



HAL
open science

Aspects semi-classiques de la quantification géométrique

Laurent Charles

► **To cite this version:**

Laurent Charles. Aspects semi-classiques de la quantification géométrique. Mathématiques [math]. Université Paris Dauphine - Paris IX, 2000. Français. NNT: . tel-00001289

HAL Id: tel-00001289

<https://theses.hal.science/tel-00001289>

Submitted on 28 Mar 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS IX - DAUPHINE
UFR MATHÉMATIQUES DE LA DÉCISION

**ASPECTS SEMI-CLASSIQUES DE LA QUANTIFICATION
GÉOMÉTRIQUE**

THÈSE

pour l'obtention du titre de

**Docteur en Sciences
Spécialité Mathématiques**
(arrêté du 30 mars 1992)

présentée et soutenue par

Laurent CHARLES

JURY

Directeur de Thèse: **Thierry PAUL**
Directeur de recherche au CNRS

Rapporteurs: **Louis BOUTET DE MONVEL**
Professeur à l'Université de Paris VI

Yves COLIN DE VERDIÈRE
Professeur à l'Université de Grenoble I,
membre de l'IUF

Suffragants: **Ivar EKELAND**
Professeur à l'Université de Paris IX

André VOROS
Ingénieur au CEA

San VŨ NGỌC
Chargé de recherche au CNRS

15 décembre 2000

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Thierry Paul, qui a suivi mes travaux tout au long de cette thèse.

Louis Boutet de Monvel et Yves Colin de Verdière me font l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse. Je suis très sensible à l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mes travaux. Je les remercie très sincèrement pour leur soutien.

André Voros m'a accueilli au Service de Physique Théorique du CEA, alors que j'étais scientifique du contingent. Je lui dois de nombreuses discussions stimulantes. Il me fait l'honneur d'être membre de mon jury. Je l'en remercie chaleureusement.

Je voudrais aussi remercier Yvar Ekeland et San Vũ Ngọc pour avoir bien voulu faire partie de ce jury.

Cette thèse a été réalisée dans d'excellentes conditions au Centre de Recherche des Mathématiques de la Décision à l'université Paris-Dauphine. Je tiens à remercier tous les thésards du CEREMADE pour l'ambiance sympathique et chaleureuse dans laquelle s'est déroulé ce travail.

Enfin je remercie tout particulièrement mes parents et mes amis. C'est grâce à leur soutien durant les moments difficiles que cette thèse a pu aboutir.

Introduction

L'analyse semi-classique est à mi-chemin entre la mécanique quantique et la mécanique classique. On s'intéresse par exemple aux propriétés spectrales d'un opérateur de Schrödinger $\hbar^2 \Delta + V$ sur un variété riemannienne (X, g) dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, que l'on relie à la dynamique hamiltonienne de $g_{ij} \xi^i \xi^j + V$ sur le cotangent T^*X . Les principaux outils nécessaires à une telle étude sont les opérateurs pseudodifférentiels, les distributions lagrangiennes et les opérateurs intégraux de Fourier. Développés par Duistermaat et Hörmander [8] durant les années 70 pour l'analyse des équations aux dérivées partielles linéaires, Helffer et Robert [26] précédés de Maslov [23], Leray [22] les ont adaptés dans une théorie avec petit paramètre. Ce cadre général s'applique à de nombreux problèmes de la physique et des mathématiques, autres que la limite semi-classique de la mécanique quantique [12]. Il permet en outre de mettre en relation l'analyse hilbertienne d'espace du type $L^2(X)$ avec la géométrie symplectique de cotangents T^*X .

Les espaces de phase qui nous intéressent dans cette thèse ne sont pas des cotangents, mais des variétés symplectiques compactes. Il est naturel de les introduire pour décrire des systèmes avec contraintes ou bien par réduction pour étudier des hamiltoniens qui possèdent des symétries sur des cotangents. Ils apparaissent aussi dans la mécanique quantique comme limites semi-classiques dans l'étude du spectre rotationnel des molécules. La quantification de ces espaces a été formalisée mathématiquement par Kostant [21] et Souriau [27] au début des années 70. Cette théorie porte le nom de quantification géométrique et s'applique aux variétés symplectiques compactes (M, ω) qui sont préquantifiables, i.e. telles qu'il existe un fibré en droite hermitien $L \rightarrow M$ muni d'une connexion de courbure $\frac{1}{\hbar} \omega$, et qui sont munies d'une structure kählerienne dont la deux-forme fondamentale est ω . L'espace de Hilbert \mathcal{H} qui quantifie (M, ω) est alors l'ensemble des sections holomorphes de L . Cette construction est motivée par la méthode des orbites dans la théorie des groupes : l'idée est que les représentations irréductibles d'un groupe de Lie s'obtiennent en quantifiant ses variétés symplectiques homogènes. C'est bien le cas lorsque le groupe est compact.

Les opérateurs que l'on considère dans ce contexte sont les opérateurs de Berezin-Toeplitz [1]. Ils sont par définition de la forme $\Pi f \Pi$, où Π est le projecteur orthogonal de $L^2(M, L)$ sur \mathcal{H} et f est une fonction de $C^\infty(M)$. Etant donné un tel opérateur, l'équation de Schrödinger

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \Psi(t) + \Pi f \Pi \Psi(t) = 0, \quad \Psi(t) \in \mathcal{H}$$

donne la dynamique des états quantiques. Une approche heuristique pour résoudre cette équation est fournie par l'intégrale de Feynman : on exprime le noyau du propagateur $\exp(it\Pi f \Pi)$ comme une intégrale sur l'ensemble des chemins de M . Cette idée est réalisée de manière rigoureuse par Daubechies, Klauder et Paul lorsque l'espace des phases est le plan euclidien, le demi-plan de Lobatchevski ou la sphère [20] [14] à l'aide d'intégrales stochastiques. Dans un premier chapitre, nous généralisons ceci aux variétés kähleriennes préquantifiables. A strictement parler, il ne s'agit pas d'un résultat semi-classique car il n'y a pas ici de petit paramètre. Néanmoins on relie de la sorte le propagateur quantique à une quantité classique, l'action des chemins de M .

Dans les chapitres suivants de cette thèse, on se place dans un contexte semi-classique.

Le fibré L est remplacé par les fibrés L^k ce qui définit les espaces de Hilbert \mathcal{H}_k . Le petit paramètre est $\hbar = k^{-1}$. De plus, l'on considère des opérateurs de Berezin-Toeplitz de la forme $\Pi_k f(\cdot, k) \Pi_k$, où $f(\cdot, k)$ est un symbole défini sur M . Le développement de l'analyse microlocale dans ce cadre remonte au livre [6] de Boutet de Monvel et Guillemin. Ces auteurs ont élaboré une théorie où l'on quantifie des cônes symplectiques à base compacte. Les opérateurs dits de Toeplitz y généralisent les opérateurs pseudodifférentiels et ont des propriétés spectrales similaires. Nos travaux s'inscrivent en quelque sorte dans une version avec petit paramètre de cette théorie. D'une autre manière, on peut considérer que la théorie semi-classique est contenue dans la théorie homogène. Boutet de Monvel et Guillemin ont d'ailleurs exploité ceci pour quantifier les variétés symplectiques compactes M préquantifiables qui ne possèdent pas nécessairement de structure kählerienne, i.e. qu'ils construisent une suite d'espaces $\mathcal{H}_k \subset C^\infty(M, L^k)$ qui vérifient essentiellement les mêmes propriétés que les espaces de sections holomorphes dans le cas kählerien, notamment leur dimension se calcule en fonction de $[\omega]$ et de la classe de Todd de (M, ω) . D'autres applications semi-classiques ont ensuite été proposées par Borthwick, Paul, Uribe (formule de traces [4], sections lagrangiennes [3]) et Zelditch (quantum map [29]), que nous complétons en partie.

Le deuxième chapitre est consacré aux opérateurs de Berezin-Toeplitz. De nombreux articles [25], [24], [9], [10], [2], [18] portent sur les propriétés symboliques de ces opérateurs et aboutissent à la construction de star-produits. Les résultats les plus généraux sont déduits de [6]. Notre contribution est de proposer un ansatz dans le cas kählerien pour le noyau de ces opérateurs. La validité de cet ansatz découle des résultats de Boutet de Monvel et Sjöstrand [7]. Il permet de donner une preuve directe des résultats connus sur les opérateurs de Berezin-Toeplitz et de décrire le calcul symbolique en fonction de la métrique kählerienne. Nous en profitons aussi pour définir la notion de microsupport.

L'objet du troisième chapitre est la quantification des sous-variétés lagrangiennes d'une variété kählerienne M préquantifiable. Par quantification, nous entendons associer à une sous-variété lagrangienne Λ de M une espace de sections ($s_k \in \mathcal{H}_k$) dont le microsupport est inclu dans Λ . Ces sections jouent le même rôle que les distributions lagrangiennes dans la quantification des cotangents. Elles possèdent entre autres un symbole total, qui rend leur manipulation aisée. La clef de cette construction est la généralisation de l'ansatz proposé dans le deuxième chapitre. Nous appliquons ceci pour traiter les problèmes suivants : conditions de Bohr-Sommerfeld pour les opérateurs de Berezin-Toeplitz, quantification des symplectomorphismes, description semi-classique du propagateur d'un opérateur de Berezin-Toeplitz et équivalence microlocale.

Dans le dernier chapitre, nous entreprenons la généralisation aux variétés symplectiques préquantifiables des résultats des chapitres 2 et 3. Nous reprenons la construction de Boutet de Monvel et Guillemin dans un cadre semi-classique. On travaille sur les espaces de Hilbert $L^2(M, L^k)$, dont la limite semi-classique ($k^{-1} \rightarrow 0$) est le cotangent T^*M muni de la deux forme symplectique $d\xi^i \wedge dx^i + \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$. La section nulle $M \rightarrow T^*M$ est alors un plongement symplectique. En introduisant des données adéquates, nous obtenons une réduction symplectique de T^*M sur M , ce qui permet d'associer à chaque sous-variété lagrangienne de M une sous-variété lagrangienne de T^*M . L'analogue quantique de ces opérations conduit à la quantification de M , de ses sous-variétés lagrangiennes et symplectomorphismes.

Chaque chapitre est indépendant et est conçu comme un article. Le premier chapitre a été publié dans *Helvetica Physica Acta*, Volume 72 (1999), no. 5-6, pages 341-355. Pour clore cette introduction, nous énonçons quelques conclusions générales de ces travaux et indiquons quelques perspectives.

Les résultats de cette thèse montrent qu'il est possible de transposer la théorie semi-classique des espaces cotangents dans le cadre de la quantification géométrique. La difficulté est de trouver la méthode adéquate et la formulation spécifique à ce contexte. Concernant l'intégrale de Feynman, l'approche usuelle [11] est de traiter l'équation de Schrödinger $\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} \Psi + (\hbar^2 \Delta + V + \frac{\hbar}{i}) \Psi = 0$ comme une équation de la chaleur à temps complexe et d'appliquer la formule de Feynman-Kac. Notre démarche consiste aussi à se ramener au semi-groupe de la chaleur mais par une méthode différente. Pour ce qui est des outils de l'analyse microlocale, nous montrons qu'il existe des ansatz appropriés aux variétés symplectiques compactes tout aussi efficaces que les intégrales oscillantes de la théorie des cotangents. Le calcul des symboles principaux se généralise et la notion de microsupport est introduite. Remarquons que les problèmes techniques sont déplacés : il n'y a plus de caustiques et il est immédiat de se (micro-)localiser dans l'espace des phases, par contre il faut faire face à la contrainte imposée par les équations de Cauchy-Riemann. De nombreuses formules semi-classiques sont étendues dans le cadre de la quantification géométrique. En général les invariants symplectiques sont inchangés ou légèrement modifiés pour prendre en compte les données préquantiques. De plus, il apparaît des invariants propres à la structure kählérienne, par exemple dans la composition des symboles ou dans les conditions de Bohr-Sommerfeld. Dans ce dernier cas une intégrale de courbure remplace l'indice de Maslov, qui est un invariant spécifique de la théorie des cotangents. Enfin, le dernier chapitre montre que l'analyse microlocale sur les espace cotangents et l'analyse microlocale sur les variétés symplectiques compactes s'inscrivent dans une même théorie. Nous indiquons entre autres comment réaliser des équivalences microlocales entre ces deux géométries, ce qui devrait permettre de transposer immédiatement les résultats d'une théorie à l'autre.

Dans nos travaux, les espaces quantiques sont définis comme des espaces de sections d'un fibré $L^k \rightarrow M$, holomorphes ou soumises à d'autres contraintes. Une extension possible est de considérer des sections de $E \otimes L^k \rightarrow M$ dans la limite $k \rightarrow \infty$, où E est un fibré auxiliaire de base M . Par exemple, si M est kählérienne, on peut sous certaines conditions topologiques, définir E comme étant le fibré des demi-formes, i.e. une racine carrée de $\Lambda^{n,0} M$. \mathcal{H}_k est alors l'ensemble des sections holomorphes de $E \otimes L^k$. On s'attend dans ce cas à une simplification du calcul symbolique et des conditions de Bohr-Sommerfeld. Une autre possibilité consiste à munir la variété symplectique (M, ω) d'une structure presque-complexe compatible, ce qui est toujours possible et choisir $E = \oplus \Lambda^{0,k}$. On introduit à partir de ces données un opérateur de Dirac spin-c D_k qui agit sur les sections de $E \otimes L^k$ et généralise l'opérateur $\bar{\partial} + \bar{\partial}^*$ défini lorsque M est kählérienne [16]. Le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch, les formules de Lefschetz et de nombreux résultats en rapport avec la réduction symplectique se généralisent dans ce contexte. Borthwick et Uribe [5] montrent aussi un équivalent du théorème d'annulation de Kodaira et proposent de définir les espaces quantiques \mathcal{H}_k comme étant le noyau de D_k . L'intérêt de cete quantification est qu'elle est déterminée canoniquement par une structure presque complexe compatible avec ω . Une dernière possibilité consiste à supposer M kählérienne et choisir pour E un fibré holomorphe de rang quelconque. Si \mathcal{H}_k^E est l'espace des sections holomorphes de $E \otimes L^k$, sa dimension est au premier ordre estimée

par $\text{rang}(E) \cdot (\frac{k}{2\pi})^n \text{Vol}(M)$, ce qui revient à multiplier la dimension de l'espace quantique par $\text{rang}(E)$. Dans tout ces cas, nous pensons que la première étape d'une étude semi-classique serait la généralisation de l'ansatz pour le noyau du projecteur sur \mathcal{H}_k .

Comme nous le montrons dans cette thèse, le langage de la quantification par déformation est tout à fait approprié pour formuler des résultats semi-classiques. Précisons d'ailleurs que nos travaux montrent l'existence de star-produits canoniques sur les variétés kähleriennes et de star-produits sur les variétés symplectiques compactes préquantifiables. La preuve est de nature différente de celles données par De Wilde-Lecomte [15] ou Fedosov [17]. Les star-produits d'une variété symplectique M sont classés à équivalence près par $H^2(M)[[\hbar]]$. Comment s'insèrent dans cette classification les star-produits que nous exhibons ? Nous pensons aussi qu'il doit être possible d'appliquer les techniques de la quantification par déformation à des problèmes autres que la description du calcul symbolique. Par exemple on peut s'interroger sur la formulation des conditions de Bohr-Sommerfeld lorsqu'on ne dispose plus de structure kählerienne. La question est délicate car les données de la quantification semblent difficiles à exploiter. Pour contourner ceci, on peut se demander s'il est possible d'écrire les conditions de Bohr-Sommerfeld à partir d'un star-produit, et si ce n'est pas le cas, quelles sont les structures adéquates.

Pour ce qui est de l'analyse, les techniques que nous utilisons reposent sur le caractère C^∞ des variétés. Dans le cas kählerien, on dispose de plus d'une structure analytique. Exploiter ceci devrait améliorer le contrôle des opérateurs par leur symbole. On peut par exemple espérer remplacer les restes $O(k^{-\infty})$ par des restes $O(e^{-Ck})$ et affiner de la sorte les descriptions semi-classiques du spectre des opérateurs comme le fait Voros sur l'espace de Bargmann dans [28].

Une dernière piste de recherche qui nous semble intéressante se rapporte à la réduction symplectique. L'étude des relations entre la quantification géométrique et la réduction symplectique remonte aux travaux de Guillemin et Sternberg [19]. Leurs idées ont été appliquées à la représentation des groupes de Lie et étendues avec des opérateurs de Dirac spin-c. Mais à notre connaissance, rien n'a été fait dans une perspective semi-classique. Pourtant de nombreux problèmes de la physique, où se présentent des symétries, se formalisent dans ce cadre. De plus la réduction des cotangents peut produire des variétés symplectiques compactes et une telle étude devrait renforcer la cohésion entre la quantification de ces deux géométries. Enfin on peut aussi envisager d'appliquer ceci à des problèmes spectraux comme le suggèrent les travaux de Colin de Verdière et Vu Ngoc [13].

Bibliography

- [1] F. A. Berezin. General concept of quantization. *Comm. Math. Phys.*, 40:153–174, 1975.
- [2] M. Bordemann, E. Meinrenken, and M. Schlichenmaier. Toeplitz quantization of Kähler manifolds and $\text{gl}(N)$, $N \rightarrow \infty$ limits. *Comm. Math. Phys.*, 165(2):281–296, 1994.
- [3] D. Borthwick, T. Paul, and A. Uribe. Legendrian distributions with applications to relative Poincaré series. *Invent. Math.*, 122(2):359–402, 1995.

- [4] D. Borthwick, T. Paul, and A. Uribe. Semiclassical spectral estimates for Toeplitz operators. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(4):1189–1229, 1998.
- [5] D. Borthwick and A. Uribe. Almost complex structures and geometric quantization. *Math. Res. Lett.*, 3(6):845–861, 1996.
- [6] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin. *The spectral theory of Toeplitz operators*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981.
- [7] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand. Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő. pages 123–164. *Astérisque*, No. 34–35, 1976.
- [8] J. Brüning and V. Guillemin, editors. *Mathematics past and present*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Fourier integral operators.
- [9] M. Cahen, S. Gutt, and J. Rawnsley. Quantization of Kähler manifolds. I. Geometric interpretation of Berezin’s quantization. *J. Geom. Phys.*, 7(1):45–62, 1990.
- [10] M. Cahen, S. Gutt, and J. Rawnsley. Quantization of Kähler manifolds. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 337(1):73–98, 1993.
- [11] P. Cartier and C. DeWitt-Morette. A new perspective on functional integration. *J. Math. Phys.*, 36(5):2237–2312, 1995.
- [12] Y. Colin de Verdière. *Méthodes semi-classiques et théorie spectrale*. en préparation.
- [13] Y. Colin de Verdière and S. Vu Ngoc. Singular Bohr-Sommerfeld rules for 2d integrable systems. *preprint Institut Fourier*, 2000.
- [14] I. Daubechies, J. R. Klauder, and T. Paul. Wiener measures for path integrals with affine kinematic variables. *J. Math. Phys.*, 28(1):85–102, 1987.
- [15] M. De Wilde and P. B. A. Lecomte. Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 7(6):487–496, 1983.
- [16] J. J. Duistermaat. *The heat kernel Lefschetz fixed point formula for the spin-c Dirac operator*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [17] B. V. Fedosov. A simple geometrical construction of deformation quantization. *J. Differential Geom.*, 40(2):213–238, 1994.
- [18] V. Guillemin. Star products on compact pre-quantizable symplectic manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 35(1):85–89, 1995.
- [19] V. Guillemin and S. Sternberg. Geometric quantization and multiplicities of group representations. *Invent. Math.*, 67(3):515–538, 1982.
- [20] J. R. Klauder and I. Daubechies. Quantum mechanical path integrals with Wiener measures for all polynomial Hamiltonians. *Phys. Rev. Lett.*, 52(14):1161–1164, 1984.
- [21] B. Kostant. Quantization and unitary representations. I. Prequantization. pages 87–208. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 170, 1970.

- [22] J. Leray. Analyse lagrangienne et mécanique quantique. pages 303, Exp. No. 1, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles (1976–1977), I, 1977.
- [23] V. P. Maslov. *Perturbation theory and asymptotic methods*. Dunod, Paris, 1972.
- [24] C. Moreno and P. Ortega-Navarro. *-products on $D^1(\mathbb{C})$, S^2 and related spectral analysis. *Lett. Math. Phys.*, 7(3):181–193, 1983.
- [25] C. Moreno and P. Ortega-Navarro. Deformations of the algebra of functions on Hermitian symmetric spaces resulting from quantization. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, 38(3):215–241, 1983.
- [26] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1987.
- [27] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod, Paris, 1970. Maîtrises de mathématiques.
- [28] A. Voros. Wentzel-Kramers-Brillouin method in the Bargmann representation. *Phys. Rev. A (3)*, 40(12):6814–6825, 1989.
- [29] S. Zelditch. Index and dynamics of quantized contact transformations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47(1):305–363, 1997.

Contents

Remerciements	iii
Introduction	v
Bibliography	viii
1 Intégrale de Feynman et Quantification de Toeplitz	1
1 Introduction	1
2 The phase of the action integral	2
3 Prequantization	5
4 Toeplitz Quantization	8
5 An approximation by the heat semi-group	10
6 Feynman Path Integral	13
Bibliography	15
2 Quantification des observables sur les variétés kähleriennes	17
1 Introduction	17
1.1 Résultats	19
1.2 Notations	21
2 Sur une algèbre \mathcal{F} associée au projecteur (Π_k)	22
2.1 La section E	23
2.2 Domaine strictement pseudo-convexe	26
2.3 Noyaux des opérateurs de \mathcal{F}	28
2.4 Symboles des opérateurs de \mathcal{F}	30
2.5 Calcul symbolique	32
3 Opérateurs de Toeplitz	37
4 Compléments sur le calcul symbolique	41
5 Microsupport	47
6 Continuité et calcul fonctionnel	50
7 Sections piquées	53
Bibliography	56

3	Quantification des sous-variétés lagrangiennes des variétés kähleriennes	59
1	Préliminaire	62
1.1	Notations	62
1.2	Opérateurs de Toeplitz	63
1.3	Lemmes	64
2	Sections lagrangiennes	65
2.1	Définition	65
2.2	Section lagrangienne dépendant d'un paramètre	72
3	Calcul symbolique des sections lagrangiennes	77
3.1	Norme et action des opérateurs de Toeplitz	77
3.2	Calcul formel	80
3.3	Calcul sous-symbolique	83
3.4	Calcul symbolique avec paramètres	85
4	Les conditions de Bohr-Sommerfeld	87
4.1	Dimension deux	87
4.2	Dimension quelconque	93
5	Applications Quantiques	98
5.1	Définitions et calcul symbolique	98
5.2	Quantum Map et propagateur semi-classique	102
5.3	Invariance	106
	Bibliography	111
4	Analyse semi-classique sur les variétés symplectiques compactes	113
1	Opérateurs pseudodifférentiels et intégraux de Fourier	115
1.1	Opérateurs pseudodifférentiels	115
1.2	Sections Lagrangiennes	119
1.3	Opérateurs intégraux de Fourier	125
1.4	Compléments	130
2	Préliminaires symplectiques	132
2.1	Sous-variété involutive strictement positive	132
2.2	Relations canoniques associées	134
3	Quantification des variétés symplectiques compactes	137
3.1	Les données	137
3.2	Quantification des variétés lagrangiennes	140
3.3	Le cas kählerien	142
3.4	Sur le caractère local du calcul symbolique	143
4	Opérateurs de Toeplitz	146
4.1	Symboles covariants et contravariants	146
4.2	Microsupport et équivalence	150

5	Appendice	152
5.1	Développements de Taylor	153
5.2	Définition des sous-variétés formelles	155
5.3	Opérations sur les sous-variétés formelles	158
5.4	Sous-variétés formelles lagrangiennes	161
	Bibliography	162

Chapter 1

Intégrale de Feynman et Quantification de Toeplitz

1 Introduction

Let us describe formally what is Feynman's path integral. We consider a particle of mass m moving in a potential $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. The quantum state space is $L^2(\mathbb{R}^3)$. The time evolution of a state Ψ_0 is given by the Schrödinger equation

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} \Psi_t = H \Psi_t$$

where $H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) + V$ is the Hamiltonian operator.

Feynman's idea is to express Ψ_t as a sum over paths

$$(1.1) \quad \Psi_t(x) = \int_{\Omega_{x,t}} e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t L(c(s), c'(s)) ds} \Psi_0(c(0)) dc$$

where $\Omega_{x,t}$ is the set of paths $c : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^3$ such that $c(t) = x$, dc is a measure on $\Omega_{x,t}$, and L denotes the Lagrangian of the system defined by

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m |\dot{x}|^2 - V(x)$$

With formula (1.1), Feynman developed many concepts of quantum mechanics (see [1]). Path integral methods were used by mathematicians to derive solutions of heat equations. They have also played a major role in quantum field theory. In non-relativistic quantum mechanics, the framework of this article, physicists have exploited Feynman's integral formula to study semi-classical properties. Mathematical works on the subject are reviewed in ([2]).

In this article, we propose a Feynman path integral formula in the setting of Toeplitz quantization of compact Kähler manifolds, with an explicit dependence on \hbar . The results we obtain generalise works of I.Daubechies, J.R.Klauder and T.Paul ([3],[4],[5]), treating of

Hamiltonians defined on the euclidean space, the Lobachevsky half-plane, and the sphere. We compute the quantum propagator by well-defined path-integrals involving Wiener measure on phase-space in the limit of diverging diffusion constant. Not only does this formulation give a rigorous computation of the solution of the Shrödinger equation, but it also allows a natural geometrical formulation of the problem in terms of the symplectic form, prequantum bundle, and Kähler metric.

In the first section, using the equivalence between the Lagrangian and the Hamiltonian formalisms on the tangent and cotangent bundle of a configuration space, we explain how the phase of the integral of the lagrangian along a path γ is defined on a symplectic manifold (M, ω) endowed with a prequantization (P, α) . Recall that $P \rightarrow M$ is a principal $(\mathbb{R}/2\pi\hbar\mathbb{Z})$ bundle, and α a connection one-form, with curvature ω . Let $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ be a Hamiltonian function. In this setting, $\exp(\frac{i}{\hbar} \int_0^t L(c(s), c'(s)) ds)$ is replaced by the product of two terms, the first being the parallel transport along γ , the second the phase of the integral of the hamiltonian along γ . In the second section, we introduce the prequantum hilbert space $L^2(M, L)$, where L is the Hermitian line bundle associated with P . Using the covariant derivative induced by α , we define the prequantum dynamics, and we give a description of its propagator in proposition 1.9, where the geometric objects introduced above appear.

The third section is devoted to the quantum setting. M is endowed with a Kähler metric g , with fundamental two-form ω . L has a natural holomorphic structure compatible with the covariant derivative. The quantum space \mathcal{H} is the set of holomorphic sections of L . Let $\Pi : L^2(M, L) \rightarrow L^2(M, L)$ be the orthogonal projector onto \mathcal{H} . The Hamiltonian operator is $\Pi L_H \Pi$, where L_H denotes multiplication by H . The fundamental estimate is proved in the fourth section. We show that the propagator $\exp(-i \frac{t}{\hbar} \Pi L_H \Pi)$ of the schrödinger equation is approximated by the heat semi-group of the generalised Laplacian $\nu \Delta_{hol} + \frac{i}{\hbar} L_H$, as ν tends to ∞ , where Δ_{hol} is the Hodge Laplacian of L . Using a Weitzenböck formula and a generalised Feynman-Kac formula we express in the last section these heat kernels as path integrals, leading to a Feynman path integral.

Let x_t^ν be the Brownian motion on the Riemannian manifold $(M, \nu g)$, starting at $x_0 \in M$. The phase of the integral action of the sample path is a semi-martingale \mathcal{P}_t^ν , defined as the parallel transport $\mathcal{P}_t^\nu : L_{x_t^\nu} \rightarrow L_{x_0^\nu}$ along x_s^ν , $0 \leq s \leq t$. The main result we obtain is stated as follows

Theorem 1.1. *For every $\Psi \in C^\infty(M, L)$, let $\Psi_t^\nu \in C^\infty(M, L)$ be defined by the path integral*

$$\Psi_t^\nu(x_0) = e^{t \frac{\nu n}{2\hbar}} \mathbb{E} \left[e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(x_s^\nu) ds} \mathcal{P}_t^\nu \cdot \Psi(x_t^\nu) \right]$$

then $\Psi_t^\nu \rightarrow e^{-i \frac{t}{\hbar} \Pi L_H \Pi} \Psi$ in \mathcal{H} as $\nu \rightarrow \infty$

Acknowledgments We would like to thank Thierry Paul for suggesting the subject.

2 The phase of the action integral

In this section, we explain how the integrand of the Feynman path integral is defined on a symplectic manifold. Let us review the Lagrangian formulation of classical mechanics on a

tangent bundle TQ of a configuration manifold Q (see [6], 3.5,3.6,3.8). Let $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth function called the Lagrangian. The fiber derivative FL of L is a fiber preserving map from TQ to T^*Q , sometimes called the Legendre transformation. Let us denote by β the canonical one-form of T^*Q defined by $\langle \beta, v \rangle = \langle \pi_{T^*Q}^* v, (\pi_Q)_* v \rangle$, $\forall v \in T(TQ)$ where $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$ and $\pi_{T^*Q} : T(T^*Q) \rightarrow T^*Q$ denote the canonical projections. The Lagrange one-form β_L and the Lagrange two-form ω_L are defined by

$$\beta_L = FL^* \beta \qquad \omega_L = FL^* d\beta$$

We assume that FL is a local diffeomorphism, hence (TQ, ω_L) is a symplectic manifold.

We define the action $A : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ by $A(v) = \langle FL(v), v \rangle$ and the energy by $E = A - L$. The Lagrangian vector field of L is the unique vector field X_E on TQ such that $\iota_{X_E} \omega_L + dE = 0$. X_E is a second order equation (i.e. $(\pi_Q)_* \circ X_E = Id$) and its integral curves $\gamma(t)$ satisfy Lagrange's equation. Using coordinates (q^i, \dot{q}^i) on TQ we recover the classical Euler-Lagrange equations

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\gamma(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}(\gamma(t))$$

Let $\Omega(q_1, q_2, T)$ be the set of C^∞ curves $\{c : [0, T] \rightarrow Q / c(0) = q_1, c(T) = q_2\}$. The Lagrangian integral is a functional defined on $\Omega(q_1, q_2, T)$ by

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^T L(c(t), \dot{c}(t)) dt$$

The variational principle of Hamilton says that the solutions $\gamma(t) = (c(t), \dot{c}(t))$ of Lagrange equation with $c \in \Omega(q_1, q_2, T)$ are the extremals of the functional \mathcal{L} . To prepare the Hamiltonian point of view, we introduce the action integral $\mathcal{A}(c) = \int_0^T A((c(t), \dot{c}(t))) dt$ and prove the following

Lemma 1.2. *Let $\gamma : [0, T] \rightarrow TQ$ be the curve defined by $\gamma(t) = (c(t), \dot{c}(t))$, we have*

$$\mathcal{A}(c) = \int_\gamma \beta_L$$

Proof. It suffices to prove that $A(\gamma(t)) = \langle \beta_L, \gamma_* \frac{\partial}{\partial t} \rangle$. We have

$$\begin{aligned} \langle \beta_L, \gamma_* \frac{\partial}{\partial t} \rangle &= \langle \beta, FL_* \gamma_* \frac{\partial}{\partial t} \rangle && \text{since } \beta_L = FL^* \beta, \\ &= \langle FL(\gamma(t)), (\pi_Q)_* FL_* \gamma_* \frac{\partial}{\partial t} \rangle && \text{by definition of } \beta, \\ &= \langle FL(\gamma(t)), \gamma(t) \rangle \end{aligned}$$

since FL is fiber preserving which implies $(\pi_Q)_* \circ FL_* = (\pi_Q)_*$, and $(\pi_Q)_* \gamma_* \frac{\partial}{\partial t} = c_* \frac{\partial}{\partial t} = \gamma(t)$,

$$= A(\gamma(t))$$

□

In the Hamiltonian formalism, the data are a symplectic manifold (M, ω) and a hamiltonian function $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, instead of the Lagrangian on the tangent space of a configuration space. The classical dynamic is the flow of the Hamiltonian vector field X_H , defined by $\iota_{X_H} \omega + dH = 0$. Let (p_i, q^i) be canonical coordinates on M , an integral curve $t \rightarrow (p_i(t), q^i(t))$ of X_H satisfies Hamilton's equation

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Recall that M is the cotangent space T^*Q with $\omega = d\beta$, and assume that the Legendre transform FL is a diffeomorphism. The relationship between Hamiltonian and Lagrangian formulations is given by $H = E \circ FL^{-1}$. The integral curves of X_H are mapped by FL onto integral curves of X_E . If $\gamma : [0, T] \rightarrow T^*Q$ is a path on T^*Q , a natural definition of its Lagrangian integral is $\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^T L(FL^{-1}(\gamma(t)))dt$. It follows from lemma (1.2) that

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_\gamma \beta - \int_0^T H(\gamma(t))dt$$

The first term of the sum, which we denote $\mathcal{A}(\gamma)$ and call action integral, is not defined on a general symplectic manifold (M, ω) , because ω is not necessarily exact. If γ is a contractible loop on M , we can set $\mathcal{A}(\gamma) = \int_S \omega$, where S is a surface of deformation of γ . This depend on S unless the integral of ω over any two-sphere in M is zero. Since the action integral appears in the Feynman path integral as the argument of the function $x \rightarrow \exp(\frac{i}{\hbar}x)$, we just need to define the phase of the action integral $\mathcal{P}(\gamma) = \exp(\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}(\gamma))$. Observe that $\gamma \rightarrow \exp(\frac{i}{\hbar} \int_S \omega)$ is well-defined, if we assume that the integrals of ω over the two-sphere in M are multiples of $2\pi\hbar$.

Let us try to define the phase of the action integral of any loop of a symplectic manifold (M, ω) . Let $x \in M$. We introduce $C_1(M, x)$ (resp. $C_2(M, x)$) the free abelian group generated by the set of differentiable singular one-simplices (resp. two-simplices) which have all their vertices mapped into the basepoint x . Observe that the generators of $C_1(M, x)$ are the loops based at x . Let $\partial : C_2(M, x) \rightarrow C_1(M, x)$ be the boundary operator, $Z_2(M, x) = \text{Ker } \partial$ the group of two-cycles, $B_1(M, x) = \text{Im } \partial$ the group of one-boundaries. Assume that M is connected. The first homology group $H_1(M)$ with integer coefficient is $C_1(M, x)/B_1(M, x)$. Let \mathbb{T} be the quotient group $\mathbb{R}/2\pi\hbar\mathbb{Z}$ and $I : C_2(M, x) \rightarrow \mathbb{T}$ the morphism of group defined by $I(S) = \int_S \omega \pmod{2\pi\hbar\mathbb{Z}}$. We formulate the problem of the definition of the phase of the integral action of the loops based at x in the following manner: find a group homomorphism $\mathcal{P} : C_1(M, x) \rightarrow \mathbb{T}$, such that

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccc} C_2 & \xrightarrow{\partial} & C_1 \\ & \searrow I & \downarrow \mathcal{P} \\ & & \mathbb{T} \end{array}$$

commutes. This problem has a solution if and only if $Z_2(M, x) \subset \text{Ker } I$, that is the periods of ω are multiples of $2\pi\hbar$. If this is the case, then the set of solutions is a principal homogeneous space for the morphisms group $\text{Mor}(H_1(M), \mathbb{T}) \cong H^1(M, \mathbb{T})$. We can also solve this problem in a geometric manner with Souriau-Kostant prequantization.

Definition 1.3. Let (M, ω) be a symplectic manifold. A prequantization of (M, ω) is a principal \mathbb{T} bundle $\pi : P \rightarrow M$, together with a connection form $\alpha \in \Omega^1(P, \mathbb{R})$ such that $\pi^*\omega = -d\alpha$

Remark 1.4. The connection is \mathbb{R} valued, because we identify the Lie algebra of \mathbb{T} with \mathbb{R} by means of the canonical projection $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$

A symplectic manifold (M, ω) admits a prequantization if and only if $\omega/2\pi\hbar$ defines an integral cohomology class, and if this condition is verified, the set of prequantizations is a principal homogeneous space for $H^1(M, \mathbb{T})$ (see [7]). In this context the phase of the action integral is defined as follows

Definition 1.5. Let (M, ω) be a symplectic manifold with prequantization (P, α) . The phase of the action integral of a loop γ is the holonomy $\mathcal{P}(\gamma) \in \mathbb{T}$ of γ . If γ is a path of M joining x_1 to x_2 , the phase of its action integral is the parallel transport along γ : it is a \mathbb{T} -isomorphism from P_{x_1} onto P_{x_2} .

Remark 1.6. The introduction of parallel transport, surprising at the first view, is appropriate for the following sections, see remark 1.10.

Remark 1.7. If M is a cotangent bundle T^*Q , the trivial bundle $T^*Q \times \mathbb{T}$ with the connection form α is $-\pi^*\beta + d\theta$ is a prequantization. The parallel transport along a curve γ is multiplication by $p(\int_\gamma \beta)$.

Remark 1.8. Considering the different prequantizations of (M, ω) , we obtain all the group homomorphisms such that diagram 1.2 commutes.

To complete the parallel between Lagrangian and Hamiltonian formalism, we mention that Weinstein stated variational principles which relate the extremals of the multivalued functional $\gamma \rightarrow \text{Log } \mathcal{P}(\gamma) - \int H(\gamma(t))dt$ to the integral curves of the Hamiltonian vector field X_H (see [8]).

3 Prequantization

Let (M, ω) be a symplectic compact manifold with prequantization (P, α) . Let ρ denote the representation of \mathbb{T} on \mathbb{C} whose character is $[\theta] \rightarrow \exp(\frac{i}{\hbar}\theta)$, and let $L = P \times_\rho \mathbb{C}$ be the associated Hermitian line bundle. The connection α induces a covariant derivation $\nabla : C^\infty(M, L) \rightarrow \Omega^1(M, L)$ which is compatible with the Hermitian structure $h \in C^\infty(M, L^* \otimes \bar{L}^*)$. The scalar product of two sections Ψ and Ψ' in $C^\infty(M, L)$ is defined by

$$\langle \Psi, \Psi' \rangle = \int_M h(\Psi, \Psi') |\omega^{\wedge n}|$$

The Hilbert space $\mathcal{H}_p = L^2(M, L)$ of prequantisation is the completion of $(C^\infty(M, L), \langle, \rangle)$. Each classical observable H in $C^\infty(M, \mathbb{R})$ acts on \mathcal{H}_p as an unbounded operator $O_{preq}(H)$, with domain $C^\infty(M, L)$ according to

$$O_{preq}(H)\Psi = (L_H - i\hbar\nabla_{X_H})\Psi, \quad \forall \Psi \in C^\infty(M, L)$$

where L_H is multiplication by H , and X_H is the Hamiltonian vector field of H . The linear mapping which sends H into the formally selfadjoint differential operator $O_{preq}(H)$ satisfies the commutation rules of P.A.M. Dirac. That is,

$$(1.3) \quad O_{preq}(1) = \text{Id}$$

$$(1.4) \quad O_{preq}(\{F, G\}) = \frac{i}{\hbar}[O_{preq}(F), O_{preq}(G)]$$

where $\{F, G\} = \omega(X_F, X_G)$ denotes the Poisson bracket of F and G . These properties are generally presented as a motivation for introducing the prequantum bundles. The next step of the quantization procedure is the definition of the Hilbert quantum space as a subspace of \mathcal{H}_p using polarization. Nevertheless, until the end of this section, we continue without adding any structure, because it allows us to introduce some important ideas for following sections.

The dynamics in a prequantum system is given by the Schrödinger equation

$$\frac{d}{dt}(\Psi) = -\frac{i}{\hbar}O_{preq}(H)\Psi \quad (E_{preq})$$

Proposition 1.9. *Let $M \times \mathbb{R} \rightarrow M, (y, t) \rightarrow x_y(t)$ denote the flow of the Hamiltonian vector field X_H . The section $\Psi : M \times \mathbb{R} \rightarrow L, (x, t) \rightarrow \Psi_t(x)$ defined by*

$$(1.5) \quad \Psi_t(x_y(t)) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(x_y(s)) ds} \mathcal{P}(x_y|_{[0,t]}) \cdot \Psi_0(y)$$

is a solution of equation (E_{preq}) with initial condition Ψ_0 in $C^\infty(M, L)$

Remark 1.10. $x_y|_{[0,t]}$ is the integral curve of X_H joining y to $x_y(t)$. By definition, $\mathcal{P}(x_y|_{[0,t]}) : P_y \rightarrow P_{x_y(t)}$ is the parallel transport along $x_y|_{[0,t]}$. Every $u \in P$ can be seen as a \mathbb{C} -isomorphism $u : L_{\pi(u)} \rightarrow \mathbb{C}$. We consider that $\mathcal{P}(x_y|_{[0,t]})$ is a \mathbb{C} -isomorphism from L_y to $L_{x_y(t)}$ defined by $[\mathcal{P}(x_y|_{[0,t]}) \cdot u]^{-1} \circ u$, where $u \in P_y$. This definition is of course independant of the choice of u .

Remark 1.11. Observe that the right part of (1.5) is the integrand of the Feynman Path integral evaluated on the classical trajectory. This gives the prequantum dynamics as a Feynman path integral where all the mass is concentratred on the path corresponding to the classical trajectory.

Proof. There is a natural identification between sections of L and the functions $\Psi \in C^\infty(P, \mathbb{C})$ such that $R_{[\theta]}^* \tilde{\Psi} = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta} \tilde{\Psi}, \forall \theta \in \mathbb{R}$, where R_g denote right multiplication in P by $g \in \mathbb{T}$. Namely every section $\Psi \in C^\infty(M, L)$ is associated to the function $\tilde{\Psi}$ by

$$(1.6) \quad u \cdot \tilde{\Psi}(u) = \Psi(\pi(u)), \quad \forall u \in P$$

On $C^\infty(P, \mathbb{C})$, equation (E_{preq}) reads as: $-(X_H^\# - \pi^* H \partial_\theta) \tilde{\Psi} = \frac{d}{dt} \tilde{\Psi}$ where $X_H^\#$ is the horizontal lift of X_H and ∂_θ is the vector field of P associated with the one parameter group $t \rightarrow R_{[t]}$. The pull-back of $\tilde{\Psi}_0$ by the flow of $X_H^\# - \pi^* H \partial_\theta$ will be a smooth solution of this equation. Since M is compact, X_H is complete. Let u_0 be a point of P . Let $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ denote the integral curve of $X_H^\#$ starting from u_0 . It is the horizontal lift of the integral curve x_t of X_H through

the point $x_0 = \pi(u_0)$. We shall look for a curve g_t of \mathbb{T} which makes $R_{g_t}u_t$ an integral curve of $X_H^\# - H\partial_\theta$. Applying Leibniz formula leads to the differential equation $\frac{d}{dt}(g_t) = -H(x_t)$. A solution $g_t = [\theta_t]$ is given by :

$$(1.7) \quad \theta_t = - \int_0^t H(x_s) ds$$

The solution obtained on $C^\infty(P, \mathbb{C})$, seen on $C^\infty(M, L)$, gives the result. \square

Let $U_t : C^\infty(M, L) \longrightarrow C^\infty(M, L)$ be the operator sending Ψ_0 to Ψ_t defined in (1.5).

Corollary 1.12. *U_t extends to \mathcal{H}_p as a unitary operator. The unbounded operator $O_{preq}(f)$ with domain $C^\infty(M, L)$ is essentially selfadjoint. The closure of $\frac{1}{\hbar}O_{preq}(f)$ is the infinitesimal generator of $(U_t)_t$.*

Proof. Since $h(U_t\Psi, U_t\Psi)(y) = h(\Psi, \Psi)(x_y(-t))$ and the flow leaves ω invariant, we have $\|U_t\Psi\|_{\mathcal{H}_p} = \|\Psi\|_{\mathcal{H}_p}$. So U_t admits a unique continuous isometric extension to \mathcal{H}_p and $U_t \circ U_{-t} = U_{-t} \circ U_t = \text{Id}$ implies that U_t is a unitary operator of \mathcal{H}_p . $(U_t)_t$ is a one-parameter group. Let us prove that it is strongly continuous. Using the denseness of $C^\infty(M, L)$ in \mathcal{H}_p , we just have to show that

$$(1.8) \quad U_t\Psi \xrightarrow[\mathcal{H}_p]{} \Psi \text{ as } t \rightarrow 0, \quad \forall \Psi \in C^\infty(M, L)$$

$M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, t) \longrightarrow h(U_t\Psi - \Psi, U_t\Psi - \Psi)(x)$ is continuous. Using uniform continuity on the compact $M \times [0, 1]$, we see that $h(U_t\Psi - \Psi, U_t\Psi - \Psi)(x)$ converges uniformly in x to 0 and (1.8) follows. In the same way, the preceding proposition implies that

$$\frac{U_t\Psi - \Psi}{t} \xrightarrow[\mathcal{H}_p]{} -\frac{i}{\hbar}O_{preq}^k(H).\Psi \text{ as } t \rightarrow 0 \quad \forall \Psi \in C^\infty(M, L)$$

So U_t is a strongly continuous one-parameter unitary group, which is strongly differentiable on a dense domain. The result follows (see Thm VIII.10 of [9]). \square

Semi-classical mechanics deals with the limit $\hbar \rightarrow 0$. It permits us to make the link between classical and quantum mechanics. When we attempt to introduce quantum mechanics in a geometric formalism, it becomes a justification of the construction. In the preceding discussion, \hbar was given and we assumed that the periods of ω were multiples of $2\pi\hbar$. Let us regard the inverse approach, that is, (M, ω) is given and we consider the set \mathcal{Q} of \hbar such that (M, ω) admit a prequantification (P, \mathbb{T}, α) . Let $\text{Per} \subset \mathbb{R}$ be the group of periods of ω . We have : $\hbar \in \mathcal{Q} \iff \text{Per} \subset 2\pi\hbar\mathbb{Z}$. If Per is a dense subgroup of \mathbb{R} , \mathcal{Q} is empty. If Per is reduced to zero, \mathcal{Q} is the set of real numbers. We are not interested in this situation, since we assume that M is compact. The last possibility is that Per is a cyclic group. If we denote d the positive generator of Per , we have $\mathcal{Q} = \{\hbar_k | \hbar_k = \frac{d}{2\pi k}, k \in \mathbb{N}\}$.

To each prequantization $(P_1, \mathbb{T}_{\hbar_1}, \alpha_1)$ of (M, ω) is associated a family of prequantizations $(P_k, \mathbb{T}_{\hbar_k}, \alpha_k)$. Namely, if \mathbb{Z}_k denote the subgroup of \mathbb{T}_{\hbar_1} of order k , we set $P_k = P_1/\mathbb{Z}_k$ and denote p_k the projection from P_1 to P_k . $\pi_k : P_k \longrightarrow M$ is a principal \mathbb{T}_{\hbar_k} -bundle with π_k

defined by $\pi_k \circ p_k = \pi_1$ and the action R^k by $p_k \circ R_{[\theta]_1}^1 = R_{[\theta]_k}^k \circ p_k$. Let $\alpha_k \in \Omega^1(P_k, \mathbb{R})$ be defined by $p_k^* \alpha_k = \alpha_1$. With our convention (see remark 1.4), this is a connection one-form defining a prequantization of M . If we denote by ρ_k the representation of \mathbb{T}_{\hbar_k} on \mathbb{C} whose character is $[\theta] \rightarrow \exp(\frac{i}{\hbar_k} \theta)$, the line bundle associated to each prequantisation is $L_k = P_k \times_{\rho_k} \mathbb{C}$. Observe that

$$L_k \sim P_1 \times_{\rho_1^{\otimes k}} \mathbb{C} \sim L_1^{\otimes k}$$

where $\rho_1^{\otimes k}$ denotes the representation of \mathbb{T}_{\hbar_1} on \mathbb{C} whose character is $[\theta] \rightarrow \exp(i \frac{k}{\hbar_1} \theta)$. The covariant derivations defined on the equivalent line bundles are equivalent.

Instead of introducing different prequantizations, we consider in the following the k -th tensor product of a line bundle L associated to one prequantization (P, \mathbb{T}, α) with $\hbar = \frac{d}{2\pi}$. In this setting we have $O_{preq}^k(H) = L_H - i \frac{\hbar}{k} \nabla_{X_H}^k$ with ∇^k the covariant derivation on $L^{\otimes k}$, and to express the different result on $L^{\otimes k}$, we just need to replace \hbar by $\frac{\hbar}{k}$. In the same way as in the proof of proposition 1.9, the sections of $L^{\otimes k}$ lift to functions on P and using this identification, we have

$$L^2(P, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=-\infty}^{k=\infty} H_p^k$$

with $H_p^k = L^2(M, L^{\otimes k})$ and the hermitian product on $L^2(P, \mathbb{C})$ defined by $\langle \tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}' \rangle = \int_P \tilde{\Psi} \tilde{\Psi}' \mu_P$ where $\mu_P = \frac{1}{2\pi\hbar} |\alpha \wedge d\alpha^{\wedge n}|$. We consider then that $L^2(P, \mathbb{C})$ is the prequantum semi-classical space. The semi-classical properties will appear in the next section, once we would introduce the quantum spaces.

4 Toeplitz Quantization

We assume that M is provided with a Kähler structure such that the fundamental two-form is ω . Let J in $C^\infty(M, \text{End}(TM))$ denote the complex structure. Since the $(0,2)$ component of the curvature tensor $-i \frac{k}{\hbar} \omega$ is vanishing, the C^∞ line bundle L^k has a unique structure of a holomorphic line bundle, whose local holomorphic sections Ψ are characterised by

$$\nabla_{X+iJX}^k \Psi = 0, \quad \forall X \in C^\infty(M, TM)$$

The quantum space H^k consists of the global holomorphic sections of L^k . It is the kernel of the differential operator $\nabla^{k(0,1)} : C^\infty(L^k) \rightarrow \Omega^{0,1}(M, L^k)$ defined by

$$\nabla^{k(0,1)} = (Id + iJ) \nabla^k.$$

Since L^k and $L^k \otimes \Lambda^{0,1} T^*M$ are Hermitian bundles, we can define $(\nabla^{k(0,1)})^*$ as the formal adjoint of $\nabla^{k(0,1)}$. We set

$$\Delta_{hol}^k = (\nabla^{k(0,1)})^* \circ \nabla^{k(0,1)}$$

$\Delta_{hol}^k : C^{-\infty}(M, L^k) \rightarrow C^{-\infty}(M, L^k)$ is an elliptic operator, thus its kernel consists of smooth sections. Since M is compact, it is finite dimensional. From the definition of Δ_{hol}^k , it follows that :

$$\langle \Delta_{hol}^k \Psi, \Psi \rangle = 0 \Leftrightarrow \nabla^{k(0,1)} \Psi = 0, \quad \forall \Psi \in C^\infty(M, L^k)$$

Thus the quantum space H^k is the kernel of Δ_{hol}^k . As a finite dimensional subspace of H_p^k and hence closed, it is a Hilbert space. As a first semi-classical result it follows from Riemann-Roch-Hirzebruch formula and Kodaira's vanishing theorem that

$$(1.9) \quad \dim H^k \sim \left(\frac{k}{2\pi\hbar} \right)^n \int_M \omega^{\wedge n} \quad \text{as } k \longrightarrow \infty$$

and consequently, the quantum spaces H^k are not trivial.

Let us define the family of coherent states $\{e_u^k\}$ indexed by P . Since H^k is a finite dimensional vector space consisting of smooth functions defined on P , the map sending $\Psi \in H^k$ to $\tilde{\Psi}(u)$ is a continuous functional, for every $u \in P$. By Riesz lemma, there is a unique quantum state $e_u^k \in H^k$ such that $\langle \Psi, e_u^k \rangle = \tilde{\Psi}(u)$. Let Π^k denote the orthogonal projection onto H^k , whose domain of definition is H_p^k or $L^2(P, \mathbb{C})$ according to the context. The Schwartz kernel of Π^k , seen as an operator acting on $C^\infty(P, \mathbb{C})$, is called the reproducing kernel and is given by

$$(1.10) \quad \Pi^k(u, u') = \langle e_u^k, e_{u'}^k \rangle = \mu_P(u) \otimes \mu_P(u')$$

An important class of examples is the set of integral coadjoint orbits of compact Lie groups. By Kostant's version of the Borel-Weil-Bott theorem, the Hilbert quantum spaces defined in this way are the irreducible representations. The coherent states were introduced in this context by Perelomov in a different manner.

To complete the quantization, we associate to each classical observable $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ an operator of H^k . The operator $O_{preq}^k(H)$ defined in the preceding section is not suitable because it does not preserve H^k . Following Toeplitz quantization we define $O_{Toep}^k(H) : H^k \longrightarrow H^k$ by

$$(1.11) \quad O_{Toep}^k(H) \cdot \Psi = \Pi^k L_H \Psi$$

It is sometimes convenient to see $O_{Toep}^k(H)$ as an operator acting on H_p^k or $L^2(P, \mathbb{C})$, defined in these cases by $O_{Toep}^k(H) = \Pi^k L_H \Pi^k$. The following property draws an analogy between coherent states and Dirac functions.

Proposition 1.13. *The Schwartz kernel of $O_{Toep}^k(H)$, seen as an operator acting on $C^\infty(P)$, is given by*

$$O_{Toep}^k(H)(u, u') = \langle L_H e_u^k, e_{u'}^k \rangle = \mu_P(u) \otimes \mu_P(u')$$

Consequently

$$\text{Tr} \left(O_{Toep}^k(H) \right) = \int_P \langle L_H e_u^k, e_u^k \rangle = \mu_P(u)$$

The commutation rules are no larger satisfied. Nevertheless the following deformation quantization result is proved in [11].

Theorem 1.14. For all $F, G \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, we have

$$\begin{aligned} \|O_{Toep}^k(F)\|_{H^k} &= \|F\|_\infty + O(1/k) \\ \|O_{Toep}^k(F)O_{Toep}^k(G) - O_{Toep}^k(FG)\|_{H^k} &= O(1/k) \\ \|k[O_{Toep}^k(F), O_{Toep}^k(G)] - O_{Toep}^k(\{F, G\})\|_{H^k} &= O(1/k) \end{aligned}$$

Other semiclassical properties were developed in [10]. These results were proved using the microlocal analysis of the Szego projector $\oplus \Pi^k$ and the symbolic calculus of Hermite operators.

The propagator for the Schrödinger equation

$$\frac{d}{dt}(\Psi) = -i \frac{k}{\hbar} O_{Toep}^k(H) \Psi \quad (E^k)$$

is the one parameter group $\exp(-t \frac{ik}{\hbar} O_{Toep}^k(H))$. The exponential is easily defined because H^k is a finite dimensional vector space. Let us consider the one parameter group of isomorphisms of H_p^k :

$$\exp(-t \frac{ik}{\hbar} \Pi^k L_H \Pi^k) = \begin{cases} \exp(-t \frac{ik}{\hbar} O_{Toep}^k(H)) & \text{on } H^k \\ 0 & \text{on } (H^k)^\perp \end{cases}$$

Since H^k is a finite dimensional vector space consisting of smooth sections, $\exp(-t \frac{ik}{\hbar} \Pi^k L_H \Pi^k)$ is a smoothing operator for every $t > 0$. In the following section, we approximate this semi-group by semi-groups generated by second order differential operators.

5 An approximation by the heat semi-group

We will need the following result about the heat kernel of a generalised Laplacian. Let E be a fiber bundle over a Riemannian manifold (M, g) . A second order differential operator $\Delta^E : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ is a generalised Laplacian, if its symbol

$$\sigma(\Delta^E) \in C^\infty(T^*M, \pi_{T^*M}^\# \text{End}(E))$$

satisfies $\sigma(\Delta^E)(x, \xi) = -|\xi|_g^2 Id$, where $|\cdot|_g$ denote the metric of T^*M associated with a Riemannian metric g .

Theorem 1.15. Let (M, g) be a compact Riemannian manifold and $E \rightarrow M$ a fiber bundle. If Δ^E is a generalised Laplacian, then there exists a unique section $k \in C^\infty((0, \infty) \times M \times M, \pi_L^* E^* \otimes \pi_R^* E)$ which satisfies :

- i) $(\partial_t + \Delta_x)k = 0$
- ii) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_M k(t, x, y) \otimes s(y) |dg|(y) = s(x), \quad \forall s \in C^\infty(M, E)$

where $|dg| \in |\Omega|^n(M)$ is the Riemannian density. The section k is called the heat kernel of Δ^E .

Remark 1.16. A generalised Laplacian Δ^E needs not to be formally selfadjoint.

Let $e^{-t\Delta^E}$ denote the smoothing operator whose Schwartz kernel is $k(t, \cdot)$. From theorem 1.15, it follows that the family $(e^{-t\Delta^E})_{t>0}$ form a one parameter semi-group. The following corollary is more adapted for the proof of theorem 1.18.

Corollary 1.17. *Let (M, g) be a compact Riemannian manifold and $E \rightarrow M$ a Hermitian bundle. If Δ^E is a generalised Laplacian, then there exists a unique, strongly continuous family $(Q(t))_{t>0}$ of smoothing operators of $L^2(M, E)$ which satisfy:*

- i) $(Q(t))_{t>0}$ is strongly differentiable on $C^\infty(M, E)$ and $\frac{d}{dt}[Q(t)s] + \Delta Q(t)s = 0$ on $(0, \infty)$, $\forall s \in C^\infty(M, E)$.
- ii) $\lim_{t \rightarrow 0} Q(t)s = s$ in $L^2(M, E)$, for every s in $C^\infty(M, E)$

Of course, $Q(t) = e^{-t\Delta^E}$. Observing that $\Delta_{hol}^k + i\frac{k}{\hbar}L_H$ is a generalised Laplacian associated with the Kähler metric, we can state the main result of this section.

Theorem 1.18. *For every $t > 0$, $e^{-t(\nu\Delta_{hol}^k + i\frac{k}{\hbar}L_H)}$ tends to $e^{-t\frac{i k}{\hbar}\Pi^k L_H \Pi^k}$ as $\nu \rightarrow \infty$ in the uniform operator topology.*

We prove this result by estimating $(e^{-t(\nu\Delta_{hol}^k + i\frac{k}{\hbar}L_H)} - e^{-t\frac{i k}{\hbar}\Pi^k L_H \Pi^k})\Psi$ with Ψ in H^k and in $(H^k)^\perp$. We set

$$R_\nu^k(t, H) = e^{-t(\nu\Delta_{hol}^k + i\frac{k}{\hbar}L_H)}$$

and

$$Q^k(t, H) = e^{-t\frac{i k}{\hbar}\Pi^k L_H \Pi^k}$$

We will establish the estimates implying the theorem in three lemmas.

Lemma 1.19. *The semi-group $R_\nu^k(t, H)$ is contractive, that is $\|R_\nu^k(t, H)\| \leq 1$, $\forall t > 0$.*

Proof. Since $C^\infty(M, L^k)$ is dense in H_p^k , it is enough to prove that $\|R_\nu^k(t, H)s\| \leq \|s\|$ for every section s in $C^\infty(M, L^k)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|R_\nu^k(t, H)s\|^2 &= \langle -(\nu\Delta_{hol}^k + ik\hbar^{-1}L_H)R_\nu^k(t, H)s, R_\nu^k(t, H)s \rangle \\ &\quad + \langle R_\nu^k(t, H)s, -(\nu\Delta_{hol}^k + ik\hbar^{-1}L_H)R_\nu^k(t, H)s \rangle \\ &= -2 \langle \nu\Delta_{hol}^k R_\nu^k(t, H)s, R_\nu^k(t, H)s \rangle \\ &= -2\nu\|\nabla^{k(0,1)} R_\nu^k(t, H)s\|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Integrating the inequality gives the result. \square

As an elliptic, formally selfadjoint operator on a compact manifold, the unbounded operator Δ_{hol}^k with domain $C^\infty(M, L^k)$ is essentially selfadjoint, its spectrum is discrete and each eigenspace is finite dimensional (see [12]). Since $\Delta_{hol}^k = (\nabla^{k(0,1)})^* \circ \nabla^{k(0,1)} \geq 0$, the eigenvalues are non negative. Let us denote λ_k^1 the first positive eigenvalue.

Lemma 1.20. $\|R_\nu^k(t, H) \circ (Id - \Pi^k)\| \leq e^{-\lambda_k^1 \nu t} + 2k\hbar^{-1} \frac{\|L_H\|}{\lambda_k^1 \nu}$

Proof. Using the decomposition of H_p^k into the orthogonal sum of eigenspace of Δ_{hol}^k , the inequality holds if $H = 0$. Let us introduce the semi-group of bounded operators of H_p^k :

$$\tilde{R}_\nu^k(t, H) = \begin{cases} Q^k(t, H) & \text{on } H^k \\ R_\nu^k(t, 0) & \text{on } (H^k)^\perp \end{cases}$$

Since $\tilde{R}_\nu^k(t, H) = R_\nu^k(t, 0) - R_\nu^k(t, 0) \circ \Pi^k + Q^k(t, H)$, it is a smoothing operator which is strongly differentiable on $C^\infty(M, L^{\otimes k})$. Observing that $\Delta_{hol}^k \circ \Pi^k = 0$ and $\Pi^k \circ R_\nu^k(t, 0) \circ (Id - \Pi^k) = 0$, we calculate the derivative

$$(1.12) \quad \frac{d}{dt}[\tilde{R}_\nu^k(t, H)\Psi] = -(\nu\Delta_{hol}^k + ik\hbar^{-1}\Pi^k L_H \Pi^k)\tilde{R}_\nu^k(t, H)\Psi \quad \forall s \in C^\infty(M, L^{\otimes k})$$

We also have

$$(1.13) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{R}_\nu^k(t, H)\Psi = \Psi \text{ in } H_p^k \quad \forall \Psi \in C^\infty(M, L^k)$$

We claim that :

$$(1.14) \quad R_\nu^k(t, H)\Psi = \tilde{R}_\nu^k(t, H)\Psi - ik\hbar^{-1} \int_0^t R_\nu^k(t-s, H) \circ (L_H - \Pi^k L_H \Pi^k) \circ \tilde{R}_\nu^k(s, H)\Psi ds$$

for every section Ψ in H_p^k . Since the function we integrate is continuous, we need only use the Riemann integral. To prove this equality, it suffices to show that the operator defined on the right side satisfies the conditions *i*) and *ii*) of corollary 1.17, which are consequences of (1.12) and (1.13).

Using that $\|\tilde{R}_\nu^k(t, H) \circ [Id - \Pi^k]\| = \|R_\nu^k(t, 0) \circ [Id - \Pi^k]\| \leq e^{-\lambda_k^1 \nu t}$, it follows from (1.14) and lemma 1.19 that

$$\begin{aligned} \|R_\nu^k(t, H) \circ [Id - \Pi^k]\Psi\| &\leq \left(e^{-\lambda_k^1 \nu t} + k\hbar^{-1} \int_0^t \|L_H - \Pi^k L_H \Pi^k\| e^{-\lambda_k^1 \nu u} du \right) \|\Psi\| \\ &\leq \left(e^{-\lambda_k^1 \nu t} + 2k\hbar^{-1} \frac{\|L_H\|}{\lambda_k^1 \nu} \right) \|\Psi\| \end{aligned}$$

□

Lemma 1.21. $\|[Q^k(t, H) - R_\nu^k(t, H)] \circ \Pi^k\| \leq k\hbar^{-1} \frac{\|L_H\|}{\lambda_k^1 \nu} (1 + 2tk\hbar^{-1} \|L_H\|)$

Proof. Note that $Q^k(t, H)\Pi^k = \tilde{R}_\nu^k(t, H)\Pi^k$. Thus equation (1.14) implies

$$\begin{aligned} [Q^k(t, H) - R_\nu^k(t, H)] \circ \Pi^k &= ik\hbar^{-1} \int_0^t R_\nu^k(t-s, H) \circ (L_H - \Pi^k L_H \Pi^k) \circ \tilde{R}_\nu^k(s, H) \circ \Pi^k ds \\ &= ik\hbar^{-1} \int_0^t R_\nu^k(t-s, H) \circ (Id - \Pi^k) \circ L_H \Pi^k \circ \tilde{R}_\nu^k(s, H) ds \end{aligned}$$

since Π^k and $\tilde{R}_\nu^k(s, H)$ commute.

Observing that $\|\Pi^k \circ \tilde{R}_\nu^k(s, H)\| = 1$, we get the estimate

$$\begin{aligned} \| [Q^k(t, H) - R_\nu^k(t, H)] \circ \Pi^k \| &\leq k\hbar^{-1} \int_0^t \| R_\nu^k(s, H) \circ (Id - \Pi^k) \| \|L_H\| ds \\ &\leq k\hbar^{-1} \frac{\|L_H\|}{\lambda_k^1 \nu} (1 + 2tk\hbar^{-1} \|L_H\|) \end{aligned}$$

Here we have used lemma 1.20. □

Proof of theorem 1.18. Since $Q^k(t, H) - R_\nu^k(t, H) = (Q^k(t, H) - R_\nu^k(t, H)) \circ \Pi^k - R_\nu^k(t, H) \circ (Id - \Pi^k)$, lemmas 1.20 and 1.21 imply

$$(1.15) \quad \|Q^k(t, H) - R_\nu^k(t, H)\| \leq e^{-\lambda_k^1 \nu t} + k\hbar^{-1} \frac{\|L_H\|}{\lambda_k^1 \nu} (3 + 2tk\hbar^{-1} \|L_H\|)$$

□

Remark 1.22. The dependence of the estimate (1.15) on k can be specified. It is proved in [14] that there exists a constant C such that $\lambda_k^1 \geq C + k$. It follows that there exists $C_1, C_2 \geq 0$ which do not depend on k, ν and t such that

$$(1.16) \quad \|e^{-t(\nu\Delta_{hol}^k + i\frac{k}{\hbar}L_H)} - e^{-t\frac{ik}{\hbar}\Pi^k L_H \Pi^k}\| \leq C_1 e^{-k\nu t} + \frac{C_2}{\nu} (1 + kt)$$

6 Feynman Path Integral

In the preceding part, we saw how the propagator for the Schrödinger equation can be approximated by heat semi-group. Using a generalised Feynman-Kač formula, we will express the solution of Schrödinger's equation as a limit of path integrals. This will be our Feynman's integral formula.

In [13], Norris proved a Feynman-Kač formula for a generalised Laplacian Δ^E which acts on sections of a vector bundle E . The first step consists in decomposing Δ^E as

$$\Delta^E = -\frac{1}{2} \text{Tr} \circ \nabla^{E \otimes T^*M} \circ \nabla^E + V$$

where $\nabla^E : C^\infty(M, E) \rightarrow \Omega^1(M, E)$ is a covariant derivative, $\text{Tr} : C^\infty(M, E \otimes T^*M \otimes T^*M) \rightarrow C^\infty(M, E)$ is the contraction with a metric g and $V \in C^\infty(M, \text{End}TM)$ acts linearly on each fiber.

To pursue this program, we need the following Weitzenböck formula (see [15]):

$$\Delta_{hol}^k = \frac{1}{2} \Delta^k - \frac{nk}{2\hbar}$$

where $\Delta^k = (\nabla^k)^* \circ \nabla^k = -\text{Tr} \circ \nabla^{L^k \otimes T^*M} \circ \nabla^k$, and $2n$ is the dimension of M . It follows that

$$e^{-t(\nu \Delta_{\hbar}^k + i \frac{k}{\hbar} L_H)} = e^{t \frac{\nu n k}{2\hbar}} e^{-t(\frac{\nu}{2} \Delta^k + i \frac{k}{\hbar} L_H)}$$

In the following we will apply Feynman-Kač formula to

$$\frac{\nu}{2} \Delta^k + i \frac{k}{\hbar} L_H = -\frac{\nu}{2} \text{Tr} \circ \nabla^{L^k \otimes T^*M} + i \frac{k}{\hbar} L_H$$

As in section 3, all the objects we will introduce depend on k only through the representation $\rho^{\otimes k}$: we will construct stochastic flows on M , P and \mathbb{T} which do not depend on k , and then using $\rho^{\otimes k}$ deduce the heat propagation on L^k .

Given x_0 in M , let us consider the Brownian motion on M starting from x_0 associated to the Riemannian metric νg . It consists of a probability space $(\Omega^\nu, \mathcal{F}^\nu, \mathbb{P}^\nu)$ equipped with a right continuous filtration $(\mathcal{F}_t^\nu)_{t \geq 0}$ such that \mathcal{F}_0^ν contains all the \mathbb{P}^ν -null sets, together with a martingale

$$\begin{aligned} x^\nu : \Omega^\nu \times [0, \infty) &\longrightarrow M \\ (\omega, t) &\longrightarrow x_t^\nu(\omega) \end{aligned}$$

which satisfies

$$b(\partial x_t^\nu, \partial x_t^\nu) = \nu \text{Tr} \circ b(x_t^\nu) \partial t, \quad \forall b \in C^\infty(M, T^*M \otimes T^*M)$$

where $b(\partial x_t^\nu, \partial x_t^\nu)$ denotes the b -quadratic variation of x_t^ν . This definition is the Lévy characterisation of Brownian motion adapted to M -valued semimartingales. A construction is obtained by solving a stochastic differential equation and using stochastic development (see [16]).

Next, given u_0 in P_{x_0} , we consider the horizontal lift $u^\nu : \Omega^\nu \times [0, \infty) \longrightarrow P$ of x^ν . This is the unique semimartingale u_t^ν in P over x_t^ν , that is $\pi \circ u_t^\nu = x_t^\nu$, such that

$$\partial((u_t^\nu)^{-1} \cdot s(x_t^\nu)) = ((u_t^\nu)^{-1} \cdot \nabla s)(\partial x_t^\nu) \quad \forall s \in C^\infty(M, L)$$

This means that, for all stopping times σ, τ , such that $\sigma \leq \tau$, we have

$$(u_\tau^\nu)^{-1} \cdot s(x_\tau^\nu) - (u_\sigma^\nu)^{-1} \cdot s(x_\sigma^\nu) = \int_\sigma^\tau ((u_t^\nu)^{-1} \nabla s) \partial x_t^\nu$$

where the right part denotes the Stratonovitch integral of the $T^*M \otimes \mathbb{C}$ -valued semimartingale $(u_t^\nu)^{-1} \cdot \nabla s$ against x_t^ν . The parallel transport $\mathcal{P}_t^\nu(\omega)$ is the \mathbb{T} -morphism from $P_{x_t^\nu(\omega)}$ onto P_{x_0} such that $\mathcal{P}_t^\nu(\omega) \cdot u_t^\nu(\omega) = u_0$, this is the phase of the action integral of the path ω . As in proposition 1.9, $\mathcal{P}_t^{\nu, k}(\omega) = u_0 \circ u_t^\nu(\omega)^{-1}$ acts as a bijective linear transformation from $L_{x_t^\nu(\omega)}$ to L_{x_0} .

Finally we define the stochastic exponential e_t^ν in \mathbb{T} by the following stochastic equation

$$(1.17) \quad de_t^\nu = e_t^\nu H(x_t^\nu) dt$$

$$(1.18) \quad e_0 = 1$$

This means that for all stopping times σ, τ , such that $\sigma \leq \tau$, we have

$$s(e_\tau^\nu) = s(e_\sigma^\nu) + \int_\sigma^\tau (\partial_\theta s)(e_t^\nu) H(x_t^\nu) dt, \quad \forall s \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

Observe that equation (1.17) can be solved as (1.7) by integrating the stochastic process $H(x_t^\nu)$ and projecting it on \mathbb{T} using p . Details of stochastic exponentials in Lie groups can be found in [17]. We interpret $e_t^\nu(\omega)$ as the integral of the Hamiltonian H along the path ω .

We can write the generalised Feynman-Kač formula

$$\left(e^{-t(\frac{\nu}{2}\Delta^k + i\frac{k}{\hbar}L_H)} \Psi \right) (x_0) = \mathbb{E} \left[\rho^k(e_t^\nu) \mathcal{P}_t^{\nu,k} \cdot \Psi(x_t^\nu) \right], \quad \forall \Psi \in C^\infty(M, L^k)$$

Using proposition 1.18, we can state:

Theorem 1.23. *For every Ψ in $C^\infty(M, L^k)$, let Ψ_t^ν be the section of L^k defined by*

$$(1.19) \quad \Psi_t^\nu(x_0) = e^{t\frac{\nu n k}{2\hbar}} \mathbb{E} \left[\rho^k(e_t^\nu) \mathcal{P}_t^{\nu,k} \cdot \Psi(x_t^\nu) \right]$$

then

$$\Psi_t^\nu \longrightarrow e^{-t\frac{i\hbar}{\hbar}\Pi^k L_H \Pi^k} \Psi \text{ in } (H^k, \langle, \rangle) \text{ as } \nu \longrightarrow \infty$$

Remark 1.24. The construction of the propagator U_t in proposition 1.9 is very similar to (1.19). In the prequantum setting, we consider a deterministic smooth curve which is the integral curve of X_H starting at x_0 instead of a brownian motion. We lift it onto P , defining in this way the phase of its integral action, and introduce the integral of the Hamiltonian along the curve to solve a differential equation analogue to (1.17). The sign difference which appears in the parallel transport $\mathcal{P}_t^\nu(\omega)$ and equation (1.17) comes from the fact that the sample paths of x_t^ν are not ending, but starting, at x_0 .

Bibliography

- [1] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill, Inc., 1965.
- [2] P. Cartier and C. DeWitt-Morette, A new perspective on functional integration, *J.Math.Phys.*, Vol. **36**, 1995, pp. 2237-2312.
- [3] I. Daubechies and J.R. Klauder, Quantum-mechanical path integrals with Wiener measure for all polynomial Hamiltonians, *J.Math.Phys.*, Vol. **26**, 1985, pp 2239-2256.
- [4] I. Daubechies, J.R. Klauder and T. Paul, Wiener measures for path integrals with affine kinematic variables, *J.Math.Phys.*, Vol. **28**, 1987, pp 85-102
- [5] T. Paul, Wavelets and Path Integral, in *Wavelets, time-frequency methods and phase space* Combes, Grossmann, Tchamitchian eds, Springer-Verlag, 1989, pp 204-208.
- [6] R. Abraham and J. Marsden, *Foundations of mechanics*, Benjamin M.A., 1978.

- [7] B. Kostant, Quantization and unitary representations, *Lect. Notes in Math.*, Vol. **170**, Springer-Verlag, 1970, pp 87-208.
- [8] A. Weinstein, Bifurcations and Hamilton's principle, *Math.Z.*, Vol. **159**, 1978, pp 235-248.
- [9] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, I. Functional analysis*, Academic Press Inc, 1970.
- [10] D. Borthwick, T. Paul and A. Uribe, Semiclassical spectral estimates for Toeplitz operators, *Ann. Inst. Fourier*, Vol. **48**, 1998.
- [11] M. Bordemann, E. Meinrenken and M. Schlichenmaier, Toeplitz quantization of Kähler manifolds and $gl(N)$, $N \rightarrow \infty$ limit, *Commun. Math. Phys.*, Vol. **165**, 1994, pp 281-296.
- [12] M.A. Shubin, *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Springer Verlag, 1978.
- [13] J.R. Norris, A complete differential formalism for stochastic calculus in manifolds, *Lect. Notes in Math.*, Vol. **1526**, 1992, pp. 189-209.
- [14] V. Guillemin and A. Uribe, The laplace operator on the nth tensor power of a line bundle : Eigenvalues which are uniformly bounded in n, *Asympt. Anal.*, Vol. **1**, 1988, pp 105-113.
- [15] A. Weil, *Variétés kähleriennes*, Hermann Paris, 1958.
- [16] K.D.Elworthy *Stochastic differential equations in manifold*, Cambridge University Press, 1982.
- [17] H. Doweck and D. Lépingle, L'exponentielle stochastique des groupes de Lie, *Lect. Notes in Math.*, Vol. **1204**, 1986, pp 352-374.

Chapter 2

Quantification des observables sur les variétés kähleriennes

1 Introduction

Soit M une variété kählerienne compacte et $\omega \in \Omega^2(M, \mathbb{R})$ sa deux-forme fondamentale. Soit $L \rightarrow M$ un fibré en droite hermitien muni d'une dérivation covariante ∇ compatible avec la structure hermitienne et de courbure $\frac{1}{i}\omega$. Il est possible d'introduire une telle structure sur M si et seulement si les périodes de ω sont des multiples de 2π . M et L sont les données de la quantification géométrique introduite par Kostant [14] et Souriau [19]: la variété symplectique (M, ω) représente l'espace des phases classique. L'espace des états quantiques est l'espace de Hilbert \mathcal{H} composé des sections holomorphes de $L \rightarrow M$. Le produit scalaire de \mathcal{H} est défini de la manière usuelle à l'aide de la mesure $\mu_M = \frac{1}{n!} |\omega^{\wedge n}|$. L'ensemble des observables classiques est l'algèbre de Poisson $C^\infty(M)$. Les observables quantiques sont les opérateurs linéaires de \mathcal{H} .

Pour faire le lien entre les observables classiques et quantiques, Berezin introduit dans [1] les notions de symboles covariants et contravariants. Afin de décrire ceci, introduisons l'ensemble $L^2(M, L)$ des sections de L de carré sommable muni du produit scalaire induit par μ_M et considérons \mathcal{H} comme un sous-espace de l'espace de Hilbert $L^2(M, L)$. Dorénavant nous identifions un observable quantique P à l'opérateur borné de $L^2(M, L)$ qui s'annule sur \mathcal{H}^\perp et dont la restriction à \mathcal{H} est P . Nous notons Π le projecteur orthogonal de $L^2(M, L)$ d'image \mathcal{H} . Un symbole contravariant est une fonction $f \in C^\infty(M)$ à laquelle on associe l'opérateur $\Pi M_f \Pi$, où M_f désigne l'opérateur borné de $L^2(M, L)$ qui agit par multiplication par f .

$$f \xrightarrow{\text{contravariant}} \Pi M_f \Pi$$

Du point de vue covariant, nous considérons un observable quantique P , introduisons son noyau au sens de Schwartz $P(x_g, x_d)$ ¹ et nous lui associons la fonction $f(x) = P(x, x)/\Pi(x, x)$,

¹Nous identifions à l'aide de μ_M le noyau au sens de Schwartz d'un opérateur Q agissant sur les sections de

appelée symbole covariant, sous l'hypothèse que $\Pi(x, x)$ ne s'annule pas

$$\frac{Q(x, x)}{\Pi(x, x)} \xleftarrow{\text{covariant}} Q$$

Rappelons le principe général selon lequel la mécanique classique correspond à la limite dite semi-classique $\hbar \rightarrow 0$ de la mécanique quantique. Pour introduire \hbar dans les données quantiques, il suffit de remplacer dans toutes les constructions précédentes le fibré $L \rightarrow M$ par le fibré $L^{\otimes k} \rightarrow M$ ($L^{\otimes k}$ est naturellement muni d'une structure hermitienne et d'une dérivation covariante de courbure $\frac{k}{i}\omega$). k décrit l'ensemble des entiers positifs, le petit paramètre est alors $\hbar = \frac{1}{k}$. En appliquant les idées de Berezin, nous mettons ainsi en relation des suites de fonctions de $C^\infty(M)$ avec des suites d'opérateurs.

Dans [6], [7] et [8], Cahen, Rawnsley et Gutt étudient les propriétés des symboles covariants. Dans le cas où M est une orbite coadjointe d'un groupe de Lie compact, ils montrent que la composition des symboles induit un star-produit. Leur preuve s'appuie sur une identification partielle mais exacte entre les observables quantiques et classiques. Au lieu de procéder ainsi, nous allons nous placer dans un contexte semi-classique comme l'a fait Guillemin [11] précédé de Bordemann, Meinrenken, Schlichenmaier [2] avec les symboles contravariants. Formulons les résultats de ces auteurs de la manière suivante: nous considérons uniquement les suites $(f(\cdot, k))_k$ qui admettent un développement asymptotique complet en puissances de k

$$(2.1) \quad f(x, k) = \sum_{l=0}^{\infty} k^{-l} f_l(x) + O(k^{-\infty}) \text{ avec } f_l \in C^\infty(M)$$

pour la topologie C^∞ , le symbole associé étant la série formelle $\sum_l \hbar^l f_l$ de $C^\infty(M)[[\hbar]]$. Pour ce qui est des observables quantiques, nous nous restreignons aux suites d'opérateurs (T_k) de la forme

$$(2.2) \quad T_k = \Pi_k M_{f(\cdot, k)} \Pi_k + R_k$$

où $(f(\cdot, k))$ à les propriétés énoncées ci-dessus et (R_k) est une suite d'opérateurs telle que $\Pi_k R_k \Pi_k = R_k$ et dont la norme hilbertienne usuelle $\|R_k\|$ est $O(k^{-\infty})$. Nous appelons une telle suite (T_k) un opérateur de Toeplitz et notons \mathcal{T} l'ensemble de ces opérateurs.

Théorème 2.1 ([2], [11]). *La relation décrite par (2.1) et (2.2) qui associe une série formelle $\sum_l \hbar^l f^l$ avec un opérateur de Toeplitz (T_k) induit un isomorphisme de $C^\infty(M)[[\hbar]]$ sur \mathcal{T} quotienté par $O(k^{-\infty})$. De plus,*

$$\begin{aligned} \|T_k\| &= O(k^{-N}) \text{ ssi } f^0 = \dots = f^{N-1} = 0 \\ \|T_k\| &\sim \text{Sup} |f^0| \text{ si } f^0 \neq 0 \end{aligned}$$

D'autre part, \mathcal{T} est stable par composition et $C^\infty(M)[[\hbar]]$ hérite de la sorte d'un star produit.

L à une section $Q(x_g, x_d)$ de $L \boxtimes L^{-1} = \pi_g^\# L \otimes \pi_d^\# L^* \rightarrow M \times M$, où π_g et π_d sont les projections $M \times M \rightarrow M$ sur le premier et deuxième facteur respectivement. Le fibré $L \boxtimes L^{-1}$ se trivialisent naturellement au dessus de la diagonale, $x \rightarrow Q(x, x)$ s'identifie donc à une fonction de $C^\infty(M)$.

Nous appelons $\sum_l \hbar^l f_l$ le symbole contravariant d'un opérateur de Toeplitz et le notons $\sigma_{\text{cont}}(T_k)$. Ce théorème se déduit de la théorie homogène des opérateurs de Toeplitz développée par Boutet de Monvel et Guillemin [4]. Il montre qu'il existe une adéquation entre la quantification par déformation et les théories microlocales à petit paramètre. Précisons que l'application $\sigma_{\text{cont}} : \mathcal{T} \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$ définit un symbole total dans le sens que son noyau est l'ensemble des opérateurs de Toeplitz qui sont régularisants. Cette application est définie intrinséquement, alors qu'habituellement en analyse microlocale seuls les symboles principaux et sous-principaux (qui correspondent ici aux fonctions f^0 et f^1 d'un symbole $\sum \hbar^l f_l$) sont définis indépendamment des coordonnées. Ceci est d'autant plus surprenant que dans la théorie homogène des opérateurs de Toeplitz [4] le symbole sous-principal lui-même n'est pas défini sans ambiguïté.

1.1 Résultats

Notre premier résultat propose un ansatz qui décrit le noyau au sens de Schwartz d'un opérateur de Toeplitz.

Théorème 2.2. *Soit une section $E \in C^\infty(M \times M, L \boxtimes L^{-1})$ telle que*

$$E(x, x) = 1, |E(x_g, x_d)| < 1 \text{ si } x_g \neq x_d \text{ et}$$

$$\nabla_{\bar{Z}_g} E \equiv \nabla_{Z_d} E \equiv 0 \text{ modulo } \mathcal{I}^\infty(\text{diag } M), \quad \forall Z \text{ champ de vecteurs holomorphes de } M.^2$$

La suite des noyaux au sens de Schwartz d'un opérateur de Toeplitz (T_k) est de la forme

$$T_k(x_g, x_d) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n E^{\otimes k} a(x_g, x_d, k) + R_k(x_g, x_d)$$

où a et (R_k) sont telles que :

- $(a(\cdot, k))_k$ est une suite de $C^\infty(M \times M)$ qui admet un développement asymptotique $\sum_{l=0}^{\infty} k^{-l} a_l$ pour la topologie C^∞ dont les coefficients vérifient $\bar{Z}_g \cdot a_l \equiv Z_d \cdot a_l \equiv 0$ modulo $\mathcal{I}^\infty(\text{diag } M)$ quel que soit le champ de vecteurs holomorphes Z de M
- (R_k) est une suite de sections de $L^k \boxtimes L^{-k}$ négligeable dans le sens qu'elle est à décroissance rapide uniforme sur les compacts ainsi que ses dérivées covariantes successives.

De plus, l'application σ qui à (T_k) associe la série formelle $\sum_l \hbar^l a_l(x, x)$ induit un isomorphisme de $\mathcal{T}/O(k^{-\infty})$ sur $C^\infty(M)[[\hbar]]$.

Ce résultat est maximal dans le sens où l'on caractérise le noyau au sens de Schwartz d'un opérateur de Toeplitz modulo une suite négligeable, autrement dit modulo la suite des noyaux au sens de Schwartz d'un opérateur régularisant. Il permet de donner une preuve directe du théorème 2.1. L'application symbole $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$ définit un deuxième symbole total. L'application symbole covariant $\sigma_{\text{cov}} : \mathcal{T} \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$ est alors définie par $\sigma_{\text{cov}}(T_k) = \sigma(T_k)(\sigma(\Pi_k))^{-1}$. Par conséquent,

$$\frac{T_k(x, x)}{\Pi_k(x, x)} = \sum_l k^{-l} f_l + O(k^{-\infty}) \text{ ssi } \sigma_{\text{cov}}(T_k) = \sum_l \hbar^l f_l$$

où le développement asymptotique est valable pour la topologie C^∞ .

Du théorème 2.2, nous déduisons de nombreuses propriétés de la loi de composition $*$ des symboles σ . Cette loi est un star-produit dont les opérateurs bidifférentiels B_l associés sont donnés localement par des formules du type

$$(2.3) \quad \begin{aligned} B_l(f, g) &= \sum_{\alpha, \beta} \tilde{B}_{\alpha, \beta}^l([\det(G_{ij})]^{-1}, G_{\alpha', \beta'}) \partial_{\bar{z}}^\beta f \cdot \partial_z^\alpha g \\ \text{avec } f * g &= \sum \hbar^l B_l(f, g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M) \end{aligned}$$

Les fonctions $G_{i,j}$ sont les composantes de la métrique kählerienne définies dans un système de coordonnées complexes (z^i) et les $G_{\alpha, \beta}$ en sont les dérivées successives. Les $\tilde{B}_{\alpha, \beta}^l$ sont des polynômes universels, c'est à dire qu'ils ne dépendent pas du choix des coordonnées ni de la métrique. Ces polynômes sont calculables, mais leur expression est si compliquée que nous n'avons pas réussi à vérifier les deux propriétés essentielles qui sont l'invariance par changement des coordonnées et l'associativité du star-produit $*$. Néanmoins, nous exprimons le terme principal des (B_l) et B_1 à partir de tenseurs associés à la métrique kählerienne. Une propriété remarquable du star-produit $*$ est qu'il ne dépend pas du choix du fibré $L \rightarrow M$, dit fibré préquantifiant. De plus, si M est une variété kählerienne quelconque, c'est à dire qui ne soit pas nécessairement compacte ou telle qu'on ne puisse pas la munir d'un fibré préquantifiant, alors les formules (2.3) définissent toujours un star-produit sur M .

Nous donnons une description similaire des lois de composition $*_{\text{cov}}$ et $*_{\text{cont}}$ des symboles covariant et contravariants et montrons que les différentes applications $C^\infty(M)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$ qui associent $\sigma(T_k)$, $\sigma_{\text{cov}}(T_k)$ et $\sigma_{\text{cont}}(T_k)$ sont des équivalences de star-produit. Les résultats que nous obtenons sur le symbole covariant généralisent ceux de Cahen, Gutt et Rawnsley.

Précisons qu'à la différence des star-produits $*_{\text{cov}}$ et $*_{\text{cont}}$, l'élément unité $\sigma(\Pi_k)$ de $*$ est une série formelle $\sum \hbar^l S_l$ dont les coefficients S_l pour $l > 0$ ne sont pas tous nuls. Les fonctions S_l sont précisément les coefficients du développement asymptotique de $(\Pi_k(x, x))$

$$(2.4) \quad \Pi_k(x, x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \sum_l k^{-l} S_l(x) + O(k^{-\infty})$$

L'existence de ce développement asymptotique ainsi que $S_0 = 1$ ont été montrés par Zelditch [22]. Dans [15], Lu a calculé S_1 , S_2 , S_3 et S_4 en fonction de la métrique kählerienne et sa méthode peut se généraliser au calcul des coefficients suivants. Nous donnons un autre algorithme pour réaliser ce calcul, à partir de l'expression des B_l .

Les calculs de [15] s'appuient sur les sections piquées introduites par Tian [21]. Ces sections sont dans le cas d'une métrique plate les états cohérents avec symbole que l'on rencontre en physique mathématique. Nous en donnons une description d'un point de vue microlocal : ces objets sont les analogues pour les opérateurs de Toeplitz à petit paramètre des intégrales oscillantes $\int e^{i\frac{x\xi}{\hbar}} a(\xi) d\xi$ pour les opérateurs pseudo-différentiels à petit paramètre. Le produit scalaire des sections piquées ainsi que l'action d'un opérateur de Toeplitz à petit paramètre sur une section piquée s'expriment directement à partir des opérateurs bidifférentiels B_l associés au star-produit $*$.

Par analogie avec la théorie des opérateurs pseudo-différentiels à petit paramètre, nous définissons le microsupport d'une suite de \mathcal{H}_k ainsi que d'une suite d'endomorphismes de \mathcal{H}_k et nous énonçons ses principales propriétés. L'introduction de ces notions est aisée essentiellement car les objets que nous considérons sont directement définis sur l'espace des phases. Pour terminer, nous traitons le calcul fonctionnel des opérateurs de Toeplitz à petit paramètre. Le résultat que nous montrons peut en partie se déduire de la théorie homogène des opérateurs de Toeplitz [4], où il est déduit de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Nous en donnons une preuve directe.

Rappelons que les propriétés symboliques de la théorie homogène des opérateurs de Toeplitz sont démontrés dans [4] à partir du calcul symbolique des opérateurs de Hermite. Boutet de Monvel [3] propose une autre méthode qui utilise le calcul symbolique des opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe. La démarche que nous suivons est essentiellement inspirée par cette approche. La preuve du théorème 2.2 consiste à montrer dans un premier temps que l'ansatz proposé est valable pour (Π_k) . Nous déduisons ceci d'un résultat de Boutet de Monvel et Sjöstrand [5] qui décrit le projecteur de Szegö d'un domaine strictement pseudo-convexe comme un opérateur intégral de Fourier à phase complexe. Précisons que la preuve de Zelditch de l'existence du développement asymptotique (2.4) partait aussi de ce résultat. Nous étendons ensuite l'ansatz aux opérateurs de Toeplitz. Pour réaliser ceci et ensuite pour démontrer les propriétés des symboles, le résultat essentiel que nous utilisons est le lemme de la phase stationnaire, dans une version où la phase prend des valeurs complexes [16] et où l'on calcule le développement asymptotique complet [12]. Ce résultat ainsi que celui de Boutet de Monvel et Sjöstrand sont les seuls que nous utilisons.

Dans un prochain article nous généraliserons l'ansatz du théorème 2.2, afin de quantifier les sous-variétés lagrangiennes de M . Ceci nous permettra de décrire les états propres ainsi que le propagateur d'un opérateur de Toeplitz et d'énoncer les conditions de Bohr-Sommerfeld.

1.2 Notations

Précisons quelques notations et définitions. Le produit scalaire de $u, v \in L_x$ est noté $h(u, v)$, la norme $|u| = h(u, u)^{\frac{1}{2}}$ et la dérivation covariante de L ∇ . Nous utilisons les mêmes notations pour les structures hermitiennes et les dérivations covariantes induites sur $L^{\otimes k}$ et $L^k \boxtimes L^{-k}$. A l'aide de μ_M , nous identifions le noyau au sens de Schwartz d'un opérateur P_k agissant sur $C^\infty(M, L^{\otimes k})$ à une section de $L^k \boxtimes L^{-k}$ et le notons $P_k(x_g, x_d)$. Si D est un opérateur différentiel agissant sur $C^\infty(M)$ (resp. $C^\infty(M, L^{\otimes k})$), alors D_g et D_d sont les opérateurs différentiels $D \otimes \text{Id}$ et $\text{Id} \otimes D$ qui agissent sur $C^\infty(M \times M)$ (resp. $C^\infty(M \times M, O^{\otimes k})$).

Si (s_k) est une famille de $C^\infty(M, L^{\otimes k})$, nous disons qu'elle est négligeable si quels que soient l, N des entiers positifs, X_1, \dots, X_l des champs de vecteurs de M et K un compact de M il existe C tel que

$$|\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_l} s_k(x)| \leq C k^{-N} \text{ sur } K$$

Si (R_k) est une famille d'opérateurs agissant sur $C^\infty(M, L^{\otimes k})$, nous disons qu'elle est régularisante si les noyaux des R_k sont de classe C^∞ et si quels que soient l, N des entiers positifs,

X_1, \dots, X_l des champs de vecteurs de $M \times M$ et K un compact de $M \times M$ il existe C tel que

$$|\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_l} R_k(x_g, x_d)| \leq C k^{-N} \text{ sur } K$$

Ces définitions correspondent à celles des familles \hbar -négligeables ou \hbar -régularisantes des théories microlocales à petit paramètre (cf. [9]).

Si Y est une sous-variété de X , nous notons $\mathcal{I}^N(Y)$ (resp. $\mathcal{I}^\infty(Y)$) l'idéal de $C^\infty(M)$ composé des fonctions s'annulant à l'ordre N (resp. à tout ordre) le long de Y . Nous utilisons la même notation pour les sections d'un fibré.

Pour finir, rappelons qu'un star-produit $*$ est une loi de $C^\infty(M)[[\hbar]]$ associative et $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire de la forme

$$\sum_l \hbar^l f_l * \sum_l \hbar^l g_l = \sum_l \hbar^l \sum_{l_1+l_2+l_3=l} A_{l_1}(f_{l_2}, f_{l_3})$$

où les A_l sont des opérateurs bidifférentiels tels que $A_0(f, g) = fg$ et $A_1(f, g) - A_1(g, f) = \frac{1}{i}\{f, g\}$. Une équivalence de star-produit est une application $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -linéaire $\phi : C^\infty(M)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$ de la forme

$$\phi(f) = f + \sum_{l>0} \hbar^l \phi_l(f)$$

où les ϕ_l sont des opérateurs différentiels.

2 Sur une algèbre \mathcal{F} associée au projecteur (Π_k)

Afin de montrer que le noyau du projecteur (Π_k) est bien décrit par l'ansatz du théorème 2.2, nous allons considérer une certaine algèbre d'opérateurs $(T_k : C^\infty(M, L^k) \rightarrow C^\infty(M, L^k))$ définie de la manière suivante. Introduisons le fibré principal $\pi : P \rightarrow M$ de groupe de structure $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $L^{\otimes k} \simeq P \times_{s_k} \mathbb{C}$, où s_k est la représentation linéaire de \mathbb{T} dans \mathbb{C} qui à $\theta \in \mathbb{T}$ associe la multiplication par $e^{-ik\theta}$. Les sections de $L^{\otimes k}$ s'identifient alors aux fonctions $f \in C^\infty(P)$ vérifiant $R_\theta^* f = e^{ik\theta} f$. La dérivation covariante ∇ induit une 1-forme de connexion $\alpha \in \Omega^1(P, \mathbb{R})$ telle que $d\alpha = \pi^* \omega$ et $\mu_P = \frac{1}{2\pi n!} |\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n}|$ est un élément de volume de P . De la sorte, l'espace des fonctions de carré sommable $L^2(P)$ est muni d'un produit scalaire et grâce à l'identification précédente nous avons

$$L^2(P) \simeq \bigoplus_{k=-\infty}^{k=\infty} L^2(M, L^{\otimes k})$$

Ainsi, à une famille bornée $(T_k)_k$ d'opérateurs bornés de $L^2(M, L^{\otimes k})$, nous associons un opérateur borné T de $L^2(P)$ qui commute avec l'action de \mathbb{T} , et réciproquement. Nous appelons la suite $(T_k)_{k \geq 0}$ la suite des coefficients de Fourier positifs de T .

Soit Π le projecteur orthogonal de $L^2(P)$ associé à la suite des Π_k . Comme nous le verrons, P se plonge naturellement dans L^* et de la sorte est le bord d'un domaine strictement pseudo-convexe dont le projecteur de Szegö est Π . L'un des résultats principaux de Boutet de Monvel

Sjöstrand ([5]) est que (Π) est un opérateur intégral de Fourier à phase complexe. Notons \mathcal{C} sa relation canonique.

Définition 2.3. \mathcal{F} est l'ensemble des opérateurs (Q_k) qui sont les suites des coefficients de Fourier positifs des opérateurs $Q : C^\infty(P) \rightarrow C^\infty(P)$ intégraux de Fourier à phase complexe, associés à la relation canonique \mathcal{C} , commutants avec ∂_θ et de degré 0.

L'objet des trois premiers sous-chapitres est de montrer que la suite des noyaux d'un opérateur $(Q_k) \in \mathcal{F}$ est de la forme

$$Q_k(x_g, x_d) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n E^k a(x_g, x_d, k) + R_k(x_g, x_d)$$

où E vérifie les mêmes propriétés que dans le théorème 2.2, $(a(\cdot, k))$ est une suite de $C^\infty(M \times M)$ qui admet un développement asymptotique $\sum_{l=0}^{\infty} k^{-l} a_l(x_g, x_d)$ pour la topologie C^∞ et $(R_k(x_g, x_d))$ est négligeable. Nous définissons ensuite le symbole total d'un opérateur de \mathcal{F} , montrons que \mathcal{F} est stable par composition et décrivons le calcul symbolique associé.

Comme nous le verrons au chapitre suivant, l'ensemble des opérateurs de Toeplitz est une sous-algèbre de \mathcal{F} . Nous déduirons les propriétés de cette algèbre de celles de \mathcal{F} .

2.1 La section E

Nous notons $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ la métrique riemannienne de M .

Proposition 2.4. *Il existe une section E de $L \boxtimes L^{-1}$ vérifiant*

$$(2.5) \quad \begin{aligned} E|_{\text{diag}(M)} &= 1 \\ \nabla_{\bar{Z}_g} E &\equiv \nabla_{Z_d} E \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag}(M))}, \quad \forall Z \text{ champ de vecteurs holomorphes de } M \end{aligned}$$

Cette section est unique modulo une section s'annulant à tout ordre le long de $\text{diag}(M)$. La fonction $\delta = -2 \ln |E|$ de $C^\infty(M \times M)$ s'annule le long de $\text{diag}(M)$ ainsi que ses dérivées premières. Si $x \in M$, $\text{Hess } \delta|_{(x,x)}$ est la forme quadratique de noyau $\text{diag}(T_x M)$ et dont la restriction au premier facteur de $T_x M \times T_x M$ coïncide avec $\frac{1}{2}g$. De plus,

$$(2.6) \quad \nabla E \equiv -E \otimes (\partial_g + \bar{\partial}_d) \delta \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag}(M))}$$

δ est strictement négative sur un voisinage de $\text{diag}(M)$ privé de $\text{diag}(M)$. Quitte à modifier E en dehors de la diagonale, nous avons

$$|E|(x_g, x_d) < 1 \text{ ssi } x_g \neq x_d$$

ce que nous supposons désormais.

Preuve. Soit s une section de L définie sur un ouvert U de M telle que $|s| = 1$. Par conséquent $\nabla s = -i\beta \otimes s$ où $\beta \in \Omega(U)$ est réelle. Cherchons une section E définie au dessus

de $U \times U$ vérifiant (2.5) de la forme $s \otimes s^{-1} e^{i\psi}$. La fonction ψ doit vérifier les équations

$$\begin{aligned}\psi(x, x) &= 0 \\ \bar{Z}_g \cdot \psi(x_g, x_d) &\equiv i\langle \beta, \bar{Z} \rangle(x_g) \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag}(U))} \\ Z_d \cdot \psi(x_g, x_d) &\equiv -i\langle \beta, Z \rangle(x_d) \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag}(U))}\end{aligned}$$

quel que soit le champ de vecteurs holomorphes Z . La courbure $\omega = d\beta$ est une deux-forme de degré (1,1), par conséquent $\bar{\partial}\beta^{(0,1)} = 0$. Quitte à restreindre U , il existe d'après le lemme de Dolbeault une fonction $\rho \in C^\infty(U)$ telle que

$$(2.7) \quad \bar{\partial}\rho + i\beta^{(0,1)} = 0$$

Posons $\psi(x_g, x_d) = i(\rho(x_g) + \bar{\rho}(x_d)) + \tilde{\psi}(x_g, x_d)$, les équations précédentes deviennent

$$(2.8) \quad \begin{aligned}\tilde{\psi}(x, x) &= -i(\rho(x) + \bar{\rho}(x)) \\ \bar{Z}_g \tilde{\psi} &\equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag}(U))} \\ Z_d \tilde{\psi} &\equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag}(U))}\end{aligned}$$

La distribution de $M \times M$ engendrée par les vecteurs \bar{Z}_g et Z_d où Z décrit les vecteurs holomorphes de TM , est intégrable et intersecte transversalement le complexifié de $\text{diag}(TM)$. Ces équations ont donc une solution unique modulo $\mathcal{I}^\infty(\text{diag}(U))$. Ceci nous assure l'existence locale et l'unicité de E . Du fait de l'unicité, il est possible de construire grâce à une partition de l'unité une section globale E vérifiant (2.5). Avec les notations précédentes, la fonction δ s'exprime de la manière suivante

$$\delta(x_g, x_d) = (\rho + \bar{\rho})(x_g) + (\rho + \bar{\rho})(x_d) - i\tilde{\psi}(x_g, x_d) - i\tilde{\psi}(x_d, x_g)$$

Soit (z^j) un système de coordonnées complexes. De $\partial_{z^j} \cdot \tilde{\psi} \equiv (\partial_{z^j_g} + \partial_{z^j_d}) \tilde{\psi}$ modulo $\mathcal{I}^\infty(\text{diag}(U))$ on déduit que $\partial_{z^j_g} \delta(x, x)$ est nul. On montre de même que les autres dérivées de δ s'annulent le long de $\text{diag}(M)$. Pour calculer le hessien de δ , remarquons que

$$(2.9) \quad \partial_{z^j_g} \partial_{z^k_d} \delta|_{(x,x)} = \partial_{z^j_g} \partial_{\bar{z}^k_d} \delta|_{(x,x)} = 0 \quad \partial_{z^j_g} \partial_{\bar{z}^k_g} \delta|_{(x,x)} = \partial_{z^j_d} \partial_{\bar{z}^k_d} \delta|_{(x,x)} = G_{j,k}$$

avec $G_{j,k} = \partial_{z^j} \partial_{\bar{z}^k} (\rho + \bar{\rho})$. Soient $X, Y \in T_x M$. Ecrivons

$$\begin{aligned}(X, 0) &= (Z, Z) + (\bar{Z}, -Z) \text{ avec } Z = \frac{1}{2}(X - iJX) \in T_x^{1,0} M \\ (Y, 0) &= (\bar{W}, \bar{W}) + (W, -\bar{W}) \text{ avec } W = \frac{1}{2}(Y - iJY) \in T_x^{1,0} M\end{aligned}$$

Le hessien de δ s'annule sur la diagonale, par conséquent

$$\begin{aligned}\text{Hess } \delta|_{(x,x)}((X, 0), (Y, 0)) &= \text{Hess } \delta|_{(x,x)}((\bar{Z}, -Z), (W, -\bar{W})) \\ &= \frac{1}{2i}\omega(W, \bar{Z}) + \frac{1}{2i}\omega(Z, \bar{W})\end{aligned}$$

d'après (2.9) et le fait que $\omega = i\partial\bar{\partial}(\rho + \bar{\rho}) = i \sum G_{j,k} dz^j \wedge d\bar{z}^k$

$$= \frac{1}{2}g(X, Y)$$

(2.6) se montre en dérivant $h(E, E) = \exp(-\delta)$. \square

Remarque 2.5. Si ω est analytique, il est possible de résoudre les équations (2.5) exactement (i.e. sans reste dans $\mathcal{I}^\infty(\text{diag } M)$) sur un voisinage de $\text{diag}(M)$ et la solution obtenue est unique au voisinage de $\text{diag}(M)$. Nous obtenons alors une section locale holomorphe de $L \boxtimes L^{-1} \rightarrow M \times \bar{M}$. \square

Remarque 2.6. L'expression locale $E^k = e^{ik\psi} s^k \otimes s^{-k}$ nous sera d'une grande utilité. C'est sous cette forme qu'on appliquera le lemme de la phase stationnaire pour les compositions d'opérateurs. Le développement de Taylor de ψ le long de la diagonale s'exprime en fonction de la métrique kählerienne (les fonctions $G_{\alpha,\beta}$ sont les dérivées successives du potentiel de Kähler $\rho + \bar{\rho}$). Grâce à ceci, nous pourrions calculer les opérateurs bidifférentiels B_l associés au star-produit $*$. \square

Exemple 2.7. Soit $M = \mathbb{C}^n$ muni de la structure holomorphe usuelle et de $\omega = idz^j \wedge d\bar{z}^j$ et $L = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. Soit $s : M \rightarrow L$ la section qui à (z^i) associe $(z^i, 1)$. On définit

$$|s| = 1, \quad \nabla s = \frac{1}{2}(z^j dz^j - \bar{z}^j d\bar{z}^j) \otimes s$$

de sorte que L soit préquantifiant. Une section holomorphe est alors

$$t = e^{-\frac{1}{2}z^j \bar{z}^j} s, \quad \nabla t = -\bar{z}^j dz^j \otimes t, \quad |t|^2 = e^{-z^j \bar{z}^j}$$

Une section E associée à cette structure est

$$\square \quad E(x_g, x_d) = e^{-\frac{1}{2}(z_g^j \bar{z}_g^j + z_d^j \bar{z}_d^j) + z_g^j \bar{z}_d^j} s(x_g) \otimes s^{-1}(x_d) = e^{-z_d^j \bar{z}_d^j + z_g^j \bar{z}_d^j} t(x_g) \otimes t^{-1}(x_d)$$

Exemple 2.8. Soit $M = \mathbb{C}P^n$ l'espace projectif complexe et L^{-1} le sous-fibré de $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ tel que L_x^{-1} soit la droite complexe $x \subset \mathbb{C}^n$. $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ est muni de la structure complexe produit et d'une structure de fibré hermitien induit par la structure hermitienne usuelle de \mathbb{C}^{n+1} . L^{-1} et par conséquent L héritent de la sorte d'une structure holomorphe et hermitienne et donc d'une unique dérivation covariante qui soit compatible avec les deux. Notons $(w^i)_{i=0,\dots,n}$ les coordonnées complexes de \mathbb{C}^{n+1} . Soit $U \subset \mathbb{C}P^n$ l'ensemble des points de coordonnées homogènes $[w^i]$ tels que $w^0 \neq 0$ et $z^i = w^i/w^0$ les coordonnées affines définies sur U . Soit $s^{-1} : U \rightarrow L^{-1}$, la section qui à (z^i) associe $(1, z^1, \dots, z^n)$. On vérifie que

$$|s|^2 = 1 + z^i \bar{z}^i, \quad \nabla s = \frac{-\bar{z}^i dz^i}{1 + z^i \bar{z}^i} \otimes s$$

La courbure de L est donc

$$\omega = i \frac{dz^j \wedge d\bar{z}^j}{1 + z^l \bar{z}^l} - i \frac{\bar{z}^j z^k dz^j \wedge d\bar{z}^k}{(1 + z^l \bar{z}^l)^2}$$

et ceci n'est autre que la deux-forme fondamentale de la structure kählerienne de Fubini-Study de $\mathbb{C}P^n$. L est ainsi un fibré préquantifiant. Une section E est alors

$$\square \quad E(x_g, x_d) = \frac{1 + z_g^j \bar{z}_d^j}{1 + z_d^k \bar{z}_d^k} s(x_g) \otimes s^{-1}(x_d)$$

2.2 Domaine strictement pseudo-convexe

Rappelons le résultat de Boutet de Monvel et Sjöstrand dont nous avons besoin. Soit Y une variété complexe de dimension $k + 1$. Soit D un domaine de Y dont le bord ∂D est compact de classe C^∞ . Soit $E \rightarrow \partial D$ le sous-fibré complexe de $T(\partial D) \otimes \mathbb{C}$ composé des vecteurs holomorphes de Y tangents à ∂D . La dimension complexe de E est k . Soit $r : Y \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ définissant D , i.e. $D = \{r \leq 0\}$ et $r'(x) \neq 0$ si $x \in \partial D$. Supposons que D soit strictement pseudo-convexe, i.e. que la forme sesquilinéaire de $E|_x$ (dite forme de Lévi)

$$(X, Y) \rightarrow \langle \partial \bar{\partial} r, X \wedge \bar{Y} \rangle \quad X, Y \in E|_x$$

soit définie positive en tout point de x de ∂D . La restriction de $-i\partial r$ à ∂D est alors une 1-forme de contact. Soit $\mu \in C^\infty(\partial D, |\Omega|(\partial D))$ un élément de volume. $L^2(\partial D)$ est ainsi muni d'une structure hilbertienne. \mathcal{H} est l'ensemble des fonctions L^2 de ∂D vérifiant les équations de Cauchy-Riemann induites :

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in L^2(\partial D) / \bar{Z}.f = 0, \forall Z \in C^\infty(\partial D, E) \right\}$$

Le projecteur de Szegö Π est le projecteur orthogonal de $L^2(\partial D)$ d'image \mathcal{H} .

Théorème 2.9 ([5]). *Soit φ la restriction à $\partial D \times \partial D$ d'une fonction ϕ de $C^\infty(Y \times Y)$ vérifiant*

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \phi(x, x) &= \frac{1}{i}r(x) \text{ et } \text{Im } \phi(x_g, x_d) > 0 \text{ si } x_g \neq x_d \\ \bar{Z}_g \phi &\equiv Z_d \phi \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag}(Y))} \end{aligned}$$

quel que soit le champ de vecteurs holomorphes Z de Y . L'application $t\varphi(x_g, x_d)$ définie sur le cône $\mathbb{R}^+ \times \partial D \times \partial D$ est une phase complexe non-dégénérée (cf. [12]) et définit donc une relation canonique \mathcal{C} . Π est un opérateur intégral de Fourier de relation canonique \mathcal{C} .

Afin d'appliquer ceci, nous plongeons le fibré principal P dans L^* de la manière suivante : si t est la représentation linéaire de \mathbb{T} dans \mathbb{C} qui à $\theta \in \mathbb{T}$ associe la multiplication par $e^{i\theta}$, nous avons $L^* \simeq P \times_t \mathbb{C}$. Définissons $i : P \rightarrow L^*$ par

$$i(u) = [u, 1] \in P \times_t \mathbb{C}, \quad \forall u \in P$$

La dérivation covariante ∇ induit une 1-forme de connexion $\alpha \in \Omega^1(P)$. Notons $\text{Hor}^{1,0} \rightarrow P$ le sous-fibré de $TP \otimes \mathbb{C}$ composé des relèvements horizontaux des vecteurs holomorphes de $TM \otimes \mathbb{C}$. Notons $H : L^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à un vecteur de L^* associe le carré de sa norme. Le résultat suivant est bien connu.

Proposition 2.10. *$D = \{H \leq 1\}$ est un domaine strictement pseudo-convexe de L^* de bord $i(P)$. Le fibré des vecteurs holomorphes de L^* tangents à $i(P)$ est $i_* \text{Hor}^{1,0}$. De plus*

$$(2.11) \quad \frac{1}{i}i^* \partial \ln H = \alpha$$

Exemple 2.11. Considérons les données de l'exemple 2.7. On trivialisé le fibré $L \simeq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ de sorte que $t(z^i) = (z^i, 1)$. D est alors défini par

$$D = \{(z^i, u) / u\bar{u} < e^{-z^i \bar{z}^i}\}$$

Ce domaine n'est autre que le quotient de

$$\mathcal{U}^n = \{(z^i, v) \in \mathbb{C}^{n+1} / \text{Im } v > z^i \bar{z}^i\}$$

par l'action $\mathbb{Z} \times \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U}^n$, $(k, (z^i, v)) \rightarrow (z^i, v + k)$, où la projection $\mathcal{U}^n \rightarrow D$ est l'application qui à (z^i, v) associe (z^i, e^{iv}) . \mathcal{U}^n est un exemple classique de domaine strictement pseudo-convexe (cf. [20]). Son bord s'identifie au groupe d'Heisenberg et le bord de D s'identifie de la sorte au groupe d'Heisenberg réduit.

Exemple 2.12. Dans l'exemple 2.8, le fibré L^{-1} privé de sa section nulle est par définition \mathbb{C}^{n+1} privé de l'origine. Par conséquent D privé de la section nulle s'identifie à la boule

$$\mathcal{B}^n = \{(w^i) \in \mathbb{C}^{n+1} / w^i \bar{w}^i < 1\}$$

privé de l'origine. Le bord de D est donc la sphère de \mathbb{C}^{n+1} et ceci donne une autre réalisation de P comme le bord d'un domaine strictement pseudo-convexe.

Preuve. Soit un ouvert U de M tel que : $P|_U \simeq U \times \mathbb{T} \ni (x, \theta)$. La 1-forme de connexion α se décompose en $\alpha = \beta + d\theta$ avec $\beta \in \Omega^1(U)$. Soit s^{-1} la section de L^* définie au dessus de U par

$$s^{-1}(x) = [(x, 0), 1] \in (U \times \mathbb{T}) \times_t \mathbb{C} \simeq L^*|_U$$

Nous avons $\nabla s^{-1} = i\beta \otimes s^{-1}$. Soit $\rho \in C^\infty(U)$ vérifiant (2.7). $e^\rho s^{-1}$ est alors une section holomorphe. Soit w la coordonnée complexe (holomorphe) linéaire de L^* telle que $w(e^\rho s^{-1}) = 1$. Introduisons un système de coordonnées complexes (z^j) sur U . Dans ces coordonnées, la fonction H et l'application i s'écrivent

$$\begin{aligned} H(z^j, w) &= w\bar{w}e^{\rho + \bar{\rho}} & U \times \mathbb{T} &\longrightarrow U \times \mathbb{C} \\ & & (z^j, \theta) &\longrightarrow (z^j, w = e^{i\theta - \rho}) \end{aligned}$$

Le relèvement horizontal $\partial_{z^j}^{\text{hor}}$ de ∂_{z^j} est donné par

$$\begin{aligned} \partial_{z^j}^{\text{hor}} &= \partial_{z^j} + i(\partial_{z^j} \bar{\rho}) \partial_\theta \\ i_* \partial_{z^j}^{\text{hor}} &= \partial_{z^j} - w(\partial_{z^j}(\rho + \bar{\rho})) \partial_w \end{aligned}$$

Ainsi $i_* \text{Hor}^{1,0}$ est un sous-fibré du fibré des vecteurs holomorphes de L^* tangents à $i(P)$. Ces deux fibrés sont de dimension complexe n et par conséquent sont égaux. Montrons (2.11)

$$\begin{aligned} \partial \ln H &= \frac{dw}{w} + \partial(\rho + \bar{\rho}) \\ i^* \partial \ln H &= id\theta - d\rho + \partial(\rho + \bar{\rho}) \\ &= i\alpha \end{aligned}$$

car β étant réelle, (2.7) implique $i\beta = \partial\bar{\rho} - \bar{\partial}\rho$. Pour finir vérifions que D est strictement pseudo-convexe

$$i^*\partial\bar{\partial}\ln H = -i^*\bar{\partial}\partial\ln H = -i^*d\partial\ln H = -di^*\partial\ln H = -id\alpha$$

et $-id\alpha(\partial_{z_j}^{\text{hor}}, \partial_{\bar{z}^k}^{\text{hor}}) = -i\omega(\partial_{z_j}, \partial_{\bar{z}^k}) = G_{j,k}$ est définie positive. \square

Identifions à présent les sections de L^k aux fonctions de $C^\infty(P)$ vérifiant $R_\theta^*f = e^{ik\theta}f$. Rappelons que si $s : M \rightarrow L^k$ est associée à $f \in C^\infty(M)$, alors $\nabla_X s$ est associée à $X^{\text{hor}}.f$, où $X^{\text{hor}}.f$ désigne le relèvement horizontal de X . Donc, les sections holomorphes s'identifient aux fonctions vérifiant les équations de Cauchy-Riemann induites. Par conséquent, la suite des coefficients de Fourier positifs du projecteur de Szegö $\Pi : L^2(P) \rightarrow L^2(P)$ est la suite (Π_k) définie dans l'introduction.

$P \times P \rightarrow M \times M$ est un fibré \mathbb{T}^2 -principal pour l'action produit. De plus $L \boxtimes L^{-1} \simeq (P \times P) \times_u \mathbb{C}$, où u est la représentation de \mathbb{T}^2 dans \mathbb{C} qui à (θ_g, θ_d) associe la multiplication par $e^{i(\theta_d - \theta_g)}$. La section E s'identifie de la sorte à une fonction \tilde{E} définie sur $P \times P$ et vérifiant $R_{(\theta_g, \theta_d)}^* \tilde{E} = e^{i(\theta_g - \theta_d)} \tilde{E}$. $E(x, x) = 1$ implique $\tilde{E}(u, u) = 1$. Soit V le voisinage de $\text{diag } P$ défini par $V = \{|\tilde{E} - 1| \leq \frac{1}{2}\}$. Définissons la fonction $\varphi = \frac{1}{i} \ln \tilde{E}$ sur V .

Proposition 2.13. *La fonction $t\varphi(u_g, u_d)$ définie sur le cône $R^+ \times V$ est une phase associée à la relation canonique de Π .*

Preuve. Travaillons localement avec les notations introduites dans les preuves des propositions 2.4 et 2.10. La fonction φ est

$$(2.12) \quad \varphi = \theta_g - \theta_d + i(\rho(x_g) + \bar{\rho}(x_d)) + \tilde{\psi}(x_g, x_d)$$

Prolongeons φ en une fonction ϕ définie sur un voisinage de $\text{diag}(L^*) \subset L^* \times L^*$ par

$$\phi = -i \ln(w_g \bar{w}_d) + \tilde{\psi}(x_g, x_d)$$

Des équations (2.8) définissant $\tilde{\psi}$ et de l'expression de H donnée dans la preuve de la proposition 2.10, on déduit que ϕ vérifie les équations (2.10), où la fonction r est $\ln H$. \square

2.3 Noyaux des opérateurs de \mathcal{F}

Théorème 2.14. *Les noyaux d'un opérateur $(F_k) \in \mathcal{F}$ sont de la forme*

$$F_k(x_g, x_d) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n E^k a(x_g, x_d, k) + R_k(x_g, x_d)$$

où $(a(\cdot, k))$ est une suite de $C^\infty(M \times M)$ qui admet un développement asymptotique

$$a(x_g, x_d, k) \sim \sum_{l=0}^{\infty} k^{-l} a_l(x_g, x_d)$$

pour la topologie C^∞ et (R_k) est négligeable. Réciproquement, étant donné une telle suite $(a(\cdot, k))$ et une suite (R_k) négligeable, il existe un opérateur $(F_k) \in \mathcal{F}$ dont les noyaux soient comme ci-dessus.

La preuve consiste essentiellement à réécrire l'intégrale oscillante définissant le noyau au sens de Schwartz d'un opérateur Fourier intégral sous la forme donnée dans le théorème : le terme oscillant devient E^k , et l'amplitude $a(x_g, x_d, k)$. A propos des termes négligeables, faisons la remarque suivante : la famille des coefficients de Fourier d'un opérateur $C^\infty(P) \rightarrow C^\infty(P)$ commutant avec ∂_θ et régularisant (dans le sens que son noyau est de classe C^∞) est régularisante, et réciproquement.

Preuve. Soit $G : C^\infty(P) \rightarrow C^\infty(P)$ un opérateur Fourier intégral de relation canonique Γ qui commute avec ∂_θ de degré 0. Son noyau est la somme d'une intégrale oscillante (cf. [12] Chapitre 7.8) et d'une fonction C^∞

$$(2.13) \quad G(u_g, u_d) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{i\tau\varphi(u_g, u_d)} s(u_g, u_d, \tau) |d\tau| + f(u_g, u_d)$$

où s est un symbole de $S_{1,0}^n(P \times P \times \mathbb{R}^+)$ qui admet un développement asymptotique

$$(2.14) \quad s(u_g, u_d, \tau) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \tau^{n-l} s_l(u_g, u_d)$$

et dont le support est inclu dans $V \times \mathbb{R}^+$. Calculons les coefficients de Fourier de $G(u_g, u_d)$. Ceux de f sont négligeables, dans le sens qu'ils sont les noyaux d'une suite régularisante et on se ramène ainsi à $f = 0$. Comme G commute avec ∂_θ , son noyau est invariant par l'action diagonale de \mathbb{T} sur $P \times P$

$$G(R_\theta \cdot u_g, R_\theta \cdot u_d) = G(u_g, u_d)$$

Il en est de même pour ϕ . Ainsi quitte à moyenner (2.13) puis (2.14), nous pouvons supposer que s et s_l sont aussi invariantes. Soit Q le quotient de $P \times P$ par l'action diagonale et $p : P \times P \rightarrow Q$ la projection associée. Le push-forward de $G(u_g, u_d)$ par $p : P \times P \rightarrow Q$ s'écrit alors

$$p_* G(q) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{i\tau\tilde{\varphi}(q)} \tilde{s}(q, \tau) |d\tau|$$

avec \tilde{s} et $\tilde{\varphi}$ tels que $p^* \tilde{s} = s$ et $p^* \tilde{\varphi} = \varphi$. De plus $\tilde{s} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \tau^{n-l} \tilde{s}_l$ où les \tilde{s}_l sont définies par $p^* \tilde{s}_l = s_l$. Q est un fibré \mathbb{T} -principal de base $M \times M$; l'action de $\theta \in \mathbb{T}$ est définie par

$$R_\theta \cdot p(u_g, u_d) = p(R_\theta \cdot u_g, u_d)$$

Nous devons calculer les coefficients de Fourier positifs de $p_* G$ pour cette action. Travaillons localement avec $P \simeq U \times \mathbb{T} \ni (x, \theta)$, de telle sorte que $Q \simeq U \times U \times \mathbb{T} \ni (x_g, x_d, \gamma)$ avec $p^* \gamma = \theta_1 - \theta_2$. Nous avons $\tilde{\varphi}(x_g, x_d, \gamma) = \gamma + \psi(x_g, x_d)$ où $\psi(x_g, x_d)$ est définie comme dans la preuve de la proposition 2.4. Les coefficients de Fourier de $p_* G$ sont

$$I_k(x_g, x_d, \gamma) = e^{ik\gamma} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+} e^{-ik\theta} e^{i\tau(\theta + \Psi(x_g, x_d))} \tilde{s}(x_g, x_d, \theta, \tau) |d\theta| |d\tau|$$

Le support de \tilde{s} est inclu dans $p(V) \times \mathbb{R}^+ \subset U \times U \times (-\alpha, \alpha) \times \mathbb{R}^+$ avec $0 < \alpha < \pi$. Nous remplaçons τ par $k\tau$.

$$I_k(x_g, x_d, \gamma) = e^{ik\gamma} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+} e^{-ik(\theta + \tau\theta + \tau\Psi(x_g, x_d))} \tilde{s}(x_g, x_d, \theta, k\tau) k |d\theta| |d\tau|$$

Pour estimer ceci, nous suivons la méthode de la phase stationnaire (chap de [12]). La première étape consiste au moyen d'intégrations par partie à se localiser au voisinage des points critiques de la phase $\phi = \theta + \tau\theta + \tau\psi(x_g, x_d)$.

$$(\partial_\tau \phi = \partial_\theta \phi = 0) \text{ ssi } (x_g = x_d, \theta = 0 \text{ et } \tau = 1)$$

Rappelons que la partie imaginaire de $\psi(x_g, x_d)$ est strictement positive si $x_g \neq x_d$. Nous obtenons

$$I_k(x_g, x_d, \gamma) = e^{ik\gamma} \int_D e^{-ik\phi(\theta, x_g, x_d, \tau)} \tilde{s}(x_g, x_d, \theta, k\tau) k |d\theta| |d\tau| + e^{ik\gamma} g_k(x_g, x_d)$$

où $D = (-\epsilon, \epsilon) \times (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ et les semi-normes $C^0(K)$ de g_k sont $O(k^{-\infty})$ si K est compact. Appliquons à présent le théorème 7.7.12 de [12]. Notons que $\phi = \psi + (\partial_\tau \phi)(\partial_\theta \phi)$. Nous obtenons

$$I_k(x_g, x_d, \gamma) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n e^{ik(\gamma + \psi(x_g, x_d))} a(x_g, x_d, k) + e^{ik\gamma} g'_k(x_g, x_d)$$

où $(a(\cdot, k))$ admet un développement asymptotique $\sum_{l=0}^{l=\infty} k^{-l} a_l$ pour la topologie C^∞ et les semi-normes $C^0(K)$ de g'_k sont $O(k^{-\infty})$. En fait l'on déduit du théorème 7.7.12 de [12] que I_k admet un développement asymptotique pour la topologie C^0 , mais les coefficients a_l sont de classe C^∞ et d'après le lemme de Borel il existe une suite $(a(\cdot, k))$ comme ci-dessus. En identifiant les fonctions I_k à des sections de $L^k \boxtimes L^{-k}$, nous obtenons l'expression des noyaux

$$(2.15) \quad F_k(x_g, x_d) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n E^k a(x_g, x_d, k) + R_k(x_g, x_d)$$

où $|R_k(x_g, x_d)|$ est uniformément $O(k^{-\infty})$. Il reste à améliorer ceci, c'est à dire montrer que $|\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_l} R_k| \leq C_{K,N} k^{-N}$ sur tout compact K et quel que soit N . Les $\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_l} F_k$ sont les coefficients de Fourier positifs de $X_1^{\text{hor}} \dots X_l^{\text{hor}} G$. Il s'estime de la même manière que les coefficients de Fourier de F_k . Par conséquent leur module est $O(k^N)$ sur tout compact avec N suffisamment grand. Les dérivées de $E^k a(\cdot, k)$ vérifient la même estimation, il en est donc de même des $\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_l} R_k$. En appliquant le lemme 3.2 de [18], nous obtenons alors que (R_k) est régularisante.

Pour la réciproque, il nous faut montrer que quelle que soit la suite (a_k) de $C^\infty(M \times M)$ admettant un développement asymptotique $\sum k^{-l} a^l$ pour la topologie C^∞ il existe un symbole $s \in S_{1,0}^n(P \times P \times \mathbb{R}^+)$ admettant un développement asymptotique $\sum \tau^l s_l$ telle que (2.15) soit vérifiée. Supposons que s_0 soit localement invariante par l'action de \mathbb{T}^2 sur un voisinage de $\text{diag } P$. On peut alors facilement calculer (cf théorème 7.7.2 [12]) le premier coefficient a_0 du développement asymptotique. Il est tel que $\tilde{p}^* a_0 = s_0$ sur un voisinage de $\text{diag}(P)$, où \tilde{p} est la projection de $P \times P$ sur $M \times M$. On peut donc choisir le s_0 qui convient, puis par approximations successives l'ensemble des s_l et enfin le symbole s grâce au lemme de Borel. \square

2.4 Symboles des opérateurs de \mathcal{F}

Définissons le symbole total d'un opérateur de \mathcal{F} . On note $\mathcal{J} = C^\infty(M \times M)/\mathcal{I}^\infty(\text{diag } M)$ l'ensemble des développements de Taylor le long de $\text{diag}(M)$.

Définition 2.15. Le symbole $S(F_k)$ d'un opérateur $(F_k) \in \mathcal{F}$ est la série formelle de $\mathcal{J}[[\hbar]]$

$$S(F_k) = \sum \hbar^l [a_l]$$

où (F_k) et $a_l(x_g, x_d)$ vérifient les conditions du théorème 2.14.

Pour montrer que l'application $S : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}[[\hbar]]$ est bien définie et que son noyau est formé des opérateurs régularisants, il nous faut estimer la croissance des noyaux des F_k en fonction de a_k .

Lemme 2.16. Soit X une sous-variété d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^k . Soit $d \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$ une fonction strictement positive en dehors de X , s'annulant au second ordre le long de X et dont le noyau du Hessien soit $T_x X$ en tout x de X . Soit $(a(\cdot, k))$ une suite de $C^\infty(\Omega)$ admettant un développement asymptotique $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) k^{-i}$ pour la topologie C^0 . Soit N un entier positif. Les deux assertions suivantes sont alors équivalentes.

- i. $\forall K$ compact de Ω , $\exists C$ tel que $|e^{-kd(x)} a(x, k)| \leq C k^{-\frac{N}{2}}$ sur K
- ii. $a_i \in \mathcal{I}^{N-2i}(X)$, $\forall i$ tel que $N \geq 2i$

Preuve. Soit l un entier supérieur à $\frac{N}{2}$. Nous avons $|a(x, k) - \sum_{i=0}^l a_i(x) k^{-i}| \leq C_K k^{-\frac{N}{2}-1}$ sur tout compact K de Ω . Par conséquent, i . équivaut à

$$(2.16) \quad \left| e^{-kd(x)} \sum_{i=0}^l a_i(x) k^{-i} \right| \leq C_K \tau^{-\frac{N}{2}}$$

D'autre part, la condition ii . équivaut à $|a_i(x)| \leq C \delta(x)^{\frac{N}{2}-i}$ sur tout compact K de Ω . La fonction $y \rightarrow y^m e^{-y}$ est bornée sur \mathbb{R}^+ . Nous en déduisons que

$$\left| e^{-k\delta(x)} a_i(x) k^{-i} \right| \leq C a_i(x) d(x)^{-\frac{N}{2}+i} k^{-\frac{N}{2}}$$

Ceci montre que ii . implique i .. Pour montrer la réciproque, nous introduisons l'ensemble

$$D = \{x \in \Omega / d(x)^{-1} \in \mathbb{N}\}$$

Considérons un entier j compris entre 1 et $l+1$ et évaluons l'inégalité (2.16) en $x \in D$ et $k = \frac{j}{d(x)}$. Nous en déduisons que la fonction

$$b_j(x) = j^l a_0(x) d(x)^{-\frac{N}{2}} + j^{l-1} a_1(x) d(x)^{-\frac{N}{2}+1} + \dots + j^0 a_l(x) d(x)^{-\frac{N}{2}+l}$$

est bornée sur $K \cap D$ si K est un compact de Ω . Les $b_j(x)$ s'expriment en fonction des $a_j(x) d(x)^{-\frac{N}{2}+j}$ par un système d'équations linéaires du type Vandermonde, donc inversible. Il en résulte que $a_j(x) d(x)^{-\frac{N}{2}+j}$ est borné sur $K \cap D$ si K est un compact de Ω . En écrivant le développement de Taylor de a_j et d le long de X , nous en déduisons i . \square

Lemme 2.17. L'application $S : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}[[\hbar]]$ est bien définie. Elle est surjective et son noyau est composé des opérateurs régularisants.

Preuve. Soient E et F deux sections de O vérifiant (2.5). Soient $(a(\cdot, k))$ et $(b(\cdot, k))$ deux suites de $C^\infty(M \times M)$ admettant respectivement des développements asymptotiques $\sum k^{-l} a_l$ et $\sum k^{-l} b_l$. Supposons que $(E^k a(\cdot, k) - F^k b(\cdot, k))$ soient les noyaux d'une suite régularisante et montrons alors que les $a_l - b_l$ s'annulent à tout ordre le long de $\text{diag}(M)$. Ecrivons

$$E^k a(\cdot, k) - F^k b(\cdot, k) = E^k (a(\cdot, k) - b(\cdot, k)) + (E^k - F^k) b(\cdot, k)$$

Montrons que le deuxième terme de la somme est $O(k^{-\infty})$ uniformément sur tout compact. De là nous en déduisons qu'il en est de même pour le premier terme, ce qui implique le résultat compte tenu du lemme 2.16. Rappelons que E et F ont même développement de Taylor le long de la diagonale. Posons $F = e^r E$. r est une fonction qui s'annule à tout ordre le long de la diagonale.

$$\begin{aligned} |E^k - F^k| &= |1 - e^{kr}| e^{-k\delta} && \text{avec } \delta = -\ln|E| \\ &\leq |kr| e^{k|r|} e^{-k\delta} && \text{car } |e^z - 1| \leq |z| e^{|z|} \\ &\leq C_{N,K} k \delta^N e^{-\frac{k}{2}\delta} && \text{sur un compact } K \\ &\leq C'_{N,K} k^{-N+1} && \text{car } y^N e^{-Y} \text{ est borné sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

quel que soit N . Ceci montre que S est bien définie. Le caractère surjectif découle du lemme de Borel. Concernant le noyau de S , d'après le lemme 2.16, si les a_l s'annulent à tout ordre le long de $\text{diag}(M)$, alors les $E^k a(\cdot, k)$ sont à décroissance rapide pour $k \rightarrow \infty$. Et il en est de même pour les dérivés successives, autrement dit $E^k a(\cdot, k)$ est négligeable. \square

M étant compact, F_k est un opérateur borné de $L^2(M, L^k)$. \mathcal{F} est stable par adjonction et

$$S(F_k^*)(x_g, x_d) = \overline{S(F_k)}(x_d, x_g)$$

Les opérateurs de \mathcal{F} sont de classe trace et nous avons le développement asymptotique

$$S(F_k) = \sum_l \hbar^l f_l \Rightarrow \text{Tr } F_k = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \sum_l k^{-l} \int_M f_l(x, x) \mu_M(x) + O(k^{-\infty})$$

La filtration usuelle de $\mathcal{J}[[\hbar]]$ est donnée par la suite d'idéaux $(\hbar^m \mathcal{J}[[\hbar]])_m$. C'est à dire que $(F_k) \in \mathcal{F}$ est la suite des coefficients de Fourier positifs d'un opérateur intégral de Fourier de degré $-m$ si et seulement si $S(F_k) \in \hbar^m \mathcal{J}[[\hbar]]$. Dans ce cas, son symbole principal est $\hbar^{-m} S(F_k)|_{\hbar=0}$.

2.5 Calcul symbolique

Nous montrons dans ce sous-chapitre que \mathcal{F} est une algèbre et nous décrivons la composition des symboles. Pour ce faire, il nous faut introduire quelques notations. Soit (z^i) un système de coordonnées complexes définies sur un ouvert U de M . A l'aide de ces coordonnées, nous identifions le développement de Taylor des fonctions de $C^\infty(U \times U)$ le long de $\text{diag } U$ à des séries formelles en les variables $(Z_g^j, \bar{Z}_d^j)_{j=1, \dots, n}$ dont les coefficients sont des fonctions de $C^\infty(U)$, de la manière suivante.

Lemme 2.18. *L'application $\mathcal{D}_d : C^\infty(U \times U) \rightarrow C^\infty(U)[[Z_g, \bar{Z}_d]]$ définie par*

$$[\mathcal{D}_d f](x, Z_g, \bar{Z}_d) = \sum_{\alpha, \beta} f_{\alpha, \beta}(x) Z_g^\alpha \bar{Z}_d^\beta \quad \text{où } f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\alpha! \beta!} \partial_{z_g}^\alpha \partial_{z_d}^\beta f(x_g, x_d) \Big|_{x=x_g=x_d}$$

induit un isomorphisme d'algèbre de $C^\infty(U \times U)/\mathcal{I}^\infty(\text{diag } U)$ sur $C^\infty(U)[[Z_g, \bar{Z}_d]]$

Les variables α, β sont des multi-indices, la notation ∂_z^α désigne l'opérateur $\partial_{z_1}^{\alpha(1)} \dots \partial_{z_n}^{\alpha(n)}$. Nous avons choisi de noter Z_g^j et \bar{Z}_d^j les variables formelles car

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_d \partial_{z_g^j} f(x_g, x_d)](x, Z_g, \bar{Z}_d) &= \partial_{Z_g^j} [\mathcal{D}_d f](x, Z_g, \bar{Z}_d) \\ [\mathcal{D}_d \partial_{\bar{z}_d^j} f(x_g, x_d)](x, Z_g, \bar{Z}_d) &= \partial_{\bar{Z}_d^j} [\mathcal{D}_d f](x, Z_g, \bar{Z}_d) \end{aligned}$$

Nous aurons besoin aussi de manipuler des développements de Taylor de fonctions de $C^\infty(U^3)$ le long de $\text{trig}(U) = \{(x, x, x) / x \in U\}$. On utilisera les indices g, m, d pour distinguer les premier, deuxième et troisième facteurs de U^3 . Le résultat suivant est analogue au résultat précédent.

Lemme 2.19. *L'application $\mathcal{D}_t : C^\infty(U^3) \rightarrow C^\infty(U)[[Z_g, Z_m, \bar{Z}_m, \bar{Z}_d]]$ définie par*

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_t f](x, Z_g, Z_m, \bar{Z}_m, \bar{Z}_d) &= \sum_{\alpha, \gamma, \delta, \beta} f_{\alpha, \gamma, \delta, \beta}(x) Z_g^\alpha Z_m^\gamma \bar{Z}_m^\delta \bar{Z}_d^\beta \\ \text{où } f_{\alpha, \gamma, \delta, \beta}(x) &= \frac{1}{\alpha! \gamma! \delta! \beta!} \partial_{z_g}^\alpha \partial_{z_m}^\gamma \partial_{\bar{z}_m}^\delta \partial_{z_d}^\beta f(x_g, x_m, x_d) \Big|_{x=x_g=x_m=x_d} \end{aligned}$$

induit un isomorphisme d'algèbre de $C^\infty(U^3)/\mathcal{I}^\infty(\text{trig } U)$ sur $C^\infty(U)[[Z_g, Z_m, \bar{Z}_m, \bar{Z}_d]]$

Définissons la famille de fonctions $G_{ij}, G^{ij}, G_{\alpha, \beta}$ associées à la métrique kählérienne. Les G_{ij} sont données par $\omega = i \sum_{i, j} G_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$. $(G^{ij})_{i, j}$ est l'inverse de $(G_{ij})_{i, j}$. Pour définir les $G_{\alpha, \beta}$, remarquons que $d\omega = 0$ implique $\partial_{z^k} G_{ij} = \partial_{z^i} G_{kj}$ et $\partial_{z^k} G_{ij} = \partial_{z^j} G_{ik}$. Par conséquent

$$\partial_{z^{i_1}} \partial_{z^{i_2}} \dots \partial_{\bar{z}^{j_1}} \partial_{\bar{z}^{j_2}} \dots G_{i_0 j_0}$$

est symétrique en i_0, i_1, i_2, \dots et en j_0, j_1, j_2, \dots . Nous notons $G_{\alpha, \beta}$ cette fonction où α (resp. β) est le multi-indice tel que $\alpha(l)$ (resp. $\beta(l)$) est le nombre d'indices i_k (resp. j_k) égal à l .

Théorème 2.20. *\mathcal{F} est stable par composition. En passant aux symboles, cette opération induit une loi $A : \mathcal{J}[[\hbar]] \times \mathcal{J}[[\hbar]] \rightarrow \mathcal{J}[[\hbar]]$ associative et $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire. Les opérateurs A_l définis par*

$$A_l : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}, \quad A(F, G) = \sum \hbar^l A_l(F, G) \quad \forall F, G \in \mathcal{J}$$

sont donnés avec les notations introduites précédemment par

$$A_l(F, G) = [\det(G_{ij})]^{-1} \sum_{k=l}^{3l} \frac{(-1)^{l-k}}{k!(k-l)!} \left[\Delta^k (R^{k-l} H.D) \right]_{Z_m = \bar{Z}_m = 0}$$

où R , D et H sont les séries formelles de $C^\infty(U)[[Z_g, Z_m, \bar{Z}_m, \bar{Z}_d]]$ définies par

$$R = \sum_{\substack{|\alpha|>0, |\beta|>0, \\ |\alpha|+|\beta|\geq 3}} \frac{G_{\alpha,\beta}(x)}{\alpha!\beta!} Z_m^\alpha \bar{Z}_m^\beta, \quad D = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta [\det(G_{ij})](x)}{\alpha!\beta!} Z_m^\alpha \bar{Z}_m^\beta$$

$$H = [\mathcal{D}_t(f(x_g, x_m) \cdot g(x_m, x_d))](x, Z_g, Z_m, \bar{Z}_m, \bar{Z}_d)$$

et Δ est l'opérateur $\sum_{i,j} G^{ij}(x) \partial_{Z_m^i} \partial_{\bar{Z}_m^j}$ agissant sur $C^\infty(U)[[Z_g, Z_m, \bar{Z}_m, \bar{Z}_d]]$.

Remarque 2.21. Le fait que \mathcal{F} soit stable par composition pouvait se déduire du caractère idempotent de la relation canonique \mathcal{C} .

La formule de composition des symboles principaux est

$$\mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}, \quad F(x, Z_g, \bar{Z}_d), G(x, Z_g, \bar{Z}_d) \rightarrow F(x, Z_g, 0) \cdot G(x, 0, \bar{Z}_d)$$

Preuve. Nous calculons le noyau $T_k(x_g, x_d)$ au sens de Schwartz du produit de deux opérateurs de \mathcal{F} de symboles respectifs F et $G \in \mathcal{J}$. Nous allons évaluer par le lemme de la phase stationnaire

$$T_k(x_g, x_d) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{2n} \int_M E^k(x_g, x_m, x_d) F(x_g, x_m) G(x_m, x_d) \mu_M(x_m)$$

où $E(x_g, x_m, x_d) \in L_{x_g}^* \otimes L_{x_d}$ est la contraction de $E(x_g, x_m) \in L_{x_g}^* \otimes L_{x_m}$ avec $E(x_m, x_d) \in L_{x_m}^* \otimes L_{x_d}$. $|E(x_g, x_m, x_d)| < 1$ si $(x_g, x_m, x_d) \notin \text{trig}(M)$. Par conséquent, la suite $T_k(\cdot, k)$ est négligeable sur tout ouvert qui ne rencontre pas la diagonale $\{x_g = x_d\}$, et pour évaluer T_k au voisinage de (x, x) modulo une suite négligeable il suffit d'intégrer sur un voisinage de (x, x, x) . On peut donc se ramener au cas où M est un ouvert U muni de coordonnées complexes (z^i) et d'une section s de $L \rightarrow U$ de norme constante égale à 1 telle que $\nabla s = (\bar{\partial}\rho - \partial\bar{\rho}) \otimes s$ où $\rho \in C^\infty(U)$. Introduisons une fonction $\psi(x_g, x_d)$ telle que $E(x_g, x_d) = e^{i\psi(x_g, x_d)} s(x_g) \otimes s^{-1}(x_d)$ de sorte que

$$E^k(x_g, x_m, x_d) = e^{ik\phi(x_g, x_m, x_d)} s(x_g) \otimes s^{-1}(x_d) \text{ avec } \phi(x_g, x_m, x_d) = \psi(x_g, x_m) + \psi(x_m, x_d)$$

Lemme 2.22. *Le développement de Taylor de $\phi(x_g, x_m, x_d) - \psi(x_g, x_d)$ le long de $\text{trig}(U)$ est*

$$(2.17) \quad [\mathcal{D}_t\phi(x_g, x_m, x_d) - \mathcal{D}_t\psi(x_g, x_d)](x, Z_g, Z_m, \bar{Z}_m, \bar{Z}_d) = \sum_{|\alpha|>0, |\beta|>0} i \frac{G_{\alpha,\beta}(x)}{\alpha!\beta!} Z_m^\alpha \bar{Z}_m^\beta$$

Preuve. Soit $G(x) = \rho(x) + \bar{\rho}(x)$. De $\partial_{z^i} \partial_{\bar{z}^j} = G_{i,j}$, nous déduisons que

$$G_{\alpha,\beta} = \partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta G \text{ si } |\alpha|, |\beta| > 0$$

Définissons les fonctions $G_{0,\beta} = \partial_{\bar{z}}^\beta G$ et $G_{\alpha,0} = \partial_z^\alpha G$. D'après la preuve de la proposition 2.4,

$$\psi(x_g, x_m, x_d) - \psi(x_g, x_d) = i(G(x_m) - \tilde{\psi}(x_g, x_m) - \tilde{\psi}(x_m, x_d) + \tilde{\psi}(x_g, x_d))$$

où la fonction $\tilde{\psi}(x_g, x_d)$ est caractérisée modulo $\mathcal{I}^\infty(\{x_g = x_d\})$ par

$$\tilde{\psi}(x, x) = G(x), \quad \partial_{\bar{z}_g^j} \tilde{\psi}(x_g, x_d) \equiv \partial_{z_g^j} \tilde{\psi}(x_g, x_d) \equiv 0 \quad \text{mod } \mathcal{I}^\infty(\{x_g = x_d\})$$

Pour calculer les dérivées successives de $\tilde{\psi}(x_g, x_m)$ par rapport à z_g^k ou \bar{z}_d^k , on remarque que

$$(\partial_{z_g^k} \tilde{\psi})(x, x) = \partial_{z^k} G(x), \quad \partial_{\bar{z}_g^j} \partial_{z_g^k} \tilde{\psi}(x_g, x_d) \equiv \partial_{z_g^j} \partial_{z_g^k} \tilde{\psi}(x_g, x_d) \equiv 0 \quad \text{mod } \mathcal{I}^\infty(\{x_g = x_d\})$$

En réitérant ceci et en raisonnant de la même manière pour les variables \bar{z}_d^k , il vient

$$(\partial_{z_g^\alpha} \tilde{\psi})(x, x) = G_{\alpha,0}, \quad (\partial_{\bar{z}_d^\beta} \tilde{\psi})(x, x) = G_{0,\beta}$$

On en déduit que

$$[\mathcal{D}_t \tilde{\psi}(x_g, x_m)] = \sum \frac{G_{0,\beta}(x)}{\beta!} \bar{Z}_m^\beta, \quad [\mathcal{D}_t \tilde{\psi}(x_m, x_d)] = \sum \frac{G_{\alpha,0}(x)}{\alpha!} Z_m^\alpha$$

D'autre part, nous avons

$$[\mathcal{D}_t \tilde{\psi}(x_g, x_d)] = G(x), \quad [\mathcal{D}_t G(x_m)] = \sum \frac{G_{\alpha,\beta}(x)}{\alpha! \beta!} Z_m^\alpha \bar{Z}_m^\beta$$

En sommant ces séries, nous obtenons le résultat. \square

Pour appliquer le lemme de la phase stationnaire, il nous faut vérifier que $d_{x_m}^2 \phi$ est non-dégénérée en (x, x, x) . Dans la base $(\partial_{z_m^i}, \partial_{\bar{z}_m^i})$, on déduit du lemme 2.22 que $d_{x_m}^2 \phi$ s'écrit

$$(2.18) \quad \begin{pmatrix} 0 & -iG_{jk}(x) \\ -iG_{kj}(x) & 0 \end{pmatrix}$$

et le résultat suit. Déterminons l'idéal \mathcal{J} de $C^\infty(U^3)$ engendré par les fonctions $\partial_{z_m^j} \phi, \partial_{\bar{z}_m^j} \phi$.

Lemme 2.23. *Une fonction $f \in C^\infty(U^3)$ appartient à \mathcal{J} si et seulement si $[\mathcal{D}_t f]$ appartient à l'idéal engendré par Z_m^j, \bar{Z}_m^j .*

Preuve. D'après le lemme 2.22, $[\mathcal{D}_t \partial_{z_m^j} \phi]$ et $[\mathcal{D}_t \partial_{\bar{z}_m^j} \phi]$ appartiennent à l'idéal engendré par Z_m^j, \bar{Z}_m^j , il en est donc de même pour toute fonction de \mathcal{J} . Pour la réciproque, considérons l'idéal \mathcal{J}' engendré par les fonctions $u^j = z_m^j - z_g^j$ et $v^j = \bar{z}_m^j - \bar{z}_d^j$. La fonction $u^j \bar{u}^j + v^j \bar{v}^j$ s'annule le long de $\text{trig } U$ au second ordre, son hessien est non-dégénéré dans les directions transverses à $\text{trig } U$. Par conséquent, $\mathcal{I}^\infty(\text{trig } U) \subset \mathcal{J}'$. D'autre part $[\mathcal{D}_t u^j] = Z_m^j$ et $[\mathcal{D}_t v^j] = \bar{Z}_m^j$. On en déduit que

$$f \in \mathcal{J}' \Leftrightarrow [\mathcal{D}_t f] \in \langle Z_m^j, \bar{Z}_m^j \rangle$$

Du lemme 2.22, on déduit alors que les fonctions $\partial_{z_m^j} \phi, \partial_{\bar{z}_m^j} \phi$ appartiennent à \mathcal{J}' , autrement dit sont combinaisons linéaires à coefficients C^∞ des u^j, v^j . De plus cette combinaison linéaire est inversible au voisinage de $\text{trig } U$ car les coefficients le long de $\text{trig } U$ sont donnés par la matrice (2.18). Il vient alors $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ et le résultat suit. \square

Si $f \in C^\infty(U^3)$, nous notons $f^r \in C^\infty(U^2)$ une fonction telle que $f(x_g, x_m, x_d) \equiv f(x_g, x_d)$ modulo \mathcal{I} . D'après le lemme 2.23, une telle fonction existe, est unique modulo $\mathcal{I}^\infty(\text{diag } U)$ et

$$[\mathcal{D}_d f^r](x, Z_g, \bar{Z}_d) = [\mathcal{D}_t f](x, Z_g, 0, 0, \bar{Z}_d)$$

Pour appliquer le théorème 7.7.12 de [12], on utilise des coordonnées réelles x_m^j telle que x_m^j et x_m^{j+n} soient les parties réelles et imaginaires de z_m^j pour $j = 1, \dots, n$ et on se ramènera ensuite aux coordonnées complexes. Définissons $\phi_{i,j} = (\partial_{x_m^i} \partial_{x_m^j} \phi)^r$, et $\phi^{i,j}(x_g, x_d)$ l'inverse de $\phi_{i,j}(x_g, x_d)$. Nous obtenons

$$(2.19) \quad \tilde{T}_k(x_g, x_d) \sim \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n e^{ik\phi^r(x_g, x_d)} \sum_l k^{-l} H_l(x_g, x_d) + O(k^{-\infty})$$

et la suite de fonctions H_k est donnée par la formule suivante

$$H_k(x_g, x_d) = [\det(\frac{1}{i}\phi_{ij})]^{-1} \sum_{l=k}^{3k} \frac{(-1)^{l-k}}{l!(l-k)!} \left[\Delta^l \left(R^{l-k} F(x_g, x_m) G(x_m, x_d) 2^n \det[G_{ij}](x_m) \right) \right]^r$$

$$\Delta = \frac{i}{2} \sum_{i,j} \phi^{ij}(x_g, x_d) \partial_{x_m^i} \partial_{x_m^j}$$

$$iR(x_g, x_m, x_d) = \phi(x_g, x_m, x_d) - \phi^r(x_g, x_d) - \sum_{i,j} \phi_{i,j} (x_m^i - (x_m^i)^r) (x_m^j - (x_m^j)^r)$$

De (2.17), nous déduisons que $\phi(x_g, x_m, x_d) - \psi(x_g, x_d)$ appartient à \mathcal{J} , i.e. $\phi^r(x_g, x_d) = \psi(x_g, x_d)$. Donc (T_k) est un opérateur de \mathcal{F} dont le symbole est $S(T_k) = \sum_i \hbar^i [H_i]$. Notons que l'on calcule en fait seulement le développement de Taylor des H_k le long de $\text{trig}(U)$ et ceci nous donne exactement le symbole $S(T_k)$. Nous pouvons ainsi réécrire les formules précédentes à partir de séries formelles.

Comme le changement de variables $(x_m^i) \rightarrow (z_m^i, \bar{z}_m^i)$ est linéaire, nous avons

$$iR(x_g, x_m, x_d) = \phi(x_g, x_m, x_d) - \psi(x_g, x_d) - \sum_{i,j} (\partial_{z_m^i} \partial_{\bar{z}_m^j} \phi)^r (z_m^i - (z_m^i)^r) (\bar{z}_m^j - (\bar{z}_m^j)^r)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\partial_{z_m^i} \partial_{z_m^j} \phi)^r (z_m^i - (z_m^i)^r) (z_m^j - (z_m^j)^r) + (\partial_{\bar{z}_m^i} \partial_{\bar{z}_m^j} \phi)^r (\bar{z}_m^i - (\bar{z}_m^i)^r) (\bar{z}_m^j - (\bar{z}_m^j)^r)$$

$$i[\mathcal{D}_t R(x_g, x_m, x_d)] = \sum_{|\alpha|>0, |\beta|>0} i \frac{G_{\alpha,\beta}}{\alpha!\beta!} Z_m^\alpha \bar{Z}_m^\beta - \sum_{i,j} i G_{i,j} Z_m^i \bar{Z}_m^j \quad \text{d'après (2.17)}$$

$$= \sum_{\substack{|\alpha|>0, |\beta|>0, \\ |\alpha|+|\beta|\geq 3}} i \frac{G_{\alpha,\beta}}{\alpha!\beta!} Z_m^\alpha \bar{Z}_m^\beta$$

D'après (2.17), il vient que $[\mathcal{D}_d \phi_{j,k}]$ ne dépend pas de Z_g ni de \bar{Z}_d . Il s'agit d'une fonction de $C^\infty(U)$ et de plus

$$\sum_{i,j=1}^{2n} \frac{1}{i} [\mathcal{D}_d \phi_{i,j}] dx^i \otimes dx^j = \sum_{i,j=1}^n G_{ij}(x) (dz^i \otimes d\bar{z}^j + d\bar{z}^j \otimes dz^i)$$

Nous reconnaissons l'expression de la métrique riemannienne $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ en coordonnées complexes. Autrement dit, si $g = \sum_{i,j=1}^{2n} g_{i,j} dx^i \otimes dx^j$, nous avons $\frac{1}{i} [\mathcal{D}_d \phi_{i,j}] = g_{i,j}(x)$. Donc

$$\begin{aligned} \mu_M &= [\det(g_{i,j})]^{\frac{1}{2}} |dx^1 \dots dx^{2n}| = \det(G_{i,j}) |dz^1 \dots dz^n \cdot d\bar{z}^1 \dots d\bar{z}^n| \\ &\Rightarrow \mathcal{D}_d [\det(\frac{1}{i} \phi_{i,j})]^{-\frac{1}{2}} = 2^{-n} [\det(G_{i,j})]^{-1} \end{aligned}$$

Et de même,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} g^{i,j} \partial_{x^i} \otimes \partial_{x^j} &= \sum_{i,j} G^{i,j} (\partial_{z^i} \otimes \partial_{\bar{z}^j} + \partial_{\bar{z}^j} \otimes \partial_{z^i}) \\ &\Rightarrow [\mathcal{D}_t \Delta f] = G^{i,j}(x) \partial_{Z_m^i} \partial_{\bar{Z}_m^j} [\mathcal{D}_t f] \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. \square

3 Opérateurs de Toeplitz

Ce chapitre est consacré aux opérateurs de Toeplitz. Dans un premier temps, nous caractérisons le projecteur (Π_k) modulo un régularisant à partir des données géométriques. Nous donnons ensuite la preuve du théorème 2.2 et montrons que les symboles σ , covariants et contravariants induisent des star-produits équivalents de $C^\infty(M)[[\hbar]]$.

Considérons l'ensemble $\tilde{\mathcal{T}}$ composé des opérateurs (T_k) tels que

$$(T_k) \in \mathcal{F} \text{ et } \forall Z \in C^\infty(M, T^{1,0}M), \nabla_{\bar{Z}_g} \circ T_k \equiv T_k \circ \nabla_{Z_d} \equiv 0 \pmod{\mathcal{R}}$$

où \mathcal{R} désigne l'ensemble des opérateurs régularisants. $\tilde{\mathcal{T}}$ est une sous-algèbre de \mathcal{F} stable par passage à l'adjoint. Comme nous le verrons, il s'agit à peu de choses près de l'algèbre des opérateurs de Toeplitz. Si (T_k) appartient à \mathcal{F} et admet pour symbole $S(T_k) = \sum \hbar^l [f_l]$, nous avons

$$(2.20) \quad \begin{aligned} &(T_k) \in \tilde{\mathcal{T}} \\ &\Leftrightarrow \bar{Z}_g \cdot f_l(x_g, x_d) \equiv Z_d \cdot f_l(x_g, x_d) \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag } M)}, \forall l, \forall Z \in C^\infty(M, T^{1,0}M) \end{aligned}$$

Preuve. En dérivant par rapport à \bar{Z}_g le noyau de T_k , il vient que $(\nabla_{\bar{Z}} \circ T_k)$ est un opérateur de \mathcal{F} dont le symbole est $\sum \hbar^l [\bar{Z}_g \cdot f_l(x_g, x_d)]$. De plus, $(\nabla_{\bar{Z}} \circ T_k)$ est régularisant si et seulement si ce symbole s'annule. On raisonne de la même manière sur $T_k \circ \nabla_Z$. \square

On définit l'application σ comme étant la composée de S restreint à $\tilde{\mathcal{T}}$ par la restriction à la diagonale de $M \times M$ que l'on identifie à M .

$$\sigma : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]], \quad \sigma(T_k) = \sum \hbar^l f_l(x, x) \text{ si } S(T_k) = \sum \hbar^l f_l(x_g, x_d)$$

Des propriétés de S et de (2.20), l'on déduit σ est un symbole total dans le sens où elle est surjective et admet pour noyau l'idéal des opérateurs régularisants. Par conséquent,

$C^\infty(M)[[\hbar]]$ est muni d'une loi $*$ associative $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire. Notons $B_l : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ les opérateurs tels que $f * g = \sum \hbar^l B_l(f, g)$ quels que soient $f, g \in C^\infty(M)$. Il découle du théorème 2.20, que les B_l sont des opérateurs bidifférentiels et qu'ils sont donnés localement par

$$(2.21) \quad B_l(f, g) = [\det(G_{ij})]^{-1} \sum_{k=l}^{3l} \frac{(-1)^{l-k}}{k!(k-l)!} \left[\Delta^k (R^{k-l} H.D) \right]_{Z_m = \bar{Z}_m = 0}$$

où Δ , R et D sont définis comme dans l'énoncé du théorème 2.20 et

$$H = \left(\sum_{\beta} \frac{1}{\beta!} \partial_{\bar{z}}^{\beta} g(x) \bar{Z}_m^{\beta} \right) \cdot \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_z^{\alpha} f(x) Z_m^{\alpha} \right)$$

Preuve. Il suffit de calculer $[DF(x_g, x_m)]$, où $F(x, x) = f(x)$ et $F(x_g, x_d)$ est annulée à tout ordre le long de $\{x_g = x_d\}$ par \bar{Z}_g et Z_d si Z est un champ de vecteurs holomorphes. Ceci peut se faire comme dans la preuve du lemme 2.22. On procède de la même façon avec $[DG(x_m, x_d)]$. \square

Entre autres, nous avons $B_1(f, g) = f.g$. Par conséquent $*$ admet un élément unité ainsi qu'un unique idempotent qui ne soit pas nul; ils sont identiques; on note $\sum_l \hbar^l S_l$ cette série formelle ($S_0 = 1$). Si M est compact, d'après le théorème 2.9, (Π_k) appartient à \mathcal{F} , il appartient bien-sur à $\tilde{\mathcal{T}}$, son symbole $\sigma(\Pi_k)$ est idempotent, il s'agit donc de $\sum_l \hbar^l S_l$. Pour le calculer, on peut utiliser que $\sum_l \hbar^l S_l * 1 = 1$, autrement dit

$$(2.22) \quad S_0 = 1, \quad S_l = - \sum_{i=0}^{l-1} B_{l-i}(S_i, 1)$$

De (2.21), on en déduit que les S_l sont déterminées par les $G_{\alpha, \beta}$ et ceci caractérise (Π_k) à un régularisant près.

Exemple 2.24. Reprenons l'exemple 2.8 où M est le projectif complexe. Il est classique qu'une base orthonormée de \mathcal{H}_k est la famille

$$\left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{(k+n)!}{\alpha!} \right)^{\frac{1}{2}} (z^1)^{\alpha(1)} \dots (z^n)^{\alpha(n)} s^k$$

où α est un multi-indice de \mathbb{Z}^{n+1} de longueur $|\alpha| = k$. L'on en déduit que

$$\Pi_k(x_g, x_d) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \frac{(k+n)!}{k!} E^k(x_g, x_d)$$

On vérifie donc bien que $(\Pi_k) \in \tilde{\mathcal{T}}$. Son symbole est $\sigma(T_k) = 1 + \hbar \frac{n(n+1)}{2} + O(\hbar^2)$. \square

Exemple 2.25. Lorsque $M = \mathbb{C}^n$ avec les données introduites dans l'exemple 2.7, les résultats précédents ne s'appliquent plus car M n'est pas compact. Néanmoins, on peut calculer comme dans l'exemple précédent le projecteur (Π_k) à partir d'une base orthonormée de \mathcal{H}_k .

$$\Pi_k(x_g, x_d) = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^n E^k(x_g, x_d)$$

L'on constate que son noyau a bien la forme attendue et son symbole est 1 qui est dans ce cas l'élément unité de $*$. \square

Du fait que (Π_k) soit l'élément unité de $\tilde{\mathcal{T}}/\mathcal{R}$, l'on déduit que si $(T_k) \in \mathcal{F}$, alors

$$(T_k) \in \tilde{\mathcal{T}} \Leftrightarrow \Pi_k T_k \Pi_k \equiv T_k \pmod{\mathcal{R}}$$

Considérons à présent les opérateurs de Toeplitz.

Proposition 2.26. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes et définissent l'ensemble \mathcal{T} des opérateurs de Toeplitz:*

- i.* $(T_k) \in \mathcal{F}$ et $\Pi_k T_k \Pi_k = T_k$
- ii.* $\exists \sum \hbar^l f_l \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ tel que $T_k \equiv \Pi_k M_{f(\cdot, k)} \Pi_k + O(k^{-\infty})$
où $f(\cdot, k) = \sum k^{-l} f_l + O(k^\infty)$ et $\Pi_k T_k \Pi_k = T_k$

\mathcal{T} est une algèbre stable par passage à l'adjoint. L'application symbole σ restreinte à \mathcal{T} est surjective et admet pour noyau l'idéal de \mathcal{T} formé des opérateurs régularisants (T_k) tels que $\Pi_k T_k \Pi_k = T_k$. La relation qui associe les séries formelles $\sum \hbar^l f_l$ et $\sigma(T_k)$, où (T_k) et $\sum \hbar^l f_l$ vérifient *ii.*, induit une bijection $\tilde{\Psi}$ de $C^\infty(M)[[\hbar]]$. $\tilde{\Psi}$ est $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -linéaire, les opérateurs $\tilde{\Psi}_l$ tels que $\tilde{\Psi}(f) = \sum \hbar^l \tilde{\Psi}_l(f)$ quel que soit $f \in C^\infty(M)$, sont différentiels d'ordre $2l$, de plus $\tilde{\Psi}_0(f) = f$

On remarquera que $\mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{T}}$ et que tout opérateur de $\tilde{\mathcal{T}}$ est égal à un régularisant près à un opérateur de Toeplitz. Ceci démontre le théorème 2.2.

Preuve. Dans un premier temps, appelons opérateur de Toeplitz un opérateur qui vérifie *i.* Si $T_k \in \tilde{\mathcal{T}}$, alors $\Pi_k T_k \Pi_k$ est un opérateur de Toeplitz égal à T_k modulo un régularisant. Donc $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$ est surjective. *ii. \Rightarrow i.*, en effet $M_{f(\cdot, k)} \Pi_k$ est un opérateur de \mathcal{F} , il en donc de même de $\Pi_k M_{f(\cdot, k)} \Pi_k$. Le symbole $S(M_{f(\cdot, k)} \Pi_k)$ est le produit de $\sum \hbar^l f_l(x_g)$ par $S(\Pi_k)$. Par conséquent $\sigma(\Pi_k M_{f(\cdot, k)} \Pi_k) = \sum \hbar^{l+m} \tilde{\Psi}_l(f_m)$, où les $\tilde{\Psi}_l$ sont différentiels d'ordre $2l$ et $\tilde{\Psi}_0$ est l'identité. Ceci définit l'application $\tilde{\Psi}$. Elle est inversible et l'on en déduit que *i. \Rightarrow ii.* \square

Les symboles covariant $\sigma_{\text{cov}} : \mathcal{T} \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$ et contravariant $\sigma_{\text{cont}} : \mathcal{T} \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$ sont définis par

$$\sigma_{\text{cov}}(T_k) = \sigma(T_k) \left(\sum \hbar^l S_l \right)^{-1}, \quad \sigma_{\text{cont}}(T_k) = \tilde{\Psi}(\sigma(T_k))$$

Comme on les obtient à partir du symbole σ par des bijections de $C^\infty(M)[[\hbar]]$, ce sont des symboles totaux. Notons $\Psi : C^\infty(M)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$ l'application qui au symbole contravariant d'un opérateur de Toeplitz associe son symbole covariant. Elle vérifie les mêmes propriétés que $\tilde{\Psi}$.

Lorsque la métrique de M est plate, par exemple dans le cas d'un tore, on vérifie aisément à partir de la formule 2.21 que $\sigma(\Pi_k) = 1$. Les symboles σ et σ_{cov} sont donc identiques. Dans un système de coordonnées complexes (z^i) tel que $\omega = idz^j \wedge d\bar{z}^j$, $*_{\text{cov}}$ et $*_{\text{cont}}$ sont les produits

Wick et anti-Wick:

$$f *_{\text{cov}} g = \sum_k \hbar^k \sum_{|\alpha|=k} (\alpha!)^{-1} (\partial_{\bar{z}}^\alpha f) (\partial_z^\alpha g)$$

$$f *_{\text{cont}} g = \sum_k (-\hbar)^k \sum_{|\alpha|=k} (\alpha!)^{-1} (\partial_z^\alpha f) (\partial_{\bar{z}}^\alpha g)$$

De plus, l'application Ψ est donnée par la formule usuelle

$$\sigma_{\text{cov}}(L) = \sum_k \hbar^k \sum_{|\alpha|=k} (\alpha!)^{-1} \partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\alpha (\sigma_{\text{cont}}(L))$$

Décrivons le calcul symbolique modulo $O(\hbar^2)$. Pour ce faire, introduisons le bivecteur $G^{-1} \in C^\infty(M, T^{1,0}M \otimes T^{0,1}M)$ et l'opérateur $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ définis dans un système de coordonnées complexes par

$$G^{-1} = \sum_{i,j} G^{ij} \partial_{z^i} \otimes \partial_{\bar{z}^j}, \quad \Delta = G^{ij} \partial_{z^i} \partial_{\bar{z}^j}$$

2Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique riemannienne

$$g(X, Y) = \omega(X, JY)$$

G^{-1} est le tenseur de la métrique hermitienne de $\Lambda^{1,0}M$. Notons $r \in C^\infty(M)$ la courbure scalaire de la dérivation covariante canonique du fibré holomorphe hermitien $T^{1,0}M$.

Proposition 2.27. *Si f et $g \in C^\infty(M)$, nous avons*

$$f * g = f.g + \hbar \langle dg \otimes df, G^{-1} \rangle - \frac{1}{2} r.f.g + O(\hbar^2)$$

$$\Psi(f) = f + \hbar \Delta f + O(\hbar^2)$$

$$f *_{\text{cov}} g = f.g + \hbar \langle dg \otimes df, G^{-1} \rangle + O(\hbar^2)$$

$$f *_{\text{cont}} g = f.g - \hbar \langle df \otimes dg, G^{-1} \rangle + O(\hbar^2)$$

Preuve. Soit $x \in M$ et (z^i) un système de coordonnées complexes centrées en x tels que

$$G_{i,j}(x) = \delta_{i,j} \quad G_{i,\alpha}(x) = G_{\alpha,i}(x) = 0 \text{ si } |\alpha| = 2$$

Nous devons montrer que

$$(2.23) \quad B_1(f, g)|_x = \sum_i (\partial_{\bar{z}^i} f) (\partial_{z^i} g) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} G_{ij,ij} . f.g|_x$$

avec $G_{ij,kl} = G_{\alpha,\beta}$ où $\alpha = \delta_i + \delta_j$ et $\beta = \delta_k + \delta_l$. L'équation (2.21) s'écrit

$$B_1(f, g) = \Delta(F.G.D)|_{Z_m=\bar{Z}_m=0} - \frac{1}{2} \Delta^2(R.F.G.D)|_{Z_m=\bar{Z}_m=0} + \frac{1}{12} \Delta^3(R^2.F.G.D)|_{Z_m=\bar{Z}_m=0}$$

Comme R s'annule à l'ordre 4 en x , le troisième terme de la somme est nul en x . Nous avons

$$D \equiv 1 + \sum_{i,j,k} G_{ij,ik}(x) Z_m^j \bar{Z}_m^k$$

modulo les termes d'ordre supérieur où égal à 3. Ainsi, en x

$$\begin{aligned} \Delta(F.G.D)|_{Z_m=\bar{Z}_m=0} &= \left[\Delta \left(\sum_{i,j} (\partial_{\bar{z}^i} f) (\partial_{z^j} g) Z_m^j \bar{Z}_m^i + f.g \sum_{i,j,k} G_{ij,ik}(x) Z_m^j \bar{Z}_m^k \right) \right] |_{Z_m=\bar{Z}_m=0} \\ &= \sum_i (\partial_{\bar{z}^i} f) (\partial_{z^i} g) + f.g \sum_{i,j} G_{ij,ij} \end{aligned}$$

D'autre part

$$R|_x \equiv \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} G_{ij,kl}(x) Z_m^i Z_m^j \bar{Z}_m^k \bar{Z}_m^l$$

modulo les termes d'ordre supérieur à 5. Ainsi, en x

$$\begin{aligned} \Delta^2(R.F.G.D)|_{Z_m=\bar{Z}_m=0} &= \left[\Delta^2 \left(f.g \cdot \sum_{i,j,k,l} G_{ij,kl}(x) Z_m^i Z_m^j \bar{Z}_m^k \bar{Z}_m^l \right) \right] |_{Z_m=\bar{Z}_m=0} \\ &= f.g \sum_{i,j} G_{ij,ij} \end{aligned}$$

En sommant, nous obtenons (2.23). En procédant de la même façon, on calcule

$$\tilde{\Psi}(f)|_x = f + \hbar \sum_i (\partial_{\bar{z}^i} \partial_{z^i} f + \frac{1}{2} \sum_{i,j} G_{ij,ij} \cdot f.g|_x) + O(\hbar^2)$$

L'on en déduit les formules de l'énoncé. □

Corollaire 2.28. $S_1 = \frac{1}{2}r$.

Corollaire 2.29. Les lois $*$, $*_{\text{cov}}$ et $*_{\text{cont}}$ sont des star-produits.

4 Compléments sur le calcul symbolique

Nous discutons quelques propriétés des star-produits $*$, $*_{\text{cov}}$ et $*_{\text{cont}}$. On notera $V_l : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ (resp. N_l) les opérateurs bidifférentiels associés au star-produit $*_{\text{cov}}$ (resp. $*_{\text{cont}}$)

$$f *_{\text{cov}} g = \sum \hbar^l V_l(f, g), \quad f *_{\text{cont}} g = \sum \hbar^l N_l(f, g) \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

et Ψ_l (resp. Ψ_l^{-1}) les opérateurs différentiels associés à Ψ (resp. l'inverse Ψ^{-1} de Ψ)

$$\Psi(f) = \sum \hbar^l \Psi_l(f), \quad \Psi^{-1}(f) = \sum \hbar^l \Psi_l^{-1}(f) \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

Comme cela apparait sur la formule (2.21), les opérateurs B_l agissent par dérivations anti-holomorphes sur le premier facteur et holomorphes sur le second facteur. Cette propriété a été nommée séparation des variables par Karabegov (cf. [13]). Dans le cas d'un star-produit dont l'élément unité est la série formelle constante égale à 1, on dispose de la caractérisation suivante.

Lemme 2.30. Soit $P : C^\infty(M)[[\hbar]] \times C^\infty(M)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$ une loi $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire, associative, admettant 1 pour unité et telle que les opérateurs P_l , définis par

$$P(f, g) = \sum \hbar^l P_l(f, g)$$

soient bidifférentiels. Alors, les opérateurs P_l agissent par dérivations antiholomorphes sur le premier facteur et holomorphes sur le second facteur si et seulement si quels que soient $f, g \in C^\infty(M)$ et U un ouvert de M telle que f soit holomorphe sur U , $P(f, g) = fg$ et $P(g, \bar{f}) = g\bar{f}$.

En considérant la structure complexe conjuguée, on obtient une caractérisation analogue pour une déformation P de la multiplication telle que les P_l agissent par dérivations holomorphes sur le premier facteur et antiholomorphes sur le second facteur.

Preuve. Montrons la réciproque. Ecrivons localement $P_l(f, g) = \sum a_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'} (\partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta f) (\partial_{\bar{z}}^{\alpha'} \partial_z^{\beta'} g)$ et montrons que les fonctions $a_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'}$ sont nulles si $|\beta'| > 1$ ou $|\alpha| > 1$. Nous avons

$$a_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'}(x) = (\alpha! \beta! \alpha'! \beta'!)^{-1} P_l((z - z(x))^\alpha (\bar{z} - \bar{z}(x))^\beta, (z - z(x))^{\alpha'} (\bar{z} - \bar{z}(x))^{\beta'}) (x)$$

D'autre part, utilisant l'associativité et l'hypothèse il vient

$$\begin{aligned} & P((\bar{z} - \bar{z}(x))^\beta (z - z(x))^\alpha, (\bar{z} - \bar{z}(x))^{\beta'} (z - z(x))^{\alpha'}) \\ &= (z - z(x))^\alpha P((\bar{z} - \bar{z}(x))^\beta, (z - z(x))^{\alpha'}) (\bar{z} - \bar{z}(x))^{\beta'} \end{aligned}$$

et ceci s'annule en x si $|\beta'| > 1$ ou $|\alpha| > 1$. \square

Lemme 2.31. Les opérateurs V_l agissent par dérivations antiholomorphes sur le premier facteur et holomorphes sur le second facteur. Les opérateurs N_l agissent par dérivations holomorphes sur le premier facteur et antiholomorphes sur le second facteur.

Preuve. Concernant le symbole covariant, cela découle de

$$(2.24) \quad V_l(f, g) = \sum_{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = l} S_{l_1}^{-1} B_{l_2}(S_{l_3} f, S_{l_4} g)$$

où S_l^{-1} n'est pas l'inverse de S_l mais telle que $(\sum \hbar^l S_l) \cdot (\sum \hbar^l S_l^{-1}) = 1$. Pour ce qui est du symbole contravariant, montrons que si f est holomorphe sur U , alors $g *_{\text{cont}} f = g \cdot f$. En passant aux adjoints, on en déduit que $\bar{f} *_{\text{cont}} g = \bar{f} \cdot g$ et le résultat découle du lemme précédent. $(M_f \Pi_k)$ est un opérateur de \mathcal{F} et son symbole est $S(M_f \Pi_k) = f(x_g) S(\Pi_k)(x_g, x_d)$. Les coefficients de $S(M_f \Pi_k)$ vérifient les équations (2.20) au dessus de U . Donc $S(M_f \Pi_k)$ se compose sur U comme le symbole d'un opérateur de Toeplitz. Par conséquent, (Π_k) étant l'élément unité de \mathcal{T} , $S(\Pi_k M_f \Pi_k)|_U = S(M_f \Pi_k)|_U$. Il vient alors

$$\begin{aligned} S(\Pi_k M_g \Pi_k M_f \Pi_k)|_U &= S(\Pi_k M_g) * S(\Pi_k M_f \Pi_k)|_U \\ &= S(\Pi_k M_g) * S(M_f \Pi_k)|_U \\ &= S(\Pi_k M_g M_f \Pi_k)|_U \end{aligned}$$

\square

Cette propriété des symboles covariants et contravariants est complétée par la suivante.

Lemme 2.32. *Si f est holomorphe au dessus de U , alors $\Psi(f)|_U = f|_U$ et $\Psi(\bar{f})|_U = \bar{f}|_U$.*

Preuve. $\Psi(f)|_U = f|_U$ découle de $S(\Pi_k M_f \Pi_k)|_U = S(M_f \Pi_k)|_U$, ce qui a été démontré dans la preuve précédente. En passant aux adjoints, on obtient la deuxième égalité. \square

Des propriétés précédentes, on peut déduire le fait suivant: si f et g sont holomorphes sur U , alors

$$\Psi(\bar{f} \cdot g)|_U = \Psi(\bar{f} *_{\text{cont}} g)|_U = \Psi(\bar{f}) *_{\text{cov}} \Psi(g)|_U = \bar{f} *_{\text{cov}} g|_U$$

autrement dit $\Psi_l(\bar{f}g) = V_l(\bar{f}, g)$ au dessus de U . Cette équation montre que l'opérateur bidifférentiel V_l (qui agit par dérivations anti-holomorphes sur le premier argument et holomorphes sur le second) est déterminé par Ψ_l et réciproquement. Ceci peut se voir de la manière suivante :

$$(2.25) \quad \Psi_l(h)(x) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta}(x) (\partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta h) \quad \Leftrightarrow \quad V_l(f, g)(x) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta}(x) (\partial_z^\alpha g) (\partial_{\bar{z}}^\beta f)$$

où f , g et h sont quelconques et (z^i) un système de coordonnées complexes. De la même façon, on montre que si f et g sont holomorphes sur U , alors $N_l(f, \bar{g})|_U = \Psi_l^{-1}(f \cdot \bar{g})$ ce qui s'écrit en coordonnées

$$(2.26) \quad \Psi_l^{-1}(h)(x) = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha, \beta}(x) (\partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta h) \quad \Leftrightarrow \quad N_l(f, g)(x) = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha, \beta}(x) (\partial_z^\alpha f) (\partial_{\bar{z}}^\beta g)$$

où f , g et h sont quelconques.

Nous allons à présent essayer de comprendre les relations entre les différents star-produits et la métrique kählerienne. De la formule 2.21, nous déduisons que

$$B_l(f, g) = \sum_{\alpha, \beta} \tilde{B}_{\alpha, \beta}^l([\det(G_{ij})]^{-1}, G_{\alpha', \beta'}) \partial_{\bar{z}}^\beta f \cdot \partial_z^\alpha g$$

où les $\tilde{B}_{\alpha, \beta}^l$ sont des polynômes universels (i.e. qui ne dépendent pas du choix des coordonnées ni de la métrique). Définissons un poids double sur les polynômes en les variables $[\det(G_{ij})]^{-1}$, $G_{\alpha, \beta}$ qui compte les dérivées holomorphes et antiholomorphes des $G_{i, j}$. Pour les monômes élémentaires, nous posons

$$m([\det(G_{ij})]^{-1}) = (0, 0), \quad m(G_{\alpha, \beta}) = (|\alpha| - 1, |\beta| - 1)$$

Le poids d'un monôme produit de plusieurs monômes est la somme des poids de ces monômes. Enfin, nous disons d'un polynôme que son poids est (p, q) s'il est une combinaison linéaire de plusieurs monômes de poids (p, q) .

Lemme 2.33. *Le poids des $\tilde{B}_{\alpha, \beta}^l$ est $m(\tilde{B}_{\alpha, \beta}^l) = (l - |\beta|, l - |\alpha|)$*

Autrement dit, dans l'expression

$$f * g = \sum_{\alpha, \beta} \hbar^l \sum_{\alpha, \beta} \tilde{B}_{\alpha, \beta}^l ([\det(G_{ij})]^{-1}, G_{\alpha', \beta'}) \partial_{\bar{z}}^\beta f \cdot \partial_z^\alpha g$$

le nombre de dérivées holomorphes en facteur de \hbar^l est l et il en de même des dérivées antiholomorphes.

Preuve. Utilisant les notations de la formule (2.21), nous avons

$$R = \sum_{\alpha, \beta} Q_{\alpha, \beta} Z_m^\alpha \bar{Z}_m^\beta \quad \text{avec } m(Q_{\alpha, \beta}) = (|\alpha| - 1, |\beta| - 1)$$

$$D = \sum_{\alpha, \beta} Q_{\alpha, \beta} Z_m^\alpha \bar{Z}_m^\beta \quad \text{avec } m(Q_{\alpha, \beta}) = (|\alpha|, |\beta|)$$

où les $Q_{\alpha, \beta}$ sont des polynômes en les variables $[\det(G_{ij})]^{-1}$ et $G_{\alpha, \beta}$, qui varient à chaque ligne. Par conséquent,

$$R^{k-l} D = \sum_{\alpha, \beta} Q_{\alpha, \beta} Z_m^\alpha \bar{Z}_m^\beta \quad \text{avec } m(Q_{\alpha, \beta}) = (|\alpha| - (k-l), |\beta| - (k-l))$$

$$R^{k-l} DFG = \sum_{\alpha, \beta} \left(\sum_{\alpha', \beta'} Q_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'} \partial_{\bar{z}}^{\beta'} f \cdot \partial_z^{\alpha'} g \right) Z_m^\alpha \bar{Z}_m^\beta$$

avec $m(Q_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'}) = (|\alpha| - |\alpha'| - (k-l), |\beta| - |\beta'| - (k-l))$

$$\Delta^k R^{k-l} DFG = \sum_{\alpha, \beta} \left(\sum_{\alpha', \beta'} Q_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'} \partial_{\bar{z}}^{\beta'} f \cdot \partial_z^{\alpha'} g \right) Z_m^\alpha \bar{Z}_m^\beta$$

avec $m(Q_{\alpha, \beta}^{\alpha', \beta'}) = (|\alpha| - |\alpha'| + l, |\beta| - |\beta'| + l)$

$$\Delta^k R^{k-l} DFG|_{Z_m = \bar{Z}_m = 0} = \sum_{\alpha, \beta} Q_{\alpha, \beta} \partial_{\bar{z}}^\beta f \cdot \partial_z^\alpha g \quad \text{avec } m(Q_{\alpha, \beta}) = (l - |\alpha|, l - |\beta|)$$

□

Cette propriété vaut aussi pour $*_{\text{cov}}$, $*_{\text{cont}}$ et on dispose d'un résultat analogue concernant le symbole $\sigma(\Pi_k) = \sum \hbar^l S_l$ et l'application Ψ .

Lemme 2.34. *Il existe une famille de polynômes universels \tilde{S}_l (resp. $\tilde{V}_{\alpha, \beta}^l$, $\tilde{N}_{\alpha, \beta}^l$) en les variables $[\det(G_{ij})]^{-1}$ et $G_{\alpha, \beta}$ tels que si (z^i) est un système de coordonnées complexes de M*

$$S_l = \tilde{S}_l([\det(G_{ij})]^{-1}, G_{\alpha, \beta})$$

$$V_l(f, g) = \tilde{V}_{\alpha, \beta}^l([\det(G_{ij})]^{-1}, G_{\alpha', \beta'}) (\partial_{\bar{z}}^\beta f) (\partial_z^\alpha g)$$

$$N_l(f, g) = \tilde{N}_{\alpha, \beta}^l([\det(G_{ij})]^{-1}, G_{\alpha', \beta'}) (\partial_z^\alpha f) (\partial_{\bar{z}}^\beta g)$$

Le poids de ces polynômes est

$$m(\tilde{S}_l) = (l, l), \quad m(\tilde{V}_{\alpha, \beta}^l) = (l - |\alpha|, l - |\beta|), \quad m(\tilde{N}_{\alpha, \beta}^l) = (l - |\alpha|, l - |\beta|)$$

Preuve. Concernant les S_l , ceci découle de (2.22). Pour les symboles covariants, on applique (2.24). On passe au symbole contravariant en utilisant (2.26) et (2.25). □

Si $G_{ij} = \delta_{ij}$ en x , on vérifie à partir de (2.21) que

$$(2.27) \quad B_l(f, g)|_x = \frac{1}{l!} \sum_{i_1, \dots, i_l} (\partial_{z^{i_1}} \dots \partial_{z^{i_l}} f) (\partial_{z^{i_1}} \dots \partial_{z^{i_l}} g)|_x + \sum_{|\alpha|+|\beta|<2l} a_{\alpha, \beta} \partial_{\bar{z}}^\beta f \cdot \partial_z^\alpha g|_x$$

Autrement dit, au premier ordre on retrouve la formule obtenue dans le cas plat et il en est de même pour $*_{\text{cov}}$ et $*_{\text{cont}}$. On peut améliorer ceci, c'est à dire identifier les B_l , V_l et N_l modulo des opérateurs bidifférentiels d'ordre $l - 1$ sur chaque argument. Définissons

$$P_{\nabla}^k : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M, (T^{*(1,0)}M)^{\otimes k}), \quad P_{\nabla}^1 f = \bar{\partial} f, \quad P_{\nabla}^k f = \nabla^k (P_{\nabla}^{k-1} f), \quad \text{si } k \geq 2$$

où $\nabla^k : C^\infty(M, (T^{*(1,0)}M)^{\otimes(k-1)}) \rightarrow \Omega^{1,0}(M, (T^{*(1,0)}M)^{\otimes k-1}) \simeq C^\infty(M, (T^{*(1,0)}M)^{\otimes k})$ est la composante holomorphe de la dérivation covariante canonique de $(T^{*(1,0)}M)^{\otimes(k-1)}$. Nous notons $\bar{P}_{\nabla}^k : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M, (T^{*(0,1)}M)^{\otimes k})$ l'opérateur conjugué. Comme nous le verrons, $P_{\nabla}^k f$ et $\bar{P}_{\nabla}^k f$ sont des tenseurs symétriques.

Lemme 2.35. *Soit f, g des fonctions de $C^\infty(M)$. Nous avons*

$$\begin{aligned} B_l(f, g) &= \frac{1}{l!} \langle P_{\nabla}^l g \otimes \bar{P}_{\nabla}^l f, (G^{-1})^{\otimes l} \rangle + P_l(f, g) \\ V_l(f, g) &= \frac{1}{l!} \langle P_{\nabla}^l g \otimes \bar{P}_{\nabla}^l f, (G^{-1})^{\otimes l} \rangle + Q_l(f, g) \\ N_l(f, g) &= \frac{(-1)^l}{l!} \langle P_{\nabla}^l f \otimes \bar{P}_{\nabla}^l g, (G^{-1})^{\otimes l} \rangle + R_l(f, g) \end{aligned}$$

où P_l , Q_l et R_l sont des opérateurs bidifférentiels de degré au plus $l - 1$ sur chaque argument.

On remarquera que cette description est très proche de celle donnée par Vey de certains star-produits.

Preuve. Soit $x \in M$. Nous allons vérifier la première égalité en x à l'aide d'un système de coordonnées centrées en x telles que

$$(2.28) \quad G_{ij}(x) = \delta_{ij}, \quad G_{i,\alpha}(x) = G_{\alpha,i}(x) = 0 \text{ si } |\alpha| \geq 2$$

L'existence de ces coordonnées est montrée dans [10]. Dans un premier temps montrons que

$$(2.29) \quad P_{\nabla}^l g|_x = \sum_{i_1, \dots, i_l} \partial_{z^{i_1}} \dots \partial_{z^{i_l}} g|_x dz^{i_1} \otimes \dots \otimes dz^{i_l}$$

Nous en déduisons que $P_{\nabla}^l g$ est un tenseur symétrique, ainsi que

$$\langle \bar{P}_{\nabla}^l f \otimes P_{\nabla}^l g, T^{\otimes l} \rangle|_x = \sum_{i_1, \dots, i_l} (\partial_{z^{i_1}} \dots \partial_{z^{i_l}} f) (\partial_{z^{i_1}} \dots \partial_{z^{i_l}} g)|_x$$

Pour montrer (2.29), rappelons que

$$\nabla dz^i = - \sum_{k,j} \Gamma_{k,j}^i dz^k \otimes dz^j \text{ avec } \Gamma_{k,j}^i = \sum_l G^{j,l} \partial_{z^k} G_{i,l}$$

Nous en déduisons que les fonctions $a_{j_1, \dots, j_l, j}^{i_1, \dots, i_l}$ qui définissent localement ∇^k , i.e.

$$\nabla^k dz^{i_1} \otimes \dots \otimes dz^{i_l} = \sum_{j_1, \dots, j_l, j} a_{j_1, \dots, j_l, j}^{i_1, \dots, i_l} (dz^{j_1} \otimes \dots \otimes dz^{j_l}) \otimes dz^j,$$

sont des combinaisons linéaires à coefficients C^∞ des $\partial_{z^k} G_{i,l}$. Par conséquent, elles s'annulent en x ainsi que leurs dérivées successives holomorphes. Ceci implique (2.29). Pour obtenir le résultat, il suffit à présent de montrer que

$$(2.30) \quad \sum_{|\alpha'|=|\beta'|=l} \tilde{B}_{\alpha', \beta'}^l ([\det(G_{ij})]^{-1}, G_{\alpha, \beta}) \partial_{\bar{z}}^\beta f \cdot \partial_z^\alpha g \Big|_x = \frac{1}{l!} \sum_{i_1, \dots, i_l} (\partial_{\bar{z}^{i_1}} \dots \partial_{\bar{z}^{i_l}} f) (\partial_{z^{i_1}} \dots \partial_{z^{i_l}} g) \Big|_x$$

$$(2.31) \quad \tilde{B}_{\alpha', \beta'}^l ([\det(G_{ij})]^{-1}, G_{\alpha, \beta}) \Big|_x = 0 \text{ si } (|\alpha'| = l \text{ et } |\beta'| < l) \text{ ou } (|\alpha'| < l \text{ et } |\beta'| = l)$$

(2.30) se vérifie directement à partir de (2.21). En effet, la série formelle R s'annule à l'ordre 4 en x , donc $R^{k-l} D$ s'annule à l'ordre $4(k-l)$. Nous en déduisons que

$$(2.32) \quad \Delta^k R^{k-l} DFG \Big|_{Z=\bar{Z}=0} = \sum_{\alpha, \beta} Q_{\alpha, \beta}^{l, k} \partial_{\bar{z}}^\beta f \cdot \partial_z^\alpha g$$

où les $Q_{\alpha, \beta}^{l, k}$ sont nuls pour $|\alpha| + |\beta| > 4l - 2k$. Donc, dans la somme (2.21), seul le terme (2.32) tel que $k = l$ contribue à (2.30). De là, le résultat se vérifie facilement. Concernant (2.31), notons que le poids des polynômes $\tilde{B}_{\alpha', \beta'}^l$ est $(0, p)$ ou $(p, 0)$ avec $p > 0$. Ces polynômes sont des combinaisons linéaires de monômes de la forme

$$\begin{aligned} &G_{i_1, \alpha_1} G_{i_2, \alpha_2} \dots G_{i_m, \alpha_m} \\ &G_{\alpha_1, i_1} G_{\alpha_2, i_2} \dots G_{\alpha_m, i_m} \end{aligned}$$

où $|i_1| = \dots = |i_m| = 1$ et $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| = p + m$. Il résulte de (2.28) que ces monômes s'annulent en x . On raisonne de la même façon pour les symboles covariants et contravariants. \square

A propos du symbole de (Π_k) , il vérifie la propriété

$$\dim \mathcal{H}^k = \text{Trace}(\Pi_k) \sim \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \sum_l k^{-l} \int_M S_l \mu_M$$

Ainsi, $\int_M S_l \mu_M = 0$ si k est strictement supérieur à n . D'après le théorème de Riemann-Roch, $\dim \mathcal{H}^k$ se calcule aussi à partir de la classe de Chern Ω de L et de classe de Todd T de (TM, J) . Il est possible de représenter Ω et T par des formes différentielles qui sont localement des expressions polynomiales en les $G_{\alpha, \beta}$ avec $|\alpha|, |\beta| \leq 2$. On peut alors vérifier que ceci est bien en accord avec $S_0 = 1$ et $S_1 = \frac{1}{2}r$. Par contre, pour $l \geq 2$, le résultat de Zhiqin-Lu montre que les \tilde{S}_l ne vérifient pas les mêmes propriétés et il en est de même pour les $\tilde{B}_{\alpha, \beta}^l$. Par exemple, si $n = 1$ et z une coordonnée complexe centrée en x et vérifiant (2.28),

$$\begin{aligned} B_2(f, g) \Big|_x &= \frac{1}{2} (\partial_{\bar{z}}^2 f) (\partial_z^2 g) + \frac{1}{2} G_{11, 11} (\partial_{\bar{z}} f) (\partial_z g) + \frac{1}{2} G_{11, 111} f (\partial_z g) + \frac{1}{2} G_{111, 11} (\partial_{\bar{z}} f) g \\ &+ \left(\frac{1}{3} G_{111, 111} - \frac{3}{4} G_{11, 11}^2\right) f \cdot g \end{aligned}$$

Le terme en facteur de $f.g$ est $-\frac{1}{3}\Delta r|_x + \frac{1}{4}r^2|_x$, où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami de M . Nous pouvons ainsi calculer S_2

$$S_2 = -B_1\left(\frac{r}{2}, 1\right) - B_2(1, 1) = \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{3}\Delta r - \frac{1}{4}r^2 = \frac{1}{3}\Delta r$$

Cette fonction n'a aucune raison de s'annuler, par contre son intégrale sur M contre μ_M est nulle.

Expliquons à présent de quelle manière se généralise le calcul symbolique dans le cas d'un variété kählerienne quelconque. Remarquons que $*$, $*_{\text{cov}}$, $*_{\text{cont}}$ ainsi que les équivalences entre ces trois star-produits ne dépendent pas du choix du fibré préquantifiant. En effet, il en est bien ainsi pour $*$ car la formule (2.21) ne dépend que de la métrique kählerienne, il en est donc de même pour $\sum \hbar^l S_l$ ce qui définit le symbole covariant et sa composition indépendamment du choix de L . On passe alors au symbole contravariant par les formules (2.25) et (2.26) qui ne dépendent pas non plus de L . A présent, supposons que M soit bien munie d'un fibré préquantifiant (L, h, ∇) mais ne soit pas nécessairement compact. On peut toujours définir l'algèbre \mathcal{F} en imposant à ces éléments d'avoir un noyau proprement supporté ce qui évite toute complication dans les compositions. Ses propriétés symboliques sont les mêmes et on peut à nouveau introduire la sous-algèbre $\tilde{\mathcal{T}}$. La composition des symboles de cette algèbre définit alors le star-produit $*$. Et on peut de même introduire les symboles covariants et contravariants des opérateurs de $\tilde{\mathcal{T}}$. Dans le cas où l'on ne dispose pas d'un fibré préquantifiant (L, h, ∇) (i.e. lorsque les périodes de ω ne sont pas toutes entières), il n'est plus possible de construire une algèbre d'opérateurs et un calcul symbolique associé. Néanmoins, on dispose toujours des différentes formules qui définissent localement $*$, $*_{\text{cov}}$, $*_{\text{cont}}$ et les équivalences, car celles-ci ne dépendent que de la métrique kählerienne. Pour vérifier que tout ceci ne dépend pas du choix des coordonnées et définit bien des lois associatives, il suffit de travailler localement au voisinage de tout point de M . L'on se ramène alors à la situation où M est munie d'un fibré préquantifiant en introduisant pour tout x de M un voisinage U de x tel qu'il existe un fibré préquantifiant $(L \rightarrow U, \nabla, h)$.

5 Microsupport

Pour définir le microsupport, nous procédons par analogie avec la théorie des opérateurs pseudo-différentiels à petit paramètre ([9]). Nous définissons les suites de \mathcal{H}_k admissibles, négligeables en un point et leur microsupport que nous caractérisons à partir d'opérateurs de Toeplitz elliptiques. Nous en profitons pour préciser quelques estimations propres aux suites de \mathcal{H}_k et introduire les états cohérents.

Les états cohérents sont des vecteurs (e_k^u) de \mathcal{H}_k indicés par $u \in P$. Rappelons que $L^* \simeq P \times_s \mathbb{C}$, où s désigne la représentation linéaire de \mathbb{T} dans \mathbb{C} qui à $\theta \in \mathbb{T}$ associe la multiplication par $e^{-i\theta}$. Définissons le plongement $j : P \rightarrow L$ par $j(u) = [u, 1] \in P \times_s \mathbb{C}$, $\forall u \in P$. On note π la projection de P sur M . L'application qui à $s \in \mathcal{H}_k$ associe $h(s(\pi(u)), j^k(u))$ est continue sur \mathcal{H}_k . D'après le lemme de Riesz, il existe donc un unique vecteur e_k^u de \mathcal{H}_k tel que

$$(s, e_k^u) = h(s(\pi(u)), j^k(u)), \forall s \in \mathcal{H}_k$$

autrement dit, $j^k(u)$ étant de norme 1,

$$s(\pi(u)) = (s, e_k^u) j^k(u)$$

Si T_k est un opérateur de $C^\infty(M, l^{\otimes k})$ tel que $\Pi_k T_k \Pi_k = T_k$, nous avons

$$(2.33) \quad T_k e_k^u(x) = T_k(x, \pi(u)) \cdot j^k(u)$$

$$(2.34) \quad (T_k e_k^u, e_k^v) = j^{-k}(v) \cdot T_k(\pi(v), \pi(u)) \cdot j^k(u)$$

Ces propriétés classiques se vérifient en explicitant les membres de gauche et de droite dans une base orthonormée de \mathcal{H}_k . Choissant $T_k = \Pi_k$, nous en déduisons que

$$e_k^u(x) = \Pi_k(x, \pi(u)) \cdot j^k(u), \quad (e_k^u, e_k^v) = O(k^\infty) \text{ si } \pi(u) \neq \pi(v)$$

$$(e_k^u, e_k^u) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \sum_l k^{-l} S_l(\pi(u)) + O(k^{-\infty})$$

Proposition 2.36. *Soit (u_k) une suite de \mathcal{H}_k . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- i. $\exists N, \|u_k\| = O(k^N)$
- ii. $\exists N, \text{Sup}_M |u_k| = O(k^N)$
- iii. $\forall l \geq 0, \forall X_1, \dots, X_l$ champs de vecteurs de $M, \exists N, \text{Sup}_M |\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_l} u_k| = O(k^N)$

Dans ce cas, (u_k) est dite admissible.

Preuve. Il est clair que $iii \Rightarrow ii \Rightarrow i$. Pour montrer que $i \Rightarrow iii$, introduisons les familles $(e_k^{Q,u})$ qui généralisent les états cohérents. Soit Q un opérateur différentiel de $C^\infty(M, L^{\otimes k})$ égal au produit $\nabla_{X_1} \circ \dots \circ \nabla_{X_l}$ où X_1, \dots, X_l sont l champs de vecteurs. Comme \mathcal{H}_k est un sous-espace de dimension finie de $C^\infty(M, L^{\otimes k})$, l'application qui à $v \in \mathcal{H}_k$ associe $h(Q.v|_u, j(u))$ est continue. D'après le théorème de Riesz, il existe $e_k^{u,Q} \in \mathcal{H}_k$ tel que $(v, e_k^{u,Q}) = h(Q.v|_u, j(u))$ pour tout $v \in \mathcal{H}_k$. Comme pour les états cohérents, nous avons les formules

$$(2.35) \quad T_k e_k^{Q,u}(x) = \left(Q_d \cdot T_k|_{(x, \pi(u))} \right) \cdot j^k(u)$$

$$(T_k e_k^{Q,u}, e_k^{R,v}) = j(v)^{-1} \cdot \left(\bar{R}_g \otimes Q_d \cdot T_k|_{(\pi(v), \pi(u))} \right) \cdot j^k(u)$$

On en déduit que la norme des $(e_k^{Q,u})_k$ est $O(k^N)$ uniformément par rapport à $u \in P$ pour un certain N (dépendant du degré de Q). Nous concluons alors en appliquant le lemme de Cauchy-Schwarz. \square

Proposition 2.37. *Soit (u_k) une suite de sections admissibles de \mathcal{H}_k et $x \in M$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- i. $\exists V$ voisinage de $x, \int_V |u_k|^2 \mu_M = O(k^{-\infty})$
- ii. $\exists V$ voisinage de $x, \text{Sup}_V |u_k| = O(k^{-\infty})$
- iii. $\exists V$ voisinage de $x, \forall l \geq 0, \forall X_1, \dots, X_l$ champs de vecteurs de $M, \exists N, \text{Sup}_V |\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_l} u_k| = O(k^{-\infty})$

Dans ce cas, la suite (u_k) est dite négligeable en x .

Preuve. Il est clair que $iii \Rightarrow ii \Rightarrow i$. Montrons que $i \Rightarrow iii$. Choisissons un voisinage W de x tel que $\overline{W} \subset V$ et qu'il existe une section $f : W \rightarrow P$. Ecrivons pour $y \in W$,

$$|\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_i} u_k|(y) = \left| \int_M h(u_k, e_k^{f(y), Q}) \mu_M \right|$$

$|h(u_k, e_k^{f(y), Q})(x)|$ est majoré par $|u_k(x)| \cdot |e_k^{f(y), Q}(x)|$. Le premier terme de ce produit est $O(k^N)$ car u_k est k -admissible et le second est uniformément $O(k^{-\infty})$ pour $(x, y) \in V^c \times W$. Donc, l'intégrale sur le complémentaire V^c de V est $O(k^\infty)$. Pour estimer l'intégrale sur V , il suffit d'appliquer le lemme de Cauchy-schwarz et l'hypothèse i . \square

Remarque 2.38. Si (s_k) est une suite de \mathcal{H}_k , on montre de la même façon que

$$(s_k) \text{ est négligeable ssi } \|s_k\| = O(k^{-\infty})$$

Remarque 2.39. Soit (T_k) une suite d'endomorphismes de $C^\infty(M, L^{\otimes k})$ telle que $\Pi_k T_k \Pi_k = T_k$. On remarquera que les deux propositions précédentes s'appliquent à la suite des noyaux $(T_k(x_g, x_d))$. En effet, il s'agit d'une suite de sections holomorphes de $O^k \rightarrow M \times \overline{M}$ ($M \times \overline{M}$ est une variété kählerienne dont la deux forme fondamentale est $\omega_g - \omega_d$, la courbure de O^k est $\frac{k}{i}(\omega_g - \omega_d)$). On peut aussi déduire de (2.35) que

$$(T_k) \text{ est régularisante ssi } \|T_k\| = O(k^{-\infty})$$

Le microsupport d'une suite (u_k) de \mathcal{H}_k est par définition le complémentaire de l'ensemble des points en lesquels (u_k) est négligeable. C'est un fermé de M que nous notons $\text{MS}(u_k)$. On définit de la même façon le microsupport $\text{MS}(T_k) \subset M \times M$ d'une suite d'endomorphismes de $C^\infty(M, L^{\otimes k})$ telle que $\Pi_k T_k \Pi_k = T_k$ et $(T_k(x_g, x_d))$ soit admissible. Nous avons les relations usuelles

$$\begin{aligned} \text{MS}(T_k \cdot s_k) &\subset \text{MS}(T_k) \cdot \text{MS}(s_k) = \{x / \exists y \in M, y \in \text{MS}(s_k) \text{ et } (x, y) \in \text{MS}(T_k)\} \\ \text{MS}(T_k \circ T'_k) &\subset \text{MS}(T_k) \circ \text{MS}(T'_k) = \{(x, z) / \exists y \in M, (x, y) \in \text{MS}(T_k) \text{ et } (y, z) \in \text{MS}(T'_k)\} \end{aligned}$$

Les égalités de droite sont des définitions. Le microsupport d'un opérateur de Toeplitz (T_k) de symbole $\sum_l \hbar^l f_l$ est inclu dans $\text{diag}(M)$. En identifiant $\text{diag}(M)$ avec M , nous avons

$$\text{MS}(T_k) = \overline{\cup_l \text{Supp } f_l}$$

(T_k) est dit elliptique en x si $f_0(x) \neq 0$, ou de manière équivalente s'il existe un opérateur de Toeplitz S_k tel que $T_k S_k - \Pi_k$ et $S_k T_k - \Pi_k$ soient négligeables en (x, x) .

Proposition 2.40. *Soit (s_k) une suite de \mathcal{H}_k . Un point x n'appartient pas au microsupport de s_k ssi il existe un opérateur de Toeplitz (T_k) elliptique en x tel que $T_k \cdot s_k$ soit négligeable en x .*

Preuve. Si $s_k(y)$ est $O(k^{-\infty})$ sur un voisinage V de x , on construit alors un opérateur de Toeplitz (T_k) elliptique en x et dont le microsupport soit inclu dans V de sorte que $(T_k s_k)$ soit négligeable. Réciproquement supposons que $T_k \cdot s_k(y)$ soit $O(k^{-\infty})$ au voisinage de x , avec T_k elliptique en x . Quitte à multiplier T_k par S_k tel que $S_k T_k \equiv \Pi_k$ au voisinage de x , on peut

supposer que $T_k \equiv \Pi_k$ au voisinage de x . Si f est une section de P définie sur un voisinage de x , nous avons

$$(T_k s_k, e_k^{f(y)}) = (s_k, T_k^* e_k^{f(y)})$$

Le résultat est alors assuré si l'on montre que lorsque y décrit un certain voisinage de x ,

$$T_k^* e_k^{f(y)} = e_k^{f(y)} + r_k^y$$

où $\|r_k\|$ est $O(k^{-\infty})$ uniformément par rapport à y . Ceci découle de la formule suivante que l'on déduit de (2.33)

$$(2.36) \quad T_k e_k^u(x) = \frac{T_k(x, \pi(u))}{\Pi_k(x, \pi(u))} e_k^u(x)$$

□

6 Continuité et calcul fonctionnel

L'estimation de la norme L^2 d'un opérateur de Toeplitz est donnée dans [2]. Nous en rappelons la preuve qui découle immédiatement des résultats précédents. Nous donnons ensuite une caractérisation des opérateurs de Toeplitz à partir des états cohérents. Nous terminons sur le calcul fonctionnel des opérateurs de Toeplitz.

Proposition 2.41. *Soit (T_k) un opérateur de Toeplitz de symbole $\sum_l \hbar^l f_l$. Soit N le plus petit entier tel que f_N soit non-nul. Nous avons*

$$\|T_k\| \sim k^{-N} \text{Sup} |f_N|$$

Remarque 2.42. Les mêmes estimations s'appliquent aux symboles covariants et contravariants de (T_k) , car ceux-ci sont égaux à $\sigma(T_k)$ modulo $O(\hbar)$.

Preuve. A l'aide des symboles contravariants, nous montrons que

$$T_k = k^{-N} \Pi_k M_{f_N} \Pi_k + k^{-N-1} \Pi_k M_{g(\cdot, k)} \Pi_k + R_k$$

où R_k est régularisant et $(g(\cdot, k))$ est une suite de $C^\infty(M)$ uniformément $O(k^{-N-1})$. Nous en déduisons qu'il existe C tel que $\|T_k\| \leq k^{-N} \text{Sup} |f_N| + C k^{-N-1}$. Soit $u \in P$ tel que $\text{Sup} |f_N| = |f_N(\pi(u))|$. En utilisant que $\|T_k e_u^k\|^2 = (T_k^* T_k e_u^k, e_u^k)$ et (2.34), nous obtenons

$$\frac{\|T_k e_u^k\|^2}{\|e_u^k\|^2} = k^{-2N} |f_N(\pi(u))|^2 + O(k^{-2N-1})$$

Et l'on déduit de ceci que $\|T_k\| \geq k^{-N} \text{Sup} |f_N| + C' k^{-N-1}$.

□

Proposition 2.43. *Soit (T_k) une suite d'endomorphismes telle que $\Pi_k T_k \Pi_k = T_k$. Alors (T_k) est un opérateur de Toeplitz ssi il existe une suite $(f(\cdot, k))$ de $C^\infty(M \times M)$ admettant un développement asymptotique $\sum_l k^{-l} f_l$ pour la topologie C^∞ et vérifiant*

$$(2.37) \quad (T_k e_k^u)(x) = f(x, \pi(u), k) e_k^u(x) + r_k^u(x)$$

où (r_k^u) est une suite uniformément (en u) négligeable. Dans ce cas, le symbole covariant de (T_k) est $\sum_l \hbar^l f_l(x, x)$.

Ce résultat est à comparer avec la caractérisation des opérateurs \hbar -pseudo-différentiels à partir de leur action sur les fonctions oscillantes $e^{\frac{i}{\hbar} x \cdot \xi}$ (cf. [9]).

Preuve. Si (T_k) est un opérateur de Toeplitz, on démontre (2.37) à partir de (2.36) et de l'expression des noyaux de (T_k) et (Π_k) . Réciproquement, si s est une section de \mathcal{H}_k , nous avons

$$s = \int_P (s, e_k^u) e_k^u \mu_P(u)$$

où l'on intègre une fonction à valeurs dans \mathcal{H}_k . Par conséquent,

$$T_k s = \int_P (s, e_k^u) T_k e_k^u \mu_P(u)$$

En remplaçant $T_k e_k^u$ par (2.37), nous trouvons l'expression du noyau de T_k

$$T_k(x_g, x_d) = f(x_g, x_d, k) \Pi_k(x_g, x_d) + j(u)^{-k} \cdot r_k^u(x) \text{ avec } \pi(u) = x_d$$

Par conséquent, $(T_k) \in \mathcal{F}$ et par hypothèse $\Pi_k T_k \Pi_k = T_k$, autrement dit (T_k) est un opérateur de Toeplitz. \square

Pour le calcul fonctionnel, on remarquera qu'il n'y a aucune difficulté à définir $g(T_k)$ si T_k est un opérateur de Toeplitz auto-adjoint et g une fonction définie sur \mathbb{R} . En effet, les \mathcal{H}_k sont de dimension finie, si (v_k^i) est une base de vecteur propres de \mathcal{H}_k , on pose

$$g(T_k) v_k^i = g(\lambda_k^i) v_k^i \quad \text{si } T_k v_k^i = \lambda_k^i v_k^i$$

Proposition 2.44. *Soit (T_k) un opérateur de Toeplitz auto-adjoint de symbole $\sum_l \hbar^l f_l$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. $(g(T_k))$ est alors un opérateur de Toeplitz de symbole principal $g(f_0)$.*

La preuve est analogue à celle donnée dans [9] pour les opérateurs pseudo-différentiels à petit paramètre.

Preuve. D'après la proposition précédente, le spectre de T_k est inclu dans

$$[-\text{Sup } |f_0| - 1, \text{Sup } |f_0| + 1]$$

si k est suffisamment grand. Quitte à modifier g en dehors de cet intervalle, nous pouvons donc supposer que g est à support compact. Etendons g en une fonction G de $C^\infty(\mathbb{C})$ à

support compact telle que $\partial_{\bar{z}}G$ s'annule à tout ordre le long de l'axe réel. Si γ_ϵ est une famille de chemins qui convergent vers l'axe réel tout en faisant le tour du support de g , nous avons

$$g(T_k) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} G(z)(z - T_k)^{-1} dz$$

Ce qui donne en appliquant le théorème de Stokes

$$g(T_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}}G(z)(z - T_k)^{-1} |dz d\bar{z}|$$

où l'intégrale converge car $\|(z - T_k)^{-1}\| = O(|y|^{-1})$ (y désigne la partie imaginaire de z). Pour $y \neq 0$, notons $\sum_l \hbar^l h_l(z, x)$ l'inverse de $z - \sum_l \hbar^l f_l$ dans $(C^\infty(M)[[\hbar]], *)$. En utilisant que les opérateurs bidifférentiels B_l associés à $*$ sont de degré l en chaque argument, on vérifie que

$$(2.38) \quad h_l(z, x) = P_l(z, x)(z - f_0)^{-(l+1)}$$

où les P_l sont des polynômes en z à coefficients dans $C^\infty(M)$. Les fonctions $y^{-1}h_l(z, x)\partial_{\bar{z}}G(z)$ sont donc de classe C^∞ . En appliquant le lemme de Borel, on construit une suite de fonctions $H(z, x_g, x_d, k)$ admettant un développement asymptotique $\sum_l k^{-l}H_l(z, x_g, x_d)$ pour la topologie C^∞ dont les coefficients vérifient

$$\begin{aligned} H_l(z, x, x) &= y^{-1}h_l(z, x)\partial_{\bar{z}}G(z) \\ \partial_{\bar{z}_g^i}H_l &= O(|x_g - x_d|^\infty) \text{ et } \partial_{z_d^i}H_l = O(|x_g - x_d|^\infty) \end{aligned}$$

où les estimations sont uniformes par rapport à z . Introduisons alors les opérateurs de noyau $(\frac{k}{2\pi})^n E^k H(z, x_g, x_d, k)$. Nous avons

$$L_k^z \cdot (z - T_k) = y^{-1}\partial_{\bar{z}}G\Pi_k + S_k^z$$

où $\|S_k^z\| = O(k^{-\infty})$ uniformément par rapport à z . On en déduit alors que

$$\partial_{\bar{z}}G(z - T_k)^{-1} = yL_k^z - yS_k^z(z - T_k)^{-1}$$

et ensuite que $g(T_k)$ est un opérateur de Toeplitz de symbole

$$(2.39) \quad \sum_l \frac{\hbar^l}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}}G(z)h_l(z, x)|dz d\bar{z}|$$

□

Remarque 2.45. Le calcul complet du symbole $\sum_l \hbar^l G_l$ de $g(T_k)$ peut se faire de la manière suivante : écrivons le développement limité $\sum_p \frac{1}{p!} g^{(p)}(f_0(x))(y - f_0(x))^p$ de g en $f_0(x)$. Nous avons alors

$$\sum_l \hbar^l G_l|_x = \sum_p \frac{1}{p!} g^{(p)}(f_0(x)) \left(\sum \hbar^l f_l(y) - f_0(x) \right)^{*p}|_{y=x}$$

où $*p$ désigne la puissance p -ième de $*$. En effet, on vérifie que cette formule converge. Supposons ensuite que g s'annule à l'ordre $q + 1$ en $f_0(x)$, on déduit alors de (2.38) et (2.39) que $G_0(x) = \dots = G_q(x) = 0$. Nous pouvons donc remplacer g par son développement limité.

7 Sections piquées

Les sections piquées sont des suites de \mathcal{H}_k dont le microsupport est réduit à un point. Nous les définissons directement à partir de la section E . Rappelons que j désigne le plongement $P \rightarrow L$ défini au début du chapitre 5 et π la projection de P sur M . Soit une section E de O vérifiant les hypothèses de la proposition 2.4 et u un point de P . Définissons la section E_u de L par

$$E_u(x) = E(x, \pi(u)) \cdot j(u)$$

(le point \cdot désigne la contraction de $E(x, \pi(u)) \in L_x \otimes L_{\pi(u)}^*$ avec $j(u) \in L_{\pi(u)}$). On déduit des propriétés de E que

$$(2.40) \quad E_u(\pi(u)) = j(u)$$

$$(2.41) \quad \nabla_{\bar{Z}} E_u \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\{\pi(u)\})}, \quad \forall Z \text{ champ de vecteurs holomorphes}$$

$$(2.42) \quad \ln |E_u| \text{ s'annule en } \pi(u) \text{ ainsi que ses dérivées et son Hessien en } \pi(u) \text{ est défini négatif}$$

$$(2.43) \quad |E_u|(x) < 1 \text{ si } x \neq \pi(u)$$

De plus, E étant unique modulo $\mathcal{I}^\infty(\text{diag } M)$, le développement de Taylor de E_u en $\pi(u)$ est imposé. Hormis cette condition ainsi que (2.43), la section E_u est quelconque. Précisons que nous avons aussi

$$\partial_z^\alpha h(E_u, E_u)|_{\pi(u)} = 0, \quad \forall \alpha$$

où (z^i) est un système de coordonnées complexes. Ceci associé à (2.40) et (2.41) caractérise le développement de Taylor de E_u en $\pi(u)$. C'est sous cette forme qu'une telle section est introduite dans [10], [15], [17] et [21].

Nous notons \mathcal{K}_x la sous-algèbre de $C^\infty(M)/\mathcal{I}^\infty(\{x\})$ composée des développements de Taylor des fonctions $f \in C^\infty(M)$ vérifiant

$$\bar{Z} \cdot f \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\{x\})}, \quad \forall Z \text{ champ de vecteurs holomorphes}$$

La proposition suivante définit les sections piquées.

Proposition 2.46. *Etant donné une suite (a_k) de $\mathcal{K}_{\pi(u)}$, il existe une suite (s_k) de \mathcal{H}_k telle que*

$$s_k(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} E_u^k(x) a(x, k) + t_k(x)$$

où la suite $(a(\cdot, k))$ de $C^\infty(M)$ admet un développement asymptotique $\sum_l k^l b_l(x)$ tel que $[b_l] = a_l$ et t_k est une suite de sections négligeable. Une telle suite est unique modulo une suite de \mathcal{H}_k négligeable.

Preuve. En utilisant diverses versions du lemme de Borel, nous construisons une suite $(a(\cdot, k))$ de $C^\infty(M)$ admettant le développement asymptotique souhaité. Nous montrerons plus loin (cf. remarque 2.50) que $\Pi_k E_u^k(x)a(x, k) - E_u^k(x)a(x, k)$ est négligeable. Donc la suite $s_k = \Pi_k E_u^k(x)a(x, k)$ convient. L'unicité découle du lemme 2.16 et de (2.42). \square

Notons \mathcal{S}_u l'ensemble des suites (s_k) définies dans la proposition 2.46 et définissons l'application symbole $\sigma : \mathcal{S}_u \rightarrow \mathcal{K}_{\pi(u)}[[\hbar]]$ par

$$\sigma(s_k) = \sum_l \hbar^l a_l$$

A l'aide de (2.42) et du lemme 2.16, on vérifie que cette application est bien définie et que son noyau est composé des suites de \mathcal{H}_k qui sont négligeables. De plus,

$$(2.44) \quad |s_k| = O(k^{\frac{n-N}{2}}) \text{ ssi } (a_l \in \mathcal{I}^{N-2l} \text{ si } 2l \leq N)$$

Exemple 2.47. Si (T_k) est un opérateur de Toeplitz et $u \in P$, alors la suite (s_k)

$$s_k(x) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{n}{2}} T_k(x, \pi(u)) \cdot j^k(u)$$

est une section piquée de \mathcal{S}_u . Appliquant ceci à (Π_k) , nous en déduisons que les états cohérents $((\frac{2\pi}{k})^{\frac{n}{2}} e_k^u)$ sont des sections piquées. Pour décrire leur symbole, considérons la projection p_x de $C^\infty(M)/\mathcal{I}^\infty(\{x\})$ sur \mathcal{K}_x définie par

$$\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} z^\alpha \bar{z}^\beta \rightarrow \sum_{\alpha} a_{\alpha, 0} z^\alpha$$

où (z^i) est un système de coordonnées complexes centrées en x . p_x ne dépend pas du choix de coordonnées. Si $\sigma(T_k) = \sum \hbar^l f_l$, alors le symbole de la section piquée s_k définie ci-dessus est $\sum \hbar^l p_{\pi(u)} f_l$. Entre autres, le symbole de $((\frac{2\pi}{k})^{\frac{n}{2}} e_k^u)$ est $\sum \hbar^l p_{\pi(u)} S_l$

Calculons à présent le produit scalaire des sections piquées. Rappelons que (B_l) est la famille d'opérateurs bidifférentiels associés au star produit $*$.

Proposition 2.48. Soient $(s_k) \in \mathcal{S}_u$ et $(t_k) \in \mathcal{S}_v$. Alors si $\pi(u) \neq \pi(v)$,

$$(s_k, t_k) = O(k^{-\infty})$$

Si $u = v$, nous avons le développement asymptotique

$$(s_k, t_k) = \sum_l k^{-l} \sum_{l_1+l_2+l_3=l} B_{l_1}(\bar{b}_{l_3}, a_{l_3})|_{\pi(u)}$$

où $\sum_l \hbar^l [a_l]$ et $\sum_l \hbar^l [b_l]$ sont les symboles de s et s' .

Compte tenu de l'expression du terme principal des B_l (2.27), nous avons

$$(2.45) \quad \|s_l\| = O(k^{-\frac{N}{2}}) \text{ ssi } (a_l \in \mathcal{I}^{N-2l} \text{ lorsque } 2l \leq N)$$

Au vu de cette estimation et de (2.44), il est naturel d'introduire la filtration $(\mathcal{S}_u^N)_N$ de \mathcal{S}_u , où \mathcal{S}_u^N est par définition l'ensemble des sections de \mathcal{S}_u dont la norme est $O(k^{-N})$. Le symbole principal de $(s_k) \in \mathcal{S}_u^N$ est la somme finie $\sum_{0 \leq 2l \leq N} \hbar^l A_l$ avec

$$A_l = [a_l] \in \mathcal{I}^{N-2l}(\{\pi(u)\}) / \mathcal{I}^{N-2l+1}(\{\pi(u)\}) \simeq S^{N-2l+1}(T_{\pi(u)}^{*1,0}M)$$

Nous avons alors

$$\|s_l\|^2 \sim k^{-N} \sum_{0 \leq 2l \leq N} |A_l|^2$$

où $|A_l|$ désigne la norme usuelle de $A_l \in S^{N-2l+1}(T_{\pi(u)}^{*1,0}M)$.

Preuve. Soient $(s_k) \in \mathcal{S}_u$ et $(t_k) \in \mathcal{S}_v$ de symboles respectifs $a \in \mathcal{K}_{\pi(u)}$ et $b \in \mathcal{K}_{\pi(v)}$.

$$(s_k, t_k) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \int_M h^k(E_u(x), E_v(x)) a_k(x) \bar{b}_k(x) \mu_M(x)$$

Si $\pi(u) \neq \pi(v)$, alors $h(E_u(x), E_v(x)) < 1$ quel que soit x . On en déduit que $(s_k, t_k) = O(k^{-\infty})$. Si $u = v$, alors $h(E_u(x), E_v(x)) < 1$ pour $x \neq \pi(u)$. Quitte à négliger une quantité $O(k^{-\infty})$, il suffit donc d'intégrer au voisinage de $\pi(u)$. Introduisons des coordonnées complexes (z^i) centrées en $\pi(u)$

$$(s_k, t_k) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \int_U e^{ik\phi(x)} A(x) \bar{B}(x) \det(G_{ij})(x) |dz^i d\bar{z}^i| + O(k^{-\infty})$$

avec $[A] = a$, $[B] = b$ et $\phi(x) = \psi(0, x) + \psi(x, 0)$, où ψ est une fonction définie comme dans la preuve du théorème 2.20. Le calcul se fait sur les développements de Taylor en 0. Nous avons

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{|\alpha| > 0, |\beta| > 0} i \frac{G_{\alpha, \beta}(0)}{\alpha! \beta!} z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|x|^\infty) \\ A(x) &= \sum_{\alpha} \frac{\partial_z^\alpha A(x)}{\alpha!} z^\alpha + O(|x|^\infty) \text{ et } \bar{B}(x) = \sum_{\beta} \frac{\partial_{\bar{z}}^\beta \bar{B}(x)}{\alpha!} \bar{z}^\beta + O(|x|^\infty) \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de la phase stationnaire, on montre alors le résultat. Le calcul est similaire à celui de la preuve du théorème 2.20. \square

Proposition 2.49. Soit $(T_k) \in \mathcal{T}$ et $(s_k) \in \mathcal{S}_u$. Alors $(T_k s_k)$ est une section piquée de \mathcal{S}_u de symbole

$$\sigma(T_k s_k) = \sum_l \hbar^l \sum_{l_1 + l_2 + l_3 = l} \sum_{\alpha, \beta} p_{\pi(x)}(B_{l_1}(f_{l_2}, a_{l_3}))$$

où $\sum_l \hbar^l f_l$ et $\sum_l [a_l]$ sont les symboles de (T_k) et (s_k) .

Preuve. Nous devons calculer

$$T_k s_k(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}n} \int_M E^k(x, y) E_u^k(y) F(x, y) A(y) \mu_M(y)$$

avec $[A] = a$ et F telle que

$$F(x, x) = f(x), \quad Z_g.F \equiv \bar{Z}_d F \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag } M)}$$

quel que soit Z champ de vecteurs holomorphes. Nous pouvons appliquer comme dans la preuve précédente le lemme de la phase stationnaire, mais on peut aussi se ramener au produit de deux opérateurs de Toeplitz de la manière suivante : introduisons une fonction $G \in C^\infty(M \times M)$ telle que

$$G(x, x) = A(x), \quad Z_g.G \equiv \bar{Z}_d G \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag } M)}$$

Notons $x_0 = \pi(u)$, nous avons alors

$$s_k(x) \equiv \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} E^k(x, x_0) G(x, x_0)$$

modulo une suite de sections négligeable. Par conséquent,

$$\begin{aligned} T_k s_k(x) &\equiv \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}n} \int_M E^k(x, y) E^k(y, x_0) F(x, y) G(y, x_0) \mu_M(y) \\ &\equiv \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} T'_k(x, x_0) \end{aligned}$$

où $T'_k(x_g, x_d)$ est le noyau au sens de Schwartz du produit de T_k par un opérateur de Toeplitz de symbole A . Ceci montre le résultat. \square

Remarque 2.50. La preuve n'utilise pas le fait que $s_k \in \mathcal{H}_k$. Par conséquent, si (s_k) est par définition égale à $E_u^k a$, on en déduit que $\Pi_k s_k \equiv s_k$ modulo une suite de sections négligeable, en utilisant que (Π_k) est l'élément unité de \mathcal{T} . Ceci complète la preuve de la proposition 2.46.

Bibliography

- [1] F. A. Berezin. General concept of quantization. *Comm. Math. Phys.*, 40:153–174, 1975.
- [2] M. Bordemann, E. Meinrenken, and M. Schlichenmaier. Toeplitz quantization of Kähler manifolds and $\text{gl}(N)$, $N \rightarrow \infty$ limits. *Comm. Math. Phys.*, 165(2):281–296, 1994.
- [3] L. Boutet de Monvel. Symplectic cones and Toeplitz operators. In *Multidimensional complex analysis and partial differential equations (São Carlos, 1995)*, pages 15–24. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [4] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin. *The spectral theory of Toeplitz operators*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981.
- [5] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand. Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő. pages 123–164. *Astérisque*, No. 34–35, 1976.
- [6] M. Cahen, S. Gutt, and J. Rawnsley. Quantization of Kähler manifolds. I. Geometric interpretation of Berezin's quantization. *J. Geom. Phys.*, 7(1):45–62, 1990.

- [7] M. Cahen, S. Gutt, and J. Rawnsley. Quantization of Kähler manifolds. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 337(1):73–98, 1993.
- [8] M. Cahen, S. Gutt, and J. Rawnsley. Quantization of Kähler manifolds. III. *Lett. Math. Phys.*, 30(4):291–305, 1994.
- [9] Y. Colin de Verdière. *Méthodes semi-classiques et théorie spectrale*. en préparation.
- [10] P. B. Gilkey. Curvature and the eigenvalues of the Dolbeault complex for Kaehler manifolds. *Advances in Math.*, 11:311–325, 1973.
- [11] V. Guillemin. Star products on compact pre-quantizable symplectic manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 35(1):85–89, 1995.
- [12] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. IV*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Fourier integral operators, Corrected reprint of the 1985 original.
- [13] A. V. Karabegov. Deformation quantizations with separation of variables on a Kähler manifold. *Comm. Math. Phys.*, 180(3):745–755, 1996.
- [14] B. Kostant. Quantization and unitary representations. I. Prequantization. pages 87–208. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 170, 1970.
- [15] Z. Lu. On the lower order terms of the asymptotic expansion of Tian-Yau-Zelditch. *Amer. J. Math.*, 122(2):235–273, 2000.
- [16] A. Melin and J. Sjöstrand. Fourier integral operators with complex-valued phase functions. pages 120–223. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 459, 1975.
- [17] W. Ruan. Canonical coordinates and Bergmann metrics. *Comm. Anal. Geom.*, 6(3):589–631, 1998.
- [18] M. A. Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the Russian by Stig I. Andersson.
- [19] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod, Paris, 1970. Maîtrise de mathématiques.
- [20] E. M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.
- [21] G. Tian. On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds. *J. Differential Geom.*, 32(1):99–130, 1990.
- [22] S. Zelditch. Szegő kernels and a theorem of Tian. *Internat. Math. Res. Notices*, 1998(6):317–331.

Chapter 3

Quantification des sous-variétés lagrangiennes des variétés kähleriennes

Soit (M, ω) une variété symplectique compacte munie d'un fibré préquantifiant $L \rightarrow M$, autrement dit L est un fibré en droite hermitien muni d'une dérivation covariante de courbure $\frac{1}{\hbar}\omega$. Afin de quantifier (M, ω) , nous supposons qu'il existe une structure complexe intégrable J compatible avec ω (i.e. $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$) et strictement positive (i.e. $\omega(X, JX) > 0$ si $X \neq 0$). Pour $k \geq 0$, nous définissons les espaces quantiques \mathcal{H}_k comme étant l'ensemble des sections holomorphes de $L^k \rightarrow M$. Nous nous intéressons à la limite $k \rightarrow \infty$ dite semi-classique. Les observables semi-classiques sont les opérateurs de Toeplitz que nous avons étudiés dans le chapitre précédent. Dans la théorie semi-classique usuelle, l'espace des phases est un cotangent et les observables semi-classiques sont les opérateurs pseudo-différentiels à petit paramètre. Leur noyau est de la forme

$$(3.1) \quad (2\pi\hbar)^{-n} \int e^{i\hbar^{-1}(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi, \hbar) |d\xi|$$

Notre principal résultat dans le deuxième chapitre était d'exprimer le noyau d'un opérateur de Toeplitz sous une forme similaire

$$(3.2) \quad T_k(x_g, x_d) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n E^k(x_g, x_d) a(x_g, x_d, k) + O(k^{-\infty})$$

où E est une section de $L \boxtimes L^{-1} \rightarrow M \times M$ et $a(\cdot, k)$ une suite de $C^\infty(M \times M)$ qui correspondent respectivement à $e^{i(x-y)\cdot\xi}$ et $a(x, \xi, \hbar)$.

L'expression (3.1) se généralise en un intégrale oscillante et permet de la sorte de définir les fonctions lagrangiennes et les opérateurs intégraux de Fourier à petit paramètre. Nous renvoyons à [6] pour l'exposé de cette théorie. L'idée suivie dans cet article est de généraliser l'expression (3.2) afin de définir les sections lagrangiennes et d'utiliser ces objets dans diverses situations. Précisément, si Λ est une sous-variété lagrangienne fermée de M telle que le fibré

plat $(L|_{\Lambda}, \nabla)$ soit trivial, une section lagrangienne associée à Λ et J est une suite (u_k) de \mathcal{H}_k de la forme

$$u_k(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^m F^k(x) a(x, k) + O(k^{-\infty})$$

où m est une constante, le $O(k^{-\infty})$ désigne une suite négligeable de $C^\infty(M, L^k)$ et

- F est une section de $L \rightarrow M$ telle que la restriction de F à Λ soit plate de norme constante égale à 1, $\nabla_{X-iJX}F$ s'annule à tout ordre le long de Λ pour tout champ de vecteurs X et $|F|(x) < 1$ si $x \notin \Lambda$.
- $(a(\cdot, k))$ est une suite de $C^\infty(M)$ qui admet un développement asymptotique $\sum_l k^{-l} a_l(x)$ pour la topologie C^∞

Le symbole de (u_k) est la série formelle $\sum_l \hbar^l b_l$ de $C^\infty(\Lambda)[[\hbar]]$, où les b_l sont les restrictions à Λ des fonctions a_l . Il s'agit d'un symbole total dans le sens qu'il s'annule si et seulement si (u_k) est $O(k^{-\infty})$. Le symbole principal est la fonction b_0 .

La première application que nous proposons est la construction de vecteurs propres approchés de n opérateurs de Toeplitz (T_k^i) qui commutent deux à deux. Ces vecteurs propres sont les analogues des fonctions BKW dans le cas d'un espace des phases du type cotangent. Sous les hypothèses usuelles de régularité des symboles principaux de (T_k^i) , ceci nous permet de décrire le spectre conjoint de (T_k^i) modulo $O(k^{-\infty})$ et d'énoncer les conditions de Bohr-Sommerfeld. Par exemple en dimension 2 ($n = 1$), les valeurs propres d'un opérateur de Toeplitz (T_k) sont contrôlées au voisinage d'une valeur régulière du symbole principal f_0 par l'holonomie de L le long des fibres de $\Lambda_E = \{f_0 = E\}$ à un $O(k^{-1})$ près. À l'ordre suivant apparaissent les intégrales d'un sous-symbole de (T_k) et de la courbure géodésique le long de Λ_E .

Nous utilisons aussi les sections lagrangiennes pour quantifier les symplectomorphismes de M , c'est à dire que nous considérons des suites d'opérateurs $U_k : C^\infty(M, L^k) \rightarrow C^\infty(M, L^k)$ dont les noyaux sont des sections lagrangiennes de $L \boxtimes L^{-1} \rightarrow M \times M$ associées au graphe d'un symplectomorphisme et à la structure complexe $(J \times -J)$ de $M \times M$. Choissant pour le symplectomorphisme l'application identité, on retrouve les opérateurs de Toeplitz. Nous montrons que les quantum map introduites par Zelditch sont des opérateurs de ce type et qu'il en est de même du propagateur $\exp(itkT_k)$ d'un opérateur de Toeplitz (T_k) . Dans le second cas, le symplectomorphisme associé est le flot à l'instant t du champ de vecteurs hamiltonien du symbole principal de (T_k) .

Selon une ancienne idée, la quantification \mathcal{H}_k d'une variété symplectique ne dépend pas du choix de la polarisation qui dans notre contexte est déterminée par la structure complexe J . Pour faire le lien entre deux quantifications \mathcal{H}_k et \mathcal{H}'_k définies par deux structures complexes J et J' , nous utilisons une suite d'opérateurs $U_k : C^\infty(M, L^k) \rightarrow C^\infty(M, L^k)$ dont la suite des noyaux est une section lagrangienne de $L \boxtimes L^{-1} \rightarrow M \times M$ associée à la diagonale de $M \times M$ et à la structure complexe $(J \times -J')$ de $M \times M$. Nous obtenons de la sorte une suite d'applications $\mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}'_k$, unitaires lorsque k est suffisamment grand, qui transforme

une section lagrangienne de \mathcal{H}_k en une section lagrangienne de \mathcal{H}'_k et par entrelacement un symplectomorphisme quantifié de \mathcal{H}_k en un symplectomorphisme quantifié de \mathcal{H}'_k .

Une construction voisine de la dernière est la réalisation d'équivalence microlocale entre les quantifications de deux variétés symplectiques de même dimension, ce qui donne une version semi-classique du lemme de Darboux. L'intérêt de ce type d'équivalence est de se ramener à des formes normales comme on peut le faire dans diverses situations lorsque l'espace des phases est un cotangent.

Pour obtenir ces résultats, il est nécessaire de décrire la composition des différents opérateurs introduits ci-dessus et leur action sur les sections lagrangiennes. A partir de là, les preuves classiques de l'analyse microlocales s'adaptent sans difficulté. Concernant les données symplectiques, on retrouve les règles habituelles: si (T_k) et (S_k) sont opérateurs définis comme ci-dessus et associés aux symplectomorphismes φ^T et φ^S , alors $(T_k \circ S_k)$ est un opérateur du même type associé au symplectomorphisme $\varphi^T \circ \varphi^S$; si de plus (u_k) est une section lagrangienne associée à Λ , alors $(T_k u_k)$ est une section lagrangienne associée à $\varphi^T(\Lambda)$. Pour ce qui est des structures complexes, l'opérateur $(T_k \circ S_k)$ est associé à $(J_T \times -J'_S)$ si (T_k) et (S_k) sont associés à $(J_T \times -J'_T)$ et $(J_S \times -J'_S)$; $(T_k u_k)$ est associé à J_T . Il résulte de ceci des lois $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaires sur les différents espaces de symboles, qui en théorie peuvent se décrire complètement à partir des données géométriques. Cependant, en pratique les calculs sont si compliqués que nous nous contentons de donner leur forme générale qui rappelle essentiellement les star-produits et nous explicitons à l'aide des données géométriques la composition des symboles principaux. Nous traitons aussi la composition des symboles sous-principaux lorsqu'elle est nécessaire : c'est le cas dans la construction des quasi-modes et dans la description du propagateur semi-classique où le calcul sous-symbolique contrôle les équations de transport.

Des sections lagrangiennes ont déjà été introduites dans le même contexte par Borthwick, Paul et Uribe ([3]). Bien que notre définition soit différente, il s'agit en fait des mêmes objets. L'approche suivie par ces auteurs consiste à se ramener à la théorie homogène des opérateurs de Toeplitz de Boutet de Monvel et Guillemin ([5]), en identifiant les sections de L^k à des fonctions définies sur le fibré principal $P \rightarrow M$ de groupe de structure \mathbb{T} associé à L . Les sections lagrangiennes s'obtiennent en projetant sur $\bigoplus \mathcal{H}_k$ des distributions lagrangiennes définies sur P . Les quantum map de Zelditch ([11]) sont définies de manière analogue à partir d'opérateurs intégraux de Fourier qui agissent sur $C^\infty(P)$. Ces différents objets sont alors considérés comme des distributions de Hermite, ce qui permet de comprendre comment ils se composent et de définir leur symbole principal. L'avantage de notre définition est qu'elle est directe et donne une description modulo $O(k^{-\infty})$ des sections lagrangiennes, les compositions et le calcul symbolique s'obtiennent par application du lemme de la phase stationnaire et ne nécessite pas d'autres connaissances. Ces simplifications rendent la théorie plus souple et permettent d'envisager un nombre important d'applications. De plus le contrôle des symboles sous-principaux nécessaire dans certains cas présente des difficultés dans l'approche suivie par ces auteurs. Mentionnons qu'une grande partie de l'article [3] est consacrée aux sections lagrangiennes des surfaces de Riemann de genre ≥ 2 . Dans l'article [11], la quantification de symplectomorphismes du tore illustre les résultats sur les quantum map. D'autre part, une formule de trace pour les opérateurs de Toeplitz est démontrée dans [4]. Nous pensons qu'il est possible de déduire de notre description des propagateurs semi-classiques, ce qui permettrait d'interpréter géométriquement les principaux termes.

1 Préliminaire

Nous indiquons dans un premier temps des notations générales et conventions. Nous rapellons ensuite brièvement les résultats du deuxième chapitre sur les opérateurs de Toeplitz dont nous avons besoin et définissons un nouveau symbole total que nous appelons symbole de type Weyl car ses propriétés rappellent celles du symbole Weyl d'un opérateur pseudodifférentiel à petit paramètre. Pour finir, nous énonçons quelques lemmes techniques que nous utiliserons pour appliquer le lemme de la phase stationnaire.

1.1 Notations

Soit (M, ω) une variété symplectique munie d'une structure complexe $J \in C^\infty(M, T^*M \otimes TM)$ intégrable, compatible avec ω et strictement positive. Autrement dit M est une variété kählerienne dont la deux forme fondamentale est ω . On note g la métrique riemannienne associée donnée par $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ et μ_M la mesure induite par g (μ_M est aussi la mesure de Liouville $\frac{1}{n!}|\omega^n|$). Soit un fibré préquantifiant $(L \rightarrow M, \nabla)$. On note $|u|$ la norme de $u \in L_x$. Le produit scalaire (u, v) de $u, v \in C^\infty(M, L)$ est défini de la manière usuelle avec l'élément de volume μ_M . On note $L \boxtimes L^{-1} \rightarrow M^2$ le fibré $\pi_g^\# L \otimes \pi_d^\# L^{-1} \rightarrow M \times M$, où π_g et π_d sont les projections $M^2 \rightarrow M$ sur le premier et second facteur respectivement. Notons que $L \boxtimes L^{-1}$ muni de la dérivation covariante induite par ∇ est un fibré préquantifiant, où la base M^2 est munie de la deux-forme symplectique $\pi_g^* \omega - \pi_d^* \omega$. Utilisant μ_M on identifie le noyau au sens de Schwartz d'un opérateur $C^\infty(M, L) \rightarrow C^\infty(M, L)$ à une section de $L \boxtimes L^{-1} \rightarrow M^2$. On utilise les mêmes notations et conventions pour les données induites sur les L^k .

Une suite $(u_k \in C^\infty(M, L^k))$ est dite négligeable si quels que soient l, N des entiers positifs, X_1, \dots, X_l des champs de vecteurs de M et K un compact de M il existe C tel que

$$|\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_l} s_k(x)| \leq C k^{-N} \text{ sur } K$$

Nous utiliserons la notation $O(k^{-\infty})$ pour désigner une suite négligeable quelconque. Si (R_k) est une suite d'opérateurs agissant sur $C^\infty(M, L^{\otimes k})$, nous disons qu'elle est régularisante si la suite de ses noyaux est négligeable. L'espace des symboles $S^0(M)$ est l'ensemble des suites $(f(\cdot, k))$ à valeurs dans $C^\infty(M)$ et qui admettent un développement asymptotique

$$f(\cdot, k) = \sum_{l=0}^{\infty} k^{-l} f_l + O(k^{-\infty})$$

pour la topologie C^∞ . Rappelons que par le procédé de Borel, on montre qu'étant donnée une série formelle $\sum \hbar^l f_l$ de $C^\infty(M)[[\hbar]]$, il existe un symbole de $S^0(M)$ unique modulo $O(k^{-\infty})$ qui admette le développement $\sum k^{-l} f_l$.

Si (S_k) est une suite de parties de \mathbb{R}^n et $(k_\alpha, E_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^n$, la notation $E_\alpha \in S_k + O(k_\alpha^{-\infty})$ signifie que pour tout N , il existe C tel que

$$\inf_{E \in S_k} |E - E_\alpha| \leq C k_\alpha^{-N}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}$$

1.2 Opérateurs de Toeplitz

Les opérateurs de Toeplitz de \mathcal{H} sont des suites d'opérateurs (T_k) agissant sur $C^\infty(M, L^k)$ de la forme suivante

$$(3.3) \quad T_k = \Pi_k M_{f(\cdot, k)} \Pi_k + R_k \quad \text{avec } f(x, k) = \sum_l k^{-l} f_l(x) + O(k^{-\infty})$$

où le développement asymptotique de la suite $(f(\cdot, k))$ de $C^\infty(M)$ vaut pour la topologie C^∞ , M_g désigne la multiplication par $g \in C^\infty(M)$ et (R_k) est régularisant et vérifie $\Pi_k R_k \Pi_k = R_k$. L'ensemble \mathcal{T} des opérateurs de Toeplitz est une algèbre dont l'unité est (Π_k) . La relation qui associe un opérateur de Toeplitz (T_k) et une série formelle $\sum_l \hbar^l f_l$ tels que (3.3) soit vérifiée induit une application

$$\sigma_{\text{cont}} : \mathcal{T} \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$$

appelée symbole contravariant. Le noyau de σ_{cont} est formé des opérateurs de Toeplitz régularisants. La loi produit induite sur $C^\infty(M)[[\hbar]]$ est un star-produit noté $*_{\text{cont}}$.

Le noyau au sens de Schwartz $T_k(x_g, x_d) \in C^\infty(M \times M, L^k \boxtimes L^{-k})$ d'un opérateur de Toeplitz (T_k) est de la forme

$$(3.4) \quad T_k(x_g, x_d) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n E^k(x_g, x_d) g(x_g, x_d, k) + R_k(x_g, x_d)$$

où (R_k) est une suite négligeable de $C^\infty(M \times M, L^k \boxtimes L^{-k})$, E est un section de $L^k \boxtimes L^{-k}$ telle que $E(x, x) = 1$, $|E(x_g, x_d)| < 1$ si $x_g \neq x_d$ et

$$\nabla_{\bar{Z}} E \equiv 0 \quad \text{mod } \mathcal{I}^\infty(\text{diag } M), \forall Z \text{ champ de vecteurs holomorphes de } M \times \bar{M}$$

et $g(\cdot, k)$ un symbole de $S^0(M \times M)$ dont les coefficients du développement asymptotique $\sum_l k^l g_l$ vérifient

$$\bar{Z}.g_l \equiv 0 \quad \text{mod } \mathcal{I}^\infty(\text{diag } M), \forall Z \text{ champ de vecteurs holomorphes de } M \times \bar{M}$$

Réciproquement, si (T_k) est une suite d'opérateurs dont le noyau s'exprime comme ci-dessus, alors $\Pi_k T_k \Pi_k - T_k$ est régularisant et $(\Pi_k T_k \Pi_k)$ est un opérateur de Toeplitz. L'application $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$ qui à (T_k) associe la série formelle $\sum_l \hbar^l f_l$ telle que

$$T_k(x, x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \sum_l k^{-l} f_l(x) + O(k^{-\infty})$$

admet pour noyau l'ensemble des opérateurs de Toeplitz régularisants. La loi produit induite sur $C^\infty(M)[[\hbar]]$ est un star-produit noté $*$. L'application symbole covariant

$$\sigma_{\text{cov}} : \mathcal{T} \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$$

est définie par $\sigma_{\text{cov}}(T_k) = \sigma(T_k)(\sigma(\Pi_k))^{-1}$ et l'on note $*_{\text{cov}}$ la loi de composition des symboles covariants.

Dans un système de coordonnées complexes (z^j) , écrivons $\omega = iG_{j,k}dz^j \wedge d\bar{z}^k$ et introduisons les fonctions $G^{j,k}$ définies par $G^{j,k}G_{l,k} = \delta_{jl}$. Si f et $g \in C^\infty(M)$, nous avons

$$f *_{\text{cov}} g = f \cdot g + \hbar G^{j,k}(\partial_{\bar{z}^k} f)(\partial_{z^j} g) + O(\hbar^2), \quad f *_{\text{cont}} g = f \cdot g - \hbar G^{j,k}(\partial_{z^j} f)(\partial_{\bar{z}^k} g) + O(\hbar^2)$$

L'application qui associe au symbole covariant d'un opérateur de Toeplitz son symbole contravariant est une équivalence de star-produit. Si $f \in C^\infty(M)$ est le symbole covariant d'un opérateur de Toeplitz (T_k) , alors

$$\sigma_{\text{cont}}(T_k) = f - \hbar (\Delta f) + O(\hbar^2), \quad \sigma(f) = f + \frac{\hbar}{2} r \cdot f + O(\hbar^2)$$

où Δ est le laplacien complexe $\Delta f = G^{j,k}(\partial_{z^j} \partial_{\bar{z}^k} f)$ et $r \in C^\infty(M)$ est la courbure scalaire de (M, g) .

Définissons le symbole de type Weyl d'un opérateur de Toeplitz (T_k) par $\sigma_w(T_k) = (\text{Id} + \frac{\hbar}{2}\Delta)\sigma_{\text{cont}}(T_k)$ et notons $*_w$ le star-produit associé. On montre alors que

$$f *_w g = f \cdot g + \frac{\hbar}{2i} \{f, g\} + O(\hbar^2)$$

$$\sigma_w(T_k) = f - \frac{\hbar}{2} \Delta f + O(\hbar^2) \text{ si } \sigma_{\text{cov}}(T_k) = f$$

Si $\sigma_w(T_k) = \sum \hbar^l f_l^w$, nous appelons f_0^w le symbole principal de T_k et f_1^w le sous-symbole. Pour finir, rappelons la formule suivante dont on trouvera une preuve dans [2]

$$(3.5) \quad \Pi_k(M_f + \frac{1}{i\hbar} \nabla_X) \Pi_k = \Pi_k(M_f + \frac{1}{\hbar} M_{\Delta f}) \Pi_k$$

si $f \in C^\infty(M)$ et X est le champ de vecteurs hamiltonien de f ($df + \iota_X \omega = 0$).

1.3 Lemmes

Soit X une variété et Y une sous-variété fermée de X de codimension k . On note $\mathcal{I}^N(Y)$ l'idéal de $C^\infty(X)$ composé des fonctions s'annulant à l'ordre N le long de Y et $\mathcal{I}^\infty(Y) = \bigcap_N \mathcal{I}^N(Y)$. Soit $\partial_1, \dots, \partial_k$ des champs de vecteurs complexes de X tels que l'on ait sur un ouvert U de X

$$[\partial_i, \partial_j] = 0 \text{ sur } U$$

$$\langle \partial_1|_x, \dots, \partial_k|_x \rangle \oplus (T_x Y \otimes \mathbb{C}) = T_x X \otimes \mathbb{C}, \quad \forall x \in U \cap Y$$

Pour résoudre certaines équations, le lemme suivant nous sera fort utile.

Lemme 3.1. *Sous les hypothèses précédentes, il existe des fonctions Z^1, \dots, Z^k de $C^\infty(U)$ telles que*

$$Z^j|_{Y \cap U} = 0, \quad \partial_i \cdot Z^j \equiv \delta_{ij} \pmod{\mathcal{I}^\infty(Y \cap U)}$$

Ces fonctions sont uniques modulo $\mathcal{I}^\infty(Y \cap U)$. Si $f \in C^\infty(U \cap Y)$, il existe $F \in C^\infty(U)$ telle que

$$F|_{Y \cap U} = f, \quad \partial_i \cdot F \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(Y \cap U)}$$

F est unique modulo $\mathcal{I}^\infty(Y \cap U)$.

Nous ne démontrons pas ce lemme, mentionnons juste qu'on peut le prouver en utilisant le calcul symbolique associé à la filtration $(\mathcal{I}^N(Y \cap U))_N$. Pour manipuler les développements de Taylor le long de sous-variétés, nous utiliserons le résultat suivant qui se démontre par le procédé de Borel.

Lemme 3.2. *L'application qui à $f \in C^\infty(U)$ associe la série formelle*

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} Z^{\alpha}, \quad \text{telle que } f_{\alpha} = \partial^{\alpha} f|_{Y \cap U}$$

induit un isomorphisme d'algèbre de $C^\infty(U)/\mathcal{I}^\infty(Y \cap U)$ sur $C^\infty(Y \cap U)[[Z^1, \dots, Z^k]]$. L'application réciproque associe à $\sum_{\alpha} g_{\alpha} Z^{\alpha}$ la classe d'équivalence d'une fonction $g \in C^\infty(U)$ telle que

$$g \equiv \sum_{|\alpha| \leq N} G_{\alpha} Z^{\alpha} \pmod{\mathcal{I}^{N+1}(Y \cap U)}, \quad \forall N$$

où les fonctions $G_{\alpha} \in C^\infty(U)$ prolongent les fonctions g_{α} et sont telles que $\partial_l G_{\alpha} \equiv 0$ modulo $\mathcal{I}^\infty(Y \cap U)$

La notation ∂^{α} désigne l'opérateur différentiel $\partial_1^{\alpha(1)} \dots \partial_k^{\alpha(k)}$. Enfin, rappelons un résultat démontré dans le deuxième chapitre.

Lemme 3.3. *Soit $d \in C^\infty(X, \mathbb{R}^+)$ une fonction strictement positive en dehors de Y , s'annulant au second ordre le long de Y et dont le noyau du Hessien soit $T_x Y$ en tout x de Y . Soit $(a(\cdot, k))$ une suite de $C^\infty(X)$ admettant un développement asymptotique $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) k^{-i}$ pour la topologie C^0 . Soit N un entier positif. Les deux assertions suivantes sont alors équivalentes.*

- i. $\forall K$ compact de X , $\exists C$ tel que $|e^{-kd(x)} a(x, k)| \leq C k^{-\frac{N}{2}}$ sur K
- ii. $a_i \in \mathcal{I}^{N-2i}(Y)$, $\forall i$ tel que $N \geq 2i$

2 Sections lagrangiennes

2.1 Définition

Pour cette partie, on se donne une variété symplectique (M, ω) munie d'un fibré préquantifiant et d'une structure complexe J intégrable, compatible avec ω et strictement positive. Soit Λ une sous-variété lagrangienne de M . Notons que la restriction de L à Λ muni de la dérivation covariante induite est un fibré plat. Les deux propositions qui suivent donnent les principales propriétés de la section F associée à (Λ, J) (cf. (3.2)) qui joue ici un rôle analogue aux phases dans la théorie usuelle sur les cotangents.

Proposition 3.4. *Soit un point $x \in \Lambda$ et un entier k_0 . Il existe alors un voisinage $U \subset M$ de x et une section $F : U \rightarrow L^{k_0}$ telle que $F|_{\Lambda \cap U}$ soit plate de norme constante égale à 1 et*

$$\nabla_{\bar{Z}} F \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda \cap U)}, \quad \forall Z \text{ champ de vecteurs holomorphes}$$

Si $F' : U' \rightarrow L^{k_0}$ vérifie les mêmes conditions et $U \cap U'$ est connexe, alors il existe un réel α tel que $e^{i\alpha} F \equiv F'$ modulo $\mathcal{I}^\infty(\Lambda \cap U \cap U')$.

Preuve. Soit U un voisinage de x et $s : U \rightarrow L$ de norme constante égale à 1. Soit $\beta \in \Omega^1(U)$ tel que

$$\nabla s = -i\beta \otimes s$$

$|s| = 1$ implique que β est réelle. Cherchons une section F de la forme $e^{ik_0\varphi} s^{k_0}$. Notons j le plongement de Λ dans M . $f = j^*\varphi$ doit vérifier $df + j^*\beta = 0$. Comme $dj^*\beta = j^*\omega = 0$, quitte à restreindre U , une telle fonction f existe et est unique à une constante près si U est connexe. $\bar{\partial}\beta^{0,1} = 0$ car $\omega = d\beta$ est de bidegré $(1, 1)$. Par conséquent, quitte à restreindre U , il existe $\rho \in C^\infty(U)$ telle que $\bar{\partial}\rho + i\beta^{0,1} = 0$. Ecrivons $\varphi = i(\rho - \tilde{\rho})$. La fonction $\tilde{\rho}$ doit vérifier les équations

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}|_\Lambda &= \rho|_\Lambda + if \\ \bar{\partial}\tilde{\rho} &\equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda)} \end{aligned}$$

Elles ont une unique solution modulo $\mathcal{I}^\infty(\Lambda \cap U)$ d'après le lemme 3.1, car la distribution $T^{0,1}M$ est intégrable et $(T_x\Lambda \otimes \mathbb{C}) \oplus T_x^{0,1}M = T_xM \otimes \mathbb{C}$. En effet, si $X \in (T_x\Lambda \otimes \mathbb{C}) \cap T_x^{0,1}M$, alors $\omega(X, \bar{X}) = 0$ car $T_x\Lambda \otimes \mathbb{C}$ est lagrangien, ce qui implique $X = 0$ car J est strictement positive. \square

L'exemple le plus simple consiste à associer une section F aux sous-espaces lagrangiens de \mathbb{R}^{2n} .

Exemple 3.5. Soit $M = \mathbb{C}^n$ muni des coordonnées complexes linéaires z^i et $\omega = idz^j \wedge d\bar{z}^j$. Soit $L = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ et une section $s : M \rightarrow L$ telle que $\nabla s = -\bar{z}^j dz^j \otimes s$ et $|s|^2 = e^{-z^j \bar{z}^j}$. Considérons un sous-espace vectoriel lagrangien $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$. Le complexifié $\Lambda_{\mathbb{C}}$ de Λ est réel (i.e. $\Lambda_{\mathbb{C}} = \bar{\Lambda}_{\mathbb{C}}$), c'est donc le graphe d'une application \mathbb{C} -linéaire

$$T^{1,0}M \rightarrow T^{0,1}M, \quad \partial_{z^i} \rightarrow q_{ij} \partial_{\bar{z}^j}$$

telle que la matrice $Q = (q_{ij})$ vérifie $Q\bar{Q} = \text{Id}$. D'autre part, $\Lambda_{\mathbb{C}}$ étant lagrangien, Q est symétrique. Réciproquement, toute matrice symétrique Q telle que $Q\bar{Q} = \text{Id}$ définit un sous-espace vectoriel lagrangien de \mathbb{C}^n d'équations $\bar{z}^j = q_{ij}z^i$. Une section F_Λ associée à Λ est

$$F_\Lambda : M \rightarrow L, \quad F = e^{\frac{1}{2}q_{ij}z^i z^j} s$$

En effet, F est certainement holomorphe, $\nabla F = (q_{ij}z^i - \bar{z}^j) dz^j \otimes F$ et donc F est plate le long de Λ , $|F(0)| = 1$ et par transport parallèle $|F(x)| = 1$ si $x \in \Lambda$. De la même façon, on vérifie qu'une section F_{Λ_u} associée à $\Lambda_u = u + \Lambda$, où $u \in \mathbb{C}^n$, est

$$\square \quad F_{\Lambda_u} : M \rightarrow L, \quad F_{\Lambda_u} = e^{\frac{1}{2}q_{ij}(z^i - u^i)(z^j - u^j) + \bar{u}^k z^k - \frac{1}{2}u^l \bar{u}^l} s$$

Le développement de Taylor de F le long de Λ est complètement déterminé par Λ et la structure kählerienne, nous calculons les dérivées premières et secondes en fonction de ces données.

Proposition 3.6. Soit $F : U \rightarrow L^{k_0}$ définie comme dans la proposition 3.4. Notons α_F la 1-forme définie par $\nabla F = \alpha_F \otimes F$ et δ la fonction $\delta = -2 \ln |F|$. Alors α_F s'annule en tout point $x \in \Lambda$ et sa dérivée $T\alpha_F : T_x M \rightarrow T_x^* M \otimes \mathbb{C}$ est donnée par

$$(3.6) \quad \langle T_X \alpha_F, Y \rangle = \frac{k_0}{i} \omega(q(X), Y), \quad \forall X, Y \in T_x M$$

où q désigne la projection de $T_x M \otimes \mathbb{C}$ d'image $T_x^{0,1} M$ et de noyau $T_x \Lambda \otimes \mathbb{C}$. δ s'annule le long de Λ ainsi que ses dérivées premières. Son hessien est la forme bilinéaire de $T_x M$ dont le noyau est $T_x \Lambda$ et dont la restriction à $JT_x \Lambda$ est $k_0 g|_{JT_x \Lambda}$.

Preuve. Si X est un champ de vecteurs anti-holomorphes, alors $\langle \alpha_F, X \rangle$ est nul à tout ordre le long de Λ . Si $X \in T_x \Lambda$, alors $\langle \alpha_F, X \rangle = 0$ car $F|_{\Lambda}$ est plate. Par conséquent, α_F s'annule en $x \in \Lambda$ et la dérivée $T\alpha_F$ est bien définie. Si $X \in T_x \Lambda$, les deux membres de l'égalité (3.6) s'annulent. Il suffit alors de vérifier (3.6) pour $X \in T_x^{0,1} M$ et Y quelconque. Prolongeons X en un champ de vecteurs antiholomorphes et Y en un champ de vecteurs. Utilisant que α_F s'annule sur Λ , nous obtenons au dessus de Λ

$$\nabla_X \nabla_Y F - \nabla_Y \nabla_X F - \nabla_{[X,Y]} F = (\langle T_X \alpha_F, Y \rangle - \langle T_Y \alpha_F, X \rangle) F$$

Le second terme du second membre s'annule. La courbure de ∇ étant $\frac{k_0}{i} \omega$, nous en déduisons que $\langle T_X \alpha_F, Y \rangle = \frac{1}{i} \omega(X, Y)$, ce qui démontre (3.6).

$|E|_{\Lambda} = 1$, donc δ s'annule le long de Λ , il en est de même de ses dérivées car $d\delta = -\alpha_F - \bar{\alpha}_F$. Le Hessien de δ en $x \in \Lambda$ est donc bien défini. Son noyau contient $T_x \Lambda$. D'autre part, (3.6) implique

$$\text{Hess } \delta(X, Y) = -\frac{k_0}{2i} \omega(q(X) - \overline{q(X)}, Y), \quad \forall X, Y \in T_x M$$

et si $X \in JT_x \Lambda$, alors $q(X) = X + iJX$, donc $\text{Hess } \delta(X, Y) = -k_0 \omega(JX, Y) = k_0 g(X, Y)$. \square

Remarque 3.7. Si E désigne la section associée au noyau des opérateurs de Toeplitz (cf. (3.4)) et $\nabla E = \alpha_E \otimes E$ sur un voisinage de $\text{diag } M$, on montre aussi que α_E s'annule en $(x, x) \in \text{diag}(M)$ et sa dérivée est donnée par

$$(3.7) \quad \langle T_{(X_1, X_2)} \alpha_E, (Y_1, Y_2) \rangle = \frac{1}{i} \omega(X_1^{0,1} - X_2^{0,1}, Y_1) + \frac{1}{i} \omega(X_1^{1,0} - X_2^{1,0}, Y_2)$$

où $X^{1,0} = \frac{1}{2}(X + iJX)$ désigne la partie holomorphe d'un vecteur X et $X^{0,1} = \frac{1}{2}(X - iJX)$ sa partie anti-holomorphe. \square

Supposons que Λ soit fermée et qu'il existe une section $t : \Lambda \rightarrow L^{k_0}$ plate de norme constante égale à 1 (i.e. que le fibré plat $(L^{k_0}|_{\Lambda}, \nabla)$ soit trivial). A l'aide d'une partition de l'unité, on déduit de la proposition 3.4 qu'il existe une section $F : M \rightarrow L^{k_0}$ telle que

$$F|_{\Lambda} = t, \quad \nabla_{\bar{Z}} F \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^{\infty}(\Lambda)}, \quad \forall Z \text{ champ de vecteurs holomorphes}$$

Une telle section est unique modulo $\mathcal{I}^{\infty}(\Lambda)$. D'après la proposition 3.6, $\delta = -2 \ln |F|$ est strictement positive sur un voisinage de Λ privé de Λ . Quitte à modifier F en dehors de ce voisinage, nous avons $|F|(x) < 1$ si $x \notin \Lambda$ ce que nous supposons désormais.

Dans l'exemple 3.5, il n'y avait pas d'obstruction à définir une section globale F associée à un sous-espace lagrangien de \mathbb{R}^{2n} . Considérons deux situations où une telle obstruction se présente : les variétés lagrangiennes sont des cercles de \mathbb{R}^2 dans le premier cas et de S^2 dans le second.

Exemple 3.8. Considérons les données de l'exemple 3.5 en dimension $n = 1$. Soit R un nombre réel strictement positif et $\Lambda \subset \mathbb{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon R . Une section lagrangienne F associée à Λ est

$$F_{\Lambda, k_0} = e^{k_0 R^2 (\ln z - \ln R) + \frac{1}{2} k_0 R^2} s^{k_0}$$

définie sur un secteur angulaire d'ouverture $< 2\pi$. En coordonnées polaires (r, θ) , nous avons $\nabla s = -(r dr + ir^2 d\theta) \otimes s$ et donc le fibré $(L^{k_0}|_{\Lambda}, \nabla)$ est trivial si et seulement si $k_0 R^2$ est entier. Supposons que ce soit le cas. La section définie ci-dessus se prolonge alors en

$$\square \quad F_{\Lambda, k_0} : M \rightarrow L, \quad F_{\Lambda, k_0} = e^{\frac{1}{2} k_0 R^2} \left(\frac{z}{R} \right)^{k_0 R^2} s^{k_0}$$

Exemple 3.9. Un exemple similaire au précédent consiste à choisir pour M l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^1$ et $L = K^{-1}$, où $K \rightarrow \mathbb{C}P^1$ est le fibré canonique, c'est à dire le sous-fibré de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$ composé $(x, (z^1, z^2))$ tel que (z^1, z^2) appartiennent à la droite $x \subset \mathbb{C}^2$. K hérite de la structure holomorphe de \mathbb{C}^2 et de sa structure hermitienne usuelle, il est donc muni d'une unique dérivation covariante compatible avec ces deux structures. Ceci induit les mêmes structures sur L . Sa courbure est la deux-forme de Fubini-Study qui définit une structure kählerienne sur $\mathbb{C}P^1$. Soit $z = \frac{z^1}{z^2}$ la coordonnée affine du point de coordonnées homogènes (z^1, z^2) . Soit t la section locale de K qui associe au point de coordonnée z le point $(z, 1)$. La section $s = t^{-1}$ est telle que

$$\nabla s = \frac{-\bar{z} dz}{1 + |z|^2} \otimes s, \quad |s|^2 = (1 + |z|^2)^{-1}$$

Choisissons pour sous-variété lagrangienne Λ le cercle $|z| = R$, où R est un réel strictement positif. Une section F associée à Λ est

$$F_{\Lambda, k_0} = e^{k_0 a(R) (\ln z - \ln R)} (1 + R^2)^{\frac{k_0}{2}} s^{k_0} \text{ avec } a(R) = \frac{R^2}{1 + R^2}$$

définie seulement localement. $(L^{k_0}|_{\Lambda}, \nabla)$ est trivial si et seulement si $a(R)k_0$ est entier et lorsque c'est le cas la section F_{Λ, k_0} est définie globalement. \square

Définition 3.10. Nous appelons une suite (v_α) une section lagrangienne associée au couple $(\Lambda, t : \Lambda \rightarrow L^{k_0})$ si

$$(3.8) \quad v_\alpha \in \mathcal{H}_{k_\alpha}, \quad v_\alpha(x) = \left(\frac{k_\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{n}{4}} F^\alpha(x) a(x, k_\alpha) + r_\alpha(x)$$

où $k_\alpha = \alpha k_0$, $(a(\cdot, k))$ est un symbole de $S^0(M)$ et (r_α) est une suite négligeable de sections de L^{k_α} .

On note $\mathcal{S}(\Lambda, t)$ l'ensemble des sections lagrangiennes associées à (Λ, t) . Cette définition ne dépend pas du choix de F . En effet, si F et G sont égales modulo $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$, il découle du lemme 3.3 et des propriétés du Hessien de $\ln |F|$ que

$$F^\alpha(x) a(x, k_\alpha) - G^\alpha(x) a(x, k_\alpha)$$

est négligeable. La constante de normalisation $\left(\frac{k_\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{n}{4}}$ a été choisie de sorte que la norme d'une section lagrangienne dont le symbole principal ne s'annule pas soit équivalente à une constante (cf. proposition 3.18). Nous montrons à présent l'existence des sections lagrangiennes et expliquons comment on les contrôle à l'aide de séries formelles : la proposition suivante établit un isomorphisme entre $C^\infty(\Lambda)[[\hbar]]$ et $\mathcal{S}(\Lambda, t)$ quotienté par l'ensemble des suites négligeables de \mathcal{H}_{k_α} .

Proposition 3.11. *Etant donné une série formelle $\sum_l \hbar^l f_l$ de $C^\infty(\Lambda)[[\hbar]]$, il existe une section lagrangienne $(v_\alpha) \in \mathcal{S}(\Lambda, t)$ telle que*

$$v_\alpha(x) = \left(\frac{k_\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{n}{4}} t^\alpha(x) \sum_l (k_\alpha)^{-l} f_l(x) + O(k_\alpha^{-\infty}) \text{ si } x \in \Lambda$$

Celle-ci est unique modulo une suite négligeable de \mathcal{H}_{k_α} . Si nous exprimons (v_α) sous la forme (3.8), les coefficients a_l du développement asymptotique de $a(x, k)$ vérifient

$$a_l|_\Lambda = f_l, \quad \bar{Z}.a_l \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda)}, \quad \forall Z \text{ champ de vecteurs holomorphes}$$

Nous appelons $\sigma(v_\alpha) = \sum_l \hbar^l f_l$ le symbole de (v_α) et f_0 son symbole principal. On déduit du lemme 3.3 que

$$|v_\alpha| = O(k_\alpha^{\frac{n}{4}-N}) \Leftrightarrow f_0 = \dots = f_N = 0$$

De plus (v_α) est négligeable si et seulement si son symbole est nul. Le microsupport de (v_α) est inclu dans Λ et est donné par

$$\text{MS}(v_\alpha) = \overline{\cup_l (\text{Supp } f_l)}$$

Preuve. La preuve s'appuie sur le résultat suivant: si $(b(\cdot, k))$ est un symbole de $S^0(M)$, alors

$$(3.9) \quad \Pi_{k_\alpha}(F^\alpha b(\cdot, k_\alpha))(x) = F^\alpha a(x, k_\alpha) + O(k_\alpha^{-\infty})$$

où $(a(\cdot, k))$ est un symbole de $S^0(M)$. De plus si l'on note a_l et b_l les coefficients du développement asymptotique de $(a(\cdot, k))$ et $(b(\cdot, k))$, alors $a_0|_\Lambda = b_0|_\Lambda$. De $\nabla_{\bar{Z}} \circ \Pi_k = 0$ et $\nabla_{\bar{Z}} F \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda)}$ pour un champ de vecteurs holomorphes Z , l'on déduit utilisant le lemme 3.3 que $F^k \bar{Z}.a(x, k)$ est négligeable, et ensuite que $\bar{Z}.a_l \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda)}$. Ceci étant, la proposition se démontre en construisant par approximations successives une suite $b(x, k)$ telle que $\Pi_{k_\alpha}(F^\alpha b(\cdot, k_\alpha))$ ait la forme souhaitée. Bien entendu, il est clair à posteriori qu'il suffisait de choisir un symbole $(b(\cdot, k))$ tel que $\bar{Z}.b_l \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda)}$ et $b_l|_\Lambda = f_l$, mais la preuve de (3.9) ne nous permet pas de calculer explicitement les coefficients a_l .

Pour montrer (3.9), nous exprimons le noyau de Π_k sous la forme (3.4) et évaluons par le lemme de la phase stationnaire l'intégrale:

$$\Pi_{k_\alpha}(F^\alpha b(\cdot, k_\alpha))(x_1) = \left(\frac{k_\alpha}{2\pi}\right)^n \int_M E^{k_\alpha}(x_1, x_2) \cdot F^\alpha(x_2) f(x_1, x_2, k_\alpha) b(x_1, k_\alpha) \mu_M(x_2) + O(k_\alpha^{-\infty})$$

Comme $|E^{k_0}(x_1, x_2)| \cdot |F(x_2)| < 1$ pour $(x_1 \neq x_2$ ou $x_2 \notin \Lambda)$, on peut se localiser au voisinage de $\text{diag}(\Lambda) \subset M \times M$. Introduisons une section s de L définie sur un ouvert U de M et de norme 1. Ecrivons

$$E(x_1, x_2) \cdot F(x_2) = e^{i\phi(x_1, x_2)} s^{k_0}(x_1), \quad F(x_1) = e^{i\varphi(x_1)} s^{k_0}(x_1)$$

où φ s'annule sur Λ et ϕ sur $\text{diag}(\Lambda)$. α_E s'annule le long de $\text{diag}(M)$ et α_F le long de Λ , il vient donc en dérivant la première égalité $d_{x_2}\phi = 0$ sur $\text{diag}(\Lambda)$. En dérivant à nouveau, nous obtenons en utilisant (3.6) et (3.7)

$$(3.10) \quad d_{x_2}^2 \phi(X, Y) = k_0 \omega(X^{1,0} - q(X), Y) \text{ sur } \text{diag}(\Lambda)$$

Nous en déduisons que $d_{x_2}^2 \phi$ est inversible sur $\text{diag}(\Lambda)$. En effet $d_{x_2}^2 \phi(X, \cdot) = 0$ implique $X^{1,0} = q(X) = 0$ car $q(X) \in T^{0,1}M$. Donc $X \in (T\Lambda \otimes \mathbb{C}) \cap T^{0,1}M = (0)$. Nous pouvons donc appliquer le lemme de la phase stationnaire (chapitre 7.7 de [7]). Introduisons un système de coordonnées (x_2^i) sur le second facteur ainsi qu'un système de coordonnées complexes (z_1^i) sur le premier facteur. En dérivant $F^{-1}(x_1)E(x_1, x_2) \cdot F(x_2)$, il vient

$$(3.11) \quad \partial_{\bar{z}_1^i} \phi(x_1, x_2) \equiv \partial_{\bar{z}_1^i} \varphi(x_1) \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag } \Lambda)}$$

Donc $\partial_{\bar{z}_1^i} \partial_{x_2^k} \phi$ s'annule à tout ordre le long de $\text{diag}(\Lambda)$. Nous allons en déduire que l'idéal engendré par la famille $(\partial_{x_2^k} \phi)_k$ est l'ensemble \mathcal{J} des fonctions $f(x_1, x_2)$ telles que

$$f|_{\text{diag } \Lambda} = 0, \quad \partial_{\bar{z}_1^i} f \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag } \Lambda)}$$

Procédant comme dans le lemme 3.1, nous associons aux champs de vecteurs $\partial_{\bar{z}_1^i}, \partial_{x_2^k}$ (i variant de 1 à n et k de 1 à $2n$) qui engendrent une distribution transverse à $\text{diag}(\Lambda)$ les fonctions \bar{X}_1^i, X_2^k . Montrons que toute fonction de \mathcal{J} est combinaison linéaire à coefficient C^∞ des X_2^k et réciproquement. Si $f \in \mathcal{J}$, alors la série formelle (cf. lemme 3.2) associée au développement de Taylor de f est dans l'idéal engendré par les X_2^k et par conséquent f est combinaison linéaire des X_2^k modulo une fonction de $\mathcal{I}^\infty(\text{diag } \Lambda)$. On vérifie que

$$\langle dX_2^1, \dots, dX_2^n, d\bar{X}_2^1, \dots, d\bar{X}_2^n \rangle^\perp = \text{diag}(T\Lambda) \otimes \mathbb{C}$$

$\sum X_2^j \bar{X}_2^j$ est donc transversalement elliptique à $\text{diag}(\Lambda)$, toute fonction de $\mathcal{I}^\infty(\text{diag } \Lambda)$ est divisible par $\sum X_2^k \bar{X}_2^k$ et s'écrit ainsi comme une combinaison linéaire des X_2^k . La réciproque est immédiate car les X_2^k appartiennent à \mathcal{J} . Les fonctions $\partial_{x_2^k} \phi$ appartiennent à \mathcal{J} , elle s'expriment donc sous la forme

$$\partial_{x_2^k} \phi = \sum_j f_{kj} X_2^j$$

Si $x \in \text{diag}(\Lambda)$, nous avons

$$f_{kj}(x) = \partial_{x_2^j} \partial_{x_2^k} \phi(x)$$

Par conséquent, f_{kj} est inversible au voisinage de $\text{diag}(\Lambda)$, les X_2^j sont combinaisons linéaires des $\partial_{x_2^k} \phi$ qui engendrent \mathcal{J} .

De (3.11), l'on déduit que $\phi(x_1, x_2) = \varphi(x_1) \pmod{\mathcal{J}}$. Il vient alors

$$\Pi_{k_\alpha}(F^\alpha b(\cdot, k_\alpha))(x) = F^\alpha(x) a(x, k_\alpha) + O(k_\alpha^{-\infty})$$

où $(a(\cdot, k))$ est un symbole de $S^0(M)$. De plus si $x \in \Lambda$, compte tenu de $f(x, x, k) = 1 + O(k^{-1})$ nous avons

$$a_o(x) = k_0^n b_0(x) \cdot (\det[-i\partial_{x_2^j} \partial_{x_2^k} \phi](x, x))^{-\frac{1}{2}} \cdot (\det[g_{jk}](x))^{\frac{1}{2}}$$

où les g_{jk} sont les coefficients de la métrique riemannienne $g = \sum_{j,k} g_{jk} dx_2^j \otimes dx_2^k$. Le résultat ne dépend pas des coordonnées (x_2^j) . Nous pouvons donc les choisir de manière à calculer facilement les deux déterminants. Si $(\partial_{x_2^i})_{i=1, \dots, n}$ est une base orthonormée de $T_x \Lambda$ et $\partial_{x_2^{i+n}} = J\partial_{x_2^i}$ en x . Alors $g_{jk}(x) = \delta_{jk}$ et il découle de (3.10) que la matrice $-i\partial_{x_2^j} \partial_{x_2^k} \phi(x, x)$ s'écrit comme une matrice par blocs de taille $n * n$:

$$\frac{k_0}{2} \begin{pmatrix} \text{Id} & -i \text{Id} \\ -i \text{Id} & 3 \text{Id} \end{pmatrix}$$

On en déduit que $a_o(x) = b_0(x)$. □

Pour terminer ce chapitre, nous construisons une section lagrangienne sur le tore à l'aide des fonctions theta.

Exemple 3.12. Considérons le plan $M = \mathbb{C}$ muni de $\omega = idz \wedge d\bar{z}$ et $L = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ trivialisé de sorte que la section t qui à z associe $(z, 1)$ vérifie

$$\nabla t = (z - \bar{z})dz \otimes t, \quad |t|^2 = e^{\frac{1}{2}(z - \bar{z})^2}$$

Soit \mathbb{T}^2 le tore $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\pi\mathbb{Z}$ qui hérite de la structure kählerienne de \mathbb{C} . L'action de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sur M se relève sur L par

$$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \times L \rightarrow L, \quad (n_1, n_2), (z, w) \rightarrow (z + n_1 + i\pi n_2, we^{2i\pi n_2 z - \pi^2 n_2^2})$$

Cette action préserve la structure hermitienne de L et sa dérivation covariante. En quotientant, on munit donc \mathbb{T}^2 d'un fibré préquantifiant $L_r \rightarrow \mathbb{T}^2$. Les sections holomorphes de L_r^k s'identifient aux sections ft^k de L^k telles que $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ soit holomorphe et vérifie

$$f(z+1) = f(z), \quad f(z+i\pi) = f(z)e^{-2i\pi kz + \pi^2 k}$$

Par exemple, on peut choisir pour f la fonction theta de Riemann

$$\theta_k(z) = \sum_n e^{2i\pi knz - \pi^2 n^2 k}$$

La suite de sections ainsi définie est alors une section lagrangienne de \mathbb{T}^2 associé à la sous-variété lagrangienne $\Lambda = \{q = 0\}$ (q désigne la partie imaginaire de z). En effet, choisissons un fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact inclu dans $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ et telle que $\phi(q) = 1$ si $-\frac{\pi}{4} \leq q \leq \frac{\pi}{4}$. Une section F associée à Λ s'obtient en rendant périodique la section $\phi(q)t$

$$F(z) = \sum_n e^{2i\pi n z - \pi^2 n^2} \phi(q+n) \cdot t(z+in)$$

Montrons que $F^k \equiv \theta_k t^k$ modulo une suite négligeable. Si $-\frac{\pi}{4} \leq q \leq \frac{\pi}{4}$, nous avons

$$\begin{aligned}
|F^k(z) - \theta_k t^k| &\leq \sum_{n \neq 0} |e^{2i\pi knz - \pi^2 n^2 k}| \cdot |t|^k \\
&\leq \sum_{n \neq 0} e^{-k(\pi n + q)^2} \\
&\leq 2e^{-k(\frac{3\pi}{4})^2} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} e^{-k(\pi n - \frac{\pi}{4})^2} \\
&\leq 2e^{-k(\frac{3\pi}{4})^2} + 2 \int_1^{\infty} e^{-k(\pi x - \frac{\pi}{4})^2} dx \\
&\leq (2 + \frac{4}{3\pi^2 k}) e^{-k(\frac{3\pi}{4})^2}
\end{aligned}$$

On estime de la même façon $F^k(z) - \theta_k t^k$ pour $q \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, ainsi que ses dérivées successives. \square

2.2 Section lagrangienne dépendant d'un paramètre

Pour obtenir par la suite des contrôles uniformes en énergie ou en temps, nous introduisons des sections lagrangiennes dépendant d'un paramètre u qui décrit un ouvert U de \mathbb{R}^n . Dans un premier temps, nous considérons une famille de sous-variétés lagrangiennes (Λ_u) telle que les fibrés plats $L \rightarrow \Lambda_u$ soient tous triviaux. C'est dans ce cadre que l'on peut décrire la propagation d'une section lagrangienne par un opérateur de Toeplitz ou bien le progateur semi-classique. Dans ce dernier cas, le contrôle uniforme par rapport au temps est nécessaire pour déduire les formules de trace. Nous considérons ensuite le cas où M est localement fibré par des tores lagrangiens Λ_u . Cette fois-ci, la motivation est de décrire de manière uniforme les vecteurs propres de n opérateurs de Toeplitz qui commutent deux à deux. La construction que nous donnons est analogue à celle de [9] pour un espace de phase du type cotangent.

Soit une famille $(i_u : \Lambda \rightarrow M)$ de sous-variétés lagrangiennes telle que l'application $U \times \Lambda \rightarrow U \times M$ qui à (u, x) associe $(u, i_u(x))$ soit un plongement C^∞ dont l'image

$$\mathcal{L} = \{(u, i_u(x)) / u \in U, x \in \Lambda\}$$

est une sous-variété fermée de $U \times M$. Soit π la projection $U \times M \rightarrow M$. Supposons qu'il existe une section $t : \mathcal{L} \rightarrow \pi^* L$ de norme constante égale à 1 et dont la restriction t_u à $\{u\} \times i_u(\Lambda)$ soit plate quel que soit u (une telle section est unique modulo un facteur $e^{if(u)}$ où f est C^∞ à valeurs réelles). Typiquement une telle situation se présente lorsque l'on propage par un flot hamiltonien une sous-variété lagrangienne munie d'une section plate.

Proposition 3.13. *Soit $i : \Lambda \rightarrow M$ une sous-variété lagrangienne fermée de M et $s : \Lambda \rightarrow L$ une section plate de norme constante égale à 1. Soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction à valeurs réelles. Notons $\varphi_t : M \rightarrow M$ le flot à l'instant t du champ de vecteurs hamiltonien de f . Soit un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors l'application*

$$I \times \Lambda \rightarrow I \times M, \quad (t, x) \rightarrow (t, i_t(x) = \varphi_t(i(x)))$$

est un plongement d'image fermée et définit une famille $(i_t(\Lambda))_t$ de sous-variétés lagrangiennes. La section $s : I \times \Lambda \rightarrow L$ définie par

$$s(t, x) = e^{i \int_0^t f(\varphi_s(x)) ds} \varphi_t^h(s(x))$$

où $\varphi_t^h : L_x \rightarrow L_{\varphi_t(x)}$ est le transport parallèle le long de $s \in [0, t] \rightarrow \varphi_s(x)$, est telle que $s(t, \cdot) : \Lambda \rightarrow i_t^\# L$ est plate de norme constante égale à 1.

Preuve. Nous vérifions seulement l'assertion concernant s . Introduisons les applications

$$j : I \times \Lambda \rightarrow I \times M, \quad (t, x) \rightarrow (t, i_t(x)), \quad \pi : I \times M \rightarrow M, \quad (t, x) \rightarrow x$$

Notons $r : I \times \Lambda \rightarrow (\pi \circ j)^\# L$ la section définie par $r(t, x) = \varphi_t^h(s(x))$ de sorte que

$$s(t, x) = e^{i \int_0^t \varphi_s(x) ds} r(t, x)$$

Soit $Y \in C^\infty(\Lambda, T\Lambda)$ que l'on considère comme un champ de vecteurs de $I \times \Lambda$. Nous devons montrer que $\nabla_Y s$ s'annule. Nous avons

$$\nabla_{\partial_t} \nabla_Y s = \nabla_Y \nabla_{\partial_t} s + \nabla_{[Y, \partial_t]} s + (\pi \circ j)^* \omega(Y, \partial_t) s$$

Y et ∂_t commutent et donc $\nabla_{[Y, \partial_t]} \tilde{s} = 0$. D'autre part, $(\pi \circ j)_* \partial_t = X|_{\varphi_t(x)}$ où X est le champ de vecteurs hamiltonien de f , et donc

$$(\pi \circ j)^* \omega(Y, \partial_t) = Y \cdot (\pi \circ j)^* f$$

Enfin $\nabla_{\partial_t} r = 0$ ce qui entraîne $\nabla_{\partial_t} s = (\pi \circ j)^* f \cdot s$, donc

$$\nabla_Y \nabla_{\partial_t} s = (Y \cdot (\pi \circ j)^* f) s + (\pi \circ j)^* f \cdot \nabla_Y s$$

Par conséquent $\nabla_{\partial_t} \nabla_Y s = (\pi \circ j)^* f \cdot \nabla_Y s$ et par hypothèse $\nabla_Y s$ est nulle le long de $\{0\} \times \Lambda$. En intégrant cette équation, il vient que $\nabla_Y s$ est nulle partout. \square

Il n'y a pas de difficulté à généraliser les propositions 3.4 et 3.11 avec ces données. On montre qu'il existe une section $F : U \times M \rightarrow \pi^\# L$ telle que

$$(3.12) \quad F|_{\mathcal{L}} = t \text{ et } \nabla_{\bar{Z}} \cdot F \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\mathcal{L})}, \quad \forall Z \in C^\infty(U \times M, T^{1,0}M)$$

On associe alors à (\mathcal{L}, t) une famille de sections lagrangiennes, i.e. des suites (v_k^u) telles que

$$v_k^u \in \mathcal{H}_k, \quad v_k^u(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{n}{4}} F^k(u, x) a(u, x, k) + r_k(u, x)$$

où $(a(\cdot, k))$ est un symbole de $S(U \times M)$ et (r_k) est une suite négligeable de $C^\infty(U \times M, \pi^\# L^k)$. On montre qu'étant donné une série formelle $\sum \hbar^l f_l$ de $C^\infty(U \times \Lambda)[[\hbar]]$, il existe une section lagrangienne, unique modulo une suite négligeable de $C^\infty(U \times M, \pi^\# L^k)$, telle que

$$v_k^u(u, i_u(x)) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{n}{4}} t^k(u, i_u(x)) \sum k^{-l} f_l(u, x) + O(k^{-\infty})$$

La restriction de (v_k^u) à $\{u\} \times M$ est une section lagrangienne de $\mathcal{S}(\Lambda_u, t_u)$ dont le symbole est $\sum \hbar^l f_l(u, \cdot)$.

Décrivons à présent la construction qui nous sera utile pour établir les conditions de Bohr-Sommerfeld. On considère un ouvert U de M difféomorphe au produit $B_r \times \mathbb{T}^n$, où $B_r \subset \mathbb{R}^n$ est la boule ouverte de rayon r centrée en 0 et $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, tel que $\omega = d\xi^i \wedge dx^i$ si ξ^i et x^i sont les coordonnées usuelles de \mathbb{R}^n et \mathbb{T}^n . La famille de variétés lagrangiennes est $\Lambda_u = \{\xi^i = u^i, \forall i\}$, où u décrit $B_{\frac{r}{2}}$. Le problème est que les fibrés $(L^k|_{\Lambda_u}, \nabla)$ ne sont pas simultanément triviaux. En effet, introduisons les lacets

$$\gamma_u^i : \mathbb{T} \rightarrow \Lambda_u, \quad t \rightarrow (u, x(t)), \quad x^j(t) = \delta_{ij}t$$

Le transport parallèle dans L le long de γ_u^i est la multiplication par un nombre complexe de module 1 que l'on peut écrire sous la forme $e^{2\pi i \varphi^i(u)}$ où φ^i est continue à valeurs réelles. Le fibré $(L^k|_{\Lambda_u}, \nabla)$ est trivial si et seulement si $\varphi^i(u) \in k^{-1}\mathbb{Z}, \forall i$; ce que nous écrivons $\varphi(u) \in k^{-1}\mathbb{Z}^n$. En déformant γ_u^i en γ_0^i et en utilisant que la courbure de L est $\frac{1}{i}\omega$, on montre que les fonctions φ^i sont affines

$$\varphi^i(u) = \varphi^i(0) + \frac{u^i}{2\pi}$$

Par conséquent la définition 3.10 des sections lagrangiennes s'applique aux (Λ_u, k_0) tels que $u \in B_{\frac{r}{2}} \cap 2\pi(-\varphi(0) + k_0^{-1}\mathbb{Z}^n)$. On souhaite obtenir un contrôle uniforme sur ces sections et considérer des symboles plus généraux.

Soit p la projection $B_r \times \mathbb{R}^n \rightarrow B_r \times \mathbb{T}^n$. Choisissons une section t de $p^\#L$, définie sur $B_r \times \{0\}$ et de norme constante égale à 1, que l'on prolonge à $B_r \times \mathbb{R}^n$ par transport parallèle le long des $\{\xi\} \times \mathbb{R}^n$. Une section de $L^k \rightarrow B_r \times \mathbb{T}^n$ se relève en gt^k , où $g \in C^\infty(B_r \times \mathbb{R}^n)$ vérifie

$$g(\xi, x + m) = g(\xi, x) e^{-2i\pi km^j \varphi^j(\xi)}$$

et réciproquement. De même les sections de $L^k \rightarrow \Lambda_u$ s'identifient aux fonctions $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que pour tout $m \in \mathbb{Z}^n$

$$(3.13) \quad g(x + m) = g(x) e^{-2i\pi km^j \varphi^j(u)}$$

les sections plates s'identifiant aux fonctions constantes.

Introduisons un symbole $(f(\cdot, k))$ de $S(B_{\frac{r}{2}} \times \mathbb{R}^n)$ tel que pour tout $m \in \mathbb{Z}^n$

$$(3.14) \quad f(u, x + m, k) = f(u, x, k) e^{2i\pi m^j c^j(u, k)} + O(k^{-\infty})$$

où $(c^j(\cdot, k))_k$ est un symbole de $S(B_{\frac{r}{2}})$ à valeurs réelles. Considérons une suite $(u_\alpha, k_\alpha)_\alpha$ à valeurs dans $B_{\frac{r}{2}} \times \mathbb{N}$ telle que

$$(3.15) \quad \varphi(u_\alpha) + k_\alpha^{-1}c(u_\alpha, k_\alpha) \in k_\alpha^{-1}\mathbb{Z}^n + O(k_\alpha^{-\infty})$$

Ainsi les fonctions $x \rightarrow f(u_\alpha, x, k_\alpha)$ vérifient les relations (3.13) à un $O(k_\alpha^{-\infty})$ près. On souhaite construire une suite de sections (s_α) telle que $s_\alpha \in \mathcal{H}_{k_\alpha}$ et

$$p^* s_\alpha(u_\alpha, x) = f(u_\alpha, x, k_\alpha) t^{k_\alpha}(u_\alpha, x) + O(k_\alpha^{-\infty})$$

Avant de réaliser ceci, discutons la condition (3.15). La fonction φ étant un difféomorphisme de B_r sur son image, il en est de même des fonctions $\varphi + k^{-1}c(\cdot, k)$ si k est suffisamment grand. L'inverse ϕ_k de $\varphi + k^{-1}c(\cdot, k)$ est bien définie sur $\varphi(B_{r-\epsilon})$. Et donc si (v_α, k_α) est une suite telle que $v_\alpha \in k_\alpha^{-1}\mathbb{Z}^n + O(k_\alpha^{-\infty})$, alors $(u_\alpha = \phi_{k_\alpha}(v_\alpha), k_\alpha)$ vérifie (3.15) et réciproquement. De plus, utilisant la formule de Taylor, on montre que les composantes de ϕ_k sont des symboles, le premier terme du développement asymptotique étant la réciproque φ^{-1} de φ . On peut ainsi se représenter les ensembles $\phi_k(k^{-1}\mathbb{Z}^n)$ comme des réseaux déformés $\varphi^{-1}(k^{-1}\mathbb{Z}^n) + O(k^{-2})$.

On considère que $B_r \times \mathbb{R}^n$ hérite de la structure complexe de $B_r \times \mathbb{T}^n \subset M$. On note $\mathcal{L} = \{(u, u, x) / u \in B_{\frac{r}{2}}, x \in \mathbb{R}^n\}$ la sous-variété fermée de $B_{\frac{r}{2}} \times B_r \times \mathbb{R}^n$. Notons π la projection $B_{\frac{r}{2}} \times B_r \times \mathbb{R}^n \rightarrow B_r \times \mathbb{R}^n$. Soit une section F de $(p \circ \pi)^\# L \rightarrow B_{\frac{r}{2}} \times B_r \times \mathbb{R}^n$ telle que $F(u, u, x) = t(u, x)$ et

$$\nabla_{\bar{Z}} F \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\mathcal{L})}, \quad \forall Z \in C^\infty(B_{\frac{r}{2}} \times B_r \times \mathbb{R}^n, T^{1,0}(B_r \times \mathbb{R}^n))$$

Soit $h(\cdot, k)$ un symbole de $S(B_{\frac{r}{2}} \times B_r \times \mathbb{R}^n)$ tel que $h(u, u, x, k) = f(u, x, k) + O(k^{-\infty})$ et les coefficients h_l de son développement asymptotique vérifient

$$\bar{Z}.h_l \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\mathcal{L})}, \quad \forall Z \in C^\infty(B_{\frac{r}{2}} \times B_r \times \mathbb{R}^n, T^{1,0}(B_r \times \mathbb{R}^n))$$

On suppose que k_α est divergente, car le résultat n'a de sens seulement lorsque k_α décrit un voisinage de l'infini.

Proposition 3.14. *Il existe une suite (s_α) telle que $s_\alpha \in \mathcal{H}_{k_\alpha}$, (s_α) soit négligeable au voisinage de tout point qui n'appartient pas à $B_{\frac{3}{4}r} \times \mathbb{T}^n \subset M$, et le relèvement par p de la restriction des s_α à $B_r \times \mathbb{T}^n$ est de la forme*

$$\left(\frac{k_\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{n}{4}} F^{k_\alpha}(u_\alpha, \xi, x) h(u_\alpha, \xi, x, k_\alpha) + O(k_\alpha^{-\infty})$$

Preuve. Soit V un ouvert connexe et simplement connexe de \mathbb{T}^n que l'on relève par un difféomorphisme $j : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. On définit alors une suite de sections

$$r_\alpha : B_r \times V \rightarrow L, \quad r_\alpha(\xi, x) = \left(\frac{k_\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{n}{4}} F^{k_\alpha}(u_\alpha, \xi, j(x)) h(u_\alpha, \xi, j(x), k_\alpha)$$

Choissant un autre relèvement j on ne modifie la suite r_α qu'à un $O(k_\alpha^{-\infty})$ près. On peut donc en recouvrant \mathbb{T}^n d'ouverts connexes et simplement connexes et en utilisant une partition de l'unité construire une suite de sections globales qui localement sont de la forme ci-dessus modulo $O(k_\alpha^{-\infty})$. On projette ensuite cette suite sur \mathcal{H}_{k_α} comme dans la preuve de la proposition 3.11. \square

Précisons le rapport entre cette construction et les sections lagrangiennes définies en 3.10. Soit $u^0 \in B_{\frac{r}{2}}$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\varphi(u^0) \in k_0^{-1}\mathbb{Z}^n$. Le fibré plat $L^{k_0} \rightarrow \Lambda_{u^0}$ est alors trivial et la section

$$t^{k_0}(u^0, \cdot) : p^\# L \rightarrow \{\xi = u^0\} \times \mathbb{R}^n$$

s'identifie à une section plate t_0 de $L^{k_0} \rightarrow \Lambda_{u^0}$. Soit $\tau \in \mathbb{Z}^n$. Définissons les suites $k_\alpha = \alpha k_0$ et $\tau_\alpha = \varphi(u^0) + k_\alpha^{-1}\tau \in k_\alpha^{-1}\mathbb{Z}^n$. Soit $u_\alpha = \phi_{k_\alpha}(\tau_\alpha)$, où ϕ_k est l'inverse de $\varphi + k^{-1}c(\cdot, k)$. Alors

(u_α, k_α) vérifie la condition (3.15) et appliquant la proposition 3.14, on définit une suite (s_α) . Nous affirmons que c'est une section lagrangienne de $\mathcal{S}(\Lambda_{u^0}, t_0)$.

Nous illustrons cette dernière partie avec des bases orthonormées $(u_{\beta,k})_\beta$ usuelles des \mathcal{H}^k lorsque M est \mathbb{C}^n , $\mathbb{C}P^n$ ou \mathbb{T}^{2n} . Choisisant des suites de la forme $s_\alpha = u_{\beta_\alpha, k_\alpha}$, nous obtenons des sections lagrangiennes comme elles sont définies dans la proposition 3.14. Il n'y a rien d'étonnant à cela car le but de cette construction est précisément de décrire les vecteurs propres des opérateurs de Toeplitz.

Exemple 3.15. Soit $M = \mathbb{C}^n$, on utilise les notations de l'exemple 3.5. Si $v \in \mathbb{R}^n$ a toutes ses coordonnées strictement positives, on lui associe le tore lagrangien

$$\Lambda_v = \{z \in \mathbb{C}^n / |z^i|^2 = v^i\}$$

D'autre part une base orthonormée de \mathcal{H}_k est la famille

$$g_{\beta,k} = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{k^{|\beta|}}{\beta!}\right)^{\frac{1}{2}} z^\beta s^k, \quad \beta \in \mathbb{Z}^n$$

Ces vecteurs sont associés aux Λ_v par la relation $\beta = kv$. En effet, on considère la section F et le symbole f

$$F(v, z) = e^{\sum_i v^i (\ln z^i - \frac{1}{2} \ln v^i) + \frac{1}{2} v^i s(z)}, \quad f(v, z, k) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{n}{4}} \prod_i \left(\frac{(kv^i)^{kv^i} e^{-kv^i}}{\Gamma(kv^i + 1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

On vérifie que $F(v, \cdot)$ est bien associée aux Λ_v et à l'aide de la formule de Stirling que f est bien un symbole. De plus si $v \in k^{-1}\mathbb{Z}^n$, nous avons $g_{kv,k} = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{n}{4}} F^k(v, \cdot) f(v, \cdot, k)$. \square

Exemple 3.16. Soit $M = \mathbb{C}P^n$, $K \rightarrow \mathbb{C}P^n$ le fibré canonique et $L = K^{-1}$. On identifie les sections u de L^k à des fonctions homogènes g définies sur \mathbb{C}^{n+1} de degré k par la relation:

$$g(x) = \langle x^k, u(\pi(x)) \rangle \text{ pour tout } x \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} = K - 0$$

(π est la projection $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$). Une base orthonormée de \mathcal{H}_k est la famille

$$g_{\beta,k} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{(k+n)!}{\beta!}\right)^{\frac{1}{2}} z^\beta \text{ où } \beta \in \mathbb{Z}^{n+1} \text{ et } |\beta| = k$$

Si $v \in (0, 1)^{n+1}$ vérifie $\sum v^i = 1$, on lui associe le tore lagrangien

$$\Lambda_v = \{[z^0, \dots, z^n] \in \mathbb{C}P^n / |z^i|^2 = v^i \sum_j |z^j|^2\}$$

Λ_v est associée à $g_{\beta,k}$ par la relation $\beta = kv$. En effet, il suffit de choisir la section F et le symbole f

$$\square \quad F(v, z) = \prod_i \left(\frac{z^i}{\sqrt{v^i}}\right)^{v^i}, \quad f(v, z, k) = \left(\frac{1}{2\pi k}\right)^{\frac{n}{4}} \sqrt{(k+n)!} \prod_i \left(\frac{(v^i)^{kv^i}}{\Gamma(kv^i + 1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Exemple 3.17. On reprend les notations de l'exemple 3.12 sur la quantification du tore \mathbb{T}^2 . Une base de \mathcal{H}_k est la famille

$$g_{\beta,k}(z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-k^{-1}\pi^2\beta^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-\pi^2 l(lk+2\beta) + 2i\pi(lk+\beta)z}, \quad \beta = 0, \dots, k-1$$

Les variétés lagrangiennes $\Lambda_v = \{\text{Im } z = v\}$ sont alors associées aux $g_{\beta,k}$ par la relation $kv + \pi\beta = 0$. \square

3 Calcul symbolique des sections lagrangiennes

Dans une première sous-partie, nous estimons la norme d'une section lagrangienne et décrivons l'action des opérateurs de Toeplitz sur les sections lagrangiennes. L'action induite sur les espaces de symboles nous mène à définir la quantification par déformation d'une sous-variété lagrangienne et nous comparons ceci avec les résultats de Xu [10]. Nous décrivons ensuite le calcul sous-symbolique. Enfin, nous expliquons comment ces résultats s'adaptent aux cas de sections lagrangiennes dépendant de paramètres.

3.1 Norme et action des opérateurs de Toeplitz

Si $(s_\alpha) \in \mathcal{S}(\Lambda, t)$ et $(t_\alpha) \in \mathcal{S}(\Lambda', t')$, alors $(s_\alpha, t_\alpha) = O(k^{-\infty})$ lorsque $\Lambda \cap \Lambda' = \emptyset$. Lorsque $\Lambda = \Lambda'$, nous avons l'estimation suivante.

Proposition 3.18. *Soient (s_α) et (t_α) deux sections lagrangiennes de $\mathcal{S}(\Lambda, t)$. Le produit scalaire de (s_α) et (t_α) admet un développement asymptotique complet en puissance de k_α dont le premier terme est*

$$(s_\alpha, t_\alpha) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\Lambda} f_0 \cdot \bar{g}_0 \mu_{\Lambda} + O(k_\alpha^{-1})$$

où f_0 et g_0 sont les symboles principaux de (s_k) et (t_k) et μ_{Λ} est la mesure de Λ induite par $g|_{T\Lambda}$.

Preuve. Nous devons estimer l'intégrale

$$\left(\frac{k_\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_M e^{-k_\alpha \delta(x)} f(x, k_\alpha) \bar{g}(x, k_\alpha) \mu_M(x)$$

Choisissons un système de coordonnées (x^j, y^j) définies sur un ouvert U telles que $U \cap \Lambda = \{y^1 = \dots = y^n = 0\}$. En effectuant un changement de coordonnées du type $x'(x, y)$ et $y' = y$, on s'arrange pour que l'orthogonal de $T_x \Lambda$ soit $\langle \partial_{y^1}, \dots, \partial_{y^n} \rangle_x$ quel que soit $x \in \Lambda \cap U$. Ainsi la métrique s'écrit le long de Λ sous la forme $g(x^l, 0) = g_{jk}(x^l, 0) dx^j \otimes dx^k + g'_{jk}(x^l, 0) dy^j \otimes dy^k$ et d'après la proposition 3.6, $\delta \equiv g'_{jk}(x^l, 0) y^j y^k \pmod{\mathcal{I}^3(\Lambda)}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \int_U e^{-k_\alpha \delta(x)} f(x, k_\alpha) \bar{g}(x, k_\alpha) \mu_M(x) &= \int |dx^j| \int e^{-k_\alpha \delta(x)} f(x, k_\alpha) \bar{g}(x, k_\alpha) (\det[g])^{\frac{1}{2}} |dy^j| \\ &= \left(\frac{\pi}{k_\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} \int f_0 \cdot \bar{g}_0 (\det[g_{j,k}])^{\frac{1}{2}} |dx^j| + O(k^{-1}) \end{aligned}$$

en appliquant le lemme de la phase stationnaire. \square

On déduit de cette proposition que si $(u_\alpha) \in \mathcal{S}(\Lambda, t)$ admet pour symbole $\sum \hbar^l f_l$ alors

$$\|u_\alpha\| = O(k_\alpha^{-(N+1)}) \Leftrightarrow f^0 = \dots = f^N = 0$$

Plus généralement, on peut estimer par le lemme de la phase stationnaire (s_α, t_α) lorsque $(s_\alpha) \in \mathcal{S}(\Lambda, t)$, $(t_\alpha) \in \mathcal{S}(\Lambda', t')$ et l'intersection de Λ et Λ' est non-dégénérée au sens de Bott (cf. [3]). Par exemple, en dimension $n = 1$, supposons que l'intersection $\Lambda \cap \Lambda'$ soit transverse et réduite à un point x et que $t(x) = t'(x)$ (ce qui suppose $k_0 = k'_0$), nous avons alors

$$(s_\alpha, t_\alpha) = \left(\frac{\pi}{k_\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} f_0(x) \cdot \bar{g}_0(x) \sqrt{1 + ia} + O(k_\alpha^{-\frac{3}{2}})$$

où f_0 et g_0 sont les symboles principaux de s et t respectivement et $a = \cotan \theta$ si θ est l'angle entre $T_x \Lambda$ et $T_x \Lambda'$. La racine carrée est déterminée de telle sorte à être continue par rapport à a et à prendre la valeur 1 lorsque $a = 0$.

Considérons à présent l'action des opérateurs de Toeplitz sur les sections lagrangiennes.

Proposition 3.19. *Soit (T_k) un opérateur de Toeplitz et (v_α) une section lagrangienne de $\mathcal{S}(\Lambda, t)$. $(T_{k_\alpha} v_\alpha)$ est alors une section lagrangienne de $\mathcal{S}(\Lambda, t)$. De plus il existe une famille d'opérateurs $L_l : C^\infty(M) \times C^\infty(\Lambda) \rightarrow C^\infty(\Lambda)$ bilinéaires, qui ne dépendent que de Λ , M et sa structure kählerienne, et tels que si $\sigma(T_k) = \sum \hbar^l f_l$ et $\sigma(v_k) = \sum \hbar^l g_l$ alors*

$$\sigma(T_k v_k) = \sum \hbar^l \sum_{l_1+l_2+l_3=l} L_{l_1}(f_{l_2}, g_{l_3})$$

L_0 est l'application qui à $f \in C^\infty(M)$, $g \in C^\infty(\Lambda)$ associe $f|_\Lambda \cdot g$. Les opérateurs suivants sont localement de la forme

$$L_l(f, g)|_{\Lambda \cap V} = \sum_{|\alpha|+|\gamma| \leq 2l} a_{\alpha, \gamma} \partial_{\bar{z}}^\alpha f|_{\Lambda \cap V} \cdot \partial_x^\gamma g, \quad \forall f \in C^\infty(M), g \in C^\infty(\Lambda)$$

où V est un ouvert de M , (z^i) un système de coordonnées complexes définies sur V , (x^i) un système de coordonnées de Λ définies sur $\Lambda \cap V$, et $a_{\alpha, \gamma} \in C^\infty(\Lambda \cap V)$.

Preuve. Nous reprenons la deuxième partie de la preuve de la proposition 3.11 et calculons les termes suivants du développement asymptotique. Comme nous l'avons vu, le calcul est local et on se ramène à $k_0 = 1$ et donc $k_\alpha = k$. Soit un système de coordonnées complexes (z^i) définies sur un ouvert U de M et $s : U \rightarrow L$ une section de norme constante égale à 1. Introduisons comme dans la preuve de la proposition 3.4 une fonction $\rho \in C^\infty(U)$ telle que $\nabla s = (\partial \rho - \partial \bar{\rho}) \otimes s$ et une fonction $h \in C^\infty(\Lambda \cap U)$ telle que $t|_\Lambda = e^{ih} s|_\Lambda$. Nous utilisons les indices 1 et 2 pour distinguer le premier du second facteur de $U \times U$. Nous devons estimer

$$T_s v_k(x_1) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{5n}{4}} \tilde{s}^k(x_1) \int e^{ik\phi(x_1, x_2)} f(z_1, \bar{z}_2) g(z_2) d\mu_M(x_2)$$

où si $f \in C^\infty(U)$, $f(z_1, \bar{z}_2)$ désigne une fonction définie sur $U \times U$ qui coïncide avec f sur $\text{diag}(U) \simeq U$ et qui soit annulée à tout ordre le long de $\text{diag}(U)$ par $\partial_{\bar{z}_1^i}$ et $\partial_{z_2^i}$, et de même si $g \in C^\infty(\Lambda)$ alors $g(z)$ désigne une fonction définie sur U qui coïncide avec g sur Λ et qui soit annulée à tout ordre le long de Λ par $\partial_{\bar{z}^i}$. D'après la preuve de la proposition 3.4 et la proposition 2.1 du premier chapitre, la phase ϕ est donnée par

$$\phi(x_1, x_2) = i(\rho(x_1) + \bar{\rho}(x_2) - (\rho + \bar{\rho})(z_1, \bar{z}_2) + \rho(x_2) - \rho(z_2)) + h(z_2)$$

Le calcul se fait sur les développements de Taylor le long de $\text{diag}(\Lambda)$ et le résultat s'exprime à partir de développements de Taylor le long de Λ . Suivant les lemmes 3.1 et 3.2, nous écrivons les développements de Taylor le long de Λ des fonctions de $C^\infty(U)$ comme des séries formelles de $C^\infty(\Lambda)[[Z^i]]$, où les fonctions Z_1^i sont associées aux champs de vecteurs ∂_{z^i} . De même, nous identifions les développements de Taylor le long de $\text{diag}(\Lambda)$ des fonctions de $C^\infty(U \times U)$ à des séries formelles de $C^\infty(\Lambda)[[\bar{Z}_1^i, Z_2^i, \bar{Z}_2^i]]$, où les fonctions $\bar{Z}_1^i, Z_2^i, \bar{Z}_2^i$ sont associées aux champs de vecteurs $\partial_{\bar{z}_1^i}, \partial_{z_2^i}, \partial_{\bar{z}_2^i}$. Précisons que les fonctions \bar{Z}_2^i ne sont pas les conjuguées des Z_2^i . Comme nous l'avons vu, l'idéal engendré par les $\partial_{z_2^i} \phi$ et $\partial_{\bar{z}_2^i} \phi$ est l'ensemble \mathcal{J} composé des fonctions dont le développement de Taylor est dans l'idéal engendré par les Z_2^i, \bar{Z}_2^i . Si le développement de Taylor de $f \in C^\infty(U \times U)$ s'écrit

$$\sum f_{\alpha,\beta,\gamma} Z_1^\alpha Z_2^\beta \bar{Z}_2^\gamma$$

alors le développement de Taylor d'une fonction $g \in C^\infty(U)$ telle que $g(x_1) = f(x_1, x_2)$ mod \mathcal{J} s'écrit

$$\sum f_{\alpha,0,0} \bar{Z}^\alpha$$

où nous identifions $C^\infty(\text{diag } \Lambda)$ et $C^\infty(\Lambda)$. Nous avons $F(x) = e^{i\varphi(x)} s(x)$ avec $\varphi(x) = i(\rho(x) - \rho(z)) + h(z)$. Ecrivons le développement de Taylor de $\phi(x_1, x_2) - \varphi(x_1)$. En notant $G_{\alpha,\beta} = \partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta (\rho + \bar{\rho})|_\Lambda$, nous avons

$$\begin{aligned} \rho(x_2) + \bar{\rho}(x_2) &\sim \sum_{\alpha,\beta} \frac{G_{\alpha,\beta}}{\alpha! \beta!} Z_2^\alpha \bar{Z}_2^\beta & \rho(z_1) + ih(z_1) &\sim G_{0,0} + ih \\ (\rho + \bar{\rho})(z_1, \bar{z}_2) &\sim \sum_{\beta} \frac{G_{0,\beta}}{\beta!} \bar{Z}_2^\beta & \rho(z_2) + ih(z_2) &\sim \sum_{\alpha} \frac{H_\alpha}{\alpha!} Z_2^\alpha \end{aligned}$$

où les H_α sont les restrictions à Λ des dérivées successives de $\rho(z) + ih(z)$ par rapport aux ∂_{z^i} . Nous en déduisons que

$$\phi(x_1, x_2) - \varphi(x_1) \sim i \sum_{|\alpha|>0, |\beta|>0} \frac{G_{\alpha,\beta}}{\alpha! \beta!} Z_2^\alpha \bar{Z}_2^\beta + i \sum_{|\alpha|>0} \frac{G_{\alpha,0} - H_\alpha}{\alpha!} Z_2^\alpha$$

Il découle de la preuve de la proposition 3.11 que $G_{i,0} = H_i$. La matrice de $-id_{x_2}^2 \phi(x, x)$ où $x \in \Lambda$ dans la base $\partial_{z_2^i}, \partial_{\bar{z}_2^i}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} G_{ij,0} - H_{ij} & G_{i,j} \\ G_{j,i} & 0 \end{pmatrix}$$

D'après (3.10), $G_{ij,0} - H_{ij} = i\omega(q(\partial_{z^i}), \partial_{z^j}) = q_i^l G_{j,l}$. L'inverse de cette matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & G^{i,j} \\ G^{j,i} & -q_i^j G^{l,j} \end{pmatrix}$$

Appliquant le théorème 7.7.12 de [7], il vient

$$T_s v_k(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{n}{4}} e^{ik\varphi(x)} s^k(x) h(x, k) + O(k^{-\infty})$$

où $h(x, k)$ admet un développement asymptotique $\sum_l k^{-l} h_l(x)$ pour la topologie C^∞ . De plus, le développement de Taylor le long de Λ des coefficients est donné par

$$(3.16) \quad h_l \sim [\det(G_{ij})]^{-1} \sum_{k=l}^{3l} \frac{(-1)^{l-k}}{k!(k-l)!} \left[\Delta^k (R^{k-l} F.G.D) \right]_{\substack{Z_2^i = \bar{Z}_2^i = 0 \\ \bar{Z}^i = \bar{Z}_1^i}}$$

F, G sont les séries formelles associées aux développements de Taylor de $f(z_1, \bar{z}_2)$ et $g(z_2)$:

$$F = \sum_{\beta} \frac{1}{\beta!} \partial_{\bar{z}}^{\beta} f|_{\Lambda} \bar{Z}_2^{\beta}, \quad G = \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}}{\alpha!} Z_2^{\alpha}$$

où les g_{α} sont les restrictions à Λ des dérivés successives de $g(z)$ par rapport aux ∂_{z_i} . D'autre part,

$$R = \sum_{\substack{|\alpha|>0, |\beta|>0, \\ |\alpha|+|\beta|\geq 3}} \frac{G_{\alpha,\beta}}{\alpha!\beta!} Z_2^{\alpha} \bar{Z}_2^{\beta} + \sum_{|\alpha|\geq 3} \frac{G_{\alpha,0} - H_{\alpha}}{\alpha!} Z_2^{\alpha}$$

D est la série formelle associée au développement de Taylor de $\det[\partial_{z_i} \partial_{\bar{z}_j}(\rho + \bar{\rho})](x_2)$ et Δ est l'opérateur

$$\Delta = \sum_{i,j} G^{i,j} \partial_{Z_2^i} \partial_{\bar{Z}_2^j} - \frac{1}{2} q_i^i G^{l,j} \partial_{\bar{Z}_2^i} \partial_{\bar{Z}_2^j}$$

Les variables formelles \bar{Z}_1^i n'intervenant pas dans le calcul, les fonctions h_l sont annulées à tout ordre le long de Λ par les champs de vecteurs $\partial_{\bar{z}_i}$ et leur restriction à Λ est donnée par la formule ci-dessus. Pour montrer que les L_l s'écrivent bien sous la forme énoncée dans le théorème, il suffit de vérifier que $g_{\alpha} = P.g$ où P est un opérateur différentiel agissant sur $C^\infty(\Lambda)$. La différentielle de $g(z)$ en $x \in \Lambda$ s'annule sur $T_x^{0,1} M$ et sa restriction à $T_x \Lambda$ est dg . Par conséquent,

$$(3.17) \quad g_i = (\partial_{z^i} g(z))|_{\Lambda} = q^c(\partial_{z^i}).g$$

Donc g_i a bien la forme souhaitée. On généralise ceci au g_{α} par récurrence sur $|\alpha|$ en remarquant que $\partial_{z^i} g(z)$ est aussi une fonction annulée à tout ordre le long de Λ par $\partial_{\bar{z}_i}$. Le calcul de $L_0(f, g)$ a déjà été fait dans la preuve de la proposition 3.11. \square

3.2 Calcul formel

Si M est une variété symplectique munie d'un star-produit $*$ et $\Lambda \subset M$ une sous-variété lagrangienne fermée de M , on appelle une quantification par déformation de Λ une application $L : C^\infty(M)[[\hbar]] \times C^\infty(\Lambda)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(\Lambda)[[\hbar]]$ qui vérifie

$$\begin{aligned} L(f_1, L(f_2, g)) &= L(f_1 * f_2, g), \quad \forall f_1, f_2 \in C^\infty(M)[[\hbar]], g \in C^\infty(\Lambda)[[\hbar]] \\ L(f, g) &= \sum \hbar^l \sum_{l_1+l_2+l_3=l} L_{l_1}(f_{l_2}, g_{l_3}) \text{ si } f = \sum \hbar^{l_1} f_{l_1} \text{ et } g = \sum \hbar^{l_2} g_{l_2} \end{aligned}$$

où les L_l sont des applications $C^\infty(M) \times C^\infty(\Lambda) \rightarrow C^\infty(\Lambda)$ localement de la forme

$$L_l(f, g)|_{\Lambda \cap V} = \sum_{|\alpha|+|\gamma| \leq 2l} a_{\alpha, \gamma} \partial_{\bar{x}}^\alpha f|_{\Lambda \cap V} \cdot \partial_y^\gamma g, \quad \forall f \in C^\infty(M), g \in C^\infty(\Lambda)$$

où $a_{\alpha, \gamma} \in C^\infty(\Lambda \cap V)$ si V est un ouvert de M , (x^i) un système de coordonnées de M définies sur V et (y^i) un système de coordonnées de Λ définies sur $\Lambda \cap V$.

Il découle de la proposition 3.19 que si M est une variété kählerienne compacte munie d'une préquantification (L, ∇) et du star-produit $*$ induit par la composition des opérateurs de Toeplitz, alors toute sous-variété lagrangienne fermée telle que le fibré $(L^{k_0}|_{\Lambda}, \nabla)$ soit trivial pour un certain $k_0 \in \mathbb{N}$ admet une quantification par déformation. Nous allons montrer que ceci s'étend aux sous-variétés lagrangiennes fermées de variétés kähleriennes quelconques. Rappelons que le star-produit $*$ induit par la composition des opérateurs de Toeplitz est bien défini sur les variétés kähleriennes qui ne sont pas nécessairement préquantifiables et compactes.

Proposition 3.20. *Toute sous-variété lagrangienne fermée Λ d'une variété kählerienne M munie du star produit induit par la composition des opérateurs de Toeplitz admet une quantification par déformation canonique.*

Preuve. Il suffit de montrer que pour tout $x \in \Lambda$, il existe un voisinage $U \subset M$ de x et une quantification par déformation de $(\Lambda \cap U, U)$ déterminée de manière unique par la structure kählerienne. Pour ce faire il suffit de considérer un ouvert U contractible, de sorte qu'il existe un unique fibré préquantifiant (L, ∇) de base U , et telle que $(L|_{\Lambda \cap U}, \nabla)$ soit trivial. On n'introduit pas de quantification \mathcal{H}_k associée à ces données car U n'étant pas compact on ne connaît pas ses propriétés. Par contre on considère une algèbre d'opérateurs $(P_k : C^\infty(U, L^k) \rightarrow C^\infty(U, L^k))$ proprement supportés et dont les noyaux sont de la forme (3.4). Considérons aussi un espace de sections lagrangiennes de la forme $F^k(x)a(x, k)$ où F est une section de L associée à Λ (cf. proposition 3.4), et a décrit l'ensemble des symboles de $S^0(U)$ dont le développement asymptotique $\sum_l k^{-l} a_l$ vérifie $\bar{Z}.a_l \equiv 0$ modulo $\mathcal{I}^\infty(U \cap \Lambda)$ quels que soient l et Z champs de vecteurs holomorphes. On définit les symboles de ces opérateurs et sections, et par le calcul symbolique on obtient une quantification par déformation. \square

Considérons à présent une variété symplectique M quelconque munie d'un star-produit $*$ et une sous-variété Λ lagrangienne fermée munie d'une quantification par déformation L . On remarquera que quel que soit $g \in C^\infty(\Lambda)[[\hbar]]$, il existe $f \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ telle que $L(f, 1) = g$. Soit

$$\mathcal{J} = \{f \in C^\infty(M)[[\hbar]] / L(f, 1) = 0\}$$

\mathcal{J} est un idéal à gauche de $(C^\infty(M)[[\hbar]], *)$. Il est de la forme $\sum \hbar^l P_l(\mathcal{I}(\Lambda)[[\hbar]])$, où les P_l sont des opérateurs différentiels et $P_0 = \text{Id}$. En effet, on construit une suite d'opérateurs différentiels Q_l telle que $L(f, 1) = \sum \hbar^l Q_l(f)|_{\Lambda}$ quel que soit f et $Q_0 = \text{Id}$; on choisit alors les P_l de sorte que $\sum \hbar^l P_l$ soit l'inverse de $\sum \hbar^l Q_l$.

Réciproquement considérons un idéal à gauche \mathcal{J}' de $(C^\infty(M)[[\hbar]], *)$ qui soit de la forme $\sum \hbar^l P'_l(\mathcal{I}(\Lambda)[[\hbar]])$ où $P'_0 = \text{Id}$. Identifiant $C^\infty(\Lambda)$ avec $C^\infty(M)/\mathcal{I}(\Lambda)$, on définit une application

$$L' : C^\infty(M)[[\hbar]] \times C^\infty(\Lambda)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(\Lambda)[[\hbar]]$$

On vérifie qu'il s'agit d'une quantification par déformation de Λ . De plus si $\mathcal{J}' = \mathcal{J}$, alors L et L' sont équivalentes dans le sens où il existe un isomorphisme R de $C^\infty((\Lambda)[[\hbar]])$, de la forme $R = \sum \hbar^l R_l$ où les R_l sont des opérateurs différentiels et $R_0 = \text{Id}$, tel que $L'(f, R(g)) = L(f, g)$ quels que soient $f \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ et $g \in C^\infty(\Lambda)[[\hbar]]$.

Dans [10], Xu montre qu'étant donné un variété symplectique M munie d'un star-produit $*$ et une sous-variété lagrangienne fermée Λ , il existe une sous-algèbre de $(C^\infty(M)[[\hbar]], *)$ de la forme $\sum \hbar^l P_l(\mathcal{I}(\Lambda)[[\hbar]])$. Il suggère que l'analogie quantique d'une variété lagrangienne est un idéal à gauche sans le montrer.

L'exemple le plus simple d'une quantification par déformation d'une variété lagrangienne est le suivant: $M = \mathbb{R}^{2n}$ muni de $\omega = dx^i \wedge dy^i$, $\Lambda = \{x = 0\}$ et

$$f_1 * f_2 = \sum_l i \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^l \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} (\partial_x^\alpha f_1)(\partial_y^\alpha f_2), \quad L(f, g) = \sum_l i \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^l \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} (\partial_x^\alpha f)(\partial_y^\alpha g)$$

Montrons que localement toute quantification par déformation d'une variété lagrangienne est équivalente à cet exemple.

Proposition 3.21. *Soit une variété symplectique M' munie d'un star-produit $*'$ et une sous-variété Λ' lagrangienne fermée munie d'une quantification par déformation L' . Alors pour tout $x \in M'$, il existe un voisinage U de x muni d'un système de coordonnées (x^i, y^i) telles que $\omega = dx^i \wedge dy^i$ et $\Lambda \cap U = \{x = 0\}$, une bijection P de $C^\infty(U)[[\hbar]]$ (resp. Q de $C^\infty(\Lambda \cap U)[[\hbar]]$) de la forme $\sum \hbar^l P_l$ (resp. $\sum \hbar^l Q_l$) où les P_l (resp. Q_l) sont des opérateurs différentiels et $P_0 = \text{Id}$ (resp. $Q_0 = \text{Id}$) tels que*

$$P(f_1 *' f_2) = P(f_1) * P(f_2), \quad Q(L'(f, g)) = L(P(f), Q(g))$$

quels que soient $f_1, f_2 \in C^\infty(M')$, $g \in C^\infty(\Lambda')$ à support compact inclu dans U .

Preuve. L'existence du système de coordonnées découle du lemme de Darboux. De plus deux star-produits sont localement équivalents, nous pouvons donc supposer que $* = *'$. L' définit un idéal \mathcal{J} de la forme $\sum_l \hbar^l P_l(C^\infty(\Lambda \cap U)[[\hbar]])$. Soient $f^i = x^i + 0(\hbar)$ pour $i = 1, \dots, n$ des éléments de \mathcal{J} . On vérifie qu'ils forment un système de générateurs de \mathcal{J} . De plus on peut choisir les f^i de sorte qu'ils commutent deux à deux. En effet, construisons les par approximations successives. Soient $g^i \in C^\infty(U)[[\hbar]]$ tels que $x^i + \hbar g^i \in \mathcal{J}$ et

$$[x^i + g^i, x^j + g^j] = \frac{\hbar^m}{2i} g^{i,j} + 0(\hbar^{m+1})$$

avec $m \geq 2$. Nous avons

$$[x^i + g^i, [x^j + g^j, x^k + g^k]] = -\frac{1}{4} \hbar^{m+1} \partial_{y^i} g^{j,k} + 0(\hbar^{m+2})$$

Utilisant l'identité de Jacobi, il vient que $d_y(g^{j,k}dy^j \wedge dy^k) = 0$ (on traite les variables x^i comme des paramètres). Appliquant le lemme de Poincaré, il existe h^j telles que $\partial_{y^i} h^j - \partial_{y^j} h^i = g^{i,j}$. De plus $[x^i + g^i, x^j + g^j]$ appartient à \mathcal{J} et donc les $g^{i,j}$ s'annulent le long de Λ . Appliquant à nouveau le lemme de Poincaré, il existe $h(y)$ telle que $\partial_{y^i} h = h^i(0, y)$. Soient h_k^i telles que $h^i = h^i(0, y) + x^k h_k^i$. Posons

$$f^i = x^i + \hbar g^i + \hbar^{m-1} \sum_k h_k^i * (x^k + \hbar g^k)$$

On vérifie alors que $[f^i, f^j] = 0(\hbar^{m+1})$. En réitérant ceci et en passant à la limite il vient $[f^i, f^j] = 0$. Notons que $[x^i, x^j] = 0$. D'après un lemme classique, il existe $g \in C^\infty(U)[[\hbar]]$ elliptique telle que $g^{-1} * f^i * g = x^i$. On se ramène ainsi à $\mathcal{J} = \mathcal{I}(\Lambda)[[\hbar]]$. Comme on l'a vu plus haut, L' est alors équivalente à la quantification par déformation de Λ induite par \mathcal{J} qui n'est autre que L . \square

3.3 Calcul sous-symbolique

L'objet de cette partie est d'identifier l'opérateur $L_1 : C^\infty(M) \times C^\infty(\Lambda) \rightarrow C^\infty(\Lambda)$. Pour ce faire, introduisons quelques notations. Si $x \in \Lambda$, rappelons que q désigne la projection de $T_x M \otimes \mathbb{C}$ d'image $T_x^{0,1} M$ de noyau $T_x \Lambda \otimes \mathbb{C}$. Soit q^c la projection de $T_x M \otimes \mathbb{C}$ d'image $T \Lambda \otimes \mathbb{C}$ et de noyau $T^{0,1} M$. Soit P_{∇}^2 l'opérateur

$$(3.18) \quad P_{\nabla}^2 : C^\infty(M) \xrightarrow{\partial} C^\infty(M, \Lambda^{1,0} M) \xrightarrow{\nabla^{\Lambda^{1,0} M}} C^\infty(M, \Lambda^{1,0} M \otimes \Lambda M)$$

où $\nabla^{\Lambda^{1,0} M}$ désigne la dérivation covariante canonique du fibré holomorphe hermitien $\Lambda^{1,0} M$. Soit $\bar{P}_{\nabla}^2 : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{0,1} M \otimes \Lambda M)$ l'opérateur conjugué. La restriction de q à $T_x^{1,0} M$ définit un tenseur

$$q_k^j dz^k \otimes \partial_{\bar{z}^j} \in C^\infty(\Lambda, \Lambda^{1,0} M \otimes T^{0,1} M)$$

Après contraction avec $G^{-1} = G^{jk} \partial_{z^j} \otimes \partial_{\bar{z}^k}$, cela donne le tenseur

$$q_l^j G^{l,k} \partial_{\bar{z}^j} \otimes \partial_{\bar{z}^k} \in C^\infty(\Lambda, T^{0,1} M \otimes T^{0,1} M)$$

à partir duquel nous définissons l'opérateur $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(\Lambda)$ par

$$Df = q_l^j G^{l,k} f_{j\bar{k}}|_{\Lambda} \quad \text{où} \quad \bar{P}_{\nabla}^2 f = f_{j\bar{k}} d\bar{z}^j \otimes d\bar{z}^k$$

Enfin, r désigne la courbure scalaire de la dérivation covariante canonique du fibré hermitien holomorphe $T^{1,0} M$ et X_f le champ de vecteurs hamiltonien de $f \in C^\infty(M)$

$$df + \iota_{X_f} \omega = 0$$

Proposition 3.22. *Si $f \in C^\infty(M)$, $g \in C^\infty(\Lambda)$ alors*

$$L_1(f, g) = -\frac{1}{2}(r \cdot f)|_{\Lambda} g - \frac{1}{2}(Df) \cdot g - i\mathcal{L}_{q^c(X_f)} \cdot g$$

Preuve. On reprend la preuve de la proposition 3.19. Choisissons un système de coordonnées normales en $x \in M$, i.e. tel que $G_{i,jk}(x) = G_{ij,k}(x) = 0$. A partir de (3.16) il vient par un calcul direct en x

$$h_1 = \frac{1}{2}G_{ij,ij} \cdot f \cdot g - \frac{1}{2}g_i^i G^{l,j}(\partial_{\bar{z}^i} \partial_{\bar{z}^j} f) \cdot g + G^{i,j}(\partial_{\bar{z}^i} f) g_j$$

où $g_i = (\partial_{z^i} g(z))|_{\Lambda}$ (en fait une partie de ce calcul a déjà été faite dans le second chapitre). Nous reconnaissons alors la courbure scalaire r et $\bar{P}_{\nabla}^2 f$, qui en x vérifient

$$r = G_{ij,ij}, \quad \bar{P}_{\nabla}^2 f = (\partial_{\bar{z}^i} \partial_{\bar{z}^j} f) d\bar{z}^i \otimes d\bar{z}^j$$

Pour identifier le dernier terme de la somme, notons que

$$X_f = -iG^{j,k}(\partial_{z^j} f) \partial_{\bar{z}^k} + iG^{j,k}(\partial_{\bar{z}^k} f) \partial_{z^j}$$

d'où $q^c(X_f) = iq^c(G^{j,k} \partial_{\bar{z}^k} f \partial_{z^j})$. On conclut alors avec (3.17). \square

L'expression de $L_1(f, g)$ se simplifie lorsque le champ de vecteurs hamiltonien de f est tangent à Λ . Rappelons que la deuxième forme fondamentale de Λ est la section

$$\sigma \in C^\infty(\Lambda, T^* \Lambda \otimes T^* \Lambda \otimes J T \Lambda) \text{ telle que } \sigma(X, Y) = \nabla_X^{TM} Y - \nabla_X^{T\Lambda} Y$$

où ∇^{TM} et $\nabla^{T\Lambda}$ désignent les connexions de Levi-Civita de (M, g) et $(\Lambda, g|_{T\Lambda})$ respectivement. Le champ de vecteurs de courbure moyenne est $H \in C^\infty(\Lambda, J T \Lambda)$ défini par $H = \text{tr } \sigma$. On note $\text{div}_\Lambda : C^\infty(\Lambda, T\Lambda) \rightarrow C^\infty(\Lambda)$ la divergence pour μ_Λ .

Proposition 3.23. *Si le champ de vecteurs hamiltonien de $f \in C^\infty(M)$ est tangent à Λ , alors*

$$(Df)|_{\Lambda} = (\Delta f)|_{\Lambda} + H \cdot f + i \text{div}_\Lambda(X_f)$$

et par conséquent

$$L_1(f, g) = -\frac{1}{2}(r \cdot f + \Delta f)|_{\Lambda} g - \frac{i}{2} \text{div}_\Lambda(X_f) \cdot g - \frac{1}{2}(H \cdot f) \cdot g - i \mathcal{L}_{X_f} \cdot g$$

Enfin, on peut se ramener au symbole de type Weyl.

Corollaire 3.24. *Si (T_k) admet pour symbole principal f_0 et pour symbole sous-principal f_1^w , $\Lambda \subset \{f_0 = 0\}$ et $(v_k) \in \mathcal{S}(\Lambda, t)$ admet pour symbole principal g_0 , alors le symbole principal de $(T_k v_k)$ s'annule, autrement dit $\sigma(T_k v_k) = \sum_{l \geq 1} \hbar^l h_l$ et de plus*

$$h_1 = -i \mathcal{L}_{X_{f_0}} \cdot g_0 + (f_1^w - \frac{1}{2}(H \cdot f_0)) \cdot g_0 - \frac{i}{2} \text{div}_\Lambda(X_{f_0}) \cdot g_0$$

Preuve de la proposition 3.23. Soient (X_j) une base orthonormée de $T_x \Lambda$ que l'on complète avec les vecteurs $Y_j = JX_j$ en une base orthonormée de $T_x M$ et (ξ^j, η^j) la base duale ($\eta^j = -J^t \xi^j$). Les vecteurs $Z_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_j - iY_j)$ forment une base de $T_x^{1,0} M$ dont la base duale

est ($\zeta^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^j + i\eta^j)$). On vérifie que $G = \zeta^j \otimes \bar{\zeta}^j$ et donc $G^{-1} = Z_j \otimes \bar{Z}_j$. La restriction de q à $T^{1,0}M$ est $-\bar{\zeta}^j \otimes Z_j$, ce qui après contraction avec G^{-1} donne

$$-Z_j \otimes Z_j = -\frac{1}{2}(X_j \otimes X_j - Y_j \otimes Y_j) + \frac{i}{2}(X_j \otimes Y_j + Y_j \otimes X_j)$$

Rappelons que sur une variété kählerienne, la connexion de Levi-Civita ∇^{TM} préserve $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$, est compatible avec G , et sa restriction à $T^{1,0}M$ est la dérivation covariante canonique du fibré hermitien holomorphe $T^{1,0}M$ (cf. [1]). Par dualité, ∇^{T^*M} préserve $\Lambda^{1,0}M$ et $\Lambda^{0,1}M$, est compatible avec G^{-1} et sa restriction à $\Lambda^{1,0}M$ est la dérivation covariante canonique du fibré hermitien holomorphe $\Lambda^{1,0}M$. Ainsi, si l'on prolonge les (X_j) sur un voisinage U de x de sorte qu'ils forment une base orthonormée de $T_y\Lambda$ pour $y \in \Lambda \cap U$ et que l'on définit comme ci-dessus les champs de vecteurs et covecteurs $Y_j, Z_j, \xi^j, \eta^j, \zeta^j$, nous avons sur $U \cap \Lambda$

$$\begin{aligned} Df &= -\langle \nabla^{T^*M} df, Z_j \otimes Z_j \rangle, & \Delta f &= \langle \nabla^{T^*M} df, Z_j \otimes \bar{Z}_j \rangle \\ (3.19) \quad \Rightarrow Df - \Delta f &= -\langle \nabla^{T^*M} df, X_j \otimes X_j \rangle + i\langle \nabla^{T^*M} df, Y_j \otimes X_j \rangle \end{aligned}$$

Ecrivons $df = (X_j f)\xi^j + (Y_j f)\eta^j$, et remarquons que $X_j.f$ s'annule sur Λ car X_j est tangent à Λ . Nous avons alors au dessus de $U \cap \Lambda$

$$\begin{aligned} \langle \nabla^{T^*M} df, X_j \otimes X_j \rangle &= (Y_k f) \langle \nabla_{X_j}^{T^*M} \eta^k, X_j \rangle \\ &= -(Y_k f) \langle \eta^k, \nabla_{X_j}^{TM} X_j \rangle && \text{car } d\langle \eta^k, X_j \rangle = 0 \\ &= -(Y_k f) \langle \eta^k, \nabla_{X_j}^{TM} X_j - \nabla_{X_j}^{T\Lambda} X_j \rangle && \text{car } \nabla_{X_j}^{T\Lambda} X_j \text{ est tangent à } \Lambda \end{aligned}$$

Par conséquent, $\langle \nabla^{T^*M} df, X_j \otimes X_j \rangle = -H.f$. Identifions à présent le deuxième terme de (3.19)

$$\langle \nabla^{T^*M} df, Y_j \otimes X_j \rangle = X_j(Y_j f) + (Y_k f) \langle \nabla_{X_j}^{T^*M} \eta^k, Y_j \rangle = X_j(Y_j f) - (Y_k f) \langle \eta^k, \nabla_{X_j}^{TM} Y_j \rangle$$

au dessus de $U \cap \Lambda$. Rappelons que $\text{div}_\Lambda X = -\text{tr} \nabla^{T\Lambda} Y$ (cf cite). De $X_f = -(Y_k f)X_k$ au dessus de Λ , on déduit

$$\begin{aligned} \text{div}_\Lambda X_f &= X_j(Y_j f) + (Y_k f) \langle \xi^j, \nabla_{X_j}^{T\Lambda} X_k \rangle \\ &= X_j(Y_j f) - (Y_k f) \langle \xi^k, \nabla_{X_j}^{T\Lambda} X_j \rangle \end{aligned}$$

car $\langle \xi^j, \nabla_{X_j}^{T\Lambda} X_k \rangle = g(X_j, \nabla_{X_j}^{T\Lambda} X_k) = -g(\nabla_{X_j}^{T\Lambda} X_j, X_k) = -\langle \xi^k, \nabla_{X_j}^{T\Lambda} X_j \rangle$. Or

$$\nabla_{X_j}^{T\Lambda} X_j - \nabla_{X_j}^{TM} X_j \in JT\Lambda$$

Il vient alors $\langle \nabla^{T^*M} df, Y_j \otimes X_j \rangle = \text{div}_\Lambda X_f$. □

3.4 Calcul symbolique avec paramètres

Pour la preuve des conditions de Bohr-Sommerfeld, nous devons généraliser les propositions 3.18 et 3.19 aux sections lagrangiennes dépendant de paramètres qui ont été introduites dans la deuxième partie du paragraphe 2.2. Considérons donc que M est localement fibré par des

tores lagrangiens, i.e. qu'un ouvert U de M soit difféomorphe à $B_r \times \mathbb{T}^n$ avec $\omega = d\xi^i \wedge dx^i$. Introduisons une section t de $p^*L \rightarrow B_r \times \mathbb{R}^n$ qui soit plate le long des $\{u\} \times \mathbb{R}^n$, où p est la projection $B_r \times \mathbb{R}^n \rightarrow B_r \times \mathbb{T}^n$. Rappelons qu'on associe alors à un symbole $(f(\cdot, k))$ de $S(B_r \times \mathbb{R}^n)$ vérifiant certaines conditions de périodicité (3.14) et à une suite (u_α, k_α) vérifiant (3.15), une suite s_α de sections lagrangiennes (cf. proposition 3.14).

Soit $f_0 \in C^\infty(B_r \times \mathbb{R}^n)$ telle que $f(\cdot, k) = f_0 + O(k^{-1})$. La fonction $|f_0|^2$ est alors invariante par l'action de \mathbb{Z}^n et il existe donc $g \in C^\infty(B_r \times \mathbb{T}^n)$ telle que $p^*g = |f_0|^2$. La norme des s_α est estimée par

$$(3.20) \quad (s_\alpha, s_\alpha) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\Lambda_{u_\alpha}} g(u_\alpha, x) \mu_{\Lambda_{u_\alpha}}(x) + O(k_\alpha^{-1})$$

Considérons une autre section lagrangienne (s'_α) définie à partir du même feuilletage lagrangien et associée à un symbole $(f'(\cdot, k))$ et une suite (u'_α, k'_α) . Supposons que $k_\alpha = k'_\alpha$. Si $|u_\alpha - u'_\alpha|$ est minoré par une constante strictement positive, on voit facilement que $(s_\alpha, s'_\alpha) = O(k^{-\infty})$. Si au contraire $u_\alpha = u'_\alpha$ on estime (s_α, s'_α) par une formule similaire à (3.20). Pour les situations intermédiaires, mentionnons l'estimation suivante que l'on obtient par le lemme de la phase stationnaire

$$|(s_\alpha, s'_\alpha)| \leq C e^{-k_\alpha c |u_\alpha - u'_\alpha|^2} + O(k_\alpha^{-\infty})$$

où C et c sont des constantes positives indépendantes de u_α, u'_α et k_α .

Soit (T_k) un opérateur de Toeplitz. La suite $(T_{k_\alpha} s_\alpha)$ est alors une section lagrangienne du même type que (s_α) . Précisément il existe une application $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -linéaire T agissant sur $C^\infty(B_r \times \mathbb{R}^n)[[\hbar]]$ de la forme

$$(Tf)(\xi, x) = \sum_{l, \alpha} \hbar^l a_{l, \alpha}(\xi, x) \partial_x^\alpha f(\xi, x), \quad \forall f \in C^\infty(B_r \times \mathbb{R}^n)$$

où les $a_{l, \alpha}$ sont invariants par l'action de \mathbb{Z}^n . Notons $\sum k^{-l} f_l$ le développement asymptotique de $(f(\cdot, k))$. Introduisons un symbole $(g(\cdot, k)) \in S(B_r \times \mathbb{R}^n)$ tel que

$$g(\cdot, k) = \sum k^{-l} g_l + O(k^{-\infty}), \quad T(\sum \hbar^l f_l) = \sum \hbar^l g_l$$

$(g(\cdot, k))$ vérifie alors les mêmes conditions de périodicité (3.14) que $(f(\cdot, k))$ et la suite de sections lagrangiennes associées à $(g(\cdot, k))$ et (u_α, k_α) (cf. proposition 3.14) est $(T_{k_\alpha} s_\alpha)$ à un $O(k_\alpha^{-\infty})$ près.

L'opérateur T est déterminé de la manière suivante: en le restreignant aux séries formelles invariantes par l'action de \mathbb{Z}^n , on considère qu'il agit sur $C^\infty(B_r \times \mathbb{T}^n)[[\hbar]]$. Soit la sous-variété lagrangienne $\Lambda_u = \{u\} \times \mathbb{T}^n \subset M$. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3.2, l'opérateur (T_k) induit une application

$$T^u : C^\infty(\Lambda_u)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(\Lambda_u)[[\hbar]]$$

Soit i_u le plongement $\Lambda_u \rightarrow B_r \times \mathbb{T}^n$. Alors si $h \in C^\infty(B_r \times \mathbb{T}^n)$, nous avons

$$T^u(i_u^* h) = i_u^* T(h)$$

ce qui caractérise l'application T .

4 Les conditions de Bohr-Sommerfeld

Nous énonçons d'abord le résultat en dimension 2 ($n = 1$) et le discutons. Nous donnons ensuite le résultat et sa preuve en dimension quelconque.

4.1 Dimension deux

Soit (T_k) un opérateur de Toeplitz auto-adjoint de symbole principal f_0 . Soit $E_0 \in \mathbb{R}$ une valeur régulière de f_0 telle que $f_0^{-1}(\{E_0\})$ soit connexe. Il existe alors un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ contenant E_0 tel que $f_0^{-1}(J)$ soit difféomorphe à l'anneau $J \times \mathbb{T}$ de sorte que les cercles $\{E\} \times \mathbb{T}$ soient les fibres de f_0 .

Pour $E \in J$, notons Λ_E la sous-variété lagrangienne $\{f_0 = E\}$. Définissons $g_0(E) \in \mathbb{R}$ comme étant l'holonomie de Λ_E : le transport parallèle le long de la courbe

$$(3.21) \quad [0, 1] \rightarrow M, \quad s \rightarrow \varphi(E, s)$$

définit une application $L_{\varphi(E,0)} \rightarrow L_{\varphi(E,0)}$ qui est une multiplication par un nombre complexe $c(E)$ de module 1. Choisisant une détermination continue du logarithme, on pose alors $g_0(E) = 2\pi i \ln(c(E))$, ce qui définit une fonction C^∞ à valeurs réelles.

Soit X le champ de vecteurs hamiltonien de f_0 . Notons α_E la 1-forme de Λ_E telle que $\langle \alpha_E, X \rangle = 1$, et f_1^w le sous-symbole de (T_k) . Introduisons un champ de vecteurs t tangent à Λ_E tel que $|t| = 1$ et n un champ de vecteurs normal tel que (t, n) forme une base orthonormée orientée de $T_x M$ en tout $x \in \Lambda_E$, autrement dit $n = Jt$. On définit alors la courbure géodésique $\tau_E \in C^\infty(\Lambda_E)$ par $\tau_E = g(\nabla_t t, n)$. Soit γ_E la 1-forme de Λ_E telle que $\langle \gamma_E, t \rangle = 1$. τ_E et γ_E dépendent du choix de t , i.e. d'une orientation de Λ_E , par contre le produit $\tau_E \gamma_E$ n'en dépend pas. Nous posons

$$g_1(E) = -\frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Lambda_E} f_1^w \alpha_E + \frac{1}{2} \int_{\Lambda_E} \tau_E \gamma_E \right)$$

où l'orientation de Λ_E est donnée par (3.21). g_1 est une fonction C^∞ à valeurs réelles.

Soit $\text{Sp}(T_k)$ l'ensemble des valeurs propres de T_k . Énonçons les conditions de Bohr-Sommerfeld.

Proposition 3.25. *Il existe une suite de fonctions $g_l \in C^\infty(J)$ ($l = 2, \dots$) à valeurs réelles telle que pour tout intervalle ouvert I dont l'adhérence est compacte et incluse dans J et pour toutes suites $(k_\alpha, E_\alpha), (k'_\alpha, E'_\alpha)$ de $\mathbb{N} \times I$, on ait*

- i $E_\alpha \in \text{Sp}(T_{k_\alpha}) + O(k_\alpha^{-\infty}) \iff g(E_\alpha, k_\alpha) \in k_\alpha^{-1}\mathbb{Z} + O(k_\alpha^{-\infty})$
- ii Si $E_\alpha \in \text{Sp}(T_{k_\alpha}), E'_\alpha \in \text{Sp}(T_{k'_\alpha})$ et $E_\alpha = E'_\alpha + O(k_\alpha^{-\infty})$, alors pour k_α suffisamment grand, $E_\alpha = E'_\alpha$ et E_α est de multiplicité 1

où $(g(\cdot, k))$ est une suite de fonctions de $C^\infty(J)$ tel que $g(E, k) = \sum_{l \leq 0} k^{-l} g_l(E) + O(k^{-\infty})$.

Les conditions de Bohr-Sommerfeld modulo $O(k^{-2})$ s'écrivent

$$E_\alpha \in \text{Sp}(T_{k_\alpha}) + O(k_\alpha^{-2}) \iff g_0(E_\alpha) + k_\alpha^{-1}g_1(E_\alpha) \in k_\alpha^{-1}\mathbb{Z} + O(k_\alpha^{-2})$$

Lorsque l'espace des phases est un cotangent T^*Q , le terme principal des conditions de Bohr-Sommerfeld fait intervenir l'action $A(E)$ de Λ_E , c'est à dire l'intégrale sur Λ_E de la 1-forme symplectique $\xi^j dx^j$. Notons que $(2\pi)^{-1}A(E)$ s'interprète comme l'holonomie d'un fibré préquantifiant, en l'occurrence du fibré trivial $L \rightarrow T^*Q$ muni de la connection $-i\xi^j dx^j$, et donc on retrouve la même quantité au premier ordre. Le terme sous-principal dans le cas d'un cotangent est somme de l'intégrale du sous-symbole de Weil contre la mesure α_E et de l'indice de Maslov de Λ_E . Dans notre contexte, on retrouve bien l'intégrale du sous-symbole. D'autre part, l'indice de Maslov se calcule à partir de Λ_E et de la polarisation réelle de T^*Q , i.e. de l'espace tangent au fibre. De manière similaire, l'intégrale de la courbure géodésique est déterminée par la sous-variété lagrangienne Λ_E et la polarisation complexe $T^{1,0}M$, en effet celle-ci associée à la structure symplectique induit la structure riemannienne.

Exemple 3.26. Si $M = \mathbb{R}^2$ est munie de sa structure riemannienne usuelle et $S^1 \simeq \Lambda \rightarrow M$ est une courbe immergée, alors $\frac{1}{2\pi} \int_\Lambda \tau\gamma$ est le degré d de l'application tangente

$$\Lambda \rightarrow S^1, \quad x \rightarrow t(x)$$

où l'on identifie $T_x M$ avec \mathbb{R}^2 et donc les vecteurs de norme 1 avec le cercle S^1 . Dans ce cas, l'indice de Maslov de Λ est $2d$. Si la courbe est plongée, $d = \pm 1$, donc la contribution de la courbure géodésique à g_1 est $\pm \frac{1}{2}$. De plus, la fonction f_1^w , que nous avons appelée le sous-symbole de (T_k) , est le sous-symbole de Weyl usuel de $(U^{-1}T_k U)$ où U est la transformée de Bargman. Par conséquent, à supposer que les conditions de Bohr-Sommerfeld que nous avons données s'appliquent ici ($M = \mathbb{C}$ n'est pas compact), on retrouve le résultat attendu. \square

Rappelons que l'intégrale de la courbure géodésique est l'un des termes de la formule de Gauss-Bonnet: soit U un ouvert de M sur lequel est défini un système de coordonnées, $D \subset U$ un domaine dont le bord est C^∞ par morceaux, $(\alpha^i)_{i=1, \dots, m}$ les angles intérieurs aux coins, alors

$$\int_{\partial D} \tau\gamma + \int_D K\mu + \sum (\pi - \alpha^i) = 2\pi$$

où $K \in C^\infty(M)$ est la courbure de Gauss. Cette formule peut être utile pour calculer la courbure géodésique.

Exemple 3.27. Si M est la sphère ($M = \mathbb{C}P^1$) de volume 2π munie de sa métrique de courbure constante ($K = 2$) et $\Lambda \rightarrow M$ une courbe plongée orientée, alors celle-ci est le bord d'un domaine D et donc $\int_\Lambda \tau\gamma$ est égale à $(2\pi - 2 \text{Aire}(D))$. \square

Sur cet exemple, il est clair que $\int_\Lambda \tau\gamma$ n'est pas constante lorsque l'on déforme Λ à la différence de l'indice de Maslov d'une courbe immergée dans un cotangent.

Notons T_E la période de Λ_E . La dérivée de g_0 est

$$g'_0(E) = \frac{1}{2\pi} T_E$$

Par conséquent, g_0 est un difféomorphisme de J sur $K = g_0(J)$. A l'aide de la formule de Taylor, on montre qu'il existe une unique suite (h_l) de $C^\infty(K)$ telle que si $h(x, k) = \sum_l k^{-l} h_l(x) + O(k^{-\infty})$ alors

$$h(g(x, k), k) = x + O(k^{-\infty})$$

sur tout ouvert U dont l'adhérence est incluse dans J (ce qui nous assure que la composition est bien définie pour k suffisamment grand). De plus h_0 est la fonction réciproque de g_0 et $h_1 = -g_1 \circ h_0 \cdot (g'_0 \circ h_0)^{-1}$. A l'aide d'une telle fonction h , nous pouvons déduire de la description implicite des valeurs propres donnée par la condition de Bohr-Sommerfeld une description paramétrique. Par exemple, nous pouvons localiser les valeurs propres de (T_k) dans les intervalles

$$I_{k,N}(\tau) = [h(\tau, k) - k^{-N}, h(\tau, k) + k^{-N}]$$

de la manière suivante.

Corollaire 3.28. *Soit F un intervalle compact inclus dans J , il existe alors k_0 tel pour $k \geq k_0$, $N \geq 2$ et pour tout couple (τ, τ') de $k^{-1}\mathbb{Z} \cap g_0(F)$*

$$\tau \neq \tau' \Rightarrow I_{k,N}(\tau) \cap I_{k,N}(\tau') = \emptyset$$

Soit $N \geq 2$. Il existe alors $k_N \geq k_0$ tel que pour $k \geq k_N$ et $\tau \in k^{-1}\mathbb{Z} \cap g_0(F)$, $I_{k,N}(\tau)$ contienne exactement une valeur propre de T_k et sa multiplicité est 1. Si I est un fermé inclus dans l'intérieur de F , alors il existe $k_{N,I} \geq k_N$ tel que pour $k \geq k_{N,I}$

$$Sp(T_k) \cap I \subset \bigcup_{\tau \in k^{-1}\mathbb{Z} \cap g_0(F)} I_{k,N}(\tau)$$

Preuve. La dérivée de h_0 ne s'annule pas sur $g_0(F)$, il existe une constante C telle que si k est suffisamment grand, $|h(\tau, k) - h(\tau', k)| \geq C|\tau - \tau'|$ pour tout couple (τ, τ') de $g_0(F)$. Il existe donc k_0 tel que pour $k \geq k_0$, les intervalles $I_{k,2}(\tau)$, où τ décrit $k^{-1}\mathbb{Z} \cap g_0(F)$, soient deux à deux disjoints. Comme $I_{k,N}(\tau) \subset I_{k,2}(\tau)$, il en est de même des $I_{k,N}(\tau)$. Pour l'existence de k_N et $k_{N,I}$, nous appliquons la proposition à un intervalle ouvert I' contenant F . Raisonnons par l'absurde. Nous supposons qu'il existe une suite $(k_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ strictement croissante et $\tau_\alpha \in k_\alpha^{-1} \cap g_0(F)$ tel que les intervalles $I_{k_\alpha, N}(\tau_\alpha)$ ne contiennent pas de valeur propre. Or $g(h(\tau_\alpha, k_\alpha)) = \tau_\alpha + O(k_\alpha^{-\infty})$ et d'après l'assertion *i*, $h(\tau_\alpha, k_\alpha) \in Sp(T_{k_\alpha}) + O(k_\alpha^{-\infty})$ ce qui contredit l'hypothèse. Supposons qu'il existe une suite $(k_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ strictement croissante et $\tau_\alpha \in k_\alpha^{-1} \cap g_0(F)$ telle que $I_{k_\alpha, N}(\tau_\alpha)$ contienne deux valeurs propres E_α et E'_α distinctes ou de multiplicité supérieure à 2. D'après l'assertion *i*, quel que soit $M \geq 2$, il existe C_M et $\tau_{M,\alpha} \in k_\alpha^{-1}\mathbb{Z}$ tels que $|g(E_\alpha, k_\alpha) - \tau_{M,\alpha}| \leq C_M k_\alpha^{-M}$. De $E_\alpha \in I_{k_\alpha, N}(\tau_\alpha)$, on déduit que $\tau_{M,\alpha} = \tau_\alpha$ pour α suffisamment grand et donc $E_\alpha = h(\tau_\alpha, k_\alpha) + O(k_\alpha^{-\infty})$. Il en est de même de E'_α et donc l'assertion *ii* s'applique à E_α et E'_α , ce qui contredit l'hypothèse et termine la preuve de l'existence de k_N . Appliquant *i* à une famille E_α qui contient toutes les valeurs propres des T_k incluses dans F , nous en déduisons qu'il existe C_N tel que

$$Sp(T_k) \cap F \subset \bigcup_{\tau \in k^{-1}\mathbb{Z}} J_{N,k}(\tau) \text{ avec } J_{N,k}(\tau) = [h(\tau, k) - C_N k^{-N}, h(\tau, k) + C_N k^{-N}]$$

Pour $k \geq k'_N$, $J_{N+1,k}(\tau)$ est inclus dans $I_{k,N}(\tau)$ ce qui implique $Sp(T_k) \cap F \subset \bigcup_{\tau \in k^{-1}\mathbb{Z}} I_{k,N}(\tau)$. Si I est un fermé inclus dans l'intérieur de F , on choisit alors une constante $k_{N,I}$ telle que $k \geq k_{N,I}$ et $I_{k,N}(\tau) \cap I \neq \emptyset$ implique $\tau \in g_0(F)$, ce qui nous assure le résultat. \square

La dimension de \mathcal{H}_k est donnée par

$$\dim \mathcal{H}_k = \text{Tr} \Pi_k = \frac{k}{2\pi} \int_M S(x, k) \mu(x)$$

où $S(x, k) = 1 + \frac{1}{2}K + O(k^{-2})$ est le symbole σ de Π_k (K est la courbure de Gauss). On interprète $\frac{k}{2\pi} S(\cdot, k) \mu$ comme une densité d'état. Il est intéressant de relier ceci au nombre de valeurs propres de (T_k) compris dans un intervalle $[a, b]$. Définissons f_1^m comme étant la moyenne du sous-symbole f_1^w sur les trajectoires de X , i.e. si $(x, \xi) \in \Lambda_E$ alors

$$f_1^m(x, \xi) = \frac{1}{T_E} \int_{\Lambda_E} f_1^w \alpha_E$$

Corollaire 3.29. *Supposons que $[a, b] \subset J$ et définissons $D_k = (f_0 + k^{-1}f_1^m)^{-1}([a, b])$ et*

$$d_k = \frac{k}{2\pi} \int_{D_k} (1 - \frac{1}{2}K) \mu$$

Si k est suffisamment grand, nous avons l'estimation

$$E(d_k + \frac{1}{2}) - 1 \leq \# \text{Sp}(T_k) \cap [a, b] \leq E(d_k + \frac{1}{2}) + 1$$

Preuve. Munissons $f_0^{-1}(J) \simeq \mathbb{T} \times J$ de coordonnées action-angle (x, ξ) . Introduisons la fonction holonomie $\phi(\xi)$: le transport parallèle le long de $x \rightarrow (x, \xi)$ est la multiplication par $\exp(2i\pi\phi(\xi))$. Si $D = \{\xi_0 \leq \xi \leq \xi_1\}$, nous avons

$$(3.22) \quad \phi(\xi_1) - \phi(\xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_D \mu$$

Soit $c(\xi)$ l'intégrale de la courbure géodésique le long de $x \rightarrow (x, \xi)$, i.e. si $E = f_0(\xi)$ alors $c(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda_E} \tau_E \gamma_E$. Montrons que

$$(3.23) \quad c(\xi_1) - c(\xi_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_D K \mu$$

On peut le déduire de la formule de Gauss-Bonnet en introduisant une triangulation sur le domaine D . On peut aussi en donner une preuve directe: soient les champs de vecteurs

$$X_1 = |\partial_x|^{-2} \partial_x, \quad X_2 = JX_1$$

(X_1, X_2) forme une base orthonormée orientée en tout point. Introduisons la 1-forme ω_1^2 telle que $\nabla X_1 = \omega_1^2 \otimes X_2$, où ∇ est la connection de Levi-Civita. $\tau_E \gamma_E$ est alors la restriction de ω_1^2 à Λ_E et de plus $K\mu(X_1 \wedge X_2) = -\langle d\omega_1^2, X_1 \wedge X_2 \rangle$. (3.23) découle alors de la formule de Stokes. A présent, considérons que f_0 et f_1^m , qui ne dépendent pas de x , sont des fonctions de la variable ξ . Soit $l(\cdot, k)$ la fonction réciproque de $f_0 + k^{-1}f_1^m$. Montrons que

$$(3.24) \quad (\phi - k^{-1} \frac{c}{2})(l(E, k)) = g_0(E) + k^{-1}g_1(E) + O(k^{-2})$$

Nous avons $l(E, k) = l_0(E) + k^{-1}l_1(E) + O(k^{-2})$, où l_0 est la fonction réciproque de f_0 et $l_1 = -f_1^m \circ l_0(f_0' \circ l_0)^{-1}$. Rappelons que $f_0'(E) = \frac{1}{2\pi}T_E$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\phi(l(E, k)) &= \phi(l_0(E)) + k^{-1}\phi'(l_0(E))l_1(E) + O(k^{-2}) \\ &= g_0(E) + k^{-1}(\phi \circ l_0)'(E) \cdot f_1^m(l_0(E)) \\ &= g_0(E) - T_E f_1^m(E) + O(k^{-2})\end{aligned}$$

De plus $c(l(E, k)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda_E} \tau_E \gamma_E + O(k^{-1})$, ce qui démontre (3.24). De (3.22), (3.23) et (3.24) l'on déduit que

$$d_k = k((g_0 + k^{-1}g_1)(b) - (g_0 + k^{-1}g_1)(a)) + O(k^{-1})$$

f_0 est monotone, on suppose qu'elle est croissante, il en est alors de même pour g_0 . D'après le corollaire 3.28, si k est suffisamment grand, nous avons

$$\begin{aligned}\#\text{Sp}(T_k) \cap [a, b] &\geq \#\{\tau \in k^{-1}\mathbb{Z} / h(\tau, k) \in [a + k^{-2}, b - k^{-2}]\} \\ &\geq \#\{\tau \in k^{-1}\mathbb{Z} / \tau \in [(g_0 + k^{-1}g_1)(a) + Ck^{-2}, (g_0 + k^{-1}g_1)(b) - Ck^{-2}]\}\end{aligned}$$

où C est une constante positive. La longueur de l'intervalle $k[(g_0 + k^{-1}g_1)(a) + Ck^{-2}, (g_0 + k^{-1}g_1)(b) - Ck^{-2}]$ est supérieure à $d_k - \frac{2}{10}$ pour k suffisamment grand, il contient donc au moins $E(d_k - \frac{2}{10})$ points entiers, ce qui est supérieur à $E(d_k + \frac{1}{2}) - 1$. On démontre de la même façon la deuxième inégalité. \square

La preuve de la proposition 3.25 consiste à exhiber des valeurs propres en construisant des vecteurs propres approchés de (T_k) . Par exemple supposons que $E_0 \in J$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ soient tels que le fibré plat $(L^{k_0} \rightarrow \Lambda_{E_0})$ soit trivial, i.e. il existe un entier p tel que $k_0 g_0(E_0) = p$. Choisissons un entier q et posons $k_\alpha = \alpha k_0$ et $\tau_\alpha = \frac{p}{k_0} + \frac{q}{k_\alpha}$. On déduit alors de la proposition 3.25 qu'il existe une suite $E(\alpha)$ de valeurs propres de T_{k_α} telle que

$$\begin{aligned}E(\alpha) &= h(\tau_\alpha, k_\alpha) + O(k_\alpha^{-\infty}) \\ &= \sum_l k_\alpha^{-l} E_l + O(k_\alpha^{-\infty})\end{aligned}$$

avec $E_1 = qh_0'(\frac{p}{k_0}) + h_1(\frac{p}{k_0}) = 2\pi T_{E_0}^{-1}(q - g_1(E_0))$. Soit w une section plate de $L^{k_0} \rightarrow \Lambda_{E_0}$ de norme constante égale à 1.

Proposition 3.30. *Il existe une section lagrangienne $(v_\alpha) \in \mathcal{S}(\Lambda_{E_0}, w)$ telle que*

$$T_{k_\alpha} v_\alpha = E(\alpha) v_\alpha + O(k_\alpha^{-\infty}) \quad \text{et} \quad (v_\alpha, v_\alpha) = \int_{\Lambda_{E_0}} |\alpha_{E_0}| + O(k_\alpha^{-1})$$

Soit $x \in \Lambda_{E_0}$, $\varphi_t : M \rightarrow M$ le flot de X et $H_{E_0} = \tau_{E_0} n$ le champ de vecteurs de courbure moyenne de Λ_{E_0} . Le symbole principal de (v_α) est $s_0 \in C^\infty(\Lambda_{E_0})$ définie par

$$s_0(\varphi_t(x)) = \left(\frac{|\alpha_{E_0}|}{|\gamma_{E_0}|} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i \int_0^t \frac{1}{2} H_{E_0} \cdot f_0(\varphi_s(x)) - f_1^w(\varphi_s(x)) + E_1 ds}$$

La fonction s_0 est bien définie. En effet, $H_{E_0} \cdot f_0(\varphi_s(x)) ds = \omega(H_{E_0}, \cdot)$. De plus nous avons $H_E = \tau_E \gamma_E$ ce qui implique $\omega(H_E, \cdot) = -\tau_E \gamma_E$. Et donc

$$\int_0^{T_{E_0}} \frac{1}{2} H_{E_0} \cdot f_0(\varphi_s(x)) - f_1^w(\varphi_s(x)) + E_1 ds = 2\pi g_1(E_0) + T_{E_0} E_1$$

et ceci est égal à $2\pi q$ compte tenu de l'expression de E_1 . Une fois de plus, il est intéressant de constater que les expressions de s_0 , E_0 , E_1 et (v_α, v_α) sont similaires à celles que l'on obtient dans le cas d'un cotangent, à ceci près que les indices de Maslov sont ici remplacés par des intégrales de courbure le long de Λ_{E_0} .

Preuve. (T_k) induit une application $T : C^\infty(\Lambda_{E_0})[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(\Lambda_{E_0})[[\hbar]]$ sur les symboles de $\mathcal{S}(\Lambda_{E_0}, w)$ de la forme

$$Ts = E_0 s - i\hbar(X \cdot s + (if_1^w - \frac{i}{2} H_{E_0} \cdot f_0 + \frac{1}{2} \operatorname{div}_{\Lambda_{E_0}}(X)) s) + \hbar^2 S s, \quad \forall s \in C^\infty(\Lambda_E)$$

où $S = \sum_{l \geq 0} \hbar^l S_l$ et les S_l sont des opérateurs différentiels agissant sur $C^\infty(\Lambda_{E_0})$. Notons que la mesure μ_{E_0} de Λ_{E_0} induite par la restriction de g à Λ_{E_0} est $|\gamma_{E_0}|$ et donc $X \cdot |\gamma_{E_0}| = \operatorname{div}_{\Lambda_{E_0}}(X) \cdot |\gamma_{E_0}|$. Par conséquent, $Ts_0 = (E_0 + \hbar E_1)s_0 + 0(\hbar^2)$. Cherchons $s_1 \in C^\infty(\Lambda_{E_0})$ et $F_2 \in \mathbb{C}$ telle que $T(s_0 + \hbar s_1) = (E_0 + \hbar E_1 + \hbar^2 F_2)(s_0 + \hbar s_1) + 0(\hbar^3)$. Ecrivons $s_1 = t \cdot s_0$, nous obtenons l'équation

$$-iX \cdot t_1 = F_2 - s_0^{-1} S_0 \cdot s_0$$

Celle-ci a une solution globale pour une unique valeur de F_2 . En réitérant ceci, on obtient un symbole $s = \sum \hbar^l s_l$ et $F = E_0 + \hbar E_1 + \sum_{l \geq 2} \hbar^l F_l$ tels que $Ts = Fs$. Choissant une section $v_\alpha \in \mathcal{S}(\Lambda_{E_0}, w)$ de symbole s , il vient

$$T_{k_\alpha} v_\alpha = E'(\alpha) v_\alpha + O(k_\alpha^{-\infty}) \quad \text{et} \quad (v_\alpha, v_\alpha) = \int_{\Lambda_{E_0}} |\alpha_{E_0}| + O(k_\alpha^{-1})$$

où $E'(\alpha) = E_0 + k^{-1} E_1 + \sum_{l \geq 2} k^{-l} F_l + O(k^{-\infty})$. (T_k) étant auto-adjoint, les F_l sont réels, et il existe une suite de valeurs propres des (T_{k_α}) égale à $E'(\alpha)$ modulo $O(k_\alpha^{-\infty})$. Appliquant le corollaire 3.28, nous en déduisons que $E(\alpha) \equiv E'(\alpha)$ modulo $O(k_\alpha^{-\infty})$. \square

Comme il apparait dans la preuve, on démontre l'existence d'une suite de valeurs propres $E(\alpha)$ qui admet un développement asymptotique $E_0 + k^{-1} E_1 + O(k^{-2})$ sans même appliquer la proposition 3.25. D'ailleurs la preuve de cette proposition s'appuie sur une construction similaire où l'on contrôle uniformément les valeurs propres en introduisant des sections lagrangiennes dépendant de paramètres. L'exemple classique sur lequel on peut tester les conditions de Bohr-Sommerfeld est l'oscillateur harmonique. Dans ce cas les vecteurs propres sont les sections lagrangiennes que nous avons décrites dans l'exemple 3.15. Explicitons les conditions de Bohr-Sommerfeld sur un exemple analogue.

Exemple 3.31. Considérons le cas où M est l'espace projectif $\mathbb{C}P^1$ avec les notations de l'exemple 3.9. Introduisons l'hamiltonien

$$f_0 = -(1 + |z|^2)^{-1}$$

Dans les coordonnées polaires (r, θ) telles que $z = re^{i\theta}$, le champs de vecteur hamiltonien H_{f_0} est ∂_θ . Identifiant par une projection stéréographique $\mathbb{C}P^1$ avec la sphère en envoyant le pôle sud S au point $z = 0$ et le pôle nord N en $z = \infty$, le champ de vecteurs hamiltonien X de f_0 est le générateur infinitésimal des rotations par rapport à l'axe (NS) . Etant donné que le flot de X préserve la structure kählerienne, il existe une manière naturelle de quantifier f_0 qui consiste à lui associer l'opérateur

$$P_k = f_0 + \frac{1}{ik} \nabla_X : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$$

On vérifie que $P_k(g s^k) = (\frac{1}{ik} \partial_\theta g - g) s^k$. Ainsi la famille $(z^l s^k)$, où $l = 0, \dots, k$, est une base de vecteurs propres de P_k . Les valeurs propres sont $\{\frac{l}{k} - 1 / l = 0, \dots, k\}$.

Λ_E est le cercle de rayon R tel que $E = -(1 + R^2)^{-1}$, son holonomie est

$$g_0(E) = 2\pi \frac{R^2}{1 + R^2} = 2\pi(E + 1)$$

D'autre part, comme $\Pi_k P_k \Pi_k = P_k$, on calcule le sous-symbole de P_k grâce à la formule (3.5)

$$f_1^w = \frac{1}{2} \Delta f_0 = \frac{1}{2} \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda_E} f_1^w d\theta = \frac{1}{2} \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1}$$

De plus la courbure géodésique et son intégrale sont

$$\tau_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{R} - R \right), \quad \gamma_E = \sqrt{2} \frac{R}{1 + R^2} d\theta, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda_E} \tau_E \gamma_E = \frac{1 - R^2}{R^2 + 1}$$

Par conséquent g_1 est identiquement nulle. Les conditions de Bohr-Sommerfeld s'écrivent donc

$$E \in -1 + k^{-1}\mathbb{Z} + O(k^{-2})$$

On remarquera qu'elles sont en fait exactes, ce qui implique $g_l = 0$ pour $l \geq 2$. De plus elles ne s'appliquent pas seulement aux valeurs propres comprises dans un intervalle compact de l'ensemble des valeurs régulières $(-1, 0)$, mais aux valeurs propres appartenant à $f_0(M)$. \square

4.2 Dimension quelconque

Soit $(T_k^1), \dots, (T_k^n)$ n opérateurs de Toeplitz qui commutent deux à deux. Le spectre conjoint de ces opérateurs est la suite de sous-ensembles de \mathbb{R}^n

$$\text{Sp}(T_k) = \{ (E^1, \dots, E^n) / \exists v \in \mathcal{H}_k \text{ tel que } v \neq 0 \text{ et } (T_k^i v = E^i v, \forall i) \}$$

La multiplicité de $E \in \text{Sp}(T_k)$ est la dimension de $\cap_i \text{Ker}(T_k^i - E^i)$. Soient f_0^i et f_1^i les symboles principal et sous-principal de (T_k^i) . Notons $f_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application dont les différentes composantes sont les f_0^i . Par hypothèse,

$$\{f_0^i, f_0^j\} = 0, \text{ quels que soient } i \text{ et } j$$

Supposons que $E_0 \in \mathbb{R}^n$ soit une valeur régulière de f_0 et que $f_0^{-1}(E_0)$ soit connexe. D'après le théorème d'Arnold-Liouville, il existe un voisinage V de E_0 tel que $f_0^{-1}(V)$ soit diffeomorphe à $W \times \mathbb{T}^n$, où W est un ouvert de \mathbb{R}^n , avec $\omega = d\xi^i \wedge dx^i$ si ξ^i et x^i sont les coordonnées usuelles de \mathbb{R}^n et \mathbb{T}^n , et les restrictions des f_0^i à $B_r \times \mathbb{T}^n$ ne dépendent pas des variables x^i (autrement dit les ensembles de niveaux $f_0^{-1}(E)$ où E décrit V sont les tores lagrangiens $\{\xi\} \times \mathbb{T}^n$). Pour $E \in V$, notons Λ_E le tore $f_0^{-1}(E)$, H_E le champ de vecteurs de courbure moyenne de Λ_E et X_E^i la restriction de $X_{f_0^i}$ à Λ_E . Soient β_E et $\delta_E \in \Omega^1(\Lambda_E)$ les 1-formes de Λ_E telles que

$$\begin{aligned} \langle \beta_E, X_E^i \rangle &= f_1^i, \text{ quel que soit } i \\ \langle \delta_E, X \rangle &= \omega(H_E, X), \text{ quel que soit } X \in T\Lambda_E \end{aligned}$$

Lemme 3.32. $\beta_E - \frac{1}{2}\delta_E$ est fermée.

Preuve. Remarquons que $\langle \beta_E - \frac{1}{2}\delta_E, X_E^i \rangle = f_1^i - \frac{1}{2}H_E \cdot f_0^i$. Comme les X_E^i commutent deux à deux et forment une base de $T_x\Lambda_E$ en tout $x \in \Lambda_E$, il suffit de montrer que

$$X_E^j \cdot (f_1^i - \frac{1}{2}H_E \cdot f_0^i) = X_E^i \cdot (f_1^j - \frac{1}{2}H_E \cdot f_0^j)$$

Chaque (T_k^i) induit une application $C^\infty(\Lambda_E)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(\Lambda_E)[[\hbar]]$ de la forme

(3.25)

$$T_E^i h = E^i h - i\hbar(X_E^i \cdot h + (if_1^i - \frac{i}{2}H_E \cdot f_0^i + \frac{1}{2}\operatorname{div}_{\Lambda_E}(X_E^i))h) + \hbar^2 S_E^i h, \quad \forall h \in C^\infty(\Lambda_E)$$

où $S_E^i = \sum_{l \geq 0} \hbar^l S_{E,l}^i$ et les $S_{E,l}^i$ sont des opérateurs différentiels agissant sur $C^\infty(\Lambda_E)$. De cette relation et compte-tenu de $[X_E^i, X_E^j] = 0$, il découle que

$$[T_E^i, T_E^j]h = i\hbar^2(X_E^j \cdot (f_1^i - \frac{1}{2}H_E \cdot f_0^i) - X_E^i \cdot (f_1^j - \frac{1}{2}H_E \cdot f_0^j))h + O(\hbar^3)$$

$[T_k^i, T_k^j] = 0$ implique $[T_E^i, T_E^j] = 0$, d'où le résultat. \square

Choisissons une base de $H_1(\Lambda_E, \mathbb{Z})$ qui dépende continuellement de E , par exemple les lacets

$$l_E^i : [0, 1] \rightarrow \Lambda_E, \quad t \rightarrow (\xi(t), x(t)) \text{ avec } \xi(t) = E \text{ et } x^j(t) = \delta_{ij}t$$

Soit $g_0 : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application dont la composante g_0^i est l'holonomie de L le long de l_E^i , i.e. le transport parallèle dans L le long de l_E^i est la multiplication par $\exp(2i\pi g_0^i(E))$. Définissons $g_1 : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$g_1^i(E) = \int_{l_E^i} -\beta_E + \frac{1}{2}\delta_E$$

Théorème 3.33. Il existe une suite d'applications $g_l : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($l = 2, \dots$) telle que pour tout ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$ d'adhérence compacte incluse dans V et pour toutes suites (k_α, E_α) , (k_α, E'_α) de $\mathbb{N} \times O$, on ait

- i $E_\alpha \in \operatorname{Sp}(T_{k_\alpha}) + O(k_\alpha^{-\infty}) \iff g(E_\alpha, k_\alpha) \in k_\alpha^{-1}\mathbb{Z}^n + O(k_\alpha^{-\infty})$
- ii Si $E_\alpha \in \operatorname{Sp}(T_{k_\alpha})$, $E'_\alpha \in \operatorname{Sp}(T_{k_\alpha})$ et $E_\alpha = E'_\alpha + O(k_\alpha^{-\infty})$, alors
pour k_α suffisamment grand, $E_\alpha = E'_\alpha$ et E_α est de multiplicité 1

où $(g(\cdot, k))$ est une suite d'applications $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $g^i(E, k) = \sum_{l \leq 0} k^{-l} g_l^i(E) + O(k^{-\infty})$.

En dimension 2, comme $H_E = \tau_E \gamma_E$, on déduit la proposition 3.28 de ce théorème. A propos de la 1-forme δ_E , précisons qu'elle n'est pas fermée en général (cf. [?]). Par contre si $M = \mathbb{C}^n$ muni de sa structure riemannienne usuelle, δ_E est fermée et sa classe de cohomologie est la classe de Maslov à un facteur près (cf. [8]).

Preuve. Comme ci-dessus (3.25), on note $T_E^i : C^\infty(\Lambda_E)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(\Lambda_E)[[\hbar]]$ l'application induite par (T_k^i) . On cherche à résoudre les équations

$$T_E^i h = E^i h, \text{ où } h \in C^\infty(\Lambda)[[\hbar]]$$

Si U est un ouvert contractile de Λ_E et $x_0 \in U$, montrons que ces équations ont une unique solution sur U vérifiant une condition initiale $h(x_0, \hbar) = C(\hbar)$ avec $C(\hbar) \in \mathbb{C}[[\hbar]]$. D'après le lemme 3.32, il existe une fonction $\varphi \in C^\infty(U)$ telle que $d\varphi = -\beta_E + \frac{1}{2}\delta_E$, autrement dit $X_E^i \varphi = -f_1^i + \frac{1}{2}H_E \cdot f_0^i$. Soit $a_E \in C^\infty(\Lambda_E)$ la fonction strictement positive définie par la relation $a_E^{-2} = \mu_{\Lambda_E}(X_E^1 \wedge \dots \wedge X_E^n)$, de sorte que $X_E^i a_E = -\frac{1}{2}a_E \operatorname{div}_{\Lambda_E}(X_E^i)$. Cherchons une solution sur U de la forme

$$h = a_E e^{i\varphi} \sum_{l \geq 0} \hbar^l h_l$$

Compte tenu de (3.25), nous avons

$$(T_E^i - E^i) a_E e^{i\varphi} \sum_{l \geq 0} \hbar^l h_l = a_E e^{i\varphi} (-i\hbar X_E^i + \hbar^2 R_E^i) \sum_{l \geq 0} \hbar^l h_l$$

où $R_E^i(f) = a_E^{-1} e^{-i\varphi} S_E^i(a_E e^{i\varphi} f)$. Isolant le coefficient de \hbar , il vient que h_0 est constante et donc égale à $C(0)$. Supposons que h_1, \dots, h_m soient déterminées de sorte que

$$h(x_0, \hbar) = C(\hbar) + O(\hbar^{m+1}), \quad (T_E^i - E^i) a_E e^{i\varphi} \sum_{l \geq 0} \hbar^l h_l = O(\hbar^{m+2})$$

Montrons alors qu'il existe une unique fonction h_{m+1} telle que ces relations soient vérifiées au rang suivant. Nous avons

$$(T_E^i - E^i) a_E e^{i\varphi} \sum_{l \geq 0} \hbar^l h_l = a_E e^{i\varphi} \hbar^{m+2} (-iX_E^i \cdot h_{m+1} + r^i) + O(\hbar^{m+3})$$

où r^i ne dépend que de h_0, \dots, h_m . Les équations $-iX_E^i \cdot h_{m+1} + r^i = 0$ ont une solution sur U si et seulement si $X_E^i \cdot r^j = X_E^j \cdot r^i$. Ceci nous est assuré car $[T_E^i - E^i, T_E^j - E^j] = 0$ et

$$[T_E^i - E^i, T_E^j - E^j] a_E e^{i\varphi} \sum_{l \geq 0} \hbar^l h_l = a_E e^{i\varphi} - i\hbar^{m+3} (X_E^i \cdot r^j - X_E^j \cdot r^i) h_{m+1} + O(\hbar^{m+4})$$

En passant à la limite, nous obtenons ainsi l'existence et l'unicité de la solution h . On remarquera que si $C(\hbar) \neq 0$, la solution h ne s'annule nulle part.

A présent, introduisons les opérateurs T^i agissant sur $C^\infty(W \times \mathbb{T}^n)[[\hbar]]$, $C^\infty(W)[[\hbar]]$ -linéaires et tels que $i_E^* T^i = T_E^i i_E^*$, si i_E désigne le plongement de $\Lambda_E = \{f_0 = E\} \times \mathbb{T}^n$ dans

$W \times \mathbb{T}^n$. Relevons ces opérateurs de sorte qu'ils agissent sur $C^\infty(W \times \mathbb{R}^n)[[\hbar]]$. On déduit du résultat ci-dessus que les équations

$$T^i h = f_0^i h, \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } h(\xi, 0, \hbar) = C(\xi, \hbar)$$

ont une unique solution $h \in C^\infty(W \times \mathbb{R}^n)[[\hbar]]$ pour une condition initiale $C \in C^\infty(W)[[\hbar]]$ donnée. Soit h la solution telle que $h(\xi, 0, \hbar) = 1$. Utilisant que les T^i sont invariants par l'action de \mathbb{Z}^n , il vient que

$$h(\xi, x + \epsilon^i, \hbar) = e^{ic^i(\xi, \hbar)} h(\xi, x, \hbar)$$

où $\epsilon^i \in \mathbb{Z}^n$ a toutes ses coordonnées nulles excepté la i -ième qui vaut 1. De plus, on connaît explicitement la série formelle h modulo $O(\hbar)$, et il vient $c^i(\xi, \hbar) = g_1^i(f_0(\xi)) + O(\hbar)$. Admettons momentanément que c^i est à valeurs réelles. On définit alors les fonctions g_i^j de l'énoncé de sorte qu'elles vérifient

$$c^i(\xi, \hbar) = \sum \hbar^l g_i^l(f_0(\xi))$$

Montrons la réciproque de l'équivalence i . Si (E_α, k_α) est une suite de $I \times \mathbb{N}$ telle que $g(E_\alpha, k_\alpha) \in k_\alpha^{-1} \mathbb{Z}^n + O(k_\alpha^{-\infty})$, alors la suite $u_\alpha = f_0^{-1}(E_\alpha)$ vérifie $g_0(f_0(u_\alpha)) + c(u_\alpha, k_\alpha) \in k_\alpha^{-1} \mathbb{Z}^n + O(k_\alpha^{-\infty})$. On peut donc lui associer comme dans la deuxième partie du paragraphe 2.2 une suite s_α de sections lagrangiennes. Compte tenu de la généralisation des propositions 3.18 et 3.19 exposée dans la partie 3.4, il vient alors

$$T_{k_\alpha} u_\alpha = E_\alpha u_\alpha + O(k_\alpha^{-\infty}) \text{ et } (u_\alpha, u_\alpha) = \int_{\Lambda_{E_\alpha}} |\alpha_{E_\alpha}| + O(k_\alpha^{-1})$$

ce qui implique $E_\alpha \in \text{Sp}(T_{k_\alpha}) + O(k_\alpha^{-\infty})$.

Montrons que les c^i sont à valeurs réelles. Décomposons c^i en partie réelle et imaginaire $a^i + ib^i$. Introduisons la série formelle

$$\tilde{h}(\xi, x, \hbar) = e^{\sum_i x^i b^i(\xi, \hbar)} h(\xi, x, \hbar)$$

Celle-ci vérifie la condition de périodicité

$$\tilde{h}(\xi, x + \epsilon^i, \hbar) = e^{ia^i(\xi, \hbar)} \tilde{h}(\xi, x, \hbar)$$

Supposons que pour tout i , $r^i(\xi, \hbar) = \hbar^m r_m^i(\xi) + O(\hbar^{m+1})$ avec $m \leq 1$. Soit X^j le champ de vecteurs hamiltonien de f_0^j relevé sur $W \times \mathbb{R}^n$ et $M^{i,j} = X^i \cdot x^j$. Remarquons que $M^{i,j}$ est inversible et qu'elle ne dépend que des variables ξ . Reprenant les calculs précédents, il vient

$$T^i \tilde{h} = (f_0^i(\xi) - i\hbar^{m+1} M^{i,j}(\xi) b_m^j(\xi)) \tilde{h} + O(\hbar^{m+2})$$

Ainsi si (u_α, k_α) est une suite de $W \times \mathbb{R}^n$ telle que $g_0(f_0(u_\alpha)) + a(u_\alpha, k_\alpha) \in k_\alpha^{-1} \mathbb{Z}^n + O(k_\alpha^{-\infty})$, on lui associe une section lagrangienne (s_α) telle que

$$T_{k_\alpha}^i s_\alpha = (f_0^i(u_\alpha) - ik_\alpha^{-m-1} M^{i,j}(u_\alpha) b_m^j(u_\alpha)) s_\alpha + O(k_\alpha^{m+2})$$

L'estimation donnée ci-dessus de la norme des s_α est toujours valable et l'équation précédente implique

$$(T_{k_\alpha} s_\alpha, s_\alpha) - (s_\alpha, T_{k_\alpha} s_\alpha) = -2ik_\alpha^{-m-1} M^{i,j}(u_\alpha) b_m^j(u_\alpha) (s_\alpha, s_\alpha) + O(k_\alpha^{-m-2})$$

En choisissant différentes suites (u_α, k_α) , on annule de la sorte b_m^j sur un sous-ensemble dense de W et donc sur W .

Pour terminer la preuve de i et montrer l'assertion ii , nous admettons le résultat suivant qui sera démontré à la fin de la partie 5.3. Soient les projections $p : W \times \mathbb{R}^n \rightarrow W \times \mathbb{T}^n$ et $\pi : O \times W \times \mathbb{R}^n \rightarrow W \times \mathbb{R}^n$, où O est un ouvert d'adhérence compacte inclu dans W . Rappelons que l'on construit une suite de sections $v(\cdot, k)$ de $(p \circ \pi)^* L^k \rightarrow O \times W \times \mathbb{R}^n$ telle que les sections lagrangiennes s_α introduites ci-dessus se relèvent par p en $v(u_\alpha, \cdot, k_\alpha) + O(k_\alpha^{-\infty})$ (avec les notations de la deuxième partie du paragraphe 2.2, il s'agit de la suite $(\frac{k}{2\pi})^{\frac{n}{4}} F^k(u, \xi, x) h(u, \xi, x, k)$). Les sections lagrangiennes s_α ainsi définies sont des quasi-modes, i.e. $T_{k_\alpha}^i s_\alpha = E_\alpha^i s_\alpha$ modulo un erreur $O(k_\alpha^{-\infty})$. En fait, nous montrerons que $v(\cdot, k)$ est une approximation des vecteurs propres des T_k^i dans le sens suivant: Si (E_α, k_α) est une suite de $O \times \mathbb{N}$ et (v_α) une suite de \mathcal{H}_{k_α} telle que

$$(3.26) \quad T_{k_\alpha}^i v_\alpha = E_\alpha^i v_\alpha, \quad (v_\alpha, v_\alpha) = 1 \quad \text{et} \quad k_\alpha \rightarrow \infty$$

alors le microsupport de (v_α) est inclu dans l'adhérence de O et quel que soit $(\xi_0, x_0) \in W \times \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U_0 de (ξ_0, x_0) et une suite (c_α) de nombres complexes tels que

$$p^* v_\alpha(\xi, x) = c_\alpha v(f_0^{-1}(E_\alpha), \xi, x, k_\alpha) + O(k_\alpha^{-\infty}) \quad \text{sur } U_0$$

Montrons le sens direct de i en raisonnant par l'absurde. Soit une suite $(E_\alpha, k_\alpha, u_\alpha)$ qui vérifie (3.26) et supposons qu'il existe N et i_0 tel que $|\exp(2i\pi k_\alpha^{-1} g^{i_0}(E_\alpha, k_\alpha))|$ soit supérieur à k_α^{-N} . Quitte à remplacer $(E_\alpha, k_\alpha, u_\alpha)$ par une sous-suite, E_α converge vers E_1 . Si ξ est tel que $f_0(\xi) = E_1$ et x quelconque, alors $k^{-\frac{n}{4}} |v(\xi, \xi, x, k)|$ tend vers une limite non nulle lorsque $k \rightarrow \infty$, et donc

$$c_\alpha v(f_0^{-1}(E_\alpha), \xi, x, k_\alpha) = c'_\alpha v(f_0^{-1}(E_\alpha), \xi, x, k_\alpha) + O(k_\alpha^{-\infty}) \text{ implique } c_\alpha = c'_\alpha + O(k_\alpha^{-\infty})$$

On en déduit alors qu'il existe un voisinage U_0 de $\{f^0(\xi) = E^1\} \times \mathbb{R}^n$ et une suite (c_α) de nombres complexes tels que

$$p^* v_\alpha(\xi, x) = c_\alpha v(f_0^{-1}(E_\alpha), \xi, x, k_\alpha) + O(k_\alpha^{-\infty}) \quad \text{sur } U_0$$

$\epsilon < |c_\alpha| < C$ pour α suffisamment grand avec ϵ strictement positif car

$$1 = (v_\alpha, v_\alpha) = |c_\alpha|^2 \int_{\Lambda_E} |\alpha_E| + O(k_\alpha^{-1})$$

Comparant $p^* v_\alpha(\xi, x)$ avec $p^* v_\alpha(\xi, x + \epsilon^{i_0})$, il vient $|\exp(2i\pi k_\alpha^{-1} g^{i_0}(E_\alpha, k_\alpha))| = O(k_\alpha^{-\infty})$ ce qui contredit l'hypothèse.

Montrons ii par l'absurde. Si $(E_\alpha, k_\alpha, u_\alpha)$ et $(E'_\alpha, k_\alpha, u'_\alpha)$ vérifient (3.26), $E_\alpha = E'_\alpha + O(k_\alpha^{-\infty})$ et $(u_\alpha, u'_\alpha) = 0$, alors quitte à extraire une sous-suite E_α converge et en raisonnant comme ci-dessus on montre que

$$(u_\alpha, u'_\alpha) = c_\alpha \overline{c'_\alpha} \int_{\Lambda_E} |\alpha_E| + O(k_\alpha^{-1})$$

où $|c_\alpha|$ et $|c'_\alpha|$ sont minorés par une constante strictement positive, ce qui est en contradiction avec $(u_\alpha, u'_\alpha) = 0$. \square

5 Applications Quantiques

5.1 Définitions et calcul symbolique

Soit (M, ω) une variété symplectique et $L \rightarrow M$ un fibré en droite hermitien muni d'une dérivation covariante ∇ de courbure $\frac{1}{i}\omega$. Considérons deux structure complexes J^a et J^b de M qui soient intégrables, compatibles avec ω et strictement positives. M est ainsi munie de deux structures kähleriennes et l'on dispose de deux quantifications \mathcal{H}_k^a et \mathcal{H}_k^b . Nous nous intéressons aux suites d'opérateurs $(T_k : \mathcal{H}_k^b \rightarrow \mathcal{H}_k^a)$ que nous identifions comme pour les opérateurs de Toeplitz à des suites

$$(T_k : C^\infty(M, L^k) \rightarrow C^\infty(M, L^k)) \text{ telles que } \Pi_k^a T_k \Pi_k^b = T_k, \forall k$$

La suite des noyaux au sens de Schwartz d'un tel opérateur est une suite de sections de $L^k \boxtimes L^{-k} \rightarrow M \times M$, que nous allons définir comme une section lagrangienne.

Pour ce faire, considérons $M \times M$ comme une variété kählerienne dont la structure complexe est $J^a \times -J^b$ et la deux forme fondamentale $\pi_g^* \omega - \pi_d^* \omega$ et notons

$$\Pi_k^{ab} : C^\infty(M, L^k \boxtimes L^{-k}) \rightarrow C^\infty(M, L^k \boxtimes L^{-k})$$

le projecteur de Szegö associé et \mathcal{H}_k^{ab} son image. Si (T_k) est une suite d'opérateurs agissant sur $C^\infty(M, L^k)$ et que $T_k(x_g, x_d)$ désigne le noyau au sens de Schwartz de T_k , nous avons

$$\Pi_k^a T_k \Pi_k^b = T_k \Leftrightarrow T_k(x_g, x_d) \in \mathcal{H}_k^{ab}$$

Soit $\varphi : M \rightarrow M$ un symplectomorphisme. Un relèvement $\tilde{\varphi} : L \rightarrow L$ de φ est dit préquantifiant si c'est un automorphisme du fibré hermitien $L \rightarrow M$ muni de sa connection, i.e.

- i. La restriction de $\tilde{\varphi}$ à L_x est une application unitaire $\tilde{\varphi}_x : L_x \rightarrow L_{\varphi(x)}$
- ii. $\nabla \varphi^* s = \varphi^* \nabla s, \forall s \in C^\infty(M, L)$

où $\varphi^* s$ est la section de L définie par $(\varphi^* s)(x) = \tilde{\varphi}_x^{-1} \cdot s(\varphi(x))$. Définissons à partir du couple $(\varphi, \tilde{\varphi})$ une sous-variété Λ de $M \times M$ et une section $s : \Lambda \rightarrow L \boxtimes L^{-1}$

$$\Lambda = \{(\varphi(x), x) / x \in M\}, \quad s((\varphi(x), x)) = \tilde{\varphi}_x \in L_{\varphi(x)} \otimes L_x^*$$

Des propriétés de φ et $\tilde{\varphi}$, il découle que Λ est lagrangienne et s est plate de norme constante égale à 1. Nous pouvons donc définir des sections lagrangiennes associées à (Λ, s) . On note $\mathcal{S}(\Lambda, \mathcal{H}^{ab}, s)$ l'ensemble de ces sections pour la quantification \mathcal{H}_k^{ab} .

Définition 3.34. L'espace des applications quantiques $\mathcal{F}(\varphi, J_a, J_b)$ est l'ensemble des suites d'opérateurs (T_k) dont les noyaux au sens de schwartz sont des sections lagrangiennes de $(\frac{k}{2\pi})^{\frac{n}{4}} \mathcal{S}(\Lambda, \mathcal{H}^{ab}, s^k)$.

Bien que cela n'apparaisse pas dans la notation, $\mathcal{F}(\varphi, J_a, J_b)$ dépend de $\tilde{\varphi}$. Le symbole d'une section lagrangienne de $\mathcal{S}(\Lambda, \mathcal{H}^{ab}, s^k)$ est une série formelle de $C^\infty(\Lambda)[[\hbar]]$. Par projection de $\Lambda \subset M \times M$ sur le deuxième facteur, on identifie $C^\infty(\Lambda)[[\hbar]]$ et $C^\infty(M)[[\hbar]]$. On définit de la sorte l'application symbole

$$\sigma : \mathcal{F}(\varphi, J_a, J_b) \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$$

Son noyau est formé des opérateurs régularisants.

$\mathcal{F}(\text{Id}, J_a, J_a)$ est l'ensemble des opérateurs de Toeplitz de \mathcal{H}^a . Pour quantifier dans \mathcal{H}^a un symplectomorphisme φ , nous considérons les éléments de $\mathcal{F}(\varphi, J_a, J_a)$. Les opérateurs de $\mathcal{F}(\text{Id}, J_a, J_b)$ permettent de faire le lien entre \mathcal{H}^a et \mathcal{H}^b . Avant d'étudier séparément ces deux types d'opérateurs, énonçons quelques propriétés élémentaires et donnons la règle générale de composition.

Si $(T_k) \in \mathcal{F}(\varphi, J_a, J_b)$ et admet pour symbole $\sum_l \hbar^l f_l$, alors l'adjoint

$$(T_k^*) \in \mathcal{F}(\varphi^{-1}, J_b, J_a) \quad \text{et} \quad \sigma(T_k^*) = \sum_l \hbar^l (\varphi^{-1})^* \bar{f}_l$$

Si $\psi : M \rightarrow M$ est un symplectomorphisme de M et $\tilde{\psi}$ un relèvement préquantifiant, alors on définit comme ci-dessus les applications $\psi^* : C^\infty(M, L^k) \rightarrow C^\infty(M, L^k)$ et l'on montre que

$$\begin{aligned} (\psi^* \circ T_k) &\in \mathcal{F}(\psi^{-1} \circ \varphi, \psi^{-1}(J_a), J_b) & \sigma(\psi^* \circ T_k) &= \sum_l \hbar^l f_l \\ (T_k \circ \Psi^*) &\in \mathcal{F}(\varphi \circ \psi^{-1}, J_a, \psi(J_b)) & \sigma(T_k \circ \psi^*) &= \sum_l \hbar^l (\psi^{-1})^* f_l \end{aligned}$$

Si ϕ est un symplectomorphisme de M et J_e une structure complexe, alors $\phi(J_e)$ désigne la structure complexe $\phi_* \circ J_e \circ \phi_*^{-1}$.

Proposition 3.35. *La composition des opérateurs définit une application*

$$\mathcal{F}(\varphi, J_a, J_b) \times \mathcal{F}(\psi, J_c, J_d) \rightarrow \mathcal{F}(\varphi \circ \psi, J_a, J_d)$$

Ceci induit une application $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire $B : C^\infty(M)[[\hbar]] \times C^\infty(M)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$. Les applications $B_l : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ définies par

$$B(f, g) = \sum \hbar^l B_l(\psi^* f, g)$$

sont des opérateurs bidifférentiels de degré $2l$.

Preuve. On se ramène à $\varphi = \psi = \text{Id}$ en remarquant le fait suivant : si $(T_k) \in \mathcal{F}(\varphi, J_a, J_b)$ et $(U_k) \in \mathcal{F}(\psi, J_c, J_d)$ admettent pour symbole f et g , alors $(\varphi^* \circ T_k)$ et $(U_k \circ \psi^*)$ sont des opérateurs de $\mathcal{F}(\text{Id}, \varphi_*^{-1} J_a \varphi_*, J_b)$ et $\mathcal{F}(\text{Id}, J_c, \psi_* J_d \psi_*^{-1})$ et ont pour symbole f et $g \circ \psi^{-1}$. On conclut ensuite en écrivant

$$T_k U_k = (\varphi^{-1})^* \circ ((\varphi^* \circ T_k) \circ (U_k \circ \psi^*)) \circ (\psi^{-1})^*$$

Supposons donc que $\varphi = \psi = \text{Id}$. Le noyau de $T_k U_k$ est de la forme

$$(T_k U_k)(x_1, x_2, x_3) = \int_M E_{ab}^k(x_1, x_2) E_{cd}^k(x_2, x_3) \tilde{f}(x_1, x_2) \tilde{g}(x_2, x_3) \mu_M(x_2)$$

où E_{ab} et E_{cd} sont des sections de $L \boxtimes L^{-1} \rightarrow M \times M$ définies par la proposition 3.4. Elles sont de norme < 1 en dehors de la diagonale, on peut donc se localiser au voisinage de $\text{Trig}(M) = \{x_1 = x_2 = x_3\}$. Soit s une section de L définie sur un ouvert U , (z_1^i) (resp. (z_3^i))

un système de coordonnées complexes pour J_a (resp. J_d) et (x_2^j) un système de coordonnées réelles. Ecrivons

$$E_{ab}(x_1, x_2).E_{cd}(x_2, x_3) = e^{i\phi(x_1, x_2, x_3)}_s \otimes s^{-1} \quad E_{ad}(x_1, x_3) = e^{i\psi(x_1, x_3)}_s \otimes s^{-1}$$

De $\nabla_{\partial_{\bar{z}_1^i}} E_{a,b} \equiv \nabla_{\partial_{\bar{z}_1^i}} E_{a,d} \equiv 0$ modulo $\mathcal{I}^\infty(\text{Trig}(M))$, on déduit que $\partial_{\bar{z}_1^i}(\phi - \psi) \equiv 0$ modulo $\mathcal{I}^\infty(\text{Trig}(M))$. De même, on montre que $\partial_{z_3^i}(\phi - \psi) \equiv 0$ modulo $\mathcal{I}^\infty(\text{Trig}(M))$. Admettons momentanément que $\partial_{x_2^i} \phi$ s'annule le long de $\text{Trig}(M)$ et que $(\partial_{x_2^i} \partial_{x_2^j} \phi)_{ij}$ est inversible le long de $\text{Trig}(M)$. Raisonnant comme dans la preuve de la proposition 3.11, on montre alors que l'idéal \mathcal{J} engendré par les $\partial_{x_2^j} \phi$ est l'ensemble des fonctions $f(x_1, x_2, x_3)$ vérifiant

$$f|_{\text{Trig}(M)} = 0, \quad \partial_{\bar{z}_1^i} f \equiv \partial_{z_3^i} f \equiv 0 \quad \text{mod } \mathcal{I}^\infty(\text{Trig}(M))$$

En appliquant le lemme de la phase stationnaire (cf. [7]), on montre alors que

$$(T_k U_k)(x_1, x_3) = e^{ik\psi(x_1, x_3)} \tilde{h}(x_1, x_3, k)_s \otimes s^{-1} + O(k^{-\infty})$$

où $\tilde{h}(x_1, x_3, k)$ est un symbole dont les coefficients \tilde{h}_l du développement asymptotique sont annulés à tout ordre le long de $\{x_1 = x_3\}$ par $\partial_{\bar{z}_1^i}$ et $\partial_{z_3^i}$. De plus $\tilde{h}_l(x, x)$ est donné par un opérateur bidifférentiel agissant sur $\tilde{f}(x, x)$ et $\tilde{g}(x, x)$. Pour ce qui est des détails, précisons que le calcul se fait aisément en écrivant les développements de Taylor des fonctions $f(x_1, x_2, x_3)$ (resp. $f(x_1, x_3)$) le long de $\{x_1 = x_2 = x_3\}$ (resp. $\{x_1 = x_3\}$) comme dans le lemme 3.2 en utilisant les champs de vecteurs $\partial_{\bar{z}_1^i}, \partial_{x_2^j}, \partial_{z_3^i}$ (resp. $\partial_{\bar{z}_1^i} \partial_{z_3^i}$).

Pour finir, vérifions que $d_{x_2} \phi$ s'annule le long de $\text{Trig}(M)$ et calculons $d_{x_2}^2 \phi$. Soit α_{ab} définie sur un voisinage de la diagonale par $\nabla E_{ab} = \alpha_{ab} \otimes E_{ab}$. D'après la proposition 3.6, α_{ab} s'annule le long de la diagonale, il en est de même de α_{cd} et on en déduit que $d_{x_2} \phi$ s'annule le long de $\text{Trig}(M)$. Soit q_{ab} la projection de $T_x M \otimes \mathbb{C}$ d'image $T_x^{(1,0)b} M = \{X - iJ_b X / X \in T_x M\}$ et de noyau $T_x^{(0,1)a} M = \{X + iJ_a X / X \in T_x M\}$. Remarquons que $\bar{q}_{ba} + q_{ab} = \text{Id}$. Ecrivons

$$\begin{aligned} (0, X_2) &= (-\bar{q}_{ba}(X_2), q_{ab}(X_2)) + (\bar{q}_{ba}(X_2), \bar{q}_{ba}(X_2)) \\ (X_1, 0) &= (\bar{q}_{ba}(X_1), -q_{ab}(X_1)) + (q_{ab}(X_1), q_{ab}(X_1)) \end{aligned}$$

On déduit alors de (3.6) que si $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in T_x(M)$, alors

$$\langle T_{(X_1, X_2)} \alpha_{ab}, (Y_1, Y_2) \rangle = \frac{1}{i} \omega(\bar{q}_{ba}(X_1 - X_2), Y_1) + \frac{1}{i} \omega(q_{ab}(X_1 - X_2), Y_2)$$

ce qui généralise (3.7). De ceci l'on déduit que pour $X, Y \in T_x M$

$$(3.27) \quad d_{x_2}^2 \phi(X, Y) = \omega(q_{ab}(X) - \bar{q}_{dc}(X), Y)$$

Par conséquent, $d_{x_2}^2 \phi(X, \cdot) = 0$ implique $q_{ab}(X) = \bar{q}_{dc}(X) = 0$ car $T^{(1,0)b} M \cap T^{(0,1)c} M = (0)$, d'où $X \in T^{(0,1)b} M \cap T^{(1,0)d} M = (0)$, donc $X = 0$. \square

Les compositions les plus intéressantes correspondent aux cas où $J_b = J_c$, car on peut les voir comme des compositions d'un endomorphisme $\mathcal{H}_k^d \rightarrow \mathcal{H}_k^b$ par un endomorphisme $\mathcal{H}_k^b \rightarrow \mathcal{H}_k^a$. Dans ces cas, on calcule facilement l'opérateur B_0 qui décrit la composition des symboles principaux.

Proposition 3.36. *Si $(T_k) \in \mathcal{F}(\varphi, J_a, J_b)$ et $(U_k) \in \mathcal{F}(\psi, J_b, J_c)$ admettent pour symboles principaux f_0 et g_0 , alors le symbole principal h_0 de $(T_k U_k) \in \mathcal{F}(\varphi \circ \psi, J_a, J_c)$ est donné par*

$$h_0 = \psi^* \left(\det(q_{\varphi^{-1}(J_a), J_b} + \bar{q}_{\psi(J_c), J_b}) \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi^* f_0 \cdot g_0$$

où si J_e et J_f sont deux structures complexes compatibles avec ω et strictement positives, $q_{J_e, J_f}|_x$ est la projection de $T_x M \otimes \mathbb{C}$ d'image $T_x^{(1,0)_e} M$ et de noyau $T_x^{(0,1)_f} M$.

Preuve. On se ramène comme dans la preuve de la proposition 3.35 au cas où $\varphi = \psi = \text{Id}$. De la fin de cette preuve, on déduit que

$$h_0(x) = f_0(x) \cdot g_0(x) \cdot \left(\frac{\det[-i \partial_{x_2^j} \partial_{x_2^k} \phi](x, x, x)}{\det[g_{ij}^b](x)} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

en utilisant que $\mu_M = \frac{1}{n!} |\omega^n|$ est aussi la mesure induite par la métrique riemannienne $g^b(X, Y) = \omega(X, J_b Y)$, autrement dit si $g^b = g_{ij}^b dx^i \otimes dx^j$ alors $\mu_M = (\det[g_{ij}^b])^{\frac{1}{2}} |dx^1 \dots dx^{2n}|$. Le quotient des deux déterminants peut s'interpréter comme étant le déterminant de la composition

$$T_x M \xrightarrow{-id_{x_2}^2 \phi} T_x^* M \xrightarrow{(g^b)^{-1}} T_x M$$

De (3.27), l'on déduit que

$$\begin{aligned} -id_{x_2}^2 \phi(X, Y) &= \omega(-iq_{ab}(X) + i\bar{q}_{cb}(X), Y) \\ &= \omega(J_b q_{ab}(X) + J_b \bar{q}_{cb}(X), Y) \end{aligned}$$

car l'image de q_{ab} est $T^{(0,1)_b} M = \text{Ker}(J_b + i \text{Id})$ et celle de \bar{q}_{cb} est $T^{(1,0)_b} M = \text{Ker}(J_b - i \text{Id})$

$$= g^b(q_{ab}(X) + \bar{q}_{cb}(X), Y)$$

Par conséquent, $(g^b)^{-1} \circ -id_{x_2}^2 \phi = q_{ab} + \bar{q}_{cb}$, ce qui montre le résultat. \square

De même, on calcule l'action d'un opérateur de $\mathcal{F}(\varphi, J_a, J_b)$ sur une section lagrangienne. Soit $\tilde{\varphi}$ un relèvement préquantifiant d'un symplectomorphisme φ . On remarquera que si $s : \Lambda \rightarrow L$ est une section plate de norme constante égale à 1, alors il en est de même de $(\varphi^{-1})^* s : \varphi(\Lambda) \rightarrow L$.

Proposition 3.37. *Si $(T_k) \in \mathcal{F}(\varphi, J_a, J_b)$ et $(u_k) \in \mathcal{S}(\Lambda, \mathcal{H}^c, s)$, alors $(T_k \cdot u_k)$ appartient à $\mathcal{S}(\varphi(\Lambda), \mathcal{H}^a, (\varphi^{-1})^* s)$. La loi de composition des symboles*

$$C : C^\infty(M)[[\hbar]] \times C^\infty(\Lambda)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(\varphi(\Lambda)[[\hbar]])$$

est $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire. Les opérateurs C_l définis par $C(f, g) = \sum \hbar^l C_l(f, g)$ sont de la forme

$$\varphi^* C_l(f, g)|_{U \cap \Lambda} = \sum_{|\alpha| + |\gamma| \leq 2l} a_{\alpha, \gamma} \cdot \partial_x^\alpha f|_{U \cap \Lambda} \cdot \partial_y^\gamma g \quad \text{avec } a_{\alpha, \gamma} \in C^\infty(U \cap \Lambda)$$

si (x^j) est un système de coordonnées de M définies sur un ouvert U de M et (y^k) un système de coordonnées de Λ définies sur $U \cap \Lambda$. Lorsque $J_b = J_c$, C_0 est donnée par

$$\varphi^* C_0(f, g) = \left(\det(q_{\varphi^{-1}(J_a), J_b} + q_{J_b}) \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot f|_\Lambda \cdot g$$

où $q_{J_b}|_x$ désigne la projection de $T_x M \otimes \mathbb{C}$ d'image $T_x^{(0,1)_b} M$ et de noyau $T_x \Lambda$.

5.2 Quantum Map et propagateur semi-classique

Dans ce paragraphe, nous considérons une unique structure complexe J , et par conséquent une unique quantification \mathcal{H} de M . Les quantum maps sont les opérateurs de \mathcal{H} qui quantifient les symplectomorphismes de M . Si $\varphi : M \rightarrow M$ est un symplectomorphisme et $\tilde{\varphi} : L \rightarrow L$ un relèvement préquantifiant de φ . Nous définissons les quantum maps associées à φ comme étant les opérateurs unitaires de $\mathcal{F}(\varphi, J, J)$ et notons $\mathcal{Q}(\varphi)$ l'ensemble de ces opérateurs. Montrons que $\mathcal{Q}(\varphi)$ n'est pas vide.

Preuve. Soit $(V_k) \in \mathcal{F}(\varphi, J, J)$ tel que son symbole principal f_0 ne s'annule pas. Son adjoint (V_k^*) appartient à $\mathcal{F}(\varphi^{-1}, J, J)$ et l'on déduit des propositions 3.35 et 3.36 que $(V_k^*V_k)$ est un opérateur de Toeplitz dont le symbole principal est

$$g_0 = |f_0|^2 \cdot \varphi^* (\det(q_{\varphi(J),J} + \bar{q}_{\varphi(J),J}))^{-\frac{1}{2}}$$

Par conséquent g_0 est réel strictement positif. Nous en déduisons que pour k suffisamment grand le spectre de $(V_k^*V_k)$ est inclus dans un intervalle (ϵ, ∞) avec $\epsilon > 0$ qui ne dépend pas de k . Quitte à modifier les V_k pour les petites valeurs de k , cette propriété reste vraie quel que soit k . En appliquant la proposition 6.3 du premier chapitre à $(V_k^*V_k)$ et à une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont la restriction à (ϵ, ∞) est $x \rightarrow x^{-\frac{1}{2}}$, il vient que $(V_k^*V_k)^{-\frac{1}{2}}$ est un opérateur de Toeplitz. L'opérateur $U_k = V_k(V_k^*V_k)^{-\frac{1}{2}}$ appartient alors à $\mathcal{F}(\varphi, J, J)$. Il vérifie $U_k^*U_k = \text{Id}$ et donc $U_kU_k^* = \text{Id}$. \square

Exemple 3.38. Dans [11], Zelditch quantifie le couple $(\varphi, \tilde{\varphi})$ en translatant les éléments de \mathcal{H}_k par $(\varphi^{-1})^*$, puis en les projetant par le projecteur de Szegö Π_k . Afin d'obtenir une transformation unitaire, il corrige l'opérateur $(\Pi_k(\varphi^{-1})^*\Pi_k)$ en le composant avec un opérateur de Toeplitz (T_k) comme nous l'avons fait dans la preuve ci-dessus. Ceci donne l'opérateur $(\Pi_k(f\varphi^{-1})^*T_k)$ qui est un élément de $\mathcal{Q}(\varphi)$. En effet, $(\varphi^{-1})^*T_k \in \mathcal{F}(\varphi, \varphi(J), J)$ et l'on conclut grâce à la proposition 3.35. \square

Remarquons que la norme du symbole principal f_0 d'une quantum map (T_k) de $\mathcal{Q}(\varphi)$ est déterminée par φ , en effet $T_k^*T_k = \text{Id}$ implique d'après la proposition 3.36

$$|f_0|^2 = \varphi^* (\det(q_{\varphi(J),J} + \bar{q}_{\varphi(J),J}))^{\frac{1}{2}}$$

Par contre, la phase de f_0 est arbitraire. Plus généralement, on montre que quel que soit la quantum map $(T_k) \in \mathcal{Q}(\varphi)$, $f \in C^\infty(M)$ à valeurs réelles et l un entier strictement positif, il existe une quantum map $(U_k) \in \mathcal{Q}(\varphi)$ telle que le symbole de $\sigma(U_k) = \sigma(T_k) + ih^l f + O(\hbar^{l+1})$.

Soit (T_k) un opérateur de Toeplitz auto-adjoint. Le propagateur semi-classique est l'opérateur $U_k(t) = e^{-iktT_k}$ qui résout l'équation de Schrödinger

$$\frac{1}{ik} \partial_t s + T_k s = 0$$

Nous allons montrer que $U_k(t)$ est une quantum map. Notons f_0 le symbole principal de T_k , X^0 le champ de vecteurs hamiltonien de f_0 et $\varphi_t : M \rightarrow M$ le flot de X^0 . Introduisons le

transport parallèle $\varphi_t^h : L_x \rightarrow L_{\varphi_t(x)}$ le long de la courbe $s \in [0, t] \rightarrow \varphi_s(x) \in M$. L'application $\tilde{\varphi}_t : L \rightarrow L$ définie par

$$\tilde{\varphi}_t(u) = e^{-i \int_0^t f_0(\varphi_s(x)) ds} \varphi_t^h(u)$$

est alors un relèvement préquantifiant de φ_t . On peut en donner une preuve directe ou bien le déduire de la proposition 3.13.

Pour décrire le symbole principal de $U_k(t)$, introduisons l'opérateur

$$D_t : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

défini de la manière suivante. Soit q_t le tenseur de $C^\infty(M, \Lambda^{(1,0)} M \otimes T^{(0,1)} M)$ qui en $x \in M$ est la restriction à $T_x^{(1,0)} M$ de la projection d'image $T_x^{(0,1)} M$ et de noyau $\varphi_{t*} T_y^{(1,0)} M$ avec $y = \varphi_t^{-1}(x)$. $G^{-1}.q_t$ est donc un tenseur de $C^\infty(M, T^{(0,1)} M \otimes T^{(0,1)} M)$ et si P_{∇}^2 désigne l'opérateur défini en (3.18), nous posons

$$D_t f = \langle P_{\nabla}^2 f, G^{-1}.q_t \rangle$$

Proposition 3.39. $U_k(t)$ est une quantum map de $\mathcal{Q}(\varphi_t)$. Si le symbole covariant de T_k est $\sum_l \hbar^l f_l$, le symbole principal de $U_k(t)$ est

$$e^{i \int_0^t (-f_1 + \frac{1}{2} D_t f_0)(\varphi_s(x)) ds}$$

En fait, nous allons montrer un résultat plus général qui décrit le noyau au sens de Schwartz de l'opérateur $U_k : C^\infty(M, L^k) \rightarrow C^\infty(M \times \mathbb{R}, L^k)$ qui à une section $s(x)$ associe $U_k(t).s(x)$. Le noyau de cet opérateur est une section de $C^\infty(M \times M \times \mathbb{R}, O^k)$. Soit

$$\mathcal{L} = \{(\varphi_t(x), x, t) / x \in M, t \in \mathbb{R}\} \subset M \times M \times \mathbb{R}$$

Comme cela a été fait au début du paragraphe 2.2, nous associons à \mathcal{L} une famille de sections lagrangiennes paramétrée par $t \in \mathbb{R}$. Soit $F \in C^\infty(M \times M \times \mathbb{R}, L \boxtimes L^{-1})$ la section associée à \mathcal{L} telle que $F(\varphi_t(x), x, t) = \tilde{\varphi}_t(x)$. Le noyau de U_k est alors de la forme

$$\left(\frac{k}{2\pi}\right)^n F^k(x_g, x_d, t) a(x_g, x_d, t, k) + R_k(x_g, x_d, t)$$

où (R_k) est une suite négligeable de $C^\infty(M \times M \times \mathbb{R}, L^k \boxtimes L^{-k})$ et $a(., k)$ un symbole de $S^0(M \times M \times \mathbb{R})$ dont les coefficients $a_l(x_g, x_d, t)$ du développement asymptotique vérifient

$$\bar{Z}_g.a_l \equiv Z_d.a_l \equiv 0 \quad \text{mod } \mathcal{I}^\infty(\Lambda), \quad \forall Z \text{ champ de vecteurs holomorphes de } M$$

Le symbole de (U_k) est la série formelle $\sum \hbar^l g_l$ de $C^\infty(M \times \mathbb{R})[[\hbar]]$ où $g_l(x, t) = a_l(\varphi_t(x), x, t)$. Le symbole $(U_k(t))$ est alors $\sum_l \hbar^l g_l(., t)$.

Preuve. Notons \mathcal{Q} l'ensemble des opérateurs $C^\infty(M, L^k) \rightarrow C^\infty(M \times \mathbb{R}, L^k)$ dont le noyau est de la forme indiquée ci-dessus. La preuve consiste à montrer que si $V_k \in \mathcal{Q}$ admet pour

symbole $\sum_{l \geq m} \hbar^l g_l$, alors $(\frac{1}{i\hbar} \partial_t + T_k) V_k$ est un opérateur de \mathcal{Q} et son symbole $\sum_{l \geq m+1} \hbar^l h_l$ est $O(\hbar^{m+1})$ avec

$$(3.28) \quad h_{m+1} = \frac{1}{i} \partial_t g_m(x, t) + (f_1 - \frac{1}{2} D_t f_0)(\varphi_t(x)) \cdot g_m(x, t)$$

A partir de là, on construit par approximations successives un opérateur $V_k \in \mathcal{Q}$ tel que $(\frac{1}{i\hbar} \partial_t + T_k) V_k = N_k$ soit régularisant et $V_k(0) \equiv \Pi_k$ modulo un régularisant. Son symbole principal est donné par la formule de l'énoncé de la proposition. Montrons que $R_k = V_k - U_k$ est régularisant: $U_k(t)$ est unitaire, en le testant sur des états cohérents (cf. chapitre 2) on montre que sa suite des noyaux est admissible, $U_k(-t) N_k = (ik)^{-1} \partial_t (U_k(-t) R_k)$ est donc régularisant et il en est de même par intégration de $U_k(-t) R_k$ est donc de R_k .

Démontrons (3.28). Si $f \in C^\infty(M)$, alors $f(z_g, \bar{z}_d)$ désigne une fonction $\tilde{f} \in C^\infty(M \times M)$ telle que

$$\tilde{f}(x, x) = f(x) \text{ et } \partial_{\bar{z}_g^i} \cdot \tilde{f} \equiv \partial_{z_d^i} \cdot \tilde{f} \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\text{diag } M)}$$

et de même si $g \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$, $g(z_g, \bar{z}_d, t)$ est une fonction $\tilde{g} \in C^\infty(M \times M \times \mathbb{R})$ telle que

$$\tilde{g}(\varphi_t(x), x, t) = g(x, t) \text{ et } \partial_{\bar{z}_g^i} \cdot \tilde{g} \equiv \partial_{z_d^i} \cdot \tilde{g} \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda)}$$

Nous devons estimer l'intégrale

$$I_k(x_1, x_3, t) = \int_M E^k(x_1, x_2) \cdot F^k(x_2, x_3, t) f_0(z_1, \bar{z}_2) g_m(z_2, \bar{z}_3, t) \mu_M(x_2)$$

et calculer $\frac{1}{i\hbar} \partial_t F(x_2, x_3, t) g_m(z_2, \bar{z}_3, t)$.

Pour estimer l'intégrale, on travaille localement au voisinage d'un point (y_0, x_0, t_0) de Λ . Soit $s(x)$ une section de L définie au voisinage de y_0 de norme constante égale à 1, la section $s'(x, t) = \varphi_t^* s(x)$ est alors définie au voisinage de (x_0, t) . Soit $\rho(x)$ définie au voisinage de y_0 telle que $\nabla s = (\bar{\partial} \rho - \bar{\partial} \bar{\rho}) \otimes s$ et $\rho'(x, t)$ définie au voisinage de (x_0, t_0) telle que à t fixé $\nabla s' = (\bar{\partial} \rho' - \bar{\partial} \bar{\rho}') \otimes s'$. On montre en suivant la preuve de la proposition 3.4 que

$$E(x_1, x_2) = e^{i\phi(x_1, x_2)} s(x_1) \otimes s^{-1}(x_2), \quad F(x_2, x_3, t) = e^{i\phi'(x_2, x_3, t)} s(x_2) \otimes (s')^{-1}(x_3, t)$$

avec

$$\begin{aligned} -i\phi(x_1, x_2) &= \rho(x_1) + \bar{\rho}(x_2) - (\rho + \bar{\rho})(z_1, \bar{z}_2) \\ -i\phi'(x_2, x_3, t) &= \rho(x_2) + \bar{\rho}'(x_3, t) - (\varphi_t^* \rho + \bar{\rho}')(z_2, \bar{z}_3, t) \end{aligned}$$

A présent la preuve est similaire à celle de la proposition 3.19. On introduit deux systèmes de coordonnées complexes (z^i) et (w^i) définis au voisinage de y_0 et x_0 , et on écrit les développements de Taylor le long de

$$\mathcal{L} = \{\varphi_t(x), x, t \mid x \in M, t \in \mathbb{R}\}$$

comme dans le lemme 3.2 à l'aide des champs de vecteurs $\partial_{z_1^i}$, $\partial_{z_2^i}$, $\partial_{\bar{z}_2^i}$ et $\partial_{w_3^i}$. On montre alors que

$$\phi(x_1, x_2) + \phi'(x_2, x_3, t) - \phi'(x_1, x_3, t) \sim i \sum_{|\alpha| > 0, |\beta| > 0} \frac{G_{\alpha, \beta}}{\alpha! \beta!} Z_2^\alpha \bar{Z}_2^\beta + i \sum_{\alpha} \frac{G_{\alpha, 0} - H_\alpha}{\alpha!} Z_2^\alpha$$

où $G_{\alpha,\beta}(x,t) = \partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta (\rho + \bar{\rho})(\varphi_t(x))$ et les H_α sont les restrictions à \mathcal{L} des dérivées par rapport aux ∂_{z_i} de $(\varphi_t^* \rho + \bar{\rho}')(z_2, \bar{z}_3, t)$. Raisonnant comme dans la preuve de la proposition 3.35, on montre que les fonctions $G_{i,0} - H_i$, qui sont les restrictions à \mathcal{L} de $\partial_{z_i}(\phi(x_1, x_2) + \phi'(x_2, x_3, t))$, s'annulent et l'on calcule la matrice de $-i d_{x_2}^2(\phi(x_1, x_2) + \phi'(x_2, x_3, t))$ dans la base $\partial_{z_i}, \partial_{\bar{z}_i}$

$$\begin{pmatrix} G_{ij,0} - H_{ij} & G_{i,j} \\ G_{j,i} & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } G_{ij,0} - H_{ij} = i\omega(q_t(\partial_{z_i}), \partial_{z_j})$$

De tout ceci, l'on déduit alors que l'intégrale est de la forme

$$I_k(x_1, x_3, t) = F^k(x_1, x_3, t)a(x_1, x_3, t, k) + O(k^{-\infty})$$

où $a(\cdot, k)$ admet un développement asymptotique $\sum_{l \geq m} k^{-l} a_l(z_1, \bar{z}_3, t)$ pour la topologie C^∞ avec

$$\begin{aligned} a_m(x, t) &= f_0(\varphi_t(x)) \cdot g_m(x, t) \\ a_{m+1}(x, t) &= -\frac{1}{2}(r \cdot f_0 + D_t f_0)(\varphi_t(x)) \cdot g_m(x, t) + f_0(\varphi_t(x)) \cdot g_{m+1}(x, t) \\ &\quad + (G^{i,j} \partial_{\bar{z}_i} f_0)(\varphi_t(x)) \cdot (\partial_{\bar{z}_j} g_m(z_2, \bar{z}_3, t))(\varphi_t(x), x, t) \end{aligned}$$

Montrons que $\partial_t F(x_2, x_3, t) \equiv -i f_0(z_2, \bar{z}_3, t) F(x_2, x_3, t)$ modulo $\mathcal{I}^\infty(\mathcal{L})$. Comme $\nabla_{\partial_{z_i}}$ et $\nabla_{\partial_{\bar{z}_i}}$ commutent avec ∂_t , il suffit de vérifier l'égalité le long de \mathcal{L} . Si X est un vecteur tangent aux deux premiers facteurs de $M \times M \times \mathbb{R}$, $\nabla_X F(\varphi_t(x), x, t)$ s'annule. Il suffit alors de montrer que

$$\nabla_X F(\varphi_t(x), x, t) = -i f_0(\varphi_t(x), x, t) F(\varphi_t(x), x, t)$$

où X est le vecteur $(X^0|_{\varphi_t(x)}, 0, \partial_t) \in T_{\varphi_t(x)} M \times T_x M \times T_t \mathbb{R}$. Nous vérifions ceci en dérivant F le long de $t \rightarrow (\varphi_t(x), x, t)$ avec x fixé. Par hypothèse

$$F(\varphi_t(x), x, t) \cdot u = e^{-i \int_0^t f_0(\varphi_s(x)) ds} \varphi_t^h(u), \quad \text{si } u \in L_x$$

et $t \rightarrow \varphi_t^h(u) \in L_{\varphi_t(x)}$ est plate, ce qui permet de conclure.

Donc en sommant $I_k(x_1, x_3, t)$ et $\frac{1}{ik} \partial_t (F^k(x_1, x_3, t) g_m(z_1, \bar{z}_3, t))$ nous obtenons

$$F^k(x_1, x_3, t) h(x_1, x_3, t, k) + O(k^{-\infty})$$

où $h(\cdot, k)$ admet un développement asymptotique $\sum_{l \leq m} k^{-l} h_l(z_1, \bar{z}_3, t)$, dont le premier terme est

$$h_m(t) = f_0(\varphi_t(x)) \cdot g_m(x, t) - f_0(\varphi_t(x)) \cdot g_m(x, t) = 0$$

Pour calculer h_{m+1} , introduisons λ la différentielle de $g_m(z_2, \bar{z}_3, t)$ en $(\varphi_t(x), x, t)$. Nous avons

$$\langle \lambda, i(G^{j,k} \partial_{\bar{z}_k} f_0)(\varphi_t(x)) \partial_{z_j} + \partial_t \rangle = \langle \lambda, i(G^{j,k} \partial_{\bar{z}_k} f_0)(\varphi_t(x)) \partial_{z_j} - i(G^{j,k} \partial_{z_j} f_0)(\varphi_t(x)) \partial_{\bar{z}_k} + \partial_t \rangle$$

Dans le terme de droite, nous reconnaissons le vecteur $(X^0|_{\varphi_t(x)}, 0, \partial_t) \in T_{\varphi_t(x)} M \times T_x M \times T_t \mathbb{R}$ tangent à Λ . Nous en déduisons que

$$h_{m+1}(x, t) = \frac{1}{i} \partial_t g_m(x, t) - \frac{1}{2} (r \cdot f_0 + D_t f_0)(\varphi_t(x)) \cdot g_m(x, t)$$

□

5.3 Invariance

Soit J_a et J_b deux structures complexes de M intégrables, compatibles avec ω et strictement positives, auxquelles nous associons deux quantifications (\mathcal{H}_k^a) et (\mathcal{H}_k^b) . L'idée qui remonte aux travaux de Kostant-Blattner-Sternberg est que la quantification de M est indépendante du choix de la structure complexe, autrement dit que (\mathcal{H}_k^a) et (\mathcal{H}_k^b) sont équivalentes dans un certain sens. Pour réaliser ceci, nous considérons un opérateur $(U_k) \in \mathcal{F}^k(\text{Id}, J_a, J_b)$ dont le symbole ne s'annule pas. Quitte à le composer par un opérateur de Toeplitz comme nous l'avons fait pour les quantum maps, nous pouvons supposer que pour k suffisamment grand

$$U_k U_k^* = \Pi_k^a, \quad U_k^* U_k = \Pi_k^b$$

autrement dit la restriction $U_k : \mathcal{H}_k^b \rightarrow \mathcal{H}_k^a$ est unitaire. Pour les petites valeurs de k , le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch ne permet pas de calculer les dimensions de \mathcal{H}_k^a et \mathcal{H}_k^b et rien ne nous assure qu'elles soient égales.

Grâce aux propositions 3.35 et 3.37, on vérifie que (U_k) agit bien comme on l'attend sur les sections lagrangiennes et les quantum map:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Lambda, \mathcal{H}^b, s) &\rightarrow \mathcal{S}(\Lambda, \mathcal{H}^a, s), & (t_k) &\rightarrow (U_k \cdot t_k) \\ \mathcal{F}(\varphi, J_a, J_a) &\rightarrow \mathcal{F}(\varphi, J_b, J_b), & (U_k) &\rightarrow (U_k T_k U_k^*) \end{aligned}$$

Ceci induit des opérations sur les symboles de la forme

$$\begin{aligned} U^\Lambda : C^\infty(\Lambda)[[\hbar]] &\rightarrow C^\infty(\Lambda)[[\hbar]], & U^\Lambda &= \sum \hbar^l U_l^\Lambda \\ U^\varphi : C^\infty(M)[[\hbar]] &\rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]], & U^\varphi &= \sum \hbar^l U_l^\varphi \end{aligned}$$

Les applications $U_l^\Lambda : C^\infty(\Lambda) \rightarrow C^\infty(\Lambda)$ (resp. $U_l^\varphi : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$) sont des opérateurs différentiels de degré au plus $2l$. En particulier, choisissant pour φ l'application identité, on définit un isomorphisme entre l'algèbre des opérateurs de Toeplitz de (\mathcal{H}_k^b) et l'algèbre des opérateurs de Toeplitz de (\mathcal{H}_k^a) . L'opération induite sur les symboles est une équivalence de star-produit.

Abordons à présent la même question d'un point de vue local. Supposons que (M_1, ω_1, J_1) et (M_2, ω_2, J_2) soient deux variétés kähleriennes de même dimension et munies de fibrés préquantifiants $L_1 \rightarrow M_1$ et $L_2 \rightarrow M_2$. Les données classiques et préquantiques sont localement isomorphes, i.e. si $x_1 \in M_1$ et $x_2 \in M_2$, alors il existe des voisinages U_i de x_i , un symplectomorphisme φ et un relèvement préquantifiant $\tilde{\varphi}$

$$\varphi : U_1 \rightarrow U_2, \quad \tilde{\varphi} : L|_{U_1} \rightarrow L|_{U_2}$$

En effet, l'existence de φ découle du lemme de Darboux. D'autre part, quitte à restreindre les U_i , il existe des sections s_i de L_i définies sur U_i de norme constante égale à 1 et telles que si $\nabla s_i = \alpha_i \otimes s_i$, alors $\alpha_1 = \varphi^* \alpha_2$. On définit ainsi $\tilde{\varphi}$ par $\tilde{\varphi}(s_1(x)) = s_2(\varphi(x))$

On souhaite étendre ceci aux quantifications \mathcal{H}^1 et \mathcal{H}^2 de M_1 et M_2 respectivement, grâce à une équivalence microlocale. Pour ce faire, nous utilisons la notion de microsupport (cf. chapitre 2). La notation $A_k \sim B_k$ au voisinage de (x, y) signifie qu'il existe un voisinage U de (x, y) tel que $MS(A_k - B_k) \cap U = \emptyset$

Proposition 3.40. *Il existe un opérateur $U_k : C^\infty(M_2, L_2^k) \rightarrow C^\infty(M_1, L_1^k)$ admissible tel que $\Pi_k^1 U_k \Pi_k^2 = U_k$, $\text{MS}(U_k) \subset \{(x, \varphi(x)) / x \in U_1\}$ et*

$$\begin{aligned} U_k U_k^* &\sim \Pi_k^1 && \text{au voisinage de } (x_1, x_1) \\ U_k^* U_k &\sim \Pi_k^2 && \text{au voisinage de } (x_2, x_2) \end{aligned}$$

De plus si (T_k) est un opérateur de Toeplitz de \mathcal{H}^2 de symbole principal f_0 , alors $(U_k T_k U_k^)$ est un opérateur de Toeplitz de \mathcal{H}^1 dont le symbole principal est égal à $\varphi^* f_0$ au voisinage de x_1 .*

Preuve. Définissons sur $U_1 \times U_2$ une section E de $L_1 \boxtimes L_2^{-1}$ telle que $E(x, \varphi(x)) = s_1(x) \otimes s_2^{-1}(\varphi(x))$ et $\nabla_{\bar{Z}} E$ s'annule à tout ordre le long du graphe de φ si Z est un champ de vecteurs holomorphes de $M_1 \times \bar{M}_2$. Considérons des opérateurs $C^\infty(M_2, L_2^k) \rightarrow C^\infty(M_1, L_1^k)$ dont les noyaux aux sens de Schwartz sont de la forme

$$(3.29) \quad E^k(x_g, x_d) a(x_g, x_d, k) + R_k(x_g, x_d)$$

où $R_k(x_g, x_d)$ est une suite négligeable de $C^\infty(M_1 \times M_2, L_1 \boxtimes L_2^{-1})$ et $a(\cdot, k)$ est un symbole de $S^0(M_1 \times M_2)$ tel qu'il existe un compact $K \subset U_1 \times U_2$ qui contienne tous les supports des $a(\cdot, k)$. Bien entendu, toutes les propriétés des applications quantiques se généralisent à ces opérateurs et en identifiant U_1 et U_2 par φ et s_1 et s_2 , on déduit de la proposition 3.35 les lois de composition des symboles. Soit V_k un opérateur de ce type tel que $a_0(x_1, x_2) \neq 0$. Quitte à le composer à gauche par Π_k^1 et à droite par Π_k^2 , il vérifie $\Pi_k^1 V_k \Pi_k^2 = V_k$. $V_k^* V_k$ est alors un opérateur de Toeplitz de \mathcal{H}_k^2 dont le symbole est réel et ne s'annule pas au voisinage de x_2 . Grâce au calcul symbolique des opérateurs de Toeplitz, on construit alors un opérateur de Toeplitz T_k tel que $V_k^* V_k T_k^2 \sim \Pi_k^2$ au voisinage de (x_2, x_2) . L'opérateur $U_k = V_k T_k$ vérifie alors $U_k^* U_k \sim \Pi_k^2$ au voisinage de (x_2, x_2) . Le symbole principal de U_k ne s'annulant pas en (x_1, x_2) , on peut construire un opérateur W_k tel que $U_k W_k \sim \Pi_k^1$ au voisinage de (x_1, x_1) (pour ce faire il suffit de choisir un opérateur dont l'adjoint a un noyau de la forme (3.29) et le corriger en le composant par un opérateur de Toeplitz). Nous avons alors $U_k^* \sim U_k^* U_k W_k \sim W_k$ au voisinage de (x_1, x_2) et par conséquent $U_k U_k^* \sim \Pi_k^1$ au voisinage de (x_1, x_1) . \square

Soient (T_k^1) et (T_k^2) des opérateurs de Toeplitz de \mathcal{H}_k^1 et \mathcal{H}_k^2 de symboles principaux f_0^1 et f_0^2 à valeurs réelles et tel que

$$f_0^1(x_1) = f_0^2(x_2) = 0, \quad df_0^1|_{x_1} \neq 0 \text{ et } df_0^2|_{x_2} \neq 0$$

On peut choisir le symplectomorphisme φ de sorte que $\varphi^* f_0^2 = f_0^1$ sur un voisinage de x_1 , et donc les symboles principaux de $(U_k T_k^2 U_k^*)$ et (T_k^1) coïncident au voisinage de x_1 . La proposition suivante améliore ceci.

Proposition 3.41. *Il existe un opérateur $U_k : C^\infty(M_2, L_2^k) \rightarrow C^\infty(M_1, L_1^k)$ et un opérateur $V_k : C^\infty(M_1, L_1^k) \rightarrow C^\infty(M_2, L_2^k)$ tels que $\Pi_k^1 U_k \Pi_k^2 = U_k$, $\Pi_k^2 V_k \Pi_k^1 = V_k$, le microsupport de (U_k) soit inclu dans $\{(x, \varphi(x)) / x \in U_1\}$ et*

$$\begin{aligned} U_k V_k &\sim \Pi_k^1 && \text{au voisinage de } (x_1, x_1) \\ V_k U_k &\sim \Pi_k^2 && \text{au voisinage de } (x_2, x_2) \\ U_k T_k^2 &\sim T_k^1 V_k && \text{au voisinage de } (x_2, x_1) \end{aligned}$$

De plus, si (T_k^1) et (T_k^2) sont auto-adjoints, on peut choisir (U_k) et (V_k) telle que $V_k = U_k^$.*

Preuve. En appliquant la proposition précédente, on est ramené au problème suivant: trouver un opérateur de Toeplitz (P_k) de \mathcal{H}^2 elliptique en x_2 tel que

$$P_k^{-1} S_k P_k \sim T_k^2 \quad \text{au voisinage de } (x_2, x_2)$$

Ceci se réalise comme pour les opérateurs \hbar -pseudodifférentiel en construisant le symbole de P par approximations successives et à l'aide du calcul symbolique type Weyl. \square

Le corollaire classique de ce résultat est la propagation semi-classique du microsupport. Dans un premier temps, précisons que si (u_α) est une suite admissible telle que $u_\alpha \in \mathcal{H}_{k_\alpha}$ et $k_\alpha \rightarrow \infty$ et (T_k) un opérateur de Toeplitz de symbole principal f_0 , alors

$$T_{k_\alpha} u_\alpha \sim 0 \text{ implique } \text{MS}(u_\alpha) \subset \{f_0 = 0\}$$

Proposition 3.42. *Si (T_k) un opérateur de Toeplitz dont le symbole principal f_0 est à valeurs réelles et (u_α) une suite admissible de \mathcal{H}_{k_α} telle que $T_{k_\alpha} u_\alpha \sim 0$, alors le microsupport de (u_α) est stable par le flot du champ de vecteurs hamiltonien de f_0 .*

Preuve. En les points où df_0 s'annule, il n'y a rien à montrer. Pour traiter les autres points, on se ramène en appliquant la proposition 3.40 au cas où M est le tore de dimension n que l'on quantifie de la manière usuelle. Localement, les données sont définies comme pour l'espace de Bargmann. C'est à dire que l'on peut choisir un système de coordonnées complexes (z^i) définies sur un ouvert U de M de sorte que $\omega = idz^j \wedge d\bar{z}^j$ et une section $s : U \rightarrow L$ telle que $|s|^2 = e^{-k|z|^2}$ et $\nabla s = -\bar{z}^j dz^j \otimes s$. Soit $x_0 \in M$ le point de coordonnées 0. On choisit pour (T_k) un opérateur de Toeplitz dont le symbole covariant est $\frac{1}{i}(z^1 - \bar{z}^1)$ au voisinage de x_0 . Soit (T'_k) l'opérateur

$$f \cdot s^k \rightarrow \phi \cdot \frac{1}{i}(z^1 \cdot f - \frac{1}{k} \partial_{z^1} f) s^k$$

où $\phi \in C_0^\infty(U)$ vaut 1 au voisinage de x_0 . Montrons que la restriction du noyau de (T_k) à $V \times M$ est égale à un régularisant près au noyau de $T'_k \Pi_k$, où V est un voisinage de x_0 bien choisi. Comme les microsupports de (T_k) et (Π_k) sont inclus dans la diagonale, il suffit de le vérifier au voisinage de (x_0, x_0) . Le noyau de (Π_k) est déterminé à un régularisant près par les données locales, donc

$$\Pi_k(x_g, x_d) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n e^{-k|z_d|^2 + kz_g^j \cdot \bar{z}_d^j} s(x_g) \otimes s^{-1}(x_d) + O(k^{-\infty})$$

au voisinage de (x_0, x_0) . Nous en déduisons que

$$(T'_k \Pi_k)(x_g, x_d) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n e^{-k|z_d|^2 + kz_g^j \cdot \bar{z}_d^j} \frac{\phi(x_g)(z_g - \bar{z}_d)}{i} s(x_g) \otimes s^{-1}(x_d) + O(k^{-\infty})$$

et l'on reconnaît au voisinage de (x_0, x_0) le noyau de T_k . Soit $u_\alpha \in \mathcal{H}_{k_\alpha}$ telle que $T_{k_\alpha} u_\alpha \sim 0$. $(T'_{k_\alpha} u_\alpha)$ est alors négligeable au voisinage de x_0 .

Dans le système de coordonnées réelles (x^j, y^j) telle que $z^j = x^j + iy^j$, le champ de vecteurs hamiltonien de $2y^1 = \frac{1}{i}(z^1 - \bar{z}^1)$ est $-\partial_{x^1}$. Effectuons le changement de jauge holomorphe $t = e^{\frac{1}{2}(z^1)^2} s$. De sorte que $T'_k(f \cdot t^k) = -\frac{\phi}{ik}(\partial_{z^1} f)t^k$. La norme $|t|^2 = e^{-2(y^1)^2 - \sum_2^n (x^i)^2 + (y^i)^2}$ est

invariante par le flot de ∂_{x^1} . Si $u_\alpha = f_\alpha \cdot t^{k_\alpha}$, alors $\frac{1}{ik_\alpha}(\partial_{z^1} f_\alpha)t^{k_\alpha}$ est négligeable au voisinage de x_0 et $\partial_{\bar{z}^1} f_\alpha = 0$, donc $(\partial_{x^1} f_\alpha)t^{k_\alpha}$ l'est aussi. En intégrant $\partial_{x^1} |f_\alpha \cdot t^{k_\alpha}|^2$ le long des courbes intégrales de ∂_{x^1} , on en déduit que

$$|f_\alpha \cdot t^{k_\alpha}|(x^1 + s, x^2, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = |f_\alpha \cdot t^{k_\alpha}|(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) + O(k_\alpha^{-\infty})$$

au voisinage de x_0 , où le reste est uniforme lorsque (x^i, y^i) décrit un compact. \square

Complétons à présent la preuve de la proposition 3.25 à l'aide des mêmes techniques.

Proposition 3.43. *Soit un opérateur de Toeplitz (T_k) de symbole principal f_0 à valeurs réelles et une suite $(k_\alpha, E_\alpha, u_\alpha)$ telle que*

$$u_\alpha \in \mathcal{H}_{k_\alpha}, \quad T_{k_\alpha} u_\alpha = E_\alpha u_\alpha + O(k_\alpha^{-\infty}), \quad (u_\alpha, u_\alpha) = 1 + O(k_\alpha^{-1})$$

On suppose de plus que $k_\alpha \rightarrow \infty$ et que la suite (E_α) prend ses valeurs dans un fermé $C \subset \mathbb{R}$. Alors le microsupport de (u_α) est inclu dans $f_0^{-1}(C)$.

Preuve. L'hypothèse sur la norme des u_α implique que la suite (u_α) est admissible. Nous devons montrer que la suite (u_α) est négligeable au voisinage de tout point $x_0 \notin f_0^{-1}(C)$. Soient des voisinages U de C et V de x_0 tels que $E - f_0(x)$ ne s'annule pas si $(E, x) \in U \times V$. Il existe alors $g \in C^\infty(U \times M)[[\hbar]]$ tel que $g(E, \cdot) *_{\text{cov}} (E - f) = 1$ sur un voisinage $W \subset V$ de x ne dépendant pas de E (f est le symbole covariant de (T_k)). Introduisons alors une famille d'opérateurs de Toeplitz (P_k^E) de symbole covariant $g(E, \cdot)$ telle que

$$P_k^E (T_k - E\Pi_k) = \Pi_k + R_k^E$$

où la suite des noyaux $(R_k^E(x_g, x_g, k))$ à valeurs dans $C^\infty(U \times M^2, L^k \boxtimes L^{-k})$ est négligeable sur $V \times W^2$. En appliquant cette égalité à u_α , on obtient le résultat. \square

Considérons maintenant n opérateurs de Toeplitz (T_k^i) qui commutent deux à deux. Soit $f_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application dont les composantes (f_0^i) sont les symboles principaux des (T_k^i) . Supposons que f_0 soit de rang n en $x_0 \in M$. Il existe alors un voisinage U de x_0 diffeomorphe à un produit $U_x \times U_y$ d'ouverts contractibles de \mathbb{R}^n tel que si l'on note (x^i) et (y^i) les coordonnées sur U_x et U_y respectivement alors $\omega = \sum dx^i \wedge dy^i$ et $f_0^i = y^i$. Soit

$$\Lambda_u = \{(x, y) \in U_x \times U_y / y = u\}$$

où u décrit $U_u := U_y$. Chaque (T_k^i) induit une application $T^{i,u}$ sur $C^\infty(\Lambda_u)[[\hbar]]$. Comme nous l'avons vu dans la preuve du théorème 3.33, étant donné $g_0 \in C^\infty(U_u)[[\hbar]]$, il existe un unique $g \in C^\infty(U_u \times U_x)[[\hbar]]$ tel que

$$T^{i,u} \cdot g(u, \cdot) = u^i \cdot g(u, \cdot), \quad g(u, 0, \hbar) = g_0(u, \hbar)$$

Soit une section $F \in C^\infty(U_u \times U, L)$ telle que $F(u, \cdot, u)$ soit plate de norme 1 et

$$\nabla_{\bar{Z}} F \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\mathcal{L})}, \quad \forall Z \in C^\infty(U_u \times U, T^{1,0} M)$$

où $\mathcal{L} = \{(u, x, y) \in U_u \times U / u = y\}$. Soit $h(\cdot, k) = \sum k^{-l} h_l$ un symbole de $S^0(U_u \times U)$ tel que

$$g(u, x, \hbar) = \sum \hbar^l h_l(u, x, u) \quad \text{et} \quad \bar{Z}.h_l \equiv 0 \quad \text{mod } \mathcal{I}^\infty(\mathcal{L}), \quad \forall Z \in C^\infty(U_u \times U, T^{1,0}M)$$

La famille de sections $(u_{k,E} = F^k(E, \cdot)h(E, \cdot, k))$ est alors solution de $T_k^i u_{k,E} = E u_{k,E}$ au voisinage de x_0 dans le sens suivant: Si $\phi \in C_0^\infty(M)$ a son support inclu dans $U_x \times U_y$ et vaut 1 au voisinage de x_0 , alors

$$T_k^i \phi u_{k,E} = E \phi u_{k,E} + O(k^{-\infty}) \quad \text{au voisinage de } x_0$$

La proposition suivante montre que toutes les solutions de $T_k^i u_{k,E} = E u_{k,E}$ sont localement de cette forme.

Proposition 3.44. *Soit une suite $(k_\alpha, E_\alpha, u_\alpha)$ telle que*

$$u_\alpha \in \mathcal{H}_{k_\alpha}, \quad T_{k_\alpha}^i u_\alpha = E_\alpha^i u_\alpha + O(k_\alpha^{-\infty}), \quad (u_\alpha, u_\alpha) = 1 + O(k_\alpha^{-1})$$

Supposons que $k_\alpha \rightarrow \infty$ et (E_α) prenne ses valeurs dans un compact de U_u . Alors il existe une suite c_α telle que

$$u_\alpha = c_\alpha F^{k_\alpha}(E_\alpha, \cdot)h(E_\alpha, \cdot, k_\alpha) + O(k_\alpha^{-\infty}) \quad \text{sur } U$$

Preuve. On peut se ramener comme dans la preuve de la proposition 3.42 au tore. En effet, en adaptant la preuve de la proposition 3.41, on montre qu'il existe une équivalence microlocale U_k entre un voisinage de x_0 et un voisinage de $0 \in \mathbb{T}^{2n}$ telle que

$$U_k T_k^i \sim S_k^i U_k^* \quad \text{au voisinage de } (x_0, 0)$$

où le symbole covariant de (S_k^i) est $\frac{1}{2i}(z^i - \bar{z}^i)$ au voisinage de 0. Du fait que les équivalences microlocales que nous avons définies préservent les sections lagrangiennes (cf. proposition 3.37 que l'on adapte avec des paramètres), il suffit de montrer le résultat pour les opérateurs (S_k^i) au voisinage de 0. Avec les notations et les méthodes de la preuve de la proposition 3.42, on montre que l'opérateur S_k^i agit au voisinage de 0 comme

$$f.s^k \rightarrow \phi \cdot \frac{1}{2i}(z^i \cdot f - \frac{1}{k} \partial_{z^i} f) s^k$$

Une suite de section $u_{k,E}$ est

$$u_{k,E} = e^{k \sum_i \frac{1}{2}(z^i - iE^i)^2 - iE^i z^i - \frac{1}{2}(E^i)^2} s^k(x)$$

On définit alors la suite c_α de sorte que u_α et $c_\alpha v_{k_\alpha}(E_\alpha, \cdot)$ coincide en $(x, y) = (0, E_\alpha)$. Il suffit alors de montrer que $f_\alpha(x, y)$ vérifie $f_\alpha(0, E(\alpha)) = 0$, $\partial_{\bar{z}} f_\alpha = 0$ et

$$(\partial_z f_\alpha)|_{v_{k_\alpha}(E_\alpha, \cdot)} = O(k_\alpha^{-\infty})$$

au voisinage de 0, alors $f_\alpha|_{v_{k_\alpha}(E_\alpha, \cdot)} = O(k_\alpha^{-\infty})$ au voisinage de x_0 . \square

Bibliography

- [1] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer Verlag, 1992.
- [2] M. Bordemann, J. Hoppe, P. Schaller, M. Schlichenmaier, $gl(\infty)$ and geometric quantization, *Commun. Math. Phys.*, Vol. **138**, pp.209-244, 1991.
- [3] D. Borthwick, T. Paul and A. Uribe, Legendrian distributions with applications to relative Poincaré series, *Invent. Math.*, Vol. **122**, pp. 359-402, 1995.
- [4] D. Borthwick, T. Paul and A. Uribe, Semiclassical spectral estimates for Toeplitz operators, *Ann. Inst. Fourier*, Vol. **48**, 1998.
- [5] L. Boutet de Monvel, V. Guillemin, *The spectral theory of Toeplitz operators*, Annals of math. stud. 99, Princeton University, 1981.
- [6] Y. Colin de Verdière, *Méthodes semi-classiques et théorie spectrale*, en préparation.
- [7] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I,IV*, Springer Verlag, 1983.
- [8] J.M. Morvan, Quelques invariants topologiques en géométrie symplectique, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Section A: Phys. théor., Vol. **38**, pp 349-370, 1983.
- [9] S. Vu Ngoc, Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type, *Comm. Pure and Applied Math* , Vol. **53**, pp 143-217, 1999.
- [10] P. Xu, Fedosov $*$ -products and quantum momentum maps, *Commun. Math. Phys.*, Vol. **197**, pp 167-197, 1998.
- [11] S. Zelditch, Index and dynamics of quantized contact transformations, *Ann.Inst. Fourier*, Vol **47**, pp 305-363, 1997.

Chapter 4

Analyse semi-classique sur les variétés symplectiques compactes

Cet article porte sur la quantification des variétés symplectiques compactes. Par quantification, nous entendons une théorie analogue à celle des opérateurs pseudodifférentiels à petit paramètre pour les espaces cotangents ou des opérateurs de Toeplitz pour les variétés kähleriennes. Nous développons ceci en nous concentrant sur la quantification des sous-variétés lagrangiennes.

La première motivation est de généraliser nos constructions et résultats sur les variétés kähleriennes des deux chapitres précédents. Ces travaux, des définitions jusqu'aux techniques utilisées, s'appuyaient de manière essentielle sur la structure kählerienne. Par contre, pour ce qui est de la mécanique classique, seul importe la structure symplectique et comme l'a montré Thurston, toute variété symplectique n'admet pas nécessairement de structure kählerienne (cf. [8]). La théorie que nous présentons donne aussi un autre point de vue sur la quantification des variétés kähleriennes et explique les relations entre les opérateurs pseudodifférentiels à petit paramètre et les opérateurs de Toeplitz.

La méthode que nous suivons est inspirée des idées de Boutet de Monvel et Guillemin développées dans la théorie homogène que nous appliquons dans la théorie à petit paramètre, à ceci près qu'au lieu d'utiliser les opérateurs ou distributions de Hermite, nous considérons des opérateurs Fourier intégraux ou distributions lagrangiennes à phase complexe. L'emploi de ces opérateurs dans un tel contexte remonte à [3] pour le projecteur de Szegö et [1] pour les opérateurs de Toeplitz. Comme nous allons le voir, ceci se généralise naturellement à la quantification des variétés lagrangiennes. Signalons enfin les articles [4], [5] et [6] de Borthwick, Paul et Uribe qui traitent de sujets connexes et sont aussi inspirés de [2]. Les techniques utilisées par ces auteurs diffèrent des nôtres en deux points: l'usage des opérateurs de Hermite et la déduction des résultats semi-classiques de résultats de la théorie homogène. Il nous a semblé plus simple de travailler uniquement sur une théorie à petit paramètre.

Soyons à présent un peu plus précis et décrivons le contenu de cet article. La première partie est consacrée à la quantification de cotangent T^*M dont la base M est compacte et

la structure symplectique est donnée par $\Omega = d\gamma + \pi^*\omega$, où γ est la 1-forme de Liouville, π la projection $T^*M \rightarrow M$ et ω une 2-forme fermée de M dont les périodes sont des multiples de 2π . On adapte à ce contexte la théorie usuelle sur les cotangents, en introduisant un fibré en droite $L \rightarrow M$ muni d'une structure hermitienne et d'une connection de courbure $\frac{1}{i}\omega$. Les états quantiques sont alors les sections de $L^k \rightarrow M$, le petit paramètre est $\hbar = k^{-1}$. On peut alors définir des opérateurs pseudodifférentiels, des fonctions lagrangiennes et des opérateurs Fourier intégraux. Pour les applications que nous avons en vue, il est nécessaire de considérer aussi des phases complexes, en contrepartie on peut se restreindre aux sous-variétés lagrangiennes sans caustiques.

Supposons à présent que (M, ω) soit une variété symplectique. Si la structure symplectique de T^*M est celle décrite ci-dessus, la section nulle $M \rightarrow T^*M$ est un plongement symplectique et l'on considère de la sorte que M est une sous-variété symplectique de T^*M . Dans une deuxième partie, nous expliquons comment prolonger les sous-variétés lagrangiennes de M en des sous-variétés lagrangiennes complexes de T^*M . Cette opération nécessite de munir M d'une certaine donnée qui détermine entre autres une structure complexe compatible avec ω . Ceci s'applique aussi aux sous-variétés lagrangiennes de produit de variétés symplectiques. Nous montrons que cette opération commute avec la composition des sous-variétés lagrangienne et étudions le calcul symbolique associé.

Appliquant ceci à la diagonale Δ de $M \times \overline{M}^1$, nous obtenons une sous-variété lagrangienne de $T^*M \times \overline{T^*M}$ et donc un espace d'opérateurs intégraux de Fourier. Nous choisissons alors un idempotent (Π_k) parmi ces opérateurs qui va jouer un rôle analogue au projecteur de Szegö dans la cas kählerien. Notamment, les espaces quantiques $\mathcal{H}_k \subset C^\infty(M, L^k)$ sont définis comme étant les images des Π_k . Leur dimension est finie et est estimée par

$$\dim \mathcal{H}_k = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \int_M \frac{\omega^n}{n!} + O(k^{n-1})$$

La troisième partie décrit ceci en détail et traite la quantification des sous-variétés lagrangiennes de M . La méthode consiste à prolonger une telle sous-variété Λ en une sous-variété $\tilde{\Lambda}$ de T^*M par le procédé défini dans la deuxième partie, ce qui en appliquant les résultats de la première partie définit un espace de sections lagrangiennes \mathcal{F} . On associe alors à Λ l'ensemble des sections (s_k) de \mathcal{F} telles que $s_k \in \mathcal{H}_k, \forall k$. On suit la même méthode pour quantifier les sous-variétés lagrangiennes de $M \times \overline{M}$ ce qui définit des opérateurs. Tout ces objets ont des symboles totaux et les règles de compositions généralisent celles obtenues dans le troisième chapitre sur les variétés kähleriennes.

La quatrième partie est consacrée aux opérateurs de Toeplitz, qui sont les opérateurs obtenus en quantifiant la diagonale de $M \times \overline{M}$. Nous montrons que l'on peut définir des symboles covariants et contravariants, ce qui induit des star produits sur M . Nous étudions le calcul principal et sous-principal des symboles et obtenons les mêmes formules que dans le cas kählerien (celles-ci ne dépendent que de la structure complexe). Nous décrivons les relations entre ces opérateurs et les opérateurs pseudo-différentiels de T^*M et définissons la notion de microsupport. Enfin, nous énonçons quelques résultats qui montrent que la quantification de M est essentiellement unique. Nous expliquons aussi comment réaliser des équivalences microlocales avec la quantification des cotangents à l'aide des mêmes techniques.

¹Si (N, α) est une variété symplectique, nous notons \overline{N} la variété symplectique $(N, -\alpha)$

1 Opérateurs pseudodifférentiels et intégraux de Fourier

Soit M une variété compacte et $L \rightarrow M$ un fibré en droite hermitien muni d'une dérivation covariante ∇ . Notons $\frac{1}{i}\omega$ la courbure de ∇ . Dans ce chapitre, nous ne supposons pas que ω est non-dégénérée. Soit γ la une-forme de Liouville de T^*M

$$\langle \gamma, X \rangle = \langle l, \pi_* X \rangle, \quad \forall X \in T_l(T^*M)$$

où $\pi : T^*M \rightarrow M$ est la projection canonique. La structure symplectique de T^*M est donnée par la 2-forme $\Omega = d\gamma + \pi^*\omega$. Pour identifier les fonctions à des demi-densités, on se donne aussi un densité μ de M strictement positive.

Si X est une variété et m un entier, on désigne par $S^m(X)$ l'ensemble des suites $(a(\cdot, k))$ à valeurs dans $C^\infty(X)$ qui admettent un développement asymptotique

$$a(\cdot, k) = \sum_{l=m}^{\infty} k^{-l} a_l + O(k^{-\infty})$$

pour la topologie C^∞ . On note $S_o^m(X)$ les suites $(a(\cdot, k))$ de $S^m(X)$ telles qu'il existe un compact K de X qui contiennent les supports de toutes les fonctions $a(\cdot, k)$. Enfin, $S(X)$ est l'union des $S^m(X)$, où m décrit \mathbb{Z} .

1.1 Opérateurs pseudodifférentiels

Nous supposons la théorie des opérateurs pseudodifférentiels à petit paramètre connue et nous nous concentrons sur les modifications à apporter pour prendre en compte le fibré L . Dans un premier temps, travaillons localement sur un ouvert U de M muni d'un système de coordonnées (x^i) et d'une section $s : U \rightarrow L$ de norme constante égale à 1. Considérons une suite d'opérateurs $(P_k : C^\infty(U, L^k \otimes |\Omega|^{\frac{1}{2}}U) \rightarrow C^\infty(U, L^k \otimes |\Omega|^{\frac{1}{2}}U))_k$ telle que la suite des noyaux au sens de Schwartz $(P_k(x_g, x_d))$ soit de la forme

$$(4.1) \quad \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n |dx_g|^{\frac{1}{2}} |dx_d|^{\frac{1}{2}} s^k(x_g) \otimes s^{-k}(x_d) \int e^{ik(x_g^i - x_d^i) \cdot \xi^i} a(x_g, x_d, \xi, k) |d\xi| + O(k^{-\infty})$$

où $(a(\cdot, k))$ est un symbole $S_o^m(U \times U \times \mathbb{R}^n)$. Rappelons qu'une telle formule ne dépend pas du choix des coordonnées : si l'on choisit un autre système de coordonnées (y^i) , alors il existe une symbole $(b(\cdot, k)) \in S_o^m(U \times U \times \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{aligned} & |dx_g|^{\frac{1}{2}} |dx_d|^{\frac{1}{2}} \int e^{ik(x_g^i - x_d^i) \cdot \xi^i} a(x_g, x_d, \xi, k) |d\xi| \\ &= |dy_g|^{\frac{1}{2}} |dy_d|^{\frac{1}{2}} \int e^{ik(y_g^i - y_d^i) \cdot \eta^i} b(y_g, y_d, \eta, k) |d\eta| + O(k^{-\infty}) \end{aligned}$$

D'autre part, étant donné un système de coordonnées, on peut s'arranger pour choisir les fonctions $a(\cdot, k)$ de sorte qu'elle ne dépende pas de x_d et dans ce cas, les coefficients du développement asymptotique $\sum k^{-l} a_l(x_g, \xi)$ de $a(\cdot, k)$ sont déterminés de manière unique. De plus si l'on considère les fonctions ξ^i comme les coordonnées dans les fibres de T^*M associées

aux x^i de sorte que $a_m(x, \xi)$ soit une fonction de $C^\infty(T^*M)$, celle-ci dépend uniquement de P_k , i.e qu'elle ne dépend pas du choix des coordonnées (x^i) . Il en de même de la fonction $a_{m+1}(x, \xi) - \frac{1}{2i}(\partial_{x^j}\partial_{\xi^j}a_m)(x, \xi)$. Par contre ces fonctions dépendent du choix de la section s et il nous faut les modifier afin de définir les symboles principal a_m^w et sous-principal a_{m+1}^w de P_k . Soient β^j les fonctions à valeurs réelles telles que $\nabla s = -i(\beta^j dx^j) \otimes s$. Nous posons

$$(4.2) \quad \begin{aligned} a_m^w(x, \xi) &= a_m(x, \xi^j + \beta^j) \\ a_{m+1}^w(x, \xi) &= \left(a_{m+1} - \frac{1}{2i} \partial_{x^j} \partial_{\xi^j} a_m \right)(x, \xi^j + \beta^j) \end{aligned}$$

Lemme 4.1. *L'expression (4.1) ne dépend pas du choix de la section s . Les fonctions a_m^w et a_{m+1}^w considérées comme des fonctions de $C^\infty(T^*M)$ ne dépendent pas du choix des coordonnées ni du choix de la section s .*

Preuve. Effectuons un changement de coordonnées $y^i(x)$. Si l'on note (x^i, ξ^i) et (y^i, η^i) les coordonnées associées de T^*M et $\alpha^i dy^i = \beta^i dx^i$, nous avons

$$\xi^i = (\partial_{x^i} y^j) \cdot \eta^j, \quad \beta^i = (\partial_{x^i} y^j) \alpha^j$$

On déduit alors que a_m^w et a_{m+1}^w ne dépendent pas des coordonnées du fait que $a_m(x, \xi)$ et $a_{m+1}(x, \xi) - \frac{1}{2i}(\partial_{x^j}\partial_{\xi^j}a_m)(x, \xi)$ n'en dépendent pas. Introduisons à présent une section $t = e^{-if} s$ où f est une fonction à valeurs réelles. Nous avons $\nabla t = -i((\beta^j + \partial_{x^j} f) dx^j) \otimes t$. Soient $g^i(x_g, x_d)$ telle que $f(x_g) - f(x_d) = g^i(x_g, x_d)(x_g^i - x_d^i)$. Nous avons

$$\begin{aligned} & s^k(x_g) \otimes s^{-k}(x_d) \int e^{ik(x_g^i - x_d^i) \cdot \xi^i} a(x_g, \xi, k) |d\xi| \\ &= t^k(x_g) \otimes t^{-k}(x_d) \int e^{ik(x_g^i - x_d^i) \cdot \xi^i} a(x_g, \xi^i - g^i(x_g, x_d), k) |d\xi| \\ &= t^k(x_g) \otimes t^{-k}(x_d) \int e^{ik(x_g^i - x_d^i) \cdot \xi^i} b(x_g, \xi, k) |d\xi| + O(k^{-\infty}) \end{aligned}$$

où $(b(\cdot, k))$ est un symbole dont on calcule les coefficients du développement asymptotique $\sum k^{-l} b_l$ avec la formule habituelle, ce qui donne

$$\begin{aligned} b_m(x, \xi) &= a_m(x, \xi^i - \partial_{x^i} f) \quad \text{car } g^i(x, x) = -\partial_{x^i} f \\ b_{m+1}(x, \xi) &= a_{m+1}(x, \xi^i - \partial_{x^i} f) + \frac{1}{i} \partial_{x_d^i} \partial_{\xi^i} a_m(x_g, \xi^i - g^i(x_g, x_d)) \Big|_{x_d=x, x_g=x} \\ &= a_{m+1}(x, \xi^i - \partial_{x^i} f) + \frac{1}{2i} (\partial_{x^i} \partial_{x^j} f)(x) (\partial_{\xi^i} \partial_{\xi^j} a_m)(x, \xi^i - \partial_{x^i} f) \end{aligned}$$

car la partie symétrique de $\partial_{x_d^i} g^j \Big|_{x_d=x, x_g=x}$ est $\frac{1}{2}(\partial_{x^i} \partial_{x^j} f)(x)$. A partir de là, il est aisé de vérifier que $a_m^w = b_m^w$ et $a_{m+1}^w = b_{m+1}^w$. \square

Donnons à présent la définition d'un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m

Définition 4.2. Un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m est une suite d'opérateurs

$$(P_k : C^\infty(M, L^k \otimes |\Omega|^{\frac{1}{2}} M) \rightarrow C^\infty(M, L^k \otimes |\Omega|^{\frac{1}{2}} M))_k$$

dont la suite des noyaux au sens de Shwartz $(P_k(x_g, x_d))$ est négligeable en dehors de la diagonale et telle que si (x^i) est un système de coordonnées de M définies sur un ouvert U , $s : U \rightarrow L$ une section de L de norme constante égale à 1 et K un compact de U^2 , alors

$$P_k(x_g, x_d)|_K = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n |dx_g|^{\frac{1}{2}} |dx_d|^{\frac{1}{2}} s^k(x_g) \otimes s^{-k}(x_d) \int e^{ik(x_g^i - x_d^i) \cdot \xi^i} a(x_g, \xi, k) |d\xi| + O(k^{-\infty})$$

où $(a(\cdot, k))$ est un symbole de $S_o^m(U \times \mathbb{R}^n)$. Les symboles principal et sous-principal de (P_k) sont les fonctions a_m^w et a_{m-1}^w de $C^\infty(T^*M)$ définies localement par les formules (4.2).

On notera $\ominus^m(M)$ l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre m . Le produit de deux opérateurs pseudodifférentiels d'ordre l et m respectivement est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $l + m$. De la règle usuelle de composition

$$c_{l+m} + \hbar c_{l+m+1} = a_l \cdot b_m + \hbar(a_l \cdot b_{m+1} + a_{l+1} \cdot b_m + \frac{1}{i}(\partial_{\xi^j} a_l)(\partial_{x^j} b_m))$$

l'on déduit la règle de composition des symboles principal et sous-principal. Si P et Q sont deux opérateurs pseudodifférentiels de symboles principal et sous-principal $a_l^w + \hbar a_{l+1}^w$ et $b_m^w + \hbar b_{m+1}^w$ respectivement, alors les symboles principal et sous-principal de $P \cdot Q$ sont

$$(4.3) \quad c_{l+m}^w + \hbar c_{l+m+1}^w = a_l^w \cdot b_m^w + \hbar(a_l^w \cdot b_{m+1}^w + a_{l+1}^w \cdot b_m^w + \frac{1}{2i}\{a_l^w, b_m^w\})$$

où $\{f, g\}$ désigne le crochet de Poisson de $f, g \in C^\infty(T^*M)$ pour la structure symplectique donnée par Ω . Le commutateur $[P, Q]$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $l + m + 1$, son symbole principal est

$$(4.4) \quad d_{l+m+1}^w = \frac{1}{i}\{a_l^w, b_m^w\}$$

De même, on montre que l'adjoint d'un opérateur pseudodifférentiel de symboles principal et sous-principal $a_m^w + \hbar a_{m+1}^w$ est un opérateur pseudodifférentiel de symboles principal et sous-principal $\bar{a}_m^w + \hbar \bar{a}_{m+1}^w$.

Partant du symbole Weyl des opérateurs pseudodifférentiels usuels, on montre que l'on peut écrire le noyau d'un opérateur pseudodifférentiel dans notre contexte sous la forme

$$\left(\frac{k}{2\pi}\right)^n |dx_g|^{\frac{1}{2}} |dx_d|^{\frac{1}{2}} s^k(x_g) \otimes s^{-k}(x_d) \int e^{ik(x_g^i - x_d^i) \cdot (\xi^i + \frac{1}{2}(\beta^i(x_g) + \beta^i(x_d)))} b(x_g, x_d, \xi, k) |d\xi| + O(k^\infty)$$

à un $O(k^{-\infty})$ près, où $(b(\cdot, k))$ est un symbole telle que $b(x_g, x_d, \xi, k)$ soit symétrique en x_g et x_d . On vérifie alors que les symboles principal et sous-principal sont donnés par

$$a_m^w(x, \xi) = b_m(x, x, \xi), \quad a_{m+1}^w(x, \xi) = b_{m+1}(x, x, \xi)$$

où $b(\cdot, k) = k^{-m} b_m + k^{-m-1} b_{m+1} + O(k^{-m-2})$.

Introduisons la notion de microsupport. Nous disons d'une suite (u_k) de $C^\infty(M, L^k)$ qu'elle est admissible si quels que soit N , les champs de vecteurs X_1, \dots, X_N et un compact K de M , il existe C et N' tel que

$$|\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_N} u_k|(x) \leq C k^{N'}, \quad \forall x \in K$$

Cette définition est assez restrictive, mais elle suffit pour ce qui suit. Un opérateur pseudodifférentiel est dit elliptique en $x \in T^*M$ si son symbole principal ne s'annule pas en x . Soit $\overline{T^*M}$ le fibré sur M obtenu en compactifiant les fibres T_x^*M en $T_x^{\widehat{}}M = T_x^*M \cup S^{n-1}(T_x^*M)$. Comme pour la théorie usuelle sur les cotangents, on peut introduire des opérateurs pseudodifférentiels dont le symbole n'est pas à support compact, ce qui permet de définir l'ellipticité à l'infini et donc en tout point de $\overline{T_x^*M}$. Ceci étant on définit le microsupport d'une suite admissible (u_k) de $C^\infty(M, L^k)$ comme étant le fermé de $\overline{T_x^*M}$ dont le complémentaire est l'ensemble des points $x \in \overline{T^*M}$ tels qu'il existe un opérateur pseudodifférentiel (P_k) elliptique en x pour lequel $(P_k u_k)$ est négligeable au voisinage de x . On ne s'attardera pas plus sur le microsupport à l'infini car toutes les suites que nous considérerons auront leur microsupport inclu dans la section nulle de T^*M .

Enfin, donnons quelques exemples classiques d'opérateurs pseudodifférentiels (dont le symbole n'est pas à support compact).

Exemple 4.3. Si X est un champ de vecteurs de M , on définit l'opérateur

$$P_X : C^\infty(M, L^k \otimes |\Omega|^{\frac{1}{2}}) \rightarrow C^\infty(M, L^k \otimes |\Omega|^{\frac{1}{2}}), \quad P_X(u \otimes \mu^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{ik}(\nabla_X u) \otimes \mu^{\frac{1}{2}}$$

Alors P est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0, ses symboles principal et sous-principal sont $\sigma(X) + \frac{\hbar}{2i} \operatorname{div}_\mu X$, où $\sigma(X) \in C^\infty(T^*M)$ est la fonction qui à $l \in T^*M$ associe $\langle l, X|_{\pi(l)} \rangle$ et $\operatorname{div}_\mu X$ est la divergence de X par rapport à μ . La courbure de L^k étant $-ik\omega$, nous avons $[P_X, P_Y] = \frac{1}{ik}(P_{[X, Y]} - \omega(X, Y))$. En calculant le symbole principal du commutateur par (4.4), on obtient la formule

$$\{\sigma(X), \sigma(Y)\} = \sigma([X, Y]) - \omega(X, Y)$$

que l'on peut aussi montrer par un calcul direct. □

Exemple 4.4. Considérons une métrique riemannienne g de M . Définissons le laplacien Δ comme étant la composition des applications

$$C^\infty(M, L^k) \rightarrow C^\infty(M, L^k \otimes T^*M) \rightarrow C^\infty(M, L^k \otimes T^*M \otimes T^*M) \rightarrow C^\infty(M, L^k)$$

où la première flèche est la connexion ∇ , la seconde le produit tensoriel de ∇ par la connexion de Levi-Civita et la troisième est la contraction avec g . Alors l'opérateur

$$u \otimes \mu^{\frac{1}{2}} \rightarrow k^{-2}(\Delta u) \otimes \mu^{\frac{1}{2}}$$

est un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole principal est $l \rightarrow |l|^2$. Si l'on choisit pour μ la densité induite par g , son symbole sous-principal est nul. On peut aussi définir l'opérateur de Schrödinger

$$Q(u \otimes \mu^{\frac{1}{2}}) = (k^{-2}\Delta u + V.u) \otimes \mu^{\frac{1}{2}} \text{ où } V \in C^\infty(M)$$

avec champ magnétique ω et potentiel V . Son symbole principal est $|l|^2 + V(\pi(l))$ et son symbole sous-principal s'annule si μ est choisi comme précédemment. □

1.2 Sections Lagrangiennes

On souhaite définir les sections lagrangiennes associées aux sous-variétés lagrangiennes de T^*M . Commençons par le cas le plus simple où Λ est une sous-variété lagrangienne de T^*M telle que la projection $\pi : \Lambda \rightarrow M$ soit un difféomorphisme. Si L est le fibré trivial $M \times \mathbb{C}$, on associe classiquement à Λ des fonctions dites lagrangiennes qui s'écrivent localement sur un ouvert U de M

$$e^{i\hbar^{-1}f(x)}a(x, \hbar)$$

où $a(x, \hbar)$ est un symbole et f une fonction à valeurs réelles telle que l'image de $df : U \rightarrow T^*M$ soit incluse dans Λ . Munissons $L = M \times \mathbb{C}$ de la connexion $\nabla = d$ et posons $F(x) = e^{if(x)}$, nous avons alors

$$(4.5) \quad |F| = 1 \text{ et l'image de } \alpha : U \rightarrow T^*M, \text{ définie par } \nabla F = i\alpha \otimes F, \text{ est incluse dans } \Lambda$$

Lorsque L est un fibré en droite hermitien munie d'une connexion, cette condition a toujours un sens et permet de définir les sections lagrangiennes comme étant les suites qui sont de la forme $F^k(x)a(x, k)$. Discutons l'existence de F dans ce cas. Choisissons une section locale $s : U \rightarrow L$ de norme constante égale à 1, de sorte que $\nabla s = \frac{1}{i}\beta \otimes s$ où β est réelle et $d\beta = \omega$. Cherchons F de la forme $e^{if(x)}s$. Si Λ est définie par les équations $\xi^i = u^i(x)$, alors f doit vérifier

$$\partial_{x^i} f = u^i + \beta^i \text{ avec } \beta = \beta^i(x)dx^i$$

Si U est contractible, une telle fonction existe si et seulement si

$$\partial_{x^i}(u^j + \beta^j) = \partial_{x^j}(u^i + \beta^i)$$

Or $\{\xi^i - u^i, \xi^j - u^j\} = -\partial_{x^i}u^j + \partial_{x^j}u^i - \partial_{x^i}\beta^j + \partial_{x^j}\beta^i$. La condition précédente équivaut donc à ce que Λ soit lagrangienne.

Considérons à présent une sous-variété formelle Λ lagrangienne positive. Cet objet est défini en 4.43 et 4.50. Indiquons brièvement qu'il s'agit d'un idéal $\mathcal{I}(\Lambda)$ de $C^\infty(T^*M)$ engendré localement par une famille libre de n fonctions tel que sa trace ou partie réelle

$$\Lambda_{\mathbb{R}} = \{x \in T^*M / f(x) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{I}(\Lambda)\}$$

soit une sous-variété de T^*M , et que son espace tangent

$$T\Lambda = \{X \in T_x(T^*M) \otimes \mathbb{C} / x \in \Lambda_{\mathbb{R}} \text{ et } \langle df, X \rangle = 0, \quad \forall f \in \mathcal{I}(\Lambda)\}$$

vérifie $T\Lambda \cap \overline{T\Lambda} = T\Lambda_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$. Λ est dite lagrangienne positive si $\mathcal{I}(\Lambda)$ est stable par crochet de Poisson et si pour tout $X \in T\Lambda$, $\frac{1}{i}\Omega(X, \bar{X})$ est positif. $T\Lambda$ est alors un sous-fibré lagrangien de $T(T^*M) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}}$. De plus, si $X \in T\Lambda$, $\Omega(X, \bar{X}) = 0$ implique $X \in T\Lambda_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$.

Supposons que

$$(4.6) \quad \begin{aligned} &\Lambda_{\mathbb{R}} \text{ soit incluse dans la section nulle de } T^*M \\ &\text{la restriction de } \pi_* : T_l(T^*M) \rightarrow T_{\pi(l)}M \text{ à } T_l\Lambda \text{ soit un isomorphisme, } \forall l \in \Lambda_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Ces deux hypothèses ne sont pas nécessaires pour définir des sections lagrangiennes associées à Λ . Mais dans les applications que nous avons en vue, elles seront toujours vérifiées et elles simplifient considérablement la présentation. On remarquera que la deuxième hypothèse signifie que la sous-variété formelle Λ n'a pas de caustique.

Si l appartient à la section nulle de T^*M , on identifie $T_l(T^*M)$ avec $T_{\pi(l)}M \oplus T_{\pi(l)}^*M$. Avec cette convention, nous avons

$$\Omega((X_1, l_1), (X_2, l_2)) = \langle l_1, X_2 \rangle - \langle l_2, X_1 \rangle + \omega(X_1, X_2)$$

Pour $l \in \Lambda_{\mathbb{R}}$, on note $q : T_{\pi(l)}M \otimes \mathbb{C} \rightarrow T_{\pi(l)}^*M \otimes \mathbb{C}$ l'application telle que

$$(4.7) \quad T_l\Lambda = \{(X, q(X)) \mid X \in T_{\pi(l)}M \otimes \mathbb{C}\}$$

Définissons la partie imaginaire de q par $\text{Im } q(X) = \frac{1}{2i}(q(X) - \bar{q}(X))$ pour $X \in T_{\pi(l)}M$. Le sous-espace $T_l\Lambda \subset T_lM \otimes \mathbb{C}$ étant lagrangien, l'application bilinéaire

$$(X, Y) \rightarrow \langle \text{Im } q(X), Y \rangle$$

est symétrique et du fait que Λ soit positive, elle est positive et admet pour noyau $T_{\pi(l)}\pi(\Lambda_{\mathbb{R}})$.

Dans ce qui suit on ne fera plus de distinction entre $\Lambda_{\mathbb{R}}$ et $\pi(\Lambda_{\mathbb{R}})$. Rappelons que si X est un champ de vecteurs de M , la fonction $\sigma(X) \in C^\infty(T^*M)$ est définie par $\sigma(X)(l) = \langle l, X|_{\pi(l)} \rangle$. Définissons la section F associée à Λ .

Proposition 4.5. *Soit $x_0 \in M$. Il existe une section F de $L \rightarrow M$ définie sur un voisinage U de x_0 telle que $|F|(x_0) = 1$ et*

$$(4.8) \quad \sigma(X) \equiv \langle \alpha, X \rangle \pmod{\mathcal{I}(\Lambda)}, \quad \text{pour tout champ de vecteurs } X \text{ de } M$$

où α est définie au voisinage de $\Lambda_{\mathbb{R}} \cap U$ par $\nabla F = i\alpha \otimes F$. Une telle section est plate de norme constante égale à 1 le long de $\Lambda_{\mathbb{R}} \cap U$. α s'annule au dessus de $\Lambda_{\mathbb{R}} \cap U$ et sa dérivée est

$$(4.9) \quad \langle T_X\alpha, Y \rangle = \langle q(X), Y \rangle, \quad \forall X, Y \in T_lM, \forall l \in \Lambda_{\mathbb{R}} \cap U$$

$-\ln|F|$ et sa dérivée s'annulent le long de $\Lambda_{\mathbb{R}} \cap U$, son hessien en $y \in \Lambda_{\mathbb{R}} \cap U$ est

$$(4.10) \quad \text{Hess}(\ln|F|)(X, Y) = -\langle \text{Im } q(X), Y \rangle, \quad \forall X, Y \in T_yM$$

Si $F' : U' \rightarrow L$ est une section qui vérifie les mêmes hypothèses et $U \cap U'$ est connexe, alors il existe un réel θ tel que

$$F' \equiv e^{i\theta} F \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})}$$

La condition (4.8) signifie formellement que l'image de $\alpha : U \rightarrow T^*M \otimes \mathbb{C}$ est incluse dans Λ , en effet $\mathcal{I}(\Lambda)$ représente l'idéal composé des fonctions s'annulant le long de Λ . Comme nous le verrons, l'existence de F découle du caractère lagrangien de Λ . On notera d'ailleurs que si $X, Y \in T_lM$, alors

$$\langle T_X\alpha, Y \rangle - \langle T_Y\alpha, X \rangle = \omega(X, Y)$$

car la courbure de L est $\frac{1}{2}\omega$. Compte tenu de (4.9), ceci équivaut à ce que $T_l\Lambda$ soit lagrangien.

Preuve. On travaille localement au voisinage de x_0 . Introduisons un système de coordonnées (x^i) de M tel que $\Lambda_{\mathbb{R}} = \{x^1 = \dots = x^p = 0\}$ et une section s de L de norme constante égale à 1. On note β^j les fonctions à valeurs réelles telles que $\nabla s = -i\beta^j dx^j \otimes s$. Cherchons une section F de la forme $F = e^{if} s$, autrement dit f doit vérifier les équations

$$(4.11) \quad \xi^i + \beta^i - \partial_{x^i} f \in \mathcal{I}(\Lambda)$$

D'après la proposition 4.46, il existe des fonctions u^1, \dots, u^n définies sur M telles que $\mathcal{I}(\Lambda)$ soit engendré par $\xi^i - u^i$ et $f \in C^\infty(M)$ appartient à $\mathcal{I}(\Lambda)$ si et seulement si elle s'annule à tout ordre le long de $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Les équations (4.11) sont donc équivalentes à

$$(4.12) \quad \partial_{x^i} f \equiv \beta^i + u^i \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})}$$

On résoud dans un premier temps les $n-p$ dernières équations le long de $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Les u^i s'annulant le long de $\Lambda_{\mathbb{R}}$, nous obtenons le système

$$\partial_{x^i} h(x^{p+1}, \dots, x^n) = \beta^i(0, \dots, 0, x^{p+1}, \dots, x^n) \text{ avec } i = p+1, \dots, n$$

Ces équations ont une solution unique à une constante additive près car $d(\beta^j dx^j) = \omega$ et Λ étant lagrangienne la restriction de ω à $\Lambda_{\mathbb{R}}$ s'annule. On résoud ensuite les p premières équations de (4.12) avec la condition $f|_{\Lambda_{\mathbb{R}}} = h$. D'après le lemme 4.42, ce système a une solution si $\partial_{x^j}(\beta^i + u^i) \equiv \partial_{x^i}(\beta^j + u^j)$ modulo $\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})$ quels que soient i et j compris entre 1 et p et cette solution est unique modulo $\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})$. Nous avons

$$(4.13) \quad \{\xi^i - u^i, \xi^j - u^j\} = -\partial_{x^i} u^j + \partial_{x^j} u^i - \partial_{x^i} \beta^j + \partial_{x^j} \beta^i$$

Ces fonctions appartiennent à $\mathcal{I}(\Lambda)$ et ne dépendent pas des variables ξ^l , elles s'annulent donc à tout ordre le long de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ et les relations de compatibilité sont vérifiées. Pour finir, montrons que la fonction f obtenue vérifie les $n-p$ dernières équations. Pour $i = 1, \dots, p$ et $j = p+1, \dots, n$, nous avons

$$\partial_{x^i} \partial_{x^j} f \equiv \partial_{x^j} \partial_{x^i} f \equiv \partial_{x^j}(\beta^i + u^i) \equiv \partial_{x^i}(\beta^j + u^j)$$

d'après (4.13). De plus la restriction de $\partial_{x^j} f$ à $\Lambda_{\mathbb{R}}$ coïncide avec celle de $\beta^j + u^j$, le résultat est alors assuré grâce au lemme 4.42. Nous avons donc montré l'existence de la section F et son unicité à un facteur près modulo $\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})$. Concernant α , remarquons que $\mathcal{I}(\Lambda)$ est engendré par les fonctions $\xi^j - \langle \alpha, \partial_{x^j} \rangle$. On en déduit que α s'annule le long de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ ce qui implique que F est plate le long de $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Le calcul de la dérivée $T\alpha$ est conséquence de

$$T_1 \Lambda = \cap_j \text{Ker } d(\xi^j - \langle \alpha, \partial_{x^j} \rangle)$$

D'autre part, $d \ln |F| = \frac{i}{2}(\alpha - \bar{\alpha})$ ce qui termine la démonstration. \square

Pour définir les sections lagrangiennes associées à Λ , nous supposons que Λ soit préquantifiable, i.e. que le fibré plat $(L \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}}, \nabla)$ soit trivial. Introduisons une section $s : \Lambda_{\mathbb{R}} \rightarrow L$ plate de norme constante égale à 1. Appliquant la proposition précédente on étend s à l'aide d'une partition de l'unité en une section $F : M \rightarrow L$ telle que (4.8) soit vérifiée et que $|F|(x) < 1$ si $x \notin \Lambda_{\mathbb{R}}$.

Définition 4.6. Une section lagrangienne d'ordre m associée à (Λ, s) est une suite (u_k) telle que

$$u_k \in C^\infty(M, L^k \otimes |\Omega|^{\frac{1}{2}} M), \quad u_k(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{p}{4}} F^k(x) a(x, k) \mu^{\frac{1}{2}}(x) + O(k^{-\infty})$$

où p est la codimension de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ dans M et $(a(\cdot, k))$ est un symbole de $S^m(M)$.

On note $\mathcal{S}^m(\Lambda, s)$ (resp. $\mathcal{S}(\Lambda, s)$) l'ensemble des sections lagrangiennes associées à (Λ, s) d'ordre m (resp. quelconque). Rappelons le résultat suivant.

Lemme 4.7. Soit $d \in C^\infty(X, \mathbb{R}^+)$ une fonction strictement positive en dehors de Y , qui s'annule au second ordre le long de Y et dont le noyau du Hessien soit $T_x Y$ en tout x de Y . Soit $(a(\cdot, k))$ une suite de $C^\infty(X)$ admettant un développement asymptotique $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) k^{-i}$ pour la topologie C^0 . Soit N un entier positif. Les deux assertions suivantes sont alors équivalentes.

- i. $\forall K$ compact de X , $\exists C$ tel que $|e^{-kd(x)} a(x, k)| \leq C k^{-\frac{N}{2}}$ sur K
- ii. a_i s'annule à l'ordre $N - 2i$ le long de Y , $\forall i$ tel que $N \geq 2i$

Nous en déduisons que la définition des sections lagrangiennes associées à (Λ, s) ne dépend pas du choix de F . L'application symbole total est définie par

$$\sigma : \mathcal{S}(\Lambda, s) \rightarrow (C^\infty(M)/\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}}))[\hbar^{-1}, \hbar], \quad \sigma(u_k) = \sum \hbar^l [a_l]$$

Grâce au lemme précédent, on montre que cette application est bien définie et que son noyau est l'ensemble des suites négligeables. Du lemme de Borel, il découle que σ est surjective. Le symbole principal de (u_k) est $[a_m] \in C^\infty(M)/\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})$. La projection $\pi : T^*M \rightarrow M$ induit un isomorphisme $C^\infty(\Lambda) \rightarrow C^\infty(M)/\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})$ (cf. proposition 4.46). Le symbole principal s'identifie donc à une fonction de $C^\infty(\Lambda)$. De même on appelle $[a_{m+1}] \in C^\infty(M)/\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})$ le symbole sous-principal de (u_k) .

Estimons la norme d'une section lagrangienne. Pour ce faire, introduisons la mesure $\mu_\Lambda \in C^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}}, |\Omega| \Lambda_{\mathbb{R}})$ définie en $x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$ par

$$\mu_\Lambda(X_{p+1} \wedge \dots \wedge X_n) = \mu(X_1 \wedge \dots \wedge X_n) \cdot \det^{-\frac{1}{2}} [(\text{Im } q(X_j), X_k)]_{j,k=1, \dots, p}$$

si (X_1, \dots, X_n) (resp. (X_{p+1}, \dots, X_n)) est une base de $T_x M$ (resp. $T_x \Lambda_{\mathbb{R}}$). Cette définition ne dépend pas du choix des vecteurs (X_i) .

Proposition 4.8. Soit $(u_k) \in \mathcal{S}^m(\Lambda, s)$. Alors (u_k, u_k) admet un développement asymptotique complet en puissance de k . Si a_m est la restriction à Λ du symbole principal de (u_k) , alors

$$(u_k, u_k) = k^{-2m} \int_\Lambda |a_m|^2 \mu_\Lambda + O(k^{2m-1})$$

Par conséquent, si $(u_k) \in \mathcal{S}(\Lambda, s)$, alors (u_k) est d'ordre m implique que la norme de (u_k) est $O(k^{-m})$. La réciproque est fautive. En fait on peut montrer que si $\sum_l \hbar^l f_l$ est le symbole total de $(u_k) \in \mathcal{S}^m(\Lambda, s)$, alors

$$\|u_k\| = O(k^{-m - \frac{N}{2}}) \Leftrightarrow f_l \text{ s'annule à l'ordre } l - 2N \text{ le long de } \Lambda_{\mathbb{R}}, \forall l \text{ tel que } l - 2N > 0$$

si N est un entier positif.

Preuve. Il découle du lemme de Morse avec paramètres qu'il existe un système de coordonnées (x^i) de M telle que

$$\Lambda_{\mathbb{R}} = \{x_1 = \dots x_p = 0\}, \quad \ln |F| = |x^1|^2 + \dots + |x^p|^2$$

On estime alors avec le lemme de la phase stationnaire l'intégrale

$$(u_k, u_k) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{p}{2}} \int |dx^{p+1} \dots dx^n| \int e^{-2 \sum_1^p |x^i|^2} |a(x, k)|^2 m(x) |dx^1 \dots dx^p|$$

où $\mu(x) = m(x) |dx^i|$. Ceci mène au résultat. On identifie μ_{Λ} à l'aide de (4.10). \square

Les deux propositions qui suivent sont consacrées à l'action d'un opérateur pseudodifférentiel sur une section lagrangienne.

Proposition 4.9. *Les opérateurs pseudodifférentiels préservent les sections lagrangiennes, i.e.*

$$\Theta^m(M) \times \mathcal{S}^{m'}(\Lambda, s) \rightarrow \mathcal{S}^{m+m'}(\Lambda, s), \quad (P_k), (u_k) \rightarrow (P_k u_k)$$

L'action d'un opérateur pseudodifférentiel sur $\mathcal{S}(\Lambda, s)$ induit une application $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -linéaire sur l'espace des symboles $(C^\infty(M)/\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}}))[[\hbar^{-1}, \hbar]]$. De plus, si $a_m^w \in C^\infty(M)$ et $b_{m'} \in C^\infty(\Lambda)$ sont les symboles principaux de $(P_k) \in \Theta^m(M)$ et $(u_k) \in \mathcal{S}^{m'}(\Lambda, s)$ respectivement, alors le symbole principal de $(P_k u_k) \in \mathcal{S}^{m+m'}(\Lambda, s)$ est

$$c_{m+m'} = [a_m^w].b_{m'} \in C^\infty(\Lambda) \quad \text{où } [a_m^w] \in C^\infty(\Lambda) = C^\infty(T^*M)/\mathcal{I}(\Lambda)$$

On peut aussi étendre cette proposition à des opérateurs pseudodifférentiels dont le symbole n'est pas à support compact, le résultat est le même. On en déduit que le microsupport de $(u_k) \in \mathcal{S}^m(\Lambda, s)$ est inclu dans $\Lambda_{\mathbb{R}}$.

Preuve. On se donne une section locale t de $L \rightarrow M$ de norme constante égale à 1 et une fonction f telle que $e^{if}t$ soit une section F associée à (Λ, s) . Nous devons évaluer l'intégrale

$$(P_k u_k)(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{p}{4}} t^k \cdot |dx|^{\frac{1}{2}} \int e^{ik\phi(x,y)} a(\xi, x, y, k) \cdot b(y, k) \cdot m^{\frac{1}{2}}(y) |dy d\xi|$$

où la phase ϕ est $\phi(x, y) = (x^i - y^i) \cdot (\xi^i + \frac{1}{2}(\beta^i(x) + \beta^i(y))) + f(y)$ et $\mu(y) = m(y) |dy|$. Nous avons

$$\partial_{\xi^i} \partial_{\xi^j} \phi = 0, \quad \partial_{\xi^i} \partial_{y^j} \phi = \delta_{ij}$$

par conséquent, la matrice des dérivées secondes de ϕ par rapport à y et ξ est inversible et nous pouvons appliquer le lemme de la phase stationnaire (cf. [7]). Le résultat est de la forme

$$(P_k u_k)(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{p}{4}} t^k \cdot |dx|^{\frac{1}{2}} e^{ik\phi_r(x)} c(x, k)$$

où si g est une fonction de x, y et ξ , $g_r(x)$ est telle que $g(x, y, \xi) - g_r(x)$ soit une combinaison linéaire à coefficients C^∞ des $\partial_{\xi^i} \phi, \partial_{y^i} \phi$. La suite $c(\cdot, k)$ admet un développement asymptotique complet en puissance de k dont le premier coefficient est

$$c_{m+m'} = (a_m(x, y, \xi) \cdot b_{m'}(y) \cdot m^{\frac{1}{2}}(y))_r$$

De $\partial_{\xi^i} \phi = x^i - y^i$, on déduit que $\phi_r(x) = f(x)$ et que les fonctions $\partial_{\xi^i} \phi, \partial_{y^i} \phi$ sont combinaisons linéaires des

$$x^i - y^i, \quad \xi^i + \beta^i(x) - \partial_{x^i} f(x)$$

et réciproquement. Par conséquent $c_{m+m'}(x) = h(x) \cdot b_{m'}(x) \cdot m^{\frac{1}{2}}(x)$ où h est déterminée par

$$h(x) = a_m(x, x, \xi) + \text{CL}(\xi^i + \beta^i(x) - \partial_{x^i} f(x))$$

ce qui implique $h(x) - a_m(x, x, \xi) \in \mathcal{I}(\Lambda)$. □

Nous pouvons aussi décrire en partie la composition des symboles sous-principaux. Pour ce faire, on notera $\text{div}_\mu(X)$ la divergence par rapport à μ d'un champ de vecteurs X de M , X_f le champ de vecteurs hamiltonien de $f \in C^\infty(T^*M)$ avec la convention de signe

$$\Omega(X_f, \cdot) + df = 0$$

Si Y est un champ de vecteurs de T^*M , sa restriction à M est par définition le champ de vecteurs X de M tel que $X|_{\pi(l)} = \pi_* Y|_l$, où l appartient à la section nulle de $\pi : T^*M \rightarrow M$. Soit $x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$, on associe à l'application $q : T_x M \otimes \mathbb{C} \rightarrow T_x M \otimes \mathbb{C}$, dont le graphe est $T_x \Lambda$ (cf. (4.7)), l'opérateur

$$\Delta_q : C^\infty(T_x^* M) \rightarrow C^\infty(T_x^* M), \quad \Delta_q = \frac{1}{2}(q_{i,j} + q_{j,i})(x) \partial_{\xi^i} \partial_{\xi^j} \text{ où } q_{i,j} = \langle q(\partial_{x^i}), \partial_{x^j} \rangle$$

Le résultat est le suivant :

Proposition 4.10. *Si $(P_k) \in \Psi(M)$ admet pour symboles principaux $a_m^w + \hbar a_{m+1}^w$ et $(u_k) \in \mathcal{S}^m(\Lambda, s)$ admet pour symbole total $\sum_{l \geq m} \hbar^l b_l$, alors la restriction à $\Lambda_{\mathbb{R}}$ du symbole sous-principal $c_{m+m'+1}$ de $(P_k u_k)$ est donnée par*

$$\begin{aligned} c_{m+m'+1}(x) = & a_m^w(x) \cdot b_{m'+1}(x) + a_{m+1}^w(x) \cdot b_{m'}(x) + \frac{1}{i}(Y \cdot b_{m'})(x) \\ & + \frac{1}{2i}(\text{div}_\mu(Y)(x) + (\Delta_q a_m^w)(x)) \cdot b_{m'}(x) \end{aligned}$$

où Y est la restriction à M de $X_{a_m^w}$ et $x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$.

Preuve. On reprend la preuve précédente avec les mêmes notations. La fonction $c_{m+m'+1}$ est

$$c_{m+m'+1}(x) = m^{-\frac{1}{2}}(x) \sum_{l=1,2,3} \frac{i^l}{l!(l-1)!} \left(\Delta^l (R^{l-1}(x, y, \xi) \cdot a_m(x, y, \xi) \cdot b_{m'}(y) \cdot m^{\frac{1}{2}}(y)) \right)_r \\ + a_{m+1}(x, y, \xi) \cdot b_{m'}(y) + a_m(x, y, \xi) \cdot b_{m'+1}(y)$$

où la fonction R et l'opérateur Δ sont donnés par

$$R(x, y, \xi) = \phi(x, y, \xi) - \phi_r(x) + (y^i - x^i)(\xi^i - \xi_r^i) - \frac{1}{2} (\partial_{y^i} \partial_{y^j} \phi)_r(x) (y^i - x^i) \cdot (y^j - x^j) \\ \Delta = \frac{1}{i} \partial_{y^i} \partial_{\xi^i} + \frac{1}{2i} (\partial_{y^i} \partial_{y^j} \phi)_r(x) \partial_{\xi^i} \partial_{\xi^j}$$

La fonction R ne dépend pas de ξ et est combinaison linéaire des $(x^i - y^i)(x^j - y^j)(x^k - y^k)$. On en déduit que dans la somme sur l , seul le terme correspondant à $l = 1$ ne s'annule pas. Calculons le en $x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$:

$$(4.14) \quad m^{-\frac{1}{2}}(x) \left(\frac{1}{i} \partial_{y^i} \partial_{\xi^i} (a_m(x, y, \xi) \cdot b_{m'}(y) \cdot m^{\frac{1}{2}}(y)) \right)_r(x) = \frac{1}{i} (\partial_{\xi^i} a_m)(x, x, 0) \cdot (\partial_{x^i} b_{m'})(x) \\ + \frac{1}{2i} (\partial_{\xi^i} a_m)(x, x, 0) \cdot (\partial_{x^i} \ln m)(x) \cdot b_{m'}(x) + \frac{1}{i} (\partial_{y^i} \partial_{\xi^i} a_m)(x, x, 0) \cdot b_{m'}(x)$$

De plus, $a_m^w(x, \xi) = a_m(x, x, \xi)$ et $(\partial_{y^i} a_m)(x, x, \xi) = \frac{1}{2} \partial_{x^i} a_m^w(x, \xi)$ si $a_m(x, y, \xi)$ est symétrique en x, y , par conséquent

$$(Y b_{m'})(x) = (\partial_{\xi^i} a_m)(x, x, 0) \cdot (\partial_{x^i} b_{m'})(x) \\ \operatorname{div}_{\mu}(Y) = (\partial_{\xi^i} a_m)(x, x, 0) \cdot (\partial_{x^i} \ln m)(x) + 2(\partial_{y^i} \partial_{\xi^i} a_m)(x, x, 0)$$

On identifie ainsi les différents termes de (4.14). D'autre part, nous avons

$$(\partial_{y^i} \partial_{y^j} \phi)_r(x) = (\partial_{x^i} \partial_{x^j} f)(x) - \frac{1}{2} (\partial_{x^i} \beta^j(x) + \partial_{x^j} \beta^i(x))$$

De plus $\nabla e^{if(x)} t(x) = i(-\beta^i(x) + \partial_{x^i} f) dx^i \otimes e^{if(x)} t(x)$, ce qui mène à

$$(\partial_{y^i} \partial_{y^j} \phi)_r(x) = \frac{1}{2} (q(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) + q(\partial_{x^j}, \partial_{x^i}))$$

et l'on reconnaît de la sorte $(\Delta_q a_m^w)|_{\Lambda_{\mathbb{R}}} \cdot b_{m'}|_{\Lambda_{\mathbb{R}}}$. Pour interpréter les termes restants, on utilise que $a_{m+1}^w(x, \xi) = a_{m+1}(x, x, \xi)$ si $a_m(x, y, \xi)$ est symétrique en x, y . \square

1.3 Opérateurs intégraux de Fourier

On se donne deux variétés M_1 et M_2 de dimensions n_1 et n_2 , que l'on munit des mêmes données $(L_i, \nabla^i, \omega^i, \Omega^i, \mu_i)$ que M . Les opérateurs intégraux de Fourier sont des suites d'applications

$$(P_k : C^\infty(M_1, L_1^k \otimes |\Omega|^{\frac{1}{2}} M_1) \rightarrow C^\infty(M_2, L_2^k \otimes |\Omega|^{\frac{1}{2}} M_2))$$

dont les noyaux au sens de Shwartz sont des sections lagrangiennes. On considère que la structure symplectique de $T^*M_1 \times T^*M_2$ est donnée par

$$\Omega_{12} = \pi_1^* \Omega_1 - \pi_2^* \Omega_2$$

où $\pi_i : T^*M_1 \times T^*M_2 \rightarrow T^*M_i$ est la projection canonique. On se donne une sous-variété formelle Λ^{12} de $T^*M_1 \times T^*M_2$ lagrangienne positive telle que

$$(4.15) \quad \begin{aligned} & \Lambda_{\mathbb{R}}^{12} \subset M_1 \times M_2 \\ & \text{la restriction de } \pi_* \text{ à } T_l \Lambda^{12} \text{ est un isomorphisme, } \forall l \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{12} \end{aligned}$$

où π est la projection $T^*M_1 \times T^*M_2 \rightarrow M_1 \times M_2$. Considérons une section $s_{12} : \Lambda_{\mathbb{R}}^{12} \rightarrow L_1 \boxtimes L_2^{-1}$ plate de norme constante égale à 1.

Λ^{12} et Ω_{12} sont les données adéquates pour décrire les compositions, par contre il faut les modifier si l'on souhaite voir les noyaux des opérateurs intégraux de Fourier comme des sections lagrangiennes. Notons $i : T^*M_1 \times T^*M_2 \rightarrow T^*M_1 \times T^*M_2$ l'application qui à (l_1, l_2) associe $(l_1, -l_2)$. $i(\Lambda^{12})$ est alors une sous-variété formelle de $T^*M_1 \times T^*M_2$ lagrangienne positive pour la 2-forme symplectique $\Omega = i^* \Omega_{12}$. Définissons

$$M = M_1 \times M_2, \quad L = L_1 \boxtimes L_2^{-1}, \quad \gamma = \pi_1^* \gamma_1 + \pi_2^* \gamma_2$$

Remarquons que $\Omega = d\gamma + \pi^* \omega$ où $-i\omega$ est la courbure de $L_1 \boxtimes L_2^{-1}$ et π la projection de $T^*M_1 \times T^*M_2$ sur $M_1 \times M_2$. Les hypothèses du chapitre précédent sont donc vérifiées (entre autres, $i(\Lambda^{12})_{\mathbb{R}} = \Lambda_{\mathbb{R}}^{12}$ et (4.6) découle de (4.15)). En appliquant la proposition 4.5 à $i(\Lambda_{12})$, on obtient une section F de $L_1 \boxtimes L_2^{-1} \rightarrow M_1 \times M_2$ dont la restriction à $\Lambda_{\mathbb{R}}^{12}$ est s_{12} .

Définition 4.11. Un opérateur intégral de Fourier d'ordre m associée à (Λ^{12}, s) est une suite d'applications (P_k) dont les noyaux au sens de Shwartz sont de la forme

$$P_k(x_1, x_2) = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{\frac{n_1+n_2}{4}} F^k(x_1, x_2) f(x_1, x_2, k) \mu_1^{\frac{1}{2}}(x_1) \otimes \mu_2^{\frac{1}{2}}(x_2) + O(k^{-\infty})$$

où $(f(\cdot, k))$ est un symbole de $S^m(M_1 \times M_2)$.

On note $\mathcal{F}^m(\Lambda^{12}, s_{12})$ l'ensemble de ces opérateurs et $\mathcal{F}(\Lambda^{12}, s_{12})$ l'union des $\mathcal{F}^m(\Lambda^{12}, s_{12})$. On définit comme pour les sections lagrangiennes le symbole total

$$\mathcal{F}^m(\Lambda^{12}, s_{12}) \rightarrow (C^\infty(M_1 \times M_2) / \mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}}^{12}))[\hbar^{-1}, \hbar], \quad P_k \rightarrow \sum_{l \geq m} \hbar^l [f_l]$$

où les f_l sont les coefficients du développement asymptotique $\sum_k k^{-l} f_l$ de $(f(\cdot, k))$. Le symbole principal de (P_k) est $[f_m]$ que l'on considérera souvent comme un élément de $C^\infty(\Lambda^{12})$. Le symbole sous-principal est $[f_{m+1}]$

L'adjoint d'un opérateur intégral de Fourier est un opérateur du même type. Précisément, soit Λ^{21} la sous variété formelle $j(\bar{\Lambda}^{12})$, où

$$j : T^*M_1 \times T^*M_2 \rightarrow T^*M_2 \times T^*M_1$$

est l'application qui échange les facteurs. La partie réelle $\Lambda_{\mathbb{R}}^{21}$ de Λ^{21} est $j(\Lambda_{\mathbb{R}}^{12})$. Soit s_{21} la section de $L_2 \boxtimes L_1^{-1} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}}^{21}$ qui à (x_2, x_1) associe $\bar{s}_{12}(x_1, x_2) \in \bar{L}_1|_{x_1} \otimes \bar{L}_2^{-1}|_{x_2} \simeq L_1^{-1}|_{x_1} \otimes L_2|_{x_2}$. Nous avons

$$\mathcal{F}^m(\Lambda^{12}, s_{12}) \rightarrow \mathcal{F}^m(\Lambda^{21}, s_{21}), \quad (P_k) \rightarrow (P_k^*)$$

Si $\sum \hbar^l f_l$ et $\sum \hbar^l g_l$ sont les symboles totaux de (P_k) et (P_k^*) , alors $g_l(x_2, x_1) = \bar{f}_l(x_1, x_2)$.

Décrivons la composition de ces opérateurs avec les opérateurs pseudodifférentiels. Pour ce qui est des notations, on décomposera l'application q dont le graphe est $T\Lambda^{12}$ (cf. (4.7)) en

$$q = q_{12}^1 + q_{12}^2, \quad \text{où } q_{12}^i : T_{x_1, x_2}(M_1 \times M_2) \otimes \mathbb{C} \rightarrow T_{x_i}^* M_i \otimes \mathbb{C} \text{ et } (x_1, x_2) \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{12}$$

de sorte que si α_{12} est définie par $\nabla F = i\alpha_{12} \otimes F$, alors

$$\langle T_{(X_1, X_2)} \alpha_{12}, (Y_1, Y_2) \rangle = \langle q_{12}^1(X_1, X_2), Y_1 \rangle - \langle q_{12}^2(X_1, X_2), Y_2 \rangle$$

La proposition suivante se démontre comme les propositions 4.9 et 4.10.

Proposition 4.12. *Soient $(P_k) \in \Psi^m(M_1)$ de symboles $a_m^w + \hbar a_{m+1}^w$ et $(Q_k) \in \mathcal{F}^p(\Lambda^{12}, s_{12})$ de symbole total $\sum \hbar^l b_l$. Alors $(P_k \circ Q_k)$ est un opérateur de $\mathcal{F}^{m+p}(\Lambda^{12}, s_{12})$ de symbole principal $c_{m+p} = [\pi_1^* a_m^w]_{c,p}$, la restriction de son symbole sous-principal à $\Lambda_{\mathbb{R}}^{12}$ est*

$$\begin{aligned} c_{m+p+1}(x_1, x_2) = & a_m^w(x_1) \cdot b_{p+1}(x_1, x_2) + a_{m+1}^w(x_1) \cdot b_p(x_1, x_2) + \frac{1}{i}(Y \cdot b_p)(x_1, x_2) \\ & + \frac{1}{2i} \operatorname{div}_{\mu_1}(Y)(x_1) \cdot b_p(x_1, x_2) + \frac{1}{2i} (\Delta_{q_{12}^1} a_m^w)(x_1) \cdot b_p(x_1, x_2) \end{aligned}$$

où Y est la restriction à M_1 du champ de vecteurs hamiltonien de a_0^w et $\Delta_{q_{12}^1}$ est l'opérateur

$$C^\infty(T_{x_1}^* M_1) \rightarrow C^\infty(T_{x_1}^* M_1), \quad \Delta_{q_{12}^1} = \frac{1}{2}(q_{i,j} + q_{j,i})(x_1, x_2) \partial_{\xi^i} \partial_{\xi^j} \quad \text{où } q_{i,j} = \langle q_{12}^1(\partial_{x^i}, 0), \partial_{x^j} \rangle$$

D'autre part, si $(R_k) \in \Theta^m$ admet pour symbole principal d_m^w , alors $(Q_k \circ R_k)$ est un opérateur de $\mathcal{F}^{m+p}(\Lambda^{12}, s_{12})$. Son symbole principal est $b_p \cdot [\pi_2^* d_m^w]$.

Pour décrire la composition des opérateurs intégraux de Fourier, on considère une troisième variété M_3 munie des mêmes données que M_1 et M_2 de sorte à définir comme ci-dessus l'ensemble $\mathcal{F}^m(\Lambda^{23}, s_{23})$ où Λ^{23} est une sous-variété formelle de $T^*M_2 \times T^*M_3$. On suppose que

$$\begin{aligned} & \text{l'intersection } \Lambda_{\mathbb{R}}^{23} \text{ de } \Lambda_{\mathbb{R}}^{12} \times M_3 \text{ et } M_1 \times \Lambda_{\mathbb{R}}^{23} \text{ est non dégénérée au sens de Bott,} \\ & \text{la projection de } \Lambda_{\mathbb{R}}^{23} \text{ sur } M_1 \times M_3 \text{ est un plongement,} \\ & T_l(\Lambda^{12} \times T^*M_3) + T_l(T^*M_1 \times \Lambda^{23}) = T_l(T^*M_1 \times T^*M_2 \times T^*M_3) \otimes \mathbb{C}, \quad \forall l \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{23} \end{aligned}$$

Comme $\Lambda_{\mathbb{R}}^{12} \subset M_1 \times M_2$ et $\Lambda_{\mathbb{R}}^{23} \subset M_2 \times M_3$, ces hypothèses sont équivalentes à celles de la proposition 4.51. Ceci définit la sous-variété formelle $\Lambda^{13} = \Lambda^{12} \circ \Lambda^{23}$ de $T^*M_1 \times T^*M_3$. Rappelons qu'une telle composition induit une application bilinéaire

$$B : C^\infty(\Lambda^{12}) \times C^\infty(\Lambda^{23}) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{13})$$

De plus la partie réelle de Λ^{13} est la projection de $\Lambda_{\mathbb{R}}^{23}$ sur $M_1 \times M_3$. On définit la section

$$s_{13} : \Lambda_{\mathbb{R}}^{13} \rightarrow L_1 \boxtimes L_3^{-1}, \quad s_{13}(x_1, x_3) = s_{12}(x_1, x_2) \cdot s_{23}(x_2, x_3) \quad \text{si } (x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{23}$$

Elle est plate de norme constante égale à 1.

Lemme 4.13. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_{\mathbb{R}}^2$. L'application \mathbb{C} -bilinéaire L de $T_{x_2}M_2 \otimes \mathbb{C}$ définie par

$$L(X, Y) = i\langle q_{12}^2(0, X), Y \rangle - i\langle q_{23}^2(X, 0), Y \rangle$$

est symétrique non-dégénérée. Sa partie réelle est une application bilinéaire symétrique de $T_{x_2}M_2$ définie positive.

Preuve. Du fait que $T\Lambda^{12}$ et $T\Lambda^{23}$ soient lagrangiens, nous avons

$$\langle q_{12}^2(0, X), Y \rangle - \langle q_{12}^2(0, Y), X \rangle = -\omega_2(X, Y), \quad \langle q_{23}^2(X, 0), Y \rangle - \langle q_{23}^2(0, Y), X \rangle = -\omega_2(X, Y)$$

Et par conséquent L est symétrique. Montrons à présent que la partie réelle de L est définie positive, ceci impliquera que L est non-dégénérée. La première égalité ci-dessus implique que la partie réelle de

$$(X, Y) \rightarrow i\langle q_{12}^2(0, X), Y \rangle$$

est symétrique. De plus Λ^{12} étant positive, elle est positive et son noyau est $T_{x_1, x_2}\Lambda_{\mathbb{R}}^{12} \cap T_{x_2}M_2$. De même, la partie réelle de $-i\langle q_{23}^2(X, 0), Y \rangle$ est symétrique positive et admet pour noyau $T_{x_2, x_3}\Lambda_{\mathbb{R}}^{23} \cap T_{x_2}M_2$. Par conséquent la partie réelle de L est positive, son noyau étant

$$T_{x_1, x_2}\Lambda_{\mathbb{R}}^{12} \cap T_{x_2}M_2 \cap T_{x_2, x_3}\Lambda_{\mathbb{R}}^{23}$$

Cet espace est le noyau de l'application tangente de la projection $\Lambda_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow M_1 \times M_3$. Il est réduit à (0) par hypothèse. \square

De ce lemme, on déduit que $q_{12}^2(0, X) = q_{23}^2(X, 0)$ implique $X = 0$ et ceci montre que la restriction de la projection $T_l(T^*M_1 \times T^*M_3) \rightarrow T_{\pi(l)}(M_1 \times M_3)$ à $T_l\Lambda^{13}$ est un isomorphisme quel que soit $l \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{13}$. Par conséquent Λ^{13} vérifie (4.15) et l'espace $\mathcal{F}^m(\Lambda^{13}, s_{13})$ est bien défini. De plus si $(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_{\mathbb{R}}^2$, on définit un élément de volume $\mu(x_1, x_2, x_3) \in |\Omega|_{x_2}M_2$ par

$$\mu(x_1, x_2, x_3) = \det^{\frac{1}{2}}[L_{jk}] |\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n|$$

où (X_i) est une base de $T_{x_2}M$, (θ^i) sa base duale et $L_{jk} = L(X_j, X_k)$. La racine carrée est déterminée par la convention suivante: la fonction

$$L_{j,k} \rightarrow \det^{\frac{1}{2}}[L_{j,k}]$$

est continue sur l'ensemble convexe des matrices $L_{j,k}$ symétriques inversibles de partie réelle définie positive. Sa restriction à l'ensemble des matrices réelles définies positives est positive. On remarquera que la définition de $\mu(x_1, x_2, x_3)$ ne dépend pas du choix de la base (X_i) .

Proposition 4.14. Sous les hypothèses précédentes, $(Q_k \circ P_k)$ appartient à $\mathcal{F}^{p+q}(\Lambda^{13}, s_{13})$ si (P_k) appartient à $\mathcal{F}^p(\Lambda^{12}, s_{12})$ et (Q_k) à $\mathcal{F}^q(\Lambda^{23}, s_{23})$. Cette opération induit une application $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire sur les symboles totaux et une application bilinéaire sur les symboles principaux. Cette dernière est de la forme

$$C^\infty(\Lambda^{12}) \times C^\infty(\Lambda^{23}) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{13}), \quad (f, g) \rightarrow B(f, g).h$$

où $h \in C^\infty(\Lambda^{13})$ est déterminée par Λ^{12} , Λ^{23} et μ_2 . Si $(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_{\mathbb{R}}$, alors $h(x_1, x_3)$ est le produit de $\mu_2(x_2)$ par $\mu^{-1}(x_1, x_2, x_3)$.

Remarque 4.15. On déduit de cette proposition l'action d'un opérateur intégral de Fourier sur une section lagrangienne. Pour ce faire il suffit de considérer que M_3 est réduite à un point

Preuve. On travaille localement. Soit s_i une section de $L_i \rightarrow M$ de norme constant égale à 1 où $i = 1, 2$ ou 3. Pour $(i, j) = (1, 2), (2, 3)$ ou $(1, 3)$, on écrit le noyau d'un opérateur de $\mathcal{F}^m(\Lambda^{ij}, s_{ij})$ sous la forme

$$P_k(x_1, x_2) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{n_i+n_j}{4}} e^{ik\phi_{ij}(x_i, x_j)} f^{ij}(x_i, x_j, k) \mu_i^{\frac{1}{2}} \mu_j^{\frac{1}{2}} s_i s_j^{-1}$$

où $e^{ik\phi_{ij}} s_i s_j^{-1}$ est la section F associée à (Λ^{ij}, s_{ij}) et $f^{ij}(\cdot, k)$ est un symbole. Nous évaluons l'intégrale suivante par le lemme de la phase stationnaire

$$I(x_1, x_3, k) = \int_{M_2} e^{ik\phi} f^{12}(x_1, x_2, k) f^{23}(x_2, x_3, k) m(x_2) |dx_2|$$

avec $\mu_2 = m(x_2)|dx_2|$ et $\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi_{12}(x_1, x_2) + \phi_{23}(x_2, x_3)$

On se localise au voisinage de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ car en dehors de cet ensemble la partie imaginaire de la phase ϕ est strictement positive. Avec les notations du lemme 4.13, nous avons

$$(4.16) \quad -i(\partial_{x_2^i} \partial_{x_2^j} \phi)(x) = L(\partial_{x_2^i}, \partial_{x_2^j})$$

Cette matrice est donc inversible, et nous pouvons appliquer le lemme de la phase stationnaire. Il vient

$$I(x_1, x_3, k) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{n_2}{2}} e^{ik\phi_r} f^{13}(x_1, x_3, k) + O(k^{-\infty})$$

où $f^{13}(x_1, x_3, k)$ est un symbole et

$$(4.17) \quad \phi_r(x_1, x_3) = \phi(x_1, x_2, x_3) + \text{CL}((\partial_{x_2^i} \phi)(\partial_{x_2^j} \phi))$$

$$(4.18) \quad f_0^{13}(x_1, x_3) = f_0^{12}(x_1, x_2) \cdot f_0^{23}(x_2, x_3) m(x_2) \det^{-\frac{1}{2}}[-i\partial_{x_2^j} \partial_{x_2^j} \phi]_{jk} + \text{CL}(\partial_{x_2^i} \phi)$$

avec des combinaisons linéaires à coefficients C^∞ . Montrons que $e^{ik\phi_r} s_1 \otimes s_3^{-1}$ est une section F associée à Λ^{13} et s_{13} . En restreignant (4.17) à $\Lambda_{\mathbb{R}}^2$, il vient que la restriction de $e^{ik\phi_r} s_1 \otimes s_3^{-1}$ à $\Lambda_{\mathbb{R}}^{13}$ coïncide avec s_{13} . Il reste à montrer que

$$(4.19) \quad \xi_1^i + \beta_1^i - \partial_{x_1^i} \phi_r \in \mathcal{I}(\Lambda^{13}), \quad \xi_3^i + \beta_3^i + \partial_{x_3^i} \phi_r \in \mathcal{I}(\Lambda^{13})$$

où les fonctions β_j^i sont définies par $\nabla s_j = -i\beta_j^i dx^i \otimes s_j$. L'idéal $\mathcal{I}(\Lambda^2)$ est engendré par les fonctions

$$\begin{aligned} \xi_1^i + \beta_1^i - \partial_{x_1^i} \phi_{12}, & \quad \xi_2^i + \beta_2^i - \partial_{x_2^i} \phi_{23} \\ \xi_2^i + \beta_2^i + \partial_{x_2^i} \phi_{12}, & \quad \xi_3^i + \beta_3^i + \partial_{x_3^i} \phi_{23} \end{aligned}$$

Ainsi $\partial_{x_2^i} \phi$ appartient à cet idéal. En dérivant (4.17), il vient que $\partial_{x_1^i} \phi_{12} - \partial_{x_1^i} \phi_r$ est combinaison linéaire des $\partial_{x_2^i} \phi$ et donc appartient à $\mathcal{I}(\Lambda^2)$. Donc $\xi_1^i + \beta_1^i - \partial_{x_1^i} \phi_r$ appartient à $\mathcal{I}(\Lambda^2)$.

Ceci montre les premières équations de (4.19) car les fonctions des $\mathcal{I}(\Lambda^{13})$ sont par définition les fonctions de $\mathcal{I}(\Lambda^2)$ qui ne dépendent pas des variables (x_2, ξ_2) . Les autres équations s'obtiennent de la même façon.

Concernant les symboles principaux, on identifie $C^\infty(L^{ij})$ à $C^\infty(M_i \times M_j)/\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}}^{ij})$. Notons $f_0(x_1, x_3)$ la fonction $B(f_0^{12}, f_0^{23})$. Elle est déterminée par

$$f_0(x_1, x_3) \equiv f_0^{12}(x_1, x_2) \cdot f_0^{23}(x_2, x_3) \text{ modulo } \mathcal{I}(\Lambda^2)$$

Si l'on introduit une fonction $f(x_1, x_3)$ telle que $f_0^{12}(x_1, x_2) \cdot f_0^{23}(x_2, x_3) - f(x_1, x_3)$ soit combinaison linéaire des $\partial_{x_i} \phi$, on déduit de $\partial_{x_i} \phi \in \mathcal{I}(\Lambda)$ que $f(x_1, x_3)$ et $f_0(x_1, x_3)$ sont égales modulo $\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}}^{13})$. On en déduit le résultat final avec pour $h(x_1, x_3)$ une fonction telle que

$$h(x_1, x_3) = m(x_2) \cdot \det^{-\frac{1}{2}}[-i\partial_{x_j} \partial_{x_k} \phi]_{jk} + \text{CL}(\partial_{x_i} \phi)$$

Sa restriction à $\Lambda_{\mathbb{R}}^{13}$ se calcule grâce à (4.16). \square

1.4 Compléments

Discutons brièvement quelques points que nous n'avons pas développés car ils ne nous seront pas utiles par la suite. Tout d'abord, il est possible d'introduire un fibré préquantifiant dans ce contexte. Il s'agit du fibré $K = \pi^\# L$, où π est la projection $T^*M \rightarrow M$. K hérite de L une structure hermitienne h^K . On le munit de la connexion

$$\nabla^K = \pi^\# \nabla + \frac{1}{i} \gamma$$

où γ est la 1-forme de Liouville. La courbure de K est alors $\frac{1}{i} \Omega$. Pour illustrer ceci, considérons une sous-variété lagrangienne $\Lambda \subset T^*M$, telle que la projection $\pi : \Lambda \rightarrow M$ soit un difféomorphisme. Comme nous l'avons vu, on associe localement à Λ une section F de L qui vérifie (4.5). Nous affirmons qu'il existe une section globale $F : M \rightarrow L$ qui vérifie (4.5) si et seulement si le fibré plat $(K|_{\Lambda}, \nabla^K)$ est trivial. Pour montrer ceci, introduisons la section $t : M \rightarrow T^*M$ dont l'image est Λ , et le fibré $J = t^\# K$ muni de la connexion $\nabla^J = t^\# \nabla^K$. En tant que fibré, J est identique à $L|_{\Lambda}$. Par contre,

$$\nabla^J = \nabla + \frac{1}{i} t^* \gamma = \nabla + \frac{1}{i} t$$

On constate alors que la condition (4.5) équivaut à ce que F soit une section plate de J .

Expliquons à présent comment introduire des sections lagrangiennes associées à une variété lagrangienne Λ telle que $\pi : \Lambda \rightarrow M$ ne soit pas nécessairement un difféomorphisme. On considère des ouverts U et V de R^N et M respectivement, munis de coordonnées (y^i) et (x^i) . On introduit le fibré $L^V = p^\# L$, où p est la projection $U \times V \rightarrow V$. On considère une section F de L^V telle que si $\nabla F = i\alpha \otimes F$, alors les différentielles des fonctions $\langle \alpha, \partial_{y^i} \rangle$ forment une famille libre au dessus des points de

$$C = \{(y, x) \in U \times V / \langle \alpha, \partial_{y^i} \rangle(y, x) = 0\}$$

et Λ soit définie localement par les équations

$$\xi^i = \langle \alpha, \partial_{x^i} \rangle(y, x), \quad (x, y) \in \mathbb{C}$$

Les sections lagrangiennes associées à Λ s'écriront alors au dessus de V

$$u_k(x) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \int F^k(y, x) a(y, x, k) dy$$

où $(a(\cdot, k))$ est un symbole de $S(U \times V)$. Pour montrer l'existence de F , on peut se ramener à la construction d'une phase avec paramètre. Soit une section $s : V \rightarrow L$ de norme constante égale à 1. Cherchons F sous la forme $e^{i\varphi(y,x)} s(x)$, les équations définissant Λ sont alors

$$\xi^i = \partial_{x^i} \phi(x, y) - \beta^i(x), \quad \partial_{y^i} \phi(x, y) = 0$$

où $\nabla s = \frac{1}{i} \beta^i dx^i \otimes s$. Dans les coordonnées $\zeta^i = \xi^i + \beta^i(x)$, nous obtenons

$$\zeta^i = \partial_{x^i} \phi(x, y), \quad \partial_{y^i} \phi(x, y) = 0$$

et $\Omega = d\zeta^i \wedge dx^i$. On reconnaît les équations habituelles. On peut bien-sûr adapter les résultats connus sur les distributions lagrangiennes dans ce contexte et définir des opérateurs intégraux de Fourier. On remarquera d'ailleurs que les opérateurs pseudodifférentiels tels que nous les avons définis sont associés à la diagonale de $T^*M \times T^*M$.

À propos des sections lagrangiennes ou opérateurs Fourier intégraux associés à des sous-variétés formelles, signalons qu'il existe une autre filtration que $(\mathcal{S}^m)_m$ ou $(\mathcal{F}^m)_m$ qui présente des propriétés intéressantes. Considérons par exemple l'espace $\mathcal{S}^0(\Lambda, t)$. Quitte à le quotienter par l'ensemble des suites négligeables, il est isomorphe à $\mathcal{D}(\Lambda_{\mathbb{R}})[[\hbar]]$, où $\mathcal{D}(\Lambda_{\mathbb{R}}) = C^\infty(M)/\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})$ est l'ensemble des développements de Taylor le long de $\Lambda_{\mathbb{R}}$. On définit alors la filtration $(W_m)_m$ de $\mathcal{D}(\Lambda_{\mathbb{R}})[[\hbar]]$

$$\sum \hbar^l [f_l] \in W_m \Leftrightarrow (f_l \in \mathcal{I}^{m-2l}(\Lambda_{\mathbb{R}}), \text{ pour tout } l \text{ tel que } m \geq 2l)$$

On peut introduire la même filtration pour les opérateurs intégraux de Fourier. On montre alors qu'elle est compatible avec les compositions. On peut aussi définir un symbole principal associé à cette filtration et décrire le calcul symbolique, il ne dépend que des espaces tangents des sous-variétés formelles. Comme nous l'avons indiqué après la proposition 4.8, c'est par cette filtration que l'on contrôle la norme des sections lagrangiennes. Nous pensons qu'il en est de même pour la norme des opérateurs intégraux de Fourier.

Enfin, pour ce qui est du calcul symbolique décrit dans les chapitres 1.2 et 1.3, nous remarquerons qu'il n'est pas complet dans le sens où il ne traite que la composition des symboles sur les parties réelles des sous-variétés formelles. Il est certainement possible d'étendre ceci avec des demi-densités sur les sous-variétés formelles, comme l'ont fait Melin et Sjöstrand dans le contexte homogène [9].

2 Préliminaires symplectiques

2.1 Sous-variété involutive strictement positive

Soit (S, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$. On note $\{f, g\} \in C^\infty(S)$ le crochet de Poisson de $f, g \in C^\infty(S)$. On utilise la même notation pour le crochet de Poisson $\{l_1, l_2\} \in \mathbb{C}$ de deux formes linéaires de $T_x^*S \otimes \mathbb{C}$. Si $f \in C^\infty(M)$, on note X_f le champs de vecteur hamiltonien ($\iota_{X_f}\omega + df = 0$).

Définition 4.16. Une sous-variété de S involutive strictement positive est une sous-variété formelle Γ de S dont l'idéal $\mathcal{I}(\Gamma)$ est stable par crochet de Poisson et telle que la forme sesquilinéaire de $(T_x\Gamma)^\perp$

$$(l_1, l_2) \rightarrow \frac{1}{i}\{l_1, \bar{l}_2\}$$

soit définie positive, quel que soit $x \in \Gamma_{\mathbb{R}}$.

Pour qu'une sous-variété formelle Γ soit involutive strictement positive, il faut et il suffit que pour tout système de générateurs (U, u^1, \dots, u^k) de $\mathcal{I}(\Gamma)$, il existe une famille de fonctions $a_k^{i,j}$ telle que $\{u^i, u^j\} = \sum_k a_k^{i,j} u^k$ sur U et $\frac{1}{i}\{u^j, \bar{u}^l\}$ soit définie positive le long de $\Gamma_{\mathbb{R}} \cap U$.

Cette notion a été introduite par Boutet de Monvel et Sjöstrand dans le contexte suivant.

Exemple 4.17. Soit (M, J) une variété complexe de dimension complexe $n + 1$ et D un domaine de M . Le fibré $E \rightarrow \partial D$ composé des vecteurs holomorphes de M tangents à ∂D est de dimension complexe n . La variété S est $T^*\partial D - 0$ munie de sa structure symplectique usuelle. L'idéal engendré par les fonctions $\sigma(X) \in C^\infty(S)$ où X décrit les sections de E , définit une sous-variété formelle Γ de S de codimension n . Si X et Y sont deux champs de vecteurs de $T\partial D$, nous avons

$$\{\sigma(X), \sigma(Y)\} = \sigma([X, Y])$$

E étant un sous-fibré intégrable de $T\partial D \otimes \mathbb{C}$, Γ est involutive. Décrivons $\Gamma_{\mathbb{R}}$. E est en somme directe avec \bar{E} . Notons $F \rightarrow \partial D$ le sous-fibré de $T\partial D$ tel que $F \otimes \mathbb{C} = E \oplus \bar{E}$. $\Sigma = F^\perp$ est un sous-fibré de $T^*\partial D$ de dimension 1; $\Sigma - 0$ est une sous-variété de S de codimension $2n$, c'est la partie réelle de Γ . Σ est naturellement muni d'une orientation: si $X \in T_x X$ est un vecteur transverse à F_x , alors $JX \in T_x M$ n'est pas tangent à ∂D ; supposons que JX soit sortant, alors $\alpha \in \Sigma_x$ est positive si $\langle \alpha, X \rangle$ est positive. On note Σ^+ l'ensemble des covecteurs positif de $\Sigma - 0$. Si α est une section de Σ et X, Y des sections de E , nous avons $-\langle \alpha, [X, \bar{Y}] \rangle = d\alpha(X \wedge \bar{Y})$. Ainsi si $\beta \in \Sigma_x$, nous définissons une forme sesquilinéaire de E_x

$$(X, Y) \rightarrow \frac{1}{i}\langle \beta, [X, \bar{Y}] \rangle$$

Si elle est définie positive quel que soit $\beta \in \Sigma^+$, alors D est dit strictement pseudo-convexe. Dans ce cas l'idéal engendré au voisinage de Σ^+ par les fonctions $\sigma(X) \in C^\infty(S)$ où X décrit les sections de E , définit une sous-variété formelle Γ^+ involutive strictement positive, sa partie réelle Σ^+ est un cône symplectique de S . \square

Cet exemple sert de modèle dans la théorie homogène des opérateurs de Toeplitz. Dans la théorie à petit paramètre, l'exemple équivalent est le suivant.

Exemple 4.18. On se donne une variété kählérienne M . On note ω la deux-forme fondamentale de M . La variété S est le cotangent T^*M muni de la deux-forme symplectique $d\gamma + \pi^*\omega$, où γ est la 1-forme de Liouville de T^*M et π est la projection $T^*M \rightarrow M$. L'idéal engendré par les fonctions $\sigma(\bar{X})$, où X décrit les champs de vecteurs holomorphes de M définit une sous-variété formelle Γ de T^*M involutive strictement positive. En effet si X et Y sont deux champs de vecteurs de M ,

$$\{\sigma(X), \sigma(Y)\} = \sigma([X, Y]) - \omega(X, Y)$$

$T^{0,1}M$ étant un sous-fibré de $TM \otimes \mathbb{C}$ intégrable et lagrangien, $\mathcal{I}(\Gamma)$ est stable par crochet de Poisson. $(X, Y) \rightarrow \frac{1}{i}\omega(X, \bar{Y})$ est une forme sesquilinéaire définie positive de $T^{1,0}M$, par conséquent Γ est strictement positive. Notons que la partie réelle de Γ est la section nulle de T^*M qui est isomorphe à M en tant que variété symplectique. \square

Revenons à la situation générale et donnons quelques propriétés des sous-variétés involutives strictement positives.

Proposition 4.19. *Si Γ une sous-variété involutive strictement positive de S de codimension k , alors sa partie réelle $\Gamma_{\mathbb{R}}$ est une sous-variété symplectique de codimension $2k$. De plus si $x \in \Gamma_{\mathbb{R}}$,*

$$T_x S \otimes \mathbb{C} = (T_x \Gamma^{\perp \Omega} \oplus T_x \bar{\Gamma}^{\perp \Omega}) \oplus (T_x \Gamma_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}), \quad T_x \Gamma = T_x \Gamma^{\perp \Omega} \oplus (T_x \Gamma_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C})$$

et $(T_x \Gamma^{\perp \Omega} \oplus T_x \bar{\Gamma}^{\perp \Omega}) = (T_x \Gamma_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C})^{\perp \Omega}$ est un espace vectoriel symplectique dont $T_x \Gamma^{\perp \Omega}$ est un sous-espace lagrangien.

Preuve. T_x^*S est un espace symplectique dont la deux-forme symplectique est donnée par le crochet de Poisson. Par hypothèse, si $X \in (T_x \Gamma)^{\perp}$, $\{X, \bar{X}\} = 0$ implique $X = 0$. Nous en déduisons que $(T_x \Gamma)^{\perp} \cap (T_x \bar{\Gamma})^{\perp} = (0)$ et aussi que $(T_x \Gamma)^{\perp} \oplus (T_x \bar{\Gamma})^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel symplectique de $T_x^*S \otimes \mathbb{C}$. De plus, $(T_x \Gamma)^{\perp} + (T_x \bar{\Gamma})^{\perp} = (T_x \Gamma_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C})^{\perp}$ et Γ étant involutive $(T_x \Gamma)^{\perp}$ est un sous-espace lagrangien de $(T_x \Gamma_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C})^{\perp}$. Pour montrer le résultat, il suffit de considérer l'image réciproque de ces espaces par l'application $\varphi : T_x S \rightarrow T_x^*S$ qui à X associe $\Omega(X, \cdot)$. Rappelons que φ est un symplectomorphisme et que si E est un sous-espace de $T_x S$, alors $\varphi(E^{\perp \Omega}) = E^{\perp}$. \square

Le résultat suivant démontré par Boutet de Monvel dans l'appendice de [1] donne la forme normale locale d'une sous-variété symplectique involutive strictement positive.

Proposition 4.20. *Soit Γ une sous-variété involutive strictement positive de S de codimension k et $x \in \Gamma_{\mathbb{R}}$. Il existe alors un voisinage U de x et un système de générateurs u^1, \dots, u^k définis sur U tels que*

$$\begin{aligned} \{u^j, u^l\} &= 0 \quad \text{mod } \mathcal{I}^{\infty}(\Lambda_{\mathbb{R}}) \\ \frac{1}{i}\{u^j, \bar{u}^l\} &= \delta_{ij} \quad \text{mod } \mathcal{I}^{\infty}(\Lambda_{\mathbb{R}}) \end{aligned}$$

On remarquera que les fonctions (u^j, \bar{u}^j) forment un système de coordonnées transverses à $\Gamma_{\mathbb{R}}$ en dualité avec les champs de vecteurs $iX_{\bar{u}^j}, -iX_{u^j}$. Ainsi on peut écrire le développement de Taylor le long de $\Gamma_{\mathbb{R}}$ de $f \in C^\infty(S)$ comme une série formelle de $C^\infty(\Gamma_{\mathbb{R}})[[\bar{U}, U]]$ (cf. fin du paragraphe 5.1)

$$(4.20) \quad [\mathcal{D}f](x, \bar{U}, U) = \sum f_{\alpha, \beta}(x) \bar{U}^\alpha U^\beta \quad \text{où } f_{\alpha, \beta} = \frac{1}{\alpha! \beta!} (-iX_u)^\alpha \cdot (iX_{\bar{u}})^\beta f|_{\Gamma_{\mathbb{R}}}$$

Si le support de f est un compact de U , alors $f \in \mathcal{I}(\Gamma)$ équivaut à $[\mathcal{D}f](x, \bar{U}, 0) = 0$. Aux conditions sur les supports près, $C^\infty(\Gamma)$ se présente localement comme l'algèbre de séries formelles $C^\infty(\Gamma_{\mathbb{R}})[[\bar{U}]]$.

De manière formelle, on peut considérer que Γ est coisotrope et qu'elle possède donc un feuilletage canonique. Ce feuilletage définit en fait une fibration de Γ sur $\Gamma_{\mathbb{R}}$, les coordonnées dans les fibres étant les variables formelles \bar{U}^i . Enfin on dispose du résultat suivant démontré par Boutet de Monvel et Guillemin dans l'appendice de [2].

Proposition 4.21. *Soit M une sous-variété symplectique fermée de S . Il existe alors une sous-variété involutive strictement positive de S dont la partie réelle soit M .*

Ce résultat permet d'étendre les exemples que nous avons donnés ci-dessus. Appliqué dans la théorie homogène (cf. [2]), il permet de quantifier les cônes symplectiques. Dans la théorie à petit paramètre, on considère une variété symplectique M que l'on identifie à la section nulle de T^*M munie comme ci-dessus de la deux forme symplectique $d\gamma + \pi^*\omega$. On introduit alors une sous-variété Γ involutive strictement positive de T^*M dont la partie réelle soit M .

2.2 Relations canoniques associées

Dans ce chapitre nous expliquons comment l'on prolonge une sous-variété lagrangienne Λ de M en une sous-variété formelle lagrangienne de S , à l'aide d'une sous-variété formelle Γ involutive et strictement positive de partie réelle M . Nous considérons aussi l'opération analogue pour les sous-variétés lagrangiennes de produits de variétés symplectiques. Nous décrivons les espaces de symboles associés, les compositions de ces variétés lagrangiennes et le calcul symbolique qui en découle.

Considérons deux plongements symplectiques $(M_i, \omega_i) \rightarrow (S_i, \Omega_i)$ avec $i = 1$ ou 2 et introduisons deux sous-variété Γ^1 et Γ^2 de S_1 et S_2 respectivement, involutives strictement positives dont les parties réelles soient M_1 et M_2 respectivement. On notera n_i la dimension de S_i et $2(n_i - k_i)$ la dimension de M_i . On suppose que les produits $M_1 \times M_2$ et $S_1 \times S_2$ sont munies des deux formes symplectiques $\pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2$ et $\pi_1^*\Omega_1 - \pi_2^*\Omega_2$, où π_1 et π_2 désigne les projections sur les premiers et seconds facteurs respectivement.

Si Λ est une sous-variété lagrangienne de $M_1 \times M_2$, on souhaite définir une sous-variété lagrangienne $\tilde{\Lambda}$ de $S_1 \times S_2$ obtenue en propageant Λ par le flot hamiltonien des π_1^*f et π_2^*g , où f et g décrivent $\mathcal{I}(\Gamma^1)$ et $\mathcal{I}(\Gamma^2)$ respectivement. Le problème est que ces champs de vecteurs hamiltoniens sont complexes et n'engendrent aucun flot à proprement parler. Pour contourner

ceci, nous introduisons l'idéal $\mathcal{I}(\tilde{\Lambda})$ composé des fonctions $h \in C^\infty(S_1 \times S_2)$ telles que

$$\begin{aligned} \forall l_1 \geq 0, \forall l_2 \geq 0, \forall f_1, \dots, f_{l_1} \in \mathcal{I}(\Gamma^1), \forall g_1, \dots, g_{l_2} \in \mathcal{I}(\Gamma^2) \\ X_{\pi_1^* f_1} \dots X_{\pi_1^* f_{l_1}} \cdot X_{\pi_2^* g_1} \dots X_{\pi_2^* g_{l_2}} \cdot h|_{\Lambda} = 0 \end{aligned}$$

Proposition 4.22. $\mathcal{I}(\tilde{\Lambda})$ définit une sous-variété lagrangienne positive de $S_1 \times S_2$ dont la partie réelle est Λ et dont l'espace tangent est

$$T_{x_1, x_2} \tilde{\Lambda} = (T_{x_1} \Gamma^1)^{\perp \Omega} \oplus (T_{x_1, x_2} \Lambda \otimes \mathbb{C}) \oplus (T_{x_2} \bar{\Gamma}^2)^{\perp \Omega}, \quad \text{si } (x_1, x_2) \in \Lambda$$

Cette construction est assez générale et nous l'appliquerons de plusieurs manières. Si l'on choisit $M_2 = S_2 = \{.\}$, on associe à une sous-variété lagrangienne de M_1 une sous-variété formelle lagrangienne de S_1 . Si $M_1 = M_2$, $S_1 = S_2$ et $\Gamma_1 = \Gamma_2$, considérons un symplectomorphisme φ de M_1 , on lui associe alors son graphe Λ et donc une sous-variété lagrangienne de $S_1 \times S_1$. Dans les chapitres suivants, ceci nous permettra de définir les sections lagrangiennes et de quantifier des symplectomorphismes d'une variété symplectique M_1 . Entre autres, les opérateurs de Toeplitz seront définis à partir de l'application identité. On s'intéressera aussi au cas où $M_1 = M_2$, $(S_1, \Gamma_1) \neq (S_2, \Gamma_2)$ et $\Lambda = \text{diag } M$. Les opérateurs associés permettront de faire le lien entre deux quantifications distinctes de M_1 .

Preuve. $\mathcal{I}(\tilde{\Lambda})$ est un idéal de $C^\infty(S_1 \times S_2)$ stable par somme localement finie et de trace Λ . Pour montrer qu'il définit une sous-variété formelle, il nous suffit de construire un système de générateurs vérifiant les hypothèses de la définition 4.43, au voisinage de tout point $(x_1, x_2) \in \Lambda$. Considérons $(u_1^1, \dots, u_1^{k_1})$ et $(u_2^1, \dots, u_2^{k_2})$ des systèmes de générateurs sous la forme normale de $\mathcal{I}(\Gamma^1)$ et $\mathcal{I}(\Gamma^2)$ respectivement, définis sur des voisinages W_1 de x_1 et W_2 de x_2 . On vérifie que si $h \in C^\infty(S_1 \times S_2)$ a son support inclu dans $W_1 \times W_2$, alors

$$(4.21) \quad h \in \mathcal{I}(\tilde{\Lambda}) \Leftrightarrow (X_{\pi_1^* u_1})^\alpha (X_{\pi_2^* u_2})^\beta h|_{\Lambda} = 0, \quad \forall \alpha, \beta$$

Soit $(x^i)_{i=1, \dots, 2(n_1+n_2-k_1-k_2)}$ un système de coordonnées de $M_1 \times M_2$ tel qu'au voisinage de (x_1, x_2)

$$\Lambda = \{x^1 = \dots = x^{n_1+n_2-k_1-k_2} = 0\}$$

Prolongeons ces coordonnées sur $S_1 \times S_2$ de telle sorte que $\{x^i, \pi_1^* u_1^j\}$, $\{x^i, \pi_1^* \bar{u}_1^j\}$, $\{x^i, \pi_2^* u_2^k\}$ et $\{x^i, \pi_2^* \bar{u}_2^k\}$ s'annulent à tout ordre le long de Λ . Nous affirmons que la famille $(\pi_1^* u_1^i, \pi_2^* \bar{u}_2^j, x^k)$ où i varie de 1 à k_1 , j de 1 à k_2 et k de 1 à $n_1 + n_2 - k_1 - k_2$, constitue un système de générateurs de $\mathcal{I}(\tilde{\Lambda})$. Pour le voir il suffit d'écrire le développement de Taylor des fonctions de $C^\infty(S_1 \times S_2)$ le long de Λ à l'aide du système de coordonnées transverses $(\pi_1^* u_1^i, \pi_1^* \bar{u}_1^i, \pi_2^* u_2^j, \pi_2^* \bar{u}_2^j, x^k)$ où $i = 1, \dots, k_2$, $j = 1, \dots, k_2$ et $k = 1, \dots, n_1 + n_2 - k_1 - k_2$ et d'appliquer (4.21). On vérifie ensuite que l'espace tangent de $\tilde{\Lambda}$ se décompose comme dans l'énoncé de la proposition. La positivité découle de la positivité de Γ^1 et Γ^2 . Il nous reste à montrer que $\mathcal{I}(\tilde{\Lambda})$ est involutif. Pour cela, il suffit de montrer que le crochet de Poisson de deux générateurs appartient à $\mathcal{I}(\tilde{\Lambda})$. En fait, la question se pose seulement pour $h^{ij} = \{x^i, x^j\}$ car les autres crochets s'annulent à tout ordre le long de Λ . Comme l'espace tangent de Λ est lagrangien, h^{ij} s'annule le long de Λ . Il résulte de l'identité de Jacobi que $\{h^{ij}, \pi_1^* u_1^l\}$ et $\{h^{ij}, \pi_2^* \bar{u}_2^l\}$ s'annulent à tout ordre le long de $\text{diag}(\Sigma)$. Le résultat s'obtient alors en appliquant (4.21). \square

Appliquant (4.21), on identifie localement à l'aide de systèmes de générateurs $(u_1^1, \dots, u_1^{k_1})$ et $(u_2^1, \dots, u_2^{k_2})$ sous la forme normale de $\mathcal{I}(\Gamma^1)$ et $\mathcal{I}(\Gamma^2)$ respectivement, les fonctions de $C^\infty(\tilde{\Lambda})$ à des séries formelles de $C^\infty(\Lambda)[[\bar{U}_1, U_2]]$: on associe à la classe d'équivalence de $f \in C^\infty(S_1 \times S_2)$ la série formelle

$$(4.22) \quad F(x, \bar{U}_1, U_2) = \sum f_{\alpha, \beta}(x) \bar{U}_1^\alpha U_2^\beta \quad \text{où } f_{\alpha, \beta} = \frac{1}{\alpha! \beta!} (-iX_{\pi_1^* u_1})^\alpha \cdot (-iX_{\pi_2^* \bar{u}_2})^\beta f|_\Lambda$$

Le signe $-$ en facteur de $X_{\pi_1^* u_1}$ vient du fait que $\{\pi_2^* u_2^j, \pi_2^* \bar{u}_2^k\} = -i\delta_{jk}$. Comme nous l'avons expliqué plus haut, on peut considérer que l'on dispose de deux fibrations $\Gamma^1 \rightarrow M_1$ et $\Gamma^2 \rightarrow M_2$. De même, $\tilde{\Lambda}$ s'interprète comme un produit fibré $\Gamma^1 \times_\Lambda \bar{\Gamma}^1$, (\bar{U}_1, U_2) étant les variables dans les fibres.

Passons en revue quelques opérations sur ces variétés lagrangiennes. La première correspond à la prise de l'adjoint d'un opérateur intégral de Fourier. Soit

$$j_M : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2 \times M_1, \quad j_S : S_1 \times S_2 \rightarrow S_2 \times S_1$$

les applications qui échangent les facteurs. Si Λ est une sous-variété lagrangienne de $M_1 \times M_2$, on définit $\Lambda' = j_M(\Lambda)$ et ensuite la sous-variété formelle $\tilde{\Lambda}'$ de $S_2 \times S_1$. On vérifie alors que $\tilde{\Lambda}'$ est le conjugué de $j_S(\tilde{\Lambda})$. On introduit de la sorte l'application $C^\infty(\tilde{\Lambda}) \rightarrow C^\infty(\tilde{\Lambda}')$ qui à la classe d'équivalence d'une fonction F associe la classe d'équivalence du conjugué de $j_S^* F$. Utilisant les notations (4.22), cette application s'écrit

$$C^\infty(\Lambda)[[\bar{U}_1, U_2]] \rightarrow C^\infty(\Lambda')[[\bar{U}_2, U_1]], \quad \sum f_{\alpha, \beta}(x) \bar{U}_1^\alpha U_2^\beta \rightarrow \sum j_M^* \bar{f}_{\alpha, \beta}(x) U_1^\alpha \bar{U}_2^\beta$$

Considérons à présent les opérations induites par la composition d'un opérateurs pseudodifférentiel et d'un opérateur intégral de Fourier. Si Δ_1 est la diagonale de $S_1 \times S_1$, alors $\Delta_1 \circ \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}$. L'application bilinéaire $C^\infty(S_1) \times C^\infty(\tilde{\Lambda}) \rightarrow C^\infty(\tilde{\Lambda})$ associée à cette composition est décrite localement avec les notations (4.20) et (4.22) par

$$\begin{aligned} C^\infty(S_1) \times C^\infty(\Lambda)[[\bar{U}_1, U_2]] &\rightarrow C^\infty(\Lambda)[[\bar{U}_1, U_2]] \\ f, G(x, \bar{U}_1, U_2) &\rightarrow [\mathcal{D}f](x, \bar{U}_1, 0) \cdot G(x, \bar{U}_1, U_2) \end{aligned}$$

De même si Δ_2 est la diagonale de $S_2 \times S_2$, alors $\tilde{\Lambda} \circ \Delta_2 = \tilde{\Lambda}$ et l'application bilinéaire associée s'écrit

$$\begin{aligned} C^\infty(\Lambda)[[\bar{U}_1, U_2]] \times C^\infty(S_2) &\rightarrow C^\infty(\Lambda)[[\bar{U}_1, U_2]] \\ F(x, \bar{U}_1, U_2), g &\rightarrow F(x, \bar{U}_1, U_2) \cdot [\mathcal{D}g](x, 0, U_2) \end{aligned}$$

Traisons l'opération sous-jacente à la composition des opérateurs intégraux de Fourier. On se donne un troisième plongement symplectique $(M_3, \omega_3) \rightarrow (S_3, \Omega_3)$ et une sous-variété Γ^3 involutive et strictement positive de S_3 de partie réelle M_3 . Soit Λ^{12} et Λ^{23} des sous-variétés lagrangiennes de $M_1 \times M_2$ et $M_2 \times M_3$ respectivement. Définissons comme ci-dessus les sous-variétés formelles $\tilde{\Lambda}^{12}$ et $\tilde{\Lambda}^{23}$ lagrangiennes positives. On souhaite étudier la composition de $\tilde{\Lambda}^{12}$ et $\tilde{\Lambda}^{23}$. Formulons les hypothèses sous lesquelles la composition de Λ^{12} et Λ^{23} est bien définie :

l'intersection Λ de $\Lambda^{12} \times M_3$ et $M_1 \times \Lambda^{23}$ est transverse,

la projection $\pi_{13} : M_1 \times M_2 \times M_3 \rightarrow M_1 \times M_3$ restreinte à Λ est un plongement.

Notons que la première hypothèse implique que cette application est une immersion lagrangienne. $\Lambda^{13} = \pi_{13}(\Lambda) = \Lambda^{12} \circ \Lambda^{23}$ est alors une sous-variété lagrangienne de $M_1 \times M_3$. Comme nous le verrons ces hypothèses impliquent aussi que la composition de $\tilde{\Lambda}^{12}$ et $\tilde{\Lambda}^{23}$ est bien définie dans le sens de la proposition 4.51. Notons $i^1 : \Lambda^{13} \rightarrow \Lambda^{12}$ et $i^3 : \Lambda^{13} \rightarrow \Lambda^{23}$ les applications telles que si $(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda$, alors $i^1(x_1, x_3) = (x_1, x_2)$ et $i^3(x_1, x_3) = (x_2, x_3)$. L'application bilinéaire associée à la composition $\Lambda^{13} = \Lambda^{12} \circ \Lambda^{23}$ est

$$C^\infty(\Lambda^{12}) \times C^\infty(\Lambda^{23}) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{13}), \quad f, g \rightarrow h(x) = f(i_1(x)).g(i_3(x))$$

On note $\tilde{\Lambda}^{13}$ la sous-variété formelle de $S_1 \times S_3$ associée à Λ^{13} .

Proposition 4.23. *La composition de $\tilde{\Lambda}^{12}$ et $\tilde{\Lambda}^{23}$ est bien définie et nous avons $\tilde{\Lambda}^{13} = \tilde{\Lambda}^{12} \circ \tilde{\Lambda}^{23}$. L'application bilinéaire associée s'écrit en utilisant des systèmes de générateurs (u_j^i) de Γ^j où $j = 1, 2$ ou 3 sous la forme normale et les notations (4.22)*

$$C^\infty(\Lambda^{12})[[\bar{U}_1, U_2]] \times C^\infty(\Lambda^{23})[[\bar{U}_2, U_3]] \rightarrow C^\infty(\Lambda^{13})[[\bar{U}_1, U_3]] \\ F(x, \bar{U}_1, U_2), G(x, \bar{U}_2, U_3) \rightarrow F(i_1(x), \bar{U}_1, 0).G(i_3(x), 0, U_3)$$

Cette proposition généralise un résultat de Boutet de Monvel [1] qui correspond à $M_1 = M_2 = M_3 = M$, $\Gamma^1 = \Gamma^2 = \Gamma^3$ et $\Lambda^{12} = \Lambda^{23} = \text{diag } M$.

Remarque 4.24. Si $M_3 = S_3 = \{.\}$ les sous-variétés lagrangiennes de $M_2 \times M_3$ s'identifient aux sous-variétés lagrangiennes de M_2 . En appliquant la proposition, on obtient la règle de composition associée à l'action d'un opérateur intégral de Fourier sur une section lagrangienne.

Preuve. Vérifions les hypothèses de la proposition 4.51. $(\Lambda^{12} \times S_3) \cap (S_1 \times \Lambda^{23}) = \Lambda$ et cette intersection est non-dégénérée au sens de Bott car l'intersection de $\Lambda^{12} \times M_3$ et $M_1 \times \Lambda^{23}$ est transverse. L'hypothèse (4.31) découle aussi de la transversalité de cette intersection et de

$$(T_x \bar{\Gamma}^2)^{\perp \Omega_2} \oplus (T_x \Gamma^2)^{\perp \Omega_2} = (T_x M_2 \otimes \mathbb{C})^{\perp \Omega}$$

Ceci vient de la stricte positivité de Γ^2 . La proposition 4.51 s'applique donc. Notons Λ^2 la sous-variété formelle $(\tilde{\Lambda}^{12} \times S_3) \cap (S_1 \times \tilde{\Lambda}^{23})$. Choisissons des systèmes de générateurs (u_1^i) et (u_3^i) sous la forme normale de $\mathcal{I}(\Gamma^1)$ et $\mathcal{I}(\Gamma^3)$ respectivement. Si $h \in \mathcal{I}(\Lambda^2)$, alors nous avons

$$(4.23) \quad (X_{\pi_1^* u_1})^\alpha (X_{\pi_3^* u_3})^\beta h|_\Lambda = 0, \quad \forall \alpha, \beta$$

Montrons que la réciproque est vraie. Il suffit de vérifier que l'ensemble des fonctions qui vérifient cette condition est un idéal définissant une sous-variété formelle de partie réelle Λ et de même codimension que Λ^2 . Pour montrer ceci, il nous faut construire un système de générateurs et ceci se réalise comme dans la preuve de la proposition 4.22 en introduisant des coordonnées sur $M_1 \times S_2 \times M_3$. Le résultat final découle alors de (4.23). \square

3 Quantification des variétés symplectiques compactes

3.1 Les données

On considère une variété symplectique compacte (M, ω) de dimension $2n$. On suppose que M est munie d'un fibré préquantifiant $L \rightarrow M$. Autrement dit L est un fibré en droite complexe

muni d'une structure hermitienne et d'une dérivation covariante ∇ de courbure $\frac{1}{i}\omega$. Pour qu'une telle structure existe il faut et il suffit que les périodes de ω soient des multiples de 2π . Le fibré cotangent T^*M est munie de la 2-forme symplectique $\Omega = d\gamma + \pi^*\omega$ où γ est la 1-forme de Liouville et π est la projection $T^*M \rightarrow M$. On définit l'élément de volume $\mu = \frac{1}{n!}|\omega^n|$. C'est avec ces données que nous appliquerons les résultats du chapitre 1.

On se donne ensuite une sous-variété Γ involutive strictement positive de T^*M dont la partie réelle est la section nulle de T^*M . Une telle sous-variété existe d'après la proposition 4.21. Soit Δ la diagonale de $M \times M$, on définit alors une sous-variété formelle $\tilde{\Delta}$ lagrangienne positive de $T^*M \times T^*M$ comme dans la proposition 4.22. Soit la section

$$s_\Delta : \Delta \rightarrow L \boxtimes L^{-1}, \quad (x, x) \rightarrow (u \otimes u^{-1}) \text{ où } u \in L_x$$

On dispose de la sorte d'une $*$ -algèbre $\mathcal{F}(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$. Finalement, on se donne un élément idempotent (Π_k) autoadjoint de $\mathcal{F}(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$. Ainsi les trois données pour quantifier (M, ω) sont

$$L \rightarrow M, \quad \Gamma, \quad (\Pi_k).$$

Avant de montrer l'existence de (Π_k) , décrivons la structure de l'espace tangent de T^*M en un point x de la section nulle. On identifie $T_x T^*M$ avec $T_y M \oplus T_y^* M$, où $y = \pi(x)$. Nous avons alors

$$\Omega((X, l), (X', l')) = \langle l, X' \rangle - \langle l', X \rangle + \omega(X, X'), \quad \forall (X, l), (X', l') \in T_y M \oplus T_y^* M$$

Ainsi, $(T_y M, \omega)$ est un sous-espace symplectique de $(T_x T^* M, \Omega)$ et son orthogonal symplectique est

$$(T_y M)^{\perp\Omega} = \{(X, l) / l + \iota_X \omega = 0\}$$

C'est un sous-espace symplectique de $(T_x T^* M, \Omega)$ et la projection $\pi_* : T_y M \oplus T_y^* M \rightarrow T_y M$ induit par restriction un symplectomorphisme de $(T_y M)^{\perp\Omega}$ sur $(T_y M, -\omega)$. Définissons les sous-espaces conjugués de $T_y M \otimes \mathbb{C}$

$$T_y^{0,1} M = \pi_*(T_x \Gamma)^{\perp\Omega}, \quad T_y^{1,0} M = \pi_*(T_x \bar{\Gamma})^{\perp\Omega}$$

On déduit alors de la proposition 4.19 que $T_y M \otimes \mathbb{C} = T_y^{1,0} M \oplus T_y^{0,1} M$ et les deux sous-espaces sont lagrangiens. De plus Γ étant strictement positive,

$$\forall Z \in T_y^{1,0} M, \quad \frac{1}{i} \omega(Z, \bar{Z}) > 0 \text{ si } Z \neq 0$$

Par conséquent, l'application linéaire $J_y : T_y M \rightarrow T_y M$ dont la restriction à $T_y^{1,0} M$ (resp. $T_y^{0,1} M$) est la multiplication par i (resp. $-i$) est une structure complexe de $T_y M$ compatible avec ω et strictement positive, i.e.

$$J_y^2 = -\text{Id}, \quad \omega(J_y X, J_y Y) = \omega(X, Y) \text{ et } \omega(X, J_y X) > 0 \text{ si } X \neq 0$$

On définit de la sorte une structure complexe $J \in C^\infty(M, TM \otimes T^*M)$ qui bien-sûr n'a aucune raison d'être intégrable. On remarquera que $T_x \Gamma$ est déterminé par J_y .

Si on note $X^{1,0} = \frac{1}{2}(X - iJX)$ la partie holomorphe de X et $X^{0,1} = \frac{1}{2}(X + iJX)$ sa partie anti-holomorphe, nous avons d'après la proposition 4.22

$$T_{y,y}\tilde{\Delta} = \{(X_1, X_2, q_{12}^1(X_1, X_2), q_{12}^2(X_1, X_2)) / X_1, X_2 \in T_x M \otimes \mathbb{C}\}$$

avec $q_{12}^1(X_1, X_2) = -\omega(X_1^{0,1} - X_2^{0,1}, \cdot)$, $q_{12}^2(X_1, X_2) = \omega(X_1^{1,0} - X_2^{1,0}, \cdot)$

La variété formelle $\tilde{\Delta}$ vérifie donc les hypothèses (4.15) et $\mathcal{F}(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$ est alors bien défini. Comme $\Delta \circ \Delta = \Delta$, on déduit des propositions 4.14 et 4.23 que $\mathcal{F}(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$ est stable par composition. $\mathcal{F}(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$ est aussi stable par passage à l'adjoint. C'est donc une $*$ -algèbre.

Lemme 4.25. $\mathcal{F}(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$ admet un élément idempotent auto-adjoint (Π_k) qui ne soit pas un régularisant. (Π_k) est nécessairement un opérateur de $\mathcal{F}^0(\Gamma)$ dont la restriction du symbole principal à Δ est la fonction constante égale à 1.

Preuve. Utilisant un système de générateurs sous la forme normale, les symboles principaux des opérateurs de $\mathcal{F}(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$ s'écrivent localement comme des séries formelles $F(x, \bar{U}, U)$. D'après les propositions 4.14 et 4.23, la loi de composition est la suivante

$$(4.24) \quad F(x, \bar{U}, U), G(x, \bar{U}, U) \rightarrow F(x, \bar{U}, 0).G(x, 0, U).H(x, \bar{U}, U)$$

où $H \in C^\infty(\tilde{\Delta})$. On déduit des formules ci-dessus donnant q_{12}^1 et q_{12}^2 que la restriction $H(x, 0, 0)$ de H à Δ est constante égale à 1. De (4.24), on déduit que (Π_k) appartient nécessairement à $\mathcal{F}^0(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$ et la restriction de son symbole principal à Δ est la fonction constante égale à 1. Soit (P_k) un opérateur auto-adjoint de $\mathcal{F}^0(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$ dont le symbole total est la série formelle 1 et $\Pi_k^0 = P_k \circ P_k$. (P_k) est auto-adjoint donc (Π_k^0) l'est aussi. Le symbole principal de Π_k^0 est H . De $(P_k \circ P_k) \circ P_k = P_k \circ (P_k \circ P_k)$, on déduit que $H(x, \bar{U}, 0) = H(x, 0, U) = 1$ et ensuite que $\Pi_k^0 \circ \Pi_k^0 \equiv \Pi_k^0$ modulo $\mathcal{F}^1(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$. Soit $T_k^1 = \Pi_k^0 - \Pi_k^0 \circ \Pi_k^0$ et $\Pi_k^1 = 2\Pi_k^0 \circ T_k^1 - T_k^1$. Ces deux opérateurs sont dans $\mathcal{F}^1(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$ et de plus

$$(\Pi_k^0 + \Pi_k^1)^2 - (\Pi_k^0 + \Pi_k^1) = -4(T_k^1)^2$$

est un opérateur de $\mathcal{F}^2(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$. En réitérant ceci et en passant à la limite, nous obtenons un symbole total idempotent auto-adjoint et donc un opérateur (Π'_k) autoadjoint tel que $\Pi'_k \circ \Pi'_k \equiv \Pi'_k$ modulo un régularisant. Pour conclure, on peut utiliser la formule de [1]

$$F_k = \frac{1}{2}(1 - (1 - 4T_k)^{-\frac{1}{2}}) \text{ avec } T_k = \Pi'_k - \Pi'_k \circ \Pi'_k$$

(F_k) est alors un régularisant et $\Pi_k = \Pi'_k + F_k(\text{Id} - 2\Pi'_k)$ est un idempotent autoadjoint. \square

On remarquera qu'il existe à un régularisant près un choix naturel du projecteur autoadjoint (Π_k) : l'opérateur construit dans la preuve en est un. De plus, (Π_k) n'est pas unique. Par exemple, choisissons un opérateur (Q_k) autoadjoint de $\mathcal{F}^l(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$ dont le symbole principal $\hbar^l Q(x, \bar{U}, U)$ s'annule sur Δ et définissons $\Pi'_k = \Pi_k + \Pi_k Q_k + Q_k \Pi_k$. Alors $\Pi'_k \equiv \Pi'_k \circ \Pi'_k$ modulo $\mathcal{F}^{l+1}(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$, et l'on peut comme dans la preuve du lemme modifier Π'_k par un opérateur de $\mathcal{F}^{l+1}(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$ en un idempotent autoadjoint. On vérifie que le symbole principal de $\Pi_k Q_k + Q_k \Pi_k$ s'annule seulement si $Q(x, \bar{U}, 0) = 0$.

Etant donné (L, Γ, Π_k) , on définit les espaces quantiques \mathcal{H}_k comme étant les images des Π_k . Connaissant la restriction du symbole principal de (Π_k) à Δ , nous pouvons évaluer la trace de (Π_k) et en déduire que

$$\dim \mathcal{H}_k = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \int_M \mu + O(k^{n-1})$$

De plus $\dim \mathcal{H}_k$ admet un développement asymptotique en puissance de k . Un des résultats principaux de Boutet de Monvel et Guillemin [2] est de montrer qu'il s'agit du polynôme de Hilbert. Précisons que le lien avec la théorie de [2] n'est pas immédiat.

3.2 Quantification des variétés lagrangiennes

Soit une variété symplectique (M, ω) quantifiée avec les données (L, Γ, Π_k) . On se donne une sous-variété lagrangienne fermée Λ de M . On souhaite quantifier Λ , c'est à dire lui associer un espace de sections lagrangiennes. Pour ce faire, on introduit la sous-variété lagrangienne formelle $\tilde{\Lambda}$ de T^*M . Celle-ci vérifie les hypothèses (4.6) et

$$T_x \tilde{\Lambda} = \{(X, q(X)) / X \in T_x M \otimes \mathbb{C}\} \text{ avec } q(X) = -\omega(p(X), \cdot)$$

où p désigne la projection de $T_x^*M \otimes \mathbb{C}$ d'image $T_x^{0,1}M$ de noyau $T_x \Lambda \otimes \mathbb{C}$. On suppose que le fibré plat $(L|_{\Lambda}, \nabla)$ est trivial et on se donne une section plate $t : \Lambda \rightarrow L$.

Définition 4.26. Une section lagrangienne associée à (Λ, t) est une section lagrangienne (u_k) de $\mathcal{S}(\tilde{\Lambda}, t)$ telle que $u_k \in \mathcal{H}_k, \forall k$.

On note $\mathcal{S}(\Lambda, t)$ l'ensemble de ces sections. La proposition suivante définit le symbole total de ces sections lagrangiennes.

Proposition 4.27. Etant donné une série formelle $\sum_l \hbar^l f_l$ de $C^\infty(\Lambda)[[\hbar, \hbar]]$, il existe une section lagrangienne $(u_k) \in \mathcal{S}(\Lambda, t)$ telle que son symbole total $\sum \hbar^l F_l$ en tant qu'élément de $\mathcal{S}(\tilde{\Lambda}, t)$ vérifie

$$F_l|_{\Lambda} = f_l, \quad \forall l$$

Un tel (u_k) est unique à une suite négligeable de \mathcal{H}_k près.

La série formelle $\sum_l \hbar^l f_l$ est par définition le symbole total de (u_k) . $\mathcal{S}^m(\Lambda, t) = \mathcal{S}^m(\tilde{\Lambda}, t) \cap \mathcal{S}(\Lambda, t)$ est le sous-espace de sections lagrangiennes associées à (Λ, t) dont le symbole est de la forme $\sum_{l \geq -m} \hbar^l f_l$. f_{-m} est le symbole principal d'une telle section lagrangienne. Appliquant la proposition 4.8, on montre que la norme de $u_k \in \mathcal{S}^m(\Lambda)$ est évaluée au premier ordre par

$$\|u_k\|^2 = k^{-2m} \int_M |f_{-m}|^2 \mu_{\Lambda} + O(k^{-2m-1})$$

où μ_{Λ} est la mesure Λ induite par la restriction de la structure riemannienne $\omega(X, JY)$ de M à Λ . Ainsi les éléments de $\mathcal{S}^m(\Lambda, t)$ sont les éléments de $\mathcal{S}(\Lambda, t)$ dont la norme est $O(k^{-m})$.

Preuve. De $\Delta \circ \Lambda = \Delta$, on déduit que si $T_k \in \mathcal{F}(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$ et $v_k \in \mathcal{S}(\tilde{\Lambda}, t)$, alors $T_k v_k \in \mathcal{S}(\tilde{\Lambda}, t)$. De plus la loi de composition des symboles principaux s'écrit localement.

$$T(x, \bar{U}, U), v(y, \bar{U}) \rightarrow T(j(y), \bar{U}, 0).v(y, 0).H(y, \bar{U})$$

où $j : \Lambda \rightarrow \Delta$ est l'application qui à y associe (y, y) . On vérifie aussi que la restriction de $H \in C^\infty(\tilde{\Lambda})$ à Λ est la fonction constante égale à 1. Par conséquent, $u_k \in \mathcal{S}^m(\tilde{\Lambda}, t)$ nécessairement et son symbole principal est déterminé par f_{-m} . De plus si l'on choisit $v_k \in \mathcal{S}^m(\tilde{\Lambda}, t)$ tel que la restriction de son symbole principal à Λ soit f_{-m} , alors $w_k = \Pi_k v_k$ vérifie $\Pi_k w_k = w_k$ et a le symbole principal souhaité. On peut bien sûr répéter ceci et montrer par approximations successives qu'il existe w_k unique modulo $\mathcal{S}^{m+p}(\tilde{\Lambda}, t)$ tel que $\Pi_k w_k = w_k$ et que les p premiers coefficients de son symbole total vérifient $F_l|_\Lambda = f_l$. En passant à la limite sur les symboles totaux, on construit alors u'_k qui a le symbole total souhaité et qui vérifie $\Pi_k u'_k \equiv u'_k$ modulo un régularisant. On pose finalement $u_k = \Pi_k u'_k$. \square

Pour définir les applications quantiques, on procède de la même façon. On se donne deux variétés symplectiques (M_i, ω_i) quantifiées par les données (L_1, Γ^1, Π^1) et (L_2, Γ^2, Π^2) et une sous-variété lagrangienne Λ^{12} du produit $M_1 \times M_2$ telle qu'il existe une section plate $s_{12} : \Lambda^{12} \rightarrow L_1 \boxtimes L_2^{-1}$.

Définition 4.28. L'espace des opérateurs intégraux de Fourier associés à (Λ_{12}, s_{12}) est

$$\mathcal{F}(\Lambda^{12}, s_{12}) = \{(T_k) \in \mathcal{F}(\tilde{\Lambda}^{12}, s_{12}) / \Pi_k^1 T_k \Pi_k^2 = T_k, \forall k\}$$

L'application symbole $\sigma : \mathcal{F}(\Lambda^{12}, s_{12}) \rightarrow C^\infty(\Lambda_{12})[[\hbar, \hbar]]$, qui à (T_k) associe la restriction à Λ^{12} de son symbole en tant qu'élément de $\mathcal{F}(\tilde{\Lambda}^{12}, s_{12})$, est surjective. Son noyau est l'ensemble des régularisants (R_k) tels que $\Pi_k^1 R_k \Pi_k^2 = R_k$.

Preuve. On peut adapter la preuve de la proposition 4.27, ou bien appliquer cette même proposition en choisissant $M = M_1 \times M_2$ munie de la structure symplectique $\pi_1^* \omega_1 - \pi_2^* \omega_2$, $L = L_1 \boxtimes \bar{L}_2$,

$$\Gamma = (\Gamma^1 \times T^* M_2) \cap (T^* M_1 \times i(\bar{\Gamma}_2))$$

où $i : T^* M_2 \rightarrow T^* M_2$ est l'application qui à ξ associe $-\xi$, et $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}_k^1 \otimes \bar{\mathcal{H}}_k^2$. Ces données définissent une quantification de $M_1 \times M_2$. Si T est un opérateur $C^\infty(M_1, L^k) \rightarrow C^\infty(M_2, L^k)$, alors $\Pi_k^1 T \Pi_k^2 = T_k$ équivaut à ce que le noyau de T appartienne à \mathcal{H}_k (on a identifié le dual de \mathcal{H}_k^2 et son conjugué). \square

Explicitons à présent quelques opérations sur les opérateurs intégraux de Fourier et les section lagrangiennes. Si $T_k \in \mathcal{F}(\Lambda^{12}, s_{12})$, alors son adjoint T_k^* appartient à $\mathcal{F}(\Lambda_{21}, s_{21})$ où $\Lambda_{21} = j(\Lambda^{12})$, $j : M_2 \times M_1 \rightarrow M_1 \times M_2$ est l'application qui échange les facteurs et $s_{21}(x_2, x_1) = \bar{s}_{12}(x_1, x_2)$. Le symbole total de T_k^* s'identifie par j au conjugué du symbole total de T_k .

Considérons l'action des opérateurs de $\mathcal{F}(\Lambda^{12}, s_{12})$ sur un espace de sections lagrangiennes $\mathcal{S}(\Lambda^2, s_2)$, où $\Lambda_2 \subset M_2$. Supposons que l'intersection Λ de Λ_{12} et $M_1 \times \Lambda_2$ soit transverse et que la projection de $\Lambda \subset M_1 \times M_2$ sur M_1 soit un plongement. On définit alors

$$\Lambda^1 = \Lambda^{12} \circ \Lambda^2, \quad s_1(x_1) = s_{12}(x_1, x_2).s_2(x_2) \text{ si } (x_1, x_2) \in \Lambda$$

Le résultat suivant se déduit des propositions 4.14 et 4.23.

Proposition 4.29. *Si $T_k \in \mathcal{F}(\Lambda^{12}, s_{12})$ et $(u_k) \in \mathcal{S}(\Lambda^2, s_2)$, alors $(T_k \cdot u_k) \in \mathcal{F}(\Lambda^1, s_1)$. Cette action induit une opération $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire sur les symboles*

$$C^\infty(\Lambda^{12})[[\hbar]] \times C^\infty(\Lambda^2)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(\Lambda^1)[[\hbar]]$$

De plus si $\hbar^m f_m$ et $\hbar^p g_p^2$ sont les symboles principaux de T_k et (u_k) respectivement, alors le symbole principal principal de $(T_k u_k)$ est $\hbar^{m+p} g_{m+p}^1$ donné par

$$g_{m+p}^1(x_1) = f_m(x_1, x_2) \cdot g_p^2(x_2) \cdot h(x_1) \text{ si } (x_1, x_2) \in \Lambda$$

où $h(x_1) \neq 0$ est déterminé par $J_{x_1}^1$, $J_{x_2}^2$, $T_{x_1, x_2} \Lambda^{12}$ et $T_{x_2} \Lambda^2$.

On peut bien-sur calculer $h(x_1)$ mais la formule est un peu compliquée. On remarquera que h étant déterminé uniquement par la structure complexe, on peut appliquer les formules montrées dans le cas kählerien lorsque Λ_{12} est le graphe d'un symplectomorphisme (cf. chapitre 3).

Le même type de résultat est valable pour les compositions d'opérateurs. Soit M_3 une troisième variété symplectique compacte quantifiée par les données (Γ^3, Π_k^3) . Considérons deux sous-variété lagrangiennes préquantifiables Λ^{12} et Λ^{23} de $M_1 \times M_2$ et $M_2 \times M_3$ respectivement, de sorte à définir $\mathcal{F}(\Lambda^{12}, s_{12})$ et $\mathcal{F}(\Lambda^{23}, s_{23})$. Supposons que l'intersection Λ de $\Lambda^{12} \times M_3$ et $M_1 \times \Lambda^{23}$ soit transverse et que la projection de Λ sur $M_1 \times M_3$ soit un plongement. On définit alors

$$\begin{aligned} \Lambda^{13} &= \Lambda^{12} \circ \Lambda^{23}, & b : C^\infty(\Lambda^{12}) \times C^\infty(\Lambda^{23}) &\rightarrow C^\infty(\Lambda^{13}) \\ s_{13}(x_1, x_3) &= s_{12}(x_1, x_2) \cdot s_{23}(x_2, x_3) \text{ si } (x_1, x_2, x_3) \in \Lambda \end{aligned}$$

où b est l'application associée à la composition. On montre alors le résultat suivant.

Proposition 4.30. *Si $(P_k) \in \mathcal{F}(\Lambda^{12}, s_{12})$ et $(Q_k) \in \mathcal{F}(\Lambda^{23}, s_{23})$, alors $(P_k Q_k)$ appartient à $\mathcal{F}(\Lambda^{13}, s_{13})$. Ceci induit une application $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire*

$$C^\infty(\Lambda^{12})[[\hbar]] \times C^\infty(\Lambda^{23})[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(\Lambda^{13})[[\hbar]]$$

Pour ce qui est des symboles principaux la composition est donné par b à un facteur multiplicatif près, qui est déterminé par les structures complexes J_1 , J_2 , J_3 et les espaces tangent de Λ^{12} et Λ^{23} .

A propos du facteur multiplicatif, on peut faire la même remarque que pour la proposition 4.29.

3.3 Le cas kählerien

Supposons que M soit une variété kählerienne compacte munie d'un fibré préquantifiant L . Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2.1, on dispose d'un choix naturel d'une sous-variété

Γ involutive strictement positive : $\mathcal{I}(\Gamma)$ est par définition l'idéal engendré par les fonctions $\sigma(\bar{Z})$ où Z décrit l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes. L'objet de ce chapitre est juste de constater que le projecteur de Szegö appartient à $\mathcal{F}(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$. Ceci complète les données pour quantifier M . On montrera aussi que les sections lagrangiennes et applications quantiques définies dans le troisième chapitre coïncident avec celle que nous avons définies ici.

Si Λ est une sous variété lagrangienne de M , on définit alors la sous-variété formelle $\tilde{\Lambda}$ de T^*M et appliquant la proposition 4.5, une section F_Λ .

Lemme 4.31. *Quel que soit le champ de vecteurs holomorphes Z de M , nous avons*

$$\nabla_{\bar{Z}} F_\Lambda \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda)}$$

De même si F_Δ est une section associée à $\tilde{\Delta}$, alors

$$\nabla_{\bar{Z}_g} F_\Delta \equiv \nabla_{Z_d} F_\Delta \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Delta)}$$

pour tout champ de vecteurs holomorphes Z

Preuve. Si $\nabla F_\Lambda = i\alpha \otimes F_\Lambda$, alors $\sigma(X) \equiv \langle \alpha, X \rangle$ modulo $\mathcal{I}(\tilde{\Lambda})$. Si Z est un champ de vecteurs holomorphes de M , alors $\langle \alpha, \bar{Z} \rangle$ appartient à $\mathcal{I}(\tilde{\Lambda})$ et cette fonction étant constante sur les fibres de $T^*M \rightarrow M$, elle s'annule à tout ordre le long de Λ , d'où le résultat pour F_Λ . Le résultat pour F_Δ s'obtient de la même façon. \square

Appliquant les résultats du deuxième chapitre, on en déduit que le projecteur de Szegö est un élément de $\mathcal{F}(\tilde{\Delta}, s_\Delta)$. Il est certainement idempotent et autoadjoint, ce qui définit les \mathcal{H}_k . Ceci étant, on constate à partir du lemme ci-dessus que les définitions des sections lagrangiennes dans le troisième chapitre et dans le chapitre précédent sont les mêmes. Il en est de même pour les applications quantiques.

3.4 Sur le caractère local du calcul symbolique

Le but de ce chapitre est de décrire la composition des symboles totaux. Considérons par exemple deux sous-variétés lagrangiennes Λ^{12} et Λ^{23} qui vérifient les hypothèses de la proposition 4.30. On obtient une application $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire

$$B : C^\infty(\Lambda^{12})[[\hbar]] \times C^\infty(\Lambda^{23})[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(\Lambda^{13})[[\hbar]]$$

où $\Lambda^{13} = \Lambda^{12} \circ \Lambda^{23}$. Notons $j_1 : \Lambda^{13} \rightarrow \Lambda^{12}$ et $j_3 : \Lambda^{13} \rightarrow \Lambda^{23}$ les applications telles que $j_1(x_1, x_3) = (x_1, x_2)$ et $j_3(x_1, x_3) = (x_2, x_3)$ pour un certain x_2 .

Proposition 4.32. *Soient (B_l) la suite d'opérateurs bilinéaires*

$$C^\infty(\Lambda^{12}) \times C^\infty(\Lambda^{23}) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{13})$$

telle que $B(f, g) = \sum \hbar^l B_l(f, g)$. Soient $(x_1^0, x_3^0) \in \Lambda^{13}$ et (y^i) (resp. (z^j)) un système de coordonnées de Λ^{12} (resp. Λ^{23}) définies au voisinage de $j_1(x_1^0, x_2^0)$ (resp. $j_3(x_1^0, x_3^0)$), il existe alors une famille de fonctions $a_{\alpha, \beta}^l$ définies sur Λ^{13} au voisinage de x_1^0, x_3^0 telle que

$$B_l(f, g)(x_1, x_3) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2l} a_{\alpha, \beta}^l(x_1, x_3) (\partial_y^\alpha f)(j_1(x_1, x_3)) (\partial_z^\beta g)(j_3(x_1, x_3))$$

Remarque 4.33. Le même type de résultat vaut pour la composition d'un opérateur avec une section lagrangienne. On peut le déduire de cette proposition en choisissant pour M_3 une variété réduite à un point.

Pour montrer la proposition, il suffit de comprendre comment se prolonge le symbole total d'un opérateur de $\mathcal{F}(\Lambda, s)$ en le symbole total du même opérateur vu comme un élément de $\mathcal{F}(\tilde{\Lambda}, s)$. Comme cela a été expliqué dans la preuve se rapportant à la définition 4.28, on peut se ramener à la même opération pour les sections lagrangiennes. Supposons donc que Λ soit une sous-variété lagrangienne de (M, ω) et considérons l'application $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire

$$C : C^\infty(\Lambda)[[\hbar]] \rightarrow (C^\infty(M)/\mathcal{I}^\infty(\Lambda))[[\hbar]], \quad C(f) = \sum \hbar^l C_l(f)$$

qui au symbole total f de $u_k \in \mathcal{S}(\Lambda, s)$ associe le symbole total $C(f)$ de $u_k \in \mathcal{S}(\tilde{\Lambda}, s)$. Lorsque Γ et (Π_k) proviennent d'une structure kählerienne, $C_0(f)$ est déterminé par

$$C_0(f)|_\Lambda = f, \quad \bar{Z}.C_0(f) \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda)}$$

quel que soit le champs de vecteurs holomorphes Z . De plus $C_l(f)$ est nulle pour $l \geq 1$.

L'opération réalisée par C_0 a un analogue dans le cas où Γ n'est pas déterminée par une structure kählerienne. Si $u \in \mathcal{I}(\Gamma)$ alors le champ de vecteurs hamiltonien X_u est tangent à $\tilde{\Lambda}$ dans le sens où

$$\forall f \in \mathcal{I}(\tilde{\Lambda}), \quad X_u.f \in \mathcal{I}(\tilde{\Lambda})$$

et par conséquent X_u agit aussi sur $C^\infty(\tilde{\Lambda})$. Rappelons que la projection $\pi : T^*M \rightarrow M$ induit un isomorphisme $\pi_* : C^\infty(\tilde{\Lambda}) \rightarrow C^\infty(M)/\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$. Définissons l'opérateur Y_u qui agit sur $C^\infty(M)/\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$ par $Y_u.\pi_*f = \pi_*X_u.f$. A l'aide de la forme normale donnée dans la proposition 4.44, on montre que Y_u est à nouveau un champ de vecteurs. L'opération qui nous intéresse consiste à associer à $f \in C^\infty(\Lambda)$ une fonction F telle que

$$(4.25) \quad F|_\Lambda = f, \quad Y_u.F \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda)}, \quad \forall u \in \mathcal{I}(\Gamma)$$

Une telle fonction existe et est unique modulo $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$. En effet, soit $G = \pi_*F \in C^\infty(\tilde{\Lambda})$. Utilisant un système de générateurs (u^i) de $\mathcal{I}(\Gamma)$ sous la forme normale et les notations 4.20, 4.25 équivaut à $G(x, \bar{U}) = G(x, 0) = f(x)$.

La propriété de ces prolongement que nous devons utiliser est la suivante.

Lemme 4.34. *Si $Q : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ est un opérateur différentiel d'ordre l et F une fonction vérifiant 4.25, alors si l'on se donne un système de coordonnées (x_i) de Λ , nous avons*

$$Q.F \equiv \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha^l F_\alpha \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda)}, \quad \text{où } F_\alpha|_\Lambda = \partial_y^\alpha f \text{ et } Y_u.F_\alpha \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda)}, \quad \forall u \in \mathcal{I}(\Gamma)$$

et les a_α^l sont des fonctions indépendantes de F .

Preuve. Il suffit de démontrer le résultat dans les cas où Q est la multiplication par une fonction ou bien lorsque c'est un champ de vecteurs. Dans le premier cas, c'est évident. Pour le second cas, on prolonge les fonctions x^i au voisinage de Λ comme en (4.25) et on introduit un système de générateurs (u^i) de $\mathcal{I}(\Gamma)$ sous la forme normale. On note v_i les fonctions $\pi_* \bar{u}^i$. Soit ∂_{x^i} les champs de vecteurs de M tels que

$$\partial_{x^i} . x^j = \delta_{i,j}, \quad \partial_{x^i} . v^j = 0$$

Alors les Y_{u^i} commutent avec les ∂_{x^i} modulo $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$. De plus tout champ de vecteurs X est combinaison linéaire à coefficients C^∞ des ∂_{x^i} et Y_{u^i} , ce qui nous assure le résultat. \square

Décrivons à présent les coefficients C_l de C .

Lemme 4.35. *Si (y_i) est un système de coordonnées de Λ , alors les applications C_l sont de la forme*

$$C_l(f) = \sum_{|\alpha|=2l} a_\alpha^l F_\alpha, \quad \text{où } F_\alpha|_\Lambda = \partial_y^\alpha f \text{ et } Y_{u^i} . F_\alpha \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(\Lambda)}, \quad \forall u \in \mathcal{I}(\Gamma)$$

et les a_α^l sont des fonctions indépendantes de f .

Preuve. Si $l = 0$, cela découle de $\Pi_k u_k = u_k$ pour $u_k \in \mathcal{F}(\Lambda, s)$ et de la formule de composition des symboles principaux donnée dans la preuve du lemme 4.27. On déduit aussi le résultat pour $l = m$ du résultat pour $l = 0, \dots, m - 1$ à partir de $\Pi_k u_k = u_k$. Pour cela, il faut revenir au lemme de la phase stationnaire. Notons $\sum \hbar^l F_l$ le symbole total de $(u_k) \in \mathcal{F}(\tilde{\Lambda}, s)$. Calculons le terme d'ordre m de $\Pi_k u_k$, nous obtenons

$$F_m = \sum_{l=0, \dots, m} \sum_{|\alpha| \leq 2l} a_\alpha^l [\partial_x^\alpha F_{m-l}]_r$$

où les x^i sont des coordonnées de M , a_α^l des fonctions définies sur M et si $g \in C^\infty(M)$, alors $[g]_r$ désigne une fonction de $C^\infty(M)$ obtenue en restreignant g à Λ et en la prolongeant ensuite par (4.25). On déduit alors le résultat du lemme 4.34. \square

Preuve de la proposition 4.32. Le résultat découle aussi du lemme de la phase stationnaire. Si $\sum \hbar^l F_l(x_1, x_2)$ et $\sum \hbar^l G_l(x_2, x_3)$ sont les symboles totaux de $P_k \in \mathcal{F}(\tilde{\Lambda}^{12}, s_{12})$ et $Q_k \in \mathcal{F}(\tilde{\Lambda}^{23}, s_{23})$ respectivement, alors la restriction $\sum \hbar^l f_l$ du symbole de $(P_k . Q_k)$ à Λ^{13} est de la forme

$$f_m(x_1, x_3) = \sum_{l_1+l_2+l_3=m} \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq 2l_1} a_{\alpha,\beta}^{l_1}(x_1, x_3) (\partial_{x_2}^\alpha F_{l_2})(j_1(x_1, x_3)) (\partial_{x_2}^\beta G_{l_3})(j_3(x_1, x_3))$$

où les (x_2^i) sont des coordonnées de M_2 et les $a_{\alpha,\beta}$ sont des fonctions indépendantes des F_l et G_l . Le résultat est alors conséquence du lemme 4.35 \square

4 Opérateurs de Toeplitz

4.1 Symboles covariants et contravariants

Soit (M, ω) une variété symplectique compacte quantifiée par les données (L, Γ, Π_k) . Les opérateurs de Toeplitz sont les opérateurs de $\mathcal{F}(\Delta, s_\Delta)$, où Δ désigne la diagonale de $M \times M$. Ils forment une $*$ -algèbre, dont l'élément unité est (Π_k) . Identifiant Δ avec M , on considère que le symbole σ de ces opérateurs est une série formelle de Laurent de $C^\infty(M)[\hbar^{-1}, \hbar]$. Comme dans le cas kählerien, on définit le symbole covariant d'un opérateur de Toeplitz:

$$\sigma_{\text{cov}} : \mathcal{F}(\Delta) \rightarrow C^\infty(M)[\hbar^{-1}, \hbar], \quad \sigma_{\text{cov}}(T_k) = \sigma(T_k) \cdot (\sigma(\Pi_k))^{-1}$$

où le produit et l'inverse sont ceux de la multiplication usuelle. Le noyau de cette application est l'idéal \mathcal{R} formé des opérateurs de Toeplitz régularisants. On peut aussi définir le symbole contravariant d'un opérateur de Toeplitz. On note g la métrique riemannienne de M associée à ω et J (i.e. $g(X, Y) = \omega(X, JY)$).

Proposition 4.36. *Si (T_k) est un opérateur de Toeplitz, il existe une série formelle de $\sum \hbar^l f_l$ de $C^\infty(M)[\hbar^{-1}, \hbar]$ telle que*

$$T_k = \Pi_k M_{f(\cdot, k)} \Pi_k + O(k^{-\infty}), \quad \text{où } f(x, k) = \sum k^{-l} f_l + O(k^\infty)$$

et le développement asymptotique vaut pour la topologie C^∞ . La relation qui associe cette série formelle et l'opérateur (T_k) induit un isomorphisme

$$\sigma_{\text{cont}} : \mathcal{F}(\Delta)/\mathcal{R} \rightarrow C^\infty(M)[\hbar^{-1}, \hbar]$$

appelé *symbole contravariant*. La bijection B de $C^\infty(M)[\hbar^{-1}, \hbar]$ qui au symbole contravariant d'un opérateur de Toeplitz associe son symbole covariant est une application $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire, de la forme

$$B(f) = \sum_{l \geq 0} \hbar^l B_l(f), \quad \text{où } B_l : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

est un opérateur différentiel d'ordre $2l$. Si (x^i) est un système de coordonnées définies sur un ouvert U de M , $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ et (g^{ij}) désigne l'inverse de (g_{ij}) , alors

$$B_0(f) = f, \quad B_1(f)|_U = \sum_{i,j} g^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j} f + \sum_k a_k \partial_{x^k} f$$

où les a_k sont des fonctions de $C^\infty(U)$.

Preuve. Soit $f \in C^\infty(M)$. $M_f \Pi_k$ est un opérateur de $\mathcal{F}(\tilde{\Delta})$ dont le symbole total est le produit de $f(x_g)$ par le symbole total de (Π_k) . Ainsi, $\Pi_k M_f \Pi_k$ est un opérateur de $\mathcal{F}(\tilde{\Delta})$ et par conséquent de $\mathcal{F}(\Delta)$. Son symbole principal est la fonction f . En revenant à la preuve de la proposition 4.14, on montre que son symbole total $\sigma(\Pi_k M_f \Pi_k) = \sum_{l \geq 0} \hbar^l g_l$ est donné par $g_l = P_l(f)$, où les P_l sont des opérateurs différentiels d'ordre $2l$. On peut aussi calculer

facilement le terme de plus haut degré de ces opérateurs car il ne dépend que des dérivées secondes de la phase, autrement dit de l'espace tangent de $\tilde{\Delta}$. Pour $l = 1$, nous avons

$$P_1(f) = \sum_{i,j} g^{ij} \partial_{x^i} \partial_{x^j} f + \sum_k b_k \partial_{x^k} f + c.f$$

où les b_k et c sont des fonctions de $C^\infty(U)$. De plus $B_1(1) = B_1(1)$, on en déduit alors le résultat. \square

Les applications σ , σ_{cov} et σ_{cont} induisent des isomorphismes de $\mathcal{F}(\Delta)/\mathcal{R}$ sur $C^\infty(M)[\hbar^{-1}, \hbar]$ et donc des lois associatives $*$, $*_{\text{cov}}$ et $*_{\text{cont}}$ sur $C^\infty(M)[\hbar^{-1}, \hbar]$. Du chapitre 3.4, on déduit que $*$ est $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -bilinéaire de la forme

$$f * g = f.g + \sum_{l \geq 1} \hbar^l C_l(f, g), \quad \text{où } C_l : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

est un opérateur bidifférentiel d'ordre $2l$. De la définition de σ_{cov} et de la proposition ci-dessus, on déduit que les lois $*_{\text{cov}}$ et $*_{\text{cont}}$ sont du même type. De plus dans ces deux cas, l'élément unité est la fonction constante égale à 1. Nous allons montrer que ces trois lois sont des star-produits. La méthode que nous avons suivie dans le cas kählerien consistait à calculer directement l'opérateur C_1 en appliquant le lemme de la phase stationnaire à la composition de deux opérateurs de Toeplitz. Il est possible d'adapter ceci dans notre contexte. Cependant, on procédera autrement en utilisant les relations entre les opérateurs pseudodifférentiels et les opérateurs de Toeplitz, qui présentent par ailleurs d'autres intérêts.

Proposition 4.37. *$\mathcal{I}(\Gamma)$ est engendré par l'ensemble des symboles principaux d'opérateurs pseudodifférentiels (P_k) tels que $P_k \Pi_k = 0$. D'autre part, si $(T_k) \in \mathcal{F}^m(\Delta)$ alors il existe un opérateur pseudodifférentiel $(P_k) \in \ominus^m$ tel que $P_k \Pi_k = \Pi_k P_k = T_k$.*

La première partie de cette proposition montre que Γ est déterminée par (Π_k) , autrement dit si l'on se donne deux quantifications (L, Γ, Π_k) et (L, Γ', Π'_k) de M , alors

$$\Gamma \neq \Gamma' \Rightarrow (\Pi_k) \neq (\Pi'_k)$$

La seconde partie de la proposition est dans le contexte homogène un des résultats clefs de [2]. La preuve donnée dans [2] consiste à se ramener à une forme normale. On l'adapte facilement en utilisant la composition des symboles principaux des opérateurs Fourier intégraux à phase complexe.

Preuve. Soit $\pi(x, \bar{U}, U)$ le symbole principal de (Π_k) . Il vérifie

$$\pi(x, \bar{U}, U) = \pi(x, \bar{U}, 0) \cdot \pi(x, 0, U) \cdot H(x, \bar{U}, U)$$

Si P_k est un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal a^w , les symboles de $\Pi_k P_k$ et $P_k \Pi_k$ sont respectivement

$$\pi(x, \bar{U}, U) \cdot [\mathcal{D}a^w](x, 0, U), \quad [\mathcal{D}a^w](x, \bar{U}, 0) \cdot \pi(x, \bar{U}, U)$$

Ainsi $P_k \Pi_k = 0$ implique $a^w \in \mathcal{I}(\Gamma)$. Réciproquement, si $a^w \in \mathcal{I}(\Gamma)$ et est à support compact, alors on choisit un opérateur pseudodifférentiel $(P_k^0) \in \Theta^0$ dont le symbole principal est a^w de sorte que $Q_k = P_k^0 \Pi_k \in \mathcal{F}^1(\Delta)$. De $Q_k \Pi_k = Q_k$, l'on déduit que le symbole principal q de Q_k vérifie

$$q(x, \bar{U}, U) = q(x, \bar{U}, 0) \cdot \pi(x, 0, U) \cdot H(x, \bar{U}, U) = \frac{q(x, \bar{U}, 0)}{\pi(x, \bar{U}, 0)} \cdot \pi(x, \bar{U}, U)$$

Par conséquent, choisissant un opérateur pseudodifférentiel $P_k^1 \in \Theta^1$ dont le symbole principal admet pour développement de Taylor $q(x, \bar{U}, 0) (\pi(x, \bar{U}, 0))^{-1}$, nous avons $(P_k^0 + P_k^1) \Pi_k \in \mathcal{F}^2(\Delta)$. On peut réitérer ceci de sorte à obtenir un opérateur pseudodifférentiel P_k' qui admet pour symbol principal a^w et tel que $P_k' \Pi_k$ soit régularisant, on choisit alors $P_k = P_k' - P_k' \Pi_k$.

Pour la deuxième partie de la proposition, on considère un opérateur de Toeplitz $(T_k) \in \mathcal{F}^m(\Delta)$. On construit dans un premier temps un opérateur pseudodifférentiel $(P_k^0) \in \Theta^m(M)$ tel que $P_k^0 \Pi_k \equiv \Pi_k P_k^0$ modulo un régularisant et que $P_k^0 \Pi_k$ et T_k aient même symbole principal. En réitérant ceci, on construit un opérateur pseudodifférentiel (P_k') tel que $P_k' \Pi_k \equiv \Pi_k P_k' \equiv T_k$. Pour conclure on pose $P_k = ?$. Donnons la construction de P_k^0 . Comme $\Pi_k T_k \Pi_k = T_k$, le symbole principal t de T_k vérifie

$$\begin{aligned} t(x, \bar{U}, U) &= t(x, 0, 0) \cdot \pi(x, \bar{U}, 0) \cdot \pi(x, \bar{U}, U) \cdot H(x, \bar{U}, U) \cdot H(x, \bar{U}, 0) \\ &= t(x, 0, 0) \cdot \pi(x, \bar{U}, U) \end{aligned}$$

utilisant que $H(x, \bar{U}, 0) = H(x, 0, 0) = 1$. Par conséquent choisissant un opérateur pseudodifférentiel $Q_k^0 \in \Theta^m$ de symbole principal $t(x, 0, 0)$, on vérifie que $Q_k^0 \Pi_k \equiv \Pi_k Q_k^0 \equiv Q_k^0$ modulo $\mathcal{F}^{m+1}(\Delta)$. Soit s le symbole principal de $S_k = Q_k^0 \Pi_k - \Pi_k Q_k^0 \in \mathcal{F}^{m+1}(\tilde{\Delta})$. Comme $S_k = \Pi_k S_k + S_k \Pi_k$, nous avons

$$\begin{aligned} s(x, \bar{U}, U) &= (\pi(x, \bar{U}, 0) \cdot s(x, 0, U) + s(x, \bar{U}, 0) \cdot \pi(x, 0, U)) \cdot H(x, \bar{U}, U) \\ &= \frac{s(x, 0, U)}{\pi(x, 0, U)} + \frac{s(x, \bar{U}, 0)}{\pi(x, \bar{U}, 0)} \end{aligned}$$

On choisit un opérateur $Q_k^1 \in \Theta^{m+1}$ de symbole principal $s(x, \bar{U}, U) (\pi(x, \bar{U}, U))^{-1}$ et on vérifie que $(Q_k^0 + Q_k^1) \Pi_k \equiv \Pi_k (Q_k^0 + Q_k^1)$ modulo $\mathcal{F}^{m+2}(\tilde{\Delta})$. On réitère cet argument pour obtenir P_k^0 . \square

On déduit de cette proposition que l'application

$$(4.26) \quad \{(P_k) \in \Theta^m(M) / \Pi_k P_k \Pi_k = P_k \Pi_k\} \rightarrow \mathcal{F}^m(\Delta), \quad (P_k) \rightarrow (P_k \Pi_k)$$

est surjective. On vérifie que c'est aussi un morphisme d'algèbre. Si f est le symbole principal d'un opérateur pseudodifférentiel (P_k) tel que $\Pi_k P_k \Pi_k = P_k \Pi_k$, alors son développement de Taylor le long de M vérifie $[\mathcal{D}f](x, \bar{U}, 0) = [\mathcal{D}f](x, 0, 0)$, autrement dit

$$\forall g \in \mathcal{I}(\Lambda), \{g, f\} \in \mathcal{I}(\Gamma)$$

ce qui revient à dire formellement que la restriction de f à Γ est constante le long du feuilletage engendré par les X_g où g décrit $\mathcal{I}(\Gamma)$. Définissons l'ensemble des fonctions de $C^\infty(\Gamma)$ constantes sur chaque feuille

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \{f \in C^\infty(T^*M) / X_g \cdot f \in \mathcal{I}(\Gamma), \forall g \in \mathcal{I}(\Gamma)\} / \mathcal{I}(\Gamma)$$

$\mathcal{A}(\Gamma)$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Poisson : si $f_1, f_2 \in C^\infty(T^*M)$ sont telles que $H_g f_i \in \mathcal{I}(\Gamma)$, $\forall g \in \mathcal{I}(\Gamma)$, il en est de même pour $f_1 \cdot f_2$ et $\{f_1, f_2\}$; ces deux lois passent au quotient.

Proposition 4.38. *L'application $\varphi : \mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow C^\infty(M)$, qui à la classe d'équivalence d'une fonction de T^*M associe sa restriction à M , est un isomorphisme d'algèbre de Poisson.*

Ce résultat est typique d'une réduction symplectique. En l'occurrence on peut considérer que

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{i} & T^*M \\ \pi \downarrow & & \\ \Gamma_{\mathbb{R}} & & \end{array} \quad i^* \Omega = \pi^* \omega$$

est une réduction symplectique dans un sens formel. Revenons aux opérateurs et remarquons que si P_k est un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal a^w , alors le symbole principal de l'opérateur de Toeplitz $\Pi_k P_k \Pi_k$ est la restriction de a_w à M . On déduit alors de (4.26) et de la proposition 4.38 que

Corollaire 4.39. *$*$, $*_{\text{cov}}$ et $*_{\text{cont}}$ sont des star-produits.*

En fait on peut être plus précis et décrire la composition des sous-symboles. Le fibre $T^{1,0}M$ est muni d'une métrique hermitienne G ,

$$G(Z, W) = \frac{1}{i} \omega(Z, \bar{W}), \quad \forall Z, W \in T_x^{1,0}M$$

On note $G^{-1} \in C^\infty(M, T^{1,0}M \otimes T^{0,1}M)$ la métrique duale, autrement dit si (Z^i) est une base orthonormée de $T_x^{1,0}M$, alors $G_x^{-1} = Z^i \otimes \bar{Z}^i$. De plus, on introduit l'opérateur

$$\Delta : C^\infty(T_x M^*) \rightarrow C^\infty(T_x M^*), \quad \Delta f = \frac{i}{2} g_{j,k} \partial_{\xi^j} \partial_{\xi^k} f \text{ si } g = g_{j,k} dx^j \otimes dx^k$$

qui n'est autre que l'opérateur associé à $\tilde{\Delta}$ défini dans la proposition 4.12.

Proposition 4.40. *Soit $(P_k) \in \ominus^m$ un opérateur pseudo-différentiel de symboles principal et sous-principal $a_m^w + \hbar a_{m+1}^w$. Si $P_k \Pi_k = \Pi_k P_k$, alors*

$$\sigma_{\text{cov}}(P_k \Pi_k) = \hbar^m a_m^w|_M + \hbar^{m+1} (a_{m+1}^w|_M + \frac{1}{2i} \Delta a_m^w|_M) + O(\hbar^{m+2})$$

Soient f et g deux fonctions de $C^\infty(M)$, alors

$$f *_{\text{cov}} g = f \cdot g + \hbar \langle G^{-1}, dg \otimes df \rangle + O(\hbar^2), \quad f *_{\text{cov}} g = f \cdot g - \hbar \langle G^{-1}, df \otimes dg \rangle + O(\hbar^2)$$

Donc les lois de composition des sous-symboles covariants et contravariants ne dépendent que de la structure complexe J , autrement dit que de l'espace tangent de Γ . A ce stade, il manque deux informations pour contrôler totalement les sous-symboles qui sont : le deuxième coefficient S_1 du symbole de (Π_k) (i.e. $\sigma(\Pi_k) = 1 + \hbar S_1 + O(\hbar^2)$), l'opérateur B_1 de la proposition 4.36 (celui-ci est connu à un champ de vecteur près). Il doit être possible de calculer cette fonction et ce champ de vecteurs en fonction de Γ et Π_k , nous ne savons pas le faire. Il est vraisemblable qu'ils ne dépendent pas uniquement de la structure complexe.

Preuve. Grâce à la proposition 4.12, on calcule les deux premiers coefficients de $\sigma(P_k \Pi_k)$. Si $x \in M$, alors $P_k \Pi_k = \Pi_k P_k$ implique que da_m^w s'annule sur $(T_x M)^\perp$. Par conséquent, le champ de vecteurs hamiltonien de a_m^w est tangent à M et sa projection Y sur M est le champ de vecteurs hamiltonien de la restriction de a_w^0 à M . Donc $\mathcal{L}_Y \omega = 0$ et il vient $\operatorname{div}_\mu Y = 0$. Soit $S_1 \in C^\infty(M)$ telle que $\sigma(\Pi_k) = 1 + \hbar S_1 + O(\hbar^2)$. Alors

$$\sigma(P_k \Pi_k) = \hbar^m a_m^w|_M + \hbar^{m+1} (a_m^w|_M \cdot S_1 + a_{m+1}^w|_M + \frac{1}{2i} \Delta a_m^w|_M) + O(\hbar^{m+2})$$

Ce qui donne les deux premiers coefficients de $\sigma_{\operatorname{cov}}(P_k \Pi_k)$. Soient $f, g \in C^\infty(M)$. Considérons deux opérateurs pseudo-différentiels P_k et Q_k tels que $P_k \Pi_k = \Pi_k P_k$, $Q_k \Pi_k = \Pi_k Q_k$ et les symboles covariants de $P_k \Pi_k$ et $Q_k \Pi_k$ soient respectivement f et g . Notons $a_0^w + \hbar a_1^w$ et $b_0^w + \hbar b_1^w$ les symboles principaux et sous-principaux de (P_k) et (Q_k) . Comme $P_k \Pi_k Q_k \Pi_k = P_k Q_k \Pi_k$, on déduit de la relation entre le symbole covariant et les symboles principal et sous-principal que

$$f *_{\operatorname{cov}} g = (a_0^w \cdot b_0^w)|_M + \frac{\hbar}{2i} (\{a_0^w, b_0^w\}|_M - (\Delta a_0^w) b_0^w|_M - a_0^w|_M (\Delta b_0^w) - \Delta(a_0^w b_0^w))$$

Nous avons $\{a_0^w, b_0^w\}|_M = \{f, g\}$. D'autre part,

$$\Delta(a_0^w b_0^w) = (\Delta a_0^w) b_0^w + a_0^w (\Delta b_0^w) + i g_{jk} (\partial_{\xi^j} a_0^w) (\partial_{\xi^k} b_0^w)$$

On peut choisir les coordonnées de sorte qu'en $x_0 \in M$,

$$J \partial_{x^i} = \partial_{x^{i+n}} \text{ pour } i = 1, \dots, n, \quad g_{ij} = \delta_{ij}, \quad G^{-1} =$$

da_0^w et db_0^w s'annulent sur $(T_x M)^\perp$. Par conséquent, en x_0

$$\partial_{\xi^i} a_0^w = -\partial_{x^{i+n}} a_0^w, \quad \partial_{\xi^i} b_0^w = -\partial_{x^{i+n}} b_0^w, \quad \partial_{\xi^{i+n}} a_0^w = \partial_{x^i}, \quad \partial_{\xi^{i+n}} b_0^w = \partial_{x^i} b_0^w$$

pour i variant de 1 à n . On calcule ainsi en x_0

$$f * g = f \cdot g + \hbar \sum_{j=1}^n (\partial_{x^j} f + i \partial_{x^{j+n}} f) \cdot (\partial_{x^j} g - i \partial_{x^{j+n}} g)$$

Ce qui montre le résultat pour la composition des symboles covariants. On en déduit le résultat sur le symbole contravariant à partir de l'expression de B_1 donnée dans la proposition 4.36 \square

4.2 Microsupport et équivalence

On s'intéresse au microsupport des suites admissibles (u_k) à valeurs dans \mathcal{H}_k comme il a été défini dans le chapitre 1.1. On s'attend à caractériser le microsupport de (u_k) avec les opérateurs de Toeplitz. Pour ce faire, nous disons d'un opérateur de Toeplitz $(T_k) \in \mathcal{F}(\Delta, s_\Delta)$ qu'il est elliptique en x si son symbole principal ne s'annule pas en x .

Proposition 4.41. *Soit (u_k) une suite à valeurs dans \mathcal{H}_k . Elle est admissible si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vérifiée*

- i. $\exists N, C$ tels que $|u_k|(x) \leq C k^N, \forall x \in M$
- ii. $\exists N$ tel que $\|u_k\| = O(k^N)$

Si c'est le cas, le microsupport de (u_k) est inclu dans M . De plus pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned} x \notin \text{MS}(u_k) &\Leftrightarrow \exists (T_k) \in \mathcal{F}(\Delta) \text{ elliptique en } x \text{ tel que } T_k u_k \text{ soit négligeable} \\ &\Leftrightarrow (u_k) \text{ est négligeable en } x \end{aligned}$$

Preuve. La caractérisation des suites admissibles de \mathcal{H}_k se démontre comme dans le cas kählerien (cf. chapitre 2). Montrons que $\text{MS}(u_k) \subset M$. Si $x \in \overline{T^*M}$ n'appartient pas à M , il existe un opérateur pseudodifférentiel (P_k) elliptique en x , tel que son microsupport, vu comme un sous ensemble de T^*M , soit disjoint de M . Par conséquent, $(P_k \Pi_k)$ est régularisant et donc $P_k u_k = P_k \Pi_k u_k$ est négligeable, d'où le résultat. Démontrons la première équivalence. Si (P_k) est un opérateur pseudodifférentiel elliptique en $x \in M$ tel que $(P_k u_k)$ soit négligeable, alors $T_k = \Pi_k P_k \Pi_k$ est elliptique en x et $(T_k u_k)$ est négligeable. Réciproquement, si (T_k) est un opérateur de Toeplitz elliptique en x tel que $(T_k u_k)$ soit négligeable, alors il existe d'après la proposition 4.37 un opérateur pseudodifférentiel (P_k) tel que $T_k = P_k \Pi_k$. (P_k) est elliptique en x et $P_k u_k = T_k u_k$. Pour démontrer la deuxième équivalence, on procède comme nous l'avons fait dans le cas kählerien (cf. chapitre 2). \square

Ceci montre autre autres que la définition du microsupport donnée dans le chapitre 2 est bien cohérente avec la définition usuelle.

Supposons que l'on dispose d'une seconde quantification \mathcal{H}_k de (M, ω) associée aux données (L, Γ', Π'_k) . Comme cela a été fait dans le chapitre 3 lorsque l'on dispose de plusieurs structures kähleriennes, on introduit une application $(U_k : C^\infty(M, L^k) \rightarrow C^\infty(M, L^k))_k$ de $\mathcal{F}(\Gamma' \times_\delta \bar{\Gamma})$ telle que

$$U_k^* U_k = \Pi_k, \quad U_k U_k^* = \Pi'_k$$

pour k suffisamment grand. De la sorte, on réalise une équivalence entre \mathcal{H}_k et \mathcal{H}'_k . Appliquant les propositions 4.29 et 4.30, il vient que U_k envoie les sections lagrangiennes de \mathcal{H}_k sur les sections lagrangiennes de \mathcal{H}'_k et agit de la même façon sur les opérateurs de Toeplitz:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Lambda, s) &\rightarrow \mathcal{S}'(\Lambda, s), & (v_k) &\rightarrow (U_k v_k) \\ \mathcal{F}(\Delta, s_\Delta) &\rightarrow \mathcal{F}'(\Delta, s_\Delta), & (T_k) &\rightarrow (U_k T_k U_k^*) \end{aligned}$$

On peut énoncer le même type de résultat pour les applications quantiques. On remarquera que la deuxième application ci-dessus induit une équivalence de star-produits. Ceci montre en un sens l'unicité de la quantification de (M, ω, L) .

On peut aussi raisonner localement comme nous l'avons fait dans le cas kählerien et à présent l'unique invariant est la dimension de M . On se ramène par exemple à un ouvert de \mathbb{C}^n quantifié de la manière usuelle:

$$\mathcal{H}_k = \left\{ f \cdot s^k / f \in C^\infty(\mathbb{C}^n) \text{ est holomorphe et } \int_{\mathbb{C}^n} |f|^2 |s|^{2k} |dz^i \cdot d\bar{z}^i| < \infty \right\}$$

où s est une section de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ telle que $\nabla s = -i\bar{z}^i dz^i \otimes s$ et $|s|^2 = e^{-z^i \cdot \bar{z}^i}$. Nous pensons qu'il est possible avec la même construction d'établir une équivalence microlocale avec $T^*\mathbb{R}^n$. L'application qui réalise ceci est bien-sur la transformée de Bargmann $U_k : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}_k$

$$(U_k f)(z) = (k\pi)^{\frac{n}{4}} 2^{\frac{n}{2}} \int e^{-\frac{k}{2}(z^2+q^2)+k\sqrt{2}z \cdot q} f(q) |dq^i| s^k(z)$$

qui vérifie $U_k U_k^* = \Pi_k$ et $U_k^* U_k = \text{Id}$. Montrons qu'il s'agit d'un opérateur intégral de Fourier dont la relation canonique est donnée par la proposition 4.19 avec

$$\begin{aligned} S_1 &= T^*\mathbb{C}^n, \quad \Omega_1 = d\zeta^i \wedge dz^i + d\bar{\zeta}^i \wedge d\bar{z}^i + idz^i \wedge d\bar{z}^i, \\ M_1 &= \mathbb{C}^n, \quad \Gamma^1 = \{\bar{\zeta}^i = 0\}, \quad \omega_1 = idz^i \wedge d\bar{z}^i \\ S_2 &= \Gamma_2 = M_2 = T^*\mathbb{R}^n, \quad \Omega_2 = \omega_2 = dp^i \wedge dq^i \\ \Lambda_{12} &= \{z^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^i - iq^i), \bar{z}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^i + iq^i)\} \end{aligned}$$

où les variables ζ^i désigne les coordonnées complexes dans les fibres de $T^*\mathbb{C}^n$ définie par $\gamma = \zeta^i(\gamma)dz^i + \bar{\zeta}^i(\gamma)d\bar{z}^i$ si $\gamma \in T^*\mathbb{C}^n$.

Preuve. Soit la section $F = e^{-\frac{k}{2}(z^2+q^2)+k\sqrt{2}z \cdot q} s^k(z)$ et α tel que $\nabla F = i\alpha \otimes F$. Nous avons

$$\alpha = i(z^i + \bar{z}^i - \sqrt{2}q^i)dz^i + i(q^i - \sqrt{2}z^i)dq^i$$

La relation canonique associée à F est donc donnée par les équations

$$\zeta^i = i(z^i + \bar{z}^i - \sqrt{2}q^i), \quad \bar{\zeta}^i = 0, \quad -p^i = i(q^i - \sqrt{2}z^i)$$

Ces équations définissent une sous-variété formelle $\tilde{\Lambda}$ de $S_1 \times S_2$ dont la partie réelle est Γ_{12} . De plus $H_{\bar{\zeta}^i} = \partial_{\bar{z}^i} + i\partial_{\zeta^i}$ est tangent à Λ , d'où le résultat. \square

Appliquant les résultats du chapitre 2.2, on peut prévoir que la transformée de Bargmann jouit des mêmes propriétés que les équivalences décrites précédemment. Pour le montrer, il faudrait généraliser les résultats des chapitres 1.2 et 1.3 car les hypothèses (4.6) ou (4.15) ne sont plus vérifiées dans ce cadre. Nous pensons que ceci est réalisable, ce qui montrerait que la quantification des cotangents et des variétés symplectiques compactes sont microlocalement équivalentes.

5 Appendice

Pour le calcul symbolique des opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe, Melin et Sjöstrand ([9]) introduisent la notion de sous-variété quasi-analytique d'une variété M : il s'agit de classes d'équivalence de sous-variétés réelles d'un complexifié de M , vérifiant les équations de Cauchy-Riemann à l'ordre infini le long de leur partie réelle. Une approche équivalente développée par Hörmander ([7]) s'appuie sur la correspondance entre les sous-variétés de M et les idéaux de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ localement engendrés par une famille libre: à une

sous-variété N est associée l'idéal des fonctions s'annulant sur N . Les idéaux de $C^\infty(M, \mathbb{C})$ localement engendrés par une famille libre remplacent alors les sous-variétés quasi-analytiques. Techniquement, le résultat essentiel est le lemme de préparation de Malgrange. Nous reprenons cette théorie en nous limitant aux idéaux \mathcal{I} de $C^\infty(M, \mathbb{C})$ dont la trace (i.e. l'ensemble des $x \in M$ tels que $f(x) = 0, \forall f \in \mathcal{I}$) est une sous-variété N de M et qui sont localement engendrés par une famille libre de fonctions transverses à N . La théorie se simplifie alors considérablement; la plupart des preuves se résument à des manipulations algébriques sur des développements de Taylor le long de sous-variétés, les développements géométriques sont plus aisés et les résultats sont plus précis. Nous passons en revue quelques opérations élémentaires telles les intersections, produits, push-forward, le but étant de décrire la composition des sous-variétés lagrangiennes. La première partie est un préliminaire où est décrit le calcul symbolique des fonctions s'annulant à un certain ordre le long d'une sous-variété et où l'on rappelle quelques résultats sur les développements de Taylor. Les définitions des sous-variétés formelles et premières propriétés sont données dans une deuxième partie. Les chapitres suivants sont consacrés aux opérations géométriques indiquées ci-dessus.

5.1 Développements de Taylor

Soit Y une sous-variété de codimension k de M . Nous notons $\mathcal{I}^m(Y)$ l'idéal de $C^\infty(M)$ composé des fonctions s'annulant à l'ordre m le long de Y , i.e.

$$f \in \mathcal{I}^m(Y) \text{ ssi } (P.f)|_Y = 0, \quad \forall P \text{ opérateur différentiel d'ordre } m-1$$

Nous définissons $\mathcal{I}^\infty(Y) = \bigcap \mathcal{I}^m(Y)$. Si $f \in C^\infty(M)$, nous appelons *développement de Taylor* de f le long de Y la classe d'équivalence de f modulo $\mathcal{I}^\infty(Y)$. Soit (f_m) une suite de $C^\infty(M)$ telle que $f_m \in \mathcal{I}^m(Y)$. La notation $f \sim \sum_{m=0}^\infty f_m$ signifie

$$f - \sum_{m=0}^N f_m \in \mathcal{I}^{N+1}(Y), \quad \forall N$$

D'après le lemme de Borel, quel que soit une suite (f_m) , il existe $f \in C^\infty(M)$ unique modulo $\mathcal{I}^\infty(Y)$ telle que $f \sim \sum_{m=0}^\infty f_m$. Si $f \in \mathcal{I}^m(Y)$, son *symbole* $\sigma(f)$ est défini comme une section de $S^m((T_z Y \otimes \mathbb{C})^\perp)$ par la formule suivante

$$\sigma(f)(y, X) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} (\partial_x^\alpha f)(x=0, y) X^\alpha$$

où $(x^1, \dots, x^k, y^{k+1}, \dots, y^n)$ un système de coordonnées de M définies sur un ouvert U tel que $U \cap Y = \{x^1 = \dots = x^k = 0\}$ et $X^i = dx^i$. Cette définition ne dépend pas du choix des coordonnées. Nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{m+1}(Y) \longrightarrow \mathcal{I}^m(Y) \xrightarrow{\sigma} C^\infty(Y, S^m((TY \otimes \mathbb{C})^\perp)) \longrightarrow 0$$

Nous appelons *un système de coordonnées transverses à Y* une famille (x^1, \dots, x^k) de fonctions à valeurs complexes définies sur un ouvert U de M s'annulant sur $U \cap Y$ et telle que

$(dx^i|_z)_i$ soit une famille libre sur \mathbb{C} quel que soit $z \in U \cap Y$. Remarquons que $(X^i = dx^i|_z)_i$ est alors une base de $(T_z Y \otimes \mathbb{C})^\perp$.

Soient U un ouvert de M et Y_1, \dots, Y_k des champs de vecteurs complexes de M tels que

$$(4.27) \quad \begin{aligned} \langle Y_1|_x, \dots, Y_k|_x \rangle \oplus (T_x Y \otimes \mathbb{C}) &= T_x X \otimes \mathbb{C}, & \forall x \in U \\ [Y_i, Y_j] &\equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^\infty(Y \cap U)} \end{aligned}$$

Pour résoudre certaines équations, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 4.42. *Soit $f \in C^\infty(Y \cap U)$ et (f^1, \dots, f^k) une famille de $C^\infty(U)$. Supposons que les fonctions $Y_i.f^j - Y_j.f^i$ s'annulent à tout ordre le long de Y . Il existe alors une fonction $g \in C^\infty(U)$ unique modulo $\mathcal{I}^\infty(Y \cap U)$ telle que*

$$\begin{aligned} g|_{Y \cap U} &= f \\ X_i.g &\equiv f^i \pmod{\mathcal{I}^\infty(Y \cap U)} \end{aligned}$$

Preuve. A l'aide d'une partition de l'unité, on se ramène à un ouvert U sur lequel est défini un système de coordonnées (x^1, \dots, x^k) transverses à Y tel que $Y_i.x^j|_Y = \delta_{ij}$. Nous montrons par récurrence sur m qu'il existe une unique fonction g modulo $\mathcal{I}^{m+1}(Y \cap U)$ telle que $g|_{Y \cap U} = f$ et $X_i.g \equiv f_i \pmod{\mathcal{I}^m(Y)}$. L'hypothèse est vraie au rang 0, soit g vérifiant l'hypothèse au rang m . Cherchons $h \in \mathcal{I}^{m+1}(Y)$ telle que $g + h$ vérifie l'hypothèse au rang $m + 1$. Nous devons résoudre .

$$d\sigma(h) + \sum_i \sigma(Y_i.g - f^i)dX^i = 0$$

Cette équation admet une unique solution ² si $d(\sum_i \sigma(Y_i.g - f^i)dX^i) = 0$. Or

$$\begin{aligned} \partial_{X^i} \sigma(Y_j.g - f^j) - \partial_{X^j} \sigma(Y_i.g - f^i) &= \sigma(Y_j(Y_i.g - f^i) - Y_i(Y_j.g - f^j)) \\ &= \sigma([Y_j, Y_i].g + Y_j.f_i - Y_i.f_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

par hypothèse. □

²L'opérateur d de dérivation au sens de de Rham agit sur $\mathcal{A}_z = \bigoplus_{m,p} S^m(T_z Y \otimes \mathbb{C})^\perp \otimes \Lambda^p(T_z Y \otimes \mathbb{C})^\perp$. Si $(X^i)_{i=1, \dots, k}$ est une base de $(T_z Y \otimes \mathbb{C})^\perp$, une base de \mathcal{A} est la famille $(X^\alpha dX^\beta)$ où α (resp. β) décrit \mathbb{N}^k (resp. $\{0, 1\}^k$) et d est défini par

$$d(X^\alpha dX^\beta) = \sum_i \partial_{X^i}(X^\alpha) dX^i \wedge dX^\beta$$

Le lemme de de Rham est valable dans ce contexte et l'on peut même décrire les solutions à l'aide de l'opérateur d^*

$$d^*(X^\alpha dX^\beta) = \sum_i X^i X^\alpha \iota_{\partial_X^i} dX^\beta$$

d et d^* laissent invariants les sous-espaces \mathcal{A}_z^p engendrés par les $(X^\alpha dX^\beta)$ tels que $|\alpha| + |\beta| = p$ et vérifient

$$d^2 = 0, \quad (d^*)^2 = 0, \quad (dd^* + d^*d)F = pF$$

si $F \in \mathcal{A}_z^p$. Par conséquent, si F est combinaison linéaire des X^α tels que $|\alpha| = p$, alors $dF = G$ équivaut à $dG = 0$ et $F = \frac{1}{p}d^*G$

Une autre application de ce lemme est d'écrire les développements de Taylor le long de Y des fonctions de $C^\infty(U)$ sous forme de séries formelles de $C^\infty(Y \cap U)[[V^1, \dots, V^k]]$. Si $f \in C^\infty(U)$, nous lui associons la série formelle

$$[\mathcal{D}f](x, V) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x) V^{\alpha}, \quad \text{où } f_{\alpha} = \frac{1}{\alpha!} Y^{\alpha} f|_{Y \cap U}$$

En quotientant, on définit de la sorte un isomorphisme de $C^\infty(U)/\mathcal{I}^\infty(Y \cap U)$ sur $C^\infty(Y \cap U)[[V^i]]$. L'inverse de cet isomorphisme associe à $\sum_{\alpha} f_{\alpha}(x) V^{\alpha}$ une fonction $f \sim \sum_{\alpha} \tilde{f}_{\alpha} v^{\alpha}$, où les fonctions \tilde{f}_{α} prolongent les f_{α} et sont annulées à tout ordre le long de Y par les Y_i et (v^i) est un système de coordonnées transverses à Y tel que $Y_i \cdot v^j \equiv \delta_{ij}$ modulo $\mathcal{I}^\infty(Y)$.

Au lieu de se donner les champs de vecteurs Y_i , on peut partir d'un système de coordonnées transverses $(v^i)_{i=1, \dots, k}$ à Y que l'on complète par x^{k+1}, \dots, x^n de sorte que la famille $(dv^i, dx^j)_{i=1, \dots, k; j=k+1, \dots, n}$ soit libre au dessus d'un ouvert U . On définit alors les champs de vecteurs Y_i par les relations

$$\langle dv^i, Y_l \rangle = \delta_{il}, \quad \langle dx^j, Y_l \rangle = 0$$

Ils vérifient les hypothèses (4.27) et l'on peut ainsi identifier les éléments de $C^\infty(U)/\mathcal{I}^\infty(U \cap Y)$ à des séries formelles de $C^\infty(Y \cap U)[[V^i]]$.

5.2 Définition des sous-variétés formelles

Définition 4.43. Soit \mathcal{I} un idéal de $C^\infty(M)$, $\Lambda_{\mathbb{R}}$ et $T\Lambda$ les ensembles définis par

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbb{R}} &= \{x \in M / f(x) = 0, \forall f \in \mathcal{I}\} \\ T\Lambda &= \{X \in T_x M \otimes \mathbb{C} / x \in \Lambda_{\mathbb{R}} \text{ et } \langle df, X \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{I}\} \end{aligned}$$

Nous disons que \mathcal{I} définit une sous-variété formelle Λ de codimension k si

- i.* \mathcal{I} est stable par somme localement finie
- ii.* $\forall x \in \Lambda_{\mathbb{R}}, \exists U$ voisinage de $x, \exists u^1, \dots, u^k \in \mathcal{I}$ tels que $(du^i|_x)_i$ est une famille libre sur \mathbb{C}

$$\forall f \in C^\infty(M), \text{Supp}(f) \subset U \Rightarrow \left(f \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \exists f_1, \dots, f_k \in C^\infty(M) \text{ tels que } f = \sum_i f_i u^i \right)$$
- iii.* $\Lambda_{\mathbb{R}}$ est une sous-variété de M
- iv.* $T_x \Lambda \cap \overline{T_x \Lambda} = T_x \Lambda_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}, \forall x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$

Cette définition est moins générale que celle d'Hörmander où n'apparaissent pas les hypothèses *iii.* et *iv.*. \mathcal{I} est l'idéal associé à Λ , nous le notons $\mathcal{I}(\Lambda)$. Nous appelons $\Lambda_{\mathbb{R}}$ la *partie réelle* de Λ , $T\Lambda$ l'*espace tangent* de Λ , et les familles (U, u^i) des *systèmes de générateurs* de $\mathcal{I}(\Lambda)$ sur U . Si (u^i) est un système de générateurs sur U , remarquons que $(T_y \Lambda)^\perp$ est engendré par $du^1|_y, \dots, du^k|_y$, quel que soit $y \in \Lambda_{\mathbb{R}} \cap U$. Par conséquent, cette famille est libre sur \mathbb{C} , et $T\Lambda$ est un sous-fibré de $TM \otimes \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}}$ de dimension complexe $n - k$.

Si $\Lambda_{\mathbb{R}}$ a même codimension que Λ , l'hypothèse *iv.* implique que les systèmes de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$ sont des systèmes de coordonnées transverses à $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Nous en déduisons que $\mathcal{I}(\Lambda) = \mathcal{I}(\Lambda_{\mathbb{R}})$, où $\mathcal{I}(\Lambda_{\mathbb{R}})$ est l'ensemble des fonctions s'annulant sur $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Réciproquement, si Y est une sous-variété de M , alors $\mathcal{I}(Y)$ définit une sous-variété formelle Λ de même codimension que Y et dont la partie réelle est Y . Dans ce cas, nous disons que Λ est réelle et nous l'identifions à $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Si Λ est une sous-variété formelle, $\overline{\mathcal{I}(\Lambda)}$ définit une sous-variété formelle que nous notons $\bar{\Lambda}$. Remarquons que $\Lambda = \bar{\Lambda}$ (i.e. $\mathcal{I}(\Lambda) = \mathcal{I}(\bar{\Lambda})$) implique que Λ est réelle.

Si \mathcal{F} est un sous-ensemble de $C^\infty(M)$, l'idéal engendré par \mathcal{F} est l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(M)$ telles que

$$f = \sum_{i \in I} f_i g^i, \quad f_i \in C^\infty(M), g_i \in \mathcal{F}$$

où I est dénombrable et la somme localement finie.

Si (u^i) est un système de générateurs sur U et $y \in U$, nous avons

$$\begin{aligned} (4.28) \quad (T_y \Lambda \cap \overline{T_y \Lambda})^\perp &= (T_y \Lambda)^\perp + (\overline{T_y \Lambda})^\perp \\ &= \langle du^1|_y, \dots, du^k|_y, d\bar{u}^1|_y, \dots, d\bar{u}^k|_y \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle d \operatorname{Re} u^1|_y, \dots, d \operatorname{Re} u^k|_y, d \operatorname{Im} u^1|_y, \dots, d \operatorname{Im} u^k|_y \rangle_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Par conséquent, si \mathcal{I} est un idéal vérifiant *i.*, *ii.* et *iii.*, l'hypothèse *iv.* équivaut à demander que le rang de la famille $(d \operatorname{Re} u^1|_y, \dots, d \operatorname{Re} u^k|_y, d \operatorname{Im} u^1|_y, \dots, d \operatorname{Im} u^k|_y)$ soit égale à la codimension de $\Lambda_{\mathbb{R}}$.

Soit $v^1, \dots, v^k \in \mathcal{I}(\Lambda)$ et $x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$ tels que $(dv^i|_x)$ soit une famille libre sur \mathbb{C} . La famille (v^i) est alors un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$ sur un voisinage de x . En effet, introduisons un système de générateurs (u_i) de $\mathcal{I}(\Lambda)$ sur un voisinage de x . Il existe alors une famille de fonctions g_j^i telles que $v^i = \sum_j g_j^i u^j$. Ceci implique que $dv^i|_x = \sum_j g_j^i(x) du^j|_x$ et donc que $(g_j^i)_{i,j}$ est inversible au voisinage de x . Nous pouvons alors écrire les u^i comme des combinaisons linéaires à coefficients C^∞ des v^i et il en est de même pour toute fonction de $\mathcal{I}(\Lambda)$.

Si Λ_1 et Λ_2 sont deux sous-variétés formelles de M ayant même partie réelle et même codimension, alors $\mathcal{I}(\Lambda_1) \subset \mathcal{I}(\Lambda_2)$ implique $\Lambda_1 = \Lambda_2$. En effet d'après le paragraphe précédent, un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda_1)$ est un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda_2)$.

Localement, un idéal définissant une sous-variété formelle se ramène à la forme normale suivante.

Proposition 4.44. *Soit Λ une sous-variété formelle de codimension k telle que $\Lambda_{\mathbb{R}}$ soit de codimension $k + l$. Soit $x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$. Il existe alors un voisinage U de x et $k + l$ fonctions à valeurs réelles $x^1, \dots, x^{k+l} \in C^\infty(M)$ telles que la famille $(x^i - ix^{k+i}, x^j)_{i=1, \dots, l; j=l+1, \dots, k}$ soit un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$ sur U .*

Preuve. Soit u^i un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$ sur un voisinage de x , que nous allons modifier de telle sorte à ce qu'il soit sous la forme souhaitée. Soit s^{l+1}, \dots, s^k des sections de

$(T\Lambda)^\perp \cap (T\bar{\Lambda})^\perp$ qui forment une famille libre au voisinage de x . Ce fibré étant le complexifié d'un sous-fibré réel de $T^*M \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}}$, il est possible de choisir les s^i réelles. Il existe une famille $(g_j^i)_{i=l+1, \dots, k; j=1, \dots, k}$ de $C^\infty(M)$ telle que $s^i = \sum_j g_j^i du^j$ sur $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Posons $v^i = \sum_j g_j^i u^j$ pour i variant de $l+1$ à k . Nous avons $dv^i = s^i$ sur $\Lambda_{\mathbb{R}}$. La famille (dv^i) est donc libre sur un voisinage de x . Nous la complétons avec v^1, \dots, v^l choisis parmi les u^i de telle sorte que $(v^i)_{i=1, \dots, k}$ soit un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$ sur un voisinage de x . $d\text{Im } v^i$ s'annule sur $\Lambda_{\mathbb{R}}$ pour $i = l+1, \dots, k$. La famille $(\text{Re } v^i, \text{Im } v^j)_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, l}$ constitue alors un système de coordonnées transverse à $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Par conséquent

$$\text{Im } v^j = \sum_{i=1}^k \alpha_i^j \text{Re } v^i + \sum_{i=1}^l \beta_i^j \text{Im } v^i$$

pour i compris entre $l+1$ et k avec les α_i^j et β_i^j à valeurs réelles s'annulant sur $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Nous posons alors $x^j = v^j (1 - i \sum_{i=1}^k \alpha_i^j - \sum_{i=1}^{i=l} \beta_i^j)$. Cette fonction prend des valeurs réelles. La famille $(v^i, x^j)_{i=1, \dots, l; j=k+1, \dots, l}$ est un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$ sur un voisinage de x . D'où le résultat. \square

Définissons les fonctions $z^j = x^j - ix^{k+j}$, $\bar{z}^j = x^j + ix^{k+1+j}$ pour j qui varie de 1 à l et $y^j = x^j$ pour $j = l+1, \dots, k$. La famille (z^i, \bar{z}^i, y^j) est alors un système de coordonnées transverse à $\Lambda_{\mathbb{R}}$. En complétant cette famille par des fonctions t^{k+l+1}, \dots, t^m , on peut écrire les développements de Taylor le long de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ de $f \in C^\infty(U)$ sous la forme d'une série formelle $[\mathcal{D}f](t, Z, \bar{Z}, Y)$ de $C^\infty(U \cap Y)[[Z^j, \bar{Z}^j, Y^i]]$ (cf. fin du chapitre 5.1). Si le support de f est un compact inclu dans U , on a alors

$$f \in \mathcal{I}(\Lambda) \Leftrightarrow [\mathcal{D}f](t, Z, 0, 0) = 0$$

En effet, si $f \in \mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})$ alors f est divisible par $z^i \cdot \bar{z}^i + y^j \cdot y^j$ et par conséquent appartient à $\mathcal{I}(\Lambda)$. L'appartenance à $\mathcal{I}(\Lambda)$ ne dépend donc que du développement de Taylor de f le long de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ et l'on obtient la relation ci-dessus.

Utilisant que $\mathcal{I}(\Lambda)$ est stable par somme localement finie, on montre que $\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{I}(\Lambda)$. En effet, si $f \in \mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})$ est à support compact inclu dans un certain voisinage U de $y \in \Lambda_{\mathbb{R}}$, on vient de montrer que $f \in \mathcal{I}(\Lambda)$. Si $y \notin \Lambda_{\mathbb{R}}$, c'est encore vrai car il existe une fonction de $\mathcal{I}(\Lambda)$ qui ne s'annule pas sur un voisinage de y . A l'aide d'une partition de l'unité, on enlève l'hypothèse sur le support de f . Dans ce qui suit, on se contentera de vérifier les résultats localement.

Il sera parfois intéressant d'utiliser la filtration $(\mathcal{I}^m(\Lambda_{\mathbb{R}}))$. En se ramenant à la forme normale, on démontre le résultat suivant: si (u^i) est un système de générateurs sur un ouvert U , alors pour toute fonction f à support compact inclu dans U nous avons

$$(4.29) \quad f \in \mathcal{I}^m(\Lambda_{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{I}(\Lambda) \Leftrightarrow \exists f_1, \dots, f_k \in \mathcal{I}^{m-1}(\Lambda_{\mathbb{R}}) \text{ tels que } f = \sum_i f_i u^i.$$

Remarquons aussi que $f \sim \sum_m f^m$ avec $f^m \in \mathcal{I}^m(\Lambda_{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{I}(\Lambda)$ implique que f appartient à $\mathcal{I}(\Lambda)$. En effet, $f^m = \sum_i f_i^m u^i$ avec $f_i^m \in \mathcal{I}^{m-1}(\Lambda_{\mathbb{R}})$ et donc $f \equiv \sum f_i u^i$ modulo $\mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})$ où $f_i \sim \sum f_i^m$.

Si Y est une sous-variété de M , nous avons $C^\infty(Y) \simeq C^\infty(M)/\mathcal{I}(Y)$. Aussi, si Λ est une sous-variété formelle de M , nous définissons l'algèbre $C^\infty(\Lambda)$ des fonctions définies sur Λ comme étant le quotient de $C^\infty(M)$ par $\mathcal{I}(\Lambda)$. Nous définissons le support de $f \in C^\infty(\Lambda)$ comme étant le sous-ensemble fermé de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ dont le complémentaire est

$$\{x \in \Lambda_{\mathbb{R}} / \exists \varphi \in C^\infty(M) \text{ tel que } \varphi(x) \neq 0 \text{ et } \varphi.g \in \mathcal{I}(\Lambda)\}$$

où $g \in C^\infty(M)$ est un représentant de f . Utilisant la forme normale et les notations introduites ci-dessus, on constate que toute fonction $[f] \in C^\infty(\Lambda)$ à support dans $U \cap \Lambda_{\mathbb{R}}$ est représentée par une unique série formelle $F(t, Z) = [\mathcal{D}f](t, Z, 0, 0)$. Ainsi $C^\infty(\Lambda)$ se présente localement comme une algèbre de séries formelles en les variables Z^1, \dots, Z^l à coefficients des fonctions définies sur $\Lambda_{\mathbb{R}}$.

5.3 Opérations sur les sous-variétés formelles

Tout d'abord, décrivons le produit d'une sous-variété formelle Λ de M de codimension k et d'une variété N . Soit π la projection $M \times N \rightarrow N$. On vérifie que l'idéal engendré par $\pi^*\mathcal{I}(\Lambda)$ définit une sous-variété formelle $\Lambda \times N$ de $M \times N$ de codimension k et de partie réelle $\Lambda_{\mathbb{R}} \times N$. L'application π^* induit une application $C^\infty(\Lambda) \rightarrow C^\infty(\Lambda \times N)$.

La proposition suivante traite de l'intersection de deux sous-variétés formelles.

Proposition 4.45. *Soit Λ^1 et Λ^2 deux sous-variétés formelles de M de codimension k^1 et k^2 respectivement. Supposons que l'intersection de $\Lambda_{\mathbb{R}}^1$ et $\Lambda_{\mathbb{R}}^2$ soit non-dégénérée au sens de Bott, i.e. que $\Lambda_{\mathbb{R}}^1 \cap \Lambda_{\mathbb{R}}^2$ est une sous-variété de M dont l'espace tangent est $T\Lambda_{\mathbb{R}}^1 \cap T\Lambda_{\mathbb{R}}^2$. Supposons aussi que l'intersection de Λ^1 et Λ^2 soit transverse dans le sens que*

$$(4.30) \quad T_x\Lambda^1 + T_x\Lambda^2 = T_xM \otimes \mathbb{C}, \quad \forall x \in \Lambda_{\mathbb{R}}^1 \cap \Lambda_{\mathbb{R}}^2$$

Alors l'idéal de $C^\infty(M)$ engendré par $\mathcal{I}(\Lambda^1)$ et $\mathcal{I}(\Lambda^2)$ définit une sous-variété formelle Λ de codimension $k_1 + k_2$, de partie réelle $\Lambda_{\mathbb{R}}^1 \cap \Lambda_{\mathbb{R}}^2$ et d'espace tangent $T\Lambda^1 \cap T\Lambda^2$.

Nous appelons Λ l'intersection de Λ^1 et Λ^2 . Utilisant que $\mathcal{I}(\Lambda^i) \subset \mathcal{I}(\Lambda)$, on définit des opérations de restrictions $C^\infty(\Lambda^i) \rightarrow C^\infty(\Lambda)$.

Preuve. Par définition, $\mathcal{I}(\Lambda)$ est l'ensemble des fonctions de $C^\infty(M)$ de la forme

$$\sum_i f_i^1 g_i^1 + \sum_j f_j^2 g_j^2$$

où $g_i^j \in \mathcal{I}(\Lambda^j)$, les f_i^j sont quelconques et la somme est dénombrable localement finie. Donc $\mathcal{I}(\Lambda)$ est stable par somme localement finie et sa trace est $\Lambda_{\mathbb{R}}^1 \cap \Lambda_{\mathbb{R}}^2$. Si (u^i) (resp. (v^j)) est un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda^1)$ (resp. $\mathcal{I}(\Lambda^2)$) au voisinage de $x \in M$, alors la famille $(du^i|_x, dv^j|_x)$ est libre d'après (4.30) et par conséquent (u^i, v^j) est un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$. De plus, $T\Lambda \cap \overline{T\Lambda} = T(\Lambda_{\mathbb{R}}^1 \cap \Lambda_{\mathbb{R}}^2) \otimes \mathbb{C}$ découle de $T(\Lambda_{\mathbb{R}}^1 \cap \Lambda_{\mathbb{R}}^2) = T\Lambda_{\mathbb{R}}^1 \cap T\Lambda_{\mathbb{R}}^2$. \square

Soit M, N deux variétés et $p : M \rightarrow N$ une application. Soit \mathcal{I} un idéal de $C^\infty(M)$. Nous définissons $p_*\mathcal{I}$ comme étant l'ensemble composé des fonctions $f \in C^\infty(N)$ telles que p^*f appartienne à \mathcal{I} . L'application $p^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$ induit alors un morphisme d'algèbre injectif de $C^\infty(N)/p_*\mathcal{I}$ vers $C^\infty(M)/\mathcal{I}$. Celui-ci est surjectif ssi quel que soit $f \in C^\infty(M)$, il existe $g \in C^\infty(N)$ telle que $p^*g \equiv f$ modulo \mathcal{I} .

Proposition 4.46. *Soit $p : M \rightarrow N$ une submersion et Λ une sous-variété formelle de M telles que*

- i. $\text{Ker } p_*|_x \oplus T_x\Lambda = T_xM \otimes \mathbb{C}, \quad \forall x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$
- ii. $p|_{\Lambda_{\mathbb{R}}}$ est un plongement

Alors $p_*\mathcal{I}(\Lambda) = \mathcal{I}^\infty(p(\Lambda_{\mathbb{R}}))$ et pour tout $f \in C^\infty(M)$, il existe $g \in C^\infty(N)$ telle que $p^*g \equiv f \pmod{\mathcal{I}(\Lambda)}$.

Remarquons que l'hypothèse i. implique que $p|_{\Lambda_{\mathbb{R}}}$ est un immersion. On déduit de cette proposition que $C^\infty(\Lambda) \simeq C^\infty(N)/\mathcal{I}(p(\Lambda_{\mathbb{R}}))$.

Preuve. Soit (y^{k+1}, \dots, y^n) un système de coordonnées sur N tels que $p(\Lambda_{\mathbb{R}}) = \{y^{k+1} = \dots = y^{k+l} = 0\}$. Définissons $x^i = p^*y^i$. Soit (u^j) un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$. L'hypothèse i. implique alors que $(u^j, x^{k+i})_{j=1, \dots, k; i=1, \dots, l}$ est un système de coordonnées transverses à $\Lambda_{\mathbb{R}}$. Soit $f \in \mathcal{I}^m(p(\Lambda_{\mathbb{R}}))$. Ecrivons son symbole sous la forme $\sigma(f) = \sum_\alpha f_\alpha Y^\alpha$ où Y^{k+i} est le symbole de y^{k+i} pour i variant de 1 à l . Nous avons alors $p^*f \in \mathcal{I}^m(\Lambda_{\mathbb{R}})$ et $\sigma(p^*f) = \sum_\alpha f_\alpha X^\alpha$ où X^{k+i} est le symbole de x^{k+i} pour i variant de 1 à l . D'après la proposition 4.29, $p^*f \in \mathcal{I}(\Lambda)$ implique que les f_α s'annulent et par conséquent que $f \in \mathcal{I}^{m+1}(p(\Lambda_{\mathbb{R}}))$. En raisonnant ainsi par récurrence sur m , nous montrons que $p_*\mathcal{I}(\Lambda) = \mathcal{I}^\infty(p(\Lambda_{\mathbb{R}}))$. A présent, considérons $f \in \mathcal{I}^m(\Lambda_{\mathbb{R}})$ et écrivons son symbole sous la forme $\sigma(f) = \sum_{\alpha, \beta} f_{\alpha, \beta} X^\alpha U^\beta$ où U^j est le symbole de u^j pour j variant de 1 à k . Introduisons une fonction $g \in \mathcal{I}^m(p(\Lambda_{\mathbb{R}}))$ admettant pour symbole $\sum_\alpha f_{\alpha, 0} Y^\alpha$. Nous avons alors $f - p^*g \in \mathcal{I}(\Lambda) \cap \mathcal{I}^m(\Lambda_{\mathbb{R}}) + \mathcal{I}^{m+1}(\Lambda_{\mathbb{R}})$. De la sorte, nous construisons par approximations successives une fonction $g \in C^\infty(N)$ telle que $p^*g \equiv f \pmod{\mathcal{I}(\Lambda)}$. \square

Corollaire 4.47. *Soit $(u^i)_{i=1, \dots, k}$ un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$ sur un voisinage U de $x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$ et (x^i) un système de coordonnées de M définies sur U telles que $(\partial_{x^j} u^i(x))_{i, j=1, \dots, k}$ soit inversible. Il existe alors k fonctions $g^i(x^{k+1}, \dots, x^n)$ telles que la famille $(x^i - g^i)_{i=1, \dots, k}$ soit un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$.*

Ce corollaire est le théorème des fonctions implicites pour les sous-variétés formelles: si Λ est définie implicitement par les équations " $u^i(x^1, \dots, x^n) = 0$ ", nous pouvons trouver un paramétrage de Λ de la forme " $x^i = g^i(x^{k+1}, \dots, x^{k+n})$ "

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition précédente aux fonctions x^1, \dots, x^k , où p est la projection $(x^1, \dots, x^n) \rightarrow (x^{k+1}, \dots, x^n)$. \square

(4.28) implique que la famille $(\text{Im } g^i)_i$ est un système de coordonnées transverses à $p(\Lambda_{\mathbb{R}})$. La proposition suivante donne une forme normale particulière à la situation présentée dans la proposition 4.46.

Proposition 4.48. *Sous les hypothèses de la proposition 4.46, considérons $x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$. Il existe alors un système de coordonnées $(x^i)_{i=1,\dots,n}$ de M sur un voisinage de x et un système de coordonnées $(y^i)_{i=k+1,\dots,n}$ de N sur un voisinage de $p(x)$ tels que*

- i. $x^i = p^*y^i$, pour $i = k + 1, \dots, n$
- ii. $(x^j - ix^{k+j}, x^i)_{j=1,\dots,l; i=l+1,\dots,k}$ est un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$ au voisinage de x

Preuve. Considérons un système de coordonnées (x^i) de M tel que le corollaire 4.47 s'applique. Il existe alors une famille $(g^i)_{i=1,\dots,k}$ de fonctions définies sur N telle que $(x^i - p^*g^i)_{i=1,\dots,k}$ soit un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$. Remplaçons les fonctions x^i par $x^i - p^* \operatorname{Re} g^i$ pour i variant de 1 à k . Il existe alors k fonctions à valeurs réelles définies sur N telle que $(x^i - ip^*f^i)_{i=1,\dots,k}$ soit un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$. Quitte à permuter les indices, les fonctions f^1, \dots, f^l constituent un système de coordonnées transverses à $p(\Lambda_{\mathbb{R}})$. Nous avons alors $f^j = \sum_{i=1}^l g_i^j f^i$ pour i variant de $l + 1$ à k . Nous remplaçons les fonctions x^i par $x^i - \sum_{i=1}^l g_i^j x^i$ pour i variant de $l + 1$ à k . Nous posons $y^i = f^i$ pour i variant de 1 à l . Nous complétons la famille (y^i) en un système de coordonnées sur M et nous remplaçons x^i par p^*y^i pour i variant de $k + 1$ à n . Le résultat est alors assuré. \square

La proposition suivante décrit un autre type de projection de sous-variété formelle d'une nature totalement différente : l'image de la projection est à nouveau une sous-variété formelle.

Proposition 4.49. *Soit $p : M \rightarrow N$ une submersion et $s = \dim M - \dim N$. Soit Λ une sous-variété formelle de M de codimension k telle que*

- i. $\operatorname{Ker} p_*|_x \cap T_x \Lambda = (0)$, $\forall x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$
- ii. $p|_{\Lambda_{\mathbb{R}}}$ est un plongement
- iii. $p_* T_x \Lambda \cap p_* T_x \bar{\Lambda} = p_*(T_x \Lambda_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C})$, $\forall x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$

Alors $p_* \mathcal{I}(\Lambda)$ définit une sous-variété formelle de N de codimension $k - s$, de partie réelle de $p(\Lambda_{\mathbb{R}})$ et d'espace tangent $p_* T \Lambda$. De plus, pour tout $f \in C^\infty(M)$, il existe $g \in C^\infty(N)$ telle que $p^*g \equiv f \pmod{\mathcal{I}(\Lambda)}$.

Remarquons que l'hypothèse *i.* implique que $p|_{\Lambda_{\mathbb{R}}}$ est un immersion. On définit $p(\Lambda)$ comme étant la sous-variété formelle associée à l'idéal $p_* \mathcal{I}(\Lambda)$ et nous avons un isomorphisme $C^\infty(\Lambda) \simeq C^\infty(p(\Lambda))$.

Preuve. Soit $x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$. Soit (y_{s+1}, \dots, y^n) un système de coordonnées de N définies sur un voisinage de $p(x)$ tel que l'espace engendré par $\partial_{y_{s+1}}|_{p(x)}, \dots, \partial_{y^k}|_{p(x)}$ soit en somme directe avec $p_* T_x \Lambda$. Définissons $x^i = p^*y^i$ pour i variant de $s + 1$ à n et complétons la famille (x^i) en un système de coordonnées de M définies sur un voisinage de x . En appliquant le corollaire 4.47, nous obtenons k fonctions $h^i(y^{k+1}, \dots, y^n)$ telles que $(x^i - p^*h^i)_{i=1,\dots,k}$ soit un système de générateurs de $\mathcal{I}(\Lambda)$. Les fonctions $y^i - h^i$ pour i variant de $s + 1$ à k sont dans $p_* \mathcal{I}(\Lambda)$. L'hypothèse *iii* implique que ces fonctions engendrent un idéal \mathcal{I} de $C^\infty(N)$ définissant un sous-variété formelle. Montrons que $\mathcal{I} = p_* \mathcal{I}(\Lambda)$. Soit $f \in C^\infty(N)$. En

appliquant la proposition (4.46) à \mathcal{I} nous obtenons f^{s+1}, \dots, f^k et $r(y^{k+1}, \dots, y^n)$ telles que $f = \sum_{i=s+1}^{i=k} f^i(y^i - h^i) + r$. Par conséquent, $p^*f = \sum_{i=s+1}^{i=k} p^*f^i(x^i - p^*h^i) + p^*r$. En appliquant la proposition (4.46) à $\mathcal{I}(\Lambda)$, nous voyons que $p^*f \in \mathcal{I}(\Lambda)$ équivaut à $p^*r \in \mathcal{I}^\infty(\Lambda_{\mathbb{R}})$, autrement dit $r \in \mathcal{I}^\infty(p(\Lambda_{\mathbb{R}}))$, autrement dit $f \in \mathcal{I}$. \square

5.4 Sous-variétés formelles lagrangiennes

Supposons que S soit munie d'une deux-forme symplectique Ω et de dimension $2n$. Un sous-ensemble de $C^\infty(S)$ est dit involutif s'il est stable par crochet de Poisson.

Définition 4.50. Une sous-variété formelle L de S est dite lagrangienne si elle est de codimension n et $\mathcal{I}(L)$ est involutif. Si de plus $\frac{1}{i}\Omega(X, \bar{X}) \geq 0$ quel que soit $X \in TL$, L est dite positive.

Si L est positive, $(X, Y) \rightarrow \frac{1}{i}\Omega(X, \bar{Y})$ est une forme sesquilinéaire positive de T_xL . Son noyau est $T_xL_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$. En effet si $X \in T_xL$ vérifie $\Omega(X, \bar{X}) = 0$, il découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\Omega(X, \bar{Y}) = 0$ quel que soit $Y \in T_xL$ et $T_x\bar{L}$ étant lagrangien $X \in T_x\bar{L}$.

Considérons trois variétés symplectiques (S_i, Ω_i) avec $i = 1, 2, 3$. Supposons que les produits $S_i \times S_j$ soient munis des deux-formes symplectiques $\pi_i^*\Omega_i - \pi_j^*\Omega_j$, où π_i et π_j désignent les projections $S_i \times S_j \rightarrow S_i$ et $S_i \times S_j \rightarrow S_j$. Considérons deux sous-variétés formelles lagrangiennes positives L^{12} et L^{23} de $S_1 \times S_2$ et $S_2 \times S_3$ respectivement. Définissons la composition $L^{13} = L^{12} \circ L^{23}$:

$$L^{13} = \pi_{13}(L) \text{ où } L = (L^{12} \times S_3) \cap (S_1 \times L^{23})$$

et π_{13} est la projection $S_1 \times S_2 \times S_3 \rightarrow S_1 \times S_3$. La proposition suivante montre que cette opération est bien définie lorsque les hypothèses nécessaires pour définir l'intersection de $L^{12} \times S_3$ et $S_1 \times L^{23}$ sont vérifiées.

Proposition 4.51. *Supposons que l'intersection $L_{\mathbb{R}} = (L_{\mathbb{R}}^{12} \times S_3) \cap (S_1 \times L_{\mathbb{R}}^{23})$ soit non dégénérée au sens de Bott, que*

$$(4.31) \quad T_x(L^{12} \times S_3) \cap T_x(S_2 \times L^{23}) = T_x(S_1 \times S_2 \times S_3) \otimes \mathbb{C}$$

quel que soit $x \in L_{\mathbb{R}}$ et que l'immersion $\pi_{13} : L_{\mathbb{R}} \rightarrow S_1 \times S_3$ soit un plongement. Alors (L, π_{13}) vérifie les hypothèses de la proposition 4.49 et la sous-variété formelle $L^{13} = \pi_{13}(L)$ est lagrangienne positive. Si $(x_1, x_2, x_3) \in L_{\mathbb{R}}$, l'espace tangent $T_{x_1, x_3}L^{13}$ est la composition de $T_{x_1, x_2}L^{12}$ avec $T_{x_2, x_3}L^{23}$.

A une telle composition est associée une application $C^\infty(L^{12}) \times C^\infty(L^{23}) \rightarrow C^\infty(L^{13})$ définie de la manière suivante: si $f_{12} \in C^\infty(L^{12})$, nous lui associons son image g_{12} par la composition

$$C^\infty(L^{12}) \rightarrow C^\infty(L^{12} \times S_3) \rightarrow C^\infty(L) \rightarrow C^\infty(L^{13})$$

où les différentes applications ont été définies dans le chapitre précédent. De même, on associe à $f_{23} \in C^\infty(L^{23})$ une fonction $g^{23} \in C^\infty(L^{13})$ et à (f_{12}, f_{23}) on associe le produit $g_{12}.g_{23}$.

Preuve. Les hypothèses nous assurent que la proposition 4.45 s'applique à $L^{12} \times S_3$ et $S_1 \times L^{23}$, de sorte que L est une sous-variété formelle de $S_1 \times S_2 \times S_3$. Vérifions les hypothèses de la proposition 4.49.

$$TL \cap (TS_2 \otimes \mathbb{C}) = (0)$$

découle comme pour la composition des sous-variétés lagrangiennes réelles de (4.31). D'autre part, si $(X_1, X_3) \in (\pi_{13})_* TL$, il existe X_2 tel que $(X_1, X_2) \in TL^{12}$ et $(X_2, X_3) \in TL^{23}$. Comme L^{12} et L^{23} sont positives, nous avons

$$(4.32) \quad \frac{1}{i}\Omega(X_1, \bar{X}_1) - \frac{1}{i}\Omega(X_2, \bar{X}_2) \geq 0$$

$$(4.33) \quad \frac{1}{i}\Omega(X_2, \bar{X}_2) - \frac{1}{i}\Omega(X_3, \bar{X}_3) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{i}\Omega(X_1, \bar{X}_1) - \frac{1}{i}\Omega(X_3, \bar{X}_3) \geq 0$$

Si de plus $(X_1, X_3) \in (\pi_{13})_* T\bar{L}$, alors $\frac{1}{i}\Omega(X_1, \bar{X}_1) - \frac{1}{i}\Omega(X_3, \bar{X}_3)$ est à la fois positif et négatif, donc nul. Par conséquent, (4.32) et (4.33) sont nécessairement nuls, et (X_1, X_2, X_3) appartient à $TL_{\mathbb{R}}$. Ce qui montre que $(\pi_{13})_* TL \cap (\pi_{13})_* T\bar{L} = (\pi_{13})_* TL_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$. Le même raisonnement montre que $\pi_{13}(L)$ est positive. On vérifie ensuite que $\mathcal{I}(\pi_{13}(L))$ est stable par crochet de Poisson. \square

Bibliography

- [1] L. Boutet de Monvel, Symplectic cones and Toeplitz operators, *Multidimensional complex analysis and partial differential equations (São Carlo 95)*, Contemp. math. 205, pp 15-24, 1997.
- [2] L. Boutet de Monvel, V. Guillemin, *The spectral theory of Toeplitz operators*, Annals of math. stud. 99, Princeton University, 1981.
- [3] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand, Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő, *Astérisque*, Vol. **34,35**, pp. 123-164, 1976.
- [4] D. Borthwick, T. Paul and A. Uribe, Legendrian distributions with applications to relative Poincaré series, *Invent. Math.*, Vol. **122**, pp. 359-402, 1995.
- [5] D. Borthwick, T. Paul and A. Uribe, Semiclassical spectral estimates for Toeplitz operators, *Ann. Inst. Fourier*, Vol. **48**, 1998.
- [6] D. Borthwick, A. Uribe, Almost complex structure and geometric quantization, *Math. Res. Lett.*, Vol. **3**, no 6, pp. 845-861, 1996.
- [7] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I,IV*, Springer Verlag, 1983.
- [8] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Mathematical Monographs, 1998.

-
- [9] A. Melin, J. Sjöstrand, Fourier integral operators with complex-valued phase function, *Lect. Notes Math.*, Vol **459**, pp. 120-223, 1975.