



**HAL**  
open science

# Nombre de rotation et dynamique faiblement hyperbolique.

Sylvain Crovisier

► **To cite this version:**

Sylvain Crovisier. Nombre de rotation et dynamique faiblement hyperbolique.. Mathématiques [math].  
Université Paris Sud - Paris XI, 2001. Français. NNT: . tel-00001185

**HAL Id: tel-00001185**

**<https://theses.hal.science/tel-00001185>**

Submitted on 4 Mar 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY  
N° d'ordre : 6770

**UNIVERSITÉ de PARIS-SUD**  
**Centre d'ORSAY**

# **THÈSE**

présentée  
pour obtenir

**le grade de Docteur en Sciences**  
**de l'Université Paris XI Orsay**  
**Spécialité : Mathématiques**

par

**Sylvain CROVISIER**

Sujet :

**Nombre de rotation et dynamique**  
**faiblement hyperbolique**

soutenue le 20 décembre 2001 devant la Commission d'examen

MM. Christian BONATTI  
Albert FATHI  
Jacek GRACZYK  
Patrice LE CALVEZ  
Marcelo VIANA  
Jean-Christophe YOCCOZ



Je voudrais dire combien mon directeur de thèse Jean-Christophe Yoccoz m'a apporté depuis le début de mes recherches. C'est avec une grande disponibilité et avec beaucoup de gentillesse qu'il m'accueillait pour discuter dans son bureau pendant des heures. J'en ressortais toujours très motivé : sa passion pour les mathématiques est vraiment contagieuse.

Les rapporteurs C. Bonatti et P. Le Calvez ont accepté de consacrer une partie de leur temps à mon travail et je leur en suis reconnaissant. Avec A. Fathi, J. Graczyk et M. Viana, ils ont chacun eu une influence particulière sur la conduite de ma thèse. C'est un grand plaisir pour moi qu'ils aient accepté d'être membres du jury.

J'ai aussi bénéficié d'excellentes conditions de travail au département de mathématiques de l'université d'Orsay. Merci à Duncan, Frédéric, Samuel et à tous les autres. Je n'oublie pas non plus notre secrétaire M. Justin.

Il m'est difficile de remercier individuellement tous ceux avec qui j'ai partagé des moments mathématiques : ce fut toujours avec beaucoup de bonheur. Je pense particulièrement aux bavards que sont Jeff et son clavecin.

Merci enfin à ma famille, à mes amis pour leur patience et leur soutien . . .

. . . et puis bien sûr à Nathalie qui m'accompagne si tendrement.



# Nombre de rotation et dynamique faiblement hyperbolique

Cette thèse s'appuie sur deux branches des systèmes dynamiques : la théorie du nombre de rotation des endomorphismes du cercle de degré un et des applications de l'anneau déviant la verticale, ainsi que la théorie des systèmes non-uniformément hyperboliques.

Nous nous intéressons tout d'abord à une classe d'applications bimodales du cercle, dilatantes et affines par morceaux. Chaque application de cette famille possède un nombre de rotation presque sûr : c'est le nombre de rotation de presque tout point du cercle. Nous étudions sa régularité et montrons que le nombre de rotation presque sûr est irrationnel pour un ensemble de paramètres de mesure totale.

Nous considérons ensuite les applications de l'anneau qui dévient la verticale et plus particulièrement les applications bimodales de la famille d'Arnol'd épaissie. Un rôle essentiel est joué par les orbites de torsion nulle. Elles permettent de montrer que l'ensemble des applications qui possèdent un nombre de rotation fixé, forme dans l'espace des paramètres une langue d'Arnol'd bordée par deux surfaces. La frontière des langues rationnelles est associée à des bifurcations selle-nœud et homoclines. Nous obtenons enfin des estimations sur la taille de l'ensemble de rotation et de l'attracteur de Birkhoff.

L'appendice est consacré aux bifurcations selles-nœud d'ensembles hyperboliques localement maximaux dont la direction instable est de dimension un. Cette bifurcation préserve la décomposition géométrique de l'espace tangent en espaces stables et instables. En revanche, l'expansion dans la direction instable dégénère près d'une orbite périodique. Nous obtenons alors une bifurcation de codimension un.

**Mots clefs :** nombre de rotation, ensemble bien ordonné, endomorphisme du cercle, langue d'Arnol'd, application déviant la verticale, ensemble d'Aubry-Mather, nombre de torsion, bifurcation homocline, ensemble hyperbolique, bifurcation selle-noeud.

**Classification mathématique par sujet (2000) :** 37C05, 37C40, 37D05, 37C20, 37D30, 37D45, 37E10, 37E40, 37E45.

# Rotation number and weakly hyperbolic dynamics

This thesis deals with two main branches of dynamical systems: the rotation number theory for degree-one circle endomorphisms and for annulus twist maps, and the theory of non-uniformly hyperbolic dynamical systems

First we define the almost sure rotation number for some circle endomorphisms. It is the rotation number for almost every point of the circle. We describe it for a family of expanding piecewise affine bimodal endomorphisms. We study its regularity and show that the set of parameters which give an irrational almost sure rotation number has full Lebesgue measure.

Then we consider annulus twist maps and more precisely bimodal maps from the fattened Arnol'd family. A key role is played by twist-free orbits. It is shown that the set of maps that possess a given rotation number forms, in the parameter space, a tongue bounded by two surfaces. The boundary of rational tongues is associated with homoclinic and saddle-node bifurcations. We finish with some estimates on the size of the rotation set and on the Birkhoff attractor.

The appendix is devoted to saddle-node bifurcations of locally maximal hyperbolic sets whose unstable direction is one-dimensional. This bifurcation preserves the geometrical decomposition of the tangent space into stable and unstable spaces. However the expansion along the unstable direction degenerates near a periodic orbit. The bifurcation is one-codimensional.

**Key words:** rotation number, ordered set, circle endomorphism, Arnol'd tongue, twist map, Aubry-Mather set, twist number, homoclinic bifurcation, saddle-node bifurcation, hyperbolic set.

# Table des matières

<i>Table des matières</i>	vii
<b>Introduction</b>	<b>xi</b>
Présentation du sujet . . . . .	xi
Présentation des résultats . . . . .	xvi
<b>I Intervalle de rotation de la famille d'Arnol'd</b>	<b>1</b>
<b>1 Notations, rappels sur les endomorphismes du cercle</b>	<b>3</b>
1.1 Notations . . . . .	3
1.2 Ensemble de rotation des endomorphismes du cercle . . . . .	6
1.3 Familles d'homéomorphismes du cercle . . . . .	8
1.4 Les endomorphismes du cercle . . . . .	11
1.5 Les applications bimodales du cercle . . . . .	12
<b>2 Orbites bien ordonnées de la famille d'Arnol'd</b>	<b>15</b>
2.1 Préliminaires . . . . .	15
2.2 Existence et unicité . . . . .	17
2.3 Autres propriétés . . . . .	22
<b>II Nombre de rotation presque sûr</b>	<b>27</b>
<b>3 Nombre de rotation presque sûr</b>	<b>29</b>
3.1 Introduction . . . . .	29
3.2 Le cas d'une famille lisse : la famille d'Arnol'd . . . . .	30
3.3 Un modèle simplifié : la famille affine par morceaux . . . . .	34
<b>4 Stabilité des mesures</b>	<b>39</b>
4.1 Introduction . . . . .	39
4.2 L'espace symbolique . . . . .	40
4.3 Les mesures invariantes . . . . .	43
4.4 Régularité de $\rho$ . . . . .	47
<b>5 Mesure de Lebesgue et nombre de rotation presque sûr</b>	<b>55</b>
5.1 Introduction . . . . .	55
5.2 Calcul approché du nombre de rotation . . . . .	55
5.3 Propriétés métriques de $\rho$ . . . . .	60



<b>6</b>	<b>Étude statistique des orbites critiques</b>	<b>63</b>
6.1	Introduction . . . . .	63
6.2	Transversalité dans l'espace des paramètres . . . . .	65
6.3	Intervalles réguliers . . . . .	68
6.4	Composantes de l'espace des paramètres . . . . .	70
6.5	Paramètres réguliers . . . . .	73
6.6	Démonstration du théorème 6.1.1 . . . . .	80
<b>III</b>	<b>Étude de la famille d'Arnol'd épaissie</b>	<b>87</b>
<b>7</b>	<b>Rappels sur les applications déviant la verticale</b>	<b>89</b>
7.1	Notations et définitions . . . . .	89
7.2	Propriétés des applications déviant le verticale . . . . .	92
7.3	Le cadre dissipatif : les attracteurs de Birkhoff . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Ensembles de torsion nulle</b>	<b>99</b>
8.1	Nombre de torsion . . . . .	99
8.2	Ensembles bien ordonnés de torsion nulle . . . . .	101
8.3	Existence d'ensembles bien ordonnés de torsion nulle . . . . .	103
<b>9</b>	<b>Présentation de la famille d'Arnol'd épaissie</b>	<b>113</b>
9.1	Les familles standards de l'anneau . . . . .	113
9.2	Les paramètres . . . . .	115
9.3	Choix de $\varphi_1$ . . . . .	116
9.4	Famille d'applications, famille d'Arnol'd épaissie . . . . .	119
<b>10</b>	<b>Langues d'Arnol'd rationnelles</b>	<b>123</b>
10.1	Considérations préliminaires . . . . .	123
10.2	Bifurcation des orbites bien ordonnées de torsion nulle : étude locale (cas dissipatif) . . . . .	129
10.3	Bifurcations des orbites bien ordonnées de torsion nulle : étude locale (cas conservatif) . . . . .	133
10.4	Bifurcation des orbites bien ordonnées de torsion nulle : étude globale	138
10.5	Localisation des langues . . . . .	140
<b>11</b>	<b>Langues d'Arnol'd irrationnelles</b>	<b>143</b>
11.1	Estimées lipschitz des surfaces $\omega_{\frac{p}{q}}^-$ et $\omega_{\frac{p}{q}}^+$ . . . . .	143
11.2	Langues irrationnelles . . . . .	146
11.3	Transversalité des surfaces $\omega^+$ et $\omega^-$ . . . . .	148
<b>12</b>	<b>Bifurcations homoclines</b>	<b>149</b>
12.1	Étude des graphes invariants . . . . .	149
12.2	Étude de tangences particulières . . . . .	161
12.3	Les courbes de bifurcation homocline . . . . .	168
12.4	Une autre caractérisation des courbes de bifurcation homocline . . . . .	170
12.5	Quelques conséquences . . . . .	177
12.6	Commentaires sur le cas conservatif . . . . .	181

<b>A</b>	<b>Bifurcation selle-nœud des ensembles hyperboliques</b>	<b>185</b>
A.1	Introduction . . . . .	185
A.2	Preliminaires . . . . .	188
A.3	Preuve du theoreme A.1.4 . . . . .	194
A.4	Estimees locales . . . . .	211
A.5	La bifurcation selle-nœud est robuste . . . . .	215
<b>B</b>	<b>Dynamique non-uniformement hyperbolique</b>	<b>223</b>
	<i>Bibliographie</i>	<b>227</b>
	<i>Index</i>	<b>235</b>



# Introduction

## Présentation du sujet

Cette thèse s’appuie sur deux branches des systèmes dynamiques : la théorie du nombre de rotation des endomorphismes du cercle et des difféomorphismes de l’anneau déviant la verticale ainsi que la théorie des systèmes non-uniformément hyperboliques. Nous en rappelons les principaux développements qui ont motivé notre étude.

## 1 Théorie du nombre de rotation

### 1.1 Les endomorphismes du cercle

Il est bien connu que ce domaine des systèmes dynamiques a débuté en 1885 avec l’introduction par H. Poincaré d’un invariant de conjugaison pour les homéomorphismes du cercle préservant l’orientation :

$$\rho : \text{Diff}_+^0(\mathbb{T}^1) \rightarrow \mathbb{T}^1$$

appelé nombre de rotation (voir [P81], chap. XV). Pour  $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T}^1)$ , on obtient un relevé de  $\rho(f)$  à  $\mathbb{R}$  comme limite de la suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n}$$

où  $x \in \mathbb{R}$  et où  $\tilde{f}$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  qui relève  $f$ .

Il classe l’ensemble des comportements possibles des orbites. Dans le cas où  $f \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{T}^1)$  et  $\alpha = \rho(f) \notin \mathbb{Q}$ , A. Denjoy a montré en 1932 dans [De] que si  $Df$  est à variation bornée,  $f$  est conjugué à la rotation  $r_\alpha$  selon un homéomorphisme du cercle  $h$ . La question de la régularité de  $h$  est un des premiers problèmes de petits diviseurs, attaqué par V. Arnol’d en 1961 dans [Ar], puis par J. Moser et M. Herman (voir [He79]). Il a été largement étudié depuis avec notamment les travaux de M. Herman, J.-C. Yoccoz, Y. Katznelson, D. Ornstein et est relativement bien compris maintenant (voir les articles introductifs [Bos, Yoc92]). La définition du nombre de rotation a été ensuite généralisée aux endomorphismes du cercle de degré un dans [NPT]. L’invariant de conjugaison est, à translation par  $\mathbb{Z}$  près, un intervalle (voir [CGT84]).

Un problème voisin concerne l’étude des familles génériques à paramètres : V. Arnol’d montre dans [Ar] que pour un arc générique de difféomorphismes, le nombre de rotation est rationnel sur un ensemble contenant un ouvert dense des paramètres : ce sont les fameuses “lignes d’Arnol’d”. Il propose comme illustration l’étude de “la famille d’Arnol’d” :

$$x \mapsto x + a \sin(2\pi x) + \omega$$

pour  $x \in \mathbb{T}^1$ , en fonction des paramètres  $\omega \in \mathbb{T}^1$  et  $|a| < \frac{1}{2\pi}$ . En contrepartie, en 1977, M. Herman dans [He77] obtient pour de tels arcs un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive de paramètres pour lesquels le difféomorphisme a un nombre de rotation irrationnel et possède une conjugaison lisse à la rotation. Diverses améliorations ont été apportées depuis par J. Graczyk et M. Tsujii [Gr93, Ts92]. Pour un arc d'homéomorphismes lisses possédant un point critique (lorsque  $a = \frac{1}{2\pi}$ ), ce résultat n'est plus vrai [Św88, GrŚw]. Il restait à comprendre le cas des endomorphismes du cercle : P. Boyland dans [Boy] a décrit le diagramme de bifurcation de l'intervalle de rotation dans l'espace des paramètres ; G. Świątek l'a complété en montrant que pour presque tout paramètre, les bornes de l'intervalle de rotation sont rationnelles [Św89].

## 1.2 Les applications de l'anneau

Si l'étude des endomorphismes du cercle est intéressante, c'est qu'elle fait le lien avec les applications de l'anneau où, là encore, le nombre de rotation se révèle important : on définit  $F_b \in \text{Diff}^0(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$  à partir de  $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T}^1)$  et d'un relevé  $\tilde{f}$  en posant

$$F_b(x, y) = (f(x) + y, b(f(x) - x + y)).$$

Pour une application générale  $F \in \text{Diff}^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$  isotope à l'identité, on peut encore définir l'ensemble de rotation

$$\{\rho \in \mathbb{R}, \exists \tilde{z} \in \mathbb{R} \times [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{p}_1(\tilde{F}^n(\tilde{z}))}{n} = \rho\},$$

où  $\tilde{F}$  est un relevé de  $F$  à  $\mathbb{R}^2$  et  $\tilde{p}_1$  la première projection  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Il n'est toutefois pas évident de savoir si l'on peut faire correspondre à chaque nombre rationnel  $\frac{p}{q}$  de cet ensemble une orbite périodique  $\mathcal{O}(z)$  avec la propriété

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^q(\tilde{z}) = \tilde{z} + p. \quad (1)$$

C'était en quelque sorte l'objet du théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff, énoncé par H. Poincaré dans [P12] en 1912 puis démontré par G.D. Birkhoff en 1913 dans [Bi13] et [Bi25] :

**Théorème (Birkhoff) :** *Soit  $F$  un homéomorphisme de l'anneau borné  $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ , isotope à l'identité et qui préserve les aires. On suppose qu'il existe un relevé vérifiant pour tout  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ ,*

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{x}, 0) < \tilde{x} < \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{x}, 1).$$

*Alors,  $F$  possède au moins deux points fixes distincts.*

L'étude de ce problème est considérablement facilitée par l'adjonction d'une hypothèse supplémentaire sur  $F$  : la déviation de la verticale. (Une application  $F \in \text{Diff}^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$  dévie la verticale si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(x, y)$  et  $y \mapsto \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^{-1}(x, y)$  sont des difféomorphismes de  $\mathbb{R}$  dans lui-même.) G.D. Birkhoff a découvert (voir [Bi20] chap. III) cette propriété en cherchant à trouver une forme normale pour les difféomorphismes  $C^\infty$  préservant les aires au voisinage d'un point fixe elliptique. Il s'est intéressé de près aux difféomorphismes qui dévient la verticale sur un anneau fermé  $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$  et qui préservent les aires (voir [Bi20] chap. III et [Bi32b]). Dans [Bi26], il montre que ces applications interviennent également dans

l'étude du billard convexe : il obtient l'existence de deux orbites périodiques satisfaisant (1) pour tout rationnel compris entre les nombres de rotation de  $\tilde{F}$  sur les bords de  $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ . Ce résultat est important pour deux raisons : ces orbites ont la propriété fondamentale d'être bien ordonnées (définie au paragraphe suivant). D'autre part, la démonstration utilise une méthode variationnelle de minimisation qui sera généralisée plus tard.

Pour aller plus loin, il faut s'intéresser à un problème un peu différent, qui s'est développé entre temps et qui traite à nouveau de petits diviseurs : la théorie de Kolmogorov-Arnol'd-Moser, étudiée à partir de 1963 par V. Arnol'd, J. Moser, H. Rüssmann, J. Pöschel, M. Herman. Si  $F$  proche d'une application linéaire préserve les aires, il existe un ensemble de Cantor de courbes invariantes sur lesquelles  $F$  est conjuguée à une rotation irrationnelle (voir [Bos, He83, He86]). D'après un résultat de G.D. Birkhoff (voir [Fat83]), ces courbes sont en fait des graphes lipschitziens au dessus de la base  $\mathbb{T}^1$ . En général, il existe des régions invariantes ouvertes annulaires qui ne contiennent aucune courbe invariante : ce sont les zones d'instabilité. S'il n'y a pas de graphe invariant de nombre de rotation  $\rho$  donné, il subsiste cependant toujours un ensemble qui est une forme dégénérée de ces courbes invariantes : il existe un compact de l'anneau qui est un graphe au-dessus d'un ensemble fermé de  $\mathbb{T}^1$  sur lequel les orbites s'ordonnent comme celles d'une rotation d'angle  $\rho$ . C'est ce qu'ont démontré indépendamment J. Mather [M82] en 1982 et S. Aubry [AL] en 1983 par des méthodes variationnelles (la démonstration de [M86] fait le lien avec la démonstration de G.D. Birkhoff dans le cas du billard). Un tel ensemble est dit bien ordonné. On peut toujours supposer que la dynamique y est minimale. Lorsque  $\rho$  est rationnel, on retrouve les deux orbites bien ordonnées du théorème de Birkhoff. Pour  $\rho$  irrationnel, on appelle alors ces compacts des ensembles d'Aubry-Mather. A. Katok et R. Douady (voir [K] et [Do]) montrent par ailleurs que les ensembles d'Aubry-Mather sont des graphes lipschitziens qui s'obtiennent comme valeurs d'adhérence d'orbites périodiques bien ordonnées. (Voir [Ch] pour une exposition détaillée de ce sujet.)

### 1.3 Les attracteurs de Birkhoff

Si l'on suppose cette fois que  $F$  est dissipative (le jacobien est uniformément majoré par une constante strictement plus petite que 1), G.D. Birkhoff dans [Bi32a] retrouve des propriétés analogues à celles des zones d'instabilité. La dynamique est concentrée sur un compact connexe de mesure nulle qui sépare l'anneau (l'attracteur de Birkhoff). Comme motivation, on observe que la théorie des endomorphismes du cercle se retrouve en faisant tendre le jacobien de  $F$  vers 0. D'autre part, ces applications apparaissent naturellement lors de l'étude d'équations différentielles ordinaires venant de la mécanique : par exemple, la dynamique du pendule amorti entretenu se ramène en prenant des sections de Poincaré à des compositions de difféomorphismes de l'anneau dissipatifs et déviant la verticale (voir [L90] chap.1).

Dans les années 1980, P. Le Calvez a poursuivi ces travaux [L87]. Pour tout réel  $\rho$  dans l'ensemble de rotation (qui est un compact de  $\mathbb{R}$ ),  $F$  possède un ensemble d'Aubry-Mather (voir [L90] et [L91] pour un panorama de cette théorie). Cette fois, les premières démonstrations sont de nature topologique [Ha, L86] mais là encore une théorie variationnelle est développée par S. Angenent et C. Golé [An90, Gol, L99].

## 2 Mesures physiques et dynamique non-uniformément hyperbolique

L'autre ingrédient principal de ce travail est sans doute plus difficile à résumer puisqu'il est lui-même issu de deux sujets plus anciens : la théorie ergodique et l'étude des systèmes dynamiques différentiables. Nous renvoyons par exemple à [V].

### 2.1 Généricité et mesures physiques

Considérons une application continue  $f : M \mapsto M$  définie sur une variété  $M$ . Les différentes mesures de probabilité invariantes et ergodiques associées isolent les briques élémentaires de la dynamique. Le bassin de  $\mu$  est l'ensemble des points  $z \in M$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k z} = \mu,$$

où  $\delta_y$  désigne la mesure de Dirac en  $y \in M$ . Si  $\mu$  est une mesure ergodique, le théorème ergodique de Birkhoff montre que le bassin d'une mesure  $\mu$  est un ensemble de mesure totale pour  $\mu$ .

Un rôle plus important est joué par les mesures "observables" (ou physiques) du point de vue de la mesure naturelle sur l'espace : la mesure de Lebesgue. Autrement dit, ce sont les mesures dont le bassin est de mesure de Lebesgue non-nulle. On espère alors qu'un système générique soit "physiquement observable" : il n'existe qu'un nombre fini de mesures physiques et presque tout point de  $M$  est dans le bassin de l'une de ces mesures. Un tel point est alors dit générique.

### 2.2 Hyperbolicité non-uniforme

Dans le but de généraliser les systèmes uniformément hyperboliques, on adjoint souvent deux hypothèses supplémentaires : aucun exposant de la mesure n'est nul et les mesures conditionnelles le long des feuilles instables sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue le long de ces feuilles (voir [Led2]). La mesure est alors qualifiée de mesure de Sinai-Ruelle-Bowen ou encore mesure S.R.B.. On gagne de précieuses propriétés puisque la théorie de Pesin s'applique alors.

### 2.3 Exemples

Un cas d'école où un tel programme a été réalisé est celui des applications dilatantes par morceaux en dimension 1, grâce aux travaux de A. Lasota, T.-Y. Li et J. Yorke (voir [LaY, LiY]).

Le passage aux applications lisses et non-uniformément hyperboliques a été abordé au début des années 1980. Tout d'abord, M. Jakobson a montré ([J]) au sein de la famille quadratique réelle

$$P_c : x \mapsto x^2 + c$$

l'existence d'un ensemble de paramètres de mesure de Lebesgue strictement positive pour lesquels  $P_c$  admet une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, invariante et ergodique et qui possède un exposant de Lyapounov strictement positif. Ce travail a été repris sous un angle d'approche différent par M. Benedicks et L. Carleson (voir [BC1]) et adapté aux applications rationnelles de la sphère de Riemann par M. Rees (voir [Re]). Plusieurs généralisations aux applications multimodales ont été apportées depuis (voir par exemple [Ts93]).

De nouvelles difficultés apparaissent lorsque l'on veut étendre cette étude aux difféomorphismes de dimension 2 puisque les points critiques ne sont pas définis a priori. M. Benedicks et L. Carleson ont considéré les applications de Hénon du plan dans lui-même :

$$H_{b,c} : (x, y) \mapsto (x^2 + c - by, x).$$

Ils obtiennent une première description de l'attracteur ([BC1]) pour un ensemble de paramètres de mesure de Lebesgue strictement positive. Notons que les paramètres concernés sont dans une région où le jacobien  $b$  est très petit. Le même résultat a été obtenu pour des applications  $C^3$ -proches par L. Mora et M. Viana ([MV]). L'existence et l'unicité de la mesure S.R.B. est démontrée par M. Benedicks et L.-S. Young dans [BY]. Ce n'est qu'ensuite que le problème du bassin a été résolu, par M. Benedicks et M. Viana dans [BV] : presque tout point du plan est dans le bassin de la mesure S.R.B. L'approche initiale en dimension 1 de M. Jakobson permet de retrouver ces résultats (voir la démonstration de M. Jakobson et S. Newhouse, [JN]) et de décrire d'autres systèmes (voir l'étude des bifurcations homoclines par J. Palis et J.-C. Yoccoz, [PY]). Le cadre a été généralisé aux applications multimodales de l'anneau par Q. Wang et L.-S. Young dans [WY].

### 3 Position du problème

L'objectif que nous nous fixons est l'étude du nombre de rotation de certaines familles explicites.

Même si depuis [Boy, Św89], l'ensemble de rotation des endomorphismes du cercle est parfaitement compris, ce n'est pas le cas des applications de l'anneau déviant la verticale. Des résultats génériques existent ([L87]) mais on peut espérer une plus grande précision dès que l'on étudie une famille spécifique. En particulier, on aimerait savoir pour quels paramètres un réel particulier appartient à l'ensemble de rotation et sous quel mécanisme il apparaît. En d'autres termes nous souhaitons décrire les langues d'Arnol'd.

D'autre part, l'ensemble de rotation ne donne pas toute l'information sur le comportement dynamique en rotation. Plus précisément, nous voulons comprendre pour le relevé  $\tilde{f}$  d'une application  $f$  du cercle et pour un point  $\tilde{z}$  générique si la quantité

$$\frac{\tilde{f}^n(\tilde{z}) - \tilde{z}}{n} \tag{2}$$

converge et décrire la limite. Si l'on suppose par exemple que presque tout point du cercle est attiré par une même orbite périodique attractive, la quantité (2) converge pour presque tout point  $\tilde{z}$  vers le nombre de rotation de l'orbite périodique. En ce sens, l'ensemble de rotation, qui en général est d'intérieur non vide peut contenir un nombre de rotation privilégié.

Considérons maintenant une famille d'endomorphismes du cercle  $(f_\omega)$  et supposons qu'elle vérifie la propriété suivante :

- (P) *Pour un sous-ensemble de paramètres  $\Omega$  de mesure de Lebesgue strictement positive, les applications  $f_\omega$  avec  $\omega \in \Omega$  possèdent une mesure  $\mu_\omega$  ergodique invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, supportée par le cercle  $\mathbb{T}^1$  entier et dont l'exposant de Lyapounov est strictement positif.*



La mesure  $\mu_\omega$  est alors une mesure physique et pour presque tout point  $z \in \mathbb{T}^1$ , (2) converge vers le nombre de rotation

$$\rho_\omega = \int_{\mathbb{T}^1} (\tilde{f}_\omega - \text{Id}) d\mu_\omega$$

de  $\mu_\omega$ . Le nombre de rotation  $\rho_\omega$  est le nombre de rotation physique, ou encore le **nombre de rotation presque sûr** de l'application  $\tilde{f}_\omega$ . Nous sommes intéressés par l'application  $\omega \mapsto \rho_\omega$  et nous désirons mener dans ce nouveau cadre une étude analogue aux travaux de M. Herman, J. Graczyk, M. Tsujii et G. Świątek.

## Présentation des résultats

Nous étudions dans les deux premières parties certaines classes d'endomorphismes du cercle. Dans la troisième partie, nous passons aux difféomorphismes de l'anneau.

### Première partie

Les résultats que nous donnons dans cette partie sont essentiellement des compléments et des précisions sur la théorie des endomorphismes du cercle.

Le chapitre 1 fixe les notations et introduit les applications bimodales du cercle. Ce sont les applications de la forme

$$\tilde{x} \mapsto \tilde{x} + a\varphi_1(\tilde{x}) + \omega,$$

où  $\varphi_1$  est une application bimodale du cercle à valeurs réelles et à dérivée schwarzienne négative. Cette classe généralise la famille d'Arnol'd et sert de modèle pour les endomorphismes du cercle, de même que les applications unimodales servaient de modèle pour les applications de l'intervalle.

Dans le chapitre 2, nous discutons l'unicité des orbites bien ordonnées pour ces endomorphismes. En particulier, pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$  contenu dans l'ensemble de rotation, il existe une unique orbite bien ordonnée périodique de nombre de rotation  $\frac{p}{q}$  avec un multiplicateur supérieur ou égal à 1 : nous l'appelons orbite positive de nombre  $\frac{p}{q}$ . Nous décrivons également le cas irrationnel. Comme corollaire de théorèmes d'A. Fathi et J. Graczyk, nous montrons que l'ensemble des orbites bien ordonnées forme un compact ayant une dimension de Hausdorff inférieure à  $\frac{1}{2}$ .

### Deuxième partie

Nous introduisons le nombre de rotation presque sûr au chapitre 3. Nous montrons grâce aux techniques d'hyperbolicité non-uniforme qu'il s'applique aux familles lisses d'endomorphismes : ainsi, la famille d'Arnol'd satisfait la propriété (P). Pour simplifier notre approche, nous nous restreignons dans le reste de cette partie à une famille dilatante affine par morceaux :

$$\tilde{f}_{\lambda,\omega}(\tilde{x}) = \begin{cases} \lambda\tilde{x} + \omega, & \text{lorsque } \tilde{x} \in [0, \frac{\lambda+1}{2\lambda}], \\ -\lambda\tilde{x} + \omega, & \text{lorsque } \tilde{x} \in [\frac{-\lambda+1}{2\lambda}, 0], \end{cases}$$

où  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \geq 3$ . Pour tout paramètre,  $f_{\lambda,\omega}$  possède une unique mesure  $\mu_{\lambda,\omega}$  absolument continue et ergodique dont le support est le cercle  $\mathbb{T}^1$  entier. Cette famille satisfait donc elle-aussi la propriété (P).

Le chapitre 4 montre la continuité de la mesure  $\mu_{\lambda,\omega}$  :

**Théorème :**

- i. La densité de la mesure  $\mu_{\lambda,\omega}$  varie continûment avec les paramètres dans chaque espace  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .*
- ii. Pour tout  $\lambda \geq 3$ , l'application qui à  $\omega$  associe la densité de  $\mu_{\lambda,\omega}$  dans  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$  a un module de continuité en  $\omega$   $|\log(\omega)|$ .*

La continuité de la mesure dans l'espace  $L^1$  avait déjà été montrée par R. Galeeva dans [Ga].

Nous en déduisons des propriétés similaires pour la fonction nombre de rotation presque sûr  $\rho$ . En particulier, pour tout  $\lambda \geq 3$ , l'application  $\omega \mapsto \rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  est höldérienne pour tout exposant  $0 < \alpha < 1$ . Ceci implique que l'ensemble des paramètres  $\omega$  pour lesquels  $\rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  est irrationnel a une dimension de Hausdorff égale à 1. Nous montrons enfin que ces applications en général ne sont pas lipschitziennes.

Au chapitre 5, nous obtenons par des méthodes différentes :

**Théorème :** *Il existe  $\lambda_0 \geq 3$  telle que :*

- i. Pour un ensemble de paramètres  $\lambda \geq \lambda_0$  de mesure de Lebesgue totale, l'application  $\omega \mapsto \rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  n'est pas absolument continue.*
- ii. L'ensemble des paramètres  $(\lambda, \omega) \in ]\lambda_0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  pour lesquels  $\rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  est irrationnel est de mesure de Lebesgue totale.*

Le cœur de la démonstration se trouve au chapitre 6 : nous menons une étude statistique des orbites critiques qui s'inspire des techniques de la preuve du théorème de Jakobson.

### Troisième partie

Le chapitre 7 est consacré à des rappels sur les applications de l'anneau qui dévient la verticale.

Nous reprenons au chapitre 8 la notion d'orbite de torsion nulle introduite par J. Mather. C'est une propriété clef pour les chapitres suivants. À la différence des approches précédentes [M84b, An88], nous étudions sous l'angle topologique les ensembles bien ordonnés de torsion nulle. Nous montrons qu'ils possèdent toutes les bonnes propriétés des ensembles bien ordonnés. En particulier, nous adaptons l'idée d'un théorème de G. Hall pour obtenir pour toute application déviant la verticale et tout rationnel  $\frac{p}{q}$  contenu dans l'ensemble de rotation, l'existence d'une orbite périodique bien ordonnée de nombre de rotation  $\frac{p}{q}$  et de torsion nulle.

Au chapitre 9, nous définissons les applications bimodales de l'anneau :

$$\tilde{F}_{b,a,\omega} : (\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x} + a\varphi_1(\tilde{x}) + y, b(a\varphi_1(\tilde{x}) + y)),$$

avec  $b > 0$ . Pour  $\varphi_1$ , nous choisissons une application bimodale à dérivée schwarziennne négative. Elles généralisent la famille d'Arnol'd épaissie introduite par [BST]

et interpolent les applications bimodales du cercle et les familles standards conservatives de l'anneau. Le paramètre  $a$  contrôle le caractère non-linéaire de l'application et sera généralement choisi assez grand. Nous complétons ce chapitre par l'appendice B en exploitant la théorie non-uniformément hyperbolique de Q. Wang et L.-S. Young. Comme corollaire nous montrons que les paramètres qu'ils décrivent sont des points de continuité de l'attracteur de Birkhoff et de l'ensemble de rotation pour la topologie de Hausdorff.

Nous introduisons les langues d'Arnol'd rationnelles au chapitre 10 :

**Théorème :** *Pour  $a$  suffisamment grand et  $0 < b \leq 1$ , pour tout rationnel  $\rho$ , l'ensemble des paramètres  $\omega$  pour lesquels  $\tilde{F}_{b,a,\omega}$  possède le nombre de rotation  $\rho$  est un intervalle d'intérieur non vide  $[\omega_\rho^-, \omega_\rho^+]$ .*

Nous montrons qu'il existe alors une et une seule orbite bien ordonnée périodique de nombre de rotation  $\rho$ , de torsion nulle, avec une valeur propre réelle supérieure ou égale à 1 : c'est l'orbite positive de nombre  $\rho$ . Sur l'intérieur de la langue, elle est hyperbolique, de type selle. Les bords de la langue sont des surfaces lisses qui correspondent à la bifurcation de l'orbite positive. Nous donnons également des estimées sur  $\omega_\rho^-$  et  $\omega_\rho^+$  ainsi que sur l'ensemble de rotation  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  :

$$\left[ \frac{a \min(\varphi_1) + \omega + 3}{1 - b}, \frac{a \max(\varphi_1) + \omega - 3}{1 - b} \right] \subset \mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) \subset \left[ \frac{a \min(\varphi_1) + \omega - 1}{1 - b}, \frac{a \max(\varphi_1) + \omega + 1}{1 - b} \right].$$

Nous étendons au chapitre 11 le théorème précédent aux nombres irrationnels. Nous prouvons également pour  $\rho \in \mathbb{R}$  des estimées lipschitziennes sur les surfaces  $(b, a) \mapsto \omega_\rho^\pm(b, a)$ . En particulier, pour  $\rho, \rho' \in \mathbb{R}$ , les surfaces  $\omega_\rho^+$  et  $\omega_{\rho'}^-$  dans l'espace des paramètres sont transverses.

Dans le dernier chapitre, nous cherchons à caractériser les paramètres pour lesquels un nombre rationnel est dans la frontière de l'ensemble de rotation :

**Théorème :** *Pour  $a$  suffisamment grand et  $0 < b < 1$ , pour tout rationnel  $\rho = \frac{p}{q}$ , il existe des réels  $\omega_{\frac{p}{q}}^- < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+ < \omega_{\frac{p}{q}}^+$  vérifiant les propriétés suivantes :*

*i. Il existe  $\eta > 0$ , tel que pour tout  $\omega$  dans  $[\omega_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-]$  (resp.  $[\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+, \omega_{\frac{p}{q}}^+]$ ),*

$$\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) \cap \left[ \frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \eta \right] = \left\{ \frac{p}{q} \right\} \quad (\text{resp. } \mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) \cap \left[ \frac{p}{q} - \eta, \frac{p}{q} \right] = \left\{ \frac{p}{q} \right\}).$$

*ii. Pour tout  $\omega$  dans  $]\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+ - 6]$  (resp.  $[\omega_{\frac{p}{q}}^- + 6, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+[$ ), il existe  $\eta > 0$  tel que*

$$\left[ \frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \eta \right] \subset \mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) \quad (\text{resp. } \left[ \frac{p}{q} - \eta, \frac{p}{q} \right] \subset \mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega})).$$

Les paramètres  $\hat{\omega}_\rho^+$  et  $\hat{\omega}_\rho^-$  correspondent à des bifurcations homoclines de l'orbite positive de nombre  $\rho$ . L'étude de ces bifurcations requiert deux outils principaux : d'une part, la propriété de torsion nulle implique que les variétés invariantes de l'orbite positive sont localement des graphes au-dessus de la première coordonnée. D'autre

part, nous utilisons l'hypothèse que  $\varphi_1$  a une dérivée schwarzienne négative pour montrer une grande rigidité de la géométrie des variétés invariantes.

Pour finir, nous décrivons partiellement comment les différentes langues s'accroissent entre elles et nous donnons une estimée sur la largeur de l'attracteur de Birkhoff. Nous insistons sur le fait que tous les résultats que nous donnons à partir du chapitre 10 sont vérifiés par tous les paramètres  $0 < b < 1$  et non uniquement par les paramètres  $b$  petits.

## Appendice

En appendice nous traitons d'un problème de nature assez différente mais qui n'est pas sans lien avec les applications de l'anneau (voir la section 9.4.4). Nous tentons de décrire une bifurcation possible pour les ensembles hyperboliques localement maximaux  $K$  dont la direction instable est de dimension 1.

Rappelons que les ensembles hyperboliques sont robustes aux perturbations : ils persistent sur un ensemble ouvert des paramètres. Nous cherchons à décrire une partie de la frontière de cet ouvert et définissons la bifurcation selle-nœud de ces ensembles. Lors de cette bifurcation, la décomposition géométrique en espaces stables et instables de l'espace tangent est préservée et la dynamique reste partiellement hyperbolique. En revanche, l'expansion dans la direction instable dégénère près d'une orbite périodique de l'ensemble.

Dans l'espace des paramètres, l'ensemble  $K$  peut être suivi continûment sur un demi-espace fermé bordé par une variété de codimension 1,  $\mathcal{O}^0$ . Le long de  $\mathcal{O}^0$ , la bifurcation persiste. D'un côté de  $\mathcal{O}^0$ ,  $K$  est hyperbolique ; de l'autre,  $K$  a disparu partiellement. En d'autres termes, la bifurcation est de codimension 1.

*Orsay, août 2001.*

Excepté le chapitre 1, les différentes parties et l'appendice sont indépendants les uns des autres.

## Liste des articles

- [Cr00] *Saddle-node bifurcation for hyperbolic sets*, prépublication de l'université Paris-Sud (2000), à paraître à Ergod. Th. & Dynam. Sys.
- [Cr01a] *Ensembles de torsion nulle des applications déviant la verticale*, prépublication de l'université Paris-Sud, à paraître au Bull. Soc. Math. France.
- [Cr01b] *Nombre de rotation presque sûr des endomorphismes du cercle affines par morceaux*, prépublication de l'université Paris-Sud (2001) à paraître au Bol. Soc. Bras. Mat. (N.S.).
- [Cr01c] *Langues d'Arnold généralisées des applications de l'anneau déviant la verticale*, à paraître aux C. R. Acad. Sci. Paris Série I.
- [Cr01d] *Une remarque sur les ensembles hyperboliques localement maximaux* à paraître aux C. R. Acad. Sci. Paris Série I.

Première partie

**Intervalle de rotation de la  
famille d'Arnol'd**



# Chapitre 1

## Notations, rappels sur les endomorphismes du cercle

Après avoir introduit les notations que nous utiliserons tout au long de ce texte, ainsi que les principaux espaces d'applications du cercle et de l'anneau, nous rappelons la théorie classique du nombre de rotation pour les homéomorphismes et les endomorphismes du cercle.

Nous citons les principaux résultats concernant la dépendance du nombre de rotation dans le cas des difféomorphismes et introduisons les langages d'Arnol'd. Nous exposons la théorie due à P. Boyland dans le cas des endomorphismes. Nous terminons en définissant les applications bimodales du cercle qui seront les endomorphismes que nous étudierons ensuite.

### 1.1 Notations

**1.1.1** Sauf si nous le mentionnons explicitement, les rationnels seront notés sous leur forme irréductible  $\frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Pour tout réel  $x$ ,  $[x]$  désigne sa partie entière:  $[x] \leq x < [x] + 1$ .

$X \setminus Y$  représente la différence des ensembles  $X$  et  $Y$ . Si  $Y$  est une partie d'un espace topologique  $X$ , on écrira respectivement  $\text{Adh}(Y)$ ,  $\text{Int}(Y)$  et  $\text{Fr}(Y)$  pour son adhérence, son intérieur et sa frontière.

On rappelle que sur un espace métrique  $(X, d)$ , l'ensemble des parties compactes non vides possède une distance naturelle: la distance de Hausdorff. Si  $(X, d)$  est compact, on obtient un espace compact. On note  $B(z, r)$  la boule ouverte de centre  $z$  et de rayon  $r$ .

Pour toute variété riemannienne  $M$ , nous noterons  $TM$ ,  $UM$ ,  $T_z M$ ,  $U_z M$  les fibrés tangent et tangent unitaire, ainsi que les espaces tangent et tangent unitaire en un point  $z \in M$ . Si  $v$  est un vecteur non nul de  $TM$ , il nous arrivera de noter de la même manière sa projection sur  $UM$ . Si  $F$  est une application dérivable  $k \in \mathbb{N}$  fois en un point  $z$ , nous noterons  $D^k F(z)$  sa dérivée d'ordre  $k$ .

Lorsque  $M$  est une surface orientée, l'angle entre deux vecteurs non nuls  $v$  et  $w$  sera paramétré par le cercle orienté  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et sera noté  $\text{Angle}(v, w)$ . Parfois, les angles seront abusivement comptés dans  $\mathbb{R}$ .

Les mesures que nous considérerons dans ce travail seront toutes à support sur des variétés. Elles seront toutes boréliennes pour la topologie usuelle. Sur  $\mathbb{R}^n$  (resp.



sur le tore  $\mathbb{T}^n$ ), nous noterons la mesure de Lebesgue  $m = dx$ .

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $C^3$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}$ , et si  $Df$  ne s'annule pas en  $x \in U$ , la dérivée schwarzienne de  $f$  en  $x$  est :

$$Sf(x) = \frac{D^3f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{Df^2(x)}{Df(x)} \right)^2. \quad (1.1)$$

### 1.1.2 Le cercle, l'anneau

On considère le **cercle**  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , l'**anneau** ouvert (ou cylindre)  $\mathbb{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$  et enfin le plan  $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{R}^2$  munis de leur structure riemannienne et de leur orientation usuelles. On appelle  $\pi_0$  et  $\pi_1$  les revêtements universels

$$\pi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^1, \tilde{x} \mapsto \tilde{x} + \mathbb{Z}; \quad \pi_1 : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{A}, (\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x}, y) + \mathbb{Z} \times \{0\}.$$

Pour  $z \in \mathbb{T}^1$  (resp.  $z \in \mathbb{A}$ ), on notera en général  $\tilde{z}$  un de ses relevés par  $\pi_0$  (resp.  $\pi_1$ ). Si  $X$  est une partie de  $\mathbb{T}^1$  (resp.  $\mathbb{A}$ ), on notera aussi  $\tilde{X} = \pi_0^{-1}(X)$  (resp.  $\tilde{X} = \pi_1^{-1}(X)$ ). On considère enfin les projections canoniques

$$\begin{aligned} p_1 : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{T}^1, (x, y) \mapsto x; & \quad \tilde{p}_1 : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}, (\tilde{x}, y) \mapsto \tilde{x}; \\ p_2 : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y; & \quad \tilde{p}_2 : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}, (\tilde{x}, y) \mapsto y. \end{aligned}$$

On définit pour tout point  $z = (x, y)$  de  $\mathbb{A}$  (resp.  $\tilde{z} = (\tilde{x}, y)$  de  $\tilde{\mathbb{A}}$ ) les ensembles

$$\begin{aligned} D(z) &= \{x\} \times \mathbb{R} & (\text{resp. } D(\tilde{z}) &= \{\tilde{x}\} \times \mathbb{R}), \\ D_i(z) &= \{x\} \times ]-\infty, y] & (\text{resp. } D_i(\tilde{z}) &= \{\tilde{x}\} \times ]-\infty, y]), \\ D_s(z) &= \{x\} \times [y, +\infty[ & (\text{resp. } D_s(\tilde{z}) &= \{\tilde{x}\} \times [y, +\infty[). \end{aligned}$$

Parfois, nous compactifierons l'anneau en rajoutant deux points  $N$  et  $S$ . Une base de voisinages pour  $N$  (resp.  $S$ ) sera  $(\mathbb{T}^1 \times ]y, +\infty[)_{y \in \mathbb{R}}$  (resp.  $(\mathbb{T}^1 \times ]-\infty, y])_{y \in \mathbb{R}}$ ). L'espace  $\hat{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \cup \{N, S\}$  est alors homéomorphe à la sphère

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

#### Convention : l'ordre sur le cercle.

Nous ferons quelques abus de notation :

- Si  $x, y$  sont deux points du cercle, il existe toujours des relevés  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  tels que  $\tilde{x} \leq \tilde{y} < \tilde{x} + 1$ . On notera  $[x, y]$  l'intervalle du cercle  $\pi_0([\tilde{x}, \tilde{y}])$  qui ne dépend pas du choix des relevés.
- Si deux points du cercle  $x, y$  possèdent des relevés  $\tilde{x}, \tilde{y}$  à  $\mathbb{R}$  contenus dans un même intervalle  $[\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0[$ ,  $]\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0]$ ,  $[\tilde{c}'_0, \tilde{c}_0 + 1[$ , ou  $]\tilde{c}'_0, \tilde{c}'_0 + 1]$ , on notera  $x < y$  lorsque  $\tilde{x} < \tilde{y}$ . Là encore, cette relation ne dépend pas du choix des relevés.

Si  $I$  est un intervalle du cercle ou de  $\mathbb{R}$ , nous noterons  $|I|$  pour sa longueur.

### 1.1.3 Les espaces d'applications

Nous noterons pour  $k \in [0, \infty] \cup \{\omega\}$ ,  $\text{Diff}^k(\mathbb{T}^1)$  (resp.  $\text{Diff}^k(\mathbb{A})$ ) les difféomorphismes du cercle (resp. de l'anneau) et  $\text{End}^k(\mathbb{T}^1)$  les applications  $C^k$  du cercle dans lui-même de degré un (que nous appellerons aussi **endomorphismes du cercle**). Le groupe  $\text{Diff}_+^k(\mathbb{T}^1)$  sera l'espace des difféomorphismes du cercle préservant l'orientation et  $\text{Diff}_0^k(\mathbb{A})$  l'espace des difféomorphismes de l'anneau isotopes à l'identité, i.e. préservant l'orientation et les bouts de  $\mathbb{A}$ . Ces espaces seront munis de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Par passage au quotient des translations

$$\begin{aligned} \tilde{r}_\omega : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \tilde{x} &\mapsto \tilde{x} + \omega, \\ \tilde{R}_\omega : \tilde{\mathbb{A}} &\rightarrow \tilde{\mathbb{A}}, & (\tilde{x}, y) &\mapsto (\tilde{x} + \omega, y), \end{aligned}$$

d'angle  $\omega \in \mathbb{R}$ , on obtient comme exemple les rotations  $r_\omega$  et  $R_\omega$  du cercle et de l'anneau.

Les applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont des relevés d'applications de  $\text{End}^k(\mathbb{T}^1)$ , sont les applications qui s'écrivent sous la forme

$$\tilde{f} = \text{Id}_{\mathbb{R}} + \phi \circ \pi_0$$

où  $\phi$  est une application  $C^k$  de  $\mathbb{T}^1$  dans  $\mathbb{R}$ . Ce sont aussi les applications  $C^k$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même qui commutent avec  $\tilde{r}_1$ . On note leur ensemble  $\mathbb{E}^k(\mathbb{T}^1)$ . Le sous-ensemble formé des relevés d'applications de  $\text{Diff}_+^k(\mathbb{T}^1)$  est noté  $\mathbb{D}^k(\mathbb{T}^1)$ . L'adhérence  $\overline{\mathbb{D}^k(\mathbb{T}^1)}$  de  $\mathbb{D}^k(\mathbb{T}^1)$  dans  $\mathbb{E}^k(\mathbb{T}^1)$  est formé des applications croissantes. On note également  $\overline{\text{Diff}_+^k(\mathbb{T}^1)}$  la partie de  $\text{End}^k(\mathbb{T}^1)$  correspondante.

Le groupe des difféomorphismes de  $\tilde{\mathbb{A}}$  qui sont des relevés d'éléments de  $\text{Diff}_0^k(\mathbb{A})$  sera noté  $\mathbb{D}^k(\mathbb{A})$ . Ce sont les difféomorphismes du plan qui s'écrivent sous la forme

$$\text{Id}_{\tilde{\mathbb{A}}} + \Phi \circ \pi_1$$

où  $\Phi$  est une application  $C^k$  de  $\mathbb{A}$  dans  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Ce sont aussi les applications  $C^k$  de  $\tilde{\mathbb{A}}$  dans lui-même qui commutent avec  $\tilde{R}_1$ .

### 1.1.4 Dynamique

Si  $X$  est un ensemble muni d'une application  $T : X \rightarrow X$ , et si  $x \in X$ , nous noterons  $\mathcal{O}^+(x)$ , l'orbite positive de  $x$ ,  $\{T^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ . Si  $T$  est bijective, nous noterons  $\mathcal{O}(x)$  (resp.  $\mathcal{O}^-(x)$ ) l'orbite complète (resp. négative) de  $x$   $\{T^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$  (resp.  $\{T^{-n}(x), n \in \mathbb{N}\}$ ).

Lorsque  $X = \mathbb{R}$  (resp.  $X = \tilde{\mathbb{A}}$ ) et  $T \in \text{E}^0(\mathbb{T}^1)$  (resp.  $T \in \text{D}^0(\mathbb{A})$ ), nous considérons aussi souvent l'orbite étendue

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}^+(\tilde{z}) &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}^+(\tilde{z} + n), \\ (\text{resp. } \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{z})) &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(\tilde{z} + (n, 0)). \end{aligned}$$

Si  $X$  est un espace métrique et  $T$  une application continue, on note  $\omega(x)$  l'ensemble  $\omega$ -limite de  $x \in X$ . Si  $T$  est un homéomorphisme, on note  $\alpha(x)$  son ensemble  $\alpha$ -limite. Soit  $Y \subset X$ . L'ensemble  $\omega$ -limite de  $Y$ ,  $\omega(Y)$  est l'ensemble  $\text{Adh}(\cup_{x \in Y} \omega(x))$ . On définit de même  $\alpha(Y)$  lorsque  $T$  est un homéomorphisme.

## 1.2 Ensemble de rotation des endomorphismes du cercle

### 1.2.1 Nombre de rotation

Nous rappelons tout d'abord la définition du nombre de rotation pour les applications de  $\overline{D^0(\mathbb{T}^1)}$  (voir [He79]) : si  $\tilde{f} \in \overline{D^0(\mathbb{T}^1)}$ , la quantité

$$\frac{\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n}$$

converge uniformément en  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$  vers un réel qui ne dépend pas de  $\tilde{x}$ . On appelle nombre de rotation de  $\tilde{f}$ , on le note  $\rho(\tilde{f})$  et sa classe  $\pi_0(\rho)$  dans  $\mathbb{T}^1$  est un invariant de conjugaison de  $f$  (première définition).

On vérifie les propriétés suivantes pour tous  $f, g \in \overline{D^0(\mathbb{T}^1)}$  :

1. Pour tout entier  $n$  (éventuellement négatif si  $f$  est un homéomorphisme),

$$\rho(\tilde{f}^n) = n\rho(\tilde{f}).$$

2. Si  $\tilde{f} \leq \tilde{g}$ ,  $\rho(\tilde{f}) \leq \rho(\tilde{g})$ .

3.  $\rho(\tilde{f})$  dépend continûment de  $\tilde{f} \in \overline{D^0(\mathbb{T}^1)}$ .

4. Pour toute mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{T}^1$ , invariante par  $f$ ,

$$\rho(\tilde{f}) = \int_{\mathbb{T}^1} (\tilde{f} - \text{Id}) d\mu \quad (\text{seconde définition}).$$

5.  $\rho(\tilde{f}) = \frac{p}{q}$  si et seulement si, il existe  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ , tel que

$$\tilde{f}^q(\tilde{z}) = \tilde{z} + p. \quad (1.2)$$

L'ensemble  $\omega$ -limite (resp.  $\alpha$ -limite) de toute orbite du cercle par  $f$  est la projection  $\pi_0(\tilde{z})$  d'une orbite de  $\tilde{f}$  vérifiant (1.2).

6. Pour tout  $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $n, n' \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$(n - n')\rho(\tilde{f}) + m < 0 \Rightarrow \tilde{f}^n(\tilde{z}) + m < \tilde{f}^{n'}(\tilde{z}) \quad (\text{troisième définition}).$$

Plus généralement, pour  $\tilde{f} \in E^0(\mathbb{T}^1)$ , on définit

**Définition 1.2.1** 1. Soit  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  et  $z \in \mathbb{R}$ . L'orbite de  $z$  est dite de **type**  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  si

$$\tilde{f}^q(\tilde{z}) = \tilde{z} + p.$$

2. Soit  $\rho \in \mathbb{R}$  et  $z \in \mathbb{R}$ . L'orbite de  $z$  est dite **bien ordonnée** de nombre de rotation  $\rho$  si

$$\forall n, n' \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z} \quad (n - n')\rho + m < 0 \Leftrightarrow \tilde{f}^n(\tilde{z}) + m < \tilde{f}^{n'}(\tilde{z}).$$

3. Soit  $\Xi \subset \mathbb{T}^1$  un ensemble  $f$ -invariant. Il est dit **bien ordonné** si

$$\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\Xi}, \tilde{x} < \tilde{y} \Rightarrow \tilde{f}(\tilde{x}) \leq \tilde{f}(\tilde{y}). \quad (1.3)$$

Un ensemble non vide invariant pour  $\tilde{f}$  est bien ordonné si c'est le relevé à  $\mathbb{R}$  d'un ensemble bien ordonné de  $f$ .

On vérifie que l'ensemble des points d'une orbite bien ordonnée est un ensemble bien ordonné.

D'autre part, une application  $\tilde{f} \in \overline{\mathbb{D}^0(\mathbb{T}^1)}$  a pour nombre de rotation  $\rho$  si et seulement s'il existe une orbite bien ordonnée de nombre de rotation  $\rho$  (quatrième définition).

## 1.2.2 Ensembles bien ordonnés

Revenons au cas général d'une application  $\tilde{f} \in E^0(\mathbb{T}^1)$ . Si  $\tilde{\Xi}$  est un ensemble bien ordonné, on peut construire (par interpolation linéaire) une application  $\tilde{g} \in \overline{\mathbb{D}^0(\mathbb{T}^1)}$  et qui coïncide avec  $\tilde{f}$  sur  $\tilde{\Xi}$ . Le nombre de rotation de  $\tilde{g}$  ne dépend pas du choix de  $\tilde{g}$  et est appelé nombre de rotation de  $\tilde{\Xi}$ . Nous noterons  $\mathcal{X}(\tilde{f})$  (resp.  $\mathcal{X}(f)$ ) l'ensemble des parties bien ordonnées fermées non vides de  $\tilde{f}$  (resp.  $f$ ).

**Proposition 1.2.1 (Katok et al.)** *i. Si  $\tilde{z}$  a une orbite bien ordonnée de nombre de rotation  $\rho$ , son orbite est un ensemble bien ordonné de nombre de rotation  $\rho$ .*

*ii. Si  $\tilde{\Xi}$  est un ensemble bien ordonné,  $\text{Adh}(\tilde{\Xi})$  est également bien ordonné.*

*iii. Si  $\tilde{\Xi}$  est un ensemble fermé et bien ordonné de nombre de rotation  $\rho$ , il contient une orbite bien ordonnée de nombre de rotation  $\rho$ .*

*iv.  $\mathcal{X}(f)$  est fermé pour la topologie de Hausdorff. L'application  $\rho : \mathcal{X}(\tilde{f}) \rightarrow \mathbb{R}$ , est continue.*

*v. Soit  $(\tilde{f}_n)$  une suite de  $E^0(\mathbb{T}^1)$  convergeant vers  $\tilde{f} \in E^0(\mathbb{T}^1)$ . Soit pour tout  $n$ , un ensemble bien ordonné fermé  $\tilde{\Xi}_n$  de  $\tilde{f}_n$  de nombre de rotation  $\rho_n$ . Si la suite  $(\tilde{\Xi}_n)$  converge vers  $\tilde{\Xi}$  pour la topologie de Hausdorff, alors le relevé  $\tilde{\Xi}$  appartient à  $\mathcal{X}(\tilde{f})$  et la suite  $(\rho_n)$  converge vers le nombre de rotation  $\rho$  de  $\tilde{\Xi}$ .*

Voir [K, Do, Cr98].

Pour terminer, remarquons qu'un ensemble bien ordonné fermé minimal de nombre de rotation  $\rho$  est

1. une orbite périodique bien ordonnée si  $\rho$  est irrationnel,
2. le cercle tout entier ou un ensemble de Cantor si  $\rho$  est irrationnel.

Nous verrons sur des exemples que la restriction de  $f$  à un ensemble bien ordonné minimal irrationnel qui est un Cantor n'est pas toujours un homéomorphisme.

### 1.2.3 Intervalle de rotation

Fixons maintenant  $\tilde{f} \in E^0(\mathbb{T}^1)$ . Pour chaque  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ , on peut chercher à définir un nombre de rotation

$$\rho(\tilde{f}, \tilde{x}) = \lim_n \frac{\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n}.$$

La limite n'existe pas toujours. Si l'on prend l'ensemble des valeurs d'adhérence puis l'union sur  $\tilde{x}$ , on trouve un ensemble  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  appelé **ensemble de rotation de  $\tilde{f}$**  (première définition).

Une construction (voir [CGT84]) permet d'associer à  $\tilde{f}$  une famille à un paramètre  $(\tilde{g}_t)_{t \in [0,1]}$  d'applications de  $\overline{D^0}(\mathbb{T}^1)$  vérifiant la propriété suivante : pour chaque  $t \in [0,1]$ , il existe un ensemble bien ordonné  $\tilde{\Xi}$  pour  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}_t$ . On montre ainsi que pour chaque  $\rho \in \mathcal{R}(\tilde{f})$ , il existe  $\tilde{\Xi} \in \mathcal{X}(\tilde{f})$  de nombre de rotation  $\rho$ . Ceci entraîne que  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  est fermé. D'autre part, par connexité de l'arc  $(\tilde{g}_t)$ , l'ensemble  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  est en fait un intervalle compact de  $\mathcal{R}$ , que l'on note  $[\rho^-(\tilde{f}), \rho^+(\tilde{f})]$ . Nous détaillerons cette construction dans un cas particulier (voir 1.4.1.1).

Pour chaque mesure de probabilité sur  $\mathbb{T}^1$  invariante par  $f$ , on peut définir le **nombre de rotation de  $\mu$**  par

$$\rho(\mu) = \int_{\mathbb{T}^1} (\tilde{f} - \text{Id}) d\mu.$$

Ce qui précède ainsi que le théorème ergodique de Birkhoff montrent que  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  est l'ensemble des nombres de rotation des mesures de probabilité invariantes ergodiques de  $f$  (seconde définition).

$\mathcal{R}(\tilde{f})$  est aussi l'ensemble des nombres de rotation des orbites bien ordonnées (troisième définition).

Pour finir,

**Proposition 1.2.2**  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  varie continûment avec  $\tilde{f}$ .

(voir [Cr98]).

## 1.3 Familles d'homéomorphismes du cercle

**1.3.0.1** Nous rappelons les résultats classiques (voir [He79]) :

Soit  $\tilde{f} \in D^0(\mathbb{T}^1)$  et notons  $\tilde{f}_\omega = \tilde{r}_\omega \circ \tilde{f}$  et  $\rho(\omega) = \rho(\tilde{f}_\omega)$  pour  $\omega \in \mathbb{R}$ . Alors,

1.  $\rho$  est une fonction continue, croissante et pour tout  $\omega$ ,  $\rho(\omega + 1) = \rho(\omega) + 1$ .
2. Si  $\alpha$  est irrationnel, alors  $\rho^{-1}(\alpha)$  est un singleton  $\{\omega_\alpha\}$ .
3. Si  $\tilde{f}$  satisfait la propriété (A) :

$$(A) \quad \text{Pour tout } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ et tout } \omega \in \mathbb{R}, \tilde{f}_\omega^q \neq \tilde{r}_p.$$

alors pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$ ,  $\rho^{-1}(\frac{p}{q})$  est un intervalle  $[\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+]$  d'intérieur non vide.

Ainsi lorsque  $\tilde{f}$  satisfait (A),  $\rho^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  est un ensemble de Cantor (modulo 1).

**Remarque 1.3.1** M. Herman montre également ([He79], chapitre III) que la condition (A) est générique: pour  $0 \leq k \leq \omega$ , l'ensemble des applications  $\tilde{f} \in D^k(\mathbb{T}^1)$  satisfaisant (A) est une intersection d'ouverts denses de  $D^k(\mathbb{T}^1)$ . D'autre part, lorsque  $\phi = \tilde{f} - \text{Id}$  est la restriction à  $\mathbb{R}$  d'une fonction entière non constante, (A) est satisfaite.

**Théorème 1.3.1 (M. Herman, [He77])** *Si  $\tilde{f} \in D^3(\mathbb{T}^1)$ , alors la mesure de Lebesgue de  $\rho^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  est strictement positive.*

*De plus,  $\rho$  est absolument continue.*

**1.3.0.2** Diverses améliorations et compléments ont été apportés depuis: J. Graczyk montre ([Gr91]) que  $\rho$  est une fonction höldérienne d'exposant supérieur ou égal à  $\frac{1}{2}$ . Utilisant le théorème de linéarisation de M. Herman ([He79], chapitre IX) et J.-C. Yoccoz ([Yoc84]), M. Tsujii ([Ts92]) démontre qu'en dehors d'un ensemble  $\Omega$  de paramètres  $\omega$  de mesure de Lebesgue nulle, soit le difféomorphisme  $f_\omega$  possède une orbite périodique, soit il est linéarisable de façon lisse. J. Graczyk prouve dans [Gr93] que  $\Omega$  a une dimension de Hausdorff nulle.

En revanche lorsque  $\tilde{f}$  n'est plus un difféomorphisme, on obtient un résultat opposé à celui du théorème 1.3.1:

**Théorème 1.3.2 (G. Świątek, [Św88])** *Soit  $\tilde{f} \in E^3(\mathbb{T}^1)$  un homéomorphisme possédant au moins un point critique. Supposons également que les points critiques soient non-dégénérés ( $D^3\tilde{f}$  ne s'annule pas). Alors,  $\rho^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.*

**Remarque 1.3.2** Dans [GrŚw], J. Graczyk et G. Świątek raffinent ce résultat et montrent également que  $\rho$  est une fonction höldérienne.

### 1.3.0.3 Exemples:

1. L'exemple initialement choisi par V. Arnol'd dans [Ar] est le suivant:

$$\tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x}) = \tilde{x} + a \sin(2\pi\tilde{x}) + \omega.$$

$f_{a,\omega}$  est inversible pour  $0 \leq a \leq \frac{1}{2\pi}$ . C'est un difféomorphisme qui satisfait (A) lorsque  $0 \leq a < \frac{1}{2\pi}$ .

La figure 1.1 représente la fonction  $\rho$  pour la famille d'Arnol'd avec la valeur particulière  $a = 0.15$ .

Pour tout  $\rho_0 \in \mathbb{R}$ , l'ensemble des paramètres  $(a, \omega)$  pour lesquels  $\rho(\tilde{f}) = \rho_0$  est appelé usuellement la **langue d'Arnol'd de nombre  $\rho_0$** . Pour  $0 \leq a \leq \frac{1}{2\pi}$ , on remarque ainsi que c'est un domaine bordé par deux graphes:

$$\{(a, \omega), \omega_{\rho_0}^-(a) \leq \omega \leq \omega_{\rho_0}^+(a)\}.$$

2. On peut construire d'autres exemples sur des produits de Blaschke:

Ainsi la fraction rationnelle définie pour  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $|a| < 1$  par

$$z \mapsto \exp(2i\pi\omega)z^2 \frac{az - 1}{\bar{a} - z}$$

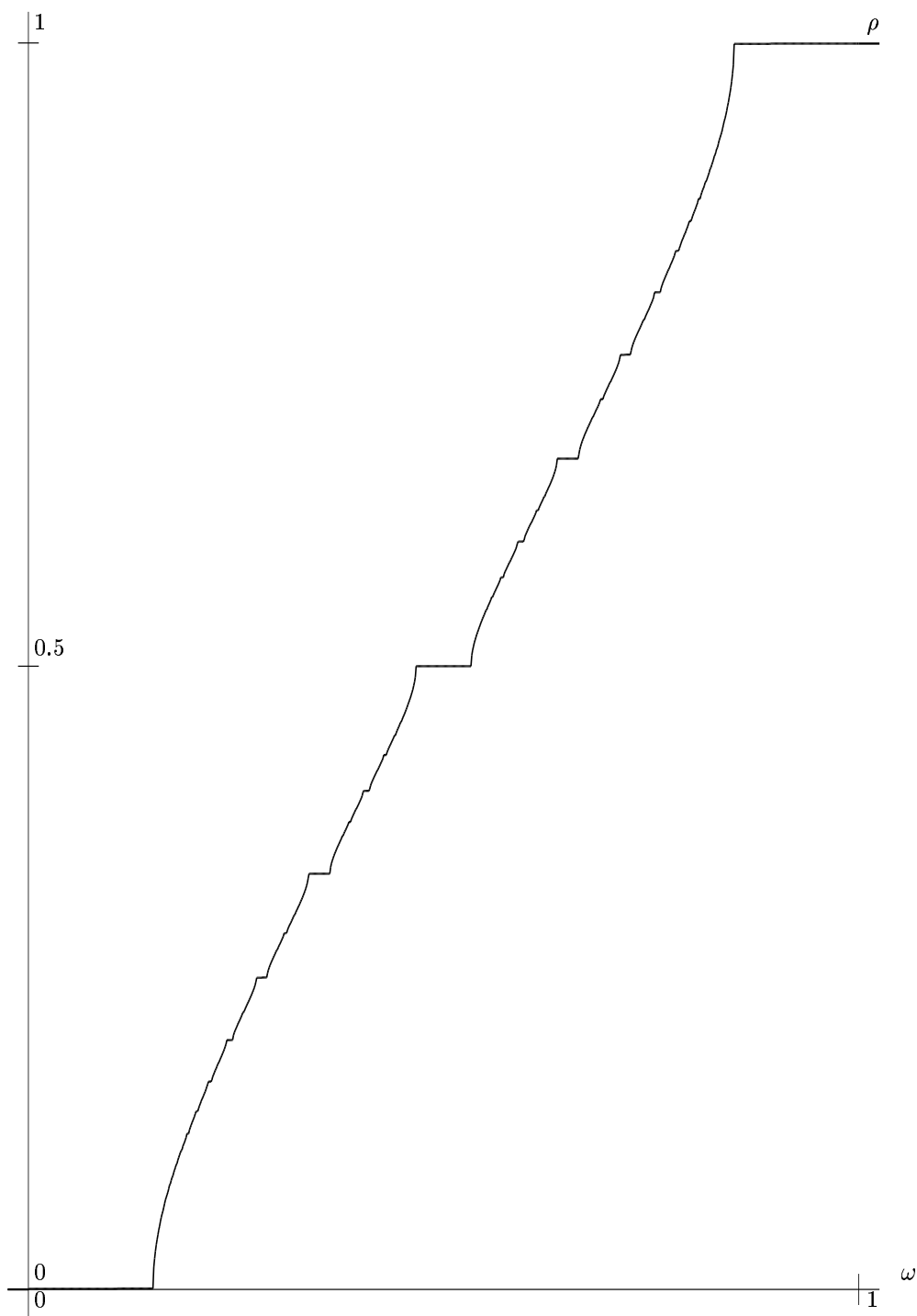


FIG. 1.1: Nombre de rotation  $\rho$  de l'application  $\tilde{x} \mapsto \tilde{x} + 0.15 \sin(2\pi\tilde{x}) + \omega$ .

préserve le cercle unité dans  $\mathbb{C}$ . Elle induit, en restriction, un endomorphisme de degré un, analytique sur le cercle.

Pour  $|a| < \frac{1}{3}$ , c'est un difféomorphisme ; pour  $|a| = \frac{1}{3}$  c'est un homéomorphisme avec un point critique. Pour  $\frac{1}{3} < |a| < 1$ , c'est une application non-inversible (voir la section 1.4.1).

## 1.4 Les endomorphismes du cercle

**1.4.1** Pour étudier le cas des endomorphismes du cercle, nous allons nous restreindre aux applications  $\tilde{f} = \text{Id} + \varphi_1$  de  $\text{End}^0(\mathbb{T}^1)$  possédant deux extrema  $\tilde{c}_0 < \tilde{c}'_0$  dans  $[0, 1[$  de sorte que  $\tilde{f}$  est strictement croissante sur  $[\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0]$  et strictement décroissante sur  $[\tilde{c}'_0, \tilde{c}_0 + 1]$ .

Nous posons à nouveau  $\tilde{f}_\omega = \tilde{r}_\omega \circ \tilde{f}$ .

Comme exemple, on peut considérer la famille d'Arnol'd  $(\tilde{f}_{a,\omega})$  avec  $a > \frac{1}{2\pi}$ .

### 1.4.1.1 La construction de Hall

Nous rappelons brièvement une construction due à G. Hall (voir [Boy]) qui a été généralisée dans [CGT84] et qui permet de montrer les résultats de la section 1.2.3.

Soit  $\tilde{f} \in E^0(\mathbb{T}^1)$  vérifiant les hypothèses de 1.4.1. Nous lui associons une famille continue d'endomorphismes croissants du cercle  $(\tilde{f}^{(t)})_{t \in [0,1]}$  de la façon suivante : pour tout  $t \in [0, 1]$ , il existe des uniques réels  $\tilde{m}_1^{(t)} \in [\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0]$  et  $\tilde{m}_2^{(t)} \in [\tilde{c}_0 + 1, \tilde{c}'_0 + 1]$  tels que

$$\tilde{f}(\tilde{m}_1^{(t)}) = \tilde{f}(\tilde{m}_2^{(t)}) = t\tilde{f}(\tilde{c}'_0) + (1-t)\tilde{f}(\tilde{c}_0 + 1).$$

Il suffit de définir  $\tilde{f}^{(t)}$  sur  $[\tilde{m}_1^{(t)}, \tilde{m}_2^{(t)} + 1[$ . On pose,

$$\tilde{f}^{(t)}(\tilde{x}) = \begin{cases} \tilde{f}(\tilde{m}_1^{(t)}), & \text{si } \tilde{x} \in [\tilde{m}_1^{(t)}, \tilde{m}_2^{(t)}[, \\ \tilde{f}(\tilde{x}), & \text{si } \tilde{x} \in [\tilde{m}_2^{(t)}, \tilde{m}_1^{(t)} + 1[. \end{cases}$$

Chaque application  $\tilde{f}^{(t)}$  possède un unique nombre de rotation. De plus  $\rho(\tilde{f}^{(t)})$  est continue et croissante en  $t$ . On montre alors  $\mathcal{R}(\tilde{f}) = \{\rho(\tilde{f}^{(t)}), t \in [0, 1]\}$  grâce au lemme suivant :

**Lemme 1.4.1 (P. Boyland)** *Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\tilde{f}^{(t)}$  possède une orbite bien ordonnée qui ne rencontre pas  $\pi_0([\tilde{m}_1^{(t)}, \tilde{m}_2^{(t)}])$ .*

L'application  $t \mapsto \rho(\tilde{f}^{(t)})$  est croissante. En particulier,

$$\rho(\tilde{f}^{(0)}) = \rho^-(\tilde{f}) \text{ et } \rho(\tilde{f}^{(1)}) = \rho^+(\tilde{f}).$$

### 1.4.1.2 Les langues d'Arnol'd

Nous rappelons les résultats de [Boy] :

**Théorème 1.4.2 (P. Boyland)** *Avec les hypothèses de la section 1.4.1,*

- i. Pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$ , il existe des réels  $\omega_{\frac{p}{q}}^- < \omega_{\frac{p}{q}}^+$  tels que l'intervalle de rotation  $\mathcal{R}(\tilde{f}_\omega)$  contienne  $\frac{p}{q}$  si et seulement si  $\omega \in [\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+]$ .*



De plus, il existe  $\omega_{\frac{p}{q}}^- \leq \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+ < \omega_{\frac{p}{q}}^+$  (resp.  $\omega_{\frac{p}{q}}^- < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- \leq \omega_{\frac{p}{q}}^+$ ) tel que  $\rho^-(\tilde{f}_\omega) = \frac{p}{q}$  (resp.  $\rho^+(\tilde{f}_\omega) = \frac{p}{q}$ ) si et seulement si  $\omega \in [\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+, \omega_{\frac{p}{q}}^+]$  (resp.  $\omega \in [\omega_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-]$ ).

ii. Pour tout irrationnel  $\alpha$ , il existe  $\omega_\alpha^- < \omega_\alpha^+$  tels que l'intervalle de rotation  $\mathcal{R}(\tilde{f}_\omega)$  contienne  $\alpha$  si et seulement si  $\omega \in [\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+]$ .

De plus,  $(\rho^-)^{-1}(\alpha) = \{\omega_\alpha^+\}$  (resp.  $(\rho^+)^{-1}(\alpha) = \{\omega_\alpha^-\}$ ).

Lorsque  $\alpha$  est irrationnel, on posera pour simplifier  $\hat{\omega}_\alpha^- = \omega_\alpha^-$  et  $\hat{\omega}_\alpha^+ = \omega_\alpha^+$ .

D'autres propriétés complètent la description du diagramme de bifurcation. Citons en particulier :

1. Les langues sont ordonnées : pour  $\rho < \rho'$  réels,  $\hat{\omega}_\rho^- < \omega_{\rho'}^-$  et  $\omega_\rho^+ < \hat{\omega}_{\rho'}^+$ .
2. Accumulation des langues : pour tout réel  $\rho$ ,

$$\omega_\rho^- = \lim_{\rho' < \rho} \omega_{\rho'}^-, \quad \hat{\omega}_\rho^- = \lim_{\rho' > \rho} \omega_{\rho'}^-. \quad (1.4)$$

Une propriété similaire existe pour les réels  $\omega_\rho^+$  et  $\hat{\omega}_\rho^+$ .

### 1.4.1.3 Étude générique de $\rho^-$ et $\rho^+$

Il existe une version du théorème 1.3.2 pour les endomorphismes du cercle :

**Théorème 1.4.3 (G. Świątek, [Św89])** Soit  $\tilde{f} \in E^2(\mathbb{T}^1)$  un endomorphisme satisfaisant les propriétés énoncées en 1.4.1 et en outre,

- i.  $D\tilde{f}$  sur  $[0, 1[\setminus\{\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0\}]$  ne s'annule pas ;
- ii.  $D^2\tilde{f}$  ne s'annule pas en  $\tilde{c}_0$  ni en  $\tilde{c}'_0$ .

Alors,  $\rho^-(\tilde{f}_\omega)$  et  $\rho^+(\tilde{f}_\omega)$  sont tout deux rationnels pour un ensemble de paramètres  $\omega$  de mesure de Lebesgue totale.

(Les hypothèses de [Św89] sont un peu plus générales.)

## 1.5 Les applications bimodales du cercle

### 1.5.1 Définition

Nous définissons les familles d'applications que nous étudierons par la suite. Une famille d'applications **S-bimodales** (ou plus simplement **bimodales**) sera une famille dans  $E^3(\mathbb{T}^1)$  de la forme :

$$\tilde{f}_{a,\omega} : \tilde{x} \mapsto \tilde{x} + a\varphi_1(\tilde{x}) + \omega.$$

$\omega \in \mathbb{R}$  est un paramètre de rotation ; le paramètre  $a \geq 0$  est un paramètre de non-linéarité puisque pour  $a = 0$ ,  $\tilde{f}_{0,\omega}$  est la translation par  $\omega$ .

Nous choisissons  $\varphi_1$  de la façon suivante :

1.  $\varphi_1$  est une fonction de classe  $C^3$ ,  $\mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  ;
2.  $\forall x, D\varphi_1(x) \neq 0 \Rightarrow S\varphi_1(x) < 0$  ;

3.  $\forall x, D\varphi_1(x) = 0 \Rightarrow D^2\varphi_1(x) \neq 0$ ;
4. Il existe  $\tilde{c}_{\varphi_1}, \tilde{c}'_{\varphi_1} \in [0, 1[$ ,  $\tilde{c}_{\varphi_1} < \tilde{c}'_{\varphi_1}$  tels que  $\varphi_1$  est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur  $[\tilde{c}_{\varphi_1}, \tilde{c}'_{\varphi_1}]$  (resp.  $[\tilde{c}'_{\varphi_1}, \tilde{c}_{\varphi_1} + 1]$ ).

Nous noterons parfois  $\varphi_a = a\varphi_1$  et  $\varphi = a\varphi_1 + \omega$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur les paramètres.

Une application est dite **bimodale** si elle appartient à une famille d'applications bimodales et si le paramètre  $a$  correspondant est non-nul. En topologie  $C^3$  l'ensemble des endomorphismes du cercle qui se relèvent dans  $E^3(\mathbb{T}^1)$  en une application bimodale non-linéaire forme un ouvert non vide de  $\text{End}^3(\mathbb{T}^1)$ .

**1.5.1.1** Nous sommes plus particulièrement intéressés par les paramètres  $a$  grands. En effet, dans ce cas :

1.  $\tilde{f}_{a,\omega}$  possède deux points critiques non-dégénérés  $\tilde{c}_0 < \tilde{c}'_0$  dans  $[0, 1[$  qui vérifient  $D^2\tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{c}'_0) < 0$  et  $D^2\tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{c}_0) > 0$ . De plus,  $\tilde{f}_{a,\omega}$  est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur  $[\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0]$  (resp.  $[\tilde{c}'_0, \tilde{c}_0 + 1]$ ).
2.  $\forall \tilde{x}, D\tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow S\tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x}) < 0$ .

L'infimum des paramètres  $a$  vérifiant (1) et (2) est noté  $a(\varphi_1) > 0$ . Lorsque  $a > a(\varphi_1)$ , on dit que  $\tilde{f}_{a,\omega}$  est **suffisamment non-linéaire**.

### 1.5.1.2 Exemple

La famille d'Arnol'd ( $\varphi_1(\tilde{x}) = \sin(2\pi\tilde{x})$ ) est une famille d'applications bimodales. Les paramètres  $a$  pour lesquels  $\tilde{f}_{a,\omega}$  est non-inversible ( $a > \frac{1}{2\pi}$ ) sont précisément ceux qui vérifient (1) et (2).

### 1.5.1.3 Intersection des langues

Dans l'espace des paramètres  $(a, \omega)$ , Boyland montre que pour tout réel  $\rho$ , la langue d'Arnol'd associée à  $\rho$  est bordée par des courbes uniformément lipschitziennes  $(a, \omega_\rho^-(a))$  et  $(a, \omega_\rho^+(a))$ . Il est intéressant de comprendre comment deux langues s'intersectent.

Dans le cas de la famille d'Arnol'd, le travail d'A. Epstein, L. Keen et C. Tresser ([EKT]) y répond partiellement : pour tout intervalle compact  $I$  de  $\mathbb{R}$ , l'ensemble des paramètres pour lesquels  $\mathcal{R}(\tilde{f}_{a,\omega}) = I$  est contractile. C'est un ensemble homéomorphe au carré  $[0, 1]^2$  si  $\text{Fr}(I) \subset \mathbb{Q}$ . Sinon, c'est une courbe. Pour le voir, ils utilisent la complexification de  $\tilde{f}_{a,\omega}$  et les théorèmes de rigidité de Thurston. Ils n'arrivent cependant pas à conclure que ces paramètres forment un point lorsque  $\text{Fr}(I) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Nous donnons une preuve très simple de ce fait pour toute famille bimodale, pourvu que  $a$  soit suffisamment grand (section 2.1).

Citons au passage [Fag], pour l'étude de la famille d'Arnol'd sur  $\mathbb{C}^*$  et les liens avec la théorie du nombre de rotation.

## 1.5.2 Bifurcations homoclines

Nous reformulons un autre résultat de P. Boyland (voir [Boy]). Au vu de l'étude systématique des orbites bien ordonnées faite au chapitre suivant, nous pourrions en donner une courte preuve (section 2.3.3).

**Proposition 1.5.1 (P. Boyland)** *Soit  $(\tilde{f}_{a,\omega})_\omega$  une famille d'applications bimodales du cercle avec  $a > a(\varphi_1)$ . Soit  $\frac{p}{q}$  un rationnel et fixons  $\omega = \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ . Alors, si l'on suppose  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- < \omega_{\frac{p}{q}}^+$ , l'orbite de  $m_2^{(1)}$  par  $f_{a,\omega}$  est périodique et bien ordonnée de type  $(p, q)$ , contenue dans la partie croissante  $[c_0, c'_0]$  et possède un multiplicateur strictement supérieur à 1. De plus, pour cette orbite,  $c'_0$  est un point homocline : on note  $x_0$  le point de l'orbite pour lequel  $]x_0, c'_0[ \cap \mathcal{O}^+(m_2^{(1)}) = \emptyset$ . Alors, d'une part  $\tilde{f}(\tilde{c}'_0) = \tilde{f}(\tilde{m}_2^{(1)})$  ; d'autre part, il existe un entier  $k > 0$  et un intervalle  $]x_0, x_0 + \varepsilon[$  arbitrairement petit, sur lequel  $f_{a,\omega}^{kq}$  est un homéomorphisme dont l'image contient  $]x_0, c'_0]$ .*

*Il y a un énoncé similaire pour  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+$  et  $m_1^{(0)}$ .*

## Chapitre 2

# Orbites bien ordonnées de la famille d'Arnol'd

Nous étudions de façon systématique les orbites bien ordonnées : tout d'abord, nous complétons notre connaissance du diagramme de bifurcation décrit en 1.4.1.2 lorsque le paramètre  $a$  est suffisamment grand et montrons en particulier la transversalité entre les courbes  $\omega^-$  et les courbes  $\omega^+$ .

Nous énonçons ensuite un théorème d'existence et d'unicité des orbites périodiques bien ordonnées. Ceci nous permet de définir les orbites bien ordonnées positives. On donne une version de ce résultat pour les nombres de rotation irrationnels.

Nous commentons enfin la combinatoire des orbites bien ordonnées. Nous remarquons que les orbites bien ordonnées sont en général hyperboliques. Ceci entraîne grâce aux travaux de A. Fathi et J. Graczyk que la réunion des orbites bien ordonnées est de dimension de Hausdorff inférieure à  $\frac{1}{2}$ . Nous terminons par la preuve de la proposition 1.5.1.

### 2.1 Préliminaires

Dans ce chapitre  $(f_{a,\omega})_\omega$  est une famille d'applications bimodales du cercle avec  $a > a(\varphi_1)$ .

**Proposition 2.1.1** *i.  $a \min \varphi_1 + \omega \leq \rho^-(\tilde{f}_{a,\omega}) \leq a \min \varphi_1 + \omega + 1$  et  $a \max \varphi_1 + \omega - 1 \leq \rho^+(\tilde{f}_{a,\omega}) \leq a \max \varphi_1 + \omega$ .*

*ii. En particulier, si l'on suppose  $a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 2$ , alors pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$ ,*

$$\omega_{\frac{p}{q}}^- < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+ < \omega_{\frac{p}{q}}^+.$$

*Démonstration :* L'application  $\tilde{f}_{a,\omega}^{(1)} - \text{Id}$  atteint son maximum,  $a \max \varphi_1 + \omega$ . De plus, puisque  $\tilde{f}_{a,\omega}^{(1)}$  est croissante, on a aussi  $\tilde{f}_{a,\omega}^{(1)} - \text{Id} \geq a \max \varphi_1 + \omega - 1$ . On en déduit immédiatement l'encadrement de  $\rho^+$ . On encadre de la même façon  $\rho^-$ .

Si  $a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 2$ ,  $\mathcal{R}(\tilde{f}_{a,\omega})$  ne peut être un singleton. Par conséquent,  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+$ . Le reste suit du théorème 1.4.2.

□

**Proposition 2.1.2** *Supposons  $a_0(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 1$  et considérons  $\rho \in \mathbb{R}$ . Alors, pour  $a > a_0$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{a - a_0}{a_0} &\geq \omega_\rho^-(a) - \omega_\rho^-(a_0) + (a - a_0) \max \varphi_1 \geq 0. \\ -\frac{a - a_0}{a_0} &\leq \omega_\rho^+(a) - \omega_\rho^+(a_0) + (a - a_0) \min \varphi_1 \leq 0. \end{aligned}$$

*Cet énoncé est encore vrai lorsque  $\rho$  est rationnel en remplaçant  $\omega_\rho^-$  (resp.  $\omega_\rho^+$ ) par  $\hat{\omega}_\rho^-$  (resp.  $\hat{\omega}_\rho^+$ ).*

*Démonstration :* Nous montrons tout d'abord la proposition avec  $\rho = \frac{p}{q}$  rationnel et pour  $\omega_{\frac{p}{q}}^-$ .

Nous introduisons l'intervalle ouvert du cercle :

$$I^+ = \{x, a_0 \varphi_1(x) > a_0 \max \varphi_1 - 1\}$$

et  $K^+ = \inf_{I^+} \varphi_1 = \max \varphi_1 - (a_0)^{-1}$ .

Le support  $S_0$  de  $D\tilde{f}_0^{(1)}$  est un intervalle compact inclus dans  $I^+$ . En effet, notons  $\tilde{I}^+$  et  $\tilde{S}_0 = [\tilde{m}_1^{(1)}, \tilde{c}'_0]$  les relevés de  $I^+$  et  $S_0$  à  $[\tilde{c}_0, \tilde{c}_0 + 1]$  et  $\tilde{c}'_{\varphi_1}$  l'unique maximum de  $\varphi_1$  dans  $[\tilde{c}_0, \tilde{c}_0 + 1]$ . On a

$$\tilde{c}'_0 + a_0 \varphi_1(\tilde{c}'_0) \geq \tilde{c}'_{\varphi_1} + a_0 \varphi_1(\tilde{c}'_{\varphi_1}),$$

et puisque  $\tilde{c}'_{\varphi_1} - \tilde{c}'_0 > 1$ ,  $\tilde{c}'_0$  appartient à  $\tilde{I}^+$ . Il suffit donc de montrer que  $\tilde{m}_1^{(1)}$  appartient à  $\tilde{I}^+$ .

Les points  $\tilde{x}$  de  $\tilde{S}_0$  sont caractérisés par

$$\tilde{x} + a_0 \varphi_1(\tilde{x}) \geq \tilde{c}'_0 + a_0 \varphi_1(\tilde{c}'_0) - 1.$$

On obtient donc immédiatement  $\tilde{c}'_{\varphi_1} \in \tilde{S}_0$  et donc  $\tilde{m}_1^{(1)} < \tilde{c}'_{\varphi_1}$ . Par conséquent,

$$a_0 \varphi_1(\tilde{m}_1^{(1)}) \geq \tilde{c}'_0 + a_0 \varphi_1(\tilde{c}'_0) - 1 - \tilde{m}_1^{(1)} \geq \tilde{c}'_{\varphi_1} + a_0 \varphi_1(\tilde{c}'_{\varphi_1}) - 1 - \tilde{m}_1^{(1)} \geq a_0 \varphi_1(\tilde{c}'_{\varphi_1}) - 1.$$

Ceci montre  $\tilde{m}_1^{(1)} \in \tilde{I}^+$  et achève de prouver l'affirmation  $S_0 \subset I^+$ .

Notons  $\omega_0 = \omega_{\frac{p}{q}}^-(a_0)$ ,  $f_0 = f_{a_0, \omega_0}$  et pour  $a \neq a_0$ ,  $f = f_{a, \omega}$ .

Supposons  $a > a_0$  et  $\omega > \omega_{\frac{p}{q}}^-(a_0) - (a - a_0)K^+$ . On obtient pour  $\tilde{x} \in \tilde{I}^+$ ,

$$(\tilde{f} - \tilde{f}_0)(\tilde{x}) \geq (a - a_0)K^+ + \omega - \omega_0 > 0.$$

D'autre part, sur  $\tilde{S}_0$ , on a :

$$\tilde{f}^{(1)}|_{S_0} \geq \tilde{f}|_{S_0} \geq \tilde{f}_0|_{S_0} = \tilde{f}_0^{(1)}|_{S_0}.$$

On en déduit  $\tilde{f}^{(1)} > \tilde{f}_0^{(1)}$  et  $(\tilde{f}^{(1)})^q > (\tilde{f}_0^{(1)})^q$ .

Si l'on avait  $\omega < \omega_{\frac{p}{q}}^-(a)$ , alors,  $(\tilde{f}^{(1)})^q < \tilde{r}_p$ . Ceci entraînerait  $(\tilde{f}_0^{(1)})^q < \tilde{r}_p$  et contredirait  $\omega_0 = \omega_{\frac{p}{q}}^-(a_0)$ . Par conséquent  $\omega \geq \omega_{\frac{p}{q}}^-(a)$ . Ainsi,

$$\omega_0 - (a - a_0)K^+ \geq \omega_{\frac{p}{q}}^-(a).$$

De la même façon, si  $a < a_0$ , on montre que

$$\omega_0 - (a - a_0) \max(\varphi_1) \geq \omega_{\frac{p}{q}}^-(a).$$

Les applications  $a \mapsto \omega_{\frac{p}{q}}^-(a)$  sont donc uniformément lipschitziennes.

Par passage à la limite, on obtient des inégalités analogues pour  $\rho$  irrationnel ou pour  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ .

On traite de la même façon le cas des applications  $\omega_{\rho}^+$  et  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+$ .

□

Comme corollaire, on obtient le résultat de transversalité suivant :

**Corollaire 2.1.3** *Supposons  $a_0(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 2$  et pour  $\rho, \rho' \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_{\rho}^-(a_0) = \omega_{\rho'}^+(a_0)$ . Alors, il existe  $K > 0$  tel que pour  $a > a_0$ , (resp.  $a < a_0$  petit)*

$$\omega_{\rho'}^+(a) - \omega_{\rho}^-(a) \geq K(a - a_0) \quad (\text{resp. } \omega_{\rho'}^+(a) - \omega_{\rho}^-(a) \leq K(a - a_0)).$$

*Cet énoncé est encore vrai en remplaçant  $\omega_{\rho}^-$  (resp.  $\omega_{\rho'}^+$ ) par  $\hat{\omega}_{\rho}^-$  (resp.  $\hat{\omega}_{\rho'}^+$ ).*

## 2.2 Existence et unicité

Nous montrons le résultat suivant:

**Proposition 2.2.1** *Soit  $(\tilde{f}_{a,\omega})_{\omega}$  une famille d'applications bimodales du cercle avec  $a > a(\varphi_1)$ . Alors, pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$ ,*

- i. Lorsque  $\omega \in \{\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+\}$ ,  $f_{a,\omega}$  possède exactement une orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$ . C'est une orbite selle-nœud.*
- ii. Lorsque  $\omega \in ]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+[$ ,  $f_{a,\omega}$  possède exactement deux orbites bien ordonnées de type  $(p, q)$ . Pour l'une d'entre elles,  $Df_{a,\omega}^q > 1$ ; elle est incluse dans l'intervalle de croissance  $[c_0, c'_0]$ . Pour l'autre,  $Df_{a,\omega}^q < 1$ .*

*Leur réunion est un ensemble bien ordonné.*

Ainsi pour  $\omega \in [\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+]$ ,  $f_{a,\omega}$  possède exactement une orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$  et de multiplicateur supérieur ou égal à 1. Elle dépend continûment des paramètres. On l'appelle **l'orbite bien ordonnée positive de type  $(p, q)$** .

Nous aurons besoin de propriétés élémentaires des applications à dérivée schwarzienne négative (voir [MS], chapitre II.6) :

- **Composition** : si  $f$  et  $g$  sont deux difféomorphismes locaux envoyant 0 sur lui-même et tels que  $Sf(0), Sg(0) < 0$ , alors  $S(g \circ f)(0) < 0$ .
- **Principe du minimum** : si  $f : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  est la restriction d'un difféomorphisme et si  $Sf < 0$  alors,

$$\forall x \in ]x_0, x_1[, |Df(x)| > \min\{|Df(x_0)|, |Df(x_1)|\}.$$

*Démonstration de la proposition 2.2.1 :*

1. Prenons  $\omega \in [\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+]$  et supposons que  $(\tilde{x}_n)$  soit une orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$  pour  $\tilde{f}_{a, \omega}$  telle que

- (a)  $\tilde{x}_{n+1} = \tilde{f}_{a, \omega}(\tilde{x}_n)$ ;
- (b)  $D\tilde{f}_{a, \omega}^q(\tilde{x}_0) \geq 1$ ;
- (c)  $\forall n, x_n \in [c_0, c'_0]$ .

On peut supposer sans perdre en généralités que  $\tilde{x}_0 \in [\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0]$  et que  $\tilde{x}_0$  est le point de  $\tilde{O}^+(\tilde{x}_0) \cap [\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0]$  le plus proche de  $\tilde{c}'_0$ .

Pour tout  $n$ ,  $\tilde{x}_n$  appartient à  $[\tilde{c}_0 + k, \tilde{c}'_0 + k]$  avec  $k = -[-n\frac{p}{q}]$ . En effet, puisque l'orbite est bien ordonnée,

$$\tilde{x}_0 + k - 1 < \tilde{x}_n \leq \tilde{x}_0 + k.$$

On obtient alors  $\tilde{c}_0 + k \leq \tilde{x}_n$  car sinon  $\tilde{x}_n \leq \tilde{c}'_0 + k - 1$  et donc  $\tilde{x}_0 < \tilde{x}_n - k + 1 \leq \tilde{c}'_0$ . Ceci contredirait le choix de  $\tilde{x}_0$ .

Soit  $(\tilde{x}'_n)$  une autre orbite avec les mêmes propriétés. Par ce qui précède, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{f}_{a, \omega}$  ne possède pas de point critique entre  $\tilde{x}_n$  et  $\tilde{x}'_n$ . Donc  $D\tilde{f}_{a, \omega}^q$  ne s'annule pas entre  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}'_0$ .

Ainsi sur un intervalle ouvert contenant  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}'_0$ ,  $\tilde{f}_{a, \omega}^q - p$  est une application strictement croissante à dérivée schwarzienne strictement négative. D'autre part,  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}'_0$  sont des points fixes. D'après le principe du minimum, une telle application possède au plus un point fixe avec dérivée supérieure ou égale à un. Ceci implique  $\tilde{x}_0 = \tilde{x}'_0$ .

On en déduit l'unicité de l'orbite bien ordonnée positive.

2. La construction de Hall montre qu'il existe un paramètre  $t \in [0, 1]$  pour lequel  $f_{a, \omega}^{(t)}$  possède le nombre de rotation  $\frac{p}{q}$ . La fonction périodique  $(f_{a, \omega}^{(t)})^q - \text{Id} - p$  est non constante et possède ou moins un zéro  $x$  qui ne vérifie pas l'une de ces deux conditions :

- (a) Sur un voisinage  $]x - \varepsilon, x[$ ,  $(f_{a, \omega}^{(t)})^q - \text{Id} - p > 0$ .
- (b) Sur un voisinage  $]x, x + \varepsilon[$ ,  $(f_{a, \omega}^{(t)})^q - \text{Id} - p < 0$ .

En tout point,  $(f_{a, \omega}^{(t)})^q - \text{Id} - p$  est dérivable à droite et à gauche. On en déduit que la dérivée à droite ou à gauche de  $(f_{a, \omega}^{(t)})^q - \text{Id} - p$  en  $x$  est positive ou nulle.

L'orbite de  $x$  par  $f_{a, \omega}^{(t)}$  ne rencontre jamais  $]m_1^{(t)}, m_2^{(t)}[$  et les orbites de  $x$  pour  $f_{a, \omega}$  et  $f_{a, \omega}^{(t)}$  coïncident. L'orbite  $\mathcal{O}^+(x)$  de  $f_{a, \omega}$  est bien ordonnée de type  $(p, q)$  et tous ses éléments sont dans la partie croissante de  $f_{a, \omega}$ . L'orbite  $\mathcal{O}^+(x)$  contient au plus un point  $m_1^{(t)}, m_2^{(t)}$ . De plus,  $Df_{a, \omega}^q \geq 1$ .

Ceci montre l'existence de l'orbite bien ordonnée positive.

3. Considérons à nouveau l'orbite positive  $\mathcal{O}^+(x)$ . Dans le cas où  $Df_{a, \omega}^q(x) = 1$ , puisque  $Sf_{a, \omega}^q(x) < 0$ , soit  $D^2f_{a, \omega}^q(x) \neq 0$ , soit  $D^2f_{a, \omega}^q(x) = 0$  et  $D^3f_{a, \omega}^q(x) < 0$ . Nous allons supposer par l'absurde que nous sommes dans ce dernier cas et montrer que l'on aboutit à une contradiction. Si  $D^3f_{a, \omega}^q(x) < 0$ ,  $Df_{a, \omega}^q(x) = 1$

et  $f_{a,\omega}^q(x) = x$  impliquent à la fois les conditions 2a) et 2b) du 2). Il existe d'après le 2) une autre orbite  $\mathcal{O}^+(x')$  qui ne satisfait pas l'une ou l'autre des conditions 2a) et 2b). C'est une seconde orbite bien ordonnée positive. Ceci est impossible d'après l'unicité de  $\mathcal{O}^+(x)$ .

Lorsque  $Df_{a,\omega}^q(\tilde{x}_0) = 1$ , l'orbite est donc de type selle nœud. Lorsque  $\omega \in \{\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+\}$ , l'orbite  $(\tilde{x}_n)$  ne peut persister sur un voisinage de  $\omega$  puisque par perturbation le nombre  $\frac{p}{q}$  disparaît de l'intervalle de rotation. L'orbite ne peut donc être hyperbolique et est donc de type selle-nœud.

4. Si pour  $\omega_0$  l'orbite  $(\tilde{x}_n)$  est de type selle-nœud, la bifurcation est transverse au paramètre  $\omega$  :

$$\frac{d}{d\omega} \tilde{f}_{a,\omega}^q(\tilde{x}_0) = \sum_{k=0}^{q-1} D\tilde{f}^{q-k-1}(\tilde{x}_{k+1}) \frac{d}{d\omega} \tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x}_k) = \sum_{k=0}^{q-1} D\tilde{f}^{q-k-1}(\tilde{x}_{k+1}).$$

Mais par définition pour tout  $k$ ,  $D\tilde{f}^{q-k-1}(\tilde{x}_{k+1}) > 0$ , donc

$$\left. \frac{d}{d\omega} \tilde{f}_{a,\omega}^q(\tilde{x}_0) \right|_{\omega_0} > 0.$$

L'orbite  $(\tilde{x}_n)$  disparaît donc pour  $\omega$  appartenant à un voisinage à droite ou à gauche de  $\omega_0$ . Par unicité de l'orbite bien ordonnée positive, on en déduit  $\omega \in \{\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+\}$ .

Ce raisonnement montre ainsi que pour  $\omega \in ]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+[$ , l'orbite bien ordonnée positive ne peut être de type selle-nœud. Elle est donc hyperbolique et  $Df_{a,\omega}^q(\tilde{x}_0) > 1$ .

5. Il est immédiat par définition de voir qu'une orbite bien ordonnée ne peut avoir deux points distincts dans la partie décroissante de  $f_{a,\omega}$  (ceci contredirait (1.3)). Ainsi si  $(\tilde{x}'_n)$  est une orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$  et si  $Df^q(\tilde{x}'_0) \geq 1$ ,  $(\tilde{x}'_n)$  est l'orbite bien ordonnée positive  $(\tilde{x}_n)$ . Par ce qui précède, pour  $\omega \in ]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+[$ , il n'y a pas d'orbite bien ordonnée  $(\tilde{x}_n)$  de type  $(p, q)$  telle que  $D\tilde{f}_{a,\omega}^q(\tilde{x}_0) = 1$ .

Toute orbite périodique bien ordonnée  $(\tilde{x}'_n)$  de type  $(p, q)$  telle que  $Df_{a,\omega}(x'_0) \neq 1$  persiste et peut être suivie continûment après perturbation. On en déduit pour  $\omega_0 \in \{\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+\}$  et pour toute orbite bien ordonnée  $(\tilde{x}'_n)$  de type  $(p, q)$ ,  $Df_{a,\omega_0}(x'_0) = 1$ . Dans ce cas, la seule orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$  est donc l'orbite positive  $(\tilde{x}_n)$ .

6. La théorie des bifurcations selle-nœud montre qu'il existe  $\varepsilon > 0$  et un voisinage  $U$  de l'orbite positive  $(x_n)$  associée à  $f_{a,\omega_{\frac{p}{q}}^-}$  tels que

- (a) Pour  $\omega < \omega_{\frac{p}{q}}^-$ ,  $U$  ne contient pas d'orbite de type  $(p, q)$  de  $f_{a,\omega}$ .
- (b) Pour  $\omega > \omega_{\frac{p}{q}}^-$ ,  $U$  contient exactement deux orbites de type  $(p, q)$  distinctes : l'orbite positive  $(x_n)$  et une seconde orbite bien ordonnée,  $(x'_n)$ . Nécessairement pour  $(x'_n)$ ,  $Df_{a,\omega}^q(x'_0) < 1$ .



On obtient une description similaire au voisinage de  $\omega_{\frac{p}{q}}^+$ .

D'après ce que l'on sait sur les orbites positives, les deux orbites  $(x_n)$  et  $(x'_n)$  ne peuvent bifurquer sur  $]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+[$  ( $Df_{a,\omega}^q - 1$  ne s'annule pas le long de ces orbites) et peuvent donc être suivies continûment sur cet intervalle.

De la même façon, sur  $]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+[$ , il n'y a pas d'autre orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$ . En effet, une telle orbite serait apparue lors d'une bifurcation. Ceci entraînerait l'existence d'une autre orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$ ,  $(x''_n)$  avec  $Df_{a,\omega}^q(x''_0) = 1$  pour un  $\omega \in ]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+[$ , ce qui est exclu.

7. Pour  $\omega \in \{\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+\}$ , les deux orbites bien ordonnées de type  $(p, q)$  sont créées à travers une bifurcation selle-nœud. Leur réunion est donc bien ordonnée. Par continuation de ces orbites leur réunion est encore un ensemble bien ordonné pour tout  $\omega \in ]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+[$ .

□

Pour traiter le cas des nombres de rotation irrationnels, nous aurons besoin du résultat suivant (voir [MS], chapitre IV) : pour un endomorphisme du cercle  $f$ , nous dirons qu'un intervalle  $I$  est errant si  $I$  et ses itérés sont deux à deux disjoints et si l'ensemble  $\omega$ -limite de  $I$  n'est pas réduit à une orbite périodique.

**Théorème 2.2.2 (voir [MS])** *Soit  $f$  un endomorphisme du cercle de classe  $C^2$  ayant ses points critiques non-dégénérés :*

$$\forall x, Df(x) = 0 \Rightarrow D^2f(x) \neq 0.$$

*Alors,  $f$  ne possède pas d'intervalle errant.*

**Proposition 2.2.3** *Soit  $(f_{a,\omega})_\omega$  une famille d'applications bimodales du cercle avec  $a > a(\varphi_1)$ . Alors, pour tout  $\alpha$  irrationnel,*

- i. Lorsque  $\omega \in ]\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+[$ , la réunion des orbites bien ordonnées de nombre de rotation  $\alpha$  restant dans la partie croissante  $[c_0, c'_0]$  de  $f_{a,\omega}$  forme un ensemble invariant homéomorphe à un ensemble de Cantor,  $K$ , sur lequel la dynamique est minimale.*
- ii. Lorsque  $\omega \in ]\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+[$ , on note  $]x^-, x^+[$  la composante du complémentaire de  $K$  qui contient l'intervalle de décroissance  $]c'_0, c_0[$  de  $f$ . Alors,  $f(x^-) = f(x^+)$ . D'autre part, pour toute paire  $\{x, x'\}$  de points distincts de  $K$  distincte de  $\{x^-, x^+\}$ ,  $f(x) \neq f(x')$ .*
- iii. Lorsque  $\omega \in \{\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+\}$ ,  $f$  n'a pas d'autre orbite bien ordonnée de nombre de rotation  $\alpha$ .*

*Lorsque  $\omega \in ]\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+[$ , l'ensemble des points d'orbite bien ordonnée est un ensemble bien ordonné  $K \cup \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  avec*

- $\forall n, f(x_n) = x_{n+1}$  ;
- $x_1 = f(x^-) = f(x^+)$  ;
- $x_0$  appartient à l'intervalle  $]c'_0, c_0[$ .

*Démonstration :*

1. Supposons  $\omega \in ]\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+[$ . Par passage à la limite (proposition 1.2.1.ii) ou grâce à la construction de Hall, il existe un ensemble compact bien ordonné,  $K$ , inclus dans la partie croissante de  $f_{a,\omega}$  sur lequel la dynamique est minimale. Puisque  $K \neq \mathbb{T}^1$ ,  $K$  est un ensemble de Cantor.
2. On note  $]x^-, x^+[$  la composante du complémentaire de  $K$  qui contient l'intervalle de décroissance de  $f_{a,\omega}$ . On choisit des relevés  $\tilde{x}^-$  et  $\tilde{x}^+$  tels que  $]\tilde{c}'_0, \tilde{c}_0 + 1[ \subset ]\tilde{x}^-, \tilde{x}^+[ \subset ]\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0 + 1[$ .

Si  $f_{a,\omega}$  possède un second ensemble  $K'$ , minimal de nombre de rotation  $\alpha$ ,  $K'$  est aussi contenu dans  $[c_0, c'_0]$ . Si l'on définit de la même façon  $\tilde{x}'^-$  et  $\tilde{x}'^+$ , on doit avoir  $\tilde{x}^- \neq \tilde{x}'^-$  car par minimalité de  $K$  et  $K'$  on aurait sinon  $K = K'$ .

Comme pour le 1) de la démonstration de la proposition 2.2.1, pour tout  $n \geq 0$ ,  $\tilde{f}_{a,\omega}^n(\tilde{x}^-)$  appartient à l'intervalle  $[\tilde{c}_0 + k, \tilde{c}'_0 + k]$  avec  $k = -[n\alpha]$ . Il en est de même de  $\tilde{f}_{a,\omega}^n(\tilde{x}'^-)$ . Ainsi aucun itéré de  $]x^-, x'^-]$  ne contient  $c_0$  ou  $c'_0$ . Les itérés de l'intervalle  $]x^-, x'^-]$  sont tous disjoints car sinon,  $x^-$  ou  $x'^-$  serait attiré par une orbite périodique. L'intervalle  $]x^-, x'^-]$  n'est pas non plus dans le bassin d'une orbite périodique attractive. C'est donc un intervalle errant. Ceci est impossible d'après le théorème précédent. L'ensemble  $K$  est donc unique.

3. Soit  $I$  une composante du complémentaire de  $K$ . Si aucun de ses itérés ne contient de point critique  $c_0$  ou  $c'_0$ , on montre de même que  $I$  est un intervalle errant. Par conséquent, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f_{a,\omega}^n$  soit un homéomorphisme entre  $I$  et  $]x^-, x^+[$ .

Si l'on suppose que  $f_{a,\omega}(x^-) \neq f_{a,\omega}(x^+)$ , l'intervalle  $]f_{a,\omega}(x^-), f_{a,\omega}(x^+)[$  est une composante du complémentaire de  $K$ . Aucun de ses itérés ne rencontre  $]x^-, x^+[$ , donc c'est un intervalle errant et on aboutit à une contradiction. Finalement,  $f_{a,\omega}(x^-) = f_{a,\omega}(x^+)$ . On en déduit que  $f_{a,\omega}$  est une bijection entre  $]x^+, x^-]$  et  $\mathbb{T}^1$ . Ceci entraîne le (ii).

4. Si l'on suppose  $\omega \in ]\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+[$ ,  $\alpha$  est dans l'intérieur de l'intervalle de rotation. On en déduit que  $x^-$  est distinct de  $c'_0$  et  $x^+$  distinct de  $c_0$ . Si par exemple  $\omega = \omega_\alpha^-$ , l'application  $\tilde{f}_{a,\omega}^{(1)}$  a le nombre de rotation  $\alpha$ . Or, la dynamique de  $\tilde{f}_{a,\omega}^{(1)}$  et  $f_{a,\omega}$  coïncident sur  $K$ . Puisque  $f(x^-) = f(x^+)$ , l'intervalle  $]x^-, x^+[$  est contenu dans l'intervalle  $[m_1^{(1)}, m_2^{(1)}]$ . On a donc  $]x^-, x^+ [= ]m_1^{(1)}, m_2^{(1)}[$  et  $x^- = c'_0$ . Si  $\omega = \omega_\alpha^+$ , on obtient cette fois  $x^+ = c_0$ .
5. Soit  $x \notin K$  un point ayant une orbite bien ordonnée de nombre de rotation  $\alpha$ . D'après ce que nous avons vu en 3), il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f_{a,\omega}^n(x) \in ]x^-, x^+[$ . Nous supposons donc momentanément que  $\tilde{x} \in ]\tilde{x}^-, \tilde{x}^+[ \subset ]\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0 + 1[$ . L'adhérence de  $\mathcal{O}^+(x)$  est bien ordonnée (proposition 1.2.1.ii) et contient  $K$ . On en déduit que  $\tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x}^-) = \tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x}^+) = \tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x})$ . Puisque  $\tilde{f}_{a,\omega}$  est bimodale, ceci n'est possible que pour un unique point  $\tilde{x}$ . Il appartient au domaine de décroissance  $]\tilde{c}'_0, \tilde{c}_0 + 1[$  de  $\tilde{f}_{a,\omega}$  et de plus d'après le 4),  $\tilde{x}$  n'est distinct de  $\tilde{x}^-$  et  $\tilde{x}^+$  que pour  $\omega \in ]\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+[$ .

Réciproquement, pour  $\omega \in ]\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+[$ , on définit  $\tilde{x}_0 \in ]\tilde{c}'_0, \tilde{c}_0[$  par

$$\tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x}^-) = \tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x}_0).$$

Il existe un unique  $t \in [0, 1]$  pour lequel  $m_1^{(t)} = x^-$ . On définit alors par récurrence

$$x_n = (f_{a,\omega}^{(t)})^{-1}(x_{n+1}).$$

Le reste du (iii) suit aisément. □

## 2.3 Autres propriétés

### 2.3.1 Orbites bien ordonnées et ordre de Farey

La combinatoire et le codage des orbites bien ordonnées ont été étudiés dans [Cr98] (voir aussi [BuS] et [Bou]). On obtient ainsi en particulier, la position relative des différentes orbites bien ordonnées périodiques positives à partir de l'ordre de Farey sur les rationnels :

Pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$  dans l'ensemble de rotation, nous notons  $x_0$  le point de l'orbite bien ordonnée positive de type  $(p, q)$ , tel que  $]x_0, c'_0[ \cap \mathcal{O}^+(x_0) = \emptyset$ . On pose ensuite  $x_n = f_{a,\omega}^n(x_0)$ .

Pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$ , l'orbite bien ordonnée positive associée “piste” les orbites bien ordonnées positives associées aux parents de  $\frac{p}{q}$  pour l'ordre de Farey sur les rationnels :

**Proposition 2.3.1** *Soit  $[\frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}]$  un intervalle de Farey inclus dans l'intervalle de rotation (i.e.  $\frac{p'}{q'} + \frac{p''}{q''} = 1$ ). Nous posons  $\frac{p}{q} = \frac{p'+p''}{q'+q''}$  et notons comme ci-dessus  $(x_n)$ ,  $(x'_n)$  et  $(x''_n)$  les orbites bien ordonnées positives de nombre de rotation respectifs  $\frac{p}{q}$ ,  $\frac{p'}{q'}$  et  $\frac{p''}{q''}$ , et  $X$  la réunion de ces trois orbites. Alors,  $\mathcal{O}^+(x_0)$  est réunion disjointe des ensembles  $\{(x_i), 1 \leq i \leq q'\}$  et  $\{(x_{i+q'}), 1 \leq i \leq q''\}$  de sorte que pour  $1 \leq i \leq q'$ ,  $]x'_i, x''_i[$  ne rencontre pas  $X$  et pour  $1 \leq i \leq q''$ ,  $]x_{i+q'}, x_i[$  ne rencontre pas  $X$ .*

**Remarque 2.3.1** Un grand nombre de résultats existent sur la théorie combinatoire des endomorphismes du cercle, et sur l'entropie topologique (on pourra consulter [ALM]). L'étude combinatoire des endomorphismes de la famille d'Arnol'd pour de petites valeurs de  $a$  a été menée également dans le but de comprendre la frontière d'entropie nulle (voir [MaT]). Un problème voisin consiste à étudier la monotonie de l'entropie. Ceci a été réalisé dans le cadre bimodal pour les applications cubiques réelles (voir [MiTh]).

### 2.3.2 Orbites bien ordonnées et dimension de Hausdorff

Les ensembles bien ordonnés sont en général hyperboliques :

**Proposition 2.3.2** *Soit  $\tilde{f}_{a,\omega}$  une application bimodale avec  $a > a(\varphi_1)$  et  $[r_1, r_2]$  un intervalle compact inclus dans  $\text{Int}(\mathcal{R}(\tilde{f}))$ . Alors, la réunion des orbites bien ordonnées ayant un nombre de rotation inclus dans  $[r_1, r_2]$  forme un ensemble compact et hyperbolique,  $K_{r_1, r_2}$ .*

La démonstration utilise le lemme suivant :

**Lemme 2.3.3** *Soit  $\tilde{f}_{a,\omega}$  une application bimodale avec  $a > a(\varphi_1)$  d'intervalle de rotation  $[\rho^-, \rho^+]$ . S'il existe une orbite bien ordonnée périodique de nombre de rotation  $\rho$  qui n'est pas hyperbolique répulsive, alors  $\rho \in \{\rho^-, \rho^+\}$ .*

*Démonstration :* Puisque  $f_{a,\omega}$  a une dérivée schwarzienne strictement négative, les orbites périodiques qui ne sont pas hyperboliques et répulsives possèdent un point critique dans leur bassin immédiat (voir [MS], chapitre II.6, théorème 6.1). Supposons par exemple que  $\mathcal{O}^+(x)$  soit une orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$  qui attire le point critique  $c'_0$ . Le bassin immédiat de  $\mathcal{O}^+(x)$  est une union d'intervalles disjoints  $I_n$ ,  $0 \leq n \leq q-1$ , ouverts, ou semi-ouverts. On supposera que  $c'_0 \in I_0$ ,  $x = x_0 \in I_0$  et pour  $0 \leq n \leq q-1$ ,  $f_{a,\omega}^n(x_0) = x_n \in I_n$ . Les intervalles  $I_n$  et leurs relevés sont échangés par  $\tilde{f}_{a,\omega}$  comme les orbites de la rotation d'angle  $\frac{p}{q}$ . Puisque  $c'_0 \in \text{Int}(I_0)$ , les intervalles  $I_1, \dots, I_{q-1}$  ne rencontrent pas  $[m_1^{(1)}, m_2^{(1)}]$ . On note  $\tilde{I}_0 = \pi_0^{-1}(I_0) \cap [\tilde{c}_0, \tilde{c}_0 + 1]$ . Par  $(\tilde{f}_{a,\omega}^{(1)})^q$ ,  $\tilde{I}_0$  est envoyé dans un relevé de  $I_1$ . Par  $(\tilde{f}_{a,\omega}^{(1)})^q$ ,  $\tilde{I}_0$  est donc envoyé dans  $\tilde{I}_0 + p$ . Par conséquent,  $\rho^+ = \rho(\tilde{f}_{a,\omega}^{(1)}) = \frac{p}{q}$ .

□

*Démonstration de la proposition 2.3.2 :* L'ensemble  $K_{r_1, r_2}$  est fermé d'après la proposition 1.2.1.v.

D'après le lemme précédent, toutes les orbites périodiques de  $K_{r_1, r_2}$  sont hyperboliques et répulsives.

Si le point critique  $c'_0$  a une orbite bien ordonnée, son orbite est aussi une orbite de  $f_{a,\omega}^{(1)}$ . Son nombre de rotation est donc  $\rho^+$ . Le même raisonnement s'applique à  $c_0$ . L'ensemble  $K_{r_1, r_2}$  ne contient donc pas de point critique.

D'après un théorème bien connu de M. Misiurewicz (voir [MS], chapitre III.3 théorème 3.2)  $K_{r_1, r_2}$  est donc un ensemble hyperbolique.

□

Un résultat de A. Fathi (voir [Fat89], la démonstration passe aux endomorphismes du cercle) montre alors que la dimension de Hausdorff de  $K_{r_1, r_2}$  est nulle :

**Théorème 2.3.4 (A. Fathi)** *Soit  $K$  un ensemble hyperbolique, réunion d'orbites bien ordonnées. Alors, la dimension de Hausdorff de  $K$  est nulle*

On utilise enfin un théorème de J. Graczyk (qu'il donne dans un cadre plus général, voir aussi [GJSTV]) :

**Théorème 2.3.5 (J. Graczyk, [Gr92])** *Soit  $f_{a,\omega}^{(1)}$  l'application supérieure d'une application bimodale ( $a > a(\varphi_1)$ ). Supposons que son nombre de rotation soit irrationnel. Alors, l'ensemble non-errant a une dimension de Hausdorff inférieure ou égale à  $\frac{1}{2}$ .*

**Remarque 2.3.2** Selon l'arithmétique de  $\rho^+$ , la dimension de l'ensemble non-errant peut ne pas être nulle.

Combinant les deux on obtient :

**Proposition 2.3.6** *Soit  $f_{a,\omega}$  une application bimodale du cercle avec  $a > a(\varphi_1)$  et soit  $K$  le compact formé de la réunion des orbites bien ordonnées.*

*Alors, lorsque  $\rho^-$  et  $\rho^+$  sont rationnels,  $\text{HK}(K) = 0$ . Sinon,  $\text{HK}(K) \leq \frac{1}{2}$ .*

**Remarque 2.3.3** Au vu du théorème 1.4.3, pour presque tout paramètre  $(a, \omega)$ ,  $K$  est hyperbolique et a une dimension de Hausdorff nulle.

### 2.3.3 Orbites homoclines

#### 2.3.3.1 Preuve de la proposition 1.5.1

On a  $\rho(\tilde{f}_{a,\omega}^{(1)}) = \rho^+(\tilde{f}_{a,\omega}) = \frac{p}{q}$ . D'après la preuve de la proposition 2.2.1, l'orbite bien ordonnée positive de type  $(p, q)$ ,  $\mathcal{O}^+(\tilde{x}_0)$  est une orbite de  $\tilde{f}_{a,\omega}^{(1)}$ . On notera  $x_0(\omega')$  le prolongement du point  $f_{a,\omega}$ -périodique  $x_0 = \pi_0(\tilde{x}_0)$  pour  $\omega'$  proche de  $\omega$ .

Par définition de  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ ,

$$(\tilde{f}_{a,\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-}^{(1)})^q \geq \tilde{r}_p. \quad (2.1)$$

On a par hypothèse  $\omega \in ]\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+[$ . Puisque pour  $\omega' > \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ , l'orbite de  $x_0(\omega')$  par  $f_{a,\omega'}$  n'est plus une orbite de  $f_{a,\omega}$ , l'orbite  $\mathcal{O}^+(x_0)$  pour  $f_{a,\omega}$  doit contenir un des points  $m_1^{(1)}$  ou  $m_2^{(1)}$ . Ce ne peut être  $m_1^{(1)}$  puisque c'est un point critique et puisque  $Df_{a,\omega}^q(x_0) > 1$  (proposition 2.2.1). Donc  $m_2^{(1)} \in \mathcal{O}^+(x_0)$ .

Nous pouvons supposer que  $x_0$  est le point de l'orbite pour lequel

$$]x_0, c'_0[ \cap \mathcal{O}^+(x_0) = \emptyset.$$

Nous considérons un ouvert  $U = ]x_0, x_0 + \varepsilon[$  pour  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit. Puisque  $\mathcal{O}^+(x_0)$  est répulsive,  $f_{a,\omega}^q(U)$  contient  $U$ . Si l'on suppose qu'aucun itéré de  $U$  ne rencontre  $c'_0$ ,  $f_{a,\omega}$  et  $f_{a,\omega}^{(1)}$  coïncident sur  $U$  et ses itérés. L'intervalle  $\cup_n f_{a,\omega}^{qn}(U)$  est donc de la forme  $]x_0, y_0[$  et  $y_0$  est une orbite commune à  $f_{a,\omega}$  et  $f_{a,\omega}^{(1)}$ , attractive d'un côté. D'après l'inégalité (2.1),  $Df_{a,\omega}^q(\tilde{y}_0) = 1$ . Ceci contredit l'unicité de la proposition 2.2.1.

Il existe donc un itéré  $f_{a,\omega}^n$  qui envoie homéomorphiquement  $U$  sur un intervalle contenant  $c'_0$ . Quitte à réduire  $U$ ,  $f_{a,\omega}^{n+1}$  envoie homéomorphiquement  $U$  sur un intervalle de la forme  $]x_{n+1}, x_{n+k+1}[$  qui ne contient pas d'autre point de l'orbite  $\mathcal{O}^+(x_0)$ . Soit alors  $f_{a,\omega}^{n+1+l}$ ,  $l \geq 0$ , le premier itéré tel que  $x_{n+l+1} = x_0$ . L'ouvert  $U$  est envoyé homéomorphiquement sur l'intervalle  $]x_{n+l+1}, x_{n+k+l+1}[ = ]x_0, x_k[$  qui contient l'intervalle de décroissance de  $f_{a,\omega}$  et  $c'_0$ . Ceci termine la preuve.

#### 2.3.3.2 Une autre caractérisation de $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^\pm$

On peut compléter le résultat de la proposition 1.5.1 : on suppose  $a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 2$  de sorte que  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+$ . Soit  $\omega \in [\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+]$  et  $\tilde{x}^-$  (resp.  $\tilde{x}^+$ ) le point de l'orbite bien ordonnée positive de type  $(p, q)$ ,  $\tilde{\mathcal{O}}^+(x)$ , tel que  $]\tilde{x}^-, \tilde{c}'_0[ \cap \tilde{\mathcal{O}}^+(x) = \emptyset$  (resp.  $]\tilde{c}_0 + 1, \tilde{x}^+ [ \cap \tilde{\mathcal{O}}^+(x) = \emptyset$ ).

- Si pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, les itérés de l'intervalle  $]x^-, x^- + \varepsilon[$  ne rencontrent pas  $c'_0$ , alors  $\omega < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ . En effet, il existe alors un intervalle de la forme  $]x^-, y[$

périodique et contenu dans la partie croissante de  $f_{a,\omega}$ . L'orbite de  $y$  est alors attractive à droite et de type  $(p, q)$  et comme dans la démonstration de la proposition 2.3.2, ceci entraîne  $\rho^+(f_{a,\omega}) = \frac{p}{q}$ .

- Sinon, il existe un entier  $k > 0$  et un intervalle  $]x^-, x^- + \varepsilon[$  arbitrairement petit sur lequel  $f_{a,\omega}^{kq}$  est un homéomorphisme dont l'image contient l'intervalle  $]x^-, c'_0]$ .

Plaçons-nous dans le second cas. Si  $\tilde{f}_{a,\omega}(c'_0) = \tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x}^+)$ , l'orbite de  $c'_0$  est une orbite homocline. Si de plus  $\omega < \omega_{\frac{p}{q}}^+$ , la bifurcation est transverse car

$$\frac{df_{a,\omega}(c'_0)}{d\omega} = 1$$

et puisque  $Df_{a,\omega}^q(x^+) > 1$  et  $Df_{a,\omega}(f_{a,\omega}^k(x^+)) > 0$ , pour  $0 \leq k < q$ ,

$$\begin{aligned} \frac{df_{a,\omega}(x^+)}{d\omega} &= -[Df_{a,\omega}^q(\tilde{x}^+) - 1]^{-1} \sum_{k=0}^{q-1} Df_{a,\omega}^k(f_{a,\omega}^{q-k}(x^+)) \frac{df_{a,\omega}(f_{a,\omega}^{q-k-1}(x^+))}{d\omega} \\ &= -[Df_{a,\omega}^q(\tilde{x}^+) - 1]^{-1} \sum_{k=0}^{q-1} Df_{a,\omega}^k(f_{a,\omega}^{q-k}(x^+)) \leq 0. \end{aligned}$$

On en déduit la discussion suivante :

**Proposition 2.3.7** • On a  $\omega > \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$  si et seulement si l'orbite  $\mathcal{O}^+(x)$  n'est pas une orbite de  $f_{a,\omega}^{(1)}$ , soit :

$$\tilde{f}_{a,\omega}(c'_0) > \tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x}^+).$$

- Pour  $\omega = \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ ,  $\tilde{f}_{a,\omega}(c'_0) = \tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x}^+)$  et  $m_2^{(1)} = x^+$ .
- Pour  $\omega < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ , l'orbite  $\mathcal{O}^+(x)$  est une orbite de  $f_{a,\omega}^{(1)}$ . D'après la transversalité, on a donc  $\tilde{f}_{a,\omega}(c'_0) < \tilde{f}_{a,\omega}(\tilde{x}^+)$ .

On peut caractériser de la même façon  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+$ .



## Deuxième partie

**Nombre de rotation presque  
sûr des endomorphismes du  
cercle affines par morceaux**





## Chapitre 3

# Nombre de rotation presque sûr

Nous définissons dans ce chapitre le nombre de rotation presque sûr pour certaines familles d'endomorphismes du cercle. Nous montrons qu'il peut s'appliquer à l'étude de deux familles particulières : la famille d'Arnol'd et une famille plus simple, la famille affine par morceaux.

### 3.1 Introduction

Nous poursuivons notre étude des endomorphismes du cercle de degré un : on considère une application continue  $\tilde{f}$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même, en général non-inversible, vérifiant pour tout  $x$

$$\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1.$$

Par passage au quotient sur  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , on obtient une application  $f$  du cercle dans lui-même. On rappelle que l'on note  $\mathcal{R}(\tilde{f})$  l'intervalle de rotation de  $\tilde{f}$ .

Comme cas particulier, nous avons défini pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  la translation  $\tilde{r}_\omega$  :

$$\tilde{r}_\omega(x) = x + \omega$$

et la rotation associée  $r_\omega$ .

Nous étudions ici le cas où  $f$  possède une mesure  $\mu$  ergodique absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont le support est  $\mathbb{T}^1$  entier et dont l'exposant de Lyapounov est strictement positif. Il résulte de [Led1] que cette mesure est unique et pour Lebesgue-presque tout point  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\tilde{f}^n(x) - x}{n}$  converge lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini vers un unique nombre  $\rho \in \mathcal{R}(\tilde{f})$ , égal à

$$\rho = \int_{[0,1[} (\tilde{f} - \text{Id}) \, d\mu. \quad (3.1)$$

C'est le **nombre de rotation presque sûr** ou "physique" de  $f$ .

Par analogie avec les travaux de V. Arnol'd, M. Herman, G. Świątek, M. Tsujii, J Graczyk... (voir les sections 1.3 et 1.4.1.3, ainsi que [Ar, He77, He79, Św88, Ts92, Gr93, GrŚw]), nous nous intéressons à des arcs d'endomorphismes de la forme

$$\tilde{f}_\omega = \tilde{r}_\omega \circ \tilde{f}$$

vérifiant la propriété suivante :

- (P) *Pour un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue strictement positive,  $\Omega$ , les applications  $f_\omega$  avec  $\omega \in \Omega$  possèdent une mesure  $\mu_\omega$  ergodique invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, supportée par le cercle  $\mathbb{T}$  entier et dont l'exposant de Lyapounov est strictement positif.*

Le problème qui apparaît naturellement est de comprendre l'application qui à  $\omega \in \Omega$  associe le nombre de rotation presque sûr  $\rho_\omega$  de  $\tilde{f}_\omega$ . Nous cherchons en quelque sorte à faire une étude statistique du nombre de rotation. Plus précisément :

1. Quelle est la régularité de l'application  $\omega \mapsto \rho(\tilde{f}_\omega)$ ?
2. Le nombre de rotation presque sûr  $\rho(\tilde{f}_\omega)$  est-il irrationnel pour un sous-ensemble de paramètres  $\Omega' \subset \Omega$  de mesure strictement positive?

### 3.2 Le cas d'une famille lisse : la famille d'Arnol'd

Nous montrons que les problèmes précédents sont pertinents pour des classes d'endomorphismes assez larges : nous donnons une méthode pour prouver que la propriété (P) est satisfaite par toute famille lisse générique comme la famille d'Arnol'd. Ceci nous sera également utile pour montrer l'existence d'attracteurs étranges globaux au sein de la famille d'Arnol'd épaissie (voir la section 9.4.5).

La famille d'Arnol'd est définie par :

$$\tilde{f}_{\alpha,\omega}(x) = x + \alpha \sin(2\pi x) + \omega.$$

On rappelle le résultat de M. Tsujii dans [Ts93] qui généralise celui de M. Jakobson [J] (voir aussi [WY]) : soit  $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$  une famille  $C^2$  d'applications multimodales du cercle telles que

1. Les points critiques de  $g_0$  sont non-dégénérés (i. e. quadratiques). On note leur ensemble  $\mathcal{C}(g_t)$  pour tout  $t$ .
2. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in \mathbb{T}^1$  tel que  $Dg_t(x) \neq 0$ ,  $Sg_t(x) < 0$  (voir la définition 1.1).
3. Les points périodiques de  $g_0$  sont hyperboliques répulsifs.
4. Les points critiques de  $g_0$  sont prépériodiques.
5. D'après la propriété 4, pour tout  $c \in \mathcal{C}(g_0)$ ,  $g_0(c)$  coïncide avec une préimage  $p$  d'un point périodique hyperbolique. Soient  $c(t)$  et  $p(t)$  les continuations de  $c$  et  $p$ . On demande à  $(g_t)$  de satisfaire la condition de transversalité :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} g_t(c(t)) \neq \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} p(t).$$

Alors, il existe un ensemble de paramètres  $E \subset \mathbb{R}$  de mesure positive (de densité 1 en 0), et des constantes  $C > 0$  et  $0 < \kappa < 1 < \kappa'$  tels que

$$i. \forall t \in E, \forall c \in \mathcal{C}(g_t), \forall n \in \mathbb{N}, \quad |Dg_t^n(g_t(c))| > C^{-1} \exp(\kappa n).$$

- ii. Pour  $t \in E$ , les points périodiques de  $g_t$  sont hyperboliques répulsifs.
- iii.  $\forall t \in E, \forall c \in \mathcal{C}(g_t), \forall n \in \mathbb{N}, \quad d(g_t^n(c), \mathcal{C}(g_t)) > C^{-1} \exp(-\kappa'n)$ .

(Les conclusions (ii) et (iii) sont des conséquences directes du (i)).

En pratique ce théorème permet de construire de gros ensembles de paramètres vérifiant ces conditions, mais l'hypothèse de transversalité n'est pas facile à montrer. Elle est toujours vérifiée par la famille quadratique (voir [Ts00]) et on peut espérer qu'il en est de même pour d'autres familles rigides comme la famille d'Arnol'd. Pour ne pas entrer dans ce problème, nous montrons qu'elle est satisfaite dans certains cas particuliers :

**Lemme 3.2.1** *Soit  $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$  une famille lisse d'applications multimodales satisfaisant les conditions 1), 3) et 4) qui vérifie la propriété :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \tilde{g}_t(x) \neq 0.$$

*Supposons que pour  $g_0 = g$ , les orbites des points critiques restent dans les intervalles de croissance de  $g$ . Alors, la condition de transversalité 5) est satisfaite.*

*Démonstration :* Nous supposons sans perdre en généralité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \tilde{g}_t(x) > 0.$$

Soit  $c \in \mathcal{C}(g)$  un point critique et  $p$  un point prépériodique: on note  $p_k = g^k(p)$  pour  $k \in \mathbb{N}$  et on suppose que  $p_{n+q} = p_n$ ,  $(n, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ . Les points  $c$  et  $p$  peuvent localement être suivis continûment lorsque  $t$  varie. On fait ici l'hypothèse que  $g_0(c) = p$  et  $\forall k \in \mathbb{N}, Dg_0(p_k) > 0$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} p_{n+q}(t) &= \frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} (p_{n+q-1}) + Dg_t(p_{n+q-1}) \frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} (p_{n+q-2}) + \dots \\ &\quad + Dg_t^{q-1}(p_{n+1}) \frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} (p_n) + Dg_t^q(p_n) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} p_n(t). \end{aligned}$$

Donc

$$(1 - Dg_t^q(p_n)) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} p_n(t) = \frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} (p_{n+q-1}) + \dots + Dg_t^{q-1}(p_{n+1}) \frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} (p_n).$$

Et puisque  $Dg_t^q(p_n) > 1$  ( $p_n$  est une orbite périodique répulsive),

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} p_n(t) < 0.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} p_n(t) &= \frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} (p_{n-1}) + Dg_t(p_{n-1}) \frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} (p_{n-2}) + \dots \\ &\quad + Dg_t^{n-1}(p_1) \frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} \Big|_{t=0} (p) + Dg_t^n(p) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} p(t). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} p(t) < 0.$$

Or par hypothèse,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} g_t(c(t)) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} g_t(c(0)) > 0$$

ce qui prouve le lemme. □

Pour appliquer ce résultat, il suffit donc de perturber une application  $f_{\alpha, \omega_0}$  dont les valeurs critiques sont des orbites périodiques bien ordonnées positives (voir la section 2.2). Nous allons voir qu'avec une hypothèse supplémentaire sur  $f_{\alpha, \omega_0}$ , l'application  $f_{\alpha, \omega}$  admet une unique mesure de probabilité invariante ergodique absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et supportée par le cercle entier.

La construction des mesures absolument continues pour les paramètres de  $E$  est classique (voir par exemple [You]). Nous rappelons des ingrédients de la preuve qui nous seront utiles pour montrer la propriété (P) (voir [MS, BC1]) :

**Lemme 3.2.2 (Misiurewicz)** *Il existe des constantes  $K_1 > 0$  et  $\lambda_1 > 1$  telles que pour tout  $t$  proche de 0, tout  $\delta > 0$  suffisamment petit, tout  $x \in \mathbb{T}^1$ , et tout entier  $n \geq 1$ , si*

$$x, g_t(x), \dots, g_t^{n-1}(x) \notin B(\mathcal{C}(g_t), \delta) \text{ et } g_t^n(x) \in B(\mathcal{C}(g_t), \delta),$$

alors,

$$Dg_t^n(x) > K_1 \lambda_1^n.$$

Pour  $t$  proche de 0,  $\mathcal{C}(g_t)$  est la continuation de  $\mathcal{C}(g_0)$ . On introduit alors autour de chaque point critique  $c(r) \in \mathcal{C}(g_t)$  et pour chaque entier  $k$  suffisamment grand les intervalles

$$J(-k, r) = [c(r) - 2^{-k}, c(r) - 2^{-(k+1)}[, \\ \text{et } J(k, r) = ]c(r) + 2^{-(k+1)}, c(r) + 2^{-k}].$$

**Lemme 3.2.3 (Benedicks-Carleson)** *Il existe des constantes  $k_0 \geq 1$  et  $\lambda_2 > 1$  et pour tout  $t \in E$  proche de 0 une fonction*

$$p : \bigcup_r [c(r) - 2^{-k_0}, c(r) + 2^{-k_0}] \rightarrow \mathbb{N}$$

constante sur chaque intervalle  $J(k, r)$ ,  $|k| \geq k_0$ , telles que

$$\text{pour } x \in J(k, r), \quad \frac{|k|}{2} \leq p(x) \leq 2|k|, \text{ et } |Dg_t^{p(x)}(x)| \geq \lambda_2^{p(x)}.$$

On énonce finalement :

**Théorème 3.2.4 (Jakobson)** *Pour tout  $t \in E$  l'application  $g_t$  admet au moins une mesure de probabilité  $\mu$  invariante ergodique et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, son exposant de Lyapounov est strictement positif: pour  $\mu$ -presque tout point  $x \in \mathbb{T}^1$ ,*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(Dg_t^n(x)) > 0.$$

Comme corollaire d'un travail de F. Ledrappier (voir [Led1, Ts93]), son support est une union finie d'intervalles fermés non triviaux et l'un d'entre eux contient un point critique dans son intérieur.

Nous en déduisons le résultat annoncé :

**Proposition 3.2.5** *Il existe un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive de paramètres  $\alpha$ , tels que les familles d'Arnol'd  $(f_{\alpha,\omega})_{\omega \in \mathbb{R}}$  aient la propriété (P).*

*Démonstration :* Le théorème 3.2.4 donne l'existence de la mesure. Il reste à étudier son support :

- Nous fixons des paramètres initiaux  $(\alpha_0, \omega_0)$  avec  $\alpha_0 \gg 1$  de la façon suivante : pour  $\omega_0 = 0$ , le point  $y = 0$  est fixe de multiplicateur  $1 + 2\pi\alpha_0 > 2$ . D'autre part, les points critiques  $c_0$  et  $c'_0$  de  $f_{\alpha_0, \omega_0}$ , sont envoyés sur le point fixe  $y$ . Nous noterons  $y(\alpha, \omega)$  la continuation de  $y$ .

On considère l'ensemble  $E$  des paramètres qui vérifient les conclusions (i) à (iii) du théorème de Jakobson. Le théorème de Fubini montre que  $E$  est de mesure strictement positive et possède  $(\alpha_0, \omega_0)$  comme point de densité. On reprend les notations des lemmes 3.2.2 et 3.2.3.

Fixons une application  $f_{\alpha,\omega}$  avec  $(\alpha, \omega) \in E$  proche de  $(\alpha_0, \omega_0)$  et  $\mu$  une mesure donnée par le théorème 3.2.4. Nous considérons les intervalles  $[\frac{1}{16}, \frac{3}{16}]$ ,  $[\frac{-3}{16}, \frac{-1}{16}]$  à droite et à gauche de  $y(\alpha, \omega)$  dans  $\mathbb{T}^1 \setminus \{y, c_0, c'_0\}$ . On remarque que si  $\alpha_0$  est suffisamment grand les images des intervalles  $[\frac{1}{16}, \frac{3}{16}]$ ,  $[\frac{-3}{16}, \frac{-1}{16}]$  recouvrent le cercle.

- Le support  $F$  de  $\mu$  est une réunion finie d'intervalles compacts et doit contenir  $c_0$  ou  $c'_0$ . Si  $F$  contient  $c_0$  (resp.  $c'_0$ ), on note  $V$  (resp.  $V'$ ) la composante de  $F$  qui contient  $c_0$  (resp.  $c'_0$ ). Il existe  $k_1 \geq k_0$  tel que  $\lambda_2^{\frac{k_1}{2}} > 12K_1^{-1}$ . Nous montrons par l'absurde que l'une des composantes  $V$  et  $V'$  existe et a un diamètre supérieur à  $2^{-(k_1+1)}$ .
- Supposons que chaque composante  $V$  ou  $V'$ , si elle existe, ait un diamètre inférieur à  $2^{-(k_1+1)}$ . Sans perdre en généralité, on considère la composante  $V$ . On note alors que par le lemme 3.2.3,  $p$  est bien définie sur  $V \setminus \{c_0\}$ .

Soit  $I$  un intervalle non trivial contenu dans  $V$ . Puisque  $|I| \leq 2^{-(k_1+1)}$ , il existe un intervalle  $J(k, r)$ ,  $k \geq k_1$  tel que

$$|I \cap J(k, r)| \geq \frac{1}{6}|I|.$$

D'après le lemme 3.2.3, il existe un itéré  $f_{\alpha,\omega}^p(I)$  de longueur minorée par

$$|f_{\alpha,\omega}^p(I)| \geq |f_{\alpha,\omega}^p(I \cap J(k, r))| > 12K_1^{-1} \frac{1}{6}|I| > 2K_1^{-1}|I|.$$

Si  $l+p \geq p$  est le premier temps tel que  $f^{l+p}(I)$  rencontre une composante  $V$  ou  $V'$ , alors par définition de  $F$ ,  $f^{l+p}(I)$  est contenu dans  $V$  ou  $V'$  et le lemme 3.2.2 implique

$$|f_{\alpha,\omega}^{p+l}(I)| > 2|I|.$$

On obtient une contradiction si l'on applique ce résultat à  $I = V$  puis éventuellement à  $I = V'$ .

On a donc montré que l'une des composantes  $V$  et  $V'$  existe et a un diamètre minoré uniformément en  $\omega$ .

- Si  $(\alpha, \omega)$  est suffisamment proche de  $(\alpha_0, \omega_0)$ , les valeurs critiques  $c_1(\alpha, \omega)$  et  $c'_1(\alpha, \omega)$  sont proches du point fixe  $y(\alpha, \omega)$ . Supposons par exemple que  $V$  est définie. L'intervalle  $f_{\alpha, \omega}(V)$  rencontre donc son image. Ainsi  $\cup_{n \geq 1} f_{\alpha, \omega}^n(V)$  est connexe et coïncide avec le support de  $\mu$ . Par construction il contient l'un des intervalles  $[\frac{1}{16}, \frac{3}{16}]$ ,  $[\frac{-3}{16}, \frac{-1}{16}]$  et doit donc recouvrir tout le cercle.

On termine la démonstration en rappelant que  $(\alpha_0, \omega_0)$  est un point de densité de  $E$ .

□

Pour comprendre comment varie le nombre de rotation presque sûr, on peut dans un premier temps chercher des propriétés de continuité de la mesure absolument continue (sur l'ensemble  $E$ ). Nous renvoyons aux résultats partiels de [Ts96, Th, RS].

### 3.3 Un modèle simplifié : la famille affine par morceaux

Nous avons vu que l'étude du nombre de rotation presque sûr s'applique à la famille d'Arnol'd. Cependant, la mesure absolument continue est construite de façon indirecte comme mesure invariante d'une application induite dilatante. Pour simplifier notre étude nous nous limitons aux applications dilatantes et plus précisément à la classe des applications affines par morceaux :

Pour  $\lambda \geq 1$  et  $\omega \in \mathbb{R}$  on définit  $\tilde{f}_{\lambda, \omega}$  vérifiant :

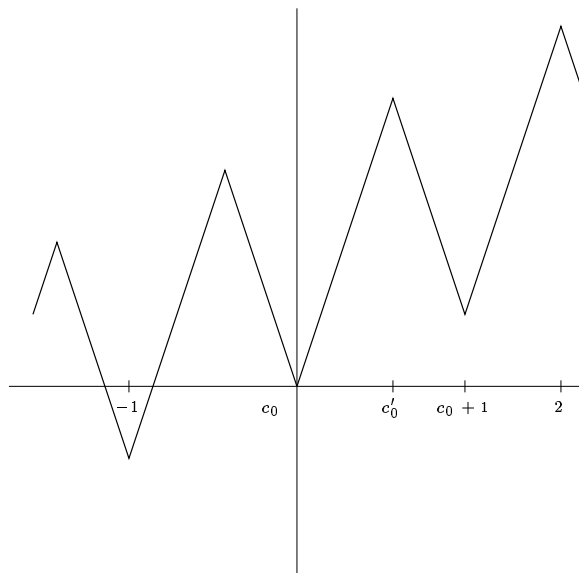
1. Pour  $x \in [0, \frac{1+\lambda}{2\lambda}[$ ,  $\tilde{f}_{\lambda, \omega}(x) = \lambda x + \omega$ ,
2. Pour  $x \in [\frac{1-\lambda}{2\lambda}, 0[$ ,  $\tilde{f}_{\lambda, \omega}(x) = -\lambda x + \omega$ ,
3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{f}_{\lambda, \omega}(x+1) = \tilde{f}_{\lambda, \omega}(x) + 1$ .

Les points  $c_0 = \pi_0(0)$  et  $c'_0 = \pi_0(\frac{1+\lambda}{2\lambda})$  jouent maintenant le rôle des **points critiques** (voir figure 3.1).

Remarquons que l'étude d'applications affines par morceaux sur le cercle et de leur nombre de rotation a déjà été menée par M. Herman, E. Ghys et V. Sergiescu (voir [He79, GhSe]) mais dans le cas d'homéomorphismes uniquement. On sait également que tout endomorphisme bimodal du cercle est semi-conjugué à l'une des applications  $f_{\lambda, \omega}$  (voir [MiTh, ALM]).

D'autre part, les applications affines par morceaux dilatantes sont bien connues en théorie ergodique puisque l'on sait ([LaY, LiY]) qu'elles admettent des mesures absolument continues invariantes ergodiques dont le support est une union finie d'intervalles (voir aussi [Led1, Ts93]) et dont l'union des bassins est de mesure de Lebesgue totale.

Dans le cas de la famille  $(f_{\lambda, \omega})$ , lorsque la pente  $\lambda$  est strictement plus grande que 2, on remarque que pour tout sous-intervalle  $I \subset \mathbb{T}$  non trivial,  $|f_{\lambda, \omega}(I)| > |I|$  sauf si  $I$  contient les deux points critiques. Il y a donc exactement une mesure de probabilité invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Lorsque la


 FIG. 3.1: Graphe de l'application  $\tilde{x} \mapsto \tilde{f}_{\lambda,\omega}(\tilde{x})$ .

pente est strictement plus grande que 3, la relation  $|f_{\lambda,\omega}(I)| > |I|$  est vérifiée pour tout sous-intervalle non trivial et le support de la mesure est  $\mathbb{T}$  tout entier :

**Lemme 3.3.1** *Pour  $\lambda_0 \geq 2$ , les applications  $f_{\lambda_0,\omega}$  possèdent une unique mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

*Pour  $\lambda_0 \geq 3$ , la famille  $(f_{\lambda_0,\omega})$  vérifie la propriété (P) avec  $\Omega = \mathbb{R}$ .*

Le cas  $\lambda_0 = 3$  résulte de l'exemple suivant :

**Exemples 3.3.1** 1. Pour  $\lambda = 2n + 1$  avec  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on a

$$\tilde{f}_{\lambda,\omega} \left( \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \right) = \frac{\lambda + 1}{2} + \omega = n + 1 + \omega = \tilde{f}_{\lambda,\omega}(0) + n + 1.$$

On remarque ainsi que la mesure de Haar du cercle est invariante. On en déduit

$$\rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega}) = \frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda} + \omega,$$

et  $\rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega}) - \omega$  est constante en  $\omega$ .

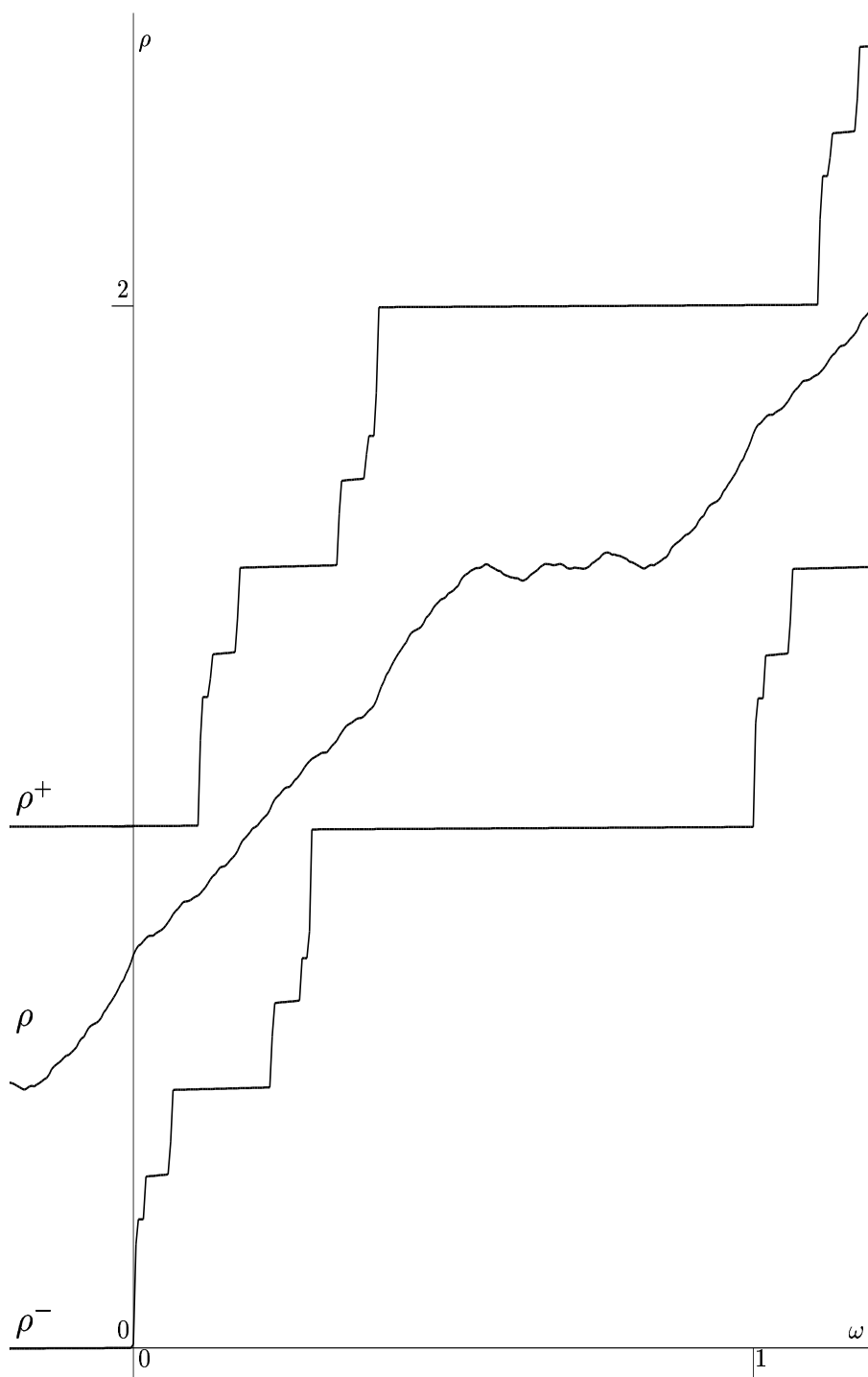
2. La figure 3.2 représente le graphe de  $\rho$  pour  $\lambda = 3.5$ . On a représenté également l'intervalle de rotation

$$\mathcal{R}(\tilde{f}_{\lambda,\omega}) = [\rho_{\omega}^-, \rho_{\omega}^+].$$

**Remarque 3.3.2** Il est facile de voir sur un exemple que  $\rho$  n'est pas croissante : l'application  $f_{\lambda,\omega}$  est markovienne lorsque  $\lambda$  est entier et  $\omega$  est de la forme  $m\lambda^{-n}$ , où  $n$  et  $m$  sont des entiers. C'est le cas par exemple pour  $\lambda = 4$  et  $\omega = \frac{10}{32}$ . La mesure  $\mu$  est constante sur chaque intervalle de la partition du cercle

$$c_0 < c'_2 < c_1 < c_2 = c_3 = c'_3 < c'_0 < c'_1 < c_0.$$



FIG. 3.2: Courbes de rotation  $\rho^-$ ,  $\rho$ , et  $\rho^+$  pour la pente  $\lambda = 3.5$ .

La densité de  $\mu$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur chaque intervalle est constante et respectivement égale à :

$$\frac{2}{6}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}.$$

Le nombre de rotation se calcule facilement et est égal à  $\frac{352}{256}$ .

Pour  $\omega = \frac{11}{32}$  la partition est

$$c_0 < c_4 = c_5 < c_1 < c_3 = c'_3 < c'_0 < c_2 < c'_1 < c'_2 < c_0$$

et la densité associée est

$$\frac{7}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{5}{32}, \frac{3}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}.$$

Le nombre de rotation est cette fois  $\frac{351}{256}$ .

Par la suite nous étudierons la régularité des applications  $\omega \mapsto \rho_\omega = \rho(\tilde{f}_{\lambda, \omega})$ . Elles sont toujours plus lisses que les applications  $\omega \mapsto \rho_\omega^-$  et  $\omega \mapsto \rho_\omega^+$ . En revanche les applications  $\rho^+$  et  $\rho^-$  ont la propriété d'être continues, croissantes, stationnaires aux valeurs rationnelles et ne prennent des valeurs irrationnelles en presque aucun  $\omega$ . On peut se poser la même question pour les applications  $\rho_\omega$  :

*Le nombre  $\rho$  est-il rationnel sur un ensemble de mesure totale ?*

Bien sûr la dichotomie entre les valeurs rationnelles et irrationnelles est moins justifiée (elle ne caractérise plus l'existence d'orbites périodiques) mais on souhaite comprendre comment sont réparties les valeurs de  $\rho$  :

*L'ensemble  $\rho^{-1}(R)$  est-il de mesure totale pour un ensemble  $R \subset \mathbb{R}$  dénombrable comme pour  $\rho^+$  et  $\rho^-$  ?*

## À propos de la figure 3.2

À partir de la formule (3.1), le calcul numérique de  $\rho$  est facile si l'on sait approcher la densité de la mesure absolument continue  $\mu$  par des fonctions  $h_n$  constantes par morceaux. On peut obtenir  $h_n$  en itérant l'opérateur de Perron-Frobenius  $\mathcal{L} : h_n = \mathcal{L}^n \cdot 1$  (voir le chapitre 4). La suite  $h_n$  converge exponentiellement vite vers la densité de  $\mu$  pour la norme de  $L^1$ . De plus, les fonctions  $h_n$  sont constantes par morceaux et le nombre d'intervalles à considérer ne croît que linéairement en  $n$ .



## Chapitre 4

# Stabilité des mesures

On étudie dans ce chapitre<sup>1</sup> les mesures invariantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue pour la famille d'applications affines par morceaux définie en section 3.3. On montre qu'elles dépendent continûment des paramètres ; on en déduit des propriétés de régularité de la fonction  $\rho$ .

### 4.1 Introduction

Les mesures que l'on décrit se mettent sous la forme

$$\mu = h \cdot m,$$

où  $m$  est la mesure de Haar du cercle et  $h$  une fonction positive de  $L^1(\mathbb{T}^1)$ . On sait que l'on peut obtenir  $h$  comme point fixe de l'opérateur de Perron-Frobenius  $\mathcal{L}$  sur  $L^1$ . Pour obtenir de bonnes propriétés sur  $\mu$ , on cherche usuellement à montrer une propriété de trou spectral pour l'opérateur qui isole la valeur propre 1. C'est la raison pour laquelle on se place en général sur un espace fonctionnel plus petit, stable par l'opérateur, par exemple l'espace des fonctions à variation bornée,  $BV(\mathbb{T}^1)$ .

Remarquons que dans le cas d'un système dynamique donné par une application affine par morceaux  $f$ , l'opérateur stabilise un espace plus petit qui est moralement l'espace des fonctions constantes par morceaux à discontinuités le long de l'ensemble post-critique. C'est du moins ce que l'on observe si l'on travaille avec une application markovienne. Dans ce cas, l'espace associé est de dimension finie. On observe également que l'opérateur n'est pas continu en  $f$  pour la norme de  $BV(\mathbb{T}^1)$ .

Ces deux remarques nous conduisent à considérer un opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$  qui agit sur un "espace symbolique"  $E(u)$ . L'espace  $E(u)$ , cette fois, ne dépend plus de  $f$  et s'envoie dans  $BV(\mathbb{T}^1)$  selon une application  $i$ . Les applications  $\widehat{\mathcal{L}}$  et  $i$  dépendent de  $f$  mais on a gagné des propriétés de continuité. Cette idée d'introduire un tel espace est inspirée de l'article de Tsujii [Ts00].

Nous introduisons l'espace  $E(u)$  et l'opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$  en section 4.2. En section 4.3, nous étudions les mesures absolument continues invariantes et montrons qu'elles dépendent continûment des paramètres. Nous améliorons ce résultat en section 4.4 : pour les normes de  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , la densité  $h$  est höldérienne en les paramètres pour tout exposant  $0 < \alpha < 1$ . En particulier ceci est également vrai pour les applications

---

1. Les résultats de ce chapitre ont été repris dans [Cr01b].

$\omega \mapsto \rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$ . Ceci entraîne que pour tout  $\lambda \geq 3$ , le nombre de rotation presque sûr  $\rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  est irrationnel pour un ensemble de paramètres  $\omega$  de dimension de Hausdorff égale à 1. Nous montrons en revanche que ces applications ne sont pas lipschitziennes en général.

## 4.2 L'espace symbolique

### 4.2.1 Définition de l'espace symbolique

**4.2.1.1** Si  $h$  est une application du cercle  $\mathbb{T}^1$  à valeurs réelles et si

$$\mathbb{T}^1 = [x_0, x_1[ \cup [x_1, x_2[ \cup \dots \cup [x_{r-1}, x_r[, \quad (x_r = x_0)$$

est une partition du cercle, la variation de  $h$  selon la subdivision  $(x_i)$  est la quantité :

$$V(h, (x_i)) = \sum_{i=0}^{r-1} |h(x_{i+1}) - h(x_i)|.$$

La variation de  $h$  est alors  $V(h) = \sup_{(x_i)} V(h, (x_i))$ . Les **applications à variation bornée** du cercle sont les applications  $h : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  continues à gauche et à variation  $V(h)$  finie. On définit la norme

$$\|h\|_{\text{BV}} = V(h) + \|h\|_{\infty}$$

qui fait de l'ensemble de applications à variation bornée  $\text{BV}(\mathbb{T}^1)$  un espace de Banach.

**4.2.1.2** Pour chaque application  $f_{\lambda,\omega}$ , nous noterons  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les orbites critiques et nous dirons que l'application  $f_{\lambda,\omega}$  possède une **collision d'ordre  $n \geq 1$**  si les ensembles  $\{c_n, c'_n\}$  et  $\{c_0, c'_0\}$  s'intersectent.

Pour la suite, on fixe une constante  $1 < u < \frac{\lambda}{2}$ . Notons  $E_1(u)$  le sous-espace de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$  formé des éléments  $(v, (s_n), (s'_n))$  tels que

$$\|(v, (s_n), (s'_n))\| = |v| + \sum_{n \geq 1} (|s_n| + |s'_n|)u^n < \infty.$$

Ceci définit une norme sur  $E_1(u)$  qui en fait un espace de Banach. L'**espace symbolique**  $E(u)$  est le noyau dans  $E_1(u)$  de la forme linéaire

$$(v, (s_n), (s'_n)) \mapsto \sum_{n \geq 1} (s_n + s'_n).$$

Les  $s_n$  et  $s'_n$  seront les sauts des discontinuités qui apparaissent en  $c_n$  et  $c'_n$ .

**4.2.1.3** Nous faisons maintenant l'hypothèse que

$$\forall n \geq 1, c_n, c'_n \notin \{c_0, c'_0\}. \quad (4.1)$$

On pose pour tout  $n \geq 1$

$$\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{si } c_0 < c_n < c'_0, \\ -1, & \text{si } c'_0 < c_n < c_0, \end{cases}$$

pour l'ordre cyclique. On définira de façon analogue les symboles  $(\eta'_n)$  associés à l'orbite de  $c'_0$ .

**4.2.1.4** On associe alors à  $(v, (s_n), (s'_n)) \in E(u)$  la fonction

$$[0, 1[ \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto v + \int_{[0, x[} \sum_{n \geq 1} (s_n \delta_{c_n} + s'_n \delta_{c'_n}), \quad (4.2)$$

où  $\delta_x$  désigne la mesure de Dirac en  $x$ . Elle définit par périodicité une application  $i(v, (s_n), (s'_n)) \in \text{BV}(\mathbb{T}^1)$  de norme majorée par

$$\|i(v, (s_n), (s'_n))\|_{\text{BV}} \leq |v| + 2 \sum_{n \geq 1} (|s_n| + |s'_n|).$$

Et  $i : E(u) \rightarrow \text{BV}(\mathbb{T}^1)$  est continue. Sa norme est inférieure à 2.

**Remarque 4.2.1** Quitte à quotienter par les fonctions constantes,  $\text{BV}(\mathbb{T}^1)$  est isomorphe à l'espace des mesures de Radon réelles sur  $\mathbb{T}^1$ . C'est en fait ce dernier espace qui apparaît dans la formule (4.2).

**4.2.1.5** En général  $i$  n'est pas injective, cependant :

**Proposition 4.2.1** *Si les  $c_n$  et  $c'_n$ ,  $n, n' \geq 1$  sont deux à deux distincts, l'application  $i$  est injective.*

*Démonstration :* On retrouve  $(v, (s_n), (s'_n))$  à partir de  $h = i(v, (s_n), (s'_n))$  en posant

$$v = h(c_0), \quad s_n = \lim_{(c_n)^+} h - \lim_{(c_n)^-} h, \quad \text{et} \quad s'_n = \lim_{(c'_n)^+} h - \lim_{(c'_n)^-} h.$$

□

**4.2.1.6** Dans le cas général où l'on ne suppose pas que la propriété (4.1) est satisfaite, nous considérons cette fois plusieurs applications  $i$  : lorsque  $c_n \in \{c_0, c'_0\}$  (resp.  $c'_n \in \{c_0, c'_0\}$ ), on doit choisir  $\eta_n \in \{-1, 1\}$  (resp.  $\eta'_n \in \{-1, 1\}$ ) pour définir ensuite

$$i(v, (s_n), (s'_n))(x) = v + \sum_{\substack{c_0 \leq c_n < x \\ (c_n \neq c_0) \text{ ou } (\eta_n = 1)}} s_n + \sum_{\substack{c_0 \leq c'_n < x \\ (c'_n \neq c_0) \text{ ou } (\eta'_n = 1)}} s'_n. \quad (4.3)$$

Autrement dit, on obtient  $i(v, (s_n), (s'_n))(x)$  à partir de  $i(v, (s_n), (s'_n))(c_0)$  en ajoutant les sauts situés entre  $c_0$  et  $x$  et on pense à  $v$  comme étant la "valeur symbolique" de  $h$  en  $c_0$ . La définition (4.3) coïncide avec la définition (4.2) lorsque l'hypothèse (4.1) est vérifiée.

**4.2.1.7** On définit également l'intégrale

$$I(v, (s_n), (s'_n)) = \int_{\mathbb{T}^1} i(v, (s_n), (s'_n)) \, dm$$

et pour tout  $x \in \mathbb{T}^1$ , les évaluations

$$e_x^-(v, (s_n), (s'_n)) = \lim_{x^-} i(v, (s_n), (s'_n)), \quad e_x^+(v, (s_n), (s'_n)) = \lim_{x^+} i(v, (s_n), (s'_n)),$$

qui sont des formes linéaires continues sur  $E(u)$ .

**Remarque 4.2.2** Il pourrait sembler plus naturel de représenter symboliquement les fonctions par un triplet  $(I, (s_n), (s'_n))$ , où  $I$  est l'intégrale de la fonction et  $(s_n)$  et  $(s'_n)$  les sauts. Pour expliciter l'opérateur de Perron-Frobenius, il sera cependant plus simple de travailler avec les triplets  $(v, (s_n), (s'_n))$ .

## 4.2.2 L'opérateur de Perron-Frobenius symbolique

**4.2.2.1** Nous rappelons que l'opérateur de Perron-Frobenius  $\mathcal{L}$  sur  $L^1(\mathbb{T}^1)$  associe à tout  $h \in L^1(\mathbb{T}^1)$  la fonction  $\mathcal{L}.h \in L^1(\mathbb{T}^1)$ , définie par :

$$\mathcal{L}.h(x) = \sum_{f(y)=x} \frac{h(y)}{|\mathbf{D}f(y)|}.$$

**4.2.2.2** Nous supposons à nouveau que l'hypothèse (4.1) est satisfaite. On peut considérer la forme linéaire

$$e_{c'_0}(v, (s_n), (s'_n)) = v + \sum_{\eta_n=1} s_n + \sum_{\eta'_n=1} s'_n. \quad (4.4)$$

On remarque que  $e_{c'_0} = e_{c'_0}^+ = e_{c'_0}^-$  et on notera parfois

$$v' = e_{c'_0}(v, (s_n), (s'_n)).$$

À chaque  $(v, (s_n), (s'_n)) \in E(u)$  on associe,

$$\widehat{\mathcal{L}}(v, (s_n), (s'_n)) = (w, (r_n), (r'_n))$$

tel que

$$r_1 = \frac{2v}{\lambda}, \quad r'_1 = \frac{-2v'}{\lambda}, \quad (4.5)$$

$$r_{n+1} = \frac{\eta_n s_n}{\lambda}, \quad r'_{n+1} = \frac{\eta'_n s'_n}{\lambda}, \quad \text{pour } n \geq 1, \quad (4.6)$$

$$w = \sum_{f(y)=c_0} \frac{e_y^-(v, (s_n), (s'_n))}{\lambda}. \quad (4.7)$$

Notons que l'on aurait pu tout aussi bien utiliser  $e_y^+$  dans l'expression de  $w$  car du fait de l'hypothèse (4.1),  $e_y^+ = e_y^-$  lorsque  $f(y) = c_0$ .

L'opérateur de Perron-Frobenius symbolique  $\widehat{\mathcal{L}}$  est continu sur  $E(u)$  et vérifie

$$i \circ \widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \circ i. \quad (4.8)$$

Il préserve donc la forme  $I$ .

**4.2.2.3** Dans le cas où la propriété (4.1) n'est plus satisfaite, nous considérerons plusieurs opérateurs : après avoir choisi  $(\eta_n)$  et  $(\eta'_n)$  comme en sections 4.2.1.3 et 4.2.1.6, nous définissons l'application  $i$  comme en 4.2.1.4 et 4.2.1.6 et la forme linéaire  $e_{c'_0}$  par la formule (4.4). La "valeur symbolique" de  $h$  en  $c'_0$  est alors  $v' = e_{c'_0}(v, (s_n), (s'_n))$ .

Les expressions des  $r_n$  et  $r'_n$ ,  $n \geq 1$  sont inchangées (formules (4.5) et (4.6)). Il reste à définir  $w$  dans l'expression (4.7) : nous calculons  $e_{c_0}^-(w, (r_n), (r'_n))$  :

$$e_{c_0}^-(w, (r_n), (r'_n)) = \sum_{\substack{f(y)=c_0 \\ c_0 < y \leq c'_0}} \frac{e_y^-(v, (s_n), (s'_n))}{\lambda} + \sum_{\substack{f(y)=c_0 \\ c'_0 \leq y < c_0}} \frac{e_y^+(v, (s_n), (s'_n))}{\lambda}.$$

On pose ensuite

$$w = e_{c_0}^-(w, (r_n), (r'_n)) + \sum_{\substack{c_n=c_0 \\ \eta_n=-1}} r_n + \sum_{\substack{c'_n=c_0 \\ \eta'_n=-1}} r'_n.$$

Dans ce cas encore, l'opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$  est continu et vérifie (4.8). Il généralise la définition donnée en 4.2.2.2.

**4.2.2.4** Ayant fixé un choix de suites  $(\eta_n)$  et  $(\eta'_n)$ , nous utiliserons parfois la norme équivalente sur  $E(u)$  :

$$\|(v, (s_n), (s'_n))\|' = 2(|v| + |v'|) + \sum_{n \geq 1} (|s_n| + |s'_n|) u^n.$$

**Remarques 4.2.3** 1. La relation (4.8) montre que le noyau de  $i$  est préservé par l'opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$ .

2. Les coefficients qui apparaissent dans l'écriture de  $\widehat{\mathcal{L}}$  sont tous dans  $\frac{1}{\lambda} \mathbb{Z}$ . Si l'on écrit que  $I$  est préservée par  $\widehat{\mathcal{L}}$ ,  $w$  s'exprime également sous la forme

$$w = \int_{\mathbb{T}^1} i(v, (s_n), (s'_n)) \, dm - \int_{\mathbb{T}^1} i(0, (s_n), (s'_n)) \, dm.$$

3. À des choix différents de symboles  $(\eta_n)$ ,  $(\eta'_n)$  sont associés différentes applications  $i$  et différents opérateurs  $\widehat{\mathcal{L}}$ . Cependant, nous verrons (lemme 4.4.4) que certains de ces choix sont meilleurs que d'autres.

## 4.3 Les mesures invariantes

### 4.3.1 Existence

Dans cette section on considère une application  $f$ , l'espace symbolique associé,  $E(u)$ , un choix d'application  $i : E(u) \rightarrow \text{BV}(\mathbb{T}^1)$  et un opérateur de Perron-Frobenius symbolique,  $\widehat{\mathcal{L}}$ , sur  $E(u)$ . On montre une propriété de trou spectral pour  $\widehat{\mathcal{L}}$ . On utilisera la notation  $h^- = -\inf(h, 0)$  et  $h^+ = \sup(h, 0)$  pour toute fonction  $h : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Lemme 4.3.1** *Le rayon spectral de l'opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$  en restriction au noyau de  $i$  est strictement inférieur à 1.*



*Démonstration* : En posant  $(w, (r_n), (r'_n)) = \widehat{\mathcal{L}}(v, (s_n), (s'_n))$ , on obtient pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} |r_1| &= \frac{2|v|}{\lambda}, & |r'_1| &= \frac{2|v'|}{\lambda}, \\ |r_{n+1}| &= \frac{|s_n|}{\lambda}, & |r'_{n+1}| &= \frac{|s'_n|}{\lambda}. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n \geq 1} (|r_n| + |r'_n|)u^n \leq \frac{u}{\lambda} \sum_{n \geq 1} (|s_n| + |s'_n|)u^n + 2 \frac{|v| + |v'|}{\lambda} \leq \frac{u}{\lambda} \|(v, (s_n), (s'_n))\|'.$$

Par hypothèse, pour tout vecteur  $(v, (s_n), (s'_n))$  dans le noyau de  $i$ , pour tout  $y \in \mathbb{T}^1$ ,  $e_y^-(v, (s_n), (s'_n)) = e_y^+(v, (s_n), (s'_n)) = 0$  donc

$$\sum_{c_n=y} s_n + \sum_{c'_n=y} s'_n = 0.$$

En  $c_0$  (resp.  $c'_0$ ), on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{c_n=c_0 \\ \eta_n=-1}} r_n + \sum_{\substack{c'_n=c_0 \\ \eta'_n=-1}} r'_n &= w = - \sum_{\substack{c_n=c_0 \\ \eta_n=1}} r_n - \sum_{\substack{c'_n=c_0 \\ \eta'_n=1}} r'_n, \\ \text{(resp. } \sum_{\substack{c_n=c'_0 \\ \eta_n=1}} r_n + \sum_{\substack{c'_n=c'_0 \\ \eta'_n=1}} r'_n &= w = - \sum_{\substack{c_n=c'_0 \\ \eta_n=-1}} r_n - \sum_{\substack{c'_n=c'_0 \\ \eta'_n=-1}} r'_n). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$2(|w| + |w'|) \leq \sum_{n \geq 1} (|r_n| + |r'_n|) \leq \frac{u}{\lambda} \|(v, (s_n), (s'_n))\|'.$$

On en déduit donc

$$\|(w, (r_n), (r'_n))\|' \leq \frac{2u}{\lambda} \|(v, (s_n), (s'_n))\|'.$$

On conclut grâce à l'inégalité  $2u < \lambda$ .

□

**Proposition 4.3.2** *Le spectre de  $\widehat{\mathcal{L}}$  contient 1 comme valeur propre simple isolée. Le reste du spectre est contenu dans un disque centré en 0 de rayon strictement inférieur à un.*

*Démonstration* :

- Soit  $\mathcal{P}$  la projection de  $E(u)$  dans lui-même définie par :

$$\mathcal{P}(v, (s_n), (s'_n)) = (v, (s_1, 0, \dots), (s'_1, 0, \dots)).$$

$\mathcal{P} \circ \widehat{\mathcal{L}}$  est un opérateur de rang fini et  $\widehat{\mathcal{L}} - \mathcal{P} \circ \widehat{\mathcal{L}}$  a une norme majorée par  $\frac{u}{\lambda} < 1$ . On sait alors (voir [DS] lemme VIII.8.2) que le spectre de  $\widehat{\mathcal{L}}$  hors du disque  $D(0, \frac{u}{\lambda})$  est constitué d'un nombre fini de valeurs propres de multiplicité finie.

- D'autre part, à tout vecteur propre  $(v, (s_n), (s'_n))$  associé à une valeur propre  $\nu$  pour  $\widehat{\mathcal{L}}$  correspond une fonction  $h = i(v, (s_n), (s'_n))$ .

Si  $h$  est non nulle, c'est donc un vecteur propre pour  $\mathcal{L}$  de valeur propre  $\nu$ . Puisque  $\mathcal{L}$  a une norme égale à 1 sur  $L^1$ , on en déduit que  $|\nu|$  est inférieur ou égal à 1.

Si  $h$  est nulle, le lemme 4.3.1 entraîne que  $|\nu| < 1$ . L'opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$  a donc un rayon spectral inférieur ou égal à 1.

- La suite  $(\widehat{h}_n) = (\frac{1}{n} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \widehat{\mathcal{L}}^k(1, (0), (0)))$  ne peut tendre vers 0 puisque la valeur le long de la suite de la forme linéaire  $I$  est constante, égale à 1. Or la somme  $E_p(u)$  des espaces propres associés aux valeurs propres de module 1 est de dimension finie. La suite  $(\widehat{h}_n)$  doit donc avoir des valeurs d'adhérence dans  $E_p(u)$ . Toute valeur d'adhérence est en fait un point fixe de  $\widehat{\mathcal{L}}$ . Donc  $\widehat{\mathcal{L}}$  possède la valeur propre 1.
- La valeur propre 1 est une valeur propre simple : on commence par remarquer qu'il n'y a pas dans  $BV(\mathbb{T}^1)$  plus d'une fonction réelle positive d'intégrale égale à 1, fixe par  $\mathcal{L}$ . En effet, nous avons vu en section 3.3 que  $f$  possède au plus une mesure de probabilité invariante, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. L'opérateur  $\mathcal{L}$  étant positif, tout point fixe  $h$  se décompose en fonctions positives fixes  $\text{Re}(h)^+$ ,  $\text{Re}(h)^-$ ,  $\text{Im}(h)^+$ ,  $\text{Im}(h)^-$  qui doivent être multiples les unes des autres.

Notons  $h_0$  la fonction réelle positive d'intégrale égale à 1. Si  $\widehat{\mathcal{L}}$  possédait un espace caractéristique associé à la valeur propre 1 de dimension strictement supérieure à 1, il existerait une fonction  $g$  telle que  $\mathcal{L}(g) - g = h_0$ . Ceci est impossible puisque  $\mathcal{L}$  préserve l'intégrale. Ceci montre que l'espace caractéristique associé à la valeur propre 1 pour  $\mathcal{L}$  est de dimension un. Il en est de même pour  $\widehat{\mathcal{L}}$  grâce au lemme 4.3.1.

- Il reste à voir que  $\widehat{\mathcal{L}}$  n'a pas d'autre valeur propre de module 1. D'après le lemme 4.3.1, il suffit de le voir pour  $\mathcal{L}$ . Mais c'est un résultat classique (voir [Sc] section V.4) dans ce cadre de voir que le spectre périphérique (i.e. contenu dans le cercle unité) est un sous-groupe fini de  $\mathbb{C}^*$ , qui est trivial lorsque la dynamique est topologiquement mélangeante. (La section 3.3 montre que c'est le cas lorsque  $\lambda \geq 3$ .)

□

**Remarques 4.3.1** 1. Au passage, nous avons redémontré l'existence de la mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. D'après la section 3.3, elle est ergodique et son support est  $\mathbb{T}^1$ .

2. Considérons un opérateur de Perron-Frobenius  $\widehat{\mathcal{L}}(0)$  et son point fixe normalisé  $(v(0), (s_n(0)), (s'_n(0)))$ . La proposition 4.3.2 entraîne que la suite  $(\widehat{\mathcal{L}}(0)^n \cdot (1, 0, 0))$  converge à vitesse exponentielle vers le point fixe : il existe  $0 < \tau < 1$  et  $C > 0$  tels que tout opérateur de Perron-Frobenius  $\widehat{\mathcal{L}}$  proche de  $\widehat{\mathcal{L}}(0)$ , ayant un point fixe normalisé  $(v, (s_n), (s'_n))$ , satisfait pour tout  $k$ ,

$$\|\widehat{\mathcal{L}}^k \cdot (1, 0, 0) - (v, (s_n), (s'_n))\| \leq C\tau^k.$$

### 4.3.2 Continuité

La proposition suivante exprime que le graphe de  $\widehat{\mathcal{L}}$  est fermé.

**Proposition 4.3.3** *Pour la norme des opérateurs, l'ensemble des opérateurs de Perron-Frobenius symboliques associés à une application  $f$  est compact. Sa dépendance en  $f$  est semi-continue supérieurement : si  $(f(l))$  est une suite d'applications convergeant vers  $f$  et  $(\widehat{\mathcal{L}}(l))$  une suite d'opérateurs de Perron-Frobenius associés, il existe une sous-suite qui converge vers un opérateur de Perron-Frobenius  $\widehat{\mathcal{L}}$  de  $f$ .*

*Démonstration* : La convergence uniforme de  $(f(l))$  vers  $f$  est équivalente à la convergence dans l'espace des paramètres de la suite associée,  $(\lambda(l), \omega(l))$  vers  $(\lambda, \omega)$ .

Considérons l'ensemble  $\mathcal{P}(\Lambda, \Omega)$  des triplets  $(\lambda, \omega, (\eta_n), (\eta'_n))$  tels que  $\lambda$  et  $\omega$  appartiennent à des ensembles compacts  $\Lambda$  et  $\Omega$  de  $]2, +\infty[$  et  $\mathbb{R}$  respectivement et tels que  $(\eta_n)$  et  $(\eta'_n)$  appartiennent à  $\{-1, +1\}^{\mathbb{N}^*}$  muni de la topologie produit et soient des suites de symboles admissibles pour l'application  $f_{\lambda, \omega}$ . L'ensemble  $\mathcal{P}(\Lambda, \Omega)$  est compact et l'application qui à  $(\lambda, \omega, (\eta_n), (\eta'_n)) \in \mathcal{P}(\Lambda, \Omega)$  associe l'opérateur  $\widehat{\mathcal{L}}$  est continue. □

**Corollaire 4.3.4** *Pour la topologie vague, la mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mu = h.m$  dépend continûment de  $f$ . Plus précisément, la densité  $h$  dépend continûment de  $f$  dans chaque espace  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .*

*Démonstration* : Soit  $(f(l))$  une suite d'applications tendant vers  $f$ ,  $(\mu(l)) = (h(l).m)$  la suite des mesures correspondantes et  $(i(l), \widehat{\mathcal{L}}(l))$  un choix d'opérateurs de Perron-Frobenius symboliques. On note  $(I(l))$  les formes d'intégration associées (voir 4.2.1.7). Quitte à extraire, on peut supposer que  $\widehat{\mathcal{L}}(l) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$  et  $I(l) \rightarrow I$ . La proposition 4.3.2 montre que si les triplets  $(v(l), (s_n(l)), (s'_n(l)))$  et  $(v, (s_n), (s'_n))$  normalisés par  $I(l)$  et  $I$  sont les vecteurs propres de  $\widehat{\mathcal{L}}(l)$  et  $\widehat{\mathcal{L}}$  associés à la valeur propre 1, on a :

$$(v(l), (s_n(l)), (s'_n(l))) \rightarrow (v, (s_n), (s'_n)).$$

Les coefficients  $s_n(l)$  et  $s'_n(l)$  vérifient des relations

$$\begin{aligned} |s_n(l)| &= \frac{2|v(l)|}{\lambda^n}, \\ |s'_n(l)| &= \frac{2|v'(l)|}{\lambda^n}. \end{aligned}$$

Il existe donc des constantes  $C > 0$  et  $\lambda_0 > 1$  telles que pour tout  $n \geq 1$  et tout  $l$ ,

$$|s_n(l)|, |s'_n(l)| < \frac{C}{\lambda_0^n}.$$

Fixons un entier  $N \geq 1$ . Si  $l$  est assez grand,  $\eta_1(l), \dots, \eta_N(l)$  et  $\eta'_1(l), \dots, \eta'_N(l)$  coïncident avec  $\eta_1, \dots, \eta_N$  et  $\eta'_1, \dots, \eta'_N$  respectivement. On en déduit

$$\begin{aligned} \int |h - h(l)| \, dm &\leq |v - v(l)| + \sum_{n=1}^N (|s_n| d(c_n, c_n(l)) + |s'_n| d(c'_n, c'_n(l))) \\ &\quad + \sum_{n=1}^N (|s_n - s_n(l)| + |s'_n - s'_n(l)|) + \frac{2C}{\lambda_0^N (\lambda_0 - 1)} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque  $N$  et  $l$  tendent vers  $+\infty$ . Par conséquent  $(h(l))$  converge vers  $h$  dans  $L^1$ . On procède de même dans chaque  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ .

□

**Remarques 4.3.2** 1. Bien sûr, la continuité est fautive sur  $L^\infty$  ou BV.

2. On pourrait envisager d'adapter cette démonstration aux applications affines par morceaux finalement dilatantes ayant un nombre fixé de points critiques. Ce résultat était déjà connu dans  $L^1$  (voir [Ga]). La démonstration utilisait les méthodes de V. Baladi et L.-S. Young [BY].

## 4.4 Régularité de $\rho$

### 4.4.1 Quelques estimées

#### 4.4.1.1 Vitesses des orbites critiques

**Lemme 4.4.1** Pour tout  $\lambda \geq 3$  et  $\omega$ , pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\frac{\lambda^n - 2\lambda^{n-1} + 1}{\lambda - 1} \leq \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c_n \right|, \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c'_n \right| \leq \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}.$$

*Démonstration* : Il suffit de remarquer que

$$\frac{\partial}{\partial \omega} c_0, \frac{\partial}{\partial \omega} c'_0 = 0$$

puis pour  $n \geq 0$ ,

$$\left| \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c_{n+1} \right| - \left| \lambda \frac{\partial}{\partial \omega} c_n \right| \right| = 1.$$

□

#### 4.4.1.2 Contrôle de la densité

**Lemme 4.4.2** Fixons un choix de  $(\lambda, \omega)$  et de symboles  $((\eta_n), (\eta'_n))$  admissibles. Si  $(v, (s_n), (s'_n))$  est le point fixe de  $\hat{\mathcal{L}}$  normalisé par  $I$ , et si  $v' = e_{c'_0}(v, (s_n), (s'_n))$ , alors

$$1 - \frac{2}{\lambda} \leq v, v' \leq 1 + \frac{3}{\lambda - 3}.$$

*Démonstration* : On rappelle les relations suivantes :

$$\begin{aligned} |s_n| &= \frac{2|v|}{\lambda^n} \\ |s'_n| &= \frac{2|v'|}{\lambda^n}. \end{aligned}$$

On a par définition de  $e_{c'_0}$  et de  $E(u)$

$$v' - v = \sum_{\eta_n=1} s_n + \sum_{\eta'_n=1} s'_n = - \sum_{\eta_n=-1} s_n - \sum_{\eta'_n=-1} s'_n$$

donc

$$|v - v'| \leq \frac{|v| + |v'|}{\lambda - 1}. \quad (4.9)$$

Ceci implique que  $v$  et  $v'$  sont de même signe. Puisque  $I(v, (s_n), (s'_n)) = 1$ ,  $v$  et  $v'$  sont positifs. On pose donc  $v^- = \min(v, v')$  et  $v^+ = \max(v, v')$ . On écrit (4.9) sous la forme :

$$(1 - \frac{2}{\lambda})v^+ \leq v^- \leq v^+. \quad (4.10)$$

Si l'on pose  $h = i(v, (s_n), (s'_n))$ , on obtient

$$2(\max(h) - v^-) \leq \sum_{n \geq 1} (|s_n| + |s'_n|) \leq 2 \frac{|v| + |v'|}{\lambda - 1}.$$

Par conséquent, utilisant  $\max(h) \geq 1$ ,

$$1 \leq \max(h) \leq \frac{\lambda v^-}{\lambda - 2}. \quad (4.11)$$

Puisque  $I(v, (s_n), (s'_n)) = 1$ , il existe un point en lequel  $h$  prend une valeur majorée par 1. On en déduit

$$(v^+ + v^- - 2) \leq \sum_{n \geq 1} (|s_n| + |s'_n|) \leq 2 \frac{v^+ + v^-}{\lambda - 1}.$$

Ceci implique avec (4.10),

$$2(1 - \frac{1}{\lambda})v^+ \leq v^+ + v^- \leq 2 \frac{\lambda - 1}{\lambda - 3}.$$

Ceci implique avec (4.11) le résultat cherché. □

#### 4.4.1.3 Estimée de convergence

Nous améliorons la proposition 4.3.2 en donnant une borne grossière mais explicite sur le trou spectral. Elle n'est d'ailleurs utile qu'avec de grandes valeurs de  $\lambda$ .

**Lemme 4.4.3** *Si l'on suppose  $\lambda \geq 3$  et  $1 < u < \min(2, \frac{\lambda}{2})$ , le spectre de  $\widehat{\mathcal{L}}$  non périphérique est contenu dans le disque  $D(0, \frac{4}{\lambda})$ .*

*Démonstration* : Notons  $E_0(u)$  le noyau de  $I$  dans  $E(u)$ . Puisque  $\widehat{\mathcal{L}}$  préserve  $E_0(u)$  et que les points fixes non nuls de  $\widehat{\mathcal{L}}$  ne sont pas dans  $E_0(u)$ , il suffit d'estimer le rayon spectral de  $\widehat{\mathcal{L}}$  en restriction à  $E_0(u)$ .

Notons  $S = (v, (s_n), (s'_n))$  un élément de  $E_0(u)$  et  $R = (w, (r_n), (r'_n))$  son image par  $\widehat{\mathcal{L}}$ . On a :

$$\sum_{n \geq 1} (|r_n| + |r'_n|)u^n \leq \frac{u}{\lambda} \|(v, (s_n), (s'_n))\|'.$$

Si  $w$  et  $w'$  sont de signes contraires,

$$2(|w| + |w'|) \leq \sum_{n \geq 1} (|r_n| + |r'_n|).$$

Sinon, on peut les supposer tout deux positifs. Puisque  $I(R) = 0$ , il existe au moins un point du cercle pour lequel  $h$  prend une valeur négative. Par conséquent,

$$|w| + |w'| \leq \sum_{n \geq 1} (|r_n| + |r'_n|).$$

On obtient dans tous les cas :

$$\|(w, (r_n), (r'_n))\|' \leq \frac{u+2}{\lambda} \|(v, (s_n), (s'_n))\|'.$$

On utilise ensuite  $u \leq 2$ .

□

#### 4.4.2 Régularité Hölder de $\rho$

Il y a des choix pour  $\widehat{\mathcal{L}}$  qui sont meilleurs que d'autres :

**Lemme 4.4.4** *Soient  $\lambda \geq 3$  et  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ . Il existe des opérateurs de Perron-Frobenius symboliques  $\widehat{\mathcal{L}}(\omega_0^+)$  et  $\widehat{\mathcal{L}}(\omega_0^-)$  pour  $f_{\lambda, \omega_0}$ , tels que*

- Pour toute suite croissante  $(\omega(l))$  convergeant vers  $\omega_0$  et toute suite d'opérateurs  $\widehat{\mathcal{L}}(l)$  associés à  $f_{\lambda_{\omega(l)}}$ ,

$$\widehat{\mathcal{L}}(l) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}(\omega_0^-).$$

- Pour toute suite décroissante  $(\omega(l))$  convergeant vers  $\omega_0$  et toute suite d'opérateurs  $\widehat{\mathcal{L}}(l)$  associés à  $f_{\lambda_{\omega(l)}}$ ,

$$\widehat{\mathcal{L}}(l) \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}(\omega_0^+).$$

*Démonstration :* D'après le lemme 4.4.1 et par récurrence, nous remarquons que pour tout  $n \geq 1$ , les paramètres  $\omega$  pour lesquels  $\{c_n, c'_n\}$  et  $\{c_0, c'_0\}$  s'intersectent est un ensemble discret. Il suit que pour  $\omega(l) \neq \omega_0$  suffisamment proche de  $\omega_0$ ,  $c_n$  et  $c'_n$  ne sont pas dans  $\{c_0, c'_0\}$ . Par conséquent, les limites à droite et à gauche en  $\omega_0$  de  $\widehat{\mathcal{L}}$  existent et définissent les opérateurs de Perron-Frobenius symboliques  $\widehat{\mathcal{L}}(\lambda, \omega_0^-)$  et  $\widehat{\mathcal{L}}(\lambda, \omega_0^+)$ .

□

Comme précédemment, nous notons  $h(f_{\lambda, \omega})$  la densité de l'application  $f_{\lambda, \omega}$ . Nous améliorons le corollaire 4.3.4 :

**Proposition 4.4.5** *Pour toute pente  $\lambda > 3$ , tout  $1 \leq p < \infty$  et tout  $0 < \alpha < 1$ , l'application  $\omega \mapsto h(f_{\lambda, \omega})$  à valeurs dans  $L^p$  est höldérienne d'exposant  $\alpha$ . Plus précisément elle admet un module de continuité  $\omega \mapsto C\omega |\log(\omega)|$ ,  $C > 0$ .*

*Démonstration* : La proposition 4.3.2 et la remarque 4.3.1.2 entraînent par compacité l'existence de constantes  $0 < \tau < 1$  et  $C > 0$  telles que pour tout  $\omega$ ,

$$\|\widehat{\mathcal{L}}^k(\lambda, \omega^+).(1, 0, 0) - (v, (s_n), (s'_n))(\lambda, \omega^+)\| \leq C\tau^k.$$

(On a une estimée analogue en  $\omega^-$ .)

Reprenons la démonstration du corollaire 4.3.4 : on approche les densités  $h$  par  $i \circ \widehat{\mathcal{L}}^k.(1, 0, 0)$ , on pose  $\widehat{\mathcal{L}}^k.(1, 0, 0) = (v(k), (s_n(k)), (s'_n(k)))$  et  $h_k = \mathcal{L}^k.1$ . Nous obtenons

$$\int |h(\omega_1) - h(\omega_2)| \leq \int |h_k(\omega_1) - h_k(\omega_2)| + 2C\tau^k.$$

On remarque toujours grâce au lemme 4.4.1 que l'intervalle  $[\omega_1, \omega_2[$  est partitionné en un nombre fini d'intervalles  $[\omega(i), \omega(i+1)[$  sur les intérieurs desquels il n'y a pas de collision d'ordre inférieur à  $k$  (voir la section 4.2.1.2). Il est alors facile de voir que  $\widehat{\mathcal{L}}^k(\omega).(1, 0, 0)$  ne dépend pas de  $\omega \in ]\omega(i), \omega(i+1)[$ . On en déduit pour chaque  $i$

$$\int |h_k(\omega(i)) - h_k(\omega(i+1))| \leq \sum_{n=1}^k (|s_n(k)| \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c_n \right| + |s'_n(k)| \left| \frac{\partial}{\partial \omega} c'_n \right|) |\omega(i) - \omega(i+1)|.$$

puis

$$\int |h(\omega_1) - h(\omega_2)| \leq \sum_{n=1}^k \frac{C}{\lambda^n} (|\frac{\partial}{\partial \omega} c_n| + |\frac{\partial}{\partial \omega} c'_n|) |\omega_1 - \omega_2| + 4C\tau^k.$$

Soit d'après le lemme 4.4.1 :

$$\int |h(\omega_1) - h(\omega_2)| \leq Ck|\omega_1 - \omega_2| + 4C\tau^k.$$

Si l'on a choisi  $k$  tel que  $\tau^{k+1} \leq \omega_1 - \omega_2 \leq \tau^k$ , on obtient

$$\int |h(\omega_1) - h(\omega_2)| \leq C|\omega_1 - \omega_2| |\log |\omega_1 - \omega_2||$$

pour une nouvelle constante  $C > 0$ . La démonstration est la même dans chaque espace  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ .

□

Pour étudier  $\rho$ , nous introduisons la fonction  $\phi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\phi(x) = \tilde{f}_{\lambda,0}(\tilde{x}) - \tilde{x}$ . Elle est définie à partir de la fonction  $\tilde{\phi}$ , 1-périodique sur  $\mathbb{R}$ ,  $\tilde{\phi}$  telle que :

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \begin{cases} (\lambda - 1)\tilde{x} & \text{si } 0 \leq \tilde{x} \leq \frac{\lambda+1}{2\lambda}, \\ (-\lambda - 1)\tilde{x} & \text{si } \frac{-\lambda+1}{2\lambda} \leq \tilde{x} \leq 0 \end{cases}$$

et ne dépend pas de  $\omega$ . On remarque que

$$\rho = \int (\phi + \omega)h \, dm,$$

et en appliquant ce qui précède dans  $L^1$ , on en déduit :

**Proposition 4.4.6** *Pour toute pente  $\lambda \geq 3$ , et tout  $0 < \alpha < 1$ , l'application  $\omega \mapsto \rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  est höldérienne d'exposant  $\alpha$ . Plus précisément elle admet un module de continuité  $\omega \mapsto C\omega |\log(\omega)|$ ,  $C > 0$ .*

Ceci nous permet de montrer

**Proposition 4.4.7** *Pour toute pente  $\lambda \geq 3$ , et toute partie  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue strictement positive, l'ensemble  $\Omega$  des paramètres  $\omega \in \mathbb{R}$  pour lesquels  $\rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega}) \in \mathcal{R}$  est de dimension de Hausdorff un. En particulier l'ensemble des valeurs de  $\omega$  pour lesquelles  $\rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  est irrationnel a dimension de Hausdorff un. Plus précisément, si  $\mathcal{R}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  de dimension de Hausdorff  $\beta$  pour  $0 < \beta \leq 1$ , l'ensemble des paramètres  $\omega \in \mathbb{R}$  pour lesquels  $\rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega}) \in \mathcal{R}$  a dimension de Hausdorff au moins  $\beta$ .*

*Démonstration :* Ceci résulte simplement du fait suivant : l'image d'un ensemble de dimension de Hausdorff  $\beta < 1$  par une application höldérienne d'exposant  $\alpha$  est de dimension de Hausdorff au plus  $\frac{\beta}{\alpha}$  (voir par exemple [Fal]). On utilise ensuite que  $\rho$  est surjective.

□

On rappelle que dans des cadres différents (voir [Gr91, GrŚw]), J. Graczyk et G. Świątek ont également montré une régularité Hölder pour leur application  $\rho$  (voir la section 1.3).

**Remarque 4.4.1** Nous allons voir que la fonction  $\omega \mapsto \rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  n'est en général pas lipschitzienne. Peut-on montrer cependant pour  $\rho$  des propriétés de régularité meilleures que celle d'être Hölder pour tout exposant  $\alpha < 1$  ?

Rappelons ainsi qu'une fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même est dans la classe Zygmund s'il existe  $C > 0$  tel que pour tous  $x \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ ,

$$|g(x + \varepsilon) + g(x - \varepsilon) - 2g(x)| \leq C\varepsilon.$$

C'est une classe plus large que les applications lipschitziennes. On constate d'après la proposition 4.4.6 que le module de continuité de  $\rho$  est celui d'une application Zygmund, ce qui nous incite à poser la question suivante :

*Les applications  $\omega \mapsto \rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  sont-elles dans la classe Zygmund ?*

### 4.4.3 $\rho$ n'est pas lipschitzienne

Nous avons vu que les fonctions  $\omega \mapsto \rho$  sont höldériennes pour tout exposant strictement plus petit que 1. Nous montrons ici qu'elles ne sont généralement pas lipschitziennes. Ce résultat sera amélioré ensuite au chapitre 5.

**Proposition 4.4.8** *Il existe des paramètres  $(\lambda, \omega_0)$  avec  $\lambda$  arbitrairement grand tels que les taux d'accroissement en  $\omega_0$  de l'application  $\omega \mapsto \rho(\lambda, \omega)$  ne soient pas bornés.*

*Démonstration :*

- Pour  $M$ , entier suffisamment grand, et  $8M \leq \lambda \leq 8M + 8$ , il existe  $c_0 \leq \tilde{p} \leq \tilde{q} \leq c'_0$  vérifiant

$$\tilde{f}_{\lambda,\omega}(\tilde{p}) = \tilde{p} + M \text{ et } \tilde{f}_{\lambda,\omega}(\tilde{q}) = \tilde{q} + 2M.$$

On en déduit que  $\tilde{p}$  et  $\tilde{q}$  sont respectivement proches de  $\frac{1}{8}$  et  $\frac{1}{4}$ . On choisit alors  $(\lambda, \omega_0)$  pour avoir

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\lambda,\omega_0}(0) &= \tilde{p}, \\ \tilde{f}_{\lambda,\omega_0}\left(\frac{\lambda+1}{2\lambda}\right) &= \tilde{q} + 4M. \end{aligned}$$



Et donc pour tout  $n \geq 1$ ,  $c_n = p$  et  $c'_n = q$  en  $(\lambda, \omega_0)$ . Nous noterons  $\rho(\omega) = \rho(f_{\lambda, \omega})$ .

- D'après le lemme 4.4.1, il existe une constante  $C_0 > 0$  indépendante de  $\lambda$  telle que pour tout entier  $N \geq 1$  et tout paramètre  $\omega$  avec

$$|\omega - \omega_0| \leq \frac{C_0}{\lambda^{N-1}}, \quad (4.12)$$

on obtienne pour tout  $1 \leq n \leq N$

$$\frac{3}{32} \leq c_n \leq \frac{5}{32} \text{ et } \frac{7}{32} \leq c'_n \leq \frac{9}{32}. \quad (4.13)$$

- Pour  $k \geq 1$ , nous posons  $h(k) = \mathcal{L}^k.1$ . On calcule une valeur approchée de  $\rho$  en posant

$$\rho(k) - \omega = \int_{\mathbb{T}^1} \phi h(k) \, dm.$$

(La fonction  $\phi$  a déjà été introduite pour démontrer la proposition 4.4.6.) Comme précédemment, nous notons

$$\widehat{\mathcal{L}}^k.(1, 0, 0) = (v(k), (s_n(k)), (s'_n(k)))$$

et

$$v'(k) = e_{c'_0}(v(k), (s_n(k)), (s'_n(k))).$$

D'après le lemme 4.4.2, pour  $\lambda$  grand et  $k > k_0(\lambda)$  suffisamment grand,  $v(k)$  et  $v'(k)$  sont arbitrairement proches de 1. On en déduit que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\lambda^n |s_n(k+n)|$  et  $\lambda^n |s'_n(k+n)|$  sont proches de 2. Les formules de récurrence

$$\begin{aligned} s_{n+1}(k+1) &= \frac{\eta_n s_n(k)}{\lambda}, \\ Dc_{n+1} &= \eta_n \lambda Dc_n + 1, \end{aligned}$$

montrent que pour tout  $k-n \geq k_0(\lambda)$ ,  $\lambda s_n(k) Dc_n$  et  $-\lambda s'_n(k) Dc'_n$  sont positifs et arbitrairement proches de 2 d'après le lemme 4.4.1 :

$$\frac{7}{4} \leq (\eta_n \lambda - 1) s_n(k) Dc_n, -(\eta'_n \lambda - 1) s'_n(k) Dc'_n \leq \frac{9}{4} \quad (4.14)$$

Il existe également une constante  $B > 0$  indépendante de  $\lambda$  qui donne pour tout  $n, k \geq 1$  une borne plus grossière :

$$(\lambda + 1) |s_n(k) Dc_n|, (\lambda + 1) |s'_n(k) Dc'_n| < B. \quad (4.15)$$

- Nous allons fixer deux entiers  $N, k \gg 1$  avec  $N < k - k_0(\lambda)$  et approcher les taux d'accroissement  $\frac{\rho(k)(\omega) - \rho(k)(\omega_0)}{\omega - \omega_0}$  pour  $\omega$  appartenant à

$$[\omega_0 - C_0 \lambda^{-(N-1)}, \omega_0 + C_0 \lambda^{-(N-1)}]. \quad (4.16)$$

Comme pour la démonstration de la proposition 4.4.5, l'intervalle (4.16) peut être partitionné en un nombre fini d'intervalles sur l'intérieur desquels il n'y a

pas de collision d'ordre inférieur ou égal à  $k$ . Sur un tel intervalle  $]\omega_i, \omega_{i+1}[$ ,  $\rho(k)$  est de la forme :

$$\rho(k)(\omega) = \rho(k)(\omega_i) + \sum_{n=1}^k \left( s_n(k)(c_n(\omega) - c_n(\omega_i))(\eta_n \lambda - 1) \frac{c_n(\omega) + c_n(\omega_i)}{2} + s'_n(k)(c'_n(\omega) - c'_n(\omega_i))(\eta'_n \lambda - 1) \frac{c'_n(\omega) + c'_n(\omega_i)}{2} \right),$$

avec la convention

$$\frac{1 - \lambda}{2\lambda} < c_n, c'_n \leq \frac{1 + \lambda}{2\lambda}.$$

Il est alors facile de voir que  $D\rho(k)$  est constante par morceaux sur l'intervalle (4.16) et de la forme :

$$D\rho(k) = \sum_{n=1}^k (s_n(k)(\eta_n \lambda - 1)c_n Dc_n + s'_n(k)(\eta'_n \lambda - 1)c'_n Dc'_n). \quad (4.17)$$

On déduit de (4.13), (4.14), (4.15) et de (4.17) l'estimation

$$D\rho(k) \geq \frac{1}{16}N - 2B(k - N) \leq -\frac{1}{16}k + 3B(k - N). \quad (4.18)$$

- D'après les sections 4.3.1 et 4.4.1.3, si  $\lambda$  est suffisamment grand, il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que pour  $\omega$  proche de  $\omega_0$  et pour tout  $k \geq 1$ ,

$$|\rho(k) - \rho(\omega)| \leq C_1 \left( \frac{4}{\lambda} \right)^k.$$

- On fixe une valeur de  $\omega$  et on définit  $N$  et  $k$  par :

$$\begin{aligned} C_0 \frac{1}{\lambda^N} < \omega \leq C_0 \frac{1}{\lambda^{N-1}}, \\ C_1 \left( \frac{4}{\lambda} \right)^{k+1} < \omega \leq C_1 \left( \frac{4}{\lambda} \right)^k. \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$k - N \leq \frac{\log 4}{\log \lambda} k + \frac{\log(C_1 C_0^{-1})}{\log \lambda}. \quad (4.19)$$

Puis en utilisant les formules (4.18) et (4.19),

$$\frac{\rho(\omega) - \rho(\omega_0)}{\omega - \omega_0} \leq \left( -\frac{1}{16} + 3B \frac{\log 4}{\log \lambda} \right) k + C.$$

pour une nouvelle constante  $C > 0$ .

- Finalement en ayant choisi  $\lambda$  suffisamment grand, on voit que les taux d'accroissement de  $\rho$  en  $(\lambda, \omega_0)$  ne sont pas majorés.

□

- Remarques 4.4.2**
1. La démonstration montre que le module de continuité de la proposition 4.4.6 est optimal.
  2. On peut montrer que les fonctions  $\rho(k)$  qui nous ont permis d'approcher  $\rho$  sont des fonctions spline d'ordre 2.
  3. Cette démonstration prouve à nouveau que  $\omega \mapsto \rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  n'est en général pas croissante.

## Chapitre 5

# Mesure de Lebesgue et nombre de rotation presque sûr

Nous appliquons des résultats que nous démontrerons au prochain chapitre et nous montrons que pour un ensemble de paramètres de mesure positive, le nombre de rotation presque sûr est irrationnel.

### 5.1 Introduction

Nous revenons à notre question initiale : comprendre comment se répartissent les valeurs du nombre de rotation presque sûr du point de vue de la mesure dans l'espace des paramètres. Par exemple :

*Le nombre de rotation  $\rho$  est-il irrationnel sur un ensemble de mesure strictement positive ?*

Nous donnons une réponse positive. Rappelons que dans [He77], la fonction  $\omega \mapsto \rho(\tilde{f}_\omega)$  est croissante et il suffisait de montrer qu'elle est absolument continue. Dans le but de compléter nos connaissances sur la régularité de  $\rho$  nous posons donc également la question suivante :

*Les applications  $\omega \mapsto \rho(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  sont-elles absolument continues ?*

Cette fois, la réponse est négative. Pour le montrer, nous approximons ces applications de façon plus directe qu'en 4.4.3 par des applications affines (section 5.2) puis nous utilisons des résultats qui ne seront démontrés qu'au prochain chapitre (section 5.3).

### 5.2 Calcul approché du nombre de rotation

#### 5.2.1 Notations

Nous avons défini au chapitre 3 pour chaque paramètre  $(\lambda, \omega)$  un endomorphisme du cercle de degré un  $f$ . Il possède deux orbites critiques  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Par ailleurs le cercle est divisé en deux intervalles de monotonie de  $f$ . Nous rappelons que

nous avons défini pour chaque entier  $n \geq 1$

$$\eta_n = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } c_n \text{ est dans l'intervalle de croissance de } f, \\ -1 & \text{lorsque } c_n \text{ est dans l'intervalle de décroissance de } f. \end{cases}$$

et de façon similaire  $\eta'_n$  selon la position de  $c'_n$ . Il y a parfois plusieurs choix possibles pour les suites  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\eta'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En revanche le lemme 4.4.4 montre que ces suites sont bien définies si l'on approche  $\omega$  à droite ou à gauche en fixant  $\lambda$ . Pour chaque paramètre  $(\lambda, \omega^-)$  ou  $(\lambda, \omega^+)$ , ceci détermine un unique opérateur symbolique  $\widehat{\mathcal{L}}$  possédant un unique point fixe  $\widehat{h} = (v, (s_n), (s'_n))$  normalisé par  $I$ . La mesure de probabilité invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mu = h.m$  est donnée par  $h = i(\widehat{h})$ .

On définit encore

$$v' = v + \sum_{\eta_n=1} s_n + \sum_{\eta'_n=1} s'_n = v - \sum_{\eta_n=-1} s_n - \sum_{\eta'_n=-1} s'_n. \quad (5.1)$$

Par le lemme 4.4.2,  $v$  et  $v'$  sont strictement positifs. Les  $s_i$  et  $s'_i$ ,  $i \geq 1$  sont réels et non nuls, on note  $\varepsilon_i$  et  $\varepsilon'_i$  leur signe.

On définit enfin "l'abscisse"  $l_i$  (resp.  $l'_i$ ) de  $c_i$  (resp.  $c'_i$ ) de la façon suivante :

- Lorsque  $\eta_i = 1$ ,  $l_i$  est le relevé de  $c_i$  dans  $[0, \frac{\lambda+1}{2\lambda}]$ .
- Lorsque  $\eta_i = -1$ ,  $l_i$  est le relevé de  $c_i$  dans  $[\frac{-\lambda+1}{2\lambda}, 0]$ .

## 5.2.2 Calcul du nombre de rotation

### 5.2.2.1 Invariance

L'invariance de  $\widehat{h}$  par  $\widehat{\mathcal{L}}$  entraîne

$$\varepsilon_{i+1} = \eta_i \varepsilon_i \text{ et } \varepsilon'_{i+1} = \eta'_i \varepsilon'_i, \text{ avec } \varepsilon_1 = 1 \text{ et } \varepsilon'_1 = -1,$$

$$s_i = \frac{2v\varepsilon_i}{\lambda^i}, \text{ et } s'_i = \frac{2v'\varepsilon'_i}{\lambda^i}, \quad i \geq 1.$$

On obtient avec (5.1)

$$v(1 + \sum_{\eta_i=1} \frac{2\varepsilon_i}{\lambda^i}) = v'(1 - \sum_{\eta'_i=1} \frac{2\varepsilon'_i}{\lambda^i}), \quad (5.2)$$

$$v(1 - \sum_{\eta_i=-1} \frac{2\varepsilon_i}{\lambda^i}) = v'(1 + \sum_{\eta'_i=-1} \frac{2\varepsilon'_i}{\lambda^i}).$$

**Remarque 5.2.1** On remarque que

$$\sum_{\eta_i=1} 2\varepsilon_i \lambda^{-i} = \sum_{i \geq 1} (\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}) \lambda^{-i}.$$

Donc (5.2) se réécrit

$$v \sum_{i \geq 1} \varepsilon_i \lambda^{-i} = -v' \sum_{i \geq 1} \varepsilon'_i \lambda^{-i}. \quad (5.3)$$

### 5.2.2.2 Normalisation

On rappelle que  $\hat{h}$  est normalisée par  $I$  ce qui s'écrit :

$$v' - \sum_{i \geq 1} (s_i l_i + s'_i l'_i) = 1$$

soit

$$v'(1 - \sum_{i \geq 1} \frac{2\varepsilon'_i l'_i}{\lambda^i}) + v(-\sum_{i \geq 1} \frac{2\varepsilon_i l_i}{\lambda^i}) = 1. \quad (5.4)$$

### 5.2.2.3 Nombre de rotation

Dorénavant on suppose que  $\lambda > 3$ . On intègre contre la mesure  $h$ .m la fonction  $\phi$  définie en 4.4.2. Le nombre de rotation presque sûr de  $f$  est  $\rho = \int \phi h \, dm + \omega$ . On obtient alors

$$\rho - \omega = \frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda} v' - \sum_{i \geq 1} \eta_i \frac{s_i}{2} (\lambda - \eta_i) l_i^2 - \sum_{i \geq 1} \eta'_i \frac{s'_i}{2} (\lambda - \eta'_i) l_i'^2.$$

soit

$$\rho - \omega = \left( \frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda} - \sum_{i \geq 1} \eta'_i \varepsilon'_i (\lambda - \eta'_i) \lambda^{-i} l_i'^2 \right) v' + \left( - \sum_{i \geq 1} \eta_i \varepsilon_i (\lambda - \eta_i) \lambda^{-i} l_i^2 \right) v. \quad (5.5)$$

On peut ensuite éliminer dans (5.5)  $v$  et  $v'$  grâce à (5.2) et (5.4). On trouve finalement

#### Proposition 5.2.1

$$\rho - \omega = \frac{A}{B}$$

où l'on a noté

$$A = \frac{\frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda} - \sum_{i \geq 1} \eta'_i \varepsilon'_i (\lambda - \eta'_i) \lambda^{-i} l_i'^2}{1 - \sum_{\eta'_i=1} \frac{2\varepsilon'_i}{\lambda^i}} + \frac{- \sum_{i \geq 1} \eta_i \varepsilon_i (\lambda - \eta_i) \lambda^{-i} l_i^2}{1 + \sum_{\eta_i=1} \frac{2\varepsilon_i}{\lambda^i}}$$

$$B = \frac{1 - \sum_{i \geq 1} 2\varepsilon'_i \lambda^{-i} l_i'}{1 - \sum_{\eta'_i=1} \frac{2\varepsilon'_i}{\lambda^i}} + \frac{- \sum_{i \geq 1} 2\varepsilon_i \lambda^{-i} l_i}{1 + \sum_{\eta_i=1} \frac{2\varepsilon_i}{\lambda^i}}.$$

**Remarques 5.2.2** 1. Depuis le début on a brisé la symétrie entre  $c_0$  et  $c'_0$ .

2. On note que lorsque la pente est suffisamment grande,  $\frac{\rho - \omega}{\lambda}$  est proche de  $\frac{1}{4}$ .

### 5.2.3 Taux d'accroissement approché de $\rho$

On cherche maintenant à estimer les variations de la fonction  $\omega \mapsto \rho - \omega$  à l'échelle  $\lambda^{-n}$ . On fixe une valeur de  $\lambda$  et on considère un intervalle  $]\omega_1, \omega_2[$  sur lequel il n'y a pas de collision d'ordre inférieur à  $n$  :

$$\forall \omega \in ]\omega_1, \omega_2[, \quad \forall 1 \leq k \leq n, \quad \{c_k, c'_k\} \cap \{c_0, c'_0\} = \emptyset.$$

Le lemme 4.4.1 montre que l'on peut en toute généralité supposer

$$|\omega_2 - \omega_1| < 2\lambda^{-n+1}.$$

On cherche à estimer  $\rho(\omega_1) - \rho(\omega_2)$  à  $C\lambda^{-n+1}$  près, où  $C$  est une constante uniforme. On a

$$\rho(\omega_2) - \rho(\omega_1) - (\omega_2 - \omega_1) = \frac{A(\omega_2) - A(\omega_1)}{B(\omega_1)} - \frac{\rho(\omega_2) - \omega_2}{\lambda B(\omega_1)} \lambda (B(\omega_2) - B(\omega_1)).$$

On note que si  $\lambda$  est assez grande,  $B$  est proche de 1 et d'après la remarque 5.2.2.2,  $\frac{\rho - \omega}{\lambda}$  est proche de  $\frac{1}{4}$ .

On commence par borner le terme  $|B(\omega_2) - B(\omega_1)|$  : on peut approcher  $B$  à  $C\lambda^{-n-1}$  près en tronquant les termes d'ordre supérieurs à  $n$  :

$$\left| \frac{1 - \sum_{1 \leq i \leq n} 2\varepsilon'_i \lambda^{-i} l'_i}{1 - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \eta_i=1}} \frac{2\varepsilon'_i}{\lambda^i}} + \frac{- \sum_{1 \leq i \leq n} 2\varepsilon_i \lambda^{-i} l_i}{1 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \eta_i=1}} \frac{2\varepsilon_i}{\lambda^i}} - B \right| < C\lambda^{-n-1}.$$

Sur l'intervalle  $]\omega_1, \omega_2[$ , il n'y a pas de collision d'ordre inférieur à  $n$  et donc les  $\varepsilon_i$  et  $\varepsilon'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont constants :

$$|(B(\omega_2) - B(\omega_1)) - \Delta B \cdot (\omega_2 - \omega_1)| \leq C\lambda^{-n-1}$$

où l'on a posé

$$\Delta B = \frac{- \sum_{1 \leq i \leq n} 2\varepsilon'_i \lambda^{-i} \frac{\partial c'_i}{\partial \omega}}{1 - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \eta_i=1}} \frac{2\varepsilon'_i}{\lambda^i}} + \frac{- \sum_{1 \leq i \leq n} 2\varepsilon_i \lambda^{-i} \frac{\partial c_i}{\partial \omega}}{1 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \eta_i=1}} \frac{2\varepsilon_i}{\lambda^i}}. \quad (5.6)$$

Nous utilisons maintenant le lemme suivant :

#### Lemme 5.2.2

$$\varepsilon_i \left( \frac{\partial c_i}{\partial \omega} + \frac{1}{\lambda - 1} \right) = \frac{\lambda^i}{\lambda + 1} \left( 1 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq i-1 \\ \eta_j=1}} \frac{2\varepsilon_j}{\lambda^j} + \sum_{j \geq i} \frac{2\varepsilon_j}{\lambda^j} \right),$$

$$\varepsilon'_i \left( \frac{\partial c'_i}{\partial \omega} + \frac{1}{\lambda - 1} \right) = -\frac{\lambda^i}{\lambda + 1} \left( 1 - \sum_{\substack{1 \leq j \leq i-1 \\ \eta_j=1}} \frac{2\varepsilon'_j}{\lambda^j} - \sum_{j \geq i} \frac{2\varepsilon'_j}{\lambda^j} \right).$$

*Démonstration* : Pour  $i = 1$ , on a

$$\frac{\partial c_1}{\partial \omega} = \frac{\partial c'_1}{\partial \omega} = \varepsilon_1 = -\varepsilon'_1 = 1.$$

Par récurrence, on vérifie

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{i+1} \left( \frac{\partial c_{i+1}}{\partial \omega} + \frac{1}{\lambda - 1} \right) \\ &= \varepsilon_i \left( \lambda \frac{\partial c_i}{\partial \omega} + \eta_i + \frac{\eta_i}{\lambda - 1} \right) \\ &= \lambda \varepsilon_i \left( \frac{\partial c_i}{\partial \omega} + \frac{1}{\lambda - 1} \right) + \frac{\lambda \varepsilon_i (\eta_i - 1)}{\lambda - 1} \\ &= \frac{\lambda^{i+1}}{\lambda + 1} \left( 1 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq i-1 \\ \eta_j = 1}} \frac{2\varepsilon_j}{\lambda^j} + \sum_{j \geq i} \frac{2\varepsilon_j}{\lambda^j} - (1 - \eta_i) \left( \frac{\varepsilon_i}{\lambda^i} + \sum_{j \geq i+1} \frac{2\varepsilon_j}{\lambda^j} \right) \right), \end{aligned}$$

ce qui établit l'égalité (il y a deux cas,  $\eta_i = \pm 1$ ).

□

Finalement, pour  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon_i \lambda^{-i} \frac{\partial c_i}{\partial \omega} - \frac{1}{\lambda + 1} \left( 1 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \eta_j = 1}} 2\varepsilon_j \lambda^{-j} \right) \right| < C \lambda^{-i-1}, \\ & \left| \varepsilon'_i \lambda^{-i} \frac{\partial c'_i}{\partial \omega} + \frac{1}{\lambda + 1} \left( 1 - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \eta_j = 1}} 2\varepsilon'_j \lambda^{-j} \right) \right| < C \lambda^{-i-1}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (5.6), et en simplifiant, on en déduit donc

$$|\Delta B| < C \sum_{1 \leq i \leq n} 2\lambda^{-i-1} < C \lambda^{-2}.$$

Il reste à estimer  $A(\omega_2) - A(\omega_1)$ . De la même façon, on peut tronquer dans  $A$  les termes d'ordre supérieur à  $n$ :

$$|A(\omega_2) - A(\omega_1) - (\Delta A_1 \cdot (\omega_2 - \omega_1) + \Delta A_2 \cdot (\omega_2 - \omega_1)^2)| < C \lambda^{-n-1}.$$

On a posé

$$\Delta A_1 = \frac{- \sum_{1 \leq i \leq n} 2\eta'_i \varepsilon'_i (\lambda - \eta'_i) \lambda^{-i} l'_i(\omega_1) \frac{\partial c'_i}{\partial \omega} - \sum_{1 \leq i \leq n} 2\eta_i \varepsilon_i (\lambda - \eta_i) \lambda^{-i} l_i(\omega_1) \frac{\partial c_i}{\partial \omega}}{1 - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \eta_i = 1}} \frac{2\varepsilon'_i}{\lambda^i}} + \frac{- \sum_{1 \leq i \leq n} 2\eta_i \varepsilon_i (\lambda - \eta_i) \lambda^{-i} l_i(\omega_1) \frac{\partial c_i}{\partial \omega}}{1 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \eta_i = 1}} \frac{2\varepsilon_i}{\lambda^i}}.$$

En utilisant à nouveau le lemme 5.2.2, on obtient

$$\left| \Delta A_1 - \frac{2}{\lambda + 1} \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \eta'_i (\lambda - \eta'_i) l'_i(\omega_1) - \sum_{1 \leq i \leq n} \eta_i (\lambda - \eta_i) l_i(\omega_1) \right) \right| < C \lambda^{-1}.$$



D'autre part,

$$\Delta A_2 = \frac{- \sum_{1 \leq i \leq n} \eta'_i \varepsilon'_i (\lambda - \eta'_i) \lambda^{-i} \left( \frac{\partial c'_i}{\partial \omega} \right)^2}{1 - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \eta'_i = 1}} \frac{2\varepsilon'_i}{\lambda^i}} + \frac{- \sum_{1 \leq i \leq n} \eta_i \varepsilon_i (\lambda - \eta_i) \lambda^{-i} \left( \frac{\partial c_i}{\partial \omega} \right)^2}{1 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \eta_i = 1}} \frac{2\varepsilon_i}{\lambda^i}}$$

et le lemme 4.4.1 implique  $|\Delta A_2| < C\lambda^{n-1}$ . Le terme quadratique  $\Delta A_2 \cdot (\omega_2 - \omega_1)^2$  est donc majoré par  $C\lambda^{-n+1}$ .

On en déduit la proposition suivante qui permet d'approcher  $\rho$  par des applications affines :

**Proposition 5.2.3** *Soit  $]\omega_1, \omega_2[$  un intervalle sur lequel il n'y a pas de collision d'ordre inférieur à  $n$ , alors,*

$$|\rho(\omega_2) - \rho(\omega_1) - \Delta_n \rho(\omega_1^+)(\omega_2 - \omega_1)| < C_b \lambda^{-n+1}$$

où  $C_b$  est une constante universelle et où l'on a posé

$$\Delta_n \rho(\omega_1^+) = \frac{2}{(\lambda + 1)B(\omega_1)} \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \eta'_i (\lambda - \eta'_i) l'_i(\omega_1) - \sum_{1 \leq i \leq n} \eta_i (\lambda - \eta_i) l_i(\omega_1) \right). \quad (5.7)$$

**Remarque 5.2.3** On voit que  $\Delta_n \rho(\omega_1^+)$  ne dépend que de la dynamique en  $\omega_1^+$ . On peut également définir

$$\Delta_n \rho(\omega_2^-) = \frac{2}{(\lambda + 1)B(\omega_2)} \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \eta'_i (\lambda - \eta'_i) l'_i(\omega_2) - \sum_{1 \leq i \leq n} \eta_i (\lambda - \eta_i) l_i(\omega_2) \right).$$

et obtenir une propriété similaire. Rappelons que pour  $\omega \in \mathbb{R}$ , les suites  $(\eta_i)$ ,  $(\eta'_i)$ , et les autres quantités qui en dépendent peuvent être différentes en  $\omega^-$  et  $\omega^+$ . On peut néanmoins montrer que pour tout  $\omega$ ,

$$|\Delta_n \rho(\omega^+) - \Delta_n \rho(\omega^-)| < C.$$

### 5.3 Propriétés métriques de $\rho$

Pour  $\lambda > 3$ , on notera  $\rho_\lambda$  l'application  $\omega \mapsto \rho(\tilde{f}_{\lambda, \omega})$ .

Le théorème 6.1.1, démontré au chapitre 6, peut être énoncé de la façon suivante :

**Théorème 5.3.1** *Il existe une constante  $C_a > 0$ , une valeur  $\lambda_0 > 3$  et un sous-ensemble  $E$  des paramètres de  $]\lambda_0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  de mesure totale tels que :*

*Pour tout  $(\lambda, \omega) \in E$  et  $p \geq 1$ , il existe  $n \geq 1$  satisfaisant les propriétés suivantes :*

i.  $c_n, \dots, c_{n+p} \in \pi_0[\frac{3}{16}, \frac{5}{16}]$ ,  $c'_n, \dots, c'_{n+p} \in \pi_0[0, \frac{1}{8}]$ .

ii. *Pour tout  $n \leq k \leq n + p$  et sur l'intervalle  $[\omega - C_a \lambda^{-k+1}, \omega + C_a \lambda^{-k+1}]$ , il n'y a pas de collision d'ordre inférieur ou égal à  $k$ .*

Le choix des intervalles  $[0, \frac{1}{8}]$  et  $[\frac{3}{16}, \frac{5}{16}]$  est relativement arbitraire. On en déduit :

**Corollaire 5.3.2** *Il existe une constante universelle  $C_c > 0$  telle que pour tout  $(\lambda, \omega_0) \in E$  et pour tout  $K > 0$ , il existe  $0 < r < K^{-1}$  et  $P > K$  vérifiant*

$$\|\rho_\lambda - (\rho_\lambda(\omega_0) + P \cdot (\text{Id} - \omega_0))\|_{C^0(B(\omega_0, r))} < C_c \cdot r.$$

*Démonstration :* Pour  $(\lambda, \omega_0) \in E$  et  $K > 0$ , on fixe un entier  $p$  tel que  $p > 32\lambda B(\omega_0)K$ . Il existe alors un entier  $n$  satisfaisant avec  $p$  les conclusions du théorème 5.3.1 et suffisamment grand pour que

$$0 < C_a \lambda^{-n+1} < K^{-1}.$$

Pour chaque entier  $n \leq k \leq n+p$ , il n'y a pas de collision d'ordre inférieur ou égal à  $k$  sur  $[\omega_0 - C_a \lambda^{-k+1}, \omega_0 + C_a \lambda^{-k+1}]$  et donc pour tout  $\omega$  dans cet intervalle la proposition 5.2.3 entraîne

$$|\rho(\omega) - \rho(\omega_0) - \Delta_k \rho(\omega_0)(\omega - \omega_0)| \leq C_b \lambda^{-k+1}.$$

En effet, il n'y a pas en  $\omega_0$  de collision d'ordre inférieur à  $k$  donc  $\Delta_k \rho(\omega_0^-) = \Delta_k \rho(\omega_0^+)$ . Il suffit donc de trouver une valeur de  $k$  pour laquelle  $|\Delta_k \rho(\omega_0)| > K$  et de poser  $r = C_a \lambda^{-k+1}$ .

Comparons  $\Delta_n \rho(\omega_0)$  et  $\Delta_{n+p} \rho(\omega_0)$ . Le théorème 5.3.1.i entraîne :

$$\eta_n = \eta_{n+1} = \dots = \eta_{n+p} = \eta'_n = \eta'_{n+1} = \dots = \eta'_{n+p} = 1,$$

$$l_n, l_{n+1}, \dots, l_{n+p} \in [\frac{3}{16}, \frac{5}{16}] \text{ et } l'_n, l'_{n+1}, \dots, l'_{n+p} \in [0, \frac{1}{8}].$$

On déduit de (5.7)

$$\Delta_{n+p} \rho(\omega_0) < \Delta_n \rho(\omega_0) - \frac{2p}{16(\lambda+1)B(\omega_0)} < \Delta_n \rho(\omega_0) - 2K.$$

Ainsi  $\Delta_n \rho(\omega_0) > K$  ou  $\Delta_{n+p} \rho(\omega_0) < -K$ , ce qu'il fallait prouver. □

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

**Théorème 5.3.3** *Pour presque toute pente  $\lambda > \lambda_0$ , l'application définie par  $\omega \mapsto \rho(\tilde{f}_{\lambda, \omega})$  n'est pas absolument continue.*

*Démonstration :* D'après le corollaire précédent, pour presque tout  $\lambda > \lambda_0$  et pour un sous-ensemble  $E_\lambda$  de  $\mathbb{R}$  de mesure pleine,  $\{\lambda\} \times E_\lambda \subset E$ . Pour tout  $\omega_0 \in E_\lambda$ , on peut construire une suite  $p_n \rightarrow \pm\infty$  (on supposera par exemple  $p_n \rightarrow +\infty$ ) et une suite de réels strictement positifs  $r_n \rightarrow 0$  tels que

$$\rho_\lambda(\omega_0 + r_n) - \rho_\lambda(\omega_0) > (p_n - C_c) \cdot r_n.$$

On en déduit que  $\rho_\lambda$  n'est pas dérivable en  $\omega_0$ . La fonction  $\rho_\lambda$  n'est pas dérivable sur un ensemble de mesure strictement positive et n'est donc pas absolument continue (voir par exemple [Ru] chapitre VII). □

C'est une réponse négative à la seconde question de l'introduction. En revanche, le théorème 5.3.1 permet également de donner une réponse positive :

**Théorème 5.3.4** *Avec les notations du théorème 5.3.1 et pour tout  $\rho_0 \in \mathbb{R}$ , l'ensemble des paramètres  $(\lambda, \omega) \in ]\lambda_0, +\infty[ \times \mathbb{R} \cap \rho^{-1}(\rho_0)$  est de mesure nulle*

*Démonstration* : Raisonnons par l'absurde : si ce n'était pas le cas, il existerait un paramètre  $(\lambda, \omega_0) \in E$  qui soit un point de densité de l'ensemble  $(\{\lambda\} \times \mathbb{R}) \cap \rho^{-1}(\rho_0)$  pour la mesure de Lebesgue de  $\{\lambda\} \times \mathbb{R}$ .

Appliquant le corollaire 5.3.2 en  $\omega_0$  avec pour constante  $K = 3C_c$ , il existe une suite de réels strictement positifs  $r_n \rightarrow 0$  tels que pour tout  $\omega$  vérifiant  $\frac{1}{2}r_n < |\omega - \omega_0| < r_n$ ,

$$|\rho_\lambda(\omega) - \rho_\lambda(\omega_0)| > K|\omega - \omega_0| - C_c \cdot r_n > \left(\frac{K}{2} - C_c\right)r_n$$

et donc  $\rho_\lambda(\omega) \neq \rho_\lambda(\omega_0)$ . La densité de  $(\{\lambda\} \times \mathbb{R}) \cap \rho^{-1}(\rho_0)$  dans les boules  $\{\lambda\} \times B(\omega_0, r_n)$  est donc plus petite que  $\frac{1}{2}$  pour tout  $n$ . Ceci contredit le choix de  $\omega_0$ .

□

**Corollaire 5.3.5** *Pour un ensemble de paramètres  $(\lambda, \omega) \in ]\lambda_0, +\infty[$  de mesure de Lebesgue totale, le nombre de rotation presque sûr  $\rho(\tilde{f}_{\lambda, \omega})$  est irrationnel.*

**Remarque 5.3.1** Plus précisément, les ensembles  $R \subset \mathbb{R}$  pour lesquels  $\rho^{-1}(R)$  est de mesure de Lebesgue strictement positive dans  $] \lambda_0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  ne sont pas dénombrables. Encore une fois,  $\rho$  a un comportement opposé à celui des fonctions  $\rho^+$  et  $\rho^-$  (voir le théorème 1.4.3).

## Chapitre 6

# Étude statistique des orbites critiques

Nous montrons que pour un ensemble des paramètres de mesure totale, les orbites critiques des endomorphismes affines par morceaux introduits au chapitre 3 satisfont certaines propriétés statistiques qui ont été utilisées au chapitre 5 : elles n'approchent pas trop vite les points critiques et sur de longues périodes elles restent dans des régions déterminées du cercle.

### 6.1 Introduction

Nous démontrons dans ce chapitre, pour les endomorphismes affines par morceaux introduits en section 3.3, le résultat suivant qui est utilisé au chapitre 5 :

**Théorème 6.1.1** *Il existe une constante universelle  $C_a > 0$  et pour tous voisinages  $V$  de  $\pi_0(\frac{1}{4})$  et  $V'$  de  $\pi_0(\frac{1}{16})$ , une valeur  $\lambda_0 \geq 3$  satisfaisant la propriété suivante : pour presque tout paramètre  $(\lambda, \omega) \in ]\lambda_0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ , et pour tout  $p \geq 1$ , il existe  $n \geq 1$  tel que :*

- i.  $c_n, \dots, c_{n+p-1} \in V$ ,  $c'_n, \dots, c'_{n+p-1} \in V'$ .*
- ii. Pour tout paramètre  $(\lambda, \omega')$  avec  $\omega' \in [\omega - C_a \lambda^{-n+1}, \omega + C_a \lambda^{-n+1}]$ , et tout  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $\{c_k, c'_k\} \cap \{c_0, c'_0\} = \emptyset$ .*
- iii. Pour tout  $n \leq k \leq n+p-1$  et tout paramètre  $(\lambda, \omega')$  avec  $\omega' \in [\omega - C_a \lambda^{-k+1}, \omega + C_a \lambda^{-k+1}]$ ,  $\{c_k, c'_k\} \cap \{c_0, c'_0\} = \emptyset$ .*

**Remarque 6.1.1** Les conclusions (ii) et (iii) sont optimales puisque d'après le lemme 4.4.1, il existe une constante  $C > C_a$  satisfaisant pour tout paramètre  $(\lambda, \omega)$ , et tout entier  $k \geq 1$  l'assertion : il existe  $\omega' \in [\omega - C \lambda^{-k+1}, \omega + C \lambda^{-k+1}]$  tel que pour le paramètre  $(\lambda, \omega')$ , l'un des points  $c_1, \dots, c_k, c'_1, \dots, c'_k$  rencontre  $\{c_0, c'_0\}$ .

Le théorème 6.1.1 est utile pour le chapitre 5 mais la preuve donne une description plus générale de l'espace des paramètres. Il s'agit en quelque sorte de contrôler le comportement des orbites critiques pour un gros ensemble des paramètres. Ce n'est pas si loin du théorème de Jakobson (voir section 3.2) qui, dans le cas d'applications

lisses multimodales, contrôle la vitesse de récurrence, ainsi que la dérivée des orbites critiques.

Dans ce chapitre, nous adaptions pour une large part ces techniques. Plus précisément, nous utilisons les constructions de [Yoc97]. Le fait de travailler avec des applications affines par morceaux simplifie beaucoup les problèmes de distorsion. En revanche, les propriétés que l'on cherche exigent un contrôle indépendant sur chaque orbite critique. Alors qu'il suffit en général d'étudier des familles à un paramètre satisfaisant des conditions de transversalité génériques, il est ici nécessaire d'avoir autant de paramètres que de points critiques. On se placera donc dans l'espace des paramètres  $(\lambda, \omega)$ . L'ensemble des paramètres que l'on retiendra sera localement un produit de deux ensembles de Cantor, contrôlant chacun la combinatoire d'une des orbites critiques.

Nous commençons par construire un ensemble de paramètres plus gros : les paramètres réguliers  $\mathcal{R}$ . C'est l'ensemble des paramètres pour lesquels les orbites critiques satisfont deux conditions (R1) et (R2). On peut approcher l'ensemble  $\mathcal{R}$  en considérant les paramètres  $\mathcal{R}_n$  pour lesquels seuls les  $n$  premiers itérés des orbites critiques satisfont ces conditions. On obtient une réunion de rectangles bordés par des courbes lisses. L'objet de la section 6.2 est de contrôler la géométrie de ces courbes.

En section 6.3, nous mettons en place dans l'espace dynamique les constructions nécessaires à la discussion combinatoire, en particulier la notion d'intervalle régulier, que l'on trouvait dans [Yoc97]. Nous n'avons pas les mêmes raisons que [Yoc97] d'introduire les intervalles et paramètres réguliers : un paramètre de  $\mathcal{R}$  vérifiera les propriétés (ii) et (iii) du théorème 6.1.1.

Nous obtenons par récurrence une décomposition de l'espace dynamique en composantes qui regroupent l'espace des paramètres ayant une même combinatoire sur les premières itérations (section 6.4).

Les paramètres réguliers sont introduits en section 6.5. Afin de décrire un ensemble de paramètres de mesure totale, nous devons nous permettre de relâcher les constantes qui interviennent dans l'énoncé de (R1) et (R2). C'est pourquoi nous définissons des conditions  $(R1)_s$  et  $(R2)_s$  pour un ensemble de paramètres initiaux  $\mathcal{P}(s)$ .

En section 6.6.1, nous contrôlons la décroissance des ensembles  $\mathcal{R}_n$ . Nous montrons que la proportion qui disparaît entre  $\mathcal{R}_n$  et  $\mathcal{R}_{n+1}$  est exponentiellement petite avec  $n$ .

Il en résulte que l'ensemble  $\mathcal{R}$  a une mesure de Lebesgue positive. La dynamique des orbites critiques pour ces paramètres est décrite par une suite d'intervalles réguliers. En quelque sorte, les applications correspondantes ont une structure presque markovienne (avec une infinité d'intervalles de retour). Nous introduisons une nouvelle condition (R3) qui impose pour les orbites critiques une grande proportion de temps passé dans les intervalles réguliers les plus simples, i.e. ayant un temps de retour petit. Un argument dit de grande déviation (section 6.6.2) permet de montrer que l'ensemble des paramètres correspondant  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$  est encore de mesure positive. Cette partie de la démonstration est elle aussi classique (voir [BC2, Yoc97]) et sert dans l'étude des familles lisses à garantir un exposant de Liapunov strictement positif. Ici encore, le but est différent : nous obtenons des temps de retours à  $V$  (resp.  $V'$ ) communs pour les deux orbites critiques. La structure presque markovienne des applications et de  $\mathcal{R}'$  permet enfin de voir que pour presque tout paramètre de  $\mathcal{R}$ , de tels retours existent sur des intervalles de temps arbitrairement grands (propriété (i) du théorème 6.1.1).

## 6.2 Transversalité dans l'espace des paramètres

### 6.2.1 Localisation des paramètres, notations

Dans ce chapitre, nous noterons  $C$  les constantes strictement supérieures à 1 qui interviennent dans les calculs et qui ne dépendent d'aucun paramètre. La pente  $\lambda$  sera choisie strictement supérieure à 60. Nous reparamétrisons l'ensemble des applications  $(\tilde{f}_{\lambda,\omega})$  en posant

$$\omega = \tilde{c}_1 - \tilde{c}_0, \quad \omega' = \tilde{c}'_0 - \tilde{c}'_1,$$

de sorte que l'application  $\tilde{f}_{\omega,\omega'}$  ait une pente  $\lambda$  donnée par :

$$\omega + \omega' = \frac{1 - \lambda^2}{2\lambda}.$$

On obtient ainsi

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \omega} = \frac{\partial \lambda}{\partial \omega'} = -\frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + 1}. \quad (6.1)$$

On a aussi

$$\frac{\partial c_1}{\partial \omega} = 1, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \omega'} = 0.$$

Soit  $n \geq 1$  tel que  $\forall 1 \leq k \leq n-1, c_k \notin \{c_0, c'_0\}$ , alors,

$$\frac{\partial c_n}{\partial \omega} = \eta_{n-1} \left( \lambda \frac{\partial c_{n-1}}{\partial \omega} - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \bar{c}_{n-1} \right) + 1, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial c_n}{\partial \omega'} = \eta_{n-1} \left( \lambda \frac{\partial c_{n-1}}{\partial \omega} - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \bar{c}_{n-1} \right), \quad (6.3)$$

où  $\bar{c}_{n-1}$  est le relevé de  $c_{n-1}$  appartenant à  $] \frac{1-\lambda}{2\lambda}, \frac{1+\lambda}{2\lambda} [$  et  $\eta_n$  le symbole introduit en section 5.2.1. On a donc  $\frac{2\lambda^2}{\lambda^2+1} |\bar{c}_{n-1}| \leq 2$ .

Les formules (6.2) et (6.3) donnent alors,

$$\left| \left| \frac{\partial c_n}{\partial \omega} \right| - \lambda^{n-1} \right| \leq 3 \frac{\lambda^{n-1} - 1}{\lambda - 1}, \quad (6.4)$$

$$\left| \frac{\partial c_n}{\partial \omega'} \right| \leq 3 \frac{\lambda^{n-1} - 1}{\lambda - 1}. \quad (6.5)$$

On obtient de la même façon

$$\left| \frac{\partial c'_n}{\partial \omega} \right| \leq 3 \frac{\lambda^{n-1} - 1}{\lambda - 1}, \quad (6.6)$$

$$\left| \left| \frac{\partial c'_n}{\partial \omega'} \right| - \lambda^{n-1} \right| \leq 3 \frac{\lambda^{n-1} - 1}{\lambda - 1}. \quad (6.7)$$

Nous considérons les **domaines** ouverts et disjoints  $\mathcal{P}_{n_0, m_0}$  de l'espace des paramètres, définis pour chaque couple  $(n_0, m_0) \in \mathbb{Z}^2$  avec  $m_0 > n_0 + 30$ , par :

$$\begin{aligned} n_0 - 1 &< \omega < n_0, \\ -m_0 - 1 &< \omega' < -m_0. \end{aligned}$$

On vérifie que les pentes des applications associées à ces domaines sont strictement supérieures à 60. Réciproquement, l'ensemble des paramètres  $(\omega, \omega')$  pour lesquels la pente est strictement supérieure à 66 est recouvert à un ensemble de mesure de Lebesgue nulle près par les domaines  $\mathcal{P}_{n_0, m_0}$ .

### 6.2.2 Courbe de prépériodicité, courbe de collision

Nous considérons à présent un point  $y$  qui est :

- soit une préimage d'un point critique. Plus précisément, il existe  $i \geq 0$  tel que  $f^i(y) \in \{c_0, c'_0\}$  et pour tout  $0 \leq k \leq i-1$ ,  $f^k(y) \notin \{c_0, c'_0\}$ .
- soit une préimage d'un point périodique,  $x$ . Il existe des entiers  $i \geq 0$  et  $q \geq 1$  tels que  $f^i(y) = x$  et  $f^q(x) = x$  et tels que l'orbite positive de  $y$  ne rencontre pas  $\{c_0, c'_0\}$ . Le point  $y$  est alors dit prépériodique.

Nous vérifions que dans les deux cas, le point  $y$  peut localement être suivi continûment avec les paramètres.

**Lemme 6.2.1** *Soit  $y$  une préimage d'un point critique ou d'un point périodique, comme décrit ci-dessus. Alors,*

$$\left| \frac{\partial y}{\partial \omega} \right|, \left| \frac{\partial y}{\partial \omega'} \right| \leq \frac{3}{\lambda - 1}. \quad (6.8)$$

*Démonstration* : L'idée est la même que pour la démonstration du lemme 4.4.1 : nous supposons que  $y$  est une préimage d'un point périodique  $x$ . Pour  $z \in \mathbb{T}^1 \setminus \{c_0, c'_0\}$ , on a par des formules analogues à (6.2) et (6.3),

$$\left| \left| \frac{\partial f(z)}{\partial \omega} \right| - \lambda \frac{\partial z}{\partial \omega} \right| \leq 3.$$

Par récurrence,

$$\left| \frac{\partial x_q}{\partial \omega} \right| = \left| \lambda^q \frac{\partial x}{\partial \omega} + R_q \right|,$$

où  $|R_q| \leq 3 \frac{\lambda^q - 1}{\lambda - 1}$  et  $x_q = f^q(x)$ . Or,  $\left| \frac{\partial x}{\partial \omega} \right| = \left| \frac{\partial x_q}{\partial \omega} \right|$  donc

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \omega} \right| \leq \frac{3}{\lambda - 1}.$$

Si  $f^i(y) = x$ , on a aussi

$$\left| \lambda^i \frac{\partial y}{\partial \omega} + R(-i) \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial \omega} \right| \leq \frac{3}{\lambda - 1}$$

avec  $|R(-i)| \leq 3 \frac{\lambda^i - 1}{\lambda - 1}$ . Donc

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial \omega} \right| \leq \frac{3}{\lambda - 1}.$$

Les autres cas se traitent de la même façon. □

Les estimées (6.4-6.7) et (6.8) montrent que si l'orbite positive de  $c_1$  (resp.  $c'_1$ ) est prépériodique et ne rencontre pas  $\{c_0, c'_0\}$ , le point critique  $c_0$  (resp.  $c'_0$ ) reste localement prépériodique le long d'une courbe dans l'espace des paramètres. Une telle courbe sera appelée **courbe de prépériodicité**. On définit de même les **courbes de collision** lorsque pour un entier  $n \geq 1$ ,  $c_n$  (resp.  $c'_n$ ) appartient à  $\{c_0, c'_0\}$  avec  $\forall 1 \leq k \leq n-1, c_k \notin \{c_0, c'_0\}$  (resp.  $c_k \notin \{c_0, c'_0\}$ ).

### 6.2.3 Courbes de types $\Gamma, \Gamma'$

L'espace des paramètres  $\{(\omega, \omega')\}$  sera muni de la métrique euclidienne standard de  $\mathbb{R}^2$ .

Nous définissons deux types de courbes dans l'espace des paramètres: une courbe lisse sera

- **de type  $\Gamma$** , si pour tout vecteur tangent non nul  $(\Omega, \Omega')$ ,

$$|\Omega| \leq \frac{3}{\lambda - 4} |\Omega'|.$$

- **de type  $\Gamma'$** , si pour tout vecteur tangent non nul  $(\Omega, \Omega')$ ,

$$|\Omega'| \leq \frac{3}{\lambda - 4} |\Omega|.$$

Puisque  $\left(\frac{3}{\lambda-4}\right)^2 < 1$ , les courbes de type  $\Gamma$  sont transverses aux courbes de type  $\Gamma'$ . On montre alors :

**Lemme 6.2.2** *Les courbes de prépériodicité et de collision associées à l'orbite de  $c_0$  (resp. de  $c'_0$ ) sont de type  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma'$ ).*

*Démonstration* : Nous reprenons les notations de la section 6.2.2 et nous traitons le cas d'une courbe de prépériodicité associée à l'orbite  $(c_n)$ : le point  $c_1$  coïncide avec une préimage  $y$  d'un point périodique  $x$ . Si l'on paramètre la courbe par  $t$ , on obtient en différenciant

$$\frac{\partial c_1}{\partial \omega} D\omega(t) + \frac{\partial c_1}{\partial \omega'} D\omega'(t) = \frac{\partial y}{\partial \omega} D\omega(t) + \frac{\partial y}{\partial \omega'} D\omega'(t).$$

On rappelle que  $\frac{\partial c_1}{\partial \omega} = 1$  et  $\frac{\partial c_1}{\partial \omega'} = 0$ . Donc

$$\frac{D\omega(t)}{D\omega'(t)} = \frac{\partial y}{\partial \omega'} \left[ 1 - \frac{\partial y}{\partial \omega} \right]^{-1}. \quad (6.9)$$

Utilisant le lemme 6.2.1,

$$\left| \frac{D\omega(t)}{D\omega'(t)} \right| \leq \frac{3}{\lambda - 4}.$$

□

### 6.2.4 Transversalité des paramètres

Terminons par le lemme suivant qui contrôle la transversalité des valeurs critiques par rapports aux points prépériodiques.

**Lemme 6.2.3** *Soit  $\theta \mapsto \sigma(\theta)$  une courbe de type  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma'$ ) paramétrée par sa longueur (on suppose  $\frac{\partial \omega'}{\partial \theta} > 0$  (resp.  $\frac{\partial \omega}{\partial \theta} > 0$ )), et comme en section 6.2.2, une préimage  $y$  d'un point périodique ou d'un point critique  $c_0$  ou  $c'_0$ . Alors,*

$$1 - \frac{7}{\lambda - 1} \leq \frac{\partial c'_1}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial \theta} \leq 1 + \frac{7}{\lambda - 1}$$

(resp.  $1 - \frac{7}{\lambda - 1} \leq \frac{\partial c_1}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial \theta} \leq 1 + \frac{7}{\lambda - 1}$ ).



*Démonstration* : On a

$$\frac{\partial c'_1}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial c'_1}{\partial \omega} - \frac{\partial y}{\partial \omega} \right) D\omega(\theta) + \left( \frac{\partial c'_1}{\partial \omega'} - \frac{\partial y}{\partial \omega'} \right) D\omega'(\theta).$$

Or, d'après le lemme 6.2.1,

$$\left| \frac{\partial c'_1}{\partial \omega'} - \frac{\partial y}{\partial \omega'} - 1 \right| \leq \frac{3}{\lambda - 1}, \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial c'_1}{\partial \omega} - \frac{\partial y}{\partial \omega} \right| \leq \frac{3}{\lambda - 1}.$$

D'autre part,  $\sigma$  est de type  $\Gamma$  et paramétrée par sa longueur donc,

$$1 \geq D\omega' \geq 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{D\omega}{D\omega'} \right)^2 \geq 1 - \frac{5}{(\lambda - 4)^2}$$

et

$$|D\omega| \leq \frac{3}{\lambda - 4}.$$

On obtient donc

$$1 - \frac{6}{\lambda - 1} - \frac{5}{(\lambda - 4)^2} \leq \frac{\partial c'_1}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial \theta} \leq 1 + \frac{6}{\lambda - 1}.$$

□

## 6.3 Intervalles réguliers

### 6.3.1 Définition

Sauf en section 6.6.4, nous fixons dorénavant un domaine  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{n_0, m_0}$  de l'espace des paramètres. Nous notons  $\lambda_-$  l'infimum des pentes des applications  $\tilde{f} = \tilde{f}_{\omega, \omega'}$ , avec  $(\omega, \omega') \in \mathcal{P}_{n_0, m_0}$

Pour ces applications, il existe des points

$$\tilde{c}_0 < \tilde{b}_{n_0} < \dots < \tilde{b}_{m_0} < \tilde{c}'_0 < \tilde{b}'_{m_0} < \dots < \tilde{b}'_{n_0} < \tilde{c}_0 + 1$$

tels que pour tout  $n_0 \leq j \leq m_0$ ,

$$\tilde{f}(\tilde{b}_j) = \tilde{b}_j + j \quad (\text{resp. } \tilde{f}(\tilde{b}'_j) = \tilde{b}'_j + j).$$

L'ensemble des points fixes de  $f$  est exactement

$$\{b_j, n_0 \leq j \leq m_0\} \cup \{b'_j, n_0 \leq j \leq m_0\}.$$

Il varie continûment avec les paramètres sur  $\mathcal{P}$ .

Nous introduisons les **intervalles de retour** du cercle

$$]b_{n_0}, b_{n_0+1}[ , \dots , ]b_{m_0-1}, b_{m_0}[ , ]b'_{m_0}, b'_{m_0-1}[ , \dots , ]b'_{n_0+1}, b'_{n_0}[ .$$

Les intervalles de retour sur  $\mathbb{R}$  sont les intervalles qui relèvent par  $\pi_0$  un intervalle de retour du cercle.

**Définition 6.3.1** *L'intervalle  $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$  est régulier d'ordre  $n \geq 0$  si  $\tilde{f}^n$  envoie  $\tilde{I}$  homéomorphiquement sur un intervalle de retour de  $\mathbb{R}$ . On définit de façon analogue les intervalles réguliers du cercle.*

Si  $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$  est régulier, l'application  $\tilde{f}^{n+1}|_{\tilde{I}}$  est un homéomorphisme et on note  $g_{\tilde{I}} = (\tilde{f}^{n+1}|_{\tilde{I}})^{-1}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on introduit

$$\Delta_n = \bigcup_{0 \leq k \leq n} f^{-k}(\{c_0, c'_0\} \cup \{b_j, n_0 \leq j \leq m_0\} \cup \{b'_j, n_0 \leq j \leq m_0\}).$$

La proposition suivante suit aisément des définitions précédentes :

**Proposition 6.3.1** *i. Si  $I$  est régulier d'ordre  $n$ , les points de  $\partial I$  sont deux points consécutifs de  $\Delta_n$ .*

*ii. Si  $I$  est régulier d'ordre  $n \geq 1$ ,  $f(I)$  est régulier d'ordre  $n - 1$ .*

*iii. Si  $I$  et  $I'$  sont réguliers,  $I \subset I'$  ou  $I' \subset I$  ou  $I \cap I' = \emptyset$ .*

*iv. Propriété de composition : si  $\tilde{I}_1$  est un intervalle régulier d'ordre  $n_1$  de  $\mathbb{R}$  et si  $\tilde{f}^{n_1+1}(\tilde{I}_1)$  contient un intervalle régulier  $\tilde{I}_2$  d'ordre  $n_2$ , alors  $\tilde{I}_3 = g_{\tilde{I}_1}(\tilde{I}_2)$  est régulier d'ordre  $n_1 + n_2 + 1 = n_3$ .*

### 6.3.2 Partition du cercle

Les composantes connexes de  $\mathbb{T}^1 \setminus \Delta_n$  forment un ensemble  $\mathcal{C}_n$  et nous définissons  $\varepsilon_n$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{C}_n$  contenus dans aucun intervalle régulier.

Si  $I \in \mathcal{C}_n$ ,  $k \leq n$ , la restriction de  $f^k$  à  $I$  est un homéomorphisme et son image est contenue dans un intervalle de  $\mathcal{C}_{n-k}$ . D'autre part, pour  $n \geq 1$ ,  $|I| = \lambda^{-1}|f(I)|$ . Par récurrence, on obtient donc pour tout  $n \geq 0$  et tout  $I \in \mathcal{C}_n$ ,

$$|I| \leq \frac{\lambda^{-n}}{\lambda - 1}.$$

Nous définissons un codage des éléments de  $\mathcal{C}_n$  : nous numérotions de 1 à  $L = 2(m_0 - n_0 + 2)$  les intervalles de  $\mathcal{C}_0$  qui, à un ensemble fini près, forment une partition du cercle. À chaque intervalle  $I \in \mathcal{C}_n$ , nous associons une unique suite  $(s_k)_{0 \leq k \leq n}$  de  $\mathbb{Z}^{n+1}$  de la façon suivante :

- Pour  $n = 0$ ,  $s_0$  est simplement le symbole de l'intervalle  $I \in \mathcal{C}_0$ .
- Si  $n \geq 1$  et si l'intervalle  $I' \in \mathcal{C}_{n-1}$  qui contient  $I$  est codé par la suite  $(s'_k)$ , on définira  $s_k = s'_k$  pour  $0 \leq k \leq n - 1$ . Relevons  $I$  en un intervalle  $\tilde{I} \in [0, 1[$ . L'image  $\tilde{f}^n(\tilde{I})$  est contenue dans un unique intervalle  $[r, r + 1[$ . L'image  $f^n(I)$  est contenue dans un unique intervalle de  $\mathcal{C}_0$ , de symbole  $m$ . On définit alors  $s_n = rL + m$ .

On remarque d'une part que deux composantes connexes différentes possèdent des codages différents et d'autre part que le nombre de symboles admissibles  $s_{k+1}$  qui peuvent suivre un symbole  $s_k$  est majoré par  $L + 1$ . On a aussi  $L \leq \lambda_- + 4$ .

On en déduit que le cardinal de l'ensemble des suites obtenues en codant les intervalles  $\mathcal{C}_n$  pour toutes les applications de  $\mathcal{P}$  est borné par  $(\lambda_- + 5)^{n+1}$ .

Un raisonnement similaire permet de montrer l'estimée suivante :

**Proposition 6.3.2** *Soit  $\tilde{f} \in \mathcal{P}$ . Pour tout  $n \geq 0$ , le cardinal de  $\varepsilon_n$  est majoré par  $4.6^n$ .*

*Démonstration* : Nous montrons cette inégalité par récurrence sur  $n$  en comptant le nombre de suites codant pour un intervalle de  $\varepsilon_n$  :

Pour  $n = 0$ , il est clair que le cardinal de  $\varepsilon_0$  est égal à 4.

Supposons maintenant  $n \geq 1$  et considérons un intervalle  $I$  inclus dans  $\varepsilon_n$ . Les composantes connexes de  $I \setminus \Delta_{n+1}$  qui ne sont pas régulières sont au plus au nombre de 6. □

Comme corollaire, l'ensemble des intervalles réguliers maximaux pour l'inclusion forme une partition mesurable du cercle. Plus précisément :

**Corollaire 6.3.3** *Pour tout  $n \geq 0$ ,*

$$\sum_{I \in \varepsilon_n} |I| \leq \frac{4}{\lambda - 1} \left( \frac{6}{\lambda} \right)^n.$$

## 6.4 Composantes de l'espace des paramètres

### 6.4.1 Continuations

Pour  $n \geq 0$ , nous définissons

$$\hat{\Delta}_n = \{(\omega, \omega') \in \mathcal{P}, \Delta_n(\omega, \omega') \cap \{c_1, c'_1\} \neq \emptyset\}$$

qui est un fermé de  $\mathcal{P}$ . Nous appelons **composantes** d'ordre  $n$  de  $\mathcal{P}$  les composantes connexes de  $\mathcal{P} \setminus \hat{\Delta}_n$ .

**Proposition 6.4.1** *Soit  $U$  une composante de  $\mathcal{P} \setminus \hat{\Delta}_n$ . Alors,*

- i. l'ensemble  $\Delta_{n+1}$  peut être suivi continûment sur  $U$  ;*
- ii. pour tout  $x \in \Delta_{n+1}$ , l'application  $U \rightarrow \mathbb{T}^1$  définie par  $(\omega, \omega') \mapsto x(\omega, \omega')$  est analytique et se prolonge continûment à  $\text{Adh}(U)$  ;*
- iii. pour tous  $(\omega_1, \omega'_1), (\omega_2, \omega'_2) \in U$ , et  $x, y \in \Delta_{n+1}$ , l'intervalle  $[x(\omega_1, \omega'_1), y(\omega_1, \omega'_1)]$  est régulier si et seulement si  $[x(\omega_2, \omega'_2), y(\omega_2, \omega'_2)]$  l'est.*

### 6.4.2 Coordonnées et composantes

Soit  $n \geq 0$  et  $U$  une composante de  $\mathcal{P}$  d'ordre  $n$ . D'après la proposition 6.4.1, il existe un unique couple  $(I, I')$  d'intervalles ouverts, appartenant à  $\mathcal{C}_n$ , et variant continûment sur  $U$ , tels que  $c_1 \in I$  et  $c'_1 \in I'$ .

On définit alors une application  $\Psi_U : U \rightarrow ]0, 1[$  de la façon suivante :

$$\Psi_U(\omega, \omega') = (\Psi_U^1(\omega, \omega'), \Psi_U^2(\omega, \omega')) = (t, u)$$

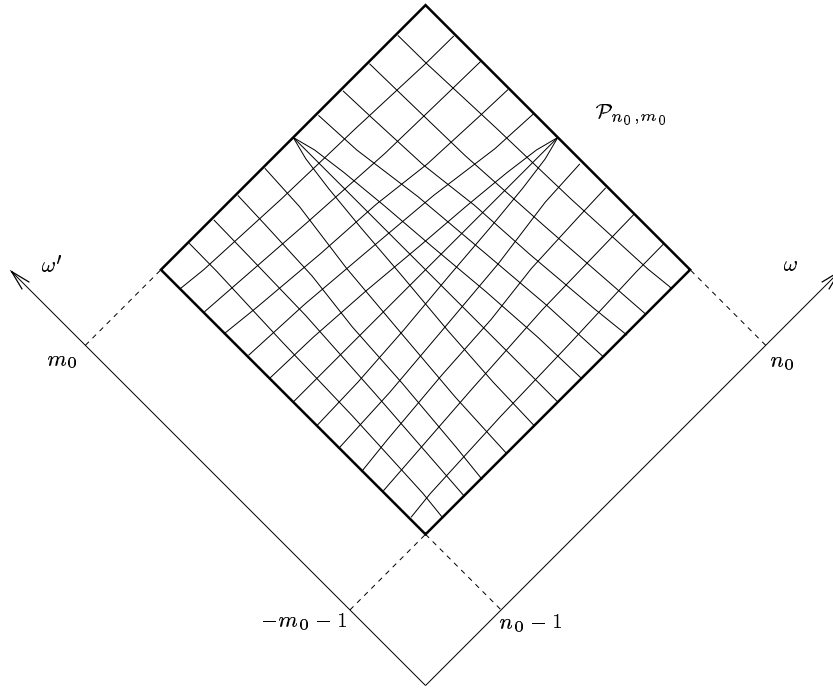
si et seulement si

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= t\tilde{z}_1 + (1-t)\tilde{z}_2, \\ \tilde{c}'_1 &= u\tilde{z}'_1 + (1-u)\tilde{z}'_2, \end{aligned}$$

où  $]\tilde{z}_1, \tilde{z}_2[$  et  $]\tilde{z}'_1, \tilde{z}'_2[$  sont des relevés à  $\mathbb{R}$  des intervalles  $I$  et  $I'$ .

**Proposition 6.4.2** *Soit  $n \geq 1$  et  $U$  une composante de  $\mathcal{P}$  d'ordre  $n$ . Alors,*

- i.  $\Psi_U$  est un difféomorphisme local ;*


 FIG. 6.1: Le domaine  $\mathcal{P}_{n_0, m_0}$ .

- ii. soit  $(\omega_0, \omega'_0) \in U$  et  $(t_0, u_0) = \Psi_U(\omega_0, \omega'_0)$ . Les courbes définies localement  $u \mapsto \Psi_U^{-1}(t_0, u)$  et  $t \mapsto \Psi_U^{-1}(t, u_0)$  sont respectivement de type  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .

*Démonstration :* Fixons  $(\omega_0, \omega'_0) \in U$  et posons  $(t_0, u_0) = \Psi_U(\omega_0, \omega'_0)$ . Le lemme de transversalité 6.2.3 montre que le long d'une courbe  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma'$ ), la seconde coordonnée  $u(\omega, \omega') = \Psi_U^1(\omega, \omega')$  (resp. la première coordonnée  $t(\omega, \omega')$ ) possède une dérivée non nulle. Par conséquent, les ensembles  $(\Psi_U^1)^{-1}(t_0)$  et  $(\Psi_U^2)^{-1}(u_0)$  sont localement des courbes  $C^1$ . La démonstration du lemme 6.2.2 entraîne alors que ce sont des courbes de type  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  respectivement. Ceci achève le (ii).

La différentielle  $D\Psi_U(\omega_0, \omega'_0)$  est surjective. On en déduit le (i).

□

### 6.4.3 Décomposition des composantes

On obtient facilement que pour toute composante  $U$  d'ordre 0 de  $\mathcal{P}$ ,  $\Psi_U : U \rightarrow ]0, 1[^2$  est un difféomorphisme. Les composantes d'ordre 0 forment donc une partition mesurable finie de  $\mathcal{P}$  (voir figure 6.1). La proposition suivante généralise ce résultat aux composantes de tout ordre. On obtient ainsi localement une structure produit de l'espace des paramètres.

**Proposition 6.4.3** Soit  $U \subset \mathcal{P}$  une composante d'ordre  $n \geq 0$ .

- i.  $\Psi_U : U \rightarrow ]0, 1[^2$  est un difféomorphisme.
- ii.  $\hat{\Delta}_{n+1} \cap U$  est une union finie de courbes de type  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  et  $U \setminus \hat{\Delta}_{n+1}$  est une réunion finie de composantes d'ordre  $n + 1$ .

*Démonstration* : On montre ce résultat par récurrence sur l'ordre  $n$ . Pour  $n = 0$ , nous avons vu que le (i) est vérifié. Soit donc  $U$  une composante d'ordre  $n$  vérifiant le (i) et caractérisée par les intervalles ouverts  $I$  et  $I'$ , éléments de  $\mathcal{C}_n$  et les conditions  $c_1 \in I$  et  $c'_1 \in I'$ . D'après la proposition 6.4.1,  $\Delta_{n+1}$  varie continûment sur  $U$ . Nous notons  $x_0 < x_1 < \dots < x_m$  et  $x'_0 < x'_1 < \dots < x'_m$ , les points de  $\Delta_{n+1}$  contenus dans l'intervalle  $\text{Adh}(I) = [x_0, x_m]$  (resp.  $\text{Adh}(I') = [x'_0, x'_m]$ ).

Puisque  $U$  vérifie le (i), les relations  $c_1 = x_j$  (resp.  $c'_1 = x'_j$ ) définissent des courbes de type  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma'$ ) qui traversent  $U$ . Leur complémentaire est réunion de composantes d'ordre  $n + 1$  qui vérifient le (i). □

Soit  $U$  est une composante d'ordre  $n$ , caractérisée par deux intervalles  $I, I' \in \mathcal{C}_n$ . Ces intervalles sont codés respectivement par les suites  $(s_k)$  et  $(s'_k)$  (voir la section 6.3.2). La construction des composantes par récurrence montre que les suites associées à des composantes distinctes ne peuvent être égales. On en déduit que le nombre de composantes d'ordre  $n$  de  $\mathcal{P}$  est majoré par

$$(L + 1)^{2(n+1)} \leq (\lambda_- + 5)^{2(n+1)}.$$

#### 6.4.4 Mesure des composantes

La mesure des composantes est bornée uniformément :

**Proposition 6.4.4** *Il existe une constante  $C_1 > 1$  vérifiant pour tout  $n \geq 0$  et toute composante  $U$  d'ordre  $n$  de  $\mathcal{P}$ ,*

$$m(U) \leq C_1 \lambda_-^{-2(n+1)}.$$

Nous utiliserons le lemme suivant

**Lemme 6.4.5** *Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}$  une courbe de type  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma'$ ) et  $I = ]z_1, z_2[$  un élément de  $\mathcal{C}_n$  que l'on suit continûment sur  $\Gamma$  de sorte que pour le paramètre  $\gamma(t)$ ,  $c_1 = tz_1 + (1-t)z_4$  (resp.  $c_1 = tz_1 + (1-t)z_4$ ). Alors,*

$$\left(1 - \frac{7}{\lambda_- + 6}\right) |I|(\gamma(t)) \leq \|D\gamma(t)\| \leq \left(1 + \frac{7}{\lambda_- - 8}\right) |I|(\gamma(t)).$$

*Démonstration* : On obtient pour tout  $t_0 \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t_0} [(c_1 - (t_0 z_1 + (1-t_0)z_4))(\gamma(t))] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t_0} [(tz_1 + (1-t)z_4) - (t_0 z_1 + (1-t_0)z_4)](\gamma(t)) \\ &= (z_1 - z_4)(\gamma(t_0)). \end{aligned}$$

Mais si  $\theta \mapsto \sigma(\theta)$  est une reparamétrisation de  $\gamma$  par sa longueur, et si  $\sigma(\theta_0) = \gamma(t_0)$ , le lemme 6.2.3 donne

$$1 - \frac{7}{\lambda_- - 1} \leq \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} [(c_1 - (t_0 z_4 + (1-t_0)z_1))(\sigma(\theta))] \right| \leq 1 + \frac{7}{\lambda_- - 1}.$$

On termine la démonstration en utilisant la formule

$$\begin{aligned} \|D\gamma(t_0)\| \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta_0} [(c_1 - (t_0 z_4 + (1 - t_0) z_1))(\sigma(\theta))] \right| \\ = \left| \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t_0} [(c_1 - (t_0 z_4 + (1 - t_0) z_1))(\gamma(t))] \right|. \end{aligned}$$

□

*Démonstration de la proposition 6.4.4 :* On introduit pour tout  $t_0, u_0 \in ]0, 1[$ , les courbes  $\gamma_{t_0} : u \mapsto \Psi_U^{-1}(t_0, u)$  et  $\gamma_{u_0} : t \mapsto \Psi_U^{-1}(t, u_0)$ . On calcule l'aire de  $U$  en intégrant :

$$m(U) = \int_{]0, 1[^2} \|D\gamma_u(t, u) \wedge D\gamma_t'(t, u)\| dt du.$$

Par définition des courbes de type  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ ,

$$C^{-1} \leq \frac{\|D\gamma_t(t, u) \wedge D\gamma_u'(t, u)\|}{\|D\gamma_t(t, u)\| \cdot \|D\gamma_u'(t, u)\|} \leq C.$$

Le lemme 6.4.5 conclut la démonstration.

□

## 6.5 Paramètres réguliers

### 6.5.1 Paramètres et intervalles réguliers

Fixons un entier  $s \geq 1$ . Nous définissons l'ensemble  $\mathcal{P}(s) \subset \mathcal{P}$  des paramètres  $(\omega, \omega')$  pour lesquels,

1.  $(\omega, \omega')$  appartient à  $\mathcal{P} \setminus \hat{\Delta}_{2^{s+1}-1}$  ;
2. il existe un entier  $2^s \leq n \leq 2^{s+1} - 1$  tel que  $c_1$  et  $c'_1$  appartiennent à des intervalles  $I$  et  $I'$  réguliers d'ordre  $n$ .

C'est une union de composantes d'ordre  $2^{s+1} - 1$ . Par la suite, nous travaillerons au sein d'un ensemble  $\mathcal{P}(s)$ ,  $s \geq 1$ . La proposition suivante montre que  $\cup_s \mathcal{P}(s)$  est de mesure totale dans  $\mathcal{P}$ .

**Proposition 6.5.1** *Pour tout  $s \geq 1$ ,*

$$m(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}(s)) \leq C_1 \left( \frac{16}{\lambda_-} \right)^{2^{2^s} - 2^s}.$$

*Démonstration :* Une composante d'ordre  $2^{s+1} - 1$  qui ne compose pas  $\mathcal{P}(s)$  vérifie pour tout entier  $2^s \leq k \leq 2^{s+1} - 1$  la propriété suivante :

- ( $P_k$ ) Un des points  $c_1$  ou  $c'_1$  n'appartient pas à un intervalle régulier d'ordre  $k$ .

Nous allons estimer le nombre de ces composantes.

Rappelons que le cardinal de  $\mathcal{C}_{2^s-1}$  est borné par

$$(L+1)^{2 \cdot 2^s}.$$

Soit  $U$  une composante d'ordre  $2^s - 1 \leq n \leq 2^{s+1} - 2$ . Elle se décompose en composantes  $V$  d'ordre  $n+1$ . Nous appelons  $I$  et  $I'$  les composantes de  $\mathcal{C}_n$  associées à  $U$ . Les composantes connexes de  $I \cap \Delta_{n+1}$  varient continûment sur  $U$  et sont en nombre inférieur ou égal à  $L+1$ . Parmi elles, au plus 6 ne sont pas régulières. Les mêmes remarques s'appliquent à  $I' \cap \Delta_{n+1}$ . Par conséquent, le nombre de composantes  $V$  satisfaisant  $P_{n+1}$  est majoré par  $12(L+1)$ . Finalement,  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}(s)$  possède au plus

$$(L+1)^{2 \cdot 2^s} \cdot (12L+12)^{2^{2^s}-2^s}$$

composantes d'ordre  $2^{2^s}-1$ . On obtient grâce à la proposition 6.4.4 l'estimée suivante :

$$m(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}(s)) \leq C_1 \left( \frac{\lambda_- + 5}{\lambda_-} \right)^{2^s+2^{2^s}} \left( \frac{12}{\lambda_-} \right)^{2^{2^s}-2^s}.$$

□

### 6.5.2 Définition des paramètres réguliers

Nous fixons un entier  $s \geq 1$  et pour toute application  $f$  dont le paramètre  $(\omega, \omega')$  n'appartient pas à  $\hat{\Delta}_{2^s-1}$ , nous définissons les **intervalles simples** de  $f$  comme les intervalles réguliers d'ordre strictement inférieur à  $2^s$ . D'après la proposition 6.4.1, si  $U$  est la composante d'ordre  $2^s - 1$  qui contient  $(\omega, \omega')$ , on peut suivre continûment l'ensemble des intervalles simples de  $f$  sur  $\text{Adh}(U)$ .

Supposons à présent que le paramètre  $(\omega, \omega')$  appartient à  $\mathcal{P}(s)$ . Nous notons  $N_0 = N'_0$  le plus petit entier compris entre  $2^s + 2$  et  $2^{s+1} + 1$  tel que  $c_1$  et  $c'_1$  appartiennent à des intervalles réguliers d'ordre  $N_0 - 2 = N'_0 - 2$ , que l'on appellera  $B(0)$  et  $B'(0)$ . (Il est bien clair que la définition de  $N_0 = N'_0$  dépend implicitement de  $s$ .)

Pour tout  $n \geq 1$ , on définit les **paramètres réguliers** d'ordre  $n$ ,  $\mathcal{R}(s, n) \subset \text{Adh}(\mathcal{P}(s))$ , comme l'ensemble des paramètres de  $\text{Adh}(\mathcal{P}(s))$  satisfaisant à deux propriétés  $(R1)_{s,n}$  et  $(R2)_{s,n}$ . L'ensemble des paramètres vérifiant une propriété supplémentaire  $(R3)_{s,n}$  sera noté  $\mathcal{R}'(s, n)$ .

$(R1)_{s,n}$  Pour tout entier  $1 \leq m \leq n$ ,  $c_m$  et  $c'_m$  appartiennent à un intervalle régulier.

Ainsi pour  $c_1$  et  $c'_1$ , les intervalles réguliers correspondants seront par exemple  $B(0)$  et  $B'(0)$ , d'ordre  $N_0 - 2$  et  $N'_0 - 2$ . On choisit des relevés  $\tilde{B}(0)$  et  $\tilde{B}'(0)$  de sorte que  $\tilde{c}_1 \in \tilde{B}(0)$  et  $\tilde{c}'_1 \in \tilde{B}'(0)$ .

Plus généralement, lorsque le paramètre de l'application  $f$  est régulier d'ordre  $n$ , on définit deux suites de temps de retour,  $(N_k)_{k \geq 0}$  et  $(N'_l)_{l \geq 0}$ , avec  $N_k, N'_l \leq n$ , deux suites d'intervalles réguliers maximaux  $(\tilde{J}_k)_{k \geq 0}$  et  $(\tilde{J}'_l)_{l \geq 0}$  de  $\mathbb{R}$ , d'ordres respectifs  $(N(k))_{k \geq 0}$  et  $(N'(l))_{l \geq 0}$  tels que :

1.  $\tilde{c}_{N_k} \in \tilde{J}_k$  (resp.  $\tilde{c}'_{N'_l} \in \tilde{J}'_l$ ).
2.  $N_{k+1} = N_k + N(k) + 1$  (resp.  $N'_{l+1} = N'_l + N'(l) + 1$ ).
3. Pour tout  $N_0 \leq m \leq n$ ,  $c_m$  (resp.  $c'_m$ ) appartient à un intervalle régulier maximal d'ordre  $r$  avec  $r = N_k - m - 1$  où  $k = \inf\{j, N_j > m\}$  (resp.  $r = N'_l - m - 1$  où  $l = \inf\{j, N'_j > m\}$ ).

Nous pouvons maintenant donner les deux dernières conditions :

(R2)<sub>s,n</sub> Pour tous  $k, l \geq 1$ , tels que  $N(k)$  et  $N'(l)$  soient définis, ( $N_k, N_l \leq n$ )

$$N(k) < N_k \quad (\text{resp. } N'(l) < N'_l).$$

(R3)<sub>s,n</sub> Pour tout  $1 \leq m \leq n$ ,

$$\sum_{\substack{2^{2^s} \leq N_k \leq m \\ N(k) > 2^s}} (N(k) + 1) + \sum_{\substack{2^{2^s} \leq N'_l \leq m \\ N'(l) > 2^s}} (N'(l) + 1) \leq \frac{1}{4}m.$$

**Définition 6.5.1** Les **paramètres réguliers**,  $\mathcal{R}(s)$ , sont les paramètres réguliers d'ordre  $n$  pour tout  $n \geq 0$ . Ainsi,  $\mathcal{R}(s) = \bigcap_n \mathcal{R}(s, n)$  On note également  $\mathcal{R}'(s) = \bigcap_n \mathcal{R}'(s, n)$ .

On notera  $B(k) \subset B(0)$  l'intervalle régulier d'ordre  $N_k + N(k) - 1$  tel que

$$g_{\tilde{B}(k)} = g_{\tilde{B}(0)} \circ g_{\tilde{J}_1} \circ \cdots \circ g_{\tilde{J}_k} = g_{\tilde{B}(k-1)} \circ g_{\tilde{J}_k}$$

et on introduit  $B'(l) \subset B'(0)$  de la même façon.

Les suites  $(B(k))$  et  $(B'(l))$  sont décroissantes et (lorsque le paramètre de  $f$  est régulier) tendent vers  $\{c_1\}$  et  $\{c'_1\}$ .

**Remarques 6.5.1** 1. La condition (R2) sera essentielle au paragraphe suivant (voir la démonstration de la proposition 6.5.2).

2. La condition (R3) exprime qu'une grande proportion des intervalles réguliers de retour des orbites critiques sont des intervalles simples. Ceci sera important en 6.6.3.

### 6.5.3 Structure de $\mathcal{R}(s, n)$

L'ensemble  $\text{Adh}(\mathcal{P}(s))$  est, à un ensemble de mesure nulle près, réunion disjointe de composantes maximales  $U$  sur lesquelles  $N_0$  est constante. Une telle composante est d'ordre  $N_0 - 2$ . Son adhérence  $R$  forme un **rectangle élémentaire** de  $\text{Adh}(\mathcal{P}(s))$ . Nous rappelons qu'il existe des intervalles réguliers  $I$  et  $I'$  d'ordre  $N_0 - 2$  tels que sur  $R$ ,  $c_1 \in \text{Adh}(I)$  et  $c'_1 \in \text{Adh}(I')$ . L'application  $\Psi_U$  se prolonge en un difféomorphisme

$$\Psi_R : R \rightarrow [0, 1]^2.$$

Nous expliquons ici comment obtenir  $\mathcal{R}(s, n + 1)$  à partir de  $\mathcal{R}(s, n)$ .

La proposition suivante nous permet de définir les **rectangles** de  $\mathcal{R}(s, n)$  :

**Proposition 6.5.2** Soit  $n \geq 1$ , alors  $\mathcal{R}(s, n)$  est une union finie de rectangles fermés  $Q$  d'intérieurs disjoints tels que :

i.

$$\text{Int}(Q) \subset \mathcal{P} \setminus \hat{\Delta}_n.$$

Pour tout  $(\omega, \omega') \in Q$ , les intervalles  $\tilde{J}_0, \dots, \tilde{J}_k$  et  $\tilde{J}'_0, \dots, \tilde{J}'_l$  sont bien définis et dépendent continûment du paramètre  $(\omega, \omega')$ . Les entiers  $k$  et  $l$  vérifient les relations

$$N_k \leq n \leq N_k + N(k), \quad N'_l \leq n \leq N'_l + N'(l). \quad (6.10)$$



ii. L'intervalle  $B(k)$  tel que

$$g_{\tilde{B}(k)} = g_{\tilde{B}(0)} \circ g_{\tilde{J}_1} \circ \cdots \circ g_{\tilde{J}_k}$$

est bien défini. Il y a une propriété correspondante pour  $B'(l)$ . Les bords de  $Q$  correspondent aux relations

$$c_1 \in \text{Fr}(B(k)) \text{ et } c'_1 \in \text{Fr}(B'(l)).$$

Cette décomposition de  $\mathcal{R}(s, n)$  est unique.

*Démonstration* : Nous procédons par récurrence sur  $n$ . Nous fixons un rectangle  $Q$  de  $\mathcal{R}(s, n)$  et nous nous intéressons à  $Q \cap \mathcal{R}(s, n+1)$ . Les entiers  $k$  et  $l$  vérifient (6.10).

Si  $n+1 \leq N_k + N(k)$  et  $n \leq N'_l + N'(l)$ ,  $Q$  reste un rectangle de  $\mathcal{R}(s, n+1)$ . Il n'y a rien à vérifier.

Si par exemple  $n = N_k + N(k)$ , on pose  $N_{k+1} = N_k + N(k) + 1$  et il faut subdiviser  $Q$ . Le point  $c_1$  appartient à l'intervalle  $B(k)$  d'ordre  $n-1$ , et le point  $c'_1$  appartient à l'intervalle  $B'(l)$  d'ordre  $N'_l + N'(l) - 1 \geq n-1$ . On remarque donc que  $\tilde{\Delta}_n$  varie continûment sur  $Q$ . Si  $\tilde{A} = \tilde{f}^{N_{k+1}-1}(\tilde{B}(k))$ ,  $\tilde{c}_{N_{k+1}}$  parcourt entièrement  $\tilde{A}$  lorsque  $(\omega, \omega')$  décrit  $Q$ . Les intersections de  $\tilde{c}_{N_{k+1}}$  avec  $\tilde{\Delta}_n$  définissent des courbes de type  $\Gamma$  qui traversent  $Q$  et sont transverses aux bords opposés définis par  $c'_1 \in \text{Fr}(B'(l))$  (c'est juste le théorème des fonctions implicites car  $c_1, \dots, c_{N_{k+1}-1}$  ne rencontrent pas  $\{c_0, c'_0\}$  sur  $\text{Int}(Q)$ ).

Le rectangle  $Q$  est donc découpé en rectangles pour lesquels  $\tilde{c}_{n+1}$  a une combinatoire constante. Il suffit pour décrire  $\mathcal{R}(s, n+1) \cap Q$  de retenir les rectangles qui correspondent à des intervalles réguliers d'ordre inférieur ou égal à  $n$ . (La condition (R2) est essentielle.)

On subdivise aussi  $Q$  selon des courbes de type  $\Gamma'$  lorsque  $n = N'_l + N'(l)$ .

□

**Remarque 6.5.2** On obtient  $\mathcal{R}'(s, n)$  en ne conservant dans  $\mathcal{R}(s, n)$  que les rectangles qui satisfont (R3) $_{s,n}$ . Ainsi  $\mathcal{R}'(s, n)$  satisfait également la proposition 6.5.2.

### 6.5.4 Mesure relative des rectangles

Nous reprenons la discussion du paragraphe précédent afin de montrer le résultat suivant :

**Proposition 6.5.3** Soit  $Q$  un rectangle de  $\mathcal{R}(s, n)$  défini par les conditions  $c_1 \in B(k-1)$  et  $c'_1 \in B'(l-1)$ . On se donne  $\tilde{x}, \tilde{y}$  deux points de  $\tilde{\Delta}_n$  dans  $\tilde{A} = \tilde{f}^{N_k-1}(\tilde{B}(k-1))$  (resp.  $\tilde{A} = \tilde{f}^{N'_l-1}(\tilde{B}'(l-1))$ ). Notons encore  $Q(\tilde{x}, \tilde{y})$  l'ensemble des paramètres de  $Q$  pour lesquels

$$\tilde{c}_{N_k} \in [\tilde{x}, \tilde{y}] \quad (\text{resp. } \tilde{c}'_{N'_l} \in [\tilde{x}, \tilde{y}]).$$

Alors,

$$C_2^{-1} \min_Q d(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \frac{m(Q(\tilde{x}, \tilde{y}))}{m(Q)} \leq C_2 \max_Q d(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

où  $C_2 > 1$  est une constante.

Nous commençons par quelques calculs préliminaires :

1. Soit  $Q$  un rectangle de  $\mathcal{R}(s, n)$ . Il est caractérisé par deux intervalles réguliers  $B(k-1)$  et  $B'(l-1)$  et des conditions

$$c_1 \in B(k-1), \quad c'_1 \in B'(l-1).$$

Comme pour les composantes de  $\mathcal{P}$ , on peut paramétrer linéairement  $B(k-1) \times B'(l-1)$  par  $[0, 1]^2$  ; on obtient un difféomorphisme  $\Psi_Q : Q \rightarrow [0, 1]^2$ . Pour tout  $(t_0, u_0) \in [0, 1]^2$ , les courbes  $\gamma_{t_0} : u \mapsto \Psi_Q^{-1}(t_0, u)$  et  $\gamma'_{u_0} : t \mapsto \Psi_Q^{-1}(t, u_0)$  sont des courbes de type  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .

2. Sur  $Q$ ,  $|B(k-1)|$  et  $|B'(l-1)|$  varient peu :

**Lemme 6.5.4** *Pour tous  $s, n \geq 1$  et tout rectangle  $Q$  de  $\mathcal{R}(s, n)$  (caractérisé par  $c_1 \in B(k-1)$  et  $c'_1 \in B'(l-1)$ ),*

$$\begin{aligned} \min_Q |B(k-1)| &\geq \frac{1}{2} \max_Q |B(k-1)| \\ \text{et } \min_Q |B'(l-1)| &\geq \frac{1}{2} \max_Q |B'(l-1)|. \end{aligned}$$

*Démonstration du lemme 6.5.4 :* D'après le 1), il suffit de voir que si  $\theta \mapsto \sigma(\theta)$  est une courbe de type  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma'$ ) contenue dans  $Q$ ,

$$\begin{aligned} \min_{\sigma} |B(k-1)| &\geq \frac{3}{4} \max_{\sigma} |B(k-1)| \\ \text{et } \min_{\sigma} |B'(l-1)| &\geq \frac{3}{4} \max_{\sigma} |B'(l-1)|. \end{aligned}$$

Supposons par exemple que  $\sigma$  soit une courbe de type  $\Gamma'$  contenue dans  $Q$  paramétrée par sa longueur  $l(\sigma)$ . Le lemme 6.2.3 implique

$$l(\sigma) \leq C \max_Q |B(k-1)|.$$

On étudie ici  $|B(k-1)|$  (resp.  $|B'(l-1)|$ ). On pose  $[z_1, z_4] = B(k-1)$  (resp.  $[z_1, z_4] = B'(l-1)$ ). Un calcul donne  $|z_4 - z_1| = \frac{\lambda^{-m}}{\lambda-1}$  ou  $|z_4 - z_1| = \frac{\lambda^{-m}}{\lambda-1}$  avec  $m = N_k - 2$  (resp.  $N'_l - 2$ ). Ainsi  $m \geq 4$ .

D'autre part,  $\sigma$  étant de type  $\Gamma'$ ,  $|\frac{\partial \lambda}{\partial \theta}| \leq \frac{2\lambda^2}{\lambda^2+1}$  d'après (6.1) et

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} (z_4 - z_1) \right| \leq 2(m+1) \frac{\lambda^{-m}}{(\lambda-1)^2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left| \max_{\sigma} |z_4 - z_1| - \min_{\sigma} |z_4 - z_1| \right| &\leq 2(m+1) \max_Q \left( \frac{\lambda^{-m}}{(\lambda-1)^2} \right) l(\sigma) \\ &\leq \frac{2(m+1)}{\lambda^m (\lambda-1)^{-2}} \max_Q |z_4 - z_1|. \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{m+1}{\lambda_-^m} \leq 1.$$

Donc

$$\left| \max_{\sigma} |z_4 - z_1| - \min_{\sigma} |z_4 - z_1| \right| \leq \frac{1}{4} \max_Q |z_4 - z_1|.$$

Le même résultat est valable le long des courbes de type  $\Gamma$ .

□

3. Le lemme 6.4.5 s'applique aussi aux rectangles : sous les hypothèses du 1), pour tout  $(t, u_0) \in [0, 1]^2$ ,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{7}{\lambda_- + 6}\right) |B(k-1)| (\gamma'_{u_0}(t)) &\leq \|D\gamma'_{u_0}(t)\| \\ &\leq \left(1 + \frac{7}{\lambda_- - 8}\right) |B(k-1)| (\gamma'_{u_0}(t)), \end{aligned}$$

pour tout  $(t_0, u) \in [0, 1]^2$ ,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{7}{\lambda_- + 6}\right) |B'(l-1)| (\gamma_{t_0}(u)) &\leq \|D\gamma_{t_0}(u)\| \\ &\leq \left(1 + \frac{7}{\lambda_- - 8}\right) |B'(l-1)| (\gamma_{t_0}(u)). \end{aligned}$$

Avec le 2) nous concluons que les dérivées des courbes  $\gamma_{t_0}$  (resp.  $\gamma'_{u_0}$ ) sont essentiellement constantes et ne dépendent pas de  $t_0$  (resp.  $u_0$ ).

4. **Lemme 6.5.5** *Sous les hypothèses du 1), nous considérons  $\theta \mapsto \sigma(\theta)$  une courbe de type  $\Gamma'$ , paramétrée par sa longueur  $l(\sigma)$ , qui traverse  $Q$  (i.e.  $\sigma$  est contenue dans  $Q$  et  $c_1(\sigma(0)), c_1(\sigma(l(\sigma))) \in \text{Fr}(B(k-1))$ ). Soient  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\Delta}_n \cap \tilde{f}^{N_k-1}(\tilde{B}(k-1))$ . On définit  $\theta_2, \theta_3 \in [0, l(\sigma)]$  tels que*

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\sigma(\theta_2)) &= \tilde{c}_{N_k}(\sigma(\theta_2)), \\ \tilde{y}(\sigma(\theta_3)) &= \tilde{c}_{N_k}(\sigma(\theta_3)). \end{aligned}$$

Alors,

$$C^{-1} \min_{\sigma} |\tilde{x} - \tilde{y}| \leq \frac{|\theta_2 - \theta_3|}{l(\sigma)} \leq C \max_{\sigma} |\tilde{x} - \tilde{y}|.$$

Il y a un énoncé équivalent pour les courbes de type  $\Gamma$ .

*Démonstration du lemme 6.5.5* : On introduit dans  $B(0)$  les points

$$z_1 \leq z_2, z_3 \leq z_4,$$

tels que

$$\begin{aligned} [z_1, z_4] &= B(k-1), \\ [\tilde{f}^{N_k-1}(\tilde{z}_2), \tilde{f}^{N_k-1}(\tilde{z}_3)] &= [\tilde{x}, \tilde{y}]. \end{aligned}$$

Le lemme 6.2.3 donne alors

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{7}{\lambda_- - 1}\right) \min_{\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3} |z_3 - z_2| &\leq |\theta_3 - \theta_2| \leq \left(1 + \frac{7}{\lambda_- - 1}\right) \max_{\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3} |z_3 - z_2|, \\ \left(1 - \frac{7}{\lambda_- - 1}\right) \min_{0 \leq \theta \leq l(\sigma)} |z_3 - z_2| &\leq l(\sigma) \leq \left(1 + \frac{7}{\lambda_- - 1}\right) \max_{0 \leq \theta \leq l(\sigma)} |z_3 - z_2|. \end{aligned}$$

En utilisant le 2), on sait que

$$\min_{0 \leq \theta \leq l(\sigma)} |z_4 - z_1| \geq \frac{1}{2} \max_{0 \leq \theta \leq l(\sigma)} |z_4 - z_1|,$$

donc

$$C^{-1} \min_{\sigma} \frac{|z_3 - z_2|}{|z_4 - z_1|} \leq \frac{|\theta_3 - \theta_2|}{l(\sigma)} \leq C \max_{\sigma} \frac{|z_3 - z_2|}{|z_4 - z_1|}.$$

On termine la démonstration en remarquant que

$$\lambda^{N_{k-1}-1} |z_3 - z_2| = |\tilde{x} - \tilde{y}| \text{ et } \frac{1}{\lambda + 1} \leq \lambda^{N_{k-1}-2} |z_4 - z_1| \leq \frac{1}{\lambda - 1}.$$

□

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration de la proposition :

*Démonstration de la proposition 6.5.3 :* Avec les notations du 1), et comme pour la démonstration de la proposition 6.4.4, on compare  $m(Q)$  et  $m(Q(x, y))$  en intégrant :

$$m(Q) = \int_{[0,1]^2} \|D\gamma_t(t, u) \wedge D\gamma'_u(t, u)\| dt du.$$

Le 3) entraîne

$$C^{-1} |B(k-1)| |B'(l-1)| \leq m(Q) \leq C |B(k-1)| |B'(l-1)|. \quad (6.11)$$

Fixons  $u_0 \in [0, 1]$ . On pose

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{N_k}(\gamma'_{u_0}(t_2)) &= \tilde{x}(\gamma'_{u_0}(t_2)), \\ \tilde{c}_{N_k}(\gamma'_{u_0}(t_3)) &= \tilde{y}(\gamma'_{u_0}(t_3)). \end{aligned}$$

On reparamètre  $\gamma'_{s_0}$  par sa longueur en une courbe  $\theta \mapsto \sigma(\theta)$ . Alors, avec les notations du 4), le 3) donne

$$C^{-1} \frac{|\theta_3 - \theta_2|}{l(\sigma)} \leq |t_3 - t_2| \leq C \frac{|\theta_3 - \theta_2|}{l(\sigma)}.$$

Puis d'après 4)

$$C^{-1} \min_{\sigma} |\tilde{x} - \tilde{y}| \leq |t_3 - t_2| \leq C \max_{\sigma} |\tilde{x} - \tilde{y}|.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} C^{-1} |B(k-1)| |B'(l-1)| \min_Q |\tilde{x} - \tilde{y}| &\leq m(Q(\tilde{x}, \tilde{y})) \leq \\ &\leq C |B(k-1)| |B'(l-1)| \max_Q |\tilde{x} - \tilde{y}|. \end{aligned} \quad (6.12)$$

La proposition suit de (6.11) et de (6.12).

□

## 6.6 Démonstration du théorème 6.1.1

### 6.6.1 Mesure de $\mathcal{R}(s)$

Nous estimons la mesure des paramètres réguliers :

**Proposition 6.6.1** *Il existe une constante  $C_3 > 1$  telle que pour tout  $s \geq 1$ ,*

$$m(\mathcal{P}(s) \setminus \mathcal{R}(s)) \leq C_3 \left( \frac{6}{\lambda_-} \right)^{2^s}.$$

Nous rappelons que sur l'intérieur des rectangles de  $\mathcal{R}(s, n)$ , les éléments de  $\varepsilon_n$  varient continûment. Nous pouvons donc améliorer le corollaire 6.3.3 :

**Lemme 6.6.2** *Pour tous  $s, n \geq 1$ , pour tout rectangle  $Q$  de  $\mathcal{R}(s, n)$ , pour tout  $0 \leq k \leq n$ ,*

$$\sum_{J \in \varepsilon_k} \max_Q |J| \leq 4 \left( \frac{6}{\lambda_-} \right)^{k+1}.$$

*Démonstration de la proposition 6.6.1 :* Puisque  $\mathcal{P}(s) \subset \cup_n \mathcal{R}(s, n)$ , nous estimons ici la mesure relative des paramètres de  $\mathcal{R}(s, n)$  qui ne vérifient pas  $(R1)_{s, n+1}$  ou  $(R2)_{s, n+1}$  :

Soit  $Q$  un rectangle de  $\mathcal{R}(s, n)$ . Par définition de  $\mathcal{R}(s, n+1)$ , la proposition 6.5.3 et le lemme 6.6.2 donnent

$$m(Q \setminus \mathcal{R}(s, n+1)) \leq 2C_2 \left( \sum_{J \in \varepsilon_n} \max_Q |J| \right) m(Q) \leq 8C_2 \left( \frac{6}{\lambda_-} \right)^{n+1} m(Q).$$

□

### 6.6.2 Mesure des paramètres $\mathcal{R}'(s)$

Nous obtenons également :

**Proposition 6.6.3** *Il existe une constante  $C_4 > 1$  telle que pour tout  $s \geq 1$  suffisamment grand,*

$$m(\mathcal{R}(s) \setminus \mathcal{R}'(s)) \leq C_4 \left( \frac{12}{\lambda_-} \right)^{\frac{2^s}{10}}.$$

*Démonstration :*

- Nous fixons une valeur de  $s \gg 1$  et nous posons  $\lambda_1 = \left( \frac{\lambda_-}{12} \right)^{\frac{1}{2}} > 1$ . Il suffit d'estimer pour chaque  $n \geq 2^{2^s}$  la mesure des paramètres de  $\mathcal{R}(s, n)$  tels que

$$\sum_{\substack{2^{2^s} \leq N_k \leq n \\ N(k) > 2^s}} (N(k) + 1) + \sum_{\substack{2^{2^s} \leq N'_l \leq n \\ N'(l) > 2^s}} (N'(l) + 1) > \frac{1}{4}n. \quad (6.13)$$

- Nous définissons par récurrence pour tout entier  $n \geq 1$  et tout paramètre  $(\omega, \omega') \in \mathcal{R}(s, n)$ , les entiers  $S_n$  et  $X_n$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} S_0 &= X_0 = 0, \\ S_n &= \sum_{\substack{2^{2s} \leq N_k \leq n \\ N(k) > 2^{2s}}} (N(k) + 1) + \sum_{\substack{2^{2s} \leq N'_l \leq n \\ N'(l) > 2^{2s}}} (N'(l) + 1), \\ X_n &= S_n - S_{n-1}, \end{aligned}$$

avec la convention  $S_0 = X_0 = 0$ . On notera également  $\mathcal{F}_n$  l'ensemble des rectangles de  $\mathcal{R}(s, n)$ . Sur chaque rectangle de  $\mathcal{R}(s, n)$  les entiers  $S_n$  et  $X_n$  sont constants.

Nous estimons par récurrence la quantité

$$\sum_{Q \in \mathcal{F}_n} \lambda_1^{S_n(Q)} m(Q).$$

Bien sûr, pour  $n = 1$ , on obtient  $m(\mathcal{P}(s))$ . Si l'on fixe un choix de rectangles  $Q_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}$  pour  $n \geq 2$ , il vient

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{F}_n, \\ Q \subset Q_{n-1}}} \lambda_1^{S_n(Q)} m(Q) = \lambda_1^{S_{n-1}(Q_{n-1})} \sum_{r \geq 0} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{F}_n, Q \subset Q_{n-1} \\ X_n(Q) = r}} \lambda_1^r m(Q).$$

On remarque que dans les sommes précédentes,  $r$  est soit nul, soit supérieur à  $2^s$ .

Lorsque  $r$  est nul,

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{F}_n, Q \subset Q_{n-1} \\ X_n(Q) = 0}} \lambda_1^r m(Q) \leq m(Q_{n-1}).$$

Lorsque  $r > 2^s$ , nous appliquons le lemme 6.6.2 et la proposition 6.5.3 :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{F}_n, Q \subset Q_{n-1} \\ X_n(Q) = r}} \lambda_1^r m(Q) &\leq \lambda_1^r \sum_{0 \leq j \leq r} C_2 C_4 \left( \frac{12}{\lambda_-} \right)^j C_2 C_4 \left( \frac{12}{\lambda_-} \right)^{r-j} m(Q_{n-1}) \\ &\leq C(r+1) \lambda_1^r \left( \frac{12}{\lambda_-} \right)^r m(Q_{n-1}) \leq C(r+1) \lambda_1^{-r} m(Q_{n-1}). \end{aligned}$$

Pour finir,

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{F}_n, \\ Q \subset Q_{n-1}}} \lambda_1^{S_n(Q)} m(Q) \leq (1 + C \sum_{2^s < r} (r+1) \lambda_1^{-r}) \lambda_1^{S_{n-1}(Q_{n-1})} m(Q_{n-1}).$$

Et donc

$$\sum_{Q \in \mathcal{F}_n} \lambda_1^{S_n(Q)} m(Q) \leq (1 + C \sum_{2^s < r} (r+1) \lambda_1^{-r}) \sum_{Q \in \mathcal{F}_{n-1}} \lambda_1^{S_{n-1}(Q)} m(Q).$$

D'où, par récurrence,

$$\sum_{Q \in \mathcal{F}_n} \lambda_1^{S_n(Q)} m(Q) \leq (1 + C \sum_{2^s < r} (r+1) \lambda_1^{-r})^n.$$

En particulier,

$$\lambda_1^{\frac{n}{4}} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{F}_n, \\ S_n(Q) > \frac{n}{4}}} m(Q) \leq (1 + C \sum_{2^s < r} (r+1) \lambda_1^{-r})^n.$$

La mesure des paramètres de  $\mathcal{R}(s, n)$  vérifiant (6.13) est donc majorée par

$$\lambda_1^{-\frac{n}{4}} (1 + C \sum_{2^s < r} (r+1) \lambda_1^{-r})^n \leq \lambda_1^{-\frac{n}{5}}$$

si  $s$  est assez grand.

- On obtient finalement

$$m(\mathcal{R}(s) \setminus \mathcal{R}'(s)) \leq \sum_{n < 2^s} \left( \frac{12}{\lambda_-} \right)^{\frac{n}{10}}.$$

□

### 6.6.3 Localisation des orbites critiques

La condition (R3) force les orbites critiques à avoir régulièrement des retours simultanés sur des intervalles simples :

**Proposition 6.6.4** *Pour tous  $s \geq 1$ ,  $r > \frac{\log(2^{2^s})}{\log(5)}$ , et tout paramètre de  $\mathcal{R}'(s, 5^{r+1})$ , il existe  $5^r < n \leq 4 \times 5^r$  et des entiers  $k, l \geq 1$  tels que*

$$\begin{aligned} N_k &\leq n < N_{k+1}, & N(k) &< 2^s, \\ N'_l &\leq n < N'_{l+1}, & N'(l) &< 2^s. \end{aligned} \tag{6.14}$$

*Démonstration :* Fixons  $r > \frac{\log(2^{2^s})}{\log(5)}$ . Par définition des intervalles  $J_k$ , pour tout entier  $n$  entre  $5^r + 1$  ( $\geq 2^{2^s}$ ) et  $4 \times 5^r$ , il existe un unique  $k \geq 0$  et  $0 \leq m \leq N(k)$  tel que  $c_n \in f^m(J_k)$ . Deux cas sont possibles selon que  $J_k$  est simple ou non. Cependant, la condition (R3) pour l'entier  $4 \times 5^r$  implique que les entiers  $5^r + 1 \leq n \leq 4 \times 5^r$  associés à des intervalles réguliers  $J_k$  non simples sont en nombre inférieur à  $5^r$ .

De la même façon, les entiers  $5^r + 1 \leq n \leq 4 \times 5^r$  associés à des intervalles réguliers  $J'_l$  non simples sont en nombre inférieur à  $5^r$ .

Il existe donc au moins un entier  $5^r + 1 \leq n \leq 4 \times 5^r$  associé à des intervalles  $J_k$  et  $J'_l$  tous deux simples. C'est ce qu'il fallait démontrer.

□

Nous fixons deux intervalles de retour du cercle  $B$  et  $B'$  vérifiant

$$d(B, \{c_0, c'_0\}), d(B', \{c_0, c'_0\}) > \frac{1}{32}. \tag{6.15}$$

Ce sont des intervalles simples d'ordre 0. Nous choisissons arbitrairement deux autres intervalles de retour  $D$  et  $D'$  tels que

$$\mathfrak{d}(B, D) > \frac{1}{4}, \quad \mathfrak{d}(B', D') > \frac{1}{4}. \quad (6.16)$$

La structure presque markovienne des applications régulières permet de montrer la proposition suivante :

**Proposition 6.6.5** *Pour tous entiers  $s, \bar{p} \geq 1$  et pour presque tout paramètre  $(\omega, \omega')$  de  $\mathcal{R}'(s)$ , il existe un entier  $\bar{n} > 2^{2^s}$  et des entiers  $k, l \geq 1$  tels que*

$$\begin{aligned} N_k &\leq \bar{n} < N_{k+1}, & N(k) &\leq 2^s, \\ N'_l &\leq \bar{n} < N'_{l+1}, & N'(l) &\leq 2^s \end{aligned}$$

et  $J_{k+1} = D$ ,  $J_{k+2} = J_{k+3} = \dots = J_{k+\bar{p}+1} = B$ ,  $J'_{l+1} = D'$ ,  $J'_{l+2} = J'_{l+3} = \dots = J'_{l+\bar{p}+1} = B'$ .

*Démonstration :* On fixe des relevés  $\tilde{B}$  et  $\tilde{B}'$  de  $B$  et  $B'$  respectivement. Il existe des entiers  $n_0 \leq m, m' \leq m_0$  tels que  $\tilde{f}(\tilde{B})$  (resp.  $\tilde{f}(\tilde{B}')$ ) recouvre  $\tilde{B} + m$  (resp.  $\tilde{B}' + m'$ ) pour toute application  $\tilde{f} = \tilde{f}_{\omega, \omega'}$  avec  $(\omega, \omega') \in \mathcal{P}$ .

On note  $\tilde{D}$  (resp.  $\tilde{D}'$ ) l'unique relevé de  $D$  (resp.  $D'$ ) tel que  $\tilde{B} \subset \tilde{F}(\tilde{D})$  (resp.  $\tilde{B}' \subset \tilde{F}(\tilde{D}')$ ) et on introduit pour  $\bar{p} \geq 0$  les intervalles

$$\tilde{B}_{\bar{p}} = g_{\tilde{D}} \circ (g_{\tilde{B}} + m)^{\bar{p}-1}(\tilde{B}) \text{ et } \tilde{B}'_{\bar{p}} = g_{\tilde{D}'} \circ (g_{\tilde{B}'} + m)^{\bar{p}-1}(\tilde{B}').$$

Les intervalles  $B_{\bar{p}} = \pi_0(\tilde{B}_{\bar{p}})$  et  $B'_{\bar{p}} = \pi_0(\tilde{B}'_{\bar{p}})$  sont réguliers d'ordre  $\bar{p}$ .

On définit pour tout

$$r > \frac{\log(2^s + \bar{p} + 1)}{\log(5)} \quad (6.17)$$

et tout entier  $n \geq 5^{r+1}$ , l'ensemble  $\mathcal{R}'(s, n, r)$  des paramètres de  $\mathcal{R}'(s, n)$  pour lesquels il existe des entiers  $5^r < \bar{n} \leq 4 \times 5^r$  et  $k, l \geq 1$  tels que

$$\begin{aligned} N_k &\leq \bar{n} < N_{k+1}, & N(k) &\leq 2^s, \\ N'_l &\leq \bar{n} < N'_{l+1}, & N'(l) &\leq 2^s \end{aligned}$$

et

$$c_{N_{k+1}} \in B_{\bar{p}}, \quad c'_{N'_{l+1}} \in B'_{\bar{p}}. \quad (6.18)$$

Par (6.17),  $4 \times 5^r + 2^s + \bar{p} + 1 < 5^{r+1}$ . L'ensemble  $\mathcal{R}'(s, n, r)$  est donc une union de rectangles de  $\mathcal{R}(s, n)$ . Il suffit de montrer que presque tout paramètre de  $\mathcal{R}'(s)$  est contenu dans un  $\mathcal{R}'(s, n, r)$ , i.e. que l'intersection de la suite décroissante

$$(\mathcal{R}'(s, 5^r) \setminus \bigcup_{r' < r} \mathcal{R}'(s, 5^r, r'))_s$$

est de mesure nulle. Soit  $Q$  un rectangle de  $\mathcal{R}'(s, 5^r) \setminus \bigcup_{r' < r} \mathcal{R}'(s, 5^r, r')$ . D'après la proposition 6.6.4,  $\mathcal{R}'(s, 5^{r+1}) \cap Q$  est contenu dans une réunion finie de rectangles



d'intérieurs disjoints  $Q_1, Q_2, \dots, Q_j$  de  $\mathcal{R}'(s, n_1), \mathcal{R}'(s, n_2), \dots, \mathcal{R}'(s, n_j)$ , où  $n_i$  est le plus petit entier  $5^r < n \leq 4 \times 5^r$  tel qu'il existe  $k, l \geq 1$  satisfaisant (6.14).

Soit  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq j$ , un tel rectangle. On lui associe des entiers  $n_i, k, l \geq 1$ . D'après la proposition 6.5.3, l'ensemble des paramètres de  $\mathcal{R}'_{5^{r+1}} \cap Q_i$  qui satisfont (6.18) est une union de rectangles de  $\mathcal{R}_{5^{r+1}}$  dont la mesure est minorée par

$$C_2^{-2} m(Q_i) \min_{Q_i} |B_{\bar{p}}| \min_{Q_i} |B'_{\bar{p}}|.$$

On peut toujours supposer  $\bar{p}$  grand de sorte que

$$C_2^{-2} \min_{Q_i} |B_{\bar{p}}| \min_{Q_i} |B'_{\bar{p}}| < \frac{1}{2}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & m \left( \mathcal{R}'(s, 5^{r+1}) \setminus \bigcap_{r' < r+1} \mathcal{R}'(s, 5^{r+1}, r') \right) \\ & < (1 - C_2^{-2} \min_{Q_i} |B_{\bar{p}}| \min_{Q_i} |B'_{\bar{p}}|) m \left( \mathcal{R}'(s, 5^r) \setminus \bigcap_{r' < r} \mathcal{R}'(s, 5^r, r') \right). \end{aligned}$$

Ceci entraîne le résultat souhaité. □

On obtient en corollaire :

**Corollaire 6.6.6** *Pour presque tout paramètre  $(\omega, \omega')$  de  $\mathcal{P}$  et pour tout entier  $p$ , il existe  $n \geq 1$  arbitrairement grand et des entiers  $k, l \geq 1$ , tels que*

- i.  $N_k = N'_l = n$
- ii.  $N(k) = N(k+1) = \dots = N(k+p-1) = 0$ ,  
 $N'(l) = N'(l+1) = \dots = N'(l+p-1) = 0$ ,
- iii.  $J_k = \dots = J_{k+p-1} = B$ ,  $J'_l = \dots = J'_{l+p-1} = B'$ .
- iv. Pour tout  $1 \leq k \leq n-1$ ,

$$\mathfrak{d}(c_{n-k}, \{c_0, c'_0\}), \mathfrak{d}(c'_{n-k}, \{c_0, c'_0\}) > \frac{\lambda^{-k}}{4}.$$

*Démonstration* : Fixons une valeur de  $s \geq 1$ . Presque tout paramètre de  $\mathcal{R}'(s)$  est dans l'intersection des paramètres donnés par la proposition précédente lorsque  $\bar{p}$  parcourt  $\mathbb{N}^*$ . Pour ces paramètres et pour tout  $p \geq 1$ , il suffit ensuite d'appliquer la proposition 6.6.5 à  $\bar{p} = p + 2^s$  et de poser  $n = \bar{n} + 2^s + 1$  pour obtenir les propriétés (i), (ii) et (iii). Il existe  $m \leq n$  et un intervalle régulier  $I$  d'ordre  $m-2$  tel que  $c_1 \in I$  et  $f^{m-2}(I) = D$ . D'autre part,  $c_m \in B$ . On déduit de (6.16), pour  $1 \leq j \leq m-1$ ,

$$\mathfrak{d}(c_{m-j}, \text{Fr}(f^{m-j-1}(I))) > \frac{\lambda^{-j}}{4}.$$

Par conséquent,

$$d(c_{m-j}, \{c_0, c'_0\}) > \frac{\lambda^{-j}}{4}.$$

Pour  $0 \leq j \leq n - m$ ,  $c_{m+j} \in B$  donc d'après (6.16),

$$d(c_{m+j}, \{c_0, c'_0\}) > \frac{1}{32}.$$

Les mêmes remarques s'appliquent à l'orbite de  $c'_0$ . On obtient donc le (iv) pour ces paramètres.

Nous concluons en remarquant, grâce aux propositions 6.5.1, 6.6.1 et 6.6.3, que

$$m(\mathcal{P} \setminus \cup_{s \geq 1} \mathcal{R}'(s)) = 0.$$

□

#### 6.6.4 Conclusion de la démonstration

*Démonstration du théorème 6.1.1* : Les voisinages  $V$  et  $V'$  étant donnés, on choisit  $\lambda_0 > 66$  tel que

$$\begin{aligned} B(\pi_0(\frac{1}{16}), (\lambda_0 - 5)^{-1}) &\subset V', \\ B(\pi_0(\frac{1}{4}), (\lambda_0 - 5)^{-1}) &\subset V. \end{aligned}$$

À mesure nulle près,  $] \lambda_0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  est recouvert par des ouverts  $U$  vérifiant :

- Il existe  $m_0 > n_0 + 30$  tels que  $U \subset \mathcal{P}_{n_0, m_0}$ .
- Il existe des intervalles de retour  $B$  et  $B'$  tels que  $B \subset V$  et  $B' \subset V'$  pour tout paramètre de  $U$

Comme en section 6.6.3, nous introduisons des intervalles de retour  $D$  et  $D'$ . Tout paramètre  $(\omega, \omega')$  donné par le corollaire 6.6.6 satisfait les conclusions du théorème 6.1.1 : le (i) est immédiat. En particulier, pour  $0 \leq m \leq p - 1$ ,

$$d(\{c_{n+m}, c'_{n+m}\}, \{c_0, c'_0\}) \geq \frac{1}{32}.$$

D'autre part, pour  $1 \leq k \leq n - 1$ ,

$$d(c_{n-k}, \{c_0, c'_0\}) > \frac{\lambda^{-k}}{4}.$$

On conclut grâce au lemme 4.4.1 la démonstration du (ii) et du (iii).

□



Troisième partie

**Ensemble de rotation de la  
famille d'Arnol'd épaissie**



## Chapitre 7

# Rappels sur les applications déviant la verticale

Dans ce chapitre, nous rappelons des résultats généraux sur les applications déviant la verticale: nous donnons la définition de l'ensemble de rotation et des orbites bien ordonnées. Nous présentons également l'approche variationnelle. Pour finir, nous définissons les attracteurs de Birkhoff.

### 7.1 Notations et définitions

#### 7.1.1 Les applications déviant la verticale

Un difféomorphisme  $C^1$  de  $\tilde{\mathbb{A}}$ ,  $\tilde{F}$ , **dévie la verticale** si pour tout  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ , les applications de  $\mathbb{R}$  dans lui-même,

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{x}, y) \text{ et } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^{-1}(\tilde{x}, y)$$

sont des difféomorphismes de  $\mathbb{R}$  (voir figure 7.1).

Presque toujours, nous ne considérerons que l'ensemble des applications préservant l'orientation. Il a deux composantes connexes: les applications déviant la verticale à

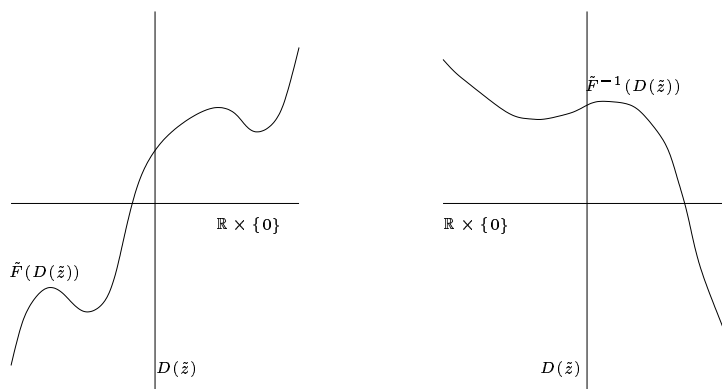
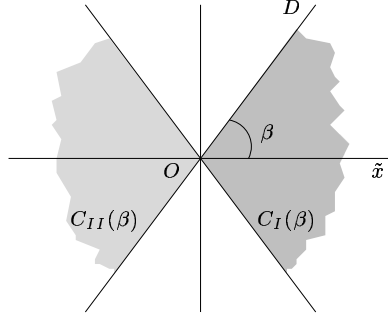


FIG. 7.1: *Déviaton de la verticale.*

FIG. 7.2: Les cônes  $C_I(\beta)$  et  $C_{II}(\beta)$ .

droite (ce sont les applications déviant la verticale telles que  $y \mapsto \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{x}, y)$  soit croissante et  $y \mapsto \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^{-1}(\tilde{x}, y)$  décroissante) et les applications déviant la verticale à gauche (telles que ces fonctions soient cette fois respectivement décroissante et croissante).

L'ensemble des éléments de  $D^1(\mathbb{A})$  qui dévient la verticale et qui préservent l'orientation sera noté  $\widetilde{DV}(\mathbb{A})$ . L'ensemble des éléments de  $\text{Diff}^1(\mathbb{A})$  correspondant sera noté  $DV(\mathbb{A})$ . C'est une partie de  $\text{Diff}_0^1(\mathbb{A})$ .

En général, dans les démonstrations nous ne traiterons que le cas des difféomorphismes déviant la verticale à droite ; le cas des difféomorphismes déviant la verticale à gauche lui est symétrique.

Nous faisons maintenant quelques remarques d'ordre technique :

1. Souvent, nous étudierons la dynamique d'applications déviant la verticale en restriction à une partie compacte de l'anneau. On observe que l'on a alors des estimées uniformes : on définit pour  $\beta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , le demi cône de  $\mathbb{R}^2$ ,  $C_I(\beta)$  formé par les demi-droites  $OD$  vérifiant  $|\text{Angle}(OD, O\tilde{x})| \leq \frac{\pi}{2} - \beta$  et  $C_{II}(\beta)$  le demi-cône opposé  $C_{II}(\beta) = -C_I(\beta)$  (voir figure 7.2). Pour  $F \in \text{Diff}^1(\mathbb{A})$ , et toute partie  $K \subset \mathbb{A}$  compacte, il existe  $\beta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , tel que

$$\forall z \in K, DF(z).(0, 1) \in C_I(\beta) \text{ et } DF^{-1}(z).(0, 1) \in C_{II}(\beta).$$

2. Il est parfois utile de se ramener à un anneau borné : pour  $M > 0$ , nous noterons

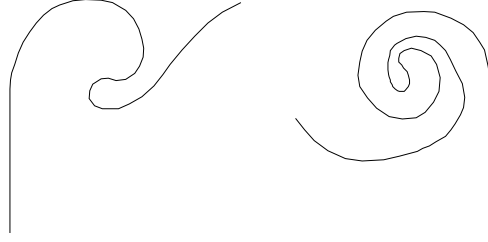
$$\mathbb{A}_M = \mathbb{T}^1 \times [-M, M]$$

et  $\text{Diff}^k(\mathbb{A}_M)$ ,  $\text{Diff}_0^k(\mathbb{A}_M)$ ,  $D^k(\mathbb{A}_M)$ ,  $DV(\mathbb{A}_M)$  et  $\widetilde{DV}(\mathbb{A}_M)$  les différents espaces d'applications associés : ainsi  $\text{Diff}^k(\mathbb{A}_M)$  sera l'ensemble des difféomorphismes  $C^k$  de  $\mathbb{A}_M$ .

Si  $F \in DV(\mathbb{A})$  vérifie  $F(\mathbb{A}_M) \subset \text{Int}(\mathbb{A}_M)$ , il existe  $M' > M$  et  $G \in DV(\mathbb{A}_{M'})$  tels que  $F$  et  $G$  coïncident sur  $\mathbb{A}_M$  (voir [L86]).

### 7.1.2 Chemins positifs, négatifs

Un outil important pour l'étude géométrique des applications déviant la verticale est la notion de chemin positif ou négatif (voir [He83, L87]) :

FIG. 7.3: Exemples de chemins négatif et positif issus de  $S$ .

**Définition 7.1.1** Un chemin positif (resp. négatif) de  $\mathbb{A}$  issu de  $N$  est un plongement  $C^1$ ,  $\gamma : ] - \infty, 0] \rightarrow \mathbb{A}$ , vérifiant les propriétés suivantes :

1. Il existe  $\tau \in ] - \infty, 0]$ , tel que pour tout  $t \leq \tau$ ,  $D\gamma(t) = -v$  où  $v$  est le vecteur vertical  $(0, 1)$ .
2. Si pour tout  $t > \tau$ , on relève continûment à  $\mathbb{R}$  l'angle entre  $-v$  et  $D\gamma(t)$  qui vaut 0 pour  $t \leq \tau$ , on obtient une quantité strictement positive (resp. négative).

La définition de chemin positif (resp. négatif) issu de  $S$  s'obtient en remplaçant dans la définition précédente  $-v$  par  $v$  (voir figure 7.3). On définit également les chemins négatifs et positifs de  $\hat{\mathbb{A}}$ .

Ceci permet de donner une autre définition

**Définition 7.1.2** a. Une partie  $X$  de  $\mathbb{A}$  sépare l'anneau si et seulement si son complémentaire a deux composantes connexes non bornées. Nous noterons  $U(X)$  (resp.  $V(X)$ ) la composante non bornée inférieure (resp. supérieure).

b. Une partie  $U$  de  $\mathbb{A}$  est un anneau inférieur (resp. supérieur) si  $U \cup \{S\}$  (resp.  $U \cup \{N\}$ ) est un ouvert connexe simplement connexe de  $\hat{\mathbb{A}}$ . On note cet ouvert  $\hat{U}$ .

c. Soit  $U$  un anneau inférieur (resp. supérieur). L'ensemble des points accessibles par un chemin positif issu de  $S$  (resp.  $N$ ) à valeur dans  $U$  est noté  $U^+$ . L'ensemble des points accessibles par un chemin négatif est noté  $U^-$ .

d. Si  $U$  est un anneau inférieur (resp. supérieur), on note  $U^0$  l'ensemble des points  $z$  de  $U$  tels que  $D_i(z)$  (resp.  $D_s(z)$ ) est contenu dans  $U$ .

e. Si  $U$  est un anneau inférieur (resp. supérieur), on définit également pour tout  $x \in \mathbb{T}^1$ ,  $\mu_U(x) = \sup(p_2(U^0 \cap (\{x\} \times \mathbb{R})))$  (resp.  $\mu_U(x) = \inf(p_2(U^0 \cap (\{x\} \times \mathbb{R})))$ ).

Nous rappelons une propriété importante des chemins négatifs (voir [He83, L87]) :

**Proposition 7.1.1 (M. Herman)** Soit  $\tilde{F} \in \widetilde{D\mathbb{V}}(\mathbb{A})$ ,  $\gamma$  un chemin négatif de  $\hat{\mathbb{A}}$  issu de  $N$  et  $\tilde{x} \in \tilde{p}_1(\gamma)$ . Alors, le point  $y$  de  $\gamma(] - \infty, 0]) \cap \tilde{p}_1^{-1}(\tilde{x})$  d'ordonnée la plus petite est aussi celui de paramètre  $t \in ] - \infty, 0]$  le plus petit.



## 7.2 Propriétés des applications déviant le verticale

### 7.2.1 Ensemble de rotation des applications déviant la verticale

Nous rappelons maintenant des résultats de [K, Ha, L89] (voir par exemple [L91]).

Fixons une application  $\tilde{F} \in \widetilde{DV}(\mathbb{A})$  et  $\tilde{z} \in \tilde{\mathbb{A}}$ . On peut considérer l'ensemble des valeurs d'adhérence dans  $\mathbb{R}$  de

$$\frac{\tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^n(\tilde{z}) - \tilde{p}_1(\tilde{z})}{n}.$$

Prenons l'union sur  $\tilde{z}$ . Ceci définit une partie  $\mathcal{R}(\tilde{F})$  de  $\mathbb{R}$  (éventuellement vide) appelée **ensemble de rotation** de  $\tilde{F}$  (première définition).

Si  $\mu$  est une mesure de probabilité à support compact de  $\mathbb{A}$  invariante par  $F$ , on peut définir son nombre de rotation

$$\rho(\mu) = \int_{\mathbb{A}} (\tilde{p}_1 \circ \tilde{F} - \tilde{p}_1) d\mu.$$

L'ensembles des nombres de rotations des mesures de probabilité de  $\mathbb{A}$  à support compact, invariantes et ergodiques pour  $F$  coïncide avec  $\mathcal{R}(\tilde{F})$  (deuxième définition).

Introduisons maintenant les ensembles bien ordonnés de l'anneau :

**Définition 7.2.1** *Un ensemble  $\Xi \subset \mathbb{A}$  non vide invariant par  $F \in DV(\mathbb{A})$  et son relevé  $\tilde{\Xi} \subset \tilde{\mathbb{A}}$  sont **bien ordonnés** si*

1. *l'application  $p_1 : \Xi \rightarrow \mathbb{T}^1$  est injective ;*
2. *pour tous  $\tilde{z}, \tilde{z}' \in \tilde{\Xi}$ ,  $\tilde{p}_1(\tilde{z}) < \tilde{p}_1(\tilde{z}') \Leftrightarrow \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{z}) < \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{z}')$ .*

Une orbite est bien ordonnée si elle forme un ensemble bien ordonné.

On peut être plus précis : un ensemble bien ordonné est le graphe d'une fonction lipschitzienne au-dessus d'une partie de  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ .

La propriété de déviation de la verticale montre alors que l'adhérence de  $\Xi$  est encore bien ordonnée et compacte. De plus,  $\tilde{F}|_{\tilde{\Xi}}$  définit après projection par  $\tilde{p}_1$  une dynamique sur  $\tilde{p}_1(\tilde{\Xi})$ . On peut la prolonger en une application de  $\overline{D^0(\mathbb{T}^1)}$  et définir un nombre de rotation. Il ne dépend pas du prolongement et est appelé nombre de rotation de  $\tilde{\Xi}$ . On le note  $\rho(\tilde{\Xi})$ .

**Définition 7.2.2** *Un ensemble d'Aubry-Mather pour  $F$  est une partie  $\Xi \subset \mathbb{A}$  bien ordonnée compacte sur laquelle la dynamique est minimale. On appellera ensemble d'Aubry-Mather de  $\tilde{F}$  le relevé  $\tilde{\Xi}$  d'un ensemble d'Aubry-Mather  $\Xi$  de  $F$ .*

Ainsi tout ensemble bien ordonné fermé contient un ensemble d'Aubry-Mather. Un ensemble d'Aubry-Mather de  $\mathbb{A}$  de nombre de rotation  $\rho$  est :

- une orbite périodique bien ordonnée si  $\rho$  est rationnel,
- le graphe  $\{(x, \psi(x)), x \in \mathbb{T}^1\}$  d'une application  $\psi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne sur lequel la dynamique est conjuguée à une rotation (dans ce cas, on parle de **cercle invariant**) ou bien un ensemble de Cantor si  $\rho$  est irrationnel.

On note  $\mathcal{X}(F)$  (resp.  $\mathcal{X}(\tilde{F})$ ) l'ensemble des parties bien ordonnées fermées de  $F$  (resp.  $\tilde{F}$ ). On obtient encore :

**Proposition 7.2.1 (A. Katok, R. Douady)** *i. Pour la topologie de Hausdorff, l'ensemble  $\mathcal{X}(F)$  est fermé. L'application  $\rho : \mathcal{X}(F) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et propre.*

*ii. Soit  $(\tilde{F}_n)$  une suite de  $\widetilde{\text{DV}}(\mathbb{A})$  convergeant vers  $F \in \widetilde{\text{DV}}(\mathbb{A})$ . Soit pour tout  $n$ , un ensemble bien ordonné fermé  $\tilde{\Xi}_n$  de  $\tilde{F}_n$  de nombre de rotation  $\rho_n$ . Si la suite  $(\tilde{\Xi}_n)$  converge vers  $\tilde{\Xi}$  pour la topologie de Hausdorff, alors  $\tilde{\Xi} \in \mathcal{X}(\tilde{F})$  et la suite  $(\rho_n)$  converge vers le nombre de rotation  $\rho$  de  $\tilde{\Xi}$ .*

*Ainsi l'application  $\tilde{F} \mapsto \mathcal{R}(\tilde{F})$  est semi-continue supérieurement.*

D'autre part,

**Proposition 7.2.2 (P. Le Calvez)** *L'ensemble des nombres de rotation des ensembles d'Aubry-Mather de  $\tilde{F}$  est exactement  $\mathcal{R}(\tilde{F})$  (troisième définition).*

En particulier,  $\mathcal{R}(\tilde{F})$  est fermé. En général, il n'est pas connexe (voir [L91]). Il peut être vide, la dynamique sur l'anneau est alors errante ; il peut aussi être égal à  $\mathbb{R}$  entier.

Comme sur le cercle, nous utiliserons aussi la définition suivante :

**Définition 7.2.3** *Soit  $\frac{p}{q}$  un rationnel et  $\tilde{z} \in \tilde{\mathbb{A}}$ . L'orbite de  $\tilde{z}$  est de type  $(p, q)$  si*

$$\tilde{F}^q(\tilde{z}) = \tilde{z} + (p, 0).$$

## 7.2.2 Anneaux montant, descendant

**7.2.2.1** Nous rappelons ici un des outils de [L89] pour montrer les résultats cités ci-dessus. L'application  $\tilde{F}$  dévie la verticale à droite.

**Proposition 7.2.3 (P. Le Calvez)** *Soit  $U$  un anneau invariant tel que  $U^- = U$  (resp.  $U^+ = U$ ). Alors,*

- $U^0 = U^+$  (resp.  $U^0 = U^-$ ),
- $F^{-1}(U^+) \subset U^+$  (resp.  $F(U^-) \subset U^-$ ).

*Le graphe  $\Gamma = \{(x, \mu_U(x)), x \in \mathbb{T}^1\}$  est invariant par  $F^{-1}$  (resp.  $F$ ) et contient un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\rho_U$ . Plus précisément,*

$$F^{-1}(\text{Adh}(\Gamma)) \subset \Gamma \text{ (resp. } F(\text{Adh}(\Gamma)) \subset \Gamma).$$

*De plus,  $\tilde{F}^{-1}|_{\tilde{\Gamma}}$  (resp.  $\tilde{F}|_{\tilde{\Gamma}}$ ) préserve l'ordre sur  $\tilde{\Gamma}$  donné par la projection  $\tilde{p}_1$ .*

*Si  $U$  est un anneau supérieur (resp. inférieur), les ensembles d'Aubry-Mather inclus dans  $U$  ont un nombre de rotation supérieur ou égal (resp. inférieur ou égal) à  $\rho_U$  et les ensembles d'Aubry-Mather inclus dans  $\mathbb{A} \setminus U$  ont un nombre de rotation inférieur ou égal (resp. supérieur ou égal) à  $\rho_U$ .*

**Remarque 7.2.1** Si  $\rho_U$  est rationnel, l'ensemble d'Aubry-Mather contenu dans  $\Gamma$  est construit comme ensemble  $\alpha$ -limite (resp.  $\omega$ -limite) de points de  $\Gamma$ . Par conséquent,  $\Gamma$  contient une orbite de type  $(p, q)$  qui n'est pas topologiquement attractive (resp. répulsive).

Nous donnons deux applications importantes de cette proposition :

**7.2.2.2** Pour tout rationnel  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , on introduit les ensembles fermés

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{C}}_{p,q}(\tilde{F}) &= \{\tilde{z} \in \tilde{\mathbb{A}}, \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^q(\tilde{z}) = \tilde{p}_1(\tilde{z}) + p\}, \\ \mathcal{C}_{p,q}(F) &= \pi_1(\tilde{\mathcal{C}}_{p,q}(\tilde{F})).\end{aligned}$$

Ce dernier compact sépare l'anneau par déviation de la verticale. Citons un lemme utile pour cette théorie :

**Lemme 7.2.4 (P. Le Calvez)** *Le compact  $\mathcal{C}_{p,q}$  possède une composante connexe et une seule qui sépare  $\mathbb{A}$ .*

On a alors

**Proposition 7.2.5 (M. Casdagli [Ca])** *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- a.  $\frac{p}{q} \notin \mathcal{R}(\tilde{F})$ ,
- b. les ensembles  $\tilde{\mathcal{C}}_{p,q}(\tilde{F})$  et  $\tilde{F}(\tilde{\mathcal{C}}_{p,q}(\tilde{F}))$  ne s'intersectent pas.

*De plus, les points de type  $(p, q)$  sont les points d'intersection des ensembles  $\tilde{\mathcal{C}}_{p,q}(\tilde{F})$  et  $\tilde{F}(\tilde{\mathcal{C}}_{p,q}(\tilde{F}))$ .*

Fixons maintenant une application  $\tilde{F} \in \widetilde{\text{DV}}(\mathbb{A})$  et  $]\rho_-, \rho_+[$  une composante du complémentaire de  $\mathcal{R}(\tilde{F})$ . On choisit n'importe quel rationnel  $\frac{p}{q} \in ]\rho_-, \rho_+[$ ; ce qui suit ne dépend pas du choix de  $\frac{p}{q}$ . Les ensembles  $\tilde{\mathcal{C}}_{p,q}(\tilde{F})$  et  $\tilde{F}(\tilde{\mathcal{C}}_{p,q}(\tilde{F}))$  ne s'intersectent pas. Deux cas sont possibles :  $\tilde{\mathcal{C}}_{p,q}(\tilde{F})$  est en dessous (resp. au dessus) de  $\tilde{F}(\tilde{\mathcal{C}}_{p,q}(\tilde{F}))$ . La composante  $]\rho_-, \rho_+[$  est alors dite **montante** (resp. **descendante**).

Plaçons-nous par exemple dans le premier cas et notons  $U_{p,q}$  (resp.  $V_{p,q}$ ) la composante non bornée inférieure (resp. supérieure) du complémentaire de  $\tilde{\mathcal{C}}_{p,q}$ . L'ensemble suivant ne dépend que de la composante  $]\rho_-, \rho_+[$  :

$$U = U_{\rho_+} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(U_{p,q}).$$

C'est un anneau inférieur invariant par  $F$ . Si  $\rho_+ = +\infty$ , c'est  $\mathbb{A}$  entier. Sinon, l'application  $\mu_U$  est bornée.

Dans ce cas, il résulte de [L89] proposition 1.5, que  $U^- = U$ . On obtient alors  $\rho_U = \rho_+$ .

On peut effectuer la même construction avec  $V_{p,q}$  :

$$V = V_{\rho_-} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(V_{p,q})$$

est un anneau supérieur satisfaisant  $V_+ = V$  et  $\rho_V = \rho_-$ . L'ensemble  $W = U \cap V$  est homéomorphe à  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ . Les orbites y sont errantes et montent le long de l'anneau.

**7.2.2.3** On peut aussi considérer un graphe continu

$$\gamma = \{(x, \phi(x)), x \in \mathbb{T}^1\}$$

disjoint de son image. L'ensemble  $\mathbb{A} \setminus \gamma$  possède deux composantes connexes : un anneau inférieur  $U(\gamma)$  et un anneau supérieur  $V(\gamma)$ . Si par exemple  $F(\gamma) \cap V(\gamma) = \emptyset$ ,

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(V(\gamma))$$

est alors un anneau invariant et  $V^- = V$ .

### 7.2.3 Applications de flux nul

Pour une application  $F \in \text{DV}(\mathbb{A})$  on peut demander une hypothèse un peu plus forte que la préservation des aires : l'hypothèse de **flux nul**, i.e.

La forme  $F^*(y dx) - y dx$  est exacte.

Elle implique la **propriété d'intersection** : pour toute courbe de Jordan  $C$  de  $\mathbb{A}$  homotope au cercle  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ ,  $F(C) \cap C \neq \emptyset$ . (Voir [L87] et [He83] chap. II.)

### 7.2.4 Projection de la dynamique

Nous rappelons (voir [L91]) que l'on peut définir pour toute application  $\tilde{F} \in \widetilde{\text{DV}}(\mathbb{A})$  des applications  $g, g' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , telles que

$$\tilde{F}(\tilde{x}, y) = (\tilde{x}', y') \Leftrightarrow y = g(\tilde{x}, \tilde{x}') \text{ et } y' = g'(\tilde{x}, \tilde{x}').$$

Bien sûr,  $g(\tilde{x} + 1, \tilde{x}' + 1) = g(\tilde{x}, \tilde{x}')$  (on a une relation analogue pour  $g'$ ).

Toute orbite  $(\tilde{z}_n) = (\tilde{x}_n, y_n)$  peut être projetée en une suite  $(\tilde{x}_n)$ . Réciproquement, une suite  $(\tilde{x}_n)$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  est la projection d'une orbite  $(\tilde{z}_n)$  si et seulement si pour tout  $n$ ,

$$g'(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n) = g(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}). \quad (7.1)$$

On retrouve  $(\tilde{z}_n)$  en posant  $y_n = g'(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n)$ .

### 7.2.5 Description variationnelle

#### 7.2.5.1 Le champ $\xi$

Parfois, nous aurons besoin d'étudier la dynamique des difféomorphismes de l'anneau déviant la verticale sous l'angle variationnel : fixons un rationnel  $\frac{p}{q}$ . Pour comprendre les orbites de type  $(p, q)$ , nous introduisons

- a. le décalage  $\sigma : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ ,  $(\tilde{x}_n) \mapsto (\tilde{x}_{n+1})$ ;
- b. et la translation  $\tau : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ ,  $(\tilde{x}_n) \mapsto (\tilde{x}_n + 1)$ .

Nous noterons  $\mathbf{x} = (\tilde{x}_n)$ .

Nous posons alors

$$E_{p,q} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} / (\sigma^q(\mathbf{x}) = \tau^p(\mathbf{x})) \cong \mathbb{R}^q.$$

Nous définissons aussi un champ de vecteurs  $\xi$  sur  $E_{p,q}$  en définissant pour tout  $\mathbf{x} \in E_{p,q}$ ,  $\xi(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}} E_{p,q}$  tel que

$$\xi_n = g'(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n) - g(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}).$$

L'application

$$(\tilde{z}_n) \mapsto (\tilde{p}_1(\tilde{z}_n))$$

induit une bijection entre les orbites  $(\tilde{z}_n)$  de type  $(p, q)$  de  $\tilde{F}$  et les singularités de  $\xi$ .

### 7.2.5.2 Le cas conservatif

Dans le cas conservatif, le champ  $\xi$  est localement un champ de gradient : il existe une fonction génératrice  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $(\tilde{x}, \tilde{x}') \in \mathbb{R}^2$ ,

$$g(\tilde{x}, \tilde{x}') = -\frac{\partial S}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{x}') \text{ et } g'(\tilde{x}, \tilde{x}') = \frac{\partial S}{\partial \tilde{x}'}(\tilde{x}, \tilde{x}').$$

On définit alors  $\mathcal{W} : E_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{q-1} S(\tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}).$$

Le champ  $\xi$  est alors le champ de gradient de  $\mathcal{W}$  pour le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^q$ . Nous disons que cette propriété n'est que locale car en général,  $\mathcal{W}$  n'est pas invariante par  $\tau$ .

La relation

$$S(\tilde{x} + 1, \tilde{x}' + 1) = S(\tilde{x}, \tilde{x}')$$

est vraie pour tout  $(\tilde{x}, \tilde{x}') \in \tilde{\mathbb{A}}$  si et seulement si  $\tilde{F}$  est de flux nul. Dans ce cas,  $\mathcal{W}$  est invariante par  $\tau$ .

## 7.3 Le cadre dissipatif : les attracteurs de Birkhoff

**7.3.1** Les attracteurs de Birkhoff ont été introduits dans [Bi32a]. Nous nous référons à [L86] et [L87] pour leur étude systématique.

Nous supposons qu'il existe un anneau  $\mathbb{A}_M = \mathbb{T}^1 \times [-M, M]$  tel que

1.  $F(\mathbb{A}_M) \subset \text{Int}(\mathbb{A}_M)$ ;
2. Il existe  $0 < b < 1$  tel que  $|\det(DF)|_{\mathbb{A}_M} < b$ .

Dans ce cas, nous ne nous intéressons plus qu'à la dynamique en restriction à  $\mathbb{A}_M$ .

**7.3.2** On définit

$$\Lambda_0 = \Lambda_0(F) = \bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathbb{A}_M).$$

C'est un compact connexe invariant de mesure nulle séparant l'anneau. L'ensemble de rotation  $\mathcal{R}(\tilde{F})$  est un compact non vide.

L'ensemble des compacts invariants connexes séparant l'anneau admet un plus petit élément pour l'inclusion, noté  $\Lambda_1 = \Lambda_1(F)$ . On l'appelle **attracteur de Birkhoff** de  $F$ .

On l'obtient à partir de tout compact connexe invariant séparant l'anneau  $\Lambda$  en considérant les composantes connexes inférieure et supérieure,  $U(\Lambda)$  et  $V(\Lambda)$  de  $\mathbb{A} \setminus \Lambda$ . On a alors

$$\Lambda_1 = \text{Adh}(U(\Lambda)) \cap \text{Adh}(V(\Lambda)).$$

En général  $\Lambda_1(F) \subsetneq \Lambda_0(F)$ .

**7.3.3** L'ensemble  $\mathcal{R}(\tilde{F})$  n'est généralement pas connexe mais en revanche, on peut considérer l'ensemble  $\mathcal{R}_1(\tilde{F})$  qui est l'ensemble des nombres de rotation des orbites bien ordonnées incluses dans  $\Lambda_1(F)$  :

**Théorème 7.3.1 (P. Le Calvez, [L86])** *L'ensemble de rotation  $\mathcal{R}_1(\tilde{F})$  de l'attracteur de Birkhoff est un intervalle compact.*

On remarque que l'application

$$F \mapsto \Lambda_0(F)$$

est semi-continue supérieurement.

Les applications

$$\begin{aligned} F &\mapsto \Lambda_1(F), \\ \tilde{F} &\mapsto \mathcal{R}_1(\tilde{F}) \end{aligned}$$

sont semi-continues inférieurement.

**7.3.4** Toutes ces applications ne sont pas continues. En revanche,

**Proposition 7.3.2 (P. Le Calvez, [L87])** *En topologie  $C^1$ , l'ensemble des points de continuité des applications*

$$F \mapsto \Lambda_1(F), \quad F \mapsto \Lambda_0(F),$$

*est un  $G_\delta$  dense.*



## Chapitre 8

# Ensembles de torsion nulle

Nous définissons la notion d'ensemble bien ordonné de torsion nulle. À la différence des études variationnelles de [AL, M82], nous proposons une approche plus topologique. On retrouve pour ces ensembles un grand nombre de propriétés des ensembles bien ordonnés. En particulier, pour tout nombre de rotation, il existe un ensemble bien ordonné de torsion nulle.

### 8.1 Nombre de torsion

#### 8.1.1 Définition

Le nombre de torsion des orbites d'une application de l'anneau déviant la verticale a déjà été introduit dans [M84b] (*amount of rotation*) et [An88] (*twist number*). Dans ces études le cadre variationnel était privilégié. Nous proposons ici de les compléter en donnant quelques propriétés topologiques. Un grand intérêt des ensembles de torsion nulle est justifié par la remarque suivante: si  $z$  possède une orbite périodique de torsion nulle, et si  $z$  possède une variété invariante  $\gamma$  qui est une courbe  $C^1$ , alors localement en  $z$ ,  $\gamma$  est un graphe au-dessus de  $\mathbb{T}^1$  (voir la proposition 8.1.1). C'est un outil fondamental pour la généralisation des langues d'Arnol'd aux applications standards dissipatives de l'anneau (voir le chapitre 10).

Nous fixons une application  $F \in DV(\mathbb{A})$  et un relevé  $\tilde{F} \in \widetilde{DV}(\mathbb{A})$ . Soit  $z \in \mathbb{A}$  et  $v \in \mathbb{T}_z \mathbb{A} \setminus \{0\}$ . Nous noterons  $\theta^0(v)$  le relevé à  $\mathbb{R}$  contenu dans  $] -1, 0]$  de l'angle orienté entre  $(0, 1)$  et  $v$ . Nous notons  $\theta_z^1(0, 1) = \theta^0(DF(z).(0, 1))$  et plus généralement  $\theta^1(v)$  le relevé à  $\mathbb{R}$  contenu dans  $]\theta_z^1(0, 1) - 1, \theta_z^1(0, 1)]$  de l'angle entre orienté  $(0, 1)$  et  $DF(z).v$  (voir figure 8.1). On définit enfin

$$\theta(v) = \theta^1(v) - \theta^0(v).$$

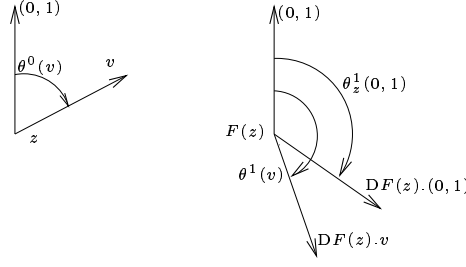
C'est un relevé à  $\mathbb{R}$  de l'angle entre  $v$  et  $DF(z).v$ .

L'application  $\theta : \mathbb{T}_z \mathbb{A} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  est l'unique fonction continue qui relève l'angle entre  $v$  et  $DF(z).v$  et pour laquelle  $DF(z).(0, 1) \in ] -\frac{1}{2}, 0[$ . De plus,  $\theta(v)$  dépend continûment de  $F$  et de  $v \in \mathbb{T}\mathbb{A}$ .

On définit aussi

$$\begin{aligned} \theta_n(v) &= \sum_{0 \leq k \leq n-1} \theta(DF^k(z).v), & \text{si } n \geq 0, \\ \theta_n(v) &= -\theta_{-n}(DF^n(z).v), & \text{si } n < 0. \end{aligned}$$



FIG. 8.1: Définition de  $\theta(v) = \theta^1(v) - \theta^0(v)$ .

**Définition 8.1.1** Un ensemble invariant  $X \subset \mathbb{A}$  pour une application  $F \in DV(\mathbb{A})$  et son relevé  $\tilde{X}$  sont dits de **torsion nulle** si pour tout  $z \in X$  et  $v \in T_z \mathbb{A} \setminus \{0\}$ ,

$$\frac{\theta_n(v)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0. \quad (8.1)$$

**Remarque 8.1.1** On constate que pour tout  $z \in \mathbb{A}$ ,  $v, v' \in T_z \mathbb{A} \setminus \{0\}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$|\theta_n(v) - \theta_n(v')| < \frac{1}{2}. \quad (8.2)$$

Dans cette définition, pour chaque  $z \in X$ , il suffit donc que (8.1) soit satisfait par un seul vecteur de  $T_z \mathbb{A} \setminus \{0\}$  pour l'être par tous.

On remarque également que pour tout  $z \in \mathbb{A}$ ,  $v \in T_z \mathbb{A} \setminus \{0\}$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta_n(v)}{n} \leq 0.$$

### 8.1.2 Le cas des orbites périodiques

Considérons une orbite périodique  $z_0, z_1 = F(z_0), \dots, z_q = F^q(z_0) = z_0$ . On peut définir plus généralement son **nombre de torsion**. C'est la quantité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta_{qn}(v)}{n} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\theta_{qn}(v)}{n}. \quad (8.3)$$

Elle ne dépend pas du vecteur  $v \in T_{z_0} \mathbb{A} \setminus \{0\}$  choisi.

Lorsque  $v$  est le vecteur vertical  $(0, 1)$ , on peut calculer  $\theta_n(v)$ ,  $n \geq 0$ , en itérant la verticale  $D_i(z)$  (ou  $D_s(z)$ ). L'angle en  $F^n(z)$  de  $F^n(D_i(z))$  peut être défini à l'aide des chemins négatifs (ou positifs si  $F$  dévie la verticale à gauche). On retrouve  $\theta_n(v)$ .

Ainsi, lorsque  $F$  dévie la verticale à droite (resp. à gauche), le nombre de torsion est toujours négatif ou nul (resp. positif ou nul). Si  $DF^q(z_0)$  possède une valeur propre réelle positive (resp. négative), le nombre de torsion est un entier (resp. demi-entier non entier). Si  $D_{z_0} F^q$  possède une valeur propre complexe, le nombre de torsion n'est pas demi-entier mais donne l'argument des valeurs propres. Le nombre de torsion est un invariant de conjugaison  $C^1$ . Si l'on perturbe  $F$  et si l'on suit continûment l'orbite de  $z_0$ , le nombre de torsion varie également de façon continue.

Dans le cadre variationnel, le nombre de torsion peut aussi être lu à partir des indices de Morse des points critiques de la fonctionnelle associée à  $F$  (voir [An88]).

La première orbite bien ordonnée donnée par les théorèmes d'existences de [AL, M82] correspond à des minima de la fonctionnelle et est toujours de torsion nulle.

Donnons une définition alternative de  $\theta_n(v)$ : lorsque  $F$  est  $C^2$  et préserve un anneau borné  $\mathbb{A}_M$  contenant  $z_0$ , il existe (voir [Ha]) une application  $C^1$ ,  $\phi : \mathbb{A} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A}$  telle que

1. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi(\cdot, t)$  est un élément de  $\text{Diff}_0^1(\mathbb{A})$ . De plus  $\phi(\cdot, 0) = \text{Id}_{\mathbb{A}}$  et  $\phi(\cdot, 1) = F$ .
2. Pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\phi(\cdot, t + n) = \phi(F^n(\cdot), t)$ .
3. Pour tout  $t \in ]0, 1]$ ,  $\phi(\cdot, t)$  est une application de DV( $\mathbb{A}$ ).

L'application  $t \mapsto \text{Angle}(D_z \phi(z_0, t).v, (0, 1))$  se relève en une application continue  $t \mapsto \theta(t)$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même et on obtient pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\theta_n(v) = \theta(n) - \theta(0).$$

D'après ce qui précède, une orbite périodique de torsion nulle  $\mathcal{O}(z)$  admet toujours une direction invariante  $v \in \mathbb{T}_z \mathbb{A} \setminus \{0\}$ . On en déduit une propriété clef pour les chapitres ultérieurs (voir aussi la proposition 8.2.1):

**Proposition 8.1.1** *Soit  $\mathcal{O}(z)$  une orbite périodique de torsion nulle et  $v = (\zeta, \eta)$  un vecteur propre de  $DF(z)$ . Alors, la suite*

$$(\zeta_n) = (D(p_1 \circ F^n)(z).(\zeta, \eta))$$

*ne s'annule pas et conserve un signe constant.*

*Démonstration :* On peut supposer que  $F$  dévie la verticale à droite. Pour tout  $n$ , si  $\zeta_n$  et  $\zeta_{n+1}$  sont non nuls et ont même signe, alors,  $\theta_n(v)$  et  $\theta_{n+1}(v)$  sont dans un même intervalle  $] \frac{k}{2}, \frac{k+1}{2} [$ . S'il sont de signe contraire,  $\theta_n(v)$  et  $\theta_{n+1}(v)$  sont inclus respectivement dans des intervalles  $] \frac{k}{2}, \frac{k+1}{2} [$  et  $] \frac{k+1}{2}, \frac{k+2}{2} [$ . Si  $\zeta_n$  est nul,  $\theta_{n-1}(v)$  et  $\theta_{n+1}(v)$  sont dans des intervalles respectifs de la forme  $] \frac{k}{2}, \frac{k+1}{2} [$  et  $] \frac{k+1}{2}, \frac{k+2}{2} [$ . On en déduit que si la suite  $(\zeta_n)$  n'est pas de signe constant ou si elle s'annule, le nombre de torsion de  $\mathcal{O}(z)$ , égal à  $\theta_q(v)$ , est strictement négatif. Ceci qui est contradictoire.

□

## 8.2 Ensembles bien ordonnés de torsion nulle

Les ensembles bien ordonnés ont de bonnes propriétés de torsion:

**Proposition 8.2.1** *Soit  $z$  un point d'accumulation d'un ensemble  $\Xi$  bien ordonné et  $v \in \mathbb{T}_z \mathbb{A} \setminus \{0\}$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,*

$$-1 < \theta_n(v) < 1.$$

*Démonstration :* D'après la section 7.2.1,  $\Xi$  est le graphe d'une application continue au-dessus de  $\mathbb{T}^1$ . Pour tous  $\tilde{z}', \tilde{z}'' \in \tilde{\Xi}$  avec  $\tilde{p}_1(\tilde{z}') < \tilde{p}_1(\tilde{z}'')$ , l'angle entre la verticale  $(0, 1)$  et  $\tilde{z}'' - \tilde{z}'$  possède un relevé dans  $[-\frac{1}{2}, 0]$ .

Nous pouvons supposer sans perdre en généralité que  $\tilde{z}$  est accumulé à droite par une suite de points  $(\tilde{z}_k)$  de  $\tilde{\Xi} \setminus \{\tilde{z}\}$  et que la suite

$$\left( \frac{\tilde{z}_k - \tilde{z}}{\|\tilde{z}_k - \tilde{z}\|} \right)$$

converge dans  $U_z \tilde{\mathbb{A}}$  vers un vecteur  $w$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\lim_k \frac{\tilde{F}^n(\tilde{z}_k) - \tilde{F}^n(\tilde{z})}{\|\tilde{z}_k - \tilde{z}\|} = D\tilde{F}^n(\tilde{z}).w.$$

Puisque sur  $\tilde{\Xi}$  l'ordre donné par  $\tilde{p}_1$  est préservé par  $\tilde{F}$ ,

$$\forall n, \quad \theta_0(D\tilde{F}(\tilde{z}).w) \in \left[ \frac{-1}{2}, 0 \right].$$

On en déduit,

$$\forall n, \quad -\frac{1}{2} \leq \theta_n(w) \leq \frac{1}{2}.$$

On termine la démonstration en utilisant (8.2) pour passer à un vecteur  $v \in \mathbb{T}_z \mathbb{A}$  quelconque.

□

**Corollaire 8.2.2** *Soit  $\Xi$  un ensemble bien ordonné.*

- i. *L'ensemble des points d'accumulation  $\Xi_0$  de  $\Xi$  (au sens topologique) est bien ordonné et de torsion nulle.*
- ii. *Si  $\Xi$  est de torsion nulle,  $\text{Adh}(\Xi)$  est bien ordonné et de torsion nulle.*

*Démonstration* : L'ensemble  $\text{Adh}(\Xi)$  est bien ordonné (section 7.2.1). Nous lui appliquons la proposition 8.2.1. Les points de  $\text{Adh}(\Xi) \setminus \Xi$  sont des points d'accumulation de  $\Xi$ . Leurs orbites sont donc de torsion nulle.

□

**Proposition 8.2.3** *Soit  $\Xi$  un ensemble bien ordonné, alors  $\Xi$  est de torsion nulle si et seulement si  $\alpha(\Xi)$  et  $\omega(\Xi)$  sont de torsion nulle.*

*Démonstration* : Si  $\Xi$  est bien ordonné de torsion nulle,  $\alpha(\Xi)$  et  $\omega(\Xi)$  sont contenus dans  $\text{Adh}(\Xi)$  qui est bien ordonné et de torsion nulle d'après le corollaire précédent.

Il reste à montrer que si  $\Xi$  est bien ordonné et si  $\alpha(\Xi)$  et  $\omega(\Xi)$  sont de torsion nulle, alors  $\Xi$  est de torsion nulle.

Soit  $z \in \Xi$ . Alors, ou bien  $\omega(z)$  est une orbite périodique, on applique la section 8.1.2; ou bien aucun point de  $\omega(z)$  n'est isolé et on utilise la proposition 8.2.1: pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe un voisinage ouvert  $U_m$  de  $\omega(z)$  tel que

$$\forall z' \in U_m, \forall v \in \mathbb{T}_{z'} \mathbb{A} \setminus \{0\}, \forall k \in \mathbb{N}, (\theta_k(v) < -1 \Rightarrow k > m).$$

Les itérés futurs de  $z$  finissent par rester dans  $U_m$ . On en déduit lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$

$$-\frac{1}{m} \leq \liminf \frac{\theta_n}{n} \leq \overline{\lim} \frac{\theta_n}{n} \leq 0.$$

On raisonne de même en  $-\infty$ .

□

**Remarque 8.2.1** Lorsque  $\Xi$  est bien ordonné de torsion nulle, les convergences (8.1) sont uniformes en  $z$  et  $v \in \mathbb{T}_z \mathbb{A}$  : en effet  $\theta$  est une application bornée. D'autre part,  $\alpha(\Xi)$  et  $\omega(\Xi)$  sont soit des ensembles bien ordonnés irrationnels, soit des unions d'orbites périodiques de torsion nulle. L'application  $\theta_n$  y est donc bornée uniformément en  $n$ .

**Corollaire 8.2.4** *Tout ensemble bien ordonné  $\Xi$  de nombre de rotation irrationnel est de torsion nulle.*

*Démonstration :* Les ensemble  $\alpha(\Xi)$  et  $\omega(\Xi)$  sont minimaux et donc de torsion nulle d'après la proposition 8.2.1. On applique ensuite la proposition 8.2.3.

□

Tout comme les ensembles bien ordonnés, les ensembles bien ordonnés de torsion nulle sont préservés par passage à la limite :

**Proposition 8.2.5** *Soit  $(\Xi_k)$  une suite d'ensembles fermés bien ordonnés de torsion nulle associée à une suite  $(F_k)$  d'applications déviant la verticale. On suppose  $\omega(\Xi_k) = \Xi_k$ .*

*Si la suite  $(F_k)$  converge vers une application  $F$  déviant la verticale, pour la topologie de  $\text{Diff}_0^1(\mathbb{A})$  et si la suite  $(\Xi_k)$  converge vers un compact de l'anneau  $\Xi$ , pour la distance de Hausdorff, alors,  $\Xi$  est bien ordonné et de torsion nulle.*

*Démonstration :* On sait déjà par la proposition 7.2.1.ii que  $\Xi$  est bien ordonné.

Puisque  $\omega(\Xi_k) = \Xi_k$ , chaque point de  $\Xi_k$  est soit une orbite périodique, soit un point d'accumulation de  $\Xi_k$ . On en déduit grâce à la proposition 8.2.1 et la section 8.1.2 que pour tout  $N \in \mathbb{Z}$ , et  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $z \in \Xi_k$  et  $v \in \mathbb{T}_z \mathbb{A} \setminus \{0\}$ ,

$$|\theta_N(F_k, v)| < 1$$

où l'on a précisé la dépendance en l'application  $F_k$ .

Par continuité de  $\theta_N$ , on obtient pour tout  $z \in \Xi$  et  $v \in \mathbb{T}_z \mathbb{A} \setminus \{0\}$ ,

$$|\theta_N(F, v)| \leq 1.$$

Ceci conclut la démonstration.

□

## 8.3 Existence d'ensembles bien ordonnés de torsion nulle

### 8.3.1 Existence

**8.3.1.1** Les propriétés d'existence obtenues pour les orbites bien ordonnées sont encore vraies pour les orbites bien ordonnées de torsion nulle :

**Proposition 8.3.1** *Soit  $\tilde{F} \in \widetilde{\text{DV}}(\mathbb{A})$ . Si  $\rho \in \mathcal{R}(\tilde{F})$ , il existe un ensemble bien ordonné pour  $\tilde{F}$  de nombre de rotation  $\rho$  et de torsion nulle.*

Un des ingrédients de la démonstration s'inspire d'une idée de Hall (voir [Ha]) pour montrer l'existence d'orbites bien ordonnées de type  $(p, q)$  lorsque  $\tilde{F}$  possède des orbites mal ordonnées de type  $(p, q)$ . Nous avons essayé de la reprendre et de la développer de façon rigoureuse en l'adaptant à notre situation.

La preuve est purement topologique et montre qu'un ensemble bien ordonné, maximal pour l'inclusion, possède toujours une orbite de torsion nulle. Ceci laisse penser qu'une démonstration variationnelle sur les cercles fantômes de S. Angenent et C. Golé est envisageable (voir [L99]).

La démonstration repose sur le lemme suivant :

**Lemme 8.3.2** *Soit  $\tilde{\Xi}$  un ensemble bien ordonné de  $\tilde{F} \in \widetilde{DV}(\mathbb{A})$  formé de deux orbites bien ordonnées  $\tilde{O}(z_0), \tilde{O}(z'_0)$  de type  $(p, q)$  éventuellement confondues qui ne sont pas de torsion nulle. Supposons de plus que  $\tilde{p}_1(\tilde{z}_0) < \tilde{p}_1(\tilde{z}'_0)$  soient deux points consécutifs de  $\tilde{p}_1(\tilde{\Xi})$ . Alors il existe une troisième orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$ ,  $\tilde{O}(z''_0)$  telle que*

- i.  $\tilde{p}_1(\tilde{z}_0) < \tilde{p}_1(\tilde{z}''_0) < \tilde{p}_1(\tilde{z}'_0)$ ,
- ii.  $\tilde{\Xi} \cup \tilde{O}(z''_0)$  est bien ordonné.

### 8.3.1.2 Preuve de la proposition 8.3.1

Il découle de [L89] que pour tout  $\rho \in \mathcal{R}(\tilde{F})$ , il existe un ensemble bien ordonné  $\Xi$  minimal de nombre de rotation  $\rho$ . Lorsque  $\rho$  est irrationnel, la conclusion suit du corollaire 8.2.4.

Nous traitons les autres cas par l'absurde : supposons que  $\rho$  soit un rationnel  $\rho = \frac{p}{q}$  et que  $F$  ne possède pas d'orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$  et de torsion nulle. L'ensemble  $\tilde{\Xi}$  est une orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$ ,  $\tilde{O}(\tilde{z})$ . On pose  $\tilde{z}(0) = \tilde{z}$  et  $\tilde{\Xi}(0) = \tilde{\Xi}$ . Grâce au lemme précédent, on construit une suite d'orbites bien ordonnées de type  $(p, q)$  (de torsion non nulle par hypothèse),  $(\tilde{O}(\tilde{z}(n)))$ , distinctes, et une suite d'ensembles bien ordonnés  $(\tilde{\Xi}(n))$  tels que pour tout  $n \geq 0$ ,

- 1.  $\tilde{\Xi}(n+1) = \tilde{\Xi}(n) \cup \tilde{O}(\tilde{z}(n+1))$ .
- 2.  $\tilde{p}_1(\tilde{z}(0)) < \tilde{p}_1(\tilde{z}(n+1))$  sont deux points consécutifs de  $\tilde{p}_1(\tilde{\Xi}(n+1))$ .

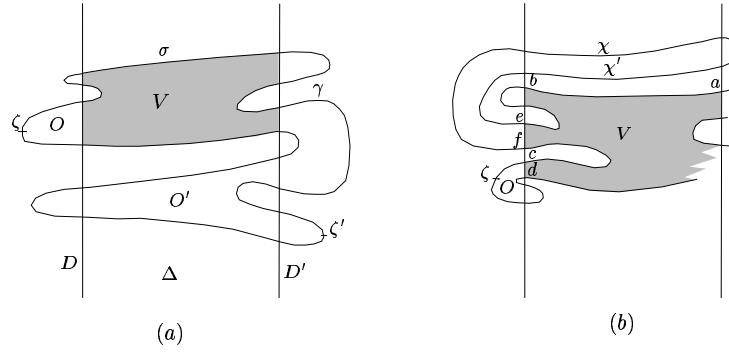
Soit  $\Xi(\infty)$  une valeur d'adhérence de la suite  $(\Xi(n)) = (\pi_1(\tilde{\Xi}(n)))$ . D'après la proposition 7.2.1.ii,  $\Xi(\infty)$  est bien ordonnée. Nous considérons alors  $\tilde{z}' = \lim \tilde{z}(n)$ . Or,  $z' = \pi_1(\tilde{z}')$  est un point d'accumulation de  $\Xi(\infty)$ . L'orbite  $\mathcal{O}(z')$  est donc périodique de type  $(p, q)$ , de torsion nulle. Ceci est contradictoire.

### 8.3.1.3 Un lemme de topologie du plan

Nous rappelons qu'un **arc** est une application injective de  $[0, 1]$  dans  $\tilde{\mathbb{A}}$ . Un **disque topologique fermé** sera une partie de  $\tilde{\mathbb{A}}$  homéomorphe à

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Une **courbe de Jordan** sera une partie de  $\tilde{\mathbb{A}}$  homéomorphe à  $\mathbb{T}^1$ . La composante connexe bornée de son complémentaire sera appelée un **domaine de Jordan**. Les courbes de Jordan seront orientées positivement. Si  $x$  et  $y$  sont deux points distincts d'un même arc ou d'une même courbe de Jordan  $\gamma$ ,  $(x, y)_\gamma$  (resp.  $[x, y]_\gamma$ ) désignera l'arc ouvert (resp. fermé) issu de  $x$  et aboutissant en  $y$  le long de  $\gamma$ .


 FIG. 8.2: Intersection  $U \cap \text{Int}(\Delta)$ .

La réunion d'une courbe de Jordan et du domaine de Jordan correspondant forme un disque topologique fermé. Nous utiliserons également les résultats suivants dû à B. de Kérékjártó (voir [LeY]) :

1. Toute composante connexe de l'intersection de deux domaines de Jordan est encore un domaine de Jordan.
2. Soient  $U$  et  $U'$  deux domaines de Jordan tels que  $U \cap U' \neq \emptyset$ ,  $U \not\subset U'$ , et  $U' \not\subset U$ . Si  $V$  est une composante connexe de  $U \cap U'$ , et si  $\gamma = \text{Fr}(U)$ ,  $\gamma' = \text{Fr}(U')$  et  $\sigma = \text{Fr}(V)$  alors, les composantes connexes de  $\sigma \setminus \gamma$  forment une famille au plus dénombrable d'arcs de  $\gamma'$  de la forme  $(x, y)_{\gamma'}$  où  $x$  et  $y$  sont des points distincts de  $\gamma \cap \gamma' \cap \sigma$ .
3. Soit  $(x, y)_{\gamma'}$  une composante de  $\sigma \setminus \gamma$ . Alors,  $(x, y)_{\gamma} \cup (x, y)_{\gamma'} \cup \{x, y\}$  est une courbe de Jordan bordant un domaine de Jordan  $O$  associé à  $(x, y)_{\gamma'}$ .
4. Les composantes connexes de  $U \setminus \text{Adh}(V)$  sont exactement les domaines  $O$  construits ainsi.

Pour démontrer le lemme 8.3.2, nous aurons besoin d'un lemme de topologie du plan (voir figure 8.2(a)) :

**Lemme 8.3.3** *Considérons la bande  $\Delta = \{(\tilde{x}, y), 0 \leq \tilde{x} \leq 1\}$  dans le plan bordée par les droites  $D = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ ,  $D' = \{(1, y), y \in \mathbb{R}\}$  et  $U$  un domaine de Jordan bordé par  $\gamma$ . Supposons que  $\gamma$  possède deux points  $\zeta$  et  $\zeta'$  respectivement à gauche et à droite de  $\Delta$  ( $\tilde{p}_1(\zeta) < 0 < 1 < \tilde{p}_1(\zeta')$ ). Alors, il existe une composante  $V$  de  $U \cap \text{Int}(\Delta)$ , bordée par une courbe de Jordan  $\sigma$ , qui sépare  $\zeta$  de  $\zeta'$  dans  $U$ : la composante  $O$  (resp.  $O'$ ) de  $U \setminus \text{Adh}(V)$  qui contient  $\zeta$  (resp.  $\zeta'$ ) dans son adhérence est associée à une composante de  $\sigma \setminus \gamma$  incluse dans  $D$  (resp.  $D'$ ).*

*Démonstration* : Tout d'abord, on remarque que l'on peut plonger  $\tilde{\mathbb{A}}$  dans le disque ouvert  $B(0, 1)$  du plan  $\mathbb{R}^2$  au moyen de l'application

$$(\tilde{x}, y) \mapsto \left( \frac{\tilde{x}}{1 + \tilde{x}^2 + y^2}, \frac{y}{1 + \tilde{x}^2 + y^2} \right).$$

Définissons les points  $A = (0, 1)$  et  $B = (0, -1)$  de  $\mathbb{R}^2$ . On considère alors  $\Delta$  comme un domaine de Jordan de frontière  $D \cup D' \cup \{A, B\}$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Le résultat de Kérékjártó s'applique donc aux ouverts  $U$  et  $\text{Int}(\Delta)$ .

1. Nous appelons  $\Sigma$  l'ensemble des composantes de  $\gamma \cap \text{Int}(\Delta)$  joignant  $D$  à  $D'$ . Par hypothèse,  $\Sigma$  est non vide et possède au moins deux éléments. Chaque élément de  $\Sigma$  a un diamètre supérieur ou égal à 1. Par compacité de  $\gamma$ ,  $\Sigma$  est donc fini.

Si  $(a, b)_\gamma \in \Sigma$ ,  $\{a, b\}$  possède exactement un point dans chaque droite  $D$  et  $D'$ . On en déduit que  $\Sigma$  est réunion disjointe de  $\Sigma_g$  et  $\Sigma_d$  : l'arc  $(a, b)_\gamma$  appartient à  $\Sigma_d$  (resp.  $\Sigma_g$ ) si et seulement si  $a \in D$  ( $a \in D'$ ).

Chaque arc  $\chi$  de  $\Sigma$  est dans la frontière d'une unique composante  $V$  de  $U \cap \text{Int}(\Delta)$ . Réciproquement, et par connexité, toute composante  $V$  de  $U \cap \text{Int}(\Delta)$  joignant  $D$  à  $D'$  contient dans sa frontière exactement un arc de chaque ensemble  $\Sigma_g$  et  $\Sigma_d$ .

2. L'arc  $(\zeta, \zeta')_\gamma$  contient  $n$  éléments de  $\Sigma_g$  et  $n + 1$  éléments de  $\Sigma_d$  ; l'arc  $(\zeta', \zeta)_\gamma$  contient  $m$  éléments de  $\Sigma_d$  et  $m + 1$  éléments de  $\Sigma_g$  avec  $n, m \in \mathbb{N}$ . On en déduit qu'il existe une composante  $V$  de  $U \cap \text{Int}(\Delta)$  bordée par une courbe de Jordan  $\sigma$  qui contient un arc  $\sigma_d \subset (\zeta, \zeta')_\gamma$  de  $\Sigma_d$  et un arc  $\sigma_g \subset (\zeta', \zeta)_\gamma$  de  $\Sigma_g$ .

3. Nous montrons que  $V$  convient : nous notons  $(a, b)_\sigma = \sigma_g$ . La composante  $O$  de  $U \setminus \text{Adh}(V)$  qui contient  $\zeta$  dans son adhérence est bordée par un arc  $(c, d)_\gamma \cup [d, c]_D$ . Soit, s'il en existe, un arc  $\chi \in \Sigma$  contenu dans  $(b, c)_\gamma \subset (\zeta', \zeta)_\gamma$ . Alors,  $\chi$  est dans la frontière d'une unique composante  $W$  de  $U \setminus \text{Adh}(V)$  distincte de  $O$ . La frontière de  $W$  est de la forme  $(e, f)_\gamma \cup [e, f]_\sigma$  avec  $(e, f)_\gamma \subset (b, c)_\gamma$  et  $[e, f]_\sigma \subset D \cup D'$ . On en déduit que  $(e, f)_\gamma$  contient l'autre arc  $\chi'$  de  $\Sigma$  contenu dans la frontière de  $W$  (voir figure 8.2(b)).

Ainsi  $(b, c)_\gamma$  contient un nombre pair d'arcs de  $\Sigma$ . Puisque  $\zeta$  est à gauche de  $D$  et  $b \in D$ ,  $(b, \zeta)_\gamma$  contient également un nombre pair d'arcs de  $\Sigma$ . Finalement,  $(c, \zeta)_\gamma$  contient un nombre pair d'arcs de  $\Sigma$ . Puisque  $\zeta$  est à gauche de  $D$  et  $c \in D \cup D'$ , on obtient  $c \in D$ . Par conséquent  $O$  est rattachée à  $V$  par un arc  $[c, d]$ , contenu dans  $D$ . Le même raisonnement s'applique à  $O'$ , la composante de  $U \setminus \text{Adh}(V)$  qui contient  $\zeta'$ .

□

### 8.3.1.4 Démonstration du lemme 8.3.2

On pose  $\tilde{z}_n = \tilde{F}^n(\tilde{z}_0)$  et  $\tilde{z}'_n = \tilde{F}^n(\tilde{z}'_0)$ . Nous supposons sans perdre en généralité que  $\tilde{F}$  dévie la verticale à droite. Nous définissons pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$  la région

$$\Delta_n = \{(\tilde{x}, y), \tilde{p}_1(\tilde{z}_n) \leq \tilde{x} \leq \tilde{p}_1(\tilde{z}'_n)\}.$$

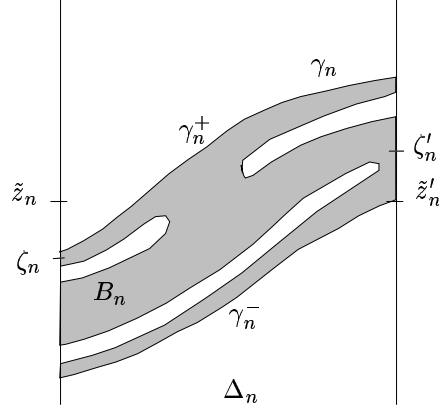
**1<sup>ère</sup> étape : construction des régions  $B_n$ .**

On exhibe pour  $n \geq 1$  une composante connexe  $B_n$  de

$$\{\tilde{z}, \forall 0 \leq k \leq n, \tilde{F}^{k-n}(\tilde{z}) \in \Delta_k\}$$

qui vérifie les conditions suivantes (voir figure 8.3) :

1.  $B_n$  est un disque topologique fermé. Le bord de  $B_n$  est une courbe de Jordan  $\gamma_n$ .


 FIG. 8.3: La région  $B_n$ .

2. Il existe deux points  $\zeta_n \in \gamma_n \cap D_i(\tilde{z}_n)$  et  $\zeta'_n \in \gamma_n \cap D_s(\tilde{z}'_n)$  tels que les composantes de  $[\zeta_n, \zeta'_n]_{\gamma_n} \cap \text{Int}(\Delta_n)$  (resp.  $[\zeta'_n, \zeta_n]_{\gamma_n} \cap \text{Int}(\Delta_n)$ ) forment une famille au plus dénombrable d'arcs  $(\eta, \xi)_{\gamma_n}$  de la forme  $\tilde{F}^n(I)$  où  $I$  est un intervalle ouvert de  $D_i(\tilde{z}'_0)$  (resp.  $D_s(\tilde{z}_0)$ ). De plus,  $\eta$  et  $\xi$  sont des points de  $D_i(\tilde{z}_n)$  ou de  $D_s(\tilde{z}'_n)$ .
3. La courbe  $[\zeta'_n, \zeta_n]_{\gamma_n}$  (resp.  $[\zeta_n, \zeta'_n]_{\gamma_n}$ ) possède exactement un arc  $\gamma_n^+ = (\eta, \xi)_{\gamma_n}$  (resp.  $\gamma_n^- = (\xi, \eta)_{\gamma_n}$ ) de la forme  $\tilde{F}^n(I_n^+)$  (resp.  $\tilde{F}^n(I_n^-)$ ) contenu dans  $\text{Int}(\Delta_n)$ , où  $I_n^+$  (resp.  $I_n^-$ ) est un intervalle ouvert de  $D_s(\tilde{z}_0)$  (resp.  $D_i(\tilde{z}'_0)$ ) tel que  $\{\eta, \xi\}$  contienne à la fois un point de  $D_i(\tilde{z}_n)$  et un point de  $D_s(\tilde{z}'_n)$ . De plus,  $\eta \in D_s(\tilde{z}'_n)$ ,  $\xi \in D_i(\tilde{z}_n)$ .
4. L'ensemble  $\gamma_n \cap \text{Fr}(\Delta_n)$  est inclus dans  $D_i(\tilde{z}_n) \cup D_s(\tilde{z}'_n)$ . Le point  $\zeta_n$  (resp.  $\zeta'_n$ ) appartient à un segment ouvert de  $D_i(\tilde{z}_n)$  (resp.  $D_s(\tilde{z}'_n)$ ) inclus dans  $\gamma_n$ .

La construction se fait par récurrence sur  $n \geq 1$  :

- a) On pose

$$B_1 = \tilde{F}(\Delta_0) \cap \Delta_1.$$

Par déviation de la verticale à droite, les propriétés 1 à 4 sont faciles à vérifier pour  $B_1$ . Nous fixons des points  $\zeta_1$  et  $\zeta'_1$ .

Nous construisons maintenant  $B_{n+1}$  à partir de  $B_n$ ,  $n \geq 1$  (voir figure 8.4) : Par déviation de la verticale,  $\zeta_n$  est en-dessous du graphe  $\tilde{F}^{-1}(D(\tilde{z}_{n+1}))$  et  $\zeta'_n$  au-dessus du graphe  $\tilde{F}^{-1}(D(\tilde{z}'_{n+1}))$ . Nous appliquons alors le lemme 8.3.3 à la bande  $\tilde{F}^{-1}(\Delta_{n+1})$ , au domaine  $\text{Int}(B_n)$  et aux points  $\zeta_n, \zeta'_n$  pour construire un domaine de Jordan  $V$ . On définit alors  $B_{n+1} = \tilde{F}(\text{Adh}(V))$ .

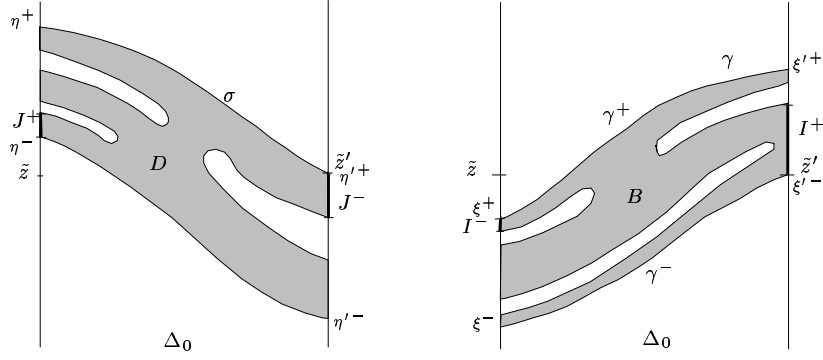
Nous notons encore  $O$  et  $O'$  les composantes de  $\text{Int}(B_n) \setminus \text{Adh}(V)$  qui contiennent  $\zeta_n$  et  $\zeta'_n$  dans leur frontière.

- b) Il reste à vérifier pour  $B_{n+1}$  les propriétés 2 à 4 :

Remarquons tout d'abord que par déviation de la verticale,  $\gamma_{n+1}$  ne rencontre ni  $D_s(\tilde{z}_{n+1}) \setminus \{\tilde{z}_{n+1}\}$  ni  $D_i(\tilde{z}'_{n+1}) \setminus \{\tilde{z}'_{n+1}\}$ . La composante  $O$  (resp.  $O'$ ) est associée à une composante de  $\tilde{F}^{-1}(\gamma_{n+1}) \setminus \gamma_n$  qui est un segment ouvert de






 FIG. 8.5: Les régions  $D$  et  $B$ .

$\gamma_q^- - (p, 0)$ . Il existe pour  $D$  des propriétés similaires (voir figure 8.5) :

- En appliquant  $\tilde{F}^{-q}$  à  $\gamma_q$ , on obtient que les composantes connexes qui composent  $\sigma \cap \text{Int}(\Delta_0)$  sont des arcs de la forme  $\tilde{G}^{-1}(I)$ , où  $I$  est un intervalle ouvert de  $D_i(\tilde{z}_0)$  ou  $D_s(\tilde{z}'_0)$ .
- Soit  $I$  la composante de  $\gamma_q \setminus \tilde{F}(\gamma_{q-1})$  qui contient  $\zeta_q$ . C'est un intervalle ouvert de  $D_i(\tilde{z}_q)$ . D'après la propriété 2,  $(\eta^-, \eta'^-)_\sigma = \tilde{F}^{-q}(I)$  est un arc qui joint  $D_s(\tilde{z}_0)$  à  $D_i(\tilde{z}'_0)$ . Il existe également un arc  $(\eta'^+, \eta^+)_\sigma = \tilde{F}^{-q}(I')$ , où  $I'$  est la composante connexe de  $\gamma_q \setminus \tilde{F}(\gamma_{q-1})$  qui contient  $\zeta'_q$ . Là encore  $(\eta'^+, \eta^+)_\sigma$  joint  $D_i(\tilde{z}'_0)$  à  $D_s(\tilde{z}_0)$ . Ces arcs sont uniques puisque  $\text{Int}(D) \subset \Delta_0$  est connexe. On note

$$I^- = I - (p, 0), \quad I^+ = I' - (p, 0).$$

- L'arc  $(\eta^+, \eta^-)_\sigma$  (resp.  $(\eta'^-, \eta'^+)_\sigma$ ) contient  $J^+$  (resp.  $J^-$ ), intervalle ouvert de  $D_s(\tilde{z}_0)$  (resp.  $D_i(\tilde{z}'_0)$ ) tel que  $\tilde{G}(J^+) = \gamma^+$  et  $\tilde{G}(J^-) = \gamma^-$ .
- b) Dans le cas où  $\gamma$  rencontre  $\tilde{z}_0$ , nous modifions  $\sigma$  (et  $\gamma$ ) près de  $\tilde{z}_0$  : l'ouvert  $D$  est une composante connexe de l'intersection des domaines de Jordan  $\text{Int}(\Delta_0)$  et  $\text{Int}(\tilde{G}^{-1}(\Delta_0))$  dans  $\hat{\mathbb{A}}$ . D'après le résultat de Kérékjártó,

$$D_i(\pi_1(\eta^-)) \cup \{S\} \cup D_i(\pi_1(\eta'^-)) \cup \pi_1([\eta^-, \eta'^-]_\sigma)$$

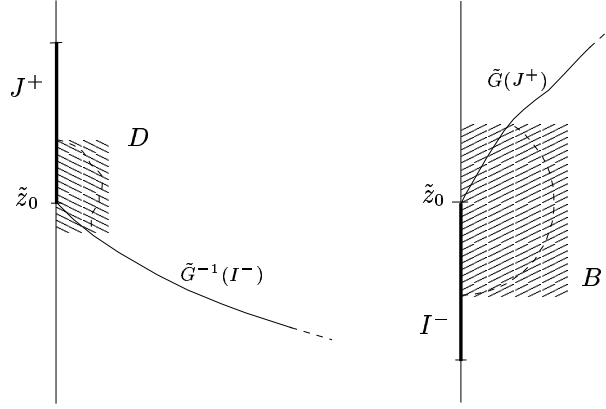
est une courbe de Jordan dans  $\hat{\mathbb{A}}$  qui borde une composante connexe de l'ensemble  $\pi_1(\text{Int}(\Delta_0) \setminus D)$ . On en déduit  $\eta^- = \tilde{z}_0$ . Si l'on écrit

$$\gamma^+ = \tilde{G}(J^+) = (\xi'^+, \xi^+)_\gamma,$$

on montre de la même façon que

$$D_s(\xi'^+) \cup \{N\} \cup D_s(\xi^+) \cup [\xi'^+, \xi^+]_\gamma$$

est une courbe de Jordan dans  $\hat{\mathbb{A}}$  qui borde une composante connexe de l'ensemble  $\pi_1(\text{Int}(\Delta_0) \setminus B)$  et  $\xi^+ = \tilde{z}_0$ . Finalement, au voisinage de  $\tilde{z}_0$ ,  $\sigma$  (resp.  $\gamma$ ) est la réunion de deux chemins  $J^+ \cup \tilde{G}^{-1}(I^-) \cup \{\tilde{z}_0\}$  (resp.  $\tilde{G}(J^+) \cup I^- \cup \{\tilde{z}_0\}$ ). Le nombre de torsion de  $\tilde{z}_0$  est donc dans  $[\frac{-1}{2}, 0[$ .

FIG. 8.6: Modification de  $D$  et  $B$  près de  $\tilde{z}_0$ .

On enlève maintenant à  $B$  une boule euclidienne ouverte  $\text{Int}(B(\tilde{z}_0, r))$  de rayon  $r > 0$  assez petit. On procède de la même façon au voisinage de  $\tilde{z}'_0$  dans le cas où  $\gamma$  rencontre  $\tilde{z}_0$ . On obtient ainsi un nouveau disque topologique fermé  $\hat{B} \subset B$ , bordé par une courbe de Jordan  $\hat{\gamma}$  et image par  $\tilde{G}$  d'un disque  $\hat{D} \subset D$ , bordé par une courbe de Jordan  $\hat{\sigma}$ . Ils sont tous deux contenus dans  $\Delta_0$  (voir figure 8.6).

- c) Si  $\tilde{z}$  est un point fixe de  $\tilde{G}$  dans  $D$ , l'ensemble  $\mathcal{O}(z) \cup \mathcal{O}(z_0)$  est bien ordonné. Le point  $\tilde{z}_0$  ne peut être accumulé par des points fixes de  $\tilde{G}$  contenus dans  $D$ . En effet, nous pourrions sinon construire un ensemble bien ordonné ayant  $\tilde{z}_0$  comme point d'accumulation. Ceci contredirait la proposition 8.2.1 puisque  $\tilde{z}_0$  n'est pas de torsion nulle. Si lors de la modification de  $\sigma$  et  $\gamma$ ,  $r$  a été choisi assez petit,  $\tilde{G}$  n'a donc pas de point fixe sur  $\hat{\sigma} \setminus \sigma$ .

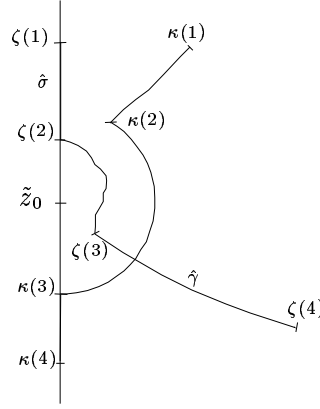
Il est alors facile de voir que  $\tilde{G}$  n'a aucun point fixe sur  $\hat{\sigma}$  :

- Le disque  $\hat{B}$  est disjoint de  $D_s(\tilde{z}_0)$  et de  $D_i(\tilde{z}'_0)$ . Il n'y a donc pas de point fixe sur les arcs contenus dans ces demi-droites.
- Le disque  $\hat{D}$  est disjoint de  $D_i(\tilde{z}_0)$  et de  $D_s(\tilde{z}'_0)$ . Il n'y a donc pas de point fixe sur les arcs de  $\sigma$  de la forme  $\tilde{G}^{-1}(I)$  où  $I$  est un intervalle de  $D_i(\tilde{z}_0)$  ou de  $D_s(\tilde{z}_0)$ .

- d) On calcule maintenant l'indice  $\text{Indice}(\tilde{G}, \hat{\sigma})$  de  $\tilde{G}$  le long de  $\hat{\sigma}$ . On paramètre  $\hat{\sigma}$  et  $\hat{\gamma}$  par  $\mathbb{T}^1$  de sorte que pour tout  $t \in \mathbb{T}^1$ ,

$$\tilde{G}(\hat{\sigma}(t)) = \hat{\gamma}(t).$$

Par définition,  $\text{Indice}(\tilde{G}, \hat{\sigma})$  est l'indice du champ de vecteurs  $(\hat{\gamma} - \hat{\sigma})$  le long de  $\hat{\sigma}$ . Si l'on déforme continûment les courbes  $\hat{\sigma}$  et  $\hat{\gamma}$ , sans annuler  $\hat{\gamma} - \hat{\sigma}$ , l'indice  $\text{Indice}(\hat{\gamma} - \hat{\sigma}, \hat{\sigma})$  ne change pas. Les composantes de  $\hat{\sigma} \cap \text{Int}(\Delta_0)$  disjointes de  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$ , de la forme  $\tilde{G}^{-1}(I)$  avec  $I \subset D_i(\tilde{z}_0) \cup D_s(\tilde{z}_0)$  peuvent être rétractés à extrémités fixées sur un arc de  $D_s(\tilde{z}_0) \cup D_i(\tilde{z}'_0)$  dans  $\tilde{\Delta} \setminus I$ . On ne modifie pas l'arc  $I$  correspondant de  $\hat{\gamma}$ . On procède ensuite de la même façon avec les composantes de  $\hat{\gamma} \cap \text{Int}(\Delta_0)$  disjointes de  $\gamma$  et  $\gamma^-$ .


 FIG. 8.7: Courbes  $\hat{\sigma}$  et  $\hat{\gamma}$  au voisinage de  $\tilde{z}_0$ .

Dans le cas où  $D$  a été modifié près de  $\tilde{z}_0$ ,  $\hat{\sigma}$  est localement une réunion

$$(\zeta(1), \zeta(2)) \cup [\zeta(2), \zeta(3)] \cup (\zeta(3), \zeta(4))$$

où  $(\zeta(1), \zeta(2))$ , est un segment de  $D_s(\tilde{z}_0)$ . On note

$$(\kappa(1), \kappa(2)) \cup [\kappa(2), \kappa(3)] \cup (\kappa(3), \kappa(4))$$

la partition correspondante qui décrit  $\hat{\gamma}$  au voisinage de  $\tilde{z}_0$ .  $(\kappa(3), \kappa(4))$  est un segment de  $D_i(\tilde{z}_0)$  (voir figure 8.7). La dynamique locale de  $\vec{G}$  en  $\tilde{z}_0$  est approchée par la différentielle  $D\vec{G}(\tilde{z}_0)$ . Par ce qui précède,  $\tilde{z}_0$  a un nombre de torsion dans  $[-\frac{1}{2}, 0[$ . On vérifie, que l'on peut modifier continûment les paramétrages de  $\hat{\sigma}$  et  $\hat{\gamma}$  sans annuler  $\hat{\gamma} - \hat{\sigma}$  de sorte que les intervalles  $(\zeta(1), \zeta(2))$  et  $(\zeta(2), \zeta(4))$  correspondent maintenant aux intervalles  $(\kappa(1), \kappa(3))$  et  $(\kappa(3), \kappa(4))$ : il suffit de montrer que si  $[\hat{\sigma}(t), \hat{\sigma}(t')]_{\hat{\sigma}}$  est un sous-arc de  $[\zeta(2), \zeta(3)]_{\hat{\sigma}}$ , alors les points  $\hat{\sigma}(t)$  et  $\hat{\gamma}(t')$  sont distincts. D'une part, d'après la forme de  $D\vec{G}(\tilde{z}_0)$ ,  $\text{Angle}(\hat{\sigma}(t), \hat{\gamma}(t)) < 0$ ; d'autre part, par définition de l'arc  $[\kappa(2), \kappa(3)]_{\hat{\gamma}}$ , l'angle  $\text{Angle}(\hat{\gamma}(t), \hat{\gamma}(t'))$  est strictement positif. Ainsi,

$$\frac{-1}{2} < \text{Angle}(\hat{\sigma}(t), \hat{\gamma}(t')) < 0$$

et donc  $\hat{\sigma}(t) \neq \hat{\gamma}(t')$ .

On procède de même en  $\tilde{z}'_0$ .

Les courbes que l'on obtient s'écrivent à présent (voir figure 8.8) :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= (\bar{\eta}(1), \bar{\eta}(2)) \cup [\bar{\eta}(2), \bar{\eta}(3)] \cup (\bar{\eta}(3), \bar{\eta}(4)) \cup [\bar{\eta}(4), \bar{\eta}(1)], \\ \bar{\gamma} &= [\bar{\xi}(1), \bar{\xi}(2)] \cup (\bar{\xi}(2), \bar{\xi}(3)) \cup [\bar{\xi}(3), \bar{\xi}(4)] \cup (\bar{\xi}(4), \bar{\xi}(1)). \end{aligned}$$

Les arcs  $[\bar{\eta}(4), \bar{\eta}(1)]$ ,  $[\bar{\eta}(2), \bar{\eta}(3)]$ ,  $[\bar{\xi}(1), \bar{\xi}(2)]$  et  $[\bar{\xi}(3), \bar{\xi}(4)]$  sont des intervalles de  $D_s(\tilde{z}_0)$ ,  $D_i(\tilde{z}'_0)$ ,  $D_i(\tilde{z}_0)$  et  $D_s(\tilde{z}'_0)$ . Les points  $\bar{\eta}(i)$  et  $\bar{\xi}(i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  correspondent aux mêmes paramètres de  $\mathbb{T}^1$ . Les arcs  $(\bar{\eta}(1), \bar{\eta}(2))$ ,  $(\bar{\eta}(3), \bar{\eta}(4))$ ,  $(\bar{\xi}(2), \bar{\xi}(3))$  et  $(\bar{\xi}(4), \bar{\xi}(1))$  sont inclus dans  $\text{Int}(\Delta_0)$ . On calcule aisément l'indice

$$\text{Indice}(\bar{\gamma} - \bar{\sigma}, \bar{\sigma}) = -1.$$

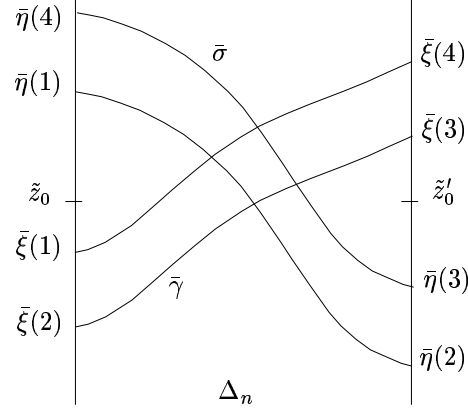


FIG. 8.8: Calcul de l'indice.

**Fin de la preuve du lemme 8.3.2.**

L'indice de  $\tilde{G}$  le long de  $\tilde{\sigma}$  est  $-1$ . L'application  $\tilde{G}$  possède donc un point fixe  $\tilde{z}_0''$  dans  $\text{Int}(\tilde{B})$ . Puisque  $\text{Int}(\tilde{B})$  ne contient pas  $\tilde{z}_0$  ou  $\tilde{z}'_0$ , l'orbite de  $\tilde{z}_0''$  est distincte de celles de  $\tilde{z}_0$  ou  $\tilde{z}'_0$ . Par construction, pour tout  $0 \leq k \leq q$ ,

$$\tilde{p}_1(\tilde{z}_k) < \tilde{p}_1(\tilde{F}^k(\tilde{z}_0'')) < \tilde{p}_1(\tilde{z}'_k).$$

L'ensemble  $\tilde{\Xi} \cup \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{z}_0'')$  est donc bien ordonné.

**8.3.2 Complément sur les anneaux montant et descendant**

Soit maintenant pour  $\tilde{F} \in \widetilde{\text{DV}}(\mathbb{A})$ , une composante connexe  $]\rho^-, \rho^+[$  de  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{R}(\tilde{F})$ . Supposons par exemple que  $\rho^-$  soit fini. On rappelle (voir la section 7.2.2) qu'on lui associe un anneau invariant  $V = V_{\rho^-}$  de  $\mathbb{A}$  et un graphe  $\Gamma = \{(x, \mu_V(x)), x \in \mathbb{T}^1\}$  contenant un ensemble fermé et bien ordonné  $\Xi$  de nombre de rotation  $\rho^-$ . On peut renforcer ce résultat :

**Proposition 8.3.4** *Sous ces hypothèses, l'ensemble  $\Xi$  est de torsion nulle.*

*Démonstration :* Il suffit encore de supposer que  $\rho^-$  est rationnel et de regarder une orbite périodique  $\mathcal{O}(z)$  de  $\Gamma$ . On se place dans le revêtement universel de l'anneau et on raisonne comme pour la proposition 8.2.1. Le graphe  $\tilde{\Gamma}$  est continu à gauche en  $\tilde{z}$  (voir [L87] sections 4.8 et 4.10). Le point  $\tilde{z}$  et ses itérés sont donc accumulés à gauche par  $\tilde{\Gamma}$ .

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Le point  $\tilde{z}_n = \tilde{F}^n(\tilde{z})$  est limite d'une suite  $(\tilde{z}_n^k)_k$  située à gauche de  $\tilde{z}_n$  dans  $\tilde{\Gamma}$ . D'après la proposition 7.2.3, la suite  $(\tilde{F}^{-j}(\tilde{z}_n^k))_k$  accumule  $\tilde{z}_j$  à gauche pour  $0 \leq j \leq n$ . Prenant un vecteur dans les valeurs d'adhérences de la suite  $(\frac{\tilde{z}_n^k - \tilde{z}_n}{\|\tilde{z}_n^k - \tilde{z}_n\|})_k$  et utilisant (8.2), on obtient pour tout  $v \in \mathbb{T}_{\tilde{z}} \tilde{\mathbb{A}}$ ,

$$-1 < \theta_n(v) < 1.$$

On utilise ensuite (8.3) pour voir que l'orbite  $\mathcal{O}(z)$ , périodique a une torsion nulle.  $\square$

Lorsque  $\rho^+$  est fini, on obtient bien sûr des résultats similaires avec  $U_{\rho^+}$ .

## Chapitre 9

# Présentation de la famille d'Arnol'd épaissie

Dans ce chapitre nous définissons les applications standards de l'anneau. Au sein de cet ensemble, nous introduisons des classes particulières (par exemple, les applications bimodales de l'anneau) que nous étudierons dans les chapitres ultérieurs. Un cas particulier est la famille d'Arnol'd épaissie.

Nous donnons ensuite quelques propriétés immédiates de ces familles et montrons comment des théorèmes bien connus s'appliquent à ces familles (le théorème d'Aubry et Mather et le théorème d'existence d'attracteurs étranges).

### 9.1 Les familles standards de l'anneau

#### 9.1.1 Présentation, premières propriétés

9.1.1.1 Nous nous restreindrons dorénavant aux applications  $\tilde{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la forme

$$\tilde{F} : (\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x} + \varphi(\tilde{x}) + y, b(\varphi(\tilde{x}) + y)), \quad (9.1)$$

où  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application 1-périodique de classe  $C^1$ . On notera aussi parfois  $\tilde{F}_b$ . L'application  $\tilde{F}$  s'écrit comme composée  $D_b \circ H_\varphi$  des applications

$$\begin{aligned} D_b &: (\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x} + y, by), \\ H_\varphi &: (\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x}, y + \varphi(\tilde{x})). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que le jacobien de  $\tilde{F}$  est constant et égal à  $b$ . Lorsque  $b$  est non nul,  $\tilde{F}$  est inversible, d'inverse

$$\tilde{F}^{-1} : (\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x} - \frac{y}{b}, \frac{y}{b} - \varphi(\tilde{x} - \frac{y}{b})). \quad (9.2)$$

Il est clair que ces applications définissent par passage au quotient des difféomorphismes  $F$  et  $F^{-1}$  de l'anneau. Les applications qui s'écrivent comme en (9.1) sont les **applications standards** de l'anneau.

**9.1.1.2** On remarque après conjugaison par

$$(\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x}, -by - \varphi(\tilde{x}))$$

que  $\tilde{F}^{-1}$  s'écrit comme dans (9.1) avec pour jacobien  $-\frac{1}{b}$  et pour application périodique  $-\frac{1}{b}\varphi$ .

**9.1.1.3** On voit aussi que  $F$  dévie la verticale à droite. D'autre part tous les changements de variables que nous considérons dans ce chapitre préservent les droites verticales. Les ensembles bien ordonnés resteront donc bien ordonnés après conjugaison.

**9.1.1.4** Quitte à faire le changement de variable

$$(\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x}, y - \varphi(\tilde{x}))$$

et à poser,  $\varphi' = \frac{1}{b}\varphi$ , on voit que l'on peut de façon équivalente étudier les familles de difféomorphismes de l'anneau déviant la verticale de la forme

$$(\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x} + y, b(y + \varphi'(\tilde{x} + y))), \quad (9.3)$$

qui est la composée  $H_{\varphi'} \circ D_b$  (voir les notations du 9.1.1.1). Sous cette écriture, on remarque que lorsque  $\varphi$  est petite,  $F$  est une perturbation de l'application linéaire de l'anneau :

$$(x, y) \mapsto (x + y, by).$$

**9.1.1.5** Nous supposons dorénavant que  $F$  préserve l'orientation ( $b > 0$ ).

- Lorsque  $b = 1$ ,  $F$  est **conservative** : la mesure de Lebesgue est préservée.
- Lorsque  $0 < b < 1$ ,  $F$  est **dissipative** : les aires sont diminuées.
- Lorsque  $b$  tend vers 0, l'application  $F_b$  tend, pour la topologie de la convergence  $C^1$  sur les compacts de  $\mathbb{A}$ , vers l'application  $F_0$ . L'image de  $F_0$  est le cercle  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$  sur lequel la dynamique est celle d'un endomorphisme du cercle de degré un,  $f$ , dont un relevé à  $\mathbb{R}$  est  $\tilde{f} = \text{Id}_{\mathbb{R}} + \varphi$ .

Réciproquement, on peut construire à partir d'un endomorphisme  $C^1$  du cercle  $f$  quelconque une famille d'applications de l'anneau  $F_b$ . La famille  $F_b$  interpole donc les endomorphismes du cercle et les applications conservatives de l'anneau, ce qui motive son étude (voir aussi [L87] et [He83] chap. II-III).

**9.1.1.6** Remarquons pour finir que lorsque  $F$  préserve les aires ( $b = 1$ ), elle induit un difféomorphisme sur le tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ . En effet, elle commute avec le revêtement :

$$\pi_2 : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{T}^2, (\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x}, y) + \mathbb{Z}^2.$$

**9.1.1.7** Dans le cas des applications de la forme (9.1) conservatives, l'hypothèse de flux nul (voir 7.2.3) s'écrit

$$\int_{\mathbb{T}^1} \varphi \, dm = 0. \quad (9.4)$$

(Voir [L87] et [He83] chap. II.)

**9.1.1.8** Lorsque  $0 < b < 1$ , les anneaux bornés  $\mathbb{A}_M$  avec  $M \geq \frac{b}{1-b} \max_{\mathbb{R}} |\varphi|$  sont positivement stables. Plus précisément, l'anneau suivant est stable :

$$\mathbb{T}^1 \times \left[ \frac{b}{1-b} \min(\varphi), \frac{b}{1-b} \max(\varphi) \right].$$

On retrouve la situation décrite en 7.3 : toute orbite positive rencontre  $\mathbb{A}_M$ . La dynamique intéressante de  $F$  est donc concentrée dans l'attracteur

$$\Lambda_0 = \bigcap_{n \geq 0} \tilde{F}^n(\mathbb{A}_M).$$

(D'après le 9.1.1.1, lorsque  $b > 1$ , on se ramène à ce cas en considérant  $\tilde{F}^{-1}$ .)

## 9.1.2 Le cadre variationnel

**9.1.2.1** Dans le cas où  $\tilde{F}$  est de la forme (9.1), on peut expliciter les objets de la section 7.2.4

$$\begin{aligned} g(\tilde{x}, \tilde{x}') &= \tilde{x}' - \tilde{x} - \varphi(\tilde{x}), \\ g'(\tilde{x}, \tilde{x}') &= b(\tilde{x}' - \tilde{x}) \end{aligned}$$

et (7.1) s'écrit

$$\tilde{x}_{n+1} + b\tilde{x}_{n-1} = (1+b)\tilde{x}_n + \varphi(\tilde{x}_n). \quad (9.5)$$

Considérons pour chaque  $n$ , un vecteur  $(\zeta_n, \eta_n) \in \mathbb{T}_{\tilde{z}_n} \tilde{\mathbb{A}}$ . La suite  $(\zeta_n, \eta_n)_n$  est une orbite de  $D\tilde{F}$  si et seulement si

$$\begin{aligned} \zeta_{n+1} &= (1 + D\varphi(\tilde{x}_n))\zeta_n + \eta_n, \\ \eta_{n+1} &= b D\varphi(\tilde{x}_n)\zeta_n + b\eta_n. \end{aligned}$$

On peut là encore projeter et étudier la suite  $(\zeta_n)$ . Lorsque  $\tilde{F}$  est de la forme (9.1), une suite  $(\zeta_n)$  est la projection d'une orbite de  $D\tilde{F}$  si et seulement si pour tout  $n$ ,

$$\zeta_{n+1} + b\zeta_{n-1} = (1 + b + D\varphi(\tilde{x}_n))\zeta_n. \quad (9.6)$$

**9.1.2.2** Pour chaque rationnel  $\frac{p}{q}$ , nous pouvons calculer le champ  $\xi$  introduit en section 7.2.5. Soit  $\mathbf{x} \in E$ . Alors pour tout entier  $n$ ,

$$\xi_n(\mathbf{x}) = (1+b)\tilde{x}_n + \varphi(\tilde{x}_n) - \tilde{x}_{n+1} - b\tilde{x}_{n-1}. \quad (9.7)$$

Lorsque  $b = 1$ , les fonctions génératrices  $S$  s'écrivent

$$S(\tilde{x}, \tilde{x}') = \frac{1}{2}(\tilde{x}' - \tilde{x})^2 + \Phi(\tilde{x}),$$

où  $\Phi$  est une primitive de  $\varphi$ .

## 9.2 Les paramètres

### 9.2.1 Paramètre de rotation

Une façon de perturber  $\tilde{F}$  sera de la composer avec une rotation, nous composerons  $f$  par une rotation : après avoir choisi une fonction  $\varphi^0$ , pour  $\omega \in \mathbb{R}$ , on pose

$$\varphi^\omega = \varphi^0 + \omega.$$



Ce choix a l'avantage de préserver la classe des applications standards. On obtient une famille  $(\tilde{F}_\omega)_\omega$ . Sous l'écriture (9.3), ceci revient à composer  $\tilde{F}$  par une translation verticale

$$(\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x}, y + \omega).$$

Lorsque l'on regardera des familles ayant un paramètre de rotation,  $\omega$ , on pourra imposer sans perdre en généralité la condition (9.4).

### 9.2.2 Paramètre de non-linéarité

Comme nous l'avons déjà remarqué en 9.1.1.4,  $\varphi$  contrôle la non-linéarité de l'application  $F$ . Il sera souvent intéressant de supposer que l'application étudiée est très loin d'être linéaire. Pour cela, nous fixerons une application  $\varphi_1$  non nulle, nous introduirons

$$\varphi = a\varphi_1 + \omega$$

avec  $a, \omega \in \mathbb{R}$  et nous étudierons la famille d'applications standards de la forme

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{b,a,\omega} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\tilde{x}, y) &\mapsto (\tilde{x} + a\varphi_1(\tilde{x}) + \omega + y, b(a\varphi_1(\tilde{x}) + \omega + y)). \end{aligned} \quad (9.8)$$

pour  $b \in ]0, 1]$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $a > a_0$  où  $a_0 > 0$  est une constante.

## 9.3 Choix de $\varphi_1$

Bien souvent, nous ferons des hypothèses supplémentaires sur  $\varphi_1$  :

### 9.3.1 La classe de Morse $\mathcal{M}$

**Définition 9.3.1** Une application standard  $\tilde{F}$  est dans la classe de Morse  $\mathcal{M}$  si la fonction  $\varphi_1$  est une fonction de Morse satisfaisant une condition de positivité :

1.  $\varphi_1$  est une fonction  $C^2$ ,  $\mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ .
2.  $\forall x, D\varphi_1(x) = 0 \Rightarrow D^2\varphi_1(x) \neq 0$  ( $\varphi_1$  n'a alors qu'un nombre fini de points critiques.)
3.  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{T}^1, (D\varphi_1(x_1) = 0 \text{ et } \varphi_1(x_1) = \varphi_1(x_2)) \Rightarrow D^2\varphi_1(x_1) D^2\varphi_1(x_2) > 0$ .

**Remarques 9.3.1** 1. En topologie  $C^2$ , la classe de Morse est un ouvert de de l'espace des applications standards  $C^2$ .

2. Si  $\tilde{F}$  est dans la classe de Morse, la famille  $(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  toute entière est dans la classe.
3. Si  $\varphi_1$ , est une fonction de Morse de classe  $C^2$  bimodale,  $\varphi_1$  est dans la classe de Morse.

On donne une condition pour qu'une application  $\tilde{F}_{b,a,\omega} \in \mathcal{M}$  soit suffisamment non-linéaire et dont l'intérêt apparaîtra à la proposition 10.1.6 :

**Définition 9.3.2** Soit  $\varphi_1$  une fonction de Morse  $\mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant les conditions 1) à 3) de la définition 9.3.1. Le réel  $a_M(\varphi_1)$  est alors l'infimum des  $a > 0$  tels que  $(D\varphi_1)^{-1}([\frac{-2}{a}, 0])$  est une union d'intervalles fermés et disjoints  $I$  vérifiant :

1.  $(D\varphi_1)^{-1}(0)$  rencontre  $I$  en un unique point  $x$ .
2. Sur le voisinage de  $x$

$$(\varphi_1)^{-1}(\varphi_1(I) + B(0, \frac{2}{a})),$$

$D^2\varphi_1$  ne s'annule pas et a un signe constant.

D'après le 3) de la définition 9.3.1,  $a_M(\varphi_1)$  est fini.

**Remarque 9.3.2** L'ouvert  $(\varphi_1)^{-1}(\varphi_1(I) + B(0, \frac{2}{a}))$  est éventuellement composé de plusieurs composantes connexes. Il est important d'énoncer une condition qui porte sur la totalité de cet ouvert et non uniquement sur la composante contenant  $I$  (voir la proposition 10.1.6).

### 9.3.2 La classe schwarziennne

**Définition 9.3.3** Une application standard  $\tilde{F}$  est dans la classe schwarziennne  $\mathcal{S}$  si la fonction  $\varphi_1$  est une fonction de Morse de dérivée schwarziennne négative :

1.  $\varphi_1$  est une fonction  $C^3$ ,  $\mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ .
2.  $\forall x, D\varphi_1(x) \neq 0 \Rightarrow S\varphi_1(x) < 0$ .
3.  $\forall x, D\varphi_1(x) = 0 \Rightarrow D^2\varphi_1(x) \neq 0$ .

**Remarques 9.3.3** 1. En topologie  $C^3$ , la classe schwarziennne est un ouvert non-vide de l'espace des applications standards  $C^3$ .

2. Si  $\tilde{F}$  est dans la classe schwarziennne, la famille  $(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  toute entière est dans la classe.

On donne une condition pour qu'une application  $\tilde{F}_{b,a,\omega} \in \mathcal{S}$  soit suffisamment non-linéaire :

**Définition 9.3.4** Soit  $\varphi_1$  une fonction de Morse  $C^3$ ,  $\mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant les conditions 1) à 3) de la définition 9.3.3. Le réel  $a_S(\varphi_1)$  est l'infimum des  $a > 0$  tels que

$$\forall a' > a, \forall x, D(\text{Id} + \frac{a'}{2}\varphi_1)(x) \neq 0 \Rightarrow S(\text{Id} + \frac{a'}{2}\varphi_1)(x) < 0.$$

### 9.3.3 Les applications bimodales de l'anneau

Nous formulons maintenant une hypothèse globale sur  $\varphi_1$  :

**Définition 9.3.5** Une application standard est **S-bimodale** ou simplement **bimodale**,  $\tilde{F} \in \mathcal{B}$ , si la fonction  $\varphi_1$  est une fonction de Morse bimodale à dérivée schwarziennne négative :

1.  $\varphi_1$  est une fonction  $C^3$ ,  $\mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ .

2.  $\forall x, D\varphi_1(x) \neq 0 \Rightarrow S\varphi_1(x) < 0$ .
3.  $\forall x, D\varphi_1(x) = 0 \Rightarrow D^2\varphi_1(x) \neq 0$ .
4. Il existe  $\tilde{c}_{\varphi_1}, \tilde{c}'_{\varphi_1} \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{c}_{\varphi_1} < \tilde{c}'_{\varphi_1} < \tilde{c}_{\varphi_1} + 1$  tels que  $\varphi_1$  est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur  $[\tilde{c}_{\varphi_1}, \tilde{c}'_{\varphi_1}]$  (resp.  $[\tilde{c}'_{\varphi_1}, \tilde{c}_{\varphi_1} + 1]$ ).

**Remarques 9.3.4** 1. Il n'y a pas de relation d'inclusion entre la classe de Morse et la classe schwarzienne. Elles contiennent toutes deux l'ensemble des applications bimodales.

2. En topologie  $C^3$ , la classe des applications bimodales est un ouvert non vide de l'espace des applications standards  $C^3$ .
3. Si  $\tilde{F}$  est bimodale, la famille  $(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  toute entière est bimodale.

On donne une condition pour qu'une application  $\tilde{F}_{b,a,\omega} \in \mathcal{B}$  soit suffisamment non-linéaire :

**Définition 9.3.6** Soit  $\varphi_1$  une fonction  $C^3$ , définissant une application bimodale  $\tilde{F}$ . Le réel  $a_B(\varphi_1)$  est l'infimum des  $a > 0$  vérifiant,

1. Il existe des constantes  $\delta, C_2 > 0$ , avec  $\delta^2 C_2 \geq 5$ , telles que sur les intervalles  $[\tilde{c}_{\varphi_1} - \delta, \tilde{c}_{\varphi_1} + \delta]$ ,  $[\tilde{c}'_{\varphi_1} - \delta, \tilde{c}'_{\varphi_1} + \delta]$ , disjoints,  $a|D^2\varphi_1| > C_2$ .
2.  $\forall a' > a, \forall x D(\text{Id} + \frac{a'}{2}\varphi_1)(x) \neq 0 \Rightarrow S(\text{Id} + \frac{a'}{2}\varphi_1)(x) < 0$ .

Le principe du minimum (voir la section 2.2) pour les applications à dérivée schwarzienne négative entraîne :

**Proposition 9.3.1** Soit  $\varphi_1$  une fonction  $C^3$  définissant une application bimodale. Pour  $a > a_B(\varphi_1)$ ,  $\text{Id} + a\varphi_1$  est bimodale : elle possède deux points critiques  $\tilde{c}_0 < \tilde{c}'_0$  avec  $|\tilde{c}'_0 - \tilde{c}_0| < 1$  et  $\text{Id} + a\varphi_1$  est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur  $[\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0]$  (resp.  $[\tilde{c}'_0, \tilde{c}_0 + 1]$ ).

**Remarques 9.3.5** 1. La condition 1) est un peu plus forte que l'hypothèse de non-linéarité énoncée en 9.3.1 (voir le lemme ci-dessous). Elle est cependant plus maniable et plus facile à énoncer.

2. Si pour  $a_0 > a_B(\varphi_1)$ , les constantes  $\delta, C_2 > 0$  satisfont la condition 1) de la définition 9.3.6, alors, pour  $a > a_0$ , la condition 1) est également satisfaite par les constantes  $C_2 \frac{a}{a_0}$  et  $\delta \sqrt{\frac{a_0}{a}}$ .
3. Pour  $\varphi_1(x) = \sin(2\pi x)$ , on obtient par exemple  $a_B = 5,3$  avec  $\delta = \frac{1}{8}$  et  $C_2 = 180$ .

**Lemme 9.3.2** Soit  $\tilde{F}$  une application bimodale. Alors,

- $a_B(\varphi_1) \geq a_M(\varphi_1)$ .
- Pour  $a' > a_B(\varphi_1)$ ,  $(a'D\varphi_1)^{-1}([-2, 0]) \subset B(c_{\varphi_1}, \frac{2}{C_2}) \cup B(c'_{\varphi_1}, \frac{2}{C_2})$ .

*Démonstration* : Soit  $a' > a_B(\varphi_1)$ . On a facilement pour  $\tilde{c}_{\varphi_1}^\varepsilon \in \{\tilde{c}_{\varphi_1}, \tilde{c}'_{\varphi_1}\}$ ,

$$|D(a'\varphi_1)(\tilde{c}_{\varphi_1}^\varepsilon \pm \frac{2}{C_2})| > 2,$$

puisque  $\frac{2}{C_2} < \delta$ . D'après le principe du minimum pour les applications à dérivée schwarzienne négative,  $|D(a'\varphi_1)|$  est strictement supérieur à 2 hors des intervalles  $[c_{\varphi_1} - \frac{2}{C_2}, c_{\varphi_1} + \frac{2}{C_2}]$  et  $[c'_{\varphi_1} - \frac{2}{C_2}, c'_{\varphi_1} + \frac{2}{C_2}]$ .

Remarquons que puisque les boules  $B(c_{\varphi_1}, \delta)$  et  $B(c'_{\varphi_1}, \delta)$  sont disjointes, alors  $\delta < \frac{1}{4}$ . Puisque  $\delta^2 C_2 > 5$ , on a  $C_2 > 80$ . Posons  $\delta' = (\frac{4}{C_2} + \frac{4}{C_2^2})^{\frac{1}{2}}$ . On obtient  $\delta' < (\frac{5}{C_2})^{\frac{1}{2}}$ . Ainsi,  $\delta' < \delta$ .

Soit par exemple  $\tilde{t} \in ]\tilde{c}_{\varphi_1}, \tilde{c}_{\varphi_1} + \frac{2}{C_2}[$  tel que  $D(a'\varphi_1)(\tilde{t}) = 2$ . Le développement de  $\varphi_1$  en  $\tilde{t}$  donne alors,

$$a'(\varphi_1(\tilde{c}_{\varphi_1} + \delta') - \varphi_1(\tilde{t})) > 2(\tilde{c}_{\varphi_1} + \delta' - \tilde{t}) + \frac{C_2}{2}(\tilde{c}_{\varphi_1} + \delta' - \tilde{t})^2.$$

Cette dernière quantité est minorée par

$$\frac{C_2}{2}(\delta' + \frac{2}{C_2} - (\tilde{t} - \tilde{c}_{\varphi_1}))^2 - \frac{2}{C_2} > \frac{C_2}{2}\delta'^2 - \frac{2}{C_2} = 2.$$

En examinant de la même façon les différents cas, on obtient donc

$$\varphi_1^{-1}(\varphi_1(I^\varepsilon) + B(0, \frac{2}{a})) \subset c_{\varphi_1}^\varepsilon + B(0, \delta')$$

où  $I^\varepsilon \subset B(c_{\varphi_1}^\varepsilon)$  est la composante contenant  $c_{\varphi_1}^\varepsilon$  sur laquelle  $|D\varphi_1| \leq 2$ . On en déduit  $a' \geq a_M(\varphi_1)$ .

□

**Par la suite ( $\tilde{F}_{b,a,\omega}$ ) sera généralement une famille bimodale de l'anneau avec  $0 < b \leq 1$ ,  $a > a_B(\varphi_1)$  et**

$$a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > C,$$

où  $C$  est une constante que l'on précisera.

## 9.4 Famille d'applications, famille d'Arnol'd épaisse

### 9.4.1 Présentation

Nous allons travailler avec les familles d'applications standards définies en section 9.1.1.1. Un exemple particulier, qui motive notre étude, est la famille d'Arnol'd épaisse, déjà introduite par plusieurs auteurs, et en particulier dans [BST]:

$$\tilde{F}_{b,a,\omega} : (\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x} + a \sin(2\pi\tilde{x}) + y, b(a \sin(2\pi\tilde{x}) + y)).$$

Ici,  $\phi_1(\tilde{x}) = \sin(2\pi\tilde{x})$  pour tout  $\tilde{x}$ .

L'étude, en partie numérique, menée dans [BST] considère cette famille pour de petites valeurs de  $a > 0$ . Le comportement quasi-périodique et la théorie KAM jouent un rôle prépondérant.

Dans notre étude, nous nous concentrerons sur les paramètres  $a$  grands, afin d'introduire de l'expansivité dans certaines directions et espérer obtenir une certaine forme d'hyperbolicité. Nous nous appuyons également de façon essentielle sur la théorie des attracteurs de Birkhoff ( $0 < b < 1$ ).

Cette famille est réelle-analytique et est invariante par les changements de coordonnées

$$\begin{aligned}(\tilde{x}, y, b, a, \omega) &\mapsto (-\tilde{x}, y, b, a, -\omega), \\(\tilde{x}, y, b, a, \omega) &\mapsto \left(x + \frac{1}{2}, -y, b, -a, \omega\right),\end{aligned}$$

ce qui permet de restreindre notre étude à  $a > 0$  et  $\omega \in [0, \frac{1}{2}] + \mathbb{Z}$ .

### 9.4.2 Pas de cercle invariant

Nous formulons dans notre cadre particulier un résultat général et classique :

**Proposition 9.4.1** *Soit  $\tilde{F} = \tilde{F}_{b,a,\omega}$  une application bimodale avec  $a > a_B(\varphi_1)$ . Alors  $\tilde{F}$  n'a pas de cercle invariant.*

*Démonstration :* Nous avons vu (voir le lemme 9.3.2) qu'il existe  $\tilde{x}$  tel que  $D\phi(\tilde{x}) < -2$ . Ceci interdit l'existence de cercle invariant (voir [He83], chapitre II).

□

**Remarque 9.4.1** C'est aussi vrai pour les applications de la classe de Morse suffisamment non-linéaires.

### 9.4.3 Le cas conservatif: le théorème d'Aubry et Mather

Le théorème de S. Aubry et J. Mather (voir [M86]) implique le résultat suivant :

**Théorème 9.4.2 (S. Aubry, J. Mather)** *Supposons que  $\tilde{F}_{b,\omega}$  soit une application standard de l'anneau telle que  $\int_{\mathbb{T}^1} \varphi \, dm = 0$ . Alors, pour  $b = 1$ ,  $\omega = 0$  et pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{1,a,0}) = \mathbb{R}$ .*

*Démonstration :* Lorsque  $\int_{\mathbb{T}^1} \varphi \, dm = 0$ ,  $b = 1$  et  $\omega = 0$ , la forme  $F^*(y \, dx) - y \, dx$  est exacte et le théorème d'Aubry et Mather s'applique.

□

Nous renvoyons à la section 12.6 pour d'autres remarques sur le cas conservatif, notamment lorsque  $\omega \neq 0$ . Pour  $\omega = 0$  et  $b = 1$ , on retrouve la famille standard classique qui est l'objet d'un grand nombre de travaux.

FIG. 9.1: Le rectangle  $\mathcal{P}_\varepsilon$ .

#### 9.4.4 Le cas dissipatif

Dans le cas dissipatif, nous avons vu (section 7.3) que le cadre de la théorie de Birkhoff est vérifié. L'ensemble de rotation  $\mathcal{R}(\tilde{F})$  est en général assez compliqué.

Notons cependant que nous avons pour les endomorphismes du cercle une description simple de l'ensemble de rotation : c'est un intervalle compact. De plus, les propriétés d'hyperbolicité montrées en section 2.3.2 donnent des renseignements au voisinage des paramètres pour lesquels  $b = 0$  :

Donnons-nous deux rationnels  $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$  tels que  $\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} > 2$ . D'après la proposition 2.1.1, l'ensemble des paramètres  $(a, \omega)$  pour lesquels  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{0,a,\omega}) = [\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}]$  est non vide et contenu dans la région où  $a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 2$ . D'après la proposition 2.1.2 c'est un rectangle fermé  $L(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$ . Sa frontière est constituée de deux courbes  $M^+$  et  $M^-$  (pour  $\omega = \omega_{\frac{p}{q}}^+$  et  $\omega = \omega_{\frac{p'}{q'}}^-$ ) qui correspondent à des bifurcations selle-nœud ainsi que de deux courbes  $\hat{M}^+$  et  $\hat{M}^-$  (pour  $\omega = \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+$  et  $\omega = \hat{\omega}_{\frac{p'}{q'}}^-$ ) qui correspondent à des bifurcations homoclines (voir les propositions 1.5.1, 2.1.1 et 2.2.1). Les courbes  $M^+$ ,  $M^-$ ,  $\hat{M}^+$  et  $\hat{M}^-$  sont transverses.

Ces bifurcations sont de codimension un. Ces courbes se prolongent donc localement lorsque  $b$  n'est plus nul en quatre variétés de codimension 1 :  $M^+$ ,  $M^-$ ,  $\hat{M}^+$  et  $\hat{M}^-$ . Le but de cette section est de montrer qu'au voisinage de l'application de dimension un, l'ensemble de rotation de  $\tilde{F}_{b,a,\omega}$  reste simple (voir figure 9.1) :

**Proposition 9.4.3** *Sous ces hypothèses, il existe  $0 < \varepsilon < 1$  (dépendant de  $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$ ) tel que l'ensemble des paramètres  $(b, a, \omega)$  de  $\mathcal{P}_\varepsilon = \{(b, a, \omega), 0 \leq b \leq \varepsilon\}$ , pour lesquels  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) = [\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}]$  est exactement le domaine compact  $Q(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$  situé entre les variétés  $M^+$ ,  $M^-$ ,  $\hat{M}^+$  et  $\hat{M}^-$ .*

*Démonstration* : Il est clair d'après la forme des équations (9.8) que  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) = [\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}]$  ne se produit que sur une partie bornée de  $\mathcal{P}_1$ . Par ailleurs, l'ensemble de rotation, comme fonction des paramètres, est continu aux points  $(0, a, \omega)$  pour la topologie de Hausdorff (car lorsque  $b$  tend vers 0,  $\Lambda_0(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  et  $\Lambda_1(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  tendent vers  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$  et  $\mathcal{R}_1(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  tend vers  $\mathcal{R}(\tilde{f}_{a,\omega})$ , voir [L87], section 11). Il nous suffit donc d'étudier un voisinage de  $L(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$  dans  $\mathcal{P}_1$ .

Si  $(a_0, \omega_0)$  est un paramètre de  $\text{Int}(L(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}))$ , on note  $\tilde{x}^-$  le point de l'orbite bien ordonnée positive de type  $(p, q)$  de  $[\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0]$  tel que  $\tilde{O}(\tilde{x}^-) \cap ]\tilde{c}_0, \tilde{x}^-[ = \emptyset$ . Puisque  $\mathcal{R}(\tilde{f}_{a_0,\omega_0})$  n'est pas réduit à  $\{\frac{p}{q}\}$ ,  $\tilde{f}_{a_0,\omega_0}(\tilde{c}'_0 - 1) > \tilde{f}_{a_0,\omega_0}(\tilde{x}^-)$ . Ainsi, il existe un unique  $\tilde{x}'^- \in [\tilde{c}'_0 - 1, \tilde{c}'_0]$  tel que  $\tilde{f}_{a_0,\omega_0}(\tilde{x}'^-) = \tilde{f}_{a_0,\omega_0}(\tilde{x}^-)$ . On définit de même pour l'orbite bien ordonnée de type  $(p', q')$  les points  $\tilde{x}^+ \in [\tilde{c}_0, \tilde{c}'_0]$  et  $\tilde{x}'^+ \in [\tilde{c}'_0, \tilde{c}_0 + 1]$ . L'étude des applications  $f_{a_0,\omega_0}^{(0)}$  et  $f_{a_0,\omega_0}^{(1)}$  (section 2.3.3.2) montre que l'image de  $]x'^-, x^-[$  (resp.  $]x^+, x'^+[$ ) par  $f_{a_0,\omega_0}^q$  est contenue dans  $]x'^-, x^-[$  (resp.  $]x^+, x'^+[$ ). Comme pour la proposition 2.3.2, ceci entraîne que l'ensemble des points dont l'orbite reste hors de  $]x'^-, x^-[ \cup ]x^+, x'^+[$  est un compact hyperbolique  $k(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$ .

Cette situation persiste localement même lorsque  $b$  n'est pas nul (voir [PT], appendice 1, pour la théorie des ensembles hyperboliques des endomorphismes) : l'attracteur

$\Lambda_1$  est contenu dans un anneau  $\mathbb{A}_M$  avec  $0 < M$  petit. Le point  $x^-$  (resp.  $x^+$ ) peut être suivi en un point  $z^-$  (resp.  $z^+$ ) périodique de type selle. La variété stable locale de  $z^-$  traverse  $\mathbb{A}_M$  selon deux courbes  $C^0$ -proches de  $D(x^-, 0)$  et  $D(x'^-, 0)$  (resp.  $D(x^+, 0)$  et  $D(x'^+, 0)$ ) qui définissent un rectangle  $R^-$  (resp.  $R^+$ ) de  $\mathbb{A}_M$  contenant  $(c_0, 0)$  (resp.  $(c'_0, 0)$ ). On obtient

$$F_{b,a,\omega}^q(R^-) \subset R^- \quad (\text{resp. } F_{b,a,\omega}^q(R^+) \subset R^+).$$

L'ensemble des points dont l'orbite ne rencontre pas  $\text{Int}(R^- \cup R^+)$  est l'ensemble stable d'un compact hyperbolique  $K(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$  conjugué à la dynamique sur la limite projective  $\hat{k}(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$  de  $k(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$ . Ceci montre que l'ensemble de rotation de  $\tilde{F}_{b,a,\omega}$  est l'intervalle  $[\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}]$ .

Lorsque  $(a_0, b_0)$  appartient à  $M^-$ , on peut encore définir l'ensemble  $k(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$  qui est cette fois un ensemble selle-nœud hyperbolique. L'orbite selle-nœud est l'unique orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$  de  $\tilde{f}_{a_0, \omega_0}$ . L'analyse de cette bifurcation est décrite en appendice A. Pour un paramètre voisin dans  $Q(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$ ,  $\tilde{F}_{b,a,\omega}$  possède encore un compact  $K(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$  sur lequel la dynamique est conjuguée à la limite projective de  $k(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$ . Lorsque l'on passe au-delà de  $M^-$ , l'unique orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$  disparaît et l'ensemble de rotation ne contient plus le rationnel  $\frac{p}{q}$ .

Lorsque  $(a_0, b_0)$  appartient à  $\hat{M}^- \setminus (M^- \cup M^+)$ , l'ensemble hyperbolique  $k(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$  est encore défini et persiste localement. L'ensemble de rotation  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  est donc  $[\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}]$  sur un voisinage de  $(0, a_0, \omega_0)$  dans  $Q(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$ . En revanche, au-delà de  $\hat{M}^-$ , la bifurcation homocline de  $\mathcal{O}(x^-)$  crée de nouveaux nombres de rotation, inférieurs à  $\frac{p}{q}$  (voir [L89], proposition 3.5 et la section 12.4.2.2).

Les mêmes arguments s'appliquent aux surfaces  $M^+$  et  $\hat{M}^+$ .

□

### 9.4.5 Dynamique non-uniformément hyperbolique

Pour certains paramètres appartenant à un ensemble  $\Delta$ , l'attracteur de Birkhoff est un attracteur étrange. Nous renvoyons à l'appendice B pour une exposition plus détaillée de cette théorie.

En corollaire, on montre que tout paramètre  $(b_0, a_0, \omega_0) \in \Delta$  est un point de continuité des applications

$$(b, a, \omega) \mapsto \Lambda_0(F_{b,a,\omega}), \Lambda_1(F_{b,a,\omega}),$$

pour la topologie de Hausdorff et d'autre part que

$$\Lambda_0(F_{b_0, a_0, \omega_0}) = \Lambda_1(F_{b_0, a_0, \omega_0}).$$

## Chapitre 10

# Langues d'Arnol'd rationnelles

A partir de ce chapitre, nous ne considérons plus que les applications standards introduites au chapitre 9. En préliminaire, nous introduisons les techniques liées à la dérivée schwarziennne, puis nous localisons les orbites bien ordonnées.

Nous passons ensuite à l'étude de la classe de Morse. Les suites de dérivées partielles associées aux orbites bien ordonnées de torsion nulle ont en général de bonnes propriétés: elles sont non nulles et de signe constant. Ceci permet de montrer que les orbites bien ordonnées de torsion nulle sont isolées, de classer leurs bifurcations (dans le domaine dissipatif seule la bifurcation selle-nœud se produit).

Pour les applications bimodales, on montre enfin que pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$ , l'ensemble des paramètres ayant  $\frac{p}{q}$  dans leur ensemble de rotation est un domaine bordé par deux variétés lisses transverses à  $\omega$ : c'est la généralisation des langues d'Arnol'd. Nous terminons en donnant des bornes sur les langues d'Arnol'd, sur la taille de l'ensemble de rotation et sur la largeur de l'attracteur (dans le cas dissipatif).

### 10.1 Considérations préliminaires

#### 10.1.1 Graphes invariants locaux

Nous fixons ici les notations que nous utiliserons aussi au chapitre 12 pour l'étude des tangences homoclines.

Considérons  $\tilde{F}$  un difféomorphisme de  $\widetilde{D\mathbb{V}}(\mathbb{T}^1)$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , et donnons-nous une orbite  $\mathcal{O}(z)$  de  $F$ ,

1. bien ordonnée, de type  $(p, q)$ ,
2. de torsion nulle,
3. et telle que  $DF^q(z)$  ait des valeurs propres distinctes.

On sait par la section 8.1.2 que les valeurs propres sont alors réelles et positives. On fixe un relevé  $\tilde{z}$  de  $z$  et on note  $\tilde{z}_n = \tilde{F}^n(\tilde{z})$ .



D'après [HPS] chap. 5A,  $\mathcal{O}(z)$  possède des variétés centrales stables (resp. instables) locales de dimension un (au moins l'un de ces deux systèmes de variétés invariantes est uniquement défini) :

- Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , il existe une variété  $C^r$  de dimension un,  $\Gamma_n$ , contenant  $\tilde{z}_n$ . De plus,  $\Gamma_{n+q} = \Gamma_n + (p, 0)$ .
- Pour tout  $n$ ,  $\tilde{F}(\Gamma_n) \cap \Gamma_{n+1}$  contient un voisinage de  $\tilde{z}_{n+1}$  dans  $\Gamma_{n+1}$ .
- Pour tout  $n$ ,  $\Gamma_n$  est tangente à la direction propre associée à la valeur propre de plus petit module (resp. de plus grand module) de  $D\tilde{F}^q(\tilde{z}_n)$ .

Nous appliquons la proposition 8.1.1 : les variétés  $\Gamma_n$  sont localement des graphes  $C^r$  au dessus de la base  $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \tilde{\mathbb{A}}$ . Puisque les graphes  $\Gamma_n$  sont localement invariants, la dynamique se projette sur  $\mathbb{R} \times \{0\}$  : pour tout  $n$ ,

1. il existe une application  $C^r$ ,  $\phi_n : \text{Dom}(\phi_n) \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un voisinage  $\text{Dom}(\phi_n)$  de  $\tilde{x}_n = \tilde{p}_1(\tilde{z}_n)$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\Gamma_n = \{(\tilde{x}, \phi_n(\tilde{x})), \tilde{x} \in \text{Dom}(\phi_n)\};$$

2. il existe un difféomorphisme local de classe  $C^r$ ,  $f_n$ , défini sur un voisinage  $\text{Dom}(f_n)$  de  $\tilde{x}_n$  dans  $\text{Dom}(\phi_n)$  et à valeurs dans  $\text{Dom}(\phi_{n+1})$  vérifiant  $f_n(\tilde{x}_n) = \tilde{x}_{n+1}$  et

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \phi_n(\tilde{x})) = (f_n(\tilde{x}), \phi_{n+1}(f_n(\tilde{x})))$$

pour tout  $\tilde{x} \in \text{Dom}(f_n)$  ;

3.  $Df_n(\tilde{x}_n) > 0$ .

Plus généralement, nous dirons qu'une orbite (finie ou infinie)  $(\tilde{z}_n)_{n \in I}$  définie sur un intervalle de  $\mathbb{Z}$  non vide et non réduit à un point,  $I$ , admet des **graphes invariants locaux**  $(\Gamma_n)_{n \in I}$  si la propriété 1) est satisfaite pour tout  $n \in I$  et les propriétés 2) et 3) pour tout entier  $n$  tel que  $n, n+1 \in I$ . Pour  $n \in I$ ,  $n+1 \notin I$ , on peut encore définir au voisinage de  $\tilde{x}_n$

$$f_n(\tilde{x}) = \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{x}, \phi_n(\tilde{x})).$$

L'application  $f_n$  n'est pas toujours un difféomorphisme dans ce cas.

Nous restreignons dorénavant notre étude aux applications de la forme (9.1) :

$$(\tilde{x}, y) \mapsto (\tilde{x} + \varphi(\tilde{x}) + y, b(\varphi(\tilde{x}) + y)).$$

Si l'orbite  $(\tilde{z}_n)_{n \in I}$  admet des graphes invariants locaux, on déduit de (9.5) pour tout entier  $n$  tel que  $n-1, n \in I$ ,

$$f_n + bf_{n-1}^{-1} = \varphi + (1+b)\text{Id} \tag{10.1}$$

sur le voisinage  $\text{Dom}(f_n) \cap f_{n-1}(\text{Dom}(f_{n-1}))$  de  $\tilde{x}_n$ .

### 10.1.2 Utilisation de la dérivée schwarzienne

Dans cette section et dans la suivante, nous supposons que  $\tilde{F} = \tilde{F}_{b,a,\omega}$  est dans la classe schwarzienne (voir 9.3.2) avec  $a > a_S(\varphi_1)$  et  $0 \leq b \leq 1$ . En particulier,  $F$  est de classe  $C^r$ ,  $r \geq 3$  et pour tout  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ ,

$$D((1+b)\text{Id} + a\varphi_1 + \omega) \neq 0 \Rightarrow S((1+b)\text{Id} + a\varphi_1 + \omega) < 0. \quad (10.2)$$

Cette section repose sur la remarque suivante :

**Lemme 10.1.1** *Soient  $f$  et  $g$  deux difféomorphismes locaux  $C^3 \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définis au voisinage de 0 tels que  $Df(0)Dg(0) > 0$ , alors*

$$S(f+g)(0) \geq \frac{Df(0)Sf(0) + Dg(0)Sg(0)}{D(f+g)(0)}. \quad (10.3)$$

En particulier, lorsque  $Sf(0), Sg(0) \geq 0$ ,  $S(f+g)(0) \geq 0$ .

*Démonstration :* On écrit les développements de  $Df$  et  $Dg$  en 0 à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} Df(x) &= a + bx + \frac{c}{2}x^2 + o(x^2), \\ Dg(x) &= a' + b'x + \frac{c'}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Par définition de la dérivée schwarzienne (voir (1.1)),

$$(Df(0))^2 Sf(0) = ca - \frac{3}{2}b^2 \text{ et } (Dg(0))^2 Sg(0) = c'a' - \frac{3}{2}b'^2.$$

On a aussi  $aa' > 0$ .

On peut alors estimer

$$\begin{aligned} (Df(0) + Dg(0))^2 S(f+g)(0) &= (c+c')(a+a') - \frac{3}{2}(b+b')^2 \\ &= ca - \frac{3}{2}b^2 + c'a' - \frac{3}{2}b'^2 + aa' \left( \frac{c}{a} - \frac{3}{2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{c'}{a'} - \frac{3}{2} \frac{b'^2}{a'^2} \right) + \frac{3}{2}aa' \left( \frac{b'}{a'} - \frac{b}{a} \right)^2, \\ &\geq (Df(0) + Dg(0)) (Df(0)Sf(0) + Dg(0)Sg(0)). \end{aligned}$$

□

**Remarque 10.1.1** Il y a égalité dans (10.3) si et seulement si  $Df$  et  $Dg$  ont des développements à l'ordre un en 0 qui sont proportionnels.

On en déduit :

**Proposition 10.1.2** *Soient  $(\tilde{z}_n)_{n \in I}$  une orbite et un système de graphes invariants locaux associé induisant des difféomorphismes locaux croissants  $f_n$  pour tout entier  $n$  tel que  $n, n+1 \in I$ . Alors, si  $n, n+1, n+2 \in I$  et si  $Sf_n(\tilde{x}_n) \leq 0$ , on a  $Sf_{n+1}(\tilde{x}_{n+1}) < 0$ . En particulier, la suite  $(\text{Signe}(Sf_n(\tilde{x}_n)))$  est de l'une des formes suivantes :*

*i. La suite est constante, de valeur  $-1$  ou  $+1$ .*

ii. Il existe  $n_0$  vérifiant :

- pour  $n < n_0$ ,  $\text{Signe}(S f_n(\tilde{x}_n)) = +1$ ,
- pour  $n > n_0$ ,  $\text{Signe}(S f_n(\tilde{x}_n)) = -1$ ,

la valeur  $\text{Signe}(S f_{n_0}(\tilde{x}_{n_0}))$  étant quelconque ( $-1, 0$  ou  $+1$ ).

*Démonstration* : On rappelle la loi de composition pour la dérivée schwarzienne : si  $f, g$  sont deux difféomorphismes locaux au voisinage de  $0$  tels que  $g(0) = 0$ ,  $f(0) = 0$ ,

$$S(f \circ g)(0) = (Dg(0))^2 S f(0) + S g(0). \quad (10.4)$$

Donc

$$\begin{aligned} S f(0) = 0 &\Leftrightarrow S f^{-1}(0) = 0, \\ S f(0) < 0 &\Leftrightarrow S f^{-1}(0) > 0. \end{aligned}$$

Revenons à la démonstration : supposons que pour un entier  $n$ ,  $S f_n(\tilde{x}_n) \leq 0$  et  $S f_{n+1}(\tilde{x}_{n+1}) \geq 0$ . Alors, par ce qui précède,  $S(f_{n+1} + b f_n^{-1}) \geq 0$  en  $\tilde{x}_{n+1}$ . D'après la formule (10.1),  $S(a\varphi_1 + \omega + (1+b)\text{Id})(\tilde{x}_{n+1}) \geq 0$ . Ceci contredit l'hypothèse (10.2). Ainsi,  $S f_n(\tilde{x}_n) \leq 0$  implique  $S f_{n+1}(\tilde{x}_{n+1}) < 0$ .

□

Bien sûr, dans le cas où l'orbite et la suite de graphes associés sont périodiques, seul le cas (i) de la proposition 10.1.2 est possible, par périodicité. On obtient alors,

**Proposition 10.1.3** *Sous les hypothèses de la proposition 10.1.2, pour tout  $k$  tel que  $n, n+1, \dots, n+k \in I$ ,*

$$b^k (Df_n S f_n)(\tilde{x}_n) > \left( \prod_{j=0}^{k-1} Df_{n+j}(\tilde{x}_{n+j}) \right)^4 (Df_{n+k} S f_{n+k})(\tilde{x}_{n+k}).$$

*Dans le cas d'une orbite périodique de période  $q$ , l'inégalité suivante est satisfaite pour tout  $n$  :*

$$b^q S f_n(\tilde{x}_n) > \left( \prod_{j=0}^{q-1} Df_j(\tilde{x}_j) \right)^4 S f_n(\tilde{x}_n). \quad (10.5)$$

*Démonstration* : D'après l'hypothèse (10.2) et la formule (10.1),

$$S(f_{n+1} + b f_n^{-1})(\tilde{x}_{n+1}) < 0 \text{ et } S(b f_n^{-1})(\tilde{x}_{n+1}) = S f_n^{-1}(\tilde{x}_{n+1}).$$

L'inégalité du lemme 10.1.1 donne

$$(Df_{n+1} S f_{n+1} + b Df_n^{-1} S f_n^{-1})(\tilde{x}_{n+1}) < 0.$$

Utilisant (10.4), on obtient

$$\frac{b}{(Df_n(\tilde{x}_n))^3} S f_n(\tilde{x}_n) > Df_{n+1}(\tilde{x}_{n+1}) S f_{n+1}(\tilde{x}_{n+1}).$$

On obtient l'inégalité voulue en faisant le produit de ces inégalités sur  $n$ .

□

### 10.1.3 Bifurcations dans la classe schwarziennne

Nous conservons les hypothèses de la section 10.1.2. Le cas conservatif est particulier et sera traité ultérieurement (en 10.3). Nous supposons donc  $b \in ]0, 1[$ .

On considère à nouveau une orbite périodique  $\mathcal{O}(z)$  bien ordonnée de type  $(p, q)$ , et de torsion nulle. Si aucune valeur propre de  $DF(z)$  n'est égale à 1,  $z$  est isolé comme point fixe de  $F^q$  et peut être suivi localement. Si au contraire,  $DF(z)$  possède la valeur propre 1, il y a une bifurcation en  $z$ . Nous fixons une suite de variétés centrales  $(\Gamma_n)$  et appliquons les constructions et les résultats des sections 10.1.1 et 10.1.2.

On remarque que  $\prod_{k=0}^{q-1} Df_k(\tilde{x}_k) = 1$ . La proposition 10.1.3 entraîne alors

$$S f_n(\tilde{x}_n) < 0.$$

D'après la loi de composition (10.4),

$$S(f_{q-1} \circ \cdots \circ f_0)(\tilde{x}_0) < 0.$$

On en déduit que la bifurcation de  $z$  n'est pas trop dégénérée:

- Soit,  $D^2(f_{q-1} \circ \cdots \circ f_0)(\tilde{x}_0) \neq 0$ . L'orbite périodique est en bifurcation selle-nœud (voir l'appendice A et en particulier les sections A.1 et A.4.1).
- soit  $D^2(f_{q-1} \circ \cdots \circ f_0)(\tilde{x}_0) = 0$  et  $D^3(f_{q-1} \circ \cdots \circ f_0)(\tilde{x}_0) < 0$ . La bifurcation est cubique de type attractif.

- Remarques 10.1.2**
1. Dans le cas conservatif, nous voyons maintenant qu'une orbite périodique de torsion nulle et de valeurs propres égales à 1 n'a pas de variété invariante  $C^3$ : la proposition 8.1.1 montre que localement ces variétés seraient des graphes et l'inégalité (10.5) entraînerait  $S f_0(\tilde{x}_0) > S f_0(\tilde{x}_0)$ . En fait un calcul montre qu'une variété invariante pour une telle orbite ne peut être deux fois différentiable en  $\tilde{x}_0$ .
  2. L'utilisation de la dérivée schwarziennne (sections 10.1.2 et 10.1.3) n'est pas essentielle dans ce chapitre puisque dans le cas de la classe de Morse, un raisonnement direct permet de montrer que seule la bifurcation selle-nœud se produit. Elle donne cependant des résultats dans un cadre un peu différent qui seront de plus utiles pour le chapitre 12.

### 10.1.4 Localisation des orbites bien ordonnées

Soit  $\tilde{F}$  une application qui dévie la verticale que l'on supposera simplement de la forme (9.1) avec  $0 \leq b \leq 1$ . Nous pouvons alors localiser les orbites bien ordonnées:

**Proposition 10.1.4** *Si  $(\tilde{x}, y)$  a une orbite bien ordonnée de nombre de rotation  $\rho$ , alors*

$$(1 - b)\rho - 1 < \varphi(\tilde{x}) < (1 - b)\rho + 1, \tag{10.6}$$

$$b(\rho - 1) < y < b(\rho + 1). \tag{10.7}$$

*Démonstration* : On pose  $\tilde{z} = (\tilde{x}, y)$ . Supposons tout d'abord que  $\rho$  n'est pas entier. Puisque  $\mathcal{O}(\tilde{z})$  est bien ordonnée,

$$\tilde{x} - [\rho] - 1 \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^{-1}(\tilde{z}) \leq \tilde{x} - [\rho].$$

$$\tilde{x} + [\rho] \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{z}) \leq \tilde{x} + [\rho] + 1.$$

D'après (9.1) et (9.2), on obtient donc

$$\begin{aligned}\tilde{x} - [\rho] - 1 &\leq \tilde{x} - \frac{1}{b}y \leq \tilde{x} - [\rho]. \\ \tilde{x} + [\rho] &\leq \tilde{x} + \varphi(\tilde{x}) + y \leq \tilde{x} + [\rho] + 1.\end{aligned}$$

On en déduit

$$[\rho] \leq \frac{1}{b}y \leq [\rho] + 1,$$

puis

$$[\rho] - b([\rho] + 1) \leq \varphi(\tilde{x}) \leq [\rho] + 1 - b[\rho].$$

Dans le cas où  $\rho$  est entier, on remarque que l'on a soit

$$\tilde{x} - \rho - 1 \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^{-1}(\tilde{z}) \leq \tilde{x} - \rho \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{z}) \leq \tilde{x} - \rho + 1,$$

soit

$$\tilde{x} - \rho - 1 \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{z}) \leq \tilde{x} - \rho \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^{-1}(\tilde{z}) \leq \tilde{x} - \rho + 1,$$

La démonstration est ensuite la même. □

Dans le cas où l'orbite est périodique bien ordonnée de type  $(p, q)$  et de torsion nulle, on a une contrainte supplémentaire: soit  $(\tilde{F}^n(\tilde{z})) = (\tilde{z}_n) = (\tilde{x}_n, y_n)$  une telle orbite. Considérons une valeur propre  $\lambda$  de  $DF^q(\tilde{z}_0)$  et une suite non nulle  $(\zeta_n, \eta_n)$  de vecteurs tangents le long de l'orbite tels que

$$DF(\tilde{z}_n) \cdot (\zeta_n, \eta_n) = (\zeta_{n+1}, \eta_{n+1}),$$

et tels que  $(\zeta_0, \eta_0)$  soit un vecteur propre de  $D\tilde{F}^q(\tilde{z})$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

On rappelle la relation obtenue en 9.1.2.1 pour tout  $n$ ,

$$\zeta_{n+1} + b\zeta_{n-1} = (1 + b)\zeta_n + D\varphi(\tilde{x}_n)\zeta_n. \quad (10.8)$$

Puisque  $(\tilde{z}_n)$  est de torsion nulle, on peut supposer (proposition 8.1.1)

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \zeta_n > 0.$$

On en déduit le lemme suivant :

**Lemme 10.1.5** *Soit  $(\tilde{z}_n) = (\tilde{x}_n, y_n)$  une orbite bien ordonnée périodique et de torsion nulle. Alors,*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, 1 + b + D\varphi(\tilde{x}_n) > 0.$$

**Remarque 10.1.3** Dans certains cas, on peut se servir de la localisation donnée par la proposition 10.1.4 pour minorer  $D\varphi$  le long de l'orbite  $(x_n)$ . Supposons que l'on ait :

$$\exists \lambda_0 > 1, \forall n, D\varphi(x_n) > \lambda_0. \quad (10.9)$$

Si la suite  $(\zeta_n)$  décroît, alors pour tout  $n$ ,

$$b\zeta_{n-1} = (1 + b + D\varphi(x_n))\zeta_n - \zeta_{n+1} \geq (b + \lambda_0)\zeta_n.$$

On en déduit que la valeur propre  $\lambda$  associée est inférieure à  $(\frac{b}{b+\lambda_0})^q \leq b^q$ .

Sinon, pour une valeur de  $n$ ,  $\zeta_{n-1} \leq \zeta_n$  et

$$\zeta_{n+1} \geq (1 + D\varphi(x_n))\zeta_n.$$

On en déduit que la suite  $(\zeta_n)$  est croissante et que la valeur propre  $\lambda$  associée est supérieure à  $(1 + \lambda_0)^q$ .

Finalement, la condition 10.9 implique que l'orbite périodique est hyperbolique selle et on obtient des estimées sur les valeurs propres.

Traisons pour finir le cas des orbites périodiques avec une valeur propre égale à 1 :

**Proposition 10.1.6** *Soit  $\tilde{F} = \tilde{F}_{b,a,\omega}$  une application dans la classe de Morse avec  $a > a_M(\varphi_1)$  et  $0 \leq b \leq 1$ . Si l'orbite de  $\tilde{z} = (\tilde{x}, y)$  est périodique de période  $q$ , bien ordonnée, de torsion nulle et si 1 est valeur propre de  $D\tilde{F}^q(\tilde{z})$ , alors, la suite  $(D^2\varphi(\tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^n(\tilde{z})))$  est non nulle et de signe constant. Si la suite est positive (resp. négative), il existe un minimum (resp. maximum)  $c$  de  $\varphi$  tel que pour tout point  $z_n = F^n(z) = (x_n, y_n)$  de l'orbite,*

$$\varphi(c) \leq \varphi(x_n) \leq \varphi(c) + 4 \text{ (resp. } \varphi(c) - 4 \leq \varphi(x_n) \leq \varphi(c)).$$

*Démonstration :* Nous introduisons comme précédemment une suite non nulle  $(\zeta_n, \eta_n)$  de vecteurs tangents aux points de l'orbite telle que  $(\zeta_0, \eta_0)$  soit un vecteur propre de  $D\tilde{F}^q(\tilde{z})$  associé à la valeur propre 1. La suite  $(\zeta_n, \eta_n)$  est donc périodique de période  $q$ .

Soit  $n_0$  tel que  $\zeta_{n_0} = \max\{\zeta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Par (10.8), on a  $D\varphi(\tilde{x}_{n_0}) \leq 0$ . Utilisant le lemme 10.1.5, on a :

$$-2 \leq D\varphi(\tilde{x}_{n_0}) \leq 0. \tag{10.10}$$

D'après (10.6),

$$\forall n, \tilde{x}_n \in \varphi^{-1}(\varphi(\tilde{x}_{n_0}) + B(0, 2)). \tag{10.11}$$

Exploitions le fait que  $\tilde{F}$  soit une application de la classe de Morse ( $\varphi = a\varphi_1 + \omega$  et  $a > a_M(\varphi_1)$ ) : (10.10) et (10.11) impliquent que  $D^2\varphi$  est non nul et de signe constant le long de la suite  $(\tilde{x}_n)$ .

Supposons par exemple que  $D^2\varphi$  soit positif. L'inégalité (10.10) et la définition de  $a_M(\varphi_1)$  impliquent qu'il existe un point critique de  $\varphi$ ,  $c$ , tel que

$$2 \geq \varphi(x_{n_0}) - \varphi(c) \geq 0.$$

L'assertion 10.11 termine la preuve. □

## 10.2 Bifurcation des orbites bien ordonnées de torsion nulle : étude locale (cas dissipatif)

Dans cette section,  $(F_{b,a,\omega})$  est une famille dans la classe de Morse. De plus,  $a > a_M(\varphi_1)$  et  $0 < b$ . Nous supposons  $0 < b < 1$  en sections 10.2.3 et 10.2.4.

### 10.2.1 Lemmes de transversalité

Nous allons utiliser le lemme suivant à plusieurs reprises :

**Lemme 10.2.1** *Soient  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(X_n)$  des suites périodiques telles que*

- i.  $\forall n, a_n > 0$ .
- ii.  $b_n$  est de signe constant (et peut éventuellement s'annuler).
- iii.  $X_{n+1} = a_n X_n + b_n$ .

*Alors,  $(X_n)$  est de signe constant. De plus, s'il existe  $n$  tel que  $X_n = 0$ , alors,  $(X_n)$  et  $(b_n)$  sont identiquement nulles.*

*Démonstration :* Si la suite  $(b_n)$  est négative ou nulle, on peut, au moyen des transformations suivantes,

$$a'_n = \frac{1}{a_{-(n+1)}} \quad b'_n = -\frac{b_{-(n+1)}}{a_{-(n+1)}} \quad X'_n = X_{-n},$$

se ramener au cas où  $(b_n)$  est positive ou nulle.

On remarque tout d'abord,

$$(\exists n, X_n \geq 0) \Rightarrow (\forall n, X_n \geq 0).$$

On en déduit, puisque  $(X_n)$  est périodique,

$$(\exists n, X_n < 0) \Rightarrow (\forall n, X_n < 0).$$

On remarque également,

$$(\exists n, X_n > 0) \Rightarrow (\forall n, X_n > 0).$$

On déduit des deux dernières assertions

$$(\exists n, X_n = 0) \Rightarrow (\forall n, X_n = 0).$$

Mais ceci implique également que la suite  $(b_n)$  est identiquement nulle.

□

Dans le but d'étudier la transversalité des bifurcations par rapport au paramètre de rotation  $\omega$ , nous introduisons la famille à paramètre  $(F_\omega)_{\omega \in \mathbb{R}}$  (voir la section 9.2.1). Nous considérerons pour  $F_{\omega_0}$  une orbite périodique bien ordonnée de torsion nulle, de période  $q$ :  $(x_n, y_n)$ . Nous nous donnons enfin pour chaque entier  $n$  des applications  $\phi_n, f_n: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies localement au voisinage de  $(\tilde{x}_n, \omega_0)$  et nous noterons  $\varphi^\omega = \varphi + \omega$ ,  $\phi_n^\omega = \phi_n(\cdot, \omega)$ ,  $f_n^\omega = f_n(\cdot, \omega)$  pour alléger l'écriture. Nous demandons les propriétés suivantes :

- les suites  $(\phi_n)$  et  $(f_n)$  sont périodiques de période  $q$ .
- Pour tout entier  $n$  et tout  $\omega$  proche de  $\omega_0$ ,  $f_n^\omega$  est un difféomorphisme local. L'hypothèse de torsion nulle et la proposition 8.1.1 impliquent  $Df_n^\omega > 0$ .
- $\tilde{F}_\omega(\tilde{x}, \phi_n^\omega(\tilde{x})) = (f_n^\omega(\tilde{x}), \phi_{n+1}^\omega(f_n^\omega(\tilde{x})))$ .

Nous pouvons réécrire la dernière condition :

$$f_n^\omega(\tilde{x}) = \tilde{x} + \varphi^\omega(\tilde{x}) + \phi_n^\omega(\tilde{x}), \quad (\text{F1})$$

$$\phi_{n+1}^\omega(f_n^\omega(\tilde{x})) = b(\varphi^\omega(\tilde{x}) + \phi_n^\omega(\tilde{x})). \quad (\text{F2})$$

Dérivons ces relations :

$$Df_n^\omega(\tilde{x}) = 1 + D\varphi^\omega(\tilde{x}) + D\phi_n^\omega(\tilde{x}), \quad (\text{D1})$$

$$\begin{aligned} D\phi_{n+1}^\omega(f_n^\omega(\tilde{x})) Df_n^\omega(\tilde{x}) &= b(D\varphi^\omega(\tilde{x}) + D\phi_n^\omega(\tilde{x})), \\ &= b(Df_n^\omega(\tilde{x}) - 1) \text{ d'après (D1)}. \end{aligned} \quad (\text{D2})$$

Donc

$$(b - D\phi_{n+1}^\omega(f_n^\omega(\tilde{x}))) Df_n^\omega(\tilde{x}) = b, \quad (\text{D2}')$$

d'où

$$b - D\phi_{n+1}^\omega(f_n^\omega(\tilde{x})) > 0. \quad (10.12)$$

(C'est en fait une conséquence directe de la déviation de la verticale.)

Dérivons maintenant (F1) et (F2) par rapport au paramètre :

$$\frac{d}{d\omega} f_n^\omega(\tilde{x}) = 1 + \frac{d}{d\omega} \phi_n^\omega(\tilde{x}), \quad (\text{O1})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \phi_{n+1}^\omega(f_n^\omega(\tilde{x})) + D\phi_{n+1}^\omega(f_n^\omega(\tilde{x})) \frac{d}{d\omega} f_n^\omega(\tilde{x}) &= b\left(1 + \frac{d}{d\omega} \phi_n^\omega(\tilde{x})\right), \\ &= b \frac{d}{d\omega} f_n^\omega(\tilde{x}) \text{ d'après (O1)}. \end{aligned} \quad (\text{O2})$$

Appliquant (O1) une nouvelle fois, on obtient

$$(b - D\phi_{n+1}^\omega(f_n^\omega(\tilde{x}))) \frac{d}{d\omega} f_n^\omega(\tilde{x}) = \frac{d}{d\omega} f_{n+1}^\omega(f_n^\omega(\tilde{x})) - 1. \quad (\text{O2}')$$

L'inégalité (10.12) et le lemme 10.2.1 impliquent alors,

**Lemme 10.2.2**  $\left(\frac{d}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_0} f_n^\omega(\tilde{x}_n)\right)$  est de signe constant et ne s'annule pas.

Dérivons à nouveau (D1) et (D2') :

$$D^2 f_n^\omega(\tilde{x}) = D^2 \varphi^\omega(\tilde{x}) + D^2 \phi_n^\omega(\tilde{x}), \quad (\text{DD1})$$

$$(b - D\phi_{n+1}^\omega(f_n^\omega(\tilde{x}))) D^2 f_n^\omega(\tilde{x}) = (Df_n^\omega(\tilde{x}))^2 D^2 \phi_{n+1}^\omega(f_n^\omega(\tilde{x})). \quad (\text{DD2})$$

Donc en utilisant (DD1),

$$\begin{aligned} (Df_n^{\omega_0}(\tilde{x}_n))^2 D^2 f_{n+1}^{\omega_0}(\tilde{x}_{n+1}) &= \\ &= (b - D\phi_{n+1}^{\omega_0}(\tilde{x}_{n+1})) D^2 f_n^{\omega_0}(\tilde{x}_n) + (Df_n^{\omega_0}(\tilde{x}_n))^2 D^2 \varphi^{\omega_0}(\tilde{x}_{n+1}). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $0 < b \leq 1$ . D'après la proposition 10.1.6, si l'orbite périodique  $(x_n, y_n)$  possède la valeur propre 1, la suite  $(D^2 \varphi(x_n))$  est de signe constant et ne s'annule pas. Le lemme 10.2.1 implique cette fois,

**Lemme 10.2.3** *Sous les hypothèses précédentes, si  $(\tilde{F}_\omega)$  est une famille de l'anneau dans la classe de Morse  $(\tilde{F}_\omega = \tilde{F}_{b,a,\omega})$  avec  $a > a_M(\varphi_1)$  et  $0 < b \leq 1$ , et si  $DF_{\omega_0}^q(x_0, y_0)$  possède la valeur propre 1, alors la suite  $(D^2 f_n^{\omega_0}(\tilde{x}_n))$  est de signe constant et ne s'annule pas.*



### 10.2.2 Suivi des variétés invariantes

Nous rappelons dans ce paragraphe comment le théorème d'existence des variétés invariantes à paramètre donne les applications  $(\phi_n^\omega)$  et  $(f_n^\omega)$  de la section précédente.

Nous supposons à nouveau que la famille  $(\tilde{F}_\omega)$  définie en section 9.2.1 admet pour  $\omega = \omega_0$  une orbite bien ordonnée de torsion nulle de type  $(p, q)$ ,  $(\tilde{z}_n) = (\tilde{x}_n, y_n)$  et que  $DF^q(z)$  a des valeurs propres réelles distinctes. On définit sur  $\mathbb{A} \times \mathbb{R}$  le difféomorphisme

$$\tilde{F} : (\tilde{z}, \omega) \mapsto (\tilde{F}_\omega(\tilde{z}), \omega).$$

$(\tilde{z}_0, \omega_0)$  est un point fixe de  $\tilde{F}^q - (p, 0, 0)$ .

Par hypothèse  $T_{\tilde{z}_0} \tilde{\mathbb{A}}$  se décompose en espaces propres  $E_1 \oplus E_2$  pour  $D\tilde{F}^q(\tilde{z}_0)$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\tilde{F}$  possède une variété invariante locale tangente à  $E_i \oplus \mathbb{R}$ . La proposition 8.1.1 montre que c'est localement un graphe de la forme  $\{(\tilde{x}, \phi_0^\omega(\tilde{x}), \omega)\}$ . Itérant par  $\tilde{F}$ , on définit aussi les graphes invariants locaux  $\{(\tilde{x}, \phi_n^\omega(\tilde{x}), \omega)\}$  pour chaque  $n$ . Les applications  $f_n$  sont alors données par (F1).

### 10.2.3 Bifurcation selle-nœud

On étudie le cas dissipatif ( $0 < b < 1$ ) où  $(\tilde{z}_n)$  est de type selle-nœud. On a pour tout entier  $n$ ,

$$\prod_{k=0}^{q-1} Df_{n+k}^{\omega_0}(\tilde{x}_{n+k}) = 1, \quad (10.13)$$

$$D^2(f_{n+q-1}^{\omega_0} \circ \cdots \circ f_n^{\omega_0})(\tilde{x}_n) \neq 0. \quad (10.14)$$

L'hypothèse (10.14) donne l'existence pour tout  $\omega$  au voisinage de  $\omega_0$ , d'un réel  $\tilde{x}_0^\omega$  dépendant de  $\omega$  de façon lisse et tel que

$$\prod_{k=0}^{q-1} Df_k^\omega(\tilde{x}_k^\omega) = 1,$$

où  $\tilde{x}_k^\omega = (f_{k-1}^\omega \circ \cdots \circ f_0^\omega)(\tilde{x}_0^\omega)$  pour  $0 \leq k \leq q-1$ .

La bifurcation selle-nœud est transverse au paramètre  $\omega$  si et seulement si la quantité

$$\Delta = \frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} (f_{q-1}^\omega \circ \cdots \circ f_0^\omega - \text{Id})(\tilde{x}_0^\omega)$$

est non nulle.

On obtient

$$\begin{aligned} \Delta = \sum_{k=0}^{q-1} D(f_{q-1}^{\omega_0} \circ \cdots \circ f_{k+1}^{\omega_0})(\tilde{x}_{k+1}) \left( \frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega_0} f_k^{\omega_0} \right) (\tilde{x}_k) \\ + (D(f_{q-1}^{\omega_0} \circ \cdots \circ f_0^{\omega_0})(\tilde{x}_0) - 1) \frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega_0} \tilde{x}_0^\omega. \end{aligned}$$

Par (10.13), le dernier terme est nul. Les autres termes sont tous non nuls et de même signe (lemme 10.2.2). On en déduit

**Proposition 10.2.4** *Les bifurcations selle-nœud des orbites périodiques bien ordonnées de torsion nulle sont transverses au paramètre de rotation  $\omega$ .*

**Remarque 10.2.1** Soit  $\mathcal{O}(z_{\lambda_c})$  une orbite  $q$ -périodique bien ordonnée de torsion nulle de type selle-nœud pour une application  $F_{\lambda_c}$  appartenant à une famille  $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{U}}$ . L'orbite  $\mathcal{O}(z_{\lambda_c})$  donne naissance à deux orbites  $\mathcal{O}(z_\lambda^1)$  et  $\mathcal{O}(z_\lambda^2)$  lorsque  $\lambda$  appartient à un demi-espace fermé  $\mathcal{U}^0 \cup \mathcal{U}^+$  de  $\mathcal{U}$  contenant  $\lambda_c$  dans sa frontière. On remarque qu'une et une seule a la propriété d'être bien ordonnée, de torsion nulle et possède une valeur propre supérieure ou égale à 1 : lorsque  $\lambda \in \mathcal{U}^0$ , les deux orbites coïncident et sont de type selle-nœud. Lorsque  $\lambda \in \mathcal{U}^+$ , il s'agit de l'orbite selle.

### 10.2.4 Généralité des bifurcations

Comme annoncé, nous montrons que pour les orbites périodiques bien ordonnées de torsion nulle la bifurcation cubique ne se produit pas :

**Proposition 10.2.5** Soit  $\tilde{F} = \tilde{F}_{b,a,\omega}$  une application de la classe de Morse de l'anneau. Si  $a$  est suffisamment grand ( $a > a_M(\varphi_1)$ ), et  $b \in ]0, 1[$ , alors pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$ , les orbites bien ordonnées de torsion nulle  $(\tilde{z}_n)$  de type  $(p, q)$  de  $\tilde{F}$  sont isolées et vérifient l'une des propriétés suivantes :

- Soit  $(\tilde{z}_n)$  persiste par perturbation de  $\tilde{F}$  ;
- soit  $(\tilde{z}_n)$  est une bifurcation de type selle-nœud transverse au paramètre  $\omega$ .

*Démonstration :* Soit  $(\tilde{z}_n)$  une orbite de type  $(p, q)$  pour  $\tilde{F}$ , bien ordonnée et de torsion nulle. Supposons à nouveau que  $DF^q$  admette la valeur propre 1. D'après les sections précédentes, il existe pour  $(\tilde{z}_n)$  des variétés centrales qui sont localement des graphes. Nous introduisons pour le difféomorphisme  $(\tilde{F})$  des application  $\phi_n$  et  $f_n$ . On a

$$\prod_{k=0}^{q-1} Df_k(\tilde{x}_k) = 1. \tag{10.15}$$

Nous estimons la quantité

$$\Delta = D^2(f_{q-1} \circ \dots \circ f_0)(\tilde{x}_0).$$

Utilisant (10.15), on obtient

$$\Delta = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{D^2 f_k(\tilde{x}_k)}{Df_k(\tilde{x}_k)} D(f_{k-1} \circ \dots \circ f_0)(\tilde{x}_0).$$

D'après le lemme 10.2.3, tous les termes de cette somme sont non nuls et de même signe. La quantité  $\Delta$  est donc non nulle. L'orbite  $(\tilde{z}_n)$  est donc de type selle-nœud. On termine en utilisant la proposition 10.2.4.

□

## 10.3 Bifurcations des orbites bien ordonnées de torsion nulle : étude locale (cas conservatif)

La bifurcation selle-nœud est un phénomène purement dissipatif. Lorsque  $b = 1$ , les orbites périodiques qui ne peuvent être suivies localement ont leurs deux valeurs

propres égales à 1 et il n'y a pas de graphes invariants locaux. En revanche, dans ce cas, la description variationnelle de la dynamique (sections 7.2.5 et 9.1.2) est plus intéressante car le champ  $\xi$  est localement un champ de gradient.

Au voisinage d'un paramètre conservatif, un seul type de bifurcation peut se produire, que nous décrivons maintenant :

### 10.3.1 Description de la bifurcation

Pour simplifier les notations,  $\lambda = (b, a, \omega)$  désignera un paramètre d'une famille standard,  $\Lambda$  sera l'espace des paramètres.

**Proposition 10.3.1** *Soit  $\tilde{F}_{\lambda_c} = \tilde{F}_{b_c, a_c, \omega_c}$  un difféomorphisme conservatif ( $b_c = 1$ ) de l'anneau appartenant à une famille d'applications de la classe de Morse  $(\tilde{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ . Supposons  $a_c$  soit suffisamment grand ( $a_c > a_M(\varphi_1)$ ) et considérons  $(\tilde{z}_{c,n})_n$  une orbite bien ordonnée de torsion nulle et de type  $(p, q)$ . Si  $DF^q(z_{c,0})$  possède la valeur propre 1, alors il existe un voisinage  $U$  de  $\mathcal{O}(z_{c,0})$  dans  $\mathbb{A}$  et  $\mathcal{U}$  de  $\lambda_c$  dans l'espace des paramètres  $\Lambda$  tels que :*

- i. *Il existe une sous-variété lisse  $U^0$  de  $\mathcal{U}$ , de codimension un, contenant  $\lambda_c$  et partageant  $\mathcal{U} \setminus U^0$  en deux composantes connexes  $U^-$  et  $U^+$ . De plus,  $U^0$  est transverse au paramètre  $\omega$ .*
- ii. *Pour  $\lambda \in U^-$ ,  $F_\lambda^q$  ne possède pas de point fixe dans  $U$ .*
- iii. *Pour  $\lambda \in U^0 \cup U^+$ ,  $F_\lambda^q$  a deux points fixes dans  $U$ . Ils sont distincts lorsque  $\lambda \in U^+$  et égaux pour  $\lambda \in U^0$ . Ils varient continûment avec le paramètre  $\lambda$ .*

Pour la démonstration, nous nous placerons dans l'espace  $E = E_{p,q}$  sur lequel est défini le champ  $\xi_\lambda$  (voir les sections 7.2.5 et 9.1.2) :

$$\xi_{\lambda,n}(\mathbf{x}) = (1 + b)\tilde{x}_n + \varphi(\tilde{x}_n) - \tilde{x}_{n+1} - b\tilde{x}_{n-1}. \quad (10.16)$$

L'orbite  $(\tilde{z}_{c,n})$  de  $\tilde{F}_{\lambda_c}$  définit par projection un point  $\mathbf{x}_c = (\tilde{p}_1(\tilde{z}_{c,n})) \in E$ , singulier pour  $\xi_{\lambda_c}$ . Il suffit maintenant d'étudier les singularités des champs  $\xi_\lambda$  au voisinage de  $\mathbf{x}_c$  pour des paramètres  $\lambda$  proches de  $\lambda_c$ .

### 10.3.2 Étude de $D\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c)$

On rappelle que  $T_{\mathbf{x}} E$  est muni du produit scalaire usuel :

$$\langle \zeta | \zeta' \rangle_{\mathbf{x}} = \sum_{k=0}^{q-1} \zeta_k \zeta'_k.$$

$D\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c)$  est un endomorphisme de  $T_{\mathbf{x}_c} E$ .

Nous savons que  $\xi_{\lambda_c}$  est le gradient d'une fonctionnelle  $\mathcal{W}$  définie sur  $E$ . Ceci implique que  $D\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c)$  est symétrique.

**Remarque 10.3.1** C'est la seule fois que nous aurons besoin de l'hypothèse de conservation des aires.

**Lemme 10.3.2** *Le noyau  $\ker D\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c)$  est de dimension un. De plus si  $\zeta$  est un vecteur non nul dans  $\ker D\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c)$ , la suite  $\zeta = (\zeta_n)$  est non nulle et de signe constant.*

Nous relierons les éléments de  $\ker D\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c)$  aux directions propres de  $DF_{\lambda_c}^q(z_{c,0})$ .

Remarquons tout d'abord que le spectre de  $DF_{\lambda_c}^q(z_{c,0})$  est réduit à  $\{1\}$  puisque  $b = 1$ . D'autre part,  $DF_{\lambda_c}^q(z_{c,0})$  n'est pas l'identité puisque d'après la proposition 8.1.1, le vecteur  $(0, 1)$  en  $z_{c,0}$  n'est pas vecteur propre de  $DF_{\lambda_c}^q(z_{c,0})$ . On en déduit que  $DF_{\lambda_c}^q(z_{c,0})$  possède une unique direction propre, associée à la valeur propre 1.

Différentions (10.16). Le vecteur  $\zeta$  est un vecteur de  $\ker D\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c)$  si et seulement si pour tout  $n$ ,

$$(b + 1 + a D\varphi_1(\tilde{x}_{c,n}))\zeta_n - b\zeta_{n-1} - \zeta_{n+1} = 0.$$

D'après la section 9.1.2.1,  $\zeta$  est ainsi la projection d'une orbite  $(v_n)$  de  $D\tilde{F}_{\lambda_c}$ . Par définition de  $E$ , la suite  $(\zeta_n) \in T_{\mathbf{x}_c} E$  est  $q$ -périodique. D'après la section 9.1.2.1, la suite  $(v_n)$  de  $TA$  est également  $q$ -périodique et  $v_0, \dots, v_{q-1}$  sont les directions invariantes de  $DF_{\lambda_c}^q$  en  $z_{c,0}, \dots, z_{c,q-1}$ . D'après ce qui précède,  $\ker D\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c)$  est donc de dimension un.

### 10.3.3 Transversalité

Puisque  $D\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c)$  est symétrique,  $T_{\mathbf{x}_c} E$  se décompose en deux espaces supplémentaires orthogonaux et invariants :

$$T_{\mathbf{x}_c} E = \mathcal{E}_{\mathbf{x}_c}^1 \oplus \mathcal{E}_{\mathbf{x}_c}^2. \quad (10.17)$$

$\mathcal{E}_{\mathbf{x}_c}^1$  est le noyau de  $D\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c)$  et, sur  $\mathcal{E}_{\mathbf{x}_c}^2$ ,  $D\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c)$  est inversible.

Nous fixons  $\bar{\zeta}$  un élément unitaire de  $\mathcal{E}_{\mathbf{x}_c}^1$ .

**Lemme 10.3.3** *Pour  $a > a_M(\varphi_1)$ ,*

$$D^3\mathcal{W}_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c) \cdot (\bar{\zeta}, \bar{\zeta}, \bar{\zeta}) \neq 0.$$

*Démonstration :* Par définition,

$$\begin{aligned} D^3\mathcal{W}_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c) \cdot (\bar{\zeta}, \bar{\zeta}, \bar{\zeta}) &= \langle D^2\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c) \cdot (\bar{\zeta}, \bar{\zeta}) \mid \bar{\zeta} \rangle_{\mathbf{x}_c} \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} a D^2\varphi_1(\tilde{x}_{c,k}) \bar{\zeta}_k^3, \text{ d'après (10.16).} \end{aligned}$$

La proposition 10.1.6 et le lemme 10.3.2 montrent alors que la suite  $(D^2\varphi_1(\tilde{x}_{c,k})\bar{\zeta}_k^3)$  est non nulle et de signe constant. □

**Lemme 10.3.4**

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \omega} \Big|_{\lambda_c} \xi_{\lambda}(\mathbf{x}_c) \mid \bar{\zeta} \right\rangle_{\mathbf{x}_c} \neq 0.$$

*Démonstration :* Il suffit d'utiliser (10.16) et d'écrire

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \omega} \Big|_{\lambda_c} \xi_{\lambda}(\mathbf{x}_c) \mid \bar{\zeta} \right\rangle_{\mathbf{x}_c} = \sum_{k=0}^{q-1} \bar{\zeta}_k.$$

La suite  $(\bar{\zeta}_k)$  est non nulle et de signe constant d'après le lemme 10.3.2. □

### 10.3.4 Fin de la preuve de la proposition 10.3.1

Nous terminons par un raisonnement facile de géométrie différentielle. On identifie canoniquement l'espace vectoriel  $E$  à l'espace tangent  $\mathbb{T}_{\mathbf{x}_c} E$  de sorte que la décomposition (10.17) se prolonge à  $E$  : l'espace  $E$  est un produit linéaire  $E^1 \times E^2$  qui induit une décomposition  $\mathbb{T}E = \mathcal{E}^1 \oplus \mathcal{E}^2$  où  $E^1$  et les fibres de  $\mathcal{E}^1$  sont de dimension 1. On décompose alors  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$  et  $\xi = \xi^1 + \xi^2$ .

On sait alors que  $D\xi_{\lambda_c}^1(\mathbf{x}_c)$  est nulle et ainsi que  $D_1\xi_{\lambda_c}^2(\mathbf{x}_c) = D\xi_{\lambda_c}^2(\mathbf{x}_c)|_{\mathcal{E}_{\mathbf{x}_c}^1}$ . En revanche,  $D_2\xi_{\lambda_c}^2(\mathbf{x}_c) = D\xi_{\lambda_c}^2(\mathbf{x}_c)|_{\mathcal{E}_{\mathbf{x}_c}^2}$  est un automorphisme. Il existe donc localement une application lisse  $\gamma : E^1 \times \Lambda \rightarrow E^2$  telle que

$$\xi_{\lambda}^2(\mathbf{x}^1, \gamma_{\lambda}(\mathbf{x}^1)) = 0.$$

Dérivons par rapport à  $E^1$  :

$$D_2\xi_{\lambda_c}^2(\mathbf{x}_c) \cdot D\gamma_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c^1) + D_1\xi_{\lambda_c}^2(\mathbf{x}_c) = 0.$$

Par hypothèse,  $D_1\xi_{\lambda_c}^2(\mathbf{x}_c) = 0$  donc

$$D\gamma_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c^1) = 0. \quad (10.18)$$

On pose

$$\psi_{\lambda}(\mathbf{x}^1) = \xi_{\lambda}^1(\mathbf{x}^1, \gamma_{\lambda}(\mathbf{x}^1)).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c^1) &= 0, \\ D\psi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c^1) &= D_1\xi_{\lambda_c}^1(\mathbf{x}_c) + D_2\xi_{\lambda_c}^1(\mathbf{x}_c) \cdot D\gamma_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c^1) = 0. \end{aligned}$$

D'après (10.18), on a aussi,

$$\begin{aligned} D^2\psi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c^1) &= D_1^2\xi_{\lambda_c}^1(\mathbf{x}_c) + 2D_2D_1\xi_{\lambda_c}^1(\mathbf{x}_c) \cdot D\gamma_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c^1) + \\ &\quad D_2^2\xi_{\lambda_c}^1(\mathbf{x}_c)(D\gamma_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c^1), D\gamma_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c^1)) + D_2\xi_{\lambda_c}^1(\mathbf{x}_c) \cdot D^2\gamma_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c^1) \\ &= D_1^2\xi_{\lambda_c}^1(\mathbf{x}_c). \end{aligned}$$

Mais puisque  $\xi^1(\mathbf{x})$  est la projection orthogonale de  $\xi(\mathbf{x})$  sur  $\mathcal{E}_{\mathbf{x}}^1$ ,

$$\langle D_1^2\xi_{\lambda_c}^1(\mathbf{x}_c) \cdot (\bar{\zeta}, \bar{\zeta}) \mid \bar{\zeta} \rangle_{\mathbf{x}_c} = \langle D_1^2\xi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c) \cdot (\bar{\zeta}, \bar{\zeta}) \mid \bar{\zeta} \rangle_{\mathbf{x}_c} = D^3\mathcal{W}(\mathbf{x}_c) \cdot (\bar{\zeta}, \bar{\zeta}, \bar{\zeta}).$$

D'après le lemme 10.3.3,  $D^2\psi_{\lambda_c}(\mathbf{x}_c^1)$  est donc non nul.

Pour  $\lambda$  proche de  $\lambda_c$  et au voisinage de  $\mathbf{x}_c$ ,  $\psi_{\lambda}$  possède donc au plus deux zéros. Notons que les zéros de  $\psi_{\lambda}$  sont en bijection avec les singularités de  $\xi_{\lambda}$  par l'application

$$\mathbf{x}^1 \mapsto (\mathbf{x}^1, \gamma_{\lambda}(\mathbf{x}^1)).$$

Le lemme 10.3.4 implique alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega}|_{\lambda_c} \psi_{\lambda}(\mathbf{x}_c^1) &= \frac{\partial}{\partial \omega}|_{\lambda_c} \xi_{\lambda}^1(\mathbf{x}_c) + D_2\xi_{\lambda}^1(\mathbf{x}_c) \cdot \frac{\partial}{\partial \omega}|_{\lambda_c} \gamma_{\lambda}(\mathbf{x}_c^1) = \frac{\partial}{\partial \omega}|_{\lambda_c} \xi_{\lambda}^1(\mathbf{x}_c) \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \omega}|_{\lambda_c} \xi_{\lambda}(\mathbf{x}_c) \mid \bar{\zeta} \right\rangle_{\mathbf{x}_c} \bar{\zeta} \neq 0. \end{aligned}$$

On a ainsi montré la transversalité de la bifurcation par rapport au paramètre  $\omega$  :  $\psi_{\lambda}$  s'annule en un unique point lorsque  $\lambda$  appartient à une sous-variété de codimension un,  $\mathcal{U}^0$ . Le reste de la proposition suit aisément.

### 10.3.5 Analyse de la bifurcation

Comme pour la remarque 10.2.1, on montre :

**Proposition 10.3.5** *Lorsque  $\lambda \in \mathcal{U}^0 \cup \mathcal{U}^+$  et  $b = 1$ ,  $F_\lambda^q$  possède exactement un point fixe dans  $U$  qui appartient à une orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$ , de torsion nulle et possède une valeur propre supérieure ou égale à 1 :*

Nous adaptons un lemme dû à S. Angenent (voir [An88] ou [L99], proposition 7.2.1) :

**Lemme 10.3.6 (S. Angenent)** *Soient  $\tilde{F} \in \widetilde{D\mathcal{V}}(\mathbb{A})$  une application qui préserve les aires,  $\frac{p}{q}$  un rationnel et  $\xi$  le champ de vecteurs sur  $E_{p,q}$ . La différentielle  $D\xi(\mathbf{x})$ , en une singularité,  $\mathbf{x}$  a un spectre réel. De plus, l'orbite périodique associée à  $\mathbf{x}$  est de torsion nulle si et seulement si le spectre est contenu dans  $\mathbb{R}_+$ .*

*Démonstration de la proposition 10.3.5 :* Nous appliquons une première fois le lemme au paramètre  $\lambda_c$  : le spectre de  $D\xi_{\lambda_c}^2(\mathbf{x}_c) \Big|_{\mathcal{E}_{\mathbf{x}_c}^2}$  est dans  $\{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ . Par perturbation, lorsque  $\lambda \in \mathcal{U}$ ,  $b = 1$  et si  $\mathbf{x}$  est proche de  $\mathbf{x}_c$ ,  $D\xi(\mathbf{x})$  préserve une décomposition de  $T_{\mathbf{x}}E$  proche de

$$\mathcal{E}_{\mathbf{x}_c}^1 \oplus \mathcal{E}_{\mathbf{x}_c}^2.$$

Pour  $\lambda \in \mathcal{U}^0$  et lorsque  $\mathbf{x}$  est le nouveau point singulier de  $\xi_\lambda$ ,  $D\xi(\mathbf{x})$  possède la valeur propre 0 et le reste du spectre est dans  $\{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ . D'après le lemme, l'orbite périodique associée ( $z_i$ ) est de torsion nulle (et 1 est valeur propre de  $DF^q(z_0)$ ).

Si en revanche  $\lambda \in \mathcal{U}^+$ ,  $\xi$  possède deux singularités  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ . Pour l'une d'entre elle,  $D\xi$  possède une valeur propre strictement négative ( $D\psi_\lambda(\mathbf{x}_1^1) < 0$ ). L'orbite associée n'est donc pas de torsion nulle. Pour l'autre,  $D\xi$  possède une plus petite valeur propre strictement positive. L'orbite associée est donc de torsion nulle d'après le lemme. De plus, elle ne peut pas avoir la valeur propre 1. C'est donc une orbite selle.

□

**Remarque 10.3.2** La bifurcation que nous avons partiellement décrite est assez particulière: la différentielle  $DF_{b_c, a_c, \omega_c}^q(z_c, 0)$ , le long de l'orbite périodique au moment de la bifurcation, possède uniquement la valeur propre 1. Ce n'est pas l'identité puisque par déviation de la verticale, la direction  $(0, 1)$  n'est pas préservée. La partie linéaire est donc unipotente comme dans le cas de la bifurcation de Bogdanov-Takens (voir [BRS]). Nous remarquons que la forme très particulière des équations que l'on étudie nous place dans un cas de bifurcation très dégénérée et de codimension assez grande.

En effet, une application conservative ne possède jamais de bifurcation de Bogdanov-Takens : si  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  est un point fixe d'un difféomorphisme  $F$ , de classe  $C^2$  de la forme

$$(u, v) \mapsto (u + v + q_1(u, v), v + q_2(u, v)),$$

avec au voisinage de  $(0, 0)$ ,  $q_j = O(u^2 + v^2)$ ,  $j = 1, 2$ , les conditions génériques pour que  $(0, 0)$  soit une bifurcation de Bogdanov-Takens sont les suivantes :

$$\frac{\partial^2 q_2}{\partial u^2}(0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial u \partial v}(0, 0) + \frac{\partial^2 q_1}{\partial u^2}(0, 0) - \frac{\partial^2 q_2}{\partial u^2}(0, 0) \neq 0.$$

Si  $F$  préserve les aires, alors pour tout  $(u, v)$ ,

$$\frac{\partial q_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial q_2}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial q_2}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial q_1}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial q_1}{\partial u}(u, v) \frac{\partial q_2}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial q_2}{\partial v}(u, v) \frac{\partial q_1}{\partial u}(u, v) = 0.$$

Dérivant par rapport à  $u$ , on obtient précisément :

$$\frac{\partial^2 q_2}{\partial u \partial v}(0, 0) + \frac{\partial^2 q_1}{\partial u^2}(0, 0) - \frac{\partial^2 q_2}{\partial u^2}(0, 0) = 0,$$

ce qui contredit les conditions de généralité.

## 10.4 Bifurcation des orbites bien ordonnées de torsion nulle : étude globale

Nous montrons ici le résultat principal de ce chapitre :

**Théorème 10.4.1** *Soit  $(\tilde{F}_{b,a,\omega})_\omega$  une famille d'applications bimodales avec  $a > a_B(\varphi_1)$ ,  $0 \leq b \leq 1$  et  $\frac{p}{q}$  un rationnel. Alors,*

i. *Il existe des réels  $\omega_{\frac{p}{q}}^- < \omega_{\frac{p}{q}}^+$  de  $\mathbb{R}$  tels que*

$$\frac{p}{q} \in \mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) \Leftrightarrow \omega \in [\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+].$$

ii. *Lorsque  $\omega \in [\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+]$ ,  $F_{b,a,\omega}$  possède exactement une orbite bien ordonnée  $\mathcal{O}(z)$  de torsion nulle de nombre de rotation  $\frac{p}{q}$ , et telle que  $DF_{b,a,\omega}^q(z)$  ait une valeur propre supérieure ou égale à 1. L'orbite  $\mathcal{O}(z)$  varie continûment avec  $\omega$ .*

iii. *Lorsque  $\omega \in ]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+[$ ,  $\mathcal{O}(z)$  est hyperbolique selle. Lorsque  $\omega \in \{\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+\}$ , la différentielle  $DF_{b,a,\omega}^q(z)$  possède la valeur propre 1 ; l'orbite  $\mathcal{O}(z)$  est de type selle-nœud pour  $b \neq 1$  ou bien du type de la bifurcation décrite en section 10.3 lorsque  $b = 1$ .*

*Les applications  $(b, a) \mapsto \omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+$  définies sur  $[0, 1] \times \{a, a > a_B(\varphi_1)\}$  sont lisses.*

**Remarque 10.4.1** Pour  $b > 1$  proche de 1, d'après la section 10.3, les conclusions du théorème sont encore vérifiées. Les applications  $(b, a) \mapsto \omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+$  sont encore lisses aux points  $(1, a)$ .

*Démonstration* : Soit  $A$  un intervalle compact de  $\{a, a > a_B(\varphi_1)\}$  et considérons l'ensemble  $\mathcal{P}$  des quadruplets  $(b, a, \omega, \mathcal{O}(z))$  tels que

1.  $0 \leq b \leq 1$ ,  $a \in A$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $\mathcal{O}(z)$  est une orbite de type  $(p, q)$  de  $\mathbb{A}$  ;
2. l'orbite de  $z$  est bien ordonnée périodique de torsion nulle ;
3. l'application  $DF_{b,a,\omega}^q(\tilde{z})$  possède la valeur propre 1.

D'après les sections 10.2.3, 10.2.4 et 10.3,  $\mathcal{P}$  est localement un graphe au-dessus des paramètres  $(b, a)$ .

D'autre part, l'estimée (10.7) montre que les orbites bien ordonnées de type  $(p, q)$  sont contenues dans un anneau borné uniforme  $\mathbb{A}_M$ ,  $M > 0$  et l'estimée (10.6) entraîne que les paramètres  $\omega$  qui apparaissent dans l'ensemble  $\mathcal{P}$  sont contenus dans un intervalle compact  $\Omega$ . Par conséquent, l'ensemble  $\mathcal{P}$  est borné et d'après la proposition 8.2.5, c'est aussi un ensemble fermé. La compacité de  $[0, 1] \times A \times \Omega \times \mathbb{A}_M^q$  et la connexité de  $[0, 1] \times A$  impliquent que  $\mathcal{P}$  est une union finie de graphes disjoints au-dessus de  $[0, 1] \times A$ .

Or, nous savons (proposition 2.2.1) que la section de  $\mathcal{P}$  correspondant aux paramètres pour lesquels  $b = 0$  est formée de deux graphes. L'ensemble  $\mathcal{P}$  est donc constitué d'exactly deux graphes  $\mathcal{P}^-$  et  $\mathcal{P}^+$ . Pour chaque couple  $(b, a)$ , nous notons  $\omega^-(b, a)$  et  $\omega^+(b, a)$  les paramètres  $\omega$  correspondant à chaque graphe.

Pour  $b = 0$ , nous savons aussi que  $\omega^-(0, a) < \omega^+(0, a)$  pour tout paramètre  $a \in A$ . De plus, pour  $\omega \in [\omega^-(0, a), \omega^+(0, a)]$ , il existe une unique orbite positive. Elle peut être suivie continûment avec les paramètres. Elle est hyperbolique pour  $\omega \in ]\omega^-(0, a), \omega^+(0, a)[$ . Elle disparaît en  $\omega \in \{\omega^-(0, a), \omega^+(0, a)\}$  à travers une bifurcation selle-nœud et elle coïncide alors avec les orbites associées aux graphes  $\mathcal{P}^-$  et  $\mathcal{P}^+$ .

Par continuation de la dimension 1, nous voyons que c'est encore vrai pour  $0 < b \leq 1$ . Ceci force l'inégalité  $\omega^-(b, a) < \omega^+(b, a)$ .

Pour  $\omega \in [\omega^-(0, a), \omega^+(0, a)]$ , on peut suivre continûment une unique orbite bien ordonnée  $(\tilde{z}_n)$  de type  $(p, q)$ , de torsion nulle avec une valeur propre réelle supérieure ou égale à 1.

Supposons qu'un paramètre  $(b, a, \omega)$  de  $[0, 1] \times A \times \mathbb{R}$  possède une orbite bien ordonnée  $(\tilde{z}'_n)$  de type  $(p, q)$ , de torsion nulle possédant une valeur propre réelle supérieure ou égale à 1. Si elle est différente de l'orbite  $(\tilde{z}_n)$  et aussi longtemps que ses valeurs propres sont distinctes de 1, on peut la suivre continûment en faisant croître  $\omega$  vers  $+\infty$ .

Pour  $\omega$  suffisamment grand, l'estimée (10.7) montre que  $\tilde{F}_{b,a,\omega}$  n'a plus d'orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$ . Par passage à la limite, on exhibe ainsi une valeur critique de  $\omega$  pour laquelle l'orbite  $(\tilde{z}'_n)$  admet une valeur propre égale à 1. Ceci montre que  $(b, a, \omega, \mathcal{O}(z'_0))$  est dans  $\mathcal{P}$  et implique que  $(\tilde{z}_n)$  et  $(\tilde{z}'_n)$  sont égales.

Ceci montre que pour tout paramètre dans  $[0, 1] \times A \times \mathbb{R}$ ,  $(\tilde{z}_n)$  est la seule orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$ , de torsion nulle avec une valeur propre réelle supérieure ou égale à 1. Elle existe si et seulement si  $\omega \in [\omega^-(b, a), \omega^+(b, a)]$ .

Lorsque  $\omega$  appartient à  $[\omega^-(b, a), \omega^+(b, a)]$ , et  $0 \leq b \leq 1$ ,  $a \in A$ , il est clair que l'ensemble de rotation  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  possède la valeur  $\frac{p}{q}$ .

Réciproquement fixons  $b$  et  $a$  et considérons l'ensemble compact  $\Omega(b, a)$  formé des paramètres  $\omega$  pour lesquels  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  possède la valeur  $\frac{p}{q}$ . Si  $\omega(b, a)$  appartient à la frontière de  $\Omega$ , d'après la proposition 8.3.1,  $\tilde{F}_{b,a,\omega}$  doit posséder une orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$  et de torsion nulle. Par perturbation, elle doit disparaître. Ceci implique qu'elle possède au moins une valeur propre égale à 1. Par ce que nous avons vu, ceci montre  $\omega \in \{\omega^-(b, a), \omega^+(b, a)\}$ .

□

**Définition 10.4.1** 1. *L'orbite  $\mathcal{O}(z)$  donnée par le théorème précédent est appelée orbite bien ordonnée positive de type  $(p, q)$ . Elle varie continûment avec les paramètres.*



2. L'ensemble des paramètres  $(b, a, \omega)$  pour lesquels  $\frac{p}{q}$  appartient à  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  est la langue d'Arnol'd associée au rationnel  $\frac{p}{q}$ .

## 10.5 Localisation des langues

Nous pouvons estimer grossièrement les applications  $\omega_{\frac{p}{q}}^-$  et  $\omega_{\frac{p}{q}}^+$  ainsi que la largeur de l'attracteur lorsque  $0 < b < 1$ .

Pour toute cette section,  $(\tilde{F}_{b,a,\omega})_\omega$  est une famille d'applications bimodales avec  $a > a_B(\varphi_1)$  et  $0 \leq b \leq 1$ .

### 10.5.1 Localisation des orbites selle-nœud

Nous complétons la proposition 10.1.6 :

**Proposition 10.5.1** *Soit  $\frac{p}{q}$  un rationnel. Lorsque  $0 \leq b \leq 1$  et  $\omega = \omega_{\frac{p}{q}}^-$  (resp.  $\omega = \omega_{\frac{p}{q}}^+$ ), notant  $\mathcal{O}(z)$  l'orbite bien ordonnée positive de type  $(p, q)$ , la suite  $(D^2\varphi(\tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^n(\tilde{z})))$  est strictement négative (resp. strictement positive).*

*Démonstration :* Pour  $0 < b \leq 1$ , l'orbite bien ordonnée positive de type  $(p, q)$ ,  $\mathcal{O}(z)$  possède la valeur propre 1. La suite  $(D^2\varphi(\tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^n(\tilde{z})))$  est non nulle et de signe constant. Faisant tendre  $b$  vers 0 avec  $\omega = \omega_{\frac{p}{q}}^-(b)$ , on se ramène à la dimension 1. Mais dans ce cas,  $\frac{p}{q}$  est le nombre de rotation supérieur (voir la proposition 2.2.1). L'orbite est alors concentrée près du maximum de  $\varphi_1$ . Les quantités  $D^2\varphi(\tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^n(\tilde{z}))$  sont donc strictement négatives.

□

**Remarque 10.5.1** La démonstration de la proposition 10.1.6 et le lemme 9.3.2 entraînent que l'orbite est contenue dans  $[c'_{\varphi_1} - \delta, c'_{\varphi_1} + \delta]$  (resp.  $[c_{\varphi_1} - \delta, c_{\varphi_1} + \delta]$ ) où  $\delta$  est une constante de la définition 9.3.6 pour  $a$ . La remarque 9.3.5.2 montre alors que pour  $a$  grand,  $\delta$  décroît au moins en  $\frac{1}{\sqrt{a}}$ .

### 10.5.2 Localisation de $\omega_{\frac{p}{q}}^-$ et $\omega_{\frac{p}{q}}^+$

Rappelons que  $\max(\varphi_1) = \varphi_1(c'_{\varphi_1})$  (resp.  $\min(\varphi_1) = \varphi_1(c_{\varphi_1})$ ).

**Proposition 10.5.2** *Pour tout rationnel  $\rho = \frac{p}{q}$ ,*

$$\begin{aligned} |a \max(\varphi_1) + \omega_{\rho}^- - (1-b)\rho - 1| &\leq 2, \\ (\text{resp. } |a \min(\varphi_1) + \omega_{\rho}^+ - (1-b)\rho + 1| &\leq 2). \end{aligned}$$

*Démonstration :* Traitons le cas de  $\omega_{\frac{p}{q}}^-$  : il existe un point  $\tilde{x}_0$  de l'orbite bien ordonnée positive de type  $(p, q)$ , tel que sur  $[\tilde{c}'_{\varphi}, \tilde{x}_0]$ ,  $-2 \leq D\varphi \leq 0$  (voir la preuve de la proposition 10.1.6). On en déduit  $-2 \leq \varphi(\tilde{x}_0) - \varphi(\tilde{c}'_{\varphi}) \leq 0$ .

On termine la preuve en appliquant (10.6).

□

Ceci donne une estimée de l'ensemble de rotation  $\mathcal{R}(\tilde{F})$  :

**Proposition 10.5.3** *Lorsque  $0 \leq b < 1$ ,*

*i.*

$$\mathcal{R}(\tilde{F}) \subset \left[ \frac{a \min(\varphi_1) + \omega - 1}{1 - b}, \frac{a \max(\varphi_1) + \omega + 1}{1 - b} \right].$$

*ii.*

$$\left[ \frac{a \min(\varphi_1) + \omega + 3}{1 - b}, \frac{a \max(\varphi_1) + \omega - 3}{1 - b} \right] \subset \mathcal{R}(\tilde{F}).$$

*Démonstration* : Le (i) est juste une conséquence de (10.6).

Pour le (ii), on remarque grâce à la proposition 10.5.2, que tout rationnel dans  $\left[ \frac{a \min(\varphi_1) + \omega + 3}{1 - b}, \frac{a \max(\varphi_1) + \omega - 3}{1 - b} \right]$  est dans  $\mathcal{R}(\tilde{F})$ , qui est fermé.

□

**Remarque 10.5.2** Bien sûr, le (ii) n'est intéressant que sous l'hypothèse supplémentaire  $a(\max(\varphi_1) - \min(\varphi_1)) > 6$ ,

### 10.5.3 Taille de l'attracteur

On peut maintenant préciser le 9.1.1.8 :

**Proposition 10.5.4** *Lorsque  $0 < b < 1$ , l'attracteur rencontre tout cercle de la forme  $\mathbb{T}^1 \times \{y\}$  avec*

$$y \in \left[ \frac{b}{1 - b}(a \min \varphi_1 + \omega + 4), \frac{b}{1 - b}(a \max \varphi_1 + \omega - 4) \right].$$

*Démonstration* : Cela résulte de la proposition 10.5.3.ii, de (10.7) et de la connexité de l'attracteur.

□

**Remarque 10.5.3** Là encore, l'hypothèse  $a(\max(\varphi_1) - \min(\varphi_1)) > 8$  est nécessaire pour que ce résultat soit intéressant.



## Chapitre 11

# Langues d'Arnol'd irrationnelles

Un résultat de P. Le Calvez, lié au *closing lemma*, permet de passer à la limite et de définir les langues d'Arnol'd irrationnelles. Nous montrons que pour tout réel  $\rho$ , la frontière de la langue d'Arnol'd associée est formée de deux surfaces  $\omega_\rho^-$  et  $\omega_\rho^+$ . Les surfaces  $\omega_\rho^-$  et  $\omega_{\rho'}^+$  associées à des nombres distincts sont transverses. Ceci généralise la proposition 2.1.2 démontrée en dimension un.

### 11.1 Estimées lipschitz des surfaces $\omega_{\frac{p}{q}}^-$ et $\omega_{\frac{p}{q}}^+$

Nous reprenons les hypothèses du théorème 10.4.1:  $(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  est une famille d'applications bimodales avec  $a > a_B(\varphi_1)$ ,  $0 \leq b \leq 1$  et  $\frac{p}{q}$  un rationnel.

Les surfaces  $\omega_{\frac{p}{q}}^-$  et  $\omega_{\frac{p}{q}}^+$  sont lisses. Dans cette section nous contrôlons leur plan tangent et généralisons la proposition 2.1.2 démontrée pour les endomorphismes du cercle. D'autres informations sur ces surfaces seront données en 11.3.

**Proposition 11.1.1** *Pour  $\rho = \frac{p}{q}$  variant dans un ensemble borné de  $\mathbb{Q}$ , la famille d'applications  $(b, a) \mapsto \omega_\rho^-(b, a)$  (resp.  $(b, a) \mapsto \omega_\rho^+(b, a)$ ) est uniformément lipschitzienne. Plus précisément, pour tous  $a, a^*, b, b^*$ ,*

$$|\omega_\rho^-(b^*, a^*) - \omega_\rho^-(b, a) + (a^* - a) \max \varphi_1 + (b^* - b)\rho| \leq \frac{4}{\min(a, a^*)} |a^* - a| + |b^* - b|,$$

et respectivement,

$$|\omega_\rho^+(b^*, a^*) - \omega_\rho^+(b, a) + (a^* - a) \min \varphi_1 + (b^* - b)\rho| \leq \frac{4}{\min(a, a^*)} |a^* - a| + |b^* - b|.$$

(On peut comparer à la proposition 10.5.2).

L'idée principale de la démonstration est une relecture de [L95].

Nous avons introduit en 7.2.2 pour une application  $\tilde{F} \in \widetilde{DV}(\mathbb{A})$  l'ensemble  $\mathcal{C}_{p,q}(\tilde{F})$ . Puisque ce compact sépare l'anneau, nous pouvons définir, pour  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ , les points  $(\tilde{x}, \mu_{\tilde{F}}^-(\tilde{x}))$  et  $(\tilde{x}, \mu_{\tilde{F}}^+(\tilde{x}))$  de  $\tilde{\mathcal{C}}_{p,q}(\tilde{F}) \cap \tilde{p}_1^{-1}(\tilde{x})$  d'ordonnée minimale et maximale.

L'ensemble  $\tilde{F}^q(\tilde{C}_{p,q}(\tilde{F}))$  a la même propriété et nous définissons de façon similaire les points  $(\tilde{x}, \nu_{\tilde{F}}^-(\tilde{x}))$  et  $(\tilde{x}, \nu_{\tilde{F}}^+(\tilde{x}))$ .

Rappelons une variante de la proposition 7.2.5 démontrée dans [L86] :

**Proposition 11.1.2 (P. Le Calvez)** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\frac{p}{q} \notin \mathcal{R}(\tilde{F})$ ;
- les ensembles  $\tilde{C}_{p,q}(\tilde{F})$  et  $\tilde{F}^q(\tilde{C}_{p,q}(\tilde{F}))$  ne s'intersectent pas ;
- l'une des fonctions  $\nu_{\tilde{F}}^- - \mu_{\tilde{F}}^+$  ou  $\mu_{\tilde{F}}^- - \nu_{\tilde{F}}^+$  est strictement positive.

Nous utiliserons le lemme suivant qui se trouve essentiellement dans [L95] :

**Lemme 11.1.3** *Soit  $\tilde{F} \in \widetilde{DV}(\mathcal{A})$ ,  $g, g'$  les applications de  $\mathbb{R}$  associés (voir section 7.2.4) et  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{q+1}$  une suite de  $\mathbb{R}$  telle que pour  $0 \leq n < q$ ,*

$$g'(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}) < g(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_{n+2}). \quad (11.1)$$

*Posons pour  $0 \leq n \leq q$ ,  $\tilde{z}_n = (\tilde{x}_n, g(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}))$ . Alors, pour  $1 \leq n \leq q$ , la courbe  $\tilde{F}^n(D_s(\tilde{z}_0))$  rencontre  $D_i(\tilde{z}_n)$ .*

*Démonstration :* Nous supposons que l'application dévie la verticale à droite et montrons la proposition par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , c'est simplement l'inégalité (voir section 7.2.4)

$$g'(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1) \leq g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2).$$

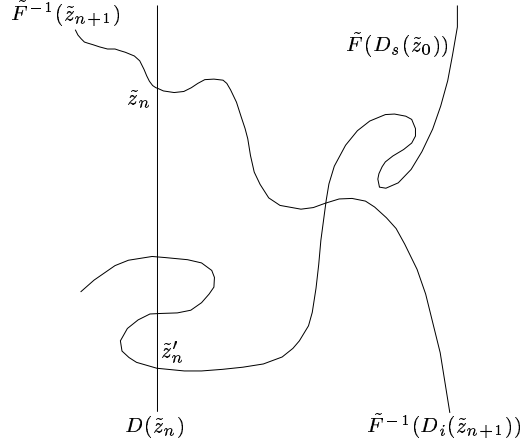
Supposons la propriété vraie au rang  $n \in \{1, \dots, q-1\}$  et notons  $\tilde{z}'_n = \tilde{F}^n(\tilde{z}_0^n)$  le point de  $\tilde{F}^n(D_s(\tilde{z}_0)) \cap D_i(\tilde{z}_n)$  d'ordonnée minimale. D'après (11.1),  $\tilde{F}(\tilde{z}_n) \in D_i(\tilde{z}_{n+1})$ . Le chemin  $\tilde{F}^{-1}(D_i(\tilde{z}_{n+1}))$  contient un chemin issu de  $S$  (voir la section 1.1.2), à droite de  $D(\tilde{z}_n)$  qui coupe cette verticale au point  $\tilde{z}_n$  d'ordonnée  $g(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1})$ . D'après la proposition 7.1.1 (voir la remarque ci-dessous), le chemin issu de  $N$ ,  $\tilde{F}^n(D_s(\tilde{z}_0^n))$  est à droite de  $D(\tilde{z}_n)$  et coupe cette verticale en  $\tilde{z}'_n$ . Puisque  $\tilde{p}_2(\tilde{z}'_n) \leq \tilde{p}_2(\tilde{z}_n)$  par récurrence, les deux courbes se rencontrent. On en déduit la propriété au rang  $n + 1$ . (Voir figure 11.1.)

□

**Remarque 11.1.1** Nous avons utilisé la proposition 7.1.1 qui montre que le premier point de rencontre entre un chemin négatif  $\gamma$  issu de  $N$  et une verticale  $D$  est aussi le point d'ordonnée minimale de  $D \cap \gamma$ . Le chemin  $\tilde{F}^n(D_s(\tilde{z}_0^n))$  ne satisfait que la seconde condition de la définition 7.1.1. En ce sens, il n'est pas négatif. On observe cependant (voir [L87] section 4.3) que la proposition 7.1.1 est encore vraie dans ce cadre.

*Démonstration de la proposition 11.1.1 :* Nous choisissons de traiter le cas de  $\omega_{\frac{p}{q}}^+$ , l'autre surface s'étudiant de la même façon. On se donne aussi deux jeux de paramètres associés respectivement aux difféomorphismes  $\tilde{F} = \tilde{F}_{b,a,\omega}$  et  $\tilde{F}^* = \tilde{F}_{b^*,a^*,\omega^*}$  :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{\frac{p}{q}}^+(b, a), \\ \omega^* &> \omega_{\frac{p}{q}}^+(b^*, a^*). \end{aligned}$$


 FIG. 11.1: Intersection des chemins  $\tilde{F}^{-1}(D_i(\tilde{z}_{n+1}))$  et  $\tilde{F}^n(D_s(\tilde{z}_0))$ .

On peut supposer  $b, b^* < 1$ . Par passage à la limite on en déduira le cas général.

D'après la proposition 7.2.5,  $\tilde{F}$  possède une orbite bien ordonnée de type  $(p, q)$ ,  $\mathcal{O}(\tilde{z})$  le long de laquelle  $\tilde{C}_{p,q}(\tilde{F})$  et  $\tilde{F}(\tilde{C}_{p,q}(\tilde{F}))$  s'intersectent, donc

$$\forall \tilde{x} \in \tilde{p}_1(\mathcal{O}(\tilde{z})), (\mu_{\tilde{F}}^+ - \nu_{\tilde{F}}^-)(\tilde{x}) \geq 0.$$

Puisque  $\frac{p}{q} \notin \mathcal{R}(\tilde{F}^*)$ , d'après la proposition 11.1.2, les fonctions  $\nu_{\tilde{F}^*}^- - \mu_{\tilde{F}^*}^+$  et  $\mu_{\tilde{F}^*}^- - \nu_{\tilde{F}^*}^+$  ne s'annulent pas. L'ensemble  $\mathcal{C}_{p,q}(\tilde{F})$  est semi-continu supérieurement en les paramètres. Faisant tendre  $\omega^*$  vers  $+\infty$ , nous ne changeons donc pas le signe de ces fonctions. Pour  $\omega^*$  suffisamment grand, on voit facilement que  $\mathcal{C}_{p,q}(\tilde{F})$  est dans un anneau montant (voir section 7.2.2). On obtient donc

$$\nu_{\tilde{F}^*}^- - \mu_{\tilde{F}^*}^+ > 0. \quad (11.2)$$

On définit maintenant les suites :  $(\tilde{z}_n) = (\tilde{F}^n(\tilde{z}))$  et  $(\tilde{x}_n) = (\tilde{p}_1(\tilde{z}_n))$ . On a bien sûr :

$$\forall n, \quad |\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n - \rho| \leq 1.$$

On rappelle aussi (voir la proposition 10.1.6) que pour tout  $n$ ,

$$\min(\varphi) \leq \varphi(\tilde{x}_n) \leq \min(\varphi) + 4.$$

Rappelons l'expression des fonctions  $g$  et  $g'$  (resp.  $g^*$  et  $g^{*'}$ ), introduites en 7.2.4 et 9.1.2 :

$$\begin{aligned} g(\tilde{x}, \tilde{x}') &= \tilde{x}' - \tilde{x} - \varphi(\tilde{x}), \\ g'(\tilde{x}, \tilde{x}') &= b(\tilde{x}' - \tilde{x}). \end{aligned}$$

En distinguant selon que  $a^* - a$  est positif ou négatif, on obtient,

$$\begin{aligned} \inf_n (g^* - g)(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}) - \sup_n (g^{*'} - g')(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}) &\geq \\ \omega - \omega^* + (a - a^*) \min(\varphi_1) - \frac{4}{a} |a^* - a| + (b - b^*)\rho - |b^* - b|. \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que

$$\omega - \omega^* + (a - a^*) \min(\varphi_1) - \frac{4}{a} |a^* - a| + (b - b^*) \rho - |b^* - b| > 0.$$

Alors, clairement, pour tout entier  $n$ ,

$$(g^{*'} - g')(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n) < (g^* - g)(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}).$$

Or puisque  $(\tilde{z}_n)$  est une orbite de  $\tilde{F}$ ,

$$g'(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n) = g(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}).$$

On a donc

$$g^{*'}(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n) < g^*(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}).$$

Posons  $\tilde{z}_i^* = (\tilde{x}_i, g^*(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}))$ . Nous sommes dans la situation du lemme 11.1.3 et pour tout  $n \in \{1, \dots, q\}$ , la courbe  $(\tilde{F}^*)^n(D_s(\tilde{z}_0^*))$  rencontre  $D_i(\tilde{z}_n^*)$ .

À l'ordre  $q$  cette propriété dit qu'il existe un point  $\tilde{z}_0^q \in D_s(\tilde{z}_0^*)$  qui s'envoie par  $\tilde{F}^q \circ \tilde{R}_{-p}$  sur un point  $\tilde{z}'_q \in D_i(\tilde{z}_0^*)$ . On en déduit  $(\mu_{\tilde{F}^*}^+ - \nu_{\tilde{F}^*}^-)(\tilde{x}_0) > 0$  ce qui contredit l'inégalité (11.2). D'où,

$$\omega - \omega^* + (a - a^*) \min(\varphi_1) - \frac{4}{a} |a^* - a| + (b - b^*) \rho - |b^* - b| \leq 0.$$

Par passage à la limite cette inégalité est encore vraie pour  $\omega^* = \omega_\rho^+(a^*, b^*)$ . En inversant les rôles de  $\omega$  et  $\omega^*$ , on obtient les estimées annoncées. □

## 11.2 Langues irrationnelles

**11.2.1** Nous rappelons tout d'abord un résultat de P. Le Calvez (voir [L95]) qui résulte du  $C^1$ -closing lemma de C. Pugh :

**Proposition 11.2.1 (P. Le Calvez)** *Soit  $\tilde{F} \in \widetilde{D\bar{V}}(\mathbb{A})$  et  $\alpha$  un nombre de rotation irrationnel appartenant à  $\mathcal{R}(\tilde{F})$ . Nous définissons  $\tilde{F}_\omega = \tilde{R}_\omega \circ \tilde{F}$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\omega$  avec  $|\omega| < \varepsilon$  et un rationnel  $\frac{p}{q} < \alpha$  (resp.  $\frac{p}{q} > \alpha$ ) avec  $|\frac{p}{q} - \alpha| < \varepsilon$  tel que  $\frac{p}{q} \in \mathcal{R}(\tilde{F}_\omega)$ .*

**11.2.2** Nous montrons l'analogie du théorème 10.4.1 pour les nombres de rotation irrationnels :

**Théorème 11.2.2** *Soit  $(\tilde{F}_{b,a,\omega})_\omega$  une famille d'applications bimodales avec  $a > a_B(\varphi_1)$  et  $0 \leq b \leq 1$ , telle que*

$$a(\max(\varphi_1) - \min(\varphi_1)) > 6 \tag{11.3}$$

*et  $\alpha$  un nombre irrationnel. Alors :*

*i. Il existe un intervalle  $[\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+]$  de  $\mathbb{R}$  tel que*

$$\alpha \in \mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) \Leftrightarrow \omega \in [\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+].$$

ii. On a la caractérisation suivante de  $\omega_\alpha^-$  et  $\omega_\alpha^+$  :

$$\omega_\alpha^- = \liminf_{\frac{p}{q} > \alpha} \omega_{\frac{p}{q}}^- = \liminf_{\frac{p}{q} < \alpha} \omega_{\frac{p}{q}}^-, \quad (11.4)$$

$$\omega_\alpha^+ = \limsup_{\frac{p}{q} > \alpha} \omega_{\frac{p}{q}}^+ = \limsup_{\frac{p}{q} < \alpha} \omega_{\frac{p}{q}}^+. \quad (11.5)$$

Lorsque  $a_c > a_B(\varphi_1)$ , les applications  $(b, a) \mapsto \omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+$  définies sur un voisinage de  $[0, 1] \times \{a_c\}$  sont lipschitziennes.

*Démonstration* : Grâce à la condition (11.3) et aux estimées de la proposition 10.5.2, on sait que pour tout rationnels  $\frac{p}{q}$  et  $\frac{p'}{q'}$  suffisamment proches de  $\alpha$ ,

$$\omega_{\frac{p}{q}}^- < \omega_{\frac{p'}{q'}}^+.$$

Si  $(\frac{p_n}{q_n})$  est une suite de rationnels convergeant vers  $\alpha$  et si les suites associées  $(\omega_{\frac{p_n}{q_n}}^-)$  et  $(\omega_{\frac{p_n}{q_n}}^+)$  convergent respectivement vers  $\omega^-$  et  $\omega^+$ , alors  $\omega^- \leq \omega^+$  et d'après la proposition 7.2.1.ii pour tout  $\omega \in [\omega^-, \omega^+]$ ,  $\tilde{F}_{b,a,\omega}$  admet un ensemble bien ordonné de nombre de rotation  $\alpha$ . Si  $[\omega'^-, \omega'^+]$  est un autre intervalle associé à une suite  $(\frac{p'_n}{q'_n})$  convergeant vers  $\alpha$ ,  $[\omega^-, \omega^+] \cup [\omega'^-, \omega'^+]$  est un intervalle.

Soient  $\omega_\alpha^-$  et  $\omega_\alpha^+$  définis par l'une des égalités de (11.4) et (11.5) respectivement. On en déduit que pour tout  $\omega \in [\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+]$ ,  $\tilde{F}_{b,a,\omega}$  admet un ensemble bien ordonné de nombre de rotation  $\alpha$ .

Réciproquement, soit  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que  $\tilde{F}_{b,a,\omega}$  admette un ensemble bien ordonné de nombre de rotation  $\alpha$ . D'après la proposition 11.2.1, il existe une suite  $(\frac{p_n}{q_n})$  que l'on peut choisir croissante ou décroissante, tendant vers  $\alpha$  et une suite  $(\omega_n)$  tendant vers  $\omega$  telles que pour tout  $n$ ,  $\tilde{F}_{b,a,\omega_n}$  ait le nombre de rotation  $\frac{p_n}{q_n}$ . On en déduit que  $\omega$  appartient à  $[\omega_\alpha^-, \omega_\alpha^+]$ .

En considérant les différents cas, on obtient ainsi les doubles égalités (11.4) et (11.5).

Pour terminer, on peut passer à la limite dans les estimées de la proposition 11.1.1 et montrer que les applications  $\omega_\alpha^-$  et  $\omega_\alpha^+$  sont lipschitziennes. □

L'ensemble des paramètres  $(b, a, \omega)$  pour lesquels  $\alpha$  appartient à  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  est la **langue d'Arnol'd** associée au nombre irrationnel  $\alpha$ .

**11.2.3** Par passage à la limite, on généralise aux langues irrationnelles les résultats connus pour les langues rationnelles :

**Proposition 11.2.3** *Sous les hypothèses du théorème 11.2.2, les estimées des propositions 10.5.2 et 11.1.1 (localisation et contrôle lipschitz des courbes  $\omega_\rho^\pm$ ) sont encore vraies pour  $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .*

**Remarque 11.2.1** Nous reprendrons à plusieurs reprises le premier argument de la preuve du théorème 11.2.2 : si  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux réels vérifiant  $|\rho' - \rho| < 1$  et si

$$a(\max(\varphi_1) - \min(\varphi_1)) > 7,$$

alors,  $\omega_\rho^- < \omega_{\rho'}^+$ .



### 11.3 Transversalité des surfaces $\omega^+$ et $\omega^-$ .

Comme conséquence de la proposition 11.1.1, nous obtenons que pour tous  $\rho, \rho' \in \mathbb{R}$ , les surfaces  $\omega_\rho^-$  et  $\omega_{\rho'}^+$  sont transverses.

**Proposition 11.3.1** *Soit  $(\tilde{F}_{b,a,\omega})_\omega$  une famille d'applications bimodales avec  $a_c > a_B(\varphi_1)$ ,  $a_c(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 6$  et  $0 \leq b \leq 1$ .*

*Soient  $a^* > a > a_c$  deux paramètres et  $\rho, \rho'$  des réels quelconques.*

*i. Si  $a_c \max \varphi_1 > 4$  (resp.  $a_c \min \varphi < -4$ ), alors il existe  $K > 0$  tel que  $\omega_\rho^-(b, a^*) + K(a^* - a) < \omega_\rho^-(b, a)$  (resp.  $\omega_\rho^+(b, a^*) > \omega_\rho^+(b, a) + K(a^* - a)$ ).*

*ii. Si  $a_c(\max(\varphi_1) - \min(\varphi_1)) > 8$ , alors il existe  $K > 0$  tel que*

$$\omega_\rho^-(b, a^*) - \omega_\rho^-(b, a) + K(a^* - a) < \omega_{\rho'}^+(b, a^*) - \omega_{\rho'}^+(b, a).$$

*En particulier, les surfaces  $\omega_\rho^-$  et  $\omega_{\rho'}^+$  sont transverses.*

## Chapitre 12

# Bifurcations homoclines

Nous utilisons la dérivée schwarzienne et les outils du chapitre 10 pour étudier la géométrie des variétés invariantes des orbites bien ordonnées positives. Ceci permet de montrer dans le domaine dissipatif que pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$ , la langue d'Arnol'd correspondante contient deux autres surfaces transverses au paramètre  $\omega$  le long desquelles des bifurcations homoclines se produisent. Ces bifurcations sont génériques. De plus, elles caractérisent l'appartenance de  $\frac{p}{q}$  à la frontière de l'ensemble de rotation. Ceci nous permet de comprendre comment les différentes langues d'Arnol'd s'accumulent. Nous terminons par une estimation de la largeur de l'attracteur de Birkhoff.

### 12.1 Étude des graphes invariants

#### 12.1.1 Notations

**12.1.1.1** Comme au chapitre précédent,  $\tilde{F} = \tilde{F}_{b,a,\omega}$  est une application standard bimodale de  $\widetilde{D\mathbb{V}}(\mathbb{T}^1)$  avec  $a > a_B(\varphi_1)$ . Sauf en sections 12.5 et 12.6, nous supposons  $0 < b < 1$ . On note encore  $\varphi = a\varphi_1 + \omega$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Nous choisissons un rationnel  $\frac{p}{q}$  dans  $\mathcal{R}(\tilde{F})$ , puis nous fixons  $\omega \in [\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+]$ . Nous notons  $\mathcal{O}$  l'orbite de  $F$  bien ordonnée positive de type  $(p, q)$ .

**12.1.1.2** On définit  $\tilde{I}_0 = [\tilde{I}_0^-, \tilde{I}_0^+]$  l'intervalle compact de  $[\tilde{c}'_{\varphi_1}, \tilde{c}_{\varphi_1} + 1]$  sur lequel  $1 + b + D\varphi \leq 0$ . Le rôle de cet intervalle est justifié par le lemme 10.1.5. On note  $\tilde{I}_n = [\tilde{I}_n^-, \tilde{I}_n^+] = \tilde{I}_0 + n$  et  $I = \pi_0(\tilde{I}_0)$ .

**12.1.1.3** Il sera commode d'indexer de la façon suivante les points de l'orbite étendue  $\tilde{\mathcal{O}} = \pi_1^{-1}(\mathcal{O}) = \{\tilde{z}_i, i \in \mathbb{Z}\}$ :

- $\tilde{z}_0$  est un relevé à  $\tilde{\mathbb{A}}$  d'un point de  $\mathcal{O}(z)$ .
- $(\tilde{x}_i) = (\tilde{p}_1(\tilde{z}_i))_{i \in \mathbb{Z}}$  est une suite strictement croissante.
- $\tilde{I}_0 \subset [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1]$ . (En effet, d'après le lemme 10.1.5,  $I$  ne contient pas de point de l'orbite  $\mathcal{O}$ .)

Ainsi, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{z}_i + (1, 0) &= \tilde{z}_{i+q}, \\ \tilde{F}(\tilde{z}_i) &= \tilde{z}_{i+p}.\end{aligned}$$

**12.1.1.4** Le formalisme introduit en section 10.1.1 était local au voisinage de l'orbite  $\mathcal{O}$ . Nous cherchons maintenant à l'étendre afin d'obtenir pour les graphes des domaines maximaux :

Nous fixons un ensemble de variétés invariantes locales  $\Gamma_i$  en chaque  $\tilde{z}_i$  associées à une valeur propre  $\lambda$  de  $DF^q(z_i)$  et nous étudions l'une des composantes  $\Gamma_i^\varepsilon$  de  $\Gamma_i \setminus \{\tilde{z}_i\}$ . Plus précisément,  $\Gamma_i^\varepsilon = \Gamma_i^+$  (resp.  $\Gamma_i^\varepsilon = \Gamma_i^-$ ) si  $\Gamma_i^\varepsilon$  est localement à droite (resp. à gauche) de  $\tilde{z}_i$ . On suppose que  $\Gamma_i^\varepsilon$  est topologiquement instable ou topologiquement stable. Par itérations ceci permet d'étendre  $\Gamma_i^\varepsilon$  (et donc  $\Gamma_i$ ) en une demi-droite (ou droite) immergée de sorte que

$$\forall i, \quad \tilde{F}(\Gamma_i^\varepsilon) = \Gamma_{i+p}^\varepsilon.$$

Autour de  $\tilde{z}_i$ ,  $\Gamma_i^\varepsilon$  (resp.  $\Gamma_i$ ) est un graphe  $C^1$ ,  $G_i^\varepsilon$  (resp.  $G_i$ ), défini sur un domaine maximal  $\text{Dom}^\varepsilon(\phi_i)$  (resp.  $\text{Dom}(\phi_i)$ ) :

$$\begin{aligned}G_i^\varepsilon &= \{(\tilde{x}, \phi_i(\tilde{x})), \tilde{x} \in \text{Dom}^\varepsilon(\phi_i)\}, \\ (\text{resp. } G_i &= \{(\tilde{x}, \phi_i(\tilde{x})), \tilde{x} \in \text{Dom}(\phi_i)\}).\end{aligned}$$

## 12.1.2 Domaines des graphes

**12.1.2.1** Considérons encore une fois la forme particulière des applications  $F$  et  $F^{-1}$  (voir (9.1) et (9.2)). Si  $G$  est un graphe  $C^1$ , de la forme  $G = \{(\tilde{x}, \phi(\tilde{x})), \tilde{x} \in \text{Dom}(\phi)\}$ , au-dessus d'un ouvert  $\text{Dom}(\phi)$ , nous lui associerons souvent les applications  $g, h : \text{Dom}(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$g(\tilde{x}) = \tilde{x} + \varphi(\tilde{x}) + \phi(\tilde{x}), \quad (12.1)$$

$$h(\tilde{x}) = \tilde{x} - \frac{1}{b}\phi(\tilde{x}). \quad (12.2)$$

Ainsi lorsque l'image de  $G$  par  $\tilde{F}$  (resp.  $\tilde{F}^{-1}$ ) est un graphe  $C^1$ ,  $G'$  (resp.  $G''$ ), et lorsque  $g', h'$  (resp.  $g'', h''$ ) sont les applications associées, alors  $g$  (resp.  $h$ ) est un difféomorphisme sur son image et  $h' = g^{-1}$  (resp.  $g'' = h^{-1}$ ).

On obtient immédiatement :

**Lemme 12.1.1** *Soit  $G$  un graphe comme ci-dessus. Pour tout  $\tilde{x} \in \text{Dom}(\phi)$ ,  $Dg(\tilde{x})$  (resp.  $Dh(\tilde{x})$ ) est nul si et seulement si  $\tilde{F}(G)$  (resp.  $\tilde{F}^{-1}(G)$ ) admet une tangente verticale en  $\tilde{F}(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))$  (resp.  $\tilde{F}^{-1}(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))$ ). Avec le paramétrage de  $\tilde{F}(G)$  (resp.  $\tilde{F}^{-1}(G)$ ) par  $\tilde{x} \in \text{Dom}(\phi)$ , la tangente verticale est dirigée vers le bas (resp. vers le haut).*

**Lemme 12.1.2** *Soient  $G$  et  $\tilde{F}(G) = G'$  des graphes  $C^1$  tels que  $g$  (et  $h'$ ) soient des difféomorphismes croissants. Alors, pour tout  $\tilde{x} \in \text{Dom}(\phi)$  (resp.  $\tilde{x}' \in \text{Dom}(\phi')$ ),  $D\phi(\tilde{x}) > -1 - D\varphi(\tilde{x})$  (resp.  $D\phi'(\tilde{x}') < b$ ).*

*Démonstration :* C'est une simple conséquence de la déviation de la verticale : il suffit d'écrire que  $Dg(x)$  (resp.  $Dh'(x)$ ) est strictement positif et d'utiliser les formules (12.1) et (12.2).

□

**12.1.2.2** Lorsque  $\Gamma_i$  est instable (resp. stable), on définit sur le domaine de  $\phi_i$  l'application généralement non-inversible  $f_i : \text{Dom}(\phi_i) \rightarrow \mathbb{R}$ , (resp.  $f_{i-p}^{-1} : \text{Dom}(\phi_i) \rightarrow \mathbb{R}$ ) par :

$$\begin{aligned} f_i(\tilde{x}) &= \tilde{x} + \varphi(\tilde{x}) + \phi_i(\tilde{x}), \\ (\text{resp. } f_{i-p}^{-1}(\tilde{x}) &= \tilde{x} - \frac{1}{b}\phi_i(\tilde{x})). \end{aligned} \quad (12.3)$$

Les résultats de la section 12.1.2.1 s'appliquent.

L'application  $f_i$  (resp.  $f_{i-p}^{-1}$ ) est un difféomorphisme sur un ouvert maximal de  $\text{Dom}(\phi_i)$  contenant  $\tilde{x}_i : \text{Dom}(f_i)$  (resp.  $\text{Dom}(f_{i-p}^{-1})$ ). On note aussi

$$\begin{aligned} \text{Dom}^\varepsilon(f_i) &= \text{Dom}(f_i) \cap \text{Dom}^\varepsilon(\phi_i), \\ (\text{resp. } \text{Dom}^\varepsilon(f_{i-p}^{-1}) &= \text{Dom}(f_{i-p}^{-1}) \cap \text{Dom}^\varepsilon(\phi_i)). \end{aligned}$$

**12.1.2.3** Il y a une relation entre  $\text{Dom}(f_i)$  et  $\text{Dom}(\phi_{i+p})$  :

**Proposition 12.1.3** *Si les  $(\Gamma_i^\varepsilon)$  sont des branches instables, alors pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,*

*i. l'ensemble  $\text{Dom}^\varepsilon(\phi_i)$  est ouvert,  $G_{i+p}^\varepsilon \subset \tilde{F}(G_i^\varepsilon)$  et plus précisément,*

$$f_i(\text{Dom}^\varepsilon(f_i)) = \text{Dom}^\varepsilon(\phi_{i+p});$$

*ii.  $\forall \tilde{x} \in \text{Dom}^\varepsilon(\phi_i), D\phi_i(\tilde{x}) < b$ ;  
 $\forall \tilde{x} \in \text{Dom}^\varepsilon(f_i), D\phi_i(\tilde{x}) > -1 - D\varphi(\tilde{x})$ .*

*Démonstration* : Nous allons traiter le cas  $\varepsilon = +$ . Pour  $i \in \mathbb{Z}$ , nous introduisons la propriété

$$(P_i) \quad \forall k \geq 0, \tilde{F}^{-k}(G_i^\varepsilon) \subset G_{i-kp}^\varepsilon.$$

Supposons que  $(P_{i_0})$  soit satisfaite. Deux cas se présentent :

Si  $G_{i_0}^+ = \Gamma_{i_0}^+$  alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\tilde{F}^{-k}(G_{i_0}^+) = \Gamma_{i_0-kp}^+ = G_{i_0-kp}^+.$$

Par périodicité de l'orbite  $(z_i)$ , on en déduit que toutes les branches  $\Gamma_i^+$  sont des graphes.

Si  $G_{i_0}^+ \subsetneq \Gamma_{i_0}^+$  et puisque  $(P_{i_0})$  est satisfaite,  $f_{i-p}^{-1}$  est un difféomorphisme croissant sur  $\text{Dom}^+(\phi_{i_0})$ . Donc d'après le lemme 12.1.2,  $D\phi_{i_0} < b$ . Par maximalité du domaine  $\text{Dom}^+(\phi_{i_0})$  on a de plus

$$\lim_{\tilde{x} \rightarrow \sup \text{Dom}^+(\phi_i)} D\phi_i(\tilde{x}) = -\infty.$$

D'après la formule (12.3) et le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient que  $Df_{i_0}$  s'annule sur  $\text{Dom}^+(\phi_{i_0})$ . Le domaine  $\text{Dom}^+(f_{i_0})$  est donc un intervalle ouvert,  $]\tilde{x}_{i_0}, t'[,$  strictement inclus dans  $\text{Dom}^+(\phi_{i_0})$ . Ainsi, d'après le lemme 12.1.1

$$G_{i_0+p}^+ = \tilde{F}(\{(\tilde{x}, \phi_{i_0}(\tilde{x})), \tilde{x} \in \text{Dom}^+(f_{i_0})\}).$$

La propriété  $(P_{i_0+p})$  est donc vraie. Par récurrence, la propriété  $(P_i)$  est vraie pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . On obtient le (i).

Dans les deux cas, le (ii) est une simple conséquence du (i) et du lemme 12.1.2.

Il reste à montrer que  $(P_{i_0})$  est satisfaite par au moins un entier  $i_0 \in \mathbb{Z}$ . Puisque les branches  $\Gamma_i^+$  sont instables, pour tout  $i$ ,

$$H_i = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \tilde{F}^k(G_{i-kp}^+)$$

est non vide. Or pour tout  $i$ ,  $\tilde{F}(H_i) \cap G_{i+p} = H_{i+p}$ . Ainsi, si  $H_{i+p} \subsetneq G_{i+p}$ , on a  $\tilde{F}(H_i) = H_{i+p}$ . Par conséquent, si pour tout  $i$ ,  $H_i \subsetneq G_i^+$ , alors  $\tilde{F}^q(H_i) = H_i + (p, 0)$  et ceci contredit le fait que  $\Gamma_i^+$  soit instable. Il existe donc  $i_0$  tel que  $H_{i_0} = G_{i_0}^+$  ce qui montre  $(P_{i_0})$ . □

Dans le cas des branches stables nous obtenons de la même façon :

**Proposition 12.1.4** *Si les  $(\Gamma_i^\varepsilon)$  sont des branches stables, alors pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,*

*i. l'ensemble  $\text{Dom}^\varepsilon(\phi_i)$  est ouvert,  $G_{i-p}^\varepsilon \subset \tilde{F}^{-1}(G_i^\varepsilon)$  et plus précisément,*

$$f_i^{-1}(\text{Dom}^\varepsilon(f_i^{-1})) = \text{Dom}^\varepsilon(\phi_{i-p});$$

*ii.  $\forall \tilde{x} \in \text{Dom}^\varepsilon(f_{i-p}^{-1}), D\phi_i(\tilde{x}) < b$  ;  
 $\forall \tilde{x} \in \text{Dom}^\varepsilon(\phi_i), D\phi_i(\tilde{x}) > -1 - D\varphi(\tilde{x})$ .*

**12.1.2.4** Nous finissons avec le lemme suivant :

**Lemme 12.1.5** *Pour tout  $i$ , et toute branche de variété invariante stable ou instable  $\Gamma_i^-$  (resp.  $\Gamma_i^+$ ),  $\tilde{z}_{i-1} \notin \text{Adh}(G_i^-)$  (resp.  $\tilde{z}_{i+1} \notin \text{Adh}(G_i^+)$ ).*

*Démonstration* : En effet, si par exemple  $\tilde{z}_{i+1} \in \text{Adh}(G_i^+)$  et si  $\Gamma_i^+$  est une branche instable, la proposition 12.1.3 montre que l'image de  $G_i^+$  par  $\tilde{F}^{-k}$ ,  $k \geq 0$  est un graphe joignant  $\tilde{z}_{i-kp}$  à  $\tilde{z}_{i-kp+1}$ . De plus,  $\tilde{F}^{-q}(G_i^+) = G_i^+ - (p, 0)$ . Donc,

$$\pi_1(G_i^+ \cup \tilde{F}^{-1}(G_i^+) \cup \dots \cup \tilde{F}^{-q+1}(G_i^+))$$

est un cercle invariant. Ceci contredit la proposition 9.4.1. □

### 12.1.3 Graphes et dérivée schwarziennne

Nous reformulons la proposition 10.1.3 :

**Lemme 12.1.6** *Soit  $G$  un graphe  $C^3$ . Nous supposons, avec les notations de la section 12.1.2.1, que  $h$  et  $g$  sont des difféomorphismes croissants. Alors si  $h$  est à dérivée schwarziennne positive,  $g$  est à dérivée schwarziennne strictement négative ; si  $g$  est à dérivée schwarziennne positive,  $h$  est à dérivée schwarziennne strictement négative.*

Nous améliorons le résultat de la section 10.1.3 :

**Proposition 12.1.7** *Avec les notations précédentes, si  $\Gamma_i^\varepsilon$  est instable (resp. stable avec  $\lambda^4 \leq b^q$ ),  $f_{i-p}^{-1}$  (resp.  $f_i$ ) est à dérivée schwarziennne strictement positive sur un voisinage de  $\{\tilde{x}_i\} \cup \text{Dom}^\varepsilon(\phi_i)$  dans  $\text{Dom}(\phi_i)$ .*

*Démonstration* : Nous ne considérerons que le cas de variétés instables. Pour les variétés stables, la démonstration est similaire.

La proposition 10.1.3 montre que  $S f_i$  est strictement négative en  $\tilde{x}_i$ . C'est donc encore vrai sur un voisinage de  $\tilde{x}_i$  dans  $\text{Dom}(\phi_i)$ .

Soit maintenant  $\tilde{x} \in \text{Dom}^\varepsilon(\phi_i)$ . Nous noterons  $\tilde{z} = (\tilde{x}, \phi_i(\tilde{x}))$ . Chaque point  $\tilde{F}^{-n}(\tilde{z})$  de l'orbite négative de  $\tilde{z}$  est dans un graphe  $G_{i-np}^\varepsilon$  d'après la proposition 12.1.3. L'orbite négative  $(\tilde{x}(-n))$  de  $\tilde{x}$  par les applications  $f_{i-np}$  est donc bien définie. On remarque toujours d'après la proposition 12.1.3 que pour  $n \geq 1$ ,  $Df_{i-np}(\tilde{x}_{i-np})$  est strictement positif.

Pour  $n$  grand,  $\tilde{x}(-nq)$  est arbitrairement proche de  $\tilde{x}_{i-npq} = \tilde{x}_i - np$  et la quantité  $S f_{i-npq}(\tilde{x}(-nq))$  est donc strictement négative. La proposition 10.1.2 montre alors  $S f_{i-p}(\tilde{x}(-1)) < 0$ .

□

**Remarque 12.1.1** Il peut sembler miraculeux que le signe de la dérivée schwarzienne soit justement celui qu'il faut pour être préservé par itérations positives (cas de la variété instable) ou négatives (cas de la variété stable).

## 12.1.4 Géométrie des graphes

**12.1.4.1** Nous commençons par un lemme sur les applications à dérivée schwarzienne négative :

**Lemme 12.1.8** Soient  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications de classe  $C^3$  tels que  $Df, Dg > 0$  et  $S f < 0, S g > 0$ . Alors :

- i. Le nombre de zéros de  $Dg - Df$  est inférieur ou égal à deux.
- ii. S'il est égal à deux, les zéros sont non-dégénérés (i.e.  $D^2g - D^2f$  y est non nul) et on a  $Df(a) \leq Dg(a)$  et  $Df(b) \leq Dg(b)$ .
- iii. Si  $Dg - Df$  a un zéro dégénéré,  $c$ , le zéro est quadratique (i.e.  $D^3g(c) - D^3f(c) > 0$ ) et on a  $Df(a) \leq Dg(a)$  et  $Df(b) \leq Dg(b)$ .

*Démonstration* : Si  $Dg - Df$  possède au moins deux zéros  $x_1 < x_2$ , on choisit une application de Möbius  $\psi$  de dérivée positive telle que  $\psi : [x'_1, x'_2] \rightarrow [x_1, x_2]$  soit un difféomorphisme pour un certain intervalle  $[x'_1, x'_2]$  et  $D(f \circ \psi)(x'_i) = 1$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

On a encore  $S(f \circ \psi) < 0, S(g \circ \psi) > 0$  et  $D(f \circ \psi), D(g \circ \psi) > 0$ . D'après le principe du minimum pour les fonctions à dérivée schwarzienne négative (voir la section 2.2 ou [MS], chapitre II.6, lemme 6.1),  $D(f \circ \psi)(x) > 1$  en tout point  $x \in ]x'_1, x'_2[$ . De même,  $D(g \circ \psi)(x) < 1$ . Ainsi,  $D((g - f) \circ \psi)$  ne s'annule pas sur  $]x'_1, x'_2[$ . On en déduit que  $Dg - Df$  est strictement négative sur  $]x_1, x_2[$ .

Si  $Dg - Df$  a un zéro dégénéré,  $c$ , on a

$$Df(c) = Dg(c), \quad D^2f(c) = D^2g(c).$$

Or  $S f(c) < 0 < S g(c)$ . La formule (1.1) implique donc :

$$D^3f(c) < D^3g(c).$$

Localement,

$$Df \leq Dg. \tag{12.4}$$

Il ne peut y avoir d'autre zéro,  $d$ , car par ce qui précède, sur  $]d, c[$  (ou  $]c, d[$ ),  $Dg - Df$  serait strictement négative, ce qui contredirait (12.4). Sur  $[a, b]$ , on a donc  $Dg - Df \geq 0$ .

Lorsqu'il y a deux zéros,  $x_1 < x_2$ , ils sont donc non-dégénérés et  $Dg - Df \geq 0$  sur  $[a, x_1] \cup [x_2, b]$ .

□

**Corollaire 12.1.9** *Sous les hypothèses du lemme 12.1.8, supposons qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = g(c)$ .*

*i. Si  $Df(c) = Dg(c)$  alors,*

- *soit  $D^2f(c) < D^2g(c)$  et  $f - g$  ne s'annule pas sur  $]c, b]$  ;*
- *soit  $D^2f(c) > D^2g(c)$  et  $f - g$  ne s'annule pas sur  $[a, c[$  ;*
- *soit  $D^2f(c) = D^2g(c)$ ,  $D^3f(c) < D^3g(c)$  et  $f - g$  ne s'annule qu'en  $c$ .*

*ii. Supposons que  $Df(c) > Dg(c)$  ou que  $Df(c) = Dg(c)$  et  $D^2f(c) < D^2g(c)$ . Alors, si  $f(a) < g(a)$ ,  $f - g$  ne s'annule pas sur  $[a, c[$  ;*

*Démonstration :* Il suffit de combiner le lemme 12.1.8 et le lemme de Rolle.

□

**12.1.4.2** Si  $G = \{(\tilde{x}, \phi(\tilde{x})), \tilde{x} \in \text{Dom}(\phi)\}$  et  $G' = \{(\tilde{x}, \phi'(\tilde{x})), \tilde{x} \in \text{Dom}(\phi')\}$  sont deux graphes, nous dirons que  $G'$  est **en-dessous** (resp. **strictement en-dessous**) de  $G$  si pour tout  $\tilde{x} \in \text{Dom}(\phi) \cap \text{Dom}(\phi')$ ,  $\phi'(\tilde{x}) \leq \phi(\tilde{x})$  (resp.  $\phi'(\tilde{x}) < \phi(\tilde{x})$ ). Un point  $z$  est en-dessous d'un graphe  $G$  s'il est contenu dans un graphe en-dessous de  $G$ . (On ne suppose pas  $\text{Dom}(\phi) \cap \text{Dom}(\phi') \neq \emptyset$ .)

L'image d'un graphe a une géométrie contrôlée :

**Proposition 12.1.10** *Soit  $G$  le graphe d'une application  $\phi$  de classe  $C^3$  au-dessus d'un intervalle ouvert  $\text{Dom}(\phi) = ]t, t'[$ . Avec les notations de la section 12.1.2.1, nous supposons que  $h$  est un difféomorphisme croissant à dérivée schwarzienne positive. Alors il existe un nombre fini de points  $t < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t'$  vérifiant les propriétés suivantes (voir figure 12.1) :*

- i. L'image par  $D\tilde{F}(t_j, \phi(t_j))$  du vecteur  $(1, D\phi(t_j))$ ,  $1 \leq j \leq k$  est verticale et dirigée vers le bas.*
- ii. L'image par  $D\tilde{F}$  de la partie de  $G$  au-dessus de chaque composante de  $\text{Dom}(\phi) \setminus \{t_j, 1 \leq j \leq k\}$  est un graphe  $C^3$  (sans tangence verticale).*
- iii. Pour tout  $1 \leq j \leq k$ ,  $t_j \notin \cup_n \tilde{I}_n$  (voir section 12.1.1.2) et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $] \tilde{I}_n^+, \tilde{I}_{n+1}^- [$  contient au plus deux points de  $\{t_j, 1 \leq j \leq k\}$ .*
- iv. Pour tout  $1 \leq j < k$ ,  $g|_{]t_j, t_{j+1}[}$  est strictement décroissant si  $]t_j, t_{j+1}[$  rencontre (et donc contient) un des intervalles  $\tilde{I}_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; sinon  $g|_{]t_j, t_{j+1}[}$  est strictement croissant.*
- v. Pour tout  $1 \leq j \leq k$ , soit  $D^2g(t_j) \neq 0$ , soit au voisinage de  $t_j$ ,  $Dg$  est négative.*
- vi. Pour tous  $1 \leq j < j' < k$ , le graphe  $\tilde{F}(\{(\tilde{x}, \phi(\tilde{x})), t_{j'} < \tilde{x} < t_{j'+1}\})$  est en-dessous du graphe  $\tilde{F}(\{(\tilde{x}, \phi(\tilde{x})), t_j < \tilde{x} < t_{j+1}\})$ .*

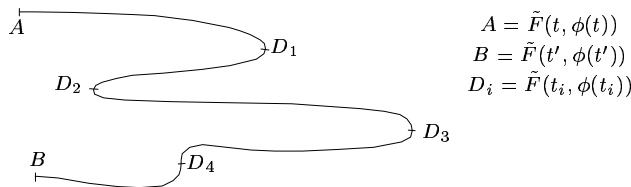


FIG. 12.1: Image  $\tilde{F}(G)$ .

*Démonstration* : Nous appliquons le lemme 12.1.1. Un point  $\tilde{x} \in \text{Dom}(\phi)$  est un zéro de  $Dg$  si et seulement si

$$1 + D\varphi(\tilde{x}) + D\phi(\tilde{x}) = 0.$$

Or,

$$h = \text{Id} - \frac{1}{b}\phi.$$

On obtient donc la condition équivalente suivante :

$$(1 + b + D\varphi)(\tilde{x}) - b Dh(\tilde{x}) = 0.$$

On rappelle que sur  $\text{Dom}(\phi)$ ,  $Dh$  est strictement positive.

Par définition, sur chaque intervalle  $\tilde{I}_n$ ,  $1 + b + D\varphi \leq 0$ . Il n'y a donc pas de zéro de  $Dg$  et  $g$  est strictement décroissante.

Sur un intervalle de la forme  $]\tilde{I}_n^+, \tilde{I}_{n+1}^-[\cap \text{Dom}(\phi)$ ,  $(1 + b)\text{Id} + \varphi$  et  $bh$  sont des difféomorphismes croissants sur leur image et de dérivée schwarzienne respectivement négative et positive. D'après le lemme 12.1.8,  $Dg$  ne s'annule qu'au plus deux fois.

Si  $t'' \in \text{Dom}(\phi)$  est un zéro dégénéré de  $Dg$ , le lemme 12.1.8 montre également qu'au voisinage de  $t''$ ,  $(1 + b + D\varphi)(\tilde{x}) - b Dh(\tilde{x}) \leq 0$ . L'application  $g$  est donc strictement décroissante.

Les assertions (v) et (vi) sont des conséquences de (i) et (ii).

□

**12.1.4.3** Cette proposition s'applique en particulier aux graphes  $G_i^+$  associés aux variétés instables :

**Corollaire 12.1.11** *Supposons que  $\Gamma_i^+$  soit une branche instable droite et que  $G \subset G_i^+$  soit un graphe au-dessus d'un ouvert  $]\tilde{x}_i, t'[\$  avec  $0 < t' - \tilde{x}_i < 1$ . Alors :*

- i. *Si  $]\tilde{x}_i, t'[\$  ne rencontre pas  $\cup_n \tilde{I}_n$ , l'image de  $G$  est réunion d'au plus deux graphes : il existe  $\tilde{x}_i < t_1 \leq t'$  tel que  $g$  soit strictement croissante sur  $]\tilde{x}_i, t_1[$  et strictement décroissante sur  $]t_1, t'[\$ .*
- ii. *Si  $]\tilde{x}_i, t'[\$  rencontre  $\cup_n \tilde{I}_n$ , alors l'image de  $G$  est réunion d'au moins deux et au plus quatre graphes : il existe  $\tilde{x}_i < t_1 < t_2 \leq t_3 \leq t'$  tels que  $g$  soit strictement croissante sur  $]\tilde{x}_i, t_1[$  et  $]t_2, t_3[$  et strictement décroissante sur  $]t_1, t_2[$  et  $]t_3, t'[\$ .*
- iii. *Supposons que pour  $t'' \in ]\tilde{x}_i, t'[\$ ,  $Dg(t'') > 0$  et que  $]\tilde{x}_i, t'[\$  rencontre  $\cup_n \tilde{I}_n$ . Alors,  $t_2 < t_3$ ,  $t'' \in ]t_2, t_3[$  et  $]t_1, t_2[$  contient un intervalle  $\tilde{I}_n$ .*



*Démonstration* : Sur  $\text{Dom}^+(\phi_i)$ ,  $f_{i-p}^{-1}$  est un difféomorphisme croissant de dérivée schwarzienne strictement positive d'après les propositions 12.1.3 et 12.1.7. Nous pouvons donc appliquer la proposition 12.1.10 en utilisant le fait que pour  $\tilde{x} \in \text{Dom}^+(\phi_i)$  proche de  $\tilde{x}_i$ ,  $Df_i$  est strictement positif.

□

**Corollaire 12.1.12** *Si  $\Gamma_i^+$  est une branche instable droite, il n'existe pas de graphe  $G_i^+ \subsetneq G \subset \Gamma_i^+$  défini au dessus d'un intervalle ouvert  $\text{Dom}(\phi)$  et possédant une tangence verticale.*

*Démonstration* : Écrivons  $\text{Dom}^+(\phi_i) = ]\tilde{x}_i, \tilde{x}'[$ . Supposons que  $\Gamma_i^+$  ait une tangente verticale en  $(\tilde{x}', \phi_i(\tilde{x}'))$ . D'après la proposition 12.1.3 elle est dirigée vers le bas. On en déduit  $f_{i-p}^{-1}(\tilde{x}') \in \text{Dom}^+(\phi_{i-p})$ . Finalement, le corollaire 12.1.11 montre que l'image par  $\tilde{F}$  de  $G_{i-p}^+$  contient au moins deux graphes successifs  $G_i^+$  et  $\gamma_i^2$ . La courbe  $G_i^+ \cup \{(\tilde{x}', \phi_i(\tilde{x}'))\} \cup \gamma_i^2$  n'est pas un graphe.

□

Bien sûr, on a des énoncés similaires avec les branches instables gauches  $\Gamma_i^-$ .

**12.1.4.4** Nous prouvons de la même façon :

**Corollaire 12.1.13** *Supposons que  $\Gamma_i^-$  soit une branche stable gauche et que  $G \subset G_i^-$  soit un graphe au-dessus d'un ouvert  $]t', \tilde{x}_i[$  avec  $0 < \tilde{x}_i - t' < 1$ . Alors :*

- i. *Si  $]t', \tilde{x}_i[$  ne rencontre pas  $\cup_n \tilde{I}_n$ , l'image de  $G$  par  $\tilde{F}^{-1}$  est réunion d'au plus deux graphes : il existe  $t' \leq t_1 < \tilde{x}_i$  tels que  $h$  soit strictement croissante sur  $]t_1, \tilde{x}_i[$  et strictement décroissante sur  $]t', t_1[$ .*
- ii. *Si  $]t', \tilde{x}_i[$  rencontre  $\cup_n \tilde{I}_n$ , alors l'image de  $G$  par  $\tilde{F}^{-1}$  est réunion d'au moins deux et au plus quatre graphes : il existe  $t' \leq t_3 \leq t_2 < t_1 < \tilde{x}_i$  tels que  $h$  soit strictement croissante sur  $]t_1, \tilde{x}_i[$  et  $]t_3, t_2[$  et strictement décroissante sur  $]t_2, t_1[$  et  $]t', t_3[$ .*
- iii. *Supposons que pour  $t'' \in ]t', \tilde{x}_i[$ ,  $Dh(t'') > 0$  et que  $]t'', \tilde{x}_i[$  rencontre  $\cup_n \tilde{I}_n$ . Alors,  $t_3 < t_2$ ,  $t'' \in ]t_3, t_2[$  et  $]t_2, t_1[$  contient un intervalle  $\tilde{I}_n$ .*

**Corollaire 12.1.14** *Si  $\Gamma_i^-$  est une branche instable droite, il n'existe pas de graphe  $G_i^- \subsetneq G \subset \Gamma_i^-$  défini au dessus d'un intervalle ouvert  $\text{Dom}(\phi)$  et possédant une tangence verticale.*

Il y a des énoncés similaires avec les branches stables droites  $\Gamma_i^+$ .

**12.1.4.5** Nous complétons le corollaire 12.1.11 par des estimées de longueur :

**Proposition 12.1.15** *Soit  $\Gamma_i^+$  une branche instable droite, et supposons que l'on ait comme pour la proposition 12.1.10 une décomposition*

$$]\tilde{x}_i, t_1[ \cup ]t_1, t_2[ \cup ]t_2, t_3[ \subset \text{Dom}^+(\phi_i)$$

avec  $t_1 < t_2 < t_3$  de sorte que  $f_i$  soit croissante sur  $]x_i, t_1[$  et  $]t_2, t_3[$  (resp. décroissante sur  $]t_1, t_2[$ ). Alors, on a les estimées suivantes :

$$f_i(t_1) - f_i(t_0) \leq \max \varphi - \varphi(t_0) + 2, \quad (12.5)$$

$$f_i(t_1) - f_i(t_2) \geq \max \varphi - \min \varphi - 2, \quad (12.6)$$

$$f_i(t_3) - f_i(t_2) \leq \varphi(t_3) - \min \varphi + 2. \quad (12.7)$$

*Démonstration* : D'après le corollaire 12.1.11, on peut supposer (à translation entière près) que  $\tilde{I}_0 \subset ]t_1, t_2[$ . On rappelle que  $\tilde{c}'_{\varphi_1}$  et  $\tilde{c}_{\varphi_1} + 1$  sont les zéros consécutifs de  $D\varphi_1$  tels que  $\tilde{I}_0 \subset ]\tilde{c}'_{\varphi_1}, \tilde{c}_{\varphi_1} + 1[$ .

On obtient,

$$f_i(t_1) - f_i(t_2) \geq f_i(\tilde{I}_0^-) - f_i(\tilde{I}_0^+). \quad (12.8)$$

Puisque  $D\phi_i \leq 1$  (proposition 12.1.3) et  $f_i = \text{Id} + \phi_i + \varphi$ ,

$$f_i(\tilde{I}_0^-) - f_i(\tilde{I}_0^+) \geq -2(\tilde{I}_0^+ - \tilde{I}_0^-) + \varphi(\tilde{I}_0^-) - \varphi(\tilde{I}_0^+).$$

On a aussi sur  $[\tilde{c}'_{\varphi_1}, \tilde{I}_0^-]$  et  $[\tilde{I}_0^+, \tilde{c}_{\varphi_1}]$ ,  $|D\varphi| \leq 2$ . Donc,

$$f_i(\tilde{I}_0^-) - f_i(\tilde{I}_0^+) \geq -2(\tilde{c}_{\varphi_1} + 1 - \tilde{c}'_{\varphi_1}) + \varphi(\tilde{c}'_{\varphi_1}) - \varphi(\tilde{c}_{\varphi_1} + 1). \quad (12.9)$$

On tire alors (12.6) de (12.8) et de (12.9).

Les estimées (12.5) et (12.6) se montrent de la même façon.

□

On montre un énoncé similaire avec les branches instables gauches.

### 12.1.5 Continuité des graphes

**12.1.5.1** Les graphes  $(G_i)$  ont des tailles localement uniformes en termes d'itérations des variétés invariantes locales :

**Proposition 12.1.16** *Fixons une partie compacte  $\mathcal{P}$  de l'espace des paramètres et une constante  $\varepsilon_0 > 0$ . Il existe alors  $C > 0$  vérifiant :*

- i. *pour tout  $(b, a, \omega) \in \mathcal{P}$ , tout point  $\tilde{\zeta}$  appartenant à l'un des graphes stables,  $G_i$ , et tout entier  $n > C$ , l'itéré  $\tilde{F}^n(\tilde{\zeta})$  appartient à  $B(z_{i+np}, \varepsilon_0)$  ;*
- ii. *pour tout  $(b, a, \omega) \in \mathcal{P}$ , tout point  $\tilde{\zeta}$  appartenant à une branche de graphes instables  $G_i^+$  (resp.  $G_i^-$ ), et si  $\tilde{I}_0 \subset \text{Dom}^+(\phi_0)$  (resp.  $\tilde{I}_0 \subset \text{Dom}^-(\phi_1)$ ), alors, pour tout entier  $n > C$ , l'itéré  $\tilde{F}^{-n}(\tilde{\zeta})$  appartient à  $B(z_{i-np}, \varepsilon_0)$ .*

*Démonstration* : Nous traitons tout d'abord le cas des graphes stables. Nous supposons par l'absurde qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$ , une suite de paramètres  $(b(n), a(n), \omega(n))$  et une suite  $(\tilde{\zeta}(n))$  telles que pour tout  $n$ ,  $\tilde{\zeta}(n)$  appartient au graphe stable  $G_i(n)$  de  $\tilde{z}_i(n)$  associé à l'application  $\tilde{F}(n) = \tilde{F}_{b(n), a(n), \omega(n)}$  et pour tout  $0 \leq k \leq n$ ,  $\tilde{F}(n)^k(\tilde{\zeta}(n)) \notin B(\tilde{z}_{i+kp}(n), \varepsilon_0)$ .

Nous notons  $\gamma(n)$  le sous-arc de  $G_i(n)$  joignant  $\tilde{z}_i(n)$  à  $\tilde{\zeta}(n)$ . D'après la proposition 12.1.3,  $\tilde{F}(n)(\gamma(n))$  est le graphe d'une application uniformément lipschitzienne en  $n$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que la suite

$(b(n), a(n), \omega(n))$  converge vers un paramètre  $(b, a, \omega)$  et que  $(\gamma(n))$  converge en topologie  $C^0$  vers un arc continu  $\gamma$  joignant  $\tilde{z}_i$  à un point  $\tilde{\zeta}$ . On pose  $\tilde{F} = \tilde{F}_{b,a,\omega}$ . On supposera par exemple que  $\gamma$  est à droite de  $\tilde{z}_i$ .

L'arc  $\gamma$  est encore un graphe et vérifie:  $\tilde{F}^q(\gamma) - (p, 0) \subset \gamma$ . Par conséquent, la suite  $(\tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^{kq}(\tilde{\zeta}) - kp)_k$  est monotone et bornée. D'après le corollaire 12.1.13.ii, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^{kq}(\tilde{\zeta})$  appartient à  $] \tilde{x}_{i+kpq}, \tilde{x}_{i+kpq+1} [$ . On en déduit que la suite  $\tilde{F}^{kq}(\tilde{\zeta}) - (kp, 0)$  converge vers un point  $\tilde{z}'_i$  d'orbite périodique de type  $(p, q)$ .

De plus, par hypothèse,  $\tilde{z}'_i \notin B(\tilde{z}_i, \varepsilon_0)$ . Par conséquent, les deux orbites  $\mathcal{O}(z_i)$  et  $\mathcal{O}(z'_i)$  sont distinctes. Le graphe  $\gamma$  est une variété invariante pour  $\tilde{z}'_i$ . L'orbite  $\tilde{z}'_i$  est donc de torsion nulle. L'orbite  $\mathcal{O}(z'_i)$  est donc périodique, de torsion nulle. Puisque  $\mathcal{O}(z_i) \neq \mathcal{O}(z'_i)$ , l'unicité du théorème 10.4.1 montre ce que les modules des valeurs propres de l'orbite  $\mathcal{O}(z'_i)$  doivent être strictement plus petit que 1. Pourtant,  $\mathcal{O}(z'_i)$  ne peut être un puits puisque pour  $n$  arbitrairement grand, il y a des points de l'orbite de  $\zeta(n)$  arbitrairement proches de  $z'_i$  dont l'orbite positive s'accumule sur l'orbite  $\mathcal{O}(z_i)$ .

Dans le cas des graphes instables, on supposera cette fois par l'absurde qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et des suites  $(b(n), a(n), \omega(n))$ ,  $(\zeta(n))$  telles que pour tout  $n$ ,  $\tilde{\zeta}(n)$  appartient au graphe instable  $G_i^+(n)$ . De plus,  $\tilde{I}_0 \subset \text{Dom}^+(\phi_0)$  et pour tout  $0 \leq k \leq n$ ,  $\tilde{F}^k(n)^{-k}(\tilde{\zeta}(n)) \notin B(\tilde{z}_{i-kp}, \varepsilon_0)$ . Nous pouvons supposer  $i = 0$  et (quitte à itérer, voir la proposition 12.1.10)  $\tilde{p}_1(\tilde{z}_0) \subset ] \tilde{x}_0, \tilde{I}_0^- [$ .

Nous construisons encore une fois une seconde orbite  $\mathcal{O}(z'_i)$  de torsion nulle qui est un puits et supposons  $\tilde{p}_1(z'_0) \in ] \tilde{z}_0, \tilde{I}_0^- [$ . Par conséquent, pour  $n$  suffisamment grand, les branches  $\Gamma_i^+$  sont des graphes avec pour extrémité la continuation de  $\mathcal{O}(z'_i)$ . Ceci contredit l'hypothèse  $\tilde{I}_0 \subset \text{Dom}^+(\phi_0)$ .

□

**12.1.5.2** Nous donnons une propriété de continuité des variétés invariantes :

**Proposition 12.1.17** *Soit  $(\tilde{F}(n)) = (\tilde{F}_{b(n),a(n),\omega(n)})$  une suite d'applications convergeant vers  $\tilde{F} = \tilde{F}_{b,a,\omega}$ . Fixons  $i \in \mathbb{Z}$  et considérons pour tout  $n$ , un arc fermé  $\gamma(n)$  contenu dans le graphe stable  $G_i(n)$  associé à  $\tilde{F}(n)$ . Si  $(\gamma(n))$  converge vers un compact  $\gamma$  en topologie de Hausdorff, alors,  $\gamma$  est un arc fermé contenu dans le graphe stable  $\text{Adh}(G_i(\tilde{F}))$  et la convergence a lieu en topologie  $C^2$ .*

*On a un énoncé similaire si pour tout  $n$ ,  $\gamma(n)$  est un arc contenu dans la branche instable  $G_i^+(n)$  (resp.  $G_i^-(n)$ ).*

*Démonstration :* D'après la proposition 12.1.16,  $\gamma$  est contenu dans la variété stable de  $\tilde{z}_i$ . Par passage à la limite,  $\gamma$  est un graphe contenu dans  $\text{Adh}(G_i(\tilde{F}))$ . Les variétés locales stables peuvent être suivies continûment en topologie  $C^2$ . Ceci montre que la convergence de la suite  $(\gamma(n))$  a lieu en topologie  $C^2$ .

□

**12.1.5.3** Nous décrivons pour finir la position relative des différents graphes  $G_i$  :

**Proposition 12.1.18** *Supposons*

$$a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 12 \tag{12.10}$$

*et considérons les variétés instables  $(G_i)$ . Alors pour tout  $i$ ,*

- i. si  $\omega > \omega_{\frac{p}{q}}^- + 6$ ,  $|\text{Dom}^+(\phi_i)| > 1$  ;  
 si  $\omega < \omega_{\frac{p}{q}}^+ - 6$ ,  $|\text{Dom}^-(\phi_i)| > 1$ .
- ii. En particulier,  $\text{Dom}(\phi_i) \cap \text{Dom}(\phi_{i+1})$  est non vide et le graphe  $G_{i+1}$  est en-dessous du graphe  $G_i$ . Quels que soient les entiers  $j < j'$ ,  $G_{j'}$  est en-dessous de  $G_j$ .

*Démonstration :*

1. Introduisons la propriété suivante :

$$(I) \quad \tilde{x}_{p+1} \in \text{Dom}^+(\phi_p) \text{ et } \tilde{z}_{p+1} \text{ est en-dessous de } G_p^+.$$

Alors, par récurrence, la propriété de déviation de la verticale entraîne,

$$(I') \quad \text{Pour } i \in \mathbb{Z}, \tilde{x}_{i+1} \in \text{Dom}^+(\phi_i) \text{ et } \tilde{z}_{i+1} \text{ est en-dessous de } G_i^+.$$

En effet si la période  $q$  de l'orbite est 1, le résultat suit trivialement de (I). Sinon, un sous-arc  $\gamma_p$  de  $G_p^+$  joint  $\tilde{z}_p$  à un point  $\tilde{z}'_p \in D_s(\tilde{z}_{p+1})$ . L'intervalle  $[\tilde{x}_p, \tilde{x}_{p+1}]$  ne rencontre aucun  $\tilde{I}_n$  (voir section 12.1.1.2). L'image de  $\gamma_p$  est donc formée d'au plus deux graphes d'après le corollaire 12.1.11.i. Le point  $\tilde{F}(\tilde{z}'_p)$  est en-dessous de  $G_{2p}^+$  (et  $\tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{z}'_p) \in \text{Dom}^+(\phi_{2p})$ ). Par déviation de la verticale,  $\tilde{F}(D_s(\tilde{z}_{p+1}))$  est un graphe en-dessous de  $G_{2p}^+$  qui joint  $\tilde{z}_{p+1}$  à  $\tilde{F}(\tilde{z}'_p)$ . Ceci montre la propriété (I') pour  $i = 2p$ . On procède de même par récurrence pour obtenir (I') pour tout  $i$ .

On déduit de (I') par récurrence :

$$(I'') \quad \text{Pour tout } i \text{ et } k > 0, \tilde{z}_{i+k} \text{ est en-dessous de } G_i^+.$$

2. Supposons que la propriété (I) soit satisfaite. Nous montrons alors :

$$|\text{Dom}^+(\phi_p)| > \max \varphi - \varphi(\tilde{x}_0) - 3.$$

D'après la propriété (I),  $\text{Dom}^+(\phi_0)$  contient  $\tilde{I}_0$ . Il existe donc un unique  $\tilde{t}^+ \in ]\tilde{x}_0, \tilde{I}_0^-[$  tel que  $Df_0(\tilde{t}^+) = 0$  (voir le corollaire 12.1.11).

Tout d'abord, on remarque

$$f_0(\tilde{t}^+) - \tilde{x}_p \geq f_0(\tilde{I}_0^-) - f_0(\tilde{x}_0).$$

Utilisant successivement  $D\phi_0 \leq 1$  (proposition 12.1.3), (I) et (10.7), on obtient

$$\phi_0(\tilde{I}_0^-) \geq \phi_0(\tilde{x}_1) + (\tilde{I}_0^- - \tilde{x}_1) \geq \phi_1(\tilde{x}_1) + (\tilde{I}_0^- - \tilde{x}_1) \geq \phi_0(\tilde{x}_0) - 1 + (\tilde{I}_0^- - \tilde{x}_1).$$

On a aussi  $|\text{D}\varphi| \leq 2$  sur  $]\tilde{c}'_{\varphi_1}, \tilde{I}_0^-[$  donc

$$\varphi(\tilde{I}_0^-) \geq \varphi(\tilde{c}'_{\varphi_1}) + 2(\tilde{c}'_{\varphi_1} - \tilde{I}_0^-) \geq \max \varphi - \frac{1}{2}.$$

Comme pour la preuve de la proposition 12.1.15, on obtient donc par définition de  $f_0$ ,

$$f_0(\tilde{t}^+) - \tilde{x}_p \geq \max \varphi - \varphi(\tilde{x}_0) - 3.$$

Ceci donne l'inégalité annoncée.

3. Avec la même démonstration et utilisant (I'), on a également :

$$(I) \text{ et } |\text{Dom}^+(\phi_i)| > 1 \Rightarrow |\text{Dom}^+(\phi_{i+p})| \geq \max \varphi - \varphi(\tilde{x}_i) - 3.$$

Si l'on suppose (I) et  $\omega > \omega_{\frac{p}{q}}^- + 6$ , alors d'après (10.6) et la proposition 10.5.2, pour tout  $i$ ,  $\varphi(\tilde{x}_i) < \max \varphi - 4$ . On obtient donc par récurrence :

$$\forall i, |\text{Dom}^+(\phi_i)| > \max \varphi - \varphi(\tilde{x}_{i-p}) - 3 > 1. \quad (12.11)$$

4. Puisque  $\max \varphi - \min \varphi > 12$ , la proposition 10.5.2 implique que  $\omega_{\frac{p}{q}}^+ - \omega_{\frac{p}{q}}^- > 6$ .

Notons  $\mathcal{L}$  l'ensemble des paramètres  $(b, a, \omega)$  pour lesquels

- (a)  $0 < b < 1$  ;
- (b)  $a > a_B(\varphi_1)$  et (12.10) sont satisfaites ;
- (c)  $\omega_{\frac{p}{q}}^- + 6 < \omega \leq \omega_{\frac{p}{q}}^+$ .

C'est un ensemble connexe.

Nous considérons maintenant  $\mathcal{P}$ , l'ensemble des paramètres de  $\mathcal{L}$  vérifiant (I). C'est clairement une partie ouverte de  $\mathcal{L}$ . D'après ce que nous avons vu, pour tout paramètre de  $\mathcal{P}$ ,

$$|\text{Dom}^+(\phi_0)| \geq 1 \quad (12.12)$$

et  $\tilde{z}_q$  est en-dessous de  $G_0^+$ . D'après la proposition 12.1.17, (12.12) reste vraie par passage à la limite et  $\mathcal{P}$  est une partie fermée de  $\mathcal{L}$ .

5. Nous allons voir que  $\mathcal{P}$  est non-vidé : pour  $b = 0$  et  $\omega = \omega_{\frac{p}{q}}^+$ , nous savons (section 2.3.3.2) qu'il existe  $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$  arbitrairement petits et  $n \in \mathbb{N}$  tels que l'intervalle  $]\tilde{x}_0, \tilde{x}_0 + \varepsilon_0[$  soit envoyé par  $\tilde{f}^{nq+1} - np$  homéomorphiquement sur un intervalle de la forme  $]\tilde{x}_p, \tilde{x}_{p+1} + \varepsilon_1[$ . Ceci montre que pour  $b > 0$  proche de 0 et  $\omega \leq \omega_{\frac{p}{q}}^+$  proche de  $\omega_{\frac{p}{q}}^+$ , l'ouvert  $\text{Dom}(\phi_p)$  associé à  $F_{b,a,\omega}$  contient  $\tilde{x}_{p+1}$ .

Pour tout  $i$ , on introduit la variété stable locale qui est un graphe :

$$W_{\text{loc}}^s(\tilde{z}_i) = \{(\tilde{x}, \psi_i(\tilde{x}))\}$$

et par déviation de la verticale, on note que  $D\psi_i(\tilde{x}_i) < 0$ . Pour ces paramètres,  $W_{\text{loc}}^s(\tilde{z}_{i+1})$  et  $G_i^+$  s'intersectent transversalement en un point unique,  $\tilde{\zeta}_i$ , proche de  $\tilde{z}_i$ . On note  $\tilde{\eta}_i = \tilde{p}_1(\tilde{\zeta}_i)$ .

Par perturbation de la situation en  $b = 0$ ,  $D\phi_i(\eta_i) > D\psi_{i+1}(\eta_i)$ . L'arc contenu dans  $G_0$  joignant  $\tilde{z}_0$  à  $\tilde{\zeta}_i$  est un graphe  $G$  au-dessus d'un domaine contenant  $\tilde{I}_0$ . Par application du corollaire 12.1.11.iii, son image est la réunion d'exactlyment trois graphes successifs,  $\gamma_p^1 = G_p^+$ ,  $\gamma_p^2$  et  $\gamma_p^3$ . On voit ainsi que l'on a  $\tilde{\zeta}_{i+q} = \tilde{\zeta}_i + p$ ,  $\tilde{F}(\tilde{\zeta}_i) = \tilde{\zeta}_{i+p}$  pour  $i \not\equiv 0[p]$  et  $\tilde{F}(\tilde{\zeta}_0) = \tilde{\zeta}_p^3 \in \gamma_p^3$ . Par conséquent,  $\tilde{\zeta}_p^3 = \tilde{F}^q(\tilde{\zeta}_p) - (p, 0)$  est en-dessous de  $G_p^+$ . Ceci montre que  $\tilde{\zeta}_p$  appartient à la branche gauche de  $W_{\text{loc}}^s(\tilde{z}_{p+1})$  et que  $\tilde{z}_{p+1}$  est en-dessous de  $G_p^+$ . La propriété (I) est donc satisfaite par les paramètres de  $\mathcal{L}$  proche de  $(0, a, \omega_{\frac{p}{q}}^+)$ .

6. Par connexité de  $\mathcal{L}$ , on obtient ainsi  $\mathcal{L} = \mathcal{P}$  ce qui donne la première moitié du (i). La seconde moitié se montre de la même façon. Ceci entraîne immédiatement pour tout  $i$  et tout paramètre contenu dans la langue d'Arnol'd généralisée de  $\frac{p}{q}$ ,  $\text{Dom}^+(\phi_i) \cap \text{Dom}^-(\phi_{i+1}) \neq \emptyset$ . Par connexité de la langue, soit pour tout paramètre et pour tout  $i$ ,  $G_i$  est en-dessous de  $G_{i+1}$ , soit pour tout paramètre et pour tout  $i$ ,  $G_{i+1}$  est en-dessous de  $G_i$ . D'après la propriété (I), c'est le second cas qui est réalisé.

□

## 12.2 Étude de tangences particulières

### 12.2.1 Système de tangences régulières

**12.2.1.1** Nous considérons maintenant deux ensembles de variétés invariantes locales  $(\Gamma_i^s)$  et  $(\Gamma_i^u)$  associées aux valeurs propres  $0 < \lambda^s \leq b^q < 1 \leq \lambda^u$ . Si l'orbite  $(\tilde{z}_i)$  est hyperbolique, pour tout  $i$ ,  $\Gamma_i^s \setminus \{\tilde{z}_i\}$  est formé de deux composantes  $\Gamma_i^{s-}$  et  $\Gamma_i^{s+}$ , situées respectivement à gauche et à droite de  $\tilde{z}_i$ . On définit de la même façon,  $\Gamma_i^{u-}$  et  $\Gamma_i^{u+}$ .

Les variétés  $(\Gamma_i^{s-})$  sont topologiquement stables et les variétés  $(\Gamma_i^{u+})$  topologiquement instables. Comme plus haut, on étend  $(\Gamma_i^{s-})$  et  $(\Gamma_i^{u+})$  et on définit les graphes  $(G_i^{u+})$  et  $(G_i^{s-})$ , donnés par des fonctions  $(\phi_i^u)$  et  $(\phi_i^s)$  ainsi que les applications  $(f_i^u)$  et  $(f_i^s)$ .

Ces définitions se généralisent au cas où  $(z_i)$  est selle-nœud :

1. Lorsque  $\omega \in ]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+]$ ,  $(\tilde{z}_i)$  est une orbite selle. Par conséquent les graphes  $(G_i^{u\pm})$  et  $(G_i^{s\pm})$  sont bien définis.
2. Lorsque  $\omega = \omega_{\frac{p}{q}}^-$  (resp.  $\omega = \omega_{\frac{p}{q}}^+$ ), c'est une orbite selle-nœud. Les graphes  $(G_i^{s\pm})$  sont associés à la variété fortement stable. En revanche, seules les branches  $(G_i^{u-})$  (resp.  $(G_i^{u+})$ ) existent.

**12.2.1.2** Par déviation de la verticale, pour tout  $i$ , au voisinage de  $\tilde{x}_i$ , et lorsque cela a un sens,

- pour  $\tilde{x} < \tilde{x}_i$ ,  $\phi_i^u(\tilde{x}) < \phi_i^s(\tilde{x})$  ;
- pour  $\tilde{x} > \tilde{x}_i$ ,  $\phi_i^u(\tilde{x}) > \phi_i^s(\tilde{x})$ .

**12.2.1.3** Par définition,

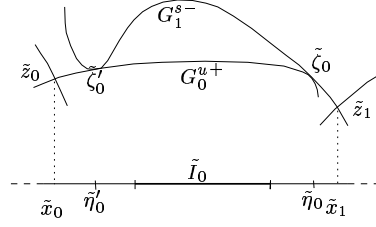
$$\phi_i^u - \phi_{i+1}^s = (b+1)\text{Id} + \varphi - (b(f_{i-p}^u)^{-1} + f_{i+1}^s). \quad (12.13)$$

D'après la proposition 12.1.7 et le lemme 10.1.1,  $b(f_{i-p}^u)^{-1} + f_{i+1}^s$  possède une dérivée et une dérivée schwarzienne strictement positives ; d'autre part  $(b+1)\text{Id} + \varphi$  possède une dérivée schwarzienne négative et sa dérivée est strictement positive hors des intervalles  $\tilde{I}_n$ .

D'après le lemme 12.1.8,

$$D((b+1)\text{Id} + \varphi) - D(b(f_{i-p}^u)^{-1} + f_{i+1}^s) \quad (12.14)$$

ne peut s'annuler qu'au plus quatre fois sur  $]\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}[$ .

FIG. 12.2: Tangences entre  $G_0^{u+}$  et  $G_1^{s-}$ .

**12.2.1.4** Comme conséquence de la section 12.2.1.3, remarquons que si  $\Gamma_{i_0}^{u+}$  et  $\Gamma_{i_0+1}^{s-}$  s'intersectent, alors aucune variété  $\Gamma_i^{u+}$  ou  $\Gamma_i^{s-}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , n'est un graphe. En effet,  $\Gamma_i^{u+}$  intersecte  $G_{i+1}^{s-}$  une infinité de fois. Si  $\Gamma_i^{u+} = G_i^{u+}$ , alors  $\phi_{i+1}^s - \phi_i^u$  possède une infinité de zéros ce qui contredit la section 12.2.1.3.

Pour la même raison, on ne peut avoir  $\Gamma_{i+1}^{s-} = G_{i+1}^{s-}$ .

**12.2.1.5** Afin d'étudier les intersections entre  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$ , nous introduisons la définition suivante :

**Définition 12.2.1** Une suite  $(\tilde{\zeta}_i)$  est un **système d'intersections** entre les graphes  $(G_i^{u+})$  et  $(G_{i+1}^{s-})$  si

1.  $\forall i \in \mathbb{Z}$ ,  $\tilde{\zeta}_i \in G_i^{u+} \cap G_{i+1}^{s-}$  ;
2.  $\forall i \neq 0[q]$ ,  $\tilde{F}(\tilde{\zeta}_i) = \tilde{\zeta}_{i+p}$  et  $\forall i$ ,  $\tilde{\zeta}_{i+q} = \tilde{\zeta}_i + (p, 0)$  ;
3.  $\tilde{I}_0^+ < \tilde{p}_1(\tilde{\zeta}_0) < \tilde{x}_1$ ,

Nous noterons pour tout  $i$ ,  $\tilde{\eta}_i = \tilde{p}_1(\tilde{\zeta}_i)$ .

Si les  $\tilde{\zeta}_i$  sont des points de tangence entre  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$ , nous dirons que  $(\tilde{\zeta}_i)$  est un **système de tangences**.

**12.2.1.6** Nous faisons quelques remarques (voir figure 12.2) :

- Supposons qu'une suite  $(\tilde{\zeta}_i)$  satisfasse 1) et 2). Si

$$D\phi_0^{u+}(\tilde{\eta}_0) \geq D\phi_1^{s-}(\tilde{\eta}_0) \quad (12.15)$$

alors, ou bien  $\tilde{x}_0 < \tilde{\eta}_0 < \tilde{I}_0^-$ , ou bien  $\tilde{I}_0^+ < \tilde{\eta}_0 < \tilde{x}_1$ . En effet,  $(Df_{-p}^u)^{-1}(\tilde{\eta}_0)$  et  $(Df_1^s)(\tilde{\eta}_0)$  sont strictement positives. Or d'après (12.13) et (12.15), l'expression (12.14) est positive en  $\tilde{\eta}_0$ . On en déduit que  $D(1+b)\text{Id}+\varphi(\tilde{\eta}_0)$  est strictement positif. Donc  $\tilde{\eta}_0 \notin \tilde{I}_0$ .

- Lorsque les hypothèses 1) à 3) sont vérifiées,  $G_0^{u+}$  et  $G_1^{s-}$  possèdent un autre point d'intersection,  $\tilde{F}^{-1}(\tilde{\zeta}_p)$ , vérifiant cette fois

$$\tilde{x}_0 < (\tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^{-1})(\tilde{\zeta}_p) < \tilde{I}_0^- . \quad (12.16)$$

En effet,  $\tilde{\zeta}_0' = \tilde{F}^{-1}(\tilde{\zeta}_p)$  appartient à  $G_0^{u+}$  d'après la proposition 12.1.3. Puisque l'image par  $\tilde{F}$  du sous-arc de  $G_0^{u+}$  situé entre  $\tilde{z}_0$  et  $\tilde{\zeta}_0'$  est encore un graphe, le corollaire 12.1.11.ii entraîne (12.16). L'intervalle  $[\tilde{\eta}_p, \tilde{x}_{p+1}]$  ne rencontre pas  $\cup_n \tilde{I}_n$  et de plus  $(Df_0^s)^{-1}$  est strictement positif en  $\tilde{\eta}_p$ . D'après le corollaire 12.1.13.i, le sous-arc de  $\Gamma_1^{s-}$  joignant  $\tilde{\zeta}_0'$  à  $\tilde{z}_1$  est un graphe.

**12.2.1.7** Si  $(\tilde{\zeta}_i)$  est un système d'intersections entre les graphes  $(G_i^{u+})$  et  $(G_{i+1}^{s-})$ , nous appellerons pour tout  $i$ ,  $\gamma_i$  et  $\sigma_{i+1}$  les sous-arcs de  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$  qui joignent  $\tilde{\zeta}_i$  à  $\tilde{z}_i$  et  $\tilde{z}_{i+1}$  respectivement. On notera  $\tilde{\zeta}_p^3 = \tilde{F}(\tilde{\zeta}_0)$  et  $\tilde{\eta}_p^3 = \tilde{p}_1(\tilde{\zeta}_p^3)$ .

L'image par  $\tilde{F}$  de  $\gamma_i$  et  $\sigma_{i+1}$  lorsque  $i \neq 0[q]$  est  $\gamma_{i+p}$  et  $\sigma_{i+1+p}$  respectivement. L'image de  $\sigma_1$  est strictement incluse dans  $\sigma_{p+1}$ .

Si l'on suppose de plus que

$$D\phi_0^{u+}(\tilde{\eta}_0) \geq D\phi_1^{s-}(\tilde{\eta}_0),$$

alors,  $Df_0^u(\tilde{\eta}_0) \geq Df_1^s(\tilde{\eta}_0)$  est strictement positif. La définition 12.2.1.2 montre que  $[\tilde{x}_0, \tilde{\eta}_0]$  contient  $\tilde{I}_0$ . D'après le corollaire 12.1.11.iii, l'image de  $\gamma_0$  est composée de trois graphes successifs  $\gamma_p^1$ ,  $\gamma_p^2$  et  $\gamma_p^3$  de la forme

$$\gamma_p^j = \{(\tilde{x}, \psi_p^j(\tilde{x}), \tilde{x} \in \text{Dom}(\psi_p^j)\}.$$

Sur  $(\tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^{-1})(\gamma_p^j)$ , avec  $j \in \{1, 3\}$  (resp.  $j = 2$ ),  $f_0^u$  est croissante (resp. décroissante) et  $\gamma_p^1$  contient  $\gamma_p$  strictement (voir figure 12.7 en section 12.4.3.2).

**12.2.1.8** Nous pouvons maintenant étudier certaines tangences entre les graphes  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$ :

**Définition 12.2.2** Nous dirons que  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$  présentent une **tangence régulière**,  $\tilde{\zeta}_i$ , si  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$  sont tangentes en  $\tilde{\zeta}_i$  et si au voisinage de  $\tilde{\eta}_i = \tilde{p}_1(\tilde{\zeta}_i)$ ,  $D^2\phi_i^u < D^2\phi_{i+1}^s$ .

**Proposition 12.2.1** Supposons que  $(\tilde{\zeta}_i)$  soit un système de tangences entre  $(G_i^{u+})$  et  $(G_{i+1}^{s-})$ . Alors :

- i. Soit la tangence est régulière et pour tout  $i$ ,  $|\text{Dom}^+(\phi_i^u)| < 1$ . Dans ce cas,  $\varphi(\tilde{x}_1) > \max \varphi - 5$ , et  $\omega < \omega_{\frac{p}{q}} + 7$ . Pour tout  $i$ , le graphe  $G_i^u$  est en-dessous du graphe  $\sigma_{i+1}$ . Le graphe  $\gamma_p^3$  est en-dessous de  $\sigma_{p+1}$ .
- ii. Soit pour tout  $i$ ,  $D^2\phi_i^u > D^2\phi_{i+1}^s$  au voisinage de  $\tilde{\eta}_i$ . Dans ce cas,  $\varphi(\tilde{x}_0) \leq 4 + \min \varphi$  et  $\omega_{\frac{p}{q}} - 6 < \omega$ .

*Démonstration :*

1. Pour tout  $i$ ,  $\tilde{\eta}_i$  est un zéro de

$$D\phi_i^u - D\phi_{i+1}^s = D((b+1)\text{Id} + \varphi) - D(b(f_{i-p}^u)^{-1} + f_{i+1}^s).$$

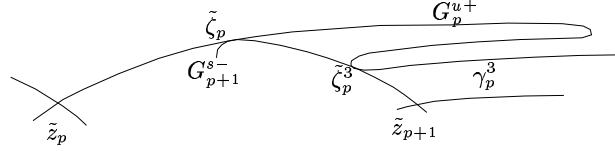
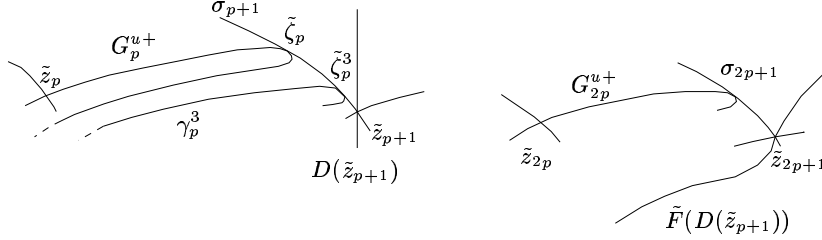
D'après la section 12.2.1.3, nous pouvons appliquer le lemme 12.1.8 au voisinage de  $\tilde{\eta}_i$  pour les fonctions  $(b+1)\text{Id} + \varphi$  et  $b(f_{i-p}^u)^{-1} + f_{i+1}^s$ . Ceci montre que soit pour tout  $i$ ,  $D^2\phi_{i+1}^s - D^2\phi_i^u$  est non nulle en  $\tilde{\eta}_i$ , soit pour tout  $i$ , elle est nulle et  $(D^3\phi_{i+1}^s - D^3\phi_i^u)(\tilde{\eta}_i) > 0$ .

Puisque  $Df_0^u(\tilde{\eta}_0) = Df_1^s(\tilde{\eta}_0)$ , nous pouvons appliquer la section 12.2.1.7 : il existe une partition

$$[\tilde{x}_0, \tilde{\eta}_0[ = ]\tilde{x}_0, t_1[ \cup ]t_1, t_2[ \cup ]t_2, t''[$$

de sorte que  $\tilde{F}(G_0^{u+})$  est une union de trois graphes successifs  $\gamma_p^1 = G_p^{u+}$ ,  $\gamma_p^2$  et  $\gamma_p^3$ . Remarquons encore que  $\tilde{\zeta}_p$  et  $\tilde{\zeta}_p^3 = \tilde{F}^q(\tilde{\zeta}_p) - (p, 0)$  vérifient  $\tilde{\eta}_p < \tilde{\eta}_p^3 < \tilde{x}_{p+1}$ . L'application  $\psi_p^3$  est donc bien définie au-dessus de  $[\tilde{\eta}_p, \tilde{\eta}_p^3]$ .



FIG. 12.3: Le cas  $D^2(\phi_1^u - \phi_0^s)(\tilde{\eta}_0) > 0$ .FIG. 12.4: Le cas  $D^2(\phi_1^u - \phi_0^s)(\tilde{\eta}_0) < 0$ .

2. Étudions tout d'abord le cas où la tangence est cubique : l'arc  $\gamma_p^3$  est tangent à  $G_{p+1}^{s-}$  en  $\tilde{\zeta}_p^3 = \tilde{F}(\tilde{\zeta}_0)$  et  $D^3\psi_p^3(\eta_p^3) < D^3\phi_{p+1}^s(\eta_p^3)$ . D'après le corollaire 12.1.9.i, appliqué aux fonctions  $(b+1)\text{Id} + \varphi$  et  $b(f_0^u)^{-1} + f_{p+1}^s$ , il n'y a pas d'autre zéro de  $\psi_p^3 - \phi_{p+1}^s$ . Donc sur  $[\tilde{\eta}_p, \tilde{\eta}_p^3]$ ,  $\psi_p^3 > \phi_{p+1}^s$ . On a cependant  $\psi_p^3(\tilde{\eta}_p) < \psi_p^1(\tilde{\eta}_p) = \phi_p^s(\tilde{\eta}_p)$ . On obtient une contradiction.
3. Passons au cas où la tangence est quadratique avec  $D^2(\phi_1^u - \phi_0^s)(\tilde{\eta}_0) > 0$ . D'après le corollaire 12.1.9.i au-dessus de  $[\tilde{\eta}_p, \tilde{x}_{p+1}]$ ,  $\tilde{\zeta}_p^3$  est le seul point d'intersection de  $\gamma_p^3$  avec  $G_{p+1}^{s-}$ . On en déduit que  $G_{p+1}^{s-}$  est en-dessous de  $\gamma_p^3$  et d'après la proposition 12.1.10.vi et le corollaire 12.1.11,  $\gamma_p^3$  est en-dessous de  $G_p^{u+}$ . Par conséquent,  $f_0^u(t_2) > \tilde{\eta}_p > f_0^u(x_0)$  (voir figure 12.3). La proposition 12.1.15 montre

$$\max \varphi - \varphi(x_0) + 2 \geq \max \varphi - \min \varphi - 2.$$

Les propositions 10.1.4 et 10.5.2 donnent alors

$$(1-b)\frac{p}{q} - 1 < \varphi(\tilde{x}_0),$$

$$\min \varphi \leq (1-b)\frac{p}{q} + 1 + \omega - \omega_{\frac{p}{q}}^+.$$

On obtient donc  $\omega_{\frac{p}{q}}^+ - \omega < 6$ .

4. Pour finir, dans le cas où la tangence est quadratique avec  $D^2(\phi_1^u - \phi_0^s)(\tilde{\eta}_0) < 0$ , sur  $]\tilde{\eta}_p, \tilde{x}_{p+1}[$  et d'après le corollaire 12.1.9.i, le graphe  $\gamma_p^1 = G_p^{u+}$  est en-dessous de  $\sigma_{p+1}$ . D'après le corollaire 12.1.9.ii appliqué à l'intervalle  $[\tilde{\eta}_p, \tilde{\eta}_p^3]$ ,  $\gamma_p^3$  est en-dessous de  $\sigma_{p+1}$ .

D'autre part, le graphe  $\gamma_p^3$  est en-dessous de  $\gamma_p^1$ . Les graphes  $\gamma_p^3$  et  $\sigma_{p+1}$  sont tangents en  $\tilde{\zeta}_p^3$ . On en déduit que  $\text{Dom}^+(\phi_p) \subset ]\tilde{x}_p, \tilde{\eta}_p^3[$  (voir figure 12.4). Ainsi  $G_p^{u+}$  est à gauche de  $D(\tilde{z}_{p+1})$ . De même,  $G_{2p}^{u+}$  est en-dessous de  $\sigma_{2p+1}$  et le graphe  $\tilde{F}(D_i(\tilde{z}_{p+1}))$  est en-dessous de  $G_{2p}^{u+}$ . On en déduit  $\text{Dom}^+(\phi_{2p}) \subset ]\tilde{x}_{2p}, \tilde{x}_{2p+1}[$ .

Par récurrence et pour tout  $i$ ,  $\text{Dom}^+(\phi_i) \subset ]\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}[$  (voir figure 12.4). On a  $f_0^u(t_1) < f_0^u(t'')$ . Par ailleurs, la proposition 12.1.15 implique

$$(f_0^u(t'') - f_0^u(t_2)) - (f_0^u(t_1) - f_0^u(t_2)) \leq \varphi(t'') - \max \varphi + 4.$$

On a donc

$$\varphi(t'') > \max \phi - 4.$$

Avec les notations de la définition 9.3.6, on remarque que les réels  $t'' < \tilde{x}_1$  sont dans  $[\tilde{I}_0^+, \tilde{I}_1^-]$ . Cet intervalle contient  $[\tilde{c}_{\varphi_1} + 1, \tilde{c}'_{\varphi_1} + 1]$  sur lequel  $\varphi$  est croissante. Les intervalles  $[\tilde{I}_0^+, \tilde{c}_{\varphi_1} + 1]$  et  $[\tilde{c}'_{\varphi_1} + 1, \tilde{I}_1^-]$  sont d'après la section 9.3.3 de longueur inférieure à  $\frac{1}{4}$  et  $|\text{D}\varphi|$  y est majorée par 2. Finalement,

$$\varphi(\tilde{x}_1) > \varphi(t'') - 1.$$

On termine en appliquant à nouveau les propositions 10.1.4 et 10.5.2.

□

Toute la section 12.2.1 s'applique également aux tangences entre les graphes  $(G_i^{s+})$  et  $(G_{i+1}^{u-})$ .

## 12.2.2 Transversalité des tangences

**12.2.2.1** Comme en section 10.2, nous considérons la famille à paramètre  $(F_\omega)$  au voisinage de  $F = F_{\omega_0}$ . On suppose que l'orbite  $\mathcal{O}(z_i)$  est de type selle. Grâce à la section 10.2.2, les applications  $\phi_i^\omega$  et  $f_i^\omega$  sont définies pour  $\omega$  voisin de  $\omega_0$ .

Soit  $i \in \mathbb{Z}$  et  $\tilde{x} \in \text{Dom}(f_i)$ . Lorsque  $\omega$  est suffisamment proche de  $\omega_0$ , on a encore  $\tilde{x} \in \text{Dom}(f_i^\omega)$ .

Les relations (O1) et (O2) de la section 10.2.1 s'écrivent cette fois

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} f_i^\omega(\tilde{x}) &= 1 + \frac{d}{d\omega} \phi_i^\omega(\tilde{x}) \\ \frac{d}{d\omega} \phi_{i+p}^\omega(f_i^\omega(\tilde{x})) + \text{D}\phi_{i+p}^\omega(f_i^\omega(\tilde{x})) \frac{d}{d\omega} f_i^\omega(\tilde{x}) &= b(1 + \frac{d}{d\omega} \phi_i^\omega(\tilde{x})). \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d}{d\omega} \phi_{i+p}^\omega(f_i^\omega(\tilde{x})) = (b - \text{D}\phi_{i+p}^\omega(f_i^\omega(\tilde{x}))) (1 + \frac{d}{d\omega} \phi_i^\omega(\tilde{x})). \quad (12.17)$$

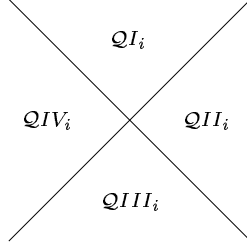
On rappelle (10.12) :

$$b - \text{D}\phi_{i+p}^\omega(f_i^\omega(\tilde{x})) > 0.$$

**12.2.2.2** Ceci entraîne le lemme suivant

**Lemme 12.2.2** *Sous les hypothèses précédentes, soit  $\tilde{x} \in \text{Dom}^+(\phi_i)$ . Alors*

- si  $\phi_i$  est associée à une variété instable,  $\frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \phi_i^\omega(\tilde{x}) > b - \text{D}\phi_i^\omega(\tilde{x})$  ;
- si  $\phi_i$  est associée à une variété stable,  $\frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \phi_i^\omega(\tilde{x}) < -1$ .

FIG. 12.5: Décomposition de l'espace  $T\tilde{A}(\tilde{z}_i)$ .

*Démonstration :*

1. Si l'inégalité

$$\frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \phi_i^\omega(\tilde{x}_i) \geq 0$$

est satisfaite pour un entier  $i = i_0$ , (12.17) entraîne pour chaque entier  $i = i_0 + np > i_0$ ,

$$\frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \phi_i^\omega(\tilde{x}_i) \geq b - D\phi_i^\omega(\tilde{x}_i).$$

Si l'inégalité

$$\frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \phi_i^\omega(\tilde{x}_i) \leq 0$$

est satisfaite pour un entier  $i = i_0$ , (12.17) entraîne pour chaque entier  $i = i_0 - np < i_0$ ,

$$\frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \phi_i^\omega(\tilde{x}_i) \leq -1.$$

On peut aussi remplacer dans le paragraphe précédent toutes les inégalités par des inégalités strictes.

2. La suite  $(\frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \phi_i^\omega(\tilde{x}_i))$  est périodique. Elle ne s'annule donc pas et garde un signe constant :

(a) soit  $\forall i \in \mathbb{Z}$ ,  $\frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \phi_i^\omega(\tilde{x}_i) > b - D\phi_i^\omega(\tilde{x}_i)$ ,

(b) soit  $\forall i \in \mathbb{Z}$ ,  $\frac{d}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \phi_i^\omega(\tilde{x}_i) < -1$ .

3. Pour chaque  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $T\tilde{A}(\tilde{z}_i) \setminus (T\Gamma_i^s(\tilde{z}_i) \cup T\Gamma_i^u(\tilde{z}_i))$  est divisé en quatre cadrans ouverts  $QI_i$ ,  $QII_i$ ,  $QIII_i$  et  $QIV_i$  (respectivement supérieur, droit, inférieur et gauche). L'application  $D\tilde{F}(\tilde{z}_i)$  préserve ces cônes (voir figure 12.5).

On calcule maintenant

$$\frac{d}{d\omega} \tilde{z}_{i+pq}^\omega = D\tilde{F}^q(\tilde{z}_i^\omega) \cdot \frac{d}{d\omega} \tilde{z}_i^\omega + \sum_{k=0}^{q-1} D\tilde{F}^k(\tilde{z}_{i+p(q-k)}^\omega) \cdot \frac{d\tilde{F}}{d\omega}(\tilde{z}_{i+p(q-k-1)}^\omega).$$

Remarquons par déviation de la verticale,

$$\frac{d\tilde{F}}{d\omega}(\tilde{z}_{i+p(q-k-1)}^\omega) = (1, b) \in QI_{i+p(q-k)}.$$

On en déduit que  $\sum_{k=0}^{q-1} D\tilde{F}^k(\tilde{z}_{i+p(q-k)}^\omega) \cdot \frac{d\tilde{F}}{d\omega}(\tilde{z}_{i+p(q-k-1)}^\omega)$  est non nul et appartient au cadran  $QI_{i+pq}$ .

4. On rappelle que  $\mathcal{O}(z_i)$  est une orbite périodique selle. L'application tangente  $(\text{Id} - \text{DF}^q)(z_i)$  préserve la décomposition en cônes mais échange les cadrans  $QI_i$  et  $QIV_i$ , ainsi que les cadrans  $QII_i$  et  $QIII_i$ . Par conséquent,  $\frac{d}{d\omega} \tilde{z}_i^\omega$  est non nul et appartient à  $QIV_i$ .

Si le graphe de  $\phi_i^\omega$  est associé à une branche instable (resp. stable), on en déduit  $\frac{d}{d\omega} \big|_{\omega=\omega_0} \phi_i^\omega(\tilde{x}_i) > 0$  (resp.  $< 0$ ) ce qui correspond au cas (2a) (resp. (2b)).

5. Soit maintenant  $\tilde{x} \in \text{Dom}^+(\phi_i)$ . Nous ne considérerons que le cas où le graphe de  $\phi_i^\omega$  est associé à une branche instable, l'autre situation lui étant symétrique.

Comme pour la démonstration de la proposition 12.1.7, nous considérons l'orbite négative de  $\tilde{x}$ ,  $(\tilde{x}(-n))$ . Pour  $n$ ,  $\tilde{x}(-nq)$  est proche de  $\tilde{x}_{i-npq}$ . On en déduit que  $\frac{d}{d\omega} \big|_{\omega=\omega_0} \phi_{i-npq}^\omega(\tilde{x}(-n)) > 0$ . Comme ci-dessus, on obtient par itérations positives

$$\frac{d}{d\omega} \big|_{\omega=\omega_0} \phi_{i-npq}^\omega(\tilde{x}(-n)) > b - D\phi_i^\omega(\tilde{x}).$$

□

**Remarque 12.2.1** Comme pour la dérivée schwarzienne dans la démonstration de la proposition 12.1.7, le signe de la dérivée  $\frac{d}{d\omega} \phi_i$  se comporte de la meilleure façon possible par rapport aux itérations positives ou négatives.

**12.2.2.3** Nous obtenons finalement la transversalité des graphes :

**Proposition 12.2.3** *Comme en section 12.1.4 si pour  $\omega = \omega_0$ ,  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$  (resp.  $G_i^{s+}$  et  $G_{i+1}^{u-}$ ) s'intersectent en un point  $\tilde{\zeta}_i$ , alors, notant  $\tilde{\eta}_i = \tilde{p}_1(\tilde{\zeta}_i)$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \big|_{\omega=\omega_0} (\phi_i^{u,\omega} - \phi_{i+1}^{s,\omega})(\tilde{\eta}_i) &> 0, \\ (\text{resp. } \frac{d}{d\omega} \big|_{\omega=\omega_0} (\phi_i^{s,\omega} - \phi_{i+1}^{u,\omega})(\tilde{\eta}_i) &< 0). \end{aligned} \quad (12.18)$$

*Démonstration :* C'est une conséquence directe du lemme précédent. Il suffit de remarquer que  $b - D\phi_i^s(\tilde{\eta}_i)$  est positif. Mais c'est une conséquence de la proposition 12.1.3.

□

**Remarques 12.2.2** 1. Si  $\tilde{\zeta}_i$  est un point de tangence quadratique ou cubique entre les variétés  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$  pour  $\omega = \omega_0$ , alors la proposition 12.2.3 montre que sur un voisinage de  $\omega_0$  à droite ou à gauche, elles s'intersectent transversalement.

2. On peut généraliser un peu cet énoncé: on suppose qu'il existe pour  $\omega = \omega_0$  une orbite homocline  $\tilde{\zeta}_i$  telle que pour tout  $i$ ,  $\tilde{\zeta}_i \in \Gamma_i^{u+} \cap \Gamma_{i+1}^{s-}$ . On suppose également pour tout  $i$  que  $\Gamma_i^{u+}$  et  $\Gamma_{i+1}^{s-}$  sont localement en  $\tilde{\zeta}_i$  des graphes  $C^1$ ,  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$  et qu'ils définissent ainsi par projection des difféomorphismes croissants  $f_i^u$  et  $f_{i+1}^s$  d'un voisinage de  $\tilde{\eta}_i = \tilde{p}_1(\tilde{\zeta}_i)$  sur un voisinage de  $\tilde{\eta}_{i+p}$ . Si  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$  ont une intersection en  $\tilde{\zeta}_i$ , alors l'inégalité 12.18 est encore vérifiée pour les graphes  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$ .

**12.2.2.4** Faisons quelques remarques lorsque  $b$  est voisin de 0 :

Pour  $b = 0$  et  $\omega = \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ , la proposition 1.5.1 montre que pour tout  $i$ , les variétés instable de  $\tilde{z}_i$  et stable de  $\tilde{z}_{i+1}$  sont tangentes en  $\tilde{z}_{i+1}$ . La tangence est quadratique. D'après la section 2.3.3, la bifurcation homocline est transverse au paramètre  $\omega$ . Il en résulte que pour les paramètres voisins avec  $b > 0$ , les graphes  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$  réalisent une bifurcation homocline. Les tangences, proches des points  $(\tilde{z}_{i+1})$ , forment un système de tangences régulières.

Réciproquement, supposons que  $(b(n))$ ,  $(a(n))$  et  $(\omega(n))$  soient des suites de paramètres convergeant respectivement vers 0,  $a$  et  $\omega$  et telles que les graphes  $(G_i^{u+}(n))$  et  $(G_{i+1}^{s-}(n))$  associés aux difféomorphismes  $(\tilde{F}_{b(n),a(n),\omega(n)})$  présentent des systèmes de tangences régulières  $(\tilde{\zeta}_i(n))_n$ . On peut supposer que pour tout  $i$ ,  $(\tilde{\zeta}_i(n))$  converge vers un point  $\tilde{\zeta}_i$ . La proposition 12.1.16 montre alors que  $\tilde{\zeta}_i$  appartient à la variété instable locale de  $\tilde{z}_i$ . Par conséquent  $\tilde{\zeta}_i \in \mathbb{R} \times \{0\}$ . De même, la variété stable de  $\tilde{z}_{i+1}$  contient  $\tilde{\zeta}_i$ . C'est un graphe d'équation

$$\tilde{x} \mapsto \tilde{x}_{i+1} - \tilde{x} - \varphi(\tilde{x}).$$

On rappelle que  $\zeta_i \notin I$ . Par passage à la limite,  $\tilde{\zeta}_i$  appartient donc à la composante connexe qui contient  $\tilde{z}_{i+1}$  de l'ensemble

$$\{\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}) \geq -1\}.$$

On en déduit  $\tilde{\zeta}_i = \tilde{z}_{i+1}$ . Le point  $\tilde{z}_0$  est donc une orbite homocline de l'orbite  $(\tilde{z}_i)$  pour  $\tilde{f}_{a,\omega}$  comme dans la proposition 1.5.1. D'après la section 2.3.3,  $\omega = \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ .

## 12.3 Les courbes de bifurcation homocline

**12.3.1** Nous en venons à la description globale des bifurcations homoclines :

**Proposition 12.3.1** *Soit  $(\tilde{F}_{b,a,\omega})_\omega$  une famille d'applications bimodales avec  $a > a_B(\varphi_1)$ ,  $0 < b < 1$ , et*

$$a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 8. \quad (12.19)$$

*Alors, pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$ , il existe des réels uniques*

$$\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+ \in ]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+[,$$

*tels que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,*

- *lorsque  $\omega = \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ , les graphes  $(G_i^{u+})$  et  $(G_{i+1}^{s-})$  possèdent un système de tangences régulières ;*
- *lorsque  $\omega = \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+$ , les graphes  $(G_i^{s+})$  et  $(G_{i+1}^{u-})$  possèdent un système de tangences régulières.*

*De plus, les applications  $(b, a) \mapsto \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+$  sont lisses.*

Nous obtenons alors comme corollaire des propositions 10.1.4 et 12.2.1.i,

**Proposition 12.3.2** *i. Sous les hypothèses de la proposition 12.3.1,*

$$(1-b)\frac{p}{q} - a \max \varphi_1 - 1 < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- \leq (1-b)\frac{p}{q} - a \max \varphi_1 + 6, \quad (12.20)$$

$$\text{(resp. } (1-b)\frac{p}{q} - a \min \varphi_1 - 6 \leq \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+ < (1-b)\frac{p}{q} - a \min \varphi_1 + 1). \quad (12.21)$$

Ou encore

$$\omega_{\frac{p}{q}}^- < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- < \omega_{\frac{p}{q}}^- + 7 \text{ et } \omega_{\frac{p}{q}}^+ - 7 < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+ < \omega_{\frac{p}{q}}^+.$$

*ii. En particulier, sous l'hypothèse  $a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 12$ ,*

$$\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- < \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+.$$

### 12.3.2 Démonstration de la proposition 12.3.1

Nous procédons comme pour la démonstration du théorème 10.4.1: soit  $A$  un intervalle compact de

$$\{a, a > a_B(\varphi_1) \text{ et } a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 8\}.$$

On s'intéresse à l'ensemble  $\mathcal{P}$  des quadruplets  $(b, a, \omega, (\tilde{\zeta}_i))$  où  $0 < b < 1$ ,  $a \in A$ ,  $\omega \in ]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+[$  et où  $(\tilde{\zeta}_i)$  est un système de tangences régulières entre les graphes  $(G_i^{u+})$  et  $(G_{i+1}^{s-})$  associés à l'orbite positive de type  $(p, q)$ ,  $(\tilde{z}_i)$ . D'après (10.6), le paramètre  $\omega$  varie dans un intervalle compact  $\Omega$ . Par périodicité, la suite  $(\tilde{\zeta}_i)$  est déterminée par les points  $\tilde{\zeta}_0, \dots, \tilde{\zeta}_{q-1}$  et il existe  $M > 0$  tel que l'anneau  $\mathbb{A}_M$  contienne tous les points de la suite  $(\zeta_i)$ . L'ensemble  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3 \times \tilde{\mathbb{A}}^q$  est donc borné.

La transversalité en les paramètres prouvée avec la proposition 12.2.3 montre que  $\mathcal{P}$  est localement un graphe au-dessus des paramètres  $(b, a)$ . Nous allons voir que c'est un ensemble fermé:

1. Soit  $(b(n), a(n), \omega(n), (\tilde{\zeta}_i(n)))$  une suite de  $\mathcal{P}$  convergeant vers le quadruplet  $(b, a, \omega, (\zeta_i))$ . Pour  $\tilde{F}_{b(n), a(n), \omega(n)}$ , on note  $\gamma_i(n)$  (resp.  $\sigma_{i+1}(n)$ ) le sous-arc fermé de  $\Gamma_i^u(n)$  (resp.  $\Gamma_{i+1}^s(n)$ ) compris entre le point de tangence  $\tilde{\zeta}_i(n)$  et  $\tilde{z}_i(n)$  (resp.  $\tilde{z}_{i+1}(n)$ ). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que pour tout  $i \in \{1, \dots, q\}$ ,  $(\gamma_i(n))$  et  $(\sigma_{i+1}(n))$  convergent vers des compacts  $\gamma_i$  et  $\sigma_{i+1}$ . D'après la proposition 12.1.17, ce sont des graphes contenus dans  $\text{Adh}(G_i^{u+})$  et  $\text{Adh}(G_{i+1}^{s-})$  associés au difféomorphisme  $\tilde{F} = \tilde{F}_{b, a, \omega}$ . La convergence a lieu pour la topologie  $C^2$  des arcs. Les courbes  $\gamma_i$  et  $\sigma_{i+1}$  sont tangentes en  $\tilde{\zeta}_i$ .
2. Par passage à la limite, les espaces tangents à  $\gamma_i$  et  $\sigma_{i+1}$  en  $\tilde{\zeta}_i$  ne peuvent être verticaux (propositions 12.1.3 et 12.1.4). Les corollaires 12.1.12 et 12.1.14 impliquent alors que les graphes  $\gamma_i$  et  $\sigma_{i+1}$  sont  $C^1$  et donc contenus dans  $G_i^{u+} \cup \{\tilde{z}_i\}$  et  $G_{i+1}^{s-} \cup \{\tilde{z}_{i+1}\}$  respectivement.
3. Le lemme 12.1.5 montre que ni  $\gamma_i$ , ni  $\sigma_{i+1}$  n'est réduit à un point.
4. Les graphes  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$  sont donc tangents en  $\tilde{\zeta}_i$ . La tangence doit être quadratique d'après la proposition 12.2.1. Par continuité des variétés invariantes locales avec le paramètre et par passage à la limite, on obtient au voisinage de  $\tilde{\eta}_i = \tilde{p}_1(\tilde{\zeta}_i)$ ,  $D^2 \phi_i^u < D^2 \phi_{i+1}^s$ . Puisque  $Df_0^u(\tilde{\eta}_0)$  est positif, on a encore à la limite  $\tilde{I}_0^+ < \tilde{\eta}_0$ . La suite  $(\tilde{\zeta}_i)$  est donc un système de tangences régulières.

5. Montrons que  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- \notin \{\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+\}$ . Puisque par construction  $\tilde{z}_i$  admet une branche instable non-dégénérée à sa droite, on ne peut avoir  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- = \omega_{\frac{p}{q}}^-$ . D'autre part, par passage à la limite, les estimées de la proposition 12.2.1.i s'appliquent et donnent

$$\varphi(\tilde{x}_1) > \max \varphi - 5.$$

Enfin on note que pour  $\omega = \omega_{\frac{p}{q}}^+$ ,

$$\varphi(\tilde{x}_1) < \min \varphi + 3.$$

Lorsque (12.19) est vérifiée, on ne peut donc avoir  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- = \omega_{\frac{p}{q}}^+$ .

En conclusion et par compacité de  $\Omega \times \mathbb{A}_M^q$ ,  $\mathcal{P}$  est union d'un nombre fini de graphes au-dessus de  $(b, a)$ . La section 12.2.2.4 décrit  $\mathcal{P}$  pour  $b$  voisin de 0 et montre que  $\mathcal{P}$  est exactement un graphe au-dessus des paramètres  $(b, a)$ . Ceci entraîne pour tout  $(b, a)$ , l'existence et l'unicité du paramètre  $\omega_{\frac{p}{q}}^-$  pour lequel les graphes  $(G_i^{u+})$  et  $(G_{i+1}^{s-})$  présentent un système de tangences régulières.

La démonstration est la même pour  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+$ .

## 12.4 Une autre caractérisation des courbes de bifurcation homocline

### 12.4.1 Énoncés des résultats

**12.4.1.1** Nous complétons la proposition 12.3.1 par la caractérisation suivante de  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$  et  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+$ . On rappelle que si  $L$  est un graphe au dessus de  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ ,  $U(L)$  et  $V(L)$  désignent respectivement les composantes connexes inférieure et supérieure du complémentaire (définition 7.1.2). Si  $(\tilde{\zeta}_i)$  est un système d'intersections entre des graphes  $(G_i^{u+})$  et  $(G_{i+1}^{s-})$  (resp.  $(G_i^{s+})$  et  $(G_{i+1}^{u-})$ ) associés à une orbite positive, nous notons  $\tilde{\eta}_i = \tilde{p}_1(\tilde{\zeta}_i)$  et nous rappelons que nous avons défini les sous-arcs  $(\gamma_i)$  et  $(\sigma_i)$  (section 12.2.1.7).

**Théorème 12.4.1** *Soit  $(\tilde{F}_{b,a,\omega})_\omega$  une famille d'applications bimodales avec  $0 < b < 1$ ,  $a > a_B(\varphi_1)$  et*

$$a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 15. \quad (12.22)$$

*Fixons un rationnel  $\frac{p}{q}$  et notons  $(\tilde{z}_i)$  l'orbite bien ordonnée positive de type  $(p, q)$ .*

*Alors :*

- i. Pour tout  $\omega$  dans  $[\omega_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- [$  (resp.  $]\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+, \omega_{\frac{p}{q}}^+]$ ), et pour tout  $i$ , les variétés  $\Gamma_i^{u+}$  et  $\Gamma_{i+1}^{s-}$  (resp.  $\Gamma_i^{s+}$  et  $\Gamma_{i+1}^{u-}$ ) sont disjointes. Plus précisément,*

$$(\cup_i \Gamma_i^u) \cap (\cup_i \Gamma_i^{s-}) = \emptyset \quad (\text{resp.} \quad (\cup_i \Gamma_i^u) \cap (\cup_i \Gamma_i^{s+}) = \emptyset).$$

- ii. Pour  $\omega = \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$  (resp.  $\omega = \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+$ ), les graphes  $(G_i^{u+})$  et  $(G_{i+1}^{s-})$  (resp.  $(G_i^{s+})$  et  $(G_{i+1}^{u-})$ ) admettent un système de tangences régulières,  $(\tilde{\zeta}_i)$ . Pour tout  $i$ , l'orbite de  $\zeta_i$  pour  $F^q$  est l'unique orbite homocline allant de  $z_i$  à  $z_{i+1}$  (resp. de  $z_{i+1}$*

à  $z_i$ ). Plus précisément,  $(\cup_i \Gamma_i^u) \cap (\cup_i \Gamma_i^{s-})$  (resp.  $(\cup_i \Gamma_i^u) \cap (\cup_i \Gamma_i^{s+})$ ) est réduit exactement à l'orbite étendue  $\tilde{O}(\zeta_i)$  de  $\tilde{F}$ . De plus, le graphe

$$\Sigma = \pi_1 (\cup_i (\gamma_i \cup \sigma_{i+1}))$$

sépare l'anneau et  $F(\Sigma) \cap V(\Sigma) = \emptyset$  (resp.  $F(\Sigma) \cap U(\Sigma) = \emptyset$ ).

- iii. Pour tout  $\omega$  dans  $]\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+ - 6[$  (resp.  $]\omega_{\frac{p}{q}}^- + 6, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+[$ ), les graphes  $(G_i^{u+})$  et  $(G_{i+1}^{s-})$  (resp.  $(G_i^{s+})$  et  $(G_{i+1}^{u-})$ ) ont un système d'intersections transverse  $(\tilde{\zeta}_i)$ . De plus, pour tout  $i$ ,  $D\phi_i^u(\tilde{\eta}_i) > D\phi_{i+1}^s(\tilde{\eta}_i)$ .

**Théorème 12.4.2** Avec les hypothèses du théorème 12.4.1,

- i. il existe  $\eta > 0$ , tel que pour tout  $\omega$  dans  $[\omega_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-]$  (resp.  $[\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+, \omega_{\frac{p}{q}}^+]$ ),

$$\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) \cap [\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \eta] = \{\frac{p}{q}\} \quad (\text{resp. } \mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) \cap [\frac{p}{q} - \eta, \frac{p}{q}] = \{\frac{p}{q}\});$$

- ii. pour tout  $\omega$  dans  $]\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+ - 6[$  (resp.  $]\omega_{\frac{p}{q}}^- + 6, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+[$ ), il existe  $\eta > 0$  tel que

$$[\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \eta] \subset \mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) \quad (\text{resp. } [\frac{p}{q} - \eta, \frac{p}{q}] \subset \mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega})).$$

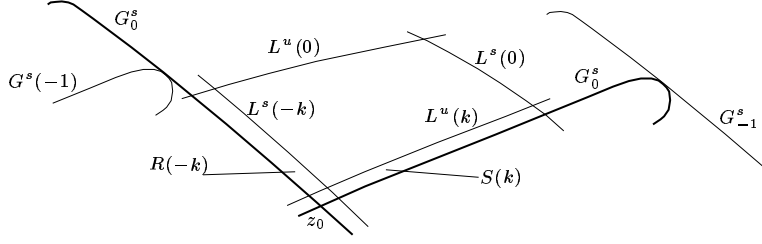
**Remarques 12.4.1** 1. On pourrait améliorer le résultat du théorème 12.4.1.ii : il existe un graphe continu  $L$  au-dessus de  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$  et contenu dans  $V(\Sigma)$  tel que  $F(L) \subset U(L)$ . Le nombre de rotation  $\rho_U$  de l'anneau  $U = \cup_{n \geq 0} F^n(V(L))$  est  $\frac{p}{q}$ .

2. Il y a des exemples où les théorèmes 12.4.1.iii et 12.4.2.ii sont faux sur l'intervalle  $]\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+]$  (resp.  $]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+]$ ) entier (voir la section 12.6.2). On observe d'ailleurs numériquement les graphes  $G_i^{u+}$  et  $G_{i+1}^{s-}$  (resp.  $G_i^{s+}$  et  $G_{i+1}^{u-}$ ) se séparer après une nouvelle bifurcation homocline (décrite par la proposition 12.2.1.ii) pour  $\omega$  proche de  $\omega_{\frac{p}{q}}^+$ .
3. Dans le cadre conservatif ( $b = 1$  et  $\omega = 0$ ), il est bien connu que les ensembles d'Aubry-Mather possèdent des orbites homoclines (voir [HK], chapitre 13, théorème 13.4.1).
4. Citons un résultat analogue dans un cadre différent : E. Bedford et J. Smillie dans [BeS] ont montré que les applications de Hénon réelles d'entropie maximale pour lesquelles l'ensemble des orbites bornées n'est pas hyperbolique présentent une tangence quadratique entre les variétés stables et instables des points fixes. Leur démonstration utilise de façon essentielle les méthodes d'analyse complexe à plusieurs variables.

L'ordre logique des preuves est le suivant :

1. Tout d'abord, nous montrons indépendamment le théorème 12.4.1.ii et le théorème 12.4.1.iii.
2. On obtient le théorème 12.4.2.i à partir du théorème 12.4.1.ii et le théorème 12.4.2.ii à partir du théorème 12.4.1.iii.



FIG. 12.6: Construction des rectangles  $R(-k)$  et  $S(k)$ .

3. Nous prouvons enfin le théorème 12.4.1.i en utilisant le théorème 12.4.2.i.

L'ordre de l'exposition est légèrement différent : nous montrons le 2), puis le 1) puis enfin le 1).

En général nous donnons uniquement les preuves qui traitent des variétés  $\Gamma_i^{u+}$  et  $\Gamma_i^{s-}$ . Le cas des variétés  $\Gamma_i^{u-}$  et  $\Gamma_i^{s+}$  s'étudie de façon symétrique.

## 12.4.2 Théorème 12.4.1.ii,iii $\Rightarrow$ théorème 12.4.2.

### 12.4.2.1 Preuve du théorème 12.4.2.i

Fixons tout d'abord  $\omega = \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}$ . Étudions l'orbite positive d'un point  $\tilde{z}$  de  $\tilde{V}(\Sigma)$  arbitrairement proche de  $\tilde{z}_0$ .

- Soit il existe  $n \geq 1$  tel que  $\tilde{F}^n(\tilde{z}) \notin \tilde{V}(\Sigma)$ . Le point  $\tilde{z}$  est alors errant.
- Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{F}^n(\tilde{z}) \in \tilde{V}(\Sigma)$ .

C'est le second cas que nous allons décrire plus en détails : soient  $L^s(0)$  et  $L^u(0)$  deux arcs transverses à  $G_0^{u+}$  et  $G_0^{s-}$  respectivement. Pour  $k \geq 0$ , les itérés

$$L^s(-k) = \tilde{F}^{-kq}(L^s(0)) + kp \text{ et } L^u(k) = \tilde{F}^{kq}(L^u(0)) - kp$$

sont encore des courbes transverses à  $G_0^{u+}$  et  $G_0^{s-}$  qui s'accroissent en topologie  $C^2$  par le  $\lambda$ -lemme sur  $\Gamma_0^s$  et  $\Gamma_0^u$  respectivement.

Les courbes  $G_0^{s-}$ ,  $G_0^{u+}$ ,  $L^s(-k)$  et  $L^u(0)$  (resp.  $G_0^{s-}$ ,  $G_0^{u+}$ ,  $L^s(0)$  et  $L^u(k)$ ) définissent dans leur complémentaire un rectangle ouvert  $R(-k)$  (resp.  $S(k)$ ) contenant dans son adhérence le point  $\tilde{z}_0$  (voir la figure 12.6).

On rappelle que  $\lambda^u$  et  $\lambda^s$  sont les valeurs propres de  $DF^q(z_0)$ . Il existe  $C > 0$  tel que

$$C^{-1}(\lambda^u)^{-k} \leq \text{Aire}(R(-k)) \leq C(\lambda^u)^{-k}$$

(resp.  $C^{-1}(\lambda^s)^k \leq \text{Aire}(S(k)) \leq C(\lambda^s)^k$ ).

Soit  $\tilde{z}' \in R(0)$  (resp.  $\tilde{z}' \in S(0)$ ). La distance de  $\tilde{z}'$  à  $G_0^{s-}$  (resp.  $G_0^{u+}$ ) est mesurée par le plus grand entier  $k \geq 0$  tel que  $\tilde{z} \in R(-k)$  (resp.  $\tilde{z} \in S(k)$ ) : il existe  $C > 0$  tel que

$$C^{-1}(\lambda^u)^{-k} \leq d(\tilde{z}, G_0^{s-}) \leq C(\lambda^u)^{-k}$$

(resp.  $C^{-1}(\lambda^s)^k \leq d(\tilde{z}, G_0^{u+}) \leq C(\lambda^s)^k$ ).

Il existe un difféomorphisme  $\tilde{F}^{kq} - (kp, 0)$  entre  $R(-k)$  et  $S(k)$  pour tout  $k \geq 0$ . D'autre part, pour tout  $k$  suffisamment grand et tout point  $\tilde{z}' \in S(k) \setminus (\tilde{F}^{-q}(S(k)) + (p, 0))$  dont l'orbite positive reste dans  $\tilde{V}(\Sigma)$ , il existe  $N \geq 0$ , uniforme en  $\tilde{z}'$  et  $k$  tel que  $\tilde{F}^{Nq}(\tilde{z}') - (Np, 0)$  appartienne à  $R(0)$ . De plus, les distances  $d(\tilde{z}', G_0^{u+})$  et  $d(\tilde{F}^{Nq}(\tilde{z}') - (Np, 0), G_0^{s-})$  sont du même ordre.

On considère ainsi pour l'orbite de  $z$  les retours à  $\pi_1(R(0))$  : si  $\tilde{z} \in R(-k) \setminus R(-k + 1)$ , l'itéré  $\tilde{F}^{kq+Nq}(\tilde{z}) - (kq + Nq, 0)$  appartient à  $R(0)$ . La distance à  $G_0^{s-}$  passe de  $(\lambda^u)^{-k}$  à  $(\lambda^s)^k$  et a donc été multipliée par un facteur majoré  $C^2 b^{kq}$ .

Par conséquent, l'orbite de  $z$  est elle-aussi errante. Ainsi tous les points de  $V(\Sigma)$  suffisamment proches de  $z_0$  sont errants.

On montre le théorème 12.4.2.i en  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$  par l'absurde : si  $\frac{p}{q}$  est approché par une suite strictement décroissante  $\rho_n$  dans  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega})$ , on considère pour tout  $n$  un ensemble d'Aubry-Mather de torsion nulle de nombre de rotation  $\rho_n$ . D'après la proposition 7.2.3 et la section 7.2.2.3, puisque  $\rho_n > \frac{p}{q}$ , les ensembles  $\Xi_n$  sont contenus dans  $V(\Sigma)$ .

On peut prendre une valeur d'adhérence  $\Xi$  de la suite  $\Xi_n$ . D'après la proposition 8.2.5,  $\Xi$  contient une orbite bien ordonnée de torsion nulle de type  $(p, q)$ . Ce ne peut être une orbite attractive puisqu'elle est accumulée par des orbites bien ordonnées de nombre de rotation supérieur. D'après l'unicité du théorème 10.4.1, c'est donc l'orbite positive  $(z_i)$ .

L'orbite  $(z_i)$  est donc accumulée dans  $V(\Sigma)$  par des ensembles d'Aubry-Mather. C'est une contradiction d'après ce que nous avons montré précédemment.

Nous avons ainsi montré par l'absurde qu'il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-}) \cap [\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \eta] = \{\frac{p}{q}\}. \quad (12.23)$$

Quitte à diminuer  $\eta$ , d'après la remarque 11.2.1 on obtient pour  $\rho \in ]\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \eta]$ ,  $\omega_\rho^+ > \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ . On déduit de (12.23) que  $\omega_\rho^- > \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ . Ceci achève la preuve du i).

### 12.4.2.2 Preuve du théorème 12.4.2.ii

Le théorème 12.4.1.iii et la proposition suivante due à P. Le Calvez (voir [L89]) montrent le théorème 12.4.2.ii.

**Proposition 12.4.3 (P. Le Calvez)** *Soit  $\tilde{F} \in \widetilde{D\tilde{V}}(\mathbb{A})$  et  $(\tilde{z}_i)$  une orbite bien ordonnée selle de type  $(p, q)$  telle que la variété instable  $\Gamma_i^u$  intersecte transversalement la variété stable  $\Gamma_{i+1}^s$  (resp.  $\Gamma_{i-1}^s$ ). Alors, il existe un réel  $\eta > 0$  tel que  $[\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \eta]$  (resp.  $[\frac{p}{q} - \eta, \frac{p}{q}]$ ) soit contenu dans  $\mathcal{R}(\tilde{F})$ .*

### 12.4.3 Preuve du théorème 12.4.1

#### 12.4.3.1 Preuve du théorème 12.4.1.iii

Les propositions 10.5.2 et 12.3.2, ainsi que la condition (12.22) montrent que  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- < \omega_{\frac{p}{q}}^+ - 6$ .

Nous prouvons tout d'abord le lemme :

**Lemme 12.4.4** *L'ensemble des paramètres  $\omega \in ]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+ - 6[$  qui vérifient la propriété (T) suivante est un intervalle de la forme  $]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+ - 6[$  :*

- (T) Les graphes  $(G_i^{u+})$  et  $(G_{i+p}^{s-})$  admettent un système d'intersections transverse  $(\tilde{\zeta}_i)$  vérifiant  $D\phi_i^u(\tilde{\eta}_i) > D\phi_{i+1}^s(\tilde{\eta}_i)$  avec  $\tilde{\eta}_i = \tilde{p}_1(\tilde{\zeta}_i)$ .

*Démonstration* : L'ensemble des paramètres  $\omega$  qui vérifient (T) est ouvert dans l'intervalle  $]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+ - 6[$ . D'autre part, si  $(\omega(n))$  est une suite croissante qui converge dans  $]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+ - 6[$  vers  $\omega$  et si (T) est vérifiée pour chaque  $\omega(n)$ , nous affirmons que (T) est encore vérifiée pour  $\omega$ . La connexité de  $]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \omega_{\frac{p}{q}}^+ - 6[$  terminera la démonstration.

Comme pour la preuve de la proposition 12.3.1, nous introduisons pour chaque  $i$  et  $n$  le point d'intersection transverse  $\tilde{\zeta}_i(n)$  des graphes compacts  $G_i^{u+}(n)$  et  $G_{i+1}^{s-}(n)$ , ainsi que les arcs  $\gamma_i(n) \subset G_i^{u+}(n)$  et  $\sigma_{i+1}(n) \subset G_{i+1}^{s-}(n)$  joignant  $\tilde{\zeta}_i(n)$  à  $\tilde{z}_i(n)$  et  $\tilde{z}_{i+1}(n)$  respectivement. Nous pouvons supposer qu'ils convergent vers des graphes,  $\gamma_i$  et  $\sigma_{i+1}$  qui joignent  $\tilde{z}_i$  et  $\tilde{z}_{i+1}$  à un point commun  $\tilde{\zeta}_i$ ; on pose  $\tilde{\eta}_i = \tilde{p}_1(\tilde{\zeta}_i)$ . Là encore, ce sont des courbes  $C^1$  non triviales contenues dans  $\Gamma_i^u$  et  $\Gamma_{i+1}^s$ . Les corollaires 12.1.12 et 12.1.14, la relation  $D\phi_i^u(\tilde{\eta}_i) \geq D\phi_{i+1}^s(\tilde{\eta}_i)$  et les estimées des propositions 12.1.3 et 12.1.4 montrent à nouveau que ce sont des graphes  $C^1$ , inclus respectivement dans  $\{\tilde{z}_i\} \cup G_i^{u+}$  et  $\{\tilde{z}_i\} \cup G_{i+1}^{s-}$ .

Si l'intersection  $\Gamma_i^u \cap \Gamma_{i+1}^s$  n'est pas transverse en  $\tilde{\zeta}_i$ , nous utilisons la proposition 12.2.1 qui décrit la tangence :

- Soit  $D^2(\phi_{i+1}^s - \phi_i^u)(\tilde{\eta}_i) > 0$ . Mais d'après la proposition 12.2.3,  $\phi_{i+1}^s - \phi_i^u$  ne s'annule pas au voisinage de  $\tilde{\eta}_i$  pour  $\omega(n) < \omega$ . Ceci contredit la construction de  $\tilde{\zeta}_i$ .
- Soit  $D^2(\phi_{i+1}^s - \phi_i^u)(\tilde{\eta}_i) < 0$ . Mais d'après la proposition 12.2.1,  $\omega_{\frac{p}{q}}^+ - 6 < \omega$  ce qui est contradictoire.

Finalement, les deux courbes sont transverses en  $\tilde{\zeta}_i$  et  $\omega$  satisfait (T). □

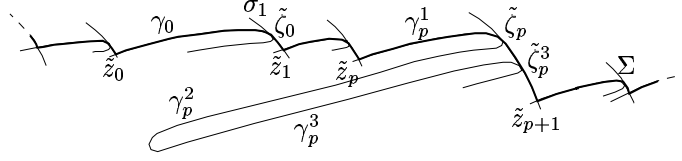
Nous savons par ailleurs que cet intervalle est non vide puisque d'après la proposition 12.2.3, il contient un intervalle  $]\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- + \eta[$ ,  $\eta > 0$ .

### 12.4.3.2 Preuve du théorème 12.4.1.ii

Nous fixons  $\omega = \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}$ .

1. D'après la proposition 12.3.1, les graphes  $(G_i^{u+})$  et  $(G_{i+1}^{s-})$  admettent un système de tangences régulières  $(\tilde{\zeta}_i)$ . Nous renvoyons aux sections 12.2.1.5 à 12.2.1.7 pour la définition des courbes  $(\gamma_i)$  et  $(\sigma_{i+1})$  et la description de leurs images. Nous noterons encore pour  $i \equiv p[q]$ ,  $\sigma'_{i+1} = \tilde{F}^q(\sigma_{i+1}) - (p, 0)$  le sous-arc de  $G_{i+1}^{s-}$  joignant  $\tilde{z}_{i+1}$  à  $\tilde{\zeta}_i^3 = \tilde{F}^q(\tilde{\zeta}_i) - (p, 0)$ .
2. L'ensemble  $\tilde{\Sigma} = \cup_i(\gamma_i \cup \sigma_i)$  est un graphe qui sépare l'anneau. Son image est la courbe (voir figure 12.7) :

$$\tilde{\Sigma} = \cup_{i \not\equiv p[q]}(\gamma_i \cup \sigma_{i+1}) \cup \cup_{i \equiv p[q]}(\gamma_i^1 \cup \gamma_i^2 \cup \gamma_i^3 \cup \sigma'_{i+1}).$$


 FIG. 12.7: Le graphe  $\Sigma$  et son image.

Pour montrer que  $F(\Sigma)$  ne rencontre pas  $V(\Sigma)$ , il suffit d'étudier  $\tilde{F}(\gamma_0) = \gamma_p^1 \cup \gamma_p^2 \cup \gamma_p^3$ . Nous appelons  $\tilde{K}$  le complémentaire de  $\tilde{V}(\Sigma)$ .

Rappelons que pour tout  $i$ ,  $G_i^u$  est le sous-arc maximal de  $\Gamma_i^u$  contenant  $\tilde{z}_i$  qui soit un graphe  $C^1$ . Nous savons également par la proposition 12.2.1 que  $|\text{Dom}^+(\phi_0^u)| < 1$ . Donc, d'après la proposition 12.1.18

$$\forall i, |\text{Dom}(\phi_i^{u-})| > 1$$

et  $G_i^{u-}$  est en-dessous de  $G_{i-1}^u$ .

D'autre part,  $G_i^{u-}$  et  $\sigma_i$  ne s'intersectent pas : en effet, en  $\eta_{i-1}$ ,  $\phi_i^s > \phi_i^u$ , et en  $\tilde{x}_i$ ,  $\phi_i^s - \phi_i^u$  s'annule avec  $D\phi_i^s < D\phi_i^u$ . Le corollaire 12.1.9.ii s'applique donc et  $G_i^{u-}$  est en-dessous de  $\gamma_{i-1} \cup \sigma_i$ .

Par récurrence, et pour  $j < i$ ,  $G_i^u$  est en-dessous de chaque graphe  $G_j^u$  et  $\sigma_{j+1}$ .

La proposition 12.2.1, montre que  $\gamma_p^1, \gamma_p^2$  et  $\gamma_p^3$  sont en-dessous de  $\gamma_p \cup \sigma_{p+1}$ . Par conséquent, ils sont également en-dessous de  $G_i^u$ .

Les propriétés que nous avons montrées sur les  $G_i^u$  entraînent alors par récurrence que  $\gamma_p^2$  et  $\gamma_p^3$  sont en-dessous de  $\tilde{\Sigma}$ . Ceci prouve l'affirmation.

Nous obtenons de plus que  $\tilde{F}(\tilde{\Sigma})$  est strictement au-dessous de l'arc ouvert  $\chi_1 = \sigma_{p+1} \setminus (\{\tilde{\zeta}_p\} \cup \tilde{\sigma}'_{p+1})$ , joignant dans  $\sigma_{p+1}$ ,  $\tilde{\zeta}_p$  à  $\tilde{\zeta}_p^3$ .

- On en déduit que les variétés  $\Gamma_i^u$  sont entièrement contenues dans  $\tilde{K}$ . Nous avons vu que  $\tilde{F}(\tilde{K})$  n'intersecte pas  $\chi_1$ , le sous-arc ouvert de  $\sigma_{p+1}$  compris entre  $\tilde{\zeta}_p$  et  $\tilde{F}^q(\tilde{\zeta}_p) - (p, 0)$ . Par conséquent,  $\chi_1$  ne rencontre pas les variétés instables  $\Gamma_i^u$ . Puisque  $\chi_1 \cup \{\tilde{\zeta}_p\}$  est un domaine fondamental de  $\cup_i \Gamma_i^{s-}$  pour l'action de  $\tilde{F}$  et  $\tilde{R}_1, \tilde{O}(\zeta_0)$  est exactement l'intersection entre  $\cup_i \Gamma_i^u$  et  $\cup_i \Gamma_i^{s-}$ .

### 12.4.3.3 Preuve du théorème 12.4.1.i

- Pour tout rationnel  $\frac{p'}{q'}$ , nous appelons  $L_{\frac{p'}{q'}}$  la composante connexe de  $\mathcal{C}_{p',q'}$  qui sépare l'anneau (voir le lemme 7.2.4) et  $\tilde{L}_{\frac{p'}{q'}} = \pi_1^{-1}(L_{\frac{p'}{q'}})$ . Nous constatons qu'elle est semi-continue supérieurement en les paramètres.

D'après le théorème 12.4.2.i, il existe un rationnel  $\frac{p'}{q'} > \frac{p}{q}$  tel que pour tout  $\omega_{\frac{p}{q}}^- \leq \omega \leq \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-, ]\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}] \cap \mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) = \emptyset$ . Si  $\frac{p'}{q'}$  est suffisamment proche de  $\frac{p}{q}$ , pour tout  $\frac{p}{q} \leq \rho \leq \frac{p'}{q'}$ , on a (remarque 11.2.1)  $\omega_{\rho}^+ \geq \omega_{\frac{p}{q}}^-$ . On en déduit que pour tout  $\omega \leq \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-, ]\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}] \cap \mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega}) = \emptyset$ .

Par ailleurs,  $\tilde{L}_{\frac{p'}{q}}$  et  $\tilde{F}(\tilde{L}_{\frac{p'}{q}})$  ne s'intersectent pas (voir la proposition 7.2.5). Faisant tendre  $\omega$  vers  $-\infty$ , on obtient plus précisément que pour  $\omega \leq \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$ ,  $\tilde{F}(\tilde{L}_{\frac{p'}{q}})$  est en-dessous de  $\tilde{L}_{\frac{p'}{q}}$  : la composante connexe de  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  contenant  $]\frac{p}{q}, \frac{p'}{q}]$  est descendante.

Suivant la section 7.2.2, nous définissons l'anneau invariant

$$V = \cup_{n \geq 0} F^n(V(L_{\frac{p'}{q}}))$$

et  $K$  son complémentaire. Pour  $\omega \in [\omega_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-[$ , on a  $\rho_V = \frac{p}{q}$ . De plus, le graphe  $\Gamma = \{(x, \mu_V(x))\}$  associé à  $V$  contient une orbite de type  $(p, q)$  (proposition 7.2.3) de torsion nulle (proposition 8.3.4) et qui n'est pas topologiquement attractive (remarque 7.2.1). D'après le théorème 10.4.1, c'est l'orbite positive de type  $(p, q)$ ,  $(z_i)$ . De plus tout autre orbite de type  $(p, q)$  contenue dans  $\Gamma$  est un puits.

L'anneau  $U(L_{\frac{p'}{q}})$  contient les branches instables locales de  $(z_i)$ . Par conséquent  $K$  contient les branches instables de  $(z_i)$  (et il n'y en a qu'une pour  $\omega = \omega_{\frac{p}{q}}^-$ ).

Nous montrons alors que les variétés  $(\Gamma_i^{s-})$  sont dans  $\tilde{V}$ . Ceci terminera la démonstration.

2. D'après la section 7.2.2.2 et la proposition 7.2.3,  $\Gamma$  est invariant par  $F^{-1}$ . La dynamique de  $F^{-1}$  (resp.  $\tilde{F}^{-1}$ ) sur  $\Gamma$  (resp.  $\tilde{\Gamma}$ ) définit, après projection par  $\tilde{p}_1$ , une application croissante  $h_V$  (resp.  $\tilde{h}_V$ ) de  $\mathbb{T}^1$  (resp.  $\mathbb{R}$ ) dans lui-même. D'après [L87] sections 4.8 et 4.10,  $h_V$  et  $\Gamma$  sont continues à gauche en tout point. D'autre part, pour tout  $x \in \mathbb{T}^1$ , l'orbite positive de  $x$  par  $h_V$  s'accumule sur un point fixe de  $h_V^q$  (voir [L87], proposition 5.4).

D'après la section 7.2.4, et d'après ce que nous avons vu au 1), un point fixe  $x$  de  $h_V^q$  peut être de deux sortes :

- Soit c'est la projection d'un point d'une orbite  $\mathcal{O}(z')$  périodique hyperbolique attractive de  $F$ . On en déduit que  $x$  est un point répulsif de  $h_V^q$ .
- Soit  $x$  est un des points fixes  $x_i$  de  $h_V^q$ .

Les points fixes de  $h_V^q$  sont isolés. Deux cas sont alors possibles :

- (a) Soit les points fixes  $(x_i)$  sont attractifs à gauche pour  $h_V$ .
  - (b) Soit ils ne le sont pas : tout point dans un voisinage à gauche de  $x_0$  converge par itérations positives de  $h_V^q$  vers  $x_{-1}$ . Fixons alors  $y$  et  $h_V^q(y)$  deux points proches et à gauche de  $x_0$ . Tout point  $t$  dans un voisinage à gauche de  $x_0$  a un itéré  $t(n)$  dans l'intervalle  $[h_V^q(y), y]$ . Faisant tendre  $t$  vers  $x_0$  on peut supposer que  $t(n)$  converge vers un point  $x' \in [h_V^q(y), y]$ . Profitant de la relation  $F^{-1}(\text{Adh } \Gamma) \subset \Gamma$  (voir la proposition 7.2.3 et [L87], proposition 5.4), on en déduit que  $x' \in \Gamma$  et par construction  $x'$  peut être itéré négativement par  $h_V$ . L'orbite de  $x'$  converge donc positivement vers  $x_{-1}$  et négativement vers  $x_0$ .
3. Nous étudions tout d'abord le cas 2a) : invoquant encore une fois la section 7.2.4, nous concluons que le graphe  $\Gamma$  coïncide localement avec la variété instable locale

de  $z_0$ . On déduit de la section 12.2.1.2 que la branche stable gauche locale de  $z_0$  n'est pas dans  $K$ . Puisque  $V$  est invariant par  $F^{-1}$ , les branches  $(\Gamma_i^{s-})$  sont dans  $\tilde{V}$ .

4. Passons au cas 2b) : nous allons montrer que cette situation est contradictoire. Nous posons  $x'_n = h_V^{-n}(x')$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Il lui correspond une orbite  $(z'_n)$  de  $F$  telle que

$$F^{nq}(z'_0) = z'_{nq} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z_0 \quad (\text{resp. } z'_{nq} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} z_{-1}).$$

Ainsi,  $(z'_n)$  est une orbite homocline. Il existe un entier  $M > 0$  grand tel que  $\tilde{z}'_{nq} - np \in G_0^{s-}$  et  $\tilde{z}'_{-nq} + np \in G_{-1}^{u+}$  pour  $n > M$ . Remarquons que dans ce cas, les variétés  $\Gamma_i^{u+}$  existent et que  $\omega \in ]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-[$ .

Puisque  $\tilde{h}_V$  est croissante, tous les points  $(\tilde{x}, \mu_V(\tilde{x}))$  pour  $\tilde{x} \in ]\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}'_0[$  appartiennent à la variété  $\Gamma_{-1}^{u+}$ . Ces points appartiennent plus précisément au sous-arc  $\gamma_0$  de  $\Gamma_{-1}^{u+}$  compris entre  $\tilde{z}_{-1}$  et  $\tilde{z}'_0$ . On peut faire le même raisonnement pour chaque point  $\tilde{z}'_n$  et construire un arc  $\gamma_n$  joignant  $\tilde{z}_{np-1}$  à  $\tilde{z}'_n$ . Nous remarquons que  $\tilde{F}(\gamma_n) = \gamma_{n+1}$  pour tout  $n$ .

Le graphe  $\Gamma$  est continu à gauche en  $\tilde{x}'_n$ . Ceci implique que si  $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$  est une paramétrisation  $C^1$  de  $\gamma_n$  avec  $\gamma_n(1) = \tilde{z}'_n$  et  $\forall t, D\gamma_n(t) \neq 0$  alors,

$$D\tilde{p}_1 \circ \gamma(1) \geq 0.$$

La déviation de la verticale implique

$$D\tilde{p}_1 \circ \gamma(1) > 0.$$

Pour tout  $n$ , la variété  $\Gamma_{np-1}^{u+}$  est donc un graphe local en  $\tilde{z}'_n$ . Par projection de la dynamique, on définit des difféomorphismes locaux  $f_n^{u+}$  au voisinage de  $\tilde{x}'_n$ , à valeurs dans un voisinage de  $\tilde{x}'_{n+1}$  et  $Df_n^{u+}(\tilde{x}'_n) > 0$ .

En  $\tilde{z}'_n$ , les variétés  $\Gamma_{np}^{s-}$  et  $\Gamma_{np-1}^{u+}$  ne peuvent s'intersecter transversalement, d'après la proposition 12.4.3. Elles sont donc tangentes, et par conséquent, pour tout  $n$ , la variété  $\Gamma_{np}^{s-}$  est également un graphe local en  $\tilde{z}'_n$ . Par projection de la dynamique, on définit des difféomorphismes locaux  $f_n^{s-}$  au voisinage de  $\tilde{x}'_n$ , à valeurs dans un voisinage de  $\tilde{x}'_{n+1}$  et  $Df_n^{s-}(\tilde{x}'_n) > 0$ .

D'après le lemme 12.1.6 et la proposition 12.1.7, les applications  $f_n^{u+}$  (resp.  $f_n^{s-}$ ) sont à dérivée schwarzienne négative (resp. positive). La tangence en  $\tilde{z}'_n$  est quadratique ou cubique. La proposition 12.2.3 et les remarques 12.2.2.1 et 12.2.2.1 montrent alors qu'au voisinage de  $\omega$ , les variétés  $\Gamma_{-1}^{u+}$  et  $\Gamma_0^{s-}$  se coupent transversalement. Avec la proposition 12.4.3, ceci contredit le choix de  $\omega \in ]\omega_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-]$ .

## 12.5 Quelques conséquences

Nous terminons par quelques corollaires pour les familles bimodales  $(\tilde{F}_{b,a,\omega})$ , vérifiant  $0 < b \leq 1$ ,  $a > a_B(\varphi_1)$  et  $a(\max \varphi_1 - \max \varphi_1) > 15$ .

### 12.5.1 Accumulation des langues

Nous rappelons que les bords des langues irrationnelles sont obtenus comme accumulation de frontières de langues rationnelles. Nous donnons une variante de ce fait :

**Proposition 12.5.1** *Pour tout irrationnel  $\alpha$ ,*

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^- &= \liminf_{\rho < \alpha} \omega_\rho^- = \liminf_{\rho > \alpha} \omega_\rho^-, \\ (\text{resp. } \omega_\alpha^+ &= \limsup_{\rho < \alpha} \omega_\rho^+ = \limsup_{\rho > \alpha} \omega_\rho^+). \end{aligned}$$

**Remarque 12.5.1** Nous ne savons pas si  $\omega_\alpha^- = \lim_{\rho} \omega_\rho^-$  (resp.  $\omega_\alpha^+ = \lim_{\rho} \omega_\rho^+$ ).

Pour les langues rationnelles, les théorèmes 12.4.2 et 12.4.1 entraînent les caractérisations suivantes de  $\omega_{\frac{p}{q}}^\pm$  et  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^\pm$ :

**Proposition 12.5.2** *Pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$ ,*

i.

$$\omega_{\frac{p}{q}}^- \leq \liminf_{\rho < \frac{p}{q}} \omega_\rho^- \quad (\text{resp. } \omega_{\frac{p}{q}}^+ \geq \limsup_{\rho > \frac{p}{q}} \omega_\rho^+).$$

ii. Lorsque  $0 < b < 1$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- &= \lim_{\rho > \frac{p}{q}} \omega_\rho^- = \lim_{\frac{p'}{q'} > \frac{p}{q}} \hat{\omega}_{\frac{p'}{q'}}^-, \\ (\text{resp. } \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^+ &= \lim_{\rho < \frac{p}{q}} \omega_\rho^+ = \lim_{\frac{p'}{q'} < \frac{p}{q}} \hat{\omega}_{\frac{p'}{q'}}^+). \end{aligned}$$

*Démonstration* : Le i) est une simple conséquence de la proposition 7.2.1).

Passons au cas de  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-$  : pour  $\rho > \frac{p}{q}$  proche de  $\frac{p}{q}$ , nous savons grâce au théorème 12.4.2.i que  $[\omega_{\frac{p}{q}}^-, \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-]$  est disjoint de  $[\omega_\rho^-, \hat{\omega}_\rho^+]$ . La remarque 11.2.1 entraîne que  $\omega_\rho^+ > \omega_{\frac{p}{q}}^-$ . On en déduit  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- < \omega_\rho^-$ . D'autre part, pour tout  $\eta > 0$ , le théorème 12.4.2.ii montre que si  $\rho$  est suffisamment proche de  $\frac{p}{q}$ , alors  $\omega_\rho^- \leq \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- + \eta$ . Ainsi

$$\limsup_{\rho > \frac{p}{q}} \omega_\rho^- \leq \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^-.$$

Lorsque  $\rho = \frac{p'}{q'}$  est rationnel, nous savons qu'un intervalle  $[\frac{p'}{q'}, \frac{p'}{q'} + \delta]$  est dans  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{b,a,\omega_{\frac{p}{q}}^- + \eta})$ . Ainsi,  $\hat{\omega}_\rho^- \leq \hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- + \eta$  est vraie également et bien sûr  $\hat{\omega}_{\frac{p}{q}}^- \leq \hat{\omega}_\rho^-$ .

□

**Remarques 12.5.2** 1. Nous verrons en section 12.6.2 sur un exemple que parfois

$$\omega_{\frac{p}{q}}^- < \liminf_{\rho < \frac{p}{q}} \omega_\rho^- \quad (\text{resp. } \omega_{\frac{p}{q}}^+ > \limsup_{\rho > \frac{p}{q}} \omega_\rho^+).$$

2. La proposition 12.5.2.ii permet d'améliorer les estimées de la proposition 12.3.2 en passant à la limite dans la proposition 10.5.2.

Nous en déduisons par passage à la limite dans la proposition 11.1.1 :

**Corollaire 12.5.3** *Pour  $\rho = \frac{p}{q}$  variant dans une partie bornée de  $\mathbb{Q}$ , et dans le domaine dissipatif  $0 < b < 1$ , la famille d'applications  $(b, a) \mapsto \hat{\omega}_\rho^-(b, a)$  (resp.  $(b, a) \mapsto \hat{\omega}_\rho^+(b, a)$ ) est uniformément lipschitzienne. Plus précisément, pour tous  $a, a^*, b, b^*$ ,*

$$|\hat{\omega}_\rho^-(b^*, a^*) - \hat{\omega}_\rho^-(b, a) + (a^* - a) \max \varphi_1 + (b^* - b)\rho| \leq \frac{4}{\min(a, a^*)} |a^* - a| + |b^* - b|,$$

et respectivement,

$$|\hat{\omega}_\rho^+(b^*, a^*) - \hat{\omega}_\rho^+(b, a) + (a^* - a) \min \varphi_1 + (b^* - b)\rho| \leq \frac{4}{\min(a, a^*)} |a^* - a| + |b^* - b|.$$

## 12.5.2 Largeur de l'attracteur de Birkhoff

Nous étendons les résultats des propositions 10.5.3 et 10.5.4 à l'attracteur de Birkhoff (voir section 7.3) :

**Proposition 12.5.4** *Lorsque  $0 \leq b < 1$  et  $a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 15$ ,*

$$\left[ \frac{a \min(\varphi_1) + \omega + 6}{1 - b}, \frac{a \max(\varphi_1) + \omega - 6}{1 - b} \right] \subset \mathcal{R}_1(\tilde{F}).$$

*Démonstration :*

1. Nous montrons tout d'abord que l'attracteur de Birkhoff n'a pas un unique nombre de rotation: pour tout  $\tilde{x}$ , nous notons  $\mu_B^-(\tilde{x})$  et  $\mu_B^+(\tilde{x})$  les points de  $D(\tilde{x}) \cap \Lambda_1$  d'ordonnée respectivement minimale et maximale. Les graphes de  $\mu_B^-$  et  $\mu_B^+$  vérifient des propriétés données par la proposition 7.2.3 (voir [L89]). Supposons que  $\Lambda_1$  ne possède que le nombre de rotation  $\rho$ . On notera  $N = [\rho]$ . L'invariance des graphes par  $\tilde{F}^{-1}$  et (9.2) entraîne pour tout  $\tilde{x}$ ,

$$Nb \leq \mu_B^-(\tilde{x}) \leq \mu_B^+(\tilde{x}) \leq (N + 1)b.$$

Soit  $(\tilde{x}, y)$  un point de  $\Lambda_1$ , d'image  $(\tilde{x}', y')$ . D'après (9.1),

$$N \leq \frac{\mu_B^-(\tilde{x}')}{b} \leq \frac{y'}{b} = \varphi(\tilde{x}) + y \leq \frac{\mu_B^+(\tilde{x}')}{b} \leq N + 1.$$

On en déduit  $N - b(N + 1) \leq \varphi(\tilde{x}) \leq N + 1 - bN$  pour tout  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$  et donc

$$a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) \leq 1 + b$$

ce qui est contradictoire avec les hypothèses.

2. L'intervalle de rotation  $[\rho^-, \rho^+]$  de  $\Lambda_1$  contient donc un nombre rationnel dans son intérieur. Dans la suite nous fixons  $\varepsilon > 0$  et un rationnel  $\frac{p}{q} \in ]\rho^-, \rho^+[$  tel que  $\frac{p}{q} > \rho^+ - \varepsilon$ . D'après les théorèmes 10.4.1 et 12.4.2, l'orbite bien ordonnée positive de type  $(p, q)$  associée  $(\tilde{z}_i)$  est hyperbolique selle. Un résultat de P. Le Calvez ([L89], proposition 14.2) montre alors que les variétés instables de  $(\tilde{z}_i)$  sont incluses dans  $\Lambda_1$ .



3. On rappelle que  $\text{Dom}(f_0^u) = ]\tilde{t}^-, \tilde{t}^+[$  est le domaine maximal où  $f_0^u$  est défini et est un difféomorphisme sur son image. Remarquons que d'après la proposition 12.1.3,  $]\tilde{t}^-, \tilde{t}^+[ \subset ]\tilde{t}_-^+, \tilde{t}_0^-]$  et que d'autre part, grâce aux estimées lipschitziennes de la proposition 12.1.3,  $\phi_0^u$  et  $f_0^u$  se prolongent toujours par continuité à  $[\tilde{t}^-, \tilde{t}^+]$ .

Supposons que  $\text{Dom}^+(\phi_0^u)$  contienne  $\tilde{x}_1$ . On a alors  $Df_0^u(\tilde{t}^+) = 0$ . D'après la proposition 12.1.18 et (10.6),

$$\phi_0^u(\tilde{x}_1) > \tilde{p}_2(\tilde{z}_1) > \phi_0^u(\tilde{x}_0) - b.$$

Puisque  $D\phi_0^u \leq 1$ , on déduit pour tout  $\tilde{t} \in [\tilde{x}_0, \tilde{t}^+]$ ,

$$\phi_0^u(\tilde{t}) > \phi_0^u(\tilde{x}_1) - 1 > \phi_0^u(\tilde{x}_0) - 2.$$

Si maintenant  $\text{Dom}^+(\phi_0^u)$  ne contient pas  $\tilde{x}_1$ , d'après la proposition 12.1.18,  $\text{Dom}^-(\phi_1^u)$  contient  $\tilde{t}^+$  et  $\phi_0^u(\tilde{t}^+) > \phi_1^u(\tilde{t}^+)$ . Puisque  $D\phi_1^u < 1$ , on obtient là encore,

$$\phi_0^u(\tilde{t}^+) > \phi_1^u(\tilde{t}^+) > \phi_1^u(\tilde{x}_1) - 1 > \phi_0^u(\tilde{x}_0) - 2$$

Comme pour la démonstration de la proposition 12.1.15, on obtient donc dans les deux cas,

$$f_0^u(\tilde{t}^+) - \tilde{x}_p > \max \varphi - \varphi(\tilde{x}_0) - 3.$$

On en déduit

$$f_0^u(\tilde{t}^+) - \tilde{t}^+ > \tilde{x}_p - \tilde{t}^+ + \max \varphi - \varphi(\tilde{x}_0) - 3 > \frac{p}{q} + \max \varphi - \varphi(\tilde{x}_0) - 4.$$

4. Notons à nouveau  $\mu_B^+(\tilde{x})$  l'ordonnée maximale des points de  $D(\tilde{x}) \cap \Lambda_1$ . On a par déviation de la verticale,

$$f_0^u(\tilde{t}^+) \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{t}^+, \mu_B^+(\tilde{t}^+)) \leq [\rho^+] + 1 + \tilde{t}^+.$$

D'où,

$$f_0^u(\tilde{t}^+) - \tilde{t}^+ < \frac{p}{q} + \varepsilon + 1.$$

On obtient donc

$$\varphi(\tilde{x}_0) \geq \max \varphi - 5 - \varepsilon$$

et par (10.6),

$$(1-b)\rho^+ + 1 > (1-b)\frac{p}{q} + 1 \geq \varphi(\tilde{x}_0) \geq a \max \varphi_1 + \omega - 5 - \varepsilon.$$

Il y a une estimée analogue pour  $\rho^-$ . On en déduit le résultat en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.

□

On en déduit donc :

**Proposition 12.5.5** *Lorsque  $0 < b < 1$  et  $a(\max \varphi_1 - \min \varphi_1) > 15$ , l'attracteur de Birkhoff rencontre tout cercle de la forme  $\mathbb{T}^1 \times \{y\}$  avec*

$$y \in \left[ \frac{b}{1-b}(a \min \varphi_1 + \omega + 7), \frac{b}{1-b}(a \max \varphi_1 + \omega - 7) \right].$$

## 12.6 Commentaires sur le cas conservatif

**12.6.1** Puisque pour  $b = 1$ , la dynamique commute avec le revêtement  $\pi_2$  du tore  $\mathbb{T}^2$ , l'ensemble de rotation est invariant par translation par  $\mathbb{Z}$ .

Nous savons par ailleurs que l'ensemble de rotation peut être l'ensemble  $\mathbb{R}$  entier (pour  $\omega = 0$ , théorème d'Aubry et Mather, voir 9.4.3), mais il peut aussi être vide :

**Proposition 12.6.1** *i. Pour  $\omega > -a \min \varphi_1$  (resp.  $\omega < -a \max \varphi_1$ ), les orbites montent dans l'anneau, la dynamique est errante. L'ensemble de rotation est vide.*

*ii. Pour  $\omega = -a \min \varphi_1$  ou  $\omega = -a \max \varphi_1$ ,  $\tilde{F}$  possède des points fixes de la forme  $(\tilde{c}_{\varphi_1}, n)$  (resp.  $(\tilde{c}'_{\varphi_1}, n)$ ) où  $n$  est entier et tout autre point est errant (sa seconde projection est monotone le long de l'orbite). L'ensemble de rotation est  $\mathbb{Z}$ . Pour  $\omega \in ] -a \max \varphi_1, -a \min \varphi_1[$ , l'ensemble de rotation n'est jamais vide puisqu'il contient toujours  $\mathbb{Z}$ .*

*iii. Pour  $\omega \in [-a \max \varphi_1 + 3, -a \min \varphi_1 - 3]$ , l'ensemble de rotation est  $\mathbb{R}$  entier.*

*Démonstration :* Le i) et ii) sont des conséquences de la formule (9.8). Le iii) vient de la proposition 10.5.2.

□

Ceci montre que l'ensemble de rotation n'est pas toujours un intervalle. On obtient également que les surfaces  $\omega^+$  (resp.  $\omega^-$ ) ne sont pas disjointes et ordonnées comme en dimension un.

**12.6.2** Nous pouvons compléter la proposition 12.6.1 et justifier les remarques 12.4.1.2 et 12.5.2.1 :

**Proposition 12.6.2** *Pour  $a > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout*

$$\omega \in [-a \max \varphi_1, -a \max \varphi_1 + \eta], \text{ (resp. } \omega \in [-a \min \varphi_1 - \eta, -a \min \varphi_1]),$$

*alors  $\mathcal{R}(\tilde{F}_{1,a,\omega}) = \mathbb{Z}$ .*

*Démonstration :* Pour  $\omega = \omega_0 = -a \min \varphi_1$ , le point fixe de nombre de rotation  $n \in \mathbb{Z}$  de  $\tilde{F}_0 = \tilde{F}_{1,a,\omega_0}$  est le point  $z(n) = (c_{\varphi_1}, n)$ . Pour chaque  $z(n)$ , nous choisissons un petit voisinage  $U(n) = B(z(n), \delta)$  avec la propriété que pour tout couple d'entiers  $(n, n') \in \mathbb{Z}^2$  avec  $n \neq n'$ ,

$$\forall z \in \text{Adh}(U(n)), F_0(z), F_0^2(z) \notin \text{Adh}(U(n')). \quad (12.24)$$

Nous remarquons

$$\forall z \in \mathbb{A}, p_2(F_0(z)) \leq p_2(z).$$

Nous en déduisons l'existence d'une constante  $K > 0$  telle que

$$\forall z \in \mathbb{A} \setminus \cup_n U(n), p_2(F_0^2(z)) < p_2(z) - K. \quad (12.25)$$

On peut supposer que toute application  $\tilde{F} = \tilde{F}_{1,a,\omega}$  proche de  $\tilde{F}_0$  satisfait encore (12.24) et (12.25). Nous introduisons également les boules  $V(n) = B(z(n), \frac{K}{2})$ . Il existe aussi  $\varepsilon < \frac{K}{4}$  telle que

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{A} \setminus \cup_n V(n), p_2(F_0^2(z)) &< p_2(z) - \varepsilon, \\ \forall z \in \mathbb{A}, p_2(F_0(z)) &< p_2(z) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Soit  $n \in \mathbb{Z}$  et  $z \in V(n)$ . D'après (12.26), si  $k \geq 1$  est le premier itéré de  $z$  hors de  $U(n)$ ,

$$p_2(F^k(z)) < p_2(z) + \frac{K}{2} + 2\varepsilon.$$

Si  $l > k$  est le premier retour de  $F^k(z)$  à  $\cup_m V(m)$ , (12.24), (12.25) et (12.26) impliquent

$$p_2(F^l(z)) < p_2(z) - K.$$

Nous avons donc montré que si l'orbite de  $z \in V(n)$  par  $F$  quitte  $U(n)$ , elle ne revient jamais dans  $V(n)$ . Toute orbite périodique de  $F$  est donc contenue dans une boule  $V(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Son nombre de rotation est alors  $n$ .

□

Fixons un entier  $n \in \mathbb{Z}$ . Les courbes  $\omega_\rho^\pm$  et  $\hat{\omega}_\rho^\pm$  pour  $\rho$  proche de  $n$ , sont uniformément lipschitziennes. Par conséquent, pour  $0 < b < 1$  et  $\rho$  proche et distinct de  $n$ , on a

$$\omega_n^- + \frac{\eta}{2} < \omega_\rho^-$$

d'où  $\omega_n^- + \frac{\eta}{2} \leq \liminf_{\rho < n} \omega_\rho^-$  (voir la remarque 12.5.2.1). Ceci implique également que les conclusions des théorèmes 12.4.1.iii et 12.4.2.ii ne sont pas satisfaites pour  $\omega$  proche de  $\omega_n^-$ .

**12.6.3** D. Goroff (voir [Gor]) et M. Herman ont montré que pour  $\omega = 0$  et  $a$  grand, l'ensemble des orbites bien ordonnées maximisantes (celles qui maximisent les fonctionnelles  $\mathcal{W}$ ) est uniformément hyperbolique. Nous allons voir que c'est encore vrai pour l'ensemble de toutes les orbites bien ordonnées et que l'on peut autoriser  $\omega$  à varier dans un intervalle assez large autour de 0 :

**Proposition 12.6.3** *Soit  $(\tilde{F}_{1,a,\omega})$  une famille d'applications bimodales conservatives de l'anneau avec  $a > a_B(\varphi_1)$ . Alors, pour tout*

$$\omega \in [-a \max \varphi_1 + 3, -a \min \varphi_1 - 3],$$

*l'ensemble des orbites bien ordonnées forme un compact uniformément hyperbolique.*

*Démonstration :* Nous fixons une application  $\tilde{F}_{1,a,\omega}$  avec  $a > a_B(\varphi_1)$ . Nous pouvons introduire les constantes  $C_2, \delta > 0$  de la définition 9.3.6 et affirmons que si  $x$  est un point du cercle pour lequel

$$\varphi(x) \in [\min \varphi(x) + 2, \max \varphi(x) - 2], \quad (12.27)$$

alors,  $|D\varphi(x)| > 5$ .

D'après le principe du minimum, il suffit de le voir pour  $\varphi(x) \in \{\min \varphi(x) + 2, \max \varphi(x) - 2\}$ . Nous rappelons qu'un tel point est dans  $B(c_{\varphi_1}, \delta) \cup B(c'_{\varphi_1}, \delta)$  (voir

la définition 9.3.6). On supposera par exemple que  $]x, c_{\varphi_1}[ \subset B(c_{\varphi_1}, \delta)$ . Si, par l'absurde  $|\mathrm{D}\varphi(x)| \leq 5$  et puisque sur  $B(c_{\varphi_1}, \delta)$ ,  $|\mathrm{D}^2\varphi| > C_2$ , on a  $|\mathrm{D}\varphi| < 5$  sur  $]x, c_{\varphi_1}[$  et donc

$$|\varphi(x) - \varphi(c_{\varphi_1})| < 5|x - c_{\varphi_1}| < \frac{5}{4} < 2$$

car  $\delta < \frac{1}{4}$ . Ceci contredit la définition de  $x$ . Par conséquent,  $|\mathrm{D}\varphi(x)| > 5$ .

Si  $(x, y)$  est un point d'une orbite bien ordonnée, par (10.6),  $|\varphi(x)| < 1$ . On voit ainsi que pour  $\omega \in [-a \max \varphi_1 + 3, -a \min \varphi_1 - 3]$  et pour tout point  $(x, y)$  appartenant à une orbite bien ordonnée, la condition (12.27) est satisfaite et donc  $|\mathrm{D}\varphi(x)| > 5$ .

Nous définissons maintenant des cônes en chaque point  $z = (x, y)$  d'une orbite bien ordonnée.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^u(z) &= \left\{ (\zeta, \zeta(1+u)), |u| < \frac{1}{2} \right\}, \\ \mathcal{C}^s(z) &= \left\{ (\zeta, -\zeta(\mathrm{D}\varphi \circ p_1)(z)(1+u)), |u| < \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Leur intersection est réduite à  $\{0\}$ . Ce sont des champs de cônes continus en  $z$ .

L'image du vecteur  $(\zeta, \zeta(1+u)) \in \mathcal{C}^u(z)$  par  $\mathrm{D}F(z)$  est

$$\left( \zeta', \zeta' \left( 1 - \frac{1}{2 + \mathrm{D}\varphi \circ p_1(z) + u} \right) \right)$$

avec  $\zeta' = \zeta(2 + \mathrm{D}\varphi \circ p_1(z) + u)$ . C'est donc un vecteur de  $\mathcal{C}^u(F(z))$ . Sa projection par  $p_1$  a été dilatée de  $2 + \mathrm{D}\varphi \circ p_1(z) + u > 2$ .

L'image du vecteur  $(\zeta, -\zeta(\mathrm{D}\varphi \circ p_1)(z)(1+u)) \in \mathcal{C}^s(z)$  par  $\mathrm{D}F^{-1}(z)$  est

$$\left( \zeta', -\zeta' \left( (\mathrm{D}\varphi \circ p_1 \circ F^{-1})(z) + 1 - \frac{1}{1 + (\mathrm{D}\varphi \circ p_1)(z)(1+u)} \right) \right)$$

avec  $\zeta' = \zeta(1 + (\mathrm{D}\varphi \circ p_1)(z)(1+u))$ . C'est donc un vecteur de  $\mathcal{C}^u(F^{-1}(z))$ . Sa projection par  $p_1$  a été dilatée de  $2 + \mathrm{D}\varphi \circ p_1(z) - u > \frac{3}{2}$ .

Le critère de champ de cônes (voir par exemple [Yoc95]) montre alors que l'ensemble des orbites bien ordonnées est un ensemble uniformément hyperbolique.

□

**12.6.4** Les propriétés d'accumulation que nous avons données montrent que les langues se chevauchent de façon complexe. Il serait intéressant de comprendre comment elles s'organisent lorsque par exemple  $b = 1$ .



## Annexe A

# Bifurcation selle-nœud des ensembles hyperboliques

Nous définissons<sup>1</sup> la bifurcation selle-nœud des ensembles hyperboliques localement maximaux ayant une direction instable de dimension 1. Nous montrons que cette bifurcation est de codimension 1. Nous terminons en construisant une norme adaptée pour ces ensembles.

### A.1 Introduction

Rappelons une propriété élémentaire: un point fixe  $P$  d'un difféomorphisme  $F$  dont les valeurs propres sont toutes différentes de 1 persiste après perturbation de  $F$ . Ce résultat se généralise aux ensembles hyperboliques: si  $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est une famille continue de difféomorphismes et si  $K$  est un ensemble hyperbolique pour  $F_{\lambda_0}$ ,  $\lambda_0 \in \Lambda$ , on peut suivre continûment  $K$  sur un voisinage ouvert de  $\lambda_0$  dans  $\Lambda$ .

L'étape suivante consiste à comprendre comment un point fixe hyperbolique  $P$  peut disparaître. Un cas possible fait intervenir la bifurcation selle-nœud: au moment de la bifurcation, la différentielle au point fixe  $DF(P)$  possède une valeur propre égale à 1. Les autres ont des modules strictement inférieurs. Nous demandons également pour tout vecteur  $v$  non-nul dans la direction centrale que  $D^2F(P)(v, v)$  ne s'annule pas. La dynamique après bifurcation est décrite par la proposition suivante (voir [NPT]):

**Proposition A.1.1** *Soit  $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille lisse de difféomorphismes. Si  $(P, \lambda_0)$  est une bifurcation selle-nœud transverse, il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\lambda_0$  dans  $\Lambda$  tel que:*

- i.  $\mathcal{O}$  possède une sous-variété de codimension un,  $\mathcal{O}^0$  qui contient  $\lambda_0$ . L'ouvert  $\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^0$  a deux composantes:  $\mathcal{O}^+$  et  $\mathcal{O}^-$ .*
- ii. La continuation  $P(\lambda)$  de  $P$  est définie si et seulement si  $\lambda \in \mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+$ .*
- iii. Le point  $P(\lambda)$  est hyperbolique si et seulement si  $\lambda \in \mathcal{O}^+$ . Pour  $\lambda \in \mathcal{O}^0$ ,  $(P(\lambda), \lambda)$  est une bifurcation selle-nœud transverse.*

---

1. Cette annexe fait l'objet de [Cr00].

La conclusion (iii) montre que la bifurcation est robuste. Les définitions précises des objets considérés dans cette introduction seront données en sections A.2 et A.4.1.

Cette annexe a pour objectif de généraliser ce résultat aux ensembles hyperboliques. Elle est motivée par les questions suivantes :

- De quelle façon est détruit un ensemble hyperbolique? Peut-on décrire certaines bifurcations?
- Quelles bifurcations sont de codimension un?
- Quelle est la dynamique après la bifurcation?

Quelques résultats récents répondent à ces questions (voir [Co98a, Co98b, CK, Ri]).

Nous souhaitons décrire une bifurcation associée à une perte d'expansivité en un point fixe de l'ensemble hyperbolique, due à la collision entre un point fixe hyperbolique selle de l'ensemble et un puits extérieur à l'ensemble hyperbolique. La décomposition géométrique de l'espace tangent en espace stable et espace central-instable n'est pas altérée. Un tel phénomène dans des cadres plus particuliers a déjà été étudié dans [Co98a, Co98b, CK]. Nous renvoyons également à [DRIV].

Un ensemble selle-nœud hyperbolique (*saddle-node hyperbolic set*) pour un difféomorphisme  $F$  sera un ensemble compact invariant  $K$  qui contient un point particulier  $P$  avec les propriétés suivantes :

1.  $P$  est un point fixe de type selle-nœud. Les autres orbites périodiques de  $K$  sont hyperboliques.
2. Il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $K$  et un ensemble ouvert  $\Omega$  qui est l'intersection d'un voisinage ouvert de  $P$  avec  $\text{Int}(W_{loc}^s(P))$  de sorte que  $K$  est l'ensemble maximal invariant de  $U \setminus \Omega$ .
3. L'ouvert  $U$  supporte un champ de cônes continu  $\mathcal{C}^s$  qui est stable et dilaté par itérations inverses. Le champ de cônes dual est noté  $\mathcal{C}^u$ . Nous insistons sur le fait que la direction centrale est de dimension 1 et que  $F$  contracte les autres directions.
4. Les courbes incluses dans  $U$  qui intersectent  $K$  et dont l'espace tangent est contenu dans  $\mathcal{C}^u$  ne se recoupent pas. Une telle courbe peut être prolongée de sorte qu'elle possède un point qui est attiré par  $P$  ou bien quitte  $U$  par itérations positives.

La propriété 1 montre que  $P$  est le seul défaut d'hyperbolicité de  $K$ . La propriété 3 doit être comparée au résultat bien connu : un ensemble invariant compact est hyperbolique si et seulement s'il supporte un champ de cônes  $\mathcal{C}^s$  tel que  $\mathcal{C}^s$  est stable et dilaté par itérations inverses et  $\mathcal{C}^u$  est dilaté par itérations positives. Les propriétés 2 et 4 expriment qu'en un sens affaibli,  $K$  est localement maximal. Elles sont satisfaites si  $K$  est un fer à cheval topologique.

Nous pouvons à présent énoncer le résultat :

**Théorème A.1.2** *Soit  $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille lisse de difféomorphismes agissant sur une variété riemannienne  $M$ . Si  $(K, P)$  est un ensemble selle-nœud hyperbolique pour l'application  $F_{\lambda_0}$  et si  $(P, \lambda_0)$  est une bifurcation selle-nœud transverse, alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\lambda_0$  tel que*

- i.  $\mathcal{O}$  se décompose comme en proposition A.1.1.

ii. La continuation  $K(\lambda)$  de  $K$  est définie si et seulement si  $\lambda \in \mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+$ . Il existe une unique application continue,  $\Phi : (\mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+) \times K \rightarrow M$  qui vérifie  $\Phi_{\lambda_0} = \text{Id}_K$  et telle que pour tout  $\lambda$ ,  $\Phi_\lambda$  soit un homéomorphisme entre  $K$  et  $K(\lambda)$  qui conjugue la dynamique.

iii. L'ensemble  $K(\lambda)$  est hyperbolique si et seulement si  $\lambda \in \mathcal{O}^+$ . Pour  $\lambda \in \mathcal{O}^0$ ,  $(K(\lambda), P(\lambda))$  est un ensemble selle-nœud hyperbolique.

On donne dans la preuve une description plus détaillée de la dynamique. Remarquons que dans cette situation l'ensemble hyperbolique existe pour un ouvert  $\mathcal{O}^+$  des paramètres et la bifurcation décrit un ouvert de la frontière  $\text{Fr}(\mathcal{O}^+) = \mathcal{O}^0$ . En d'autres termes, la bifurcation est robuste (i.e. de codimension un). Lorsque  $\lambda \in \mathcal{O}^-$  une partie de la dynamique de  $K$  persiste mais nous ne donnons aucun résultat sur l'ensemble maximal invariant de  $U$  (voir [Co98a, Co98b]).

Pour  $\lambda \in \mathcal{O}^0$ , l'espace tangent au-dessus des points  $x \in K(\lambda)$  se décompose en deux espaces, l'un stable  $E_x^s$ , l'autre instable  $E_x^u$  :

$$T_x M = E_x^s \oplus E_x^u.$$

Il est bien connu que l'on peut adapter la métrique au voisinage d'un ensemble hyperbolique afin que les fibrés  $E_x^s$  and  $E_x^u$  soient respectivement contractés et dilatés après seulement une itération de  $DF$ . Un résultat similaire existe ici :

**Proposition A.1.3** *Soit  $(K, P)$  un ensemble selle-nœud hyperbolique pour un difféomorphisme  $F$  d'une variété riemannienne  $(M, \|\cdot\|)$ . Il existe alors une métrique continue  $\|\cdot\|_a$  sur  $M$  telle que*

$$\begin{aligned} \forall x \in K \setminus \{P\}, \forall v \in E_x^u \setminus \{0\}, \quad & \|DF(x).v\|_a > \|v\|_a, \\ \text{et } \forall x \in K, \forall v \in E_x^s \setminus \{0\}, \quad & \|DF(x).v\|_a < \|v\|_a. \end{aligned}$$

Cette annexe est organisée de la façon suivante: les définitions, notations et exemples sont introduits en section A.2. L'ingrédient principal pour ces résultats permet de montrer la dilatation des vecteurs de  $C^u$  pour  $K(\lambda_0)$ . Nous le donnons en section A.3 en utilisant des arguments de dimension un (nous renvoyons à la preuve du théorème de R. Mañé dans [MS]):

**Théorème A.1.4** *Soit  $(K, P)$  un ensemble selle-nœud hyperbolique d'un difféomorphisme  $F$ . Donnons-nous  $W$ , un voisinage ouvert de  $P$ . Alors, pour tout  $k > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour toute orbite finie  $z_0, z_1, \dots, z_n$  de  $K$  avec  $z_n \notin W$  et  $n \geq n_0$  et pour tout  $v \in C^u(z_0) \setminus \{0\}$ ,*

$$\frac{\|DF^n(z_0).v\|}{\|v\|} > k.$$

De façon indépendante dans [PS], E. Pujals et M. Sambarino ont également utilisé les arguments de R. Mañé pour étudier les difféomorphismes des surfaces admettant une décomposition dominée.

La section A.4 contrôle la dilatation au voisinage de  $P$  pour les applications perturbées de  $\mathcal{O}^+$ . Le théorème A.1.2 et la proposition A.1.3 sont démontrés en section A.5.



## A.2 Preliminaries

### A.2.1 Notations

In Sections A.2 and A.3 we consider a smooth diffeomorphism  $F$  on a smooth Riemannian manifold  $M$ . The dimension of  $M$  will be  $d$ .

The tangent and the unitary tangent bundles over  $X \subset M$  are denoted  $\mathrm{TX}$  and  $\mathrm{UX}$ .

The tangent space at the point  $z \in M$  is  $\mathrm{T}_z M$ . The length of a Lipschitz curve  $\sigma$  in  $M$  will be noted  $|\sigma|$ .

In a metric space we note  $B(z, r)$  the open ball centered at  $z$  with radius  $r$ . For example,  $B^k(0, 1)$  will stand for the euclidean open ball of  $\mathbb{R}^k$ . We use also the notation  $B(Y, r) = \cup_{y \in Y} B(y, r)$  for any subset  $Y$ .

### A.2.2 Saddle-node fixed points

Let  $P$  be a saddle-node fixed point as defined at the beginning of Section A.1. The tangent space at  $P$ ,  $\mathrm{T}_P M$ , splits into  $E_P^s \oplus E_P^c$ . The subspaces  $E^s$  and  $E^c$  are invariant;  $E^s$  is strictly contracted by  $DF$  and  $E^c$  is associated to the eigenvalue 1. It is well-known (see [HPS], Section 4 Theorem 4.1) that  $P$  admits a unique strong stable manifold,  $W_P^{ss}$ , tangent to  $E_P^s$ . It separates locally  $M$  in two regions. One is attracted by  $P$ ; the other contains a unique invariant half central manifold  $W_P^c$  tangent to  $E_P^c$  (see [NPT]).

**Remarks A.2.1** 1. One can also assume in the following that  $P$  is a periodic orbit (see Remark A.5.1).

2. Of course by considering  $F^{-1}$  instead of  $F$  one can also consider saddle-node fixed points having one eigenvalue equal to one and other eigenvalues with module bigger than one.

### A.2.3 Stable cone field

**Definition A.2.1** An invariant subset  $K \subset M$  admits a (one-codimensional) **continuous stable invariant cone field** if

1. The tangent bundle splits in two continuous bundles:  $\mathrm{TK} = E^1 \oplus E^2$  with  $\dim(E^1) = 1$ . For any  $v \in \mathrm{TK}$  we note  $v = v^1 + v^2$ .
2. There exist two continuous norms  $\|\cdot\|_1$  and  $\|\cdot\|_2$  on  $E^1$  and  $E^2$  respectively such that the cone field

$$\mathcal{C}^s = \{v \in \mathrm{TK}, \|v^1\|_1 \leq \|v^2\|_2\}$$

is backward invariant: for any  $z \in K$ ,

$$DF^{-1}(\mathcal{C}_z^s) \subset \mathrm{Int}(\mathcal{C}_{F^{-1}(z)}^s) \cup \{0\}.$$

As a consequence the dual cone field

$$\mathcal{C}^u = \{v \in \mathrm{TU}, \|v^1\|_1 \geq \|v^2\|_2\}$$

is forward invariant.

3. There are some constants  $0 < \beta < 1$  and  $n_0 \in \mathbb{N}$  such that for any  $z \in K$ ,

$$\forall v \in \mathcal{C}_z^s, \quad \|DF^{-n_0}(z).v\| \geq \beta^{-1}\|v\|, \text{ and}$$

$$\forall v \in \mathcal{C}_z^u, \forall w \in \mathcal{C}_{F^{n_0}(z)}^s, \quad \beta \|DF^{n_0}(z).v\|^2 \|DF^{-n_0}(F^{n_0}(z)).w\| \geq \|v\|^2 \|w\|.$$

**Remarks A.2.2** 1. Note that we do not assume that  $DF$  is expanding on  $\mathcal{C}^u$ .

2. The existence of a continuous stable invariant cone field on  $K$  does not depend on the choice of a metric on  $M$ .
3. The previous definition can be extended for subsets  $U$  that are not invariant. The backward invariance (Property 2) and the second part of Property 3 are only required for points  $z$  in  $U \cap F^{-1}(U)$  and  $U \cap F^{-1}(U) \cap \dots \cap F^{-n_0}(U)$  respectively. If  $K$  is an invariant compact set admitting a continuous stable invariant cone field a neighborhood of  $K$  does also. If  $P \in K$  is a saddle-node fixed point the splitting  $E_P^s \oplus E_P^c$  is compatible with the cone field:

$$E_P^s \subset \mathcal{C}_P^s \text{ and } E_P^c \subset \mathcal{C}_P^u.$$

4. The usual definition of invariant stable cone field (or of partial hyperbolicity, see [BP]) is more general: one does not assume  $\dim(E)^u = 1$  and the domination hypothesis is weaker: For any  $z \in K$ ,

$$\forall v \in \mathcal{C}_z^u, \forall w \in \mathcal{C}_{F^{n_0}(z)}^s, \quad \beta \|DF^{n_0}(z).v\| \|DF^{-n_0}(F^{n_0}(z)).w\| \geq \|v\| \|w\|.$$

However we want to describe here invariant sets which are close to be hyperbolic. Any condition that bounds the contraction in the central unstable direction (i.e. in  $\mathcal{C}^u$ ) is appropriate.

Suppose that a point  $z$  is in  $K$ , we define at  $z$  its stable and unstable cones of order  $n$ ,  $\mathcal{C}_z^s(n)$  and  $\mathcal{C}_z^u(n)$  as  $DF^{-n}(\mathcal{C}_{F^n(z)}^s)$  and  $DF^n(\mathcal{C}_{F^{-n}(z)}^u)$  respectively. Condition 3 implies that the angle between vectors in the same stable or unstable cone decreases uniformly as  $n$  increases. Condition 2 implies  $\mathcal{C}^s(n+1) \subset \mathcal{C}^s(n)$ .

As a preliminary to the next paragraph we recall that an invariant compact set  $K$  is **hyperbolic** if the tangent space at each point  $z$  of  $K$  splits  $T_z K = E_z^s \oplus E_z^u$  such that:

1. The splitting is invariant:  $DF^{-1}(E^s) = E^s$  and  $DF(E^u) = E^u$ .
2. There exist some  $0 < \beta < 1$ ,  $c > 0$  such that if  $z \in K$ ,  $v \in E_z^s$  (resp.  $v \in E_z^u$ ),  $n \in \mathbb{N}$  then

$$\|DF^{-n}(z).v\| \geq c\beta^{-n}\|v\|$$

(resp.  $\|DF^n(z).v\| \geq c\beta^{-n}\|v\|$ ).

The cone field criterion asserts that any invariant compact set admitting a stable invariant cone field and such that there exists a constant  $\mu > 1$  and an integer  $n \geq 1$  with

$$\forall z \in K, \quad \forall v \in \mathcal{C}^u, \quad \|DF^n(z).v\| \geq \mu\|v\|,$$

is hyperbolic.

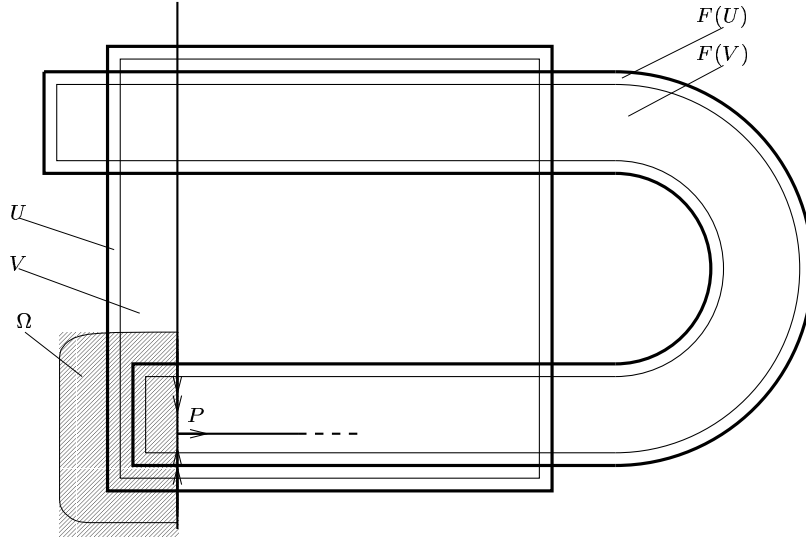


Figure A.1: Open sets  $U$ ,  $V$ ,  $\Omega$  associated to the saddle-node hyperbolic set  $(K, P)$ .

Suppose that on an open set  $U$  the diffeomorphism admits a continuous stable invariant cone field. An **u-curve** (tangent to  $\mathcal{C}^u$ ) is a rectifiable map from  $[0, 1]$  in  $U$  with tangent subspaces in  $\mathcal{C}^u$ . (Up to a reparametrization such a curve is Lipschitz.) Unless specified we will however assume that u-curves are  $\mathcal{C}^2$ .

An embedding of  $B^{d-1}(0, 1)$  is a **s-leaf** (tangent to  $\mathcal{C}^s$ ) if its tangent subspaces are in  $\mathcal{C}^s$ .

#### A.2.4 Saddle-node hyperbolic sets

We first recall

**Definition A.2.2** Let  $X$  be a subset of  $M$ . The **maximal invariant subset** of  $X$ ,  $Y$  is:

$$Y = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} F^k(X).$$

Let us come to the major definition of our study:

**Definition A.2.3** A compact invariant set  $K$  of the diffeomorphism  $F$  associated to the point  $P \in K$  is a **saddle-node hyperbolic set** if it satisfies the following properties (see Figure A.1):

1. **Hyperbolicity of periodic orbits:**  $P$  is a saddle-node fixed point and every periodic orbit in  $K$  different from  $P$  is hyperbolic.
2. **Local maximality:** There exist a small open set  $\Omega$  intersection of a small neighborhood of  $P$  with  $W_{loc}^s(P) \setminus W^{ss}(P)$  and an open neighborhood  $U$  of  $K$  such that  $K$  is the maximal invariant set of  $\bar{U} \setminus \Omega$ .
3. **Existence of a stable cone field:** There exists on a neighborhood of  $\bar{U}$  a continuous stable invariant cone field  $\mathcal{C}^s$ .

We introduce the norms  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  and a constant  $\beta$  as in Definition A.2.1.

4. **Topological expansion:** In a neighborhood of  $\bar{U}$ , u-curves that intersect  $K$  do not have self-intersection. There exists an open set  $V$  with  $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$  such that for any u-curve  $\gamma$  intersecting  $K$ ,

$$\gamma \subset \bar{U} \cap F^{-1}(\bar{U}) \setminus \Omega \Rightarrow \gamma \subset \bar{V}.$$

The open set  $\Omega$  is small enough so that for any u-curve  $\gamma$  in  $\bar{U}$  that intersects  $K$  in  $z$ , at most one component of  $\gamma \setminus \{z\}$  intersects  $F^{-1}(\Omega)$ .

**Remarks A.2.3** 1. Condition 1 expresses that  $P$  is the only lack of hyperbolicity of  $K$ . Indeed it will be a corollary of the next section to see that condition 1 is equivalent to: for all open neighborhood  $W$  of  $P$ , the maximal invariant set in  $K \setminus W$  is hyperbolic.

2. The first part of condition 4 implies that u-curves in  $\bar{U}$  tangent to  $\mathcal{C}^u(1)$  that intersects  $K$  are not closed. Such u-curve that are tangent to  $\mathcal{C}^s(1)$  have their length uniformly bounded by some constant  $k_l$ : otherwise one could find an u-curve in  $\bar{U}$  tangent to  $\mathcal{C}^u(1)$  whose endpoints are arbitrarily close together. Hence one could close it and build a closed u-curve tangent to  $\mathcal{C}^u$  in any neighborhood of  $\bar{U}$ . This is a contradiction.

The second part of condition 4 asserts that for any u-curve  $\gamma$  in  $\bar{U} \setminus \Omega$  intersecting  $K$  and  $\bar{U} \setminus \bar{V}$ , there exists  $z \in \gamma$  such that  $F(z)$  is not in  $\bar{U}$ . Both are important to prove that  $K$  is totally disconnected in the unstable direction. They are illustrated by some examples below. In particular we will see that for horseshoes condition 4 is automatically satisfied.

3. For any iterate  $F^n$ ,  $(K, P)$  is again a saddle-node hyperbolic set (see Lemma A.2.1 below).
4. One can not require instead of condition 2 that  $K$  is the maximal invariant subset of one of its neighborhoods: In some examples there exists an orbit on  $W_P^c$  whose points are eventually attracted by  $\Omega$  and which is arbitrarily close to a homoclinic orbit of  $K$  between  $W_P^{ss}$  and  $W_P^c$ .
5. Condition 3 is necessary to ensure that the tangent space splits in two supplementary subspaces at each point of  $K$ . One can construct a counter example satisfying only properties 1 and 2 (see also [Ri]). Consider in dimension two the degenerate horseshoe  $K$  in the rectangle  $R$ : the rectangles  $R_1, R_2, R_3$  and  $R_4$  form a Markov partition of  $K$ ;  $F$  is a product on  $R_1, R_2$ , and  $R_4$ . The saddle-node fixed point  $P$  is an endpoint of  $R_1$  and  $R$ . The image of an unstable side of  $R_3$  is tangent to a stable side of  $R_1$  (see Figure A.2). This last property contradicts the existence of distinct stable and unstable directions at each point of  $K$ . However any compact invariant subset of  $K$  which does not contain  $P$  is hyperbolic (similar but detailed arguments are contained in [Ri]). Indeed every “bad point” of  $K$ , i.e. whose stable and unstable directions are tangent, is forward or backward attracted by  $P$ .

**Examples A.2.4** 1. Explicit classes of examples have already been considered in [Co98a, Co98b] and [CK]. These are horseshoes in dimension two build from maps on one-dimensional manifolds.

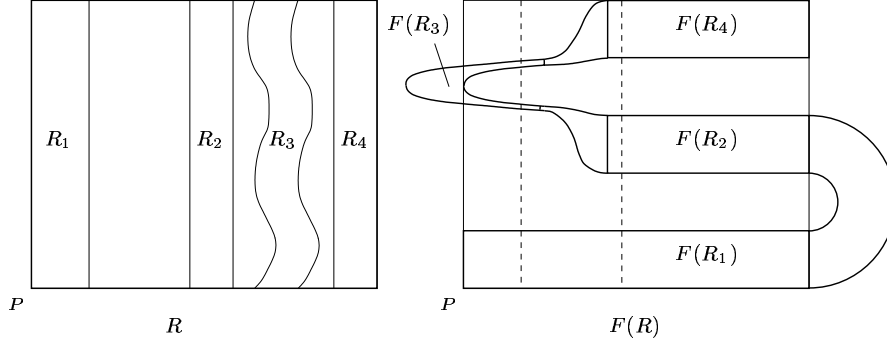


Figure A.2: A counter example with homoclinic tangencies.

2. More generally one can consider horseshoes in any dimension  $d \geq 2$  with one-dimensional unstable direction. We require that:
  - (a) There exists an open set  $U$  carrying a continuous stable invariant cone field  $\mathcal{C}^s$ .
  - (b) There exists in  $U$  a finite number of rectangles  $R_0, \dots, R_1$ . Each of them is the image of an immersion  $\phi : B^{d-1}(0, 1) \times [0, 1] \rightarrow U$ . The stable boundary of  $R_i$  is made of s-leaves  $\partial_j^s R_i = \phi_i(B^{d-1}(0, 1) \times \{j\})$ ,  $j = 0, 1$ . The curves  $\phi(\{z\} \times [0, 1])$  are u-curves. We assume that the sets  $\bar{R}_i$  are disjoint.  $K$  is the maximal invariant set in  $\cup R_i$ .
  - (c) There exists a saddle-node fixed point  $P \in \partial_0^s R_0$ ,  $\partial_0^s R_0 \subset W_P^{ss}$  and  $W_{\text{loc}}^s(P) \cap \text{Int}(R_0) = \emptyset$ . Other periodic orbits in  $\cup R_i$  are hyperbolic.
  - (d)  $F(\partial_0^s R_0) \subset \partial_0^s R_0$ . Other stable boundary  $\partial_j^s R_i$  are sent outside  $\cup \bar{R}_i$  under forward iteration. Moreover for any  $i, j$ ,

$$F(R_i) \cap \partial R_j \subset \partial_0^s R_j \cup \partial_1^s R_j.$$

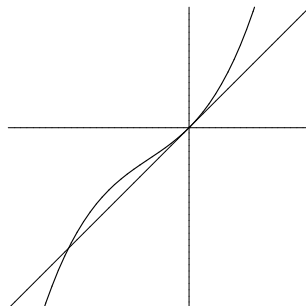
Assumptions 1 to 3 in Definition A.2.3 are obviously satisfied. Considering a higher iterate of  $F$  one can shrink the cone field  $\mathcal{C}^u$  and the rectangles  $R_i$ . Thus any u-curve contained in some  $R_i$  has no self intersection. Take  $U$  small enough. We get the same property for u-curves in  $U$ .

With slight modifications one can assume that u-curves which intersect  $K$  can not intersect  $\partial R_j$  outside  $\partial_0^s R_j \cup \partial_1^s R_j$ : For some large  $n \geq 0$  one replace  $\mathcal{C}^u$  by  $\mathcal{C}^u(n)$  and  $\cup R_i$  by  $\cap_{k=0}^n F^{-k}(\cup R_i)$  which is again a finite union of rectangles.  $V$  is now a small neighborhood of  $\cup R_i$  and  $\bar{\Omega}$  is a local stable manifold of  $P$  that contains  $\partial_0^s R_0$ . The second part of condition 4 is a consequence of (d).

3. Other interesting examples can be considered, in particular modeled on hyperbolic attractors.

We have chosen to construct an example modeled on a DA-map (see [Sm]) by some modifications on the construction of [HK] Section 17.2 pp. 537-540: we first start from the linear Anosov diffeomorphism on the torus  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$  given by the matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Figure A.3: The map  $x \mapsto \phi(x, 0)$ .

There are local coordinates in a neighborhood of  $(0, 0)$  where the map writes:

$$(x, y) \rightarrow (\sigma_1 x, \sigma_2 y)$$

with  $0 < \sigma_2 < 1 < \sigma_1$ . We now perturb the diffeomorphism in a small neighborhood of  $(0, 0)$  so that the diffeomorphism writes now:

$$F : (x, y) \rightarrow (\phi(x, y), \sigma_2 y).$$

$\phi(\cdot, 0)$  satisfies  $\phi(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}\phi(0, 0) = 1$  and  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(0, 0) > 1$  as it is represented on Figure A.3. We set  $\phi(x, y) = \eta(y)\phi(x, 0) + (1 - \eta(y))\sigma_1 x$  with some bump function  $\eta$ .

For  $\theta \ll \varepsilon$  small enough we consider for any  $y$ , the intervals (perhaps empty)  $[x(y), -\theta]$  and  $(-\theta, 0)$  where  $x(y)$  is the smallest real satisfying

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y) = 1 + \varepsilon.$$

We set

$$X = \bigcup_y (x(y), 0) \times \{y\}.$$

Choosing  $\varepsilon$  and  $\eta$  carefully,  $X$  is contained in the basin of  $(0, 0)$  and satisfies  $F(X) \subset X$ .

We consider the maximal invariant subset (compact)  $K$  of  $\mathbb{T}^2 \setminus X$  and  $P = (0, 0)$ . Note that the horizontal direction is preserved: On  $\mathbb{T}^2 \setminus X$ , there exists an invariant cone field  $\mathcal{C}^u$  arbitrarily sharp and close to the unstable direction. We introduce the open sets

$$U = \mathbb{T}^2 \setminus \left( \bigcup_y [x(y), -\theta] \times \{y\} \right), \quad \Omega = \bigcup_{x(y) < \theta} (-\theta, 0) \times \{y\}$$

and claim that  $(K, P)$  is a saddle-node hyperbolic set. Assumptions 1 to 3 are obvious. The first part of property 4 is now clear: Any u-curve is close to the horizontal foliation of the torus and has to intersect  $\mathbb{T}^2 \setminus U$ . For the second part we remark that the image of  $\partial U$  is contained in  $U \cup \Omega$ . We set  $\tilde{V} = U \setminus B(\partial U, \varepsilon')$  with  $\varepsilon' > 0$  small.

### A.2.5 Adapted neighborhoods

We explain here how  $U$ ,  $V$  and  $\Omega$  can be modified in order to be contained in an arbitrarily small neighborhood of  $K$  so that our definition of saddle-node hyperbolic set is really a local property of  $(K, P)$ : for any integer  $n \geq 1$ , the sets

$$U'_n = \left( \bigcap_{|k| \leq n} F^k(U) \right) \setminus \bigcup_{|k| \leq n-1} F^k(\Omega), \quad V'_n = \left( \bigcap_{|k| \leq n} F^k(V) \right) \setminus \bigcup_{|k| \leq n-1} F^k(\Omega)$$

are contained in a neighborhood  $B(K, \varepsilon)$  of  $K$  and by Definition A.2.3.2,  $\varepsilon > 0$  can be taken arbitrarily small if  $n$  is large enough.

We set

$$U_n = \left( \bigcap_{|k| \leq n} F^k(U) \right) \cap B(K, 2\varepsilon), \quad V_n = \left( \bigcap_{|k| \leq n} F^k(V) \right) \cap B(K, \varepsilon),$$

$$\Omega_n = \left( \bigcup_{|k| \leq n+1} F^k(\Omega) \right) \cap (B(K, 3\varepsilon) \cup F(B(K, 3\varepsilon))).$$

and prove:

**Lemma A.2.1** *Let  $U, V$  and  $\Omega$  be open sets associated to a saddle-node hyperbolic set  $(K, P)$  as in Definition A.2.3. Then for any integer  $n \geq 0$ , the cone field  $\mathcal{C}'^s = \mathcal{C}^s(-n)$  and the sets  $U_n, V_n$  and  $\Omega_n$  defined above satisfy again the definition A.2.3 and are contained in an arbitrarily small neighborhood of  $K$ .*

*Proof:* Properties 1 and 2 are obvious. On  $U_n$  we consider the cone field  $\mathcal{C}'^u = DF^n(\mathcal{C}^u)$ .

Note that  $\bar{U}_n \setminus \Omega_{n-1}$  is contained in  $\bar{U}'_n$  so that

$$\bar{U}_n \cap F^{-1}(\bar{U}_n) \setminus \Omega_n \subset \bar{U}'_n \cap F^{-1}(\bar{U}'_n).$$

For the last assumption we consider now any u-curve  $\gamma$  in  $U_n$  tangent to  $\mathcal{C}'^u$  that intersects  $K$ . For any  $-n \leq k \leq n$ ,  $F^k(\gamma)$  is again a u-curve in  $U$  tangent to  $\mathcal{C}^u$ . In particular, the first part of condition 4 is realised. Let us assume now that

$$\gamma \subset \bar{U}_n \cap F^{-1}(\bar{U}_n) \setminus \Omega_n.$$

For any  $-n \leq k \leq n$ ,

$$F^k(\gamma) \subset \bar{U} \cap F^{-1}(\bar{U}) \setminus \Omega.$$

Thus,  $\gamma \subset F^{-k}(\bar{V})$  and  $\gamma \subset \bar{V}'_n \subset \bar{V}_n$ .

□

**Remark A.2.5** By taking  $\Omega$  larger, one can assume that  $\Omega$  is stable (see Remark A.2.5):  $F(\Omega) \subset \Omega$ . From this, one gets that  $F(\Omega_n) \cap U_n \subset \Omega_n$ .

### A.3 Proof of Theorem A.1.4

In this section, we fix a saddle-node hyperbolic set  $(K, P)$ . We show that if one waits until a point leaves a fixed neighborhood of the saddle-node fixed point it has gained expansion in its unstable direction. Our arguments follow those by W. de Melo and S. van Strien in [MS], Section III.5 pp. 247-257 for proving Mañé's theorem.

Sometimes it is easier to work with a flat metric. Our result does not depend on the choice of a metric. Thus one can cover  $\bar{U} \subset M$  with a finite number of charts and consider on each of them a flat metric. Our estimates will change by a uniform constant which does not depend on the number of iterations we could do.

Note that it is enough to prove Theorem A.1.4 for an iterate of  $F$ . Thus one replaces  $F$  by some iterate  $F' = F^m$ ,  $m \geq 1$  and considers new open sets  $U' = U_m$ ,  $V' = V_m$  and  $\Omega' = \Omega_m$  and a new cone field  $\mathcal{C}'^s$  as in Lemma A.2.1. One can then assume that

1. the new unstable cones  $\mathcal{C}'^u$  are arbitrarily sharp. Note that the new stable cones  $\mathcal{C}'^s(1)$  for  $F'$  coincide with the former cones  $\mathcal{C}^s$  and are defined on  $\bar{U}'$ .
2. the new constant  $\beta'$  can be taken arbitrarily small. Note also that Property 3 of Definition A.2.1 implies for any  $z \in \bar{U}' \cap F'^{-1}(\bar{U}')$ ,

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathcal{C}'^s_z(1), \quad \|DF'^{-1}.v\| &\geq \beta'^{-1}\|v\|, \\ \forall v \in \mathcal{C}'^u_z, \forall w \in \mathcal{C}'^s_{F'(z)}(1), \quad \beta\|DF'(z).v\|^2\|DF'^{-1}(F'(z)).w\| &\geq \|v\|^2\|w\|. \end{aligned} \tag{A.1}$$

3. if  $\alpha$  is the minimum angle between vectors in  $\mathcal{C}'^s(1)$  and  $\mathcal{C}'^u$  then

$$\frac{\beta'}{\sin(\alpha)} < 1/24. \tag{A.2}$$

In the following we will forget the dependence in  $m$ . We will simply note  $F$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $\Omega$ ,  $\mathcal{C}^u$  and  $\beta$  for  $F'$ ,  $U'$ ,  $V'$ ,  $\Omega'$ ,  $\mathcal{C}'^u$  and  $\beta'$  as in Definition A.2.3. We consider also some constant  $k_l$  as in Remark A.2.3. 2.

### A.3.1 Distortion

One can control the curvature of  $u$ -curves as in [BP] or [ABV] Remark 2.5:

**Lemma A.3.1** *There exists  $\rho > 0$  such that for every  $u$ -curve  $\gamma$  in  $\bar{U}$  with curvature bounded by  $\rho$  the image  $F(\gamma)$  is an  $u$ -curve with curvature bounded by  $\rho$ .*

*Proof:* We will use the following estimate for  $z \in \bar{U} \cap F^{-1}(\bar{U})$  :

$$\forall v \in \mathcal{C}_z^u \setminus \{0\}, \forall \zeta \in \{v\}^\perp, \quad \frac{\|DF.\zeta \wedge DF.v\|}{\|DF.v\|^3} \leq \frac{\|\zeta\|}{3\|v\|^2}. \tag{A.3}$$

One obtains it by decomposing  $\zeta = \zeta^1 + \zeta^2$  with  $\zeta^1 \in \mathcal{C}^s(2)$  and  $\zeta^1 \in \mathbb{R}.v$ . One gets from (A.1),

$$\frac{\|DF.\zeta \wedge DF.v\|}{\|DF.v\|^3} < \beta \frac{\|\zeta^1\|}{\|v\|^2}.$$

Then one gets from (A.2) that  $\beta\|\zeta^1\| \leq \frac{1}{24}\|\zeta\|$ .

To prove the Lemma, one assumes that  $\gamma$  is parametrized by its length. In this case its curvature at  $\gamma(t)$  is  $\|\gamma''(t)\|$ . The curvature at  $F(\gamma(t))$  of  $F \circ \gamma$  is:

$$\frac{\|(F \circ \gamma)''(t) \wedge (F \circ \gamma)'(t)\|}{\|(F \circ \gamma)'(t)\|^3}.$$



We compute

$$(F \circ \gamma)''(t) = D^2F(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t), \gamma'(t)) + DF(\gamma(t)) \cdot \gamma''(t)$$

and bound the curvature by

$$\frac{\|D^2F(\gamma'(t), \gamma'(t)) \wedge DF \cdot \gamma'(t)\|}{\|(F \circ \gamma)'(t)\|^3} + \frac{\|DF \cdot \gamma''(t) \wedge DF \cdot \gamma'(t)\|}{\|(F \circ \gamma)'(t)\|^3}.$$

The first term is uniformly bounded by some constant  $c$  and the second one by  $\gamma''(t)/3$  (recall (A.3)). Thus it is sufficient to take  $\rho > \frac{3c}{2}$ .

□

Suppose that  $\gamma$  is a curve in  $U$  parametrized by their lengths with curvature bounded by  $\rho$ . The derivative of  $\log \|DF(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\|$  is

$$\frac{\langle DF(\gamma(t)) \cdot \gamma''(t) + D^2F(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t), \gamma'(t)), DF(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \rangle}{2\|DF(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\|^2}$$

which is uniformly bounded by some  $c_1 > 0$ .

Recall that  $|\gamma|$  note the length of a curve  $\gamma$ . We need the following standard distortion lemma:

**Lemma A.3.2** *For each constant  $c > 0$  there exists  $0 < \eta < 1$  such that giving two smooth  $u$ -curves  $\sigma \subset \gamma \subset U$  parametrized by their length with curvature bounded by  $\rho$  and assuming*

- i.  $\gamma, F(\gamma), \dots, F^{n-1}(\gamma)$  are well-defined in  $U$  for some integer  $n$ ,
- ii.  $\sum_{i=0}^{n-1} |F^i(\sigma)| < c$ ,
- iii.  $|\gamma| \leq (1 + \eta)|\sigma|$ ,

we get

$$i. \forall i \leq n, \quad |F^i(\gamma)| \leq 2|F^i(\sigma)|.$$

$$ii. \forall x, y \in \gamma,$$

$$\exp(-2c_1c)\|DF^n(y) \cdot \gamma'(y)\| \leq \|DF^n(x) \cdot \gamma'(x)\| \leq \exp(2c_1c)\|DF^n(y) \cdot \gamma'(y)\|.$$

In general we will use this lemma with  $\sigma = \gamma$ .

*Proof:* Note that the curvature of the curves  $\gamma, F(\gamma), \dots, F^{n-1}(\gamma)$  is bounded by  $\rho$  (Lemma A.3.1). The proof is now similar to the one-dimensional case (see [MS] Chap. I.2).

□

### A.3.2 Rectangles

#### A.3.2.1

In this section we define the notion of rectangle  $R$  associated to an u-curve  $\gamma$ . One may think of it as a thickened u-curve. The stable sides of  $R$  which correspond to the endpoints of  $\gamma$  are s-leaves that are chosen in a quite arbitrary way. The relevant size for rectangles is not the thickness which will not vary essentially but the length which is defined at Section A.3.3. A key tool here that will be used implicitly is the graph transform (see also [Sh]): If  $L$  is a s-leaf of radius  $r$  centered at  $z \in K$ ,  $F^{-1}(L)$  is a s-leaf of radius bigger than  $\frac{r}{\beta}$  centered at  $F^{-1}(z)$  with a higher order. Take any s-leaves  $L_n$  at  $F^n(z)$ . A subsequence  $F^{-n}(L_n)$  converges in  $B(z, r)$  to a s-leaf with infinite order. As a consequence any point of  $K$  possesses a unique local stable manifold which is smooth.

Most of the properties we state here are of geometrical nature and can be proved easily by considering appropriate local charts.

#### A.3.2.2

First of all we introduce a large enough integer  $n_c$  that will give the order of sharp unstable and stable cones and some constants  $0 < r \ll r_0 < 1$  (see below).

One can extend  $\Omega$  so that  $\Omega$  is stable:

$$F(\bar{\Omega}) \cap \bar{U}_n \subset (\Omega \cup W_{loc}^{ss}(P)) \cap \bar{\Omega}, \quad (\text{A.4})$$

and  $\bar{\Omega}$  is compact. By Lemma A.2.1 one can assume that  $\bar{U}$  is compact. The other assumptions in definition A.2.3 are unchanged.

$W$  is an open set containing  $P$  as stated in Theorem A.1.4 and that we fix now. We have to adapt  $U, V, \Omega$  to the choice of  $W$ .

In a same way, one replaces  $U, V$  and  $\Omega$  by  $U_{n_c}, V_{n_c}$  and  $\Omega_{n_c}$  so that the cone fields  $\mathcal{C}^s(n_c)$  and  $\mathcal{C}^u(n_c)$  are defined on a neighborhood  $B(\bar{U}, r_0)$  of  $\bar{U}$ . Note that definition A.2.3.4 is now satisfied by u-curves tangent to  $\mathcal{C}^u(n_c)$ . We require also that

$$B(V, r_0) \subset U. \quad (\text{A.5})$$

It will be convenient to set for  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} D &= \bar{U} \setminus \Omega, \\ D(0) &= D \cap F^{-1}(D) = (\bar{U} \cap F^{-1}(\bar{U})) \setminus F^{-1}(\Omega), \\ D(n) &= D \cap \dots \cap F^{-n-1}(D) = \bar{U} \cap \dots \cap F^{-n-1}(\bar{U}) \setminus F^{-n-1}(\Omega). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

#### A.3.2.3

From now on a **u-curve** is a  $C^2$ -curve that intersects  $K$  whose tangent subspaces are in  $\mathcal{C}^u$  and whose curvature is bounded by  $\rho$ . Unless specified, they will be u-curves with respect to  $\mathcal{C}^u(n_c)$ . A u-curve is of **order**  $n \geq 0$  if all its backwards iterates of order smaller than  $n$  are u-curves.

With  $r$  small, for any u-curve  $J \subset \bar{U}$ ,  $z \in J$ , and  $0 < \varepsilon < 8r$ ,

$$J \cap B(z, \varepsilon) \text{ has only one connected component.} \quad (\text{A.7})$$

If not one could construct a sequence of u-curves converging to a u-curve with some self-intersection and contradict Definition A.2.3.4.

Note that  $J \subset D(0)$  implies  $J \subset \bar{V}$  (Definition 4).

**A.3.2.4**

A u-curve is a **long u-curve** (resp. **crosses  $\bar{U}$** ) if both of its ends are in  $\partial\bar{U} \cup \partial\bar{\Omega}$  (resp.  $M \setminus \bar{U}$ ). Every u-curve in  $\bar{U} \cup F^{-1}(\bar{U})$  can be extended in a long u-curve (resp. in a u-curve that crosses  $\bar{U}$ ).

For  $r_0 > 0$  small enough, every long u-curve  $T$  satisfies

$$r_0 < |T| < k_l. \quad (\text{A.8})$$

More generally, by changing  $r_0$  by a bounded factor one can assume that for any u-curve  $J \subset D(0)$  such that  $F(J)$  intersects  $\partial\bar{U}$ ,  $|J| > r_0$ .

We state an other important consequence of Definition A.2.3.4. From it we deduce that through every point of  $K$ , one can construct a long u-curve with arbitrarily high order.

**Lemma A.3.3** *If  $T$  is a long u-curve, every component of  $F(T) \cap \bar{U}$  intersecting  $K$  contains again a long u-curve.*

*Proof:* Take  $z \in T \cap K$  and consider any component  $T_1$  of  $T \setminus \{z\}$ . Either  $T_1 \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$ . Here  $F(T_1)$  intersects  $\partial\bar{\Omega}$ . Or  $T_1 \subset \bar{U} \setminus \bar{\Omega}$ . As  $T_1 \not\subset \bar{V}$ ,  $T_1 \not\subset F^{-1}(\bar{U})$  and  $F(T_1)$  intersects  $\partial\bar{U}$ .

□

**Lemma A.3.4** *The unstable manifold of any periodic point  $z$  of  $K$  different from  $P$  contains a long u-curve passing through  $z$ .*

*The local branch of  $W_P^c$  which is not in  $W_P^s$  is a long u-curve. Note also that any u-curve contained in  $U \setminus \Omega$  and intersecting  $\bar{\Omega} \cap W_P^{ss}$  becomes of length bigger than  $r_0$  by iteration.*

*Proof:* We prove the first part; the argument is identical for the second one. The curvature remains the same after a finite number of iterations and the proof of Lemma A.3.1 implies that it is bounded by  $\rho$ . It remains to show that the unstable manifold is long: if not there exists a branch  $\gamma$  of the unstable manifold of  $z$  contained in  $\bar{U} \setminus \bar{\Omega}$ .  $\gamma$  is Lipschitz so its endpoints are well-defined and belongs to  $\bar{U} \setminus \bar{\Omega}$ . One of them is  $z$ . The other one is also a periodic point  $z'$ . Note that by Definition A.2.3.4,  $z \neq z'$ . Moreover points on  $\gamma$  are attracted by  $z'$ . Thus we must have  $z' = P$ . In this case some points of  $\gamma$  are in  $\bar{\Omega}$  which is a contradiction.

□

**A.3.2.5**

A s-leaf  $L$  will be called a **long s-leaf** centered at  $z \in \bar{U}$  if the exponential map of  $L$  at  $z$  is an homeomorphism between  $B^{d-1}(0, 10r) \subset T_z L$  and  $L$ . Unless specified, we will only consider s-leaves with respect to  $\mathcal{C}^s(n_c)$ . If  $r > 0$  is small enough, every point  $z$  in  $\bar{U}$  is contained in a long s-leaf.

A s-leaf is of **order**  $n \geq 0$  if all its forward iterates with order smaller than  $n$  are s-leaves. Every point in  $\bar{U} \cap F^{-1}(\bar{U}) \cap \dots \cap \bar{F}^{-n}(\bar{U})$  admits a long s-leaf of order bigger than  $n \geq 0$ . When  $z \in W^{ss}(P) \cap \bar{\Omega}$  we take  $L$  as subset of  $W^{ss}(P) \cap F^{-2}(\bar{\omega})$ . More

generally when  $z \in K$ , the Section A.3.2.1 implies that there exists at  $z$  a unique long leaf with infinite order defined by:

$$W_z^s = \left\{ z' \in \bar{U}, \frac{d(F^n(z), F^n(z'))}{\beta'^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\} \text{ for some } 0 < \beta' < \beta.$$

The smallness of  $r$  and largeness of  $n_c$  imply for any u-curve  $J \subset \bar{U}$  and long s-leaf  $L$  centered in  $\bar{U}$  tangent to  $\mathcal{C}^s(n_c - 1)$  the following properties :

1.  $J \cap L$  is empty or a singleton.
2. Assume that  $J$  and  $L$  intersect at  $z'$  and consider  $z \in L$ . Then there exists a curve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$  with  $\gamma(0) = z$ ,  $\gamma(1) = z'$  such that  $t \mapsto d(\gamma(t), J)$  is strictly decreasing and for any  $t$ ,

$$\frac{2}{3} \sin(\alpha) |\gamma|_{[t,1]} \leq d(\gamma(t), J) \leq |\gamma|_{[t,1]},$$

where  $d(\gamma(t), J)$  stands for the distance between  $\gamma(t)$  and  $J$  in  $M$  and  $\alpha$  stands for the minimum angle between vectors in  $\mathcal{C}^s(1)$  and  $\mathcal{C}^u$ .

### A.3.2.6

In this section and in the next one, we consider the following situation:  $T$  is any u-curve  $T$  that crosses  $\bar{U}$  and  $J \subset T \cap D(0)$  is a smaller compact u-curve. We choose any long disjoint s-leaves at the endpoints  $z_1$  and  $z_2$  of  $J$ ,  $L_1$  and  $L_2$ .

**Lemma A.3.5** *Under this setting,*

- i. for any  $z \in B(J, 2r)$  and any long s-leaf  $L(z)$  centered at  $z$  and tangent to  $\mathcal{C}^s(n_c - 1)$ ,  $L(z)$  intersects  $T$ ;*
- ii. for any  $z \in B(J, 2r) \setminus (L_1 \cup L_2)$  there exists a long s-leaf  $L(z)$  centered at  $z$  with respect to  $\mathcal{C}^s(n_c - 1)$  that does not intersect  $L_1 \cup L_2$ ;*
- iii. if  $L(z)$  and  $L'(z)$  are two long s-leaves as in (ii), and  $\{w\} = L(z) \cap T$ ,  $\{w'\} = L'(z) \cap T$ ,*

$$w \in J \Leftrightarrow w' \in J.$$

*Proof:* Note that the stable and unstable cones of order  $n_c - 1$  at points near  $z$  are near the cones of order  $n_c - 1$  at  $z$  by continuity of the cone fields. The angles between stable and unstable vectors are bounded from below. As a consequence the u-curves and s-leaves of radius  $\varepsilon$  are near lines and hyperplanes of  $\mathbb{R}^d$ . So any u-curve centered at  $z'$  and s-leaf centered at  $z$  intersect if  $z'$  is at distance smaller than  $\chi\varepsilon$  from  $z$  for some uniform constant  $0 < \chi < 1$  that can be chosen arbitrarily close to 1. This proves the first assertion.

For (ii) we cover  $\bar{U}$  by local charts with flat metric. We chose on them linear coordinates  $(x_u, y_s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$  compatible with the cone fields  $\mathcal{C}^u(n_c)$  and  $\mathcal{C}^s(n_c)$ . If  $r$  is small enough the ball centered at any point in  $\bar{U}$  and with radius  $2r$  is contained in a chart. One can subdivide the component of  $T \cap \bar{V}$  containing  $J$  in a finite number of curves  $[z(0), z(1)]$ ,  $[z(1), z(2)]$ ,  $\dots$ ,  $[z(n-1), z(n)]$  such that  $z_1 = z(i_1)$  and  $z_2 = z(i_2)$ . We require that all the segments  $[z(i), z(i+1)]$  (but possibly  $[z(i_1), z(i_1+1)]$  if  $z(i_1+1) = z(i_2)$ ) have their length bigger than  $r$ . Choose for each  $z(i)$  a long s-leaf

$L(i)$  centered at  $z(i)$ . ( $L_1 = L(i_1)$  and  $L_2 = L(i_2)$ .) They are graph of the form  $\{(h_i(y_s), y_s)\}$ .

If  $r$  is small and  $n_c$  large enough all the s-leaves  $L(i)$  are disjoint and the graphs  $\{(th_i(y_s) + (1-t)h_{i+1}(y_s), y_s)\}$  for  $t \in [0, 1]$  and  $0 \leq i < n$  are s-leaves tangent to  $\mathcal{C}^s(n_c - 1)$  that defines a foliation of  $B(J, 2r)$ .

We prove (iii) by contradiction: Suppose that  $w \in J$ ,  $w' \in T \setminus J$ . We get  $w' \in B(w, 4r)$  and by (A.7),

$$\exists i \in \{1, 2\}, \quad w, w' \in B(z_i, 5r).$$

$B(z_i, 8r) \setminus L_i$  has two connected components. Thus  $L(z)$  and  $L'(z)$  are contained in different components and can not intersect at  $z$ .

□

By (iii), one defines for any  $0 < \varepsilon \leq r$ , the **rectangle**  $R_\varepsilon(J, L_1, L_2)$  as the set of points  $z \in B(J, \varepsilon)$  that project on  $J$ : either  $z \in L_1 \cup L_2$  or  $L(z) \cap T \subset J$  for any  $L(z)$  as in (ii). When  $\varepsilon = r$  we only write  $R_\varepsilon(J, L_1, L_2)$ .

We will say that a rectangle  $R_\varepsilon(J, L_1, L_2)$  is of **order**  $n \geq 0$  if  $L_1$  and  $L_2$  are of order  $n$  and  $J \subset D(n)$ . In order to iterate the rectangle, we first consider some long s-leaves  $L_1^n$  and  $L_2^n$  containing  $F^n(z_1)$  and  $F^n(z_2)$  and take inductively the long s-leaves  $L_i^j$  as subset of  $F^{-1}(L_i^{j+1})$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq j < n$ , to construct the rectangle  $R(F^j(J), L_1^j, L_2^j)$ . In this case and as a consequence of Section A.3.2.5 Property 2 and Lemma A.3.5.ii, for any  $0 < \varepsilon < r$ ,  $F(R_\varepsilon(J, L_1, L_2))$  is contained in  $R_{\frac{3\beta}{2 \sin(\alpha)} \varepsilon}(F(J), L_1^1, L_2^1)$  and in  $R_{\frac{\varepsilon}{16}}(F(J), L_1^1, L_2^1)$  (recall (A.2)).

### A.3.2.7

As in Section A.3.2.6,  $R(J, L_1, L_2)$  is a rectangle with  $J \subset T$ . For any u-curve  $T'$  with endpoints outside  $B(\bar{V}, r)$ , such that  $T' \subset B(T, r)$ , the intersection  $T' \cap R(J, L_1, L_2)$  is either empty or a segment whose endpoints are in  $L_1$  and  $L_2$ . If it is not empty it will be called a **section** of  $R(J, L_1, L_2)$ .

By compactity, if  $r$  is small and  $n_c$  large enough, we get also the following property: There exists  $\frac{r}{4} < r' < \frac{r}{2}$  such that for any u-curve  $T$  crossing  $\bar{U}$  and any u-curve  $\sigma \subset B(\bar{V}, \frac{r_2}{2})$ , if  $\sigma \cap B(T, r') \neq \emptyset$ , then  $\sigma \subset B(T, \frac{r}{2})$ . Thus, for any rectangle  $R(J, L_1, L_2)$ , any u-curve  $T'$  which crosses  $\bar{U}$  and intersects  $R_{r'}(J, L_1, L_2)$ , contains a section of  $R(J, L_1, L_2)$ .

A section  $S$  will be called a  $\varepsilon$ -**section** when  $S \cap R_\varepsilon(J, L_1, L_2)$  is non-empty and  $0 < \varepsilon \leq r'$ .

Moreover we will need to consider  $\frac{r'}{4} < r_2 < \frac{r'}{2}$  (resp.  $\frac{r_2}{4} < r_3 < \frac{r_2}{2}$ ) so that any  $r_2$ -section (resp.  $r_3$ -section) of any  $R(J, L_1, L_2)$  is contained in  $R_{\frac{r'}{2}}(J, L_1, L_2)$  (resp.  $R_{\frac{r_2}{2}}(J, L_1, L_2)$ ).

Remark also that when  $R(J, L_1, L_2)$  is of order  $n \geq 0$  and  $\sigma$  is a section of  $R(J, L_1, L_2)$ ,  $F^k(\sigma)$  is a section of  $R(F^k(J), L_1^k, L_2^k)$ ,  $0 \leq k \leq n$ .

### A.3.3 Length of a rectangle

A useful distance  $d_L$  between  $L_1$  and  $L_2$  is defined by:

$$d_L(L_1, L_2) = \sup_{\sigma} |\sigma|,$$

where the supremum is taken over all sections of  $R(J, L_1, L_2)$ .

The aim of the next proposition is to prove by a standard argument that any section gives more or less the distance  $d_L(L_1, L_2)$ , and that this distance is independent from a choice of the manifolds  $L_i$ .

**Proposition A.3.6** *There exists  $\Delta > 1$  such that for any integer  $n \geq 0$ , for any rectangle  $R(J, L_1, L_2)$  of order  $n$  such that  $F^{n+1}(J)$  has one endpoint in  $B(\partial\bar{U}, r)$ , for any section  $\sigma$ ,*

$$\frac{1}{\Delta}|J| < |\sigma| < \Delta|J|.$$

We state before a classical  $\lambda$ -lemma which controls iterations of unstable cones (see for example [BR], Appendix A):

**Lemma A.3.7** *Consider any Riemannian norm on the unitary bundle  $UM$  inducing a distance  $\tilde{d}$ . There exist constants  $0 < \lambda < 1$  and  $c' > 0$  such that for any integer  $n \geq 0$ , for any two points  $\zeta, \xi$  on a same long s-leaf tangent to  $\mathcal{C}^s(n_s - 1)$  of order greater than  $n$  and any  $v_\zeta \in \mathcal{C}_\zeta^u(n_c) \setminus \{0\}$ ,  $v_\xi \in \mathcal{C}_\xi^u(n_c - 1) \setminus \{0\}$ , we have*

$$\tilde{d}(DF^n(\zeta).v_\zeta, DF^n(\xi).v_\xi) \leq c'\lambda^n.$$

*Proof of Proposition A.3.6:* Our strategy is to construct a Lipschitz map from  $\sigma$  to  $J$  with uniform constant  $\Delta$ .

We claim that for any rectangle  $R(J, L_1, L_2)$  of order 0 and any section  $\sigma$  one can define a Lipschitz homeomorphism  $\phi$  from  $J$  to  $\sigma$  with some uniform Lipschitz constant  $\tau$  such that for any  $z \in J$ , the points  $z$  and  $\phi(z)$  are on a same long s-leaf  $L_z$  tangent to  $\mathcal{C}^s(n_c - 1)$ .

Consider now the general case:  $R(J, L_1, L_2)$  is of order  $n$ . Using the claim we define  $\phi_n : F^n(J) \rightarrow F^n(\sigma)$  such that for any  $z \in F^n(J)$ , the points  $z$  and  $\phi_n(z)$  are on a same long s-leaf  $L_z^n$ . As above we get for each  $0 \leq k \leq n$  a long s-leaf  $L_z^k$ . We note  $v(z)$  a unitary vector tangent at  $F^k(J)$  or  $F^k(\sigma)$  for  $z \in F^k(J)$  or  $z \in F^k(\sigma)$ . The map  $\phi_0 : J \rightarrow \sigma$  defined by

$$\phi_0(z) = (F^{-n} \circ \phi_n \circ F^n)(z)$$

is a homeomorphism. Its Lipschitz constant is bounded by:

$$\max_{z \in J} \|DF^n(\phi_0(z)).v(\phi_0(z))\|^{-1} \text{Lip } \phi_n \|DF^n(z).v(z)\|.$$

We decompose

$$\|DF^n(\phi_0(z)).v(\phi_0(z))\|^{-1} \|DF^n(z).v(z)\|$$

in a product of the following factors indexed by  $0 \leq k \leq n - 1$ :

$$\|DF(F^k \circ \phi_0(z)).v(F^k \circ \phi_0(z))\|^{-1} \|DF(F^k(z)).v(F^k(z))\|.$$

Using Lemma A.3.7 we bound each of them by

$$\exp(c\tilde{d}(v(F^k \circ \phi_0(z)), v(F^k(z)))) \leq \exp(cc'\lambda^k).$$

Hence  $\text{Lip } \phi$  is finite and bounded by

$$\Delta = \tau \exp\left(cc' \frac{1}{1 - \lambda}\right).$$

In a same way  $\text{Lip } \phi^{-1} \leq \Delta$  and the proposition is proved.

It remains to prove the claim: Recall that  $|J| > r_0$  and as in the proof of Lemma A.3.5.ii, we can subdivide  $J$  and  $\sigma$  in a finite number of curves  $[z_i, z_{i+1}]$  and  $[z'_i, z'_{i+1}]$  of length bigger than  $r$  and contained in a same chart. We construct also a foliation of  $R(J, L_1, L_2)$  by s-leaves:  $z_i$  and  $z'_i$  are on a same leaf  $H_i$  and the other ones are obtained by linear interpolation.

The holonomy of the foliation defines a homeomorphism  $\phi : J \rightarrow \sigma$ . For each  $i$ , the length of  $[z_i, z_{i+1}]$  and  $[z'_i, z'_{i+1}]$  are bounded from above and below. Thus  $\phi$  is Lipschitz.

□

**Remark A.3.1** If  $r$  is small and  $n_c$  large enough,  $c'$  in Lemma A.3.7 and  $|\tau - 1|$  can be chosen arbitrarily small. Thus  $\Delta$  is arbitrarily close to 1.

As a corollary we get a correspondence between the length of a rectangle and its volume :

**Corollary A.3.8** *There exists  $\theta > 1$  such that for any rectangle  $R(J, L_1, L_2)$  of order  $n$  as in Proposition A.3.6 we have*

$$\text{Volume}(R_{\frac{r_3}{2}}(J, L_1, L_2)) \geq \theta|J|.$$

*Proof:* For small values of  $n$ , the length of  $J$  is bounded from below and the result is obvious. Thus we only have to consider the cases  $n$  is large.  $L_1$  and  $L_2$  are close together.

Recall that the volume of the ball centered at  $J$  in  $L_1$  of radius  $\frac{r_3}{2}$  and the angle between vectors of  $\mathcal{C}^s$  and  $\mathcal{C}^u$  are uniformly bounded from below. The volume is computed by integration along the unstable direction and the previous proposition ends the proof.

□

## A.3.4 Combinatorics

### A.3.4.1

For any long u-curve  $T$  and any  $n \in \mathbb{N}$  we define

$$E_n(T) = T \cap D(n).$$

$\mathcal{E}_n(T)$  is the set of all connected components of  $E_n(T)$  intersecting  $K$ . The unions of those sets over all curves  $T$  is noted  $\mathcal{E}_n$ .

The following proposition is an easy consequence of Definition A.2.3.4 and Remark A.2.3.2.

**Proposition A.3.9** *i. Let  $T$  be any long u-curve. Then, for any  $n \geq m$ ,  $E_n(T) \subset E_m(T)$ . If  $J \in \mathcal{E}_{m+1}(T)$ , there exists  $J' \in \mathcal{E}_m(T)$  such that  $F(J) \subset J'$ .*

*ii. For all integer  $n \geq 0$  and all  $J \in \mathcal{E}_n$ ,  $F^{n+1}(J)$  contains a long u-curve.*

*Proof:* For i), Lemma A.3.3 shows that the connected part of  $F(J \cap \bar{U})$  that contains  $F(J)$  is a long u-curve.

For ii), we get by formula (A.6)

$$\partial J \subset \partial F^{-n-1}(\Omega) \cup \partial U \cup \dots \cup \partial F^{n+1}(\bar{U}).$$

The remark A.2.3.2 implies then that

$$\partial J \subset \partial F^{-n-1}(\Omega) \cup \partial F^{n+1}(\bar{U}).$$

□

### A.3.4.2

Consider u-curves  $J \subset D(n)$  and  $J' \subset D(m)$  for some  $m \leq n$  and  $0 < \varepsilon \leq r'$ . If there exist  $\zeta \in J$  and  $\xi \in J'$  with  $\zeta$  and  $\xi$  on a s-leaf of diameter smaller than  $\varepsilon$  and of order  $m$ , we will say that  $J'$   $\varepsilon$ -covers  $J$ . When  $\varepsilon = r'$  we will only say that  $J'$  covers  $J$ .

**Proposition A.3.10** *Any integer  $n \in \mathbb{N}$ , any curve  $J \in \mathcal{E}_n$  with endpoints  $z_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  satisfy the following properties:*

- i. *Any long s-leaves  $L_i$  of order  $n$  through  $z_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  are disjoint.*
- ii. *Suppose that  $J' \in \mathcal{E}_m$ ,  $1 \leq m < n$ , covers  $J$  and that  $F^{m+1}(J')$  does not intersect  $\bar{\Omega}$ . Then for any choice of long s-leaves  $L'_j$  with order  $n$  at the endpoints of  $J'$ ,  $J$  is contained in  $R(J', L'_1, L'_2)$  and the leaves  $L_i$  and  $L'_j$  are disjoint.*

*Proof:* We first remark that the s-leaves  $L_i$  have their  $n$  first iterates of diameter less than  $r$ . Moreover the distance between  $F^n(z_1)$  and  $F^n(z_2)$  is bigger than  $r_0$  by (A.5). This implies the first part of the proposition.

To prove the second part we consider the long u-curve  $F^{m+1}(J')$  and the u-curve  $F^{m+1}(J)$ . Note that  $F^{m+1}(J) \subset D^0$ .  $F^{m+1}(L_i)$  and  $F^{m+1}(L'_i)$  are s-leaves of diameter bounded by  $10r$ .  $\bar{\Omega} \cap F^{m+1}(J') = \emptyset$ . Hence the endpoints of  $J'$  are in  $\partial \bar{U}$ . The leaves  $F^{m+1}(L'_i)$  are contained in  $B(M \setminus U, r)$  and the leaves  $F^{m+1}(L_i)$  inside  $B(V, r)$ . Thus they are disjoint (recall (A.5)). This imply that  $L_i$  and  $L'_i$  are disjoint. Take any u-curve  $S$  containing  $J$  and crossing  $\bar{U}$ . It contains also a section  $\sigma$  of  $R(J', L'_1, L'_2)$  and  $\sigma \cap J$  is non-empty.  $F^{m+1}(\sigma)$  has its endpoints outside  $\bar{V}$ . Thus  $J \subset \sigma$ . Hence  $J$  is contained in  $R(J', L'_1, L'_2)$ .

□

**Proposition A.3.11** *Under the previous assumptions, if  $J' = F^j(J)$  with  $j \leq n - 1$  and if  $J'$  intersects  $R_{r_2}(J, L_1, L_2)$ , there exists a fixed point of  $F^j$  in  $R_{r'}(J, L_1, L_2)$ .*

*Proof:* By Proposition A.3.10,  $J'$  defines a section  $\gamma$  of  $R_{\frac{r'}{2}}(J, L_1, L_2)$  (recall Section A.3.2.7). The curve  $F^j(\gamma)$  is a section of  $R_{16^{-j}\frac{r'}{2}}(J', L'_1, L'_2)$  (recall the end of Section A.3.2.6) and contains a section of the rectangle  $R_{(16^{-j+1})\frac{r'}{2}}(J, L_1, L_2)$ .

By induction any iterate  $l$  of  $\gamma$  by  $F^j$  contains a section  $\gamma_l$  of  $R_{r_l}(J, L_1, L_2)$  where

$$r_l = \frac{r'}{2}(1 + 16^{-j} + (16)^{-2j} + \dots + (16)^{-lj}) < r'.$$

Hence  $\gamma_l$  is a curve contained in  $R_{r'}(J, L_1, L_2)$ . The sequence of those iterates converge to a Lipschitz curve  $\bar{\gamma}$  with  $\bar{\gamma} \subset F^j(\bar{\gamma})$  and  $\bar{\gamma}$  contains a fixed point.

□



### A.3.4.3

Note that if  $R(J)$  and  $R(J')$  are some rectangles with  $J$  and  $J'$  as in Section A.3.4.2 and if there is no  $r_3$ -covering relation between  $J$  and  $J'$  then  $R_{\frac{r_3}{2}}(J)$  and  $R_{\frac{r_3}{2}}(J')$  are disjoint. As a corollary to the previous section we get the following:

**Corollary A.3.12** *There exists a constant  $k_v > 0$  such that for any rectangle of order  $n \geq 0$ ,  $R(J, L_1, L_2)$ , and with no  $r_3$ -covering relations between the iterates  $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m \leq n$  of  $J$  then*

$$\sum_{j=0}^m |F^{k_j}(J)| < k_v.$$

*Proof:* By assumptions the rectangles  $R_{\frac{r_3}{2}}(F^{k_j}(J), L_1^{k_j}, L_2^{k_j})$  are all disjoint and of volume bigger than  $\theta|F^{k_j}(J)|$  for  $0 \leq j \leq m$ . We deduce that

$$\sum_{j=0}^m |F^{k_j}(J)| < \frac{\text{Volume}(\bar{U})}{\theta}.$$

□

### A.3.5 No wandering u-curve

We set  $e_n = \max_{J \in \mathcal{E}_n} |J|$ .

**Proposition A.3.13**

$$e_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

*It implies that  $K$  contains no u-curve.*

*Proof:* We prove the proposition by contradiction: suppose that the proposition is false. One can find some  $\varepsilon > 0$  and some infinite sequence  $(\bar{J}_{n_i})$  with  $(n_i)$  strictly increasing,  $\bar{J}_{n_i} \in \mathcal{E}_{n_i}$  and  $|\bar{J}_{n_i}| > \varepsilon$  for any  $i$ . Any accumulation point for  $(\bar{J}_{n_i})$  is a curve  $\bar{J}$  of length bigger than  $\varepsilon$ . Moreover for all  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{J}$  is included in  $D(k)$ . One deduces that through each point  $z$  of  $J$  there exists a unique long s-leaf  $W_z^s$  of infinite order.

**Lemma A.3.14** *Up to performing a change on the sequence  $(\bar{J}_{n_i})$ , one can form a new sequence  $(J_n)$  with the following additional property: there exists a u-curve  $T$  crossing  $\bar{U}$  such that  $J_n \subset T$  for all  $n$ .*

*Proof:* If  $\bar{J}_{n_i}$  and  $\bar{J}$  are close enough,  $\bar{J}$  projects by holonomy with respect to the foliation  $W_{\bar{J}}^s$  on a subcurve  $\bar{J}' \subset \bar{J}_{n_i}$  not reduced to a point and every point in  $\bar{J}'$  remains in  $D$  by forward iterations. Consider now any u-curve  $T$  containing  $\bar{J}'$  and for each  $n$  the element  $J_n$  of  $\mathcal{E}_n(T)$  containing  $\bar{J}'$ .

□

The sequence  $(J_n)$  is decreasing and converge to an u-curve  $J \subset T$ .

Now, we claim that there is no  $r_2$ -covering between iterates  $k$  and  $j$  of  $J$ : we form the rectangles  $R(F^k(J), L_1^k, L_2^k)$  where  $L_1^k$  and  $L_2^k$  are subsets of the stable manifolds of the endpoints of  $F^k(J)$ . Consider some u-curves  $T_k \subset F^k(T)$  containing  $F^k(J)$

and crossing  $\bar{U}$ . Let us assume that  $F^k(J) \cap R_{r_2}(F^j(J)) \neq \emptyset$  with  $k - j > 0$ . Then  $T_k$  defines a section  $S_k$  of  $R(F^j(J), L_1^j, L_2^j)$ . As  $F^n(J) \subset D$  for any  $n \in \mathbb{N}$  and as  $F$  contracts uniformly in the unstable direction, we get  $F^n(S_k) \subset D$  for any  $n \in \mathbb{N}$ . Among the subsegments of  $T$  which remains in  $D$  by forward iterations,  $F^k(J)$  is maximal for the inclusion. Hence  $S_k \subset F^k(J)$ .

Symmetrically  $T_j$  contains a section  $S_j$  of  $R(F^k(J), L_1^k, L_2^k)$  and  $S_j \subset F^j(J)$ . Recall that  $L_i^j$  and  $L_{i'}^k$  are disjoint or contained in a same s-leaf,  $i, i' \in \{1, 2\}$ . We deduce that in fact  $S_j = F^j(J)$  and  $S_k = F^k(J)$ .

By the same argument as in Proposition A.3.11,  $R_{r'}(F^j(J), L_1^j, L_2^j)$  must contain a fixed point  $Q$  of  $F^{k-j}$ . By Section A.3.2.3,  $Q$  must have an unstable branch which leaves  $R(F^j(J), L_1^j, L_2^j)$  and intersect  $L_1^j$  or  $L_2^j$  in a fixed point for  $F^{2(k-j)}$ . It contradicts the definition of the unstable manifold and proves the claim.

We finish the proof by some length estimate: we use Corollary A.3.12 for each  $J_n$ . We get

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |F^k(J)| < k_v \text{ and } |F^k(J)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (\text{A.9})$$

We use Lemma A.3.2 with constant  $2k_v$  and get some constant  $\eta > 0$ . Iterating  $J$  a little bit more we can assume that

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |F^k(J)| < \frac{r}{2 + \eta}.$$

Take any u-curve  $S \subset T$  with  $J \not\subset S$  of length smaller than  $\min(2, 1 + \eta)|J|$ . We prove by induction on  $k$  that

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad F^k(S) \subset B(\bar{V}, r) \text{ and } |F^k(S)| < 2|F^k(J)|.$$

We suppose it is true for all integers  $k$  with  $k < k_0$  and prove it for  $k_0$ : the inductive assumption and (A.9) imply

$$\sum_{k=0}^{k_0-1} |F^k(S)| < 2k_v.$$

We also have  $|S| < (1 + \eta)|J|$  and by Lemma A.3.2, we get

$$|F^{k_0}(S)| < 2|F^{k_0}(J)| < r.$$

$F^{k_0}(S)$  contains a point of  $\bar{V}$ . Hence  $F^{k_0}(S) \subset B(\bar{V}, r)$  and our claim is proved.

No forward iterate  $F^k(S)$  can intersect  $\Omega$ : if not  $F^k(S)$  would contain a point in  $W_P^s$  and a point outside  $W_P^s$ . A further iterate of  $S$  would be of length bigger than  $r_0$  by Section A.3.2.3. But

$$\forall k \geq 0, \quad |F^k(S)| < \frac{2r}{2 + \eta}.$$

We get a contradiction. This proves that  $\forall k, F^k(S) \subset D$ . Thus  $\forall n, S \subset J_n$ . This contradicts the definition of  $J$  (recall  $J \not\subset S$ )

□

### A.3.6 Growth of derivatives: the case of periodic orbits

**Proposition A.3.15** *There exists  $c > 0$  such that for any periodic orbit  $O(z)$  in  $U$  of minimal period  $q$ , and not equal to  $\{P\}$ , and for any unstable vector  $v$  at  $z$ ,*

$$\|DF^q(z).v\| \geq \frac{c}{e_q} \|v\|.$$

*Proof:* We first fix such a periodic orbit  $O$  and remark that it can not intersect  $\Omega$  so that it is contained in  $O$ . Hence  $O$  is a hyperbolic orbit of  $K$ . For any point  $z_i$ ,  $1 \leq i \leq q$ , of the orbit let us take as u-curve that crosses  $\bar{U}$ , a part  $T_i$  of the unstable manifold of  $z_i$  containing  $z_i$ . The corresponding element of  $\mathcal{E}_0$  is called  $J(i)$  and we fix any rectangle  $R(i) = R(J(i), L_1(i), L_2(i))$  associated to  $J(i)$ .  $L(i)$  is the long leaf centered at  $z_i$  contained in  $W_{z_i}^s$ . As in the proof of Lemma A.3.10 for any  $z_i \in R_{r'}(j)$ ,  $J(j)$  and  $L(i)$  intersect in a unique point  $\tilde{z}_i$ . We think of it as the projection of  $z_i$  on  $J(j)$ .  $\tilde{z}_i$  lies on the unstable manifold of a periodic orbit and must stay in  $\bar{V}$  under backward iterations (Lemma A.3.3). It must also remain at distance less than  $r$  from  $K$  by forward iterations and thus is contained in  $K$ .

**Lemma A.3.16** *There are some points  $z_{i_0}, \dots, z_{i_k}$  in  $O$  and a  $q$ -periodic map  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \{i_0, i_1, \dots, i_k\}$  such that the following properties (C1)-(C3) are satisfied:*

$$\forall 0 \leq i < q-1, z_i \in R_{r'}(\phi(i)), \quad \forall 0 \leq j \leq k, \phi(i_j) = i_j, \quad (\text{C1})$$

$$\forall 0 \leq j < j' \leq k, z_{i_j}, z_{i_{j'}} \notin R_{r_3}(i_j). \quad (\text{C2})$$

*For any  $0 \leq j \leq k$ , and any  $i \in \phi^{-1}(i_j)$  one defines  $J(F(\tilde{z}_i))$  the element of  $\mathcal{E}_0$  contained in  $F(T_{i_j})$  and containing  $F(\tilde{z}_i)$ . We consider the largest segment  $\tilde{\gamma}_i \subset J(i_j)$  containing  $\tilde{z}_i$  with the following property: for any  $0 \leq s \leq q-1$  such that  $J(F(\tilde{z}_i)) \subset B(T_s, r')$  and  $F(\tilde{\gamma}_i) \cap R(s) \neq \emptyset$  then  $\tilde{\gamma}_i \subset R(s)$ . We will say that  $z_i$  and  $z_{i'}$  are bound if  $\phi(i) = \phi(i')$  and  $\tilde{\gamma}_i = \tilde{\gamma}_{i'}$ .*

$$z_i \text{ and } z_{i'} \text{ are bound together} \Rightarrow \phi(i+1) = \phi(i'+1). \quad (\text{C3})$$

*Proof:* We will construct a map  $\phi$  which satisfies moreover we require two additional properties:

$$\forall 0 \leq i \leq q-1, 0 \leq \phi(i) \leq i. \quad (\text{C4})$$

$$\begin{aligned} &\text{If } z_i \text{ (} 0 \leq i \leq q-2 \text{) is not bound to any } z_{i'}, \text{ with } 0 \leq i' < i, \\ &\text{then } z_{i+1} \in R_{r_2}(\phi(i+1)). \text{ More precisely if } z_{i+1} \in R_{r_2}(0) \text{ then } \phi(i+1) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C5})$$

$\phi$  is defined inductively on  $i$ : We set first  $z_{i_0} = z_0$  and  $\phi(0) = 0$ . Let assume now that  $\phi(i)$  is defined for  $0 \leq i \leq n-1$ , ( $n < q$ ) with values  $0 = i_0 < \dots < i_l < q-1$ . Then  $\phi(z_n)$  is defined in the following way:

There are three cases:

1.  $z_{n-1}$  is bound to another  $z_i$ ,  $0 \leq i < n-1$ . Then  $\phi(n) = \phi(i+1)$ .
2.  $z_{n-1}$  is bound with no  $z_i$   $0 \leq i < n-1$ , and for any  $0 \leq j \leq l$ ,  $z_n \notin R_{r_2}(i_j)$ . Then we set  $i_{l+1} = n$ ,  $\phi(n) = n$ .
3.  $z_{n-1}$  is bound with no  $z_i$  but  $z_n \in R_{r_2}(i_j)$  for some  $0 \leq j \leq l$ . Then  $\phi(n) = i_j$ . There may be several possible choices. However if  $z_n \in R_{r_2}(0)$  then  $\phi(n) = 0$ .

First one checks Conditions (C1–C5) by induction. Note that  $\phi(n)$  is well-defined in case 1): the binding is an equivalence relation and  $\phi(i+1)$  does not depend on the choice of  $z_i$ . By condition (C5) one can assume  $z_{i+1} \in R_{r_2}(\phi(n))$ . Thus the unstable manifold of  $z_{i+1}$  defines a section of  $R_{\frac{r'}{2}}(\phi(n))$ . On the other hand the unstable manifold of  $z_i$  defines a section of  $R_{\frac{r'}{2}}(\phi(i))$ . It implies that  $z_{n-1}$  is at distance less than  $r' + \frac{r}{2}$  from this section. Hence,  $z_n$  is at distance less than  $(r' + \frac{r}{2})/16$  from the unstable manifold of  $z_{i+1}$ . Recall that  $\frac{r}{4} < r'$ . We deduce that the distance between  $z_n$  and the unstable manifold of  $z_{\phi(n)}$  is bounded by  $\frac{r'}{2} + \frac{r'}{8} + \frac{r'}{4}$ . Thus  $z_n \in R_{r'}(\phi(n))$ .

One checks easily that other conditions (C2–C5) are satisfied.

One completes the definition of  $\phi$  by periodicity. It remains to prove that if  $z_i$  and  $z_{q-1}$  ( $0 \leq i < q-1$ ) are bound then  $\phi(i+1) = \phi(q)$ . The index  $i$  can be taken minimal so that  $z_i$  is bound with no  $z_{i'}$  ( $0 \leq i' < i$ ).

Note that since  $z_i$  and  $z_{q-1}$  are bound together,  $z_i$  is at distance less than  $r' + \frac{r}{2}$  from the unstable manifold of  $z_{q-1}$ . Thus  $z_{i+1}$  is at distance less than  $(r' + \frac{r}{2})/16$  from the unstable manifold of  $z_0$ . We get  $z_{i+1} \in R_{r_2}(0)$  and by (C5)  $\phi(i+1) = 0$ . Hence  $\phi(i+1) = \phi(q) = 0$ .

□

**Lemma A.3.17** *The number of points  $z_{i_0}, \dots, z_{i_k}$ , is bounded by some integer  $N$  which does not depend on the choice of the orbit  $O$ .*

*Proof:* The volume of each  $R_{\frac{r_3}{2}}(i_j)$  is uniformly bounded from below by  $\theta r_0$  (recall Corollary A.3.8 and  $|J(i)| > r_0$ ). Thus it is enough to bound from above  $\sum \text{Volume}(R_{\frac{r_3}{2}}(i_j))$ .

For each  $0 \leq j \leq k$  we bound the number of rectangles  $R_{\frac{r_3}{2}}(i_{j'})$ ,  $j < j' \leq k$ , intersecting  $R_{\frac{r_3}{2}}(i_j)$ : recall that  $T_j$  is a u-curve  $T_j$  with length less than  $k_l$  which crosses  $\bar{U}$  and contains  $J(i_j)$ . Assuming that  $R_{r_3}(i_j)$  intersects  $R_{r_3}(i_{j'})$ ,  $T_j$  contains a section  $I_{j'}$  of  $R(i_{j'})$ . The endpoints of  $I_{j'}$  are in  $B(\partial\bar{U}, r) \cup \bar{\Omega}$ . If  $R_{\frac{r_3}{2}}(i_j)$  intersects another rectangle  $R_{\frac{r_3}{2}}(i_{j''})$  with  $j'' > j'$ , the projection of  $z_{i_{j''}}$  on  $T_j$  is not in  $I_{j'}$  (condition (C2)) and must be at distance at least  $r_0$  from  $I_{j'}$ . We deduce that at most  $\frac{k_l}{r_0}$  rectangles  $R_{\frac{r_3}{2}}(i_{j'})$ ,  $j < j' \leq k$  can intersect  $R_{\frac{r_3}{2}}(i_j)$ .

Now any point in  $\bar{U}$  is at most in  $\frac{k_l}{r_0}$  rectangles  $R_{\frac{r_3}{2}}(i_j)$ . Hence we bound  $\sum \text{Volume}(R_{\frac{r_3}{2}}(i_j))$  by  $\frac{r_0 \text{Volume}(\bar{U})}{k_l}$ .

□

Now we prove the proposition:  $R(0) \setminus L(0)$  has two components. If  $r$  is small enough, one of them does not intersect  $F^{-1}(\bar{\Omega})$  (recall Definition A.2.3.4). We note  $Q$  the corresponding endpoint of  $J(0)$ .

We consider the point  $z_i$  with  $\phi(i) = 0$  whose projection  $\tilde{z}_i$  is as close as possible to  $Q$ .  $Q_i$  is the endpoint of  $J(i)$  corresponding to  $Q$ . We define  $\sigma_i \subset [z_i, Q_i]$  to be the largest segment of  $J(i)$  that contains  $z_i$  with the following property: for any  $0 \leq s \leq q-1$ , if  $\sigma_i \subset B(T_s, r)$  and  $\sigma_i \cap R(s) \neq \emptyset$ , then  $\sigma_i$  is contained in  $R(s)$ .

One leaf  $L'(i) = L_1(s)$  or  $L_2(s)$ , for some  $s$ , contains one endpoint of  $\sigma_i$  and defines the rectangle  $S(i) = R(\sigma_i, L(i), L'(i))$ . Then  $T_0$  contains a section  $\tilde{\sigma}_i$  of  $S(i)$ . By construction  $F(L'(i))$  has one point in  $\partial\bar{U}$  and

$$|\sigma_i| > \frac{r_0}{\Delta}.$$

By induction one defines for  $1 \leq s \leq q$ ,

$$S(i-s) = F^{-1}(S(i-s+1)) \cap R(\phi(i-s)).$$

If  $F^{-1}(S(i-s+1))$  intersects some rectangle  $R(j)$ , it can not intersect  $L_1(j) \cup L_2(j)$ . Indeed it would imply either that  $S(i-s+1) \cap B(\partial\bar{U}, r) \neq \emptyset$  (but  $S(i-s+1) \subset B(\bar{V}, r)$ ) or that  $F^{-1}(S(i-s+1))$  intersects  $F^{-1}(\bar{\Omega})$  (but  $S(i)$  does not intersect  $\bar{\Omega}$ ). This proves that  $S(i-s)$  is a subrectangle of  $R(\phi(i-s))$ .

It implies also that  $J(\phi(i-s))$  induces a section  $\tilde{\sigma}_{i-s}$  of  $S(i-s)$  (one endpoint is  $\tilde{z}_{i-s}$ ) and that  $\sigma_{i-s} = F^{-s}(\sigma_i)$  is a section of  $S(i-s)$  which contains  $z_{i-s}$ .

Now we prove that for  $1 \leq s \leq q$ ,  $\tilde{\sigma}_{i-s} \subset \tilde{\gamma}_{i-s}$ : let us assume that for some  $0 \leq j \leq q-1$ ,  $F(J(\tilde{z}_{i-s})) \subset B(T_s, r')$  and  $F(\tilde{\sigma}_{i-s}) \cap R(j) \neq \emptyset$ . If  $s > 1$  as  $S(i-s+1) \subset F^{-1}(S(i-s+2))$  does not intersect  $L_1(j)$  nor  $L_2(j)$  we get that  $F(\tilde{\sigma}_{i-s}) \subset R(j)$ . If  $s = 1$ , and  $F(\tilde{\sigma}_{i-1}) \not\subset R_{\frac{r}{2}}(s)$  then  $\sigma_i$  would intersect  $R(s)$  and its complementary and would be contained in  $\bar{B}(T_s, r)$ . It contradicts the definition of  $\sigma_i$ . Hence  $F(\tilde{\sigma}_{i-1}) \subset R(s)$ .

Assuming that  $\phi(i-s) = \phi(i-s') = j$ ,  $1 \leq s' < s \leq q$ , one shows by contradiction that the rectangles  $S(i-s), S(i-s') \subset R(j)$  are disjoint: If not as  $L(i-s), L(i-s')$ ,  $L'(i-s)$  and  $L'(i-s')$  are disjoint  $\tilde{\sigma}_{i-s}$  and  $\tilde{\sigma}_{i-s'}$  intersect each other. Thus  $z_{i-s}$  and  $z_{i-s'}$  are bound together. By condition (C3),  $\phi(i-s+1) = \phi(i-s'+1)$  and the rectangles  $S(i-s+1)$  and  $S(i-s'+1)$  intersect each other. By induction one shows that  $\phi(i-s+s') = 0$  and  $S(i-s+s')$  intersects  $S(i)$  ( $\phi$  is  $q$ -periodic). By our choice of  $z_i$ ,  $z_{i-s+s'}$  is not in  $S(i)$ . Hence  $z_i$  is in  $S(i-s+s')$ ;  $z_i$  and  $z_{i-s+s'}$  are bound together;  $S(i-s+s')$  intersects  $S(i-q)$ . Repeating the same argument we show that  $\phi(i+s-s') = 0$  and  $z_{i+s-s'}$  is in  $S(0)$  which is a contradiction.

One gets for any  $0 \leq j \leq k$  that  $|J(i_j)| \leq k_l$  and

$$\sum_{1 \leq s \leq q} |\tilde{\sigma}_{i-s}| < N k_l$$

and by Proposition A.3.6

$$\sum_{1 \leq s \leq q} |\sigma_{i-s}| < N k_l \Delta.$$

As  $|\sigma_i| > r_0$  and  $F^q(\sigma_{i-q}) = \sigma_i$ , using also that  $z_i \in \sigma_{i-q}$  and  $\sigma_{i-q} \subset E_q$ , we get by Lemma A.3.2 for any unstable unitary vector  $v$  at  $z_i$ ,

$$\|DF^q(z_i).v\| \geq \exp(-2c_1 N k_l \Delta) \frac{|\sigma_i|}{|\sigma_{i-q}|} \geq \exp(-2c_1 N k_l \Delta) \frac{r_0}{e_q}.$$

□

### A.3.7 Growth of derivatives: proof of Theorem A.1.4

Recall that we have fixed a small neighborhood of  $P$ ,  $W$ .

By Proposition A.3.15,  $F$  has only a finite number of periodic orbits in  $K$  with all their eigenvalues in  $B(0, 2)$ . Hence there exists  $1 < \lambda$  such that for every periodic orbit of  $K$  different from  $\{P\}$ , the module of the unstable eigenvalue is bigger than  $\lambda^3$ . Once one knows that the unstable eigenvalues are bounded from below one can require a new condition on the choice of the constants  $r$  and  $n_c$ . By remark A.3.1,  $\Delta$  can be chosen close to 1:

$$1 < \Delta^2 < \lambda.$$

**Lemma A.3.18** *There exists  $m_1 > 0$  such that: for any  $q$ -periodic orbit  $O(z) \neq \{P\}$ , let  $T$  be the long  $u$ -curve through  $z$  contained in  $W^u(z)$  and take for some  $n \geq m_1 + q$ ,  $J \in \mathcal{E}_n(T)$  containing  $z$ . Assume also that there is no  $r_3$ -covering between  $J$ ,  $F(J)$ ,  $\dots$ ,  $F^{q-1}(J)$ . Then, for any  $z' \in J$ , and any unitary vector  $w'$  tangent to  $J$  at  $z'$ ,*

$$\|DF^q(z').w'\| \geq \lambda^2. \quad (\text{A.10})$$

*Proof:* We first assume only that  $J \in \mathcal{E}_n(T)$  for some  $n \geq q$ . For any unitary vectors  $w$  tangent to  $J$  at  $z$ ,

$$\|DF^q(z').w'\| \geq \|DF^q(z).w\| \exp\left(-2c_1 \sum_{k=0}^{q-1} |F^k(J)|\right).$$

Since there is no  $r_3$ -covering between iterates of  $J$ ,

$$\sum_{k=0}^{q-1} |F^k(J)| \leq k_v.$$

If the orbit satisfies:

$$\|DF^q(z).w\| > \exp(+2c_1 k_v) \lambda^2, \quad (\text{A.11})$$

we get easily (A.10). Only a finite number of periodic orbits do not satisfy (A.11). Their period are bounded by some  $q_0$ . We consider an integer  $m_1$  such that

$$\exp(2c_1 q_0 e_{m_1-1}) < \lambda$$

and some orbit  $O(z)$  with period bounded by  $q_0$ . Recall that

$$\|DF^q(z).w\| \geq \lambda^3.$$

We deduce that if  $n \geq q_0 + m_1 - 1$ ,  $|J| + \dots + |F^q| < q_0 e_{m_1-1}$  and this implies (A.10).  $\square$

We prove also :

**Lemma A.3.19** *There exists some  $m_2 \geq 0$  such that: for any  $n \geq m_1$ ,  $z \in K$  and  $J \in \mathcal{E}_{n+m_2}$  such that  $z \in J$  and  $F^n(z) \notin W$ , we have  $J \cap \bar{\Omega} = \emptyset$ .*

*Proof:* We consider some integer  $m_0 \geq 0$  such that

$$\forall n \geq m_0, F^n(\bar{\Omega}) \subset W.$$

For  $m_1 \geq m_0$  large enough the lemma is now a consequence of Proposition A.3.15.  $\square$

We set  $n_1 = \max(m_1, m_2)$ . Take  $z_{-n_c}, \dots, z_0, z_1, \dots, z_n$  an orbit of  $F$  in  $K$  with  $z_n \notin W$  and  $v_{-n_c} \in \mathcal{C}_{z_{-n_c}}^u$ . We set

$$v_k = DF^{k+n_c}(z_{-n_c}).v_{-n_c}.$$

We fix a long  $u$ -curve  $T$  containing  $z_0$  of order bigger than  $n_c$  and tangent to  $v_0$ .  $J$  denotes an element of  $\mathcal{E}_{n+n_1}(T)$  containing  $z_0$ . We consider also one rectangle

$R(J, L_1, L_2)$  with  $L_1$  and  $L_2$  of order  $n + n_1$  and its iterates  $R(F^k(J), L_1^k, L_2^k)$  with  $0 \leq k \leq n$ . Remark that from Lemma A.3.19  $F^n(J)$  can not intersect  $\Omega$ .

**Lemma A.3.20**

$$\sum_{m=0}^{n-n_1} |F^m(J)| \leq \frac{k_v}{1-\lambda^{-1}}.$$

*Proof:* First we claim that if for some  $m < s \leq l \leq n - n_1$ ,  $F^l(J)$   $r_3$ -covers  $F^m(J)$  and  $F^s(J)$ , then

$$\lambda |F^m(J)| < |F^s(J)|. \quad (\text{A.12})$$

To prove the claim it is sufficient to assume that with  $l, m$  fixed,  $s$  is minimal with those properties. By Proposition A.3.10, we introduce a section  $F^{s-m}(I) \subset F^s(I)$  of  $R(F^l(J), L_1^l, L_2^l)$  containing  $F^s(J)$ . It implies by Section A.3.2.7 that  $F^{s-m}(I)$  is in  $R_{r_2}(F^l(J), L_1^l, L_2^l)$ . By Proposition A.3.10,  $I$  is also contained in  $R_{r_2}(F^l(J), L_1^l, L_2^l)$ . Thus  $R_{r_2}(F^{s-m}(I), L_1^l, L_2^l)$  contains  $I$ . We define also the rectangle  $R(I, L_1^l, L_2^l)$  such that  $F^{s-m}(L_i^l) \subset L_i^l$   $i = 1, 2$ . By Proposition A.3.11 there exists in the rectangle  $R_{r'}(I, L_1^l, L_2^l)$  a fixed point  $Q$  of the map  $F^{s-m}$ . Recall that  $R(F^n(J), L_1^n, L_2^n)$  does not contain the point  $P$  so that  $R(F^l(J), L_1^l, L_2^l)$  can not contain  $P$ . Thus  $Q$  is different from  $P$  and  $Q$  is hyperbolic.  $W^u(Q)$  defines a  $r' + r_2$ -section  $S$  of  $R(I, L_1^l, L_2^l)$ . We remark also that there is no  $r_3$ -covering between the curves  $I, F(I), \dots, F^{m-s-1}(I)$ . Indeed it would imply by Proposition A.3.10 that some  $F^j(J)$ ,  $m+1 \leq j \leq s-1$  is contained in  $R(F^l(J), L_1^l, L_2^l)$  and contradict the minimality of  $s$ .

The section  $S$  is contained in an u-curve of  $\mathcal{E}_{n-l}$  with  $n-l \geq n_1 - 1$ . Hence by (A.10) and definition of  $\lambda$ , for any  $z \in S$ , and  $w$  any unitary vector tangent to  $I$  at  $z$ ,

$$\|DF^{s-m}(z).w\| > \lambda \Delta^2.$$

$S$  contains a section  $S'$  of  $R(F^m(J), L_1^m, L_2^m)$  and  $F^{s-m}(S')$  is a section of  $R(F^s(J), L_1^s, L_2^s)$ . Thus

$$|F^{s-m}(S')| > |S'| \lambda \Delta^2$$

and by Proposition A.3.6 the claim is proved.

We prove now the announced property. Consider  $F^{n-n_1}(J), F^{n-n_1-1}(J), \dots, J$ . By Proposition A.3.10 there exist  $n - n_1 = l_{j_0} > l_{j_0-1} > \dots > l_1 \geq 0$  such that every  $F^m(J)$ ,  $0 \leq m \leq n - n_1$  is  $r_3$ -covered by some  $F^{l_j}(J)$  and for  $1 \leq j < j' \leq r$ , there is no covering relation between  $F^{l_j}(J)$  and  $F^{l_{j'}}(J)$ . The construction is done by induction on the sequence  $(F^{n-n_1-k}(J))_k$ .

Using the claim for any  $1 \leq j \leq j_0$ ,

$$\sum_{F^m(J) \text{ covered by } F^{l_j}(J)} |F^m(J)| \leq \frac{|F^{l_j}(J)|}{1-\lambda^{-1}}.$$

Finally using Corollary A.3.12 we get

$$\sum_{j=1}^{j_0} |F^{l_j}(J)| \leq k_v$$

and

$$\sum_{m=0}^{n-n_1} |F^m(J)| \leq \frac{k_v}{1-\lambda^{-1}}$$

which gives the announced bound.  $\square$

We prove here theorem A.1.4 for the map  $F$  and the open set  $W$ : we got the estimate:

$$\sum_{m=0}^{n-1} |F^m(J)| \leq \frac{k_v}{1-\lambda^{-1}} + (n_1 - 1)k_l.$$

Thus

$$\begin{aligned} \|DF^n(z_0).v_0\| &> \exp\left(-2c_1\left(\frac{k_v}{1-\lambda^{-1}} + (n_1 - 1)k_l\right)\right) \frac{|F^n(J)|}{|J|} \|v_0\| \\ &> \exp\left(-2c_1\left(\frac{k_v}{1-\lambda^{-1}} + (n_1 - 1)k_l\right)\right) \frac{r_0}{e_n} \|v_0\|. \end{aligned}$$

And by Proposition A.3.13,  $\|DF^n(z_0).v_0\|$  is arbitrarily large if  $n$  is large enough. The end of the proof is straightforward.

## A.4 Local estimates

We saw in the previous section that at the time of the bifurcation,  $F$  is expanding in the unstable direction. It is not clear however that a similar work can be carried on for a perturbed map. In this section we give an other ingredient for proving expansion: we analyse the dynamics in a neighborhood of  $P$  for the perturbed maps.

### A.4.1 Saddle-node bifurcation

We are going on with the discussion of Section A.2.2: let  $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  be a smooth family of diffeomorphisms of  $M$ . The parameter space  $\Lambda$  is here an open subset of a finite-dimensional space. If  $P_{\lambda_0}$  is a saddle-node fixed point of  $F_{\lambda_0}$ ,  $(P_{\lambda_0}, \lambda_0)$  is a fixed point of the diffeomorphism

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \quad M \times \Lambda &\rightarrow M \times \Lambda \\ (z, \lambda) &\mapsto (F_\lambda(z), \lambda). \end{aligned}$$

By [HPS],  $\tilde{F}$  preserves locally a  $(\dim \Lambda + 1)$ -dimensional central submanifold  $W^c$  tangent to  $E_{P_0}^c \times T_{\lambda_0} \Lambda$  at  $(P_{\lambda_0}, \lambda_0)$ . For  $(z, \lambda) \in W^c$ ,  $W^c$  is transversal with respect to  $M \times \{\lambda\}$  so that  $W^c \cap (M \times \{\lambda\})$  is a submanifold of  $M \times \{\lambda\}$ .

**Definition A.4.1**  $(P_{\lambda_0}, \lambda_0)$  is said to be a **transversal saddle-node bifurcation** if

1.  $P_{\lambda_0}$  is a saddle-node fixed point of  $F_{\lambda_0}$ .
2. For some (and then any) central manifold  $W^c$  of  $\tilde{F}$  at  $(P_{\lambda_0}, \lambda_0)$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{F}|_{W^c}(P_{\lambda_0}, \lambda_0) \neq 0.$$



By condition 2, the bifurcation persists in a neighborhood of  $(P_{\lambda_0}, \lambda_0)$  along a submanifold  $\mathcal{O}^0$  of  $\mathcal{O}$  of codimension 1. Those bifurcations are described in [NPT] through their conjugacy classes. We recall now some basic facts about the local behaviour of the dynamics (see also Proposition A.1.1):

- We can shrink  $\mathcal{O}$  to a smaller neighborhood of  $\lambda_0$  so that  $\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^0$  is the union of two connected open sets  $\mathcal{O}^+$  and  $\mathcal{O}^-$ .
- There exists a neighborhood  $W$  of  $P_{\lambda_0}$  such that :
  1. For  $\lambda \in \mathcal{O}^-$ ,  $F_\lambda$  has no fixed point in  $W$  and every point leaves  $W$  by backward and forward iterations.
  2. For  $\lambda \in (\mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+)$ ,  $F_\lambda$  has two fixed points  $P_\lambda$  and  $Q_\lambda$  in  $U$ . They are distinct for  $\lambda \in \mathcal{O}^+$  and equal for  $\lambda \in \mathcal{O}^0$ . Moreover  $P_\lambda$  and  $Q_\lambda$  vary continuously with  $\lambda$ . When  $\lambda \in \mathcal{O}^0$ ,  $(P_\lambda, \lambda)$  is a transversal saddle-node bifurcation. When  $\lambda \in \mathcal{O}^+$ ,  $P_\lambda$  and  $Q_\lambda$  are hyperbolic:  $P$  is a saddle point and  $Q$  is a sink.

The choice of the manifold  $W^c$  is now fixed.

#### A.4.2 Local coordinates

We choose local coordinates near  $(P_{\lambda_0}, \lambda_0)$  in  $M \times \Lambda$  so that a point  $(z, \lambda)$  will be represented by

$$(x, y, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \times \Lambda$$

and  $y = 0$  is an equation for  $W^c$ . It is possible to take  $P_\lambda = (0, 0)$  for any  $\lambda \in \mathcal{O}^0$ :

$$x \mapsto F_\lambda(x, 0) = (f_\lambda(x), 0)$$

defines a family of local one-dimensional diffeomorphisms.

For any integer  $k \geq 0$  one can  $C^k$ -conjugate  $(f_\lambda)$  to the following normal form: <sup>2</sup>

$$f_\lambda(x) = -c(\lambda) + x + x^2 + o(x^2).$$

Consider the map

$$(z, \lambda) \mapsto (F_\lambda(z) - (c(\lambda), 0), \lambda).$$

The submanifold  $\{(0, 0)\} \times \Lambda \subset M \times \Lambda$  contains only fixed points and possesses a  $d - 1$ -dimensional invariant stable bundle. By [HPS] Theorem 5.5, there exists for this map an invariant manifold  $\hat{W}^s$  such that

1.  $\dim \hat{W}^s = d - 1 + \dim \Lambda$ .
2.  $\forall \lambda \in \mathcal{O}$ ,  $(0, 0, \lambda) \in \hat{W}^s$ .
3. For every  $(z, \lambda) \in \hat{W}^s$ ,  $\hat{W}^s$  is transversal with respect to  $M \times \{\lambda\}$  at  $(z, \lambda)$  so that

$$\hat{W}_\lambda^s = \hat{W}^s \cap (M \times \{\lambda\})$$

is a submanifold.

4.  $\hat{W}^s$  and  $W^c$  are transversal.

---

<sup>2</sup>Assuming that  $f_\lambda$  is  $C^\infty$  one can even deduce from [Ta] that when  $\lambda \in \mathcal{O}^0$ ,  $f_\lambda$  is conjugated to  $x \mapsto x + x^2 + \delta(\lambda)x^3$  but in general  $f_\lambda$  is only  $C^k$  due to the fact that  $W^c$  is not  $C^\infty$  (see [St]).

We change the coordinates so that  $x = 0$  is an equation for  $\hat{W}^s$ . Near  $(0, 0)$ ,  $F_\lambda$  has now the form:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -c + x(1 + x + O(1) \cdot y + o(x)) \\ B \cdot y + O(x, y) \cdot y \end{pmatrix}.$$

with  $C^k$  dependence in  $\lambda$ .  $B$  is an attracting linear automorphism: there exists  $\beta' < 1$  with  $\|B\| < \beta'$ . Note also that

$$\begin{aligned} c = 0 & \quad \text{when } \lambda \in \mathcal{O}^0, \\ c > 0 & \quad \lambda \in \mathcal{O}^+, \\ c < 0 & \quad \lambda \in \mathcal{O}^-. \end{aligned}$$

Locally the parameter space can be viewed as a product

$$\lambda = (c, l) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$$

with  $m = \dim \Lambda$  and  $\lambda_0 = (0, 0)$ . Our further estimates are needed only for  $\lambda \in (\mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+)$ . So we prefer work with the new smooth family  $(G_{\bar{\lambda}})_{\bar{\lambda} \in \bar{\mathcal{O}}}$  defined by

$$G_{(\bar{c}, \bar{l})} = F_{(\bar{c}^2, \bar{l})}$$

and the fixed point

$$\bar{P}_{\bar{\lambda}} = P_{(\bar{c}^2, \bar{l})} = (\bar{p}_{\bar{\lambda}}, 0)$$

is defined for any  $\bar{\lambda}$  and varies smoothly. The map

$$(z, \bar{\lambda}) \mapsto (G_{\bar{\lambda}}(z), \bar{\lambda})$$

preserves the submanifold  $\{(\bar{p}_{\bar{\lambda}}, 0)\} \times \bar{\mathcal{O}}$  which posses a  $(d-1)$ -dimensional invariant stable bundle. Again one deduces that the stable manifold of  $\bar{P}_{\bar{\lambda}}$  varies continuously in the  $C^k$ -topology so that near  $\bar{P}_{\bar{\lambda}}$ ,  $G_{\bar{\lambda}}$  can be conjugated to

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(1 + a + \delta x + \gamma y + o(x, y)) \\ B \cdot y + O(x, y) \cdot y \end{pmatrix}$$

with  $a = 0$  if and only if  $\bar{c} = 0$  and  $a > 0$  elsewhere,  $\delta(\lambda_0) = 1$  and  $\|B\| < \beta'$ .

Every tangent vector  $v$  decomposes into  $v_x + v_y$ . Suppose that  $F_{\lambda_0}$  satisfies a stable cone field criterion in a neighborhood of  $P_{\lambda_0}$  then any diffeomorphism near  $F_{\lambda_0}$  satisfies a cone field criterion with the same cone field. In the following we will suppose that the unstable cone at  $P_{\lambda_0}$  is sufficiently sharp:

$$\mathcal{C}_{P_{\lambda_0}}^u \subset \{v = v_x + v_y \in TM_{P_{\lambda_0}}, \quad \|v_y\| \leq \eta \|v_x\|\}$$

with some sufficiently small constant  $\eta$  to be fixed in the following section (consider for instance some  $\mathcal{C}^u(n)$  with  $n$  large enough instead of  $\mathcal{C}^u$ ). Taking  $\eta$  and  $W$  smaller one can suppose that the unstable cone is defined in the whole  $W$  and satisfies a similar condition.

### A.4.3 Local estimates

For any  $\lambda \in \mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+$  (or  $\bar{\lambda} \in \bar{\mathcal{O}}$ ) and any small open set  $W$  containing  $P_{\lambda_0}$ ,  $W_{P_\lambda}^{ss}$  cuts  $W \setminus W_{P_\lambda}^{ss}$  in two open subsets. One of them,  $W(\lambda)$ , is attracted by  $P_\lambda$  when  $\lambda \in \mathcal{O}^0$  and contains  $Q_\lambda$  when  $\lambda \in \mathcal{O}^+$ .

We prove here the following proposition:

**Proposition A.4.1** *Consider any transversal saddle-node bifurcation  $(P_{\lambda_0}, \lambda_0)$  of the family  $(F_\lambda)$  and any small open neighborhood  $W$  of  $P_{\lambda_0}$  carrying an invariant stable cone field  $\mathcal{C}^u$ . Then there exists  $0 < k < 1$  such that for any  $\lambda \in (\mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+)$ , any finite orbit  $z_0, z_1, \dots, z_n$  in  $W \setminus W(\lambda)$ , any unstable vector  $v \in \mathcal{C}_{z_0}^u$ , then*

$$\|DF_\lambda^n(z_0).v\| \geq k\|v\|.$$

If  $W$  is small enough,  $k$  is arbitrarily close to 1.

*Proof:* We consider any diffeomorphism  $G$  from the family  $(G_\lambda)$  sufficiently close to  $F_{\lambda_0}$ . Note that the result does not depend on the choice of a norm. We modify slightly the norm in the following way: the norm of  $v_x$  and  $v_y$  are unchanged. We set for the new norm  $\|\cdot\|'$

$$\|v\|' = \begin{cases} \|v_x\| & \text{if } \|v_y\| \leq \eta\|v_x\|, \\ \|v_y\| & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We deduce from the stability of the unstable cone that for any  $z \in U$ , and any  $v \in \mathcal{C}_z^u$ ,

$$\|DG(z).v\|' = \left| \frac{\partial}{\partial x} G_x(z) \right| \|v\|'.$$

If one considers an admissible orbit in  $W \setminus W(\lambda)$ :  $z_0, z_1, \dots, z_n$  we note first that  $x_k \geq 0$  at each point of the orbit. Then the first derivative in  $DG$  at those points is bounded from below by

$$\frac{\partial}{\partial x} G_x(z) \geq 1 + a + 2\delta'x - \gamma'\|y\| \quad (\text{A.13})$$

with constants  $0 < \delta' < \delta$  and  $\gamma' > |\gamma|$ . One bounds it uniformly from upper by  $1 + a'$  with some  $a' > 0$ . One deduces from that the following estimates on the coordinates:

$$\begin{aligned} \|y_k\| &\leq \beta'^k \|y_0\|, \\ x_k &\geq \frac{1}{(1 + a')^{n-k}} x_n. \end{aligned}$$

We iterate an unstable vector  $v \in \mathcal{C}_{z_0}^u$  along the orbit. The expansion is bounded from below by:

$$\begin{aligned} \|DG^n(x_0, y_0).v\|' &\geq \prod_{k=0}^{n-1} (1 + a + 2\delta'x_k - \gamma'\|y_k\|) \|v\|' \\ &\geq \prod_{k=0}^{n-1} \left( 1 + a + \frac{2\delta'x_n}{(1 + a')^{n-k}} - \gamma'\beta'^k \|y_0\| \right) \|v\|'. \end{aligned}$$

We only want to control the loss of expansion and the following rough lower bound is enough:

$$\|DG^n(x_0, y_0).v\|' \geq \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \gamma' \beta'^k \|y_0\|) \|v\|' \geq (1 - \gamma' \frac{\|y_0\|}{1 - \beta'}) \|v\|'.$$

Recall that  $\|y_0\|$  is arbitrarily small if  $W$  is small enough. The proof is complete.  $\square$

**Remark A.4.1** With a more precise study one gets a stronger result when  $\lambda \in \mathcal{O}^0$ ; we will not use it however: consider an orbit  $z_{-1}, z_0, \dots, z_n, z_{n+1}$  with  $z_{-1}, z_{n+1} \notin W$ ,  $z_0, \dots, z_n \in W \setminus W(\lambda)$  and  $v \in \mathcal{C}_{z_0}^u$ . If  $\delta$  is the distance of the orbit to  $P_\lambda$  then  $n \sim -c \log(\delta)$  and

$$\|DF^n.v\| \sim c \frac{\|v\|}{\delta}.$$

See also [Co98b, CK, DRoV] for a study of the transition map near a saddle-node point.

## A.5 The saddle-node bifurcation is robust

Our assumptions here are stated in Theorem A.1.2. We suppose also that the estimates of Section A.4 near  $(P_{\lambda_0}, \lambda_0)$  are valid.

### A.5.1 Hyperbolicity

Recall that for any small neighborhood  $W$  of  $P$ , the set  $W(\lambda)$  has been defined at the beginning of Section A.4.3. We fix the open sets  $U, V, \Omega$  as in Definition A.2.3. We consider a small open set  $W$  such that  $\Omega = W(\lambda)$ .

**Proposition A.5.1** *For any  $\lambda \in \mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+$  the maximal invariant set  $K(\lambda)$  of  $F_\lambda$  in  $U \setminus \Omega(\lambda)$  with  $\Omega(\lambda) = W \setminus W(\lambda)$  satisfies:*

- i. *When  $\lambda \in \mathcal{O}^0$ ,  $(K(\lambda), P_\lambda)$  and the sets  $\hat{U}, \hat{V}$  and  $\Omega(\lambda)$  satisfy the definition A.2.3 of saddle-node hyperbolic set for  $F_\lambda$ . Moreover  $K(\lambda_0) = K$ .*
- ii. *When  $\lambda \in \mathcal{O}^+$ ,  $K(\lambda)$  is hyperbolic for  $F_\lambda$ .*

*Proof:* For  $\lambda \in \mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+$  close to  $\lambda_0$ , the maximal invariant set  $K(\lambda)$  in  $U \setminus \Omega(\lambda)$  is close to  $K$ .

- As  $W$  is a small neighborhood of  $P_{\lambda_0}$ , no periodic orbit distinct from  $P_\lambda$  or  $Q_\lambda$  is contained in  $W$  for any diffeomorphism  $F_\lambda$  near  $F_{\lambda_0}$ . Theorem A.1.4 asserts after perturbation that there exists some integer  $N \geq 1$  such that for any diffeomorphism  $F_\lambda$  near  $F_{\lambda_0}$ , any orbit  $z_0, z_1, \dots, z_N$  of  $F_\lambda$  close to  $K$  with  $z_N \notin W$ , any  $v \in \mathcal{C}_{z_0}^u$ ,

$$\|DF^n(z_0).v\| \geq 8(1 + \|DF^{-1}\|^{-1}) \|v\|.$$

If  $W$  has been chosen small enough the loss of expansion in  $W \setminus W(\lambda)$  is bounded from below by  $\frac{1}{2}$  when  $\lambda \in \mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+$ . Any orbit  $(z_k)_{0 \leq k \leq l}$  close to  $K$  in  $U$  can be decomposed in periods of the form

**Type I** (possibly empty)  $z_0, \dots, z_{k_1-1}$  with  $k_1$  smaller than  $N$ .

**Type II**  $z_{k_i}, \dots, z_{k_{i+1}-1}$  with  $z_{k_i+1}, \dots, z_{k_{i+1}}$  in  $W$ .

**Type III**  $z_{k_i}, \dots, z_{k_{i+1}}$  with  $z_{k_{i+1}-1} \notin W$  and  $k_{i+1} - k_i = N$ .

The loss of expansion during periods of type I is bounded from below by some constant  $0 < C^N < 1$ . Note that between two periods of type II there exists at least one period of type III. If an orbit has  $s$  periods, its expansion for vectors in the unstable cone between times 0 and  $l$  is bounded from below by:

$$C^N 4^{\frac{s}{2}}. \quad (\text{A.14})$$

- Consider for  $\lambda \in \mathcal{O}^0$  a periodic orbit  $O(z)$  of period  $q$  in  $U$  distinct from  $\{P\}$ . If one considers  $z_0, \dots, z_{kq}$  for large  $k$ , the previous argument and Definition A.2.3.3 show that  $O(z)$  is hyperbolic. On  $U$  one can change the continuous stable invariant cone field  $\mathcal{C}^s$  into  $\mathcal{C}'^s$  so that the unstable cones of  $\mathcal{C}'^u$  are strictly smaller as those of  $\mathcal{C}^u$ . We deduce that if  $z \in U \setminus \bar{V}$ , and  $z'$  close enough to  $K$  can be connected by an u-curve with respect to  $\mathcal{C}'^u$ , then  $z$  can be connected to a point in  $K$  by an u-curve with respect to  $\mathcal{C}^u$ . Shrinking slightly  $U$  if necessary, such a point  $z$  is sent by any diffeomorphism close to  $F_{\lambda_0}$  outside  $U \setminus \Omega(\lambda)$ . As the maximal invariant set  $K(\lambda)$  in  $U \setminus \Omega(\lambda)$  is arbitrarily close to  $K$ ,  $(K(\lambda), P_\lambda)$ , the open sets  $U, V, W(\lambda)$  and the cone field  $\mathcal{C}'^s$  satisfies the definition of saddle-node hyperbolic set when  $\lambda \in \mathcal{O}^0$ .
- Suppose that  $\lambda \in \mathcal{O}^+$ .  $P_\lambda$  is then hyperbolic and in a neighborhood of  $P_\lambda$ ,  $DF_\lambda$  is expansive in the unstable direction. Long orbits in  $W \setminus W(\lambda)$  must stay a long time near  $P_\lambda$  so that we get a better estimate for orbits of type II:

$$\|DF^{k_{i+1}-k_i} \cdot v\| \geq \frac{1}{4} \mu^{k_{i+1}-k_i} \|v\|$$

for some  $\mu > 1$  depending on the parameter  $\lambda$ . Take  $\mu^N < 2$  and observe that the lower bound (A.14) on expansion becomes:

$$C^N \mu^l.$$

Definition A.2.3.3 remains valid and the cone field criterion asserts now that the maximal invariant set in  $U \setminus W(\lambda)$  is hyperbolic.

The proposition holds with open sets  $U, V$  and  $W$ .

□

## A.5.2 Continuation of $K$

*Proof of Theorem A.1.2:* We use here the constructions of Section A.3 for the map  $F_{\lambda_0}$  in  $U$ :

First we choose an integer  $n_1 \gg 1$ . Any point  $z$  of  $K$  possesses a rectangle  $R(z) = R(J(z), L_1(z), L_2(z))$  of order  $n_1$  such that  $J(z) \in \mathcal{E}_{n_1}$  contains  $z$ . From the family  $(R(z))_{z \in K}$  we can extract a finite number of rectangles  $(R_k)$  such that the rectangles  $R_{r'', k}$ , with thickness  $0 < r'' < r$ , cover  $K$ .

We define the continuation of each  $R_k$  when  $\lambda \in \mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+$ : we fix some long u-curves  $T_k$  crossing  $\bar{U}$  containing  $J_k$  for each  $k$ . When the endpoint  $z(\lambda)$  of  $J_k$  associated to  $L_{1,k}$  is in  $W_P^{ss} \cap F^{-1}(\Omega(\lambda))$ ,  $L_{1,k} \subset W_{P_\lambda}^{ss}$  can be continued thanks

to the continuation  $W_{P_\lambda}^{ss} : L_{1,k}(\lambda)$  intersects  $T_k$  at some  $z_1(\lambda)$ . In the other case,  $L_{1,k}$  and  $z_1$  are unchanged. Doing the same for the other endpoint, it defines  $R_k(\lambda) = R(J_k(\lambda), L_{1,k}(\lambda), L_{2,k}(\lambda))$ . Note that when  $\lambda$  is close enough to  $\lambda_0$  we have the inclusions:

$$K(\lambda) \subset \bigcup_k R_{k,r''} \subset U.$$

By perturbation the results of Sections A.3.2.7 and A.3.4.2 are valid with rectangles  $R_k(\lambda)$  and  $F^{n_1}(R_k(\lambda))$ :

**Lemma A.5.2** *If  $\mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+$  have been chosen small enough, there exist  $0 < r'' < r' < r$  such that for any  $\lambda, \lambda' \in \mathcal{O}^0 \cup \mathcal{O}^+$ :*

i. *If  $F_{\lambda'}^{n_1}(R_{k,r''}(\lambda)) \cap R_{l,r''}(\lambda)$  is non-empty then for any  $\lambda'$ ,  $F_{\lambda'}^{n_1}(R_{k,r}(\lambda'))$  crosses  $R_{l,r'}(\lambda')$ :*

$$F_{\lambda'}^{n_1}(R_{k,r}(\lambda')) \cap R_{l,r}(\lambda') \subset R_{l,r'}(\lambda')$$

*and the leaves  $F_{\lambda'}^{n_1}(L_{i,k}(\lambda'))$  and  $L_{i,l}(\lambda')$ ,  $i = 1, 2$ , are disjoint.*

ii. *If  $F_{\lambda'}^{n_1}(R_{k,r'}(\lambda)) \cap R_{l,r'}(\lambda)$  is non-empty then for any  $\lambda'$ ,  $F_{\lambda'}^{n_1}(R_{k,r}(\lambda'))$  crosses  $R_{l,r}(\lambda')$ .*

For each  $\lambda, \lambda'$  we define a map

$$\Phi_{\lambda,\lambda'} : K(\lambda) \rightarrow K(\lambda').$$

Choose for  $z \in K(\lambda)$  a sequence  $(k_n)$  such that

$$\forall n \in \mathbb{Z}, F_{\lambda}^{nn_1}(z) \in R_{k_n,r'}(\lambda).$$

By Lemma A.5.2, for any  $n \geq 0$ ,

$$F_{\lambda'}^{-nn_1}(R_{k_n}(\lambda')) \cap F_{\lambda'}^{-(n-1)n_1}(R_{k_{n-1}}(\lambda')) \cdots \cap R_{k_0}(\lambda')$$

is a rectangle which stays in  $U \setminus \Omega(\lambda')$  during  $nn_1$  iterations. Using Section A.3.5 for the map  $F_{\lambda'}$  when  $\lambda' \in \mathcal{O}^0$  or using the hyperbolicity of  $K(\lambda')$  when  $\lambda' \in \mathcal{O}^+$  we see that the length of this rectangle is arbitrarily small when  $n$  increases and that

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F_{\lambda'}^{-nn_1}(R_{k_n}(\lambda'))$$

is a point of  $K(\lambda')$ . This point does not depend on the choice of  $(k_n)$  and will be denoted  $\Phi_{\lambda,\lambda'}(z)$ . Indeed if  $(k'_n)$  is an other admissible sequence note that

$$\bigcap_{-1-N \leq n \leq N+1} F_{\lambda'}^{-nn_1}(R_{k_n}(\lambda')) \subset \bigcap_{-N \leq n \leq N} F_{\lambda'}^{-nn_1}(R_{k'_n}(\lambda')).$$

We claim that for any  $\lambda, \lambda', \lambda''$  we get

$$\Phi_{\lambda',\lambda''} \circ \Phi_{\lambda,\lambda'} = \Phi_{\lambda,\lambda''}.$$

To prove this fact let us choose  $(k_n)$  such that

$$\forall n \in \mathbb{Z}, F_{\lambda}^{nn_1}(z) \in R_{k_n,r''}(\lambda).$$

Since the family satisfies (by (i))

$$\forall n \in \mathbb{Z}, F_{\lambda'}^{n n_1}(\Phi_{\lambda, \lambda'}(z)) \in R_{k_n, r'}(\lambda').$$

one can compute  $\Phi_{\lambda', \lambda''}(\Phi_{\lambda, \lambda'}(z))$  and  $\Phi_{\lambda, \lambda''}(z)$  using the same family  $(R_{k_n}(\lambda''))$  and we are done.

The map  $\Phi$  is continuous. Moreover for any  $\lambda$ ,  $\Phi_{\lambda, \lambda} = \text{Id} \big|_{K(\lambda)}$ . Thus each  $\Phi_{\lambda, \lambda'}$  is a homeomorphism which conjugates the dynamics.

□

### A.5.3 Adapted Norm

*Proof of Proposition A.1.3:* The cone field property in Definition A.2.1 asserts that  $TK$  admits a unique invariant splitting  $TK = E^s \oplus E^u$  with

- $\dim E^u = 1$  and  $E^u \subset \mathcal{C}^u(n_c)$ ,
- $E^s \subset \mathcal{C}^s(n_c)$ ,

with some arbitrarily large integer  $n_c$ . It is well-known how to construct an adapted norm for the uniformly contracting direction  $E^s$  (see [Sh]). Thus it is sufficient to find an adapted norm for the unstable direction.

- By changing the norm continuously and replacing  $\|\cdot\|$  by  $\|\cdot\|'$  in a neighborhood of  $P$  (recall Section A.4), we first prove the following local property: there exists a neighborhood  $W_0$  of  $P$  and a continuous  $\phi_0 : W_0 \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$  satisfying for any  $z \in W_0 \setminus \Omega$  and  $v \in \mathcal{C}_z^u(n_c) \setminus \{0\}$ ,  $n_c$  large,

$$\phi_0(F(z)) \|DF(z).v\| \geq \phi_0(z) \|v\| \text{ with equality if and only if } z = P.$$

Remember the proof of Proposition A.4.1 and the estimate (A.13). If  $W_0$  is small enough there are local coordinates  $z = (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$  such that

$$\|DF(z).v\| \geq (1 + 2\delta x - \gamma' \|y\|) \|v\|$$

with  $\delta, \gamma' > 0$ . Let us define

$$\phi_0(z) = 1 - \frac{2\gamma'}{1 - \beta'} \|y\|.$$

If  $W_0$  is small enough,  $\phi_0(W_0) \subset [\frac{1}{2}, 1]$ . Under the previous assumptions remark also that,

$$\begin{aligned} \frac{\phi_0(F(z)) \|DF.v\|}{\phi_0(z) \|v\|} &\geq (1 + 2\delta x - \gamma' \|y\|) \frac{(1 - \frac{2\gamma'}{1 - \beta'} \|F(y)\|)}{(1 - \frac{2\gamma'}{1 - \beta'} \|y\|)} \\ &\geq \frac{(1 - \gamma' \|y\| - \frac{2\gamma'}{1 - \beta'} \|F(y)\|)}{(1 - \frac{2\gamma'}{1 - \beta'} \|y\|)} \geq 1 \end{aligned}$$

with equality if and only if  $x = 0$  and  $\|y\| = 0$  i.e.  $z = P$ . (Remember that  $\|F(y)\| \leq \beta' \|y\|$  and  $x \geq 0$ .)

- In order to solve the global problem, consider a small open neighborhood of  $P$ ,  $\tilde{W} \subset W_0$  and some integer  $n_0$  given by Theorem A.1.4: for any orbit  $z_0, \dots, z_n$  and any  $v \in E_{z_0}^u \setminus \{0\}$ ,

$$n \geq n_0 \text{ and } z_n \notin \tilde{W} \Rightarrow \|DF^n(z_0).v\| > 8(1 + \|DF^{-1}\|^{-1})\|v\|. \quad (\text{A.15})$$

We set  $W = \tilde{W} \cap F^{-1}\tilde{W} \cap \dots \cap F^{-n_0}\tilde{W}$ . One may take  $W$  such that  $\text{Int}(\bar{W}) = W$  and  $\bar{W}$  is compact.  $W$  is an open neighborhood of  $P$  and there exists again  $n_1 \geq n_0$  such that for any finite orbit  $z_0, \dots, z_n$  and any  $v \in E_{z_0}^u \setminus \{0\}$ ,

$$n \geq n_1 \text{ and } z_n \notin \tilde{W} \Rightarrow \|DF^n(z_0).v\| > 8(1 + \|DF^{-1}\|^{-1})\|v\|. \quad (\text{A.16})$$

Moreover if  $z_0, \dots, z_n$  is an orbit in  $K$  with  $z_0, z_n \in W$  and  $z_i \notin W$ ,  $0 < i < n$ , then for any  $v \in E_{z_0}^u \setminus \{0\}$ ,

$$\|DF^n(z_0).v\| > 4\|v\|. \quad (\text{A.17})$$

Indeed we proceed as in the proof of Proposition A.5.1: First remark that  $n > n_0$  and  $z_{n-1} \notin \tilde{W}$ . If  $z_k \notin \tilde{W}$  then

$$\frac{\|DF^k.v\|}{\|DF^{k-n_0}.v\|}$$

is controlled by (A.15). The loss of expansion during periods contained in  $\tilde{W}$  is bounded from below by  $\frac{1}{2}$ .

- Let us define the norms

$$\|v\|_i = \|v\| + \dots + \|DF^{-i+1}.v\|, \quad 1 \leq i \leq n_1.$$

For any  $F(z) \in K \setminus W$  and  $v \in E_z^u \setminus \{0\}$ , by (A.16),

$$\|DF.v\|_{n_1} - \|v\|_{n_1} = \|DF.v\| - \|DF^{-n_1+1}.v\| > 0. \quad (\text{A.18})$$

We have also for  $z \in W_0$ ,

$$\phi_0(z)\|v\| < \|DF.v\|_1 < \dots < \|DF^{n_1}.v\|_{n_1}. \quad (\text{A.19})$$

We introduce some  $n_2 > n_1$  such that for any orbit  $z_0, \dots, z_{n_2-1}$  in  $K \setminus W$ , and  $v \in E_{z_0}^u$ ,

$$\|DF^{n_2}.v\| \geq 4\|v\|_{n_1}. \quad (\text{A.20})$$

Define also the norms

$$\|v\|_{-i} = 2^{-1-\frac{i}{n_2}} \|DF^i.v\|, \quad 1 \leq i < n_2,$$

$$\text{and } \|v\|_{-i}^l = 2^{-1-\frac{l}{i}} \|DF^i.v\|, \quad 1 \leq i < l, \quad 2 \leq l < n_1 + n_2$$

so that for any  $z \in (K \cap W) \setminus (F(W) \cup F^2(W) \cup \dots \cup F^{n_2}(W))$ ,

$$\begin{aligned} \phi_0(z)\|v\| &> \|DF^{-1}.v\|_{-1} > \dots > \\ &> \|DF^{-n_2+1}.v\|_{-n_2+1} > \|DF^{-n_2}.v\|_{n_1}, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$



(remember (A.20) and  $\frac{1}{2} \leq \phi_0(z)$ ) and for any  $z \in (K \cap W \cap F^l(W)) \setminus (F(W) \cup F^2(W) \cup \dots \cup F^{l-1}(W))$ ,

$$\begin{aligned} \phi_0(z)\|v\| &> \|DF^{-1}.v\|_{-1}^l > \dots > \\ &> \|DF^{-n_2+1}.v\|_{-l+1}^l > \phi_0(F^{-l}(z))\|DF^{n_2}.v\|, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

(remember (A.17)).

- We introduce a partition of the unity  $(\psi, 1 - \psi)$  subordinate to  $R = \bar{W}$  and  $E = M \setminus W$ :  $\psi$  is a smooth map from  $M$  to  $[0, \infty)$  with the property that  $\psi$  is equal to zero outside a small neighborhood  $B(R, \varepsilon)$  of  $R$  and equal to one inside  $R \setminus B(E, \varepsilon)$ . We construct a decomposition

$$M = \left( \bigcup_{j=-n_2+1}^{n_1-1} E_j \right) \cup E_\infty \cup \bigcup_{l=2}^{n_1+n_2-1} \left( \bigcup_{j=1}^{l-1} E_j^l \right)$$

associated to a partition of the unity

$$1 = \sum_j \psi_j + \psi_\infty + \sum_l \sum_j \psi_j^l : \quad (\text{A.23})$$

- $E_0 = R$  and  $\psi_0 = \psi$ ,
- For  $1 \leq j < n_1$ ,

$$E_j = F^j(R) \cap \bigcap_{i=j+1-(n_1+n_2)}^{j-1} F^i(E),$$

$$\psi_j = \psi \circ F^{-j} \cdot \prod_{i=j+1-(n_1+n_2)}^{j-1} (1 - \psi) \circ F^{-i},$$

- For  $1 \leq j < n_2$ ,

$$E_{-j} = F^{-j}(R) \cap \bigcap_{i=j+1-(n_1+n_2)}^{j-1} F^{-i}(E),$$

$$\psi_{-j} = \psi \circ F^j \cdot \prod_{i=j+1-(n_1+n_2)}^{j-1} (1 - \psi) \circ F^i, ,$$

- $E_\infty = \bigcap_{i=-n_2+1}^{n_1-1} F^i(E)$  and  $\psi_\infty = \prod_{i=-n_2+1}^{n_1-1} (1 - \psi) \circ F^{-i}$ ,
- For  $2 \leq l < n_1 + n_2$ ,  $1 \leq j < l$ ,

$$E_j^l = F^j(R) \cap F^{-l+j}(R) \cap \bigcap_{i=-l+j+1}^{j-1} F^i(E),$$

$$\psi_j^l = \psi \circ F^{-j} \cdot \psi \circ F^{l-j} \cdot \prod_{i=-l+j+1}^{j-1} (1 - \psi) \circ F^{-i}.$$

One checks (A.23) and also that for any  $z \in M$ ,

$$\begin{aligned} & - \forall 3 \leq l < n_1 + n_2, 1 \leq j < l - 1, \quad \psi_{j+1}^l(F(z)) = \psi_j^l(z), \\ & - \forall 1 \leq j < n_1 - 1, \quad \psi_{j+1}(F(z)) = \psi_j(z), \\ & - \forall 1 \leq j < n_2 - 1, \quad \psi_{-j-1}(F^{-1}(z)) = \psi_{-j}(z), \\ & - \psi_\infty(F(z)) + \psi_{-n_2+1}(F(z)) = \psi_{n_1-1}(z) + \psi_\infty(z), \\ & - \psi_0(z) + \psi_1^2(F(z)) + \dots + \psi_1^{n_3+n_2-1}(F(z)) + \psi_1(F(z)), \\ & \quad = \psi_0(z) + \psi_1^2(z) + \dots + \psi_{n_3+n_2-2}^1(z) + \psi_{-1}(z). \end{aligned}$$

By taking  $\varepsilon > 0$  sufficiently small in the definition of  $\psi$ , one gets that the supports of the functions  $\psi_j$  and  $\psi_j^l$  are arbitrarily close to the sets  $E_j$  and  $E_j^l$ .

Defining

$$\|v\|_a = \psi_0(z)\phi_0(z)\|v\| + \sum_{j \neq 0} \psi_j(z)\|v\|_j + \psi_\infty(z)\|v\|_{n_1} + \sum_l \sum_j \psi_j^l(z)\|v\|_j^l$$

we deduce from (A.18), (A.19), (A.21), and (A.22), that for any  $z \in K$ ,  $v \in E_z^u \setminus \{0\}$ ,

$$\|DF.v\|_a \geq \|v\|_a$$

with equality if and only if  $\psi_0(z) = 1$  and

$$\phi_0(z)\|DF.v\|_a = \phi_0\|v\|_a$$

which is equivalent to  $z = P$ .

□

**Remark A.5.1** Theorem A.1.2 and Proposition A.1.3 extend when  $F_{\lambda_0}$  admits a finite number  $m$  of saddle-node fixed points. In this case one should consider  $m$  one-codimensional manifolds intersecting at  $\lambda_0$ . In particular one can also consider the case  $F$  has a finite number of saddle-node periodic orbits by taking a proper iterate of  $F$ .



## Annexe B

# Dynamique non-uniformément hyperbolique

Nous avons vu (section 3.2) que lorsque  $b = 0$ , le théorème de Jakobson s'applique à la famille d'Arnol'd. Lorsque  $0 < b \ll 1$ , il est possible d'utiliser la théorie des attracteurs étranges initiée par M. Benedicks et L. Carleson pour décrire certains paramètres des familles bimodales. Les attracteurs étranges globaux de l'anneau (ceux pour lesquels l'attracteur de Birkhoff est un attracteur étrange) ont déjà été considérés par L. Díaz, J. Rocha et M. Viana ainsi que par L. Mora (voir [DRoV, Mo]). Nous nous appuyons dans cet appendice sur le travail de Q. Wang et L.-S. Young (voir [WY]) qui s'applique directement aux applications bimodales de l'anneau. Ceci nous permet d'étudier la continuité des attracteurs en ces paramètres.

**B.0.3.1** Nous rappelons les hypothèses de [WY]:

Nous nous plaçons sur un anneau borné  $\mathbb{A}_M$  où  $M > 0$  est une constante. Nous considérons une famille  $(F_{b,t})$  d'applications  $C^3$  envoyant l'anneau  $\mathbb{A}_M$  dans  $\text{Int}(\mathbb{A}_M)$  avec  $(b, t) \in \mathbb{R}^2$  proches d'un paramètre initial  $(0, 0)$ . Pour  $b = 0$ , l'image est le cercle  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ , et pour  $b \neq 0$ ,  $F_{b,t}$  est un difféomorphisme sur son image .

1. Pour  $b = 0$ , la famille  $(g_t) = (F_{0,t})$  sur  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$  vérifie les conditions 1 à 5 données en 3.2 pour le paramètre initial  $(0, 0)$ .
2. Lorsque  $\frac{d}{dx}(p_1 \circ F_{0,t})(x, 0) = 0$ , alors  $\frac{d}{dy}F_{0,t}(x, 0) \neq 0$ .
3. Soit  $]x, x'[$  un intervalle maximal de monotonie pour l'application du cercle  $g_0$ . Alors,  $g_0(]x, x'[)$  recouvre entièrement le cercle.
4. Il existe  $K > 0$  tel que pour tous  $t, b$ ,

$$K^{-1}b \leq |\det(DF_{b,t})| \leq Kb.$$

Nous notons comme pour les applications déviant la verticale dissipatives,

$$\Lambda_0(b, t) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_{b,t}^n(\mathbb{A}_M).$$

Dans le cas des familles bimodales de l'anneau, nous fixons la valeur  $a = a_0$  et considérons la famille  $(F_{b,a_0,\omega})$ . Nous avons déjà discuté la condition 1) en 3.2 (voir le lemme 3.2.1). La condition 2) résulte simplement de la propriété de déviation de la verticale. La condition 4) est trivialement vérifiée puisque pour  $b > 0$ ,

$$b = |\det(\mathrm{D}F_{b,a,\omega})|.$$

Enfin, lorsque  $a > a_B(\varphi_1)$ , la condition (3) est elle-aussi satisfaite.

**B.0.3.2** Nous rappelons quelques définitions :

**Définition B.0.1** 1. Soit  $\mu$  une mesure ergodique pour l'action d'un difféomorphisme  $\tilde{F}$  de  $\mathbb{A}$ . Un point  $z \in \mathbb{A}$  est dit **générique** pour  $\mu$  si pour la topologie vague,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{F^k(z)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu,$$

où  $\delta_{z'}$  désigne la mesure de Dirac en  $z'$ .

2. Une mesure ergodique  $\mu$  pour l'action d'un difféomorphisme  $\tilde{F}$  de  $\mathbb{A}$  est une **mesure SRB** (i.e. de Sinai-Ruelle-Bowen) si les exposants de Lyapounov de la mesure sont tous non-nuls et si les mesures conditionnelles le long des feuilles instables sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue de ces variétés.

Nous énonçons les résultats de cette théorie, rassemblés dans [WY]:

**Théorème B.0.3 (Benedicks, Carleson, Viana, Wang, Young)** Pour un ensemble des paramètres  $\Delta$ , de mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$  strictement positive au voisinage de  $(0,0)$  et pour toute application  $F_{b,t}$  avec  $(b,t) \in \Delta$ ,

- i. il existe un nombre fini de mesures SRB distinctes  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r'}$  où  $r'$  est inférieur ou égal au nombre de points critiques de  $F_{0,0}$  sur le cercle;
- ii. presque tout point pour la mesure de Lebesgue de l'anneau est générique pour l'une de ces mesures.

**B.0.3.3** En fait, bien d'autres propriétés sont vérifiées pour ces paramètres. La dynamique peut être approchée par des ensembles hyperboliques :

**Proposition B.0.4 (Q. Wang, L.-S. Young)** Pour tout paramètre  $(b,t) \in \Delta$ , il existe un compact  $\mathcal{C} \subset \Lambda_0$  (l'ensemble critique) tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\Lambda_{0,\varepsilon} = \{z \in \Lambda_0, \forall n \in \mathbb{Z}, d(F_{b,t}^n(z), \mathcal{C}) \geq \varepsilon\}$$

est uniformément hyperbolique. De plus,

$$\Lambda_0 = \mathrm{Adh}\left(\bigcup_{\varepsilon > 0} \Lambda_{0,\varepsilon}\right).$$

**B.0.3.4** Q. Wang et L.-S. Young donnent une description géométrique assez précise de l'attracteur  $\Lambda_0$  :

Nous fixons une application  $F = F_{b,t}$  avec  $(b,t) \in \Delta$ . On pose  $R_0 = \mathbb{A}_M$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on définit l'anneau  $R_k = F^k(R_0)$ . On construit à partir de  $R_k$  un ensemble  $\mathcal{T}_k$  de branches monotones : ce sont des disques topologiques  $S \subset R_k$  tels que  $\text{Fr}(S) \cap R_k$  est constitué de deux arcs compacts (les bords monotones de  $S$ ). (Voir [WY], section 9.2.)

Les branches de  $\mathcal{T} = \cup_k \mathcal{T}_k$  approximent  $\Lambda_0$  (voir [WY], théorème 5) : il existe  $K > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une collection finie  $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{T}$  tels que :

1. La réunion  $\tilde{R}_n = \bigcup_{S \in \mathcal{S}_n} S$  est un voisinage de  $\Lambda_0$ .
2. La suite de compacts  $(\tilde{R}_n)$  est décroissante et  $\bigcap_n \tilde{R}_n = \Lambda_0$ .
3.  $\forall n, \forall S \in \mathcal{S}_n, \exists n \leq k \leq Kn, S \in \mathcal{T}_k$ .

Les branches monotones de  $\mathcal{S} = \cup_n \mathcal{S}_n$  vérifient une propriété géométrique importante (voir [WY], fin de la section 9.3) : pour tout  $S \in \mathcal{S}$ , notons  $k \in \mathbb{N}$  l'entier tel que  $S \in \mathcal{T}_k$ . Alors, les deux bords monotones de  $S$  appartiennent chacun à une composante différente de  $\text{Fr}(R_k)$ .

Nous terminons par une propriété essentielle pour le codage de la dynamique : pour tout  $z \in \Lambda_0$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  arbitrairement grand,  $m \in \mathbb{N}$  et  $S \in \mathcal{S}_{k+m}$ , tels que  $F^{-m}(S) \subset B(z, \varepsilon)$ . (Voir [WY], proposition 10.1'. Remarquons cependant que l'énoncé de la proposition ne donne que  $S \in \mathcal{T}_{n+m}$  pour  $n$  arbitrairement grand. La preuve et celle du lemme 10.3 montrent sans modification que  $S \in \mathcal{S}_{k+m}$ .)

**B.0.3.5** La proposition B.0.4 permet de montrer en toute généralité le résultat suivant :

**Proposition B.0.5** *Les paramètres de  $\Delta$  sont des points de continuité de l'application  $(b,t) \mapsto \Lambda_0(b,t)$  pour la topologie de Hausdorff.*

*Démonstration* : On vérifie aisément que l'ensemble  $\Lambda_0$  est semi-continu supérieurement en les paramètres. Pour avoir l'autre semi-continuité, il suffit alors d'utiliser l'approximation de  $\Lambda_0(b,t)$  par des ensembles hyperboliques, donnée par la proposition B.0.4 et d'utiliser la propriété de continuation hyperbolique.

□

**Remarque B.0.2** La démonstration donne mieux : soit pour  $\varepsilon > 0$ , l'espace  $E$  des applications de classe  $C^1$  de  $\text{Int}(\mathbb{A}_M)$  dans  $\text{Int}(\mathbb{A}_{M-\varepsilon})$  muni de la topologie compacte ouverte. L'attracteur  $\Lambda_0(F)$  est bien défini pour toute application  $F \in E$ .

Une application  $F_{b,t}$  avec  $(b,t) \in \Delta$  est alors un point de continuité de l'application  $F \mapsto \Lambda_0(F)$  définie sur  $E$  et à valeurs dans les compacts de  $\mathbb{A}$ .

**B.0.3.6** Dans le cas des attracteurs de Birkhoff, nous pouvons améliorer ce résultat en utilisant la section B.0.3.4 :

**Proposition B.0.6** *Soit  $(\tilde{F}_{b,a,\omega})$  une famille bimodale de l'anneau et  $\Delta$  l'ensemble des paramètres donnés par le théorème B.0.3. Alors, pour tout  $(b,a,\omega) \in \Delta$ ,*

- i.  $\Lambda_0(F_{b,a,\omega}) = \Lambda_1(F_{b,a,\omega})$ .

ii.  $F_{b,a,\omega}$  est un point de continuité des applications

$$F \mapsto \Lambda_0(F), \quad F \mapsto \Lambda_1(F).$$

*Démonstration* : Le (ii) est juste une conséquence du (i). En effet,  $F \mapsto \Lambda_0$  est semi-continue inférieurement,  $F \mapsto \Lambda_1$  semi-continue supérieurement et pour toute application  $F$ ,  $\Lambda_1(F) \subset \Lambda_0(F)$ .

Soit pour  $F_{b,a,\omega}$ ,  $S \in \mathcal{S}$  et  $k$  tel que  $S \in \mathcal{T}_k$ . Alors, puisque  $S$ , connexe rencontre les deux composantes de  $\text{Fr}(R_k)$  et puisque  $\Lambda_1$  les sépare,  $S$  et  $\Lambda_1$  s'intersectent.

Soit  $z \in \Lambda_0$  et  $\varepsilon > 0$ . D'après le 3 de la section B.0.3.4 il existe  $S \in \mathcal{S}$  et  $n \geq 0$  tels que  $F_{b,a,\omega}^{-n}(S) \subset B(z, \varepsilon)$ . On en déduit que  $\Lambda_1$  est dense dans  $\Lambda_0$ . Ceci termine la démonstration du (i).

□

# Bibliographie

- [ALM] L. ALSEDÀ, J. LLIBRE, M. MISIUREWICZ, *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, World Scientific Publishing Co. (1993).
- [ABV] J. ALVES, C. BONATTI, M. VIANA, *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding*, *Invent. Math.* **140** (2000), 351–398.
- [An88] S. ANGENENT, *The periodic orbits of an area preserving twist map*, *Commun. Math. Phys.* **115** (1988), 353–374.
- [An90] S. ANGENENT, *Monotone recurrence relations, their Birkhoff orbits and topological entropy*, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **10** (1990), 15–41.
- [Ar] V. ARNOL'D, *Small denominators I: Mapping the circle onto itself*, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* **25** (1961), 21–86. Voir aussi : *Translations Amer. Math. Soc.* 2<sup>nd</sup> série **46** (1965), 213–284.
- [AL] S. AUBRY, P. LE DAERON, *The discrete Frenkel-Kontorova model and its extension*, *Physica D* **8** (1983), 381–422.
- [BY] V. BALADI, L-S. YOUNG, *On the spectra of randomly perturbed expanding maps*, *Commun. Math. Phys.* **156** (1993), 355–385. Voir aussi : *Erratum*, *Commun. Math. Phys.* **166** (1994), 219–220.
- [BeS] E. BEDFORD, J. SMILLIE, *Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy: tangencies* (en préparation).
- [BC1] M. BENEDICKS, L. CARLESON, *On iterations of  $1 - ax^2$  on  $(-1, 1)$* , *Ann. of Math.* **122** (1985), 1–24.
- [BC2] M. BENEDICKS, L. CARLESON, *The dynamics of the Hénon map*, *Ann. of Math.* **133** (1991), 73–169.
- [BV] M. BENEDICKS, M. VIANA, *Solution of the basin problem for Hénon-like attractors*, *Invent. Math.* **143** (2000), 375–434.
- [BY] M. BENEDICKS, L-S. YOUNG, *Sinai-Ruelle-Bowen measures for certain Hénon maps*, *Invent. Math.* **112** (1993), 541–576.
- [Bi13] G.D. BIRKHOFF, *Proof of Poincaré's last geometric theorem*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **14** (1913), 14–22. Voir aussi *Collected Mathematical papers of G.D. Birkhoff*, tome I Dover, New York (1968), 673–681.



- [Bi20] G.D. BIRKHOFF, *Surface transformations and their dynamical applications*, Acta Math. **43** (1920), 1–119. Voir aussi : *Collected Papers*, tome II, 111–229.
- [Bi25] G.D. BIRKHOFF, *An extension of Poincaré's last geometric theorem*, Acta Math. **47** (1925), 297–311. Voir aussi : *Collected Papers*, tome II, 252–266.
- [Bi26] G.D. BIRKHOFF, *On the periodic motions of dynamical systems*, Acta Math. **50** (1927), 359–379. Voir aussi : *Collected Papers*, tome II, 333–353.
- [Bi32a] G.D. BIRKHOFF, *Sur quelques courbes fermées remarquables*, Bull. Soc. Math. France **60** (1932), 1–26. Voir aussi : *Collected Papers*, tome II, 418–443.
- [Bi32b] G.D. BIRKHOFF, *Sur l'existence de régions d'instabilité en dynamique*, Ann. Inst. Henri Poincaré **2** (1932), 369–386. Voir aussi : *Collected Papers*, tome II, 444–461.
- [Bos] J.-B. BOST, *Tores invariants et systèmes dynamiques hamiltoniens*, séminaire Bourbaki 639, Astérisque **133–134**, Soc. Math. France (1986), 113–157.
- [Bou] T. BOUSCH, *Le poisson n'a pas d'arêtes*, Ann. Inst. Henri Poincaré (proba. et stat.) **36** (2000), 489–508.
- [BR] R. BOWEN, D. RUELLÉ, *The ergodic theory of axiom A flows*, Invent. Math. **29** (1975), 181–202.
- [Boy] P. BOYLAND, *Bifurcations of circle maps: Arnol'd tongues, bistability and rotation intervals*, Commun. Math. Phys. **106** (1986), 353–381.
- [BP] M. BRIN, YA. PESIN, *Partially hyperbolic dynamical systems*, Math. USSR Izv. **8** (1974), 177–218. Transl. of Izv. Akad. Nauk. SSSR ser. mat. **38** (1974), 178–212.
- [BRS] H. BROER, R. ROUSSARIE, C. SIMÓ, *Invariant circles in the Bogdanov-Takens bifurcation for diffeomorphisms*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **16** (1996), 1147–1172.
- [BST] H. BROER, C. SIMÓ, J. TATJER, *Towards global models near the homoclinic tangencies of dissipative diffeomorphisms*, Nonlinearity **11** (1998), 667–770.
- [BuS] S. BULLET, P. SENTENAC, *Ordered orbits of the shift, square roots, and the devil's staircase*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **115** (1994), 451–481.
- [CK] Y. CAO, S. KIRIKI, *An isolated saddle-node bifurcation occurring inside a horseshoe*, Dyn. Stab. Syst. **15** (2000), 11–22.
- [Ca] M. CASDAGLI, *Periodic orbits for dissipative twist maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **7** (1987), 165–173.
- [Ch] A. CHENCINER, *La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif : de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather*, séminaire Bourbaki 622, Astérisque **121–122**, Soc. Math. France (1982), 147–170.
- [CGT84] A. CHENCINER, J.-M. GAMBAUDO, C. TRESSER, *Une remarque sur la structure des endomorphismes de degré 1 du cercle*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **299** (1984), 145–147.

- [Co98a] M.J. COSTA, *Global strange attractors after collision of horseshoes with periodic sinks*, PhD Thesis IMPA (1998).
- [Co98b] M.J. COSTA, *Saddle-node horseshoes giving rise to global Hénon-like attractors*, An. Acad. Bras. Ci. **70** (1998), 393–400.
- [Cr98] S. CROVISIER, *Orbites bien ordonnées de la famille d’Arnol’d épaissie*, mémoire de DEA, ENS-Lyon (1998).
- [Cr00] S. CROVISIER, *Saddle-node bifurcation for hyperbolic sets*, prépublication de l’université Paris-Sud (2000), à paraître à Ergod. Th. & Dynam. Sys.
- [Cr01a] S. CROVISIER, *Ensembles de torsion nulle des applications déviant la verticale*, à paraître au Bull. Soc. Math. France.
- [Cr01b] S. CROVISIER, *Nombre de rotation presque sûr des endomorphismes du cercle affines par morceaux*, prépublication de l’université Paris-Sud (2001) à paraître au Bol. Soc. Bras. Mat. (N.S.).
- [Cr01c] S. CROVISIER, *Langues d’Arnold généralisées des applications de l’anneau déviant la verticale*, à paraître aux C. R. Acad. Sci. Paris Série I.
- [Cr01d] S. CROVISIER, *Une remarque sur les ensembles hyperboliques localement maximaux*, à paraître aux C. R. Acad. Sci. Paris Série I.
- [De] A. DENJOY, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, J. Math. Pures Appl. Série IX **11** (1932), 333–375. Voir aussi : *articles et mémoires*, tome II, Gauthier Villars, Paris (1955), 881–923.
- [DRiV] L. DÍAZ, I. RIOS, M. VIANA, *The intermittency route to chaotic dynamics*, in *Global analysis of dynamical systems: A festschrift dedicaced to Floris Takens for its 60<sup>th</sup> birthday*, H. Broer, B. Krauskopf, G. Vegter eds, Institute of Physics Publishing (2001), 309–327.
- [DRoV] L.J. DÍAZ, J. ROCHA, M. VIANA, *Strange attractors in saddle-node cycles: prevalence and globality*, Invent. Math. **125** (1996), 37–74.
- [Do] R. DOUADY, *Application du théorème des tores invariants*, thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, univ. Paris VII (1982).
- [DS] N. DUNFORD, J. SCHWARTZ, *Linear operators. Part I*. John Wiley & Sons (1958).
- [EKT] A. EPSTEIN, L. KEEN, C. TRESSER, *The set of maps  $F_{a,b} : x \mapsto x + a + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x)$  with any given rotation interval is contractible*, Commun. Math. Phys. **173** (1995), 313–333.
- [Fag] N. FAGELLA, *Dynamics of the complex standard family*, J. Math. Anal. Appl. **229** (1999), 1–31.
- [Fal] K. FALCONER, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons (1990).
- [Fat83] A. FATHI, *Une démonstration plus topologique du théorème de Birkhoff*, appendice du chap. I de [He83], 39–46.

- [Fat89] A. FATHI, *Expansiveness, hyperbolicity and Hausdorff dimension*, Commun. Math. Phys. **126** (1989), 249–262.
- [Ga] R. GALEEVA, *Stability of the densities of invariant measures for piecewise affine expanding non-renormalizable maps*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **66** (1997), 137–144.
- [GhSe] É. GHYS, V. SERGIESCU, *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), 185–239.
- [Gol] C. GOLÉ, *Ghost circle for twist maps*, J. Diff. Equations **97** (1992), 140–173.
- [Gor] D. GOROFF, *Hyperbolic sets for twist maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **5** (1985), 337–354.
- [Gr91] J. GRACZYK, *Harmonic scaling for smooth families of diffeomorphisms of the circle*, Nonlinearity **4** (1991), 935–959.
- [Gr92] J. GRACZYK, *Dynamics of circle maps with flat spots*, manuscrit (1992).
- [Gr93] J. GRACZYK, *Linearizable circle diffeomorphisms in one-parameter families*, Bol. Soc. Bras. Mat. (N.S.) **24** (1993), 201–210.
- [GJSTV] J. GRACZYK, L. JONKER, G. ŚWIĄTEK, F. TANGERMAN, J. VEERMAN, *Differentiable maps with a flat interval*, Commun. Math. Phys. **173** (1995), 599–622.
- [GrŚw] J. GRACZYK, G. ŚWIĄTEK, *Critical circle maps near bifurcation*, Commun. Math. Phys. **176** (1996), 227–260.
- [Ha] G. HALL, *A topological version of a theorem of Mather on twist maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **4** (1984), 585–603.
- [HK] B. HASSELBLATT, A. KATOK, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge univ. P. (1995).
- [He77] M. HERMAN, *Mesure de Lebesgue et nombre de rotation*, in *Geometry and topology*, Lecture Notes in Mathematics **597**, Springer Verlag, Berlin (1977), 271–293.
- [He79] M. HERMAN, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **49** (1979), 5–233.
- [He83] M. HERMAN, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l’anneau, volume 1*, Astérisque **103–104**, Soc. Math. France (1983).
- [He86] M. HERMAN, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l’anneau, volume 2*, Astérisque **144**, Soc. Math. France (1986).
- [HPS] M. HIRSCH, C. PUGH, M. SHUB, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **583** (1977), Springer Verlag.
- [J] M. JAKOBSON, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Commun. Math. Phys. **81** (1981), 39–88.

- [JN] M. JAKOBSON, S. NEWHOUSE, *On the structure of non-hyperbolic attractors*, (en préparation).
- [K] A. KATOK, *Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorem*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **2** (1982), 185–194.
- [LaY] A. LASOTA, J. YORKE, *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*, Trans. Am. Math. Soc. **186** (1973), 481–488.
- [L86] P. LE CALVEZ, *Existence d'orbites quasi-périodiques dans les attracteurs de Birkhoff*, Commun. Math. Phys. **106** (1986), 383–394.
- [L87] P. LE CALVEZ, *Propriétés des attracteurs de Birkhoff*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **8** (1987), 241–310.
- [L89] P. LE CALVEZ, *Propriétés générales des applications déviant la verticale*, Bull. Soc. Math. France **117** (1989), 69–102.
- [L90] P. LE CALVEZ, *Étude topologique des applications déviant la verticale*, Ensaos Matemáticos **2**, Soc. Bras. Mat. (1990).
- [L91] P. LE CALVEZ, *Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l'anneau et du tore*, Astérisque **204**, Soc. Math. France (1991).
- [L95] P. LE CALVEZ, *Construction d'orbites périodiques par perturbation d'un difféomorphisme de l'anneau déviant la verticale*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **321** (1995), 463–468.
- [L99] P. LE CALVEZ, *Décomposition des difféomorphismes du tore en applications déviant la verticale*, Mémoire Soc. Math. France **79** (1999).
- [LeY] P. LE CALVEZ, J.-C. YOCCOZ, *Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe*, Ann. of Math. **146** (1997), 241–293.
- [Led1] F. LEDRAPPIER, *Some properties of absolutely continuous invariant measures on an interval*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **1** (1981), 77–93.
- [Led2] F. LEDRAPPIER, *Propriétés ergodiques des mesures de Sinai*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **59** (1984), 163–188.
- [LiY] T.-Y. LI, J. YORKE, *Ergodic transformations from an interval into itself*, Trans. Am. Math. Soc. **235** (1978), 183–192.
- [MaT] R. MACKAY, C. TRESSER, *Transition to topological chaos for circle maps*, Phys. D **19** (1980), 206–237.
- [M82] J. MATHER, *Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus*, Topology **21** (1982), 457–467.
- [M84b] J. MATHER, *Amount of rotation about a point and the Morse index*, Commun. Math. Phys. **94** (1984), 141–153.
- [M86] J. MATHER, *A criterion for the non-existence of invariant circles*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **63** (1986), 153–204.

- [MS] W. DE MELO, S. VAN STRIEN, *One-dimensional dynamics*, Springer Verlag (1993).
- [MiTh] J. MILNOR, W. THURSTON, *On iterated maps of the interval*, in *Dynamical Systems* Lecture Notes in Mathematics **1342**, Springer Verlag (1988), 465–563.
- [MiTh] J. MILNOR, C. TRESSER, *On entropy and monotonicity for real cubic maps*, *Comm. Math. Phys.* **209** (2000), 123–178.
- [Mo] L. MORA, *Birkhoff-Hénon attractors for dissipative perturbations of area-preserving twist maps*, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **14** (1994), 807–815.
- [MV] L. MORA, M. VIANA, *Abundance of strange attractors*, *Acta Math.* **171** (1993), 1–71.
- [NPT] S. NEWHOUSE, J. PALIS, F. TAKENS, *Bifurcations and stability of families of difféomorphisms*, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **57** (1983), 5–72.
- [PT] J. PALIS, F. TAKENS, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge Univ. P. (1993).
- [PY] J. PALIS, J.-C. YOCOZ, *Fer à cheval non-uniformément hyperbolique engendrés par une bifurcation homocline et densité nulle des attracteurs*, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* **333** (2001), 867–871.
- [P81] H. POINCARÉ, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, *J. de Math Pures Appl. Série III* **7** (1881), 375–422 et **8** (1882), 251–296. Voir aussi : *Œuvres de Henri Poincaré*, tome I, Gauthier Villars, Paris (1928), 3–44 et 44–84. *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, *J. de Math Pures Appl. Série IV* **1** (1885), 167–244 et **2** (1886), 151–217. Voir aussi : *Œuvres*, tome I, 90–158 et 167–222.
- [P12] H. POINCARÉ, *Sur un théorème de géométrie*, *Rencondiconti del Circolo Matematico di Palermo* **33** (1912), 375–407. Voir aussi : *Œuvres*, tome VI, 499–538.
- [PS] E. PUJALS, M. SAMBARINO, *Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms*, *Ann. of Math.* **151** (2000), 961–1023.
- [Re] M. REES, *Positive measure sets of ergodic rational maps*, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **19** (1986), 383–407.
- [Ri] I.L. RIOS, *Unfolding homoclinic tangencies inside horseshoes: hyperbolicity, fractal dimension and persistent tangencies*, *Nonlinearity* **14** (2001), 431–462.
- [Ru] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, 3<sup>ème</sup> édition, McGraw-Hill (1987).
- [RS] M. RYCHLIK, E. SORETZ, *Regularity and other properties of absolutely continuous invariant measures for the quadratic family*, *Commun. Math. Phys.* **150** (1992), 217–236.
- [Sc] H. SCHAEFER, *Banach lattices and positive operators*, Springer Verlag (1974).
- [Sh] M. SHUB, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, astérisque **56** Soc. Math. France (1978).

- [Sm] S. SMALE, *Differentiable dynamical systems*, Bull. A.M.S. **73** (1967), 747–817.
- [St] S.T. VAN STRIEN, *Center manifolds are not  $C^\infty$* , Math. Z., **166** (1979), 143–145.
- [Św88] G. ŚWIĄTEK, *Rational rotation numbers for maps of the circle*, Commun. Math. Phys. **119** (1988), 109–128.
- [Św89] G. ŚWIĄTEK, *Endpoints of rotation intervals for maps of the circle*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **9** (1989), 173–190.
- [Ta] F. TAKENS, *Normal forms for certain singularities of vector fields*, Ann. Inst. Fourier **23** (1973), 163–195.
- [Th] H. THUNBERG, *Unfolding of chaotic unimodal maps and the parameter dependence of natural measures*, Nonlinearity **14** (2001), 323–337.
- [Ts92] M. TSUJII, *Rotation number and one-parameter families of circle diffeomorphisms*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **12** (1992), 359–363.
- [Ts93] M. TSUJII, *Positive Lyapunov exponents in families of one-dimensional dynamical systems*, Invent. Math. **111** (1993), 113–137.
- [Ts96] M. TSUJII, *On continuity of Bowen-Ruelle-Sinai measures in families of one-dimensional maps*, Commun. Math. Phys. **177** (1996), 1–11.
- [Ts00] M. TSUJII, *A simple proof for monotonicity of entropy in the quadratic family*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **20** (2000), 925–933.
- [V] M. VIANA, *Stochastic dynamics of deterministic systems*, Brazilian Math. Colloquium, IMPA (1997).
- [WY] Q. WANG, L.-S. YOUNG, *Strange attractors with one direction of instability*, Commun. Math. Phys. **218** (2001), 1–92.
- [Yoc84] J.-C. YOCCOZ, *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **17** (1984), 333–359.
- [Yoc92] J.-C. YOCCOZ, *An introduction to small divisors problems*, in *From number theory to physics*, M. Waldschmidt, P. Moussa, J.-M. Luck, C. Itzykson eds, Springer Verlag, Berlin (1992), 659–679.
- [Yoc95] J.-C. YOCCOZ, *Introduction to hyperbolic dynamics*, in *Real and Complex Dynamical Systems*, B. Branner et P. Hojth (eds) Kluwer Academics Publishers, Amsterdam (1995), 265–291.
- [Yoc97] J.-C. YOCCOZ, *Jakobson's theorem*, notes de cours au Collège de France (1997). Voir aussi: *Dynamique des polynômes quadratiques*, notes rédigées par Marguerite Flexor, in *Dynamique & géométrie complexes*, Panoramas et synthèses **8**, S.M.F. (1999), 187–222.
- [You] L.-S. YOUNG, *Decay of correlations for certain quadratic maps*, Commun. Math. Phys. **146** (1992), 123–138.



# Index

- $a_B, a_M, a_S$ , 116–118  
 $\mathbb{A}, \hat{\mathbb{A}}, \tilde{\mathbb{A}}, \mathbb{A}_M$ , 4, 90  
 $\alpha(x), \alpha(Y)$ , 5  
anneau  
    inférieur, supérieur, 91  
    montant, descendant, 93  
application  
    bimodale,  $\mathcal{B}$ , 12, 117  
    conservative, dissipative, 114  
    déviant la verticale,  $\widetilde{DV}(\mathbb{A})$ , 89  
    de flux nul, 95  
    standard, 113  
attracteur de Birkhoff,  $\Lambda_1$ , 96  
  
bifurcation selle-nœud, 185, 211  
  
 $\mathcal{C}_{p,q}$ , 94  
cercle invariant, 92  
chemin positif, négatif, 90  
classe  
    de Morse,  $\mathcal{M}$ , 116  
    schwarzienne,  $\mathcal{S}$ , 117  
collision, 40  
  
 $D(z), D_i(z), D_s(z)$ , 4  
 $D^k(\mathbb{T}^1), \overline{D^k}(\mathbb{T}^1)$ , 5  
dérivée schwarzienne,  $Sf$ , 4  
 $\text{Diff}^k(\mathbb{T}^1), \text{Diff}^k(\mathbb{A})$ , 5  
  
 $E^k(\mathbb{T}^1), \text{End}^k(\mathbb{T}^1)$ , 5  
ensemble  
    bien ordonné, 7, 92  
    d'Aubry-Mather, 92  
    de rotation  $\mathcal{R}(f), \mathcal{R}(\tilde{F})$ , 8, 92, 97  
    de torsion nulle, 100  
    selle-nœud hyperbolique, 185–221  
  
 $\tilde{f}^{(t)}$ , 11  
famille  
    d'Arnol'd, 11  
    d'Arnol'd épaisse, 119  
  
langue d'Arnol'd, 9, 140, 147  
  
 $m_1^{(t)}, m_2^{(t)}$ , 11  
 $\mu_U$ , 91  
  
nombre de rotation  
    d'une application  $\rho(\tilde{f})$ , 6  
    d'une mesure  $\rho(\mu)$ , 8, 92  
    presque sûr, 29  
  
 $\mathcal{O}(x), \mathcal{O}^+(x), \mathcal{O}^-(x), \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{x})$ , 5  
 $\omega(x), \omega(Y)$ , 5  
 $\omega_\rho^-, \hat{\omega}_\rho^-, \hat{\omega}_\rho^+, \omega_\rho^+$ , 11, 138, 146, 168  
orbite  
    bien ordonnée, 6  
    positive, 17, 139  
    type, 6, 93  
  
 $\pi_0, \pi_1$ , 4  
 $p_1, p_1, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ , 4  
  
 $\tilde{r}_\omega, r_\omega, \tilde{R}_\omega, R_\omega$ , 5  
 $\rho^-, \rho^+$ , 8





N<sup>o</sup> d'impression 2385  
4<sup>ème</sup> trimestre 2001