



HAL
open science

Map Theory et Antifondation

Thierry Vallée

► **To cite this version:**

Thierry Vallée. Map Theory et Antifondation. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2001. Français. NNT: . tel-00001298

HAL Id: tel-00001298

<https://theses.hal.science/tel-00001298>

Submitted on 5 Apr 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES

Année

N°

THESE
pour l'obtention du Diplôme de
Docteur de l'Université Paris 7

Spécialité : Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique
présentée et soutenue publiquement

par
Thierry VALLEE

le 21 Décembre 2001

”Map Theory” et Antifondation

Directrice : Chantal BERLINE

Rapporteurs : Peter ACZEL et Furio HONSELL

Jury :

Peter ACZEL

Chantal BERLINE

Alain BRETTO

Pierre-Louis CURIEN

Klaus GRUE

Furio HONSELL

Jean-Louis KRIVINE

Denis RICHARD

Résumé

Map Theory est une extension équationnelle du lambda-calcul non-typé conçue par Klaus Grue pour être une fondation commune de l'informatique et des mathématiques. Elle permet en particulier une interprétation complète du calcul des prédicats et de *ZFC*, choisie comme axiomatisation de référence de la théorie des ensembles (*ZFC* désigne dans cette thèse la théorie de Zermelo-Fraenkel sans la fondation). Toutes les notions primitives de la logique du premier ordre et de la théorie des ensembles, valeurs de vérité, connecteurs, quantificateurs, appartenance et égalité, y sont traduites par des termes du lambda-calcul (enrichi de quelques constantes). De plus, Map Theory permet de donner un sens calculatoire immédiat à tous les constructeurs ensemblistes usuels.

La version initiale de Map Theory par K. Grue est *fondée*, en ce sens qu'elle ne considère que les ensembles (ou classes) *bien-fondés*. Nous montrons dans cette thèse qu'il est possible d'élaborer une version *antifondée* de Map Theory qui prenne en compte l'existence des objets *non-bien-fondés*, et permette de raisonner sur ces objets par co-induction. Le lien avec l'informatique théorique est que ce nouveau système ouvre la possibilité d'une représentation des types de données co-inductifs, et de la modélisation des phénomènes et processus circulaires.

Dans la première partie, nous présentons l'axiomatisation MTA de ce nouveau système, et nous montrons que $ZFC+AFA$, où AFA est l'axiome d'Antifondation de Aczel-Forti-Honsell, y est interprétable syntaxiquement. Dans la deuxième partie, nous montrons la consistance de MTA relativement à $ZFC+SI$, où SI est l'axiome exprimant l'existence d'un cardinal fortement inaccessible.

Table des matières

Introduction.	xi
0.1 Map Theory : un synopsis	xi
0.2 Antifondation, <i>AFA</i> et <i>MTA</i>	xiv
0.3 Syntaxe de Map Theory	xvii
0.3.1 Principe de l'interprétation syntaxique de <i>ZFC</i>	xvii
0.3.2 Articulations entre <i>MT</i> , <i>MTF</i> et <i>MTA</i>	xvii
0.4 Sémantique de Map Theory	xviii
0.4.1 κ -pré-modèle	xix
0.4.2 Les "systèmes" comme modèles de <i>ZFC</i>	xix
0.4.3 Le système $(\Phi, \in_\Phi, \sim_\Phi)$	xxii
0.5 Quelques remarques sur <i>MTA</i>	xxii
I Syntaxe	1
1 Map Theory : du λ-calcul au calcul des prédicats	9
1.1 Les axiomes de base de <i>MT</i> : un λ -calcul enrichi	9
1.1.1 Les axiomes de sélection	9
1.1.2 Les réductions et le changement de variables liées	9
1.1.3 Les règles de déduction élémentaires.	9
1.1.4 Les métathéorèmes du λ -calcul	10
1.2 Quantum Non Datur et Calcul Propositionnel	13
1.2.1 La règle de <i>QND</i>	13
1.2.2 Les tautologies au sens de <i>MT</i>	14
1.2.3 L'implication non-monotone	14
1.2.4 Le théorème de déduction	17
1.2.5 Interprétation du calcul propositionnel dans <i>MT</i>	20
1.2.6 Les métathéorèmes du "calcul propositionnel"	25
1.3 Interprétation du calcul des prédicats dans <i>MT</i>	29

1.3.1	Etre un ensemble dans MT	29
1.3.2	La constante ε et les quantificateurs dans MT	29
1.3.3	Les axiomes de quantification	30
1.3.4	Propriétés élémentaires des quantificateurs	31
1.3.5	Les métathéorèmes de quantification	31
1.3.6	Plongement du calcul des prédicats dans MT	34
1.3.7	Théories du 1 ^{er} ordre interprétables dans MT	39
2	Interprétation de ZFC dans Map Theory.	43
2.1	Les axiomes de ZFC	44
2.2	Traduction des formules de ZFC dans MT	45
2.3	Axiomes de construction et Constructeurs ensemblistes.	47
2.3.1	Les axiomes de construction	48
2.3.2	L'axiome $MTA-Infini$	50
2.3.3	ϕ -constructeurs et ϕ -structures	51
2.3.4	Termes simples et Théorème de Construction	53
2.3.5	Les constructeurs ensemblistes	54
2.3.6	ZFC -termes avec ϕ -structures	55
2.3.7	Clôture de Φ par les constructeurs ensemblistes.	59
2.4	Axiomes de l'Egalité et propriétés de \sim et $\dot{\in}$	63
2.4.1	Les axiomes de l'égalité	63
2.4.2	Propriétés de \sim	64
2.4.3	Propriétés de $\dot{\in}$	67
2.5	Démonstrations des axiomes de ZFC dans MTA	68
2.5.1	L'extentionnalité dans MTA	69
2.5.2	La substitutivité dans MTA	72
2.5.3	L'axiome de l'ensemble vide	78
2.5.4	L'axiome de la paire	78
2.5.5	L'axiome de l'union	79
2.5.6	L'axiome de l'infini	79
2.5.7	L'axiome de compréhension	81
2.5.8	L'axiome de l'ensemble des parties	83
2.5.9	L'axiome de remplacement	89
2.5.10	L'axiome du choix	90
2.6	Les métathéorèmes de la "théorie des ensembles".	93
3	Prouvabilité de AFA dans MTA	97
3.1	Présentation de AFA	97
3.2	Représentation syntaxique des couples dans MT	99
3.2.1	Le ϕ -constructeur \langle , \rangle	100

3.2.2	Propriétés des MT -couples standards	100
3.2.3	Compatibilité de \sim avec le constructeur \langle , \rangle	103
3.3	Représentation syntaxique des relations binaires et des fonctions dans MT	104
3.4	Le ϕ -constructeur $Eval$	108
3.5	Les MT -décorations	110
3.6	Axiome de <i>Décoration</i> et prouvabilité de $A\dot{F}A1$	113
3.6.1	Le constructeur $\tilde{\phi}$	113
3.6.2	Le constructeur δ	115
3.6.3	Le ϕ -constructeur $\tilde{\delta}$	121
3.6.4	Le ϕ -constructeur $Décoration(,)$	121
3.6.5	Prouvabilité de $A\dot{F}A1$	122
3.7	Principe de <i>Coinduction</i> et prouvabilité de $A\dot{F}A_2$	125
3.7.1	La MT -bisimulation B	126
3.7.2	Prouvabilité de $A\dot{F}A_2$	129
II Sémantique		133
4 Préliminaires		137
4.1	La sémantique κ -continue	137
4.1.1	Quelques rappels sur les ensembles ordonnés	137
4.1.2	κ -cpos et κ -continuité	138
4.1.3	κ -continuité et κ -topologie	139
4.1.4	κ -sémantique du λ -calcul non-typé	140
4.1.5	Modélisation des théories du λ -calcul	142
4.1.6	Codage des fonctions n -aire	143
4.1.7	Éléments κ -compacts et fonctions en escalier	144
4.1.8	κ -ccpos et κ -domaines de Scott.	145
4.1.9	Opérateurs de points fixes dans les κ -ccpos réflexifs	147
4.1.10	Fonctions κ -compactes	148
4.2	Les pré-modèles de Map Theory	149
5 Satisfaction des axiomes et règles du λ-calcul et du calcul propositionnel		153
6 Satisfaction des axiomes <i>Caract</i> et de Quantification.		157
6.1	Fonctions de choix continues	158
6.2	Satisfaction des axiomes <i>Caract</i> et de <i>Quantification</i>	160

7	Satisfaction des axiomes de l'Égalité	163
7.1	Les relations binaires représentables	163
7.2	L'opération $()^+$	165
7.3	Bisimulations sur les ouverts de la forme G^+	169
7.4	Satisfaction des axiomes de l'Égalité.	171
8	Satisfaction des axiomes de Construction et de MTA-Infini	175
8.1	La $GCPA$	176
8.2	Propriétés de clôture de Φ et Φ^+ et axiomes de <i>Construction</i>	176
8.3	Satisfaction de l'axiome MTA -Infini	179
9	Construction de Φ	183
9.1	L'opération $\mapsto_{()}$	185
9.1.1	L'opération $\mapsto_{()}$ préserve la σ -petitesse.	185
9.1.2	L'opération $\mapsto_{()}$ préserve l'inclusion dans \mathcal{M}_c	185
9.1.3	Rapports entre les opérations $\mapsto_{()}$ et \mapsto	186
9.1.4	Reformulations de la $GCPA$	186
9.2	Le décorateur universel δ_G^ρ	188
9.2.1	L'opérateur \exists_G^ρ	189
9.2.2	L'opérateur $\dot{\epsilon}_G$	189
9.2.3	L'opérateur \langle , \rangle	190
9.2.4	Les opérateurs I_G^ρ , $Feuil_G^\rho$, Enf_G^ρ et Δ_G^ρ	192
9.2.5	L'opérateur δ_G^ρ	195
9.2.6	Le décorateur δ_G^ρ préserve la κ -compacité	198
9.3	Construction de Ψ	199
9.3.1	Les opérations \mathcal{Q}' et D^ρ	200
9.3.2	Construction de Ψ	200
9.3.3	Propriétés de Ψ	201
9.4	Définition de Φ	203
10	Satisfaction de l'antifondation	207
10.1	Satisfaction du principe de <i>Coinduction</i>	207
10.2	Satisfaction de MTA -Deco	209
10.2.1	Les fonctions de choix dépendant.	210
10.2.2	Les opérateurs S^α , P^α et \langle , \rangle^α	211
10.2.3	Les quotients X / \sim_γ sont finalement constants	212
10.2.4	β -antichaines	213
10.2.5	Bisimilarité de $\delta_\beta bx$ et $\delta_\sigma bx$	215
10.2.6	Satisfaction de MTA -Déco	219

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	ix
11 Conclusion	223
A Axiomes et Règles de Map Theory	225
B Théorème de Dédution	229
Bibliographie	233
Index	234

Introduction.

Map Theory est une extension équationnelle du λ -calcul non-typé, due à Klaus Grue et qui se présente comme une fondation commune de l'informatique théorique et des mathématiques. Elle se pose ainsi comme une alternative à la théorie des ensembles dont *ZFC* est choisi comme axiomatisation de référence (*ZFC* désigne ici la théorie de Zermelo-Fraenkel sans la fondation). Initialement, K.Grue développa une version *Fondée* de Map Theory, ne considérant que les objets mathématiques *bien-fondés*. Nous montrons dans cette thèse qu'il est possible de donner une version *Antifondée* de Map Theory qui prenne en compte l'existence des objets *non-bien-fondés*.

Cette thèse se compose de deux parties, l'une syntaxique où l'on développe une axiomatisation de Map Theory antifondée, l'autre où l'on montre la consistance (relative) de cette axiomatisation. Dans cette introduction, nous décrivons tout d'abord rapidement les propriétés essentielles de Map Theory. Ensuite, après avoir introduit l'antifondation, nous ferons un exposé de la syntaxe de Map Theory ainsi qu'une présentation intuitive de ses modèles. Nous terminerons par quelques remarques concernant notre axiomatisation de l'antifondation.

0.1 Map Theory : un synopsis

Map Theory est à la fois un système déductif, qui permet d'exprimer et de montrer des propriétés des objets mathématiques, et un langage où l'on peut effectuer des calculs. Ainsi, il est un des rares (sinon le seul) système non-typé à réunir les propriétés suivantes, que nous commenterons ensuite rapidement :

- C'est une théorie formelle rigoureusement définie écrite dans un langage très simple.
- Elle a un pouvoir expressif suffisant pour fonder les mathématiques classiques.

- Elle admet comme sous-théorie un langage de programmation complet. Elle permet une représentation des ensembles et des opérations sur les ensembles par des termes sur lesquels il est possible d'effectuer directement des calculs.
- Elle est consistante (relativement à $ZFC + SI$, où SI est l'axiome affirmant l'existence d'un cardinal (fortement) inaccessible).
- Elle est aussi simple que les diverses axiomatisations de ZFC

Dans [13] K.Grue donne une axiomatisation de la version fondée de Map Theory, axiomatisation que nous noterons dorénavant MTF . Dans la *première partie* de cette thèse nous donnons une des axiomatisations possibles de l'antifondation dans Map Theory. Cette axiomatisation que nous appellerons MTA , reprend une grande partie des axiomes et règles de MTF . La partie commune à MTF et MTA sera notée MT .

Le langage de MTF comprend, outre un ensemble de variables, l'application et la λ -abstraction propre au λ -calcul pur, 5 constantes $\{\perp, T, if, \varepsilon, \phi\}$. Pour MTA nous rajoutons à cet ensemble une unique constante " \sim ". Ces constantes ont pratiquement toutes une triple signification calculatoire, logique et ensembliste.

Dans [13], Grue montre aussi que toute preuve d'un énoncé dans $ZFC + FA$, où FA est l'axiome de bonne fondation usuel, s'interprète dans MTF en une preuve d'une équation ayant un sens équivalent. Toujours dans la première partie de cette thèse, nous verrons qu'une interprétation analogue est possible de $ZFC + AFA$ dans MTA , où AFA est l'axiome d'antifondation donné par Peter Aczel en [1].

Le fait que Map Theory soit une théorie du λ -calcul pur (non-typé) lui permet en particulier d'être complète du point de vue de la calculabilité (toutes les fonctions récursives sont calculables).

De plus, la constante if qui correspond au $IF...Then...Else$ des langages de programmation, permet de définir à l'intérieur de MT un sous-langage de programmation dans le même esprit que le langage fonctionnel $LISP$ (Cf. [13, p.18]). A cela s'ajoute le fait que les ensembles, les opérations usuelles sur les ensembles (les opérations "paire", "union" etc...) et les formules, sont représentés dans le langage de MTF et MTA par des termes, termes qui sont susceptibles d'être utilisés dans des calculs de β -réduction.

En [6], C. Berline et K. Grue montrent la consistance MTF dans le cadre de la sémantique κ -continue. Cette sémantique est une généralisation, à tout cardinal régulier κ , de la sémantique (ω -)continue de Dana Scott. Nous en ferons une présentation détaillée dans le chapitre *Préliminaires* de la *deuxième partie*. Pour ceux qui sont intéressés par les origines de cette

généralisation, nous renvoyons à l'introduction de [6].

La construction de modèles de MTF est effectuée dans un univers V vérifiant l'existence d'un cardinal inaccessible. Pour cela on exhibe tout d'abord certains κ -modèles du λ -calcul usuel qui sont appelés des κ -pré-modèles. On montre ensuite qu'en supposant $\kappa > \sigma$, pour σ un cardinal inaccessible, on peut construire dans tout κ -pré-modèle \mathcal{M} un sous-ensemble κ -ouvert Φ_F ¹ permettant à \mathcal{M} , via l'interprétation de la constante ϕ par la fonction caractéristique de Φ_F , de satisfaire l'ensemble des axiomes de MTF . Au cours de la deuxième partie de cette thèse, nous montrerons qu'en partant des mêmes κ -pré-modèles, et avec les mêmes hypothèses sur κ , on peut construire dans tout κ -pré-modèle \mathcal{M} un sous-ensemble Φ permettant à \mathcal{M} , via l'interprétation de la constante ϕ par la fonction caractéristique de Φ (et non-plus par celle de Φ_F), de satisfaire l'ensemble des axiomes de MTA .

Dans ces deux constructions l'utilisation d'un inaccessible inférieur à κ est nécessaire pour assurer la κ -continuité des interprétations respectives de ϕ et ε , ainsi que de celle de \sim pour MTA . Remarquons pour clôturer ce paragraphe que Φ_F , muni de relations binaires adéquates, est un modèle de $ZFC + FA$ (Cf [6] Appendice A.3), et que Φ est un modèle de $ZFC + AFA$ (non-publié²).

La théorie MTF est constituée de 17 axiomes et 2 règles (en plus de ceux du λ -calcul), et MTA est constituée de 22 axiomes et 2 règles. Les axiomes sont des équations simples. Parmi eux les Axiomes de Construction, qui expriment essentiellement que Φ_F et Φ sont des structures suffisamment riches pour être des modèles de ZFC , sont au nombre de 11, mais sont tous des instances (équationnelles) d'une unique propriété sémantique de clôture de Φ_F ou Φ (resp. la GCP ou la $GCPA$) Remarquons que MTF et MTA sont des théories plus simples que la théorie initiale (et inconsistante) de Alonso Church (Cf [9], [10] et [11]). Notons ici que la technicité du plongement de Map Theory dans ZFC développée dans la première partie vient, non d'une complexité intrinsèque de Map Theory, mais de ce que cette théorie est basée sur des principes entièrement différents de ceux de ZFC .

¹ Φ_F désigne ici et désignera tout au long de cette thèse l'ensemble noté Φ dans [6].

²La démonstration de ce fait aurait dû se trouver en appendice de cette thèse, mais nous avons dû y renoncer faute de place.

0.2 Antifondation, $AF A$ et $MT A$

Depuis quelques années, on assiste à un renouvellement d'intérêt pour l'*Antifondation* en théorie des ensembles, cet intérêt étant d'ailleurs souvent lié à certains développements de l'informatique théorique. La présentation que nous faisons ici des applications et recherches sur l'antifondation, et en particulier sur l'axiome $AF A$, n'a pas prétention à être exhaustive. Nous nous excusons par avance auprès des chercheurs que nous aurions oubliés de citer.

Plusieurs axiomes d'antifondation avait été formulés en particulier par P. Finsler [12], D. Scott [26] et M. Boffa, mais le plus utilisé en informatique théorique est sans conteste l'axiome $AF A$, introduit par F. Honsell et M. Forti en [15] (sous le nom de \overline{X}_1) et popularisé par P. Aczel en [1]. Remarquons que l'intérêt de P. Aczel pour l'antifondation fut dès l'origine inspiré par des problèmes d'informatique théorique, notamment par les travaux de Robin Milner (Cf [27], [28]) liés au développement de sa théorie mathématique des processus concurrents. Un autre argument fort en faveur de $AF A$ est que cet axiome est le *dual* en un sens très fort de l'axiome de fondation (voir par exemple l'exposé qu'en font J. Rutten et D. Turi en [25]). Nous présentons maintenant brièvement cet axiome. Pour une présentation plus détaillée, nous renvoyons en outre à [1], à [7] et [14]. Nous verrons ensuite certaines applications de $AF A$, puis nous terminerons en disant quelques mots de $MT A$.

Rappelons qu'un graphe est un couple (a, b) d'ensembles tels que b est une relation binaire sur a . L'axiome $AF A$, affirme que tout graphe (a, b) admet une unique *décoration*, autrement dit qu'il existe une unique fonction d telle que pour tout $x \in a$, on ait :

$$d(x) = \{d(x') : (x, x') \in b\}$$

La conséquence principale de cet axiome est l'existence, dans tout univers V de $ZFC + AF A$, d'une classe extrêmement riche d'ensembles non-bien fondés.

Une formulation équivalente et particulièrement intuitive de $AF A$ est donnée par le *Solution Lemma* de Aczel. Il énonce, que tout système d'équations de la forme $(x_i = e_i)_{i \in I}$, où les x_i sont des variables et les e_i des ensembles dont les descriptions utilisent ces variables, admet une unique solution. Par exemple, l'équation $x = \{x\}$ admet une unique solution, "l'auto-singleton" Ω . Autre exemple, l'équation $x = \{\emptyset, x\}$ admet une unique solution que nous noterons Ω' . Dernier exemple, le système $x = \{z, y\}, y = \{y\}, z = \emptyset$ admet une unique solution Ω'' et qui est le seul élément de l'univers vérifiant $\Omega'' = \{\emptyset, \Omega\}$.

Une autre formulation équivalente, dont nous allons nous servir, utilise la notion de *graphe pointé*. Un graphe pointé est une structure $((a, b), x)$, où (a, b) est un graphe et x un élément de a tel que, pour tout $y \in a$, il existe un chemin du graphe (a, b) reliant x à y . L'axiome *AFA* est équivalent à l'affirmation que tout graphe pointé a une unique décoration. Dans ce cas, et pour d la décoration du graphe pointé $((a, b), x)$, on dira que l'ensemble $d(x)$ est *le décorateur* de $((a, b), x)$. L'axiome *AFA* est donc clairement équivalent à affirmer que, pour tout graphe (a, b) et pour tout $x \in a$, il existe un décorateur du sous-graphe pointé $((a_x, b_x), x)$ de $((a, b), x)$ tel que :

$$a_x = \{y \in a : \text{il existe un chemin dans } (a, b) \text{ partant de } x \text{ et arrivant en } y\}$$

De nombreux phénomènes présentent un caractère non-bien fondé : processus bouclant sur eux-mêmes, systèmes de transitions non-déterministes, paradoxes des langues naturelles etc... D'autres encore sont potentiellement infinis, accessibles à une connaissance partielle et progressive, comme les chaînes de caractères, les nombres réels, les séries formelles... Pour définir, modéliser, raisonner sur de tels objets, il est souvent très peu pertinent, voire impossible, d'utiliser les moyens classiques donnés par les principes de *Définition et Raisonnement par Induction*. Cela a amené certains théoriciens de l'informatique comme R. Milner, Bart Jacobs, Jan Rutten, Daniele Turi, Martina Lenisa... à développer une autre approche, plus adaptée, qui consiste à mettre en place et à utiliser les principes duaux des précédents : les principes de *Définition et Raisonnement par Co-Induction*. Très brièvement, en théorie des Catégories, la dualité Induction-Coinduction correspond à la dualité *Algèbre Initiale-CoAlgèbre Finale*, celle-ci est une généralisation de la dualité *Plus Petit Point Fixe-Plus Grand Point Fixe* de la théorie des ensembles. Pour une introduction à ces différentes notions et aux rapports qu'elles entretiennent, nous renvoyons principalement à [20], [25] et à la première partie de [21]. Notons en particulier que Turi et Rutten ont remarqué dans [25] que l'axiome de fondation *FA* équivaut à affirmer que l'univers ensembliste V est une algèbre initiale pour le foncteur $\mathcal{P}_S : \underline{SET} \mapsto \underline{SET}$, où \underline{SET} est la catégorie des classes munies des relations fonctionnelles et où \mathcal{P}_S est défini sur toute classe X par : $\mathcal{P}_S(X) = \{x : x \in V \text{ et } x \subseteq X\}$. De façon duale, ils ont aussi remarqué que *AFA* équivaut à affirmer que V est une coalgèbre finale pour le même foncteur \mathcal{P}_S de \underline{SET} .

Dans le cadre de cette approche coinductive, il paraît naturel d'effectuer certaines modélisations dans des univers satisfaisant *AFA*. Cela permet en particulier de simplifier certaines constructions et démonstrations. Par exemple, les univers de $ZFC + AFA$ sont utilisés dans le cadre des

sémantiques finales pour les langages de programmation. Nous renvoyons en particulier à [21] et [22] pour une introduction aux sémantiques finales et leurs applications.

Outre les applications en informatique théorique, les univers antifondés sont utilisés en théorie des ensembles. Ils permettent de simplifier certaines constructions. On citera en particulier l'utilisation des *hyper-univers* de $ZFC + \overline{X}_1$ en [15] pour démontrer la consistance de $ZFC + GPK$, où GPK est un schéma de compréhension valable pour toute formule généralisée positive et ceci “sans limitation de la taille” de l'ensemble dont on affirme l'existence.

Citons aussi l'utilisation des ensembles non-bien-fondés de Aczel dans l'interprétation des paradoxes des langues naturelles par Jon Barwise, John Etchmendedy et Lawrence Moss en [4] et [5]. Pour une présentation de ces deux ouvrages, nous renvoyons aux revues de D.A. Martin [23] et M. Boffa [8]. Citons aussi l'introduction du système STS de théorie des ensembles par Alexandru Baltag en [2]. Baltag part de l'interprétation de Barwise et Moss qui veut que le fondement intuitif de FAA soit l'identification entre structures et ensembles. La théorie des ensembles est alors une théorie des structures possibles relativement à l'appartenance. La théorie STS systématise cette approche. Elle comprend en particulier un axiome d'antifondation qui généralise l'axiome FAA , utilisant pour cela la logique modale infinitaire pour décrire les “structures”. Cette approche permet aussi de donner une interprétation nouvelle des paradoxes classiques de la théorie des ensembles.

Le système MTA a essentiellement les mêmes avantages que MTF . Il étend la puissance d'expression de Map Theory aux traitements formel des objets non-bien-fondés. Il possède en particulier un Principe de *CoInduction* permettant de formaliser le raisonnement co-inductif sur les ensembles.

D'autre part, l'antifondation semblait naturelle à Map Theory (je dis “semblait” car la perte de certaines “vertus”, comme la représentation syntaxique simple de certains ensembles infinis par *Prim* (sans pouvoir les regagner de manière consistante par un “*Coprim*”) montrerait plutôt le contraire aujourd'hui). En effet, les constructeurs de points fixes (comme par exemple Y le constructeur de point fixe de Curry) permettent de définir très facilement des termes pour lesquels l'interprétation \in_{Φ} de l'appartenance dans Map Theory n'est pas bien fondée. Par exemple, le terme $\Omega =_{def} (Y \lambda f \lambda x. (if\ x\ f\ f))$ vérifie $\Omega \in_{\Phi} \Omega$. En revanche on ne sait actuellement toujours pas s'il est consistant de demander que Ω soit un élément de Φ .

0.3 Syntaxe de Map Theory

Nous donnons tout d'abord le principe général de l'interprétation de *ZFC* dans Map Theory, ensuite nous décrivons comment s'articulent *MT*, *MTF* et *MTA*.

0.3.1 Principe de l'interprétation syntaxique de *ZFC*.

Les seuls moyens d'expression dont dispose Map Theory sont les termes d'un λ -calcul enrichi par les constantes, et le raisonnement équationnel. Toutes les notions utilisées en théorie des ensembles, à savoir les notions logiques de valeur de vérité, de connecteurs et de quantificateurs, ainsi que les notions ensemblistes d'appartenance et d'égalité, sont traduites par des termes de ce λ -calcul. En particulier, le booléen *Vrai* est représenté par une constante "*T*". Le booléen *Faux* est représenté par n'importe quelle abstraction i.e n'importe quel terme de la forme $\lambda x.A$. Il a cependant un représentant canonique qui est $\lambda x.T$ (notons ici, qu'en plus des valeurs de vérité classiques *Vrai* et *Faux*, Map Theory emprunte au λ -calcul une valeur de vérité supplémentaire, l'*Indéterminé*, représenté par une constante " \perp "). Le *Vrai* étant représenté par *T*, l'équation $A = T$ se lit "le terme *A* est vrai".

Le plongement de *ZFC* dans Map Theory consiste alors à montrer que, pour tout théorème (clos) *G* de *ZFC*, l'équation $\dot{G} = T$ est démontrable, où \dot{G} est le terme traduisant *G* dans Map Theory.

Cette façon de procéder rend syntaxiquement explicite l'attribution d'une valeur de vérité à un énoncé, acte qui est implicite dans les différents systèmes logiques (où la vérité d'un énoncé est simplement déduite de sa démontrabilité et de la fiabilité du système). En particulier, cette caractéristique rend possible la démonstration *directe* de la fausseté d'un énoncé. En effet, dans les systèmes logiques habituels il faut passer par la démonstration de $\neg G$, pour montrer que l'énoncé *G* est faux, alors que dans Map Theory il suffit de montrer $\dot{G} = \lambda x.A$, pour un terme *A* quelconque.

0.3.2 Articulations entre *MT*, *MTF* et *MTA*

La théorie *MT* comporte trois groupes d'axiomes. Le premier, dit *du λ -calcul et du calcul des propositions*, englobe les axiomes et règles usuelles de l' $\alpha\beta$ -équivalence. Il comprend de plus les axiomes définissant le comportement des constantes \perp, T, if ainsi qu'une règle dite de *Quartum Non Datur*. Ce premier groupe permet en particulier de plonger le calcul des

propositions dans MT . Un deuxième groupe, dit *du Calcul des Prédicats*, décrit essentiellement le comportement de la constante ε et permet le plongement du calcul des prédicats dans MT . Un troisième groupe, comprend les axiomes dits *de Construction*³. Ces axiomes expriment des propriétés de clôture de “l’univers”, univers représenté syntaxiquement par la constante ϕ (qui joue ainsi un rôle analogue au prédicat *ÊtreUnEnsemble* des théories des classes). Ils sont utilisés dans MTA et MTF pour plonger ZFC dans ces systèmes.

En plus des axiomes et règles de MT , la théorie MTF comporte un axiome de construction *C-Prim* et une règle dite *Principe d’Induction*. Comme son homologue de la théorie des ensemble, cette règle sert de principe de “raisonnement”, mais elle est cependant *strictement plus forte*. En effet, elle sert à montrer les propriétés habituelles de l’égalité dans MTF (réflexivité, symétrie, transitivité). Notons de plus que, inversement à la présentation usuelle où le principe d’induction est donné comme une conséquence de la bonne fondation, cette règle permet de montrer la traduction de FA dans MTF .

En remplacement de *C-Prim*, la théorie MTA comporte un “axiome de l’infini” plus classique dans sa formulation et qui nous est imposé par la non-bonne fondation de certains éléments de Φ ⁴. De plus, le Principe d’Induction de MTF est remplacé par une règle dite *Principe de Co-induction* qui permet de “raisonner” par co-induction dans MTA . D’autre part, MTA comporte un groupe d’axiome dits de *l’Egalité* qui expriment les propriétés habituelles de l’égalité étendues à des “objets” qui ne sont pas des objets de “l’univers”. Cette extension permet de “raisonner” dans MTA sur tout objet qui est “égal” à un objet de “l’univers” sans pour cela en faire partie. En particulier, la démonstration de FA dans MTA utilise des “décorateurs” qui ne sont pas des “objets de l’univers”. Le fait qu’ils aient essentiellement le comportement “d’ensembles” peut cependant être exprimé dans le langage de MTA et donne lieu à un dernier axiome nommé *MTA-Déco*.

0.4 Sémantique de Map Theory

Nous présentons tout d’abord la notion de κ -*pré-modèle* de Map Theory, dont nous avons parlé en Section 0.1. Ensuite, nous introduirons la notion de *système* pour éclairer la manière dont Φ_F et Φ , muni chacun d’une in-

³Notons que nous englobons dans ce groupe, non seulement les axiomes de construction *C-* de K.Grue, mais aussi ses axiomes *Well*1, 2, 3.

⁴Voir Section 2.3.2

terpétation de l'appartenance et de l'égalité, sont des modèles respectifs de $ZFC + FA$ et $ZFC + AFA$.

0.4.1 κ -pré-modèle

Intuitivement, un κ -pré-modèle \mathcal{M} est un ensemble de fonctions monotones, noté \mathfrak{F} , auquel on a rajoutés deux éléments \mathbf{T} et $\perp_{\mathcal{M}}$ qui interprètent respectivement les constantes T et \perp . Cette tripartition de \mathcal{M} correspond aux trois valeurs de vérité de Map Theory *Faux*, *Vrai* et *Indéterminé*. Ainsi \mathfrak{F} est le pendant sémantique de l'ensemble des abstractions du langage (qui comme nous l'avons déjà dit ont pour valeur de vérité le *Faux*). Tout κ -pré-modèle satisfait en particulier les axiomes et règles du λ -calcul et du calcul propositionnel dont nous avons parlé précédemment.

Bien que \mathbf{T} et $\perp_{\mathcal{M}}$ ne soient pas des fonctions, ils ont respectivement le même comportement applicatif que les fonctions constantes à valeur \mathbf{T} et $\perp_{\mathcal{M}}$. Ce comportement est donc défini par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}(\mathbf{T} \mathbf{u}) &= \mathbf{T} \\ (\perp_{\mathcal{M}} \mathbf{u}) &= \perp_{\mathcal{M}}\end{aligned}$$

pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$.

On remarque tout d'abord que, conformément à l'usage en λ -calcul, nous utilisons l'expression $(\mathbf{f}\mathbf{u})$ pour noter le résultat de \mathbf{f} appliqué à \mathbf{u} plutôt que la notation $\mathbf{f}(\mathbf{u})$. En outre, nous utiliserons les caractères gras pour désigner les éléments de \mathcal{M} . De plus, pour tout ensemble $G \subseteq \mathcal{M}$ on définira $\mathbf{u}G =_{def} \{(\mathbf{u}\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in G\}$.

La particularité essentielle que \mathcal{M} emprunte au λ -calcul est que la distinction ontologique entre fonctions et arguments est abolie. En particulier, les éléments de \mathfrak{F} sont, en plus d'être des éléments de \mathcal{M} , des fonctions de \mathcal{M} vers \mathcal{M} . Autrement dit, tout élément de \mathfrak{F} peut être considéré tantôt comme un argument, en tant qu'élément de \mathcal{M} , tantôt comme une fonction de domaine \mathcal{M} . Ceci conjugué à la définition du comportement applicatif de \mathbf{T} et $\perp_{\mathcal{M}}$ on en conclut que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$, où $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M} =_{def} \{u : u\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}\}$. En particulier, l'auto-application est donc définie pour les éléments de \mathcal{M} , et l'écriture $(\mathbf{f} \mathbf{f})$ a un sens.

0.4.2 Les “systèmes” comme modèles de ZFC

Pour la discussion qui suit on se place dans un modèle $(V, \in, =)$ de ZFC . Rappelons que ZFC désigne dans cette thèse la théorie de Zermelo-Fraenkel sans fondation, et correspond donc à la théorie notée ZFC^- par P. Aczel dans [1]. La théorie ZFC^{-e} désignera ZFC moins l'axiome d'Extensionnalité.

Les systèmes sont utilisés dans [1] comme modèle de la théorie des ensembles. Un *système* est défini comme une classe Sys (éventuellement propre) de V munie d'une relation binaire \in_{Sys} , dite "appartenance" au sens du système Sys . On définit pour $\mathbf{u} \in Sys$ la classe $(\mathbf{u})_{Sys} =_{def} \{\mathbf{v} \in Sys : \mathbf{v} \in_{Sys} \mathbf{u}\}$ et on demande que, pour tout $\mathbf{u} \in Sys$, cette classe soit un ensemble. Ce requisit correspond dans les systèmes que nous utiliserons à demander à ce que $(\mathbf{u})_{Sys}$ soit un ensemble de cardinalité inférieure à σ , pour σ un inaccessible. Pour simplifier notre exposé informel, nous summerons ces deux requisits en disant que, dans un système, l'ensemble $(\mathbf{u})_{Sys}$ doit être *petit*. Une condition suffisante pour qu'un système satisfasse les axiomes de ZFC^{-e} est qu'il soit *plein*, autrement dit que, pour tout ensemble $X \subseteq Sys$, il existe $\mathbf{u} \in Sys$ tel que $(\mathbf{u})_{Sys} = X$.

Pour qu'un système plein (Sys, \in_{Sys}) soit un modèle de ZFC , il reste à définir une interprétation de l'égalité qui soit compatible avec l'axiome d'Extensionnalité. Dans le cas où Sys est un système "bien-fondé" il suffit d'interpréter l'égalité par la relation \equiv_{Sys} définie par $\mathbf{u} \equiv_{Sys} \mathbf{v}$ si et seulement si $(\mathbf{u})_{Sys} = (\mathbf{v})_{Sys}$; mais ceci est faux de façon générale.

En effet, une des conséquences de FAA , appelée *Forte Extensionnalité*, est que deux "ensembles" *bisimilaires* doivent être "égaux". Deux ensembles sont bisimilaires s'ils sont liés entre eux par une *bi-simulation*, c'est à dire une relation R telle que, pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Sys$:

"Si $\mathbf{u}R\mathbf{v}$ alors : pour tout $\mathbf{x} \in_{Sys} \mathbf{u}$ il existe $\mathbf{y} \in_{Sys} \mathbf{v}$ tel que $\mathbf{x}R\mathbf{y}$, et pour tout $\mathbf{y} \in_{Sys} \mathbf{v}$ il existe $\mathbf{x} \in_{Sys} \mathbf{u}$ tel que $\mathbf{x}R\mathbf{y}$ "

Nous allons voir sur un exemple très simple que dès que l'on admet des "ensembles non-bien-fondés" dans Sys , l'Extensionnalité et la Forte Extensionnalité doivent être distinguées. Supposons en effet que \mathbf{u}, \mathbf{v} sont deux éléments distincts de Sys tels que : $(\mathbf{u})_{Sys} = \{\mathbf{u}\}$ et $(\mathbf{v})_{Sys} = \{\mathbf{v}\}$. Les deux éléments \mathbf{u}, \mathbf{v} sont donc "non-bien-fondés" au sens de Sys puisque $\mathbf{u} \in_{Sys} \mathbf{u}$ et $\mathbf{v} \in_{Sys} \mathbf{v}$. Maintenant le fait que \mathbf{u} et \mathbf{v} soient distincts, bien que compatible avec l'extensionnalité, contredit la forte extensionnalité. Il est en effet facile de voir que la relation $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v})\}$ est, dans ce cas, une bi-simulation.

On obtient un modèle de la Forte Extensionnalité en interprétant l'égalité par l'union \sim_{Sys} de toutes les bi-simulations sur Sys , qui est en fait la bi-simulation maximale sur Sys , et une relation d'équivalence.

Une fois l'interprétation $=_{Sys}$ de l'égalité fixée (soit \equiv_{Sys} soit \sim_{Sys}), on modifie légèrement la définition de l'appartenance, de manière à conserver l'extensionnalité, en posant : $\mathbf{x} \in'_{Sys} \mathbf{u}$ si et seulement si il existe $\mathbf{y} \in Sys$ tel que $\mathbf{y} \in_{Sys} \mathbf{u}$ et $\mathbf{x} =_{Sys} \mathbf{y}$.

On appellera dorénavant *système extensionnel* tout système

$(Sys, \in_{Sys}, =_{Sys})$ vérifiant l'axiome d'Extensionnalité, autrement dit tout système tel que, pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Sys$, on ait : $(\mathbf{u})_{Sys} = (\mathbf{v})_{Sys}$ ssi $\mathbf{u} =_{Sys} \mathbf{v}$ (remarquons que “ssi” abrégé “si et seulement si”, cette abréviation sera utilisée tout au long de cette thèse).

Un système Sys satisfait *FA* s'il est constitué d'éléments “bien fondés” au sens de Sys , c'est à dire s'il n'existe pas dans Sys de suite infinie $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$ telle que $\dots \mathbf{u}_2 \in_{Sys} \mathbf{u}_1 \in_{Sys} \mathbf{u}_0$. La satisfaction de *AFA* suppose que le système Sys soit non seulement plein mais aussi *complet*. Nous renvoyons à [1, p.33] pour la définition de cette notion. Nous notons simplement ici que la *complétude* du système $(\Phi, \in_\Phi, \sim_\Phi)$, que nous présentons au paragraphe suivant, vient de ce que les κ -pré-modèles de Map Theory sont suffisamment riches pour contenir un opérateur correspondant à chaque opération sur les ensembles. En particulier, ils contiennent un “décorateur universel” capable de décorer (au sens défini plus haut en Section 0.2) tout “graphe pointé” de Φ .

Les guillemets de l'expression “graphe pointé” ci-dessus indique que l'on parle ici des graphes au sens de $(\Phi, \in_\Phi, \sim_\Phi)$. En effet, les interprétations de l'appartenance et de l'égalité dans un système $(Sys, \in_{Sys}, =_{Sys})$ impliquent une interprétation des notions usuelles de la théorie des ensembles qui soit propre à ce système. Par exemple, un “ensemble vide” au sens du système Sys est un élément \mathbf{u} de Sys tel que $(\mathbf{u})_{Sys} = \emptyset$. Une “paire” au sens de Sys un élément $\mathbf{u} \in Sys$ tel que $(\mathbf{u})_{Sys} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, où $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in Sys$. Lorsque ce système est extensionnel, on parle de “l'ensemble vide de Sys ”, de “la paire \mathbf{v}, \mathbf{w} ”, “du couple \mathbf{v}, \mathbf{w} ”. Remarquons que “l'unicité” de ces objets dans Sys est l'unicité modulo $=_{Sys}$. On écrira alors \emptyset^{Sys} , $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}^{Sys}$, $(\mathbf{v}, \mathbf{w})^{Sys}$... pour dénoter ces éléments du système.

Par la suite, dans nos discussions informelles sur le système $S =_{def} (\Phi, \in_\Phi, \sim_\Phi)$, on continuera à employer les guillemets “ ” pour distinguer les paires, couples, fonctions... au sens de S , des paires, couples, fonctions... au sens de de l'univers V . En particulier on écrira parfois “l'univers” pour désigner l'ensemble Φ et “ensembles” pour désigner ses éléments. Comme toutes les notions usuelles de la théorie des ensembles, la notion de décoration introduite en section 0.2 s'interprète dans tout système extensionnel plein. En particulier, dans notre système S on appellera “décoration” du graphe $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^\Phi$ toute “fonction” $\mathbf{d} \in \Phi$ tel que, pour tout $x \in (\mathbf{a})_\Phi$ et pour $\mathbf{d}\langle \mathbf{x} \rangle$ “l'image de \mathbf{x} par \mathbf{d} ”, on ait :

$$(\mathbf{d}\langle \mathbf{x} \rangle)_\Phi = \{\langle \mathbf{d}\langle \mathbf{y} \rangle : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbf{b})_\Phi \}$$

0.4.3 Le système $(\Phi, \in_\Phi, \sim_\Phi)$

La représentation ensembliste usuelle des ensembles par des fonctions utilise leurs fonctions caractéristiques. Map Theory part d'un principe différent, l'idée étant que l'ensemble \mathbf{x} est représenté par toute fonction $\mathbf{f} : V \rightarrow V$ dont l'image est \mathbf{x} .

On se place maintenant dans un univers V de $ZFC + SI$, et on fixe un κ -pré-modèle \mathcal{M} de Map Theory. Pour $\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathcal{M}$ on notera $(\mathbf{u}\mathbf{x})$ le résultat l'application de \mathbf{u} à \mathbf{x} . Comme déjà signalé, la correspondance syntaxique entre MTA et $ZFC + AFA$ (resp. $ZFC + FA$) s'appuie sur l'existence d'un κ -ouvert $\Phi \subseteq \mathcal{M}$ modèle de $ZFC + AFA$ (resp. $ZFC + FA$). Notons que la plupart des choses que nous allons dire maintenant, hormis celles concernant les “décorations des graphes”, sont aussi vraies de Φ_F . En particulier, la relation \in_{Φ_F} est définie sur le même principe que la relation \in_Φ .

On part de l'hypothèse qu'un sous-ensemble Φ de \mathcal{M} suffisamment riche a été construit, en particulier que Φ est clos par application (et que Φ vérifie les propriétés de clôture exprimées par les axiomes de construction, *MTA-Infini* et *MTA-Déco*). On va maintenant s'intéresser à la définition des relations \in_Φ et \sim_Φ .

Rappelons que \mathbf{T} est un élément distingué \mathcal{M} , qui représente le booléen *Vrai*. Nous allons voir qu'il représente aussi l'ensemble vide. Pour obtenir un système il faut d'abord définir \in_Φ . On définit la relation \in_φ sur Φ par : pour tout $\mathbf{u} \neq \mathbf{T}$, $x \in_\varphi \mathbf{u}$ si et seulement si il existe $\mathbf{y} \in \Phi$ tel que $(\mathbf{u}\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Pour $\mathbf{u} \neq \mathbf{T}$, les “éléments” de \mathbf{u} (au sens de Φ) sont donc très exactement les éléments (au sens de V) de l'ensemble $\mathbf{u}\Phi = \{(\mathbf{u}\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Phi\}$. Il serait maintenant naturel d'interpréter l'égalité en prenant la bi-simulation maximale \sim_Φ sur Φ et de définir la relation \in_Φ par : $\mathbf{x} \in_\Phi \mathbf{u}$ si et seulement si il existe $\mathbf{y} \in \Phi$ telle que $\mathbf{x} \sim_\Phi \mathbf{y}$ et $\mathbf{y} \in_\varphi \mathbf{u}$. Mais nous allons voir dans la section suivante qu'il faut procéder un peu différemment.

0.5 Quelques remarques sur MTA

Dans Map Theory, la manière canonique pour montrer un axiome de ZFC^{-e} est d'introduire un terme représentant l'opération dont il est question dans l'axiome. Par exemple, pour montrer l'axiome de la paire on exhibe un constructeur P et on montre qu'il satisfait la traduction de l'axiome de la paire dans MT . Pour montrer AFA dans MTA , nous sommes parti de la même démarche. Nous exhibons un constructeur δ et nous montrons que ce terme fonctionne comme un “décorateur universel” pour tout “graphe” de “l'univers” Φ . Intuitivement, le terme δ appliqué successivement à un “en-

semble d'arête" \mathbf{b} et à un "sommet $\mathbf{x} \in (\mathbf{a})_{\Phi}$ " fournit un décorateur $\delta\mathbf{bx}$ du "graphe $(\mathbf{a}_x, \mathbf{b}_x)^{\Phi}$ ". Cependant le terme δ n'est pas tout à fait adéquat. En effet, $\delta\mathbf{bx}$ n'est jamais un élément de Φ , même pour $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \Phi$; par contre c'est un élément d'un sur-ensemble Φ^+ de Φ qui de plus est "bi-similaire" à un élément de Φ . Ceci, en particulier, nous a amené à renforcer notre axiomatisation, notamment au niveau des axiomes de l'égalité, de manière à pouvoir raisonner et parler des objets de \mathcal{M} qui sont bi-similaires, au sens de la bi-simulation maximale sur Φ^+ , à des éléments de Φ . C'est cette bi-simulation maximale sur Φ^+ qui sera dorénavant notée \sim_{Φ} et c'est sa restriction à Φ qui sert à définir le système introduit dans la section précédente.

Parlons maintenant de l'introduction de la constante \sim . Dans *MTF*, l'égalité ensembliste est définissable au niveau de la syntaxe par un terme, noté \doteq . Dans *MTA*, ce terme n'est plus adéquat pour représenter la relation \sim_{Φ} . En effet, son interprétation, qui est une fonction caractéristique de la relation $=_{\Phi_F}$, n'a pas le comportement souhaité sur les éléments "non-bien-fondés" de Φ . Plutôt que de modifier le cadre général dans lequel nous construisons notre sémantique de *MTA*, à savoir les κ -pré-modèles standards introduits en [6], nous avons préféré introduire la constante \sim et l'interpréter directement par la fonction caractéristique de \sim_{Φ} . En effet, tout d'abord, il est à priori intéressant de construire dans un cadre commun et sur les mêmes principes des modèles de théories de nature très différente. De plus, non seulement les κ -pré-modèles sont les modèles les plus naturels des axiomes de base de *MT* (λ -calcul+calcul propositionnel), mais ils sont adéquats pour le calcul (Cf [6, Appendice B]). Enfin, aucune des modifications de la notion de κ -pré-modèles envisageables ne nous assure une simplification de l'axiomatisation de *MTA*, ce qui aurait été leur seule justification.

Tout modèle \mathcal{M} de Map Theory contient beaucoup d'éléments qui ne sont pas des "ensembles", comme par exemple, $\perp_{\mathcal{M}}$ et $\lambda\mathbf{x}.\mathbf{x}$ (la fonction identité sur \mathcal{M}). Certains ont tout de même un "sens ensembliste", tel $\lambda\mathbf{x}.\mathbf{x}$, qui "représente" "l'univers Φ ", puisque clairement $\mathbf{u} \in_{\Phi} \lambda\mathbf{x}.\mathbf{x}$ ssi $\mathbf{u} \in \Phi$. D'ailleurs toutes les classes au sens habituel de la théorie des ensembles sont représentables par des éléments de \mathcal{M} . Il existe aussi des éléments qui n'ont aucun sens ensembliste, comme $\perp_{\mathcal{M}}$.

Première partie

Syntaxe

Introduction de la 1^{ère} Partie

Dans cette partie nous décrivons le système MTA et nous montrons comment $ZFC+AF A$ s'interprète dans ce système. Nous faisons une présentation détaillée de cette interprétation, en reprenant de nombreux résultats de Grue [13], et nous en généralisons certains. En particulier nous donnons une généralisation du Théorème de Dédution (Théorème 31). De plus, contrairement à ce qui avait été fait en [13] nous isolons la partie concernant le calcul des prédicats de la partie théorie des ensembles et donnons d'une façon générale les conditions (simples) portant sur une théorie du premier ordre pour qu'elle soit plongeable dans MT . Enfin, dans le Chapitre 2 nous avons choisi de remplacer les preuves dites "conversationnelles" de [13] par des preuves (complètes et) formelles puisque certaines de ces preuves conversationnelles faisaient appel à des propriétés intuitivement vraies (et vraies dans le modèle) mais qui ne découlaient pas de la syntaxe.

Dans les discussions informelles par lesquelles nous présenterons la syntaxe nous ferons référence, de façon intuitive, à un pré-modèle \mathcal{M} de Map Theory et au système $(\Phi, \in_{\Phi}, \sim_{\Phi})$ tel qu'il a été décrit dans l'introduction. La construction mathématique du modèle sera effectuée dans la deuxième partie.

Nous allons maintenant introduire le langage de MTA .

Le langage de Map Theory pour l'antifondation. Le langage de MTA comprend un ensemble \mathcal{C} de six constantes : \perp , T , if , ϕ , ε et \sim ⁵. On se donne un ensemble infini VAR de variables. On définit l'ensemble $\Lambda(\mathcal{C})$ des λ -termes de MTA construits sur VAR comme le plus petit ensemble tel que :

1. $VAR \cup \mathcal{C} \subseteq \Lambda(\mathcal{C})$
2. Si $A \in \Lambda(\mathcal{C})$ et $B \in \Lambda(\mathcal{C})$ alors $(AB) \in \Lambda(\mathcal{C})$
3. Si $A \in \Lambda(\mathcal{C})$ et $x \in VAR$ alors $\lambda x.A \in \Lambda(\mathcal{C})$

Nous utiliserons la plupart du temps les métavariabes A, B, C, D pour désigner les termes de $\Lambda(\mathcal{C})$.

Comme \mathcal{M} est un modèle de MTA , les termes de $\Lambda(\mathcal{C})$ sont interprétés par des éléments de \mathcal{M} . Pour introduire intuitivement les constantes du langage et les futurs axiomes et théorèmes syntaxiques nous nous servons de ces interprétations. Pour les distinguer des termes eux-mêmes, nous utiliserons les conventions suivantes : Une constante indicée par \mathcal{M} désignera

⁵Rappelons que la constante \sim est un ajout propre à MTA .

l'interprétation de celle-ci. Nous noterons \mathbf{A} l'interprétation d'un terme A quelconque. Enfin, nous utiliserons de nombreuses abréviations de termes. Ces abréviations seront traitées comme les constantes, autrement dit, une abréviation indicée par \mathcal{M} désignera l'interprétation de cette abréviation dans \mathcal{M} .

Nous commentons maintenant brièvement les constantes de MTA :

- La constante \perp est bien sûr interprétée par $\perp_{\mathcal{M}}$. La constante \perp et l'élément $\perp_{\mathcal{M}}$ peuvent être interprétées, comme d'habitude en λ -calcul, comme l'absence d'information, l'indéterminé, ou encore le fait que le calcul dure indéfiniment.
- La constante T est interprétée par \mathbf{T} et représente le booléen *Vrai*. Nous verrons plus tard qu'elle représente aussi l'ensemble vide.
- if dénote une fonction de sélection IF dont le comportement est le suivant :

$$IF(u, v, w) = \begin{cases} \perp_{\mathcal{M}} & \text{si } u = \perp_{\mathcal{M}} \\ v & \text{si } u = \mathbf{T} \\ w & \text{si } u \in \mathfrak{F} \end{cases}$$

On remarque que la fonction IF réagit différemment selon la “valeur de vérité” de son premier argument. Elle est en particulier utilisée pour traduire les connecteurs logiques dans \mathcal{M} .

- La constante ϕ dénote la fonction caractéristique du sous-ensemble Φ de \mathcal{M} dont nous avons parlé. Cet ensemble, muni de deux relations binaires \in_{Φ} et \sim_{Φ} , est suffisamment riche pour être un modèle de $ZFC + AFA$. La fonction caractéristique χ_{Φ} de Φ est définie par :

$$\chi_{\Phi}(\mathbf{u}) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{si } \mathbf{u} \in \Phi \\ \perp_{\mathcal{M}} & \text{sinon} \end{cases}$$

- ε dénote une fonction de choix E_{Φ} qui joue le rôle d'une variante de l'opérateur de Hilbert. Pour ρ un fonction de choix sur \mathcal{M} , la fonction E_{Φ} a le comportement suivant :

$$E_{\Phi}(\mathbf{u}) = \begin{cases} \perp_{\mathcal{M}} & \text{si } \perp_{\mathcal{M}} \in \mathbf{u}\Phi \\ \rho(\Phi) & \text{si } \mathbf{u}\Phi \subseteq \mathfrak{F} \\ \rho(\{\mathbf{x} \in \Phi : \mathbf{u}\mathbf{x} = \mathbf{T}\}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Lorsque $\perp_{\mathcal{M}} \notin \mathbf{u}\Phi$, on a alors deux possibilités :

- 1) Il existe $\mathbf{x} \in \Phi$ tel que $\mathbf{u}\mathbf{x} = \mathbf{T}$: alors E_{Φ} choisit un élément \mathbf{x} de Φ qui vérifie cette propriété.
- 2) $\mathbf{T} \notin \mathbf{u}\Phi$: E_{Φ} choisit alors un élément quelconque de Φ comme témoin du comportement de \mathbf{u} sur Φ , relativement aux valeurs de vérité *Vrai* et *Faux*.

Maintenant, si on s'intéresse à la valeur de $(\mathbf{u}(E_{\Phi} \mathbf{u}))$, on voit facilement que :

- 1') $(\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{u})) = \mathbf{T}$ si et seulement si il existe $\mathbf{x} \in \Phi$ tel que $(\mathbf{u}\mathbf{x}) = \mathbf{T}$
 2') $(\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{u})) \in \mathfrak{F}$ sinon .

Autrement dit, sous l'hypothèse $\perp_{\mathcal{M}} \notin \mathbf{u}\Phi$, le terme $(\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{u}))$ répond en quelque sorte à la question de savoir s'il existe $\mathbf{x} \in \Phi$ tel que $\mathbf{u}\mathbf{x} = \mathbf{T}$. Nous verrons plus tard comment interpréter les quantificateurs \exists et \forall à partir de ε .

- La constante \sim dénote la fonction caractéristique $\chi_{\sim_{\Phi}}$ de la bi-simulation maximale \sim_{Φ} sur un sur-ensemble Φ^+ de Φ . Cette fonction a le comportement suivant :

$$\chi_{\sim_{\Phi}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{cases} \perp_{\mathcal{M}} & \text{si } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \notin \Phi^+ \times \Phi^+ \\ \mathbf{T} & \text{si } \mathbf{u} \sim_{\Phi} \mathbf{v} \\ F_{\mathcal{M}} & \text{sinon} \end{cases}$$

La constante \sim servira à traduire le signe “=” de la théorie des ensembles.

Notations générales Nous donnons maintenant un ensemble de conventions d'écriture et d'abréviations.

Les premières conventions concernent les signes utilisés pour introduire des abréviations :

Notation 1 (*Egalités définitionnelles*)

- 1) Nous utiliserons $=_{def}$ pour introduire d'une part les abréviations de termes de *MT*, d'autre part celles des formules de *ZFC*.
- 2) Nous utiliserons \equiv_{def} pour introduire les abréviations d'équations entre termes de *MT*.
- 3) Le signe \equiv devra se lire “est de la forme”. Ce signe sera en particulier utilisé dans les démonstrations par induction. Par exemple, lors d'une démonstration par induction sur la complexité d'une formule on écrira $A \equiv (B \Rightarrow C)$ pour signifier *A est de la forme (B \Rightarrow C) pour B et C les formules sur lesquelles portent l'hypothèse d'induction..*

Les premières abréviations concernent le parenthésage :

Notation 2 :

- 1) Nous supprimerons le plus souvent les parenthèses extérieures. En particulier, nous écrirons AB pour (AB) .
- 2) Nous utiliserons de façon générale la convention gauche, autrement dit, pour tous termes A, B_1, \dots, B_n : $AB_1 \dots B_n =_{def} (\dots(AB_1) \dots B_n)$. Cependant, lorsqu'un terme A sera d'arité “naturelle” n , il nous arrivera d'écrire $(A B_1 \dots B_n)$ plutôt que d'utiliser cette convention. Par exemple, nous écrirons (*if* $B_1 B_2 B_3$) plutôt que *if* $B_1 B_2 B_3$, puisque la constante *if*

représente la fonction à 3 arguments IF , et que de ce fait son arité “naturelle” est 3.

Nous introduisons maintenant des abréviations concernant les suites de termes :

Notation 3 :

- 1) Nous utiliserons les métavariabes \overline{A} , \overline{B} , \overline{C} et \overline{D} pour désigner des suites de termes quelconques, et qui peuvent en particulier être vides.
- 2) Pour \overline{A} une suite de termes, $lg(\overline{A})$ désignera la longueur de \overline{A} .
- 3) Pour $\overline{A} = A_1, \dots, A_n$ et $\overline{B} = B_1, \dots, B_n$, on écrira $\overline{A} = \overline{B}$ pour la suite d'équations $A_1 = B_1; \dots; A_n = B_n$.
- 4) Pour $\overline{B} = B_1, \dots, B_n$, on écrira dans certains cas particuliers très précis $A\overline{B}$ pour désigner la suite AB_1, \dots, AB_n . Par exemple, on écrira $\phi\overline{B}$ pour $\phi B_1, \dots, \phi B_n$.
- 5) $\overline{A}, \overline{B}$ désigne la concaténation des suites \overline{A} et \overline{B} .

On définit comme d'habitude l'ensemble des variables libres et l'ensemble des variables liées d'un terme ou d'un ensemble de termes. De même pour la définition de la substitution correcte d'une suite de termes à une suite de variables libres dans un terme. Les abréviations qui suivent portent sur ces notions :

Notation 4 :

- 1) $VL(B)$ désignera l'ensemble des variables libres du terme B . De même $VL(\overline{B})$ désignera l'ensemble des variables libres de la suite \overline{B} .
- 2) Sauf mention contraire, lorsque nous utiliserons la notation \overline{y} pour désigner une suite de variables, cette suite sera considérée sans répétition. Cette convention est en particulier utilisée dans les points 3 et 4 qui suivent :
- 3) Pour B un terme et \overline{y} une suite de variables, on écrira $B[\overline{y}]$ pour signifier que $VL(B) \subseteq \overline{y}$.
- 4) Pour $B[\overline{y}]$ un terme, $B[\overline{C}/\overline{y}]$ désignera le terme résultant de la substitution correcte de la suite \overline{C} aux variables \overline{y} dans B . Cette écriture supposera toujours $lg(\overline{C}) = lg(\overline{y})$.

La convention suivante concerne les théories et leurs théorèmes :

Notation 5 :

- 1) Pour une équation $B = C$ et une théorie \mathfrak{Th} du λ -calcul on écrira $\vdash_{\mathfrak{Th}} B = C$ et parfois $\mathfrak{Th} \vdash B = C$, pour signifier que $B = C$ est un théorème de \mathfrak{Th} . Lorsque cette théorie sera MT (ou MTA à partir de la Section 2.4.1), on écrira simplement $\vdash B = C$.
- 2) On utilisera aussi la notation $B =_{MT} C$ (resp. $B =_{MTA} C$) en lieu et

place de $\vdash_{MT} B = C$ (resp. $\vdash_{MTA} B = C$).

3) On utilisera la même notation pour les théories du premier ordre et les systèmes déductifs du calcul des prédicats. Par exemple, $\vdash_{ZFC} G$ ou $ZFC \vdash G$ signifiera que la formule G est un théorème de ZFC .

Les dernières conventions portent sur le vocabulaire que nous utiliserons lorsque nous commenterons des axiomes et des théorèmes syntaxiques :

Notation 6 :

1) Le terme de “constructeur” sera utilisé uniquement pour parler de termes. Lorsque nous parlerons “d’opérateurs” il s’agira toujours d’objets sémantiques, c’est à dire d’éléments de \mathcal{M} .

2) Nous dirons parfois qu’un terme B est démontrable dans MT (resp. MTA) pour signifier que l’équation $B = T$ est un théorème de MT (resp. MTA).

Plan de la Première Partie Dans cette première partie nous montrerons que tout théorème clos G de $ZFC + AFA$ a une traduction \hat{G} démontrable (au sens de la notation précédente) dans MTA . Pour cela nous diviserons notre travail en trois chapitres :

Dans le premier sont introduits les axiomes dits “du λ -calcul, du calcul propositionnel et du calcul des prédicats”. On y montre que les notions logiques habituelles de connecteurs, de valeurs de vérité, de quantificateurs sont toutes interprétables par des termes de MTA . On montre ensuite que, pour tout langage \mathcal{L} du 1^{er} ordre de signature P , on peut simuler dans MT toute preuve du calcul des prédicats sur \mathcal{L} sous la seule condition que l’on puisse interpréter les symboles de P par des termes “déterminés”. On en conclura que si les traductions des axiomes d’une théorie du 1^{er} ordre (d’un langage traduit de façon “déterminée”) sont démontrables dans MTA , alors toutes les traductions des théorèmes de cette théorie sont démontrables dans MTA .

Dans le deuxième, nous définirons tout d’abord une traduction “déterminée” du langage $\{\in, =\}$ de la théorie des ensembles. Puis, après avoir introduit les axiomes dits “de construction” et “d’égalité”, nous montrerons que les traductions des axiomes de ZFC sont démontrables dans MTA . On en conclura, en utilisant le premier chapitre, que toutes les traductions des théorèmes de ZFC sont démontrables dans MTA .

Dans le troisième, après avoir introduit des axiomes et règles dits de “l’antifondation”, nous montrerons que la traduction de l’axiome AFA de

P. Aczel est démontrable dans MTA . Et donc que tous ce qui est prouvable dans $ZFC + AFA$ l'est aussi dans notre théorie.

Chapitre 1

Map Theory : du λ -calcul au calcul des prédicats

1.1 Les axiomes de base de MT : un λ -calcul enrichi

1.1.1 Les axiomes de sélection

Ces trois schémas d'axiomes expriment le comportement de la constante if qui est l'analogue dans MT du “*If Then Else*” des langages de programmation :

$$\begin{aligned} MT-Select1 &\vdash (if\ T\ B\ C) = B \\ MT-Select2 &\vdash (if\ \lambda x.A\ B\ C) = C \\ MT-Select3 &\vdash (if\ \perp\ B\ C) = \perp \end{aligned}$$

1.1.2 Les réductions et le changement de variables liées

En plus de l' α -équivalence et de la β -réduction ces schémas fixent le comportement applicatif des constantes T et \perp :

$$\begin{aligned} MT-Applic-T &\vdash (TB) = T \\ MT-Applic-\beta &\vdash (\lambda x.A\ B) = A[B/x] \text{ si } B \text{ est librement substituable à } x \text{ dans } A \\ MT-Applic-\perp &\vdash (\perp B) = \perp \\ MT-Renommer &\vdash \lambda x.A[x/y] = \lambda y.A \text{ pour } x \text{ n'apparaissant pas dans } A \end{aligned}$$

1.1.3 Les règles de déduction élémentaires.

Il s'agit du passage au contexte et de la transitivité de l'égalité :

$$\begin{array}{ll}
MT-Trans & A = B; A = C \vdash B = C \\
MT-Abstract & A = B \vdash \lambda x.A = \lambda x.B \\
MT-Applic & A = B; C = D \vdash (AB) = (CD)
\end{array}$$

1.1.4 Les métathéorèmes du λ -calcul

Les métathéorèmes de MT que nous énonçons dans cette section sont des métathéorèmes usuels du λ -calcul. Leur démonstration est donc analogue, aussi nous renvoyons à [13] pour le détail des preuves.

Un métathéorème est un théorème qui n'est pas un théorème de MT mais un théorème *sur* MT . Il montre que, pour tous termes, certaines équations concernant ces termes sont démontrables dans MT . Souvent les métathéorèmes que nous énoncerons comporteront des hypothèses et devront se lire : Pour tous termes B, C et toutes suites de termes \bar{A}, \bar{A}' de même longueur, il est possible de construire une preuve de $B = C$ dans MT à partir des hypothèses $\bar{A} = \bar{A}'$. Tous ces métathéorèmes auront comme conséquence immédiate que, si les équations $\bar{A} = \bar{A}'$ sont effectivement démontrables dans MT alors $B = C$ est effectivement démontrable dans MT . Chaque métathéorème peut donc être vu, et sera utilisé, comme une (méta)règle de déduction : nous utiliserons donc pour les énoncer la même notation que pour les règles à savoir :

$$\bar{A} = \bar{A}' \vdash B = C$$

Ces métrarègles permettent de garder aux preuves formelles une taille acceptable. Pour les démonstrations des premiers métathéorèmes, nous renvoyons à [13] (ou Barendregt [3]).

L'égalité dans MT est une relation d'équivalence :

Théorème 7 (*Equiv*) [13, p.32] Pour tous termes A, B et C on a :

$$\begin{array}{ll}
& \vdash A = A \\
A = B & \vdash B = A \\
A = B; B = C & \vdash B = C
\end{array}$$

Preuve. Nous donnons la démonstration de la réflexivité, car elle est originale dans MT , utilisant la constante *if* et les axiomes de Sélection :

1. *Select1* $(if\ T\ A\ A) = A$
2. *Select1* $(if\ T\ A\ A) = A$
3. *Trans*(1,2) $A = A$

■

Remarque 8 Comme nous venons de le faire pour l'axiome MT -*Select1* dans la preuve précédente, nous continuerons à sous-entendre dans la colonne de gauche des preuves formelles le préfixe MT - pour les références

aux axiomes et règles de MT . Rappelons que ce préfixe sert à distinguer les axiomes communs à MTF et MTA des axiomes et règles propres à MTA qui seront introduits par le préfixe $MTA-$.

Nous sous-entendons à partir de maintenant la locution “Pour tous termes” dans l’énoncé des futurs métathéorèmes. Nous énonçons maintenant le théorème de passage au contexte :

Théorème 9 (*Context*) [13, p.33] Pour tout contexte $C[]$ on a :
 $A = B \vdash C[A] = C[B]$

On voit facilement qu’en utilisant autant de fois que nécessaire l’axiome *Renommer* on peut égaliser dans MT deux termes α -équivalents, ce qu’exprime le (méta)théorème suivant :

Théorème 10 (*Renom*) [13, p.32]
 Si A et B sont α -équivalents alors $\vdash A = B$

Nous allons terminer ces premiers pas dans le système déductif de MT par un métathéorème très utile et très classique qui généralise *Context*. Nous en donnerons une démonstration formelle qui sera l’occasion d’introduire un certain nombre de conventions que nous utiliserons pour l’écriture des preuves formelles tout au long de cette première partie.

Définition 11 :

1. Soit $A[\bar{y}]$ un terme. On appellera instance de A tout terme de la forme $A[\bar{C}/\bar{y}]$ où \bar{C} est une suite de termes librement substituables à \bar{y} dans A . En particulier pour \bar{C} une suite donnée, on parlera d’une \bar{C} -instance de A .
2. Soit $\bar{A}[\bar{y}]$ une suite de termes. Une instance de \bar{A} est une suite $\bar{A}[\bar{C}/\bar{y}]$ de termes telle que chaque $A_i[\bar{C}/\bar{y}]$ pour $1 \leq i \leq \text{lg}(\bar{A})$ est une instance de A_i . En particulier pour \bar{C} une suite donnée, on parlera d’une \bar{C} -instance de \bar{A} .
3. Soient $A = B$ une équation et \bar{y} telle que $VL(A, B) \subseteq \bar{y}$. Une instance de $A = B$ est une équation de la forme $A[\bar{C}/\bar{y}] = B[\bar{C}/\bar{y}]$ où $A[\bar{C}/\bar{y}]$ et $B[\bar{C}/\bar{y}]$ sont, respectivement, des instances de A et B . En particulier pour \bar{C} une suite donnée, on parlera d’une \bar{C} -instance de $A = B$.

Remarque 12 L’instanciation du terme A pour $\bar{C} \equiv \bar{z}$, où \bar{z} est une suite de variables sans répétition, correspond à un renommage des variables libres de A .

Théorème 13 (*Instance*) Pour toute instance $A[\bar{C}/\bar{y}] = B[\bar{C}/\bar{y}]$ de $A = B$, on a $A = B \vdash A[\bar{C}/\bar{y}] = B[\bar{C}/\bar{y}]$.

Preuve. Soient $n = \text{lg}(\bar{y}) = \text{lg}(\bar{C})$:

- | | |
|--|---|
| 1. <i>Hyp</i> | $A = B$ |
| 2. <i>Abstract</i> $\times n$ (1) | $\lambda\bar{y}.A = \lambda\bar{y}.B$ |
| 3. <i>Applic</i> $\times n$ (2) | $(\lambda\bar{y}.A \bar{C}) = (\lambda\bar{y}.B \bar{C})$ |
| 4. (<i>Applic</i> - β + <i>Trans</i>) $\times n$ | $(\lambda\bar{y}.A \bar{C}) = A[\bar{C}/\bar{y}]$ |
| 5. (<i>Applic</i> - β + <i>Trans</i>) $\times n$ | $(\lambda\bar{y}.B \bar{C}) = B[\bar{C}/\bar{y}]$ |
| 6. <i>Trivial</i> (3, 4, 5) | $A[\bar{C}/\bar{y}] = B[\bar{C}/\bar{y}]$ |

■

Remarquons que cette preuve, qui utilise les métavariabes de termes A, B, \bar{C} , n'est pas une preuve de *MT*. C'est la preuve d'un métathéorème, autrement dit un schéma de preuve qui ne devient une preuve de *MT* que lorsque les métavariabes A, B, \bar{C} sont effectivement remplacées par des termes.

Pour abrégier nos démonstrations, nous allons mettre en place un certain nombre de conventions qui sont déjà à l'oeuvre dans la démonstration ci-dessus :

Conventions dans l'écriture des preuves formelles

1. *Règle*(i_1, \dots, i_n) (resp. *MétaRègle*(i_1, \dots, i_n)) se lira *Règle* (resp. *Méтарègle*) appliquée aux équations des lignes i_1, \dots, i_n .
2. Dans certains cas, nous réunirons en une seule ligne deux lignes correspondant à l'application de deux règles différentes. Nous écrirons alors *Règle1* + *Règle2*.
3. Lorsque nous utiliserons n fois la même règle, les n lignes seront abrégées en une seule. Les lignes 4 et 5 sont un exemple de conjugaison des deux conventions dont nous venons de parler.
4. Dans la ligne 4, il est possible que pour effectuer une β -réduction correcte, il faille tout d'abord renommer quelques variables. A l'avenir nous supposerons toujours ce travail fait ; nous travaillerons donc à α -équivalence près.
5. Pour les lemmes et théorèmes ayant un nom spécifique (le nom situé entre parenthèses devant l'énoncé du lemme ou du théorème), c'est ce nom qui sera utilisé de préférence au numéro du lemme ou du théorème. Par exemple on fera référence au Théorème 2 en indiquant *Context* dans la colonne de gauche. Les lemmes et théorèmes ayant un nom spécifique seront cités dans l'**Index** à la rubrique **Théorèmes**.
6. "*Trivial*" dans la colonne de gauche de la preuve signale que l'équation de la colonne de droite est obtenue à partir des lignes au-dessus par applications des axiomes *Select*1, 2, 3, *Applic*-*T*, β , \perp et des métathéorèmes

Renom, *Context* et *Equiv*. Ainsi la preuve du Théorème 5 pourrait aussi se résumer en :

1. *Hyp* $A = B$
2. *Trivial*(1) $A[\overline{C}/\overline{y}] = B[\overline{C}/\overline{y}]$

1.2 Quantum Non Datur et Calcul Propositionnel

1.2.1 La règle de *QND*

Comme nous l'avons déjà dit, on compte trois valeurs de vérité dans Map Theory, le *Vrai* représenté par T , le *Faux* représenté par tout terme de la forme $\lambda x.B$ et l'*Indéterminé* représenté par \perp . Le fait que *MT* vérifie une sorte de Quantum non datur, autrement dit qu'il n'existe que trois valeurs de vérité, est exprimé par la règle *QND*. Pour énoncer cette règle on utilise le terme $F'x =_{def} \lambda y.(xy)$ comme représentant du *Faux* associé à la variable x . Nous donnons tout d'abord la règle, puis nous la commenterons :

$$\begin{array}{lcl}
 \text{QND} & \text{Si} & \vdash A[T/x] = B[T/x] \\
 & \text{et} & \vdash A[F'x/x] = B[F'x/x] \\
 & \text{et} & \vdash A[\perp/x] = B[\perp/x] \\
 & \text{Alors} & \vdash A = B
 \end{array}$$

On remarque tout d'abord que, par *Instance* et *Context*, $A = B$ est démontrable si et seulement si (à α -équivalence près) $A[t/x] = B[t/x]$ est démontrable pour tout terme t .

Nous commentons maintenant la deuxième prémisse du *QND*, à savoir $\vdash A[F'x/x] = B[F'x/x]$. Tout d'abord, il est facile de voir que pour tout terme t on a $\vdash F't = t$ si et seulement si il existe un terme s tel que $\vdash t = \lambda z.s$. Maintenant, supposons qu'on ait $\vdash A[F'x/x] = B[F'x/x]$, et soit $\lambda z.s$ une abstraction quelconque. Par *Instance* on a $\vdash A[F'\lambda z.s/x] = B[F'\lambda z.s/x]$ et donc, *trivialement*, $\vdash A[\lambda z.s/x] = B[\lambda z.s/x]$. On a ainsi le résultat suivant :

“ $\vdash A[F'x/x] = B[F'x/x]$ si et seulement si pour toute abstraction $\lambda z.s$ on a $\vdash A[\lambda z.s/x] = B[\lambda z.s/x]$ ”

La signification profonde du *QND* est donc donnée par l'énoncé suivant :

“Si $\vdash A[T/x] = B[T/x]$ et $\vdash A[\lambda z.s/x] = B[\lambda z.s/x]$ pour toute abstraction $\lambda z.s$ et $\vdash A[\perp/x] = B[\perp/x]$ alors $\vdash A[t/x] = B[t/x]$ pour tout terme t ”

Le reste de cette section sera consacré à l'étude des conséquences du *QND*, et en particulier au plongement du calcul propositionnel dans *MT*, que cette règle permet.

1.2.2 Les tautologies au sens de MT

Nous allons définir la notion de tautologie dans MT , le rapport entre cette notion et la notion classique de tautologie sera bientôt clair.

Définition 14 Soient A et B des termes et \bar{y} une suite de variables telle que $VL(A, B) \subseteq \bar{y}$. Une instance logique de l'équation $A = B$ est une instance $A[\bar{C}/\bar{y}] = B[\bar{C}/\bar{y}]$ de $A = B$ telle que chaque C_i est soit T , soit $F'y_i$, soit \perp , c'est à dire, essentiellement, une valeur de vérité de MT .

Définition 15 Une équation $A = B$ est dite une tautologie si toutes ses instances logiques sont démontrables dans MT .

En raisonnant par induction sur le nombre n de variables libres dans $A = B$, il est facile de montrer en utilisant QND que :

Théorème 16 (*Tauto*) Si $A = B$ est une tautologie alors $\vdash A = B$.

Une conséquence triviale de ce théorème et du Théorème 5 (*Instance*) est que :

Théorème 17 (*InstTauto*) Toute instance de tautologie est prouvable.

Nous allons bientôt nous intéresser à l'interprétation du calcul propositionnel dans MT .

Pour nous faciliter la tâche dans les démonstrations formelles, nous mettrons en place dans la section 1.3.5 un outil très utile, à savoir un "théorème de déduction" pour MT . Pour énoncer ce théorème nous introduisons maintenant la notion d'implication non-monotone.

1.2.3 L'implication non-monotone

Ce qu'on appelle l'implication non-monotone est une abréviation pour des équations ayant une certaine forme. Nous commençons par introduire une abréviation concernant les termes :

Définition 18 :

1. $A : B =_{def} (if A B \perp)$
2. Soit \bar{A} une suite de termes et B un terme. Si $\bar{A} \equiv \emptyset$ on pose $\bar{A} : B =_{def} B$, sinon pour $\bar{A} \equiv (A_1, \dots, A_n)$, on pose $\bar{A} : B =_{def} A_1 : (A_2 : \dots : (A_n : B) \dots)$.

Remarque 19 On vérifie trivialement que $\vdash \bar{T} : B = B$.

Notons que la définition de $A : B$ diffère de la définition originale donnée en [13], définition pour laquelle le Lemme 26 (voir ci-dessous) n'est en fait pas vrai.

Nous introduisons maintenant les abréviations d'équations définissant l'implication non-monotone :

Notation 20

1. $\bar{A} \longrightarrow (B = C) \equiv_{def} \bar{A} : B = \bar{A} : C$
2. $\bar{A} \longrightarrow B \equiv_{def} \bar{A} \longrightarrow (B = T)$
3. $\bar{A} \longrightarrow B_1; \dots; B_n \equiv_{def} \bar{A} \longrightarrow B_1; \dots; \bar{A} \longrightarrow B_n$
4. $\bar{A} \longrightarrow (\bar{B} = \bar{C}) \equiv_{def} \{ \bar{A} \longrightarrow (B_i = C_i) : 1 \leq i \leq lg(\bar{B}) = lg(\bar{C}) \}$

Dans l'équation $\bar{A} \longrightarrow (B = C)$ les termes $A_1, \dots, A_n \in \bar{A}$ sont appelés “*hypothèses internes*” et l'équation $B = C$ “*conclusion*”. Bien entendu, on ne doit pas confondre ces hypothèses avec les hypothèses d'un métathéorème ou d'une règle. Pour les distinguer, ces hypothèses internes seront séparées par des virgules au lieu des points-virgules utilisés pour les hypothèses d'un théorème ou d'une règle.

Remarque 21 *Il suit de la définition de “:” que l'équation $\emptyset \longrightarrow (B = C)$ n'est autre que l'équation $B = C$. De plus, il est trivial de vérifier, en utilisant la Remarque 19, que $\vdash \bar{T} \longrightarrow B = C$ ssi $\vdash B = C$.*

Remarque 22 *Toute équation de la forme $\bar{A} \longrightarrow (B = C)$ avec $\bar{A} = (A_1, \dots, A_n)$ peut être vue comme étant de la forme $A_1 \longrightarrow (B' = C')$ en prenant $B' \equiv (A_2 \dots : (A_n : B) \dots)$ et $C' \equiv (A_2 \dots : (A_n : C) \dots)$.*

La raison pour laquelle on parle “d'implication” nous est donnée par le théorème suivant qui est l'analogue, pour l'implication non-monotone, du Modus Ponens du calcul des propositions. Nous définirons plus loin une “implication monotone” qui est un terme de *MT* (Cf Définition 34.8 p.20). La démonstration du théorème est l'occasion d'introduire une convention :

Convention d'écriture des preuves formelles Dans les lignes 2, 3, 4 de la démonstration suivante nous avons écrit plusieurs équations sur une seule ligne en les séparant par des points-virgules. Cette convention sera de nouveau employée chaque fois où plusieurs équations se déduiront de la même règle par les mêmes lignes.

Théorème 23 (*MP*) *On a $\bar{A} = \bar{T}; \bar{A} \longrightarrow (B = C) \vdash B = C$*

Preuve. Soit $n = lg(\overline{A})$:

1. *Hyp* $\overline{A} = \overline{T}; (\overline{A} : B) = (\overline{A} : C)$
2. *Context*(1) $(\overline{A} : B) = (\overline{T} : B); (\overline{A} : C) = (\overline{T} : C)$
3. *Rem21* $(\overline{T} : B) = B; (\overline{T} : C) = C$
4. *Equiv*(2, 3) $(\overline{A} : B) = B; (\overline{A} : C) = C$
5. *Equiv*(4) $B = C$

■

Remarque 24 *Le théorème précédent nous dit que, pour tout théorème de la forme $\overline{A} \longrightarrow (B = C)$, si on sait démontrer $\overline{A} = \overline{T}$ alors on sait démontrer $B = C$. Nous verrons, lorsque nous aborderons le Théorème de Dédution, que la réciproque, à savoir “si $\overline{A} = \overline{T} \vdash B = C$ alors $\vdash \overline{A} \longrightarrow (B = C)$ ”, est vraie si la démonstration de $B = C$ à partir $\overline{A} = \overline{T}$ n'utilise la règle d'abstraction ou le QND que sur des variables non libres dans \overline{A} .*

Nous allons voir maintenant une généralisation triviale mais importante de *MP*.

Théorème 25 (*Méta*)

*Soient \overline{A}, B, C des termes tels que $VL(\overline{A}, B, C) \subseteq \overline{y}$. Si $\overline{A} \longrightarrow (B = C)$ est un théorème de *MT* et que \overline{D} est librement substituable à \overline{y} dans \overline{A}, B, C alors :*

$$\overline{A}[\overline{D}/\overline{y}] = \overline{T} \vdash B[\overline{D}/\overline{y}] = C[\overline{D}/\overline{y}]$$

Preuve.

1. *Hyp* $\overline{A} \longrightarrow (B = C)$
2. *Hyp* $\overline{A}[\overline{D}/\overline{y}] = \overline{T}$
3. *Instance*(1) $\overline{A}[\overline{D}/\overline{y}] \longrightarrow B[\overline{D}/\overline{y}] = C[\overline{D}/\overline{y}]$
4. *MP*(2; 3) $B[\overline{D}/\overline{y}] = C[\overline{D}/\overline{y}]$

■

On remarque que *Instance* peut être vu comme le cas particulier où $\overline{A} = \emptyset$ du théorème précédent.

Il faut noter que ce métathéorème a une forme particulière; c'est une espèce de méta-métathéorème. En effet, il affirme qu'à tout théorème de *MT* de la forme $\vdash \overline{A} \longrightarrow (B = C)$ on peut faire correspondre un métathéorème (une métarègle), à savoir :

“Pour toute suite de termes \overline{D} on a : $\overline{A}[\overline{D}/\overline{y}] = \overline{T} \vdash B[\overline{D}/\overline{y}] = C[\overline{D}/\overline{y}]$ ”

Cela nous amène à mettre en place une nouvelle convention pour l'écriture de nos preuves :

La convention ”Méta” : Dans la plupart des démonstrations que nous ferons plus tard, ce n'est pas le théorème sous sa forme initiale $\overline{A} \longrightarrow$

$(B = C)$ dont nous aurons besoin, mais de l'instance du métathéorème correspondant, à savoir $\overline{A}[\overline{D}/\overline{y}] = \overline{T} \vdash B[\overline{D}/\overline{y}] = C[\overline{D}/\overline{y}]$. Plutôt que de multiplier les noms de théorème nous ferons référence à l'utilisation du métathéorème correspondant en faisant précéder le nom du théorème par *Méta*.

Nous allons voir maintenant que l'ordre des hypothèses internes et leurs éventuelles répétitions ne jouent aucun rôle :

Lemme 26 *Les équations suivantes sont des tautologies de MT :*

1. $x : (y : z) = (x : y) : z$
2. $(x : y) : z = (y : x) : z$
3. $(x : x) : y = x : y$

On en déduit alors facilement le théorème suivant :

Théorème 27 *Si l'ensemble des termes présents dans la suite \overline{A} est le même que celui des termes présents dans la suite \overline{A}' alors on a $\vdash \overline{A} \longrightarrow B = C$ si et seulement si $\vdash \overline{A}' \longrightarrow B = C$*

On remarque aussi que l'on peut toujours, par passage au contexte, rajouter des hypothèses internes, autrement dit :

Lemme 28 (*AjoutHyp*) *Pour toute suite \overline{A} on a $B = C \vdash \overline{A} \longrightarrow B = C$*

Remarque 29 *Par associativité de l'opération “:” (Lemme 26.1), tous les parenthésages de l'expression $A_1 : A_2 : \dots : A_n : B$ qui respectent la binarité de “:” sont équivalents au sens où les termes correspondants sont tous égalisables dans MT . En particulier, pour $\overline{A} = (A_1, \dots, A_n)$, tout théorème de la forme $\overline{A} \longrightarrow (B = C)$ est équi-démontrable au théorème $A \longrightarrow (B = C)$, où $A \equiv (A_1 : \dots : (A_{n-1} : A_n) \dots)$.*

1.2.4 Le théorème de déduction

Rappelons que le Théorème de Déduction pour le calcul des prédicats énonce que, pour un système déductif complet S donné et pour toutes formules G_1, \dots, G_n, H , si $G_1; \dots; G_n \vdash_S H$, alors pour $p \leq n$ on a $G_1; \dots; G_p \vdash_S G_{p+1} \wedge \dots \wedge G_n \Rightarrow H$.

Le Théorème 31 qui va suivre est un analogue pour *MT*, *MTA* et *MTF* de ce théorème. Il affirme (à certaines restrictions près) que :

Si $A_1 = T; \dots; A_n = T \vdash B = C$ alors, pour $p \leq n$:

$A_1 = T; \dots; A_p = T \vdash A_{p+1}, \dots, A_n \longrightarrow (B = C)$.

La preuve de ce théorème est renvoyée en Appendice B, et ceci pour deux raisons. La première est qu'elle est assez longue et technique. La deuxième est que pour montrer le Théorème de Dédution dans toute sa généralité pour MTF et MTA , nous aurions dû introduire ici les règles d'*Induction* et de *CoInduction*. De plus, il aurait fallu mentionner dans la Définition 30 ci-dessous, les affaiblissements $Induction_{\overline{C}}$ et $CoInduction_{\overline{C}}$ de ces règles, affaiblissements dont l'utilisation est *seule autorisée* dans les preuves sous hypothèses de déduction. Tout ceci aurait complexifiée inutilement notre présentation puisque la seule utilisation que nous ferons de la règle de *CoInduction* (Cf Théorème 324) sera indépendante de toute hypothèse. Nous nous contentons donc ici d'énoncer le Théorème de Dédution, et de ne parler que des affaiblissements $Abstract_{\overline{C}}$ et $QND_{\overline{C}}$.

La convention $MTFA$

Ce que nous allons dire maintenant s'appliquant à MT , MTA et MTF , nous écrirons $MTFA$, pour signifier " MT ou MTA ou MTF ".

Pour pouvoir préciser les conditions d'application du théorème nous introduisons une définition :

Définition 30 Soient $\overline{B}, \overline{C} \in \Lambda(\mathcal{C})^{<\omega}$.

On définit la théorie $MTFA(\overline{B}; \overline{C})$ par :

- $MTFA(\overline{B}; \overline{C})$ a pour axiomes : d'une part les théorèmes de $MTFA$ (et donc en particulier ses axiomes), d'autre part les équations $\overline{B} = \overline{T}$.
- $MTFA(\overline{B}; \overline{C})$ a les mêmes règles que $MTFA$ excepté que les règles *Astract* et *QND* sont remplacées par les affaiblissements suivants :

$$\begin{array}{l} \textit{Abstract}_{\overline{C}} \quad \textit{Si} \quad D = D' \\ \quad \quad \quad \textit{et} \quad x \textit{ n'est pas libre dans } \overline{C} \\ \quad \quad \quad \textit{Alors} \quad \vdash \lambda x.D = \lambda x.D' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textit{QND}_{\overline{C}} \quad \textit{Si} \quad \vdash D[T/x] = D'[T/x] \\ \quad \quad \quad \textit{et} \quad \vdash D[F'x/x] = D'[F'x/x] \\ \quad \quad \quad \textit{et} \quad \vdash D[\perp/x] = D'[\perp/x] \\ \quad \quad \quad \textit{et} \quad x \textit{ n'est pas libre dans } \overline{C} \\ \quad \quad \quad \textit{Alors} \quad \vdash D = D' \end{array}$$

La suite \overline{B} est appelée ensemble des hypothèses de la théorie, et la suite \overline{C} ensemble des contraintes de la théorie.

Le seul cas qui nous intéressera par la suite est celui où l'ensemble de contraintes est un segment final de l'ensemble des hypothèses. On remarque de plus que $MTFA(\emptyset; \emptyset) = MTFA$.

Théorème 31 (*Déduct*-) Soient $\overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ des suites de termes et $C = C'$ une équation.

Si $MTFA(\overline{B}, \overline{D}; \overline{C}, \overline{D}) \vdash C = C'$ alors $MTFA(\overline{B}; \overline{C}) \vdash \overline{D} \longrightarrow (C = C')$.

Preuve. Voir Appendice B. ■

Corollaire 32 (*Déduct*) Soit \overline{D} une suite de termes et $C = C'$ une équation. Si $MTFA(\overline{D}; \overline{D}) \vdash C = C'$ alors $MTFA \vdash \overline{D} \longrightarrow (C = C')$.

Le corollaire *Déduct* sera par la suite un outil précieux combiné à la convention suivante :

La convention “hyp”

Supposons qu'à un moment donné d'une démonstration formelle on ait à montrer $\overline{B} \longrightarrow (C = D)$. Plutôt que d'écrire une preuve directe de cette équation dans *MT* où *MTA* nous la remplacerons par une preuve de $C = D$ dans $MTFA(\overline{B}; \overline{B})$. Nous procéderons comme suit :

On introduit tout d'abord des “*hypothèses de déduction*” de la forme $\overline{B} = \overline{T}$, en indiquant *hyp* (et non *Hyp*) dans la colonne de gauche. A partir de cette indication, la démonstration se poursuit dans $MTFA(\overline{B}; \overline{B})$, et a pour but de montrer $C = D$. Une fois cette équation obtenue, on conclut $\overline{B} \longrightarrow (C = D)$ en utilisant le fait que *Déduct* nous assure de l'existence d'une preuve directe de $\overline{B} \longrightarrow (C = D)$. A partir de là, la démonstration initiale se poursuit de nouveau dans *MTFA*.

Notons que nous continuerons à citer les métathéorèmes vus jusqu'à présent pour justifier les lignes des démonstrations dans $MTFA(\overline{B}; \overline{B})$. En effet, puisque les axiomes de *MTFA* sont des axiomes de $MTFA(\overline{B}; \overline{B})$, et qu'aux affaiblissements $Astract_{\overline{B}, \overline{B}}$ et $QND_{\overline{B}, \overline{B}}$ près ces deux théories ont les mêmes règles, ces métathéorèmes restent vrais dans $MTFA(\overline{B}; \overline{B})$. Une restriction est cependant à introduire concernant l'utilisation du métathéorème *Context*. Du fait de la restriction concernant les variables libres de \overline{B} dans l'application de $Astract_{\overline{B}, \overline{B}}$, celle-ci ne peut être appliquée, dans le cadre de $MTFA(\overline{B}; \overline{B})$, que pour un contexte $C[]$ où aucune variable libre de \overline{B} n'est liée. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que cette condition est remplie pour chaque utilisation que nous ferons de ce métathéorème.

Remarquons aussi que nous n'utiliserons jamais la règle $QND_{\overline{B}, \overline{B}}$ dans nos démonstrations sous hypothèses de déduction. Le *QND* ne sera utilisé que pour démontrer des tautologies qui, comme leurs instances, sont des axiomes de $MTFA(\overline{B}; \overline{B})$.

Avant de clore cette section nous tirons un corollaire important de *Déduct* (et dont la démonstration utilise la convention hyp) :

Corollaire 33 Soient $\overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ des suites de termes.

Si

$$\overline{C} = \overline{D} \vdash_{MTFA(\overline{B}; \overline{B})} C' = D'$$

Alors

$$\overline{B} \longrightarrow (\overline{C} = \overline{D}) \vdash_{MTFA} \overline{B} \longrightarrow (C' = D')$$

Preuve. Supposons $\overline{C} = \overline{D} \vdash_{MTFA(\overline{B}; \overline{B})} C' = D'$

1. *Hyp* $\overline{B} \longrightarrow (C_i = D_i)$ pour $1 \leq i \leq \text{lg}(\overline{C})$
2. *hyp* $\overline{B} = \overline{T}$
3. *MP(2, 1)* $C_i = D_i$ pour $1 \leq i \leq \text{lg}(\overline{C})$
4. *3 + hypothèse* $C' = D'$
5. *Déduct(2, 4)* $\overline{B} \longrightarrow (C' = D')$

■

1.2.5 Interprétation du calcul propositionnel dans *MT*

Traduction des connecteurs dans *MT*.

Définition 34 Pour toutes variables x et y on définit :

1. $F =_{def} \lambda x.T$
2. $!x =_{def} (if\ x\ T\ T)$
3. $\flat x =_{def} (if\ x\ F\ F)$
4. $\dot{x} =_{def} (if\ x\ F\ T)$
5. $x \hat{\wedge} y =_{def} (if\ x\ \approx y\ \flat y)$
6. $x \dot{\wedge} y =_{def} (if\ x\ !y\ \approx y)$
7. $x \Rightarrow y =_{def} (if\ x\ \approx y\ !y)$
8. $x \dot{\Rightarrow} y =_{def} (if\ x\ \approx y\ \dot{x})$

Le constructeur $\Rightarrow =_{def} \lambda x \lambda y. x \Rightarrow y$ est appelé *implication monotone* en vertu du fait que, comme tout terme, il est interprété par une fonction monotone dans tout modèle de toute sémantique monotone.

Les termes $\lambda x. \dot{x}$, $\lambda x \lambda y. x \hat{\wedge} y$, $\lambda x \lambda y. x \dot{\wedge} y$, $\lambda x \lambda y. x \Rightarrow y$ et $\lambda x \lambda y. x \dot{\Rightarrow} y$ seront appelés *constructeurs propositionnels*. On remarque que ces constructeurs sont stricts, autrement dit ils rendent \perp si un de leurs argument est égal à \perp (voir les axiomes de sélection). Par ailleurs, il est facile de vérifier que ces constructeurs ont le comportement habituel des fonctions de vérité. Par exemple, on a $\vdash T \hat{\wedge} T = T$ et $\vdash F \dot{\wedge} x = F$ pour $x \in \{T, F\}$ etc.... On vérifie aussi facilement que les propriétés habituelles des connecteurs logiques sont vérifiées par les constructeurs propositionnels. Nous en donnons quelques exemples dans le lemme suivant :

Lemme 35 *Les équations suivantes sont des tautologies :*

1. $x \dot{\wedge} y = y \dot{\wedge} x$
2. $x \dot{\vee} y = y \dot{\vee} x$
3. $(x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z = x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)$
4. $(x \dot{\vee} y) \dot{\vee} z = x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z)$
5. $x \dot{\leftrightarrow} y = y \dot{\leftrightarrow} x$

Ce lemme nous permettra à l'avenir de ne plus tenir compte de l'ordre des arguments et du parenthésages dans les expressions de la forme $A_1 \dot{\wedge} \dots \dot{\wedge} A_n$ ou $A_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} A_n$ ou $A_1 \dot{\leftrightarrow} A_2$, puisque, par *InstTauto* toutes les instances des tautologies au-dessus sont démontrables.

Les termes $\lambda x. \approx x$, $\lambda x. !x$, $\lambda x. \flat x$ ne correspondent pas à des connecteurs usuels et servent seulement à définir les constructeurs propositionnels, on les appellera des *constructeurs auxiliaires*. Les deux lemmes suivants expriment que ces constructeurs s'introduisent naturellement dans le contexte de *MT* :

Lemme 36 *Les équations suivantes sont des tautologies :*

1. $(x \Rightarrow x) = (x \dot{\leftrightarrow} x) = !x$
2. $(x \dot{\wedge} x) = (x \dot{\vee} x) = \approx x$
3. $\dot{\neg} \dot{\neg} x = \approx x$

Le lemme qui va suivre exprime que \approx se simplifie et commute avec tous les constructeurs unaires que nous venons de voir :

Lemme 37 (*Simplif \approx*) *Les équations suivantes sont des tautologies :*

1. $\approx (\approx x) = \approx x$
2. $\approx (!x) = !(\approx x) = !x$
3. $\approx (\flat x) = \flat (\approx x) = \flat x$
4. $\approx (\dot{\neg} x) = \dot{\neg} (\approx x) = \dot{\neg} x$

Traduction des formules du calcul propositionnel dans *MT*.

On considère les formules du calcul des propositions construites avec les connecteurs usuels ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) sur l'ensemble de variables propositionnelles VAR (l'ensemble des variables de *MT*).

Définition 38 *On appelle ensemble des CP-termes, et on note CP, le plus petit sous-ensemble de $\Lambda(\mathcal{C})$ qui vérifie :*

$$CP := VAR \mid \approx CP \mid !CP \mid \flat CP \mid \dot{\neg} CP \mid CP \dot{\wedge} CP \mid CP \dot{\vee} CP \mid CP \Rightarrow CP \mid CP \dot{\leftrightarrow} CP$$

Notation 39 *Pour toute formule G du calcul des propositions, on notera \dot{G} la traduction évidente de G dans *MT*.*

Définition 40 *On appellera CP-tautologie tout terme \dot{G} qui est la traduction d'une tautologie G (au sens usuel) du calcul des propositions.*

Remarquons qu'une CP-tautologie est un terme alors qu'une tautologie au sens de MT est une équation. Nous verrons plus loin (Théorème 51) que toute CP-tautologie $\dot{G}[\bar{y}]$ donne lieu à une tautologie de la forme $!\bar{y} \longrightarrow \dot{G}$.

Détermination des CP-termes.

Définition 41 *Un terme A sera dit déterminé sous hypothèses \bar{B} si $\vdash \bar{B} \longrightarrow !A$. Il sera dit déterminé si on a $\vdash !A = T$.*

Remarque 42 *Il est inconsistant d'égaliser un terme déterminé à \perp .*

Dans le cours de cette première partie nous aurons l'occasion d'énoncer un certain nombre de théorèmes dits "de détermination". Le premier de ces théorèmes est un théorème de détermination pour les CP-termes. Il sera la conséquence du lemme suivant :

Lemme 43 *Les équations suivantes sont des tautologies :*

1. $!x \longrightarrow ! \approx x$
2. $!x \longrightarrow !!x$
3. $!x \longrightarrow ! \vdash x$
4. $!x \longrightarrow ! \dot{\neg} x$
5. $!x, !y \longrightarrow ! (x \dot{\wedge} y)$
6. $!x, !y \longrightarrow ! (x \dot{\vee} y)$
7. $!x, !y \longrightarrow ! (x \dot{\supset} y)$
8. $!x, !y \longrightarrow ! (x \dot{\leftrightarrow} y)$

Nous arrivons maintenant à notre premier théorème de détermination (remarquons que, conformément à la Notation 3.6, nous abrégons $!y_1, \dots, !y_n$ par $!\bar{y}$ dans la démonstration qui suit) :

Théorème 44 (*DétCP*) *Tout CP-terme $A[\bar{y}]$ est déterminé sous hypothèses $!\bar{y}$.*

Preuve. La démonstration se fait par induction sur la complexité de A . Nous ne donnons la démonstration que pour le cas $A \equiv B \dot{\wedge} C$, les autres cas se démontrant de façon similaire grâce au lemme précédent :

1. *hyp* $!\bar{y} = \bar{T}$
2. *MP*(1, *hyp ind*) $!B = T; !C = T$
3. *Méta*(*Lem43.5*)(2) $!(B \dot{\wedge} C) = T$
4. *Déduct*(1, 3) $!\bar{y} \longrightarrow !(B \dot{\wedge} C)$

■

Dans la suite de notre exposé nous utiliserons essentiellement le théorème de détermination que nous venons de démontrer sous la forme du corollaire :

Corollaire 45 (*Dét*) *Pour tout CP-terme $A[\bar{y}]$ et toute instance $A[\bar{C}/\bar{y}]$ de A on a $\bar{C} = \bar{T} \vdash! A[\bar{C}/\bar{y}] = T$.*

Preuve. C'est une simple application du théorème *Méta* (Théorème 25) au théorème précédent. ■

Plongement du calcul des propositions dans MT .

Rappelons que si G est une formule du calcul des propositions, \dot{G} est sa traduction dans MT .

Le but de cette section va être de montrer que si $G[\bar{y}]$ est une tautologie alors : $\vdash! \bar{y} \longrightarrow \dot{G}$

La méthode que nous allons employer, pour montrer ce théorème, consiste à faire correspondre à toute preuve de G (dans un système déductif complet donné), une preuve de $!y_1, \dots, !y_m \longrightarrow \dot{G}$.

Il y aurait une autre manière de faire consistant à montrer que, pour toute CP-tautologie \dot{G} , $! \bar{y} \longrightarrow \dot{G}$ est une tautologie au sens de MT . Bien que cette seconde méthode soit plus rapide, elle est difficilement réutilisable pour le calcul des prédicats (Section 1.3.6). De plus, une des vocations initiales de MT étant d'être utilisée pour la vérification des preuves mathématiques, nous privilégions une conversion preuve pour preuve.

On commence par fixer un système déductif complet pour le calcul propositionnel :

- A1 $G \Rightarrow (H \Rightarrow G)$
- A2 $(G \Rightarrow (H \Rightarrow K)) \Rightarrow ((G \Rightarrow H) \Rightarrow (G \Rightarrow K))$
- A3 $(\neg H \Rightarrow \neg G) \Rightarrow ((\neg H \Rightarrow G) \Rightarrow H)$

et la règle de Modus Ponens :

$$MP \quad H; H \Rightarrow K \vdash K$$

où G, H, K parcourent les formules du calcul propositionnel construites sur VAR et sur le système complet de connecteurs $\{\Rightarrow, \neg\}$.

Nous allons d'abord montrer que toute tautologie $G[\bar{y}]$ construite avec les seuls connecteurs \Rightarrow et \neg , on a $\vdash! \bar{y} \longrightarrow \dot{G}$. Ce résultat sera une conséquence des lemmes suivants :

Lemme 46 *Les équations suivantes sont des tautologies :*

1. $!x, !y \longrightarrow x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$
2. $!x, !y, !z \longrightarrow (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$
3. $!x, !y \longrightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x) \Rightarrow ((\neg y \Rightarrow x) \Rightarrow y)$

Il existe aussi une version du Modus Ponens pour l'implication monotone \Rightarrow , que voici :

Lemme 47 (MP_{\Rightarrow}) Soient B, C des termes et \bar{A} une suite de termes.
On a : $\bar{A} \rightarrow B; \bar{A} \rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash \bar{A} \rightarrow C$

Preuve. Le cas où $\bar{A} = \emptyset$ est une simple application du théorème *Méta* à la tautologie $x, x \Rightarrow y \rightarrow y$. Le cas $\bar{A} \neq \emptyset$, est une conséquence immédiate du cas précédent et du Corollaire 33. ■

Proposition 48 Pour toute tautologie du calcul propositionnel $G[\bar{y}]$ construite uniquement avec \neg et \Rightarrow on a : $!\bar{y} \rightarrow \dot{G}$

Preuve. On raisonne par induction sur la preuve de G ; le fait que cette preuve existe étant garanti par la complétude du système de déduction choisi.

1. G est un axiome : Nous ne donnons la démonstration que pour le premier schéma, les autres cas étant similaires.

Soit donc $G \equiv (H \Rightarrow (K \Rightarrow H))$:

1. *hyp* $!\bar{y} = \bar{T}$
2. $MP(1, DétCP)$ $!\dot{K} = T; !\dot{H} = T$
3. $Méta(Lem46.1)(2)$ $\dot{H} \Rightarrow (\dot{K} \Rightarrow \dot{H}) = T$
4. $Deduct(1, 3)$ $!\bar{y} \rightarrow \dot{H} \Rightarrow (\dot{K} \Rightarrow \dot{H})$

2. H est la conclusion de l'application du Modus Ponens à partir des hypothèses K et $K \Rightarrow G$. Le résultat est immédiat par hypothèse d'induction et MP_{\Rightarrow} .

■

Pour généraliser le théorème précédent à toute tautologie écrite avec les connecteurs usuels, nous utiliserons les lemmes suivants dont la preuve, facile, est laissée au lecteur :

Lemme 49 Les équations suivantes sont des tautologies de MT :

$$\begin{aligned} x \dot{\wedge} y &= \dot{\neg}(x \Rightarrow \dot{\neg}y) \\ x \dot{\vee} y &= \dot{\neg}x \Rightarrow y \\ x \dot{\Leftrightarrow} y &= (x \Rightarrow y) \dot{\wedge} (y \Rightarrow x) \end{aligned}$$

Lemme 50 Soient A un CP -terme utilisant les constructeurs propositionnels $\{\dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\vee}, \dot{\Rightarrow}, \dot{\Leftrightarrow}\}$ et A' sa "réécriture" (attendue) avec les seuls constructeurs $\{\dot{\neg}, \Rightarrow\}$, on a $\vdash A = A'$ dans MT .

Preuve. Induction sur la complexité de A en utilisant le lemme précédent.

■

Théorème 51 *Pour toute tautologie $G[\bar{y}]$ du calcul propositionnel on a $! \bar{y} \longrightarrow \dot{G}$.*

Preuve. Soit G' la définition de G dans le langage $\{\neg, \Rightarrow\}$. Par la Proposition 48 on a $! \bar{y} \longrightarrow \dot{G}'$, et par le lemme précédent $\dot{G} = \dot{G}'$.

■

Dans la suite de notre exposé nous utiliserons souvent le théorème que nous venons de démontrer sous la forme suivante :

Corollaire 52 (*CalculProp*) *Si B est une \bar{C} -instance de CP-tautologie alors $! \bar{C} = \bar{T} \vdash B = T$*

Pour conclure la Section 1.2 nous donnons d'autres outils pratiques pour raisonner dans MT :

1.2.6 Les métathéorèmes du “calcul propositionnel”

Nous venons de voir comment un système formel du calcul propositionnel peut être simulé dans MT . Nous allons maintenant nous donner quelques principes de déduction supplémentaires. Les deux premiers sont les équivalents dans MT des principes de Tertium Non Datur et de Raisonnement par l'Absurde. Il est donc possible de “raisonner” dans MT selon ces grands principes.

Le tertium non datur.

Nous allons voir maintenant que si on a $!B = T$, ce qui signifie intuitivement que la valeur de vérité de B est T ou F , on peut alors raisonner par Tertium Non Datur dans MT :

Théorème 53 (*TND*)

$$\bar{A} \longrightarrow !B; \bar{A}, B \longrightarrow (C = D); \bar{A}, \dot{\neg}B \longrightarrow (C = D) \vdash \bar{A} \longrightarrow (C = D)$$

Preuve. On montre le cas $\bar{A} = \emptyset$. Pour le cas $\bar{A} \neq \emptyset$, on remarque simplement que la démonstration du cas “vide” est aussi une démonstration dans $MTFA(\bar{A}; \bar{A})$ (puisque qu'elle est indépendante des variables libres de \bar{A}), et ceci quelquesoit \bar{A} . Le cas $\bar{A} \neq \emptyset$ est donc une conséquence du premier cas et du Corollaire 33 :

1. *Hyp* $!B = T; B : C = B : D; \dot{\neg}B : C = \dot{\neg}B : D$
2. *InstTaut* $!B \longrightarrow ((if B (B : C) (\dot{\neg}B : C)) = C)$
3. *InstTaut* $!B \longrightarrow ((if B (B : D) (\dot{\neg}B : D)) = D)$
4. *MP(1,2)* $(if B (B : C) (\dot{\neg}B : C)) = C$
5. *MP(1,3)* $(if B (B : D) (\dot{\neg}B : D)) = D$
6. *Context(1)* $(if B (B : C) (\dot{\neg}B : C)) = (if B (B : D) (\dot{\neg}B : D))$

8. *Equiv*(4, 5, 6) $C = D$ ■

Le principe de raisonnement par l'absurde va maintenant être une conséquence du *TND* :

Le raisonnement par l'absurde.

Lemme 54 (*Absurde*) $\overline{A} \longrightarrow !B; \overline{A}, \dot{\neg}B \longrightarrow F \vdash \overline{A} \longrightarrow B$

Preuve. On montre le cas $\overline{A} = \emptyset$, le cas $\overline{A} \neq \emptyset$ étant réglé par la même remarque que pour le *TND* :

1. *Hyp* $!B = T; \dot{\neg}B \longrightarrow F$
2. *hyp* $\dot{\neg}B = T$
3. *Trivial*(1, 2) $T \longrightarrow F$
4. *Trivial*(3) $F = T$
5. *Equiv*(3, 4) $\dot{\neg}B = F$
6. *Trivial*(5) $\dot{\neg}\dot{\neg}B = T$
7. *InstTauto*(1, 4, 5) $\dot{\neg}\dot{\neg}B \longrightarrow B$
8. *MP*(6, 7) $B = T$

■

Raisonnement sur les connecteurs.

Les tautologies qui suivent permettront de raisonner dans *MT* sur les constructeurs propositionnels (on pourra par exemple inférer A de $A \wedge B$), on appelle ces tautologies “lois logiques” :

Lemme 55 (*LoiLg*) *Les équations suivantes sont des tautologies*

1. $y_1 \dot{\wedge} \dots \dot{\wedge} y_n \longrightarrow y_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$
2. $y_1, \dots, y_n \longrightarrow y_1 \dot{\wedge} \dots \dot{\wedge} y_n$
3. $x \longrightarrow (x \dot{\vee} y = !y)$
4. $\dot{\neg}x \longrightarrow (x \dot{\vee} y = \approx y)$
5. $x, y \longrightarrow (x \dot{\Rightarrow} y)$
6. $x \longrightarrow (x \dot{\Rightarrow} y = \approx y)$
7. $\dot{\neg}x \longrightarrow (x \dot{\Rightarrow} y = !y)$
8. $x \dot{\Rightarrow} y, y \dot{\Rightarrow} x \longrightarrow x \dot{\Leftrightarrow} y$
9. $x \longrightarrow (x \dot{\Leftrightarrow} y = \approx y)$
10. $\dot{\neg}x \longrightarrow (x \dot{\Leftrightarrow} y = \dot{\neg}y)$

Implication non-monotone et implication monotone.

On va maintenant voir deux théorèmes où sont exprimés les liens existant entre l'implication non-monotone et l'implication monotone $\dot{\Rightarrow}$. Le premier

montre comment on peut passer de l'implication Non Monotone à l'implication Monotone ($NonM \mapsto M$). Pour l'énoncer nous utiliserons l'abréviation suivante :

Notation 56 $\dot{\lambda}\bar{A} =_{def} (A_1 \dot{\lambda} \dots \dot{\lambda} A_n)$ pour $\bar{A} = (A_1, \dots, A_n)$

Lemme 57 (*Implic_{NonM→M}*)

$$\bar{D} \longrightarrow !\bar{A}; \bar{D} \longrightarrow !\bar{B}; \bar{D}, \bar{A} \longrightarrow \bar{B} \vdash \bar{D} \longrightarrow \dot{\lambda}\bar{A} \Rightarrow \dot{\lambda}\bar{B}$$

Preuve. On montre le cas $\bar{D} = \emptyset$, le cas $\bar{D} \neq \emptyset$ étant réglé par la même remarque que pour le *TND*. Nous allons raisonner par *TND* :

1. *Hyp* $\dot{\lambda}\bar{A} = \bar{T}$
2. *Hyp* $\dot{\lambda}\bar{B} = \bar{T}$
3. *Hyp* $\bar{A} \longrightarrow \bar{B}$
4. *Dét*(1), *Dét*(2) $!\dot{\lambda}\bar{A} = \dot{\lambda}\bar{B} = T$
5. *hyp* $\dot{\lambda}\bar{A} = T$
6. *Méta*(*LoiLg1*)(5) $A_i = T$ pour $i \leq lg(\bar{A})$
7. *MP*(6, 3) $\bar{B} = \bar{T}$
8. *Méta*(*LoiLg2*)(7) $\dot{\lambda}\bar{B} = T$
9. *Méta*(*LoiLg5*)(4, 6) $(\dot{\lambda}\bar{A} \Rightarrow \dot{\lambda}\bar{B}) = T$
10. *Déduct*(5, 9) $\dot{\lambda}\bar{A} \longrightarrow (\dot{\lambda}\bar{A} \Rightarrow \dot{\lambda}\bar{B})$
11. *hyp* $\dot{\lambda}(\dot{\lambda}\bar{A}) = T$
12. *Méta*(*LoiLg7*)(4, 11) $(\dot{\lambda}\bar{A} \Rightarrow \dot{\lambda}\bar{B}) = T$
13. *Déduct*(11, 12) $\dot{\lambda}(\dot{\lambda}\bar{A}) \longrightarrow (\dot{\lambda}\bar{A} \Rightarrow \dot{\lambda}\bar{B})$
14. *TND*(4, 10, 13) $(\dot{\lambda}\bar{A} \Rightarrow \dot{\lambda}\bar{B}) = T$

■

Inversement, le théorème que nous allons voir maintenant exprime la possibilité de passer de l'implication Monotone à l'implication Non Monotone ($M \mapsto NonM$) :

Lemme 58 (*Implic_{M→NonM}*)

$$\bar{D} \longrightarrow (\dot{\lambda}\bar{A} \Rightarrow \dot{\lambda}\bar{B}) \vdash \bar{D}, \bar{A} \longrightarrow \bar{B}$$

Preuve. Comme d'habitude, on ne montre que le cas $\bar{D} = \emptyset$:

1. *Hyp* $(\dot{\lambda}\bar{A} \Rightarrow \dot{\lambda}\bar{B}) = T$
2. *hyp* $\bar{A} = \bar{T}$
3. *Méta*(*LoiLg2*)(1) $\dot{\lambda}\bar{A} = T$
4. *InstTauto* $\dot{\lambda}\bar{A} \longrightarrow ((\dot{\lambda}\bar{A} \Rightarrow \dot{\lambda}\bar{B}) = \dot{\lambda}\bar{B})$
5. *MP*(4, 5) $(\dot{\lambda}\bar{A} \Rightarrow \dot{\lambda}\bar{B}) = \dot{\lambda}\bar{B}$
6. *Equiv*(1, 5) $\dot{\lambda}\bar{B} = T$
7. *Méta*(*LoiLg1*)(6) $\bar{B} = \bar{T}$
8. *Déduct*(2, 7) $\bar{A} \longrightarrow \bar{B}$

■

Le lemme qui suit exprime la transitivité de l'implication non-monotone :

Lemme 59 $\overline{D}, \overline{A} \longrightarrow \overline{B}; \overline{D}, \overline{B} \longrightarrow \overline{C} \vdash \overline{D}, \overline{A} \longrightarrow \overline{C}$

Preuve. On montre le cas $\overline{D} = \emptyset$, le cas $\overline{D} \neq \emptyset$ étant, comme d'habitude, une conséquence de ce premier cas et du Corollaire 33 :

1. *Hyp* $\overline{A} \longrightarrow \overline{B}$
2. *Hyp* $\overline{B} \longrightarrow \overline{C}$
3. *hyp* $\overline{A} = \overline{T}$ ■
4. *MP*(3; 1) $\overline{B} = \overline{T}$
5. *MP*(3; 2) $\overline{C} = \overline{T}$
6. *Déduct*(3, 5) $\overline{A} \longrightarrow \overline{C}$

Le dernier lemme de cette section exprime comment passer d'une conjonction d'implications non-monotones à une implication non-monotone entre "conjonctions" monotones :

Lemme 60 *Si pour tous $A_i \in \overline{A}$ et $B_i \in \overline{B}$, on a $a \vdash \overline{D}, A_i \longrightarrow B_i$ alors :*
 $\vdash \overline{D}, \wedge \overline{A} \longrightarrow \wedge \overline{B}$

Preuve.

1. *Hyp* $\overline{D}, A_i \longrightarrow B_i$ pour tous $A_i \in \overline{A}$ et $B_i \in \overline{B}$
2. *hyp* $\overline{D} = \wedge \overline{A} = T$
3. *Méta*(*LoiLg1*)(2) $A_i = T$ pour tous $A_i \in \overline{A}$ ■
4. *MP*(2, 3; 1) $B_i = T$ pour tous $B_i \in \overline{B}$
5. *Méta*(*LoiLg2*)(4) $\wedge \overline{B} = T$
6. *Déduct*(2, 45) $\overline{D}, \wedge \overline{A} \longrightarrow \wedge \overline{B}$

Equivalences non-monotone et monotone

Nous appelons *équivalence non-monotone* les couples d'équations de la forme $\overline{C}, A \longrightarrow B; \overline{C}, B \longrightarrow A$. On commence par introduire une abréviation pour les ensembles de doubles implications non-monotones :

Notation 61 $\overline{C}, (\overline{A} \longleftrightarrow \overline{B}) \equiv_{def} \overline{C}, \overline{A} \longrightarrow \overline{B}; \overline{C}, \overline{B} \longrightarrow \overline{A}$

Les lemmes suivants découlent respectivement des Lemmes 57, 58, 59 et 60. Remarquons que le premier utilise aussi la *LoiLg8*.

Lemme 62 (*Equiv_{NonM \rightarrow M}*)

$\overline{C} \longrightarrow !\overline{A}; \overline{C} \longrightarrow !\overline{B}; \overline{C}, (\overline{A} \longleftrightarrow \overline{B}) \vdash \overline{C} \longrightarrow (\wedge \overline{A} \leftrightarrow \wedge \overline{B})$

Lemme 63 (*Equiv_{M \rightarrow NonM}*)

$\overline{C} \longrightarrow (\wedge \overline{B} \leftrightarrow \wedge \overline{A}) \vdash \overline{C}, (\overline{A} \longleftrightarrow \overline{B})$

Lemme 64 $\overline{D}, (\overline{A} \longleftrightarrow \overline{B}); \overline{D}, (\overline{B} \longleftrightarrow \overline{C}) \vdash \overline{D}, (\overline{A} \longleftrightarrow \overline{C})$

Lemme 65 *Si pour tous $A_i \in \overline{A}$ et $B_i \in \overline{B}$, on a $\vdash \overline{D}, (A_i \longleftrightarrow B_i)$ alors :*
 $\vdash \overline{D}, (\hat{\lambda}\overline{A} \longleftrightarrow \hat{\lambda}\overline{B})$

1.3 Interprétation du calcul des prédicats dans MT

Le but de cette section va être de montrer que l'on peut “simuler” le calcul des prédicats dans MT . Cela suppose une traduction des quantificateurs dans MT et des moyens de raisonner similaires à ceux du calcul des prédicats.

Dans nos discussions pour introduire les axiomes et les métathéorèmes, nous nous placerons dans le modèle intuitif \mathcal{M} que nous avons décrit dans l'introduction. Les termes du λ -calcul écrits en gras désigneront l'interprétation des termes dans ce modèle. Ainsi $\lambda\mathbf{x}.\mathbf{A}$ désignera l'interprétation de $\lambda x.A$.

1.3.1 Etre un ensemble dans MT

La principale différence entre les quantificateurs de MT et les quantificateurs du calcul des prédicats est que les premiers ont un domaine. Ce domaine, dans le cas qui nous occupe, est celui des “ensembles” au sens de MT : le sous-ensemble $\Phi \subseteq \mathcal{M}$:

Comme nous l'avons déjà signalé on peut voir MT comme une théorie des classes munie d'un symbole de prédicat “Être un ensemble”. Ce symbole ϕ représente syntaxiquement la fonction caractéristique χ_Φ de “l'univers” Φ . Rappelons que cette fonction est définie sur \mathcal{M} par : $\chi_\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{T}$ si et seulement si $\mathbf{u} \in \Phi$, et $\chi_\Phi(\mathbf{u}) = \perp_{\mathcal{M}}$ sinon. Le fait que la fonction χ_Φ ne prend que les valeurs \mathbf{T} et $\perp_{\mathcal{M}}$ est approché au niveau syntaxique par l'axiome suivant :

AXIOME MT -Caract $\phi x =! \phi x$

1.3.2 La constante ε et les quantificateurs dans MT

Pour traduire les formules du calcul des prédicats par un terme, MT utilise la constante ε . Cette constante est le représentant syntaxique d'une fonction de choix E_Φ sur Φ qui joue le rôle de l'opérateur de Hilbert. Rappelons que cette fonction est définie à partir d'une fonction de choix ρ de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ vers \mathcal{M} , c'est à dire une fonction telle que, pour tout $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{M}$, on ait $\rho(X) \in X$. On rappelle maintenant la définition de E_Φ :

$$E_{\Phi}(\mathbf{u}) = \begin{cases} \perp & \text{si } \perp_{\mathcal{M}} \in \mathbf{u}\Phi \\ \rho(\Phi) & \text{si } \mathbf{u}\Phi \subseteq \mathfrak{F} \\ \rho(\{\mathbf{x} \in \Phi : \mathbf{u}\mathbf{x} = \mathbf{T}\}) & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut maintenant donner la traduction des quantificateurs dans MT :

Définition 66 *Pour tout terme A on pose*

1. $\varepsilon x.A =_{def} (\varepsilon \lambda x.A)$
2. $\dot{\exists}x.A =_{def} \approx (\lambda x.A \ \varepsilon x.A) =_{MT} \approx A[\varepsilon x.A/x]$
3. $\dot{\forall}x.A =_{def} \dot{\neg} \dot{\exists}x.\dot{\neg}A =_{MT} \approx (A[\varepsilon x.\dot{\neg}A/x])$

Notation 67 $\dot{\forall}\bar{x}.A =_{def} \dot{\forall}x_1..\dot{\forall}x_n.A$ où $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ est une suite de variables avec éventuellement des répétitions.

Comme nous l'avons déjà signalé ε est interprété par E_{Φ} dans \mathcal{M} . On voit facilement que :

- (1) $\dot{\exists}\mathbf{x}.\mathbf{A} = \mathbf{T}$ si et seulement si $\perp_{\mathcal{M}} \notin \lambda\mathbf{x}\mathbf{A}\Phi$ et il existe $\mathbf{u} \in \Phi$ tel que $(\lambda\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{u}) = \mathbf{T}$.
- (2) $\dot{\forall}\mathbf{x}.\mathbf{A} = \mathbf{T}$ si et seulement si $\perp_{\mathcal{M}} \notin \lambda\mathbf{x}\mathbf{A}\Phi$ et pour tous $\mathbf{u} \in \Phi$ on a $(\lambda\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{u}) = \mathbf{T}$.

1.3.3 Les axiomes de quantification

Nous introduisons maintenant les axiomes qui expriment les propriétés de ε , $\dot{\exists}$ et $\dot{\forall}$ dont nous aurons besoin pour simuler le calcul des prédicats dans MT :

La propriété (2) ci-dessus implique que $\mathbf{A}[\mathbf{B}/x] = \mathbf{T}$ pour tout $\mathbf{B} \in \Phi$, ce qu'exprime l'axiome suivant :

$$\text{AXIOME } MT\text{-Quantif1} \quad \phi B, \dot{\forall}x.A \longrightarrow A[B/x]$$

Le fait que E_{Φ} ne teste la valeur de $\lambda\mathbf{x}\mathbf{A}$ que sur les \mathbf{u} appartenant à Φ s'exprime par l'axiome suivant :

$$\text{AXIOME } MT\text{-Quantif2} \quad \varepsilon x.A = \varepsilon x.(\phi x \dot{\wedge} A)$$

Comme ρ est une fonction de choix sur \mathcal{M} et par définition de E_{Φ} , on a clairement $E_{\Phi}(\lambda\mathbf{x}\mathbf{A}) \in \Phi$ si et seulement si $\perp_{\mathcal{M}} \notin \lambda\mathbf{x}\mathbf{A}\Phi$, ce qu'exprime l'axiome :

$$\text{AXIOME } MT\text{-Quantif3} \quad \phi(\varepsilon x.A) = \dot{\forall}x.!A$$

Maintenant si $\dot{\exists}x.A = T$, cela suppose que $\perp_{\mathcal{M}} \notin \lambda xA[\Phi]$ et qu'il existe un u dans Φ tel que $(\lambda xA x) = \mathbf{T}$ et donc $E_{\Phi}(\lambda xA) = \rho(\{u \in \Phi : (\lambda xA u) = \mathbf{T}\}) \in \Phi$. Cela nous donne l'axiome suivant :

AXIOME MT-Quantif4 $\dot{\exists}x.A \longrightarrow \phi(\varepsilon x.A)$

Le dernier axiome de quantification exprime sensiblement la même chose que *Quantif2* (mais ne peut être pour l'instant supprimé sans complexifier notre exposé) :

AXIOME MT-Quantif5 $\dot{\forall}x.A = \dot{\forall}x.(\phi x : A)$

Remarque 68 *La version initiale de Quantif5 dans [13] est $\dot{\forall}x.A = \dot{\forall}x.(\phi x \dot{\wedge} A)$. Il est aisé de montrer en utilisant Caract qu'on a $\vdash \dot{\forall}x.(\phi x : A) = \dot{\forall}x.(\phi x \dot{\wedge} A)$. Les deux versions de Quantif5 sont donc équivalentes et le choix de notre version n'est guidé que par un souci de simplification de certaines preuves.*

1.3.4 Propriétés élémentaires des quantificateurs

Nous allons voir maintenant que les quantificateurs tels qu'ils sont définis dans MT vérifient certaines propriétés usuelles des quantificateurs.

Lemme 69 *Pour tout terme B et pour toute variable x , on a :*
 $\vdash \varepsilon x.B = \varepsilon x. \approx B$

Preuve.

1. *InstGammauto* $\phi x \dot{\wedge} B = \phi x \dot{\wedge} \dot{\neg} \dot{\neg} B$
2. *Trivial* $\varepsilon x.(\phi x \dot{\wedge} B) = \varepsilon x.(\phi x \dot{\wedge} \dot{\neg} \dot{\neg} B) \quad \blacksquare$
3. *Quantif2 + Trivial(2)* $\varepsilon x.B = \varepsilon x. \dot{\neg} \dot{\neg} B$

Il est facile, à partir des définitions de $\dot{\exists}$ et $\dot{\forall}$ et en utilisant les Lemmes 36 et 37 (*Simplif \approx*), de déduire du lemme précédent que :

Corollaire 70 *Pour tous B, x , on a :*

1. $\vdash \varepsilon x. \dot{\neg} \dot{\neg} B = \varepsilon x.B$
2. $\vdash \dot{\exists}x. \dot{\neg} \dot{\neg} B = \dot{\exists}x. \approx B = \approx \dot{\exists}x.B = \dot{\exists}x.B$
3. $\vdash \dot{\forall}x. \dot{\neg} \dot{\neg} B = \dot{\forall}x. \approx B = \approx \dot{\forall}x.B = \dot{\forall}x.B$
4. $\vdash \dot{\forall}x. \dot{\neg} B = \dot{\neg} \dot{\exists}x.B$

Corollaire 71 *Pour tous B, x , on a : $\vdash \dot{\exists}x.B = \dot{\neg} \dot{\forall}x. \dot{\neg} B$*

1.3.5 Les métathéorèmes de quantification

Nous allons voir maintenant les métathéorèmes qui nous permettront de plonger le calcul des prédicats dans MT .

Notation 72 Soient A un terme et $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$:

$$\forall \bar{x}. A =_{def} \dot{\forall} x_1 \dots \dot{\forall} x_n. A$$

Le premier théorème est une conséquence immédiate de *Quantif1*, il est le pendant dans *MT* de l'axiome d'instanciation du calcul des prédicats :

Théorème 73 (*Inst_v*) Si \bar{B} est librement substituable à \bar{x} dans A :

$$\phi \bar{B} = \bar{T}; \dot{\forall} \bar{x} A = T \vdash A[\bar{B}/\bar{x}] = T$$

Le fait que la règle de généralisation du calcul des prédicats est valide dans *MT* est une conséquence de *Quantif5* :

Théorème 74 (*Géné*) Si \bar{x} n'est pas libre dans \bar{C} , on a :

$$\bar{C}, \phi \bar{x} \longrightarrow A \vdash \bar{C} \longrightarrow \dot{\forall} \bar{x}. A$$

Preuve. On remarque tout d'abord que trivialement $\dot{\forall} \bar{x}. T = T$, il vient :

- | | |
|--|---|
| 1. <i>Hyp</i> | $\bar{C}, \phi \bar{x} \longrightarrow A$ |
| 2. <i>hyp</i> | $\bar{C} = \bar{T}$ |
| 3. <i>MP</i> (2, 1) | $\phi \bar{x} : A = \phi \bar{x} : T$ |
| 4. <i>Trivial</i> (3) | $\dot{\forall} \bar{x}. (\phi \bar{x} : A) = \dot{\forall} \bar{x}. (\phi \bar{x} : T)$ ■ |
| 5. (<i>Quantif5</i> \times 2)(4) + <i>Trivial</i> | $\dot{\forall} \bar{x}. A = \dot{\forall} \bar{x}. T$ |
| 6. <i>Trivial</i> (5) | $\dot{\forall} \bar{x}. A = T$ |
| 7. <i>Déduct</i> (2, 6) | $\bar{C} \longrightarrow \dot{\forall} \bar{x}. A$ |

Remarque 75 Il est à noter que la démonstration de *Géné* utilise des abstractions sur \bar{x} . Ceci implique des restrictions quant à l'utilisation de ce théorème dans le cadre d'une démonstration sous hypothèses de déduction. En effet, les variables de \bar{x} ne doivent pas apparaître libres dans cette démonstration, si l'on veut pouvoir conclure par *Déduct*.

Dans \mathcal{M} , la méthode canonique pour montrer $\dot{\exists} \mathbf{x} \mathbf{A} = \mathbf{T}$ est d'exhiber un élément \mathbf{u} de Φ qui vérifie $(\lambda \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{u}) = \mathbf{T}$. Cette méthode est validée par le théorème suivant :

Théorème 76 (*Exhib*) $\phi B = T; !(\dot{\exists} x. A) = T; A[B/x] = T \vdash \dot{\exists} x. A = T$

Preuve. On raisonne par l'absurde :

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1. <i>Hyp</i> | $\phi B = T$ |
| 2. <i>Hyp</i> | $!(\dot{\exists} x. A) = T$ |
| 3. <i>Hyp</i> | $A[B/x] = T$ |
| 4. <i>MP</i> (1, <i>Quantif1</i>) | $\dot{\forall} x. \dot{\neg} A \longrightarrow \dot{\neg} A[B/x]$ |
| 5. <i>Trivial</i> (3, 4) | $\dot{\forall} x. \dot{\neg} A \longrightarrow \dot{\neg} T$ |
| 6. <i>Lem70.4</i> + <i>Trivial</i> | $\dot{\neg}(\dot{\exists} x. A) \longrightarrow F$ |
| 7. <i>Absurde</i> (2, 6) | $\dot{\exists} x. A = T$ |

■

Comme nous l'avons déjà vu lors de la présentation des constantes, si $\perp_{\mathcal{M}} \notin \lambda \mathbf{x}.\mathbf{A} [\Phi]$ et qu'il existe $\mathbf{u} \in \Phi$ tel que $(\lambda \mathbf{x}.\mathbf{A} \mathbf{u}) = \mathbf{T}$, on a $E_{\Phi}(\lambda \mathbf{x}.\mathbf{A}) \in \{\mathbf{u} \in \Phi : (\lambda \mathbf{x}.\mathbf{A} \mathbf{u}) = \mathbf{T}\}$. Ceci s'exprime syntaxiquement dans la métarègle suivante :

Théorème 77 (*Choix*) $\dot{\exists}x.B = T \vdash \phi(\varepsilon x.B) = T; B[\varepsilon x.B/x] = T$

Preuve. Le fait que $\phi(\varepsilon x.B) = T$ est donné par *Quantif4* et *MP*. Pour montrer $B[\varepsilon x.B/x] = T$, nous utilisons la tautologie $\approx x \rightarrow x$:

1. *Hyp* $\approx B[\varepsilon x.B/x] = T$
2. *InstTauto* $\approx B[\varepsilon x.B/x] \rightarrow B[\varepsilon x.B/x]$
3. *MP*(1,3) $B[\varepsilon x.B/x] = T$

■

Le théorème qui suit exprime le fait que le choix effectué par E_{Φ} ne dépend que des valeurs de vérité des $(\lambda \mathbf{x}.\mathbf{A} \mathbf{u})$ pour $\mathbf{u} \in \Phi$:

Théorème 78 (*Ackermann*) $\phi x \rightarrow A \leftrightarrow B \vdash \varepsilon x.A = \varepsilon x.B$

Preuve. Nous utiliserons les tautologies $(!y : T) = !y$ en ligne 2 et $(x : (y \leftrightarrow z)) \wedge y = (x : (y \leftrightarrow z)) \wedge z$ en ligne 5 :

1. *Hyp* $(\phi x : A \leftrightarrow B) = (\phi x : T)$
2. *InstTauto* $!\phi x : T = !\phi x$
3. (*Caract + Trivial*)(2) $\phi x : T = \phi x$
4. *Trivial*(1,3) $(\phi x : A \leftrightarrow B) = \phi x$
5. *InstTauto* $(\phi x : A \leftrightarrow B) \wedge A = (\phi x : A \leftrightarrow B) \wedge B$
6. *Trivial*(5,4) $\phi x \wedge A = \phi x \wedge B$
7. *Context*(6) $\varepsilon x.(\phi x \wedge A) = \varepsilon x.(\phi x \wedge B)$
8. *Quantif2 + Trivial*(7) $\varepsilon x.A = \varepsilon x.B$

■

On termine cette section par un théorème de “détermination” :

Lemme 79 (*Dét_{∃,∀}*) Pour tout terme B et toute suite \overline{C} de termes telle que $x \notin VL(\overline{C})$, si $\vdash \overline{C}, \phi x \rightarrow !B$ alors :

- 1) $\vdash \overline{C} \rightarrow \dot{\forall}x. !B$
- 2) $\vdash \overline{C} \rightarrow \phi(\varepsilon x.B)$
- 3) $\vdash \overline{C} \rightarrow !\dot{\exists}x.B$
- 4) $\vdash \overline{C} \rightarrow !\dot{\forall}x.B$

Preuve. Le 1 s'obtient facilement en utilisant *Deduct* avec $\overline{C} = \overline{T}$ comme hypothèses de déduction et *Géné*. Le 2 se déduit trivialement de 1 et de l'axiome *Quantif3*. Le 4 découle aisément du Lemme 43.4 et du 3. On montre le 3 :

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. <i>hyp</i> | $\overline{C} = \overline{T}$ |
| 2. $MP(1, 1 + 2)$ | $\dot{\forall}x. !B = T; \phi(\varepsilon x.B) = T$ |
| 3. $Inst_{\dot{\forall}}(2)$ | $!B[\varepsilon x.B/x] = T$ |
| 4. $Méta(Simplif \approx)$ | $!B[\varepsilon x.B/x] =! \approx B[\varepsilon x.B/x]$ |
| 5. $Déf(\dot{\exists}) + Equiv(3, 4)$ | $!\dot{\exists}x.B = T$ |

■

1.3.6 Plongement du calcul des prédicats dans MT

Dans cette section on prend l'ensemble VAR des variables de MT comme ensemble de variables d'individus pour les langages du premier ordre dont nous parlerons.

Nous allons voir que, un langage P du 1^{er} ordre étant donné, ainsi qu'un système déductif complet S pour le calcul des prédicats sur P , il est possible, moyennant une traduction des formules de P convenable, de simuler toute preuve de S dans MT .

Langage du 1^{er} ordre dans MT

Pour rester simple (et parce que cela nous suffit), nous ne parlerons ici que des langages du 1^{er} ordre *sans symbole de fonction*, bien qu'on puisse étendre les résultats de cette section à tout langage. De ce fait, nous identifierons le langage avec son ensemble de lettres de prédicats. Nous utilisons tous les connecteurs et quantificateurs usuels $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists\}$.

Soit $P = \{P_n : n < l\}$ donc un ensemble fini ou dénombrable de lettres de prédicats ($l \leq \mathbb{N}$) On rappelle que l'ensemble FP des formules du calcul des prédicats construites sur P est défini comme le plus petit ensemble tel que :

$$FP := (P_n \overline{y}) \mid \neg FP \mid (FP \wedge FP) \mid (FP \Rightarrow FP) \mid (FP \vee FP) \mid (FP \Leftrightarrow FP) \mid \exists x.FP \mid \forall x.FP$$

où, dans la première clause, \overline{y} est une suite de variables de VAR avec éventuellement des répétitions et dont la longueur est égale à l'arité de P_n .

Pour traduire les lettres de prédicats de P , on se donne une fonction θ de P dans $\Lambda^0(\mathcal{C})$ (l'ensemble des termes clos de MT). On définit maintenant l'ensemble $\theta(FP)$ des termes construits sur $\theta(P)$. Cet ensemble contient strictement l'ensemble image $\theta[FP]$ de FP par θ , autrement dit l'ensemble des traductions des formules de FP , mais pour simplifier les raisonnements par induction que nous ferons par la suite nous avons besoin d'une plus grande généralité :

Définition 80 Soit θ une fonction de P dans $\Lambda^0(\mathcal{C})$. On définit par induction l'ensemble $\theta(FP)$ des $\theta(FP)$ -termes comme le plus petit sous-ensemble de $\Lambda(\mathcal{C})$ tel que :

$$\theta(FP) := (\theta(P_n) \bar{y}) \mid \approx \theta(FP) \mid !\theta(FP) \mid \flat \theta(FP) \mid \dot{\neg} \theta(FP) \mid \theta(FP) \wedge \theta(FP) \mid \theta(FP) \dot{\Rightarrow} \theta(FP) \mid \theta(FP) \dot{\vee} \theta(FP) \mid \theta(FP) \dot{\Leftrightarrow} \theta(FP) \mid \dot{\exists} x. \theta(FP) \mid \dot{\forall} x. \theta(FP)$$

où, dans la première clause, \bar{y} est une suite de variables de VAR avec éventuellement des répétitions et dont la longueur est égale à l'arité de P_n ; et où, dans les deux dernières, x est quelconque dans VAR .

Remarque 81 Il est clair que θ induit canoniquement une interprétation de toute formule $G \in FP$ par un $\theta(FP)$ -terme, que nous noterons $\theta(G)$.

Notation 82 $\theta(G)$ sera notée plus simplement \dot{G} lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur θ .

Nous allons voir maintenant une condition sur la fonction θ pour qu'elle "force la détermination de P ". Nous verrons en Sections 1.3.6 et 1.3.7 que cette "détermination" est suffisante pour plonger le calcul des prédicats sur P dans MT .

Détermination des $\theta(FP)$ -termes.

Définition 83 Soit P un langage et θ une fonction de P dans $\Lambda^0(\mathcal{C})$. On dira que :

1. θ force la détermination de P , ou que P est déterminé par θ , si, pour tout $P_n \in P$, on a : $\vdash \phi \bar{y} \longrightarrow !(\theta(P_n) \bar{y})$
où \bar{y} est une suite de variables de longueur égale à l'arité de P_n
2. θ force la détermination de FP , ou que FP est déterminé par θ si, pour tout $A[\bar{y}] \in \theta(FP)$ on a : $\vdash \phi \bar{y} \longrightarrow !A$

Théorème 84 ($Dét\theta(FP)$) Soient P un langage et $\theta : P \rightarrow \Lambda^0(\mathcal{C})$. La fonction θ force la détermination de P si et seulement elle force la détermination de FP .

Preuve. L'implication gauche-droite est immédiate. Supposons donc que θ force la détermination de P , et soit $A[\bar{y}]$ un $\theta(FP)$ -terme. On doit montrer $\phi \bar{y} \longrightarrow !A$. La preuve se fait par induction sur la complexité de A :

- 1) Le cas $A \equiv (\theta(P_n) \bar{y})$ est réglé par *hypothèse*.
- 2) Les cas $A \equiv \approx B \mid !B \mid \flat B \mid \dot{\neg} B \mid B \wedge C \mid B \dot{\Rightarrow} C \mid B \dot{\vee} C \mid B \dot{\Leftrightarrow} C$ se règlent de façon analogue aux cas du Théorème 44 ($DétCP$) (il suffit de remplacer les hypothèses de déduction $! \bar{y} = \bar{T}$ par les hypothèses de déduction $\phi \bar{y} = \bar{T}$).

- 3) Le cas où $A \equiv \forall x.B$ découle facilement des cas \neg et \exists par définition de $\forall x.B$.
- 4) Le cas $A \equiv \exists x.B$ est réglé par le Lemme 79 ■

Un système pour le calcul des prédicats.

On se donne maintenant un système déductif S (qui étend le système du calcul propositionnel de la Section 1.2.5). Ce système est complet pour les formules valides construites sur $\{\neg, \Rightarrow, \forall\}$. Cependant, comme cette complétude ne nous sera utile que dans la section suivante, les schémas d'axiomes et les règles de S sont ici présentés en toute généralité pour les formules de FP :

On se donne les schémas d'axiomes suivants, où G, H, K sont des formules quelconques de FP :

- A1 $G \Rightarrow (H \Rightarrow G)$
 A2 $(G \Rightarrow (H \Rightarrow K)) \Rightarrow ((G \Rightarrow H) \Rightarrow (G \Rightarrow K))$
 A3 $(\neg H \Rightarrow \neg G) \Rightarrow ((\neg H \Rightarrow G) \Rightarrow H)$

et la règle de Modus Ponens pour toute formules H et K :

$$MP \quad H; H \Rightarrow K \vdash K$$

On ajoute maintenant les schémas d'axiomes du calcul des prédicats et la règle de généralisation :

- A4 $\forall x.A \Rightarrow A[y/x]$ pour toute variable y
 librement substituable à x dans A
 A5 $\forall x(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall xB)$
 Si x n'est pas libre dans A
Généralisation $A \vdash \forall xA$

Plongement du système S dans MT .

Nous verrons ici que si FP est déterminé par θ on peut associer à toute démonstration d'une formule $G[\bar{y}]$ dans le système S une démonstration de $\phi\bar{y} \longrightarrow \dot{G}$ dans MT . On en déduira dans la section suivante une condition suffisante pour qu'une théorie du 1^{er} ordre soit "interprétable" dans MT .

Notation 85 *L'utilisation de l'hypothèse "FP est déterminé par θ " sera indiquée par (H1) dans les preuves qui vont suivre.*

Satisfaction des axiomes du calcul propositionnel et du Modus Ponens. Nous allons voir tout d'abord que l'hypothèse (H1) est suffi-

sante pour que MT satisfasse les (traductions des) axiomes du calcul des propositions :

Lemme 86 *Supposons que FP soit déterminé par θ , et soient $A[\bar{y}]$, $B[\bar{y}]$ et $C[\bar{y}]$ des $\theta(FP)$ -termes. On a :*

1. $\vdash \phi_{\bar{y}} \longrightarrow A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $\vdash \phi_{\bar{y}} \longrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3. $\vdash \phi_{\bar{y}} \longrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$

Preuve. Nous donnons la démonstration pour le cas $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$, les autres cas étant semblables :

1. *hyp* $\phi_{\bar{y}} = \bar{T}$
2. $MP(1, (H1))$ $!A = T; !B = T$
3. *BalculProp(2)* $A \Rightarrow (B \Rightarrow A) = T$
4. *Déduct(1, 3)* $\phi_{\bar{y}} \longrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$

■

Nous établissons maintenant un lemme analogue au Lemme 47 pour le calcul des prédicats :

Lemme 87 *Pour tous $\theta(FP)$ -termes $A[\bar{y}]$ et $B[\bar{y}]$ on a $\phi_{\bar{y}} \longrightarrow A$; $\phi_{\bar{y}} \longrightarrow (A \Rightarrow B) \vdash \phi_{\bar{y}} \longrightarrow B$*

Preuve. C'est un cas particulier de MP_{\Rightarrow} (Lemme 47) pour $\bar{C} \equiv \phi_{\bar{y}}$. ■

Satisfaction des axiomes du calcul des prédicats et de la Règle de Généralisation. Le théorème *GénéG* est l'équivalent dans MT de la Règle de Généralisation, voyons les axiomes :

Le lemme suivant montre que, sous l'hypothèse (H1), MT vérifie les (traductions des) axiomes du calcul des prédicats du schéma $A4$. Sa démonstration sera l'occasion pour nous de compléter la convention **hyp** par la convention suivante. Celle-ci permet d'introduire en cours de démonstration des hypothèses de déduction supplémentaires et provisoires :

La convention "hyp+"

Supposons qu'à un moment donné d'une preuve on ait à démontrer une équation de la forme $\bar{A} \longrightarrow (B = C)$. Conformément à la Convention "hyp" on introduit alors des hypothèses de déduction $\bar{A} = \bar{T}$, puis on continue la preuve dans $MTFA(\bar{A}; \bar{A})$. Supposons maintenant que, dans la partie de la preuve qui s'effectue dans $MTFA(\bar{A}; \bar{A})$, on ait de nouveau à démontrer une équation de la forme $\bar{A}' \longrightarrow (B' = C')$. Plutôt que d'écrire directement la preuve de $\bar{A}' \longrightarrow (B' = C')$ dans $MTFA(\bar{A}; \bar{A})$ nous utiliserons le procédé suivant : On introduit par *hyp+* les hypothèses de déduction *supplémentaires* $\bar{A}' = \bar{T}$. La preuve se poursuit alors dans

$MTFA(\overline{A}, \overline{A}'; \overline{A}, \overline{A}')$. Une fois l'équation $B' = C'$ obtenue, on conclut, comme cela est permis par le théorème *Déduct-*, qu'il existe une démonstration dans $MT(\overline{A}; \overline{A})$ de $\overline{A}' \longrightarrow (B' = C')$. On suppose cette démonstration écrite, et la preuve se poursuit de nouveau dans $MTFA(\overline{A}; \overline{A})$.

Lemme 88 *Supposons que FP soit déterminé par θ . Soit $A[\overline{y}, x]$ un $\theta(FP)$ -terme on a $\vdash \phi\overline{y} \longrightarrow \forall x.A \Rightarrow A[y/x]$ pour toute variable $y \in \overline{y}$ librement substituable à x dans A .*

Preuve.

1. *hyp* $\phi\overline{y} = \overline{T}$
2. *hyp+* $\forall x.A = T$
3. *Inst \forall (1, 2)* $A[y/x] = T$
4. *Déduct-(2, 3)* $\forall x.A \longrightarrow A[y/x]$
5. *MP(1, (H1))* $!\forall x.A = !A[y/x] = T$
6. *Implic $_{NonM \rightarrow M}$ (5, 4)* $\forall x.A \Rightarrow A[y/x] = T$
7. *Déduct(1, 6)* $\phi\overline{y} \longrightarrow \forall x.A \Rightarrow A[y/x]$

■

Remarque 89 *Le choix d'utiliser la Convention "hyp+" est motivé uniquement par des raisons de gain de place. En effet, il est toujours possible de se passer de la Convention "hyp+" et de n'utiliser que la Convention "hyp". Par exemple, on pourrait montrer le lemme précédent comme suit :*
Lemme 1 : $\vdash \phi\overline{y}, \forall x.A \longrightarrow A[y/x]$

Preuve :

1. *hyp* $\phi\overline{y} = \overline{T}; \forall x.A = T$
3. *Inst \forall (1, 2)* $A[y/x]$.
4. *Déduct(2, 3)* $\phi\overline{y}, \forall x.A \longrightarrow A[y/x]$

Lemme 2 : $\vdash \phi\overline{y} \longrightarrow \forall x.A \Rightarrow A[y/x]$

Preuve :

1. *hyp* $\phi\overline{y} = \overline{T}$
2. *MP(1, Lemme 1)* $\forall x.A \longrightarrow A[y/x]$
3. *MP(1, (H1))* $!\forall x.A = !A[y/x] = T$
4. *Implic $_{NonM \rightarrow M}$ (3, 2)* $\forall x.A \Rightarrow A[y/x] = T$
5. *Déduct(1, 4)* $\phi\overline{y} \longrightarrow \forall x.A \Rightarrow A[y/x]$

Nous montrons maintenant que, sous la condition (H1), MT vérifie les (traductions des) axiomes du schéma A5 :

Lemme 90 *Supposons que FP soit déterminé par θ . Soient $A[\overline{y}]$ et $B[\overline{y}, x]$ des $\theta(FP)$ -termes, $x \notin VL(A)$. Alors :*
 $\phi\overline{y} \longrightarrow \forall x.(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x.B)$

Preuve. On raisonne par TND :

1. hyp $\phi\bar{y} = \bar{T}$
2. $MP(1, (H1))$ $!A = T$
3. $hyp+$ $A = T$
4. $Context(3)$ $\dot{\forall}x.(A \dot{\Rightarrow} B) \dot{\Rightarrow} (A \dot{\Rightarrow} \dot{\forall}x.B) = \dot{\forall}x.(T \dot{\Rightarrow} B) \dot{\Rightarrow} (T \dot{\Rightarrow} \dot{\forall}x.B)$
5. $Déf(\dot{\Rightarrow}) + Trivial$ $= \dot{\forall}x. \approx B \dot{\Rightarrow} \approx \dot{\forall}x.B$
6. $Trivial + Cor70.3$ $= \dot{\forall}x.B \dot{\Rightarrow} \dot{\forall}x.B$
7. $Instance(Lem36.1)$ $= !\dot{\forall}x.B$
8. $MP(1, (H1))$ $= T$
9. $Déduct-(3, 8)$ $A \longrightarrow \dot{\forall}x.(A \dot{\Rightarrow} B) \dot{\Rightarrow} (A \dot{\Rightarrow} \dot{\forall}x.B)$
10. $hyp+$ $\dot{\neg}A = T$
11. $Méta(LoiLg7)(10)$ $(A \dot{\Rightarrow} B) = !B; (A \dot{\Rightarrow} \dot{\forall}x.B) = !\dot{\forall}x.B$
12. $MP(1, (H1))$ $!B = !\dot{\forall}x.B = T$
13. $Trivial(11, 12)$ $\dot{\forall}x.(A \dot{\Rightarrow} B) \dot{\Rightarrow} (A \dot{\Rightarrow} \dot{\forall}x.B) = (\dot{\forall}x.T \dot{\Rightarrow} T)$
14. $Trivial$ $= (T \dot{\Rightarrow} T) = T$
15. $Déduct-(10, 14)$ $\dot{\neg}A \longrightarrow \dot{\forall}x.(A \dot{\Rightarrow} B) \dot{\Rightarrow} (A \dot{\Rightarrow} \dot{\forall}x.B)$
16. $TND(2, 9, 15)$ $\dot{\forall}x.(A \dot{\Rightarrow} B) \dot{\Rightarrow} (A \dot{\Rightarrow} \dot{\forall}x.B) = T$
17. $Déduct(1, 16)$ $\phi\bar{y} \longrightarrow \dot{\forall}x.(A \dot{\Rightarrow} B) \dot{\Rightarrow} (A \dot{\Rightarrow} \dot{\forall}x.B)$

■

Remarque 91 *Il est important de voir que dans les lignes 4 et 13, les mentions de $Context$ et $Trivial$ masquent une utilisation de la règle d'abstraction sur la variable x . L'utilisation du théorème de déduction sur la dernière ligne de chacune des deux démonstrations est donc justifié par le fait que x n'est pas libre dans A .*

Remarque 92 *L'utilisation du corollaire $Déduct$ en dernière ligne d'une démonstration se fait toujours de la même façon. Elle reprend des hypothèses de déduction de la forme $\bar{A} = \bar{T}$ et une conclusion intermédiaire $B = C$ pour donner $\bar{A} \longrightarrow (B = C)$. Cette utilisation étant maintenant bien comprise, nous sous-entendrons dorénavant cette dernière ligne.*

1.3.7 Théories du 1^{er} ordre interprétables dans MT

Dans cette section, nous supposons toujours que θ force la détermination de FP pour un langage $P = \{P_n : n < l\}$ où, rappelons-le, FP est l'ensemble de formules du calcul des prédicats construites sur P .

Nous allons définir une notion de θ -validité pour les formules de FP et nous montrerons que si les axiomes d'une théorie \mathcal{T} sont θ -valides alors tous les théorèmes de la théorie le sont.

Dans la suite, lorsque nous parlerons des “théorèmes” d’une théorie du 1^{er} ordre \mathcal{T} , on supposera toujours que l’on s’est doté d’un *système complet du calcul des prédicats*, et qu’il s’agit de l’ensemble des théorèmes de \mathcal{T} dans ce système.

Définition 93 Une formule $G[\bar{y}]$ de FP est θ -valide dans MT (ou plus simplement θ -valide) si on a $\vdash \phi\bar{y} \longrightarrow \theta(G)$

Définition 94 Une théorie du 1^{er} ordre $\mathcal{T} \subseteq FP$ est θ -interprétable dans MT (ou plus simplement θ -interprétable) si tous ses théorèmes sont θ -valides.

Cas où les formules sont écrites seulement avec $\{\neg, \Rightarrow, \forall\}$.

On notera ici \widehat{FP} l’ensemble des formules du calcul des prédicats écrites sur P contenant les seuls connecteurs et quantificateurs $\{\neg, \Rightarrow, \forall\}$.

Proposition 95 Une théorie $\mathcal{T} \subseteq \widehat{FP}$ est θ -interprétable dans MT si et seulement si ses axiomes sont θ -valides dans MT .

Preuve. Le sens “seulement si” est évident puisque les axiomes sont des théorèmes. Montrons la réciproque. Soit $G[\bar{y}]$ un théorème de \mathcal{T} ; on doit montrer que, pour la traduction \dot{G} de G par θ , on a $\vdash \phi\bar{y} \longrightarrow \dot{G}$. Comme le système déductif S est complet pour le système $\{\neg, \Rightarrow, \forall\}$ il existe une démonstration de G dans S à partir des axiomes de \mathcal{T} . La preuve se fait alors par induction sur la longueur d’une démonstration de longueur minimale de G dans S :

- 1) Si G est un axiome de \mathcal{T} , le résultat est donné par hypothèse.
- 2) Si G est un axiome du calcul des propositions le résultat est obtenu par le Lemme 86.
- 3) Si G est un axiome du calcul des prédicats, on utilise le Lemme 90 ou le Lemme 88.
- 4) Si G est obtenu par une application de MP on utilise alors le Lemme 87.
- 5) Si G est obtenu par généralisation on utilise le théorème *GénéG* en prenant $\bar{x} \equiv x$. ■

Cas général Nous allons maintenant généraliser le théorème précédent à des théories admettant des formules construites avec les connecteurs $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists\}$. Pour cela nous introduisons des notations :

Notation 96 :

- 1) Pour toute formule $G \in FP$, on notera $\hat{G} \in \widehat{FP}$ sa réécriture standard dans le système $\{\neg, \Rightarrow, \forall\}$.

2) Pour tout terme $A \in \theta(FP)$, on notera \hat{A} sa traduction avec les constructeurs $\{\dot{\neg}, \dot{\Rightarrow}, \dot{\forall}\}$.

3) Pour toute théorie $\mathcal{T} \subseteq FP$, on notera $\hat{\mathcal{T}} =_{def} \{\hat{G} : G \in \mathcal{T}\} \subseteq \widehat{FP}$.

Lemme 97 Pour tout $\theta(FP)$ -terme A on a $\vdash A = \hat{A}$

Preuve. La preuve se fait facilement par induction sur la complexité de A en utilisant le Lemme 50 et le Corollaire 71. ■

Corollaire 98 $\mathcal{T} \subseteq FP$ est θ -interprétable ssi $\hat{\mathcal{T}} \subseteq \widehat{FP}$ l'est.

Preuve. Supposons que \mathcal{T} soit θ -interprétable, il est alors clair que $\hat{\mathcal{T}}$ est θ -interprétable, puisque les théorèmes de $\hat{\mathcal{T}}$ sont aussi des théorèmes de \mathcal{T} (par définition de $\hat{\mathcal{T}}$). Maintenant supposons $\hat{\mathcal{T}}$ θ -interprétable. Soit $G[\bar{y}]$ un théorème de \mathcal{T} . Par définition de $\hat{\mathcal{T}}$, \hat{G} est un de ses théorèmes et puisque $\hat{\mathcal{T}}$ est θ -interprétable, on a donc $\phi\bar{y} \longrightarrow \hat{G}$. Par le lemme précédent il vient alors trivialement $\phi\bar{y} \longrightarrow \dot{G}$. Tout théorème de \mathcal{T} est donc θ -valide, d'où le résultat. ■

Théorème 99 Soit \mathcal{T} une théorie du 1^{er} ordre. Supposons que θ force la détermination du langage de \mathcal{T} . Alors \mathcal{T} est θ -interprétable ssi ses axiomes sont θ -valides.

Preuve. Si les axiomes de \mathcal{T} sont θ -valides, ceux de $\hat{\mathcal{T}}$ le sont trivialement par le Lemme 97. Par la Proposition 95, $\hat{\mathcal{T}}$ est donc interprétable. On conclut par le corollaire précédent. ■

Corollaire 100 Si P est déterminé θ alors, pour toute formule valide $G[\bar{y}] \in FP$, on a $\vdash \phi\bar{y} \longrightarrow \theta(G)$

Preuve. C'est en effet un cas particulier du théorème précédent pour $\mathcal{T} = \emptyset$. ■

Chapitre 2

Interprétation de ZFC dans Map Theory.

Nous montrerons dans ce chapitre qu'en définissant convenablement une fonction θ , pour tout théorème $G[\bar{y}]$ de ZFC , on a $\vdash_{MTA} \phi\bar{y} \longrightarrow \theta(G)$, ce qui peut se lire :

“Si \bar{y} est interprétée par une suite finie “d'ensembles” alors $\theta(G) = T$ ”

Par les Théorèmes 84 et 99, il suffit pour cela que fonction θ force la détermination du langage $P =_{def} \{=, \in\}$, et que les axiomes de ZFC soient θ -valides. La définition de θ sera l'objet de la Section 2.2. Le fait que θ détermine P sera donné par le Théorème 137 (Section 2.3.6). Après avoir montré les propriétés utiles des traductions \sim et $\dot{\in}$ de “=” et “ \in ”, nous montrerons, en Section 2.5, la θ -validité de chaque axiome de ZFC . Nous en concluons que ZFC est interprétable dans MTA , ainsi que certains principes de démonstration dans MTA (valable aussi pour MTF) dits “*Métathéorèmes de la “théorie des ensembles”*”.

Le cas de l'axiome d'antifondation $AF A$ sera traité à part, dans le Chapitre 3.

Rappelons que nous désignons par MT l'ensemble des axiomes communs à MTA et MTF (les versions respectivement Antifondée et Fondée de Map Theory). Dans ce chapitre, certains axiomes introduits ne sont pas des axiomes de MT , mais des axiomes de MTA . Rappelons que pour les distinguer, le nom des axiomes sera précédé de “ MT -” pour les axiomes de MT , et de “ MTA ” pour les axiomes spécifiques à MTA .

Tout d'abord nous présentons l'axiomatisation de ZFC que nous avons choisie.

2.1 Les axiomes de ZFC

L'axiomatisation suivante de ZFC est tirée pour l'essentiel de P. Aczel [1, p.117], nous ajoutons simplement un axiome pour l'ensemble vide et nous modifions l'axiome de l'infini (nous dirons quelques mots sur la raison de cette modification) :

L'extensionnalité :

$$(ZFC - Ext) \quad \forall u \forall v ((u \subseteq v \wedge v \subseteq u) \Leftrightarrow u = v)$$

où, pour $x, y \subseteq VAR$, on pose $x \subseteq y =_{def} \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)$

L'ensemble vide :

$$(ZFC - Vide) \quad \exists z \forall v \neg(v \in z)$$

La paire :

$$(ZFC - P) \quad \forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

L'union :

$$(ZFC - U) \quad \forall u \exists z \forall x \forall y (x \in u \wedge y \in u \Rightarrow u \in z)$$

Les parties :

$$(ZFC - W) \quad \forall u \exists z \forall y (y \subseteq u \Rightarrow y \in z)$$

L'infini :

$$(ZFC - I) \quad \exists z \forall u ((\forall v \neg(v \in u) \Rightarrow u \in z) \wedge (u \in z \Rightarrow \exists y (y \in z \wedge \forall w (w \in y \Leftrightarrow w = u))))$$

L'axiome de l'infini choisi ici est classique mais il diffère de l'axiome choisi par K.Grue [13, p.60], et de celui repris de L. Rieger par P. Aczel en [1, p.117]; ces deux axiomes n'étant pas adaptés à l'antifondation. En effet, le premier est vérifié par tout Ω solution de l'équation $\Omega = \{\Omega\}$, et le deuxième par tout Ω' solution de l'équation $\Omega' = \{\emptyset, \Omega'\}$.

La compréhension pour toute formule G :

$$(ZFC - Comp) \quad \forall u \exists z \forall x (x \in z \Leftrightarrow x \in u \wedge G) \quad \text{pour } z \text{ non libre dans } G$$

Le remplacement pour toute formule G :

$$(ZFC - R) \quad \forall u \exists z \forall y (y \in z \wedge \exists x G \Rightarrow \exists x (x \in z \wedge G)) \quad \text{pour } z \text{ non libre dans } G$$

Remarque 101 *Les axiomes de paire, union, puissance et remplacement affirment l'existence de sur-ensembles de la paire, de l'union etc.... usuels. On utilise ensuite la compréhension pour démontrer l'existence de ces ensembles.*

Remarque 102 *Bien que les axiomes de la paire et de l'ensemble vide ne soient pas strictement nécessaires (voir par exemple Krivine [18] ou Kunen [19]), nous les conservons. D'une part parce qu'ils sont usuels et d'autre part parce que cela nous permettra d'avoir des illustrations simples de la façon dont les axiomes de ZFC sont satisfaits dans MT .*

Le choix :

$$(ZFC - C) \quad \forall u \quad (\forall x(x \in u \Rightarrow \exists v(v \in x)) \wedge \\ \forall x \forall y \forall w (x \in u \wedge y \in u \wedge w \in x \wedge w \in y \Rightarrow x = y)) \\ \Rightarrow \exists z (\\ \forall x(x \in u \Rightarrow \exists v(v \in x \wedge v \in z)) \wedge \\ \forall x \forall w \forall w' (x \in u \wedge w \in x \wedge w' \in x \wedge w \in z \wedge w' \in z) \Rightarrow w = w'))$$

L'axiome du choix affirme que pour toute famille \mathbf{u} d'ensembles non-vides et disjoints, il existe un ensemble \mathbf{z} contenant pour chaque $\mathbf{x} \in \mathbf{u}$, un unique élément choisi dans \mathbf{x} .

Notation 103 (*ZFC et ZFC^{-e}*) Dorénavant ZFC désignera l'axiomatisation que nous venons de donner, et ZFC^{-e} celle-ci moins l'axiome d'extensionnalité.

2.2 Traduction des formules de ZFC dans MT.

Nous avons vu dans la Section 1.3.6 comment traduire le calcul des prédicats dans MT. Dans cette section nous exhiberons les termes (abrégés par $\dot{\sim}$ et $\dot{\in}$) qui serviront à traduire les symboles de relation = et \in dans MTA. Ces traductions diffèrent de celles données en [13] pour MTF. Avant d'aller plus loin, nous allons discuter ces différences.

Dans MTF, le signe d'égalité "=" était interprété par le terme $(Y \mathfrak{A})$, où Y est le combinateur de points fixes de Curry et \mathfrak{A} le terme :

Définition 104 :

$$\mathfrak{A} =_{def} \lambda f. \lambda u \lambda v. (if \ u \ (if \ v \ T \ F) \ (if \ v \ F \ \dot{\forall} x \dot{\exists} y. f(ux)(vy) \wedge \dot{\forall} y \dot{\exists} x. f(ux)(vy)))$$

Rappelons à cette occasion que Y est défini par :

Définition 105 $Y =_{def} \lambda f. (\lambda x. f(xx) \ \lambda x. f(xx))$

On se donnait les abréviations $\dot{=} =_{def} (Y \mathfrak{A})$ et $u \dot{=} v =_{def} (Y \mathfrak{A})uv$.

Comme \mathbf{T} représente l'ensemble vide, et que les "éléments" de $\mathbf{u} \neq \mathbf{T}$ sont les éléments de $\mathbf{u}\Phi$, l'appartenance se définissait à partir de l'égalité par le terme $\dot{\in} =_{def} \lambda u \lambda x. (if \ u \ F \ \dot{\exists} z. (uz \dot{=} x))$. On se donnait aussi l'abréviation $x \dot{\in} u =_{def} \dot{\in} ux$

Le fait que $\dot{=}$ est un point fixe de \mathfrak{A} permettait alors, en utilisant la Règle d'Induction, de montrer que (la relation induite sur Φ par) $\dot{=}$ était une relation d'équivalence, et qu'elle était à valeurs dans Φ , c'est à dire que $\vdash \phi u, \phi v \longrightarrow \phi(u \dot{=} v)$. On en déduisait l'extensionnalité dans MTF, à

savoir :

$$\phi u, \phi v \longrightarrow (u \doteq v \Leftrightarrow \forall x. (x \dot{\in} u \Leftrightarrow x \dot{\in} v))$$

Dans MTA , les choses sont plus complexes. En effet, il est naturel d'utiliser les mêmes " κ -pré-modèles" de MT que ceux construit en [6, p.50] comme point de départ de la modélisation de MTA . Ces pré-modèles sont les modèles des axiomes et règles de λ -calcul et du QND les plus simples et les plus naturels de la sémantique κ -continue. Or, ils interprètent le constructeur de points fixes de Curry Y par l'opérateur de plus petits points fixes de \mathcal{M} (noté \mathbb{Y} en Section 4.1.9). Cela a pour conséquence que, pour tous choix convenable de Φ et pour tous les \mathbf{u}, \mathbf{v} non bien fondés de Φ , on a $\mathbf{u} \doteq \mathbf{v} = \perp$. Ces pré-modèles ne satisfont donc pas l'équation $\phi u, \phi v \longrightarrow ! (u \doteq v)$ dont nous avons besoin pour plonger le calcul des prédicats dans MT (cf Section 1.3.6, hypothèse (H1)).

Pour résoudre ce problème, plusieurs solutions peuvent être envisagées. La première, consiste à remplacer Y dans la définition de \doteq par un autre combinateur de points fixes. Mais cette solution ne fonctionne pas car il semble bien que les combinateurs de points fixes soient tous interprétés par \mathbb{Y} dans nos κ -pré-modèles, au moins les plus naturels. La deuxième solution consisterait à remplacer Y par une constante qu'on interprète par un opérateur de points fixes ayant les bonnes propriétés (il en existe sous-certaines conditions). Cette solution entraînant une complexification trop grande de la sémantique a été abandonnée. Finalement, la solution que nous choisissons est d'introduire une constante \sim pour représenter l'égalité, et de poser par axiome que \sim fonctionne comme un point fixe de \mathfrak{A} .

L'énoncé de cet axiome utilisera la notation et l'abréviation suivantes :

Notation 106 On utilisera la notation infixe $u \sim v =_{def} \sim u v$.

Définition 107 $u \sim_0 v =_{def} \forall x \exists y. (ux \sim vy) \wedge \forall y \exists x. (ux \sim vy)$

On donne maintenant l'axiome :

$$MTA-Fix^{\sim} \quad u \sim v \longleftrightarrow (if\ u\ (if\ v\ T\ F)\ (if\ v\ F\ u \sim_0 v))$$

Remarque 108 Par définition de \longleftrightarrow , $MTA-Fix^{\sim}$ est en fait constitué de deux équations, et donc, stricto sensu, de deux axiomes. Nous continuerons cependant à le considérer comme un axiome unique.

On définit l'appartenance comme précédemment, et on utilise la notation infixe :

Définition 109 :

$$1) \dot{\in} =_{def} \lambda u \lambda x. (if\ u\ F\ \exists z. (uz \sim x))$$

$$2) x \dot{\in} u =_{def} \dot{\in} u x$$

Définition 110 La fonction θ qui interprétera dorénavant les formules de ZFC dans MTA est définie au niveau atomique et pour toutes variables x, y , par :

$$\theta(x = y) = x \sim y$$

$$\theta(x \in y) = x \dot{\in} y$$

L'extension de θ à toute formules de ZFC s'effectuant naturellement comme indiqué en Section 1.3.6.

Définition 111 (ZFC-Termes) On appellera désormais ZFC -terme tout terme qui est la traduction d'une formule de ZFC . On notera $\Lambda(ZFC)$ l'ensemble des ZFC -termes (par extension, il nous arrivera de parler de " ZFC -terme" pour un terme seulement MTA -égal à un ZFC -terme).

Nous allons maintenant introduire un certain nombre d'axiomes qui expriment des propriétés de clôture de Φ , propriétés qui font de Φ une structure suffisamment riche pour être un modèle de ZFC^{-e} .

2.3 Axiomes de construction et Constructeurs ensemblistes.

On peut voir les axiomes de ZFC^{-e} comme réclamant implicitement qu'un univers U soit clos pour certaines opérations (éventuellement d'arité 0, comme, par exemple, pour l'axiome de l'ensemble vide), opérations décrites par des sous-formules qui sont contenues dans les axiomes. Par exemple, l'axiome de la paire peut être vu comme affirmant que U doit être clos pour une "opération" **Paire** qui, de plus, vérifie la formule $(\mathbf{u} \in \mathbf{Paire}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \in \mathbf{Paire}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$.

Un des avantages de Map Theory sur ZFC est que ces opérations existent au niveau syntaxique et sont représentées par des termes avec lesquels on peut, de plus, faire certains calculs. La démonstration syntaxique de la traduction de chaque axiome de ZFC^{-e} passe alors par deux étapes :

1. On exhibe un terme clos C , et on montre que C est un ϕ -constructeur, autrement dit que l'on a $\vdash \phi \bar{x} \longrightarrow \phi(C \bar{x})$.
2. On montre $\vdash \phi \bar{x} \longrightarrow \dot{G}[C/z, \bar{x}]$, où \dot{G} est la traduction de la sous-formule G décrivant l'opération correspondant à l'axiome.

Les ϕ -constructeurs vérifiant, au sens de 2, une formule de ZFC sont appelés des *constructeurs ensemblistes*. Il existe beaucoup de ϕ -constructeurs qui ne sont pas des constructeurs ensemblistes.

Nous ne nous intéresserons ici qu'à l'étape 1 de la démonstration syntaxique, la 2 sera l'objet de la Section 2.5. Nous verrons successivement :

- Une présentation des *Axiomes de Construction*. Ces axiomes expriment des propriétés de clôture de Φ plus *élémentaires* que celles concernant les constructeurs ensemblistes, mais dont ces dernières sont des conséquences. Nous ferons une mention spéciale pour l'axiome *MTA-Infini* qui remplace l'axiome de construction *C-Prim* de K. Grue ([13, p.49].
- Une introduction des notions de ϕ -constructeur et de ϕ -structure.
- Une caractérisation très utile des ϕ -structures : les *termes simples*
- Une présentation des *constructeurs ensemblistes*.
- Une présentation des *ZFC-termes* avec ϕ -structures.
- Une démonstration à partir des Axiomes de Construction que, pour tout constructeur ensembliste C d'arité "naturelle" n , on a :

$$\vdash \phi z_1, \dots, \phi z_n \longrightarrow \phi(C z_1 \dots z_n)$$

Par exemple, on montrera que pour le constructeur P correspondant à l'opération **Paire** on a :

$$\vdash \phi x, \phi y \longrightarrow \phi(Pxy)$$

2.3.1 Les axiomes de construction

Comme nous venons de le signaler, les constructeurs qui correspondent aux axiomes de ZFC^{-e} peuvent être définis dans Map Theory à partir de constructeurs plus simples. Les axiomes de construction que nous donnons ici exprime la clôture de Φ pour ces constructeurs simples excepté celui correspondant à l'axiome de l'infini, qui sera donné dans la section suivante.

Nous introduisons tout d'abord un certain nombre d'abréviations :

Définition 112 :

$$F =_{def} \lambda x.T$$

$$App =_{def} \lambda u \lambda z.(uz)$$

$$S =_{def} \lambda u \lambda z.u$$

$$P =_{def} \lambda x \lambda y \lambda z.(if z x y)$$

$$Curry =_{def} \lambda a \lambda x \lambda y.a(Pxy)$$

Remarquons que le constructeur S est généralement noté K en λ -calcul (S désignant alors un autre constructeur). Nous commenterons ces abréviations en même temps que les axiomes de construction suivants :

<i>AXIOMES</i>	(<i>MT-T</i>)	$\phi T = T$
	(<i>MT-F</i>)	$\phi F = T$
	(<i>MT-⊥</i>)	$\phi \perp = \perp$
	(<i>MT-φ</i>)	$\phi \lambda x. A = \phi \lambda x. \phi A$
<i>AXIOMES</i>	(<i>MT-App</i>)	$\phi u, \phi z \longrightarrow \phi(uz)$
	(<i>MT-P</i>)	$\phi u, \phi v \longrightarrow \phi(Puv)$
	(<i>MT-Curry</i>)	$\phi u \longrightarrow \phi(Curry u)$
	(<i>MT-Diag</i>)	$\phi u \longrightarrow \phi \lambda x. ((ux)x)$
	(<i>MT-CInv</i>)	$\phi u, \phi v \longrightarrow \phi \lambda x. u(xv)$
	(<i>MT-Comp</i>)	$\forall x. \phi(fx), \phi u \longrightarrow \phi \lambda x. f(ux)$

Remarque 113 *MT-Diag*, *MT-CInv* et *MT-Comp*, qui ont été introduits par C. Berline et K. Grue en [6, p.38], remplacent les deux axiomes initiaux nettement plus complexes *C-M1* et *C-M2* [13, p.49]. Le fait que ces trois axiomes impliquent *C-M1* et *C-M2* était déjà implicite dans [13].

Rappelons que nous appelons “opérateurs” les interprétations des termes de $\Lambda(C)$ dans le modèle \mathcal{M} , et que, pour les distinguer des variables, ces opérateurs sont écrit en gras :

MT-T : Exprime à la fois que “l’ensemble vide” \mathbf{T} et le “booléen” \mathbf{T} (T pour *True*) appartient à Φ .

MT-F : Exprime que la fonction constante de valeur \mathbf{T} , notée \mathbf{F} , est dans Φ . Les fonctions constantes sont l’équivalent dans *MT* des singletons, aussi cet axiome nous permettra de montrer le théorème $\vdash \phi x \longrightarrow \phi Sx$, qui exprime la clôture de Φ pour l’opération singleton. Comme, de plus, \mathbf{F} est le représentant canonique du booléen *Faux*, l’axiome exprime aussi que ce booléen est dans Φ . Cet axiome est noté *MT-K'* de [13, p.49].

MT-⊥ : Exprime que l’indéterminé est extérieur à Φ .

MT-φ : Exprime que $\mathbf{f} \in \Phi$ si et seulement si $\chi_{\Phi} \circ \mathbf{f} \in \Phi$.

MT-App : Comme nous l’avons déjà dit, les “éléments” de $\mathbf{u} \in \Phi$ au sens de $(\Phi, \in_{\Phi}, \sim_{\Phi})$ sont les éléments de $\mathbf{u}\Phi$ au sens de V . Ces “éléments” doivent, bien sûr, être eux-mêmes des “ensembles”. On devra donc avoir $\mathbf{u}\Phi \subseteq \Phi$. En d’autres termes Φ doit être clos pour l’application.

MT-P : Le terme P est le représentant syntaxique de l’opération **Paire**. L’axiome exprime donc que Φ est clos pour cet opération et il sera en particulier utilisé pour démontrer l’axiome de la paire.

MT-Curry : L’opérateur **Curry** = $\lambda \mathbf{a} \lambda \mathbf{x} \lambda \mathbf{y}. (\mathbf{a}(\mathbf{Pxy}))$ opère une sorte de décurrification. Il transforme $\mathbf{a} \in \mathcal{M}$, qui intentionnellement opère sur l’objet structuré \mathbf{Pxy} , en un opérateur à deux arguments \mathbf{x} et \mathbf{y} .

MT-Diag : Exprime le fait que si $\mathbf{f} \in \Phi$ alors la fonction qui à \mathbf{x} associe $\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{x})$ est dans Φ . L’opérateur $\lambda \mathbf{f} \lambda \mathbf{x}. ((\mathbf{fx})\mathbf{x})$ à pour effet de transformer une

fonction binaire f en une fonction unaire. Bien sûr, en itérant l'application de cet opérateur on transforme une fonction d'arité quelconque en une fonction unaire, et ceci en identifiant tous les arguments.

MT-CInv : L'opérateur $\lambda f \lambda \mathbf{v} \lambda \mathbf{g} . (f(\mathbf{g}\mathbf{v}))$ est une espèce d'opérateur de composition-évaluation, qui pour une fonction f et un argument \mathbf{v} donne pour toutes fonctions \mathbf{g} , la valeur de $(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{v})$. Combiné avec *MT-Diag*, l'axiome *MT-CInv* permet de montrer que le constructeur ensembliste *Union* est un ϕ -constructeur.

MT-Comp : Exprime le fait que si $f \in \Phi \mapsto \Phi$ et $\mathbf{g} \in \Phi$ alors $f \circ \mathbf{g} \in \Phi$. Il a pour conséquence facile par *MT-App* que Φ est clos par composition. Entre autres, il joue un rôle important pour montrer que les constructeurs ensemblistes *Compréhension_{B,y}* et *Remplacement_{B,y,x}* sont des ϕ -constructeurs.

Notation 114 *A partir de maintenant la référence "Trivial" dans une démonstration indiquera que l'équation de la colonne de droite est obtenue, à partir des lignes au dessus, par applications des axiomes MT-T, F, \perp en plus des axiomes habituels (Select1, 2, 3 ; Applic-T, β , \perp et des métarègles Renom, Context, Equiv).*

2.3.2 L'axiome *MTA-Infini*

Le remplacement de l'axiome *MT-Prim* de [13] par l'axiome *MTA-Infini* mérite une petite discussion :

Les "ensembles infinis" d'un modèle \mathcal{M} de *MTA* ou *MTF*, sont des fonctions f telles que $f[\Phi]$ (respectivement $f[\Phi_F]$ ¹ pour *MTF*) est infini (au sens de V).

Dans le cas de "l'univers" bien-fondé Φ_F , certaines de ces fonctions, définies par induction, sont représentables syntaxiquement grâce au constructeur : $Prim =_{def} \lambda f \lambda a \lambda b . (Y \lambda g \lambda y . (if \ y \ a \ (f \ \lambda z . (g \ (y \ (bz))))))$. Par exemple, la fonction \mathbf{g}_ω définie par :

$$\mathbf{g}_\omega(\mathbf{y}) = \begin{cases} \perp_{\mathcal{M}} & \text{si } \mathbf{y} = \perp_{\mathcal{M}} \\ \mathbf{T} & \text{si } \mathbf{y} = \mathbf{T} \\ \lambda z . (\mathbf{g}_\omega(\mathbf{y}\mathbf{T})) & \text{sinon} \end{cases}$$

correspond au terme $\omega_{\Phi_F} =_{def} (Prim \ \lambda x . x \ T \ T)$. Intuitivement ω_{Φ_F} est l'ensemble $\{\hat{n} : n \in \mathbb{N}\}$, où $\hat{n} =_{def} \lambda x_1 \dots \lambda x_n . T$. On peut alors montrer formellement dans *MTF* des propriétés de ces fonctions inductives en "raisonnant" grâce à la règle d'*Induction*. Par exemple, on pouvait déduire $\vdash_{MTF} n \dot{\in} \omega_{\Phi_F} = T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pouvait aussi déduire

¹Rappelons que Φ_F est la base du modèle de *ZFC + FA* construit en [2], et que sa fonction caractéristique interprète la constante ϕ dans *MTF*.

$\vdash_{MTF} \dot{I}N\dot{F}I\dot{N}I[\omega_{\Phi_F}] = T$, où $\exists z \dot{I}N\dot{F}I\dot{N}I[z]$ est l'axiome d'infini donné par Grue en [13], et $\dot{I}N\dot{F}I\dot{N}I$ sa traduction dans MTF . L'axiome $C\text{-Prim}$ de MTF exprimait alors que, pour $\mathbf{f} \in \Phi_F \mapsto \Phi_F$ et $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Phi_F$, on a $(\mathbf{Prim} \mathbf{f} \mathbf{a} \mathbf{b}) \in \Phi_F$ (où \mathbf{Prim} est l'interprétation de $Prim$ dans \mathcal{M}).

Dans le cas de MTA , en raison du caractère non-bien-fondé de certains éléments de Φ , il n'a pas été possible de montrer $(\mathbf{Prim} \mathbf{f} \mathbf{a} \mathbf{b}) \in \Phi$ à partir des hypothèses $\mathbf{f} \in \Phi \mapsto \Phi$ et $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Phi$, et ceci même dans le cas particulier où $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{T}$ (cas de \mathbf{g}_ω). À défaut d'avoir, pour l'instant, trouvé une représentation syntaxique des "ensembles infinis" qui soit à la fois dans l'esprit " λ -calcul" de Map Theory, et adaptée à l'antifondation, nous introduisons un nouvel axiome plus classique dans sa formulation :

$$AXIOMES \quad (MTA\text{-}Infini) \quad \dot{\exists}z.(T \dot{\in} z \wedge \dot{\forall}x.(x \dot{\in} z \Rightarrow Sx \dot{\in} z)) = T$$

Cet axiome a pour conséquence immédiate, par *Choix* et *LoiLg1*, le lemme suivant, d'où on déduira en Section 2.5.6 l'axiome de l'infini dans MTA :

$$\text{Définition 115} \quad \omega_\Phi =_{def} \varepsilon z.(T \dot{\in} z \wedge \dot{\forall}x.(x \dot{\in} z \Rightarrow Sx \dot{\in} z))$$

$$\text{Lemme 116} \quad \vdash \phi\omega_\Phi = T \dot{\in} \omega_\Phi = \dot{\forall}x.(x \dot{\in} \omega_\Phi \Rightarrow Sx \dot{\in} \omega_\Phi) = T$$

2.3.3 ϕ -constructeurs et ϕ -structures

Comme l'expriment les axiomes de construction, de nombreux opérateurs pour lesquels Φ est clos ne sont pas des opérateurs ensemblistes. Ces opérateurs, autrement dit les éléments de $\cup_{n < \omega} (\Phi^n \mapsto \Phi)$, seront appelés de façon générale des Φ -opérateurs. Certains de ces opérateurs ont un représentant syntaxique, cela motive la définition suivante :

Définition 117 *Un terme clos C est un ϕ -constructeur s'il existe $n \geq 0$ tel que $\vdash \phi z_1, \dots, \phi z_n \longrightarrow \phi(C z_1 \dots z_n)$. L'entier n est alors appelé une arité de C .*

Remarque 118 *Il est facile de voir que :*

1. *Tout ϕ -constructeur d'arité n est d'arité $n + k$ pour tout entier k (par *MT-App*).*
2. *Tout ϕ -constructeur a une arité minimale, et ceux qui ont un sens intuitif clair ont une "arité naturelle" qui coïncide souvent avec leur arité minimale. Comme la propriété de minimalité ne nous servira pas, nous utiliserons plus volontiers la notion informelle d'arité naturelle. Les ϕ -constructeurs d'arité 0 sont intuitivement les éléments de Φ , et les ϕ -constructeurs d'arité n les "classes n -aires" de Φ .*

Exemple 119 *Par arité naturelle croissante :*

arité 0 : T, F (par les axiomes *MT-T* et *MT-F*)

arité 1 : $\phi, \lambda x.\phi x, I =_{def} \lambda x.x$ (trivialement), *Curry* (par *MT-Curry*)

arité 2 : *App* (par *MT-App*), P (par *MT-P*)

.....

Nous aurons souvent besoin de manipuler des “ ϕ -constructeurs appliqués à des variables”, cela motive la définition suivante :

Définition 120 *Un terme $t[\bar{z}]$ est un ϕ -structure si on a :*

$$\vdash \phi\bar{z} \longrightarrow \phi t[\bar{z}]$$

Remarque 121 *Comme $\phi x \longrightarrow \phi x$ est une instance de tautologie, toute variable est une ϕ -structure.*

Remarque 122 *Il est clair qu'un terme $t[\bar{z}]$ est une ϕ -structure si et seulement si $\lambda\bar{z}.t$ est un ϕ -constructeur d'arité $lg(\bar{z})$.*

Notons bien la différence “ontologique” qui distingue un ϕ -constructeur d'une ϕ -structure : Un ϕ -constructeur représente un élément de $(\Phi^n \mapsto \Phi)$ i.e une “classe” du point de vue de Map Theory. Cette “classe” peut être “propre”. Par exemple, P représente la “classe” dont les “éléments” sont les “paires” $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ pour $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Phi$, mais c'est une “classe propre” puisque $P \notin \Phi$. Par opposition, et pourvu que ses variables libres soient interprétées par des “ensembles”, une ϕ -structure est toujours interprétée par un “ensemble”, un élément de Φ .

Nous avons choisi ce nom de “ ϕ -structure” en référence à l'identification “ensemble-structure” impliquée par l'axiome *AFA* et parce que les ϕ -structures font apparaître, dans une certaine mesure, la structure des ensembles dans la syntaxe. Par exemple, la structure binaire de la paire est rendue par le comportement applicatif du *if* (axiomes *Select1,2*) dans la définition de P .

De même que la structure d'un ensemble, une ϕ -structure peut être complexe, i.e constituée de ϕ -structures “emboîtées” les unes dans les autres. Par exemple, $PT(Puv)$ est une “paire”, elle-même constituée de T et de la “paire” (Puv) . Par ailleurs, un “emboîtement” de ϕ -structures reste une ϕ -structure. Ceci est exprimé par le lemme suivant :

Lemme 123 *L'ensemble des ϕ -structures est le plus petit ensemble*

$Z \subseteq \Lambda(C)$ *tel que :*

1) $VAR \subseteq Z$

2) *Si C est un ϕ -constructeur d'arité n et que $\bar{t} \in Z^n$ alors $(C\bar{t}) \in Z$.*

3) Z *est clos par* $=_{MTA}$.

Preuve. On montre tout d'abord que l'ensemble des ϕ -structures vérifie les conditions 1,2 et 3, puis qu'il est inclus dans tout Z vérifiant cette propriété :

(i) Tout variable est une ϕ -structure (Remarque 121). Maintenant, si \bar{t} est une suite de ϕ -structures, le fait que $(C \bar{t})$ soit une ϕ -structure s'obtient facilement par définition d'un ϕ -constructeur d'arité $lg(\bar{t})$ et par application du théorème *Méta* aux hypothèses d'inductions. Enfin le 3 est une conséquence immédiate de *Context*.

(ii) On suppose maintenant que $Z \subseteq \Lambda(C)$ vérifie 1, 2 et 3. Soit $t[\bar{z}]$ une ϕ -structure. On a trivialement $t =_{MT} (\lambda \bar{z}. t \bar{z})$ et $\lambda \bar{z}. t$ est un ϕ -constructeur (Remarque 122). De plus, par 1 on a $\bar{z} \in Z^n$ pour $n = lg(\bar{z})$. On en conclut $t \in Z$ par 2 et 3. ■

2.3.4 Termes simples et Théorème de Construction

Par la suite, nous aurons souvent besoin de montrer que certains termes sont des ϕ -structures (ou, ce qui revient au même, que leurs clôtures sont des ϕ -constructeurs). Pour nous aider dans cette tâche, nous nous servons d'un théorème général dit *Théorème de Construction*. Ce théorème, qui découle des Axiomes de Construction, exprime la clôture de Φ pour une large classe d'opérateurs. Son énoncé nécessite la définition suivante :

Définition 124 Soit $X \subsetneq VAR$, et " ν " une variable n'apparaissant pas dans X . Soit $Var = \{\nu\} \cup X$. L'ensemble Σ des termes simples construits sur Var est l'ensemble défini inductivement par :

$$\Sigma := y \in X \mid T \mid F \mid (\Sigma\Sigma) \mid P\Sigma\Sigma \mid \phi\Sigma \mid \Sigma \sim \Sigma \mid C[\bar{\Sigma}/\bar{z}] \mid (\Sigma(\nu\bar{\Sigma})) \mid \lambda z. \Sigma[P\nu z/\nu] \mid \varepsilon y. \Sigma[T/\nu] \mid \Sigma[T/\nu, \bar{\Sigma}/\bar{y}] \mid \Sigma^{MT}$$

Dans cette définition $\bar{\Sigma}$ désigne une suite finie quelconque de termes simples. Dans la clause $C[\bar{\Sigma}/\bar{z}]$, $C[\bar{z}]$ est une ϕ -structure. La variable z , dans la clause $\lambda z. \Sigma[P\nu z/\nu]$, doit être *non libre dans Σ* et différente de ν . Dans la clause $\varepsilon y. \Sigma[T/\nu]$ on doit avoir $y \in X$. La dernière clause signifie que tout terme *MTA*-équivalent à un terme simple et qui a ses variables libres dans Var est lui-même simple.

Remarque 125 Seules les variables de $Var = X \cup \{\nu\}$ peuvent apparaître libres dans un terme simple construit sur Var . Par contre, comme l'égalité dans *MT* contient la α -équivalence, n'importe quelle variable de VAR peut s'y trouver liée.

Remarque 126 Par les clauses $P\Sigma\Sigma$, $(\Sigma\Sigma)$ et Σ^{MT} , on vérifie facilement que si A, B et C sont des termes simples construits sur Var alors :

$\lambda y.(if\ y\ B\ C)$, $(if\ A\ B\ C)$, $\neg A$, $\approx A$, $!A$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \vee B$ et $A \Leftrightarrow B$ sont des termes simples construits sur Var .

Convention : Nous supposons maintenant $Var = X \cup \{\nu\}$ fixé et nous parlerons de “terme simple” pour abrégier “terme simple construit sur Var ”.

Nous énonçons maintenant le Théorème de Construction. La démonstration de ce théorème reprend essentiellement celle du Théorème de Totalité Unaire [13] auquel nous renverrons pour les cas non-triviaux.

Théorème 127 (Construction) Soit $S[\bar{y}]$ un terme, avec $\bar{y} \subseteq X$ alors :
 S est un terme simple ssi S est une ϕ -structure.

Preuve.

\Leftarrow) est une conséquence immédiate de la Remarque 121 et des clauses $y \in X$ et $C[\bar{\Sigma}/\bar{z}]$

\Rightarrow) On commence par démontrer le lemme suivant :

“Pour tout terme simple $S'[\nu, \bar{y}]$ sur Var on a $\vdash \phi \bar{y} \longrightarrow \phi \lambda \nu. S'$ ”

La preuve de ce lemme se fait par induction sur la structure de S' . Les cas $S' = X \mid T \mid F \mid (\Sigma \Sigma) \mid P \Sigma \Sigma \mid \phi \Sigma \mid \Sigma \sim \Sigma \mid C[\bar{\Sigma}/\bar{z}]$ découlent respectivement, et en utilisant *Méta*, soit des Axiomes de Construction, soit de l'axiome $MTA-Const^{\sim}$ (qui sera introduit en Section 2.4.1), soit de l'hypothèse sur C . Le cas Σ^{MT} est trivial. Les autres sont traités dans Grue [13, p.55] dans le cadre du Théorème de Totalité Unaire.

Le théorème se déduit maintenant du lemme comme suit : On remarque tout d'abord que comme ν n'est pas libre dans S on a $\phi(\lambda \nu. S\ T) =_{\beta} \phi S$. On a alors facilement $\vdash \phi \bar{y} \longrightarrow \phi(\lambda \nu. S\ T)$ par $MT-T$ et $MT-App$. On en conclut trivialement $\vdash \phi \bar{y} \longrightarrow \phi S$. ■

Remarque 128 La restriction $\bar{y} \subseteq X$ dans l'énoncé du théorème précédent est purement technique. En effet, comme pour tout terme $S[\bar{y}]$ il est possible de trouver X tel que $\bar{y} \subseteq X$, toute ϕ -structure est simple relativement à un $X \subsetneq VAR$ suffisamment bien choisi.

2.3.5 Les constructeurs ensemblistes

Nous donnons maintenant la liste des constructeurs ensemblistes dont nous montrerons dans la Section 2.3.7 qu'ils sont des ϕ -constructeurs. Il est à remarquer qu'aux schémas de Compréhension et de Remplacement correspondent deux familles infinies de constructeurs indexées par le ZFC -terme B :

Les constructeurs ensemblistes :

Vide	T
Paire(,)	P
Union()	$\lambda u \lambda z. u(zT)(zF)$
Parties()	$\lambda u \lambda x. (if\ x\ T\ \lambda z. u(x(I''\ u\ (uz))))$ avec $I'' =_{def} \lambda u \lambda y. \varepsilon z'. (uz' \sim y)$
Choix()	$\lambda u \lambda x. \varepsilon y. (y \dot{\in} ux)$
Compréhension $_{B,y}()$	$\lambda \bar{x} \lambda u. (if\ u\ T\ (if\ \dot{\exists} z. B[uz/y]\ T\ \lambda z. (if\ B[uz/y]\ uz\ uz_0)))$ pour tout ZFC -terme $B[y, \bar{x}]$ tel que $z \notin \bar{x}$ et pour $z_0 \equiv \varepsilon z. B[uz/y]$
Remplacement $_{B,y,x}()$	$\lambda \bar{x} \lambda u \lambda z. (\varepsilon x. B[uz/y])$ pour tout ZFC -terme $B[y, x, \bar{x}]$ tel que $z \notin \bar{x}$

2.3.6 ZFC -termes avec ϕ -structures

Définition et simplicité.

Pour montrer que les constructeurs ensemblistes $Compréhension_{B,y}()$ et $Remplacement_{B,y,x}()$ sont des ϕ -constructeurs, on utilisera la simplicité du ZFC -terme B . L'objet de cette section sera donc de montrer que tout ZFC -terme est simple. Ce résultat sera une conséquence d'un théorème plus général, et qui nous sera utile par la suite, établissant la simplicité de ce que nous appelons les ZFC -termes avec ϕ -structures. Nous introduisons tout d'abord de manière informelle cette notion :

Comme nous l'avons déjà dit, certaines opérations sur les ensembles sont représentées syntaxiquement par ce que nous avons appelé les *constructeurs ensemblistes* : $P(,)$, $Parties()$ etc... Rappelons aussi que les axiomes de ZFC^{-e} sont démontrés dans MT en exhibant un terme qui "vérifie" (la traduction de) la formule contenue dans l'axiome. Par exemple, pour montrer l'axiome de la paire on montrera que :

$$\vdash \phi x, \phi y \longrightarrow (x \dot{\in} Pxy \wedge y \dot{\in} Pxy)$$

Cette manière de faire implique la manipulation de ZFC -termes où certaines variables libres sont remplacées par des ϕ -structures. Ce sont ces derniers que nous appelons ZFC -termes avec ϕ -structures. Par exemple, à partir du ZFC -terme $x \dot{\in} z \wedge y \dot{\in} z$, on obtient le ZFC -terme avec ϕ -structures $x \dot{\in} Pxy \wedge y \dot{\in} Pxy$ en remplaçant la variable z par Pxy . Nous donnons maintenant la définition formelle des ZFC -termes avec ϕ -structures, puis on mon-

trera que ces termes sont des ϕ -structures (Corollaire 136).

Définition 129 Un terme B est un *ZFC*-terme avec ϕ -structures si :

- 1) $B \equiv x \sim y$ ou $B \equiv x \dot{\in} y$ pour $x, y \in VAR$
- 2) $B \equiv A[\bar{t}/\bar{x}]$ où $A[\bar{x}]$ un *ZFC*-terme avec ϕ -structures, et \bar{t} est une suite de ϕ -structures.
- 3) B a une des formes suivantes : $\neg A, \exists y.A, \forall y.A, A \wedge A', A \Rightarrow A', A \vee A', A \Leftrightarrow A'$ pour A, A' des *ZFC*-termes avec ϕ -structures.
- 4) $B =_{MTA} B'$ pour B' un *ZFC*-terme avec ϕ -structures.

Notation 130 $\Lambda(ZFCs)$ dénotera la classe des *ZFC*-termes avec ϕ -structures.

Remarque 131 Rappelons que $\Lambda(ZFC)$ désigne la classe des *ZFC*-termes. Clairement $\Lambda(ZFC) \subseteq \Lambda(ZFCs)$, mais de plus cette inclusion est stricte. En effet, en conjuguant les clauses 2 et 3, on peut “quantifier” sur des variables apparaissant dans des ϕ -structures. Par exemple, en substituant Pxy à z' dans le *ZFC*-terme $z' \dot{\in} z$ (clause 2), puis en “quantifiant sur y ” en vertu de la clause 3, on obtient le *ZFC*-terme avec ϕ -structures $\exists y.Pxy \dot{\in} z$ qui n'est pas une traduction de formule de *ZFC*.

Remarque 132 La clause 2 de la définition réclame que toutes les variables libres de A soient remplacées par des ϕ -structures. En fait, cette clause, qui autorise le remplacement d'une variable par elle-même (puisque toute variable est une ϕ -structure), englobe le cas où seule une partie stricte de $VL(A)$ est remplacée.

Remarque 133 Etant donné un ensemble infini $X \subseteq VAR$, on peut toujours choisir le \bar{x} de la clause 2 de la Définition 129 dans X .

Avant d'aborder la démonstration que tout *ZFC*-terme avec constructeurs est simple, nous introduisons une convention d'écriture pour les preuves de simplicité :

Convention pour les preuves de simplicité

Nous écrirons ces preuves sur deux colonnes. Dans la colonne de gauche, nous donnons un terme simple. Dans celle de droite, nous indiquons la raison pour laquelle ce terme est simple sachant que les termes énoncés dans les lignes précédentes de la démonstration sont simples. Cette raison est, le plus souvent, une des clauses de la Définition 124 mais peut être aussi un lemme, lorsque le terme est simple en vertu de la clause $C[\bar{\Sigma}/\bar{y}]$. Dans ce cas nous écrirons le nom du lemme entre parenthèses après avoir indiqué $C[\bar{\Sigma}/\bar{y}]$. Certaines lignes seront justifiées en indiquant plusieurs clauses séparées par le signe “+” pour signifier que le terme est simple par applications successives

de ces clauses. Enfin, nous écrirons α -équivalent au lieu de Σ^{MT} lorsque nous voudrions préciser que le terme est simple par α -équivalence.

Lemme 134 *Si $B[y, \bar{x}]$ est un terme simple à variables libres dans X , alors $\dot{\exists}y.B$ est un terme simple.*

Preuve. Rappelons que $\dot{\exists}y.B =_{MT} \approx B[\varepsilon y.B/y]$, par le Remarque 126 et la clause Σ^{MT} il suffit donc de vérifier que $B[\varepsilon y.B/y]$ est un terme simple :

B	<i>Hyp</i>
$B = B[T/\nu]$	$\nu \notin VL(B)$
$\varepsilon y.B$	$\varepsilon y.\Sigma[T/\nu]$
$B[\varepsilon y.B/y]$	$\Sigma[T/\nu, \Sigma/y]$

■

Théorème 135 *Tout ZFC-terme avec ϕ -structures $B[\bar{y}]$ tel que $\bar{y} \subseteq X$ est simple.*

Preuve. La preuve se fait par induction sur la complexité de B .

- Si B est de la forme $u \sim v$ pour $u, v \in X$, le résultat est immédiat par la clause $\Sigma \sim \Sigma$.
- Si B est de la forme $u \dot{\in} v =_{def} (if\ v\ F\ \dot{\exists}y.(vy \sim u))$ pour $u, v \in X$ alors :

u, v, y	$u, v, y \in X$
(vz)	$(\Sigma\Sigma)$
$(vz) \sim u$	$\Sigma \sim \Sigma$
$\dot{\exists}y.(vy \sim u)$	<i>Lem134</i>
$(if\ v\ F\ \dot{\exists}y.(vy \sim u))$	<i>Rem126</i>

- Si $B \equiv A[\bar{t}/\bar{x}]$ pour $A[\bar{x}]$ un ZFC-terme avec ϕ -structures et \bar{t} une suite de ϕ -structures alors, par la Remarque 133, on peut supposer que $\bar{x} \subseteq X$ et donc que $A[\bar{x}]$ est simple par l'hypothèse d'induction. Par le Théorème de Construction, d'une part \bar{t} est une suite de termes simples, d'autre part $A[\bar{x}]$ est une ϕ -structure. On conclut par la clause $C[\bar{\Sigma}/\bar{x}]$.
- Si maintenant B est un ZFC-terme complexe on utilise la Remarque 126, le Lemme 134 et le fait que par définition $\dot{\forall}y.B =_{def} \dot{\neg}\dot{\exists}y.\dot{\neg}B$ (Définition 66).
- Si $B =_{MTA} B'$ pour B' un ZFC-terme avec ϕ -structures, le résultat est immédiat par la clause Σ^{MT} .

■

Corollaire 136 *Pour tout ZFC-terme avec ϕ -structure $B[\bar{x}]$ on a :*
 $\vdash \phi\bar{x} \longrightarrow \phi B$; *et ainsi $\lambda\bar{x}.B$ est un ϕ -constructeur n -aire pour $n = lg(\bar{x})$.*

Preuve. On choisit Var tel que $\bar{x} \subseteq X$ et on applique le Théorème de Construction et le théorème précédent. ■

Détermination des *ZFC*-termes avec ϕ -structures.

Avant de clôre cette section sur les *ZFC*-termes avec constructeurs, nous allons donner une conséquence importante du théorème précédent. Nous en tirerons des corollaires pratiques, et une convention d'écriture pour nos futures preuves formelles.

Théorème 137 (*DétZFCs*) *Si* $B[\bar{x}] \in \Lambda(\text{ZFCs})$ *alors* B *est une* ϕ -*structure, et on a* $a \vdash \phi\bar{x} \longrightarrow !B$.

Preuve. Par le Corollaire 136, on a $\phi\bar{x} \longrightarrow \phi B$; par ailleurs $\phi B \longrightarrow !B$ est une instance de tautologie. On conclut par transitivité de l'implication non-monotone. ■

Nous tirons maintenant trois conséquences importantes du théorème précédent. Les deux derniers nous permettrons de “raisonner”, à partir de la Section 2.5, sur les *ZFC*-termes avec ϕ -structures en utilisant les moyens donnés par les théorèmes *CalculPréd*, *TND*, *ImplicNonM→M*, *EquivNonM→M*, *Absurde*, *Exhib* et *MP⇒*. Le premier est une conséquence immédiate de $Dét_{\exists, \forall}$ (Lemme 79.2) et de *DétZFCs*.

Corollaire 138 (*Choix'*)

Pour tout $B[\bar{x}, y] \in \Lambda(\text{ZFCs})$, *on a* $a \vdash \phi\bar{x} \longrightarrow \phi(\varepsilon y.B)$

Rappelons que si G est une formule de *ZFC*, le terme \dot{G} est sa traduction via θ qui est définie au niveau atomique par $\theta(x \in y) = x \dot{\in} y$ et $\theta(x = y) = x \dot{\sim} y$.

Corollaire 139 (*FormValide*) *Soient* $G[\bar{z}]$ *une formule valide de* *ZFC* *et* $\bar{t}[\bar{x}]$ *des* ϕ -*structures, alors on a* $a : \vdash \phi\bar{x} \longrightarrow \dot{G}[\bar{t}/\bar{z}]$

Preuve. Par la Corollaire 100, on a $a \vdash \phi\bar{z} \longrightarrow \dot{G}$ et par *Instance* (Théorème 13) $\vdash \phi\bar{t} \longrightarrow \dot{G}[\bar{t}/\bar{z}]$. Le résultat suit alors facilement du fait que, par définition des ϕ -structures, on a $a \vdash \phi\bar{x} \longrightarrow \phi t[\bar{x}]$ pour tout $t \in \bar{t}$.

■

Les faits regroupés dans la Proposition suivante découlent par *DétZFCs* des théorèmes *TND*, *Absurde*, *ImplicNonM→M*, *EquivNonM→M*, et *Exhib*.

Proposition 140 *Soient* A, B, C *des* *ZFC*-*termes avec* ϕ -*structures et à variables libres dans* \bar{x} . *Soit* \bar{D}, \bar{D}' *deux suites de termes telles que* $\phi\bar{x} \subseteq \bar{D}$. *Alors :*

1. $A \longrightarrow (B = C); \dot{\neg}A \longrightarrow (B = C) \vdash_{MTA(\overline{D}; \overline{D}')} B = C$
2. $\dot{\neg}A \longrightarrow F \vdash_{MTA(\overline{D}; \overline{D}')} A = T$
3. $\overline{A} \longrightarrow B \vdash_{MTA(\overline{D}; \overline{D}')} \dot{\wedge}\overline{A} \dot{\Rightarrow} B = T$
4. $A \longleftarrow B \vdash_{MTA(\overline{D}; \overline{D}')} A \dot{\Leftrightarrow} B = T$
5. $\phi A = T; B[A/x] = T \vdash_{MTA(\overline{D}; \overline{D}')} \dot{\exists}x.B = T$

Preuve. On montre le cas du *TND*, les autres étant analogues :

On remarque tout d'abord que on a $\vdash \phi\overline{x} \longrightarrow !A$ par *DétZFCs*. Par définition de $MTA(\overline{D}; \overline{D}')$ (Cf Définition 30), l'équation $\phi\overline{x} \longrightarrow !A$ est donc un axiome de cette théorie, il vient :

1. *Axiomes de* $MTA(\overline{D}; \overline{D}')$ $\phi\overline{x} = \overline{T}$
2. *Axiomes de* $MTA(\overline{D}; \overline{D}')$ $\phi\overline{x} \longrightarrow !A$
3. *MP*(1,2) $!A = T$
4. *Hyp* $A \longrightarrow B = C; \dot{\neg}A \longrightarrow B = C$
5. *TND*(3,4) $B = C$

■

La proposition que nous venons de donner justifie la convention suivante :

Convention d'écriture des preuves formelles

Dorénavant, nous montrerons souvent des résultats concernant des *ZFC*-termes avec ϕ -structures et dont les démonstrations utilisent des hypothèses de déduction de la forme $\phi\overline{x} = \overline{T}$. Nous raisonnerons alors selon les grands principes exprimés par les théorèmes *TND*, *Absurde*, *ImplicNonM→M*, *MP* $\dot{\Rightarrow}$, *Exhib* en utilisant la proposition précédente. Mais, plutôt que d'y faire référence, nous continuerons à justifier la ligne courante par *TND*, *Absurde*... Par exemple, nous écrirons *TND* au lieu de *Prop*140.1.

2.3.7 Clôture de Φ par les constructeurs ensemblistes.

Rappelons que ces constructeurs sont définis en Section 2.3.5.

Nous opérerons en deux temps. Pour les cas simples nous donnerons une démonstration directe, de façon à nous familiariser avec les axiomes de constructions. Pour les cas plus complexes, nous présenterons les résultats comme des corollaires du Théorème de Construction.

Les constructeurs *Vide*, *Paire*(,), *Singleton*(), *Union*().

Pour *Vide* et *Paire*(,) le résultat est donné par les axiomes *MT-T* et *MT-P*. Bien qu'elle nous ne sera utile qu'en Section 2.5 pour mon-

trer l'axiome de l'infini, nous ajoutons la démonstration pour le constructeur $S =_{def} \lambda u \lambda z. u$:

Le constructeur $Singleton()$:

Théorème 141 ($Singleton$) $\vdash \phi u \longrightarrow \phi(Su)$

Preuve.

1. *hyp* $\phi u = T$
2. *MT- φ* $\phi \lambda z. u = \phi \lambda z. \phi u$ ■
3. *Context(1)* $= \phi \lambda z. T$
4. *MT-F* $= T$

Le constructeur $Union()$:

Rappelons que $Union() =_{def} \lambda u \lambda z. u(zT)(zF)$.

Lemme 142 $\vdash \dot{\forall} x. \phi \lambda z. x(zF) = T$

Preuve.

1. *hyp* $\phi x = T$
2. *Méta(MT-CInv)(1, MT-F)* $\phi \lambda z. x(zF) = T$. ■
3. *Déduct(1,2) + Généré* $\dot{\forall} x. \phi \lambda z. x(zF) = T$

Théorème 143 ($Union$) $\vdash \phi u \longrightarrow \phi(Union(u))$

Preuve. On pose $f =_{def} \lambda x \lambda z. x(zF)$, il vient :

1. *hyp* $\phi u = T$
2. *Lem142 + Trivial* $\dot{\forall} x. \phi(fx) = T$
3. *Méta(MT-Comp)(1,2)* $\phi \lambda z'. f(uz') = T$
4. *Déf(f) + Trivial(3)* $\phi \lambda z' \lambda z. uz'(zF) = T$
5. *MT-Cinv + MT-T + Trivial* $\phi \lambda z' \lambda z. u(z'T)(zF) = T$
6. *Méta(MT-Diag)(5) + Trivial* $\phi \lambda z. u(zT)(zF) = T$

■

Les Constructeurs $Parties()$, $Compréhension_{B,y}()$, $Remplacement_{B,y,x}()$ et $Choix()$.

Nous abordons maintenant la démonstration du fait que $Parties()$, $Choix$, $Compréhension_{B,y}()$ et $Remplacement_{B,y,x}()$ sont des ϕ -constructeurs. Pour cela nous montrons que ces termes sont des termes simples qui ne contiennent pas ν , puis nous concluons par le Théorème de Construction.

Le constructeur $Parties()$:

Rappelons que $Parties() =_{def} \lambda u \lambda x. (if\ x\ T\ \lambda z. u(x\ (I''\ u\ (uz))))$
où $I'' =_{def} \lambda u \lambda y. \varepsilon z'. (uz' \sim y)$. Nous donnerons une présentation intuitive de ce terme en Section 2.5.8, lorsque nous montrerons l'axiome des parties dans MTA .

On montre tout d'abord que I'' est un ϕ -constructeur binaire :

Lemme 144 $\vdash \phi u, \phi y \longrightarrow \phi(I'' u y)$

Preuve.

- | | |
|---|--|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi u = \phi y = \phi z = T$ |
| 2. <i>MP(1; MT-App)</i> | $\phi(uz) = T$ |
| 3. <i>Méta(Cor136)(1, 2)</i> | $\phi(uz \sim y) = T$ |
| 4. <i>Tauto</i> | $\phi x \longrightarrow !x$ |
| 5. <i>MP(3; InstTauto(4))</i> | $!(uz \sim y) = T$ |
| 6. <i>Déduct(1, 3)</i> | $\phi u, \phi y, \phi z \longrightarrow !(uz \sim y)$ |
| 7. <i>Dét\exists, \forall-2(6)</i> | $\phi u, \phi y \longrightarrow \phi \varepsilon z. (uz \sim y)$ |

■

Théorème 145 $(Parties)\ Parties()$ est un ϕ -constructeur unaire.

Preuve. Compte tenu du Théorème de Construction, il suffit de montrer que pour $u \in X$ le terme $Parties(u)$ est simple :

u	$u \in X$
$u(\nu F)$	$\Sigma(\nu \Sigma)$
$(I'' u u(\nu F))$	$C[\bar{\Sigma}/\bar{z}]$ (Lem144)
$u(\nu T F (I'' u u(\nu F)))$	$\Sigma(\nu \Sigma^3)$
$\lambda z. u((P\nu z) T F (I'' u u(P\nu z F)))$	$\lambda z. \Sigma[P\nu z/\nu]$
$\lambda z. u(\nu F (I'' u (uz)))$	Σ^{MT}
$\lambda z. u(\nu F W)$ où $Z =_{def} (I'' u (uz))$	
$\lambda y (if\ y\ T\ \lambda z. u(\nu F Z))$	$P\Sigma\Sigma$
$(\lambda y. (if\ y\ T\ \lambda z. u(\nu F Z)) (\nu F))$	$\Sigma(\nu \Sigma)$
$(if\ (\nu F)\ T\ \lambda z. (u(\nu F Z)))$	Σ^{MT}
$\lambda x. (if\ (P\nu x F)\ T\ \lambda z. (u(P\nu x F Z)))$	$\lambda x. \Sigma[P\nu x/\nu]$
$\lambda x. (if\ x\ T\ \lambda z. u(x Z))$	Σ^{MT}
$Partie(u)$	Σ^{MT}

■

Le constructeur $Choix()$:

Rappelons que $Choix() =_{def} \lambda u \lambda x. \varepsilon y. y \dot{\in} (ux)$:

Théorème 146 $(Choix)\ Choix()$ est un ϕ -constructeur unaire.

Preuve. Par le Théorème de Construction, il suffit de montrer que, pour $u \in X$, le terme $ChoiX(u)$ est simple :

$$\begin{array}{ll}
u, y, x & u, y, x \in X \\
(u(\nu F)) & (\Sigma(\nu\Sigma)) \\
(y \dot{\in} x) & C[\overline{\Sigma}/\overline{y}] \text{ (Cor136)} \\
\epsilon y.(y \dot{\in} x) & \epsilon y.\Sigma[T/\nu] \\
\epsilon y.(y \dot{\in} (u(\nu F))) & \Sigma[T/\nu, \overline{\Sigma}/\overline{x}] \\
\lambda z.\epsilon y.(y \dot{\in} u(P\nu z F)) & \lambda z.\Sigma[P\nu z/\nu] \\
\lambda z.\epsilon y.(y \dot{\in} uz) & \Sigma^{MT} \\
ChoiX(u) & \Sigma^{MT} \quad \blacksquare
\end{array}$$

Le constructeur $Compréhension_{B,y}(\)$:

Rappelons tout d'abord que :

$Compréhension_{B,y}(\) =_{def} \lambda \overline{x} \lambda u.(if\ u\ T\ (if\ \dot{\exists} z.B[uz/y]\ T\ \lambda z.(if\ B[uz/y]\ uz\ uz_0)))$
où $z_0 \equiv \epsilon z.B[uz/y]$, avec $z \notin \overline{x}$.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 147 Soit $B[y, \overline{x}]$ un ZFC -terme.

Pour $\overline{x} \cup \{u, z\} \subseteq X$, les termes $B[(uz)/y]$, $B[u(\nu F)/y]$ et $\dot{\exists} z.B[(uz)/y]$ sont simples.

Preuve. Nous traitons les trois termes ensembles :

$$\begin{array}{ll}
\overline{x}, u, z & \overline{x}, u, z \in X \\
(uz) & (\Sigma\Sigma) \\
u(\nu F) & \Sigma(\nu\Sigma) \\
B[(uz)/y] & C[\overline{\Sigma}/\overline{y}] \text{ (Cor136)} \\
B[u(\nu F)/y] & C[\overline{\Sigma}/\overline{y}] \text{ (Cor136)} \\
\epsilon z.B[(uz)/y] & \epsilon y.\Sigma[T/\nu] \\
\dot{\exists} z.B[(uz)/y] & Lem134 + Rem126 \\
\blacksquare &
\end{array}$$

Théorème 148 (*Compréhension*) Pour tout ZFC -terme $B[y, \overline{x}]$ le terme $Compréhension_{B,y}(\)$ est un ϕ -constructeur n -aire pour $n = lg(\overline{x}) + 1$.

Preuve. Par le Théorème de Construction, il nous suffit de montrer que, pour $\overline{x} \cup \{u, z, y\} \subseteq X$, le terme $Compréhension_{B,y}(\overline{x}, u)$ est simple :

Soit $z_0 =_{def} \epsilon z.B[(uz)/y]$:

$$\begin{array}{ll}
\overline{x}, u, z & \overline{x}, u, z \in X \\
B[u(\nu F)/y]; \dot{\exists} z.B[(uz)/y]; z_0 & Lem147 \\
(u z_0); u(\nu F) & (\Sigma\Sigma); \Sigma(x\Sigma) \\
(if\ B[u(\nu F)/y]\ u(\nu F)\ (uz_0)) & Rem126 \\
\lambda z.(if\ B[u(P\nu z F)/y]\ u(P\nu z' F)\ (uz_0)) & \lambda z.\Sigma[P\nu z/\nu]
\end{array}$$

$\lambda z.(if\ B[uz/y]\ uz\ (u\ z_0))$	Σ^{MT}
$(if\ \dot{\exists}z.B[(uz)/y]\ T\ \lambda z.(if\ B[(uz)/y]\ (uz)\ (uz_0)))$	<i>Rem126</i>
$(if\ u\ T\ (if\ \dot{\exists}z.B[(uz)/y]\ T\ \lambda z.(if\ B[(uz)/y]\ (uz)\ (uz_0)))$	<i>Rem126</i>
<i>Compréhension</i> $_{B,y}(\bar{x}, u)$	$\Sigma^{MT} + Déf(z_0)$

■

Le constructeur $Remplacement_{B,y,x}(\)$:

Rappelons que pour $B[y, x, \bar{x}]$ un *ZFC*-terme, on a :

$Remplacement_{B,y,x}(\) =_{def} \lambda \bar{x} \lambda u. \lambda z. \varepsilon y. B[(uz)/x]$ où $z \notin \bar{x}$.

Théorème 149 (*Remplacement*) Soit $B[y, x, \bar{x}]$ un *ZFC*-terme. Le terme $Remplacement_{B,y,x}(\)$ est un ϕ -constructeur n -aire pour $n = lg(\bar{x}) + 1$.

Preuve. Par le Théorème de Construction, il suffit de montrer que pour $\bar{x} \cup \{u, y, x\} \subseteq X$, le terme $\lambda z. \varepsilon y. B[(uz)/y]$ avec $z \notin \bar{x}$ est simple :

\bar{x}, u, y, x	$\bar{x}, u, y, x \in X$
$(u(\nu F))$	$(\Sigma(\nu \bar{\Sigma}))$
B	$C[\bar{\Sigma}/\bar{z}]$ (<i>Cor136</i>)
$\varepsilon x. B$	$\varepsilon x. \Sigma[T/\nu]$
$\varepsilon x. B[(u(\nu F))/y]$	$\Sigma[\Sigma/y]$
$\lambda z. \varepsilon x. B[(u(PazF))/y]$	$\lambda z. \Sigma[P\nu z/\nu]$
$\lambda z. \varepsilon x. B[(uz)/y]$	Σ^{MT}

■

2.4 Axiomes de l'Égalité et propriétés de \sim et $\dot{\in}$.

2.4.1 Les axiomes de l'égalité

En [13] le *Principe d'Induction* permettait de montrer pour *MTF*, d'une part les théorèmes exprimant que l'interprétation $\dot{=}$ de l'égalité était une relation d'équivalence (Cf p.65), d'autre part que $\vdash \phi u, \phi v \longrightarrow \phi(u \dot{=} v)$ ($\dot{=}$ est un ϕ -constructeur binaire). Comme le *Principe de Coinduction* que nous utilisons ici (Cf Section 3.7) ne permet pas de montrer les théorèmes correspondants dans *MTA*, nous introduisons quatre axiomes simples, dont ces théorèmes seront des conséquences. Nous rappelons aussi l'axiome *MTA-Fix \sim* :

Le premier exprime la réflexivité de \sim_{Φ} sur Φ :

AXIOME MTA-Réflex $\tilde{\Phi}$ $\phi u \longrightarrow (u \sim u)$

Le second exprime la symétrie de \sim_{Φ} sur tout \mathcal{M} et non seulement sur Φ .

Cette symétrie généralisée nous est utile pour le chapitre 3 :

$$\text{AXIOME } MTA\text{-Sym}^{\sim} \quad u \sim v = v \sim u$$

Le troisième axiome exprime une compatibilité de \sim avec l'égalité de *MTA*. Il aura plusieurs conséquences intéressantes, et en particulier le théorème exprimant la transitivité de \sim_{Φ} sur \mathcal{M} :

$$\text{AXIOME } MTA\text{-Compat}^{\sim} \quad u \sim v \longrightarrow (u \sim w = v \sim w)$$

Pour $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Phi$, on a $\mathbf{u} \sim_{\Phi} \mathbf{v}$ ou $\mathbf{u} \not\sim_{\Phi} \mathbf{v}$. Puisque \sim est interprétée par la fonction caractéristique de \sim_{Φ} (Cf Introduction, section 0.5), on a ainsi $\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \in \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$. Maintenant, comme l'expriment les axiomes *MT-T* et *MT-F*, les deux booléens \mathbf{T}, \mathbf{F} sont des éléments de Φ . On a donc $\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \in \Phi$. En d'autres termes, \sim est un ϕ -constructeur binaire, ce qu'exprime l'axiome suivant :

$$\text{AXIOME } MTA\text{-Const}^{\sim} \quad \phi u, \phi v \longrightarrow \phi(u \sim v)$$

Nous rappelons maintenant le dernier axiome de l'égalité, dont nous avons vu qu'il était nécessaire pour l'extensionnalité.

Pour $\sim_0 =_{def} \forall x \exists y. (ux \sim vy) \wedge \forall y \exists x. (ux \sim vy)$:

$$\text{AXIOME } MTA\text{-Fix}^{\sim} \quad u \sim v \longleftrightarrow (if\ u\ (if\ v\ T\ F)\ (if\ v\ F\ u \sim_0 v))$$

Remarque 150 *Par Méta appliqué à $MTA\text{-Fix}^{\sim}$, pour tous termes t, s :*
 $\vdash t \sim s = T \quad ssi \vdash (if\ t\ (if\ s\ T\ F)\ (if\ s\ F\ t \sim_0 s)) = T$

Par la suite nous utiliserons librement ce fait en substituant l'une à l'autre les deux équations ci-dessus dans nos preuves formelles, sans mentionner l'utilisation de $MTA\text{-Fix}^{\sim}$.

2.4.2 Propriétés de \sim

Les premières propriétés

Nous tirons maintenant quelques conséquences immédiates des trois premiers axiomes de l'égalité :

Théorème 151 (*Trans* $^{\sim}$) $\vdash u \sim v, u \sim w \longrightarrow v \sim w$

Preuve. Suit trivialement de *MTA-Compat* $^{\sim}$ et de *MP*. ■

Nous utiliserons *MTA-Compat* $^{\sim}$, *MTA-Sym* $^{\sim}$ et *Trans* $^{\sim}$ sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 152 (*Equiv* $^{\sim}$) *Soit \overline{A} une suite de termes.*

Pour tous termes t, r et s on a :

$$1) \quad \overline{A} \longrightarrow t \sim s \vdash \overline{A} \longrightarrow s \sim s$$

- 2) $\overline{A} \longrightarrow t \dot{\sim} s \vdash \overline{A} \longrightarrow s \dot{\sim} t$
 3) $\overline{A} \longrightarrow t \dot{\sim} s; \overline{A} \longrightarrow s \dot{\sim} r \vdash \overline{A} \longrightarrow t \dot{\sim} r$

Preuve. Les points 2 et 3 sont triviaux. Le point 1 suit facilement du fait que par *MTA-Compat \sim* on a $t \dot{\sim} s \longrightarrow (t \dot{\sim} s = s \dot{\sim} s)$. ■

Convention dans l'écriture des preuves formelles

Dans la suite, nous utiliserons la même convention que pour le théorème *Equiv* (Théorème 7). Autrement dit, l'indication *Equiv \sim* dans une preuve formelle recouvrera une suite quelconque d'utilisations de 1, 2 et 3.

Le corollaire suivant exprime une conséquence de la réflexivité de \sim_{Φ} sur \mathcal{M} : la compatibilité de l'égalité dans *MTA* avec \sim :

Corollaire 153 (*CompatEgal*) *Pour tous termes t et s on a :*
 $t \dot{\sim} t = T; t = s \vdash t \dot{\sim} s = T$

Preuve. Par *Context* et $t = s$ on a $t \dot{\sim} s = t \dot{\sim} t$, d'où le résultat. ■

Propriétés de \sim découlant de *MTA-Fix \sim*

Nous allons voir maintenant les propriétés de \sim qui découle de *PtFix* et qui seront utiles pour montrer l'extentionnalité en Section 2.5.1.

Dans les discussions informelles qui vont suivre, \sim_{Φ} et \in_{Φ} désigneront les relations binaires sur \mathcal{M}^2 qui interprètent (via leurs fonctions caractéristiques) respectivement la constante \sim et le terme $\dot{\in}$.

Le lemme suivant exprime que $\mathbf{T} \sim_{\Phi} \mathbf{T}$. C'est une conséquence facile de la transitivité de \longrightarrow et de *MTA-Fix \sim* :

Lemme 154 $\vdash u, v \longrightarrow u \dot{\sim} v$

Le lemme suivant est un corollaire immédiat de *DétZFCs* (Théorème 137) :

Lemme 155

1. $\vdash (u \dot{\sim} v) \longrightarrow !u$
2. $\vdash (u \dot{\sim} v) \longrightarrow !v$

Comme nous l'avons signalé, du point de vue logique le théorème *TND* exprime que, sur les termes dont la valeur de vérité est déterminée (i.e $\neq \perp$), on peut raisonner par tiers exclu dans *MT*. De par l'interprétation ensembliste de T ("l'ensemble vide") et du fait que les "ensembles non-vides" sont représentés par des termes de la forme $\lambda x.t$, on peut aussi voir le *TND* comme un principe de raisonnement par cas : vide, non-vide. Par la suite, nous aurons souvent à raisonner par *TND* et en particulier sur

“l'égalité”. Les deux lemmes qui vont suivre nous seront alors précieux. Le premier exprime que “l'ensemble vide” est unique relativement à \sim . Le second que, si un “ensemble non-vide” est égal à un autre “ensemble”, ce dernier est lui aussi “non-vide”.

Lemme 156 $\vdash u, u \sim v \longrightarrow v$

Preuve.

1. *hyp* $u = T$
2. *hyp* $u \sim v = T$
3. *Trivial*(1) $(if\ u\ (if\ v\ T\ F)\ (if\ v\ F\ u \sim_0 v)) = (if\ v\ T\ F)$
4. *Equiv*(2, 3) $(if\ v\ T\ F) = T$
5. *Tauto* $(if\ v\ T\ F) \longrightarrow v$
6. *MP*(5, 6) $v = T$

■

Lemme 157 $\vdash \dot{u}, u \sim v \longrightarrow \dot{v}$

Preuve.

1. *hyp* $\dot{u} = T$
2. *hyp* $u \sim v = T$
3. *Trivial*(1) $(if\ u\ (if\ v\ T\ F)\ (if\ v\ F\ u \sim_0 v)) = (if\ v\ F\ u \sim_0 v)$
4. *Equiv*(2, 3) $(if\ v\ F\ u \sim_0 v) = T$
5. *Tauto* $(if\ v\ F\ u \sim_0 v) \longrightarrow \dot{v}$
6. *MP*(4, 6) $\dot{v} = T$

■

Le lemme suivant exprime que l'égalité entre deux “ensembles non-vides” se définit par l'égalité entre leurs “éléments” :

Lemme 158 (*EgalNonVide*) $\vdash \dot{u}, \dot{v}, (u \sim v \longleftrightarrow u \sim_0 v)$

Preuve.

Il suffit de remarquer que $\dot{u}, \dot{v} \longrightarrow (if\ u\ (if\ v\ T\ F)\ (if\ v\ F\ u \sim_0 v)) = u \sim_0 v$ est une tautologie. Le résultat s'obtient alors facilement par transitivité de \longrightarrow (Lemme 64) et *MTA-Fix* \sim .

■

Il est immédiat par les deux lemmes précédents que :

Corollaire 159 $\vdash \dot{u}, u \sim v \longleftrightarrow u \sim_0 v$

Lemme 160 :

$\overline{A}, \phi u, \phi v, \dot{u}, \dot{v}, \phi y \longrightarrow uy = vy \vdash \overline{A}, \phi u, \phi v, \dot{u}, \dot{v} \longrightarrow u \sim v$

Preuve.

- | | |
|--|---|
| 1. <i>hyp</i> | $\overline{A} = \phi u = \phi v = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $\dot{\in} u = \dot{\in} v = T$ |
| 3. <i>hyp+</i> | $\phi y = T$ |
| 4. <i>MP</i> (1, 2, 3; <i>Hyp</i>) | $uy = vy$ |
| 5. <i>MT-App</i> (1, 3) | $\phi(uy) = T$ |
| 6. <i>Méta</i> (<i>Réfl</i> $\dot{\sim}$)(5) | $(uy) \dot{\sim} (uy) = T$ |
| 7. <i>Trivial</i> (4, 6) | $(uy) \dot{\sim} (vy) = T$ |
| 8. <i>Exhib</i> (3, 7) | $\dot{\exists} x. uy \dot{\sim} vx = \dot{\exists} x. ux \dot{\sim} vy = T$ |
| 9. <i>Déduct</i> -(3, 8) + <i>Géné</i> | $\dot{\forall} y \dot{\exists} x. uy \dot{\sim} vx = \dot{\forall} y \dot{\exists} x. ux \dot{\sim} vy = T$ |
| 10. <i>Méta</i> (<i>LoiLg2</i>)(9) + <i>Déf</i> ($\dot{\sim}_0$) | $u \dot{\sim}_0 v = T$ |
| 11. <i>MP</i> (2, 10; <i>Lem158</i>) | $u \dot{\sim} v = T$ |

■

2.4.3 Propriétés de $\dot{\in}$

Les lemmes suivants énoncent des propriétés qui découlent essentiellement de la définition de $\dot{\in}$ et qui seront utiles pour montrer l'extentionnalité dans *MT*. Rappelons que $t \dot{\in} s =_{def} (if\ s\ F\ \dot{\exists} z.(sz \dot{\sim} t))$:

Lemme 161 *Pour tous termes t et s on a :*

$$\dot{\in} s = T \vdash t \dot{\in} s = \dot{\exists} z.(sz \dot{\sim} t).$$

Remarque 162 *Si $s =_{MTA} \lambda x.s'$, l'hypothèse du lemme est vérifiée.*

Le lemme suivant exprime que \mathbf{v} est un “élément” de \mathbf{u} si et seulement si $\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{x}$ pour un $\mathbf{x} \in \Phi$.

Lemme 163 (*NonVide*) *Pour tous termes t, s et r on a :*

$$1) (t \dot{\in} s) = T \vdash \dot{\in} s = T; \phi z_0 = T; (sz_0 \dot{\sim} t) = T \quad \text{où } z_0 \equiv \varepsilon z.(sz \dot{\sim} t)$$

$$2) \dot{\in} s = \phi s = \phi r = T \vdash (sr \dot{\in} s) = T$$

Preuve.

Le 1 découle facilement de la définition de $\dot{\in}$, nous montrons 2 :

- | | |
|--|---|
| 1. <i>Hyp</i> | $\dot{\in} s = \phi s = \phi r = T$ |
| 2. <i>Méta</i> (<i>MT-App</i>)(1) | $\phi(sr) = T$ |
| 3. <i>Méta</i> (<i>MTA-Réfl</i> $\dot{\sim}$)(2) | $(sr \dot{\sim} sr) = T$ |
| 4. <i>Méta</i> (<i>DétZFCs</i>)(1) + <i>Lem161</i> | $!(sr \dot{\in} s) = !\dot{\exists} z.(sz \dot{\sim} sr) = T$ |
| 5. <i>Exhib</i> (1, 3, 4) | $\dot{\exists} z.(sz \dot{\sim} sr) = (sr \dot{\in} s) = T$ |

■

Nous donnons maintenant un corollaire utile du lemme précédent, concernant toutes les ϕ -structures qui sont des abstractions :

Corollaire 164 (*NonVide_s*)

Soit $\lambda x.t[\bar{y}]$ une ϕ -structure :

$\vdash \phi\bar{y}, \phi z \longrightarrow (\lambda x.t[\bar{y}])z \dot{\in} \lambda x.t[\bar{y}]$

Preuve.

1. *hyp* $\phi\bar{y} = \bar{T}$
2. *hyp* $\phi z = T$
3. *Trivial* $\dot{\in}(\lambda x.t[\bar{y}]) = T$
4. *MP(1; Déf120)* $\phi\lambda x.t[\bar{y}] = T$
5. *NonVide.2(3, 4, 1)* $(\lambda x.t[\bar{y}])z \dot{\in} \lambda x.t[\bar{y}] = T$

■

Le lemme suivant exprime qu'un “ensemble” est “vide” si et seulement si il est égal à T :

Lemme 165 (*Vide*) Pour tous termes s et t on a :

- 1) $s = T \vdash \forall z. \dot{\in}(z \dot{\in} s) = T$
- 2) $\phi s = \forall z. \dot{\in}(z \dot{\in} s) = T \vdash s = T$

Preuve.

1) On prouve facilement en utilisant la définition de $\dot{\in}$ que, sous hypothèse de déduction $\phi z = T$, on a $\dot{\in}(z \dot{\in} s) = T$. On conclut alors par *Déduct* puis *Géné.*

2) On raisonne par l'absurde

1. *Hyp* $\phi s = \forall z. \dot{\in}(z \dot{\in} s) = T$
2. *InstTauto* $\phi s \longrightarrow !s$
3. *MP(1; 2)* $!s = T$
4. *hyp+* $\dot{\in}s = T$
5. *MT-T* $\phi T = T$
6. *NonVide.2(4, 3)* $(sT \dot{\in} s) = T$
7. *Inst \forall (5, 1)* $\dot{\in}(sT \dot{\in} s) = T$
8. *Trivial(6, 7)* $F = T$
9. *Déduct(4, 8)* $\dot{\in}s \longrightarrow F$
10. *Absurde(3, 9)* $s = T$

■

Corollaire 166 :

- 1) $\vdash \phi x, x \longleftrightarrow \forall z. \dot{\in}(z \dot{\in} x)$
- 2) $\vdash \phi x, \dot{\in}x \longleftrightarrow \exists z. z \dot{\in} x$

2.5 Démonstrations des axiomes de *ZFC* dans *MTA*

Dans cette section nous allons démontrer que pour tout axiome $G[\bar{y}]$ de *ZFC* on a $\vdash \phi\bar{y} \longrightarrow \dot{G}$, où \dot{G} la traduction de G dans *MT*.

Nous commençons la démonstration des axiomes de ZFC dans MTA par l'extentionnalité.

2.5.1 L'extentionnalité dans MTA

La démonstration de l'extentionnalité dans MTA utilise 5 lemmes.

Le premier exprime qu'un “ensemble” \mathbf{v} , inclus dans un “ensemble vide” \mathbf{u} , est lui-même “vide” (rappelons que $v \dot{\subseteq} u =_{def} \dot{\forall} z (z \dot{\in} v \Rightarrow z \dot{\in} u)$) :

Lemme 167 $\vdash \phi u, \phi v, u, v \dot{\subseteq} u \longrightarrow v$

Preuve. On utilisera *FormValide* (Corollaire 139) sur la formule suivante, dont le lecteur se convaincra sans peine qu'elle est valide :

$$\forall z \neg(z \in u) \Rightarrow (v \subseteq u \Rightarrow \forall z \neg(z \in v))$$

1. *hyp* $\phi u = \phi v = u = T$
2. *hyp* $\dot{\forall} z.(z \dot{\in} v \Rightarrow z \dot{\in} u) = T$
3. *MP*(1; *Cor*166) $\dot{\forall} z.\dot{\neg}(z \dot{\in} u) = T$
4. *FormValide* $\dot{\forall} z.\dot{\neg}(z \dot{\in} u) \Rightarrow (v \dot{\subseteq} u \Rightarrow \dot{\forall} z.\dot{\neg}(z \dot{\in} v)) = T$
5. *MP* \Rightarrow (3, 2; 4) $\dot{\forall} z.\dot{\neg}(z \dot{\in} v) = T$
6. *MP*(1, *Cor*166) $v = T$

■

Le deuxième exprime que si un “ensemble non-vidé” \mathbf{u} est inclus dans un “ensemble” \mathbf{v} alors celui-ci est “non-vidé” :

Lemme 168 $\vdash \phi u, \phi v, \dot{\neg} u, u \dot{\subseteq} v \longrightarrow \dot{\neg} v$

Preuve.

1. *hyp* $\phi u = \phi v = T; \dot{\neg} u = T; \dot{\forall} z.(z \dot{\in} u \Rightarrow z \dot{\in} v) = T$
2. *Méta*(*MT-App*) + *MT-T* $\phi(uT) = T$
3. *NonVide*2(1) + *MT-T* $(uT \dot{\in} u) = T$
4. *Inst* $\dot{\forall}$ (2, 1) $(uT \dot{\in} u) \Rightarrow (uT \dot{\in} v) = T$
5. *MP* \Rightarrow (3, 4) $(uT \dot{\in} v) = T$
6. *NonVide*.1(5) $\dot{\neg} v = T$

■

Rappelons que $u \dot{\sim}_0 v =_{def} \dot{\forall} x \dot{\exists} y.(ux \dot{\sim} vy) \wedge \dot{\forall} y \dot{\exists} x.(ux \dot{\sim} vy)$. Le troisième lemme introduit une écriture simplifiée du terme $u \dot{\sim}_0 v$, simplification permise par *MTA-Sym* \sim .

Définition 169 $\dot{\subseteq} =_{def} \lambda w \lambda w'. \dot{\forall} z \dot{\exists} z'. (wz \dot{\sim} w'z')$

Lemme 170 $\vdash u \dot{\sim}_0 v = (u \dot{\subseteq} v \wedge v \dot{\subseteq} u)$

Preuve. Trivial en utilisant la définition de $\dot{\subseteq}$, l'axiome $MTA-Sym^{\sim}$ et le théorème *Context*.

■

Le quatrième lemme exprime que, pour les “ensembles non vides”, le terme $\dot{\subseteq}$ est une définition alternative pour “l’inclusion” :

Lemme 171 $\vdash \phi u, \phi v, \dot{\neg}u, \dot{\neg}v, u\dot{\subseteq}v \longleftrightarrow u\dot{\subseteq}v$

Preuve.

\longrightarrow)

- | | |
|---|--|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi u = \phi v = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $\dot{\neg}u = \dot{\neg}v = T$ |
| 3. <i>hyp</i> | $\dot{\forall}z.(z \dot{\in} u \dot{\Rightarrow} z \dot{\in} v) = T$ |
| 4. <i>hyp+</i> | $\phi y = T$ |
| 5. <i>Méta(MT-App)(1, 4)</i> | $\phi(uy) = T$ |
| 6. <i>NonVide.2(2, 1, 4)</i> | $uy \dot{\in} u = T$ |
| 7. <i>Inst$\dot{\forall}$(5, 3) + MP$\dot{\Rightarrow}$</i> | $uy \dot{\in} v = T$ |
| 8. <i>Rem162(2) + Trivial(7)</i> | $\dot{\exists}x.(vx \dot{\sim} uy) = T$ |
| 9. <i>Déduct-(3, 13) + Gén\acute{e}</i> | $\dot{\forall}y \dot{\exists}x.(vx \dot{\sim} uy) = T$ |

\longleftarrow)

- | | |
|---|--|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi u = \phi v = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $\dot{\neg}u = \dot{\neg}v = T$ |
| 3. <i>hyp</i> | $\dot{\forall}y \dot{\exists}x.(vx \dot{\sim} uy) = T$ |
| 4. <i>hyp+</i> | $\phi z = z \dot{\in} u = T$ |
| 5. <i>Rem162(2) + Trivial(4)</i> | $\dot{\exists}x.ux \dot{\sim} z = T$ |
| Soit : | $x_0 =_{def} \varepsilon x.(ux \dot{\sim} z)$ |
| 6. <i>Choix(5)</i> | $\phi x_0 = T; ux_0 \dot{\sim} z = T$ |
| 7. <i>Ins$\dot{\forall}$(6, 3)</i> | $\dot{\exists}y.(vy \dot{\sim} ux_0) = T$ |
| Soit : | $y_0 =_{def} \varepsilon y.(vy \dot{\sim} ux_0)$ |
| 8. <i>Choix(7)</i> | $\phi y_0 = T; ux_0 \dot{\sim} vy_0 = T$ |
| 9. <i>Equiv\sim(6, 8)</i> | $(vy_0 \dot{\sim} z) = T$ |
| 10. <i>Exhib(8, 9)</i> | $\dot{\exists}y.(vy \dot{\sim} z) = T$ |
| 11. <i>Rem162(2) + Trivial(10)</i> | $z \dot{\in} v = T$ |
| 12. <i>Déduct-(4, 11)</i> | $\phi z, z \dot{\in} u \longrightarrow z \dot{\in} v$ |
| 13. <i>Implic$_{NonM \rightarrow M}$(12)</i> | $\phi z \longrightarrow z \dot{\in} u \dot{\Rightarrow} z \dot{\in} v$ |
| 14. <i>Gén\acute{e}(13)</i> | $\dot{\forall}z.(z \dot{\in} u \dot{\Rightarrow} z \dot{\in} v) = T$ |

■

Il découle du lemme précédent que la “double inclusion” est équivalente à “l’égalité” pour les “ensembles non-vides” :

Corollaire 172 $\vdash \phi u, \phi v, \dot{\neg}u, \dot{\neg}v, (u \dot{\subseteq} v \wedge v \dot{\subseteq} u) \longleftrightarrow u \dot{\sim} v$

Preuve. On a $\vdash \phi u, \phi v, \dot{\neg}u, \dot{\neg}v, (u \dot{\subseteq} v \wedge v \dot{\subseteq} u) \longleftrightarrow u \dot{\sim}_0 v$ par le Lemme 65 et définition de $\dot{\sim}$. Le resultat découle alors directement du Corollaire 159 par transitivité de \longleftrightarrow .

■

Nous sommes maintenant prêts à montrer que l'Axiome d'extensionnalité est prouvable dans MTA :

Théorème 173 $\vdash \forall u \forall v. ((u \dot{\subseteq} v \wedge v \dot{\subseteq} u) \leftrightarrow u \dot{\sim} v) = T$

Preuve. Nous montrons que :

$\vdash \phi u, \phi v, (u \dot{\subseteq} v \wedge v \dot{\subseteq} u) \longleftrightarrow u \dot{\sim} v$,

le résultat en découlant immédiatement par *Equiv_{NonM}→M* et *Géné* :

→) On raisonne par *TND* :

1. *hyp* $\phi u = \phi v = T$
2. *hyp* $(u \dot{\subseteq} v \wedge v \dot{\subseteq} u) = T$
3. *Méta(LoiLg1)(2)* $u \dot{\subseteq} v = v \dot{\subseteq} u = T$
4. *hyp+* $u = T$
5. *MP(1, 3; Lem167)* $v = T$
6. *MP(4, 5; Lem154)* $u \dot{\sim} v = T$
7. *Déduct-(4, 6)* $u \longrightarrow u \dot{\sim} v$
8. *hyp+* $\dot{\neg}u = T$
9. *MP(1, 3; Lem168)* $\dot{\neg}v = T$
10. *MP(1, 9, 2; Cor172)* $u \dot{\sim} v = T$
11. *Déduct-(8, 10)* $\dot{\neg}u \longrightarrow u \dot{\sim} v$
12. *TND(7, 11)* $u \dot{\sim} v = T$

←) On raisonne par *TND* :

1. *hyp* $\phi u = \phi v = T$
2. *hyp* $u \dot{\sim} v = T$
3. *hyp+* $u = T$
4. *MP(3, 2; Lem156)* $v = T$
5. *FormValide* $\phi x \longrightarrow (x \dot{\subseteq} x \wedge x \dot{\subseteq} x)$
6. *MP(MT-T; Inst(5))* $(T \dot{\subseteq} T \wedge T \dot{\subseteq} T) = T$
7. *Trivial(6, 3, 4)* $(u \dot{\subseteq} v \wedge v \dot{\subseteq} u) = T$
8. *Déduct-(3, 7)* $u \longrightarrow (u \dot{\subseteq} v \wedge v \dot{\subseteq} u)$
9. *hyp+* $\dot{\neg}u = T$
10. *MP(9, 2; Lem157)* $\dot{\neg}v = T$
11. *MP(1, 10; Cor172)* $(u \dot{\subseteq} v \wedge v \dot{\subseteq} u) = T$ ■
12. *Déduct-(9, 11)* $\dot{\neg}u \longrightarrow (u \dot{\subseteq} v \wedge v \dot{\subseteq} u)$
13. *TND(8, 12)* $(u \dot{\subseteq} v \wedge v \dot{\subseteq} u) = T$

2.5.2 La substitutivité dans MTA

Avant de démontrer les autres axiomes de ZFC , nous allons voir l'analogie dans MTA d'une conséquence importante de l'extentionnalité : la *substitutivité*. Il est intuitivement évident que, si deux suites d'ensembles sont égales, on peut les *substituer* l'une à l'autre sans modifier la valeur de vérité d'une formule. Cette propriété de l'égalité intuitive est démontrable dans ZFC en utilisant l'Axiome d'extentionnalité, autrement dit, pour toute formule $G[\bar{z}]$ de ZFC on a :

$$\vdash_{ZFC} (\bar{x} = \bar{y}) \Rightarrow (G[\bar{x}/\bar{z}] \Leftrightarrow G[\bar{y}/\bar{x}])$$

Nous allons donner ici *deux Théorèmes de Substitutivité* pour MTA .

Le premier étend celui de la théorie des ensembles, en prenant en compte le fait que certains éléments de \mathcal{M} sont “égaux” à des “ensembles” sans être eux-mêmes des “ensembles”. Il exprime qu'une suite d'éléments de \mathcal{M} “égale” à une suite “d'ensembles”, lui est substituable dans tout ZFC -terme.

Le deuxième généralise en un certain sens le premier, puisqu'il l'étend à une certaine classe de ZFC -termes avec ϕ -structures. Cependant, dans le même temps, il restreint les substitutions autorisées à des substitutions entre suites “d'ensembles”. Il exprime ainsi qu'une suite “ensembles” “égale” à une autre suite “d'ensembles” lui est substituable dans certains ZFC -termes avec ϕ -structures, pourvu que les ϕ -structures figurant dans ce terme soient *compatibles* (nous verrons le sens exact de ce mot) avec \sim .

Substitutivité dans les ZFC -termes.

On se donne tout d'abord une notation :

Notation 174 Pour $\bar{t} = t_1, \dots, t_n$ et $\bar{t}' = t'_1, \dots, t'_n$ on pose :

$$\bar{t} \sim \bar{t}' =_{def} t_1 \sim t'_1, \dots, t_n \sim t'_n$$

Lorsqu'on écrira $\bar{t} \sim \bar{t}'$ on supposera toujours $lg(\bar{t}) = lg(\bar{t}')$.

L'objet de cette section sera de montrer le Théorème 182 qui énonce que, pour tout ZFC -terme $B[\bar{x}, \bar{z}]$ on a :

$$\vdash \phi\bar{x}, \phi\bar{u}, \phi\bar{v}, \bar{u} \sim \bar{v} \longrightarrow B[\bar{u}/\bar{z}] = B[\bar{v}/\bar{z}]$$

Remarquons que ce théorème énonce une substitutivité plus forte que celle exprimée par le Corollaire 8.6.4 de [13, p.66] puisque qu'elle parle d'égalité entre termes et non plus seulement d'équivalence. Cela permet en particulier de simplifier certaines démonstrations. De plus, sa démonstration se faisant par induction sur la complexité de B , nous commençons par la substitutivité dans les ZFC -termes atomiques avec \sim :

Lemme 175 (*SubstAtom1*)

- 1) $u \dot{\sim} v \longrightarrow (u \dot{\sim} x = v \dot{\sim} x)$
- 2) $u \dot{\sim} v \longrightarrow (x \dot{\sim} u = x \dot{\sim} v)$
- 3) $u \dot{\sim} v, u' \dot{\sim} v' \longrightarrow (u \dot{\sim} u' = v \dot{\sim} v')$

Preuve. Le point 1 n'est autre que l'axiome *MTA-Compat*[~] et le 2 est une conséquence facile de 1 et de *MTA-Sym*[~], on montre 3 :

1. *hyp* $u \dot{\sim} v = T$
2. *hyp* $u' \dot{\sim} v' = T$
3. *MP*(1, Point1) + *Sym*[~] $u \dot{\sim} u' = v \dot{\sim} u' = u' \dot{\sim} v$
4. *MP*(2, Point1) + *Sym*[~] $u' \dot{\sim} v = v' \dot{\sim} v = v \dot{\sim} v'$
5. *Trans*(3, 4) $u \dot{\sim} u' = v \dot{\sim} v'$

■

Nous allons aborder la démonstration de la substitutivité pour les *ZFC*-termes atomiques avec $\dot{\in}$. Celle-ci utilise les deux lemmes suivants :

Lemme 176 *Soit* $y_0 =_{def} \varepsilon y. ux \dot{\sim} vy$ *on a :*

- 1) $\vdash \dot{\sim} u, u \dot{\sim} v, \phi x \longrightarrow \phi y_0$
- 2) $\vdash \dot{\sim} u, u \dot{\sim} v, \phi x \longrightarrow ux \dot{\sim} vy_0$

Preuve.

1. *hyp* $\phi u = \phi u' = T$
2. *hyp* $\dot{\sim} u = T$
3. *hyp* $u \dot{\sim} v = T$
4. *hyp* $\phi x = \phi y = T$
5. *MP*(2, 3; *Lem157*) $u \dot{\sim}_0 v = T$
6. *Méta*(*LoiLg1*)(5) $\dot{\forall} x \dot{\exists} y. (ux \dot{\sim} vy) = T$
7. *Inst* _{$\dot{\forall}$} (4, 6) $\dot{\exists} y. (ux \dot{\sim} vy) = T$
8. *Choi*₍₇₎ $\phi y_0 = ux \dot{\sim} vy_0 = T$ ■

Lemme 177 :

- 1) $\vdash \phi u, \phi u', \dot{\sim} u, u \dot{\sim} v, u' \dot{\sim} v', \phi z \longrightarrow !((vz) \dot{\sim} v')$
- 2) $\vdash \phi u, \phi u', \dot{\sim} u, u \dot{\sim} v, u' \dot{\sim} v' \longrightarrow ! (v' \dot{\in} v)$

Preuve. Pour le 2, on a tout d'abord par le 1 et le *Dét* _{$\dot{\exists}, \dot{\forall}$} (Lemme 79) :

$$\vdash \phi u, \phi u', \dot{\sim} u, u \dot{\sim} v, u' \dot{\sim} v' \longrightarrow ! \dot{\exists} z. (vz \dot{\sim} v').$$

Or, en utilisant les Lemmes 157 et 161, on vérifie facilement que :

$$\vdash \dot{\sim} u, u \dot{\sim} v \longrightarrow (v' \dot{\in} v = \dot{\exists} z. (vz \dot{\sim} v'))$$

Le résultat suit alors facilement. On montre maintenant le 1 :

1. *hyp* $\phi u = \phi u' = T$
2. *hyp* $\dot{\sim} u = T$
3. *hyp* $u \dot{\sim} v = u' \dot{\sim} v' = T$
4. *hyp* $\phi z = T$

Soit :	$y_0 =_{def} \varepsilon y.u y.\dot{\sim} v z$
5. $MP(2, 3, 4; Lem176.1)$	$\phi y_0 = u y_0 \dot{\sim} v z = T$
10. $Méta(SubstAtom1.3)(9, 3)$	$u y_0 \dot{\sim} u' = v z \dot{\sim} v'$
11. $Méta(DétZFCs)(1, 8)$	$! u y_0 \dot{\sim} u' = T$
12. $Trivial(10, 11)$	$! v z \dot{\sim} v' = T$

■

Lemme 178 $\vdash \phi u, \phi u', \dot{\sim} u, u \dot{\sim} v, u' \dot{\sim} v', u' \dot{\in} u \longleftrightarrow v' \dot{\in} v$

Preuve. Le sens \longleftarrow se montre comme ci-dessous le sens \longrightarrow , en intervertissant les rôles respectifs de u, u' et de v, v' à partir de la ligne 7 (inclusive), et en utilisant $DétZFCs$ au lieu du Lemme 177.2 en ligne 15.

1. hyp	$\phi u = \phi u' = T$
2. hyp	$u \dot{\sim} v = u' \dot{\sim} v' = T$
3. hyp	$\dot{\sim} u = T$
4. $MP(3, 2; Lem157)$	$\dot{\sim} v = T$
5. $MP(2, 3; Cor159)$	$u \dot{\sim}_0 v = T$
6. $Lem170 + Trivial(5)$	$(u \dot{\in} v \wedge v \dot{\in} u) = T$
7. $Méta(LoiLg1)(6) + Déf(\dot{\in})$	$\forall z \dot{\exists} z'. u z \dot{\sim} v z' = T$
8. $hyp+$	$u' \dot{\in} u = T$
Soit :	$z_0 =_{def} \varepsilon z.u z \dot{\sim} u'$
9. $NonVide(8)$	$\phi z_0 = u z_0 \dot{\sim} u' = T$
10. $Inst_{\dot{\sim}}(9, 7)$	$\dot{\exists} z'. u z \dot{\sim} v z' = T$
Soit :	$z'_0 =_{def} \varepsilon z'. u z_0 \dot{\sim} v z'_0$
11. $Choix(10)$	$\phi z'_0 = u z_0 \dot{\sim} v z'_0 = T$
12. $Equiv^{\sim}$	$v z'_0 \dot{\sim} u' = T$
13. $Méta(SubstiAtom1.2)(2)$	$v z'_0 \dot{\sim} v' = T$
14. $MP(4; Lem161)$	$v' \dot{\in} v = \dot{\exists} z.v z \dot{\sim} v'$
15. $MP(1, 2, 3; Lem177.2) + Triv.(14)$	$! \dot{\exists} z.v z \dot{\sim} v' = T$
16. $Exhib(6, 8, 9) + Trivial(14)$	$\dot{\exists} z.v z \dot{\sim} v' = v' \dot{\in} v = T$

■

Nous énonçons maintenant la substitutivité pour les ZFC -termes avec $\dot{\in}$:

Lemme 179 ($SubstitAtom2$)

- 1) $\phi x, \phi u, u \dot{\sim} v \longrightarrow u \dot{\in} x = v \dot{\in} x$
- 2) $\phi x, \phi u, u \dot{\sim} v \longrightarrow x \dot{\in} u = x \dot{\in} v$
- 3) $\phi u, \phi u', u \dot{\sim} v, u' \dot{\sim} v' \longrightarrow (u' \dot{\in} u = v' \dot{\in} v)$

Preuve. Les point 1 et 2 découlent facilement du 3 en utilisant $Réflex_{\dot{\in}}$.
On montre le 3 en raisonnant par TND :

1. <i>hyp</i>	$\phi u = \phi u' = T$
2. <i>hyp</i>	$u \dot{\sim} v = u' \dot{\sim} v' = T$
3. <i>hyp+</i>	$u = T$
4. <i>MP</i> (3, 2; <i>Lem</i> 156)	$v = T$
5. <i>Trivial</i> (4) + <i>Déf</i> ($\dot{\in}$)	$u' \dot{\in} u = v' \dot{\in} v = u' \dot{\in} T = v' \dot{\in} T = F$
6. <i>Déduct</i> -(3, 5)	$u \longrightarrow (u' \dot{\in} u = v' \dot{\in} v)$
7. <i>hyp+</i>	$\dot{\neg} u = T$
8. <i>MP</i> (7, 2; <i>Lem</i> 157)	$\dot{\neg} v = T$
9. <i>MP</i> (1; <i>DétZFCs</i>)	$!(u' \dot{\in} u) = T$
10. <i>MP</i> (1, 2, 7; <i>Lem</i> 177.2)	$!(v' \dot{\in} v) = T$
11. <i>MP</i> (1, 2, 7; <i>Lem</i> 161)	$!\dot{\exists} z.(vz) \dot{\sim} v' = !\dot{\exists} y.(uy) \dot{\sim} u = T$
12. <i>Equiv</i> _{NonM} $\rightarrow M$ (9, 10, 11)	$(u' \dot{\in} u \leftrightarrow v' \dot{\in} v) = T$
13. <i>Lem</i> 161(7, 8)	$u' \dot{\in} u = \dot{\exists} z.uz \dot{\sim} u'; v' \dot{\in} v = \dot{\exists} z.vz \dot{\sim} v'$
14. <i>Tauto</i>	$\approx x \leftrightarrow \approx y \longrightarrow (\approx x = \approx y)$
15. <i>InstTauto</i> (7) + <i>Déf</i> ($\dot{\exists}$)	$\dot{\exists} y.uy \dot{\sim} u' \leftrightarrow \dot{\exists} z.vz \dot{\sim} v' \longrightarrow (\dot{\exists} y.uy \dot{\sim} u' = \dot{\exists} z.vz \dot{\sim} v')$
16. <i>Trivial</i> (13, 15)	$(u' \dot{\in} u \leftrightarrow v' \dot{\in} v) \longrightarrow (u' \dot{\in} u = v' \dot{\in} v)$
17. <i>MP</i> (12; 16)	$u' \dot{\in} u = v' \dot{\in} v$
18. <i>Déduct</i> -(7, 17)	$\dot{\neg} u \longrightarrow (u' \dot{\in} u = v' \dot{\in} v)$
19. <i>TND</i> (6, 18)	$(u' \dot{\in} u = v' \dot{\in} v)$

■

Il nous reste un dernier lemme important à voir avant de démontrer, par induction, le premier Théorème de Substitutivité :

Lemme 180 Soient $A[\bar{x}, y]$ un terme et \bar{B} une suite de terme ne contenant pas y libre, on a :

- 1) $\bar{B}, \phi\bar{x}, \phi y \longrightarrow !A$; $\bar{B}, \phi\bar{x}, \phi y \longrightarrow A = A' \vdash \bar{B}, \phi\bar{x} \longrightarrow \varepsilon y.A = \varepsilon y.A'$
2) $\bar{B}, \phi\bar{x}, \phi y \longrightarrow !A$; $\bar{B}, \phi\bar{x}, \phi y \longrightarrow A = A' \vdash \bar{B}, \phi\bar{x} \longrightarrow \dot{\exists} y.A = \dot{\exists} y.A'$

Preuve. On montre 1 et 2 en même temps :

1. <i>Hyp</i>	$\bar{B}, \phi\bar{x}, \phi y \longrightarrow !A$
2. <i>Hyp</i>	$\bar{B}, \phi\bar{x}, \phi y \longrightarrow (A = A')$
3. <i>hyp</i>	$\bar{B} = \phi\bar{x} = \bar{T}$
4. <i>MP</i> (3, <i>Dét</i> _{$\dot{\exists}, \dot{\forall}$} -2(1))	$\phi\varepsilon y.A = T$
5. <i>MP</i> (3, 2)	$\phi y \longrightarrow (A = A')$
6. <i>Méta</i> (4, 5)	$A[\varepsilon y.A/y] = A'[\varepsilon y.A/y]$
7. <i>hyp+</i>	$\phi y = T$

- | | |
|--|--|
| 8. <i>MP</i> (3, 5) | $A = A'$ |
| 9. <i>MP</i> (3+7, <i>FormValide</i>) | $A \dot{\leftrightarrow} A = T$ |
| 10. <i>Trivial</i> (8, 9) | $A \dot{\leftrightarrow} A = A \dot{\leftrightarrow} A' = T$ |
| 11. <i>Déduct</i> -(7, 10) | $\phi y \longrightarrow A \dot{\leftrightarrow} A'$ |
| 12. <i>Ackermann</i> (11) | $\varepsilon \mathbf{y}. \mathbf{A} = \varepsilon \mathbf{y}. \mathbf{A}'$ |
| 13. <i>6+Trivial</i> (12) | $A[\varepsilon y. A/y] = A'[\varepsilon y. A/y] = A'[\varepsilon y. A'/y]$ |
| 14. <i>Déf</i> ($\dot{\exists}$) + <i>Trivial</i> (13) | $\dot{\exists} \mathbf{y}. \mathbf{A} = \dot{\exists} \mathbf{y}. \mathbf{A}'$ |

■

Remarque 181 *On pourrait penser que le 1 du lemme précédent est immédiat par Context. En fait, il n'en est rien en raison des restrictions sur l'utilisation de la règle MT-Abstract dans les démonstrations sous hypothèses de déduction. Cette remarque est valable aussi pour les Corollaires 183 et 189 ci-dessous.*

On énonce maintenant le Théorème de Substitution pour les *ZFC*-termes :

Théorème 182 (*Substit*) *Pour tout ZFC-terme $B[\bar{z}', \bar{z}]$ on a :*
 $\vdash \phi \bar{z}', \phi \bar{u}, \bar{u} \sim \bar{v} \longrightarrow (B[\bar{u}/\bar{z}] = B[\bar{v}/\bar{z}])$

Preuve. On raisonne par induction sur la construction du *ZFC*-terme B . Pour le cas où B traduit une formule atomique les diverses possibilités sont réglées par les lemmes *SubstitAtom1* et *2*. Pour le cas où B traduit une formule complexe construite avec un connecteur unaire ou binaire, le résultat s'obtient facilement par *Context* à partir de l'hypothèse d'induction. Par définition de $\dot{\forall}$, le cas $B \equiv \dot{\forall} y. A$ est réglé par les cas $\dot{\rightarrow}$ et $\dot{\exists}$. Enfin le cas $B \equiv \dot{\exists} y. A$ découle immédiatement de l'hypothèse d'induction et du lemme précédant en utilisant *DétZFCs*. ■

Corollaire 183 *Pour tout ZFC-terme $B[y, \bar{z}', \bar{z}]$ on a :*
 $\vdash \phi \bar{z}', \phi \bar{u}, \bar{u} \sim \bar{v} \longrightarrow \varepsilon y. B[\bar{u}/\bar{z}] = \varepsilon y. B[\bar{v}/\bar{z}]$

Preuve. Par *DétZFCs* et *AjoutHyp* on a $\vdash \bar{u} \sim \bar{v}, \phi \bar{x}, \phi y, \phi \bar{u} \longrightarrow !B[\bar{u}/\bar{z}]$. Le corollaire est donc une simple application du Lemme 180.1. ■

Substitutivité dans les *ZFC*-termes avec ϕ -structures.

On définit tout d'abord formellement les notions de compatibilité forte et faible :

Définition 184 :

1) *On dira que $t[\bar{w}, \bar{w}'] \in \Lambda(C)$ est fortement compatible avec \sim relativement à \bar{w} si :*

$$\vdash \phi\bar{w}', \phi\bar{x}, \phi\bar{y}, \bar{x}\sim\bar{y} \longrightarrow t[\bar{x}/\bar{w}] = t[\bar{y}/\bar{w}],$$

et qu'il est faiblement compatible (ou plus simplement compatible) si :

$$\vdash \phi\bar{w}', \phi\bar{x}, \phi\bar{y}, \bar{x}\sim\bar{y} \longrightarrow t[\bar{x}/\bar{w}] \sim t[\bar{y}/\bar{w}]$$

2) Soit \bar{t} une suite de termes, on dira que \bar{t} est fortement (resp. faiblement) compatible avec \sim relativement à \bar{w} , si chaque $t_i \in \bar{t}$ est fortement (resp. faiblement) compatible.bilité (faible).

Remarque 185 En utilisant AjoutHyp, on vérifie aussi que si t est compatible avec \sim relativement à $VL(\bar{t})$, alors il l'est pour tout $\bar{w} \supseteq VL(t)$.

Exemple 186 Toute variable est compatible avec \sim relativement à elle-même.

Lemme 187 Pour tout terme $t[\bar{w}', \bar{w}]$, si $\vdash \phi\bar{w}', \phi\bar{w} \longrightarrow t \sim t$ alors :

Si t est fortement compatible avec \sim relativement à \bar{w} alors il l'est faiblement.

Preuve.

1. Hyp $\phi\bar{w}', \phi\bar{w} \longrightarrow t \sim t$
2. Hyp $\phi\bar{w}', \phi\bar{x}, \phi\bar{y}, \bar{x}\sim\bar{y} \longrightarrow t[\bar{x}/\bar{w}] = t[\bar{y}/\bar{w}]$
3. hyp $\phi\bar{w}' = \phi\bar{x} = \phi\bar{y} = T$
4. hyp $\bar{x}\sim\bar{y} = T$
5. Méta(1)(3) $t[\bar{x}/\bar{w}] \sim t[\bar{x}/\bar{w}] = T$
6. MP(3, 4; 2) $t[\bar{x}/\bar{w}] = t[\bar{y}/\bar{w}]$
7. Trivial(5, 6) $t[\bar{x}/\bar{w}] \sim t[\bar{y}/\bar{w}] = T$

■

Le théorème de substitution que nous donnons maintenant concerne les ZFC-termes avec ϕ -structures obtenus à partir des ZFC-termes en substituant des ϕ -structures à des variables. Il découle essentiellement de *Substit* :

Théorème 188 (*Substit_s*) Soient $B[\bar{z}, \bar{z}']$ un ZFC-terme et $\bar{t}[\bar{w}', \bar{w}]$ une suite de ϕ -structures. Si \bar{t} est (faiblement) compatible avec \sim relativement à \bar{w} alors :

$$\vdash \phi\bar{w}', \phi\bar{z}', \phi\bar{x}, \phi\bar{y}, \bar{x}\sim\bar{y} \longrightarrow (B[\bar{t}[\bar{x}/\bar{w}]/\bar{z}] = B[\bar{t}[\bar{y}/\bar{w}]/\bar{z}])$$

Preuve. On notera m la longueur de \bar{t} et \bar{z} . Comme chaque $t_i \in \bar{t}$ est une ϕ -structure, on vérifie tout d'abord facilement que, pour tout $i \leq m$:

$$(*) \vdash \phi\bar{w}', \phi\bar{x} \longrightarrow \phi t_i[\bar{x}/\bar{w}]$$

1. hyp $\phi\bar{w}' = \phi\bar{z}' = \phi\bar{x} = \phi\bar{y} = \bar{T}$
2. hyp $\bar{x}\sim\bar{y} = \bar{T}$

Pour tout $i \leq m$:

3. MP(1; (*)) $\phi t_i[\bar{x}/\bar{w}] = T$
4. MP(1, 2; Compatibilité de t_i) $t_i[\bar{x}/\bar{w}] \sim t_i[\bar{y}/\bar{w}] = T$
5. Méta(*Substit*)(3, 4) $B[\bar{t}[\bar{x}/\bar{w}]/\bar{z}] = B[\bar{t}[\bar{y}/\bar{w}]/\bar{z}]$

■

On a un corollaire similaire au Corollaire 183 pour *Substit_s*. Il se montre en utilisant le Lemme 180.1 et 2 :

Corollaire 189 *Soit $B[\bar{z}, \bar{z}', y]$ un ZFC-terme. Sous les mêmes hypothèses que le lemme sur \bar{t} :*

$$\begin{aligned} \vdash \phi\bar{w}', \phi\bar{z}', \phi\bar{x}, \phi\bar{y}, \bar{x}\sim\bar{y} &\longrightarrow (\varepsilon y.B[\bar{t}[\bar{x}/\bar{w}]/\bar{z}] = \varepsilon y.B[\bar{t}[\bar{y}/\bar{w}]/\bar{z}]) \\ \vdash \phi\bar{w}', \phi\bar{z}', \phi\bar{x}, \phi\bar{y}, \bar{x}\sim\bar{y} &\longrightarrow (\exists y.B[\bar{t}[\bar{x}/\bar{w}]/\bar{z}] = \exists y.B[\bar{t}[\bar{y}/\bar{w}]/\bar{z}]) \end{aligned}$$

2.5.3 L'axiome de l'ensemble vide

L'axiome de l'ensemble vide est une conséquence facile du Corollaire 166 :

Théorème 190 $\vdash \exists x \forall v. \dot{\neg}(v \dot{\in} x) = T$

2.5.4 L'axiome de la paire

L'axiome de la paire sera une conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme 191 $\vdash \phi x, \phi y \longrightarrow x \dot{\in} Pxy$

Preuve. Rappelons que $Pxy =_{def} \lambda z.(if\ z\ x\ y)$

1. *hyp* $\phi x = \phi y = T$
2. *Select1* $(Pxy\ T) = x$
3. *Refl^{\sim\Phi}(1)* $x \sim x = T$
4. *CompatEgal(2, 3)* $(Pxy\ T) \sim x = T$
5. *Exhib(1, M-T, 4)* $\exists u. ((Pxy\ u) \sim x) = T$
6. *Déf($\dot{\in}$) + Trivial(5)* $x \dot{\in} Pxy = T$

■

Lemme 192 $\vdash \phi x, \phi y \longrightarrow y \dot{\in} Pxy$

Preuve. La démonstration de ce lemme s'obtient à partir de la preuve ci-dessus en remplaçant T par F et l'axiome $MT-T$ par $MT-F$. ■

Théorème 193 $\vdash \forall x \forall y \exists z. (x \dot{\in} z \wedge y \dot{\in} z) = T$

Preuve.

1. *hyp* $\phi x = \phi y = T$
2. *MP(1, Lem191)* $x \dot{\in} Pxy = T$
3. *MP(1, Lem192)* $y \dot{\in} Pxy = T$
4. *MétaLoiLg1(2, 3)* $x \dot{\in} Pxy \wedge y \dot{\in} Pxy = T$
5. *MP(1, MT-P)* $\phi(Pxy) = T$
6. *Exhib(1, 5, 4)* $\exists z. (x \dot{\in} z \wedge y \dot{\in} z) = T$
7. *Déduct(1, 6) + Génég* $\forall x \forall y. \exists z. (x \dot{\in} z \wedge y \dot{\in} z) = T$

■

2.5.5 L'axiome de l'union

Lemme 194 $\vdash \phi u, \phi x, \phi y, x \dot{\in} y, y \dot{\in} u \longrightarrow x \dot{\in} Union(u)$

Preuve. Rappelons que $Union(u) =_{def} \lambda z.u(zT)(zF)$

1. *hyp* $\phi u = \phi x = \phi y = T$
2. *hyp* $x \dot{\in} y = y \dot{\in} u = T$
3. *NonVide.1(2)* $\dot{\neg} y = \dot{\neg} u = T$
Soient : $v_0 =_{def} \varepsilon v.(yv \dot{\sim} x)$ et $w_0 =_{def} \varepsilon w.(uw \dot{\sim} y)$
4. *NonVide.1(2) + Sym $\dot{\sim}$* $\phi v_0 = \phi w_0 = x \dot{\sim}(yv_0) = y \dot{\sim}(uw_0) = T$
5. *Méta(Substit)(1, 2)* $x \dot{\in} uw_0 = T$
6. *NonVide.1(5)* $\dot{\neg}(uw_0) = T$
Soit : $z_0 =_{def} \varepsilon z.(uw_0 z \dot{\sim} x)$
7. *NonVide.1(5)* $\phi z_0 = (uw_0 z_0) \dot{\sim} x = T$
8. *Méta(MT-P)(4, 7)* $\phi(Pw_0 z_0) = T$
9. *Trivial* $(Union(u) Pw_0 z_0) = uw_0 z_0$
10. *Méta(MT-App)(1, 4, 7)* $\phi(uw_0 z_0) = T$
11. *Méta(Refl $\dot{\sim}$ $_{\phi}$)(10)* $uw_0 z_0 \dot{\sim} uw_0 z_0 = T$
12. *CompatEgal(11, 9)* $(Union(u) Pw_0 z_0) \dot{\sim} uw_0 z_0 = T$
13. *Méta(Equiv $\dot{\sim}$)(7, 12)* $(Union(u) Pw_0 z_0) \dot{\sim} x = T$
14. *Exhib(8, 13)* $\exists y.((Union(u) y) \dot{\sim} x) = T$
15. *Rem162 + Trivial(14)* $x \dot{\in} Union(u)$

■

Théorème 195 $\vdash \forall u \exists z \forall x \forall y.((x \dot{\in} y \wedge y \dot{\in} u) \Rightarrow x \dot{\in} z) = T$

Preuve.

1. *hyp* $\phi u = T$
2. *hyp+* $\phi x = \phi y = T$
3. *MP(1, 2; Lem194)* $x \dot{\in} y, y \dot{\in} u \longrightarrow x \dot{\in} Union(u)$
4. *Implic $_{NonM \rightarrow M}$ (1, 2, 3)* $(x \dot{\in} y \wedge y \dot{\in} u) \Rightarrow x \dot{\in} Union(u) = T$
5. *Deduct-(2) + Généré* $\forall x \forall y.((x \dot{\in} y \wedge y \dot{\in} u) \Rightarrow x \dot{\in} Union(u)) = T$
6. *MP(1; Union)* $\phi Union(u) = T$
7. *Exhib(5, 4)* $\exists z \forall x \forall y.((x \dot{\in} y \wedge y \dot{\in} u) \Rightarrow x \dot{\in} z) = T$

■

2.5.6 L'axiome de l'infini

La démonstration de l'axiome de l'infini dans MTA (Théorème 199) passe par le fait que $\omega_{\Phi} =_{def} \varepsilon z.(T \dot{\in} z \wedge \forall x.(x \dot{\in} z \Rightarrow Sx \dot{\in} z))$ vérifie la formule exprimant l'infinité d'un ensemble.

On montre tout d'abord une propriété des “singletons” :

Lemme 196 $\vdash \phi u \longrightarrow \dot{\forall} w.(w \in Su \Leftrightarrow w \sim u)$

Preuve. On montre $\phi u, \phi w, w \in Su \longleftrightarrow w \sim u$, le résultat en découlant par *Equiv* $_{NonM \rightarrow M}$ et *Géné.* On utilisera librement le fait que, par la Remarque 162, on a $\vdash v \in Su = \dot{\exists} z.((Su)z \sim v)$.

\longrightarrow)

1. *hyp* $\phi u = \phi v = T$
2. *hyp* $\dot{\exists} z.(Su)z \sim v = T$
- Soit : $z_0 =_{def} \varepsilon z.(Su)z \sim v$
3. *Choix* $\phi z_0 = (Su)z_0 \sim v = T$
4. *Trivial* $(Su)z_0 = u$
5. *Trivial*(3,4) $u \sim v = T$

\longleftarrow)

1. *hyp* $\phi u = \phi v = T$
2. *hyp* $u \sim v = T$
3. *Rm* $\dot{\exists} z.(Su)z \sim v$
4. *Trivial* $(Su)T = u$
5. *Trivial*(2,4) $(Su)T \sim v = T$
6. *Exhib*(*MT-T*,5) + 3 $\dot{\exists} z.(Su)z \sim v = T$

■

L'axiome de l'infini découle maintenant des deux lemmes qui vont suivre. Le premier exprime que "l'ensemble vide" est un "élément" de ω_Φ :

Lemme 197 $\vdash \phi u \longrightarrow (\dot{\forall} z.\dot{\neg}(z \in u) \Rightarrow u \in \omega_\Phi)$

Preuve.

1. *hyp* $\phi u = T$
2. *hyp+* $\dot{\forall} z.\dot{\neg}(z \in u) = T$
3. *MP*(1, 2; *Cor*166) $u = T$
4. *Trivial*(197, 3) $u \in \omega_\Phi = T$
5. *Déduct.*(2, 4) $\dot{\forall} z.\dot{\neg}(z \in u) \longrightarrow u \in \omega_\Phi$
6. *Implic* $_{NonM \rightarrow M}$ (5) $\dot{\forall} z.\dot{\neg}(z \in u) \Rightarrow u \in \omega_\Phi = T$

■

Lemme 198 $\vdash \phi u \longrightarrow (u \in \omega_\Phi \Rightarrow \dot{\exists} y.(y \in \omega_\Phi \wedge \dot{\forall} w.(w \in y \Leftrightarrow w \sim u)))$

Preuve.

1. *hyp* $\phi u = T$
2. *hyp+* $u \in \omega_\Phi = T$
3. *Inst* $_{\dot{\forall}}(1, Lem116)$ $(u \in \omega_\Phi \Rightarrow Su \in \omega_\Phi) = T$
4. *MP* $_{\Rightarrow}(2, 3)$ $Su \in \omega_\Phi = T$
5. *MP*(1, *Lem*196) $\dot{\forall} w.(w \in Su \Leftrightarrow w \sim u) = T$
6. *Singleton*(1) $\phi(Su) = T$
7. *Méta*(*LoiLog*2)(4, 5) $(Su \in \omega_\Phi \wedge \dot{\forall} w.(w \in Su \Leftrightarrow w \sim u)) = T$

8. *Exhib*(6, 5) $\dot{\exists}y.(y \in \omega_{\Phi} \wedge \dot{\forall}w.(w \in y \leftrightarrow w \sim u)) = T$
 9. *Deduct*-(2, 7) $u \in \omega_{\Phi} \longrightarrow \dot{\exists}y.(y \in \omega_{\Phi} \wedge \dot{\forall}w.(w \in y \leftrightarrow w \sim u))$
 10. *Implic*_{Non M} $\rightarrow M$ $(u \in \omega_{\Phi} \Rightarrow \dot{\exists}y.(y \in \omega_{\Phi} \wedge \dot{\forall}w.(w \in y \leftrightarrow w \sim u))) = T$

■

Théorème 199 :

$$\vdash \dot{\exists}z \dot{\forall}u.(\dot{\forall}z. \dot{\neg}(z \in u) \Rightarrow u \in z) \wedge (u \in z \Rightarrow \dot{\exists}y (y \in z \wedge \dot{\forall}w (w \in y \leftrightarrow w \sim u))) = T$$

Preuve. Suit facilement des deux lemmes précédents en utilisant *Géné* et *Exhib*. ■

On suppose le lecteur maintenant suffisamment familiarisé avec nos démonstration formelles pour introduire deux nouvelles conventions d'écriture.

Conventions pour l'écriture des preuves formelles

1. Chaque fois que dans le cours d'une démonstration on aura posé des hypothèses $\phi \bar{y} = \bar{T}$ et que l'énoncé à démontrer sera de la forme $\dot{\forall} \bar{y}. A = T$ on arrêtera la preuve à $A = T$. L'utilisation de *Deduct* et de *GénéG* pour obtenir la conclusion voulue sera alors sous-entendue.
2. Pour des termes t et s , lorsque $\phi t = T$ et $\phi s = T$ sont démontrés, on sous-entendra parfois la démonstration de $\phi(ts)$ par *Méta*(*MT-App*).

2.5.7 L'axiome de compréhension

On se donne maintenant pour le reste de cette section un ZFC-terme $B[y, \bar{x}]$. Rappelons tout d'abord que :

$$\text{Compréhension}_{B,y}(\) =_{def} \lambda \bar{x} \lambda u. (if\ u\ T\ (if\ \dot{\neg} \dot{\exists} z. B[uz/y]\ T\ \lambda z. (if\ B[uz/y]\ uz\ uz_0)))$$

où $z_0 =_{def} \varepsilon z. B[uz/y]$ avec $u \notin VL(B)$ et $z \notin \bar{x}$.

Comme *Compréhension*_{B,y}() est un terme assez complexe, on introduit des notations qui permettent d'en faire ressortir la structure :

Notation 200 *Compréhension*_{B,y}() =_{def} $\lambda \bar{x} \lambda u. \Upsilon$ où :

$$\Upsilon =_{def} (if\ u\ T\ \Upsilon_0)$$

$$\Upsilon_0 =_{def} (if\ \dot{\neg} \dot{\exists} z. B[uz/y]\ T\ \Upsilon_1)$$

$$\Upsilon_1 =_{def} \lambda z. (if\ B[uz/y]\ uz\ uz_0)$$

$$z_0 =_{def} \varepsilon z. B[uz/y]\ \text{avec } u \notin VL(B)\ \text{et } z \notin \bar{x}.$$

Rappelons que, par *Compréhension* (Théorème 148), on a :

$$\vdash \phi \bar{x}, \phi u \longrightarrow \phi \Upsilon$$

La démonstration de l'axiome de compréhension dans *MTA* utilisera deux lemmes. Le premier exprime des conséquences directes de la définition de Υ :

Lemme 201 :

- 1) $\vdash \dot{\neg}\Upsilon \longrightarrow \dot{\neg}u = \dot{\exists}z.B[uz/y] = T$
- 2) $\vdash \dot{\neg}u, \dot{\exists}z.B[uz/y] \longrightarrow (\Upsilon = \Upsilon_1)$

Preuve. Pour le point 1, on remarque simplement que $\dot{\neg}\Upsilon \longrightarrow \dot{\neg}u$ et $\dot{\neg}\Upsilon \longrightarrow \dot{\exists}z.B[uz/y]$ sont des instances des tautologies $\dot{\neg}(if\ x\ T\ y) \longrightarrow \dot{\neg}x$ et $\dot{\neg}(if\ x\ T\ (if\ \dot{\neg}y\ T\ z)) \longrightarrow y$. Pour le point 2, on remarque simplement que $\dot{\neg}u, \dot{\exists}z.B[uz/y] \longrightarrow (\Upsilon = \Upsilon_1)$ est une instance de la tautologie $\dot{\neg}x, y \longrightarrow (if\ x\ T\ (if\ \dot{\neg}y\ T\ z)) = z$. ■

Le deuxième exprime que les “éléments” de Υ sont exactement les “éléments” de u qui “vérifient” B :

Lemme 202 $\vdash \phi\bar{x}, \phi u, \phi x, x \in \Upsilon \longleftrightarrow (x \in u \wedge B[x/y])$

Preuve. Rappelons que $z_0 =_{def} \varepsilon z.B[uz/y]$:

\longrightarrow)

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi\bar{x} = \phi u = \phi x = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $x \in \Upsilon = T$ |
| Soit : | $y_0 =_{def} \varepsilon y.\Upsilon y \dot{\sim} x$ |
| 3. <i>NonVide.1(2)</i> | $\dot{\neg}\Upsilon = T$ |
| 4. <i>NonVide.1(2)</i> | $\phi y_0 = \Upsilon y_0 \dot{\sim} x = T$ |
| 5. <i>MP(3; Lem201.1)</i> | $\dot{\neg}u = \dot{\exists}z.B[uz/y] = T$ |
| 6. <i>MP(5; Lem201.2)</i> | $\Upsilon = \Upsilon_1 =_{def} \lambda z.(if\ B[uz/y]\ uz\ uz_0)$ |
| 7. <i>Trivial(4, 6)</i> | $\Upsilon_1 y_0 \dot{\sim} x = T$ |
| 8. <i>hyp+</i> | $B[(u\ y_0)/y] = T$ |
| 9. <i>Trivial(8)</i> | $\Upsilon_1 y_0 = (if\ B[(u\ y_0)/y]\ (u\ y_0)\ (u\ z_0)) = (u\ y_0)$ |
| 10. <i>Trivial(7, 9)</i> | $(u\ y_0) \dot{\sim} x = T$ |
| 11. <i>Exhib(4, 10) + Rem162(5)</i> | $\dot{\exists}y.(u\ y) \dot{\sim} x = x \in u = T$ |
| 12. <i>Méta(Substit)(1, 10, 8)</i> | $B[x/y] = T$ |
| 13. <i>Méta(LoiLg2)(11, 12)</i> | $(x \in u \wedge B[x/y]) = T$ |
| 14. <i>Déduct-(8, 13)</i> | $B[(u\ y_0)/y] \longrightarrow (x \in u \wedge B[x/y])$ |
| 15. <i>hyp+</i> | $\dot{\neg}B[(u\ y_0)/y] = T$ |
| 16. <i>Trivial(15)</i> | $\Upsilon_1 y_0 = (if\ B[(u\ y_0)/y]\ (u\ y_0)\ (u\ z_0)) = (u\ z_0)$ |
| 17. <i>Trivial(7, 16)</i> | $(u\ z_0) \dot{\sim} x = T$ |
| 18. <i>Exhib(19, 18) + Rem162(5)</i> | $\dot{\exists}y.(u\ y) \dot{\sim} x = x \in u = T$ |
| 19. <i>Choix(5)</i> | $\phi z_0 = B[(u\ z_0)/y] = T$ |
| 20. <i>Méta(Substit)(1, 17, 19)</i> | $B[x/y] = T$ |
| 21. <i>Méta(LoiLg2)(18, 20)</i> | $x \in u \wedge B[x/y] = T$ |
| 22. <i>Déduct-(20, 26)</i> | $\dot{\neg}(B[(u\ y_0)/y]) \longrightarrow (x \in u \wedge B[x/y])$ |
| 23. <i>TND(14, 22)</i> | $(x \in u \wedge B[x/y]) = T$ |

\longleftarrow)

1. <i>hyp</i>	$\phi\bar{x} = \phi x = \phi u = T$
2. <i>hyp+</i>	$x \dot{\in} u \wedge B[x/y] = T$
3. <i>Méta(LoiLg1)(2)</i>	$x \dot{\in} u = B[x/y] = T$
4. <i>NonVide.1(3)</i>	$\dot{\neg}u = T$
5. <i>Lem161(4) + Trivial(3)</i>	$\dot{\exists}y.(uy) \dot{\sim} x = T$
Soit :	$y_0 =_{def} \varepsilon y.uy \dot{\sim} x$
6. <i>Choi(x)(5)</i>	$\phi y_0 = (uy_0) \dot{\sim} x = T$
7. <i>Méta(Substit)(1, 6, 3)</i>	$B[(uy_0)/y] = T$
8. <i>Exhib(5, 6)</i>	$\dot{\exists}z.B[(uz)/y] = T$
9. <i>MP(4, 7; Lem201.2)</i>	$\Upsilon = \Upsilon_1$
10. <i>Trivial(9, 7)</i>	$\Upsilon y_0 = \Upsilon_1 y_0 = (if B[(uy_0)/y] (u y_0) (u z_0)) = (u y_0)$
11. <i>Trivial(6, 10)</i>	$\Upsilon y_0 \dot{\sim} x = T$
12. <i>Exhib(6, 11) + Rem162(9)</i>	$\dot{\exists}y.(\Upsilon y \dot{\sim} x) = x \dot{\in} \Upsilon = T$

■

Nous abordons maintenant le théorème qui exprime que l'axiome de compréhension est prouvable dans *MTA*.

Théorème 203 $\vdash \dot{\forall}\bar{x}\dot{\forall}u\dot{\exists}z\dot{\forall}x.(x \dot{\in} z \Leftrightarrow (x \dot{\in} u \wedge B[x/y])) = T$

Preuve.

1. <i>hyp</i>	$\phi\bar{x} = \phi u = T$
2. <i>hyp+</i>	$\phi x = T$
3. <i>MP(1, 2; Lem202)</i>	$x \dot{\in} \Upsilon \longleftrightarrow (x \dot{\in} u \wedge B[x/y])$
4. <i>Equiv_{NonM \rightarrow M}(3)</i>	$x \dot{\in} \Upsilon \Leftrightarrow (x \dot{\in} u \wedge B[x/y]) = T$
5. <i>Déduct-(2, 4) + Géné</i>	$\dot{\forall}x.(x \dot{\in} \Upsilon \Leftrightarrow (x \dot{\in} u \wedge B[x/y])) = T$
6. <i>MP(1, Compréhension)</i>	$\phi\Upsilon = T$
7. <i>Exhib(6, 5)</i>	$\dot{\exists}z\dot{\forall}x.(x \dot{\in} z \Leftrightarrow (x \dot{\in} u \wedge B[x/y])) = T$

■

2.5.8 L'axiome de l'ensemble des parties

Dans cette section, nous devons montrer que *MTA* permet de prouver (la traduction de) l'axiome des parties, autrement dit que :

$$\vdash \dot{\forall}u\dot{\exists}z\dot{\forall}y(y \dot{\subseteq} u \Rightarrow y \dot{\in} z) = T$$

Comme pour les autres axiomes de *ZFC^{-e}*, la démonstration passe par l'exhibition d'un terme qui "vérifie" (la traduction de) la formule contenue dans l'axiome. Ce terme est la ϕ -structure *Parties(u)*, et il s'agit essentiellement de montrer :

$$(*) \vdash \phi u, \phi y, y \dot{\subseteq} u \longrightarrow y \dot{\in} \text{Parties}(u)$$

Comme la démonstration que nous abordons est assez longue, en raison de

notre choix initial de formaliser les preuves au maximum², nous en donnons tout d'abord une présentation intuitive :

Le terme $Parties(u) =_{def} \lambda x.(if\ x\ T\ \lambda z.u(x(I''\ u\ (uz))))$ est une légère variation technique du terme plus simple $Parties'(u) =_{def} \lambda x.(if\ x\ T\ \lambda z.u(xz))$ qui va le remplacer dans notre discussion informelle. Notons simplement pour l'instant que cette légère variation est justifiée par le fait que $Parties'(u)$ n'est pas une ϕ -structure.

Comme l'indique l'équation (*), il s'agit essentiellement de montrer dans cette section que, sous les hypothèses $\phi u = \phi y = y \dot{\subseteq} u = T$, on a $\vdash y \dot{\in} Parties'(u) = T$. Par définition de $\dot{\in}$ (Définition 109) et *Exhib* (Théorème 76), il faut pour cela trouver un terme \varkappa tel que $\vdash \phi \varkappa = T$ et $\vdash (Parties'(u)\ \varkappa) \dot{\sim} y = T$. Dans le cas où $y = T$, il suffit de prendre $\varkappa =_{def} T$, comme le montrera le Lemme 213. Dans le cas où $\dot{\sim} y = T$, la démarche naturelle est de prendre $\varkappa =_{def} \lambda z.(if\ (uz) \dot{\in} y\ z\ \varepsilon z.(uz \dot{\in} y))$. On a alors $\vdash (Parties'(u)\ \varkappa) = \lambda z.u(\varkappa z)$, et on peut vérifier par “extensio-nalité” (Théorème 173) que $\vdash \lambda z.u(\varkappa z) \dot{\sim} y$.

Malheureusement, on se heurte de nouveau au fait que \varkappa n'est pas une ϕ -structure (on n'a donc pas $\vdash \phi \varkappa = T$). Ceci nous oblige, comme c'était déjà le cas pour $Parties'(u)$, à modifier le terme \varkappa en utilisant le constructeur I'' . On obtient alors la définition suivante pour \varkappa (on suppose u et y fixés) :

Définition 204 $\varkappa =_{def} \lambda z.(if\ (uz) \dot{\in} y\ (I''\ u\ (uz))\ \varepsilon z'.(uz' \dot{\in} y))$

Avant de montrer (*) en suivant le plan esquissé dans notre discussion informelle, l'utilisation de I'' nous oblige à détailler le comportement de ce constructeur, et notamment les rapports qu'il entretient avec \varkappa .

Propriétés de I'' et \varkappa

L'essentiel de ce qui nous intéresse dans le comportement de $I'' =_{def} \lambda u \lambda y.\varepsilon z'.uz' \dot{\sim} y$ est donné par le résultat suivant :

Lemme 205 $\vdash \phi u, \phi z \longrightarrow u(I''\ u\ (uz)) \dot{\sim} uz$

²Remarquons que la démonstration “conversationnelle” donnée par K. Grue en [1] comporte une erreur, ce qui justifie d'autant plus le soin apporté à notre preuve.

Preuve.

1. *hyp* $\phi u = \phi z = T$
2. *MP(1; MT-App)* $\phi(uz = T)$
3. *Méta(Réfl \sim_ϕ)* $uz \sim uz = T$
4. *Exhib(1, 3)* $\dot{\exists} z'. (uz' \sim uz) = T$
Soit : $z_0 =_{def} \varepsilon z'. (uz' \sim uz) = I'' u(uz)$
5. *ChoiX(4)* $\phi z_0 = uz_0 \sim uz = T$
6. *Trivial(5)* $u(I'' u(uz)) \sim uz = T$

■

Le lemme suivant exprime une compatibilité forte de I'' avec \sim :

Lemme 206 $\vdash \phi u, \phi v, \phi v', uv \sim uv' \longrightarrow (I'' u(uv)) = (I'' u(uv'))$

Preuve. Il est facile de vérifier que l'on a :

$$\vdash \phi u, \phi v, \phi v', uv \sim uv', \phi z' \longrightarrow (uz' \sim uv) \dot{\leftrightarrow} (uz' \sim uv')$$

Et donc par *Ackermann* :

$$\vdash \phi u, \phi v, \phi v', uv \sim uv' \longrightarrow \varepsilon z'. (uz \sim uv) = \varepsilon z'. (uz' \sim uv')$$

Le résultat suit alors trivialement.

■

Nous allons bientôt voir deux lemmes concernant les rapports entre I'' et \varkappa , mais avant nous montrons que \varkappa est une ϕ -structure :

Lemme 207 $\vdash \phi u, \phi y \longrightarrow \phi \varkappa$

Preuve. Par le Théorème de Construction, il nous suffit de montrer que \varkappa est un terme simple pour $u, y \in X$. Pour cela, on remarque tout d'abord que par le corollaire *ChoiX'* (Corollaire 138) on a $\vdash \phi u, \phi y \longrightarrow \phi \varepsilon z. (uz \dot{\in} y)$. Le terme $\lambda u \lambda y. \varepsilon z. (uz \dot{\in} y)$ est donc un ϕ -constructeur d'arité 2. Comme, de plus, $\dot{\in}$ et I'' sont aussi des ϕ -constructeurs d'arité 2 (Corollaire 136 et Lemme 144), il vient :

$$\begin{array}{ll}
 u, y & u, y \in X \\
 \varepsilon z'. (uz' \dot{\in} y) & C[\overline{\Sigma}/\overline{z}] \\
 u(\nu T) & (\Sigma(\nu \Sigma)) \\
 \varepsilon z'. (uz' \sim u(\nu F)) & C[\overline{\Sigma}/\overline{z}] \\
 (I'' u u(\nu F)) & \Sigma^{MT} \\
 u(\nu T) \dot{\in} y & C[\overline{\Sigma}/\overline{z}] \\
 (if\ u(\nu F) \dot{\in} y\ (I'' u u(\nu F))\ \varepsilon z'. (uz' \dot{\in} y)) & (P\Sigma\Sigma\ \Sigma) \\
 \lambda z. (if\ u(P\nu z F) \dot{\in} y\ (I'' u u(P\nu z F))\ \varepsilon z'. (uz' \dot{\in} y)) & \lambda z. \Sigma[P\nu z/\nu] \\
 \lambda z. (if\ (uz) \dot{\in} y\ (I'' u(uz))\ \varepsilon z'. (uz' \dot{\in} y)) & \Sigma^{MT}
 \end{array}$$

■

Corollaire 208 $\vdash \phi u, \phi y \longrightarrow \phi(\text{Parties}(u)\ \varkappa)$

Preuve. Immédiat par *Parties* (Théorème 145) et *MT-App*. ■

Lemme 209 :

$$1) \vdash uz \dot{\in} y \longrightarrow \varkappa z = (I'' u (uz))$$

$$2) \vdash \dot{\neg}(uz \dot{\in} y) \longrightarrow \varkappa z = \varepsilon z'.(uz' \dot{\in} y)$$

Preuve. Le 1 est trivial. Le 2 est, à une β -réduction près, une instance de la tautologie $\dot{\neg}x \longrightarrow (if\ x\ y\ z) = z$. ■

Lemme 210 $\vdash \phi u, \phi y, \phi z \longrightarrow (\varkappa z) = (\varkappa(I'' u (uz)))$

Preuve.

- | | |
|--|--|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi u = \phi y = \phi z = T$ |
| 2. <i>MP</i> (1; <i>MT-App</i>) | $\phi(uz) = T$ |
| 3. <i>MP</i> (1, 3; <i>Lem144</i>) | $\phi(I'' u (uz)) = T$ |
| 4. <i>MP</i> (1; <i>Lem205</i>) | $u(I'' u (uz)) \dot{\sim} uz = T$ |
| 5. <i>Méta</i> (<i>Substit</i>)(1, 3, 4) | $u(I'' u (uz)) \dot{\in} y = uz \dot{\in} y$ |
| 6. <i>Méta</i> (<i>Lem206</i>)(1, 3, 4) | $(I'' u u(I'' u (uz))) = I'' u (uz)$ |
| 7. <i>hyp</i> + | $uz \dot{\in} y = T$ |
| 8. <i>Trivial</i> (7, 5) | $u(I'' u (uz)) \dot{\in} y = T$ |
| 9. <i>MP</i> (7; <i>Lem209.1</i>) | $\varkappa z = (I'' u (uz))$ |
| 10. <i>Méta</i> (<i>Lem209.1</i>)(8) | $\varkappa(I'' u (uz)) = (I'' u u(I'' u (uz)))$ |
| 11. <i>Trivial</i> (6, 9, 10) | $\varkappa z = \varkappa(I'' u (uz))$ |
| 12. <i>Déduct</i> -(7, 11) | $uz \dot{\in} y \longrightarrow \varkappa z = \varkappa(I'' u (uz))$ |
| 13. <i>hyp</i> + | $\dot{\neg}(uz \dot{\in} y) = T$ |
| 14. <i>Trivial</i> (13, 5) | $\dot{\neg}(u(I'' u (uz)) \dot{\in} y) = T$ |
| 15. <i>MP</i> (13; <i>Lem209.2</i>) | $\varkappa z = \varepsilon z'.uz' \dot{\in} y$ |
| 16. <i>Méta</i> (<i>Lem209.2</i>)(14) | $\varkappa(I'' u (uz)) = \varepsilon z'.uz' \dot{\in} y$ |
| 17. <i>Trivial</i> (15, 16) | $\varkappa z = \varkappa(I'' u (uz))$ |
| 18. <i>Déduct</i> -(13, 17) | $\dot{\neg}(uz \dot{\in} y) \longrightarrow \varkappa z = \varkappa(I'' u (uz))$ |
| 19. <i>TND</i> (12, 18) | $\varkappa z = \varkappa(I'' u (uz))$ |

■

Corollaire 211 $\vdash \phi u, \phi y, \phi z, uz \dot{\in} y \longrightarrow u(\varkappa(I'' u (uz))) \dot{\sim} uz$

Preuve.

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi u = \phi y = \phi z = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $uz \dot{\in} y = T$ |
| 3. <i>MP</i> (1; <i>Lem210</i>) | $\varkappa(I'' u (uz)) = \varkappa z$ |
| 4. <i>MP</i> (2; <i>Lem209.1</i>) | $\varkappa z = (I'' u (uz))$ |
| 5. <i>Trivial</i> (3, 4) | $u(\varkappa(I'' u (uz))) = u(I'' u (uz))$ |
| 6. <i>MP</i> (1; <i>Lem205</i>) | $u(I'' u (uz)) \dot{\sim} uz = T$ |
| 7. <i>Trivial</i> (5, 6) | $u(\varkappa(I'' u (uz))) \dot{\sim} uz$ |

■

On établit maintenant un dernier lemme utile :

Lemme 212 Soit $z_1 =_{def} \varepsilon z'.(uz' \dot{\in} y)$, on a :

$$\begin{aligned} \vdash \phi u, \phi y, \dot{\neg} y, y \dot{\subseteq} u &\longrightarrow \phi z_1 \\ \vdash \phi u, \phi y, \dot{\neg} y, y \dot{\subseteq} u &\longrightarrow uz_1 \dot{\in} y \end{aligned}$$

Preuve.

1. *hyp* $\phi u = \phi y = T$
2. *hyp* $\dot{\neg} y = T$
3. *hyp* $\forall v.(v \dot{\in} y \Rightarrow v \dot{\in} u) = T$
4. *NonVide.2(2) + MT-T* $yT \dot{\in} y = T$
5. *Méta(MT-App)(1, MT-T)* $\phi(yT) = T$
6. *MP \Rightarrow (4, Inst $\dot{\vee}$ (5, 3))* $yT \dot{\in} u = T$
- Soit : $z_0 =_{def} \varepsilon z.(uz \dot{\sim} yT)$
7. *NonVide.1(6)* $\phi z_0 = uz_0 \dot{\sim} yT = T$
8. *Méta(Substit)(5, 7, 6)* $uz_0 \dot{\in} y = T$
9. *Exhib(7, 8)* $\dot{\exists} z'.(uz' \dot{\in} y) = T$
10. *ChoiX(9)* $\phi z_1 = uz_1 \dot{\in} y = T$

■

Déduction de l'axiome des parties dans MTA

Nous abordons maintenant la démonstration proprement dite de l'axiome des parties dans MTA. Pour cela on utilisera librement l'égalité $y \dot{\in} Parties(u) =_{MT} \dot{\exists} x.((Parties(u) x) \dot{\sim} y)$ qui découle de la Remarque 162. On montre tout d'abord que "l'ensemble vide" est un "élément" de $Parties(u)$:

Lemme 213 $\vdash \phi u, y \longrightarrow y \dot{\in} Parties(u)$

Preuve.

1. *hyp* $\phi u = T$
2. *hyp* $y = T$
3. *Trivial(2)* $(Parties(u) T) = (Parties(u) y) = T = y$
4. *Méta(Réfl $\dot{\sim}$)(3)* $y \dot{\sim} y = T$
5. *Trivial(4, 3)* $(Parties(u) y) \dot{\sim} y = T$
6. *Exhib(2, 5)* $\dot{\exists} x.((Parties(u) x) \dot{\sim} y) = T$

■

On donne maintenant le lemme central de cette section. Il exprime que y "non-vidé" et "inclus" dans u , a les mêmes "éléments" que $(Parties(u) \varkappa)$. Par extensionnalité, on en tirera comme corollaire que $(Parties(u) \varkappa) \dot{\sim} y = T$ et donc $y \dot{\in} Parties(u)$.

On remarque tout d'abord que par *Select2* on a $(Parties(u) \varkappa) =_{MT} \lambda z.u(\varkappa(I'' u (uz)))$. Nous utiliserons librement cette égalité par la suite.

Lemme 214 $\vdash \phi u, \phi y, \dot{\neg}y, y \dot{\subseteq} u, \phi x, x \dot{\in} y \longleftrightarrow x \dot{\in} (\text{Parties}(u) \varkappa)$

Preuve. On se donne l'abréviation $R =_{def} \lambda z. u(\varkappa(I'' u(uz)))$

\longrightarrow)

- | | |
|---|--|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi u = \phi y = \phi x = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $\forall x. (x \dot{\in} y \dot{\Rightarrow} x \dot{\in} u) = T$ |
| 3. <i>hyp</i> | $x \dot{\in} y = T$ |
| 4. $MP \dot{\Rightarrow} (4; Inst \dot{\vee} (1, 3))$ | $x \dot{\in} u = T$ |
| Soit : | $z_0 =_{def} \varepsilon z. uz \dot{\sim} x$ |
| 5. <i>NonVide.1(4)</i> | $\phi z_0 = uz_0 \dot{\sim} x = T$ |
| 6. <i>Méta(Substit)(1, 5, 3)</i> | $uz_0 \dot{\in} y = T$ |
| 7. <i>Méta(Cor211)(1, 6)</i> | $u(\varkappa(I'' u(uz_0))) \dot{\sim} uz_0 = T$ |
| 8. <i>Trivial(7)</i> | $(R z_0) \dot{\sim} uz_0 = T$ |
| 9. <i>Equiv \dot{\sim} (5, 8)</i> | $(R z_0) \dot{\sim} x = T$ |
| 10. $MP(1; Cor208)$ | $\phi R = T$ |
| 11. <i>Rem162</i> | $x \dot{\in} R = \dot{\exists} z. Rz \dot{\sim} x$ |
| 12. <i>Méta(DétZFCs)(1, 10)</i> | $!x \dot{\in} R = !\dot{\exists} z. Rz \dot{\sim} x = T$ |
| 13. <i>Exhib(5, 12, 9)</i> | $\dot{\exists} z. Rz \dot{\sim} x = x \dot{\in} R = T$ |

\longleftarrow) On raisonne par *TND*

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi u = \phi y = \phi x = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $\dot{\neg}y = y \dot{\subseteq} u = T$ |
| 4. <i>hyp</i> | $x \dot{\in} R = T$ |
| Soit : | $z_0 = \varepsilon z. Rz \dot{\sim} x$ |
| 5. <i>NonVide.1(4)</i> | $\phi z_0 = Rz_0 \dot{\sim} x = T$ |
| 6. <i>Méta(DétZFCs)(1, 5)</i> | $!(uz_0 \dot{\in} y) = T$ |
| 7. <i>hyp+</i> | $uz_0 \dot{\in} y = T$ |
| 8. <i>Méta(Cor211)(1, 5, 7)</i> | $u(\varkappa(I'' u(uz_0))) \dot{\sim} uz_0 = T$ |
| 9. <i>Trivial(8)</i> | $Rz_0 \dot{\sim} uz_0 = T$ |
| 10. <i>Equiv \dot{\sim} (5, 9)</i> | $x \dot{\sim} uz_0 = T$ |
| 11. <i>Méta(Substit)(1, 10, 7)</i> | $x \dot{\in} y = T$ |
| 12. <i>Déduct-(7, 11)</i> | $uz_0 \dot{\in} y \longrightarrow x \dot{\in} y$ |
| 13. <i>hyp+</i> | $\dot{\neg}(uz_0 \dot{\in} y) = T$ |
| Soit : | $z_1 =_{def} \varepsilon z. (uz \dot{\in} y)$ |
| 14. <i>Méta(Lem209.2)(13)</i> | $\varkappa z_0 = z_1$ |
| 15. $MP(1, 2; Lem212)$ | $\phi z_1 = uz_1 \dot{\in} y = T$ |
| 16. <i>Méta(Lem210)(1, 5) + 14</i> | $\varkappa(I'' u(uz_0)) = \varkappa z_0 = z_1$ |
| 17. <i>Trivial(16)</i> | $Rz_0 = u(\varkappa(I'' u(uz_0))) = uz_1$ |
| 18. <i>Trivial(5, 17)</i> | $uz_1 \dot{\sim} x = T$ |

19. *Méta(Substit)*(1, 18, 15) $x \dot{\in} y = T$
 20. *Déduct*-(13, 19) $\dot{\neg}(uz_0 \dot{\in} y) \longrightarrow x \dot{\in} y$
 21. *TND*(6, 12, 20) $x \dot{\in} y = T$

■

Corollaire 215 $\vdash \phi u, \phi y, \dot{\neg} y, y \dot{\subseteq} u \longrightarrow y \dot{\in} \text{Parties}(u)$

Preuve. Soit $R =_{def} \lambda z. u(\varkappa(I^n u(uz)))$

1. *hyp* $\phi u = \phi y = \dot{\neg} y = y \dot{\subseteq} u = T$
2. *MP*(1; *Lem*214) $\phi x, x \dot{\in} y \longrightarrow x \dot{\in} R$
3. *ImplicNonM→M* $\phi x \longrightarrow (x \dot{\in} y \dot{\Rightarrow} x \dot{\in} R)$
4. *Géné*(3) $y \dot{\subseteq} R = T$
5. *Réciproquement* $R \dot{\subseteq} y = T$
6. *Méta(LoiLg2)*(4, 5) $y \dot{\subseteq} R \wedge R \dot{\subseteq} y = T$
7. *MP*(1; *Lem*207 + *Cor*208) $\phi \varkappa = \phi R = T$
8. *Inst* $\dot{\forall}$ (1, 7, *Thm*173) $(y \dot{\subseteq} R \wedge R \dot{\subseteq} y) \dot{\Rightarrow} R \dot{\sim} y = T$
9. *MP* $\dot{\Rightarrow}$ (6, 8) + *Trivial* $(\text{Parties}(u) \varkappa) \dot{\sim} y = T$
10. *Exhib*(7, 9) + *Rem*162 $\dot{\exists} x. (\text{Parties}(u) x) \dot{\sim} y = y \dot{\in} \text{Parties}(u) = T$

■

La “satisfaction” de l’axiome de l’ensemble des parties est maintenant une conséquence facile du lemme précédent :

Théorème 216 $\vdash \dot{\forall} u \dot{\exists} z \dot{\forall} y (y \dot{\subseteq} u \dot{\Rightarrow} y \dot{\in} z) = T$

Preuve. En raisonnant par *TND* à partir du Lemme 213 et du corollaire précédent, on obtient $\vdash \phi u, \phi y, y \dot{\subseteq} u \longrightarrow y \dot{\in} \text{Parties}(u)$. Le théorème suit alors facilement en utilisant *Exhib* et *Géné*. ■

2.5.9 L’axiome de remplacement

Dans cette section, nous montrons que *MTA* vérifie le schéma d’axiomes de remplacement. Autrement dit, nous montrons que, pour toute formule $G[y, x, \bar{x}]$ de *ZFC* :

$$\vdash \dot{\forall} \bar{x} \dot{\forall} u \dot{\exists} z \dot{\forall} y. (y \dot{\in} u \wedge \dot{\exists} x. \dot{G} \dot{\Rightarrow} \dot{\exists} x. (x \dot{\in} z \wedge \dot{G})) = T$$

où z est non libre dans \dot{G} .

On fixe tout d’abord une formule $G[y, x, \bar{x}]$ de *ZFC* et on montrera le théorème pour cette formule.

Comme pour les autres axiomes de *ZFC*^{-e}, la démonstration passe par l’exhibition d’un terme qui “vérifie” (la traduction de) la formule contenue dans l’axiome. Ce terme est la ϕ -structure *Remplacement* $\dot{G}, y, x(u)$, qu’on abrégera par R_u^G . On va donc montrer que :

$$\vdash \phi \bar{x}, \phi u \longrightarrow \dot{\forall} y. (y \dot{\in} u \wedge \dot{\exists} x. \dot{G} \dot{\Rightarrow} \dot{\exists} x. (x \dot{\in} R_u^G \wedge \dot{G}))$$

Rappelons-que $R_u^G =_{def} \lambda z.(\varepsilon x.\dot{G}[uz/y])$ pour $z \notin \bar{x}$.

Le théorème de remplacement sera une conséquence du lemme suivant :

Lemme 217 $\vdash \phi\bar{x}, \phi u, \phi y, y \in u, \exists x.\dot{G} \longrightarrow \exists x.(x \in R_u^G \wedge \dot{G})$

Preuve.

1. *hyp* $\phi\bar{x} = \phi u = \phi y = T$
2. *hyp* $y \in u = T$
3. *hyp* $\exists x.\dot{G} = T$
- Soit : $z_0 =_{def} \varepsilon z.uz \sim y$
4. *NonVide*.1(2) $\phi z_0 = uz_0 \sim y = T$
- Soient : $x_0 =_{def} \varepsilon x.\dot{G}; x_1 =_{def} \varepsilon x.\dot{G}[uz_0/y]$
5. *Méta*(*Cor*183)(1, 4) $x_0 = \varepsilon x.\dot{G} = \varepsilon x.\dot{G}[uz_0/y] = x_1$
6. *Choix*(3) $\phi x_0 = \dot{G}[x_0/x] = T$
7. *Trivial*(5, 6) $\phi x_1 = \dot{G}[x_1/x] = T$
8. *Trivial* $(R_u^G z_0) = x_1$
9. *NonVide*_s(1, 4) $(R_u^G z_0) \in R_u^G = T$
10. *Trivial*(8, 9) $x_1 \in R_u^G = T$
11. *Méta*(*LoiLg*2)(7, 10) $x_1 \in R_u^G \wedge \dot{G}[x_1/x] = T$
12. *Exhib*(7, 11) $\exists x.(x \in R_u^G \wedge \dot{G})$

■

Théorème 218 $\vdash \forall \bar{x} \forall u \exists z \forall y.(y \in u \wedge \exists x.\dot{G} \Rightarrow \exists x.(x \in z \wedge \dot{G})) = T$

Preuve.

1. *hyp* $\phi\bar{x} = \phi u = T$
2. *hyp*+ $\phi y = T$
3. *MP*(1; *Lem*217) $\phi y, y \in u, \exists x.\dot{G} \longrightarrow \exists x.(x \in R_u^G \wedge \dot{G})$
4. *Implic*_{NonM→M}(3) $(y \in u \wedge \exists x.\dot{G} \Rightarrow \exists x.(x \in R_u^G \wedge \dot{G}))$
5. *Deduct*-(2, 4) + *Géné* $\forall y.(y \in u \wedge \exists x.\dot{G} \Rightarrow \exists x.(x \in R_u^G \wedge \dot{G}))$
6. *MP*(1; *Remplacement*) $\phi R_u^G = T$
7. *Exhib*(6, 5) $\exists z \forall y.(y \in u \wedge \exists x.\dot{G} \Rightarrow \exists x.(x \in z \wedge \dot{G}))$

■

2.5.10 L'axiome du choix

Dans cette section, nous montrons que MTA vérifie l'axiome du choix. Autrement dit, nous montrons que :

$$\vdash \forall u \left(\forall x.(x \in u \Rightarrow \exists v.v \in x) \wedge \forall x \forall y \forall v.(x \in u \wedge y \in u \wedge v \in x \wedge v \in y \Rightarrow x \sim y) \right) \\ \Rightarrow \exists z. \left(\forall x.(x \in u \Rightarrow \exists v.(v \in x \wedge v \in z)) \wedge \forall x \forall w \forall w'.(x \in u \wedge w \in x \wedge w' \in x \wedge w \in z \wedge w' \in z \Rightarrow w \sim w') \right))$$

La démonstration de ce théorème, bien que relativement simple en elle-même, va nous imposer la manipulation de termes longs et complexes. Pour réduire ces manipulations nous allons élargir la convention **hyp** par l'utilisation d'hypothèses globales, du niveau de la section. En effet, jusqu'à présent, nous n'avions utilisé des hypothèses de déduction locales, à l'intérieur de démonstrations. Ces hypothèses étaient réintégrées dans l'énoncé final du théorème par l'utilisation de *Deduct* ou *Deduct-*. Ici, nous posons une suite de 3 hypothèses \overline{H} de la forme $\overline{A} = \overline{T}$ en début de section. S'en suivra un ensemble de résultats qui seront des théorèmes de $MTA(\overline{A}; \overline{A})$. A chacun de ces théorèmes $B = C$ correspond donc un théorème de MTA de la forme $\overline{A} \rightarrow B = C$, mais qui ne sera pas énoncé. Les hypothèses externes \overline{A} ne seront réintégrées que dans l'énoncé du théorème final.

Les 3 hypothèses dont nous allons nous servir sont les suivantes :

$$H1 : \phi u = T$$

$$H2 : \dot{\forall}x.(x \dot{\in} u \dot{\Rightarrow} \dot{\exists}v.(v \dot{\in} x)) = T$$

$$H3 : \dot{\forall}x \dot{\forall}y \dot{\forall}v.(x \dot{\in} u \dot{\wedge} y \dot{\in} u \dot{\wedge} v \dot{\in} x \dot{\wedge} v \dot{\in} y \dot{\Rightarrow} x \dot{\sim} y) = T$$

Nous allons maintenant exhiber un terme qui "vérifie" (la traduction de) la formule contenue dans l'axiome du choix. Ce terme est, bien sûr, la ϕ -structure $Choi(x(u) =_{def} \lambda z. \varepsilon v. v \dot{\in} (uz))$, qui sera abrégée par C_u , et nous allons donc montrer que :

$$\vdash \dot{\forall}x.(x \dot{\in} u \dot{\Rightarrow} \dot{\exists}v.(v \dot{\in} x \dot{\wedge} v \dot{\in} C_u)) \dot{\wedge} \\ \dot{\forall}x \dot{\forall}w \dot{\forall}w'.(x \dot{\in} u \dot{\wedge} w \dot{\in} x \dot{\wedge} w' \dot{\in} x \dot{\wedge} w \dot{\in} C_u \dot{\wedge} w' \dot{\in} C_u \dot{\Rightarrow} w \dot{\sim} w')$$

Par la *LoiLg2*, il suffit pour cela de montrer séparément :

- (1) $\vdash \dot{\forall}x.(x \dot{\in} u \dot{\Rightarrow} \dot{\exists}v.(v \dot{\in} x \dot{\wedge} v \dot{\in} C_u))$
- (2) $\vdash \dot{\forall}x \dot{\forall}w \dot{\forall}w'.(x \dot{\in} u \dot{\wedge} w \dot{\in} x \dot{\wedge} w' \dot{\in} x \dot{\wedge} w \dot{\in} C_u \dot{\wedge} w' \dot{\in} C_u \dot{\Rightarrow} w \dot{\sim} w')$

On commence par un lemme exprimant une conséquence facile de l'hypothèse $H2$:

Lemme 219 *Soit $v_0 =_{def} \varepsilon v.(v \dot{\in} uz)$ on a :*

$$\vdash_{\overline{H}} \phi z, (uz) \dot{\in} u \rightarrow \phi v_0 = v_0 \dot{\in} (uz) = T.$$

Preuve.

1. *hyp* $\phi z = T$
2. *hyp* $uz \dot{\in} u = T$
3. *MP*($H1, 1$; *MT-App*) $\phi uz = T$
4. *Inst $\dot{\forall}$* (3, $H2$) $uz \dot{\in} u \dot{\Rightarrow} \dot{\exists}v.(v \dot{\in} uz) = T$
5. *MP $\dot{\Rightarrow}$* (2, 4) $\dot{\exists}v.(v \dot{\in} uz) = T$
Soit : $v_0 =_{def} \varepsilon v.(v \dot{\in} uz_0)$
6. *Choi*(5) $\phi v_0 = v_0 \dot{\in} uz_0 = T$

■

Le (1) est l'objet du lemme suivant :

Lemme 220 $\vdash_{\overline{H}} \dot{\forall}x.(x \dot{\in} u \Rightarrow \dot{\exists}v.(v \dot{\in} x \wedge v \dot{\in} C_u)) = T$

Preuve.

1. *hyp* $\phi x = T$
2. *hyp* $x \dot{\in} u = T$
Soit : $z_0 =_{def} \varepsilon z.uz \dot{\sim} x$
3. *NonVide.1(2)* $\phi z_0 = uz_0 \dot{\sim} x = T$
4. *Méta(Substit)(H1, 1, 3, 2)* $uz_0 \dot{\in} u = T$
Soit : $v_0 =_{def} \varepsilon v.(v \dot{\in} uz_0)$
5. *Trivial* $(C_u z_0) = v_0$
6. *Méta(Lem219)(3, 4)* $\phi v_0 = v_0 \dot{\in} uz_0 = T$
7. *Méta(Substit)(1, 3, 6)* $v_0 \dot{\in} x = T$
8. *Méta(NonVide_s)(3) + 5* $(C_u z_0) \dot{\in} C_u = v_0 \dot{\in} C_u = T$
9. *Méta(LoiLg2)(7, 8)* $v_0 \dot{\in} x \wedge v_0 \dot{\in} C_u = T$
10. *Exhib(6, 9)* $\dot{\exists}v.(v \dot{\in} x \wedge v \dot{\in} C_u) = T$
11. *Déduct(1, 2, 10)* $\phi x, x \dot{\in} u \longrightarrow \dot{\exists}v.(v \dot{\in} x \wedge v \dot{\in} C_u)$
12. *Implic_{NonM \rightarrow M}(11) + Gén* $\vdash \dot{\forall}x.(x \dot{\in} u \Rightarrow \dot{\exists}v.(v \dot{\in} x \wedge v \dot{\in} C_u))$

■

Le (2) est l'objet du lemme suivant :

Lemme 221 :

$\vdash_{\overline{H}} \dot{\forall}x \dot{\forall}w \dot{\forall}w'.(x \dot{\in} u \wedge w \dot{\in} x \wedge w' \dot{\in} x \wedge w \dot{\in} C_u \wedge w' \dot{\in} C_u \Rightarrow w \dot{\sim} w') = T$

Preuve. Le lemme suit par *Implic_{NonM \rightarrow M}* et *Géné* du théorème :

$\vdash \phi x, \phi w, \phi w', x \dot{\in} u, w \dot{\in} x, w' \dot{\in} x, w \dot{\in} C_u, w' \dot{\in} C_u \longrightarrow w \dot{\sim} w'$

que nous montrons :

1. *hyp* $\phi x = \phi w = \phi w' = T$
2. *hyp* $x \dot{\in} u = T$
3. *hyp* $w \dot{\in} x = w' \dot{\in} x = T$
4. *hyp* $w \dot{\in} C_u = w' \dot{\in} C_u = T$
Soient : $z_0 = \varepsilon z.C_u z \dot{\sim} w \quad z_1 =_{def} \varepsilon z.C_u z \dot{\sim} w'$
5. *NonVide.1(3)* $\phi z_0 = \phi z_1 = C_u z_0 \dot{\sim} w = C_u z_1 \dot{\sim} w' = T$
6. *Méta(MT-App)(H1, 5)* $\phi(uz_0) = \phi(uz_1) = T$
7. *NonVide.1(2)* $\dot{\neg}u = T$
8. *NonVide.2(7, H1, 5)* $uz_0 \dot{\in} u = uz_1 \dot{\in} u = T$
Soient : $v_0 =_{def} \varepsilon v.(v \dot{\in} uz_0) \quad v_1 =_{def} \varepsilon v.(v \dot{\in} uz_1)$
9. *Trivial* $C_u z_0 = v_0 \quad C_u z_1 = v_1$
10. *Méta(Lem219)(5, 8)* $\phi v_0 = \phi v_1 = v_0 \dot{\in} uz_0 = v_1 \dot{\in} uz_1 = T$
11. *Trivial(5, 9)* $v_0 \dot{\sim} w = v_1 \dot{\sim} w' = T$
12. *Méta(Substit)(1, 6, 11, 10)* $w \dot{\in} uz_0 = w' \dot{\in} uz_1 = T$

- | | |
|---|---|
| 13. <i>Méta(LoiLg2)(2, 8, 3, 12)</i> | $(x \dot{\in} u \dot{\wedge} u z_0 \dot{\in} u \dot{\wedge} w \dot{\in} x \dot{\wedge} w \dot{\in} u z_0) = T$ |
| 14. <i>Méta(LoiLg2)(2, 8, 3, 12)</i> | $(x \dot{\in} u \dot{\wedge} u z_1 \dot{\in} u \dot{\wedge} w' \dot{\in} x \dot{\wedge} w' \dot{\in} u z_1) = T$ |
| 15. <i>Inst$\dot{\vee}$(1, 6, H3)</i> | $(x \dot{\in} u \dot{\wedge} u z_0 \dot{\in} u \dot{\wedge} w \dot{\in} x \dot{\wedge} w \dot{\in} u z_0 \Rightarrow x \dot{\sim} u z_0) = T$ |
| 16. <i>Inst$\dot{\vee}$(1, 6, H3)</i> | $(x \dot{\in} u \dot{\wedge} u z_1 \dot{\in} u \dot{\wedge} w' \dot{\in} x \dot{\wedge} w' \dot{\in} u z_1 \Rightarrow x \dot{\sim} u z_1) = T$ |
| 17. <i>MP$\dot{\Rightarrow}$(13+14, 15+16)</i> | $x \dot{\sim} u z_0 = x \dot{\sim} u z_1 = T$ |
| 18. <i>Equiv$\dot{\sim}$(17)</i> | $u z_0 \dot{\sim} u z_1 = T$ |
| 19. <i>Méta(Cor183)(6, 18)</i> | $v_0 = \varepsilon v. (v \dot{\in} u z_0) = \varepsilon v. (v \dot{\in} u z_1) = v_1$ |
| 20. <i>Trivial(11, 19)</i> | $v_0 \dot{\sim} w = v_0 \dot{\sim} w' = T$ |
| 21. <i>Equiv$\dot{\sim}$(20)</i> | $w \dot{\sim} w' = T$ ■ |

Corollaire 222 :

$$\vdash_{\overline{H}} \dot{\exists} z \left(\dot{\forall} x. (x \dot{\in} u \Rightarrow \dot{\exists} v. (v \dot{\in} x \dot{\wedge} v \dot{\in} z)) \dot{\wedge} \right. \\ \left. \dot{\forall} x \dot{\forall} w \dot{\forall} w'. (x \dot{\in} u \dot{\wedge} w \dot{\in} x \dot{\wedge} w' \dot{\in} x \dot{\wedge} w \dot{\in} z \dot{\wedge} w' \dot{\in} z \Rightarrow w \dot{\sim} w') \right)$$

Preuve. Suit par *Exhib* et *LoiLg2* des Lemmes *Choix*, 220 et 221. ■

Théorème 223 *La traduction de l'axiome du choix est prouvable dans MTA.*

Preuve. Suit par *Déduction* du corollaire précédent en utilisant *Implic $_{NonM \rightarrow M}$* et *Géné.* ■

2.6 Les métathéorèmes de la “théorie des ensembles”.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème fondamental de ce chapitre. Il sera suivi de 2 de ses corollaires :

Théorème 224 (*ThmZFC*) *Pour tout théorème $G[\overline{y}]$ de ZFC on a :*

$$\vdash \phi \overline{y} \longrightarrow \dot{G}$$

Preuve. Par *DétZFCs* l'interprétation θ (Cf Définition 110) force la détermination du langage de *ZFC*. Par les Théorèmes 173, 190, 193, 195, 199, 203, 216, 218 et 223, les axiomes de *ZFC* sont tous θ -valides. Le résultat est donc une application du Théorème 99. ■

On élargit maintenant facilement *ThmZFC* aux *ZFC*-termes avec ϕ -structures en utilisant *Méta* :

Corollaire 225 (*ThmZFCs*) *Soit $G[\overline{y}, \overline{x}]$ un théorème de ZFC. Soit $\overline{t}[\overline{z}]$ une suite de ϕ -structures, on a : $\vdash \phi \overline{y}, \phi \overline{z} \longrightarrow \dot{G}[\overline{t}/\overline{x}]$*

Nous utiliserons régulièrement *ThmZFC* et *ThmZFCs* dans le chapitre suivant. Une telle utilisation suppose la démonstration du fait que la formule G est un théorème de *ZFC*. Dans la pratique, G étant toujours un théorème clairement évident, cette démonstration sera sous-entendue.

Le deuxième corollaire de *ThmZFC* nécessite l'introduction de deux notions, la première étant classique en théorie des ensembles, la deuxième étant propre à *MTFA* :

Définition 226 Soit $G[\bar{x}; z]$ une formule de *ZFC*. On dira que G est fonctionnelle en \bar{x} si :

$$\vdash_{ZFC} G[\bar{x}; z] \wedge G[\bar{x}; z'] \Rightarrow z = z'$$

qu'elle est totale si de plus :

$$\vdash_{ZFC} \forall \bar{x} \exists z G[\bar{x}; z]$$

qu'elle est injective si de plus :

$$\vdash_{ZFC} G[\bar{x}; z] \wedge G[\bar{x}'; z] \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}'$$

Par abus de langage on parlera de “la fonctionnelle G ” pour abrégier “la relation fonctionnelle G ”.

Définition 227 Soit $G[\bar{x}; z]$ une fonctionnelle totale en \bar{x} . On dira que le terme $t[\bar{y}]$ calcule G (dans *MTFA*) si :

$$1) \vdash \phi\bar{y}, \phi\bar{x} \longrightarrow \phi(t\bar{x})$$

$$2) \vdash \phi\bar{y}, \phi\bar{x} \longrightarrow G[(t\bar{x})/z]$$

Remarque 228 Toute fonctionnelle totale $G[\bar{x}; z]$ est calculable par le terme $t =_{def} \lambda \bar{x}. \varepsilon z. \dot{G}$. En effet, si G est totale, on a par *ThmZFC* que

$$\vdash \phi\bar{x} \longrightarrow \exists z \dot{G}, \text{ et donc par } \text{Choi}x :$$

$$1) \vdash \phi\bar{x} \longrightarrow \phi \varepsilon z. \dot{G}$$

$$2) \vdash \phi\bar{x} \longrightarrow \dot{G}[\varepsilon z. \dot{G}/z]$$

Cependant, les termes de la forme $\lambda \bar{x}. \varepsilon z. \dot{G}$ sont en général complexes et peu intéressants, en particulier pour le calcul. La plupart du temps *MTFA* nous permet d'en produire de plus simples. L'un des exemples le plus simple est celui du ϕ -constructeur P , dont nous montrerons en Section 3.2.2 qu'il calcule $Pr[x, y; z]$, la relation fonctionnelle en x, y qui exprime que $z = \{x, y\}$.

La proposition suivante serait vraie pour *MTF* (avec \doteq à la place de \sim). Nous n'en donnons ici que la démonstration dans *MTA* :

Proposition 229 Si $G[\bar{x}; z]$ est fonctionnelle totale en \bar{x} et si $t[\bar{y}]$ calcule G dans *MTA* alors :

$$1) \vdash \phi\bar{x}, \phi z, \phi z' \longrightarrow \dot{G}[\bar{x}; z] \wedge \dot{G}[\bar{x}; z'] \doteq z \sim z'$$

$$2) \vdash \phi\bar{y}, \phi\bar{x}, \phi z \longrightarrow \dot{G}[\bar{x}; z] \doteq z \sim (t\bar{x})$$

$$3) \vdash \phi\bar{y}, \phi\bar{x}, \phi\bar{x}', \bar{x} \sim \bar{x}' \longrightarrow (t\bar{x}) \sim (t\bar{x}')$$

Et si G est injective :

$$4) \vdash \phi\bar{x}, \phi\bar{x}', \bar{x} \sim \bar{x}' \longleftrightarrow (t\bar{x}) \sim (t\bar{x}')$$

Preuve. Le point 1 est une conséquence immédiate de *ThmZFC*.

Supposons que (*) t calcule G :

Point 2 :

1. *hyp* $\phi\bar{y} = \phi\bar{x} = \phi z = T$
2. *MP*(1; (*)) $\phi(t\bar{x}) = T$
3. *MP*(1; (*)) $\dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x})] = T$
4. *hyp+* $\dot{G}[\bar{x}; z] = T$
5. *Méta*(*LoiLg2*)(2, 3) $\dot{G}[\bar{x}; z] \wedge \dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x})] = T$
6. *MP* \Rightarrow (5; Point 1) $z \sim (t\bar{x}) = T$
7. *Déduct*-(4, 6) $\dot{G}[\bar{x}; z] \longrightarrow z \sim (t\bar{x})$
8. *hyp+* $z \sim (t\bar{x}) = T$
9. *MP*(1, 8; *Substit*) + 3 $\dot{G}[\bar{x}; z] = \dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x})] = T$
10. *Déduct*-(8, 9) $z \sim (t\bar{x}) \longrightarrow \dot{G}[\bar{x}; z]$
11. *Equiv* $_{NonM \rightarrow M}$ (7, 9) $\dot{G}[\bar{x}; z] \Leftrightarrow z \sim (t\bar{x}) = T$

On montre en même temps les points 3 et 4. On supposera simplement à partir de la ligne 15 que G est injective, et donc par *ThmZFC* que :

(**) $\vdash \phi\bar{y}, \phi\bar{x}, \phi\bar{x}' \longrightarrow (\dot{G}[\bar{x}; z] \wedge \dot{G}[\bar{x}'; z] \Rightarrow \bar{x} \sim \bar{x}')$

1. *hyp* $\phi\bar{y} = \phi\bar{x} = \phi\bar{x}' = T$
2. *MP*(1; (*)) $\phi(t\bar{x}) = \phi(t\bar{x}') = T$
3. *MP*(1; (*)) $\dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x})] = \dot{G}[\bar{x}'; (t\bar{x}')] = T$
4. *hyp+* $\bar{x} \sim \bar{x}' = T$
5. *Méta*(2, 1, 4; *Substit*) $\dot{G}[\bar{x}'; (t\bar{x}')] = \dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x}')] = T$
6. *Trivial*(3, 5) $\dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x})] = \dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x}')] = T$
7. *Méta*(*LoiLg2*)(6) $\dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x})] \wedge \dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x}')] = T$
8. *Méta*(1, 2; Point 1) $((\dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x})] \wedge \dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x}')] \Rightarrow (t\bar{x}) \sim (t\bar{x}')) = T$
9. *MP* \Rightarrow (7, 8) $(t\bar{x}) \sim (t\bar{x}') = T$
10. *Déduct*-(4, 9) $\bar{x} \sim \bar{x}' \longrightarrow (t\bar{x}) \sim (t\bar{x}')$
11. *hyp+* $(t\bar{x}) \sim (t\bar{x}') = T$
12. *Méta*(2; *Substit*) $\dot{G}[\bar{x}'; (t\bar{x}')] = \dot{G}[\bar{x}'; (t\bar{x})]$
13. *Trivial*(3, 12) $\dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x})] = \dot{G}[\bar{x}'; (t\bar{x})] = T$
14. *Méta*(*LoiLg2*)(13) $(\dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x})] \wedge \dot{G}[\bar{x}'; (t\bar{x})]) = T$
15. *Méta*((**))(2) $(\dot{G}[\bar{x}; (t\bar{x})] \wedge \dot{G}[\bar{x}'; (t\bar{x})] \Rightarrow \bar{x} \sim \bar{x}')$
16. *MP* \Rightarrow (14, 15) $\bar{x} \sim \bar{x}' = T$
17. *Déduct*-(4, 9) $(t\bar{x}) \sim (t\bar{x}') \longrightarrow \bar{x} \sim \bar{x}'$

■

Nous faisons pour la proposition précédente la même remarque que pour *ThmZFCs*. L'utilisation de cette proposition suppose la démonstration qu'une formule $G[\bar{x}, z]$ est fonctionnelle en \bar{x} et, éventuellement, qu'elle est injective. Cette démonstration sera généralement omise étant donné que

la fonctionnalité des formules employées ou leur injectivité sera toujours évidente.

Chapitre 3

Prouvabilité de $AF A$ dans MTA

3.1 Présentation de $AF A$

Rappelons qu'un graphe est un couple (\mathbf{a}, \mathbf{b}) d'ensembles tels que \mathbf{b} est une relation binaire sur \mathbf{a} (un ensemble de couples d'éléments de \mathbf{a}). Nous utiliserons la définition usuelle du couple en théorie des ensembles, à savoir : $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =_{def} \{\{\mathbf{a}\}, \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}\}$.

Nous rappelons tout d'abord de façon informelle l'axiome $AF A$, tel qu'il est donné dans [1] :

“Tout graphe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) admet une unique décoration, autrement dit il existe une unique fonction d telle que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{a}$, on ait : $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{d}(\mathbf{x}') : (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathbf{b}\}$ ”

Dans cet énoncé, le fait que les ensembles \mathbf{a} et \mathbf{b} soient réunis en un couple (\mathbf{a}, \mathbf{b}) est accessoire. De plus, l'existence d'une unique décoration dans le cas où $\mathbf{b} = \emptyset$ est une conséquence facile de ZF (on prend $\mathbf{d} = \emptyset$ pour le cas $\mathbf{a} = \emptyset$, et $\mathbf{d} = \{(\mathbf{x}, \emptyset) : \mathbf{x} \in \mathbf{a}\}$ pour le cas $\mathbf{a} \neq \emptyset$). L'axiome $AF A$ est donc équivalent modulo ZF à l'énoncé suivant :

“Pour tous ensembles \mathbf{a} et \mathbf{b} non-vides, si \mathbf{b} est une relation binaire sur \mathbf{a} alors il existe une unique fonction \mathbf{d} de domaine \mathbf{a} telle que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{a}$, on ait :

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{d}(\mathbf{x}') : (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathbf{b}\}”$$

C'est sous la forme de cet énoncé, plus simple à montrer dans MTA , que nous traiterons $AF A$. Nous en entreprenons maintenant l'écriture formelle. Pour cela nous commençons par introduire 4 abréviations pour les formules

ZFC qui explicitent les relations :

$\mathbf{z} = \{\mathbf{x}\}$, $\mathbf{z} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{z}$,

où $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sont des ensembles (la cinquième abrégant simplement une conjonction de ces formules) :

Notation 230 *Pour z, x, y des variables :*

1. $Sgl[x; z] =_{def} \forall v (v \in z \Leftrightarrow v = x)$
2. $Pr[x, y; z] =_{def} \forall v (v \in z \Leftrightarrow (v = x \vee v = y))$
3. $Cpl[x, y; z] =_{def} \forall w (w \in z \Leftrightarrow (Sgl[x; z] \vee Pr[x, y; z]))$
4. $CplIn[z; x, y] =_{def} \exists v (v \in z \wedge Cpl[x, y; v])$
5. $CplsIn[z; x, y \& z'; x', y'] =_{def} CplIn[z; x, y] \wedge CplIn[z'; x', y']$

Les 8 abréviations suivantes concernent les formules exprimant respectivement que, pour $\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ des ensembles :

1. \mathbf{d} est une relation binaire
2. \mathbf{d} est fonctionnelle
3. \mathbf{d} est une fonction
4. \mathbf{a} est le domaine de \mathbf{d} (vu comme une relation binaire)
5. \mathbf{d} est une fonction de domaine \mathbf{a}
6. Pour tout \mathbf{x} du domaine de \mathbf{d} on a $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{d}(\mathbf{x}') : (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathbf{d}\}$
7. \mathbf{d} est une décoration du “graphe” \mathbf{a}, \mathbf{b}
8. (\mathbf{a}, \mathbf{b}) est un graphe, autrement dit \mathbf{b} est une relation binaire sur \mathbf{a}

Notation 231 *Pour a, b et d des variables on définit :*

1. $Rel[d] =_{def} \forall z (z \in d \Rightarrow \exists x \exists y Cpl[x, y; z])$
2. $Fnl[d] =_{def} \forall x \forall y \forall y' (CplsIn[d; x, y \& d; x, y'] \Rightarrow y = y')$
3. $Fonct[d] =_{def} Rel[d] \wedge Fnl[d]$
4. $Dom[d, a] =_{def} \forall x. (x \in a \Leftrightarrow \exists y CplIn[d; x, y])$
5. $FnDm[d, a] =_{def} Fonct[d] \wedge Dom[d, a]$
6. $Dc[b, d] =_{def} \forall x \forall y (CplIn[d; x, y] \Rightarrow \forall y' (y' \in y \Leftrightarrow \exists x' CplsIn[b; x, x' \& d; x', y']))$
7. $Déco[a, b, d] =_{def} FnDm[a, d] \wedge Dc[b, d]$
8. $Graph[a, b] =_{def} \forall z (z \in b \Rightarrow \exists x \exists x' (x \in a \wedge x' \in a \wedge Cpl[x, x'; z]))$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer formellement l'axiome *AFA* :

$$(ZFC-AFA) \quad \forall a \forall b (\exists x (x \in a) \wedge \exists x (x \in b) \wedge Graph[a, b] \Rightarrow \exists d (Déco[a, b, d] \wedge \forall d' (Déco[a, b, d'] \Rightarrow d = d')))$$

Cet axiome est clairement équivalent à la conjonction des deux axiomes suivants, appelés respectivement $AFA1$ et $AFA2$ par P.Aczel. Le premier exprime l'aspect *existentiel* de AFA , "il existe une décoration", le deuxième exprime l'*unicité* de cette décoration :

$$(ZFC-AFA1) \quad \forall a \forall b (\exists x (x \in a) \wedge \exists x (x \in b) \wedge Graph[a, b] \Rightarrow \exists d. Déco[a, b, d])$$

$$(ZFC-AFA2) \quad \forall d \forall d' \forall a \forall b (\exists x (x \in a) \wedge \exists x (x \in b) \wedge Graph[a, b] \\ \wedge Déco[a, b, d] \wedge Déco[a, b, d'] \Rightarrow d = d')$$

Nous allons aborder maintenant les démonstrations dans MTA des traductions de $ZFC-AFA1$ et $ZFC-AFA2$, traductions que nous noterons respectivement $\dot{A}\dot{F}A1$ et $\dot{A}\dot{F}A2$:

$$\vdash \dot{\forall} a \dot{\forall} b. (\dot{\exists} x. (x \dot{\in} a) \wedge \dot{\exists} x. (x \dot{\in} b) \wedge \dot{G}raph[a, b] \Rightarrow \dot{\exists} d. \dot{D}éco[d, a, b])$$

$$\vdash \dot{\forall} d \dot{\forall} d' \dot{\forall} a \dot{\forall} b. (\dot{\exists} x (x \dot{\in} a) \wedge \dot{\exists} x (x \dot{\in} b) \wedge \dot{G}raph[a, b] \\ \wedge \dot{D}éco[d, a, b] \wedge \dot{D}éco[d', a, b] \Rightarrow d \sim d')$$

Pour ces deux démonstrations, nous procéderons comme suit :

1. Nous montrerons qu'il existe des représentations syntaxiques canoniques des *couples* et des *fonctions* dans MT .
2. Nous introduirons un ϕ -constructeur $Eval$ qui est une sorte d'opérateur d'évaluation : appliqué à une "fonction" d et un "élément" x de son domaine, il donne "l'image", notée $d\langle x \rangle$, de x par d .
3. Nous montrerons des propriétés des MT -décorations, c'est à dire des termes d vérifiant :
 $\vdash \phi a, \phi b, \dot{G}raph[a, d] \longrightarrow \dot{D}éco[a, b, d]$.
4. Sous l'axiome supplémentaire $MTA-Déco$, nous montrerons l'existence d'une MT -décoration $Décoration(a, b)$, où $Décoration(,)$ est un ϕ -constructeur d'arité 2 que nous définirons. Nous en déduirons $\dot{A}\dot{F}A1$.
5. Nous introduirons une règle dite de *Coinduction* d'où découlera $\dot{A}\dot{F}A2$.

3.2 Représentation syntaxique des couples dans MT

Nous introduirons tout d'abord un ϕ -constructeur \langle , \rangle , puis nous montrons (Corollaire 239.3 p.103) que les termes de la forme $\langle t, s \rangle$, où $s, t \in \Lambda(C)$, sont les représentants canoniques des couples dans la syntaxe de MT , autrement dit :

$$\vdash \phi x, \phi y, z \sim \langle x, y \rangle \longleftrightarrow \dot{C}pl[x, y; z]$$

où $\dot{C}pl[z; x, y]$ est la traduction de la formule $Cpl[x, y; z]$ dans *MTA*. On montrera aussi que \langle , \rangle est faiblement compatible avec \sim i.e que :

$$\vdash \phi x, \phi x', \phi y, \phi y', x \sim x' \wedge y \sim y' \longleftrightarrow \langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$$

3.2.1 Le ϕ -constructeur \langle , \rangle

Conformément à la définition usuelle du couple (\mathbf{x}, \mathbf{y}) comme paire $\{\{\mathbf{x}\}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}\}$, l'écriture du constructeur \langle , \rangle utilise les constructeurs $P =_{def} \lambda x \lambda y \lambda w. (if\ w\ x\ y)$ et $S =_{def} \lambda w. x$ définis en Section 2.3.1 :

Définition 232 :

1. $\langle , \rangle =_{def} \lambda x \lambda y. (P\ Sx\ Pxy)$
2. $\langle t, s \rangle =_{def} \langle , \rangle ts$ pour tous termes t, s et $w \notin VL(t, s)$

Nous montrons en préambule que \langle , \rangle est un ϕ -constructeur d'arité 2 :

Lemme 233 (*Couple*) $\vdash \phi x, \phi y \longrightarrow \phi \langle x, y \rangle$

Preuve. Découle facilement de *Singleton* (Lemme 141) et de l'axiome (*MT-P*). ■

Le corollaire trivial qui suit nous sera utile dans la prochaine section :

Corollaire 234 *Pour tous termes $s[\bar{y}], t[\bar{y}]$, si (sx) et (tx) sont des ϕ -structures alors :* $\vdash \phi \bar{y}, \phi x \mapsto \phi \langle sx, tx \rangle$

Avant de montrer d'autres propriétés du constructeur \langle , \rangle découlant essentiellement des propriétés correspondantes de S et P , on introduit une terminologie :

Définition 235 *On appellera dorénavant et respectivement *MT*-Singletons, *MT*-Paires et *MT*-Couples Standards les termes de la forme St , Pts et $\langle t, s \rangle$, où t et s sont des termes de *MTA*.*

3.2.2 Propriétés des *MT*-couples standards

Cette section sera dédiée à la démonstration des points suivants qui expriment que les ϕ -constructeurs S, P et \langle , \rangle calculent les fonctionnelles *Sgl*, *Pr* et *Cpl*. Autrement dit les *MT*-singletons, *MT*-paires et *MT*-couples standards sont bien les interprétations canoniques des singletons, paires et couples dans *MTA* :

$$(1) \vdash \phi z, \phi x, (z \sim Sx \longleftrightarrow \dot{S}gl[x; z])$$

- (2) $\vdash \phi z, \phi x, \phi y, (z \dot{\sim} Pxy \longleftrightarrow \dot{P}r[x, y; z])$
(3) $\vdash \phi z, \phi x, \phi y, (z \dot{\sim} \langle x, y \rangle \longleftrightarrow \dot{C}pl[x, y; z])$
(4) $\vdash \phi z, \phi x, \phi y, (\dot{C}plIn[z; x, y] \longleftrightarrow \langle x, y \rangle \dot{\in} z)$

Le point (4) sera traité à part. Pour les points (1),(2) et (3), et comme les formules $Sgl[x; z]$, $Pr[x, y; z]$ et $Cpl[x, y; z]$ sont clairement fonctionnelles, il nous reste à montrer que S , P et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ calculent ces formules (Cf Proposition 229). Ce sera l'objet des trois prochains lemmes.

Rappelons que Sx et Pxy sont des abstractions, on a donc $v \dot{\in} Sx =_{MT} \dot{\exists}u.(Sxu) \dot{\sim} v$ et $v \dot{\in} Pxy =_{MT} \dot{\exists}u.(Pxyu) \dot{\sim} v$ (Remarque 162). Nous utiliserons librement ces égalités par la suite.

Lemme 236 $\vdash \phi x \longrightarrow \dot{S}gl[x; Sx]$

Preuve. Rappelons que $\dot{S}gl[x; Sx] =_{def} \dot{\forall}v.(v \dot{\in} Sx \dot{\Leftrightarrow} v \dot{\sim} x)$. On montre que :

$\vdash \phi x, \phi v, v \dot{\in} Sx \longleftrightarrow v \dot{\sim} x$. Le résultat en découlant immédiatement par $Equiv_{NonM \rightarrow M}$ et *Géné* :

\longrightarrow)

- | | |
|---|---|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi x = \phi v = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $v \in \lambda w.x = \dot{\exists}u.(\lambda w.x u) \dot{\sim} v = T$ |
| Soit : | $u_0 =_{def} \varepsilon u.((\lambda w.x u) \dot{\sim} v)$ |
| 3. <i>Choi</i> (2) | $\phi u_0 = ((\lambda w.x u_0) \dot{\sim} v) = T$ |
| 4. <i>Triv</i> .(3) + <i>MTA-Sym</i> \sim | $x \dot{\sim} v = v \dot{\sim} x = T$ |

\longleftarrow)

- | | |
|---|---|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi x = \phi y = \phi v = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $v \dot{\sim} x = T$ |
| 3. <i>Triv</i> .(2) + <i>MTA-Sym</i> \sim | $(v \dot{\sim} (\lambda w.x T)) = ((\lambda w.x T) \dot{\sim} v) = T$ |
| 4. <i>Exhib</i> (<i>MT-T</i> , 1, 3) | $\dot{\exists}u.((\lambda w.x u) \dot{\sim} v) = v \dot{\in} \lambda w.x = T$ |

■

On donne maintenant l'équivalent du lemme précédent pour les MT -paires standards :

Lemme 237 $\vdash \phi x, \phi y \longrightarrow \dot{P}r[x, y; Pxy]$

Preuve. Rappelons que $\dot{P}r[x, y; Pxy] =_{def} \dot{\forall}v.(v \dot{\in} Pxy \dot{\Leftrightarrow} (v \dot{\sim} x \dot{\forall} v \dot{\sim} y))$. On montre que $\vdash \phi x, \phi y, \phi v, v \dot{\in} Pxy \longleftrightarrow (v \dot{\sim} x \dot{\forall} v \dot{\sim} y)$, le résultat en découlant immédiatement par $Equiv_{NonM \rightarrow M}$ et *Géné* :

\longrightarrow) On raisonne par *TND*.

1. <i>hyp</i>	$\phi x = \phi y = \phi v = T$
2. <i>hyp</i>	$v \dot{\in} Pxy = \exists u. ((Pxy u) \dot{\sim} v) = T$
Soit :	$u_0 =_{def} \varepsilon u. ((Pxy u) \dot{\sim} v)$
3. <i>Choix</i> (2)	$\phi u_0 = ((Pxy u_0) \dot{\sim} v) = T$
4. <i>hyp+</i>	$u_0 = T$
5. <i>Triv.</i> (3) + 3	$((Pxy u_0) \dot{\sim} v) = ((Pxy T) \dot{\sim} v) = x \dot{\sim} v = T$
6. <i>MTA-Sym</i> [~] (5)	$v \dot{\sim} x = T$
7. <i>Méta</i> (<i>LoiLg3</i>)(6)	$(v \dot{\sim} x \dot{\vee} v \dot{\sim} y) = !(v \dot{\sim} y) = T$
8. <i>MP</i> (1; <i>DétZFC_s</i>) + <i>Trivial</i> (7)	$(v \dot{\sim} x \dot{\vee} v \dot{\sim} y) = T$
9. <i>Déduct-</i> (4, 8)	$u_0 \longrightarrow (v \dot{\sim} x \dot{\vee} v \dot{\sim} y)$
10. <i>hyp+</i>	$\dot{\sim} u_0 = T$
11. <i>InsTauto</i>	$\dot{\sim} u_0 \longrightarrow ((Pxy u_0) = y)$
12. <i>MP</i> (10; 11)	$(Pxy u_0) = y$
13. <i>Triv.</i> (12) + 3 + <i>MTA-Sym</i> [~]	$((Pxy u_0) \dot{\sim} v) = y \dot{\sim} v = v \dot{\sim} y = T$
14. <i>Triv.</i> (13) + <i>MP</i> (1; <i>DétZFC_s</i>)	$(v \dot{\sim} x \dot{\vee} v \dot{\sim} y) = !(v \dot{\sim} x) = T$
15. <i>Déduct-</i> (10, 14)	$\dot{\sim} u_0 \longrightarrow (v \dot{\sim} x \dot{\vee} v \dot{\sim} y)$
16. <i>TND</i> (3, 9, 15)	$(v \dot{\sim} x \dot{\vee} v \dot{\sim} y) = T$

←) La démonstration utilise le *ThmZFC_s* sur le théorème :

$$((v = x \vee v = y) \wedge x \in u \wedge y \in u) \Rightarrow v \in u$$

1. <i>hyp</i>	$\phi x = \phi y = \phi v = T$
2. <i>hyp</i>	$(v \dot{\sim} x \dot{\vee} v \dot{\sim} y) = T$
3. <i>MP</i> (1; <i>Lem191, 192</i>)	$x \dot{\in} Pxy = y \dot{\in} Pxy = T$
4. <i>Méta</i> (<i>LoiLg2</i>)(2, 3)	$((v \dot{\sim} x \dot{\vee} v \dot{\sim} y) \wedge x \dot{\in} Pxy \wedge y \dot{\in} Pxy) = T$
5. <i>MP</i> (1; <i>ThmZFC_s</i>)	$((v \dot{\sim} x \dot{\vee} v \dot{\sim} y) \wedge x \dot{\in} Pxy \wedge y \dot{\in} Pxy) \Rightarrow v \dot{\in} Pxy = T$
6. <i>MP</i> _⇒ (4; 5)	$v \dot{\in} Pxy = T$

■

L'équivalent des deux lemmes précédents pour \langle , \rangle va découler facilement du fait que $\langle x, y \rangle =_{def} (P Sx Pxy)$:

Lemme 238 $\vdash \phi x, \phi y \longrightarrow \dot{C}pl[x, y; \langle x, y \rangle]$

Preuve. La démonstration utilise le *ThmZFC_s* sur le théorème de *ZFC* :

$$Sgl[x; u'] \wedge Pr[x, y; u''] \wedge Pr[u', u''; u] \Rightarrow Cpl[x, y; u]$$

1. <i>hyp</i>	$\phi x = \phi y = T$
2. <i>MP</i> (1; <i>Singleton, Paire</i>)	$\phi Sx = \phi Pxy = T$
3. <i>Méta</i> (<i>Lem237</i>)(2)	$\dot{P}r[Sx, Pxy; \langle x, y \rangle] = T$
4. <i>MP</i> (1; <i>Lem236, 237</i>)	$\dot{S}gl[x; Sx] = \dot{P}r[x, y; Pxy] = T$
5. <i>Méta</i> (<i>LoiLg2</i>)(5, 6)	$(\dot{S}gl[x; Sx] \wedge \dot{P}r[x, y; Pxy] \wedge \dot{P}r[Sx, Pxy; \langle x, y \rangle]) = T$

6. $MP(1; ThmZFCs)$ $(\dot{S}gl[x; Sx] \wedge \dot{P}r[x, y; Pxy] \wedge \dot{P}r[Sx, Pxy; \langle x, y \rangle])$
 $\Rightarrow \dot{C}pl[x, y; \langle x, y \rangle] = T$
7. $MP \Rightarrow (6; 8)$ $\dot{C}pl[x, y; \langle x, y \rangle] = T$

■

En corollaire nous obtenons les points (1),(2) et (3) :

Corollaire 239 :

- 1) $\vdash \phi x, \phi z, (z \sim Sx \longleftrightarrow \dot{S}gl[x; z])$
 2) $\vdash \phi x, \phi y, \phi z, (z \sim Pxy \longleftrightarrow \dot{P}r[x, y; z])$
 3) $\vdash \phi x, \phi y, \phi z, (z \sim \langle x, y \rangle \longleftrightarrow \dot{C}pl[x, y; z])$

Le point (4) est maintenant l'objet du lemme suivant :

Lemme 240 $\vdash \phi w, \phi x, \phi y, \dot{C}plIn[w; x, y] \longleftrightarrow \langle x, y \rangle \dot{\in} w$

Preuve. Rappelons que $\dot{C}plIn[w; x, y] =_{def} \dot{\exists} z. (z \dot{\in} w \wedge \dot{C}pl[x, y; z])$
 \rightarrow)

1. *Hyp* $\phi d = \phi x = \phi y = T$
 2. *Hyp* $\dot{\exists} z. (z \dot{\in} w \wedge \dot{C}pl[x, y; z]) = T$
 Soit : $z_0 =_{def} \varepsilon z. (z \dot{\in} w \wedge \dot{C}pl[x, y; z])$
 3. *Choi*x $\phi z_0 = (z_0 \dot{\in} w \wedge \dot{C}pl[x, y; z_0]) = T$
 4. *LoiLg1*(3) $z_0 \dot{\in} w = \dot{C}pl[x, y; z_0] = T$
 5. *Méta*(*Cor239.3*)(1+3, 4) $z_0 \sim \langle x, y \rangle = T$
 6. *Méta*(*Substit*)(1+3+5, 4) $\langle x, y \rangle \dot{\in} w = T$

\leftarrow)

1. *Hyp* $\phi d = \phi x = \phi y = T$
 2. *Hyp* $\langle x, y \rangle \dot{\in} w = T$
 3. *MP*(1; *Couple*) $\phi \langle x, y \rangle = T$
 4. *Méta*(*Equi* $\tilde{\Phi}$)(3) $\langle x, y \rangle \sim \langle x, y \rangle = T$
 5. *Méta*(*Cor239.3*)(1, 3) $\dot{C}pl[x, y; \langle x, y \rangle] = T$
 6. *LoiLg2*(2, 5) $(\langle x, y \rangle \dot{\in} w \wedge \dot{C}pl[x, y; \langle x, y \rangle]) = T$
 7. *Exhib*(1, 3, 6) $\dot{\exists} z. (z \dot{\in} w \wedge \dot{C}pl[x, y; z]) = T$

■

3.2.3 Compatibilité de \sim avec le constructeur \langle , \rangle .

Comme S et \langle , \rangle calculent les fonctionnelles totales Sgl et Cpl , on a immédiatement par la Proposition 229.3 que S et \langle , \rangle sont compatibles avec \sim . Comme il est également évident que ces fonctionnelles sont aussi injectives, la réciproque est vraie, par la Proposition 229.4. Ce qu'exprime le corollaire suivant :

Corollaire 241 (*Compat_{Cpl}*)

- 1) $\vdash \phi x, \phi x', (x \sim x' \longleftrightarrow Sx \sim Sx')$
- 2) $\vdash \phi z, \phi x, \phi y, \phi y', (x \sim x', y \sim y' \longleftrightarrow \langle x, y \rangle \sim \langle x, y \rangle)$

Le corollaire suivant exprime que, pour des termes $s[\bar{y}]$ et $t[\bar{y}]$, si sz et tz sont des ϕ -structures compatibles avec \sim relativement à z alors c'est aussi le cas pour la ϕ -structure $\langle sz, tz \rangle$:

Corollaire 242 *Soient $s[\bar{y}]$, $t[\bar{y}]$ des termes.*

Si (sx) et (tx) sont des ϕ -structures et que :

- $\vdash \phi \bar{y}, \phi x, \phi x', x \sim x' \mapsto (sx) \sim (sx')$
- $\vdash \phi \bar{y}, \phi x, \phi x', x \sim x' \mapsto (tx) \sim (tx')$

Alors :

- $\vdash \phi \bar{y}, \phi x, \phi x', x \sim x' \mapsto \langle sx, tx \rangle \sim \langle sx', tx' \rangle$

Preuve. Découle facilement de *Méta* appliqué au corollaire précédent en utilisant les propriétés de t . ■

3.3 Représentation syntaxique des relations binaires et des fonctions dans *MT*

À la représentation canonique des couples que nous venons de donner correspond une représentation canonique des relations binaires et des fonctions dans *MT*, que nous introduisons :

Définition 243 *Soit a une ϕ -structure. On appellera :*

- 1) *MT-relation (binaire) standard sur a tout terme de la forme*

$r_{a,st} =_{def} \lambda z. \langle s(az), t(az) \rangle$, où s, t sont des termes tels que :

- (i) *(sx) et (tx) sont des ϕ -structures*

- 2) *MT-fonction standard de domaine a toute MT-relation standard de domaine a telle que :*

- (ii) *$s = \lambda x.x$ et t est compatible avec \sim relativement à x*

Ce terme sera alors noté $f_{a,t}$.

Remarque 244 $VL(r_{a,st}) = VL(a, s, t)$, pour toute MT-relation standard $r_{a,st}$ sur a .

On donne maintenant des propriétés élémentaires des *MT*-relations standards qui découlent essentiellement de leur définitions. Le premier lemme exprime que si \mathbf{a} est un “ensemble” alors la restriction de $r_{\mathbf{a},st}$ à Φ est un “ensemble” :

Lemme 245 Pour toutes MT-relation standard $r_{a,st}$ et $\bar{y} \supseteq VL(s, t)$:

$$\vdash \phi a, \phi \bar{y} \longrightarrow \phi r_{a,st}$$

Preuve. Nous montrons que $r_{a,st}$ est simple.

a, \bar{y}, x	X
$a(\nu F)$	$(\Sigma(\nu \bar{\Sigma}))$
$(s a(\nu F)) (t a(\nu F))$	$C[\bar{\Sigma}/\bar{z}]$ (Déf 243(i))
$\langle (s a(\nu F)), (t a(\nu F)) \rangle$	$C[\bar{\Sigma}/\bar{z}]$ (Couple)
$\lambda z. \langle (s a(P\nu z F)), (t a(P\nu z F)) \rangle$	$\lambda z. \Sigma[P\nu z/\nu]$
$\lambda z. \langle s(az), t(az) \rangle$	Σ^{MT}

■

Lemme 246 Pour toute MT-relation standard $r_{a,st}$ et $\bar{y} \supseteq VL(s, t)$, on a :

- 1) $\vdash \dot{\cdot} r_{a,st} = T$
- 2) $\vdash z \dot{\in} r_{a,st} = \dot{\exists} v. (r_{a,st} v) \dot{\sim} z$
- 3) $\vdash \phi a, \phi \bar{y}, \phi z \longrightarrow \langle s(az), t(az) \rangle \dot{\in} r_{a,st}$

Preuve. Le 1 découle directement des définitions de $r_{a,st}$ et $\dot{\cdot}$. Le 2 découle de celle de $\dot{\in}$. On montre le point 3 :

1. hyp $\phi a = \phi \bar{y} = T$
2. hyp $\phi z = T$
3. MP(1; 245) $\phi r_{a,st} = T$
4. NonVide.2(Point1, 3, 2) $(r_{a,st} z) \dot{\in} r_{a,st} = T$
5. Déf($r_{a,st}$) + Trivial(4) $\langle s(az), t(az) \rangle \dot{\in} r_{a,st} = T$

■

Lemme 247 Pour toute MT-relation standard $r_{a,st}$ et $\bar{y} \supseteq VL(s, t)$, on a :

$$\vdash \phi a, \phi \bar{y}, \phi x, x \dot{\in} a \longrightarrow \langle sx, tx \rangle \dot{\in} r_{a,st}$$

Preuve.

1. hyp $\phi a = \phi \bar{y} = \phi x = T$
2. hyp $x \dot{\in} a = T$
3. MP(1; 245) $\phi r_{a,st} = T$
4. MP(1, Cor234) $\phi \langle sx, tx \rangle = T$
- Soit : $z_0 =_{def} \varepsilon z. (az) \dot{\sim} x$
5. NonVide.1(2) $\phi z_0 = (az_0) \sim x = T$
6. Méta(MT-App)(1, 3) $\phi(az_0) = T$
7. Méta(Cor242)(1, 4, 3) $\langle s(az_0), t(az_0) \rangle \dot{\sim} \langle x, tx \rangle = T$
8. Méta(Lem246.3)(1, 4, 3) $\langle s(az_0), t(az_0) \rangle \dot{\in} \phi r_{a,st} = T$
9. Méta(Substit)(3, 4, 7, 8) + Triv. $\langle sx, tx \rangle \dot{\in} \phi r_{a,st} = T$

■

Corollaire 248 Pour toute MT-fonction standard $f_{a,t}$ et $\bar{y} \supseteq VL(t)$, on a :

$$\vdash \phi a, \phi \bar{y}, \phi x, x \dot{\in} a \longrightarrow \langle x, tx \rangle \dot{\in} f_{a,t}$$

Le résultat suivant est la réciproque du lemme précédent. Il exprime que tout “couple” appartenant à une *MT*-relation standard $r_{a,st}$ est de la forme $\langle (s x_0), (t x_0) \rangle$, pour un x_0 tel que $\phi x_0 = T$, et que si de plus a est “non-vide”, on a aussi $x_0 \dot{\in} a = T$:

Lemme 249 *Soient $r_{a,st}$ une *MT*-relation standard et $\bar{y} \supseteq VL(s, t)$.*

Soient $v_0 =_{def} \varepsilon v.(r_{a,st})v \dot{\sim} \langle x, z \rangle$ et $x_0 = (av_0)$, on a :

- 1) $\vdash \phi a, \phi \bar{y}, \phi x, \phi z, \langle x, z \rangle \dot{\in} r_{a,st} \longrightarrow \phi x_0$
- 2) $\vdash \phi a, \phi \bar{y}, \phi x, \phi z, \langle x, z \rangle \dot{\in} r_{a,st} \longrightarrow (s x_0) \dot{\sim} x$
 $\vdash \phi a, \phi \bar{y}, \phi x, \phi z, \langle x, z \rangle \dot{\in} r_{a,st} \longrightarrow (s x_0) \dot{\sim} z$
- 3) $\vdash \phi a, \dot{\neg} a, \phi \bar{y}, \phi x, \phi z, \langle x, z \rangle \dot{\in} r_{a,st} \longrightarrow x_0 \dot{\in} a$

Preuve. Pour simplifier, on montre les trois points en même temps. Remarquons cependant que l’hypothèse $\dot{\neg} a = T$ n’est utilisée que pour le 3 en ligne 10 :

- | | |
|---|---|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi a = \dot{\neg} a = \phi \bar{y} = \phi x = \phi z = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $\langle x, z \rangle \dot{\in} r_{a,st} = T$ |
| 3. <i>MP</i> (1; 245) | $\phi(r_{a,st}) = T$ |
| 4. <i>hyp</i> | $\langle x, z \rangle \dot{\in} r_{a,st} = T$ |
| Soient : | $v_0 =_{def} \varepsilon v.(r_{a,st})v \dot{\sim} \langle x, z \rangle$ et $x_0 = (av_0)$ |
| 5. <i>NonVide.1 + Trivial</i> (4) | $\phi v_0 = \langle s(av_0), t(av_0) \rangle \dot{\sim} \langle x, z \rangle = T$ |
| 6. <i>Méta</i> (<i>MT-App</i>)(1, 5) | $\phi x_0 = T$ |
| 7. <i>Méta</i> (<i>Def243</i> (i))(1, 6) | $\phi(s x_0) = \phi(t x_0) = T$ |
| 8. <i>Méta</i> (<i>Compat_{Cpl}</i>)(7, 1, 5) | $(s x_0) \dot{\sim} x \wedge (t x_0) \dot{\sim} z = T$ |
| 9. <i>Méta</i> (<i>LoiLg1</i>)(8) | $(s x_0) \dot{\sim} x = (t x_0) \dot{\sim} z = T$ |
| 10. <i>NonVide.2</i> (1, 5) | $x_0 \dot{\in} a = T$ |

■

On montre maintenant que les *MT*-fonctions standards sur a sont bien les représentations syntaxiques des fonctions de domaine a dans *MT* (pour a “non-vide”), autrement dit :

Théorème 250 *Pour toute *MT*-fonction standard $f_{a,t}$ et $\bar{y} \supseteq VL(t)$:*

$\vdash \phi a, \dot{\neg} a, \phi \bar{y} \longrightarrow \dot{F}nDm[a, f_{a,t}] = T$

Preuve. On doit montrer que $\vdash \phi a, \phi \bar{y} \longrightarrow \dot{R}el[f_{a,t}] \wedge \dot{F}nl[f_{a,t}] \wedge \dot{D}om[a, f_{a,t}]$ (Cf Notation 231). Par la *LoiLg2*, il suffit de vérifier séparément $\vdash \phi a, \phi \bar{y} \longrightarrow \dot{R}el[f_{a,t}]$, $\vdash \phi a, \phi \bar{y} \longrightarrow \dot{F}nl[[f_{a,t}]$ et $\vdash \phi a, \phi \bar{y} \longrightarrow \dot{D}om[a, f_{a,t}]$. Ce sera l’objet des trois lemmes qui suivent. ■

Lemme 251 *Pour toute *MT*-relation standard $r_{a,st}$ on a :*

$\vdash \phi a, \phi \bar{y} \longrightarrow \dot{R}el[r_{a,st}]$

Preuve.

1. *hyp* $\phi a = \phi \bar{y} = T$
2. *hyp+* $\phi v = T$
3. *hyp+* $v \dot{\in} r_{a,st} = T$
 Soit : $z_0 =_{der} \varepsilon z. (r_{a,st} z) \dot{\sim} v$
4. *NonVide.1(3) + Trivial* $\phi z_0 = (r_{a,st} z_0) \dot{\sim} v = T$
5. *Trivial(4)* $\langle s(az_0), t(az_0) \rangle \dot{\sim} v = T$
6. *Méta(MT-App)(1, 4)* $\phi(az_0) = T$
7. *Méta(Def243(i))(1, 6)* $\phi s(az_0) = \phi t(az_0) = T$
8. *Méta(Lem238)(7)* $\dot{C}pl[s(az_0), t(az_0); \langle s(az_0), t(az_0) \rangle] = T$
9. *Méta(Substit)(2, 7, 5, 8)* $\dot{C}pl[s(az_0), t(az_0); v] = T$
10. *Exhib(6 + 7, 9) × 2* $\dot{\exists} x \dot{\exists} y. \dot{C}pl[x, y; v] = T$
11. *Deduct-(2 + 3, 7)* $\phi v, v \dot{\in} r_{a,st} \longrightarrow \dot{\exists} x \dot{\exists} y. \dot{C}pl[x, y; v]$
12. *Implic_{NonM→M} + Généré* $\dot{\forall} v. (v \dot{\in} r_{a,st} \dot{\Rightarrow} \dot{\exists} x \dot{\exists} y. \dot{C}pl[x, y; v]) = T$
13. *Déf(Rel[r_{a,st}])* $\dot{R}el[r_{a,st}] = T$

■

Lemme 252 Pour toute MT-fonction standard $f_{a,t}$ on a :

$$\vdash \phi a, \phi \bar{y} \longrightarrow \dot{F}nl[f_{a,t}]$$

Preuve. Notons en ligne 12 l'utilisation de la condition (ii) de la Définition

243.

1. *hyp* $\phi a = \phi \bar{y} = T$
2. *MP(1, 245)* $\phi f_{a,t} = T$
3. *hyp+* $\phi x = \phi y = \phi y' = T$
4. *hyp+* $\dot{C}plIn[f_{a,t}; x, y] = \dot{C}plIn[f_{a,t}; x, y'] = T$
5. *Méta(Lem240)(2, 3)* $\langle x, y \rangle \dot{\in} f_{a,t} = \langle x, y' \rangle \dot{\in} f_{a,t} = T$
 Soient : $v_0 =_{def} \varepsilon v. (f_{a,t} v) \dot{\sim} \langle x, y \rangle$ et $x_0 =_{def} (av_0)$
 Soient : $v_1 =_{def} \varepsilon v. (f_{a,t} v) \dot{\sim} \langle x, y' \rangle$ et $x_1 =_{def} (av_1)$
6. *MP(1, 3, 5; Lem249.1)* $\phi x_0 = \phi x_1 = T$
7. *MP(1, 3, 5; Lem249.2)* $x_0 \dot{\sim} x = x_1 \dot{\sim} x = T$
8. *MP(1, 3, 5; Lem249.2)* $(t x_0) \dot{\sim} y = (t x_1) \dot{\sim} y' = T$
9. *Trans[~](7)* $x_0 \dot{\sim} x_1 = T$
10. *Méta(Déf243.(ii))(1, 6, 9)* $(t x_0) \dot{\sim} (t x_1) = T$
11. *Trans[~] + Sym[~](8, 10)* $y \dot{\sim} y' = T$
12. *Deduct-(3 + 4, 11)* $\phi x, \phi y, \phi y', \dot{C}plIn[f_{a,t}; x, y], \dot{C}plIn[f_{a,t}; x, y'] \longrightarrow y \dot{\sim} y'$
13. *Implic_{NonM→M} + Généré(12)* $\dot{\forall} x \dot{\forall} y \dot{\forall} y'. (\dot{C}plsIn[f_{a,t}; x, y \& f_{a,t}; x, y'] \dot{\Rightarrow} y \dot{\sim} y') = T$
14. *Déf(Fnl[f_{a,t}])* $\dot{F}nl[f_{a,t}] = T$

■

Lemme 253 *Pour toute MT-fonction standard $f_{a,t}$ on a :*
 $\vdash \phi a, \dot{\neg} a, \phi \bar{y} \longrightarrow \dot{D}om[a, f_{a,t}]$

Preuve. On montre $\vdash \phi a, \phi \bar{y}, \phi x, x \dot{\in} a \longleftrightarrow \dot{\exists} y. \dot{C}plIn[f_{a,t}; x, y]$, le résultat en découlant par *Equiv_{NonM→M}* et *Géné* (Cf Notation 231.4). On montre les deux sens de \longleftrightarrow en même temps :

- | | |
|---|--|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi a = \phi \bar{y} = \phi x = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $\dot{\neg} a = T$ |
| 3. <i>MP</i> (1, 245) | $\phi(f_{a,t}) = T$ |
| 4. <i>Déf</i> 243.(i)(1) | $\phi(tx) = T$ |
| 5. <i>hyp+</i> | $x \dot{\in} a = T$ |
| 6. <i>MP</i> (1, 5; <i>Cor</i> 248) | $\langle x, tx \rangle \dot{\in} f_{a,t} = T$ |
| 7. <i>Méta</i> (<i>Lem</i> 240)(3, 1, 4, 6) | $\dot{C}plIn[f_{a,t}; x, tx] = T$ |
| 8. <i>Exhib</i> (4, 7) | $\dot{\exists} y. \dot{C}plIn[f_{a,t}; x, y] = T$ |
| 9. <i>Déduct</i> -(5, 8) | $x \dot{\in} a \longrightarrow \dot{\exists} y. \dot{C}plIn[f_{a,t}; x, y]$ |
| 10. <i>hyp+</i> | $\dot{\exists} y. \dot{C}plIn[f_{a,t}; x, y] = T$ |
| Soit : | $y_0 =_{def} \varepsilon y. \dot{C}plIn[f_{a,t}; x, y]$ |
| 11. <i>Choix</i> (10) | $\phi y_0 = \dot{C}plIn[f_{a,t}; x, y_0] = T$ |
| 12. <i>Méta</i> (<i>Lem</i> 240)(3, 1, 11) | $\langle x, y_0 \rangle \dot{\in} f_{a,t} = T$ |
| Soient : | $v_0 =_{def} \varepsilon v. (f_{a,t} v) \dot{\sim} \langle x, y_0 \rangle$ et $x_0 =_{def} (av_0)$ |
| 13. <i>Méta</i> (<i>Lem</i> 249.1)(1, 11, 12) | $\phi x_0 = T$ |
| 14. <i>Méta</i> (<i>Lem</i> 249.2)(1, 11, 12) | $x_0 \dot{\sim} x = T$ |
| 15. <i>Méta</i> (<i>Lem</i> 249.3)(1, 11, 12, 2) | $x_0 \dot{\in} a = T$ |
| 16. <i>Méta</i> (<i>Substit</i>)(1, 14, 15) | $x \dot{\in} a = T$ |
| 17. <i>Déduct</i> -(10, 16) | $\dot{\exists} y. \dot{C}plIn[f_{a,t}; x, y] \longrightarrow x \dot{\in} a$ |

■

Avant de clôre cette section nous donnons une propriété des “graphes” :

Lemme 254 $\vdash \phi a, \phi b, \phi x, \phi y, \dot{G}raph[a, b], \dot{C}plIn[b; x, x'] \longrightarrow x \dot{\in} a; y \dot{\in} a$

Preuve. La formule $\dot{G}raph[a, b] \wedge \dot{C}plIn[b; x, y] \Rightarrow (x \in a \wedge y \in a)$ étant clairement un théorème de *ZFC*, on a, par *ThmZFCs* :

$\vdash \phi a, \phi b, \phi x, \phi y \longrightarrow ((\dot{G}raph[a, b] \wedge \dot{C}plIn[b; x, y]) \Rightarrow (x \dot{\in} a \wedge y \dot{\in} a))$

Le résultat découle alors facilement en utilisant la *LoiLg1* et *Implic_{M→NonM}*.

■

3.4 Le ϕ -constructeur *Eval*

Rappelons que le constructeur *Eval* est une sorte d’opérateur d’évaluation, appliqué à une “fonction” d et à un “élément” x de son domaine, il rend

l'image $d\langle x \rangle$ de x par d . C'est essentiellement cette propriété que nous allons montrer ici.

Définition 255 $Eval =_{def} \lambda d \lambda x. d\langle x \rangle$
où, pour d, x des variables, $d\langle x \rangle =_{def} \varepsilon y. \dot{C}plIn[d; x, y]$

On montre tout d'abord que *Eval* est un ϕ -constructeur d'arité 2 :

Lemme 256 $(Eval) \vdash \phi d, \phi x \longrightarrow \phi d\langle x \rangle$, et donc *Eval* est un ϕ -constructeur d'arité 2.

Preuve. Le résultat découle du Théorème de Construction du fait que le terme $\varepsilon y. \dot{C}plIn[d; x, y]$ est un terme simple. Ce que nous montrons :

$$\begin{array}{l} x, y, d \quad X \\ \dot{C}plIn[d; x, y] \quad C[\bar{\Sigma}/\bar{z}] \text{ (Lem135)} \\ \varepsilon y. \dot{C}plIn[d; x, y] \quad \varepsilon y. \Sigma[T/\nu] \end{array}$$

■

Le lemme qui suit exprime le fait que *Eval* évalue la valeur de d sur tout “élément” de son “domaine” :

Lemme 257 $\vdash \phi d, \phi a, \phi x, \dot{F}nDm[a, d], x \dot{\in} a \longrightarrow \dot{C}plIn[d; x, d\langle x \rangle]$

Preuve.

$$\begin{array}{l} 1. hyp \quad \phi d = \phi a = \phi x = T \\ 2. hyp \quad \dot{F}onct[d] \wedge \dot{D}om[a, d] = T \\ 3. hyp \quad x \dot{\in} a = T \\ 4. Méta(LoiLg1)(2) + Déf(\dot{D}om[]) \quad \dot{\forall} x. (x \dot{\in} a \Leftrightarrow \dot{\exists} y. \dot{C}plIn[d; x, y]) \\ 5. Inst_{\dot{\vee}}(1; 4) \quad x \dot{\in} a \Leftrightarrow \dot{\exists} y. \dot{C}plIn[d; x, y] = T \\ 6. MP_{\dot{\Rightarrow}}(3; 5) \quad \dot{\exists} y. \dot{C}plIn[d; x, y] = T \\ 7. ChoiX(6) + Trivial \quad \dot{C}plIn[d; x, d\langle x \rangle] = T \end{array}$$

■

Comme d est une “fonction”, $d\langle x \rangle$ est unique en tant “qu'image” de “ x par d ”, ce qu'exprime le lemme qui suit :

Lemme 258 $\vdash \phi d, \phi a, \phi x, \phi y, \dot{F}nDm[a, d], x \dot{\in} a, \dot{C}plIn[d; x, y] \longrightarrow y \dot{\sim} d\langle x \rangle$

Preuve.

$$\begin{array}{l} 1. hyp \quad \phi d = \phi a = \phi x = \phi y = T \\ 2. hyp \quad \dot{R}el[d] \wedge \dot{F}nl[d] \wedge \dot{D}om[a, d] = T \\ 3. hyp \quad x \dot{\in} a = T \\ 4. hyp \quad \dot{C}plIn[d; x, y] = T \\ 5. Méta(LoiLg1)(2) + Déf(\dot{F}nl[]) \quad \dot{\forall} x \dot{\forall} y \dot{\forall} y' (\dot{C}plsIn[d; x, y \& d, x, y'] \dot{\Rightarrow} y \dot{\sim} y') = T \\ 6. MP(1, 2, 3; Lem257) \quad \phi d\langle x \rangle = \dot{C}plIn[d; x, d\langle x \rangle] = T \\ 7. Méta(LoiLg2)(4, 5) \quad \dot{C}plsIn[d; x, y \& d; x, d\langle x \rangle] = T \end{array}$$

8. $Inst_{\dot{\sim}}(1, 5)$ $\dot{C}plIn[d; x, y \& d; x, d\langle x \rangle] \Rightarrow y \dot{\sim} d\langle x \rangle = T$
 9. $MP_{\dot{\sim}}(8; 6)$ $y \dot{\sim} d\langle x \rangle = T$

■

On montre maintenant la compatibilité forte de *Eval* avec $\dot{\sim}$ relativement à x (dont découle immédiatement la compatibilité faible par le Lemme 187 et $Réfl_{\dot{\sim}}$) :

Lemme 259 ($Compat_{d\langle \cdot \rangle}$)

$$\vdash \phi d, \phi x, \phi x', x \dot{\sim} x' \longrightarrow d\langle x \rangle = d\langle x' \rangle$$

$$\vdash \phi d, \phi x, \phi x', x \dot{\sim} x' \longrightarrow d\langle x \rangle \dot{\sim} d\langle x' \rangle$$

Preuve.

1. *hyp* $\phi x = \phi x' = \phi d = T$
2. *hyp* $x \dot{\sim} x' = T$
3. *hyp+* $\phi y = T$
4. *hyp+* $\dot{C}plIn[d; x, y] = T$
5. *MP*(1, 2; *Substit*) $\dot{C}plIn[d; x', y] = T$
6. *Déduct*-(4, 5) $\dot{C}plIn[d; x, y] \longrightarrow \dot{C}plIn[d; x', y]$
7. *Idem*(4-6) $\dot{C}plIn[d; x', y] \longrightarrow \dot{C}plIn[d; x, y]$
8. *Equiv* $_{NonM \rightarrow M}$ (6, 7) $\dot{C}plIn[d; x, y] \Leftrightarrow \dot{C}plIn[d; x', y] = T$
9. *Déduct*-(3, 8) $\phi y \longrightarrow \dot{C}plIn[d; x, y] \Leftrightarrow \dot{C}plIn[d; x', y]$
10. *Ackermann*(9) $\varepsilon y. \dot{C}plIn[d; x, y] = \varepsilon y. \dot{C}plIn[d; x', y]$
11. *Déf*($d\langle x \rangle$) + *Triv.* $d\langle x \rangle = d\langle x' \rangle$

■

3.5 Les *MT*-décorations

Définition 260 On appellera *MT*-décorations tout terme d vérifiant :

$$\vdash \phi a, \phi b, \dot{G}raph[a, d] \longrightarrow \dot{D}éco[a, b, d].$$

Comme déjà signalé à la fin de la Section 3.1, nous exhiberons bientôt un exemple de *MT*-décoration. Ici nous montrerons les propriétés des *MT*-décorations utiles pour déduire *AFA*2 (Cf Section 3.7). Ces propriétés seront essentiellement des propriétés découlant de la définition d'une décoration. Rappelons que \mathbf{d} est une décoration du graphe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) si, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{a}$, on a :

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{d}(\mathbf{x}') : (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \dot{\in} \mathbf{b}\}$$

La première propriété que nous montrons utilise un théorème de *ZFC* exprimant que si \mathbf{d} est une décoration du graphe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) alors, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{a}$, $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \emptyset$ si et seulement si $\{\mathbf{x}' : \dot{C}plIn[\mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{x}']\} = \emptyset$. Par *ThmZFCs* on a donc :

$$(*) \vdash \phi d, \phi a, \phi b, \phi x, \phi y \longrightarrow \dot{G}raph[a, b] \wedge \dot{D}éco[d, a, b] \wedge x \in a \wedge \dot{C}plIn[d; x, y] \\ \Rightarrow (\forall z. \dot{\neg}(z \in y) \Leftrightarrow \dot{\neg} \exists x'. \dot{C}plIn[b; x, x'])$$

Lemme 261 :

$$1) \vdash \phi d, \phi a, \phi b, \phi x, \dot{G}raph[a, b], \dot{D}éco[d, a, b], x \in a, (d \langle x \rangle \longleftrightarrow \dot{\neg} \exists x'. \dot{C}plIn[b; x, x']) \\ 2) \vdash \phi d, \phi a, \phi b, \phi x, \dot{G}raph[a, b], \dot{D}éco[d, a, b], x \in a, (\dot{\neg} d \langle x \rangle \longleftrightarrow \exists x'. \dot{C}plIn[b; x, x'])$$

Preuve. Le 2 se montre facilement en utilisant le 1 et la tautologie

$x \Leftrightarrow \dot{\neg} y = \dot{\neg} x \Leftrightarrow y$. On montre le 1 :

1. *hyp* $\phi d = \phi a = \phi b = \phi x = T$
2. *hyp* $\dot{G}raph[a, b] = \dot{D}éco[d, a, b] = T$
3. *hyp* $x \in a = T$
4. *Méta(LoiLg1)(2)* $\dot{F}nDm[a, d] = T$
5. *MP(1, 3, 4; Lem257)* $\phi d \langle x \rangle = \dot{C}plIn[d; x, d \langle x \rangle] = T$
6. *Méta(LoiLg2)(2, 3, 5)* $\dot{G}raph[a, b] \wedge \dot{D}éco[d, a, b] \wedge x \in a \wedge \dot{C}plIn[d; x, d \langle x \rangle] = T$
7. *MP \Rightarrow (Méta(*) (1, 5), 6)* $\forall z. \dot{\neg}(z \in d \langle x \rangle) \Leftrightarrow \dot{\neg} \exists x'. \dot{C}plIn[b; x, x'] = T$
8. *Equi $v_M \mapsto NonM$ (7)* $\forall z. \dot{\neg}(z \in d \langle x \rangle) \longleftrightarrow \dot{\neg} \exists x'. \dot{C}plIn[b; x, x']$
9. *Méta(Cor166.1)(5)* $\forall z. \dot{\neg}(z \in d \langle x \rangle) \longleftrightarrow d \langle x \rangle$
10. *Trans \longleftrightarrow (10, 11)* $d \langle x \rangle \longleftrightarrow \dot{\neg} \exists x'. \dot{C}plIn[b; x, x']$

■

Une conséquence immédiate du lemme précédent est que, pour deux décorations \mathbf{d} et \mathbf{d}' d'un même graphe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , et $\mathbf{x} \in \mathbf{a}$, on a $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \emptyset$ ssi $\mathbf{d}'(\mathbf{x}) = \emptyset$. Ceci est exprimé le corollaire suivant qui découle facilement par la transitivité \longleftrightarrow :

Corollaire 262 :

$$1) \vdash \phi d, \phi d', \phi a, \phi b, \phi x, \dot{G}raph[a, b], \dot{D}éco[d, a, b], \dot{D}éco[d', a, b], x \in a, \\ d \langle x \rangle \longleftrightarrow d' \langle x \rangle \\ 2) \vdash \phi d, \phi d', \phi a, \phi b, \phi x, \dot{G}raph[a, b], \dot{D}éco[d, a, b], \dot{D}éco[d', a, b], x \in a, \\ \dot{\neg} d \langle x \rangle \longleftrightarrow \dot{\neg} d' \langle x \rangle$$

La deuxième propriété que nous montrons utilise un théorème de *ZFC* exprimant que, si \mathbf{d} est une décoration du graphe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) et que $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathbf{b}$ alors $\mathbf{d}(\mathbf{x}') \in \mathbf{d}(\mathbf{x})$. Par *ThmZFCs* on a donc :

$$(**) \vdash \phi d, \phi a, \phi b, \phi x, \phi x', \phi y, \phi y' \longrightarrow (\dot{F}orm[d, a, b, x, x', y, y'] \Rightarrow y' \in y)$$

où $\dot{F}orm[d, a, b, x, x']$ abrège :

$$\dot{G}raph[a, b] \wedge \dot{D}éco[d, a, b] \wedge \dot{C}plIn[b; x, x'] \wedge \dot{C}plsIn[d; x, y \& d; x', y']$$

Lemme 263 :

$$\vdash \phi d, \phi a, \phi b, \phi x, \phi x', \dot{G}raph[a, b], \dot{D}éco[d, a, b], \dot{C}plIn[b; x, x'] \longrightarrow d \langle x' \rangle \in d \langle x \rangle$$

Preuve.

1. *hyp* $\phi d = \phi a = \phi b = \phi x = \phi x' = T$
2. *hyp* $\dot{G}raph[a, b] = \dot{C}plIn[b; x, x'] = T$
3. *hyp* $\dot{D}éco[d, a, b] = T$
4. *MP*(1; *Eval*) $\phi d\langle x \rangle = \phi d\langle x' \rangle = T$
5. *MP*(1, 2; *Lem254*) $x \dot{\in} a = x' \dot{\in} a = T$
6. *Méta*(*LoiLg1*)(3) $\dot{F}nDm[a, d] = T$
7. *MP*(1, 4, 5; *Lem257*) $\dot{C}plIn[d; x, d\langle x \rangle] = \dot{C}plIn[d; x, d\langle x' \rangle] = T$
8. *Méta*(*LoiLg2*)(2, 3, 7) $\dot{F}orm[d, a, b, x, x', d\langle x \rangle, d\langle x' \rangle] = T$
9. *Méta*(*(**)*)(1, 4) $(\dot{F}orm[d, a, b, x, x', d\langle x \rangle, d\langle x' \rangle] \dot{\Rightarrow} d\langle x' \rangle \dot{\in} d\langle x \rangle) = T$
10. *MP* $\dot{\Rightarrow}$ (8; 9) $d\langle x' \rangle \dot{\in} d\langle x \rangle = T$

■

Lorsque $\dot{\in} d\langle x \rangle = T$, les éléments de $d\langle x \rangle$ sont de la forme $d\langle x \rangle y$ pour $y \in \Phi$, c'est ce qu'exprimait *NonVide* (Lemme 163). Les deux lemmes suivants montrent que ces éléments sont eux-mêmes de la forme $d\langle w_0 \rangle$, pour $w_0 \dot{\in} a = T$ et $\dot{C}plIn[b; x, w_0] = T$. Le premier découle facilement de la définition de $Dc[d, a, b]$ (Notation 231.6) en utilisant $Ins_{\dot{\vee}}$, $Implic_{M \rightarrow NonM}$ et $Equiv_{M \rightarrow NonM}$:

Lemme 264 :

$$\vdash \dot{D}c[d, b], \phi x, \phi y, \dot{C}plIn[d; x, y], \phi y', y' \dot{\in} y \longrightarrow \dot{\exists} x'. \dot{C}plsIn[b; x, x' \& d, x', y']$$

Lemme 265 Soit $x_0 =_{def} \varepsilon x'. \dot{C}plsIn[b; x, x' \& d; x', d\langle x \rangle y]$, on a :

$$\begin{aligned} \vdash \phi d, \phi a, \phi b, \phi x, \phi y, \dot{G}raph[a, b], \dot{D}éco[d, a, b], x \dot{\in} a, \dot{\in} d\langle x \rangle &\longrightarrow \phi w_0 \\ \vdash \phi d, \phi a, \phi b, \phi x, \phi y, \dot{G}raph[a, b], \dot{D}éco[d, a, b], x \dot{\in} a, \dot{\in} d\langle x \rangle &\longrightarrow w_0 \dot{\in} a \\ \vdash \phi d, \phi a, \phi b, \phi x, \phi y, \dot{G}raph[a, b], \dot{D}éco[d, a, b], x \dot{\in} a, \dot{\in} d\langle x \rangle &\longrightarrow \dot{C}plIn[b; x, w_0] \\ \vdash \phi d, \phi a, \phi b, \phi x, \phi y, \dot{G}raph[a, b], \dot{D}éco[d, a, b], x \dot{\in} a, \dot{\in} d\langle x \rangle &\longrightarrow d\langle x \rangle y \dot{\sim} d\langle w_0 \rangle \end{aligned}$$

Preuve.

1. *hyp* $\phi d = \phi a = \phi b = \phi x = \phi y = T$
2. *hyp* $\dot{G}raph[a, b] = T$
3. *hyp* $\dot{D}éco[d, a, b] = \dot{F}nDm[a, d] \wedge \dot{D}c[d, b] = T$
4. *hyp* $\dot{\in} d\langle x \rangle = T$
5. *hyp* $x \dot{\in} a = T$
6. *NonVide*.2(4, 1) $d\langle x \rangle y \dot{\in} d\langle x \rangle = T$
7. *Méta*(*LoiLg1*)(3) $\dot{F}nDm[a, d] = \dot{D}c[d, b] = T$
8. *MP*(1, 5, 7; *Lem257*) $\phi d\langle x \rangle = \dot{C}plIn[d; x, d\langle x \rangle] = T$
9. *Méta*(*MT-App*)(8, 1) $\phi(d\langle x \rangle y) = T$
10. *NonVide*.1(8, 4, 1) $d\langle x \rangle y \dot{\in} d\langle x \rangle = T$

11. *Méta*(7, 1, 8, 9; *Lem*264) $\dot{\exists}x'. \dot{C}plsIn[b; x, x' \& d; x', d\langle x \rangle y] = T$
 Soit : $w_0 =_{def} \varepsilon x'. (\dot{C}plsIn[b; x, x' \& d; x', d\langle x \rangle y])$
 12. *Choix*(11) $\phi w_0 = \dot{C}plsIn[b; x, w_0 \& d; w_0, d\langle x \rangle y] = T$
 13. *Méta*(*LoiLg1*)(12) $\dot{C}plIn[b; x, w_0] = \dot{C}plIn[d; w_0, d\langle x \rangle y] = T$
 14. *Méta*(*Lem*254)(1, 12, 2, 13) $\mathbf{w}_0 \dot{\in} \mathbf{a} = \mathbf{T}$
 15. *Méta*(*Lem*258)(1, 3, 12, 9, 13) $\mathbf{d}\langle \mathbf{x} \rangle \mathbf{y} \dot{\sim} \mathbf{d}\langle \mathbf{w}_0 \rangle = \mathbf{T}$

■

3.6 Axiome de *Décoration* et prouvabilité de $\dot{A}FA1$

Rappelons que $\dot{A}FA1$ est la traduction de $AFA1$ dans le langage de MTA . Dans cette section on montre que $\dot{A}FA1$ est une conséquence de l'axiome dit “de *Décoration*”. Cet axiome que nous donnons maintenant utilise deux constructeurs $\tilde{\phi}$ et δ que nous définirons bientôt :

$$MTA\text{-}Déco \quad \phi b, \phi x \longrightarrow \tilde{\phi}(\delta b x)$$

Comme tous les énoncés existentiels, $AFA1$ est démontré dans MTA en exhibant un ϕ -constructeur vérifiant la (traduction de la) formule contenue dans $AFA1$. Ce ϕ -constructeur sera noté *Décoration*(,). Il utilise un constructeur δ^Φ que nous introduirons immédiatement après les constructeurs $\tilde{\phi}$ et δ . Nous montrerons alors (Section 3.6.5) que, pour $\langle a, b \rangle$ un “graphe”, *Décoration*(a, b) est une “décoration” de $\langle a, b \rangle$. Nous en déduisons finalement $\vdash \dot{A}FA1 = T$.

3.6.1 Le constructeur $\tilde{\phi}$

Comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction de cette thèse, dans MTA il existe des objets, qui, bien que n'étant pas des “ensembles”, sont “égaux” à des “ensembles”. Le prédicat “être égal à un ensemble” est exprimé dans la syntaxe par le constructeur $\tilde{\phi}$, son interprétation dans \mathcal{M} sera la fonction caractéristique (nous verrons en quel sens dans la Section 10.2.6 de la 2^{ème} Partie) de la clôture $\tilde{\Phi}$ de Φ par \sim :

Définition 266 $\tilde{\phi} =_{def} \lambda x. \dot{\exists} y. (x \dot{\sim} y)$

La première propriété de $\tilde{\phi}$ exprime le fait que $\Phi \subseteq \tilde{\Phi}$:

Lemme 267 $\vdash \phi x \longrightarrow \tilde{\phi} x$

Preuve. Comme la formule $\dot{\exists} y (x = y)$ est une conséquence triviale de l'extensionnalité, par *ThmZFCs* on a $\vdash \phi x \longrightarrow \dot{\exists} y. (x \dot{\sim} y)$. Le résultat est

donc immédiat.

■

On donne maintenant un constructeur auxiliaire qui joue le rôle de “l’identité au sens de \sim_Φ ”, et dont les propriétés sont liées à celles de $\tilde{\phi}$:

Définition 268 $\tilde{I} =_{def} \lambda x.\varepsilon y.x \sim y$

Le lemme qui suit découle trivialement des définitions de \tilde{I} et *Choir* :

Lemme 269 :

$$\begin{aligned} \vdash \tilde{\phi}x &\longrightarrow \phi(\tilde{I}x) \\ \vdash \tilde{\phi}x &\longrightarrow x \sim (\tilde{I}x) \end{aligned}$$

Lemme 270 :

$$\begin{aligned} 1) \vdash \phi x &\longrightarrow \phi(\tilde{I}x) \\ 2) \vdash \phi x &\longrightarrow (\tilde{I}x) \sim x \\ 3) \vdash \phi x &\longrightarrow (\tilde{I}x) = (\tilde{I}(\tilde{I}x)) \\ 4) \vdash \phi x, \phi y, x \sim y &\longrightarrow (\tilde{I}x) = (\tilde{I}y). \end{aligned}$$

Preuve. Le 1 et le 2 viennent immédiatement par le Lemme 267 et la transitivité de \longrightarrow par le 1 et 2 du lemme précédent. Le 3 découle aisément du 1,2 et 4. Maintenant, il est facile de montrer $\vdash \phi y, \phi y', \phi z, y \sim y' \longrightarrow (z \sim y \leftrightarrow z \sim y')$, le 4 est donc une conséquence d’*Ackermann*. ■

Lemme 271 ($\text{Réfl}_{\tilde{\phi}}$) $\vdash \tilde{\phi}x \longrightarrow x \sim x$

Preuve.

$$\begin{aligned} 1. \text{hyp} & \quad \dot{\exists}y.(x \sim y) = T \\ 2. \text{MP}(1; \text{Lem270.1}) & \quad \phi(\tilde{I}x) = (\tilde{I}x) \sim x = T \\ 3. \text{Méta}(\text{Compat})(2) & \quad x \sim x = (\tilde{I}x) \sim x \\ 4. \text{Trivial}(2, 3) & \quad x \sim x = T \end{aligned}$$

■

Corollaire 272 $\vdash \tilde{\phi}x \longrightarrow !x$

Preuve. Le résultat découle aisément du lemme précédent et de ce que $\vdash x \sim x \longrightarrow !x$ (Lemme 155) . ■

Lemme 273 $\vdash \tilde{\phi}x, \phi z \longrightarrow \tilde{\phi}(xz)$

Preuve. On raisonne par *TND*.

Rappelons que $x \sim_0(\tilde{I}x) =_{def} \dot{\forall}z.\dot{\exists}y.(xz \sim ((\tilde{I}x)y)) \wedge \dot{\forall}y.\dot{\exists}z.(xz \sim ((\tilde{I}x)y))$:

- | | |
|---|--|
| 1. <i>hyp</i> | $\tilde{\phi}x = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $\phi z = T$ |
| 3. <i>MP</i> (1; <i>Cor272</i>) | $!x = T$ |
| 4. <i>hyp+</i> | $x = T$ |
| 5. <i>Méta</i> (<i>Lem267</i>)(<i>MT-T</i>) | $\tilde{\phi}T = T$ |
| 6. <i>Trivial</i> (4) + 5 | $\tilde{\phi}(xz) = \tilde{\phi}(Tz) = \tilde{\phi}T = T$ |
| 7. <i>Déduct</i> -(4, 6) | $x \longrightarrow \tilde{\phi}(xz)$ |
| 8. <i>hyp+</i> | $\dot{\neg}x = T$ |
| 9. <i>MP</i> (1; <i>Lem270.1</i>) | $\phi(\tilde{I}x) = x \sim (\tilde{I}x) = T$ |
| 10. <i>Méta</i> (<i>Lem157</i>)(8, 9) | $\dot{\neg}(\tilde{I}x) = T$ |
| 11. <i>Méta</i> (<i>Lem158</i>)(8, 10) | $x \sim_0(\tilde{I}x) = T$ |
| 12. <i>Méta</i> (<i>LoiLg1</i>)(11) | $\dot{\forall}z. \dot{\exists}y. (xz \sim ((\tilde{I}x)z)) = T$ |
| 13. <i>Inst</i> $\dot{\forall}$ (2, 12) | $\dot{\exists}y. (xz \sim ((\tilde{I}x)y)) = T$ |
| Soit : | $y_0 =_{def} \varepsilon y. (xz \sim ((\tilde{I}x)y))$ |
| 14. <i>Choix</i> (13) | $\phi y_0 = (xz) \sim ((\tilde{I}x)y_0) = T$ |
| 15. <i>Méta</i> (<i>MT-App</i>)(9, 14) | $\phi((\tilde{I}x)y_0) = T$ |
| 16. <i>Méta</i> (<i>Substit</i>)(15, 14) | $\dot{\exists}y. ((\tilde{I}x)y_0) \sim y = \dot{\exists}y. xz \sim y$ |
| 17. <i>Trivial</i> (16) | $\tilde{\phi}((\tilde{I}x)y_0) = \tilde{\phi}(xz)$ |
| 18. <i>Méta</i> (<i>Lem267</i>)(15) | $\tilde{\phi}((\tilde{I}x)y_0) = T$ |
| 19. <i>Trivial</i> (17, 18) | $\tilde{\phi}(xz) = T$ |
| 20. <i>Déduct</i> -(8, 18) | $\dot{\neg}x \longrightarrow \tilde{\phi}(xz)$ |
| 21. <i>TND</i> (3, 7, 19) | $\tilde{\phi}(xz) = T$ |

■

Le corollaire suivant découle facilement du Lemme 269 par *Substit* et *DétZFCs*.

Corollaire 274 (*DétZFC $\tilde{\phi}$*) Pour tout *ZFC*-terme $B[\bar{z}, \bar{u}]$ on a :

$$\vdash \phi\bar{z}, \tilde{\phi}\bar{x} \longrightarrow !B[\bar{x}/\bar{u}]$$

3.6.2 Le constructeur δ

Rappelons que, pour un graphe donné (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , on appelle *feuille* tout sommet \mathbf{x} de \mathbf{a} qui n'a pas d'enfant, c'est à dire tel que $\{\mathbf{y} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{b}\} = \emptyset$. Ceci justifie les définitions suivantes :

Définition 275 :

- 1) *Feuil* $=_{def} \lambda b \lambda x. \dot{\neg} \dot{\exists} y. \langle x, y \rangle \in b$
- 2) *Enf* $=_{def} \lambda b \lambda x. \varepsilon y. \langle x, y \rangle \in b$

Les lemmes suivants découle essentiellement des définitions de *Feuil* et *Enf* :

Lemme 276 (*Feuil*) *Feuil* est un ϕ -constructeur d'arité 2.

Preuve. On a $\phi b, \phi x, \phi y \longrightarrow \phi \dot{\exists} y. \langle x, y \rangle \dot{\in} b$ par *DétZFC_s* (Théorème 137). ■

Lemme 277 (*Enf*) *Enf* est un ϕ -constructeur d'arité 2.

Preuve. Par *DétZFC_S* on a $\phi b, \phi x, \phi y \longrightarrow \langle x, y \rangle \dot{\in} b$. Le résultat est donc une conséquence immédiate du point 2 de *Dét_{∃, ∨}* (Lemme 79). ■

Lemme 278 $\vdash \phi b, \phi x, \dot{\neg}(Feuil\ b\ x) \longrightarrow \langle x, (Enf\ b\ x) \rangle \dot{\in} b$

Preuve.

1. *hyp* $\phi b = \phi x = T$
2. *hyp* $\dot{\neg}(Feuil\ b\ x) = T$
3. *Déf(Feuil) + Trivial* $\dot{\neg} \dot{\neg} \dot{\exists} y. \langle x, y \rangle \dot{\in} b = T$
4. *InstTauto + 3* $\dot{\neg} \dot{\neg} \dot{\exists} y. \langle x, y \rangle \dot{\in} b = \dot{\exists} y. \langle x, y \rangle \dot{\in} b = T$
5. *Choix(4)* $\langle x, (Enf\ b\ x) \rangle \dot{\in} b = T$

■

Nous donnons maintenant la définition de δ :

Définition 279 :

- 1) $\dot{\Delta} =_{def} \lambda d \lambda b \lambda x \lambda y. (if\ \langle x, y \rangle \dot{\in} b\ db(\tilde{I}y)\ db(Enf\ b\ x))$
- 2) $\dot{d} =_{def} \lambda d \lambda b \lambda x. (if\ (Feuil\ b\ x)\ T\ (\dot{\Delta}\ db\ x))$
- 3) $\delta =_{def} (Y\ \dot{d})$

Remarque 280 Pour toute variable b, x , on a : $\delta b x =_{\beta} (if\ (Feuil\ b\ x)\ T\ (\dot{\Delta}\ \delta\ b\ x))$

Nous utiliserons librement la remarque précédente par la suite. On va maintenant s'intéresser aux propriétés de δ :

Propriétés élémentaires de δ

Les deux lemmes faciles suivants expriment des propriétés de δ qui découlent essentiellement de sa définition :

Lemme 281 :

- 1) $\vdash \phi b, \phi x, (\delta b x \longleftrightarrow (Feuil\ b\ x))$
- 2) $\vdash \phi b, \phi x, (\dot{\neg} \delta b x \longleftrightarrow \dot{\neg}(Feuil\ b\ x))$

Lemme 282 :

- 1) $\vdash \phi b, \phi x, \dot{\neg} \delta b x \longrightarrow \delta b x = (\dot{\Delta}\ \delta\ b\ x)$
- 2) $\vdash \phi b, \phi x, \phi y, \langle x, y \rangle \dot{\in} b \longrightarrow \dot{\neg}(Feuil\ b\ x)$

Le lemme qui suit décrit le comportement applicatif de $\delta bx \neq T$ sur les éléments de Φ . Il exprime en particulier que, pour tout $y \in \Phi$, il existe un $z \in \Phi$ tel que $\delta bxy = \delta bz$. Autrement dit, un terme de la forme δbxy peut toujours être égaliser à un terme de la forme δbz :

Lemme 283 :

$$1) \vdash \phi b, \phi x, \phi y, \langle x, y \rangle \dot{\in} b \longrightarrow \delta bxy = ((\dot{\Delta} \delta bx)y) = \delta b(\tilde{I}y)$$

$$2) \vdash \phi b, \phi x, \phi y, \langle x, y \rangle \dot{\in} b \longrightarrow \langle x, (\tilde{I}y) \rangle \dot{\in} b$$

$$3) \vdash \phi b, \phi x, \phi y, \dot{\neg} \langle x, y \rangle \dot{\in} b \longrightarrow \delta bxy = ((\dot{\Delta} \delta bx)y) = \delta b(Enf bx)$$

Preuve. On a trivialement $((\dot{\Delta} \delta bx)y) = (if \langle x, y \rangle \dot{\in} b \ db(\tilde{I}y) \ db(Enf bx))$.

Le 1 et le 3 découlent donc facilement des tautologies

$v \longrightarrow (if v z z') = z$ et $\dot{\neg} v \longrightarrow (if v z z') = z'$ en utilisant les deux lemmes précédents. Maintenant, comme \langle , \rangle est compatible avec \sim , par le théorème *Substit_s*, on a :

$$\vdash \phi b, \phi x, \phi y, \phi z, y \sim z \longrightarrow \langle x, y \rangle \dot{\in} b = \langle x, z \rangle \dot{\in} b$$

En instanciant z par $(\tilde{I}y)$, on vérifie alors facilement le 2 en utilisant le Lemme 270. ■

Propriétés de δ découlant de *MTA-Déco*

Le lemme suivant, qui découle de *MTA-Déco* (et du Lemme 273), donne son équivalent pour les termes de la forme δbxy :

Lemme 284 (*MTA-Déco'*) $\vdash \phi b, \phi x, \phi y \longrightarrow \tilde{\phi}(\delta bxy)$

Les corollaires suivants expriment des propriétés des termes de la forme δbx et δbxy qui découlent de *MTA-Déco* et de *MTA-Déco'*. Ils se montrent aisément en utilisant respectivement les Lemmes 270, 271, et les Corollaires 272 et 274 :

Corollaire 285 :

$$1) \vdash \phi b, \phi x \longrightarrow \phi(\tilde{I} \delta bx)$$

$$\vdash \phi b, \phi x \longrightarrow \delta bx \sim (\tilde{I} \delta bx)$$

$$2) \vdash \phi b, \phi x, \phi y \longrightarrow \phi(\tilde{I} \delta bxy); \quad \delta bxy \sim (\tilde{I} \delta bxy)$$

Corollaire 286 (*Réfl_δ*)

$$1) \vdash \phi b, \phi x \longrightarrow \delta bx \sim \delta bx$$

$$2) \vdash \phi b, \phi x, \phi y \longrightarrow \delta bxy \sim \delta bxy$$

Corollaire 287 (*Dét_δ*)

$$1) \vdash \phi b, \phi x \longrightarrow !\delta bx$$

$$2) \vdash \phi b, \phi x, \phi y \longrightarrow !\delta bxy$$

Notation 288 Soient $\bar{b} = b_1, \dots, b_n$ et $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ et $\bar{y} = y_1, \dots, y_n$, on pose :

- 1) $\delta\bar{b}\bar{x} = \delta b_1 x_1, \dots, \delta b_n x_n$
- 2) $\delta\bar{b}\bar{x}\bar{y} = \delta b_1 x_1 y_1, \dots, \delta b_n x_n y_n$

Lemme 289 (*DétZFC $_\delta$*) Pour tout ZFC-terme $B[\bar{z}, \bar{u}, \bar{v}]$ on a :
 $\vdash \phi\bar{z}, \phi\bar{b}, \phi\bar{x}, \phi\bar{y} \longrightarrow! (B[\delta\bar{b}\bar{x}/\bar{u}; \delta\bar{b}\bar{x}\bar{y}/\bar{v}])$

Nous donnons maintenant un corollaire immédiat du lemme précédent qui nous sera utile pour démontrer la compatibilité de \sim avec les termes de la forme δb (Théorème 296) :

Corollaire 290 $\vdash \phi b, \phi y, \phi z, \phi u \longrightarrow! \exists v. (\delta byu \sim \delta bzv)$

Preuve. Par *DétZFC $_\delta$* on a $\vdash \phi b, \phi y, \phi z, \phi u, \phi v \longrightarrow! \delta byu \sim \delta bzv$. Les points 1 et 2 sont donc des conséquences immédiate de *Dét $_{\exists, \forall}$* (Lemme 79).
 ■

Le dernier lemme de cette section exprime que les “éléments” de $\delta b x$ sont de la forme $\delta b x y$ pour $y \in \Phi$:

Lemme 291 :

- 1) $\vdash \phi x, \phi y, \dot{\sim} \delta b x \longrightarrow \delta b x y \dot{\in} \delta b x$
- 2) Soit $z_0 =_{def} \varepsilon z. \delta b x z \sim y$, on a :
 $\vdash \phi x, \phi y, y \dot{\in} \delta b x \longrightarrow \phi z_0$
 $\vdash \phi x, \phi y, y \dot{\in} \delta b x \longrightarrow \delta b x z_0 \sim y$

Preuve. Le 2 est une application immédiate de *NonVide.1* (Lemme 163), on montre le 1 :

- | | |
|---|--|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi b = \phi x = \phi y = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $\dot{\sim} \delta b x = T$ |
| 3. <i>Triv.</i> | $\delta b x y \dot{\in} \delta b x = \dot{\exists} z. \delta b x z \sim \delta b x y$ |
| 4. <i>MP(1, 2; Réfl_δ)</i> | $\delta b x y \sim \delta b x y$ |
| 5. <i>MP(1, 2; DétZFC$_\delta$) + Triv.(3)</i> | $!(\delta b x y \dot{\in} \delta b x) =!(\dot{\exists} v. \delta b x v \sim \delta b x y) = T$ |
| 6. <i>Exhib(1, 4, 3) + Triv(3)</i> | $\dot{\exists} v. \delta b x v \sim \delta b x y = \delta b x y \dot{\in} \delta b x = T$ |
-

Compatibilités de δ avec \sim

L’objet de cette section est la démonstration du Théorème 296 qui exprime la compatibilité de $\delta b x$ et $\delta b x y$ avec \sim respectivement en x et en x, y .

Celle-ci va découler de la compatibilité forte des sous-termes entrants dans la définition de δ . Ce sera l'objet des deux lemmes suivants.

Le premier est une application immédiate du *Substit_s* puisque le ϕ -constructeur \langle , \rangle est compatible avec \sim (Corollaire 241).

Lemme 292 $\vdash \phi b, \phi x, \phi y, \phi y', \phi x', x \sim x', y \sim y' \longrightarrow \langle x, y \rangle \dot{\in} b = \langle x', y' \rangle \dot{\in} b$

Lemme 293 :

1) $\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \sim x' \longrightarrow (Enf\ b\ x) = (Enf\ b\ x')$

2) $\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \sim x' \longrightarrow (Feuil\ b\ x) = (Feuil\ b\ x')$

Preuve. Une conséquence facile du lemme précédent et de $Réfl_{\phi}^{\sim}$ est que :

$\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \sim x', \phi y \longrightarrow \langle x, y \rangle \dot{\in} b = \langle x', y \rangle \dot{\in} b$

De plus, par *DetZFCs* on a :

$\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \sim x', \phi y \longrightarrow !\langle x, y \rangle \dot{\in} b$

Par le Lemme 180, il vient alors :

$\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \sim x', \phi y \longrightarrow \varepsilon y. \langle x, y \rangle \dot{\in} b = \varepsilon y. \langle x', y \rangle \dot{\in} b$

$\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \sim x', \phi y \longrightarrow \dot{\exists} y. \langle x, y \rangle \dot{\in} b = \dot{\exists} y. \langle x', y \rangle \dot{\in} b$

Les points 1 et 2 découle alors trivialement par définition de *Enf* et *Feuil*.

■

Corollaire 294 :

1) $\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \sim x', (\delta b x \longleftrightarrow \delta b x')$

2) $\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \sim x', (\dot{\neg} \delta b x \longleftrightarrow \dot{\neg} \delta b x')$

Preuve. Découle immédiatement du Lemme 281 et du lemme précédent par transitivité de \longleftrightarrow .

■

Le lemme suivant exprime la forte compatibilité de $\delta b x y$ avec \sim relativement à y , il en découlera le théorème central de cette section :

Lemme 295 $\vdash \phi b, \phi x, \phi x', \phi y, \phi y', x \sim x', y \sim y' \longrightarrow \delta b x y = \delta b x' y'$

Preuve.

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi b = \phi x = \phi x' = \phi y = \phi y' = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $x \sim x' = y \sim y' = T$ |
| 3. <i>hyp+</i> | $\delta b x = T$ |
| 4. <i>MP(1, 2, 3; Cor294.1)</i> | $\delta b x' = T$ |
| 5. <i>Trivial(3, 4)</i> | $\delta b x y = \delta b x' y' = T y = T y' = T$ |
| 6. <i>Déduct-(3, 5)</i> | $\delta b x \longrightarrow \delta b x y = \delta b x' y'$ |

- | | |
|--|--|
| 7. <i>hyp</i> + | $\dot{\vdash} \delta b x = T$ |
| 8. <i>MP</i> (1, 2, 7; <i>Cor</i> 294.2) | $\dot{\vdash} \delta b x' = T$ |
| 9. <i>MP</i> (8; <i>Lem</i> 282) | $\delta b x = (\dot{\Delta} \delta b x); \delta b x' = (\dot{\Delta} \delta b x')$ |
| 10. <i>MP</i> (1, 2; <i>Lem</i> 270.2) | $(\tilde{I}y) = (\tilde{I}y')$ |
| 11. <i>MP</i> (1, 2; <i>Lem</i> 293.1) | $(E n f b x) = (E n f b x')$ |
| 12. <i>MP</i> (1, 2; <i>Lem</i> 292) | $\langle x, y \rangle \dot{\in} b = \langle x', y' \rangle \dot{\in} b$ |
| 13. <i>Trivial</i> (10, 11, 12) | $((\dot{\Delta} \delta b x)y) = ((\dot{\Delta} \delta b x')y')$ |
| 14. <i>Trivial</i> (9, 13) | $\delta b x y = \delta b x' y'$ |
| 15. <i>Déduct</i> -(7, 14) | $\dot{\vdash} \delta b x \longrightarrow \delta b x y = \delta b x' y'$ |
| 16. <i>MP</i> (1; <i>Dét</i> $_{\delta}$) | $! \delta b x = T$ |
| 17. <i>TND</i> (3, 15, 16) | $\delta b x y = \delta b x' y'$ |

■

Théorème 296 (*Compat* $_{\delta}$)

- 1) $\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \dot{\sim} x' \longrightarrow \delta b x \dot{\sim} \delta b x'$
 2) $\vdash \phi b, \phi x, \phi x', \phi y, \phi y', x \dot{\sim} x', y \dot{\sim} y' \longrightarrow \delta b x y \dot{\sim} \delta b x' y'$

Preuve. Le point 2 découle immédiatement du lemme précédent, de *Réfl* $_{\delta}$ et du Lemme 187. Pour le point 1 on raisonne par *TND*. Pour simplifier les écritures, on utilise les abréviations $z_0 =_{def} \delta b x$ et $z_1 =_{def} \delta b x'$:

- | | |
|---|---|
| 1. <i>hyp</i> | $\phi b = \phi x = \phi x' = T$ |
| 2. <i>hyp</i> | $x \dot{\sim} x' = T$ |
| 3. <i>hyp</i> + | $z_0 = T$ |
| 4. <i>MP</i> (1, 2, 3; <i>Cor</i> 294.1) | $z_1 = T$ |
| 5. <i>Méta</i> (<i>Lem</i> 154)(3, 4) | $z_0 \dot{\sim} z_1 = z_0 \dot{\sim} z_0 = T$ |
| 6. <i>Déduct</i> -(3, 6) | $z_0 \longrightarrow z_0 \dot{\sim} z_1$ |
| 7. <i>hyp</i> + | $\dot{\vdash} z_0 = T$ |
| 8. <i>MP</i> (1, 2; <i>Cor</i> 294.2) | $\dot{\vdash} z_1 = T$ |
| 9. <i>hyp</i> + | $\phi u = T$ |
| 10. <i>MP</i> (9; <i>Réfl</i> $_{\phi}$) | $u \dot{\sim} u = T$ |
| 11. <i>MP</i> (1, 2, 10; <i>Point</i> 2) | $(z_0 u) \dot{\sim} (z_1 u) = T$ |
| 12. <i>MP</i> (1, 2, 9; <i>Cor</i> 290) | $! \dot{\exists} v. (z_0 u) \dot{\sim} (z_1 v) = ! \dot{\exists} v. (z_1 u) \dot{\sim} (z_0 v) = T$ |
| 13. <i>Exhib</i> (8, 12, 11) | $\dot{\exists} v. (z_0 u) \dot{\sim} (z_1 v) = \dot{\exists} v. (z_1 u) \dot{\sim} (z_0 v) = T$ |
| 14. <i>Déduct</i> -(8, 12) + <i>Géné</i> | $\forall u \dot{\exists} v. (z_0 u) \dot{\sim} (z_1 v) = \forall u \dot{\exists} v. (z_1 u) \dot{\sim} (z_0 v) = T$ |
| 15. <i>LoiLg</i> 2(14) + <i>Déf</i> (\sqsubseteq)(14) | $(z_0 \sqsubseteq z_1 \wedge z_1 \sqsubseteq z_0) = T$ |
| 16. <i>Trivial</i> (15, <i>Lem</i> 170) | $z_0 \dot{\sim} z_1 = T$ |
| 17. <i>Méta</i> (<i>Lem</i> 158)(7, 8, 16) | $z_0 \dot{\sim} z_1 = T$ |
| 18. <i>Déduct</i> -(7, 17) | $\dot{\vdash} z_0 \longrightarrow z_0 \dot{\sim} z_1$ |
| 19. <i>TND</i> (<i>Dét</i> $_{\delta}$, 6, 18) | $z_0 \dot{\sim} z_1 = T$ |

■

3.6.3 Le ϕ -constructeur $\tilde{\delta}$

Définition 297 $\tilde{\delta} = \lambda b \lambda x. \tilde{I}(\delta b x)$

Les premières propriétés de $\tilde{\delta}$ découlent facilement du Lemme 270 par *MTA-Déco* :

Lemme 298 :

$$1) \vdash \phi b, \phi x \longrightarrow \phi \tilde{\delta} b x$$

$$2) \vdash \phi b, \phi x \longrightarrow \tilde{\delta} b x \sim \delta b x$$

La compatibilité de $\tilde{\delta} b$ avec \sim découle de celle de δb :

Théorème 299 (*Compat $_{\tilde{\delta}}$*)

$$\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \sim x' \longrightarrow \tilde{\delta} b x = \tilde{\delta} b x'$$

$$\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \sim x' \longrightarrow \tilde{\delta} b x \sim \tilde{\delta} b x'$$

Preuve. Le deuxième résultat découle immédiatement du premier par *Réfl $_{\phi}^{\sim}$* . De plus, on vérifie facilement que par *Compat $_{\delta}$* et *DétZFC $_{\delta}$* on a :

$$\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \sim x', \phi u \longrightarrow (u \sim \delta b x \Leftrightarrow u \sim \delta b x')$$

Le premier résultat découle alors par *Ackermann* puisque $\tilde{\delta} b x =_{\beta} \varepsilon u. u \sim \delta b x$.

■

Corollaire 300 $\vdash \phi b, \phi x, \phi x', x \sim x' \longrightarrow \langle x, \tilde{\delta} b x \rangle \sim \langle x', \tilde{\delta} b x' \rangle$

Preuve. Découle facilement du théorème précédent et *Compat $_{Cpl}$* . ■

3.6.4 Le ϕ -constructeur *Décoration*(,)

Définition 301 *Décoration*(,) $=_{def} \lambda a \lambda b. \lambda z. \langle a z, \tilde{\delta} b(a z) \rangle$

Pour simplifier les écritures nous travaillerons à partir de maintenant avec le β -réduit $Dab =_{def} \lambda z. \langle a z, \tilde{\delta} b(a z) \rangle$ de *Décoration*(a, b), les équations vérifiées par ce β -réduit l'étant trivialement par *Décoration*(a, b). Nous allons voir ici les propriétés de base de Dab , elles découlent essentiellement de ce que :

Lemme 302 *Dab* est une *MT-Fonction Standard* de domaine a .

Preuve. On doit vérifier les conditions (i) et (ii) de la Définition 243. Or, le (i) est donné par le Lemme 298.1, et le (ii) par le théorème précédent.

■

Il vient immédiatement par les Lemmes 245, 246, le Corollaire 248 et le Lemme 249 :

Corollaire 303 $\vdash \phi a, \phi b \longrightarrow \phi(Dab)$

Corollaire 304 :

- 1) $\vdash \dot{\neg}Dab = T$
- 2) $\vdash z \dot{\in} Dab = \dot{\exists}v.(Dabv) \dot{\sim} z$
- 3) $\vdash \phi a, \phi b, \phi z \mapsto \langle (az), \dot{\delta}b(az) \rangle \dot{\in} Dab$

Corollaire 305 $\vdash \phi a, \phi b, \phi x, x \dot{\in} a \longrightarrow \langle x, \dot{\delta}bx \rangle \dot{\in} Dab$

Corollaire 306 Soient $v_0 =_{def} \varepsilon v.(r_{a,st})v \dot{\sim} \langle x, z \rangle$ et $x_0 = (av_0)$, on a :

- 1) $\vdash \phi a, \phi b, \phi x, \phi z, \langle x, z \rangle \dot{\in} Dab \longrightarrow \phi x_0$
- 2) $\vdash \phi a, \phi b, \phi x, \phi z, \langle x, z \rangle \dot{\in} Dab \longrightarrow x_0 \dot{\sim} x$
 $\vdash \phi a, \phi b, \phi x, \phi z, \langle x, z \rangle \dot{\in} Dab \longrightarrow (\dot{\delta}bx_0) \dot{\sim} z$
- 3) $\vdash \phi a, \dot{\neg}a, \phi b, \phi x, \phi z, \langle x, z \rangle \dot{\in} Dab \longrightarrow x_0 \dot{\in} a$

3.6.5 Prouvabilité de $\dot{A}\dot{F}A1$

Nous montrons maintenant $\dot{A}\dot{F}A1$, autrement dit :

$$\vdash \dot{\forall}a \dot{\forall}b (\dot{\exists}x(x \dot{\in} a) \dot{\wedge} \dot{\exists}x(x \dot{\in} b) \dot{\wedge} \dot{G}raph[a, b] \dot{\Rightarrow} \dot{\exists}d.\dot{D}\acute{e}co[a, b, d])$$

où $\dot{G}raph$ et $\dot{D}\acute{e}co$ sont les traductions des formules $Graph$ et $D\acute{e}co$ de la théorie des ensembles (voir Notation 231 7 et 8).

Comme pour la démonstration de l’Axiome du Choix dans *MTA*, nous allons poser une suite d’hypothèses $\overline{H} \equiv_{def} \overline{A} = \overline{T}$. Les théorèmes démontrés à la suite de ces hypothèses seront donc des théorèmes de $MTA(\overline{A}; \overline{A})$. Pour retrouver les théorèmes de *MTA* correspondants il suffira alors d’utiliser le Théorème de Déduction. Ainsi, si $\vdash_{MTA(\overline{A}; \overline{A})} B = C$, le théorème de *MTA* correspondant est $\vdash \overline{A} \longrightarrow B = C$. Pour simplifier, on écrira $\vdash_{\overline{H}} B = C$ pour $\vdash_{MTA(\overline{A}; \overline{A})} B = C$. On pose maintenant les hypothèses dont nous allons nous servir :

- $H1 : \phi a = T; \dot{\neg}a = T$
- $H2 : \phi b = T; \dot{\neg}b = T$
- $H3 : Graph[a, b] = T$

Nous montrons que Dab est une “décoration” du “graphe (a, b) ”, c’est à dire que :

$$\vdash_{\overline{H}} D\acute{e}co[Dab, a, b] = T$$

Par *LoiLg2*, il suffit de montrer $\dot{F}nDm[a, Dab] = T$ puis $\dot{D}c[b, Dab] = T$ (Cf Notation 231.6). Comme Dab est une *MT*-fonction standard de domaine a , la première équation est donnée par le Théorème 250, il reste donc à montrer la deuxième équation. Nous verrons qu’elle se déduit du résultat suivant :

(*) $\vdash_{\overline{H}} \phi x, \phi y', y' \dot{\in} \delta b x \longleftrightarrow \dot{\exists} x'. \dot{C}plsIn[b; x, x' \& Dab; x', y']$

Tout d'abord, comme b est une "relation binaire" sur a et que Dab est une "fonction de domaine a ", il suit du Lemme 254 et du Corollaire 305 :

Lemme 307 :

$\vdash_{\overline{H}} \phi x, \phi x', \langle x, x' \rangle \dot{\in} b \longrightarrow \langle x, \tilde{\delta} b x \rangle \dot{\in} Dab$

$\vdash_{\overline{H}} \phi x, \phi x', \langle x, x' \rangle \dot{\in} b \longrightarrow \langle x', \tilde{\delta} b x' \rangle \dot{\in} Dab$

On montre maintenant le sens \longrightarrow de (*) :

Lemme 308 $\vdash_{\overline{H}} \phi x, \phi y', y' \dot{\in} \delta b x \longrightarrow \dot{\exists} x'. \dot{C}plsIn[b; x, x' \& Dab; x', y']$

Preuve. Soit $z_0 =_{def} \varepsilon z. (\delta b x) z \sim y'$, on va montrer les deux points suivants :

(i) $\vdash_{\overline{H}} \phi x, \phi y', y' \dot{\in} \delta b x, \langle x, z_0 \rangle \dot{\in} b \longrightarrow \dot{\exists} x'. \dot{C}plsIn[b; x, x' \& Dab; x', y']$

(ii) $\vdash_{\overline{H}} \phi x, \phi y', y' \dot{\in} \delta b x, \dot{\neg} \langle x, z_0 \rangle \dot{\in} b \longrightarrow \dot{\exists} x'. \dot{C}plsIn[b; x, x' \& Dab; x', y']$

Le résultat en découlant immédiatement par TND . Le (ii) se montre essentiellement comme le (i) en remplaçant $(\tilde{I}z_0)$ par $(Enf\ b\ x)$ et le Lemme 283.1 par le Lemme 283.3, on montre (i) :

1. *hyp* $\phi x = \phi y' = T$
2. *hyp* $y' \dot{\in} \delta b x = T$
3. *hyp* $\langle x, z_0 \rangle \dot{\in} b = T$
4. *NonVide.1(2)* $\phi z_0 = \delta b x z_0 \sim y' = T$
5. *Méta(Cor283.1)(1, 3, 4)* $\delta b x z_0 = \delta b(\tilde{I}z_0)$
6. *Méta(Cor283.2)(1, 3, 4)* $\langle x, (\tilde{I}z_0) \rangle \dot{\in} b = T$
7. *Méta(Lem269)(4)* $\phi(\tilde{I}z_0) = \tilde{I}z_0 \sim z_0 = T$
8. *Trivial(4, 5)* $\delta b(\tilde{I}z_0) \sim y' = T$
9. *Méta(Lem298)(H2, 7)* $\tilde{\delta} b(\tilde{I}z_0) \sim \delta b(\tilde{I}z_0) = T$
10. *Trans \sim +Sym \sim (8, 9)* $\tilde{\delta} b(\tilde{I}z_0) \sim y' = T$
11. *Méta(Lem307)(7, 6)* $\langle (\tilde{I}z_0), \tilde{\delta} b(\tilde{I}z_0) \rangle \dot{\in} Dab = T$
12. *MP(H1, H2; Cor303)* $\phi(Dab) = T$
13. *Méta(Lem298)(H2, 8)* $\phi(\tilde{\delta} b(\tilde{I}z_0)) = T$
14. *Méta(Cor239.3)(1, H1, 7, 6)* $\dot{C}plIn[b; x, (\tilde{I}z_0)] = T$
15. *Méta(Cor239.3)(12, 7, 13, 11)* $\dot{C}plIn[Dab; (\tilde{I}z_0), \tilde{\delta} b(\tilde{I}z_0)] = T$
16. *Méta(LoiLg2)(14, 15)* $\dot{C}plsIn[b; x, (\tilde{I}z_0) \& Dab; (\tilde{I}z_0), \tilde{\delta} b(\tilde{I}z_0)] = T$
17. *Méta(Substit)(H1, 1, 7, 10, 16)* $\dot{C}plsIn[b; x, (\tilde{I}z_0) \& Dab; (\tilde{I}z_0), y'] = T$
18. *Exhib(7, 17)* $\dot{\exists} x'. (\dot{C}plsIn[b; x, x' \& Dab; x', y']) = T$

■

On montre maintenant le sens \longleftarrow de (*). Compte tenu de *Choix* et *Méta*, ce sens découle facilement du résultat suivant :

Lemme 309 $\vdash_{\overline{H}} \phi x, \phi y', \phi x', \dot{C}plIn[b; x, x'], \dot{C}plIn[Dab; x', y'] \longrightarrow y' \dot{\in} \delta bx$

Preuve.

1. *hyp* $\phi x = \phi x' = \phi y = T$
 2. *hyp* + *MP*(1; *Lem*240) $\dot{C}plIn[b; x, x'] = \langle x, x' \rangle \dot{\in} b = T$
 3. *hyp* + *MP*(1; *Lem*240) $\dot{C}plIn[Dab; x', y'] = \langle x', y' \rangle \dot{\in} Dab = T$
 4. *Mé*ta(*Couple*)(1) $\phi \langle x, x' \rangle = T$
 5. *MP*(1, 2; *Lem*282) $\dot{\in} \delta bx = T$
- Soient :
6. *MP*(1, 3; *Cor*306.1) $\phi x_0 = T$
 7. *MP*(1, 3; *Cor*306.2) $x_0 \sim x' = \tilde{\delta} b x_0 \sim y' = T$
 8. *Mé*ta(*Compat*_{*Cpl*})(1, 7) $\langle x, x' \rangle \sim \langle x, x_0 \rangle = T$
 9. *Mé*ta(*Substit*)(2, 4) $\langle x, x_0 \rangle \dot{\in} b = T$
 10. *Mé*ta(*Lem*282)(1, 9, 8) $((\delta bx) x_0) = \delta b(\tilde{I} x_0)$
 11. *Mé*ta(*Lem*269)(6) $\phi(\tilde{I} x_0) = (\tilde{I} x_0) \sim x_0 = T$
 12. *Mé*ta(*Compat* _{$\tilde{\delta}$})(6, 11) $\tilde{\delta} b x_0 = \tilde{\delta} b(\tilde{I} x_0)$
 13. *Mé*ta(*Lem*298.2)(*H2*, 11) $\tilde{\delta} b(\tilde{I} x_0) \sim \delta b(\tilde{I} x_0) = T$
 14. *Triv.*(12+10, 13) $\tilde{\delta} b x_0 \sim ((\delta bx) x_0) = T$
 15. *Sym*[~]+*Trans*[~](7, 14) $((\delta bx) x_0) \sim y' = T$
 16. *Triv.*(5) + *DétZFC* _{δ} (*H2*, 1) $! y' \dot{\in} \delta bx = ! \dot{\exists} v. \delta b x v \sim y' = T$
 17. *Exhib*(6, 16, 15) $\dot{\exists} v. \delta b x v \sim y' = y' \dot{\in} \delta bx = T$

■

Des deux lemmes précédents, il découle immédiatement par *Equiv*_{*NonM*→*M*} et *Géné* que :

Corollaire 310 $\vdash_{\overline{H}} \phi x \longrightarrow \dot{\forall} y'. (y' \dot{\in} \delta bx \Leftrightarrow \dot{\exists} x'. \dot{C}plIn[b; x, x' \& Dab; x', y'])$

On montre maintenant le théorème principal de cette section :

Théorème 311 $\vdash_{\overline{H}} \dot{D}c[b, Dab] = T$

Preuve. Par *Implic*_{*NonM*→*M*} et *Géné* il suffit de montrer :

$\vdash_{\overline{H}} \phi x, \phi y, \dot{C}plIn[Dab; x, y] \longrightarrow \dot{\forall} y'. (y' \dot{\in} y \Leftrightarrow \dot{\exists} x'. \dot{C}plsIn[b; x, x' \& Dab; x', y'])$

1. *hyp* $\phi x = \phi y = T$
 2. *hyp* + *MP*(1; *Lem*240) $\dot{C}plIn[Dab; x, y] = \langle x, y \rangle \dot{\in} Dab = T$
- Soient :
3. *MP*(1, 2; *Cor*306) $\phi x_0 = x_0 \sim x = \tilde{\delta} b x_0 \sim y = T$
 4. *Mé*ta(*Cor*310)(3) $\dot{\forall} y'. (y' \dot{\in} \delta b x_0 \Leftrightarrow \dot{\exists} x'. \dot{C}plsIn[b; x_0, x' \& Dab; x', y']) = T$
 5. *Mé*ta(*Lem*298.2)(3) $\tilde{\delta} b x_0 \sim \delta b x_0 = T$
 6. *Trans*[~] $y \sim \delta b x_0 = T$
 7. *Mé*ta(*Substit*)(1, 3, 6) $\dot{\forall} y'. (y' \dot{\in} y \Leftrightarrow \dot{\exists} x'. \dot{C}plIn[b; x, x' \& Dab; x', y']) = T$

■

On en arrive au théorème final, objet de cette section :

Théorème 312 $\vdash \forall a \forall b. (\exists x. x \in a \wedge \exists x. x \in b \wedge \dot{G}raph[a, b]) \Rightarrow \exists d. \dot{D}éco[a, b, d]$

Preuve. Par *LoiLg2*, *Déduct* et les Théorèmes 250 et 311, on vérifie facilement :

(*) $\vdash \phi a, \phi b, \dot{\neg} a, \dot{\neg} b, \dot{G}raph[a, b] \longrightarrow \dot{D}éco[a, b, Dab]$

on montre maintenant le résultat :

1. *hyp* $\phi a = \phi b = T$
2. *hyp+* $\exists x. x \in a \wedge \exists x. x \in b \wedge \dot{G}raph[a, b] = T$
3. *Méta(LoiLg1)(3)* $\exists x. x \in a = \exists x. x \in b = \dot{G}raph[a, b] = T$
4. *MP(1, 3; Cor166)* $\dot{\neg} a = \dot{\neg} b = T$
5. *MP(1, 3, 4; (*))* $\dot{D}éco[Dab, a, b] = T$
6. *MP(1; Décoration)* $\phi Dab = T$
7. *Exhib(5, 6)* $\exists d. \dot{D}éco[a, b, d] = T$
8. *Déduct-(2, 7)* $\exists x. x \in a \wedge \exists x. x \in b \wedge \dot{G}raph[a, b] \longrightarrow \exists d. \dot{D}éco[a, b, d]$
9. *Implic_{NonM \rightarrow M}(8)* $(\exists x. x \in a \wedge \exists x. x \in b \wedge \dot{G}raph[a, b]) \Rightarrow \exists d. \dot{D}éco[a, b, d] = T$

■

3.7 Principe de *Coinduction* et prouvabilité de $A\dot{F}A_2$

L'objet de cette section est de prouver $A\dot{F}A_2$. Ce théorème sera une conséquence du Principe de *Coinduction*. Nous introduisons ici ce principe qui, rappelons-le, est une règle de déduction. Son énoncé utilise un constructeur \mathcal{Q}' que nous définirons plus tard.

Pour tous termes \bar{A} et t , où u, v n'apparaissent pas libres. :

Coinduction $\bar{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \in t \longrightarrow \mathcal{Q}'tuv \vdash \bar{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \in t \longrightarrow u \dot{\sim} v$

Nous introduisons tout d'abord la terminologie dont nous allons nous servir :

Définition 313 *Nous appellerons MT-bisimulation sous hypothèses \bar{A} , tout terme t tel que : $\vdash \bar{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \in t \longrightarrow \mathcal{Q}'tuv$*

Nous verrons bientôt un exemple de *MT*-bisimulation (Cf Définition 316). Nous donnons maintenant les grandes lignes de la démonstration de $A\dot{F}A_2$:

L'axiome $A\dot{F}A_2$ affirme que, pour tout graphe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , si \mathbf{d} et \mathbf{d}' sont des

décorations de (\mathbf{a}, \mathbf{b}) alors $\mathbf{d} = \mathbf{d}'$. Démontrer *FAA2* consiste donc, en particulier, à vérifier l'égalité de deux fonctions \mathbf{d} et \mathbf{d}' de même domaine \mathbf{a} . Cette vérification passe par celle que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{a}$, on a $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \mathbf{d}'(\mathbf{x})$. Nous procéderons donc dans l'ordre suivant :

1. Nous exhibons une *MT-bisimulation* B sous hypothèses \overline{A} , où \overline{A} est la suite suivante :

$$\overline{A} =_{def} \phi a, \phi b, \phi d, \phi d', \dot{\neg} a, \dot{\neg} b, \dot{G}raph[a, b], \dot{D}éco[a, b, d], \dot{D}éco[a, b, d']$$

2. Par application du Principe de *Coinduction* et du fait que B est une *MT-bisimulation*, on déduira alors :

$$\vdash \overline{A}, \phi x, x \dot{\in} a \longrightarrow d\langle x \rangle \dot{\sim} d'\langle x \rangle$$

Il nous restera à en déduire *FAA2*.

Pour clore cette introduction, nous présentons maintenant le terme \mathfrak{Q}' :

Définition 314 $\mathfrak{Q}' =_{def} \lambda f. \lambda u \lambda v. (if\ u\ (if\ v\ T\ F)\ (if\ v\ F\ \mathfrak{Q}'_0\ f\ u\ v))$

où $\mathfrak{Q}'_0 =_{def} \lambda f. \lambda u \lambda v. (\forall x \exists y. \langle u\ x, v\ y \rangle \dot{\in} f \wedge \forall y \exists x. \langle u\ x, v\ y \rangle \dot{\in} f)$

Les propriétés suivantes du constructeur \mathfrak{Q}' sont triviales :

Lemme 315 *Pour tout terme t*

$$1) \vdash u, v \longrightarrow \mathfrak{Q}'\ t\ u\ v$$

$$2) \vdash \dot{\neg} u, \dot{\neg} v \longrightarrow \mathfrak{Q}'\ t\ u\ v = \mathfrak{Q}'_0\ t\ u\ v$$

3.7.1 La *MT-bisimulation* B

Dans cette section nous exhibons le terme B , et nous montrons que c'est une *MT-bisimulation* sous les hypothèses \overline{A} .

Définition 316 $B =_{def} \lambda v. \langle d\langle a\ v \rangle, d'\langle a\ v \rangle \rangle$

Propriétés élémentaires de B

Les propriétés de B que nous donnons maintenant découlent essentiellement de ce que :

Lemme 317 *B est une *MT-relation* binaire sur a .*

Preuve. Comme par *MT-App* on a $\vdash \phi x, \phi d \longrightarrow \phi(dx)$, le terme B vérifie clairement la condition (i) de la Définition 243.

■

Il vient immédiatement par les Lemmes 245, 246, 247 et 249 :

Corollaire 318 $\vdash \phi a, \phi d, \phi d' \longrightarrow \phi B$

Corollaire 319 :

- 1) $\vdash \dot{\neg}B = T$
- 2) $\vdash z \dot{\in} B = \dot{\exists}v.(Bv) \dot{\sim} z$
- 3) $\vdash \phi a, \phi d, \phi d', \phi z \mapsto \langle d\langle av \rangle, d'\langle av \rangle \rangle \dot{\in} B$

Corollaire 320 $\vdash \phi a, \phi d, \phi d', \phi x, x \dot{\in} a \longrightarrow \langle d\langle x \rangle, d'\langle x \rangle \rangle \dot{\in} B$

Corollaire 321 Soient $v_0 =_{def} \varepsilon z.(Bz) \dot{\sim} \langle u, v \rangle$ et $x_0 =_{def} (av_0)$, on a :

- 1) $\vdash \phi a, \phi d, \phi d', \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} B \longrightarrow \phi x_0$
- 2) $\vdash \phi a, \phi d, \phi d', \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} B \longrightarrow d\langle x_0 \rangle \dot{\sim} u$
 $\vdash \phi a, \phi d, \phi d', \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} B \longrightarrow d'\langle x_0 \rangle \dot{\sim} v$
- 3) $\vdash \phi a, \dot{\neg}a, \phi d, \phi d', \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} B \longrightarrow x_0 \dot{\in} a$

Le terme B est une MT -bisimulation sous hypothèses \overline{A}

Pour montrer que B est une MT -bisimulation sous hypothèses \overline{A} , nous allons travailler, comme pour l'axiome du Choix (Section 2.5.10), en posant l'ensemble d'hypothèses \overline{H} :

- $H1 : \phi a = T; \dot{\neg}a = T$
- $H2 : \phi b = T; \dot{\neg}b = T$
- $H3 : Graph[a, b] = T$
- $H4 : \phi d = \phi d' = T$
- $H5 : Déco[d, a, b] =_{def} \dot{F}nDm[a, d] \wedge \dot{D}c[b, d] = T$
- $H6 : Déco[d', a, b] =_{def} \dot{F}nDm[a, d'] \wedge \dot{D}c[b, d'] = T$

Tout les résultats que nous verrons à partir de maintenant seront des théorèmes de $MTA(\overline{A}; \overline{A})$. En particulier, nous montrerons :

$$\vdash_{\overline{H}} \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} B \longrightarrow \mathcal{A}'Buv$$

Par le Corollaire 262 on sait que, pour tout x tel que $x \dot{\in} a = T$, on a $d\langle x \rangle = T$ ssi $d'\langle x \rangle = T$ et $\dot{\neg}d\langle x \rangle = T$ ssi $\dot{\neg}d'\langle x \rangle = T$. Conjugué au fait, exprimé par le Corollaire 321, que $\langle u, v \rangle \dot{\in} B$ implique $u \dot{\sim} d\langle x \rangle$ et $v \dot{\sim} d'\langle x \rangle$ pour un x tel que $x \dot{\in} a = T$ (puisque par $H2$ on a $\dot{\neg}a = T$), on en déduit :

Lemme 322 :

- 1) $\vdash_{\overline{H}} \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} B, (u \longleftrightarrow v)$
- 2) $\vdash_{\overline{H}} \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} B, (\dot{\neg}u \longleftrightarrow \dot{\neg}v)$

Preuve. Le 2 se montre de façon similaire au 1 en utilisant le Lemme 157 à la place du Lemme 156. Pour le 1, on montre l'implication $u \longrightarrow v$, l'implication réciproque se montrant de la même façon en remplaçant les rôles respectif de u et v :

1. *hyp* $\phi u = \phi v = T$
2. *hyp* $\langle u, v \rangle \in B = T$
3. *hyp* $u = T$
Soient : $v_0 =_{def} \varepsilon z. (Bz) \sim \langle u, v \rangle$ et $x_0 =_{def} (av_0)$
4. *MP*(1, 2; *Cor*321) $\phi x_0 = d\langle x_0 \rangle \sim u = d'\langle x_0 \rangle \sim v = x_0 \dot{\in} a = T$
5. *Mé*ta(*Lem*156)(3, 4) $u = d\langle x_0 \rangle = T$
6. *Mé*ta(*Cor*262)(4, 6) $d'\langle x_0 \rangle = T$
7. *Mé*ta(*Lem*156)(3, 6) $v = d'\langle x_0 \rangle = T$

■

On montre que si u et v sont “non-vides” alors $\mathfrak{A}Buv = T$:

Lemme 323 :

- 1) $\vdash_{\overline{H}} \phi u, \phi v, \dot{\neg} u, \dot{\neg} v, \langle u, v \rangle \in B \longrightarrow \dot{\forall} y \dot{\exists} z. \langle uy, vz \rangle \in B$
- 2) $\vdash_{\overline{H}} \phi u, \phi v, \dot{\neg} u, \dot{\neg} v, \langle u, v \rangle \in B \longrightarrow \dot{\forall} z \dot{\exists} y. \langle uy, vz \rangle \in B$
- 3) $\vdash_{\overline{H}} \phi u, \phi v, \dot{\neg} u, \dot{\neg} v, \langle u, v \rangle \in B \longrightarrow \mathfrak{A}'_0 Buv$
- 4) $\vdash_{\overline{H}} \phi u, \phi v, \dot{\neg} u, \dot{\neg} v, \langle u, v \rangle \in B \longrightarrow \mathfrak{A} Buv$

Preuve. Le 4 est une conséquence immédiate du 3 et du Lemme 315. Le 3 découle de 1 et 2 par définition de \mathfrak{A}'_0 (Définition 314) et *LoiLg*2. Le 2 se montre de façon similaire au 1 en intervertissant les rôles respectifs de u et v .

On montre le 1. Soit $v_0 =_{def} \varepsilon z. Bz \sim \langle u, v \rangle$ et $x_0 =_{def} (av_0)$:

1. *hyp* $\phi u = \phi v = T$
2. *hyp* $\dot{\neg} u = \dot{\neg} v = \langle u, v \rangle \in B = T$
3. *MP*(1, 2; *Cor*321) $\phi x_0 = d\langle x_0 \rangle \sim u = d'\langle x_0 \rangle \sim v = x_0 \dot{\in} a = T$
4. *Mé*ta(*Lem*157)(2, 3) $\dot{\neg} d\langle x_0 \rangle = \dot{\neg} d'\langle x_0 \rangle = T$
5. *Mé*ta(*Lem*158)(2, 4) + *Triv.*(3) $d\langle x_0 \rangle \sim_0 u = d'\langle x_0 \rangle \sim_0 v = T$
6. *Mé*ta(*LoiLg*1)(5) + *Déf*(107) $\dot{\forall} y \dot{\exists} z. d\langle x_0 \rangle z \sim uy = T$
7. *hyp* + $\phi y = T$
8. *Inst* $\dot{\forall}$ (7, 6) $\dot{\exists} z. d\langle x_0 \rangle z \sim uy = T$
Soit : $z_0 =_{def} \varepsilon z. d\langle x_0 \rangle z \sim uy$
9. *Choi*x(8) $\phi z_0 = d\langle x_0 \rangle z_0 \sim uy = T$
Soit : $w_0 =_{def} \varepsilon x'. \dot{C}plsIn[b; x_0, x' \ \& \ d; x', d\langle x_0 \rangle z_0]$
10. *Mé*ta(*Lem*265)(\overline{H} , 3, 9, 4) $\phi w_0 = w_0 \dot{\in} a = \dot{C}plsIn[b; x_0, w_0] = d\langle w_0 \rangle \sim d\langle x_0 \rangle z_0 = T$
11. *Mé*ta(*Lem*263)(\overline{H} , 3, 10) $d'\langle w_0 \rangle \dot{\in} d'\langle x_0 \rangle = T$
12. *Mé*ta(*Eval*)(*H*4, 10, 3) $\phi d\langle w_0 \rangle = \phi d'\langle w_0 \rangle = d\langle x_0 \rangle = d'\langle x_0 \rangle = T$

- | | |
|---|---|
| 13. Méta(<i>Substit</i>)(3, 12, 11) + Rem162 | $d'\langle w_0 \rangle \dot{\in} v = \dot{\exists}y.(vy) \sim d'\langle w_0 \rangle = T$ |
| Soit : | $y_0 =_{def} \varepsilon y.vy \sim d'\langle w_0 \rangle$ |
| 14. <i>Choix</i> (12) | $\phi y_0 = vy_0 \sim d'\langle w_0 \rangle = T$ |
| 15. <i>Trans</i> \sim + <i>Sym</i> \sim (9, 10) | $uy \sim d'\langle w_0 \rangle = T$ |
| 16. Méta(<i>MT-App</i>)(1, 7, 14) | $\phi(uy) = \phi(vy_0) = T$ |
| 17. Méta(<i>Compat_{Cpl}</i>)(12, 16) | $\langle uy, vy_0 \rangle \sim \langle d'\langle w_0 \rangle, d'\langle w_0 \rangle \rangle = T$ |
| 18. Méta(<i>Couple</i>)(12, 16) | $\phi\langle ux, vy_0 \rangle = \phi\langle d'\langle w_0 \rangle, d'\langle w_0 \rangle \rangle = T$ |
| 19. Méta(<i>Lem??</i>)(\bar{H} , 10) | $\langle d'\langle w_0 \rangle, d'\langle w_0 \rangle \rangle \dot{\in} B = T$ |
| 20. Méta(<i>Substit</i>)(17, 19) | $\langle uy, vy_0 \rangle \dot{\in} B = T$ |
| 21. <i>MP</i> (1, 7; <i>DétZFCs</i>) | $\dot{\exists}z.\langle uy, vz \rangle \dot{\in} B = T$ |
| 22. <i>Exhib</i> (14, 21, 20) | $\dot{\exists}z.\langle uy, vz \rangle \dot{\in} B = T$ |
| 23. <i>Déduct</i> -(7, 22) + <i>Géné</i> | $\dot{\forall}y\dot{\exists}z.\langle uy, vz \rangle \dot{\in} B = T$ |

■

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que B est une *MT*-bisimulation d'hypothèses \bar{A} et d'appliquer le principe de *Coinduction* :

Théorème 324 :

- 1) $\vdash \bar{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} B \longrightarrow \mathfrak{A}'Buv$
- 2) $\vdash \bar{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} B \longrightarrow u \sim v$

Preuve. Le 2 est une simple application du principe de *Coinduction* à

1. Pour montrer 1, on raisonne par *TND* :

1. *hyp* $\bar{A} = T$
2. *hyp* $\phi u = \phi v = T$
3. *hyp* $\langle u, v \rangle \dot{\in} B = T$
4. *hyp+* $u = T$
5. *MP*(2, 3; *Lem322.1*) $v = T$
6. *MP*(4, 5; *Lem315.1*) $\mathfrak{A}'Buv = T$
7. *Déduct*-(4, 6) $u \longrightarrow \mathfrak{A}'Buv$
8. *hyp+* $\dot{\neg}u = T$
9. *MP*(2, 3, *Lem322.2*) $\dot{\neg}v = T$
10. *MP*(2, 8, 9; *Lem323.4*) $\mathfrak{A}'Buv = T$
11. *Déduct*-(7, 9) $\dot{\neg}u \longrightarrow \mathfrak{A}'Buv$
12. *TND*(7, 11) $\mathfrak{A}'Buv = T$
13. *Déduct*(1, 2, 3, 12) $\bar{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} B \longrightarrow \mathfrak{A}'Buv$

■

Nous abordons maintenant la démonstration de $A\dot{F}A_2$ proprement dite :

3.7.2 Prouvabilité de $A\dot{F}A_2$

Nous devons montrer :

$$A\dot{F}A2 : \vdash \dot{\forall}d\dot{\forall}d'\dot{\forall}a\dot{\forall}b.(\dot{\exists}x.x\dot{\in}a\dot{\wedge}\dot{\exists}x.x\dot{\in}b\dot{\wedge}\dot{G}raph[a, b] \\ \dot{D}\acute{e}co[a, b, d]\dot{\wedge}\dot{D}\acute{e}co[a, b, d']\dot{\Rightarrow}d\dot{\sim}d')$$

Nous travaillons pour l'instant dans $MTA(\overline{A}; \overline{A})$, où $\overline{H} \equiv_{def} \overline{A} = \overline{T}$ est l'ensemble d'hypothèses de la section précédente.

Le lemme qui suit exprime que si d et d' sont deux “décorations” d'un même “graphe” $\langle a, b \rangle$ alors, $d\langle x \rangle \dot{\sim} d'\langle x \rangle$ pour tout $x \dot{\in} a$, il découle essentiellement du Théorème 324 :

Lemme 325 $\vdash_{\overline{H}} \phi x, x \dot{\in} a \longrightarrow d\langle x \rangle \dot{\sim} d'\langle x \rangle$

Preuve.

1. *hyp* $\phi x = x \dot{\in} a = T$
2. $MP(H4, 1; Eval)$ $\phi d\langle x \rangle = \phi d'\langle x \rangle = T$
3. $MP(H4, 2; Cor320)$ $\langle d\langle x \rangle, d'\langle x \rangle \rangle \dot{\in} B = T$
4. $MP(\overline{H}; Thm324.2)$ $\phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} B \longrightarrow u \dot{\sim} v$
5. *Méta*(5)(3, 4) $d\langle x \rangle \dot{\sim} d'\langle x \rangle = T$

■

Avant de continuer et pour simplifier nos écritures, on se donne deux abréviations. La première concerne une formule de ZFC exprimant que deux fonctions d et d' ont même valeur sur tout les éléments d'un ensemble a . La deuxième concerne le ZFC -terme correspondant à la formule :

Notation 326 *Pour d et d' des variables :*

- 1) $d =_{Ext} d' =_{def} \dot{\forall}x\dot{\forall}y\dot{\forall}y'(x \dot{\in} a \dot{\wedge} CplsIn[d; x, y \ \& \ d, x, y'] \Rightarrow y = y')$
- 2) $d \dot{\sim}_{Ext} d' =_{def} \dot{\forall}x\dot{\forall}y\dot{\forall}y'(x \dot{\in} a \dot{\wedge} \dot{C}plsIn[d; x, y \ \& \ d; x, y'] \Rightarrow y \dot{\sim} y')$

On conclut maintenant du lemme précédent que si d et d' sont des “décorations” d'un même “graphe” (a, b) alors elles sont “extensionnellement égale” sur leur domaine a :

Lemme 327 $\vdash_{\overline{H}} d \dot{\sim}_{Ext} d' = T$

Preuve.

1. *hyp* $\phi x = \phi y = \phi y' = T$
2. *hyp*+ $x \dot{\in} a \dot{\wedge} \dot{C}plsIn[d; x, y \ \& \ d; x, y'] = T$
3. *Méta*(LoiLg1)(2) $x \dot{\in} a = \dot{C}plsIn[d; x, y] = \dot{C}plsIn[d; x, y'] = T$
4. *Méta*(LoiLg1)(H5, H6) $\dot{F}nDm[a, d] = \dot{F}nDm[a, d'] = T$
5. $MP(H4, H1, 1, 4; Lem258)$ $y \dot{\sim} d\langle x \rangle = y' \dot{\sim} d'\langle x \rangle = T$
6. $MP(\overline{H}, 1; 3)$ $d\langle x \rangle \dot{\sim} d'\langle x \rangle = T$
7. *Trans* \sim + *Sym* \sim (5, 6) $y \dot{\sim} y' = T$
8. *Deduct*-(2, 7) $x \dot{\in} a \dot{\wedge} \dot{C}plsIn[d; x, y \ \& \ d; x, y'] \longrightarrow y \dot{\sim} y'$
9. *NonMono*(8) $x \dot{\in} a \dot{\wedge} \dot{C}pls[d; x, y \ \& \ d; x, y'] \Rightarrow y \dot{\sim} y' = T$
10. *Deduct*(1, 9) $\dot{\forall}x\dot{\forall}y\dot{\forall}y'(x \dot{\in} a \dot{\wedge} \dot{C}plsIn[d; x, y \ \& \ d; x, y'] \Rightarrow y \dot{\sim} y')$

■

On va maintenant déduire du lemme précédent que sous \overline{H} on a $d \sim d'$. Pour cela, on va utiliser le théorème *ThmZFCs*. En effet, comme deux fonctions d et d' de même domaine a , sont égales si et seulement si pour tout $x \in a$ on $d(x) = d(x')$, on a par *ThmZFCs* que la formule suivante est un théorème de *MTA* :

$$(*) \vdash \forall a \forall d \forall d'. (\dot{F}nDm[a, d] \wedge \dot{F}nDm[a, d'] \wedge d \sim_{Ext} d') \Rightarrow d \sim d'$$

L'équation ci-dessus en tant que théorème de *MTA* est un axiome de *MTA*(\overline{H}) (Cf définition 30), on en tire le lemme suivant :

Lemme 328 $\vdash_{\overline{H}} d \sim d' = T$

Preuve.

1. *Inst* $\dot{\vee}$ ($H1+H4$, $(*)$) $(\dot{F}nDm[a, d] \wedge \dot{F}nDm[a, d'] \wedge d \sim_{Ext} d') \Rightarrow d \sim d'$
2. *Méta*(*LoiLg1*)($H5$, $H6$) $\dot{F}nDm[a, d] = \dot{F}nDm[a, d'] = T$
3. *Lem327* $d \sim_{Ext} d' = T$
4. *Méta*(*LoiLg2*)(2, 3) $\dot{F}nDm[a, d] \wedge \dot{F}nDm[a, d'] \wedge d \sim_{Ext} d' = T$
5. *MP* \Rightarrow (1, 4) $d \sim d'$

■

Nous arrivons à notre but qui est aussi le théorème final de cette 1^{ère} Partie

Théorème 329 $\vdash A\dot{F}A_2 = T$

Preuve.

1. *hyp* $\phi d = \phi d' = \phi a = \phi b = T$
2. *hyp*+ $\dot{\exists}x.x \in a \wedge \dot{\exists}x.x \in b \wedge \dot{G}raph[a, b]$
 $\wedge \dot{D}éco[a, b, d] \wedge \dot{D}éco[a, b, d'] = T$
3. *Méta*(*LoiLg1*)(2) $\dot{\exists}x.x \in a = \dot{\exists}x.x \in b = T$
4. *Méta*(*LoiLg1*)(2) $\dot{G}raph[a, b] = \dot{D}éco[a, b, d] = \dot{D}éco[a, b, d'] = T$
5. *MP*(3, *Cor166.2*) $\dot{\neg}a = \dot{\neg}b = T$
6. *Lem328*(1, 4, 5) $d \sim d' = T$
7. *Déduct*-(2, 6) $\dot{\exists}x.x \in a \wedge \dot{\exists}x.x \in b \wedge \dot{G}raph[a, b]$
 $\wedge \dot{D}éco[a, b, d] \wedge \dot{D}éco[a, b, d'] \longrightarrow d \sim d'$
8. *Implic* $_{Nom M \rightarrow M}$ $\dot{\exists}x.x \in a \wedge \dot{\exists}x.x \in b \wedge \dot{G}raph[a, b]$
 $\wedge \dot{D}éco[a, b, d] \wedge \dot{D}éco[a, b, d'] \Rightarrow d \sim d'$
9. *Déduct*(1, 8) + *Géné* $A\dot{F}A_2 = T$

■

Deuxième partie

Sémantique

Nous montrons dans cette partie que le système MTA est consistant relativement à $ZFC + SI$, où SI est l'axiome exprimant l'existence d'un cardinal (fortement) inaccessible. Pour cela nous partons des κ -pré-modèles construits en [6] dans le cadre de la sémantique κ -continue. Rappelons que la sémantique κ -continue est une généralisation à tout cardinal régulier $\kappa \geq \omega$ de la sémantique (ω -)continue de D. Scott. Nous montrons que si on prend $\kappa > \sigma$ pour σ un inaccessible alors, dans tout κ -pré-modèle \mathcal{M} de Map Theory, on peut construire $\Phi \subseteq \mathcal{M}$ et définir une interprétation des constantes $\{\varepsilon, \phi, \sim\}$ relative à Φ telle que \mathcal{M} soit un modèle de MTA .

Nous ferons tout d'abord une présentation détaillée de la sémantique κ -continue et des κ -pré-modèles. Ensuite nous introduirons progressivement les propriétés des pré-modèles et des *ouverts* qu'ils contiennent nécessaires à la modélisation des différents groupes d'axiomes de MTA , excepté l'axiome MTA -Déco et le Principe de CoInduction. La satisfaction de cet axiome et de cette règle passe par la construction préalable de l'ouvert $\Phi \subseteq \mathcal{M}$, ce qui sera fait dans le Chapitre 9. Le dernier chapitre sera alors consacré à la satisfaction de MTA -Déco et du Principe de CoInduction.

On travaille dans un univers V qui satisfait les axiomes de ZFC , et toutes les définitions topologiques et sémantiques qui vont suivre sont relatives à V . Nous supposons de plus, pour la construction de Φ , que V satisfait SI . Dans la suite, sauf mention contraire, κ désignera un cardinal régulier $\kappa \geq \omega$.

Avant de clore ce préambule, nous introduisons certaines notations générale.

Notation 330 *On continuera à écrire \bar{A} pour les suites de termes, mais on utilisera aussi \bar{u} pour les suites finies ou dénombrables (au sens de V) d'ensembles.*

Notation 331 *Pour $G, H \in V$, on écrira $G \setminus H$ le complémentaire de H dans G .*

Notation 332 *Pour tout ensemble $G \in V$ et $n \in \omega \in V$:*

1) $G^n = \{\bar{u} : \bar{u} \subseteq G \wedge \text{lg}(\bar{u}) = n\}$ (où $\text{lg}(\bar{u})$ est la longueur de la suite \bar{u})

2) $G^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} G^n$

Chapitre 4

Préliminaires

4.1 La sémantique κ -continue

4.1.1 Quelques rappels sur les ensembles ordonnés

Dans la suite de ce chapitre \mathcal{D} désignera un ensemble muni d'un ordre partiel $\leq_{\mathcal{D}}$ et *p.o* abrégera "ordre partiel"

Définition 333 Soient $H \subseteq \mathcal{D}$ et $u \in \mathcal{D}$:

- 1) u est un majorant de H si pour tout $v \in H$ on a $v \leq_{\mathcal{D}} u$.
- 2) u est un minorant de H si pour tout $v \in H$ on a $u \leq_{\mathcal{D}} v$
- 3) La borne supérieure de H , notée $\text{sup}(H)$, est le plus petit majorant de H lorsqu'il existe.
- 4) La borne inférieure de H , notée $\text{inf}(H)$ est le plus grand minorant de H , s'il existe.

Remarque 334 :

- 1) $\text{sup} \emptyset$ existe ssi \mathcal{D} admet un plus petit élément.
- 2) $\text{inf} \emptyset$ existe ssi \mathcal{D} admet un plus grand élément.

Notation 335 On notera $\text{Maj}(H)$ l'ensemble des majorants de H dans \mathcal{D} et $\text{Min}(H)$ l'ensemble de ses minorants,

Remarque 336 Si $H, K \subseteq \mathcal{D}$ admettant des sup . Si tout élément de H est majoré par un élément de K , on a $\text{sup} H \leq_{\mathcal{D}} \text{sup} K$. En particulier, ceci est vrai lorsque $H \subseteq K$

Remarque 337 Soient $H \subseteq K \subseteq \mathcal{D}$ alors $\text{Min}(K) \subseteq \text{Min}(H)$. Si de plus H et K admettent des inf alors $\text{inf} K \leq \text{inf} H$.

4.1.2 κ -cpos et κ -continuité

On définit tout d'abord la notion "d'ordre partiel κ -complet" (κ -cpo). Les κ -cpos sont en particulier des ensembles partiellement ordonnés ($p.o$) et non-vides. On donne tout d'abord des définitions préliminaires :

Définition 338 Soit ξ un cardinal. Un ensemble sera dit ξ -petit s'il est non vide et de cardinalité strictement inférieure à ξ .

Notation 339 On écrira dorénavant $H \subseteq_{\xi} G$ pour signifier que $H \subseteq G$ et que H est ξ -petit.

Définition 340 Soit κ un cardinal régulier et soit $(\mathcal{D}, \leq_{\mathcal{D}})$ un $p.o$. Un sous-ensemble X de \mathcal{D} est dit κ -filtrant si $X \neq \emptyset$ et si pour tout $H \subseteq_{\kappa} X$, il existe un majorant de H dans X .

Remarque 341 Toute suite croissante $(u_{\eta})_{\eta < \kappa}$ est κ -filtrante (car κ est régulier), par contre lorsque $\kappa > \omega$, il est faux en général qu'une suite croissante $(u_{\eta})_{\eta < \xi}$ pour un cardinal $\xi < \kappa$ soit κ -filtrante (dans ce cas la suite $(u_{\eta})_{\eta < \xi}$ est κ -filtrante ssi elle admet un plus grand élément).

Remarque 342 Soit $(\mathcal{D}, \leq_{\mathcal{D}})$ un $p.o$, et soient κ et κ' deux cardinaux réguliers tels que $\kappa \leq \kappa'$. Il est évident que si $X \subseteq \mathcal{D}$ est κ' -filtrant, il est aussi κ -filtrant.

On en arrive à la définition d'un κ -cpo :

Définition 343 Soit $(\mathcal{D}, \leq_{\mathcal{D}})$ un ensemble partiellement ordonné. On dira que $(\mathcal{D}, \leq_{\mathcal{D}})$ est un κ -cpo s'il possède un plus petit élément, noté $\perp_{\mathcal{D}}$ (ou plus simplement \perp), et si tous les sous-ensembles κ -filtrants de \mathcal{D} admettent des sup.

Remarque 344 Soit $(\mathcal{D}, \leq_{\mathcal{D}})$ un $p.o$ et soient $\kappa \leq \kappa'$ deux cardinaux réguliers tels que $\kappa \leq \kappa'$. Il est évident, par la remarque précédente, que si $(\mathcal{D}, \leq_{\mathcal{D}})$ est un κ -cpo, il est aussi un κ' -cpo.

Notation 345 A partir de maintenant, on écrira simplement \mathcal{D} , plutôt que $(\mathcal{D}, \leq_{\mathcal{D}})$.

On définit maintenant une notion de κ -continuité pour les fonctions entre κ -cpos :

Définition 346 Soient \mathcal{D}, \mathcal{E} des κ -cpos, une fonction f de \mathcal{D} vers \mathcal{E} est dite κ -continue si elle est monotone et si elle respecte les sup s d'ensembles κ -filtrants i.e pour tout $X \subseteq \mathcal{D}$ κ -filtrant on a : $f(\sup(X)) \leq \sup\{f(u) : u \in X\}$ (ce qui implique l'égalité par la monotonie).

Dans la définition précédente, l'existence du $\sup\{f(u) : u \in X\}$ nous est assurée par le fait que l'image d'un ensemble κ -filtrant par une fonction monotone est un ensemble κ -filtrant.

Notation 347 Pour \mathcal{D}, \mathcal{E} des κ -cpos, $H \subseteq \mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, on notera $f[H]$ l'image de H par f , i.e $f[H] =_{def} \{f(x) : x \in H\}$.

Notation 348 Pour \mathcal{D}, \mathcal{E} des κ -cpos, on notera $[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]_\kappa$ l'ensemble des fonctions κ -continues de \mathcal{D} vers \mathcal{E} .

La catégorie, notée \mathfrak{C}_κ , des κ -cpos et des fonctions continues forme une *Catégorie Cartésienne Close (ccc)*. La démonstration de ce fait, que nous ne reprenons pas ici, est une généralisation facile du cas ω . C'est cette propriété qui permet de modéliser le λ -calcul. Nous renvoyons au livre de Barendregt [3] pour la définition d'une ccc. Nous nous bornons ici à énoncer les propriétés que nous utiliserons explicitement. En particulier, \mathfrak{C}_κ est close par produit cartésien et espace de fonctions, autrement dit :

- Si \mathcal{D}, \mathcal{E} des κ -cpos alors $\mathcal{D} \times \mathcal{E}$ muni de l'ordre produit (où $(u, v) \leq_{\mathcal{D} \times \mathcal{E}} (u', v')$ ssi $u \leq_{\mathcal{D}} v$ et $u' \leq_{\mathcal{E}} v'$) est lui-même un κ -cpo.
- Si \mathcal{D} et \mathcal{E} sont des κ -cpos alors $[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]_\kappa$ muni de l'ordre extensionnel (où $f \leq_{[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]_\kappa} f'$ ssi $\forall u : f(u) \leq_{\mathcal{E}} f'(u)$) est lui-même un κ -cpo.

La démonstration de ces deux faits passe par le lemme suivant, que nous utiliserons indépendamment :

Lemme 349 Soient \mathcal{D}, \mathcal{E} des κ -cpos :

1) Soit $H \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{E}$. Soient $H_1 \subseteq \mathcal{D}$ sa première projection et $H_2 \subseteq \mathcal{E}$ sa deuxième. On a H est κ -filtrant ssi H_1 et H_2 sont κ -filtrants et, dans ce cas, $\sup(H) = (\sup H_1, \sup H_2) = \sup(H_1 \times H_2)$.

2) Soit $H \subseteq [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]_\kappa$. Alors H est κ -filtrant ssi pour tout $u \in \mathcal{D}$ l'ensemble $H_u = \{f(u) : f \in H\}$ est κ -filtrant et, dans ce cas, le \sup de H est le \sup extensionnel, i.e la fonction f^{\sup} définie par : $f^{\sup}(u) = \sup(H_u)$ pour tout $u \in \mathcal{D}$.

4.1.3 κ -continuité et κ -topologie

Il existe une autre caractérisation des fonctions κ -continues. Cette caractérisation correspond à la définition d'une topologie canonique sur les κ -cpos que nous appellerons κ -topologie.

Notation 350 Soient $(\mathcal{D}, \leq_{\mathcal{D}})$ un κ -cpo et $G \subseteq \mathcal{D}$:

$$\uparrow G = \{x \in \mathcal{D} : \exists y \in G, y \leq_{\mathcal{D}} x\}$$

Définition 351 Soit \mathcal{D} un κ -cpo. La κ -topologie sur \mathcal{D} est la topologie dont les ouverts sont les ensembles $O \subseteq \mathcal{D}$ tels que :

- 1) $O = \uparrow O$
- 2) Tout ensemble κ -filtrant $X \subseteq \mathcal{D}$, on a : $\sup(X) \in O \Rightarrow O \cap X \neq \emptyset$

Les ouverts de cette topologie sont aussi appelés κ -ouverts.

Remarque 352 $\perp_{\mathcal{D}} \in O$ ssi $O = \mathcal{D}$.

On vérifie facilement que :

- Toute union d'ouverts est un ouvert.
- L'intersection d'une famille κ -petite d'ouverts est un ouvert.
- Si O et O' sont des ouverts des κ -topologies sur les κ -cpos \mathcal{D} et \mathcal{E} alors $O \times O'$ est un ouvert de la κ -topologie sur $\mathcal{D} \times \mathcal{E}$.

La κ -continuité coïncide avec la continuité usuelle relativement à la κ -topologie :

Lemme 353 Soient \mathcal{D} et \mathcal{E} des κ -cpos et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, on a :
 $f \in [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]_{\kappa}$ si et seulement si, pour tout ouvert $O \subseteq \mathcal{E}$, $f^{-1}[O]$ est un ouvert de \mathcal{D} .

Notation 354 Pour $f \in [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]_{\kappa}$:

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \neq \perp\} = f^{-1}[\mathcal{E} - \{\perp\}]$$

On remarque que si f est une fonction κ -continue $\text{dom}(f)$ est un κ -ouvert car $\mathcal{E} - \{\perp\}$ est un κ -ouvert. Le lemme suivant, qui donne une condition suffisante de continuité, nous sera utile plusieurs fois par la suite :

Lemme 355 Soient \mathcal{D} et \mathcal{E} des κ -cpos et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$. Supposons que :

- 1) $\text{dom}(f)$ est κ -ouvert
 - 2) $\forall u, v \in \text{dom}(f), u \leq_{\mathcal{D}} v \Rightarrow f(u) = f(v)$
- alors f est κ -continue.

Preuve. La croissance vient facilement du fait que $\text{dom}(f) = \uparrow \text{dom}(f)$. Soit $X \subseteq \mathcal{D}$ et κ -filtrant, on doit montrer $f(\sup X) \leq_{\mathcal{E}} \sup\{f(u) : u \in X\}$. Si $\sup X \notin \text{dom}(f)$ c'est évident. Si $\sup X \in \text{dom}(f)$ alors il existe $u \in X \cap \text{dom}(f)$ puisque $\text{dom}(f)$ est un κ -ouvert. Or $u \leq_{\mathcal{D}} \sup X$ et donc $f(u) = f(\sup X)$. ■

4.1.4 κ -sémantique du λ -calcul non-typé

Soient \mathcal{D} un κ -cpo, VAR un ensemble de variables et C un ensemble de constantes. Nous introduisons maintenant l'ensemble $\Lambda(C)$ des termes du λ -calcul, construits sur C :

Définition 356 L'ensemble $\Lambda(C)$ est le plus petit ensemble tel que :

- 1) $VAR \cup C \subseteq \Lambda(C)$
- 2) Si $t, t' \in \Lambda(C)$ alors $(tt') \in \Lambda(C)$
- 3) Si $t \in \Lambda(C)$ et $x \in VAR$ alors $\lambda x.t \in \Lambda(C)$

Notation 357 On notera $\Lambda(C)$ l'ensemble des termes clos de $\Lambda(C)$

Dans le cas où $C = \emptyset$, l'ensemble $\Lambda(C)$ est l'ensemble Λ des termes du λ -calcul pur sans constante ajoutée. L'interprétation de ces termes se fait à l'intérieur de structures appelées "objets réflexifs". Nous en donnons ici la définition :

Définition 358 Un objet réflexif d'une ccc \mathbb{C} est un triplet $\hat{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, \lambda, \mathbb{A})$ où, \mathcal{D} est un objet de \mathbb{C} , λ, \mathbb{A} des morphismes de la catégorie vérifiant :
 $\lambda : [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}] \rightarrow \mathcal{D}^1$, $\mathbb{A} : \mathcal{D} \rightarrow [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}]$ et $\mathbb{A} \circ \lambda = id_{[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}]}$

Pour interpréter les termes de $\Lambda(C)$ lorsque $C \neq \emptyset$, on enrichit l'objet réflexif d'une fonction d'interprétation j des constantes de C vers \mathcal{D} . Ceci motive la définition suivante :

Définition 359 On appellera structure interprétative de $\Lambda(C)$ tout couple $(\hat{\mathcal{D}}, j)$, où $\hat{\mathcal{D}}$ est un objet réflexif d'une ccc et j une fonction de C vers \mathcal{D} .

Nous en arrivons maintenant à la définition formelle de l'interprétation des termes de $\Lambda(C)$ dans une structure interprétative $(\hat{\mathcal{D}}, j)$. Il existe deux façons classiques et équivalentes de procéder. La première consiste à travailler avec les environnements, qui sont les fonctions de VAR dans \mathcal{D} , et à définir l'interprétation de chaque terme dans tout environnement. La deuxième, que nous avons choisie, consiste à définir l'interprétation des termes de $\Lambda(C \cup \mathcal{D})$ ², termes dits *clos à paramètres dans \mathcal{D}* . De cette interprétation, on déduit alors celle des termes de $\Lambda(C \cup \mathcal{D})$ et $\Lambda(C)$.

L'interprétation $| \cdot |^j$ des termes de $\Lambda(C \cup \mathcal{D})$ est donnée par induction sur la structure du terme :

1. $|u|^j = u$ pour $u \in \mathcal{D}$
2. $|c|^j = j(c)$ pour $c \in C$
3. $|(tt')|^j = \mathbb{A}(|t|^j)(|t'|^j)$
4. $|\lambda x.t|^j = \lambda(u \rightarrow |t[u/x]|^j)$

¹où $[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}]$ est l'objet de \mathbb{C} qui représente l'ensemble des morphismes de \mathcal{D} vers \mathcal{D}

²On suppose alors $C \cap \mathcal{D} = \emptyset$

On remarque que la troisième clause suppose que, pour tout terme t la fonction $u \rightarrow |t[u/x]|^j$ est κ -continue, ce qui se montre simultanément et nous est assuré par le fait qu'on travaille dans une *ccc*.

On définit maintenant de façon générale l'interprétation des termes de $\Lambda(C \cup \mathcal{D})$ et $\Lambda(C)$. Soit $t[\bar{x}]$ un terme où $VL(t) \subseteq \bar{x}$. L'interprétation $|t|_{\bar{u}}^j$ de t , en fonction de l'interprétation \bar{u} de \bar{x} , est définie par $|t|_{\bar{u}}^j = |t[\bar{u}/\bar{x}]|^j$.

Notation 360 *On notera simplement $|t|$ l'interprétation des termes clos de $\Lambda(C \cup \mathcal{D})$ qui ne contiennent pas d'occurrence de constante, puisque cette interprétation est alors indépendante de j .*

Notation 361 *Pour tout κ -cpo réflexif $\hat{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, \lambda, \mathbb{A})$*
 $\mathfrak{F}_{\mathcal{D}} =_{def} \lambda[[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}]_{\kappa}] = \{\lambda(f) : f \in [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}]_{\kappa}\}$

Remarque 362 *De ce qui précède, il est clair que, pour tout terme de la forme $\lambda x.t$, on a $|\lambda x.t|^j \in \mathfrak{F}_{\mathcal{D}}$.*

Le lemme suivant nous sera utile :

Lemme 363 *Pour tout $u \in \mathcal{D}$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) $u \in \mathfrak{F}_{\mathcal{D}}$
- 2) $u = |\lambda x.(ux)|^j$
- 3) $u = (F'u)$ où $F' =_{def} \lambda u \lambda x.(ux)$

4.1.5 Modélisation des théories du λ -calcul

Une théorie équationnelle du λ -calcul pur est constituée d'un ensemble d'équations AX qu'on prend comme axiomes, et d'un ensemble de règles de déduction RG qui permettent d'inférer une équation, dite *conclusion*, d'un ensemble fini d'équations appelées *prémises*. En particulier, on demande que ces axiomes et ces règles englobent l' α - et la β -équivalence (au sens où si deux termes t, t' sont $\alpha\beta$ -équivalents alors l'équation $t = t'$ est déductible dans la théorie).

La notion de satisfaction par une structure interprétative $(\hat{\mathcal{D}}, j)$, avec $\hat{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, \lambda, \mathbb{A})$, d'une équation, d'un ensemble d'équations, d'une règle et d'une théorie Th , est définie comme suit :

Définition 364 :

- 1) *Soient $t[\bar{x}]$ et $t'[\bar{x}]$ des termes de $\Lambda(C \cup \mathcal{D})$. La structure interprétative $(\hat{\mathcal{D}}; j)$ satisfait l'équation $t = t'$ si pour tout $\bar{u} \in \mathcal{D}^{<\omega}$ on a $|t[\bar{u}/\bar{x}]|^j = |t'[\bar{u}/\bar{x}]|^j$. On écrira $\mathcal{D} \models t = t'$ pour " $\hat{\mathcal{D}}$ satisfait $t = t'$ ". En particulier, si t et t' sont des termes clos (à paramètres dans \mathcal{D} ou non) on a $\mathcal{D} \models t = t'$ si et seulement si $|t|^j = |t'|^j$*

2) On dira que $\hat{\mathcal{D}}$ satisfait une suite d'équations $\bar{t} = \bar{t}'$, et on écrira $\mathcal{D} \vDash \bar{t} = \bar{t}'$, si $\hat{\mathcal{D}}$ satisfait chacune des équations de $\bar{t} = \bar{t}'$.

3) On dira que $\hat{\mathcal{D}}$ satisfait la règle $R : \bar{t} = \bar{t}' \vdash s = s'$ et on écrira $\mathcal{D} \vDash R$, si $\mathcal{D} \vDash \bar{t} = \bar{t}'$ implique $\mathcal{D} \vDash s = s'$, autrement dit si :

$$\forall \bar{u} \in \mathcal{D} : \mathcal{D} \vDash \bar{t}[\bar{u}/\bar{x}] = \bar{t}'[\bar{u}/\bar{x}] \Rightarrow \forall \bar{u} \in \mathcal{D} : \mathcal{D} \vDash s[\bar{u}/\bar{x}] = s'[\bar{u}/\bar{x}]$$

Définition 365 On dira que $(\hat{\mathcal{D}}, j)$ satisfait fortement la règle $R : \bar{t} = \bar{t}' \vdash t = t'$ si, pour tout \bar{x} contenant les variables libres de \bar{t}, \bar{t}', s, s' on a :

$$\forall \bar{u} \in \mathcal{D} : (\mathcal{D} \vDash \bar{t}[\bar{u}/\bar{x}] = \bar{t}'[\bar{u}/\bar{x}] \Rightarrow \mathcal{D} \vDash s[\bar{u}/\bar{x}] = s'[\bar{u}/\bar{x}])$$

Remarque 366 On vérifie facilement que si une règle est fortement satisfaite, elle est satisfaite.

Définition 367 Soit $Th = (AX, RG)$ une théorie. On dira qu'une structure $(\hat{\mathcal{D}}, j)$ est un modèle de Th , ce que l'on note $\mathcal{D} \vDash Th$, si $(\hat{\mathcal{D}}, j)$ satisfait chaque axiome de AX et chaque règle de RG .

En particulier, on a le résultat suivant :

Lemme 368 Soient $\hat{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, \lambda, \mathbb{A})$ un κ -cpo réflexif et $t, t' \in \Lambda(C \cup \mathcal{D})$. Si t et t' sont $\alpha\beta$ -équivalents alors $\mathcal{D} \vDash t = t'$.

4.1.6 Codage des fonctions n -aire

Notation 369 Soit $\hat{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, \lambda, \mathbb{A})$ un κ -cpo réflexif. Pour $u, v \in \mathcal{D}$, $\bar{v} \in \mathcal{D}^{<\omega}$, on définit $u\bar{v}$ par induction sur la longueur de \bar{v} de la façon suivante :

- $uv = (uv) =_{def} \mathbb{A}(u)(v)$ i.e la fonction $\mathbb{A}(u)$ appliquée à l'argument v .
- $u\bar{v}v =_{def} \mathbb{A}(u\bar{v})(v)$.

Notons que $u\bar{v}$ est défini pour toute suite "finie" \bar{v} au sens de l'univers V dans lequel on travaille, et pas seulement pour toute suite "finie" au sens intuitif.

Remarque 370 Soient $\hat{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, \lambda, \mathbb{A})$ un κ -cpo réflexif et $u \in \mathcal{D}$. Pour tout $X \subseteq \mathcal{D}$ et κ -filtrant, on a, par le fait que $\mathbb{A}(u)$ est κ -continue :

$$u(\sup X) = \mathbb{A}(u)(\sup X) = \sup\{\mathbb{A}(u)x : x \in X\} = \sup\{ux : x \in X\}$$

L'interprétation des constantes du langage de Map Theory utilise parfois des codes de fonctions de $[\mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}]_\kappa$. Pour cette raison, nous donnons maintenant la définition de la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ des codages dans \mathcal{D} des fonctions n -aires :

Définition 371 On définit par induction une suite $(\lambda^n)_{n \in \omega}$ de fonctions de $[\mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}]$ vers \mathcal{D} , comme suit :

1. $\lambda^1 = \lambda$
2. $\lambda^{n+1}(f) = \lambda(u \mapsto \lambda^n(v_1, \dots, v_n \mapsto f[u, v_1, \dots, v_n]))$

On montre facilement par induction sur n et en utilisant les propriétés des *ccc* que les fonctions λ^n sont bien définies et κ -continues de $[\mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}]$ vers \mathcal{D} .

Remarque 372 *Pour tous $n \in \omega$, $\bar{u} \in \mathcal{D}^n$ et $f \in [\mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}]_\kappa$, on a : $\lambda^n(f)\bar{u} = f(\bar{u})$. En particulier, on a $\lambda(f)u = f(u)$.*

4.1.7 Éléments κ -compacts et fonctions en escalier

Dans cette section, nous donnons tout d'abord la définition d'un κ -compact. En liaison avec cette notion de κ -compacité, nous introduisons ensuite la famille des fonctions *en escalier* sur les κ -cpo, dont nous montrons qu'elles sont κ -continues. Ces fonctions seront souvent utilisées par la suite.

Définition 373 *Soit \mathcal{D} un κ -cpo. Un élément c de \mathcal{D} est dit compact si, pour tout ensemble κ -filtrant $X \subseteq \mathcal{D}$ tel que $c \leq_{\mathcal{D}} \sup X$, il existe $v \in X$ tel que $c \leq_{\mathcal{D}} v$. En particulier, l'élément $\perp_{\mathcal{D}}$ est κ -compact en ce sens.*

Notation 374 *Pour \mathcal{D} un κ -cpo et $H \subseteq \mathcal{D}$, on notera H_c l'ensemble des éléments compacts de H (et donc en particulier \mathcal{D}_c l'ensemble des κ -compacts de \mathcal{D}). Pour $u \in \mathcal{D}$, on notera $\downarrow_c u$ l'ensemble des compacts inférieurs ou égaux à u .*

Il est clair que \mathcal{D}_c est clos par sup de sous-ensembles κ -petits. De plus :

Remarque 375 *Les éléments compacts d'un κ -cpo \mathcal{D} sont exactement les éléments c de \mathcal{D} tel que $\uparrow \{c\}$ est un ouvert et ainsi, pour tout $H \subseteq \mathcal{D}_c$, l'ensemble $\uparrow H$ est un κ -ouvert.*

On va déduire de la remarque précédente un lemme qui établit la κ -continuité de certaines fonctions dites "*en escalier*". L'énoncé de ce lemme utilise la notion d'*antichaine* :

Définition 376 *Soit (\mathcal{D}, \leq) un ensemble ordonné :*

- 1) *On dira que $u, v \in \mathcal{D}$ sont compatibles si il existe $w \in \mathcal{D}$ tel que $u, v \leq w$ et incompatibles dans le cas contraire.*
- 2) *Une antichaine est un sous-ensemble de \mathcal{D} dont les éléments sont incompatibles deux à deux.*

Définition 377 Soient \mathcal{D} et \mathcal{E} des κ -cpos. Soit $X \subseteq \mathcal{D}_c$ une antichaine et soit une fonction $s : X \rightarrow \mathcal{E}$. On considère la fonction définie sur \mathcal{D} par :

$$g_s(u) = \begin{cases} s(e) & \text{si } u \geq e \text{ et } e \in X \\ \perp_{\mathcal{E}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Une telle fonction sera dite fonction en escalier,

On remarque que l'incompatibilité deux à deux des éléments de X nous assure de la bonne définition de g_s .

Lemme 378 Soient \mathcal{D} et \mathcal{E} des κ -cpos et $X \subseteq \mathcal{D}_c$ une antichaine :

- 1) Pour toute fonction $s : X \rightarrow \mathcal{E}$, la fonction g_s est κ -continue et $\text{dom}(g_s) = \uparrow X$.
- 2) Si, de plus, X est κ -petit et $s[X] \subseteq \mathcal{E}_c$, alors la fonction g_s est κ -compacte dans $[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]_{\kappa}$.

Preuve.

- 1) La continuité est une conséquence directe du Lemme 355.
- 2) Pour le cas $\text{Card}(X) = 1$, la démonstration est analogue au cas $\kappa = \omega$. Il en résulte que si X est un ensemble κ -petit de κ -compacts alors g_s est le sup d'un ensemble κ -petit de fonctions compactes et est donc compacte. ■

Nous donnons maintenant quelques exemples de fonctions en escalier :

Exemple 379 Pour tout κ -compact $e \in \mathcal{D}$ et tout $v \in \mathcal{E}$, on définit la fonction $g_{e,v}$ par :

$$g_{e,v}(u) = \begin{cases} v & \text{si } u \geq e \\ \perp_{\mathcal{E}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions de la forme $g_{e,v}$ sont des fonctions en escalier, en prenant $s(e) = v$ pour $X = \{e\}$. De plus, $g_{e,v}$ est κ -compacte dans $[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]_{\kappa}$ ssi v est κ -compact.

Remarque 380 Pour $f \in [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]_{\kappa}$, on a $g_{e,v} \leq f$ ssi $v \leq f(e)$.

Remarque 381 Toute fonction constante peut être vue comme la fonction en escalier $g_{\perp,v}$ où $v \in \mathcal{E}$ est la valeur de la fonction. En particulier, une telle fonction est κ -compacte dans $[\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]_{\kappa}$ ssi v est κ -compact.

4.1.8 κ -ccpos et κ -domaines de Scott.

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, les modèles de Map Theory qui nous intéressent font partie d'une sous-catégorie pleine³ et cartésienne

³Rappelons que \mathcal{C}' est une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} si $\text{Obj}(\mathcal{C}') \subseteq \text{Obj}(\mathcal{C})$ et $\forall A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C}') \text{ Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$

close de celle des κ -cpo, la catégorie des κ -domaines de Scott. Une sous-catégorie pleine intermédiaire est celles des κ -ccpos. Nous présentons ici les deux classes de domaines correspondant.

Définition 382 *Un κ -cpo \mathcal{D} sera dit un κ -ccpo si tout ensemble majoré $X \subseteq \mathcal{D}$ admet un sup.*

Remarque 383 *Il est clair que si \mathcal{D} est un κ -ccpo, tout $X \subseteq \mathcal{D}$ non vide admet un inf, c'est à dire un sup de l'ensemble de ses minorants.*

Le Lemme 349.2 s'étend naturellement aux sup s quelconques dans les κ -ccpos :

Lemme 384 *Soient \mathcal{D}, \mathcal{E} des κ -ccpos et $X \subseteq [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]_\kappa$. Si le sup de X existe c'est le sup extensionnel (i.e le sup point par point).*

La définition des κ -domaines de Scott passe par celle de la κ -algébricité. Rappelons que $\downarrow_c u = \{e \in \mathcal{D}_c : e \leq u\}$ pour $u \in \mathcal{D}$ et \mathcal{D} un κ -cpo.

Définition 385 *Un κ -cpo \mathcal{D} sera dit κ -algébrique si, pour tout $u \in \mathcal{D}$, $\downarrow_c u$ est κ -filtrant et $u = \sup(\downarrow_c u)$.*

On peut voir aussi facilement qu'un sous-ensemble G d'un κ -cpo κ -algébrique est un ouvert si et seulement s'il est "engendré" par un ensemble de compacts, autrement dit :

Lemme 386 *Pour \mathcal{D} un κ -cpo κ -algébrique et $G \subseteq \mathcal{D}$, les quatres énoncés suivants sont équivalents :*

- 1) G est un κ -ouvert
- 2) $G = \uparrow G$ et pour tout $u \in G$ on a $(\downarrow_c u) \cap G \neq \emptyset$
- 3) $G = \uparrow (G \cap \mathcal{D}_c)$
- 4) Il existe $H \subseteq \mathcal{D}_c$ tel que $G = \uparrow H$

Preuve. L'équivalence de 2, 3 et 4 est évidente. Le fait que 4 implique 1 est donné par la Remarque 375. On montre maintenant $1 \Rightarrow 2$. Soit donc un ouvert G . Pour montrer 2, il nous suffit de trouver, pour chaque $u \in G$ un κ -compact e_u tel que $e_u \in G$ et $e_u \leq u$. Soit donc $u \in G$. Puisque \mathcal{D} est algébrique, $\downarrow_c u$ est κ -filtrant, et on a donc $\sup(\downarrow_c u) = u \in G$. Comme G est un ouvert, on a $(\downarrow_c u) \cap G \neq \emptyset$. Il suffit alors de choisir e_u dans $\downarrow_c u \cap G$.

■

Définition 387 *Un κ -domaine de Scott est un κ -ccpo κ -algébrique.*

4.1.9 Opérateurs de points fixes dans les κ -ccpos réflexifs

Définition 388 Soit $\hat{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, \lambda, \mathbb{A})$ un κ -cpo réflexif :

- 1) Soient $u, x \in \mathcal{D}$. On dira que x est un point fixe de u si $ux = x$.
- 2) On dira $Z \in \mathcal{D}$ est un opérateur de points fixes sur \mathcal{D} si, pour tout $u \in \mathcal{D}$, Zu est un point fixe de u .

Exemple 389 L'interprétation dans \mathcal{D} de tout combinateur de points fixes du λ -calcul est un opérateur de points fixes.

Nous montrons maintenant l'existence d'un plus petit point fixe (*pppf*) pour tout élément d'un κ -ccpo réflexif. Notons que, dans la définition qui suit, il faut tenir compte qu'une suite croissante de longueur $\eta < \kappa$ n'est pas nécessairement κ -filtrante lorsque $\kappa > \omega$ (Remarque 341), et n'admet donc pas forcément un sup. Se restreindre aux κ -ccpos réflexifs (au lieu des κ -cpos quelconques) permet de contourner cette difficulté, ce cadre étant d'ailleurs largement suffisant par la suite.

Définition 390 Soient $\hat{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, \lambda, \mathbb{A})$ un κ -ccpo réflexif et $u \in \mathcal{D}$. On définit la suite $(u^\eta)_{\eta < \kappa}$ par :

$$u^0 = \perp$$

$$u^{\eta+1} = u(u^\eta)$$

$$u^\eta = \sup\{u^\gamma : \gamma < \eta\} \text{ pour } \eta \text{ limite}$$

Lemme 391 Soient $\hat{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, \lambda, \mathbb{A})$ un κ -ccpo réflexif et $u \in \mathcal{D}$. La suite $(u^\eta)_{\eta < \kappa}$ est bien définie, croissante, et $u^\kappa =_{def} \sup(u^\eta)_{\eta < \kappa}$ est le *pppf* de u .

Preuve.

Pour que $(u^\eta)_{\eta < \kappa}$ soit bien définie, on doit vérifier l'existence du $\sup\{u^\gamma : \gamma < \eta\}$ pour tout $\eta < \kappa$ limite. Or, dans un κ -ccpo, toute suite majorée admet un sup, il suffit donc de remarquer que $\{u^\gamma : \gamma < \eta\}$ est majoré par tout point fixe de u (vérification triviale par induction sur γ); l'existence d'un tel point fixe découlant, entre autres, de l'Exemple 389.

La croissance se montre sans problème par induction sur η .

Maintenant, cette croissance nous assure du fait que $\{u^\eta : \eta < \kappa\}$ est κ -filtrant et il vient :

$$u(\sup(u^\eta)_{\eta < \kappa}) = \sup(u(u^\eta))_{\eta < \kappa} = \sup(u^{\eta+1})_{\eta < \kappa} = \sup(u^\eta)_{\eta < \kappa}$$

Le sup de la suite est donc un point fixe de u et c'est le plus petit puisque, comme déjà signalé, tout élément de cette suite est majoré par n'importe quel point fixe de u .

■

Nous allons voir maintenant que dans tout κ -ccpo réflexif il existe un opérateur de *pppf*. Cela découle du lemme suivant :

Lemme 392 Soit $\hat{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, \lambda, \mathbb{A})$ un κ -ccpo. La fonction $F_{pf} : u \mapsto u^\kappa$ est κ -continue sur \mathcal{D} .

Preuve. Tout d'abord, il est clair que, pour tous $u, v \in \mathcal{D}$, si $u \leq v$ on a $u^\eta \leq v^\eta$ pour tout $\eta < \kappa$. On en conclut $\sup(u^\eta)_{\eta < \kappa} \leq \sup(v^\eta)_{\eta < \kappa}$ et la croissance de F_{pf} . Maintenant, soit $X \subseteq \mathcal{D}$ et κ -filtrant et soit $s =_{def} \sup X$. On a par définition $F_{pf}(s) = \sup(s^\eta)_{\eta < \kappa}$. Or, on vérifie facilement par induction sur η en utilisant le Lemme 349 et la κ -filtrance de X , que $s^\eta = \sup\{u^\eta : u \in X\}$. Il vient :

$$\begin{aligned} F_{pf}(s) &= \sup(s^\eta)_{\eta < \kappa} \\ &= \sup\{\sup\{u^\eta : u \in X\} : \eta < \kappa\} \\ &= \sup\{u^\eta : u \in X, \eta < \kappa\} \quad \blacksquare \\ &= \sup\{\sup\{u^\eta : \eta < \kappa\} : u \in X\} \\ &= \sup\{F_{pf}(u) : u \in X\} \end{aligned}$$

Définition 393 Soit $\hat{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, \lambda, \mathbb{A})$ un κ -ccpo réflexif. On appellera opérateur de pppf l'élément $\lambda(F_{pf})$ et on le notera $\mathbb{Y}_{\mathcal{D}}$ (ou plus simplement \mathbb{Y}).

Corollaire 394 Pour tout κ -ccpo réflexif $\hat{\mathcal{D}}$ et $u \in \mathcal{D}$, $(\mathbb{Y}u)$ est le pppf de u .

Remarque 395 Insistons sur le fait que \mathbb{Y} a une définition sémantique. Toutefois, pour les modèles de MT construits en [6, p.49], il est possible de montrer que l'on a en fait $\mathbb{Y} = |Y|$, où Y est le combinateur de points fixes de Curry (Cf Définition 105).

4.1.10 Fonctions κ -compactes

Nous montrons maintenant que dans les κ -domaines de Scott, l'image d'une fonction κ -compacte est un ensemble de κ -compacts. La démonstration de ce fait est une généralisation facile du cas ω . Nous n'en donnons qu'une esquisse. Elle passe par la définition et le lemme suivant :

Définition 396 Soient \mathcal{D} et \mathcal{E} des κ -domaines de Scott. Pour $f \in [\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}]_\kappa$ on pose :

$$\mathbf{g}_f =_{def} \{g_{e,d} : e \in \mathcal{D}_c \wedge d \in \mathcal{E}_c \wedge d \leq f(e)\}$$

où $g_{e,d}$ est la fonction en escalier κ -compacte définie dans l'Exemple 379.

Lemme 397 Pour toute fonction f on a $\sup(\mathbf{g}_f) = f$.

Lemme 398 Soit f une fonction κ -compacte. Pour tout $u \in \mathcal{D}$, $f(u)$ est κ -compact dans \mathcal{E} .

Preuve. On vérifie facilement que $f = \sup(\mathbf{g}_f) = \sup\{\sup H : H \subseteq_\kappa \mathbf{g}_f\}$; puis, par régularité de κ , que $\{\sup H : H \subseteq_\kappa \mathbf{g}_f\}$ est κ -filtrant. Par κ -compacité de f , il existe $H \subseteq_\kappa \mathbf{g}_f$ tel que $f \leq \sup H$. Comme $\sup(H) \leq f$, on a finalement $f = \sup(H)$. Soit maintenant $u \in \mathcal{D}$. On $f(u) = \sup(H)(u) = \sup\{g_{c,d}(u) : g_{c,d} \in H\}$ par le Lemme 384. Il ne reste plus qu'à remarquer que, puisque H est κ -petit, $f(u)$ est le sup d'un ensemble κ -petit de κ -compacts, c'est donc un κ -compact. ■

4.2 Les pré-modèles de Map Theory

Nous introduisons la notion de pré-modèle de MT dans la catégorie des κ -cpos, ou κ -pré-modèle. La définition que nous donnons ici diffère donc légèrement de celle donnée en [13] qui ne concernait que les κ -domaines de Scott. En effet, ce n'est qu'à partir du Chapitre 9 qu'il sera nécessaire de travailler dans cette sous-catégorie.

Les κ -pré-modèles de Map Theory sont construits à partir de κ -cpos ayant une certaine forme. Pour les introduire on définit tout d'abord une opération pour laquelle la catégorie des κ -cpos, comme celle des κ -domaines de Scott, est close :

Définition 399 Soit $(\mathcal{D}, \leq_{\mathcal{D}})$ un κ -cpo et $\tilde{T}, \tilde{\perp} \notin \mathcal{D}$. On notera $\mathcal{D} \oplus_{\tilde{\perp}} \tilde{T}$ le κ -cpo $(\mathcal{D}', \leq_{\mathcal{D}'})$ tel que $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \{\tilde{T}, \tilde{\perp}\}$ et $u \leq_{\mathcal{D}'} v$ si et seulement si : $u = \tilde{\perp}$ ou $u = v = \tilde{T}$ ou $u \leq_{\mathcal{D}} v$ ($u, v \in \mathcal{D}$).

Nous définissons maintenant la notion de κ -pré-modèle :

Définition 400 (κ -pré-modèle 1) Un κ -pré-modèle est un triplet $(\mathcal{M}, \tilde{\lambda}, \tilde{A})$ où \mathcal{M} un κ -cpo et :

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{A} & \\ & \longrightarrow & \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\quad} & [\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}]_{\kappa} \oplus_{\tilde{\perp}} \tilde{T} \\ & \longleftarrow & \\ & \tilde{\lambda} & \end{array}$$

$\tilde{\lambda}, \tilde{A}$ sont deux isomorphismes d'ordre inverses l'un de l'autre.

Pour le reste de cette section, on suppose fixé un tel κ -pré-modèle $(\mathcal{M}, \tilde{\lambda}, \tilde{A})$.

Notation 401 :

- 1) $\perp =_{def} \perp_{\mathcal{M}}$ et donc $\perp = \tilde{\lambda}(\tilde{\perp})$
- 2) $T =_{def} \tilde{\lambda}(\tilde{T})$
- 3) $\mathfrak{F} =_{def} \tilde{\lambda}([\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}]_{\kappa})$.

Comme $\tilde{\lambda}$ et \tilde{A} sont des bijections on a $\mathfrak{F} = \mathcal{M} \setminus \{\perp, T\}$ et $\perp \neq T$.

Comme $\tilde{\lambda}, \tilde{A}$ sont deux isomorphismes d'ordre, ils commutent à tous les inf s et aux sup s (ils sont donc en particulier κ -continus). De plus, par définition de $[\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}]_{\kappa \oplus \perp} \tilde{T}$, on voit facilement que $u \leq_{\mathcal{M}} v$ si et seulement si : $u = \perp$ ou $u = v = T$ ou $u, v \in \mathfrak{F}$ et $u \leq_{\mathcal{M}} v$. En particulier, on a donc $u \leq_{\mathcal{M}} T$ si et seulement si $u = \perp$ ou T , et $T \leq u$ si et seulement si $u = T$. On en déduit facilement les propriétés suivantes des pré-modèles :

Lemme 402 :

- 1) Pour tout $H \subseteq \mathcal{M}$ admettant un sup :
 - sup $H = T$ ssi $H = \{T\}$ ou $H = \{T, \perp\}$
 - sup $H = \perp$ ssi $H = \emptyset$ ou $H = \{\perp\}$
 - sup $H \in \mathfrak{F}$ ssi $H \subseteq \mathfrak{F} \cup \{\perp\}$ et $H \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$
- 2) Pour tout $H \subseteq \mathcal{M}$ admettant un inf :
 - inf $H = T$ ssi $H = \{T\}$
 - inf $H = \perp$ ssi $\perp \in H$ ou ($T \in H$ et $H \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$)
 - inf $H \in \mathfrak{F}$ ssi $H \subseteq \mathfrak{F}$

Du lemme précédent, on déduit facilement :

Lemme 403 :

- 1) \mathfrak{F} est un κ -ouvert (de la κ -topologie sur \mathcal{M}).
- 2) Pour tout ouvert O , on a $T \in O$ si et seulement si, soit $\perp \in O$ et alors $O = \mathcal{M}$, soit $O = \{T\} \cup O'$ pour $O' \subseteq \mathfrak{F}$ un ouvert.

On définit maintenant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{A} & \\ & \longrightarrow & \\ \mathcal{M} & & [\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}]_{\kappa} \\ & \longleftarrow & \\ & \lambda & \end{array}$$

en posant $\mathbb{A}(u) = \tilde{A}(u)$ pour $u \in \mathfrak{F}$, $\mathbb{A}(\perp) = x \mapsto \perp$ et $\mathbb{A}(T) = x \mapsto T$; $\lambda(f) = \tilde{\lambda}(f)$ pour toute fonction κ -continue de $[\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}]_{\kappa}$.

On vérifie facilement que :

Lemme 404 $(\mathcal{M}, \lambda, \mathbb{A})$ est un κ -cpo réflexif, en particulier $\mathbb{A} \circ \lambda = id_{[\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}]_{\kappa}}$.

Définition 405 (κ -pré-modèle 2) A partir de maintenant et pour éviter d'alourdir notre terminologie, on appellera aussi " κ -pré-modèle" le κ -cpo réflexif $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}, \lambda, \mathbb{A})$ induit par un κ -pré-modèle $(\mathcal{M}, \tilde{\lambda}, \tilde{A})$. De plus, on écrira souvent simplement \mathcal{M} au lieu $\hat{\mathcal{M}}$.

La propriété sémantique exprimée par le lemme suivant est appelée *Fort Quartum Non-Datur (FQND)*. Nous verrons dans la section suivante que ce lemme implique que tout κ -pré-modèle satisfait la règle de *QND* de *MT*.

Lemme 406 (FQND) *Pour tout κ -pré-modèle \mathcal{M} on a :*

$$\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{M} : |F'u| = u\} \cup \{T, \perp\}.$$

Preuve. En effet, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\mathcal{M}} = \{u \in \mathcal{M} : |F'u| = u\}$ (Lemme 363) et, comme on l'a déjà remarqué, $\mathcal{M} = \mathfrak{F} \cup \{T, \perp\}$. ■

Remarque 407 *La restriction $\mathbb{A}_{|\mathfrak{F}}$ de \mathbb{A} à \mathfrak{F} et λ sont deux isomorphismes (d'ordre) inverses entre les κ -cpos \mathfrak{F} et $[\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}]_{\kappa}$.*

Comme $\mathbb{A}_{|\mathfrak{F}}$ et λ sont deux isomorphismes d'ordre, ils commutent aux *inf s* et aux *sup s* des sous-ensembles de \mathfrak{F} et de $[\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}]_{\kappa}$ et préservent la compacité. On en déduit facilement, en utilisant le Lemme 402, les trois lemmes suivants :

Lemme 408 :

1) *Soit $H \subseteq [\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}]_{\kappa}$. Si H admet un sup ou un inf alors $\{\lambda(f) : f \in H\}$ admet un sup ou un inf et :*

$$\begin{aligned} \lambda(\sup H) &= \sup\{\lambda(f) : f \in H\} \\ \lambda(\inf H) &= \inf\{\lambda(f) : f \in H\} \end{aligned}$$

2) *Soit $H \subseteq \mathcal{M}$. Si H admet un sup ou un inf alors $\{\mathbb{A}(u) : u \in H\}$ admet un sup ou un inf et :*

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\sup H) &= \sup\{\mathbb{A}(u) : u \in H\} \\ \mathbb{A}(\inf H) &= \inf\{\mathbb{A}(u) : u \in H\} \end{aligned}$$

Lemme 409 *Soit $X \subseteq \mathcal{M}$ tel que $\sup(X)$ existe et $\bar{x} \in \mathcal{M}^{<\omega}$. Si \mathcal{M} est un κ -ccpo ou si X est κ -filtrant alors $\sup(X) \bar{x} = \sup\{u\bar{x} : u \in X\}$.*

Preuve. On esquisse la démonstration du cas où \mathcal{M} est un κ -ccpo, l'autre cas s'obtenant en y remplaçant le Lemme 384 par le Lemme 349 : On remarque que l'existence du $\sup\{u\bar{x} : u \in X\}$ est assuré, dans les κ -ccpos, par le fait que l'ensemble $\{u\bar{x} : u \in X\}$ est majoré par $\sup(X)\bar{x}$. Il suffit ensuite de faire une induction sur la longueur de \bar{x} en utilisant le fait que \mathbb{A} commute à tous les sup et le Lemme 384. ■

Lemme 410 :

- 1) $\lambda^n(f)$ est κ -compact dans \mathcal{M} ssi f est κ -compacte dans $[\mathcal{M}^n \mapsto \mathcal{M}]_{\kappa}$
- 2) $\mathbb{A}(u)$ est κ -compacte dans $[\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}]_{\kappa}$ ssi u est κ -compact dans \mathcal{M} .

Preuve. Comme \perp et T sont κ -compacts, $\mathbb{A}(\perp) = x \mapsto \perp$ et $\mathbb{A}(T) = x \mapsto T$ sont des fonctions κ -compactes (Remarque 381). Le reste du lemme découle, dans le cas $n = 1$, immédiatement du fait que $\mathbb{A}_{|\mathfrak{F}}$ et λ sont des isomorphismes, et dans le cas général par une induction sur n . ■

Nous allons voir maintenant que, sous une certaine interprétation j des constantes if , \perp et T , tout pré-modèle satisfait les axiomes et règles de MT dits “du λ -calcul et du calcul des propositions”.

Chapitre 5

Satisfaction des axiomes et règles du λ -calcul et du calcul propositionnel

On suppose dans ce chapitre que $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}, \lambda, \mathbb{A})$ est un κ -pré-modèle au sens de la Définition 405.

Rappelons que MTA , est une théorie du λ -calcul enrichi de l'ensemble de constantes $C = \{\perp, T, if; \varepsilon, \phi, \sim\}$. L'interprétation de MTA se fait donc dans une structure $(\hat{\mathcal{M}}, j)$, où j est une fonction d'interprétation de C dans \mathcal{M} .

Nous ne nous intéressons ici qu'aux interprétations naturelles des constantes \perp, T et if dans les pré-modèles, autrement dit, nous fixerons $j(\perp) = \perp$, $j(T) = T$ et $j(if) = \lambda^3(IF)$, où IF est la fonction définie dans le Lemme 412 plus bas, sans définir l'interprétation des autres constantes. Cependant, comme le lecteur pourra le vérifier, les théorèmes qui vont suivre sont vrais pour une interprétation quelconque de ε, ϕ, \sim dans \mathcal{M} . Ils sont de plus démontrés en [6] auquel nous renvoyons.

Nous introduisons maintenant une convention d'écriture :

CONVENTION :

Pour simplifier les écritures, l'interprétation $|t|^j$ dans \mathcal{M} du terme clos $t \in \Lambda(\mathcal{M} \cup C)$ sera simplement notée t lorsque le contexte le permettra. Ainsi, par exemple, l'écriture $t \in G$ pour $G \subseteq \mathcal{M}$, devra se lire "l'interprétation de t se trouve dans G ". Autre exemple : sous cette convention, " $\mathcal{M} \models t = t'$ " et " $t = t'$ " deviennent deux formulations équivalentes pour dire que les interprétations des termes clos t et t' sont égales.

Comme $(\mathcal{M}, \lambda, \mathbb{A})$ est un κ -cpo réflexif on sait depuis le Lemme 368 que \mathcal{M} satisfait les axiomes et règles d' $\alpha\beta$ -équivalence et de passage au contexte (*Applic- β* , *Renommer*, *Trans* et *Abstract*). Seuls les axiomes *Select1, 2, 3*, *Applic-T*, *Applic- \perp* et la règle de *QND*, nous intéressent donc ici. Nous les rappelons tout d'abord :

Comportement de la constante *if* :

$$\begin{aligned} \textit{Select1} &\vdash (\textit{if } T \ A \ B) = A \\ \textit{Select2} &\vdash (\textit{if } \lambda x.C \ A \ B) = B \\ \textit{Select3} &\vdash (\textit{if } \perp \ A \ B) = \perp \end{aligned}$$

Comportement applicatif des constantes \perp et T :

$$\begin{aligned} \textit{Applic-T} &\vdash (TB) = T \\ \textit{Applic-}\perp &\vdash (\perp B) = \perp \end{aligned}$$

Le calcul propositionnel est traduit dans *MT* grâce à la seule règle du *QND* :

$$\begin{aligned} \textit{QND} \quad \text{Si} &\quad \vdash A[T/x] = B[T/x] \\ \text{et} &\quad \vdash A[F'x/x] = B[F'x/x] \\ \text{et} &\quad \vdash A[\perp/x] = B[\perp/x] \\ \text{Alors} &\quad \vdash A = B \end{aligned}$$

Nous donnons maintenant les propriétés de \mathcal{M} d'où découle la satisfaction de ces règles et axiomes. Nous renvoyons à [6] pour les démonstrations faciles des lemmes qui suivent.

Lemme 411 *Pour tout $u \in \mathcal{M}$ on a $Tu = T$ et $\perp u = \perp$.*

En posant $j(\perp) = \perp$ et $j(T) = T$, il est donc immédiat par le lemme précédent, que \mathcal{M} satisfait *Applic-T* et *Applic- \perp* .

Lemme 412 *La fonction IF de \mathcal{M}^3 vers \mathcal{M} définie par :*

$$IF(u, v, w) = \begin{cases} \perp & \text{si } u = \perp \\ v & \text{si } u = T \\ w & \text{si } v \in \mathfrak{F} \end{cases}$$

est κ -continue.

La démonstration du lemme précédent est facilitée par le fait qu'une fonction n -aire est κ -continue ssi elle l'est en chacun de ces arguments.

En posant $j(\textit{if}) =_{def} \lambda^3(IF)$, on vérifie facilement que, pour tout $u, v, w \in \mathcal{M}$ on a : $\textit{if } \perp vw = \perp$, $\textit{if } Tvw = v$ et $\textit{if } uvw = w$ si $u \in \mathfrak{F}$. On en déduit que, \mathcal{M} satisfait les axiomes *Select1, 2, 3* (on utilise en particulier la Remarque 372).

Il nous reste à voir que \mathcal{M} satisfait la règle de QND . Intuitivement, cette règle affirme que, pour f, g des fonctions κ -continues :

Si $f(T) = g(T)$
 et $f(F'u) = g(F'u)$ pour tout $u \in \mathcal{M}$
 et $f(\perp) = g(\perp)$
 Alors $f(u) = g(u)$ pour tout $u \in \mathcal{M}$ i.e $f = g$

Or, le QND aussi bien que cette implication sont trivialement vérifiés par tout modèle du λ -calcul qui vérifie le $FQND$; et donc par tout κ -pré-modèle (Lemme 406).

Définition 413 (κ -pré-modèle 3) Nous appellerons dorénavant κ -pré-modèle toute structure (\mathcal{M}, j) induite par un κ -pré-modèle \mathcal{M} et où j est définie de la façon que nous venons de voir pour les constantes if, \perp et T . Tout κ -pré-modèle satisfait donc les axiomes du λ -calcul et du calcul propositionnel de MT .

Avant de clôre ce chapitre, nous donnons quelques propriétés supplémentaires de l'interprétation des termes dans les κ -pré-modèles (au sens de la notation précédente).

Lemme 414 (*Quasi-extensionnalité*) Pour tous $u, v \in \mathfrak{F}$ on a :
 $u \leq v$ (resp. $u = v$) si et seulement si $ux \leq vx$ (resp. $ux = vx$) pour tout $x \in \mathcal{M}$.

Définition 415 Pour tout $n \in \omega$, on définit \hat{n} et \check{n} par :
 1) $\hat{n} =_{def} T$ si $n = 0$ et $\hat{n} =_{def} \lambda^n(\bar{u} \in \mathcal{M}^n \mapsto T)$ sinon.
 2) $\check{n} =_{def} \perp$ si $n = 0$ et $\check{n} =_{def} \lambda^n(\bar{u} \in \mathcal{M}^n \mapsto \perp)$ sinon.

Il est facile de montrer, par induction sur $n \in \mathbb{N}$, que $\hat{n} = |\lambda x_1 \dots \lambda x_n. T|^j$ et que $\check{n} = |\lambda x_1 \dots \lambda x_n. \perp|^j$. De plus, du Lemme 410 et de la Remarque 381, on déduit facilement :

Remarque 416 :

- 1) La suite \check{n} , pour $n \in \omega$, est une suite croissante d'éléments κ -compacts.
- 2) La suite \hat{n} , pour $n \in \omega$, est une antichaine d'éléments κ -compacts et maximaux.
- 3) On a $\check{m} \leq \hat{n}$ ssi $m \leq n$.

Nous donnons maintenant 5 conséquences faciles et très utiles du $FQND$ et de la définition de IF . Elles portent sur les constructeurs propositionnels et l'implication non monotone (voir Définition 34 et Notation 20 pour les définitions de $!, \flat, \approx, :, \dot{\cdot}, \dot{\wedge}$ et \longrightarrow) :

Lemme 417 *Pour tous $u, v \in \mathcal{M}$:*

- 1) $\mathcal{M} \vDash !u = T$ ssi $u \neq \perp$
- 2) $\mathcal{M} \vDash !u = \perp$ ssi $u = \perp$

Lemme 418 *Pour tout $u, v \in \mathcal{M}$:*

- 1) $\mathcal{M} \vDash \dot{u} = T$ ssi $u \in \mathfrak{F}$
- 2) $\mathcal{M} \vDash \dot{u} = F$ ssi $u = T$
- 3) $\mathcal{M} \vDash \dot{u} = \perp$ ssi $u = \perp$

Lemme 419 *Pour tout $u, v \in \mathcal{M}$:*

- 1) $\mathcal{M} \vDash u \dot{\wedge} v = T$ ssi $u = T$ et $v = T$
- 2) $\mathcal{M} \vDash u \dot{\wedge} v = \perp$ ssi $u = \perp$ ou $v = \perp$
- 3) $\mathcal{M} \vDash u \dot{\wedge} v = F$ sinon.

Lemme 420 *Pour tout $u, v \in \mathcal{M}$:*

- 1) $\mathcal{M} \vDash u : v = v$ si $u = T$
- 2) $\mathcal{M} \vDash u : v = \perp$ sinon.

Lemme 421 *Pour tout $u, v \in \mathcal{M}$:*

- 1) $\mathcal{M} \vDash u \dot{\Rightarrow} v = \perp$ ssi $u = \perp$ ou $v = \perp$
- 2) $\mathcal{M} \vDash u \dot{\Rightarrow} v = F$ ssi $u = T$ et $v \in \mathfrak{F}$
- 3) $\mathcal{M} \vDash u \dot{\Rightarrow} v = T$ sinon

Lemme 422 *Pour toute suite de termes \bar{A} de $\Lambda_{\mathcal{M},C}$, tous termes $B, C \in \Lambda_{\mathcal{M},C}$ et toute suite $\bar{x} \supseteq VL(\bar{A}, B, C)$, les énoncés suivants sont équivalents :*

- 1) $\mathcal{M} \vDash \bar{A} \longrightarrow B = C$
- 2) $\forall \bar{u} \in \mathcal{M}^{lg(\bar{x})} : (\mathcal{M} \vDash \bar{A}[\bar{u}/\bar{x}] = \bar{T} \Rightarrow \mathcal{M} \vDash B[\bar{u}/\bar{x}] = C[\bar{u}/\bar{x}])$

Chapitre 6

Satisfaction des axiomes *Caract* et de Quantification.

On fixe pour ce chapitre un cardinal $\kappa \geq \omega$ et un κ -pré-modèle $(\hat{\mathcal{M}}, j)$.

Nous nous intéressons maintenant aux interprétations des constantes ε et ϕ dans $(\hat{\mathcal{M}}, j)$. Contrairement à celles de if, \perp, T , ces interprétations ne sont pas “pré-déterminées” par la donnée de \mathcal{M} . Elles sont relatives au sous-ensemble Φ de \mathcal{M} qu’on choisit comme “domaine de la quantification” et à une fonction de choix ρ sur \mathcal{M} . La constante ε est alors interprétée par le code d’une fonction E , qui est une “fonction de choix κ -continue sur Φ ” (voir ci-dessous, Définition 429), et ϕ est interprétée par le code de la fonction caractéristique χ_Φ de Φ .

Il est facile de voir que la fonction caractéristique χ_G de $G \subseteq \mathcal{M}$, telle qu’elle est définie plus bas, est κ -continue ssi G est un κ -ouvert. Nous introduirons la notion de “fonction de choix κ -continue sur G ” et nous donnerons plusieurs exemples de telles fonctions. Enfin, nous montrerons que, pour tout Φ ouvert et remplissant des conditions très simples, les Axiomes de Quantification sont satisfaits.

Remarquons d’une part, que les lemmes et théorèmes de ce chapitre sont souvent énoncés de façon générale pour $G \subseteq \mathcal{M}$, alors que cette généralité ne sera vraiment nécessaire que pour la construction de l’ensemble Ψ , qui engendrera Φ en Section 9.4; d’autre part, qu’ils sont vrais pour une interprétation quelconque de la constante \sim .

Définition 423 Soit $G \subseteq \mathcal{M}$. On appellera fonction caractéristique de G , la fonction χ_G définie par :

$$\chi_G(u) = \begin{cases} T & \text{si } u \in G \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme 424 Soit $G \subseteq \mathcal{M}$, χ_G est κ -continue si et seulement si G est un ouvert.

6.1 Fonctions de choix continues

On introduit tout d'abord les notions dont nous aurons besoin :

Définition 425 On appellera “fonction racine” et on notera r la fonction κ -continue définie par :

$$r(u) = \begin{cases} \perp & \text{si } u = \perp \\ F & \text{si } u \in \mathfrak{F} \\ T & \text{si } u = T \end{cases}$$

Remarque 426 On vérifiera sans peine que $\lambda(r)$ est l'interprétation du terme

$\approx =_{def} \lambda z.(if z T F)$. On peut aussi noter que r est la fonction en escalier g_s , où $s : \{T, \lambda x.\perp\} \rightarrow \mathcal{M}$ est définie par $s(T) = T$ et $s(\lambda x.\perp) = F$.

Définition 427 (Prop. d'Ackermann) On dira qu'une fonction $E \in \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ vérifie la propriété d'Ackermann pour G si :

$$[\forall x \in G : r(ux) = r(vx)] \Rightarrow E(u) = E(v).$$

Définition 428 On appellera fonction de choix sur \mathcal{M} toute fonction ρ de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ vers \mathcal{M} telle que pour tout $X \subseteq \mathcal{M}$ et non-vide on ait $\rho(X) \in X$.

Définition 429 On appellera fonction de choix continue sur G toute fonction $E \in [\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}]_\kappa$ vérifiant la propriété d'Ackermann pour G , et telle que, pour tout $u \in \mathcal{M}$:

- 1) Si $\perp \in uG$ alors $E(u) = \perp$.
- 2) Si $\perp \notin uG$ alors $E(u) \in G$
- 2) Si $\perp \notin uG$ et $T \in uG$ alors $E(u) \in \{x \in G : ux = T\}$.

Autrement dit, E choisit continûment un élément x de G qui vérifie $ux = T$ s'il en existe un (et si la valeur de ux est “déterminée” pour tout $x \in G$).

Remarque 430 Lorsque $\perp \notin G$ on a donc que $E(u) \in G$ ssi $\perp \notin uG$.

Définition 431 Soit ρ une fonction de choix sur \mathcal{M} . On note E_G^ρ la fonction définie sur \mathcal{M} par :

$$E_G^\rho(u) = \begin{cases} \perp & \text{si } \perp \in uG \\ \rho(G) & \text{si } uG \subseteq \mathfrak{F} \\ \rho(\{x \in G : ux = T\}) & \text{si } \perp \notin uG \ni T \end{cases}$$

Par la suite, de nombreux lemmes vrais pour les sous-ensembles κ -petits de \mathcal{M} le seront aussi pour des sous-ensembles de la forme $\uparrow H$, où H est κ -petit. Cela justifiera la définition suivante :

Définition 432 *Pour tout $G \subseteq \mathcal{M}$ et ξ un cardinal, on dira que G est essentiellement ξ -petit s'il existe $H \subseteq_\xi \mathcal{M}$ tel que $H \subseteq G \subseteq \uparrow H$.*

On remarque que tout ensemble ξ -petit est essentiellement ξ -petit, de plus :

Remarque 433 *Pour tous H, G , si $H \subseteq G \subseteq \uparrow H$ alors $\uparrow H = \uparrow G$.*

Pour le reste de cette section on se donne $G \subseteq \mathcal{M}$ et ρ une fonction de choix quelconque sur \mathcal{M} . On donne maintenant le lemme central de cette section :

Lemme 434 *Si G est essentiellement κ -petit et $\perp \notin G$ alors E_G^ρ est une fonction de choix continue sur G .*

Preuve. La seule propriété non-triviale est la κ -continuité de E_G^ρ . Pour la montrer, il suffit de vérifier que E_G^ρ vérifie les conditions du Lemme 355. La première condition est que $U =_{\text{def}} \text{dom}(E_G^\rho) = \{u : \perp \notin uG\}$ soit un κ -ouvert. Or supposons $H \subseteq G \subseteq \uparrow H$, alors $U = \bigcap_{x \in H} \{u : ux \neq \perp\} = \bigcap_{x \in H} f_x^{-1}[\mathcal{M} - \{\perp\}]$, où f_x est la fonction κ -continue $v \mapsto vx$. Si H est κ -petit, U est alors l'intersection d'une famille κ -petite d'ouverts. C'est donc un ouvert. On vérifie maintenant la deuxième condition. Soient donc $u \leq v$ avec $\perp \notin uG$. On a $\perp \notin vG$, et comme T est incomparable avec les éléments de \mathfrak{F} , on vérifie facilement que $\{x \in G : ux = T\} = \{x \in G : vx = T\}$. Le résultat est alors évident. ■

Le Lemme 436 exprimera le fait que si $H \subseteq_\kappa G \subseteq \uparrow H$ alors toute fonction de choix continue sur H est aussi une fonction de choix continue sur G . Ce résultat découlera du lemme suivant :

Lemme 435 *Soit $H \subseteq G \subseteq \uparrow H$ et $u \in \mathcal{M}$:*

- 1) $\perp \in uG \Leftrightarrow \perp \in uH$
- 2) *Si $\perp \notin uH$ alors $T \in uG \Leftrightarrow T \in uH$*

Preuve. On remarque tout d'abord que l'hypothèse implique :

$$uH \subseteq uG \subseteq u(\uparrow H) \subseteq \uparrow uH$$

Maintenant, il est évident que $\perp \in uH$ ssi $\perp \in \uparrow(uH)$, et donc que si $\perp \notin uH$ alors $T \in uH$ ssi $T \in \uparrow(uH)$. On en conclut facilement les points 1 et 2. ■

Lemme 436 *Soit E une fonction de choix continue sur H . Si $H \subseteq_\kappa G \subseteq \uparrow H$ alors E est une fonction de choix continue sur G .*

Preuve. E est κ -continue par hypothèse. On montre tout d'abord qu'elle vérifie la *propriété d'Ackermann pour G* . Soient donc $u, v \in \mathcal{M}$. Comme $H \subseteq G$, si $\forall x \in G \ r(ux) = r(vx)$ alors $\forall x \in H \ r(ux) = r(vx)$ et, comme E vérifie la propriété d'Ackermann pour H , on a $E(u) = E(v)$. Soit maintenant $u \in \mathcal{M}$, par le lemme précédent il vient immédiatement :

- 1) $\perp \in uG \Rightarrow \perp \in uH \Rightarrow E(u) = \perp$
- 2) Si $\perp \notin uG$ alors $\perp \notin uH$ et $E(u) \in H \subseteq G$
- 3) Si $\perp \notin uG$ et $T \in uG$ alors $T \in uH$ et $E(u) \in \{x \in H : ux = T\} \subseteq \{x \in G : ux = T\}$. ■

Corollaire 437 *Si $H \subseteq_{\kappa} G \subseteq \uparrow H$ alors, pour toute fonction de choix ρ sur \mathcal{M} , E_H^{ρ} est une fonction de choix continue sur G .*

6.2 Satisfaction des axiomes *Caract* et de Quantification

Pour cette section, on fixe un κ -ouvert $\Phi \subseteq \mathcal{M}$ essentiellement κ -petit. On suppose de plus que $\perp \notin \Phi$. On se donne une fonction de choix continue E sur Φ (dont l'existence est garantie par le Lemme 434). De plus, par le Lemme 424, χ_{Φ} est κ -continue.

On pose $j(\varepsilon) = \lambda(E)$ et $j(\phi) = \lambda(\chi_{\Phi})$.

Ainsi on aura en particulier $\mathcal{M} \models \phi u = T$ ssi $u \in \Phi$, et $\mathcal{M} \models \phi u = \perp$ sinon.

Nous allons voir maintenant que, sous une telle interprétation des constantes, \mathcal{M} satisfait les axiomes de *Quantifications*. On rappelle tout d'abord ces axiomes ainsi que l'axiome *Caract* :

- Caract* $\phi x = !\phi x$
Quantif1 $\phi B, \dot{\forall} x.A \longrightarrow A[B/x]$
Quantif2 $\varepsilon x.A = \varepsilon x.(\phi x \dot{\wedge} A)$
Quantif3 $\phi \varepsilon x.A = \dot{\forall} x.!A$
Quantif4 $\dot{\exists} x.A \longrightarrow \phi \varepsilon x.A$
Quantif5 $\dot{\forall} x.A = \dot{\forall} x.(\phi x : A)$

Rappelons que pour $A, B \in \Lambda_{\mathcal{M}, C}$, on a $A : B =_{def}$ (if $A \ B \ \perp$). On vérifie facilement que, sous l'interprétation précédente de ϕ , on a :

Lemme 438 *Pour tout terme $A \in \Lambda_{\mathcal{M}, C}$ et tout $u \in \mathcal{M}$:*

- 1) $\mathcal{M} \models \phi u \dot{\wedge} A[u/x] = T$ ssi $\mathcal{M} \models \phi u : A[u/x] = T$ ssi $u \in \Phi$ et $\mathcal{M} \models A[u/x] = T$
- 2) $\mathcal{M} \models \phi u \dot{\wedge} A[u/x] = \perp$ ssi $\mathcal{M} \models \phi u : A[u/x] = \perp$ ssi $u \notin \Phi$ ou $\mathcal{M} \models A[u/x] = \perp$

Preuve. ϕu ne prenant que la valeur T ou \perp , le lemme suit immédiatement des Lemmes 419 et 420.

■

Comme on interprète ε par $\lambda(E)$, et que E satisfait la propriété d'*Ackermann* sur Φ (Cf Définition 427), on déduit du lemme précédent que :

Corollaire 439 $\mathcal{M} \models \varepsilon x.A = \varepsilon x.(\phi x \dot{\wedge} A) = \varepsilon x.(\phi x : A)$

Que ε permet de traduire adéquatement les quantificateurs (ce qu'expriment les Propositions 441 et 442) découlera du résultat suivant :

Lemme 440 *Pour tout $u \in \mathcal{M}$ on a :*

- 1) $\mathcal{M} \models u(\varepsilon u) = \perp$ ssi $\perp \in u\Phi$
- 2) $\mathcal{M} \models u(\varepsilon u) \in \mathfrak{F}$ ssi $u\Phi \subseteq \mathfrak{F}$
- 3) $\mathcal{M} \models u(\varepsilon u) = T$ ssi $T \in u\Phi$ et $\perp \notin u\Phi$

Preuve. Nous écrirons "Clause1,2 ou 3" pour indiquer l'utilisation des clauses 1,2 ou 3 de la définition des fonctions de choix continues. Notons que $u(\varepsilon u) = u(E(u))$ et que la Remarque 430 nous donne $E(u) \in \Phi$ ssi $\perp \notin u\Phi$.

1) Si $\perp \notin u\Phi$ alors $E(u) \in \Phi$ et donc $\perp \neq u(E(u))$. Inversement, soit $x \in \Phi$ tel que $ux = \perp$, il vient par Clause1 : $u\perp = u(E(u)) \leq ux = \perp$.

Remarquons que par 1 on a $u(E(u)) \neq \perp \Leftrightarrow \perp \notin u\Phi \Leftrightarrow E(u) \in \Phi$. Il vient :

2) Si $u(E(u)) \in \mathfrak{F}$ et que $T \in u\Phi$, comme $\perp \notin u\Phi$ on a $u(E(u)) = T$ (Clause3), ce qui est contradictoire. Inversement, si $u\Phi \subseteq \mathfrak{F}$ alors $E(u) \in \Phi$ par Clause2, et donc $u(E(u)) \in \mathfrak{F}$.

3) Si $\perp \in u\Phi$ alors $u(E(u)) = \perp \neq T$. Si maintenant $T \notin u\Phi$ et $\perp \notin u\Phi$, on a $u\Phi \subseteq \mathfrak{F}$ et $u(\varepsilon u) \in \mathfrak{F}$, et donc $u(E(u)) \neq T$. L'implication inverse est immédiate par Clause3.

■

Pour les définitions de $\dot{\exists}$ et $\dot{\forall}$ nous renvoyons à la Définition 66 :

Proposition 441 *Pour tout $A \in \Lambda_{\mathcal{M},C}$ tel que $VL(A) \subseteq \{x\}$, l'interprétation de $\dot{\exists}x.A$ est égale à \perp , F ou T et :*

- 1) $\mathcal{M} \models \dot{\exists}x.A = T$ ssi $(\forall u \in \Phi \mathcal{M} \models A[u/x] \neq \perp$ et $\exists u \in \Phi : \mathcal{M} \models A[u/x] = T)$
- 2) $\mathcal{M} \models \dot{\exists}x.A = \perp$ ssi $\exists u \in \Phi \mathcal{M} \models A[u/x] = \perp$
- 3) $\mathcal{M} \models \dot{\exists}x.A = F$ ssi $\forall u \in \Phi \mathcal{M} \models A[u/x] \in \mathfrak{F}$

Proposition 442 *Pour tout $A \in \Lambda_{\mathcal{M},C}$ tel que $VL(A) \subseteq \{x\}$, l'interprétation de $\dot{\forall}x.A$ est égal à \perp , F ou T et :*

- 1) $\mathcal{M} \models \dot{\forall}x.A = T$ ssi $\forall u \in \Phi \mathcal{M} \models A[u/x] = T$
- 2) $\mathcal{M} \models \dot{\forall}x.A = \perp$ ssi $\exists u \in \Phi \mathcal{M} \models A[u/x] = \perp$

3) $\mathcal{M} \vDash \dot{\forall}x.A = F$ ssi $(\forall u \in \Phi \mathcal{M} \vDash A[u/x] \neq \perp$ et $\exists u \in \Phi : \mathcal{M} \vDash A[u/x] \in \mathfrak{F})$

On en arrive maintenant au théorème principal de ce chapitre, à savoir :

Théorème 443 *Pour que les axiomes de Quantification soient satisfaits par un κ -pré-modèle $(\hat{\mathcal{M}}, j)$ qui interprète ϕ et ε comme précédemment à partir d'un $\Phi \subseteq \mathcal{M}$, il suffit que Φ soit un κ -ouvert essentiellement κ -petit et tel que $\perp \notin \Phi$.*

Preuve. :

Caract : Evident par définitions de ! et de χ_Φ .

Quantif1 : Par le Lemme 422, on doit montrer que, pour $\bar{y} \supseteq VL(A, B)$ et $\bar{u} \in \mathcal{M}^{lg(\bar{y})}$:

$(\mathcal{M} \vDash \phi(B[\bar{u}/\bar{y}]) = T$ et $\mathcal{M} \vDash \dot{\forall}x.A[\bar{u}/\bar{y}] = T)$ implique $\mathcal{M} \vDash A[B/x][\bar{u}/\bar{y}] = T$

Soit $v = |B[\bar{u}/\bar{y}]|$, par hypothèse on a $v \in \Phi$. Le résultat découle alors directement de la Proposition 442.1, puisque clairement $|A[B/x][\bar{u}/\bar{y}]| = |A[v/y][\bar{u}/\bar{y}]|$.

Quantif2 : Voir Corollaire 439.

Quantif3 : Comme $!A[u/x] = (if A[u/x] T T)$, on a que $!A[u/x] = \perp$ ssi $A[u/x] = \perp$, et $A[u/x] = T$ sinon. De même, par définition de χ_Φ , $\phi\varepsilon x.A$ prend soit la valeur \perp , soit la valeur T . Maintenant, $\phi\varepsilon x.A = T$ ssi $\varepsilon x.A \in \Phi$ ssi $\forall u \in \Phi : (\lambda x.A u) \neq \perp$ (Remarque 430) ssi $\forall u \in \Phi : (\lambda x.!A u) \neq \perp$ ssi $\dot{\forall}x.!A = T$ (Proposition 442).

Quantif4 : On doit montrer que pour $VL(A) \subseteq \bar{x}$ et $\bar{u} \in \mathcal{M}^{lg(\bar{x})}$, on a $\mathcal{M} \vDash \dot{\exists}x.A[\bar{u}/\bar{x}] = T$ implique $\mathcal{M} \vDash \phi\varepsilon x.A[\bar{u}/\bar{x}] = T$. Supposons donc $\dot{\exists}x.A[\bar{u}/\bar{x}] = T$. On a donc en particulier que $\forall u \in \Phi : A[u/x, \bar{u}/\bar{x}] \neq \perp$ (Proposition 441.1), et donc $\forall u \in \Phi : !A[u/x, \bar{u}/\bar{x}] = T$ (voir *Quantif2*). Il vient $\dot{\forall}x.!A = T = \phi\varepsilon x.A$.

Quantif5 : Vient facilement du Lemmes 438 et de la Proposition 442. ■

Chapitre 7

Satisfaction des axiomes de l'Égalité

On suppose pour ce chapitre que $\kappa > \omega$ et que $(\hat{\mathcal{M}}, j)$ est un κ -pré-modèle au sens de la Définition 413. A partir du Lemme 466 p.168, on supposera de plus que \mathcal{M} est un κ -ccpo. On remarquera que certains résultats de ce chapitre utilisent l'existence d'un cardinal inaccessible $\sigma < \kappa$. Ces résultats ne seront cependant utilisés que dans le chapitre 9 et ne jouent aucun rôle dans la satisfaction des axiomes de l'égalité.

On s'intéresse ici à l'interprétation de la constante $\dot{\sim}$. Comme celle de ϕ et ε , cette interprétation est relative au choix de Φ . L'idée fondamentale qui nous guide est d'interpréter $\dot{\sim}$ par la fonction caractéristique d'une relation d'équivalence sur un certain sur-ensemble Φ^+ de Φ . Cette relation sera définie comme la “*bisimulation maximale*” sur Φ^+ .

Nous définirons bientôt l'opération $()^+$ et la notion de *bisimulation*. Nous verrons aussi les conditions sur $\Phi \subseteq \mathcal{M}$, qui permettent une interprétation de la constante $\dot{\sim}$ satisfaisant les axiomes de l'*Egalité*.

Nous commençons par regarder de façon générale quelles sont les relations binaires sur les sous-ensembles de \mathcal{M} qui sont *représentables* par un élément de \mathcal{M} .

7.1 Les relations binaires représentables

Définition 444 Soient $G \subseteq \mathcal{M}$ et R une relation binaire sur G . On appellera fonction caractéristique de R (sur G), la fonction χ_R définie par :

$$\chi_R(u, v) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{si } (u, v) \in R \\ F & \text{si } (u, v) \notin R \text{ et } (u, v) \in G^2 \\ \perp & \text{si } (u, v) \notin G^2 \end{cases}$$

Définition 445 On dira qu'une relation R sur G est représentable (dans \mathcal{M}) si χ_R est κ -continue.

Lemme 446 Pour une relation R sur G les deux propriétés suivantes sont équivalentes et elles impliquent que G est un κ -ouvert :

- 1) R est représentable
- 2) R et $G^2 \setminus R$ sont des κ -ouverts.

Preuve. Il est clair que 2 implique que G^2 est un ouvert, et donc G est un ouvert. On montre maintenant l'équivalence de 1 et 2 :

Soit $O \subseteq \mathcal{M}$ un ouvert quelconque. Si $\perp \in O$, on a $O = \mathcal{M}$, et donc $\chi_R^{-1}[O]$ est l'ouvert \mathcal{M} . Dans le cas contraire, on a $\chi_R^{-1}[O] = \chi_R^{-1}[O \cap \{T, F\}]$ et on a les quatre possibilités suivantes : $\chi_R^{-1}[O] = \emptyset$, $\chi_R^{-1}[O] = R$, $\chi_R^{-1}[O] = G^2 \setminus R$ et $\chi_R^{-1}[O] = R \cup (G^2 \setminus R)$. Il est donc clair que χ_R est continue ssi R et $G^2 \setminus R$ sont des ouverts. ■

Le lemme qui suit donne une caractérisation des relations d'équivalence représentables :

Lemme 447 Soit R une relation d'équivalence sur G . Sont équivalents :

- 1) χ_R est κ -continue (R est représentable)
- 2) G est un ouvert et $\forall u, v \in G : u \leq v \Rightarrow (u, v) \in R$

Preuve.

\Rightarrow) Si χ_R est κ -continue G et R sont des ouverts par le lemme précédent. On a donc en particulier $R = \uparrow R$. Puisque R est réflexive, on a $(u, u) \in R$. et donc finalement $(u, v) \in R$ si $u \leq v$.

\Leftarrow) Supposons que G soit un ouvert et que $\forall u, v \in G : u \leq v \Rightarrow (u, v) \in R$. On va montrer que χ_R est κ -continue. En vertu du Lemme 355, il suffit de vérifier que $\text{dom}(\chi_R) = G^2$ est un ouvert, et que, si $(u, v) \in G^2$ et $(u, v) \leq_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} (u', v')$ alors $\chi_R(u, v) = \chi_R(u', v')$. La première condition découle immédiatement du fait que G est un ouvert. Maintenant, par définition de $\leq_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}$, si $(u, v) \leq_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} (u', v')$. on a $u \leq u'$ et $v \leq v'$. Si de plus $u, v \in G$, on a $u', v' \in G$ (puisque $G = \uparrow G$), et il vient par hypothèse $(u, u') \in R$ et $(v, v') \in R$. On vérifie alors facilement, en utilisant le fait que R est une relation d'équivalence, que $(u, v) \in R$ ssi $(u', v') \in R$. D'où le résultat. ■

7.2 L'opération $()^+$

Définition 448 Pour tout $G \subseteq \mathcal{M}$: $G^+ =_{def} \{u : \forall \bar{x} \in G^{<\omega}, u\bar{x} \neq \perp\}$.

Le suite de cette section sera utilisée pour montrer deux propriétés importantes de G^+ . La première est que si G est essentiellement κ -petit, alors G^+ est un ouvert (Lemme 464). La deuxième suppose que \mathcal{M} est un κ -ccpo et qu'il existe un cardinal inaccessible $\sigma < \kappa$. Dans ce cas, on montrera que, pour tout G vérifiant $H \subseteq G \subseteq \uparrow H$ avec $H \subseteq_\sigma \mathcal{M}_c$, on a que G^+ est un ouvert essentiellement σ -petit (Corollaire 469).

L'expression de ces propriétés nécessite l'introduction de certaines notions :

Notation 449 Pour $K, G \subseteq \mathcal{M}$ et $K \neq \emptyset$, on définit pour tout $n \in \omega$:

$$K^n \mapsto G =_{def} \{u \in \mathcal{M} : \forall \bar{x} \in K^n, u\bar{x} \in G\}$$

On remarque que $K^0 \mapsto G = G$ et on abrégera $K^1 \mapsto G$ par $K \mapsto G$.

Remarque 450 :

- 1) $T \in K^n \mapsto G$ ssi $T \in G$
- 2) $\perp \in K^n \mapsto G$ ssi $\perp \in G$
- 3) $K^{n+1} \mapsto G = K \mapsto (K^n \mapsto G) = K^n \mapsto (K \mapsto G)$

Le lemme trivial suivant exprime, la croissance pour l'inclusion de \mapsto en son deuxième argument, et la décroissance en son premier :

Lemme 451 Soient $H \subseteq H'$ et $K \subseteq K'$, on a :

$$H' \mapsto K \subseteq H \mapsto K'$$

Remarque 452 On vérifie facilement par induction sur n que, si $X \subseteq G \mapsto X$, alors, pour tous $n > 0$, on a $X \subseteq G^n \mapsto X$.

Les propriétés énoncées dans le lemme suivant sont immédiates :

Lemme 453 Soient $G, H, X \subseteq \mathcal{M}$:

- 1) $T \in G^+$ et $\perp \notin G^+$
- 2) $H \subseteq G$ implique $G^+ \subseteq H^+$
- 3) $G^+ = \uparrow G^+ = (\uparrow G)^+$
- 4) $G^+ = G^n \mapsto G^+$ pour tout $n \in \omega$
- 5) Si $X \subseteq G \mapsto X$ et $\perp \notin X$ alors $X \subseteq G^+$
- 6) $G^+ = \sqcup \{u^G : u \in G^+\}$.

Définition 454 On définit la relation $=_G$ sur \mathcal{M} par :

$$u =_G v \Leftrightarrow \forall \bar{x} \in G^{<\omega} : r(u\bar{x}) = r(v\bar{x})$$

Comme $\emptyset \in G^{<\omega}$, le lemme suivant est immédiat :

Lemme 455 Soit $G \subseteq \mathcal{M}$. La relation $=_G$ est une relation d'équivalence et :

$$u =_G v \Leftrightarrow (r(u) = r(v) \text{ et } \forall x \in G : ux =_G vx)$$

Corollaire 456 Pour tous $u, v \in \mathcal{M}$ on a :

- 1) $u =_G T$ ssi $u = T$
- 2) $u =_G \perp$ ssi $u = \perp$.

Remarque 457 Si $H \subseteq G$ alors $u =_G v \Rightarrow u =_H v$.

Remarque 458 Pour tous $u, v \in G^+$, on $u \leq v \Rightarrow u =_G v$

En particulier $=_G$ est une relation d'équivalence sur G^+ représentable (par la remarque précédente). Malheureusement, elle n'est pas adéquate pour interpréter \sim . En particulier, elle n'est pas "maximale", ce qui nous conduit à introduire une relation plus grossière dans la section suivante.

Le lemme et le corollaire suivants découlent facilement des points 2 et 3 du Lemme 453 :

Lemme 459 Soit $K \subseteq \mathcal{M}$:

- 1) $K^+ = (\uparrow K)^+$
- 2) $\forall u, v \in K^+ \quad u =_K v \Leftrightarrow u =_{\uparrow K} v$

Preuve. La vérification du point 1 (déjà cité) et de 2 se fait trivialement en utilisant le fait que $\mathfrak{F} = \uparrow \mathfrak{F}$ et que $\{T\} = \uparrow \{T\}$. ■

Corollaire 460 Si $\uparrow H = \uparrow G$, et en particulier si $H \subseteq G \subseteq \uparrow H$, alors :

- 1) $H^+ = G^+$
- 2) $\forall u, v \in G^+ \quad u =_H v \Leftrightarrow u =_G v$

Le lemme suivant porte sur la cardinalité de $G^{<\omega}$ pour $G \subseteq \mathcal{M}$, il sera en particulier utile pour démontrer le Lemme 464 :

Lemme 461 Pour tout cardinal $\xi > \omega$ et régulier :

- 1) Si G est ξ -petit alors $G^{<\omega}$ est ξ -petit.
- 2) Si G est essentiellement ξ -petit alors $G^{<\omega}$ est essentiellement ξ -petit.

Preuve. Le 2 découle du 1 puisque si $H \subseteq_\xi G \subseteq \uparrow H$, on a clairement $H^{<\omega} \subseteq_\xi G^{<\omega} \subseteq \uparrow (H^{<\omega})$. Maintenant si G est ξ -petit, on a $\text{Card}(G^{<\omega}) = \sup\{\text{Card}(G), \omega\} < \xi$. ■

On tire maintenant une conséquence du lemme précédent qui nous sera utile en Section 9.1.1 :

Lemme 462 Si $\sigma < \kappa$ est un cardinal inaccessible et si $G \subseteq \mathcal{M}$ est essentiellement σ -petit alors : $\text{Card}(G^+ / =_G) < \sigma$.

Preuve. Soit H tel que $H \subseteq_\sigma G \subseteq \uparrow H$. On a $(H^+ / =_H) = (G^+ / =_G)$ par le Corollaire 460. De plus, on vérifie facilement que la fonction définie de $H^+ / =_H$ vers $\mathcal{P}(H^{<\omega}) \times \mathcal{P}(H^{<\omega})$ par :

$$i(u^H) = (\{\bar{x} \in H^{<\omega} : u\bar{x} \in \mathfrak{F}\}, \{\bar{x} \in H^{<\omega} : u\bar{x} = T\})$$

est une injection, il vient :

$$\text{Card}(G^+ / =_G) \leq \text{Card}(\mathcal{P}(H^{<\omega}) \times \mathcal{P}(H^{<\omega})) = 2^{\text{Card}(H^{<\omega})}$$

On conclut par inaccessibilité de σ et le lemme précédent.

■

Avant d'en arriver au lemme annoncé en début de section, nous introduisons une notation pour la classe de u selon $=_G$:

Notation 463 Pour tout $u \in \mathcal{M}$: $u^G = \{v \in \mathcal{M} : v =_G u\}$.

Lemme 464 Si $G \subseteq \mathcal{M}$ est essentiellement κ -petit, alors :

1) Pour tout $u \in G^+$, u^G est un ouvert inclus dans G^+ , en particulier $u^G = \uparrow u^G$.

2) G^+ est un ouvert.

Preuve. Le 2 est découle du 1 et du Lemme 453.6, on montre 1 :

Rappelons que r est la fonction racine (Cf Définition 425). Tout d'abord, en utilisant la continuité de l'application et la clôture de $[\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}]_\kappa$ par composition, on vérifie facilement que, pour tout $\bar{x} \in \mathcal{M}^{<\omega}$, la fonction $\mathfrak{g}_{\bar{x}}$ de \mathcal{M} vers \mathcal{M} définie par $\mathfrak{g}_{\bar{x}}(v) = r(v\bar{x})$ est κ -continue. Maintenant, il est évident que $u^G \subseteq G^+$. De plus :

$$\begin{aligned} u^G &= \{v \in \mathcal{M} : \forall \bar{x} \in G^{<\omega} r(u\bar{x}) = r(v\bar{x})\} \\ &= \prod_{\bar{x} \in G^{<\omega}} \Omega_{\bar{x}} \quad \text{où } \Omega_{\bar{x}} =_{\text{def}} \{v \in \mathcal{M} : r(v\bar{x}) = r(u\bar{x})\} \end{aligned}$$

Comme $r(u\bar{x}) \neq \perp$, on a $r(u\bar{x}) \in \{T\}$, ou $r(u\bar{x}) \in \mathfrak{F}$. On vérifie alors facilement que dans le premier cas $\Omega_{\bar{x}} = \mathfrak{g}_{\bar{x}}^{-1}[\{T\}]$, et dans le second $\Omega_{\bar{x}} = \mathfrak{g}_{\bar{x}}^{-1}[\mathfrak{F}]$. Pour tout $\bar{x} \in G^{<\omega}$, l'ensemble $\Omega_{\bar{x}}$ est donc l'image inverse d'un ouvert par une fonction κ -continue (Lemme 403). C'est donc un ouvert. Maintenant, si $\text{card}(G) < \kappa$, on a $\text{card}(G^{<\omega}) < \kappa$, et u^G est donc l'intersection d'une famille κ -petite d'ouverts, il est donc lui-même un ouvert. Enfin, si G est seulement essentiellement κ -petit, on se ramène immédiatement au cas précédent par le Corollaire 460. ■

On suppose maintenant que \mathcal{M} est un κ -ccpo et donc que tout sous-ensemble non-vide de \mathcal{M} admet un inf, et l'on montre des propriétés supplémentaires de G^+ , modulo éventuellement une petite restriction sur G ¹. On montrera

¹Remarquons que ces propriétés étaient vraies en [2] pour G^0 , mais qu'ici la démonstration est très différente du fait que l'on ne dispose pas d'un opérateur équivalent à l'opérateur \downarrow_G .

en particulier que $G^+ = \uparrow INF(G^+)$ où :

Notation 465 $INF(G^+) =_{def} \{\inf(u^G) : u \in G^+\}$

On remarque immédiatement que, comme $G^+ \subseteq \mathfrak{F} \cup \{T\}$, on a :
 $INF(G^+) \subseteq \mathfrak{F} \cup \{T\}$ (Lemme 402.2).

Lemme 466 *Pour tous $u \in G^+$ et $x \in G_c$ on a :*

$$\inf(u^G)x = \inf\{vx : v \in u^G\}$$

Preuve. Si $u = T$ c'est évident. Supposons donc $u^G \subseteq \mathfrak{F}$ et soient $m =_{def} \inf\{vx : v \in u^G\}$ et $u_0 = \inf(u^G)$. Comme u_0 minore u^G on a clairement $u_0x \leq m$. Par ailleurs, par le Lemme 409, on a $u_0x = \sup\{wx : w \in Min(u^G)\}$, où, rappelons-le, $Min(u^G)$ est l'ensemble des minorants de u^G . Pour montrer $m \leq u_0x$ il suffit donc de trouver $w \in Min(u^G)$ tel que $wx = m$.

Soit g la fonction en escalier définie par :

$$g(y) = \begin{cases} m & \text{si } y \geq x \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction g est κ -continue par compacité de x (Exemple 379). Soit $w = \lambda(g)$. On a immédiatement $wx = m$. Il nous reste à montrer que $w \in Min(u^G)$. Soit donc $v \in u^G$, on doit montrer $w \leq v$. Comme $w, v \in \mathfrak{F}$, il nous suffit de montrer $\forall y (wy \leq vy)$. Si $y \not\geq x$ c'est évident, puisque $wy = \perp$. Si $y \geq x$ il vient : $wy = m \leq vx \leq vy$.

■

Lemme 467 *Si $\uparrow G = \uparrow H$ pour un $H \subseteq \mathcal{M}_c$ alors :*

- 1) $G^+ = \uparrow INF(G^+)$
- 2) *Pour tout $u \in G^+$, on a $u^G = \uparrow \{\inf(u^G)\}$*

Preuve.

1) Compte tenu du Corollaire 460, on peut supposer que $G \subseteq \mathcal{M}_c$. Soit $G' =_{def} \uparrow INF(G^+)$. On sait déjà que $G^+ \subseteq G'$. Compte tenu que $\perp \notin G'$, pour montrer que $G' \subseteq G^+$, il suffit de vérifier que $G' \subseteq G \mapsto G'$ (Lemme 453.5). Il faut donc montrer que si $w \in G'$ et $x \in G$ alors $wx \in G'$. Par définition de G' il existe $u \in G^+$ tel que $\inf(u^G) \leq w$. On a $(ux) \in G^+$, et donc $\inf((ux)^G) \in G'$. Maintenant, par le Lemme 455, on a $\{vx : v \in u^G\} \subseteq (ux)^G$, et ainsi $\inf((ux)^G) \leq \inf\{vx : v \in u^G\}$ (Remarque 337). En utilisant le lemme précédent, il vient :

$$\inf((ux)^G) \leq \inf\{vx : v \in u^G\} \leq \inf(u^G)x \leq wx$$

Comme sous hypothèse du lemme $\uparrow(G') = G'$, on en conclut $wx \in G'$.

2) Par le 1, on a $\inf(u^G) \in G^+$ et comme $\inf(u^G) \leq u$, il vient $\inf(u^G) \in u^G$ (Remarque 458). ■

Corollaire 468 *Si $H \subseteq G \subseteq \uparrow H$ pour un $H \subseteq_{\kappa} \mathcal{M}_c$ alors $INF(G^+)$ est une antichaine d'éléments κ -compacts.*

Preuve. Par hypothèse G est essentiellement κ -petit et on a facilement $\uparrow G = \uparrow H$. Pour tout $u \in G^+$, on a donc que $u^G = \uparrow \{\inf(u^G)\}$ est un ouvert (Lemme 464.1). Comme $\uparrow \{v\}$ ouvert équivaut à v compact (cf Remarque 375), on en conclut $INF(G^+) \subseteq \mathcal{M}_c$. Maintenant, si $u, v \in G^+$ et $u \neq_G v$ alors $\inf(u^G)$ et $\inf(v^G)$ sont incompatibles (puisque si $w, w' \in G^+$ on a $w \leq w' \Rightarrow w =_G w'$). ■

Corollaire 469 *Si $\sigma < \kappa$ est un inaccessible et si $H \subseteq G \subseteq \uparrow H$ pour un $H \subseteq_{\sigma} \mathcal{M}_c$ alors :*

- 1) $Card(INF(G^+)) < \sigma$
- 2) $G^+ = \uparrow INF(G^+)$ est un ouvert essentiellement σ -petit.

Preuve. Le 2 est une conséquence immédiate du 1 et du corollaire précédent. Pour le 1, il suffit de remarquer que le Lemme 462 nous donne immédiatement $Card(INF(G^+)) = Card(G^+ / =_G) < \sigma$. ■

Remarque 470 *Si \mathcal{M} est un κ -domaine de Scott (i.e un κ -ccpo algébrique), du fait de la caractérisation des ouverts donnée par le Lemme 386, tout ouvert G de \mathcal{M} vérifie le Lemme 467.*

7.3 Bisimulations sur les ouverts de la forme G^+

On fixe pour cette section $G \subseteq \mathcal{M}$. On définit maintenant une opération Θ_G de $\mathcal{P}(G^+ \times G^+)$ vers $\mathcal{P}(G^+ \times G^+)$ et la notion de Θ_G -bisimulation sur G^+ :

Définition 471 *Soit $R \subseteq G^+ \times G^+$ on pose :*

$$\Theta_G(R) = \{ (u, v) \in G^+ \times G^+ : \begin{array}{l} u = v = T \\ OU \\ u \neq T \neq v \text{ et} \\ \forall x \in G \exists y \in G : (ux, vy) \in R \text{ et} \\ \forall y \in G \exists x \in G : (ux, vy) \in R \} \end{array}$$

Définition 472 *Une relation R sur G^+ est une Θ_G -bisimulation si $R \subseteq \Theta_G(R)$.*

Remarque 473 *Par définition de $\Theta_G(R)$ il est clair que pour toute Θ_G -bisimulation R , on a $T R v$ ou $v R T$ si et seulement si $v = T$.*

Il est clair que Θ_G est croissante pour l'inclusion et que toute union de Θ_G -bisimulation est elle-même une Θ_G -bisimulation. La version du Théorème de Tarski que nous allons maintenant énoncer, nous assure de l'existence d'une Θ_G -bisimulation maximale :

Théorème 474 (Tarski) *Soit X un ensemble. Si $\Theta : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ est un opération croissante, alors Θ admet un treillis complet de points fixes et, de plus, le plus grand point fixe V_Θ de Θ , est défini par :*
 $V_\Theta = \cup \{R \subseteq X : R \subseteq \Theta(R)\}.$

Corollaire 475 *Il existe une Θ_G -bisimulation maximale sur G^+ , qui est le plus grand point fixe de Θ_G .*

Notation 476 *A partir de maintenant nous noterons \sim_G la Θ_G -bisimulation maximale sur G^+ , et $u \sim_G v$ pour $(u, v) \in \sim_G$.*

Remarque 477 *On vérifie facilement que les restrictions de $=_G$ et de \leq à G^+ sont des Θ_G -bisimulations. Par maximalité de \sim_G on a donc*

- (i) $u =_G v \Rightarrow u \sim_G v$
- (ii) $u \leq v \Rightarrow u \sim_G v$.

Les résultats suivants expriment des propriétés simples de \sim_G :

Théorème 478 *\sim_G est une relation d'équivalence. De plus, si G est essentiellement κ -petit, \sim_G est représentable.*

Preuve. On vérifie facilement que, pour toute Θ_G -bisimulation R , les relations $\Delta =_{def} \{(u, u) : u \in G^+\}$, R^{-1} et $R^{Trans} = \{(u, v) : \exists w \in G^+, (u, w) \in R \text{ et } (w, v) \in R\}$ sont des Θ_G -bisimulations, il résulte de la maximalité de \sim_G que c'est une relation d'équivalence. Par ailleurs, si G est essentiellement κ -petit, G^+ est un ouvert (Lemme 464) et on a $\forall u, v \in G^+ (u \leq v \Rightarrow u \sim_G v)$ (remarque précédente). Donc \sim_G est représentable. ■

Remarque 479 *Lorsque $\perp \notin G$ (qui est le seul cas qui nous intéressera), les relations $=_G$ et \sim_G sont clairement différentes. Par exemple, on a alors $\lambda x.(if\ x\ T\ F)$, $\lambda x.(if\ \neg x\ T\ F) \in G^+$, $\lambda x.(if\ x\ T\ F) \sim_G \lambda x.(if\ \neg x\ T\ F)$ et $\lambda x.(if\ x\ T\ F) \neq_G \lambda x.(if\ \neg x\ T\ F)$.*

Remarque 480 *Il résulte de la Remarque 477 que, sur G^+ , chaque classe selon \sim_G est une union d'un certain nombre de classes selon $=_G$. On a donc $Card(G^+ / \sim_G) \leq Card(G^+ / =_G)$.*

Si $\uparrow H = \uparrow G$, on a $G^+ = H^+$ (Corollaire 460), et donc Θ_G et Θ_H sont deux opérations monotones définies sur un même ensemble. Nous allons voir maintenant que sous cette hypothèse, on a aussi $\sim_G = \sim_H$ (rappelons que l'on avait déjà $=_G = =_H$) ; ce sera un corollaire immédiat du lemme suivant :

Lemme 481 Soit $K \subseteq \mathcal{M}$, on a $\sim_{\uparrow K} = \sim_K$.

Preuve. On prouve la double inclusion $\sim_{\uparrow K} \subseteq \sim_K$ et $\sim_K \subseteq \sim_{\uparrow K}$. Par maximalité de $\sim_{\uparrow K}$ et de \sim_K , il suffit de montrer que $\sim_{\uparrow K} \subseteq \Theta_K(\sim_{\uparrow K})$ et $\sim_K \subseteq \Theta_{\uparrow K}(\sim_K)$. Soit donc $u, v \in (\uparrow K)^+ = K^+$ (Lemme 453.3), on va montrer que $u \sim_{\uparrow K} v \Rightarrow (u, v) \in \Theta_K(\sim_{\uparrow K})$ et $u \sim_K v \Rightarrow (u, v) \in \Theta_{\uparrow K}(\sim_K)$. On remarque tout d'abord que si $u = T$ on a : $u \sim_{\uparrow K} v$ ssi $v = T$ ssi $u \sim_K v$ (Remarque 473). Le résultat découle alors trivialement par définitions de Θ_K et $\Theta_{\uparrow K}$. Supposons maintenant $u \neq T \neq v$:

1) Soit $u \sim_{\uparrow K} v$, il faut montrer : $\forall x \in K \exists y \in K : ux \sim_{\uparrow K} vy$ et $\forall y \in K \exists x \in K : ux \sim_{\uparrow K} vy$. Soit donc $x \in K$. Puisque $\sim_{\uparrow K}$ est une $\Theta_{\uparrow K}$ -bisimulation il existe $y \in \uparrow K$ tel que $ux \sim_{\uparrow K} vy$. Comme $K \subseteq \uparrow K$ il existe $y' \in K$ tel que $y' \leq y$. On a donc $vy' \leq vy$ et donc $vy \sim_{\uparrow K} vy'$ (Remarque 477). On en conclut, par transitivité de $\sim_{\uparrow K}$ que, $ux \sim_{\uparrow K} vy'$ pour $y' \in K$. Par symétrie de $\sim_{\uparrow K}$ on a immédiatement $\forall y \in K \exists x \in K : ux \sim_{\uparrow K} vy$.

2) Soit $u \sim_K v$, il faut montrer : $\forall x \in \uparrow K \exists y \in \uparrow K : ux \sim_K vy$ et $\forall y \in \uparrow K \exists x \in \uparrow K : ux \sim_K vy$. Soit donc $x \in \uparrow K$. Puisque $K \subseteq \uparrow K$ il existe $x' \in K$ tel que $x' \leq x$. On a donc $ux \sim_K ux'$. Puisque \sim_K est une Θ_K -bisimulation, il existe $y \in K \subseteq \uparrow K$ tel que $ux' \sim_K vy$. On en conclut, par transitivité de \sim_K , $ux \sim_K vy$ pour un $y \in \uparrow K$.

Par symétrie de \sim_K on a immédiatement $\forall y \in \uparrow K \exists x \in \uparrow K : ux \sim_K vy$.

■

Corollaire 482 Si $\uparrow H = \uparrow G$ alors $\sim_G = \sim_H$.

7.4 Satisfaction des axiomes de l'Égalité.

Pour cette section, on fixe un ouvert $\Phi \subseteq \mathcal{M}$ essentiellement κ -petit tel que $\perp \notin \Phi \ni T$. On suppose les constantes ε, ϕ interprétées comme dans le Chapitre 6, et donc que \mathcal{M} satisfait les théorèmes des chapitres précédents. On suppose aussi que $F \in \Phi$ (rappelons que $F =_{def} \lambda x.T$) et que $\Phi \subseteq \Phi^+$. Nous montrerons dans le Chapitre 9 qu'un tel Φ existe.

Comme Φ est essentiellement κ -petit, par le théorème précédent, χ_{\sim_Φ} est κ -continue, où \sim_Φ est la Θ_Φ -bisimulation maximale sur Φ^+ . On pose alors $j(\sim) = \lambda^2(\chi_{\sim_\Phi})$.

Nous montrons maintenant que, moyennant ces hypothèses sur Φ et cette interprétation, \mathcal{M} satisfait les axiomes d'égalité. Nous rappelons tous d'abord ces axiomes :

$$\begin{array}{ll}
MTA-Réflex_{\Phi}^{\sim} & \phi u \longrightarrow (u \sim u) \\
MTA-Sym^{\sim} & u \sim v = v \sim u \\
MTA-Compat^{\sim} & u \sim v \longrightarrow (u \sim w = v \sim w) \\
MTA-Const^{\sim} & \phi u, \phi v \longrightarrow \phi(u \sim v) \\
MTA-Fix^{\sim} & u \sim v \longleftrightarrow (if\ u\ (if\ v\ T\ F)\ (if\ v\ F\ u \sim_0 v))
\end{array}$$

où $u \sim v =_{def} ((\sim u)v)$ et $u \sim_0 v =_{def} \dot{\forall}x \dot{\exists}y.(ux) \sim (vy) \wedge \dot{\forall}y \dot{\exists}x.(ux) \sim (vy)$

Compte tenu de l'interprétation de \sim que nous avons donnée, on a immédiatement :

Lemme 483 *Pour tous $u, v \in \mathcal{M}$ on a $\mathcal{M} \models u \sim v = \perp$ ou F ou T , et :*

- 1) $\mathcal{M} \models u \sim v = T$ ssi $\chi_{\sim_{\Phi}}(u, v) = T$ ssi $(u, v \in \Phi^+ \text{ et } u \sim_{\Phi} v)$
- 2) $\mathcal{M} \models u \sim v = \perp$ ssi $\chi_{\sim_{\Phi}}(u, v) = \perp$ ssi $(u \notin \Phi^+ \text{ ou } v \notin \Phi^+)$
- 3) $\mathcal{M} \models u \sim v = F$ ssi $\chi_{\sim_{\Phi}}(u, v) = F$ ssi $(u, v \in \Phi^+ \text{ et } u \not\sim_{\Phi} v)$

Théorème 484 *Si $j(\sim) =_{def} \lambda(\chi_{\sim_{\Phi}})$, alors \mathcal{M} satisfait les axiomes de l'Egalité.*

Preuve. La satisfaction des axiomes $MTA-Réflex^{\sim_{\Phi}}$, $MTA-Sym^{\sim_{\mathcal{M}}}$ et $MTA-Compat$ suit du fait que \sim_{Φ} est une relation d'équivalence sur Φ^+ et que $\Phi \subseteq \Phi^+$. La satisfaction de $MTA-Const^{\sim}$ vient de ce que pour tous $u, v \in \Phi \subseteq \Phi^+$, on a $(u \sim v) = T$ ou F , et que $T, F \in \Phi$. Il reste à montrer $MTA-Fix^{\sim}$. Compte tenu du Lemme 422, il suffit pour cela de vérifier que :

$$\mathcal{M} \models u \sim v = T \text{ ssi } \mathcal{M} \models (if\ u\ (if\ v\ T\ F)\ (if\ v\ F\ u \sim_0 v)) = T$$

Cet énoncé est montré dans la Proposition 486 ci-dessous, et est une conséquence du lemme suivant. ■

Lemme 485 *Pour tous $u, v \in \mathcal{M}$, les deux énoncés suivants sont équivalents :*

- 1) $\mathcal{M} \models \dot{\forall}x \dot{\exists}y.(ux) \sim (vy) = T$
- 2) $u, v \in \Phi^+$ et $\forall x \in \Phi, \exists y \in \Phi : ux \sim_{\Phi} vy$

Preuve.

$$\mathcal{M} \models \dot{\forall}x \dot{\exists}y.(ux) \sim (vy) = T$$

$$\Leftrightarrow (Prop442.1, 441.2)$$

$$\forall x \in \Phi [\exists y \in \Phi : \mathcal{M} \models (ux) \sim (vy) = T \text{ et } \forall y \in \Phi : \mathcal{M} \models (ux) \sim (vy) \neq \perp]$$

$$\Leftrightarrow Lem483.1$$

$$\forall x, y \in \Phi [(ux), (vy) \in \Phi^+ \text{ et } \exists y \in \Phi (ux) \sim_{\Phi} (vy)]$$

$$\Leftrightarrow (Lem453.4)$$

$$u, v \in \Phi^+ \text{ et } \forall x \in \Phi \exists y \in \Phi : (uy) \sim_{\Phi} (vy)$$

■

Proposition 486 *Pour tous $u, v \in \mathcal{M}$, sont équivalents :*

- 1) $\mathcal{M} \models u \dot{\sim} v = T$
- 2) $\mathcal{M} \models (if\ u\ (if\ v\ T\ F)\ (if\ v\ F\ u \dot{\sim}_0 v)) = T$

Preuve. Posons $u \approx v =_{def} (if\ u\ (if\ v\ T\ F)\ (if\ v\ F\ u \dot{\sim}_0 v))$. Des définitions de la fonction IF et de \sim_{Φ} il suit que :

- Si $u = v = T$ alors $u \dot{\sim} v = u \approx v = T$
- Si $u = T$ et $v \neq T$ (ou l'inverse) alors $u \dot{\sim} v = u \approx v = F$
- Si $u = \perp$ ou $v = \perp$ alors $u \dot{\sim} v = u \approx v = \perp$ (rappelons que $\perp \notin \Phi^+$)

Il reste à voir ce qui se passe dans le cas $u, v \in \mathfrak{F}$. Or, dans ce cas on a $u \approx v = u \dot{\sim}_0 v$. En utilisant le lemme précédent, le fait que \mathcal{M} satisfait $MTA-Sym^{\sim}$ et le passage au contexte, la symétrie de \sim_{Φ} , et les propriétés de l'interprétation de $\dot{\wedge}$ exprimées par le Lemme 419, il suit que :

$$\mathcal{M} \models u \dot{\sim}_0 v = T$$

ssi

$$u, v \in \Phi^+ \text{ et } \forall x \in \Phi, \exists y \in \Phi : ux \sim_{\Phi} vy \text{ et } \forall y \in \Phi, \exists x \in \Phi : ux \sim_{\Phi} vy$$

On en conclut, par définition de \sim_{Φ} que :

$$\mathcal{M} \models u \dot{\sim}_0 v = T \text{ ssi } \mathcal{M} \models u \dot{\sim} v = T. \blacksquare$$

Avant de clôre cette section nous allons voir quelques propriétés de l'interprétation du constructeur $\dot{\epsilon}$. Rappelons que $u \dot{\epsilon} v =_{def} (if\ v\ F\ \dot{\exists}x.(vx) \dot{\sim} u)$. Remarquons que $\dot{\epsilon}$ induit une relation $\in_{\Phi} =_{def} \{(u, v) \in \mathcal{M} : u \dot{\epsilon} v = T\}$, qui est représentable.

Lemme 487 *Pour tous $u, v \in \mathcal{M}$:*

- 1) Si $v = T$ alors $u \dot{\epsilon} v = F$
- Et si $v \neq T$ alors :
- 2) $u \dot{\epsilon} v = \perp$ ssi $u \notin \Phi^+$ ou $v \notin \Phi^+$
- 3) $u \dot{\epsilon} v = T$ ssi $u, v \in \Phi^+$ et il existe $x \in \Phi$ tel que $vx \sim_{\Phi} u$
- 4) $u \dot{\epsilon} v = F$ ssi $u, v \in \Phi^+$ et pour tous $x \in \Phi$ on a $vx \not\sim_{\Phi} u$.

Preuve. Rappelons que $u \dot{\epsilon} v =_{def} (if\ v\ F\ \dot{\exists}x.ux \dot{\sim} v)$, les résultats se vérifient alors facilement en utilisant la Proposition 441 et le Lemme 483.

■

Nous abordons maintenant la satisfaction des axiomes de construction et de l'infini :

Chapitre 8

Satisfaction des axiomes de Construction et de *MTA-Infini*

Nous venons de voir que lorsque $\kappa > \omega$, pour enrichir tout κ -pré-modèle $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}, \lambda, \mathbb{A})$ en une structure $(\hat{\mathcal{M}}, \Phi, j)$ modélisant les axiomes et règles du λ -calcul, du calcul propositionnel, du calcul des prédicats et “de l'égalité”, il suffit de trouver un ouvert essentiellement κ -petit $\Phi \subseteq \mathcal{M}$ tel que $T \in \Phi \ni F$ et $\Phi \subseteq \Phi^+$.

Dans ce chapitre on suppose de plus $\kappa > \sigma$, pour σ un cardinal inaccessible.

Nous allons maintenant montrer que si l'ouvert Φ remplit une condition supplémentaire, alors $(\hat{\mathcal{M}}, \Phi, j)$ satisfait tous les *Axiomes de Construction* ainsi que l'*Axiome MTA-Infini*. Cette condition, qui sera relative à σ , sera appelée *Propriété Générale de Clôture pour l'Antifondation* (abrégée par *GCPA*) en référence à la condition de *Propriété Générale de Clôture* (*GCP*) vérifiée par le sous-ensemble $\Phi_F \subseteq \mathcal{M}$ utilisé en [6, p.36] pour modéliser *MTF*. Comme la *GCPA* sur Φ , la *GCP* est une condition suffisante sur Φ_F pour que \mathcal{M} satisfasse tous les axiomes de *Construction* (moyennant les interprétations relatives de ε et ϕ par $E_{\Phi_F}^p$ et χ_{Φ_F}). Ces axiomes expriment, rappelons-le, des propriétés de clôture de l'ouvert Φ qui en font une structure suffisamment riche pour être un modèle de *ZFC*.

8.1 La *GCPA*

Nous allons maintenant exprimer la *GCPA* et, à titre comparatif, la *GCP* (pour un inaccessible σ fixé). Pour cela nous introduisons des définitions et notations :

Notation 488 Pour $\bar{x} \in G^\omega$ et $n \in \omega$, on note \bar{x}_n la suite composée des n premiers éléments de \bar{x} . En particulier pour $n = 0$, on a $\bar{x}_n = \emptyset$.

Définition 489 Soit $G \subseteq \mathcal{M}$. On dira que $u \in \mathcal{M}$ est bien fondé relativement à G si $u \in G^0$, où G^0 est l'ensemble défini par :

$$G^0 =_{def} \{u \in \mathcal{M} : \forall \bar{x} \in G^\omega, \exists n \in \omega : u\bar{x}_n = T\}$$

Remarque 490 $G^0 \subseteq G^+$

Remarque 491 Comme l'opération $()^+$, l'opération $()^0$ est décroissante pour l'inclusion. On en déduit facilement que les opérations \mathcal{Q}^0 et \mathcal{Q}^+ qui associent à G respectivement $G^0 \mapsto G$ et $G^+ \mapsto G$, sont croissantes pour l'inclusion. Autrement dit, si $H \subseteq G$ alors $H^0 \mapsto H \subseteq G^0 \mapsto G$ et $H^+ \mapsto H \subseteq G^+ \mapsto G$.

Notation 492 Pour $G \subseteq \mathcal{M}$, on notera $O_\sigma(G)$ l'ensemble des ouverts essentiellement σ -petits inclus dans G .

L'opération $()^0$ joue le même rôle pour Φ_F que l'opération $()^+$ pour Φ . Pour Φ_F , on avait $\Phi_F \subseteq \Phi_F^0$ et donc $\Phi_F \subseteq O^0$ pour tout $O \in O_\sigma(\Phi_F)$. On en concluait par *GCP* que $\Phi_F \subseteq \Phi_F \mapsto \Phi_F$, cette inclusion signifiant, du point de vue de la théorie des ensembles, que "tout élément d'un ensemble est aussi un ensemble". De même, nous montrerons que $\Phi \subseteq \Phi^+$ et nous en concluons par *GCPA* que $\Phi \subseteq \Phi \mapsto \Phi$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir la *GCP* et la *GCPA* :

Définition 493 Soit $G \subseteq \mathcal{M}$, on dira que G satisfait la :

- 1) *GCP* si $G = \cup\{O^0 \mapsto G : O \in O_\sigma(G)\}$
- 2) *GCPA* si $G = \cup\{O^+ \mapsto G : O \in O_\sigma(G)\}$

On donnera en Section 9.1.4 des formulations équivalentes de la *GCPA*, également utiles en pratique.

8.2 Propriétés de clôture de Φ et Φ^+ et axiomes de *Construction*.

On introduit tout d'abord la notion de *MTA*-modèle :

Définition 494 On appellera *MTA- κ -modèle*, ou plus simplement *MTA-modèle*, toute structure $(\hat{\mathcal{M}}, \Phi, j)$, où \mathcal{M} est un κ -pré-modèle, Φ un ouvert essentiellement κ -petit vérifiant la GCPA et tel que $T, F \in \Phi$ et $\Phi \subseteq \Phi^+$, et j est une interprétation des constantes définie comme dans les Chapitre 5, 6 et 7.

Dans cette section, on suppose l'existence d'un MTA-modèle $(\hat{\mathcal{M}}, j, \Phi)$, et on montre qu'il satisfait les axiomes de Construction, que nous rappelons :

$$\begin{array}{ll}
(MT-T) & \phi T = T \\
(MT-F) & \phi F = T \\
(MT-\perp) & \phi \perp = \perp \\
(MT-\varphi) & \phi \lambda x.A = \phi \lambda x.\phi A \\
(MT-App) & \phi u, \phi z \longrightarrow \phi(uz) \\
(MT-P) & \phi u, \phi v \longrightarrow \phi(Puv) \\
(MT-Curry) & \phi u \longrightarrow \phi(Curry\ u) \\
(MT-Diag) & \phi u \longrightarrow \phi(\lambda x.uxx) \\
(MT-CInv) & \phi f, \phi v \longrightarrow \phi \lambda x.f(xv) \\
(MT-Comp) & \forall x.\phi(fx), \phi g \longrightarrow \phi \lambda x.f(gx)
\end{array}$$

Lemme 495 Si $\Phi = \cup\{O^+ \mapsto \Phi : O \in O_\sigma(\Phi)\}$ alors, pour tous $n \in \omega$:
 $\Phi \subseteq (\Phi^+)^n \mapsto \Phi \subseteq \Phi^n \mapsto \Phi \subseteq \Phi^n \mapsto \Phi^+ = \Phi^+$

Preuve. On sait déjà que $(\Phi^n \mapsto \Phi^+) = \Phi^+$ (Lemme 453.4). Le reste se fait par induction sur n et se montre facilement à partir de l'hypothèse d'induction en utilisant les propriétés de Φ et la contra et covariance de \mapsto (Lemme 451). On montre le cas $n = 1$. On remarque tout d'abord que par contravariance de $()^+$ et de \mapsto on a $O^+ \mapsto \Phi \subseteq \Phi^+ \mapsto \Phi$ pour tout $O \subseteq \Phi$. Ainsi $\Phi \subseteq \Phi^+ \mapsto \Phi$ est immédiat par GCPA. Maintenant, comme $\Phi \subseteq \Phi^+$, la contravariance, puis la covariance de \mapsto , nous donne $\Phi^+ \mapsto \Phi \subseteq \Phi \mapsto \Phi \subseteq \Phi \mapsto \Phi^+$. ■

Corollaire 496 Tout MTA-modèle $(\hat{\mathcal{M}}, \Phi, j)$ satisfait les axiomes MT-T, MT-F, MT- \perp , MT-App

Preuve. La satisfaction des trois premiers axiomes découle des hypothèses $T \in \Phi \ni F$ et $\perp \notin \Phi$. Celle de MT-App de $\Phi \subseteq \Phi \mapsto \Phi$. ■

Lemme 497 Tout MTA-modèle $(\hat{\mathcal{M}}, \Phi, j)$ satisfait MT- φ .

Preuve. On note tout d'abord que $u \in \Phi$ ssi $\mathcal{M} \models \phi u = T$ ssi $\phi u \in \Phi$. On doit montrer que, pour tout terme $A \in \Lambda_{\mathcal{M}, C}$ tel que $VL(A) \subseteq \{x\}$, on a $\lambda x.A \in \Phi$ ssi $\lambda x.\phi A \in \Phi$. Par GCPA il nous suffit de montrer que $\lambda x.A \in O^+ \mapsto \Phi$ ssi $\lambda x.\phi A \in O^+ \mapsto \Phi$. Or ceci est clair puisque, pour tout

$w \in O^+$, $(\lambda x A w) \in \Phi$ ssi $A[w/x] \in \Phi$ ssi $\phi A[w/x] \in \Phi$ ssi $(\lambda x. \phi A w) \in \Phi$.

■

Rappelons les définitions des constructeurs S, P et $Curry$:

Définition 498 :

$$S =_{def} \lambda u \lambda z. u$$

$$P =_{def} \lambda u \lambda v \lambda z. (if z u v)$$

$$Curry =_{def} \lambda u \lambda x \lambda y. (u (Pxy))$$

Lemme 499 Dans tout *MTA*-modèle $(\hat{\mathcal{M}}, \Phi, j)$ on a :

- 1) $S \in G^+ \mapsto G^+$ pour tout $G \subseteq \Phi$, et $S \in \Phi \mapsto \Phi$
- 2) $P \in (G^+)^2 \mapsto G^+$ pour tout $G \subseteq \Phi$, et $P \in \Phi^2 \mapsto \Phi$
- 3) $Curry \in \Phi \mapsto \Phi$

Preuve.

1) Il est clair que si $u \in G^+$ alors $\lambda z. u \in G^+$, d'où le premier résultat. Maintenant, si $u \in \Phi$ on a $\lambda z. u \in O^+ \mapsto \Phi$ pour tout $O \in O_\sigma(\Phi)$, et donc $Su \in \Phi$ par *GCPA*; d'où le deuxième résultat.

2) Est clair puisque pour tout $u, v \in G^+$ on a :

$Puv = \lambda z. (if z u v) \in G^+ \mapsto G^+ \subseteq G \mapsto G^+ = G^+$ (Puisque $G \subseteq \Phi$ et $\Phi \subseteq \Phi^+$ implique $G \subseteq G^+$). Par ailleurs, si $u, v \in \Phi$ on a $Puv \in G^+ \mapsto \Phi$ pour tout $G \subseteq \Phi$ et donc $Puv \in \Phi$ par *GCPA*.

3) Si $u \in \Phi$, on a $u \in O^+ \mapsto \Phi$ pour un $O \in O_\sigma(\Phi)$. Donc, si $x, y \in O^+$ on a $Pxy \in O^+$ et $u(Pxy) \in \Phi$. On a donc $(Curry u) = \lambda x \lambda y. (u(Pxy)) \in (O^+)^2 \mapsto \Phi \subseteq (O^+ \mapsto \Phi) \subseteq \Phi$, les deux inclusions suivant immédiatement de la *GCPA*. ■

Corollaire 500 Tout *MTA*-modèle satisfait *MT-P* et *MT-Curry*.

Preuve. *MT-P* et *MT-Curry* ne sont que l'expression syntaxique des points 1) et 2) du lemme précédent (Cf Lemme 422). ■

Les lemmes qui suivent utilisent les Lemmes 522 et 523. Bien que ces derniers ne nécessitent rien de plus que ce que nous savons déjà, il nous a paru préférable de les regrouper en Section 9.1.4, lorsque nous donnerons des caractérisations équivalentes de la *GCPA*.

Notation 501 :

$$\circ = \lambda f \lambda g \lambda x. f(gx)$$

$$\circ^{inv} = \lambda f \lambda v. \lambda x. f(xv)$$

Lemme 502 Dans tout *MTA*-modèle $(\hat{\mathcal{M}}, \Phi, j)$ on a :

- 1) $\lambda u \lambda x. uxx \in \Phi \mapsto \Phi$
- 2) $\circ^{inv} \in \Phi, \Phi \mapsto \Phi$
- 3) $\circ \in \Phi \mapsto \Phi, \Phi \mapsto \Phi$

Preuve.

- 1) Soit $u \in \Phi$, par le Lemme 523 il existe $O \in O_\sigma(\Phi)$ tel que $u \in O^+$, $O^+ \mapsto \Phi$. On a alors clairement $\lambda x.u x x \in O^+ \mapsto \Phi \subseteq \Phi$.
- 2) Soient $f, v \in \Phi$. Soit $O \in O_\sigma(\Phi)$ tel que $f \in O^+ \mapsto O$ et $v \in O$ (il en existe par le Lemme 522). Soit maintenant $x \in O^+$, on a $xv \in O^+$ et $f(xv) \in O$. On en conclut $\lambda x.f(xv) \in O^+ \mapsto O$.
- 3) Soient $f \in \Phi \mapsto \Phi$ et $g \in \Phi$. Il existe donc $O \in O_\sigma(\Phi)$ tel que $g \in O^+ \mapsto \Phi$. Maintenant, si $x \in O^+$ on a $gx \in \Phi$ et donc $f(gx) \in \Phi$. On en conclut $f \circ g \in O^+ \mapsto \Phi$. ■

Corollaire 503 *Tout MTA-modèle satisfait MT-Diag, MT-CInv et MT-Comp.*

Preuve. *MT-Diag, MT-CInv et MT-Comp* ne sont que les expressions syntaxiques des points 1), 2) et 3) du lemme précédent. ■

8.3 Satisfaction de l'axiome *MTA-Infini*

Rappelons que dans *MTF* l'axiome de l'infini de *ZFC* était essentiellement assumé par l'axiome de Construction *C-Prim* (Cf Section 2.3.2). Il est montré en [6] que ce dernier est satisfait par \mathcal{M} lorsque que Φ_F vérifie la *GCP*. De même, nous allons montrer ici que si Φ vérifie la *GCPA* alors \mathcal{M} satisfait l'axiome *MTA-Infini*. Cet axiome n'est pas à proprement parler un axiome de construction bien qu'il ait pour conséquence l'existence d'un "ensemble infini" appartenant à Φ . Nous rappelons maintenant cet axiome :

$$(MTA-Infini) \quad \dot{\exists}z.(T \dot{\in} z \wedge \dot{\forall}x.(x \dot{\in} z \Rightarrow Sx \dot{\in} z)) = T$$

Pour montrer que \mathcal{M} satisfait *MTA-Infini*, nous allons exhiber un élément $\omega_\Phi \in \Phi$ qui vérifie $\mathcal{M} \vDash ((T \dot{\in} \omega_\Phi) \wedge \dot{\forall}x.(x \dot{\in} \omega_\Phi \Rightarrow Sx \dot{\in} \omega_\Phi)) = T$. Rappelons tout d'abord que pour $n \in \omega$ on a $\hat{n} =_{def} T$ si $n = 0$, et $\hat{n} =_{def} \lambda^n(\bar{u} \mapsto T)$ sinon (Définition 415). De plus, pour tout $n \in \omega$, \hat{n} est un élément κ -compact et maximal de \mathcal{M} (Remarque 416).

Remarque 504 *On vérifie facilement que :*

- 1) $\widehat{n+1} = \lambda x.\hat{n} = S\hat{n}$ (induction sur $n \in \omega$).
- 2) $\hat{n} \sim_\Phi \hat{m}$ ssi $n = m$ (induction sur $\inf(n, m)$)
- 3) $\hat{n} \in \Phi$, et donc $\hat{n} \in \Phi_c = \Phi \cap \mathcal{M}_c$ (induction sur n)

Notation 505 $O_\omega =_{def} \{\hat{n} : n \in \omega\} = \uparrow O_\omega$

Lemme 506 *Dans tout MTA-modèle, on a :*
 $O_\omega \subseteq \Phi_c$ et $O_\omega \in O_\sigma(\Phi)$.

Preuve. Suit trivialement de ce qui précède.

■

On définit maintenant une fonction f_ω dont la bonne définition est assurée par la Remarque 504 :

Définition 507 La fonction $f_\omega \in \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ est définie par :

$$f_\omega(u) = \begin{cases} \perp & \text{si } u \notin O_\omega^+ \\ \hat{n} & \text{si } u \notin O_\omega^+ \text{ et } u \sim_{O_\omega} \hat{n} \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme 508 f_ω est κ -continue.

Preuve. Il est facile de voir que f_ω est la fonction en escalier (Définition 377) obtenue en prenant $X =_{def} INF(O_\omega^+)$ et $s : X \mapsto \mathcal{M}$ définie par : $s(u) = \hat{n}$ si $u \sim_\Phi \hat{n}$ et $s(u) = T$ sinon (rappelons que $X =_{def} INF(O_\omega^+)$ est un antichaine de κ -compacts par le Corollaire 468). On conclut par le Lemme 378. ■

Définition 509 $\omega_\Phi =_{def} \lambda(f_\omega)$

Corollaire 510 $\omega_\Phi \in \Phi$

Preuve. Par le Lemme 506 et la définition de ω_Φ , on a clairement : $\omega_\Phi \in (O_\omega^+ \mapsto O_\omega) \subseteq (O_\omega^+ \mapsto \Phi) \subseteq \Phi$ (puisque Φ vérifie la *GCPA*). ■

Corollaire 511 Pour tout $u \in \mathcal{M}$, $u \dot{\in} \omega_\Phi = T$ ssi il existe $n \in \omega$ tel que $u \sim_\Phi \hat{n}$.

Preuve. Le sens \Leftarrow suit immédiatement des définitions de f_ω et \sim_Φ . Montrons le sens \Rightarrow . On utilise le Lemme 487.3. Si $u \dot{\in} \omega_\Phi = T$ alors il existe $v \in \Phi$ tel que $\omega_\Phi v \sim_\Phi u$. Or, par définition de ω_Φ il est clair que $\omega_\Phi v = f_\omega(v) \in O_\omega$. ■

Proposition 512 \mathcal{M} satisfait *MTA-Infini*

Preuve. Par la Proposition 441 et le Corollaire 510, il suffit de montrer :

(*) Pour tout $z \in \Phi$: $\mathcal{M} \vDash (T \dot{\in} z \wedge \dot{\forall} x. (x \dot{\in} z \Rightarrow Sx \dot{\in} z)) \neq \perp$

(**) $\mathcal{M} \vDash (T \dot{\in} \omega_\Phi \wedge \dot{\forall} x. (x \dot{\in} \omega_\Phi \Rightarrow Sx \dot{\in} \omega_\Phi)) = T$

• On montre (*) : Soit $z \in \Phi$. Par le Lemme 419, il suffit de vérifier séparément $T \dot{\in} z \neq \perp$ et

$\dot{\forall} x. (x \dot{\in} z \Rightarrow Sx \dot{\in} z) \neq \perp$. Le premier énoncé se vérifie alors facilement par le Lemme 487, et le deuxième en utilisant la Proposition 442, le Lemme 421.1 et le Lemme 499.1.

• On montre (**) : Il suffit de montrer séparément $(T \dot{\in} \omega_\Phi) = T$ et $\dot{\forall} x. (x \dot{\in} z \Rightarrow Sx \dot{\in} z) = T$. Le premier énoncé est une conséquence directe du

corollaire précédent. Pour le second, par (*) et le Lemme 421.3, il suffit de vérifier que si $u \in \Phi$ alors $u \dot{\in} \omega_\Phi = T$ implique $Su \dot{\in} \omega_\Phi = T$. Or, par le corollaire précédent, si $u \dot{\in} \omega_\Phi = T$ il existe $n \in \omega$ tel que $\hat{n} \underset{\Phi}{\sim} u$. Cela implique $(S\hat{n}) \underset{\Phi}{\sim} Su$, et donc $Su \dot{\in} \omega_\Phi = T$, puisque $(S\hat{n}) =_{def} \widehat{n+1}$.

■

Il nous reste à montrer que, sous l'hypothèse de l'existence d'un cardinal inaccessible $\sigma < \kappa$, on peut construire, dans tout κ -pré-modèle (au sens de la Définition 413), un ouvert Φ vérifiant l'ensemble des propriétés requises.

Chapitre 9

Construction de Φ

On suppose maintenant que l'univers V de départ contient un cardinal inaccessible σ et on se donne pour tout ce chapitre un κ -pré-modèle $\hat{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}, j)$ où $\kappa > \sigma$ (par exemple $\kappa = \sigma^+$ conviendrait). On suppose aussi que \mathcal{M} est un κ -domaine de Scott (et donc un κ -ccpo). On va montrer qu'on peut enrichir ce pré-modèle en un MTA - κ -modèle $(\hat{\mathcal{M}}, \Phi, j)$, autrement dit, on va montrer qu'on peut construire $\Phi \subseteq \mathcal{M}$ tel que :

- (1) $T, F \in \Phi$
- (2) $\Phi = \uparrow \Psi$ pour un $\Psi \subseteq_{\kappa} \mathcal{M}_c$ (i.e Φ est un ouvert essentiellement κ -petit)
- (3) $\Phi \subseteq \Phi^+$ (et donc $\perp \notin \Phi$)
- (4) $\Phi = \{O^+ \mapsto \Phi : O \in O_{\sigma}(\Phi)\}$ (i.e Φ vérifie la $GCPA$)

Rappelons que \mathcal{M}_c est l'ensemble des éléments κ -compacts de \mathcal{M} .

Nous donnons tout d'abord une présentation intuitive de la construction de Φ . Cette construction est parallèle à la hiérarchie cumulative des types. Rappelons cette hiérarchie :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{\emptyset\} \\ V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_{\alpha}) \\ V_{\alpha} &= \bigcup_{\gamma < \alpha} V_{\gamma} \quad \text{pour } \alpha \text{ limite} \end{aligned}$$

Il est bien connu que $(V_{\sigma}, \in, =)$ est un modèle de ZFC . De plus, par induction sur $\alpha < \sigma$, il est clair que les éléments de V_{α} sont bien fondés et donc que V_{σ} est un modèle de FA . De façon parallèle, en [6] il est construit dans \mathcal{M} un modèle Φ_F (qui est noté Φ dans [6]) de $ZFC + FA$. Pour cela on prend $\Phi_F =_{def} \Phi_{\sigma}^F$ où $(\Phi_{\alpha}^F)_{\alpha \leq \sigma}$ est la suite d'ouverts définie par :

$$\begin{aligned}\Phi_1^F &= \{T\} \\ \Phi_{\alpha+1}^F &= \mathcal{Q}^0(\Phi_\alpha^F) =_{def} (\Phi_\alpha^F)^0 \mapsto \Phi_\alpha^F \\ \Phi_\alpha^F &= \cup_{\gamma < \alpha} \Phi_\gamma^F \quad \text{pour } \alpha \text{ limite}\end{aligned}$$

Notons que, contrairement au cas de la hiérarchie classique, on ne peut pas prendre $\Phi_F = \cup(\Phi_\alpha^F)_{\alpha \in On}$ et se dispenser ainsi de l'existence de l'inaccessible σ car, dans ce cas, l'ensemble Φ_F ne serait pas essentiellement κ -petit. On perdrait alors la κ -continuité de $E_{\Phi_F}^\rho$ et la possibilité d'interpréter ε .

Dans le cas de l'antifondation, les choses sont plus complexes. En effet, pour modéliser ZFC , nous avons toujours besoin que Φ soit clos par une opération (que nous noterons \mathcal{Q}^+) jouant le rôle de \mathcal{P} . Mais cela n'est plus suffisant. En effet, la satisfaction de l'axiome $AF A$ suppose l'existence d'ensembles non bien fondés capables de “décorer”² des graphes comportant des boucles et des chemins infinis. Pour obtenir ces ensembles nous mettrons en évidence l'existence dans \mathcal{M} d'un “décorateur universel pour Φ_α ”, que nous noterons δ_α , pour chaque $\alpha \leq \sigma$. Un tel décorateur est un élément de \mathcal{M} qui, appliqué à une “ensemble d'arêtes” $b \in \Phi_\alpha$ et un “sommet” $x \in \Phi_\alpha$ donne “l'ensemble” $\delta_\alpha bx$ capable de décorer le “sous-graphe” de b “issu” de x . On prendra ensuite $\Phi =_{def} \Phi_\sigma$, où $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in On}$ est la suite définie par :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \{T\} \\ \Phi_{\alpha+1} &= \mathcal{Q}^+(\Phi_\alpha) \cup \uparrow \{\delta_\alpha bx : b, x \in \Phi_\alpha\} \\ \Phi_\alpha &= \cup_{\gamma < \alpha} \Phi_\gamma \quad \text{pour } \alpha \text{ limite}\end{aligned}$$

Remarquons que l'on prend $\uparrow \{\delta_\alpha bx : b, x \in \Phi_\alpha\}$ pour définir $\Phi_{\alpha+1}$, et non seulement $\{\delta_\alpha bx : b, x \in \Phi_\alpha\}$. Cela nous permet de garantir $\Phi = \uparrow \Phi$ et que Φ est un ouvert, condition nécessaire pour que χ_Φ soit κ -continue. Nous pouvons aussi remarquer que ne pas s'arrêter à σ nous ferait perdre, non seulement l'interprétation de ε , mais aussi celle de \sim . De plus, on ne pourrait alors définir $\delta_{\sigma+1}$ et donc finalement satisfaire MTA -*Déco*.

Rappelons qu'il est suffisant pour la continuité de χ_Φ et E_Φ^ρ que $\Phi = \uparrow \Psi$, pour Ψ un ensemble κ -petit de κ -compacts. L'essentiel de ce chapitre sera consacré à construire un tel Ψ . Pour cela, nous introduisons tout d'abord une nouvelle opération “flèche” de $\mathcal{P}(\mathcal{M}^2)$ vers $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ qui a la particularité de préserver la σ -petitesse ainsi que l'inclusion dans \mathcal{M}_c . On définira ensuite, de façon générale pour $G \subseteq_\kappa \mathcal{M}$ et ρ une fonction de choix sur \mathcal{M} , un “décorateur universel pour G ” noté δ_G^ρ . On montrera en particulier que, sous certaines conditions sur G , si $b, x \in \mathcal{M}_c$ alors $\delta_G^\rho bx \in \mathcal{M}_c$. Il nous restera alors à construire Ψ et à vérifier que $\Phi = \uparrow \Psi$ a les propriétés voulues.

²Cf la section Antifondation, $AF A$ et MTA de l'introduction de la thèse

9.1 L'opération $\mapsto_{(\)}$

On rappelle tout d'abord la notion de domaine d'un élément de \mathcal{M} :

Définition 513 Soit $u \in \mathcal{M}$: $dom(u) = \{x \in \mathcal{M} : ux \neq \perp\}$

Remarquons que $dom(u)$ est toujours un ouvert.

Définition 514 Soient $H, K \subseteq \mathcal{M}$:

$$H^+ \mapsto_H K =_{def} \{u \in H^+ \mapsto K : dom(u) = H^+ \text{ et } \forall x, y \in H^+ : x =_H y \Rightarrow ux = uy\}$$

Remarque 515 Comme $\perp \notin H^+ \ni T$, on a $dom(T) = \mathcal{M} \neq H^+$ et $dom(\perp) = \emptyset \neq H^+$, et donc $\perp, T \notin H^+ \mapsto_H K$.

9.1.1 L'opération $\mapsto_{(\)}$ préserve la σ -petitesse.

Lemme 516 $Card(H^+ \mapsto_H K) \leq Card(K)^{Card(H^+/_H)}$. En particulier :
Si H et K sont σ -petits $H^+ \mapsto_H K$ est σ -petit.

Preuve. On remarque que le cardinal de $H^+ \mapsto_H K$ est au plus égal au cardinal de l'ensemble des fonctions de $(H^+/_H)$ vers K . Si H et K sont σ -petits alors $H^+/_H$ est σ -petit par le corollaire précédent, et on conclut par inaccessibilité de σ . ■

9.1.2 L'opération $\mapsto_{(\)}$ préserve l'inclusion dans \mathcal{M}_c .

Lemme 517 Si $H, K \subseteq \mathcal{M}_c$ et $Card(H) < \sigma$ alors $H^+ \mapsto_H K \subseteq \mathcal{M}_c$

Preuve. Rappelons tout d'abord que $H^+ = \uparrow INF(H^+)$ est un ouvert essentiellement σ -petit (Corollaire 469). Soit maintenant $w \in H^+ \mapsto_H K$, notons que la définition de \mapsto_H implique $wx = w \inf(x^H)$ si $x \in H^+$, et $wx = \perp$ sinon. De plus, l'ensemble $INF(H^+)$ est une antichaine κ -petite de κ -compacts (Corollaire 468). La fonction g définie par :

$$g(u) = \begin{cases} w \inf(u^H) & \text{si } u \in H^+ \text{ (i.e s'il existe } v \in INF(H^+) \text{ tel que } u \geq v) \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

est donc une fonction en escalier κ -continue et κ -compacte (Lemme 378). De plus, il est évident que $\lambda(g) = w$. On en conclut que w est κ -compact (Lemme 410). ■

9.1.3 Rapports entre les opérations $\mapsto_{(\)}$ et \mapsto

Lemme 518 *Si $H \subseteq_{\sigma} \mathcal{M}_c$ et $\perp \notin K$ alors :*

$$(H^+ \mapsto \uparrow K) = \uparrow (H^+ \mapsto K) = \begin{cases} \uparrow (H^+ \mapsto_H K) & \text{si } T \notin K \\ \uparrow (H^+ \mapsto_H K) \cup \{T\} & \text{si } T \in K \end{cases}$$

Preuve. Le sens \supseteq des égalités ci-dessus est évident. Pour le sens \subseteq , comme on a le sens \supseteq , il suffit de montrer :

$$(H^+ \mapsto \uparrow K) \subseteq \begin{cases} \uparrow (H^+ \mapsto_H K) & \text{si } T \notin K \\ \uparrow (H^+ \mapsto_H K) \cup \{T\} & \text{si } T \in K \end{cases}$$

Pour cela, on montre tout d'abord :

$$(*) \ ((H^+ \mapsto \uparrow K) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \uparrow (H^+ \mapsto_H K)$$

Soit donc $w \in ((H^+ \mapsto \uparrow K) \cap \mathfrak{F})$. On définit la fonction $q : (\uparrow K) \mapsto K$ par $q(z) = \rho(\{y : y \in K \wedge y \leq z\})$ où ρ est une fonction de choix quelconque sur \mathcal{M} , et la fonction s par :

$$s(u) = \begin{cases} q(wz) & \text{si } u \geq z \text{ et } z \in INF(H^+) \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $INF(H^+)$ est une antichaine de κ -compacts (Corollaire 468), s est une fonction en escalier κ -continue (Lemme 378). On vérifie alors facilement que $\lambda(s) \in (H^+ \mapsto_H K)$ et que $\lambda(s) \leq w$. On en conclut $w \in \uparrow (H^+ \mapsto_H K)$.

Maintenant, il est clair que $T \in (\uparrow K)$ ssi $T \in K$. Ainsi, puisque $\perp \notin K \subseteq \uparrow K$, par la Remarque 450.1 et 2, il vient $(H^+ \mapsto \uparrow K) \subseteq \mathfrak{F}$ si $T \notin K$, et $T \in (H^+ \mapsto \uparrow K) \subseteq (\mathfrak{F} \cup \{T\})$ sinon. Le résultat suit alors trivialement par (*). ■

Corollaire 519 *Si G et H sont des ouverts essentiellement σ -petits alors $G^+ \mapsto H$ est un ouvert essentiellement σ -petit.*

Preuve. Comme G et H sont des ouverts, on a $G = \uparrow K$ et $H = \uparrow K'$ pour $K, K' \subseteq_{\sigma} \mathcal{M}_c$ (Lemme 386). Il vient :

$$G^+ \mapsto H = (K^+ \mapsto \uparrow K') = \uparrow (K^+ \mapsto_K K') \ (\cup \{T\})$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\uparrow (K^+ \mapsto_K H)$ ($\cup \{T\}$) est un ensemble σ -petit de κ -compacts par les Lemmes 516 et 517. ■

9.1.4 Reformulations de la *GCPA*

On va maintenant déduire de ce qui précède une définition équivalente de la *GCPA*, ce sera l'objet du Lemme 522. On en déduira, une propriété importante des ouverts vérifiant la *GCPA* (Lemme 523.3).

On commence par un lemme intermédiaire :

Lemme 520 Soient $K, G \subseteq \mathcal{M}$ des ouverts tels que K est essentiellement σ -petit, alors :

$$K^+ \mapsto G = \cup\{K^+ \mapsto O : O \in O_\sigma(G)\}$$

Preuve. \supseteq suit de la croissance de \mapsto en son deuxième argument. Maintenant, par le Lemme 386, il existe $H \subseteq_\sigma \mathcal{M}_c$ tel que $K = \uparrow H$. Soit $u \in K^+ \mapsto G$ et $X =_{def} INF(K^+)$. Par le Corollaire 469, on a $uK^+ \subseteq (\uparrow uX) \subseteq G$ et uX est σ -petit. Maintenant, comme G est un ouvert, pour tout $y \in uX$, on peut choisir $e_y \in G_c$ tel que $e_y \leq y$. Soit $H' = \{e_y : y \in uX\}$. L'ensemble H' est σ -petit et donc $\uparrow H' \in O_\sigma(G)$. Il vient : $uK^+ \subseteq (\uparrow uX) \subseteq (\uparrow H')$. On en conclut $u \in K^+ \mapsto \uparrow H'$. ■

Définition 521 Pour tout ouvert $G \subseteq \mathcal{M}$, on définit :

- 1) $\mathcal{F}_1(G) = \cup\{O^+ \mapsto G : O \in O_\sigma(G)\}$
- 2) $\mathcal{F}_2(G) = \cup\{O^+ \mapsto O : O \in O_\sigma(G)\}$
- 3) $\mathcal{F}_3(G) = \cup\{(O^+)^2 \mapsto O : O \in O_\sigma(G)\}$

Rappelons que $G \subseteq \mathcal{M}$ vérifie la *GCPA* ssi $G = \mathcal{F}_1(G)$ (Cf Définition 493). Le lemme suivant permet une formulation alternative de la *GCPA* :

Lemme 522 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$

Preuve. Soit G un ouvert. Par croissance de \mapsto en son deuxième argument, il est clair, que $\mathcal{F}_2(G) \subseteq \mathcal{F}_1(G)$. Inversement, soit $u \in O^+ \mapsto G$. Par le lemme précédent, il existe $O' \in O_\sigma(G)$ tel que $u \in O^+ \mapsto O'$. Il ne reste qu'à remarquer que, pour $O'' = O \cup O'$, on a $O'' \in O_\sigma(G)$ et $u \in O^+ \mapsto O' \subseteq (O'')^+ \mapsto O''$. ■

Lemme 523 Soit G un ouvert. Si $G = \mathcal{F}_1(G)$ alors :

- 1) $\forall K \subseteq_\sigma G, \exists O \in O_\sigma(G) : K \subseteq (O^+ \mapsto O) \quad (\subseteq (O^+ \mapsto G))$
- 2) $\forall H \in O_\sigma(G), \exists O \in O_\sigma(G) : H \subseteq (O^+ \mapsto O) \quad (\subseteq (O^+ \mapsto G))$
- 3) $G = \mathcal{F}_3(G)$

Preuve. On utilisera librement $\mathcal{F}_1(G) = \mathcal{F}_2(G)$.

1) Soit $K \subseteq_\sigma G$. Comme $G = \mathcal{F}_2(G)$, pour tout $u \in K$, on peut choisir $O_u \in O_\sigma(G)$ tel que $u \in O_u^+ \mapsto O_u$. Soit $O = \cup_{u \in K} O_u \subseteq G$. Il vient :

$$K \subseteq \cup_{u \in K} (O_u^+ \mapsto O_u) \subseteq O^+ \mapsto O$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que, par régularité de σ , on a $O \in O_\sigma(G)$.

2) Soit $H \in O_\sigma(G)$. Il existe donc $K \subseteq_\sigma G$ tel que $H = \uparrow K$. Par 1) il existe donc $O \in O_\sigma(G)$ tel que $K \subseteq O^+ \mapsto O$. Comme $O^+ \mapsto O$ est ouvert (Corollaire 519), il vient : $H = \uparrow K \subseteq \uparrow (O^+ \mapsto O) = (O^+ \mapsto O)$

3) On raisonne par double inclusion. Soit $H \in O_\sigma(G)$. On montre tout

d'abord $\mathcal{F}_2(G) \subseteq \mathcal{F}_3(G)$. Par 2 on a $H^+ \mapsto H \subseteq H^+ \mapsto (O^+ \mapsto O)$ pour $O \in O_\sigma(G)$. Soit $L = H \cup O$, il vient $L \in O_\sigma(G)$ et $H^+ \mapsto H \subseteq (L^+ \mapsto (L^+ \mapsto L))$. On montre maintenant $\mathcal{F}_3(G) \subseteq \mathcal{F}_1(G)$. Si $O \in O_\sigma(G)$ on a $(O^+ \mapsto O) \subseteq \mathcal{F}_2(G) = G$. On en conclut $O^+ \mapsto (O^+ \mapsto O) \subseteq (O^+ \mapsto G) \subseteq G$. ■

9.2 Le décorateur universel δ_G^ρ

Nous supposons maintenant $G \subseteq \mathcal{M}$ essentiellement κ -petit, cette hypothèse étant nécessaire pour que δ_G^ρ soit défini. Nous supposons de plus que ρ est une fonction de choix ρ sur \mathcal{M} . Rappelons que \sim_G est la Θ_G -bisimulation maximale sur G^+ et qu'on a, en particulier, pour tout $x, y \in G^+$:

$$x \sim_G y \Leftrightarrow x = y = T$$

ou

$$x \neq T \neq y \wedge (\forall z \in G, \exists z' \in G : xz \sim_G xz') \wedge (\forall z \in G, \exists z' \in G : xz \sim_G xz')$$

Comme G est essentiellement κ -petit les fonctions E_G^ρ et χ_{\sim_G} sont κ -continues (voir Définitions 431 et 423, et les Lemmes 434 et 447). Cela permet les définitions suivantes qui seront utilisées pour celle de δ_G^ρ :

Notation 524 :

- 1) $\varepsilon_G^\rho = \lambda(E_G^\rho)$
- 2) $\varepsilon_G^\rho x.A =_{def} \varepsilon_G^\rho \lambda x.A$ pour tout terme $\lambda x.A$
- 3) $\dot{\sim}_G = \lambda^2(\chi_{\sim_G})$
- 4) $u \dot{\sim}_G v =_{def} ((\dot{\sim}_G u)v)$

L'opérateur ε_G^ρ est déjà connu et l'opérateur $\dot{\sim}_\Phi$ était l'interprétation de $\dot{\sim}$ dans le Chapitre 7. Par leurs définitions on a immédiatement $\varepsilon_G^\rho u = E_G^\rho(u)$ et $u \dot{\sim}_G v = \chi_{\sim_G}(u, v)$ pour tous $u, v \in \mathcal{M}$. Insistons sur le fait que \sim_G est une relation sur G^+ (au sens de l'univers V) et que $\dot{\sim}_G$ est un élément de \mathcal{M} . On vérifie alors facilement les lemmes et remarque suivants :

Lemme 525 Pour tout $u, v \in \mathcal{M}$, on a $u \dot{\sim}_G v \in \{\perp, T, F\}$ et :

- 1) $u \dot{\sim}_G v \neq \perp$ ssi $u, v \in G^+$
- 2) $u \dot{\sim}_G v = T$ ssi $u, v \in G^+$ et $u \sim_G v$
- 3) $u \dot{\sim}_G v = F$ ssi $u, v \in G^+$ et $u \not\sim_G v$

De le Remarque 430 il suit :

Remarque 526 Si $\perp \notin uG$ alors $\varepsilon_G^\rho u \in G$. Si, de plus, $\perp \notin G$ alors, réciproquement, $\varepsilon_G^\rho u \in G$ implique $\perp \notin uG$

Lemme 527 *Si $\perp \notin G$ alors, pour tout $u \in \mathcal{M}$:*

$$\varepsilon_G^\rho u = \perp \text{ ssi } \perp \in uG \text{ ssi } u(\varepsilon_G^\rho u) = \perp$$

Lemme 528 *Si $\perp \notin G$ et $\perp \notin uG$:*

$$1) \text{ Si } T \in uG \text{ alors } \varepsilon_G^\rho u \in \{x \in G : ux = T\} \text{ et } u(\varepsilon_G^\rho u) = T$$

$$2) \text{ Si } uG \subseteq \mathfrak{F} \text{ alors } \varepsilon_G^\rho u \in G \text{ et } u(\varepsilon_G^\rho u) \in \mathfrak{F}$$

Nous introduisons maintenant 6 opérateurs supplémentaires entrant dans la définition de δ_G^ρ .

9.2.1 L'opérateur \exists_G^ρ

Définition 529 *Soit A un terme clos à paramètres dans \mathcal{M} et G essentiellement κ -petit :*

$$\exists_{Gy}.A =_{def} \simeq (\lambda y.A (\varepsilon_G^\rho \lambda y.A)) \text{ , en rappelant que } \simeq C =_{def} (if C T F).$$

Remarque 530 ε_G^ρ dépend de ρ , mais $\exists_{Gy}.A$ n'en dépend pas comme le montre le lemme suivant, qui découle facilement des deux lemmes et de la remarque précédents.

Lemme 531 *Pour tout terme $A[y] \in \Lambda(C \cup \mathcal{M})$, on a $\exists_{Gy}.A \in \{\perp, T, F\}$ et :*

$$1) \exists_{Gy}.A = \perp \text{ si et seulement si il existe } x \in G \text{ tel que } (\lambda y.A x) = \perp.$$

Si $\exists_{Gy}.A \neq \perp$, et en particulier si $\lambda y.A \in G^+$, alors :

$$2) \exists_{Gy}.A = T \text{ si et seulement si il existe } x \in G \text{ tel que } (\lambda y.A x) = T$$

$$3) \exists_{Gy}.A = F \text{ si et seulement si pour tout } x \in G \text{ tel que } (\lambda y.A x) \in \mathfrak{F}.$$

9.2.2 L'opérateur $\dot{\exists}_G$

Définition 532 *Pour G essentiellement κ -petit, on définit :*

$$x \dot{\exists}_{Gy} = (if y F \exists_{Gv}.(yv \dot{\sim}_G x)) .$$

Remarque 533 *On vérifie facilement que $\dot{\exists}_G$ est compatible avec \sim_G , autrement dit, que si $x \sim_G x'$ et $y \sim_G y'$ alors on a : $x \dot{\exists}_{Gy} = x' \dot{\exists}_{Gy'}$.*

Lemme 534 :

$$1) \text{ Si } x, y \in G^+ \text{ alors } x \dot{\exists}_{Gy} \neq \perp$$

$$2) \text{ Si } y \neq T \text{ et } x \dot{\exists}_{Gy} \neq \perp \text{ alors } x, y \in G^+$$

Preuve. Nous montrons d'abord : (*) $\exists_{Gv}.(yv \dot{\sim}_G x) \neq \perp \Leftrightarrow x, y \in G^+ :$

$$\exists_{Gv}.(yv \dot{\sim}_G x) \neq \perp \Leftrightarrow \forall v \in G : yv \dot{\sim}_G x \neq \perp \quad Lem531.1$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in G : yv, x \in G^+ \quad Lem525.1$$

$$\Leftrightarrow y, x \in G^+ \quad Lem453.4$$

1) Si $x, y \in G^+$, on a en particulier $y \neq \perp$, et le résultat découle donc immédiatement de (*).

2) Il suffit de remarquer que $y \neq T$ et $x \dot{\in}_G y \neq \perp$ implique $y \in \mathfrak{F}$, on a donc $x \dot{\in}_G y = \exists_G v.(yv \sim_G x)$. On applique alors de nouveau (*). ■

Proposition 535 *Pour tous $x, y \in G^+$:*

- 1) $x \dot{\in}_G y = T$ ssi ($y \neq T$ et il existe $v \in G$ tel que $yv \sim_G x$)
- 2) $x \dot{\in}_G y = F$ sinon.

Preuve. Suit facilement du Lemme 531.2 et 3 en utilisant le 1 du lemme précédent. ■

9.2.3 L'opérateur \langle , \rangle

Dans cette section, on suppose seulement de façon générale $G \subseteq \mathcal{M}$.

Définition 536 *Rappelons que :*

- 1) $S = \lambda x \lambda z.x$
- 2) $P = \lambda x \lambda y \lambda z.(if\ z\ x\ y)$
- 3) $\langle , \rangle =_{def} \lambda x \lambda y.(P\ Sx\ Pxy)$
- 4) $\langle x, y \rangle =_{def} \langle , \rangle xy$

Définition 537 $G \subseteq \mathcal{M}$ est TF-valué si $\perp \notin G \ni T$ et $G \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Le lemme suivant exprime la clôture de G^+ par les opérateurs S, P et \langle , \rangle :

Lemme 538 *Pour tous x, y :*

- 1) $x \in G^+ \Leftrightarrow Sx \in G^+$.
- 2) Si $\perp \notin G$ alors : $x, y \in G^+ \Rightarrow (Pxy \in G^+ \text{ et } \langle x, y \rangle \in G^+)$.
- 3) Si G est TF-valué alors : $(Pxy \in G^+ \text{ ou } \langle x, y \rangle \in G^+) \Rightarrow x, y \in G^+$.

Preuve.

- 1) Est immédiat.
- 2) Suit de la remarque que si $\perp \notin G$ alors, pour tous x, y , on a $PxyG = \{x, y\}$
- 3) Supposons que G soit TF-valué. Par définition de \langle , \rangle et 1, il suffit de montrer que $Pxy \in G^+$ implique $x, y \in G^+$. Supposons donc $Pxy \in G^+$. On doit montrer que, pour tout $\bar{z} \in G^{<\omega}$, on a $x\bar{z} \neq \perp$ et $y\bar{z} \neq \perp$. Or ceci suit trivialement du fait que $x\bar{z} = (Pxy\ T\bar{z})$ et $y\bar{z} = (Pxy\ z\bar{z})$ pour tout $z \in \mathfrak{F}$, et que par ailleurs $T \in G$ et $G \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ (puisque G est TF-valué). ■

Corollaire 539 *Si G est essentiellement κ -petit alors, pour tous $x, y, b \in \mathcal{M}$:*

- 1) Si $\perp \notin G$ et $x, y, b \in G^+$ alors $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \neq \perp$.
- 2) Si G est TF-valué et $b \neq T$ et $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \neq \perp$ alors $x, y, b \in G^+$.

Preuve. On rappelle tout d'abord que la définition de $\dot{\epsilon}_G$ nécessite que G soit essentiellement κ -petit. Maintenant, le résultat est une conséquence directe du lemme précédent et de la Proposition 535. ■

Le lemme suivant exprime la compatibilité des opérateurs S et P avec \sim_G :

Lemme 540 *Pour tout $x, y, x', y' \in \mathcal{M}$:*

$$1) Sx \sim_G Sx' \Leftrightarrow x \sim_G x'$$

$$2) Si \perp \notin G \text{ alors } ((x \sim_G x' \wedge y \sim_G y') \vee (x \sim_G y' \wedge y \sim_G x')) \Rightarrow Pxy \sim_G Px'y'$$

3) Si G est TF -valué alors :

$$Pxy \sim_G Px'y' \Leftrightarrow ((x \sim_G x' \wedge y \sim_G y') \vee (x \sim_G y' \wedge y \sim_G x'))$$

Preuve. Le 1 et le 2 se vérifient facilement en utilisant le lemme précédent. Le sens \Leftarrow du 3 est immédiat par le 1. Supposons maintenant $Pxy \sim_G Px'y'$ et donc :

$$(a) \quad \forall z \in G, \exists z' \in G : (Pxy z) \sim_G (Px'y' z') \quad \text{et}$$

$$(b) \quad \forall z' \in G, \exists z \in G : (Pxy z) \sim_G (Px'y' z')$$

Par (a) et comme $T \in G$, il existe z' tel que $(Pxy T) \sim_G (Px'y' z')$, i.e tel que $x \sim_G (Px'y' z')$. Comme on a $z' = T$ ou $z' \in \mathfrak{F}$ (puisque $\perp \notin G$), on vérifie sans peine que :

$$(1) \quad x \sim_G x' \text{ ou } x \sim_G y'$$

De même, en choisissant $z \in G \cap \mathfrak{F}$ (c'est possible puisque G est TF -valué), on montre de la même manière que :

$$(2) \quad y \sim_G x' \text{ ou } y \sim_G y'$$

Par (b) en raisonnant comme précédemment, on obtient :

$$(3) \quad x \sim_G x' \text{ ou } y \sim_G x'$$

$$(4) \quad x \sim_G y' \text{ ou } y \sim_G y'$$

On montre maintenant par l'absurde que :

$$x \sim_G x' \Rightarrow y \sim_G y' \text{ et } x \sim_G y' \Rightarrow y \sim_G x',$$

le résultat découlant alors immédiatement par (1). On utilise librement le fait que \sim_G est une relation d'équivalence :

A) Supposons $x \sim_G x'$ et $y \not\sim_G y'$. Par (2) et (4), on a donc $y \sim_G x'$ et $x \sim_G y'$. Comme par hypothèse on a $x \sim_G x'$, il vient $x \sim_G y$ puis $y \sim_G y'$. Ce qui est contradictoire.

B) Supposons $x \sim_G y'$ et $y \not\sim_G x'$. Par (2) et (3), on a donc $y \sim_G y'$ et $x \sim_G x'$. Comme par hypothèse on a $x \sim_G y'$, il vient $x \sim_G y$ puis $y \sim_G x'$. Ce qui est contradictoire. ■

Nous allons maintenant établir la compatibilité de l'opérateur \langle , \rangle avec \sim_G . Ce sera une conséquence du lemme suivant :

Lemme 541 *Pour tous $x, y, z \in \mathcal{M}$, on a :*

- 1) *Si $\perp \notin G$ alors $x \sim_G z \sim_G y \Rightarrow Sz \sim_G Pxy$*
- 2) *Si G est TF-valué alors $Sz \sim_G Pxy \Leftrightarrow x \sim_G z \sim_G y$*

Preuve. On vérifie tout d'abord facilement que si $\perp \notin G$ on a, pour tout $z \in G^+$, que $Sz \sim_G Pzz$. Il vient ensuite :

$$\begin{aligned} 1) \quad x \sim_G z \sim_G y &\Rightarrow ((z \sim_G x \wedge z \sim_G y) \vee (z \sim_G y \wedge z \sim_G x)) \\ &\Rightarrow Pzz \sim_G Pxy && \text{(Lem540.2)} \\ &\Rightarrow Sz \sim_G Pxy \end{aligned}$$

- 2) Le sens \Leftarrow est immédiat par le 1. On montre le sens \Rightarrow :

$$\begin{aligned} Sz \sim_G Pxy &\Rightarrow Pzz \sim_G Pxy \\ &\Rightarrow ((z \sim_G x \wedge z \sim_G y) \vee (z \sim_G y \wedge z \sim_G x)) && \text{(Lem540.1)} \\ &\Rightarrow z \sim_G x \wedge z \sim_G y \\ &\Rightarrow x \sim_G z \sim_G y \end{aligned}$$

■

Lemme 542 *Pour tous x, x', y, y' , on a :*

- 1) *Si $\perp \notin G$ alors $x \sim_G x' \wedge y \sim_G y' \Rightarrow \langle x, y \rangle \sim_G \langle x', y' \rangle$*
- 2) *Si G est TF-valué alors $\langle x, y \rangle \sim_G \langle x', y' \rangle \Leftrightarrow x \sim_G x' \wedge y \sim_G y'$*

Preuve. Suit aisément des deux lemmes précédents puisque $\langle x, y \rangle = (P Sx Pxy)$. ■

9.2.4 Les opérateurs I_G^ρ , $Feuil_G^\rho$, Enf_G^ρ et Δ_G^ρ

Dans cette section, G désignera un sous-ensemble essentiellement κ -petit de \mathcal{M} tel que $G \subseteq G^+$, et donc $\perp \notin G$, et ρ désignera une fonction de choix sur \mathcal{M} (rappelons que l'hypothèse “ G essentiellement κ -petit” est nécessaire à la continuité de χ_{\sim_G} et donc à la définition de ε_G^ρ et $\dot{\sim}_G$).

Définition 543 *Pour tout $G \subseteq \mathcal{M}$ essentiellement κ -petit :*

- 1) $I_G^\rho =_{def} \lambda y. \varepsilon_G^\rho z. z \dot{\sim}_G y$
- 2) $Feuil_G^\rho =_{def} \lambda b \lambda x. \dot{\neg} (\exists_G y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b)$
- 3) $Enf_G^\rho =_{def} \lambda b \lambda x. \varepsilon_G^\rho y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b$
- 4) $\Delta_G^\rho =_{def} \lambda d \lambda b \lambda x \lambda y. (if \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \ db(I_G^\rho y) \ db(Enf_G^\rho b x))$

Avant de donner les propriétés des opérateurs que nous venons de définir, nous en faisons une présentation intuitive.

L'opérateur I_G^ρ est une sorte d'opérateur d'identité sur G^+ / \sim_G ; plus précisément, il choisit, pour tout élément de G^+ , un élément de G qui lui est “égal” au sens de \sim_G , lorsqu'un tel élément existe, et un élément de

G quelconque dans le cas contraire. Les trois autres opérateurs travaillent également à \sim_G près. En particulier, ce que nous dirons ci-après doit se comprendre à cette équivalence \sim_G près.

Pour les autres opérateurs, l'idée de départ est que la variable b représente "l'ensemble des arêtes" d'un "graphe" $\langle a, b \rangle$ de G , i.e un élément de \mathcal{M} tel que :

$$bG \subseteq \{\langle x, y \rangle : x, y \in aG\}$$

Pour un tel b et pour un "sommets" $x \in aG$, l'opérateur ($Feuil_G^\rho b x$) va déterminer si x est une "feuille" du graphe, i.e si $\{\langle x, y \rangle : y \in G\} \cap bG = \emptyset$.

Maintenant si x n'est pas une "feuille" de $\langle a, b \rangle$, l'opérateur ($Enf_G^\rho b$) choisit un "enfant" de x , i.e un élément de $\{y \in G : \langle x, y \rangle \in bG\}$. Soit maintenant ($\Delta_G^\rho db$) pour un $d \in \mathcal{M}$. L'hypothèse $G \subseteq G^+$ nous assurant $\langle x, y \rangle \in_G b \neq \perp$ pour tout $y \in G$, on aura, à \sim_G près :

$$(1) ((\Delta_G^\rho db)x)G = \{dby : \langle x, y \rangle \in bG\}$$

Nous verrons que ce comportement de Δ_G^ρ nous permettra de définir, dans la section suivante, un "décorateur universel pour G ", c'est à dire un opérateur capable de décorer tout "graphe" de G . Cet opérateur sera noté δ_G^ρ .

La plupart des lemmes suivants établissent formellement les propriétés intuitives que nous venons de décrire :

Lemme 544 Pour tout $y \in \mathcal{M}$ on a :

$$1) I_G^\rho y \in G \text{ ssi } I_G^\rho y \neq \perp \text{ ssi } y \in G^+.$$

Et si $y \in G^+$ alors $I_G^\rho y \in G$ et :

$$2) \text{ s'il existe } z \in G \text{ tel que } z \sim_G y = T, \text{ alors } I_G^\rho y \sim_G y = T.$$

$$3) \text{ sinon } I_G^\rho y \sim_G y = F.$$

Preuve. On utilise librement le fait que $I_G^\rho y = \varepsilon_G^\rho \lambda z. z \sim y$.

Le 2 et le 3 découlent facilement du 1 et du Lemme 528, on montre le 1 : Par la Remarque 526 on a immédiatement $I_G^\rho y \in G$ ssi $I_G^\rho y \neq \perp$. Il reste donc à montrer : $I_G^\rho y \neq \perp \Leftrightarrow y \in G^+$. Puisque $G \subseteq G^+$, le Lemme 525.1 nous donne pour tout $z \in G$: $z \sim_G y \neq \perp$ ssi $y \in G^+$. Il vient, par le Lemme 527 :

$$I_G^\rho y \neq \perp \text{ ssi } \perp \notin (\lambda z. z \sim_G y)[G] \text{ ssi } y \in G^+. \blacksquare$$

Comme \sim_G est réflexive, on a immédiatement par le 2 du lemme précédent :

Corollaire 545 Pour tout $y \in G$, on a $I_G^\rho y \in G$ et $I_G^\rho y \sim_G y = T$.

On montre maintenant les propriétés de $Feuil_G^\rho$ et Enf_G^ρ .

Lemme 546 Pour tout $x \in \mathcal{M}$, on a $(Feuil_G^\rho T x) = T$.

Preuve. Par définition de $\dot{\in}_G$, on a $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G T = F$ pour tout $x, y \in \mathcal{M}$. Par le Lemme 531.3, on a $\exists_G y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_G T = F$, et donc $(Feuil_G^\rho T x) = T$ (définition de $\dot{\in}$). ■

Lemme 547 Pour tous $b, x \in \mathcal{M}$:

- 1) Si $b, x \in G^+$ alors $(Feuil_G^\rho b x) \neq \perp$ et $(Enf_G^\rho b x) \neq \perp$
 - 2) Si $T \in G$ et $b \neq T$ alors :
- $((Feuil_G^\rho b x) \neq \perp$ ou $(Enf_G^\rho b x) \neq \perp) \Rightarrow b, x \in G^+$

Preuve.

- 1) Soient $b, x \in G^+$. Par le Corollaire 539.1, pour tout $y \in G \subseteq G^+$, on a $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \neq \perp$. On en conclut, d'une part $\exists_G y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \neq \perp$ puis $(Feuil_G^\rho b x) \neq \perp$ (Lemme 531.1 puis définition de $\dot{\in}$), d'autre part $\varepsilon_G^\rho y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \neq \perp$ (Lemme 527).
- 2) Supposons $(Feuil_G^\rho b x) \neq \perp$ ou $(Enf b x) \neq \perp$. On a donc $\exists_G y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \neq \perp$ ou $\varepsilon_G^\rho y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \neq \perp$ (définitions de $\dot{\in}$ et Enf_G^ρ). Par les Lemmes 531.1 et 527, il vient donc $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \neq \perp$ pour tout $y \in G \subseteq G^+$. Soit $y \in G$, comme $b \neq T$, on a $\langle x, y \rangle, b \in G^+$ (Lemme 534.2). Il reste à remarquer que comme $T \in G$, on a en particulier $x = \langle x, y \rangle T T \in G^+$ (puisque $G^+ = G^2 \mapsto G^+$).

■

Lemme 548 Pour tous $b, x \in G^+$, on a :

- 1) $(Feuil_G^\rho b x) = T$ ssi $\{y \in G : \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b = T\} = \emptyset$
- 2) $(Feuil_G^\rho b x) = F$ sinon; et alors $\langle x, (Enf_G^\rho b x) \rangle \dot{\in}_G b = T$.

Preuve. Tout d'abord on remarque que si $b, x \in G^+$ alors $(Feuil_G^\rho b x) \neq \perp$ (1 du lemme précédent). Il vient :

- 1) Si $(Feuil_G^\rho b x) = T$ alors $\exists_G y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b = F$ (Définition de $\dot{\in}$) et $\{y \in G : \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b = T\} = \emptyset$ (Lemme 531.3). Supposons maintenant que, pour tout $y \in G$, on ait $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \neq T$. Si $b = T$ on conclut par le Lemme 546. Si $b \neq T$ alors, pour tout $y \in G$, on a $b, x, y \in G^+$ et donc $\perp \neq \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \in \mathfrak{F}$ (539.1). On en conclut $\exists_G y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b = F$ (Lemme 531.3) et donc $(Feuil_G^\rho b x) = T$.
- 2) Si $(Feuil_G^\rho b x) \neq T$, on a immédiatement $(Feuil_G^\rho b x) = F$ (puisque $(Feuil_G^\rho b x) \neq \perp$). On a donc $\exists_G y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b = T$. Par le Lemme 531.2, il existe donc $y \in G$ tel que $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b = T$ et, pour tout $y \in G$, on a $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \neq \perp$. On conclut par le Lemme 528.1 puisque $(Enf_G^\rho b x) = \varepsilon_G y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b$.

■

Le lemme qui suit donne des propriétés de Enf_G^ρ similaires à celles données par le Lemme 544 pour I_G^ρ :

Lemme 549 Pour tous $b, x \in \mathcal{M}$, alors :

1) $(\text{Enf}_G^\rho bx) \in G$ ssi $(\text{Enf}_G^\rho bx) \neq \perp$.

Et si $b, x \in G^+$ alors $(\text{Enf}_G^\rho bx) \in G$ et :

2) S'il existe $y \in G$ tel que $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b = T$ alors $\langle x, (\text{Enf}_G^\rho bx) \rangle \dot{\in}_G b = T$

3) Sinon $\langle x, (\text{Enf}_G^\rho bx) \rangle \dot{\in}_G b = F$.

Preuve. Le 1 est donné par la Remarque 526. De plus, si $b, x \in G^+$ et $y \in G \subseteq G^+$, on a $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \neq \perp$ (Corollaire 539.1), et donc $\varepsilon_G^\rho \cdot \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \in G$. Le 2 et le 3 découle alors facilement du Lemme 528. ■

Le dernier lemme de cette section exprime certaines compatibilités fortes des opérateurs Feuil_G^ρ , I_G^ρ , Enf_G^ρ et Δ_G^ρ avec \sim_G . Il découle facilement de leur définitions :

Lemme 550 Pour tout $d, b, x, y, x', y' \in G^+$:

1) $y \sim_G y' \Rightarrow I_G^\rho y = I_G^\rho y'$

2) $x \sim_G x' \wedge y \sim_G y' \wedge b \sim_G b' \Rightarrow \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b = \langle x', y' \rangle \dot{\in}_G b'$

3) $x \sim_G x' \wedge b \sim_G b' \Rightarrow (\text{Feuil}_G^\rho bx) = (\text{Feuil}_G^\rho b' x')$

4) $x \sim_G x' \wedge b \sim_G b' \Rightarrow (\text{Enf}_G^\rho bx) = (\text{Enf}_G^\rho b' x')$

5) $x \sim_G x' \wedge y \sim_G y' \Rightarrow ((\Delta_G^\rho dbx)y) = ((\Delta_G^\rho dbx')y')$

9.2.5 L'opérateur δ_G^ρ

Comme dans la section précédente, on suppose ici $G \subseteq G^+$ et essentiellement κ -petit. De plus, ρ désigne toujours une fonction de choix sur \mathcal{M} .

Rappelons que \mathbb{Y} est l'opérateur de plus petit point fixe de \mathcal{M} (Définition 393).

Définition 551 (Le “décorateur universel sur G ”)

1) $d_G^\rho =_{\text{def}} \lambda d \lambda b \lambda x. (if (\text{Feuil}_G^\rho bx) T (\Delta_G^\rho dbx))$

2) $\delta_G^\rho =_{\text{def}} (\mathbb{Y} d_G^\rho)$

Comme δ_G^ρ est un point fixe de d_G^ρ , il est clair que, pour tous $b, x \in \mathcal{M}$:

$$\delta_G^\rho bx = (if (\text{Feuil}_G^\rho bx) T (\Delta_G^\rho \delta_G^\rho bx))$$

Nous commençons par une présentation intuitive de δ_G^ρ , le “décorateur universel sur G ”. Rappelons qu'une décoration d'un graphe ensembliste (a, b) est une fonction d telle que, pour tout sommet $x \in a$, on ait :

$$d(x) = \{d(y) : (x, y) \in b\}$$

Interprétée dans le système $S =_{\text{def}} (G, \in_G, \sim_G)$ (où $x \in_G y$ ssi $x \dot{\in}_G y = T$) la notion de décoration devient : “ d est une “décoration” du “graphe” $\langle a, b \rangle$ ssi pour tout $x \in aG$, on a :

$$d\langle x \rangle G = \{d\langle y \rangle : \langle x, y \rangle \in bG\}^S$$

où $d\langle x \rangle$ est "l'image de x par d ".

Supposons maintenant $d \in G$ tel que $dG = \{\langle x, \delta_G^\rho bx \rangle : x \in aG\}^S$. Il est facile de voir que d est alors une "décoration" de $\langle a, b \rangle$. En effet, soit $x \in aG$ et $u =_{def} \delta_G^\rho bx$. Si x est une "feuille", on a $(Feuil\ b\ x) = T$ et $\delta_G^\rho bx = T =_{def} \emptyset^S$. Sinon, on a $u = (\Delta_G^\rho \delta_G^\rho bx)$ et :

$$uG = \{\delta_G^\rho by : \langle x, y \rangle \in bG\}^S$$

Les propriétés intuitives que nous venons de décrire seront démontrées en Section 10.2 pour le cas particulier où $G = \Phi$. Pour l'instant, nous n'établissons que celles utiles à la construction de Ψ et de Φ , construction qui nécessite de pouvoir travailler avec un $G \subseteq \mathcal{M}$ et ρ , une fonction de choix sur \mathcal{M} , quelconques.

Le premier lemme est trivial :

Lemme 552 Soient $b, x \in \mathcal{M}$:

- 1) $\delta_G^\rho bx = \perp$ ssi $(Feuil_G^\rho bx) = \perp$
- 2) $\delta_G^\rho bx = T$ ssi $(Feuil_G^\rho bx) = T$
- 3) $\delta_G^\rho bx = (\Delta_G^\rho \delta_G^\rho bx)$ ssi $(Feuil_G^\rho bx) = F$

Corollaire 553 Pour tout $x \in \mathcal{M}$: $\delta_G^\rho Tx = T$

Preuve. Vient directement du point 2 du lemme, et du Lemme 547.2. ■

La compatibilité forte de $\delta_G^\rho b$ avec \sim_G découle facilement du Lemme 550 :

Lemme 554 Si $x \sim_G x'$ et $y \sim_G y'$ alors $\delta_G^\rho bxy = \delta_G^\rho bx'y'$.

On clôt cette section par deux propriétés essentielles de δ_G^ρ :

Lemme 555 Si $b, x \in G^+$ alors : $\delta_G^\rho bx \neq T$ implique $(\delta_G^\rho bx)G^+ \subseteq \delta_G^\rho bG$.

Preuve. Si $b, x \in G^+$, on a $(Feuil_G^\rho bx) \neq \perp$ (Lemme 547.1). Il reste donc deux cas :

1^{er} Cas : Si $(Feuil_G^\rho bx) = T$ alors $\delta_G^\rho bx = T$.

2^{ème} Cas : Si $(Feuil_G^\rho bx) = F$ alors $\delta_G^\rho bx = (\Delta_G^\rho \delta_G^\rho bx)$ et donc :

$$\delta_G^\rho bxy = (if \langle x, y \rangle \in_G b \delta_G^\rho b(I_G^\rho y) \delta_G^\rho b(Enf_G^\rho bx))$$

Si $y \in G^+$ on a $\langle x, y \rangle \in_G b \neq \perp$ (Corollaire 539.1). On a donc $\delta_G^\rho bxy = \delta_G^\rho b(I_G^\rho y)$ ou $\delta_G^\rho bxy = \delta_G^\rho b(Enf_G^\rho bx)$ suivant les cas $\langle x, y \rangle \in_G b = T$ ou $\langle x, y \rangle \in_G b \in \mathfrak{F}$. Le résultat découle alors soit du Lemme 544.1, soit des Lemmes 547.1 et 549.1. ■

Corollaire 556 Pour tout $b \in G^+$, on a $\delta_G^\rho b \in (G^+)^+$.

Preuve. Il nous suffit de montrer que, pour tout $x \in G^+$, on a $\delta_G^\rho bx \in (G^+)^+$. Soit donc $\bar{y} \in (G^+)^{<\omega}$, il faut montrer $\delta_G^\rho bx\bar{y} \neq \perp$. Or, par le lemme précédent, on vérifie facilement que soit $\delta_G^\rho bx\bar{y} = \delta_G^\rho bz$ pour un $z \in G \subseteq G^+$, soit $\delta_G^\rho bx\bar{y} = T$. Or, par le Lemme 547.1, on a $(Feuil_G^\rho bx) \neq \perp$, et donc $\delta_G^\rho bz \neq \perp$ (Lemme 552.1). ■

L'opérateur δ_G^ρ est égal à d_G^ρ

On suppose seulement ici que G est essentiellement κ -petit. Nous introduirons des propriétés supplémentaires sur G dans la section suivante.

Rappelons que, par définition de \mathbb{Y}^3 , $\delta_G^\rho =_{def} (\mathbb{Y} d_G^\rho)$ est le sup de la suite croissante définie pour $\eta < \kappa$ par :

$$\begin{aligned} d_G^\rho{}^0 &= \perp \\ d_G^\rho{}^{\eta+1} &= d_G^\rho(d_G^\rho{}^\eta) \\ d_G^\rho{}^\eta &= \sup\{d_G^\rho{}^\gamma : \gamma < \eta\} \text{ pour } \eta \text{ limite} \end{aligned}$$

Nous montrons ici que la suite $(d_G^\rho{}^\eta)_{\eta < \kappa}$ est stationnaire en ω et que donc $\delta_G^\rho = d_G^\rho{}^\omega$. Pour simplifier on écrira Δ pour Δ_G^ρ , et d^η pour $d_G^\rho{}^\eta$.

Les deux premiers lemmes que nous donnons montrent des propriétés de Δ . On remarque au préalable que, pour tous $\eta < \kappa$ et $y \in \mathcal{M}$:

$$((\Delta d^\eta bx)y) = (if \langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \quad d^\eta b(I_G^\rho y) \quad d^\eta b(Enf_G^\rho bx))$$

Il suit alors facilement que :

Lemme 557 Pour tous $b, x \in \mathcal{M}$ et $\eta < \kappa$:

- 1) si $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b = \perp$ alors $((\Delta d^\eta bx)y) = \perp$
- 2) si $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b = T$ alors $((\Delta d^\eta bx)y) = d^\eta b(I_G^\rho y)$
- 3) si $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \in \mathfrak{F}$ alors $((\Delta d^\eta bx)y) = d^\eta b(Enf_G^\rho bx)$

Lemme 558 Pour tout $\eta < \kappa$ limite, on a :

$$(\Delta d^\eta bx) = \sup\{(\Delta d^\gamma bx) : \gamma < \eta\}$$

Preuve. Rappelons que si $\eta < \kappa$ la sous-suite $(d^\gamma)_{\gamma < \eta}$ n'est pas obligatoirement κ -filtrante (Remarque 341). On ne peut donc déduire immédiatement du Lemme 409 que $(\Delta d^\eta) = \sup\{(\Delta d^\gamma) : \gamma < \eta\}$ et donc le résultat.

Maintenant, par croissance de la suite $(d^\eta)_{\eta < \kappa}$, on a immédiatement $\sup\{(\Delta d^\gamma bx) : \gamma < \eta\} \leq (\Delta d^\eta bx)$. Inversement, par la propriété de *Quasi-Extensionnalité* (Lemme 414), il suffit de montrer que pour tout y :

$$((\Delta d^\eta bx)y) \leq \sup\{(\Delta d^\gamma bx) : \gamma < \eta\}y$$

³Cf Définition 393 p.148

autrement dit, par le Lemme 409, que :

$$((\Delta d^n b x)y) \leq \sup\{((\Delta d^\gamma b x)y) : \gamma < \eta\}$$

On raisonne maintenant en utilisant les 3 points du lemme précédent :

(i) Si $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b = \perp$ c'est évident par le point 1

(ii) Si $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b = T$, on a :

$$\begin{aligned} ((\Delta d^n b x)y) &= d^n b(I_G^\rho y) && \text{point 2} \\ &= \sup\{d^\gamma : \gamma < \eta\} b(I_G^\rho y) && \text{Déf } d^n \\ &= \sup\{d^\gamma b(I_G^\rho y) : \gamma < \eta\} && \text{Lem409} \\ &= \sup\{((\Delta d^\gamma b x)y) : \gamma < \eta\} && \text{point 2} \end{aligned}$$

(iii) Si $\langle x, y \rangle \dot{\in}_G b \in \mathfrak{F}$, le résultat se montre de façon similaire au cas précédent en utilisant le point 3. ■

Nous allons pouvoir maintenant aborder le résultat central de cette section. On commence par une remarque :

Remarque 559 *Il est clair que pour tout $\eta < \kappa$ on a :*

$$d^{\eta+1} = \lambda b \lambda x. (i f (F e u i l_G^\rho b x) T (\Delta d^\eta b x))$$

On vérifie donc facilement que, pour tous $b, x \in \mathcal{M}$:

$$(i) d^{\eta+1} b x = \perp \quad s s i (F e u i l b x) = \perp$$

$$(ii) d^{\eta+1} b x = T \quad s s i (F e u i l b x) = T$$

$$(iii) d^{\eta+1} b x = (\Delta d^\eta b x) \in \mathfrak{F} \quad s s i (F e u i l b x) = F$$

Proposition 560 $\delta_G^\rho = d_G^\rho =_{def} \sup\{d_G^\rho : \rho < \omega\}$

Preuve. On doit montrer $\sup\{d^\eta : \eta < \kappa\} = d^\omega$. Pour cela, il suffit clairement, par définition et croissance de la suite, que l'on ait $d^{\omega+1} \leq d^\omega$. Par *Quasi-Extensionnalité* (Lemme 414), cela revient à vérifier que, pour tous $b, x \in \mathcal{M}$, $d^{\omega+1} b x \leq d^\omega b x$. Soient donc $b, x \in \mathcal{M}$. Tout d'abord, il est clair que $d^\omega =_{def} \sup\{d^\eta : \eta < \omega\} = \sup\{d^{\eta+1} : \eta < \omega\}$. On doit donc montrer $d^{\omega+1} b x \leq \sup\{d^{\eta+1} b x : \eta < \omega\}$. Si $(F e u i l b x) = \perp$ ou $(F e u i l b x) = T$, c'est évident par la Remarque 559.(i) et 559.(ii). Reste donc le cas où $(F e u i l b x) = F$. On doit montrer alors $(\Delta d^\omega b x) \leq \sup\{(\Delta d^\eta b x) : \eta < \omega\}$, ce qui est donné par le lemme précédent. ■

9.2.6 Le décorateur δ_G^ρ préserve la κ -compacité

On va maintenant montrer que δ_G^ρ préserve la κ -compacité si G est *TF*-valué et $G \subseteq_\sigma (G^+)_c$ (i.e G est σ -petit et $G \subseteq G^+ \cap \mathcal{M}_c$). Ce sera une conséquence du lemme suivant :

Lemme 561 *Si G est *TF*-valué et $G \subseteq_\sigma (G^+)_c$ alors :*
Si $d \in ((G^+)_c)^2 \mapsto \mathcal{M}_c$ on a $(\Delta_G^\rho d) \in ((G^+)_c)^2 \mapsto \mathcal{M}_c$.

Preuve. Soient $b, x \in (G^+)_c$ et soient :

$$m =_{\text{def}} (\Delta_G^\rho \text{ db } x) =_{\text{def}} \lambda y. (if \langle x, y \rangle \in_G b \text{ db}(I_G^\rho y) \text{ db}(E\eta f_G^\rho b x)) \text{ et}$$

$$K =_{\text{def}} \{db(I_G^\rho y) : y \in G^+\} \cup \{db(E\eta f_G^\rho b x)\}$$

Tout d'abord, si $b = T$, pour tout $y \in \mathcal{M}$, on a $\langle x, y \rangle \in_G b = F$ (définition de $\dot{\in}_G$). Par *Quasi-extensionnalité* et définition de F , on a donc $m = \lambda y \lambda x. T$ qui est compact (Remarque 416.2). Supposons maintenant $b \neq T$. Par les Lemmes 549.1 et 544.1, il vient $(E\eta f_G^\rho b x) \in G \subseteq (G^+)_c$ et, pour tout $y \in G^+$, $I_G^\rho y \in G \subseteq (G^+)_c$. Par hypothèse sur d , on a donc $K \subseteq \mathcal{M}_c$. Puisque $b \neq T$ et que G est TF -valué, on a clairement par le Corollaire 539 que $\langle x, y \rangle \in_G b = \perp$ ssi $y \notin G^+$, et donc $\text{dom}(m) = G^+$. Maintenant, si $y \in G^+$ on a $my = db(I_G^\rho y)$ ou $db(E\eta f_G^\rho b x)$ et donc $m \in G^+ \mapsto K$. Enfin, si $y =_G y'$ on a $y \sim_G y'$ (Remarque 477), et comme m est compatible avec \sim_G (Lemme 550.5), il vient $my = my'$. On en conclut finalement $m \in G^+ \mapsto_G K \subseteq \mathcal{M}_c$ (Lemme 517). ■

Proposition 562 *Si G est TF -valué et $G \subseteq_\sigma (G^+)_c$ alors $\delta_G^\rho \in (\mathcal{M}_c)^2 \mapsto \mathcal{M}_c$.*

Preuve. Remarquons que si $b = T$ on a $\delta_G^\rho bx = T$ (Corollaire 553), et que si $b \notin G^+$ ou $x \notin G^+$, on a $\delta_G^\rho bx = \perp$ (Lemmes 552.1 et 547). Dans les deux cas, $\delta_G^\rho bx$ est κ -compact.

On suppose à partir de maintenant $b \neq T$ et $b, x \in G^+ \cap \mathcal{M}_c$. Par la Proposition 560 et le Lemme 409, on a $\delta_G^\rho bx = \sup\{d^\eta bx : \eta \in \omega\}$. Pour que $\delta_G^\rho bx$ soit κ -compact il suffit donc que $d^\eta bx$ soit κ -compact, pour tout $\eta < \omega$ (puisque $\omega < \kappa$); ce qu'on montre par induction sur η . Le cas $\eta = 0$ étant immédiat, osons $m =_{\text{def}} d^{\eta+1} bx$. Par définition de d_G^ρ on a :

$$m = d_G^\rho(d^\eta bx) = (if (Feuil_G^\rho bx) T (\Delta_G^\rho d^\eta bx))$$

Le cas $(Feuil_G^\rho bx) = \perp$ ou T étant immédiat, supposons $(Feuil_G^\rho bx) = F$. Dans ce cas, on a $m = (\Delta_G^\rho d^\eta bx)$ et le résultat découle donc immédiatement du lemme précédent puisque, par hypothèse d'induction, on a $d^\eta \in ((G^+)_c)^2 \mapsto \mathcal{M}_c$. ■

9.3 Construction de Ψ

Comme déjà signalé, la construction de Ψ se fera par induction ordinaire. On prendra $\Psi = \Psi_\sigma$ pour $(\Psi_\alpha)_{\alpha < \sigma}$ une suite croissante de sous-ensemble de \mathcal{M} , construite par induction sur α . Pour définir cette suite on introduit tout d'abord deux opérations de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ vers $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ (la première totale et la seconde partielle).

9.3.1 Les opérations \mathcal{Q}' et D^ρ

On définit tout d'abord l'opération \mathcal{Q}' :

Définition 563 *Pour tout $H \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{Q}'(H) = H^+ \mapsto_H H$*

Le lemme qui suit exprime que l'opération \mathcal{Q}' préserve la “ σ -petitesse” et l'inclusion dans \mathcal{M}_c . Il découle immédiatement des Lemmes 516 et 517.

Lemme 564 *Si $H \subseteq_\sigma \mathcal{M}_c$ alors $\mathcal{Q}'(H) \subseteq_\sigma \mathcal{M}_c$.*

On introduit maintenant l'opération D^ρ . La définition de $D^\rho(G)$, parce qu'elle utilise l'opérateur δ_G^ρ , n'a de sens que si $G \subseteq \mathcal{M}$ est essentiellement κ -petit :

Définition 565 *Soit ρ une fonction de choix sur \mathcal{M} . Pour tout $G \subseteq \mathcal{M}$ essentiellement κ -petit, on pose : $D^\rho(G) = \{\delta_G^\rho bx : b, x \in G\}$.*

Il est clair que :

Lemme 566 *Si G est essentiellement σ -petit (resp. σ -petit) alors $D^\rho(G)$ est essentiellement σ -petit (resp. σ -petit).*

Lemme 567 *Soit G essentiellement κ -petit. Si $T \in G \subseteq G^+$ alors :*

- 1) $D^\rho(G) \in (G^+ \mapsto D^\rho(G))$
- 2) $D^\rho(G) \subseteq (G^+)^+$ et $\perp \notin D^\rho(G)$
- 3) Si, de plus, $G \subseteq_\sigma \mathcal{M}_c$ alors $D^\rho(G) \subseteq \mathcal{M}_c$.

Preuve. Le 1 découle aisément du Lemme 555, et le 2 du Corollaire 556 par le Lemme 453.4. Pour le 3, on distingue deux cas :

Si $G = \{T\}$ alors $D^\rho(G) = \{\delta_G^\rho TT\} = \{T\} \subseteq \mathcal{M}_c$ (Corollaire 553).

Si $G \neq \{T\}$, comme $\perp \notin G$, l'ensemble G est donc TF -valué, et on conclut par la Proposition 562. ■

9.3.2 Construction de Ψ

On fixe pour toute cette section une fonction de choix ρ sur \mathcal{M} . Nous construisons maintenant Ψ , puis nous verrons ses propriétés essentielles. Notons que la définition de la suite $(\Psi_\alpha)_{\alpha \leq \sigma}$ nécessite celle, simultanée, d'une suite de fonctions de choix $(\rho_\alpha)_{\alpha \leq \sigma}$ sur \mathcal{M} , définies à partir de ρ .

Définition 568 *On pose $\Psi = \Psi_\sigma$ où $(\Psi_\alpha)_{\alpha \leq \sigma}$ est la suite croissante définie par :*

$$- \Psi_0 = \{T\}$$

- $\Psi_{\alpha+1} = \Psi_\alpha \cup \mathcal{Q}'(\Psi_\alpha) \cup D^{\rho_\alpha}(\Psi_\alpha)$
où ρ_α est la fonction de choix sur \mathcal{M} définie par :

$$\rho_\alpha(X) = \begin{cases} \varrho(X) & \text{Si } X \cap \Psi_\alpha = \emptyset \\ \varrho(X \cap \Psi_\gamma) & \text{Sinon, où } \gamma \leq \alpha \text{ est minimal tel que } X \cap \Psi_\gamma \neq \emptyset \end{cases}$$

- $\Psi_\alpha = \sqcup_{\gamma < \alpha} \Psi_\gamma$ si α est un ordinal limite; en particulier $\Psi = \sqcup_{\gamma < \alpha} \Psi_\sigma$.

On remarque tout d'abord que la croissance de la suite $(\Psi_\alpha)_{\alpha < \sigma}$ est évidente et qu'elle justifie la mention "où $\gamma \leq \alpha$ est minimal pour $X \cap \Psi_\gamma \neq \emptyset$ " dans la définition de ρ_α . D'autre part, par les Lemmes 564 et 566, il est facile de vérifier la σ -petitesse de Ψ_α pour tout $\alpha < \sigma$. L'opération D^{ρ_α} est donc définie sur Ψ_α , et $\Psi_{\alpha+1}$ est donc bien défini pour tout $\alpha < \sigma$.

Remarque 569 On a $\Psi_\alpha^+ = \bigcap_{\gamma < \alpha} \Psi_\gamma^+$ pour tout α limite. En particulier, on a $\Psi^+ = \bigcap_{\alpha < \sigma} \Psi_\alpha^+$.

Notation 570 On notera $rg(u)$ le rang de $u \in \Psi$, i.e le plus petit $\alpha < \sigma$ tel que $u \in \Psi_\alpha$. Pour $H \subseteq \Psi$, on notera aussi $rg(H) =_{def} \sup\{rg(u) : u \in H\}$.

Il est clair que $rg(u)$ est un ordinal successeur. De plus, si $H \subseteq_\sigma \Psi$, on a $H \subseteq \Psi_\alpha$ pour $\alpha = rg(H) < \sigma$.

9.3.3 Propriétés de Ψ

Lemme 571 $\Psi \subseteq \mathcal{M}_c$

Preuve. Par définition de Ψ , il suffit de montrer, par induction sur $\alpha < \sigma$, que $\Psi_\alpha \subseteq \mathcal{M}_c$. Cela se fait sans problème en utilisant les Lemmes 564 et 567.3. ■

Lemme 572 Pour tout $0 < \alpha \leq \sigma$, on $T \in \Psi_\alpha$ et $\Psi_\alpha \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Preuve. Il est évident que $T \in \Psi_\alpha$ pour tout α . Par croissance de la suite, il nous suffit maintenant de montrer $\Psi_1 \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$. Or, comme Ψ_0 est κ -petit, Ψ_0^+ est un ouvert (Lemme 464.1) et sa fonction caractéristique $\chi_{\Psi_0^+}$ est κ -continue (Lemme 424). On vérifie alors sans peine que $\lambda(\chi_{\Psi_0^+}) \in (\Psi_0^+ \mapsto_{\Psi_0} \Psi_0) \subseteq \Psi_1$.
■

Lemme 573 $Card(\Psi) \leq \sigma < \kappa$

Preuve. Comme $Card(\Psi_\alpha) < \sigma$ pour tout $\alpha < \sigma$, on a immédiatement $Card(\Psi) \leq \sigma$. ■

Comme $\sigma < \kappa$, l'ensemble $\Psi = \Psi_\sigma$ est essentiellement κ -petit et donc :

Corollaire 574 $\delta_\Psi^{\rho_\sigma}$ et $D^{\rho_\sigma}(\Psi_\sigma)$ sont définis.

Nous allons maintenant aborder le Théorème principal de cette section, à savoir : $\Psi \subseteq (\Psi^+ \mapsto \Psi) \subseteq (\Psi \mapsto \Psi) \subseteq \Psi^+$. Il sera une conséquence des deux lemmes suivants. Remarquons que l'énoncé du premier se limite au cas $\alpha < \sigma$, puisque nous n'avons pas défini $\Psi_{\sigma+1}$ (ce qui par le corollaire précédent serait possible, bien qu'inutile ici).

Lemme 575 *Pour tous $\gamma < \sigma$:*

- 1) $\Psi_\gamma \subseteq \Psi_\gamma^+ \Rightarrow \Psi_{\gamma+1} \subseteq \Psi_\gamma^+$
- 2) $\Psi_\gamma \subseteq \Psi_\gamma^+ \Rightarrow \Psi_\gamma \subseteq \Psi_{\gamma+1}^+$.

Preuve. Supposons $\Psi_\gamma \subseteq \Psi_\gamma^+$:

1) On doit montrer $(\Psi_\gamma^+ \mapsto_{\Psi_\gamma} \Psi_\gamma) \subseteq \Psi_\gamma^+$ et $D^{\rho_\gamma}(\Psi_\gamma) \subseteq \Psi_\gamma^+$. La deuxième inclusion est donnée par le Lemme 567.2, puisque $\Psi_\gamma \subseteq \Psi_\gamma^+ \Rightarrow \Psi_\gamma^{++} \subseteq \Psi_\gamma^+$. Pour la première, on remarque simplement que, par le Lemme 451 :

$$(\Psi_\gamma^+ \mapsto_{\Psi_\gamma} \Psi_\gamma) \subseteq (\Psi_\gamma^+ \mapsto \Psi_\gamma) \subseteq (\Psi_\gamma \mapsto \Psi_\gamma^+) = \Psi_\gamma^+$$

2) Il suffit de montrer que, pour tout $\eta \leq \gamma$, on a $\Psi_\eta \subseteq \Psi_{\gamma+1}^+$. La preuve se fait par induction sur $\eta \leq \gamma$. Le cas $\eta = 0$ étant évident, et le cas η limite découlant immédiatement de l'hypothèse d'induction, on montre le cas $\eta + 1$. Par hypothèse d'induction, on a $\Psi_\eta \subseteq \Psi_{\gamma+1}^+$, il reste à montrer $(\mathcal{Q}'(\Psi_\eta) \cup D^{\rho_\gamma}(\Psi_\eta)) \subseteq \Psi_{\gamma+1}^+$:

On remarque tout d'abord que le 1 nous donne $\Psi_{\gamma+1} \subseteq \Psi_\gamma^+ \subseteq \Psi_\eta^+$ (puisque $\Psi_\eta \subseteq \Psi_\gamma$). Par l'hypothèse d'induction et les Lemmes 451 et 453.4, il vient d'une part :

$$(\Psi_\eta^+ \mapsto_{\Psi_\eta} \Psi_\eta) \subseteq (\Psi_\eta^+ \mapsto \Psi_\eta) \subseteq (\Psi_{\gamma+1} \mapsto \Psi_{\gamma+1}^+) = \Psi_{\gamma+1}^+$$

D'autre part, comme $\eta \leq \gamma$, on a $\Psi_\eta \subseteq \Psi_{\gamma+1} \subseteq \Psi_\eta^+$ et donc, par le Lemme 567.2 : $D^{\rho_\eta}(\Psi_\eta) \subseteq \Psi_\eta^{++} \subseteq \Psi_{\gamma+1}^+$. ■

Lemme 576 *Pour tout $\alpha \leq \sigma$ on a : $\Psi_\alpha \subseteq (\Psi_\alpha^+ \mapsto \Psi_\alpha)$ et $\perp \notin \Psi_\alpha \subseteq \Psi_\alpha^+$.*

Preuve. On raisonne par induction sur α . Le cas $\alpha = 0$ étant évident, voyons les deux autres cas :

1) α est limite :

Tout d'abord on remarque que : $\Psi_\gamma \subseteq \Psi_\alpha$ implique $(\Psi_\gamma^+ \mapsto \Psi_\gamma) \subseteq (\Psi_\alpha^+ \mapsto \Psi_\alpha)$ pour tout $\gamma < \alpha$. On a donc, par hypothèse d'induction, $\Psi_\gamma \subseteq (\Psi_\alpha^+ \mapsto \Psi_\alpha)$ pour tout $\gamma < \alpha$, i.e $\Psi_\alpha \subseteq (\Psi_\alpha^+ \mapsto \Psi_\alpha)$. Supposons maintenant qu'il existe $u \in \Psi_\alpha$ tel que $u \notin \Psi_\alpha^+$. Soit donc $\bar{x} \in (\Psi_\alpha)^{<\omega}$ tel que $u\bar{x} = \perp$. Soit $\gamma = rg(\bar{x} \cup \{u\})$. Comme α est limite, on a clairement $\gamma < \alpha$ et donc $\bar{x} \cup \{u\} \subseteq \Psi_\gamma$. Il vient : $u \in \Psi_\gamma$ et $u \notin \Psi_\gamma^+$. Ce qui contredit l'hypothèse d'induction $\Psi_\gamma \subseteq \Psi_\gamma^+$.

2) $\alpha = \gamma + 1$:

(i) On montre tout d'abord $\Psi_\alpha \subseteq (\Psi_\alpha^+ \mapsto \Psi_\alpha)$. Par hypothèse d'induction on a $\Psi_\gamma \subseteq (\Psi_\gamma^+ \mapsto \Psi_\gamma)$. Or, par croissance de la suite $(\Psi_\alpha)_{\alpha \leq \sigma}$ et le Lemme 451, on a $(\Psi_\gamma^+ \mapsto \Psi_\gamma) \subseteq (\Psi_\alpha^+ \mapsto \Psi_\alpha)$. On en conclut $\Psi_\gamma \cup (\Psi_\gamma^+ \mapsto_{\Psi_\gamma} \Psi_\gamma) \subseteq \Psi_\alpha^+ \mapsto \Psi_\alpha$. Maintenant, par le Lemme 567.1, il vient :

$$D^{\rho_\gamma}(\Psi_\gamma) \subseteq (\Psi_\gamma^+ \mapsto D^{\rho_\gamma}(\Psi_\gamma)) \subseteq (\Psi_\alpha^+ \mapsto D^{\rho_\gamma}(\Psi_\gamma)) \subseteq (\Psi_\alpha^+ \mapsto \Psi_\alpha)$$

(ii) On montre maintenant $\Psi_\alpha \subseteq \Psi_\alpha^+$. Par hypothèse d'induction on a $\Psi_\gamma \subseteq \Psi_\gamma^+$, et donc, par lemme précédent, $\Psi_\alpha \subseteq \Psi_\gamma^+$ et $\Psi_\gamma \subseteq \Psi_\alpha^+$. Il vient :

$$(\Psi_\gamma^+ \mapsto_{\Psi_\gamma} \Psi_\gamma) \subseteq (\Psi_\gamma^+ \mapsto \Psi_\gamma) \subseteq (\Psi_\alpha \mapsto \Psi_\alpha^+) = \Psi_\alpha^+ \text{ et } D^{\rho_\gamma}(\Psi_\gamma) \subseteq \Psi_\gamma^{++} \subseteq \Psi_\alpha^+. \blacksquare$$

Théorème 577 $\Psi \subseteq (\Psi^+ \mapsto \Psi) \subseteq (\Psi \mapsto \Psi) \subseteq (\Psi \mapsto \Psi^+) = \Psi^+$.

Preuve. Découle facilement du du lemme précédent en prenant $\alpha = \sigma$, et en utilisant le Lemme 451. \blacksquare

Corollaire 578 Pour tout $\gamma, \alpha \leq \sigma$ on a $\Psi_\gamma \subseteq \Psi_\alpha^+$.

Preuve. En effet, par croissance de la suite Ψ_α et décroissance de $(\)^+$, il vient $\Psi_\gamma \subseteq \Psi \subseteq \Psi^+ \subseteq \Psi_\alpha^+$. \blacksquare

Corollaire 579 Pour tous $\alpha \leq \sigma$ et $0 \neq n \in \omega$, on a :
 $\Psi_\alpha \subseteq (\Psi_\alpha^+)^n \mapsto \Psi_\alpha \subseteq \Psi^n \mapsto \Psi_\alpha$.

Preuve. En effet, par le corollaire précédent, on a :

$$\Psi_\alpha \subseteq (\Psi_\alpha^+ \mapsto \Psi_\alpha) \subseteq \Psi \mapsto \Psi_\alpha$$

La généralisation à tout $n \neq 0$ étant immédiate par la Remarque 452. \blacksquare

Définition 580 Soient $u \in \mathcal{M}$ et $X \subseteq \mathcal{M}$, on définit par induction sur $n \in \omega$:

$$uX^0 = \{u\}$$

$$uX^{n+1} =_{def} \{u^!x : u^! \in uX^n, x \in X\} = \{u\bar{x} : \bar{x} \in X^{n+1}\}$$

Corollaire 581 Pour tout $u \in \Psi$ et tout $n \in \omega$, l'ensemble $u\Psi^n$ est σ -petit.

9.4 Définition de Φ

Définition 582 $\Phi = \uparrow \Psi$

Définition 583 Pour tout $\alpha \leq \sigma$: $\Phi_\alpha =_{def} (\uparrow \Psi_\alpha)$

Remarque 584 $\Phi = \cup(\Phi_\alpha)_{\alpha < \sigma} = \Phi_\sigma$ (puisque \uparrow commute aux unions quelconques).

Remarque 585 L'ensemble $\Phi_\alpha^+ = \Psi_\alpha^+$ est un ouvert pour tout $\alpha \leq \sigma$ (Lemmes 573 et 464). De plus, si $\alpha < \sigma$ c'est un ouvert essentiellement σ -petit (Corollaire 469).

Notation 586 Pour tout $\alpha \leq \sigma$: $\delta_\alpha = \delta_{\Psi_\alpha}^{\rho_\alpha}$

Lemme 587 Pour tout $\alpha < \sigma$:

- 1) $\Phi_\alpha \subseteq \Phi_{\alpha+1}$
- 2) $\Phi_\alpha \subseteq \Phi_\alpha^+ \mapsto \Phi_\alpha$
- 3) $\Phi_{\alpha+1} = (\Phi_\alpha^+ \mapsto \Phi_\alpha) \cup \uparrow \{\delta_\alpha bx : b, x \in \Phi_\alpha\}$

Preuve.

1) Découle immédiatement de la croissance de la suite $(\Psi_\alpha)_{\alpha \leq \sigma}$

2) Par le Lemme 518 et le Corollaire 460, il vient :

$$\Phi_\alpha = \uparrow \Psi_\alpha \subseteq \uparrow (\Psi_\alpha^+ \mapsto \Psi_\alpha) = \Psi_\alpha^+ \mapsto (\uparrow \Psi_\alpha) = \Phi_\alpha^+ \mapsto \Phi_\alpha$$

3) Par définition de $\Phi_{\alpha+1}$ et le fait que \uparrow commute aux unions, il vient :

$$\Phi_{\alpha+1} = \uparrow \Psi_\alpha \cup \uparrow (\Psi_\alpha^+ \mapsto_{\Psi_\alpha} \Psi_\alpha) \cup \uparrow D^{\rho_\alpha}(\Psi_\alpha)$$

Or, par le Lemme 518 et le point 2, on a :

$$\Phi_\alpha^+ \mapsto \Phi_\alpha = \{T\} \cup \uparrow (\Psi_\alpha^+ \mapsto_{\Psi_\alpha} \Psi_\alpha) \subseteq (\uparrow \Psi_\alpha \cup \uparrow (\Psi_\alpha^+ \mapsto_{\Psi_\alpha} \Psi_\alpha)) \subseteq \Phi_\alpha^+ \mapsto \Phi_\alpha$$

Il reste à montrer que $\uparrow \{\delta_\alpha bx : b, x \in \Phi_\alpha\} = \uparrow D^{\rho_\alpha}(\Psi_\alpha)$, ce qui se montre trivialement en utilisant le fait que, par définition, $\uparrow D^{\rho_\alpha}(\Psi_\alpha) = \uparrow \{\delta_\alpha bx : b, x \in \Psi_\alpha\}$. ■

Théorème 588 :

- 1) $T, F \in \Phi$, $\perp \notin \Phi$
- 2) $\Phi = \uparrow \Psi$ pour $\Psi \subseteq \mathcal{M}_c$ et κ -petit
- 3) $\Phi = \cup \{O^+ \mapsto \Phi : O \in O_\sigma(\Phi)\}$, i.e Φ vérifie la GCPA.
- 4) $\Phi \subseteq (\Phi^+ \mapsto \Phi) \subseteq (\Phi \mapsto \Phi) \subseteq \Phi^+$

Preuve.

1) Il est évident que $T \in \Phi$ et que $\perp \notin \Phi$, on montre $\lambda x.T \in \Phi$. On sait déjà que $\lambda(\chi_{\Psi_0^+}) \in \Psi_1$ (Cf démonstration du Lemme 572). Il est facile de vérifier que $\lambda(\chi_{\Psi_0^+}) \leq \lambda x.T$, et donc $\lambda x.T \in \Phi_1$.

2) Immédiat par les Lemmes 573 et 571.

3) Par le Lemme 522, il nous suffit de montrer que $\Phi = \cup \{O^+ \mapsto O : O \in O_\sigma(\Phi)\}$. On raisonne par double inclusion :

\subseteq) Par le 1 du lemme précédent, on a $\Phi_\alpha \subseteq \Phi_\alpha^+ \mapsto \Phi_\alpha$ pour tout $\alpha < \sigma$. Il ne nous reste plus qu'à remarquer que $\Phi_\alpha \in O_\sigma(\Phi)$.

\supseteq) Soit maintenant $O \in O_\sigma(\Phi)$. Par hypothèse, il existe donc $H \subseteq_\sigma \Phi$ tel que $O = \uparrow H$. Par régularité de σ , il existe $\alpha < \sigma$ tel que $H \subseteq \Phi_\alpha$ et donc $O \subseteq \Phi_\alpha$. On en conclut, par le point 2 du lemme précédent :

$$(O^+ \mapsto O) \subseteq (\Phi_\alpha^+ \mapsto \Phi_\alpha) \subseteq \Phi_{\alpha+1}$$

4) On a $\Phi^+ = \Psi^+$, et comme $\Psi \subseteq \Psi^+$, il vient $\Phi \subseteq \Phi^+$

Maintenant, en raisonnant comme pour le point 2 du lemme précédent, il vient :

$$\Phi \subseteq (\Phi^+ \mapsto \Phi) \subseteq (\Phi \mapsto \Phi) \quad \blacksquare$$

Chapitre 10

Satisfaction de l'antifondation

On se donne pour toute ce chapitre un *MTA*-modèle $(\hat{\mathcal{M}}, \Phi, j)$ de la sémantique κ -continue pour $\kappa > \sigma$, où σ est un inaccessible. On suppose toujours que \mathcal{M} est un κ -domaine de Scott, et que $\Phi = \uparrow \Psi$ est construit comme nous venons de la faire dans le chapitre précédent pour ϱ une fonction de choix sur \mathcal{M} fixée.

Nous allons montrer ici que le principe de *Coinduction* et que l'axiome *MTA-Déco* sont satisfaits par la structure $(\hat{\mathcal{M}}, \Phi, j)$:

10.1 Satisfaction du principe de *Coinduction*

Nous rappelons tout d'abord ce principe qui est une règle de déduction et qui utilise la notation suivante :

Notation 589 (*Rappel*) Soient $u, v \in VAR$ et t un terme où u, v ne sont pas libres :

- 1) $\mathfrak{A}'t =_{def} \lambda u \lambda v. (if\ u\ (if\ v\ T\ F)\ (if\ v\ F\ \mathfrak{A}'_0 t))$ où
- 2) $\mathfrak{A}'_0 t =_{def} (\forall x \exists y. \langle ux, vy \rangle \dot{\in} t) \wedge (\forall y \exists x. \langle ux, vy \rangle \dot{\in} t)$

La Règle de Coinduction :

Pour toute suite de termes $\bar{A}, t \in \Lambda(C)$ où les variables u, v ne sont pas libres :

$$\text{Coinduction} \quad \bar{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} t \longrightarrow \mathfrak{A}'tuv \vdash \bar{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} t \longrightarrow u \dot{\sim} v$$

Rappelons que par le Lemme 422, pour toute suite \overline{B}, C, D de termes clos à paramètres dans \mathcal{M} , on a :

$$\mathcal{M} \models \overline{B} \longrightarrow (C = D) \text{ ssi } \mathcal{M} \models \overline{B} = \overline{T} \Rightarrow \mathcal{M} \models C = D$$

On utilisera librement ce rappel dans les démonstrations du lemme et du théorème suivants (dans cette section on sera toujours dans le cas où $D = T$).

L'objet de cette section est de montrer :

Théorème 590 \mathcal{M} satisfait la règle de Coinduction.

La preuve de ce théorème utilise le Lemme 592, la remarque qui suit ce lemme justifiant la terminologie suivante :

Définition 591 Soient $\overline{A}[\overline{x}], t[\overline{x}]$ des termes de $\Lambda(C)$. On dira que t représente une bisimulation sous hypothèses \overline{A} si :

$$\forall \overline{w}, u, v \in \mathcal{M} \quad \mathcal{M} \models \overline{A}[\overline{w}/\overline{x}], \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} t[\overline{w}/\overline{x}] \longrightarrow (\mathfrak{A}' t[\overline{w}/\overline{x}] uv)$$

Lemme 592 Soit t un terme représentant une bisimulation sous hypothèses \overline{A} . Si $\overline{w} \subseteq \mathcal{M}$ vérifie $\mathcal{M} \models \overline{A}[\overline{w}/\overline{x}] = T$, alors la relation $R_{t, \overline{w}}$ définie par :

$$R_{t, \overline{w}} = \{(u, v) \in \Phi^2 : \mathcal{M} \models \langle u, v \rangle \dot{\in} t[\overline{w}/\overline{x}] = T\}$$

est une Θ_Φ -bisimulation.

Preuve. Soit $\overline{w} \subseteq \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \overline{A}[\overline{w}/\overline{x}] = T$, on abrégera $R_{t, \overline{w}}$ par R . Tout d'abord, on remarque que $R \subseteq \Phi^2 \subseteq (\Phi^+)^2$. On doit montrer ensuite $R \subseteq \Theta_\Phi(R)$:

Soient donc $u, v \in \Phi$ tels que $\langle u, v \rangle \in R$. On rappelle tout d'abord que $u, v \in \Phi$ ssi $\mathcal{M} \models \phi u = \phi v = T$. On a donc par hypothèse et définition de R :

$$\mathcal{M} \models \overline{A}[\overline{w}/\overline{x}] = \phi u = \phi v = \langle u, v \rangle \dot{\in} t[\overline{w}/\overline{x}] = T$$

Comme t représente une bisimulation, il vient $(\mathfrak{A}' t[\overline{w}/\overline{x}] uv) = T$. On distingue maintenant 2 cas :

a) Si $u = T$, on a $(\mathfrak{A}' t[\overline{w}/\overline{x}] uv) = (if v T F) = T$. On en conclut facilement $v = T$ et $(u, v) \in \Theta_\Phi(R)$.

b) Si $u \neq T$, on a $(\mathfrak{A}' t[\overline{w}/\overline{x}] uv) = (if v F \mathfrak{A}'_0 t[\overline{w}/\overline{x}]) = T$. Il est clair que cela implique $v \neq T$ et $\mathfrak{A}'_0 t[\overline{w}/\overline{x}] = T$. Par le Lemme 419, on a $\forall x \exists y. \langle ux, vy \rangle \dot{\in} t[\overline{w}/\overline{x}] = T$ et $\forall y \exists x. \langle ux, vy \rangle \dot{\in} t[\overline{w}/\overline{x}] = T$. En utilisant les Lemmes 442 puis 441, il vient :

$$\forall x \in \Phi \exists y \in \Phi, \mathcal{M} \models \langle ux, vy \rangle \dot{\in} t[\overline{w}/\overline{x}] = T \quad \text{et}$$

$$\forall y \in \Phi \exists x \in \Phi, \mathcal{M} \models \langle ux, vy \rangle \dot{\in} t[\overline{w}/\overline{x}] = T$$

Par définition de R et le fait que $u\Phi \subseteq \Phi$ et $v\Phi \subseteq \Phi$ (Théorème 588.4) on en conclut :

$\forall x \in \Phi \exists y \in \Phi : \langle ux, vy \rangle \in R$ et $\forall y \in \Phi \exists x \in \Phi : \langle ux, vy \rangle \in R$
 et donc $(u, v) \in \Theta_\Phi(R)$. ■

Remarque 593 Si t représente une bisimulation sous hypothèses \bar{A} alors $R_{t, \bar{A}} = \cup \{R_{t, \bar{w}} : \bar{w} \subseteq \mathcal{M} \text{ et } \mathcal{M} \models \bar{A}[\bar{w}/\bar{x}] = T\}$ est une Θ_Φ -bisimulation (en tant qu'union de Θ_Φ -bisimulations).

On donne maintenant la preuve du Théorème 590 :

Preuve. Par définition de la satisfaction d'une règle (Définition 364.3), on doit montrer que :

Si

$$(*) \quad \forall \bar{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{M} \quad \mathcal{M} \models \bar{A}[\bar{w}/\bar{x}], \phi \mathbf{u}, \phi \mathbf{v}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \dot{\in} t[\bar{w}/\bar{x}] \longrightarrow (\mathcal{A}'t[\bar{w}/\bar{x}]\mathbf{u}\mathbf{v})$$

alors

$$(**) \quad \forall \bar{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{M} \quad \mathcal{M} \models \bar{A}[\bar{w}/\bar{x}], \phi \mathbf{u}, \phi \mathbf{v}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \dot{\in} t[\bar{w}/\bar{x}] \longrightarrow \mathbf{u} \dot{\sim} \mathbf{v}$$

Supposons (*), autrement dit que t représente une bisimulation sous hypothèses \bar{A} . On doit montrer (**) et donc que, pour tous $\bar{w}, u, v \in \mathcal{M}$:

Si $\mathcal{M} \models \bar{A}[\bar{w}/\bar{x}] = \phi u = \phi v = \langle u, v \rangle \dot{\in} t[\bar{w}/\bar{x}] = T$ alors $\mathcal{M} \models u \sim v = T$

Soient donc $\bar{w}, u, v \in \mathcal{M}$ vérifiant les hypothèses de l'implication ci-dessus. Comme $\mathcal{M} \models \bar{A}[\bar{w}/\bar{x}] = T$, la relation $R_{t, \bar{w}}$ définie dans le lemme précédent est une Θ_Φ -bisimulation. De plus, comme $\mathcal{M} \models \phi u = \phi v = \langle u, v \rangle \dot{\in} t[\bar{w}/\bar{x}] = T$, on a clairement $(u, v) \in R_{t, \bar{w}}$. Par maximalité de \sim_Φ , on en conclut $(u, v) \in \sim_\Phi$ et donc $\mathcal{M} \models u \dot{\sim} v = T$. ■

10.2 Satisfaction de MTA-Deco

Dans cette section nous allons montrer que, sous réserve d'interpréter ε par $\lambda(E_\Psi^{\rho_\sigma})$, le MTA-modèle \mathcal{M} satisfait l'axiome MTA-Déco, que nous rappelons :

$$MTA\text{-Déco} \quad \phi b, \phi x \longrightarrow \tilde{\phi}(\delta b x)$$

où $\tilde{\phi} = \lambda x. \dot{\exists} u. u \dot{\sim} x$ et $\delta =_{def} (Y \lambda d \lambda x. (if (Feuil b x) T (\dot{\Delta} d b x)))$.

Avant d'esquisser le plan de cette section, nous introduisons des abréviations concernant les fonctions de choix continues et les opérateurs utilisés dans la construction de Ψ (voir Définitions 431, 543 et 551). Ces fonctions et opérateurs utilisent les fonctions de choix de type ρ_η qui, rappelons-le, sont définies pour chaque $\eta \leq \sigma$ relativement à ϱ (la fonction de choix sur \mathcal{M} fixée en début de Section 9.3.2) par :

$$\rho_\eta(X) = \begin{cases} \varrho(X) & \text{Si } X \cap \Psi_\eta = \emptyset \\ \varrho(X \cap \Psi_\gamma) & \text{Sinon, où } \gamma \leq \eta \text{ est minimal tel que } X \cap \Psi_\gamma \neq \emptyset \end{cases}$$

Notation 594 Pour tout $\eta \leq \sigma$:

- 1) $E_\eta =_{def} E_{\Psi_\eta}^{\rho_\eta}$
- 2) $\varepsilon_\eta =_{def} \lambda(E_\eta) = \varepsilon_{\Psi_\eta}^{\rho_\eta}$
- 3) $\delta_\eta =_{def} \delta_{\Psi_\eta}^{\rho_\eta}$
- 4) $\sim_\eta =_{def} \sim_{\Psi_\eta}$

Pour vérifier *MTA-Déco*, il suffit de montrer que, pour chaque $b, x \in \Phi$, il existe un $\beta < \sigma$ tel que $\mathcal{M} \models \delta_\beta bx \sim \delta bx = T$. Pour ce faire, nous précisons, dans un premier temps, les rapports entre les \sim_η et nous montrerons qu'il existe $\beta < \sigma$ tel que : $\delta_\beta bx \sim_\sigma \delta_\sigma bx$. Puis, dans un deuxième temps, on verra que sous l'hypothèse supplémentaire $j(\varepsilon) = \lambda(E_\sigma)^1$, on a $|\delta|^j = \delta_\sigma$.

La démonstration du premier point utilise des propriétés des fonctions de type E_η pour $\eta \leq \sigma$ (nous rappellerons leur définition). Nous verrons en particulier une propriété justifiant l'appellation de "*fonctions de choix dépendant*" pour de telles fonctions. Nous introduirons ensuite des opérateurs de singletons, paires et couples relatifs à $\alpha \leq \sigma$ et notés S^α , P^α et $\langle \cdot, \cdot \rangle^\alpha$. Ils n'ont ici qu'une utilité technique. Puis nous verrons qu'il existe $\beta < \sigma$ tel que pour tous $u, v \in \Psi_{\alpha+2}$ et pour tout $\beta < \sigma$ suffisamment grand, on ait : $u \sim_{\Psi_\beta} v \Leftrightarrow u \sim_\Psi v$. On en conclura, en utilisant des propriétés cardinales des quotients Ψ / \sim_β et Ψ / \sim_σ , que $\delta_\beta bx \sim_\sigma \delta_\sigma bx$.

Pour unifier les notations, Ψ sera le plus souvent noté Ψ_σ tout au long de cette section. Rappelons que $\sim_\sigma =_{def} \sim_\Psi = \sim_\Phi$ (Corollaire 482).

10.2.1 Les fonctions de choix dépendant.

Nous fixons ici $\eta \leq \sigma$ et nous nous intéresserons aux propriétés de E_η . Explicitons tout d'abord sa définition :

Définition 595 :

$$E_\eta(u) = \begin{cases} \perp & \text{si } \perp \in u\Psi_\eta \\ \rho_\eta(\Psi_\eta) & \text{si } u\Psi_\eta \subseteq \mathfrak{F} \\ \rho_\eta(\{x \in \Psi_\eta : ux = T\}) & \text{si } \perp \notin u\Psi_\eta \ni T \end{cases}$$

Par le Lemme 434, la fonction E_η est une fonction de choix continue sur Ψ_η . On donne maintenant deux lemmes. Le premier exprime des propriétés élémentaires de E_η , et le deuxième montre que le choix effectué par E_η sur Ψ_η dépend (d'où l'appellation de fonction de choix dépendant) de celui effectué par la fonction E_α pour tout $\alpha < \eta$.

¹Ce qui est cohérent avec la satisfaction des axiomes de Quantifications, et plus généralement avec tout ce qui précède puisque $E_\Psi^{\rho_\sigma}$ est une fonction de choix continue sur Φ (Corollaire 437).

Lemme 596 Soient $\eta \leq \sigma$ et $u \in \mathcal{M}$ tel que $\perp \notin u\Psi_\eta$, on a :

- 1) Si $u\Psi_\eta \subseteq \mathfrak{F}$ alors $\varepsilon_\eta u = T$
- 2) Si $T \in u\Psi_\eta$ alors $\varepsilon_\eta u = \varrho(\{x \in \Psi_\gamma : ux = T\})$, où $\gamma \leq \eta$ est minimal pour $T \in u\Psi_\gamma$.

Preuve. Le point 2 découle facilement des définitions de $\varepsilon_\eta = \lambda(E_\eta)$ et ρ_η . On montre le 1. Si $u\Psi_\eta \subseteq \mathfrak{F}$ alors, par définition on a $\varepsilon_\eta u = \rho_\eta(\Psi_\eta) = \varrho(\Psi_\eta \cap \Psi_\gamma)$, où γ minimal pour $\Psi_\eta \cap \Psi_\gamma \neq \emptyset$. Maintenant, comme $\Psi_0 \subseteq \Psi_\eta$, ce minima est 0. On a donc $\varepsilon_\eta u = \varrho(\Psi_\eta \cap \{T\}) = T$ (puisque ϱ est une fonction de choix sur \mathcal{M}). ■

Lemme 597 Soient $\alpha < \eta \leq \sigma$ et $u \in \mathcal{M}$ tel que $\perp \notin u\Psi_\eta$:

- 1) Si $u\Psi_\eta \subseteq \mathfrak{F}$ alors $\varepsilon_\eta u = \varepsilon_\alpha u = T$
- 2) Si $T \in u\Psi_\alpha$ alors $\varepsilon_\eta u = \varepsilon_\alpha u \in \{x \in \Psi_\alpha : ux = T\}$

Preuve. Les deux points découlent facilement du lemme précédent, en utilisant les définitions de E_η et E_α , et du fait que $u\Psi_\alpha \subseteq u\Psi_\eta$. ■

10.2.2 Les opérateurs S^α , P^α et \langle , \rangle^α

Notation 598 Pour $f \in [\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}]_\kappa$, $B[z] \in \Lambda(C \cup \mathcal{M})$ et $x \in VAR$, on utilisera l'abréviation suivante :

$$B[f(x)/z] =_{def} B[(\lambda(f) x)/z]$$

Rappelons que, pour tout $\alpha \leq \sigma$, la fonction $\chi_{\Psi_\alpha^+}$ est κ -continue, puisque Ψ_α^+ est un ouvert (Remarque 585); ce qui justifie les définitions suivantes :

Définition 599 Pour tout $\alpha \leq \sigma$:

- 1) $S^\alpha =_{def} \lambda x \lambda z. (if \chi_{\Psi_\alpha^+}(z) x x)$
- 2) $P^\alpha =_{def} \lambda x \lambda y \lambda z. (if (\chi_{\Psi_\alpha^+}(z) \dot{\lambda} z) x y)$
- 3) $\langle , \rangle^\alpha =_{def} \lambda x \lambda y. (P^\alpha S^\alpha x P^\alpha xy)$
- 4) et pour tous $x, y \in \mathcal{M}$: $\langle x, y \rangle^\alpha =_{def} \langle , \rangle^\alpha xy$

Les opérateurs S, P et \langle , \rangle (Cf Définition 112) ont pour domaines \mathcal{M} pour le premier, et $\mathfrak{F} \cup \{T\}$ pour les deux autres. Les constructeurs S^α, P^α et \langle , \rangle^α , qui sont de domaine Ψ_α^+ , sont donc en quelque sorte des restrictions de S, P et \langle , \rangle à Ψ_α^+ . Cela leur permet de vérifier les propriétés suivantes :

Lemme 600 Pour tous $\alpha < \sigma$ et $x, y \in \Psi_\alpha$, on a :

- 1) $S^\alpha x, P^\alpha xy \in \Psi_{\alpha+1}$
- 2) $\langle x, y \rangle^\alpha \in \Psi_{\alpha+2}$

Preuve. Il est clair, par définition de \mapsto_{Ψ_α} , que l'on a $S^\alpha x, P^\alpha xy \in (\Psi_\alpha^+ \mapsto_{\Psi_\alpha} \Psi_\alpha) \subseteq \Psi_{\alpha+1}$. On en conclut le 1 puis le 2. ■

Lemme 601 *Pour tous $\eta \leq \sigma$ et $x, y \in \Psi_\alpha$ on a :*

- 1) $Sx \sim_\eta S^\alpha x$
- 2) $Pxy \sim_\eta P^\alpha xy$
- 3) $\langle x, y \rangle \sim_\eta \langle x, y \rangle^\alpha$

Preuve. Comme $\Psi_\alpha, \Psi_{\alpha+2} \subseteq \Psi_\eta^+$ (Corollaire 578), par le Lemme 538.1 et le lemme précédent, on a en particulier $\{Sx, S^\alpha x, Pxy, P^\alpha xy, \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle^\alpha\} \subseteq \Psi_\eta^+$. Le résultat découle alors facilement par définition de \sim_η . ■

10.2.3 Les quotients X / \sim_γ sont finalement constants

Définition 602 *On dira que $f : (\sigma \cup \{\sigma\}) \mapsto V$ (où, rappelons-le, V est l'univers) est constante à partir de $\beta < \sigma$ si, pour tout $\gamma \geq \beta$, on a $f(\gamma) = f(\beta)$. On dira qu'elle est finalement constante s'il existe un tel β .*

L'objet de cette section sera de montrer la Proposition 605 qui découle des deux lemmes suivants :

Lemme 603 *Pour tout $X \subseteq_\sigma \Psi$ il existe $\beta < \sigma$ tel que :*

Pour tous $u \in X$ et $n \geq 1$, la fonction $\gamma \mapsto u\Psi_\gamma^n$ est constante à partir de β .

Preuve. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer que, pour $u \in X$ et $n \geq 1$ fixés, la fonction $f_{u,n} : \gamma \mapsto u\Psi_\gamma^n$. En effet, si $\beta_{u,n} < \sigma$ est l'ordinal à partir duquel la fonction $f_{u,n}$ est finalement constante, il est clair que toutes les fonctions $f_{u,n}$ sont constantes à partir de $\beta = \sup\{\beta_{u,n} : u \in X \text{ et } n \geq 1\}$, et on a $\beta < \sigma$ puisque X est σ -petit et que σ est régulier.

Fixons donc $u \in X$, $\alpha < \sigma$ tel que $u \in \Psi_\alpha$ et $n \in \omega$.

Par croissance de la suite $(\Psi_\gamma)_{\gamma \leq \sigma}$, il suffit de trouver β tel que $u\Psi^n = u\Psi_\beta^n$. Soit $L_n^u = \{\rho(\{\bar{x} \in \Psi^n : u\bar{x} = w \in \Psi_\beta^n\})\}$. Cet ensemble est σ -petit, puisque inclus dans Ψ_α (Corollaire 579). Par régularité de σ , il existe donc $\beta < \sigma$ tel que, pour tout $\bar{x} \in L_n^u$, on ait $\bar{x} \in \Psi_\beta^n$. Par ailleurs, on a clairement $u\Psi^n = uL_n^u$ et donc $u\Psi^n = u\Psi_\beta^n$. ■

Lemme 604 *Soit $X \subseteq \Psi$ tel que $X \subseteq \Psi \mapsto X$ et soient $\gamma, \beta \leq \sigma$.*

Si pour tout $u \in X$ on a $u\Psi_\gamma = u\Psi_\beta$, alors $X^2 \cap \sim_\gamma = X^2 \cap \sim_\beta$.

Preuve. On doit montrer $R = R'$ pour $R =_{def} (X^2 \cap \sim_\gamma)$ et $R' =_{def} (X^2 \cap \sim_\beta)$. On remarque tout d'abord que, puisque $\Psi \subseteq \Psi_\gamma^+ \cap \Psi_\beta^+$ (Corollaire 578), les relations R et R' sont bien des relations sur Ψ_γ^+ et Ψ_β^+ . On montre maintenant $R \subseteq R'$, la réciproque s'obtenant en inversant les rôles de γ et β .

Par maximalité de \sim_β , il suffit de montrer que R est une Θ_{Ψ_β} -bisimulation, autrement dit que :

$$R \subseteq \Theta_{\Psi_\beta}(R) =_{def} \left\{ \begin{array}{l} (u, w) : u = v = T \\ \text{Ou} \\ u \neq T \neq v \text{ et} \\ \forall x \in \Psi_\beta \exists y \in \Psi_\beta (ux, vy) \in R \text{ et} \\ \forall y \in \Psi_\beta \exists x \in \Psi_\beta (ux, vy) \in R \end{array} \right\}$$

Supposons donc $u \sim_\gamma v$ pour $u, v \in X$, il vient :

1^{er} cas : $u = T$ (ou $v = T$) : comme \sim_γ est une Θ_{Ψ_γ} -bisimulation on a alors $u = v = T$, et donc $(u, v) \in \Theta_{\Psi_\beta}(R)$.

2^{ème} cas : $u \neq T$ et $v \neq T$: on montre $\forall x \in \Psi_\beta \exists y \in \Psi_\beta (ux, vy) \in R$, la démonstration de $\forall y \in \Psi_\beta \exists x \in \Psi_\beta (ux, vy) \in R$ s'effectuant de manière similaire. Soit donc $x \in \Psi_\beta$. Puisque $u\Psi_\gamma = u\Psi_\beta$, il existe $x' \in \Psi_\gamma$ tel que $ux = ux'$. Comme \sim_γ est une Θ_{Ψ_γ} -bisimulation et que $u \sim_\gamma v$, il existe $y' \in \Psi_\gamma$ tel que $ux' \sim_\gamma vy'$. De plus, comme $v\Psi_\gamma = v\Psi_\beta$, il existe $y \in \Psi_\beta$ tel que $vy' = vy$. On en conclut $ux \sim_\gamma vy$. Comme $X \subseteq \Psi \mapsto X$, on a de plus que $ux, vy \in X$, et donc $(ux, vy) \in R$. ■

Proposition 605 *Pour tout $X \subseteq_\sigma \Psi$ tel que $X \subseteq \Psi \mapsto X$, il existe $\beta < \sigma$ vérifiant :*

- 1) $X \subseteq \Psi_\beta$
- 2) Pour tous $u \in X$ et $n \geq 1$, la fonction $\gamma \mapsto u\Psi_\gamma^n$ est constante à partir de β .
- 3) Les fonctions $\gamma \mapsto X^2 \cap \sim_\gamma$ et $\gamma \mapsto \text{Card}(X / \sim_\gamma)$ sont constantes à partir de β .

Preuve. Le 3 découle immédiatement du 2 par le lemme précédent. De plus, par le Lemme 603, il existe $\beta_0 < \sigma$ vérifiant le 2. Maintenant, comme X est σ -petit et que σ est régulier, on peut trouver β_1 tel que $X \subseteq \Psi_{\beta_1}$. Il suffit donc de prendre $\beta = \sup\{\beta_0, \beta_1\}$. ■

Notation 606 *Pour tout $X \subseteq_\sigma \Psi$, on notera β_X le plus petit ordinal qui satisfait la proposition précédente.*

10.2.4 β -antichaines

L'objet de cette section est de montrer le Lemme 613. Ce résultat découle de l'existence, pour tout $X \subseteq_\sigma \Psi$, de " β_X -antichaines" de longueur suffisamment longues.

Définition 607 *On dira que $H \subseteq \mathcal{M}$ est une β -antichaine si $\emptyset \neq H \subseteq \Psi_\beta^+$ et si, pour tous $u, v \in H$, on a $u \sim_\beta v \Rightarrow u = v$*

On notera que toute β -antichaine est une antichaine au sens de la Définition 376 ; c'est une conséquence immédiate de la Remarque 477.2.

Définition 608 Soient $\beta \leq \sigma$ et H une β -antichaine. On définit la fonction Ret_H^β sur \mathcal{M} par :

$$Ret_H^\beta(u) = \begin{cases} \perp & \text{si } x \notin \Psi_\beta^+ \\ u & \text{si } x \sim_\beta u \text{ et } u \in H \\ \varrho(H) & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque tout d'abord que le fait que H soit une β -antichaine nous assure de la bonne définition de Ret_H^β .

Remarque 609 :

1) $Ret_H^\beta \in \mathfrak{F} \cap (\Psi_\beta^+ \mapsto H)$

2) Pour tout $x \in \Psi_H^\beta$ on a : $Ret_H^\beta(x) = x$ ssi $x \in H$

On peut noter aussi que les fonctions de type Ret_H^β sont des rétractions, c'est à dire qu'elle vérifient $Ret_H^\beta \circ Ret_H^\beta = Ret_H^\beta$.

Lemme 610 Pour toutes β -antichaine H et H' :

1) La fonction Ret_H^β est κ -continue.

2) Si, de plus, $H \subseteq \Psi_\beta$ alors $ret_H^\beta =_{def} \lambda(Ret_H^\beta) \in \Psi_{\beta+1} (\subseteq \Psi_\beta^+)$

3) $ret_H^\beta = ret_{H'}^\beta$ ssi $H = H'$.

Preuve.

1) On sait déjà que le $dom(Ret_H^\beta) = \Psi_\beta^+$ est un ouvert. De plus, comme pour $u, v \in \Psi_\beta^+$ on a $u \leq v \Rightarrow u \sim_\beta v$, il vient $u \leq v \Rightarrow Ret_H^\beta(u) = Ret_H^\beta(v)$. On conclut par le Lemme 355.

2) Comme pour tous $u, v \in \Psi_\beta^+$, on a $u =_{\Psi_\beta} v \Rightarrow u \sim_\beta v$, il est facile de vérifier que $ret_H^\beta \in (\Psi_\beta^+ \mapsto_{\Psi_\beta} \Psi_\beta) \subseteq \Psi_{\beta+1}$.

3) Suit immédiatement de la Remarque 609.2. ■

Le lemme suivant est un corollaire immédiat de la Proposition 605 et de la définition de β_X :

Lemme 611 Si $X \subseteq_\sigma \Psi$ et $X \subseteq \Psi \mapsto X$, alors pour tous $\gamma, \gamma' \geq \beta_X$ et $K \subseteq X$ on a que K est une γ antichaine ssi c'est une γ' -antichaine.

Lemme 612 Soit K une β -antichaine tel que $K \subseteq \Psi_\beta$.

L'ensemble $\hat{K} = \{ret_H^\beta : \emptyset \neq H \subseteq K\} \cup \{T\}$ est une β -antichaine de cardinalité $2^{Card(K)}$.

Preuve. Du Lemme 610.2 on tire que $\hat{K} \subseteq \Psi_{\beta+1} \subseteq \Psi_\beta^+$. Le fait que tous les éléments de \hat{K} sont distincts suit du Lemme 610.3. Il en résulte

immédiatement que la cardinalité de \hat{K} est celle indiquée. Il reste à voir que $u, u' \in \hat{K}$ et $u \sim_\beta u'$ impliquent $u = u'$. Si $u = T$ ou $u' = T$ le résultat est immédiat. Supposons donc $u = \text{ret}_H^\beta$, $u' = \text{ret}_H^\beta$ et $H \neq H'$. Sans perte de généralité on peut supposer qu'il existe $x \in H \setminus H'$. Dans ce cas $ux = x$ et ux n'est \sim_β -équivalent à aucun élément de H' (puisque $H \cup H'$ est une β -antichaine). Par ailleurs $u' \Psi_\beta \subseteq H'$ (Remarque 609) et $u, v \in \mathfrak{F}$. Il en résulte immédiatement que $u \not\sim_\beta u'$. ■

Lemme 613 *Soit $X \subseteq_\sigma \Psi$ tel que $X \subseteq \Psi \mapsto X$. Si $\beta_X \leq \beta \leq \sigma$ alors : $\text{Card}(\Psi / \sim_\beta) \geq 2^{\text{Card}(X / \sim_\beta)}$*

Preuve. Rappelons que $\beta_X < \sigma$ est le plus petit ordinal vérifiant la Proposition 605. Soit $K = \{\varrho(\{v \in X : u \sim_\beta v\}) : u \in X\}$ et $\xi =_{\text{def}} \text{Card}(K) = \text{Card}(X / \sim_\beta)$. Il est clair que K est une β -antichaine. Par le Lemme 612, on sait qu'il existe une β_X antichaine de cardinalité 2^ξ . Comme toute β_X -antichaine est une β -antichaine pour $\beta \geq \beta_X$ (Proposition 605), on a bien $\text{Card}(\Psi / \sim_\beta) \geq 2^\xi$. ■

10.2.5 Bisimilarité de $\delta_\beta bx$ et $\delta_\sigma bx$.

Nous montrons ici que pour tous $b, x \in \Psi$, il existe un $\beta < \sigma$ tel que $\delta_\beta bx \sim_\Phi \delta_\sigma bx$. Pour cela, nous verrons qu'il suffit que β vérifie la Proposition 605 relativement à $X =_{\text{def}} \Psi_{\alpha+2}$, où $\alpha = \text{rg}(\{b, x\})$. Remarquons que, comme $\Psi_{\alpha+2} \subseteq \Psi \mapsto \Psi_{\alpha+2}$ (Corollaire 579) et que $\Psi_{\alpha+2}$ est σ -petit, un tel β existe.

Comme nous utiliserons souvent l'hypothèse dont nous venons de parler, nous commençons par une abréviation :

Notation 614 $H[\alpha, \beta]$ est l'hypothèse suivante sur α, β :
 $H[\alpha, \beta] =_{\text{def}} (\alpha < \sigma \text{ et } \beta_X \leq \beta < \sigma)$ pour $X = \Psi_{\alpha+2}$.

Nous abrègerons de la manière suivante les opérateurs introduits par les Notations et Définitions 524, 529, 532, 543 et 551 :

Notation 615 Soit $\eta \leq \sigma$:

- 1) $\dot{\sim}_\eta =_{\text{def}} \dot{\sim}_{\Psi_\eta}$
- 2) $\exists_\eta =_{\text{def}} \exists_{\Psi_\eta}^{\rho_\eta}$
- 3) $\dot{\in}_\eta =_{\text{def}} \dot{\in}_{\Psi_\eta}$
- 4) $I_\eta = I_{\Psi_\eta}^{\rho_\eta}$
- 5) $\text{Feuil}_\eta =_{\text{def}} \text{Feuil}_{\Psi_\eta}^{\rho_\eta}$
- 6) $\text{Enf}_\eta =_{\text{def}} \text{Enf}_{\Psi_\eta}^{\rho_\eta}$
- 7) $\Delta_\eta =_{\text{def}} \Delta_{\Psi_\eta}^{\rho_\sigma}$
- 8) $\delta_\eta =_{\text{def}} \delta_{\Psi_\eta}^{\rho_\eta}$

Rappelons que, pour tout $\eta \leq \sigma$:

$$\delta_\eta bx = (if (Feuil_\eta bx) T (\Delta_\eta \delta_\eta bx))$$

Nous montrons maintenant que, sous l'hypothèse $H[\alpha, \beta]$, on a $\delta_\beta bx \sim_\Phi \delta_\sigma bx$, pour tous $b, x \in \Psi_\alpha$. Remarquons que si $b = T$, le résultat est immédiat par le Corollaire 553 et le fait que $T \sim_\Phi T$, l'hypothèse $H[\alpha, \beta]$ n'est donc pas utile dans ce cas :

Lemme 616 *Pour tous $\beta < \sigma$ et $x \in \mathcal{M}$, on a :*

$$\delta_\beta Tx = \delta_\sigma Tx = T \text{ et } \delta_\beta Tx \sim_\Phi \delta_\sigma Tx.$$

Il nous reste à voir le cas $T \neq b \in \Psi_\alpha$. Dans ce cas, le résultat repose essentiellement sur le fait que si $H[\alpha, \beta]$ est vérifié on a $(I_\beta y) = (I_\sigma y)$, $(Feuil_\beta bx) = (Feuil_\sigma bx)$ et $(Enf_\eta bx) = (Enf_\sigma bx)$, pour tous $b, x, y \in \Psi_\alpha$. Pour montrer ces résultats, on utilisera librement le fait que $\Psi_\alpha \subseteq \Psi_{\alpha+2} \subseteq \Psi \mapsto \Psi_{\alpha+2}$.

Egalité de I_β et I_σ sur Ψ_α .

Lemme 617 *Si $H[\alpha, \beta]$ est vérifié alors, pour tout $y \in \Psi_\alpha$, on a :*

$$I_\beta y = I_\sigma y \in \Psi_\alpha$$

Preuve. Soit $y \in \Psi_\alpha$, et soient $u =_{def} \lambda z.z \dot{\sim}_\beta y$ et $u' =_{def} \lambda z.z \dot{\sim}_\sigma y$. Pour montrer $I_\beta y = I_\sigma y$, il suffit clairement de vérifier $\varepsilon_\beta u = \varepsilon_\sigma u'$. Tout d'abord, comme $\Psi \subseteq \Psi_\sigma^+ \cap \Psi_\beta^+$, on a $\perp \notin u[\Psi_\beta]$ et $\perp \notin u'[\Psi_\sigma]$ (Lemme 525.1). De plus, par réflexivité des bisimulations \sim_β et \sim_σ , on a $uy = T$ et $u'y = T$. Par le Lemme 597.2, et en prenant successivement $\eta = \beta$ puis $\eta = \sigma$, il vient :

$$(*) \quad \varepsilon_\beta u = \varepsilon_\alpha u \quad \text{et} \quad \varepsilon_\sigma u' = \varepsilon_\alpha u'$$

Par la Proposition 605.3, pour tout $z \in \Psi_\alpha$, on a $z \sim_\beta y$ ssi $z \sim_\sigma y$, et donc $uz = T$ ssi $u'z = T$. Par la propriété d'*Ackermann* des fonctions de choix continue (Définition 428), on en conclut que $\varepsilon_\alpha u = \varepsilon_\alpha u'$. En utilisant (*), on a donc finalement $\varepsilon_\beta u = \varepsilon_\sigma u'$. Maintenant, il ne reste plus qu'à remarquer que $\varepsilon_\beta u = \varepsilon_\alpha u \in \Psi_\alpha$ (Lemme 527). ■

Egalité de $Feuil_\beta$ et $Feuil_\sigma$ sur Ψ_α^2 .

Le fait que $(Feuil_\beta bx) = (Feuil_\sigma bx)$ pour tout $b, x \in \Psi_\alpha$ sera une conséquence des trois lemmes qui suivent. Remarquons que le premier lemme et son corollaire n'utilisent pas $H[\alpha, \beta]$.

Lemme 618 *Soient $\alpha, \beta \leq \sigma$ avec $\beta \geq 1$ et $x, y \in \mathcal{M}$.*

Pour tous $u \in \Psi_\alpha$, si $u \sim_\beta \langle x, y \rangle$ alors il existe $y' \in \Psi_\alpha$ tel que $y \sim_\beta y'$.

Preuve. Supposons $u \sim_\beta \langle x, y \rangle$ et soit $z \in \mathfrak{F} \cap \Psi_\beta$ (comme $\beta > 0$, il en existe par le Lemme 572). Par définition de \sim_β , on vérifie facilement l'existence de $x_1, x_2 \in \Psi_\beta$ tels $ux_1x_2 \sim_\beta \langle x, y \rangle zz$, i.e tel que $ux_1x_2 \sim_\beta y$. En posant $y' =_{def} ux_1x_2$ et comme $u \in \Psi_\alpha \subseteq \Psi_\alpha^2 \mapsto \Psi_\alpha$, on a de plus $y' \in \Psi_\alpha$. ■

Corollaire 619 Soient $1 \leq \beta \leq \sigma$ et $x, y \in \mathcal{M}$.

Pour tout $b \in \Psi_\alpha$, si $\langle x, y \rangle \dot{\in}_\beta b = T$ alors il existe $y' \in \Psi_\alpha$ tel que $\langle x, y' \rangle \dot{\in}_\beta b = T$.

Preuve. Supposons $\langle x, y \rangle \dot{\in}_\beta b = T$, et donc $b \neq T$. Puisque Ψ_β est TF -valué, on a en particulier $b, y, x \in \Psi_\beta^+$ (Corollaire 539.2). De plus, il existe $v \in \Psi_\beta$ tel que $bv \sim_\beta \langle x, y \rangle$ (Proposition 535). Maintenant, $bv \in \Psi_\alpha$ (Corollaire 579) et donc, par le lemme précédent puis le Lemme 538.1, il existe $y' \in \Psi_\beta$ tel que $bv \sim_\beta \langle x, y' \rangle$. Comme $b, y', x \in \Psi_\beta^+$ on en conclut $\langle x, y' \rangle \dot{\in}_\beta b = T$ (Proposition 535.1). ■

Lemme 620 Si $H[\alpha, \beta]$ alors, pour tous $b, x, y \in \Psi_\alpha$:

$\langle x, y \rangle \dot{\in}_\beta b = T \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \dot{\in}_\sigma b = T$.

Preuve. On montre tout d'abord que, pour tout $v \in \Psi_\sigma$, on a $bv \sim_\beta \langle x, y \rangle \Leftrightarrow bv \sim_\sigma \langle x, y \rangle$:

Comme $b, x, y \in \Psi_\alpha$ on a $bv \in \Psi_\alpha$ et $\langle x, y \rangle^\alpha \in \Psi_{\alpha+2}$ (Lemme 600). Il vient :

$$\begin{aligned} bv \sim_\beta \langle x, y \rangle &\Leftrightarrow bv \sim_\beta \langle x, y \rangle^\alpha && \text{Lemme 601.2} \\ &\Leftrightarrow bv \sim_\sigma \langle x, y \rangle^\alpha && \text{Proposition 605.3} \\ &\Leftrightarrow bv \sim_\sigma \langle x, y \rangle && \text{Lemme 601.2} \end{aligned}$$

Maintenant, comme par hypothèse on a $b\Psi_\beta = b\Psi_\sigma$, on vérifie que :

$$\exists v \in \Psi_\beta \quad bv \sim_\beta \langle x, y \rangle \quad \text{ssi} \quad \exists v \in \Psi_\sigma \quad bv \sim_\sigma \langle x, y \rangle = T$$

Le résultat découle alors facilement de la Proposition 535. ■

Lemme 621 Supposons $H[\alpha, \beta]$ et soient $b, x \in \Psi_\alpha$. Les quatres énoncés suivants sont équivalents :

- 1) $\exists y \in \Psi_\beta : \langle x, y \rangle \dot{\in}_\beta b = T$
- 2) $\exists y \in \Psi_\alpha : \langle x, y \rangle \dot{\in}_\beta b = T$
- 3) $\exists y \in \Psi_\alpha : \langle x, y \rangle \dot{\in}_\sigma b = T$
- 4) $\exists y \in \Psi_\sigma : \langle x, y \rangle \dot{\in}_\sigma b = T$

Preuve. L'équivalence de 2 et 3 est immédiate par le lemme précédent. Que $2 \Rightarrow 1$ et que $3 \Rightarrow 4$ est immédiat puisque $\Psi_\alpha \subseteq \Psi_\beta \subseteq \Psi_\sigma$ (Proposition 605.1). Enfin, le fait que $1 \Rightarrow 2$ et que $4 \Rightarrow 3$ est donné par le Corollaire 619. ■

Proposition 622 *Si $H[\alpha, \beta]$ alors, pour tous $b, x \in \Psi_\alpha$:*

- 1) $(Feuil_\beta bx) = (Feuil_\sigma bx)$
- 2) $\delta^\beta bx = T \Leftrightarrow \delta^\sigma bx = T$

Preuve. Remarquons que le cas $b = T$ est réglé par le Lemme 546, supposons donc $b \neq T$. Le 2 découle alors immédiatement du 1 et du Lemme 552. Le 1 suit facilement du lemme précédent par définition de $Feuil_\beta$ et $Feuil_\sigma$ et Lemme 531. ■

Egalité de Enf_β et Enf_σ sur Ψ_α^2 .

Lemme 623 *Si $H[\alpha, \beta]$ alors, pour tous $b, x \in \Psi_\alpha$ avec $b \neq T$:*

$$(Enf_\beta bx) = (Enf_\sigma bx) \in \Psi_\alpha$$

Preuve. Soient $u =_{def} \lambda y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_\beta b$ et $u' =_{def} \lambda y. \langle x, y \rangle \dot{\in}_\sigma b$. Pour montrer $(Enf_\beta bx) = (Enf_\sigma bx)$, il suffit de vérifier que $\varepsilon_\beta u = \varepsilon_\sigma u'$. On remarque tout d'abord qu'on a $\Psi \subseteq \Psi_\sigma^+ \cap \Psi_\beta^+$. Par le le Corollaire 539, on en conclut que $\perp \notin u[\Psi_\beta]$ et que $\perp \notin u'[\Psi_\sigma]$. Par le Lemme 621 et le Lemme 597, on a donc :

$$(*) \quad \varepsilon_\alpha u = \varepsilon_\beta u \quad \text{et} \quad \varepsilon_\alpha u' = \varepsilon_\sigma u'$$

Maintenant, par le Lemme 620, pour tout $y \in \Psi_\alpha$ on a : $uy = T$ ssi $u'y = T$. Par propriété d'*Ackermann* des fonctions de choix continues (Définition 428), on a $\varepsilon_\alpha u = \varepsilon_\alpha u'$. Le résultat découle alors trivialement de (*). Il reste à remarquer que, par le Lemme 549.1, on a $\varepsilon_\alpha u \in \Psi_\alpha$. ■

La bisimulation $R_{\alpha, \beta}$.

Nous montrons ici le Théorème 628 qui affirme que sous l'hypothèse $H[\alpha, \beta]$ et pour tous $b, x \in \Psi_\alpha$, on a $\delta_\beta bx \sim_\sigma \delta_\sigma bx$. Par maximalité de \sim_σ , il suffit de montrer que la relation suivante est une Θ_{Ψ_σ} -bisimulation (Corollaire 627).

Définition 624 $R_{\alpha, \beta} =_{def} \{(\delta_\beta bx, \delta_\sigma bx) : b, x \in \Psi_\alpha\}$

Ceci découle des deux lemmes qui suivent :

Lemme 625 *Soit $b, x \in \Psi_\alpha$, $\alpha < \sigma$. Supposons $\beta = \sigma$ ou $H[\alpha, \beta]$ alors :*
 $\exists y \in \Psi_\sigma : \langle x, y \rangle \dot{\in}_\beta b \in \mathfrak{F}$

Preuve. On remarque tout d'abord que, pour tout $y \in \Psi_\sigma$, on a $\langle x, y \rangle \dot{\in}_\beta b \neq \perp$ puisque $x, y, b \in \Psi_\beta^+$ (Corollaire 539). Supposons maintenant que, pour tout $y \in \Psi_\sigma$, on ait $\langle x, y \rangle \dot{\in}_\beta b = T$. Par le Corollaire 619, pour tout $y \in \Psi_\sigma$, il existe $\hat{y} \in \Psi_\alpha$ tel que $y \sim_\beta \hat{y}$. La fonction $y \mapsto \hat{y}$ induit donc une injection de $(\Psi_\sigma / \sim_\beta) \mapsto (\Psi_\alpha / \sim_\beta)$. Ce qui contredit le Lemme 613. ■

Lemme 626 Soient $b, x \in \Psi_\alpha$ et $y \in \Psi_\sigma$. Si $\delta_\beta bx \neq T$ et $\delta_\sigma bx \neq T$ alors :

- 1) $\forall y \in \Psi_\sigma \exists y' \in \Psi_\sigma (\delta_\beta bxy, \delta_\sigma bxy') \in R_{\alpha, \beta}$
- 2) $\forall y' \in \Psi_\sigma \exists y \in \Psi_\sigma (\delta_\beta bxy, \delta_\sigma bxy') \in R_{\alpha, \beta}$

Preuve. On remarque tout d'abord que comme $\delta_\beta bx \neq T$ et $\delta_\sigma bx \neq T$ on a :

$$\delta_\beta bx = (\Delta_\beta \delta_\beta bx) =_{def} \lambda y. (if \langle x, y \rangle \in_\beta b \delta_\beta b(I_\beta y) \delta_\beta b(Enf_\beta bx))$$

et

$$\delta_\sigma bx = (\Delta_\sigma \delta_\sigma bx) =_{def} \lambda y. (if \langle x, y \rangle \in_\sigma b \delta_\sigma b(I_\sigma y) \delta_\sigma b(Enf_\sigma bx))$$

On montre maintenant le 1, le 2 se montrant de façon similaire en utilisant l'autre cas du Lemme 625 dans ce qui suit :

Soit donc $y \in \Psi_\sigma$, par définition de $R_{\alpha, \beta}$ on doit trouver $z \in \Psi_\alpha$ et $y' \in \Psi_\sigma$ tels que $\delta_\beta bxy = \delta_\beta bz$ et $\delta_\sigma bxy' = \delta_\sigma bz$. Le cas $\langle x, y \rangle \in_\beta b = \perp$ étant exclu (Corollaire 539.1), il reste deux cas possibles :

- Si $\langle x, y \rangle \in_\beta b \in \mathfrak{F}$: on a alors $\delta_\beta bxy = \delta_\beta bz$ pour $z =_{def} (Enf_\beta bx)$. De plus, par le Lemme 549.1, on a $z = (Enf_\sigma bx) \in \Psi_\alpha$. Il ne reste plus alors qu'à choisir $y' \in \Psi_\sigma$ tel que $\langle x, y' \rangle \in_\sigma b \in \mathfrak{F}$ (c'est possible par le Lemme 625 cas $\beta = \sigma$) pour avoir $\delta_\sigma bxy' = \delta_\sigma bz$.
- Si $\langle x, y \rangle \in_\beta b = T$: on a alors $\delta_\beta bxy = \delta_\beta bz$ pour $z =_{def} (I_\beta y)$. Par le Corollaire 619, il existe $y' \in \Psi_\alpha$ tel que d'une part $y \sim_\beta y'$, d'autre part $\langle x, y' \rangle \in_\beta b = T$. Ainsi, d'une part, par compatibilité de I_β avec \sim_β (Lemme 550.1), on a $z = I_\beta y = I_\beta y'$. D'autre part, par le Lemme 620, on a $\langle x, y' \rangle \in_\sigma b = T$. Il reste à remarquer que, puisque $I_\beta y' = I_\sigma y' \in \Psi_\alpha$ (Lemme 544.1), on a finalement $\delta_\sigma bxy' = \delta_\sigma b(I_\sigma y') = \delta_\sigma bz$. ■

Corollaire 627 $R_{\alpha, \beta}$ est une Θ_{Ψ_σ} -bisimulation.

Preuve. Vérification triviale en utilisant la Proposition 622.2 et le lemme précédent. ■

Théorème 628 Pour tous $b, x \in \Psi$, il existe $\beta > \sigma$ tel que $\delta_\beta bx \sim_\Phi \delta_\sigma bx$.

Preuve. Soit $\alpha < \sigma$ tel que $b, x \in \Psi_\alpha$. L'existence de $\beta < \sigma$ vérifiant les hypothèses $H[\alpha, \beta]$ est donné par la Proposition 605. On conclut par le Lemme 616 et le corollaire précédent (puisque $\sim_\sigma = \sim_\Phi$). ■

10.2.6 Satisfaction de MTA-Déco

Nous posons maintenant $j(\varepsilon) = \lambda(E_\sigma) = \varepsilon_\sigma$. Comme nous l'avons déjà signalé (Note 10.2 p.210), ce choix est cohérent avec tout le travail précédemment effectué.

Nous montrons que sous cette interprétation \mathcal{M} satisfait l'axiome MTA -déco, autrement dit $\mathcal{M} \models \phi b, \phi x \longrightarrow \tilde{\phi}(\delta b x)$.

Dans le reste de cette section, il est plus clair de distinguer les termes de leurs interprétations, aussi nous écrirons $|t|^j$ pour désigner l'interprétation du terme t .

Définition 629 $\tilde{\Phi} = \{v \in \mathcal{M} : \tilde{\phi}v = T\}$

Rappelons que $\tilde{\phi} = \lambda v. \dot{\exists} u. u \sim v$. Le lemme suivant découle facilement de la Proposition 441 et du Lemme 483 :

Lemme 630 $\tilde{\Phi} = \{v \in \Phi^+ : \exists u u \sim_{\Phi} v\}$

Corollaire 631 $\tilde{\Phi}$ est un ouvert contenant Φ

Preuve. Le fait que $\Phi \subseteq \tilde{\Phi}$ est évident. De plus $\tilde{\phi}$, qui est un terme de $\Lambda(C)$, est interprété dans \mathcal{M} par le code d'une fonction κ -continue (qui prend les valeurs \perp , T ou F), et $\tilde{\Phi}$ est l'image inverse de l'ouvert $\{T\}$ par cette fonction.

■

Rappelons que :

$\delta_{\sigma} =_{def} (\mathbb{Y} d_{\sigma}) \in \mathcal{M}$ et que

$\delta =_{def} (Y \dot{d}) \in \Lambda(C)$

$d_{\sigma} =_{def} | \lambda d \lambda b \lambda x. (if (Feuil_{\sigma} b x) T (\Delta_{\sigma} d b x)) |^j \in \mathcal{M}$ et que

$\dot{d} =_{def} \lambda d \lambda b \lambda x. (if (Feuil b x) T (\dot{\Delta} d b x)) \in \Lambda(C)$

Nous renvoyons aux Définitions 268, 275 et 279 pour les constructeurs qui suivent :

Remarque 632 Compte tenu que $j(\varepsilon) = \varepsilon_{\sigma}$ et que $j(\dot{\sim}) = \lambda(\chi_{\sim_{\Phi}}) = \lambda(\chi_{\sim_{\sigma}})$, on vérifie facilement et successivement que (\mathcal{M}, Φ, j) satisfait :

1) $|I^n|^j = I_{\sigma}$

2) $|Feuil|^j = Feuil_{\sigma}$

3) $|Enf|^j = Enf_{\sigma}$

4) $|\dot{\Delta}|^j = \Delta_{\sigma}$

5) $|\dot{d}|^j = d_{\sigma}$

Lemme 633 $\mathcal{M} \models \delta_{\sigma} \leq |\delta|^j$

Preuve. C'est une conséquence immédiate des définitions de δ et δ_{σ} , du 5 de la remarque précédente et du fait que $\mathcal{M} \models \mathbb{Y} \leq |Y|$ puisque \mathbb{Y} est l'opérateur de plus petits points fixes de \mathcal{M} . ■

Théorème 634 *\mathcal{M} satisfait MTA-Déco*

Preuve. Rappelons que par le Lemme 422, $\mathcal{M} \models \phi b, \phi x \longrightarrow \tilde{\phi}(\delta b x)$ ssi pour tous $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \tilde{\Phi}$ on a $|\delta \mathbf{b} \mathbf{x}|^j \in \tilde{\Phi}$. Supposons $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \tilde{\Phi}$ et soit $\alpha < \sigma$ tel que $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \Phi_\alpha$. Soient $\mathbf{b}', \mathbf{x}' \in \Psi_\alpha$ tels que $\mathbf{b}' \leq \mathbf{b}$ et $\mathbf{x}' \leq \mathbf{x}$. Maintenant $|\delta \mathbf{b} \mathbf{x}|^j \geq |\delta \mathbf{b}' \mathbf{x}'|^j \geq \delta_\sigma \mathbf{b}' \mathbf{x}'$ (lemme précédent), et comme $\tilde{\Phi} = \uparrow \tilde{\Phi}$ il suffit de montrer que $\delta_\sigma \mathbf{b}' \mathbf{x}' \in \tilde{\Phi}$. Soit β tel que $H[\alpha, \beta]$ (Notation 614). Par le Théorème 628 on a $\delta_\sigma \mathbf{b}' \mathbf{x}' \sim_\sigma \delta_\beta \mathbf{b}' \mathbf{x}'$. De plus, $\delta_\beta \mathbf{b}' \mathbf{x}' \in \Psi_{\beta+1}$ par définition de $\Psi_{\beta+1}$. On a donc $\delta_\beta \mathbf{b}' \mathbf{x}' \in \tilde{\Phi}$ et finalement $\delta_\sigma \mathbf{b}' \mathbf{x}' \in \tilde{\Phi}$, ce qu'il fallait démontrer. ■

Chapitre 11

Conclusion

Nous avons vu dans une première partie assez technique comment plonger toute preuve d'un théorème de $ZFC+FA$ dans une preuve du théorème équivalent de MTA . Ceci nous permet d'affirmer que MTA est une théorie suffisamment puissante pour fonder les mathématiques. Insistons sur le fait que la difficulté de développer un tel plongement est liée à l'hétérogénéité des fondements respectifs de Map Theory et ZFC , et non à la complexité de Map Theory. En particulier, les axiomes de construction (et $C-Prim$ ou $MTA-Infini$ suivant le cas fondé ou antifondé), qui sont véritablement le noyau de la représentation des objets mathématiques dans Map Theory, sont très simples et naturels du point de vue λ -calcul.

Dans une deuxième partie, nous avons montré la consistance de MTA relativement à $ZFC + SI$. En particulier, nous avons montré comment construire par induction sur un cardinal inaccessible σ un sous-ensemble Φ dans tout κ -pré-modèle standard, pourvu qu'on ait $\kappa > \sigma$. Rappelons qu'on peut montrer que ce sous-ensemble Φ muni des relations \in_Φ et \sim_Φ , introduites dans l'Introduction et définies rigoureusement dans le Chapitre 7, est un modèle de $ZFC + FA$. Remarquons encore que ce modèle est construit essentiellement dans le même esprit que l'univers Φ_F de [6].

Du fait que Map Theory se trouve au carrefour entre les fondements des mathématiques et de l'informatique, les futures recherches sur cette théorie peuvent prendre plusieurs directions.

Une première direction consiste à s'intéresser aux aspects "théorie des ensembles" de Map Theory. En particulier, la force exacte de MTF et MTA , qui se situe entre ZFC et $ZFC + SI$, reste à définir. De plus, la construction de modèles dans l'esprit de ceux de Map Theory pourrait ouvrir des perspectives sur des preuves de consistance de théories ensemblistes.

Une deuxième direction consiste à s'intéresser à Map Theory du point de vue calcul et implémentation. En particulier, il serait intéressant de définir les différentes stratégies de calcul possibles dans Map Theory et d'en étudier les propriétés.

La troisième direction dont nous allons parler est liée à la seconde. Nous avons vu dans la Section 2.3.2 que l'antifondation nous a fait perdre l'axiome *C-Prim* de *MTF*. Cet axiome était particulièrement intéressant. Il exprimait, d'une part, que les définitions par induction étaient possibles dans Φ_F , et d'autre part que Φ_F contient des objets "infinis" au sens de Map Theory. Ces objets étaient représentés par des termes de la forme $(Prim\ f\ a\ b)$, dans l'esprit du λ -calcul. En particulier, ces termes pouvaient être directement utilisables dans des β -calculs. L'axiome *MTA-Infini* ne joue pas entièrement le même rôle. En effet, s'il est suffisant du point de vue du plongement de *ZFC* dans *MTA*, il lui manque un aspect calculatoire simple. En particulier, il ne permet pas de définir co-inductivement de manière naturelle des fonctions.

Pour avoir une axiomatisation plus symétrique, il serait naturel de remplacer *MTA-Déco* et *MTA-Infini* par un axiome *C-CoPrim* affirmant la clôture de Φ relativement à un terme, naturellement dual de *Prim*, noté *CoPrim*. Cependant, montrer la consistance de l'axiome correspondant (en combinaison avec les autres axiomes) est actuellement au delà de nos possibilités et réclamerait éventuellement de nouvelles idées sémantiques. Par ailleurs il n'est pas évident que cet axiome ait la puissance d'expression de *MTA-déco* qui permet de décorer tout graphe. En revanche il paraît assez clair que ce *Co-Prim* (ou ses variantes) permettrait de décorer suffisamment de graphes pour couvrir les applications concrètes en informatique théorique de la co-induction.

Annexe A

Axiomes et Règles de Map Theory

Les Axiomes et règles de MT

Lambda-calcul et QND

MT-Select1 $\vdash (if\ T\ B\ C) = B$

MT-Select2 $\vdash (if\ \lambda x.A\ B\ C) = C$

MT-Select3 $\vdash (if\ \perp\ B\ C) = \perp$

MT-Applic-T $\vdash (TB) = T$

MT-Applic- β $\vdash (\lambda x.A\ B) = A[B/x]$ si B est librement substituable à x dans A

MT-Applic- \perp $\vdash (\perp B) = \perp$

MT-Renommer $\vdash \lambda x.A[x/y] = \lambda y.A$ pour x n'apparaissant pas dans A

MT-Trans $A = B; A = C \vdash B = C$

MT-Abstract $A = B \vdash \lambda x.A = \lambda x.B$

MT-Applic $A = B; C = D \vdash (AB) = (CD)$

QND Si $\vdash A[T/x] = B[T/x]$

et $\vdash A[F'x/x] = B[F'x/x]$

et $\vdash A[\perp/x] = B[\perp/x]$

Alors $\vdash A = B$

Quantification et Caract

- $MT\text{-Caract}$ $\phi x =! \phi x$
 $MT\text{-Quantif1}$ $\phi B, \dot{\forall}x.A \longrightarrow A[B/x]$
 $MT\text{-Quantif2}$ $\varepsilon x.A = \varepsilon x.(\phi x \wedge A)$
 $MT\text{-Quantif3}$ $\phi(\varepsilon x.A) = \dot{\forall}x.!A$
 $MT\text{-Quantif4}$ $\dot{\exists}x.A \longrightarrow \phi(\varepsilon x.A)$
 $MT\text{-Quantif5}$ $\dot{\forall}x.A = \dot{\forall}x.(\phi x : A)$

Construction

- $(MT\text{-}T)$ $\phi T = T$
 $(MT\text{-}F)$ $\phi F = T$
 $(MT\text{-}\perp)$ $\phi \perp = \perp$
 $(MT\text{-}\varphi)$ $\phi \lambda x.A = \phi \lambda x.\phi A$
 $(MT\text{-}App)$ $\phi u, \phi z \longrightarrow \phi(uz)$
 $(MT\text{-}P)$ $\phi u, \phi v \longrightarrow \phi(Puv)$
 $(MT\text{-}Curry)$ $\phi u \longrightarrow \phi(Curry\ u)$
 $(MT\text{-}Diag)$ $\phi u \longrightarrow \phi \lambda x.((ux)x)$
 $(MT\text{-}CInv)$ $\phi u, \phi v \longrightarrow \phi \lambda x.u(xv)$
 $(MT\text{-}Comp)$ $\dot{\forall}x.\phi(fx), \phi u \longrightarrow \phi \lambda x.f(ux)$

Axiomes et règles propres à MTF

Construction

- $(C - Prim)$ $\dot{\forall}x.\phi fx, \phi u, \phi v \longrightarrow \phi(Prim\ f\ u\ v)$
 où $Prim =_{def} \lambda f \lambda a \lambda b.(Y\ \lambda g \lambda y.(if\ y\ a\ (f\ \lambda z.(g\ (y\ (bz))))))$

Principe d'induction

Pour tous termes t et \bar{A} tels que $x \notin VL(\bar{A})$ et y n'apparaît pas dans t :

- Induction* : $\bar{A}, \phi x, x \longrightarrow t; \bar{A}, \phi x, \dot{\neg}x, \dot{\forall}y.t[(xy)/x] \longrightarrow t \vdash \bar{A}, \phi x \longrightarrow t$

Axiomes et règles propres à MTA

Axiomes d'égalité

$$MTA-Réflex_{\tilde{\phi}} \quad \phi u \longrightarrow (u \sim u)$$

$$MTA-Sym^{\sim} \quad u \sim v = v \sim u$$

$$MTA-Compat^{\sim} \quad u \sim v \longrightarrow (u \sim w = v \sim w)$$

$$MTA-Const^{\sim} \quad \phi u, \phi v \longrightarrow \phi(u \sim v)$$

$$MTA-Fix^{\sim} \quad u \sim v \longleftrightarrow (if\ u\ (if\ v\ T\ F)\ (if\ v\ F\ u \sim_0 v))$$

Axiome MTA-Infini

$$(MTA-Infini) \quad \exists z. (T \dot{\in} z \wedge \forall x. (x \dot{\in} z \Rightarrow Sx \dot{\in} z)) = T$$

Axiome MTA-Décoration

$$MTA-Déco \quad \phi b, \phi x \longrightarrow \tilde{\phi}(\delta b x)$$

Le Principe de CoInduction

Pour tous termes t et \bar{A} où $u, v \notin VL(\bar{A})$:

$$CoInduction : \quad \bar{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} t \longrightarrow (\mathcal{Q}'\ tuv) \vdash \bar{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} t \longrightarrow u \sim v$$

Annexe B

Théorème de Dédution

Nous montrons ici le Théorème de Dédution énoncé en Section 1.2.4. Rappelons que *MTFA* abrège “*MT* ou *MTF* ou *MTA*”. Nous donnons maintenant la définition complète de *MTFA*(\overline{B} ; \overline{C}) :

Définition 635 Soient $\overline{B}, \overline{C} \in \Lambda(\mathcal{C})^{<\omega}$.

On définit la théorie *MTFA*(\overline{B} ; \overline{C}) par :

- *MTFA*(\overline{B} ; \overline{C}) a pour axiomes : d'une part les théorèmes de *MTFA* (et donc en particulier ses axiomes), d'autre part les équations $\overline{B} = \overline{T}$.

- *MTFA*(\overline{B} ; \overline{C}) a les mêmes règles que *MTFA* excepté que les règles *Abstract*, *QND*, *Induction* ou *CoInduction* sont remplacées par les affaiblissements suivants :

Abstract $_{\overline{C}}$ Si $D = D'$
 et x n'est pas libre dans \overline{C}
 Alors $\vdash \lambda x.D = \lambda x.D'$

QND $_{\overline{C}}$ Si $\vdash D[T/x] = D'[T/x]$
 et $\vdash D[F'x/x] = D'[F'x/x]$
 et $\vdash D[\perp/x] = D'[\perp/x]$
 et x n'est pas libre dans \overline{C}
 Alors $\vdash D = D'$

Pour tous termes t et \overline{A} tels que $x \notin VL(\overline{A})$ et y n'apparaît pas dans t :

Induction $_{\overline{C}}$ Si $\vdash \overline{A}, \phi x, x \longrightarrow t$
 et $\vdash \overline{A}, \phi x, \dot{\neg} x, \forall y.t[(xy)/x] \longrightarrow t$
 et x n'est pas libre dans \overline{C}
 Alors $\vdash \overline{A}, \phi x \longrightarrow t$

Pour tous termes t et \overline{A} tels que $u, v \notin VL(\overline{A})$:

CoInduction $_{\overline{C}}$ Si $\vdash \overline{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} t \longrightarrow (\mathcal{Q}' tuv)$
 et x n'est pas libre dans \overline{C}
 Alors $\vdash \overline{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} t \longrightarrow u \dot{\sim} v$

La suite \overline{B} est appelée ensemble des hypothèses de la théorie, et la suite \overline{C} ensemble des contraintes de la théorie.

Le théorème de déduction sera une conséquence triviale du lemme suivant :

Lemme 636 :

Soient $\overline{B}, \overline{C}$ des suites de termes, D un terme et $C = C'$ une équation.

Si $MTFA(\overline{B}, D; \overline{C}, D) \vdash C = C'$ alors $MTFA(\overline{B}; \overline{C}) \vdash D \longrightarrow (C = C')$

Preuve. On écrira plus simplement $\vdash D \longrightarrow (C = C')$ pour $MTFA(\overline{B}; \overline{C}) \vdash D \longrightarrow (C = C')$. On raisonne par induction sur la longueur minimale l d'une démonstration de $C = C'$ dans $MTFA(\overline{B}, D; \overline{C}, D)$:

1. $l = 1$. On a trois cas possibles :
 - $C = C'$ est un théorème de $MTFA$. Par *AjoutHyp*, on a $D \longrightarrow (C = C')$ est un théorème de $MTFA(\overline{B}; \overline{C})$.
 - $C = C'$ est l'équation $D = T$. Par *InstTauto* on a que $D \longrightarrow (D = T)$ est un théorème de $MTFA$ et donc un axiome de $MTFA(\overline{B}; \overline{C})$.
 - $C = C'$ est de la forme $A = T$ pour $A \in \overline{B}$. Par définition $A = T$ est un axiome de $MTFA(\overline{B}; \overline{C})$.
2. $l = k + 1$ pour $k > 0$. L'équation $C = C'$ est donc obtenue par une règle de déduction de $MTFA(\overline{B}, D; \overline{C}, D)$ à partir de prémisses. Avant de démontrer le lemme pour chaque règle particulière, nous allons discuter les choses de façon générale. Les prémisses d'une règle, notons les $C_1 = C'_1; \dots; C_l = C'_l$, sont des équations issues de lignes de la démonstration de $C = C'$. Il est clair que chaque $C_j = C'_j$, où $1 \leq j \leq l$, à une preuve de longueur minimale strictement plus courte que celle de $C = C'$. L'hypothèse d'induction s'applique alors et on a donc $\vdash D \longrightarrow (C_1 = C'_1); \dots; \vdash D \longrightarrow (C_l = C'_l)$. Nous allons voir maintenant pour chaque règle particulière comment construire une preuve de $D \longrightarrow (C = C')$ dans $MTFA(\overline{B}, \overline{C})$ à partir de ces théorèmes donnés par l'hypothèse d'induction. :
 - *Trans* : soient $B = C$ et $B' = C'$ les prémisses de la règle. On a par hypothèse d'induction $\vdash (D : B) = (D : C)$ et $\vdash (D : B') = (D : C')$ et donc, par *Trans*, il vient $\vdash (D : C) = (D : C')$.
 - *Abstract* $_{\overline{C}, D}$: soit $B = B'$ la prémisses de la règle, on a donc $(C = C') \equiv (\lambda x. B = \lambda x. B')$. On commence par quelques remarques sur la démonstration ci-dessous. Tout d'abord, pour ob-

tenir des tautologies en ligne 2, 4, on suppose $z \notin VL(B, B')$. Ensuite, rappelons que dans le cadre de $MTFA(\overline{B}, \overline{C})$, l'utilisation de *Context* n'est permise que lorsque aucune utilisation de la règle d'abstraction n'est faite sur une variable libre de \overline{C} (Cf la discussion suivant Convention *hyp* en section 1.2.4). Or cette condition est remplie en ligne 6 puisque, par définition de $Abstract_{\overline{C}, D}$, on a en particulier $x \notin VL(\overline{C})$.

1. *Hyp d'ind.* $(D : B) = (D : B')$
2. *Tauto* $(z : \lambda x.B) = (z : \lambda x.(z : B))$
3. *InstTauto* $(D : \lambda x.B) = (D : \lambda x.(D : B))$
4. *Tauto* $(z : \lambda z.B') = (z : \lambda x.(z : B'))$
5. *InstTauto* $(D : \lambda x.B') = (D : \lambda x.(D : B'))$
6. *Context*(1) $(D : \lambda x.(D : B)) = (D : \lambda x.(D : B'))$
7. *Equiv*(3, 6) $(D : \lambda x.B) = (D : \lambda x.(D : B'))$
8. *Equiv*(7, 5) $(D : \lambda x.B) = (D : \lambda x.B')$

– *Applic* : soient $B = E$ et $F = G$ les prémisses de la règle, on a donc $C = C' \equiv (BF) = (EG)$. Il vient :

1. *Hyp d'ind.* $(D : B) = (D : E); (D : F) = (D : G)$
2. *Tauto* $x : (yz) = x : ((x : y)(x : z))$
3. *InstTauto* $D : (BF) = D : ((D : B)(D : F))$
4. *InstTauto* $D : (EG) = D : ((D : E)(D : G))$
5. *Context*(1) $D : ((D : B)(D : F)) = D : ((D : E)(D : G))$
6. *Equiv*(3, 5) $D : (BF) = D : ((D : E)(D : G))$
7. *Equiv*(6, 4) $D : (BF) = D : (EG)$

– $QND_{\overline{C}, D}$: soient $C[T/x] = C'[T/x]$ et $C[F'x/x] = C'[F'x/x]$ et $C[\perp/x] = C'[\perp/x]$ les prémisses de la règle. Par hypothèse d'induction on a $\vdash D : C[T/x] = D : C'[T/x]$ et $\vdash D : C[F'x/x] = D : C'[F'x/x]$ et $\vdash D : C[\perp/x] = D : C'[\perp/x]$. Du fait que x n'est pas libre dans D (par définition de $QND_{\overline{C}, D}$), on a $D : C[T/x] \equiv (D : C)[T/x]$ et $D : C'[T/x] \equiv (D : C')[T/x]$. De même pour les cas $F'x/x$ et \perp/x . L'hypothèse d'induction nous donne donc $\vdash (D : C)[T/x] = (D : C')[T/x]$ et $\vdash (D : C)[F'x/x] = (D : C')[F'x/x]$ et $\vdash (D : C)[\perp/x] = (D : C')[\perp/x]$. Il suffit donc d'appliquer $QND_{\overline{C}}$ pour avoir $D : C = D : C'$.

– $Induction_{\overline{C}, D}$:

on a donc $C = C' \equiv \overline{A}, \phi x \longrightarrow t$, où $x \notin VL(\overline{A})$, avec par hypothèse d'induction $\vdash D, \overline{A}, \phi x, x \longrightarrow t$ et $\vdash D, \overline{A}, \phi x, \dot{\lambda}x, \forall y.t[(xy)/x] \longrightarrow t$ (avec y n'apparaissant pas dans t). Or, par définition de $Induction_{\overline{C}, D}$

on a $x \notin VL(\overline{C}, D)$, il suffit donc d'appliquer $Induction_{\overline{C}}$ aux hypothèses d'induction pour obtenir $\vdash D, \overline{A}, \phi x \longrightarrow t$.

– $CoInduction_{\overline{C}, D}$:

on a donc $C = C' \equiv \overline{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} t \longrightarrow (\mathfrak{A}' tuv)$, où $u, v \notin VL(\overline{A})$, avec comme hypothèse d'induction que $\vdash D, \overline{A}, \phi u, \phi v, \langle u, v \rangle \dot{\in} t \longrightarrow u \sim v$. Comme pour la règle d' $Induction$, il suffit de remarquer que par définition de $CoInduction_{\overline{C}, D}$ on a $u, v \notin VL(\overline{C}, D)$, et d'appliquer $CoInduction_{\overline{C}}$.

■

Théorème 637 (*Déduct-*) Soient $\overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ des suites de termes et $C = C'$ une équation.

Si $MTFA(\overline{B}, \overline{D}; \overline{C}, \overline{D}) \vdash C = C'$ alors $MTFA(\overline{B}; \overline{C}) \vdash \overline{D} \longrightarrow (C = C')$.

Bibliographie

- [1] P. Aczel : *Non-Well-Founded sets*- CSLI Lectures Notes 14
- [2] A. Baltag. : *STS, A Structural Theory of Sets*- Ph.D. Dissertation, To be published by Kluwer Publishers in Applied Logic Series.
- [3] H.P Barendregt : *The lambda-calculus, its syntax an semantics*- Studies In Logic, vol.103, North Holland, revised edition 1984.
- [4] J. Barwise et J. Etchmendy : *The Liar*- Journal of Symbolic Logic, 1992.
- [5] J. Barwise et L. Moss : *Vicious Cercle : On the mathematics of non-well-founded sets phenomena*- CSLI Lecture Notes N^o60. Stanford CSLI Publication, 1996.
- [6] C. Berline et K. Grue : *A κ -denotational semantics for map theory in ZFC + SI* -TCS :179, p.137-202, 1997.
- [7] M. Boffa : P. Aczel, Non-well-founded Sets- Journal of Symbolic Logic 1998, p.1111-1112.
- [8] M. Boffa : *Barwise-Moss, Vicious circles*- JSL 1997, p.1039-1040.
- [9] A. Church : *A set of postulates for the foundation of logic I*- Ann. Math 33, p.346-366, 1932.
- [10] A. Church : *A set of postulates for the foundation of logic II*- Ann. Math 34, p.839-864, 1933.
- [11] A. Church : *The Calculi of Lambda Conversion*- Princeton University Press, 1941.
- [12] P. Finsler : *Über die Grundlagen der Mengenlehre*- I. Math Zeitschrift 25 :683-713, 1926.
- [13] K.Grue : *Map Theory*- Theoretical Computer Science,102(1) :1-133, july 1992.
- [14] R. Hinnion : A propos de l'anti-fondation, Cahier du Centre de Logique N^o7 : *L'antifondation en logique et en théorie des ensembles*- p.9-28, Louvain-La-Neuve, 1992.

- [15] M. Forti et F. Honsell : *Set Theory with Free Construction Principles*- Annali Scuola Normale Sup. di Pisa, Classe si Sc., Serie IV, X(3), pp.493-522, 1983.
- [16] M. Forti et F. Honsell : *Weak foundation and anti-foundation properties of positively comprehensive hyperuniverses*- Cahier du Centre de Logique N^o7, Université catholique de Louvain, Département de philosophie, p.31-43, 1992.
- [17] J.L Krivine : *Théorie axiomatique des ensembles*- Presse Universitaire de France, 1969 (éd. revue et augmentée 1972).
- [18] J.L Krivine : *Théorie des ensembles*- Cassini, France, 1998.
- [19] K. Kunen : *Set Theory, An Introduction to independence proofs*- Studies in Logic and the foundation of mathematics, vol 102, North Holland, Amsterdam, 1980.
- [20] B. Jabobs et J. Rutten : *A tutorial on (Co)algebras and (co)induction*- EATCS Bulletin 62, 1997.
- [21] M. Lenisa : *Themes in Final Semantics*- Dottorato di ricerca in informatica, PhD thesis TD-6/98, Università di Pisa, 1998.
- [22] M. Lenisa : *A complete Coniductive Logical System for Bisimulation Equivalence on Circular Objects*- TMR Linear FMRX-CT98-0170, 2001.
- [23] D.A. Martin : *Barwise Etchemendy, The Liar*- JSL 1992, p.252-254.
- [24] J. Rutten : *Behavioural differential equations : a coinductive calculus of streams, automata, and power series*- Report SEN-R0023 ISSN 1386-369X, CWI Amsterdam, 2000.
- [25] J. Rutten et D. Turi : *On the foundations of final coalgebra semantics : non-well-founded sets, partial orders, metric space*- Mathematical Structures in Computer Sciences, vol 8, pp. 481-540, 1998.
- [26] D. Scott : *A Different Kind of Model for Set Theory*- Unpublished paper given at the Standford Congress of Logic, Methodology and Philosophie of Sciences, 1960.
- [27] R. Milner : *A calculus of Communicating Systems*- Berlin, Spriner-Verlag. Lecture Notes in Computer Science, N^o 92, 1980.
- [28] R. Milner : *Calculi for Synchrony and Asynchrony*- TCS 25 :267-310, 1993.

Index

A

Abréviations

Equations

$\overline{C}, (\overline{A} \longleftrightarrow \overline{B})$	28
$\overline{A} \longrightarrow B$	15
$\overline{A} \longrightarrow B_1; \dots; B_n$	15
$\overline{A} \longrightarrow (B = C)$	15
$\overline{A} \longrightarrow (\overline{B} = \overline{C})$	15

Formules

$=_{Ext}$

$Cpl[x, y; z]$	98
$Dc[b, d]$	98
$Deco[a, b, d]$	98
$Dom[d, a]$	98
$Fonct[d]$	98
$FnDm[d, a]$	98
$Fnl[d]$	98
$Graph[a, b]$	98
$Pr[x, y; z]$	98
$Rel[d]$	98
$Sgl[x; z]$	98

Termes

$A : B$	14
$\overline{A} : B$	14
App	48
\mathfrak{A}'	126
\mathfrak{A}'_0	126
$Choix()$	54
$Comprehension()$	
\langle, \rangle	100
$Curry$	48
$d(x)$	109

$Decoration()$	121
----------------	-----

δ	116
----------	-----

$\dot{\Delta}$	116
----------------	-----

\dot{d}	116
-----------	-----

$\tilde{\delta}$	121
------------------	-----

Enf	115
-------	-----

$\varepsilon x.A$	30
-------------------	----

$\lambda \dot{A}$	27
-------------------	----

$Eval$	109
--------	-----

F	20, 48
-----	--------

$Feuil$	115
---------	-----

I''	54
-------	----

\tilde{I}	114
-------------	-----

$\dot{\square}$	69
-----------------	----

ω_{Φ}	51
-----------------	----

Y	45
-----	----

P	48
-----	----

$Paire()$	54
-----------	----

$Parties()$	54
-------------	----

$\tilde{\phi}$	113
----------------	-----

$Remplacement()$	
------------------	--

S	48
-----	----

$\tilde{\sim}_0$	46
------------------	----

$\tilde{t} \sim \tilde{t}'$	72
-----------------------------	----

$\tilde{\sim}_{Ext}$	130
----------------------	-----

$Union()$	54
-----------	----

Traductions

$\dot{\vdash}$	20
----------------	----

$\dot{\lambda}$	20
-----------------	----

$\dot{\vee}$	20
--------------	----

$\dot{\Rightarrow}$	20
---------------------	----

$\dot{\Leftrightarrow}$	20
-------------------------	----

- $\dot{\exists}$ 30
- $\dot{\forall}$ 30
- $\dot{\in}$ 46
- \dot{G} 21, 35
- $\theta(G)$ 35
- Ackermann
 - Méta-règle 33
 - Propriétés d' 158
- Antichaines
 - Antichaine 144
 - β -antichaine 213
- Axiomes ensemblistes
 - AF A* viii, x, 98
 - AF A1* 99, 113
 - AF A2* 99, 125
 - FA* viii
- B**
- Bisimulations
 - Bisimulation xvi
 - $R_{\alpha,\beta}$ 218
 - Θ_G -bisimulation 169
 - Θ_G -bisimulation max ... 170
- C**
- Calcul de la formule 94
- CoInduction xi, 18, 125
- Compact
 - Ensemble de... 144
 - Fonction κ -compacte ... 148
 - κ -compact 144
- Compatible
 - Compatible avec $=_{MTA}$.. 64
 - Compatible avec $\tilde{\sim}$ 65
 - Compatible avec \sim
 - Compatible w.r.t \leq 144
- Complet xvii
- Constructeurs
 - Ensemblistes 47, 48, 54
 - ϕ -constructeur 47, 51
- Propositionnels 20
- Contraintes
 - De *MTFA*(\overline{B} ; \overline{C}) 18
- Conventions
 - Générales . 12, 15, 59, 65, 81
 - hyp 19, 37, 231
 - hyp+ 37
 - MTFA 18
 - Preuve Simplicité 56
- D**
- Décorateur xi
- Décoration x
- Détermination
 - terme déterminé 22
 - Forcer la... 35
- Déterminé 36
- Domaine 140, 185
- κ -domaine de Scott 146
- E**
- Ensembles
 - Φ ix, 51, 175
 - Φ_F ix, 50, 175, 183
 - $\tilde{\Phi}$ 220
 - Ψ 157, 183
- Equivalences
 - Monotone 20
 - Non-Monotone 28
- Extensionnel xvi
- F**
- Finale constante 212
- Flèches
 - \downarrow_c 146
 - $\mapsto()$ 185
 - \mapsto 165
 - \uparrow 139
- Fonctionnelle 94
- Fonctions
 - Choix continue 158

- De codage (λ^n) 143
 De choix continue 158
 En escalier 145
 χ_G 157
 χ_R 163
 E_G^ρ 158
 E_η 210
 $g_{e,v}$ 145
 f_ω 180
 F_{pf} (pppf) 148
 Racine 158
 Ret_H^β 214
 Forte extensionnalité xvi
- G**
- Graphe pointé xi
- H**
- hyp 19
 hyp+ 37
 Hypothèses
 De déduction 19
 De $MTFA(\overline{B}; \overline{C})$ 18
 Internes 15
- I**
- Implications
 Monotone 20
 Non-Monotone 15
 Indéterminé 13
 Induction xi, 18
 Règle 50
 Règle d' 45
 Instances
 instance 11
 instance logique 14
 \overline{C} -instance 11
 Interprétable 40
 Interprétation 142
- K**
- κ -modèle 177
 κ -ccpo 146
 κ -ouvert 140
 κ -pré-modèle xv
 κ -pré-modèle .. ix, 149, 150, 155
- L**
- Langages
 \widehat{FP} 34
 \widehat{FP} 40
 Λ 141
 $\Lambda^0(C \cup \mathcal{D})$ 141
 $\Lambda(C \cup \mathcal{D})$ 141
 $\Lambda(C \cup \mathcal{M})$ 211
 $\Lambda(ZFC)$ 47
 $\Lambda(ZFCs)$ 56
 $\Lambda(C)$ 3
- M**
- MT-Standards
 MT-Couple 100
 MT-Décoration 110
 MT-Fonction 104
 MT-Paire 100
 MT-Relation binaire 104
 MT-Singleton 100
- O**
- Opérateurs 7
 \langle , \rangle^α
 d_G^ρ 195
 Δ_G 192
 δ_G^ρ 195
 Enf_G^ρ 192
 \sim_G 188
 ε_G 188
 \exists_G 189
 $Feuil_G^\rho$ 192
 I_G^ρ 192
 $\dot{\varepsilon}_G$ 189
 ω_Φ 180

\mathbb{Y}	148	Tautologies	
P^α	211	CP-Tautologie	22
S^α	211	tautologie de MT	14
Opérations		Termes	
H_c	144	CP-terme	21
$G \setminus H$	135	Terme simple	48, 53
D^ρ	200	$\theta(FP)$ -terme	35
G^n	135	ZFC-terme	47
G^ω	135	ZFC-terme avec ϕ -struct. ..	56
O_σ	176	Théorèmes	
G^+	165	Absurde (Lem)	26
$\oplus_{\bar{1}}$	149	Ackermann	33
$\mathcal{Q}^{\bar{1}}$	200	AjoutHyp (Lem)	17
Θ_G	169	CalculProp	25
G^0	176	Choix	33, 61
P		Choix' (Cor)	58
Petit	xvi	Compat $_{d\langle \rangle}$ (Lem)	110
Essentiellement ξ -petit .	159	Compat $_{\bar{\delta}}$	
ξ -petit	138	CompatEgal (Cor)	65
ϕ -structure	52	Compréhension	62
Plein	xvi	Construction	54
Point fixe	147	Context	11
Propriétés		Couple (Lem)	100
GCP	ix, 175	Deduct (Cor)	19
GCPA	ix, 175, 186	Deduct-	19
R		Dét (Cor)	23
Rang	201	DétCP	22
Relations		Dét $_{\bar{\delta}}$ (Cor)	117
$=_G$	165	Dét $\exists\forall$ (Lem)	33
\subseteq_ξ	138	Dét $\theta(FP)$	35
\sim_G	170	DétZFC $_{\bar{\delta}}$ (Lem)	118
S		DétZFC $_{\bar{\phi}}$ (Cor)	115
Satisfaction	142	DétZFCs	58
Satisfaction forte	143	EgalNonVide (Lem)	66
ϕ -structure	48	Enf (Lem)	116
Système	xvi	Equiv	10
T		Equiv $_{M \mapsto NonM}$ (Lem) ...	28
		Equiv $_{NonM \mapsto M}$ (Lem) ...	28
		Equiv \sim (Cor)	64
		Eval (Lem)	109

Exhib	32	ZFC^{-e}	xv, 45
Feuil (Lem)	116	MT	viii, xiii
FormValide (Cor)	58	MTA	viii, xiii
FQND (Lem)	151	MTF	viii, xiii
Géné	32	$MTFA$	18
Implic $_{M \rightarrow NonM}$ (Lem)	27	$MTFA(\overline{B}; \overline{C})$	18
Implic $_{NonM \rightarrow M}$		θ -valide	40
Inst $_{\forall}$	32	Trivial	12, 50
Instance	11		
InstTauto	14		
LoiLg (Lem)	26		
Méta	16		
MP	15		
MP \Rightarrow	24		
MTA-Déco' (Lem)	117		
NonVide (Lem)	67		
NonVide $_s$ (Cor)	68		
Parties	61		
Réfl $_{\delta}$ (Cor)	117		
Réfl $_{\phi}$			
Remplacement	63		
Renom	11		
Simplif \approx	21		
Singleton	60		
Substit	76		
SubstitAtom1 (Lem)	73		
SubstitAtom2 (Lem)	74		
Substit $_s$	77		
Tauto	14		
ThmZFC	93		
ThmZFCs (Cor)	93		
TND	25		
Trans \sim	64		
Union	60		
Vide (Lem)	68		
Théories			
ZFC	vii, 44, 45		
$ZFC + AFA$	viii		
$ZFC + FA$	viii		
$ZFC + SI$	viii		