



**HAL**  
open science

# Homogénéisation Numérique de Paramètres Pétrophysiques Pour des Maillages Déstructurés en Simulation de Réservoir

Thierry Hontans

► **To cite this version:**

Thierry Hontans. Homogénéisation Numérique de Paramètres Pétrophysiques Pour des Maillages Déstructurés en Simulation de Réservoir. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2000. Français. NNT: . tel-00001294

**HAL Id: tel-00001294**

**<https://theses.hal.science/tel-00001294>**

Submitted on 3 Apr 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

PRÉSENTÉE À

## L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES EXACTES ET DE  
LEURS APPLICATIONS

PAR

**Thierry HONTANS**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

Spécialité :  
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

---

**HOMOGENÉISATION NUMÉRIQUE  
DE PARAMÈTRES PÉTROPHYSIQUES  
POUR DES MAILLAGES DÉSTRUCTURÉS  
EN SIMULATION DE RÉSERVOIR**

---

Soutenue le 13 Juillet 2000

Devant la Commission d'examen formée de :

<b>M. M. PANFILOV</b>	Professeur, Académie des Sciences Russe, Russie	Président du Jury
<b>M. A. BOURGEAT</b>	Professeur, Université de Saint Etienne	Rapporteur
<b>M. J. JAFFRE</b>	Directeur de Recherche, INRIA, Rocquencourt	Rapporteur
<b>M. M. AMARA</b>	Professeur, Université de Pau (U.P.P.A.)	
<b>M. B. AMAZIANE</b>	Maître de conférences, Université de Pau (U.P.P.A.)	
<b>M. A. BAMBERGER</b>	Professeur, Institut Français du Pétrole, Rueil Malmaison	
<b>M. A. GUESSAB</b>	Professeur, Université de Pau (U.P.P.A.)	
<b>M. P. TERPOLILLI</b>	Docteur d'Etat, Ingénieur de recherche à Elf, Pau	



# Remerciements

Ce travail a été effectué au Centre Scientifique et Technique Jean Feger de la société Elf Exploration Production à Pau.

Je remercie Monsieur Mikhail Panfilov, de l'intérêt qu'il a marqué pour ce travail et de l'honneur qu'il me fait de présider le jury. Je remercie également Messieurs Mohamed Amara, Alain Bamberger et Allal Guessab, de l'attention qu'il ont porté à cette thèse et de leur participation au jury.

Messieurs Alain Bourgeat et Jérôme Jaffré ont accepté d'être mes rapporteurs. Je souhaite leur exprimer toute ma gratitude pour leurs remarques constructives et leur sais gré d'avoir bien voulu examiner ce travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur Brahim Amaziane, qui m'a fait l'honneur d'être mon directeur de thèse, et m'a guidé dans ma formation de mathématiques appliquées.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Peppino Terpolilli, initiateur de cette thèse, et présent lors de toutes les étapes de ce travail. Je lui sais gré de m'avoir apporté quelques unes de ses nombreuses compétences scientifiques, ses remarques et ses idées constructives, son enthousiasme et son éternel optimisme. Par ailleurs je le remercie pour le grand intérêt qu'il a porté à ce travail, que je considère comme nôtre, ainsi que pour ses encouragements et son soutien moral sans lesquels cette thèse n'aurait pu être menée à terme.

C'est l'occasion aussi pour moi d'exprimer mes remerciements à tous les agents d'Elf, que j'ai rencontré au cours de ces trois années. Je leur suis infiniment reconnaissant de leur chaleureux accueil et de l'expérience professionnelle qu'ils m'ont transmise. Plus particulièrement, j'exprime mes remerciements à Monsieur Philippe Tessier ainsi qu'à son successeur Monsieur Patrick Gilly pour m'avoir accueilli dans leur projet et pour les nombreux conseils qu'ils m'ont suggérés sur le plan industriel.

J'adresse enfin mes remerciements les plus affectueux à mes parents ainsi qu'à tous mes amis d'un petit coin du Sud Ouest où il fait bon vivre.



# TABLE DES MATIERES

0.1	INTRODUCTION GENERALE . . . . .	10
0.2	NOTATIONS . . . . .	16
<b>PARTIE I</b>		<b>19</b>
<b>1</b>	<b>Mise à l'échelle des perméabilités absolues</b>	<b>21</b>
1.1	Introduction . . . . .	21
1.2	Notations . . . . .	23
1.3	Méthodes algébriques . . . . .	25
1.3.1	Moyennes arithmétique, harmonique et géométrique . . . . .	26
1.3.2	Moyenne de puissance . . . . .	27
1.3.3	Méthode de Cardwell et Parsons . . . . .	27
1.3.4	Autres estimateurs . . . . .	28
1.3.5	Méthode de renormalisation . . . . .	28
1.4	Méthodes d'homogénéisations . . . . .	30
1.4.1	Loi de Darcy . . . . .	31
1.4.2	Homogénéisation périodique . . . . .	31
1.4.3	Homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires . . . . .	34
1.4.4	Homogénéisation avec des conditions aux bords confinées . . . . .	36
1.4.5	Homogénéisation stochastique . . . . .	38
1.5	Rappels de quelques résultats utilisés en homogénéisation . . . . .	40
1.5.1	G-convergence . . . . .	40
1.5.2	G-convergence parabolique . . . . .	41
1.5.3	Deux résultats classiques en homogénéisation . . . . .	42
<b>2</b>	<b>Approximation numérique du tenseur équivalent</b>	<b>43</b>
2.1	Introduction . . . . .	43
2.2	Notations . . . . .	44
2.3	Méthode linéaire . . . . .	45

2.3.1	Encadrement numérique du tenseur équivalent . . . . .	46
2.3.2	Encadrement pour les termes extra-diagonaux . . . . .	52
2.3.3	Estimations d'erreurs et convergence des approximations . . . . .	53
2.3.4	Etude d'un contexte symétrique . . . . .	56
2.3.5	Stabilité par rapport à la G-convergence . . . . .	60
2.3.6	Stabilité par rapport à la G-convergence parabolique . . . . .	60
2.3.7	Autre encadrement du tenseur équivalent . . . . .	67
2.4	Comparaison des méthodes d'homogénéisation linéaire, confinée et périodique . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Calcul numérique de la perméabilité équivalente par éléments finis avec des maillages déstructurés</b>	<b>77</b>
3.1	Introduction . . . . .	78
3.2	Données du problème . . . . .	78
3.3	Maillages 2D déstructurés . . . . .	79
3.3.1	Maillages géologique et dynamique 2D . . . . .	79
3.3.2	Maillage éléments finis 2D . . . . .	79
3.4	Maillages 3D déstructurés . . . . .	80
3.4.1	Maillages géologique et dynamique 3D . . . . .	81
3.4.2	Boite englobante . . . . .	82
3.4.3	Maillage éléments finis tétraédrique . . . . .	82
3.4.4	Gestion des failles . . . . .	83
3.4.5	Maille dégénérée (Pinch-outs) . . . . .	84
3.4.6	Raffinement . . . . .	84
3.4.7	Approximation volumique d'une maille dynamique . . . . .	86
3.5	Résolution numérique des problèmes locaux . . . . .	87
3.5.1	Méthode des éléments finis conformes . . . . .	87
3.5.2	Méthode des éléments finis mixtes hybrides . . . . .	88
3.6	Calculs numériques du tenseur équivalent . . . . .	89
3.6.1	Domaine symétrique . . . . .	89
3.6.2	Domaine du L inversé . . . . .	90
3.6.3	Exemple 2D déstructuré . . . . .	92
3.6.4	Exemple 3D structuré . . . . .	93
3.6.5	Exemple 3D déstructuré . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>97</b>
4.1	Géométries 2D déstructurées . . . . .	98

4.2	Simulations traceur 2D . . . . .	98
4.2.1	Description d'un traceur . . . . .	100
4.2.2	Caractéristiques du traceur . . . . .	100
4.2.3	Pilotage des puits . . . . .	100
4.2.4	Expériences numériques 2D . . . . .	101
4.2.5	Maillage de référence . . . . .	102
4.2.6	Maillage fin déstructuré . . . . .	106
4.2.7	Maillage intermédiaire déstructuré . . . . .	110
4.2.8	Maillage grossier déstructuré . . . . .	114
4.3	Simulations diphasiques 2D . . . . .	116
4.4	Géométrie 3D déstructurée et distribution de la perméabilité absolue . .	118
4.5	Simulations traceur 3D . . . . .	118
4.5.1	Caractéristiques du traceur . . . . .	118
4.5.2	Position et pilotage des puits . . . . .	121
4.5.3	Expériences numériques 3D . . . . .	121
4.5.4	Cartes de perméabilité mises à l'échelle . . . . .	121
4.5.5	Maillage de référence . . . . .	122
4.5.6	Maillage grossier . . . . .	126
4.5.7	Temps de calculs . . . . .	133
4.6	Simulations diphasiques 3D . . . . .	134
4.6.1	Caractéristiques des fluides . . . . .	134
4.6.2	Expériences numériques diphasiques . . . . .	135
4.6.3	Maillage de référence . . . . .	135
4.6.4	Maillage grossier . . . . .	135
4.7	Conclusion . . . . .	140

## **PARTIE II**

**141**

<b>5</b>	<b>Application du contrôle optimal à la mise à l'échelle des perméabilités absolues avec des conditions aux limites quelconques</b>	<b>143</b>
5.1	Introduction . . . . .	143
5.2	Notations . . . . .	145
5.3	Rappels . . . . .	145
5.3.1	Minimisation de l'erreur du flux . . . . .	146
5.3.2	Egalité des flux pour des conditions aux limites périodiques . . . .	147
5.3.3	Approche des moindres carrés pondérés . . . . .	148
5.3.4	Critère de l'énergie en milieu stochastique . . . . .	149

5.4	Idées de base . . . . .	149
5.5	Cadre général . . . . .	151
5.5.1	Conditions aux limites de Dirichlet . . . . .	152
5.5.2	Conditions aux limites mêlées . . . . .	152
5.6	Minimisation d'une fonctionnelle énergétique . . . . .	153
5.7	Minimisation d'une fonctionnelle basée sur la vitesse . . . . .	154
5.8	Exemples 1D . . . . .	155
5.8.1	Fonctionnelle énergétique . . . . .	155
5.8.2	Fonctionnelle basée sur la vitesse . . . . .	157
5.9	Etude de la fonctionnelle énergétique . . . . .	158
5.9.1	Continuité . . . . .	159
5.9.2	Existence d'un minimum . . . . .	162
5.9.3	Différentiabilité . . . . .	162
5.10	Etude de la fonctionnelle basée sur la vitesse . . . . .	178
5.10.1	Continuité . . . . .	178
5.10.2	Existence d'un minimum . . . . .	179
5.10.3	Différentiabilité . . . . .	179
5.11	Algorithme de calcul . . . . .	183
5.11.1	Fonctionnelle énergétique . . . . .	183
5.11.2	Fonctionnelle basée sur la vitesse . . . . .	184

**6 Propriétés du tenseur équivalent obtenu avec des conditions aux limites quelconques 185**

6.1	Introduction . . . . .	185
6.2	Notations . . . . .	186
6.3	Cas particuliers importants : méthodes couramment utilisées en ingénierie pétrolière . . . . .	186
6.3.1	Homogénéisation avec des conditions aux limites linéaires . . . . .	187
6.3.2	Homogénéisation avec des conditions aux limites confinées . . . . .	191
6.3.3	Homogénéisation périodique . . . . .	195
6.3.4	Homogénéisation stochastique . . . . .	201
6.3.5	Conclusions . . . . .	204
6.4	Stabilité pour la G-convergence . . . . .	205
6.4.1	Fonctionnelle énergétique . . . . .	206
6.4.2	Fonctionnelle basée sur la vitesse . . . . .	210
6.5	Application dans le cadre périodique et stochastique . . . . .	211
6.6	Unicité d'un minimum . . . . .	212
6.6.1	Calcul de la différentielle d'ordre deux . . . . .	212

6.6.2	Dépendance continue de la différentielle d'ordre deux . . . . .	215
6.6.3	Unicité du contrôle optimal . . . . .	220
6.7	Convergence de l'approximation du tenseur équivalent . . . . .	222
6.8	Convergence de la solution dépendant du tenseur équivalent . . . . .	223
6.9	Estimations d'erreurs . . . . .	226
<b>7</b>	<b>Tests numériques</b>	<b>229</b>
7.1	Introduction . . . . .	229
7.2	Domaine symétrique . . . . .	230
7.3	Influence du taux d'agrégation . . . . .	234
7.4	Conclusions . . . . .	237
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>238</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>242</b>

## 0.1 INTRODUCTION GENERALE

Les réservoirs pétroliers sont en général constitués de roches fortement hétérogènes à l'intérieur desquelles se trouvent les hydrocarbures que l'on souhaite extraire. L'amélioration du taux de récupération de ces hydrocarbures nécessite une connaissance détaillée des milieux poreux souterrains et en particulier des variations spatiales de leurs propriétés physiques. Les moyens d'étude et de modélisation de ces variations, souvent complexes, font appel à des disciplines très diverses. De nombreuses données sont fournies par la géologie, la sismique, les essais de puits, les diagraphies et les laboratoires. On construit alors une description fine des propriétés pétrophysiques du réservoir en utilisant les techniques de la géostatistique. Le modèle fin (ou géologique) ainsi construit est composé en général de un à dix millions de mailles, à chacune desquelles sont associés des paramètres pétrophysiques tels que la porosité, les perméabilités absolues et relatives. Cependant, la difficulté réside dans la prise en compte de cette complexité lors des simulations numériques des écoulements des fluides.

Dans le cadre du travail qui suit, on s'intéresse au problème de la récupération secondaire du pétrole lors de l'exploitation d'un gisement. Les procédés de récupération secondaire, couramment pratiqués, consistent à pousser l'huile vers des puits de production en injectant un fluide (de l'eau, par exemple) par des puits injecteurs judicieusement répartis. L'étude des écoulements polyphasiques en milieux poreux conduit en général à traiter des équations non-linéaires et couplées, présentant un caractère hyperbolique. La simulation numérique d'un tel phénomène sur un modèle géologique comportant plus d'un million de mailles est envisageable, au moyen de simulations parallèles par exemple. Mais bien que les moyens informatiques ne cessent de progresser, la durée de la simulation est encore trop grande et certains problèmes de convergence peuvent apparaître, compte tenu de la faible taille des mailles géologiques. D'autre part, il semble qu'il soit très difficile de tenter le calage d'un historique de production pour un modèle supérieur à un million de mailles.

La géostatistique est fondée sur des techniques probabilistes. La conséquence est que l'on ne dispose pas d'un seul modèle géologique, mais d'un ensemble (plusieurs dizaines) de modèles (réalisations) équiprobables du gisement. Les difficultés rencontrées sur un seul modèle géologique pour la simulation des écoulements des fluides rendent impossible le travail de simulation de l'ensemble des réalisations géostatistiques. Pour pallier à ces difficultés, on est amené à recourir aux méthodes d'homogénéisation ou de changement d'échelles. L'approche consiste à construire, pour chaque réalisation géostatistique, un modèle grossier (ou dynamique), comportant entre vingt et deux cents mille mailles, en mettant à l'échelle les caractéristiques pétrophysiques. Pour chaque maille du modèle dynamique, on effectue par exemple la mise à l'échelle du tenseur de perméabilité absolue,

dont le résultat est appelé perméabilité équivalente ou homogénéisée. La simulation d'un tel ensemble de modèles grossiers devient alors réalisable. Cependant, ce processus est encore très long en temps de calcul. C'est pourquoi on restreint le nombre de réalisations géostatistiques à traiter. En pratique, il est courant de traiter trois situations correspondant aux cas minimum, médian et maximum des hydrocarbures en place dans le gisement. Dans la suite on s'intéresse au cas d'une seule réalisation géostatistique.

Les premiers travaux [20] sur la mise à l'échelle datent de 1945 et sont basés sur des lois heuristiques comme la moyenne arithmétique ou harmonique. Dans les années 1970 de nombreux articles ont été publiés, dans des domaines d'application très divers, faisant intervenir la théorie de l'homogénéisation périodique. Le tenseur homogénéisé est calculé à partir des solutions de problèmes locaux avec des conditions aux bords périodiques. Une présentation de cette théorie peut être trouvée dans les ouvrages de Bensoussan et al. [12] et Sanchez-Palencia [78]. L'homogénéisation périodique est une théorie très puissante qui permet de résoudre de nombreux problèmes. Toutefois l'hypothèse de périodicité est assez restrictive. En 1977, Bamberger [10] développa une méthode pour déterminer le tenseur équivalent sur des géométries quelconques. Avec cette approche le calcul du tenseur équivalent nécessite la résolution de problèmes locaux avec des conditions aux bords linéaires. De plus le tenseur équivalent ainsi obtenu est stable pour la G-convergence. Au début des années 1980, Bourgeat [15], [45] appliqua l'homogénéisation périodique aux problèmes des écoulements des fluides dans les milieux poreux. Une méthode plus générale qui est l'homogénéisation stochastique fut appliquée, au début des années 1990, par Bourgeat et al [17], aux problèmes de l'industrie pétrolière. Une synthèse des nombreux résultats obtenus peut être trouvée dans [45].

L'utilisation de maillages flexibles en simulation de réservoir est en pleine expansion. Le modèle dynamique est construit en respectant au mieux les particularités de la géométrie réelle du réservoir, tels que les chenaux et les failles. Toutes ces contraintes engendrent généralement un maillage réservoir irrégulier sur lequel sont simulés les écoulements des fluides. Par conséquent, on est confronté au problème de la mise à l'échelle des caractéristiques pétrophysiques sur des maillages flexibles de type *Corner Point Geometry* ou déstructurés de type Voronoï. Dans ce qui suit, on s'intéresse uniquement à la composition des perméabilités absolues, qui est un point de passage crucial entre la géologie de production et l'étude des prévisions de production d'un gisement.

L'ensemble des méthodes de mise à l'échelle des perméabilités absolues peut se diviser en deux grandes familles qui sont les méthodes algébriques et les méthodes numériques. Les méthodes algébriques, basées sur de simples calculs analytiques, sont en général très rapides en temps de calculs mais ne fournissent des résultats satisfaisants que dans quelques situations bien particulières. L'obtention de résultats plus précis exige le recours aux

méthodes numériques qui nécessitent en général la résolution de problèmes locaux, posés sur chaque maille grossière du modèle réservoir.

Les problèmes locaux, suivant les méthodes, sont résolus pour des conditions aux limites particulières. La particularité de ces conditions aux limites est une conséquence de la construction même de ces méthodes numériques. On constate que pour une distribution de perméabilité donnée, les résultats obtenus peuvent être très différents suivant les conditions aux limites choisies. L'expérience des ingénieurs réservoirs a conduit à l'utilisation de plusieurs types de conditions aux limites : les conditions de type linéaire, de type confiné ou bien de type périodique. Un avantage relatif des conditions de type confiné est de fournir un tenseur de perméabilité diagonal qui peut être directement intégré par le simulateur industriel Eclipse [31] utilisé par le groupe Elf. Pour les autres types de conditions on obtient généralement des tenseurs pleins. Peu de travaux ont cherché à préciser le choix des conditions aux limites : la pratique est souvent conditionnée par les outils disponibles. On peut mentionner la publication de Barker et Thibeau [9] (ainsi que les références de cet article) où est faite une analyse des méthodes de mise à l'échelle et ils soulignent la forte dépendance des résultats par rapport au type de conditions aux limites choisies. Il est aussi recommandé d'utiliser des conditions proches des conditions réelles d'exploitation du gisement. Ce phénomène s'explique dans la théorie de l'homogénéisation car le tenseur homogénéisé est indépendant des conditions aux limites du gisement, lorsque la différence entre la taille des mailles fines et des mailles grossières est très grande. Ainsi, si on considère le paramètre  $\varepsilon$  qui est le rapport entre la taille caractéristique des mailles fines et celle des mailles grossières, l'homogénéisation peut être interprétée comme une analyse asymptotique correspondant à la situation où  $\varepsilon$  tend vers zéro. On peut considérer que cette situation est réalisée dans de nombreux problèmes de l'ingénierie pétrolière. Cependant, dans bien des cas,  $\varepsilon$  ne peut être infiniment petit, et la question de la dépendance du tenseur équivalent par rapport aux conditions aux limites devient pertinente. Les résultats des simulations dépendent donc du choix des conditions aux limites (périodiques, linéaires, confinées) qui sont en général très éloignées des conditions réelles du gisement. Afin de mieux prendre en compte les conditions réelles du réservoir et d'étudier le comportement du tenseur équivalent en fonction des conditions aux limites appliquées aux problèmes locaux, on est confronté au problème de calculer un tenseur équivalent pour des conditions aux limites quelconques.

Dans ce travail on définit une méthode de calcul du tenseur équivalent pour des conditions aux limites générales. Cette méthode est fondée sur des techniques d'optimisation et donne lieu à un algorithme effectif. L'application de cet algorithme dans les cas particuliers des conditions aux limites linéaires, confinées et périodiques, permet de retrouver les résultats connus des diverses méthodes de mise à l'échelle des perméabilités absolues.

De plus, cette méthode se révèle être stable pour la G-convergence. Une des conséquences de cette dernière propriété est la généralisation d'un résultat de Bourgeat et Badea [8]. Enfin, l'algorithme mis au point permet également de traiter des maillages déstructurés. La possibilité d'effectuer la mise à l'échelle pour des maillages déstructurés est devenu quasiment indispensable dans l'industrie pétrolière. La méthode d'homogénéisation avec des conditions aux limites linéaires, a l'avantage de pouvoir être appliquée aux maillages déstructurés. L'implémentation rigoureuse de cette méthode en maillages structurés 3D est relativement facile. En revanche, sa mise en oeuvre pour des temps de calculs raisonnables, devient plus délicate lors du traitement de maillages déstructurés, notamment en raison de l'apparition des failles. Dans ce travail on présente les différentes étapes de l'implémentation des méthodes linéaire et confinée pour des maillages déstructurés 3D ainsi qu'une approche permettant d'obtenir un encadrement numérique du tenseur équivalent. Des estimations d'erreurs et des résultats de convergence sont établis. On généralise par ailleurs le résultat de stabilité de G-convergence pour la méthode linéaire à la G-convergence parabolique. Enfin, pour valider les méthodes implémentées on effectue des simulations pour des écoulements monophasiques et diphasiques immiscibles et incompressibles.

## Organisation du mémoire

Cette thèse est organisée en 2 parties.

La **première partie** (chapitres 1 à 4) est consacrée d'une part à l'approximation numérique du tenseur équivalent obtenue par la méthode d'homogénéisation avec les conditions aux bords linéaires et confinées en maillages déstructurés.

Dans le premier chapitre, on rappelle différentes méthodes de mise à l'échelle de la perméabilité absolue dont la plupart sont couramment utilisées en ingénierie pétrolière. On présente brièvement la théorie de l'homogénéisation périodique et stochastique ainsi que certains résultats relatifs à la G-convergence.

Dans le chapitre 2, on propose d'utiliser à la fois la méthode des éléments finis conformes et la méthode des éléments finis mixtes pour résoudre les problèmes locaux. On montre que ceci permet d'obtenir un encadrement numérique de la perméabilité équivalente fournie par les méthodes linéaire ou du mode confiné. Des résultats de convergence et d'estimation d'erreur sont présentés. On montre en particulier que les méthodes linéaire et du mode confiné sont stables pour la G-convergence parabolique. On termine alors ce chapitre par une comparaison entre les méthodes d'homogénéisation linéaire, confinée et périodique.

Le troisième chapitre s'intéresse à la mise en oeuvre de la méthode d'homogénéisation avec les conditions aux bords linéaires en maillage déstructuré en dimension 2 et 3. On définit d'abord la méthodologie employée afin de respecter scrupuleusement le maillage dynamique et géologique, puis on donne l'algorithme particulier mis en place afin de pouvoir traiter de manière automatique les mailles du modèle dynamique situées près des failles. Ensuite, on présente des résultats numériques de tenseurs équivalents calculés pour les méthodes linéaire et du mode confiné. On compare enfin les résultats avec les diverses méthodes décrites au chapitre 1.

Le quatrième chapitre est consacré aux simulations numériques des écoulements des fluides dans un gisement. Des simulations monophasiques et diphasiques 2D, permettant de comparer les diverses méthodes de mise à l'échelle, sont effectuées sur des maillages déstructurés. On compare alors ces résultats à des simulations effectuées sur un maillage orthogonal classique. On étudie ensuite la mise à l'échelle d'une partie d'un gisement réel 3D. Pour ce maillage flexible 3D on effectue enfin des simulations monophasiques et diphasiques de fluides immiscibles et incompressibles qui permettent de valider la méthode de mise à l'échelle implémentée.

La **deuxième partie** (chapitres 5 à 7) concerne le développement d'une méthode de mise à l'échelle des perméabilités absolues avec des conditions aux limites quelconques appliquées aux problèmes locaux.

Afin de pouvoir prendre en compte des conditions aux limites générales, on présente dans le chapitre 5 une méthode de mise à l'échelle fondée sur la minimisation d'une fonctionnelle représentant la somme des écarts des énergies locales et globales, pour des conditions aux limites de type Dirichlet ou mêlées. Une seconde approche basée sur la moyenne des vecteurs de filtration à l'échelle locale et globale est également présentée. Après avoir donné quelques exemples sur un cas monodimensionnel, on étudie, dans l'optique d'une mise en oeuvre numérique, les propriétés de continuité et de dérivabilité des différentes fonctionnelles considérées. Ce chapitre s'achève par la présentation d'un algorithme de calcul effectif de la perméabilité équivalente.

Au chapitre 6, on applique les méthodes du chapitre précédent, avec les conditions aux limites classiques linéaires, confinées et périodiques. On retrouve ainsi les tenseurs équivalents obtenus par les méthodes d'homogénéisation avec les conditions aux bords linéaires, confinées et périodiques. L'étude du cadre stochastique est également abordé. De plus, on établit un lien entre une méthode de minimisation, permettant le calcul du tenseur équivalent avec des conditions aux bords linéaires [34], et une méthode de mise à l'échelle basée sur les flux [29]. Par ailleurs, on examine différentes propriétés des méthodes de mise à l'échelle introduites au chapitre 5. On montre en particulier la stabilité pour la

G-convergence. Ceci permet alors de retrouver certains résultats déjà connus. Des résultats de convergence et des estimations d'erreurs sont également démontrés.

Le dernier chapitre est consacré à quelques essais numériques 2D où l'on applique la méthode basée sur la fonctionnelle énergétique qui a été développée au chapitre 5. On montre que le tenseur équivalent obtenu en résolvant le problème de minimisation dépend des conditions aux limites prises en compte lors de la résolution des problèmes locaux. On compare alors nos résultats aux tenseurs obtenus par les méthodes classiques. Enfin, on observe numériquement certaines propriétés de la méthode qui ont été démontrées théoriquement dans le chapitre 5.

## 0.2 NOTATIONS

En général, les notations sont indiquées dans le texte lorsqu'elles sont introduites. Néanmoins, on reproduit ici les notations les plus utilisées.

$\Omega$  : gisement pétrolier

$d$  : dimension de l'espace de travail

$G_h$  : maillage géologique

$T_H$  : maillage dynamique

$\theta$  : maille géologique

$\omega$  : maille dynamique

$K := K(x)$  : tenseur des perméabilités absolues du maillage géologique.

$K^*$  : perméabilité équivalente

$I_{-1,\omega}(\cdot)$  : opérateur de moyenne harmonique sur l'ouvert  $\omega$

$I_{1,\omega}(\cdot)$  : opérateur de moyenne arithmétique sur l'ouvert  $\omega$

$M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  : ensemble des matrices symétriques équi-bornées et équi-coercives sur  $\Omega$

$M(h, a, \omega)$  : ensemble des matrices constantes appartenant à  $M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  comprises entre la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique d'une matrice  $K(x) \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$

$\partial\omega$  : frontière d'un ouvert quelconque  $\omega$

$|\omega|$  : mesure de l'ouvert  $\omega$

$\vec{\mathbf{n}}$  : normale unitaire à un ouvert, orientée vers l'extérieur

$x_i$  :  $i^{\text{ème}}$  axe de coordonnée

$\vec{\mathbf{e}}_i$  :  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique

$\varepsilon$  : suite de nombres réels strictement positifs qui converge vers zéro

$C$  : constante indépendante de  $\varepsilon$

$(\vec{\mathbf{Q}})_i$  :  $i^{\text{ème}}$  composante d'un vecteur  $\vec{\mathbf{Q}}$

$A_{ij}$  : élément générique d'une matrice  $A$

$\det(A)$  : déterminant de la matrice  $A$

$$\|u\|_{A,\omega} = \left( \int_{\omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla u \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H^1(\omega)$$

$$\|\vec{\mathbf{q}}\|_{A,\omega} = \left( \int_{\omega} A(x) \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{q}} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \vec{\mathbf{q}} \in (L^2(\omega))^d$$

$\|\cdot\|_2$  : norme matricielle induite par la norme Euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$

$$\|\cdot\| : \text{norme matricielle définie par } \|A\| = \left( \int_{\omega} \|A(x)\|_2^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\cdot\|_S : \text{norme de Schur définie par } \|A(x)\|_S = \left( \sum_{i,j=1}^d |(A(x))_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$Y$  : cellule de base

$H_p^1(Y)$  : Ensemble des fonctions de  $H^1(Y)$   $Y$ -périodiques

$$Q = \Omega \times ]0, T[$$

$$W(0, T) = \left\{ v / v \in L^2(0, T, V); \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T, V') \right\}, \text{ où } V \text{ est un espace de Hilbert dont le dual est noté } V'$$

$(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mu)$  : espace probabilisé

$\gamma_0$  : opérateur de trace

$\Gamma_D^i$  ou  $\Gamma_D$  : partie de la frontière de  $\partial\omega$  soumise à une condition aux limites de Dirichlet

$\Gamma_N^i$  ou  $\Gamma_N$  : partie de la frontière de  $\partial\omega$  soumise à une condition aux limites de Neumann

$$H_{0, \Gamma_D}^1(\omega) = \{v \in H^1(\omega) \text{ tel que } \gamma_0(v) = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$

$$H(\text{div}, \omega) = \{\vec{s}; \vec{s} \in (L^2(\omega))^d; \text{div}(\vec{s}) \in L^2(\omega)\}$$

$$H_{0, \Gamma_N}(\text{div}, \omega) = \{\vec{s} \in H(\text{div}, \omega); \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N\}$$

$$H_0(\text{div}, \omega) = \{\vec{s} \in H(\text{div}, \omega); \text{div}(\vec{s}) = 0\}$$

$$H_{0, \Gamma_N}^0(\text{div}, \omega) = \{\vec{s} \in H_{0, \Gamma_N}(\text{div}, \omega); \text{div}(\vec{s}) = 0\}$$

$$(H_0(\text{div}, \omega))_{\text{mean}^0} = \left\{ \vec{s} \in H_0(\text{div}, \omega); \int_{\omega} \vec{s} \, dx = 0 \right\}$$

$$H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D) = \left\{ \psi \in L^2(\Gamma_D); \exists v \in H^1(\omega) \text{ avec } v|_{\partial\omega \setminus \Gamma_D} = 0, v|_{\Gamma_D} = \psi \right\}$$

$$\left( H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D) \right)^* : \text{dual topologique de } H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  : crochet de dualité entre  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\omega)$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$

$$a(\cdot, \cdot) : \text{forme bilinéaire définie par } a(u, v) = \int_{\omega} K(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in H^1(\omega)$$

$$L^{\vec{\xi}}(\cdot) : \text{forme linéaire définie par } L^{\vec{\xi}}(v) = - \int_{\omega} K(x) \vec{\xi} \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H^1(\omega) \text{ et } \vec{\xi} \in \mathbb{R}^d$$

$$J_{\vec{\xi}}(\cdot) : \text{fonctionnelle définie par } J_{\vec{\xi}}(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L^{\vec{\xi}}(v) \quad \forall v \in H^1(\omega) \text{ et } \vec{\xi} \in \mathbb{R}^d$$

$\mathcal{L}_h(\cdot, \cdot)$  : fonctionnelle définie pour  $\vec{s} \in H(\text{div}, \omega)$ ,  $v \in L^2(\omega)$  et  $h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$  par

$$\mathcal{L}_h(\vec{s}, v) = \frac{1}{2} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{s} \cdot \vec{s} \, dx + \langle \vec{s} \cdot \vec{n}, h \rangle - \int_{\omega} \text{div}(\vec{s}) v \, dx$$

$$\|u\|_{L^2(0, T, H_0^1(\omega))} = \left( \int_0^T \|u\|_{1, \omega}^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u\|_{L^2(0, T, H^{-1}(\omega))} = \left( \int_0^T \|u\|_{H^{-1}(\omega)}^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathcal{A}_d$  : espace des matrices carrées d'ordre  $d$

$\mathcal{D}$  : élément de l'espace produit  $(H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega))^m$

$\mathcal{M}$  : élément de l'espace produit  $\prod_{i=1}^m \left( H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D^i) \times \left( H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N^i) \right)^* \right)$

$I_{\mathcal{D}}(\cdot)$  : fonctionnelle énergétique pour des conditions aux limites de Dirichlet

$I_{\mathcal{M}}(\cdot)$  : fonctionnelle énergétique pour des conditions aux limites mêlées

$J_{\mathcal{D}}(\cdot)$  : fonctionnelle basée sur la vitesse pour des conditions aux limites de Dirichlet

$J_{\mathcal{M}}(\cdot)$  : fonctionnelle basée sur la vitesse pour des conditions aux limites mêlées



# **PARTIE I**



# Chapitre 1

## Mise à l'échelle des perméabilités absolues

Après avoir introduit les différentes notations considérées, on rappelle dans ce chapitre les principales méthodes de mise à l'échelle des perméabilités absolues. La majeure partie de ces techniques sont utilisées dans le milieu pétrolier et couramment exposées dans la littérature. On s'intéresse notamment aux méthodes obtenues à l'aide de la théorie de l'homogénéisation telles qu'elles sont développées dans le livre [45].

### 1.1 Introduction

L'hétérogénéité des milieux poreux naturels conduit à la notion d'échelle d'observation. Suivant les applications envisagées, on peut définir principalement trois grandes échelles d'observations :

- l'échelle microscopique qui consiste à observer le milieu au niveau du pore.
- l'échelle macroscopique (où échelle d'homogénéisation) qui considère le milieu comme continu, et permet d'englober plusieurs zones hétérogènes.
- l'échelle gigascopique (où échelle du gisement) qui prend en compte les variations spatiales des propriétés macroscopiques du milieu.

L'étude des écoulements de fluides d'un réservoir pétrolier nous conduit à être confronté au problème connu sous le nom de "mise à l'échelle" dans le milieu pétrolier. Les paramètres pétrophysiques, caractérisant le réservoir, telles que la porosité et la perméabilité absolue (pour les milieux monophasiques) auxquelles il faut ajouter les perméabilités relatives et la pression capillaire (pour les milieux polyphasiques) doivent donc être mis à l'échelle. Dans la suite, on restreint notre étude à la mise à l'échelle de la perméabilité absolue, dont le résultat sera appelé perméabilité équivalente.

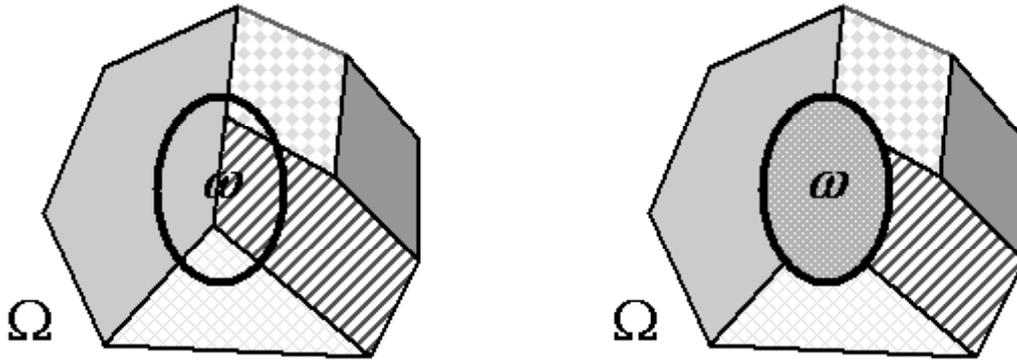


Figure 1.1: Définition d'un milieu homogène équivalent

Le concept de perméabilité absolue équivalente d'un milieu hétérogène est assez délicat. L'idée fondamentale est de remplacer un milieu composé de perméabilités hétérogènes par un milieu de perméabilité homogène de sorte que la substitution soit équivalente pour certaines finalités et dans certaines situations. Le problème est de préciser ces finalités et ces situations puisque le fait de remplacer plusieurs valeurs par une seule implique forcément une perte d'information. Dans la littérature on peut trouver plusieurs définitions d'un milieu homogène équivalent. Celle citée ci-dessous est souvent mentionnée en ingénierie pétrolière.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  occupé par un milieu poreux hétérogène et  $\omega$  une partie hétérogène de  $\Omega$  (voir figure 1.1). Marle définit alors un milieu homogène équivalent de la manière suivante :

”On a un milieu hétérogène  $\Omega$ , dans lequel a lieu un écoulement de fluide incompressible. On veut remplacer une partie  $\omega$  de ce milieu par un milieu homogène, de caractéristiques telles que l'écoulement d'ensemble soit perturbé le moins possible.”

L'homogénéisation a un sens mathématique qui est plus général par rapport au sens, plus restrictif, des ingénieurs-réservoirs. L'homogénéisation mathématique est l'étude, par une analyse asymptotique, du comportement macroscopique d'un processus physique où les phénomènes microscopiques jouent un rôle essentiel. De tels processus sont modélisés mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles. D'une manière générale on introduit un paramètre  $\varepsilon$ , qui représente le rapport entre la taille des hétérogénéités locales et la taille du gisement. En faisant tendre alors ce paramètre  $\varepsilon$  vers zéro dans les équations à l'échelle microscopique on obtient des équations ”globales ou homogénéisées” pour lesquelles la perméabilité absolue homogénéisée (équivalente) est bien définie. Pour les ingénieurs réservoirs, l'homogénéisation consiste à approcher par des constantes (destinées au simulateur de réservoir) les paramètres pétrophysiques

spatialement variables dans les équations aux dérivées partielles gouvernant le processus d'écoulement en milieu poreux.

## 1.2 Notations

Dans toute la suite de ce travail, on considère les notations suivantes :

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$ , représentant un gisement où  $d = 1, 2$ , ou  $3$ . La frontière de  $\Omega$  sera notée  $\partial\Omega$ . Le terme générique d'une matrice carrée  $A$  d'ordre  $d$ , sera noté  $A_{ij}, 1 \leq i, j \leq d$  et  $\det(A)$  désignera le déterminant de  $A$ .

Etant donnés deux réels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < +\infty$ , on considère la famille  $M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  des matrices **symétriques**  $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq d}$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq d \\ \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^d \quad \lambda_1 |\vec{\xi}|^2 \leq A(x) \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq \lambda_2 |\vec{\xi}|^2 \quad p. p. x \in \Omega \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où  $\cdot$  représente le produit scalaire Euclidien dans  $\mathbb{R}^d$ .

Sur  $M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  on introduit l'ordre partiel suivant

$$A \leq B := \left[ A \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq B \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^d \right].$$

On considère une partition  $T_H$  de l'ouvert  $\Omega$  en  $N$  ouverts  $(\omega_i^H)_{1 \leq i \leq N}$ , où  $H$  représente le diamètre maximum des ouverts  $(\omega_i^H)_{1 \leq i \leq N}$  :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\omega}_i^H.$$

La partition  $T_H$  désigne le maillage dynamique sur lequel est effectuée la simulation du réservoir, et  $\omega_i^H, 1 \leq i \leq d$ , est une maille (grossière) du maillage dynamique.

On considère une seconde partition  $G_h$  du réservoir  $\Omega$  composée de  $M$  ouverts  $(\theta_i^h)_{1 \leq i \leq M}$ , où  $h$  représente le diamètre maximum des ouverts  $(\theta_i^h)_{1 \leq i \leq M}$  :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M \bar{\theta}_i^h.$$

La partition  $G_h$  correspond au maillage géologique comportant plusieurs millions de mailles fines (ou géologiques)  $(\theta_i^h)_{1 \leq i \leq M}$ . Par la suite, pour alléger les notations, on notera  $\omega$  [*resp.*  $\theta$ ] l'ouvert  $\omega_i^H$  [*resp.*  $\theta_i^h$ ] s'il n'y a pas d'ambiguïté et  $\partial\omega$  [*resp.*  $|\omega|$ ] représentera la frontière [*resp.* la mesure] de l'ouvert  $\omega$ .

Lorsque la partition  $G_h$  est une sous partition d'un élément de  $T_H$ , on appellera taux

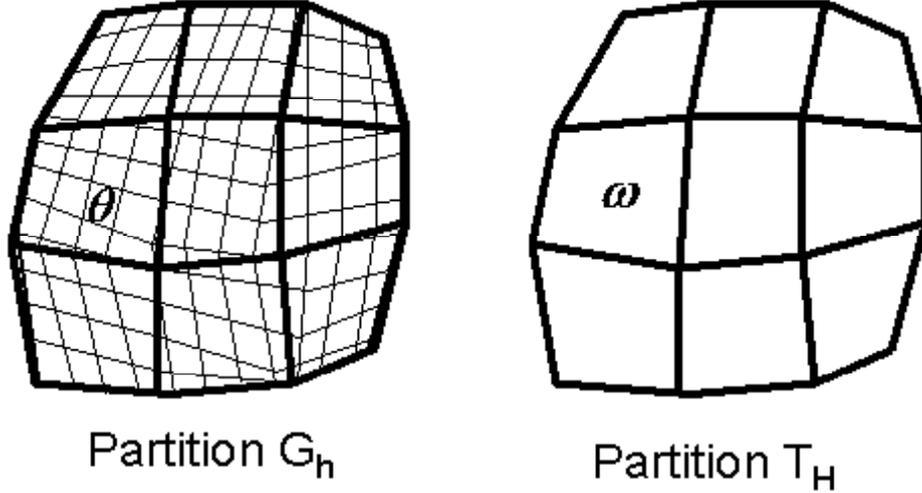


Figure 1.2: Maillages dynamique et géologique

d'agrégation le nombre entier de mailles fines  $\theta$  incluses dans  $\omega$ . Si le nombre de mailles fines incluses dans  $\omega$  est constant pour chaque maille  $\omega$  de  $T_H$ , on aura alors un taux d'agrégation uniforme, sinon le taux d'agrégation est qualifié de non uniforme.

On note  $K$  la perméabilité absolue hétérogène de  $G_h$  variable d'une maille à l'autre et  $K^*$  la perméabilité équivalente associée à chaque maille  $\omega$  de  $T_H$ . Les partitions  $G_h$  et  $T_H$  permettent ainsi de définir les maillages géologique et dynamique (voir figure 1.2).

Par ailleurs,  $\vec{n}$  désigne la normale unitaire extérieure d'un ouvert quelconque et  $\vec{e}_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique. On notera  $(\vec{q})_i$  la  $i^{\text{ème}}$  composante d'un vecteur  $\vec{q}$  qui, lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, sera représenté simplement par  $q_i$ . L'indice  $\varepsilon$  prendra ses valeurs dans une suite de nombres strictement positifs qui converge vers zéro, et on désignera par  $C$  des constantes diverses indépendantes de  $\varepsilon$ .

Soit  $A$  une matrice de  $M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ . Dans la suite, on considère les opérateurs de moyenne arithmétique  $I_{1,\omega}$  et de moyenne harmonique  $I_{-1,\omega}$  définies par :

$$I_{1,\omega}(A) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} A(x) dx \quad I_{-1,\omega}(A) = \left( \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} A^{-1}(x) dx \right)^{-1}$$

On introduit également la cellule de base  $Y$  définie par  $Y = \prod_{i=1}^d ]0, y_i^0[$  utilisée pour les milieux périodiques.

On utilise les notations standards pour les espaces de Sobolev et on note

$$\|u\|_{0,\omega} = \left( \int_{\omega} (u(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{la norme de } L^2(\omega)$$

$$|u|_{1,\omega} = \left( \int_{\omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{la norme de } H_0^1(\omega)$$

$$\|u\|_{1,\omega} = \left( \|u\|_{0,\omega}^2 + |u|_{1,\omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{la norme de } H^1(\omega)$$

On notera par

$$H_p^1(Y) = \left\{ u \in H^1(Y) / u \text{ est } Y\text{-périodique} \right\}.$$

Soit  $T$  un nombre strictement positif et  $Q = \Omega \times ]0, T[$ . On considère un espace de Hilbert  $V$  dont le dual sera noté  $V'$  et on introduit l'espace

$$W(0, T) = \left\{ v / v \in L^2(0, T, V); \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T, V') \right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|v\|_W^2 = \int_0^T \|v\|_V^2 dt + \int_0^T \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{V'}^2 dt$$

où  $\|\cdot\|_{V'}$  désigne la norme duale définie sur  $V'$ .

Enfin on note par  $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mu)$  un espace probabilisé, où  $\mathcal{R}$  désigne l'espace des réalisations,  $\mathcal{F}$  une tribu et  $\mu$  une mesure de probabilité.

### 1.3 Méthodes algébriques

Il existe de nombreuses méthodes de mise à l'échelle et celles-ci vont faire l'objet des paragraphes suivants. Les méthodes algébriques se distinguent par le fait que de simples calculs analytiques sont effectués pour fournir la perméabilité équivalente ou à défaut un encadrement de cette dernière. Les tenseurs de perméabilité obtenus par les différentes méthodes sont toujours diagonaux et ne sont valables que dans quelques situations particulières telles que : problème monodimensionnel, milieux stratifiés, milieux décrits par une loi lognormale, etc... Pour simplifier les notations, on présente les différentes méthodes dans le cas bidimensionnel et l'on note  $T_a$  le taux d'agrégation. Le domaine  $\omega$  contient  $N_{x_1}$  [resp.  $N_{x_2}$ ] mailles fines le long des axes  $x_1$  [resp.  $x_2$ ] comme indiqué dans la figure 1.3. On suppose par ailleurs que le tenseur de perméabilité hétérogène  $K(x)$  de  $M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  est isotrope et constant sur chaque maille fine  $\theta$  du domaine  $\omega$  :

$$K(x)|_{\theta} = k^{nm} = \begin{bmatrix} k_{11}^{nm} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & k_{ii}^{nm} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & k_{dd}^{nm} \end{bmatrix} \quad \text{avec } k_{ii}^{nm} \in \mathbb{R}_*^+ \text{ pour } \begin{array}{l} 1 \leq i \leq d \\ 1 \leq n \leq N_{x_1} \\ 1 \leq m \leq N_{x_2}. \end{array}$$

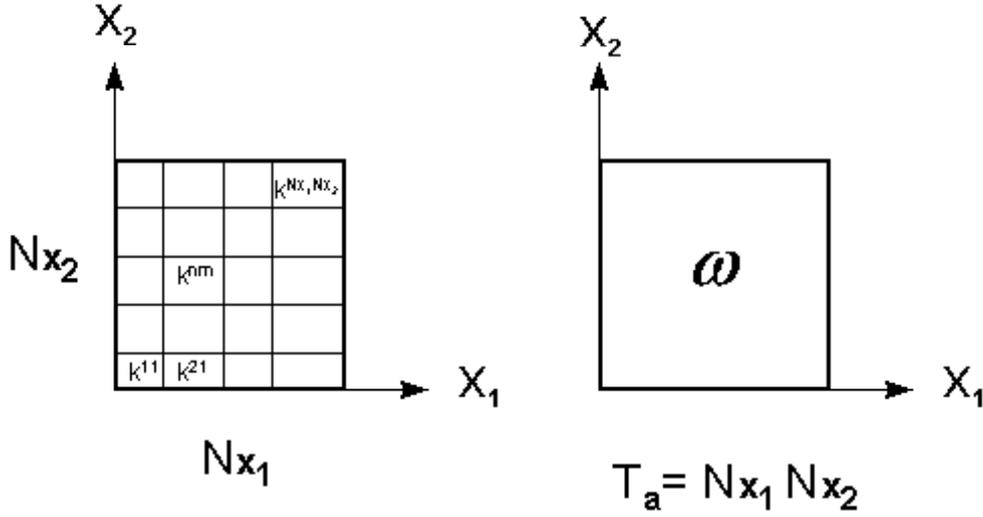


Figure 1.3: Taux d'agrégation

### 1.3.1 Moyennes arithmétique, harmonique et géométrique

La manière la plus simple pour obtenir une perméabilité équivalente est d'utiliser les opérateurs de moyenne arithmétique et de moyenne harmonique qui seront notées respectivement AR et HA lors des simulations numériques. Ainsi, en première approche, on peut avoir :

$$K_{ii}^* = I_{-1, \omega} (K_{ii}) = \left( \frac{1}{T_a} \sum_{m=1}^{N_{x_2}} \sum_{n=1}^{N_{x_1}} \frac{1}{k_{ii}^{nm}} \right)^{-1} \quad 1 \leq i \leq d \quad (1.2)$$

$$K_{ii}^* = I_{1, \omega} (K_{ii}) = \frac{1}{T_a} \sum_{m=1}^{N_{x_2}} \sum_{n=1}^{N_{x_1}} k_{ii}^{nm} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.3)$$

Pour un milieu stratifié, la moyenne arithmétique [resp. harmonique] fournit la perméabilité équivalente exacte pour les écoulements parallèles [resp. perpendiculaires] aux strates.

On peut également considérer la moyenne géométrique, qui sera notée GE, suivant les directions :

$$K_{ii}^* = \left( \prod_{m,n=1}^{N_{x_2}, N_{x_1}} k_{ii}^{nm} \right)^{\frac{1}{T_a}} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.4)$$

Pour un milieu lognormal 2D isotrope, la perméabilité équivalente  $K^*$  donnée par la moyenne géométrique est exacte. Plus généralement, ce résultat est également vrai pour tous milieux 2D où  $K(x)/E[K(x)]$  et  $K^{-1}(x)/E[K^{-1}(x)]$  suivent une même loi spatiale

invariante par rotation de  $90^\circ$ , où  $E[\cdot]$  désigne l'espérance mathématique. C'est notamment le cas pour un damier 2D. La démonstration dans le cas général est due à Matheron [61].

Par ailleurs, d'autres auteurs tels Cardwell, Parsons [20] et Matheron [61] ont montré l'inégalité fondamentale suivante :

$$I_{-1,\omega}(K_{ii}) \leq K_{ii}^* \leq I_{1,\omega}(K_{ii}) \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.5)$$

Cette inégalité est toujours valable quelque soit le milieu et quelle que soit la direction considérée.

### 1.3.2 Moyenne de puissance

On peut écrire toutes ces moyennes en une seule formule proposée par Journel et al. [52] et couramment appelée la moyenne de puissance :

$$K_{ii}^* = (I_{1,\omega}((K_{ii})^\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \quad 1 \leq i \leq d \quad (1.6)$$

où  $\alpha$  est un paramètre à déterminer.

Pour  $\alpha = -1$ ,  $\alpha = 1$  et  $\alpha$  tendant vers 0 on retrouve respectivement les moyennes harmonique, arithmétique et géométrique. L'utilisation de cette méthode revient à trouver le bon paramètre  $\alpha$ . Pour des milieux à distribution lognormale isotrope, Noetinger [66] a démontré que

$$\alpha = 1 - \frac{2}{d}$$

où  $d$  est la dimension de l'espace considéré.

### 1.3.3 Méthode de Cardwell et Parsons

A partir de l'inégalité fondamentale et utilisant une analogie électrique Cardwell et Parsons [20] ont montré l'encadrement suivant :

$$I_{-1,\omega}(K_{ii}) \leq K_{ii}^{\text{inf}} \leq K_{ii}^* \leq K_{ii}^{\text{sup}} \leq I_{1,\omega}(K_{ii}) \quad (1.7)$$

$$\text{où } K_{ii}^{\text{inf}} = I_{-1,\omega}(I_{1,PE_j}(K_{ii})) \quad \text{et} \quad K_{ii}^{\text{sup}} = I_{1,\omega}(I_{-1,PA_j}(K_{ii})) \quad (1.8)$$

$(PA_j)_{1 \leq j \leq N}$  représentent les différentes couches parallèles à la direction  $i$  étudiée et  $(PE_j)_{1 \leq j \leq N}$  représentent les différentes tranches perpendiculaires à la direction  $i$  considérée du domaine  $\omega$ . Si on considère par exemple la direction  $i = 1$  alors  $(PA_j)_{1 \leq j \leq N_{x_2}}$  et  $(PE_j)_{1 \leq j \leq N_{x_1}}$  sont définies comme indiquées dans la figure 1.4. Les différentes moyennes

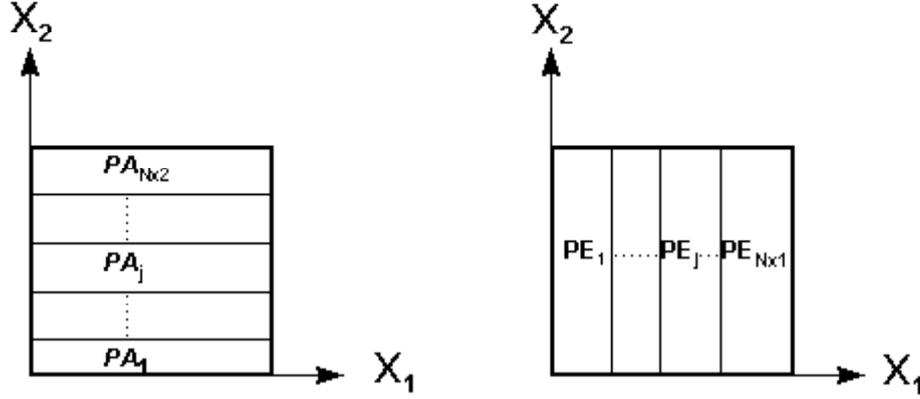


Figure 1.4: Bornes de Cardwell et Parsons

sur les couches parallèles et les tranches perpendiculaires s'écrivent :

$$I_{1,PE_j}(K_{ii}) = \frac{1}{N_{x_2}} \sum_{m=1}^{N_{x_2}} k_{ii}^{jm} \text{ et } I_{-1,PA_j}(K_{ii}) = \left( \frac{1}{N_{x_1}} \sum_{n=1}^{N_{x_1}} \frac{1}{k_{ii}^{nj}} \right)^{-1}.$$

En utilisant une approche variationnelle Le Loc'h [57] est parvenu aux mêmes résultats.

### 1.3.4 Autres estimateurs

A partir des bornes inférieure  $K_{ii}^{\text{inf}}$  et supérieure  $K_{ii}^{\text{sup}}$  obtenues par la méthode de Cardwell et Parsons, Le Loc'h [57] et Guérillot [39] proposent dans le cadre bidimensionnel l'estimateur, noté CW lors des simulations numériques et défini par :

$$K_{ii}^* = \sqrt{K_{ii}^{\text{inf}} K_{ii}^{\text{sup}}} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.9)$$

Cette idée a été étendue par Lemouzy [58] au cadre tridimensionnel. Par ailleurs, Romeu [76] a généralisé la formule de Le Loc'h-Guérillot en ne prenant plus la moyenne géométrique de  $K_{ii}^{\text{inf}}$  et  $K_{ii}^{\text{sup}}$  mais la formule suivante :

$$K_{ii}^* = \left( K_{ii}^{\text{inf}} \right)^\alpha \left( K_{ii}^{\text{sup}} \right)^{1-\alpha} \quad 1 \leq i \leq d \quad (1.10)$$

où  $\alpha$  est un paramètre à déterminer entre 0 et 1. Cette approche a été généralisée au cadre tridimensionnel par Romeu [76].

### 1.3.5 Méthode de renormalisation

Fondée sur la récursivité, la méthode de renormalisation, notée RE, calcule la perméabilité équivalente par une série d'agrégations successives des mailles fines  $\theta$ . Par exemple,

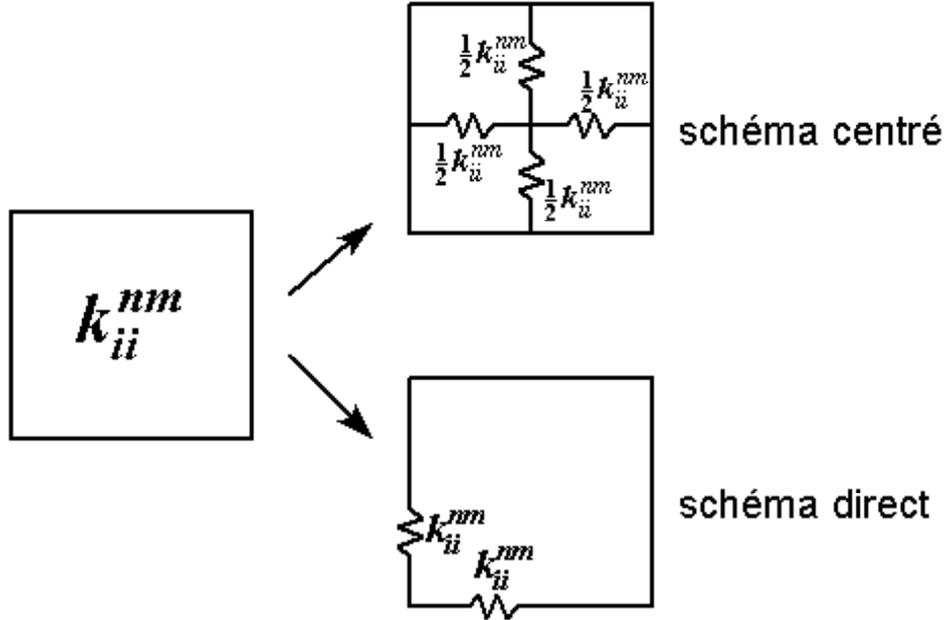


Figure 1.5: Analogies électriques

en deux dimensions, cela consiste à regrouper par quatre les mailles fines voisines  $\theta$  et à calculer la perméabilité équivalente de ce sous ensemble de quatre mailles. Cette opération est itérée jusqu'à l'obtention du domaine  $\omega$  dont la perméabilité sera la perméabilité équivalente du milieu. Le calcul de la perméabilité équivalente fait appel à une analogie avec les réseaux de résistances électriques. Différentes analogies sont possibles et jouent évidemment un rôle fondamental sur les résultats. King [53], précurseur de la méthode de renormalisation, propose le schéma centré (cf figure 1.5) qui conduit à utiliser la moyenne harmonique pour le calcul des transmissivités inter-mailles.

L'analogie pour le calcul de la perméabilité équivalente pour un groupe de quatre mailles se définit comme dans la figure 1.6. Une pression  $P_1$  est imposée sur le côté  $\Gamma_1$  et une pression  $P_2$  sur  $\Gamma_2$ . On suppose par ailleurs que  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  sont imperméables. On calcule alors la perméabilité équivalente à ce réseau de résistance. La méthode consiste à réunir les points qui sont au même potentiel et à ignorer les branches dont l'une des extrémités est soumise à une tension nulle. Ensuite, en utilisant la transformation "triangle-étoile", on obtient la perméabilité équivalente  $K^*$  dont le terme générique est donné par :

$$K_{ii}^* = \left[ \frac{1}{4(K_{ii}^{12} + K_{ii}^{11})} + \left( \frac{4}{3} \frac{K_{ii}^{12} K_{ii}^{22}}{K_{ii}^{12} + K_{ii}^{22}} + \frac{3}{4} \frac{K_{ii}^{11} K_{ii}^{21}}{K_{ii}^{11} + K_{ii}^{21}} \right)^{-1} + \frac{1}{4(K_{ii}^{22} + K_{ii}^{21})} \right]^{-1} \quad 1 \leq i \leq d \quad (1.11)$$

Gautier et Noëtinger [36] propose une méthode basée sur le procédé de King avec un

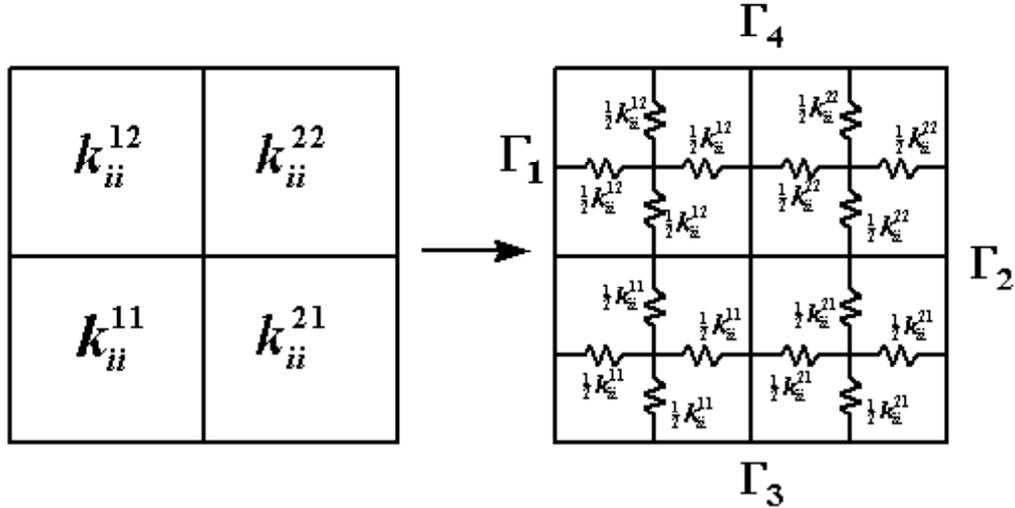


Figure 1.6: Exemple de regroupement

schéma direct (cf. figure 1.5) et des conditions aux limites périodiques.

Les méthodes algébriques sont donc des méthodes rapides qui permettent d'obtenir un tenseur de la perméabilité équivalente diagonal, ou à défaut un encadrement de ce dernier. Cependant les résultats fournis par ces méthodes ne sont exacts que pour quelques situations particulières. Une approche plus générale nécessite donc le recours aux méthodes d'homogénéisation pour lesquelles il y a des bases théoriques bien établies.

## 1.4 Méthodes d'homogénéisations

Il existe de nombreuses méthodes pour obtenir des tenseurs équivalents. Dans ce paragraphe, on s'intéresse uniquement aux méthodes d'homogénéisation basées sur les principes variationnels et pour lesquelles des résultats précis de convergence ont été établis pour les écoulements des fluides en milieu poreux [45]. Toutes ces méthodes numériques sont basées sur la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles auxquelles on adjoint des conditions aux limites. L'objet des prochains paragraphes est de présenter ces différentes méthodes classiquement utilisées en ingénierie pétrolière. Contrairement aux méthodes algébriques, la majeure partie de ces méthodes fournissent des tenseurs de perméabilité équivalents avec des termes extra-diagonaux.

Dans tous les paragraphes qui suivent, on suppose que le tenseur de perméabilité du maillage géologique  $K$  appartient à l'ensemble  $M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ .

### 1.4.1 Loi de Darcy

A l'échelle du pore, les écoulements des fluides incompressibles sont régis par les équations de Stokes. Toutefois, les mécanismes mis en jeu à cette échelle sont négligeables pour la simulation des gisements, d'où le passage à une échelle supérieure : l'échelle macroscopique. A partir des équations de Stokes et en supposant que les pores sont des champs aléatoires stationnaires et ergodiques, Matheron [61] obtient en passant à l'échelle macroscopique la loi de Darcy :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{Q}} = -\frac{K(x)}{\mu} \nabla p \\ \operatorname{div} [\vec{\mathbf{Q}}] = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \omega \quad (1.12)$$

où  $p$  désigne la pression et  $\mu$  la viscosité du fluide. La méthode de la moyenne volumique utilisée par Marle [60] permet de retrouver également la loi de Darcy à partir des équations de Stokes. Par ailleurs, Tartar [84] et Sanchez-Palencia [78] retrouvent la loi de Darcy à l'échelle macroscopique en appliquant la théorie de l'homogénéisation périodique. Enfin, en utilisant la convergence à deux échelles, Allaire [45] aboutit au même résultat.

### 1.4.2 Homogénéisation périodique

Dans ce paragraphe, on se consacre uniquement à la vaste théorie de l'homogénéisation périodique que l'on notera HP lors des simulations numériques. Les premiers travaux concernant la théorie de l'homogénéisation périodique appliquée au comportement des fluides dans les problèmes des milieux pétroliers sont dûs à Bourgeat [15], [45]. On rappelle brièvement ici la théorie de l'homogénéisation périodique pour un fluide monophasique au travers de la méthode des développements asymptotiques ainsi que certains résultats concernant l'approximation numérique des coefficients homogénéisés.

On suppose dans ce paragraphe que le domaine  $\omega = Y$ ,  $Y$  étant la cellule de base, et que le tenseur  $K$  de  $M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  est  $Y$ -périodique. Plusieurs techniques mathématiques telles que les développements asymptotiques présentés par exemple dans Bensoussan et al. [12], les travaux de Sanchez-Palencia [78], la méthode de l'énergie de Tartar [45] [83] et la convergence à deux échelles d'Allaire [1] permettent d'obtenir les coefficients homogénéisés ou équivalents. On rappelle ici brièvement la méthode des développements asymptotiques à échelles multiples.

Soit  $K_\varepsilon(x) = K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  et  $K$   $Y$ -périodique, on considère le problème

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} p_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \\ -\operatorname{div} [K_\varepsilon(x) \nabla p_\varepsilon] = f \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $f$  est une fonction donnée de  $L^2(\Omega)$ . Le paramètre  $\varepsilon$  représente le rapport entre la taille de la cellule  $Y$  et la taille du gisement  $\Omega$ ,  $x$  est la variable macroscopique et  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  est la variable microscopique. Le but des méthodes d'homogénéisation est le passage à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers zéro dans l'équation (1.13) afin d'obtenir un problème limite ( $P_0$ ) qualifié d'homogénéisé.

On écrit formellement le développement asymptotique de  $p^\varepsilon$  sous la forme suivante :

$$p_\varepsilon(x) = p_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon p_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 p_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots \quad ; \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (1.14)$$

avec  $p_i(x, y)$   $Y$ -périodique en  $y$  pour tout  $x$  appartenant à  $\Omega$ .

En substituant l'expression de  $p_\varepsilon(x)$  donnée par (1.14) dans le problème (1.13) et en identifiant successivement les différentes puissances de  $\varepsilon$ , on obtient l'équation du problème homogénéisé dont le premier terme  $p_0$  du développement asymptotique est l'unique solution de :

$$\begin{cases} p_0 \in H_0^1(\Omega) \\ -div [K^* \nabla p_0] = f \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.15)$$

Le tenseur homogénéisé  $K^*$  de  $M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  est constant sur  $\Omega$  et nécessite la résolution numérique de problèmes locaux posés sur la cellule de base  $Y$  avec des conditions aux limites périodiques :

$$\begin{cases} w_j \in H_p^1(Y) / \mathbb{R} \\ -div_y [K(y)(\nabla_y w_j + \vec{e}_j)] = 0 \quad \text{dans } Y \end{cases} \quad (1.16)$$

Les coefficients homogénéisés sont donnés par :

$$K_{ij}^* = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[ K_{ij}(y) + \sum_{k=1}^d K_{ik}(y) \frac{\partial w_j}{\partial y_k} \right] dy \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (1.17)$$

et aussi par :

$$K_{ij}^* = \frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) [\nabla_y w_i + \vec{e}_i] \cdot [\nabla_y w_j + \vec{e}_j] dy \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.18)$$

L'homogénéisation périodique a l'avantage d'être une méthode mathématique robuste bien que son champ d'application soit restreint aux domaines périodiques. Cependant cette théorie permet de trouver des lois de comportement pour des systèmes complexes tels que des systèmes d'équations non linéaires dont certains sont décrits dans l'ouvrage de Panfilov [67].

## Approximation Numérique

Afin d'obtenir une borne numérique inférieure [*resp.* supérieure] du tenseur homogénéisé théorique  $K^*$ , Marini [59] utilise une méthode d'éléments finis non conformes [*resp.* conformes] pour résoudre les problèmes locaux (1.16). Pour cela, on suppose que la cellule

de base  $Y$  s'écrit  $Y = \bigcup_m Q_m$ , avec  $(Q_m)_{m \geq 0}$  un polygone sur lequel le tenseur  $K$  est supposé constant. Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de la cellule  $Y$  composée de triangles et  $\vec{\xi}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ . On introduit alors l'approximation supérieure  $\overline{K_{Mh}^*}$  définie par le problème approché suivant :

$$\overline{K_{Mh}^*} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \min_{w_h \in \tilde{W}_h} \frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) [\nabla w_h + \vec{\xi}] \cdot [\nabla w_h + \vec{\xi}] dy \quad (1.19)$$

où l'espace d'approximation  $W_h$  est défini par :

$$W_h = \left\{ v_h \in C^0(Y) / v_h|_T \in P_k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h \text{ } Y\text{-périodique.} \right\} \quad (1.20)$$

$P_k(T)$  désigne l'espace des polynômes définis sur  $T$  de degré inférieur ou égal à  $k$ . Afin d'obtenir une borne inférieure notée  $\underline{K_{Mh}^*}$ , le problème suivant est introduit

$$\underline{K_{Mh}^*} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \min_{w_h \in \tilde{W}_h} \sum_m \sum_T J_{\vec{\xi}}^{T,m}(w_h) \quad (1.21)$$

où  $J_{\vec{\xi}}^{T,m}(\cdot)$  est défini par

$$J_{\vec{\xi}}^{T,m}(w_h) = \frac{1}{|Y|} \left( \int_{T \cap Q_m} K(y) \nabla w_h \cdot \nabla w_h dy + 2 \int_{\partial T \cap \partial Q_m} K(y) \vec{\xi} \cdot \vec{n} w_h d\sigma + \int_{T \cap Q_m} K(y) \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} dy \right) \quad (1.22)$$

Dans le problème (1.21), l'espace  $\tilde{W}_h$  est défini par

$$\tilde{W}_h = \left\{ \begin{array}{l} v_h \in L^2(\omega) / v_h|_T \in P_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h \text{ continu au milieu des côtés} \\ \text{de } T \cap Q_m \text{ et } v_h \text{ est périodique au point milieu de } \partial T \cap \partial Q_m. \end{array} \right\} \quad (1.23)$$

Dans le cadre bidimensionnel, on a alors l'encadrement suivant :

$$\underline{K_{Mh}^*} \leq K^* \leq \overline{K_{Mh}^*}. \quad (1.24)$$

Toutefois, ces approximations ne sont valables que pour un espace de travail de dimension deux.

Une autre approche pour estimer numériquement le tenseur homogénéisé est due à Dvořák [30]. L'approximation supérieure, notée  $\overline{K_{Dh}^*}$ , du tenseur homogénéisé est définie par la solution du problème suivant :

$$\overline{K_{Dh}^*} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \min_{w_h \in W_h} \frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) [\nabla w_h + \vec{\xi}] \cdot [\nabla w_h + \vec{\xi}] dy \quad (1.25)$$

où  $W_h$  est une famille dense de sous espaces de  $H_p^1(Y)$ , et  $\vec{\xi}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ .

Dans le cadre bidimensionnel et en utilisant les fonctions courants, on définit un tenseur

$B_h^*$  par l'intermédiaire du problème décrit ci-dessous :

$$B_h^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \min_{w_h \in W_h} \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{K(y)}{\det(K(y))} [\nabla w_h + \vec{\xi}] \cdot [\nabla w_h + \vec{\xi}] dy. \quad (1.26)$$

L'approximation inférieure, notée  $K_{Dh}^*$ , est alors définie par la relation :

$$\frac{K_{Dh}^*}{\det(B_h^*)} = \frac{B_h^*}{\det(B_h^*)}. \quad (1.27)$$

Dans le cadre bidimensionnel, on a alors les résultats suivants :

$$\frac{K_{Dh}^*}{\det(B_h^*)} \leq K^* \leq \overline{K_{Dh}^*} \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \overline{K_{Dh}^*} - K^* \right\| = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{K_{Dh}^*}{\det(B_h^*)} - K^* \right\| = 0 \quad (1.28)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne une norme matricielle quelconque.

Dans le deuxième chapitre on montre qu'en utilisant les fonctions courants, on obtient une borne numérique inférieure du tenseur équivalent pour la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires qui est exposée ci-après.

### 1.4.3 Homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires

Cette méthode mathématique trouve son fondement dans une théorie d'approximation des coefficients d'opérateurs elliptiques due à Bamberger [10]. Dans un cadre stochastique qui est décrit plus loin, cette méthode peut être interprétée comme une méthode mathématique standard d'homogénéisation. Dans la suite on appellera cette méthode d'homogénéisation, avec des conditions aux bords linéaires, la méthode linéaire que l'on notera ML pour les simulations numériques.

Soit  $H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ . On considère les opérateurs elliptiques du second ordre de la forme suivante :

$$A = -div [K(x)\nabla] \quad B = -div [H(x)\nabla] \quad (1.29)$$

Soit  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$  on considère le problème :

$$\begin{cases} A(p) = 0 & \text{dans } \omega \\ p = g & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (1.30)$$

auquel est associée la forme bilinéaire définie par :

$$a(w, v) = \int_{\omega} K(x)\nabla w \cdot \nabla v dx \quad \forall w, v \in H^1(\omega). \quad (1.31)$$

On note  $p = \mathcal{A}^{-1}(g)$  la solution de (1.30).

Par ailleurs on considère le problème :

$$\begin{cases} B(u) = 0 & \text{dans } \omega \\ u = g & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (1.32)$$

auquel est associée la forme bilinéaire suivante :

$$b(w, v) = \int_{\omega} H(x) \nabla w \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in H^1(\omega) \quad (1.33)$$

et on note  $u = \mathcal{B}^{-1}(g)$  la solution de (1.32).

Suivant Bamberger, on dira que le tenseur  $K$  est équivalent, au sens de l'énergie, au tenseur  $H$  sur  $\omega$  si :

$$a(\mathcal{A}^{-1}(g), \mathcal{A}^{-1}(g)) = b(\mathcal{B}^{-1}(g), \mathcal{B}^{-1}(g)) \quad \forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega). \quad (1.34)$$

Or, dans [10], il est prouvé que l'on n'est pas assuré de trouver dans chaque classe d'équivalence un représentant à coefficients constants sur  $\omega$ . Par conséquent on est amené à se restreindre au sous espace de  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$  engendré par la famille  $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$ , où  $x_i$  désigne le  $i^{\text{ème}}$  axe de coordonnées.

Soit  $K^*$  un tenseur constant sur  $\omega$ , et  $C$  l'opérateur défini par  $C = -div [K^* \nabla]$  auquel est associée la forme bilinéaire :

$$c(w, v) = \int_{\omega} K^* \nabla w \cdot \nabla v \, dx \quad \forall w, v \in H^1(\omega). \quad (1.35)$$

On considère alors le problème :

$$\begin{cases} C(w) = 0 & \text{dans } \omega \\ w = g & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (1.36)$$

où  $g$  appartient à l'espace vectoriel engendré par  $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$ . On note  $w = \mathcal{C}^{-1}(g)$  la solution de (1.36).

La définition de l'équivalence du tenseur  $K$  par le tenseur constant sur  $\omega$ , noté  $K^*$ , s'écrit alors sous la forme suivante :

$$a(\mathcal{A}^{-1}(x_i), \mathcal{A}^{-1}(x_j)) = c(\mathcal{C}^{-1}(x_i), \mathcal{C}^{-1}(x_j)) \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.37)$$

La définition (1.37) peut se réécrire sous la forme explicite :

$$K_{ij}^* = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) \nabla p_i \cdot \nabla p_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (1.38)$$

où les fonctions  $(p_i)_{1 \leq i \leq d}$  sont solutions des problèmes locaux suivants :

$$\begin{cases} -div [K(x) \nabla p_i] = 0 & \text{dans } \omega \\ p_i = x_i & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.39)$$

On rappelle maintenant certaines propriétés du tenseur équivalent  $K^*$  obtenu par (1.38) et (1.39). Une démonstration de ces résultats peut être trouvée dans [10].

**Proposition 1.4.1** *Si  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  alors le tenseur  $K^*$  défini par (1.38) et (1.39) possède les propriétés suivantes :*

$$K^* \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega) \quad (1.40)$$

$$I_{-1, \omega}(K) \leq K^* \leq I_{1, \omega}(K) \quad (1.41)$$

$$K^* \text{ est stable pour la } G\text{-convergence.} \quad (1.42)$$

Dans cette méthode on suppose uniquement que  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ , mais aucune hypothèse est faite sur la géométrie du domaine  $\omega$ , ce qui permet d'appliquer théoriquement cette démarche à des maillages déstructurés. De plus, le tenseur équivalent  $K^*$  est toujours symétrique défini positif.

#### 1.4.4 Homogénéisation avec des conditions aux bords confinées

Cette méthode est basée sur une approche de type ingénieur [25]. Elle consiste à trouver le champ des vitesses de problèmes locaux en régime incompressible permanent avec des conditions aux limites mêlées particulières. La méthode suppose que le domaine  $\omega$  est régulier (cf. figure 1.7), où l'on note  $\Gamma_0^i$  et  $\Gamma_1^i$  les deux faces opposées perpendiculaires à l'axe  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ . En d'autres termes,  $\Gamma_0^i$  [resp.  $\Gamma_1^i$ ] est la frontière du domaine  $\omega$ , appartenant au plan d'équation  $x_i = a_i$  [resp.  $x_i = b_i$ ]. On note  $\Gamma_N^i = \partial\omega - (\Gamma_0^i \cup \Gamma_1^i)$ . Cette méthode est parfois appelée la méthode du mode confiné dans la littérature pétrolière que l'on notera MC lors des simulations numériques.

On considère les problèmes locaux suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\mathbf{Q}}_i = -K(x)\nabla p_i & \text{dans } \omega \\ \operatorname{div} [\vec{\mathbf{Q}}_i] = 0 & \text{dans } \omega \\ p_i = p_0^i & \text{sur } \Gamma_0^i \\ p_i = p_1^i & \text{sur } \Gamma_1^i \\ \frac{\partial p_i}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N^i \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d \quad (1.43)$$

où  $p_j^i \in \mathbb{R}_*^+$ , pour tout  $1 \leq i \leq d$  et  $0 \leq j \leq 1$ .

On introduit la  $i^{\text{ème}}$  composante des flux moyens notée  $(\vec{\mathbf{Q}}_i)_i$  :

$$(\vec{\mathbf{Q}}_i)_i = - \left( \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x)\nabla p_i \, dx \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_i \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.44)$$

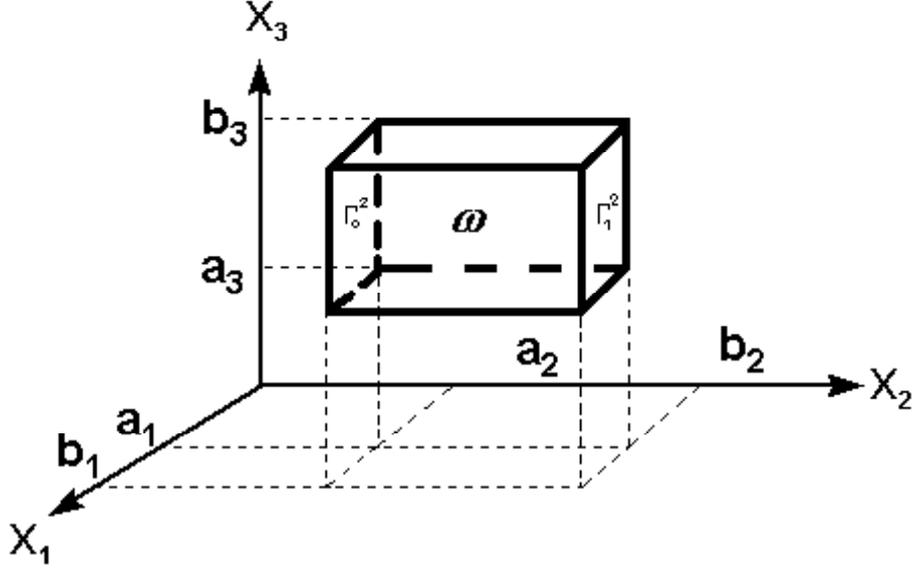


Figure 1.7: Maille dynamique  $\omega$

Soit  $K^* \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  constant sur  $\omega$  et supposé **diagonal**, on considère alors les problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{Q}_i^* = -K^* \nabla p_i^* & \text{dans } \omega \\ \operatorname{div} [\vec{Q}_i^*] = 0 & \text{dans } \omega \\ p_i^* = p_0^i & \text{sur } \Gamma_0^i \\ p_i^* = p_1^i & \text{sur } \Gamma_1^i \\ \frac{\partial p_i^*}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N^i \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d \quad (1.45)$$

auxquels on associe la  $i^{\text{ème}}$  composante des flux moyens  $(\vec{Q}_i^*)_i$  donnée par :

$$(\vec{Q}_i^*)_i = - \left( \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^* \nabla p_i^* dx \right) \cdot \vec{e}_i \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.46)$$

L'unique solution du problème (1.45) est :

$$p_i^*(x_i) = \frac{b_i - x_i}{L^i} p_0^i + \frac{x_i - a_i}{L^i} p_1^i \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.47)$$

où  $L^i = b_i - a_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ .

Par conséquent, on obtient :

$$(\vec{Q}_i^*)_i = - \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} K_{ii}^* \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.48)$$

Ainsi en égalant  $(\vec{Q}_i)_i$  et  $(\vec{Q}_i^*)_i$  on obtient le tenseur de perméabilité équivalent donné par :

$$K_{ii}^* = \frac{L^i}{p_1^i - p_0^i} \left( \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) \nabla p_i dx \right) \cdot \vec{e}_i \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.49)$$

Les conditions aux limites appliquées aux problèmes (1.43) et (1.45) sont parfois appelées conditions de type imperméable dans l'ingénierie pétrolière.

Cette méthode nécessite des domaines  $\omega$  réguliers, mais fournit un tenseur équivalent diagonal. Ceci est un avantage car certains simulateurs industriels actuels ne tiennent pas compte des termes extradiagonaux des tenseurs de perméabilité absolue.

### 1.4.5 Homogénéisation stochastique

Une généralisation [12] de l'homogénéisation périodique est l'homogénéisation stochastique dont une présentation dédiée aux problèmes de l'ingénierie pétrolière peut être trouvée dans [45]. La théorie de l'homogénéisation stochastique a été appliquée aux problèmes des écoulements des fluides diphasiques par Bourgeat [45]. Toutefois on se contente ici de rappeler brièvement le résultat principal pour un fluide monophasique. Considérons l'écoulement d'un fluide monophasique incompressible dans un réservoir hétérogène  $\Omega$  où la perméabilité  $K(\frac{x}{\varepsilon}, r)$  est la réalisation d'une fonction aléatoire statistiquement homogène avec  $r$  appartenant à l'espace probabilisé  $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mu)$  :

$$-div \left[ K\left(\frac{x}{\varepsilon}, r\right) (\nabla p_\varepsilon^r) \right] = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \quad r \in \mathcal{R} \quad (1.50)$$

Le paramètre  $\varepsilon > 0$  est le rapport entre l'échelle typique de variation de la perméabilité et la taille du réservoir  $\Omega$ . En utilisant les outils de l'homogénéisation stochastique, Bourgeat et al. [17] obtiennent une équation effective (1.51) qui décrit le comportement du fluide dans le milieu homogène qualifié d'équivalent :

$$-div [K^* \nabla p^*] = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \quad (1.51)$$

Le tenseur de perméabilité équivalent  $K^*$  est donné par :

$$K^* \vec{e}_k = \int_{\mathcal{R}} K(y, r) [\nabla_y u_k + \vec{e}_k] d\mu \quad (1.52)$$

où les fonctions  $u_k$  sont solution des problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^d) \\ -div_y [K(y, r) (\nabla_y u_k + \vec{e}_k)] = 0 \\ \int_{\mathcal{R}} \nabla_y u_k d\mu = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \quad \forall r \in \mathcal{R} \quad (1.53)$$

#### Approximation numérique

Le calcul du tenseur équivalent défini par (1.52) et (1.53) est assez délicat d'un point de vue numérique, car il nécessite la résolution de problèmes locaux posés sur  $\mathbb{R}^d$  et ceci pour chaque réalisation  $r \in \mathcal{R}$ . Les premiers travaux pour palier à cette difficulté ont été

réalisés dans le cadre de l'élasticité linéaire (voir [77]). Ces derniers ont été repris par Badea et Bourgeat [7] [8], en introduisant deux familles de problèmes auxiliaires, afin de calculer une approximation numérique du tenseur théorique  $K^*$  défini par (1.52) et (1.53). Soit  $V$  un volume de  $\Omega$  définie par  $V = v \times ]0, 1[^d$  où  $v \in \mathbb{R}$ . On considère d'une part les problèmes

$$\begin{cases} -div [K(x)\nabla p_i] = 0 & \text{dans } V \\ p_i = \vec{e}_i \cdot \vec{x} & \text{sur } \partial V \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d \quad (1.54)$$

auxquels on associe

$$K_{ap}^*(V, K(x)) \cdot \vec{e}_i = \int_V K(x)\nabla p_i \, dx \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.55)$$

Il est à noter que les problèmes (1.54) correspondent aux problèmes de la méthode linéaire. D'autre part les problèmes adjoints suivants sont étudiés :

$$\begin{cases} -div [K(x)\nabla w_i] = 0 & \text{dans } V \\ \frac{\partial w_i}{\partial n} = \vec{e}_i \cdot \vec{n} & \text{sur } \partial V \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d \quad (1.56)$$

auxquels on associe

$$S_{ap}^*(V, K(x)) \cdot \vec{e}_i = \int_V K(x)\nabla w_i \, dx \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.57)$$

Sous l'hypothèse supplémentaire que le champ de perméabilité  $K$  est ergodique les auteurs de [7] [8] démontrent que :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} K_{ap}^*(V, K(x)) = K^* \quad (1.58)$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} S_{ap}^*(V, K(x)) = (K^*)^{-1} \quad (1.59)$$

Grâce à ces résultats, les auteurs mettent au point un algorithme constructif permettant d'obtenir un "volume élémentaire représentatif".

**Remarque 1.4.2 :** *Le temps de calcul des méthodes algébriques est indépendant de la variance de la loi de distribution de la perméabilité alors que le temps de calcul pour les méthodes numériques croît avec cette variance.*

Cette description des méthodes n'est pas exhaustive, puisqu'il en existe de nombreuses autres pour trouver un tenseur de perméabilité équivalent. On peut mentionner, par exemple, la méthode de prise de moyenne à grande échelle due à Quintard et Whitaker [70] [71]. Le principe général est d'écrire les différentes variables locales telles que la perméabilité absolue et la porosité comme la somme d'une variable à grande échelle et d'un terme de déviation. Sous certaines hypothèses Bourgeat et al. [16] montrent que la

méthode d'homogénéisation et la méthode de prise de moyenne à grandes échelles sont équivalentes.

D'autre part, on peut signaler une méthode basée sur les ondelettes [32], la théorie de la percolation ou des chemins critiques [40], l'homogénéisation multigrille [54], la méthode des lignes de courant [41], la théorie des milieux effectifs [26], la méthode des perturbations [61] et enfin la méthode de Monte-Carlo [86]. Dans la deuxième partie de cette thèse on rappellera également d'autres méthodes de mise à l'échelle, ces dernières étant basées sur des problèmes d'optimisation.

Pour clore ce chapitre, on rappelle quelques résultats fréquemment utilisés dans la théorie de l'homogénéisation.

## 1.5 Rappels de quelques résultats utilisés en homogénéisation

### 1.5.1 G-convergence

Une propriété de la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires est que le tenseur équivalent est stable pour la G-convergence. On rappelle ici la définition de la G-convergence et certaines de ces propriétés utilisées. La majeure partie de ces résultats se trouvent dans [45] et [51].

Soit  $(K_\varepsilon)$ , une suite de matrices de la famille  $M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  et  $K_0$  une matrice de  $M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ .

**Définition 1.5.1** *On dira que la suite de matrice  $K_\varepsilon$  G-converge vers  $K_0$  dans  $\Omega$ ,*

$$\text{et on notera} \quad K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0$$

$$\text{Si pour toute suite } (f_\varepsilon) \text{ telles que } f_\varepsilon \xrightarrow{H^{-1}(\Omega)} f_0 \quad \text{fort}$$

$$\text{alors} \quad p_\varepsilon \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} p_0 \quad \text{faible}$$

$$\begin{array}{l} \text{où } p_\varepsilon \text{ est la solution de} \\ \left\{ \begin{array}{l} p_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \\ -\text{div} [K_\varepsilon(x)\nabla p_\varepsilon] = f_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} p_0 \text{ est la solution de} \\ \left\{ \begin{array}{l} p_0 \in H_0^1(\Omega) \\ -\text{div} [K_0(x)\nabla p_0] = f_0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \end{array}$$

Rappelons maintenant quelques propriétés liées à la G-convergence.

**Théorème 1.5.2** *De toute suite de matrices  $(K_\varepsilon) \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ , on peut extraire une sous suite qui G-converge dans  $\Omega$  vers  $K_0 \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ .*

**Proposition 1.5.3** Si  $K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0$  alors

$$K_\varepsilon \nabla p_\varepsilon \xrightarrow{(L^2(\Omega))^d} K_0 \nabla p_0 \quad \text{faible}$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} K_\varepsilon(x) \nabla p_\varepsilon \cdot \nabla p_\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} K_0(x) \nabla p_0 \cdot \nabla p_0 \, dx.$$

**Proposition 1.5.4** Si  $K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0$  fortement pour une norme matricielle alors  $K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0$ .

**Théorème 1.5.5** (Convergence de solutions arbitraires)

Soient  $K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0$  dans  $\Omega$  et  $\Omega_1$  un ouvert quelconque inclus dans  $\Omega$ . On suppose qu'il existe des fonctions  $w_\varepsilon \in H^1(\Omega_1)$  telles que :

$$w_\varepsilon \xrightarrow{H^1(\Omega_1)} w_0 \quad \text{faible} \quad \text{et} \quad -\operatorname{div} [K_\varepsilon(x) (\vec{z} + \nabla w_\varepsilon)] = h$$

où  $\vec{z} \in (L^2(\Omega_1))^d$  et  $h \in H^{-1}(\Omega_1)$ . Alors

$$K_\varepsilon (\vec{z} + \nabla w_\varepsilon) \xrightarrow{(L^2(\Omega))^d} K_0 (\vec{z} + \nabla w_0) \quad \text{faible} \quad \text{et} \quad -\operatorname{div} [K_0(x) (\vec{z} + \nabla w_0)] = h$$

Ce théorème implique que la matrice G-limite est indépendante du terme source ainsi que des conditions aux limites appliquées sur la frontière de  $\Omega$ .

## 1.5.2 G-convergence parabolique

En vue d'étendre la stabilité du tenseur équivalent, obtenu par la méthode linéaire, à la G-convergence parabolique, on rappelle la définition suivante due à Zhikov et al. [87].

**Définition 1.5.6** On dira que la suite de tenseurs  $(K_\varepsilon) \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  converge vers  $K_0 \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  au sens de la G-convergence parabolique et on notera :

$$K_\varepsilon \xrightarrow{GP} K_0$$

si  $\forall f \in L^2(0, T, H^{-1}(\omega))$

$$\begin{aligned} \text{a) } & p_\varepsilon \xrightarrow{L^2(0, T, H_0^1(\omega))} p_0 \quad \text{faible} \\ \text{b) } & \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} \xrightarrow{L^2(0, T, H^{-1}(\omega))} \frac{\partial p_0}{\partial t} \quad \text{faible} \end{aligned}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} p_\varepsilon \text{ est la solution de} \\ p_\varepsilon \in W(0, T) \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} [K_\varepsilon(x) \nabla p_\varepsilon] = f \quad \text{dans } Q \\ p_\varepsilon(0, \cdot) = 0 \quad \text{p.p. dans } \omega \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0 \text{ est la solution de} \\ p_0 \in W(0, T) \\ \frac{\partial p_0}{\partial t} - \operatorname{div} [K_0(x) \nabla p_0] = f \quad \text{dans } Q \\ p_0(0, \cdot) = 0 \quad \text{p.p. dans } \omega \end{array} \right.$$

Une extension de cette définition pour des opérateurs paraboliques quasilineaires peut être trouvée dans [82].

**Proposition 1.5.7** *Si  $K_\varepsilon \xrightarrow{GP} K_0$  alors*

$$K_\varepsilon \nabla p_\varepsilon \xrightarrow{(L^2(Q))^d} K_0 \nabla p_0 \quad \text{faible.}$$

### 1.5.3 Deux résultats classiques en homogénéisation

On termine ce chapitre par quelques résultats classiques utilisés dans les problèmes d'homogénéisation et repris ultérieurement dans ce travail.

**Lemme 1.5.8** *Soit  $\varphi$  une fonction définie sur la cellule de base  $Y$ , qu'on prolonge par périodicité à tout  $\mathbb{R}^d$ , avec  $\varphi \in L^p(Y)$ ,  $p \geq 1$ . On définit la suite de fonctions  $\varphi_\varepsilon$  sur  $\Omega$  par :*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

alors  $\varphi_\varepsilon$  est bornée dans  $L^p(\Omega)$ , indépendamment de  $\varepsilon$  et

$$\varphi_\varepsilon \longrightarrow I_{1,Y}(\varphi) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \varphi(y) dy$$

dans  $L^p(\Omega)$  faible si  $p < +\infty$ .

dans  $L^\infty(\Omega)$  faible \* si  $p = +\infty$ .

**Lemme 1.5.9** *(Compacité par compensation)*

Soient  $(\vec{p}_\varepsilon)$  et  $(\vec{q}_\varepsilon)$  deux suites de vecteurs de  $(L^2(\Omega))^d$  vérifiant les conditions :

$$\begin{array}{llll} \vec{p}_\varepsilon \xrightarrow{(L^2(\Omega))^d} \vec{p}_0 & \text{faible} & \text{rot}(\vec{q}_\varepsilon) = 0 & \\ \vec{q}_\varepsilon \xrightarrow{(L^2(\Omega))^d} \vec{q}_0 & \text{faible} & \text{div}(\vec{p}_\varepsilon) \xrightarrow{H^{-1}(\Omega)} \text{div}(\vec{p}_0) & \text{fort} \end{array}$$

alors

$$\vec{p}_\varepsilon \cdot \vec{q}_\varepsilon \longrightarrow \vec{p}_0 \cdot \vec{q}_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

# Chapitre 2

## Approximation numérique du tenseur équivalent

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'approximation numérique du tenseur équivalent obtenu par la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires. On montre d'abord qu'en utilisant la méthode des éléments finis conformes pour résoudre les problèmes locaux, on obtient une borne supérieure du tenseur équivalent et que l'utilisation de la méthode des éléments finis mixtes fournit une borne inférieure. Des résultats de convergence et des estimations d'erreur sont obtenus sous certaines hypothèses. On montre ensuite que la méthode linéaire est stable pour la G-convergence parabolique. Ces résultats se généralisent sans difficulté au cas de la méthode confinée. On compare enfin les méthodes d'homogénéisation avec des conditions aux limites linéaires, confinées et périodiques.

### 2.1 Introduction

Le calcul du tenseur équivalent nécessite la résolution de problèmes locaux posés sur chaque maille grossière du maillage dynamique, auxquels on adjoint des conditions aux limites. Les différentes méthodes considérées dans le chapitre 1, se différencient uniquement par les conditions aux limites prises en compte. Dans ce chapitre, on s'intéresse uniquement à la méthode d'homogénéisation qui utilise des conditions aux bords linéaires. Pour résoudre les problèmes locaux, on utilise alors une méthode d'éléments finis mixtes ainsi qu'une méthode d'éléments finis conformes. Cette approche permet d'obtenir une borne numérique inférieure et une supérieure du tenseur équivalent.

## 2.2 Notations

On utilise les notations classiques des espaces de Sobolev ainsi que certains espaces définis ci-après :

$$\begin{aligned}
H_{0,\Gamma_D}^1(\omega) &= \left\{ v \in H^1(\omega) \text{ tel que } \gamma_0(v) = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\} \\
H(\operatorname{div}, \omega) &= \left\{ \vec{s}; \vec{s} \in (L^2(\omega))^d; \operatorname{div}(\vec{s}) \in L^2(\omega) \right\} \\
H_{0,\Gamma_N}(\operatorname{div}, \omega) &= \left\{ \vec{s} \in H(\operatorname{div}, \omega); \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N \right\} \\
H_0(\operatorname{div}, \omega) &= \left\{ \vec{s} \in H(\operatorname{div}, \omega); \operatorname{div}(\vec{s}) = 0 \right\} \\
H_{0,\Gamma_N}^0(\operatorname{div}, \omega) &= \left\{ \vec{s} \in H_{0,\Gamma_N}(\operatorname{div}, \omega); \operatorname{div}(\vec{s}) = 0 \right\} \\
(H_0(\operatorname{div}, \omega))_{\text{mean}^0} &= \left\{ \vec{s} \in H_0(\operatorname{div}, \omega); \int_{\omega} \vec{s} \, dx = 0 \right\}
\end{aligned}$$

Soit  $A(x)$  une matrice appartenant à l'ensemble  $M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  défini au premier chapitre. On note  $\|\cdot\|_S$  la norme de Schur définie par :

$$\|A(x)\|_S = \left( \sum_{i,j=1}^d |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part on utilisera les normes suivantes

$$\|u\|_{L^2(0,T,H_0^1(\omega))} = \left( \int_0^T |u|_{1,\omega}^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\omega))} = \left( \int_0^T \|u\|_{H^{-1}(\omega)}^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u\|_{L^2(0,T,L^2(\omega))} = \|u\|_{0,Q}$$

Soient  $\vec{\xi}$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^d$  et  $h$  un élément de  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ .

On adopte les notations suivantes :

$$a(u, v) = \int_{\omega} K(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in H^1(\omega)$$

$$L^{\vec{\xi}}(v) = - \int_{\omega} K(x) \vec{\xi} \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H^1(\omega)$$

$$J_{\vec{\xi}}(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L^{\vec{\xi}}(v) \quad \forall v \in H^1(\omega)$$

$$\mathcal{L}_h(\vec{s}, v) = \frac{1}{2} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{s} \cdot \vec{s} \, dx + \langle \vec{s} \cdot \vec{n}, h \rangle - \int_{\omega} \operatorname{div}(\vec{s}) \, v \, dx \quad \begin{array}{l} \forall \vec{s} \in H(\operatorname{div}, \omega) \\ \text{et } \forall v \in L^2(\omega) \end{array}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le crochet de dualité entre  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\omega)$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ .

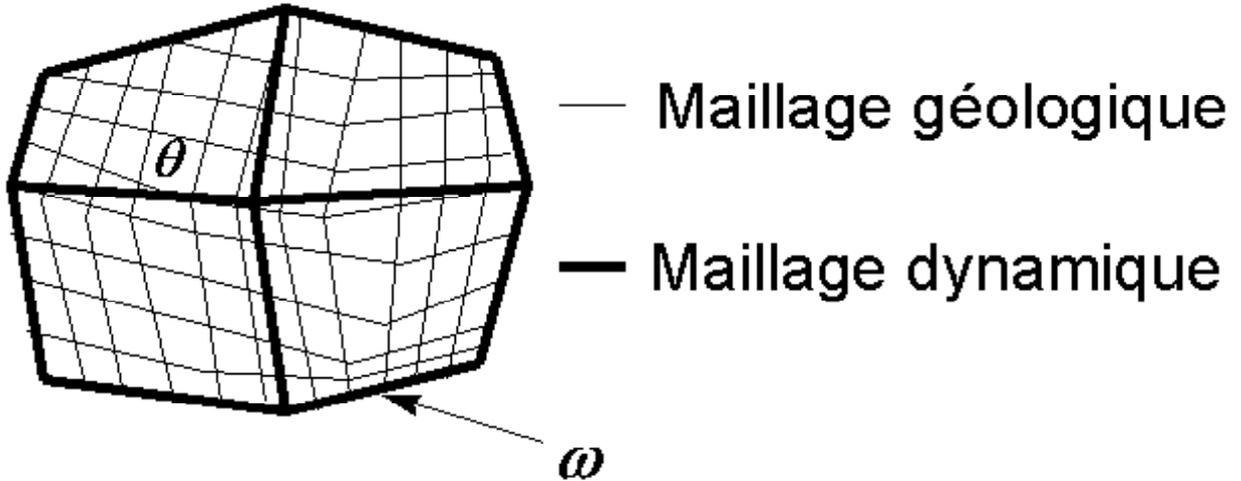


Figure 2.1: Données du problème

### 2.3 Méthode linéaire

On considère un domaine finement maillé (voir figure 2.1), où le tenseur de perméabilité  $K$  est supposé connu dans chaque maille fine  $\theta$ . Notre but est de trouver un tenseur équivalent, noté  $K^*$ , qui représentera la valeur de la perméabilité absolue de la maille grossière  $\omega$  dans le simulateur. Pour cela, on applique la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires qui a été rappelée au premier chapitre, de la manière suivante :

Pour tout ouvert  $\omega \subset \Omega$ , les coefficients du tenseur  $K^*$  sont donnés par la formule :

$$K_{ij}^* = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) \nabla p_i \cdot \nabla p_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (2.1)$$

où les fonctions  $(p_i)_{1 \leq i \leq d}$  sont solutions des problèmes locaux :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [K(x) \nabla p_i] = 0 & \text{dans } \omega \\ p_i = x_i & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (2.2)$$

On notera que le tenseur équivalent  $K^*$  est symétrique défini positif. En général, bien que le tenseur de perméabilité  $K$  est diagonal à l'échelle du maillage fin, on obtient des tenseurs équivalents comportant des termes extra-diagonaux qui peuvent être non négligeables dans certains cas. Ces situations sont rencontrées lors du traitement de certains maillages déstructurés modélisant des réservoirs réels.

### 2.3.1 Encadrement numérique du tenseur équivalent

Concernant l'encadrement numérique du tenseur équivalent, les premiers travaux sont dus à Hill, Mandell repris par Suquet [81]. Marini [59], dont les travaux ont été rappelés au chapitre 1, traite le cas de l'homogénéisation périodique et obtient des résultats valables uniquement dans un espace de dimension deux. Pour ce qui est de la méthode linéaire, Corre et al. [24] ont mené des travaux relativement sommaires sur le sujet. Par ailleurs une autre approche qui a été présentée au premier chapitre a été développée par Badea et Bourgeat [7] pour encadrer numériquement le tenseur équivalent donné par la théorie de l'homogénéisation stochastique.

La détermination du tenseur de perméabilité équivalent donné par (2.1) nécessite le calcul des fonctions  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , solutions des problèmes locaux (2.2). Dans ce paragraphe on utilise à la fois la méthode des éléments finis conformes et la méthode des éléments finis mixtes pour résoudre les problèmes locaux et obtenir des approximations du tenseur équivalent.

On montre, dans un cadre multidimensionnel général, que la méthode des éléments finis conformes donne une approximation numérique du tenseur équivalent, qui converge par valeur supérieure vers le tenseur de perméabilité équivalent, alors que la méthode des éléments finis mixtes fournit une approximation convergeant par valeur inférieure [4]. Ainsi, lorsque l'on raffine le maillage éléments finis, les approximations inférieures et supérieures convergent vers le tenseur équivalent, ce qui permet d'obtenir des approximations numériques précises. L'encadrement numérique du tenseur équivalent permet donc de juger la qualité de l'approximation obtenue.

Dans l'optique d'appliquer la méthode des éléments finis conformes, on effectue un changement de la fonction inconnue  $p_i$  du problème (2.2). Le problème local (2.2) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [K(x) (\nabla w_i + \vec{e}_i)] = 0 & \text{dans } \omega \\ w_i = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $w_i = p_i - x_i$ . Le terme générique du tenseur équivalent  $K^*$  est par conséquent donné par :

$$K_{ij}^* = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) [\nabla w_i + \vec{e}_i] \cdot [\nabla w_j + \vec{e}_j] dx \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (2.4)$$

Considérons la formulation variationnelle de (2.3)

$$\begin{cases} w_i \in H_0^1(\omega) \\ a(w_i, v) = L^{\vec{e}_i}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \end{cases} \quad (2.5)$$

La solution du problème (2.5) est aussi solution du problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} w_i \in H_0^1(\omega) \\ J_{\vec{e}_i}(w_i) = \inf_{v \in H_0^1(\omega)} J_{\vec{e}_i}(v) \end{cases} \quad (2.6)$$

Soit  $V_h^0 \subset H_0^1(\omega)$  un espace d'approximation obtenu en utilisant la méthode des éléments finis conformes, (voir par exemple [23]), où  $h$  est la taille de la triangulation régulière de  $\bar{\omega}$ .

On introduit  $w_{ih}$  la solution discrète obtenue par la méthode des éléments finis conformes et qui satisfait :

$$\begin{cases} w_{ih} \in V_h^0 \\ a(w_{ih}, v_h) = L^{\vec{e}_i}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$w_{ih}$  qui est la solution discrète du problème (2.3), est également la solution du problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} w_i \in V_h^0 \\ J_{\vec{e}_i}(w_{ih}) = \inf_{v_h \in V_h^0} J_{\vec{e}_i}(v_h) \end{cases} \quad (2.8)$$

A partir des solutions discrètes  $w_{ih}$  du problème (2.7) on définit l'approximation  $\overline{K}_h^*$  du tenseur de perméabilité  $K^*$  donnée par :

$$(\overline{K}_h^*)_{ij} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) [\nabla w_{ih} + \vec{e}_i] \cdot [\nabla w_{jh} + \vec{e}_j] dx \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (2.9)$$

L'utilisation de la méthode des éléments finis mixtes nécessite d'écrire le problème local (2.2) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{q}}_i = -K(x)\nabla p_i & \text{dans } \omega \\ \text{div}(\vec{\mathbf{q}}_i) = 0 & \text{dans } \omega \\ p_i = x_i & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (2.10)$$

On associe alors au problème (2.10) la formulation variationnelle mixte suivante :

$$\begin{cases} (\vec{\mathbf{q}}_i, p_i) \in H(\text{div}, \omega) \times L^2(\omega) \\ \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{q}}_i \cdot \vec{\mathbf{s}} dx - \int_{\omega} p_i \text{div}(\vec{\mathbf{s}}) dx = - \langle \vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{n}}, x_i \rangle \quad \forall \vec{\mathbf{s}} \in H(\text{div}, \omega) \\ \int_{\omega} v \text{div}(\vec{\mathbf{q}}_i) dx = 0 \quad \forall v \in L^2(\omega) \end{cases} \quad (2.11)$$

Le problème (2.11) possède une solution unique, (voir par exemple [19]), caractérisée par le problème de point selle suivant :

$$\mathcal{L}_{x_i}(\vec{\mathbf{q}}_i, p_i) = \inf_{\vec{\mathbf{s}} \in H(\text{div}, \omega)} \sup_{v \in L^2(\omega)} \mathcal{L}_{x_i}(\vec{\mathbf{s}}, v) \quad (2.12)$$

De plus, le problème (2.11) est équivalent à la formulation duale

$$\mathcal{L}_{x_i}(\vec{\mathbf{q}}_i, p_i) = \inf_{\vec{\mathbf{s}} \in H_0(\text{div}, \omega)} \mathcal{L}_{x_i}(\vec{\mathbf{s}}, p_i) \quad (2.13)$$

Pour obtenir une approximation numérique, notée  $\underline{K}_h^*$ , du tenseur de perméabilité équivalent  $K^*$  en utilisant la formulation variationnelle mixte (2.11), on considère la famille de triangulation régulière de  $\bar{\omega}$  de diamètre  $h$ . On introduit les espaces d'approximations suivants  $X_h \subset H(\text{div}, \omega)$  et  $M_h \subset L^2(\omega)$  des fonctions polynômiales par morceaux. Les approximations obtenues par la méthode des éléments finis mixtes  $(\vec{\mathbf{q}}_{ih}, p_{ih}) \in X_h \times M_h$  de  $(\vec{\mathbf{q}}_i, p_i) \in H(\text{div}, \omega) \times L^2(\omega)$  sont solutions du problème :

$$\begin{cases} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{q}}_{ih} \cdot \vec{\mathbf{s}}_h \, dx - \int_{\omega} p_{ih} \text{div}(\vec{\mathbf{s}}_h) \, dx = - \langle \vec{\mathbf{s}}_h \cdot \vec{\mathbf{n}}, x_i \rangle & \forall \vec{\mathbf{s}}_h \in X_h \\ \int_{\omega} v_h \text{div}(\vec{\mathbf{q}}_{ih}) \, dx = 0 & \forall v_h \in M_h \end{cases} \quad (2.14)$$

Des exemples d'espaces  $(X_h, M_h)$  satisfaisant la condition classique inf-sup sont les éléments de Raviart-Thomas triangulaires et rectangulaires [72], [75] et les éléments tétraédriques de Nedelec [62] (pour d'autres exemples voir [19], [37]).

On définit alors l'approximation  $\underline{K}_h^*$  de  $K^*$  par :

$$(\underline{K}_h^*)_{ij} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{q}}_{ih} \cdot \vec{\mathbf{q}}_{jh} \, dx \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (2.15)$$

On a alors le résultat suivant :

**Théorème 2.3.1** *Soient  $\omega$  un ouvert borné convexe, de frontière  $\partial\omega$  Lipschitz continue, et  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ . On suppose que  $\overline{K}_h^*$  [resp.  $\underline{K}_h^*$ ] est donné par la relation (2.9) [resp. (2.15)]. Alors on a les estimations suivantes :*

$$I_{-1, \omega}(K) \leq \underline{K}_h^* \leq K^* \leq \overline{K}_h^* \leq I_{1, \omega}(K) \quad (2.16)$$

où  $K^*$  est le tenseur équivalent obtenu par la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires.

Démonstration :

Soit  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\vec{\xi} = \sum_{i=1}^d \xi_i \vec{\mathbf{e}}_i$ . On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{Q}}_h &= \sum_{i=1}^d \xi_i \vec{\mathbf{q}}_{ih} & P_h &= \sum_{i=1}^d \xi_i p_{ih} & g &= \sum_{i=1}^d \xi_i x_i \\ \vec{\mathbf{Q}} &= \sum_{i=1}^d \xi_i \vec{\mathbf{q}}_i & P &= \sum_{i=1}^d \xi_i p_i \\ W_h &= \sum_{i=1}^d \xi_i w_{ih} & W &= \sum_{i=1}^d \xi_i w_i \end{aligned}$$

En utilisant le problème (2.11) [resp. (2.14)] et par linéarité on obtient que

$$\begin{cases} (\vec{\mathbf{Q}}, P) \in H(\text{div}, \omega) \times L^2(\omega) \\ \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{Q}} \cdot \vec{\mathbf{s}} \, dx - \int_{\omega} P \, \text{div}(\vec{\mathbf{s}}) \, dx = - \langle \vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g \rangle \quad \forall \vec{\mathbf{s}} \in H(\text{div}, \omega) \\ \int_{\omega} v \, \text{div}(\vec{\mathbf{Q}}) \, dx = 0 \quad \forall v \in L^2(\omega) \end{cases} \quad (2.17)$$

et que  $(\vec{\mathbf{Q}}_h, P_h) \in X_h \times M_h$  est la solution du problème

$$\begin{cases} (\vec{\mathbf{Q}}_h, P_h) \in X_h \times M_h \\ \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{Q}}_h \cdot \vec{\mathbf{s}}_h \, dx - \int_{\omega} P_h \, \text{div}(\vec{\mathbf{s}}_h) \, dx = - \langle \vec{\mathbf{s}}_h \cdot \vec{\mathbf{n}}, g \rangle \quad \forall \vec{\mathbf{s}}_h \in X_h \\ \int_{\omega} v_h \, \text{div}(\vec{\mathbf{Q}}_h) \, dx = 0 \quad \forall v_h \in M_h \end{cases} \quad (2.18)$$

Le problème (2.17) est équivalent à la formulation duale

$$\mathcal{L}_g(\vec{\mathbf{Q}}, P) = \inf_{\vec{\mathbf{s}} \in H_0(\text{div}, \omega)} \mathcal{L}_g(\vec{\mathbf{s}}, P) \quad (2.19)$$

En utilisant (2.15) on obtient que

$$\underline{K}_h^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{Q}}_h \cdot \vec{\mathbf{Q}}_h \, dx \quad (2.20)$$

De la même manière que précédemment, en utilisant les problèmes (2.5) [resp. (2.7)] et par linéarité, on obtient que  $W$  est la solution du problème :

$$\begin{cases} W \in H_0^1(\omega) \\ a(W, v) = L^{\vec{\xi}}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \end{cases} \quad (2.21)$$

et  $W_h$  est la solution du problème discret :

$$\begin{cases} W_h \in V_h^0 \\ a(W_h, v_h) = L^{\vec{\xi}}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Par ailleurs, les problèmes (2.21) et (2.22) sont respectivement équivalents aux problèmes de minimisation ci-dessous :

$$\begin{cases} W \in H_0^1(\omega) \\ J_{\vec{\xi}}(W) = \inf_{v \in H_0^1(\omega)} J_{\vec{\xi}}(v) \end{cases} \quad (2.23)$$

et

$$\begin{cases} W_h \in V_h^0 \\ J_{\vec{\xi}}(W_h) = \inf_{v_h \in V_h^0} J_{\vec{\xi}}(v_h) \end{cases} \quad (2.24)$$

En utilisant (2.9) on obtient

$$\overline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) [\nabla W_h + \vec{\xi}] \cdot [\nabla W_h + \vec{\xi}] dx \quad (2.25)$$

On doit démontrer que

$$I_{-1,\omega}(K) \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq \underline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq K^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq \overline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq I_{1,\omega}(K) \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \quad (2.26)$$

Or  $X_h \subset H(\text{div}, \omega)$ , d'où en utilisant (2.19) on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{Q} \cdot \vec{Q} dx + \langle \vec{Q} \cdot \vec{n}, g \rangle &\leq \\ \frac{1}{2} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{Q}_h \cdot \vec{Q}_h dx + \langle \vec{Q}_h \cdot \vec{n}, g \rangle & \end{aligned} \quad (2.27)$$

D'autre part, pour  $(\vec{s}, v) = (\vec{Q}, P)$  dans (2.17) et  $(\vec{s}_h, v_h) = (\vec{Q}_h, P_h)$  dans (2.18), on obtient

$$\begin{cases} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{Q} \cdot \vec{Q} dx = - \langle \vec{Q} \cdot \vec{n}, g \rangle \\ \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{Q}_h \cdot \vec{Q}_h dx = - \langle \vec{Q}_h \cdot \vec{n}, g \rangle \end{cases} \quad (2.28)$$

D'où :

$$-\frac{1}{2} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{Q} \cdot \vec{Q} dx \leq -\frac{1}{2} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{Q}_h \cdot \vec{Q}_h dx \quad (2.29)$$

et d'après (2.20), on a :

$$\underline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq K^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \quad (2.30)$$

Montrons que  $I_{-1,\omega}(K) \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq \underline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi}$ .

Comme  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  on a  $K^{-1} \in M\left(\frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_1}, \Omega\right)$ , d'où

$$\int_{\omega} K^{-1}(x) (\vec{Q}_h + \underline{K_h^*} \vec{\xi}) \cdot (\vec{Q}_h + \underline{K_h^*} \vec{\xi}) dx \geq 0 \quad (2.31)$$

En développant (2.31) on obtient

$$\int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{Q}_h \cdot \vec{Q}_h dx + 2 \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{Q}_h \cdot \underline{K_h^*} \vec{\xi} dx + \int_{\omega} K^{-1}(x) \underline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \underline{K_h^*} \vec{\xi} dx \geq 0 \quad (2.32)$$

En prenant  $(\vec{s}_h, v_h) = (\underline{K_h^*} \vec{\xi}, P_h)$  dans (2.18) on obtient

$$\int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{Q}_h \cdot \underline{K_h^*} \vec{\xi} dx = - \langle \underline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \vec{n}, g \rangle \quad (2.33)$$

ce qui donne d'après (2.20) et (2.33) :

$$\int_{\omega} \underline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} dx - 2 \langle \underline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \vec{n}, g \rangle + \int_{\omega} K^{-1}(x) \underline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \underline{K_h^*} \vec{\xi} dx \geq 0 \quad (2.34)$$

Or d'après la formule de Green on a :

$$\int_{\omega} \underline{K}_h^* \vec{\xi} \cdot \nabla (\vec{\xi} \cdot \vec{x}) dx = - \int_{\omega} \operatorname{div} (\underline{K}_h^* \vec{\xi}) \vec{\xi} \cdot \vec{x} dx + \langle \underline{K}_h^* \vec{\xi} \cdot \vec{n}, g \rangle \quad (2.35)$$

D'autre part, le tenseur  $\underline{K}_h^*$  étant constant sur  $\omega$ ,  $\operatorname{div} (\underline{K}_h^* \vec{\xi}) = 0$ , et alors :

$$\int_{\omega} \underline{K}_h^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} dx = \langle \underline{K}_h^* \vec{\xi} \cdot \vec{n}, g \rangle . \quad (2.36)$$

Par conséquent, grâce à (2.34) et (2.36) on a :

$$\int_{\omega} K^{-1}(x) \underline{K}_h^* \vec{\xi} \cdot \underline{K}_h^* \vec{\xi} dx \geq \int_{\omega} \underline{K}_h^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} dx \quad (2.37)$$

ce qui est équivalent à

$$\int_{\omega} K^{-1}(x) \underline{K}_h^* \vec{\xi} \cdot \underline{K}_h^* \vec{\xi} dx \geq \int_{\omega} (\underline{K}_h^*)^{-1} \underline{K}_h^* \vec{\xi} \cdot \underline{K}_h^* \vec{\xi} dx \quad (2.38)$$

On pose  $\vec{\eta} = \underline{K}_h^* \vec{\xi}$ . Lorsque le vecteur  $\vec{\xi}$  parcourt  $\mathbb{R}^d$ , le vecteur  $\vec{\eta}$  parcourt également  $\mathbb{R}^d$ . De (2.38) on déduit que

$$\int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\eta} \cdot \vec{\eta} dx \geq \int_{\omega} (\underline{K}_h^*)^{-1} \vec{\eta} \cdot \vec{\eta} dx \quad (2.39)$$

c'est à dire,

$$\left( \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^{-1}(x) dx \right) \vec{\eta} \cdot \vec{\eta} \geq (\underline{K}_h^*)^{-1} \vec{\eta} \cdot \vec{\eta} \quad (2.40)$$

pour tout  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^d$ , d'où on a

$$\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^{-1}(x) dx \geq (\underline{K}_h^*)^{-1} \quad (2.41)$$

ce qui est équivalent à :

$$I_{-1,\omega}(K) \leq \underline{K}_h^*. \quad (2.42)$$

Maintenant, on démontre que  $K^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq \overline{K}_h^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi}$ .

Comme l'espace  $V_h^0$  est inclus dans  $H_0^1(\omega)$ , en utilisant le problème de minimisation (2.23) on obtient

$$\frac{1}{2} a(W, W) - L^{\vec{\xi}}(W) \leq \frac{1}{2} a(W_h, W_h) - L^{\vec{\xi}}(W_h) \quad (2.43)$$

C'est à dire que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\omega} K(x) \nabla W \cdot \nabla W dx + \int_{\omega} K(x) \vec{\xi} \cdot \nabla W dx \leq \\ \frac{1}{2} \int_{\omega} K(x) \nabla W_h \cdot \nabla W_h dx + \int_{\omega} K(x) \vec{\xi} \cdot \nabla W_h dx \end{aligned} \quad (2.44)$$

En rajoutant de chaque côté de l'inégalité  $\frac{1}{2} \int_{\omega} K(x) \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} dx$  et en multipliant par  $\frac{2}{|\omega|}$ , on obtient grâce à (2.25)

$$K^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq \overline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \quad (2.45)$$

En utilisant le problème de minimisation (2.24) et en prenant  $v_h = 0$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{\omega} K(x) \nabla W_h \cdot \nabla W_h dx + \int_{\omega} K(x) \vec{\xi} \cdot \nabla W_h dx \leq 0 \quad (2.46)$$

On rajoute de chaque côté de l'inégalité  $\frac{1}{2} \int_{\omega} K(x) \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} dx$  et on multiplie par  $\frac{2}{|\omega|}$ , on obtient alors :

$$\overline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq I_{1,\omega}(K) \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \quad \square. \quad (2.47)$$

### 2.3.2 Encadrement pour les termes extra-diagonaux

Pour avoir une bonne approximation des coefficients du tenseur équivalent, il est souvent intéressant d'avoir un encadrement pour le terme générique  $(K^*)_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq d$ . C'est l'objet du paragraphe qui suit. Grâce au résultat général (2.16), on dispose d'un encadrement immédiat pour les termes diagonaux en prenant  $\vec{\xi} = \vec{e}_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ . On a alors

$$(\underline{K_h^*})_{ii} \leq (K^*)_{ii} \leq (\overline{K_h^*})_{ii} \quad 1 \leq i \leq d \quad (2.48)$$

d'où les estimations ci-dessous

$$\begin{aligned} 0 &\leq (K^*)_{ii} - (\underline{K_h^*})_{ii} \leq (\overline{K_h^*})_{ii} - (\underline{K_h^*})_{ii} \\ 0 &\leq (\overline{K_h^*})_{ii} - (K^*)_{ii} \leq (\overline{K_h^*})_{ii} - (\underline{K_h^*})_{ii} \end{aligned} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (2.49)$$

Concernant les termes extra-diagonaux, on a le résultat suivant :

**Proposition 2.3.2** *Sous les hypothèses du théorème 2.3.1, on a :*

$$\left| (K^*)_{ij} - \frac{1}{2} [(\overline{K_h^*})_{ij} + (\underline{K_h^*})_{ij}] \right| \leq \frac{1}{4} [(\overline{K_h^*})_{ii} - (\underline{K_h^*})_{ii} + (\overline{K_h^*})_{jj} - (\underline{K_h^*})_{jj}] \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (2.50)$$

Démonstration :

On a les identités

$$K^*(\vec{e}_i + \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_i + \vec{e}_j) = (K^*)_{ii} + 2 (K^*)_{ij} + (K^*)_{jj} \quad (2.51)$$

$$K^*(\vec{e}_i - \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_i - \vec{e}_j) = (K^*)_{ii} - 2 (K^*)_{ij} + (K^*)_{jj} \quad (2.52)$$

En utilisant (2.51) et en prenant  $\vec{\xi} = (\vec{e}_i + \vec{e}_j)$  dans (2.26) on a :

$$(\underline{K_h^*})_{ii} + 2 (\underline{K_h^*})_{ij} + (\underline{K_h^*})_{jj} \leq (K^*)_{ii} + 2 (K^*)_{ij} + (K^*)_{jj} \leq (\overline{K_h^*})_{ii} + 2 (\overline{K_h^*})_{ij} + (\overline{K_h^*})_{jj} \quad (2.53)$$

De la même manière en utilisant (2.52) et en prenant  $\vec{\xi} = (\vec{e}_i - \vec{e}_j)$  dans (2.26) on a :

$$(\underline{K}_h^*)_{ii} - 2(\underline{K}_h^*)_{ij} + (\underline{K}_h^*)_{jj} \leq (K^*)_{ii} - 2(K^*)_{ij} + (K^*)_{jj} \leq (\overline{K}_h^*)_{ii} - 2(\overline{K}_h^*)_{ij} + (\overline{K}_h^*)_{jj} \quad (2.54)$$

D'après (2.53) et (2.54) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\underline{K}_h^*)_{ii} - (\overline{K}_h^*)_{ii} + \\ (\underline{K}_h^*)_{jj} - (\overline{K}_h^*)_{jj} + \\ 2 [(\overline{K}_h^*)_{ij} + (\underline{K}_h^*)_{ij}] \end{array} \right\} \leq 4 (K^*)_{ij} \leq \left\{ \begin{array}{l} (\overline{K}_h^*)_{ii} - (\underline{K}_h^*)_{ii} + \\ (\overline{K}_h^*)_{jj} - (\underline{K}_h^*)_{jj} + \\ 2 [(\overline{K}_h^*)_{ij} + (\underline{K}_h^*)_{ij}] \end{array} \right\} \quad (2.55)$$

d'où le résultat (2.50)  $\square$ .

**Remarque 2.3.3** La moyenne  $\frac{1}{2} [(\overline{K}_h^*)_{ij} + (\underline{K}_h^*)_{ij}]$  donnera, en général, une approximation numérique du tenseur équivalent  $(K^*)_{ij}$  plus précise que  $(\underline{K}_h^*)_{ij}$  où  $(\overline{K}_h^*)_{ij}$  pour  $1 \leq i, j \leq d$ .

### 2.3.3 Estimations d'erreurs et convergence des approximations

Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent sont valables pour une triangulation donnée du domaine  $\omega$ . Or, dans certaines situations, notamment lorsque les perméabilités absolues varient "fortement" au sein du domaine  $\omega$ , les encadrements numériques obtenus ne sont pas satisfaisants. On a alors recours au raffinement de maillage qui permet de réduire cet encadrement numérique. Ainsi l'approximation numérique du tenseur équivalent  $\underline{K}_h^*$  [resp.  $\overline{K}_h^*$ ] obtenue en utilisant la méthode des éléments finis mixtes [resp. conformes] converge vers la valeur théorique  $K^*$  lorsque l'on raffine le maillage. Plus précisément, sous certaines hypothèses, on démontre le résultat suivant :

**Proposition 2.3.4** Soit  $\omega$  un ouvert borné convexe, de frontière  $\partial\omega$  Lipschitz continue. On suppose que la matrice symétrique  $K \in (C^1(\omega))^{d^2}$ .

Alors on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\underline{K}_h^*)_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} (\overline{K}_h^*)_{ij} = (K^*)_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (2.56)$$

$$\|\underline{K}_h^* - K^*\|_S = \|\overline{K}_h^* - K^*\|_S = O(h). \quad (2.57)$$

Démonstration :

On montre d'abord que  $\lim_{h \rightarrow 0} (\overline{K}_h^*)_{ii} = (K^*)_{ii}$ ,  $1 \leq i \leq d$ .

Par définition on a

$$(K^*)_{ii} - (\overline{K}_h^*)_{ii} = \frac{1}{|\omega|} \left[ \int_{\omega} K(x) (\nabla w_i + \vec{e}_i) \cdot (\nabla w_i + \vec{e}_i) dx - \int_{\omega} K(x) (\nabla w_{ih} + \vec{e}_i) \cdot (\nabla w_{ih} + \vec{e}_i) dx \right] \quad (2.58)$$

soit encore

$$(K^*)_{ii} - (\overline{K_h^*})_{ii} = \frac{1}{|\omega|} [a(w_i - w_{ih}, w_{ih} - w_i) + 2a(w_i - w_{ih}, w_i + x_i)] \quad (2.59)$$

Comme  $K \in (C^1(\omega))^{d^2}$  de (2.59), on obtient la majoration suivante:

$$\left| (\overline{K_h^*})_{ii} - (K^*)_{ii} \right| \leq C \left( |w_i - w_{ih}|_{1,\omega}^2 + |w_i - w_{ih}|_{1,\omega} \right) \quad (2.60)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

Or on a :

$$|w_i - w_{ih}|_{1,\omega} \leq Ch |w_i|_{2,\omega} \quad (2.61)$$

C'est un résultat classique basé sur un résultat de régularité [38] ainsi que sur les estimations d'erreurs, relatives à la méthode des éléments finis conformes qui peuvent être trouvées dans [69].

En utilisant alors (2.61) on obtient

$$\left| (\overline{K_h^*})_{ii} - (K^*)_{ii} \right| \leq Ch \quad 1 \leq i \leq d \quad (2.62)$$

Par conséquent on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\overline{K_h^*})_{ii} = (K^*)_{ii} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (2.63)$$

On traite maintenant le cas des termes extra-diagonaux. De la relation (2.16) on déduit que :

$$K^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq \overline{K_h^*} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^d \quad (2.64)$$

d'où en prenant  $\vec{\xi} = (\vec{e}_i - \vec{e}_j)$  on a :

$$(K^*)_{ii} - 2(K^*)_{ij} + (K^*)_{jj} \leq (\overline{K_h^*})_{ii} - 2(\overline{K_h^*})_{ij} + (\overline{K_h^*})_{jj} \quad (2.65)$$

soit encore

$$2 \left[ (\overline{K_h^*})_{ij} - (K^*)_{ij} \right] \leq (\overline{K_h^*})_{ii} - (K^*)_{ii} + (\overline{K_h^*})_{jj} - (K^*)_{jj} \quad (2.66)$$

En prenant  $\vec{\xi} = (\vec{e}_i + \vec{e}_j)$  dans (2.64) on a:

$$(K^*)_{ii} + 2(K^*)_{ij} + (K^*)_{jj} \leq (\overline{K_h^*})_{ii} + 2(\overline{K_h^*})_{ij} + (\overline{K_h^*})_{jj} \quad (2.67)$$

soit encore

$$(K^*)_{ii} - (\overline{K_h^*})_{ii} + (K^*)_{jj} - (\overline{K_h^*})_{jj} \leq 2 \left[ (\overline{K_h^*})_{ij} - (K^*)_{ij} \right] \quad (2.68)$$

Des relations (2.66) et (2.68) on obtient:

$$\left| (\overline{K_h^*})_{ij} - (K^*)_{ij} \right| \leq \frac{1}{2} \left[ (\overline{K_h^*})_{ii} - (K^*)_{ii} + (\overline{K_h^*})_{jj} - (K^*)_{jj} \right] \quad (2.69)$$

d'où en utilisant la relation (2.62) on trouve

$$\left| (\overline{K_h^*})_{ij} - (K^*)_{ij} \right| \leq Ch \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (2.70)$$

Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\overline{K_h^*})_{ij} = (K^*)_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (2.71)$$

En utilisant (2.70) on a

$$\left\| \overline{K_h^*} - K^* \right\|_S = \left( \sum_{i,j=1}^d \left| (\overline{K_h^*})_{ij} - (K^*)_{ij} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch \quad (2.72)$$

la seconde égalité de (2.57) est alors acquise.

On montre maintenant que l'approximation numérique inférieure  $\underline{K_h^*}$  converge vers le tenseur théorique  $K^*$ .

Montrons d'abord que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\underline{K_h^*})_{ii} = (K^*)_{ii} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (2.73)$$

On a par définition

$$(\underline{K_h^*})_{ii} - (K^*)_{ii} = \frac{1}{|\omega|} \left[ \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{q}}_{ih} \cdot \vec{\mathbf{q}}_{ih} dx - \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{q}}_i \cdot \vec{\mathbf{q}}_i dx \right] \quad (2.74)$$

Ce qui se réécrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} (\underline{K_h^*})_{ii} - (K^*)_{ii} = \frac{1}{|\omega|} & \left[ \int_{\omega} K^{-1}(x) (\vec{\mathbf{q}}_{ih} - \vec{\mathbf{q}}_i) \cdot (\vec{\mathbf{q}}_{ih} - \vec{\mathbf{q}}_i) dx \right. \\ & \left. + 2 \int_{\omega} K^{-1}(x) (\vec{\mathbf{q}}_{ih} - \vec{\mathbf{q}}_i) \cdot \vec{\mathbf{q}}_i dx \right] \end{aligned} \quad (2.75)$$

d'où on obtient la majoration suivante :

$$\left| (\underline{K_h^*})_{ii} - (K^*)_{ii} \right| \leq C \left( \left\| \vec{\mathbf{q}}_{ih} - \vec{\mathbf{q}}_i \right\|_{0,\omega}^2 + \left\| \vec{\mathbf{q}}_{ih} - \vec{\mathbf{q}}_i \right\|_{0,\omega} \right) \quad (2.76)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ .

Par ailleurs, un résultat classique sur les estimations d'erreur de la méthode des éléments finis mixtes [69] permet d'obtenir que :

$$\left\| \vec{\mathbf{q}}_i - \vec{\mathbf{q}}_{ih} \right\|_{0,\omega} \leq Ch \left| \vec{\mathbf{q}}_i \right|_{1,\omega} \quad (2.77)$$

En utilisant alors (2.77) on obtient

$$\left| (\underline{K_h^*})_{ii} - (K^*)_{ii} \right| \leq Ch \quad 1 \leq i \leq d \quad (2.78)$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\underline{K_h^*})_{ii} = (K^*)_{ii} \quad 1 \leq i \leq d \quad (2.79)$$

or on sait d'après la relation (2.30) que :

$$\underline{K}_h^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq K^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^d \quad (2.80)$$

De la même manière que précédemment, on obtient la relation suivante

$$\left| (K^*)_{ij} - (\underline{K}_h^*)_{ij} \right| \leq \frac{1}{2} \left[ (K^*)_{ii} - (\underline{K}_h^*)_{ii} + (K^*)_{jj} - (\underline{K}_h^*)_{jj} \right] \quad (2.81)$$

De (2.78) et (2.81) on a

$$\left| (K^*)_{ij} - (\underline{K}_h^*)_{ij} \right| \leq Ch \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (2.82)$$

Par conséquent

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\underline{K}_h^*)_{ij} = (K^*)_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (2.83)$$

Finalement, d'après (2.82) on a

$$\left\| \underline{K}_h^* - K^* \right\|_S = \left( \sum_{i,j=1}^d \left| (\underline{K}_h^*)_{ij} - (K^*)_{ij} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch \quad (2.84)$$

d'où la première égalité de (2.57)  $\square$ .

### 2.3.4 Etude d'un contexte symétrique

On s'intéresse ici à un cas symétrique, c'est à dire à une situation où la distribution de perméabilité  $K$  est symétrique par rapport aux axes de coordonnées. En s'inspirant des travaux de Bourgat et Dervieux [14], on montre que la mise à l'échelle d'une distribution de perméabilité constituée de tenseurs isotropes répartie sur un domaine symétrique fournit un tenseur équivalent diagonal. Ce résultat est donné par la proposition qui suit.

**Proposition 2.3.5** *On suppose que le tenseur  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  est diagonal et que la distribution de perméabilité  $K$ , ainsi que le domaine  $\omega$ , sont symétriques par rapport aux axes de coordonnées. Alors le tenseur équivalent  $K^*$  obtenu par la méthode linéaire vérifie:*

$$K_{ij}^* = 0 \quad \begin{cases} 1 \leq i, j \leq d \\ i \neq j \end{cases}.$$

Avant de démontrer la proposition 2.3.5, on introduit quelques notations.

On note  $S_i$  le point symétrique du point  $S$  par rapport à l'hyperplan  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , comme indiqué dans la figure 2.2. On considère un ensemble de paramètres  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$  prenant les valeurs 0 ou 1, que l'on munit de l'algèbre de Boole. Soit une fonction  $\phi$  définie sur  $\omega$ , on définit alors l'ensemble  $S_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}$  par

$$S_{\alpha_1, \dots, \alpha_d} = \{ \phi / \phi(S_i) = (-1)^{\alpha_i} \phi(S), 1 \leq i \leq d, \forall S \in \omega \} \quad (2.85)$$

On dispose alors des propriétés suivantes qui peuvent être trouvées dans [14].

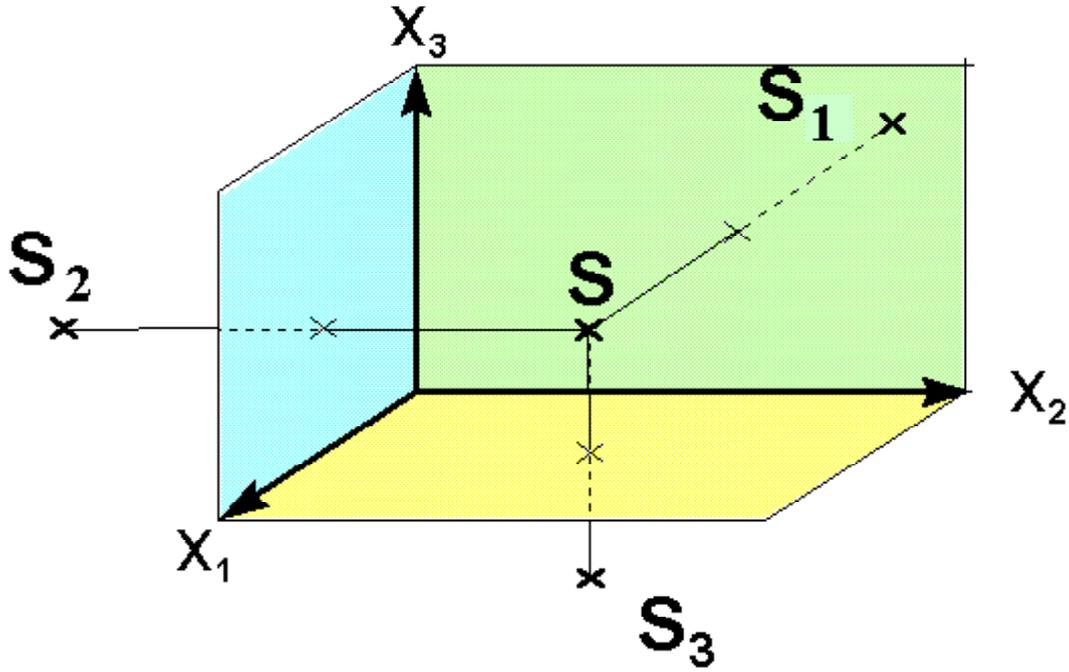


Figure 2.2:  $S_i$  est le point symétrique de  $S$  par rapport à l'hyperplan  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

**Lemme 2.3.6** Soit une fonction  $\phi \in S_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}$ . On a les propriétés suivantes :

- i) Si  $\varphi \in S_{\beta_1, \dots, \beta_d}$  alors  $\phi\varphi \in S_{\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_d+\beta_d}$
- ii)  $\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \in S_{\alpha_1, \dots, \alpha_i+1, \dots, \alpha_d}$
- iii) S'il existe un indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , tel que  $\alpha_i$  est impair alors  $\int_{\omega} \phi dx = 0$

On démontre maintenant la proposition 2.3.5.

Démonstration :

La distribution symétrique de perméabilité  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  se traduit de la manière suivante:

$$K_{ij} \in S_{0,0,\dots,0} \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (2.86)$$

Une formulation variationnelle du problème (2.2) est donnée par :

$$\begin{cases} p_i \in H^1(\omega) \\ \int_{\omega} K(x) \nabla p_i \cdot \nabla v dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\omega) & 1 \leq i \leq d. \\ p_i = x_i & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (2.87)$$

En prenant  $v = p_j - x_j$  on obtient :

$$\int_{\omega} K(x) \nabla p_i \cdot \nabla p_j dx = \int_{\omega} K(x) \nabla p_i \cdot \nabla x_j dx \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (2.88)$$

En utilisant (2.1) on a :

$$|\omega| K_{ij}^* = \int_{\omega} K(x) \nabla p_i \cdot \vec{e}_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (2.89)$$

soit encore

$$K_{ij}^* = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \left[ \sum_{k=1}^d K_{jk}(x) \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \right] dx \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (2.90)$$

Or  $K$  est diagonal d'où :

$$K_{ij}^* = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K_{jj}(x) \frac{\partial p_i}{\partial x_j} dx \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (2.91)$$

Montrons que  $\int_{\omega} K_{jj}(x) \frac{\partial p_i}{\partial x_j} dx = 0$ , pour  $\begin{cases} 1 \leq i, j \leq d \\ i \neq j \end{cases}$ .

Pour cela on montre d'abord que la fonction  $p_i$  solution du problème (2.87) appartient à l'ensemble  $S_{0,0,\dots,1,\dots,0}$

Par définition la fonction  $x_i \in S_{0,0,\dots,1,\dots,0}$ . On pose

$$\tilde{x}_i = (-1)^{\alpha_i} x_i \quad 1 \leq i \leq d \quad (2.92)$$

où  $\alpha_i = \delta_{l,i}$ .

On introduit également la fonction  $\tilde{p}_i^l$  définie par  $\tilde{p}_i^l(S) = p_i(S_i)$ ,  $1 \leq l \leq d$ . On a alors que  $\tilde{p}_i^l$  est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} \tilde{p}_i^l \in H^1(\omega) \\ \int_{\omega} K(x) \nabla \tilde{p}_i^l \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \\ \tilde{p}_i^l = \tilde{x}_i \quad \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i, l \leq d. \quad (2.93)$$

En posant  $\tilde{w}_i^l = \tilde{p}_i^l - \tilde{x}_i$  on a

$$\int_{\omega} K(x) \nabla \tilde{w}_i^l \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\omega} K(x) \nabla \tilde{x}_i \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \quad (2.94)$$

or en utilisant (2.92) on obtient:

$$\int_{\omega} K(x) \nabla \tilde{w}_i^l \cdot \nabla v \, dx = - (-1)^{\alpha_i} \int_{\omega} K(x) \nabla x_i \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \quad (2.95)$$

En posant  $w_i = p_i - x_i$  dans (2.87) on obtient:

$$\int_{\omega} K(x) \nabla w_i \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\omega} K(x) \nabla x_i \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \quad (2.96)$$

d'où d'après (2.95) et (2.96) on a

$$\int_{\omega} K(x) \nabla \tilde{w}_i^l \cdot \nabla v \, dx = (-1)^{\alpha_i} \int_{\omega} K(x) \nabla w_i \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \quad (2.97)$$

ainsi

$$\int_{\omega} K(x) \nabla \left( \tilde{w}_i^l - (-1)^{\alpha_l} w_i \right) \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \quad (2.98)$$

En prenant  $v = \tilde{w}_i^l - (-1)^{\alpha_l} w_i$  dans (2.98) et comme la matrice  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  on obtient :

$$\left| \tilde{w}_i^l - (-1)^{\alpha_l} w_i \right|_{1,\omega} = 0 \quad (2.99)$$

cela implique que

$$\tilde{w}_i^l = (-1)^{\alpha_l} w_i \quad (2.100)$$

c'est à dire

$$\tilde{p}_i^l - \tilde{x}_i = (-1)^{\alpha_l} p_i - (-1)^{\alpha_l} x_i \quad (2.101)$$

En utilisant (2.92) on obtient

$$\tilde{p}_i^l = (-1)^{\alpha_l} p_i \quad (2.102)$$

c'est à dire

$$\tilde{p}_i^l(S) = (-1)^{\alpha_l} p_i(S) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha_l = \delta_{l,i} \\ 1 \leq l \leq d \end{cases} \quad (2.103)$$

Or (2.103) est équivalent à

$$p_i(S_l) = (-1)^{\alpha_l} p_i(S) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha_l = \delta_{l,i} \\ 1 \leq l \leq d \end{cases} \quad (2.104)$$

ce qui implique que

$$p_i \in S_{0,0,\dots,1,\dots,0} \quad (2.105)$$

En utilisant les différentes propriétés du lemme 2.3.6 on obtient successivement que

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} \in S_{0,0,\dots,1,\dots,1,\dots,0} \quad \text{car } i \neq j \quad (2.106)$$

d'où

$$K_{jj} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \in S_{0,0,\dots,1,\dots,1,\dots,0} \quad \begin{cases} 1 \leq i, j \leq d \\ i \neq j \end{cases} \quad (2.107)$$

ce qui implique que

$$\int_{\omega} K_{jj}(x) \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \, dx = 0 \quad (2.108)$$

finalemt on obtient :

$$K_{ij}^* = 0 \quad \begin{cases} 1 \leq i, j \leq d \\ i \neq j \end{cases} \quad \square. \quad (2.109)$$

### 2.3.5 Stabilité par rapport à la G-convergence

La G-convergence est une propriété importante qui permet d'avoir une réponse au problème de la mise à l'échelle dans certaines situations asymptotiques. Comme il a été rappelé au premier chapitre, le tenseur obtenu par la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires est stable pour la G-convergence. Une démonstration de ce théorème, énoncé précisément ci-après, peut être trouvée dans [10].

**Théorème 2.3.7** *Soit  $K_\varepsilon \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  tel que  $K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0$  alors*

$$K_\varepsilon^* \xrightarrow{G} K_0^*$$

où  $K_\varepsilon^*$  [resp.  $K_0^*$ ] est le tenseur de perméabilité équivalent à  $K_\varepsilon$  [resp.  $K_0$ ] obtenu en utilisant la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires.

### 2.3.6 Stabilité par rapport à la G-convergence parabolique

Dans ce paragraphe on démontre que le tenseur équivalent obtenu par la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires est également stable pour la G-convergence parabolique. Plus précisément, on a le résultat qui suit :

**Théorème 2.3.8** *Soient  $f \in L^2(0, T, H^{-1}(\omega))$  et  $K_\varepsilon \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  tel que*

$$K_\varepsilon \xrightarrow{GP} K_0 \tag{2.110}$$

et

$$\phi_\varepsilon \xrightarrow{L^\infty(\omega)} \phi_0 \text{ faible } * \quad \text{avec } 0 < m \leq \phi_\varepsilon \leq m' < +\infty \tag{2.111}$$

Alors

$$p_\varepsilon^* \xrightarrow{L^2(0, T, H_0^1(\omega))} p_0^* \quad \text{faible} \tag{2.112}$$

$$\phi_\varepsilon \frac{\partial p_\varepsilon^*}{\partial t} \xrightarrow{L^2(0, T, H^{-1}(\omega))} \phi_0 \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \quad \text{faible} \tag{2.113}$$

$$K_\varepsilon^* \nabla p_\varepsilon^* \xrightarrow{(L^2(Q))^d} K_0^* \nabla p_0^* \quad \text{faible} \tag{2.114}$$

où  $p_\varepsilon^*$  est la solution de

$$\begin{cases} p_\varepsilon^* \in W(0, T) \\ \phi_\varepsilon \frac{\partial p_\varepsilon^*}{\partial t} - \operatorname{div} [K_\varepsilon^* \nabla p_\varepsilon^*] = f & \text{dans } Q \\ p_\varepsilon^*(0, \cdot) = 0 & \text{p.p. dans } \omega \end{cases} \tag{2.115}$$

et  $p_0^*$  est la solution de

$$\begin{cases} p_0^* \in W(0, T) \\ \phi_0 \frac{\partial p_0^*}{\partial t} - \operatorname{div} [K_0^* \nabla p_0^*] = f & \text{dans } Q \\ p_0^*(0, \cdot) = 0 & \text{p.p. dans } \omega \end{cases} \quad (2.116)$$

où  $K_\varepsilon^*$  [resp.  $K_0^*$ ] est le tenseur de perméabilité équivalent à  $K_\varepsilon$  [resp.  $K_0$ ] obtenu en utilisant la méthode linéaire.

On peut généraliser le théorème 2.3.8 pour des conditions initiales quelconques. Toutefois, afin d'alléger les calculs on ne considère ici que le cas d'une condition initiale homogène.

On démontre dans un premier temps deux résultats intermédiaires qui interviennent dans la démonstration du théorème 2.3.8.

La proposition qui suit provient des travaux de Amaziane [2].

**Proposition 2.3.9** Soient  $m$  et  $m'$  deux nombres réels. On suppose que

$$p_\varepsilon \xrightarrow{L^2(0, T, H_0^1(\omega))} p_0 \quad \text{faible} \quad (2.117)$$

$$\phi_\varepsilon \xrightarrow{L^\infty(\omega)} \phi_0 \text{ faible} * \quad \text{avec } 0 < m \leq \phi_\varepsilon \leq m' < +\infty. \quad (2.118)$$

$$\frac{\partial(\phi_\varepsilon p_\varepsilon)}{\partial t} \text{ est borné dans } L^2(0, T, H^{-1}(\omega)) \quad (2.119)$$

alors

$$p_\varepsilon \xrightarrow{L^2(Q)} p_0 \quad \text{fort} \quad (2.120)$$

**Proposition 2.3.10** Soient  $m$  et  $m'$  deux nombres réels. On suppose que

$$\phi_\varepsilon \xrightarrow{L^\infty(\omega)} \phi_0 \text{ faible} * \quad \text{avec } 0 < m \leq \phi_\varepsilon \leq m' < +\infty. \quad (2.121)$$

Soit  $w_\varepsilon$  la solution du problème :

$$\begin{cases} w_\varepsilon \in W(0, T) \\ \phi_\varepsilon \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} [K_\varepsilon(x) \nabla w_\varepsilon] = f & \text{dans } Q \\ w_\varepsilon(0, \cdot) = 0 & \text{p.p. dans } \omega \end{cases} \quad (2.122)$$

on a alors

$$w_\varepsilon \xrightarrow{L^2(0, T, H_0^1(\omega))} w_0 \quad \text{faible} \quad (2.123)$$

$$\frac{\partial(\phi_\varepsilon w_\varepsilon)}{\partial t} \xrightarrow{L^2(0, T, H^{-1}(\omega))} \frac{\partial(\phi_0 w_0)}{\partial t} \quad \text{faible} \quad (2.124)$$

$$\|K_\varepsilon \nabla w_\varepsilon\|_{0, Q} \leq C \quad (2.125)$$

Démonstration :

On démontre d'abord que  $w_\varepsilon$  est bornée dans  $L^2(0, T, H_0^1(\omega))$ .

Une formulation variationnelle du problème (2.122) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\varepsilon \in W(0, T) \\ \left\langle \phi_\varepsilon \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}, v \right\rangle + \int_\omega K_\varepsilon(x) \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \\ w_\varepsilon(0, \cdot) = 0 \end{array} \right. \quad (2.126)$$

En intégrant entre  $[0, T]$  et en prenant  $v = w_\varepsilon$  dans (2.126), on obtient :

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial (\sqrt{\phi_\varepsilon} w_\varepsilon)}{\partial t}, \sqrt{\phi_\varepsilon} w_\varepsilon \right\rangle dt + \int_0^T \int_\omega K_\varepsilon(x) \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon \, dx dt = \int_0^T \langle f, w_\varepsilon \rangle \, dt \quad (2.127)$$

On obtient alors

$$\frac{1}{2} \left\| \sqrt{\phi_\varepsilon} w_\varepsilon(T) \right\|_{0,\omega}^2 - \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\phi_\varepsilon} w_\varepsilon(0) \right\|_{0,\omega}^2 + \int_0^T \int_\omega K_\varepsilon(x) \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon \, dx dt = \int_0^T \langle f, w_\varepsilon \rangle \, dt \quad (2.128)$$

Or  $w_\varepsilon(0, \cdot) = 0$  et  $K_\varepsilon \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ . On en déduit :

$$\lambda_1 \|w_\varepsilon\|_{L^2(0, T, H_0^1(\omega))}^2 \leq \int_0^T \|f\|_{H^{-1}(\omega)} |w_\varepsilon|_{1,\omega} \, dt \quad (2.129)$$

Ce qui implique

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2(0, T, H_0^1(\omega))}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|f\|_{L^2(0, T, H^{-1}(\omega))} \|w_\varepsilon\|_{L^2(0, T, H_0^1(\omega))} \quad (2.130)$$

On a alors

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2(0, T, H_0^1(\omega))} \leq \frac{1}{\lambda_1} \|f\|_{L^2(0, T, H^{-1}(\omega))} \quad (2.131)$$

La solution  $w_\varepsilon$  du problème (2.122) demeure donc dans un borné fixe de  $L^2(0, T, H_0^1(\omega))$ .

Par ailleurs comme  $(K_\varepsilon)_{ij} \in L^\infty(\omega)$  pour tout  $1 \leq i, j \leq d$ , on a alors

$$\|K_\varepsilon \nabla w_\varepsilon\|_{0,Q} \leq C \quad (2.132)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$

On montre maintenant que  $\frac{\partial (\phi_\varepsilon w_\varepsilon)}{\partial t}$  demeure dans un borné fixe de  $L^2(0, T, H^{-1}(\omega))$ .

A partir de la formulation variationnelle (2.126) on obtient

$$\left| \left\langle \frac{\partial (\phi_\varepsilon w_\varepsilon)}{\partial t}, v \right\rangle \right| \leq [C \|\nabla w_\varepsilon\|_{0,\omega} + \|f\|_{H^{-1}(\omega)}] |v|_{1,\omega} \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \quad (2.133)$$

En divisant par  $|v|_{1,\omega}$  et en prenant le supremum sur  $v \in H_0^1(\omega)$  on a :

$$\left\| \frac{\partial (\phi_\varepsilon w_\varepsilon)}{\partial t} \right\|_{H^{-1}(\omega)} \leq C \|\nabla w_\varepsilon\|_{0,\omega} + \|f\|_{H^{-1}(\omega)} \quad (2.134)$$

Avec (2.131) on obtient :

$$\left\| \frac{\partial (\phi_\varepsilon w_\varepsilon)}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\omega))} \leq C \|f\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\omega))} \quad (2.135)$$

D'après (2.111), (2.131), (2.135) et la proposition 2.3.9 on a

$$w_\varepsilon \xrightarrow{L^2(Q)} w_0 \quad \text{fort} \quad (2.136)$$

et par conséquent

$$\phi_\varepsilon w_\varepsilon \xrightarrow{L^2(0,T,L^2(\omega))} \phi_0 w_0 \quad \text{faible} \quad (2.137)$$

De plus on a  $\phi_\varepsilon \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial (\phi_\varepsilon w_\varepsilon)}{\partial t}$ , alors avec ce qui précède on a (2.124)  $\square$ .

Démontrons le théorème 2.3.8.

Démonstration :

Pour la clarté de la démonstration, on suppose que les données sont suffisamment régulières pour avoir la régularité  $\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(Q), \forall \varepsilon \geq 0$ .

D'après l'hypothèse de G-convergence parabolique (2.110) et la proposition 1.5.7 on a pour tout  $f \in L^2(0,T,H^{-1}(\omega))$

$$p_\varepsilon \xrightarrow{L^2(0,T,H_0^1(\omega))} p_0 \quad \text{faible} \quad (2.138)$$

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} \xrightarrow{L^2(0,T,H^{-1}(\omega))} \frac{\partial p_0}{\partial t} \quad \text{faible} \quad (2.139)$$

$$K_\varepsilon \nabla p_\varepsilon \xrightarrow{(L^2(Q))^d} K_0 \nabla p_0 \quad \text{faible} \quad (2.140)$$

où  $p_\varepsilon$  est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_\varepsilon \in W(0,T) & \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} - \text{div} [K_\varepsilon(x) \nabla p_\varepsilon] = f & \text{dans } Q \\ p_\varepsilon(0, \cdot) = 0 & \text{p.p. dans } \omega \end{array} \right. \quad (2.141)$$

et  $p_0$  est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_0 \in W(0,T) & \\ \frac{\partial p_0}{\partial t} - \text{div} [K_0(x) \nabla p_0] = f & \text{dans } Q \\ p_0(0, \cdot) = 0 & \text{p.p. dans } \omega \end{array} \right. \quad (2.142)$$

Par ailleurs, en utilisant la proposition 2.3.10 grâce au problème (2.115) et à l'hypothèse (2.111), on a

$$p_\varepsilon^* \xrightarrow{L^2(0,T,H_0^1(\omega))} p_0^* \quad \text{faible} \quad (2.143)$$

$$\frac{\partial(\phi_\varepsilon p_\varepsilon^*)}{\partial t} \xrightarrow{L^2(0,T,H^{-1}(\omega))} \frac{\partial(\phi_0 p_0^*)}{\partial t} \quad \text{faible} \quad (2.144)$$

$$\|K_\varepsilon^* \nabla p_\varepsilon^*\|_{0,Q} \leq C. \quad (2.145)$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ , on introduit alors les fonctions suivantes afin de se ramener à des problèmes elliptiques.

$$\begin{aligned} P_\varepsilon &= \int_0^T p_\varepsilon(x,t) \varphi(t) dt & P_\varepsilon^* &= \int_0^T p_\varepsilon^*(x,t) \varphi(t) dt \\ P_0 &= \int_0^T p_0(x,t) \varphi(t) dt & P_0^* &= \int_0^T p_0^*(x,t) \varphi(t) dt \\ f_\varepsilon &= - \int_0^T \frac{\partial p_\varepsilon(x,t)}{\partial t} \varphi(t) dt & f_\varepsilon^* &= - \int_0^T \phi_\varepsilon(x) \frac{\partial p_\varepsilon^*(x,t)}{\partial t} \varphi(t) dt \\ f_0 &= - \int_0^T \frac{\partial p_0(x,t)}{\partial t} \varphi(t) dt & f_0^* &= - \int_0^T \phi_0(x) \frac{\partial p_0^*(x,t)}{\partial t} \varphi(t) dt \\ F &= \int_0^T f(x,t) \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.146)$$

On a

$$f_\varepsilon = - \int_0^T \frac{\partial p_\varepsilon(x,t)}{\partial t} \varphi(t) dt = \int_0^T p_\varepsilon(x,t) \varphi'(t) dt \quad (2.147)$$

De la même manière on obtient

$$f_\varepsilon^* = - \int_0^T \phi_\varepsilon(x) \frac{\partial p_\varepsilon^*(x,t)}{\partial t} \varphi(t) dt = \int_0^T \phi_\varepsilon(x) p_\varepsilon^*(x,t) \varphi'(t) dt \quad (2.148)$$

D'après le problème (2.141) [resp. (2.115)] les fonctions  $P_\varepsilon, f_\varepsilon$  [resp.  $P_\varepsilon^*, f_\varepsilon^*$ ] et  $F$  vérifient respectivement les problèmes suivants :

$$\begin{cases} P_\varepsilon \in H_0^1(\omega) \\ -\text{div}[K_\varepsilon(x) \nabla P_\varepsilon] = F + f_\varepsilon \quad \text{dans } \omega \end{cases} \quad (2.149)$$

$$\begin{cases} P_\varepsilon^* \in H_0^1(\omega) \\ -\text{div}[K_\varepsilon^* \nabla P_\varepsilon^*] = F + f_\varepsilon^* \quad \text{dans } \omega \end{cases} \quad (2.150)$$

On examine les propriétés des fonctions  $f_\varepsilon, f_\varepsilon^*$  et  $P_\varepsilon$ .

En utilisant la proposition 2.3.9 grâce à (2.138), (2.139) [resp. (2.143), (2.144)] et (2.111) on a

$$p_\varepsilon \xrightarrow{L^2(Q)} p_0 \quad \text{fort} \quad (2.151)$$

et

$$p_\varepsilon^* \xrightarrow{L^2(Q)} p_0^* \quad \text{fort} \quad (2.152)$$

or l'hypothèse (2.111) implique, en utilisant (2.152), que

$$\phi_\varepsilon p_\varepsilon^* \xrightarrow{L^2(Q)} \phi_0 p_0^* \quad \text{faible} \quad (2.153)$$

L'injection de  $L^2(Q)$  dans  $L^2(0, T, H^{-1}(\omega))$  étant continue et compacte, on a d'après (2.151) et (2.153) :

$$p_\varepsilon \xrightarrow{L^2(0, T, H^{-1}(\omega))} p_0 \quad \text{fort} \quad (2.154)$$

$$\phi_\varepsilon p_\varepsilon^* \xrightarrow{L^2(0, T, H^{-1}(\omega))} \phi_0 p_0^* \quad \text{fort} \quad (2.155)$$

d'où

$$f_\varepsilon = \int_0^T p_\varepsilon(x, t) \varphi'(t) dt \xrightarrow{H^{-1}(\omega)} \int_0^T p_0(x, t) \varphi'(t) dt = f_0 \quad \text{fort} \quad (2.156)$$

$$f_\varepsilon^* = \int_0^T \phi_\varepsilon(x) p_\varepsilon^*(x, t) \varphi'(t) dt \xrightarrow{H^{-1}(\omega)} \int_0^T \phi_0(x) p_0^*(x, t) \varphi'(t) dt = f_0^* \quad \text{fort} \quad (2.157)$$

D'autre part comme  $p_\varepsilon \xrightarrow{L^2(0, T, H_0^1(\omega))} p_0$  faiblement d'après (2.138) on a :

$$P_\varepsilon \xrightarrow{H_0^1(\omega)} P_0 \quad \text{faible.} \quad (2.158)$$

On montre maintenant que  $K_\varepsilon^* \xrightarrow{G} K_0^*$ .

D'après le problème (2.142) les fonctions  $P_0$ ,  $f_0$ , et  $F$  vérifient l'équation suivante

$$\begin{cases} P_0 \in H_0^1(\omega) \\ -\text{div} [K_0(x) \nabla P_0] = F + f_0 \quad \text{dans } \omega \end{cases} \quad (2.159)$$

En récapitulant on a :

$$P_\varepsilon \xrightarrow{H_0^1(\omega)} P_0 \quad \text{faible} \quad \text{et} \quad f_\varepsilon \xrightarrow{H^{-1}(\omega)} f_0 \quad \text{fort} \quad (2.160)$$

où  $P_\varepsilon$  [resp.  $P_0$ ] est la solution du problème (2.149) [resp. (2.159)]. C'est à dire que

$$K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0. \quad (2.161)$$

Or d'après le théorème 2.3.7 on sait que l'approximation pour la méthode linéaire est stable pour la G-convergence. Plus précisément on a donc :

$$K_\varepsilon^* \xrightarrow{G} K_0^* \quad (2.162)$$

Par définition cela implique que  $\forall g_\varepsilon \in H^{-1}(\omega)$  telle que  $g_\varepsilon \xrightarrow{H^{-1}(\omega)} g_0$  fortement, on a

$$u_\varepsilon^* \xrightarrow{H_0^1(\omega)} u_0^* \quad \text{faible} \quad (2.163)$$

où  $u_\varepsilon^*$  est la solution de

$$\begin{cases} u_\varepsilon^* \in H_0^1(\omega) \\ -\operatorname{div} [K_\varepsilon^* \nabla u_\varepsilon^*] = g_\varepsilon \quad \text{dans } \omega \end{cases} \quad (2.164)$$

et  $u_0^*$  est la solution de

$$\begin{cases} u_0^* \in H_0^1(\omega) \\ -\operatorname{div} [K_0^* \nabla u_0^*] = g_0 \quad \text{dans } \omega \end{cases} \quad (2.165)$$

Soit  $w_0^*$  une fonction de  $\mathcal{D}(\omega)$ , on considère alors  $u_\varepsilon^*$  la solution du problème (2.164) avec

$$g_\varepsilon = -\operatorname{div} [K_0^* \nabla w_0^*] \quad (2.166)$$

Par conséquent on a

$$u_\varepsilon^* \xrightarrow{H_0^1(\omega)} w_0^* \quad \text{faible} \quad (2.167)$$

D'après (2.145) il existe un vecteur  $\vec{\mathbf{q}}_0^* \in (L^2(Q))^d$  tel que

$$K_\varepsilon^* \nabla p_\varepsilon^* \xrightarrow{(L^2(Q))^d} \mathbf{q}_0^* \quad \text{faible} \quad (2.168)$$

Identifions  $\vec{\mathbf{q}}_0^*$ .

En récapitulant (2.168) (2.167) (2.150) (2.157) on a :

$$\begin{aligned} \text{i) } & K_\varepsilon^* \nabla p_\varepsilon^* \xrightarrow{(L^2(Q))^d} \mathbf{q}_0^* \quad \text{faible} \quad \text{d'où } K_\varepsilon^* \nabla P_\varepsilon^* \xrightarrow{(L^2(\omega))^d} \int_0^T \vec{\mathbf{q}}_0^*(x,t) \varphi(t) dt \quad \text{faible} \\ \text{ii) } & \nabla u_\varepsilon^* \xrightarrow{(L^2(\omega))^d} \nabla w_0^* \quad \text{faible} \\ \text{iii) } & -\operatorname{div} [K_\varepsilon^* \nabla P_\varepsilon^*] = F + f_\varepsilon^* \quad \text{avec } f_\varepsilon^* \xrightarrow{H^{-1}(\omega)} f_0^* \quad \text{fort} \end{aligned} \quad (2.169)$$

d'après le lemme 1.5.9 de compacité par compensation on a :

$$K_\varepsilon^* \nabla P_\varepsilon^* \cdot \nabla u_\varepsilon^* \longrightarrow \int_0^T \vec{\mathbf{q}}_0^*(x,t) \varphi(t) dt \cdot \nabla w_0^* \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\omega) \quad (2.170)$$

Par ailleurs de (2.162) (2.143) (2.164) (2.166) on a

$$\begin{aligned} \text{i) } & K_\varepsilon^* \nabla u_\varepsilon^* \xrightarrow{(L^2(Q))^d} K_0^* \nabla w_0^* \quad \text{faible} \\ \text{ii) } & p_\varepsilon^* \xrightarrow{L^2(0,T,H_0^1(\omega))} p_0^* \quad \text{faible} \quad \text{d'où } \nabla P_\varepsilon^* \xrightarrow{(L^2(\omega))^d} \nabla P_0^* \quad \text{faible} \\ \text{iii) } & -\operatorname{div} [K_\varepsilon^* \nabla u_\varepsilon^*] = g_\varepsilon \quad \text{avec } g_\varepsilon \xrightarrow{H^{-1}(\omega)} g_0 \quad \text{fort} \end{aligned} \quad (2.171)$$

d'après le lemme 1.5.9 de compacité par compensation on a :

$$K_\varepsilon^* \nabla u_\varepsilon^* \cdot \nabla P_\varepsilon^* \longrightarrow K_0^* \nabla w_0^* \cdot \nabla P_0^* \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\omega) \quad (2.172)$$

Or la matrice  $K_\varepsilon^*$  étant symétrique on obtient de (2.170) et (2.172) :

$$K_0^* \nabla w_0^* \cdot \nabla P_0^* = \int_0^T \overrightarrow{\mathbf{q}_0^*}(x, t) \varphi(t) dt \cdot \nabla w_0^* \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\omega) \text{ et } \forall w_0^* \in \mathcal{D}(\omega) \quad (2.173)$$

D'autre part, la matrice  $K_0^*$  étant symétrique on a alors

$$K_0^* \nabla P_0^* = \int_0^T \overrightarrow{\mathbf{q}_0^*}(x, t) \varphi(t) dt \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\omega) \quad (2.174)$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_0^T K_0^* \nabla p_0^*(x, t) \varphi(t) dt = \int_0^T \overrightarrow{\mathbf{q}_0^*}(x, t) \varphi(t) dt \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\omega) \quad (2.175)$$

et ceci  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ , d'où finalement on obtient :

$$K_0^* \nabla p_0^* = \overrightarrow{\mathbf{q}_0^*} \text{ dans } \mathcal{D}'(Q) \quad (2.176)$$

donc en écrivant le problème (2.115) sous forme variationnelle et en passant à la limite on obtient le problème (2.116)  $\square$ .

### 2.3.7 Autre encadrement du tenseur équivalent

Il existe d'autres approches pour obtenir un encadrement numérique du tenseur équivalent. En s'inspirant de Dvořák [30] on utilise, dans ce paragraphe, les fonctions courants pour obtenir une borne numérique inférieure du tenseur équivalent. La borne supérieure étant obtenue de la même manière que dans le théorème 2.3.1. Afin de pouvoir utiliser les fonctions courants on se restreint, dans ce paragraphe, au cas où  $\omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ .

Soient  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  et  $V_h^0 \subset H_0^1(\omega)$  un espace d'approximation obtenu en utilisant la méthode des éléments finis conformes. On considère le problème discret suivant

$$\begin{cases} w_{ih} \in V_h^0 \\ \int_\omega K(x) \nabla w_{ih} \cdot \nabla v_h dx = - \int_\omega K(x) \vec{\mathbf{e}}_i \cdot \nabla v_h dx \quad \forall v_h \in V_h^0 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 2. \quad (2.177)$$

On définit alors une approximation du tenseur équivalent, notée  $\overline{\overline{K_h^*}}$ , par :

$$\left(\overline{\overline{K_h^*}}\right)_{ij} = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega K(x) (\nabla w_{ih} + \vec{\mathbf{e}}_i) \cdot (\nabla w_{jh} + \vec{\mathbf{e}}_j) dx \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad (2.178)$$

D'autre part on introduit l'espace  $W$  suivant :

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \psi \in H^1(\omega) \text{ t.q. } \psi = \varphi + ax_1 + bx_2 + c \text{ où } \varphi \in H^1(\omega) \\ \text{avec } a = -\frac{1}{|\omega|} \int_\omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx, \quad b = -\frac{1}{|\omega|} \int_\omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx \text{ et } c \in \mathbb{R}. \end{array} \right\} \quad (2.179)$$

Soit  $W_h$  un espace d'approximation de  $W$ . Pour tout  $1 \leq i \leq 2$ , on introduit alors le problème discret suivant

$$\begin{cases} \psi_{ih} \in W_h \\ \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} \nabla \psi_{ih} \cdot \nabla v_h \, dx = - \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} \vec{e}_i \cdot \nabla v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h^0 \end{cases} \quad (2.180)$$

et on définit la matrice  $B_h^*$  par la relation qui suit :

$$(B_h^*)_{ij} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} (\nabla \psi_{ih} + \vec{e}_i) \cdot (\nabla \psi_{jh} + \vec{e}_j) \, dx \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad (2.181)$$

Une approximation, notée  $\underline{\underline{K}}_h^*$ , du tenseur équivalent est alors construite par la relation :

$$\underline{\underline{K}}_h^* = B_h^* [\det(B_h^*)]^{-1}. \quad (2.182)$$

**Proposition 2.3.11** Soient  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert borné convexe, de frontière  $\partial\omega$  Lipschitz continue, et  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ . On suppose que  $\overline{\overline{K}}_h^*$  [resp.  $\underline{\underline{K}}_h^*$ ] est donné par la relation (2.178) [resp. (2.182)]. Alors on a les estimations suivantes :

$$I_{-1,\omega}(K) \leq \underline{\underline{K}}_h^* \leq K^* \leq \overline{\overline{K}}_h^* \leq I_{1,\omega}(K) \quad (2.183)$$

où  $K^*$  est le tenseur équivalent obtenu par la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires

Le résultat relatif à la borne supérieure a été obtenu grâce au théorème 2.3.1. Pour la borne inférieure on a besoin de quelques résultats intermédiaires, avant la démonstration de la proposition 2.3.11.

**Lemme 2.3.12** Soient  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  et  $K^*$  le tenseur équivalent obtenu par la méthode linéaire. On a alors la caractérisation suivante

$$\forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^2 \quad K^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \sup_{\vec{s} \in H_0(\text{div}, \omega)} \frac{2}{|\omega|} \int_{\omega} \vec{s} \cdot \vec{\xi} \, dx - \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{s} \cdot \vec{s} \, dx \quad (2.184)$$

Démonstration :

Soit  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{\xi} = \sum_{i=1}^2 \xi_i \vec{e}_i$  et on note  $g = \sum_{i=1}^2 \xi_i x_i$ . En suivant la même démarche que la démonstration du théorème 2.3.1, à partir de la formulation variationnelle mixte des problèmes locaux (2.2), on obtient par linéarité :

$$\begin{cases} (\vec{Q}, P) \in H(\text{div}, \omega) \times L^2(\omega) \\ \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{Q} \cdot \vec{s} \, dx + \int_{\omega} P \, \text{div}(\vec{s}) \, dx = \langle \vec{s} \cdot \vec{n}, g \rangle \quad \forall \vec{s} \in H(\text{div}, \omega) \\ \int_{\omega} v \, \text{div}(\vec{Q}) \, dx = 0 \quad \forall v \in L^2(\omega) \end{cases} \quad (2.185)$$

Le problème (2.185) est équivalent à la formulation duale

$$\frac{1}{2} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{Q}} \cdot \vec{\mathbf{Q}} \, dx - \langle \vec{\mathbf{Q}} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g \rangle = \inf_{\vec{\mathbf{s}} \in H_0(\text{div}, \omega)} \frac{1}{2} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{s}} \, dx - \langle \vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g \rangle \quad (2.186)$$

Par ailleurs comme  $\vec{\mathbf{s}}$  appartient à  $H_0(\text{div}, \omega)$  on obtient en utilisant la formule de Green que

$$\int_{\omega} \vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\boldsymbol{\xi}} \, dx = \langle \vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g \rangle \quad (2.187)$$

En prenant  $\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{Q}}$  et  $v = P$  dans (2.185) on a :

$$\int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{Q}} \cdot \vec{\mathbf{Q}} \, dx = \langle \vec{\mathbf{Q}} \cdot \vec{\mathbf{n}}, g \rangle \quad (2.188)$$

D'autre part comme dans la démonstration du théorème 2.3.1 on obtient que :

$$K^* \vec{\boldsymbol{\xi}} \cdot \vec{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{Q}} \cdot \vec{\mathbf{Q}} \, dx. \quad (2.189)$$

Ainsi en utilisant (2.186), (2.187), (2.188) et (2.189) on déduit la caractérisation suivante de  $K^*$  :

$$-\frac{|\omega|}{2} K^* \vec{\boldsymbol{\xi}} \cdot \vec{\boldsymbol{\xi}} = \inf_{\vec{\mathbf{s}} \in H_0(\text{div}, \omega)} \frac{1}{2} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{s}} \, dx - \int_{\omega} \vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\boldsymbol{\xi}} \, dx \quad (2.190)$$

Enfin (2.190) est équivalent à

$$K^* \vec{\boldsymbol{\xi}} \cdot \vec{\boldsymbol{\xi}} = \sup_{\vec{\mathbf{s}} \in H_0(\text{div}, \omega)} \frac{2}{|\omega|} \int_{\omega} \vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\boldsymbol{\xi}} \, dx - \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^{-1}(x) \vec{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{s}} \, dx \quad \square. \quad (2.191)$$

**Lemme 2.3.13** *Le tenseur équivalent  $K^*$  calculé par la méthode linéaire se définit de la manière suivante :*

$$\forall \vec{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{R}^2 \quad (K^*)^{-1} \vec{\boldsymbol{\eta}} \cdot \vec{\boldsymbol{\eta}} = \inf_{\vec{\mathbf{r}} \in (H_0(\text{div}, \omega))_{\text{mean}^0}} \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^{-1}(x) (\vec{\boldsymbol{\eta}} + \vec{\mathbf{r}}) \cdot (\vec{\boldsymbol{\eta}} + \vec{\mathbf{r}}) \, dx \quad (2.192)$$

Démonstration :

Dans la caractérisation du lemme 2.3.12 on peut décomposer le vecteur  $\vec{\mathbf{s}}$  sous la forme  $\vec{\mathbf{s}} = \vec{\boldsymbol{\eta}} + \vec{\mathbf{r}}$ , où  $\vec{\boldsymbol{\eta}}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  et  $\vec{\mathbf{r}} \in (H_0(\text{div}, \omega))_{\text{mean}^0}$ . On obtient alors

$$K^* \vec{\boldsymbol{\xi}} \cdot \vec{\boldsymbol{\xi}} = \sup_{\vec{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{R}^2} [2\vec{\boldsymbol{\eta}} \cdot \vec{\boldsymbol{\xi}} - B\vec{\boldsymbol{\eta}} \cdot \vec{\boldsymbol{\eta}}] \quad (2.193)$$

où

$$B\vec{\boldsymbol{\eta}} \cdot \vec{\boldsymbol{\eta}} = \inf_{\vec{\mathbf{r}} \in (H_0(\text{div}, \omega))_{\text{mean}^0}} \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^{-1}(x) (\vec{\boldsymbol{\eta}} + \vec{\mathbf{r}}) \cdot (\vec{\boldsymbol{\eta}} + \vec{\mathbf{r}}) \, dx \quad (2.194)$$

Une condition nécessaire pour trouver le supremum  $\vec{\boldsymbol{\eta}}_0$  dans (2.193) est que

$$B\vec{\boldsymbol{\eta}}_0 = \vec{\boldsymbol{\xi}} \iff \vec{\boldsymbol{\eta}}_0 = B^{-1}\vec{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.195)$$

De (2.193) et (2.195) on obtient que

$$K^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = 2B^{-1} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} - B^{-1} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \quad (2.196)$$

C'est à dire

$$K^* = B^{-1} \iff (K^*)^{-1} = B \quad (2.197)$$

En utilisant (2.194) et (2.197) on obtient le résultat (2.192)  $\square$ .

**Lemme 2.3.14** *On suppose que  $\omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ .*

*Alors*

$$(H_0(\operatorname{div}, \omega))_{\text{mean}^0} = Q \nabla W \quad (2.198)$$

où la matrice  $Q$  est définie par :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.199)$$

et l'espace  $W$  est donné par (2.179).

Pour démontrer le lemme 2.3.14 on a besoin d'un résultat sur les fonctions courants que l'on peut trouver dans [37].

**Proposition 2.3.15** *On suppose que  $\omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\vec{\mathbf{r}}$  une fonction de  $(L^2(\omega))^2$ . Alors*

$$\vec{\mathbf{r}} \in H_0(\operatorname{div}, \omega) \iff \exists \varphi \in H^1(\omega) \text{ telle que } \vec{\mathbf{r}} = Q \nabla \varphi. \quad (2.200)$$

De plus la fonction courant  $\psi$  est unique à une constante additive près.

On démontre maintenant le lemme 2.3.14

Démonstration :

Soit  $\varphi \in H^1(\omega)$  et un polynôme  $ax_1 + bx_2 + c$  appartenant à  $P_1$  dont les coefficients sont donnés par :

$$a = -\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx, \quad b = -\frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx \quad \text{et } c \in \mathbb{R}. \quad (2.201)$$

On définit alors le vecteur  $\vec{\zeta} \in (L^2(\omega))^2$  de la manière suivante

$$\vec{\zeta} = Q \nabla [\varphi + ax_1 + bx_2 + c] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + b \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - a \end{pmatrix} \quad (2.202)$$

(2.202) implique que  $\operatorname{div}(\vec{\zeta}) = 0$  et (2.201) entraîne que  $\int_{\omega} \vec{\zeta} dx = 0$ . Par conséquent  $\vec{\zeta} \in (H_0(\operatorname{div}, \omega))_{\text{mean}^0}$ . On a donc l'inclusion suivante :  $(H_0(\operatorname{div}, \omega))_{\text{mean}^0} \supset Q\nabla W$ . Examinons l'inclusion inverse. Soit  $\vec{\zeta} \in (H_0(\operatorname{div}, \omega))_{\text{mean}^0}$ , d'après la proposition 2.3.15, on sait qu'il existe une fonction  $\varphi \in H^1(\omega)$  unique à une constante additive près telle que

$$\vec{\zeta} = Q\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (2.203)$$

Or comme  $\vec{\zeta} \in (H_0(\operatorname{div}, \omega))_{\text{mean}^0}$ , on a  $\int_{\omega} \vec{\zeta} dx = 0$ , d'où en utilisant (2.203), on obtient

$$\int_{\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx = 0 \quad (2.204)$$

En utilisant (2.203), (2.204) et le fait que  $\varphi \in H^1(\omega)$  est unique à une constante additive près on a que  $\vec{\zeta} \in Q\nabla W$ . On obtient alors l'inclusion souhaitée  $\square$ .

**Lemme 2.3.16** *Soit la matrice  $B^*$  définie par :*

$$\forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^2 \quad B^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \inf_{\psi \in W} \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} (\vec{\xi} + \nabla\psi) \cdot (\vec{\xi} + \nabla\psi) dx. \quad (2.205)$$

Alors  $B^*$  et le tenseur équivalent  $K^*$  sont liés par la relation

$$K^* = B^* [\det(B^*)]^{-1}. \quad (2.206)$$

Démonstration :

D'après les lemmes 2.3.13 et 2.3.14 on a :

$$\forall \vec{\eta} \in \mathbb{R}^2 \quad (K^*)^{-1} \vec{\eta} \cdot \vec{\eta} = \inf_{\psi \in W} \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^{-1}(x) (\vec{\eta} + Q\nabla\psi) \cdot (\vec{\eta} + Q\nabla\psi) dx \quad (2.207)$$

D'où, en prenant  $\vec{\eta} = Q\vec{\xi}$ ,  $\forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$  dans (2.207) on obtient

$$(K^*)^{-1} Q\vec{\xi} \cdot Q\vec{\xi} = \inf_{\psi \in W} \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^{-1}(x) (Q\vec{\xi} + Q\nabla\psi) \cdot (Q\vec{\xi} + Q\nabla\psi) dx \quad (2.208)$$

C'est à dire :

$$Q^t (K^*)^{-1} Q\vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \inf_{\psi \in W} \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} Q^t K^{-1}(x) Q (\vec{\xi} + \nabla\psi) \cdot (\vec{\xi} + \nabla\psi) dx \quad (2.209)$$

On pose alors

$$Q^t (K^*)^{-1} Q = B^* \quad (2.210)$$

D'autre part pour une matrice  $A \in (L^2(\omega))^4$  symétrique on a

$$A^{-1} = [\det(A)]^{-1} Q^t A Q \iff Q^t A^{-1} Q = [\det(A)]^{-1} A \quad (2.211)$$

En utilisant alors (2.209) et (2.210) et (2.211) on obtient

$$B^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \inf_{\psi \in W} \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} (\vec{\xi} + \nabla \psi) \cdot (\vec{\xi} + \nabla \psi) \, dx \quad (2.212)$$

Or, d'après (2.210) :

$$\det(B^*) = \det(Q^t) \det[(K^*)^{-1}] \det(Q) \quad (2.213)$$

De plus,

$$\det(Q^t) = \det(Q) = 1 \text{ et } \det[(K^*)^{-1}] = \frac{1}{\det[(K^*)]} \quad (2.214)$$

donc

$$\det(B^*) = \frac{1}{\det[(K^*)]} \quad (2.215)$$

et comme

$$B^* = Q^t (K^*)^{-1} Q = K^* [\det(K^*)]^{-1} \quad (2.216)$$

on obtient, en utilisant (2.215) et (2.216), que

$$K^* = B^* [\det(B^*)]^{-1} \quad (2.217)$$

Grâce à (2.212) et (2.217) on a le résultat souhaité  $\square$ .

On rappelle maintenant quelques propriétés sur les matrices dont les démonstrations peuvent être trouvées dans [30].

**Lemme 2.3.17** *Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques inversibles et  $R$  une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors*

$$\begin{aligned} i) \quad & \text{si } A \leq B \quad \text{alors} \quad R^t A R \leq R^t B R \\ ii) \quad & A \leq B \quad \iff \quad A^{-1} \geq B^{-1} \end{aligned}$$

On démontre maintenant la proposition 2.3.11.

Démonstration :

Soit  $W_h$  un espace d'approximation de  $W$ . Du lemme 2.3.16 on déduit que :

$$B^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq B_h^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.218)$$

où

$$B_h^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \inf_{\psi_h \in W_h} \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} (\vec{\xi} + \nabla \psi_h) \cdot (\vec{\xi} + \nabla \psi_h) dx \quad (2.219)$$

et on définit une approximation  $\underline{\underline{K}}_h^*$  du tenseur équivalent par la relation

$$\underline{\underline{K}}_h^* = B_h^* [\det(B_h^*)]^{-1} \quad (2.220)$$

En utilisant le lemme 2.3.17 et la relation (2.218)

$$Q^t B^* Q \leq Q^t B_h^* Q \quad (2.221)$$

ce qui est équivalent à

$$Q^t (B^*)^{-1} Q \geq Q^t (B_h^*)^{-1} Q \quad (2.222)$$

D'où en utilisant (2.211), (2.220), (2.222) et (2.206) on obtient

$$\underline{\underline{K}}_h^* \leq K^*. \quad (2.223)$$

D'autre part le problème (2.219) est équivalent à

$$|\omega| B_h^* \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \inf_{\psi_h \in W_h} \frac{1}{2} \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} \nabla \psi_h \cdot \nabla \psi_h dx + \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} \nabla \psi_h \vec{\xi} dx \quad (2.224)$$

et le problème de minimisation (2.224) est équivalent au problème suivant

$$\left\{ \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} (\nabla \psi_h + \vec{\xi}) \cdot \nabla v dx = 0 \quad \forall v \in V_h^0 \right. \quad (2.225)$$

Le problème (2.225) étant linéaire, il suffit de le résoudre pour la base canonique  $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq 2}$ .

$$\left\{ \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} (\nabla \psi_{ih} + \vec{e}_i) \cdot \nabla v dx = 0 \quad \forall v \in V_h^0 \quad 1 \leq i \leq 2 \right. \quad (2.226)$$

On obtient alors grâce à (2.219) la caractérisation suivante

$$(B_h^*)_{ii} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} (\nabla \psi_{ih} + \vec{e}_i) \cdot (\nabla \psi_{ih} + \vec{e}_i) dx. \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (2.227)$$

Or

$$2A\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = A(\vec{e}_i + \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_i + \vec{e}_j) - A\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i - A\vec{e}_j \cdot \vec{e}_j \quad (2.228)$$

En utilisant (2.219) et (2.226) et (2.228) on obtient

$$(B_h^*)_{ij} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} (\nabla \psi_{ih} + \vec{e}_i) \cdot (\nabla \psi_{jh} + \vec{e}_j) dx. \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (2.229)$$

et en prenant  $\psi_h = 0$  dans le problème (2.219), on a

$$B_h^* \leq \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) [\det(K(x))]^{-1} dx \quad (2.230)$$

On déduit alors que :

$$Q^t B_h^* Q \leq \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} Q^t K(x) Q [\det(K(x))]^{-1} dx \quad (2.231)$$

En utilisant (2.211) et (2.231) on obtient

$$[\det(B_h^*)] (B_h^*)^{-1} \leq \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K^{-1}(x) dx \quad (2.232)$$

Grâce à la relation (2.220) on obtient finalement

$$I_{-1,\omega}(K(x)) \leq \underline{\underline{K_h^*}} \quad \square. \quad (2.233)$$

## 2.4 Comparaison des méthodes d'homogénéisation linéaire, confinée et périodique

Dans un premier temps, on signale que tous les résultats établis au cours de ce chapitre, pour la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires, se généralisent aisément à la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux limites confinées. De manière plus précise le tenseur équivalent de la méthode confinée vérifie aussi le théorème 2.3.1, la proposition 2.3.4, le théorème 2.3.7 et enfin le théorème 2.3.8. Ceci a des applications pratique très importantes car la méthode confinée, qui permet d'obtenir des tenseurs équivalents diagonaux, est très utilisée dans l'ingénierie pétrolière. Cette méthode évite donc de négliger les termes extra-diagonaux, non pris en compte par certains simulateurs industriels.

On compare alors les méthodes linéaire, confinée et l'homogénéisation périodique. Cette étude comparative porte sur les termes diagonaux obtenus par les différentes méthodes.

**Proposition 2.4.1** *On suppose que la cellule de base de l'homogénéisation périodique  $Y$  est identique au domaine  $\omega$ , et que  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ . Pour la méthode du mode confiné, on suppose en outre que la pression  $p_0^i$  [resp.  $p_1^i$ ] imposée sur la frontière  $\Gamma_0^i$*

[resp.  $\Gamma_1^i$ ] appartenant au plan  $x_i = a_i$  [resp.  $x_i = b_i$ ] est égale à  $a_i$  [resp.  $b_i$ ]. On a alors les inégalités suivantes

$$(K_{MC}^*)_{ii} \leq (K_{ML}^*)_{ii} \quad 1 \leq i \leq d \quad (2.234)$$

$$(K_{HP}^*)_{ii} \leq (K_{ML}^*)_{ii} \quad 1 \leq i \leq d \quad (2.235)$$

où  $K_{ML}^*$  [resp.  $K_{HP}^*$ ,  $K_{MC}^*$ ] désigne le tenseur équivalent obtenu par la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires [resp. périodiques, confinées].

Démonstration :

Sous les hypothèses de la proposition 2.4.1, on donne successivement les termes génériques des tenseurs équivalents obtenus par les différentes méthodes ainsi que les problèmes locaux correspondants.

On rappelle que le tenseur  $K_{ML}^*$  est donné par la formule suivante

$$(K_{ML}^*)_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) [\nabla u_i + \vec{e}_i] \cdot [\nabla u_j + \vec{e}_j] dy \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (2.236)$$

où  $u_i$  est la solution du problème de minimisation suivant:

$$\begin{cases} u_i \in H_0^1(Y) \\ J_{\vec{e}_i}(u_i) = \inf_{v \in H_0^1(Y)} J_{\vec{e}_i}(v) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (2.237)$$

Par ailleurs avec les hypothèses faites pour le mode confiné le tenseur  $K_{MC}^*$  est donné par

$$(K_{MC}^*)_{ii} = \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) (\nabla w_i + \vec{e}_i) \cdot (\nabla w_i + \vec{e}_i) dy \right) \quad 1 \leq i \leq d \quad (2.238)$$

où  $w_i$  est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} w_i \in H_{0,\Gamma_D}^1(Y) \\ J_{\vec{e}_i}(w_i) = \inf_{v \in H_{0,\Gamma_D}^1(Y)} J_{\vec{e}_i}(v) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (2.239)$$

Le tenseur  $K_{HP}^*$  est donné par la formule suivante

$$(K_{HP}^*)_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) (\nabla z_i + \vec{e}_i) \cdot (\nabla z_j + \vec{e}_j) dy \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (2.240)$$

où les fonctions  $(z_i)_{1 \leq i \leq d}$  sont les solutions des problèmes locaux suivants

$$\begin{cases} z_i \in H_p^1(Y) \\ -div [K(y) (\nabla z_i + \vec{e}_i)] = 0 \quad \text{dans } Y \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (2.241)$$

Une formulation variationnelle du problème (2.241) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_i \in H_p^1(Y) \\ \int_Y K(y) (\nabla z_i + \vec{e}_i) \cdot \nabla v \, dy = 0 \quad \forall v \in H_p^1(Y) \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d. \quad (2.242)$$

La solution du problème (2.242) est aussi solution du problème de minimisation suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_i \in H_p^1(Y) \\ J_{\vec{e}_i}(z_i) = \inf_{v \in H_p^1(Y)} J_{\vec{e}_i}(v) \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d. \quad (2.243)$$

D'autre part, comme  $H_0^1(Y)$  est un sous espace de  $H_{0,\Gamma_D}^1(Y)$  [*resp.*  $H_p^1(Y)$ ], on obtient de (2.239) [*resp.* (2.243)] les inégalités suivantes

$$J_{\vec{e}_i}(w_i) \leq J_{\vec{e}_i}(u_i) \quad (2.244)$$

$$J_{\vec{e}_i}(z_i) \leq J_{\vec{e}_i}(u_i) \quad (2.245)$$

En rajoutant de chaque côté de l'inégalité  $\frac{1}{2} \int_Y K(y) \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i \, dy$  et en multipliant par  $\frac{2}{|Y|}$ , on obtient respectivement

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) [\nabla w_i + \vec{e}_i] \cdot [\nabla w_i + \vec{e}_i] \, dy \leq \frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) [\nabla u_i + \vec{e}_i] \cdot [\nabla u_i + \vec{e}_i] \, dy \quad (2.246)$$

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) [\nabla z_i + \vec{e}_i] \cdot [\nabla z_i + \vec{e}_i] \, dy \leq \frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) [\nabla u_i + \vec{e}_i] \cdot [\nabla u_i + \vec{e}_i] \, dy \quad (2.247)$$

d'où les relations (2.234) et (2.235)  $\square$ .

## Chapitre 3

# Calcul numérique de la perméabilité équivalente par éléments finis avec des maillages déstructurés

Le calcul de la perméabilité équivalente fournie par l'une des méthodes d'homogénéisation présentées aux chapitres précédents nécessite la résolution de problèmes locaux. Ces  $d$  (dimension en espace) problèmes locaux sont posés sur chaque maille grossière appartenant au maillage dynamique et correspondent à des problèmes elliptiques. Pour résoudre numériquement ces problèmes locaux dans des maillages déstructurés, nous avons utilisé une méthode d'éléments finis conformes afin d'avoir une estimation de la borne supérieure du tenseur équivalent et une méthode d'éléments finis mixtes pour obtenir une borne inférieure. Dans ce chapitre on se consacre exclusivement à la présentation de la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires. On présente tout d'abord la méthodologie employée afin de respecter scrupuleusement le maillage dynamique et géologique. En général lors du traitement des maillages déstructurés il n'existe pas de taux d'agrégation permettant de décrire une maille dynamique en fonction des mailles géologiques. Ce phénomène s'accroît aux abords des fortes discontinuités géologiques. C'est pourquoi un algorithme a été mis au point pour traiter correctement et de manière automatique les mailles du modèle dynamique situées près des failles. La résolution par une méthode d'éléments finis sur des maillages 3D déstructurés est coûteuse en temps CPU. Des efforts ont donc été faits afin d'optimiser ce temps de calcul. On termine enfin ce chapitre, par des exemples numériques de calculs de tenseurs équivalents que l'on compare aux résultats obtenus avec les diverses méthodes présentées au cours des chapitres précédents.

## 3.1 Introduction

L'utilisation de maillages déstructurés en simulation dynamique de réservoir est devenue une pratique courante en ingénierie pétrolière. Ceci permet de mieux prendre en compte les discontinuités géométriques comme les failles et les hétérogénéités principales d'un gisement telles que les chenaux. L'avantage de la méthode linéaire est d'être valable théoriquement sur des mailles dynamiques de géométrie quelconque. L'implémentation de cette méthode en maillages structurés 3D a déjà été effectuée [43]. La mise en oeuvre, pour des temps de calculs raisonnables, devient plus délicate lors du traitement de maillages déstructurés 3D, notamment en raison de la représentation explicite des failles.

## 3.2 Données du problème

Lors de l'étude d'un gisement, la construction d'un modèle réservoir s'effectue au cours d'un processus comportant plusieurs étapes et faisant appels à diverses techniques. La mise à l'échelle, qui est l'une de ces étapes, implique des données de deux sortes. D'une part, on dispose d'un maillage géologique (fin) déstructuré constitué d'environ  $10^6$  mailles à l'intérieur desquelles on connaît en particulier la perméabilité absolue et la porosité. Ces paramètres pétrophysiques sont constants pour chacune des mailles fines. D'autre part, un maillage dynamique (grossier) déstructuré comportant environ  $10^4$  mailles est proposé par l'ingénieur réservoir et pour lequel on ne connaît que les coordonnées des points. Les maillages géologiques et dynamiques sont au format GRDECL, qui est le format *Corner Point Geometry* (C.P.G.) couramment utilisé en simulation dynamique pétrolière. Le principe en est le suivant : la partie inférieure et supérieure du réservoir est décrit par un semi de points. Ensuite à partir d'un point de la partie inférieure et de son point correspondant de la partie supérieure on trace une directrice sur laquelle le sommet de la maille sera situé. Enfin pour définir complètement un noeud (sommet) d'une maille il ne reste plus qu'à donner la cote  $z$  sur la directrice générée (c.f. figure 3.3). Ces maillages peuvent contenir des failles (principales et secondaires) pouvant être inverses ainsi que des mailles dégénérées comme les pinch-outs dans le cas des maillages dynamiques. De plus, les deux maillages peuvent être totalement indépendants, c'est à dire qu'il n'existe pas de taux d'agrégation reliant le maillage géologique au maillage dynamique. La procédure développée s'inscrit dans le cas le plus général possible: deux maillages C.P.G. pouvant être indépendants.

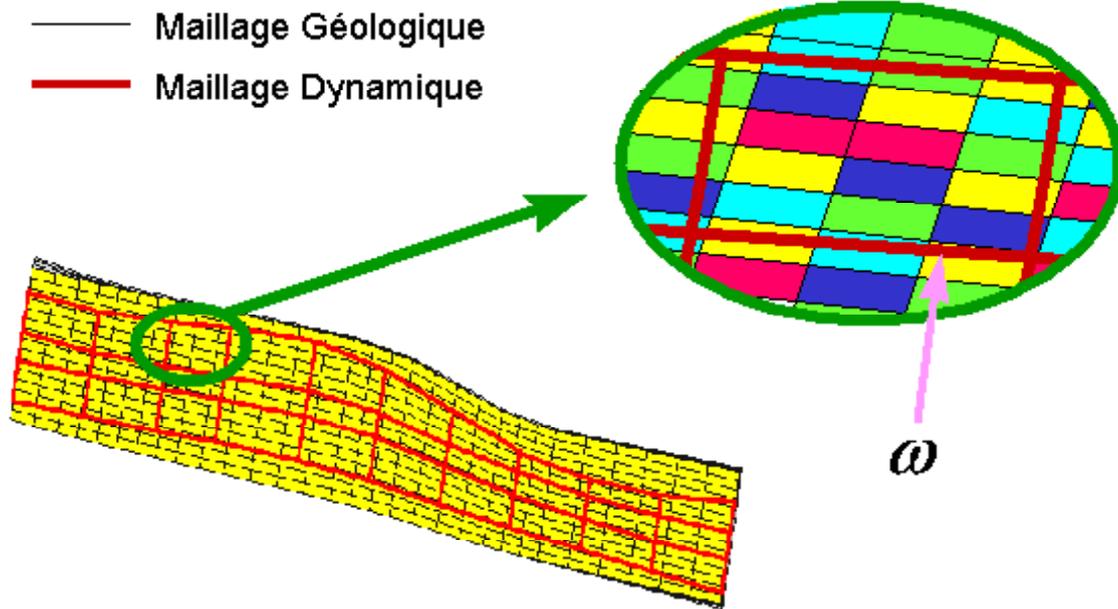


Figure 3.1: Modèles géologique et dynamique 2D

### 3.3 Maillages 2D déstructurés

Dans ce paragraphe on se consacre uniquement au problème bidimensionnel, afin de mettre en évidence certaines difficultés liées aux maillages.

#### 3.3.1 Maillages géologique et dynamique 2D

On présente dans la figure 3.1 une partie d'un maillage dynamique et géologique bidimensionnel ainsi que les propriétés pétrophysiques associées. Les couleurs représentent les différentes perméabilités absolues, constantes par maille. Les deux maillages sont déstructurés et aucun taux d'agrégation ne les relie.

#### 3.3.2 Maillage éléments finis 2D

On utilise une méthode d'éléments finis conformes [resp. mixtes] pour la résolution numérique des problèmes locaux. Pour cela il est nécessaire d'avoir une triangulation du domaine  $\omega$ , tout en gardant les noeuds du maillage fin, qui sont déjà imposés par la connaissance de la perméabilité absolue dans chaque maille fine. Si l'on fait simplement l'intersection d'une maille dynamique  $\omega$  avec le maillage fin comme dans la figure 3.2 a), on n'obtient pas en général une triangulation régulière.

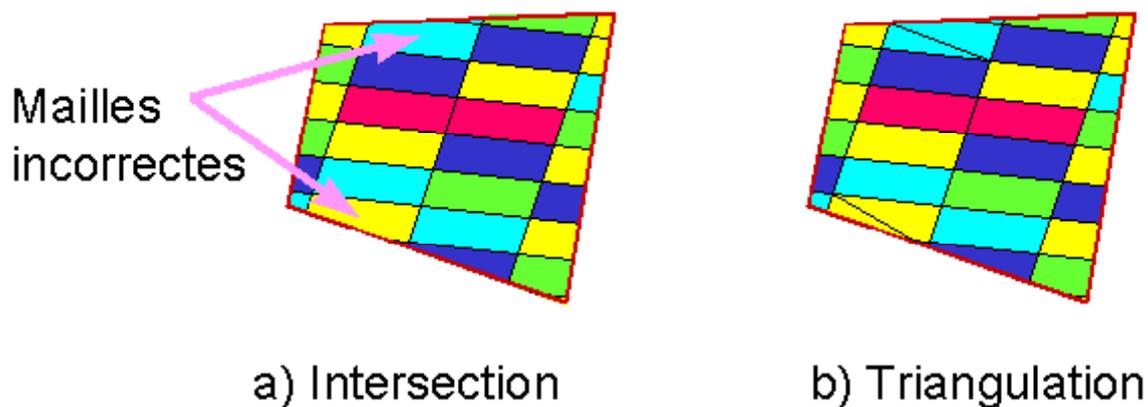


Figure 3.2: Maillage éléments finis

Le premier problème à résoudre est donc de mailler le domaine  $\omega$  avec une triangulation éléments finis tout en gardant les noeuds intérieurs imposés par le maillage fin. Une solution est de redécouper les éléments qui posent problème, comme dans la figure 3.2 b). Une présentation plus générale de cette méthode ainsi que son implémentation peuvent être trouvées dans [44]. On dispose ainsi d'un algorithme permettant de traiter une maille dynamique. Pour traiter la totalité du maillage dynamique on effectue alors une boucle sur l'ensemble des mailles dynamiques.

### 3.4 Maillages 3D déstructurés

Dans ce paragraphe on travaille avec des données 3D, issues d'un cas réel de réservoir, comportant de nombreuses difficultés et on présente la méthodologie employée pour le calcul de la perméabilité équivalente. Le maillage dynamique est généralement obtenu en intégrant, pour un modèle géologique donné, les contraintes du simulateur telles que la forme des mailles et le nombre maximum de maille autorisé. Dans le but d'améliorer la simulation du réservoir, le modèle dynamique essaie de respecter au mieux les discontinuités géométriques (failles) et pétrophysiques (hétérogénéités fondamentales) des réservoirs. Cette succession de contraintes à des échelles différentes conduit généralement à un modèle dynamique complètement indépendant du modèle géologique. C'est pourquoi il est rare d'avoir des taux d'agrégation reliant les deux maillages.

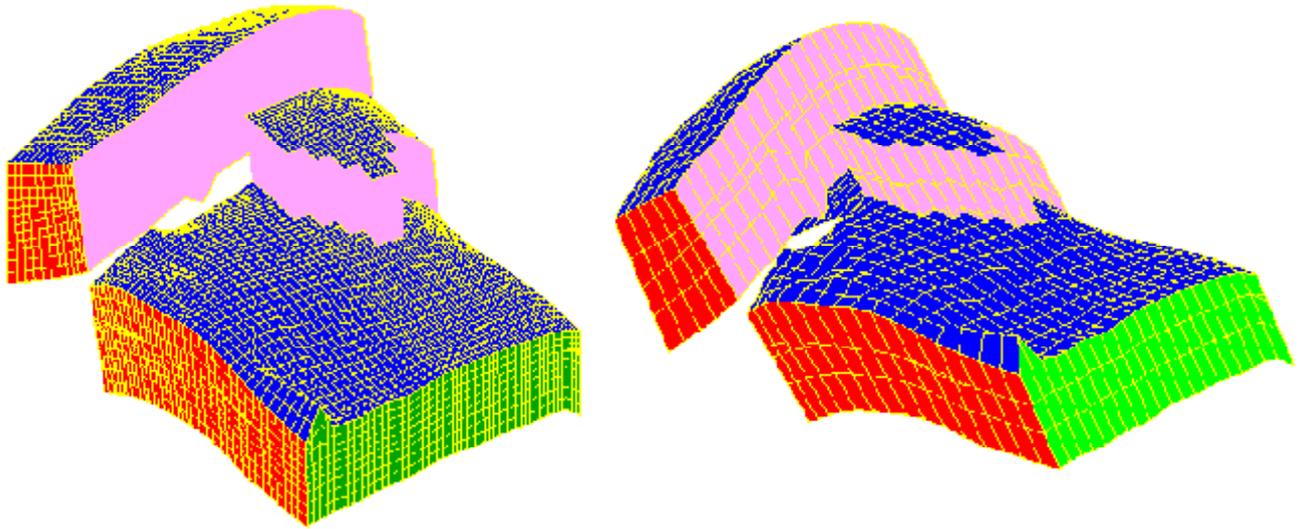


Figure 3.3: Maillages 3D

### 3.4.1 Maillages géologique et dynamique 3D

Un exemple de maillage géologique et de maillage dynamique est donné dans la figure 3.3.

Comme pour le cas bidimensionnel, la difficulté d'obtenir une triangulation de chaque maille  $\omega$  réside dans la construction d'un maillage respectant des points géométriques donnés. Ces contraintes géométriques peuvent être classées en deux catégories. D'une part, les sommets des cellules fines qui sont situés à l'intérieur de la maille dynamique considérée  $\omega$ . D'autre part, les points qui sont définis par l'intersection des mailles fines avec la frontière de la maille grossière. Le traitement global du maillage dynamique s'effectue par le biais d'une boucle sur l'ensemble des mailles grossières. C'est pourquoi dans la suite de ce chapitre on se consacre uniquement au traitement d'une maille dynamique 3D.

La génération du maillage éléments finis résultant de l'intersection d'une maille dynamique et du maillage géologique est un problème difficile lorsque l'on manipule des maillages déstructurés. Au début de ce travail de thèse, il n'existait, à notre connaissance, aucun logiciel de maillage permettant de faire l'intersection de deux maillages totalement indépendants (i.e. sans taux d'agrégation). Un module de maillage permettant de construire le maillage éléments finis en respectant toutes les contraintes citées précédemment a par conséquent été développé en collaboration avec la société Simulog. Ce module est construit à partir des algorithmes de maillages du logiciel Simail [79]. Plus précisément une triangulation de Delaunay-Voronoi a été utilisée afin de tenir compte des noeuds imposés dans le maillage éléments finis. Dans les deux paragraphes suivants

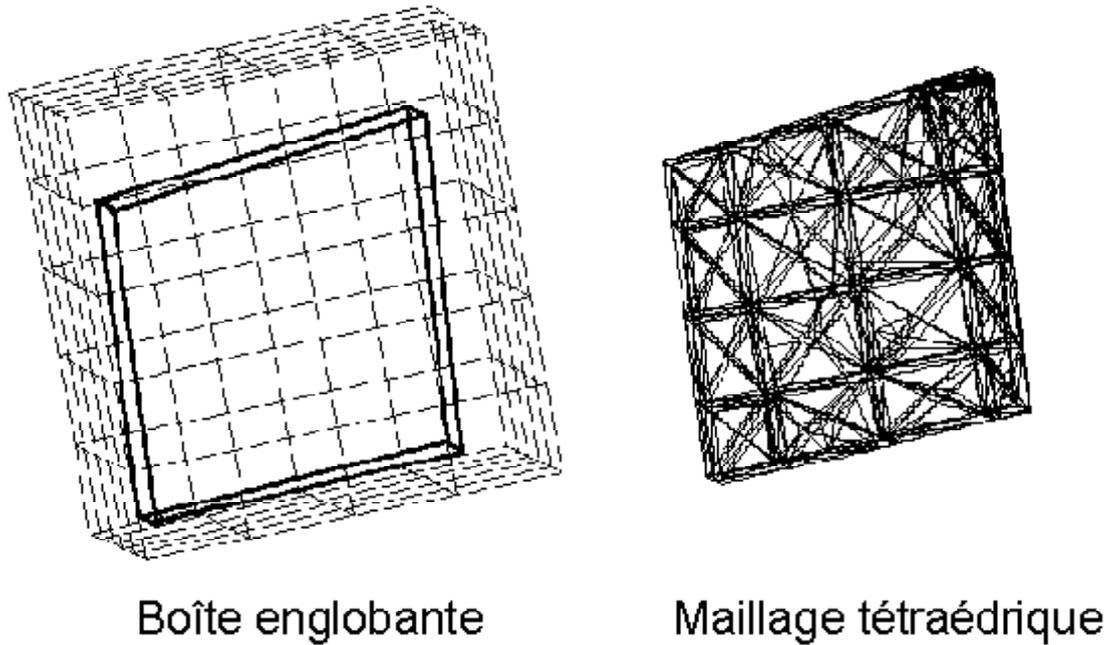


Figure 3.4: Triangulation

on détaille les différentes étapes pour obtenir le maillage éléments finis 3D permettant de calculer la perméabilité équivalente.

### 3.4.2 Boite englobante

En vue d'intégrer le programme de mise à l'échelle dans le logiciel commercial Simup [80], la société Beicip-Franlab a également collaboré à la construction des données préliminaires aux algorithmes de maillages du logiciel Simail. Pour générer le maillage éléments finis nécessaire à la résolution des problèmes locaux, on crée dans un premier temps une boîte englobante (c.f. figure 3.4) de la maille grossière. Cette boîte englobante, constituée des mailles fines du maillage géologique, contient strictement la maille dynamique. Cette étape permet de minimiser le temps cpu lors de l'intersection de la maille grossière avec le maillage géologique. La seconde étape préliminaire consiste à mailler en triangle la surface de la maille dynamique.

### 3.4.3 Maillage éléments finis tétraédrique

Afin de prendre en compte les noeuds internes au domaine  $\omega$  une méthode de triangulation de Delaunay-Voronoi a été utilisée pour construire le maillage éléments finis. Partant

du maillage surfacique triangulé de la maille dynamique  $\omega$  et de la boîte englobante, le module de maillage développé génère automatiquement un maillage tétraédrique pour chaque maille grossière (c.f. figure 3.4). Ce maillage est composé uniquement de tétraèdres. Chaque tétraèdre est complètement inclus dans une maille fine. Ainsi la porosité et la perméabilité absolue associées à chaque maille fine sont affectées à chaque tétraèdre qui est contenu dans cette cellule fine. Cette démarche permet de ne perdre aucune information tant sur le plan pétrophysique que sur le plan géométrique. D'autre part on répertorie les noeuds qui sont situés sur la frontière du domaine  $\omega$  ou à l'intérieur de ce dernier. On a alors toutes les données nécessaires pour appliquer la méthode des éléments finis.

### 3.4.4 Gestion des failles

La modélisation des réservoirs fait généralement apparaître des discontinuités telles que les failles dont il faut tenir compte lors de l'étape de la mise à l'échelle. La situation la plus générale à traiter est la mise à l'échelle d'un maillage géologique C.P.G. vers un modèle dynamique C.P.G. indépendant du modèle géologique. Deux types de failles sont alors à considérer : les failles "géologiques" représentées à l'échelle fine et leur traduction dans le modèle dynamique que l'on appellera failles "dynamiques". La différence des échelles de représentation fait que très souvent la faille dynamique n'est pas géométriquement identique à la faille géologique que l'on souhaite prendre en compte. Il peut ainsi arriver que les cellules fines englobant la maille grossière  $\omega$  ne sont pas toutes du même côté de la faille géologique. La maille grossière ne permet pas de respecter les discontinuités aussi bien que dans le modèle géologique. Dans la figure 3.5, on peut remarquer que certaines cellules fines ne sont pas du même côté de la faille géologique que la majorité des cellules fines constituant la maille grossière. La figure 3.5 révèle également un autre problème qui peut survenir lors d'un changement d'échelle : la maille dynamique n'est pas entièrement remplie par des cellules fines (région 1). Afin de respecter les failles géologiques, un algorithme de maillage spécifique a été développé. Un masque est appliqué sur les cellules fines constituant la boîte englobante et situées du mauvais côté de la faille. Une fois que les cellules fines indésirables sont désactivées par ce masque on applique l'algorithme de maillage automatique sur les cellules actives de la boîte englobante pour obtenir le maillage tétraédrique. Pour traiter le second problème (cellules fines manquantes), on duplique autant de fois que nécessaire les cellules fines situées sur le bord de la boîte englobante, afin de remplir entièrement la maille dynamique. On utilise alors le mailleur Voronoï pour obtenir la triangulation. Cette approche permet d'effectuer une mise à l'échelle automatique qui évite un travail fastidieux (et parfois source d'erreur) de gestion manuelle des failles. Ce traitement est efficace essentiellement pour les failles dynamiques

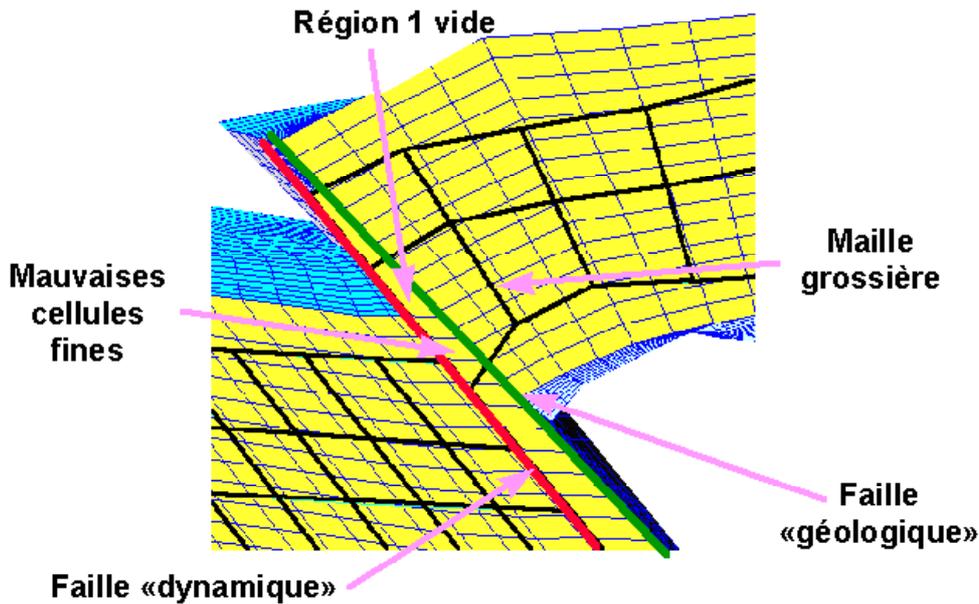


Figure 3.5: Traitement des failles

secondaires (modélisées en escalier), qui peuvent être géométriquement très différentes des failles géologiques correspondantes (c.f. figure 3.6).

### 3.4.5 Maille dégénérée (Pinch-outs)

Il arrive fréquemment que le maillage dynamique contienne des mailles dégénérées couramment appelées pinch-outs dans l'industrie pétrolière. L'existence de telles mailles est souvent liée à l'apparition ou à la disparition de couches géologiques (cf figure 3.7).

Un maillage éléments finis respectant la frontière du pinch-out ainsi que le maillage géologique est obtenu pour ces mailles singulières de la même manière que précédemment. En outre la méthode développée permet de mailler des domaines  $\omega$  à géométrie quelconque. Ceci autorise le traitement des maillages dynamiques Voronoï (c.f. figure 3.8) qui commencent à apparaître dans l'industrie pétrolière.

### 3.4.6 Raffinement

Un module de raffinement de maillage a été développé afin d'obtenir une bonne précision numérique du tenseur équivalent. Le raffinement est effectué sur les mailles fines qui constitue la boîte englobante.

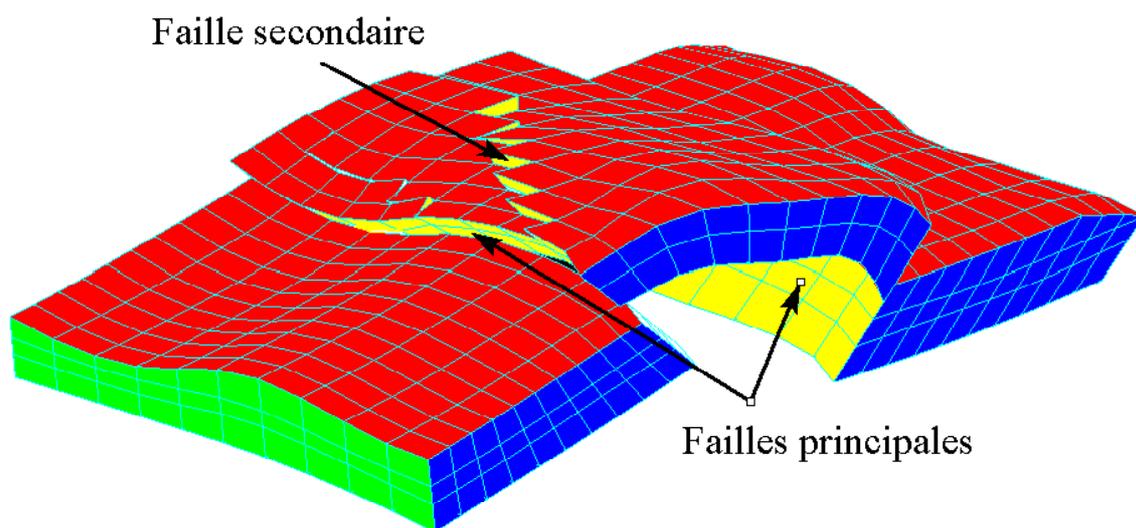


Figure 3.6: Modélisation des failles

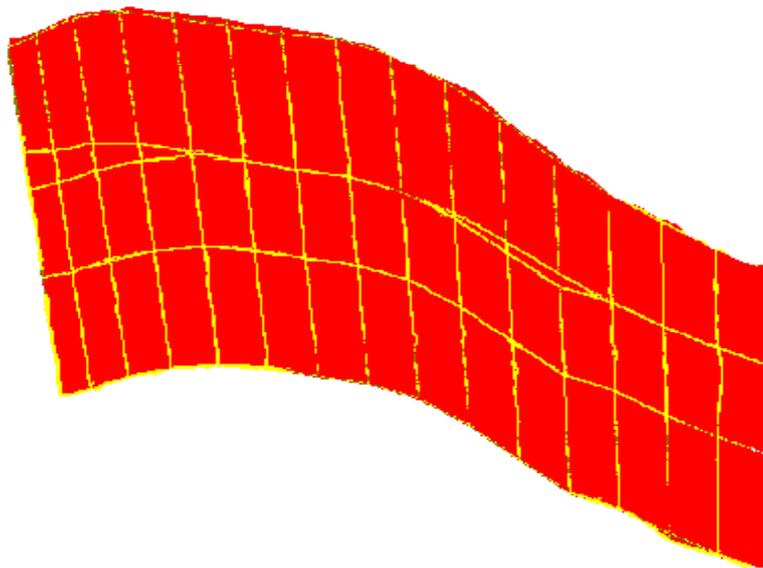


Figure 3.7: Pinch-outs (coupe transversale)

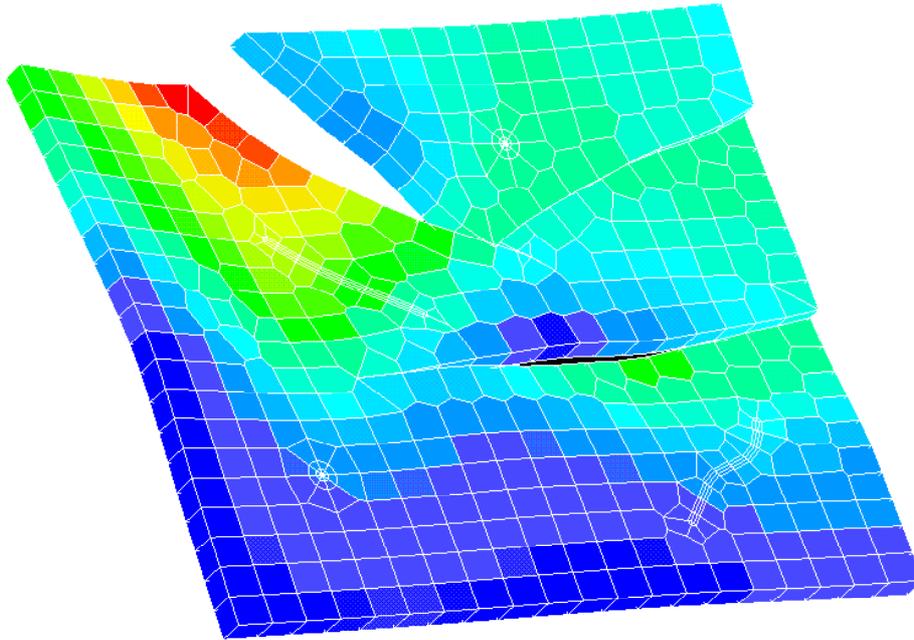


Figure 3.8: Exemple avec des mailles Voronoï

### 3.4.7 Approximation volumique d'une maille dynamique

Le temps cpu nécessaire à la construction du maillage tétraédrique est très élevé. Néanmoins il existe plusieurs solutions pour le diminuer comme l'utilisation d'une transformation géométrique pour se ramener à un cube de référence, sur lequel le maillage est alors construit. Toutefois la mise en oeuvre de ces différentes solutions est relativement coûteuse; c'est pourquoi l'étape du maillage tétraédrique a été remplacée par l'alternative de la boîte englobante qui correspond à une approximation volumique de la maille C.P.G. considérée. Ce travail a été réalisé au sein de la société Elf Exploration Production et permet de compléter la chaîne de traitement des maillages 3D déstructurés.

#### Boîte englobante

Pour chaque maille grossière donnée  $\omega$  on construit une boîte englobante composée de mailles fines. Trois options (cf figure 3.9) sont disponibles :

a) La boîte englobante est constituée des mailles fines incluses dans  $\omega$  ou ayant une intersection avec la frontière du domaine  $\omega$ .

b) La boîte englobante est constituée des mailles fines dont le centre de gravité est inclus dans la maille grossière.

c) La boîte englobante est constituée de  $N_{x_i}$  mailles fines dans l'axe des  $x_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

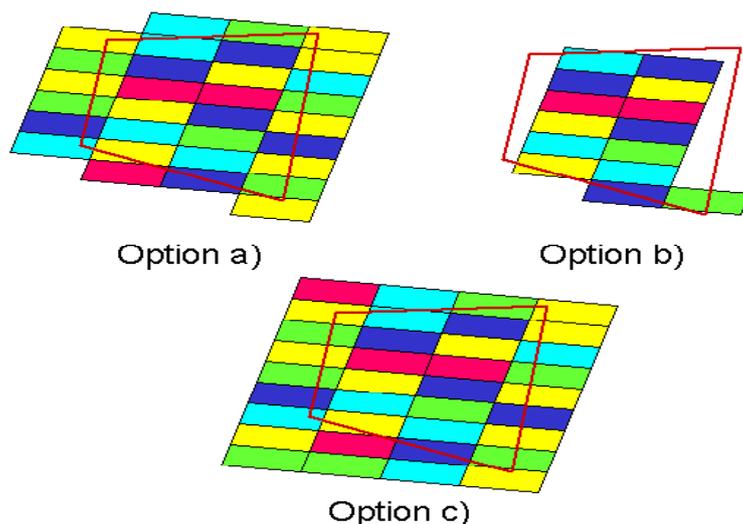


Figure 3.9: Approximation d'une maille dynamique

On applique alors la méthode des éléments finis conformes et/ou mixtes sur l'approximation volumique de la maille dynamique. Ceci permet de s'affranchir de la construction du maillage tétraédrique d'où un gain de temps. Bien que cette façon de faire est une source d'erreurs supplémentaires qui peuvent être grandes dans certains cas, cette méthodologie peut encore être améliorée. Ce genre d'approximation est couramment utilisée en ingénierie pétrolière [50], [80], où la boîte englobante utilisé est l'option c).

## 3.5 Résolution numérique des problèmes locaux

Le but de ce paragraphe est de présenter les principales étapes de la programmation de la méthode des éléments finis appliquée à la résolution des problèmes locaux pour des maillages déstructurés.

### 3.5.1 Méthode des éléments finis conformes

Afin d'obtenir une borne supérieure du tenseur équivalent, un code d'éléments finis conformes a été développé pour résoudre les problèmes locaux sur un maillage déstructuré. Une présentation de la méthode des éléments finis conformes peut être trouvée dans [23]. L'implémentation effectuée permet de traiter une triangulation composée de triangles et/ou de quadrilatères en 2D. L'implémentation dans le cadre 2D est nécessaire pour répondre à des situations de l'industrie pétrolière telles que le traitement de cross-sections qui correspondent à un problème bidimensionnel. Dans le cadre tridimensionnel

la triangulation peut être composée de tétraèdres et/ou d'hexaèdres. On utilise alors des éléments finis de degré un [69] définis sur les divers éléments que peut comporter la triangulation.

Le calcul de la matrice de raideur et du second membre élémentaire se font classiquement par l'usage d'un élément fini de référence. A partir des contributions élémentaires, calculées sur chaque élément de la triangulation, on construit le système linéaire que l'on sauvegarde sous la forme d'un stockage morse.

Les problèmes locaux ne diffèrent que par leurs conditions aux limites. Or ces conditions aux limites se retrouvent uniquement dans le second membre du système linéaire. Au cours de l'assemblage, on calcule les seconds membres élémentaires et ceci pour chaque condition aux limites, ce qui permet d'optimiser les temps de calculs. On est donc amené à résoudre deux ou trois systèmes linéaires, suivant la dimension, de la forme  $Ax = b$  où seul le second membre  $b$  change. On résout alors le système linéaire par l'une des deux méthodes suivantes :

- La méthode itérative du gradient conjugué avec un préconditionnement basé sur la décomposition incomplète de Cholesky.

- La méthode directe de Cholesky.

On calcule enfin, les coefficients du tenseur équivalent à partir des solutions des différents systèmes linéaires et des éléments de la matrice de masse. Grâce à plusieurs calculs intermédiaires, sauvegardés en mémoire au cours de l'assemblage, on obtient ainsi les coefficients du tenseur homogénéisé par une simple combinaison linéaire des différents éléments calculés précédemment.

### 3.5.2 Méthode des éléments finis mixtes hybrides

Pour résoudre les problèmes locaux nous avons utilisé par ailleurs, une méthode d'éléments finis mixtes hybrides [19]. Cette approximation permet d'obtenir une borne inférieure du tenseur équivalent. Lors de la programmation nous nous sommes basés sur les travaux de Bendali et al. [11], [73]. Comme le tenseur  $K$  est constant par élément et que l'on utilise l'espace de Raviart-Thomas de plus bas degré, le système linéaire final à résoudre peut être obtenu en appliquant une méthode éléments finis  $P_1$  non-conforme au problème initial. L'assemblage, le stockage et la résolution du système linéaire est effectué de la même manière que dans le cas de la méthode des éléments finis conformes. Le calcul des coefficients équivalents est immédiat.

Cette méthode a été programmée en 2D pour un maillage déstructuré composé uniquement de triangle. En 3D, la méthode des éléments finis mixtes capable de traiter des triangulations composées d'hexaèdres a été programmée au sein de l'IFP par S. Gaiffe [33] et L. Jeannin.

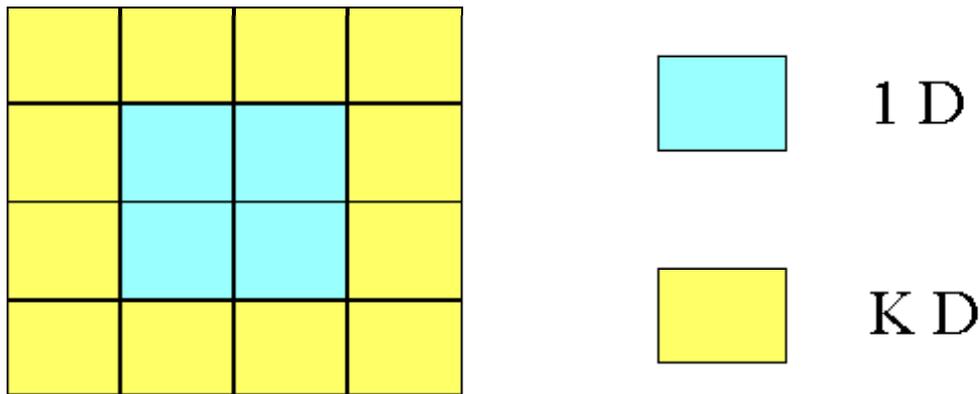


Figure 3.10: Domaine symétrique

**Remarque 3.5.1** *Il a été également programmé en 2D (M.E.F. conformes et M.E.F. mixtes hybrides) ainsi qu'en 3D (M.E.F. conformes) la résolution des problèmes locaux et le calcul du tenseur équivalent fournis par la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords confinées.*

## 3.6 Calculs numériques du tenseur équivalent

On présente des exemples de calculs de tenseurs équivalents pour les différentes méthodes de mise à l'échelle présentées dans les chapitres précédents. On examine numériquement les coefficients équivalents obtenus pour diverses géométries 2D et 3D.

### 3.6.1 Domaine symétrique

On considère le domaine symétrique dont la distribution de perméabilité (homogène et isotrope) est donnée par la figure 3.10. La perméabilité est fixée à 1 Darcy à l'intérieur du domaine (zone bleu) et l'on fait varier la perméabilité dans le milieu décrit par la zone verte. Cet exemple a été étudié par de nombreux auteurs [2], [3] et [54], ce qui va nous permettre de comparer numériquement les diverses méthodes classiquement utilisées. La symétrie de la distribution des perméabilités absolues de la maille grossière et l'isotropie de chaque milieu implique l'isotropie du tenseur homogénéisé. C'est pourquoi les résultats obtenus, repris dans le tableau (3.1), doivent être multipliés par la matrice identité d'ordre 2 afin d'obtenir le tenseur équivalent final.

$K$	$K_{HA}^*$	$K_{GE}^*$	$K_{RE}^*$	$K_{CW}^*$	$\underline{K}_{MC}^*$	$\overline{K}_{MC}^*$	$K_{HP}^*$	$K_{MG}^*$	$\underline{K}_{ML}^*$	$\overline{K}_{ML}^*$	$K_{AR}^*$
10	3.08	5.62	6.17	6.46	6.47	6.48	6.52	6.70	7.28	7.29	7.75
100	3.88	31.62	54.24	58.49	58.54	58.56	59.23	61.73	69.20	69.22	75.25

(3.1)

Les abréviations du tableau ci-dessus font référence aux méthodes suivantes :

$\overline{K}_{MC}^*$	Méthode confinée (borne supérieure)	
$\underline{K}_{MC}^*$	Méthode confinée (borne inférieure)	
$\overline{K}_{ML}^*$	Méthode linéaire (borne supérieure)	
$\underline{K}_{ML}^*$	Méthode linéaire (borne inférieure)	
$K_{HP}^*$	Homogénéisation périodique	
$K_{MG}^*$	Méthode multigrille [54]	(3.2)
$K_{RE}^*$	Méthode de renormalisation	
$K_{CW}^*$	Méthode de Carwell et Parsons	
$K_{HA}^*$	Moyenne harmonique	
$K_{GE}^*$	Moyenne géométrique	
$K_{AR}^*$	Moyenne arithmétique	

Comme le prévoit la théorie toutes les méthodes de mise à l'échelle fournissent des résultats compris entre la moyenne harmonique et arithmétique. Les méthodes numériques fournissent dans l'ensemble des résultats semblables. On observe également que les résultats de la méthode confinée et de l'homogénéisation périodique sont inférieurs aux résultats du tenseur équivalent obtenu par la méthode linéaire.

### 3.6.2 Domaine du L inversé

La figure 3.11 décrit l'exemple du L inversé qui a été extrait des travaux de Amaziane et Al. [2] et [3]. Contrairement à l'exemple précédent, la distribution de la perméabilité (homogène et isotrope) est non symétrique. Dans ce cas, même si tous les milieux sont isotropes, le tenseur homogénéisé n'est pas isotrope. Les résultats de la mise à l'échelle pour chacune des méthodes considérées sont repris dans le tableau ci-dessous. On présente les tenseurs équivalents obtenus en fonction du nombre d'éléments de la triangulation du domaine sur laquelle on applique la méthode des éléments finis pour résoudre les problèmes locaux. On utilise les mêmes notations que pour l'exemple précédent et les

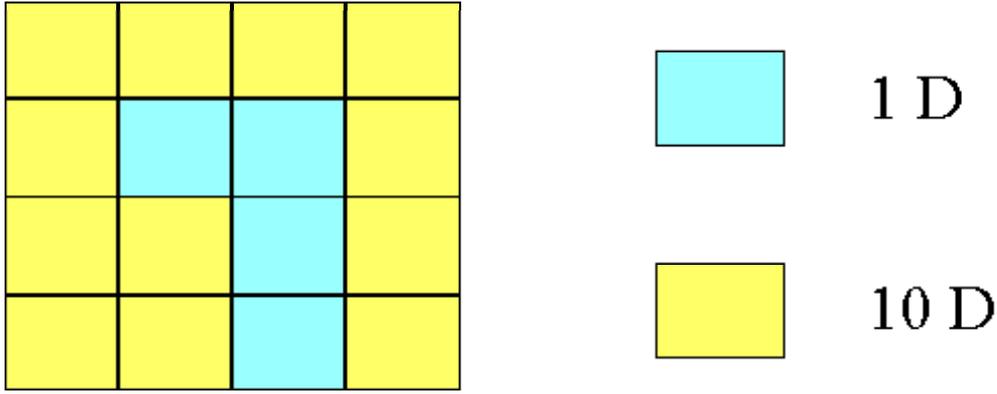


Figure 3.11: L inversé

termes des tenseurs équivalents sont donnés de la manière suivante :

$$\begin{array}{|c|}
 \hline
 K_{11}^* \\
 \hline
 K_{12}^* = K_{21}^* \\
 \hline
 K_{22}^* \\
 \hline
 \end{array} \quad (3.3)$$

Mail.	$K_{HA}^*$	$K_{RE}^*$	$\underline{K}_{MC}^*$	$\overline{K}_{MC}^*$	$K_{CW}^*$	$K_{HP}^*$	$K_{GE}^*$	$\underline{K}_{ML}^*$	$\overline{K}_{ML}^*$	$K_{AR}^*$
16 elts	3.08	4.80	4.75	4.99	5.31	5.57	5.62	5.62	5.87	7.75
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.34	0.00	-0.32	-0.32	0.00
	3.08	6.75	6.62	6.94	6.71	6.94	5.62	6.66	6.94	7.75
256 elts	3.08	4.80	4.87	4.88	5.31	5.35	5.62	5.73	5.75	7.75
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.28	0.00	-0.34	-0.34	0.00
	3.07	6.75	6.77	6.79	6.71	6.78	5.62	6.81	6.83	7.75
784 elts	3.08	4.80	4.87	4.87	5.31	5.33	5.62	5.74	5.74	7.75
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.28	0.00	-0.34	-0.34	0.00
	3.08	6.75	6.78	6.78	6.71	6.76	5.62	6.82	6.82	7.75

La distribution de la perméabilité n'étant pas symétrique, les tenseurs équivalents obtenus par les méthodes linéaire et périodique comportent des termes extra-diagonaux non nuls, contrairement aux méthodes algébriques. Ces termes non nuls impliquent que les directions principales de l'écoulement du fluide ne sont pas alignées avec les axes de coordonnées de la maille grossière. On remarque par ailleurs que les résultats des tenseurs équivalents obtenus avec les méthodes numériques convergent lorsque l'on raffine le maillage élément finis. Plus précisément on constate que les tenseurs obtenus à l'aide d'une

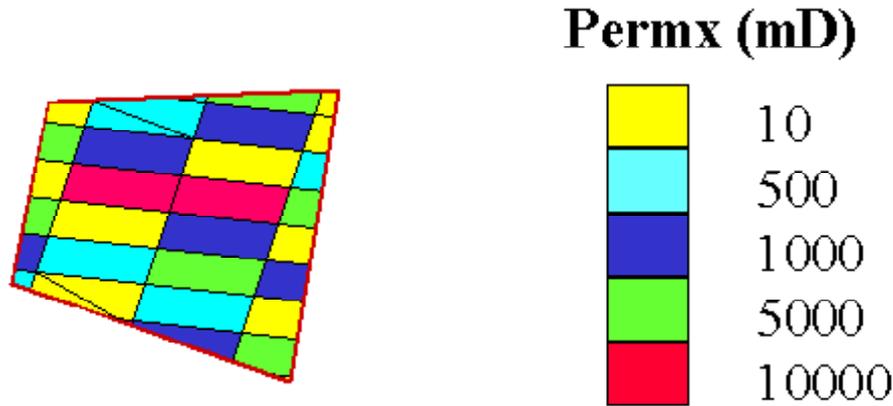


Figure 3.12: Géométrie quelconque 2D

méthode d'éléments finis mixte-hybride convergent par valeur inférieure tandis que la méthode d'élément finis conforme permet de converger vers le tenseur équivalent par valeur supérieure.

### 3.6.3 Exemple 2D déstructuré

Dans ce paragraphe on expose les résultats du tenseur équivalent obtenu par la méthode linéaire sur une géométrie quelconque bidimensionnelle, extraite d'une coupe 2D d'un gisement réel. La distribution de la perméabilité homogène et isotrope variant entre 10 et 10000 mD est illustrée par la figure 3.12. Les coefficients du tenseur équivalent obtenus par la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires sont donnés dans le tableau suivant :

Termes du tenseur équivalent	Méthode éléments finis	
	Mixte hybride	Conforme
$K_{11}^*$	2395.52	2397.34
$K_{12}^*$	4.29	4.29
$K_{22}^*$	1371.84	1371.95

(3.4)

Les résultats présentés dans le tableau (3.4) ont été obtenus avec un maillage élément finis raffiné composé de 220 triangles. On remarque que la méthode des éléments finis conformes [resp. mixtes hybrides] fournit bien une borne supérieure [resp. inférieure] du tenseur équivalent.

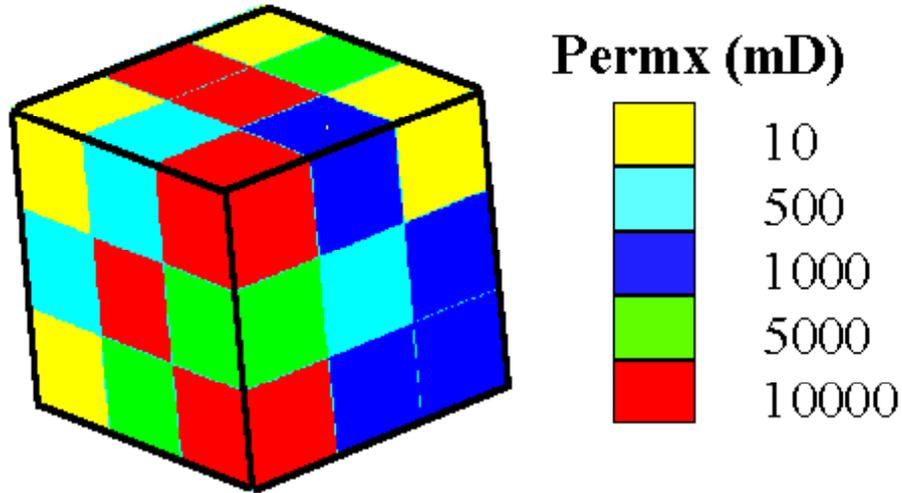


Figure 3.13: Maillage orthogonal 3D

### 3.6.4 Exemple 3D structuré

On considère maintenant un exemple décrit par une géométrie 3D orthogonale. Dans le cas de la figure 3.13 qui correspond à un taux d'agrégation de  $3 \times 3 \times 3$  mailles fines, on obtient les résultats suivants :

Termes du tenseur équivalent	$\underline{K}_{MC}^*$	$\overline{K}_{MC}^*$	$\underline{K}_{ML}^*$	$\overline{K}_{ML}^*$
$K_{11}^*$	1691.49	1691.56	1813.82	1813.97
$K_{12}^*$	0.0	0.0	-0.417	-0.427
$K_{13}^*$	0.0	0.0	3.56	3.56
$K_{22}^*$	3561.35	3562.59	3645.95	3646.23
$K_{23}^*$	0.0	0.0	5.43	5.43
$K_{33}^*$	2413.73	2414.05	2527.15	2527.82

(3.5)

Les calculs ont été effectués sur un maillage éléments finis raffiné et composé de 1728 hexaèdres. On remarque que les termes diagonaux de l'approximation du tenseur équivalent calculée avec la méthode linéaire sont supérieurs aux termes diagonaux issus de la méthode confinée.

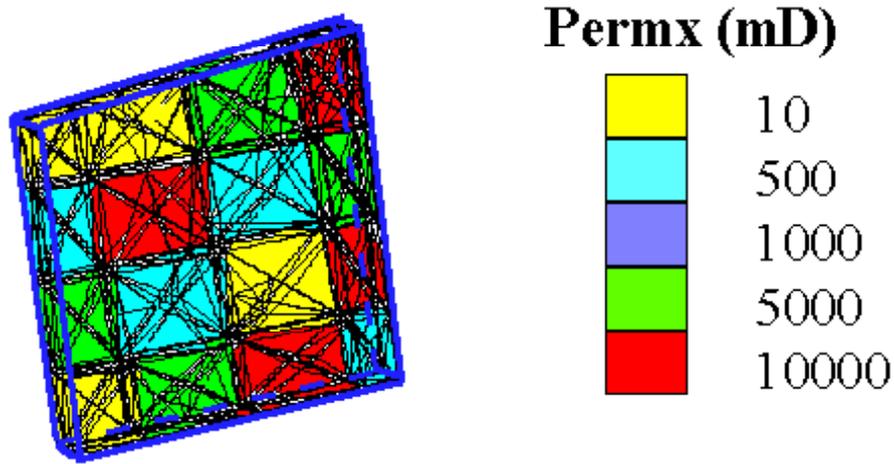


Figure 3.14: Géométrie quelconque 3D

### 3.6.5 Exemple 3D déstructuré

On termine enfin par le traitement d'un exemple 3D déstructuré. L'exemple de la figure 3.14 correspond à la structure d'une maille grossière 3D *Corner Point Geometry*, dont la perméabilité absolue homogène et isotrope du maillage fin varie entre 10 et 10000 mD. On applique dans ce cas la méthodologie présentée précédemment pour obtenir le maillage tétraédrique de la figure 3.14 sur lequel on applique la méthode des éléments finis. La méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires fournit alors le tenseur équivalent suivant :

Termes du tenseur équivalent	Méthode éléments finis	
	Mixte	Conforme
$K_{11}^*$	731.72	732.20
$K_{12}^*$	-2.72	-2.72
$K_{13}^*$	0.55	0.55
$K_{22}^*$	591.61	592.17
$K_{23}^*$	1.79	1.80
$K_{33}^*$	534.64	534.83

(3.6)

La borne inférieure obtenue par la méthode des éléments finis mixtes a été calculée sur un maillage composé de 864 hexaèdres alors que la borne supérieure a été obtenue avec le maillage tétraédrique décrit par la figure 3.14 et qui comporte 1248 tétraèdres. La

différence entre les termes fournis par la méthode des éléments finis conformes et mixtes est inférieure à 1%. On peut donc en conclure que l'on a obtenu une bonne approximation du tenseur équivalent fourni par la méthode linéaire.



# Chapitre 4

## Simulations numériques

On applique les différentes méthodes de mise à l'échelle, étudiées dans les chapitres précédents, à la simulation numérique des écoulements en milieux poreux. Des expériences numériques ont été réalisées afin de tester et de comparer les diverses méthodes. Des tests numériques en 2D avec un maillage structuré ont été présentés dans [4]. Un exemple en 3D avec maillage déstructuré a été présenté dans [5]. Dans ce chapitre on se contente de présenter deux exemples afin d'illustrer la méthodologie exposée au chapitre 3. Le premier test correspond à un modèle académique 2D sur lequel on compare les diverses méthodes de mise à l'échelle sur un maillage orthogonal et déstructuré. Contrairement au maillage orthogonal, construit de manière classique, le maillage déstructuré a été construit de manière à respecter les hétérogénéités principales telles que les chenaux à forte perméabilité. Afin de valider dans un cadre tridimensionnel la méthode présentée au chapitre 3, le second exemple traite le cas plus général d'un modèle 3D déstructuré, dont les données ont été extraites d'un gisement pétrolier réel. Pour chaque test, on présentera des résultats numériques pour des écoulements monophasiques, ainsi que pour des écoulements diphasiques immiscibles et incompressibles. Une description ainsi que la modélisation numérique et l'analyse mathématique de ces phénomènes peut être trouvés dans l'ouvrage de Chavent et Jaffré [22]. Dans le cadre diphasique, les expériences numériques effectuées simulent les déplacements forcés de l'huile par de l'eau. Pour les différentes simulations effectuées on compare les résultats de la simulation de référence (i.e. simulation sur le maillage fin) aux résultats obtenus sur le modèle mis à l'échelle en utilisant les tenseurs équivalents fournis par les différentes méthodes d'homogénéisation. On présente les courbes de concentration ainsi que les cartes de saturations et de pressions du gisement. Les temps de calcul sont mentionnés pour illustrer le gain obtenu.

## 4.1 Géométries 2D déstructurées

Le premier exemple concerne un cas académique dont la distribution de perméabilité isotrope est donnée dans la figure 4.1. Il s'agit d'un croisement en diagonale de deux chenaux, dont un se sépare en deux parties pour se rejoindre à l'extrémité droite. Le maillage comporte  $100 \times 100$  mailles fines et la perméabilité varie entre 7000 et 9000 mD dans les chenaux puis se dégrade aux alentours de ces derniers. Plusieurs méthodes de mise à l'échelle ont été testées sur cet exemple. Les tenseurs homogénéisés sont obtenus sur deux maillages grossiers différents. L'un est un maillage dynamique grossier qui a été construit afin de respecter au mieux la géométrie des chenaux, ce qui a conduit au maillage déstructuré défini dans la figure 4.2 et comportant 195 mailles. Le second maillage grossier est quant à lui construit de manière classique et correspond à un maillage orthogonal constitué de  $13 \times 15$  (195) mailles. La porosité  $\phi$  de chacune des mailles fines est déduite de sa perméabilité  $k$  par la loi suivante :

$$\begin{aligned} \phi &= 0.05 + (0.02345 * \ln(k)) \\ \text{et si } \phi &\leq 10^{-2} \text{ alors } \phi = 10^{-2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

La porosité de chaque maille du maillage dynamique est calculée par la moyenne arithmétique.

## 4.2 Simulations traceur 2D

Dans ce paragraphe on se restreint à des simulations traceur dont une brève présentation est donnée dans le paragraphe suivant. Sur le gisement présenté précédemment on va comparer différentes méthodes de mise à l'échelle. Lors des simulations associées à la méthode d'homogénéisation avec les conditions aux bords linéaires (**ML**), nous avons pris la moyenne des tenseurs équivalents obtenus avec la méthode des éléments finis mixtes-hybrides et la méthode des éléments finis conformes (i.e. bornes de l'encadrement). Concernant la méthode confinée (**MC**) nous avons aussi pris la moyenne des bornes inférieures et supérieures obtenues numériquement. Quant à la méthode de Cardwell et Parsons (**CW**) elle fournit également deux bornes qui encadrent la perméabilité équivalente.

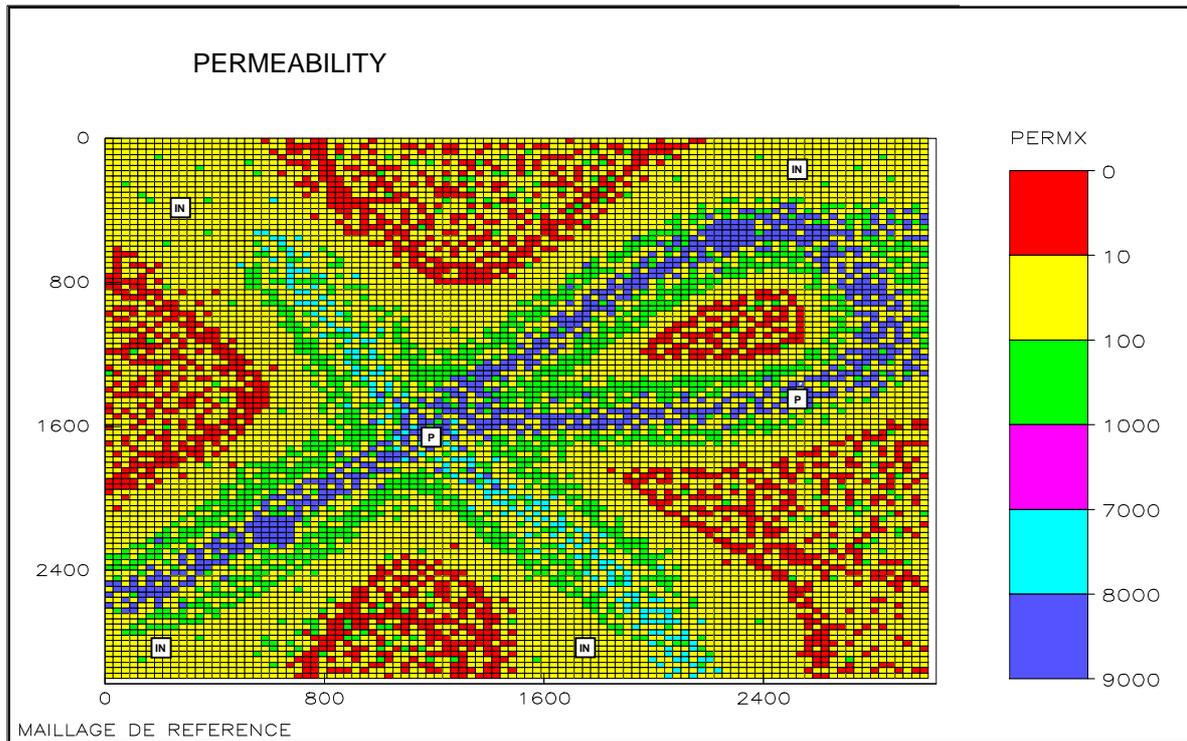


Figure 4.1: Distribution de la perméabilité absolue (maillage fin de référence)

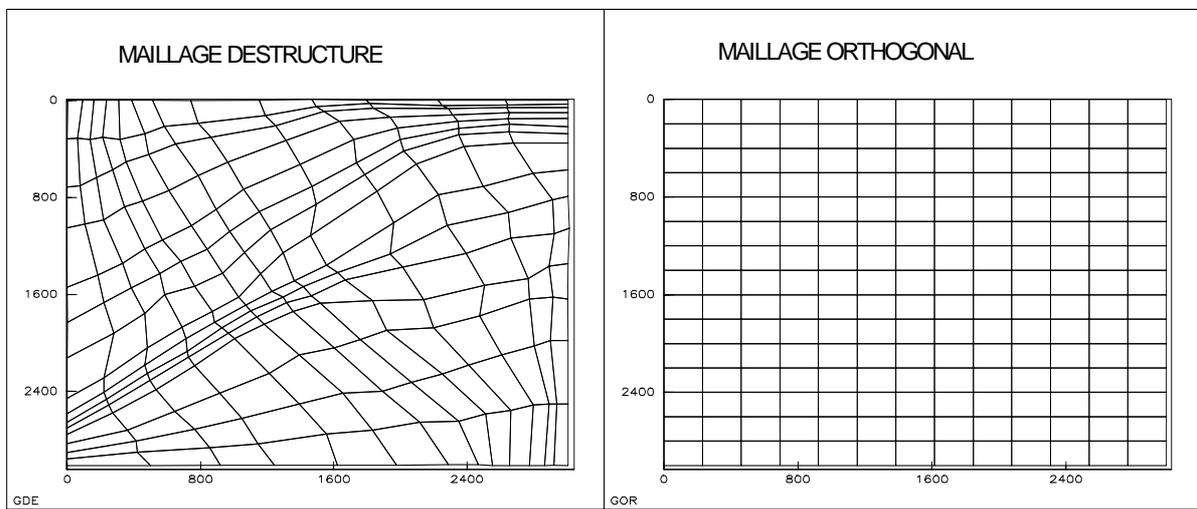


Figure 4.2: Maillages dynamiques

Comme cela est indiqué dans la relation (1.9) du premier chapitre, nous avons utilisé la moyenne géométrique de ces deux bornes lors des simulations. Enfin, nous avons également utilisé les moyennes arithmétique (**AR**) et harmonique (**HA**).

### 4.2.1 Description d'un traceur

Les simulations traceur permettent de simuler les déplacements d'un fluide monophasique (ex. l'eau) dans un gisement hétérogène. On peut alors observer le comportement d'un gisement et situer les chemins d'écoulement préférentiels du fluide, chemins qu'il faudra restituer au mieux lors de l'étape de mise à l'échelle. Ce type de simulations permet de s'affranchir des courbes de perméabilités relatives puisque l'on ne traite qu'un seul fluide. Par conséquent, lors des comparaisons des simulations fine et grossières les seuls paramètres qui varient sont la porosité et la perméabilité absolue, ce qui permettra de valider les méthodes d'homogénéisation. De plus, les simulations traceur nécessite de faibles temps de calculs. Toutes les simulations ont été effectuées avec le logiciel industriel Eclipse [31].

### 4.2.2 Caractéristiques du traceur

Le traceur utilisé est un traceur dans la phase eau avec les caractéristiques suivantes:

$$\begin{aligned} \text{Viscosité} &= 1.65 \text{ Cp} \\ \text{Densité} &= 1000 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \tag{4.2}$$

### 4.2.3 Pilotage des puits

On dispose de six puits sur le champ, dont les emplacements sont donnés dans la figure 4.1. Les quatre puits injecteurs, notés IN, sont situés aux extrémités des chenaux et l'on dispose de deux puits producteurs dont un, nommé PROD1 lors des simulations, est situé à l'intersection des deux chenaux. Le second puits producteur, nommé PROD2 est situé dans l'une des parties du chenal scindé en deux. Les puits sont gérés de manière à ce que la quantité de fluide injecté soit égale à la quantité de fluide produit et les caractéristiques des puits sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Débit d'injection des puits injecteurs} &: 25 \text{ m}^3/\text{j} \\ \text{Débit de production du puits PROD1} &: 50 \text{ m}^3/\text{j} \\ \text{Débit de production du puits PROD2} &: 50 \text{ m}^3/\text{j} \end{aligned} \tag{4.3}$$

#### 4.2.4 Expériences numériques 2D

On impose que le champ ait une concentration initiale en traceur nulle. Ainsi en injectant un traceur par les puits injecteurs, on peut observer l'écoulement de ce traceur dans le gisement jusqu'aux puits producteurs. La simulation de référence sur le maillage fin est notée **REF\_T** (REFérence Traceur) et les diverses simulations effectuées sur le maillage grossier déstructuré sont notées **GDE\_T** (Grossier DEstructuré Traceur) suivie de l'abréviation de la méthode de mise à l'échelle utilisée. Les simulations effectuées sur le maillage grossier orthogonal sont notées **GOR\_T** (Grossier ORthogonal Traceur) suivie également de l'abréviation correspondant à la méthode d'homogénéisation employée. Pour chacune des méthodes de mise à l'échelle on effectue, avec les tenseurs équivalents obtenus, trois simulations sur les maillages dynamiques définis ci-dessous.

- 1°) Afin de s'affranchir des approximations numériques faites lors de la simulation des écoulements, les valeurs des tenseurs équivalents sont redistribuées sur un maillage comportant autant de maille que le maillage de référence. Dans le cas orthogonal cela correspond à redistribuer les valeurs des tenseurs équivalents sur le maillage de référence. On peut ainsi comparer des simulations numériques où la taille du maillage est identique. Les simulations effectuées sur ce maillage "Fin" seront référencées par la lettre **F**. Par exemple **GDE\_T\_ML\_F** correspond à la simulation sur le maillage DEstructuré, d'un Traceur pour les tenseurs équivalents obtenus par la Méthode Linéaire. Le maillage déstructuré comportant le même nombre de mailles fines que le maillage Fin de référence .
- 2°) Des simulations d'écoulements monophasiques sont réalisées sur un maillage numérique déstructuré, intermédiaire entre le maillage défini précédemment dans le 1°) et le maillage grossier original. On effectue ainsi des simulations sur un maillage grossier "Raffiné" qui seront notées **R**. Par exemple, la simulation d'un Traceur sur le maillage Grossier DEstructuré Raffiné (intermédiaire) pour les tenseurs équivalents obtenus par la Méthode Linéaire sera notée : **GDE\_T\_ML\_R**.
- 3°) Enfin, on utilise le maillage grossier original sur lequel les différentes méthodes de mise à l'échelle ont été appliquées. On notera alors simplement **GDE\_T\_ML** pour une simulation sur le maillage Grossier DEstructuré d'un Traceur avec les coefficients de la Méthode Linéaire.

## 4.2.5 Maillage de référence

Les tenseurs équivalents ont été calculés sur le maillage grossier orthogonal donné dans la figure 4.2. On redistribue alors les valeurs des tenseurs équivalents sur le maillage de référence afin d'effectuer les simulations sur la même triangulation du gisement. Dans ce qui suit, on présente les courbes de concentration du traceur, les débits de production ainsi que la production cumulée du traceur aux puits producteurs. De plus les cartes de concentration et de pression sont comparées à la simulation de référence. Les résultats obtenus sont présentés dans les figures 4.3 à 4.6.

### Concentrations de traceur

On présente dans la figure 4.3 les courbes de concentration de traceur au cours du temps pour les différents puits producteurs. Pour le puits producteur PROD1 comme pour le puits producteur PROD2 la forme générale des courbes est quasiment la même quelque soit la méthode employée avec une meilleure forme générale pour le puits PROD2. Les courbes obtenues avec les méthodes numériques (ML et MC) sont quasiment identiques. Les différences entre les courbes proviennent simplement du temps de percée qui est différent suivant les méthodes utilisées. Le temps de percée le plus proche de la référence pour les puits PROD1 et PROD2 est celui issu de la moyenne arithmétique. Toutefois pour des concentrations élevées de traceur les méthodes numériques tendent à être meilleures.

### Débits et productions totales de traceur

Dans la figure 4.4 on compare les débits de production de traceur à chaque puits producteur ainsi que la production cumulée de traceur. Pour le puits PROD1 les courbes de production de traceur obtenues par les méthodes numériques sont décalées dans le temps par rapport à celles de la simulation de référence. Dans cet exemple la méthode de Cardwell et Parsons donne des résultats satisfaisants. Concernant les débits de production, on remarque un meilleur comportement global pour le puits PROD2 où l'on constate que les moyennes arithmétique et harmonique fournissent des résultats relativement éloignés par rapport à la référence.

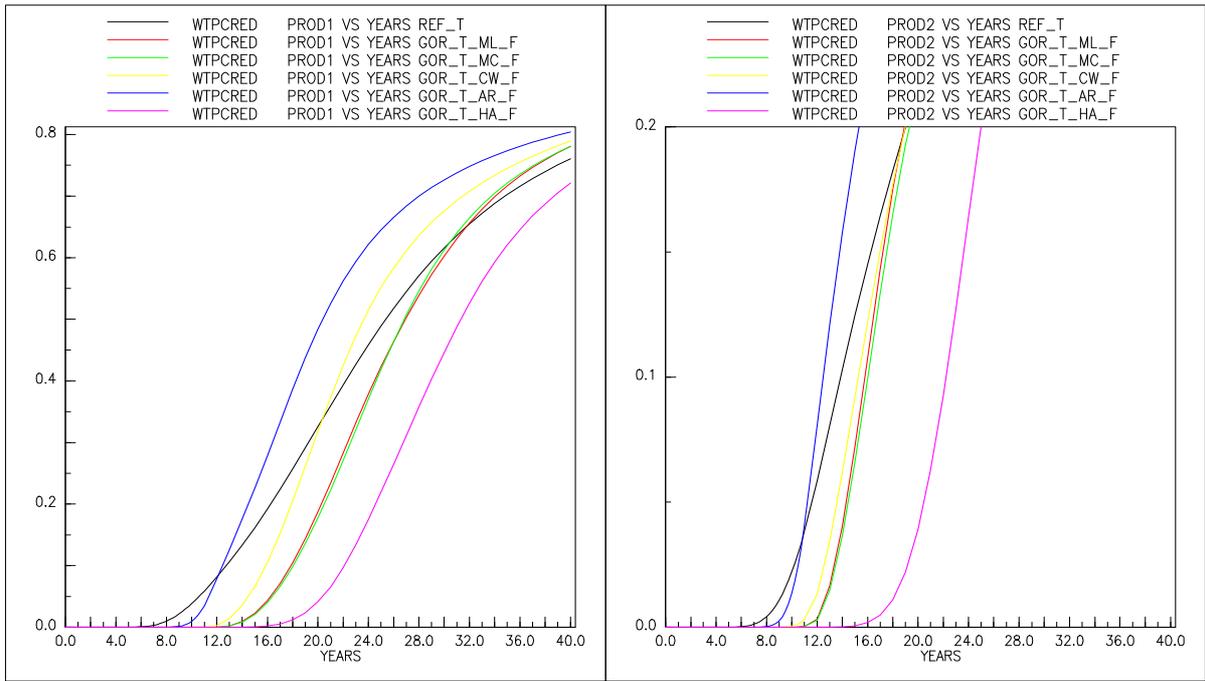


Figure 4.3: Concentrations de traceur  
(simulations effectuées sur le maillage fin de référence)

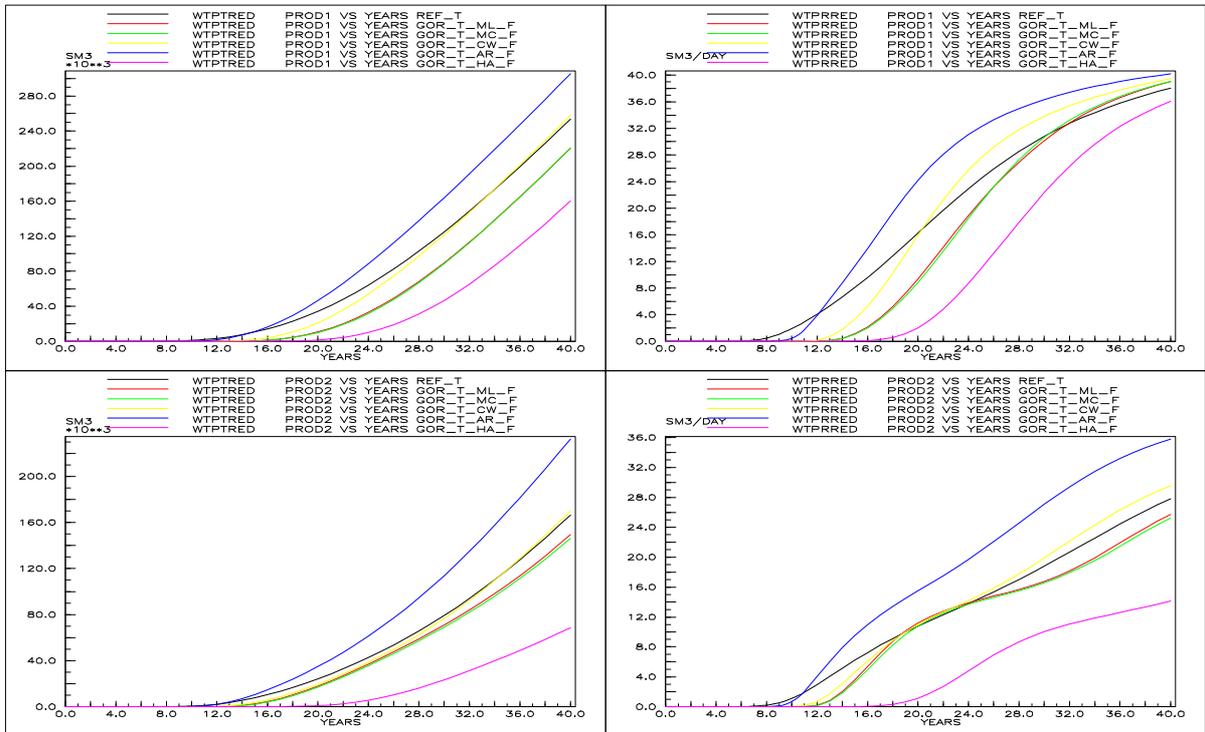


Figure 4.4: Débits et productions totale de traceur  
(simulations effectuées sur le maillage fin de référence)

### **Cartes de concentration**

Dans la figure 4.5 on compare les cartes de concentration de traceur à un même pas de temps. Les cartes correspondantes à la méthode confinée ne sont pas présentées car elles sont quasiment identiques à celles obtenues avec la méthode linéaire. Au vu des résultats précédents, nous avons choisi de ne présenter que les cartes de concentration les plus proches de la simulation de référence. C'est pourquoi concernant les méthodes algébriques on présente seulement les résultats obtenus avec la méthode de Cardwell et Parsons ainsi que la moyenne arithmétique. D'une manière générale on remarque que les cartes de concentration acquises avec la méthode ML et CW (pour cet exemple) sont quasiment identiques et reproduisent bien la simulation de référence. Quant à la moyenne arithmétique, quelques imperfections apparaissent, notamment aux abords des puits injecteurs.

### **Cartes de pression**

Dans la figure 4.6 on présente les champs de pression à un temps donné. Il apparaît nettement que la méthode numérique linéaire (ML) a permis de reproduire le champ de pression le plus proche de la référence. Le champ de pression issu des simulations faites avec la méthode confinée (MC) étant identique à celui obtenu avec la méthode ML, il n'est pas présenté. La carte de pression obtenue avec la méthode de Cardwell et Parsons présente une surpression globale par rapport à la simulation de référence. Ceci s'explique par le fait que les perméabilités équivalentes calculées par cette méthode sont inférieures aux perméabilités fournies par les méthodes numériques près des puits. Ainsi avec la méthode CW, les débits imposés des puits injecteurs ont pour conséquence d'augmenter la pression autour de ces derniers. Quant à la moyenne arithmétique, elle fournit des perméabilités plus élevées ce qui peut expliquer que le champ de pression observé est quasiment constant.

### **Conclusion**

Finalement le meilleur compromis entre tous les résultats est obtenu grâce aux méthodes numériques de mise à l'échelle avec toutefois des résultats très moyens au niveau des courbes de concentration et des débits de production de traceur. Ceci n'est pas surprenant puisque le maillage sur lequel a été effectué la mise à l'échelle ne tient absolument pas compte de la géométrie des chenaux. Cet argument fait l'objet du paragraphe suivant.

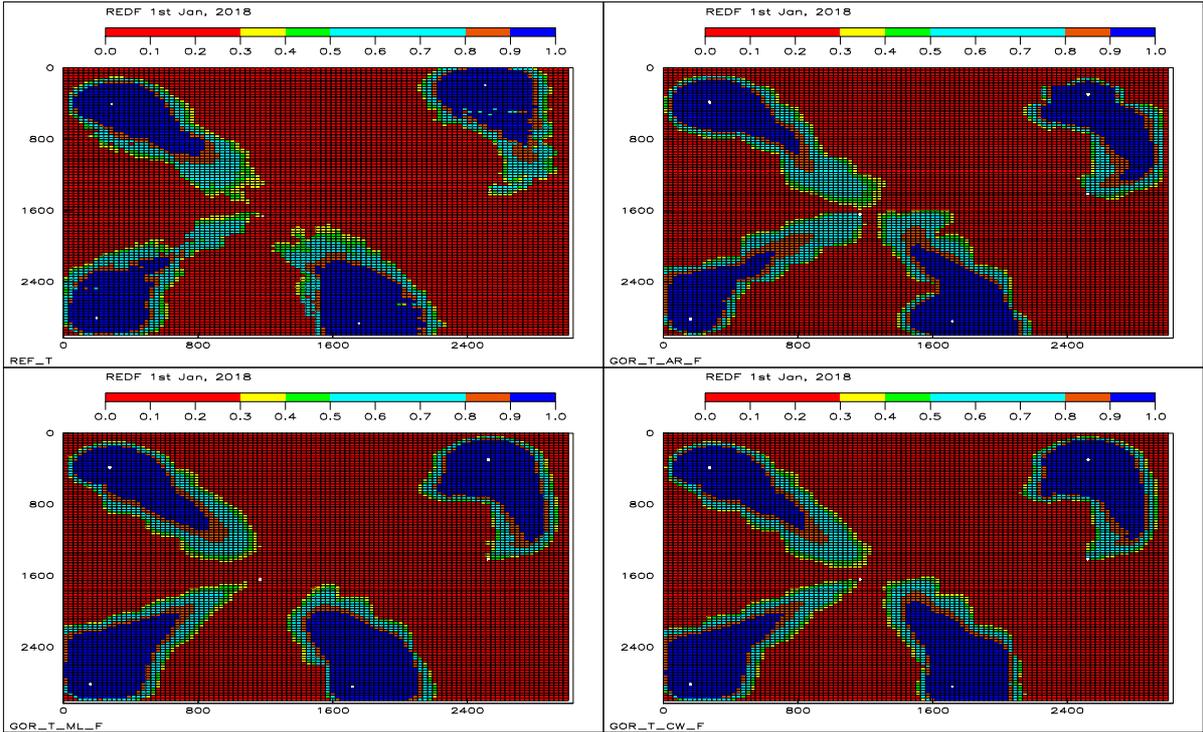


Figure 4.5: Cartes de concentration (18 ans)

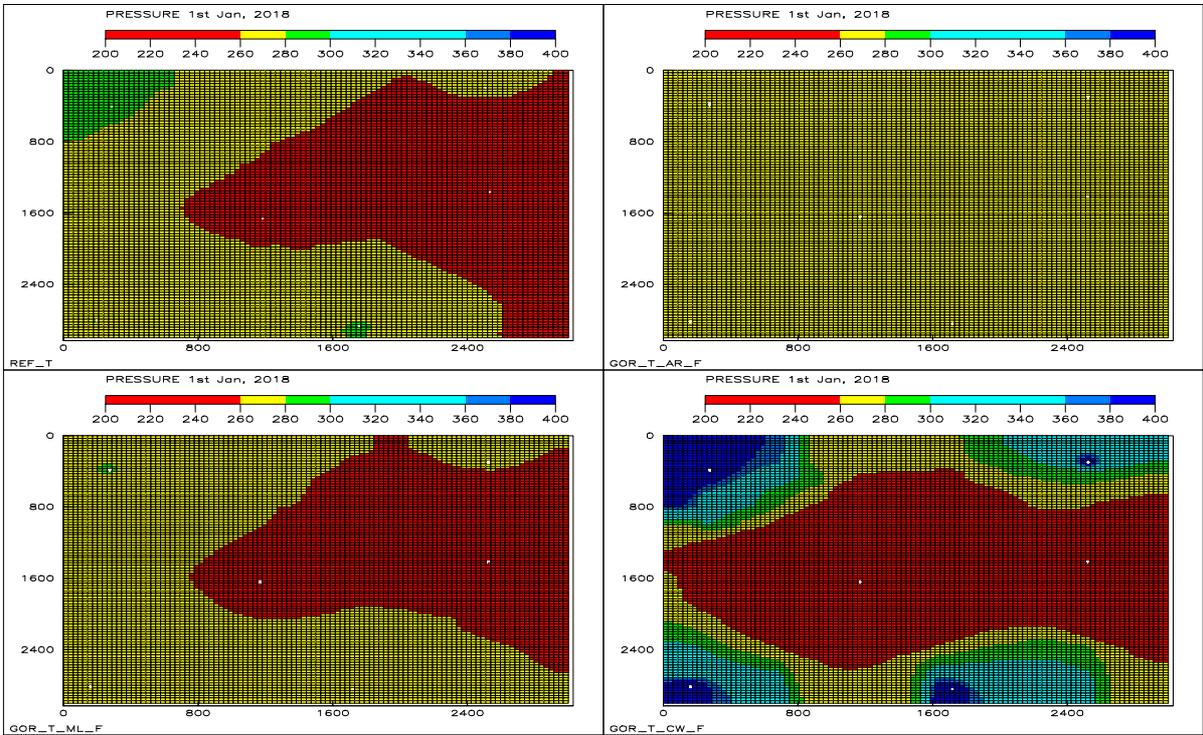


Figure 4.6: Cartes de pression (18 ans)

## 4.2.6 Maillage fin déstructuré

Dans ce paragraphe on étudie les tenseurs équivalents calculés sur le maillage grossier déstructuré décrit dans la figure 4.2. On construit dans un premier temps un maillage fin déstructuré de la manière suivante : on subdivise chaque maille grossière de telle manière à avoir un maillage fin déstructuré comportant le même nombre de maille que le maillage de référence. Les tenseurs équivalents calculés sur le maillage dynamique déstructuré illustré par la figure 4.2 sont alors redistribués sur le maillage fin déstructuré. Finalement, les simulations effectuées sur ce maillage 'fin' déstructuré sont comparées à la simulation de référence. Dans les figures 4.7 à 4.10, on donne les résultats obtenus.

### Concentrations de traceur

Dans la figure 4.7 qui représente les courbes de concentration de traceur on note que les courbes qui approchent le mieux la simulation de référence sont obtenues avec les méthodes numériques. Par ailleurs ces résultats sont meilleurs que ceux acquis dans le cas précédent avec une homogénéisation sur le maillage grossier orthogonal. Pour le puits producteur PROD1 on remarque même une différence significative entre la méthode linéaire et la méthode confinée. Lors du traitement de cet exemple la méthode de Cardwell et Parsons permet d'obtenir la meilleure prédiction du temps de percée. Pour le puits producteur PROD2 la forme générale des courbes est quasiment la même pour les diverses méthodes employées. Les courbes issues des simulations faites avec les méthodes numériques (ML et MC) sont pratiquement identiques sur ce puits. Là encore c'est la méthode CW qui permet d'avoir le temps de percée le plus proche de la référence pour le puits PROD2.

### Débits et productions totales de traceur

Dans la figure 4.8 les courbes de production totale de traceur obtenues avec les méthodes d'homogénéisation numériques permettent de restituer pratiquement les résultats de la simulation de référence. En ce qui concerne les débits de production on remarque que les méthodes numériques fournissent également une meilleure prédiction. Toutefois on note pour le puits producteur PROD2 un certain biais pour les 15 dernières années de la simulation. Comme c'est le cas pour les courbes de concentration de traceur, on a de meilleurs résultats qu'en effectuant une mise à l'échelle sur le maillage orthogonal fait dans le cas précédent. Les méthodes algébriques fournissent quant à elles des résultats respectant la tendance des simulations fines.

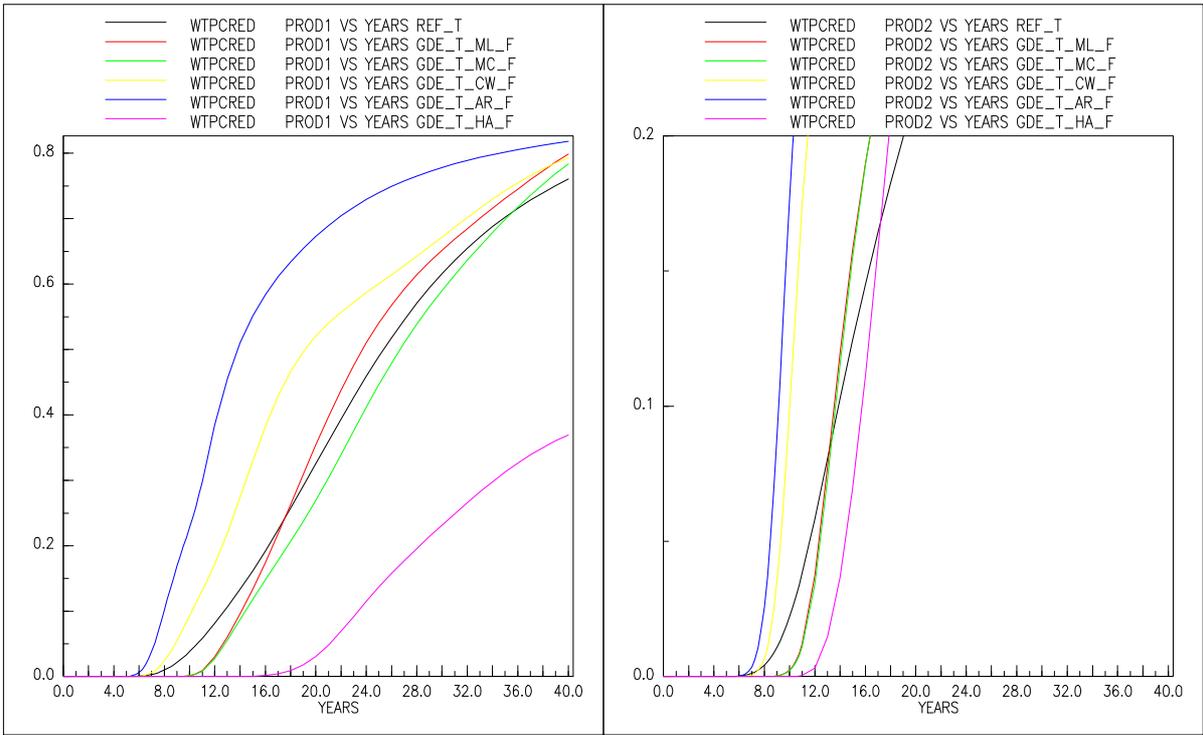


Figure 4.7: Concentrations de traceur  
(simulations effectuées sur le maillage fin déstructuré)

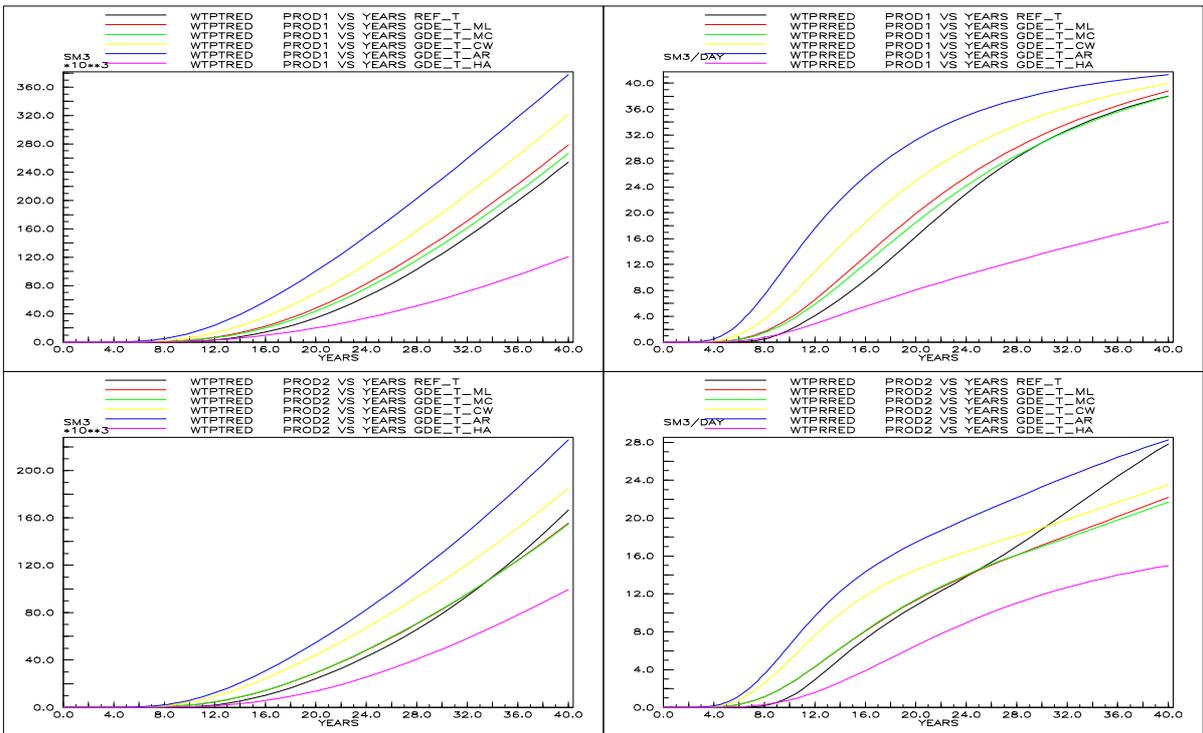


Figure 4.8: Débits et productions totale de traceur  
(simulations effectuées sur le maillage fin déstructuré)

## **Cartes de concentration**

Les cartes de concentration présentées dans la figure 4.9 tendent à confirmer les résultats commentés précédemment. La carte présentée pour la méthode ML est la plus proche de la référence bien que le contraste de concentration soient accentuées par le fait que le maillage suit le chenal. Les cartes correspondantes à la méthode confinée ne sont pas présentées car elles sont quasiment identiques à celles obtenues avec la méthode linéaire, ce qui était le cas précédemment. D'une manière générale on remarque que les méthodes AR et CW fournissent des cartes de concentration qui présentent des concentrations trop importantes dans les chenaux. Les fronts de concentration sont trop fins, ce qui est imputable à la mise à l'échelle sur un maillage respectant le chenal.

## **Cartes de pression**

Les cartes de pression sont présentées dans la figure 4.10. Il apparaît encore nettement que le champ de pression le plus proche de la référence est obtenu avec la méthode numérique linéaire (ML). Ce dernier est même meilleur que le champ de pression de l'exemple précédent. Comme dans le cas orthogonal, les simulations faites avec la méthode de Cardwell et Parsons donne un champ en surpression par rapport à la simulation de référence alors que celui obtenu avec la moyenne arithmétique est quasiment constant. Comme dans le cas orthogonal, ceci est à relier aux perméabilités équivalentes calculées par la méthode CW [resp. AR] qui sont inférieures [resp. supérieures] aux perméabilités fournies par les méthodes numériques près des puits.

## **Conclusion**

Les méthodes linéaire et confinée ont permis de restituer quasiment la simulation de référence. On en conclut qu'il est préférable de construire le maillage dynamique en fonction de la géologie et ceci afin de capter au mieux les hétérogénéités et de permettre une meilleure restitution des écoulements après la mise à l'échelle. Les résultats obtenus avec les méthodes algébriques sont sensiblement améliorées par rapport à une mise à l'échelle sur un maillage orthogonal, mais reste toutefois assez loin de la référence. C'est la méthode de Cardwell et Parsons qui fournit les meilleurs résultats parmi les méthodes algébriques. L'utilisation d'un maillage déstructuré pour réaliser l'homogénéisation en vu d'une simulation numérique sur le maillage fin déstructuré a permis d'améliorer les résultats, par rapport aux simulations du paragraphe précédent.

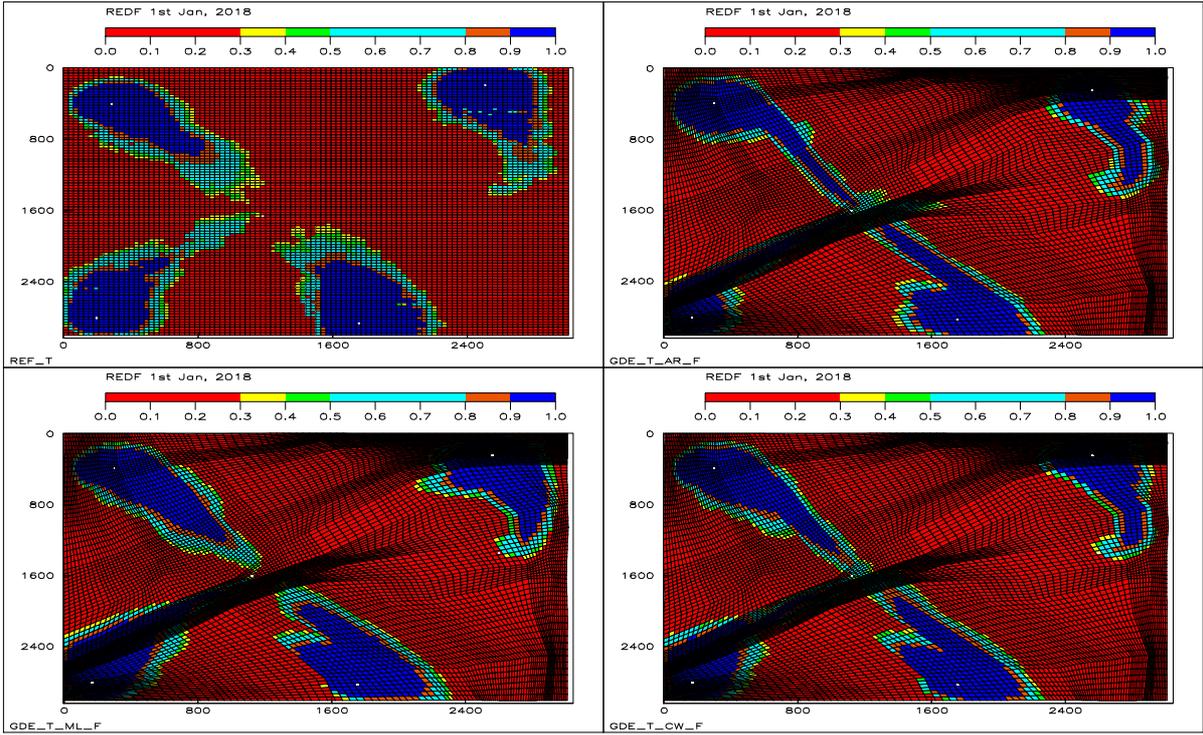


Figure 4.9: Cartes de concentration (18 ans)

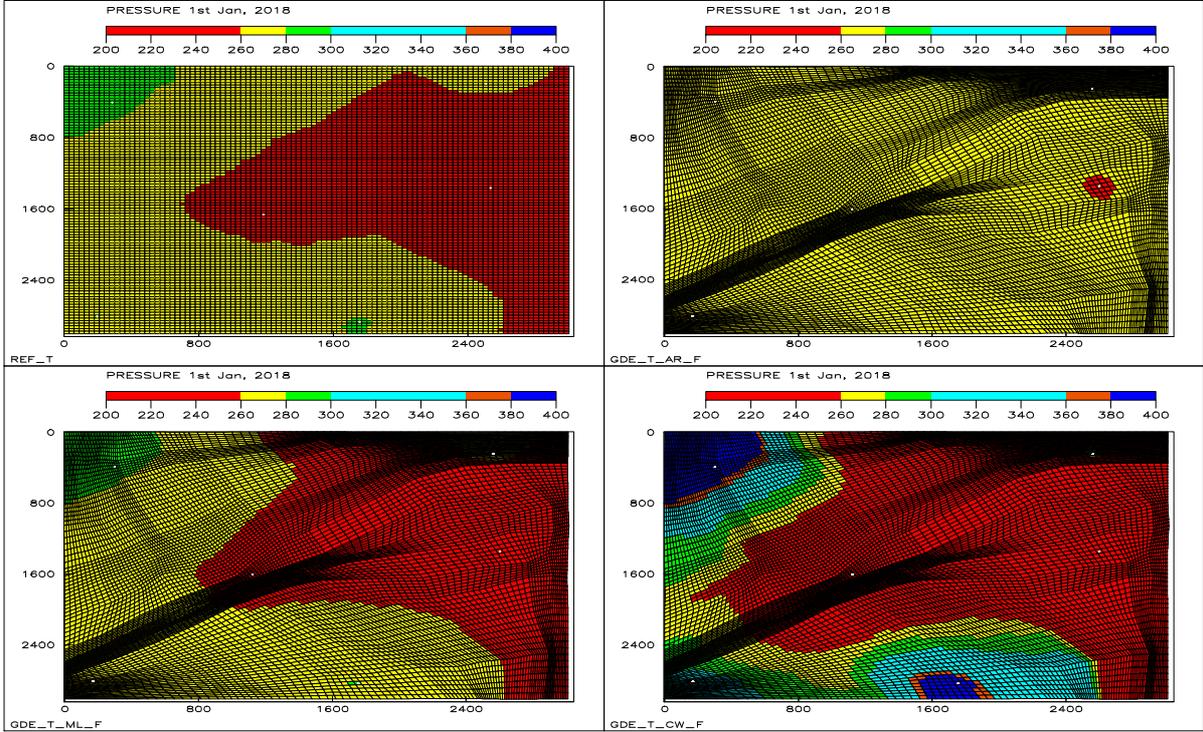


Figure 4.10: Cartes de pression (18 ans)

## 4.2.7 Maillage intermédiaire déstructuré

On effectue maintenant les simulations sur un maillage déstructuré intermédiaire entre le maillage fin déstructuré du paragraphe précédent et le maillage grossier original de la figure 4.2. Ce maillage dans lequel on a redistribué les tenseurs équivalents obtenus par les différentes méthodes d'homogénéisation comporte  $45 \times 39$  (1755) mailles et est décrit dans les figures 4.13 et 4.14. Les figures 4.11 à 4.14 illustre également les résultats issus des simulations faites sur le maillage intermédiaire déstructuré pour les différentes méthodes de mise à l'échelle.

### Concentrations de traceur

Les méthodes d'homogénéisation numériques permettent d'obtenir de meilleurs résultats par rapport aux méthodes algébriques (c.f. figure 4.11). Pour le puits producteur PROD1, les méthodes numériques se rapprochent très près du temps de percée de référence et reproduisent quasiment par la suite les concentrations de la référence avec un petit avantage pour la méthode linéaire (ML). Ce rapprochement du temps de percée de référence est imputable au maillage intermédiaire déstructuré utilisé. En effet, plus on simule sur un maillage grossier, plus on tend à retarder le temps de percée. Notons que pour le uits PROD1 le temps de percée le plus proche de la référence est obtenu avec la méthode de Cardwell et Parsons bien que la courbe ait tendance à s'écarter de la référence par la suite. Pour le puits PROD2 les méthodes ML et MC restituent quasiment le profil des concentrations du maillage fin.

### Débits et productions totales de traceur

Comme pour la simulation sur le maillage fin déstructuré, les courbes de production totale de traceur les plus proches de la référence sont obtenues avec les méthodes d'homogénéisation numériques comme l'indique la figure 4.12. En ce qui concerne les débits de production on observe également que les méthodes numériques fournissent une meilleure prédiction. Toutefois on remarque un certain décalage pour les temps de simulation supérieurs à 25 ans. Les remarques concernant les méthodes algébriques sont identiques à celles faites dans le cas des résultats obtenus sur le maillage fin déstructuré.

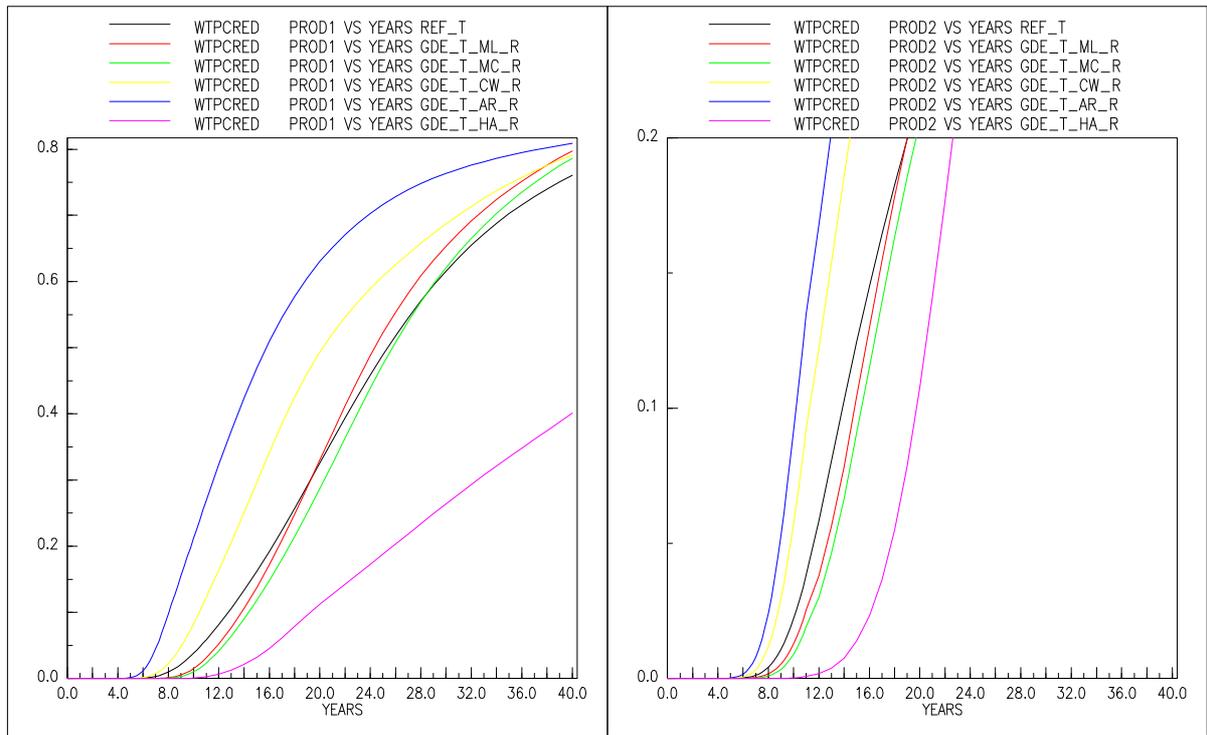


Figure 4.11: Concentrations de traceur  
(simulations effectuées sur le maillage numérique intermédiaire déstructuré)

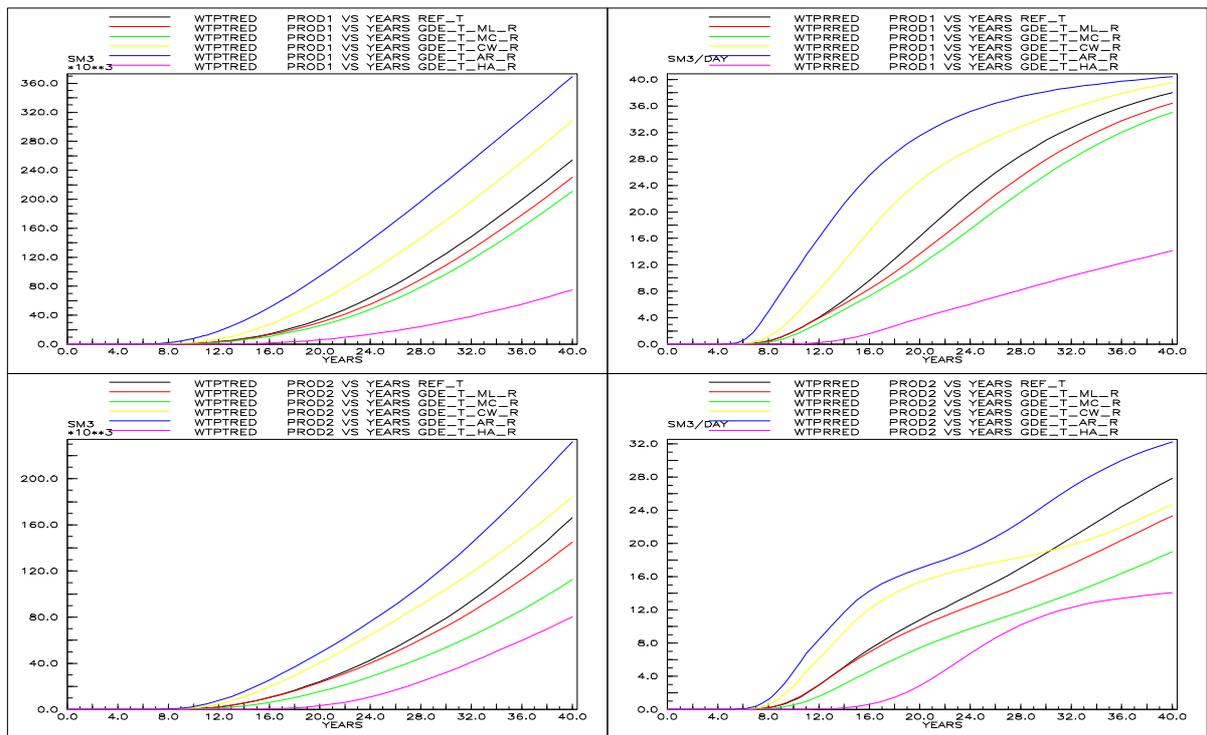


Figure 4.12: Débits et productions totale de traceur  
(simulations effectuées sur le maillage numérique intermédiaire déstructuré)

### **Cartes de concentration**

Dans les cartes de concentrations de la figure 4.13 on retrouve les résultats de la figure 4.9. Les commentaires sont identiques à ceux fait alors précédemment. Les cartes de concentration issues des simulations effectuées sur ce maillage numérique intermédiaire n'altèrent en rien la qualité des résultats obtenus sur le maillage fin.

### **Cartes de pression**

Les champs de pression présentés dans la figure 4.14 à un temps donné sont quasiment identiques à ceux obtenus dans la figure 4.10. Toutefois on voit apparaître une plus grande surface où la pression est inférieure à 260 bars pour la moyenne arithmétique. Finalement, on remarque que c'est avec les coefficients équivalents fournis par la méthode linéaire que l'on restitue le mieux le champ de pression de la simulation de référence.

### **Conclusion**

La redistribution sur le maillage grossier déstructuré intermédiaire des tenseurs équivalents issus des méthodes d'homogénéisation numériques a eu pour effet d'obtenir une meilleure prédiction du temps de percée tout en restituant de façon satisfaisante la simulation de référence aux temps longs. Par ailleurs, il a été constaté que les résultats obtenus sur le maillage grossier déstructuré intermédiaire sont meilleurs que ceux obtenus sur un maillage orthogonal intermédiaire (1755 mailles). Le respect des discontinuités géologiques lors de la construction du maillage grossier ainsi que pour l'étape de mise de mise à l'échelle apparaît une fois encore un élément essentiel si l'on souhaite reproduire au mieux les résultats des simulations fines sur un maillage plus grossier. Cette remarque est d'autant plus vraie que le maillage sur lequel est pratiqué la simulation est grossier.

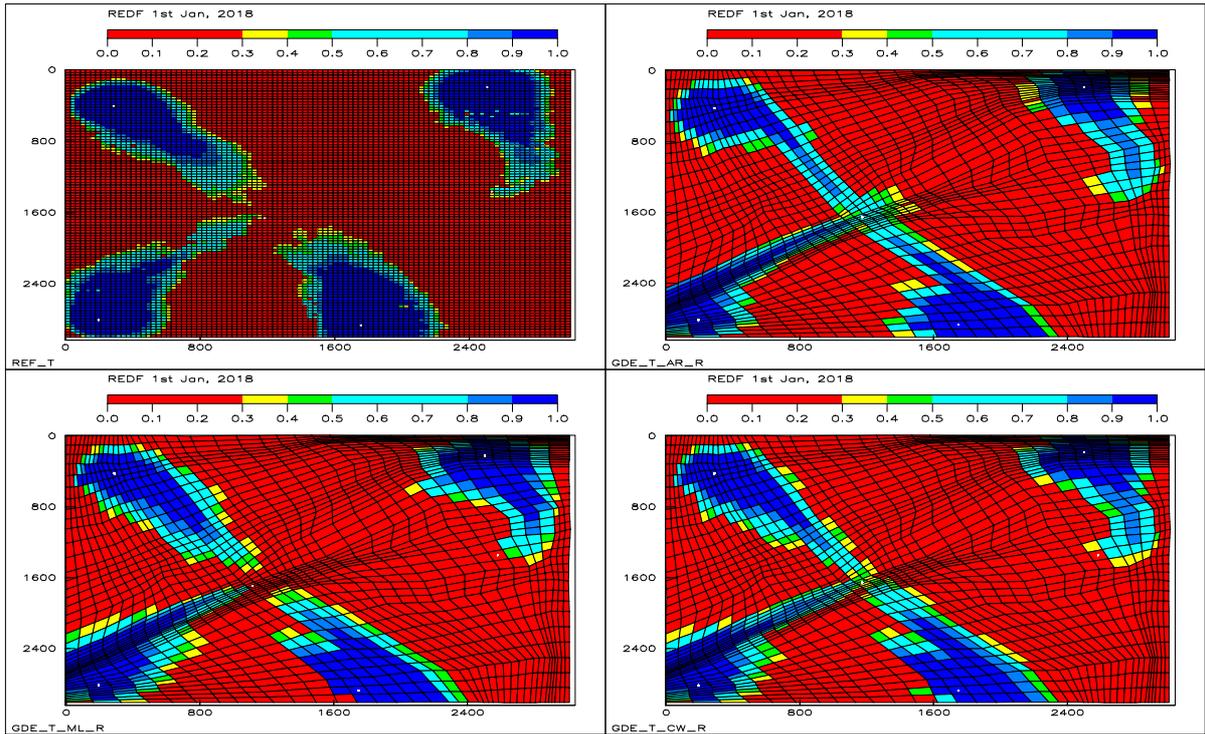


Figure 4.13: Cartes de concentration (18 ans)

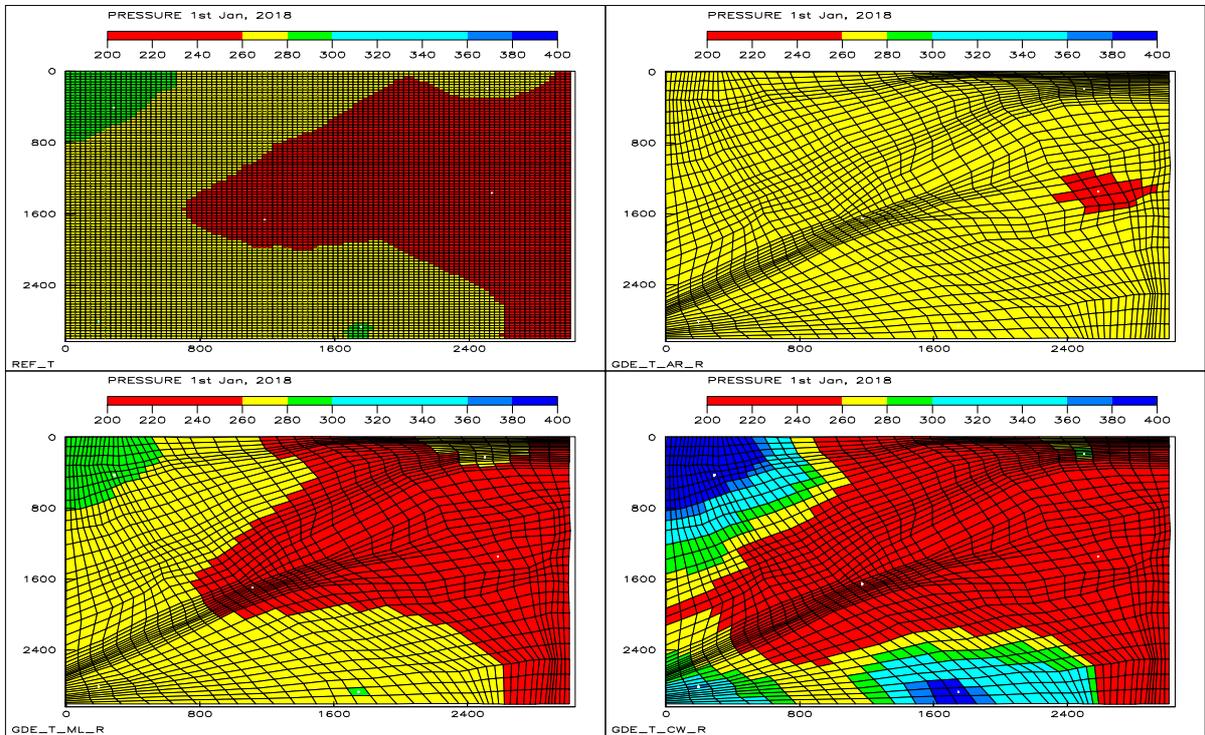


Figure 4.14: Cartes de pression (18 ans)

## 4.2.8 Maillage grossier déstructuré

La dernière étape consiste à réaliser les simulations sur le maillage grossier déstructuré sur lequel ont été calculés les coefficients équivalents. Etant donné que les résultats obtenus sont pratiquement les mêmes que dans le cas du maillage intermédiaire déstructuré on ne présente ici que les courbes de concentration de traceur et les cartes de pressions.

### Concentrations de traceur

Comme cela a été déjà signalé dans le cas précédent, on remarque l'effet du maillage sur le temps de percée obtenu avec les tenseurs équivalents des méthodes numériques. Ces dernières fournissent encore la prédiction la plus fiable par rapport à la référence comme l'indique la figure 4.15. Toutefois les résultats commencent à se dégrader au puits producteur PROD2.

### Cartes de pression

Les champs de pression présentés dans la figure 4.16 se dégradent quelque peu par rapport à ceux de la figure 4.14. Cette dégradation est dû au fait que la simulation est effectuée sur le maillage grossier ayant servi à calculer les coefficients équivalents. On ne retrouve pas de fronts de pression aussi corrects avec la méthode ML, bien que ces derniers soient encore très proches de la référence.

### Conclusion

Les simulations faites sur le maillage grossier déstructuré sur lequel la mise à l'échelle des perméabilités absolues a été effectuée confirment les résultats obtenus sur les différents maillages intermédiaires. Une dégradation prévisible des résultats est mise en évidence. Toutefois, les simulations faites avec les coefficients équivalents des méthodes d'homogénéisation numériques sont encore satisfaisantes. Par ailleurs, des simulations numériques ont été effectuées pour différentes caractéristiques du fluide traceur. Nous avons alors relevé des conclusions semblables à celles décrites précédemment dans ce chapitre.

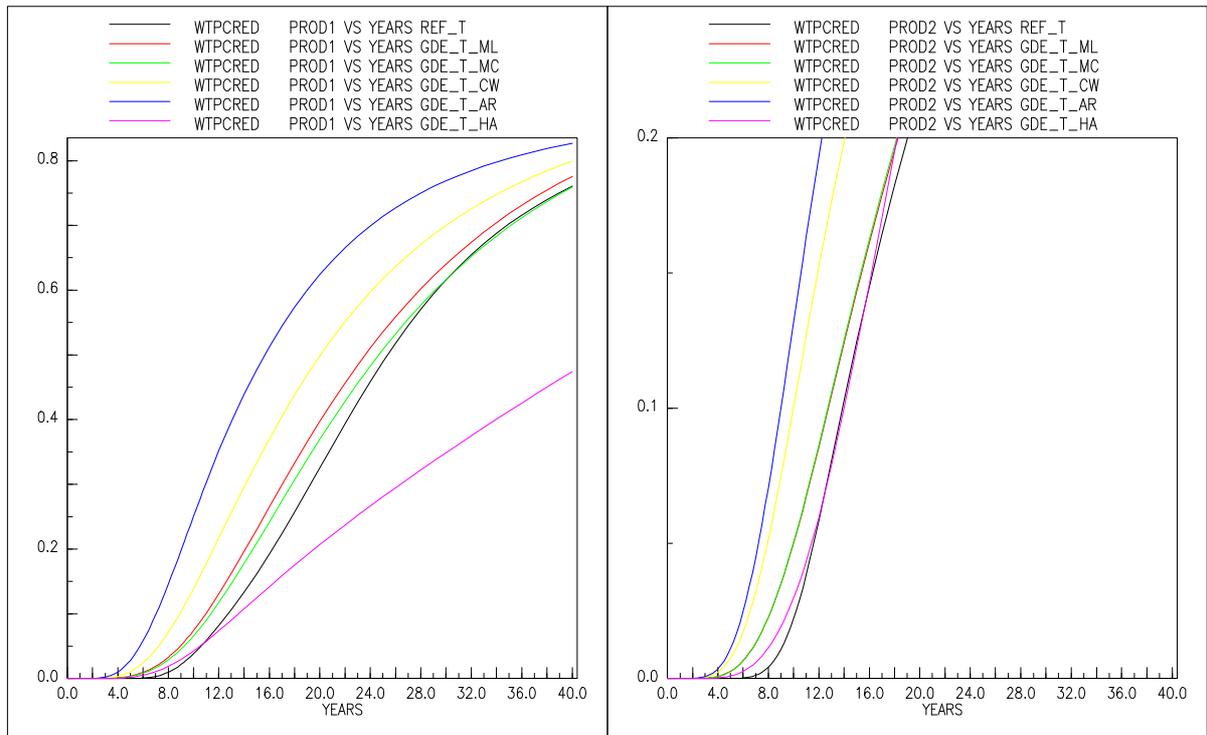


Figure 4.15: Concentrations de traceur (simulations effectuées sur le maillage grossier déstructuré)

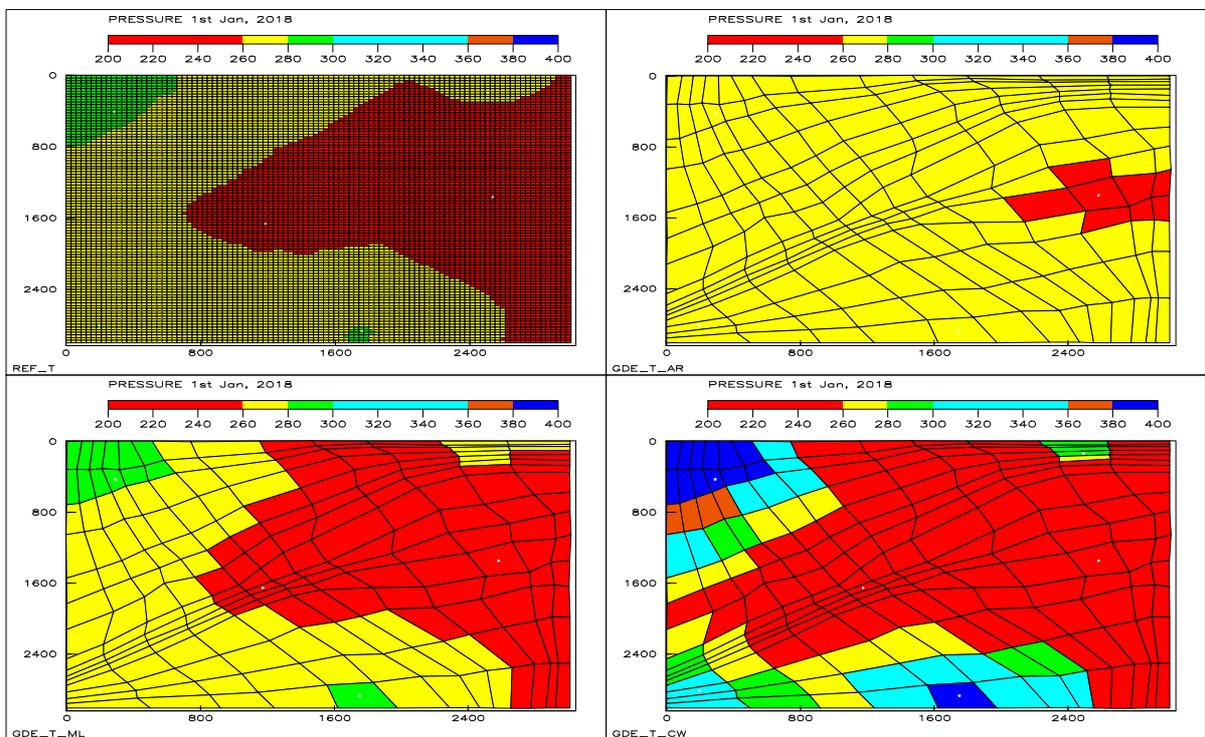


Figure 4.16: Cartes de pression (18 ans)

### 4.3 Simulations diphasiques 2D

Des simulations diphasiques de fluides immiscibles et incompressibles ont également été effectuées sur cet exemple académique bidimensionnel. Lorsque l'on réaffecte les perméabilités absolues équivalentes sur le maillage de référence, on peut observer des phénomènes identiques à ceux rencontrés dans le cas du traceur. Pour les simulations diphasiques sur le maillage fin déstructuré, on remarque également des comportements similaires à ceux relevés dans le cas des simulations traceur. C'est pourquoi les résultats ne sont pas présentés ici. Par contre lors des simulations effectuées sur les maillages intermédiaires grossiers les résultats diffèrent grandement suivant les courbes de perméabilités relatives choisies et le maillage numérique pris en compte. Aucune explication cohérente permet de justifier ces résultats. En fait, ceci n'est pas étonnant si l'on considère que lors d'une simulation multiphasiques sur un maillage grossier on doit au préalable réaliser l'homogénéisation de la perméabilité absolue mais aussi l'homogénéisation des perméabilité relative suivie d'une correction de la dispersion numérique. Même lorsqu'on manipule un seul jeu de perméabilité relative dans le gisement de sérieux problèmes peuvent apparaître. Ce problème de l'homogénéisation des courbes de perméabilité relative pour un modèle d'écoulement diphasique a été traité par Bourgeat et Hidani [18]. De nombreux travaux ont été menés dans ce domaine dont une synthèse peut être trouvée dans [9] et [45]. Néanmoins, des simulations diphasiques ont été effectuées [4] pour comparer l'homogénéisation périodique avec les méthodes étudiées dans ce chapitre. Dans le cas d'une distribution de perméabilité 2D aléatoirement répartie, il a été constaté que l'on obtient de meilleurs résultats avec la méthode linéaire. Dans l'exemple tridimensionnel de la deuxième partie de ce chapitre on présente quelques résultats de simulations diphasiques.



## 4.4 Géométrie 3D déstructurée et distribution de la perméabilité absolue

Dans ce paragraphe, on présente la structure générale d'une zone extraite d'un gisement réel 3D que nous avons étudiée. La géométrie du réservoir de référence illustré par la figure 4.17, est constitué de 165000 mailles réparties sur 40 couches. Ce modèle fin est un maillage déstructuré de type *Corner Point Geometry*, comprenant plusieurs failles et pinch-out. Une coupe horizontale de la distribution de la perméabilité absolue qui varie entre 0 et 8000 mD est donnée dans la figure 4.17. On signale que les tenseurs de perméabilité ne sont généralement pas homogènes. De plus on constate que le pourcentage de perméabilité inférieur à 10 mD est très élevée. Ceci à pour effet de créer des barrières qu'il faudra restituer lors de l'étape de mise à l'échelle. La taille du modèle fin à permis de simuler cette partie du gisement à l'échelle fine, ce qui offre la possibilité de pouvoir comparer les résultats obtenus en utilisant les diverses méthodes de mise à l'échelle.

Le maillage grossier sur lequel est effectué le calcul des perméabilités équivalentes est donné dans la figure 4.18. Dans cette figure on représente la géométrie du maillage dynamique suivant la profondeur à laquelle sont situées les mailles grossières. Ce modèle grossier est un maillage *Corner Point Geometry* déstructuré composé de 3300 mailles réparties sur 20 couches.

## 4.5 Simulations traceur 3D

On se restreint dans un premier temps aux cas des simulations traceur 3D. Sur le gisement tridimensionnel présenté précédemment on va comparer les différentes méthodes de mise à l'échelle. Comme dans le premier exemple, on différencie les simulations qui sont effectuées par des abréviations correspondant aux méthodes de mise à l'échelle utilisées.

### 4.5.1 Caractéristiques du traceur

Le traceur utilisé est un traceur dans la phase eau avec les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Viscosité} &= 0.65 \text{ Cp} \\ \text{Densité} &= 1150 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \tag{4.4}$$

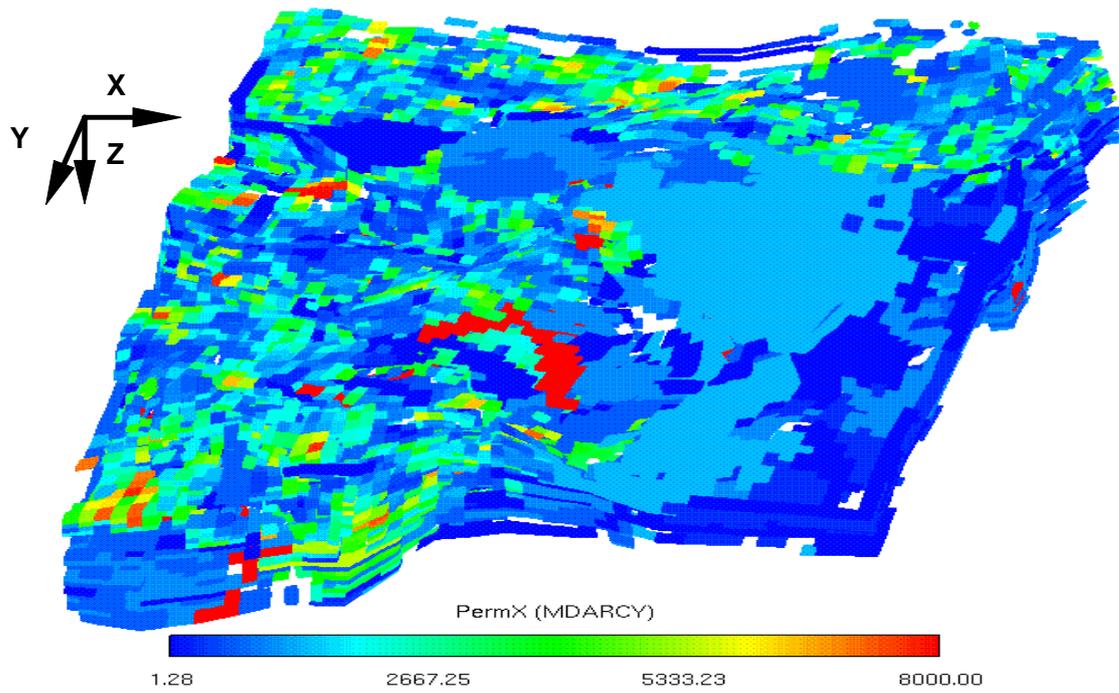


Figure 4.17: Carte de perméabilité du maillage de référence

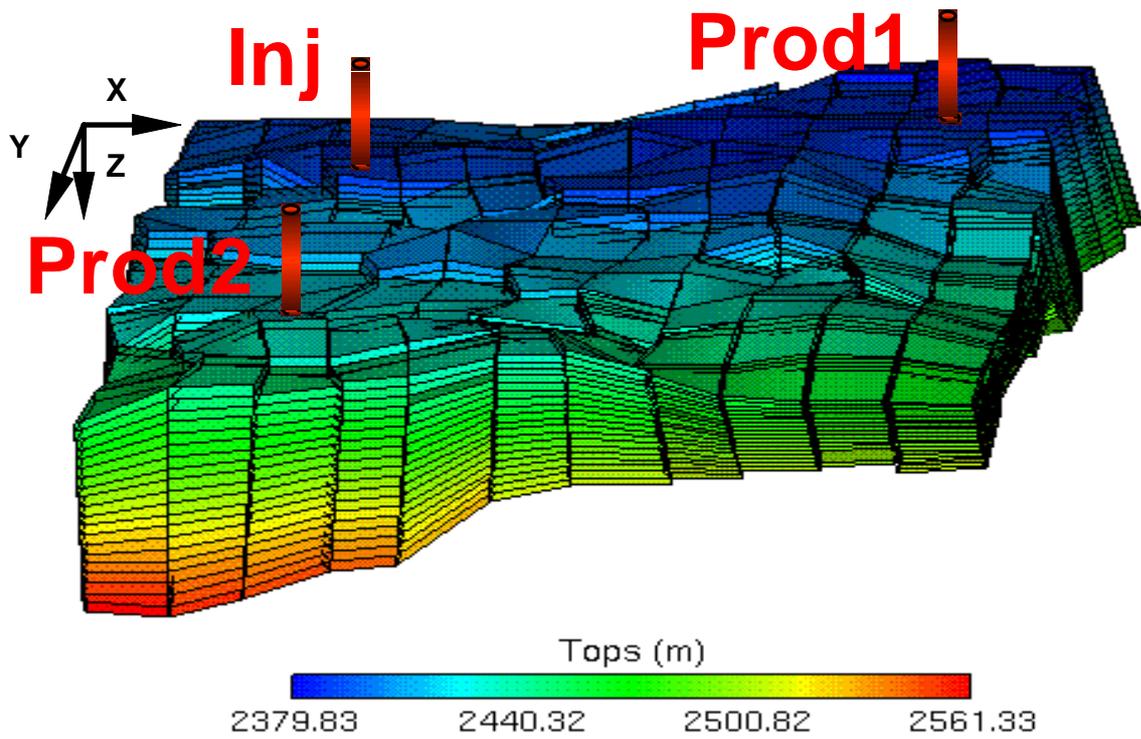


Figure 4.18: Maillage dynamique (Profondeur)

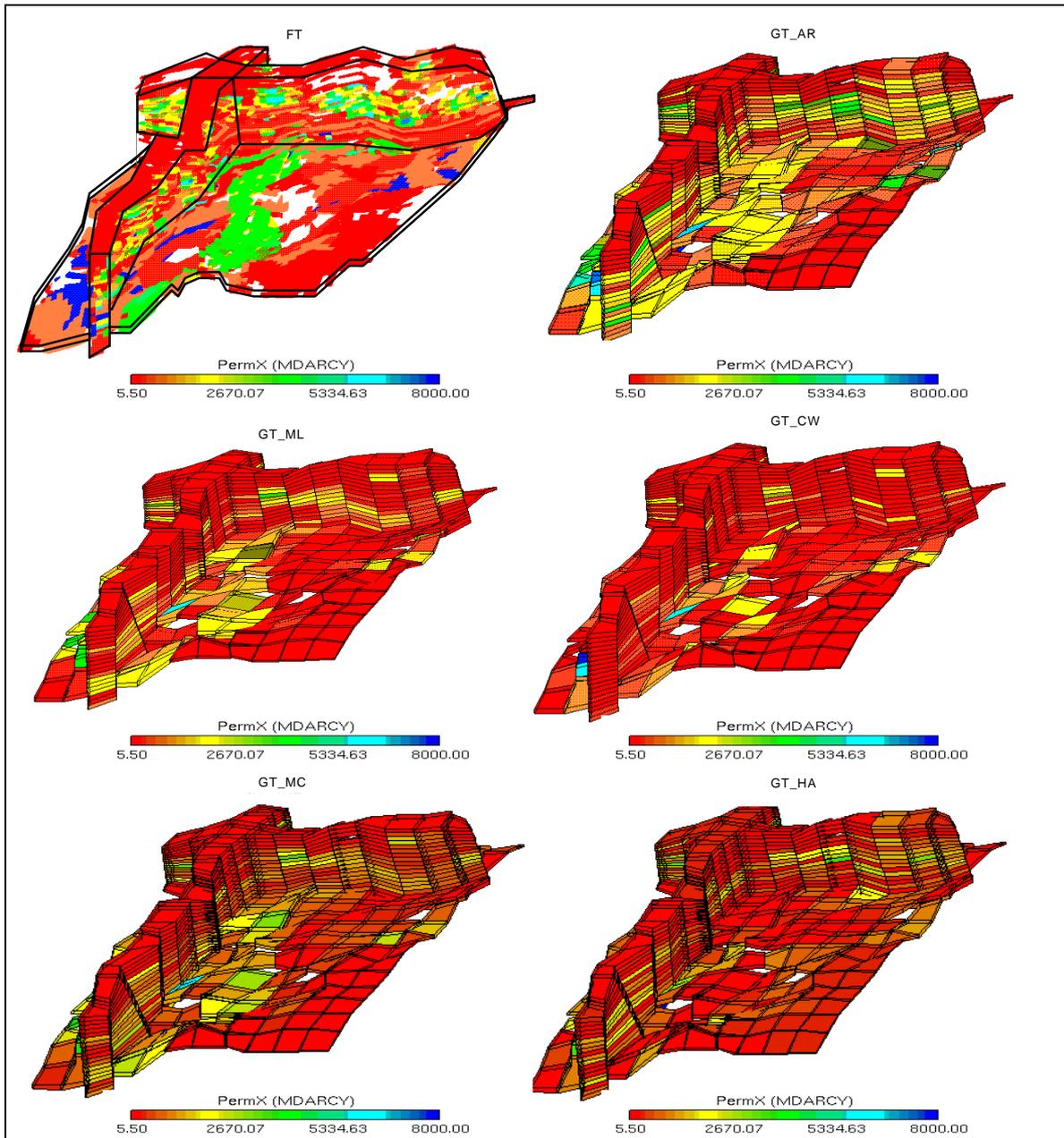


Figure 4.19: Cartes de perméabilité (PERMX)

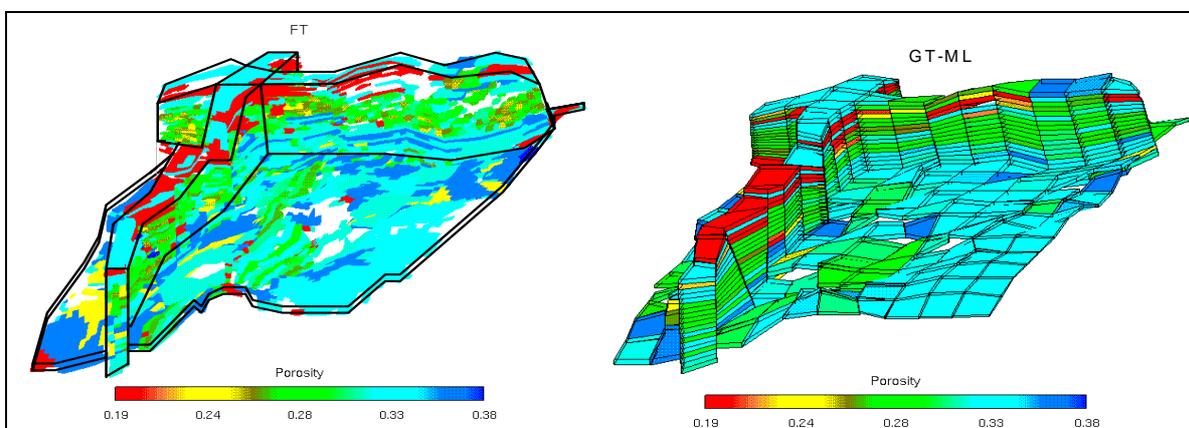


Figure 4.20: Cartes de porosité (PORO)

## 4.5.2 Position et pilotage des puits

Trois puits sont répartis sur le champ dont les emplacements sont donnés dans la figure 4.18. Les couches 14 à 17 sont perforées par le puits injecteur noté INJ et les deux puits producteurs dont l'un, noté PROD1, perfore les couches 3 à 7 et l'autre, noté PROD2, perfore les couches 1 à 7. De façon à ne pas altérer le régime de pression du gisement, on injecte dans le réservoir autant de fluide que l'on en produit et ceci de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Débit d'injection du puits INJ} & : 611,2 \text{ m}^3/\text{j} \\ \text{Débit de production du puits PROD1} & : 305,6 \text{ m}^3/\text{j} \\ \text{Débit de production du puits PROD2} & : 305,6 \text{ m}^3/\text{j} \end{aligned} \quad (4.5)$$

## 4.5.3 Expériences numériques 3D

La simulation de référence sur le maillage fin est notée **FT** (Fin Traceur) et les diverses simulations effectuées sur le maillage dynamique grossier sont notées **GT** (Grossier Traceur) suivie de l'abréviation de la méthode de mise à l'échelle utilisée. Les simulations obtenues sur le maillage dynamique avec les différentes méthodes de mise à l'échelle sont comparées à la simulation de référence obtenue sur le maillage fin. Deux types de maillages ont été utilisés pour les simulations numériques :

- 1°) Le maillage fin de référence dans lequel les perméabilités équivalentes ont été redistribuées.
- 2°) Le maillage grossier donné par la figure 4.18.

On impose que la concentration initiale du traceur est nulle dans le champ et l'on adopte les mêmes notations que dans l'exemple bidimensionnel.

## 4.5.4 Cartes de perméabilité mises à l'échelle

On donne dans la figure 4.19 une idée de la distribution des perméabilités équivalentes obtenues par les diverses méthodes de mise à l'échelle utilisées. On les compare à titre indicatif à la perméabilité de référence du maillage fin. L'inégalité fondamentale est bien respectée puisque l'ensemble des cartes des perméabilités absolues du maillage grossier sont comprises entre la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique. En raison de la présence de perméabilités très faibles dans le maillage fin, la méthode de Cardwell et Parsons fournit en général des perméabilités inférieures à celles des méthodes numériques. Dans la figure 4.20, on présente la distribution de la porosité du maillage fin qui est une fonction de la perméabilité  $k$  de chaque maille fine. Les mailles non visibles correspondent à des volumes de roches imperméables. Le champ de porosité définit sur le maillage dynamique est également donné dans la figure 4.20.

### 4.5.5 Maillage de référence

Les perméabilités absolues équivalentes calculées par les différentes méthodes de mise à l'échelle ont été redistribuées sur le maillage fin de référence. Dans les figures 4.21 à 4.24 on compare les résultats avec la simulation de référence.

#### Concentrations de traceur

Dans la figure 4.21, on présente les courbes de concentration de traceur aux puits producteurs. Pour le puits producteur PROD1 la forme générale des courbes obtenues avec les méthodes numériques est meilleure que celles obtenues avec les différentes moyennes. De plus, les méthodes numériques restitue correctement le temps de percée de la simulation de référence contrairement aux méthodes algébriques. Concernant les méthodes numériques, on peut signaler un léger avantage pour la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords confinées. Pour le puits producteur PROD2, les méthodes numériques reproduisent quasiment la courbe de concentration de référence alors que les différentes moyennes fournissent des résultats approximatifs. On peut signaler toutefois que la méthode de Cardwell et Parsons permet d'obtenir sur ce puits des résultats satisfaisants.

#### Débits et productions totales de traceur

Dans la figure 4.22 on compare les débits de production ainsi que la production cumulée de traceur aux puits producteurs. L'allure générale des courbes FT\_ML et FT\_MC correspondent à la référence pour le puits PROD1. Par contre les courbes obtenues par les différentes moyennes donnent des débits et des productions de traceur très éloignés de la simulation de référence. Là encore il semble que la méthode confinée fournit une meilleure prédiction par rapport à la méthode linéaire. Concernant le puits PROD2 on remarque le même comportement avec un meilleur calage pour les méthodes numériques.

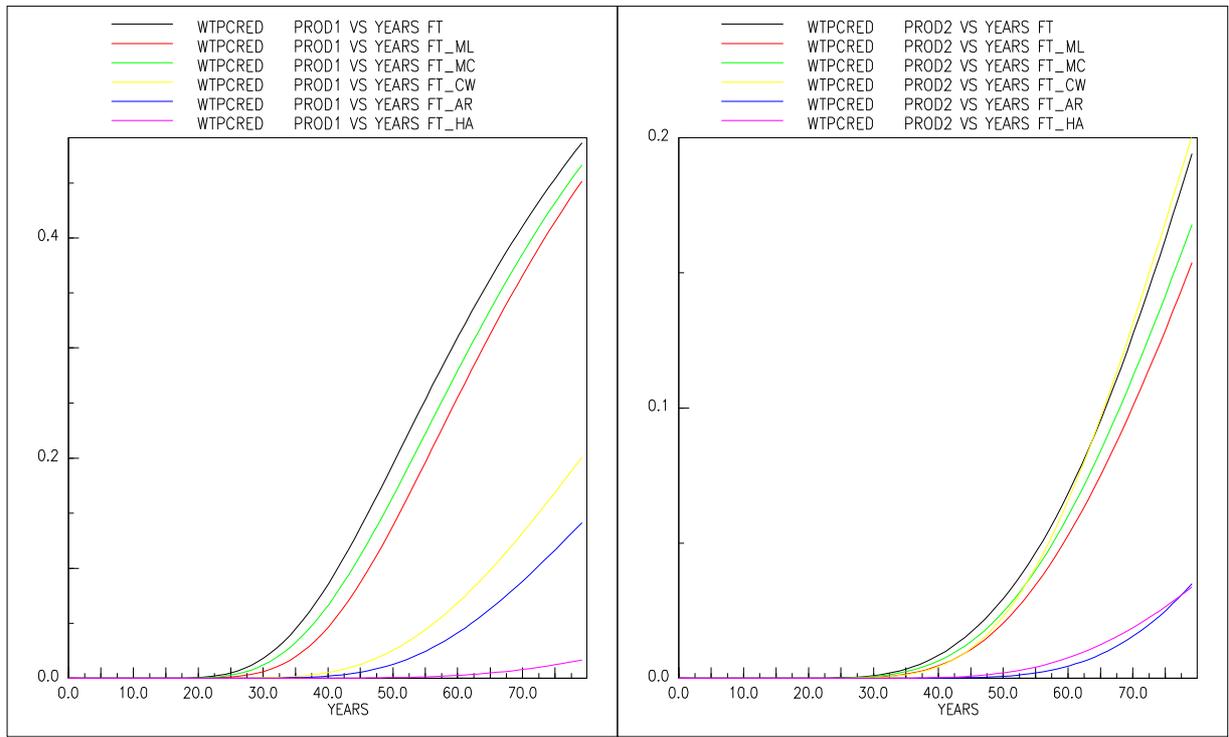


Figure 4.21: Concentrations de traceur  
(simulations effectuées sur le maillage de référence)

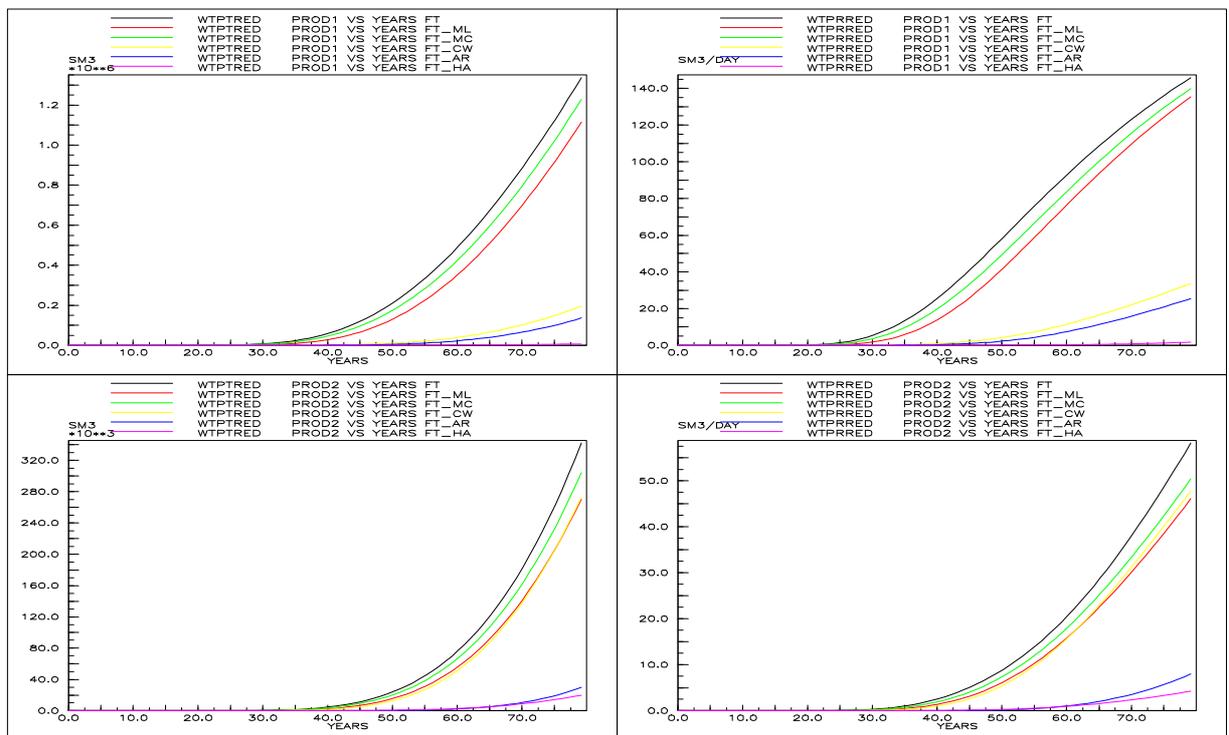


Figure 4.22: Débits et productions totale de traceur  
(simulations effectuées sur le maillage de référence)

## **Cartes de concentration**

Dans la figure 4.23 on compare les cartes de concentration de traceur suivant une coupe verticale YZ, à un pas de temps donné. Cette coupe est située dans l'alignement des puits injecteur (INJ) et producteur (PROD2) matérialisé par un trait blanc. On remarque d'une manière générale que les différentes méthodes de mise à l'échelle fournissent des résultats très voisins. Néanmoins, on constate une meilleure restitution du front de concentration pour la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires, notamment dans les couches inférieures.

## **Cartes de pression**

On compare dans la figure 4.24 les cartes de pression suivant la même coupe verticale YZ décrite précédemment. Il apparaît clairement que la carte de pression la plus proche de la référence est associée à l'utilisation des tenseurs équivalents de la méthode numérique linéaire. Par ailleurs, contrairement aux méthodes algébriques, les différents fronts de pression sont pratiquement restitués et ceci de façon satisfaisante. Les moyennes arithmétique et de Cardwell et Parsons fournissent une surpression autour du puits injecteur qui n'a pas lieu d'être.

## **Conclusion**

La simulation de référence est bien restituée dans son ensemble par les tenseurs équivalents obtenus avec la méthode linéaire. Le temps de percée, la concentration, les débits et la production cumulée de traceur sont très proches de la référence. De plus la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires permet de retrouver le champ de pression de la simulation sur le maillage fin. Quant aux méthodes algébriques certains biais apparaissent par rapport aux résultats de la simulation de référence, notamment aux abords des puits.

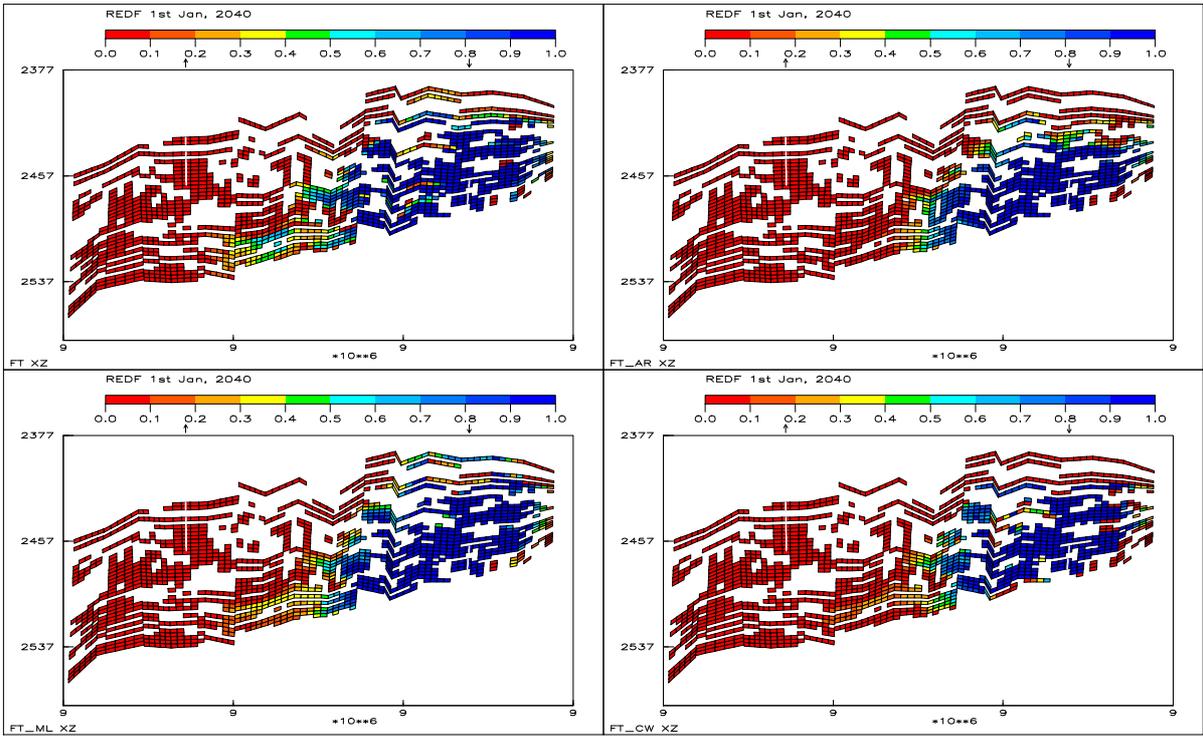


Figure 4.23: Cartes de concentration (40ans)

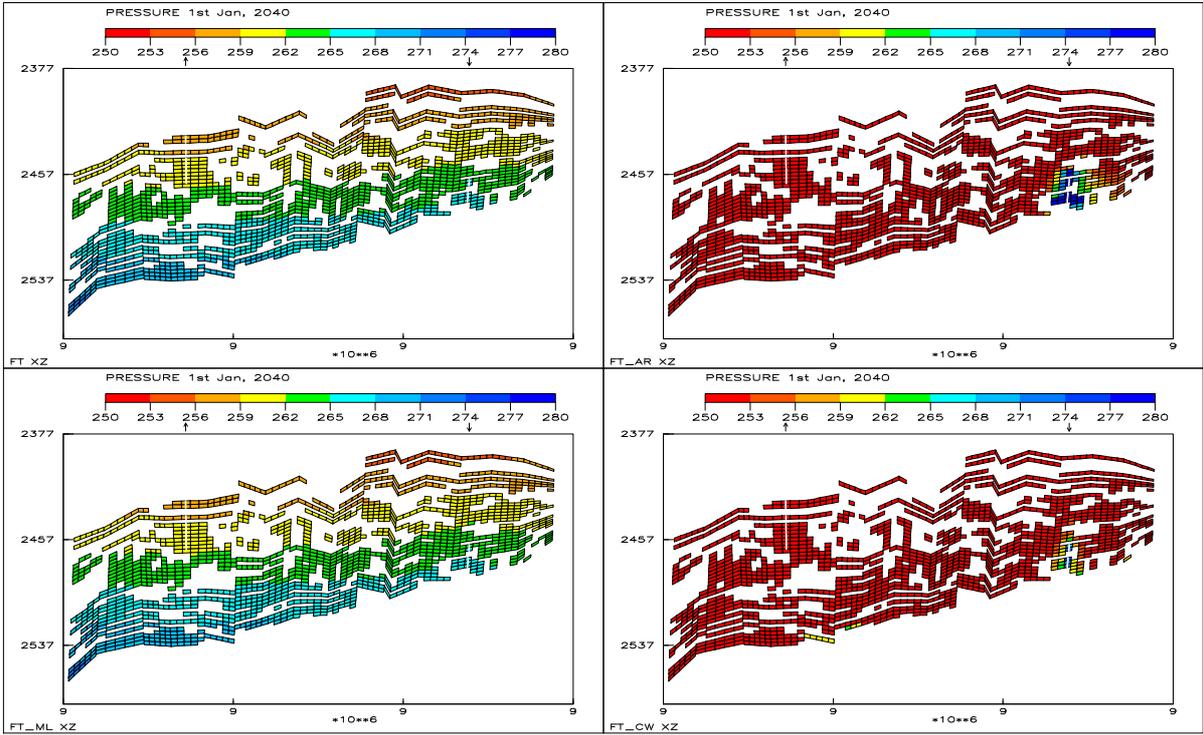


Figure 4.24: Cartes de pression (40ans)

### 4.5.6 Maillage grossier

Dans le test bidimensionnel, on a présenté des résultats provenant de simulations faites sur plusieurs maillages dynamiques, afin de valider les méthodes numériques de mise à l'échelle sur des maillages déstructurés. Or dans les cas réels, l'ingénieur réservoir peut très difficilement effectuer les simulations monophasiques sur le maillage de référence ainsi que sur des maillages intermédiaires. Quant aux simulations de fluides multiphasiques, elles font l'objet de recherche intense, notamment grâce à l'utilisation des calculateurs parallèles. Or dans le premier exemple on voit apparaître des résultats différents (temps de percée) suivant les maillages utilisés, ce qui est une source d'incertitude pour l'ingénieur réservoir. Ainsi dans un cas réel, le seul maillage sur lequel l'ingénieur peut juger la mise à l'échelle de la perméabilité absolue est le maillage dynamique grossier original. C'est pourquoi dans les figures 4.25 à 4.32 on présente les résultats des simulations faites sur le maillage grossier décrit par la figure 4.18. Ces derniers sont comparés aux résultats de la simulation de référence.

#### Concentrations de traceur

Dans la figure 4.25 on remarque que pour le puits producteur PROD1 la forme générale des courbes de concentration de traceur obtenues avec les méthodes numériques sont meilleures que celles obtenues avec les différentes moyennes. Néanmoins la moyenne arithmétique et la méthode de Cardwell et Parsons restituent le meilleur temps de percée. Concernant le puits producteur PROD2 les méthodes numériques reproduisent quasiment la référence alors que les différentes méthodes algébriques fournissent des résultats approximatifs.

#### Débits et productions totales de traceur

En ce qui concerne les débits et les productions totale de traceur illustré dans la figure 4.26, on remarque que pour le puits PROD1 l'allure générale des courbes GT\_ML et GT\_MC correspondent à la référence. Au contraire les courbes obtenues par les différentes méthodes algébriques sont très approximatifs, voire mauvaises. Pour le puits PROD2 les commentaires sont identiques.

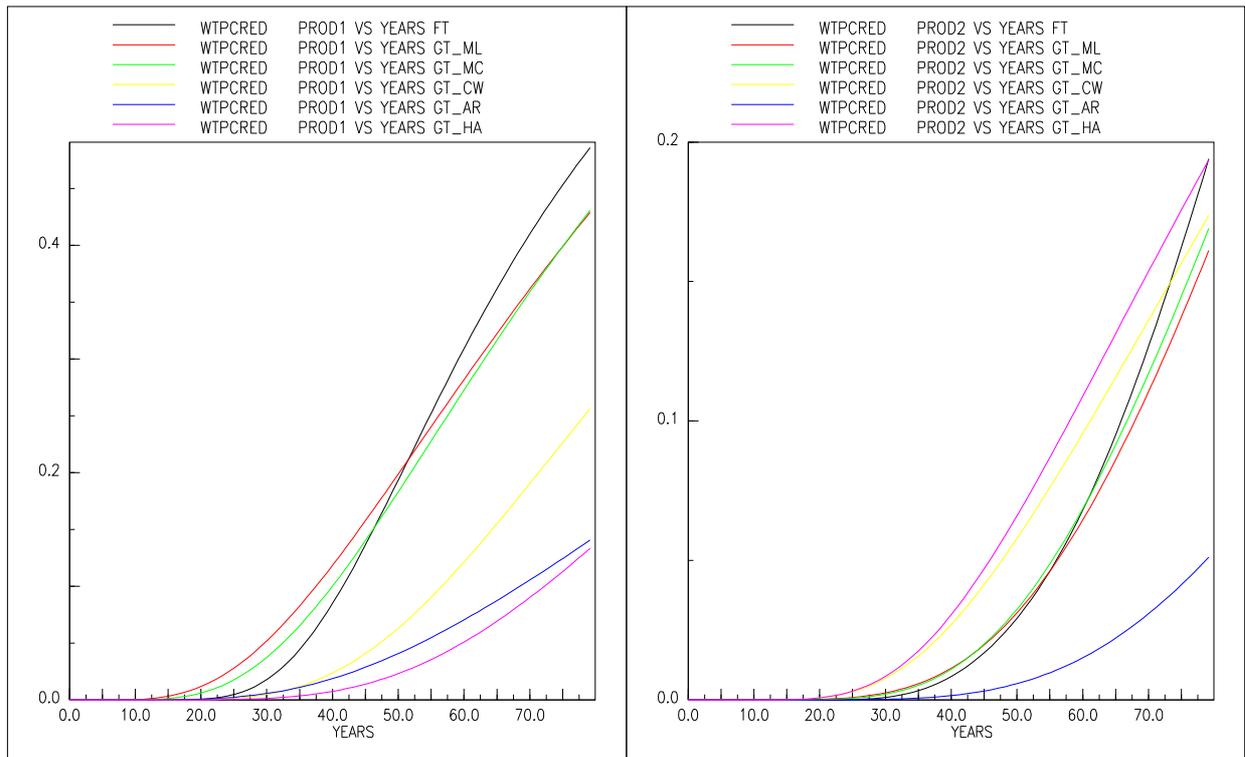


Figure 4.25: Concentrations de traceur  
(simulations effectuées sur le maillage grossier)

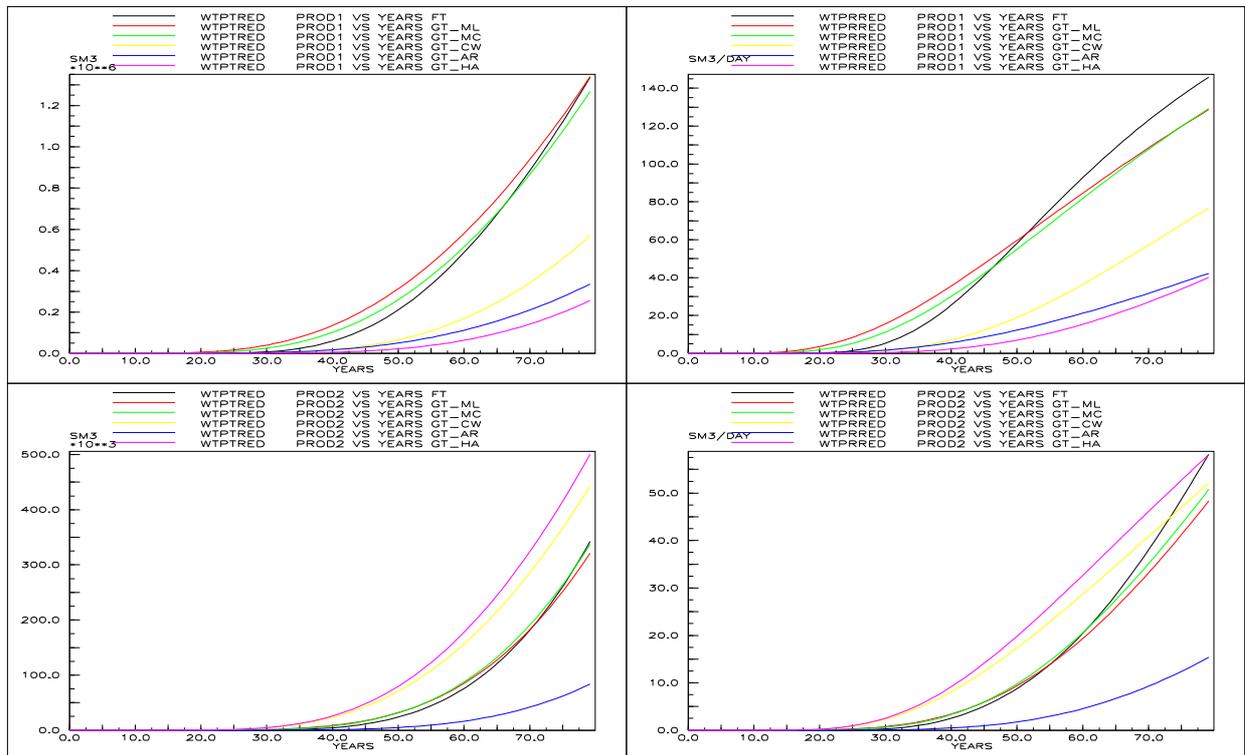


Figure 4.26: Débits et productions totale de traceur  
(simulations effectuées sur le maillage grossier)

## Cartes de concentration

Afin d'avoir une idée globale de l'écoulement on présente des vues 3D. Les méthodes linéaire et confinée donnent pratiquement les mêmes résultats, c'est pourquoi on ne présente que les simulations réalisées avec les coefficients équivalents de la méthode linéaire. Quant aux méthodes algébriques, on présente les résultats obtenus avec la méthode de Cardwell et Parsons ainsi que la simulation avec la moyenne arithmétique des tenseurs des perméabilités absolues.

Dans la figure 4.27 qui correspond à 10 ans de simulation, on constate que la concentration de traceur autour du puits injecteur est mieux restitué par la méthode linéaire.

Au bout de 20 ans (c.f. figure 4.28) les concentrations de traceur élevées obtenues avec la moyenne arithmétique se situent principalement autour du puits injecteur, contrairement à la simulation de référence. On remarque par ailleurs qu'un chemin préférentiel horizontal tend à être restitué par la méthode de Cardwell et Parsons, ce qui n'est pas le cas dans la simulation de référence. Pour la méthode numérique linéaire on voit que le traceur est pratiquement arrivé au puits producteur PROD1, comme le confirme la référence et que le front de concentration est globalement bien restitué.

Au bout de 40 années de production (c.f. figure 4.29) les diverses cartes de concentration sont très différentes suivant les méthodes de mise à l'échelle. Malgré l'utilisation du maillage grossier comme maillage de simulation, c'est encore la méthode de mise à l'échelle linéaire qui donne les meilleurs résultats. La méthode algébrique de Cardwell et Parsons fournit des cartes d'iso-concentration quasi horizontales et qui suivent les couches précédemment saturées ce qui est très éloigné de la simulation de référence. Concernant la méthode de la moyenne arithmétique, les couches supérieures ne sont pas balayées contrairement à la simulation fine.

Pour le dernier pas de temps présenté dans la figure 4.30, les phénomènes décrits sont accentués. On voit que la concentration de traceur autour du puits producteur PROD2 obtenue avec GT\_ML varie autour de 0.2, ce qui correspond aux courbes de concentration de traceur de la référence du puits PROD2 de la figure 4.25. La méthode de Cardwell et Parsons tend à décrire le même phénomène autour du puits PROD2, mais les fronts de concentration sont mauvais dans les autres zones du gisement. Par exemple autour du puits PROD1 la concentration est trop élevée par rapport à la simulation de référence.

## Cartes de pression

Dans les figures 4.31 à 4.32 on présente les cartes de pression 3D aux temps  $t=10$  ans et  $t=20$  ans. La remarque générale est que ces cartes sont inchangées au cours du temps. En

fait le régime de pression du champ s'établit rapidement dans les deux premières années de la simulation et varie très peu par la suite. D'autre part, pour les différentes méthodes de mise à l'échelle utilisées les cartes de pression tendent à respecter globalement le champ de pression de la simulation de référence. Ceci est probablement dû à l'immensité du gisement considéré qui tend à diminuer l'effet de surpression ou de dépression engendré par les différents puits. Néanmoins on obtient une sensible amélioration avec la méthode linéaire, notamment autour du puits injecteur et des couches supérieures.

## **Conclusion**

Les résultats présentés confirme indéniablement que les perméabilités équivalentes obtenues avec les méthodes numériques permettent de très bien restituer la simulation de référence. Malgré l'utilisation du maillage grossier comme maillage de simulation, on obtient de très bonnes prédictions pour le temps de percée ainsi que pour les débits de production. Les cartes de concentration et de pression sont globalement satisfaisantes. Les différentes méthodes algébriques fournissent, quant à elles, des résultats très éloignés de la simulation de référence.

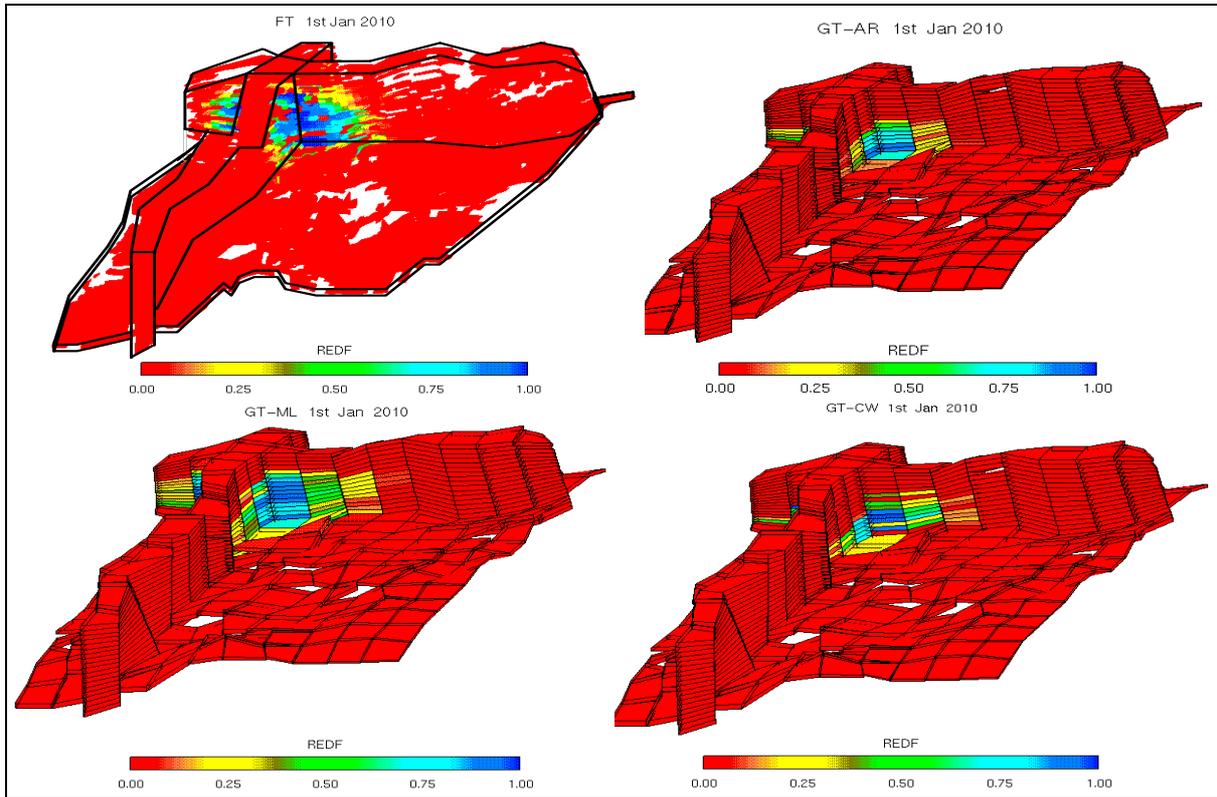


Figure 4.27: Cartes de concentration (10 ans)

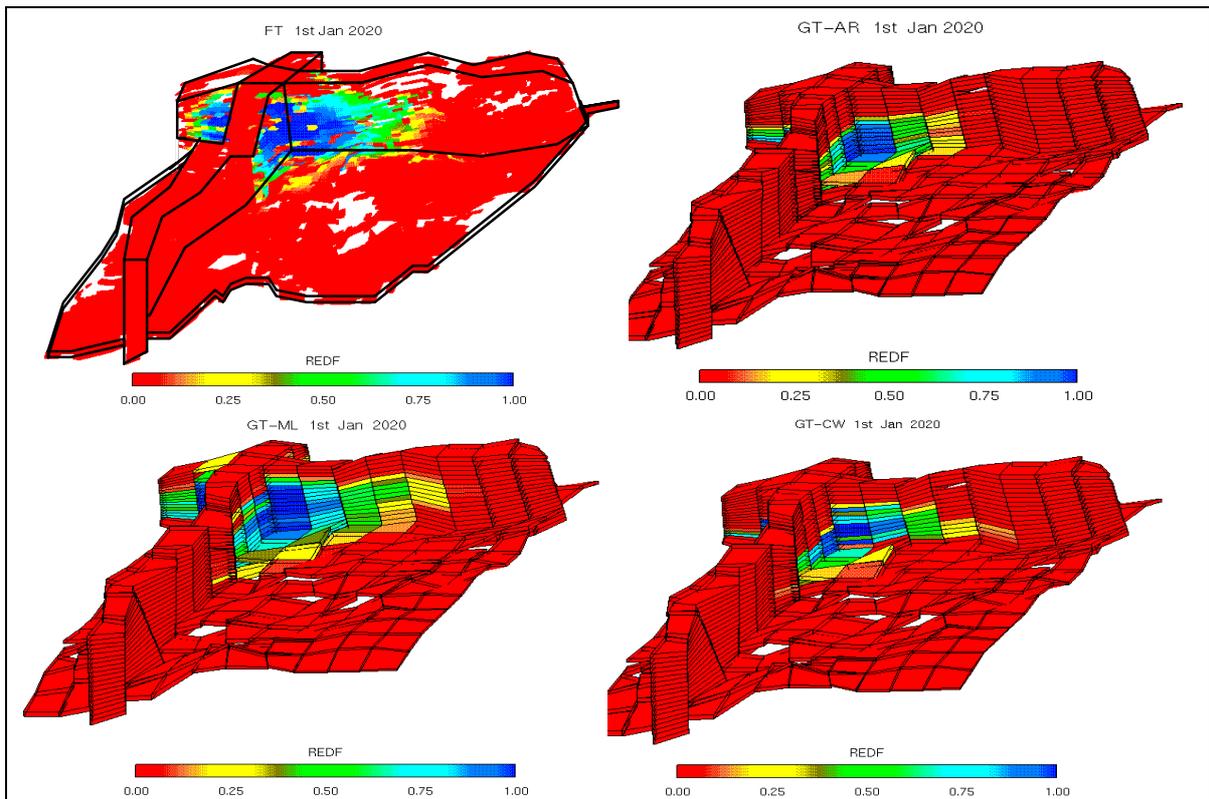


Figure 4.28: Cartes de concentration (20 ans)

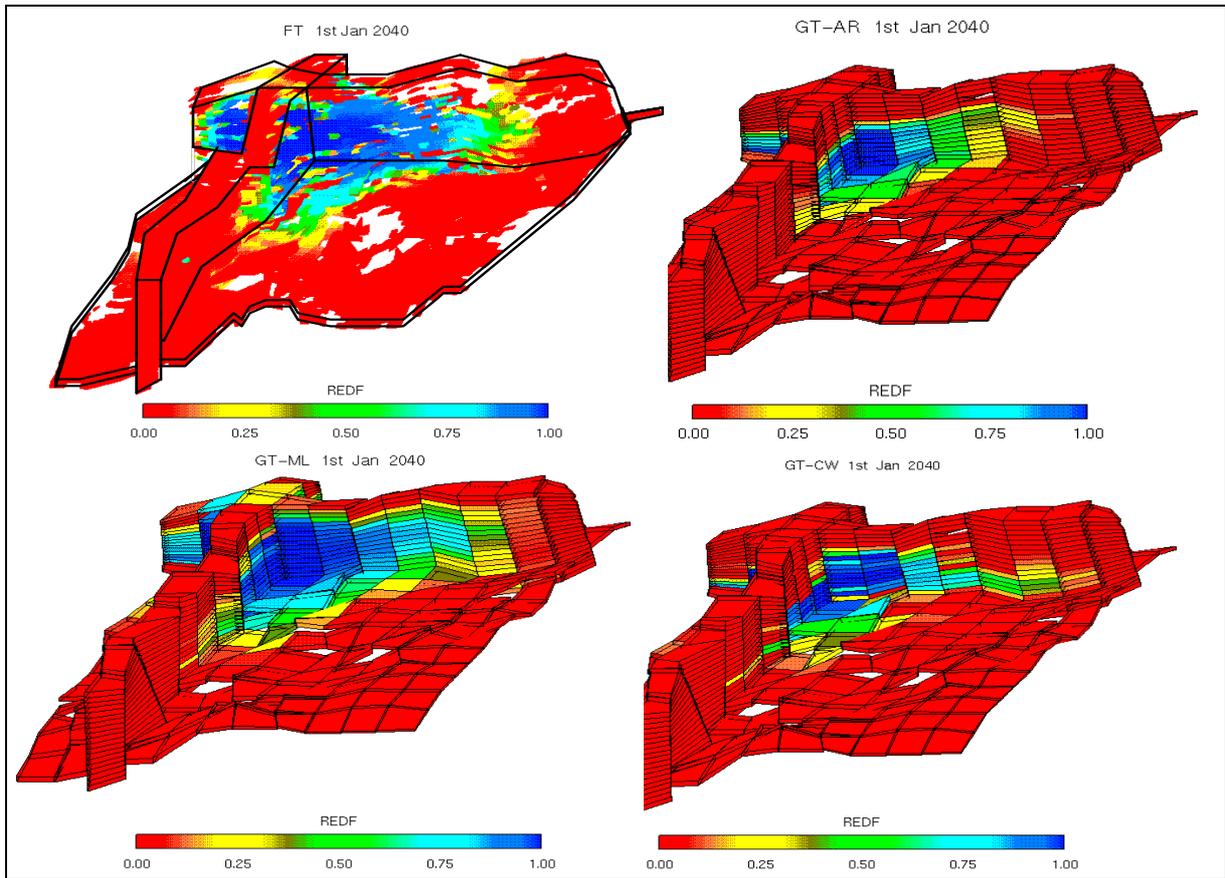


Figure 4.29: Cartes de concentration (40 ans)

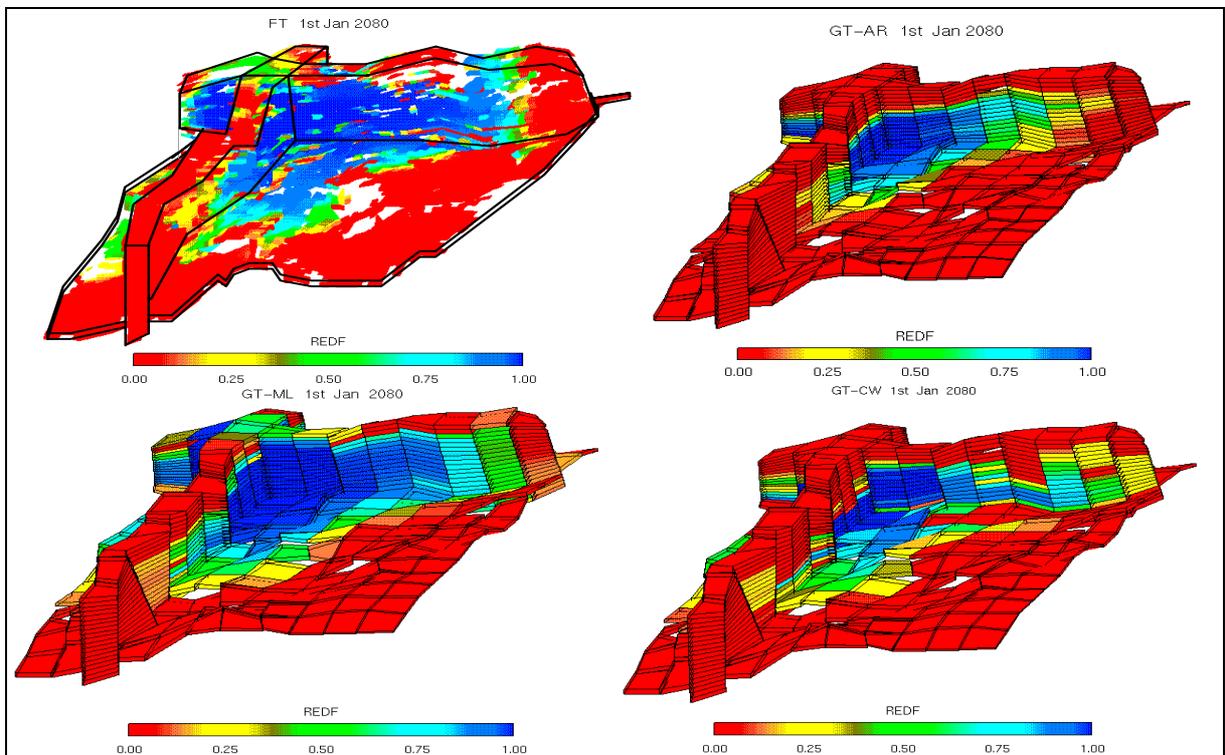


Figure 4.30: Cartes de concentration (80 ans)

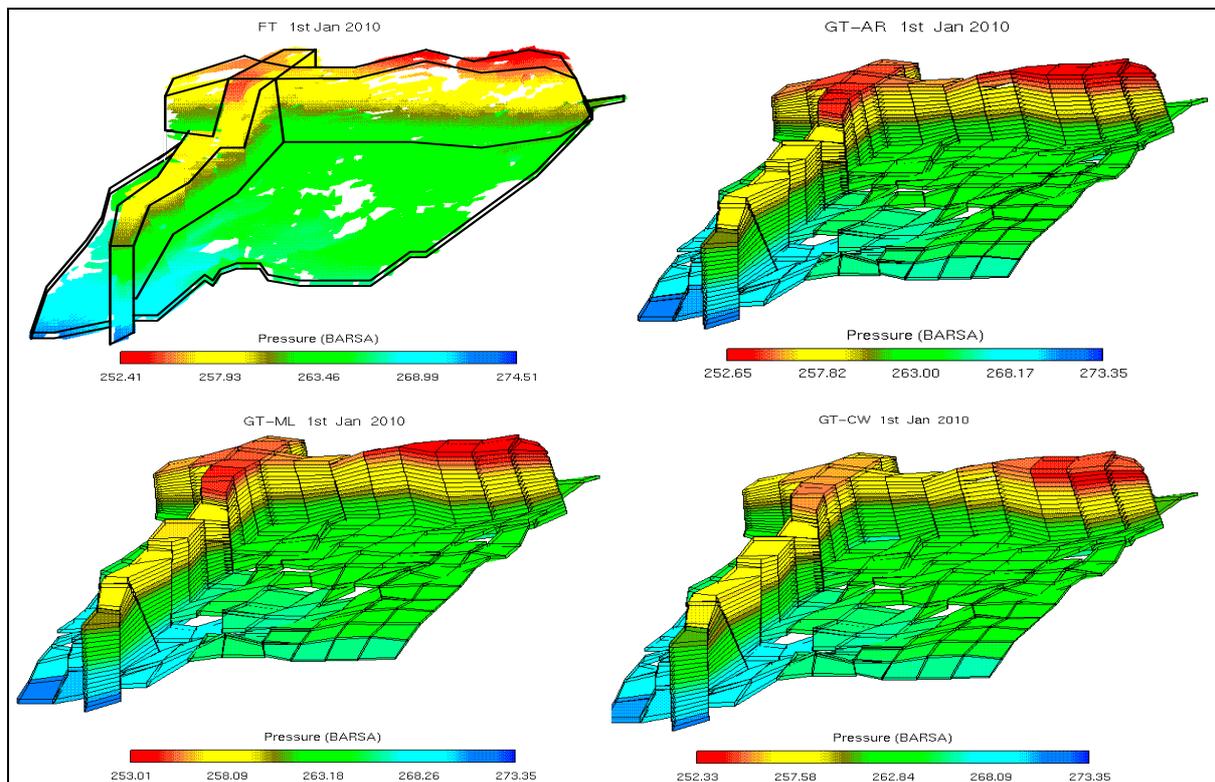


Figure 4.31: Cartes de pression (10 ans)

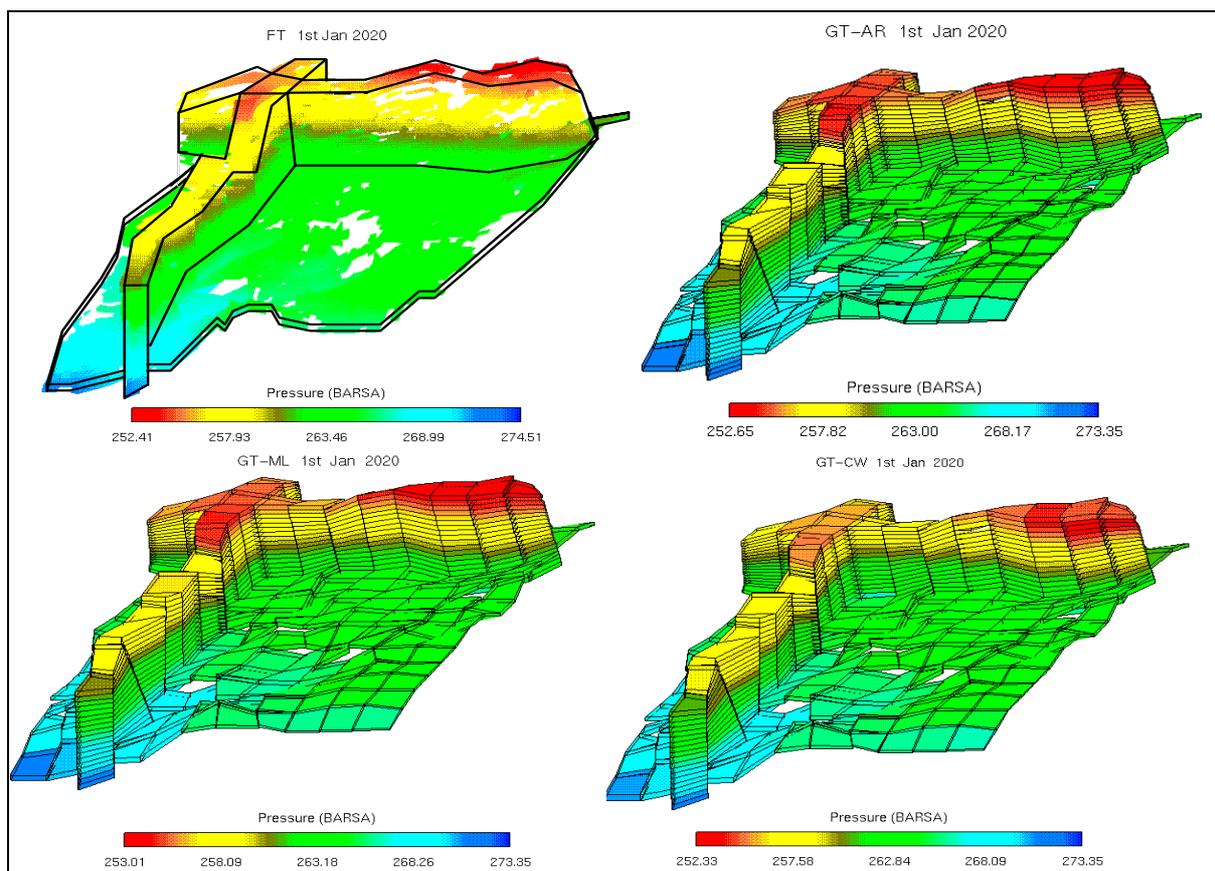


Figure 4.32: Cartes de pression (20 ans)

### 4.5.7 Temps de calculs

Dans le tableau qui suit on présente les temps de calcul CPU nécessaire au code éléments finis qui a été réalisé pour le calcul des tenseurs équivalents de la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires et confinées. Les différents temps de calcul mentionnés ci dessous ont été relevés lors du traitement de l'exemple tridimensionnel (simulations traceurs) qui à été présenté précédemment. A titre indicatif on compare aux temps des méthodes algébriques qui sont implémentées dans un logiciel interne à Elf Exploration Production. Par ailleurs on donne le temps de simulation sur le maillage grossier afin de pouvoir comparer au temps de calcul nécessaire à la simulation de référence.

Travail effectué	Méthodes numériques		Méthodes algébriques		
	linéaire	confinée	Méthode de Cardwell et Parsons	Moyenne arithmétique	Moyenne harmonique
Etape de mise à l'échelle	8 mn	10 mn	4 mn	4 mn	4 mn
Simulation dynamique	25 sec	25 sec	25 sec	25 sec	25 sec

Simulation de référence	2 h 30
-------------------------	--------

On constate que les temps de calcul pour les méthodes numériques de mise à l'échelle sont corrects par rapport aux temps nécessaires pour les méthodes algébriques. La simulation dynamique pour une carte de perméabilité donnée sur le maillage grossier est inférieure à 30 secondes. En conséquence le temps total cumulé pour obtenir les tenseurs équivalents ainsi que la simulation dynamique est inférieur à 9 minutes pour la méthode linéaire. Le traitement du réservoir nécessite une durée totale de 11 minutes pour la méthode confinée. Sachant que la simulation de référence dure environ 2h 30, on met donc environ 14 fois moins de temps pour obtenir les résultats intégrant la mise à l'échelle avec les méthodes linéaire ou confinée et les simulations grossières qui sont satisfaisantes par rapport aux résultats de référence.

## 4.6 Simulations diphasiques 3D

Dans cette partie on s'intéresse au problème de la récupération secondaire du pétrole lors de l'exploitation d'un gisement. Aux premiers temps de l'industrie pétrolière, la récupération du pétrole consistait à laisser produire les gisements d'eux-même par simple décompression jusqu'à un certain seuil de déplétion (récupération primaire). Cette récupération prend évidemment fin quand la pression dans le gisement devient égale à la pression atmosphérique, bien qu'à ce moment, il puisse rester encore dans le gisement l'essentiel de l'huile initiale. Pour accroître le taux de récupération, on met en oeuvre des procédés d'extraction complémentaires, appelés procédés de balayage artificiel (injection d'eau ou de gaz). Cette phase est appelée aussi "récupération secondaire" ou "récupération assistée". Les procédés de récupération secondaire, couramment pratiqués, consistent à pousser l'huile vers les puits de production en injectant un fluide (de l'eau, par exemple) par des puits injecteurs judicieusement répartis. Comme il a été mentionné précédemment les simulations diphasiques engendrent de nombreux problèmes supplémentaires dûs au changement d'échelle des perméabilités relatives. Néanmoins les écoulements diphasiques ayant des applications pratiques en ingénierie pétrolière on présente des simulations correspondant aux déplacements forcés de l'huile par de l'eau dans le gisement.

### 4.6.1 Caractéristiques des fluides

Les lettres  $w$  et  $o$  se réfèrent aux phases huile et eau et l'on désigne par  $\rho_i$  la densité,  $S_i$  la saturation et  $\mu_i$  la viscosité de la phase  $i$  pour  $i = w, o$ . Les caractéristiques des deux fluides utilisés sont :

$$\begin{aligned} \mu_o &= 1.0 \text{ Cp} & \mu_w &= 1.5 \text{ Cp} \\ \rho_o &= 1000 \text{ kg/m}^3 & \rho_w &= 850 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

On utilise des perméabilités relatives en croix, définies par :

$$\begin{aligned} k_r(S_w) &= S_w \\ k_o(S_w) &= 1 - S_w \end{aligned} \quad (4.7)$$

## 4.6.2 Expériences numériques diphasiques

On dispose de trois puits, disposés comme précédemment et géré de la même manière que lors des simulations traceur. Le champ est complètement saturé en huile à l'instant initial et l'on injecte de l'eau par le puits injecteur pour pousser et récupérer l'huile. La simulation de référence sur le maillage fin est noté **FD** (Fin Diphasique) et les diverses simulations effectuées sur le maillage dynamique sont notées **GD** (Grossier Diphasique) suivie de l'abréviation correspondant à la méthode de mise à l'échelle utilisée. On utilise les mêmes cartes de perméabilité mises à l'échelle et présentées dans la figure 4.19 pour effectuer les simulations dynamiques.

## 4.6.3 Maillage de référence

Nous avons réalisé une simulation diphasique sur le maillage de référence (165000 mailles) qui a nécessité 22 heures et 32 minutes. Ce temps de simulation plutôt long est essentiellement dû à la faible taille des 165000 mailles fines qui est une source de nombreux problèmes de convergence numérique. On considère alors cette simulation comme la simulation de référence que l'on va comparer aux résultats obtenus sur le maillage grossier.

## 4.6.4 Maillage grossier

On effectue des simulations diphasiques immiscibles et incompressibles sur le maillage grossier avec les cartes de perméabilité obtenues par les différentes méthodes d'homogénéisation. Le temps CPU nécessaire pour une simulation diphasique sur le maillage grossier est de 15 minutes. Ainsi si l'on utilise la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires, pour le calcul de la perméabilité équivalente (8 mn), on obtient un temps final inférieur à 30 minutes pour obtenir les prédictions du gisements. On met donc 45 fois moins de temps que la simulation de référence pour approcher cette dernière. Dans les figures 4.33 à 4.36 on présente les résultats obtenus sur le maillage grossier que l'on compare à la simulation diphasique de référence.

## **Courbes de water cut**

Dans la figure 4.33 sont tracées les courbes de "water-cut" qui correspondent à la fraction de l'eau dans la production liquide des puits producteurs. Pour le puits producteur PROD1 il apparaît clairement que la méthode numérique ML fournit les résultats les plus proches de la simulation de référence. En effet pour la méthode linéaire le temps de percée est correctement restitué et la forme générale de la courbe de water-cut est quasiment identique à la courbe de référence. Quant aux tenseurs équivalents de la méthode confinée ils permettent de restituer le temps de percée de référence, mais fournissent par la suite une mauvaise prédiction du pourcentage d'eau au puits. Toujours pour le puits PROD1, on obtient avec les méthodes algébriques des résultats très approximatifs par rapport à la référence. Contrairement au puits PROD1, c'est la méthode confinée qui fournit la meilleure prédiction de la courbe de water-cut pour le puits PROD2. La forme générale de la courbe est respectée lorsque l'on utilise la méthode linéaire avec toutefois un temps de percée assez éloigné de la référence. Parmi les méthodes algébriques c'est la méthode de Cardwell et Parsons qui fournit les résultats, aux puits PROD1 et PROD2, les plus proches de la référence.

## **Débits et productions totales d'huile**

Dans la figure 4.34, on compare les débits de production ainsi que la production cumulée d'huile aux puits producteurs. Pour les puits PROD1 et PROD2 la simulation effectuée avec les perméabilités équivalentes obtenues par la méthode ML fournit les débits de production d'huile les plus proches de la référence. L'allure générale des courbes obtenues avec les autres méthodes respectent globalement la prédiction de la simulation fine. Enfin, la meilleure prévision des productions totales d'huile aux deux puits producteurs est encore fournie par la simulation GT\_ML. Les autres méthodes fournissent néanmoins des résultats acceptables.

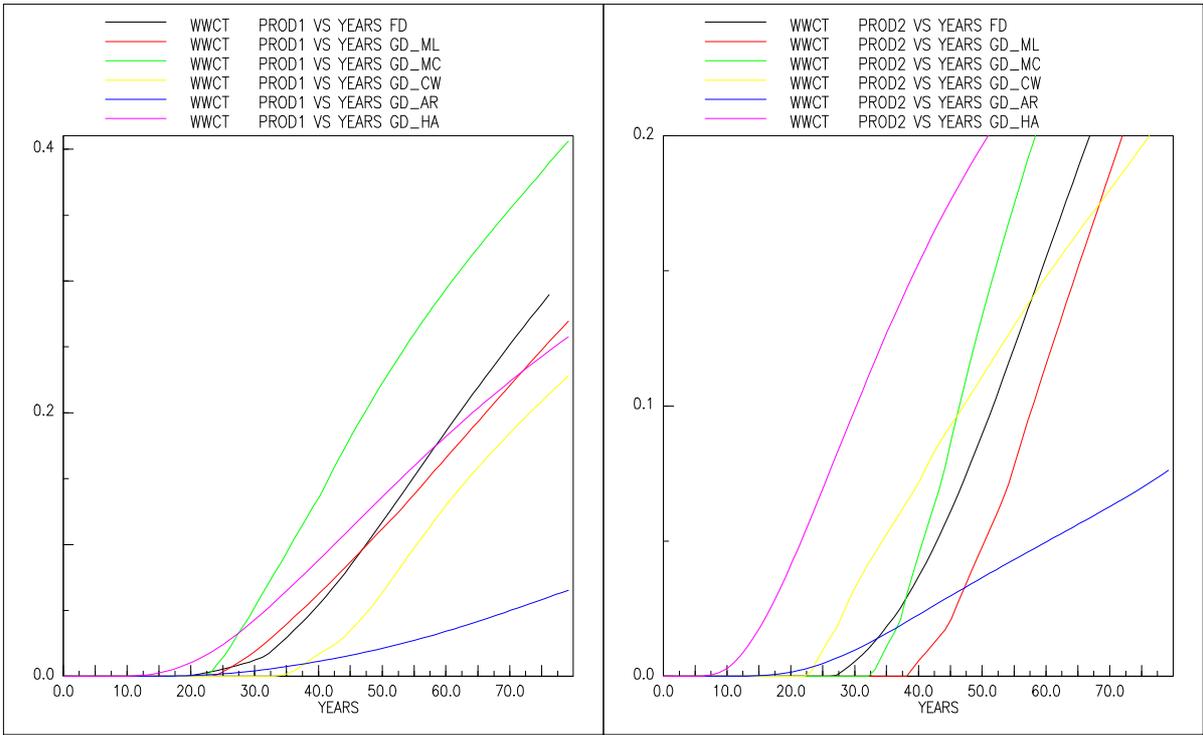


Figure 4.33: Courbes de Water-cut

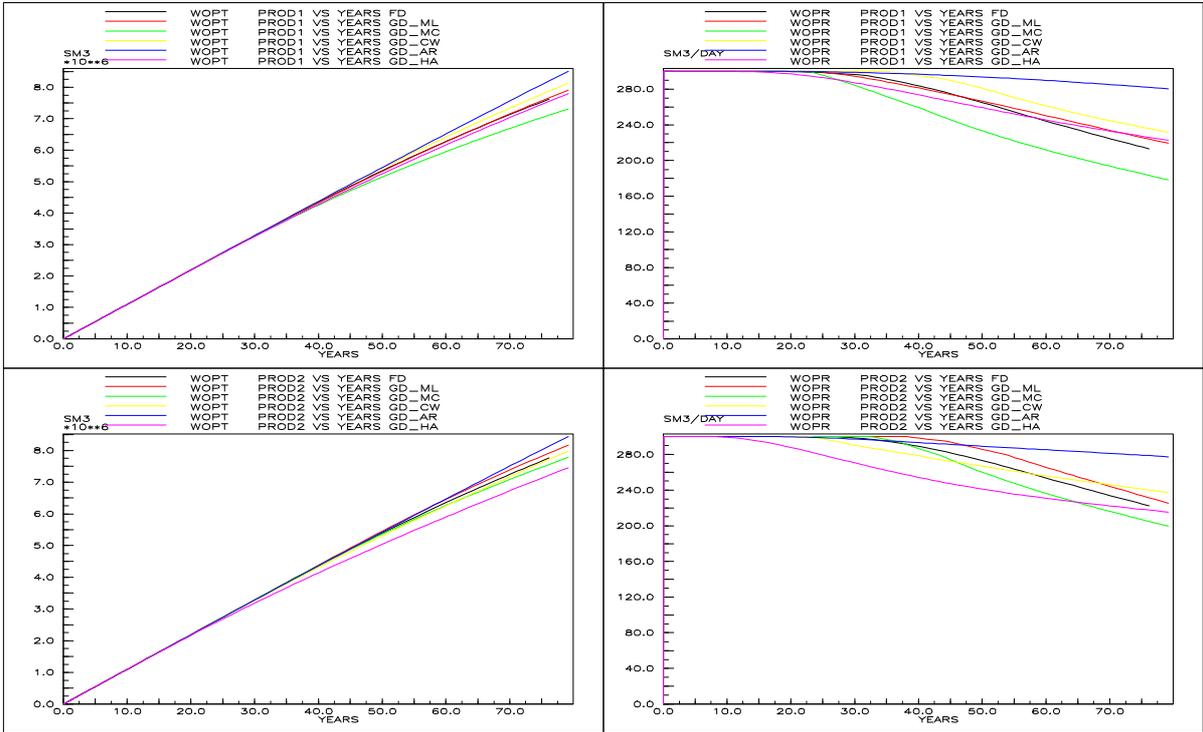


Figure 4.34: Débits de production et productions totale d'huile

### **Cartes de saturation**

Dans la figure 4.35 on compare les cartes de saturation en eau à  $t= 40$  ans et suivant une coupe verticale XZ. Il apparaît clairement que c'est la méthode linéaire qui permet de restituer le mieux la carte de saturation obtenue sur le maillage de référence. La simulation GD\_ML fournit des fronts de saturation quasiment identique à ceux de la référence. Avec la méthode de Cardwell et Parsons on obtient un chemin préférentiel horizontal pour l'eau qui n'a pas lieu d'être. Quant aux saturations obtenues avec la moyenne arithmétique, elles sont trop faibles au voisinage du puits injecteur.

### **Cartes de pression**

Dans les figures 4.36 on présente une coupe verticale des cartes de pression pour un même pas de temps. Comme dans le cas du traceur, le régime de pression s'établit dans les premières années et ne varie pratiquement pas par la suite. On constate que pour les méthodes de mise à l'échelle utilisées, les cartes de pression sont sensiblement les mêmes. Néanmoins on obtient une légère amélioration avec la méthode linéaire, notamment autour du puits injecteur et dans les couches supérieures du réservoir.

### **Conclusion**

Au vu des différents résultats c'est la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires qui permet de fournir dans l'ensemble les meilleurs résultats. Les cartes de saturations et de pressions obtenues avec cette dernière méthode sont les plus proches de celles fournies par la simulation de référence.

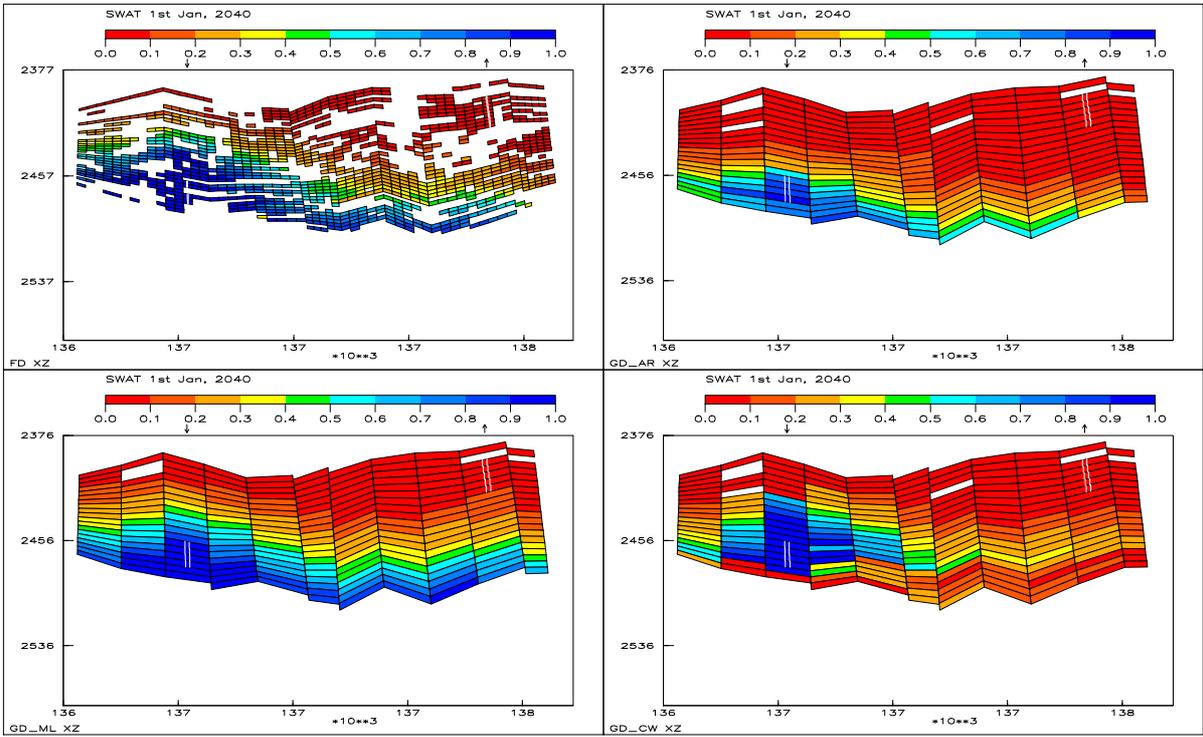


Figure 4.35: Cartes de saturation (40 ans)

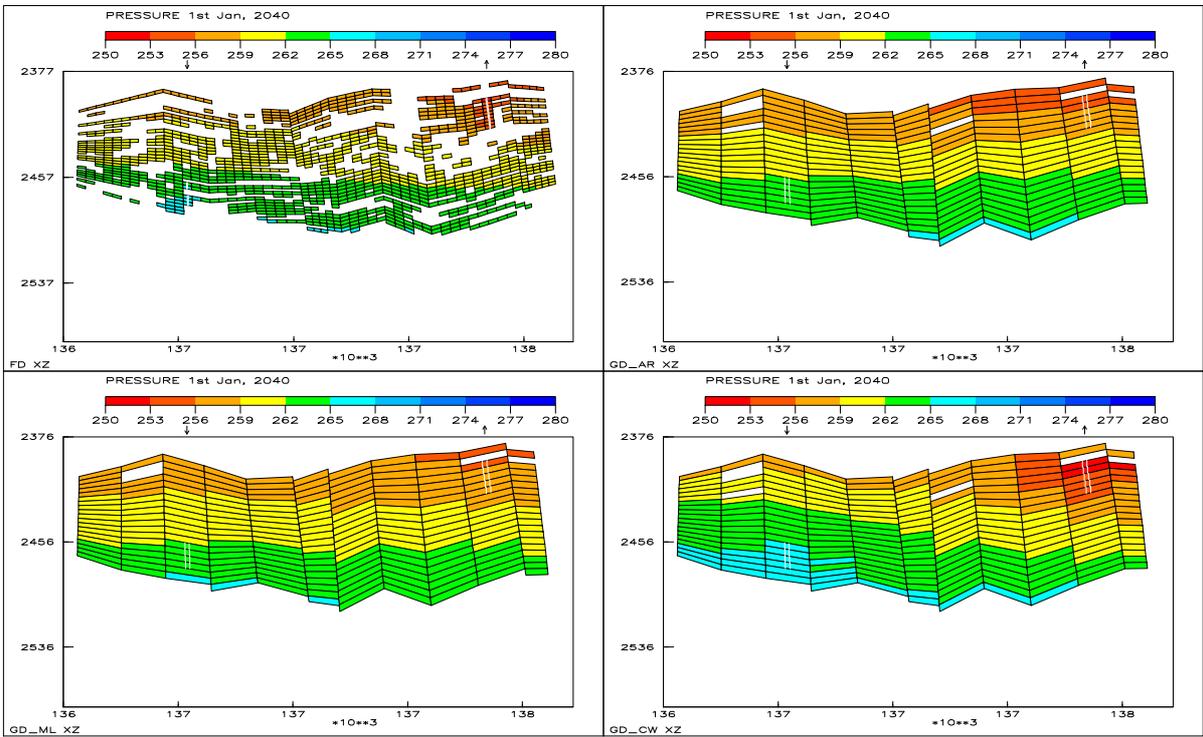


Figure 4.36: Cartes de pression (40 ans)

## 4.7 Conclusion

Les différentes simulations obtenues dans ce cadre bidimensionnel ont permis de mettre en avant l'avantage des maillages déstructurés. D'abord on effectue la mise à l'échelle des caractéristiques pétrophysiques sur un maillage déstructuré construit en respectant au mieux les discontinuités géologiques. Ensuite on réalise les simulations numériques des écoulements des fluides. On obtient alors des résultats meilleurs que ceux obtenus sur un maillage orthogonal.

Ces simulations numériques ont également permis de valider les méthodes d'homogénéisations sur des maillages déstructurés 3D. Dans l'ensemble, il apparaît que les méthodes numériques permettent de restituer des prédictions, des cartes de saturation et de pression satisfaisantes par rapport aux résultats de la simulation de référence. De plus, les temps de calcul CPU nécessaires aux calculs des tenseurs équivalents sur des maillages déstructurés 3D sont des plus acceptables. Ceci permet d'envisager l'utilisation pour des problèmes industriels du code de mise à l'échelle des perméabilités absolues en maillages déstructurés.

## **PARTIE II**



# Chapitre 5

## Application du contrôle optimal à la mise à l'échelle des perméabilités absolues avec des conditions aux limites quelconques

Dans ce chapitre on construit une méthode de mise à l'échelle basée sur la minimisation d'une fonctionnelle représentant la somme des écarts des énergies dissipées locales et globales. Cette méthode permet de prendre en compte des conditions aux limites générales de type Dirichlet ou mêlées qui sont appliquées aux problèmes locaux. Une seconde approche basée la minimisation de l'écart des deux champs de vitesse local et global est également présentée. Après avoir donné quelques exemples sur un cas monodimensionnel, on étudie, dans l'optique d'une mise en oeuvre numérique, les propriétés de continuité et de dérivabilité pour les différentes fonctionnelles considérées. Ce chapitre est alors terminé par la présentation d'un algorithme de calcul effectif de la perméabilité équivalente.

### 5.1 Introduction

Une étape importante des méthodes numériques classiques, utilisées pour calculer la perméabilité équivalente dans un domaine  $\omega$ , est la résolution de problèmes locaux qui décrivent l'écoulement permanent d'un fluide monophasique modélisé par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{Q} = -K(x)\nabla P & \text{dans } \omega \\ \operatorname{div}[\vec{Q}] = 0 & \text{dans } \omega \\ + CL & \end{array} \right. \quad (5.1)$$

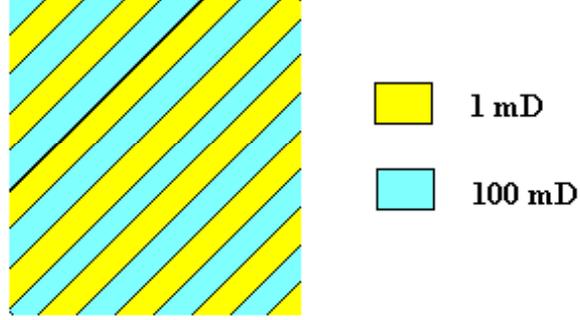


Figure 5.1: Milieu stratifié à 45°

où  $K$  est le tenseur de perméabilité appartenant à  $M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ .

Ces problèmes locaux, posés sur chaque maille  $\omega$  du maillage dynamique sont soumis à des conditions aux limites ( $CL$ ) particulières. Par exemple, les conditions aux limites linéaires [resp. confinées] sont utilisées pour la méthode d’homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires [resp. confinées]. L’homogénéisation périodique quant à elle conduit à résoudre des problèmes elliptiques soumis à des conditions aux limites périodiques. La théorie mathématique de l’homogénéisation périodique correspond à une analyse asymptotique des problèmes, où le rapport entre la taille caractéristique du maillage fin (échelle microscopique) et la taille du maillage grossier (échelle macroscopique) est très petit. Dans le cas où les deux échelles sont infiniment séparées, il est bien connu que l’influence des conditions aux limites s’estompe [7], [8]. Au contraire, lorsque cette condition de séparation des échelles n’est pas vérifiée, les simulations obtenues par la mise à l’échelle des perméabilités dépendent des conditions aux limites utilisées [9]. Renard et de Marsily [74] donne l’exemple d’un milieu stratifié incliné à 45° (c.f Figure 5.1) sur lequel les tenseurs équivalents obtenus, suivant les conditions aux limites sont :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 26.61 & 23.88 \\ 23.88 & 26.61 \end{bmatrix}}_{C.L. \text{ linéaires}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 9.05 & 0 \\ 0 & 9.05 \end{bmatrix}}_{C.L. \text{ confinées}}$$

L’étude de la dépendance du tenseur équivalent en fonction des conditions aux limites appliquées aux problèmes locaux devient alors nécessaire. Par ailleurs, quelques soient les conditions aux limites particulières considérées dans les méthodes classiques, elles sont en général très éloignées des conditions réelles du réservoir lors de la mise en production. Afin de pouvoir prendre en compte ces conditions réelles, il est nécessaire d’établir une méthode de mise à l’échelle des perméabilités absolues pour des conditions aux limites générales, applicables à des maillages déstructurés. Pour ce faire on introduit dans ce chapitre une

méthode [85] pour calculer un tenseur équivalent restituant au mieux l'écoulement décrit par (5.1) pour des conditions aux limites générales supposées données.

## 5.2 Notations

Soit  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ , on définit la norme matricielle  $|||\cdot|||$  par :

$$|||K||| = \left( \int_{\omega} \|K(x)\|_2^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

où  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme matricielle induite par la norme Euclidienne  $|\cdot|$  sur  $\mathbb{R}^d$ .

On introduit par ailleurs l'ensemble noté  $M(h, a, \omega)$  et défini par :

$$M(h, a, \omega) = \left[ \begin{array}{l} H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega) \text{ tel que } H \text{ est constant sur } \omega \\ \text{et } I_{-1, \omega}(K) \leq H \leq I_{1, \omega}(K) \end{array} \right]$$

Les notations  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{a}$  de  $M(\mathbf{h}, \mathbf{a}, \omega)$  signifient que l'on considère les matrices constantes  $H$  comprises entre la moyenne **harmonique** et **arithmétique** de  $K$ . De plus  $M(h, a, \omega)$ , muni de la norme  $|||\cdot|||$ , est un ensemble convexe fermé borné.

On introduit également la norme

$$|||\vec{\mathbf{q}}|||_{K, \omega} = \left( \int_{\omega} K(x) \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{q}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \vec{\mathbf{q}} \in (L^2(\omega))^d$$

Soit  $\Gamma$  une partie de la frontière de  $\partial\omega$  on définit l'espace :

$$H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ \psi \in L^2(\Gamma); \exists v \in H^1(\omega) \text{ avec } v|_{\partial\omega \setminus \Gamma} = 0, v|_{\Gamma} = \psi \right\}.$$

Enfin, on notera par  $\left( H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^*$  le dual topologique de  $H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

## 5.3 Rappels

Dans ce paragraphe on rappelle quelques méthodes classiques de mise à l'échelle basées sur des critères de conservation d'énergie, de flux et de vitesse entre les échelles fines et grossières. Certaines de ces méthodes seront utilisées dans la suite de ce travail. Soit  $K$  un tenseur de perméabilité appartenant à  $M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ .

### 5.3.1 Minimisation de l'erreur du flux

Gallouët et Guérrillot [34] [35] proposent la méthode de mise à l'échelle suivante. Ils considèrent un voisinage  $V$ , incluant le domaine  $\omega$ , sur lequel on résoud le problème local:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{Q}}_{\vec{\lambda}} = -\frac{K(x)}{\mu} (\nabla p_{\vec{\lambda}} - \rho \vec{\mathbf{g}}) & \text{dans } V \\ \operatorname{div} [\vec{\mathbf{Q}}_{\vec{\lambda}}] = 0 & \text{dans } V \\ p_{\vec{\lambda}} = \vec{\lambda} \cdot \vec{\mathbf{x}} & \text{sur } \partial V \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $\vec{\lambda}$  est un paramètre de  $\mathbb{R}^d$ . Le fluide est caractérisé par la viscosité  $\mu$  et la densité  $\rho$ . Comme le problème (5.2) est linéaire, on résoud  $d$  problèmes locaux en faisant varier la valeur du paramètre  $\vec{\lambda}$ .

Soit le tenseur constant sur  $\omega$ , noté  $K^*$ , on considère alors le problème :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{Q}}_{\vec{\lambda}}^* = -\frac{K^*}{\mu} (\nabla p_{\vec{\lambda}}^* - \rho \vec{\mathbf{g}}) & \text{dans } V \\ \operatorname{div} [\vec{\mathbf{Q}}_{\vec{\lambda}}^*] = 0 & \text{dans } V \\ p_{\vec{\lambda}}^* = \vec{\lambda} \cdot \vec{\mathbf{x}} & \text{sur } \partial V \end{cases} \quad (5.3)$$

Gallouët et Guérrillot définissent alors la fonctionnelle :

$$J(K^*) = \int_s \left( \int_{\partial\omega} [(\vec{\mathbf{Q}}_{\vec{\lambda}} - \vec{\mathbf{Q}}_{\vec{\lambda}}^*) \cdot \vec{\mathbf{n}}]^2 dx \right) \quad (5.4)$$

$$\text{où } S = \left\{ \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^d / \sum_{i=1}^d \lambda_i^2 = 1 \right\}. \quad (5.5)$$

La méthode proposée consiste à minimiser le carré de la différence entre le débit du milieu hétérogène et le débit du milieu homogène sur la frontière de  $\omega$ , pour toutes les directions possibles  $\vec{\lambda}$ .

Si l'on restreint le voisinage  $V$  à un domaine  $\omega$  rectangulaire en 2D, ou cubique en 3D, et si  $\vec{\lambda} = \vec{\mathbf{e}}_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , où  $\vec{\mathbf{e}}_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique, les solutions des problèmes locaux (5.3) sont connues et  $p_{\vec{\mathbf{e}}_i}^* = x_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ . Les coefficients du tenseur équivalent s'écrivent alors sous la forme explicite suivante :

$$K_{ij}^* = -\frac{1}{\int_{\partial\omega} \mathbf{n}_i^2 d\sigma} \int_{\partial\omega} (\vec{\mathbf{Q}}_{\vec{\mathbf{e}}_j})_i \cdot \mathbf{n}_i^2 d\sigma \quad (5.6)$$

où  $(\vec{\mathbf{Q}}_{\vec{\mathbf{e}}_j})_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur vitesse  $\vec{\mathbf{Q}}_{\vec{\mathbf{e}}_j}$  solution du problème local (5.2) et  $\mathbf{n}_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur normal  $\vec{\mathbf{n}}$  au domaine  $\omega$ .

Cette méthode est également applicable autour des puits où la condition aux limites linéaire dans (5.2) et (5.3) est remplacée par  $P(r) = \ln(r)$ ,  $r$  représentant le rayon. De plus cette méthode peut être mise en oeuvre sur des maillages déstructurés. Cependant le tenseur équivalent obtenu est en général non symétrique, même sur des géométries régulières, ce qui entraîne des difficultés d'utilisation de la méthode.

### 5.3.2 Egalité des flux pour des conditions aux limites périodiques

On reprend les notations de la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords confinées (c.f. figure 1.7 du chapitre 1) où l'on suppose de plus que le domaine est un carré en 2D ou un cube en 3D. On note  $\Gamma_0^i$  et  $\Gamma_1^i$  les deux faces opposées perpendiculaires à l'axe  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ . En d'autres termes,  $\Gamma_0^i$  [resp.  $\Gamma_1^i$ ] est la frontière du domaine  $\omega$ , appartenant au plan d'équation  $x_i = a_i$  [resp.  $x_i = b_i$ ]. Cette méthode proposée par Durlofsky [28] [29] consiste à calculer l'écoulement d'un fluide incompressible décrit par la loi de Darcy auquel on applique les conditions aux limites ci-après :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\mathbf{Q}}_i = -K(x)\nabla p_i & \text{dans } \omega \\ \operatorname{div} [\vec{\mathbf{Q}}_i] = 0 & \text{dans } \omega \\ p_i|_{\Gamma_0^j} = p_i|_{\Gamma_1^j} - \mathbf{G}_i \delta_{ij} & 1 \leq j \leq d \\ K\nabla p_i \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_0^j} = -K\nabla p_i \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_1^j} & 1 \leq j \leq d \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d \quad (5.7)$$

où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker et  $\vec{\mathbf{G}}$  est un vecteur donné de  $\mathbb{R}^d$ .

Soit  $K^*$ , un tenseur constant sur  $\omega$ , on considère alors les problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\mathbf{Q}}_i^* = -K^*\nabla p_i^* & \text{dans } \omega \\ \operatorname{div} [\vec{\mathbf{Q}}_i^*] = 0 & \text{dans } \omega \\ p_i^*|_{\Gamma_0^j} = p_i^*|_{\Gamma_1^j} - \mathbf{G}_i \delta_{ij} & 1 \leq j \leq d \\ K^*\nabla p_i^* \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_0^j} = -K^*\nabla p_i^* \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_1^j} & 1 \leq j \leq d \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d. \quad (5.8)$$

Pour ces conditions aux limites, les pressions  $p_i^*$ ,  $1 \leq i \leq d$ , s'écrivent de la manière suivante :

$$p_i^* = C - \mathbf{G}_i \frac{(x_i - a_i)}{L^i} \quad (5.9)$$

où  $L^i = b_i - a_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , et  $C$  est une constante.

Les composantes du tenseur équivalent sont alors déterminées par conservation des flux :

$$\int_{\Gamma_1^i} \vec{\mathbf{Q}}_j^* \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\sigma = \int_{\Gamma_1^i} \vec{\mathbf{Q}}_j \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\sigma \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (5.10)$$

soit encore

$$K_{ij}^* = \frac{-1}{\mathbf{G}_j} \int_{\Gamma_1^i} \vec{\mathbf{Q}}_j \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\sigma \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (5.11)$$

Cette méthode nécessite que le domaine  $\omega$  soit un carré ou un cube, toutefois le tenseur équivalent obtenu est toujours symétrique défini positif. Dans le chapitre 6 on montre comment la méthode due à Durlofsky est reliée à la méthode de minimisation de l'erreur du flux.

### 5.3.3 Approche des moindres carrés pondérés

Contrairement aux méthodes numériques précédentes cette approche ne nécessite pas la résolution de problèmes locaux sur le domaine  $\omega$ . La méthode se place sur le gisement  $\Omega$  tout entier. Pour cela on introduit la partition  $T$  de l'ouvert  $\Omega$  en  $N$  ouverts  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq N}$

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\omega}_i. \quad (5.12)$$

et une fonction  $f \in L^2(\Omega)$  telle que  $\int_{\Omega} f \, dx = 0$ . Nielsen et Tveito [63] considèrent le problème suivant :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{Q}} = -K(x)\nabla p & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} [\vec{\mathbf{Q}}] = f & \text{dans } \Omega \\ K\nabla p \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.13)$$

Soit  $\mathcal{A}_{dm}$ , l'ensemble définie par :

$$\mathcal{A}_{dm} = \{A \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega) \text{ tel que } A \text{ est constant sur } \omega_i, 1 \leq i \leq N\} \quad (5.14)$$

Pour  $K^* \in \mathcal{A}_{dm}$  on introduit le problème :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{Q}}^* = -K^*(x)\nabla p^* & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} [\vec{\mathbf{Q}}^*] = f & \text{dans } \Omega \\ K^*\nabla p^* \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.15)$$

Les auteurs proposent de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\|\vec{\mathbf{Q}}^* - \vec{\mathbf{Q}}\|_{0,\Omega}^2 \quad (5.16)$$

pour tout tenseur  $K^* \in \mathcal{A}_{dm}$ .

Afin d'éviter le calcul du vecteur vitesse  $\vec{\mathbf{Q}}$  solution du problème (5.13) ils minimisent l'écart des vitesses pour la norme  $\|\cdot\|_{K^{-1},\Omega}$ , élevée au carré. Après simplifications la fonctionnelle à minimiser s'écrit :

$$I(K^*) = \int_{\Omega} K^{-1}(x)\vec{\mathbf{Q}}^* \cdot \vec{\mathbf{Q}}^* \, dx \quad (5.17)$$

De plus un procédé de régularisation est utilisé en rajoutant le terme  $\|K^* - K\|_{0,\Omega}^2$  à la fonctionnelle (5.17). Finalement la méthode revient à minimiser pour tout  $K^* \in \mathcal{A}_{dm}$ , la fonctionnelle :

$$J(K^*) = \int_{\Omega} K^{-1}(x)\vec{\mathbf{Q}}^* \cdot \vec{\mathbf{Q}}^* \, dx + \alpha \|K^* - K\|_{0,\Omega}^2 \quad (5.18)$$

où  $\alpha \geq 0$  est un petit paramètre à déterminer.

Cette méthode s'affranchit des problèmes locaux et est applicable sur des maillages

déstructurés. Toutefois la perméabilité équivalente obtenue par cette méthode, qui ne résoud pas le problème (5.13), n'est valable que pour des conditions aux limites de Neumann homogènes. Dans ce chapitre on développe une approche semblable restreint à une maille dynamique  $\omega$  avec la moyenne des vecteurs vitesse de filtration.

### 5.3.4 Critère de l'énergie en milieu stochastique

Indelman et Dagan [47], [48] et [49] proposent une approche sur le gisement  $\Omega$  tout entier. Ils considèrent un milieu stochastique hétérogène  $\Omega$ , soumis à des conditions aux limites particulières. Une des conditions nécessaires pour calculer le tenseur équivalent est que l'énergie dissipée dans le milieu stochastique hétérogène soit égale à l'énergie du milieu homogène. Le point de départ est l'écoulement d'un fluide monophasique décrit par la loi de Darcy dans le gisement  $\Omega$  soumis à des conditions aux limites confinées. La distribution de perméabilité  $K$  est considérée comme une fonction aléatoire stationnaire et les solutions  $\vec{Q}$  et  $P$  du système de Darcy sont les réponses de référence. L'attention est surtout portée aux réponses globales du système, généralement exprimées en termes de débit total (moyenne et variance). La discrétisation spatiale est définie par la partition  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\omega}_i$  qui permet de traiter le problème numériquement. On note  $K_i^*$  la restriction sur le domaine  $\omega_i$  du tenseur équivalent. Le critère d'évaluation de la qualité de l'approximation  $K_i^*$  (après certaines considérations, qui privilégient un accord quant à la réponse globale du système) est précisé en termes énergétiques. Pour chaque maille  $\omega_i$ , on explicite la dissipation d'énergie de la solution numérique et de la solution de référence; leurs deux premiers moments statistiques doivent être égaux. Les conditions pour satisfaire ces critères sont discutées dans Indelman [46].

Dans cette méthode le cadre stochastique est très important car il est associé à certaines considérations géométriques qui suppose que  $\omega_i$  est très grand devant la taille des hétérogénéités locales.

## 5.4 Idées de base

Certains outils de la théorie du contrôle optimal, qui comprend de vastes champs d'application développés par exemple dans Lions [55], [56] et Pironneau [68] seront utilisés dans la suite de ce travail . Dans un premier temps on expose dans le cadre le plus simple possible notre méthode de mise à l'échelle permettant de prendre en compte des conditions aux limites de type Dirichlet quelconques. On considère d'une part le système

(5.1), auquel on adjoint une condition aux limites  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ .

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[K(x)\nabla P] = 0 & \text{dans } \omega \\ P = g & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (5.19)$$

On introduit alors l'énergie du système (5.19) définie par :

$$E_g(K) = \frac{1}{2} \int_{\omega} K(x) \nabla P \cdot \nabla P \, dx \quad (5.20)$$

D'autre part, on considère pour une matrice constante  $H \in M(h, a, \omega)$ , un système analogue à (5.1), auquel on adjoint la même condition aux limites  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$  du problème (5.19)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[H \nabla U] = 0 & \text{dans } \omega \\ U = g & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (5.21)$$

On définit alors l'énergie du système (5.21) :

$$E_g(H) = \frac{1}{2} \int_{\omega} H \nabla U \cdot \nabla U \, dx \quad (5.22)$$

La méthode consiste alors à trouver une matrice  $H \in M(h, a, \omega)$  qui minimise l'écart entre l'énergie  $E_g(H)$  et l'énergie  $E_g(K)$ . Plus précisément, on cherche à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{H \in M(h, a, \omega)} [E_g(H) - E_g(K)]^2. \quad (5.23)$$

La matrice  $H$ , solution du problème (5.23), sera alors notée  $K^*$  et représentera le tenseur équivalent à  $K$  sur le domaine  $\omega$ .

Une autre approche basée sur la vitesse de filtration sera également développée. Le principe général en est le suivant : Pour le problème (5.19) on construit à partir de la vitesse de filtration le vecteur suivant :

$$\vec{\mathbf{V}}_g(K) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) \nabla P \, dx \quad (5.24)$$

et on associe au problème (5.21) la quantité

$$\vec{\mathbf{V}}_g(H) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} H \nabla U \, dx \quad (5.25)$$

On obtient de cette manière la moyenne des vitesses de filtration à l'échelle locale et globale. Le principe est de comparer des grandeurs, ici les vitesses de filtration, en les ramenant à la même échelle. Le plus simple est alors de se ramener à l'échelle grossière

c'est pourquoi on cherche à minimiser l'écart entre les vecteurs à l'échelle microscopique et macroscopique en résolvant le problème :

$$\inf_{H \in M(h,a,\omega)} \left| \vec{V}_g(H) - \vec{V}_g(K) \right|^2 \quad (5.26)$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme Euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ .

Le minimum du problème (5.26) qui sera noté  $K^*$  représentera un tenseur équivalent à  $K$ , au sens des vitesses, définie sur le domaine  $\omega$ .

Dans les chapitres qui suivent on démontre que les problèmes (5.23) et (5.26) admettent une solution, mais qui est généralement non unique. Bien que l'unicité du tenseur équivalent ne soit pas importante on introduit un nombre fini de conditions aux limites distinctes que l'on applique aux problèmes (5.19) et (5.21) afin de réduire l'ensemble des solutions aux problèmes de minimisation. La méthode consiste alors à minimiser la somme des écarts des énergies correspondant aux différentes conditions aux bords. Pour ce qui est des vitesses on minimise la somme des écarts des vitesses moyennes sur le domaine  $\omega$ . C'est la méthode avec les deux aspects énergies et vitesses qui va être développée maintenant.

## 5.5 Cadre général

Afin de pouvoir décrire la méthode de manière générale, on introduit les notations ci-après. On considère une maille quelconque  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  du maillage dynamique et un nombre entier  $m > 0$ . On note alors par  $\mathcal{D}$  un élément de l'espace  $\left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)\right)^m$ , dont la  $i^{\text{ème}}$  composante sera notée  $g_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  :

$$\mathcal{D} \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)\right)^m \quad (5.27)$$

Dans les méthodes classiques  $m = d$ , où  $d$  est la dimension en espace. Dans la suite, on se place dans un cadre plus général où l'on peut dissocier le nombre de conditions aux limites et la dimension de l'espace de travail.

Soient  $\partial\omega = \Gamma_D^i \cup \Gamma_N^i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , où  $\Gamma_D^i$  [resp.  $\Gamma_N^i$ ] est une partie de la frontière soumise à une condition aux limites de Dirichlet [resp. Neumann]. On notera  $\mathcal{M}$  un élément de l'espace produit  $\left(H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D^1) \times \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N^1)\right)^*\right) \times \dots \times \left(H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D^m) \times \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N^m)\right)^*\right) \times \dots \times \left(H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D^m) \times \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N^m)\right)^*\right)$ . La  $i^{\text{ème}}$  composante de l'élément  $\mathcal{M}$  appartenant à  $H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D^i) \times \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N^i)\right)^*$  sera noté  $(g_i^D, g_i^N)$  :

$$\mathcal{M} \in \prod_{i=1}^m \left(H_{0,0}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D^i) \times \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N^i)\right)^*\right) \quad (5.28)$$

Les éléments  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{M}$  définissent ainsi un nombre fini de conditions aux limites. Pour un tenseur  $K$  appartenant à l'ensemble  $M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ , on introduit un tenseur constant  $H \in M(h, a, \omega)$  et un ensemble de fonctions  $(f_i)_{1 \leq i \leq m} \in L^2(\omega)$ . Bien que le cas général puisse être traité, on suppose, afin de simplifier les calculs, que les fonctions  $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$  sont **indépendantes** des tenseurs  $K$  et  $H$ .

### 5.5.1 Conditions aux limites de Dirichlet

On décrit maintenant les différents problèmes locaux ainsi que les diverses quantités qui seront utilisées pour définir les méthodes étudiées.

Soient les  $m$  problèmes définis par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [K(x) \nabla P_i] = f_i & \text{dans } \omega \\ P_i = g_i & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.29)$$

On considère alors les quantités suivantes :

$$E_{ij}^D(K) = \frac{1}{2} \int_{\omega} K(x) \nabla P_i \cdot \nabla P_j \, dx - \int_{\omega} f_i P_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (5.30)$$

$$\vec{V}_i^D(K) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) \nabla P_i \, dx \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.31)$$

Lorsque  $i = j$  la quantité  $E_{ij}^D(K)$  n'est autre que l'énergie dissipée du système (5.29) et le vecteur  $\vec{V}_i^D(K)$  représente la vitesse de filtration moyenne dans le domaine  $\omega$ .

D'autre part, on considère les  $m$  problèmes suivants :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [H \nabla U_i] = f_i & \text{dans } \omega \\ U_i = g_i & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m \quad (5.32)$$

auxquels on associe  $E_{ij}^D(H)$  et  $\vec{V}_i^D(H)$  donnés par :

$$E_{ij}^D(H) = \frac{1}{2} \int_{\omega} H \nabla U_i \cdot \nabla U_j \, dx - \int_{\omega} f_i U_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (5.33)$$

$$\vec{V}_i^D(H) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} H \nabla U_i \, dx \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.34)$$

### 5.5.2 Conditions aux limites mêlées

De la même manière que précédemment on définit maintenant, pour des conditions aux limites mêlées, les problèmes locaux ainsi que les quantités qui vont intervenir dans la

fonctionnelle à minimiser.

Pour des conditions aux limites mêlées on introduit les  $m$  problèmes :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[K(x)\nabla W_i] = f_i & \text{dans } \omega \\ W_i = g_i^D & \text{sur } \Gamma_D^i \\ K\nabla W_i \cdot \vec{\mathbf{n}} = g_i^N & \text{sur } \Gamma_N^i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.35)$$

On définit alors :

$$E_{ij}^M(K) = \frac{1}{2} \int_{\omega} K(x)\nabla W_i \cdot \nabla W_j \, dx - \int_{\Gamma_N^i} g_i^N W_j \, d\sigma - \int_{\omega} f_i W_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (5.36)$$

$$\vec{\mathbf{V}}_i^M(K) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x)\nabla W_i \, dx \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.37)$$

Lorsque  $i = j$   $E_{ij}^M(K)$  représente l'énergie dissipée du système (5.35) et  $\vec{\mathbf{V}}_i^M(K)$  est la vitesse de filtration moyenne dans le domaine  $\omega$ .

Par ailleurs, on considère les  $m$  problèmes définis par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[H\nabla Z_i] = f_i & \text{dans } \omega \\ Z_i = g_i^D & \text{sur } \Gamma_D^i \\ H\nabla Z_i \cdot \vec{\mathbf{n}} = g_i^N & \text{sur } \Gamma_N^i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m \quad (5.38)$$

ainsi que les quantités  $E_{ij}^M(H)$  et  $\vec{\mathbf{V}}_i^M(H)$  :

$$E_{ij}^M(H) = \frac{1}{2} \int_{\omega} H\nabla Z_i \cdot \nabla Z_j \, dx - \int_{\Gamma_N^i} g_i^N Z_j \, d\sigma - \int_{\omega} f_i Z_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (5.39)$$

$$\vec{\mathbf{V}}_i^M(H) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} H\nabla Z_i \, dx \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.40)$$

Lorsque l'on calcule des tenseurs de perméabilités absolues équivalents, l'objectif est de perturber le moins possible l'écoulement du fluide pour des conditions aux limites données. Plusieurs critères peuvent être utilisés pour déterminer le tenseur équivalent. Dans ce chapitre on s'intéresse principalement à l'énergie et à la vitesse de filtration.

## 5.6 Minimisation d'une fonctionnelle énergétique

Suivant les conditions aux limites appliquées aux problèmes locaux on définit les problèmes de minimisation qui serviront à calculer le tenseur équivalent. Dans le but de manipuler des grandeurs physiques on définit les fonctionnelles "énergétiques", notées  $I_{\mathcal{D}}$  et  $I_{\mathcal{M}}$ , par :

$$I_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K)]^2 \quad (5.41)$$

$$I_{\mathcal{M}}(H) = \sum_{i,j=1}^m \left[ E_{ij}^M(H) - E_{ij}^M(K) \right]^2. \quad (5.42)$$

On considère alors les problèmes d'optimisation :

$$\inf_{H \in M(h,a,\omega)} I_{\mathcal{D}}(H) \quad (5.43)$$

$$\inf_{H \in M(h,a,\omega)} I_{\mathcal{M}}(H). \quad (5.44)$$

A partir des problèmes (5.43) et (5.44) on définit ci-dessous le tenseur équivalent associé.

**Définition 5.6.1** *Pour des conditions aux limites de Dirichlet on dira qu'un tenseur  $K^* \in M(h,a,\omega)$  est équivalent à  $K$  sur  $\omega$  au sens de l'énergie si  $K^*$  est solution du problème (5.43) i.e.*

$$I_{\mathcal{D}}(K^*) = \inf_{H \in M(h,a,\omega)} I_{\mathcal{D}}(H). \quad (5.45)$$

**Définition 5.6.2** *Pour des conditions aux limites mêlées on dira qu'un tenseur  $K^* \in M(h,a,\omega)$  est équivalent à  $K$  sur  $\omega$  au sens de l'énergie si  $K^*$  est solution du problème (5.44) i.e.*

$$I_{\mathcal{M}}(K^*) = \inf_{H \in M(h,a,\omega)} I_{\mathcal{M}}(H). \quad (5.46)$$

**Remarque 5.6.3** *Le choix des contraintes  $h$  et  $a$  de l'espace  $M(h,a,\omega)$  vient naturellement du fait que le tenseur équivalent que l'on cherche à calculer est toujours compris entre les moyennes harmonique et arithmétique (c.f. (1.5) du chapitre 1).*

## 5.7 Minimisation d'une fonctionnelle basée sur la vitesse

Une autre approche consiste à utiliser la moyenne des vitesses de filtration locales et globales qui ont une signification physique bien précise pour l'ingénieur gisement.

On définit alors les fonctionnelles, notées  $J_{\mathcal{D}}$  et  $J_{\mathcal{M}}$ , de la façon suivante :

$$J_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i=1}^m \left| \vec{\mathbf{V}}_i^{\mathcal{D}}(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^{\mathcal{D}}(K) \right|^2 \quad (5.47)$$

$$J_{\mathcal{M}}(H) = \sum_{i=1}^m \left| \vec{\mathbf{V}}_i^{\mathcal{M}}(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^{\mathcal{M}}(K) \right|^2 \quad (5.48)$$

et on introduit les problèmes d'optimisation :

$$\inf_{H \in M(h,a,\omega)} J_{\mathcal{D}}(H) \quad (5.49)$$

$$\inf_{H \in M(h,a,\omega)} J_{\mathcal{M}}(H). \quad (5.50)$$

Suivant les conditions aux limites, le tenseur équivalent est alors défini comme suit :

**Définition 5.7.1** *Pour des conditions aux limites de Dirichlet on dira qu'un tenseur  $K^* \in M(h, a, \omega)$  est équivalent à  $K$  sur  $\omega$  au sens des vitesses si  $K^*$  est solution du problème (5.49) i.e.*

$$J_{\mathcal{D}}(K^*) = \inf_{H \in M(h, a, \omega)} J_{\mathcal{D}}(H). \quad (5.51)$$

**Définition 5.7.2** *Pour des conditions aux limites mêlées on dira qu'un tenseur  $K^* \in M(h, a, \omega)$  est équivalent à  $K$  sur  $\omega$  au sens des vitesses si  $K^*$  est solution du problème (5.50) i.e.*

$$J_{\mathcal{M}}(K^*) = \inf_{H \in M(h, a, \omega)} J_{\mathcal{M}}(H). \quad (5.52)$$

Après avoir introduit des problèmes de minimisation faisant intervenir des fonctionnelles basées sur l'énergie et la vitesse, il semble naturel d'introduire une autre grandeur physique qui est le flux. En suivant les mêmes étapes décrites précédemment on définit un problème d'optimisation faisant intervenir une fonctionnelle basée sur le flux. Cette approche ne sera pas traitée dans cette thèse, bien qu'elle ne soulève aucune difficulté supplémentaire par rapport aux méthodes basées sur l'énergie ou la vitesse. Dans le chapitre 6 on montre toutefois certaines relations entre la méthode de mise à l'échelle qui consiste à minimiser l'erreur du flux et la méthode des flux pour des conditions aux limites périodiques.

## 5.8 Exemples 1D

Pour illustrer les deux approches, on applique les différentes méthodes sur un cas monodimensionnel. Soient  $\omega = ]a, b[$  un ouvert borné quelconque de  $\mathbb{R}$  et  $K$  un tenseur de perméabilité appartenant à  $M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ .

### 5.8.1 Fonctionnelle énergétique

Dans un premier temps, on examine le cas de la fonctionnelle énergétique et du problème (5.45) correspondant à la définition 5.6.1. Dans le cadre monodimensionnel, les problèmes (5.29) et (5.32) s'écrivent uniquement pour  $i = 1$ , que l'on omet pour alléger les écritures. Soient  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  deux nombres réels distincts, si on suppose que le second membre  $f_1$  est nul, le problème (5.29) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dx} \left( K(x) \frac{dP}{dx} \right) = 0 \quad \text{dans } ]a, b[ \\ P(a) = \alpha_0 \\ P(b) = \alpha_1 \end{array} \right. \quad (5.53)$$

avec  $P$  la solution  $P_1$ .

Du problème (5.53) on obtient que

$$K(x) \frac{dP}{dx} = C \quad (5.54)$$

où  $C$  est une constante.

En multipliant par  $\frac{dP}{dx}$  de chaque côté de l'égalité (5.54), puis en intégrant sur l'ouvert  $]a, b[$  on obtient

$$\int_a^b K(x) \frac{dP}{dx} \frac{dP}{dx} dx = C (\alpha_1 - \alpha_0). \quad (5.55)$$

D'autre part, en divisant l'égalité (5.54) par  $K > 0$ , car  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ , puis en intégrant sur l'ouvert  $]a, b[$  on obtient

$$(\alpha_1 - \alpha_0) = C \int_a^b K^{-1}(x) dx \quad (5.56)$$

d'où  $C = \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)}{\int_a^b K^{-1}(x) dx}$ . Il est alors possible de calculer l'énergie  $E_{11}^D(K)$  en reportant la valeur de  $C$  dans (5.55) :

$$E_{11}^D(K) = \frac{1}{2} \int_{\omega} K(x) \frac{dP}{dx} \frac{dP}{dx} dx = \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{2} \left( \int_a^b K^{-1}(x) dx \right)^{-1} \quad (5.57)$$

On considère alors le problème (5.32) pour  $H \in M(h, a, \omega)$ . En 1D, ce problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( H \frac{dU}{dx} \right) = 0 & \text{dans } ]a, b[ \\ U(a) = \alpha_0 \\ U(b) = \alpha_1 \end{cases} \quad (5.58)$$

L'énergie  $E_{11}^D(H)$  est alors égale à :

$$E_{11}^D(H) = \frac{1}{2} \int_{\omega} H \frac{dU}{dx} \frac{dU}{dx} dx = \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)^2 H}{2(b-a)}. \quad (5.59)$$

La fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}(\cdot)$  considérée est donnée par :

$$I_{\mathcal{D}}(H) = \left[ E_{11}^D(H) - E_{11}^D(K) \right]^2. \quad (5.60)$$

On cherche donc la solution au problème (5.43) qui s'écrit :

$$\min_{H \in M(h, a, \omega)} I_{\mathcal{D}}(H). \quad (5.61)$$

La fonction  $I_{\mathcal{D}}(\cdot)$  étant continue et strictement convexe sur  $M(h, a, \omega)$ , le problème (5.61) admet une solution unique. En dérivant directement la fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}(\cdot)$  par rapport à  $H$ , on obtient :

$$\frac{dI_{\mathcal{D}}(H)}{dH} = \left( \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)^2 H}{2(b-a)} - \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{2} \left( \int_a^b K^{-1}(x) dx \right)^{-1} \right) \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{(b-a)}. \quad (5.62)$$

1<sup>er</sup> cas :  $\alpha_1 = \alpha_0$  et  $a \neq b$  alors pour tout  $H \in M(h, a, \omega)$ ,  $I_{\mathcal{D}}(H) \equiv 0$  et donc tout tenseur de  $M(h, a, \omega)$  est solution du problème (5.61).

2<sup>ème</sup> cas :  $\alpha_1 \neq \alpha_0$  et  $a \neq b$ , d'où on a la caractérisation suivante :

$$\frac{dI_{\mathcal{D}}(H)}{dH} = 0 \iff H = \left( \frac{1}{(b-a)} \int_a^b K^{-1}(x) dx \right)^{-1}. \quad (5.63)$$

De plus  $\left( \frac{1}{(b-a)} \int_a^b K^{-1}(x) dx \right)^{-1} \in M(h, a, \omega)$ , par conséquent

$$K^* = \left( \frac{1}{(b-a)} \int_a^b K^{-1}(x) dx \right)^{-1} \quad (5.64)$$

est bien l'unique solution du problème (5.61). De plus le tenseur équivalent défini par (5.64) annule la fonction coût  $I_{\mathcal{D}}(\cdot)$ .

On retrouve ainsi un résultat bien connu : la moyenne harmonique de  $K$  est le tenseur équivalent à  $K$  sur l'ouvert  $]a, b[$ .

## 5.8.2 Fonctionnelle basée sur la vitesse

On applique maintenant la définition 5.7.1 faisant intervenir la fonctionnelle basée sur la vitesse. Au problème (5.53) on associe la moyenne du vecteur vitesse :

$$\vec{\mathbf{V}}_1^D(K) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b K(x) \frac{dP}{dx} dx. \quad (5.65)$$

En utilisant (5.54) et (5.56) on obtient

$$\vec{\mathbf{V}}_1^D(K) = (\alpha_1 - \alpha_0) \left( \int_a^b K^{-1}(x) dx \right)^{-1}. \quad (5.66)$$

Par ailleurs au problème (5.58) est associé  $\vec{\mathbf{V}}_1^D(H)$  définie par :

$$\vec{\mathbf{V}}_1^D(H) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b H \frac{dU}{dx} dx = \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)}{(b-a)} H. \quad (5.67)$$

La fonctionnelle  $J_{\mathcal{D}}(\cdot)$  est donnée par :

$$J_{\mathcal{D}}(H) = \left( \vec{\mathbf{V}}_1^D(H) - \vec{\mathbf{V}}_1^D(K) \right)^2. \quad (5.68)$$

Suivant la définition 5.7.1, on cherche la solution au problème :

$$\min_{H \in M(h, a, \omega)} J_{\mathcal{D}}(H) \quad (5.69)$$

Le problème (5.69) admet une solution unique car la fonction  $J_{\mathcal{D}}(H)$  est continue et strictement convexe sur  $M(h, a, \omega)$ . On a :

$$\frac{dJ_{\mathcal{D}}(H)}{dH} = 2 \left( (\alpha_1 - \alpha_0) \left[ \frac{H}{(b-a)} - \left( \int_a^b K^{-1}(x) dx \right)^{-1} \right] \right) \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)}{(b-a)}. \quad (5.70)$$

1<sup>er</sup> cas :  $\alpha_1 = \alpha_0$  et  $a \neq b$  donc pour tout  $H \in M(h, a, \omega)$ ,  $J_{\mathcal{D}}(H) \equiv 0$  ce qui implique que n'importe quel tenseur de  $M(h, a, \omega)$  est solution du problème (5.69).

2<sup>ème</sup> cas :  $\alpha_1 \neq \alpha_0$  et  $a \neq b$ , on obtient la caractérisation :

$$\frac{dJ_{\mathcal{D}}(H)}{dH} = 0 \iff H = \left( \frac{1}{(b-a)} \int_a^b K^{-1}(x) dx \right)^{-1}. \quad (5.71)$$

En outre  $\left( \frac{1}{(b-a)} \int_a^b K^{-1}(x) dx \right)^{-1} \in M(h, a, \omega)$ , donc

$$K^* = \left( \frac{1}{(b-a)} \int_a^b K^{-1}(x) dx \right)^{-1} \quad (5.72)$$

est l'unique solution au problème (5.69) et  $J_{\mathcal{D}}(K^*) = 0$ .

On retrouve bien la moyenne harmonique de  $K$  sur  $]a, b[$ .

## 5.9 Etude de la fonctionnelle énergétique

Dans le cas multidimensionnel on ne peut effectuer les calculs de manière explicite pour trouver un minimum aux problèmes d'optimisation servant à définir le tenseur équivalent. Ceci provient du fait que la solution  $U_i$  [resp.  $Z_i$ ],  $1 \leq i \leq m$ , du problème (5.32) [resp. (5.38)] est en général une fonction non linéaire du tenseur  $H \in M(h, a, \omega)$ . Par conséquent, on résout numériquement les problèmes de minimisation afin de déterminer le tenseur équivalent  $K^*$ . Toutefois, et c'est l'objet du paragraphe qui suit, il est nécessaire d'avoir des informations sur la continuité et la différentiabilité des fonctionnelles  $I_{\mathcal{D}}$  et  $I_{\mathcal{M}}$ . La continuité sera un élément essentiel (bien que la semi-continuité inférieure soit suffisante) pour s'assurer de l'existence d'un minimum au problème de minimisation. Quand à la différentiabilité elle sera utilisée pour les calculs numériques.

## 5.9.1 Continuité

### Conditions aux limites de Dirichlet

**Proposition 5.9.1** *La fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$  définie par (5.41) est continue sur  $(M(h, a, \omega), |||\cdot|||)$ .*

Avant de démontrer la proposition 5.9.1 on a besoin d'un résultat connu pour l'énergie [51], que l'on étend ici.

**Proposition 5.9.2** *Soient  $f_i \in L^2(\omega)$  et  $g_i \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . On suppose que  $H_\varepsilon \xrightarrow{G} H_0$ , alors*

$$\begin{aligned}
 i) & \quad p_i^\varepsilon \xrightarrow{H^1(\omega)} p_i^0 \quad \text{faible} & 1 \leq i \leq m \\
 ii) & \quad H_\varepsilon \nabla p_i^\varepsilon \xrightarrow{(L^2(\omega))^d} H_0 \nabla p_i^0 \quad \text{faible} & 1 \leq i \leq m \\
 iii) & \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega} H_\varepsilon(x) \nabla p_i^\varepsilon \cdot \nabla p_j^\varepsilon dx = \int_{\omega} H_0(x) \nabla p_i^0 \cdot \nabla p_j^0 dx & 1 \leq i, j \leq m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{où } p_i^\varepsilon \text{ est la solution de} \\
 (PB_\varepsilon) & \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div} [H_\varepsilon(x) \nabla p_i^\varepsilon] = f_i \quad \text{dans } \omega \\ p_i^\varepsilon = g_i \quad \text{sur } \partial\omega \end{array} \right. & 1 \leq i \leq m \quad (5.73)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \text{où } p_i^0 \text{ est la solution de} \\
 (PB_0) & \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div} [H_0(x) \nabla p_i^0] = f_i \quad \text{dans } \omega \\ p_i^0 = g_i \quad \text{sur } \partial\omega \end{array} \right. & 1 \leq i \leq m. \quad (5.74)
 \end{aligned}$$

#### Démonstration :

Le point i) est la conséquence directe de la définition 1.5.1 de la G-convergence et le point ii) est une conséquence de la proposition 1.5.3. Ce sont des résultats classiques de la théorie de la G-convergence. Cette même théorie nous donne aussi la convergence des énergies :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega} H_\varepsilon(x) \nabla p_i^\varepsilon \cdot \nabla p_i^\varepsilon dx = \int_{\omega} H_0(x) \nabla p_i^0 \cdot \nabla p_i^0 dx \quad 1 \leq i \leq m$$

qui correspond donc au point iii) pour  $i = j$ . Il reste à démontrer le cas  $i \neq j$ .

Une formulation variationnelle du problème (5.73) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i^\varepsilon \in H^1(\omega) \\ \int_{\omega} H_\varepsilon(x) \nabla p_i^\varepsilon \cdot \nabla v dx = \int_{\omega} f_i v dx \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \\ p_i^\varepsilon = g_i \quad \text{sur } \partial\omega \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.75)$$

Pour tout  $1 \leq j \leq m$ , on considère une fonction  $w_j \in H^1(\omega)$  telle que  $w_j = g_j$  sur  $\partial\omega$ . En prenant comme fonction test  $v_j^\varepsilon = p_j^\varepsilon - w_j$  dans (5.75) on a :

$$\int_{\omega} H_\varepsilon(x) \nabla p_i^\varepsilon \cdot \nabla p_j^\varepsilon dx = \int_{\omega} H_\varepsilon(x) \nabla p_i^\varepsilon \cdot \nabla w_j dx + \int_{\omega} f_i(p_j^\varepsilon - w_j) dx \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (5.76)$$

Or d'après i) et ii) on obtient que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega} H_\varepsilon(x) \nabla p_i^\varepsilon \cdot \nabla p_j^\varepsilon dx = \int_{\omega} H_0(x) \nabla p_i^0 \cdot \nabla w_j dx + \int_{\omega} f_i(p_j^0 - w_j) dx \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (5.77)$$

Par ailleurs une formulation variationnelle de (5.74) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i^0 \in H^1(\omega) \\ \int_{\omega} H_0(x) \nabla p_i^0 \cdot \nabla v dx = \int_{\omega} f_i v dx \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \quad 1 \leq i \leq m. \\ p_i^0 = g_i \quad \text{sur } \partial\omega \end{array} \right. \quad (5.78)$$

En prenant  $v_j^0 = p_j^0 - w_j$  dans (5.78) on obtient :

$$\int_{\omega} H_0(x) \nabla p_i^0 \cdot \nabla p_j^0 dx = \int_{\omega} H_0(x) \nabla p_i^0 \cdot \nabla w_j dx + \int_{\omega} f_i(p_j^0 - w_j) dx \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (5.79)$$

Par conséquent en utilisant (5.77) et (5.79) on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega} H_\varepsilon(x) \nabla p_i^\varepsilon \cdot \nabla p_j^\varepsilon dx = \int_{\omega} H_0(x) \nabla p_i^0 \cdot \nabla p_j^0 dx \quad 1 \leq i, j \leq m \quad \square. \quad (5.80)$$

On démontre maintenant la proposition 5.9.1

Démonstration :

Soient  $(H_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  une suite de matrice appartenant à  $M(h, a, \omega)$  et  $H_0 \in M(h, a, \omega)$ . On suppose que  $H_\varepsilon$  converge vers  $H_0$  pour la norme  $||| \cdot |||$ .

D'après la proposition 1.5.4, on a que  $H_\varepsilon \xrightarrow{G} H_0$ . Ainsi en utilisant la propriété iii) de la proposition 5.9.2 on obtient que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega} H_\varepsilon \nabla p_i^\varepsilon \cdot \nabla p_j^\varepsilon dx = \int_{\omega} H_0 \nabla p_i^0 \cdot \nabla p_j^0 dx \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (5.81)$$

où  $p_i^\varepsilon$  [resp.  $p_i^0$ ] est la solution de (5.73) [resp. (5.74)].

D'où en utilisant i) de la proposition 5.9.2, (??) et (5.81) on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\omega} H_\varepsilon \nabla p_i^\varepsilon \cdot \nabla p_j^\varepsilon dx - \int_{\omega} f_i p_j^\varepsilon dx = \frac{1}{2} \int_{\omega} H_0 \nabla p_i^0 \cdot \nabla p_j^0 dx - \int_{\omega} f_i p_j^0 dx \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (5.82)$$

i.e.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{ij}^D(H_\varepsilon) = E_{ij}^D(H_0) \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (5.83)$$

ce qui implique que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \sum_{i,j=1}^m \left( E_{ij}^D (H_\varepsilon) - E_{ij}^D (K) \right)^2 \right] = \sum_{i,j=1}^m \left( E_{ij}^D (H_0) - E_{ij}^D (K) \right)^2 \quad (5.84)$$

c'est à dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\mathcal{D}} (H_\varepsilon) = I_{\mathcal{D}} (H_0). \quad (5.85)$$

Donc, la fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$  est continue  $\square$ .

### Conditions aux limites mêlées

On démontre maintenant la continuité de la fonctionnelle énergétique  $I_{\mathcal{M}}$  pour des conditions aux limites mêlées.

**Proposition 5.9.3** *La fonctionnelle  $I_{\mathcal{M}}$  définie par (5.42) est continue sur  $(M(h, a, \omega), |||\cdot|||)$ .*

Avant de démontrer la proposition 5.9.3 on a également besoin d'un résultat connu relatif à la G-convergence et que l'on rappelle ici.

**Proposition 5.9.4** *Soient  $f_i \in L^2(\omega)$  et  $(g_i^D, g_i^N) \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D^i) \times \left( H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N^i) \right)^*$ ,  $1 \leq i \leq m$ .*

*On suppose que  $H_\varepsilon \xrightarrow{G} H_0$ , alors*

$$\begin{aligned} i) & \quad w_i^\varepsilon \xrightarrow{H^1(\omega)} w_i^0 \quad \text{faible} & 1 \leq i \leq m \\ ii) & \quad H_\varepsilon \nabla w_i^\varepsilon \xrightarrow{(L^2(\omega))^d} H_0 \nabla w_i^0 \quad \text{faible} & 1 \leq i \leq m \\ iii) & \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega} H_\varepsilon(x) \nabla w_i^\varepsilon \cdot \nabla w_j^\varepsilon dx = \int_{\omega} H_0(x) \nabla w_i^0 \cdot \nabla w_j^0 dx & 1 \leq i, j \leq m \end{aligned} \quad (5.86)$$

où  $w_i^\varepsilon$  est la solution de

$$(PB_\varepsilon) \begin{cases} -\operatorname{div} [H_\varepsilon(x) \nabla w_i^\varepsilon] = f_i & \text{dans } \omega \\ w_i^\varepsilon = g_i^D & \text{sur } \Gamma_D^i \\ H_\varepsilon \nabla w_i^\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}} = g_i^N & \text{sur } \Gamma_N^i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m \quad (5.87)$$

et

$$(PB_0) \begin{cases} -\operatorname{div} [H_0(x) \nabla w_i^0] = f_i & \text{dans } \omega \\ w_i^0 = g_i^D & \text{sur } \Gamma_D^i \\ H_0 \nabla w_i^0 \cdot \vec{\mathbf{n}} = g_i^N & \text{sur } \Gamma_N^i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.88)$$

Démonstration :

La démonstration repose sur le fait que la G-convergence est indépendante des conditions aux limites d'après la proposition 1.5.5. En suivant le même cheminement que la démonstration de la proposition 5.9.2 on obtient alors le résultat souhaité  $\square$ .

Démonstration de la proposition 5.9.3 :

La démonstration est identique à celle de la proposition 5.9.1 en utilisant les résultats de la proposition 5.9.4  $\square$ .

## 5.9.2 Existence d'un minimum

La continuité des fonctionnelles  $I_{\mathcal{D}}$  et  $I_{\mathcal{M}}$  permet d'apporter une première propriété concernant l'existence d'une solution aux problèmes de minimisation. Plus précisément, on a le résultat qui suit.

**Proposition 5.9.5** *Le problème de minimisation (5.43) [resp. (5.44)] admet au moins un minimum.*

Démonstration :

La fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$  [resp.  $I_{\mathcal{M}}$ ] est continue sur le fermé borné  $M(h, a, \omega)$  d'après la proposition 5.9.1 [resp. 5.9.3]. Donc elle admet au moins un minimum sur  $M(h, a, \omega)$   $\square$ .

## 5.9.3 Différentiabilité

On étudie maintenant la différentiabilité par rapport au tenseur  $H$  des différentes fonctionnelles introduites auparavant. Avoir une forme explicite de la différentielle est une propriété importante, notamment d'un point de vue numérique, car l'on dispose alors d'algorithmes performants pour calculer le minimum. En particulier si  $f_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq m$  le calcul des gradients se simplifie énormément ce qui permet d'avoir des temps de calcul rapides. On examine en premier lieu le cas général de la fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$  faisant intervenir des conditions aux limites de Dirichlet.

### Conditions aux limites de Dirichlet

**Proposition 5.9.6** *La fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$  définie par (5.41) est différentiable et pour tout  $1 \leq \alpha, \beta \leq d$ , on a :*

$$\frac{\partial I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{\alpha\alpha}} = \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K)] * \begin{pmatrix} \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\beta}} dx - \\ \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_{\beta}} dx \end{pmatrix} \quad \text{si } \alpha = \beta$$

$$\frac{\partial I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K)] * \begin{pmatrix} \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx + \\ \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\alpha}} \right) dx - \\ \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx \end{pmatrix} \quad \text{si } \alpha \neq \beta$$

(5.89)

où  $U_i$  est la solution du problème (5.32) et  $\Psi_i$  est la solution du problème "adjoint" défini par :

$$\begin{cases} \Psi_i \in H_0^1(\omega) \\ -\text{div}[H \nabla \Psi_i] = f_i \quad \text{dans } \omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.90)$$

Avant de démontrer la proposition 5.9.6 on introduit les opérateurs  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq 7}$  définis ci-après. Ces derniers permettent d'écrire les différentes fonctionnelles étudiées comme des composées d'opérateurs élémentaires facile à manipuler.

Pour tout tenseur  $H \in M(h, a, \omega)$  on définit les opérateurs  $(\varphi_1^i)_{1 \leq i \leq m}$  et  $(\varphi_2^i)_{1 \leq i \leq m}$  par :

$$H \xrightarrow{\varphi_1^i} \nabla U_i \quad (5.91)$$

$$H \xrightarrow{\varphi_2^i} U_i \quad (5.92)$$

où  $U_i$  est la solution du problème (5.32).

Pour tout  $(\vec{\psi}, \vec{\eta}) \in (L^2(\omega))^d \times (L^2(\omega))^d$  on définit  $\varphi_3$  et  $\varphi_4$  par :

$$(\vec{\psi}, \vec{\eta}) \xrightarrow{\varphi_3} H \vec{\psi} \cdot \vec{\eta} \quad (5.93)$$

$$\vec{\psi} \xrightarrow{\varphi_4} H \vec{\psi} \quad (5.94)$$

On suppose en outre que chaque composante des vecteurs  $\vec{\psi}$  et  $\vec{\eta}$  est différentiable. La définition des opérateurs  $\varphi_5$  et  $(\varphi_6^i)_{1 \leq i \leq m}$  pour tout  $v \in L^2(\omega)$  est donnée par :

$$v \xrightarrow{\varphi_5} \int_{\omega} v dx \quad (5.95)$$

$$v \xrightarrow{\varphi_6^i} \int_{\omega} f_i v \, dx \quad (5.96)$$

où  $f_i$  est l'un des éléments de l'ensemble  $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$  utilisées dans les problèmes (5.29) et (5.32). Enfin, on introduit l'opérateur  $\varphi_7^{\alpha\beta}$  définie par :

$$\varphi_7^{\alpha\beta} (U_i, U_j) = \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq d \quad (5.97)$$

où  $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$  est la solution du problème (5.32).

La démonstration de la proposition 5.9.6 nécessite plusieurs résultats intermédiaires donnés ci-après. Une propriété importante est de connaître la dépendance par rapport à  $H$  de la solution  $U_i$  [resp.  $Z_i$ ] du problème (5.32) [resp. (5.38)]. La réponse est donnée par la proposition qui suit due à Chavent [21].

**Proposition 5.9.7** *Soit une matrice  $H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  et  $f \in L^2(\omega)$ . On considère le problème :*

$$-\operatorname{div} [H(x)\nabla U] = f \quad \text{dans } \omega \quad (5.98)$$

*auquel on adjoint des conditions aux limites qui peuvent être du type Dirichlet, Neumann ou mêlées.*

*Alors la solution  $U$  du problème (5.98) qui est une fonction non linéaire en  $H$  est de classe  $C^\infty$  par rapport à  $H$ .*

La proposition ci-dessous étudie la différentiabilité des opérateurs  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq 7}$  introduits précédemment.

**Proposition 5.9.8** Les opérateurs  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq 7}$  sont différentiables et pour tout  $1 \leq \alpha, \beta \leq d$  on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_1^i(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} &= \nabla \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \quad 1 \leq i \leq m \\
\frac{\partial \varphi_2^i(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} &= \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \quad 1 \leq i \leq m \\
\frac{\partial \varphi_3(\vec{\psi}, \vec{\eta})}{\partial H_{\alpha\beta}} &= H \left[ \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial H_{\alpha\beta}} \vec{\eta} + \vec{\psi} \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial H_{\alpha\beta}} \right] + \begin{cases} \Psi_\alpha \eta_\beta & \text{si } \alpha = \beta \\ \Psi_\alpha \eta_\beta + \Psi_\beta \eta_\alpha & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \\
\frac{\partial \varphi_4(\vec{\psi})}{\partial H_{\alpha\beta}} &= H \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial H_{\alpha\beta}} + \begin{cases} \Psi_\beta \vec{e}_\alpha & \text{si } \alpha = \beta \\ \Psi_\alpha \vec{e}_\beta + \Psi_\beta \vec{e}_\alpha & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (5.99) \\
D\varphi_5(v) &= \int_\omega v \, dx \\
D\varphi_6^i(v) &= \int_\omega f_i v \, dx \quad 1 \leq i \leq m \\
\frac{\partial \varphi_7^{\alpha\beta}(U_i, U_j)}{\partial H_{\alpha\beta}} &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \quad 1 \leq i, j \leq m.
\end{aligned}$$

Démonstration :

Les "applications"  $\varphi_5$  et  $(\varphi_6^i)_{1 \leq i \leq m}$  étant des "applications" linéaires "continues" elles sont différentiables et elles sont leurs propres différentielles.

D'après la proposition 5.9.7 on a

$$\frac{\partial \varphi_2^i(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \quad \forall 1 \leq i \leq m. \quad (5.100)$$

De plus comme l'application  $v \xrightarrow{t} \nabla v$  est linéaire et continue  $\forall v \in H^1(\omega)$  on obtient :

$$\frac{\partial \varphi_1^i(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \frac{\partial (t \circ \varphi_2^i)(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = t \left[ \frac{\partial \varphi_2^i(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} \right] = \nabla \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.101)$$

Chaque composante du couple  $(\vec{\psi}, \vec{\eta})$  étant différentiable, "l'application"  $\varphi_3$  est différentiable par rapport à  $(H_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq d}$  comme composée d'applications différentiables.

On a

$$\frac{\partial \varphi_3(\vec{\psi}, \vec{\eta})}{\partial H_{\alpha\beta}} = \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} H \vec{\psi} \cdot \vec{\eta} = \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} \left( \sum_{\gamma, \delta=1}^d H_{\gamma\delta} \Psi_\delta \eta_\gamma \right) \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq d. \quad (5.102)$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi_3(\vec{\psi}, \vec{\eta})}{\partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{\gamma, \delta=1}^d H_{\gamma\delta} \left[ \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} (\Psi_\delta \eta_\gamma) \right] + \begin{cases} \Psi_\alpha \eta_\beta & \text{si } \alpha = \beta \\ \Psi_\alpha \eta_\beta + \Psi_\beta \eta_\alpha & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}. \quad (5.103)$$

En développant on obtient

$$\frac{\partial \varphi_3(\vec{\psi}, \vec{\eta})}{\partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{\gamma, \delta=1}^d H_{\gamma\delta} \left[ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial H_{\alpha\beta}} \eta_\gamma + \Psi_\delta \frac{\partial \eta_\gamma}{\partial H_{\alpha\beta}} \right] + \begin{cases} \Psi_\alpha \eta_\beta & si \alpha = \beta \\ \Psi_\alpha \eta_\beta + \Psi_\beta \eta_\alpha & si \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (5.104)$$

ce qui implique

$$\frac{\partial \varphi_3(\vec{\psi}, \vec{\eta})}{\partial H_{\alpha\beta}} = H \left[ \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial H_{\alpha\beta}} \vec{\eta} + \vec{\psi} \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial H_{\alpha\beta}} \right] + \begin{cases} \Psi_\alpha \eta_\beta & si \alpha = \beta \\ \Psi_\alpha \eta_\beta + \Psi_\beta \eta_\alpha & si \alpha \neq \beta \end{cases}. \quad (5.105)$$

D'autre part on a

$$\frac{\partial \varphi_4(\vec{\psi})}{\partial H_{\alpha\beta}} = \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} H \vec{\psi} = \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} \left( \sum_{\delta=1}^d H_{\gamma\delta} \Psi_\delta \right)_{1 \leq \gamma \leq d} \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq d \quad (5.106)$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi_4(\vec{\psi})}{\partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{\delta=1}^d \left( H_{\gamma\delta} \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial H_{\alpha\beta}} \right)_{1 \leq \gamma \leq d} + \begin{cases} \Psi_\beta \vec{e}_\alpha & si \alpha = \beta \\ \Psi_\alpha \vec{e}_\beta + \Psi_\beta \vec{e}_\alpha & si \alpha \neq \beta \end{cases} \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq d \quad (5.107)$$

c'est à dire

$$\frac{\partial \varphi_4(\vec{\psi})}{\partial H_{\alpha\beta}} = H \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial H_{\alpha\beta}} + \begin{cases} \Psi_\beta \vec{e}_\alpha & si \alpha = \beta \\ \Psi_\alpha \vec{e}_\beta + \Psi_\beta \vec{e}_\alpha & si \alpha \neq \beta \end{cases} \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq d \quad (5.108)$$

La dernière relation de (5.99) est obtenue grâce à l'application de la première relation de (5.99).  $\square$ .

Afin de manipuler la quantité de base qui compose la fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$  on introduit  $L_{ij}^D$  définie par :

$$L_{ij}^D(H) = \left[ E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K) \right]^2 \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (5.109)$$

où  $E_{ij}^D(H)$  [resp.  $E_{ij}^D(K)$ ] est donné par (5.33) [resp. (5.30)]. La fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$  initiale peut se réécrire sous la forme

$$I_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^d L_{ij}^D(H). \quad (5.110)$$

On étudie alors la différentiabilité du terme générique  $L_{ij}^D$ .

**Proposition 5.9.9** *La fonctionnelle  $L_{ij}^D$  est différentiable et pour tout  $1 \leq i, j \leq m$  et  $1 \leq \alpha, \beta \leq d$  on a :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} &= 2 \left[ E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K) \right] * \\ &\quad \left[ \frac{1}{2} \int_{\omega} H \left( \nabla \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \nabla U_j + \nabla U_i \nabla \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \right) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{\omega} f_i \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \alpha = \beta \\ \frac{1}{2} \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \right] \end{aligned} \quad (5.111)$$

où  $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$  est la solution du problème (5.32).

Démonstration :

Pour tout  $1 \leq i, j \leq m$ , le terme  $E_{ij}^D(H)$  peut s'écrire comme la composé des opérateurs  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq 6}$ :

$$E_{ij}^D(H) = \frac{1}{2} \left[ \varphi_5 \circ \varphi_3 \left( \varphi_1^i(H), \varphi_1^j(H) \right) \right] - \varphi_6^i \circ \varphi_2^j(H) \quad (5.112)$$

Or d'après la proposition 5.9.8 on sait que chaque opérateur  $\varphi_j$  est différentiable, donc  $E_{ij}^D(H)$  est différentiable comme composé d'opérateurs différentiables. On a :

$$\frac{\partial L_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = 2 \left[ E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K) \right] * \frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}}. \quad (5.113)$$

Le calcul de la différentielle revient donc à connaître  $\frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}}$ . D'après (5.112) on a :

$$\frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} \left( \frac{1}{2} \left[ \varphi_5 \circ \varphi_3 \left( \varphi_1^i(H), \varphi_1^j(H) \right) \right] - \varphi_6^i \circ \varphi_2^j(H) \right) \quad (5.114)$$

soit encore

$$\frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} \left[ \varphi_5 \circ \varphi_3 \left( \varphi_1^i(H), \varphi_1^j(H) \right) \right] - \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} \left( \varphi_6^i \circ \varphi_2^j(H) \right). \quad (5.115)$$

Grâce aux résultats de la proposition 5.9.8 on a

$$\frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} \left( \varphi_6^i \circ \varphi_2^j(H) \right) = D\varphi_6^i \left( \frac{\partial \varphi_2^j(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) = D\varphi_6^i \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) = \int_{\omega} f_i \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) dx. \quad (5.116)$$

D'autre part on a

$$\frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} [\varphi_5 \circ \varphi_3 (\varphi_1^i (H), \varphi_1^j (H))] = D\varphi_5 \left( \frac{\partial \varphi_3 (\varphi_1^i (H), \varphi_1^j (H))}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \quad (5.117)$$

mais

$$D\varphi_5 \left( \frac{\partial \varphi_3 (\varphi_1^i (H), \varphi_1^j (H))}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) = \int_{\omega} \frac{\partial \varphi_3 (\varphi_1^i (H), \varphi_1^j (H))}{\partial H_{\alpha\beta}} dx \quad (5.118)$$

Or en utilisant la proposition 5.9.8 on a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_3 (\varphi_1^i (H), \varphi_1^j (H))}{\partial H_{\alpha\beta}} &= H \left[ \frac{\partial \varphi_1^i (H)}{\partial H_{\alpha\beta}} \varphi_1^j (H) + \varphi_1^i (H) \frac{\partial \varphi_1^j (H)}{\partial H_{\alpha\beta}} \right] + \\ &\begin{cases} (\varphi_1^i (H))_{\alpha} (\varphi_1^j (H))_{\beta} & si \alpha = \beta \\ (\varphi_1^i (H))_{\alpha} (\varphi_1^j (H))_{\beta} + (\varphi_1^i (H))_{\beta} (\varphi_1^j (H))_{\alpha} & si \alpha \neq \beta \end{cases} \end{aligned} \quad (5.119)$$

Ce qui implique finalement

$$\begin{aligned} D\varphi_5 \left( \frac{\partial \varphi_3 (\varphi_1^i (H), \varphi_1^j (H))}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) &= \int_{\omega} H \left( \nabla \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \nabla U_j + \nabla U_i \nabla \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \right) dx \\ &+ \begin{cases} \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx & si \alpha = \beta \\ \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx & si \alpha \neq \beta \end{cases} \end{aligned} \quad (5.120)$$

En récapitulant (5.115) (5.116) (5.117) et (5.120) on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{ij}^D (H)}{\partial H_{\alpha\beta}} &= \frac{1}{2} \int_{\omega} H \left( \nabla \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \nabla U_j + \nabla U_i \nabla \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \right) dx \\ &- \int_{\omega} f_i \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) dx \\ &+ \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx & si \alpha = \beta \\ \frac{1}{2} \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx & si \alpha \neq \beta \end{cases} \end{aligned} \quad (5.121)$$

d'où le résultat annoncé en utilisant (5.113)  $\square$ .

Le dernier résultat de la proposition 5.9.9 nous indique simplement que  $L_{ij}^D$  est différentiable. Toutefois la formule (5.111), qui décrit la différentielle, ne peut être calculée explicitement car elle dépend des variations de la solution  $U_i$  par rapport à  $H$ , que l'on ne connaît pas. Afin d'obtenir une différentielle explicite, ce qui est l'objet de la proposition qui suit, on introduit un problème adjoint qui permet de s'affranchir de la différentielle de  $U_i$  par rapport à  $H$ .

**Proposition 5.9.10** *La différentielle de la fonctionnelle  $L_{ij}^D$  définie par (5.109) peut encore s'écrire pour tout  $1 \leq i, j \leq m$  et  $1 \leq \alpha, \beta \leq d$  :*

$$\frac{\partial L_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\alpha}} = [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K)] * \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\beta}} dx - \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_{\beta}} dx \right) \quad \text{si } \alpha = \beta$$

$$\frac{\partial L_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K)] * \left( \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx + \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\alpha}} \right) dx - \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx \right) \quad \text{si } \alpha \neq \beta$$

(5.122)

où  $U_i$  est la solution du problème (5.32) et  $\Psi_i$  est la solution du problème "adjoint" défini par :

$$\begin{cases} \Psi_i \in H_0^1(\omega) \\ -\text{div}[H \nabla \Psi_i] = f_i \quad \text{dans } \omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.123)$$

Avant de démontrer la proposition 5.9.10 on établit deux résultats intermédiaires.

**Proposition 5.9.11** *Soit  $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$  la solution du problème (5.32) alors*

$$\frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \in H_0^1(\omega) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq \alpha, \beta \leq d. \end{matrix} \quad (5.124)$$

Pour démontrer la proposition 5.9.11, on a besoin de quelques estimations a priori qui font l'objet du prochain lemme.

**Lemme 5.9.12** *Soient une suite de matrice  $H_{\varepsilon} \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  et  $E_{ij}^D(H_{\varepsilon})$  définies par:*

$$E_{ij}^D(H_{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_{\omega} H_{\varepsilon}(x) \nabla p_i^{\varepsilon} \cdot \nabla p_j^{\varepsilon} dx - \int_{\omega} f_i p_j^{\varepsilon} dx \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (5.125)$$

où la fonction  $(p_i^{\varepsilon})_{1 \leq i \leq d}$  est la solution du problème

$$\begin{cases} -\text{div}[H_{\varepsilon}(x) \nabla p_i^{\varepsilon}] = f_i \quad \text{dans } \omega \\ p_i^{\varepsilon} = g_i \quad \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m \quad (5.126)$$

$$\text{avec } f_i \in L^2(\omega) \quad \text{et } g_i \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega) \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.127)$$

Alors on a les estimations suivantes

$$\left| E_{ij}^D(H_\varepsilon) \right| \leq C \quad \text{et} \quad \|p_i^\varepsilon\|_{1,\omega} \leq C \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (5.128)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$  et de la matrice  $H_\varepsilon$ .

Démonstration :

Soit  $\tilde{W}_i$  une fonction de  $H^1(\omega)$  telle que  $\gamma_0(\tilde{W}_i) = g_i$

On pose  $W_i^\varepsilon = p_i^\varepsilon - \tilde{W}_i$ . Le problème (5.126) se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} W_i^\varepsilon \in H_0^1(\omega) \\ -\operatorname{div} [H_\varepsilon(x) \nabla (W_i^\varepsilon + \tilde{W}_i)] = f_i \quad \text{dans } \omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.129)$$

Une formulation variationnelle du problème (5.129) est donnée par :

$$\begin{cases} W_i^\varepsilon \in H_0^1(\omega) \\ \int_\omega H_\varepsilon(x) \nabla (W_i^\varepsilon + \tilde{W}_i) \nabla v \, dx = \int_\omega f_i v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m \quad (5.130)$$

En prenant  $v = W_i^\varepsilon$  dans (5.130) on a :

$$\int_\omega H_\varepsilon(x) \nabla W_i^\varepsilon \cdot \nabla W_i^\varepsilon \, dx = - \int_\omega H_\varepsilon(x) \nabla \tilde{W}_i \cdot \nabla W_i^\varepsilon \, dx + \int_\omega f_i W_i^\varepsilon \, dx \quad (5.131)$$

Or  $H_\varepsilon \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ ,  $f_i \in L^2(\omega)$  et  $\tilde{W}_i \in H^1(\omega)$  d'où il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  et de  $H_\varepsilon$  telle que

$$\lambda_1 |W_i^\varepsilon|_{1,\omega}^2 \leq C |W_i^\varepsilon|_{1,\omega} + C \|W_i^\varepsilon\|_{0,\omega}. \quad (5.132)$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré on obtient:

$$\lambda_1 |W_i^\varepsilon|_{1,\omega}^2 \leq C |W_i^\varepsilon|_{1,\omega} \quad (5.133)$$

où la constante  $C$  est encore indépendante de  $\varepsilon$  et de  $H_\varepsilon$ . Donc

$$|W_i^\varepsilon|_{1,\omega} \leq C. \quad (5.134)$$

On obtient alors que

$$\|W_i^\varepsilon\|_{1,\omega} \leq C. \quad (5.135)$$

D'autre part

$$\|p_i^\varepsilon\|_{1,\omega} \leq \|W_i^\varepsilon\|_{1,\omega} + \|\tilde{W}_i\|_{1,\omega} \quad (5.136)$$

et ceci pour toute fonction  $\tilde{W}_i \in H^1(\omega)$  telle que  $\gamma_0(\tilde{W}_i) = g_i$ . D'où

$$\|p_i^\varepsilon\|_{1,\omega} \leq \|W_i^\varepsilon\|_{1,\omega} + \|g_i\|_{\frac{1}{2},\partial\omega} \quad (5.137)$$

Par conséquent grâce à (5.135) on a :

$$\|p_i^\varepsilon\|_{1,\omega} \leq C + \|g_i\|_{\frac{1}{2},\partial\omega}. \quad (5.138)$$

Ce qui implique

$$|E_{ij}^D(H_\varepsilon)| \leq C \quad \square. \quad (5.139)$$

On démontre maintenant la proposition 5.9.11.

Démonstration :

Pour  $\varepsilon > 0$ , on introduit la matrice  $M^\varepsilon$  suivante :

$$(M_\varepsilon)_{\gamma\eta} = \begin{cases} \varepsilon & \text{pour } \begin{cases} \gamma = \alpha \\ \eta = \beta \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \gamma = \beta \\ \eta = \alpha \end{cases} & \text{si } \alpha \neq \beta \\ \varepsilon & \text{pour } \gamma = \eta = \alpha & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 1 \leq \gamma, \eta \leq d \quad (5.140)$$

On note la matrice  $H_\varepsilon = H + M_\varepsilon$ ,  $M_\varepsilon$  étant définie de manière à ce que  $H_\varepsilon \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ .

On introduit les problèmes :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[H_\varepsilon \nabla U_i^\varepsilon] = f_i \text{ dans } \omega \\ U_i^\varepsilon = g_i \text{ sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.141)$$

Or  $U_i$  est la solution du problème (5.32) ce qui permet en utilisant (5.141) d'avoir :

$$\operatorname{div}[H_\varepsilon \nabla U_i^\varepsilon - H \nabla U_i] = 0 \quad (5.142)$$

On obtient alors :

$$\operatorname{div}\left[H_\varepsilon \nabla \left(\frac{U_i^\varepsilon - U_i}{\varepsilon}\right)\right] = -\operatorname{div}\left[\left(\frac{H_\varepsilon - H}{\varepsilon}\right) \nabla U_i\right] \quad (5.143)$$

Supposons que l'on soit dans le cas où  $\alpha \neq \beta$  alors (5.143) se réécrit de la manière suivante:

$$\operatorname{div}\left[H_\varepsilon \nabla \left(\frac{U_i^\varepsilon - U_i}{\varepsilon}\right)\right] = -\operatorname{div}\left[\frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon & \vdots \\ \vdots & \varepsilon & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \nabla U_i\right] \quad (5.144)$$

d'où :

$$\int_\omega H_\varepsilon \nabla \left(\frac{U_i^\varepsilon - U_i}{\varepsilon}\right) \nabla v \, dx = \int_\omega \nabla \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} \\ 0 \\ \frac{\partial U_i}{\partial x_\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \quad (5.145)$$

En prenant  $v = \frac{U_i^\varepsilon - U_i}{\varepsilon}$  on obtient après majorations :

$$\left\| \nabla \left( \frac{U_i^\varepsilon - U_i}{\varepsilon} \right) \right\|_{0,\omega} \leq \frac{1}{\lambda_1} \left( \int_\omega \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_\beta} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.146)$$

Par conséquent  $\frac{U_i^\varepsilon - U_i}{\varepsilon}$  demeure dans un borné fixe de  $H^1(\omega)$ . D'après la proposition 5.9.7 on sait que les fonctions  $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$  sont différentiables par rapport à  $H$  et donc  $\frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}}$  existe. Cela implique que

$$\frac{U_i^\varepsilon - U_i}{\varepsilon} \xrightarrow{H^1(\omega)} \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \quad \text{faible} \quad (5.147)$$

Comme l'application trace  $\gamma_0$  définie de  $H^1(\omega)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$  est linéaire et continue on obtient :

$$\gamma_0 \left( \frac{U_i^\varepsilon - U_i}{\varepsilon} \right) \xrightarrow{H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)} \gamma_0 \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \quad \text{faible.} \quad (5.148)$$

Par linéarité on a :

$$\frac{\gamma_0(U_i^\varepsilon) - \gamma_0(U_i)}{\varepsilon} \xrightarrow{H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)} \gamma_0 \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \quad \text{faible} \quad (5.149)$$

or  $\gamma_0(U_i^\varepsilon) = g_i$  et  $\gamma_0(U_i) = g_i$ , donc :

$$\frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \in H_0^1(\omega) \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq \alpha, \beta \leq d \end{array} \quad \square. \quad (5.150)$$

On dispose alors maintenant de tout les éléments nécessaires à la démonstration de la proposition 5.9.10.

Démonstration :

Une formulation variationnelle du problème (5.32) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} U_i \in H^1(\omega) \\ \int_\omega H \nabla U_i \cdot \nabla v \, dx = \int_\omega f_i v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \quad 1 \leq i \leq m. \\ U_i = g_i \quad \text{sur } \partial\omega \end{array} \right. \quad (5.151)$$

En choisissant  $v = \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}}$ , ce qui est un choix loisible d'après la proposition 5.9.11, on obtient :

$$\int_\omega H \nabla U_i \cdot \nabla \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) dx = \int_\omega f_i \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} dx \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (5.152)$$

d'où en utilisant la proposition 5.9.9 on obtient pour  $1 \leq i, j \leq m$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = & 2 \left[ E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K) \right] * \\ & \left[ \frac{1}{2} \int_{\omega} H \left( \nabla \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \nabla U_j - \nabla U_i \nabla \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \right) dx \right. \\ & \left. + \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \alpha = \beta \\ \frac{1}{2} \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \right] \end{aligned} \quad (5.153)$$

En dérivant (5.151) par rapport à  $(H_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq d}$  on a :

$$\int_{\omega} H \nabla \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \cdot \nabla v \, dx = \begin{cases} - \int_{\omega} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial v}{\partial x_{\beta}} \, dx & \text{si } \alpha = \beta \\ - \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial v}{\partial x_{\beta}} \, dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} \, dx \right) & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (5.154)$$

pour tout  $v \in H_0^1(\omega)$ . Cette relation est acquise en prenant  $\varphi_1^i(H_i) \equiv v$  dans (5.117).

Une formulation variationnelle du problème (5.123) est donnée par :

$$\begin{cases} \Psi_i \in H_0^1(\omega) \\ \int_{\omega} H \nabla \Psi_i \cdot \nabla v \, dx = \int_{\omega} H \nabla U_i \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m \quad (5.155)$$

En prenant  $v = \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}}$  dans (5.155) on a :

$$\int_{\omega} H \nabla \Psi_i \cdot \nabla \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \, dx = \int_{\omega} H \nabla U_i \cdot \nabla \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \, dx \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (5.156)$$

En choisissant  $v = \Psi_i$  dans (5.154) il vient

$$\int_{\omega} H \nabla \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \cdot \nabla \Psi_i \, dx = \begin{cases} - \int_{\omega} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\beta}} \, dx & \text{si } \alpha = \beta \\ - \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\alpha}} \right) \, dx & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (5.157)$$

pout tout  $1 \leq i, j \leq m$ .

En utilisant (5.153) (5.156) et (5.157) on obtient

$$\frac{\partial L_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \left[ E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K) \right] * \begin{cases} \left[ \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\beta}} dx - \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_{\beta}} dx \right] & si \alpha = \beta \\ \left[ \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx + \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\alpha}} \right) dx - \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx \right] & si \alpha \neq \beta \end{cases} \quad \square. \quad (5.158)$$

On démontre maintenant la proposition initiale 5.9.6 grâce aux divers résultats intermédiaires démontrés précédemment.

Démonstration :

D'après (5.41), pout tout  $1 \leq \alpha, \beta \leq d$ , on a

$$\frac{\partial I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} \left[ \sum_{i,j=1}^m \left[ E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K) \right]^2 \right] \quad (5.159)$$

En utilisant la proposition 5.9.9 on sait que  $L_{ij}^D(H) = \left[ E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K) \right]^2$  est différentiable  $1 \leq i, j \leq m$ , d'où

$$\frac{\partial I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} \left[ L_{ij}^D(H) \right] \quad (5.160)$$

Grâce à la proposition 5.9.10 on obtient finalement :

$$\frac{\partial I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{\alpha\beta}(x)} = \sum_{i,j=1}^m \left[ E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K) \right] * \begin{cases} \left[ \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\beta}} dx - \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_{\beta}} dx \right) \right] & si \alpha = \beta \\ \left[ \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx + \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_{\alpha}} \right) dx - \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx \right] & si \alpha \neq \beta \end{cases}$$

ce qui est le résultat recherché  $\square$ .

## Conditions aux limites mêlées

Les conditions aux limites sont d'une importance fondamentale dans les problèmes de contrôle optimal posés précédemment. C'est pourquoi le calcul du gradient des différentes fonctionnelles dépend des conditions aux limites prise en compte. On exprime dans la proposition qui suit la différentiabilité de la fonctionnelle  $I_{\mathcal{M}}$  pour des conditions aux limites mêlées.

**Proposition 5.9.13** *La fonctionnelle  $I_{\mathcal{M}}$  définie par (5.42) est différentiable et pour tout  $1 \leq \alpha, \beta \leq d$ , on a :*

$$\frac{\partial I_{\mathcal{M}}(H)}{\partial H_{\alpha\alpha}} = \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^M(H) - E_{ij}^M(K)] * \left( \begin{array}{l} \int_{\omega} \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_{\beta}} dx - \\ \int_{\omega} \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Theta_j}{\partial x_{\beta}} dx \end{array} \right) \quad \text{si } \alpha = \beta$$

$$\frac{\partial I_{\mathcal{M}}(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^M(H) - E_{ij}^M(K)] * \left( \begin{array}{l} \int_{\omega} \left( \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx + \\ \int_{\omega} \left( \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_{\alpha}} \right) dx - \\ \int_{\omega} \left( \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Theta_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Theta_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx \end{array} \right) \quad \text{si } \alpha \neq \beta$$

(5.161)

où  $Z_i$  est la solution du problème (5.38) et  $\Theta_i$  est la solution du problème "adjoint" donné par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Theta_i \in H_{0,\Gamma_D}^1(\omega) & \\ -\text{div}[H \nabla \Theta_i] = f_i \quad \text{dans } \omega & 1 \leq i \leq m. \\ H \nabla \Theta_i \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N^i & \end{array} \right. \quad (5.162)$$

Démonstration :

On suit le même cheminement que pour la démonstration de la proposition 5.9.6 en utilisant les résultats des trois propositions données ci-dessous  $\square$ .

Afin d'étudier un terme générique de  $I_{\mathcal{M}}$  on introduit la fonctionnelle  $L_{ij}^M$  donnée par :

$$L_{ij}^M(H) = [E_{ij}^M(H) - E_{ij}^M(K)]^2 \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (5.163)$$

où  $E_{ij}^M(H)$  [resp.  $E_{ij}^M(K)$ ] est définie par (5.39) [resp. (5.36)].

**Proposition 5.9.14** La fonctionnelle  $L_{ij}^M$  est différentiable et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{ij}^M(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = & 2 \left[ E_{ij}^M(H) - E_{ij}^M(K) \right] * \\ & \left[ \frac{1}{2} \int_{\omega} H \left[ \nabla \left( \frac{\partial Z_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \nabla Z_j + \nabla Z_i \nabla \left( \frac{\partial Z_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \right] dx \right. \\ & - \int_{\omega} f_i \left( \frac{\partial Z_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) dx - \int_{\Gamma_N^i} g_i^N \left( \frac{\partial Z_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) d\sigma \\ & \left. + \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\omega} \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \alpha = \beta \\ \frac{1}{2} \int_{\omega} \left( \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \right] \end{aligned} \quad (5.164)$$

pour tout  $1 \leq i, j \leq m$  et  $1 \leq \alpha, \beta \leq d$ ,  $(Z_i)_{1 \leq i \leq m}$  étant la solution du problème (5.38).

Démonstration :

Identique à la démonstration de la proposition 5.9.9  $\square$ .

Afin d'éliminer le terme  $\left( \frac{\partial Z_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right)$  de la proposition 5.9.14 on établit le résultat suivant .

**Proposition 5.9.15** Le gradient de la fonctionnelle  $L_{ij}^M$  peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{ij}^M(H)}{\partial H_{\alpha\alpha}} = & \left[ E_{ij}^M(H) - E_{ij}^M(K) \right] * \left( \int_{\omega} \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_{\beta}} dx - \right) \quad \text{si } \alpha = \beta \\ \\ \frac{\partial L_{ij}^M(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = & \left[ E_{ij}^M(H) - E_{ij}^M(K) \right] * \left( \int_{\omega} \left( \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx + \right. \\ & \left. \int_{\omega} \left( \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_{\alpha}} \right) dx - \right. \\ & \left. \int_{\omega} \left( \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \Theta_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial \Theta_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx \right) \quad \text{si } \alpha \neq \beta \end{aligned} \quad (5.165)$$

où  $Z_i$  est la solution du problème (5.38) et  $\Theta_i$  est la solution du problème adjoint ci-dessous :

$$\begin{cases} \Theta_i \in H_{0, \Gamma_D}^1(\omega) \\ -\text{div} [H \nabla \Theta_i] = f_i \quad \text{dans } \omega \\ H \nabla \Theta_i \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N^i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.166)$$

Démonstration :

On suit la même démarche que la démonstration de la proposition 5.9.10, en utilisant la proposition 5.9.16  $\square$ .

Le résultat suivant est l'analogue de la proposition 5.9.11 mais appliqué à des conditions aux limites mêlées.

**Proposition 5.9.16** Soit  $(Z_i)_{1 \leq i \leq m}$  la solution du problème (5.38) alors

$$\frac{\partial Z_i}{\partial H_{\alpha\beta}} = 0 \text{ sur } \Gamma_D^i \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq \alpha, \beta \leq d. \end{array} \quad (5.167)$$

Démonstration :

Identique à la démonstration de la proposition 5.9.11  $\square$ .

**Remarque 5.9.17** Si les seconds membres  $f_i$  sont tous nuls pour tout  $1 \leq i \leq m$ , alors la différentielle de  $I_D$  et  $I_M$  se simplifie et on n'a plus besoin du problème adjoint. Ceci est d'une grande importance car dans les applications numériques de l'ingénierie pétrolière le second membre est généralement nul. Plus précisément on a le résultat suivant :

**Proposition 5.9.18** On suppose que  $f_i = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq m$ . Alors la fonctionnelle  $I_D$  définie par (5.41) est différentiable et pour tout  $1 \leq \alpha, \beta \leq d$ , on a :

$$\frac{\partial I_D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K)] * \begin{cases} \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \alpha = \beta \\ \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (5.168)$$

Démonstration :

Dans la démonstration de la proposition 5.9.10 on a directement que :

$$\int_{\omega} H \nabla U_i \cdot \nabla \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) dx = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq m \quad (5.169)$$

grâce à la relation (5.152) et à l'hypothèse que  $f_i = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq m$ .

En utilisant alors (5.111) et (5.169) on obtient  $\forall 1 \leq i, j \leq m$  :

$$\frac{\partial L_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = 2 [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K)] * \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \alpha = \beta \\ \frac{1}{2} \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (5.170)$$

On termine alors la démonstration de la même manière que la proposition 5.9.6  $\square$ .

**Proposition 5.9.19** On suppose que  $f_i = 0$  et  $g_i^N = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq m$ . Alors la fonctionnelle  $I_M$  définie par (5.42) est différentiable et on a pour tout  $1 \leq \alpha, \beta \leq d$  :

$$\frac{\partial I_M(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^M(H) - E_{ij}^M(K)] * \begin{cases} \int_{\omega} \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \alpha = \beta \\ \int_{\omega} \left( \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial Z_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (5.171)$$

Démonstration :

Identique à la démonstration de la proposition 5.9.18  $\square$ .

## 5.10 Etude de la fonctionnelle basée sur la vitesse

On étudie dans ce paragraphe les propriétés de continuité et de différentiabilité des fonctionnelles  $J_{\mathcal{D}}$  et  $J_{\mathcal{M}}$ , définies par (5.47) et (5.48) et qui sont basées sur la moyenne du vecteur vitesse de filtration. En suivant le même plan que pour l'étude des fonctionnelles énergétiques on établit les résultats ci-après.

### 5.10.1 Continuité

#### Conditions aux limites de Dirichlet

**Proposition 5.10.1** *La fonctionnelle  $J_{\mathcal{D}}$  définie par (5.47) est continue sur  $(M(h, a, \omega), |||\cdot|||)$ .*

Démonstration :

Soient  $(H_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une suite de matrices appartenant à  $M(h, a, \omega)$  et  $H_0 \in M(h, a, \omega)$ . On suppose que  $(H_\varepsilon)$  converge vers  $H_0$  pour la norme  $|||\cdot|||$ .

D'après la proposition 1.5.4 on a que  $H_\varepsilon \xrightarrow{G} H_0$ . Ainsi en utilisant la propriété ii) de la proposition 5.9.2 on obtient que  $\forall \vec{\mathbf{q}} \in (L^2(\omega))^d$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega} H_\varepsilon \nabla p_i^\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{q}} \, dx = \int_{\omega} H_0 \nabla p_i^0 \cdot \vec{\mathbf{q}} \, dx \quad 1 \leq i \leq m \quad (5.172)$$

$$(PB_\varepsilon) \begin{cases} -\operatorname{div} [H_\varepsilon \nabla p_i^\varepsilon] = f_i & \text{dans } \omega \\ p_i^\varepsilon = g_i & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad \text{et} \quad (PB_0) \begin{cases} -\operatorname{div} [H_0 \nabla p_i^0] = f_i & \text{dans } \omega \\ p_i^0 = g_i & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (5.173)$$

En prenant  $\vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{e}}_j$  dans (5.172) on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\omega} H_\varepsilon \nabla p_i^\varepsilon \, dx \right)_j = \left( \int_{\omega} H_0 \nabla p_i^0 \, dx \right)_j \quad 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq d \quad (5.174)$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \vec{\mathbf{V}}_i^D(H_\varepsilon) \right)_j = \left( \vec{\mathbf{V}}_i^D(H_0) \right)_j \quad 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq d. \quad (5.175)$$

En utilisant (5.175) on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \vec{\mathbf{V}}_i^D(H_\varepsilon) - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \right|^2 = \left| \vec{\mathbf{V}}_i^D(H_0) - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \right|^2 \quad 1 \leq i \leq m \quad (5.176)$$

ce qui implique

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \left| \vec{\mathbf{V}}_i^D(H_\varepsilon) - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \right|^2 = \sum_{i=1}^m \left| \vec{\mathbf{V}}_i^D(H_0) - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \right|^2 \quad (5.177)$$

c'est à dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{\mathcal{D}}(H_\varepsilon) = J_{\mathcal{D}}(H_0). \quad (5.178)$$

Par conséquent la fonctionnelle  $J_{\mathcal{D}}$  est continue  $\square$ .

## Conditions aux limites mêlées

**Proposition 5.10.2** *La fonctionnelle  $J_{\mathcal{M}}$  définie par (5.48) est continue sur  $(M(h, a, \omega), \|\cdot\|)$ .*

Démonstration :

La démonstration est identique à la démonstration de la proposition 5.10.1, en utilisant les résultats de la proposition 5.9.4  $\square$ .

### 5.10.2 Existence d'un minimum

L'existence d'un minimum aux problèmes de minimisation (5.49) et (5.50) est alors immédiate.

**Proposition 5.10.3** *Le problème de minimisation (5.49) [resp. (5.50)] admet au moins un minimum.*

Démonstration :

La fonctionnelle  $J_{\mathcal{D}}$  [resp.  $J_{\mathcal{M}}$ ] est continue sur le fermé borné  $M(h, a, \omega)$  grâce à la proposition 5.10.1 [resp. 5.10.2], donc elle admet au moins un minimum sur  $M(h, a, \omega)$   $\square$ .

### 5.10.3 Différentiabilité

En utilisant la même démarche que lors de l'étude de la fonctionnelle énergétique, on montre que les fonctionnelles  $J_{\mathcal{D}}$  et  $J_{\mathcal{M}}$  sont différentiables.

## Conditions aux limites de Dirichlet

**Proposition 5.10.4** *La fonctionnelle  $J_{\mathcal{D}}$  définie par (5.47) est différentiable et on a :*

$$\frac{\partial J_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{2}{|\omega|} \sum_{\eta=1}^d \left[ (\vec{\mathbf{V}}_i^D(H))_{\eta} - (\vec{\mathbf{V}}_i^D(K))_{\eta} \right] * \begin{cases} \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \alpha = \beta = \eta \\ \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \alpha \end{cases} \\ \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \beta \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right] \quad (5.179)$$

où  $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$  est la solution du problème (5.32).

La démonstration de la proposition 5.10.4 s'effectue en plusieurs étapes présentées ci-après. On introduit la fonctionnelle  $F_i^D$  définie par :

$$F_i^D(H) = \left| \vec{\mathbf{V}}_i^D(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \right|^2 \quad (5.180)$$

où  $\vec{\mathbf{V}}_i^D(H)$  [resp.  $\vec{\mathbf{V}}_i^D(K)$ ] est donné par (5.34) [resp. (5.31)].

La première étape consiste alors à étudier le terme générique  $F_i^D$  de la fonctionnelle  $J_{\mathcal{D}}$ .

**Proposition 5.10.5** *La fonctionnelle  $F_i^D$  est différentiable et  $\forall 1 \leq i \leq m$ , on a :*

$$\frac{\partial F_i^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \frac{2}{|\omega|} \sum_{\eta=1}^d \left[ \left( \vec{\mathbf{V}}_i^D(H) \right)_\eta - \left( \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \right)_\eta \right] * \begin{cases} \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_\beta} dx & \text{si } \alpha = \beta = \eta \\ \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_\beta} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \alpha \end{cases} \\ \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \beta \end{cases} \\ 0 & \text{si } \eta \neq \alpha, \beta \end{cases} \quad (5.181)$$

Démonstration :

Le terme  $\vec{\mathbf{V}}_i^D(H)$  peut s'écrire comme la composée des opérateurs  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq 7}$  :

$$\vec{\mathbf{V}}_i^D(H) = \frac{1}{|\omega|} \left[ \varphi_5 \circ \varphi_4 \circ \varphi_1^i(H) \right] \quad (5.182)$$

D'après la proposition 5.9.8 on sait que chaque opérateur  $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq 7}$  est différentiable, donc  $\vec{\mathbf{V}}_i^D(H)$  est différentiable comme composé d'opérateurs différentiables. On a :

$$\frac{\partial F_i^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = 2 \sum_{\eta=1}^d \left[ \left( \vec{\mathbf{V}}_i^D(H) \right)_\eta - \left( \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \right)_\eta \right] \frac{\partial \left( \vec{\mathbf{V}}_i^D(H) \right)_\eta}{\partial H_{\alpha\beta}}. \quad (5.183)$$

Le calcul de la différentielle revient donc à connaître  $\frac{\partial \left( \vec{\mathbf{V}}_i^D(H) \right)_\eta}{\partial H_{\alpha\beta}}$ . De (5.182) on peut écrire

$$\frac{\partial \left( \vec{\mathbf{V}}_i^D(H) \right)_\eta}{\partial H_{\alpha\beta}} = \frac{1}{|\omega|} \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} \left( \varphi_5 \circ \varphi_4 \circ \varphi_1^i(H) \right)_\eta \quad 1 \leq \eta \leq d. \quad (5.184)$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} \left( \varphi_5 \circ \varphi_4 \circ \varphi_1^i(H) \right)_\eta = D\varphi_5 \left( \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} \left( \varphi_4 \circ \varphi_1^i(H) \right)_\eta \right) \quad 1 \leq \eta \leq d \quad (5.185)$$

mais (5.99) implique

$$D\varphi_5 \left( \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} (\varphi_4 \circ \varphi_1^i(H)) \right)_\eta = \int_\omega \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} (\varphi_4 \circ \varphi_1^i(H))_\eta dx \quad 1 \leq \eta \leq d. \quad (5.186)$$

En utilisant la proposition 5.9.8 on a pour  $1 \leq \eta \leq d$

$$\int_\omega \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} (\varphi_4 \circ \varphi_1^i(H))_\eta dx = \int_\omega \left( H \frac{\partial \varphi_1^i(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} \right)_\eta dx + \begin{cases} \int_\omega (\varphi_1^i(H))_\beta dx & \text{si } \alpha = \beta = \eta \\ \int_\omega (\varphi_1^i(H))_\beta dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \alpha \end{cases} \\ \int_\omega (\varphi_1^i(H))_\alpha dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \beta \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.187)$$

ce qui devient

$$\int_\omega \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} (\varphi_4 \circ \varphi_1^i(H))_\eta dx = \int_\omega \left( H \frac{\partial \varphi_1^i(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} \right)_\eta dx + \begin{cases} \int_\omega \frac{\partial U_i}{\partial x_\beta} dx & \text{si } \alpha = \beta = \eta \\ \int_\omega \frac{\partial U_i}{\partial x_\beta} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \alpha \end{cases} \\ \int_\omega \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \beta \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.188)$$

Finalement on obtient que

$$\frac{\partial F_i^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \frac{2}{|\omega|} \sum_{\eta=1}^d \left[ (\vec{\nabla}_i^D(H))_\eta - (\vec{\nabla}_i^D(K))_\eta \right]^* \left[ \int_\omega \left( H \nabla \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \right)_\eta dx + \begin{cases} \int_\omega \frac{\partial U_i}{\partial x_\beta} dx & \text{si } \alpha = \beta = \eta \\ \int_\omega \frac{\partial U_i}{\partial x_\beta} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \alpha \end{cases} \\ \int_\omega \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \beta \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right]. \quad (5.189)$$

Etant donné que le tenseur  $H \in M(h, a, \omega)$  est constant sur  $\omega$  on a que  $\text{div}(H\vec{e}_\eta) = 0$ . A l'aide d'une formule de Green on a alors

$$\int_\omega H\vec{e}_\eta \nabla v dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \quad (5.190)$$

En choisissant  $v = \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}}$  dans (5.190) on obtient que

$$\int_{\omega} \left( H \nabla \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) \right)_{\eta} dx = 0 \quad (5.191)$$

Finalement grâce à (5.189) et (5.191) on trouve (5.181)  $\square$ .

On démontre maintenant la proposition 5.10.4.

Démonstration :

D'après (5.47) on a

$$\frac{\partial J_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} \left[ \sum_{i=1}^m |\vec{\mathbf{V}}_i^D(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K)|^2 \right]. \quad (5.192)$$

En utilisant la proposition 5.10.5 on sait que  $|\vec{\mathbf{V}}_i^D(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K)|^2$  est différentiable d'où on a

$$\frac{\partial J_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial H_{\alpha\beta}} [F_i^D(H)] \quad (5.193)$$

et on obtient (5.179)  $\square$ .

**Remarque 5.10.6** *Contrairement à la fonctionnelle énergétique le calcul de la différentielle de  $J_{\mathcal{D}}$  dans le cas général ne nécessite pas la résolution d'un problème adjoint.*

### Conditions aux limites mêlées

Concernant les conditions aux limites mêlées on dispose d'un résultat analogue à la proposition 5.10.4 pour la différentiabilité.

**Proposition 5.10.7** *La fonctionnelle  $J_{\mathcal{M}}$  définie par (5.48) est différentiable et pour tout  $1 \leq \alpha, \beta \leq d$  on a :*

$$\frac{\partial J_{\mathcal{M}}(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{2}{|\omega|} \sum_{\eta=1}^d \left[ (\vec{\mathbf{V}}_i^M(H))_{\eta} - (\vec{\mathbf{V}}_i^M(K))_{\eta} \right] * \begin{cases} \int_{\omega} \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \alpha = \beta = \eta \\ \int_{\omega} \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \alpha \end{cases} \\ \int_{\omega} \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \beta \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right] \quad (5.194)$$

où  $Z_i$  est la solution du problème (5.38).

On suit les mêmes étapes de la démonstration de la proposition 5.10.4 en utilisant la proposition ci-dessous.

**Proposition 5.10.8** *Soit la fonctionnelle  $F_i^M$  définie par :*

$$F_i^M(H) = \left| \vec{\mathbf{V}}_i^M(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^M(K) \right|^2 \quad 1 \leq i \leq m \quad (5.195)$$

où  $\vec{\mathbf{V}}_i^M(H)$  [resp.  $\vec{\mathbf{V}}_i^M(K)$ ] est définie par (5.34) [resp. (5.31)]. Alors  $F_i^M$  est différentiable et pour tout  $1 \leq i \leq d$  on a :

$$\frac{\partial F_i^M(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \frac{2}{|\omega|} \sum_{\eta=1}^d \left[ (\vec{\mathbf{V}}_i^M(H))_{\eta} - (\vec{\mathbf{V}}_i^M(K))_{\eta} \right] * \begin{cases} \int_{\omega} \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \alpha = \beta = \eta \\ \int_{\omega} \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \alpha \end{cases} \\ \int_{\omega} \frac{\partial Z_i}{\partial x_{\alpha}} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \eta = \beta \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.196)$$

Démonstration :

Identique à la démonstration de la proposition 5.10.5.

## 5.11 Algorithme de calcul

On énonce maintenant l'algorithme permettant de calculer dans un domaine quelconque  $\omega$  un tenseur de perméabilité  $K^* \in M(h, a, \omega)$  équivalent à  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  en prenant en compte des conditions aux limites quelconques pour les problèmes locaux. L'algorithme de calcul se décompose en plusieurs étapes que l'on présente pour le problème (5.45) qui fait intervenir la fonctionnelle énergétique.

### 5.11.1 Fonctionnelle énergétique

Pour des conditions aux limites de Dirichlet on résout d'abord les problèmes locaux (5.29). Les moyennes arithmétique et harmonique de  $K$  sont déterminées afin de fixer les contraintes  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{a}$  de l'ensemble des tenseurs admissibles  $M(h, a, \omega)$ . Grâce aux solutions des problèmes (5.29) on calcule alors les quantités  $E_{ij}^D(K)$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ . Dans un deuxième temps on initialise un tenseur constant  $H_0 \in M(h, a, \omega)$  par un tenseur compris entre les contraintes précédemment calculées. On résout ensuite les problèmes (5.32) avec le tenseur constant initialisé à  $H_0$  et on calcule les quantités  $E_{ij}^D(H_0)$ ,  $1 \leq$

$i, j \leq m$ . La troisième étape consiste à calculer la valeur de la fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}(H_0) = \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H_0) - E_{ij}^D(K)]^2$  ainsi que son gradient avec la formule (5.89). Si  $I_{\mathcal{D}}(H_0) = 0$  alors  $H_0$  est un tenseur équivalent à  $K$ , sinon une nouvelle direction de descente est calculée. Ainsi on obtient un nouvel itéré  $H_1$ , à partir duquel on résout à nouveau les problèmes (5.32). On effectue l'étape 3 autant de fois que nécessaire jusqu'à obtenir un minimum au problème (5.45).

L'algorithme synthétique de calcul se présente sous la forme suivante :

- 1 - Résolution des problèmes (5.29)
- 2 - Calculs de  $E_{ij}^D(K)$   $1 \leq i, j \leq m$
- 3 - Initialisation des contraintes
- 4 - Initialisation de  $H_0$
- 5 - Faire jusqu'à trouver le minimum du problème (5.45)
  - a) Résolution des problèmes (5.32)
  - b) Calculs de  $E_{ij}^D(H_n)$   $1 \leq i, j \leq m$
  - c) Calculs de  $I_{\mathcal{D}}(H_n)$  et de son gradient
  - d) Calcul de la direction de descente
- 6 -  $K^* = H_n$

Pour des conditions aux limites mêlées l'algorithme est identique.

**Remarque 5.11.1** *La possibilité de chercher le tenseur  $H$  dans l'espace  $M(h, a, \omega)$  laisse beaucoup de souplesse. On peut en particulier rechercher un tenseur diagonal, en imposant aux termes extradiagonaux du tenseur  $H$  d'être nuls. Ceci peut être un avantage de la méthode car certains simulateurs industriels actuels ne prennent pas en compte des tenseurs plein de perméabilité.*

### 5.11.2 Fonctionnelle basée sur la vitesse

L'algorithme de calcul pour une fonctionnelle basée sur la vitesse est pratiquement le même que pour la méthode avec la fonctionnelle énergétique. Dans l'algorithme précédent il suffit de remplacer les quantités

$$\begin{array}{llll}
E_{ij}^D(K) & 1 \leq i, j \leq m & \text{par} & \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) & 1 \leq i \leq m \\
E_{ij}^D(H_n) & 1 \leq i, j \leq m & \text{par} & \vec{\mathbf{V}}_i^D(H_n) & 1 \leq i \leq m \\
\text{et } I_{\mathcal{D}}(H_n) & & \text{par} & J_{\mathcal{D}}(H_n) & 
\end{array}$$

Pour le calcul du gradient de la fonctionnelle  $J_{\mathcal{D}}(H_n)$  on utilise la formule (5.179).

Pour des conditions aux limites mêlées l'algorithme est identique en choisissant les fonctionnelles, le gradient ainsi que les problèmes aux limites correspondant, aux cas des conditions aux limites mêlées, énoncées précédemment.

# Chapitre 6

## Propriétés du tenseur équivalent obtenu avec des conditions aux limites quelconques

Dans ce chapitre on présente certaines propriétés des méthodes de mise à l'échelle des perméabilités absolues énoncées au chapitre précédent. On applique d'abord les méthodes du chapitre 5 pour les conditions aux limites particulières utilisées dans les méthodes numériques classiques. On retrouve ainsi les résultats de la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires, confinées, périodiques ainsi que les résultats de l'homogénéisation stochastique. De plus, on établit un lien entre la méthode de minimisation de l'erreur du flux et la méthode basée sur l'égalité des flux pour des conditions aux limites périodiques. Ensuite, on examine différentes propriétés de la méthode de mise à l'échelle introduite au chapitre 5. On montre en particulier le résultat important de stabilité pour la G-convergence. Sous certaines conditions on montre par ailleurs que la solution des problèmes d'optimisation faisant intervenir la fonctionnelle énergétique est unique. Enfin des estimations d'erreurs ainsi que la convergence du tenseur équivalent sont également démontrés.

### 6.1 Introduction

Les différentes méthodes introduites dans le chapitre précédent fournissent un tenseur équivalent quelque soient les conditions aux limites générales appliquées aux problèmes locaux. Il est donc naturel de se poser la question : quel tenseur obtient-on avec ces méthodes pour les conditions aux limites classiques ? La première partie de ce chapitre est entièrement dédié à ce problème [85]. Par ailleurs le tenseur obtenu avec les méthodes

du chapitre 5 dépend des conditions aux limites appliquées sur les bords du domaine  $\omega$ . On étudie alors l'influence de ces conditions aux limites lorsque la taille du domaine  $\omega$  devient grande par rapport à la taille des hétérogénéités. L'étude de la stabilité de la méthode pour la G-convergence permettra de répondre à ce problème. Inversement, on peut également examiner le comportement du tenseur équivalent lorsque la taille du domaine tend vers zéro en étudiant la convergence de l'approximation du tenseur équivalent. Dans le chapitre précédent nous avons montré que les différents problèmes d'optimisation servant à définir le tenseur équivalent possèdent au moins une solution. Nous terminons alors ce chapitre en étudiant la question de l'unicité de la solution.

## 6.2 Notations

Soit  $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mu)$  un espace probabilisé où  $\mathcal{R}$  désigne l'espace des réalisations,  $\mathcal{F}$  une tribu et  $\mu$  une probabilité. Dans le prochain paragraphe le cadre de l'homogénéisation stochastique sera abordé. Pour cela il s'avère utile d'introduire les espaces notés par abus de langage  $L^2(\mathcal{R}) \equiv L^2(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mu)$  et  $H^1(\mathcal{R}) \equiv H^1(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mu)$ . On définit alors les espaces des fonctions dérivant d'un potentiel, ainsi que des solénoïdes :

$$L_{sol}^2(\mathcal{R}) = \left\{ u \in \left( L^2(\mathcal{R}) \right)^d, \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d \right\} \quad (6.1)$$

$$L_{pot}^2(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^d \oplus \left\{ \nabla u, u \in H^1(\mathcal{R}) \right\} \quad (6.2)$$

Cela permet de définir les ensembles :

$$\mathcal{V}_{pot}^2 = \left\{ u \in \left( L_{pot}^2(\mathcal{R}) \right)^d, \int_{\mathcal{R}} u \, d\mu = 0 \right\} \quad (6.3)$$

$$\mathcal{V}_{sol}^2 = \left\{ u \in \left( L_{sol}^2(\mathcal{R}) \right)^d, \int_{\mathcal{R}} u \, d\mu = 0 \right\} \quad (6.4)$$

On a alors la décomposition de Weyl's :

$$\left( L^2(\mathcal{R}) \right)^d = \mathcal{V}_{pot}^2 \oplus \mathcal{V}_{sol}^2 \oplus \mathbb{R}^d = \mathcal{V}_{pot}^2 \oplus \left( L_{sol}^2(\mathcal{R}) \right)^d \quad (6.5)$$

## 6.3 Cas particuliers importants : méthodes couramment utilisées en ingénierie pétrolière

On applique dans ce paragraphe les différentes méthodes décrites au chapitre précédent dans le cadre particulier des conditions aux limites linéaires et confinées. Le cadre de l'homogénéisation périodique et stochastique est également examiné. Pour chaque classe

de conditions aux limites étudiées on considérera la minimisation des fonctionnelles introduites précédemment. On établit une relation entre deux méthodes basées sur les flux qui ont été rappelées au chapitre précédent. On termine ce paragraphe en rappelant sous forme de tableau les résultats obtenus mettant ainsi en évidence les relations entre les différentes méthodes classiques de l'ingénierie pétrolière.

### 6.3.1 Homogénéisation avec des conditions aux limites linéaires

On se place dans le cadre particulier de la méthode d'homogénéisation avec les conditions aux bords linéaires. Le nombre de problèmes locaux est égal à la dimension du problème on a donc  $m = d$ . On considère l'élément  $\mathcal{D}$  défini par (5.27) appartenant à  $(H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega))^m$  dont la  $i^{\text{ème}}$  composante  $g_i = x_i$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ . Enfin on prend  $f_i = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ .

On considère les problèmes suivants :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [K(x)\nabla P_i] = 0 & \text{dans } \omega \\ P_i = x_i & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.6)$$

On introduit alors les quantités  $E_{ij}^D(K)$  et  $\vec{V}_i^D(K)$  définies par :

$$E_{ij}^D(K) = \frac{1}{2} \int_{\omega} K(x)\nabla P_i \cdot \nabla P_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.7)$$

$$\vec{V}_i^D(K) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x)\nabla P_i \, dx \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.8)$$

Soit  $H \in M(h, a, \omega)$  on définit alors les problèmes

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [H\nabla U_i] = 0 & \text{dans } \omega \\ U_i = x_i & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.9)$$

auxquels on associe  $E_{ij}^D(H)$  et  $\vec{V}_i^D(H)$  donnés par :

$$E_{ij}^D(H) = \frac{1}{2} \int_{\omega} H\nabla U_i \cdot \nabla U_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.10)$$

$$\vec{V}_i^D(H) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} H\nabla U_i \, dx \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.11)$$

Or pour toute matrice  $H \in M(h, a, \omega)$  l'unique solution du problème (6.9) est  $U_i = x_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ . Ainsi les quantités  $E_{ij}^D(H)$ , et  $\vec{V}_i^D(H)$  s'écrivent sous la forme explicite :

$$E_{ij}^D(H) = \frac{|\omega| H_{ij}}{2} \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.12)$$

$$\vec{V}_i^D(H) = H \vec{e}_i \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.13)$$

### a) Fonctionnelle énergétique

Pour calculer le tenseur équivalent on applique la définition 5.6.1 correspondant à la recherche de la solution du problème :

$$\inf_{H \in M(h,a,\omega)} I_{\mathcal{D}}(H) \quad (6.14)$$

où d'après (5.41)  $I_{\mathcal{D}}$  est définie par :

$$I_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^d \left[ E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K) \right]^2. \quad (6.15)$$

En utilisant (6.12),  $I_{\mathcal{D}}$  devient ici :

$$I_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^d \left[ \frac{|\omega| H_{ij}}{2} - E_{ij}^D(K) \right]^2. \quad (6.16)$$

On sait d'après la proposition 5.9.5 que le problème (6.14) admet au moins une solution. En outre la fonctionnelle décrite par (6.16) est quadratique en  $H_{ij}$  et non dégénérée, ce qui implique qu'elle est strictement convexe. Par conséquent le problème (6.14) admet une solution unique. Un calcul direct donne

$$\frac{\partial I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = 2 \left[ \frac{|\omega| H_{ij}}{2} - E_{ij}^D(K) \right] \frac{|\omega|}{2}. \quad (6.17)$$

On a alors la caractérisation suivante

$$\frac{\partial I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = 0 \iff \left[ \frac{|\omega| H_{ij}}{2} = E_{ij}^D(K) \right]. \quad (6.18)$$

Ce qui se réécrit d'après (6.7) sous la forme

$$H_{ij} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) \nabla P_i \cdot \nabla P_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (6.19)$$

Or la matrice  $H$  définie par (6.19) appartient à l'espace  $M(h, a, \omega)$  d'après la proposition 1.4.1. Par conséquent l'unique solution du problème de minimisation (6.14) est la matrice  $K^*$  dont le terme générique est donné par

$$K_{ij}^* = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) \nabla P_i \cdot \nabla P_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (6.20)$$

On retrouve donc les coefficients de la méthode d'homogénéisation avec les conditions aux bords linéaires. De plus on a  $I_{\mathcal{D}}(K^*) = 0$  ce qui signifie que l'énergie dissipée est égale pour le tenseur  $K$  et le tenseur  $K^*$ , ce qui a été démontré par Bøe [13] avec une toute autre méthode. On constate aussi que les contraintes ne jouent pas et en fait

$$\inf_{H \in M(h,a,\omega)} I_{\mathcal{D}}(H) = \inf_{H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)} I_{\mathcal{D}}(H) = \inf I_{\mathcal{D}}(H). \quad (6.21)$$

## b) Fonctionnelle basée sur la vitesse

On utilise maintenant la définition 5.7.1 pour calculer le tenseur équivalent qui consiste à chercher la solution du problème suivant

$$\inf_{H \in M(h,a,\omega)} J_{\mathcal{D}}(H) \quad (6.22)$$

avec  $J_{\mathcal{D}}$  définie par

$$J_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i=1}^d \left| \vec{\mathbf{V}}_i^D(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \right|^2 \quad (6.23)$$

Grâce à (6.13) on a

$$J_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i=1}^d \left| H \vec{\mathbf{e}}_i - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \right|^2 \quad (6.24)$$

Ce qui est équivalent à

$$J_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^d \left( H \vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \right)^2 \quad (6.25)$$

On remarque que la fonctionnelle  $J_{\mathcal{D}}$  donnée par (6.25) est quadratique en  $H_{ij}$  et non dégénérée, ce qui implique qu'elle est strictement convexe. D'autre part la proposition 5.10.3, nous indique que le problème (6.22) admet au moins une solution. Ainsi le problème (6.22) admet une solution unique. En dérivant directement  $J_{\mathcal{D}}(H)$  par rapport à  $(H_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$  on obtient :

$$\frac{\partial J_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = 2 \left( H_{ij} - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \right) \quad (6.26)$$

d'où on a :

$$\frac{\partial J_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = 0 \iff H_{ij} = \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \quad (6.27)$$

ce qui donne

$$H_{ij} = \frac{1}{|\omega|} \left( \int_{\omega} K(x) \nabla P_i \, dx \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.28)$$

Afin de pouvoir utiliser (6.28), on établit une relation grâce au problème (6.6).

Une formulation variationnelle du problème (6.6) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i \in H^1(\omega) \\ \int_{\omega} K(x) \nabla P_i \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \quad 1 \leq i \leq m. \\ P_i = x_i \quad \text{sur } \partial\omega \end{array} \right. \quad (6.29)$$

En prenant comme fonction test  $v = P_j - x_j$ , dans (6.29) on obtient

$$\int_{\omega} K(x) \nabla P_i \cdot \nabla P_j \, dx = \left( \int_{\omega} K(x) \nabla P_i \, dx \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \quad (6.30)$$

Par conséquent, en utilisant (6.28) et (6.30) on retrouve les coefficients de la méthode linéaire. On obtient également que la fonctionnelle  $J_{\mathcal{D}}(H)$  est nulle pour le tenseur équivalent défini par (6.28) et que les contraintes de l'ensemble des tenseurs admissibles  $M(h, a, \omega)$  n'intervienne pas dans le problème de minimisation (6.22).

### c) Fonctionnelle flux

Dans la méthode de la minimisation de l'erreur du flux, Gallouët et Guérrillot introduisent la fonctionnelle suivante :

$$F_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{j=1}^d \left( \int_{\partial\omega} [(H \nabla U_j - K(x) \nabla P_j) \cdot \vec{\mathbf{n}}]^2 d\sigma \right) \quad (6.31)$$

ainsi que le problème de minimisation :

$$\inf_{H \in M} F_{\mathcal{D}}(H) \quad (6.32)$$

où  $M$  est l'espace général des matrices carrées constantes sur  $\omega$ .

Dans la suite de ce paragraphe  $F_{\mathcal{D}}$  sera utilisée pour établir un lien entre la méthode de minimisation de l'erreur du flux et la méthode de l'égalité des flux pour des conditions aux limites périodiques. Pour les problèmes locaux (6.6) et (6.9) le problème de minimisation (6.32) correspond à la méthode de minimisation de l'erreur du flux décrite au chapitre 5. Afin de voir les particularités de cette méthode par rapport à la nouvelle approche présentée dans le chapitre 5 on détaille les calculs.

Pour toute matrice  $H \in M$  l'unique solution du problème (6.9) est  $U_i = x_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , d'où on obtient

$$F_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{j=1}^d \left( \int_{\partial\omega} [H \vec{\mathbf{e}}_j \cdot \vec{\mathbf{n}} - K(x) \nabla P_j \cdot \vec{\mathbf{n}}]^2 d\sigma \right). \quad (6.33)$$

En développant (6.33) on a

$$F_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{j=1}^d \left[ \int_{\partial\omega} \left[ \sum_{l=1}^d H_{lj} \mathbf{n}_l \right]^2 d\sigma - 2 \int_{\partial\omega} \left[ \sum_{l=1}^d H_{lj} \mathbf{n}_l \right] K(x) \nabla P_j \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma + \int_{\partial\omega} [K(x) \nabla P_j \cdot \vec{\mathbf{n}}]^2 d\sigma \right] \quad (6.34)$$

Comme dans le cas de la fonctionnelle énergétique, la fonctionnelle (6.34) est strictement convexe. Le problème (6.32) admet par conséquent une solution unique. En dérivant par rapport à  $H$  il vient :

$$\frac{\partial F_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = 2 \int_{\partial\omega} \left( \left[ \sum_{l=1}^d H_{lj} \mathbf{n}_l \right] \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_i \left[ \sum_{l=1}^d (K(x) \nabla P_j)_l \cdot \mathbf{n}_l \right] \right) d\sigma \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (6.35)$$

Or si l'on cherche le point qui annule le gradient il suffit de résoudre le système linéaire suivants :

$$\int_{\partial\omega} \left( \left[ \sum_{l=1}^d H_{lj} \mathbf{n}_l \right] \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_i \left[ \sum_{l=1}^d (K(x) \nabla P_j)_l \cdot \mathbf{n}_l \right] \right) d\sigma = 0 \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (6.36)$$

Si le domaine  $\omega$  est un rectangle ou un parallélépipède droit le gradient (6.35) devient alors

$$\frac{\partial F_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = 2 \int_{\partial\omega} \left( H_{ij} \mathbf{n}_i^2 - (K(x) \nabla P_j)_i \cdot \mathbf{n}_i^2 \right) d\sigma \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (6.37)$$

D'où on obtient la formule explicite suivante :

$$H_{ij} = \frac{1}{\int_{\partial\omega} \mathbf{n}_i^2 d\sigma} \int_{\partial\omega} (K(x) \nabla P_j)_i \cdot \mathbf{n}_i^2 d\sigma \quad (6.38)$$

C'est le tenseur équivalent obtenu par Gallouët et Guérrillot. Notons que ce tenseur n'est pas forcément symétrique.

### 6.3.2 Homogénéisation avec des conditions aux limites confinées

On se place maintenant dans le cadre particulier de la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords confinées, où  $f_i = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq d$  et  $m = d$ . La partition de la frontière du domaine  $\omega$  se décompose en deux parties  $\Gamma_0^i$  et  $\Gamma_1^i$ ,  $1 \leq i \leq d$ . On a  $\Gamma_D^i = \Gamma_0^i \cup \Gamma_1^i$  où  $\Gamma_0^i$  et  $\Gamma_1^i$  représentent les deux faces orthogonales à l'axe  $x_i$ , pour tout  $1 \leq i \leq d$ . C'est à dire que  $\Gamma_0^i$  [resp.  $\Gamma_1^i$ ] est la frontière du domaine régulier  $\omega$ , appartenant au plan d'équation  $x_i = a_i$  [resp.  $x_i = b_i$ ]. On note  $\Gamma_N^i = \partial\omega - \Gamma_D^i$ . La  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\mathcal{M}$  définie par (5.28) est construite de la manière suivante

$$g_i^D = \begin{cases} p_0^i & \text{sur } \Gamma_0^i \\ p_1^i & \text{sur } \Gamma_1^i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d. \\ g_i^N = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N^i$$

où  $p_j^i \in \mathbb{R}_*^+$ , pour tout  $1 \leq i \leq d$  et  $0 \leq j \leq 1$ .

Suivant (5.35), (5.36) et (5.37) on considère les problèmes

$$\begin{cases} -\text{div} [K(x) \nabla W_i] = 0 & \text{dans } \omega \\ W_i = p_0^i & \text{sur } \Gamma_0^i \\ W_i = p_1^i & \text{sur } \Gamma_1^i \\ K \nabla W_i \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma_N^i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.39)$$

ainsi que les quantités suivantes :

$$E_{ij}^M(K) = \frac{1}{2} \int_{\omega} K(x) \nabla W_i \cdot \nabla W_j dx \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.40)$$

$$\vec{\mathbf{V}}_i^M(K) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) \nabla W_i \, dx \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.41)$$

Pour un tenseur  $H \in M(h, a, \omega)$  **diagonal**, on considère alors les problèmes suivants

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [H \nabla Z_i] = 0 & \text{dans } \omega \\ Z_i = p_0^i & \text{sur } \Gamma_0^i \\ Z_i = p_1^i & \text{sur } \Gamma_1^i \\ H \nabla Z_i \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma_N^i \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.42)$$

auxquels on associe  $E_{ij}^M(H)$  et  $\vec{\mathbf{V}}_i^M(H)$  définies de la manière suivante :

$$E_{ij}^M(H) = \frac{1}{2} \int_{\omega} H \nabla Z_i \cdot \nabla Z_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.43)$$

$$\vec{\mathbf{V}}_i^M(H) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} H \nabla Z_i \, dx \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.44)$$

L'unique solution du problème (6.42) est donné par

$$Z_i = \frac{b_i - x_i}{L^i} p_0^i + \frac{x_i - a_i}{L^i} p_1^i \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.45)$$

où  $L^i = b_i - a_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ .

On peut alors calculer

$$E_{ij}^M(H) = \frac{1}{2} \int_{\omega} H \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right) \vec{\mathbf{e}}_i \cdot \left( \frac{p_1^j - p_0^j}{L^j} \right) \vec{\mathbf{e}}_j \, dx \quad (6.46)$$

et

$$\vec{\mathbf{V}}_i^M(H) = \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right) H \vec{\mathbf{e}}_i. \quad (6.47)$$

Or la matrice  $H \in M(h, a, \omega)$  est diagonale, on obtient alors l'expression explicite :

$$E_{ij}^M(H) = \begin{cases} \frac{|\omega| H_{ij}}{2} \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right)^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (6.48)$$

### a) Fonctionnelle énergétique

Comme indiqué dans la définition 5.6.2, on considère alors le problème

$$\inf_{\substack{H \in M(h, a, \omega) \\ \text{et } H_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j}} I_{\mathcal{M}}(H) \quad (6.49)$$

où  $I_{\mathcal{M}}$  est définie par:

$$I_{\mathcal{M}}(H) = \sum_{i,j=1}^m \left[ E_{ij}^M(H) - E_{ij}^M(K) \right]^2. \quad (6.50)$$

A partir de (6.48) et par un calcul direct on obtient

$$\frac{\partial I_{\mathcal{M}}(H)}{\partial H_{ii}} = 2 \left[ \frac{|\omega| H_{ii}}{2} \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right)^2 - E_{ii}^M(K) \right] \frac{|\omega|}{2} \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right)^2 \quad (6.51)$$

ce qui conduit à

$$\frac{\partial I_{\mathcal{M}}(H)}{\partial H_{ii}} = 0 \iff H_{ii} = \frac{2}{|\omega|} \left( \frac{L^i}{p_1^i - p_0^i} \right)^2 E_{ii}^M(K) \quad (6.52)$$

d'où

$$H_{ii} = \frac{1}{|\omega|} \left( \frac{L^i}{p_1^i - p_0^i} \right)^2 \int_{\omega} K(x) \nabla W_i \cdot \nabla W_i \, dx \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (6.53)$$

Afin d'écrire (6.53) sous la forme d'une vitesse de filtration on considère la formulation variationnelle du problème (6.39) qui est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_i \in H^1(\omega) \\ \int_{\omega} K(x) \nabla W_i \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\omega) \\ W_i = p_0^i \quad \text{sur } \Gamma_0^i \\ W_i = p_1^i \quad \text{sur } \Gamma_1^i \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.54)$$

où l'on rappelle que  $H_{0,\Gamma_D}^1(\omega) = \{v \in H^1(\omega) \text{ tel que } \gamma_0(v) = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ .

En prenant  $v = W_i - \left( \frac{b_i - x_i}{L^i} p_0^i + \frac{x_i - a_i}{L^i} p_1^i \right)$  dans (6.54) on obtient

$$\int_{\omega} K(x) \nabla W_i \cdot \nabla W_i \, dx = \int_{\omega} K(x) \nabla W_i \cdot \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right) \vec{e}_i \, dx \quad (6.55)$$

Par conséquent en utilisant (6.53) et (6.55) on obtient

$$H_{ii} = \frac{L^i}{(p_1^i - p_0^i)} \left( \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) \nabla W_i \, dx \right) \cdot \vec{e}_i \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.56)$$

Le tenseur  $H$  défini par (6.56) appartient à  $M(h, a, \omega)$ . Ceci se démontre de la même manière que pour la proposition 1.4.1. Donc l'unique solution du problème (6.49) est le tenseur  $K^*$  défini par

$$K_{ij}^* = \begin{cases} \frac{L^i}{(p_1^i - p_0^i)} \left( \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) \nabla W_i \, dx \right) \cdot \vec{e}_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (6.57)$$

On retrouve ainsi les résultats de la méthode du mode confiné. De plus  $I_{\mathcal{M}}(K^*) = 0$  et donc l'énergie dissipée correspondante au tenseur  $K$  est égale à l'énergie dissipée calculé avec le tenseur  $K^*$ . Enfin les contraintes qui imposent que le tenseur  $K^*$  soit compris entre les moyennes harmonique et arithmétique sont satisfaites mais n'entre pas en jeu lors de la minimisation et l'on a :

$$\inf_{H \in M(h, a, \omega)} I_{\mathcal{M}}(H) = \inf_{H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)} I_{\mathcal{M}}(H) = \inf I_{\mathcal{M}}(H). \quad (6.58)$$

## b) Fonctionnelle basée sur la vitesse

En utilisant la définition 5.7.2 où la fonctionnelle  $J_{\mathcal{M}}$  est définie par

$$J_{\mathcal{M}}(H) = \sum_{i=1}^m \left| \vec{\mathbf{V}}_i^M(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^M(K) \right|^2 \quad (6.59)$$

on introduit le problème

$$\inf_{\substack{H \in M(h, a, \omega) \\ \text{et } H_{ij}=0 \text{ si } i \neq j}} J_{\mathcal{M}}(H) \quad (6.60)$$

A partir (6.47) et (6.59) on a la décomposition suivante :

$$J_{\mathcal{M}}(H) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \left( \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right) H_{ij} - \vec{\mathbf{V}}_i^M(K) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \right)^2 \quad (6.61)$$

La stricte convexité de  $J_{\mathcal{M}}$  et la proposition 5.10.3 nous assure que le problème (6.60) admet une solution unique. En dérivant par rapport à  $H_{ii}$  on obtient

$$\frac{\partial J_{\mathcal{M}}(H)}{\partial H_{ii}} = 0 \iff H_{ii} = \frac{L^i}{(p_1^i - p_0^i)} \vec{\mathbf{V}}_i^M(K) \cdot \vec{\mathbf{e}}_i \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.62)$$

En utilisant (6.41) on aboutit à :

$$H_{ii} = \frac{L^i}{(p_1^i - p_0^i)} \left( \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} K(x) \nabla W_i \, dx \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_i \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.63)$$

Finalement on retrouve le tenseur équivalent de la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords confinées.

## c) Fonctionnelle flux

On cherche maintenant la solution du problème suivant:

$$\inf_{\substack{H \in M(h, a, \omega) \\ \text{et } H_{ij}=0 \text{ si } i \neq j}} F_{\mathcal{D}}(H) \quad (6.64)$$

où  $F_{\mathcal{D}}(H)$  est définie par

$$F_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i=1}^d \left( \int_{\partial\omega} [(H \nabla Z_i - K(x) \nabla W_i) \cdot \vec{\mathbf{n}}]^2 \, d\sigma \right) \quad (6.65)$$

D'après (6.45) on obtient

$$F_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i=1}^d \left( \int_{\partial\omega} \left[ \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right) H \vec{\mathbf{e}}_i - K(x) \nabla W_i \right] \cdot \vec{\mathbf{n}} \right]^2 \, d\sigma \quad (6.66)$$

En développant (6.66) on obtient

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i=1}^d & \left[ \int_{\partial\omega} \left[ \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right) H_{ii} \mathbf{n}_i \right]^2 d\sigma \right. \\
& - 2 \int_{\partial\omega} \left[ \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right) H_{ii} \mathbf{n}_i \right] d\sigma \int_{\partial\omega} K(x) \nabla W_i \cdot \mathbf{\bar{n}} d\sigma \\
& \left. + \int_{\partial\omega} [K(x) \nabla W_i \cdot \mathbf{\bar{n}}]^2 d\sigma \right] \quad (6.67)
\end{aligned}$$

Comme dans les cas précédent le problème (6.64) admet une solution unique. En calculant le gradient par rapport à  $H$  on obtient pour tout  $1 \leq i \leq d$  :

$$\frac{\partial F_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ii}} = 2 \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right)^2 H_{ii} \int_{\partial\omega} \mathbf{n}_i^2 d\sigma - 2 \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right) \int_{\partial\omega} ([K(x) \nabla W_i \cdot \mathbf{\bar{n}}] \mathbf{n}_i) d\sigma \quad (6.68)$$

Le domaine étant un carré ou un cube, le gradient s'écrit encore

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = & 2 \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right) \left[ \left( \frac{p_1^i - p_0^i}{L^i} \right) H_{ii} |\Gamma_0^i \cup \Gamma_1^i| \right. \\
& \left. + \int_{\Gamma_0^i} (K(x) \nabla W_i \cdot \mathbf{\bar{n}}) d\sigma - \int_{\Gamma_1^i} (K(x) \nabla W_i \cdot \mathbf{\bar{n}}) d\sigma \right] \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.69)
\end{aligned}$$

Le tenseur qui annule la différentielle est alors donné par la formule suivante

$$H_{ii} = \frac{L^i}{|\Gamma_0^i \cup \Gamma_1^i| (p_1^i - p_0^i)} \left[ \int_{\Gamma_1^i} (K(x) \nabla W_i \cdot \mathbf{\bar{n}}) d\sigma - \int_{\Gamma_0^i} (K(x) \nabla W_i \cdot \mathbf{\bar{n}}) d\sigma \right] \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.70)$$

Par conséquent l'unique solution au problème de minimisation (6.64) est le tenseur  $K^*$  qui annule la fonctionnelle  $F_{\mathcal{D}}(\cdot)$  dont le terme générique pour tout  $1 \leq i, j \leq d$ , est donné par :

$$K_{ij}^* = \begin{cases} \frac{L^i}{|\Gamma_0^i \cup \Gamma_1^i| (p_1^i - p_0^i)} \left[ \int_{\Gamma_1^i} (K(x) \nabla W_i \cdot \mathbf{\bar{n}}) d\sigma - \int_{\Gamma_0^i} (K(x) \nabla W_i \cdot \mathbf{\bar{n}}) d\sigma \right] & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (6.71)$$

Ces formules définissent un tenseur équivalent ne correspondant, à notre connaissance, à aucune méthode connue.

### 6.3.3 Homogénéisation périodique

On se place dans le cadre de l'homogénéisation périodique qui a été rappelée au chapitre 1. On considère donc un domaine  $\omega = Y$  qui est la cellule de base de forme carré en 2D où cubique en 3D de côté unité; le nombre de problèmes locaux est égal à la dimension

du problème, soit  $m = d$ . On a aussi  $f_i = 0$ , pour tout  $1 \leq i \leq d$ . Les problèmes locaux considérés sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} p_i \in H_p^1(Y) / \mathbb{R} \\ -div_y [K(y)(\nabla_y p_i + \vec{e}_i)] = 0 \end{cases} \quad \text{dans } Y \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.72)$$

Le problème (6.72) s'écrit encore sous la forme suivante

$$\begin{cases} p_i \in H_p^1(Y) / \mathbb{R} \\ -div_y [K(y)\nabla_y p_i] = div_y [K(y)\vec{e}_i] \end{cases} \quad \text{dans } Y \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.73)$$

Le second membre du problème (6.73) dépend de  $K$ . Afin de pouvoir appliquer les méthodes de mise à l'échelle présentées au chapitre 5 on effectue le changement de variable suivant :

$$P_i = p_i + y_i \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.74)$$

Le problème (6.72) s'écrit alors

$$\begin{cases} P_i \in H^1(Y) \\ -div_y [K(y)\nabla_y P_i] = 0 \quad \text{dans } Y \\ P_i|_{\Gamma_0^j} = P_i|_{\Gamma_1^j} - \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq d \\ K\nabla_y P_i \cdot \vec{n}|_{\Gamma_0^j} = -K\nabla_y P_i \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1^j} \quad 1 \leq j \leq d \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.75)$$

auquel on associe

$$E_{ij}^D(K) = \frac{1}{2} \int_Y K(y) \nabla_y P_i \cdot \nabla_y P_i \, dy \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.76)$$

$$\vec{V}_i^D(K) = \frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) \nabla_y P_i \, dy \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.77)$$

On considère pour  $H \in M(h, a, \omega)$  le problème suivant :

$$\begin{cases} u_i \in H_p^1(Y) / \mathbb{R} \\ -div_y [H(\nabla_y u_i + \vec{e}_i)] = 0 \end{cases} \quad \text{dans } Y \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.78)$$

De la même manière que précédemment on effectue le changement de variable

$$U_i = u_i + y_i \quad 1 \leq j \leq d. \quad (6.79)$$

Le problème (6.78) s'écrit alors

$$\begin{cases} U_i \in H^1(Y) \\ -div_y [H\nabla_y U_i] = 0 \quad \text{dans } Y \\ U_i|_{\Gamma_0^j} = U_i|_{\Gamma_1^j} - \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq d \\ H\nabla_y U_i \cdot \vec{n}|_{\Gamma_0^j} = -H\nabla_y U_i \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1^j} \quad 1 \leq j \leq d \end{cases} \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.80)$$

On vérifie aisément que la solution de ce problème est donnée par :

$$U_i = y_i + C \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.81)$$

où  $C$  est une constante.

On définit alors les quantités ci-après :

$$E_{ij}^D(H) = \frac{1}{2} \int_Y H \nabla_y U_i \cdot \nabla_y U_j \, dy \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.82)$$

$$\vec{V}_i^D(H) = \frac{1}{|Y|} \int_Y H \nabla_y U_i \, dy \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.83)$$

### a) Fonctionnelle énergétique

Utilisons la définition 5.6.1 qui considère la fonctionnelle

$$I_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^d \left[ E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K) \right]^2 \quad (6.84)$$

et le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{H \in M(h,a,\omega)} I_{\mathcal{D}}(H) \quad (6.85)$$

En utilisant (6.81) et (6.82),  $I_{\mathcal{D}}$  s'écrit

$$I_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^d \left[ \frac{|Y| H_{ij}}{2} - E_{ij}^D(K) \right]^2 \quad (6.86)$$

d'où on a

$$\frac{\partial I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = 0 \iff \left[ \frac{|Y| H_{ij}}{2} = E_{ij}^D(K) \right] \quad (6.87)$$

Ce qui implique

$$H_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) \nabla_y P_i \cdot \nabla_y P_j \, dy \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.88)$$

En utilisant (6.74) on obtient finalement

$$H_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y K(y) \nabla_y (p_i + y_i) \cdot \nabla_y (p_j + y_j) \, dy \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.89)$$

qui est le tenseur équivalent obtenu par la théorie de l'homogénéisation périodique. On remarque que le tenseur définie par (6.89) appartient à  $M(h, a, \omega)$  et qu'il annule la fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$ . On constate une fois encore que le minimum de  $I_{\mathcal{D}}$  est aussi un minimum global sans contrainte.

## b) Fonctionnelle basée sur la vitesse

Comme dans la définition 5.7.1 on considère la fonctionnelle  $J_{\mathcal{D}}$  définie par

$$J_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i=1}^d \left| \vec{\mathbf{V}}_i^D(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \right|^2 \quad (6.90)$$

et le problème suivant

$$\inf_{H \in M(h, a, \omega)} J_{\mathcal{D}}(H) \quad (6.91)$$

De (6.83) on obtient

$$J_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^d \left( \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y H \nabla_y U_i \, dy \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \right)^2 \quad (6.92)$$

Grâce à (6.81) on a

$$J_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^d \left( H_{ij} - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \right)^2 \quad (6.93)$$

d'où

$$\frac{\partial J_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = 0 \iff H_{ij} = \vec{\mathbf{V}}_i^D(K) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \quad (6.94)$$

c'est à dire

$$H_{ij} = \frac{1}{|Y|} \left( \int_Y K(y) \nabla_y P_i \, dy \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.95)$$

D'après le changement de variable (6.74) on peut écrire

$$H_{ij} = \frac{1}{|Y|} \left( \int_Y K(y) (\nabla_y p_i + \vec{\mathbf{e}}_i) \, dy \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \quad (6.96)$$

Par ailleurs le tenseur  $H$  définie par (6.96) appartient à  $M(h, a, \omega)$ . Donc l'unique solution du problème (6.91) est le tenseur  $K^*$  défini par

$$K_{ij}^* = \frac{1}{|Y|} \left( \int_Y K(y) (\nabla_y p_i + \vec{\mathbf{e}}_i) \, dy \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \quad (6.97)$$

Ainsi en utilisant les problèmes locaux (6.72) et (6.78) on retrouve l'expression du tenseur équivalent obtenue par la théorie de l'homogénéisation périodique. Le minimum  $K^*$  défini par (6.97) est un minimum global sans contrainte et  $J_{\mathcal{D}}(K^*) = 0$ .

## c) Fonctionnelle flux

On se place maintenant dans le cadre de la méthode qui impose l'égalité des flux pour les conditions aux limites périodiques (c.f. paragraphe 5.3.2). C'est à dire que l'on considère les problèmes locaux de la forme suivante :

$$\begin{cases} p_i \in H_p^1(Y) / \mathbb{R} \\ -\operatorname{div}_y [K(y)(\nabla_y p_i + \mathbf{G}_i \vec{\mathbf{e}}_i)] = 0 \end{cases} \quad \text{dans } Y \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.98)$$

où  $\vec{\mathbf{G}}$  est un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^d$ . En effectuant le changement de variable suivant:

$$P_i = p_i + \mathbf{G}_i y_i \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.99)$$

Ainsi, le problème (6.98) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_i \in H^1(Y) & \\ -div_y [K(y)\nabla_y P_i] = 0 & \text{dans } Y \\ P_i|_{\Gamma_0^j} = P_i|_{\Gamma_1^j} - \delta_{ij} \mathbf{G}_i & 1 \leq j \leq d \\ K\nabla_y P_i \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_0^j} = -K\nabla_y P_i \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_1^j} & 1 \leq j \leq d \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.100)$$

On considère pour  $H \in M(h, a, \omega)$  le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_i \in H_p^1(Y) / \mathbb{R} & \\ -div_y [H(\nabla_y u_i + \mathbf{G}_i \vec{\mathbf{e}}_i)] = 0 & \text{dans } Y \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.101)$$

Comme précédemment on effectue le changement de variable

$$U_i = u_i + \mathbf{G}_i y_i \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.102)$$

Le problème (6.101) peut alors s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_i \in H^1(Y) & \\ -div_y [H\nabla_y U_i] = 0 & \text{dans } Y \\ U_i|_{\Gamma_0^j} = U_i|_{\Gamma_1^j} - \delta_{ij} \mathbf{G}_i & 1 \leq j \leq d \\ H\nabla_y U_i \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_0^j} = -H\nabla_y U_i \cdot \vec{\mathbf{n}}|_{\Gamma_1^j} & 1 \leq j \leq d \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.103)$$

Or la solution de ce problème est donnée par

$$U_i = \mathbf{G}_i y_i + C \quad 1 \leq j \leq d. \quad (6.104)$$

où  $C$  est une constante.

On cherche maintenant la solution du problème suivant:

$$\inf_{H \in M} F_{\mathcal{D}}(H) \quad (6.105)$$

où  $F_{\mathcal{D}}(H)$  est définie par

$$F_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{j=1}^d \left( \int_{\partial\omega} [(H \nabla_y U_j - K(y)\nabla_y P_j) \cdot \vec{\mathbf{n}}]^2 d\sigma \right) \quad (6.106)$$

En utilisant (6.104) et (6.106) on obtient

$$F_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{j=1}^d \left( \int_{\partial\omega} [(H \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \mathbf{G}_j - K(y)\nabla_y P_j) \cdot \vec{\mathbf{n}}]^2 d\sigma \right) \quad (6.107)$$

ceci se réécrit sous la forme suivante

$$F_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{j=1}^d \left[ \int_{\partial\omega} \left[ \sum_{l=1}^d H_{lj} \mathbf{G}_j \mathbf{n}_l \right]^2 d\sigma - 2 \int_{\partial\omega} \left[ \left( \sum_{l=1}^d H_{lj} \mathbf{G}_j \mathbf{n}_l \right) K(y) \nabla_y P_j \cdot \vec{\mathbf{n}} \right] d\sigma + \int_{\partial\omega} [K(y) \nabla_y P_j \cdot \vec{\mathbf{n}}]^2 d\sigma \right] \quad (6.108)$$

En dérivant par rapport à H on obtient:

$$\frac{\partial F_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = 2 \int_{\partial\omega} \left( \left[ \sum_{l=1}^d H_{lj} \mathbf{G}_j \mathbf{n}_l \right] \mathbf{G}_j \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_i \mathbf{G}_j [K(y) \nabla_y P_j \cdot \vec{\mathbf{n}}] \right) d\sigma \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.109)$$

Or le domaine est un carré ou un cube ce qui implique que le gradient s'écrit

$$\frac{\partial F_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = 2 \int_{\partial\omega} \left( H_{ij} \mathbf{G}_j^2 \mathbf{n}_i^2 - (K(y) \nabla_y P_j)_i \cdot \mathbf{G}_j \mathbf{n}_i^2 \right) d\sigma \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.110)$$

En annulant  $\frac{\partial F_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}}$  on a

$$\int_{\partial\omega} H_{ij} \mathbf{G}_j \mathbf{n}_i^2 d\sigma = \int_{\partial\omega} (K(y) \nabla_y P_j)_i \cdot \mathbf{n}_i^2 d\sigma. \quad (6.111)$$

Les conditions aux limites des problèmes (6.100) et (6.103) implique finalement que

$$H_{ij} = \frac{1}{\mathbf{G}_j} \int_{\Gamma_1^i} (K(y) \nabla_y P_j)_i d\sigma \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (6.112)$$

On retrouve ainsi les coefficients obtenus par Durlofsky.

L'approche décrite ci dessus donne une interprétation de la méthode basée sur l'égalité des flux en terme de minimisation d'une fonctionnelle. De plus cela met en évidence les relations (en terme de minimisation et en terme de conditions aux limites) avec la méthode de minimisation de l'erreur des flux. Plus précisément si on applique la méthode développée par Gallouët-Guérillot avec des conditions aux limites périodiques on retrouve les coefficients équivalents obtenus par Durlofsky. Ces derniers étant rien d'autre que les coefficients issus de l'homogénéisation périodique. En effet des relations (6.95) et (6.97) on obtient :

$$K_{ij}^* = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left( \int_Y K(y) \nabla_y P_j dy \right) \cdot \nabla_y y_i \quad (6.113)$$

A l'aide d'une formule de Green il vient :

$$K_{ij}^* = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left( \int_{\partial Y} K(y) \nabla_y P_j \cdot \vec{\mathbf{n}} y_i d\sigma \right) \quad (6.114)$$

Ce qui s'écrit encore grâce aux conditions aux limites

$$K_{ij}^* = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left( \int_{\Gamma_1^i} (K(y) \nabla_y P_j)_i d\sigma \right) \quad (6.115)$$

où  $P_i$  est donné par (6.74). Cela correspond bien aux coefficients (6.112) pour la cellule unite  $Y$  et le vecteur  $\vec{\mathbf{G}}$  dont chaque composante vaut 1.

### 6.3.4 Homogénéisation stochastique

On se place dans le cadre de l'homogénéisation stochastique définie sur l'espace probabilisé  $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mu)$ . Pour chaque réalisation  $r \in \mathcal{R}$  on définit le tenseur de perméabilité par  $K(\frac{x}{\varepsilon}, r) = K_\varepsilon(x, r)$ . Dans les méthodes du chapitre 5 cela correspond à poser d'une part les problèmes locaux sur  $\mathbb{R}^d$  et d'autre part, à remplacer l'intégrale sur le domaine  $\omega$  par l'espérance mathématique définie sur l'espace probabilisé  $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mu)$ . On considère donc les problèmes locaux de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i^r \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^d) \\ -div_y [K(y, r)(\vec{e}_i + \nabla_y p_i^r)] = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \quad \forall r \in \mathcal{R} \\ \int_{\mathcal{R}} \nabla_y p_i^r d\mu = 0 \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.116)$$

Afin de pouvoir appliquer les méthodes de mise à l'échelle présentées au chapitre précédent on effectue le changement de variable suivant:

$$P_i^r = p_i^r + y_i \quad \forall r \in \mathcal{R} \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.117)$$

Le problème (6.116) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i^r \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^d) \\ -div_y [K(y, r)\nabla_y P_i^r] = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \quad \forall r \in \mathcal{R} \\ \int_{\mathcal{R}} \nabla_y P_i^r d\mu = \vec{e}_i \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.118)$$

pour lequel on associe les quantités suivantes

$$E_{ij}^D(K) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} K(y, r) \nabla_y P_i^r \cdot \nabla_y P_j^r d\mu \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.119)$$

$$\vec{V}_i^D(K) = \int_{\mathcal{R}} K(y, r) \nabla_y P_i^r d\mu \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.120)$$

On considère pour  $H \in M(h, a, \omega)$  le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^d) \\ -div_y [H(\vec{e}_i + \nabla_y u_i)] = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.121)$$

En effectuant le changement de variable

$$U_i = u_i + y_i \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.122)$$

Le problème (6.121) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} U_i \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^d) \\ -div_y [H\nabla_y U_i] = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.123)$$

Or la solution de ce problème est donnée par

$$U_i = y_i + C \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.124)$$

On définit alors

$$E_{ij}^D(H) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} H \nabla_y U_i \cdot \nabla_y U_j \, d\mu = \frac{1}{2} H_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.125)$$

$$\vec{V}_i^D(H) = \int_{\mathcal{R}} H \nabla_y U_i \, d\mu \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.126)$$

### a) Fonctionnelle énergétique

On considère la fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$  définie par

$$I_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^d \left[ E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K) \right]^2 \quad (6.127)$$

et le problème

$$\inf_{H \in M(h,a,\omega)} I_{\mathcal{D}}(H) . \quad (6.128)$$

De (6.125) on peut écrire

$$I_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^d \left[ \frac{H_{ij}}{2} - E_{ij}^D(K) \right]^2 \quad (6.129)$$

ce qui fournit

$$\frac{\partial I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = 0 \iff \left[ \frac{H_{ij}}{2} = E_{ij}^D(K) \right] \quad (6.130)$$

Finalement, grâce à (6.119), on a

$$H_{ij} = \int_{\mathcal{R}} K(y,r) \nabla_y P_i^r \cdot \nabla_y P_j^r \, d\mu \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.131)$$

En utilisant alors le changement de variable (6.117) on obtient

$$H_{ij} = \int_{\mathcal{R}} K(y,r) (\nabla_y p_i^r + \vec{e}_i) \cdot (\nabla_y p_j^r + \vec{e}_j) \, d\mu \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.132)$$

Le tenseur défini par (6.132) appartenant à  $M(h, a, \omega)$  est l'unique solution du problème (6.128) et c'est un minimum global sans contrainte. Afin d'obtenir un tenseur équivalent basé sur la vitesse on va réécrire le problème (6.116) en utilisant les fonctions potentiels et solénoïdes.

On pose

$$\mathcal{Z}_i^r = \nabla_y p_i^r \quad (6.133)$$

En utilisant (6.133), le problème (6.116) peut se réécrire grâce à la décomposition de Weyl's (6.5) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Z}_i^r \in \mathcal{V}_{pot}^2 \\ \int_{\mathcal{R}} K(y, r) (\vec{\mathbf{e}}_i + \mathcal{Z}_i^r) \varphi \, d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_{pot}^2 \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq d \quad (6.134)$$

En prenant  $\varphi = \mathcal{Z}_j^r$  dans (6.134) on obtient

$$\int_{\mathcal{R}} K(y, r) (\vec{\mathbf{e}}_i + \mathcal{Z}_i^r) \mathcal{Z}_j^r \, d\mu = 0 \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.135)$$

Grâce à (6.132), (6.133) et (6.135) on a

$$H_{ij} = \int_{\mathcal{R}} K(y, r) (\nabla_y p_i^r + \vec{\mathbf{e}}_i) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \, d\mu \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (6.136)$$

Donc le tenseur homogénéisé obtenu par la méthode de l'homogénéisation stochastique peut se réécrire sous la forme (6.136).

## b) Fonctionnelle basée sur la vitesse

Comme dans la définition 5.7.1 on considère la fonctionnelle  $J_{\mathcal{D}}$  définie par

$$J_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i=1}^d \left| \vec{\mathbf{V}}_i^{\mathcal{D}}(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^{\mathcal{D}}(K) \right|^2 \quad (6.137)$$

et le problème suivant

$$\inf_{H \in M(h, a, \omega)} J_{\mathcal{D}}(H) \quad (6.138)$$

En utilisant (6.124) et (6.126) on obtient

$$J_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^d \left( H_{ij} - \vec{\mathbf{V}}_i^{\mathcal{D}}(K) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \right)^2 \quad (6.139)$$

La fonctionnelle  $J_{\mathcal{D}}$  est continue et quadratique en  $H$ , donc le problème de minimisation (6.138) admet une solution unique. (6.139) nous donne directement que

$$\frac{\partial J_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{ij}} = 0 \iff H_{ij} = \vec{\mathbf{V}}_i^{\mathcal{D}}(K) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \quad (6.140)$$

c'est à dire

$$H_{ij} = \left( \int_{\mathcal{R}} K(y, r) \nabla_y p_i^r \, d\mu \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \quad 1 \leq i \leq d. \quad (6.141)$$

En utilisant le changement de variable (6.117) on a

$$H_{ij} = \left( \int_{\mathcal{R}} K(y, r) (\nabla_y p_i^r + \vec{\mathbf{e}}_i) \, d\mu \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (6.142)$$

Par ailleurs le tenseur  $H$  défini par (6.142) appartient à  $M(h, a, \omega)$ . Donc l'unique solution du problème (6.138) est le tenseur  $K^*$  défini par :

$$K_{ij}^* = \left( \int_{\mathcal{R}} K(y, r) (\nabla_y p_i^r + \vec{e}_i) d\mu \right) \cdot \vec{e}_j \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (6.143)$$

Ainsi en utilisant les problèmes locaux (6.116) et (6.121) on retrouve l'expression du tenseur équivalent obtenue par la théorie de l'homogénéisation stochastique, grâce aux relations (6.136) et (6.143).

### 6.3.5 Conclusions

On résume dans le tableau suivant les résultats de ce paragraphe. En fonction des fonctionnelles utilisées et des conditions aux limites choisies on énonce la méthode dont on retrouve le tenseur équivalent.

Conditions aux limites	Fonctionnelle		
	Energétique	Vitesse	Flux
Linéaires	Méthode linéaire	Méthode linéaire	Minimisation de l'erreur du flux
Confinées	Mode confiné	Mode confiné	Résultats (6.71)
Périodiques	Homog. périodique	Homog. périodique	Méthode de l'égalité des flux
Cadre Stochastique	Homog. stochastique	Homog. stochastique	×

Au terme de ce paragraphe plusieurs commentaires peuvent être apportés pour l'ensemble des trois conditions aux limites classiquement utilisées ainsi que pour le cadre stochastique :

1. Quelques soient les méthodes du chapitre 5 appliquées avec les conditions aux limites classiques on retrouve la plupart des résultats connus. Ainsi l'ensemble des méthodes classiques étudiées dans ce paragraphe peuvent être interprétées comme la minimisation d'une fonctionnelle.
2. Pour les conditions aux limites classiques il y a équivalence entre l'approche énergétique et l'approche vitesse développée ici. Cependant pour des conditions aux limites quelconques nous n'avons pas de résultats.

3. Dans tous ces cas particuliers la fonctionnelle étudiée est quadratique convexe non dégénérée en les termes  $H_{ij}$ . Ceci est une propriété forte permettant d'aboutir à un tenseur équivalent unique : le minimum obtenu dans chaque cas est aussi minimum sans contraintes.
4. Le tenseur équivalent obtenu annule la fonctionnelle objectif. Ceci s'interprète physiquement par l'égalité des énergies dissipées aux échelles microscopiques et macroscopiques. Nous retrouvons des résultats dûs à Njifenjou [64] et Bøe [13] pour des conditions aux limites périodiques et linéaires. Le résultat dans le cadre stochastique semble nouveau ainsi que dans le cas confiné.
5. On remarque que les différentes solutions des problèmes locaux pour des tenseurs  $H$  constants, sont linéaires. Evidemment pour des conditions aux limites générales ceci est faux.
6. Soit  $\vec{\lambda}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ . Par linéarité, toute combinaison du type  $\sum_{i=1}^d \lambda_i p_i$  où  $(p_i)_{1 \leq i \leq d}$  sont les solutions des problèmes (6.6) [resp. (6.39), (6.72)] va être solution des problèmes (6.6) [resp. (6.39), (6.72)] pour une combinaison linéaire des conditions aux bords linéaires [resp. confinées et périodiques]. On étend alors par linéarité tous les résultats obtenus à ce type de conditions aux limites. Ceci étend un résultat de Njifenjou (théorème 3, pp. 353, [65]).

Quelques remarques particulières relatives à la fonctionnelle flux :

7. La méthode de l'égalité des flux pour des conditions périodiques peut être interprétée comme la méthode de minimisation de l'erreur du flux à laquelle on applique des conditions aux limites périodiques.
8. Si on minimise la fonctionnelle flux associée à des conditions aux limites confinées on obtient un tenseur équivalent fourni par la formule explicite (6.71). Ce résultat ne correspond à aucun des résultats connus.

## 6.4 Stabilité pour la G-convergence

On étudie dans ce paragraphe certaines propriétés de stabilité des méthodes de mise à l'échelle développées au cours du chapitre précédent. La définition des problèmes d'optimisation faisant intervenir l'énergie ainsi que la vitesse de filtration nécessitent des données qui peuvent se répartir en 2 catégories :

1°) des conditions aux limites et des seconds membres donnés et fixés.

2°) un domaine  $\omega$  sur lequel est défini un tenseur  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ .

La résolution du problème d'optimisation permet alors de trouver un tenseur  $K^* \in M(h, a, \omega)$  équivalent à  $K$ .

Dans la théorie de l'homogénéisation classique, on suppose que le tenseur  $K_\varepsilon$  dépend d'un paramètre  $\varepsilon > 0$  qui est le rapport entre la taille des hétérogénéités locales et la taille du domaine. Lorsque l'on fait tendre ce rapport  $\varepsilon$  vers zéro on obtient la G-convergence suivante :  $K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_{HP}^*$  où  $K_{HP}^*$  est le tenseur équivalent de l'homogénéisation périodique. En ce qui concerne notre approche, pour chaque  $\varepsilon > 0$  fixé, on peut appliquer une des méthodes du chapitre précédent et obtenir un tenseur  $K_\varepsilon^*$  équivalent à  $K_\varepsilon \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ . On peut alors se demander quel est le comportement de la suite de tenseur équivalent  $K_\varepsilon^*$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. C'est l'objet du paragraphe qui suit.

### 6.4.1 Fonctionnelle énergétique

Pour certaines conditions aux limites, incluant les conditions classiques, la méthode de mise à l'échelle décrite au chapitre 5 utilisant la fonctionnelle de l'énergie est stable pour la G-convergence. Plus précisément on a le résultat suivant :

**Théorème 6.4.1** *Soit  $K_\varepsilon$  une suite de matrice appartenant à  $M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  et  $K_0 \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  tel que  $K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on note  $K_\varepsilon^*$  [resp.  $K_0^*$ ] un tenseur équivalent à  $K_\varepsilon$  [resp.  $K_0$ ] obtenu en utilisant la définition 5.6.1 ou 5.6.2 avec des conditions aux limites pour lesquelles  $K_\varepsilon^*$  et  $K_0^*$  sont des minimums globaux.*

*Alors il existe une suite extraite  $K_\varepsilon^*$ , encore notée  $K_\varepsilon^*$ , telle que*

$$K_\varepsilon^* \xrightarrow{G} K_0^*. \quad (6.144)$$

**Remarque 6.4.2** *Dans le cas des conditions aux limites classiques (linéaires, confinées, périodiques) l'hypothèse d'avoir des minimums globaux est vérifiée.*

Avant de démontrer le théorème 6.4.1 on donne deux résultats intermédiaires. La proposition qui suit est un résultat classique dont une démonstration peut être trouvée dans Dal Maso [27] ou Attouch [6].

**Proposition 6.4.3** *On considère les problèmes suivants :*

$$I_\varepsilon(H) = \inf_{H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)} L_\varepsilon(H) \quad \text{et} \quad I_0(H) = \inf_{H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)} L_0(H) \quad (6.145)$$

où  $L_\varepsilon(H)$  [resp.  $L_0(H)$ ] est une fonctionnelle quelconque dépendant d'une matrice  $H$  appartenant à l'ensemble  $M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ .

On suppose que  $L_\varepsilon(H)$  converge uniformément par rapport à  $H$  vers  $L_0(H)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(H) = I_0(H) \quad \text{uniformément.} \quad (6.146)$$

On établit maintenant un résultat qui permet d'affirmer que la fonctionnelle  $I_D$  [resp.  $I_M$ ] définie par (5.41) [resp. (5.42)] converge uniformément.

**Proposition 6.4.4** *On suppose que  $K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0$ . On considère alors pour tout  $\varepsilon \geq 0$  les problèmes :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} [K_\varepsilon(x) \nabla P_i^\varepsilon] = f_i & \text{dans } \omega \\ P_i^\varepsilon = g_i & \text{sur } \partial\omega \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} [K_\varepsilon(x) \nabla W_i^\varepsilon] = f_i & \text{dans } \omega \\ W_i^\varepsilon = g_i^D & \text{sur } \Gamma_D^i \\ K_\varepsilon \nabla W_i^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = g_i^N & \text{sur } \Gamma_N^i \end{array} \right. \quad (6.147)$$

auxquels on adjoint les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} E_{ij}^D(K_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_\omega K_\varepsilon(x) \nabla P_i^\varepsilon \cdot \nabla P_j^\varepsilon \, dx - \int_\omega f_i P_j^\varepsilon \, dx \\ E_{ij}^M(K_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_\omega K_\varepsilon(x) \nabla W_i^\varepsilon \cdot \nabla W_j^\varepsilon \, dx - \int_{\Gamma_N^i} g_i^N W_j^\varepsilon \, d\sigma - \int_\omega f_i W_j^\varepsilon \, dx \end{aligned} \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (6.148)$$

Alors

i) la fonctionnelle définie par  $\sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K_\varepsilon)]^2$  converge uniformément vers  $\sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K_0)]^2$  par rapport à  $H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , où  $E_{ij}^D(H)$  est donné par (5.33).

ii) la fonctionnelle définie par  $\sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^M(H) - E_{ij}^M(K_\varepsilon)]^2$  converge uniformément vers  $\sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^M(H) - E_{ij}^M(K_0)]^2$  par rapport à  $H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , où  $E_{ij}^M(H)$  est donné par (5.39).

Démonstration :

Examinons i). On calcule dans un premier temps la limite simple de :

$$\sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K_\varepsilon)]^2. \quad (6.149)$$

Pour cela on introduit pour tout  $H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  la fonctionnelle  $F^\varepsilon(H)$  définie par :

$$F^\varepsilon(H) = \left| \sum_{i,j=1}^m \left( [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K_\varepsilon)]^2 - [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K_0)]^2 \right) \right| \quad (6.150)$$

D'après la proposition 5.9.2 on sait que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{ij}^D(K_\varepsilon) = E_{ij}^D(K_0) \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (6.151)$$

et grâce au lemme 5.9.12 on a

$$\left| E_{ij}^D(K_\varepsilon) \right| \leq C \quad (6.152)$$

où C est une constante indépendante de  $\varepsilon$  et de  $K_\varepsilon$ .

De (6.150) et (6.152) on obtient la majoration suivante

$$\forall H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega) \quad F^\varepsilon(H) \leq C \sum_{i,j=1}^m \left| E_{ij}^D(K_\varepsilon) - E_{ij}^D(K_0) \right| \left| E_{ij}^D(H) \right| \quad (6.153)$$

avec C une constante indépendante de  $\varepsilon$ , de  $K_\varepsilon$  et de  $H$ .

En utilisant (6.151) on a alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(H) = 0 \quad (6.154)$$

On regarde maintenant la convergence uniforme. D'après (6.153) et le lemme 5.9.12 on en déduit

$$\sup_{H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)} F^\varepsilon(H) \leq C \sum_{i,j=1}^m \left| E_{ij}^D(K_\varepsilon) - E_{ij}^D(K_0) \right| \quad (6.155)$$

où C désigne une constante indépendante de  $\varepsilon$  et de  $H$ . Ainsi en passant à la limite grâce à (6.151) il vient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \sup_{H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)} F^\varepsilon(H) \right) = 0 \quad (6.156)$$

La démonstration de ii) est identique  $\square$ .

On démontre maintenant le théorème 6.4.1.

Démonstration :

On considère une suite de matrice  $K_\varepsilon \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ . En appliquant la définition 5.6.1 pour tout  $\varepsilon \geq 0$  **fixé**, on définit un tenseur, noté  $K_\varepsilon^*$ , équivalent à  $K_\varepsilon$  avec l'hypothèse suivante :

$$\inf_{H \in M(h_\varepsilon, a_\varepsilon, \omega)} I_{\mathcal{D}}(H) = \inf_{H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)} I_{\mathcal{D}}(H) \quad (6.157)$$

On rappelle que  $I_{\mathcal{D}}$  est définie par :

$$I_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^m \left[ E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K_\varepsilon) \right]^2. \quad (6.158)$$

On a  $K_\varepsilon^* \in M(h_\varepsilon, a_\varepsilon, \omega)$  et on note  $U_i^{*\varepsilon}$  la solution du problème

$$\begin{cases} -div [K_\varepsilon^* \nabla U_i^{*\varepsilon}] = f_i \text{ dans } \omega \\ U_i^{*\varepsilon} = g_i \text{ sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m \quad (6.159)$$

qui permet de calculer

$$E_{ij}^D(K_\varepsilon^*) = \frac{1}{2} \int_{\omega} K_\varepsilon^* \nabla U_i^{*\varepsilon} \cdot \nabla U_j^{*\varepsilon} dx - \int_{\omega} f_i U_j^{*\varepsilon} dx \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (6.160)$$

Par définition on a pour tout  $\varepsilon \geq 0$  fixé

$$\sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(K_\varepsilon^*) - E_{ij}^D(K_\varepsilon)]^2 = \inf_{H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)} \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K_\varepsilon)]^2 \quad (6.161)$$

Comme  $K_\varepsilon^* \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  pour tout  $\varepsilon > 0$  le lemme 5.9.12 nous donne :

$$\|U_i^{*\varepsilon}\|_{1,\omega} \leq C \quad (6.162)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$  et de  $K_\varepsilon^*$ .

De (6.162) on en déduit qu'il existe une suite extraite de  $U_i^{*\varepsilon}$ , encore notée  $U_i^{*\varepsilon}$ , telle que

$$U_i^{*\varepsilon} \xrightarrow{H^1(\omega)} U_i^{*0} \quad \text{faible} \quad (6.163)$$

On considère maintenant la sous-suite de tenseur  $K_\varepsilon^*$  indexé par les mêmes indices que la suite convergente  $U_i^{*\varepsilon}$ . Pour tout  $\varepsilon \geq 0$  on a  $K_\varepsilon^* \in M(h_\varepsilon, a_\varepsilon, \omega)$  qui est un ensemble inclus dans  $M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ . Par conséquent  $(K_\varepsilon^*)$  est une suite bornée ce qui implique d'après le théorème 1.5.2 l'existence d'une sous suite, encore noté  $K_\varepsilon^*$ , telle que

$$K_\varepsilon^* \xrightarrow{G} K_0^* \quad (6.164)$$

En outre  $K_0^* \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  donc  $K_0^*$  est un tenseur constant symétrique définie positif [27].

On considère le problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [K_0^* \nabla U_i^{*0}] = f_i \text{ dans } \omega \\ U_i^{*0} = g_i \text{ sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (6.165)$$

auquel on associe

$$E_{ij}^D(K_0^*) = \frac{1}{2} \int_{\omega} K_0^* \nabla U_i^{*0} \cdot \nabla U_j^{*0} dx - \int_{\omega} f_i U_j^{*0} dx \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (6.166)$$

Grâce à (6.164) on en déduit que l'on a :

$$U_i^{*\varepsilon} \xrightarrow{H^1(\omega)} U_i^{*0} \quad \text{faible} \quad (6.167)$$

où  $U_i^{*\varepsilon}$  [resp.  $U_i^{*0}$ ] est la solution du problème (6.159) [resp. (6.165)].

Finalement on a que  $K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0$  et  $K_\varepsilon^* \xrightarrow{G} K_0^*$  ce qui permet de passer à la limite dans (6.161) en utilisant les propositions 5.9.2, 6.4.3 et 6.4.4. On obtient alors :

$$\sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(K_0^*) - E_{ij}^D(K_0)]^2 = \inf_{H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)} \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K_0)]^2 \quad (6.168)$$

On en conclut que le tenseur constant  $K_0^*$  est un minimum global du problème de minimisation (6.157).

La démonstration pour la définition 5.6.2 est identique  $\square$ .

Le théorème 6.4.1 peut être appliqué dans les cas particuliers des conditions aux limites linéaires ou confinées. Comme on l'a vu précédemment dans ces situations on a unicité du tenseur équivalent qui de plus est un minimum global, d'où le résultat suivant.

**Corollaire 6.4.5** *Soit  $K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  on note  $K_\varepsilon^*$  [resp.  $K_0^*$ ] le tenseur équivalent à  $K_\varepsilon$  [resp.  $K_0$ ] en utilisant la définition 5.6.1 où 5.6.2. On suppose que les problèmes locaux sont résolus avec des conditions aux limites linéaires ou confinées. Alors la suite de tenseurs équivalents  $K_\varepsilon^*$   $G$ -converge vers l'unique tenseur équivalent  $K_0^*$ .*

Ce corollaire permet de retrouver en particulier un résultat de Bamberger [10] qui a été rappelé au premier chapitre. Le cas des conditions aux limites périodiques et du cadre stochastique sera abordé un peu plus loin dans ce chapitre.

## 6.4.2 Fonctionnelle basée sur la vitesse

On examine maintenant le cas de la fonctionnelle basée sur la vitesse de filtration dont on étudie l'influence d'une suite de tenseurs  $K_\varepsilon^*$  équivalents à  $K_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

**Théorème 6.4.6** *On suppose que  $K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on note  $K_\varepsilon^*$  [resp.  $K_0^*$ ] le tenseur équivalent à  $K_\varepsilon$  [resp.  $K_0$ ] obtenu en utilisant la définition 5.7.1 ou 5.7.2 avec des conditions aux limites pour lesquelles  $K_\varepsilon^*$  et  $K_0^*$  sont des minimums globaux. Alors il existe une suite extraite  $K_\varepsilon^*$ , encore notée  $K_\varepsilon^*$ , telle que*

$$K_\varepsilon^* \xrightarrow{G} K_0^*. \quad (6.169)$$

Démonstration :

On suit les mêmes étapes que pour la démonstration du théorème 6.4.1 en utilisant la proposition 6.4.7 donnée ci-après.

**Proposition 6.4.7** *On suppose que  $K_\varepsilon \xrightarrow{G} K_0$  et l'on considère les quantités suivantes:*

$$\begin{aligned} \vec{V}_i^D(K_\varepsilon) &= \frac{1}{|\omega|} \int_\omega K_\varepsilon(x) \nabla P_i^\varepsilon dx \\ \vec{V}_i^M(K_\varepsilon) &= \frac{1}{|\omega|} \int_\omega K_\varepsilon(x) \nabla W_i^\varepsilon dx \end{aligned} \quad 1 \leq i \leq m \quad (6.170)$$

où  $(P_i^\varepsilon)_{1 \leq i \leq m}$  et  $(W_i^\varepsilon)_{1 \leq i \leq m}$  sont les solutions des problèmes définis par (6.147).

Alors

i) la fonctionnelle définie par  $\sum_{i=1}^m \left| \vec{\mathbf{V}}_i^D(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K_\varepsilon) \right|^2$  converge uniformément vers  $\sum_{i=1}^m \left| \vec{\mathbf{V}}_i^D(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^D(K_0) \right|^2$  par rapport à  $H \in M(h, a, \omega)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , où  $\vec{\mathbf{V}}_i^D(H)$  est donné par (5.34)

ii) la fonctionnelle définie par  $\sum_{i=1}^m \left| \vec{\mathbf{V}}_i^M(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^M(K_\varepsilon) \right|^2$  converge uniformément vers  $\sum_{i=1}^m \left| \vec{\mathbf{V}}_i^M(H) - \vec{\mathbf{V}}_i^M(K_0) \right|^2$  par rapport à  $H \in M(h, a, \omega)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , où  $\vec{\mathbf{V}}_i^M(H)$  est donné par (5.40).

Démonstration :

La démonstration est identique à la preuve de la proposition 6.4.4.  $\square$ .

## 6.5 Application dans le cadre périodique et stochastique

Dans le cas de l'homogénéisation périodique et stochastique, on sait que la matrice G-limite (unique) est le tenseur homogénéisé constant. Cette information supplémentaire qui indique que la matrice est constante permet d'affirmer que la suite de tenseurs équivalents calculée en utilisant l'une des méthodes du chapitre 5 va G-converger vers cette matrice G-limite constante. C'est un cas particulier important car la matrice G-limite obtenue est alors indépendante des conditions aux limites utilisées par les méthodes développées au chapitre 5. Ainsi la suite de tenseurs équivalents converge vers le tenseur fourni par l'homogénéisation stochastique ce qui permet de retrouver un résultat dû à Sab [77] ainsi que Badea et Bourgeat [7]. Plus précisément on a la proposition ci-dessous.

**Proposition 6.5.1** *Soit un tenseur de perméabilité  $K_\varepsilon^P$  [resp.  $K_\varepsilon^S$ ] appartenant à  $M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  défini sur un milieu poreux périodique [resp. stochastique]. Alors*

$$K_\varepsilon^{*P} \xrightarrow{G} K_{HP}^* \quad (6.171)$$

$$K_\varepsilon^{*S} \xrightarrow{G} K_{HS}^* \quad (6.172)$$

où  $K_\varepsilon^{*P}$  [resp.  $K_\varepsilon^{*S}$ ] est le tenseur équivalent à  $K_\varepsilon^P$  [resp.  $K_\varepsilon^S$ ] obtenu par l'une des quatre définitions 5.6.1, 5.6.2, 5.7.1, ou 5.7.2, et  $K_{HP}^*$  [resp.  $K_{HS}^*$ ] désigne le tenseur homogénéisé issu de l'homogénéisation périodique [resp. stochastique].

### Démonstration :

Par hypothèse  $K_\varepsilon^P \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ , donc d'après le théorème 1.5.2 on peut en extraire une sous suite qui va G-converger vers une limite unique. Par ailleurs de l'homogénéisation périodique on sait que la G-limite est donnée par  $K_{HP}^*$ , où  $K_{HP}^*$  est obtenu en utilisant l'homogénéisation périodique. Donc on a

$$K_\varepsilon^P \xrightarrow{G} K_{HP}^* \quad (6.173)$$

En utilisant le théorème 6.4.1 on en déduit :

$$K_\varepsilon^{*P} \xrightarrow{G} K_{HP}^* \quad (6.174)$$

La démonstration est identique pour les définitions 5.6.2, 5.7.1, 5.7.2 ainsi que pour le cadre stochastique  $\square$ .

Ce résultat s'applique en particulier aux conditions aux limites confinées : on a pour tout  $\varepsilon > 0$  que  $K_\varepsilon^*$  est une matrice diagonale et l'on obtient alors que la suite  $(K_\varepsilon^*)$  va G-converger vers une matrice pleine.

## 6.6 Unicité d'un minimum

Il a été montré dans le chapitre 5 que les différents problèmes de minimisation servant à définir le tenseur équivalent possédaient au moins une solution. Ensuite lors de la première partie de ce chapitre on a montré qu'il existait certaines situations, correspondant aux méthodes classiques, où il y a unicité du tenseur équivalent. Cette unicité provient des conditions aux limites particulières utilisées. Le but de ce paragraphe est d'étendre à des conditions aux limites plus générales ces situations où il y a unicité du problème de minimisation. On se restreint au cas de la fonctionnelle énergétique.

### 6.6.1 Calcul de la différentielle d'ordre deux

Le but de ce paragraphe est de calculer la différentielle d'ordre deux de la fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$  définie par (5.41) et de montrer qu'elle est définie positive en tout point d'un certain domaine. On aura alors que la fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$  est strictement convexe ce qui nous assurera de l'unicité de la solution au problème d'optimisation (5.43).

**Proposition 6.6.1** *Pour tout  $1 \leq i \leq m$  on suppose que  $f_i = 0$  dans les problèmes (5.29) et (5.32). Alors la fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$  définie par (5.41) est deux fois différentiable et pour tout  $1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq d$ , on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{\gamma\delta} \partial H_{\alpha\beta}} &= \sum_{i,j=1}^m \left\{ \begin{array}{l} \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\delta}} dx \right) \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx \right) \quad si \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{cases} \\ \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\delta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\delta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\gamma}} dx \right) \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx \quad si \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma \neq \delta \end{cases} \\ \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\delta}} dx \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} dx \right) \quad si \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \gamma = \delta \end{cases} \\ \left[ \begin{array}{l} \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\delta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\delta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\gamma}} dx \right) \\ * \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} dx \right) \end{array} \right] \quad si \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \gamma \neq \delta \end{cases} \end{array} \right. \\
&\quad + [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K)] * \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) dx \quad si \begin{cases} \alpha = \beta \\ 1 \leq \gamma, \delta \leq d \end{cases} \\ \left[ \begin{array}{l} \left( \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) dx \right) \\ + \left( \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) dx \right) \end{array} \right] \quad si \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ 1 \leq \gamma, \delta \leq d \end{cases} \end{array} \right. \\
\end{aligned} \tag{6.175}$$

où  $U_i$  est la solution du problème (5.32).

Démonstration :

D'après la définition (5.47) on a

$$I_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K)]^2 \tag{6.176}$$

Or la proposition 5.9.18 nous indique que  $I_{\mathcal{D}}$  est différentiable et que :

$$\frac{\partial I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K)] \frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} \tag{6.177}$$

où

$$\frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \begin{cases} \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx & si \alpha = \beta \\ \int_{\omega} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \right) dx & si \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{6.178}$$

En utilisant la proposition 5.9.8 le terme générique de  $\frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}}$  peut s'écrire comme la composée d'opérateurs différentiables :

$$\int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx = \varphi_5 \circ \varphi_7^{\alpha\beta} (\varphi_2^i(H), \varphi_2^j(H)) \tag{6.179}$$

On en déduit alors que  $\frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}}$  est différentiable. De (6.177) il vient

$$\frac{\partial^2 I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{\gamma\delta} \partial H_{\alpha\beta}} = \sum_{i,j=1}^m \left[ \left( \frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\gamma\delta}} \frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} \right) + [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K)] \frac{\partial^2 E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\gamma\delta} \partial H_{\alpha\beta}} \right] \quad (6.180)$$

Le calcul de  $\frac{\partial^2 I_{\mathcal{D}}(H)}{\partial H_{\gamma\delta} \partial H_{\alpha\beta}}$  revient donc à calculer les termes  $\frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\gamma\delta}} \frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}}$  et  $\frac{\partial^2 E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\gamma\delta} \partial H_{\alpha\beta}}$ , les autres étant connus.

Etude du terme  $\frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\gamma\delta}} \frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}}$  :

En utilisant (6.178) on obtient directement :

$$\frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\gamma\delta}} \frac{\partial E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\alpha\beta}} = \begin{cases} \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\delta}} dx \right) \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx \right) & \text{si } \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{cases} \\ \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\delta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\delta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\gamma}} dx \right) \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx & \text{si } \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma \neq \delta \end{cases} \\ \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\delta}} dx \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} dx \right) & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \gamma = \delta \end{cases} \\ \left[ \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\delta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\delta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\gamma}} dx \right) \right] \\ * \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} dx \right) & \text{si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \gamma \neq \delta \end{cases} \end{cases} \quad (6.181)$$

Etude du terme  $\frac{\partial^2 E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\gamma\delta} \partial H_{\alpha\beta}}$  :

Examinons le cas où  $\alpha = \beta$ . En utilisant (6.178) et (6.179) on a

$$\frac{\partial^2 E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\gamma\delta} \partial H_{\alpha\beta}} = \frac{\partial}{\partial H_{\gamma\delta}} \left[ \varphi_5 \circ \varphi_7^{\alpha\beta} \left( \varphi_2^i(H), \varphi_2^j(H) \right) \right] \quad (6.182)$$

Or  $\varphi_5$  est une application linéaire d'où :

$$\frac{\partial}{\partial H_{\gamma\delta}} \left[ \varphi_5 \circ \varphi_7^{\alpha\beta} \left( \varphi_2^i(H), \varphi_2^j(H) \right) \right] = \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial H_{\gamma\delta}} \left[ \varphi_7^{\alpha\beta} \left( \varphi_2^i(H), \varphi_2^j(H) \right) \right] dx \quad (6.183)$$

Par ailleurs de la proposition 5.9.8 on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial H_{\gamma\delta}} \varphi_7^{\alpha\beta} \left( \varphi_2^i(H), \varphi_2^j(H) \right) dx &= \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial \varphi_2^i(H)}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial \varphi_2^j(H)}{\partial x_{\beta}} dx \\ &+ \int_{\omega} \frac{\partial \varphi_2^i(H)}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( \frac{\partial \varphi_2^j(H)}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) dx \end{aligned} \quad 1 \leq \gamma, \delta \leq d \quad (6.184)$$

Ce qui s'écrit encore

$$\int_{\omega} \frac{\partial}{\partial H_{\gamma\delta}} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} \right) dx = \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) dx \quad (6.185)$$

En utilisant (6.182), (6.183), (6.184) et (6.185) on obtient finalement :

$$\frac{\partial^2 E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\gamma\delta} \partial H_{\alpha\beta}} = \left[ \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) dx \right] \text{ si } \begin{cases} \alpha = \beta \\ 1 \leq \gamma, \delta \leq d \end{cases} \quad (6.186)$$

Pour  $\alpha \neq \beta$  on suit les mêmes étapes que précédemment et on obtient

$$\frac{\partial^2 E_{ij}^D(H)}{\partial H_{\gamma\delta} \partial H_{\alpha\beta}} = \left[ \begin{aligned} & \left( \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) dx \right) \\ & + \left( \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_j}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_{\beta}} dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( \frac{\partial U_i}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) dx \right) \end{aligned} \right] \text{ si } \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ 1 \leq \gamma, \delta \leq d \end{cases} \quad (6.187)$$

De (6.180), (6.181), (6.186) et (6.187) on a alors le résultat (6.175)  $\square$ .

## 6.6.2 Dépendance continue de la différentielle d'ordre deux

Pour des conditions aux limites linéaires on sait qu'il y a unicité au problème d'optimisation (5.43). Afin d'étendre cette propriété à des conditions aux limites "proches" des conditions linéaires on étudie la continuité de la différentielle d'ordre deux  $\frac{\partial^2 I_D(H)}{\partial H_{\gamma\delta} \partial H_{\alpha\beta}}$  par rapport au tenseur  $H$  et aux conditions aux limites  $g_i \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ , pour tout  $1 \leq i \leq m$ . En effet si la différentielle d'ordre deux est continue par rapport aux éléments cités précédemment on pourra alors montrer qu'il existe un voisinage des conditions aux limites linéaires dans lequel la fonctionnelle  $I_D$  est encore strictement convexe.

**Proposition 6.6.2** *Pour tout  $1 \leq i \leq m$  on suppose que  $f_i = 0$  dans les problèmes (5.29) et (5.32), ainsi que  $m = d$ . Alors la différentielle d'ordre deux  $\frac{\partial^2 I_D(H)}{\partial H_{\gamma\delta} \partial H_{\alpha\beta}}$  définie par (6.175) dépend continûment du tenseur  $H$  et des conditions aux limites  $g_i \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ , pour tout  $1 \leq i \leq m$ .*

Avant de démontrer la proposition 6.6.2 on a besoin du résultat ci-dessous.

**Proposition 6.6.3** *Soient  $(H^n)_{n \geq 0} \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ , on considère pour tout  $1 \leq i \leq m$  les problèmes :*

$$(PB_i^n) \begin{cases} -\operatorname{div} [H^n \nabla U_i^n] = 0 & \text{dans } \omega \\ U_i^n = g_i^n & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad \text{et} \quad (PB_i^0) \begin{cases} -\operatorname{div} [H^0 \nabla U_i^0] = 0 & \text{dans } \omega \\ U_i^0 = g_i^0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (6.188)$$

On suppose que

$$\text{et } \begin{array}{l} H^n \longrightarrow H^0 \text{ pour une norme matricielle } \|\cdot\| \\ g_i^n \longrightarrow g_i^0 \text{ pour la norme de } H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega) \end{array} \quad 1 \leq i \leq m \quad (6.189)$$

Alors la solution  $U_i^n$  qui dépend de  $H^n$  et de  $g_i^n$  tend vers  $U_i^0$  pour la norme  $H^1(\omega)$ , i.e.

$$U_i^n \xrightarrow{H^1(\omega)} U_i^0 \quad \text{fort} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (6.190)$$

et on a aussi

$$\frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} \xrightarrow{H_0^1(\omega)} \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \quad \text{fort} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq \gamma, \delta \leq d. \end{cases} \quad (6.191)$$

Démonstration :

La démonstration se fait en 2 parties.

1<sup>ère</sup> partie : On démontre (6.190). En suivant les mêmes étapes que pour le lemme 5.9.12 on démontre d'abord que

$$\|U_i^n\|_{1,\omega} \leq C \quad 1 \leq i \leq m \quad (6.192)$$

Par conséquent on peut extraire une sous suite de  $U_i^n$  encore noté  $U_i^n$  telle que

$$U_i^n \xrightarrow{H^1(\Omega)} \chi_i \quad \text{faible} \quad 1 \leq i \leq m \quad (6.193)$$

L'application trace étant continue de  $H^1(\omega)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$  on a :

$$g_i^n \xrightarrow{H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)} \gamma_0(\chi_i) \quad \text{faible} \quad 1 \leq i \leq m \quad (6.194)$$

Or par hypothèse on sait

$$g_i^n \xrightarrow{H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)} g_i^0 \quad \text{fort} \quad 1 \leq i \leq m \quad (6.195)$$

Par unicité de la limite on en déduit alors

$$\gamma_0(\chi_i) = g_i^0 \quad 1 \leq i \leq m \quad (6.196)$$

Une formulation variationnelle de  $(PB_i^n)$  est donnée par :

$$\begin{cases} U_i^n \in H^1(\omega) \\ \int_{\omega} H^n \nabla U_i^n \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \\ U_i^n = g_i^n \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m \quad (6.197)$$

En utilisant (6.189), (6.193) et (6.196) on peut passer à la limite et on obtient

$$\begin{cases} \chi_i \in H^1(\omega) \\ \int_{\omega} H^0 \nabla \chi_i \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \\ \chi_i = g_i^0 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (6.198)$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [H^0 \nabla \chi_i] = 0 & \text{dans } \omega \\ \chi_i = g_i^0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad (6.199)$$

La solution du problème (6.199) et  $(PB_i^0)$  étant unique on en déduit

$$\chi_i = U_i^0 \quad 1 \leq i \leq m. \quad (6.200)$$

Donc de (6.193) et (6.200) on a

$$U_i^n \xrightarrow{H^1(\Omega)} U_i^0 \quad \text{faible} \quad (6.201)$$

De plus par compacité il vient

$$U_i^n \xrightarrow{L^2(\Omega)} U_i^0 \quad \text{fort} \quad (6.202)$$

On montre maintenant que la sous suite  $U_i^n \longrightarrow U_i^0$  fortement pour la semi-norme de  $H_0^1(\Omega)$ .

$$\begin{aligned} \lambda_1 |U_i^n - U_i^0|_{1,\omega}^2 &\leq \int_{\omega} H^n \nabla (U_i^n - U_i^0) \cdot \nabla (U_i^n - U_i^0) \, dx \leq \int_{\omega} H^n \nabla (U_i^n - U_i^0) \cdot \nabla U_i^n \, dx \\ &\quad - \int_{\omega} H^n \nabla U_i^n \nabla U_i^0 \, dx \\ &\quad + \int_{\omega} H^n \nabla U_i^0 \nabla U_i^0 \, dx \end{aligned} \quad (6.203)$$

Lorsque  $n$  tend vers zéro les deux derniers termes de l'inégalité (6.203) tendent vers  $\int_{\omega} H^0 \nabla U_i^0 \nabla U_i^0 \, dx$  et donc s'annule mutuellement. Le troisième terme se gère de la manière qui suit. En utilisant une formule de Green et le problème  $(PB_i^n)$  on a

$$\int_{\omega} H^n \nabla U_i^n \cdot \nabla (U_i^n - U_i^0) \, dx = \langle H^n \nabla U_i^n \cdot \vec{n}, g_i^n - g_i^0 \rangle \quad (6.204)$$

Or  $H^n \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$  ce qui permet d'obtenir grâce à (6.192)

$$\int_{\omega} H^n \nabla U_i^n \cdot \nabla (U_i^n - U_i^0) \, dx \leq C \|g_i^n - g_i^0\|_{\frac{1}{2}, \partial\omega} \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0 \quad (6.205)$$

Par conséquent de (6.203) et (6.205) on a

$$|U_i^n - U_i^0|_{1,\omega}^2 \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0 \quad (6.206)$$

Finalement grâce à (6.202) et (6.206) on obtient (6.190).

2<sup>ème</sup> partie : On démontre maintenant (6.191). Des deux problèmes  $(PB_i^n)$  et  $(PB_i^0)$  on obtient en dérivant par rapport à  $H_{\gamma\delta}^n$ ,  $n \geq 0$  et  $1 \leq \gamma, \delta \leq d$  :

$$\int_{\omega} H^n \nabla \left( \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} \right) \cdot \nabla v \, dx = \begin{cases} - \int_{\omega} \frac{\partial U_i^n}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial v}{\partial x_{\delta}} \, dx & \text{si } \gamma = \delta \\ - \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i^n}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial v}{\partial x_{\delta}} \, dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i^n}{\partial x_{\delta}} \frac{\partial v}{\partial x_{\gamma}} \, dx \right) & \text{si } \gamma \neq \delta \end{cases} \quad (6.207)$$

et

$$\int_{\omega} H^0 \nabla \left( \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right) \cdot \nabla v \, dx = \begin{cases} - \int_{\omega} \frac{\partial U_i^0}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial v}{\partial x_{\delta}} \, dx & \text{si } \gamma = \delta \\ - \left( \int_{\omega} \frac{\partial U_i^0}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial v}{\partial x_{\delta}} \, dx + \int_{\omega} \frac{\partial U_i^0}{\partial x_{\delta}} \frac{\partial v}{\partial x_{\gamma}} \, dx \right) & \text{si } \gamma \neq \delta \end{cases} \quad (6.208)$$

pour tout  $v \in H_0^1(\omega)$ . Ces relations sont obtenues en prenant  $U_j \equiv v$  dans (5.120).

Or d'après la proposition 5.9.11 on a pour tout  $n \geq 0$  :

$$\frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} \in H_0^1(\omega) \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq \gamma, \delta \leq d. \end{cases} \quad (6.209)$$

Ainsi en prenant  $v = \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n}$  dans (6.207) on obtient après majorations :

$$\left| \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} \right|_{1,\omega} \leq C \|U_i^n\|_{1,\omega} \quad (6.210)$$

Or  $U_i^n \in H^1(\omega)$  donc de (6.210), on en déduit que  $\frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n}$  reste dans un borné fixe de  $H_0^1(\omega)$ . Donc il existe  $\Theta \in H_0^1(\omega)$  tel que

$$\frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} \Theta \quad \text{faible} \quad (6.211)$$

En passant alors à la limite dans (6.207) on obtient grâce à (6.208)

$$\Theta = \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \quad (6.212)$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \quad \text{faible} \quad (6.213)$$

ce qui implique par compacité de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  que :

$$\frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \quad \text{fort} \quad (6.214)$$

On montre maintenant que  $\frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n}$  converge vers  $\frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0}$  pour la semi norme de  $H_0^1(\Omega)$ .

$$\lambda_1 \left| \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} - \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right|_{1,\omega}^2 \leq \int_{\omega} H^n \nabla \left( \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} - \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right) \cdot \nabla \left( \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} - \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right) \, dx \quad (6.215)$$

En développant (6.215) on a

$$\lambda_1 \left| \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} - \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right|_{1,\omega}^2 \leq \int_{\omega} H^n \nabla \left( \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} - \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right) \cdot \nabla \left( \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} \right) dx - \int_{\omega} H^n \nabla \left( \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} - \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right) \cdot \nabla \left( \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right) dx \quad (6.216)$$

Par l'intermédiaire de l'inégalité de Cauchy-Schwartz on aboutit à :

$$\lambda_1 \left| \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} - \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right|_{1,\omega}^2 \leq C \left\| \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} - \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right\|_{0,\omega} \quad (6.217)$$

Ce qui grâce à (6.214) permet d'obtenir que  $\frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n}$  converge vers  $\frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0}$  pour la semi norme de  $H_0^1(\Omega)$   $\square$ .

On démontre maintenant la proposition 6.6.2.

Démonstration :

Pour les hypothèses (6.189) on doit montrer

$$\frac{\partial^2 I_{\mathcal{D}}(H^n, g_1^n, \dots, g_m^n)}{\partial H_{\gamma\delta}^n \partial H_{\alpha\beta}^n} \xrightarrow{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 I_{\mathcal{D}}(H^0, g_1^0, \dots, g_m^0)}{\partial H_{\gamma\delta}^0 \partial H_{\alpha\beta}^0} \quad (6.218)$$

Pour cela il suffit d'étudier le comportement lorsque  $n \rightarrow 0$  des termes génériques de la formule (6.175) qui sont :

$$\int_{\omega} \frac{\partial U_i^n}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j^n}{\partial x_{\delta}} dx, \quad \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial U_j^n}{\partial x_{\beta}} dx \quad \text{et} \quad E_{ij}^D(H^n) \quad \begin{cases} 1 \leq i, j \leq m \\ 1 \leq \gamma, \delta \leq d \end{cases} \quad (6.219)$$

avec  $U_i^n$  la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -div [H^n \nabla U_i^n] = 0 & \text{dans } \omega \\ U_i^n = g_i^n & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m \quad (6.220)$$

1<sup>ère</sup> étape : On cherche la limite de  $\int_{\omega} \frac{\partial U_i^n}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j^n}{\partial x_{\delta}} dx$ . Pour cela on introduit  $U_i^0$  qui est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -div [H^0 \nabla U_i^0] = 0 & \text{dans } \omega \\ U_i^0 = g_i^0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m \quad (6.221)$$

et l'on considère :

$$\left| \int_{\omega} \frac{\partial U_i^n}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j^n}{\partial x_{\delta}} dx - \int_{\omega} \frac{\partial U_i^0}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j^0}{\partial x_{\delta}} dx \right| \leq \left| \int_{\omega} \frac{\partial U_i^n}{\partial x_{\gamma}} \left( \frac{\partial U_j^n}{\partial x_{\delta}} - \frac{\partial U_j^0}{\partial x_{\delta}} \right) dx \right| + \left| \int_{\omega} \frac{\partial U_j^0}{\partial x_{\delta}} \left( \frac{\partial U_i^n}{\partial x_{\gamma}} - \frac{\partial U_i^0}{\partial x_{\gamma}} \right) dx \right| \quad (6.222)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient :

$$\left| \int_{\omega} \frac{\partial U_i^n}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j^n}{\partial x_{\delta}} dx - \int_{\omega} \frac{\partial U_i^0}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j^0}{\partial x_{\delta}} dx \right| \leq \|U_i^n\|_{1,\omega} \|U_j^n - U_j^0\|_{1,\omega} + \|U_j^0\|_{1,\omega} \|U_i^n - U_i^0\|_{1,\omega} \quad (6.223)$$

Grâce à la proposition 6.6.3 on en déduit que le second membre de (6.223) tend vers zéro quand  $n$  tend vers zéro. Ainsi on a :

$$\int_{\omega} \frac{\partial U_i^n}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j^n}{\partial x_{\delta}} dx \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{\omega} \frac{\partial U_i^0}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial U_j^0}{\partial x_{\delta}} dx \quad (6.224)$$

2<sup>ème</sup> étape : On cherche la limite de  $\int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial U_j^n}{\partial x_{\beta}} dx$  et l'on étudie

$$\left| \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} \right) \frac{\partial U_j^n}{\partial x_{\beta}} dx - \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right) \frac{\partial U_j^0}{\partial x_{\beta}} dx \right| \leq \left| \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_j^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} - \frac{\partial U_j^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right) \frac{\partial U_j^n}{\partial x_{\beta}} dx \right| + \left| \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right) \frac{\partial U_j^n - \partial U_j^0}{\partial x_{\beta}} dx \right| \quad (6.225)$$

Comme précédemment cela implique

$$\left| \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} \right) \frac{\partial U_j^n}{\partial x_{\beta}} dx - \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right) \frac{\partial U_j^0}{\partial x_{\beta}} dx \right| \leq \left| \frac{\partial U_j^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} - \frac{\partial U_j^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right|_{1,\omega} \|U_j^n\|_{1,\omega} + \left| \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right|_{1,\omega} \|U_j^n - U_j^0\|_{1,\omega} \quad (6.226)$$

En utilisant la proposition 6.6.3 on en déduit que :

$$\int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i^n}{\partial H_{\gamma\delta}^n} \right) \frac{\partial U_j^n}{\partial x_{\beta}} dx \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial U_i^0}{\partial H_{\gamma\delta}^0} \right) \frac{\partial U_j^0}{\partial x_{\beta}} dx \quad (6.227)$$

3<sup>ème</sup> étape : Etant donné que  $H^n \xrightarrow{G} H^0$  pour une norme matricielle  $\|\cdot\|$  on a que  $H^n \xrightarrow{G} H^0$  d'où en utilisant la proposition 5.9.2 on a :

$$\left| E_{ij}^D(H^n) - E_{ij}^D(K) \right| \xrightarrow{\mathbb{R}} \left| E_{ij}^D(H^0) - E_{ij}^D(K) \right| \quad (6.228)$$

Ainsi grâce à (6.224), (6.227) et (6.228) on en déduit (6.218)  $\square$ .

### 6.6.3 Unicité du contrôle optimal

Dans un voisinage des conditions aux limites linéaires la fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}$  est encore strictement convexe.

**Proposition 6.6.4** Soit  $g_i \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)$ ,  $1 \leq i \leq d$  et on note  $I_{\mathcal{D}}''(\cdot)$  la différentielle d'ordre deux définie par (6.175). Alors :

$$\begin{aligned} (\exists \eta_i > 0 \quad 1 \leq i \leq d) \quad \text{tel que } \forall g_i \in \left( \|g_i - x_i\|_{\frac{1}{2}, \partial\omega} \leq \eta_i \quad 1 \leq i \leq d \right) \\ \Rightarrow I_{\mathcal{D}}''(H, g_1, \dots, g_d) w.w > 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}} \end{aligned} \quad (6.229)$$

Démonstration :

D'après la proposition 6.6.2 on sait que la différentielle d'ordre deux  $I_{\mathcal{D}}''(H)$  est continue par rapport aux conditions aux limites  $(g_i)_{1 \leq i \leq d}$  et au tenseur  $H \in M(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ , ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad (\exists \eta_i > 0 \quad 1 \leq i \leq d) \quad \text{tel que } \forall g_i \in \left( \|g_i - x_i\|_{\frac{1}{2}, \partial\omega} \leq \eta_i \quad 1 \leq i \leq d \right) \\ \Rightarrow \left| I_{\mathcal{D}}''(H, g_1, \dots, g_d) w.w - I_{\mathcal{D}}''(H, x_1, \dots, x_d) w.w \right| \leq \varepsilon \quad \forall w \in \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}} \end{aligned} \quad (6.230)$$

On en déduit :

$$-\varepsilon + I_{\mathcal{D}}''(H, x_1, \dots, x_d) w.w \leq I_{\mathcal{D}}''(H, g_1, \dots, g_d) w.w \leq \varepsilon + I_{\mathcal{D}}''(H, x_1, \dots, x_d) w.w \quad (6.231)$$

Or on sait que pour des conditions aux limites linéaires on a

$$I_{\mathcal{D}}''(H, x_1, \dots, x_d) w.w > 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}} \quad (6.232)$$

Donc  $\forall w \in \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$  si on prend par exemple

$$\varepsilon = \frac{I_{\mathcal{D}}''(H, x_1, \dots, x_d) w.w}{2} > 0 \quad (6.233)$$

dans (6.231) on obtient :

$$0 < \frac{I_{\mathcal{D}}''(H, x_1, \dots, x_d) w.w}{2} \leq I_{\mathcal{D}}''(H, g_1, \dots, g_d) w.w \quad (6.234)$$

Finalement on a :

$$\begin{aligned} \forall w \in \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}} \quad (\exists \eta_i > 0 \quad 1 \leq i \leq d) \quad \text{tel que } \forall g_i \in \left( \|g_i - x_i\|_{\frac{1}{2}, \partial\omega} \leq \eta_i \quad 1 \leq i \leq d \right) \\ \Rightarrow I_{\mathcal{D}}''(H, g_1, \dots, g_d) w.w > 0 \quad \square. \end{aligned} \quad (6.235)$$

**Remarque 6.6.5** Les propositions 6.6.2 et 6.6.4 sont également valables pour les conditions aux limites confinées et périodiques. Cela signifie que pour des conditions aux limites suffisamment proches des conditions aux limites pour lesquelles on sait qu'il y a unicité du tenseur équivalent on a encore une fonctionnelle strictement convexe. Ceci implique alors que l'on a unicité de la solution du problème de minimisation (5.43).

## 6.7 Convergence de l'approximation du tenseur équivalent

Les méthodes du chapitre 5 ont été mises au point pour un domaine  $\omega$  fixé. Le but de ce paragraphe est d'étudier la convergence du tenseur équivalent lorsque la taille du domaine  $\omega$  devient de plus en plus petite. Pour cela on applique un résultat dû à Bamberger [10]. On considère  $T_H$  une partition de l'ouvert  $\Omega$ , où  $H$  représente le diamètre maximum des ouverts  $(\omega_i^H)_{1 \leq i \leq N}$  :

$$T_H = \bigcup_{i=1}^N \omega_i^H. \quad (6.236)$$

**Théorème 6.7.1** *Le tenseur équivalent à  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ , noté  $K_H^*$  est défini sur chaque ouvert  $\omega_i^H$  par  $K_H^*|_{\omega_i^H}$  qui est le tenseur équivalent à  $K|_{\omega_i^H}$  obtenu en appliquant l'une des quatre définitions 5.6.1, 5.6.2, 5.7.1, 5.7.2. Alors l'approximation  $K_H^*$  est convergente i.e.*

$$\lim_{H \rightarrow 0} (K_H^*) = K \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^{d^2}. \quad (6.237)$$

Démonstration :

D'une part on montre que

$$\lim_{H \rightarrow 0} I_{-1, \omega_i^H}(K) = \lim_{H \rightarrow 0} I_{1, \omega_i^H}(K) = K|_{\omega_i^H} \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^{d^2} \quad 1 \leq i \leq N. \quad (6.238)$$

D'autre part comme  $K_H^*|_{\omega_i^H} \in M(h, a, \omega_i^H)$  et grâce à une propriété du quotient de Rayleigh pour les matrices symétriques on a

$$\left\| K_H^*|_{\omega_i^H} - I_{-1, \omega_i^H}(K) \right\|_2 \leq \left\| I_{1, \omega_i^H}(K) - I_{-1, \omega_i^H}(K) \right\|_2 \quad (6.239)$$

Donc

$$0 \leq \int_{\omega_i^H} \left\| K_H^*(x)|_{\omega_i^H} - I_{-1, \omega_i^H}(K) \right\|_2^2 dx \leq \int_{\omega_i^H} \left\| I_{1, \omega_i^H}(K) - I_{-1, \omega_i^H}(K) \right\|_2^2 dx \quad (6.240)$$

Or d'après (6.238) on a

$$\int_{\Omega} \left\| I_{1, \omega_i^H}(K) - I_{-1, \omega_i^H}(K) \right\|_2^2 dx \xrightarrow{R} 0 \quad (6.241)$$

d'où en utilisant (6.240) on en déduit

$$\int_{\omega_i^H} \left\| K_H^*(x)|_{\omega_i^H} - I_{-1, \omega_i^H}(K) \right\|_2^2 dx \xrightarrow{R} 0 \quad (6.242)$$

Par ailleurs

$$\left\| K_H^*|_{\omega_i^H} - K|_{\omega_i^H} \right\|_2 \leq \left\| K_H^*|_{\omega_i^H} - I_{-1, \omega_i^H}(K) \right\|_2 + \left\| I_{-1, \omega_i^H}(K) - K|_{\omega_i^H} \right\|_2 \quad (6.243)$$

ce qui permet d'obtenir l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \int_{\omega_i^H} \left\| K_H^*(x)|_{\omega_i^H} - K(x)|_{\omega_i^H} \right\|_2^2 dx &\leq 2 \int_{\omega_i^H} \left\| K_H^*(x)|_{\omega_i^H} - I_{-1, \omega_i^H}(K) \right\|_2^2 dx \\ &+ 2 \int_{\omega_i^H} \left\| I_{-1, \omega_i^H}(K) - K(x)|_{\omega_i^H} \right\|_2^2 dx \end{aligned} \quad (6.244)$$

D'après (6.242) et (6.238) les deux membres de droite de l'inégalité (6.244) tendent vers zéro par conséquent

$$\int_{\omega_i^H} \left\| K_H^*(x)|_{\omega_i^H} - K(x)|_{\omega_i^H} \right\|_2^2 dx \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \quad 1 \leq i \leq N \quad (6.245)$$

ce qui implique

$$\int_{\Omega} \|K_H^*(x) - K(x)\|_2^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{\omega_i^H} \left\| K_H^*(x)|_{\omega_i^H} - K(x)|_{\omega_i^H} \right\|_2^2 dx \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \quad (6.246)$$

qui n'est autre que le résultat (6.237)  $\square$ .

## 6.8 Convergence de la solution dépendant du tenseur équivalent

On étudie maintenant l'écoulement d'un fluide monophasique incompressible sur le gisement  $\Omega$  dont le champ de perméabilité absolue à été mis à l'échelle par l'une des méthodes développées au chapitres 5. Le calcul numérique de la solution (pression) est faite pour un pas de discrétisation qui est en général inférieur ou égal au pas de discrétisation  $H$  ce dernier étant le diamètre maximum des ouverts  $(\omega_i^H)_{1 \leq i \leq N}$  sur lesquels la méthode de mise à l'échelle à été appliquée. En faisant tendre le pas de discrétisation vers zéro on obtient alors que l'approximation numérique de la pression tend vers la solution calculée avec le champ de perméabilité  $K$  initial.

On partitionne la frontière du gisement  $\Omega$  de la manière suivante  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  et on introduit  $g_D \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$ ,  $g_N \in \left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N)\right)^*$  et  $f \in L^2(\Omega)$ .

**Théorème 6.8.1** *Soient  $K \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  et  $T_H$  une partition de l'ouvert  $\Omega$ . On considère les problèmes suivants*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}[K(x)\nabla U] = f & \text{dans } \Omega \\ U = g_D & \text{sur } \Gamma_D \\ K\nabla U \cdot \vec{n} = g_N & \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}[K_H^*(x)\nabla U_H^*] = f & \text{dans } \Omega \\ U_H^* = g_D & \text{sur } \Gamma_D \\ K_H^*\nabla U_H^* \cdot \vec{n} = g_N & \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (6.247)$$

où le tenseur équivalent à  $K$ , noté  $K_H^*$  est défini sur chaque ouvert  $\omega_i^H$  par  $K_H^*|_{\omega_i^H}$  qui est le tenseur équivalent à  $K|_{\omega_i^H}$  obtenu en appliquant l'une des quatre définitions 5.6.1, 5.6.2, 5.7.1, 5.7.2.

Alors lorsque  $H$  tend vers zéro on a :

$$U_H^* \xrightarrow{H^1(\Omega)} U \quad \text{fort} \quad (6.248)$$

et

$$K_H^* \nabla U_H^* \xrightarrow{(L^2(\Omega))^d} K \nabla U \quad \text{fort} \quad (6.249)$$

Démonstration :

La démonstration s'effectue en quatre étapes.

1<sup>ère</sup> étape : on montre que  $U_H^* \xrightarrow{H^1(\Omega)} U$  faiblement quand  $H \rightarrow 0$ .

Soit  $Z$  une fonction de  $H^1(\omega)$  telle que  $Z = g_D$  sur  $\Gamma_D$ . On pose alors

$$W_H^* = U_H^* - Z \quad \text{et} \quad W = U - Z \quad (6.250)$$

Une formulation variationnelle des problèmes (6.247) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} W \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} K(x) \nabla(W + Z) \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_N} v g_N \, d\sigma = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (6.251)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} W_H^* \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} K_H^*(x) \nabla(W_H^* + Z) \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_N} v g_N \, d\sigma = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (6.252)$$

En prenant  $v = W_H^*$  dans (6.252) il vient

$$\int_{\Omega} K_H^*(x) \nabla W_H^* \cdot \nabla W_H^* \, dx = - \int_{\Omega} K_H^*(x) \nabla W_H^* \cdot \nabla Z \, dx + \int_{\Gamma_N} W_H^* g_N \, d\sigma + \int_{\Omega} f W_H^* \, dx \quad (6.253)$$

De (6.253) on obtient que  $W_H^*$  demeure dans un borné fixe de  $H_{0,\Gamma_D}^1(\omega)$ , muni de la semi-norme de  $H_0^1(\omega)$ . Par conséquent il existe une fonction  $W_0$  de  $H_{0,\Gamma_D}^1(\omega)$  telle que

$$W_H^* \xrightarrow{H_{0,\Gamma_D}^1(\omega)} W_0 \quad \text{faible} \quad (6.254)$$

Par ailleurs on a

$$\|K_H^* \nabla W_H^*\|_{0,\Omega} \leq C \quad (6.255)$$

d'où il existe une fonction  $q$  de  $(L^2(\Omega))^d$  telle que

$$K_H^* \nabla W_H^* \xrightarrow{(L^2(\Omega))^d} q \quad \text{faible} \quad (6.256)$$

De (6.254) on en déduit

$$\int_{\Omega} K(x) \nabla (W_H^* - W_0) \cdot \nabla \varphi \, dx \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \quad \forall \varphi \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) \quad (6.257)$$

D'autre part en utilisant le théorème 6.7.1 on peut écrire

$$\int_{\Omega} [K_H^*(x) - K(x)] \nabla W_H^* \cdot \nabla \varphi \, dx \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \quad \forall \varphi \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) \quad (6.258)$$

A partir de (6.257) et (6.258) on obtient

$$\int_{\Omega} K_H^*(x) \nabla W_H^* \cdot \nabla \varphi \, dx \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_{\Omega} K(x) \nabla W_0 \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) \quad (6.259)$$

ce qui permet ainsi que le théorème 6.7.1 de passer à la limite dans (6.252) et d'avoir

$$\int_{\Omega} K(x) \nabla (W_0 + Z) \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_N} v g_N \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) \quad (6.260)$$

Or la solution du problème (6.251) est unique donc

$$W_0 \equiv W \quad (6.261)$$

En utilisant (6.250), (6.254) et (6.261) on obtient finalement  $U_H^* \xrightarrow{H^1(\Omega)} U$ .

2<sup>ème</sup> étape : on montre que  $K_H^* \nabla U_H^* \xrightarrow{(L^2(\Omega))^d} K \nabla U$  faiblement.

Pour tout vecteur  $\vec{\psi}$  de  $(L^2(\Omega))^d$  on considère

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [K_H^*(x) \nabla U_H^* - K(x) \nabla U] \vec{\psi} \, dx &= \int_{\Omega} [K_H^*(x) - K(x)] \vec{\psi} \cdot \nabla U_H^* \, dx \\ &+ \int_{\Omega} K(x) \vec{\psi} \cdot \nabla (U_H^* - U) \, dx \end{aligned} \quad (6.262)$$

De (6.262) on obtient la majoration suivante

$$\left| \int_{\Omega} [K_H^*(x) \nabla U_H^* - K(x) \nabla U] \vec{\psi} \, dx \right| \leq C \left\| [K_H^* - K] \vec{\psi} \right\|_{0,\Omega} + \left| \int_{\Omega} K(x) \vec{\psi} \cdot \nabla (U_H^* - U) \, dx \right| \quad (6.263)$$

Or en utilisant le théorème 6.7.1 et le résultat de la première étape il vient que le second membre de (6.263) tend vers zéro ce qui implique

$$K_H^* \nabla U_H^* \xrightarrow{(L^2(\Omega))^d} K \nabla U \quad \text{faible.} \quad (6.264)$$

3<sup>ème</sup> étape : Montrons que la sous suite  $U_H^* \xrightarrow{H^1(\Omega)} U$  fortement.

On a

$$\begin{aligned} \lambda_1 |U_H^* - U|_{1,\Omega}^2 &\leq \int_{\Omega} K_H^*(x) \nabla (U_H^* - U) \cdot \nabla (U_H^* - U) \, dx = \int_{\Omega} K_H^*(x) \nabla U_H^* \cdot \nabla (U_H^* - U) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} K_H^*(x) \nabla U_H^* \nabla U \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} K_H^*(x) \nabla U \nabla U \, dx \end{aligned} \quad (6.265)$$

En utilisant le problème (6.252) il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K_H^*(x) \nabla (U_H^* - U) \cdot \nabla (U_H^* - U) \, dx &= \int_{\Omega} f(U_H^* - U) \, dx - \int_{\Omega} K_H^*(x) \nabla U_H^* \nabla U \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_N} (U_H^* - U) g_N \, d\sigma + \int_{\Omega} K_H^*(x) \nabla U \nabla U \, dx \end{aligned} \quad (6.266)$$

D'où en passant à la limite on obtient que le second membre de (6.266) tend vers zéro quand  $H \rightarrow 0$ , ce qui implique

$$U_H^* \xrightarrow{H^1(\Omega)} U \quad \text{fort} \quad (6.267)$$

4<sup>ème</sup> étape : on montre que  $K_H^* \nabla U_H^* \xrightarrow{(L^2(\Omega))^d} K \nabla U$  fortement.

De l'inégalité

$$|K_H^* \nabla U_H^* - K \nabla U| \leq |K_H^* \nabla U_H^* - K \nabla U_H^*| + |K \nabla U_H^* - K \nabla U| \quad (6.268)$$

on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |K_H^*(x) \nabla U_H^* - K(x) \nabla U|^2 \, dx &\leq 2 \int_{\Omega} |K_H^*(x) \nabla U_H^* - K(x) \nabla U_H^*|^2 \, dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} |K(x) \nabla U_H^* - K(x) \nabla U|^2 \, dx \end{aligned} \quad (6.269)$$

Par conséquent comme  $\|\nabla U_H^*\|_{0,\Omega}$  est borné on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |K_H^*(x) \nabla U_H^* - K(x) \nabla U|^2 \, dx &\leq 2C \|K_H^* - K\|_2^2 \\ &\quad + 2C \|\nabla U_H^* - \nabla U\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned} \quad (6.270)$$

Or d'après le théorème 6.7.1 et la 3<sup>ème</sup> étape, le second membre de (6.268) converge vers zéro lorsque  $H \rightarrow 0$  □.

## 6.9 Estimations d'erreurs

Une estimation de l'erreur est nécessaire afin de pouvoir apporter des informations sur la précision des résultats obtenus. Certains travaux ont déjà été effectués sur le sujet

notamment par Zohdi et al. [88] pour modéliser des structures élastiques hétérogènes en utilisant des modèles hiérarchiques. Cette idée a été reprise par Hersvik and Espedal [42] pour effectuer une mise à l'échelle hiérarchique adaptative d'un réservoir hétérogène. Nous l'adaptions aux cas des méthodes de mises à l'échelle développées au chapitre 5. Soit une matrice  $A \in M(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$  on rappelle les définitions des normes  $\|\cdot\|_{A,\Omega}$  et  $|||\cdot|||_{A,\Omega}$  définies par :

$$\begin{aligned} \|u\|_{A,\omega} &= \left( \int_{\omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla u \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H^1(\omega) \\ |||\vec{q}|||_{A,\omega} &= \left( \int_{\omega} A(x) \vec{q} \cdot \vec{q} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \vec{q} \in (L^2(\omega))^d. \end{aligned} \quad (6.271)$$

**Théorème 6.9.1** *Sous les hypothèses du théorème 6.8.1 on a l'estimation suivante :*

$$\|U - U^*\|_{K,\Omega} \leq |||\mathcal{T}^* \nabla U^*|||_{K,\Omega} \quad (6.272)$$

où

$$\mathcal{T}^* = I - K^{-1} K_H^*. \quad (6.273)$$

Démonstration :

Les problèmes (6.247) s'écrivent sous forme variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} U \in H^1(\omega) \\ \int_{\Omega} K(x) \nabla U \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_N} v g_N \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\omega) \\ U = g_D \quad \text{sur } \Gamma_D \end{array} \right. \quad (6.274)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} U_H^* \in H^1(\omega) \\ \int_{\Omega} K_H^*(x) \nabla U_H^* \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_N} v g_N \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\omega) \\ U_H^* = g_D \quad \text{sur } \Gamma_D \end{array} \right. \quad (6.275)$$

La formulation variationnelle (6.275) se réécrit sous la forme suivante

$$\int_{\Omega} K(x) \nabla U_H^* \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} [K(x) - K_H^*(x)] \nabla U_H^* \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Gamma_N} v g_N \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\omega) \quad (6.276)$$

En utilisant (6.274) on a

$$\int_{\Omega} K(x) \nabla U_H^* \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} [K(x) - K_H^*(x)] \nabla U_H^* \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} K(x) \nabla U \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\omega) \quad (6.277)$$

En prenant  $v = (U - U_H^*)$  on obtient

$$\int_{\Omega} K(x) \nabla (U - U_H^*) \cdot \nabla (U - U_H^*) \, dx = - \int_{\Omega} [K(x) - K_H^*(x)] \nabla U_H^* \cdot \nabla (U - U_H^*) \, dx \quad (6.278)$$

c'est à dire

$$\|U - U_H^*\|_{K,\Omega}^2 \leq - \int_{\Omega} [K(x) - K_H^*(x)] \nabla U_H^* \cdot \nabla (U - U_H^*) \, dx \quad (6.279)$$

Ce qui s'écrit encore

$$\|U - U_H^*\|_{K,\Omega}^2 \leq - \int_{\Omega} K^{\frac{1}{2}}(x) K^{-1}(x) [K(x) - K_H^*(x)] \nabla U_H^* \cdot K^{\frac{1}{2}}(x) \nabla (U - U_H^*) \, dx \quad (6.280)$$

d'où

$$\|U - U_H^*\|_{K,\Omega}^2 \leq - \int_{\Omega} K^{\frac{1}{2}}(x) [I - K^{-1}(x) K_H^*(x)] \nabla U_H^* \cdot K^{\frac{1}{2}}(x) \nabla (U - U_H^*) \, dx \quad (6.281)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient

$$\|U - U_H^*\|_{K,\Omega}^2 \leq \left[ \int_{\Omega} K^{\frac{1}{2}}(x) \mathcal{T}^* \nabla U_H^* \cdot K^{\frac{1}{2}}(x) \mathcal{T}^* \nabla U_H^* \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\Omega} K^{\frac{1}{2}}(x) \nabla (U - U_H^*) \cdot K^{\frac{1}{2}}(x) \nabla (U - U_H^*) \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.282)$$

i.e.

$$\|U - U_H^*\|_{K,\Omega}^2 \leq \| \mathcal{T}^* \nabla U_H^* \|_{K,\Omega} \|U - U_H^*\|_{K,\Omega} \quad \square. \quad (6.283)$$

**Remarque 6.9.2** La relation (6.272) donne une estimation de l'erreur que l'on commet lorsqu'on calcule le champ de pression sur un gisement  $\Omega$  dont les perméabilités absolues ont été mise à l'échelle. Une "bonne" méthode de mise à l'échelle consisterait alors à minimiser cette erreur. L'interprétation de l'estimation (6.272) conduit à considérer la fonctionnelle suivante :

$$J(K^*) = \int_{\Omega} [K(x) - K^*(x)] \nabla U_H^* \cdot \nabla U_H^* \, dx + \int_{\Omega} [K^{-1}(x) - (K^*(x))^{-1}] Q^* \cdot Q^* \, dx \quad (6.284)$$

où  $Q^* = K^* \nabla U^*$ . On constate que la minimisation de cette fonctionnelle ne nécessite pas la résolution du problème fin comme dans la méthode des moindres carrés pondérés rappelée au chapitre 5. Néanmoins dans (6.284) on ne privilégie pas la vitesse par rapport à la pression ou inversement, contrairement à la méthode des moindres carrés pondérés qui est basée sur la vitesse. C'est un compromis entre ces deux quantités qui est suggéré par (6.272).

# Chapitre 7

## Tests numériques

Dans ce chapitre on teste numériquement sur des exemples 2D la méthode de mise à l'échelle basée sur la minimisation de la somme des écarts des énergies. C'est à dire que l'on résout le problème :

$$\inf_{H \in M(h,a,\omega)} I_{\mathcal{D}}(H) \quad \text{avec} \quad I_{\mathcal{D}}(H) = \sum_{i,j=1}^m [E_{ij}^D(H) - E_{ij}^D(K)]^2 \quad (7.1)$$

où  $E_{ij}^D(H)$  [resp.  $E_{ij}^D(K)$ ] est donné par (5.33) [resp. (5.30)].

Pour des conditions aux limites générales on cherche un tenseur équivalent en appliquant l'algorithme de calcul effectif qui a été présenté au chapitre 5. Une procédure d'optimisation de la librairie IMSL est utilisée pour résoudre le problème (7.1) et le gradient de la fonctionnelle  $I_{\mathcal{D}}(\cdot)$  est calculé à l'aide de la proposition 5.9.18. Les résultats issus de cette méthode sont alors comparés avec ceux des méthodes classiques. On montre numériquement que le tenseur équivalent obtenu par la méthode de minimisation des énergies dépend des conditions aux limites appliquées aux problèmes locaux. On calcule enfin pour différents taux d'agrégation un tenseur équivalent et l'on commente les résultats obtenus.

### 7.1 Introduction

Dans les deux chapitres précédents nous avons construit une méthode permettant de calculer un tenseur équivalent, pour des conditions aux limites quelconques appliquées aux problèmes locaux. Une des particularités de cette approche est qu'elle conduit à des algorithmes effectifs : la mise à l'échelle de la perméabilité absolue est faite en résolvant un problème d'optimisation. Ce dernier est résolu en utilisant une procédure d'optimisation non-linéaire avec contraintes de la librairie IMSL. D'autre part une méthode d'éléments finis mixtes hybrides est employée pour résoudre les problèmes locaux. L'algorithme de

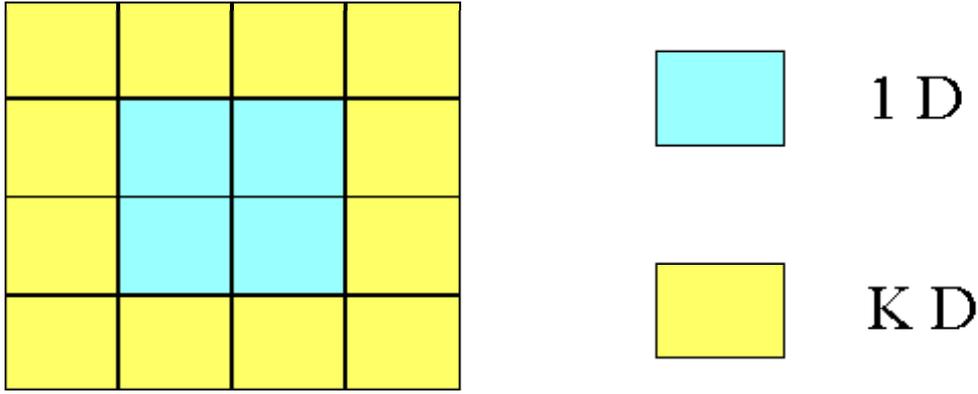


Figure 7.1: Distribution de la perméabilité absolue

calcul mis au point dans le chapitre 5 est alors validé numériquement sur des exemples 2D. Afin de pouvoir comparer nos résultats avec ceux obtenus par les méthodes de mise à l'échelle classiques, on traite dans un premier temps l'exemple du domaine symétrique pour lequel les résultats des méthodes standards ont été présentés dans le chapitre 3. Pour un choix de conditions aux limites données on teste ainsi l'algorithme permettant d'obtenir un tenseur qui annule la fonctionnelle objectif et qui sera par définition le tenseur équivalent. Dans ce chapitre on se restreint à l'étude numérique de la fonctionnelle coût  $I_{\mathcal{D}}(\cdot)$ , définie par la somme des écarts des énergies et ceci pour des conditions aux limites de Dirichlet. Lors de la résolution du problème (7.1) on utilise la proposition 5.9.18 qui permet d'avoir une expression explicite du gradient de la fonction coût  $I_{\mathcal{D}}(\cdot)$ .

## 7.2 Domaine symétrique

On considère l'exemple du domaine symétrique (c.f. figure 7.1) dont la perméabilité absolue est donnée par :

$$K(x) = \begin{cases} K I_2 & \text{dans la partie jaune} \\ I_2 & \text{dans la partie bleu} \end{cases} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}_*^+ \quad (7.2)$$

où  $I_2$  est la matrice identité d'ordre 2.

Le domaine est un carré défini pour  $5 \leq x \leq 10$  et  $5 \leq y \leq 10$ . On se propose alors d'étudier l'influence des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} g_1(x, y) = 5x \\ g_2(x, y) = e^{(y-6)} \end{cases} \quad (7.3)$$

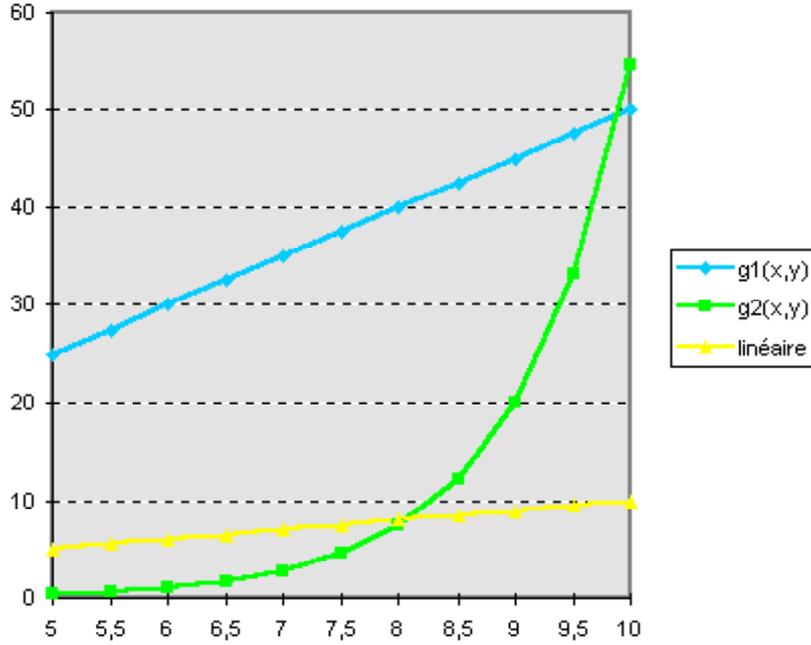


Figure 7.2: Conditions aux limites étudiées

associées à des seconds membres nuls. On a visualisé les représentations de  $g_1$  et  $g_2$  sur la figure 7.2. On peut noter que la fonction  $g_2$  est fortement non-linéaire pour le domaine de validation choisi. A titre comparatif on a tracé en jaune les conditions linéaires. En vue d'étudier l'influence des hétérogénéités de la perméabilité absolue sur les résultats obtenus on considère deux cas d'études.

### **CAS 1: K=10 D**

Le premier cas consiste à prendre  $K = 10D$  dans la distribution de perméabilité. Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau 7.1 et une représentation graphique des valeurs de la fonction coût à chaque itération est donnée dans la figure 7.3.

Il apparaît d'abord que le tenseur calculé par la minimisation de  $I_D(\cdot)$  n'est pas de la forme  $\alpha I_2$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ ) contrairement aux résultats des méthodes classiques qui sont rappelés dans le tableau 7.0 (les notations sont celles du chapitre 3 [tableau 3.2]).

Tableau 7.0: Tenseurs équivalents obtenus par les méthodes classiques

$K$	$K_{HA}^*$	$K_{GE}^*$	$K_{RE}^*$	$K_{CW}^*$	$K_{MC}^*$	$\overline{K_{MC}^*}$	$K_{HP}^*$	$K_{MG}^*$	$K_{ML}^*$	$\overline{K_{ML}^*}$	$K_{AR}^*$
10	3.08	5.62	6.17	6.46	6.47	6.48	6.52	6.70	7.28	7.29	7.75
100	3.88	31.62	54.24	58.49	58.54	58.56	59.23	61.73	69.20	69.22	75.25

Tableau 7.1: Evolution des perméabilités et de la fonction coût (cas 1)

Itération	$K_{11}$	$K_{12}$	$K_{22}$	Val. fonct.
1	5.413	0.00000	5.413	2.20E+07
2	5.413	0.30769	5.647	1.70E+07
3	5.490	0.02749	5.857	1.42E+07
4	6.999	-0.01655	7.457	7.00E+04
5	6.523	0.12742	7.476	2.76E+04
6	6.491	0.02708	7.507	1.33E+04
7	6.342	-0.01791	7.574	2.65E+03
8	6.217	-0.01113	7.616	1.20E+02
9	6.193	-0.00124	7.623	1.12E+00
10	6.192	-0.00014	7.623	1.75E-02
11	6.192	0.00001	7.623	1.31E-04

Pourtant on considère une distribution symétrique de perméabilité (homogène et isotrope) qui est répartie dans un domaine symétrique ce qui conduit généralement à l'obtention d'un tenseur équivalent isotrope. On voit clairement l'influence des conditions aux limites choisies qui ont "cassé" la symétrie du domaine. La condition aux limites  $g_2$  a une influence plus importante que  $g_1$ , ce qui se traduit ici par le fait que le terme  $K_{22}$  est supérieur au terme  $K_{11}$ .

D'autre part il apparaît que l'algorithme converge correctement puisque la fonction coût à une valeur de 2.2 E+07 lors de la première itération pour aboutir à une valeur de 1.31 E-04 au bout de 11 itérations. Lors de cette dernière itération le tenseur équivalent obtenu par la méthode de minimisation est donné par :

$$K^* = \begin{bmatrix} 6.192 & 1.00E - 05 \\ 1.00E - 05 & 7.623 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Donc, en appliquant l'algorithme donné au chapitre 5 et par l'intermédiaire de la procédure d'optimisation, on obtient divers itérés qui permettent de diminuer la valeur de la fonction coût. La comparaison du tenseur équivalent  $K^*$  avec les tenseurs homogénéisés issus des méthodes classiques permet de remarquer que le terme  $K_{11}$  est proche du résultat obtenu par la méthode de renormalisation tandis que le terme  $K_{22}$  est voisin de celui fourni par la moyenne arithmétique. En outre, on constate que le tenseur (7.4) est différent de ceux obtenus par les autres méthodes numériques.

Lors de la première itération, la moyenne arithmétique de la borne inférieure et de la

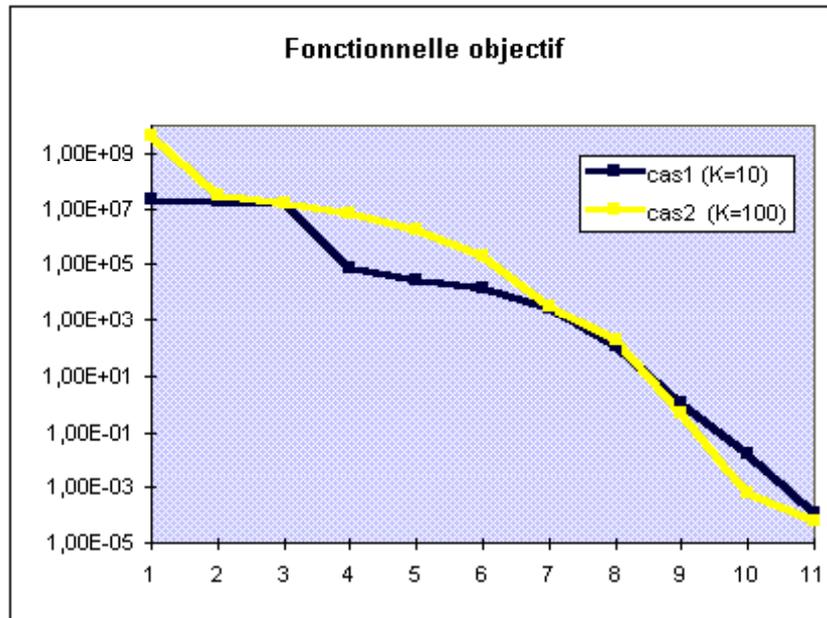


Figure 7.3: Convergence de la fonction coût

borne supérieure de l'ensemble des tenseurs admissibles a été choisie pour définir le tenseur initial. Afin d'étudier l'influence de la valeur du tenseur initial, plusieurs essais ont été effectués. Signalons auparavant que dans l'exemple étudié rien n'assure que la fonction coût soit convexe et par conséquent l'existence de minimum locaux n'est pas exclue. Cependant les résultats numériques montrent que dans tous les cas la méthode a convergé vers le tenseur (7.4).

Le temps CPU nécessaire aux 11 itérations a été de 40 secondes (sur une machine HP), durant lesquelles la procédure d'optimisation a fait appel 16 fois à la fonction coût et 13 fois au calcul du gradient. Ce temps relativement faible est dû tout d'abord, au fait que le calcul du gradient ne nécessite aucun calcul supplémentaire, car les seconds membres des problèmes locaux sont nuls (c.f. proposition 5.9.18). Ensuite, la résolution des problèmes locaux pour les tenseurs constants, fournis par la procédure d'optimisation, est peu coûteuse en temps de calcul.

### **CAS 2: K=100 D**

On effectue exactement la même expérience qui a été décrite précédemment mais on prend cette fois  $K=100 D$  dans la distribution de perméabilité. Les résultats obtenus aux cours des itérations sont repris dans le tableau 7.2. Il a fallu à nouveau 11 itérations

Tableau 7.2: Evolution des perméabilités et de la fonction coût (cas 2)

Itération	$K_{11}$	$K_{12}$	$K_{22}$	Val. fonct.
1	39.566	0.00000	39.566	4.72E+09
2	39.566	3.88350	75.250	3.18E+07
3	45.898	-3.88350	74.753	1.51E+07
4	46.472	-0.10601	73.500	6.58E+06
5	50.601	0.60839	72.510	1.88E+06
6	53.576	0.42140	71.463	2.17E+05
7	54.715	0.03863	71.047	3.07E+03
8	54.588	0.00402	71.086	1.89E+02
9	54.564	0.00027	71.087	0.50E+00
10	54.564	-0.00001	71.087	6.82E-04
11	54.564	0.00000	71.087	5.77E-05

pour obtenir le tenseur équivalent  $K^*$  défini par :

$$K^* = \begin{bmatrix} 54.564 & 0. \\ 0. & 71.087 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

et pour lequel la fonction coût  $I_{\mathcal{D}}(K^*)$  est nulle. On remarque que le phénomène d'anisotropie, présenté dans le cas n°1, est accentué dans cet exemple là. Par conséquent l'influence des conditions aux limites, appliquées aux problèmes locaux, est plus importante lorsque le domaine à homogénéiser contient de fortes hétérogénéités.

Par ailleurs, la convergence de l'algorithme est quasiment identique au cas n°1 ce qui implique que ce dernier est indépendant des hétérogénéités du domaine. Le terme  $K_{11}$  du tenseur équivalent (7.5) est très proche de la valeur trouvée par la méthode de renormalisation. Par contre le terme  $K_{22}$  n'est obtenu par aucune des méthodes classiques. Pour ce cas là encore, plusieurs choix de tenseur initial ont été testés. Comme dans le cas précédent l'algorithme a toujours convergé vers le tenseur équivalent  $K^*$  donné par (7.5) bien que la convexité de la fonctionnelle ne soit pas assurée.

### 7.3 Influence du taux d'agrégation

Dans l'exemple du paragraphe précédent le tenseur équivalent  $K^*$  a été calculé avec les conditions aux limites (7.3) appliquées à la cellule de base décrite par la figure 7.1. On

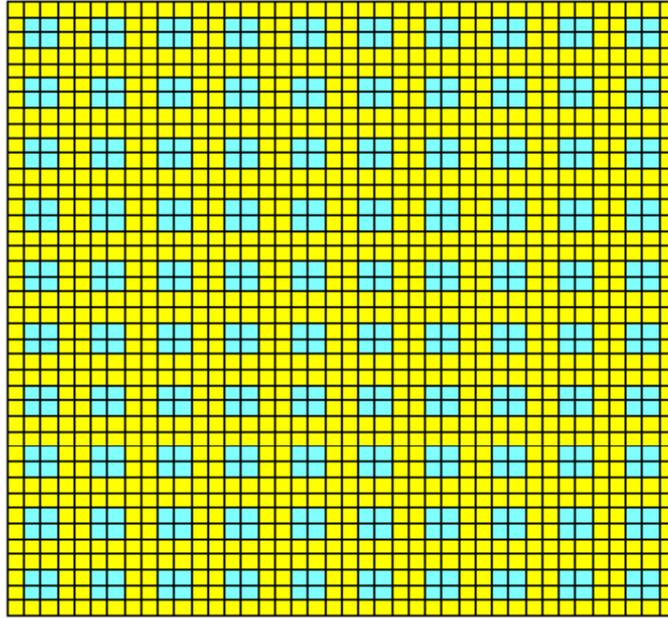


Figure 7.4: Domaine 10\*10

étudie maintenant l'influence de ces conditions aux limites lorsque le tenseur équivalent est calculé sur un domaine périodique constitué de plusieurs cellules de base. Plus précisément on cherche à calculer avec l'algorithme du chapitre 5 un tenseur équivalent sur tout le domaine décrit par la figure 7.4 auquel on applique les conditions aux limites (7.3). Dans ce cadre particulier, qui correspond à un cas périodique, on connaît le tenseur équivalent exact. Celui-ci est donné par la théorie de l'homogénéisation périodique dont le résultat est ici :

$$K_{HP}^* = \begin{bmatrix} 6.52 & 0. \\ 0. & 6.52 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

On examine en premier lieu les résultats obtenus par la méthode de minimisation de l'énergie sur le domaine carré défini pour  $5 \leq x \leq 10$  et  $5 \leq y \leq 10$  et représenté par la figure 7.4. Ce dernier est constitué par 10 répétitions dans chaque direction de la cellule initiale donnée dans la figure 7.1. Dans la théorie de l'homogénéisation périodique, cela revient à poser  $\varepsilon = 0.1$ . En utilisant le même jeu de conditions aux limites définies par (7.3) et en prenant  $K=10D$  on obtient, après 17 itérations, le tenseur équivalent suivant :

$$K^* = \begin{bmatrix} 6.17 & 4.53E - 06 \\ 4.53E - 06 & 6.20 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

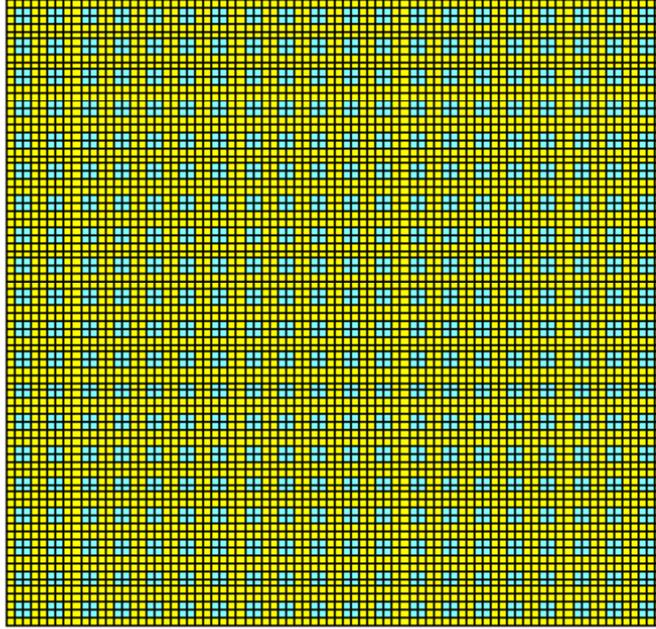


Figure 7.5: Domaine 20\*20

Pour ce tenseur la valeur de la fonctionnelle objectif  $I_{\mathcal{D}}(K^*)$  vaut :  $10^{-4}$ . Bien que ce tenseur est relativement éloigné du tenseur (7.6), on constate déjà une chose intéressante. Contrairement aux résultats obtenus précédemment le tenseur comporte des termes diagonaux quasiment égaux. Ceci s'explique par le fait que l'influence des conditions aux limites s'estompe lorsque la taille du domaine à homogénéiser devient grande par rapport à la taille des hétérogénéités. On voit qu'ici l'effet des conditions aux limites sur le tenseur équivalent obtenu est plus faible. Toutefois on ne retrouve pas le résultat théorique de l'homogénéisation périodique. On décide alors d'examiner le cas décrit par la figure 7.5 et qui correspond à prendre  $\varepsilon = 0.05$  dans l'homogénéisation périodique.

Au bout de 17 itérations on obtient que la fonction coût  $I_{\mathcal{D}}(K^*)$  vaut  $2.60E - 07$  pour le tenseur équivalent suivant :

$$K^* = \begin{bmatrix} 6.35 & -1.89E - 08 \\ -1.89E - 08 & 6.38 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

On constate que ce tenseur est quasiment isotrope et tend vers le tenseur de l'homogénéisation périodique par valeur inférieure. On réitère le processus sur un maillage 40\*40 ( $\varepsilon = 0.025$ ) et on obtient alors :

$$K^* = \begin{bmatrix} 6.44 & 5.27E - 09 \\ 5.27E - 09 & 6.46 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

On retrouve à présent le tenseur de la théorie de l'homogénéisation avec une erreur relative inférieure à 1,3%. Par conséquent pour un maillage suffisamment grand (ici  $40 \times 40$ ) les conditions aux limites n'ont pratiquement plus d'influence sur le résultat final et l'on retrouve alors les résultats classiques.

## 7.4 Conclusions

Nous avons testé numériquement la méthode de mise à l'échelle fondée sur la minimisation de la fonctionnelle énergétique. Un tenseur équivalent peut désormais être calculé pour des conditions aux limites non standard et ces premiers tests ont permis de montrer que l'algorithme décrit au chapitre 5 converge pour des distributions de perméabilités académiques. Il a été également mis en évidence la forte dépendance du tenseur équivalent par rapport aux conditions aux limites appliquées aux problèmes locaux. D'autre part plus les hétérogénéités du domaine s'accroissent et plus l'influence des conditions aux limites s'accroît. Par contre, l'effet des conditions aux bords s'estompe au fur et à mesure que la taille du domaine à homogénéiser devient grande par rapport à la taille des hétérogénéités locales. Enfin la propriété qui permet d'avoir le gradient sans aucun calcul supplémentaire a permis d'aboutir à des temps de calculs satisfaisants.

Toutefois ces exemples numériques préliminaires soulèvent déjà quelques questions qui pourront faire l'objet de travaux supplémentaires. D'abord, pourquoi obtient-on, dans les cas étudiés, l'unicité du tenseur équivalent alors que rien ne garantit que la fonctionnelle minimisée soit convexe. Il semblerait que cela soit dû au fait que les conditions aux limites soit "indépendantes" en un certain sens. Ensuite, le tenseur équivalent qui a été calculé annule dans tous les cas la fonctionnelle objectif. Ceci semble troublant puisqu'il n'y a aucune raison que la valeur de la fonction coût soit toujours nulle pour le minimum obtenu. On constate enfin que les différents tenseurs calculés dans les exemples considérés convergent par valeurs inférieures vers le tenseur donné par l'homogénéisation périodique. Ceci est probablement dû à l'utilisation d'une méthode d'éléments finis mixtes hybrides lors de la résolution des problèmes locaux. Une étude théorique sur l'encadrement du tenseur équivalent, semblable à celle effectuée au chapitre 2 mais en incluant le processus de minimisation mériterait d'être menée. Ceci afin de voir si la propriété est vraie dans le cas général. Bien d'autres questions se posent et sont développées dans les perspectives générales de cette thèse.

# Conclusion générale et perspectives

Avant d'aborder les perspectives de recherche que ce travail suscite, résumons la démarche que nous avons adoptée ainsi que les principaux résultats obtenus.

## Conclusion générale

### 1<sup>ère</sup> partie

Pour des géométries quelconques 3D nous avons montré comment il est possible d'obtenir numériquement des bornes inférieures et supérieures du tenseur équivalent issu de la méthode d'homogénéisation avec des conditions aux bords linéaires. Pour cela nous avons utilisé à la fois une méthode d'éléments finis mixtes et une méthode d'éléments finis conformes pour résoudre les problèmes locaux. La convergence des approximations inférieures et supérieures ainsi que des estimations d'erreurs ont été établis. On montre par ailleurs que cette méthode de mise à l'échelle est stable pour la G-convergence parabolique. Tous ces résultats sont également valables pour la méthode de mise à l'échelle avec des conditions aux bords confinées. Nous avons ensuite réalisé une étude comparative entre les deux méthodes précédemment citées et la théorie de l'homogénéisation périodique pour lesquelles seules les conditions aux limites changent. Nous avons alors pu montrer que les coefficients diagonaux du tenseur équivalent issus de la méthode linéaire, majorent les coefficients diagonaux des tenseurs équivalents obtenus à l'aide des méthodes d'homogénéisations avec les conditions aux bords confinées et périodiques.

Les modèles de gisements comportent très souvent de nombreuses discontinuités géologiques et sont constitués de plusieurs millions de mailles le tout devant être géré au cours de l'étape de mise à l'échelle. Basée sur la méthode de mise à l'échelle avec des conditions aux limites linéaires, nous avons proposé une implémentation permettant de calculer correctement le tenseur équivalent pour des modèles déstructurés 3D. Pour cela un module de maillage, basé sur une triangulation de Delaunay-Voronoi, permettant de construire le maillage éléments finis en respectant l'intersection des maillages géologiques et dynamiques a été développé en collaboration avec la société Simulog. D'autre part pour résoudre les problèmes locaux une méthode d'éléments finis (mixtes et conformes) a été implémentée acceptant de prendre en compte des maillages 2D et 3D déstructurés. De plus un algorithme particulier a été mis en place afin de pouvoir traiter de manière automatique les mailles du modèle dynamique situées près des failles. Tout ceci permet

finaleme nt de traiter les maillages industriels les plus répandus actuellement. Des approximations numériques du tenseur équivalent sont présentées pour des maillages déstructurés 2D et 3D.

Afin de valider les différentes solutions proposées lors de la simulation numériques des écoulements des fluides en milieux poreux, nous avons construit deux cas d'études. Les différentes simulations monophasiques et diphasiques ont été effectuées avec le simulateur industriel Eclipse. Dans le premier cas qui est un exemple bidimensionnel, il a été mis en avant l'avantage d'utiliser des maillages déstructurés par rapport aux maillages orthogonaux lors de l'étape de mise à l'échelle. Dans le second cas d'étude correspondant au traitement d'une partie d'un gisement pétrolier réel, il a été présenté des résultats pour des écoulements monophasiques ainsi que pour des écoulements diphasiques immiscibles et incompressibles. Nous avons obtenu des résultats satisfaisants et ce pour des temps de calcul très acceptables.

### 2<sup>ème</sup> partie

Les méthodes d'homogénéisations numériques classiques sont basées sur la résolution de problèmes locaux auxquels on adjoint des conditions aux limites linéaires, confinées ou bien périodiques. Cependant, ces différentes conditions aux limites peuvent être très éloignées de celles de la réalité. Or si l'on souhaite mieux prendre en compte les conditions réelles du réservoir et étudier le comportement du tenseur équivalent en fonction des conditions aux limites, on est confronté au problème de calculer un tenseur équivalent pour des conditions aux limites quelconques. C'est pourquoi nous avons développé une méthode, basée sur un problème d'optimisation, permettant de calculer un tenseur équivalent pour des conditions aux limites générales appliquées aux problèmes locaux. La perméabilité équivalente est calculée en minimisant une fonctionnelle représentant la somme des écarts des énergies locales et globales. Une seconde approche basée sur la moyenne des vecteurs vitesses de filtration à l'échelle locale et globale a été également étudiée. L'existence d'un minimum au problème d'optimisation ainsi qu'une dérivée explicite ont été obtenus. En s'appuyant alors sur la théorie du contrôle optimal, nous avons construit un algorithme de calcul effectif du tenseur équivalent pouvant s'appliquer sur des maillages déstructurés.

Les méthodes classiques d'homogénéisations possèdent de nombreuses propriétés qui ont été rappelées au cours du premier chapitre. L'existence de telles propriétés pour la méthode développée a, par conséquent, été étudiée. Nous avons d'abord montré qu'en appliquant la méthode proposée avec les conditions aux limites classiques, nous retrouvons la plupart des résultats connus. Ensuite, la méthode s'est révélée être stable pour la G-convergence dans les cas classiques. Par la suite, nous avons alors regardé le prob-

lème de l'unicité du tenseur équivalent. Nous n'avons obtenu que des résultats partiels, qui indiquent que pour des conditions aux limites relativement proches des conditions classiques, on obtient un tenseur équivalent unique. Sur le plan numérique l'algorithme effectif permettant de calculer un tenseur équivalent pour des conditions aux limites quelconques a été implémenté. Les problèmes locaux sont résolus avec une méthode d'éléments finis mixtes hybrides et le problème de minimisation est traité à l'aide d'une procédure d'optimisation non-linéaire avec contraintes. Enfin, quelques essais numériques ont été effectués et mettent en avant que le tenseur équivalent dépend énormément des conditions aux limites appliquées aux problèmes locaux.

## **Perspectives**

La première partie de ce travail a consisté à la mise en place au sein de la société Elf Exploration Production d'un code numérique de gisement, permettant de réaliser la mise à l'échelle des modèles de réservoirs comportant plusieurs millions de mailles et ce, pour des géométries complexes 3D. Afin de faciliter le travail de l'ingénieur réservoir, l'étape suivante consiste à intégrer ce programme dans un logiciel muni d'une interface conviviale. Par ailleurs, le développement d'un outil graphique permettant de valider les résultats obtenus semble nécessaire.

Dans la deuxième partie, nous avons mis au point une méthode de mise à l'échelle permettant de prendre en compte des conditions aux limites quelconques. Divers résultats ont été obtenus, cependant, afin de compléter le travail réalisé, il nous semble intéressant d'envisager les trois thèmes de recherche suivants :

### **1. Travaux théoriques**

Au vu des premiers résultats numériques, il semble que l'on ait unicité du tenseur équivalent, pour des conditions aux limites générales respectant un certain critère "d'indépendance" (à définir). Ce constat, s'il est confirmé, mériterait une étude théorique plus approfondie.

Dans ce travail de thèse, la méthode de mise à l'échelle élaborée prend en compte sans distinction les différentes conditions aux limites. C'est-à-dire que l'on affecte en quelque sorte le même poids aux conditions aux limites sans rechercher de priorité. Or, pour diverses raisons, il se peut qu'une condition aux limites soit plus importante que les autres c'est pourquoi une étude du problème de minimisation au sens de Pareto pourrait être envisagée.

Un autre axe de recherche serait de poursuivre le travail dans le cadre de fluides multiphasiques en introduisant les courbes de perméabilités relatives dans le problème d'optimisation.

## 2. Calculs numériques

Bien que les premiers résultats sur le plan numérique soient encourageants, il est indéniable qu'il faille pousser plus en avant les tests numériques, notamment au travers d'exemples sur des géométries déstructurées. Il nous semble également important d'implémenter l'approche basée sur le vecteur vitesse, d'étudier la résolution du problème de minimisation pour des tenseurs diagonaux permettant ainsi une généralisation de la méthode confinée et enfin d'envisager le cas tridimensionnel.

## 3. Utilisation de la méthode

Les conditions aux limites générales peuvent désormais être prises en compte. Il s'agit maintenant, de savoir comment elles peuvent être utilisées au mieux pour des problèmes industriels. Une première approche consisterait à effectuer pour un fluide monophasique la simulation du modèle géologique permettant ainsi de connaître la pression en tout point du gisement. A partir de cette information, il suffirait alors d'appliquer simplement la méthode sur chaque maille dynamique. D'autres stratégies bien plus sophistiquées peuvent également être envisagées.



# Bibliographie

- [1] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**, pp. 1482–1518, 1992.
- [2] B. Amaziane, Applications des techniques d’homogénéisation aux écoulements diphasiques incompressibles en milieu poreux, Thèse de l’Université Claude Bernard, Lyon I, 1988.
- [3] B. Amaziane, A. Bourgeat, and J. Koebbe, Numerical simulation and homogenization of two-phase flow in heterogeneous porous media, *Transport in Porous Media*, **6**, pp. 519–547, 1991.
- [4] B. Amaziane, T. Hontans, and J. Koebbe, Equivalent permeability and simulation of two-phase flow in heterogeneous porous media, submitted to *Computational Geosciences*, 1997.
- [5] B. Amaziane, T. Hontans, P. Terpolilli, and P. Tessier, Permeability upscaling for flexible grids using flux methods, *Proceedings of 6th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, Peebles, Scotland, 1998.
- [6] H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, Pitman, Boston, 1984.
- [7] A. Badaea, and A. Bourgeat, Homogenization of two phase flow through randomly heterogeneous porous media. In A. Bourgeat, C. Carasso, S. Luckhaus, and A. Mikelić, editors, *Mathematical Modelling of flow through Porous Media*, World Scientific, pp. 44-58, Singapoure, 1995.
- [8] A. Badaea, and A. Bourgeat, Numerical Simulations by Homogenization of two phase flow through randomly heterogeneous porous media, in *Modeling and Computation in Environmental Sciences*, *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, vol. 59, Vieweg Pub., Brannschweig, pp. 13-24, 1997.

- [9] J. W. Barker, and S. Thibeau, A critical review of the use of pseudo relative permeabilities for upscaling, SPE 35491, pp. 109-117, 1996.
- [10] A. Bamberger, Approximation des coefficients d'opérateurs elliptiques stable pour la G-convergence, Publications du Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique, N° MAP/15, 1977.
- [11] A. Bendali, N. Raynaud, and J. M. Thomas, New decomposition of shape spaces of mixed finite element methods, Appl. Math. Lett., vol. 9, No 1, pp33-38, 1996.
- [12] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou, Asymptotic analysis for periodic structures, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [13] Ø. Bøe, Analysis of an upscaling method based on conservation of dissipation, Transport in Porous Media, 17, pp. 77–86, 1994.
- [14] J. F. Bourgat et A. Dervieux, Méthode d'homogénéisation des opérateurs à coefficients périodiques : étude des correcteurs provenant du développement asymptotique, INRIA, Rapport de Recherche N°278, 1978.
- [15] A. Bourgeat, Homogenized behavior of two-phase flow in naturally fractured reservoirs with uniform fractures distribution, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 47, pp. 205–216, 1984.
- [16] A. Bourgeat, M. Quintard et S. Whitaker, Eléments de comparaison entre la méthode d'homogénéisation et la méthode de prise de moyenne avec fermeture, Compte Rendus Acad. Sci. Paris, t. 306, série II, pp. 463-466, 1988.
- [17] A. Bourgeat, A. Mikelić, and S. Wright, Stochastic two-scale convergence in the mean and applications. J. reine angew. Mth., 456, pp. 19-51, 1994.
- [18] A. Bourgeat and A. Hidani, Effective model of two-phase flow in a porous medium made of different rock types, Applicable Analysis, 58, pp. 1-29, 1995.
- [19] F. Brezzi and M. Fortin, Mixed and hybrid finite element methods, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [20] W. T. Cardwell, and R. L. Parsons, Average permeabilities of heterogeneous oil sands, Trans. Am. Inst. Mining. Met. Pet. Eng., pp. 34-42. 1945.
- [21] G. Chavent, Analyse fonctionnelle et identification de coefficients répartis dans les équations aux dérivées partielles, Thèse de la Faculté des Sciences de Paris, 1971.

- [22] G. Chavent and J. Jaffré, *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [23] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [24] B. Corre, R. Eymard et A. Pfertzel, *Homogénéisation par méthodes variationnelles : composition de perméabilités absolues*, Rapport Interne Elf Aquitaine Production, 1988.
- [25] B. Corre, *Techniques d'homogénéisation. Homogénéisation des perméabilités absolues - Composition des perméabilités relatives*, Rapport Interne Elf Aquitaine Production, EP/S/PRO/GTS/BC/91.065, 1991.
- [26] G. Dagan, *Models of groundwater flow in statistically homogeneous porous formations*, *Water Resour. Res.*, 15(1), pp. 107-121, 1981.
- [27] G. Dal Maso, *An introduction to  $\Gamma$  convergence*, Birkhäuser, 1993.
- [28] L. J. Durlofsky and E. Y. Chung, *Effective permeability of heterogeneous reservoirs regions*, in *2nd European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, D. Guérillot, O. Guillon, eds, Editions Technip, Paris, pp. 57-64, 1990.
- [29] L. J. Durlofsky, *Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media*, *Water Resour. Res.*, 27, pp. 699-708, 1991.
- [30] J. Dvořák, *A reliable numerical method for computing homogenized coefficients*, MAT-Report 31, Mathematical Institute, Danish Technical University, 1994.
- [31] *Eclipse 99, Reference Manuel*, Geoquest, 1999.
- [32] M. S. Espedal and O. Saevarid, *Upscaling of permeability based on wavelet representation*, *Proceedings of the 4th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, Røros, Norway, 7-10 june 1994.
- [33] S. Gaiffe, *Unstructured meshes for complex wells*, *Proceedings of the 6th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, Peebles, Scotland, 1998.
- [34] T. Gallouët and D. Guérillot, *An optimal method for averaging the absolute permeability*, *Proceedings of the Third International Reservoir Characterization Technical Conference*, Tulsa, Oklahoma, 3-5 Nov. 1991.

- [35] T. Gallouët and D. Guérillot, Average heterogeneous porous media by minimisation of the error in the flow rate, Proceedings of the 4th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Røros, Norway, 7-10 june 1994.
- [36] Y. Gautier, and B. Noetinger, Preferential flow paths detection for heterogeneous reservoirs using a new renormalization technique, Proceedings of the 4th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Røros, Norway, 7-10 june 1994.
- [37] V. Girault and P. A. Raviart, Finite element methods for Navier-Stokes equations, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [38] P. Grisvard, Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, 1985.
- [39] D. Guérillot, An integrated model for computer aided reservoir description : from outcrop study to fluid flow simulations. Revue de l'IFP, vol. 45, n°1, 1990.
- [40] Kirkpatrick, Percolation and conduction, Rev. of modern physics, 45(4), pp. 574-588, 1973.
- [41] H. H. Haldorsen, and L. W. Lake, A new approach to shale management in field-scale models, SPEJ, pp. 447-452, 1984.
- [42] K. J. Hersvik and M. S. Espedal, Adaptive hierarchical upscaling of flow in heterogeneous reservoirs based on a posteriori error estimate, Computational Geosciences, 00, pp. 1-26, 1998.
- [43] Homog version 2.8, Logiciel interne Elf Exploration Production, manuel d'utilisation, 1998.
- [44] T. Hontans, Extension des techniques d'homogénéisation aux maillages non structurés, Rapport Interne Elf Aquitaine Production, EP/P/PRO/GTS, N° 57/96, 1996.
- [45] U. Hornung, Homogenization and porous media, Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer, 1997.
- [46] P. Indelman, Upscaling of permeability of anisotropic heterogeneous formations 3. Applications, Water Resources Research, vol. 29, No 4, pp. 935-943, 1993.
- [47] P. Indelman and G. Dagan, Upscaling of permeability of anisotropic heterogeneous formations 1. The general framework, Water Resources Research, vol. 29, No 4, pp. 917-923, 1993.

- [48] P. Indelman and G. Dagan, Upscaling of permeability of anisotropic heterogeneous formations 2. General structure and small perturbation analysis, *Water Resources Research*, vol. 29, No 4, pp. 924-934, 1993.
- [49] P. Indelman and G. Dagan, Upscaling of conductivity of heterogeneous formations: general approach and application to isotropic media, *Transport in Porous media*, 12, pp. 161-183, 1993.
- [50] Irap Mapping version 5.0, User Guide, Smedvig Technologies, 1997.
- [51] V.V. Jikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik, Homogenization of differential operators and integral functionals, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [52] A. G. Journel, C. V. Deutsch, and A. J. Desbarats, Power averaging for block effective permeability, SPE 15128, 56th California Regional Meeting of the Society of Petroleum Engineers, Oakland, 1986.
- [53] P. R King, The use of renormalisation for calculating effective permeability, *Transport in Porous Media*, vol. 4, pp.37-58, 1989.
- [54] S. Knapek, Matrix-dependent multigrid homogenization for diffusion problems, *SIAM J. Scient. Comp.*, vol. 20, n°2, pp. 515–533, 1999.
- [55] J. L. Lions, Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod, Gauthier-Villars, 1968.
- [56] J. L. Lions, Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal, *Lecture Notes in Mathematics* 323, Springer-Verlag, 1973.
- [57] G. Le Loc'h, Etude de la composition des perméabilités par des méthodes variationnelles, Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1987.
- [58] P. Lemouzy, Calcul de la perméabilité absolue effective, Note interne n°2685, Institut Français du Pétrole, 1991.
- [59] L. D. Marini, Estimates from above and from below for the homogenized coefficients, *Numer. Math.*, 50, pp. 533-545, 1987.
- [60] C. M. Marle, On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reactions in porous media. *Int. J. Eng. Sci.*, 20, pp. 643-662, 1982.
- [61] G. Matheron, *Eléments pour une théorie des milieux poreux*, Masson Paris, 1967.
- [62] J. Nedelec, Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ , *Numer. Math.*, 13, pp. 887-898, 1992.

- [63] B. F. Nielsen, and A. Tveito, An upscaling method for one-phase flow in heterogeneous reservoirs. A weighted output least squares (WOLS) approach. *Computational Geosciences*, vol. 2, N°2, pp. 93-123, 1998.
- [64] A. Njifenjou, Eléments finis mixtes hybrides duaux et homogénéisation des paramètres pétrophysiques, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1993.
- [65] A. Njifenjou, Expression en termes d'énergie pour la perméabilité absolue effective, *Revue de l'Institut Français du Pétrole*, vol. 49, n° 4, pp. 345, 358, 1993.
- [66] B. Noetinger, The effective permeability of a heterogeneous porous media, *Transport in Porous Media*, vol. 15, pp. 99-127, 1994.
- [67] M. Panfilov, *Macroscopic models of flow through highly heterogeneous porous media*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [68] O. Pironneau, *Optimal shape design for elliptic systems*, Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [69] A. Quarteroni, and A. Valli, *Numerical approximation of partial differential equations*, Springer-Verlag, 1994.
- [70] M. Quintard et S. Whitaker, Ecoulement monophasique en milieux poreux: effet des hétérogénéités locales. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. 6, n°5, pp. 691-726, 1987.
- [71] M. Quintard, and S. Whitaker, Two-phase flow in heterogeneous porous media: the method of large-scale averaging. *Transport in Porous media*, vol. 3, pp. 357-413, 1988.
- [72] P. A. Raviart and J. M. Thomas, A mixed finite element method for second order elliptic problems, *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, I. Galligani, E. Magenes, eds., *Lecture Notes in Math.* 606, Springer-Verlag, New York, pp. 292-315, 1977.
- [73] N. Raynaud, *Approximation par méthode d'éléments finis de problèmes de transmission raides*, Thèse de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, 1994.
- [74] P. Renard and G. de Marsily, Calculating equivalent permeability: a review, *Advances in Water Resources*, Vol. 20, N° 5-6, pp. 253-278, 1997.

- [75] J. E. Roberts and J. M. Thomas, Mixed and hybrid methods, Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds., Vol. II, Finite Element Methods (Part1), North-Holland, Amsterdam, pp. 524-639, 1991.
- [76] R. K. Romeu, Ecoulement en milieux hétérogènes: prise de moyenne de perméabilité en régimes permanent et transitoire, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1994.
- [77] K. Sab, On the homogenization and the simulation of random materials, European Journal of Mechanics A/Solids, 11, n°5, pp. 585-607, 1992.
- [78] E. Sanchez-Palencia, Non-homogeneous media and vibration theory, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [79] Simail version 6.3, Manuel d'utilisation, Simulog, 1997.
- [80] Simup version 2.1, User Guide, Beicip-Franlab, 1999.
- [81] P. Suquet, Plasticité et homogénéisation, Thèse d'Etat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1982.
- [82] N. Svanstedt, G-convergence of parabolic operators, Nonlinear Analysis, 36, pp. 807-842, 1999.
- [83] L. Tartar, Quelques remarques sur l'homogénéisation. In H. Fujita, editor, Proc. of the Japan-France Seminar 1976 "Functional Analysis and Numerical Analysis", pp. 469-481. Japan Society for the Promotion of Sciences, 1978.
- [84] L. Tartar, Incompressible fluid flow in a porous medium - convergence of the homogenization process. in [78] pp. 368-377, 1980.
- [85] P. Terpolilli and T. Hontans, Boundary effects in the upscaling of absolute permeability: a new approach, Proceedings of the 7th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Italy, 5-8 september 2000.
- [86] J. E. Warren, and H. S. Price, Flow in heterogeneous porous media, SPE Journal, vol. 1, pp. 153-169, 1961.
- [87] V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik, G-convergence of parabolic operators, Russian Math. Surveys 36:1, pp. 9-60, 1981.
- [88] T. I. Zohdi, J. T. Oden, and G. J. Rodin, Hierarchical modeling of heterogeneous bodies, Comp. Meth. Appl. Mech. Engr., 138, pp. 273-298, 1996.





## Résumé

### **HOMOGENEISATION NUMERIQUE DE PARAMETRES PETROPHYSIQUES POUR DES MAILLAGES DESTRUCTURES EN SIMULATION DE RESERVOIR**

Dans cette thèse on s'intéresse aux méthodes d'homogénéisations qui nécessitent la résolution de problèmes locaux soumis à des conditions aux limites. Dans la première partie on étudie une méthode avec des conditions aux limites linéaires applicables sur des maillages déstructurés. On montre qu'en utilisant une méthode d'éléments finis mixtes [resp. conformes] on obtient une approximation numérique inférieure [resp. supérieure] du tenseur équivalent. On démontre également un résultat de stabilité pour la G-convergence parabolique. Des approximations numériques du tenseur équivalent calculées sur des domaines 2D et 3D déstructurés sont données ainsi que des simulations d'écoulements monophasiques et diphasiques permettant de valider la méthode.

Dans la deuxième partie on définit une nouvelle méthode de mise à l'échelle permettant de prendre en compte des conditions aux limites quelconques appliquées aux problèmes locaux. Sur des maillages déstructurés le tenseur équivalent est déterminé en minimisant l'écart des énergies dissipées (ou. des vitesses moyennes) locales et globales. On obtient, en utilisant les techniques du contrôle optimal, un algorithme de calcul effectif qui permet de retrouver, pour les conditions aux limites classiques, les résultats bien connus. Des résultats de convergence et des estimations d'erreurs sont établis. On montre enfin que cette méthode est stable pour la G-convergence et quelques essais numériques 2D sont présentés.

## Abstract

### **NUMERICAL HOMOGENIZATION OF PETROPHYSICAL PARAMETERS USING UNSTRUCTURED GRIDS IN RESERVOIR SIMULATION**

Homogenization methods that require to solve local problems subject to boundary conditions are addressed in this thesis. In the first part we study a method with linear boundary conditions which can be applied to unstructured grids. We show that using a mixed [resp. conforming] finite elements method we obtain a lower [resp. upper] numerical approximation of equivalent tensor. We prove also that the resulting equivalent permeability tensor is stable as defined relative to parabolic G-convergence. Numerical approximations of equivalent tensor computed on 2D and 3D unstructured grids are given. Moreover simulations of one-phase and two-phase flow are performed in order to validate the method.

In the second part we define a new upscaling method which can take into account general boundary conditions applied to local problems. The determination of equivalent tensor is made, on unstructured grid, by minimizing the difference of dissipated energies (or averaged velocity) at local and global scale. Using optimal control techniques, we obtain an effective computing algorithm which allows us to find, with classical boundary conditions, the well-know results. Convergence results and errors estimates are presented. We show finally that this method is stable as defined relative to G-convergence and 2D numerical experiments are presented.