



**HAL**  
open science

# Effets non linéaires et quantiques dans les microcavités semi-conductrices

Jean-Philippe Karr

► **To cite this version:**

Jean-Philippe Karr. Effets non linéaires et quantiques dans les microcavités semi-conductrices. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2001. Français. NNT: . tel-00001199

**HAL Id: tel-00001199**

**<https://theses.hal.science/tel-00001199>**

Submitted on 8 Mar 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Table des matières

<b>Table des matières</b> . . . . .	i
<b>Introduction</b> . . . . .	1
<b>1. Microcavités semi-conductrices en régime de couplage fort</b> . . . . .	5
A Microcavités semi-conductrices . . . . .	7
A.1 Résonances excitoniques dans un puits quantique semi-conducteur	7
A.2 Microcavités à puits quantiques . . . . .	13
B Le régime de couplage fort dans les microcavités semi-conductrices . . .	19
B.1 Hamiltonien linéaire . . . . .	19
B.2 Etats propres - énergies propres . . . . .	20
B.3 Définition du régime de couplage fort . . . . .	21
B.4 Caractéristiques des polaritons . . . . .	22
<b>2. Propriétés optiques linéaires d'une microcavité</b> . . . . .	25
A Etude de la relaxation . . . . .	26
A.1 Discussion . . . . .	26
A.2 Relaxation du champ électromagnétique dans la cavité vide . . .	27
A.3 Modélisation par un couplage avec un réservoir . . . . .	32
A.4 Relaxation du champ excitonique . . . . .	34
B Calcul des spectres . . . . .	37
B.1 Equations d'évolution . . . . .	37
B.2 Régime stationnaire . . . . .	38
C Influence du désordre . . . . .	41
C.1 Discussion . . . . .	41
C.2 Modélisation simplifiée du désordre . . . . .	42
C.3 Résultats . . . . .	44

---

<b>3. Caractérisation de l'échantillon</b>	47
A Courbe d'anticroisement	47
A.1 Gradient d'épaisseur des microcavités	48
A.2 Description du montage	50
A.3 Choix du modèle	55
A.4 Résultats	57
B Largeurs de raie	58
B.1 Réflectivité en lumière blanche	60
B.2 Réflectivité en excitation laser	61
<b>4. Etude théorique des fluctuations</b>	67
A Introduction	67
B Le bruit quantique du champ électromagnétique	70
B.1 Fluctuations quantiques d'un mode du champ libre	70
B.2 Fluctuations quantiques d'un faisceau laser	72
B.3 Corrélations entre deux faisceaux	75
C Hamiltonien du système	80
C.1 Termes non linéaires	80
C.2 Hamiltonien effectif	81
C.3 Conservation de l'énergie	83
D Excitation sous incidence normale	84
D.1 Equations de Heisenberg-Langevin	84
D.2 Equation d'évolution pour le polariton	85
D.3 Réponse optique en régime non linéaire	87
D.4 Etude des fluctuations du champ réfléchi	90
E Excitation à «l'angle magique»	100
E.1 Equations de Heisenberg-Langevin	101
E.2 Etude des champs moyens au-dessus du seuil	103
E.3 Etude des fluctuations	105
E.4 Résultats dans le cas équilibré	108
E.5 Prise en compte du déséquilibre signal-complémentaire	117
E.6 Effet d'un excès de bruit entrant	119
<b>5. Etude expérimentale des fluctuations</b>	123
A Dispositif de mesure de bruit	123
A.1 Principe de la détection homodyne	123

---

A.2	Montage expérimental . . . . .	127
B	Résultats . . . . .	135
B.1	Etude de la réflectivité . . . . .	136
B.2	Fluctuations d'intensité du faisceau réfléchi . . . . .	141
B.3	Dépendance en quadrature des fluctuations du faisceau réfléchi .	150
	<b>Conclusion</b> . . . . .	155
	<b>Annexe</b> . . . . .	157
A	Hamiltonien du système électrons-trous couplé à un champ lumineux . .	158
B	Equation de Wannier . . . . .	159
C	Etats excitoniques . . . . .	162
D	Opérateur de création d'un exciton . . . . .	163
E	La transformation d'Usui . . . . .	164
F	Hamiltonien effectif d'un mode excitonique couplé au champ lumineux .	165
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	169



## Introduction

Au début du 20<sup>ème</sup> siècle, Planck parvient à interpréter la distribution spectrale du rayonnement du corps noir. Einstein remarque que la démonstration de Planck suppose implicitement que l'énergie du champ électromagnétique ne peut varier que par quanta de grandeur  $h\nu$  et introduit la notion de photon qui lui permet d'expliquer l'effet photoélectrique. C'était là la première indication de la nature quantique de la lumière.

Celle-ci se traduit notamment par l'existence des inégalités de Heisenberg qui imposent une valeur minimale au produit des variances de deux observables conjuguées. Par exemple, le produit des fluctuations d'intensité et de phase est supérieur à une certaine constante. Un laser fonctionnant très au-dessus du seuil permet d'atteindre cette limite : toutes les quadratures du champ sont affectées du même niveau de bruit, appelé bruit quantique standard. Le bruit d'intensité correspondant est alors le «bruit de grenaille» ou «shot noise». Ce bruit d'origine fondamentale constitue une réelle limitation à la sensibilité dans les mesures de spectroscopie ou d'interférométrie de haute précision.

Cependant l'inégalité de Heisenberg n'impose une limite que sur le produit de deux variances : par exemple il est concevable de réduire le bruit d'intensité en dessous de la limite standard au prix d'une incertitude accrue sur la phase. De tels états non classiques sont appelés états comprimés. C'est en 1985 qu'un tel état fut réalisé expérimentalement pour la première fois [Slusher 85] en utilisant la non-linéarité de type  $\chi^{(3)}$  d'une vapeur de sodium. Depuis la réduction du bruit quantique a été démontrée dans de nombreux systèmes ; une revue de l'ensemble de ces résultats est publiée dans [Kimble 92].

L'un des systèmes les plus performants est l'oscillateur paramétrique optique. Celui-ci est composé d'un cristal non linéaire d'ordre 2 inséré dans une cavité optique. Le cristal, pompé par un champ second harmonique à la fréquence  $\omega_p$ , génère par émission paramétrique un faisceau signal et un faisceau complémentaire aux fréquences respectives  $\omega_s$  et  $\omega_c$ . On peut décrire intuitivement le processus à l'intérieur du cristal au

niveau quantique : un photon à la fréquence  $\omega_p$  donne naissance à deux photons aux fréquences  $\omega_s$  et  $\omega_c$ . La conservation de l'énergie impose la condition  $\omega_p = \omega_s + \omega_c$ , et la conservation de l'impulsion totale se traduit par une condition dite d'«accord de phase».

Ces deux photons sont créés «en même temps», ce qui permet théoriquement d'obtenir une corrélation quantique parfaite entre les intensités des faisceaux signal et complémentaire à proximité du seuil d'oscillation ; c'est ce que l'on appelle des faisceaux jumeaux. Expérimentalement une réduction de bruit de 86% a été obtenue en soustrayant leurs intensités [Mertz 91]. Pour une revue de l'étude des fluctuations quantiques dans les oscillateurs paramétriques optiques le lecteur pourra se reporter à la référence [Reynaud 92].

La plupart des systèmes utilisés pour réduire le bruit quantique font intervenir un milieu non linéaire inséré dans une cavité optique de bonne finesse afin de renforcer son interaction avec la lumière. La démonstration de tels phénomènes quantiques dans des dispositifs semi-conducteurs est actuellement un enjeu important en vue d'applications possibles dans le domaine de l'opto-électronique. Plusieurs expériences ont montré la possibilité de réduire le bruit quantique dans les semi-conducteurs, soit en utilisant des propriétés non linéaires [Fox 95] soit dans des lasers à semi-conducteur de type «ruban» [Kilper 96] ou à cavité verticale [Hermier 01]. Les microcavités semi-conductrices fonctionnant en couplage fort sont des candidats intéressants car elles sont susceptibles de présenter plusieurs types d'effets quantiques ; elles sont étudiées au laboratoire depuis 1996.

Une revue de la physique et des applications des microcavités se trouve dans les références [Rarity&Weisbuch] et [Cargèse 98]. Ces systèmes sont composés d'un ou plusieurs puits quantiques placés dans une cavité optique dont l'épaisseur est de l'ordre de la longueur d'onde et dont la finesse peut atteindre quelques milliers. Le premier mode résonant de la cavité est ajusté à la même fréquence que le premier niveau excitonique du puits quantique. On peut ainsi atteindre le régime de couplage fort entre les excitons et les photons ; il en résulte des modes mixtes exciton-photon appelés polaritons de cavité. Ces modes peuvent être excités de façon résonante par absorption directe de photons.

Lorsque la densité d'excitation lumineuse est modérée, les polaritons peuvent être considérés comme des bosons en interaction. Dans certaines conditions, l'interaction entre polaritons provenant de l'interaction coulombienne entre excitons se traduit par une non-linéarité d'ordre 3. L'interaction entre le champ et le milieu non linéaire peut entraîner une modification et éventuellement une réduction des fluctuations du champ

réfléchi. Cette situation présente des analogies avec le cas d'atomes froids en cavité déjà étudié au laboratoire, où l'interaction non linéaire entre les atomes et le champ a permis d'obtenir une réduction de bruit de 40% sur le champ réfléchi [Lambrecht 96]. Une étude théorique menée au laboratoire a confirmé la possibilité d'obtenir une réduction de bruit au moyen de microcavités semi-conductrices [Eleuch 98]. Cette réduction de bruit pourrait se produire avec des puissances incidentes très faibles, contrairement au cas de la référence [Fox 95].

Les mesures de bruit réalisées lors de la thèse de Gaétan Messin [Messin 00] ont démontré un premier effet de modification des fluctuations du champ, sous la forme d'une amplification géante des fluctuations d'intensité du champ réfléchi. Nous présentons dans ce mémoire une étude théorique et expérimentale détaillée des fluctuations quantiques dans une microcavité semi-conductrice, mettant en évidence une réduction du bruit en dessous du bruit thermique.

D'autre part, plusieurs groupes ont observé récemment un phénomène de mélange paramétrique à quatre ondes dans les microcavités [Stevenson 00] qui provient du même processus d'interaction non linéaire entre polaritons. Un faisceau pompe crée des polaritons d'énergie  $\omega_p$  et de vecteur d'onde  $k_p$ ; deux polaritons dans le mode de la pompe peuvent être convertis en un polariton «signal» et un polariton «complémentaire» qui émettent à leur tour deux faisceaux lumineux. Pour observer le seuil d'oscillation paramétrique il faut ajuster précisément l'angle d'incidence du faisceau pompe de manière à ce que ce mécanisme conserve à la fois l'énergie et l'impulsion, d'où le terme d'«angle magique» couramment employé dans la littérature.

Dans ce régime de fonctionnement le système présente de fortes analogies avec un oscillateur paramétrique optique et peut donc donner lieu à des effets d'optique quantique intéressants. Nous développons un modèle permettant d'évaluer la possibilité de générer des faisceaux jumeaux en utilisant une microcavité semi-conductrice.

Les trois premiers chapitres de ce manuscrit traitent exclusivement des propriétés linéaires des microcavités. Ils ont pour but d'une part de donner au lecteur une bonne compréhension du système, et d'autre part de déterminer les caractéristiques de base de notre échantillon, avant de passer à l'étude des fluctuations quantiques proprement dite, qui fait l'objet des chapitres 4 et 5.

Le premier chapitre décrit les différents éléments d'une microcavité semi-conductrice et étudie le couplage fort entre les excitons et les photons dans ce type de système. Les propriétés essentielles des polaritons de cavité sont étudiées dans le cadre d'un modèle quantique simple. Au chapitre 2 nous introduisons les équations de Heisenberg-Langevin du système, en précisant notamment les hypothèses sous lesquelles il est



possible de traiter de façon simple les phénomènes de relaxation des excitons. Ces équations sont résolues en régime stationnaire de manière à calculer les spectres de réflectivité, de transmission et d'absorption d'une microcavité. Nous étudions également l'influence du désordre, qui permet de rendre compte de façon plus précise des largeurs de raie observées. Enfin le troisième chapitre présente les mesures que nous avons réalisées afin de caractériser l'échantillon ; la comparaison des résultats avec le modèle du chapitre 2 nous permet de déterminer les paramètres qui seront utiles dans la suite.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude théorique des fluctuations quantiques. Nous utilisons un modèle simple considérant les excitons comme des bosons en interaction, en ne gardant que le premier terme du développement perturbatif de l'interaction. On peut ainsi traiter de façon «unifiée» deux configurations expérimentales différentes, mettant en lumière leurs analogies :

- la première correspond aux expériences que nous avons effectivement réalisées, où la microcavité est excitée sous incidence normale. Nous montrons que dans ce cas les interactions entre excitons se traduisent par un effet non linéaire d'ordre 3 de type Kerr. La possibilité d'obtenir une réduction du bruit est étudiée en détail ;

- la seconde correspond au cas de conversion paramétrique, la microcavité étant excitée à l'«angle magique». Nous montrons que les équations d'évolution du système ont une forme similaire à celles d'un oscillateur paramétrique optique et nous discutons la possibilité d'obtenir des faisceaux jumeaux dans cette configuration.

Enfin le chapitre 5 présente les résultats expérimentaux et les compare aux prédictions du modèle dans le cas où la microcavité est excitée sous incidence normale. Les résultats obtenus confirment l'existence d'un effet non linéaire cohérent de type Kerr.

## Chapitre 1

# Microcavités semi-conductrices en régime de couplage fort

Nous nous intéressons dans ce mémoire à une microcavité constituée de deux miroirs multicouches de Bragg, contenant un puits quantique. La figure 1.1 représente la structure de l'échantillon sur lequel nous avons réalisé la plus grande partie des études expérimentales. Celui-ci a été fabriqué à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne et nous a été fourni par R. Houdré et R. P. Stanley de l'Institut de Micro- et Optoélectronique.

Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons une description générale de ce type de structure en insistant sur ses propriétés optiques. Le premier paragraphe introduit la notion d'exciton avant de s'intéresser au cas particulier des excitons confinés dans des puits quantiques. Nous décrivons ensuite les microcavités à miroirs de Bragg. Enfin, nous montrons comment le fait de placer un puits quantique dans une microcavité modifie son couplage avec la lumière.

L'exaltation du champ électromagnétique dans la cavité permet d'atteindre le régime de couplage fort entre les excitons et les photons. La deuxième partie de ce chapitre présente un modèle quantique simple qui explique les propriétés optiques linéaires des microcavités en régime de couplage fort soumises à une excitation laser peu intense. Pour décrire le système, nous utilisons un hamiltonien linéaire qui est le résultat d'un développement perturbatif au premier ordre du hamiltonien total du système électrons-trous. La construction de ce hamiltonien est décrite en annexe.

La signature essentielle du régime de couplage fort est un dédoublement des résonances optiques qui s'explique par l'apparition de deux états propres d'énergies distinctes appelés polaritons de cavité, due au couplage exciton-photon. La notion de polariton nous sera utile dans le chapitre 4, pour interpréter les propriétés non linéaires des microcavités, qui apparaissent lorsque l'excitation laser est plus intense.

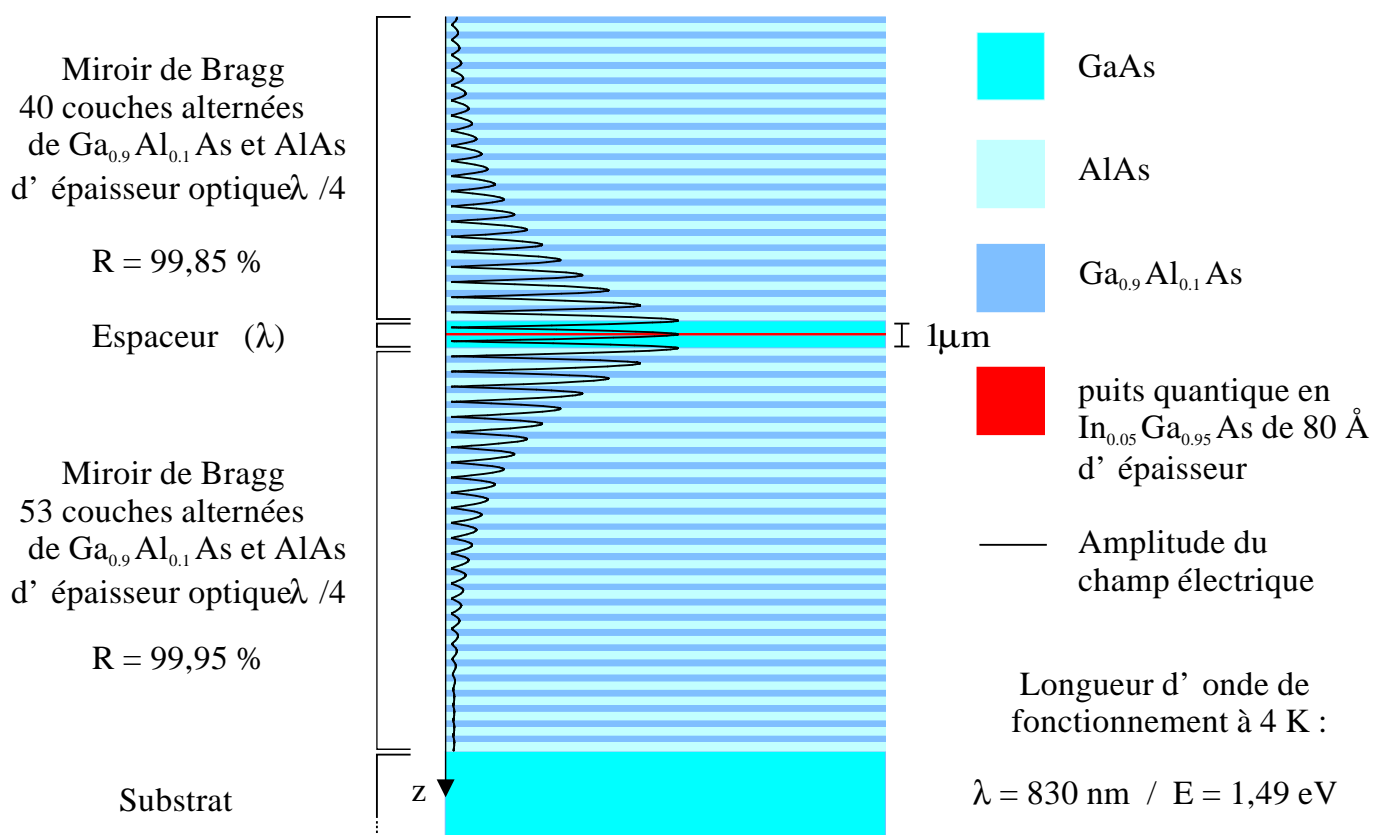


Fig. 1.1 – Structure de la microcavité étudiée.

## A Microcavités semi-conductrices

### A.1 Résonances excitoniques dans un puits quantique semi-conducteur

#### A.1.1 Structure de bandes d'un semi-conducteur : quelques rappels

La figure 1.2 représente de façon schématique la «relation de dispersion»  $E(k)$  des bandes de valence et de conduction d'un matériau semi-conducteur à bande interdite directe. Dans l'état fondamental du cristal, les électrons remplissent entièrement la bande de valence, tandis que la bande de conduction est vide.

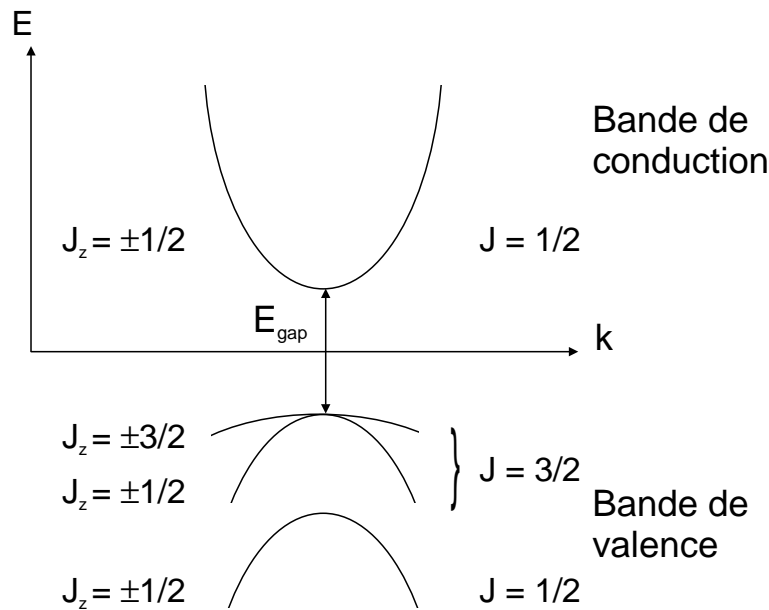


Fig. 1.2 – Description schématique de la structure de bande d'un semi-conducteur massif à bande interdite directe.

Au voisinage de  $k = 0$  on peut représenter les dispersions des différentes bandes par des paraboles. Les électrons se comportent alors comme des particules libres et on peut associer à chaque bande une masse effective  $m^*$  définie par la relation :

$$E(k) = E(k = 0) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \quad (1-1)$$

Dans la plupart des matériaux semi-conducteurs, la bande de conduction est unique tandis que la bande de valence est composée de trois sous-bandes. Pour comprendre cela il faut revenir aux origines «chimiques» des différentes bandes. La bande de conduction

provient d'états de type  $s$  de moment orbital  $l = 0$  tandis que la bande de valence provient d'états de type  $p$ , de moment orbital  $l = 1$ . Pour la bande de valence, l'interaction spin-orbite rentre en jeu et entraîne une levée de dégénérescence entre les états de moment angulaire total  $J = 1/2$  et  $J = 3/2$ . La bande  $J = 1/2$  a une énergie plus basse que la bande  $J = 3/2$ ; elle est couramment appelée «split-off band». La bande  $J = 3/2$  est elle-même divisée en deux sous-bandes  $J_z = \pm 3/2$  et  $J_z = \pm 1/2$  qui ont le même extremum à  $k = 0$  mais n'ont pas la même dispersion  $E(k)$ . Leurs masses effectives sont donc différentes et c'est pourquoi on dit que les états  $J_z = \pm 3/2$  forment la bande des trous «lourds» et les états  $J_z = \pm 1/2$  la bande des trous «légers».

### A.1.2 Excitons dans un semi-conducteur massif

Les propriétés optiques d'un matériau semi-conducteur sont déterminées par l'énergie de bande interdite  $E_{gap}$  qui sépare les bandes de valence et de conduction. Il est possible d'exciter optiquement la bande de conduction si l'énergie des photons incidents  $\hbar\omega$  est supérieure à  $E_{gap}$ . Un électron de valence passe alors à la bande de conduction en absorbant un photon. La disparition de cet électron de la bande de valence peut être décrite, de façon équivalente, par la création d'une particule virtuelle de charge opposée, appelée trou. On parle de création d'une paire électron-trou par absorption d'un photon.

Cependant des résonances d'absorption étroites ont été observées pour des énergies inférieures à  $E_{gap}$ . Ces résonances sont dues à l'interaction coulombienne attractive entre l'électron et le trou et correspondent à la création d'une paire électron-trou liée, appelée exciton. L'énergie de la résonance excitonique est égale à

$$E_{exc}(K) = E_{gap} - E_l + \frac{\hbar^2 K^2}{2m} \quad (1-2)$$

où  $E_l$  est l'énergie de liaison de l'exciton.  $\hbar\mathbf{K}$  est l'impulsion de l'exciton, définie comme l'impulsion du centre de masse de la paire électron-trou et  $m$  est sa masse effective, égale à la somme des masses effectives de l'électron et du trou.

Comme il existe deux types de trous, il existe également deux types d'excitons : les excitons de trous lourds et les excitons de trous légers, qui n'ont pas la même masse effective.

Le problème de l'exciton présente des analogies avec celui de l'atome d'hydrogène, le trou jouant le rôle du proton. Le hamiltonien du système a la même forme et la structure des niveaux excitoniques est la même : il existe des niveaux d'exciton 1s, 2s, 2p, etc. La fonction d'onde du mouvement relatif électron-trou est simplement donnée

par la fonction d'onde hydrogénoïde correspondante. Cette analogie a cependant ses limites, car l'exciton est une excitation collective de tous les électrons de valence, qui dans le cas idéal d'un cristal parfaitement homogène est délocalisée sur tout le cristal. D'autre part l'«état fondamental» de l'exciton est en fait l'état fondamental du cristal, où la paire s'est recombinaée ; il est plus judicieux de le comparer à l'état fondamental du positronium (paire électron-positron).

Les ordres de grandeur mis en jeu sont également très différents. A cause des faibles masses effectives de l'électron et du trou et des effets d'écrantage de l'interaction de Coulomb, l'énergie de liaison de l'exciton est plusieurs ordres de grandeur en dessous de la constante de Rydberg : elle est typiquement de l'ordre de quelques meV dans les semi-conducteurs massifs III-V. L'énergie thermique à température ambiante étant  $k_B T \simeq 25$  meV, les résonances excitoniques ne sont nettement visibles qu'à basse température. Pour les mêmes raisons, le rayon de Bohr effectif de l'exciton ( $\simeq 100$  Å) est deux ordres de grandeur au-dessus de celui de l'atome d'hydrogène. La maille cristalline mesurant environ 5 Å dans le cas du GaAs, il occupe plusieurs cellules du cristal.

### A.1.3 Couplage avec la lumière

Il est possible de créer un exciton par absorption d'un photon ; inversement, un exciton peut émettre un photon par recombinaison de la paire électron-trou. Ce couplage exciton-photon provient de l'interaction entre les électrons du cristal et le champ électromagnétique. Nous la décrivons dans l'approximation dipolaire électrique par le hamiltonien :

$$H_{dip} = -e \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}}{m_e} \quad (1-3)$$

où  $\mathbf{p}$  est l'opérateur impulsion d'un électron de charge  $-e$ , de masse  $m_e$  et  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur du champ électromagnétique.

Nous allons maintenant décrire les règles de sélection qui régissent cette interaction. Pour cela on considère une onde plane  $\mathbf{A}_0 \exp(i\mathbf{k}r)$ , provoquant une transition entre l'état fondamental du cristal et un état excitonique de trou lourd de vecteur d'onde  $\mathbf{K}_{exc}$  et de moment angulaire  $J_{exc}$ .

- L'invariance par translation du cristal impose la conservation de l'impulsion totale. Les excitons ne peuvent absorber ou émettre que des photons de même vecteur d'onde  $\mathbf{k} = \mathbf{K}_{exc}$ .

- L'état excitonique doit être de type  $s$ , car la fonction d'onde du mouvement relatif électron-trou ne doit pas s'annuler à l'origine.

- Le moment angulaire total doit être conservé.

Explorons les conséquences de cette dernière règle. On choisit l'axe de quantification suivant la direction définie par  $\mathbf{K}_{exc}$ . Le moment angulaire total des électrons (respectivement des trous lourds) est  $J_e = 1/2$  (respectivement  $J_{hh} = 3/2$ ) et sa projection sur l'axe de quantification est  $M_e = \pm 1/2$  (respectivement  $M_{hh} = \pm 3/2$ ). Par conséquent, il existe des excitons de moment  $J_{exc} = 2$  et des excitons de moment  $J_{exc} = 1$ . L'état fondamental du cristal étant un état de  $J = 0$ , le couplage dipolaire ne permet pas de se coupler aux états  $J_{exc} = 2$ , qui sont pour cette raison appelés «états noirs». Les états radiatifs sont caractérisés par  $J_{exc} = 1$  et  $M_{exc} = \pm 1$  et peuvent donc émettre des photons de  $M_{exc} = \pm 1$ . Comme on a  $\mathbf{k} = \mathbf{K}_{exc}$ , la direction de propagation de l'onde plane coïncide avec l'axe de quantification de  $J$  et les ondes de  $M_{exc} = \pm 1$  correspondent aux ondes polarisées circulairement droite et gauche.

Dans un semi-conducteur massif, le spectre des états excitoniques est un continuum tridimensionnel d'états  $|\mathbf{K}_{exc}, M_{exc}\rangle$ , exactement comme pour les états du champ électromagnétique  $|\mathbf{k}, \sigma\rangle$ . Cependant, les règles de sélection entraînent qu'un état excitonique donné ne peut interagir qu'avec un seul mode du champ électromagnétique. Nous allons voir que la situation est différente dans un puits quantique.

#### A.1.4 Excitons dans un puits quantique

Les progrès de la fabrication des semi-conducteurs permettent maintenant de réaliser des hétérostructures dans lesquelles le mouvement des électrons se trouve confiné à deux (puits quantiques), une (fils quantiques) ou zéro (boîtes quantiques) dimensions. Ce changement de dimension modifie fortement l'interaction entre la lumière et les excitations du cristal. Nous traitons ici le cas des puits quantiques.

Un puits quantique est une séquence de couches planes semi-conductrices, où un matériau A, d'une épaisseur typique de 100 Å, est inséré dans un matériau B de plus grande bande interdite. Dans notre échantillon, il s'agit d'une fine couche d' $In_{0.05}Ga_{0.95}As$  placée dans du  $GaAs$ . Lorsque l'on trace la variation des extrema des bandes de conduction et de valence sur l'axe de croissance des couches (figure 1.3), on observe des discontinuités abruptes aux deux interfaces. Ces discontinuités créent des puits de potentiel pour les électrons et pour les trous dans le matériau central A. Il existe donc des états d'électrons et de trous liés, qui sont confinés suivant l'axe  $Oz$  perpendiculaire au plan des couches, mais libres dans le plan du puits  $Oxy$ . De la même façon que dans les semi-conducteurs massifs, on peut créer dans les puits quantiques des paires électron-trou liées ou excitons. Ces excitons sont alors confinés suivant l'axe  $Oz$ , mais libres

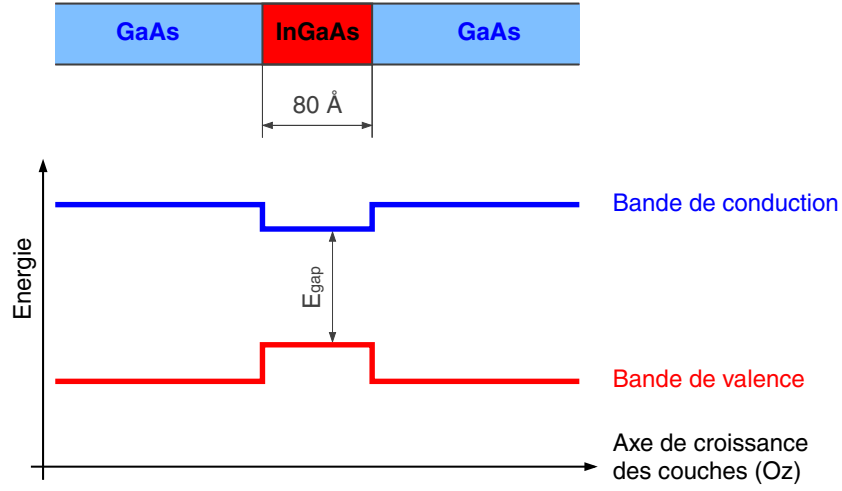


Fig. 1.3 – Description schématique d'un puits quantique. Ici, un puits en InGaAs de 80 Å d'épaisseur est placé dans du GaAs.

dans le plan  $Oxy$ . Ils possèdent la même structure de niveaux 1s, 2s, 2p... que l'atome d'hydrogène à deux dimensions (voir dans l'annexe).

La structure de bandes d'un puits quantique présente une différence notable avec celle des matériaux massifs : les bandes de trous lourds et de trous légers ne sont plus dégénérées à  $k = 0$ . En effet l'énergie de confinement  $\epsilon$  d'un état électronique dans le puits d'épaisseur  $L$  dépend de sa masse effective  $m^*$  :

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* L^2} \quad (1-4)$$

Nous ne décrivons pas en détail la structure des niveaux d'électron, de trou et d'excitons dans le puits quantique. Le puits quantique contenu dans notre microcavité est conçu de manière à ce que le niveau électronique de plus basse énergie soit bien séparé de tous les autres et ce niveau est le seul qui joue un rôle dans nos expériences. Il s'agit du niveau d'exciton de trou lourd 1s, correspondant au niveau d'électron de plus basse énergie et au niveau de trou de plus basse énergie. Dans toute la suite, lorsque nous parlerons d'exciton ou de résonance excitonique, c'est toujours à cet état que nous ferons référence. Son énergie est donnée par la relation de dispersion suivante :

$$E(K_{\parallel}) = E_{exc} + \frac{\hbar^2 K_{\parallel}^2}{2m_{exc}} \quad (1-5)$$

avec

$$E_{exc} = E_{gap} + \varepsilon_e + \varepsilon_h + E_{1s} \quad (1-6)$$

Dans cette équation,  $\varepsilon_e$  et  $\varepsilon_h$  désignent respectivement les énergies de confinement du premier niveau d'électron et du premier niveau de trou lourd.  $E_{1s}$  est l'énergie de liaison



de l'exciton de trou lourd  $1s$ , qui est calculée dans l'annexe.  $\hbar\mathbf{K}_{\parallel}$  est l'impulsion du centre de masse de l'exciton dans le plan  $Oxy$ .  $m_{exc}$  est la masse effective de l'exciton dans le plan  $Oxy$ , qui est égale à la somme des masses effectives de l'électron  $m_e$  et du trou lourd  $m_{hh}$ . Dans le cas de l'Arsénure de Gallium, ces masses effectives valent, en fonction de la masse de l'électron  $m_0$  :

$$\begin{aligned} m_e^{xy} &= 0.067 m_0 \\ m_{hh}^{xy} &= 0.112 m_0 \\ m_{exc}^{xy} &= 0.179 m_0 \end{aligned} \quad (1-7)$$

### A.1.5 Couplage avec la lumière

Dans un puits quantique, l'invariance par translation suivant l'axe de croissance est brisée. Du continuum tridimensionnel en  $\mathbf{K}$  dans un matériau massif, le spectre des états excitoniques passe à un continuum bidimensionnel en  $\mathbf{K}_{\parallel}$ . La règle de sélection sur les vecteurs d'onde est remplacée par une règle de sélection sur les vecteurs d'onde dans le plan des couches. Plus précisément, un exciton de vecteur d'onde  $\mathbf{K}_{\parallel}$  dans le plan  $Oxy$  ne peut émettre que des photons de même vecteur d'onde dans le plan  $Oxy$   $\mathbf{k}_{\parallel} = \mathbf{K}_{\parallel}$ . La composante  $k_z$  du vecteur d'onde du photon est a priori libre de prendre n'importe quelle valeur.

Par conséquent, un état excitonique donné n'est pas couplé à un état unique du champ, comme dans un matériau massif, mais à un continuum de modes du champ électromagnétique. L'interaction matière-rayonnement est dans un régime perturbatif. L'exciton acquiert un temps de vie radiatif, qu'il est possible de calculer en utilisant la règle d'or de Fermi [Andreani 91]. Dans un puits quantiques d'InGaAs de 100 Å, la largeur naturelle de l'exciton est de l'ordre de quelques centièmes de meV, correspondant à un temps de vie radiatif de quelques dizaines de picosecondes.

Cependant, la conservation de l'énergie lors de l'interaction exciton-photon, imposée par la règle d'or de Fermi, ne peut être vérifiée que pour une partie des états excitoniques. La condition de conservation s'écrit :

$$E_{exc} + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{exc}} = \hbar \frac{ck}{n} = \hbar \frac{c}{n} \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_z^2} \quad (1-8)$$

où  $\hbar ck/n$  est l'énergie d'un photon de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  se propageant dans le matériau d'indice  $n$  qui compose le puits. Cette relation ne peut être vérifiée que si la

composante  $k_{\parallel}$  du vecteur d'onde de l'exciton est inférieure à la quantité :

$$k_r \simeq \frac{nE_{exc}}{\hbar c} \quad (1-9)$$

Par conséquent seuls les états vérifiant  $|\mathbf{k}_{\parallel}| \leq k_r$  sont couplés à la lumière. Nous avons distingué la zone radiative de la zone non radiative sur la figure 1.4 représentant la dispersion de l'exciton.

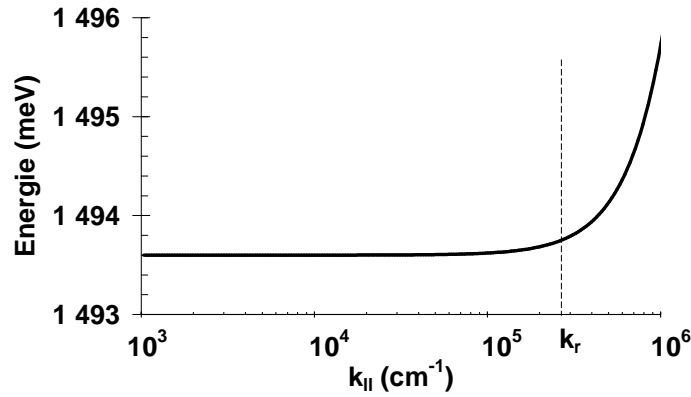


Fig. 1.4 – Courbe de dispersion de l'énergie d'un exciton typique en fonction du module de son vecteur d'onde dans le plan des couches. Paramètres :  $E_{exc}=1493.6$  meV,  $n=3.54$ .

La condition de conservation du moment angulaire reste quant à elle valable. Cependant, dans le cas d'un puits quantique l'axe de quantification de  $J$  est l'axe de croissance  $Oz$  qui ne coïncide pas avec la direction de propagation, sauf pour  $\mathbf{k}_{\parallel} = 0$ . Lorsque  $\mathbf{k}_{\parallel} \neq 0$ , une onde lumineuse polarisée circulairement droite ou gauche n'excite pas un état pur de spin, mais un mélange des états  $M_{exc} = +1$  et  $M_{exc} = -1$  qui est calculé dans l'annexe de la référence [Cassabois 99].

Nous allons voir maintenant que l'utilisation d'une cavité permet de modifier profondément le couplage des excitons avec la lumière.

## A.2 Microcavités à puits quantiques

Depuis une vingtaine d'années, l'amélioration des techniques de croissance permet de réaliser des miroirs de Bragg semi-conducteurs de haute réflectivité. Dès lors, de nombreuses expériences ont été réalisées sur des échantillons constitués d'un ou plusieurs puits quantiques enfermés entre deux miroirs de Bragg formant une microcavité.

Ces études ont été motivées par les résultats obtenus pour des atomes en cavité, comme la modification du taux d'émission spontanée (effet Purcell) ou la mise en

évidence du régime de couplage fort entre atomes et photons. L'idée est d'obtenir le même type d'effets dans des matériaux semi-conducteurs, plus adaptés aux applications industrielles, en exploitant l'analogie des excitons avec un milieu atomique. Ces recherches ont effectivement donné lieu à des applications très importantes, comme les LEDs (Light Emitting Diodes) à microcavité et les VCSELs (Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers). D'autre part, le régime de couplage fort entre les excitons et les photons dans une microcavité semi-conductrices a été mis en évidence pour la première fois par C.Weisbuch en 1992 [Weisbuch 92], ouvrant un domaine de recherche entièrement nouveau.

Dans cette partie, nous allons tout d'abord décrire brièvement les propriétés des miroirs de Bragg et de la cavité vide. Puis nous placerons un puits quantique à l'intérieur de cette cavité, et nous montrerons comment elle sélectionne un mode du champ parmi ceux qui peuvent se coupler à l'exciton, permettant d'obtenir un couplage entre deux états uniques, condition nécessaire pour atteindre le régime de couplage fort.

### A.2.1 La cavité

#### *a) Description*

Les miroirs de Bragg en matériaux semi-conducteurs permettent d'obtenir de très hautes réflectivités avec une absorption réduite. Leur principe de fonctionnement est le même que celui de miroirs diélectriques multicouches. L'élément de base de ces miroirs est une paire de couches de même épaisseur optique  $\lambda_0/4$  où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde de la radiation considérée, et d'indices différents  $n_B$  et  $n_H$ . Dans notre échantillon, les matériaux employés sont AlAs, d'indice  $n_B = 2.95$  et  $\text{Ga}_{0.9}\text{Al}_{0.1}\text{As}$ , d'indice  $n_H=3.48$ . L'empilement d'un grand nombre de ces paires de couches se comporte comme un miroir sur une bande spectrale appelée «stop-band», centrée sur  $\lambda_0$  et large d'une centaine de nanomètres. Nous avons représenté figure 1.5 le coefficient de réflexion calculé de l'un des miroirs de notre échantillon en fonction de la longueur d'onde, pour l'incidence normale. Le calcul suit l'approche des «matrices de transfert» qui est détaillée dans la référence [Savona 98]. On remarquera que le coefficient de réflexion d'un miroir de Bragg semi-conducteur présente, comme celui d'un miroir multicouches diélectrique, des oscillations très importantes lorsque l'on s'écarte de la «stop-band». Nous verrons que celles-ci sont à l'origine des «modes de fuite» de la microcavité.

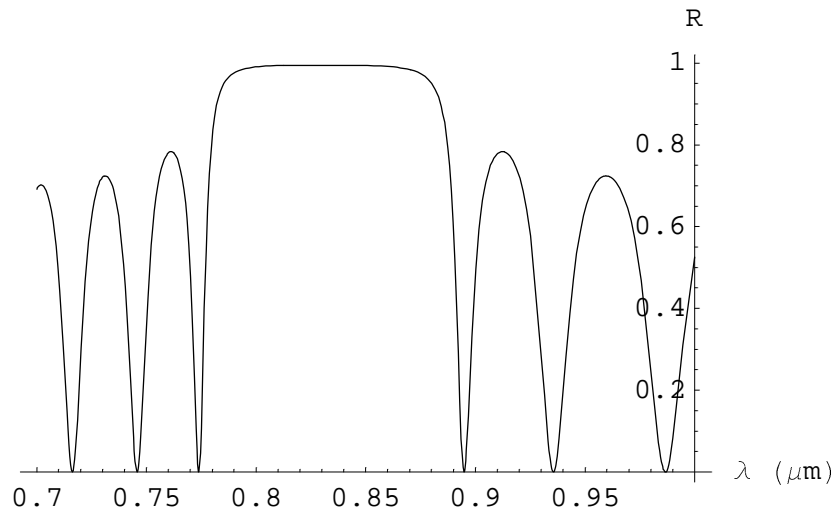


Fig. 1.5 – Coefficient de réflexion en fonction de la longueur d’onde pour un miroir de Bragg centré sur 830 nm composé de 20 paires  $Ga_{0.9}Al_{0.1}As/AlAs$ .

Deux miroirs de Bragg parallèles, séparés par une distance optique  $L = p\lambda_0/2$  avec  $p$  entier, forment une cavité Fabry Péro qui présente une résonance à la longueur d’onde  $\lambda_0$  lorsqu’elle est excitée à l’incidence normale. Dans notre cas la résonance se situe autour de  $\lambda_0=830\text{nm}$  et la longueur de la cavité est  $L = \lambda_0$ . Nous présentons figure 1.6 le résultat d’un calcul du coefficient de réflexion de notre échantillon, la cavité étant supposée vide. On observe au centre de la «stop-band» un creux très étroit et très marqué du coefficient de réflexion (et bien sûr un pic correspondant du coefficient de transmission), qui correspond à la résonance de la cavité Fabry Péro. On retrouve le caractère oscillatoire du coefficient de réflexion en dehors de la «stop-band», comme dans le cas d’un miroir de Bragg unique.

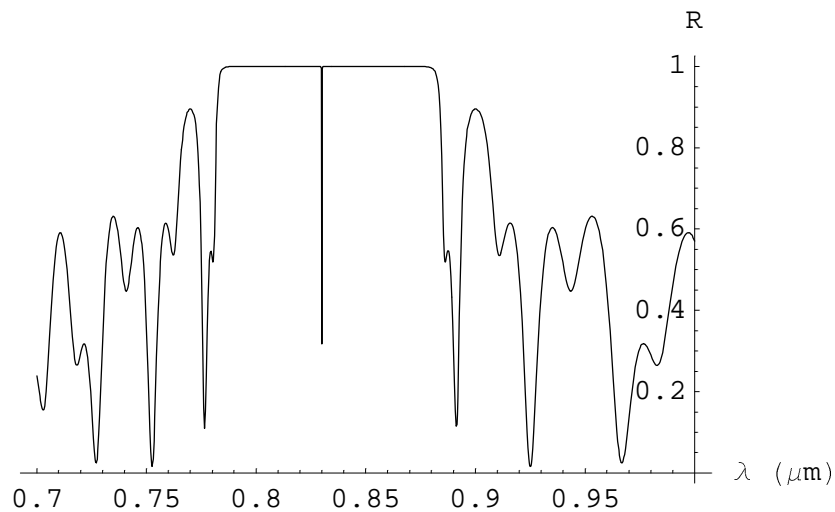


Fig. 1.6 – Calcul du coefficient de réflexion de la cavité vide en fonction de la longueur d’onde.

Remarquons que la structure de la microcavité n'est pas entièrement symétrique, puisque la croissance des couches s'effectue sur un substrat de GaAs : l'un des deux miroirs, que nous appellerons miroir avant, est en contact avec l'air, tandis que le miroir arrière repose sur le substrat. En pratique, nous excitons toujours la microcavité par le miroir avant. A nombre de couches égal, le coefficient de réflexion du miroir arrière est inférieur à cause de la présence du substrat ; dans notre échantillon, le nombre de couches du second miroir est nettement supérieur (53 contre 40) et son coefficient de réflectivité en intensité  $R_2$  est supérieur à celui du miroir avant  $R_1$  ( $R_2 = 99.95\%$  contre  $R_1 = 99.85\%$ ).

*b) Relation de dispersion*

On peut introduire pour ce type de cavité une relation de dispersion des photons, de forme analogue à celle des excitons donnée par la relation 1-5. La dispersion provient de ce que la longueur d'onde de résonance  $\lambda_{0,\theta'}$  dépend de l'angle de propagation à l'intérieur de la cavité  $\theta'$  par rapport à l'incidence normale.

La cavité impose une condition de quantification sur la composante  $k_z$  du vecteur d'onde. L'ordre d'interférence étant conservé (les résonances sont très éloignées les unes des autres, de sorte qu'une seule d'entre elles se situe dans la stop-band des miroirs de Bragg) on a :

$$k_z = \frac{2\pi n_c}{\lambda_0} \quad (1-10)$$

où  $n_c$  est l'indice à l'intérieur de la cavité (il est en première approximation égal à l'indice du «spacer» de GaAs :  $n_c \simeq 3.54$ ). Par contre la composante dans le plan des couches  $k_{\parallel}$  dépend de  $\theta'$  ( $k_{\parallel} = k_z \tan \theta'$ ). On a donc

$$\lambda_{0,\theta'} = \frac{2\pi n_c}{k} = \frac{2\pi n_c}{\sqrt{k_z^2 + k_{\parallel}^2}} = \frac{2\pi n_c}{k_z \sqrt{1 + \tan^2 \theta'}} = \lambda_0 \cos \theta' \quad (1-11)$$

Cela peut s'écrire sous la forme d'une relation de dispersion  $E(k_{\parallel})$  où  $E = hc/\lambda_{0,\theta'}$  est l'énergie du photon dans le mode résonant de la cavité :

$$E(k_{\parallel}) = \sqrt{E_0^2 + \frac{\hbar^2 c^2 k_{\parallel}^2}{n_c^2}} \quad (1-12)$$

$E_0 = hc/\lambda_0$  est l'énergie de la résonance de la cavité pour l'incidence normale.

De la même manière que pour l'exciton, on peut attribuer au photon de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{\parallel} = 0$  une masse effective dans le plan des couches, définie comme la courbure de la relation de dispersion :

$$\frac{1}{m_{phot}} = \frac{d^2 E}{dk_{\parallel}^2}(k_{\parallel} = 0) \quad (1-13)$$

On trouve

$$m_{phot} = \frac{n_c h}{\lambda_0 c} \quad (1-14)$$

qui est de l'ordre de  $10^{-5}$  fois la masse de l'électron, ou encore  $10^{-4}$  fois celle de l'exciton. En d'autres termes la courbure de la dispersion du photon est de l'ordre de  $10^4$  fois celle de la dispersion de l'exciton. On pourra donc négliger la dispersion de l'exciton par rapport à celle du photon.

### c) Modes de fuite

Une dernière caractéristique importante des microcavités à miroirs de Bragg concerne l'existence de modes secondaires appelés «modes de fuite».

Nous venons de voir que l'utilisation d'un angle d'incidence  $\theta$  non nul a pour effet de déplacer la longueur d'onde de résonance de la cavité d'un facteur  $\cos\theta'$  ( $\theta'$  est l'angle à l'intérieur de la cavité, donné par  $\sin\theta = n_c \sin\theta'$ ). Par conséquent, si l'on trace le coefficient de réflexion de la cavité non plus en fonction de la longueur d'onde (l'angle d'incidence étant fixé et égal à 0) mais en fonction de l'angle de propagation  $\theta'$  (la longueur d'onde d'excitation étant fixée et égale à  $\lambda_0$ ), on obtient une courbe de même allure (voir figure 1.7). En particulier, on retrouve des oscillations du coefficient de réflexion en fonction de  $k_{\parallel}$ . Les minima de réflectivité peuvent s'interpréter comme des modes secondaires, provenant des pics de réflectivité des miroirs de Bragg en dehors de la «stop-band». Ces modes sont bien sûr beaucoup plus larges que le mode principal, puisque la réflectivité des miroirs est beaucoup plus faible qu'à l'intérieur de la «stop-band». Ils sont appelés «modes de fuite», parce que le champ électromagnétique confiné dans ces modes «fuit» beaucoup plus efficacement. Enfin, il faut noter que ces modes correspondent à des angles de propagation intracavité importants et dans le cas de notre échantillon subissent une réflexion totale à l'interface avec l'air du miroir avant. Par conséquent, ils ne peuvent fuir que par le substrat de GaAs qui jouxte le miroir arrière. On peut montrer que leur nombre est égal au nombre de paires de couches du miroir arrière [Savona 98].

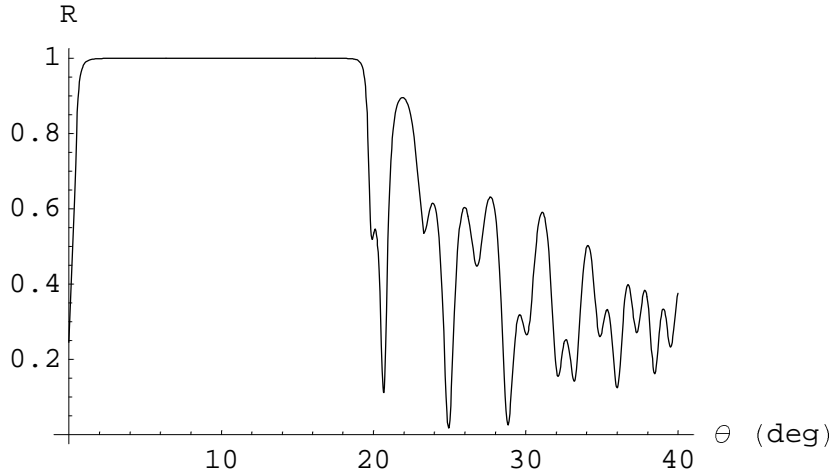


Fig. 1.7 – Calcul du coefficient de réflexion de la cavité vide en fonction de l’angle de propagation dans la cavité.

Les modes de fuite forment un canal de pertes très important par émission dans le substrat et sont la principale limitation de l’efficacité des microcavités en tant qu’émetteurs de lumière.

### A.2.2 Puits quantique en cavité

Nous considérons maintenant la structure complète de la microcavité, telle qu’elle est décrite dans la figure 1.1 . Le puits quantique est placé dans la cavité à l’endroit où l’amplitude du champ électromagnétique est maximale. L’échantillon est conçu de façon à ce que l’énergie de résonance de la cavité  $E_0$  soit proche de l’énergie de la transition excitonique  $E_{exc}$ .

Dans le cas d’un puits quantique «nu» (i.e. sans cavité), nous avons vu qu’un état excitonique donné de vecteur d’onde  $\mathbf{k}_{\parallel}$  était couplé à un continuum de modes du champ électromagnétique  $\{\mathbf{k}_{\parallel}, k_z\}$ . Comme la cavité impose la quantification du mouvement dans la direction  $Oz$  perpendiculaire aux couches, elle sélectionne une seule valeur de  $k_z$  et donc un seul mode parmi ceux qui sont susceptibles de se coupler à l’exciton. Idéalement, on réalise ainsi un couplage entre deux états discrets. En réalité, le mode de cavité possède une largeur finie. La résonance excitonique est elle aussi élargie par des pertes non radiatives. Les trois principales causes d’élargissement sont le désordre dû aux imperfections des matériaux, l’interaction des excitons avec les phonons du réseau cristallin et l’interaction entre excitons (voir chapitre 2).

Il est important de remarquer que l’on peut créer sélectivement un état excitonique de  $\mathbf{k}_{\parallel} = \{k_x, k_y\}$  donné en choisissant l’angle d’incidence du photon  $\theta = \{\theta_x, \theta_y\}$  pour

avoir :

$$\begin{aligned} k \sin(\theta_x) &= k_x \\ k \sin(\theta_y) &= k_y \end{aligned} \tag{1-15}$$

où  $k = hc/E$ ,  $E$  étant l'énergie d'excitation. Si on néglige les diffusions entre états excitoniques de vecteurs d'ondes différents, la réponse du système ne fait intervenir que deux états : le photon de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{\parallel}$  et l'exciton de même  $\mathbf{k}_{\parallel}$ .

En conclusion, nous avons montré dans cette partie que la géométrie particulière des microcavités semi-conductrices permettait de coupler un état excitonique avec un seul mode du champ. De plus, en jouant sur l'angle d'incidence de la lumière on peut choisir le vecteur d'onde des états que l'on excite. Nous allons maintenant présenter un modèle quantique linéaire du système, où les modes du champ électromagnétique et les excitons sont représentés par des oscillateurs harmoniques couplés. Cela nous permettra d'une part de déterminer les conditions dans lesquelles une microcavité fonctionne en régime de couplage fort et d'autre part d'expliquer la réponse optique de notre échantillon lorsque l'excitation lumineuse est peu intense.

## B Le régime de couplage fort dans les microcavités semi-conductrices

### B.1 Hamiltonien linéaire

Les propriétés optiques linéaires des microcavités en régime de couplage fort peuvent s'interpréter par un modèle simple, où l'exciton et le mode de cavité sont représentés par des oscillateurs harmoniques quantifiés [Pau 95]. Remarquons que pour calculer les valeurs moyennes des champs, il suffirait de les représenter par des oscillateurs classiques (voir par exemple [Savona 98]). Nous introduisons le formalisme quantique parce qu'il est indispensable pour calculer les fluctuations des champs, ce que nous ferons au chapitre 4.

La forme du hamiltonien est justifiée dans l'annexe, où nous écrivons le hamiltonien effectif en allant jusqu'à l'ordre 2 en densité excitonique. Ici, nous supposons que la microcavité est soumise à une excitation peu intense, donnant lieu à une faible densité d'excitons. Nous n'écrivons par conséquent que les termes d'ordre 1 en densité excitonique. Les termes du deuxième ordre seront considérés au chapitre 4 qui traite des effets non linéaires.



On suppose que l'onde incidente crée des excitons dans un état pur de spin (c'est le cas à l'incidence normale pour une onde polarisée circulairement). Cela nous permet de ne pas écrire la sommation sur les spins. Rappelons qu'à cause de la règle de sélection sur les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_{\parallel}$ , le hamiltonien peut se décomposer en la somme des hamiltoniens  $H_{\mathbf{k}_{\parallel}}$  décrivant chacun un mode unique du champ dans la cavité de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{\parallel}$ , en interaction avec les excitons de même vecteur d'onde :

$$H_{\mathbf{k}} = E_{exc}(k) b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}} + E_{cav}(k) a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{\Omega_R}{2} \left( a_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} \right) \quad (1-16)$$

Nous avons supprimé l'indice  $\parallel$  afin d'alléger les notations.  $\{a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}\}$  et  $\{b_{\mathbf{k}}^{\dagger}, b_{\mathbf{k}}\}$  sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation d'un photon et d'un exciton de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dans le plan des couches. Ils satisfont les relations de commutations de bosons. Les deux premiers termes sont les hamiltoniens libres des modes excitoniques et photoniques.  $E_{exc}(k)$  et  $E_{cav}(k)$  sont les relations de dispersion de l'exciton et du mode de cavité, données par les équations 1-5 et 1-12. Le dernier terme décrit un couplage linéaire entre excitons et photons provenant de l'interaction dipolaire. Il comporte un terme correspondant à la création d'un photon et à l'annihilation d'un exciton (terme d'émission) et un terme correspondant à la création d'un exciton et à l'annihilation d'un photon (terme d'absorption).  $\Omega_R/2$  est l'énergie mise en jeu par le couplage radiatif.

## B.2 États propres - énergies propres

Le hamiltonien se diagonalise comme suit :

$$H_{\mathbf{k}} = E_{+}(k) p_{\mathbf{k}}^{(+)\dagger} p_{\mathbf{k}}^{(+)} + E_{-}(k) p_{\mathbf{k}}^{(-)\dagger} p_{\mathbf{k}}^{(-)} \quad (1-17)$$

Les états propres de ce système sont appelés polaritons de cavité. Leurs énergies sont données par :

$$E_{\pm}(k) = \frac{1}{2} \left( E_{exc}(k) + E_{cav}(k) \pm \sqrt{\delta_k^2 + \Omega_R^2} \right) \quad (1-18)$$

où  $\delta_k$  est appelé désaccord exciton-cavité et vaut :

$$\delta_k = E_{cav}(k) - E_{exc}(k) \quad (1-19)$$

Les opérateurs de polariton correspondants se déduisent des opérateurs de photon et d'exciton par une transformation unitaire :

$$\begin{pmatrix} p_{\mathbf{k}}^{(-)} \\ p_{\mathbf{k}}^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_k & X_k \\ X_k & C_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ b_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad (1-20)$$

où  $X_k$  et  $C_k$  sont les coefficients de Hopfield [Hopfield 58], nombres réels positifs définis par :

$$X_k^2 = \frac{\delta_k + \sqrt{\delta_k^2 + \Omega_R^2}}{2\sqrt{\delta_k^2 + \Omega_R^2}} \quad (1-21)$$

$$C_k^2 = \frac{\Omega_R^2}{2\sqrt{\delta_k^2 + \Omega_R^2} (\delta_k + \sqrt{\delta_k^2 + \Omega_R^2})} \quad (1-22)$$

vérifiant la relation d'unitarité :

$$X_k^2 + C_k^2 = 1 \quad (1-23)$$

Par exemple le polariton  $p_{\mathbf{k}}^{(-)}$  s'écrit  $p_{\mathbf{k}}^{(-)} = X_k b_{\mathbf{k}} - C_k a_{\mathbf{k}}$ .  $X_k^2$  et  $C_k^2$  représentent respectivement les fractions excitonique et photonique de ce polariton. A désaccord nul ( $\delta_k = 0$ ) on a  $X_k^2 = C_k^2 = 1/2$ .

### B.3 Définition du régime de couplage fort

Si l'on prend maintenant en compte les phénomènes de relaxation, le champ dans la cavité et l'exciton acquièrent des durées de vie finies. Dans une approche de type hamiltonien effectif on peut le modéliser en introduisant des énergies complexes,  $E_{cav}(k) - i\gamma_{cav}(k)$  et  $E_{exc}(k) - i\gamma_{exc}(k)$  [Cohen 88b]. Un traitement plus complet de la relaxation sera présenté au chapitre 2.

Les énergies propres obtenues sont alors des nombres complexes, dont la partie réelle donne l'énergie des polaritons et la partie imaginaire leurs taux de relaxation :

$$E_{\pm}(k) = \frac{E_{cav}(k) + E_{exc}(k)}{2} - i \frac{\gamma_{cav}(k) + \gamma_{exc}(k)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\delta_k - i(\gamma_{cav}(k) - \gamma_{exc}(k)))^2 + \Omega_R^2} \quad (1-24)$$

A désaccord nul entre l'exciton et la cavité, on obtient :

$$E_{\pm}(k) = E_{exc}(k) - i \frac{\gamma_{cav}(k) + \gamma_{exc}(k)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Omega_R^2 - (\gamma_{cav}(k) - \gamma_{exc}(k))^2} \quad (1-25)$$

L'existence de deux énergies distinctes pour les deux polaritons dépend donc des valeurs relatives de  $\Omega_R$  et  $|\gamma_{cav}(k) - \gamma_{exc}(k)|$ . Si la constante de couplage  $\Omega_R$  est inférieure à la différence des constantes de relaxation, les deux énergies propres ont la même partie réelle et la dégénérescence entre l'exciton et la cavité n'est pas levée. On est alors en régime de couplage faible. Si  $\Omega_R$  est supérieure à la différence des constantes de relaxation, les deux énergies propres ont des parties réelles distinctes séparées de :

$$\Omega'_R = \sqrt{\Omega_R^2 - (\gamma_{cav}(k) - \gamma_{exc}(k))^2} \quad (1-26)$$

Cette quantité est couramment appelée «vacuum Rabi splitting», par analogie au cas d'atomes en régime de couplage fort dans une cavité de haute finesse.

## B.4 Caractéristiques des polaritons

### B.4.1 Courbe d'anticroisement

La figure 1.8 représente la variation des énergies des polaritons de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = 0$ , données par la formule 1-18, en fonction du désaccord exciton-cavité. On observe un anticroisement caractéristique du régime de couplage fort. Par la suite, on appellera la branche de plus haute énergie «branche haute de polariton» et l'autre branche «branche basse de polariton».

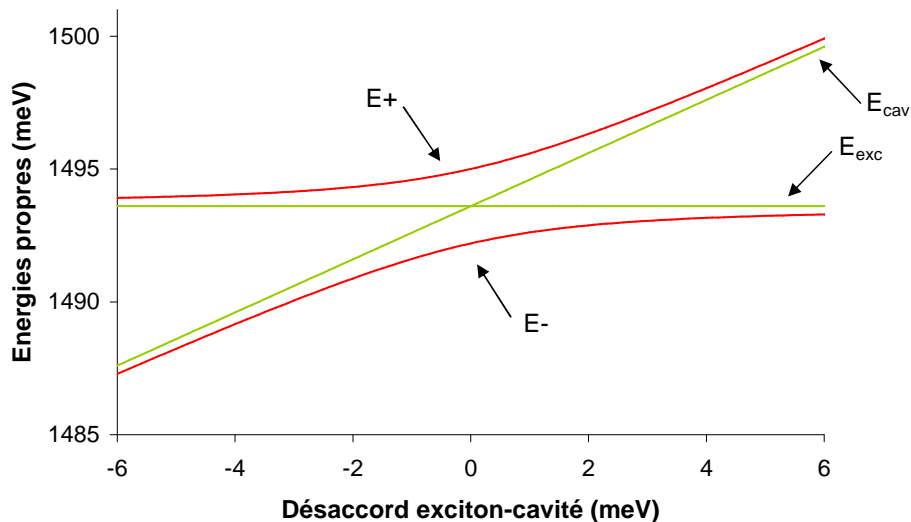


Fig. 1.8 – Anticroisement des énergies des états polaritons en fonction de l'énergie de résonance de la cavité.

Cette courbe correspond à un cas idéal où les durées de vie sont infinies. Les largeurs finies de l'exciton et du mode de cavité ont pour conséquence de déplacer les énergies propres par rapport au cas idéal 1-18 ; par exemple elles entraînent une réduction du «vacuum Rabi splitting» dont la valeur  $\Omega'_R$  est inférieure à la valeur en l'absence de dissipation  $\Omega_R$ .

On peut montrer que le déplacement des énergies par rapport au cas idéal est toujours inférieur ou égal à  $\Omega_R \times (\gamma_{cav}(k) - \gamma_{exc}(k))^2 / 4\Omega_R^2$ . La formule 1-18 reste donc correcte dans le cas d'un couplage suffisamment fort pour satisfaire la condition :

$$(\gamma_{cav}(k) - \gamma_{exc}(k))^2 \ll \Omega_R^2 \quad (1-27)$$

Nous étudierons plus en détail les effets de déplacement des résonances dans les chapitres 2 et 3.

#### B.4.2 Taux de relaxation

Les taux de relaxation  $\gamma_{\pm}(k)$  des polaritons, donnés par la partie imaginaire des énergies propres, s'écrivent :

$$\gamma_{-}(k) = X_k^2 \gamma_{exc}(k) + C_k^2 \gamma_{cav}(k) \quad (1-28)$$

$$\gamma_{+}(k) = C_k^2 \gamma_{exc}(k) + X_k^2 \gamma_{cav}(k) \quad (1-29)$$

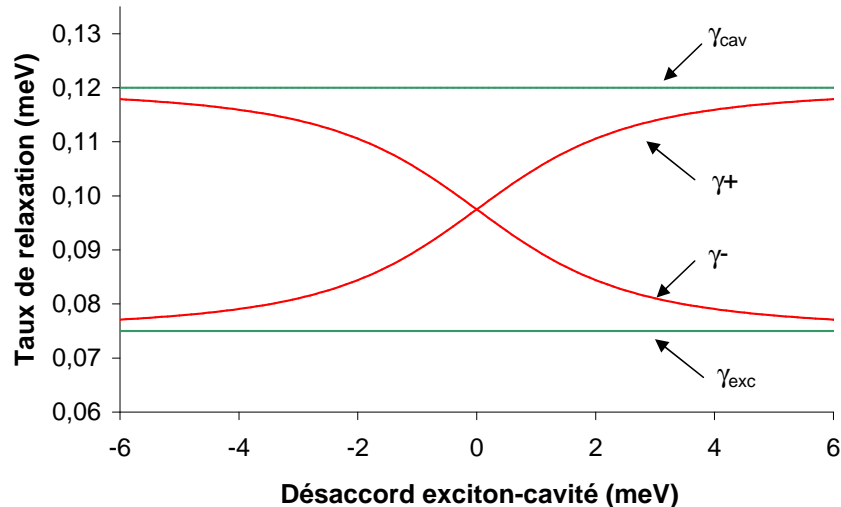


Fig. 1.9 – Taux de relaxation des états polaritons en fonction de l'énergie de résonance de la cavité.

Il s'agit d'une expression exacte qui ne fait pas appel à l'hypothèse de couplage très fort 1-27. Les largeurs des polaritons sont une simple combinaison linéaire des largeurs de l'exciton et de la cavité, avec des poids égaux à leurs fractions excitoniques et photoniques. La figure 1.9 représente leurs variations en fonction du désaccord exciton-cavité pour  $\mathbf{k} = 0$  ; elles se croisent à désaccord nul à l'inverse des énergies propres.

### B.4.3 Relation de dispersion

A partir des relations 1-18, 1-5 et 1-12, on obtient les relations de dispersion des deux branches de polariton dans le plan des couches, qui sont représentées figure 1.10.

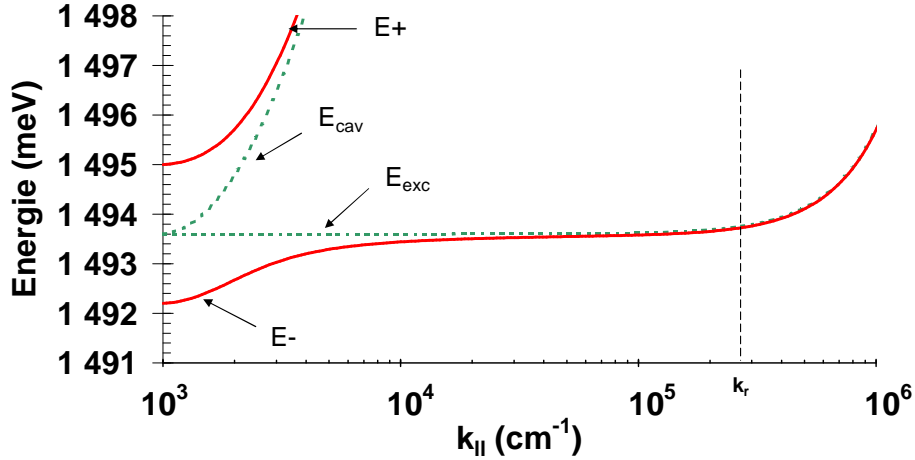


Fig. 1.10 – Courbes de dispersion des polaritons, le désaccord exciton-cavité étant nul pour  $\mathbf{k}=0$ .

Le point important est que l'on a directement accès à la dispersion des polaritons en changeant l'angle d'excitation ou de détection [Houdré 94]. On peut exciter de façon résonante un état polariton de  $\mathbf{k}$  donné en ajustant l'angle d'incidence. Inversement des mesures de photoluminescence résolues en angle permettent de séparer les contributions des différents états  $\mathbf{k}$ .

Enfin, il est possible d'attribuer une masse effective aux polaritons de  $\mathbf{k} = 0$  :

$$\begin{aligned} m_- &= m_{phot}/C_0^2 \\ m_+ &= m_{phot}/X_0^2 \end{aligned} \quad (1-30)$$

Ces formules simplifiées sont obtenues en négligeant la dispersion de l'exciton par rapport à celle du photon.

## Chapitre 2

# Propriétés optiques linéaires d'une microcavité

Avant d'étudier les effets non linéaires, il est nécessaire de bien comprendre les propriétés optiques linéaires de notre échantillon. Dans ce but nous calculons à partir du modèle linéaire du chapitre 1 (dont le hamiltonien est donné en 1-16) les spectres d'absorption, de transmission et de réflectivité de la microcavité excitée de façon résonante par un laser. Nous nous intéressons plus particulièrement aux spectres observés dans les conditions où nous avons étudié expérimentalement les effets non linéaires, c'est-à-dire ceux de la branche basse de polaritons, excitée à l'incidence normale ( $\mathbf{k}=0$ ). Nous comparerons les résultats obtenus aux spectres expérimentaux dans le chapitre 3.

Pour reproduire les spectres expérimentaux il est essentiel de tenir compte des phénomènes de relaxation qui entraînent l'élargissement des raies ; la partie A est consacrée à l'étude de la relaxation. Une remarque préliminaire s'impose : si l'on veut seulement décrire la transmission, la réflexion et l'absorption il suffit de calculer les taux de relaxation associés aux différents mécanismes. Par contre dans le cadre de l'étude des fluctuations quantiques que nous développerons dans les chapitres 4 et 5, il faut tenir compte des fluctuations qui leur sont associées en vertu du théorème fluctuation-dissipation. C'est pourquoi nous allons décrire l'évolution du système par des équations de type Heisenberg-Langevin qui contiennent à la fois un terme de dissipation et un terme fluctuant («force de Langevin»).

L'étude complète de la relaxation dans les microcavités est déjà un problème complexe ; l'écriture d'équations de Heisenberg-Langevin l'est encore davantage. Nous adoptons ici une approche phénoménologique, en introduisant un taux de relaxation  $\gamma_b$  pour l'exciton, ajusté d'après les largeurs de raies mesurées. Le terme de fluctuations associé est calculé moyennant plusieurs approximations. Le but de la partie A est essentiellement de préciser ces approximations. Un calcul plus complet est en cours et sera finalisé ultérieurement.

Une fois obtenues les équations de relaxation pour les excitons et les photons, les équations d'évolution complètes du système s'en déduisent simplement et on étudie le régime stationnaire afin de calculer les spectres optiques (partie B).

Pour expliquer plus précisément les largeurs de raie de ces polaritons, il est nécessaire de prendre en compte l'effet du désordre dû aux imperfections des matériaux, qui se traduit par un élargissement inhomogène de la raie excitonique. Dans la partie C, nous ajoutons cet ingrédient au modèle quantique.

## A Etude de la relaxation

### A.1 Discussion

On suppose que le miroir avant de la microcavité est excité par un faisceau laser cohérent, dont les photons ont un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dans le plan des couches. Nous avons vu au chapitre 1 que seuls les deux états polaritons de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  interviennent, à cause de la loi de conservation du vecteur d'onde dans le plan des couches. Si on tient compte de la relaxation cette image simple n'est plus valable, puisque la relaxation se traduit par des diffusions entre états de  $\mathbf{k}'$  différents. Un modèle complet doit donc faire intervenir tous les états  $\mathbf{k}'$ ; en conséquence la réponse du système doit être influencée par la relation de dispersion particulière des polaritons représentée figure 1.10. Par exemple les taux de relaxation des deux branches de polaritons n'ont aucune raison d'être égaux (puisque leurs relations de dispersion sont différentes), alors que selon le modèle simple du chapitre 1 les deux branches sont parfaitement symétriques (voir figure 1.9).

Nous voulons décrire l'évolution du système par des équations de type Heisenberg-Langevin. Celles-ci s'obtiennent en représentant la relaxation par un couplage avec un «réservoir» bien plus grand que le système considéré et qui n'est pas perturbé par l'interaction avec celui-ci. On dérive aisément les équations de Heisenberg-Langevin si la structure du réservoir est simple (par exemple, un bain d'oscillateurs harmoniques unidimensionnel) et si le couplage système-réservoir est linéaire [Cohen 88a] [Walls 94]. Dans notre cas ce réservoir comprendrait l'ensemble des états de polaritons de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}'$  différents du vecteur d'onde d'excitation  $\mathbf{k}$ , dont la structure est nettement plus complexe que celle d'un réservoir harmonique.

Pour simplifier le problème on fait l'approximation suivante : on néglige l'influence du couplage exciton-photon sur la relaxation. Nous allons étudier séparément la relaxation des photons et des excitons de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et ajouter ensuite l'interaction

exciton-photon en négligeant son effet éventuel sur les processus de relaxation. Gardons à l'esprit que ce modèle ne prend pas en compte d'éventuels effets liés à la relation de dispersion des polaritons, comme par exemple une dissymétrie entre la branche haute et la branche basse, ou la dépendance du taux de relaxation en fonction de  $\mathbf{k}$  [Tassone 97]. Une telle simplification est justifiée par le fait qu'on ne s'intéresse qu'à la branche basse des polaritons au voisinage de  $\mathbf{k}=0$  (incidence normale).

Nous allons maintenant étudier séparément la relaxation du photon et de l'exciton dans le cadre de la méthode entrée-sortie [Collett 84] [Reynaud 89a]. La relaxation du champ électromagnétique dans une cavité est bien connue et est habituellement décrite par une approche de type Fabry Péroù où on étudie l'évolution du champ au cours de sa propagation dans la cavité. Elle permet notamment de relier le terme de fluctuations aux champs qui arrivent sur la cavité et qui en repartent. Nous présentons cette approche puis nous montrons qu'il est possible d'obtenir les mêmes équations en modélisant le mode de cavité par un oscillateur harmonique couplé à un réservoir composé de l'ensemble des modes à l'extérieur de la cavité.

Par contre le traitement complet de l'évolution des excitons comprenant le terme de fluctuation a été très peu étudié. Nous adoptons ici une approche phénoménologique en introduisant un taux de relaxation  $\gamma_b$  ajusté d'après les largeurs de raie mesurées. Nous montrons qu'en faisant certaines approximations on peut se ramener à la même situation que pour le champ intracavité et considérer que le mode excitonique est couplé à un réservoir harmonique.

## A.2 Relaxation du champ électromagnétique dans la cavité vide

On étudie dans cette partie l'évolution du champ dans la cavité lorsque celle-ci reçoit un champ laser quasi résonant.

Afin de prendre en compte la dynamique temporelle des fluctuations, il est nécessaire d'adopter une approche multimode. Nous écrirons le champ laser incident comme la superposition d'un champ moyen à la fréquence centrale  $\omega_L$  (supposée proche de la fréquence de résonance de la cavité  $\omega_{cav} = E_{cav}/\hbar$ ) et de fluctuations que nous supposons égales au bruit quantique standard. Nous introduisons maintenant l'opérateur enveloppe [Fabre 95] qui permet de représenter commodément un champ laser.



### A.2.1 Opérateur enveloppe

Rappelons tout d'abord que pour un mode unique du champ libre, décrit par des opérateurs d'annihilation et de création  $\{a, a^\dagger\}$ , l'opérateur champ électrique est donné par la relation :

$$E(t) = i\mathcal{E}_0 (a_\omega e^{-i\omega t} - a_\omega^\dagger e^{i\omega t}) \quad (2-1)$$

$\mathcal{E}_0$  est une constante de normalisation dont nous préciserons la valeur dans le paragraphe suivant et  $\{a_\omega, a_\omega^\dagger\}$  sont les opérateurs dans le référentiel tournant :

$$a_\omega = a(t)e^{i\omega t} \text{ et } a_\omega^\dagger = a^\dagger(t)e^{-i\omega t} \quad (2-2)$$

Nous allons voir que l'opérateur enveloppe permet de généraliser cette relation.

Le champ électromagnétique qui sort d'un laser a une valeur moyenne non nulle sur une bande de fréquence très étroite et nous le considérerons comme monochromatique. Mais il a aussi des fluctuations à toutes les autres fréquences, que l'on suppose égales aux fluctuations du vide. Ces fluctuations ont une amplitude indépendante de la fréquence et constituent un bruit «blanc».

Pour caractériser un état donné du champ, on devrait donc a priori écrire le comportement des modes à toutes les fréquences. En pratique on n'étudie qu'une bande de fréquence réduite autour de la fréquence du laser, de largeur faible devant cette fréquence centrale.

On peut donc considérer le champ laser comme la superposition d'un champ moyen à la fréquence  $\omega_L$  et de fluctuations dont les fréquences sont contenues dans une bande de fréquences de largeur  $\Delta\omega$  très petite devant  $\omega_L$ . On ne tiendra pas compte de la structure spatiale transverse du faisceau laser. Celui-ci sera modélisé par une onde d'extension transverse finie, de section  $S$ , dont on néglige la variation d'amplitude dans le plan transverse.

Pour une fonction  $f(t)$  quelconque, on définit la transformée de Fourier  $f(\omega)$  de la manière suivante :

$$f(\omega) = \int e^{i\omega t} f(t) dt \quad (2-3)$$

La transformation de Fourier inverse s'écrit donc :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega t} f(\omega) d\omega \quad (2-4)$$

Le champ électrique total se déduit de l'expression 2-1 en intégrant sur un intervalle de largeur  $\Delta\omega$  :

$$E(t) = i \int_{\Delta\omega} \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{E}_0(\omega) (a_\omega e^{-i\omega t} - a_\omega^\dagger e^{i\omega t}) \quad (2-5)$$

On suppose que  $\mathcal{E}_0(\omega)$  dépend peu de  $\omega$  sur l'intervalle  $\Delta\omega$  et on le remplace par sa valeur en  $\omega = \omega_L$ , que l'on note  $\mathcal{E}_{0\omega_L}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} E(t) &= i\mathcal{E}_{0\omega_L} \left( \int_{\Delta\omega} \frac{d\omega}{2\pi} a_\omega e^{-i\omega t} - \int_{\Delta\omega} \frac{d\omega}{2\pi} a_\omega^\dagger e^{i\omega t} \right) \\ &= i\mathcal{E}_{0\omega_L} \left( e^{-i\omega_L t} \int_{\Delta\omega} \frac{d\Omega}{2\pi} a_{\omega_L+\Omega} e^{-i\Omega t} - e^{i\omega_L t} \int_{\Delta\omega} \frac{d\Omega}{2\pi} a_{\omega_L+\Omega}^\dagger e^{i\Omega t} \right) \end{aligned} \quad (2-6)$$

où les fréquences  $\Omega = \omega - \omega_L$  sont très petites devant la fréquence optique  $\omega_L$ . On pose :

$$A(\Omega) = ia_{\omega_L+\Omega}, \quad A^\dagger(\Omega) = -ia_{\omega_L-\Omega}^\dagger \quad (2-7)$$

L'opérateur champ s'exprime alors en fonction des transformées de Fourier inverses de  $A(\Omega)$  et  $A^\dagger(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} E(t) &= \mathcal{E}_{0\omega_L} \left( e^{-i\omega_L t} \int_{\Delta\omega} \frac{d\Omega}{2\pi} A(\Omega) e^{-i\Omega t} + e^{i\omega_L t} \int_{\Delta\omega} \frac{d\Omega}{2\pi} A^\dagger(\Omega) e^{-i\Omega t} \right) \\ &= \mathcal{E}_{0\omega_L} (A(t) e^{-i\omega_L t} + A^\dagger(t) e^{i\omega_L t}) \end{aligned} \quad (2-8)$$

Cette relation généralise la relation 2-1 ; les opérateurs dans le référentiel tournant sont remplacés par les opérateurs  $A(t)$ ,  $A^\dagger(t)$ .  $A(t)$  peut s'interpréter comme l'enveloppe lentement variable du champ complexe autour de la fréquence  $\omega_L$ .

### A.2.2 Normalisation

La valeur de la constante  $\mathcal{E}_{0\omega_L}$  est fixée par le choix de l'unité des opérateurs  $A(t)$  et  $A^\dagger(t)$ . La valeur moyenne  $N(t) = \langle A^\dagger(t)A(t) \rangle$  donne le nombre de photons qui traversent la section du faisceau par unité de temps, de sorte que  $A(t)$  est homogène à la racine carrée d'une fréquence. On peut démontrer la relation suivante :

$$\mathcal{E}_{0\omega_L} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\epsilon_0 S c}} \quad (2-9)$$

$\mathcal{E}_0(\omega)$  varie lentement avec  $\omega$ , en  $\omega^{1/2}$ . Ceci permet bien de considérer que sur la bande de fréquence de largeur  $\Delta\omega \ll \omega_L$  étudiée,  $\mathcal{E}_0(\omega)$  reste constante.

### A.2.3 Equation d'évolution du champ

Nous utilisons dans ce paragraphe une approche de type Fabry Pérot.

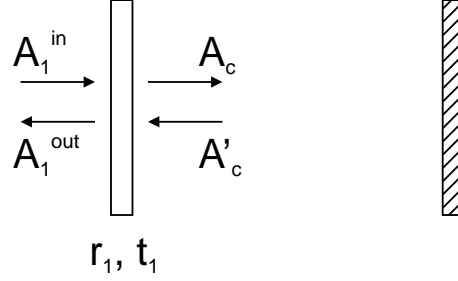


Fig. 2.1 – Définition des champs.

Pour simplifier le calcul, on considère une cavité à un seul miroir de couplage en supposant que le miroir arrière est parfaitement réfléchissant. On note respectivement  $A_c(t)$ ,  $A_1^{in}(t)$  et  $A_1^{out}(t)$  les opérateurs enveloppes du champ intracavité et des champs incident et réfléchi (voir figure 2.1). Le miroir avant est supposé sans pertes et a un coefficient de transmission en énergie  $T_1$  très petit devant 1, de sorte que son coefficient de réflexion en amplitude  $r_1$  s'écrit :

$$r_1 = \sqrt{1 - T_1} \simeq 1 - \frac{T_1}{2} \quad (2-10)$$

Les relations entrée-sortie pour le miroir d'entrée de la cavité sont :

$$\begin{aligned} A_c(t) &= t_1 A_1^{in}(t) + r_1 A'_c(t) \\ A_1^{out}(t) &= t_1 A'_c(t) - r_1 A_1^{in}(t) \end{aligned} \quad (2-11)$$

Il s'agit d'une transformation unitaire des champs entrants. Soit  $\tau$  le temps qu'il faut au champ pour effectuer un aller-retour dans la cavité. Le champ électrique  $E'_c$  à l'instant  $t$  qui a effectué un aller dans la cavité est égal au champ  $E_c$  qui est rentré à  $t - \tau$  :

$$E'_c(t) = E_c(t - \tau) \quad (2-12)$$

A l'aide de la relation 2-8 on en déduit :

$$A'_c(t) = A_c(t - \tau) e^{i\omega_L \tau} \quad (2-13)$$

Les équations 2-11 et 2-13 conduisent à :

$$A_c(t) = t_1 A_1^{in}(t) + r_1 A_c(t - \tau) e^{i\omega_L \tau} \quad (2-14)$$

Introduisons le désaccord du laser par rapport à la résonance de cavité  $\delta_a = \omega_{cav} - \omega_L$ . La phase  $\omega_L \tau$  est égale à  $-\delta_a \tau$  à  $2\pi$  près, et on peut donc remplacer  $i\omega_L \tau$  par  $-i\delta_a \tau$  dans l'exponentielle. On se place à proximité de la résonance ( $|\delta_a \tau| \ll 1$ ) et on fait un développement limité de l'exponentielle à l'ordre 1.

$$A_c(t) - A_c(t - \tau) = t_1 A_1^{in}(t) + \left( (1 - \frac{T_1}{2})(1 - i\delta_a \tau) - 1 \right) A_c(t - \tau) \quad (2-15)$$

Finalement, on suppose que les variations de  $A_c(t)$  sont petites sur un intervalle de durée  $\tau$  et on obtient après division par  $\tau$  en ne gardant que les termes d'ordre 1 :

$$\frac{dA_c}{dt}(t) = -(\gamma_1 + i\delta_a) A_c(t) + \sqrt{\frac{2\gamma_1}{\tau}} A_1^{in}(t) \quad (2-16)$$

$\gamma_1$  est le taux de décroissance du champ dans la cavité donné par :

$$\gamma_1 = \frac{T_1}{2\tau} \quad (2-17)$$

Le dernier terme contient les fluctuations associées à la relaxation, qui sont dues aux fluctuations du champ entrant, égales aux fluctuations du vide pour un champ cohérent.

#### A.2.4 Equation normalisée

Nous utiliserons dorénavant deux normalisations différentes selon que le champ considéré se propage à l'intérieur ou à l'extérieur de la cavité. En effet les unités pertinentes ne sont pas les mêmes dans ces deux cas : l'intensité d'un champ intracavité est caractérisée par le nombre de photons dans la cavité, tandis que l'intensité d'un champ se propageant dans l'espace libre est caractérisée par un flux de photons. On pose donc  $a(t) = A_c(t)\sqrt{\tau}$ . La quantité  $n(t) = \langle a^\dagger(t)a(t) \rangle$  représente bien le nombre de photons dans la cavité. L'équation d'évolution de l'opérateur  $a$  s'écrit :

$$\frac{da}{dt}(t) = -(\gamma_1 + i\delta_a) a(t) + \sqrt{2\gamma_1} A_1^{in}(t) \quad (2-18)$$

Cette relation se généralise aisément au cas où le miroir arrière n'est pas parfaitement réfléchissant, mais possède un coefficient de transmission en énergie  $T_2$  très petit devant 1 :

$$\frac{da}{dt}(t) = -(\gamma_a + i\delta_a) a(t) + \sqrt{2\gamma_1} A_1^{in}(t) + \sqrt{2\gamma_2} A_2^{in}(t) \quad (2-19)$$

$A_2^{in}(t)$  désigne le champ entrant par le miroir arrière, égal au champ du vide et  $\gamma_a = \gamma_1 + \gamma_2$  avec

$$\gamma_2 = \frac{T_2}{2\tau} \quad (2-20)$$

### A.3 Modélisation par un couplage avec un réservoir

Dans une autre approche, on modélise le mode de cavité par un oscillateur harmonique. On peut dériver l'équation de relaxation de ce mode en écrivant explicitement son couplage avec un réservoir harmonique unidimensionnel constitué par l'ensemble des modes du champ à l'extérieur de la cavité. Le hamiltonien du système s'écrit :

$$H = H_S + H_R + H_I \quad (2-21)$$

où  $H_S$  et  $H_R$  sont les termes d'évolution libre du champ intracavité et du réservoir et  $H_I$  le hamiltonien de couplage :

$$H_S = \hbar\omega_{cav} a_c^\dagger a_c \quad (2-22)$$

$$H_R = \int \frac{d\omega}{2\pi} \hbar\omega A_{1\omega}^\dagger A_{1\omega} \quad (2-23)$$

$$H_I = i\hbar \int \frac{d\omega}{2\pi} \kappa_1(\omega) \left( a_c^\dagger A_{1\omega} - A_{1\omega}^\dagger a_c \right) \quad (2-24)$$

$a_c, a_c^\dagger$  sont les opérateurs d'annihilation et de création d'un photon dans le mode de la cavité et  $A_{1\omega}, A_{1\omega}^\dagger$  les opérateurs d'annihilation et de création du réservoir, satisfaisant les relations de commutation suivantes :

$$[a_c(t), a_c^\dagger(t)] = 1 \quad (2-25)$$

$$[A_{1\omega}(t), A_{1\omega'}^\dagger(t)] = 2\pi\delta(\omega - \omega') \quad (2-26)$$

Remarquons que seules les fréquences positives ayant un sens physique, les bornes de l'intégration sur  $A_{1\omega}$  devraient être  $(0, +\infty)$ . On intègre cependant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

C'est une bonne approximation pour les systèmes optiques qui évoluent à très haute fréquence.

Les équations de Heisenberg pour les opérateurs  $a_c$  et  $A_{1\omega}$  s'écrivent respectivement :

$$\frac{da_c}{dt}(t) = -i\omega_{cav}a_c(t) - \int \frac{d\omega}{2\pi} \kappa_1(\omega) A_{1\omega}(t) \quad (2-27)$$

$$\frac{dA_{1\omega}}{dt}(t) = -i\omega A_{1\omega}(t) + \kappa_1(\omega) a_c(t) \quad (2-28)$$

On intègre formellement l'équation d'évolution de l'opérateur de réservoir à partir d'un instant initial  $t_0 < t$  :

$$A_{1\omega}(t) = e^{-i\omega(t-t_0)} A_{1\omega}(t_0) + \kappa_1(\omega) \int_{t_0}^t e^{-i\omega(t-t')} a_c(t') dt' \quad (2-29)$$

et on injecte cette expression dans l'équation d'évolution du mode de cavité. On introduit l'opérateur lentement variable  $a(t) = a_c(t)e^{i\omega_L t}$ . Son évolution est donnée par l'équation :

$$\frac{da}{dt}(t) = -i\delta_a a(t) - \int \frac{d\omega}{2\pi} \kappa_1(\omega) e^{-i(\omega-\omega_L)(t-t_0)} A_{1\omega}(t_0) - \int \frac{d\omega}{2\pi} \kappa_1(\omega)^2 \int_{t_0}^t e^{-i(\omega-\omega_L)(t-t')} a(t') dt' \quad (2-30)$$

On suppose que le coefficient de couplage  $\kappa_1(\omega)$  est indépendant de la fréquence sur une bande de fréquence autour de la fréquence optique. En interchangeant les intégrales de temps et de fréquence dans le dernier terme on obtient alors :

$$\frac{da}{dt}(t) = -i\delta_a a(t) - \kappa_1 \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i(\omega-\omega_L)(t-t_0)} A_{1\omega}(t_0) - \kappa_1^2 \int_{t_0}^t \delta(t-t') a(t') dt' \quad (2-31)$$

Pour un temps  $t_0$  suffisamment éloigné dans le passé on obtient :

$$\frac{da}{dt}(t) = -\left(\frac{\kappa_1^2}{2} + i\delta_a\right) a(t) - \kappa_1 \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i(\omega-\omega_L)(t-t_0)} A_{1\omega}(t_0) \quad (2-32)$$

Le facteur  $1/2$  provient de l'intégration de la fonction  $\delta$  sur une moitié de l'axe des temps. On voit que cette équation se met sous une forme similaire à l'équation 2-18 :

$$\frac{da}{dt}(t) = -(\gamma_1 + i\delta_a) a(t) + \sqrt{2\gamma_1} A_1'^{in}(t) \quad (2-33)$$

à condition de poser :

$$\kappa_1 = \sqrt{2\gamma_1} = \frac{t_1}{\sqrt{\tau}} \quad (2-34)$$

Le champ entrant  $A_1^{in}(t)$  est défini par une intégrale sur les champs du réservoir ayant évolué librement à partir d'un instant  $t_0$  supposé infiniment éloigné dans le passé :

$$\begin{aligned} A_1^{in}(t) &= - \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i(\omega-\omega_L)(t-t_0)} A_{1\omega}(t_0) \\ &= - \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t_0)} A_{1\omega+\omega_L}(t_0) \end{aligned} \quad (2-35)$$

En comparant cette expression avec la définition de l'opérateur enveloppe on voit que le champ entrant a la même forme que dans l'équation 2-18 à un terme de phase près (cette phase arbitraire provient du choix de l'instant  $t_0$  à partir duquel on «branche» l'interaction avec le réservoir). D'autre part l'intégration sur les fréquences se fait ici entre  $-\infty$  et  $+\infty$  alors que dans le formalisme de l'opérateur enveloppe on avait intégré sur une bande de fréquence de largeur  $\Delta\omega$  autour de la fréquence optique.

Du point de vue de l'étude des fluctuations, ce sont les propriétés statistiques des fluctuations entrantes qui nous importent, c'est-à-dire leurs fonctions de corrélation. Dans le cas où on intègre sur toutes les fréquences, la fonction d'autocorrélation du champ entrant est donnée par une fonction  $\delta$  ; dans le cas où on intègre sur une bande de largeur  $\Delta\omega$ , celle-ci a une largeur de l'ordre de  $1/\Delta\omega$ . Ces deux approches sont donc équivalentes si on s'intéresse à des temps longs par rapport à  $1/\Delta\omega$  (où encore à des fréquences d'analyse  $\Omega \ll \Delta\omega$ ).

Pour une comparaison détaillée des deux approches le lecteur pourra se reporter à la référence [Courty 90].

## A.4 Relaxation du champ excitonique

Les mécanismes d'élargissement d'un niveau excitonique dans un puits quantique sont principalement de trois sortes : le désordre, les interactions coulombiennes entre excitons [Ciuti 98] [Baumberg 98] [Tassone 99] et l'interaction exciton-phonon. Tout ceci n'est valable que si la densité d'excitation est suffisamment basse ( $n_{exc}a_{exc} \ll 1$ , où  $n_{exc}$  est la densité d'excitons par unité de surface et  $a_{exc}$  le rayon de Bohr bidimensionnel de l'exciton), de sorte que l'on peut encore considérer que les excitons forment un gaz de bosons en interaction. A des densité plus élevées, la nature fermionique des excitations

électroniques l'emporte ; les électrons et les trous forment un plasma dont les propriétés sont radicalement différentes. Ce point est précisé dans l'annexe.

L'influence du désordre sera discutée dans la partie C. D'autre part on néglige l'élargissement causé par les interactions entre excitons («élargissement collisionnel»), car les mesures de réflectivité et de transmission se font à très basse densité d'excitation. Dans ces conditions le mécanisme de relaxation dominant est l'interaction des excitons avec les phonons du réseau cristallin. Comme on se place à basse température (les mesures sont faites à 4K) il s'agit des phonons acoustiques. Cette hypothèse a été vérifiée par des mesures de photoluminescence quasi-résonante lors de la thèse de Gaétan Messin [Messin 00] et est en accord avec les résultats de la référence [Stanley 97]. Le hamiltonien d'interaction exciton-phonon s'écrit [Piermarocchi 96]:

$$H_{exc-ph} = i \sum_{q_z} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}'} G(\mathbf{q}, q_z) \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k} + \mathbf{q}} \left( c_{\mathbf{q}, q_z} - c_{-\mathbf{q}, q_z}^\dagger \right) b_{\mathbf{k}'}^\dagger b_{\mathbf{k}} \quad (2-36)$$

$c_{\mathbf{q}, q_z}^\dagger$  et  $c_{\mathbf{q}, q_z}$  sont les opérateurs de création et d'annihilation d'un phonon dont le vecteur d'onde a les composantes  $\mathbf{q}$  dans le plan des couches et  $q_z$  dans la direction  $Oz$  perpendiculaire aux couches. Ce hamiltonien décrit les diffusions des excitons entre un état de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et un état de vecteur d'onde  $\mathbf{k}'$ , accompagnées de la création ou de la destruction d'un phonon. L'invariance par translation dans le plan du puits quantique entraîne la conservation de l'impulsion dans le plan des couches, qui est matérialisée par la fonction  $\delta$ . Par contre l'impulsion dans la direction  $z$  perpendiculaire aux couches n'est pas conservée et il apparaît une somme sur  $q_z$ . Le coefficient de couplage  $G(\mathbf{q}, q_z)$  est réel et en première approximation proportionnel à la racine carrée de l'impulsion échangée  $\Delta q = (|\mathbf{q}|^2 + q_z^2)^{1/2}$ , donc à la racine carrée de l'énergie échangée  $\Delta E = E_{ph}(\mathbf{q}, q_z) = \hbar u (|\mathbf{q}|^2 + q_z^2)^{1/2}$  ( $u$  est la vitesse du son dans le matériau).

Le mode d'exciton  $b_{\mathbf{k}}$  est donc couplé à la fois à tous les modes excitoniques de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$  (formant un bain d'oscillateurs harmoniques bidimensionnel) et à l'ensemble des modes de phonons (formant un bain d'oscillateurs harmoniques tridimensionnel).

Il est cependant possible de se ramener au cas d'un couplage linéaire avec un seul réservoir :

$$H_{exc-ph} = i \sum_i G_i \left( b_{\mathbf{k}}^\dagger R_i - b_{\mathbf{k}} R_i^\dagger \right) \quad (2-37)$$

avec le remplacement :  $b_{\mathbf{k} + \mathbf{q}} (c_{-\mathbf{q}, q_z} - c_{\mathbf{q}, q_z}^\dagger) \rightarrow R_i$ . Les modes du réservoir sont donc des combinaisons des modes d'excitons et de phonons. C'est l'approche qui est suivie



dans la référence [Steyn-Ross 83] pour les excitons d'un semi-conducteur massif, dans le cadre de la méthode de «l'équation pilote».

Pour dériver les équations de Heisenberg-Langevin, on ne peut plus procéder de la même manière qu'au paragraphe précédent. Cependant il est possible d'utiliser la méthode des «projecteurs» [Cohen 88b] [Courty 90], qui permet de séparer sans ambiguïté les termes de relaxation des termes de fluctuation.

Nous avons effectué la dérivation des équations de Heisenberg-Langevin en utilisant les projecteurs sous l'approximation suivante : on modélise le réservoir excitonique par un niveau unique [Savona 98] [Messin 00]. On note  $D, D^\dagger$  les opérateurs d'annihilation et de création correspondants. Les phonons qui couplent le niveau  $b_{\mathbf{k}}$  au niveau  $D$  ont un vecteur d'onde dans le plan imposé par la conservation de l'impulsion, mais leur vecteur d'onde dans la direction  $z$  peut prendre n'importe quelle valeur. Ils forment donc un réservoir harmonique unidimensionnel que l'on suppose continu ; on appelle  $c_\omega$  ( $c_\omega^\dagger$ ) l'opérateur d'annihilation (de création) d'un phonon d'énergie  $\omega$ . Sous cette hypothèse le hamiltonien d'interaction exciton-phonon s'écrit :

$$H_{exc-ph} = i\hbar \int \beta(\omega) \left( b_{\mathbf{k}}^\dagger D_\omega - b_{\mathbf{k}} D_\omega^\dagger \right) \quad (2-38)$$

où la forme du coefficient de couplage est donnée par  $\beta(\omega) = \beta_0 \sqrt{\omega}$  et  $D_\omega = D (c_\omega - c_\omega^\dagger)$ . Les hamiltoniens libres du mode excitonique et du réservoir s'écrivent :

$$H_S = \hbar\omega_{exc}(k) b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \quad (2-39)$$

$$H_R = \hbar\omega_D D^\dagger D + \int d\omega \hbar\omega c_\omega^\dagger c_\omega \quad (2-40)$$

La différence essentielle par rapport au hamiltonien 2-21 décrivant la relaxation du champ électromagnétique dans la cavité réside dans la forme du hamiltonien du réservoir, qui n'est plus celui d'un bain d'oscillateurs harmoniques.

On trouve que les taux de transfert entre le niveau d'exciton considéré et le niveau  $D$  dépendent à la fois du nombre de phonons et du nombre d'excitons présents dans  $D$ . Les termes de fluctuations font également intervenir des produits de nombres d'excitons et de phonons et sont d'un traitement complexe. Nous utiliserons dans toute la suite un modèle plus simple qui permet de rendre compte qualitativement des caractéristiques du bruit ajouté par l'interaction exciton-phonon.

Deux types de simplifications sont possibles : on peut traiter la relaxation soit par un couplage avec un réservoir de phonons (ce qui permet d'expliquer la dépendance en température du bruit ajouté) [Eleuch 98] [Eleuch 99], soit par un couplage avec

un réservoir d'excitons (ce qui permet d'expliquer la dépendance du bruit ajouté en fonction de la densité d'excitons).

Nous n'étudions pas la dépendance en température ; lors des expériences l'échantillon est toujours à la même température de 4 K. Par contre la dépendance en intensité est importante pour l'étude des effets non linéaires (voir chapitre 4). On considère donc un couplage linéaire avec un réservoir d'excitons supposé continu, représenté par des opérateurs  $B_\omega$  :

$$H_I = i\hbar \int d\omega \beta \left( b_{\mathbf{k}}^\dagger B_\omega - B_\omega^\dagger b_{\mathbf{k}} \right) \quad (2-41)$$

On peut alors dériver l'équation de relaxation pour l'opérateur dans le référentiel tournant  $b(t) = b_{\mathbf{k}} e^{i\omega_L t}$  en suivant la même démarche que pour le mode de cavité. Elle prend une forme similaire :

$$\frac{db}{dt}(t) = -(\gamma_b + i\delta_b)b(t) + \sqrt{2\gamma_b}B^{in}(t) \quad (2-42)$$

où  $\delta_b = \omega_{exc}(k) - \omega_L$ ,  $\gamma_b$  est le taux de relaxation de l'exciton, qui est relié au coefficient de couplage  $\beta$ . Les fluctuations entrantes  $B^{in}$  s'écrivent en fonction des opérateurs du réservoir  $B_\omega$ .

Les normalisations sont identiques à celles de l'équation 2-18 :  $b(t)$  est sans dimension ( $n_{exc}(t) = \langle b^\dagger(t)b(t) \rangle$  est le nombre d'excitons dans le puits quantique) et  $B^{in}(t)$  est homogène à la racine carrée d'une fréquence.

## B Calcul des spectres

Nous reprenons maintenant le modèle quantique linéaire du chapitre 1 pour calculer les spectres de réflectivité, de transmission et d'absorption de notre échantillon. Pour cela nous donnons les équations d'évolution du système, puis nous résolvons l'état stationnaire.

### B.1 Equations d'évolution

Pour obtenir les équations d'évolution complètes il suffit d'ajouter aux équations de relaxation du champ électromagnétique (2-19) et du mode excitonique (2-42) les termes correspondant au couplage exciton-photon (dernier terme du hamiltonien 1-16) :

$$\frac{da}{dt}(t) = -(\gamma_a + i\delta_a)a(t) - igb(t) + \sqrt{2\gamma_1}A_1^{in}(t) + \sqrt{2\gamma_2}A_2^{in}(t) \quad (2-43)$$

$$\frac{db}{dt}(t) = -(\gamma_b + i\delta_b)b(t) - iga(t) + \sqrt{2\gamma_b}B^{in}(t) \quad (2-44)$$

où  $g$  est le coefficient de couplage exciton-photon en unités de fréquence :

$$g = \Omega_R/2\hbar \quad (2-45)$$

## B.2 Régime stationnaire

Nous réécrivons les équations 2-43 et 2-44 pour les valeurs moyennes des champs et nous cherchons leur solution en régime stationnaire :

$$(\gamma_a + i\delta_a)\bar{a} + ig\bar{b} = \sqrt{2\gamma_1}A_1^{in} \quad (2-46)$$

$$(\gamma_b + i\delta_b)\bar{b} + ig\bar{a} = 0 \quad (2-47)$$

On calcule facilement les intensités moyennes des champs  $n_a = |\bar{a}|^2$  et  $n_b = |\bar{b}|^2$  (respectivement égales aux nombres moyens d'excitons et de photons) :

$$\frac{n_a}{I_1^{in}} = \frac{2\gamma_1(\gamma_b^2 + \delta_b^2)}{(g^2 + \gamma_a\gamma_b - \delta_a\delta_b)^2 + (\gamma_a\delta_b + \gamma_b\delta_a)^2} \quad (2-48)$$

$$\frac{n_b}{I_1^{in}} = \frac{2\gamma_1g^2}{(g^2 + \gamma_a\gamma_b - \delta_a\delta_b)^2 + (\gamma_a\delta_b + \gamma_b\delta_a)^2} \quad (2-49)$$

où  $I_1^{in} = |\bar{A}_1^{in}|^2$  est l'intensité du champ entrant. La normalisation des champs entrants et sortants est différente de celle des champs intracavité (§A.2.4) si bien que  $I_1^{in}$  est égal au flux de photons entrant. Les champs réfléchi  $A_1^{out}$  et transmis  $A_2^{out}$  par la cavité sont :

$$A_1^{out} = \sqrt{2\gamma_1}a - A_1^{in} \quad (2-50)$$

$$A_2^{out} = \sqrt{2\gamma_2}a \quad (2-51)$$

On en déduit les coefficients de réflexion et de transmission de la microcavité :

$$R = \frac{I_1^{out}}{I_1^{in}} = \frac{((g^2 - (\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_b - \delta_a\delta_b)^2 + ((\gamma_1 - \gamma_2)\delta_b - \gamma_b\delta_a)^2}{(g^2 + \gamma_a\gamma_b - \delta_a\delta_b)^2 + (\gamma_a\delta_b + \gamma_b\delta_a)^2} \quad (2-52)$$

$$T = \frac{I_2^{out}}{I_1^{in}} = \frac{4\gamma_1\gamma_2(\gamma_b^2 + \delta_b^2)}{(g^2 + \gamma_a\gamma_b - \delta_a\delta_b)^2 + (\gamma_a\delta_b + \gamma_b\delta_a)^2} \quad (2-53)$$

où  $I_1^{out} = |\overline{A}_1^{out}|^2$  et  $I_2^{out} = |\overline{A}_2^{out}|^2$  sont les intensités réfléchie et transmise. On en déduit finalement le coefficient d'absorption  $A = 1 - R - T$  :

$$A = \frac{4\gamma_1\gamma_2g^2}{(g^2 + \gamma_a\gamma_b - \delta_a\delta_b)^2 + (\gamma_a\delta_b + \gamma_b\delta_a)^2} \quad (2-54)$$

Le coefficient d'absorption est proportionnel au nombre moyen d'excitons dans le puits quantique :

$$A I_1^{in} = 2\gamma_b n_b \quad (2-55)$$

Cette relation s'interprète de la façon suivante : la puissance absorbée  $A I_1^{in}$  provient des pertes non radiatives des excitons  $2\gamma_b n_b$ .

Les figures 2.2 et 2.3 montrent les spectres d'absorption, de réflectivité et de transmission théoriques sous incidence normale ( $\mathbf{k} = 0$ ) pour deux valeurs du désaccord exciton-cavité  $\delta = \delta_a - \delta_b$ . On observe le dédoublement des raies caractéristique du régime de couplage fort. Les deux pics d'absorption s'interprètent par la création d'une population cohérente de polaritons de branche basse (pic de gauche) ou de branche haute (pic de droite).

A désaccord nul, les deux pics sont identiques. A désaccord  $\delta = 2g$  le polariton de basse énergie est de caractère excitonique et celui de haute énergie est de caractère photonique. La largeur du mode de cavité étant plus grande que la largeur de l'exciton, les pics sont plus larges du côté haute énergie et l'absorption y est plus basse.

Remarquons que les énergies des maxima d'absorption, de transmission et des minima de réflectivité, diffèrent légèrement entre elles et diffèrent également des énergies propres du hamiltonien données par l'expression 1-24. Par exemple, les séparations à désaccord nul entre les pics d'absorption et de transmission valent respectivement :

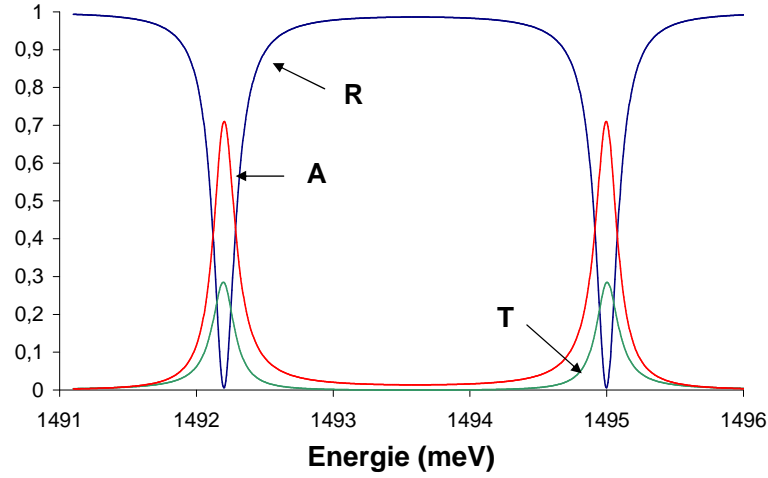


Fig. 2.2 – Réflexion, transmission et absorption à incidence normale, pour  $\delta = 0$ . Paramètres :  $g=1.4$  meV,  $\gamma_1=0.09$  meV,  $\gamma_2=0.03$  meV et  $\gamma_b=0.075$  meV.

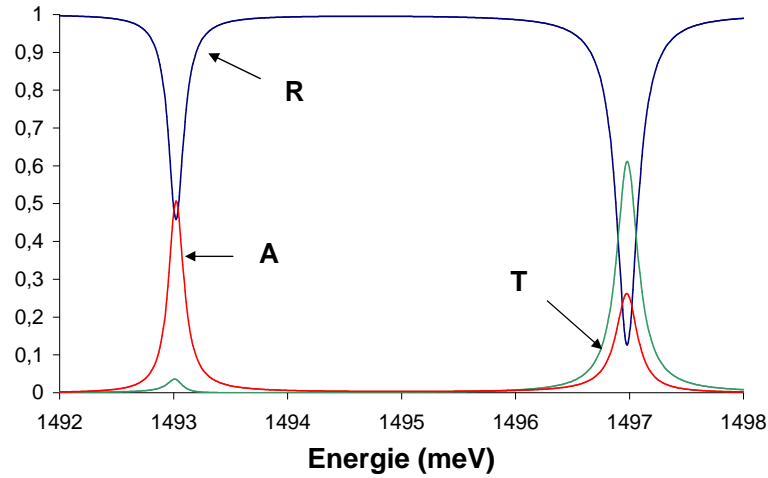


Fig. 2.3 – Réflexion, transmission et absorption à incidence normale, pour  $\delta = 2g$ . Les autres paramètres sont ceux de la figure 2.2.

$$\Delta E_A = 2\hbar\sqrt{g^2 - \frac{\gamma_a^2 + \gamma_b^2}{2}} \quad (2-56)$$

$$\Delta E_T = 2\hbar\sqrt{g\sqrt{g^2 + 2\gamma_b(\gamma_a + \gamma_b)} - \gamma_b^2} \quad (2-57)$$

Nous n'écrivons pas la séparation en réflectivité qui a une expression plus compliquée. On peut néanmoins démontrer les relations suivantes [Savona 95]:

$$\Delta E_A \leq \Delta E_R \leq \Delta E_T \leq \Omega'_R \quad (2-58)$$

La condition pour observer expérimentalement le dédoublement des raies par une

mesure d'absorption est donc plus stricte que la condition de couplage fort proprement dite provenant de 1-26. Le couplage doit être suffisamment fort pour vérifier :

$$g^2 > \frac{\gamma_a^2 + \gamma_b^2}{2} \quad (2-59)$$

La position des pics de transmission, d'absorption ou de réflectivité est sensible aux largeurs de raies. Ces déplacements par rapport au cas idéal 1-18 sont plus grands que ceux des énergies propres du hamiltonien qui ont été étudiées au 1.B.4.1. Par exemple les résonances d'absorption sont déplacées d'une quantité de l'ordre de  $g \times \frac{\gamma_a^2 + \gamma_b^2}{4g^2}$ . La condition de validité de la formule approchée 1-18 peut s'écrire :

$$\gamma_a^2 + \gamma_b^2 \ll 2g^2 \quad (2-60)$$

Cette condition est bien vérifiée pour notre échantillon. Nous verrons cependant au chapitre 3 qu'il faut tenir compte du décalage dû aux largeurs de raie pour ajuster précisément les courbes d'anticroisement.

## C Influence du désordre

### C.1 Discussion

Dans les puits quantiques de très bonne qualité, le «désordre» provient essentiellement des fluctuations de composition des alliages ( $In_xGa_{1-x}As$  dans notre cas) et des rugosités des interfaces du puits. On peut le modéliser par l'interaction des excitons avec un potentiel désordonné, qui n'a plus la périodicité du réseau cristallin et ne conserve donc pas le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dans le plan des couches. Il se traduit par un élargissement inhomogène de la raie excitonique.

En principe, ce mécanisme de relaxation n'est pas indépendant des autres et aurait du être traité en même temps que l'interaction exciton-phonon dans la partie A.4. En particulier, la relaxation peut se produire à l'intérieur de la raie inhomogène de l'exciton (cet effet est appelé diffusion spectrale). Nous faisons ici l'approximation de considérer les différents processus comme indépendants.

On doit également se demander quelle est l'influence du couplage exciton-photon sur les effets du désordre. Il faut a priori traiter les deux phénomènes ensemble [Savona 97]; l'interaction exciton-photon (qui conserve le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dans le plan des couches) entre en compétition avec la diffusion de l'exciton par le potentiel désordonné (qui ne

conserve pas  $\mathbf{k}$ ). Nous faisons une nouvelle fois l'approximation décrite dans la partie A.1 qui consiste à négliger l'influence du couplage exciton-photon sur la relaxation.

On prend donc comme donnée la forme de raie de l'exciton nu, prenant en compte à la fois l'élargissement inhomogène dû au désordre et l'élargissement homogène dû aux autres mécanismes de relaxation (elle peut être calculée à partir d'un modèle microscopique ou définie de façon phénoménologique) et on ajoute ensuite le couplage avec les photons. Nous avons discuté les limites de cette approximation au A.1 : elle ne rend pas compte des effets liés à la relation de dispersion des polaritons. Pourtant, il a été montré qu'elle donnait de très bons résultats dans le cas où l'élargissement des raies est dominé par les effets de désordre [Ell 98] [Whittaker 98]. Notamment, l'asymétrie de la raie excitonique causée par le désordre (l'absorption est plus grande sur le côté haute énergie) permet d'expliquer l'asymétrie observée entre les deux branches de polaritons (sur la plupart des échantillons, la branche haute est nettement plus large que la branche basse ; nous reviendrons dans le chapitre 3 sur les origines physiques de cette asymétrie). Ici nous cherchons seulement à expliquer les propriétés de la branche basse sur laquelle nous avons réalisé toute l'étude des effets non linéaires. Par conséquent il nous suffira de représenter la raie excitonique par une Gaussienne symétrique.

Cette approximation est habituellement utilisée dans le cadre d'un modèle semi-classique appelé «théorie de la dispersion linéaire» : la forme de la raie excitonique est représentée par un coefficient d'absorption  $\alpha(\omega)$  et un indice de réfraction  $n(\omega)$ . Nous allons maintenant l'introduire dans notre modèle quantique en suivant l'approche de V. Savona [Savona 98]. On représente la raie inhomogène par un ensemble de niveaux  $\mathbf{k}=0$  d'énergies différentes, dont le coefficient de couplage avec la lumière suit une forme Gaussienne.

## C.2 Modélisation simplifiée du désordre

On remplace donc l'opérateur  $b_{\mathbf{k}}$  par une collection d'opérateurs excitoniques de fréquences  $\omega_0$  réparties autour de la fréquence centrale  $\omega_{exc}(k)$ . Le hamiltonien du système s'écrit maintenant :

$$H = \hbar\omega_{cav}a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \int d\omega_0 \hbar\omega_0 b_{\omega_0}^\dagger b_{\omega_0} + \hbar g \int d\omega_0 \alpha_0(\omega_0) \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\omega_0} + b_{\omega_0}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right) \quad (2-61)$$

Le coefficient  $\alpha_0(\omega_0)$  donne la contribution des différents niveaux excitoniques au

couplage avec la lumière :

$$\alpha_0(\omega_0) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma_{inh}} e^{-\frac{(\omega_0 - \omega_{exc}(k))^2}{2\gamma_{inh}^2}} \right]^{1/2} \quad (2-62)$$

où  $\gamma_{inh}$  représente la demi-largeur inhomogène de l'exciton. La force d'oscillateur totale de l'exciton devant rester inchangée, on a :

$$\int d\omega_0 [\alpha_0(\omega_0)]^2 = 1 \quad (2-63)$$

En suivant la même démarche que dans la partie B, on peut écrire l'équation d'évolution pour les opérateurs de photon et d'exciton dans le référentiel tournant :

$$\begin{aligned} \frac{da(t)}{dt} &= -(\gamma_a + i\delta_a)a(t) - ig \int d\omega' \alpha(\omega') b_{\omega'}(t) \\ &\quad + \sqrt{2\gamma_1} A_1^{in}(t) + \sqrt{2\gamma_2} A_2^{in}(t) \end{aligned} \quad (2-64)$$

$$\frac{db_{\omega'}(t)}{dt} = -(\gamma_b + i\delta') b_{\omega'}(t) - ig\alpha(\omega') a(t) + \sqrt{2\gamma_b} \alpha(\omega') B_{\omega'}^{in}(t) \quad (2-65)$$

avec  $\delta' = \omega' - \omega_L$ . Les champs entrants  $B_{\omega'}^{in}(t)$  sont définis de la même manière qu'au A.3. Pour calculer les champs moyens, nous réécrivons les équations d'évolution pour les valeurs moyennes des champs et nous cherchons leur solution en régime stationnaire :

$$(\gamma_a + i\delta_a)\bar{a} + ig \int d\omega' \alpha(\omega') \bar{b}_{\omega'} = \sqrt{2\gamma_1} A_1^{in} \quad (2-66)$$

$$(\gamma_b + i\delta') \bar{b}_{\omega'} + ig\alpha(\omega') \bar{a} = 0 \quad (2-67)$$

Il est commode d'introduire un opérateur  $b$  défini comme une combinaison linéaire de l'ensemble des opérateurs d'exciton :

$$b = \int d\omega' \alpha(\omega') b_{\omega'} \quad (2-68)$$

On peut alors réécrire les équations du régime stationnaire sous une forme similaire à celles de la partie B :

$$(\gamma_a + i\delta_a)\bar{a} + ig\bar{b} = \sqrt{2\gamma_1} A_1^{in} \quad (2-69)$$

$$(\gamma_b + i\delta_b)\bar{b} + ig\bar{a} = 0 \quad (2-70)$$



Les équations sont exactement identiques au cas homogène, à condition de remplacer  $\gamma_b$  et  $\delta_b$  par les quantités  $\gamma_\sigma$  et  $\delta_\sigma$  définies par :

$$\gamma_\sigma = \frac{\text{Re}(\sigma(\omega_L))}{|\sigma(\omega_L)|^2} \text{ et } \delta_\sigma = \frac{-\text{Im}(\sigma(\omega_L))}{|\sigma(\omega_L)|^2} \quad (2-71)$$

avec

$$\sigma(\omega) = \int d\omega' \frac{\alpha^2(\omega')}{\gamma_b + i(\omega' - \omega)} \quad (2-72)$$

A ce remplacement près, les formules 2-48 à 2-55 restent valables. Finalement on peut représenter l'effet du désordre en attribuant au niveau excitonique considéré une largeur et une position effectives qui dépendent de la fréquence d'excitation  $\omega_L$ .

### C.3 Résultats

Les figures 2.4 et 2.5 comparent les spectres d'absorption calculés avec et sans élargissement inhomogène. Dans le cas d'une raie inhomogène étroite ( $\gamma_{inh}=0.25$  meV, valeur réaliste pour un échantillon de bonne qualité), la séparation entre les deux pics ainsi que leurs largeurs restent quasiment inchangées à désaccord nul (figure 2.4). Les largeurs des états polaritons sont donc déterminées par les largeurs *homogènes* de l'exciton et du photon. Ce résultat rejoint celui de la référence [Houdré 96].

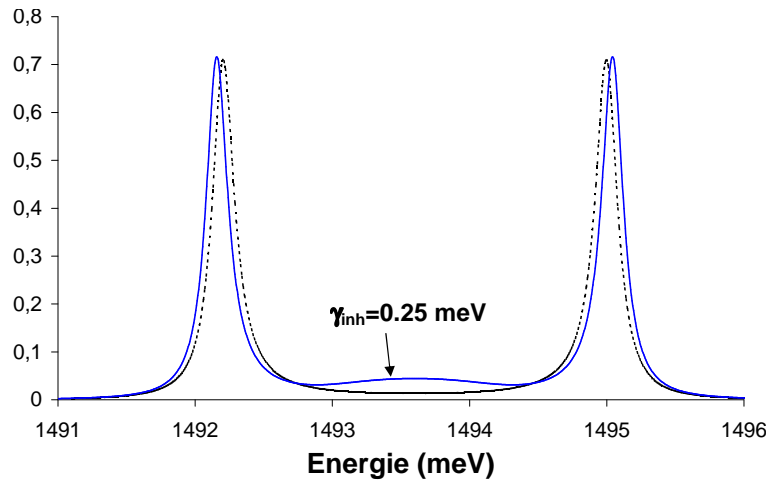


Fig. 2.4 – Spectres d'absorption à désaccord nul avec (traits pleins) et sans (pointillés) élargissement inhomogène. Autres paramètres :  $g=1.4$  meV,  $\gamma_1=0.09$  meV,  $\gamma_2=0.03$  meV et  $\gamma_b=0.075$  meV.

Lorsque l'on s'éloigne du désaccord nul (figure 2.5), l'élargissement inhomogène acquiert une influence croissante sur la forme des raies d'absorption. Le pic de type

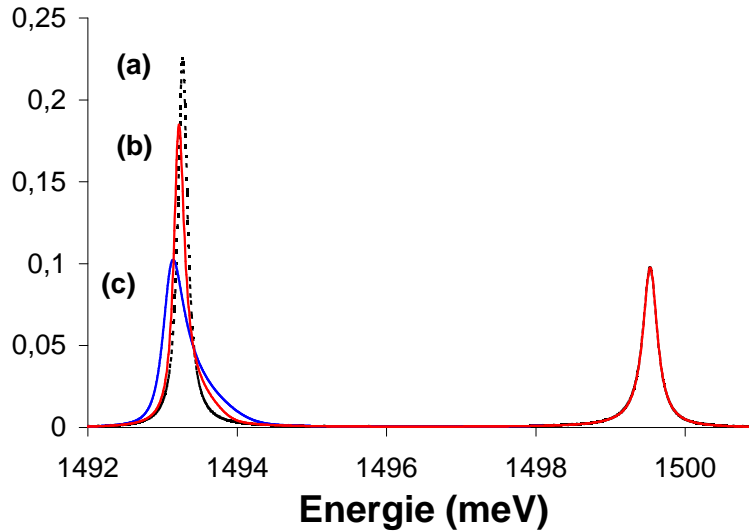


Fig. 2.5 – Spectres d'absorption à désaccord  $\delta = 4g$ . (a)  $\gamma_{inh}=0$ , (b)  $\gamma_{inh}=0.125$  meV et (c)  $\gamma_{inh}=0.25$  meV. Les autres paramètres sont ceux de la figure 2.4

«exciton» est nettement déplacé et élargi tandis que le pic de type «photon» n'est pas affecté.

Nous avons tracé figure 2.6 la variation des largeurs des états polaritons en fonction du désaccord exciton-cavité, pour plusieurs valeurs de l'élargissement inhomogène. Par exemple pour  $\gamma_{inh}=0.125$  meV les largeurs de raies restent inchangées par rapport au cas homogène pour des désaccords inférieurs à 3 meV ; en revanche pour  $\gamma_{inh}=0.375$  meV, les largeurs restent inchangées seulement pour les désaccords négatifs.

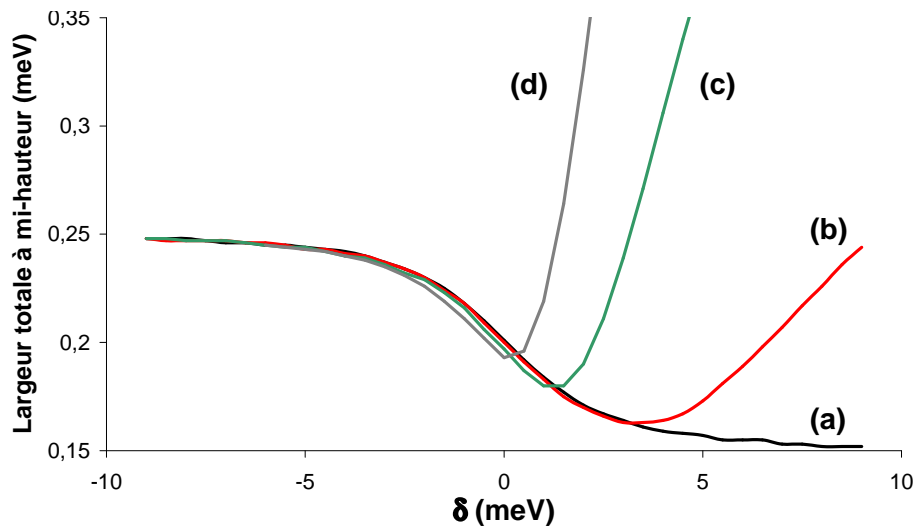


Fig. 2.6 – Variation des largeurs de raie en fonction du désaccord exciton-cavité. (a)  $\gamma_{inh}=0$ , (b)  $\gamma_{inh}=0.125$  meV, (c)  $\gamma_{inh}=0.25$  meV et (d)  $\gamma_{inh}=0.375$  meV. Autres paramètres :  $g=1.4$  meV,  $\gamma_1=0.09$  meV,  $\gamma_2=0.03$  meV et  $\gamma_b=0.075$  meV.

On voit donc que les largeurs ne sont sensibles à la largeur inhomogène que pour des désaccords positifs (pic «exciton») et ceci d'autant plus que la largeur inhomogène est grande.

## Chapitre 3

# Caractérisation de l'échantillon

Comme on l'a vu, la mise en évidence expérimentale du régime de couplage fort dans les microcavités semi-conductrices peut se faire par des mesures de réflectivité, de transmission ou d'absorption, en observant le dédoublement des résonances. Si l'on veut caractériser plus précisément l'échantillon, la comparaison des données expérimentales avec les prédictions du modèle présenté au chapitre précédent devrait permettre de fixer les paramètres essentiels : l'énergie de résonance de l'exciton, l'énergie de couplage exciton-photon et les largeurs de raie de l'exciton et du mode de cavité. Les deux premiers paramètres peuvent se déduire de la courbe d'anticroisement. Les deux derniers peuvent être déterminés à partir de l'étude des largeurs de raie des polaritons.

Il faut souligner qu'une connaissance *précise* des paramètres linéaires est nécessaire dans l'optique de la modélisation des effets non linéaires présentée au chapitre 4. Ceux-ci sont en effet très sensibles à une petite variation de l'un des paramètres ; par exemple nous verrons que les intensités de seuil sont proportionnelles au cube de la largeur du polariton (formule 4-84).

## A Courbe d'anticroisement

La première étape consiste à mesurer les énergies des deux résonances d'absorption (ou de réflectivité, ou de transmission) en fonction du désaccord exciton-cavité. Ceci permet de tracer la courbe d'anticroisement de notre échantillon. Pour faire varier le désaccord, il suffit de déplacer le point d'excitation sur la surface de l'échantillon, grâce au gradient d'épaisseur des microcavités (§1).

La méthode la plus simple consiste à étudier la réflectivité au moyen d'une source de lumière à spectre large - on parle alors de réflectivité en lumière blanche. L'analyse spectrale de la lumière réfléchie fournit directement les spectres de réflectivité de la microcavité. Nous avons choisi d'effectuer nos mesures au moyen d'une source laser

quasi-monochromatique car c'est dans ces conditions d'excitation que nous avons étudié le bruit.

Ces deux méthodes peuvent donner des résultats différents puisque les conditions d'excitation sont très différentes. Pour notre échantillon, nous verrons dans la partie B que les largeurs obtenues par réflectivité en lumière blanche sont plus *petites* que les largeurs obtenues en balayant un laser monochromatique ; il est probable que ce désaccord provient simplement de ce que ces deux mesures ont été réalisées sur des zones différentes du même échantillon.

Nous allons maintenant décrire le montage avant de présenter l'ajustement de la courbe d'anticroisement expérimentale.

## A.1 Gradient d'épaisseur des microcavités

Un point essentiel qui facilite considérablement l'étude expérimentale des microcavités est que l'on peut faire varier à volonté le paramètre de désaccord entre l'exciton et la cavité en déplaçant le point d'excitation sur la surface de l'échantillon. En effet, lors de la fabrication de l'échantillon il est possible d'introduire de façon contrôlée un très léger angle entre les miroirs de la cavité, de l'ordre de quelques  $10^{-6}$  radian. En différents points de l'échantillon on a donc des longueurs de cavité différentes. La taille de l'échantillon étant de quelques millimètres, il est possible en déplaçant le point d'excitation sur toute sa surface de faire varier la longueur de la cavité (et donc sa longueur d'onde de résonance) de plusieurs nanomètres.

La situation est cependant compliquée par le fait que le puits quantique présente lui aussi des variations d'épaisseur, qui s'accompagnent de variations de l'énergie de résonance de l'exciton.

L'une des conséquences importantes de la pente de la cavité est qu'il faut choisir avec soin le diamètre  $\Phi$  de la tache d'excitation. En effet, chaque point de la tache correspond à une longueur différente pour la cavité ; la dispersion totale de l'énergie de résonance de la cavité est de l'ordre de :

$$\Delta E = \Phi \frac{\delta E}{\delta x} \quad (3-1)$$

où  $\delta E/\delta x$  est la pente de la cavité suivant sa ligne de plus grande pente, exprimée en énergie par unité de longueur. Si  $\Delta E$  est supérieur à la largeur de raie  $2\gamma_{cav}$  de la cavité, la taille finie de la tache se traduit par un élargissement artificiel des raies, dont il faut tenir compte lors de l'interprétation des données. Avec les données de l'échantillon on peut évaluer la taille maximale à environ  $50 \mu m$ .

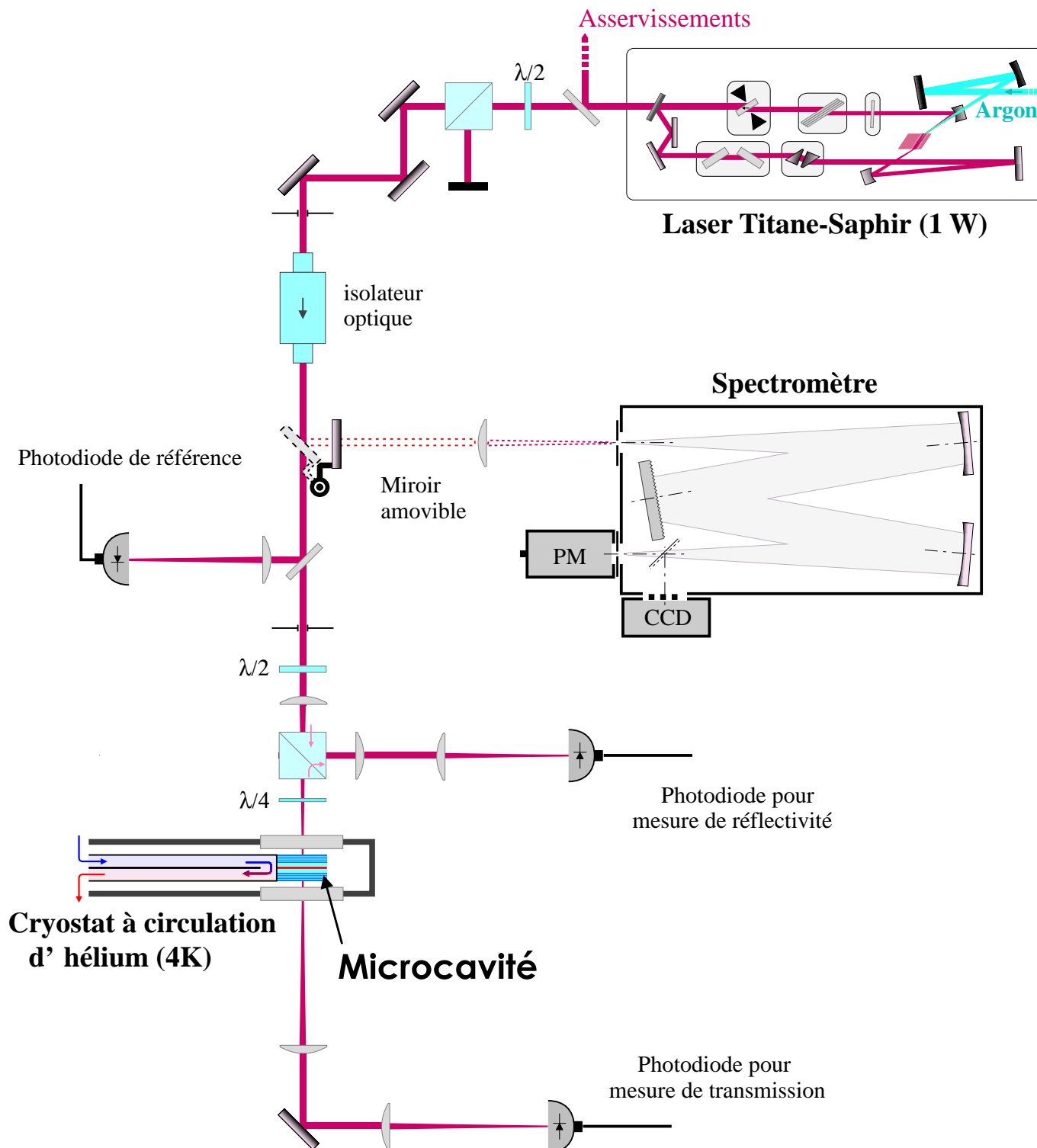


Fig. 3.1 – Schéma du montage utilisé pour l'étude de la réflectivité et de la transmission.

## A.2 Description du montage

Le montage utilisé pour étudier les résonances de réflectivité et de transmission est détaillé sur la figure 3.1. Nous allons maintenant décrire un par un ses différents éléments : le cryostat à circulation d'hélium contenant la microcavité, la source laser, un spectromètre pour mesurer la longueur d'onde d'excitation et un circulateur optique permettant de récupérer la lumière réfléchi. Deux photodiodes permettent respectivement de mesurer les puissance transmise et réfléchi. Nous parlerons enfin des conditions de focalisation sur l'échantillon et de la méthode employée pour déterminer la position des résonances.

### A.2.1 Le cryostat

Rappelons qu'à cause de sa faible énergie de liaison, l'exciton n'est clairement visible qu'à basse température. Les premières études ont été réalisées à la température de l'azote liquide (77K). Dans ce cas les résonances sont clairement visibles, mais considérablement élargies par l'interaction des excitons avec les phonons du réseau cristallin ; les intensités nécessaires pour observer des effets non linéaires sont beaucoup plus hautes. C'est pourquoi nous avons choisi de réaliser toutes nos expériences à la température de l'hélium liquide (4K).

L'échantillon est placé dans un cryostat à circulation d'hélium, permettant de stabiliser sa température à 4K pendant plusieurs heures, avec des variations inférieures au dixième de Kelvin. Il s'agit d'un modèle commercial de la marque *Oxford Instruments* référencé sous le nom de *microstat* parce qu'il a été conçu pour des expériences de microscopie. L'échantillon est fixé sur un doigt froid, entre deux fenêtres d'un diamètre de 2,5 cm distantes d'environ 1 cm. On peut ainsi travailler en réflexion ou en transmission, avec une ouverture angulaire de l'ordre de  $45^\circ$ .

Afin de faire varier le désaccord exciton-cavité, il faut pouvoir déplacer de façon contrôlée le spot d'excitation sur la surface de l'échantillon. Pour cela, nous avons monté l'ensemble du cryostat sur une platine de translation horizontale, dont la sensibilité est de 1 micron et dont la vis de commande est graduée tous les 10 microns. Etant donné un angle entre les miroirs de quelques  $10^{-6}$  radian, l'incertitude de lecture de 5 microns correspond à une incertitude de l'ordre de  $25 \mu eV$  sur le désaccord exciton-cavité, tout à fait acceptable puisqu'elle est petite par rapport aux largeurs de raies.

La zone de l'échantillon que nous étudions est donc une ligne horizontale  $Ox$ . Comme son gradient d'épaisseur n'est pas homogène sur toute sa surface, deux lignes horizontales distinctes fournissent deux courbes d'anticroisement différentes. C'est pour-

quoi nous devons veiller à faire toutes nos expériences en excitant la même ligne horizontale de l'échantillon. Pour cela nous avons mis en place deux diaphragmes qui permettent de réaligner le faisceau incident sur un axe bien défini.

### A.2.2 La source laser

Pour les mesures de transmission et de réflectivité, il est important d'avoir une source accordable, de manière à pouvoir explorer une région importante de la courbe d'anticroisement. Pour cela une plage de fonctionnement de l'ordre de 10 nm centrée sur 830 nm est largement suffisante. L'autre caractéristique importante est la largeur spectrale qui doit être suffisamment petite pour pouvoir résoudre les largeurs de raie typique des polaritons. Ces largeurs étant de l'ordre de 0.1 nm, la largeur spectrale ne doit pas excéder 0.02 nm.

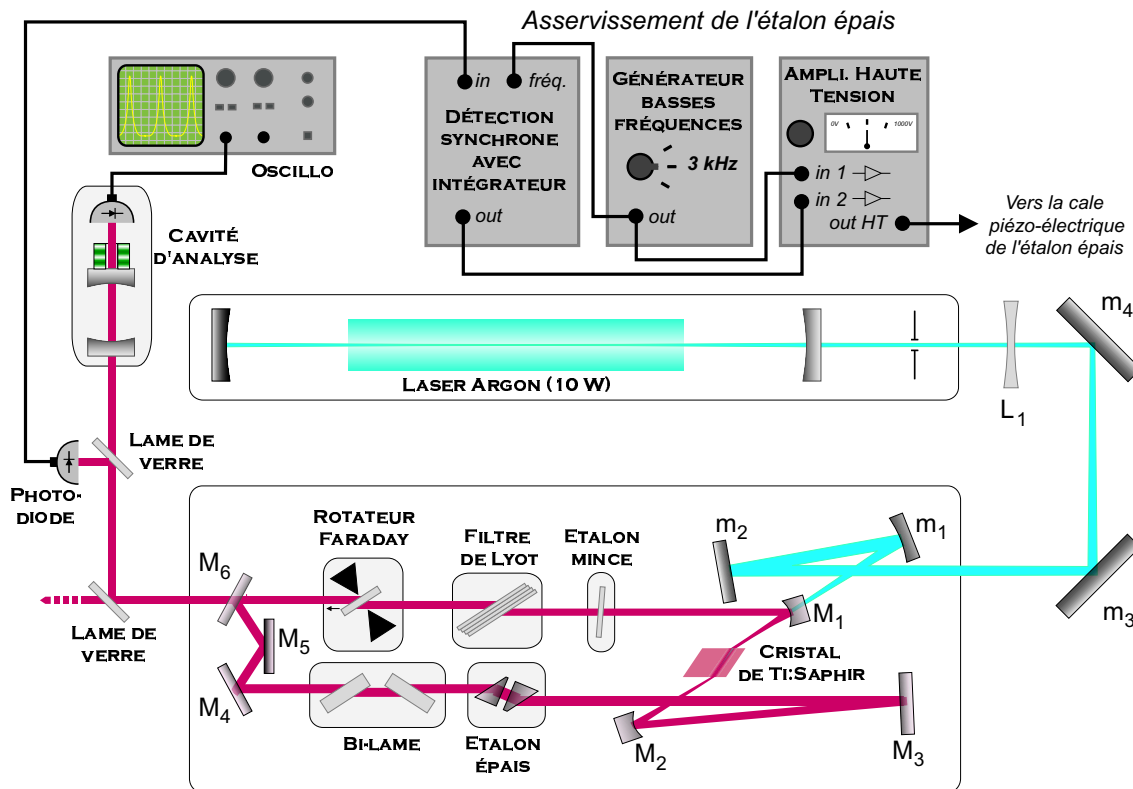


Fig. 3.2 – Schéma de principe du laser titane:saphir et de l'asservissement de l'étalon épais.

La source que nous avons utilisée est un laser titane:saphir continu, construit au laboratoire selon le modèle mis au point par François Biraben. Le cristal de titane:saphir est pompé par un laser à argon ionisé *Spectra Physics 2030* qui délivre une puissance de



10 Watt. La cavité laser a une longueur de 1.6 mètre, ce qui définit un intervalle entre deux modes longitudinaux consécutifs de 170 MHz. Elle contient 3 éléments sélectifs qui permettent d'assurer un fonctionnement monomode et de sélectionner la fréquence. Ces filtres sont un filtre de Lyot (d'intervalle spectral libre  $\Delta\omega=1$  THz), un étalon Fabry Péroต์ «mince» (une lame de verre,  $\Delta\omega=160$  GHz) et un étalon Fabry Péroต์ «épais» (deux prismes séparés par une couche d'air,  $\Delta\omega=20$  GHz). Lorsque les courbes de transmission des éléments sélectifs ont un maximum commun, il s'opère une sélection de modes : seul le mode de cavité dont la fréquence est la plus proche de la fréquence optimale peut osciller. Afin d'éviter des sauts de modes, on asservit la distance entre les deux prismes du Fabry Péroต์ épais. Lorsque le laser est monomode et stable, un bilame (deux lames de verre dont la rotation modifie la longueur optique de la cavité) permet de balayer continûment sa fréquence sur une largeur d'environ 10 GHz (0.02 nm). Au-delà de cette valeur, le balayage provoque un saut de mode du Fabry Péroต์ épais. On peut déplacer la fréquence du laser à plus grande échelle en procédant par sauts : soit en modifiant l'orientation du Fabry Péroต์ mince jusqu'à provoquer un saut du Fabry Péroต์ épais de 20 GHz (0.04 nm) soit en modifiant celle du filtre de Lyot jusqu'à provoquer un saut du Fabry Péroต์ mince de 160 GHz (0.32 nm).

On dispose ainsi d'une source accordable entre 820 et 850 nm. La puissance de sortie est supérieure à 1 W sur toute cette gamme de longueurs d'onde et les fluctuations de puissance sont inférieures à 2%. Le faisceau de sortie est bien décrit par un mode gaussien de diamètre 1 mm. La largeur spectrale est de l'ordre de 1 MHz. La longueur d'onde dérive lentement à cause des variations de la température ambiante, mais les dérives sont toujours inférieures à la résolution du spectromètre (voir le paragraphe suivant).

En conclusion la plage de fonctionnement du titane-saphir est suffisante pour nos expériences et sa largeur spectrale assez petite. En fait pour des mesures de transmission ou de réflectivité il n'est pas utile d'avoir une source aussi fine (1 MHz, i.e.  $2 \cdot 10^{-6}$  nm), mais nous verrons au chapitre 5 que c'est une condition nécessaire pour effectuer des mesures de bruit. La puissance fournie est elle aussi largement supérieure à nos besoins (la puissance incidente sur l'échantillon est fixée à 0.5 mW de façon à s'affranchir des effets non linéaires). Là encore nous verrons au chapitre 5 qu'il est important d'avoir un laser très au-dessus du seuil pour mesurer le bruit.

Remarquons enfin que les fluctuations de puissance du laser limitent la précision des mesures à 2%. Pour certaines mesures, ces fluctuations sont gênantes. C'est pourquoi nous avons mis en place un dispositif d'asservissement de l'intensité du laser (décrit dans le chapitre 5).

### A.2.3 Le spectromètre

Il s'agit d'un appareil commercial de la marque *Jobin-Yvon*, référencé sous le nom de *Spectromètre HR 1000*. Il possède deux entrées et deux sorties distantes d'un mètre. Sur l'une des entrées et sur l'une des sorties sont installées deux fentes identiques réglables à  $1 \mu\text{m}$  près et graduées tous les  $10 \mu\text{m}$ . Derrière la fente de sortie est installé un photomultiplicateur adapté à l'infrarouge, dont le signal est observable directement sur l'écran d'un oscilloscope numérique. La résolution en longueur d'onde de ce système est de l'ordre du centième de nanomètre lorsque les fentes sont ouvertes à  $10 \mu\text{m}$ .

Cependant, les longueurs d'onde affichées par le spectromètre peuvent dériver de 2 ou 3 dixièmes de nanomètre en l'espace d'une journée de mesures, sous l'effet de la dilatation thermique. Il est nécessaire de le réétalonner plusieurs fois par jour en mesurant une transition atomique de longueur d'onde bien connue. Nous avons employé pour cela une lampe à Xénon, possédant une transition à  $828.01 \text{ nm}$ , suffisamment proche des longueurs d'ondes où nous travaillons ( $828\text{-}834 \text{ nm}$ ) pour fournir une référence fiable. Tenant compte de l'incertitude supplémentaire liée à la procédure d'étalonnage, nous estimons l'incertitude de mesure d'une longueur d'onde à  $\pm 0,02 \text{ nm}$ .

### A.2.4 Le circulateur optique

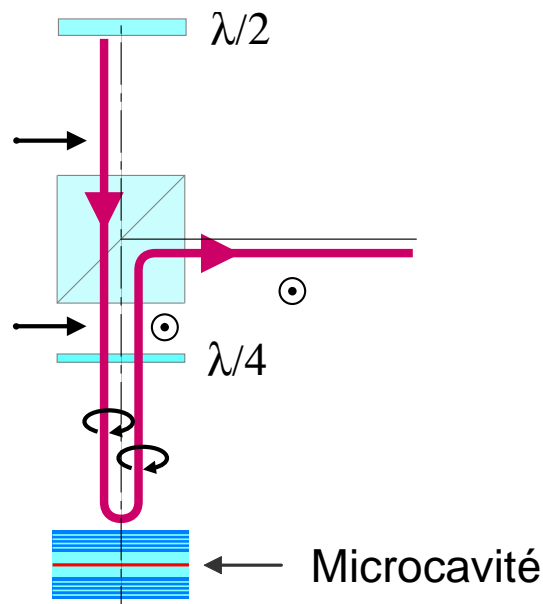


Fig. 3.3 – Circulateur optique

Un circulateur optique est mis en place devant l'échantillon afin de séparer la lumière réfléchie de la lumière incidente. Son principe de fonctionnement est rappelé figure 3.3. Il comprend un cube polariseur et une lame quart d'onde qui transforme la polarisation linéaire sélectionnée en transmission par le cube en polarisation circulaire. La microcavité reçoit une lumière polarisée circulairement, ce qui permet de n'exciter que les états excitoniques de moment angulaire  $M_z = +1$  (ou bien  $M_z = -1$  pour une polarisation  $\sigma_-$ ). La lumière réfléchie est de polarisation circulaire opposée (par rapport à la direction de propagation). Après traversée de la lame quart d'onde elle a une polarisation linéaire orthogonale à celle du faisceau entrant et est réfléchie par le cube, ce qui permet de la séparer aisément sans perte d'intensité.

### A.2.5 Focalisation sur l'échantillon

Le faisceau laser est focalisé sur l'échantillon grâce à une lentille de focale 150 mm. Nous avons pu évaluer la taille de la tache focale en déplaçant horizontalement l'échantillon de manière à couper plus ou moins le faisceau avec son bord vertical. L'intensité transmise  $I_t(x)$  est alors égale au produit de convolution du profil d'intensité du faisceau  $I(x, y)$  par une fonction de Heaviside  $H(x)$  centrée sur la position  $x_0$  du bord de l'échantillon (si on néglige la rugosité du bord de l'échantillon). On suppose que le faisceau incident est un faisceau gaussien de waist  $W$  :

$$I(x, y) = I_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2W^2}\right) \quad (3-2)$$

L'ajustement de l'intensité mesurée permet de déterminer  $W$  avec une bonne précision. On obtient un diamètre  $2W = 75 \mu\text{m}$ . D'après les conclusions du paragraphe A.1 on s'attend donc à ce que les raies mesurées soient élargies artificiellement par l'angle entre les miroirs. Il serait souhaitable de focaliser davantage, mais il faut dans ce cas diminuer l'intensité incidente pour s'affranchir des effets non linéaires et le rapport signal à bruit s'en ressent. D'autre part cela conduirait à augmenter la divergence du faisceau, autre source possible d'élargissement artificiel.

En effet un faisceau de divergence  $\Delta\theta$  autour de l'incidence normale crée une distribution d'états polaritons de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_{\parallel}$  différents de largeur  $\Delta k_{\parallel} = 2\pi \sin(\Delta\theta)/\lambda$ . La dispersion associée à cette largeur en  $k_{\parallel}$  est  $\Delta E = \hbar^2 \Delta k_{\parallel}^2 / 2m_p$ . Lorsque cette dispersion est supérieure à la largeur de raie du polariton, elle provoque un élargissement artificiel de la résonance. Par exemple pour une divergence de  $1^\circ$  on obtient une largeur  $\Delta k_{\parallel} \simeq 10^3 \text{ cm}^{-1}$  et une dispersion  $\Delta E \simeq 0.06 \text{ meV}$  si le polariton est de type «photon». Avec les données de l'échantillon on peut estimer la divergence

maximale acceptable à environ  $2^\circ$ . Pour notre faisceau laser de diamètre initial 1 mm, cela signifie que la lentille de focalisation doit avoir une focale supérieure à 20 mm.

La position des pics est quant à elle peu modifiée par l'effet d'élargissement car le déplacement reste très petit par rapport au diamètre de la tache focale et est inférieur à la précision de lecture. Par conséquent nous ne tenons pas compte de cet effet pour ajuster la courbe d'anticroisement. En revanche nous en tiendrons compte dans la partie suivante pour reproduire les largeurs de raies expérimentales.

### A.2.6 Mesure des positions des résonances

Pour mesurer les énergies des résonances de la microcavité, la méthode la plus naturelle consiste à choisir un point d'excitation sur l'échantillon (fixant ainsi le désaccord exciton-cavité), puis à tracer un spectre de transmission, de réflectivité ou d'absorption. Il faudrait pour cela balayer continûment la longueur d'onde du laser Titane-Saphir sur une plage de l'ordre des largeurs de raie des polaritons, c'est-à-dire sur quelques dixièmes de nanomètre, ce qui n'est malheureusement pas possible. Nous avons donc choisi la procédure inverse : la fréquence du laser est fixée et on trace les spectres en déplaçant l'échantillon.

Nous avons choisi d'utiliser les résonances de transmission pour construire la courbe d'anticroisement. En effet, celle-ci offre un meilleur contraste que la réflectivité, la transmission hors résonance étant quasi-nulle. La précision sur la position des résonances est donc meilleure ; elle est limitée seulement par la précision de lecture. Nous avons bien sûr vérifié que l'étude de la réflectivité donnait des résultats compatibles.

## A.3 Choix du modèle

### A.3.1 Effet des largeurs de raies

A cause des largeurs non nulles du photon et de l'exciton, le balayage de l'échantillon et le balayage du laser fournissent deux courbes d'anticroisement très légèrement décalées l'une par rapport à l'autre et par rapport au cas idéal sans relaxation. Ce décalage provient essentiellement de la largeur inhomogène de l'exciton, qui est en général plus grande que les largeurs homogènes de l'exciton et du mode de cavité.

A titre d'illustration la figure 3.4 représente trois courbes d'anticroisement : la première correspond au cas idéal, la deuxième à une mesure des résonances par balayage du laser et la dernière à une mesure par balayage de l'échantillon.

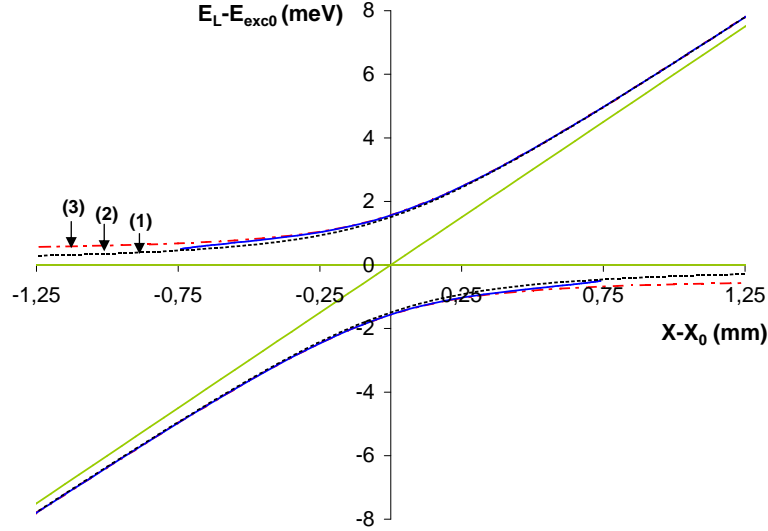


Fig. 3.4 – Courbes d'anticroisement théoriques obtenues par 3 modèles différents : (1) énergie des polaritons en l'absence de relaxation, (2) recherche des maxima de transmission en balayant l'échantillon et (3) recherche des maxima de transmission en balayant le laser. La courbe (2) est située entre les courbes (1) et (3). Paramètres :  $\Omega_R=3$  meV,  $\gamma_{cav}=0.2$  meV ( $\gamma_1=\gamma_2=0.1$  meV),  $\gamma_{exc}=0.05$  meV,  $\gamma_{inh}=0.3$  meV,  $p_{cav}=6$  meV/mm,  $p_{exc}=0$ .

On observe un léger décalage en énergie qui se traduit par un décalage important de la position de résonance sur l'échantillon lorsque la résonance considérée est de type excitonique (à désaccord très positif sur la branche basse ou très négatif sur la branche haute). En effet sur une branche de type excitonique l'énergie des résonances varie peu en fonction de la position et la position d'une résonance peut être très sensible à un petit décalage en énergie. Nous avons tracé à titre d'exemple la position des résonances sur l'échantillon en fonction de la largeur inhomogène de l'échantillon (figure 3.5). On constate que le décalage devient important lorsque l'énergie du laser se rapproche de l'énergie de résonance de l'exciton.

### A.3.2 Procédure d'ajustement

Nous n'avons donc pas utilisé les formules simplifiées 1 – 18 pour ajuster la courbe expérimentale. Afin d'obtenir un ajustement plus précis des régions excitoniques de la courbe d'anticroisement, nous utilisons les résultats du modèle de la partie 2-C tenant compte des élargissements homogène et inhomogène.

Les largeurs de raies sont déduites des mesures de réflectivité en lumière blanche. La détermination de ces largeurs est décrite dans la partie B.1.

On suppose que sur la zone de l'échantillon étudiée les énergies de la cavité  $E_{cav}$  et

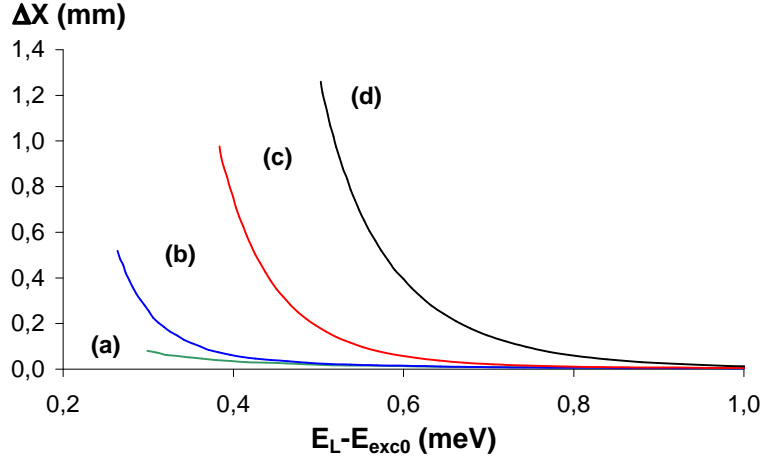


Fig. 3.5 – Décalage en position de la branche basse entre le tracé «vertical» et le tracé «horizontal», en fonction de l'énergie d'excitation. (a)  $\gamma_{inh}=0$  (b)  $\gamma_{inh}=0.1$  meV, (c)  $\gamma_{inh}=0.2$  meV et (d)  $\gamma_{inh}=0.3$  meV. Les autres paramètres sont ceux de la figure 3.4.

de l'exciton  $E_{exc}$  varie linéairement en fonction de la position  $x$  :

$$E_{cav}(x) - E_{exc}^0 = p_{cav}(x - x_0) \quad (3-3)$$

$$E_{exc}(x) - E_{exc}^0 = p_{exc}(x - x_0) \quad (3-4)$$

où  $x_0$  est la position du point de l'échantillon correspondant au désaccord nul et  $E_{exc}^0$  est l'énergie de la résonance excitonique en ce point. Finalement ce modèle comporte 5 paramètres ajustables :  $x_0$ ,  $E_{exc}^0$ ,  $p_{cav}$ ,  $p_{exc}$  et le «vacuum Rabi splitting»  $\Omega_R$ .

Pour réaliser l'ajustement on calcule numériquement la position sur l'échantillon des maxima de transmission. Rappelons que la transmission est donnée par la formule 2-53 avec les remplacements  $\delta_b \rightarrow \delta_\sigma$  et  $\gamma_b \rightarrow \gamma_\sigma$  (formules 2-71).

## A.4 Résultats

La figure 3.6 représente la courbe d'anticroisement que nous avons obtenue. Rappelons que l'échantillon est refroidi à 4K et que l'intensité d'excitation est de 0.5 mW. L'ajustement de la courbe expérimentale (par la méthode des moindres carrés) est satisfaisant et permet de déterminer les 5 paramètres :

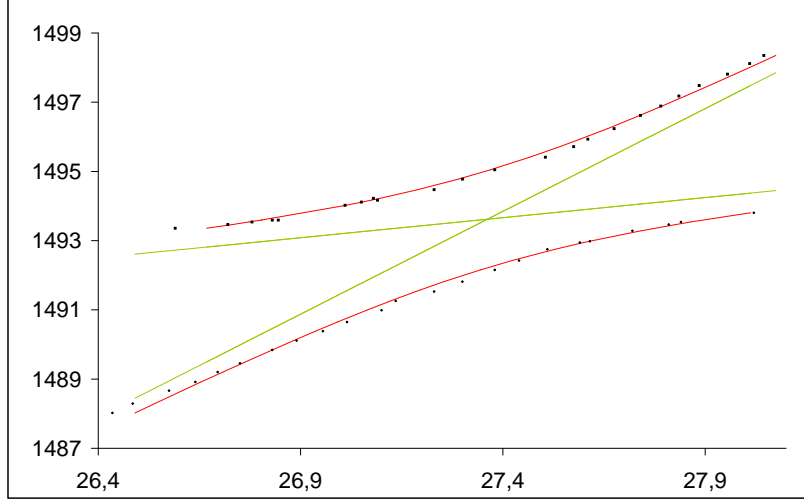


Fig. 3.6 – Points expérimentaux de la courbe d'anticroisement. En traits pleins : ajustement. En pointillés : énergies de l'exciton et du photon déduites du modèle.

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 27.36 \pm 0.02 \text{ mm} \\
 E_{exc}^0 &= 1493.62 \pm 0.05 \text{ meV} \\
 p_{cav} &= 5.94 \pm 0.09 \text{ meV/mm} \\
 p_{exc} &= 1.16 \pm 0.06 \text{ meV/mm} \\
 \Omega_R &= 2.78 \pm 0.11 \text{ meV}
 \end{aligned} \tag{3-5}$$

L'imperfection du modèle est due essentiellement à la courbure de l'échantillon : il n'est pas parfaitement correct de représenter les variations des énergies du photon et de l'exciton en fonction de  $x$  par des droites.

## B Largeurs de raie

Nous avons proposé dans la partie 2-C une modélisation de l'élargissement des polaritons tenant compte de l'influence du désordre ; nous l'utilisons dans cette partie pour ajuster les données expérimentales. On détermine ainsi les trois paramètres ajustables de ce modèle : les largeurs homogènes de l'exciton ( $\gamma_b$ ) et du mode de cavité ( $\gamma_a$ ) et la largeur inhomogène de l'exciton ( $\gamma_{inh}$ ).

Tout d'abord nous avons réalisé l'ajustement des largeurs mesurées en lumière blanche par R. P. Stanley et R. Houdré sur une autre portion du même échantillon. Toutes les sources éventuelles d'élargissement artificiel (tache focale trop grande, divergence trop forte du faisceau incident, photoluminescence superposée à la lumière réfléchie) ont été soigneusement éliminées. Les plus petites longueurs d'onde sont filtrées afin d'éviter leur absorption par le continuum ; en effet l'excitation de l'échantillon à une énergie supérieure à l'énergie de bande interdite peut modifier les largeurs de raie [Stanley 98]. Cet ajustement nous donne les valeurs des paramètres  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ ,  $\gamma_{inh}$ .

Nous avons ensuite vérifié si ces valeurs nous permettaient de reproduire les largeurs de raie que nous mesurons sur notre portion de l'échantillon, tenant compte de l'élargissement supplémentaire sous l'effet de la taille de la tache focale. Un désaccord important a été constaté : dans notre cas les raies sont sensiblement plus larges et l'ajustement ne donne pas des résultats satisfaisants. Nous avons vérifié que cet élargissement ne provenait pas d'un effet parasite (autre que la taille de la tache focale, qui est prise en compte dans la modélisation). La variation des largeurs de raie en fonction du désaccord est mal comprise ; elle pourrait être due au fait que la portion d'échantillon dont nous disposons présente d'importantes irrégularités de surface.

Nous présentons maintenant les résultats de l'ajustement des largeurs mesurées en lumière blanche. Celles-ci ne sont pas utiles pour la caractérisation de notre échantillon (puisqu'elles ont été réalisées sur une autre portion de celui-ci) mais sont intéressantes pour deux raisons :

- en lumière blanche il est possible d'obtenir des spectres sur une large plage de désaccords exciton-cavité, tandis qu'en lumière laser les mesures ne sont pas valables à désaccord très positif (ce point est précisé dans la partie B.2). D'une part cela permet une détermination plus précise des paramètres. D'autre part le modèle est validé de façon plus convaincante ;

- ces mesures montrent que l'on peut fabriquer des échantillons présentant des raies plus fines, ce qui implique des seuils de non-linéarité plus bas et de meilleures performances en terme de réduction de bruit (voir chapitre 4). Pour tracer les courbes théoriques du chapitre 4, nous utiliserons les paramètres déduits des mesures en lumière blanche (le but de ce chapitre étant d'évaluer les possibilités optimales des microcavités en couplage fort et pas seulement de notre échantillon).



## B.1 Réflectivité en lumière blanche

La figure 3.7 montre l'ajustement des données fournies par R. P. Stanley et R. Houdré provenant de mesures de réflectivité en lumière blanche. On compare la largeur mesurée à la largeur déduite de la formule 2-52 avec les remplacements  $\delta_b \rightarrow \delta_\sigma$  et  $\gamma_b \rightarrow \gamma_\sigma$  (formules 2-71).

L'ajustement est limité à la branche basse; en effet c'est uniquement sur cette branche que nos expériences ont été réalisées.

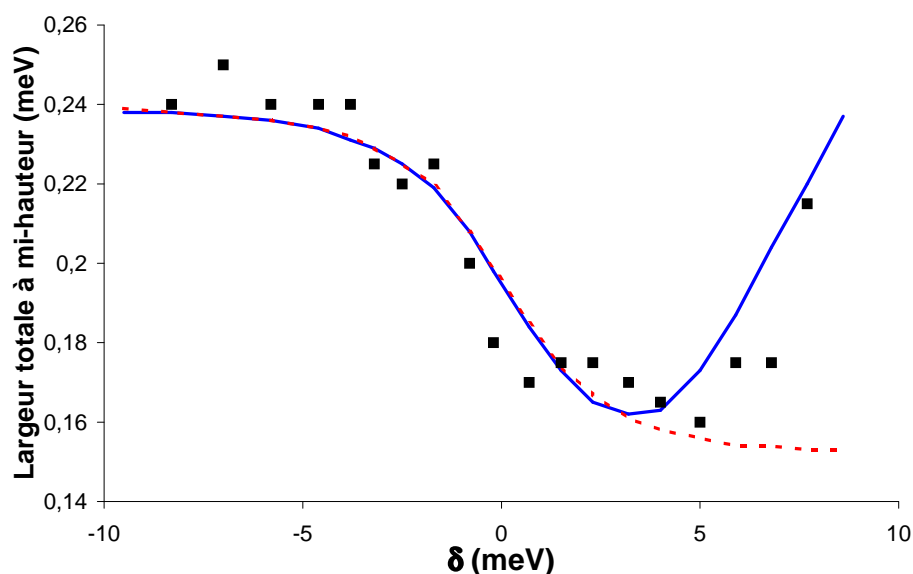


Fig. 3.7 – Largeurs de raies mesurées sur la branche basse en fonction du désaccord exciton-cavité (d'après R. P. Stanley et R. Houdré). Courbe en traits pleins : ajustement. En pointillés : largeurs obtenues sans tenir compte de l'élargissement inhomogène.

L'accord est satisfaisant sur toute la gamme de désaccords étudiée. Par contre le modèle utilisé ne permet pas d'expliquer la dissymétrie très importante entre les deux branches de polaritons.

On peut interpréter cette dissymétrie par deux phénomènes. D'une part la dispersion linéaire provoque une asymétrie due à la forme de raie asymétrique de l'exciton nu [Ell 98] ; l'absorption est plus importante sur le côté haute énergie du pic. De plus un modèle microscopique complet montre que la branche haute est fortement couplée par le désordre aux états excitoniques de la branche basse, ce qui entraîne un élargissement important [Savona 97].

L'ajustement par la formule 2-52 permet de déterminer les largeurs homogènes de l'exciton et du mode de cavité et la largeur inhomogène de l'exciton (il s'agit de demi-largeurs) :

$$\begin{aligned}
\gamma_{cav} &= 0.12 \text{ meV} \\
\gamma_{exc} &= 0.075 \text{ meV} \\
\gamma_{inh} &= 0.125 \text{ meV}
\end{aligned}
\tag{3-6}$$

La valeur de  $\gamma_{cav}$  correspond exactement à la valeur déduite d'un calcul utilisant l'approche des matrices de transfert [Messin 00]. Par contre les valeurs de  $\gamma_{exc}$  et  $\gamma_{inh}$  sont probablement légèrement faussées par le fait que l'on n'a pas tenu compte de l'asymétrie de la raie excitonique. Ce modèle conduit probablement à sous-estimer la largeur inhomogène totale ; l'incertitude sur cette quantité pourrait être améliorée par des mesures à désaccord très positif qui nous permettraient d'avoir une idée plus précise de la largeur de la raie excitonique «nue».

Cependant le point important est que les largeurs de raies ne sont pas sensibles à l'élargissement inhomogène pour des désaccords inférieurs à 3 meV. On peut alors tenir compte de la relaxation en attribuant aux modes excitoniques et photoniques des largeurs  $\gamma_{cav} = 0.12 \text{ meV}$  et  $\gamma_{exc} = 0.075 \text{ meV}$ . Les coefficients de relaxation  $\gamma_1, \gamma_2$  associés respectivement aux miroirs avant et arrière sont déduits du calcul par les matrices de transfert. On obtient :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 0.09 \text{ meV} \\
\gamma_2 &= 0.03 \text{ meV}
\end{aligned}
\tag{3-7}$$

## B.2 Réflectivité en excitation laser

Nous avons effectué des mesures de réflectivité en excitation laser afin d'être dans les mêmes conditions d'excitation que lors des mesures de bruit décrites dans le chapitre 5. Sur toute les mesures la densité d'excitation est inférieure à  $1 \text{ W/cm}^2$ . Elle est suffisamment basse pour que l'on puisse négliger l'élargissement «collisionnel» de la raie excitonique. On évite également un chauffage local de l'échantillon par le faisceau laser qui augmenterait l'élargissement dû au couplage exciton-phonon.

### B.2.1 Spectroscopie par balayage de l'échantillon

Comme notre laser n'est pas balayable sur une plage de longueur d'onde de l'ordre des largeurs de raies il serait difficile de tracer des spectres en fonction de l'énergie

d'excitation. Nous traçons les spectres de réflectivité en employant la méthode de balayage «horizontal» décrite plus haut : l'échantillon est déplacé continûment tandis que la longueur d'onde d'excitation reste fixe.

Le paramètre variable est le même pour ces deux types de spectre : c'est le désaccord du laser par rapport à la résonance de cavité. Cependant l'interprétation des spectres obtenus par balayage de l'échantillon est un peu plus compliquée. D'une part lorsqu'on se déplace sur l'échantillon on fait également varier la nature (plus ou moins excitonique ou photonique) des polaritons que l'on excite. D'autre part la relation entre déplacement sur l'échantillon et déplacement d'énergie n'est pas le même selon le point de la courbe d'anticroisement où l'on se place ; en première approximation, le déplacement en énergie s'obtient en multipliant le déplacement en position par la pente locale de la courbe d'anticroisement.

La précision de lecture de la position de l'échantillon est de 5 microns. L'incertitude en énergie correspondante est de l'ordre  $30 \mu\text{eV}$  à désaccord très négatif (la pente de la courbe d'anticroisement tend alors vers la pente de la cavité) et de l'ordre de  $5 \mu\text{eV}$  à désaccord très positif (la pente de la courbe d'anticroisement tendant vers la pente de l'exciton). Dans tous les cas la précision de lecture est aussi bonne ou meilleure que celle de notre spectromètre.

La sensibilité de la platine de translation de l'échantillon est de l'ordre du micron. Lorsqu'on trace un spectre en déplaçant continûment l'échantillon, on peut donc atteindre théoriquement une résolution de l'ordre du micron. La résolution correspondante en énergie est comprise entre 1 et  $6 \mu\text{eV}$  selon la région de la courbe d'anticroisement étudiée.

Cette méthode a l'inconvénient qu'il est très difficile d'effectuer des mesures sur les pics de type «exciton» (à désaccord très positif sur la branche basse). En effet dans cette zone l'énergie de résonance varie très lentement en fonction de la position : la variation d'énergie provient essentiellement de la variation d'épaisseur du puits quantique. On obtient donc des raies très larges qui sont sujettes aux irrégularités des variations d'épaisseur du puits, ce qui empêche une détermination précise des largeurs de raie.

### B.2.2 Prise en compte de la taille de la tache focale

Comme nous l'avons vu, lorsque le diamètre de la tache focale est supérieur à une valeur de l'ordre de  $50 \mu\text{m}$ , celle-ci cause un élargissement artificiel des raies de réflectivité à cause du gradient d'épaisseur de l'échantillon. Pour tenir compte de cet effet il faut considérer la structure spatiale dans le plan transverse. Le variation d'intensité

sur la surface de la tache focale centrée en  $(0, 0)$  est donnée par

$$I(x, y) = I_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2W^2}\right) \quad (3-8)$$

où  $2W$  a été déterminé en coupant la tache focale avec le bord de l'échantillon (voir partie A.2.5).

La taille de la tache doit être comparée à la taille caractéristique d'un mode de la cavité Fabry Péro. La taille  $l$  du mode est associée à l'ouverture du faisceau incident qui est de  $\alpha=1/150$  dans notre cas ; une bonne évaluation est fournie par la formule  $l = \alpha LF$  où  $L$  est la longueur de la cavité et  $F$  sa finesse. On trouve  $l \simeq 10 \mu\text{m}$ . On peut donc considérer que la surface de la tache contient un grand nombre de modes. On passe à la limite du continuum ; la réflectivité est alors la convolution de la réflectivité locale  $R(x, y)$  par le profil d'intensité de la tache  $I(x, y)$ .

Si on balaye l'échantillon suivant sa ligne de plus grande pente, on peut négliger le gradient suivant la direction perpendiculaire ce qui simplifie considérablement les calculs. On peut déterminer expérimentalement les lignes d'égale épaisseur de l'échantillon (qui sont perpendiculaires aux lignes de plus grande pente) en observant le faisceau réfléchi grâce à une caméra infrarouge : à résonance on observe une ligne sombre qui matérialise une ligne d'égale épaisseur de l'échantillon. Nous balayons l'échantillon horizontalement ; les lignes d'égale épaisseur font un angle  $\theta \simeq 15-20^\circ$  avec la verticale, ce qui signifie que les lignes de plus grande pente sont à  $\theta$  de l'horizontale.

Bien que l'on ne balaye pas l'échantillon suivant sa ligne de plus grande pente, il est possible de se ramener à ce cas simple en définissant une taille de tache effective  $W' = W/\cos(\theta)$ . Comme on a  $\cos(\theta) \simeq 0.95$ ,  $W'$  diffère peu de  $W$ .

Finalement la réflectivité en un point de l'échantillon  $x_0$  est donnée par :

$$R_{spot}(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}W'} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2W'^2}\right) dx \quad (3-9)$$

Cette approche peut être validée en considérant les spectres de réflectivité tracés sur une résonance de type «photon», c'est-à-dire à désaccord négatif. Pour de tels désaccords la largeur de raie est très peu sensible à l'élargissement homogène ou inhomogène de l'exciton ; les paramètres importants sont la largeur du mode de cavité, qui est *calculée* par la méthode des matrices de transfert ( $\gamma_{cav}=0.12 \text{ meV}$ ), et la taille de tache *mesurée* par la procédure décrite en A.2.5 ( $\phi=75 \mu\text{m}$ ). Sans aucun paramètre ajustable on reproduit à la fois la largeur et la hauteur du creux de réflectivité (figure 3.8).

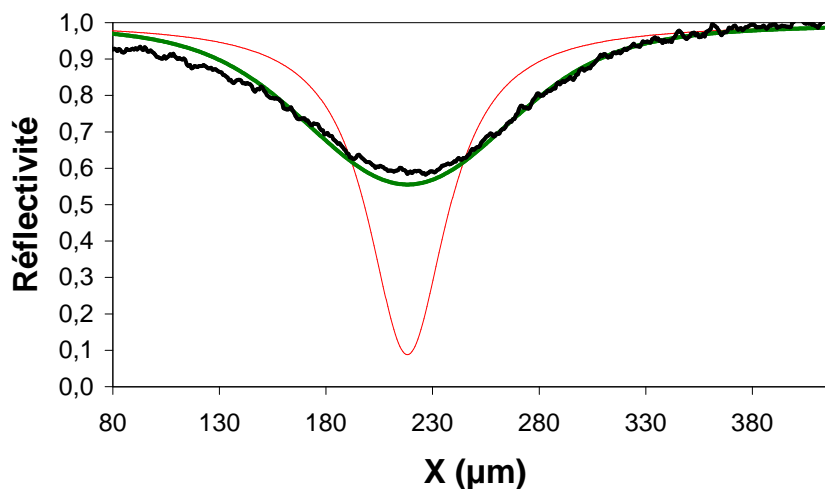


Fig. 3.8 – Spectre de réflectivité en fonction de la position sur l'échantillon pour  $\lambda=832.84$  nm, correspondant à  $\delta=-2$  meV. En trait épais : ajustement prenant en compte le diamètre de la tache focale qui est de  $75\mu\text{m}$ . En trait fin : courbe obtenue si on ne tient pas compte de l'effet de la taille de la tache.

### B.2.3 Résultats

Nous avons tracé plusieurs spectres de réflectivité en éliminant soigneusement les différentes causes d'élargissement artificiel (figure 3.10). La taille de la tache focale a été réduite à 45 microns de manière à limiter l'effet d'élargissement décrit ci-dessus. La puissance utilisée est toujours inférieure à 20 microwatts soit moins de  $1 \text{ W/cm}^2$  ; les effets liés à un chauffage local de l'échantillon ou à l'élargissement collisionnel sont ainsi évités. La gamme de désaccords étudiée va de  $-1$  meV à  $+1$  meV ; la figure 3.9 permet de visualiser clairement la zone de l'échantillon parcourue par la tache focale lors de chaque mesure.

Le modèle simple qui nous a permis d'ajuster les largeurs de raies mesurées en lumière blanche ne permet pas de rendre compte de ces données. Un calcul d'ordre de grandeur permet de se convaincre de ce que les raies de réflectivité mesurées correspondent à des largeurs nettement plus grandes que celles mesurées en lumière blanche. Par exemple pour  $\lambda=831.77$  nm correspondant à  $\delta=0.1$  meV on mesure une largeur totale à mi-hauteur de  $125 \mu\text{m} \pm 10\%$ . Pour avoir une idée de la largeur spectrale correspondante on peut multiplier cette largeur par la pente locale de la courbe de l'anticroisement au point de résonance, qui est en première approximation égale à la moyenne des pentes de la cavité et de l'exciton, soit  $3.5 \text{ meV/mm}$ . On obtient une largeur de  $440 \mu\text{eV}$  nettement supérieure aux  $200 \mu\text{eV}$  mesurés en lumière blanche.

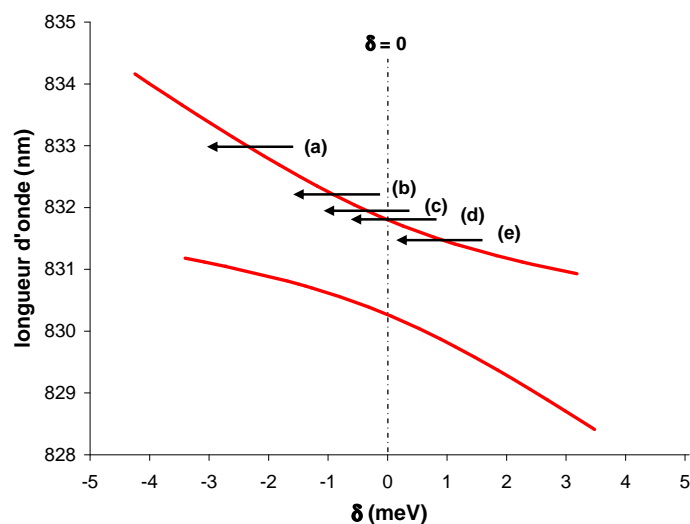


Fig. 3.9 – Longueurs d’onde de résonance en fonction du désaccord exciton-cavité. Les flèches symbolisent le parcours réalisé par la tache focale sur la surface de l’échantillon au cours d’une mesure. Longueurs d’onde représentées : (a) 833 nm, (b) 832.25 nm, (c) 832 nm, (d) 831.8 nm, (e) 831.4 nm.

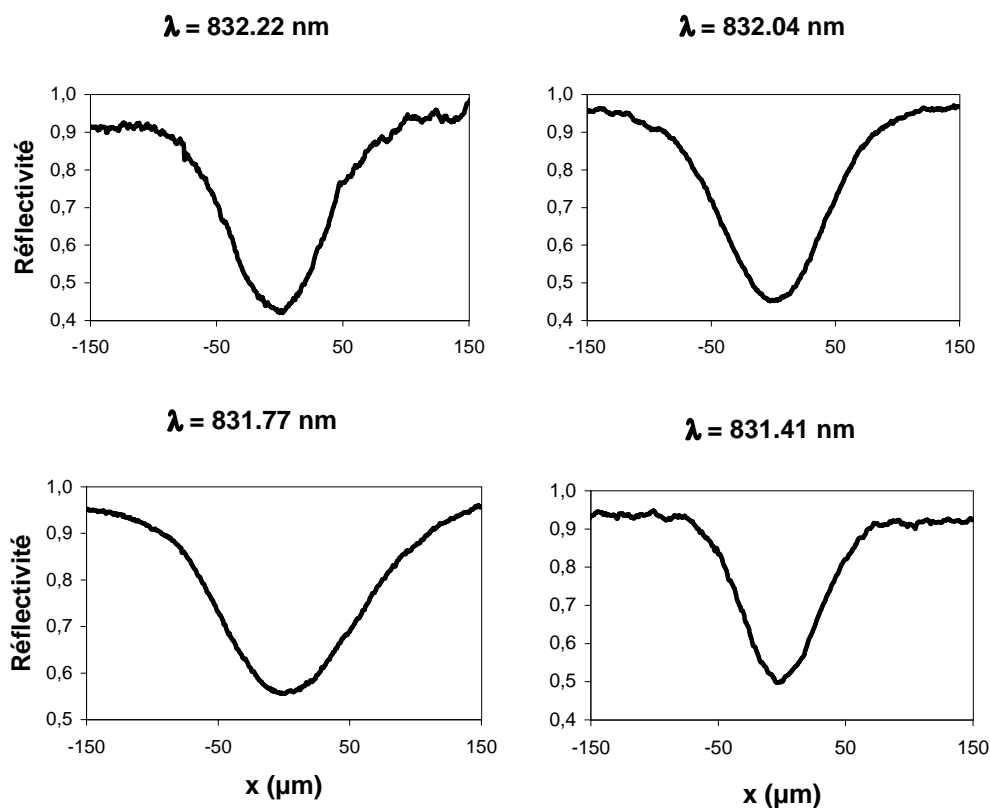


Fig. 3.10 – Réflectivité en fonction de la position sur l’échantillon, pour plusieurs longueurs d’onde d’excitation.

Le désaccord entre les mesures en lumière blanche et les mesures en lumière laser provient probablement de ce que ces deux expériences ont été réalisées sur des portions différentes de l'échantillon dont les structures peuvent être légèrement différentes. Il est en effet très difficile de réaliser par épitaxie un échantillon parfaitement homogène sur toute sa surface.

Cette hypothèse est confirmée par la comparaison des courbes d'anticroisement : sur la portion étudiée en lumière blanche l'anticroisement est situé à environ 1488 meV au lieu de 1493.6 meV pour la nôtre. Ce décalage peut s'expliquer par une différence d'épaisseur du puits quantique. Plus précisément il correspond à un puits plus fin d'une dizaine d'angströms sur la portion dont nous disposons. Les excitons du puits sont alors plus sensibles aux fluctuations d'épaisseur et peuvent présenter un élargissement inhomogène plus important.

Notre portion d'échantillon présente également une pente de cavité nettement supérieure (6 meV/mm au lieu de 2 à 3 meV/mm) ce qui nuit à la précision des mesures. Enfin des inhomogénéités de la surface pourraient expliquer que les raies soient plus larges lorsqu'on les mesure en balayant la surface de l'échantillon. Cette hypothèse peut être vérifiée en mesurant la réflectivité en lumière blanche.

Nous passons maintenant à l'étude des propriétés optiques non linéaires des microcavités semi-conductrices. Le modèle utilisé repose sur des hypothèses simples concernant les largeurs de raie : on prend en compte seulement l'élargissement *homogène* de la raie excitonique. Il n'autorisera pas un accord quantitatif précis sur le profil des raies ; nous verrons cependant qu'il reproduit qualitativement tous les aspects du comportement du système.

## Chapitre 4

# Etude théorique des fluctuations

## A Introduction

L'idée initiale qui a conduit à l'étude des microcavités semiconductrices en couplage fort dans le groupe d'Optique Quantique est la possibilité, déjà étudiée dans la thèse de H.Eleuch [Eleuch 98] [Eleuch 99], d'obtenir une réduction du bruit en dessous de la limite quantique standard en exploitant les propriétés non linéaires des polaritons. Le principe de cette réduction de bruit est le suivant : un faisceau laser crée des polaritons dans un mode unique. Les composantes excitoniques de ces polaritons ont entre elles une interaction coulombienne qui se traduit par une non-linéarité de type  $\chi^{(3)}$ . La non-linéarité modifie les fluctuations du champ de polaritons et donc, à travers la composante photonique des polaritons, les fluctuations du faisceau laser réfléchi par la microcavité.

Plus généralement, l'interaction polariton-polariton est à la source de phénomènes physiques très intéressants. Après une première période de résultats controversés [Pau 96] [Cao 97] [Kira 97], plusieurs groupes ont observé des non-linéarités dans l'émission des polaritons, en régime d'excitation non résonante [Dang 98] [Senellart 99]. Cependant l'interprétation des résultats en excitation non résonante est très difficile. Les premiers effets non linéaires en excitation résonante ont été mis en évidence par Huang et al. [Huang 00].

Une avancée décisive a été effectuée par Savvidis et. al. : une amplification géante de l'émission sous excitation résonante a pu être attribuée sans ambiguïté à l'interaction polariton-polariton [Savvidis 00a], grâce à des mesures systématiques de spectroscopie pompe-sonde résolue en angle. L'impulsion pompe excite de façon résonante la branche basse de polariton avec un angle d'incidence  $\theta_p$  correspondant à un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_p$ , tandis qu'une impulsion sonde de faible intensité excite la branche basse à incidence normale ( $\mathbf{k}=0$ ). Le spectre de réflectivité de la sonde est mesuré en fonction de l'angle



$\theta_p$ , de l'intensité et du délai entre les deux impulsions. Une amplification géante de la sonde a été observée lorsque l'angle d'incidence est proche d'une certaine valeur critique couramment appelée «angle magique». Celui-ci est situé à proximité du point d'inflexion de la branche basse de polariton et correspond exactement à la solution de l'équation de conservation de l'énergie  $2E_P(k_p) = E_P(0) + E_P(2k_p)$ . La résonance angulaire du gain est très étroite et déterminée par la largeur des états polaritons. Cette règle de sélection suggère fortement que le processus responsable de l'amplification est un mélange à quatre ondes, où deux polaritons dans le mode de la pompe ( $\mathbf{k}_p$ ) sont convertis en un polariton «signal» de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = 0$  et un polariton «complémentaire» de vecteur d'onde  $2\mathbf{k}_p$  (voir figure 4.1). Cette explication a été confirmée par l'observation directe du faisceau émis dans la direction correspondant au vecteur d'onde  $2\mathbf{k}_p$  [Savvidis 00b]. Celui-ci est beaucoup moins intense que le faisceau sonde, car le polariton  $2\mathbf{k}_p$  a une fraction photonique beaucoup plus faible et donc un temps de vie radiatif nettement plus long.

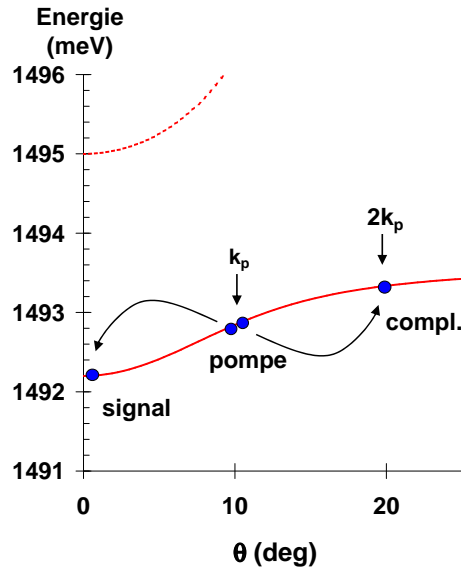


Fig. 4.1 – Relations de dispersion des deux branches de polaritons dans le cas de notre échantillon. Les flèches représentent le processus de conversion paramétrique des polaritons de la pompe ( $\simeq 10^\circ$ ) vers le signal ( $0^\circ$ ) et le complémentaire ( $\simeq 20^\circ$ ).

Depuis des effets stimulés ont été mis en évidence en excitation non résonante en ajoutant un faisceau sonde résonant à  $\mathbf{k} = 0$  [Senellart 00]. En excitation résonante, le même effet a également été observé en régime d'excitation continue et en

l'absence de stimulation par une sonde à  $\mathbf{k} = 0$  [Houdré 00] [Stevenson 00]: lorsque l'intensité de pompe dépasse un certain seuil (bien sûr plus élevé que dans le cas stimulé), la microcavité émet deux faisceaux cohérents, l'un dans la direction  $\mathbf{k} = 0$  et l'autre nettement moins intense dans la direction  $2\mathbf{k}_p$ . Cette configuration est particulièrement intéressante du point de vue de l'optique quantique. En effet, les polaritons «signal» et «complémentaire» sont créés au même instant par le processus de mélange à quatre ondes; on peut donc s'attendre à ce que les intensités des champs «signal» et «complémentaire» soient fortement corrélées au niveau quantique, de la même façon que dans un Oscillateur Paramétrique Optique (O.P.O.). Dans ce cas les intensités des champs lumineux émis à  $\mathbf{k} = 0$  et  $2\mathbf{k}_p$  sont elles aussi corrélées, malgré la différence de temps de vie radiatif entre les deux polaritons. Si ces corrélations sont suffisamment bonnes, les microcavités pourraient être utilisées pour générer des «faisceaux jumeaux».

Ces deux phénomènes (non-linéarité  $\chi^{(3)}$  et oscillation paramétrique) ont la même origine physique, à savoir l'interaction polariton-polariton. Dans la partie C, nous commençons par écrire le hamiltonien effectif d'interaction polariton-polariton. Nous montrons ensuite que les deux types d'effets correspondent aux deux façons de satisfaire la conservation de l'énergie: l'effet  $\chi^{(3)}$  correspond aux solutions dégénérées et l'effet d'amplification aux solutions non dégénérées. Dans les deux cas, l'effet non linéaire se traduit par une transition de phase. Ainsi, il existe un seuil de bistabilité associé à l'effet  $\chi^{(3)}$  et un seuil d'oscillation du même type que celui d'un O.P.O. dans la configuration de «l'angle magique». Les fluctuations jouent un rôle prépondérant dans la transition de phase et divergent au voisinage du point critique.

Nous étudions successivement les deux configurations dans les parties D et E. Dans la partie D consacrée à l'effet de type  $\chi^{(3)}$ , nous étudions les fluctuations quantiques de façon détaillée afin de comprendre l'influence des différents paramètres sur les performances en terme de réduction de bruit. Les prédictions du modèle seront comparées aux résultats expérimentaux au chapitre 5. La partie E traitant de l'excitation à «l'angle magique» est de nature plus exploratoire puisqu'aucune expérience étudiant les fluctuations quantiques n'a été réalisée pour le moment dans cette configuration. Nous mettons en lumière l'analogie du système avec un O.P.O. (remarquée dans la référence [Baumberg 00]) et nous évaluons la possibilité d'obtenir au-dessus du seuil d'oscillation des faisceaux sortants corrélés au niveau quantique.

## B Le bruit quantique du champ électromagnétique

Nous introduisons dans cette partie le formalisme nécessaire à l'étude des fluctuations quantiques d'un faisceau lumineux.

### B.1 Fluctuations quantiques d'un mode du champ libre

#### B.1.1 Opérateurs de quadrature

Considérons un mode donné du champ électromagnétique, caractérisé par une fréquence  $\omega$ , un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et une polarisation  $\epsilon$ . En physique classique, le champ électrique associé à ce mode en un point donné peut s'écrire :

$$E(t) = E_P \sin(\omega t) + E_Q \cos(\omega t) \quad (4-1)$$

$E_P$  et  $E_Q$  sont les amplitudes des deux quadratures du champ.

Dans le cadre d'une description quantique du champ électromagnétique,  $E_P$  et  $E_Q$  sont des opérateurs, appelés opérateurs de quadrature et donnés par les relations :

$$E_P = \mathcal{E}_0 (a_\omega + a_\omega^\dagger) \quad (4-2)$$

$$E_Q = i\mathcal{E}_0 (a_\omega - a_\omega^\dagger) \quad (4-3)$$

où  $a_\omega$ ,  $a_\omega^\dagger$  sont les opérateurs d'annihilation et de création du photon dans le référentiel tournant, qui ont été définis au chapitre 2 (relations 2-2). La constante de normalisation  $\mathcal{E}_0$  est donnée par la relation 2-9. Comme les opérateurs  $a_\omega$  et  $a_\omega^\dagger$  satisfont les relations de commutation de bosons, les opérateurs de quadrature ne commutent pas :

$$[E_P, E_Q] = 2i\mathcal{E}_0^2 \quad (4-4)$$

#### B.1.2 Limite quantique standard

Cette relation de commutation impose une limite au produit des incertitudes sur les opérateurs de quadrature. On a ainsi l'inégalité de Heisenberg suivante :

$$\Delta E_P \Delta E_Q \geq \mathcal{E}_0^2 \quad (4-5)$$

où l'incertitude sur un opérateur  $O$  est donnée par :

$$\Delta O = \sqrt{\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2} \quad (4-6)$$

La notation  $\langle O \rangle$  désigne la valeur moyenne de  $O$  prise sur l'état quantique considéré.

La définition des opérateurs de quadratures correspond à un choix arbitraire de l'origine des phases dans le plan de Fresnel. On peut définir de façon plus générale le couple d'opérateurs de quadrature correspondant à une translation de  $\theta$  de l'origine des phases :

$$E_{P\theta} = \mathcal{E}_0 (a_\omega e^{i\theta} + a_\omega^\dagger e^{-i\theta}) \quad (4-7)$$

$$E_{Q\theta} = i\mathcal{E}_0 (a_\omega e^{i\theta} - a_\omega^\dagger e^{-i\theta}) \quad (4-8)$$

On a toujours l'inégalité de Heisenberg :

$$\Delta E_{P\theta} \Delta E_{Q\theta} \geq \mathcal{E}_0^2 \quad (4-9)$$

Si le mode du champ considéré est dans l'état vide, alors toutes les composantes de quadrature ont la même dispersion (puisque'il n'y a pas de phase privilégiée pour le vide), égale à  $\mathcal{E}_0$ . Le vide définit ainsi une référence pour les fluctuations, que l'on appelle la limite quantique standard. On a pensé pendant longtemps que cette limite était indépassable. En fait, l'inégalité de Heisenberg porte sur le produit des incertitudes de deux quadratures conjuguées et rien n'interdit d'avoir un état du champ pour lequel l'un des opérateurs de quadrature a une incertitude inférieure à celle du vide, à condition que son opérateur conjugué ait une incertitude supérieure. De tels états sont appelés états comprimés.

Un laser très au-dessus du seuil produit un certain type d'état appelé état cohérent. Un état cohérent  $|\alpha\rangle$  peut être défini comme un état propre de l'opérateur d'annihilation  $a$ , de valeur propre  $\alpha$ . Le vide est ainsi un cas particulier d'état cohérent (il correspond à  $\alpha=0$ ). Les états cohérents ont les mêmes incertitudes que le vide :

$$\Delta E_{P\theta} = \Delta E_{Q\theta} = \mathcal{E}_0 \text{ pour tout } \theta \quad (4-10)$$

Toutes leurs quadratures sont déterminées avec la meilleure précision autorisée par la mécanique quantique. Ce sont donc les états les plus proches du champ classique et c'est pourquoi les états cohérents sont aussi appelés états quasi-classiques.

### B.1.3 Caractérisation des fluctuations

Pour caractériser complètement les fluctuations du champ, il faut pouvoir calculer les dispersions de n'importe quelle quadrature  $\Delta E_{P\theta}$  ou  $\Delta E_{Q\theta}$ . Par exemple pour un champ de valeur moyenne nulle ( $\langle a^\dagger \rangle = \langle a \rangle = 0$ ), la dispersion de  $E_{P\theta}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta E_{P\theta}^2 &= \mathcal{E}_0^2 \langle (a_\omega e^{i\theta} + a_\omega^\dagger e^{-i\theta}) (a_\omega e^{i\theta} + a_\omega^\dagger e^{-i\theta}) \rangle \\ &= \mathcal{E}_0^2 (\langle a_\omega a_\omega^\dagger \rangle + \langle a_\omega^\dagger a_\omega \rangle + \langle a_\omega a_\omega \rangle e^{2i\theta} + \langle a_\omega^\dagger a_\omega^\dagger \rangle e^{-2i\theta})\end{aligned}\quad (4-11)$$

Il suffit donc de connaître les quantités  $\langle a_\omega^\dagger a_\omega \rangle$ ,  $\langle a_\omega a_\omega^\dagger \rangle$ ,  $\langle a_\omega a_\omega \rangle$ ,  $\langle a_\omega^\dagger a_\omega^\dagger \rangle$ .

## B.2 Fluctuations quantiques d'un faisceau laser

Nous avons vu au chapitre 2 qu'un faisceau laser ne peut pas être modélisé par un champ monomode. Nous le décrivons par un opérateur enveloppe  $A(t)$  (défini en 2-8) qui prend en compte non seulement le champ laser cohérent à la fréquence  $\omega_L$  mais aussi ses fluctuations dans une bande de fréquence  $\Delta\omega \ll \omega_L$ . Les fluctuations d'une quadrature du champ ne sont plus caractérisées par une variance  $\Delta E_{P\theta}$  mais par un «spectre de bruit».

### B.2.1 Définitions : spectre de bruit

Les fluctuations d'un observable  $O(t)$  sont décrites par l'opérateur  $\delta O(t) = O(t) - \langle O(t) \rangle$ . On introduit également la fonction d'autocorrélation  $C_O(t, t')$  définie par :

$$C_O(t, t') = \langle O(t)O(t') \rangle - \langle O(t) \rangle \langle O(t') \rangle = \langle \delta O(t)\delta O(t') \rangle \quad (4-12)$$

Dans le cas d'un processus stationnaire,  $C_O(t, t')$  dépend uniquement de l'intervalle de temps  $\tau = t - t'$ . On pose alors  $C_O(\tau) = C_O(t - t')$  et on peut définir le *spectre de bruit* de l'opérateur  $O$  comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$S_O(\Omega) = \int C_O(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau \quad (4-13)$$

On peut démontrer la relation suivante entre le spectre de bruit et la transformée de Fourier  $\delta O(\Omega)$  des fluctuations  $\delta O(t)$ , appelée théorème de Wiener-Kinchine [Mandel&Wolf 95]:

$$\langle \delta O(\Omega)\delta O(\Omega') \rangle = 2\pi\delta(\Omega + \Omega')S_O(\Omega) \quad (4-14)$$

### B.2.2 Opérateurs de quadrature

Les quadratures sont définies de la même façon que dans le cas monomode :

$$E_{P\theta}(t) = \mathcal{E}_{0\omega_L}(A(t)e^{i\theta} + A^\dagger(t)e^{-i\theta}) \quad (4-15)$$

Donnons une interprétation physique de ces opérateurs. Si l'on suppose que la valeur moyenne du champ est grande devant les fluctuations, les fluctuations de l'opérateur intensité  $I = A^\dagger A$  s'écrivent :

$$\delta I = (\langle A^\dagger \rangle + \delta A^\dagger)(\langle A \rangle + \delta A) \simeq \langle A^\dagger \rangle \delta A + \langle A \rangle \delta A^\dagger \quad (4-16)$$

Dans toute la suite on choisit  $\langle A \rangle$  réel. Dans ce cas  $\langle A^\dagger \rangle = \langle A \rangle$  et

$$\delta I = \langle A \rangle (\delta A + \delta A^\dagger) \propto \delta E_{P\theta=0} = \delta E_P \quad (4-17)$$

De même, les fluctuations de phase du champ sont proportionnelles à celles de l'opérateur  $E_{P\theta=\pi/2} = E_Q$ . Plus généralement, les fluctuations du champ selon une direction du plan de Fresnel faisant un angle  $\theta$  avec sa valeur moyenne sont proportionnelles à celles de  $E_{P\theta}$ .

### B.2.3 Caractérisation des fluctuations - Représentation matricielle

Nous avons vu que dans le cas monomode, les variances des quadratures du champ se calculent à partir des valeurs moyennes des 4 produits d'opérateurs d'annihilation et de création. Ici, dans le cas multimode, c'est à partir des 4 fonctions de corrélation des opérateurs  $\delta A(\Omega)$  et  $\delta A^\dagger(\Omega')$  que l'on peut obtenir les spectres de bruit des quadratures du champ. Ainsi les fonctions d'autocorrélation de  $E_{P\theta}(\Omega)$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \langle \delta E_{P\theta}(\Omega) \delta E_{P\theta}(\Omega') \rangle &= \mathcal{E}_{0\omega_L}^2 \langle (\delta A(\Omega)e^{i\theta} + \delta A^\dagger(\Omega)e^{-i\theta}) (\delta A(\Omega')e^{i\theta} + \delta A^\dagger(\Omega')e^{-i\theta}) \rangle \\ &= \mathcal{E}_{0\omega_L}^2 (\langle \delta A(\Omega) \delta A^\dagger(\Omega') \rangle + \langle \delta A^\dagger(\Omega) \delta A(\Omega') \rangle \\ &\quad + e^{2i\theta} \langle \delta A(\Omega) \delta A(\Omega') \rangle + e^{-2i\theta} \langle \delta A^\dagger(\Omega) \delta A^\dagger(\Omega') \rangle) \end{aligned} \quad (4-18)$$

On rappelle que seul le mode central de fréquence  $\omega_L$  a un champ moyen non nul. Par conséquent les fluctuations  $\delta A(\Omega)$  sont simplement égales à  $A(\Omega)$  pour  $\Omega \neq 0$ .

Si le champ  $A(t)$  est stationnaire, le commutateur  $[A(t), A^\dagger(t')]$  ne dépend que de  $\tau = t - t'$ . On en déduit la relation de commutation suivante dans l'espace des fréquences :

$$[A(\Omega), A^\dagger(\Omega')] = 2\pi\delta(\Omega + \Omega') \quad (4-19)$$

Les 4 fonctions de corrélation qui apparaissent dans l'expression 4-18 sont elles aussi proportionnelles à  $\delta(\Omega + \Omega')$ .

### *Représentation matricielle*

Il est commode de représenter les champs par des vecteurs colonnes à deux dimensions :

$$|A(\Omega)\rangle = \begin{bmatrix} A(\Omega) \\ A^\dagger(\Omega) \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

Son adjoint est le vecteur ligne  $\langle A(\Omega)|$  :

$$\langle A(\Omega)| = \left[ (A(\Omega))^\dagger (A^\dagger(\Omega))^\dagger \right] = [A^\dagger(-\Omega)A(-\Omega)] \quad (4-21)$$

La matrice de corrélation du champ  $[V(\Omega)]$  est alors définie par la relation :

$$\langle |\delta A(\Omega)\rangle \langle \delta A(\Omega')| \rangle = 2\pi\delta(\Omega - \Omega')[V(\Omega)] \quad (4-22)$$

Les corrélations de  $E_{P\theta}(\Omega)$  s'expriment facilement à l'aide de  $[V(\Omega)]$  d'après 4-18 :

$$\langle \delta E_{P\theta}(\Omega)\delta E_{P\theta}(\Omega') \rangle = 2\pi\mathcal{E}_{0\omega_L}^2\delta(\Omega + \Omega')([V(\Omega)]_{1,1} + [V(\Omega)]_{2,2} + 2\text{Re}([V(\Omega)]_{1,2}e^{2i\theta})) \quad (4-23)$$

En comparant cette expression avec 4-14 on en déduit le spectre de bruit de  $E_{P\theta}$  :

$$S_{E_{P\theta}}(\Omega) = \mathcal{E}_{0\omega_L}^2([V(\Omega)]_{1,1} + [V(\Omega)]_{2,2} + 2\text{Re}([V(\Omega)]_{1,2}e^{2i\theta})) \quad (4-24)$$

Les valeurs extrêmes du spectre de bruit sont :

$$S_{E_{P\theta} \min}(\Omega) = \mathcal{E}_{0\omega_L}^2([V(\Omega)]_{1,1} + [V(\Omega)]_{2,2} - 2|[V(\Omega)]_{1,2}|) \quad (4-25)$$

$$S_{E_{P\theta} \max}(\Omega) = \mathcal{E}_{0\omega_L}^2([V(\Omega)]_{1,1} + [V(\Omega)]_{2,2} + 2|[V(\Omega)]_{1,2}|) \quad (4-26)$$

Le champ est dit comprimé à une fréquence d'analyse donnée si le bruit minimal à cette fréquence est inférieur à la limite quantique standard  $\mathcal{E}_{0\omega_L}^2$ . Autrement dit, si on introduit le spectre normalisé à la limite quantique standard :

$$S_{min}(\Omega) = S_{E_{P\theta} \min}(\Omega)/\mathcal{E}_{0\omega_L}^2 = [V(\Omega)]_{1,1} + [V(\Omega)]_{2,2} - 2|[V(\Omega)]_{1,2}| \quad (4-27)$$

la condition de réduction du bruit quantique à une fréquence d'analyse donnée s'écrit :

$$S_{min}(\Omega) < 1 \quad (4-28)$$

Pour un champ laser cohérent, qui est la superposition d'un état cohérent dans le mode  $\omega_L$  et de fluctuations du vide aux autres fréquences, la matrice de corrélation s'écrit :

$$[V(\Omega)]_{\text{cohérent}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-29)$$

En effet, dans l'état vide, seul le terme  $\langle \delta A(\Omega) \delta A^\dagger(-\Omega) \rangle$  n'est pas nul.

## B.3 Corrélations entre deux faisceaux

### B.3.1 Définitions

Etant donnés deux opérateurs  $O_1$  et  $O_2$  on définit leur fonction de corrélation croisée  $C_{12}(t, t')$  :

$$C_{12}(t, t') = \langle O_1(t) O_2(t') \rangle - \langle O_1(t) \rangle \langle O_2(t') \rangle = \langle \delta O_1(t) \delta O_2(t') \rangle \quad (4-30)$$

Dans le cas d'un processus stationnaire,  $C_{12}(t, t')$  dépend uniquement de l'intervalle de temps  $\tau = t - t'$ . On peut alors définir sa transformée de Fourier  $S_{12}(\Omega)$  qui caractérise le spectre des corrélations :

$$S_{12}(\Omega) = \int C_{12}(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau \quad (4-31)$$

Le spectre des corrélations satisfait une relation analogue à 4-14 :

$$\langle \delta O_1(\Omega) \delta O_2(\Omega') \rangle = 2\pi \delta(\Omega + \Omega') S_{12}(\Omega) \quad (4-32)$$

On définit enfin la fonction de corrélation normalisée :

$$C_{12}(\Omega) = \frac{S_{12}(\Omega)}{\sqrt{S_1(\Omega) S_2(\Omega)}} \quad (4-33)$$

où  $S_1(\Omega)$  et  $S_2(\Omega)$  sont respectivement les spectres de bruit de  $O_1$  et  $O_2$ . On peut montrer que  $C_{12}(\Omega)$  est un nombre complexe vérifiant :

$$|C_{12}(\Omega)| \leq 1 \quad (4-34)$$



### B.3.2 Application aux faisceaux lumineux

Considérons deux faisceaux laser décrits par des opérateurs enveloppes  $A(t)$  et  $B(t)$ . Les corrélations entre une quadrature quelconque  $E_{P\theta}^A$  du champ  $A$  et une quadrature quelconque  $E_{P\theta'}^B$  du champ  $B$ , à une fréquence d'analyse  $\Omega$ , sont données par la fonction de corrélation normalisée :

$$C_{AB}^{\theta\theta'}(\Omega) = \frac{S_{AB}^{\theta\theta'}(\Omega)}{\sqrt{S_A^\theta(\Omega)S_B^{\theta'}(\Omega)}} \quad (4-35)$$

où  $S_{AB}^{\theta\theta'}(\Omega)$  est le spectre des corrélations entre  $E_{P\theta}^A$  et  $E_{P\theta'}^B$  et  $S_A^\theta(\Omega)$  et  $S_B^{\theta'}(\Omega)$  sont respectivement les spectres de bruit de  $E_{P\theta}^A$  et  $E_{P\theta'}^B$ . On rappelle que ces trois quantités vérifient les relations :

$$\langle \delta E_{P\theta}^A(\Omega) \delta E_{P\theta'}^B(\Omega') \rangle = 2\pi \delta(\Omega + \Omega') S_{AB}^{\theta\theta'}(\Omega) \quad (4-36)$$

$$\langle \delta E_{P\theta}^A(\Omega) \delta E_{P\theta}^A(\Omega') \rangle = 2\pi \delta(\Omega + \Omega') S_A^\theta(\Omega) \quad (4-37)$$

$$\langle \delta E_{P\theta'}^B(\Omega) \delta E_{P\theta'}^B(\Omega') \rangle = 2\pi \delta(\Omega + \Omega') S_B^{\theta'}(\Omega) \quad (4-38)$$

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux corrélations d'intensité entre deux faisceaux. La fonction de corrélation normalisée  $C_{AB}^I(\Omega)$  entre les intensités  $I_A$  et  $I_B$  est définie de la même façon que la fonction de corrélation entre quadratures 4-35, en remplaçant  $E_{P\theta}^A$  par  $I_A$  et  $E_{P\theta'}^B$  par  $I_B$ .

D'après la relation 4-17 les fluctuations d'intensité sont proportionnelles aux fluctuations d'amplitude :

$$\delta I_A(\Omega) = \sqrt{I_A} \delta E_{P0}^A(\Omega) \text{ et } \delta I_B(\Omega) = \sqrt{I_B} \delta E_{P0}^B(\Omega) \quad (4-39)$$

Par conséquent la fonction de corrélation d'intensité normalisée  $C_{AB}^I(\Omega)$  est simplement égale à la fonction de corrélation d'amplitude normalisée  $C_{AB}^{00}(\Omega)$ .

### B.3.3 Critères de corrélation quantique

La fonction de corrélation que nous avons définie permet de donner une valeur pour les corrélations, mais pas directement une idée de leur nature classique ou quantique. Deux faisceaux très bruités peuvent avoir une fonction de corrélation proche de 1 sans que cela fasse intervenir le moindre processus quantique. Dans quel cas peut-on dire que deux faisceaux A et B sont corrélés au niveau quantique? Nous allons présenter deux types de critères.

a) *Comparaison avec une expérience «classique»*

Un premier critère consiste à considérer que les corrélations sont quantiques lorsqu'elles ne peuvent pas être produites par une expérience «classique» utilisant des faisceaux cohérents et des lames semi-transparente. Il est couramment utilisé dans les oscillateurs paramétriques optiques (O.P.O.).

*Cas équilibré*

Dans les expériences visant à générer des faisceaux corrélés au niveau quantique en utilisant un O.P.O., on se place en général dans le cas dit équilibré où les faisceaux «signal» et «complémentaire» ont des intensités très proches. Dans ce cas on peut mettre en évidence les corrélations d'intensité entre deux faisceaux  $A$  et  $B$  en mesurant le spectre de bruit  $S_{I_A-I_B}(\Omega)$  de la différence des intensités  $I_A - I_B$  [Mertz 91]. Celui-ci peut s'exprimer en fonction du spectre des corrélations d'amplitude :

$$S_{I_A-I_B}(\Omega) = I_A S_A(\Omega) + I_B S_B(\Omega) - 2\sqrt{I_A I_B} \text{Re } S_{AB}^{00}(\Omega) \quad (4-40)$$

où  $S_A(\Omega)$  et  $S_B(\Omega)$  désignent les spectres de bruit normalisés de la quadrature d'amplitude des champs  $A$  et  $B$ . Si les deux faisceaux ont la même intensité et le même spectre de bruit on obtient :

$$S_{I_A-I_B}(\Omega) = 2I_A(S_A(\Omega) - \text{Re } S_{AB}^{00}(\Omega)) = 2I_A S_A(\Omega) (1 - C_{AB}^{00}(\Omega)) \quad (4-41)$$

Dans le cas de faisceaux parfaitement corrélés ( $C_{AB}^{00} = 1$ ) on obtient un bruit nul sur la différence des intensités.

Plus généralement on compare ce résultat à celui d'une expérience «classique» où les faisceaux  $A$  et  $B$  sont produits en séparant en deux un faisceau cohérent sur une lame semi-transparente. Dans ce cas les fluctuations de la différence des intensités sont égales au «bruit de grenaille» du faisceau cohérent d'intensité  $I_A + I_B = 2I_A$  (la démonstration de cette égalité est détaillée dans le chapitre 5). La condition pour avoir des corrélations quantiques s'écrit :

$$\frac{S_{I_A-I_B}(\Omega)}{2I_A} = S_A(\Omega) (1 - C_{AB}^{00}(\Omega)) < 1 \quad (4-42)$$

*Cas général*

Dans la suite de ce chapitre nous étudierons les corrélations d'intensité entre deux faisceaux d'intensités très différentes. Dans cette situation la différence des intensités n'est pas la quantité la mieux adaptée pour mettre en évidence expérimentalement les corrélations. On peut cependant compenser le déséquilibre entre les intensités des deux faisceaux, soit en introduisant des pertes optiques pour le faisceau le plus intense (par exemple le faisceau A), soit en amplifiant le photocourant généré par le faisceau le plus faible.

*Atténuation du faisceau le plus intense*

On atténue le faisceau A en lui faisant traverser une lame partiellement réfléchissante de coefficient de transmission en énergie  $T$  avant de mesurer le bruit de la différence des intensités. Il est facile de montrer que l'écart du bruit du faisceau A au bruit quantique standard est atténué d'un facteur  $T$ . Les corrélations d'intensité  $S_{AB}^I$  sont également diminuées d'un facteur  $T$ . Finalement le spectre de bruit de la différence des intensités s'écrit :

$$S_{I'_A - I_B}(\Omega) = TI_A(1 + T(S_A(\Omega) - 1)) + I_B S_B(\Omega) - 2T\sqrt{I_A I_B} \operatorname{Re} S_{AB}^{00}(\Omega) \quad (4-43)$$

L'expérience classique correspondante consiste à séparer un faisceau cohérent d'intensité  $TI_A + I_B$  sur une lame partiellement réfléchissante de façon à obtenir un faisceau d'intensité  $TI_A$  et un autre d'intensité  $I_B$ . Le bruit mesuré sur la différence des intensités est de nouveau égal au bruit de grenaille, si bien que le critère de corrélation quantique est donné par :

$$S_{I'_A - I_B}(\Omega) < TI_A + I_B \quad (4-44)$$

*Amplification du signal le plus faible*

On amplifie électroniquement avec un gain  $g$  le signal de bruit correspondant au faisceau B. Le spectre de bruit de la différence des intensités s'écrit :

$$S_{I_A - gI_B}(\Omega) = I_A S_A(\Omega) + g^2 I_B S_B(\Omega) - 2g\sqrt{I_A I_B} \operatorname{Re} S_{AB}^{00}(\Omega) \quad (4-45)$$

On peut comparer ce résultat à celui de l'expérience consistant à séparer un faisceau cohérent d'intensité  $I_A + I_B$  en un faisceau d'intensité  $I_A$  et un autre d'intensité  $I_B$  et à mesurer le bruit sur la différence des intensités avec un gain  $g$  sur la voie B. On obtient le «shot noise» d'un faisceau d'intensité  $I_A + g^2 I_B$ . Finalement le critère s'écrit :

$$S_{I_A - g I_B}(\Omega) < I_A + g^2 I_B \quad (4-46)$$

*b) Critère sur la variance conditionnelle*

Selon ce critère, deux faisceaux sont corrélés au niveau quantique si la connaissance des fluctuations de l'un des faisceaux permet de réduire celles de l'autre en dessous du bruit quantique standard. On peut le formuler en utilisant la variance conditionnelle. En théorie des probabilités la variance conditionnelle d'une variable aléatoire par rapport à une autre est égale à la variance de la première variable, connaissant la valeur de l'autre.

*Les corrélations entre deux champs sont dites quantiques quand la variance conditionnelle de l'un par rapport à l'autre est inférieure au bruit quantique standard.*

Par exemple on peut montrer que le spectre de bruit normalisé de l'opérateur intensité  $I_A$  connaissant l'intensité  $I_B$  vaut :

$$S_{I_A|I_B}(\Omega) = I_A S_A(\Omega) (1 - C_{AB}^{00}(\Omega)^2) \quad (4-47)$$

Le critère de corrélation quantique s'écrit donc :

$$S_{I_A|I_B}(\Omega) < I_A \quad (4-48)$$

Ce critère est plus sévère que le précédent. Remarquons qu'il ne s'applique pas au cas de faisceaux comprimés en intensité : un faisceau ayant des fluctuations en dessous du bruit quantique standard serait automatiquement corrélé à n'importe quel autre faisceau. Enfin si les deux faisceaux n'ont pas le même spectre de bruit ce critère dépend du faisceau que l'on considère.

## C Hamiltonien du système

Pour étudier les effets non linéaires nous reprenons le hamiltonien utilisé par C. Ciuti dans les références [Ciuti 00] et [Ciuti 01]. Nous montrons en annexe qu'il résulte d'un développement du hamiltonien à l'ordre 2 en densité excitonique.

Pour tracer les courbes théoriques, nous prendrons les paramètres mesurés en lumière blanche (voir partie 3.B.1). Comme nous l'avons montré dans le chapitre 3, le désordre n'a qu'une influence négligeable sur la forme de la réponse optique sauf sur une résonance de type «exciton» (à désaccord très positif). C'est pourquoi le modèle n'en tient pas compte.

### C.1 Termes non linéaires

Deux termes supplémentaires viennent s'ajouter au hamiltonien  $\sum_{\mathbf{k}} H_{\mathbf{k}}$  employé au chapitre 1 (équation 1-16) : un terme d'interaction exciton-exciton et un terme de saturation de l'exciton. Le premier terme s'écrit :

$$H_{exc-exc} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_q b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'} \quad (4-49)$$

avec

$$V_q \simeq V_0 = \frac{6e^2 a_{exc}}{\epsilon_0 A} \quad (4-50)$$

sous la condition  $q a_{exc} \ll 1$ ,  $a_{exc}$  étant le rayon de Bohr bidimensionnel de l'exciton.  $\epsilon_0$  est la constante diélectrique du puits quantique et  $A$  est l'aire de quantification. Pour un rayon de Bohr de l'exciton de 10 nm, la condition de validité s'écrit  $q \ll 10^6 \text{ cm}^{-1}$ . Nous n'écrivons que les termes qui vérifient cette condition.

Quant au terme de saturation, il prend la forme suivante :

$$H_{sat} = - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{sat} \left( a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}'}^\dagger \right) \quad (4-51)$$

avec

$$V_{sat} = \frac{\Omega_R}{2n_{sat}A} \quad (4-52)$$

où  $n_{sat} = 7/(16\pi a_{exc}^2)$  est la densité de saturation de l'exciton. Finalement, le hamiltonien du système est :

$$H = \sum_{\mathbf{k}} H_{\mathbf{k}} + H_{exc-exc} + H_{sat} \quad (4-53)$$

Nous allons maintenant étudier la réponse de ce système à une excitation par un laser monomode continu.

## C.2 Hamiltonien effectif

On note respectivement  $E_L$  et  $\mathbf{k}_L$  l'énergie et le vecteur d'onde dans le plan des couches des photons du champ laser incident. On considère une situation où on excite de façon résonante ou quasi-résonante le polariton de branche basse énergie de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_L$ . Plus précisément on suppose  $|E_L - E_P(k_L)| \ll \Omega_R$ , où  $E_P(k_L)$  est l'énergie du polariton de branche basse, donnée par la relation de dispersion 1-24.

Si la densité d'excitation est faible, l'excitation modifie peu les résonances du système et on a toujours deux résonances (les deux polaritons) bien séparées en énergie (les largeurs de raies étant petites devant la séparation  $\Omega_R$ ). Lorsqu'on pompe la branche basse on peut alors négliger les contributions liées à la branche haute et considérer que la réponse du système ne fait intervenir que la branche basse ; cela revient à supposer que la population de la branche haute est nulle. Dans ces conditions il est plus commode de réécrire le hamiltonien du système dans la base des polaritons, en négligeant tous les termes contenant la branche haute. Cette transformation aboutit au hamiltonien effectif suivant :

$$H = H_P + H_{PP}^{eff} \quad (4-54)$$

où  $H_P$  est le terme d'évolution libre de la branche basse de polariton :

$$H_P = \sum_{\mathbf{k}} E_P(k) p_{\mathbf{k}}^\dagger p_{\mathbf{k}} \quad (4-55)$$

et  $H_{PP}^{eff}$  est un hamiltonien effectif d'interaction polariton-polariton :

$$H_{PP}^{eff} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}}^{PP} p_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger p_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger p_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}'} \quad (4-56)$$

avec

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}}^{PP} = \{V_0 X_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|} X_{\mathbf{k}'} + 2V_{sat} (C_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|} X_{\mathbf{k}'} + C_{\mathbf{k}'} X_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|})\} X_{|\mathbf{k}'-\mathbf{q}|} X_{\mathbf{k}} \quad (4-57)$$

De manière à comparer les contributions respectives du terme de d'interaction polariton-polariton et du terme de saturation, étudions le rapport  $2V_{sat}/V_0$  en oubliant pour le moment les coefficients de Hopfield  $X$  et  $C$  :

$$\frac{2V_{sat}}{V_0} = \frac{\Omega_R \epsilon_0}{6n_{sat} e^2 a_{exc}} = \frac{8\pi \Omega_R a_{exc} \epsilon_0}{21e^2} \quad (4-58)$$

Avec les valeurs typiques  $\Omega = 2.8$  meV,  $a_{exc} = 10$  nm et  $\epsilon_0 = 12 \epsilon_{vide}$ , on obtient une valeur de 0.02. Le terme d'interaction exciton-exciton est donc largement dominant par rapport au terme de saturation (sauf lorsque l'un des coefficients  $C$  est très grand devant les coefficients  $X$ , ce qui est le cas lorsque le désaccord exciton-cavité est très négatif). Dans toute la suite, on se place au voisinage du désaccord nul et on néglige le terme de saturation :

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}}^{PP} \simeq V_0 X_{|\mathbf{k}+\mathbf{q}|} X_{\mathbf{k}'} X_{|\mathbf{k}'-\mathbf{q}|} X_{\mathbf{k}} \quad (4-59)$$

D'autre part, on néglige les diffusions multiples, c'est-à-dire l'interaction entre des modes autres que le mode de la pompe. Cela revient à conserver uniquement les termes où le vecteur d'onde de la pompe  $\mathbf{k}_L$  apparaît au moins deux fois :

$$\begin{aligned} H_{PP}^{eff} &= \frac{1}{2} V_{\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_L, 0} p_{\mathbf{k}_L}^\dagger p_{\mathbf{k}_L}^\dagger p_{\mathbf{k}_L} p_{\mathbf{k}_L} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_L} V_{\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_L, \mathbf{k}_L - \mathbf{k}} \left( p_{2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}}^\dagger p_{\mathbf{k}}^\dagger p_{\mathbf{k}_L} p_{\mathbf{k}_L} + h.c. \right) \\ &+ 2 \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_L} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_L, 0} p_{\mathbf{k}_L}^\dagger p_{\mathbf{k}}^\dagger p_{\mathbf{k}_L} p_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (4-60)$$

Le premier terme décrit l'interaction entre polaritons au sein du mode de la pompe. Le deuxième terme correspond à un processus de «fission», où deux polaritons de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_L$  donnent un polariton «signal» de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et un polariton «complémentaire» de vecteur d'onde  $2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}$ . Le dernier terme correspond à l'interaction entre le mode  $\mathbf{k}_L$  et le mode  $\mathbf{k}$ , qui entraîne au premier ordre une renormalisation de l'énergie du mode  $\mathbf{k}$  proportionnelle à  $|p_{\mathbf{k}_L}|^2$ .

### C.3 Conservation de l'énergie

La condition de conservation de l'énergie associée au processus de «fission» s'écrit :

$$\tilde{E}_P(\mathbf{k}) + \tilde{E}_P(2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}) = 2\tilde{E}_P(\mathbf{k}_L) \quad (4-61)$$

où, pour un vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  donné,  $\tilde{E}_P(\mathbf{q})$  est l'énergie renormalisée par l'interaction avec le mode de la pompe  $\{\mathbf{q}, \mathbf{k}_L\} \longrightarrow \{\mathbf{q}, \mathbf{k}_L\}$  :

$$\tilde{E}_P(\mathbf{q}) = E_P(q) + 2V_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_L, \mathbf{0}} |\langle p_{\mathbf{k}_L} \rangle|^2 \quad (4-62)$$

L'équation 4-61, admet toujours une solution triviale, à savoir  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_L$ . A cause de la forme très particulière de la dispersion des polaritons, il n'existe des solutions non triviales que si le vecteur d'onde de pompe  $\mathbf{k}_L$  dépasse une certaine valeur critique, correspondant à un angle d'excitation bien déterminé  $\theta_c$ .

Cet angle critique dépend essentiellement du paramètre de «vacuum Rabi splitting», même s'il dépend légèrement du désaccord exciton-cavité et de l'intensité d'excitation. Il correspond environ au point d'inflexion de la relation de dispersion des polaritons, situé au milieu de la «cuvette» creusée par le couplage exciton-photon. Pour les paramètres de notre échantillon, il est de l'ordre de  $10^\circ$  à désaccord nul.

On voit que selon l'angle d'incidence  $\theta$ , la non-linéarité peut se traduire par deux processus différents :

- si  $\theta < \theta_c$ , les termes dominants sont de type  $p^\dagger p^\dagger pp$  et décrivent l'interaction entre polaritons au sein du même mode. On montrera que dans ce cas le système présente des analogies avec un milieu Kerr optique résonant. On étudiera l'effet du terme non linéaire sur les fluctuations du champ réfléchi par la microcavité.

- si  $\theta \geq \theta_c$ , il existe des vecteurs d'onde  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_L$  tels que le processus de «fission»  $\{\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_L\} \rightarrow \{\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}\}$  conserve l'énergie. Nous montrerons que le système présente alors un «seuil d'oscillation» du même type que celui d'un Oscillateur Paramétrique Optique (O.P.O.). Au-dessus du seuil on assiste à un transfert cohérent de population du mode de pompe  $\mathbf{k}_L$  vers les modes  $\mathbf{k}$  (mode «signal») et  $2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}$  (mode «complémentaire»). On s'intéressera particulièrement aux corrélations quantiques entre les faisceaux «signal» et «complémentaire» émis par la microcavité.



## D Excitation sous incidence normale

Pour étudier le premier type de comportement du système, on choisit de se placer à l'incidence normale ( $\mathbf{k}_L=0$ ). C'est dans cette configuration que nous avons réalisé nos expériences. Nous faisons maintenant une approximation de faible densité d'excitation ; les différents termes du hamiltonien effectif d'interaction polariton-polariton 4-60 apparaissent comme une perturbation pour le mode  $p_0$  ; les modes  $\mathbf{k} \neq 0$  sont faiblement peuplés par rapport au mode de pompe ; on ne garde que le terme d'ordre le plus haut. Plus précisément on néglige les termes suivants :

- $p_{-\mathbf{k}}^\dagger p_{\mathbf{k}}^\dagger p_0 p_0$  avec  $\mathbf{k} \neq 0$  ne conservent pas l'énergie. Ils correspondent à un processus de relaxation du mode  $p_0$  par interaction exciton-exciton, qui entraîne un élargissement augmentant avec la densité d'excitation [Ciuti 98]. Comme au chapitre 2 on suppose donc qu'on se place à des densités d'excitation suffisamment basses pour pouvoir négliger l'élargissement collisionnel par rapport aux autres causes d'élargissement. On gardera à l'esprit que cette approximation est moins bien justifiée qu'au chapitre 2, parce qu'on considère des densités d'excitation plus importantes où les effets non linéaires commencent à jouer un rôle ;

- les termes  $p_0^\dagger p_{\mathbf{k}}^\dagger p_0 p_{\mathbf{k}}$  avec  $\mathbf{k} \neq 0$  qui entraînent une renormalisation de l'énergie du mode  $p_0$  proportionnelle à  $|p_{\mathbf{k}}|^2$ . On suppose donc la densité d'excitation suffisamment faible pour que les modes  $\mathbf{k} \neq 0$  restent faiblement peuplés.

Sous ces hypothèses, le hamiltonien effectif d'interaction polariton-polariton se réduit à un seul terme :

$$H_{PP}^{eff} = \frac{1}{2} V_{0,0,0} p_0^\dagger p_0^\dagger p_0 p_0 \text{ avec } V_{0,0,0} = V_0 X_0^4 \quad (4-63)$$

### D.1 Equations de Heisenberg-Langevin

La réécriture du hamiltonien dans la base des polaritons fournit une image physique claire des processus mis en jeu. Cependant pour l'écriture des équations d'évolution du système, il est nécessaire de revenir à la base des excitons et des photons. C'est en effet dans cette base que nous avons étudié la relaxation au chapitre 2. La relaxation du mode d'exciton et du mode de cavité s'écrit simplement parce que chacun des deux est couplé à un seul réservoir ; mais on ne peut pas écrire directement l'équation d'évolution du polariton, qui est couplé à deux réservoirs distincts à travers ses composantes excitonique et photonique.

Lorsqu'on reprend le hamiltonien 4-53 et qu'on fait les mêmes approximations (en ne

gardant que le terme d'ordre le plus haut en champ pompe) on aboutit au hamiltonien suivant dans la base des excitons et des photons :

$$H = E_{exc} b_0^\dagger b_0 + E_{cav} a_0^\dagger a_0 + \frac{\Omega_R}{2} (a_0^\dagger b_0 + b_0^\dagger a_0) + \frac{1}{2} V_0 b_0^\dagger b_0^\dagger b_0 b_0 \quad (4-64)$$

avec  $E_{exc} = E_{exc}(k=0)$  et  $E_{cav} = E_{cav}(k=0)$ . Il s'agit du hamiltonien linéaire 1-16, complété par un terme de type «effet Kerr» ( $b_0^\dagger b_0^\dagger b_0 b_0$ ) provenant de l'interaction coulombienne entre excitons. On écrit les équations d'évolution dans le référentiel tournant à la fréquence du champ pompe. On rappelle les définitions des opérateurs lentement variables  $a$  et  $b$  :

$$a(t) = a_0(t) e^{i\omega_L t} \text{ et } a^\dagger(t) = a_0^\dagger(t) e^{-i\omega_L t} \quad (4-65)$$

$$b(t) = b_0(t) e^{i\omega_L t} \text{ et } b^\dagger(t) = b_0^\dagger(t) e^{-i\omega_L t} \quad (4-66)$$

$$(4-67)$$

On obtient simplement les équations 2-43 et 2-44 du chapitre 2, complétées par un terme non linéaire en  $b^\dagger b b$  :

$$\frac{da}{dt} = -(\gamma_a + i\delta_a) a - igb + \sqrt{2\gamma_1} A_1^{in} + \sqrt{2\gamma_2} A_2^{in} \quad (4-68)$$

$$\frac{db}{dt} = -(\gamma_b + i\delta_b) b - iga - \frac{iV_0}{\hbar} b^\dagger b b + \sqrt{2\gamma_b} B^{in} \quad (4-69)$$

Les équations d'évolution des opérateurs  $a^\dagger$  et  $b^\dagger$  sont respectivement les équations hermitiques conjuguées de 4-68 et 4-69.

## D.2 Equation d'évolution pour le polariton

Ayant obtenu la forme correcte des équations de relaxation on peut revenir à la base des polaritons qui est plus commode pour effectuer les calculs. On définit les opérateurs de polaritons dans le référentiel tournant :

$$p(t) = p_0^{(-)}(t) e^{i\omega_L t} = X_0 b(t) - C_0 a(t) \quad (4-70)$$

$$q(t) = p_0^{(+)}(t) e^{i\omega_L t} = X_0 a(t) + C_0 b(t) \quad (4-71)$$

avec des définitions analogues pour les opérateurs de création  $p^\dagger(t)$  et  $q^\dagger(t)$ . En supprimant les termes contenant l'opérateur  $q$ , on obtient pour l'opérateur  $p$  l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{dp}{dt} = -(\gamma_p + i\delta_p)p - i\alpha_p p^\dagger p p - C_0 \left( \sqrt{2\gamma_1} A_1^{in} + \sqrt{2\gamma_2} A_2^{in} \right) + X_0 \sqrt{2\gamma_b} B^{in} \quad (4-72)$$

avec :

$$\alpha_p = X_0^4 \alpha_{exc} \text{ où } \alpha_{exc} = \frac{V_0}{\hbar} \quad (4-73)$$

$$\gamma_p = C_0^2 \gamma_a + X_0^2 \gamma_b \quad (4-74)$$

$$\delta_p = (E_p - E_L) / \hbar \quad (4-75)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \left( E_{cav} + E_{exc} - \sqrt{(E_{cav} - E_{exc})^2 + \Omega_R^2} \right) \quad (4-76)$$

Le terme non linéaire d'ordre 3 aboutit comme prévu à une équation d'évolution analogue à celle du champ électromagnétique dans une cavité contenant un milieu Kerr. Nous allons retrouver cette analogie dans les deux paragraphes suivants. Tous d'abord, nous étudions la réponse cohérente de la microcavité et nous mettons en évidence un seuil de bistabilité, comme dans le cas du milieu Kerr. Puis nous calculons les fluctuations du champ réfléchi par la cavité. Nous montrons que celles-ci dépendent de la quadrature du champ mesurée et divergent lorsqu'on s'approche d'un point tournant de bistabilité. Enfin, nous verrons dans quelle mesure on peut espérer réduire les fluctuations du champ réfléchi en dessous de la limite quantique standard.

Avant de continuer, soulignons quelques différences importantes par rapport au cas du milieu Kerr passif idéal :

- La particule en jeu n'est plus un photon, mais un polariton. Ses caractéristiques (énergie, largeur de raie) dépendent du paramètre de désaccord cavité-exciton, qui détermine ses fractions photonique et excitonique.

- La non-linéarité dépend également du désaccord cavité-exciton (elle est proportionnelle au carré de la fraction excitonique,  $X_0^4$ ).

- Expérimentalement, on injecte un champ lumineux et on observe le champ sortant de la cavité (nous nous intéresserons ici au champ réfléchi). Or le couplage des polaritons à l'extérieur de la cavité dépend du désaccord exciton-cavité (il est proportionnel à la fraction photonique  $C_0^2$ ).

Pour toutes ces raisons, il sera particulièrement important d'étudier comment le comportement de la microcavité varie en fonction du désaccord exciton-cavité. Les effets

sur le champ réfléchi doivent résulter d'un compromis entre la non-linéarité (maximale à désaccord très positif, lorsque le polariton tend vers l'exciton) et le couplage à la lumière (maximal à désaccord très négatif, lorsque le polariton tend vers un photon).

Remarquons enfin que l'écriture des termes de fluctuations entrantes est plus compliquée que dans le cas du milieu Kerr en cavité. En effet, à cause de leur nature composite, les polaritons sont couplés à deux réservoirs distincts : les champs à l'extérieur de la cavité (à travers leur partie photonique) et les excitons de  $\mathbf{k} \neq 0$  (à travers leur partie excitonique). En particulier, le réservoir excitonique constitue une source de bruit supplémentaire dont il faut tenir compte.

### D.3 Réponse optique en régime non linéaire

#### D.3.1 Bistabilité

Nous réécrivons l'équation 4-72 pour les valeurs moyennes des champs et nous cherchons sa solution en régime stationnaire :

$$\frac{d\langle p \rangle}{d\tau} = -(\gamma_p + i\delta_p)\langle p \rangle - i\alpha_p n_p \langle p \rangle - C_0 \sqrt{2\gamma_1} \langle A_1^{in} \rangle = 0 \quad (4-77)$$

où  $n_p = |\langle p \rangle|^2$  est le nombre moyen de polaritons. En multipliant cette équation par son équation conjuguée on obtient :

$$n_p (\gamma_p^2 + (\delta_p + \alpha_p n_p)^2) = 2\gamma_1 C_0^2 I_1^{in} \quad (4-78)$$

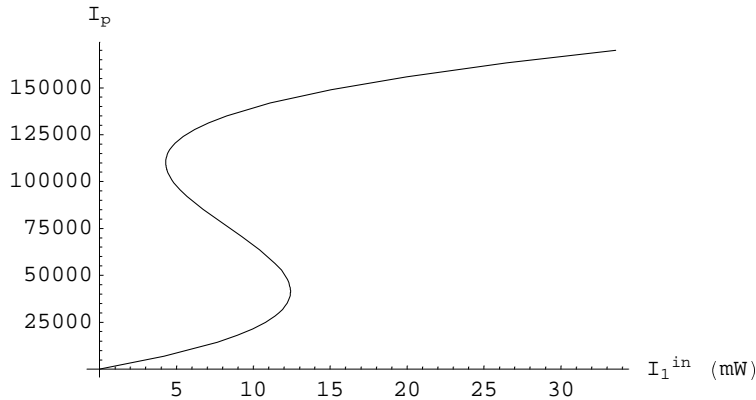


Fig. 4.2 – Variations de  $n_p$  en fonction de  $I_1^{in}$  à désaccord exciton-cavité nul. Le désaccord du laser est  $\delta_p = -2.5 \gamma_p$ . Autres paramètres :  $\gamma_a = 0.12 \text{ meV}$ ,  $\gamma_b = 0.075 \text{ meV}$ ,  $\alpha_{exc} = 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ meV}$ .

Cette équation est analogue à celle donnant l'intensité du champ dans une cavité contenant un milieu Kerr passif idéal. Nous avons tracé figure 4.2 un exemple des

variations de  $n_p$  en fonction de  $I_1^{in}$ , avec les paramètres de l'échantillon. Une zone de bistabilité apparaît entre les deux extréma locaux. Les points tournants s'obtiennent en résolvant l'équation  $\frac{dI_1^{in}}{dn_p} = 0$ , soit :

$$3\alpha_p^2 n_p^2 + 4\alpha_p n_p \delta_p + \gamma_p^2 + \delta_p^2 = 0 \quad (4-79)$$

Le discriminant de cette équation de degré 2 sur  $n_p$  s'écrit :

$$\Delta = \alpha_p^2 (\delta_p^2 - 3\gamma_p^2) \quad (4-80)$$

Pour un fonctionnement bistable on doit avoir nécessairement  $\Delta > 0$ , c'est-à-dire  $\delta_p^2 > 3\gamma_p^2$ . Il faut de plus que l'équation 4-79 ait des racines positives. Finalement il y a bistabilité si et seulement si :

$$\delta_p < -\sqrt{3}\gamma_p, \text{ c'est-à-dire : } \omega_L > \omega_p + \sqrt{3}\gamma_p \quad (4-81)$$

Dans ce cas, la valeur de  $n_p$  correspondant au «point bas» de bistabilité s'écrit :

$$n_p^1 = \frac{-2\delta_p - \sqrt{\delta_p^2 - 3\gamma_p^2}}{3\alpha_p} \quad (4-82)$$

et le seuil correspondant pour l'intensité lumineuse est :

$$I_1^{in} = \frac{-(2\delta_p + \sqrt{\delta_p^2 - 3\gamma_p^2}) (\delta_p^2 + 3\gamma_p^2 - \delta_p \sqrt{\delta_p^2 - 3\gamma_p^2})}{27\alpha_p C_0^2 \gamma_1} \quad (4-83)$$

### D.3.2 Etude de l'intensité de seuil

Le seuil de bistabilité le plus bas est obtenu lorsque  $\delta_p$  tend vers  $-\sqrt{3}\gamma_p$  par valeurs négatives. Il vaut alors :

$$I_{seuil}^{in} = \frac{4\gamma_p^3}{3\sqrt{3}\alpha_p C_0^2 \gamma_1} \quad (4-84)$$

Comme nous l'avons expliqué, les paramètres de cette équation dépendent du désaccord exciton-cavité  $\delta = (E_{cav} - E_{exc})/\hbar$ . Il est intéressant de voir pour quels désaccords on obtient les seuils de bistabilité les plus bas. Pour cela, réécrivons 4-84 en utilisant les définitions 1-22, 4-73 et 4-74 :

$$I_{seuil}^{in} = \frac{8 \left( \delta^2 \gamma_b + 2(\gamma_a + \gamma_b) g^2 + \delta \gamma_b \sqrt{\delta^2 + 4g^2} \right)^3}{3\sqrt{3}g^2 \left( \delta + \sqrt{\delta^2 + 4g^2} \right)^4 \alpha_{exc} \gamma_1} \quad (4-85)$$

L'intensité du seuil est minimale lorsque  $\delta$  vaut :

$$\delta_0 = \frac{2\gamma_a - \gamma_b}{\sqrt{2\gamma_a\gamma_b}}g \quad (4-86)$$

Selon les valeurs relatives de  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$ , le point optimal peut se trouver à désaccord positif ou négatif. Nous avons représenté figure 4.3 les variations de l'intensité de seuil en fonction du désaccord pour les paramètres de notre échantillon. Le minimum se situe à  $\delta_0=1.72$  meV.

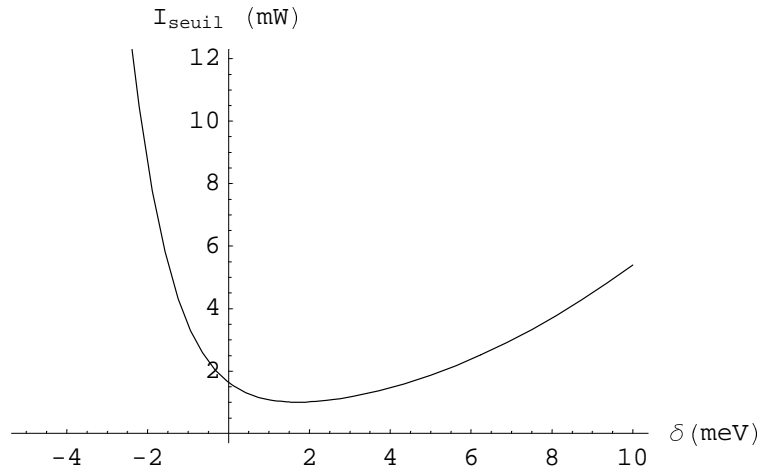


Fig. 4.3 – Variations du seuil de bistabilité en fonction du désaccord exciton-cavité. Les paramètres sont ceux de la figure 4.2.

### D.3.3 Spectres de réflectivité

La bistabilité du champ de polariton intracavité se traduit bien sûr par une bistabilité des spectres de réflectivité, d'absorption ou de transmission. Pour calculer les spectres, on trouve tout d'abord l'amplitude moyenne stationnaire  $p_0$  du champ de polariton intracavité, en réinjectant la valeur de l'intensité trouvée grâce à 4-78 dans l'équation 4-77. La valeur moyenne du champ de photon intracavité s'en déduit par la relation :

$$a_0 = -C_0 p_0 \quad (4-87)$$

Les relations entrée-sortie 2-50 et 2-51 permettent de calculer les champs transmis et réfléchi et finalement les coefficients de réflexion, transmission et absorption.

Nous avons représenté figure 4.4 les spectres de réflectivité calculés avec les paramètres de notre échantillon, pour plusieurs valeurs de l'intensité incidente.

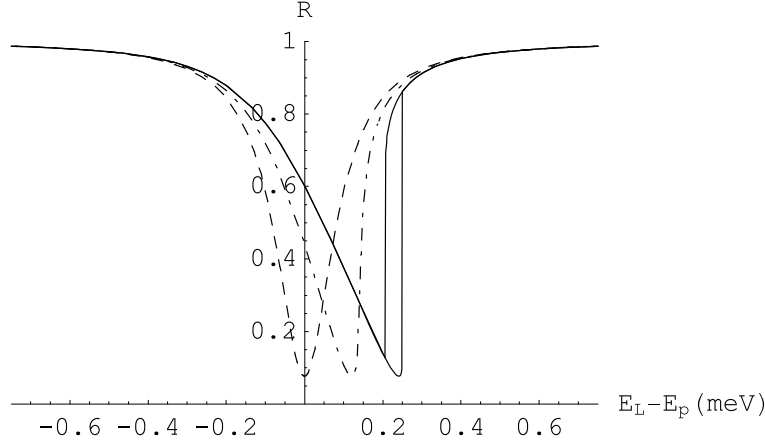


Fig. 4.4 – Spectres de réflectivité pour  $I_1^{in}$  tendant vers zéro (tirets),  $I_1^{in}=1.5$  mW (points-tirets) et  $I_1^{in}=3$  mW (traits pleins). Les autres paramètres sont ceux de la figure 4.2.

Le creux de réflectivité devient de plus en plus dissymétrique lorsqu'on augmente l'intensité de pompe. Pour la plus haute des 3 intensités, on observe une zone de bistabilité. Nous avons alors représenté les deux solutions stables. Notons que pour une telle intensité une modélisation précise nécessite la prise en compte du terme non linéaire d'ordre supérieur.

L'effet non linéaire entraîne également un déplacement vers le bleu de l'énergie  $\tilde{E}_p$  du minimum de réflectivité. Ce déplacement est linéaire en intensité.

## D.4 Etude des fluctuations du champ réfléchi

### D.4.1 Calcul

Tout d'abord, on sépare les fluctuations du champ moyen en posant :

$$p(t) = p_0 + \delta p(t) \quad (4-88)$$

$$A_i^{in}(t) = \langle A_i^{in} \rangle + \delta A_i^{in}(t) \text{ pour } i = 1, 2 \quad (4-89)$$

$$B^{in}(t) = \langle B^{in} \rangle + \delta B^{in}(t) \quad (4-90)$$

avec des définitions similaires pour les opérateurs  $p^\dagger$ ,  $A_i^{in\dagger}$  et  $B^{in\dagger}$ . On linéarise ensuite l'équation d'évolution du champ  $p$  (4-72) et son hermitique conjuguée autour de la valeur stationnaire  $p_0$ , en ne gardant que les termes d'ordre un en fluctuations. La transformée de Fourier des équations ainsi linéarisées s'écrit :

$$\begin{aligned}
-i\Omega\delta p(\Omega) &= -i(\gamma_p + i\delta_p)\delta p(\Omega) - 2i\alpha_p n_p \delta p(\Omega) - i\alpha_p p_0^2 \delta p^\dagger(\Omega) \\
&\quad - C_0 \left( \sqrt{2\gamma_1} \delta A_1^{in}(\Omega) + \sqrt{2\gamma_2} \delta A_2^{in}(\Omega) \right) + X_0 \sqrt{2\gamma_b} \delta B^{in}(\Omega)
\end{aligned} \tag{4-91}$$

$$\begin{aligned}
-i\Omega\delta p^\dagger(\Omega) &= -i(\gamma_p - i\delta_p)\delta p^\dagger(\Omega) + 2i\alpha_p n_p \delta p^\dagger(\Omega) + i\alpha_p p_0^{*2} \delta p(\Omega) \\
&\quad - C_0 \left( \sqrt{2\gamma_1} \delta A_1^{in\dagger}(\Omega) + \sqrt{2\gamma_2} \delta A_2^{in\dagger}(\Omega) \right) + X_0 \sqrt{2\gamma_b} \delta B^{in\dagger}(\Omega)
\end{aligned} \tag{4-92}$$

Pour simplifier l'écriture des fluctuations entrantes on pose :

$$\begin{aligned}
F^{in}(\Omega) &= -C_0 \left( \sqrt{2\gamma_1} \delta A_1^{in}(\Omega) + \sqrt{2\gamma_2} \delta A_2^{in}(\Omega) \right) + X_0 \sqrt{2\gamma_b} \delta B^{in}(\Omega) \\
F^{in\dagger}(\Omega) &= -C_0 \left( \sqrt{2\gamma_1} \delta A_1^{in\dagger}(\Omega) + \sqrt{2\gamma_2} \delta A_2^{in\dagger}(\Omega) \right) + X_0 \sqrt{2\gamma_b} \delta B^{in\dagger}(\Omega)
\end{aligned} \tag{4-93}$$

Les équations se réécrivent de façon plus commode avec l'écriture matricielle présentée dans la première partie de ce chapitre :

$$\begin{bmatrix} \delta p(\Omega) \\ \delta p^\dagger(\Omega) \end{bmatrix} = U^{-1}(\Omega) \begin{bmatrix} F^{in}(\Omega) \\ F^{in\dagger}(\Omega) \end{bmatrix} \tag{4-94}$$

avec

$$U(\Omega) = \begin{bmatrix} \gamma + i(\delta_p + 2\alpha_p n_p) - i\Omega & i\alpha p_0^2 \\ -i\alpha p_0^{*2} & \gamma - i(\delta_p + 2\alpha_p n_p) - i\Omega \end{bmatrix} \tag{4-95}$$

Les fluctuations du champ de photons intracavité se déduisent des fluctuations du champ de polaritons par la relation :

$$\begin{bmatrix} \delta a(\Omega) \\ \delta a^\dagger(\Omega) \end{bmatrix} = -C_0 \begin{bmatrix} \delta p(\Omega) \\ \delta p^\dagger(\Omega) \end{bmatrix} \tag{4-96}$$

On en déduit ensuite les fluctuations du champ réfléchi à partir de la relation entrée-sortie 2-50 :

$$\begin{bmatrix} \delta A_1^{out}(\Omega) \\ \delta A_1^{out\dagger}(\Omega) \end{bmatrix} = \sqrt{2\gamma_1} \begin{bmatrix} \delta a(\Omega) \\ \delta a^\dagger(\Omega) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta A_1^{in}(\Omega) \\ \delta A_1^{in\dagger}(\Omega) \end{bmatrix} \tag{4-97}$$

Finalement, à partir de 4-94, 4-96 et 4-97, on calcule les fluctuations du champ réfléchi en fonction des fluctuations entrantes :



$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \delta A_1^{out}(\Omega) \\ \delta A_1^{out\dagger}(\Omega) \end{bmatrix} &= -\sqrt{2\gamma_1}C_0U^{-1} \begin{bmatrix} F^{in}(\Omega) \\ F^{in\dagger}(\Omega) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta A_1^{in}(\Omega) \\ \delta A_1^{in\dagger}(\Omega) \end{bmatrix} \\
&= (-I + 2\gamma_1C_0^2U^{-1}) \begin{bmatrix} \delta A_1^{in}(\Omega) \\ \delta A_1^{in\dagger}(\Omega) \end{bmatrix} + \sqrt{4\gamma_1\gamma_2}C_0^2U^{-1} \begin{bmatrix} \delta A_2^{in}(\Omega) \\ \delta A_2^{in\dagger}(\Omega) \end{bmatrix} \\
&\quad - \sqrt{4\gamma_1\gamma_b}X_0C_0U^{-1} \begin{bmatrix} \delta B^{in}(\Omega) \\ \delta B^{in\dagger}(\Omega) \end{bmatrix} \tag{4-98}
\end{aligned}$$

Nous avons vu que les fluctuations d'un champ lumineux étaient entièrement caractérisées par la donnée de la matrice de corrélation  $V(\Omega)$  définie par la relation 4-22. On calcule donc la matrice de corrélation du champ réfléchi en fonction des matrices de corrélation des différents champs entrants :

$$\begin{aligned}
V_{A_1}^{out}(\Omega) &= (-I + 2\gamma_1C_0^2U^{-1})V_{A_1}^{in}(\Omega)(-I + 2\gamma_1C_0^2U^{-1})^{*T} \\
&\quad + 4\gamma_1\gamma_2C_0^4U^{-1}V_{A_2}^{in}(\Omega)(U^{-1})^{*T} + 4\gamma_1\gamma_bC_0^2X_0^2U^{-1}V_B^{in}(\Omega)(U^{-1})^{*T} \tag{4-99}
\end{aligned}$$

Le champ laser entrant par le miroir avant est dans un état cohérent ; le champ entrant par le miroir arrière est le vide. Donc d'après la relation 4-29, leurs matrices de corrélation sont égales à :

$$V_{A_1}^{in}(\Omega) = V_{A_2}^{in}(\Omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4-100}$$

Les fluctuations entrantes  $B^{in}$  sont proportionnelles à celles du réservoir excitonique (voir chapitre 2). Ce réservoir est peuplé par des diffusions en provenance du mode  $\mathbf{k} = 0$ . Par conséquent on peut considérer que sa population  $n_{exc}$  est proportionnelle au nombre d'excitons  $\langle b^\dagger b \rangle = n_b$  dans le mode  $\mathbf{k} = 0$ . La matrice de corrélation des fluctuations  $B^{in}$  prend donc la forme suivante :

$$V_B^{in}(\Omega) = \begin{bmatrix} 1 + n_{exc} & 0 \\ 0 & n_{exc} \end{bmatrix} \tag{4-101}$$

$$\text{avec } n_{exc} = \beta n_b = \beta X_0^2 n_p \tag{4-102}$$

où  $\beta$  est un paramètre phénoménologique qui représente le rapport du nombre moyen d'excitons par mode dans le réservoir au nombre d'excitons dans le mode  $\mathbf{k}=0$ . La relation 4-99 donnant la matrice de corrélation du champ réfléchi  $V_{A_1}^{out}(\Omega)$ , permet

enfin de calculer le spectre de bruit de toutes les quadratures du champ sortant, grâce à la relation 4-24.

Par la suite, nous calculerons des spectres de bruit d'intensité (c'est-à-dire le spectre de bruit de la quadrature d'amplitude, définie par  $\theta = 0$ ) et les spectres de bruit minimisé et maximisé en fonction de la quadrature. En effet, le bruit d'intensité est plus facile à mesurer expérimentalement, car il n'est pas nécessaire de recombinaison le faisceau réfléchi avec un oscillateur local (voir chapitre 5). D'autre part, le bruit maximal et le bruit minimal donnent accès à l'amplitude de l'oscillation du bruit en fonction de la quadrature du champ. Enfin, le bruit minimal permet d'étudier la possibilité d'obtenir des états comprimés.

La fréquence d'analyse  $\Omega$  est limitée expérimentalement à une valeur de l'ordre de 20MHz, soit moins de 100neV, trois ordres de grandeur en dessous des largeurs de raie typiques des polaritons (voir chapitre 5). On s'attend donc à n'observer aucune dépendance du bruit en fonction de la fréquence d'analyse. C'est pourquoi on fera souvent l'approximation de se placer à fréquence nulle.

#### D.4.2 Cas linéaire

Etudions tout d'abord la réponse du système aux fluctuations entrantes en l'absence d'effets non linéaires ( $\alpha_{exc} = 0$ ). Cela nous permettra de comprendre l'origine du signal de bruit lorsque l'intensité du champ laser incident est très faible.

En l'absence d'effets non linéaires, l'équation 4-77 se résout facilement. La valeur moyenne du champ de polariton vaut :

$$p_0 = \frac{-C_0\sqrt{2}\gamma_1 \langle A_1^{in} \rangle}{\gamma_p + i\delta_p} \quad (4-103)$$

Après quelques calculs on en déduit la matrice de corrélation du champ réfléchi grâce à la relation 4-99 :

$$V_{A_1}^{out}(\Omega) = \begin{bmatrix} 1 + A(\omega_L + \Omega) n_{exc} & 0 \\ 0 & A(\omega_L - \Omega) n_{exc} \end{bmatrix} \quad (4-104)$$

où  $A(\omega)$  n'est autre que le spectre d'absorption de la microcavité :

$$A(\omega) = \frac{4C_0^2 X_0^2 \gamma_1 \gamma_b}{(\omega - \omega_p)^2 + \gamma_p^2} \quad (4-105)$$

Dans cette équation  $\omega_p = E_p/\hbar$  est la fréquence du polariton. La population du réservoir est elle aussi reliée à l'absorption en vertu de la relation 2-54 :

$$n_{exc} = \beta n_b = \beta \frac{A(\omega_L) I_1^{in}}{2\gamma_b} \quad (4-106)$$

Le spectre de bruit normalisé au bruit quantique standard d'une quadrature quelconque du champ vaut donc :

$$\begin{aligned} S_{E_{P\theta}}(\Omega) &= 1 + (A(\omega_L + \Omega) + A(\omega_L - \Omega)) n_{exc} \text{ pour tout } \theta \\ &= 1 + \frac{\beta I_1^{in}}{2\gamma_b} A(\omega_L) (A(\omega_L + \Omega) + A(\omega_L - \Omega)) \end{aligned} \quad (4-107)$$

A fréquence d'analyse nulle on obtient :

$$S_{E_{P\theta}}(\Omega = 0) = 1 + \frac{\beta A(\omega_L)^2 I_1^{in}}{\gamma_b} \text{ pour tout } \theta \quad (4-108)$$

Le champ réfléchi présente un excès de bruit indépendant de la quadrature considérée, proportionnel à l'intensité incidente et proportionnel au carré de l'absorption.

Commentons au passage la forme de l'absorption 4-105. Elle est à comparer à la formule 2-54 du chapitre 2 qui donne lieu à deux pics d'absorption. Ici on s'intéresse seulement à l'une des deux résonances d'absorption (la branche basse), en négligeant l'effet de l'autre résonance. Cette approximation est valable si la séparation entre les deux résonances est grande devant leur largeur :  $\gamma_p \ll 2g$ .

L'absorption a la forme d'une Lorentzienne, centrée sur l'énergie du polariton, de largeur  $\gamma_p$ . La quantité  $C_0^2 X_0^2$  au numérateur indique que la hauteur du pic est le résultat d'un compromis entre le caractère photonique du polariton (qui lui permet de se coupler à la lumière) et son caractère excitonique (qui lui permet de stocker l'énergie sous forme d'excitons). L'absorption est maximale lorsque le désaccord exciton-cavité vaut :

$$\delta_1 = \frac{\gamma_a - \gamma_b}{\sqrt{\gamma_a \gamma_b}} g \quad (4-109)$$

Avec les paramètres de notre échantillon on obtient  $\delta_1 = 0.55$  meV.

### D.4.3 Effet de la non-linéarité sur les fluctuations

L'interaction non linéaire entre excitons modifie radicalement les fluctuations du champ sortant. Le bruit acquiert une dépendance en fonction de la quadrature. Certaines quadratures sont amplifiées et d'autres sont comprimées ; pour une quadrature

donnée du champ la variation du bruit en fonction de l'intensité incidente n'est plus linéaire. Nous allons maintenant montrer que les fluctuations d'une certaine quadrature divergent lorsqu'on s'approche d'un point tournant de bistabilité.

Calculons pour cela le déterminant de la matrice  $U$ , dont l'inversion permet de passer des fluctuations entrantes aux fluctuations sortantes :

$$Det(U) = 3\alpha_p^2 n_p^2 + 4\alpha_p \delta_p n_p + \gamma_p^2 + \delta_p^2 - \Omega^2 - 2i\Omega\gamma \quad (4-110)$$

Si l'on fixe la fréquence d'analyse à zéro, on a :

$$Det(U) = 3\alpha_p^2 n_p^2 + 4\alpha_p \delta_p n_p + \gamma_p^2 + \delta_p^2 \quad (4-111)$$

On remarque que l'équation  $Det(U) = 0$  n'est autre que l'équation de bistabilité 4-79. Lorsqu'on s'approche d'un point de bistabilité, le déterminant de la matrice  $U$  tend vers zéro et l'une des deux valeurs propres de  $U^{-1}$  tend vers l'infini. Par conséquent les fluctuations du champ sortant divergent selon une certaine quadrature. Dans ce type de situation il n'est pas correct de linéariser les équations d'évolution au premier ordre en fluctuations [Reynaud 89b]. C'est pourquoi nous nous placerons toujours en dessous du seuil de bistabilité pour calculer le bruit.

#### D.4.4 Résultats

Dans cette partie nous étudions en détail les fluctuations du champ réfléchi par la microcavité et la possibilité d'obtenir une réduction du bruit quantique. Les paramètres («vacuum Rabi splitting» et largeurs de l'exciton et de la cavité) sont déduits des mesures de réflectivité en lumière blanche (voir partie B.3.1.) :  $\Omega_R=2.78$  meV,  $\gamma_1=0.09$  meV,  $\gamma_2=0.03$  meV et  $\gamma_b=0.075$  meV. Le coefficient non linéaire  $V_0$  (donné par l'équation 4-50) est calculé en supposant que la zone active de l'échantillon a une surface de  $(80 \mu\text{m})^2$ . On trouve  $V_0 = 1.4 \cdot 10^{-5}$  meV. Le coefficient  $\beta$  donnant l'excès de bruit entrant (relation 4-102) est un paramètre ajustable du modèle dont nous étudierons l'influence.

Les paramètres que l'on peut faire varier expérimentalement sont au nombre de trois : le désaccord exciton-cavité (qui dépend du point de l'échantillon que l'on excite), le désaccord du laser par rapport à la résonance du polariton et l'intensité du laser.

Nous nous intéressons bien sûr à la quadrature donnant le bruit minimal. Nous étudions aussi la quadrature donnant le bruit maximal afin de démontrer l'amplification du bruit. Enfin nous traçons le bruit d'intensité car c'est en mesurant cette quantité que nous avons étudié expérimentalement la forme des pics de bruit (chapitre 5).

a) *Forme des pics*

Nous traçons des courbes en fonction du désaccord du laser afin d'étudier la forme du pic de bruit. Les figures 4.5 et 4.6 montrent deux exemples, le premier nettement en dessous du seuil de bistabilité et le second à proximité du seuil. Sur ces deux courbes le profil de la réflectivité est indiqué en tiretés. Le paramètre d'excès de bruit entrant est fixé à zéro.

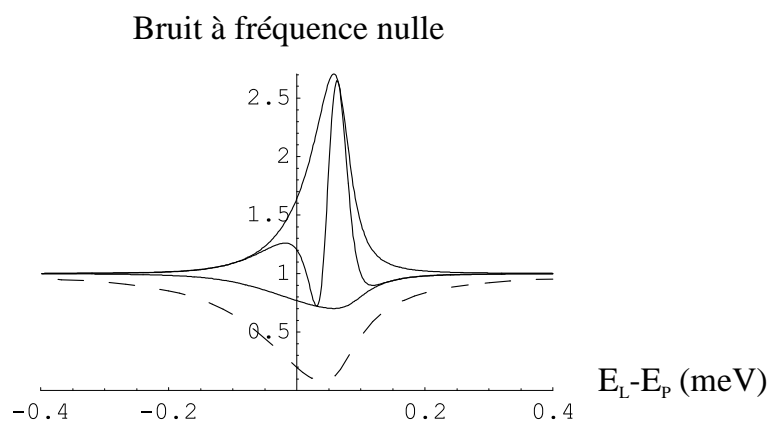


Fig. 4.5 – En traits pleins : bruit minimal, maximal et bruit d'intensité en fonction de l'énergie du laser. Le bruit est calculé à fréquence nulle. Paramètres :  $\beta=0$ ,  $\delta=0$ ,  $I_1^{in}=0.5$  mW. En tiretés : réflectivité.

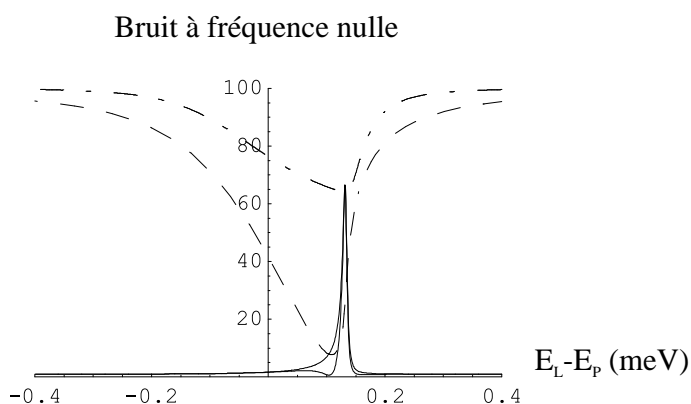


Fig. 4.6 – Bruit maximal et bruit d'intensité à fréquence nulle en fonction de l'énergie du laser. Paramètres :  $\beta=0$ ,  $\delta=0$ ,  $I_1^{in}=1.4$  mW. En points-tirets : bruit minimal multiplié par 100. En tiretés : réflectivité multipliée par 100.

On obtient une importante réduction du bruit. L'optimum est atteint lorsque le laser est légèrement désaccordé vers le bleu par rapport à la résonance de réflectivité ; il correspond à la zone de plus forte pente du creux de réflectivité. C'est également

en ce point qu'on observe la plus forte amplification du bruit. On a également une réduction du bruit d'intensité, mais celle-ci a lieu sur un domaine beaucoup plus petit.

Lorsqu'on augmente l'intensité d'excitation, la réduction de bruit s'améliore ; en contrepartie l'amplification du bruit augmente de façon fortement non linéaire et le pic de bruit s'affine considérablement. L'optimum est toujours atteint sur le point de plus forte pente du creux de réflectivité.

Au-dessus du seuil de bistabilité, le modèle prévoit une réduction de bruit optimale au voisinage de l'un des points tournants, ainsi qu'une divergence des fluctuations selon une certaine quadrature ; cependant la linéarisation des équations n'est plus valable lorsqu'on est trop près d'un point critique et un calcul plus complet est nécessaire.

Tous ces résultats correspondent au cas d'un milieu Kerr passif dans une cavité optique [Reynaud 89b]. Dans notre cas les taux de réduction attendus sont cependant moins importants, car le champ qui subit l'effet non linéaire n'est pas le champ de photons mais un champ de polaritons. Lorsqu'on mesure les fluctuations du champ lumineux sortant on n'observe que la partie photonique des polaritons : cela peut se représenter par des pertes, qui ont pour effet de ramener le niveau de bruit vers la limite quantique standard.

#### *b) Influence d'un excès de bruit entrant*

L'excès de bruit provenant de l'interaction avec le réservoir excitonique dégrade la réduction de bruit. La figure 4.7 étudie l'influence du paramètre d'excès de bruit  $\beta$ , les autres paramètres étant ceux de la figure 4.5. La réduction de bruit diminue progressivement et disparaît totalement à partir d'une certaine valeur critique  $\beta_c$  pour laquelle les fluctuations minimales sont exactement au niveau du bruit quantique standard quelque soit le désaccord du laser.

On peut montrer que cette valeur critique est égale à :

$$\beta_c = \frac{\alpha_{exc}}{2\gamma_b} \quad (4-112)$$

Elle ne dépend que des caractéristiques de l'exciton. En particulier elle ne dépend ni de la largeur du mode de cavité, ni du désaccord exciton-cavité. Finalement la possibilité d'obtenir une réduction du bruit dépend de la valeur relative de la non-linéarité excitonique, des pertes de l'exciton et du paramètre  $\beta$  qui représente la fraction d'excitons occupant les états  $\mathbf{k} \neq 0$ . Le cas le plus favorable est celui d'une non-linéarité forte et d'une largeur excitonique faible.

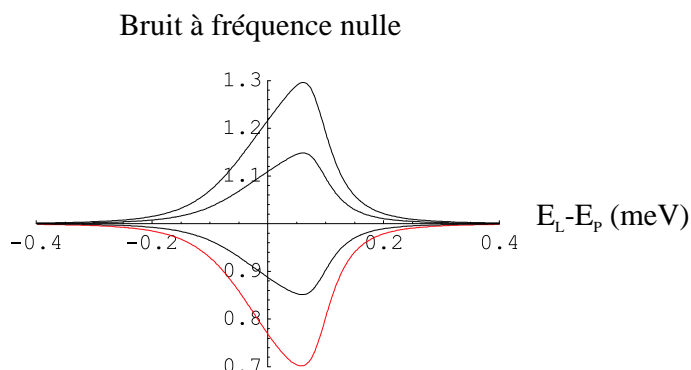


Fig. 4.7 – Bruit minimal en fonction de l'énergie du laser, pour  $\beta=0$ ,  $\beta=5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\beta=10^{-4}$ ,  $\beta=1.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\beta=2 \cdot 10^{-4}$ . Paramètres :  $\delta=0$ ,  $I_1^{in}=0.5 \text{ mW}$ . La courbe obtenue pour  $\beta=10^{-4}$  est confondue avec l'axe horizontal  $S_{min}=1$ .

c) Etude en intensité

Les figures 4.8 et 4.9 représentent respectivement les variations du bruit minimal et du bruit maximal en fonction de l'intensité d'excitation, pour plusieurs valeurs du paramètre  $\beta$ .

Lorsque  $\beta < \beta_c$  on obtient une réduction de bruit pour certaines quadratures et pour certains désaccords du laser ; on représente dans ce cas le bruit optimisé en fonction de la quadrature et du désaccord. Lorsque  $\beta > \beta_c$  il n'y a pas de réduction du bruit quantique et le bruit minimal, égal au bruit quantique standard, est obtenu en s'éloignant de la résonance (voir figure 4.7) ; on représente dans ce cas le bruit minimisé en fonction de la quadrature, pour le désaccord qui correspond à la réduction de bruit optimale dans le cas idéal.

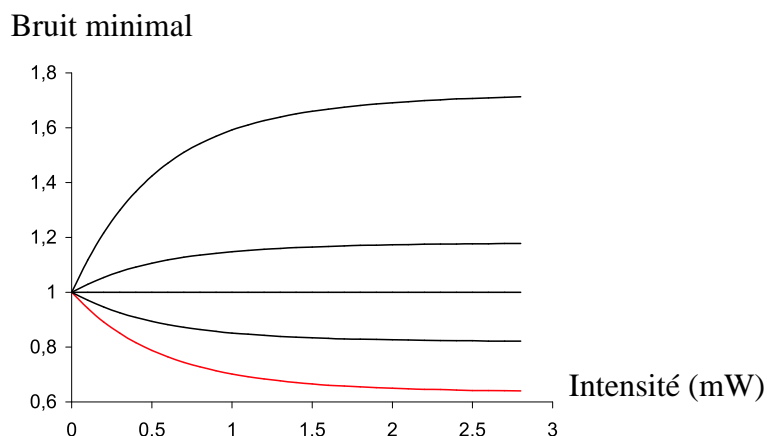


Fig. 4.8 – Bruit minimal obtenu en optimisant la quadrature et le désaccord du laser, en fonction de l'intensité, pour les mêmes valeurs de  $\beta$  que dans la figure 4.7.

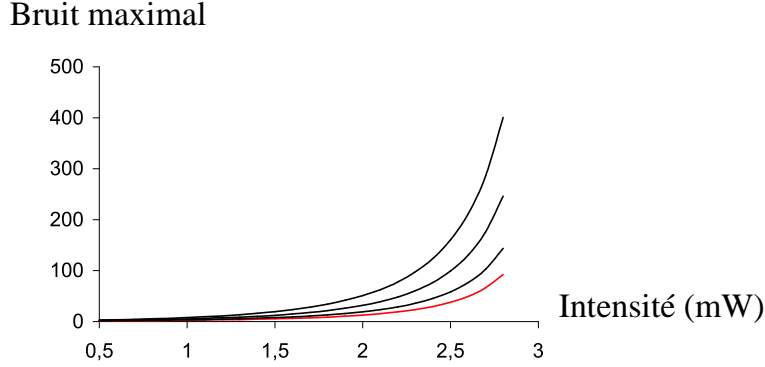


Fig. 4.9 – Bruit maximal obtenu en optimisant la quadrature et le désaccord du laser, en fonction de l'intensité, pour les mêmes valeurs de  $\beta$  que dans la figure 4.7.

La réduction de bruit sature rapidement lorsqu'on s'approche du seuil de bistabilité tandis que le bruit maximal diverge.

*d) Etude en fonction du désaccord exciton-cavité*

Pour quelle valeur du désaccord exciton-cavité peut-on obtenir la compression du bruit la plus efficace? Dans le cas où l'excès de bruit entrant est nul, on peut montrer que la réduction de bruit optimale (obtenue au voisinage d'un point de bistabilité) est égale à :

$$S_{opt} = 1 - C_0^2 \frac{\gamma_1}{\gamma_p} = 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_a + \frac{x_0^2}{C_0^2} \gamma_b} \quad (4-113)$$

Ce résultat permet de préciser la comparaison entre notre système et un milieu Kerr passif dans une cavité optique. Dans le cas du milieu Kerr, le taux de réduction de bruit optimal vaut  $\gamma_1/\gamma_a$ . Il correspond au cas limite de l'expression 4-113 lorsque la fraction excitonique du polariton tend vers zéro.

Le coefficient  $C_0^2$  qui intervient dans cette expression permet d'expliquer simplement pourquoi les performances de ce système sont inférieures à celle du milieu Kerr idéal. L'effet non linéaire concerne les polaritons et on ne peut observer que la partie photonique de ces polaritons. Tout se passe comme si on regardait le champ de polaritons à travers une lame semi-transparente dont le coefficient de transmission en intensité vaut  $C_0^2$ .



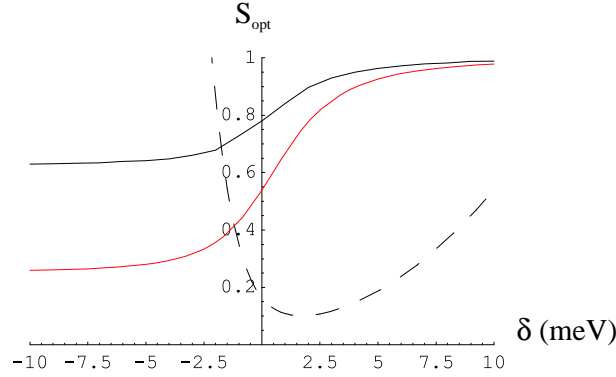


Fig. 4.10 – Taux de réduction de bruit optimal en fonction du désaccord exciton-cavité pour  $\beta=0$  et  $\beta=5.10^{-5}$ ; en tiretés, profil des variations du seuil de bistabilité.

Nous avons représenté figure 4.10 les variations de  $S_{opt}$  en fonction du désaccord exciton-cavité. La réduction de bruit est optimale à désaccord très négatif, lorsque la fraction photonique du polariton tend vers 1. Par contre les seuils de non-linéarité augmentent très rapidement lorsqu'on diminue le désaccord. En se plaçant au voisinage du désaccord nul on réalise un compromis permettant d'obtenir à la fois une réduction notable du bruit (de l'ordre de 30 à 40 %) et des seuils de non-linéarité très bas (de l'ordre de quelques milliwatts). Ce comportement est le même en présence d'un excès de bruit, mais la réduction de bruit est moins importante (10 à 20 % au voisinage du désaccord nul).

Ce compromis est du même type que celui que l'on recherche dans les milieux non linéaires optiques. Loin d'une résonance le milieu tend vers un milieu Kerr parfait mais la non-linéarité est faible. On doit donc se rapprocher de résonance pour avoir une non-linéarité plus forte, au prix d'un bruit parasite plus fort.

Nous concluons ici l'étude du cas d'excitation en incidence normale. Il apparaît que la possibilité d'obtenir une réduction de bruit dépend des caractéristiques de l'échantillon. Il est particulièrement important d'avoir un miroir arrière très réfléchissant et une largeur homogène de l'exciton aussi faible que possible.

## E Excitation à «l'angle magique»

Dans cette partie nous supposons que l'échantillon est excité de façon résonante à l'angle critique  $\theta_c$  défini dans la partie C.3. Rappelons que lorsque l'angle d'incidence  $\theta$  est supérieur ou égal à  $\theta_c$ , il existe des vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  différents de  $\mathbf{k}_L$  tels

que la conversion paramétrique  $\{\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_L\} \longrightarrow \{\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}\}$  satisfait la conservation de l'énergie.

Quels sont les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  solutions pour  $\theta = \theta_c$ ? La figure 4.11 représente la quantité  $|E_P(\mathbf{k}) + E_P(2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}) - 2E_P(\mathbf{k}_L)|$  en fonction de  $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$ ,  $\mathbf{k}_L$  étant orienté suivant  $x$ .

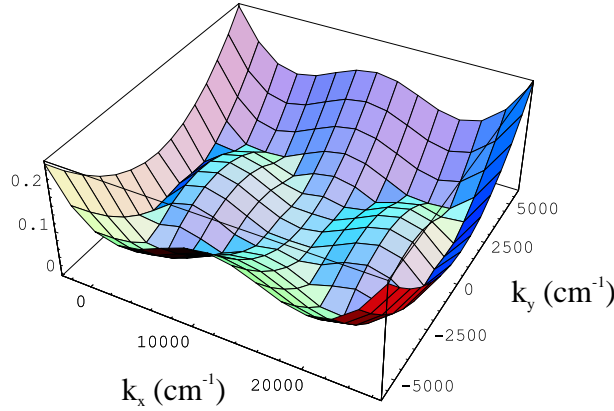


Fig. 4.11 – Tracé de la quantité  $|E_P(\mathbf{k}) + E_P(2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}) - 2E_P(\mathbf{k}_L)|$  en fonction de  $k_x$  et  $k_y$ .

La zone de conservation de l'énergie a la forme d'un double lobe symétrique par rapport au vecteur d'onde d'excitation  $\{k_L, 0\}$ , passant par les points  $\{0, 0\}$  et  $\{2k_L, 0\}$ . L'oscillation paramétrique peut a priori se produire pour une infinité de couples signal-complémentaire  $\{\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}\}$ .

Nous nous intéresserons uniquement au processus  $\{\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_L\} \longrightarrow \{\mathbf{0}, 2\mathbf{k}_L\}$ . En effet c'est le seul pour lequel un seuil d'oscillation a été mis en évidence dans les expériences récentes, les autres processus  $\{\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_L\} \longrightarrow \{\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_L - \mathbf{k}\}$  restant en dessous du seuil.

Si on suppose que l'on est au-dessus du seuil et que seul le couple  $\{\mathbf{0}, 2\mathbf{k}_L\}$  oscille, on peut négliger l'effet des autres modes sur la pompe. Dans ce cas les équations d'évolution des trois modes  $\mathbf{0}, \mathbf{k}_L, 2\mathbf{k}_L$  et leurs équations conjuguées forment un système fermé, que nous allons maintenant étudier.

## E.1 Equations de Heisenberg-Langevin

Comme dans la partie D il est nécessaire de revenir à la base exciton-photon pour calculer les termes de fluctuation. Ici nous écrivons directement les équations d'évolutions des polaritons sans détailler les étapes intermédiaires.

On ne se place pas dans le référentiel tournant à la fréquence du laser  $E_L/\hbar$  comme dans la partie D. Le champ pompe évolue à la fréquence du laser, mais les champ «signal» et «complémentaire» évoluent respectivement aux fréquences  $E_p(0)/\hbar$

et  $E_p(2k_L)/\hbar$ . Donc les opérateurs lentement variables s'écrivent :

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{\mathbf{k}_L}(t) &= p_{\mathbf{k}_L}(t)e^{iE_L t/\hbar} \\ \tilde{p}_0(t) &= p_0(t)e^{iE_p(0)t/\hbar} \\ \tilde{p}_{2\mathbf{k}_L}(t) &= p_{2\mathbf{k}_L}(t)e^{iE_p(2k_L)t/\hbar}\end{aligned}\quad (4-114)$$

De plus on suppose pour simplifier que la cavité a un seul miroir de couplage ( $\gamma_2 = 0$ ). On a donc  $\gamma_1 = \gamma_a$  et un seul champ photonique entrant. Finalement on obtient le système suivant :

$$\frac{d\tilde{p}_0}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left( 2V_{0,\mathbf{k}_L,0}\tilde{p}_{\mathbf{k}_L}^\dagger \tilde{p}_{\mathbf{k}_L} - i\gamma_0 \right) \tilde{p}_0 \quad (4-115)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{p}_{2\mathbf{k}_L}}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} \left( 2V_{2\mathbf{k}_L,\mathbf{k}_L,0}\tilde{p}_{\mathbf{k}_L}^\dagger \tilde{p}_{\mathbf{k}_L} - i\gamma_{2k_L} \right) \tilde{p}_{2\mathbf{k}_L} \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} V_{\mathbf{k}_L,\mathbf{k}_L,\mathbf{k}_L} \tilde{p}_{2\mathbf{k}_L}^\dagger \tilde{p}_{\mathbf{k}_L}^2 e^{i\Delta E t/\hbar} - C_0 \sqrt{2\gamma_a} A_{\mathbf{0}}^{in} + X_0 \sqrt{2\gamma_b} B_{\mathbf{0}}^{in}\end{aligned}\quad (4-116)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{p}_{\mathbf{k}_L}}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} \left( \Delta_L + V_{\mathbf{k}_L,\mathbf{k}_L,0}\tilde{p}_{\mathbf{k}_L}^\dagger \tilde{p}_{\mathbf{k}_L} - i\gamma_{k_L} \right) \tilde{p}_{\mathbf{k}_L} \\ &\quad - \frac{2i}{\hbar} V_{\mathbf{k}_L,\mathbf{k}_L,\mathbf{k}_L} \tilde{p}_{\mathbf{k}_L}^\dagger \tilde{p}_0 \tilde{p}_{2\mathbf{k}_L} e^{-i\Delta E t/\hbar} - C_{k_L} \sqrt{2\gamma_a} A_{\mathbf{k}_L}^{in} + X_{k_L} \sqrt{2\gamma_b} B_{\mathbf{k}_L}^{in}\end{aligned}\quad (4-117)$$

où  $\gamma_q$  désigne le taux de relaxation du polariton de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ ;  $\Delta_L = E_p(k_L) - E_L$  est le déphasage du laser par rapport au polariton de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_L$ ;  $\Delta E = E_p(2k_L) + E_p(0) - 2E_L$  est la variation d'énergie associée au processus paramétrique;  $A_{\mathbf{q}}^{in}$  et  $B_{\mathbf{q}}^{in}$  sont les fluctuations entrantes. Parmi les champs entrants, seul  $A_{\mathbf{k}_L}^{in}$ , qui correspond au champ laser excitateur, a une valeur moyenne non nulle.

Enfin, les équations d'évolution pour les opérateurs  $\tilde{p}_{\mathbf{k}_L}^\dagger$ ,  $\tilde{p}_0^\dagger$  et  $\tilde{p}_{2\mathbf{k}_L}^\dagger$  sont simplement les équations hermitiques conjuguées de 4-115, 4-116 et 4-117 respectivement.

Ces équations ont la même structure que celles d'un oscillateur paramétrique optique (O.P.O.) non-dégénéré avec néanmoins deux différences importantes :

- les champs mis en jeu sont des champs de polaritons et non des champs de photons. Notamment, on ne peut observer à l'extérieur de la microcavité que la partie photonique des champs «signal» et «complémentaire» ;

- d'autres processus non linéaires rentrent en jeu, à savoir  $\{\mathbf{k}, \mathbf{k}_L\} \longrightarrow \{\mathbf{k}, \mathbf{k}_L\}$ . Ils entraînent au premier ordre une renormalisation des énergies (proportionnelle à  $|\langle p_{\mathbf{k}_L} \rangle|^2$ ), mais ils ont aussi un effet sur les fluctuations (proportionnel à  $p_{\mathbf{k}_L}^\dagger p_{\mathbf{k}_L} -$

$|\langle p_{\mathbf{k}_L} \rangle|^2$ ). Par exemple le terme  $-\frac{i}{\hbar} V_{\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_L, 0} p_{\mathbf{k}_L}^\dagger p_{\mathbf{k}_L} p_{\mathbf{k}_L}$  qui apparaît dans l'équation d'évolution de la pompe n'est autre que le terme de type Kerr que nous avons étudié dans la partie précédente.

Remarquons enfin que le processus non linéaire est de type  $\chi^{(3)}$  alors que dans un O.P.O. «traditionnel» il est de type  $\chi^{(2)}$  (un photon «pompe» d'énergie  $\hbar\omega_0$  est converti en un photon «signal» d'énergie  $\hbar\omega_1$  et un photon «complémentaire» d'énergie  $\hbar\omega_2$  avec  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ ). Cependant des O.P.O. utilisant un mélange paramétrique à 4 ondes ont également été réalisés [Granclement 89].

## E.2 Etude des champs moyens au-dessus du seuil

Pour pouvoir obtenir des expressions analytiques pour les champs moyens on néglige les effets de renormalisation en  $|\langle p_{\mathbf{k}_L} \rangle|^2$ . Ceux-ci ne changent pas la physique du problème mais entraînent une très légère modification du vecteur d'onde  $\mathbf{k}_L$  qui assure la conservation de l'énergie pour le processus  $\{\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_L\} \longrightarrow \{\mathbf{0}, 2\mathbf{k}_L\}$ . Lorsqu'on enlève les termes en  $|\langle p_{\mathbf{k}_L} \rangle|^2$  il reste des termes fluctuants proportionnels à  $p_{\mathbf{k}_L}^\dagger p_{\mathbf{k}_L} - |\langle p_{\mathbf{k}_L} \rangle|^2$ . On néglige également ces termes.

On suppose donc que la conservation de l'énergie est assurée et on retire les termes de renormalisation des équations d'évolution. De plus on suppose que le laser est parfaitement résonant ( $\Delta_L=0$ ). Le système devient :

$$\frac{d\tilde{p}_{\mathbf{k}_L}}{dt} = -\gamma_{\mathbf{k}_L} \tilde{p}_{\mathbf{k}_L} - 2iE_{int} \tilde{p}_{\mathbf{k}_L}^\dagger \tilde{p}_0 \tilde{p}_{2\mathbf{k}_L} - C_{k_L} \sqrt{2\gamma_a} A_{\mathbf{k}_L}^{in} + X_{k_L} \sqrt{2\gamma_b} B_{\mathbf{k}_L}^{in} \quad (4-118)$$

$$\frac{d\tilde{p}_0}{dt} = -\gamma_0 \tilde{p}_0 - iE_{int} \tilde{p}_{2\mathbf{k}_L}^\dagger \tilde{p}_{\mathbf{k}_L}^2 - C_0 \sqrt{2\gamma_a} A_0^{in} + X_0 \sqrt{2\gamma_b} B_0^{in} \quad (4-119)$$

$$\frac{d\tilde{p}_{2\mathbf{k}_L}}{dt} = -\gamma_{2\mathbf{k}_L} \tilde{p}_{2\mathbf{k}_L} - iE_{int} \tilde{p}_0^\dagger \tilde{p}_{\mathbf{k}_L}^2 - C_{2k_L} \sqrt{2\gamma_a} A_{2\mathbf{k}_L}^{in} + X_{2k_L} \sqrt{2\gamma_b} B_{2\mathbf{k}_L}^{in} \quad (4-120)$$

avec :

$$E_{int} = \frac{V_{\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_L, \mathbf{k}_L}}{\hbar} \quad (4-121)$$

Les équations conjuguées de 4-118, 4-119 et 4-120 donnent l'évolution des opérateurs de création. On rappelle que les champs entrants excitoniques correspondent à la luminescence des différents modes et sont des champ incohérents (de valeur moyenne nulle). Seul le champ pompe  $A_{\mathbf{k}_L}^{in}$  a une valeur moyenne non nulle. Les équations donnant les valeurs moyennes à l'état stationnaire sont :

$$-\gamma_{k_L} \bar{p}_{\mathbf{k}_L} - 2iE_{int} \bar{p}_{\mathbf{k}_L}^* \bar{p}_0 \bar{p}_{2\mathbf{k}_L} = C_{k_L} \sqrt{2\gamma_a} \bar{A}_{\mathbf{k}_L}^{in} \quad (4-122)$$

$$-\gamma_0 \bar{p}_0 - iE_{int} \bar{p}_{2\mathbf{k}_L}^* \bar{p}_{\mathbf{k}_L}^2 = 0 \quad (4-123)$$

$$-\gamma_{2k_L} \bar{p}_{2\mathbf{k}_L}^* + iE_{int} \bar{p}_0 \bar{p}_{\mathbf{k}_L}^{*2} = 0 \quad (4-124)$$

Pour qu'une solution non triviale existe, le déterminant du système formé par les deux dernières équations doit être nul :

$$E_{int}^2 |\bar{p}_{\mathbf{k}_L}|^4 - \gamma_0 \gamma_{2k_L} = 0 \quad (4-125)$$

ce qui nous donne l'intensité de seuil pour le champ pompe :

$$|\bar{p}_{\mathbf{k}_L}|^2 = \frac{\sqrt{\gamma_0 \gamma_{2k_L}}}{E_{int}} \quad (4-126)$$

L'intensité lumineuse correspondant au seuil est :

$$I_{\mathbf{k}_L, S}^{in} = |\bar{A}_{\mathbf{k}_L, S}^{in}|^2 = \frac{\gamma_{k_L}^2 (\gamma_0 \gamma_{2k_L})^{1/2}}{2\gamma_a C_{k_L}^2 E_{int}} \quad (4-127)$$

On en déduit facilement les intensités des champs signal et complémentaire :

$$|\bar{p}_0|^2 = \frac{\gamma_{k_L}}{2E_{int}} \sqrt{\frac{\gamma_{2k_L}}{\gamma_0}} (\sigma - 1) \quad (4-128)$$

$$|\bar{p}_{2\mathbf{k}_L}|^2 = \frac{\gamma_{k_L}}{2E_{int}} \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_{2k_L}}} (\sigma - 1) \quad (4-129)$$

avec  $\sigma = \sqrt{I_{\mathbf{k}_L}^{in} / I_{\mathbf{k}_L, S}^{in}}$  le paramètre de pompe.

On obtient enfin les intensités lumineuses sortant de la cavité :

$$I_0^{out} = 2\gamma_a C_0^2 |\bar{p}_0|^2 = \frac{\gamma_a \gamma_{k_L} C_0^2}{E_{int}} \sqrt{\frac{\gamma_{2k_L}}{\gamma_0}} (\sigma - 1) \quad (4-130)$$

$$I_{2\mathbf{k}_L}^{out} = 2\gamma_a C_{2k_L}^2 |\bar{p}_{2\mathbf{k}_L}|^2 = \frac{\gamma_a \gamma_{k_L} C_{2k_L}^2}{E_{int}} \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_{2k_L}}} (\sigma - 1) \quad (4-131)$$

Remarquons que ces intensités sont liées par une relation simple :

$$\frac{I_0^{out}}{I_{2\mathbf{k}_L}^{out}} = \frac{\gamma_{2k_L} C_0^2}{\gamma_0 C_{2k_L}^2} \quad (4-132)$$

Avec les paramètres de notre échantillon les fractions photoniques des polaritons «signal» et «complémentaire» sont respectivement  $C_0^2=0.5$  et  $C_{2k_L}^2 \simeq 0.05$ . Si on suppose que les largeurs des deux modes sont égales on trouve un rapport d'intensité de l'ordre de 10.

Pour résumer, au-dessus du seuil tous les polaritons créés par la pompe sont transférés au signal et au complémentaire («déplétion» de la pompe), de sorte que le nombre de polaritons dans le mode de la pompe reste fixe. Ce phénomène est bien connu dans les oscillateurs paramétriques optiques triplement résonants. Les intensités du signal et du complémentaire ont entre elles un rapport fixe et augmentent en racine carrée de l'intensité lumineuse incidente.

### E.3 Etude des fluctuations

#### E.3.1 Equations d'évolution

Comme dans le cas d'excitation à incidence normale, on linéarise les équations d'évolution 4-118, 4-119 et 4-120 autour du point de fonctionnement obtenu. Pour tout vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ , on pose :

$$\tilde{p}_{\mathbf{q}} = \bar{p}_{\mathbf{q}} + \delta p_{\mathbf{q}} \quad (4-133)$$

$$A_{\mathbf{q}}^{in} = \bar{A}_{\mathbf{q}}^{in} + \delta A_{\mathbf{q}}^{in} \quad (4-134)$$

$$B_{\mathbf{q}}^{in} = \bar{B}_{\mathbf{q}}^{in} + \delta B_{\mathbf{q}}^{in} \quad (4-135)$$

avec des définitions analogues pour les opérateurs de création. Les équations linéarisées s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d\delta p_{\mathbf{k}_L}}{dt} = & -\gamma_{\mathbf{k}_L} \delta p_{\mathbf{k}_L} - 2iE_{int} \left( \bar{p}_0 \bar{p}_{2\mathbf{k}_L} \delta p_{\mathbf{k}_L}^\dagger + \bar{p}_{\mathbf{k}_L}^* \bar{p}_{2\mathbf{k}_L} \delta p_0 + \bar{p}_{\mathbf{k}_L}^* \bar{p}_0 \delta p_{2\mathbf{k}_L} \right) \\ & - C_{k_L} \sqrt{2\gamma_a} \delta A_{\mathbf{k}_L}^{in} + X_{\mathbf{k}_L} \sqrt{2\gamma_b} \delta B_{\mathbf{k}_L}^{in} \end{aligned} \quad (4-136)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta p_0}{dt} = & -\gamma_0 \delta p_0 - iE_{int} \left( 2\bar{p}_{2\mathbf{k}_L}^* \bar{p}_{\mathbf{k}_L} \delta p_{\mathbf{k}_L} + \bar{p}_{\mathbf{k}_L}^2 \delta p_{2\mathbf{k}_L}^\dagger \right) \\ & - C_0 \sqrt{2\gamma_a} \delta A_0^{in} + X_0 \sqrt{2\gamma_b} \delta B_0^{in} \end{aligned} \quad (4-137)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta p_{2\mathbf{k}_L}}{dt} = & -\gamma_{2k_L} \delta p_{2\mathbf{k}_L} - iE_{int} \left( 2\bar{p}_0^* \bar{p}_{\mathbf{k}_L} \delta p_{\mathbf{k}_L} + \bar{p}_{\mathbf{k}_L}^2 \delta p_0^\dagger \right) \\ & - C_{2k_L} \sqrt{2\gamma_a} \delta A_{2\mathbf{k}_L}^{in} + X_{2k_L} \sqrt{2\gamma_b} \delta B_{2\mathbf{k}_L}^{in} \end{aligned} \quad (4-138)$$

On a encore les 3 équations complexes conjuguées. Nous pouvons maintenant injecter dans ce système les valeurs moyennes des champs  $p_{\mathbf{k}_L}$ ,  $p_0$  et  $p_{2\mathbf{k}_L}$  que nous avons

calculées au paragraphe précédent (équations 4-126, 4-128 et 4-129). Mais pour cela il faut préciser la phase de ces champs.

La phase du champ pompe est arbitraire (elle est égale à la phase du champ entrant  $A_{\mathbf{k}_L}^{in}$ ). On suppose sa valeur moyenne  $\bar{p}_{\mathbf{k}_L}$  réelle positive. Les relations 4-123 et 4-124 imposent la même relation entre les phases du signal  $\varphi_{\mathbf{0}}$  et du complémentaire  $\varphi_{2\mathbf{k}_L}$ , à savoir :

$$\varphi_{\mathbf{0}} + \varphi_{2\mathbf{k}_L} = -\frac{\pi}{2} \quad (4-139)$$

Par contre, la différence des phases  $\varphi_{\mathbf{0}} - \varphi_{2\mathbf{k}_L}$  est un paramètre libre. On choisit  $\bar{p}_{\mathbf{0}}$  réel positif et donc  $\bar{p}_{2\mathbf{k}_L}$  est imaginaire pur, de partie imaginaire négative. Avec ces choix de phases, les équations d'évolution deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{d\delta p_{\mathbf{k}_L}}{dt} &= -\gamma_{k_L} \left( \delta p_{\mathbf{k}_L} + (\sigma - 1) \delta p_{\mathbf{k}_L}^\dagger \right) - \sqrt{2\gamma_{k_L}\gamma_0(\sigma - 1)}\delta p_{\mathbf{0}} \\ &\quad - i\sqrt{2\gamma_{k_L}\gamma_{2k_L}(\sigma - 1)}\delta p_{2\mathbf{k}_L} - C_{k_L}\sqrt{2\gamma_a}\delta A_{\mathbf{k}_L}^{in} + X_{k_L}\sqrt{2\gamma_b}\delta B_{\mathbf{k}_L}^{in} \end{aligned} \quad (4-140)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta p_{\mathbf{0}}}{dt} &= -\gamma_0\delta p_{\mathbf{0}} + \sqrt{2\gamma_{k_L}\gamma_0(\sigma - 1)}\delta p_{\mathbf{k}_L} - i\sqrt{\gamma_0\gamma_{2k_L}}\delta p_{2\mathbf{k}_L}^\dagger \\ &\quad - C_0\sqrt{2\gamma_a}\delta A_{\mathbf{0}}^{in} + X_0\sqrt{2\gamma_b}\delta B_{\mathbf{0}}^{in} \end{aligned} \quad (4-141)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta p_{2\mathbf{k}_L}}{dt} &= -\gamma_{2k_L}\delta p_{2\mathbf{k}_L} - i\sqrt{2\gamma_{k_L}\gamma_{2k_L}(\sigma - 1)}\delta p_{\mathbf{k}_L} - i\sqrt{\gamma_0\gamma_{2k_L}}\delta p_{\mathbf{0}}^\dagger \\ &\quad - C_{2k_L}\sqrt{2\gamma_a}\delta A_{2\mathbf{k}_L}^{in} + X_{2k_L}\sqrt{2\gamma_b}\delta B_{2\mathbf{k}_L}^{in} \end{aligned} \quad (4-142)$$

$\sigma = \sqrt{I_{\mathbf{k}_L}^{in}/I_{\mathbf{k}_L,S}^{in}}$  est le paramètre de pompe. Ces trois équations et leurs équations conjuguées forment un système de 6 équations à 6 inconnues qui permet de calculer les fluctuations des champs pompe, signal et complémentaire en fonction des fluctuations entrantes. Si l'on veut caractériser entièrement ces fluctuations, on doit calculer leurs matrices de corrélation, comme on l'a fait dans le cas de l'excitation à incidence normale.

Ici nous nous intéressons seulement aux fluctuations d'amplitude et plus particulièrement aux corrélations entre les amplitudes des champs signal et complémentaire. Nous allons voir que pour calculer les fluctuations d'amplitude il suffit de résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues.

### E.3.2 Fluctuations d'amplitude

Introduisons les parties réelle et imaginaire des champs de polaritons :

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbf{q}} &= \delta p_{\mathbf{q}} + \delta p_{\mathbf{q}}^\dagger \\ \beta_{\mathbf{q}} &= -i (\delta p_{\mathbf{q}} - \delta p_{\mathbf{q}}^\dagger)\end{aligned}\quad (4-143)$$

et des définitions analogues pour les champs de photons et d'excitons :

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbf{q}}^{A,in(out)} &= \delta A_{\mathbf{q}}^{in(out)} + \delta A_{\mathbf{q}}^{in(out)\dagger} \\ \beta_{\mathbf{q}}^{A,in(out)} &= -i (\delta A_{\mathbf{q}}^{in(out)} - \delta A_{\mathbf{q}}^{in(out)\dagger}) \\ \alpha_{\mathbf{q}}^{B,in} &= \delta B_{\mathbf{q}}^{in} + \delta B_{\mathbf{q}}^{in\dagger} \\ \beta_{\mathbf{q}}^{B,in} &= -i (\delta B_{\mathbf{q}}^{in} - \delta B_{\mathbf{q}}^{in\dagger})\end{aligned}\quad (4-144)$$

Pour les champs  $p_{\mathbf{k}_L}$  et  $p_0$ , dont la valeur moyenne est réelle,  $\alpha$  donne les fluctuations d'amplitude et  $\beta$  les fluctuations de phase. Pour le champ  $p_{2\mathbf{k}_L}$  qui est imaginaire pur, c'est  $-\beta$  qui donne les fluctuations d'amplitude et  $\alpha$  les fluctuations de phase.

Les équations d'évolution pour les fluctuations d'amplitude des trois champs s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_{\mathbf{k}_L}}{dt} &= -\gamma_{k_L} \sigma \alpha_{\mathbf{k}_L} - \sqrt{2\gamma_{k_L} \gamma_0 (\sigma - 1)} \alpha_0 + \sqrt{2\gamma_{k_L} \gamma_{2k_L} (\sigma - 1)} \beta_{2\mathbf{k}_L} \\ &\quad - C_{k_L} \sqrt{2\gamma_a} \alpha_{\mathbf{k}_L}^{A,in} + X_{k_L} \sqrt{2\gamma_b} \alpha_{\mathbf{k}_L}^{B,in}\end{aligned}\quad (4-145)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_0}{dt} &= -\gamma_0 \alpha_0 + \sqrt{2\gamma_{k_L} \gamma_0 (\sigma - 1)} \alpha_{\mathbf{k}_L} - \sqrt{\gamma_0 \gamma_{2k_L}} \beta_{2\mathbf{k}_L} \\ &\quad - C_0 \sqrt{2\gamma_a} \alpha_0^{A,in} + X_0 \sqrt{2\gamma_b} \alpha_0^{B,in}\end{aligned}\quad (4-146)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\beta_{2\mathbf{k}_L}}{dt} &= -\gamma_{2k_L} \beta_{2\mathbf{k}_L} - \sqrt{2\gamma_{k_L} \gamma_{2k_L} (\sigma - 1)} \alpha_{\mathbf{k}_L} - \sqrt{\gamma_0 \gamma_{2k_L}} \alpha_0 \\ &\quad - C_{2k_L} \sqrt{2\gamma_a} \beta_{2\mathbf{k}_L}^{A,in} + X_{2k_L} \sqrt{2\gamma_b} \beta_{2\mathbf{k}_L}^{B,in}\end{aligned}\quad (4-147)$$

On obtient un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues. On effectue maintenant une transformation de Fourier de manière à manipuler des équations algébriques. Le système s'écrit plus commodément en notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \gamma_{k_L} \sigma - i\Omega & \sqrt{2\gamma_{k_L} \gamma_0 (\sigma - 1)} & -\sqrt{2\gamma_{k_L} \gamma_{2k_L} (\sigma - 1)} \\ -\sqrt{2\gamma_{k_L} \gamma_0 (\sigma - 1)} & \gamma_0 - i\Omega & \sqrt{\gamma_0 \gamma_{2k_L}} \\ \sqrt{2\gamma_{k_L} \gamma_{2k_L} (\sigma - 1)} & \sqrt{\gamma_0 \gamma_{2k_L}} & \gamma_{2k_L} - i\Omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}_L}(\Omega) \\ \alpha_0(\Omega) \\ \beta_{2\mathbf{k}_L}(\Omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_{k_L} \sqrt{2\gamma_a} \alpha_{\mathbf{k}_L}^{A,in} + X_{k_L} \sqrt{2\gamma_b} \alpha_{\mathbf{k}_L}^{B,in} \\ -C_0 \sqrt{2\gamma_a} \alpha_0^{A,in} + X_0 \sqrt{2\gamma_b} \alpha_0^{B,in} \\ -C_{2k_L} \sqrt{2\gamma_a} \beta_{2\mathbf{k}_L}^{A,in} + X_{2k_L} \sqrt{2\gamma_b} \beta_{2\mathbf{k}_L}^{B,in} \end{pmatrix}\quad (4-148)$$



L'inversion de la matrice  $3 \times 3$  permet de calculer les fluctuations d'amplitude des champs  $p_{\mathbf{k}_L}$ ,  $p_0$  et  $p_{2\mathbf{k}_L}$  en fonction des fluctuations entrantes. On en déduit les fluctuations d'amplitude des champs lumineux sortants  $\alpha_{\mathbf{q}}^{A, out}$  grâce aux relations 2-50 (relation entrée-sortie) et 4-87 :

$$\alpha_{\mathbf{q}}^{A, out} = -C_q \sqrt{2\gamma_a} \alpha_{\mathbf{q}} - \alpha_{\mathbf{q}}^{A, in} \quad (4-149)$$

Enfin on calcule les spectres de bruit  $S_{\alpha_{\mathbf{q}}}^{A, out}(\Omega)$  et les corrélations  $C_{\alpha_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{q}'}}^{A, out}(\Omega)$ .

### E.3.3 Fluctuations entrantes

Il reste à préciser les spectres de bruits des 6 champs entrants  $A_{\mathbf{k}_L}^{in}$ ,  $A_0^{in}$ ,  $A_{2\mathbf{k}_L}^{in}$ ,  $B_{\mathbf{k}_L}^{in}$ ,  $B_0^{in}$  et  $B_{2\mathbf{k}_L}^{in}$ . Le champ  $A_{\mathbf{k}_L}^{in}$  est le champ laser de pompe, décrit par un état cohérent.  $A_0^{in}$  et  $A_{2\mathbf{k}_L}^{in}$  sont les fluctuations du vide. Par conséquent les matrices de corrélation de ces trois champs s'écrivent :

$$V_{A_{\mathbf{q}}}^{in}(\Omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ pour } \mathbf{q} = \mathbf{0}, \mathbf{k}_L, 2\mathbf{k}_L \quad (4-150)$$

Dans une première approche, on néglige l'excès de bruit apporté par les différents réservoirs excitoniques. Dans ce cas les matrices de corrélation des trois champs  $B_{\mathbf{k}_L}^{in}$ ,  $B_0^{in}$  et  $B_{2\mathbf{k}_L}^{in}$  s'écrivent :

$$V_{B_{\mathbf{q}}}^{in}(\Omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ pour } \mathbf{q} = \mathbf{0}, \mathbf{k}_L, 2\mathbf{k}_L \quad (4-151)$$

Les spectres de bruit des fluctuations d'amplitude entrantes s'écrivent donc :

$$S_{\alpha_{\mathbf{q}}}^{A, in}(\Omega) = S_{\alpha_{\mathbf{q}}}^{B, in}(\Omega) = 1 \text{ pour } \mathbf{q} = \mathbf{0}, \mathbf{k}_L, 2\mathbf{k}_L \quad (4-152)$$

## E.4 Résultats dans le cas équilibré

Dans un premier temps nous nous plaçons dans le cas «équilibré», c'est-à-dire que nous considérerons les pertes du signal et du complémentaire comme identiques. Plus généralement on suppose que le taux de relaxation des polaritons est indépendant du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . C'est le cas si les largeurs de la cavité et de l'exciton sont égales ( $\gamma_a = \gamma_b$ ). On note  $\gamma = \gamma_{k_L} = \gamma_0 = \gamma_{2k_L} = \gamma_a = \gamma_b$ . Nous étudierons plus loin l'effet d'une dissymétrie entre les pertes du signal et du complémentaire.

### E.4.1 Expressions des fluctuations intracavité; différence des fluctuations du signal et du complémentaire

Le calcul de la différence des fluctuations d'amplitude des champs de polariton signal et complémentaire va nous permettre de mettre en lumière les analogies et les différences entre notre système et un oscillateur paramétrique optique. Les fluctuations d'amplitude des champs de polaritons s'écrivent :

$$\alpha_{\mathbf{k}_L}(\Omega) = \frac{1}{D(\Omega)} \left( -\gamma(\Omega + 2i\gamma) \alpha_{\mathbf{k}_L}^{in} - \gamma\sqrt{2(\sigma - 1)}(2\gamma - i\Omega) \alpha_{\mathbf{0}}^{in} \right. \\ \left. + \gamma\sqrt{2(\sigma - 1)}(2\gamma - i\Omega) \beta_{2\mathbf{k}_L}^{in} \right) \quad (4-153)$$

$$\alpha_{\mathbf{0}}(\Omega) = \frac{1}{D(\Omega)} \left( \gamma\sqrt{2(\sigma - 1)}(2\gamma - i\Omega) \alpha_{\mathbf{k}_L}^{in} \right. \\ \left. + (\gamma^2(3\sigma - 2) - \Omega^2 - i\gamma\Omega(\sigma + 1))\alpha_{\mathbf{0}}^{in} + \gamma(\gamma(\sigma - 2) + i\Omega) \beta_{2\mathbf{k}_L}^{in} \right) \quad (4-154)$$

$$\beta_{2\mathbf{k}_L}(\Omega) = \frac{1}{D(\Omega)} \left( -\gamma\sqrt{2(\sigma - 1)}(2\gamma - i\Omega) \alpha_{\mathbf{k}_L}^{in} + \gamma(\gamma(\sigma - 2) + i\Omega) \alpha_{\mathbf{0}}^{in} \right. \\ \left. + (\gamma^2(3\sigma - 2) - \Omega^2 - i\gamma\Omega(\sigma + 1))\beta_{2\mathbf{k}_L}^{in} \right) \quad (4-155)$$

avec

$$D(\Omega) = \gamma [8\gamma^2(\sigma - 1) - \Omega^2(\sigma + 2)] + i\Omega [\gamma^2(4 - 6\sigma) + \Omega^2] \\ \alpha_{\mathbf{0}(\mathbf{k}_L)}^{in} = -C_{0(k_L)} \sqrt{2\gamma_a} \alpha_{\mathbf{0}(\mathbf{k}_L)}^{A,in} + X_{0(k_L)} \sqrt{2\gamma_b} \alpha_{\mathbf{0}(\mathbf{k}_L)}^{B,in} \\ \beta_{2\mathbf{k}_L}^{in} = -C_{2k_L} \sqrt{2\gamma_a} \beta_{2\mathbf{k}_L}^{A,in} + X_{2\mathbf{k}_L} \sqrt{2\gamma_b} \beta_{2\mathbf{k}_L}^{B,in} \quad (4-156)$$

Calculons maintenant les fluctuations de la différence des amplitudes des champs signal et complémentaire. On introduit pour cela la quantité normalisée :

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_{\mathbf{0}} + \beta_{2\mathbf{k}_L}) \quad (4-157)$$

$$r(\Omega) = (4\gamma^2(\sigma - 1) - \Omega^2 - i\Omega\gamma\sigma) r^{in} \quad (4-158) \\ \text{avec } r^{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_{\mathbf{0}}^{in} + \beta_{2\mathbf{k}_L}^{in})$$

Il est important de noter que  $r$  n'est pas sensible aux fluctuations de la pompe, qui s'annulent lorsqu'on forme la différence. Cette propriété est à la base de la génération

de faisceaux jumeaux par un oscillateur paramétrique optique. On obtient notamment un bruit nul lorsque  $\Omega = 0$  et  $\sigma \rightarrow 1$ .

Dans un oscillateur paramétrique optique dégénéré ou quasi-dégénéré la symétrie entre signal et complémentaire est conservée à l'extérieur de la cavité, car les deux champs intracavité sont des champs de photons de même fréquence couplés de manière identique au champ extérieur. Par contre dans une microcavité les champs signal et complémentaire sont composés de polaritons qui n'ont pas la même fraction photonique et on peut donc s'attendre à une réduction significative des corrélations entre les faisceaux lumineux émis.

#### E.4.2 Spectres de bruit des champs sortant ; fonction de corrélation signal-complémentaire

Les spectres de bruit d'amplitude des champs sortants pompe, signal et complémentaire s'écrivent :

$$S_{\alpha_{\mathbf{k}_L}}^{A, out}(\Omega) = 1 + \frac{4\gamma^2 C_{k_L}^2}{|D(\Omega)|^2} F(\Omega) \quad (4-159)$$

$$S_{\alpha_0}^{A, out}(\Omega) = 1 + \frac{8\gamma^4 C_0^2}{|D(\Omega)|^2} G(\Omega) \quad (4-160)$$

$$S_{\beta_{2\mathbf{k}_L}}^{A, out}(\Omega) = 1 + \frac{8\gamma^4 C_{2k_L}^2}{|D(\Omega)|^2} G(\Omega) \quad (4-161)$$

Et les corrélations entre les amplitudes des champs signal et complémentaires, définies dans la partie B.3 de ce chapitre, sont données par :

$$S_{\alpha_0 - \beta_{2\mathbf{k}_L}}^{A, out}(\Omega) = \frac{4\gamma^2 C_0 C_{2k_L}}{|D(\Omega)|^2} H(\Omega) \quad (4-162)$$

avec

$$F(\Omega) = (4\gamma^2 + \Omega^2)(4\gamma^2 - \Omega^2)(\sigma - 1) \quad (4-163)$$

$$G(\Omega) = \gamma^2(-7\sigma^2 + 16\sigma - 8) + \Omega^2(-\sigma^2 + 4\sigma - 2) \quad (4-164)$$

$$H(\Omega) = 2\gamma^4\sigma^2 + \gamma^2\Omega^2(4 - \sigma^2) + \Omega^4 \quad (4-165)$$

La fonction de corrélation normalisée entre les intensités du signal et du complé-

mentaire, définie par la relation 4-35, s'écrit :

$$C_{\alpha_0 - \beta_{2k_L}}^{A, out}(\Omega) = \frac{4\gamma^2 C_0 C_{2k_L} H(\Omega)}{\sqrt{(D(\Omega) + 8\gamma^4 C_0^2 G(\Omega)) (D(\Omega) + 8\gamma^4 C_{2k_L}^2 G(\Omega))}} \quad (4-166)$$

Nous avons représenté sur les figures 4.12, 4.13 et 4.14 les spectres de bruit d'amplitude des champs signal, complémentaire et pompe en fonction du paramètre de pompe  $\sigma = \sqrt{I_{k_L}^{in} / I_{k_L, S}^{in}}$ . La figure 4.15 montre la fonction de corrélation signal-complémentaire normalisée en fonction de l'intensité de pompe.

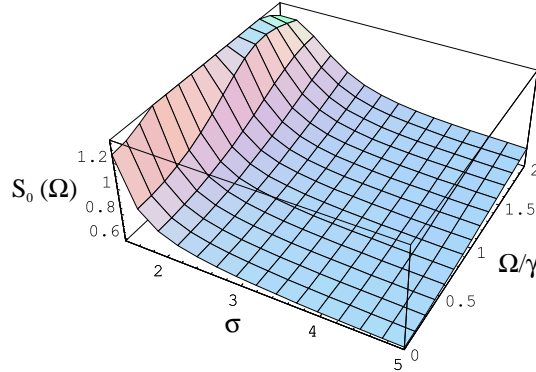


Fig. 4.12 – Bruit d'amplitude du faisceau signal, en fonction de l'intensité et de la fréquence d'analyse.

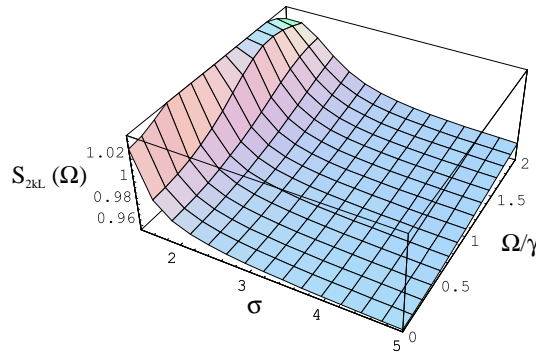


Fig. 4.13 – Bruit d'amplitude du faisceau complémentaire, en fonction de l'intensité et de la fréquence d'analyse.

Les spectres de bruit du signal et du complémentaires ont exactement la même forme, mais les écarts par rapport au bruit quantique standard sont beaucoup moins importants pour le complémentaire, puisque son couplage à la lumière est beaucoup moins efficace. Le rapport des écarts au bruit quantique standard est donné par le

rapport des coefficients photoniques :

$$\frac{S_{\alpha_0}^{A, out}(\Omega) - 1}{S_{\beta_{2k_L}}^{A, out}(\Omega) - 1} = \frac{C_0^2}{C_{2k_L}^2} \quad (4-167)$$

Les fluctuations du signal et du complémentaire divergent lorsque  $\sigma \rightarrow 1^+$ . On obtient une compression de bruit lorsque l'intensité dépasse  $\sigma = 1.55$ , qui se renforce lorsqu'on augmente l'intensité de pompe. La compression du bruit est optimale à fréquence nulle. Elle se dégrade lorsqu'on augmente la fréquence d'analyse pour disparaître lorsque celle-ci devient de l'ordre de  $\gamma$ .

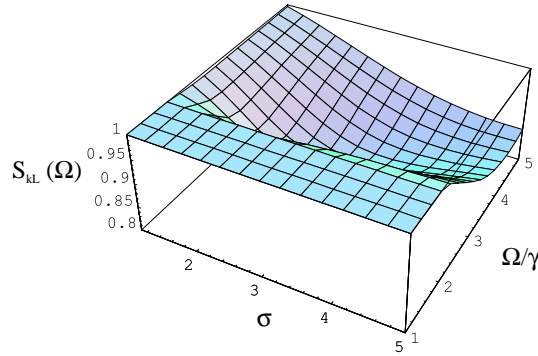


Fig. 4.14 – Bruit d'amplitude du faisceau pompe, en fonction de l'intensité et de la fréquence d'analyse.

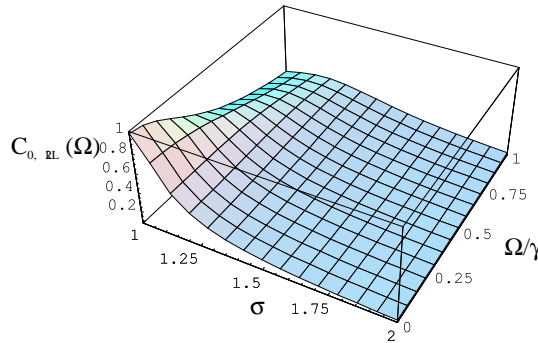


Fig. 4.15 – Corrélation signal-complémentaire, en fonction de l'intensité et de la fréquence d'analyse.

On prévoit également une légère réduction de bruit du faisceau pompe, mais celle-ci n'est pas optimale à fréquence nulle, contrairement au cas des faisceaux signal et complémentaire. On obtient au maximum 15 % de réduction de bruit pour  $\sigma = 3.59$  et  $\Omega = 3.69 \gamma$ .

Le signal et le complémentaire présentent des corrélations très fortes lorsqu'on est légèrement au-dessus du seuil. Les corrélations sont parfaites au voisinage du seuil et à fréquence d'analyse nulle ( $C(\Omega = 0) \rightarrow 1$  lorsque  $\sigma \rightarrow 1^+$ ). Elles se dégradent

rapidement lorsqu'on augmente l'intensité de pompe. Elle décroissent aussi lorsqu'on augmente la fréquence d'analyse et disparaissent lorsque celle-ci devient de l'ordre de la largeur de raie  $\gamma$ .

### E.4.3 Etude à fréquence nulle

En pratique, la fréquence d'analyse est de l'ordre de 10MHz (voir chapitre 5), plusieurs ordres de grandeur en dessous des largeurs de raies. On peut donc considérer que l'on mesure les fluctuations à fréquence nulle. Les expressions à fréquence nulle sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 S_{\alpha_{\mathbf{k}_L}}^{A, out}(\Omega = 0) &= 1 + \frac{C_{k_L}^2}{\sigma - 1} \\
 S_{\alpha_0}^{A, out}(\Omega = 0) &= 1 - C_0^2 \frac{J(\sigma)}{8(\sigma - 1)^2} \\
 S_{\beta_{2\mathbf{k}_L}}^{A, out}(\Omega = 0) &= 1 - C_{2k_L}^2 \frac{J(\sigma)}{8(\sigma - 1)^2} \\
 C_{\alpha_0 - \beta_{2\mathbf{k}_L}}^{A, out}(\Omega = 0) &= \frac{C_0 C_{2k_L} \sigma^2}{\sqrt{\{8(\sigma - 1)^2 - C_0^2 J(\sigma)\} \{8(\sigma - 1)^2 - C_{2k_L}^2 J(\sigma)\}}}
 \end{aligned} \tag{4-168}$$

avec

$$J(\sigma) = 7\sigma^2 - 16\sigma + 8 \tag{4-169}$$

Nous avons tracé ces quantités sur les figures 4.16 à 4.19.

Les réductions de bruit optimales pour le signal et le complémentaire sont obtenues dans la limite d'une intensité de pompe infinie et valent :

$$\begin{aligned}
 S_{\alpha_0}^{A, out}(\Omega = 0) &\rightarrow 1 - \frac{7C_0^2}{8} \text{ et} \\
 S_{\beta_{2\mathbf{k}_L}}^{A, out}(\Omega = 0) &\rightarrow 1 - \frac{7C_{2k_L}^2}{8} \text{ lorsque } \sigma \rightarrow +\infty
 \end{aligned} \tag{4-170}$$

mais seules de très faibles corrélations subsistent :

$$C_{\alpha_0 - \beta_{2\mathbf{k}_L}}^{A, out}(\Omega = 0) \rightarrow \frac{C_0 C_{2k_L}}{\sqrt{(8 - 7C_0^2)(8 - 7C_{2k_L}^2)}} \text{ lorsque } \sigma \rightarrow +\infty \tag{4-171}$$

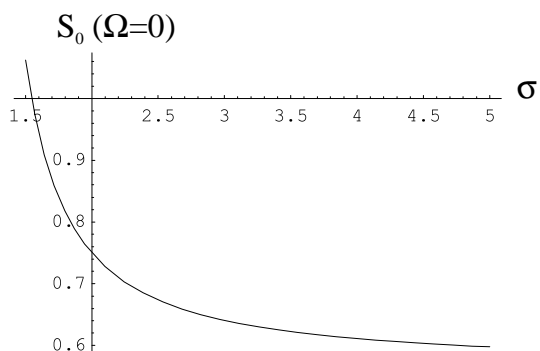


Fig. 4.16 – Bruit d'amplitude à fréquence nulle du faisceau signal, en fonction de l'intensité.

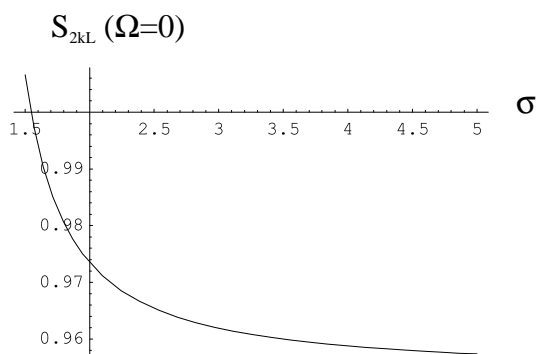


Fig. 4.17 – Bruit d'amplitude à fréquence nulle du faisceau complémentaire, en fonction de l'intensité.

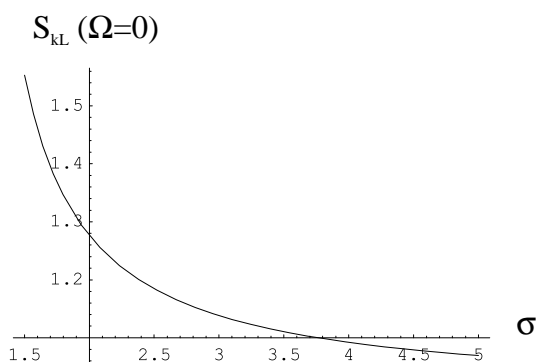


Fig. 4.18 – Bruit d'amplitude à fréquence nulle du faisceau pompe, en fonction de l'intensité.

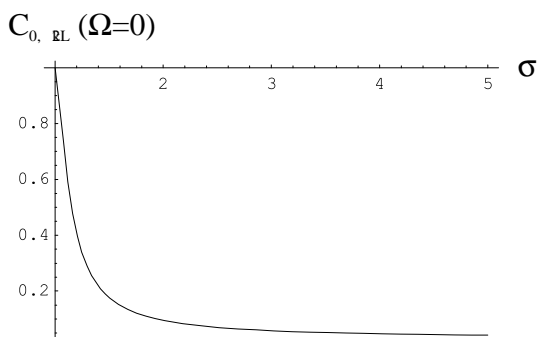


Fig. 4.19 – Corrélation signal-complémentaire à fréquence nulle, en fonction de l'intensité.

#### E.4.4 Les corrélations sont-elles quantiques ?

Notre modèle prévoit une forte corrélation d'intensité entre les faisceaux signal et complémentaire. Nous appliquons maintenant les différents critères définis dans la partie B.3.3. pour étudier le caractère quantique de ces corrélations.

Nous commençons par étudier les critères de réduction de bruit sur la différence des intensités. Le faisceau signal étant beaucoup plus intense que le complémentaire (dans le cas de notre échantillon le rapport des intensités vaut 10), la différence des intensités n'est pas une quantité adaptée à la mise en évidence des corrélations : il faut compenser le déséquilibre soit en introduisant des pertes optiques sur le faisceau le plus intense, soit en amplifiant le photocourant généré par le faisceau complémentaire. La deuxième solution est la plus adaptée aux conditions expérimentales car elle permet de mesurer des signaux plus importants et donc d'améliorer le rapport signal à bruit.

##### *a) Différence des intensités après amplification du bruit du complémentaire*

On suppose que l'on amplifie électroniquement le signal de bruit du faisceau complémentaire avant de mesurer les fluctuations de la différence des intensités ; pour chaque valeur de l'intensité le facteur d'amplification doit être optimisé pour obtenir la meilleure réduction de bruit. La figure 4.20 représente le bruit obtenu à fréquence d'analyse nulle (calculé d'après la relation 4-45), en fonction de l'intensité de pompe. Le bruit est normalisé au bruit quantique standard ; le critère de corrélation quantique 4-46 est satisfait si et seulement si ce bruit est inférieur à 1.

On obtient une réduction de bruit de l'ordre de 10% à proximité du seuil, ce qui est remarquable sachant que les faisceaux signal et complémentaire sont individuellement très bruités. Lorsqu'on s'éloigne du seuil la réduction de bruit devient plus importante, bien que les corrélations signal-complémentaire soient beaucoup plus faibles ; la réduction de bruit provient essentiellement de la réduction de bruit d'intensité du faisceau signal. Le taux de réduction obtenu ne dépasse que de très peu celui du signal seul.

##### *b) Critère sur la variance conditionnelle*

Il s'agit d'étudier la variance conditionnelle des fluctuations d'un faisceau connaissant celles de l'autre faisceau (donnée par 4-47). Le critère 4-48 nous dit que les corrélations sont dans le domaine quantique lorsque cette quantité est inférieure à 1.



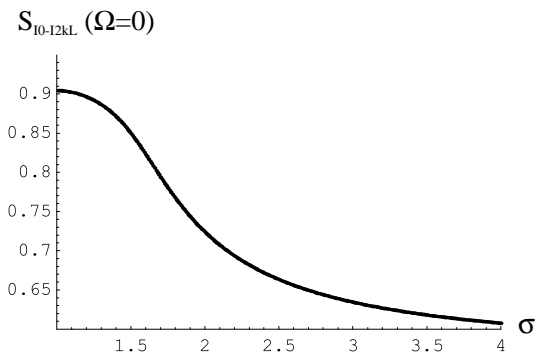


Fig. 4.20 – Spectre de bruit de la différence des intensités après amplification du bruit du complémentaire. Pour chaque valeur de l'intensité le facteur d'amplification est optimisé pour obtenir le bruit le plus bas.

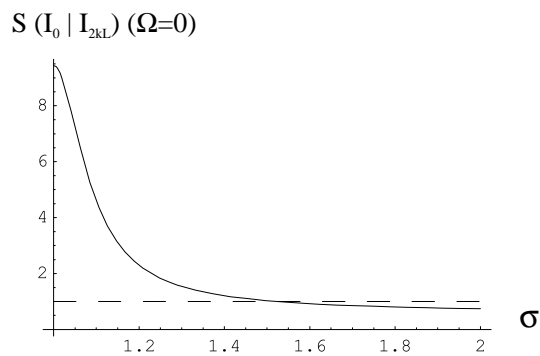


Fig. 4.21 – Variance conditionnelle des fluctuations de l'intensité du signal, connaissant celles du complémentaire.

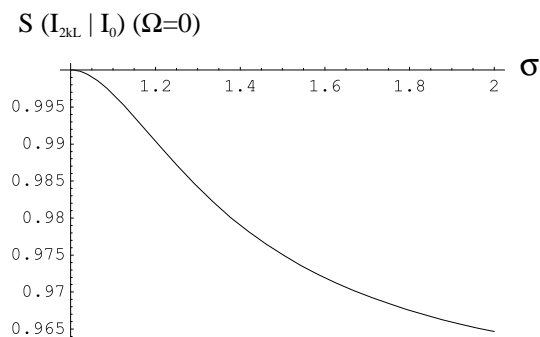


Fig. 4.22 – Variance conditionnelle des fluctuations de l'intensité du complémentaire, connaissant celles du signal.

Du point de vue du faisceau signal (figure 4.21) la zone des corrélations quantiques commence à  $\sigma = 1.53$ , tout près du point où son bruit commence à être réduit en dessous du bruit quantique standard. C'est seulement sur une zone très réduite (entre 1.53 et 1.55) qu'on a des corrélations quantiques (au sens de la variance conditionnelle) entre des faisceaux présentant de l'excès de bruit.

Du point de vue du faisceau complémentaire (figure 4.22) les corrélations se situent toujours dans le domaine quantique, mais les effets sont très faibles. On obtient une réduction de quelques pourcent en dessous de la limite quantique standard.

En conclusion, le modèle prévoit de fortes corrélations au voisinage du seuil, qui diminuent rapidement lorsqu'on s'en éloigne pour donner lieu essentiellement à une réduction de bruit importante sur le faisceau signal. L'information quantique contenue dans ces corrélations est cependant faible. Cela est dû essentiellement au fait que l'on n'observe que la partie photonique des polaritons (ce qui correspond à des pertes, comme dans le cas d'excitation à angle nul) et à la dissymétrie entre signal et complémentaire.

Nous avons supposé jusqu'ici que les taux de relaxation sont les mêmes pour les trois modes en jeu. Dans ce cas le rapport d'intensité entre signal et complémentaire est donné par le rapport de leurs fractions photoniques qui est de l'ordre de 10 pour notre échantillon. Cependant plusieurs groupes ont mesuré des différences d'intensité beaucoup plus grandes, atteignant des valeurs de l'ordre de  $10^2$  pour Savvidis *et. al* et de  $10^4$  pour Saba *et. al*. Cette dissymétrie supplémentaire est due au fait que le complémentaire subit des pertes plus importantes que le signal. En effet les excitons de vecteur d'onde  $2\mathbf{k}_L$  ont une énergie très proche de celles des excitons non radiatifs ; la diffusion vers ces états est favorisée par leur grande densité d'états (par rapport à la densité d'états à faible  $\mathbf{k}$ ). Une grande partie de l'énergie est perdue par émission dans les «modes de fuite» de la cavité (voir le chapitre 1 pour une définition de ces modes).

## E.5 Prise en compte du déséquilibre signal-complémentaire

On attribue donc aux excitons du mode complémentaire une largeur  $\gamma_{b\ 2k_L}$  plus grande que les largeurs respectives  $\gamma_{b\ k_L}$  et  $\gamma_{b\ 0}$  des excitons de la pompe et du signal. Par contre le taux de relaxation du champ dans la cavité  $\gamma_a$  est indépendant du vecteur d'onde puisque les trois vecteurs d'onde en jeu sont à l'intérieur de la plage de réflectivité maximale des miroirs de Bragg (voir figure 1.7).

Les bruits à fréquence nulle des trois faisceaux sortants et la fonction de corrélation signal-complémentaire s'écrivent :

$$\begin{aligned}
S_{\alpha_{\mathbf{k}_L}}^{A, out}(\Omega = 0) &= 1 + C_{k_L}^2 \frac{\gamma_a}{\gamma_{k_L}(\sigma - 1)} \\
S_{\alpha_0}^{A, out}(\Omega = 0) &= 1 - C_0^2 \frac{\gamma_a}{\gamma_0} \frac{7\sigma^2 - 16\sigma + 8}{8(\sigma - 1)^2} \\
S_{\beta_{2\mathbf{k}_L}}^{A, out}(\Omega = 0) &= 1 - C_{2k_L}^2 \frac{\gamma_a}{\gamma_{2k_L}} \frac{7\sigma^2 - 16\sigma + 8}{8(\sigma - 1)^2} \\
S_{\alpha_0 - \beta_{2\mathbf{k}_L}}^{A, out}(\Omega = 0) &= \frac{\gamma_a}{\sqrt{\gamma_0 \gamma_{2k_L}}} \frac{C_0 C_{2k_L} \sigma^2}{8(\sigma - 1)^2}
\end{aligned} \tag{4-172}$$

Par rapport au cas équilibré, les écarts au bruit quantique standard des faisceaux pompe, signal, complémentaire sont respectivement multipliés par des facteurs  $\frac{\gamma_a}{\gamma_{k_L}}$ ,  $\frac{\gamma_a}{\gamma_0}$  et  $\frac{\gamma_a}{\gamma_{2k_L}}$ . La corrélation est multipliée par un facteur  $\gamma_a/\sqrt{\gamma_0 \gamma_{2k_L}}$ .

Les bruits d'intensité de la pompe et du signal sont donc peu affectés par le dés-équilibre. Par contre les effets de réduction de bruit sont fortement atténués sur le complémentaire et deviennent complètement négligeables.

La fonction de corrélation normalisée est représentée figure 4.23. De fortes corrélations subsistent au voisinage du seuil : la fonction de corrélation normalisée tend toujours vers 1 lorsque  $\sigma \rightarrow 1^+$ . Lorsqu'on s'éloigne du seuil les corrélations décroissent plus rapidement que dans le cas équilibré.

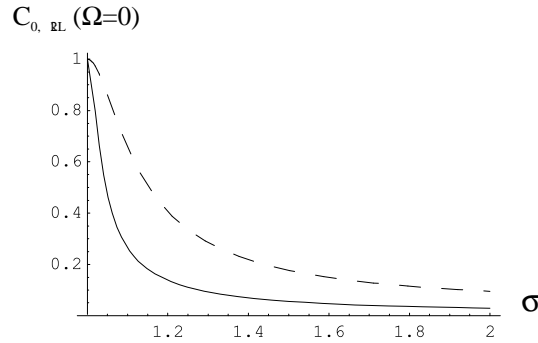


Fig. 4.23 – Corrélation signal-complémentaire à fréquence nulle en fonction de l'intensité, pour  $\gamma_{2k_L} = 10\gamma_0$ . Le cas équilibré est représenté en pointillés.

Le critère quantique sur la différence des intensités ainsi que le critère sur la variance conditionnelle du complémentaire sont toujours satisfaits. Cependant la réduction de bruit est négligeable à proximité du seuil, comme on le voit sur la figure 4.24.

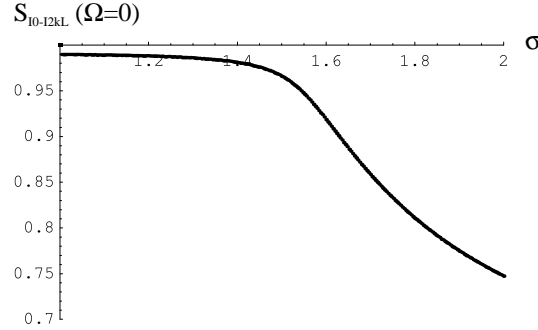


Fig. 4.24 – Spectre de bruit de la différence des intensités après amplification du bruit du complémentaire. Pour chaque valeur de l'intensité le facteur d'amplification est optimisé pour obtenir le bruit le plus bas.

Les pertes subies par le faisceau complémentaire entraînent donc une réduction très importante des effets quantiques. Pour obtenir des effets quantiques mesurables il faut remédier à ce déséquilibre ; une solution consiste à utiliser une cavité de moins bonne finesse. On peut ainsi obtenir une situation où le temps de vie radiatif du complémentaire est nettement plus court que son temps de diffusion vers le réservoir excitonique ; l'élargissement non radiatif du complémentaire est alors moins important par rapport à son élargissement radiatif.

Nous étudions maintenant l'effet des excès de bruit sur chacun des modes, correspondant à la luminescence résonante de ces modes.

## E.6 Effet d'un excès de bruit entrant

Nous modélisons la luminescence de la même manière que dans le cas d'excitation à l'angle nul. On suppose que le réservoir excitonique en interaction avec un mode de polariton donné a une population proportionnelle au nombre d'excitons dans ce mode. Sous cette hypothèse les matrices de corrélation des trois champs excitoniques entrants  $B_{\mathbf{kL}}^{in}$ ,  $B_{\mathbf{0}}^{in}$  et  $B_{2\mathbf{kL}}^{in}$  s'écrivent :

$$V_{B_{\mathbf{q}}}^{in}(\Omega) = \begin{bmatrix} 1 + n_{\mathbf{q}} & 0 \\ 0 & n_{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \text{ pour } \mathbf{q} = \mathbf{0}, \mathbf{kL}, 2\mathbf{kL} \quad (4-173)$$

avec

$$n_{\mathbf{q}} = \beta |b_{\mathbf{q}}|^2 = \beta X_q^2 |p_{\mathbf{q}}|^2 \quad (4-174)$$

Donc les spectres de bruit des fluctuations d'amplitude entrantes sont données par :

$$S_{\alpha_{\mathbf{q}}}^{B, in}(\Omega) = 1 + 2n_{\mathbf{q}} \quad (4-175)$$

Nous donnons maintenant dans le cas équilibré les expressions des bruits d'intensité à fréquence nulle des trois faisceaux sortants et de la corrélation signal-complémentaire.

$$\begin{aligned} S_{\alpha_{\mathbf{k}_L}}^{A, out}(0) &= 1 + \frac{C_{k_L}^2 (1 + X_0^2 n_0 + X_{2k_L}^2 n_{2\mathbf{k}_L})}{\sigma - 1} \quad (4-176) \\ S_{\alpha_0}^{A, out}(0) &= 1 - C_0^2 \times \\ &\quad \frac{7\sigma^2 - 16\sigma + 8 - 8X_{k_L}^2 n_{\mathbf{k}_L} (\sigma - 1) - X_0^2 n_0 (3\sigma - 2)^2 - X_{2k_L}^2 n_{2\mathbf{k}_L} (\sigma - 2)^2}{8(\sigma - 1)^2} \\ S_{\beta_{2\mathbf{k}_L}}^{A, out}(0) &= 1 - C_{2k_L}^2 \times \\ &\quad \frac{7\sigma^2 - 16\sigma + 8 - 8X_{k_L}^2 n_{\mathbf{k}_L} (\sigma - 1) - X_0^2 n_0 (\sigma - 2)^2 - X_{2k_L}^2 n_{2\mathbf{k}_L} (3\sigma - 2)^2}{8(\sigma - 1)^2} \\ S_{\alpha_0 - \beta_{2\mathbf{k}_L}}^{A, out}(0) &= \frac{C_0 C_{2k_L} (\sigma^2 + 8X_{k_L}^2 n_{\mathbf{k}_L} (\sigma - 1) - (X_0^2 n_0 + X_{2k_L}^2 n_{2\mathbf{k}_L}) (3\sigma^2 - 8\sigma + 4))}{8(\sigma - 1)^2} \end{aligned}$$

Les figures 4.25 à 4.28 montrent les bruits à fréquence nulle des trois champs sortants et la fonction de corrélation signal-complémentaire pour  $\beta=5.10^{-5}$ .

L'excès de bruit entrant fait remonter les niveaux de bruit, en particulier celui du faisceau signal dont la compression de bruit se trouve réduite. Son influence augmente lorsqu'on augmente l'intensité de pompe puisqu'il augmente lui-même linéairement. Cependant les corrélations ne sont pas affectées. Cela provient de ce que l'excès de bruit entrant sur la pompe est distribué de façon égale entre signal et complémentaire et contribue à renforcer les corrélations. C'est pourquoi les corrélations sont toujours dans le domaine quantique selon le critère sur la différence des intensités, même en présence d'excès de bruit (figure 4.29).

Les corrélations quantiques sont finalement peu affectées par l'excès de bruit correspondant à la luminescence des différents modes.

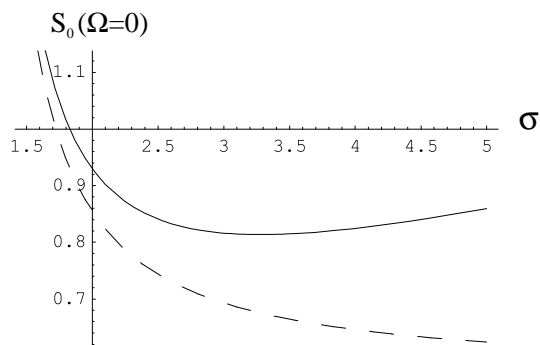


Fig. 4.25 – Bruit à fréquence nulle du signal en fonction de l'intensité, avec un excès de bruit entrant  $\beta=5.10^{-5}$ . Le cas idéal est représenté en pointillés.

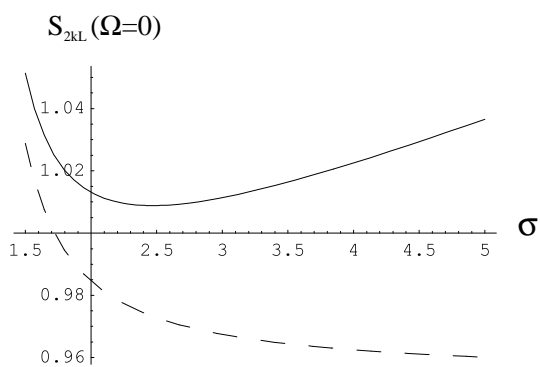


Fig. 4.26 – Bruit à fréquence nulle du complémentaire en fonction de l'intensité, avec un excès de bruit entrant  $\beta=5.10^{-5}$ . Le cas idéal est représenté en pointillés.

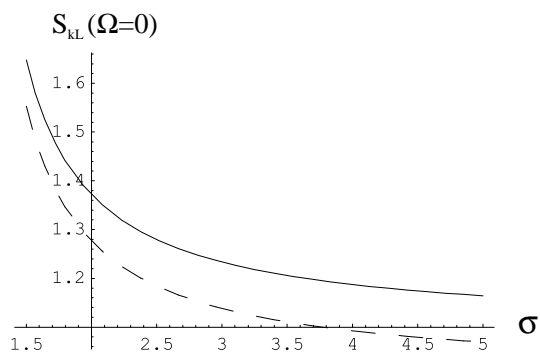


Fig. 4.27 – Bruit à fréquence nulle de la pompe en fonction de l'intensité, avec un excès de bruit entrant  $\beta=5.10^{-5}$ . Le cas idéal est représenté en pointillés.

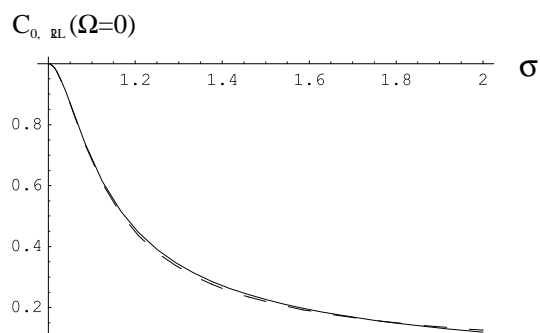


Fig. 4.28 – Fonction de corrélation normalisée en fonction de l'intensité, avec un excès de bruit entrant  $\beta=5.10^{-5}$ . Le cas idéal est représenté en pointillés.

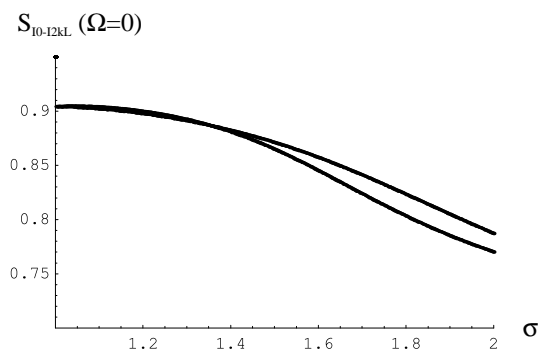


Fig. 4.29 – Bruit sur la différence des intensités du signal et du complémentaire après amplification du bruit du complémentaire, pour  $\beta=0$  et  $\beta=5.10^{-5}$ .

Ceci conclut notre étude du cas d'excitation à l'«angle magique». Comme dans un oscillateur paramétrique optique on obtient deux faisceaux fortement corrélés en intensité en se plaçant légèrement au-dessus du seuil. Cependant l'information quantique contenue dans ces corrélations est plus faible que dans le cas de l'O.P.O., à cause de la fraction photonique plus faible et des pertes non radiatives plus importantes du complémentaire par rapport au signal. Pour observer des effets quantiques il faut réaliser un meilleur équilibre entre ces deux modes. Celui-ci peut être amélioré en utilisant une cavité de moins bonne finesse.

## Chapitre 5

# Etude expérimentale des fluctuations

## A Dispositif de mesure de bruit

### A.1 Principe de la détection homodyne

La détection homodyne permet de mesurer les fluctuations de toutes les quadratures d'un champ lumineux donné. Pour cela, on le fait interférer avec un champ de même fréquence, habituellement appelé oscillateur local. Une cale piézo-électrique permet de faire varier le chemin parcouru par l'oscillateur local et donc aussi son déphasage  $\theta$  avec le champ mesuré. Les deux faisceaux ont des polarisations linéaires orthogonales. Ils sont recombinaés sur un cube séparateur de polarisation. Pour obtenir des interférences, on utilise un second cube séparateur de polarisation précédé par une lame demi-onde qui fait tourner de  $45^\circ$  la direction de polarisation des deux faisceaux. Deux photodiodes sont placées en réflexion (Ph1) et en transmission (Ph2) du cube (voir figure 5.1).

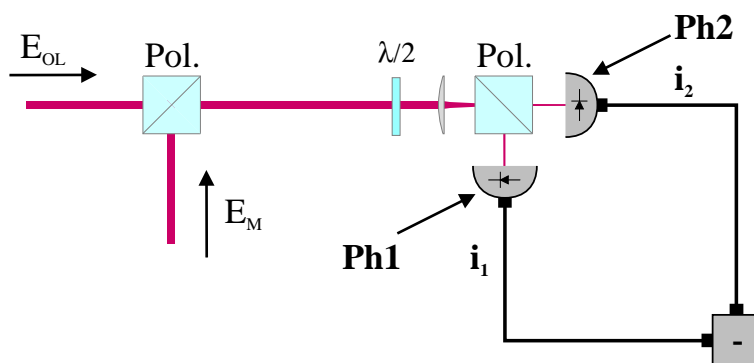


Fig. 5.1 – Schéma de la détection homodyne : le champ à mesurer est recombinaé avec un oscillateur local.

On note respectivement  $E_{OL}$  et  $E_M$  le champ de l'oscillateur local et le champ mesuré incidents sur le cube. Le champ incident sur la photodiode Ph1 est donc égal



à  $(E_{OL} + E_M)/\sqrt{2}$ , tandis que celui incident sur la Ph2 est égal à  $(E_{OL} - E_M)/\sqrt{2}$ . Décomposons  $E_{OL}$  et  $E_M$  en une partie de fréquence négative, contenant les opérateurs d'annihilation et une partie de fréquence positive, contenant les opérateurs de création :

$$E_{OL} = E_{OL}^+ + E_{OL}^- \text{ avec } E_{OL}^+ = A_{OL}(t)e^{-i\omega_L t} \text{ et } E_{OL}^- = A_{OL}^\dagger(t)e^{i\omega_L t} \quad (5-1)$$

$$E_M = E_M^+ + E_M^- \text{ avec } E_M^+ = A_M(t)e^{-i\omega_L t} \text{ et } E_M^- = A_M^\dagger(t)e^{i\omega_L t} \quad (5-2)$$

L'opérateur photocourant  $i$  d'une photodiode éclairée par un champ  $E = E^+ + E^-$  est donné par la théorie de la photodétection [Glauber 65] :

$$i = E^+ E^- \quad (5-3)$$

Les photocourants  $i_1$  et  $i_2$  délivrés par les 2 photodiodes sont donc :

$$i_1 = \frac{(E_{OL}^+ + E_M^+)(E_{OL}^- + E_M^-)}{2} \quad (5-4)$$

$$i_2 = \frac{(E_{OL}^+ - E_M^+)(E_{OL}^- - E_M^-)}{2} \quad (5-5)$$

Ces deux photocourants sont amplifiés avec le même gain  $g$ . Le signal de détection homodyne  $I_-$ , qui est égal à la différence entre ces deux signaux, ne contient que les termes d'interférence :

$$I_- = g(i_1 - i_2) = g(E_{OL}^+ E_M^- + E_M^+ E_{OL}^-) = g\left((A_{OL}(t)A_M^\dagger(t) + A_M(t)A_{OL}^\dagger(t))\right) \quad (5-6)$$

On décompose les champs en valeur moyenne et fluctuations quantiques. L'enveloppe du champ mesuré se met sous la forme :

$$A_M(t) = \langle A_M \rangle + \delta A_M(t) \quad (5-7)$$

Pour écrire celle de l'oscillateur local, il faut tenir compte du déphasage  $\theta$  entre les champs moyens :

$$A_{OL}(t) = \langle A_{OL} \rangle e^{i\theta} + \delta A_{OL}(t) \quad (5-8)$$

où  $\langle A_M \rangle$  et  $\langle A_{OL} \rangle$  sont pris réels. En ne gardant que les termes d'ordre 1 en fluctuations, on trouve que les fluctuations  $\delta I_-$  du signal de détection homodyne sont égales à :

$$\delta I_-(t) = g\left(\langle A_{OL} \rangle \left(\delta A_M(t)e^{i\theta} + \delta A_M^\dagger(t)e^{-i\theta}\right) + \langle A_M \rangle \left(\delta A_{OL}(t) + \delta A_{OL}^\dagger(t)\right)\right) \quad (5-9)$$

### A.1.1 La détection équilibrée : mesure sans oscillateur local

Il est possible de mesurer les fluctuations d'amplitude d'un faisceau sans le faire interférer avec un oscillateur local. C'est alors le faisceau mesuré lui même qui sert d'oscillateur local aux fluctuations du vide rentrant par l'autre voie du cube. En remplaçant  $A_M$  par  $A_{vide}$  et  $A_{OL}$  par  $A_M$  dans l'expression 5-9 on obtient :

$$\delta I_-(t) = g \langle A_M \rangle \left( \delta A_{vide}(t) + \delta A_{vide}^\dagger(t) \right) \quad (5-10)$$

Le spectre de bruit  $S_{I_-}(\Omega)$  de  $I_-$  est proportionnel au spectre de bruit du vide. Pour avoir accès aux fluctuations d'amplitude du faisceau on mesure la somme des photocourants délivrés par les deux photodiodes  $I_+$ , amplifiée par le même facteur  $g$  :

$$I_+ = g(i_1 + i_2) = g \left( E_{vide}^+ E_{vide}^- + E_M^+ E_M^- \right) = g \left( A_{vide}(t) A_{vide}^\dagger(t) + A_M(t) A_M^\dagger(t) \right) \quad (5-11)$$

A l'ordre 1, les fluctuations de ce signal  $\delta I_+$  sont égales à :

$$\delta I_+ = g \langle A_M \rangle \left( \delta A_M(t) + \delta A_M^\dagger(t) \right) \quad (5-12)$$

Le spectre de bruit  $S_{I_+}(\Omega)$  de  $I_+$  est bien proportionnel au spectre de bruit d'amplitude du faisceau mesuré. C'est le bruit que l'on mesurerait en plaçant directement une seule photodiode en face du faisceau (au lieu de séparer celui-ci en deux parties et de resommer les signaux).

L'intérêt de ce dispositif à deux photodiodes est que l'on déduit directement le spectre de bruit d'amplitude normalisé au bruit quantique standard  $S_{E_{M0}}(\Omega)$ , en faisant le rapport :

$$\frac{S_{I_+}(\Omega)}{S_{I_-}(\Omega)} = S_{E_{M0}}(\Omega) \quad (5-13)$$

Autrement dit on n'a pas besoin de connaître le facteur de proportionnalité  $g$ .

### A.1.2 Cas d'un oscillateur local fort

La plupart des expériences de détection homodyne réalisent une situation où le champ moyen de l'oscillateur local est beaucoup plus intense que celui du champ mesuré, alors que leurs fluctuations d'amplitude sont du même ordre de grandeur (en général de l'ordre du bruit quantique standard). Dans ce cas les fluctuations mesurées se réduisent à :

$$\delta I_-(t) = g \langle A_{OL} \rangle \left( \delta A_M(t) e^{i\theta} + \delta A_M^\dagger(t) e^{-i\theta} \right) = g \langle A_{OL} \rangle \delta E_{M\theta} \quad (5-14)$$

Ainsi le spectre de bruit  $S_{I_-}(\Omega)$  de  $I_-$  est proportionnel au spectre de bruit  $S_{E_{M\theta}}(\Omega)$  de  $E_{M\theta}$  ; la détection homodyne permet bien de mesurer les fluctuations des opérateurs de quadratures.

Si on coupe le faisceau mesuré, on mesure un spectre de bruit  $S_{I_-}(\Omega)_{OL}$  proportionnel au spectre de bruit du vide, qui définit donc le niveau de bruit associé au bruit quantique standard. Le spectre de bruit normalisé  $S_{E_{M\theta}}(\Omega)$  des quadratures du faisceau mesuré s'obtient en formant le rapport :

$$\frac{S_{I_-}(\Omega)}{S_{I_-}(\Omega)_{OL}} = S_{E_{M\theta}}(\Omega) \quad (5-15)$$

### A.1.3 Cas général

Comme nous le verrons, nos conditions expérimentales ne nous permettent pas d'avoir un oscillateur local beaucoup plus intense que le champ à mesurer. Dans ce cas on ne peut plus négliger le deuxième terme de de l'équation 5-9. Il est tout de même possible d'obtenir le spectre de bruit normalisé  $S_{E_{M\theta}}(\Omega)$  en formant le rapport :

$$\frac{S_{I_-}(\Omega) - S_{I_-}(\Omega)_M}{S_{I_-}(\Omega)_{OL}} = S_{E_{M\theta}}(\Omega) \quad (5-16)$$

où  $S_{I_-}(\Omega)_M$  est le spectre de bruit mesuré en coupant l'oscillateur local.

### A.1.4 Prise en compte du bruit électronique

Le signal mesuré est en fait la somme du bruit du faisceau lumineux et du bruit électronique provenant des amplificateurs de la chaîne de détection, qui est le bruit que l'on mesure lorsque les photodiodes ne reçoivent pas de lumière. Le bruit «optique» doit être aussi grand que possible par rapport au bruit électronique de façon à avoir un bon rapport signal à bruit. Dans notre montage, le bruit électronique correspond typiquement au bruit quantique standard d'un faisceau de 2mW et les faisceaux mesurés ont une intensité comprise entre 1 et 10mW. Le bruit électronique n'est donc pas négligeable et doit être pris en compte.

Les origines des bruits «optiques» et électroniques étant différentes, ils ne sont pas corrélés. Par conséquent leurs spectres de bruit s'ajoutent. Pour obtenir la contribution «optique» il suffit de retrancher à chaque enregistrement le bruit électronique mesuré dans les mêmes conditions, que l'on note  $S_{I_{\pm}}(\Omega)_{el}$  selon que l'on mesure la somme où la différence des photocourants. Pour les trois types de mesures que nous venons de décrire, les valeurs correctes du bruit normalisés s'écrivent :

- Pour la détection équilibrée :

$$\frac{S_{I_+}(\Omega) - S_{I_+}(\Omega)_{el}}{S_{I_-}(\Omega) - S_{I_-}(\Omega)_{el}} = S_{EM_0}(\Omega) \quad (5-17)$$

- Dans le cas d'un oscillateur local fort :

$$\frac{S_{I_-}(\Omega) - S_{I_-}(\Omega)_{el}}{S_{I_-}(\Omega)_{OL} - S_{I_-}(\Omega)_{el}} = S_{EM_\theta}(\Omega) \quad (5-18)$$

- Dans le cas général :

$$\frac{S_{I_-}(\Omega) - S_{I_-}(\Omega)_M}{S_{I_-}(\Omega)_{OL} - S_{I_-}(\Omega)_{el}} = S_{EM_\theta}(\Omega) \quad (5-19)$$

## A.2 Montage expérimental

Le montage expérimental de mesure de bruit est représenté figure 5.2. La plupart des éléments (le cryostat, la source de lumière, le spectromètre et le circulateur optique) ont déjà été décrits au chapitre 2. Les conditions de focalisation sur l'échantillon ont également été discutées et sont les mêmes qu'au chapitre 2 (la tache focale mesure entre 70 et 80  $\mu m$ ). La lumière réfléchi par la microcavité est maintenant renvoyée sur un système de détection homodyne dont nous venons de décrire le principe.

### A.2.1 Stabilisation en intensité de la source laser

Le faisceau sortant du laser titane-saphir présente des fluctuations d'intensité à basse fréquence de l'ordre de 1 à 2%, dues pour l'essentiel aux vibrations des différents éléments optiques du laser. Le bruit mesuré est sensible à ces fluctuations : par exemple pour un faisceau au bruit quantique standard (dont le spectre de bruit d'intensité est proportionnel à l'intensité moyenne), la précision relative des mesures de bruit est limitée à 2%. De plus la formule 5-19 nous dit que pour obtenir la valeur du bruit normalisé au bruit quantique standard il faut réaliser trois mesures de bruit : une de l'oscillateur local, une du faisceau réfléchi par la microcavité et une de ces deux faisceaux recombines. Les incertitudes liées à ces trois mesures s'ajoutent et deviennent une sérieuse limitation de la précision de nos mesures, notamment si l'on veut mettre en évidence une faible réduction du bruit en dessous de la limite quantique standard. C'est pourquoi nous avons mis en place un asservissement d'intensité destiné à réduire les fluctuations d'intensité à basse fréquence.

Le principe de l'asservissement consiste à utiliser un atténuateur variable piloté par une boucle électronique de contre-réaction qui contrôle l'intensité transmise par

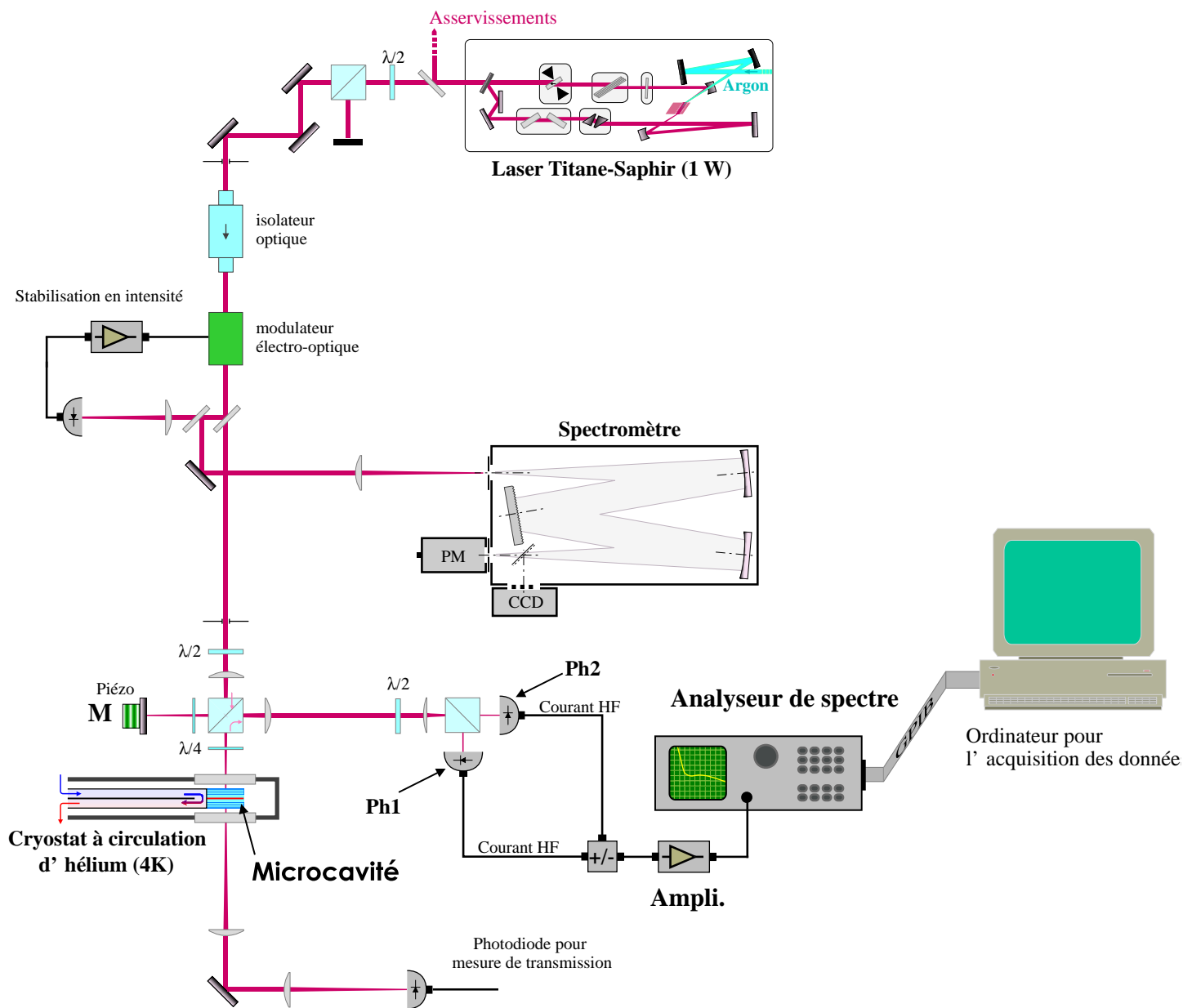


Fig. 5.2 – Schéma du montage expérimental de mesure de bruit.

l'atténuateur. Le faisceau laser étant polarisé linéairement, il traverse un modulateur électro-optique dont les lignes neutres sont à  $45^\circ$  de la polarisation incidente. Les deux composantes du champ qui correspondent aux projections sur les deux lignes neutres subissent des déphasages différents, qui dépendent de la tension appliquée sur l'électro-optique. Le faisceau transmis a donc une polarisation elliptique dont l'ellipticité dépend de la tension appliquée. Pour réaliser un atténuateur variable, il suffit de faire suivre l'électro-optique par un polariseur parallèle à la polarisation du faisceau incident. L'intensité transmise par ce dispositif est donnée par :

$$I^t = \frac{I^{in}}{2} [1 + \cos(\epsilon)] \quad (5-20)$$

où  $\epsilon$  est la différence des déphasages subis par les deux polarisations propres de l'électro-optique, qui est proportionnelle à la tension appliquée. Nous utilisons un électro-optique Csänger *LM202*, monté sur un support New Focus 9082 qui permet un alignement précis.

Le signal d'erreur est fourni par une photodiode qui mesure l'intensité d'une petite partie du faisceau, prélevée en sortie de l'électro-optique par une lame de verre. A l'aide d'un amplificateur différentiel, ce signal est comparé à une tension de référence stable dont on peut faire varier la valeur afin de régler l'intensité moyenne sur laquelle on s'asservit. La fonction de transfert de l'électronique est déterminée par un premier intégrateur de pente globale -6 dB/octave, suivi par un deuxième intégrateur pour les fréquences inférieures à 7 kHz, qui permet d'augmenter le gain basse fréquence.

Pour avoir un gain suffisant, on a intérêt à travailler à mi-transmission du modulateur électro-optique ; en effet c'est autour de ce point de fonctionnement que la transmission est la plus sensible à une variation de la tension appliquée (équation 5-20). On perd donc une moitié de la puissance lumineuse, mais ce n'est pas gênant puisque la puissance de sortie du laser est très nettement supérieure à nos besoins.

Ce dispositif permet de réduire les fluctuations relatives d'intensité à environ 0.2% (voir figure 5.3). L'asservissement est efficace jusqu'à 50 kHz. Nous avons vérifié en utilisant le montage de détection homodyne décrit ci-après que l'asservissement n'introduisait pas d'excès de bruit dans la gamme de fréquence où on mesure les fluctuations.

### A.2.2 Photodiodes

Les deux photodiodes utilisées sont des EG&G FFD 100 dont l'efficacité quantique est de l'ordre de 88% à 830 nm. Il est nécessaire d'avoir des détecteurs d'efficacité quantique élevée, car toute perte tend à ramener les fluctuations détectées au niveau

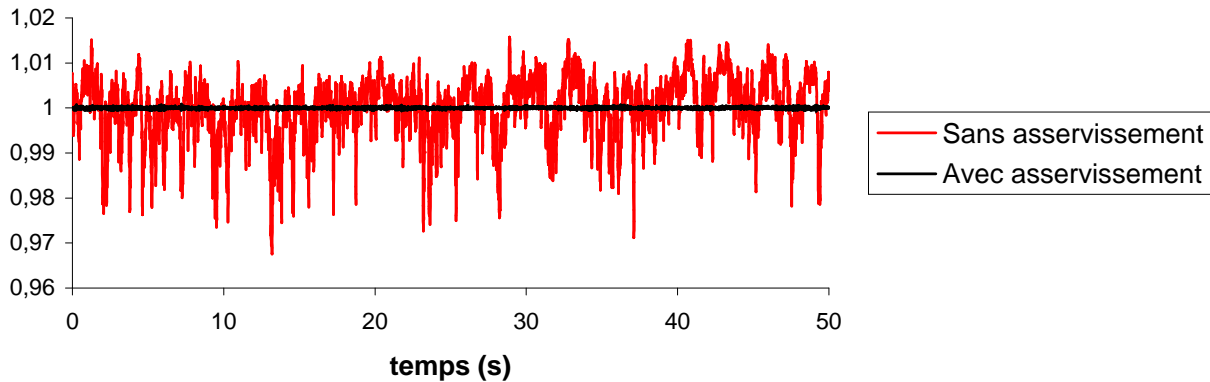


Fig. 5.3 – Enregistrement de l'intensité du laser avec et sans stabilisation de l'intensité. Les intensités sont normalisées par leur valeur moyenne.

du bruit quantique standard. Plus précisément, le spectre de bruit normalisé  $S^\eta(\Omega)$  obtenu avec un détecteur d'efficacité quantique  $\eta$  et le spectre de bruit  $S(\Omega)$  que l'on aurait obtenu avec un détecteur parfait sont liés par la relation :

$$S^\eta(\Omega) = 1 + \eta (S(\Omega) - 1) \quad (5-21)$$

La différence du spectre de bruit par rapport au bruit quantique standard se trouve donc atténuée d'un facteur  $\eta$ . Pour cette même raison, il faut limiter au maximum les pertes optiques subies par le faisceau réfléchi avant sa détection : le chemin parcouru doit être minimisé et les optiques traversées doivent être traitées anti-reflet.

Un autre paramètre important est la bande passante des photodiodes qui détermine la plage de fréquence sur laquelle nous pourrions analyser le bruit. Cette bande passante est limitée par la capacité de la photodiode qui, avec la résistance de charge, constitue un filtre passe-bas qui coupe à plus de 30 MHz.

Les photodiodes sont montées sur un circuit électronique mis au point par Antoine Heidmann, dont le rôle est double : séparer la partie continue du signal ( $\Omega < 15\text{kHz}$ , sortie «DC») de la partie haute fréquence ( $\Omega > 4\text{MHz}$ , sortie «HF») et assurer l'amplification de ces signaux.

La sortie DC fournit une tension proportionnelle au photocourant émis par la photodiode, qui est lui-même proportionnel à l'intensité lumineuse reçue. Elle nous sert à mesurer l'intensité reçue par la photodiode.

Le signal HF est amplifié sur une plage de fréquence allant de 4 à 25 MHz. Les autres fréquences sont coupées pour éviter une éventuelle saturation des détecteurs ou de l'analyseur de spectre par des excès de bruit importants à basse ou haute fréquence. Nous pouvons donc mesurer le bruit à des fréquences d'analyse comprises entre 4 et 25 MHz.

### A.2.3 Le dispositif sommateur-soustracteur

Pour effectuer la somme ou la différence entre les parties haute fréquence des deux photocourants, nous avons employé deux dispositifs couramment utilisés au laboratoire dont on peut trouver la description dans la thèse de Gaétan Messin [Messin 00]. L'un est un dispositif passif constitué de trois diviseurs («splitters») de la marque Mini-Circuit. On passe du mode «sommateur» au mode «soustracteur» en intervertissant deux connecteurs BNC. L'autre est un dispositif actif doté d'un commutateur dont la position détermine le fonctionnement en soustracteur ou en sommateur. Le circuit actif est d'un emploi plus pratique lorsqu'il faut basculer souvent entre somme et différence, c'est-à-dire pour mesurer le bruit d'intensité en détection équilibrée. Par contre, le rapport signal à bruit est alors légèrement moins bon car le circuit actif ajoute du bruit électronique.

### A.2.4 L'analyseur de spectre

Le signal de sortie du sommateur/soustracteur est envoyé vers un analyseur de spectre HP 8560E sur son entrée 50 ohms. On peut tracer des spectres de bruit en faisant varier la fréquence d'analyse de 5 à 20 MHz en quelques secondes, avec un filtre d'analyse de 300 kHz ou 1 MHz et un filtre vidéo de 30 Hz (les signaux varient très lentement sur la bande 5-20 MHz). Cependant la plupart des mesures ont été réalisées à fréquence d'analyse fixe en faisant varier d'autres paramètres. Nous avons choisi comme fréquence d'analyse 7 MHz qui correspond à la meilleure réponse de notre système de détection.

Le signal obtenu à la sortie du sommateur/soustracteur étant parfois du même ordre que le bruit de fond de l'analyseur de spectre, un amplificateur linéaire adapté 50 ohms est placé en fin de chaîne, juste avant l'analyseur de spectre. Il s'agit d'un amplificateur du commerce, de la marque Nuclétudes, qui présente une large bande passante (0.1 à 500 MHz) et un gain de 20 dB.

### A.2.5 L'oscillateur local

On utilise comme oscillateur local une partie du faisceau laser incident sur la microcavité, que l'on prélève au niveau du cube séparateur de polarisation situé devant l'échantillon. En tournant la lame  $\lambda/2$  qui précède le cube, on peut régler les intensités relatives du faisceau envoyé sur la microcavité et de l'oscillateur local. Celui-ci est réfléchi sur un miroir M monté sur une cale piézo-électrique et recombinaison au niveau du



cube avec le faisceau réfléchi par la microcavité. Si l'on souhaite effectuer une mesure sans oscillateur local (détection équilibrée) il suffit de cacher le miroir M.

Avec nos conditions de focalisation sur l'échantillon ( focale de 150 mm), les effets non linéaires se manifestent lorsque la puissance incidente est de l'ordre de quelques milliwatts. Les photodiodes étant efficaces pour des puissances comprises entre 1 et 10 mW l'oscillateur local ne doit pas être trop intense. Lors de nos mesures la puissance de l'oscillateur local était du même ordre que celle du faisceau réfléchi par la cavité (quelques milliwatts).

Si l'on veut que l'oscillateur local soit beaucoup plus intense que le faisceau mesuré (ce qui améliorerait le rapport signal à bruit des mesures) il faut diminuer fortement la focale de la lentille placée devant l'échantillon de façon à abaisser les seuils non linéaires. D'une part cela n'est pas possible à cause de problèmes d'encombrement dus notamment aux vitres du cryostat : on ne peut pas approcher suffisamment la lentille de l'échantillon. D'autre part si les seuils non linéaires sont trop bas (inférieurs à 1mW) on ne peut pas effectuer de mesures de bruit d'intensité (sans oscillateur local) car les signaux sont trop faibles pour les photodétecteurs.

Il est important que la source de lumière utilisée soit au bruit quantique standard sur toutes les quadratures du champ et à toutes les fréquences d'analyse où on étudie le bruit, de façon à ne pas perturber les mesures. Le laser Titane-Saphir répond à ce critère ; nous avons vérifié qu'il était au bruit quantique standard selon toutes les quadratures du champ entre 5 et 20 MHz. Ce résultat était attendu pour deux raisons. D'une part, les fluctuations d'un laser tendent vers le bruit quantique standard lorsqu'on est très au-dessus du seuil (ce qui est notre cas puisque la puissance de sortie dépasse 1 Watt) et en dehors de la bande passante de la cavité. D'autre part, le faisceau de sortie est fortement atténué avant d'irradier la microcavité ; en pratique la puissance incidente ne dépasse jamais 10 mW, ce qui correspond à un facteur d'atténuation de l'ordre de 100. Ces pertes ont pour effet de ramener encore davantage les fluctuations du faisceau au bruit quantique standard.

### A.2.6 Recouvrement spatial

Afin de limiter les pertes de détection, il faut optimiser le recouvrement spatial entre le faisceau mesuré et l'oscillateur local. Pour le contrôler, on utilise la voie DC des photodiodes. Lorsqu'on balaye le déphasage  $\theta$  entre l'oscillateur local et le faisceau mesuré à l'aide d'un générateur basse fréquence, on mesure des oscillations sur la voie DC, qui correspondent à la partie basse fréquence du signal d'interférence. On compare

l'amplitude de ces oscillations à sa valeur dans le cas d'un recouvrement parfait. On note  $V_{OL}$ ,  $V_M$  et  $V_{osc}$  les valeurs des tensions mesurées à l'oscilloscope correspondant respectivement à l'oscillateur local seul, au faisceau mesuré seul et à l'amplitude crête-à-crête des oscillations lorsque les deux faisceaux interfèrent. On a les relations :

$$V_{OL} = g_{DC}I_{OL} \quad (5-22)$$

$$V_M = g_{DC}I_M \quad (5-23)$$

$g_{DC}$  est le gain de la voie DC, qui est le même pour les deux photodiodes lorsque celles-ci sont équilibrées. Lorsque les deux faisceaux interfèrent et si le recouvrement est parfait, le champ incident sur une photodiode est égal à  $(E_{OL} \pm E_M) / \sqrt{2}$  et la tension fournie par la voie DC vaut :

$$V_i = \frac{g_{DC}}{2} \left( I_{OL} + I_M \pm 2\sqrt{I_{OL}I_M}\cos(\theta) \right) = V_{OL} + V_M \pm 2\sqrt{V_{OL}V_M}\cos(\theta) \quad (5-24)$$

où  $\theta$  est la différence de phase entre les deux faisceaux. Le signe + correspond à la photodiode Ph1 (i=1) et le signe - à Ph2 (i=2). L'amplitude des oscillations est égale à  $4\sqrt{V_{OL}V_M}$ . Par conséquent la qualité du recouvrement est donnée par la quantité :

$$\eta = \frac{V_{osc}}{4\sqrt{V_{OL}V_M}} \quad (5-25)$$

Dans notre cas, il est facile d'obtenir un bon recouvrement lorsque le laser incident est désaccordé par rapport aux résonances de la microcavité. En effet la microcavité se comporte alors comme un simple miroir. Le faisceau réfléchi garde la même structure spatiale que celle du faisceau incident, à savoir celle d'un mode Gaussien  $TEM_{00}$ . Nous avons mesuré  $\eta=0.98 \pm 0.02$ .

Par contre lorsque le laser est résonant, le faisceau incident subit une absorption inhomogène à cause du gradient d'épaisseur de l'échantillon (voir chapitre 3), ce qui limite la qualité du recouvrement. Sur les résonances de type «cavité» (à désaccord négatif) cet effet est particulièrement prononcé parce que le gradient d'énergie y est maximal ; le recouvrement peut descendre jusqu'à  $\eta=0.88 \pm 0.02$  à résonance. A désaccord positif ou nul le gradient d'énergie est moins important et le recouvrement atteint 0.90 à 0.95.

### A.2.7 Balayage et asservissement de la phase de l'oscillateur local

Pour effectuer des mesures de détection homodyne valables il est important de contrôler avec précision la différence de phase entre l'oscillateur local et le faisceau réfléchi par la microcavité. Les fluctuations de la différence de phase doivent être petites pendant la durée d'intégration de l'analyseur de spectre, sinon la mesure de bruit sera le résultat d'un moyennage sur l'ensemble des phases parcourues pendant la mesure.

Le bruit de la pompe qui assure la circulation d'hélium dans le cryostat cause malheureusement des vibrations basse fréquence ( $f \sim 50-100$  Hz) importantes de la microcavité et donc des fluctuations de phase du faisceau qui se réfléchit dessus. De manière à compenser ces fluctuations, nous avons réalisé un asservissement qui agit sur la longueur du bras de l'oscillateur local par l'intermédiaire de la cale piézo-électrique pilotant le miroir M. La réponse dynamique du système cale + miroir est suffisamment rapide puisque sa fréquence de résonance se situe vers 5 kHz.

Le signal d'erreur est obtenu en utilisant les sorties basse fréquence (DC) des amplificateurs des deux photodiodes Ph1 et Ph2. D'après la relation 5-24 et en tenant compte de l'imperfection du recouvrement, la différence et la somme des tensions DC s'écrivent :

$$V_- = 2g_{DC}\sqrt{\eta I_{OL}I_M}\cos(\theta) \quad (5-26)$$

$$V_+ = g_{DC}(I_{OL} + I_M) \quad (5-27)$$

On voit que pour fixer un déphasage  $\theta$  il suffit de fixer la tension  $V_-$ . En fait on compare  $V_-$  à une fraction de  $V_+$ , le signal d'erreur étant de la forme  $V_- - \kappa V_+$  où  $\kappa$  peut varier de -1 à +1. L'avantage de cette approche est que la valeur de  $\theta$  sur laquelle on s'asservit n'est pas sensible à d'éventuelles fluctuations d'intensité du faisceau incident :

$$\cos(\theta) = \kappa \frac{I_{OL} + I_M}{2\sqrt{\eta I_{OL}I_M}} \quad (5-28)$$

Le signal d'erreur est obtenu de la façon suivante : à partir des tensions  $V_1$  et  $V_2$  fournies par les deux photodiodes, le signal d'interférence est obtenu grâce à un montage soustracteur. Deux amplificateurs, fonctionnant respectivement en additionneur et en inverseur, permettent d'obtenir les tensions  $V_+$  et  $-V_+$ . Un potentiomètre connecté à ces deux potentiels fournit une tension de la forme  $-\kappa V_+$ . Le signal d'erreur est fourni par un dernier amplificateur qui additionne les tensions  $V_-$  et  $-\kappa V_+$ .

Le signal d'erreur est amplifié à basse fréquence par un intégrateur de pente -6 dB/octave, puis un second intégrateur pour les fréquences inférieures à 700 Hertz.

Ce signal pilote la cale piézo-électrique par l'intermédiaire d'un amplificateur rapide -200/+200 V.

### A.2.8 Test de l'équilibrage

Il est très important pour la validité du calcul du signal de détection homodyne d'avoir deux ensembles photodiode + amplificateur aussi identiques que possible. La procédure d'équilibrage est décrite dans la thèse de Gaétan Messin. On choisit deux photodiodes d'efficacités quantiques aussi proches que possible. L'équilibrage de la partie basse fréquence des amplificateurs des photodiodes permet de réaliser l'équilibrage des puissances optiques envoyées sur les deux voies de la détection homodyne : on tourne la lame  $\lambda/2$  jusqu'à avoir  $\langle i_1 \rangle = \langle i_2 \rangle$ . Enfin, il faut réaliser l'équilibrage des sorties haute fréquence des photodiodes. On joue pour cela sur les composants électroniques des deux montages d'amplification.

Il est possible de caractériser la qualité de l'équilibrage obtenu en mesurant la *réjection* de la chaîne de détection. Pour cela on envoie vers le dispositif de mesure de bruit un faisceau présentant un excès de bruit d'intensité à une fréquence d'analyse  $\Omega$  donnée. Pour produire un tel faisceau on utilise une diode laser dont on module le courant de pompe à la fréquence  $\Omega$ . On mesure alors les spectre de bruit de la somme et de la différence des photocourants produits par les deux photodiodes. Le spectre de bruit de la somme est proportionnel au spectre de bruit d'intensité du faisceau incident et présente donc un pic à la fréquence  $\Omega$ . Si l'équilibrage est parfait, l'excès de bruit se soustrait lorsqu'on fait la différence des photocourants. S'il n'est pas parfait on observe également un pic à la fréquence  $\Omega$  sur le spectre de bruit de la différence. Le taux de réjection à la fréquence  $\Omega$  est le rapport des puissances de bruit des deux pics.

Nous avons mesuré un taux de réjection supérieur à 40dB sur toute la gamme de fréquence accessible (5-20 MHz) ce qui correspond à un équilibrage global meilleur que 1 %.

## B Résultats

Revenons tout d'abord sur les principales prédictions de notre modèle (partie 4-D). Lorsqu'on augmente la densité d'excitation sur la microcavité, l'effet non linéaire provenant de l'interaction coulombienne entre excitons devrait se traduire par plusieurs phénomènes :

- les résonances de réflectivité se déplacent vers le bleu et ce déplacement dépend linéairement de la densité d'excitation ;
- les spectres de réflectivité deviennent de plus en plus asymétriques, jusqu'à devenir bistables ;
- les fluctuations du champ réfléchi acquièrent une dépendance en phase de plus en plus importante. Certaines quadratures sont amplifiées et d'autres sont dé-amplifiées. La dépendance en phase est maximale au voisinage d'un point tournant de bistabilité. En dessous du seuil de bistabilité, elle est maximale sur le flanc le plus raide du creux de réflectivité ;
- la possibilité d'obtenir une réduction du bruit quantique dépend des valeurs relatives du coefficient non linéaire, de l'élargissement de la raie excitonique et du paramètre d'excès de bruit caractérisant le «rendement» de la photoluminescence.

Nous présentons maintenant les résultats expérimentaux dans cet ordre : nous étudions en premier lieu le comportement de la réflectivité lorsqu'on fait varier l'intensité d'excitation. Puis nous nous intéressons aux fluctuations du champ réfléchi. Nous comparons les spectres de réflectivité et de bruit d'intensité obtenus dans les mêmes conditions ; enfin, la dépendance en phase des fluctuations est mise en évidence par des mesures de détection homodyne avec oscillateur local.

### *Position des mesures sur la courbe d'anticroisement*

Tous les spectres présentés ici ont été tracés en déplaçant l'échantillon. Les particularités de cette méthode sont discutées dans le chapitre 3. Pour faciliter l'interprétation des courbes expérimentales nous reproduisons figure 5.4 une courbe d'anticroisement, où les parcours réalisés par la tache d'excitation sur la surface de l'échantillon sont matérialisés par des segments de droites horizontaux.

## **B.1 Etude de la réflectivité**

### **B.1.1 Position des résonances**

La figure 5.5 montre la position des résonances de réflectivité en fonction de l'intensité du laser d'excitation. On observe un déplacement dans le sens des désaccords décroissants, ce qui correspond à un déplacement vers le bleu des énergies. Le sens du déplacement correspond bien à une interaction répulsive entre polaritons.

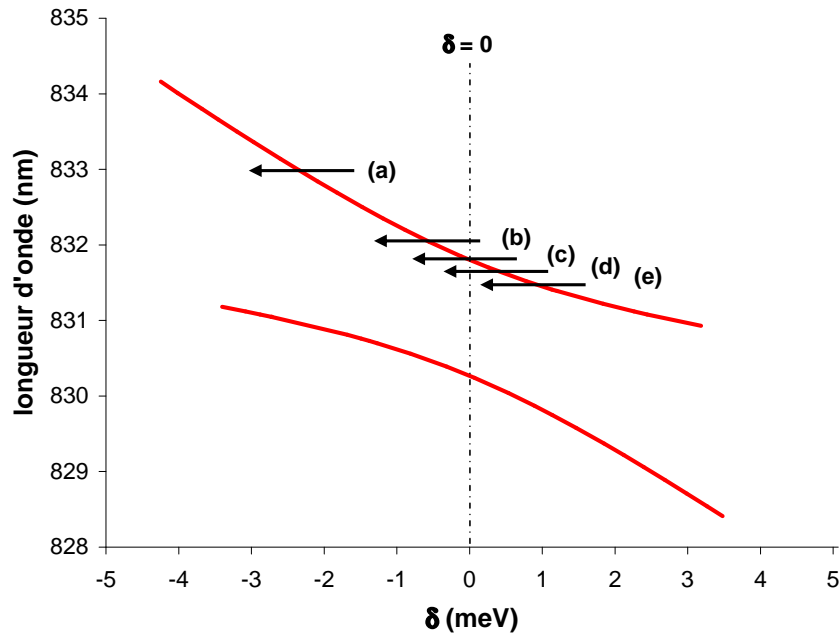


Fig. 5.4 – Longueurs d’onde de résonance en fonction du désaccord exciton-cavité. Les flèches symbolisent le parcours réalisé par la tache focale sur la surface de l’échantillon au cours d’une mesure. Longueurs d’onde représentées : (a) 833 nm, (b) 832.1 nm, (c) 831.8 nm, (d) 831.6 nm, (e) 831.4 nm.

Tenant compte de l’imprécision des mesures de position, les résultats sont parfaitement compatibles avec un déplacement linéaire.

### B.1.2 Spectres de réflectivité

Les figures 5.6 à 5.9 représentent les spectres de réflectivité de la microcavité pour plusieurs valeurs de l’intensité du laser d’excitation. Ils ont été obtenus à partir de la différence des signaux HF de photodiodes (proportionnelle à l’intensité réfléchie). C’est pourquoi le rapport signal à bruit est moins bon que sur les spectres de réflectivité du chapitre 3. Lors de chaque série de mesures la longueur d’onde du laser est fixée et les spectres sont tracés en déplaçant l’échantillon. Cette étude est réalisée pour plusieurs longueurs d’onde d’excitation, correspondant à des désaccords compris entre -2 meV et +0.6 meV.

L’allure des spectres dépend fortement du désaccord choisi. A désaccord positif ou nul, on observe que les raies subissent une déformation importante lorsqu’on augmente l’intensité d’excitation et deviennent bistables à haute intensité. La bistabilité est visible pour  $\lambda=831.58$  nm et  $I=7$  mW (figure 5.6) où le creux de réflectivité présente un

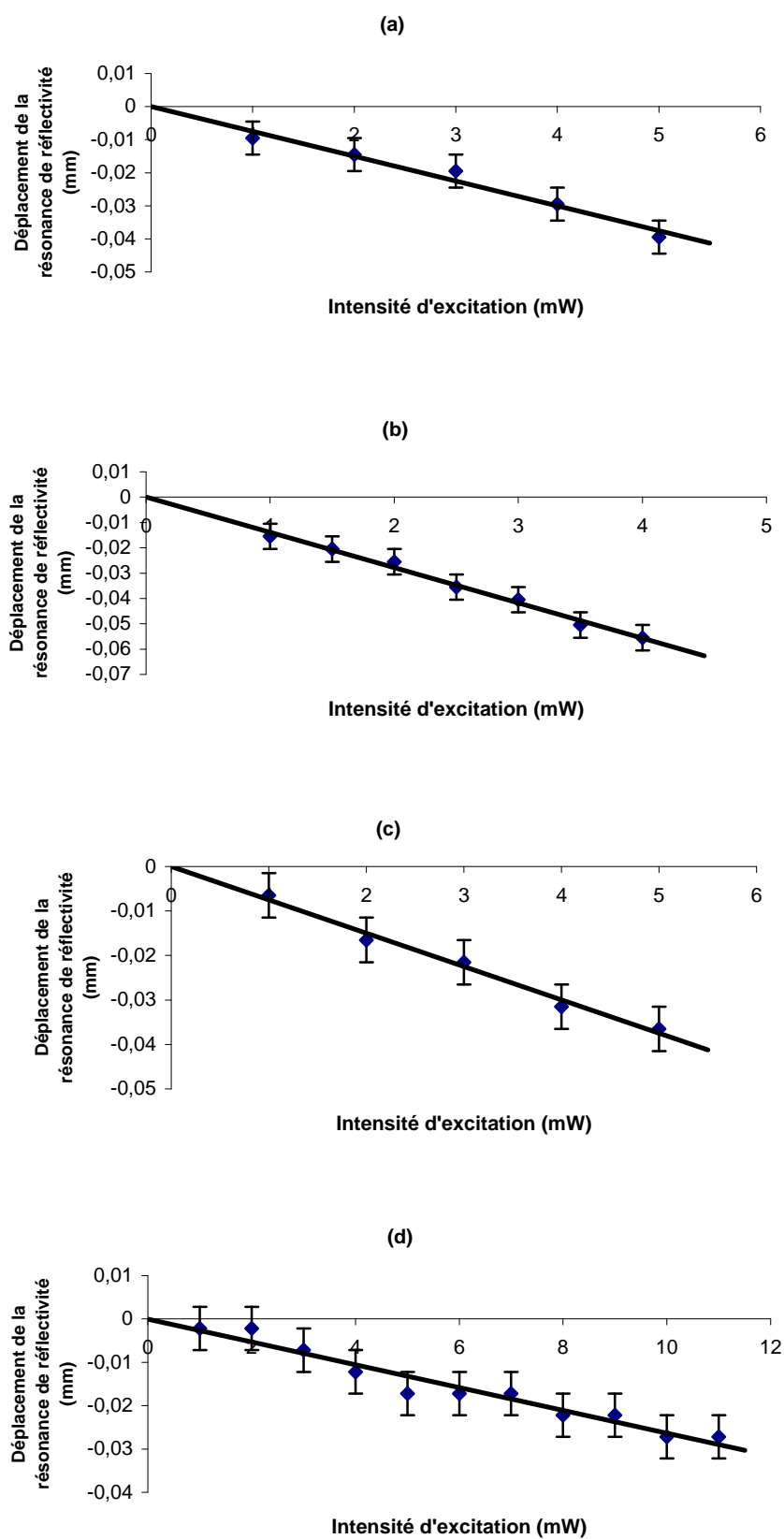


Fig. 5.5 – Déplacement des résonances de réflectivité en fonction de l'intensité d'excitation, pour plusieurs longueurs d'onde : (a) 831.40 nm, (b) 831.51 nm, (c) 831.77 nm, (d) 832.02 nm.

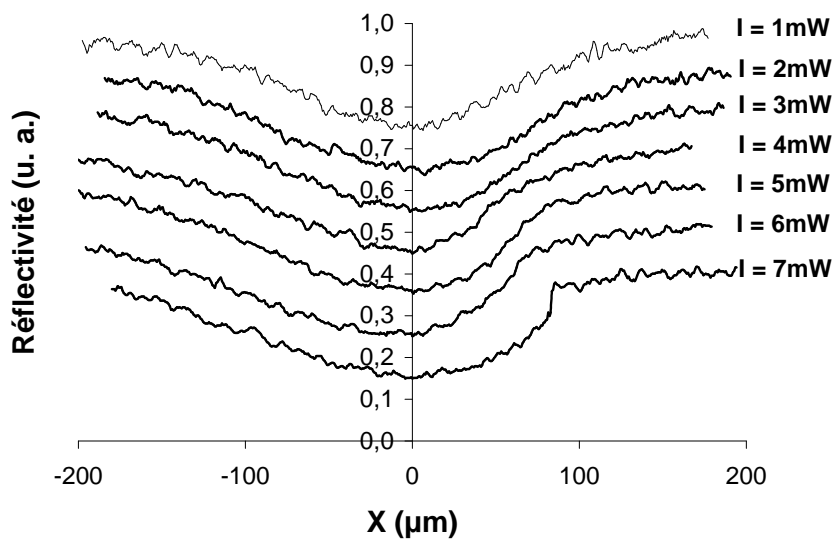


Fig. 5.6 – Profil de la réflectivité en fonction de la position pour plusieurs intensités. La longueur d'onde d'excitation est  $\lambda=831.58$  nm correspondant à  $\delta = +0.6$  meV.

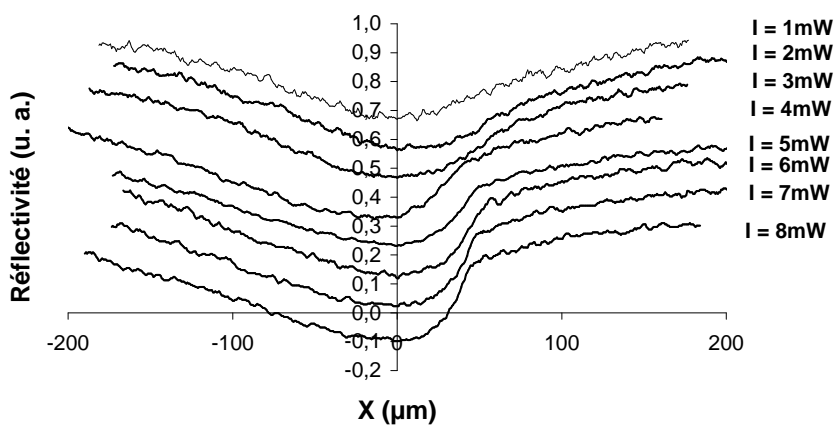


Fig. 5.7 – Profil de la réflectivité en fonction de la position pour plusieurs intensités. La longueur d'onde d'excitation est  $\lambda=831.86$  nm correspondant à  $\delta = -0.1$  meV.



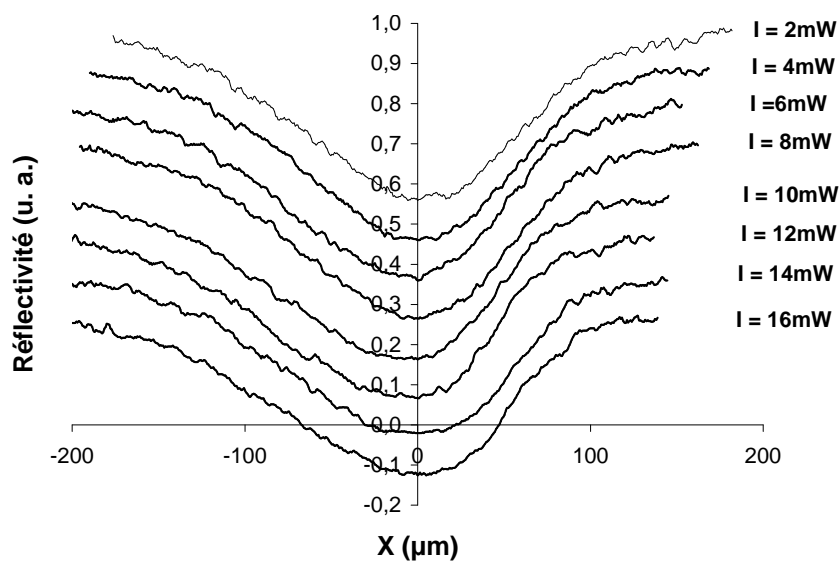


Fig. 5.8 – Profil de la réflectivité en fonction de la position pour plusieurs intensités. La longueur d'onde d'excitation est  $\lambda = 832.10 \text{ nm}$  correspondant à  $\delta = -0.65 \text{ meV}$ .

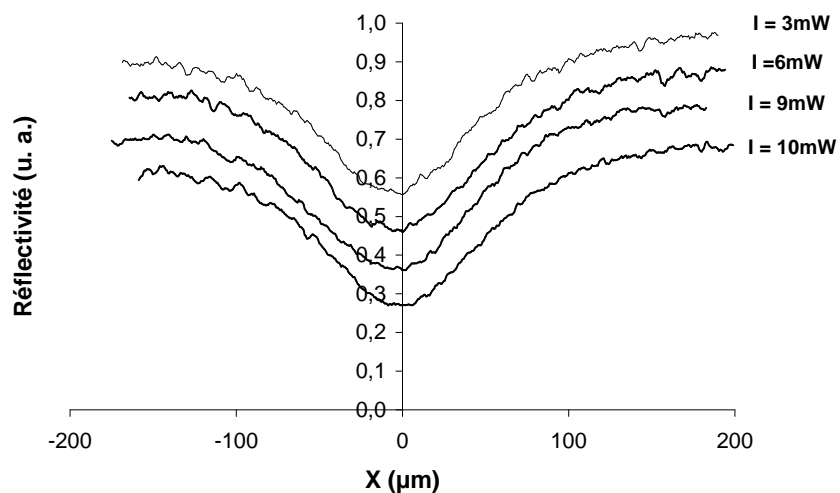


Fig. 5.9 – Profil de la réflectivité en fonction de la position pour plusieurs intensités. La longueur d'onde d'excitation est  $\lambda = 832.84 \text{ nm}$  correspondant à  $\delta = -2 \text{ meV}$ .

bord vertical. L'existence d'une zone de bistabilité a été vérifiée en balayant l'échantillon en sens inverse. Par contre les effets non linéaires n'apparaissent qu'à haute intensité à désaccord négatif.

Ce comportement est en accord avec le modèle. Les effets observés résultent d'un compromis entre non-linéarité (proportionnelle au carré de la fraction excitonique du polariton  $X_0^4$ ) et couplage à la lumière (proportionnel à la fraction photonique du polariton  $C_0^2$ ). Les seuils de bistabilité prévus sont en première approximation proportionnels à  $1/X_0^4 C_0^2$ . Ce résultat est obtenu en négligeant la dépendance de la largeur de raie du polariton en fonction du désaccord dans l'équation 4-84. Les seuils les plus bas sont bien obtenus pour des désaccords légèrement positifs (voir la figure 4.3).

Remarquons que l'ajustement des spectres de réflectivité doit permettre d'estimer la valeur du coefficient non linéaire de l'exciton à condition de connaître précisément les largeurs de raie. Nous présenterons le résultat d'un calcul préliminaire dans le paragraphe suivant.

## B.2 Fluctuations d'intensité du faisceau réfléchi

Nous nous intéressons dans cette partie à la forme des pics de bruit. Pour cela on mesure les fluctuations d'intensité en fonction de la position sur l'échantillon. Pour obtenir le bruit d'intensité normalisé au bruit quantique standard il faut mesurer les bruits de la somme et de la différence des photocourants. On trace successivement les deux spectres correspondants en fonction de la position sur l'échantillon (figure 5.10). Pour synchroniser précisément ces deux signaux on trace simultanément le spectre de transmission qui sert de signal de référence. Enfin le spectre de bruit normalisé au bruit quantique standard est calculé en utilisant la formule 5-17 (figure 5.11).

Nous avons tracé figures 5.12 à 5.15 les spectres de bruit d'intensité du faisceau réfléchi en fonction de l'intensité du laser d'excitation. La fréquence d'analyse est fixée à 7 MHz. Cette étude a été réalisée dans les mêmes conditions que les mesures de réflectivité présentées dans le paragraphe précédent. Nous pouvons ainsi superposer à chaque spectre de bruit le spectre de réflectivité obtenu dans les mêmes conditions.

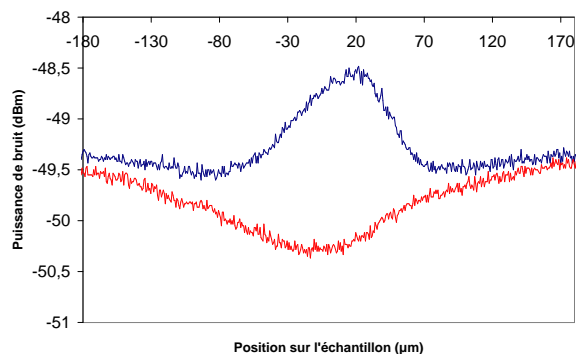


Fig. 5.10 – Exemple de courbe expérimentale brute acquise sur l'analyseur de spectre. Courbe du dessus : puissance de bruit de la somme des photocourants. En dessous : puissance de bruit de la différence des photocourants (proportionnelle à l'intensité réfléchie). Le niveau du bruit électronique est de  $-53$  dBm.

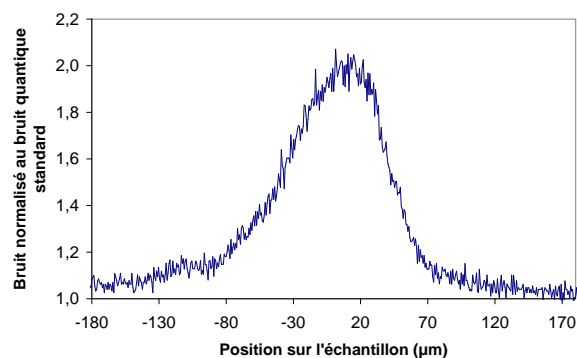


Fig. 5.11 – Bruit normalisé au bruit quantique standard, déduit des courbes expérimentales de la figure 5.10

On constate une corrélation très nette entre les déformations des spectres de réflectivité et de bruit. A basse intensité d'excitation, le spectre de réflectivité reste symétrique et la forme du pic de bruit suit à peu près celle de l'absorption. Lorsqu'on augmente l'intensité d'excitation, on observe simultanément à la déformation du creux de réflectivité une amplification très importante du bruit d'intensité et un rétrécissement du pic de bruit. L'excès de bruit est toujours maximal sur le flanc raide du creux de réflectivité (comparer à la courbe théorique 4.6). En régime bistable, l'excès de bruit est maximal au voisinage du point tournant de bistabilité.

En ce qui concerne la variation des effets non linéaires en fonction du désaccord, on peut faire le même commentaire que pour la réflectivité : l'amplification du bruit est plus prononcée à désaccord légèrement positif ou nul. Lorsque le désaccord devient négatif les seuils d'amplification augmentent rapidement ; par exemple pour  $\lambda=832.84$  nm (correspondant à un désaccord de -2 meV) on n'observe aucune déformation significative des raies sur toute la gamme d'intensité étudiée.

D'un point de vue qualitatif, tous ces résultats sont parfaitement en accord avec notre modèle et valident l'analogie avec un milieu Kerr passif dans une cavité optique.

A titre d'illustration, nous représentons quelques spectres théoriques préliminaires de réflectivité (figure 5.16) et de bruit (figure 5.17) correspondant à la première série de mesures ( $\lambda=831.58$  nm, figure 5.12) obtenus grâce au modèle de la partie 4.D. La valeur de la largeur homogène de l'exciton est de 0.17 meV ; elle a été obtenue en ajustant le spectre de réflectivité à basse intensité d'excitation *en prenant en compte l'effet de taille de tache*. Cette largeur relativement importante pourrait s'expliquer par l'élargissement collisionnel (qui n'est plus négligeable pour de telles densités d'excitation) et par le chauffage local de l'échantillon par le laser. La non-linéarité excitonique vaut  $\alpha_{exc}=1.1 \cdot 10^{-5}$  meV, proche de la valeur théorique de  $1.4 \cdot 10^{-5}$  pour une tache de 80  $\mu\text{m}$  de diamètre.

Le modèle reproduit le déplacement des résonances de réflectivité ainsi que le seuil de bistabilité. Il prédit correctement le rétrécissement du pic de bruit lorsqu'on augmente l'intensité d'excitation ainsi que l'augmentation non linéaire du bruit.

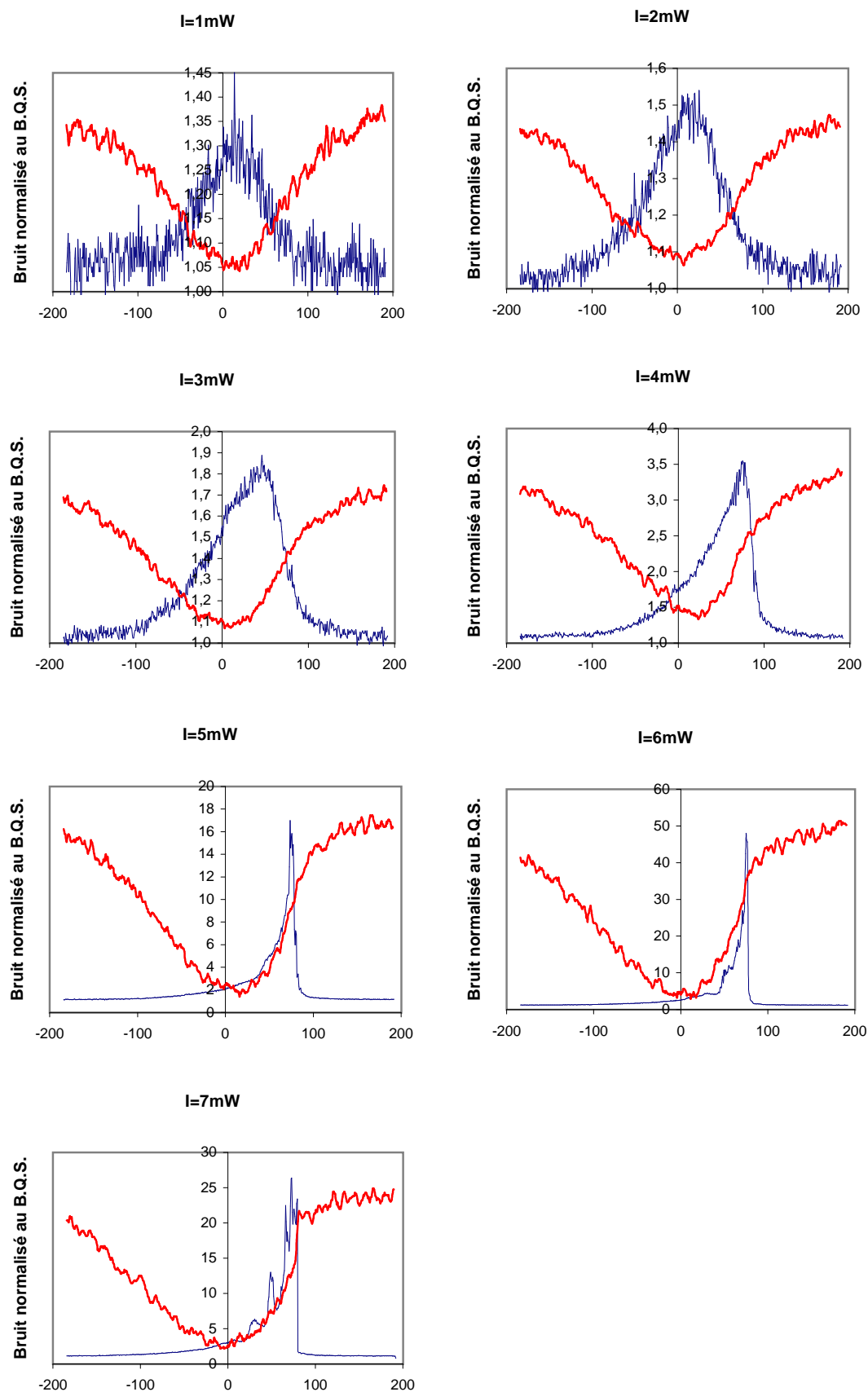


Fig. 5.12 – Trait fin : bruit d'intensité en fonction de la position sur l'échantillon en microns.

Trait épais : profil de la réflectivité. Longueur d'onde du laser:  $\lambda = 921,58 \text{ nm}$ .

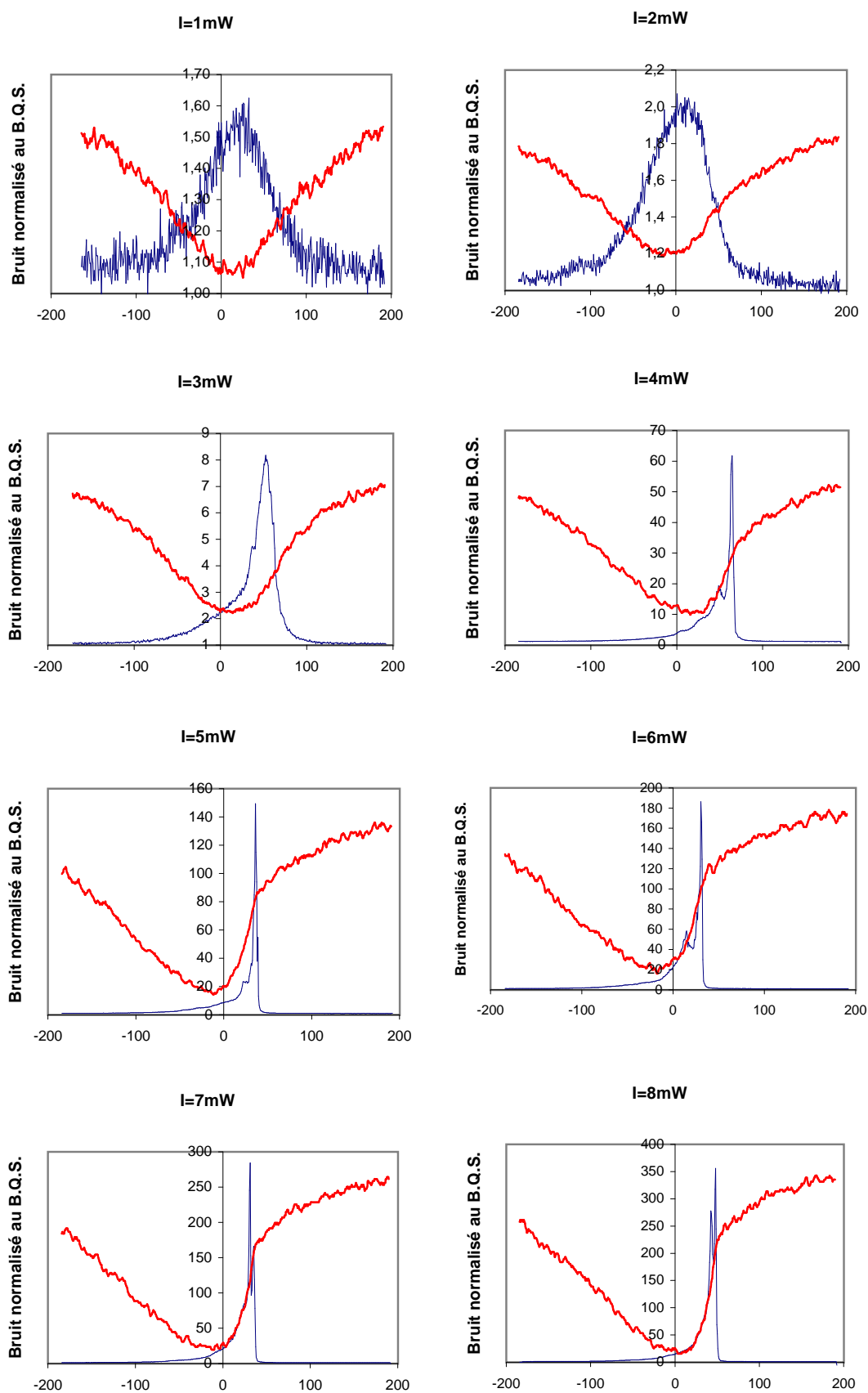


Fig. 5.13 – Trait fin : bruit d'intensité en fonction de la position sur l'échantillon en microns.

Trait épais : profil de la réflectivité. Longueur d'onde du laser :  $\lambda=831.86$  nm, cor-

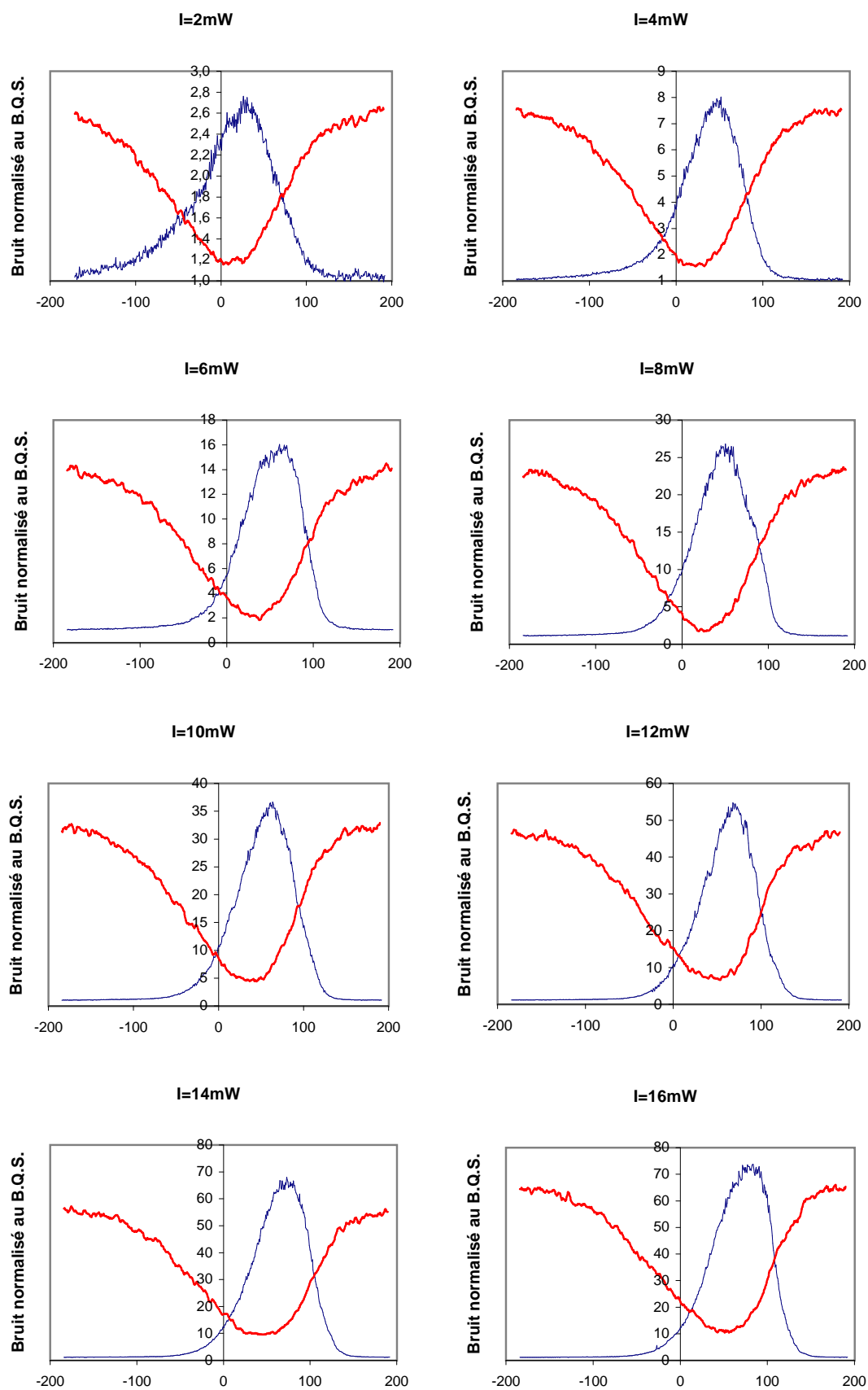


Fig. 5.14 – Trait fin : bruit d'intensité en fonction de la position sur l'échantillon en microns.

Trait épais : profil de la réflectivité. Longueur d'onde du laser :  $\lambda = 832,10 \text{ nm}$ , cor-

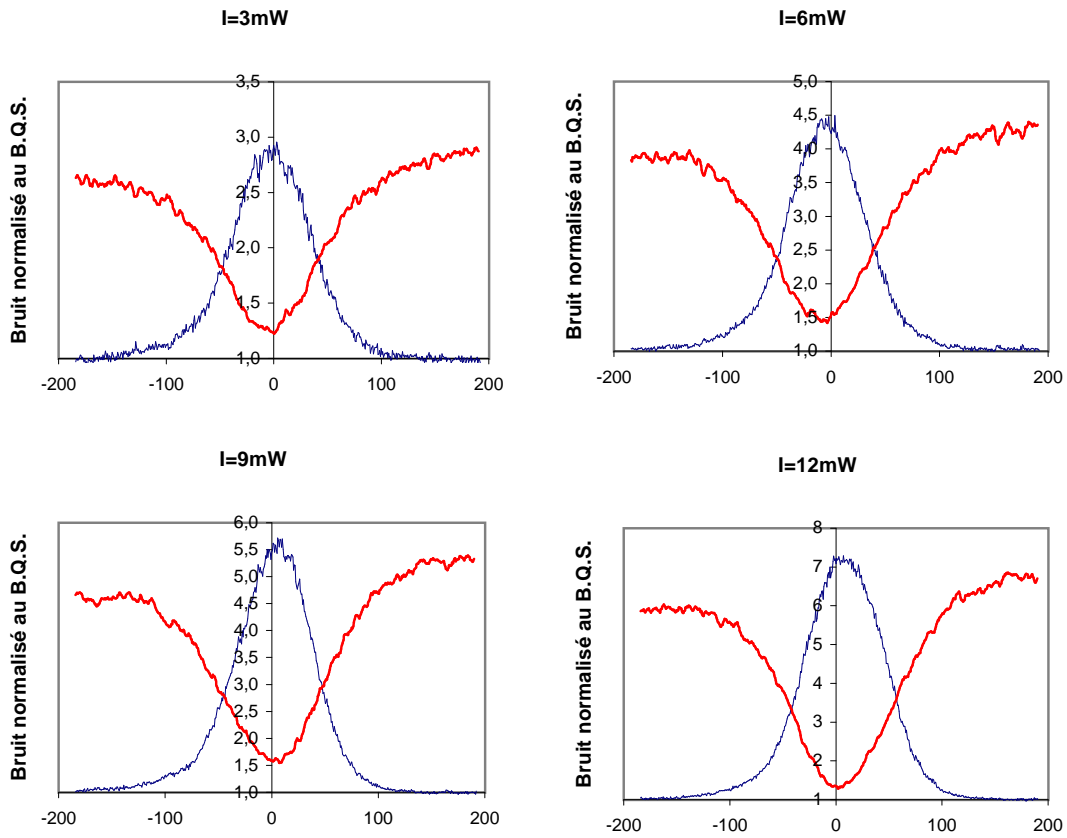


Fig. 5.15 – Trait fin : bruit d'intensité en fonction de la position sur l'échantillon en microns. Trait épais : profil de la réflectivité. Longueur d'onde du laser :  $\lambda=832.84$  nm, correspondant à  $\delta=-2$  meV.

Pour obtenir un accord quantitatif, il faudrait tout d'abord disposer d'une caractérisation précise de l'échantillon, notamment concernant la largeur (homogène ou inhomogène) de la raie excitonique (voir chapitre 3).

Il faudrait ensuite tenir compte de l'effet de taille de tache. En régime non linéaire il n'est plus possible de reconvoluer simplement les résultats sur le profil d'intensité de la tache comme cela est fait dans le chapitre 3 ; pour chaque point de la tache il faut calculer les spectres de réflectivité et de bruit d'intensité correspondant à l'intensité locale en ce point. La prise en compte de cet effet doit améliorer notablement l'accord avec le modèle. En particulier, la taille de la tache élargit considérablement les spectres de réflectivité et diminue les excès de bruit. Elle cause aussi un élargissement du pic de bruit, surtout à basse intensité ; cet effet joue moins à haute intensité car la variation du bruit avec l'intensité est fortement non linéaire, ce qui diminue l'effet des bords de la tache. C'est pourquoi on observe malgré tout un net rétrécissement du pic de bruit.



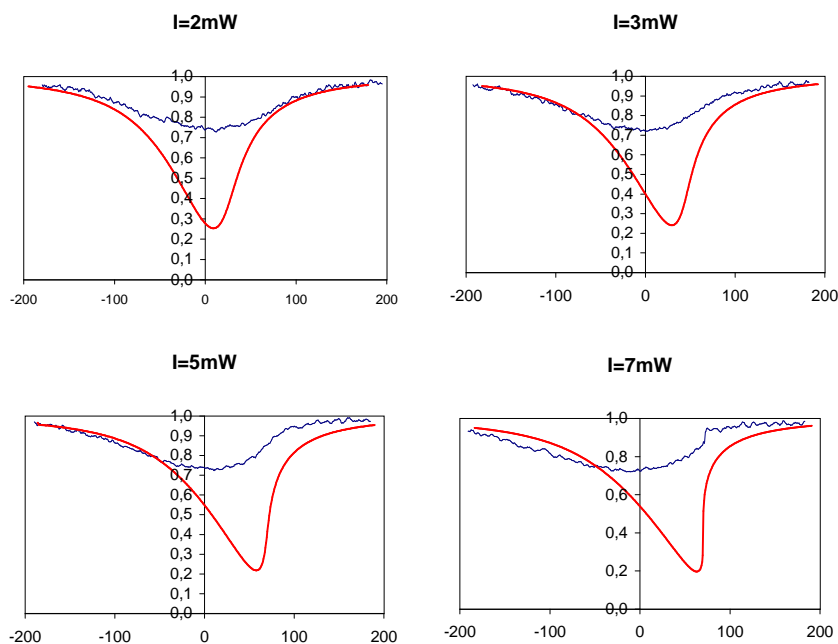


Fig. 5.16 – Réflectivité en fonction de la position sur l'échantillon en microns pour une longueur d'onde d'excitation  $\lambda=831.58$  nm et pour plusieurs intensités d'excitation. Trait fin : courbe expérimentale. Trait épais : courbe théorique (ne tenant pas compte de l'effet de taille de tache). Paramètres :  $\gamma_b=0.17$  meV,  $\alpha_{exc}=1.1 \cdot 10^{-5}$  meV.

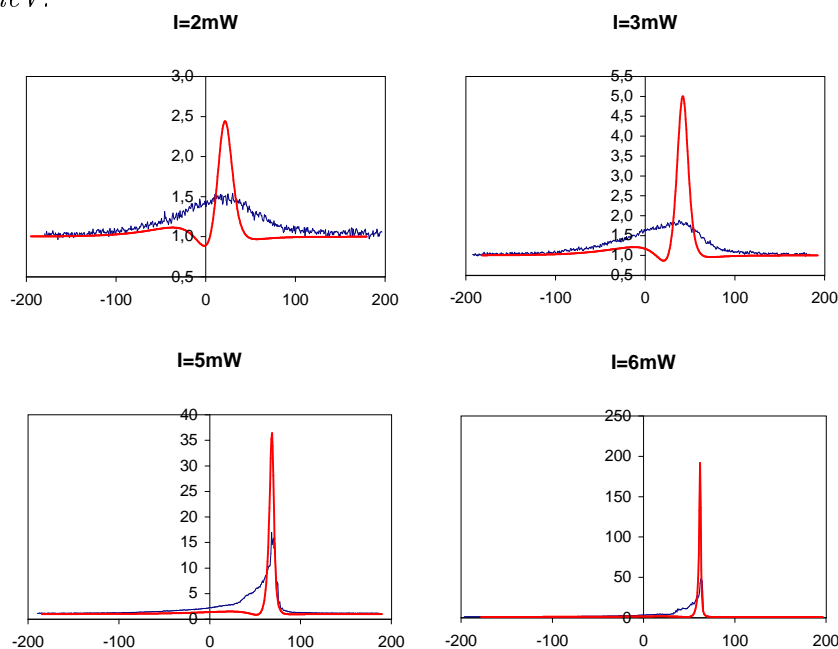


Fig. 5.17 – Bruit d'intensité en fonction de la position sur l'échantillon en microns, pour une longueur d'onde d'excitation  $\lambda=831.58$  nm et pour plusieurs intensités d'excitation. Trait fin : courbe expérimentale. Trait épais : courbe théorique avec les paramètres de la figure 5.16 (ne tenant pas compte de l'effet de taille de tache).

Par contre l'effet de moyennage est suffisant pour supprimer une éventuelle réduction de bruit d'intensité.

Enfin il est probablement nécessaire de tenir compte de l'élargissement collisionnel qui peut jouer un rôle non négligeable pour de telles densités d'excitation [Ciuti 98].

### Régime linéaire

A basse intensité d'excitation il est intéressant de comparer la forme du pic de bruit avec celle du pic d'absorption. Le modèle prévoit un excès de bruit proportionnel au carré de l'absorption (partie 4.D.4.2, équation 4-108). En ajustant le pic de bruit par une fonction proportionnelle au carré de l'absorption on obtient effectivement un excellent accord (figures 5.18 et 5.19). Ce résultat valide l'hypothèse consistant à supposer que le bruit entrant par la voie excitonique est proportionnel à l'absorption (équation 4-102).

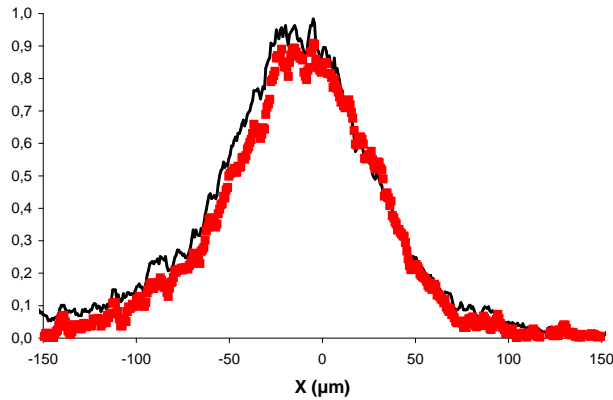


Fig. 5.18 – Excès de bruit d'intensité (points) comparé au profil de l'absorption au carré (trait), pour  $\lambda=832.84$  nm (correspondant à  $\delta=-1$  meV).

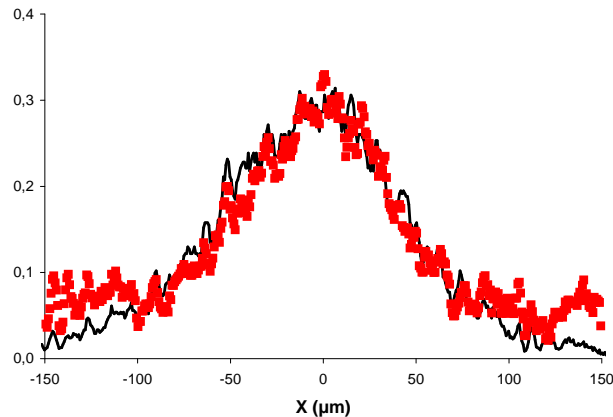


Fig. 5.19 – Excès de bruit d'intensité (points) comparé au profil de l'absorption au carré (trait), pour  $\lambda=831.58$  nm (correspondant à  $\delta=+0.5$  meV).

Nous avons donc mis en évidence une amplification géante des fluctuations du faisceau réfléchi due à l'interaction polariton-polariton. De manière équivalente, on peut parler d'amplification paramétrique de la luminescence [Messin 01]. Les résultats obtenus sont compatibles avec un modèle reposant sur l'interaction coulombienne entre excitons. Cependant la preuve définitive du caractère cohérent de ce processus d'amplification ne peut venir que de l'observation de la dépendance en phase des fluctuations (ou, de manière équivalente, la dépendance en phase de la luminescence émise par la microcavité).

### B.3 Dépendance en quadrature des fluctuations du faisceau réfléchi

Nous allons maintenant présenter les résultats des mesures de détection homodyne avec oscillateur local. Le but de ces mesures est en particulier d'étudier comment les fluctuations du faisceau réfléchi acquièrent une dépendance en phase lorsqu'on augmente l'intensité d'excitation.

Il serait évidemment souhaitable d'acquérir toute l'information sur les fluctuations (dépendance en phase et dépendance en position) en une seule mesure. Cela pourrait se faire en balayant l'échantillon très lentement par rapport à la variation de la phase de l'oscillateur local. Malheureusement, le déplacement de l'échantillon ne peut pas être parfaitement perpendiculaire au faisceau qui se réfléchit dessus. Le faisceau réfléchi subit donc des variations de phase qui sont trop importantes pour être rattrapées par l'asservissement de la phase de l'oscillateur local.

Nous avons utilisé la procédure suivante : la longueur d'onde et l'intensité d'excitation étant fixées, on explore toute la zone résonante de l'échantillon et on sélectionne le point d'excitation qui fournit la plus forte dépendance en quadrature pour le faisceau réfléchi. Le point que l'on choisit dépend donc de l'intensité d'excitation ; on compense en fait le déplacement vers le bleu de l'énergie du polariton en changeant la longueur de cavité. L'interprétation des courbes est rendue moins intuitive du fait que la nature des polaritons mis en jeu (i.e. leur fraction excitonique ou photonique) varie très légèrement en fonction de l'intensité d'excitation. Cependant, si on excitait un point fixe de l'échantillon on observerait très rapidement une saturation des effets non linéaires à cause du déplacement vers le bleu de la résonance.

Pour obtenir le spectre de bruit normalisé au bruit quantique standard, il faut mesurer le bruit de la différence des photocourants dans trois configurations distinctes :

le bruit du signal de détection homodyne (en faisant interférer le champ réfléchi avec l'oscillateur local), celui de l'oscillateur local seul (en cachant le faisceau réfléchi) et celui du faisceau réfléchi (en cachant l'oscillateur local). La figure 5.20 montre un exemple de ces trois signaux. On en déduit le spectre de bruit normalisé (figure 5.21) en utilisant la formule 5-19.

Les fluctuations du signal de détection homodyne sont essentiellement dues aux vibrations mécaniques de l'échantillon entraînées par la circulation d'hélium. Le filtre vidéo étant fixé à 30 Hz, on pourrait craindre que les vibrations à des fréquences supérieures à 30 Hz ne causent un moyennage du signal et une diminution artificielle de l'amplitude des oscillations. C'est pourquoi nous avons vérifié chaque mesure en utilisant l'asservissement de la phase de l'oscillateur local. Sur les mesures présentées ici nous n'avons constaté aucun effet de moyennage du signal.

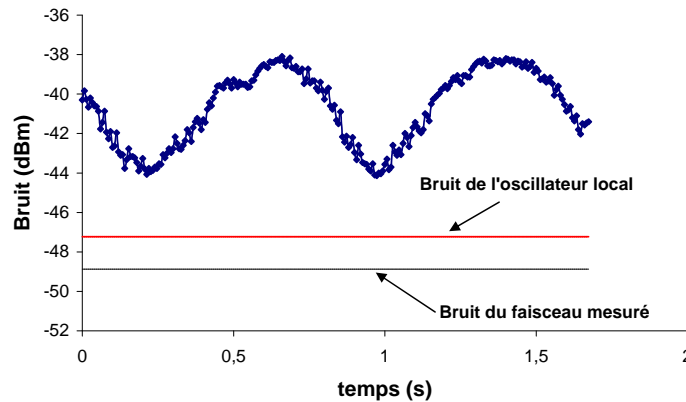


Fig. 5.20 – Exemple de signal de détection homodyne, tel qu'il est acquis sur l'analyseur de spectre. Les niveaux de bruit correspondant à l'oscillateur local seul et au faisceau réfléchi seul sont également indiqués.

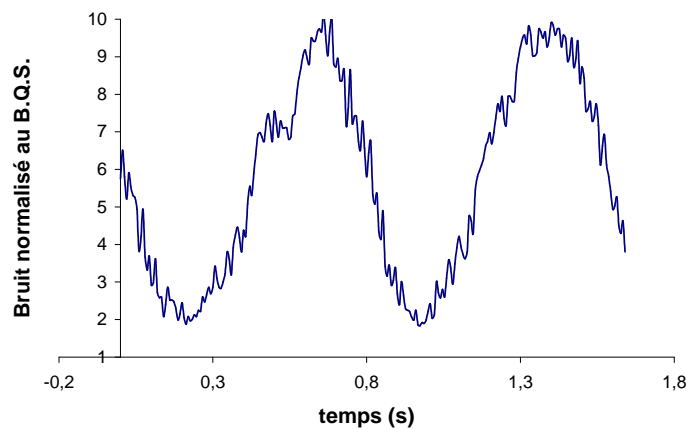


Fig. 5.21 – Bruit normalisé au bruit quantique standard déduit de la courbe de la figure 5.20.

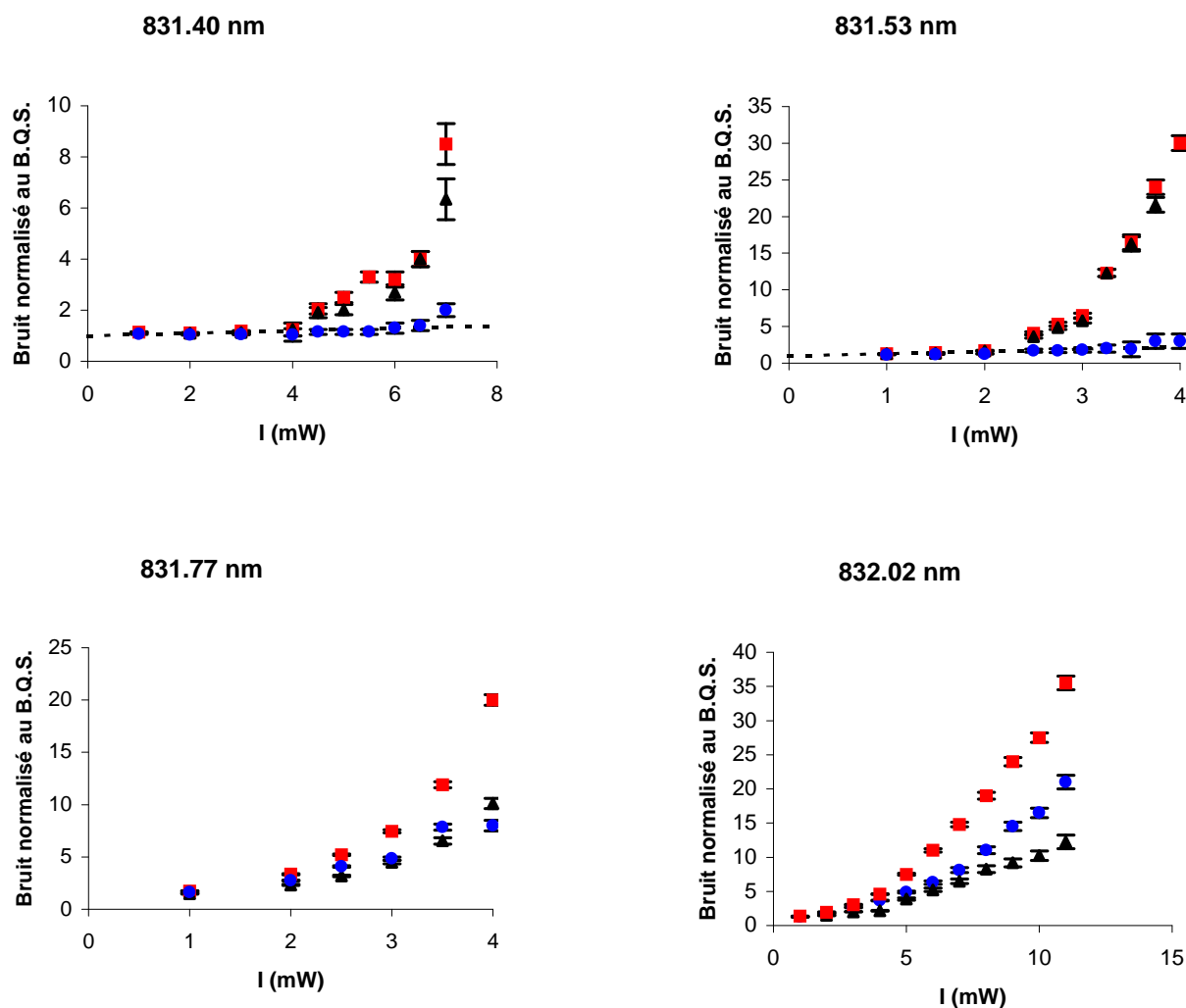


Fig. 5.22 – Bruit minimal, bruit maximal et bruit d'intensité en fonction de l'intensité d'excitation, pour plusieurs longueurs d'onde d'excitation. Le bruit thermique est représenté en tiretés.

La figure 5.22 montre les courbes obtenues pour plusieurs longueurs d'onde d'excitation, correspondant à des désaccords compris entre  $-0.5$  meV et  $+1.2$  meV. Pour chaque valeur de l'intensité d'excitation nous avons représenté les fluctuations de la quadrature donnant le bruit maximal et de la quadrature donnant le bruit minimal.

On voit que l'amplitude de la dépendance en phase augmente rapidement, surtout à désaccord positif ( $\lambda=831.40$  nm et  $\lambda=831.53$  nm). Nous avons également tracé le niveau du bruit thermique, extrapolé à partir de sa valeur à basse intensité d'excitation. Le bruit minimal descend en dessous du bruit thermique, comme le montre plus clairement la figure 5.23. Certaines quadratures sont donc «dé-amplifiées»; c'est

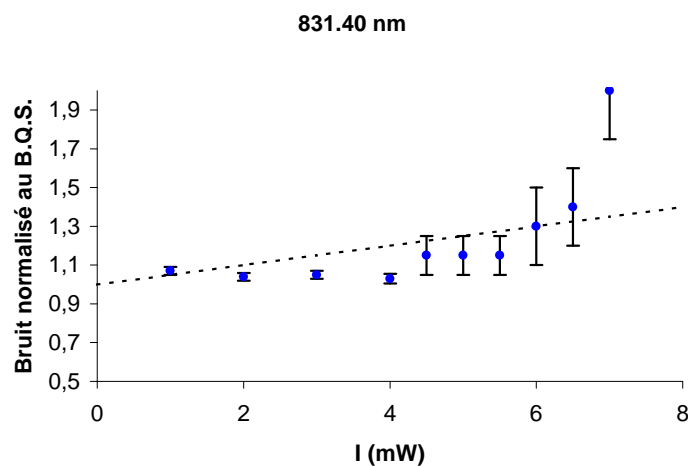


Fig. 5.23 – Bruit minimal et bruit thermique (tiretés) en fonction de l'intensité d'excitation pour  $\lambda=831.40$  nm (agrandissement de la figure 5.22).

là la contrepartie de l'amplification géante que nous avons mise en évidence sur la quadrature d'amplitude.

Ce comportement est en bon accord qualitatif avec le modèle. On pourra comparer les courbes obtenues à désaccord positif avec la courbe théorique 4.9.

On n'observe pas de réduction du bruit en dessous de la limite standard, même si l'excès de bruit causé par la luminescence est presque totalement supprimé lorsqu'on se place à désaccord légèrement positif.

Cela provient très probablement de la structure spatiale inhomogène du faisceau réfléchi rend très difficile, sinon impossible, l'observation d'une réduction de bruit. Le fait de mesurer l'intégralité du faisceau réfléchi entraîne inévitablement un moyennage des effets correspondant à des points différents de la tache focale, donc à des longueurs de cavité différentes. Même si deux points avoisinants présentent une réduction de bruit, celle-ci n'a aucune raison de se produire selon la même quadrature du champ réfléchi. On peut réaliser alors un moyennage d'une zone de bruit réduit avec une zone de fort excès de bruit.

Cet effet est particulièrement visible sur les résonances de type «cavité» où les raies sont plus fines. Il permet notamment d'expliquer pourquoi le bruit d'intensité n'est pas situé à l'intérieur des limites du signal de détection homodyne pour  $\lambda=832.02$  nm (figure 5.22).

L'étape suivante de l'expérience consiste donc à mettre au point un système de filtrage spatial du faisceau réfléchi par la microcavité, visant à sélectionner une zone plus petite de l'échantillon, si possible du même ordre que la «longueur de cohérence» associée à la divergence du faisceau d'excitation (environ 10 microns).

En conclusion deux résultats importants ont été obtenus. Nous avons mis en évidence la dépendance en phase de l'émission de la microcavité, ce qui valide définitivement son interprétation en terme de mélange paramétrique à quatre ondes de polaritons (se traduisant par un effet  $\chi^{(3)}$ ). D'autre part une réduction de bruit en dessous du bruit thermique a été observée. Nous avons également précisé les conditions expérimentales dans lesquelles on pourrait observer une réduction du bruit quantique.

## Conclusion

Nous avons obtenu un ensemble de résultats théoriques et expérimentaux concernant la modification des fluctuations quantiques du champ en interaction avec une microcavité semi-conductrice fonctionnant en régime de couplage fort.

Sous l'effet des interactions non linéaires entre polaritons, certaines quadratures du champ voient leurs fluctuations amplifiées de façon spectaculaire, tandis que d'autres sont dé-amplifiées en dessous du bruit thermique. De façon équivalente, on peut dire que certaines composantes de phase de la luminescence émise par la microcavité sont fortement amplifiées, tandis que d'autres sont dé-amplifiées. Cette dépendance en phase de l'émission constitue une preuve définitive du caractère cohérent du processus non linéaire en jeu.

Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec un modèle prenant en compte l'interaction entre polaritons provenant de l'interaction coulombienne entre excitons. Le déplacement vers le bleu des énergies de résonance, l'observation d'un seuil de bistabilité et l'augmentation de la dépendance en phase des fluctuations avec l'intensité de pompe sont conformes aux prévisions.

Nous avons aussi observé une réduction des fluctuations sortantes en dessous du bruit thermique, qui est elle aussi conforme au modèle reposant sur interaction non linéaire cohérente d'ordre 3 entre polaritons. Nous n'avons pas observé jusqu'à présent de réduction du bruit en dessous du bruit quantique standard. Du point de vue théorique, nous avons montré que la possibilité d'un tel effet dépend des valeurs relatives de la non-linéarité et du rendement de photoluminescence. Du point de vue expérimental, nous pouvons espérer optimiser les performances de notre montage de mesure de bruit en améliorant le recouvrement spatial du faisceau réfléchi avec l'oscillateur local, grâce à une technique de filtrage spatial.

Enfin nous avons montré qu'une microcavité, lorsqu'elle est excitée à l'«angle magique» est susceptible de générer des faisceaux fortement corrélés en intensité lorsqu'on se place légèrement au-dessus du seuil d'oscillation paramétrique. La mesure de ces corrélations est délicate à cause de la différence d'intensité entre les deux faisceaux,



mais doit être possible si la finesse de la cavité n'est pas trop haute. D'autre part, très au delà du seuil d'oscillation, on prévoit une réduction de bruit importante du faisceau signal. Cette configuration expérimentale est une voie prometteuse pour observer des phénomènes quantiques dans des dispositifs semi-conducteurs dont on pourrait envisager l'intégration dans des systèmes opto-électroniques.

## Annexe

Nous proposons au chapitre 4 de ce mémoire une modélisation très simple de la dynamique des fluctuations dans une microcavité. Dans ce modèle, l'exciton et le mode de cavité sont considérés comme des oscillateurs harmoniques bosoniques couplés linéairement. Un terme supplémentaire décrit la saturation du couplage exciton-photon. Enfin, les interactions entre excitons sont traitées au premier ordre par des produits de 4 opérateurs excitoniques.

Le lecteur est en droit de se demander comment il est possible de modéliser aussi simplement l'excitation optique d'un cristal semi-conducteur, qui met pourtant en jeu la totalité des électrons de la bande de valence ! Le but de cette annexe est de répondre à cette interrogation, en expliquant la démarche conduisant à la construction de ce hamiltonien simplifié.

Dans un premier temps, nous écrivons le hamiltonien complet d'un puits quantique bidimensionnel couplé à un champ lumineux, en utilisant le formalisme électron-trou. Puis nous montrons comment un calcul semi-classique permet de dériver une équation de Shrödinger pour le mouvement relatif de l'électron et du trou, appelée équation de Wannier. Les excitons ne sont autres que les états liés de l'équation de Wannier. La description de leurs niveaux d'énergie et de leurs fonctions d'onde fait l'objet du paragraphe suivant.

Le traitement de l'exciton en seconde quantification est un problème complexe, qui peut être abordé de plusieurs façons. Nous commençons par décrire l'approche la plus couramment employée, qui consiste à définir l'opérateur de création de l'exciton comme une simple combinaison linéaire des opérateurs d'électron et de trou. Cependant, le comportement des opérateurs ainsi construits s'écarte de plus en plus du comportement bosonique lorsqu'on augmente la densité d'excitons, ce qui complique considérablement le traitement perturbatif des interactions entre excitons. C'est pourquoi nous choisissons une autre méthode, appelée transformation d'Usui. Celle-ci établit une bijection de l'espace fermionique électron-trou vers un espace bosonique. Le hamiltonien est ré-écrit dans l'espace bosonique ; les opérateurs de création et d'annihilation de l'exciton

sont écrits en fonction des opérateurs bosoniques, satisfaisant ainsi par construction les relations de commutation de bosons. La nature fermionique des électrons et des trous se traduit par des termes correctifs à tous les ordres d'interaction. Dans le dernier paragraphe, nous montrons que le hamiltonien employé au chapitre 2 correspond simplement au développement perturbatif à l'ordre 2 du hamiltonien bosonique total.

## A Hamiltonien du système électrons-trous couplé à un champ lumineux

Considérons un puits quantique excité par un champ lumineux monochromatique, dont les photons ont un vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  dans le plan des couches formant le puits et une énergie  $\hbar\omega_q$  proche de l'énergie de bande interdite. Dans ce cas, la réponse optique du milieu fait intervenir uniquement les bandes de valence et de conduction. Nous écrivons donc le hamiltonien des bandes de valence et de conduction couplées au champ de photons. L'interaction avec le champ électromagnétique est responsable de transitions interbandes; l'interaction coulombienne est responsable de transitions intrabandes.

Dans un puits quantique, la bande de valence n'est pas dégénérée car les trous lourds et les trous légers n'ont pas la même énergie de confinement dans le puits. Ici, on prend en compte uniquement la bande de trous lourds.

Enfin, rappelons que le puits quantique est un système quasi-bidimensionnel. Les états électroniques sont donnés par un spin  $\sigma$  et un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dans le plan des couches formant le puits, le vecteur d'onde dans la direction perpendiculaire étant quantifié. Le hamiltonien du système s'écrit [Rochat 00]:

$$H = H_{cin} + H_{champ} + H_{coul} \quad (\text{A-1})$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique :

$$H_{cin} = \sum_{\sigma_{phot}=\{\pm 1\}} \hbar\omega_q a_{\mathbf{q}, \sigma_{phot}}^\dagger a_{\mathbf{q}, \sigma_{phot}} + \sum_{\mathbf{k}, \sigma_e=\{\pm 1/2\}} E_k^c c_{\mathbf{k}, \sigma_e}^\dagger c_{\mathbf{k}, \sigma_e} + \sum_{\mathbf{k}', \sigma_h=\{\pm 3/2\}} E_{k'}^v h_{\mathbf{k}', \sigma_h}^\dagger h_{\mathbf{k}', \sigma_h} \quad (\text{A-2})$$

$c_{\mathbf{k}, \sigma_e}^\dagger$  et  $h_{\mathbf{k}', \sigma_h}^\dagger$  sont les opérateurs de création d'électron et de trou, de vecteurs d'onde respectifs  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$ , de spins  $\sigma_e$  et  $\sigma_h$ .  $a_{\mathbf{q}, \sigma_{phot}}^\dagger$  est l'opérateur de création d'un photon de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  et de spin  $\sigma_{phot}$ .  $E_k^c$  et  $E_{k'}^v$  sont respectivement les dispersions des bandes de conduction et de valence, que l'on représente par des paraboles, approxima-

tion courante lorsqu'on s'intéresse au voisinage des extrema des bandes :

$$E_k^c = E^c + \hbar^2 k^2 / 2m_e \quad (\text{A-3})$$

$$E_{k'}^v = E^v + \hbar^2 k'^2 / 2m_h \quad (\text{A-4})$$

$m_e$  et  $m_h$  sont respectivement les masses effectives de l'électron et du trou dans le plan des couches.

Le deuxième terme du hamiltonien décrit l'interaction des électrons avec le champ :

$$H_{champ} = \sum_{\mathbf{k}', \sigma_{phot}=\{\pm 1\}, \sigma_h=\{\pm 3/2\}} [Gc_{\mathbf{q}-\mathbf{k}', \sigma_{phot}-\sigma_h}^\dagger h_{\mathbf{k}', \sigma_h}^\dagger a_{\mathbf{q}, \sigma_{phot}} + h.c.] \cdot 1_e(\sigma_{phot} - \sigma_h) \quad (\text{A-5})$$

$1_e(\sigma_{phot} - \sigma_h) = \delta_{\sigma_{phot}-\sigma_h; +1/2} + \delta_{\sigma_{phot}-\sigma_h; -1/2}$  donne la règle de sélection sur les spins.

Le dernier terme représente l'interaction de Coulomb :

$$H_{coul} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{p} \neq 0} V(p) \times \left[ \begin{aligned} & \sum_{\sigma_e, \sigma'_e=\{\pm 1/2\}} c_{\mathbf{k}', \sigma_e}^\dagger c_{\mathbf{k}'', \sigma'_e}^\dagger c_{\mathbf{k}''+\mathbf{p}, \sigma'_e} c_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}, \sigma_e} \\ & + \sum_{\sigma_h, \sigma'_h=\{\pm 3/2\}} h_{\mathbf{k}', \sigma_h}^\dagger h_{\mathbf{k}'', \sigma'_h}^\dagger h_{\mathbf{k}''+\mathbf{p}, \sigma'_h} h_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}, \sigma_h} \\ & - 2 \sum_{\sigma_e=\{\pm 1/2\}, \sigma_h=\{\pm 3/2\}} c_{\mathbf{k}', \sigma_e}^\dagger h_{\mathbf{k}'', \sigma_h}^\dagger h_{\mathbf{k}''+\mathbf{p}, \sigma_h} c_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}, \sigma_e} \end{aligned} \right] \quad (\text{A-6})$$

$V(p)$  est la transformée de Fourier du potentiel coulombien qui vaut pour un système bidimensionnel :

$$V(p) = \frac{2\pi e^2}{A \cdot \epsilon \cdot p} \quad (\text{A-7})$$

$A$  est la surface de l'échantillon et  $\epsilon$  la constante diélectrique statique du matériau.

## B Equation de Wannier

Nous présentons dans cette partie la description habituelle des états excitoniques dans un puits quantique. Elle utilise les «équations de Bloch» du semi-conducteur soumis à un champ électromagnétique classique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , (ici une description quantique du champ lumineux n'est pas nécessaire). Pour un traitement plus détaillé voir [Haug&Koch 90] ou [Koch 98].

Les équations de Bloch s'obtiennent en dérivant les équations du mouvement pour les facteurs d'occupation des électrons  $n_{e\mathbf{k}}$  et des trous  $n_{h\mathbf{k}}$  définis par :

$$n_{e\mathbf{k}} = \langle c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \rangle \quad (\text{B-1})$$

$$n_{h\mathbf{k}} = \langle h_{\mathbf{k}}^\dagger h_{\mathbf{k}} \rangle \quad (\text{B-2})$$

et pour la polarisation interbande  $p_{\mathbf{k}}$  donnée par :

$$p_{\mathbf{k}} = \langle h_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \rangle \quad (\text{B-3})$$

Dans cette partie nous n'écrivons pas la sommation sur les spins qui sont désormais inclus dans les indices  $\mathbf{k}$ . L'évolution de ces trois quantités fait intervenir des valeurs moyennes de produits de quatre opérateurs, dont l'évolution fait à leur tour intervenir des valeurs moyennes de produits de six opérateurs, et ainsi de suite. On obtient ainsi une hiérarchie infinie d'équations différentielles couplées. On peut tronquer cette hiérarchie en factorisant les valeurs moyennes d'ordre quatre en produits des valeurs moyennes à deux opérateurs  $n_{e\mathbf{k}}$ ,  $n_{h\mathbf{k}}$  et  $p_{\mathbf{k}}$ ; en effectuant la factorisation seulement à l'ordre suivant on obtient des termes correctifs qui rendent compte des collisions et des effets d'écrantage. Le système fermé ainsi obtenu forme les équations de Bloch du semi-conducteur. Elles jouent le même rôle que les équations de Bloch optiques pour un système à deux niveaux.

Les effets excitoniques sont contenus dans l'équation d'évolution de la polarisation  $p_{\mathbf{k}}$ , prise dans la limite de basse densité d'excitation. Nous allons maintenant présenter brièvement la dérivation de cette équation et montrer qu'elle conduit à une équation analogue à l'équation de Schrödinger pour un atome d'hydrogène, appelée équation de Wannier.

Le hamiltonien du système est celui de la partie A, à l'exception du terme d'interaction dipolaire entre le champ *classique* et les porteurs de charge qui s'écrit :

$$H_{\text{champ}} = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{B-4})$$

où la polarisation du milieu est donnée par l'opérateur :

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \left[ \mu_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^\dagger h_{-\mathbf{k}}^\dagger + \mu_{\mathbf{k}}^* h_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \right] \quad (\text{B-5})$$

Les coefficients  $\mu_{\mathbf{k}}$  sont les éléments de matrice du dipôle.

L'équation d'évolution de la polarisation interbande est obtenue en écrivant l'équation de Heisenberg pour l'opérateur  $h_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}$  et en passant aux valeurs moyennes :

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\mathbf{k}}}{dt} &= -i\omega'_{\mathbf{k}}p_{\mathbf{k}} - \frac{i}{\hbar}\mu_{\mathbf{k}}E(\mathbf{r}, t)[n_{e\mathbf{k}} + n_{h\mathbf{k}} - 1] + \frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{p} \neq 0} V_{\mathbf{p}} \\ &\times \left[ \langle c_{\mathbf{k}'+\mathbf{p}}^\dagger h_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}+\mathbf{p}} \rangle + \langle h_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}}^\dagger h_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}} h_{-\mathbf{k}-\mathbf{p}} \rangle - \langle c_{\mathbf{k}'+\mathbf{p}}^\dagger h_{-\mathbf{k}+\mathbf{p}} c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}} \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle h_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}}^\dagger h_{-\mathbf{k}} h_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} \rangle + \langle h_{-\mathbf{k}+\mathbf{p}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} \rangle \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \right] \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

avec

$$\omega'_{\mathbf{k}} = \frac{E_{\mathbf{k}}^c - E_{\mathbf{k}}^v}{\hbar} \quad (\text{B-7})$$

On voit que cette équation fait intervenir des valeurs moyennes de produits de 4 opérateurs. On suit maintenant une approche de type Hartree-Fock, qui consiste à factoriser ces termes en valeurs moyennes de produits de 2 opérateurs. On ajoute formellement les termes d'ordre plus élevé, qui correspondent à l'effet des collisions. On obtient ainsi l'équation de Bloch pour la polarisation :

$$\frac{dp_{\mathbf{k}}}{dt} = -i\omega_{\mathbf{k}}p_{\mathbf{k}} - i\Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)[n_{e\mathbf{k}} + n_{h\mathbf{k}} - 1] + \left. \frac{dp_{\mathbf{k}}}{dt} \right|_{col} \quad (\text{B-8})$$

Les fréquences  $\omega_{\mathbf{k}}$  et  $\Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$  sont respectivement la fréquence de la transition  $\omega'_{\mathbf{k}}$  et la «fréquence de Rabi»  $\mu_{\mathbf{k}}E(\mathbf{r}, t)/\hbar$  renormalisées par l'interaction de Coulomb :

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega'_{\mathbf{k}} - \frac{1}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} V_{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|} (n_{e\mathbf{k}'} + n_{h\mathbf{k}'}) \quad (\text{B-9})$$

$$\Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_{\mathbf{k}}E(\mathbf{r}, t)}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} V_{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|} p_{\mathbf{k}'} \quad (\text{B-10})$$

On s'intéresse maintenant à la limite de basse densité. On écrit donc  $n_{e\mathbf{k}'} \simeq n_{h\mathbf{k}'} \simeq 0$  et le terme de collisions tend également vers zéro. L'équation B-8 se réduit à :

$$\frac{dp_{\mathbf{k}}}{dt} = -i\omega_{\mathbf{k}}p_{\mathbf{k}} - i\Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B-11})$$

On prend comme champ excitateur une onde plane de fréquence  $\omega$ . Dans l'approximation du champ tournant, la polarisation évolue à la même fréquence  $\omega$  et sa composante à la fréquence  $\omega$  est donnée par :

$$[\omega_{\mathbf{k}} - \omega + i\gamma]p_{\mathbf{k}} = \Omega_{\mathbf{k}} \quad (\text{B-12})$$

où  $\gamma$  est un coefficient de relaxation phénoménologique. Enfin, En effectuant une transformation de Fourier spatiale pour revenir à l'espace des coordonnées, on obtient :

$$\left[ -\frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2}{2m_r} - \frac{e^2}{\epsilon r} + E_{gap} - \hbar(\omega - i\gamma) \right] p(\mathbf{r}) = \mu E \delta^3(\mathbf{r}) V \quad (\text{B-13})$$

à condition de négliger la dépendance de l'élément de matrice dipolaire  $\mu_{\mathbf{k}}$  en fonction de  $\mathbf{k}$ , ce qui est raisonnable lorsqu'on s'intéresse à de faibles valeurs de  $\mathbf{k}$  et à des fréquences proches de la bande interdite. Rappelons que l'énergie de bande interdite vaut :

$$E_{gap} = E_0^c - E_0^v = \omega_0' \quad (\text{B-14})$$

La masse réduite de l'exciton  $m_r$  est définie par :

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_h} \quad (\text{B-15})$$

L'équation B-13 est une équation différentielle avec second membre, qui peut se résoudre en écrivant  $p(\mathbf{r})$  comme une superposition linéaire des solutions de l'équation homogène associée :

$$\left[ -\frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2}{2m_r} - \frac{e^2}{\epsilon r} \right] \psi_n(\mathbf{r}) = \epsilon_n \psi_n(\mathbf{r}) \quad (\text{B-16})$$

L'équation B-16 est l'équation de Shrödinger pour le mouvement relatif d'un électron et d'un trou couplés par un potentiel coulombien attractif ; elle est connue en physique des semi-conducteurs sous le nom d'équation de Wannier.

## C Etats excitoniques

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'équation de Wannier est strictement analogue à l'équation de Schrödinger de l'atome d'hydrogène. La masse du proton est simplement remplacée par la masse effective du trou et la constante diélectrique du vide est remplacée par celle du matériau semi-conducteur. Cela entraîne que les ordres de grandeurs des paramètres physiques mis en jeu sont très différents.

Les solutions de l'équation de Wannier sont donc les mêmes que celles du problème hydrogénoïde ; il y a des états liés, appelés excitons de Wannier et des états libres formant un continuum. Nous nous limiterons ici à décrire les énergies des états liés, ainsi que la fonction d'onde du niveau 1s. En effet, c'est le seul qui joue un rôle dans notre situation expérimentale.

Comme pour le cas de l'atome d'hydrogène en 2 dimensions, les niveaux sont définis par un nombre quantique principal  $n = 0, 1, 2, \dots$  et un nombre quantique secondaire  $m \in \{-n, +n\}$ . Leurs énergies s'écrivent, avec  $E_{gap}$  comme origine :

$$E_n = -E_0 \frac{1}{(n + 1/2)^2} \quad (\text{C-1})$$

L'énergie de liaison du premier niveau ( $n = 0$ ) vaut donc  $4E_0$ , avec

$$E_0 = \frac{e^4 m_r}{2\epsilon^2 \hbar^2} = \frac{\hbar^2}{2m_r a_0^2} = \frac{e^2}{2\epsilon a_0} \quad (\text{C-2})$$

avec

$$a_0 = \frac{\hbar^2 \epsilon}{e^2 m_r} \quad (\text{C-3})$$

Remarquons que l'énergie de liaison du niveau 2s vaut  $4E_0/9$ , soit déjà 9 fois moins que celle du niveau 1s. Ce niveau est beaucoup plus proche du bord de bande et donc plus difficile à distinguer.

La fonction d'onde du niveau 1s s'écrit :

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{8}{\pi}} e^{-2r/a_0} \quad (\text{C-4})$$

On voit que le rayon de Bohr de l'exciton à deux dimensions vaut  $a_0/2$ . Une application numérique utilisant les paramètres de l'Arsénure de Gallium donne un rayon de Bohr de l'exciton de l'ordre de 100 Å et une énergie de liaison de l'ordre de 20 meV pour le niveau 1s.

## D Opérateur de création d'un exciton

Il est possible de construire des opérateurs de création et de destruction pour l'exciton, comme une simple superposition linéaire des opérateurs d'électron et de trou. Plus précisément, l'opérateur décrivant la création d'un exciton dans l'état  $n$  avec une impulsion totale  $\mathbf{K}$  peut s'écrire [Haug&Koch 90]:

$$b_{n,\mathbf{K}}^\dagger = \sqrt{A} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta(\mathbf{K} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')) \psi_n \left( \frac{\mathbf{k} + \mathbf{k}'}{2} \right) c_{\mathbf{k}}^\dagger h_{-\mathbf{k}'}^\dagger \quad (\text{D-1})$$

où  $\psi_n(\mathbf{k})$  est la transformée de Fourier d'espace de la fonction d'onde de l'exciton dans l'état  $n$  satisfaisant la condition de normalisation :

$$\sum_{\mathbf{k}} |\psi_n(\mathbf{k})|^2 = \frac{1}{A} \quad (\text{D-2})$$

On peut démontrer la relation suivante :

$$b_{n,\mathbf{K}}^\dagger = \sqrt{A} \sum_{\mathbf{k}} \psi_n(\mathbf{k} - \mathbf{K}/2) c_{\mathbf{k}}^\dagger h_{\mathbf{K}-\mathbf{k}}^\dagger \quad (\text{D-3})$$



L'exciton étant un état lié de deux fermions, on peut s'attendre à ce qu'il se comporte comme un boson. La relation de commutation pour l'exciton dans l'état fondamental s'écrit :

$$\begin{aligned} [b_{1s,0}, b_{1s,0}^\dagger] &= A \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \psi_{1s}(\mathbf{k}) \psi_{1s}^*(\mathbf{k}') [h_{-\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}, c_{\mathbf{k}'}^\dagger h_{-\mathbf{k}'}^\dagger] \\ &= A \sum_{\mathbf{k}} |\psi_{1s}(\mathbf{k})|^2 (1 - c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} - h_{-\mathbf{k}}^\dagger h_{-\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (\text{D-4})$$

On a donc :

$$\langle [b_{1s,0}, b_{1s,0}^\dagger] \rangle = 1 - O(na_0^2) \quad (\text{D-5})$$

où  $n$  est la densité d'excitons par unités de surface. La déviation du commutateur par rapport au cas bosonique est proportionnelle au nombre moyen d'électrons et de trous contenus dans une surface de l'ordre de  $a_0^2$ , c'est-à-dire la surface de l'exciton. On peut donc considérer en première approximation l'exciton comme un boson dans le régime de faible densité, i.e. de faible excitation lumineuse.

Si on s'intéresse maintenant aux interactions entre excitons, provenant de l'interaction coulombienne entre électrons et trous, ce formalisme n'est pas le plus adapté. En effet, comme les opérateurs de création et d'annihilation ainsi définis ne satisfont pas les relations de commutation de bosons, on ne peut pas appliquer la théorie des perturbations. Une approche efficace est de revenir aux opérateurs décrivant les électrons et les trous [Kira 97], mais les résultats sont difficiles à interpréter en termes d'interaction entre excitons. Une autre approche consiste à appliquer une transformation qui permet de passer de l'espace fermionique à un espace bosonique. Une transformation couramment employée est la transformation d'Usui [Usui 60]. Elle a été appliquée par H. Hanamura à des systèmes tridimensionnels [Hanamura 74] et par G. Rochat *et al.* aux puits quantiques [Rochat 00]. Dans cette partie, nous décrivons brièvement le principe de la transformation d'Usui, puis nous l'appliquons à notre système en suivant la référence [Rochat 00]. Le hamiltonien bosonique ainsi obtenu sert de base à la modélisation des microcavités semi-conductrices proposée au chapitre 4.

## E La transformation d'Usui

Usui introduit un opérateur  $U$  qui transforme l'opérateur de création d'une paire de fermions  $c_{\mathbf{k}, \sigma_e}^\dagger h_{\mathbf{k}', \sigma_h}^\dagger$  en un opérateur bosonique  $C_{\mathbf{k}, \sigma_e; \mathbf{k}' \sigma_h}^\dagger$  [Usui 60]:

$$U = |0\rangle_{FF} \langle 0| \left[ \exp \left( \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \sum_{\sigma_e, \sigma_h} C_{\mathbf{k}_1, \sigma_e; \mathbf{k}_2, \sigma_h} \times h_{\mathbf{k}_2, \sigma_h} c_{\mathbf{k}_1, \sigma_e} \right) \right] |0\rangle_{BB} \langle 0| \quad (\text{E-1})$$

où  $|0\rangle_{FF}\langle 0|$  et  $|O\rangle_{BB}\langle 0|$  sont les projecteurs sur les états «vide», respectivement fermionique et bosonique. Cependant, la transformation  $U$  n'est pas unitaire. Une transformation unitaire est obtenue en introduisant un opérateur  $O$  qui ordonne les vecteurs d'onde des électrons et des trous. Finalement, le hamiltonien bosonique s'obtient grâce à la transformation suivante :

$$H_B = OUH_FU^{-1}O \quad (\text{E-2})$$

Le hamiltonien  $H_B$  est formé d'une somme infinie de produits d'opérateurs bosoniques  $C_{\mathbf{k}, \sigma_e; \mathbf{k}', \sigma_h}$  à tous les ordres. Nous introduisons de plus une transformation canonique des opérateurs bosoniques  $C_{\mathbf{k}, \sigma_e; \mathbf{k}', \sigma_h}$  vers des opérateurs excitoniques  $b_{n, \mathbf{K}, \sigma}$ , où  $n$  est l'état excitonique,  $\mathbf{K}$  le vecteur d'onde du centre de masse et  $\sigma$  le spin de l'exciton, qui peut prendre les valeurs  $\{\pm 1, \pm 2\}$ . La relation entre les opérateurs bosoniques et les opérateurs excitoniques s'écrit :

$$C_{\mathbf{k}_1, \sigma_1; \mathbf{k}_2, \sigma_2} = \sum_{n, \mathbf{K}} \sum_{\sigma} \sqrt{A} \delta_{\mathbf{K}; \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \delta_{\sigma; \sigma_1 + \sigma_2} \psi_n(\alpha \mathbf{k}_1 - \beta \mathbf{k}_2) b_{n, \mathbf{K}, \sigma} \quad (\text{E-3})$$

avec  $\alpha = m_e/M$  et  $\beta = m_h/M$ , où  $M = m_e + m_h$  la masse de l'exciton.

## F Hamiltonien effectif d'un mode excitonique couplé au champ lumineux

Lorsqu'on applique cette transformation au hamiltonien fermionique A-1, en allant jusqu'aux termes d'ordre deux en densité excitonique et en ne tenant compte que du niveau 1s dans un seul état de spin (par exemple  $\sigma = 1$ ) on obtient le hamiltonien effectif suivant [Rochat 00]:

$$H_B = H_B^{cin} + H_B^{champ} + H_B^{coul} \quad (\text{F-1})$$

a) *Terme d'énergie cinétique*

$$H_B^{cin} = H_B^{(2)} + H_B^{(4)} \quad (\text{F-2})$$

avec

$$H_B^{(2)} = \sum_{\mathbf{K}} \left( E_{gap} - E_{1s} + \frac{\hbar^2 K^2}{2M} \right) b_{\mathbf{K}}^{\dagger} b_{\mathbf{K}} \quad (\text{F-3})$$

où on a noté  $b_{\mathbf{K}}$  l'opérateur  $b_{1s, \mathbf{K}, \sigma=1}$  et  $E_{1s}$  l'énergie de liaison du niveau  $1s$ . Il s'agit là du hamiltonien libre d'un système de bosons. La nature fermionique des électrons et des trous entraîne une renormalisation du terme d'énergie cinétique :

$$H_B^{(4)} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{K}', \mathbf{p}} Y_{\mathbf{K}, \mathbf{K}', \mathbf{p}} b_{\mathbf{K}+\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{K}'-\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{K}'} b_{\mathbf{K}} \quad (\text{F-4})$$

avec

$$Y_{\mathbf{K}, \mathbf{K}', \mathbf{p}} = \sum_{\{\mathbf{k}_i\}} (E_{\mathbf{k}_1}^c + E_{\mathbf{k}_4}^v) \delta_{\mathbf{K}'; \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{K}; \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{p}; \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3} \quad (\text{F-5})$$

$$\times \psi_{1s}^*(\alpha \mathbf{k}_1 - \beta \mathbf{k}_2) \psi_{1s}^*(\alpha \mathbf{k}_3 - \beta \mathbf{k}_4) \psi_{1s}(\alpha \mathbf{k}_1 - \beta \mathbf{k}_4) \psi_{1s}(\alpha \mathbf{k}_3 - \beta \mathbf{k}_2) \quad (\text{F-6})$$

Il apparaît dans cette équation la transformée de Fourier  $\psi_{1s}(\mathbf{k})$  de la fonction d'onde du niveau  $1s$  qui s'écrit :

$$\psi_{1s}(k) = \frac{\sqrt{2\pi} a_0}{A} \frac{1}{[1 + (ka_0/2)^2]^{3/2}} \quad (\text{F-7})$$

### b) Interaction avec le champ électromagnétique

$$H_B^{champ} = H_B^{ch(2)} + H_B^{ch(4)} \quad (\text{F-8})$$

Le premier terme est linéaire :

$$H_B^{ch(2)} = G (a_{\mathbf{q}, \sigma=1} b_{\mathbf{q}}^\dagger + h.c.) \quad (\text{F-9})$$

et le second rend compte de la saturation du couplage :

$$H_B^{ch(4)} = GA^{3/2} \left( a_{\mathbf{q}, \sigma=1} \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} Z_{\mathbf{K}, \mathbf{K}', \mathbf{q}} b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}+\mathbf{K}'-\mathbf{q}} + h.c. \right) \quad (\text{F-10})$$

avec

$$Z_{\mathbf{K}, \mathbf{K}', \mathbf{q}} = \sum_{\{\mathbf{p}_i\}} \delta_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 - \alpha \mathbf{K} + \alpha \mathbf{q}; 0} \delta_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \beta \mathbf{K}' + \beta \mathbf{q}; 0} \psi_{1s}^*(\mathbf{p}_1) \psi_{1s}^*(\mathbf{p}_2) \psi_{1s}(\mathbf{p}_3) \quad (\text{F-11})$$

c) *Interaction coulombienne*

$$H_B^{coul} = H_B^{coul(4)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{K}', \mathbf{p}} (f(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p}, \mathbf{K}, \mathbf{K}')) b_{\mathbf{K}+\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{K}'-\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{K}} b_{\mathbf{K}'} \quad (\text{F-12})$$

Le coefficient  $f(\mathbf{p})$  correspond au potentiel d'interaction directe électron-électron et trou-trou :

$$f(\mathbf{p}) = A^2 V(p) \sum_{\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4} [\psi_{1s}^*(\mathbf{p}_3 - \alpha\mathbf{p}) - \psi_{1s}^*(\mathbf{p}_3 + \beta\mathbf{p})] \times \\ [\psi_{1s}^*(\mathbf{p}_4 + \alpha\mathbf{p}) - \psi_{1s}^*(\mathbf{p}_4 - \beta\mathbf{p})] \times \psi_{1s}(\mathbf{p}_3) \psi_{1s}(\mathbf{p}_4) \quad (\text{F-13})$$

et  $g(\mathbf{p}, \mathbf{K}, \mathbf{K}')$  au potentiel d'échange électron-électron et trou-trou :

$$g(\mathbf{p}, \mathbf{K}, \mathbf{K}') = A^2 \sum_{\mathbf{k}, \{\mathbf{p}_i\}} V(k) \psi_{1s}^*(\mathbf{p}_1) \psi_{1s}^*(\mathbf{p}_2) \psi_{1s}(\mathbf{p}_3) \psi_{1s}(\mathbf{p}_4) \quad (\text{F-14}) \\ \times [\delta_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4 - \alpha\mathbf{p}; \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4 - \mathbf{k} + \beta\mathbf{K}' - \beta\mathbf{K} - \beta\mathbf{p}; \mathbf{0}} - \delta_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4 - \alpha\mathbf{p} + \mathbf{k}; \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4 + \beta\mathbf{K}' - \beta\mathbf{K} - \beta\mathbf{p}; \mathbf{0}}] \\ \times [\delta_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 + \alpha\mathbf{p} - \mathbf{k}; \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 - \beta\mathbf{K}' + \beta\mathbf{K} + \beta\mathbf{p}; \mathbf{0}} - \delta_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 + \alpha\mathbf{p}; \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3 + \mathbf{k} - \beta\mathbf{K}' + \beta\mathbf{K} + \beta\mathbf{p}; \mathbf{0}}]$$

Le terme de renormalisation de l'énergie cinétique et le terme d'interaction coulombienne ont la même forme (il s'agit de produit de 4 opérateurs excitoniques).

d) *Limite aux grandes longueurs d'onde*

En pratique on ne s'intéresse qu'aux états excitoniques couplés à la lumière. Leur vecteur d'onde a un module  $k \leq k_r \simeq 2.10^7 m^{-1}$  ( $k_r$  est défini par la relation 1-9). Or l'échelle de variation des différents coefficients de couplage est de l'ordre de l'inverse du rayon de Bohr bidimensionnel de l'exciton, soit environ  $10^8 m^{-1}$ . On pourra donc prendre la valeur en  $\mathbf{k} = 0$  de tous ces coefficients.

Dans cette limite le terme de renormalisation de l'énergie cinétique est négligeable par rapport au terme d'interaction coulombienne :

$$Y_{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}} \simeq 0 \quad (\text{F-15})$$

Le coefficient de saturation du couplage exciton-photon s'écrit :

$$Z_{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}} = \frac{\Omega_R}{2n_{sat}A} \quad (\text{F-16})$$

où  $n_{sat} = 7 / (16\pi a_{exc}^2)$  est la densité de saturation de l'exciton.

Enfin les termes d'interaction coulombienne sont :

$$f(\mathbf{0}) = 0 \quad (\text{F-17})$$

$$g(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \frac{6e^2 a_{exc}}{\epsilon_0 A} \quad (\text{F-18})$$

Nous venons de retrouver le hamiltonien 4-53 qui nous sert à modéliser la non-linéarité excitonique dans le chapitre 4.

## Bibliographie

- [Andreani 91] L. C. Andreani, *Radiative lifetime of free excitons in quantum wells*, Solid State Comm. **77**, 641 (1991).
- [Baumberg 98] J. J. Baumberg, A. Armitage, M. S. Skolnick, J. S. Roberts, *Suppressed polariton scattering in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. Lett. **81**, 661 (1998).
- [Baumberg 00] J. J. Baumberg, P. G. Savvidis, R. M. Stevenson, A. I. Tartakovskii, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, J. S. Roberts, *Parametric oscillation in a vertical cavity: a polariton condensate or micro-optical parametric oscillator*, Phys. Rev. B **62**, R16247 (2000).
- [Cao 97] H. Cao, S. Pau, J. M. Jacobson, G. Björk, Y. Yamamoto, A. Imamoglu, *Transition from a microcavity exciton-polariton to a photon laser*, Phys. Rev. A **55**, 4632 (1997).
- [Cassabois 99] G. Cassabois, *Relaxation de cohérence dans des hétérostructures de semi-conducteurs*, Thèse de l'Université Paris VI effectuée au LPMC de l'Ecole Normale Supérieure (1999).
- [Cargèse 98] *Confined photon systems: fundamentals and applications*, ed. Springer, eds. H. Benisty, J. M. Gérard, R. Houdré, J. Rarity, C. Weisbuch (1998).
- [Ciuti 98] C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, P. Schweindimann, *Threshold behavior in the collision broadening of microcavity polaritons*, Phys. Rev. B **58**, R10123 (1998).
- [Ciuti 00] C. Ciuti, P. Schweindimann, B. Deveaud, A. Quattropani, *Theory of the angle-resonant polariton amplifier*, Phys. Rev. B **62**, R4825 (2000).
- [Ciuti 01] C. Ciuti, P. Schweindimann, A. Quattropani, *Parametric luminescence of microcavity polaritons*, Phys. Rev. B **63**, 041303(R) (2001).

- [Cohen 88a] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, §**CIV.2** - *Equations de Heisenberg-Langevin pour un oscillateur harmonique amorti* in *Processus d'interaction entre photons et atomes*, ed. InterEditions/Editions du CNRS (1988).
- [Cohen 88b] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, §**III** - *Etude non perturbative des amplitudes de transition* in *Processus d'interaction entre photons et atomes*, ed. InterEditions/Editions du CNRS (1988).
- [Collett 84] M. J. Collett and C. W. Gardiner, Phys. Rev. A **30**, 1386 (1984).
- [Courty 90] J. M. Courty, *Les fluctuations quantiques dans l'interaction d'un système non linéaire avec un réservoir harmonique*, Thèse de l'Université Paris VI effectuée au LKB (1990).
- [Dang 98] L. S. Dang, D. Heger, R. André, F. Boeuf, R. Romestain, *Stimulation of polariton luminescence in a semiconductor microcavity*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3920 (1998).
- [Eleuch 98] H. Eleuch, *Etude théorique des fluctuations quantiques dans la lumière sortant d'une microcavité semi-conductrice*, Thèse de l'Université Paris VI effectuée au LKB (1998).
- [Eleuch 99] H. Eleuch, J.M. Courty, G. Messin, C. Fabre, E. Giacobino, *Cavity QED effects in semiconductor microcavities*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **1**, 1 (1999).
- [Ell 98] C. Ell, J. Prineas, T. R. Nelson, Jr., S. Park, H. M. Gibbs, G. Khitrova, S. W. Koch, R. Houdré, *Influence of structural disorder and light coupling on the excitonic response of semiconductor microcavities*, Phys. Rev. Lett. **80**, 4795 (1998).
- [Fabre 95] C. Fabre, *Quantum fluctuations in light beams*, in *Quantum fluctuations*, ed. Elsevier Science Publishers B.V., eds S. Reynaud, E. Giacobino et J. Zinn-Justin, Les Houches, Session LXIII (1995).
- [Fox 95] A. M. Fox, J. J. Baumberg, M. Dabbicco, B. Huttner, J. F. Ryan, *Squeezed light generation in semiconductors*, Phys. Rev. Lett. **74**, 1728 (1995).
- [Glauber 65] R. Glauber, *Quantum optics and electronics*, ed. Gordon and Breach (1965).
- [Grandclément 89] D. Grandclément, G. Grynberg, M. Pinard, *Parametric oscillation in sodium vapor*, Phys. Rev. Lett. **59**, 44 (1989).

- [Hanamura 74] E. Hanamura, *Theory of many Wannier excitons I*, J. Phys Soc. Japan **37**, 1545 (1974); *Theory of many Wannier excitons II. Absence of self-induced transparency*, J. Phys Soc. Japan **37**, 1553 (1974).
- [Haug&Koch 90] H. Haug, S. W. Koch, *Quantum theory of the optical and electronic properties of semiconductors*, ed. World Scientific (1990).
- [Hermier 01] J. P. Hermier, A. Bramati, A. Z. Khoury, E. Giacobino, P. Schnit-zer, R. Michalzik, K. J. Ebeling, *Noise characteristics of oxide confined Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers*, IEEE J. Quan-tum Electr. **37**, 87 (2001).
- [Hopfield 58] J. J. Hopfield, *Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals*, Phys. Rev. **112**, 1555 (1958).
- [Houdré 94] R. Houdré, C. Weisbuch, R. P. Stanley, U. Oesterle, P. Pellandini, M. Ilegems, *Measurement of cavity-polariton dispersion curve from angle resolved photoluminescence experiments*, Phys. Rev. Lett. **73**, 2043 (1994).
- [Houdré 96] R. Houdré, J. L. Gibernon, P. Pellandini, R. P. Stanley, U. Oesterle, C. Weisbuch, J. O’Gorman, B. Roycroft, M. Ilegems, *Vacuum-field Rabi splitting in the presence of inhomogeneous broadening: Resolution of a homogeneous linewidth in an inhomoge-neously broadened system*, Phys. Rev. A **53**, 2711 (1996).
- [Houdré 00] R. Houdré, C. Weisbuch, R. P. Stanley, U. Oesterle, M. Ilegems, *Nonlinear emission of semiconductor microcavities in the strong coupling regime*, Phys. Rev. Lett. **85**, 2793 (2000).
- [Huang 00] R. Hyang, F. Tassone, Y. Yamamoto, *Experimental evidence of stimulated scattering of excitons into microcavity polaritons*, Phys. Rev. B **61**, R7854 (2000).
- [Kilper 96] D. C. Kilper, D. G. Steel, R. Craig, D. R. Scifres, *Polarization-dependent noise in photon-number squeezed light generated by quantum-well lasers*, Opt. Lett. **21**, 1283 (1996).
- [Kimble 92] H. J. Kimble, *Squeezed states of light: an (incomplete) survey of experimental progress and prospects*, Physics Reports **219**, 227 (1992).
- [Kira 97] M. Kira, F. Jahnke, S. W. Koch, J. D. Berger, D. V. Wick, T. R. Nelson, G. Khitrova, H. M. Gibbs, *Quantum theory of nonli-*



- near semiconductor microcavity luminescence explaining «Boser» experiments*, Phys. Rev. Lett. **79**, 5170 (1997).
- [Koch 98] S. W. Koch, *Microscopic theory of the optical semiconductor response near the fundamental absorption edge in Confined photon systems: fundamentals and applications*, ed. Springer, eds. H. Benisty, J. M. Gérard, R. Houdré, J. Rarity, C. Weisbuch (1998).
- [Lambrecht 96] A. Lambrecht, T. Coudreau, A. M. Steinberg, E. Giacobino, S. Reynaud, *Squeezing with cold atoms*, Europhysics Letters Vol. 36, No. 2, 93-98 (1996).
- [Mandel&Wolf 95] L. Mandel, E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics*, ed. Cambridge University Press, p.56-59 (1995).
- [Mertz 91] J. Mertz, T. Debuisschert, A. Heidmann, C. Fabre, E. Giacobino, *Improvements in the observed intensity correlation of optical parametric oscillator twin beams*, Opt. Lett. **16**, 1234 (1991).
- [Messin 99] G. Messin, J. Ph. Karr, H. Eleuch, J.M. Courty, E. Giacobino, *Squeezed states and the quantum noise of light in semiconductor microcavities*, J. Phys. Cond. Matter **11**, 6069 (1999).
- [Messin 00] G. Messin, *Luminescence, bruit et effets non linéaires dans les microcavités semi-conductrices*, Thèse de l'Université Paris VI effectuée au LKB (2000).
- [Messin 01] G. Messin, J. Ph. Karr, A. Baas, G. Khitrova, R. Houdré, R. P. Stanley, U. Oesterle, E. Giacobino, *Parametric polariton amplification in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. Lett. **87**, 127403 (2001).
- [Pau 95] S. Pau, G. Björk, J. M. Jacobson, H. Cao, Y. Yamamoto, *Microcavity exciton-polariton splitting in the linear regime*, Phys. Rev. B **51**, 14437 (1995).
- [Pau 96] S. Pau, H. Cao, J. M. Jacobson, G. Björk, Y. Yamamoto, A. Imamoglu, *Observation of a laserlike transition in a microcavity exciton-polariton system*, Phys. Rev. A **54**, R1789 (1996).
- [Piermarocchi 96] C. Piermarocchi, F. Tassone, V. Savona, A. Quattropani, P. Schweindimann, *Nonequilibrium dynamics of free quantum well excitons in time-resolved photoluminescence*, Phys. Rev. B **53**, 15834 (1996).
- [Rarity&Weisbuch] *Microcavities and photonic bandgaps: physics and applications*, ed.

- Kluwer Academic Publishers, eds. J. Rarity and C. Weisbuch, NATO ASI Series Vol. 324 of Series E (1996).
- [Reynaud 89a] S. Reynaud, A. Heidmann, *A semiclassical linear input output transformation for quantum fluctuations*, Opt. Comm. **71**, 209 (1989).
- [Reynaud 89b] S. Reynaud, C. Fabre, E. Giacobino, A. Heidmann, *Photon noise reduction by passive optical bistable systems*, Phys. Rev. A **40**, 1440 (1989).
- [Reynaud 92] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, C. Fabre, *Quantum fluctuations in optical systems*, Progress in optics **30**, ed. E. Wolf, p.1-85 (1992).
- [Rochat 00] G. Rochat, C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, P. Schweindimann, *Excitonic Bloch equations for a two-dimensional system of interacting excitons*, Phys. Rev. B **61**, 13856 (2000).
- [Savona 95] V. Savona, L. C. Andreani, P. Schweindimann, A. Quattropani, *Quantum well excitons in semiconductor microcavities: unified treatment of the weak and strong coupling regime*, Solid State Comm. **93**, 733 (1995).
- [Savona 97] V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, F. Tassone, P. Schweindimann, *Microscopic theory of motional narrowing of microcavity polaritons in a disordered potential*, Phys. Rev. Lett. **78**, 4470 (1997).
- [Savona 98] V. Savona, *Linear optical properties of semiconductor microcavities with embedded quantum wells in Confined photon systems: fundamentals and applications*, ed. Springer, eds. H. Benisty, J. M. Gérard, R. Houdré, J. Rarity, C. Weisbuch (1998).
- [Savvidis 00a] P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, J. S. Roberts, *Angle-resonant stimulated polariton amplifier*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1547 (2000).
- [Savvidis 00b] P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, J. S. Roberts, *Asymmetric angular emission in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. B **62**, R13278 (2000).
- [Savvidis 01] P. G. Savvidis, C. Ciuti, J. J. Baumberg, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, J. S. Roberts, *Off-branch polaritons and multiple scat-*

- tering in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. B **64**, 075311 (2001).
- [Senellart 99] P. Senellart, J. Bloch, *Nonlinear emission of microcavity polaritons in the low density regime*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1233 (1999).
- [Senellart 00] P. Senellart, J. Bloch, B. Sermage, J. Y. Marzin, *Microcavity polariton depopulation as evidence for stimulated scattering*, Phys. Rev. B **62**, R16263 (2000).
- [Slusher 85] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, J. F. Valley, *Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in optical cavity*, Phys. Rev. Lett. **55**, 2409 (1985).
- [Stanley 97] R. P. Stanley, S. Pau, U. Oesterle, R. Houdré, M. Ilegems, *Resonant photoluminescence of semiconductor microcavities: the role of acoustic phonons in polariton relaxation*, Phys. Rev. B **55**, R4867 (1997).
- [Stanley 98] R. P. Stanley, R. Houdré, U. Oesterle, M. Ilegems, *Photoquenching of excitonic inhomogeneous linewidth in semiconductor microcavities*, Solid State Comm. **106**, 485 (1998).
- [Stevenson 00] R.M. Stevenson, V. N. Astratov, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, M. Emam Ismail, A. L. Tartakovskii, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, J. S. Roberts, *Continuous wave observation of massive polariton redistribution by stimulated scattering in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3680 (2000).
- [Steyn-Ross 83] M. L. Steyn-Ross, C. Gardiner, *The quantum theory of the excitonic bistability*, Phys. Rev A **27**, 310 (1983).
- [Tassone 97] F. Tassone, C. Piermarocchi, V. Savona, A. Quattropani, P. Schweindimann, *Bottleneck effects in the relaxation and photoluminescence of microcavity polaritons*, Phys. Rev. B **56**, 7554 (1996).
- [Tassone 99] F. Tassone, E. Yamamoto, *Exciton scattering dynamics in a semiconductor microcavity and stimulated scattering into polaritons*, Phys. Rev. B **59**, 10830 (1997).
- [Usui 60] T. Usui, *Excitations in a high density electron gas*, Progr. Theor. Phys. **23**, 787 (1960).
- [Walls 94] D. F. Walls, G. J. Milburn, *Quantum optics*, ed. Springer-Verlag (1994).

- 
- [Weisbuch 92] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, Y. Arakawa, *Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor microcavity*, Phys. Rev. Lett. **69**, 3314 (1992).
- [Whittaker 98] D. M. Whittaker, *What determines inhomogeneous linewidth in semiconductor microcavities?*, Phys. Rev. Lett. **80**, 4791 (1998).