



HAL
open science

Dynamique forcée des systèmes vitreux : des verres de spin aux fluides complexes

Ludovic Berthier

► **To cite this version:**

Ludovic Berthier. Dynamique forcée des systèmes vitreux : des verres de spin aux fluides complexes. Physique mathématique [math-ph]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2001. Français. NNT : 2001LYO10053 . tel-00001364

HAL Id: tel-00001364

<https://theses.hal.science/tel-00001364>

Submitted on 27 May 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

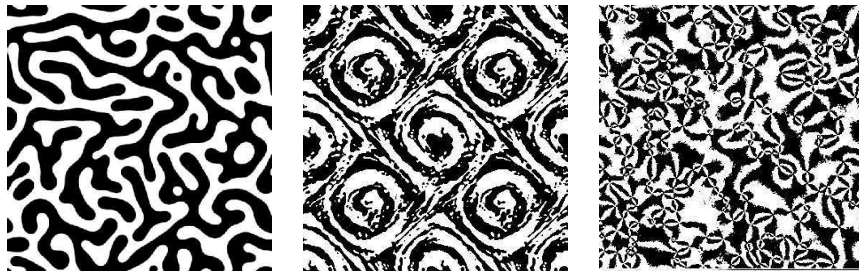
THÈSE
présentée
devant l'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD – LYON 1
pour l'obtention
du DIPLÔME DE DOCTORAT
(arrêté du 30 mars 1992)

présentée et soutenue publiquement le

27 Avril 2001

par M. LUDOVIC BERTHIER

DYNAMIQUE FORCÉE DES SYSTÈMES VITREUX : DES VERRES DE SPIN AUX FLUIDES COMPLEXES



JURY :	J.-L. BARRAT	Directeur de thèse
	J.-P. BOUCHAUD	Rapporteur
	W. KOB	Président du jury
	J. KURCHAN	Directeur de thèse
	G. PARISI	Examineur
	G. TARJUS	Rapporteur

Ceux qu'on remercie...

Ma thèse s'est déroulée administrativement au Département de Physique des Matériaux de l'Université Claude Bernard - Lyon 1, physiquement au laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon. J'en remercie tout naturellement les directeurs successifs, J. A. Serughetti et A. Pérez d'une part, P. Oswald et S. Ciliberto d'autre part.

Cette double étiquette n'est que la résultante de l'heureux concours de circonstances qui voulut que J.-L. Barrat et J. Kurchan acceptassent de me proposer de devenir leur étudiant commun. J'ai ainsi bénéficié au cours de ces trois années d'un double encadrement scientifique que je qualifie sans aucune hésitation d'exceptionnel. Après avoir apprécié les qualités de rigueur et de clarté de Jean-Louis enseignant, j'ai compris qu'elles étaient en fait le reflet de ses très grandes qualités de chercheur. Son esprit de synthèse, allié à une redoutable efficacité, lui donne un très grand recul ainsi qu'une connaissance tout à la fois vaste et précise des divers aspects de la physique statistique. Jorge est un physicien différent, qui m'a lui aussi impressionné tout au long de ma thèse. Son approche de la Physique est faite à la fois d'intuition et d'imagination, ce qui le conduit à inventer et 'voir' les résultats bien avant de pouvoir même les concrétiser par un calcul ou une simulation numérique, et donc bien avant la plupart des autres physiciens. J'ai vainement tenté de prendre cette intuition en défaut, il m'en a coûté un dîner... Je les remercie infiniment tous les deux pour m'avoir offert une petite part de leur expérience.

Je remercie ensuite J.-P. Bouchaud et G. Tarjus d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Le choix de Jean-Philippe s'imposait naturellement, puisqu'il m'a encouragé dans mes efforts à chacune de nos rencontres. Les discussions que nous avons eues ont sans aucun doute influencé et inspiré mon travail. Je lui suis donc en partie redevable des résultats présentés ci-dessous, même si nos discussions n'ont (pour l'instant) pas trouvé leur concrétisation dans une collaboration. Le nom de Gilles, ensuite, apparaît dans la bibliographie de la quasi-totalité des publications de cette thèse. Sur chaque sujet toutefois, il a posé un regard différent – pour ne pas dire 'opposé' – au mien : domaines frustrés *vs* couplage de modes, parking *vs* p -spin, etc. Il était donc particulièrement intéressant de confronter ainsi nos points de vue par l'intermédiaire de son rapport de thèse. Une collaboration en cours dira si deux approches différentes peuvent finir par converger... Je remercie encore W. Kob pour avoir très gentiment (car un peu précipitamment) accepté de présider le jury de thèse, et G. Parisi d'avoir bien voulu dégager un peu d'un temps que je sais précieux pour y participer.

Les travaux présentés dans cette thèse m'ont permis de collaborer avec A. Barrat, L. F. Cugliandolo, P. C. W. Holdsworth, J. L. Iguain et M. Sellitto, que je remercie tous chaleureusement. En particulier, j'ai commencé ma thèse en travaillant sur un article écrit *par* Alain. Il est donc très chouette de pouvoir la terminer en travaillant sur un article écrit *avec* Alain. Leticia, ensuite, m'a soutenu tout au long de ma thèse, m'a notamment

donné l'occasion de donner mon premier 'vrai' séminaire, et m'a beaucoup appris sur le métier de chercheur : j'espère que je saurai me montrer digne de sa confiance. Peter, enfin, s'est affirmé au fil du temps comme mon 'troisième directeur de thèse'. Il est aussi mon collaborateur, et c'est maintenant devenu mon ami. Je lui suis reconnaissant d'avoir assumé ces trois rôles avec beaucoup de gentillesse.

Par ailleurs, les interactions scientifiques longues ou courtes, fréquentes ou uniques, que j'ai eues avec B. Abou, A. Ajdari, D. Bonn, A. Bray, M. Cates, A. Cavagna, C. Chamon, L. Cipelletti, E. Clément, T. Coolen, C. Dérec, V. Dupuis, M. Evans, R. Exartier, S. Franz, M. Fuchs, M. Grousson, C. Godrèche, H. Hilhorst, E. Kolb, F. Krzakala, J.-M. Luck, O. Martin, R. Mélin, M. Mézard, M. Moore, M. Nicolas, D. Petit, J.-F. Pinton, P. Sollich, F. Thalmann, L. Vanel, E. Vincent, J. Wittmer, et H. Yoshino ont pu m'aider dans mon travail.

Au laboratoire de Physique, j'ai encore bénéficié des conseils toujours bienveillants et très amicaux de W. Appel, L. Bocquet, P. Degiovanni, L. Freidel, A. De Martino, F. Delduc, M. Magro, P. Pujol, et même de J.-M. Maillet. Marc, en particulier, a été mon voisin de bureau plus-que-parfait. Laurent, Marc et Pierre ont joué à la perfection leur rôle de 'grand frère' en guidant mes premiers pas de physicien. Ils m'ont ainsi fait profiter avec patience et gentillesse de leur – encore jeune mais déjà riche – expérience. Les apéritifs prolongés du GDR de Rhéologie (que faire d'autre à Garchy?) m'ont permis de faire la connaissance de Lydéric, avec qui j'ai pu interagir dans la suite de ma thèse. J'espère vraiment que cela me donnera l'occasion de collaborer un jour avec ce chercheur "rare au monde" ... François m'a fait l'amitié de descendre de sa stratosphère supersymétrique pour s'intéresser à mes problèmes de cisaillement. Ses questions 'naïves', parfois non dénuées d'ironie, m'ont certainement poussé à prendre du recul sur mon travail. Enfin, j'ai partagé mon destin de thésard avec J. Baudry, L. Bellon, J. Jullien (et A. Roque), N. Kitanine, S. Peysson, B. Portelli, F. Restagno (et A. Dewaele), et V. Terras : on se sent moins seul, ainsi.

pour Magali + 2 ε

Quaerendo invenietis

TABLE DES MATIÈRES

1.	Introduction	3
2.	Dynamique lente et croissance de domaines	21
2.1	Exemple canonique de la décomposition spinodale	22
2.1.1	Modèles et méthodes numériques	22
2.1.2	Structure et croissance des domaines	23
2.1.3	Vieillessement et violations du FDT	24
2.1.4	Que signifie le résultat $T_{\text{eff}} = \infty$?	26
2.2	Un cas soluble: Le modèle $O(n)$ pour $n \rightarrow \infty$	30
2.2.1	Paramètre d'ordre non conservé: Lois d'échelle classiques	30
2.2.2	Multiscaling et sous-vieillessement: Effets de la loi de conservation	31
2.2.3	Calcul de la température effective	33
2.3	Dynamique critique hors équilibre: Le modèle XY en 2 dimensions	34
2.3.1	Dynamique critique: Lois d'échelle	35
2.3.2	Vieillessement dans la phase de Kosterlitz-Thouless	36
2.3.3	Une $P(q)$ 'trivialement non triviale'	40
2.3.4	Calculer les violations du FDT avec la mesure d'équilibre	43
2.4	Le vieillessement des verres de spin	45
2.4.1	Existence de la transition verre de spin	45
2.4.2	Croissance de la longueur de cohérence	46
2.4.3	Validité de la relation statique / dynamique	47
3.	Influence d'un écoulement sur la séparation de phase	52
3.1	Décomposition spinodale sous cisaillement homogène	53
3.1.1	Pourquoi le problème est-il si difficile?	53
3.1.2	Croissance anisotrope des domaines	55
3.1.3	Généralisation de l'hypothèse d'échelle standard	59
3.1.4	Un argument heuristique	61
3.2	Advection chaotique d'un mélange binaire passif	63
3.2.1	De la vinaigrette avec un batteur à œuf	64
3.2.2	Étude de l'état stationnaire dynamique	67
4.	Rhéologie non linéaire des systèmes vitreux	71
4.1	Une approche microscopique pour la rhéologie non linéaire	73
4.1.1	Approximation de couplage de modes et systèmes désordonnés	73
4.1.2	Deux échelles de temps...	77
4.1.3	... et deux températures	81
4.1.4	Température effective, processus activés, et contrainte seuil	82
4.1.5	Diagramme des phases Contrainte – Température	84

4.2	Un pas vers l'expérience : Étude numérique d'un liquide cisailé	85
4.2.1	La rhéologie vue par la dynamique moléculaire	86
4.2.2	Mesure de la température effective	90
5.	<i>Échelles de temps et températures effectives dans les verres de spin</i>	93
5.1	Théorie champ moyen : Ultramétrie dynamique	94
5.1.1	Dynamique forcée des verres de spin	94
5.1.2	Relation ultramétrique et violations du FDT	95
5.1.3	À quoi ressemble l'ultramétrie ?	98
5.2	Dynamique forcée du modèle d'Edwards-Anderson en 3 dimensions	102
5.2.1	L'ultramétrie dynamique est-elle observable ?	102
5.2.2	Températures effectives	105
6.	<i>Dynamique forcée par un champ oscillant : Cas des matériaux granulaires</i>	108
6.1	Une transition de phase hors équilibre	109
6.1.1	Un cas simple : Le modèle de Sherrington-Kirkpatrick sphérique	109
6.1.2	Résultats qualitatifs pour le modèle p -spin, $p \geq 3$	113
6.2	Au-delà du champ moyen : Rôle des états métastables	116
6.3	Dynamique lente des matériaux granulaires	118
7.	<i>Conclusion</i>	122
8.	<i>Annexe : Publications</i>	124
	Response function of coarsening systems	125
	Sub-aging in a domain growth model	132
	Nonequilibrium critical dynamics of the 2D XY model	136
	Real space application of the mean-field description of spin glass dynamics	156
	Phase separation in an homogeneous shear flow: Morphology, growth laws and dynamic scaling	161
	Phase separation in a chaotic flow	171
	A two-time scale, two-temperature scenario for nonlinear rheology	175
	Fluctuation-dissipation relation in a sheared fluid	184
	Dynamic ultrametricity in spin glasses	188
	Glassy systems under time-dependent driving forces: Application to slow granu- lar rheology	198
	<i>Bibliographie</i>	213
	<i>Résumé</i>	235

1. INTRODUCTION

“This is not a play about aging, aging is depressing.”
G. ROWLANDS, in *Opening Night*, de J. CASSAVETES.

La mécanique statistique a pour objet de décrire les propriétés thermodynamiques des systèmes physiques. Pour beaucoup d’entre eux, l’étude de propriétés statiques est amplement suffisante : on arrive ainsi à une description quantitative de leurs propriétés ainsi que de leurs éventuelles transitions de phase [1]. Pourtant, dès la naissance de la thermodynamique au XIX^e siècle, on s’est aussi intéressé aux propriétés hors équilibre avec par exemple l’étude des machines thermiques [1]. Pour certains systèmes physiques, un état d’équilibre n’est même jamais atteint et seules leurs propriétés dynamiques sont expérimentalement pertinentes. En toute rigueur, ainsi que le discute en détail Ma [2], aucun système n’atteint un véritable état d’équilibre où ses propriétés physiques n’évoluent plus dans le temps. L’équilibre habituellement étudié par la mécanique statistique n’est donc qu’une approximation où les processus ‘rapides’ ont eu lieu, tandis que des processus plus ‘lents’ sont ignorés. L’étude de certains de ces processus lents est l’objet de ce travail.

L’expression ‘hors équilibre’ est en fait très largement employée en physique, et pas seulement en physique statistique. L’étude des phénomènes hors équilibre recouvre donc une très large classe de domaines. Citons, sans souci d’exhaustivité et par un choix complètement subjectif, les problèmes de la turbulence [3], de la décohérence quantique [4], de la dynamique de croissance d’interfaces [5], du chaos dans les systèmes dynamiques [6], etc. La liste est longue...

En physique statistique, on peut essentiellement distinguer deux types de situations hors équilibre. Une première classe provient du fait que le temps de relaxation de certains systèmes, c’est-à-dire le temps qu’ils mettent à atteindre leur état d’équilibre, peut devenir extrêmement long. Dans ce cas, ‘extrêmement’ signifie que ce temps peut devenir comparable, ou même bien plus grand que la durée typique d’une expérience ou d’une simulation numérique. Un exemple de ce genre de situation provient de l’étude de la dynamique des transitions de phase du second ordre. Près du point critique, la dynamique devient très lente : c’est le phénomène de ralentissement critique [7, 8]. Un exemple qui va aussi nous intéresser par la suite est fourni par l’étude des systèmes désordonnés où la dynamique est considérablement ralentie par la frustration induite par le désordre [9]. Une deuxième classe de phénomènes consiste à placer le système dans une situation qui, par construction, sera hors équilibre [10]. On peut ainsi soumettre un échantillon à une différence de température, de potentiel, etc. On étudiera alors les phénomènes de transport (de chaleur, de courant électrique, etc.) qui sont, dans l’ensemble, assez bien compris, le principe étant d’étudier de faibles perturbations autour de l’état d’équilibre [10]. Signalons ici que l’étude des phénomènes de transport au niveau quantique dans les systèmes mésoscopiques est actuellement un axe de recherches majeur en physique de la matière condensée [11].

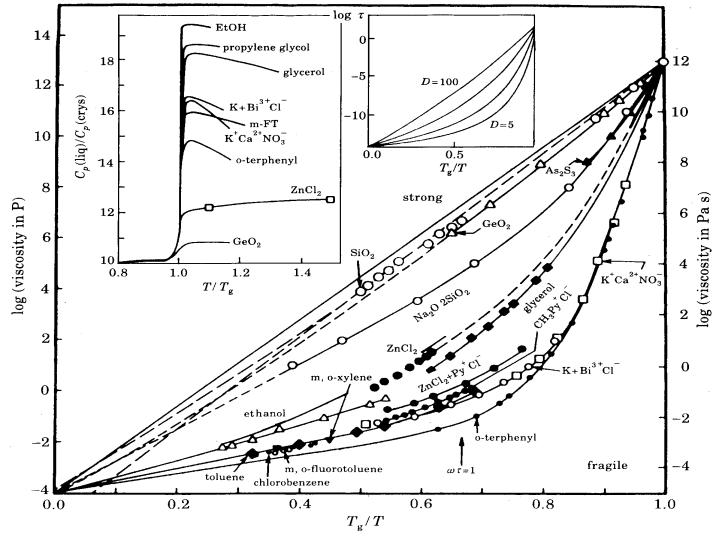


Fig. 1.1: *Augmentation rapide de la viscosité à l'approche de la transition vitreuse pour différents matériaux, d'après la Ref. [13]. La valeur de la température lorsque la viscosité vaut 10^{13} Poise définit la température de transition vitreuse T_g . La viscosité change de plus de 10 ordres de grandeurs alors que la température est seulement divisée par 2. La nature exacte de ce ralentissement extrêmement rapide de la dynamique est encore mal comprise.*

Nous considérons par la suite, au niveau classique, le cas où la perturbation imposée au système est forte ou/et le cas où celui-ci ne se trouve pas près de son état d'équilibre, deux situations dont notre compréhension est loin d'être satisfaisante à l'heure actuelle.

Les systèmes vitreux

Dans la suite, nous nous intéressons à ces deux types de situation hors équilibre, en portant notre attention sur une classe de systèmes physiques que j'appellerai 'vitreux'. On peut en donner une définition générale, donc plutôt vague, en qualifiant de vitreux un système dont le temps de relaxation devient extrêmement grand (éventuellement infini) lorsqu'un paramètre de contrôle (densité, pression, température, etc.) est varié. Dans le cas où cette (quasi-)divergence est assez bien localisée, on parle de 'transition vitreuse', notion là encore assez floue comme nous le verrons. L'exemple canonique est celui des verres structuraux, dont le temps de relaxation augmente très vite lorsque la température T est abaissée près de la température de transition vitreuse T_g . Expérimentalement, cette divergence se manifeste par celle de coefficients de transport, comme la viscosité, cf Fig. 1.1. La température de transition vitreuse est alors définie par la condition $\eta(T = T_g) = 10^{13}$ Poise, où $\eta(T)$ est la viscosité [12].

Grâce au flou de notre définition des systèmes vitreux, on peut en fait qualifier de vitreux une très large classe de systèmes microscopiques. On retrouve en effet cette dynamique lente dans des composés aussi divers que les systèmes magnétiques désordonnés, par exemple les verres de spin [14], mais aussi dans les fluides complexes (émulsions, polymères, colloïdes, etc.) [15, 16], les matériaux granulaires [17], les supraconducteurs de type-II en présence de désordre [18], les ondes de densité de charge [19], etc.

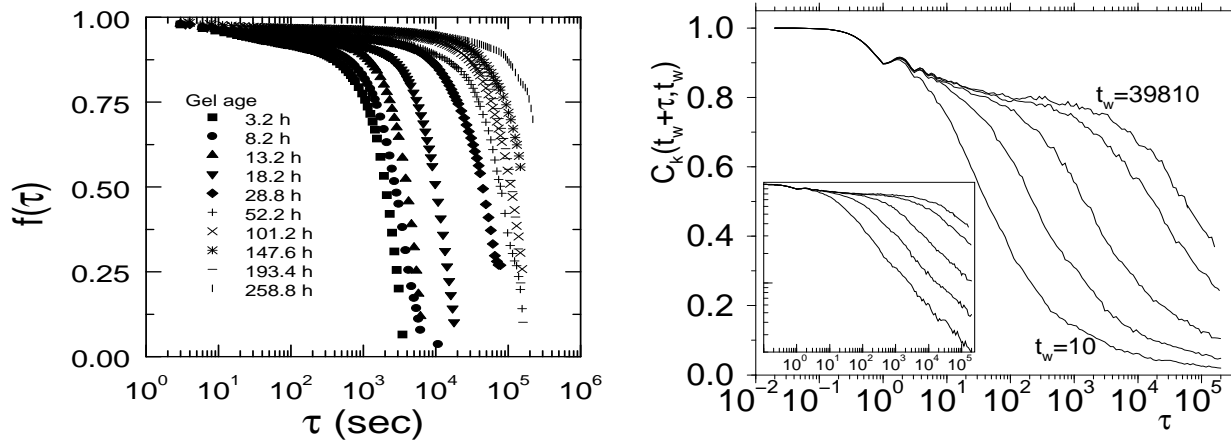


Fig. 1.2: Vieillessement des systèmes vitreux. À gauche, dans le cas d'un gel colloïdal, fluctuations de densité mesurées par diffusion de la lumière, d'après la Ref. [25]; à droite, fonctions de corrélation densité-densité dans la simulation numérique d'un liquide de Lennard-Jones dans sa phase vitreuse, d'après Ref. [26]. Dans les 2 cas, le temps de relaxation structural dépend de l'âge du système, $t_r \simeq t_w^\mu$, avec $\mu \simeq 0.9$.

Malgré une grande diversité au niveau microscopique, on peut isoler quelques caractéristiques communes à tous ces systèmes. Une partie d'entre eux, notamment, contient du désordre. Dans un supraconducteur de type-II, par exemple, les vortex magnétiques sont piégés par les impuretés dans des états qui sont localement énergétiquement favorables, ou métastables. La présence d'un grand nombre de ces configurations métastables ralentit donc considérablement la dynamique de ces objets [20]. D'autres matériaux, comme les verres structuraux, ne contiennent pas de désordre, mais leur structure est désordonnée. Pour décrire cette distinction, les notions de 'désordre gelé' et 'désordre auto-induit' ont été introduites. Un second facteur est la présence de frustration [21]. Dans un matériau granulaire au repos par exemple, les grains ne peuvent se réarranger pour minimiser leur énergie potentielle du simple fait des contraintes géométriques (contact entre les grains). Dans d'autres cas, les contraintes peuvent être d'ordre cinétique, et le désordre peut lui aussi induire de la frustration [21].

Une dynamique hors équilibre

Nous avons vu que le temps de relaxation des systèmes vitreux peut devenir très grand à l'approche de la 'transition vitreuse'. Dans la 'phase vitreuse', ce temps est – ou peut être considéré comme – infini : pendant l'expérience ou la simulation, la dynamique du système se déroule donc hors de l'équilibre. Là encore, malgré la diversité microscopique des systèmes cités plus haut, des effets typiques et que je qualifierai donc de 'dynamique vitreuse', ont été observés : vieillissement, hystérésis, effets de mémoire, violations des propriétés d'équilibre, etc [22].

Il est peut-être important de préciser ici que lorsqu'un système est à l'équilibre, son état ne dépend que de quelques grandeurs physiques, comme la température ou la pression, qui constituent donc les paramètres d'état. Pour un système hors équilibre ceci n'est plus vrai, et l'état d'un échantillon dépend, en général, de la façon dont il a été préparé.

Pour observer des effets hors équilibre qui soient ‘universels’, il faut donc spécifier très clairement le protocole expérimental utilisé.

Un tel exemple d’universalité est donné par le phénomène de vieillissement [22, 23, 24] (Fig. 1.2). Le protocole consiste à préparer le système dans un état d’équilibre au-dessus de la transition vitreuse, puis à réaliser une trempe à l’instant initial $t = 0$ qui le place dans sa phase vitreuse où il ne peut équilibrer. On observe alors que le temps de relaxation t_r dépend du temps t_w passé dans la phase vitreuse, appelé ‘âge’ du système. Dans un nombre remarquable d’expériences, on trouve que $t_r \simeq t_w$ [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. Ce comportement est appelé ‘vieillissement simple’ et signifie que pendant la phase de vieillissement, l’âge du système t_w est la seule échelle de temps pertinente. Expérimentalement, des études plus précises montrent que l’emploi de la relation $t_r \simeq t_w^\mu$ est souvent nécessaire [24]. Le cas $\mu > 1$ a reçu le nom de ‘super-vieillissement’, tandis que le cas où $\mu < 1$ a été appelé ‘sous-vieillissement’. Ce point a notamment été l’objet d’une grande attention dans les expériences sur les verres de spins [31].

Cette propriété est déduite de l’étude de quantités à deux temps, $C(t, t_w)$. Dans un matériau magnétique par exemple, on mesure l’aimantation à un temps $t > t_w$ lorsqu’un champ magnétique a été appliqué entre les temps $t = 0$ et $t = t_w$. Dans les simulations numériques, ce sont plus souvent des fonctions de corrélation qui sont mesurées comme la corrélation densité-densité pour un verre structural. Les courbes obtenues ont typiquement l’allure de celles de la Fig. 1.2. La relaxation se compose essentiellement de 2 échelles de temps, l’une courte (relaxation ‘ β ’) où la relaxation est stationnaire, $t_\beta \simeq \text{const}$, et une seconde plus longue (relaxation ‘ α ’) qui dépend de l’âge du système, $t_\alpha \simeq t_r \simeq t_w$. Une image physique est celle de particules qui vibrent dans une cage formée par les particules voisines (relaxation β), puis qui s’en échappent (relaxation α). La seconde relaxation, de nature collective, est de plus en plus lente dans la phase vitreuse. La valeur de la corrélation sur le plateau séparant les 2 régimes est le ‘paramètre d’Edwards-Anderson’ q_{EA} , défini par $q_{EA} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{t_w \rightarrow \infty} C(t, t_w)$. La fonction de corrélation se sépare alors naturellement en deux parties, l’une stationnaire et l’autre vieillissante,

$$C(t, t_w) = C_{\text{stat}}(t - t_w) + C_{\text{aging}}(t, t_w). \quad (1.1)$$

La propriété de vieillissement simple devient dans ces notations $C_{\text{aging}}(t, t_w) \simeq \mathcal{C}(t/t_w)$, où $\mathcal{C}(x)$ est une fonction d’échelle.

Des protocoles expérimentaux plus élaborés (cycles en température ou en champ magnétique, changement de la vitesse de trempe, etc.) ont permis de constater d’autres analogies, mais aussi des différences entre les divers systèmes [34, 35, 36]. Mentionnons ici, mais nous y revenons plus bas, que le théorème de fluctuation-dissipation n’est pas satisfait lors de la dynamique de vieillissement [37]. L’étude des violations du théorème a permis elle aussi d’établir une classification des différents systèmes vieillissants.

La dynamique forcée des systèmes vitreux

Alors que la plupart des études théoriques se sont attachées à décrire les systèmes vitreux pendant leur vieillissement [22, 23], il est important de noter que l’étude de la dynamique forcée de ces mêmes systèmes est elle aussi expérimentalement pertinente. Par dynamique forcée, nous entendons une situation expérimentale où de l’énergie est injectée dans le système [38], par opposition à une situation où on laisse simplement le

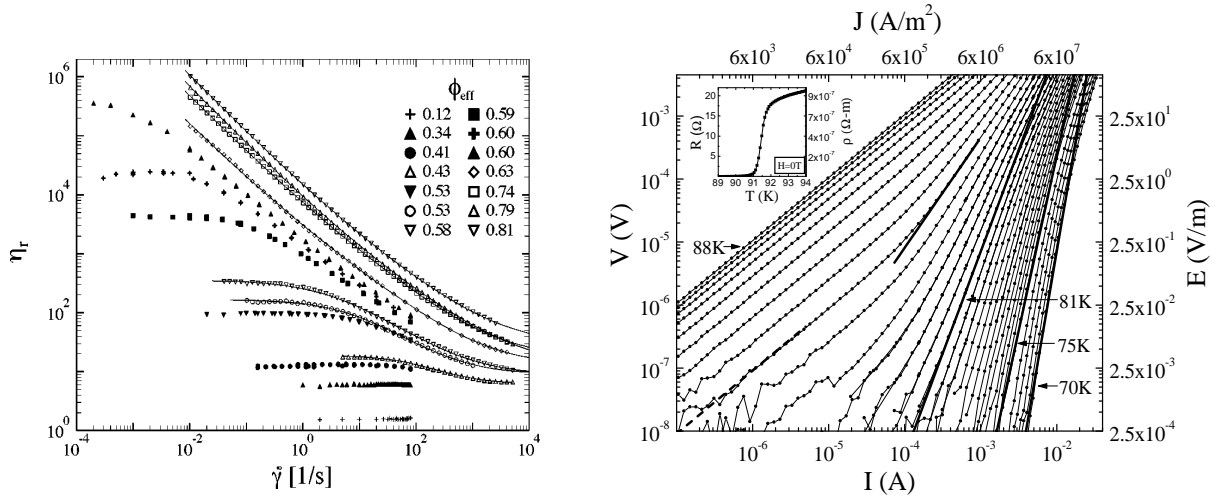


Fig. 1.3: À gauche : rhéologie non linéaire dans un fluide complexe, décrite par la variation de la viscosité avec le taux de cisaillement, d'après la Ref. [39]. La viscosité est constante dans un fluide Newtonien. À droite : caractéristiques Tension - Intensité dans un supraconducteur à haute T_c , d'après la Ref. [40]. Un comportement ohmique classique est décrit par la ligne pointillée.

système relaxer (très lentement) vers son état d'équilibre. Citons, à titre d'exemples, le cas d'un supraconducteur traversé par un courant électrique constant [18], ou encore d'un fluide complexe auquel un cisaillement homogène est appliqué (Fig. 1.3) [15]. L'effet du forçage est alors d'«accélérer» une dynamique qui, par essence, est extrêmement lente. Ceci résulte donc en une compétition complexe entre les différentes échelles de temps. Ainsi, le temps de relaxation d'un fluide complexe cisailé, et donc sa viscosité η , diminuent avec l'intensité du taux de cisaillement γ , typiquement comme une loi de puissance

$$\eta \simeq \gamma^{-\alpha}. \quad (1.2)$$

C'est le phénomène de rhéofluidification (Fig. 1.3, à gauche). Dans le cas des supraconducteurs, l'application d'un courant électrique I dans la phase vitreuse ('verre de vortex') régularise les échelles de temps divergentes et le temps de relaxation est alors bien décrit par la loi de fluage [18]

$$t_r \simeq t_0 \exp \left[\frac{U_0}{T} \left(\frac{I_c}{I} \right)^\mu \right], \quad (1.3)$$

où U_0 et t_0 sont des échelles d'énergie et de temps, et $\mu > 0$. On mesure alors la tension $V \propto t_r^{-1}$ (Fig. 1.3, à droite). L'apparition du comportement de fluage (1.3) est considérée comme une signature expérimentale de la présence d'une phase vitreuse [20, 41]. Dans les 2 cas, en particulier, nous voyons que *le vieillissement est stoppé par le forçage extérieur* [42], le temps de relaxation devenant fini, même dans la phase vitreuse. On peut comprendre ce phénomène assez simplement en réalisant que le forçage introduit une nouvelle constante de temps dans la dynamique du système (par exemple γ^{-1} dans le cas d'un cisaillement) : c'est cette nouvelle échelle de temps, et non plus t_w , qui contrôle alors t_r .

Pour d'autres systèmes, comme les mousses [43] ou les matériaux granulaires [44, 45, 46], c'est le plus souvent la dynamique forcée qui est étudiée, car ces systèmes sont

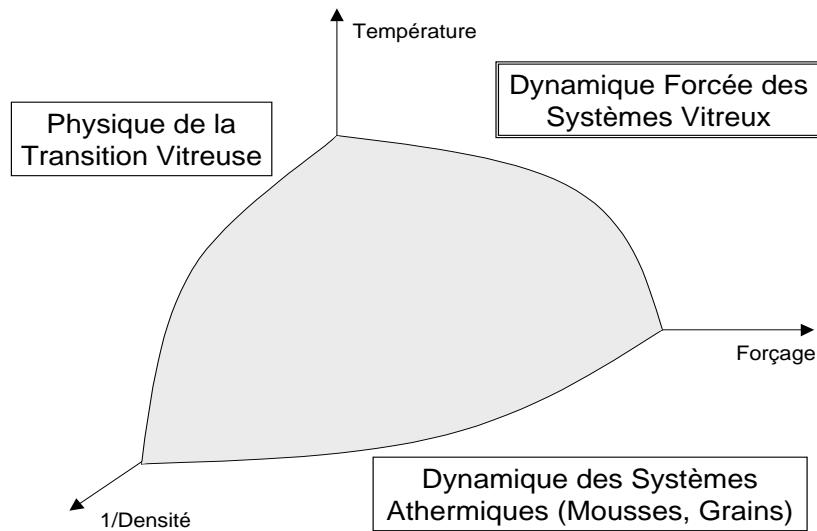


Fig. 1.4: Le diagramme des phases proposé par Liu et Nagel [48]. La phase vitreuse ('jammed') est grisée. Dans la suite, nous nous concentrons sur le plan Température - Forçage de ce diagramme des phases qui 'unifie' verres et granulaires.

incapables de s'écouler sans sollicitation extérieure. Le caractère macroscopique des grains ou des bulles rend en effet l'agitation thermique complètement négligeable par rapport aux autres échelles d'énergie, typiquement l'énergie potentielle de pesanteur [44, 45, 46]. Outre la description des propriétés d'écoulement de ces systèmes 'athermiques', un enjeu théorique est de construire une mécanique statistique qui leur soit adaptée [17].

Plus spécifiquement, deux types de perturbations sont envisageables pour forcer la dynamique du système. On peut tout d'abord imaginer une perturbation non-conservative constante, ce qui revient à appliquer une force qui ne dérive pas d'une énergie potentielle : c'est ce que l'on fait en cisillant un fluide ou en appliquant un courant électrique à un supraconducteur, cf Fig. 1.3. Un autre moyen de forcer la dynamique consiste à appliquer une force conservative qui dépend du temps, par exemple sinusoïdalement : de l'énergie est alors injectée au système à chaque cycle. Ce second cas est pertinent pour l'étude de la compaction lente des matériaux granulaires sous vibration, mais c'est aussi la façon dont on sonde les propriétés de relaxation d'un système dans une expérience de 'hole-burning' [47]. Dans les deux cas, la dynamique n'obéit plus à la relation du bilan détaillé : le système n'est donc jamais à l'équilibre [38].

Un des buts de notre travail a été de décrire théoriquement le comportement générique des systèmes vitreux forcés. Cette approche s'inscrit donc naturellement dans la perspective récente de Liu et Nagel, qui proposent un diagramme des phases qui serait commun à une large classe de systèmes vitreux [48]. Dans sa version la plus simple, le diagramme comporte trois axes : Température - 1/Densité - Forçage (Fig. 1.4). La phase 'vitreuse' (on dit aussi en bon français 'jammed') est alors localisée dans la partie basse température / haute densité / faible forçage du diagramme des phases. L'étude de la dynamique forcée des systèmes vitreux correspond donc à celle du plan Température - Forçage de ce diagramme des phases et nous reviendrons par deux fois au cours de ce travail à ce diagramme des phases.

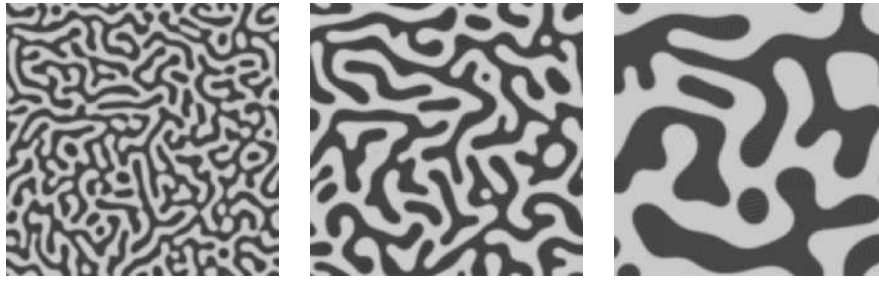


Fig. 1.5: Simulation numérique de la décomposition spinodale d'un mélange binaire. Chaque couleur représente une des 2 phases et le temps augmente de gauche à droite. À la limite thermodynamique, l'équilibre (les 2 phases complètement séparées) n'est jamais atteint. Cette simulation est décrite plus en détail au chapitre 2.

Viellissement et croissance de domaines

Les principaux modèles théoriques qui décrivent la dynamique lente des systèmes vitreux, en particulier le phénomène de vieillissement, ont été développés au cours des dix dernières années [22, 23]. Une première famille de modèles, d'ordre phénoménologique et que nous n'étudierons plus par la suite, résulte d'une vision 'dans l'espace des phases'. Un exemple est fourni par le modèle de pièges développé par Bouchaud [23]. Dans sa version la plus élémentaire, le modèle décrit la dynamique simple d'un système complexe en la réduisant à celle d'un système simple, un point matériel, évoluant d'états en états dans l'espace des configurations par une dynamique thermiquement activée. La complexité est alors reportée dans la statistique des barrières d'énergie. Bien que phénoménologique, ce modèle a d'une part le mérite de sa simplicité, mais il a surtout permis, d'autre part, de capturer l'essence même du phénomène de vieillissement dès le début des années 90, puisqu'il conduit naturellement à une dynamique où la seule échelle de temps caractéristique est l'âge du système t_w [23]. Il est à noter que cette famille de modèles est aussi utilisée dans la littérature des supraconducteurs : la dynamique des vortex en présence de désordre et de courant électrique est alors réduite à celle d'un point dans un potentiel désordonné (modèle de Sinai) en présence d'un forçage [18, 49].

Une deuxième famille de modèles, phénoménologique elle aussi, provient d'une vision de type 'croissance de domaines' [8, 50, 51]. Il est en effet possible d'obtenir un temps de relaxation infini dans un matériau ferromagnétique non désordonné loin de son point critique en réalisant l'expérience suivante, représentée sur la Fig. 1.5. Le matériau est préparé à l'instant initial dans un état complètement désordonné, correspondant à un état d'équilibre à une température $T = \infty$. Au temps $t = 0$, le système est placé à une température $T < T_c$ dans sa phase ferromagnétique. Après un temps t , des domaines d'aimantation '+' et '-' sont apparus, dont la taille typique $L(t)$ croît, dans les cas les plus simples, comme une puissance du temps, $L(t) \simeq t^\alpha$ [51]. Le point crucial est qu'à la limite thermodynamique un tel système n'atteint jamais son état d'équilibre qui est composé d'un seul type de domaines. La dynamique n'est donc pas stationnaire : le système 'vieillit'. Nous étudierons par la suite le cas très similaire de la décomposition spinodale d'un mélange binaire.

Plus quantitativement, ce vieillissement peut être détecté, comme nous l'avons déjà vu plus haut, par l'étude de fonctions de corrélation. Si, au cours de la croissance de

domaines magnétiques, on mesure la fonction d'autocorrélation spin-spin $C(t, t_w)$, celle-ci aura typiquement le comportement décrit dans les Figs. 1.2. Dans ce cas, l'échelle de temps courte correspondant à une dynamique stationnaire reflète les fluctuations d'équilibre à l'intérieur des domaines. L'échelle de temps longue reflète quant à elle la relaxation du système due aux fluctuations des interfaces. Celles-ci étant d'autant plus lentes que les domaines sont grands, cette seconde relaxation dépend donc de l'âge du système et des arguments d'échelle simples conduisent à une relaxation de la forme $C_{\text{aging}}(t, t_w) \simeq \mathcal{C}[L(t)/L(t_w)]$. Cette image en termes de croissance de domaines donne donc, après l'image des cages, une seconde explication très simple des courbes de la Fig. 1.2 et donc de l'équation (1.1). Dans ce cas, le paramètre d'Edwards-Anderson est simplement relié à l'aimantation d'équilibre $m_{\text{eq}}(T)$ par $q_{EA} = m_{\text{eq}}(T)^2$.

Soulignons ici que cette description peut être étendue au cas où la croissance de domaines se fait en présence de désordre ou dans un matériau ferromagnétique dilué [23]. L'image du vieillissement en termes de croissance de domaines a aussi été utilisée pour interpréter les résultats obtenus dans certains verres ferroélectriques [34]. L'application de ces phénomènes de croissance de domaines aux verres de spin, conjuguée à des arguments de type lois d'échelle, a permis une description très élaborée de la phase verre de spins : c'est le modèle des 'gouttelettes' (droplet) développé par Fisher et Huse à la fin des années 80 [52]. Ce modèle s'attache à décrire à la fois la statique et la dynamique hors équilibre des verres de spin et fournit (pour l'instant) la seule alternative sérieuse à la description suggérée par la théorie champ moyen, que nous décrivons plus bas. Cette image est plus difficilement applicable à des matériaux comme les supraconducteurs : on se contente alors de garder les arguments d'échelles sans plus parler de domaines [53].

Pour les verres structuraux et les fluides complexes, la façon dont on peut appliquer cette image n'est pas claire à l'heure actuelle, même si des modèles de type croissance de domaines ont été proposés pour décrire la transition vitreuse [54, 55]. Ces modèles reposent sur l'existence d'une échelle de longueur 'mésoscopique', qui croît à l'approche de la transition vitreuse. La définition théorique claire ainsi que la mise en évidence numérique ou expérimentale d'une telle échelle de longueur font encore l'objet d'intenses recherches. Si la transition vitreuse ne semble pas associée à la divergence d'une échelle de longueur comme dans une transition de phase du second ordre par exemple [56], un effort à la fois numérique [57, 58, 59] et expérimental [60, 61, 62] important a récemment fait émerger la notion d'hétérogénéités dynamiques, dont la taille semble grandir lorsque la dynamique ralentit.

Une température pour les systèmes hors équilibre

La troisième famille de modèles théoriques constitue ce que j'appellerai par la suite 'la théorie champ moyen'. On peut la considérer comme une approche 'premier principe' dans le sens où elle s'attache à la solution exacte de modèles microscopiques. Jusqu'à présent, seuls des modèles de type champ moyen ont pu être résolus. De manière générique, ces modèles sont définis par un Hamiltonien, $H[\mathbf{s}]$, qui contient des variables de spins, $\mathbf{s} \equiv (s_1, \dots, s_N)$, qui interagissent de manière compliquée : par exemple les couplages sont des variables aléatoires. Dans ce contexte, deux modèles ont été plus particulièrement

étudiés. Le modèle p -spin est défini par l'Hamiltonien [63]

$$H[\mathbf{s}] = \sum_{j_1 < \dots < j_p} J_{j_1 \dots j_p} s_{j_1} \dots s_{j_p}, \quad (1.4)$$

et le modèle de Sherrington-Kirkpatrick, défini par [64]

$$H[\mathbf{s}] = \sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j. \quad (1.5)$$

L'ingrédient qui rend les calculs possibles est que chaque spin interagit avec tous les autres spins du système. L'approximation de champ moyen devient exacte mais toute information spatiale est perdue. Ceci consitue, à mon sens, une limitation sérieuse à ce type de modèles.

À ces modèles, on doit encore associer une dynamique et on choisit le plus souvent, au niveau théorique, d'étudier une dynamique de Langevin,

$$\frac{\partial s_i(t)}{\partial t} = -\frac{\delta H[\mathbf{s}]}{\delta s_i(t)} + \zeta_i(t). \quad (1.6)$$

Pour ces modèles champ moyen, De Dominicis [65] a montré comment décrire la dynamique à l'aide du formalisme de Martin, Siggia et Rose [66]. Sompolinsky et Zippelius [67] ont alors obtenu les équations dynamiques exactes satisfaites par ces systèmes, mais ce n'est qu'au cours des années 90 que ces équations ont pu être asymptotiquement résolues [68, 69, 70, 71]. Ces équations dynamiques impliquent uniquement les fonctions de corrélation spin-spin $C(t, t_w) = N^{-1} \sum_i \langle s_i(t) s_i(t_w) \rangle$ et leur fonction de réponse conjuguée $R(t, t_w) = N^{-1} \sum_i \delta \langle s_i(t) \rangle / \delta \zeta_i(t_w)$, et sont obtenues à la limite thermodynamique, $N \rightarrow \infty$.

Dans des modèles plus réalistes, contenant par exemple des interactions à courte portée, de telles équations ne peuvent en général être obtenues sans des approximations qu'il est difficile de contrôler [72]. Une telle approche, basée sur l'approximation de couplages de modes, a été développée dans les années 80 par Götze et ses collaborateurs pour étudier la dynamique d'équilibre des liquides surfondus [73]. Remarquablement, les équations les plus simples, dites schématiques, de la théorie de couplage de modes coïncident avec les équations exactes dérivées pour les modèles désordonnés champ moyen à l'équilibre [74]. L'étude de ces dernières dans le régime de basse température peut donc être vue comme une extension hors équilibre de la théorie de couplage de modes et les modèles correspondant, par exemple le modèle p -spin [63], comme des modèles champ moyen de verres structuraux. Latz a récemment entrepris la généralisation de la théorie de couplages de modes (non schématique) dans le régime de vieillissement [75]. La connexion de cette approche avec la solution de vieillissement du modèle p -spin n'a malheureusement pas encore été possible, tant les équations obtenues sont complexes à résoudre.

La solution de ces équations dynamiques a montré l'existence d'une transition dynamique pour $T = T_c$ [68]. À basse température, $T < T_c$, les fonctions dynamiques suivent la décomposition (1.1), et les fonctions de corrélation se comportent donc essentiellement comme celles de la Fig. 1.2, avec une partie vieillissante de la forme $C_{\text{aging}}(t, t_w) = \mathcal{C}[h(t)/h(t_w)]$. Ce fut donc un premier succès de cette approche que de pouvoir reproduire le vieillissement observé expérimentalement à partir d'une approche microscopique, même si le calcul explicite de la fonction $h(t)$ qui entre dans la corrélation n'a pas été possible,

rendant la détermination du régime de vieillissement incomplète [68, 69, 70, 71]. Le second point qui a émergé de ces études est que le théorème de fluctuation-dissipation (FDT) qui relie à l'équilibre les fonctions C et R par la relation

$$R(t, t_w) = \frac{1}{T} \frac{\partial C(t, t_w)}{\partial t_w}, \quad t > t_w, \quad (1.7)$$

n'est plus satisfait dans le régime de vieillissement. Les calculs montrent qu'à la place, une extension non triviale du FDT est satisfaite. Elle s'écrit

$$R_{\text{aging}}(t, t_w) = \frac{1}{T_{\text{eff}}} \frac{\partial C_{\text{aging}}(t, t_w)}{\partial t_w}, \quad t > t_w, \quad (1.8)$$

ce qui définit T_{eff} une fonction des deux temps t et t_w . Ce paramètre, qui remplace la température T de l'expression (1.7), est appelé 'température effective' [76]. On montre de plus qu'à la limite asymptotique où $t, t_w \rightarrow \infty$, $h(t)/h(t_w) \simeq \mathcal{O}(1)$, elle devient une fonction de la seule corrélation C , $T_{\text{eff}} = T_{\text{eff}}(C(t, t_w))$ [70]. Les courbes de la Fig. 1.2 indiquent que la relaxation se déroule essentiellement en deux étapes et on peut donc s'attendre à ce que la fonction $T_{\text{eff}}(C)$ prenne 2 valeurs différentes, chacune associée à une échelle de temps. Ce scénario se trouve exactement réalisé dans le modèle p -spin, où la température effective associée à l'échelle de temps courte, $C > q_{EA}$, est $T_{\text{eff}} = T$ (comme à l'équilibre), tandis que pour l'échelle de temps longue, $C < q_{EA}$, on a $T_{\text{eff}} > T$ [68]. Tout se passe donc comme si les degrés de liberté les plus lents étaient équilibrés à une température plus élevée que celle du bain thermique. Dans d'autres modèles, comme le modèle de Sherrington-Kirkpatrick, qui est un modèle champ moyen pour les verres de spin, la relaxation n'est pas composée de seulement 2 échelles de temps, mais d'une 'hiérarchie' (mot dont le sens sera précisé au chapitre 5 qui introduit le concept d'ultramétrie dynamique) [69], la partie vieillissante de la corrélation s'écrivant $C_{\text{aging}}(t, t_w) = \sum_i C_i [h_i(t)/h_i(t_w)]$. Chaque échelle de temps i est alors associée à une température effective différente.

Ce sont les travaux de Cugliandolo, Kurchan et Peliti qui ont donné un sens thermodynamique au facteur T_{eff} en montrant qu'il avait les propriétés qu'on peut attendre d'une température [76]. On montre en effet de manière générale que T_{eff} est la température mesurée par un thermomètre couplé au système. Un thermomètre ayant un temps de réponse τ rapide ($\tau \sim t_\beta$) lirait donc une température $T_{\text{eff}} = T$ alors qu'avec un temps de réponse plus lent ($\tau \sim t_\alpha$), il lirait $T_{\text{eff}} > T$. De plus, si l'on couple 2 systèmes vieillissants ayant pour une échelle de temps τ donnée une T_{eff} différente, avec un système ayant un temps de réponse τ (par exemple un oscillateur harmonique de pulsation $\omega \sim \tau^{-1}$), de l'énergie sera transférée entre les 2 systèmes par l'oscillateur, dont le sens d'écoulement sera fixé par la différence des T_{eff} . En ce sens, la température effective T_{eff} vérifie le principe zéro de la thermodynamique.

L'existence d'une température effective lors de la dynamique hors équilibre des systèmes vitreux est un résultat *exact* pour les modèles champ moyen. De nombreuses études numériques [32, 37, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85] et plus récemment expérimentales [86, 87, 88] ont permis de montrer que des violations du FDT similaires existent dans des modèles plus réalistes de systèmes vitreux, cf Fig. 1.6. Ces différents travaux ont donc permis, d'une part, de tester la validité de l'approche champ moyen et d'autre part d'établir une classification des différents systèmes vitreux en fonction des violations du FDT rencontrées.

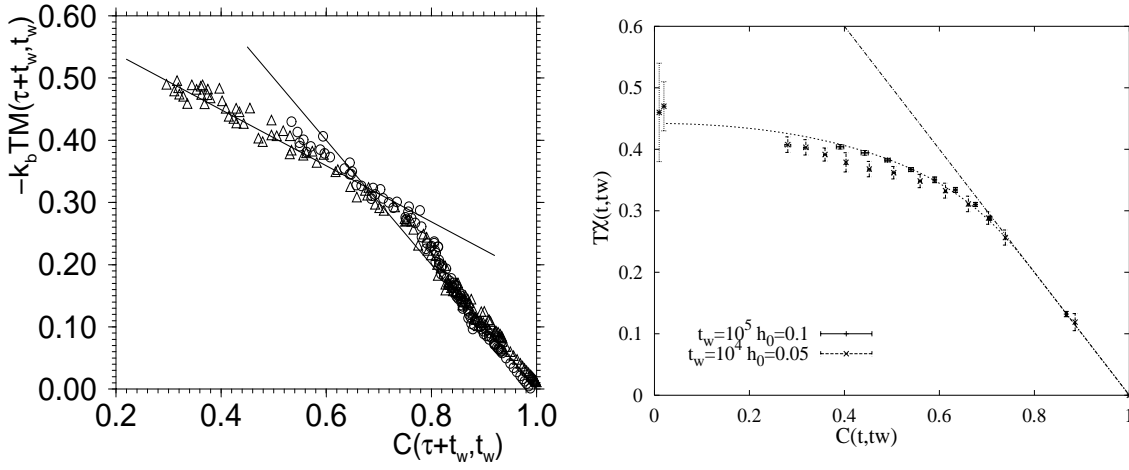


Fig. 1.6: Études de la violation du FDT dans un liquide de Lennard-Jones (à gauche, Ref. [77]) et dans un verre de spin à trois dimensions (à droite, Ref. [78]), par simulation numérique. À l'équilibre, le FDT implique une relation linéaire entre les 2, la pente étant l'inverse de la température. Dans les 2 cas, le FDT est violé pour les faibles valeurs de la corrélation.

La manière standard d'étudier numériquement les violations du FDT est de choisir 2 observables $A(t)$ et $B(t)$ et de comparer la fonction de corrélation $C_{AB}(t, t_w) \equiv \langle A(t)B(t_w) \rangle$ à la susceptibilité $\chi_{AB}(t, t_w) \equiv \int_{t_w}^t dt' \delta \langle A(t) \rangle / \delta h_B(t') \equiv \int_{t_w}^t dt' R_{AB}(t, t')$, qui sont les quantités physiquement accessibles. Le champ $h_B(t)$ est thermodynamiquement conjugué à $B(t)$. Dans le cas où la généralisation (1.8) avec $T_{\text{eff}} = T_{\text{eff}}(C)$ est valide, et seulement dans ce cas, la susceptibilité devient une fonction maîtresse de la corrélation, indépendante du temps: $\chi_{AB} = \chi_{AB}(C_{AB})$. La pente de cette courbe est alors donnée par $d\chi_{AB}/dC_{AB} = -1/T_{\text{eff}}(C)$. C'est la variation de la susceptibilité en fonction de la corrélation, paramétrée par le temps, qui est représentée sur les courbes de la Fig. 1.6. Nous retrouverons ce graphe à plusieurs reprises par la suite.

Analytiquement, on a plus directement accès à la fonction de corrélation $C_{AB}(t, t_w)$ et à la fonction de réponse $R_{AB}(t, t_w)$. On définit alors une 'température effective', fonction des deux temps t et t_w par la relation

$$T_{\text{eff}}(t, t_w) \equiv \frac{1}{R_{AB}(t, t_w)} \frac{\partial C_{AB}(t, t_w)}{\partial t_w}. \quad (1.9)$$

Les prédictions de la théorie champ moyen sont alors testées directement sur cette fonction. Il est important de noter que lorsque celle-ci ne devient pas une fonction de la corrélation seule, les informations données par les courbes paramétriques susceptibilité - corrélation et par la fonction $T_{\text{eff}}(t, t_w)$ sont différentes. Dans ce cas (cf paragraphes 2.3 et 5.2), le contenu thermodynamique de $T_{\text{eff}}(t, t_w)$ est moins clair. Par conséquent, l'emploi de l'expression 'température effective' pourra paraître légèrement abusif.

Notons enfin que c'est une prédiction majeure de la théorie champ moyen que le choix des observables choisies pour tester le FDT n'est pas pertinent. Seule compte alors l'échelle de temps sur laquelle les violations du FDT sont mesurées, à chaque échelle de temps correspondant une valeur de la température effective [76]. Cette prédiction n'a pour l'instant pas reçu de validation numérique ou expérimentale.

C'est essentiellement sur la *dynamique* des systèmes vitreux que porte notre travail. Il est aisé de justifier cette approche par le fait que les systèmes vitreux ne sont *jamais* à l'équilibre [89]. Citons ici l'exemple standard des verres de cathédrale toujours hors équilibre plusieurs siècles après leur fabrication (et qui, malheureusement, ne coulent pas... [90]). De ce point de vue, calculer les propriétés thermodynamiques statiques peut paraître une question académique. Nous tenons cependant ici à mentionner plusieurs aspects statiques qui nous intéresseront par la suite.

La transition vitreuse

Comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, la nature précise de la transition vitreuse est loin d'être éclaircie à l'heure actuelle [91, 92]. D'un point de vue fondamental, la situation n'est donc pas très satisfaisante et justifie amplement que l'on s'intéresse (aussi) aux aspects statiques. On ne sait pas, par exemple, s'il existe une transition thermodynamique ou si cette transition correspond uniquement à un ralentissement considérable de la dynamique. Une nouvelle fois, les modèles champ moyen de verres structuraux que nous étudierons par la suite fournissent un exemple concret où tout, en particulier la thermodynamique, peut être calculé exactement. Ils fournissent donc une description précise de la transition vitreuse, qui constitue ce que l'on pourrait appeler la 'théorie champ moyen de la transition vitreuse'¹ [74].

Prenons une nouvelle fois l'exemple du modèle p -spin. À haute température, le système est dans sa phase paramagnétique. Lorsque la température est baissée, il apparaît une transition dynamique à une température $T = T_c$, non accompagnée d'une transition thermodynamique qui a lieu à $T = T_k < T_c$. La transition dynamique correspond à une divergence du temps de relaxation. Pour une température $T < T_c$, l'espace des phases est fractionné en beaucoup d'états métastables, sur un domaine d'énergie libre $f \in [f_{\min}(T), f_{\max}(T)]$ [63, 93, 94]. Dans ce cas, 'beaucoup' signifie que le nombre de ces états $\mathcal{N}(f, T)$ est tel que la limite thermodynamique

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{N}(f, T)}{N} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Sigma(f, T)}{N} \quad (1.10)$$

existe et est finie. Ceci définit donc une variable extensive $\Sigma(f, T)$, la 'complexité' ou encore l'entropie configurationnelle, qui dénombre les minima d'énergie libre, appelés dans le contexte des verres de spin 'états TAP' (pour Thouless-Anderson-Palmer [95]). La transition thermodynamique n'intervient qu'à la 'température de Kauzmann' T_k , caractérisée par l'annulation de l'entropie configurationnelle $\Sigma(f_{\min}(T_k), T_k) = 0$. Cette vision champ moyen de la transition vitreuse a essentiellement été formalisée par les travaux de Kirkpatrick, Thirumalai et Wolynes au milieu des années 80 [74]. Plus récemment, Mézard, Parisi et leurs collaborateurs [96, 97], en utilisant un formalisme proposé par Monasson [98], ont été capables de développer des méthodes systématiques de calcul de l'entropie configurationnelle, de la température de Kauzmann ainsi que d'autres quantités thermodynamiques pour différents modèles réalistes de liquides, moyennant des approximations de type hypernetted chain ('HNC') [96, 97]. Signalons enfin que la vision champ moyen de la transition,

1. Je distords ici la chronologie, car les modèles champ moyen ont fourni un exemple concret où de plus anciennes idées sur la transition vitreuse se trouvent exactement réalisées.

qui provient pour l'essentiel du modèle p -spin, fait l'objet de nombreux tests numériques à l'heure actuelle dans les verres structuraux. Je mentionne ici à titre d'exemple l'étude géométrique du paysage d'énergie [99], dont l'importance a récemment été soulignée par Cavagna [100].

La brisure de symétrie des répliques et l'ultramétrie

L'étude de la statique des verres de spin a été résolue au niveau champ moyen au tout début des années 80 par Parisi [101], qui a donné la solution du modèle de Sherrington-Kirkpatrick [64]. La transition thermodynamique est classique puisqu'il s'agit d'une transition du second ordre entre un état paramagnétique et une phase verre de spin. Cette transition thermodynamique est accompagnée d'une divergence du temps de relaxation qui a lieu à la même température que la transition statique. Ce qui est moins classique est la nature de la symétrie qui est brisée à la transition : il s'agit en effet de 'briser la symétrie des répliques' [101, 102]. Le paramètre d'ordre de la transition est alors la 'fonction de Parisi' $P(q)$, qui représente la distribution de probabilités du recouvrement entre états. C'est encore Parisi qui a donné un sens physique à ce résultat qui peut s'expliquer de la façon suivante [103]. La phase verre de spin est caractérisée par un grands nombres d'états purs ; le poids statistique d'un état pur α est w_α . La probabilité de recouvrement entre deux copies du même système est reliée à la fonction de Parisi par la relation

$$P(q) = \sum_{\alpha, \beta} w_\alpha w_\beta \delta(q - q^{\alpha\beta}), \quad (1.11)$$

où $q^{\alpha\beta}$ désigne le recouvrement entre les états α et β . Dans le cas des verres de spin champ moyen, il faut briser la symétrie des répliques une infinité de fois, et la fonction $P(q)$ est composée d'une fonction de Dirac centrée en $q = q_{EA}$ et d'une partie continue qui s'étend vers $q = 0$ [101]. Pour les verres structuraux champs moyen, en particulier le modèle p -spin, la statique est résolue en brisant une seule fois la symétrie des répliques, et la fonction $P(q)$ ne comporte pas la partie continue mais seulement 2 fonctions de Dirac en $q = 0$ et $q = q_{EA}$ [63].

De plus, la solution du modèle de Sherrington-Kirkpatrick a montré que dans le cas d'une brisure continue de la symétrie des répliques les différents états purs sont organisés de manière hiérarchique [104]. Spécifiquement, l'espace des états purs a une structure ultramétrique [105]. Cela signifie qu'en introduisant une métrique sur cet espace, c'est-à-dire une définition de la distance $d^{\alpha\beta}$ entre les états α et β , on montre la propriété suivante, qui caractérise un espace ultramétrique,

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \quad d^{\alpha\beta} \leq \max \{d^{\alpha\gamma}, d^{\gamma\beta}\}. \quad (1.12)$$

L'espace des états peut alors être décrit comme ayant une structure d'arbre. À l'extrémité des branches, on trouve les différents états, et la distance entre 2 états est représentée par la distance à l'embranchement commun le plus proche.

Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de solution analytique pour un modèle de verre de spin en dimension finie plus grande que 2 (la dimension critique inférieure se situe, croit-on, entre 2 et 3 pour les verres de spin). Depuis la solution champ moyen de Parisi, on s'est donc efforcé de comprendre si elle décrit aussi les verres de spins tridimensionnels, ou si la description phénoménologique (donc plus simple) de Fisher et Huse est

mieux adaptée. La question est encore ouverte, les 2 descriptions paraissant également susceptibles d'interpréter les différents résultats expérimentaux ou numériques. Une difficulté supplémentaire provient du fait que la plupart des tests de la théorie champ moyen sont numériques, alors que le lien entre simulations et expériences n'est pas clairement établi [106]. Un point de vue plus pragmatique, que j'adopterai par la suite², est de se demander plus modestement si le formalisme champ moyen est pertinent (ou nécessaire) pour comprendre les simulations et les expériences.

Les liens avec la dynamique

Ces différents résultats statiques sont en partie connectés aux aspects dynamiques décrits plus haut. Deux points remarquables méritent en particulier d'être soulignés. Il existe, tout d'abord, une connection entre les notions d'entropie configurationnelle (statique) et de température effective (dynamique). Dès la solution de Cugliandolo et Kurchan de la dynamique de vieillissement du modèle p -spin, on s'est aperçu que la température effective qui apparaît dans le FDT est reliée à l'entropie configurationnelle de ce même modèle par la relation [98]

$$\frac{1}{T_{\text{eff}}} = \left. \frac{\partial \Sigma(f, T)}{\partial f} \right|_{f=f_{\infty}}, \quad (1.13)$$

où f_{∞} désigne la valeur asymptotique prise par l'énergie libre, $f_{\infty} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$. La similarité entre cette relation et la définition thermodynamique usuelle de la température, $T^{-1} \equiv \partial S / \partial U$, est frappante. Ceci suggère donc de construire une mécanique statistique (ou une thermodynamique [107]) pour les degrés de liberté lents des systèmes vitreux où la notion d'état métastable remplacerait celle de micro-état, mais où subsisterait la notion d'équiprobabilité : tous les états métastables sont équivalents.

Cette analogie a été récemment développée sur la base des idées de Stillinger et Weber [108], dont le principe est d'essayer d'accéder à cette entropie configurationnelle par l'étude des structures inhérentes rencontrées dans la dynamique [109]. Cette approche fournit donc un moyen concret de dénombrer les états métastables, et donc d'accéder à l'entropie configurationnelle. Toutefois, il est important de noter que la notion même d'états métastables, qui sert de base à la définition de l'entropie configurationnelle, ne peut être rigoureusement applicable dans des systèmes réalistes [55, 110]. L'approche de type structure inhérente ne saurait donc être autre chose qu'une bonne approximation dans des cas concrets.

Ainsi, même si l'apparition, au niveau champ moyen, de tels résultats est extrêmement encourageante, il faut bien remarquer que les problèmes de la définition correcte des états métastables, de leur dénombrement dans des modèles réalistes, de la possible définition d'ensembles statistiques pour les systèmes vitreux sont des problèmes théoriques encore très largement ouverts [111].

Le second lien important entre dynamique et statique provient encore de l'étude des systèmes champ moyen. Nous avons déjà mentionné que la résolution des équations dynamiques pour des systèmes champ moyen à brisure continue de la symétrie des répliques a montré qu'à chaque valeur de la corrélation était associée une échelle de temps et une température effective $T_{\text{eff}} = T_{\text{eff}}(C)$. Les différentes échelles de temps sont, en outre,

2. Et qui provient de mes discussions avec P. Holdsworth.

organisées d'une façon hiérarchique : nous reviendrons au chapitre 5 sur cette notion d'ultramétrie dynamique. Enfin, la température effective est reliée à la fonction de Parisi statique par la relation [112]

$$x(C) \equiv \frac{T}{T_{\text{eff}}}(C) = \int_0^C dC' P(C'), \quad (1.14)$$

ce qui définit $x(C)$, le 'rapport de fluctuation-dissipation' (FDR). Des travaux ultérieurs ont donné une démonstration de cette relation (1.14), valable pour des systèmes qualifiés de 'stochastiquement stables' [112]. Techniquement, cette stabilité signifie que les propriétés du système sont inchangées lors de l'ajout d'une petite perturbation aléatoire à l'Hamiltonien initial [112]. Il est malheureusement difficile d'obtenir une manifestation concrète de cette stabilité stochastique hors la relation (1.14), ce qui rend pour l'instant l'argument quelque peu circulaire. Cette relation est toutefois extrêmement puissante, car elle relie des quantités mesurées lors de la dynamique hors équilibre à des quantités statiques, c'est-à-dire calculées avec la mesure de Gibbs. Elle permet enfin de rendre compte qualitativement de l'allure des courbes de la Fig. 1.6 : un modèle dont la statique serait résolue par un pas de brisure de symétrie des répliques donnerait lieu à des courbes paramétriques susceptibilité - corrélation faisant apparaître 2 températures (Fig. 1.6 à gauche), alors qu'avec une brisure continue de la symétrie des répliques on obtiendrait en quelque sorte une 'infinité' de températures effectives (Fig. 1.6 à droite). Sur la courbe de droite, la relation (1.14) est même testée quantitativement avec succès, puisque la courbe continue est précisément calculée en utilisant la relation (1.14) et la fonction de Parisi statique du modèle simulé [78]. Nous reviendrons aussi sur cette correspondance.

Si chacune de ces deux relations statique / dynamique a reçu une interprétation qualitative [113], il n'est pas aisé de les réconcilier, même au niveau champ moyen. Le modèle p -spin dont provient la relation (1.13) ne satisfait pas à l'Eq. (1.14), tandis qu'il n'existe pas d'interprétation claire des violations de FDT dans le modèle de Sherrington-Kirkpatrick dont provient la relation (1.14) en terme d'une entropie configurationnelle. La réconciliation de ces 2 relations, ainsi que leur test dans des modèles réalistes restent des questions encore largement ouvertes, auxquelles nous avons aussi tenté d'apporter des éléments de réponse.

Un résumé du travail de thèse

Pour étudier la dynamique forcée des systèmes vitreux, plusieurs possibilités nous sont offertes par la variété de modèles décrits dans cette introduction. Au cours de ce travail, nous nous sommes donc intéressés aux deux approches théoriques que sont les modèles de croissance de domaines et les modèles désordonnés champ moyen. La troisième voie de recherches que nous avons empruntée consiste en la simulation numérique de modèles plus réalistes mais impossibles à traiter analytiquement. Je résume ici brièvement les résultats de la thèse, ce qui constitue aussi l'annonce du plan suivi pour leur présentation. Enfin, les annexes contiennent les articles [114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123] auxquels ont donné lieu ces travaux. La thèse peut toutefois se lire indépendamment des annexes.

Vieillessement et croissance de domaines

Nous nous sommes intéressés dans une première partie de notre travail à l'approche de type croissance de domaines en nous attachant à comparer précisément cette approche aux résultats prédits par la théorie champ moyen. L'idée est de calculer, ou de mesurer numériquement, le comportement des fonctions dynamiques à deux temps (fonctions de corrélation et de réponse) et de tester la validité du FDT et de ses possibles généralisations [114, 115, 116]. Ces études nous ont permis de donner un sens physique au lien (1.14) entre statique et dynamique en proposant une généralisation de cette relation qui va bien au-delà de sa formulation initiale. Ces études nous ont permis en retour de donner une interprétation spatiale de la dynamique de vieillissement des verres de spin [117].

(i) Nous avons tout d'abord réalisé la simulation numérique de la décomposition spinodale d'un mélange binaire [114]. Ceci a confirmé le fait que les fonctions de réponse pour ce type de modèles ont un comportement compatible avec la généralisation (1.8) du FDT, avec une température effective asymptotiquement infinie. Ce résultat est aussi en accord avec la relation statique-dynamique (1.14). Une approche analytique confirme ce résultat et prédit même le comportement préasymptotique de T_{eff} , en éclairant sa signification physique.

(ii) L'étude de la séparation de phase peut être traitée analytiquement dans le cadre du modèle $O(n)$, dans la limite $n \rightarrow \infty$ [115]. Suivant les lois de conservation imposées par la dynamique, on retrouve soit le comportement standard de vieillissement simple, soit un comportement de type sous-vieillessement. La violation de la relation simple $t_r \simeq t_w$ est interprétée en terme des différentes échelles de longueur présentes dans le système. Il est à noter qu'elle apparaît dans très peu de modèles théoriques. Là encore, la température effective associée aux violations du FDT est infinie.

(iii) Le cas où la séparation de phase se fait au point critique a été exploré grâce à l'étude analytique et numérique du modèle XY en 2 dimensions [116]. Le comportement est qualitativement différent de ce qui se passe sous la température critique. La présence des fluctuations critiques sur des échelles de longueur allant de la taille du pas du réseau à celle du système induit un comportement qui ne correspond à aucune des trois familles de modèles décrites dans l'introduction. Ce comportement est en revanche quantitativement identique à ce qui est observé dans les verres de spin tridimensionnels, tant au niveau des corrélations que des fonctions de réponse, et donc des violations du FDT. La fonction de Parisi pour le modèle XY en 2 dimensions est calculée analytiquement pour des systèmes de taille finie. Nous proposons une généralisation de la relation statique / dynamique (1.14) qui établit un lien entre propriétés dynamiques à temps fini et propriétés statiques à taille finie. Cette conjecture est testée avec succès dans le régime de vieillissement du modèle XY à 2 dimensions.

(iv) Cette généralisation est ensuite étudiée dans le cas des verres de spin [117]. Nous montrons sa validité indépendamment de l'existence d'une transition de phase de type brisure de symétrie des répliques en étudiant numériquement la dynamique d'un verre de spin à 2 dimensions, qui est paramagnétique à toute température. Cette étude permet de donner une interprétation spatiale de la dynamique de vieillissement des verres de spin, qui n'est pas incluse dans la théorie champ moyen sous sa forme actuelle, en mettant en avant le rôle essentiel joué par la 'longueur de cohérence'.

Croissance de domaines en présence d'un écoulement

L'étude de la dynamique forcée des systèmes vitreux commence naturellement par celle des systèmes vitreux 'les plus simples' que sont les séparations de phase. Il est toutefois apparu au cours de ce travail que l'étude du phénomène de croissance de domaines forcé par un écoulement constitue un axe de recherches en soit et soulève de nombreux problèmes qui sont encore loin d'être quantitativement résolus. Nous avons donc essayé de donner une contribution à ce vaste problème grâce à 2 études numériques [118, 119].

(i) Le premier travail [118] porte sur le problème de la croissance de domaines forcée par un cisaillement homogène, qui est un cas très étudié dans la littérature, en tant que premier pas vers des écoulements plus complexes. L'enjeu est de comprendre de manière quantitative comment l'écoulement modifie la croissance de domaines et si, éventuellement, il la stoppe. Nous avons donné une réponse à ces questions dans l'approximation où la séparation de phase n'influe pas en retour sur le champ de vitesse.

(ii) Le second travail [119] est une tentative originale de s'approcher d'écoulements plus complexes, éventuellement turbulents. Il considère en effet le cas où la séparation de phase se déroule dans un écoulement chaotique, c'est-à-dire caractérisé par la dispersion exponentielle de 2 conditions initiales voisines. Dans ce cas, l'écoulement est capable de stopper la séparation de phase. Le système atteint alors un état stationnaire dynamique, caractérisé par la compétition entre les phénomènes de dispersion chaotique et de décomposition spinodale.

Rhéologie des systèmes vitreux

Une partie majeure de notre travail a consisté en l'étude théorique de la dynamique forcée des systèmes vitreux dans le cadre des modèles champ moyen décrits dans cette introduction. Dans le cas où le forçage consiste en une force non-conservative constante, nous avons obtenu les résultats théoriques et numériques suivants [120, 121, 122].

(i) L'étude de la dynamique hors équilibre du modèle p -spin en présence d'une force non-conservative constante a donné lieu à une description très précise du diagramme des phases Forçage - Température, directement applicable à la rhéologie non linéaire des liquides surfondus et des fluides complexes [120]. Le comportement du temps de relaxation en fonction de l'amplitude du forçage est très similaire à celui de la Fig. 1.3. Le phénomène de rhéofluidification est en particulier bien décrit par une loi de puissance, $\eta \simeq \gamma^{-2/3}$. Quelles que soient l'intensité du forçage et la température, le temps de relaxation est fini : le vieillissement est donc stoppé par le cisaillement. Un aspect nouveau pour la rhéologie est l'apparition d'une température effective différente de celle du bain thermique pour les degrés de liberté structuraux en présence d'un cisaillement.

(ii) Ces résultats théoriques ont été testés dans la simulation numérique par dynamique moléculaire d'un liquide de type Lennard-Jones sous cisaillement homogène [121]. Alors que la rhéologie du liquide surfondu était assez bien connue, les violations du FDT et l'apparition d'une température effective sous l'action du cisaillement sont des aspects totalement nouveaux.

(iii) Dans le cas des verres de spin, l'image qui se dégage est la généralisation à une infinité d'échelles de temps du comportement à 2 échelles de temps obtenu pour les verres structuraux [122]. Ces échelles de temps sont organisées de façon hiérarchique, et l'on obtient la contrepartie dynamique de la solution statique de Parisi de ces modèles. L'étude des verres de spin forcés permet une mise en évidence très directe de cette hiérarchie,

plus difficile à observer lors du régime de vieillissement. La simulation numérique par la méthode de Monte-Carlo d'un verre de spin tridimensionnel ne fait cependant pas apparaître clairement cette construction, mais ressemble plus à ce qui se passerait à un point critique.

Cas du forçage alternatif: analogie avec les matériaux granulaires

Le cas du forçage alternatif a permis de s'intéresser une nouvelle fois au plan Forçage - Température du diagramme des phases de la Fig. 1.4 pour le modèle p -spin [123]. Alors que la présence d'une perturbation non-Hamiltonienne, si petite soit-elle, rend le temps de relaxation fini, une perturbation sinusoïdale ne stoppe le vieillissement que si son amplitude est suffisamment forte. Il existe donc, pour une fréquence donnée, une transition dynamique entre une phase 'vitreuse' caractérisée par un temps de relaxation infini, et une phase 'liquide' où le temps de relaxation est fini.

Cette phénoménologie est tout à fait similaire à celle des matériaux granulaires sous vibration modérée, et les analogies et différences entre les 2 systèmes sont analysées en détail. Là encore, il apparaît une température effective pour les degrés de liberté lents. Ces résultats renforcent la similarité entre systèmes vitreux et granulaires et ouvrent la voie à une description thermodynamique des granulaires très similaire à celle des verres.

2. DYNAMIQUE LENTE ET CROISSANCE DE DOMAINES

Lorsqu'il y a de nombreuses interprétations possibles, il ne faut pas en choisir une bonne pour écarter les autres : si chacune explique quelque chose, elles sont toutes vraies.

F. CAMON, *La maladie humaine.*

Dans ce premier chapitre, nous étudions la dynamique de vieillissement de divers modèles de croissance de domaines. Nous avons rappelé dans l'introduction que le processus de croissance de domaines conduit naturellement à des fonctions de corrélation très similaires à celles de la Fig. 1.2. La théorie dynamique champ moyen suggère de s'intéresser aux autres fonctions dynamiques que sont les fonctions de réponse, et donc aux violations du FDT. C'est ce que nous faisons ici dans le cadre des phénomènes de séparation de phase. Dans chaque cas, nous portons notre attention sur les fonctions d'autocorrélation et leurs fonctions de réponse conjuguées.

Avant ces travaux, Cugliandolo et Dean [81] avaient résolu la dynamique de vieillissement du modèle p -spin sphérique pour $p = 2$. Dans ce cas, le modèle est équivalent au modèle $O(n)$ à trois dimensions dans la limite $n \rightarrow \infty$. A. Barrat [80] avait quant à lui obtenu des résultats numériques (par des simulations Monte Carlo) pour les fonctions de réponse lors de la croissance de domaines dans le cadre du modèle d'Ising à 2 et 3 dimensions. Ces travaux avaient montré que les fonctions de réponse dans ces modèles se comportent asymptotiquement différemment des modèles champ moyen de verres ou de verres de spin en ce sens que la susceptibilité ne vieillit pratiquement pas. La pente des courbes paramétriques susceptibilité - corrélation est alors nulle pour $C < q_{EA}$ ce qui correspond asymptotiquement à une température effective infinie, $T_{\text{eff}} = \infty$ [76].

Très récemment enfin, Godrèche et Luck d'une part [124, 125], et Zannetti et ses collaborateurs d'autre part [126, 127], se sont intéressés à un cas un peu différent où le système, toujours après avoir été préparé dans un état complètement désordonné, est soudain placé à un point critique de son diagramme des phases. Il a ainsi été montré que le comportement 'canonique' de ces modèles (décrit dans le paragraphe suivant) est modifié, la relation (1.14) étant même violée pour la chaîne d'Ising. Le cas du modèle XY à 2 dimensions est donc considéré, car il a l'avantage de présenter une ligne continue de points critiques et de se prêter à une approche analytique assez complète. Il nous permet enfin de proposer une généralisation de la relation (1.14) incluant une description spatiale du vieillissement, et lui donnant un sens physique nouveau.

Cette généralisation est enfin testée numériquement dans un modèle de verre de spin, le modèle d'Edwards-Anderson, permettant une compréhension du vieillissement dans les verres de spin comme une équilibration successive d'excitations de plus en plus grandes, conduisant à la définition d'une 'longueur de cohérence'. Ce dernier point semble expliquer le vieillissement dans les verres de spin comme une sorte de croissance de domaines, justifiant la position de ces résultats dans ce chapitre. Nous verrons cependant que la situation est en fait un peu différente.

2.1 Exemple canonique de la décomposition spinodale

2.1.1 Modèles et méthodes numériques

La description standard d'une séparation de phase consiste en une dynamique de Langevin pour un paramètre d'ordre scalaire $\phi(\mathbf{x}, t)$ [51]

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\Gamma \left(\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} \right) + \zeta(\mathbf{x}, t). \quad (2.1)$$

Cette équation est l'équation de Ginzburg-Landau dépendant du temps, dans laquelle nous avons introduit un coefficient de transport Γ , et un bruit thermique ζ qui est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance $\langle \zeta(\mathbf{x}, t) \zeta(\mathbf{x}', t') \rangle = 2T \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$. La fonctionnelle d'énergie libre $F[\phi]$ est du type Ginzburg-Landau-Wilson

$$F[\phi] = \int d^d \mathbf{x} \left[\frac{\xi_{\text{eq}}}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{4} \phi^4 - \frac{1}{2} \phi^2 \right], \quad (2.2)$$

où ξ_{eq} représente la longueur de corrélation à l'équilibre et d est le nombre de dimensions spatiales. Si l'on veut décrire la séparation de phase d'un mélange binaire, la conservation de la matière modifie la dynamique, et on doit alors étudier l'équation de Cahn-Hilliard [51]

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \Gamma \nabla^2 \left(\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} \right) + \zeta(\mathbf{x}, t), \quad (2.3)$$

où la variance du bruit thermique Gaussien est cette fois donnée par $\langle \zeta(\mathbf{x}, t) \zeta(\mathbf{x}', t') \rangle = -2T \delta(t - t') \nabla^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Cette équation a la forme d'une équation de continuité $\partial_t \phi = -\nabla \cdot \mathbf{j}$ avec un courant $\mathbf{j} = -\Gamma \nabla (\delta F / \delta \phi)$, ce qui montre que la dynamique est gouvernée par les gradients de potentiel chimique $\mu \equiv \delta F / \delta \phi$.

Dans les 2 cas, on doit encore spécifier les conditions initiales associées à ces équations différentielles du premier ordre en temps. Le système étant complètement désordonné à $t = 0$, on choisit de décrire $\phi(\mathbf{x}, 0)$ par une distribution Gaussienne de moments

$$\langle \phi(\mathbf{x}, 0) \rangle = 0; \quad \langle \phi(\mathbf{x}, 0) \phi(\mathbf{x}', 0) \rangle = \Delta \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.4)$$

Ainsi posé, le problème de la séparation de phase se ramène donc à celui de la résolution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre, évidemment impossible à résoudre analytiquement de façon exacte. Le processus est cependant très bien compris, même au niveau quantitatif, et nous renvoyons à la très complète revue de Bray pour les nombreuses approches théoriques utilisées [51].

Pour notre part, nous avons développé un algorithme pour résoudre numériquement l'équation de Cahn-Hilliard en deux dimensions spatiales. La solution numérique consiste à discrétiser le temps (en pas de temps Δt), l'espace (en pas $\Delta x = \Delta y$), et à prendre des conditions aux limites périodiques dans un système de dimensions linéaires finies L_x et L_y . Les dérivées temporelles sont traitées grâce à une méthode d'Euler semi-implicite, tandis que les dérivées spatiales sont calculées par une méthode spectrale (passage dans l'espace de Fourier) [128]. L'espace est mesuré en unités de ξ_{eq} et le temps en unités de

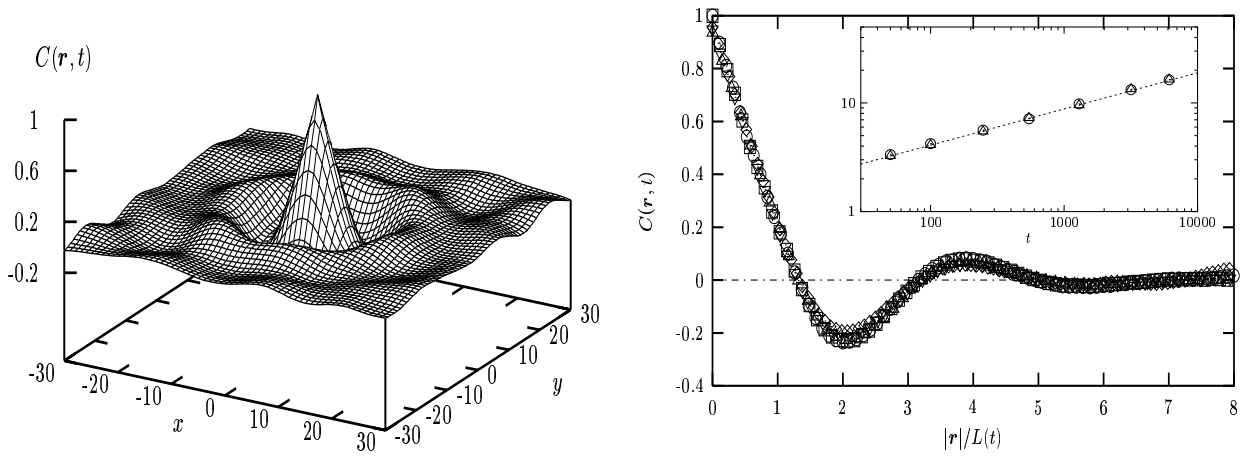


Fig. 2.1: À gauche : fonction de corrélation à deux points lors de la décomposition spinodale, pour un temps $t = 100$. À droite : la fonction de corrélation est moyennée circulairement et représentée en fonction de la variable réduite $|\mathbf{r}|/L(t)$, avec $L(t) \simeq R_x(t) \simeq R_y(t)$ pour différents temps $t \in [50, 1000]$. Les 2 fonctions $R_x(t)$ (cercles) et $R_y(t)$ (triangles) sont représentées dans l'encart de la figure de droite ; la ligne pointillée est la loi de puissance $L(t) \simeq t^{1/3}$.

$t_0 \equiv \xi_{\text{eq}}^2/\Gamma$. On obtient alors dans l'espace de Fourier la relation de récurrence pour passer du pas de temps n au pas $n + 1$. Elle s'écrit

$$\phi(\mathbf{k}, t_{n+1}) = \frac{1}{1 + (k^4 - k^2)\Delta t} \cdot \left(\phi(\mathbf{k}, t_n) - k^2 \phi^3(\mathbf{k}, t_n) + \sqrt{k} \zeta(\mathbf{k}, t_n) \right). \quad (2.5)$$

Les vecteurs d'onde sont maintenant de la forme $\mathbf{k} = (2\pi i/L_x, 2\pi j/L_y) \equiv (k_{x_i}, k_{y_i})$ et la variable ζ a pour variance $\langle \zeta(k_{x_i}, k_{y_j}, t_n) \zeta(k_{x_k}, k_{y_l}, t_m) \rangle = 2T\Delta t \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} / (\Delta x \Delta y)$.

2.1.2 Structure et croissance des domaines

Nous décrivons brièvement ici les principaux aspects de la séparation de phase, en nous appuyant sur nos résultats numériques. Nous calculons ensuite les quantités dynamiques qui nous intéressent. Le résultat de base du processus de décomposition spinodale a été présenté sur la Fig. 1.5. Après un temps très court, correspondant au temps microscopique de formation d'une interface, $t \simeq t_0 = \xi_{\text{eq}}^2/\Gamma$, de petits domaines sont formés dans lesquels le paramètre d'ordre vaut $\phi \simeq \pm 1$. Le système prend alors une structure bicontinue et isotrope que l'on peut simplement caractériser par une taille typique $L(t)$ qui croît avec le temps t , cf Fig. 1.5.

Plus quantitativement, cette évolution peut être décrite par la fonction de corrélation à deux points

$$C(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{V} \int d^d \mathbf{x} \langle \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle \quad (2.6)$$

dont la transformée de Fourier est le facteur de structure, expérimentalement accessible dans une expérience de diffusion de la lumière (ou de rayons X dans le cas des alliages)

$$S(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{1}{V} \langle \phi(\mathbf{k}, t) \phi(-\mathbf{k}, t) \rangle, \quad (2.7)$$

avec $\phi(\mathbf{k}, t) \equiv \int d^d \mathbf{x} \phi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$. La fonction de corrélation (2.6) est représentée sur la Fig. 2.1. L'isotropie de cette fonction reflète celle des structures de la Fig. 1.5. En calculant l'intersection de cette surface avec un plan horizontal $z = \text{const}$, on obtient la forme moyenne des domaines. Dans ce cas, les domaines sont circulaires. Ce résultat n'est pas forcément intuitif, car les images de la Fig. 1.5 montrent plutôt l'existence de 'tubes' dont il faudrait caractériser la taille par 2 échelles de longueur. En fait, une seule longueur $L(t)$ suffit ; elle représente la 'largeur' de ces 'tubes'. On extrait la taille typique des domaines $R_x(t)$ et $R_y(t)$ dans les directions (Ox) et (Oy). L'encart de la Fig. 2.1 donne la variation temporelle de ces longueurs. La croissance de domaines est très bien représentée par la loi de Lifshitz-Slyozov-Wagner $L(t) \simeq R_x(t) \simeq R_y(t) \simeq t^{1/3}$ [51]. On peut comprendre simplement cette loi en écrivant que le potentiel chimique près d'une interface est donné par $\mu \simeq \sigma/L(t)$, où σ est la tension de surface. La vitesse de l'interface $dL(t)/dt$ est de l'ordre de grandeur du gradient de potentiel chimique, et donc

$$\frac{dL(t)}{dt} \simeq \frac{\sigma}{L^2(t)} \quad \Rightarrow \quad L(t) \simeq (\sigma t)^{1/3}, \quad (2.8)$$

qui est la loi de puissance mesurée sur la Fig. 2.1. Cet argument simple est dû à Huse [129].

Un second aspect intéressant de la décomposition spinodale est lui aussi visible sur les images de la Fig. 1.5. Lors de la croissance des domaines, dans le régime caractérisé par $\xi_{\text{eq}} \ll L(t) \ll L$, la seule échelle de longueur qui caractérise le système est la taille des domaines $L(t)$. L'hypothèse d'échelle consiste alors à écrire que toutes les propriétés statistiques sont indépendantes du temps lorsque l'unité de longueur choisie est $L(t)$. Par exemple, pour les fonctions à deux points définies plus haut, on aura

$$C(\mathbf{r}, t) \simeq \mathcal{C} \left(\frac{|\mathbf{r}|}{L(t)} \right) \quad \Leftrightarrow \quad S(\mathbf{k}, t) \simeq L(t)^d \mathcal{S}(|\mathbf{k}|L(t)), \quad (2.9)$$

où $\mathcal{C}(x)$ et $\mathcal{S}(x)$ sont deux fonctions d'échelle, transformées de Fourier l'une de l'autre. Cette hypothèse est testée avec succès sur la Fig. 2.1.

2.1.3 Vieillessement et violations du FDT

Nous nous intéressons maintenant aux fonctions dynamiques à deux temps dans le but de caractériser le vieillissement du système. La première fonction dynamique que nous étudions est la fonction d'autocorrélation définie par

$$C(t, t_w) = \frac{1}{V} \int d^d \mathbf{x} \langle \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t_w) \rangle. \quad (2.10)$$

Le vieillissement du système est clairement démontré sur la Fig. 2.2, où la fonction de corrélation $C(t, t_w)$ est représentée en fonction de $t - t_w$, à différents 'âges' t_w du système¹. Dans un système à l'équilibre, toutes les courbes se superposeraient. Ce n'est pas le cas ici. Le système n'est donc pas invariant par translation dans le temps : il 'vieillit'. On remarque de plus que ces courbes sont qualitativement très similaires à celles de la Fig. 1.2. On peut donc décomposer la corrélation en une partie stationnaire qui décrit

1. On a en fait représenté la fonction à deux temps $C(t, t) - C(t, t_w)$ pour éviter des problèmes de normalisation. Une autre solution aurait été de calculer la fonction de corrélation $C(t, t_w) = \langle \text{sgn}[\phi(\mathbf{x}, t)] \text{sgn}[\phi(\mathbf{x}, t_w)] \rangle$.

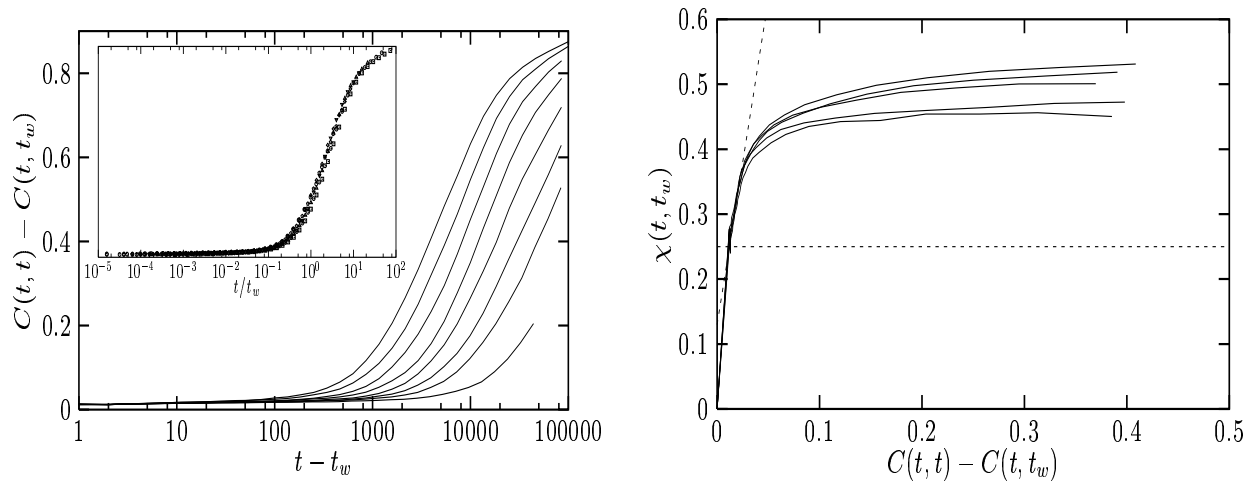


Fig. 2.2: À gauche : fonctions d'autocorrélation $C(t, t_w)$ en fonction de la différence des temps $t - t_w$ pour $t_w = 317, 502, 796, 1262, 2000, 3170, 5024, 7962$ (de gauche à droite). La loi de vieillissement simple est démontrée dans l'encart où les mêmes données sont représentées en fonction de la variable d'échelle t/t_w . À droite : courbes susceptibilité - corrélation paramétrées par la différence des temps $t - t_w$, pour différents temps $t_w = 317, 502, 796, 2000, 5024$ (de haut en bas). La ligne horizontale est la valeur χ_{eq} et la relation linéaire d'équilibre, $\chi(t, t_w) = [C(t, t) - C(t, t_w)]/T$, est indiquée en pointillé.

les fluctuations intra-domaines, et une partie vieillissante qui provient des fluctuations dues au mouvement des parois de domaines : $C(t, t_w) = C_{\text{stat}}(t - t_w) + C_{\text{aging}}(t, t_w)$. La partie stationnaire représente les fluctuations d'équilibre à l'intérieur d'un des domaines. On a donc $q_{EA} = \lim_{t-t_w \rightarrow \infty} C_{\text{stat}}(t - t_w) = \langle \phi \rangle_{\text{eq}}^2$. Les résultats numériques présentés dans ce paragraphe sont obtenus à basse température, $T = 0.1$. La partie stationnaire de la corrélation est donc quasiment inexistante, avec un paramètre d'Edwards-Anderson proche de 1, $q_{EA} \simeq 1$. L'hypothèse d'échelle nous permet de prédire la forme de la partie $C_{\text{aging}}(t, t_w)$ de la corrélation

$$C_{\text{aging}}(t, t_w) \simeq \mathcal{C}\left(\frac{L(t)}{L(t_w)}\right) \simeq \mathcal{C}\left(\frac{t}{t_w}\right), \quad (2.11)$$

où $\mathcal{C}(x)$ est une fonction d'échelle [130]. Cette forme est testée avec succès dans l'encart de la fig. 2.2. On retrouve donc la forme de vieillissement simple en t/t_w , mais aussi la forme générale prédite par les modèles champ moyen en $h(t)/h(t_w)$ avec ici $h(t) = L(t) \simeq t^{1/3}$. Cette similitude suggère donc d'interpréter la fonction $h(t)$ comme une échelle de longueur en train de croître dans le système. Remarquons enfin que la loi de vieillissement simple en t/t_w — dont nous avons déjà souligné qu'elle signifie que t_w est la seule échelle de temps pertinente — est l'analogue direct de l'hypothèse d'échelle qui stipule que $L(t)$ est la seule échelle de longueur pertinente dans la séparation de phase.

Nous analysons maintenant le comportement des fonctions de réponse et les violations du FDT. Nous mesurons donc la susceptibilité $\chi(t, t_w)$ définie par l'intégrale de la fonction

de réponse $R(t, t_w)$,

$$\chi(t, t_w) = \int_{t_w}^t dt' R(t, t'), \quad R(t, t_w) = \frac{1}{V} \int d^d \mathbf{x} \frac{\delta \langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle}{\delta h(\mathbf{x}, t_w)}, \quad (2.12)$$

où le champ $h(\mathbf{x}, t)$ modifie la fonctionnelle d'énergie libre par le terme

$$\Delta F[\phi] = - \int d^d \mathbf{x} h(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t). \quad (2.13)$$

Concrètement, la susceptibilité $\chi(t, t_w)$ est calculée en ajoutant entre les temps t_w et t un champ constant, spatialement aléatoire Gaussien de moyenne nulle et de variance h_0 . La susceptibilité est alors reliée à l'aimantation alternée,

$$\chi(t, t_w) \simeq \frac{1}{h_0^2 V} \int d^d \mathbf{x} \langle h(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (2.14)$$

l'égalité n'étant réalisée que dans la limite $h_0 \rightarrow 0$. Numériquement, on doit appliquer un champ d'amplitude finie et donc tester avec beaucoup de soins la validité de la réponse linéaire. La Fig. 2.2 représente les variations de $\chi(t, t_w)$ en fonction de $C(t, t_w)$, relation paramétrée par la différence des temps $t - t_w$. À l'équilibre, lorsque le FDT est vérifié, on obtient la relation linéaire $\chi(t, t_w) = [C(t, t) - C(t, t_w)]/T$.

On voit que le FDT est bien vérifié pour de faibles valeurs de $C(t, t) - C(t, t_w)$ correspondant à une différence de temps $t - t_w \ll t_w$ et donc au régime dominé par les fluctuations intra-domaines : ces fluctuations sont donc des fluctuations d'équilibre et le trait pointillé horizontal dénote la valeur $\chi_{\text{eq}} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{t_w \rightarrow \infty} \chi(t, t_w) = (1 - q_{EA})/T$. La Fig. 2.2 montre aussi clairement que le FDT est violé pour des temps $t - t_w \gg t_w$: la courbe paramétrique s'écarte de la relation linéaire d'équilibre. Lorsque t_w augmente, les courbes paramétriques montrent que la fonction de réponse varie très peu lorsque la corrélation tombe à 0, la pente $d\chi/dC$ de la courbe paramétrique devenant de plus en plus faible, impliquant donc $T_{\text{eff}} \rightarrow \infty$: les résultats numériques confirment donc ce qu'avaient trouvé Cugliandolo et Dean [81] d'une part, et A. Barrat [80] d'autre part. Ce résultat a depuis été retrouvé dans divers modèles ferromagnétiques [82], et il est aussi obtenu en présence de désordre [83].

Enfin, ce résultat est attendu si l'on admet le lien entre la fonction de Parisi statique et le rapport de fluctuation-dissipation mesuré dynamiquement, Eq. (1.14). En effet, la fonction de Parisi pour un matériau ferromagnétique est simplement $P(q) = \delta(q - q_{EA})$, ce qui implique que $x(C > q_{EA}) = 1$ et $x(C < q_{EA}) = 0$. De plus, le fait que $x = 0$ est cohérent avec la relation (1.13) puisque la complexité Σ est nulle pour un matériau ferromagnétique, l'équation (1.13) impliquant alors $T_{\text{eff}} = \infty$.

2.1.4 Que signifie le résultat $T_{\text{eff}} = \infty$?

Nous justifions maintenant ce résultat par une approche analytique, ce qui va nous permettre de donner une interprétation physique assez générale des violations du FDT lors d'une croissance de domaines.

Le but du calcul est donc de donner une forme d'échelle pour la fonction de réponse que nous décomposons en

$$\chi(t, t_w) = \chi_{\text{stat}}(t - t_w) + \chi_{\text{aging}}(t, t_w), \quad (2.15)$$

la première partie provenant de la réponse d'équilibre intra-domaine, tandis que la seconde correspond à la réponse des spins qui sont situés à proximité des interfaces. On calcule tout d'abord aisément la valeur asymptotique de la réponse à l'équilibre, χ_{eq} . En se plaçant à basse température et en linéarisant autour de l'équilibre, le problème devient Gaussien et on obtient

$$\chi_{\text{eq}} = \int d^d \mathbf{k} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2 + \xi_{\text{eq}}^{-2}}. \quad (2.16)$$

Le calcul explicite des premières corrections en température à l'expression (2.16) montre qu'elles sont négligeables pour $T = 0.1$, en accord avec le résultat de la simulation numérique directe d'équilibre (comportant un seul domaine). L'expression (2.16) étant divergente pour $d > 1$, on doit introduire un cutoff UV pour régulariser toutes les expressions. On introduit alors un facteur $\exp(-k^2 a^2)$ dans les intégrales sur l'espace de Fourier, a jouant le rôle du pas du réseau. On obtient alors la divergence de χ_{eq} avec a : $\chi_{\text{eq}} \simeq a^{2-d}$ pour $d > 2$ et $\chi_{\text{eq}} \simeq \ln(a/\xi_{\text{eq}})$ pour $d = 2$.

Pour calculer le comportement de χ_{aging} , on peut utiliser l'une des approches proposées pour décrire le comportement asymptotique des séparations de phase [51]. Celles-ci donnent de très bons résultats dans le cas où le paramètre d'ordre n'est pas une quantité conservée, Eq. (2.1), et nous considérons tout d'abord cette situation. Le principe de toutes ces approches est de remplacer le paramètre d'ordre $\phi(\mathbf{x}, t)$ qui prend la valeur ± 1 dans les domaines et varie rapidement près des interfaces par un champ auxiliaire $m(\mathbf{x}, t)$ qui absorbe les variations rapides de ϕ . À temps longs, on aura la relation $\phi \simeq \text{sgn}(m)$. On calcule ensuite l'équation d'évolution de m en présence du champ h

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \nabla^2 m - \sum_{a,b=1}^d n_a n_b \nabla_a \nabla_b m + h |\nabla m|, \quad (2.17)$$

où $\mathbf{n} \equiv \nabla m / |\nabla m|$ est le vecteur normal à la paroi. On utilise maintenant l'approximation de Ohta, Jasnow et Kawasaki (OJK) [131] pour effectuer les remplacements $n_a n_b \rightarrow \delta_{ab}/d$ (moyenne circulaire) et $|\nabla m| \rightarrow \langle (\nabla m)^2 \rangle^{1/2} \equiv a(t)$. On obtient alors une équation auto-cohérente

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D \nabla^2 m + a(t) h, \quad D \equiv \frac{d-1}{d}. \quad (2.18)$$

La susceptibilité cherchée est reliée au champ auxiliaire m par la relation

$$\chi_{\text{aging}}(t, t_w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\langle h(\mathbf{x}) m(\mathbf{x}, t) \rangle}{h_0^2 \sqrt{\langle m^2 \rangle}}, \quad (2.19)$$

en appliquant le champ h entre les instants t_w et t . On résout l'équation (2.18) pour obtenir

$$m(\mathbf{k}, t) = m(\mathbf{k}, 0) e^{-k^2 D t} + h(\mathbf{k}) \int_{t_w}^t dt' a(t') e^{-k^2 D (t-t')}, \quad (2.20)$$

d'où l'on déduit les comportements à temps longs $\langle m^2 \rangle \simeq \Delta (Dt)^{-d/2}$ et $a(t) \simeq \sqrt{\Delta} t^{-(d+2)/4}$. On peut alors déduire la réponse due aux interfaces qui se met sous la forme

$$\chi_{\text{aging}}(t, t_w) \simeq \int d^d \mathbf{k} \int_t^{t_w} dt' e^{-k^2 D (t-t')} \frac{(Dt)^{d/4}}{(Dt')^{(d+2)/4}}, \quad (2.21)$$

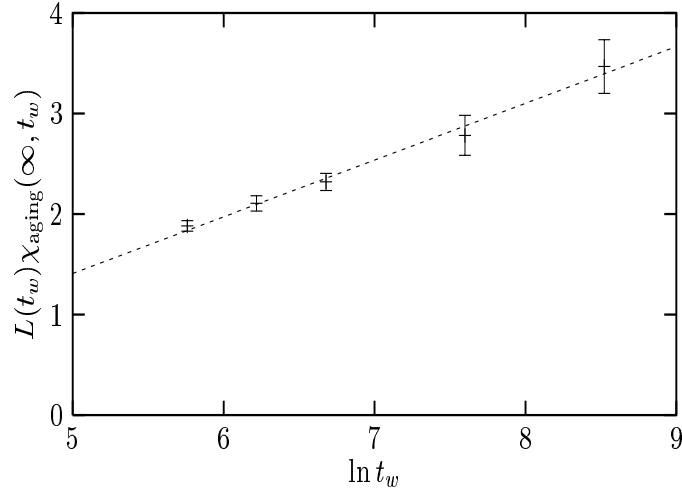


Fig. 2.3: Test de la dépendance de la hauteur du plateau des courbes paramétriques avec t_w . Pour $d = 2$, on attend $\chi_{\text{aging}}(\infty, t_w) \simeq \ln L(t_w)/L(t_w)$, en accord avec les données numériques obtenues dans la décomposition spinodale.

où la contribution de chaque vecteur d'onde \mathbf{k} est clairement apparente. On obtient finalement le comportement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{\text{aging}}(t, t_w)}{\chi_{\text{eq}}} &\simeq \frac{1}{t_w^{1/2}} \mathcal{F}\left(\frac{t}{t_w}\right) & d > 2, \\ &\simeq \frac{\ln(t_w^{1/2}/a)}{\ln(a/\xi_{\text{eq}})} \frac{1}{t_w^{1/2}} \mathcal{F}\left(\frac{t}{t_w}\right) & d = 2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où la fonction d'échelle $\mathcal{F}(x)$ est définie par

$$\mathcal{F}(x) \equiv \lim_{A \rightarrow 0} \int_1^x \frac{dx'}{A^{2-d}} \frac{x'^{d/4}}{x'^{(d+2)/4}} \frac{1}{(x - x' + A^2)^{d/2}}. \quad (2.23)$$

Il est alors immédiat, en utilisant les relations (2.11) et (2.22) de déduire que le FDR est asymptotiquement nul pour toute dimension $d \geq 2$,

$$x(C) = 0, \quad C < q_{EA}. \quad (2.24)$$

Ce résultat peut se retrouver par des arguments assez simples en calculant la réponse des interfaces due au champ aléatoire. L'intérêt est que le résultat est alors indépendant de la dynamique choisie. On peut en effet écrire que

$$\chi_{\text{aging}}(t, t_w) = \chi_{\text{aging}}^>(t, t_w) + \chi_{\text{aging}}^<(t, t_w) \quad (2.25)$$

où l'on a distingué la réponse provenant des vecteurs d'onde plus grands ('>') et plus petits ('<') que $2\pi/L(t_w)$. Les modes de petits vecteurs d'onde, $k \ll 2\pi/L(t_w)$, donnent une contribution similaire à celle d'un champ uniforme [51],

$$\chi_{\text{aging}}^<(t, t_w) \simeq \int_{\frac{2\pi}{L}}^{\frac{2\pi}{L(t_w)}} d^d \mathbf{k} L(t_w) \mathcal{F}_1\left(\frac{L(t)}{L(t_w)}\right) \simeq \frac{1}{L(t_w)^{d-1}} \mathcal{F}_2\left(\frac{L(t)}{L(t_w)}\right), \quad \forall d. \quad (2.26)$$

La susceptibilité d'un mode de grand vecteur d'onde, $k \gg 2\pi/L(t_w)$, est proportionnelle à k^{-2} et à la densité d'interfaces $L(t)^{-1}$. On a donc

$$\chi_{\text{aging}}^>(t, t_w) \simeq \int_{\frac{2\pi}{L(t_w)}}^{\frac{2\pi}{a}} d^d \mathbf{k} \frac{1}{k^2 L(t)}, \quad (2.27)$$

ce qui conduit aux relations

$$\begin{aligned} \chi_{\text{aging}}^>(t, t_w) &\simeq \frac{1}{L(t_w)} \mathcal{F} \left(\frac{L(t)}{L(t_w)} \right), & d > 2, \\ &\simeq \frac{\ln(L(t_w)/a)}{L(t_w)} \mathcal{F} \left(\frac{L(t)}{L(t_w)} \right), & d = 2, \\ &\simeq \mathcal{F} \left(\frac{L(t)}{L(t_w)} \right), & d = 1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Cet argument physique conduit donc naturellement à la relation (2.24) pour des dimensions spatiales $d \geq 2$. Il prédit aussi une décroissance très lente de la susceptibilité $\chi_{\text{aging}}(\infty, t_w) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \chi_{\text{aging}}(t, t_w)$ en dimension $d = 2$, ce que les données numériques confirment sur la Fig. 2.3. On voit donc que pour toute dimension $d \geq 2$, la violation du FDT est compatible avec la description champ moyen, avec $T_{\text{eff}} = \infty$.

L'argument montre enfin qu'en dimension $d = 1$, la susceptibilité est une fonction de la seule variable t/t_w , tout comme la fonction de corrélation. Ceci implique donc qu'en dimension $d = 1$, le FDR n'est pas nul et que les courbes paramétrique susceptibilité - corrélation sont indépendantes de t_w . Comme pour les modèles champ moyen, on atteint donc une courbe maîtresse $\chi = \chi(C)$, mais avec une violation de la relation (1.14). Ce résultat a récemment fait l'objet de trois articles [124, 126, 127] soulignant deux faits. (i) En dimension 1, la trempe se fait au point critique $T = 0 \equiv T_c$ [124], (ii) la violation de la relation (1.14) est due à la contribution des interfaces [127]. Nous reviendrons sur ces deux points au paragraphe 2.3, où nous montrons aussi qu'il convient de clairement distinguer ces deux effets.

On peut enfin donner plusieurs interprétations physiques pour cette température effective infinie.

- Nous avons d'abord signalé son interprétation statique utilisant les 2 relations (1.13) et (1.14). Cet argument n'est valable que si la densité d'interfaces décroît suffisamment vite, de sorte que seule la contribution intra-domaine de la susceptibilité est pertinente [127].
- Une interprétation plus qualitative provient du fait que si l'on 'regarde' le système sur une échelle de longueur $L \gg L(t_w)$, il apparaît essentiellement désordonné, comme il l'était dans son état initial correspondant à une température $T = \infty$. Cette interprétation suppose un lien échelles de longueur / échelles de temps : le système équilibre d'abord sur les petites échelles ($T_{\text{eff}} \simeq T$), tandis que les grandes échelles gardent la mémoire de leur état initial désordonné ($T_{\text{eff}} \gg T$). Nous réutiliserons cet argument au paragraphe 2.3.
- Un point de vue alternatif provient d'une analogie avec les processus thermiquement activés. Un système en contact avec un bain thermique à la température T_{bain} passe

une barrière d'énergie de hauteur ΔE en un temps typique $\tau \propto \exp(\Delta E/T_{\text{bain}})$. On peut donc interpréter une température effective $T_{\text{eff}} > T_{\text{bain}}$ soit comme un bain thermique effectif avec $T_{\text{bain}} = T_{\text{eff}}$, soit comme une barrière d'énergie effective avec $\Delta E_{\text{eff}} = \Delta E \cdot T_{\text{bain}}/T_{\text{eff}}$. Dans cette image, $T_{\text{eff}} = \infty$ est équivalent à $\Delta E_{\text{eff}} = 0$: c'est précisément ce qui se produit pour une séparation de phase où le mouvement des parois requiert le passage d'une barrière d'énergie nulle [132, 133].

2.2 Un cas soluble : Le modèle $O(n)$ pour $n \rightarrow \infty$

L'étude du cas standard de la décomposition spinodale d'un mélange binaire nous a permis d'exposer la phénoménologie classique des séparations de phase ainsi que ses liens avec la dynamique de vieillissement d'autres systèmes vitreux. Nous étudions dans ce paragraphe la généralisation du modèle précédent au cas où le paramètre d'ordre est un vecteur à n composantes : c'est le modèle $O(n)$ dont on peut résoudre exactement la dynamique dans la limite où le nombre de composantes est grand, $n \rightarrow \infty$ [134]. Notre contribution a été d'utiliser les résultats connus sur le modèle $O(n)$ pour calculer les fonctions dynamiques à 2 temps et caractériser ainsi le régime de vieillissement. Nous étudions successivement les 2 cas où le paramètre d'ordre est une quantité non conservée, puis conservée. Nous calculons ensuite la température effective associée au régime de vieillissement dans les 2 cas.

2.2.1 Paramètre d'ordre non conservé : Lois d'échelle classiques

La fonctionnelle d'énergie libre du modèle $O(n)$ peut s'écrire

$$F[\phi] = \int d^d \mathbf{x} \left[\frac{\xi_{\text{eq}}}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{4n} (n - \phi^2)^2 \right], \quad (2.29)$$

qui est la généralisation directe de l'expression (2.29), la normalisation du potentiel étant choisie de manière à simplifier les expressions qui suivront. L'équation de Ginzburg-Landau s'écrit désormais

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = - \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.30)$$

expression où la température a été prise égale à 0, car nous avons vu que celle-ci ne modifie que la partie de 'quasi-équilibre' des fonctions dynamiques qui nous intéressent dans cette étude. On calcule donc dans ce paragraphe uniquement la partie 'aging' des fonctions dynamiques, l'indice étant sous-entendu. On doit donc résoudre n équations différentielles

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla^2 \phi + \phi - \frac{1}{n} (\phi^2) \phi. \quad (2.31)$$

La limite $n \rightarrow \infty$ simplifie la dynamique dans la mesure où l'on peut faire le remplacement $\phi^2/n \rightarrow \phi^2$, où ϕ est une composante (quelconque) du vecteur ϕ [134]. On obtient alors l'équation auto-cohérente [135]

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla^2 \phi + a(t) \phi; \quad a(t) \equiv 1 - \langle \phi^2 \rangle, \quad (2.32)$$

à laquelle on associe de nouveau les conditions initiales désordonnées (2.4). On obtient alors facilement

$$\phi(\mathbf{k}, t) = \phi(\mathbf{k}, 0) e^{-k^2 t} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{d/4}, \quad (2.33)$$

avec $t_0 \equiv \Delta^{2/d}/8\pi$. On peut donc calculer à partir de cette expression toutes les quantités caractérisant la croissance de domaines. On obtient ainsi le facteur de structure

$$S(\mathbf{k}, t) = (8\pi t)^{d/2} e^{-2k^2 t}, \quad (2.34)$$

en utilisant la condition initiale $\langle \phi(\mathbf{k}, 0) \phi(-\mathbf{k}, 0) \rangle = \Delta V$. On peut mettre le facteur de structure sous la forme d'échelle (2.9), $S(\mathbf{k}, t) = L^d \mathcal{S}(|\mathbf{k}|L)$, en posant $L(t) \equiv t^{1/2}$ et $\mathcal{S}(x) \equiv (8\pi)^{d/2} \exp(-2x^2)$. On trouve de même la fonction d'autocorrélation

$$C(t, t_w) = \left[\frac{2\sqrt{tt_w}}{t + t_w} \right]^{d/2}, \quad (2.35)$$

qui peut elle aussi se mettre sous une forme d'échelle en définissant la variable $\lambda_1 \equiv t/t_w$. On a en effet

$$C(t, t_w) = \mathcal{C}_1(\lambda_1); \quad \mathcal{C}_1(x) \equiv \left[\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right]^{d/2}. \quad (2.36)$$

Le modèle $O(n)$, $n \rightarrow \infty$ avec une dynamique non conservée fournit donc un exemple concret où l'hypothèse d'échelle *peut se démontrer*. Le système est statistiquement invariant lorsque l'espace est mesuré en unités de $L(t)$ qui croît dans ce cas comme une puissance du temps, $L(t) \simeq \sqrt{t}$.

2.2.2 Multiscaling et sous-vieillessement : Effets de la loi de conservation

Dans le cas où l'on impose la conservation du paramètre d'ordre, on doit généraliser l'équation de Cahn-Hilliard en

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla^2 \left(\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} \right), \quad (2.37)$$

où l'on a pris une nouvelle fois la température égale à 0. On doit donc résoudre l'équation suivante

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla^2 \left[\nabla^2 \phi + \phi - \frac{1}{n} (\phi^2) \phi \right], \quad (2.38)$$

et l'on suit la même procédure que précédemment en étudiant une seule des composantes de ϕ . On trouve alors la solution dans l'espace de Fourier [136]

$$\phi(\mathbf{k}, t) = \phi(\mathbf{k}, 0) \exp \left[-k^4 t + k^2 \sqrt{\frac{dt}{2}} \ln \left(\frac{t}{t_0} \right) \right], \quad (2.39)$$

avec cette fois $t_0 \equiv \Delta^{4/d}/(16\pi)^2$. On calcule le facteur de structure qui se met sous la forme [136]

$$S(\mathbf{k}, t) \simeq [L_1(t)^d]^{f(kL_2(t))}, \quad (2.40)$$

avec $f(x) \equiv 2x^2 - x^4$. Dans cette expression, 2 échelles de longueur ont été définies

$$L_1(t) \equiv t^{1/4}, \quad L_2(t) \equiv \left(\frac{8t}{d \ln(t/t_0)} \right)^{1/4}. \quad (2.41)$$

La forme d'échelle standard du facteur de structure $S(\mathbf{k}, t) \simeq L(t)^d \mathcal{S}(|\mathbf{k}|L(t))$ implique qu'il varie comme $L(t)^d$ avec un *préfacteur* qui dépend de la variable d'échelle $|\mathbf{k}|L(t)$. Ici, on voit que la forme asymptotique est complètement différente puisque $S(\mathbf{k}, t)$ varie comme $L_1(t)^\alpha$ avec un *exposant* qui dépend continûment de la variable d'échelle $|\mathbf{k}|L_2(t)$, $\alpha = \alpha[|\mathbf{k}|L_2(t)]$.

Cette forme inhabituelle du facteur de structure a été appelée 'multiscaling' par Cogniglio et Zannetti [136], qui l'ont interprétée avec une sorte de scénario hiérarchique en termes de domaines inclus dans des domaines, chaque 'sous-domaine' ayant sa vitesse de croissance propre. Cette interprétation est assez obscure dans la mesure où il n'y a pas de défauts topologiques, et donc pas domaines, dans le modèle $O(n)$ si $n > d$, ce qui est bien entendu le cas lorsque $n = \infty$. Cette interprétation laisse toutefois espérer un scénario de vieillissement avec plusieurs échelles de temps, similaire à ce qui se passe par exemple dans le modèle de Sherrington-Kirkpatrick [69]. Nous testons ceci en calculant la fonction d'autocorrélation. On trouve facilement

$$C(t, t_w) \simeq (t + t_w)^{-d/4} \exp \left(\frac{d \left(\sqrt{t \ln(t/t_0)} + \sqrt{t_w \ln(t_w/t_0)} \right)^2}{8(t + t_w)} \right). \quad (2.42)$$

On remarque tout d'abord que la corrélation ne peut pas se réécrire comme une fonction de t/t_w , comme dans le cas non conservé. Le temps de relaxation n'est donc pas proportionnel à t_w . En effet, pour des différences de temps $\tau \equiv t - t_w$ égales à t_w , on a

$$C(t_w + t_w, t_w) \underset{t_w \rightarrow \infty}{\simeq} t_w^{-(3-2\sqrt{2})d/24} \underset{t_w \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0. \quad (2.43)$$

À grands t_w , la relaxation se fait donc entièrement sur une échelle de temps $\tau \ll t_w$. Dans ce régime, on a

$$C(t, t_w) \underset{\tau \ll t_w}{\simeq} \exp \left(-\frac{d \ln t_w}{64} \left(\frac{\tau}{t_w} \right)^2 \right). \quad (2.44)$$

On peut donc définir la variable d'échelle $\lambda_2 \equiv \tau \sqrt{\ln t_w}/t_w$ et réécrire la corrélation sous la forme

$$C(t, t_w) \simeq \mathcal{C}_2(\lambda_2); \quad \mathcal{C}_2(x) \equiv \exp \left(-\frac{dx^2}{64} \right), \quad (2.45)$$

ce qui montre que le temps de relaxation croît avec t_w comme $t_r \simeq t_w/\sqrt{\ln t_w} \ll t_w$: il s'agit d'un comportement de sous-vieillessement [31]. On peut enfin calculer la fonction

$h(t)$ telle que $C(t, t_w) \simeq \mathcal{C}[h(t)/h(t_w)]$, cette forme étant valide dans le régime de temps tels que $t, t_w \rightarrow \infty$ avec C finie, c'est-à-dire ici

$$t_w \rightarrow \infty, \quad \tau \simeq t_r \simeq \frac{t_w}{\sqrt{\ln t_w}}. \quad (2.46)$$

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'un choix naturel pour $h(t)$ était la longueur typique des domaines $L(t)$. Dans le cas présent, il existe 2 longueurs caractéristiques $L_1(t)$ et $L_2(t)$, mais aucune des 2 ne peut être utilisée. On peut prendre à la place une 'loi de puissance accélérée'

$$h(t) = \exp [(\ln t)^{3/2}], \quad (2.47)$$

ce qui correspond à la fonction d'échelle $\mathcal{C}(x) = \exp [-d \ln^2(x)/288]$. Dans ce cas, la fonction $h(t)$ est différente des 2 longueurs caractéristiques du problème et n'a pas d'interprétation physique directe.

Dans le cas où le paramètre d'ordre est conservé, le système est donc caractérisé par 2 échelles de longueur. Ceci explique l'absence du régime de vieillissement standard en $L(t)/L(t_w)$, avec $L(t)$ une taille caractéristique. Cet exemple montre que la fonction $h(t)$, dont l'étude est motivée par la théorie champ moyen, n'est pas nécessairement une longueur caractéristique du système. Il offre aussi une alternative à la quantification usuelle de cet effet, due à Struik [24], qui a introduit l'exposant μ (désormais logiquement appelé 'exposant de Struik') par la relation $t_r \simeq t_w^\mu$, avec $\mu < 1$. Ici, on a plutôt $t_r \simeq t_w/(\ln t_w)^a$, avec $a > 0$. Les expériences de vieillissement dans les verres de spin ont été décrites avec ces 2 exposants et donnent des valeurs $\mu \simeq 0.97$ et $a = 2.2$ [22].

Enfin, cet exemple permet d'exhiber une cause possible de sous-vieillissement (coexistence de plusieurs échelles de longueur), dont l'existence est toujours non comprise dans les expériences ou les simulations. Il est intéressant de constater qu'une explication en termes d'effets de taille finie a été proposée: les échantillons utilisés dans les expériences étant constitués de grains de taille finie, il est possible que la taille de ces grains joue elle aussi un rôle [137, 138]. Cela revient à dire que les conditions dans lesquelles l'hypothèse d'échelle est satisfaite ($\xi_{\text{eq}} \ll L(t) \ll L$ pour la décomposition spinodale) ne sont pas réalisées dans les expériences. Cette explication est proche de la comparaison que fait Bouchaud de ce phénomène avec la situation de la turbulence où les lois d'échelles de Kolmogorov ne sont satisfaites que dans le régime inertiel et sont violées si on les mesure à trop petite ou trop grande échelle [3]. Notons enfin qu'il existe très peu de modèles théoriques où du sous-vieillissement apparaît [139, 140], justifiant ainsi l'intérêt de notre étude.

2.2.3 Calcul de la température effective

Nous calculons enfin la température effective qui caractérise le vieillissement du modèle $O(n)$. On peut la calculer par la relation

$$T_{\text{eff}}(q) = \lim_{t_w \rightarrow \infty} \left. \frac{\partial C(t, t_w)}{\partial t_w} \right|_{C(t, t_w)=q}. \quad (2.48)$$

Ici bien sûr, l'interprétation en termes de parois de domaines n'est pas valable, du fait de l'absence de défauts topologiques. La fonction de réponse est calculée comme dans le

cadre de l'approximation OJK et on obtient

$$R(t, t_w) \simeq (t - t_w)^{-d/2} \left(\frac{t}{t_w} \right)^{d/4}, \quad (2.49)$$

dans le cas où la dynamique est non conservée et

$$R(t, t_w) \simeq (t - t_w)^{-(d+2)/4} \exp \left(\frac{d}{8} \frac{(\sqrt{t \ln t} - \sqrt{t_w \ln t_w})^2}{t - t_w} \right), \quad (2.50)$$

pour le cas conservé, toutes les constantes numériques ayant été ôtées de ces expressions. On obtient alors le comportement à temps longs de la température effective en combinant les relations (2.35, 2.42, 2.49, 2.50). On obtient successivement

$$T_{\text{eff}}(q) \simeq \lim_{t_w \rightarrow \infty} t_w^{d/2-1}, \quad T_{\text{eff}}(q) \simeq \lim_{t_w \rightarrow \infty} \frac{t_w^{(d-2)/4}}{(\ln t_w)^{(d+2)/8} \exp(\sqrt{\ln t_w})}. \quad (2.51)$$

Ces relations sont valables pour $0 < q < 1$ et montrent donc que pour $d > 2$, on a encore une température effective infinie, $T_{\text{eff}} = \infty$, même si notre interprétation précédente en termes de parois de domaines fait ici défaut.

2.3 Dynamique critique hors équilibre : Le modèle XY en 2 dimensions

Il est bien connu qu'à l'approche d'un point critique, la dynamique d'un système ralentit considérablement [7, 8]. Ce ralentissement est la conséquence directe de la divergence de la longueur de corrélation à la température critique, $\xi_{\text{eq}}(T_c) = \infty$. Ainsi, pour $|T - T_c| \ll T_c$, il existe des fluctuations de très grandes longueurs d'onde dans le système, dont le temps de relaxation peut devenir macroscopiquement observable. Une expérience classique de premier cycle consiste à observer le phénomène d'opalescence critique près du point critique de SF₆.

Au point critique, le temps de relaxation diverge : un système critique peut donc être qualifié de 'vitreux', d'après la définition donnée dans l'introduction. (Dans la pratique, il est raisonnablement facile d'équilibrer, par exemple, un système ferromagnétique près de son point critique, tandis qu'équilibrer un verre de spin à basse température ne l'est pas. La différence est essentiellement quantitative et tient au fait que la croissance de la 'longueur de cohérence' est extrêmement lente dans les verres de spin [141].) On est donc naturellement amené à se poser les mêmes questions que pour une séparation de phase ayant lieu à $T < T_c$ concernant les fonctions dynamiques à 2 temps et les violations du FDT, ainsi que le lien de cette dynamique hors équilibre avec les propriétés statiques.

L'étude que nous avons réalisée avec P. Holdsworth et M. Sellitto a été motivée par plusieurs travaux antérieurs². Comme nous l'avons signalé, il est assez naturel d'essayer de comparer la dynamique de vieillissement à un point critique aux propriétés déduites de la théorie champ moyen. C'est ce qu'ont fait simultanément Godrèche et Luck d'une

2. Ma décision d'entreprendre ce travail provient essentiellement d'un déjeuner partagé avec C. Godrèche pendant les journées Itzykson (Saclay, Juin 2000), où il a attiré mon attention sur ses 2 travaux récents [124, 125] avec J.-M. Luck.

part [124] et Zannetti et ses collaborateurs d'autre part [126, 127] sur la chaîne d'Ising à température nulle, dont nous avons anticipé les résultats au paragraphe 2.1.4. Godrèche et Luck ont ensuite considéré analytiquement le cas du modèle ferromagnétique sphérique en dimension $d > 2$ et numériquement le modèle d'Ising pour $d = 2$, à $T = T_c$ dans les 2 cas [125].

Une dernière motivation, plus physique, est que le processus de vieillissement sous le point critique est quantitativement décrit en distinguant les contributions intra-domaines des contributions dues aux défauts topologiques. Cette distinction devient caduque au point critique, où le système a une structure auto-similaire, caractérisée par des domaines de toutes les tailles, allant du pas du réseau à la taille du système. On peut donc attendre des propriétés de vieillissement qualitativement différente de celles que nous venons de décrire.

Enfin, le choix du modèle XY est motivé par le fait que c'est le système critique 'le plus simple', dans la mesure où sous la transition de Kosterlitz-Thouless, il est décrit par une théorie Gaussienne [142]. De ce fait, un bon nombre de résultats statiques et dynamiques déjà établis nous ont été utiles pour cette étude.

Nous décrivons tout d'abord la physique du vieillissement au point critique. Les formes d'échelles ainsi décrites sont ensuite démontrées analytiquement et numériquement dans le cas du modèle XY en 2 dimensions. Enfin, nous analysons plus en détail l'application de la relation statique / dynamique (1.14) pour un système critique.

2.3.1 Dynamique critique : Lois d'échelle

Nous envisageons la situation expérimentale suivante [143]. Un système, par exemple un matériau ferromagnétique, est initialement préparé à très haute température, donc dans sa phase paramagnétique. Le paramètre d'ordre est nul, $m(t = 0) = m_{\text{eq}}(T \gg T_c) = 0$. À l'instant initial $t = 0$, il est placé à son point critique caractérisé par $T = T_c$. À un temps $t > 0$, la longueur de corrélation dynamique $\xi(t)$ a atteint la valeur

$$\xi(t) \simeq t^{1/z}, \quad (2.52)$$

où z est l'exposant critique dynamique défini par la divergence du temps de relaxation près de T_c selon $t_r \simeq |T - T_c|^{-\nu z}$. La valeur du paramètre d'ordre est alors $m(t) \simeq \xi(t)^{-\beta/\nu}$, où β et ν sont les exposants critiques respectivement associés à l'aimantation et à la longueur de corrélation [7]. On a donc $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = m_{\text{eq}}(T_c) = 0$. Par construction, on étudie désormais le régime où $\xi(t) \ll L \ll \xi_{\text{eq}}(T_c) = \infty$. Cette situation est donc qualitativement différente de celle des 2 précédents paragraphes où l'on avait $m(t) \simeq m_{\text{eq}}(T < T_c) > 0$ pour $t \gg t_0$; le régime étudié correspondait à $\xi_{\text{eq}}(T) \ll L(t) \ll L$.

Au temps t , les fluctuations de grands vecteurs d'onde $k \gg \xi(t)^{-1}$ ont relaxé vers leur état d'équilibre, tandis que les fluctuations de petits vecteurs d'onde $k \ll \xi(t)^{-1}$ sont toujours hors équilibre, le temps de relaxation d'une fluctuation de vecteur d'onde k vérifiant la relation $t_r(k) \simeq k^{-z}$. Les fonctions dynamiques reçoivent donc de nouveau 2 contributions, l'une stationnaire et l'autre vieillissante. Le point nouveau est que la partie stationnaire est typique d'un système critique. On aura donc la loi de puissance $C_{\text{stat}}(t - t_w) \simeq (t - t_w)^{-2\beta/\nu z}$. Ce régime de 'quasi-équilibre' est interrompu pour des temps $t - t_w \simeq t_w$ lorsque la croissance de la longueur de corrélation se fait sentir. On s'attend

donc à la forme d'échelle suivante pour la fonction d'autocorrélation

$$C(t, t_w) \simeq (t - t_w)^{-2\beta/\nu z} \mathcal{C} \left(\frac{\xi(t)}{\xi(t_w)} \right), \quad (2.53)$$

où $\mathcal{C}(x)$ est une fonction d'échelle.

Pour la susceptibilité, de même, la décomposition en une contribution intra-domaine et une contribution des interfaces perd tout son sens, puisqu'il n'y a plus de vrais 'domaines'. Sur une distance $\xi(t)$, le système est critique et il a donc une structure auto-similaire : est composé de domaines inclus dans des domaines, etc [144]. La réponse va donc prendre la forme

$$R(t, t_w) \simeq (t - t_w)^{-2\beta/\nu z - 1} \mathcal{R} \left(\frac{\xi(t)}{\xi(t_w)} \right), \quad (2.54)$$

où $\mathcal{R}(x)$ est une fonction d'échelle. L'exposant de la partie stationnaire provient du fait que le FDT doit être satisfait aux temps courts, $t - t_w \ll t_w$.

Enfin, on s'attend à la forme suivante des courbes paramétriques susceptibilité - corrélation. Pour des temps $t - t_w \ll t_w$, la dynamique est régie par les grands vecteurs d'onde : le FDT est satisfait. Pour des temps $t - t_w \gg t_w$, la dynamique sonde les grandes échelles toujours hors équilibre, et la courbe $\chi(C)$ quitte la relation linéaire d'équilibre. Le crossover entre les 2 régimes se produit pour $t - t_w \simeq t_w$, et la corrélation a alors la valeur $C(t_w + t_w, t_w) \simeq t_w^{-2\beta/\nu z}$, ce qui définit un 'pseudo-paramètre d'Edwards-Anderson' à temps fini : $q_{EA}(t_w) \simeq m(t_w)^2 \simeq t_w^{-2\beta/\nu z}$. Les courbes paramétriques χ vs C dépendent donc du temps d'attente t_w , et une courbe maîtresse $\chi(C)$ *n'est pas atteinte*, à la différence des modèles champ moyen. Par contre, comme l'ont remarqué Godrèche et Luck [125], les formes (2.53) et (2.54) impliquent qu'en utilisant la définition à 2 temps de la température effective $T_{\text{eff}}(t, t_w) = \partial_{t_w} C(t, t_w) \times R(t, t_w)^{-1}$, celle-ci devient une fonction du seul rapport $\xi(t)/\xi(t_w)$,

$$T_{\text{eff}}(t, t_w) \simeq \mathcal{T} \left(\frac{\xi(t)}{\xi(t_w)} \right). \quad (2.55)$$

Il est peut-être important de rappeler qu'ici l'expression 'température effective' n'est qu'une définition. Dans ce cas, en effet, la fonction de corrélation fait apparaître 2 échelles de temps, l'une rapide $t - t_w \simeq t_0 \ll t_w$ correspondant à $T_{\text{eff}} \simeq T$, l'autre lente $t - t_w \simeq t_w$ à laquelle ne correspond pas une unique température effective, comme cela se produit dans le modèle p -spin par exemple. De plus, les équations (2.53) et (2.55) montrent que $T_{\text{eff}}(t, t_w)$ ne peut pas se mettre sous la forme d'une fonction de la seule corrélation $C(t, t_w)$.

2.3.2 Vieillessement dans la phase de Kosterlitz-Thouless

Nous analysons ici le comportement du modèle XY à 2 dimensions sous la température de Kosterlitz-Thouless T_{KT} . Pour $0 \leq T \leq T_{KT}$, le système est critique. Il est donc caractérisé par une décroissance algébrique des fonctions de corrélation à 2 points et une longueur de corrélation infinie. Kosterlitz et Thouless [142] ont montré qu'à suffisamment grande échelle, les propriétés de cette phase sont bien décrites par l'approximation d'ondes de spin, qui consiste à remplacer le paramètre d'ordre ϕ , qui est un vecteur bidimensionnel, par l'angle θ défini par $\phi \equiv e^{i\theta}$ puis à décrire le modèle par la fonctionnelle d'énergie libre

$$F[\theta] = \frac{\rho(T)}{2} \int d^2 \mathbf{x} |\nabla \theta|^2. \quad (2.56)$$

La dynamique de ce modèle est donnée par une équation de Langevin [130, 145]

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\delta F[\theta]}{\delta \theta(\mathbf{x}, t)} + \zeta(\mathbf{x}, t), \quad (2.57)$$

où le bruit thermique est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance $\langle \zeta(\mathbf{x}, t) \zeta(\mathbf{x}', t') \rangle = 4\pi\eta(T)\rho(T)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')$, qui fait intervenir l'exposant critique $\eta(T)$, relié à $\rho(T)$ et à la température T par la relation $2\pi\rho(T)\eta(T) = T$ [142].

Pour que le problème soit correctement posé, on doit encore spécifier les conditions initiales. L'approximation d'ondes de spin est une bonne description de la phase basse température, à la condition que la densité de défauts topologiques (ici ce sont des vortex) soit égale à sa valeur d'équilibre. Dans le cas où le système subit une trempe depuis une température $T \gg T_{KT}$, les vortex sont présents en très grand nombre et la dynamique ne peut plus être décrite par l'équation (2.57). On choisit donc d'étudier le cas où la température initiale est $T = 0$. Bray et Rutenberg [145] ont étudié le cas plus général où la température initiale satisfait $0 \leq T \leq T_{KT}$. Notons enfin que l'on peut faire un calcul en choisissant des conditions initiales qui simulent une longueur de corrélation finie pour le modèle (2.56) et (2.57), dans l'esprit du travail de Newman, Bray et Moore [146] : cette approche est elle aussi insuffisante pour rendre compte de l'influence des vortex et nous n'en reproduisons donc pas les résultats ici³. Nous prenons donc dans la suite

$$\theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0, \quad \forall \mathbf{x}. \quad (2.58)$$

La solution est alors immédiate en passant dans l'espace de Fourier. On obtient

$$\theta(\mathbf{k}, t) = \int_0^t dt' e^{-k^2 \rho(T)(t-t')} \zeta(\mathbf{k}, t'), \quad (2.59)$$

d'où l'on peut déduire les fonctions dynamiques qui nous intéressent. La fonction d'auto-corrélation spin-spin s'écrit ainsi

$$C(t, t_w) = \left[\frac{a^4}{(a^2 + 2t)(a^2 + 2t_w)} \cdot \frac{(a^2 + t + t_w)^2}{(a^2 + t - t_w)^2} \right]^{\eta(T)/4}, \quad (2.60)$$

tandis que la fonction de réponse conjuguée est donnée par

$$R(t, t_w) = \frac{1}{4\pi\rho(T)(a^2 + t - t_w)^{1+\eta(T)/2}} \left[\frac{a^4(a^2 + t + t_w)^2}{(a^2 + 2t)(a^2 + 2t_w)} \right]^{\eta(T)/4}. \quad (2.61)$$

On en déduit la température effective

$$T_{\text{eff}}(t, t_w) = T \left[1 - \frac{(a^2 + t - t_w)(t - t_w)}{(a^2 + t + t_w)(a^2 + 2t_w)} \right]. \quad (2.62)$$

Dans chaque cas, nous avons utilisé le cutoff UV a , comme au paragraphe 2.1.4. La fonction de corrélation, ainsi que les courbes paramétriques susceptibilité - corrélation sont représentées sur la Fig. 2.4. Ces 3 fonctions dynamiques peuvent se mettre sous la

3. Ce calcul a été réalisé à Manchester, avec l'aide d'A. Bray.

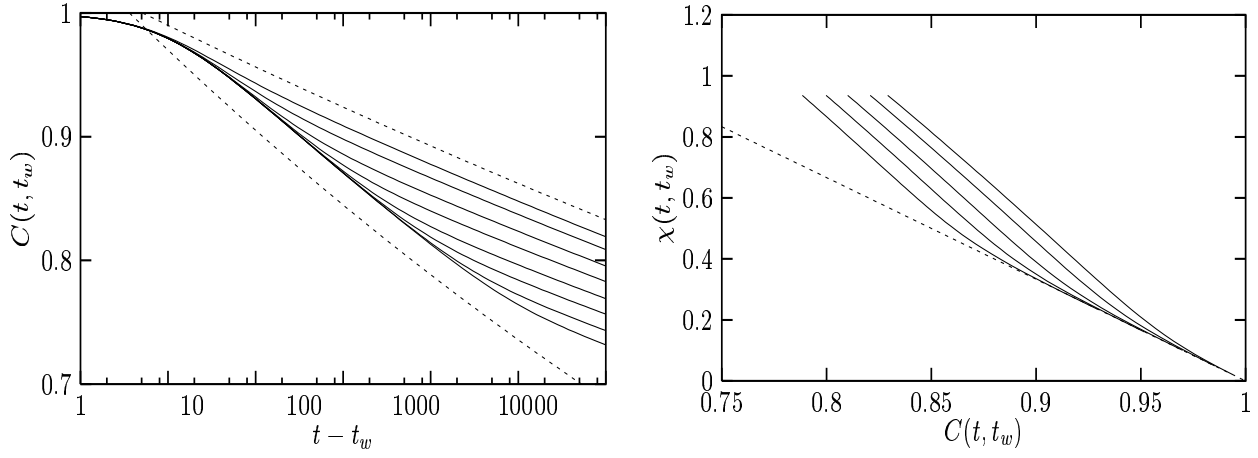


Fig. 2.4: Vieillescence et violations du FDT dans le modèle XY à 2 dimensions à partir de conditions initiales ordonnées. À gauche : fonctions de corrélation (2.60) avec $\eta/2 = 0.03$, $a = 1$ et $t_w = 1, 3, 10, \dots, 3000$ (de haut en bas). Les traits pointillés sont les lois de puissance (2.64) et (2.65). À droite : courbes paramétrique χ vs C pour les mêmes paramètres et $t_w = 1, 3, 10, 30, 100$ (de droite à gauche). Le trait pointillé est le FDT à l'équilibre.

forme d'échelle décrite au paragraphe précédent. Explicitement, on obtient pour des temps $t - t_w \gg a^2$ les expressions

$$\begin{aligned}
 C(t, t_w) &\simeq (t - t_w)^{-\eta(T)/2} \left[\frac{(1 + \lambda)^2}{4\lambda} \right]^{\eta(T)/4}, \\
 R(t, t_w) &\simeq [4\pi\rho(T)]^{-1} (t - t_w)^{-1-\eta(T)/2} \left[\frac{(1 + \lambda)^2}{4\lambda} \right]^{\eta(T)/4}, \\
 T_{\text{eff}}(t, t_w) &\simeq T \left[1 - \frac{(\lambda - 1)^2}{2(1 + \lambda)} \right],
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

avec la définition $\lambda \equiv t/t_w$. On peut donc distinguer différents régimes. Le régime de quasi-équilibre a lieu pour des temps $a^2 \ll t - t_w \ll t_w$, i.e. $\lambda \simeq 1$, et on a dans ce cas

$$C(t, t_w) \simeq (t - t_w)^{-\eta(T)/2}, \quad R(t, t_w) \simeq (t - t_w)^{-1-\eta(T)/2}, \quad T_{\text{eff}}(t, t_w) \simeq T. \tag{2.64}$$

Le régime de vieillescence correspond aux temps longs $t - t_w \gg t_w$, i.e. $\lambda \gg 1$, la décroissance des fonctions de corrélation et de réponse est encore une loi de puissance,

$$C(t, t_w) \simeq t^{-\eta(T)/4}, \quad R(t, t_w) \simeq t^{-1-\eta(T)/4}, \quad T_{\text{eff}}(t, t_w) \simeq T_{\text{eff}}(\lambda) < T. \tag{2.65}$$

Le crossover entre les 2 régimes a lieu pour $t - t_w \simeq t_w$. Les fonctions de corrélation pour différents t_w ne se superposent pas : il n'y a pas invariance par translation dans le temps et le système vieillit. La simulation directe du modèle XY (sans l'approximation des ondes de spin)

$$H = - \sum_{\langle i, j \rangle} \phi_i \cdot \phi_j, \tag{2.66}$$

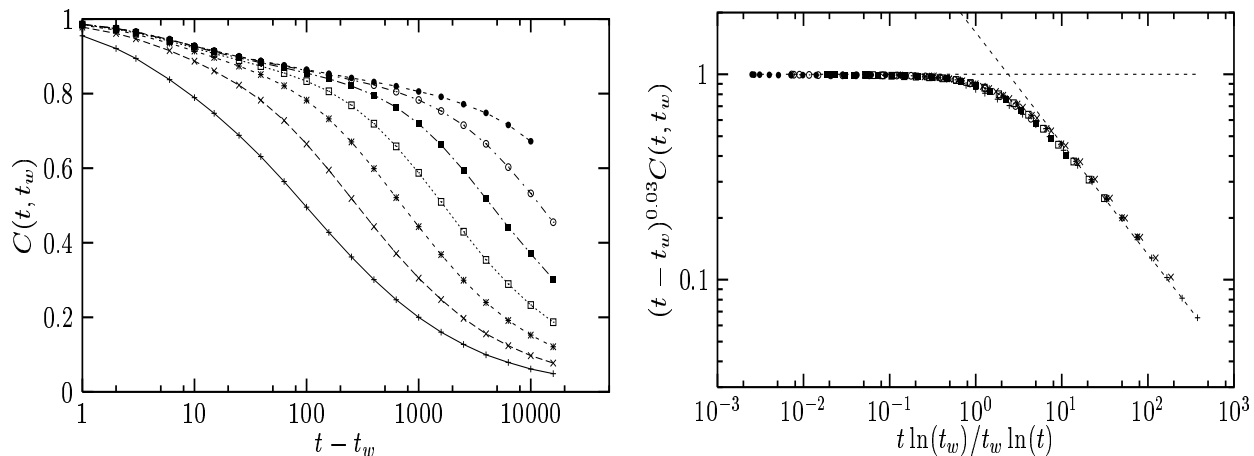


Fig. 2.5: Vieillessement dans le modèle XY à 2 dimensions à partir de conditions initiales désordonnées. À gauche : fonctions de corrélation avec $t_w = 10, 30, 100, 300, 1000, 3000, 10000$ (de gauche à droite). À droite : test de la forme d'échelle (2.53) pour les mêmes valeurs de t_w . Les lignes pointillées sont les lois de puissance x^0 et $x^{-0.54}$.

où les spins sont des vecteurs à 2 composantes de module 1 placés sur un réseau carré bidimensionnel confirme les résultats obtenus analytiquement pour les conditions initiales ordonnées, confirmant ainsi la validité de l'approximation d'ondes de spin pour décrire cette situation.

On voit donc à travers l'exemple du modèle XY en 2 dimensions se réaliser exactement les formes d'échelle (2.53)-(2.55) proposées au paragraphe précédent. Pour le modèle XY, on a en effet la relation [142] $\beta/\nu = \eta(T)/2$ et $z = 2$. La partie stationnaire décroît donc avec la puissance $\eta(T)/2 = 2\beta/\nu z$, tandis que les variables d'échelle $\xi(t)/\xi(t_w)$ et t/t_w sont équivalentes. Enfin, les courbes paramétriques (Fig. 2.4) ont bien la forme attendue. Une 'nouveauité' ici provient du fait que les conditions initiales ordonnées rendent la température effective déduite de ces courbes plus petite que celle du bain thermique : c'est le premier exemple connu de cette situation. Le sens physique de ce résultat est cependant clair, dans la mesure une nouvelle fois où si l'on 'regarde' le système sur une grande échelle $\gg \xi(t)$, les fluctuations de petits vecteurs d'onde ont encore la mémoire de leur état initial à $T = 0$, et le système apparaît donc plus 'ordonné' qu'à l'équilibre.

Si l'on veut étudier le cas standard où la température initiale est $T = \infty$, on doit recourir à la simulation numérique pour avoir une description correcte de la dynamique des vortex. La Fig. 2.5 présente les fonctions de corrélations obtenues dans ce cas, pour la température finale $T = 0.3$ (on a $T_{KT} \simeq 0.89$). On voit que la forme (2.53) est très bien vérifiée. Dans ce cas, la présence des vortex rend la loi de croissance de la longueur de corrélation inhabituelle [147, 148], puisqu'elle présente une correction logarithmique à la loi de puissance standard, $\xi(t) \simeq t^{1/z} / \sqrt{\ln t}$. La variable d'échelle est donc dans ce cas $\xi(t)/\xi(t_w) = [t \ln t_w] / [t_w \ln t]$. Le comportement obtenu est asymptotiquement équivalent à une loi de vieillissement simple, mais il est très similaire pour des temps finis à du sous-vieillessement. Enfin, les données numériques montrent que la fonction d'échelle $\mathcal{C}(x)$, Eq. (2.53), a le comportement suivant :

$$\mathcal{C}(x) \simeq \text{const}, \quad x \rightarrow 1^+; \quad \mathcal{C}(x) \simeq x^{-\lambda}, \quad x \gg 1, \quad (2.67)$$

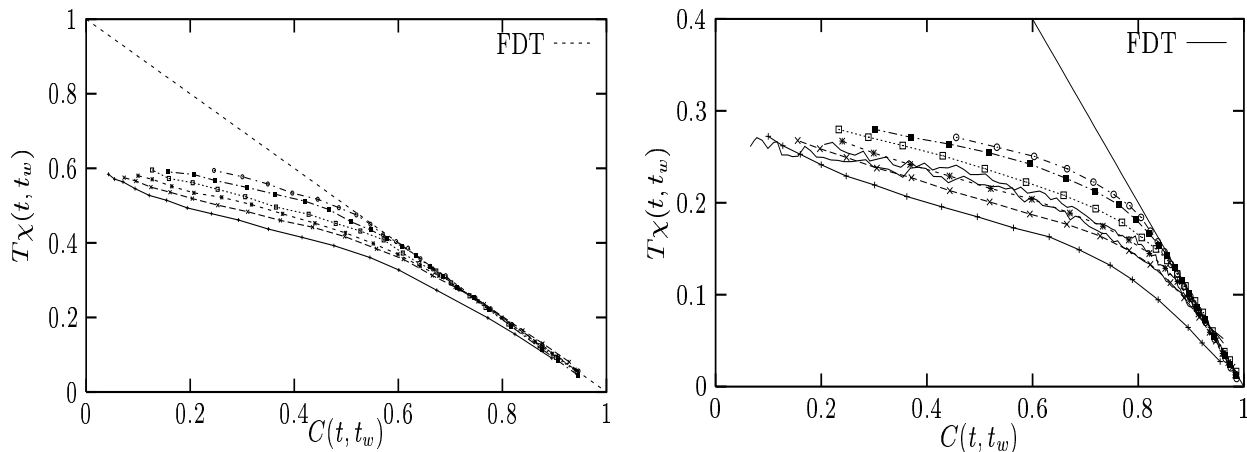


Fig. 2.6: Courbes paramétriques pour des conditions initiales désordonnées et les températures finales $T = 0.7$ (gauche) et $T = 0.3$ (droite). Pour $T = 0.3$, les lignes continues représentent des données similaires obtenues dans le modèle d'Edwards-Anderson à 3 dimensions.

comme dans le cas des conditions initiales ordonnées, Eqs. (2.64, 2.65). Il est intéressant de noter que c'est aussi la forme utilisée dans les simulations du modèle d'Edwards-Anderson à 3 dimensions [149].

Enfin, la simulation nous permet d'accéder à la susceptibilité pour des conditions initiales désordonnées et donc d'obtenir les courbes paramétriques usuelles. Le résultat est présenté pour les températures $T = 0.3$ et $T = 0.7$ sur la Fig. 2.6. On constate immédiatement (c'est en effet la remarque principale faite par Godrèche et Luck) que ces courbes sont qualitativement différentes de celles obtenues dans le cas où la trempe a lieu sous le point critique. Alors que pour $T < T_c$ la courbe paramétrique s'écarte de la relation d'équilibre pour devenir très rapidement horizontale, à $T = T_c$ les courbes paramétriques ne s'aplatissent que très lentement, d'une manière très similaire à ce qui est observé numériquement dans les verres de spin [37, 69, 78, 79]. Un exemple de résultats numériques pour le modèle d'Edwards-Anderson a été présenté dans l'introduction, Fig. 1.6. Cette similarité est rendue plus frappante sur la Fig. 2.6, où nous avons superposé avec des lignes continues des courbes obtenues dans le modèle d'Edwards-Anderson à 3 dimensions. Notons enfin que les courbes pour différents t_w se rapprochent lentement (en montant) de la courbe d'équilibre, alors que sous le point critique les courbes vont (en descendant) vers une valeur asymptotique. Une nouvelle fois, cette évolution qualitative des courbes paramétriques est très similaire à ce qui se passe dans les verres de spin tridimensionnels.

2.3.3 Une $P(q)$ 'trivialement non triviale'

La dynamique de vieillissement du modèle XY se révèle donc très riche, car très similaire à celle observée numériquement dans les verres de spin tridimensionnels. Elle est de plus qualitativement différente des comportements obtenus dans les modèles champ moyen, ainsi que du cas de la séparation de phase sous le point critique. Dans ce dernier cas, nous avons vu que l'interprétation des violations du FDT et donc de la température effective satisfait bien le lien statique / dynamique résumé par l'équation (1.14). Il est donc naturel de se poser la même question ici.

Lorsque l'on veut tester numériquement la relation (1.14) dans le cas du modèle XY, on réalise immédiatement l'ambiguïté de sa définition. Cette relation relie en effet une quantité dynamique $x(C)$ obtenue en prenant les limites $t_w \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$, dans cet ordre [68], à une quantité statique obtenue à l'équilibre dans un système infini. Les tests numériques de cette relation consistent toutefois à mesurer dynamiquement les quantités $\chi(t, t_w)$ et $C(t, t_w)$ pour un temps t_w aussi grand que possible, mais nécessairement fini. On obtient ainsi une courbe paramétrique que l'on compare à une courbe

$$\chi(C, L) \equiv \frac{1}{T} \int_C^1 dq \int_0^q dq' P(q', L), \quad (2.68)$$

obtenue par double intégration de la fonction de Parisi $P(q, L)$ calculée à l'équilibre dans un système de taille L aussi grande que possible, mais elle aussi nécessairement finie. On doit alors argumenter que les 2 courbes sont obtenues dans leur limite asymptotique, respectivement $t_w \rightarrow \infty$ et $L \rightarrow \infty$, pour démontrer la validité de la relation (1.14) [78]: c'est ce qui est fait sur la Fig. 1.6 dans le modèle d'Edwards-Anderson à 3 dimensions.

Pour le modèle XY, la fonction $x(C)$ n'existe pas car une courbe maîtresse $\chi(C)$ n'est pas atteinte. Pour chaque t_w , on obtient donc une courbe $\chi(t, t_w)$ vs $C(t, t_w)$ différente. D'un point de vue statique, ensuite, il est bien connu que les fluctuations du paramètre d'ordre (ici l'aimantation m) sont non triviales pour un point critique [150]. Spécifiquement, la distribution de probabilité des fluctuations de m dans un système de taille L , notée $Q(m, L)$, se comporte comme $Q(m, L) \simeq L^{\beta/\nu} \mathcal{Q}(mL^{\beta/\nu})$, où la fonction d'échelle $\mathcal{Q}(x)$ est en général non-Gaussienne et très asymétrique [150]. On s'attend donc à des propriétés similaires pour la fonction $P(q, L)$.

Pour comparer concrètement statique et dynamique dans le modèle XY, on doit comparer les violations du FDT dans un système infini, $L \rightarrow \infty$, pour un temps t_w fini, avec la fonction de Parisi calculée à l'équilibre, $t_w \rightarrow \infty$, dans un système de taille finie L . On est donc très naturellement conduit à proposer une généralisation de la relation (1.14) consistant à considérer le système vieillissant au temps t_w comme étant constitué de sous-systèmes quasi-équilibrés de taille $\xi(t_w)$. La relation (1.14) devient alors

$$\chi(t, t_w) = \frac{1}{T} \int_{C(t, t_w)}^1 dq \int_0^q dq' P(q', \xi(t_w)), \quad (2.69)$$

où l'on a mis en relation temps fini / taille finie.

La première nouveauté de cette *conjecture* est qu'elle ne prend pas les limites asymptotiques $t_w \rightarrow \infty$ dans la dynamique et $L \rightarrow \infty$ dans la statique, ce qui rend le lien statique / dynamique expérimentalement et numériquement pertinent en étendant son domaine de validité. Le second aspect nouveau réside dans la prise en compte de la croissance de la longueur de corrélation dynamique $\xi(t)$. La formulation originale [112] provenant des études champ moyen dans lesquelles toute notion d'espace est absente ne pouvait en effet tenir compte de cet aspect. Ceci donne donc une base physique au lien statique / dynamique: Il est en effet raisonnable de penser qu'une collection de systèmes de taille $\xi(t_w)$ ait des propriétés thermodynamiques données par la statique d'un seul système de taille $L = \xi(t_w)$. D'une certaine manière, la *mesure dynamique* consiste en une *moyenne sur un ensemble* de systèmes à l'équilibre.

Pour tester cette conjecture, il faut tout d'abord accéder à $P(q, L)$. Cette fonction est facilement déduite de $Q(m, L)$, qui a récemment été calculée [151, 152]. Nous rappelons

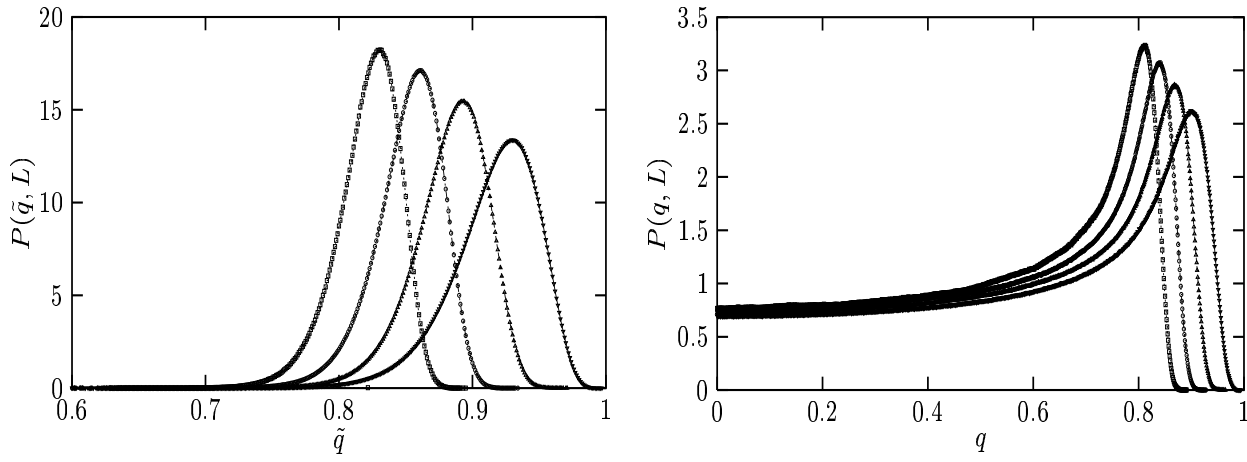


Fig. 2.7: Fonctions de Parisi pour $T = 0.3$ et les tailles $L = 4, 8, 16, 32$ (de droite à gauche dans chaque cas). À gauche, on calcule les fluctuations dues à celles de m seulement. À droite, on inclue aussi les fluctuations de ψ ; l'aimantation s'écrit $\mathbf{m} = me^{i\psi}$.

brèvement ici ses propriétés. Le vecteur aimantation $\mathbf{m} \equiv L^{-2} \sum_i \phi_i$ fluctue en module m et en orientation ψ . La dépendance en taille et en température de $Q(m, L)$ se fait uniquement par l'intermédiaire des deux premiers moments de la distribution qui varient comme $\langle m \rangle \simeq L^{-\eta(T)/2}$, et $\sigma \equiv \sqrt{\langle m^2 \rangle} \simeq T \langle m \rangle$ [153]. $Q(m, L)$ prend alors la forme

$$Q(m, L) = \sigma^{-1} \mathcal{F} \left(\frac{m - \langle m \rangle}{\sigma} \right). \quad (2.70)$$

La forme fonctionnelle de $\mathcal{F}(x)$ est très bien décrite par une distribution de Gumbel généralisée [151, 152]

$$\mathcal{F}(x) = K(e^{y-e^y})^{\pi/2}, \quad y = b(x - s), \quad (2.71)$$

où K , b et s sont des constantes numériques pures qui sont fixées par la normalisation de la distribution $\int dx \mathcal{F}(x) = 1$. Ce sont les fluctuations de m qui contiennent la physique du point critique, les fluctuations de ψ étant simplement données par $Q(\psi, L) = (2\pi)^{-1}$.

Lorsque l'on passe au recouvrement, on peut adopter deux définitions, selon que l'on inclue (q), ou non (\tilde{q}), la rotation globale de l'aimantation. Cela conduit alors à deux fonctions de Parisi différentes,

$$P(\tilde{q}, L) = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{q}}} Q(\sqrt{\tilde{q}}, L), \quad P(q, L) = \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt{q}}^1 dm \frac{Q(m, L)}{\sqrt{m^4 - q^2}}. \quad (2.72)$$

On a représenté ces 2 fonctions sur la Fig. 2.7, pour diverses tailles L et une température $T = 0.3$. Les propriétés d'échelle de $P(\tilde{q}, L)$ découlent de celles de $Q(m, L)$ et sont typiques des fluctuations du paramètre d'ordre au point critique. On a en effet $\langle \tilde{q} \rangle \simeq L^{-\eta(T)} \simeq \sqrt{\langle \tilde{q}^2 \rangle}$. Une nouvelle fois, les 2 premiers moments de la distribution sont proportionnels, ce qui découle de la relation d'hyperscaling entre exposants critiques [144].

Toutefois, la relation (1.14) requiert l'utilisation de la fonction $P(q, L)$ [112], qui est est plus amusante [154] puisqu'elle a la même structure que dans les modèles champ moyen de verres de spin avec brisure continue de la symétrie des répliques [14, 101]: un pic vers

la valeur $\langle q \rangle$ ($= q_{EA}$ dans une phase verre de spin) et une partie continue qui s'étend vers $q \simeq 0$. Cette similarité a été notée dans la Ref. [154]. Ici, la partie continue provient simplement de la rotation du vecteur \mathbf{m} dans le plan XY. Pour $T \rightarrow 0$, on aurait en effet $q = \cos \psi$, et donc

$$P(q, L) dq = Q(\psi, L) d\psi \quad \Rightarrow \quad P(q, L) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}}. \quad (2.73)$$

Pour $T > 0$, cette forme est convoluée avec les fluctuations de $|\mathbf{m}|$ pour donner les courbes de la Fig. 2.7. À basse température, on a donc $P(0, L) = 2/\pi \simeq 0.64$, ce qui est proche de la valeur obtenue pour $T = 0.3^4$. Dans le cas de la brisure de symétrie des répliques, une fonction $P(q, L)$ continue résulte de l'existence de nombreux états purs (cf introduction). Ici, les états purs existent tout simplement à cause de la symétrie $O(2)$ de l'Hamiltonien XY. Cette comparaison fournit ainsi une explication très qualitative de la solution de Parisi du modèle de Sherrington-Kirkpatrick : la moyenne sur le désordre fait apparaître une 'nouvelle dimension' (l'espace des répliques) permettant de passer d'un état pur à l'autre. La différence est donc que dans le modèle XY, la symétrie pour passer d'un état pur à l'autre est connue dès le départ. Notons enfin que c'est une des remarques de Fisher et Huse sur l'utilisation de la fonction $P(q)$ (qui provient de leur opinion sur le "comportement exotique du modèle de Sherrington-Kirkpatrick" [155]) que la fonction $P(q)$ puisse être non triviale dans un système qui l'est [156]. Les modèles ferromagnétiques à symétrie continue à basse température en constituent donc une bonne illustration.

2.3.4 Calculer les violations du FDT avec la mesure d'équilibre

Il y a du hasard dans toute coïncidence.

M. YOURCENAR, *Souvenirs pieux.*

Nous sommes donc en position de tester notre conjecture (2.69), ce que nous faisons sur la Fig. 2.8, où sont rassemblés les résultats statiques en taille finie et les résultats dynamiques à temps fini. Cette comparaison est faite pour 2 températures $T = 0.7$ et $T = 0.3$. Le résultat remarquable de cette étude est que la conjecture (2.69) que nous avons proposée est très bien satisfaite pour $T = 0.7$. Nous avons en effet superposé les 2 jeux de courbes, en choisissant des tailles L pour les calculs statiques qui satisfont à la relation $L \simeq t_w^{1/z}$ (nous n'avons évidemment pas suffisamment de précision pour distinguer ici le terme $\sqrt{\ln t_w}$).

Pour la plus basse température, l'accord est beaucoup moins satisfaisant ; il n'est en fait que qualitatif. La raison est que lors des calculs statiques, les vortex sont présents avec leur densité d'équilibre dans le système, alors qu'ils sont bien plus nombreux dans la dynamique. La comparaison du système vieillissant avec une collection de petits systèmes quasi-équilibrés ne fonctionne que si l'influence des vortex est minime. Les images de la Fig. 2.9 expliquent alors pourquoi les vortex perturbent moins la dynamique à $T = 0.7$ qu'à $T = 0.3$: à la plus basse température en effet, les vortex sont très peu mobiles. Ils peuvent même être piégés par le réseau au cours de la simulation Monte Carlo. La conséquence est que les vortex sont pour la plupart non appariés. À $T = 0.7$ au contraire,

4. Il est plutôt amusant de pouvoir calculer exactement cette valeur dans un modèle en dimension finie, puisque la quantité $P(0, L)$ fait l'objet de très intenses investigations dans les verres de spins 3D...

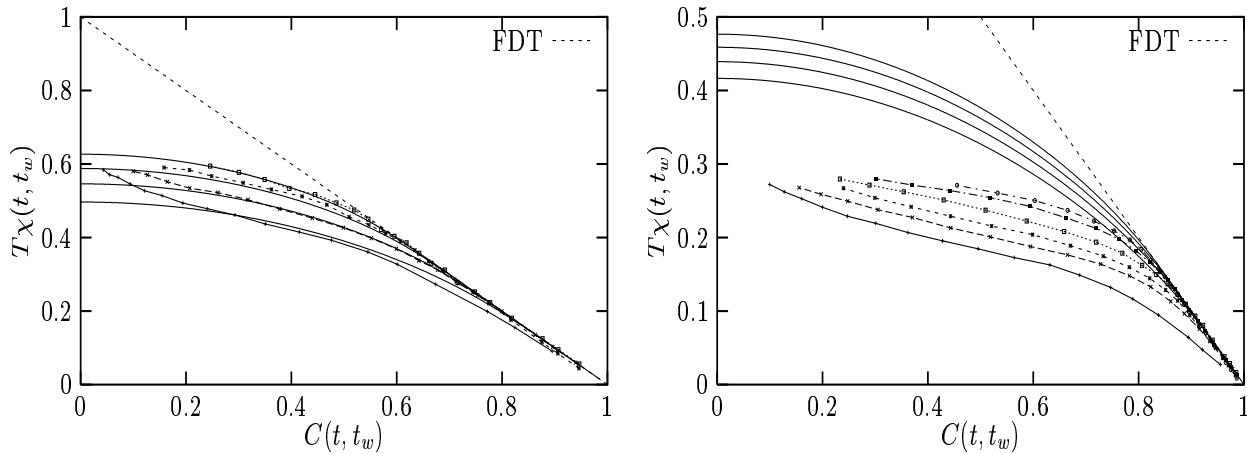


Fig. 2.8: Test de la relation (2.69). Les points sont les données dynamiques, et les lignes continues sont obtenues en intégrant la fonction de Parisi. À gauche : $T = 0.7$, les temps sont $t_w = 10, 100, 1000, 3000$ et les tailles $L = 4, 8, 16, 32$ (de bas en haut). À droite : $T = 0.3$, les temps sont $t_w = 10, 30, 100, 300, 1000, 3000, 10000$ et les tailles $L = 4, 8, 16, 32$ (de bas en haut).

la plupart des vortex forment des paires, et même souvent des quadrupôles, ce qui écrante leur influence.

La situation à basse température est en fait très similaire à la croissance de domaines à 1 dimension, qui est entièrement contrôlée par le mouvement des interfaces. Dans ce cas, la fonction $x(C)$ est très bien définie d'un point de vue dynamique. Corberi *et al.* [127] ont ainsi utilisé la relation (1.14) pour calculer une 'fonction de Parisi' par la relation $P_{dyn}(q) = dx(q)/dq$. La fonction de Parisi statique, quand à elle, est triviale, puisqu'elle est reliée aux fluctuations de l'aimantation à $T = 0$ dans la chaîne d'Ising (qui peuvent se calculer facilement par des méthodes itératives [157]). La limite thermodynamique est même extrêmement simple puisque l'on obtient $P_{stat}(q) = \delta(q \pm 1)$. Les 2 résultats ne coïncident évidemment pas, $P_{dyn}(q) \neq P_{stat}(q)$. Ni la relation (1.14), ni sa généralisation (2.69), ne sont donc satisfaites.

Si l'on tient à utiliser une relation statique / dynamique dans le cas de la chaîne d'Ising ou du modèle XY à basse température, il faut donc envisager de calculer statiquement une fonction $P(q, L)$ incluant les défauts topologiques présents au cours de la dynamique : le problème est alors de choisir correctement la densité, la dynamique, etc., de ces défauts. Comme illustration, nous avons calculé numériquement la fonction $P(q, L)$ du modèle XY en imposant à deux spins voisins d'être en sens opposé : la queue de la distribution qui s'étend en 0 est alors grandement réduite. L'effet qualitatif est donc bien en accord avec les résultats numériques de la Fig. 2.8.

De même pour la chaîne d'Ising, si l'on impose la présence d'une unique paroi de domaines lors du calcul des propriétés statiques, on obtient facilement le résultat $P_{stat}(q) = 1$, alors que sans la paroi $P_{stat}(q) = \delta(q \pm 1)$. Ceci démontre une nouvelle fois les changements drastiques que peuvent apporter les défauts topologiques à la fonction $P_{stat}(q)$, et permet une explication qualitative du fait que la relation statique / dynamique n'est plus satisfaite lorsque la dynamique devient dominée par les défauts topologiques.

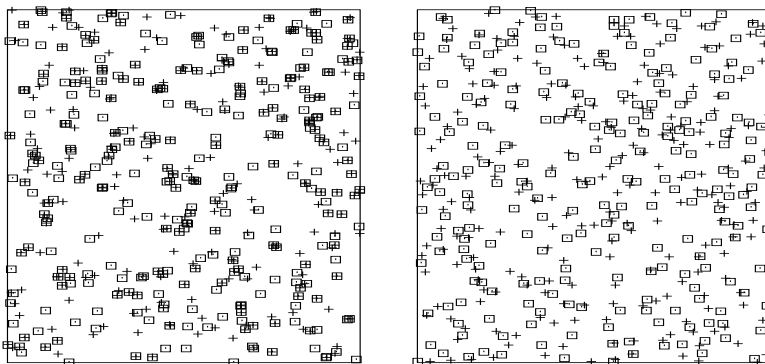


Fig. 2.9: Positions des vortex (croix) et des antivortex (carrés) pour le même temps $t_w = 10^3$ après la trempe, pour les températures finales $T = 0.7$ (gauche) et $T = 0.3$ (droite). Dans les 2 cas, la condition initiale est $T = \infty$.

2.4 Le vieillissement des verres de spin

2.4.1 Existence de la transition verre de spin

La très grande similarité des comportements dynamiques du modèle XY à 2D et du modèle d'Edwards-Anderson à 3D soulève en fait une question sous-jacente dans la littérature des verres de spin : la phase verre de spin est-elle une phase critique comme la phase de Kosterlitz-Thouless ? Cette question n'est pas vraiment centrale à l'heure actuelle dans la communauté, qui est plutôt polarisée entre les 2 approches théoriques que sont la théorie d'échelle développée par Fisher et Huse et la théorie émergeant de la solution des modèles champ moyen. Le point que nous soulevons ici est cependant présent en filigrane, et il est récemment réapparu à travers les travaux de Moore et ses collaborateurs [158, 159, 160]. La question que nous posons est en fait d'abord celle de l'existence de la transition verre de spin à 3 dimensions : y a-t-il une vraie transition du second ordre entre les phases paramagnétique et verre de spin comme en champ moyen ? A-t-on comme dans le modèle XY une transition de type Kosterlitz-Thouless entre une phase paramagnétique et une phase critique sur toute une gamme de températures ? La transition a-t-elle lieu à $T = 0$?

Expérimentalement, l'existence de la transition est établie en faisant appel à des arguments d'échelle dynamiques [31]. La susceptibilité magnétique est mesurée à des fréquences de plus en plus basses pour obtenir des informations sur la limite de fréquence nulle. Il semble ne faire de doute pour personne qu'il existe une température de transition finie [31].

Numériquement, plusieurs méthodes sont possibles pour détecter la transition [141]. On peut par exemple mesurer la divergence de la susceptibilité verre de spin ou essayer de détecter la température critique par le croisement du cumulante de Binder $g(T, L) = 3 - \langle q^4 \rangle / \langle q^2 \rangle^2$, puisque $g(T = T_c, L)$ ne dépend pas de L [141]. La première méthode ne permet pas de réfuter une température de transition nulle, $T_c = 0$ [161]. Jusqu'à très récemment, la seconde méthode ne permettait pas de distinguer entre la transition standard à $T_c > 0$ et une transition de type Kosterlitz-Thouless [162, 163]. Ce n'est qu'en construisant une machine spécialement adaptée à ce problème que Ballesteros *et al.* [164] ont pu voir d'une manière assez convaincante le croisement du cumulante de Binder pour une température $T_c > 0$, semblant indiquer l'existence d'une température de transition

finie dans le modèle d'Edwards-Anderson à 3 dimensions.

Ce résultat indique donc que la transition est du second ordre avec l'existence d'une longueur de corrélation finie dans la phase verre de spin, $\xi_{\text{eq}}(T < T_c) < \infty$, à la différence du modèle XY à 2 dimensions. Nous ne connaissons toutefois aucun travail où cette longueur de corrélation est mesurée. Un argument souvent avancé est que cette longueur reste très grande, même pour des températures assez basses. En d'autres mots, la région critique serait assez importante dans les verres de spin. La conséquence directe est que beaucoup de résultats numériques sur la statique des verres de spin sont obtenus dans un régime où $L \ll \xi_{\text{eq}}(T)$, ce qui expliquerait la grande similitude avec une phase de type Kosterlitz-Thouless. Cet argument est aussi utilisé dans les Refs. [158, 159, 160] : il est en effet naturel d'obtenir une fonction $P(q, L)$ ayant une structure non triviale dans le régime critique $L \ll \xi_{\text{eq}}$. L'étude standard des fluctuations d'aimantation au point critique ne dit en effet rien d'autre [150]. Bray et Moore ont d'ailleurs montré, à titre d'illustration, que dans le modèle d'Edwards-Anderson à 1 dimension, la fonction $P(q, L < \xi_{\text{eq}}(T))$ n'est pas triviale [165].

Signalons encore que la définition de la longueur de corrélation d'équilibre $\xi_{\text{eq}}(T)$ ne nous semble pas claire au niveau théorique. Habituellement, on a accès à une telle quantité par la décroissance d'une fonction de corrélation spatiale. Pour les verres de spin, on peut mesurer la fonction de corrélation associée au paramètre d'ordre d'Edwards-Anderson,

$$C(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{V} \int d^d \mathbf{x} \langle \phi(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{x}, t) \rangle^2. \quad (2.74)$$

Les prédictions sur la décroissance de cette fonction à grande distance semblent s'accorder sur une décroissance algébrique. La théorie de Fisher et Huse prédit un comportement $C(\mathbf{r}, t) \simeq |\mathbf{r}|^{2-d-\eta}$, pour $|\mathbf{r}| \leq \xi_{\text{eq}}(T)$, suivi d'une autre loi de puissance $C(\mathbf{r}, t) \simeq |\mathbf{r}|^{-\theta}$ pour $|\mathbf{r}| \geq \xi_{\text{eq}}(T)$, le crossover entre les 2 fournissant une définition pratique de la longueur de corrélation [52]. La présence d'un mode de masse nulle dans la théorie champ moyen en dimension $d > 6$ (le 'réplicon') semble aussi indiquer une décroissance algébrique de cette fonction de corrélation dans le cas d'une brisure de la symétrie des répliques [166], mais la théorie ne fournit pas de méthode pour mesurer directement $\xi_{\text{eq}}(T)$.

2.4.2 Croissance de la longueur de cohérence

Dynamiquement, il est possible de mesurer pendant le régime de vieillissement la fonction $C(\mathbf{r}, t)$, qui possède alors une dépendance explicite en t . Les études numériques montrent que cette fonction est bien représentée par la forme [79, 141, 167]

$$C(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{|\mathbf{r}|^\alpha} \exp \left[- \left(\frac{|\mathbf{r}|}{\ell(t)} \right)^\beta \right], \quad (2.75)$$

où α et β sont 2 exposants positifs qui dépendent de la température. Cette forme peut s'interpréter simplement en disant que le système s'équilibre successivement sur des échelles de longueur de plus en plus grandes. Au temps t , le système est donc localement équilibré sur une distance $\ell(t)$, que nous appelons la 'longueur de cohérence'. La fonction de corrélation développe donc peu à peu son comportement algébrique d'équilibre, celui-ci étant coupé, pour t fini, par une fonction de la variable d'échelle $|\mathbf{r}|/\ell(t)$. Nous préférons le terme de longueur de cohérence à celui de longueur de corrélation dynamique, pour les raisons

évoquées dans le paragraphe précédent, le lien entre les longueurs $\ell(t)$ et $\xi_{\text{eq}}(T)$ ne nous semblant pas très évident.

La croissance de la longueur de cohérence pendant le régime de vieillissement des verres de spin a été clairement mise en évidence numériquement [79, 149, 167, 168]. L'importance de cette échelle de longueur sur les propriétés d'échelle de diverses grandeurs physiques a de plus été démontrée dans les Refs. [169]. La longueur de cohérence $\ell(t)$ a aussi été déduite expérimentalement du comportement de l'énergie de couplage à un champ magnétique (énergie Zeeman) [170]. Toutes ces études montrent que la longueur de cohérence croît comme une puissance du temps t ,

$$\ell(t) \simeq t^{0.2T/T_g}, \quad (2.76)$$

l'exposant étant quantitativement le même dans les expériences et les simulations.

Cette vision spatiale du processus de vieillissement est absente de la théorie dynamique champ moyen sous sa présente forme [22]. Par contre, cette croissance d'une échelle de longueur est réminiscente de la croissance de domaines décrite tout au long de ce chapitre et nous reviendrons sur ce point plus bas. Toutefois, pour comprendre l'existence de cette longueur dans les verres de spin, on doit recourir aux arguments phénoménologiques de Fisher et Huse, pour qui le processus de vieillissement consiste précisément en une équilibration successive d'échelles de longueurs de plus en plus grandes. Des arguments d'échelle les conduisent alors à la relation [52]

$$\ell(t) \simeq \left(\frac{T \ln t}{\Upsilon(T)} \right)^{1/\psi}, \quad (2.77)$$

où $\Upsilon(T)$ représente une barrière énergie typique à la température T . Les lois de croissance (2.76)-(2.77) pour $\ell(t)$ étant toutes deux extrêmement lentes, il est bien évidemment difficile de les différencier tant au niveau expérimentale que numérique. Une double étude expérimentale et numérique en cours mesurant la dépendance en température de $\Upsilon(T)$ devrait permettre d'éclairer ce point [171].

2.4.3 Validité de la relation statique / dynamique

L'existence de la longueur de cohérence $\ell(t)$ nous permet donc d'envisager l'application aux verres de spin de la relation statique / dynamique proposée au paragraphe précédent dans le cadre de notre étude du modèle XY. Ce point de vue est très différent de la formulation initiale de cette relation. Notre étude étant techniquement similaire à celle du paragraphe précédent, nous passerons rapidement sur les détails numériques. Nous avons montré dans l'introduction, Fig. 1.6, les résultats obtenus numériquement dans le modèle d'Edwards-Anderson à 3 dimensions montrant la coïncidence d'une courbe paramétrique obtenue dynamiquement pour un temps $t_w = 10^5$, et d'une courbe obtenue par la double intégration de la fonction de Parisi statique pour une taille $L = 16$ [78]. Comme nous l'avons souligné au paragraphe 2.3.3, l'hypothèse faite est que ces 2 courbes ont atteint leur limite asymptotique, hypothèse qui permet alors de discuter la forme de la fonction $P(q, L = \infty)$ et donc l'existence d'une phase verre de spin caractérisée par une brisure continue de la symétrie des répliques [78].

Dans ce paragraphe, nous voulons d'une part montrer le très large domaine de validité de la relation (2.69) qui généralise la relation (1.14) initialement déduite de l'étude de

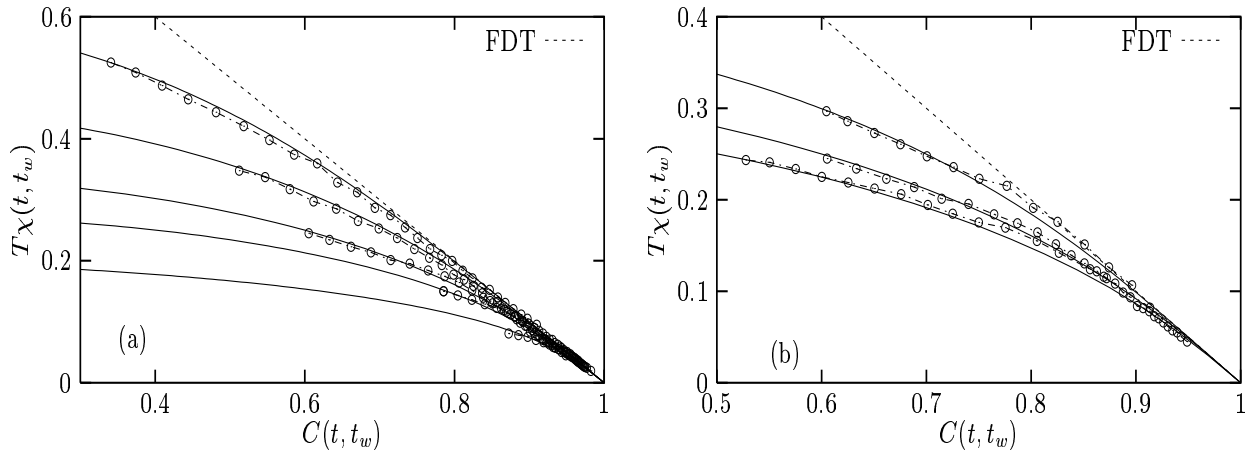


Fig. 2.10: Courbes paramétriques susceptibilité - corrélation obtenue dynamiquement (cercles) comparés aux données statiques (lignes continues). La ligne pointillée est la relation d'équilibre. (a) $t_w = 10^4$, pour différentes températures $T = 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2$ (de haut en bas). (b) Température $T = 0.4$ et temps $t_w = 10^2, 3.10^3, 3.10^4$ (de bas en haut), et données d'équilibre pour les tailles $L = 8, 10, 18$ (de bas en haut).

modèles champ moyen. Nous voulons d'autre part signaler que son utilisation ne valide pas pour autant la théorie champ moyen dans son ensemble. Pour cela, nous présentons ici des résultats numériques obtenus avec A. Barrat sur le modèle d'Edwards-Anderson à 2 dimensions dont l'Hamiltonien est

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s_i s_j, \quad (2.78)$$

où s_i ($i = 1, \dots, N$) sont $N = L \times L$ spins d'Ising situés sur les sites d'un réseau carré avec des conditions aux limites périodiques, les J_{ij} étant des variables aléatoires Gaussiennes de moyenne 0 et de variance 1. À 2 dimensions, la température de transition de phase se situe à $T_c = 0$ [172]. Nous présentons ici seulement les résultats portant sur l'étude de la relation (2.69) puisque la dynamique de ce modèle a été étudiée en détail [149, 173]. À basse température, le temps de relaxation devient très grand (mais ne diverge qu'à $T_c = 0$). On observe alors une dynamique de vieillissement très similaire à celle du modèle en 3 dimensions. En particulier, la longueur de cohérence définie ci-dessus croît algébriquement, $\ell(t) \simeq t^{0.2T}$. Comme au paragraphe précédent, nous mesurons indépendamment la fonction d'autocorrélation $C(t, t_w) \equiv N^{-1} \sum_i \langle s_i(t) s_i(t_w) \rangle$ et la susceptibilité $\chi(t, t_w)$ correspondante lors de la dynamique. Nous obtenons ainsi pour différentes températures T et différents t_w des courbes paramétriques susceptibilité - corrélation. Nous comparons ces courbes obtenues dynamiquement aux courbes $\chi(C, L) = T^{-1} \int_C^1 dq \int_0^q dq' P(q', L)$ obtenues par double intégration de la fonction de Parisi statique. Nos résultats sont résumés sur la Fig. 2.10.

La Fig. 2.10-a montre comme la Fig.1.6 que les données statiques et dynamiques coïncident. La différence est qu'ici, nous avons choisi avec soin une taille L permettant le lien $t_w \leftrightarrow L$. Ceci est plus clairement démontré sur la Fig. 2.10-b où nous montrons qu'à chaque temps t_w correspond une taille L . Pour les températures $T \in [0.2, 0.6]$, nous trouvons une relation entre L et t_w tout à fait compatible avec la croissance algébrique

$$L \propto t_w^{0.2T}.$$

Ces résultats sont un signe supplémentaire de l'importance physique de la longueur de cohérence. Le lien précis entre la taille L correspondant à un temps t_w et la longueur de cohérence $\ell(t_w)$ est un point un peu délicat. Les conditions aux limites périodiques utilisées lors des calculs statiques permettent l'estimation $L \simeq 2\ell(t_w)$. Ceci n'est qu'une estimation puisque nous avons explicitement vérifié que cette correspondance est sensible aux conditions aux limites en imposant des conditions aux limites antipériodiques pour mesurer $P(q, L)$. Un moyen clair d'établir la correspondance entre les deux quantités serait de calculer $P(q, L)$ à l'intérieur d'une boîte de taille L incluse dans un système de beaucoup plus grande taille, ainsi que le proposent par exemple Newman et Stein [174]. Ce calcul est évidemment numériquement beaucoup plus coûteux, mais rend le résultat insensible aux conditions aux limites imposées.

La relation statique / dynamique ne fonctionne que parce que les excitations de taille $\ell(t_w)$ qui contribuent lors de la dynamique à la décroissance de la fonction de corrélation sous sa forme d'échelle $C(t, t_w) \simeq \mathcal{C}(\ell(t)/\ell(t_w))$ et à la partie hors équilibre des courbes paramétriques, sont les mêmes qui contribuent à la partie non triviale de la fonction de Parisi statique, $P(q \simeq 0, L)$. Ce résultat nous semble physiquement très important, il est la conséquence directe de la relation (2.69) que nous avons proposée dans au paragraphe précédent. En ce sens, le vieillissement des verres de spin est qualitativement différent d'une croissance de domaines standard où les excitations de grande taille $L(t_w)$ qui régissent la dynamique (les parois de domaines), sont absentes dans la statique, la relation (1.14) n'étant satisfaite que dans la limite $t_w \rightarrow \infty$ où les parois de domaines disparaissent. C'est aussi la raison pour laquelle nous avons préféré le nom de longueur de cohérence à celui de 'taille des domaines', parfois utilisé dans la littérature.

Notons encore que nos résultats ne nous renseignent absolument pas sur la forme géométrique des excitations de grande taille qui sont à l'œuvre au cours du vieillissement ou qui dominent la statique. En particulier, il n'est pas clair à l'heure actuelle que la description de ces excitations en termes d'objets compacts (les fameuses 'gouttelettes' de Fisher et Huse) soit la bonne. Notre étude montre simplement la pertinence de cette question pour obtenir une compréhension complète du processus de vieillissement des verres de spin. Ce problème n'est en fait envisagé que depuis peu dans la littérature [175].

Nous concluons ce paragraphe par une remarque sur les échelles de longueur impliquées lors de la dynamique des verres de spins. Nous avons en effet montré que les études statiques et dynamiques sondent finalement les mêmes excitations sur des échelles de longueur qui sont très similaires. Une première conséquence est que passer aux échelles de temps expérimentales, i.e. multiplier les temps par un facteur $\sim 10^6$ fait gagner un facteur $\sim (10^6)^{0.2 \times 0.7} \sim 6.5$ sur les échelles de longueur à $T = 0.7T_g$. On sonde donc au grand maximum des tailles de l'ordre de $\ell \sim 40$ dans la dynamique des verres de spin, ce qui rend la limite thermodynamique d'un intérêt *pratique* assez modeste...

Une seconde conséquence de notre travail est que les deux types de simulation (statiques et dynamiques) contiennent potentiellement les mêmes informations. Ce fait a été à notre avis très largement sous-estimé dans la littérature des verres de spin. Une illustration très frappante concerne l'étude du comportement des verres de spin en champ magnétique, pour lesquelles les études statiques et dynamiques semblent donner des résultats différents. La question se situe ici sur l'existence d'une transition verre de spin en champ magnétique (la 'ligne de Almeida-Thouless' [176] (AT)) prédite par la théorie champ moyen, et qui n'existe pas d'après les arguments d'échelle de Fisher et Huse [52]. Les études statiques

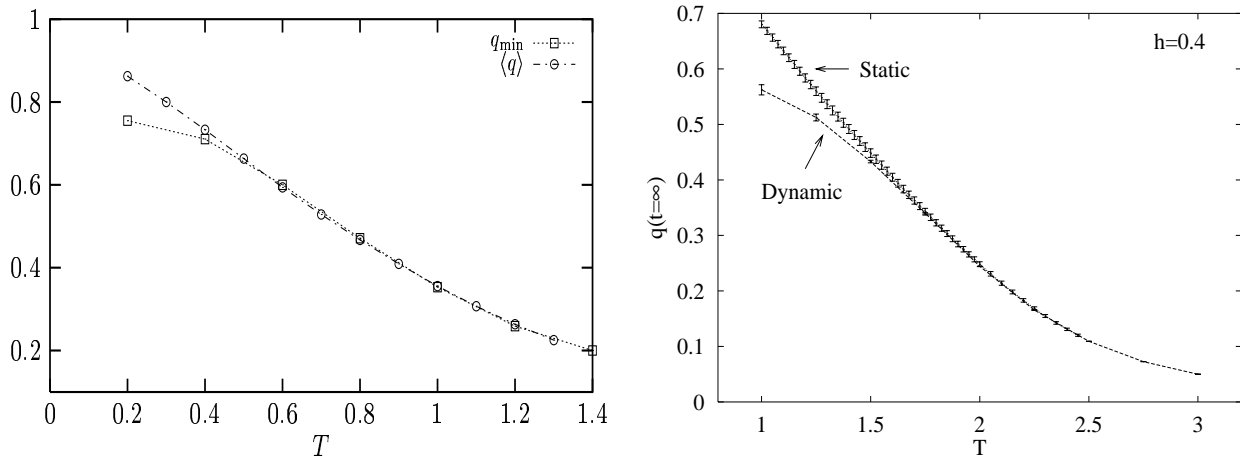


Fig. 2.11: À gauche : évolution en température des 2 recouvrements q_{min} et $\langle q \rangle$ dans le modèle d'Edwards-Anderson à 2 dimensions avec un champ magnétique uniforme $h = 0.4$. À droite : données similaires obtenues à 4 dimensions, d'après la Ref. [180].

ne montrent pas de signe clairs de l'existence d'une ligne AT : le cumulants de Binder en champ ne se croise pas [177, 178], la susceptibilité est quasiment constante [179]. Les études dynamiques semblent cependant pencher très clairement en faveur de l'existence de cette ligne [180, 181, 182].

Pour comprendre ce point très intrigant (statique et dynamique devraient en principe contenir les mêmes informations), nous avons refait en dimension 2 les études dynamiques démontrant l'existence d'une ligne AT. Ces études consistent à mesurer différents recouvrements (notés q_{min} et $\langle q \rangle$) qui doivent être différents (i) dans la phase verre de spin, (ii) dans la limite thermodynamique, (iii) d'après la forme obtenue en champ moyen pour la fonction $P(q)$ avec champ magnétique. Le premier recouvrement, q_{min} , est défini comme

$$q_{min} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i^a(t) s_i^b(t), \quad (2.79)$$

où (a, b) désignent 2 copies du même système évoluant selon des histoires thermiques différentes, à partir de configurations initiales indépendantes. q_{min} est donc le recouvrement minimum autorisé par la fonction $P(q)$. Le second recouvrement est calculé statiquement,

$$\langle q \rangle \equiv \int dq' P(q') q', \quad (2.80)$$

c'est le premier moment de la distribution $P(q)$. Nous présentons l'évolution en température de ces 2 quantités sur la Fig. 2.11 pour le champ $h = 0.4$. Alors qu'à haute température l'égalité $q_{min} = \langle q \rangle$ est très bien satisfaite, on obtient une différence significative à plus basse température, semblant indiquer l'existence d'une transition de phase ayant lieu à la température $T^{AT}(h = 0.4) \simeq 0.5$. La Fig. 2.11 présente aussi les résultats de la Ref. [180], obtenus sur le modèle d'Edwards-Anderson à 4 dimensions, pour le champ $h = 0.4$. C'est le protocole numérique de cette référence que nous avons très exactement répété, obtenant des résultats clairement similaires, cf Fig. 2.11.

Seule l'utilisation de tailles bien plus grandes (pour la statique) et de temps bien plus longs (pour la dynamique) permettrait de conclure à l'absence de la ligne AT en 2 dimensions. Cette remarque a déjà été faite au début des années 80 par Young d'une part [183], Kinzel et Binder d'autre part [184]. On voit donc que données statiques et dynamiques sondent effectivement les mêmes échelles de longueur, et doivent donc, à ce titre, être considérées avec les mêmes précautions.

3. INFLUENCE D'UN ÉCOULEMENT SUR LA SÉPARATION DE PHASE

Nous quittons avec ce chapitre l'étude du régime de vieillissement des systèmes vitreux, réalisée sur l'exemple des séparations de phase, pour entrer dans le domaine de la dynamique forcée des systèmes vitreux. Il est donc naturel de commencer cette étude par les systèmes vitreux 'les plus simples' que nous venons d'étudier et de porter notre attention sur le problème de la croissance de domaines.

Une manière pertinente de forcer la dynamique de ces systèmes, spécialement en vue de l'étude de la séparation de phase des mélanges binaires, est de considérer celle-ci en présence d'un écoulement. Cette étude soulève des problèmes théoriques importants (dynamique des transitions de phase du premier ordre en présence d'une perturbation non Hamiltonienne), mais elle est en relation directe avec des questions très pratiques : c'est toute une branche du génie chimique qui étudie les propriétés d'écoulement et de mélange des fluides binaires, simples ou polymériques, et même plus récemment de mélanges granulaires (problèmes de ségrégation et de mélange). Ces problèmes fondamentaux et appliqués sont décrits dans les revues d'Onuki [185] et d'Ottino [186].

Dans la pratique, les mélanges binaires sont soumis à des écoulements complexes. Comme à son habitude, le physicien ramène ces problèmes pertinents pour les applications, mais compliqués, à des situations plus simples supposées capturer l'essence du phénomène. C'est pourquoi une très grosse activité expérimentale [187, 188, 189, 190, 191, 192, 193], numérique [194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205] et théorique [185, 194, 206, 207, 208, 209] s'est concentrée sur le problème de la séparation de phase en présence d'un cisaillement homogène.

Dans les années 80, essentiellement à la suite des travaux théoriques d'Onuki [210], des expériences ont été menées pour étudier l'influence d'un écoulement turbulent (à grand nombre de Reynolds $R_e \gg 1$) sur la position du point critique des mélanges binaires [211, 212, 213] : les fluctuations critiques se développent plus difficilement du fait de l'écoulement, ce qui a pour effet d'abaisser la température de la transition. Nous ne connaissons pas d'études numériques sur ce sujet, mais le problème mériterait évidemment que l'on s'y intéresse. De même, il existe peu de travaux s'intéressant à l'effet d'un écoulement turbulent sur la séparation de phase proprement dite [214]. Expérimentalement, seul le cas d'un écoulement chaotique (mais non turbulent, $R_e \simeq 1$) a été étudié par le groupe d'Ottino [215], dans la foulée de leurs études sur la dispersion chaotique d'un scalaire passif [216, 217], problème très étudié depuis le milieu des années 80 [218, 219].

Notre motivation pour ce sujet était d'obtenir une description simple de la dynamique forcée des systèmes vitreux. Comme nous avons essayé de le faire sentir dans les lignes qui précèdent, ce problème est tout sauf simple et le comportement des mélanges binaires sous cisaillement assez différents par exemple de celui des fluides complexes que nous voulions décrire. Nous avons donc étudié ce problème *per se*, dans les 2 cas d'un cisaillement homogène et d'un écoulement chaotique, que nous présentons maintenant.

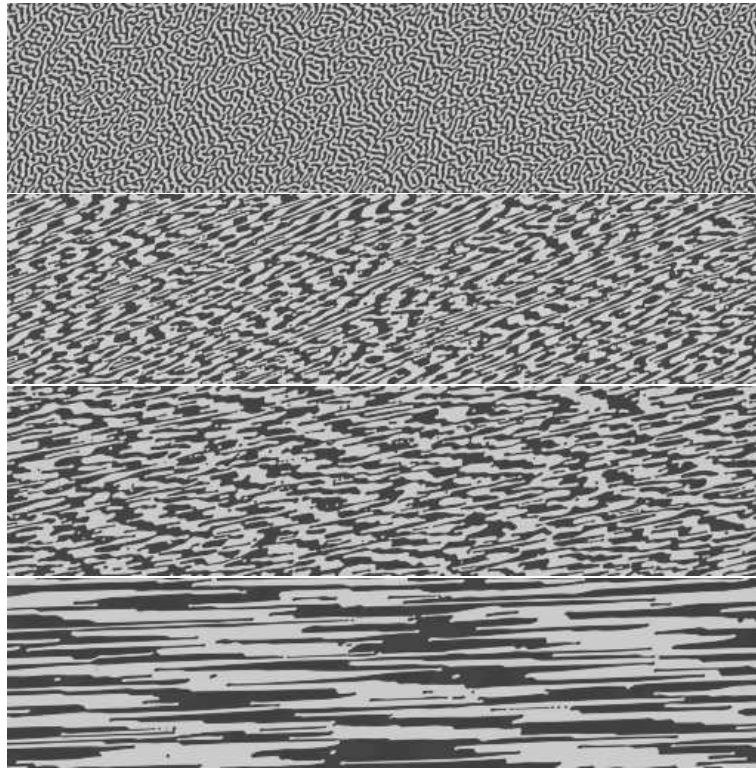


Fig. 3.1: Simulation de la décomposition spinodale d'un mélange binaire sous cisaillement homogène en 2 dimensions, négligeant les effets hydrodynamiques. On a pris ici $\mathbf{v} = \gamma y \mathbf{e}_x$ et on a successivement $\gamma t = 1, 5, 10, 50$, de haut en bas.

3.1 Décomposition spinodale sous cisaillement homogène

3.1.1 Pourquoi le problème est-il si difficile ?

La première difficulté dans l'étude de ce problème de la décomposition spinodale sous cisaillement homogène est de s'y retrouver dans l'incroyable abondance de résultats publiés, parfois similaires, parfois contradictoires. Nous allons donc d'abord tenter de répondre à la question : "Que sait-on ?".

La description qualitative du phénomène peut se faire à l'aide de la Fig. 3.1, qui présente les résultats numériques que nous avons obtenus (la méthode sera décrite plus bas). Comme auparavant, le système est placé sous sa ligne spinodale à l'instant initial, mais cette fois en présence d'un écoulement dont le taux de cisaillement est γ . L'effet du cisaillement est d'introduire une nouvelle échelle de temps dans le système, γ^{-1} , et nous considérons le cas où $\gamma^{-1} \gg t_0$, où t_0 a été défini au chapitre précédent comme le temps de formation des interfaces. Après la trempe, la séparation de phase est essentiellement inchangée pour $\gamma t \ll 1$: les domaines se forment de manière isotrope en un temps $t \simeq t_0$ et croissent pour former une structure bicontinue isotrope jusqu'à des temps $\gamma t \simeq 1$. La première configuration de la Fig. 3.1 est en effet très similaire à celles de la Fig. 1.5. L'effet du cisaillement se fait ensuite sentir et pour des temps $\gamma t \gtrsim 1$, les domaines deviennent anisotropes. Une direction privilégiée est alors clairement présente dans le système. Cette direction s'aligne progressivement avec celle de l'écoulement. Lorsque $\gamma t \gg 1$, les domaines sont très allongés, parallèles à l'écoulement, comme sur la dernière configuration de la

Fig. 3.1.

Toutes les études s'accordent évidemment sur cette présentation qualitative de l'influence du cisaillement. Les questions qui se posent naturellement sont alors les suivantes. (1) Le système n'étant plus isotrope en présence de l'écoulement, une seule échelle de longueur ne suffit pas à caractériser la structure des domaines. Le premier problème est donc de définir les propriétés de cette structure (orientation des domaines, échelles de longueur) puis de les mesurer. (2) On doit ensuite soulever la question de la croissance des domaines. Se fait-elle à la même vitesse qu'en l'absence de l'écoulement? (3) Est-ce que cette croissance dure indéfiniment, ou bien est-elle finalement stoppée pour atteindre un état stationnaire dynamique? (4) Enfin, l'hypothèse d'échelle n'étant naturellement plus valable dans ce cas, on peut se demander si une généralisation appropriée est envisageable.

Répondre à ces questions pour des situations expérimentales réalistes implique de tenir compte du rôle joué par l'hydrodynamique dans la séparation de phase. Des arguments dimensionnels dus à Onuki [185] prédisent ainsi que l'effet de l'hydrodynamique est de casser les très longs domaines. À temps longs $\gamma t \gg 1$, on atteint donc un état stationnaire dynamique, formé de domaines étirés dans la direction de l'écoulement. Cette phase a été appelée 'string phase' et observée expérimentalement [189, 190]. Frischknecht [209] a de plus montré par une analyse de stabilité linéaire que cette phase est robuste vis-à-vis des instabilités thermodynamique et de Rayleigh. D'autres expériences, au contraire, n'observent pas cette phase et reportent donc une croissance ininterrompue des domaines [187, 188, 193, 203]. Les simulations numériques n'ont apporté pour l'instant que peu de renseignements, puisqu'il est numériquement très difficile de réaliser une simulation 'réaliste', i.e. avec interactions hydrodynamiques. Des progrès importants ont récemment été réalisés dans l'étude de la séparation de phase avec hydrodynamique, mais sans écoulement macroscopique, grâce à des simulations de type 'lattice Boltzmann' [195, 197, 220]. La prise en compte sérieuse¹ d'un écoulement devrait donc être possible assez prochainement [195].

Si l'on ne tient pas compte des effets hydrodynamiques, la réponse aux questions (1)-(4) n'est encore pas très facile. D'un point de vue théorique, on ne dispose d'aucune prédiction faite à partir d'un modèle raisonnable de décomposition spinodale sous cisaillement [208]. Les études existantes s'intéressent donc à des modèles moins réalistes, comme le modèle $O(n)$ avec $n \rightarrow \infty$ (cf paragraphe 2.2) toujours soluble en présence d'un cisaillement [206], ou bien encore au cas d'un paramètre d'ordre non conservé dans l'approximation OJK (cf paragraphe 2.1.4) [207]. Enfin, une approche de type 'groupe de renormalisation' (RG) a été proposée par Bray dans le cas sans écoulement [221]. Elle permet une dérivation très élégante des lois de croissance, mais repose sur le fait que l'hypothèse d'échelle est valable. Elle a récemment été généralisée au cas d'un cisaillement homogène [194].

Enfin, les simulations numériques négligeant l'hydrodynamique ne répondent pas non plus de manière satisfaisante aux questions (1)-(4). Les premières simulations (début des années 90) ne dégagent que les aspects qualitatifs évoqués plus haut [201, 202, 205]. Des lois de croissance algébriques sont ensuite établies [204], mais sans mesure — ou bien des mesures douteuses [194] — des exposants, ni de l'orientation des domaines. Enfin, l'hypothèse d'échelle sur laquelle se base l'approche RG n'a été partiellement testée que dans un cas [191], avec des résultats négatifs.

1. Les 'string phases' observées numériquement jusqu'ici [196, 202] résultent trivialement d'un effet de taille finie, à l'exception notable du travail de Wagner et Yeomans [197], un peu plus convaincant, mais beaucoup trop qualitatif.

Nous tentons donc ici de clarifier ces divers points par la simulation numérique de l'équation de Cahn-Hilliard en 2 dimensions, en présence d'un cisaillement homogène. Cette équation devient donc (à $T = 0$)

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) = \Gamma \nabla^2 \left(\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} \right). \quad (3.1)$$

Nous choisissons l'écoulement dans la direction (Ox) : $\mathbf{v} = \gamma y \mathbf{e}_x$. En mesurant une nouvelle fois le temps en unités de t_0 et l'espace en unités de ξ_{eq} , on doit résoudre l'équation différentielle

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\gamma y \frac{\partial \phi}{\partial x} - \nabla^2 (\nabla^2 \phi - \phi^3 + \phi). \quad (3.2)$$

Pour cela, nous utilisons l'astucieuse méthode proposée par Onuki [222], qui consiste à effectuer le changement de variable $x' \equiv x - \gamma t y$, $y' \equiv y$. Définissant ensuite $\phi(\mathbf{x}, t) \equiv \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)$, l'Eq. (3.2) devient

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = -\hat{\nabla}^2 (\hat{\nabla}^2 \hat{\phi} - \hat{\phi}^3 + \hat{\phi}), \quad (3.3)$$

avec

$$\hat{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'} - \gamma t \frac{\partial}{\partial x'} \right), \quad \hat{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y'} - \gamma t \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2. \quad (3.4)$$

L'intérêt de cette transformation est évident puisque l'équation (3.3) est formellement identique à l'équation de Cahn-Hilliard sans écoulement, Eq. (2.3). Nous pouvons donc utiliser l'algorithme décrit au chapitre précédent pour la résoudre. Le seul paramètre libre de la simulation est le taux de cisaillement γ . Nous avons dû faire varier sa valeur sur une large gamme ($\gamma^{-1} \in [25, 800]$) pour dégager des résultats quantitativement convaincants, et cette étude est donc bien plus complète que les précédentes. Nous insistons sur le fait que la seule contrainte sur le taux de cisaillement est $\gamma^{-1} \gg t_0$, de sorte que l'on étudie l'influence de l'écoulement sur des domaines parfaitement bien définis. Nous présentons maintenant nos résultats.

3.1.2 Croissance anisotrope des domaines

Nous avons déjà discuté des aspects qualitatifs de la séparation de phase. En particulier, il émerge clairement de la Fig. 3.1 que les domaines ne sont plus isotropes et qu'une seule longueur ne peut suffire à les caractériser. L'anisotropie se voit aussi sur la fonction de corrélation à deux points, Eq. (2.6), dont nous présentons un exemple sur la Fig. 3.2 pour les valeurs $\gamma = 0.01$ et $\gamma t = 5$.

Comme précédemment, nous pouvons utiliser cette fonction (nous rappelons que c'est sa transformée de Fourier qui est mesurée expérimentalement) pour en déduire des informations sur la morphologie des domaines. Leur forme moyenne est toujours obtenue en analysant l'intersection de $C(\mathbf{r}, t)$ avec un plan horizontal, $z = const$. Cette intersection, ainsi que son évolution, sont représentées sur la Fig. 3.2. Il est clair d'après ces courbes que les domaines ont en moyenne une forme elliptique. Nous concluons donc que pour décrire correctement leur structure, trois paramètres sont nécessaires : les axes principaux

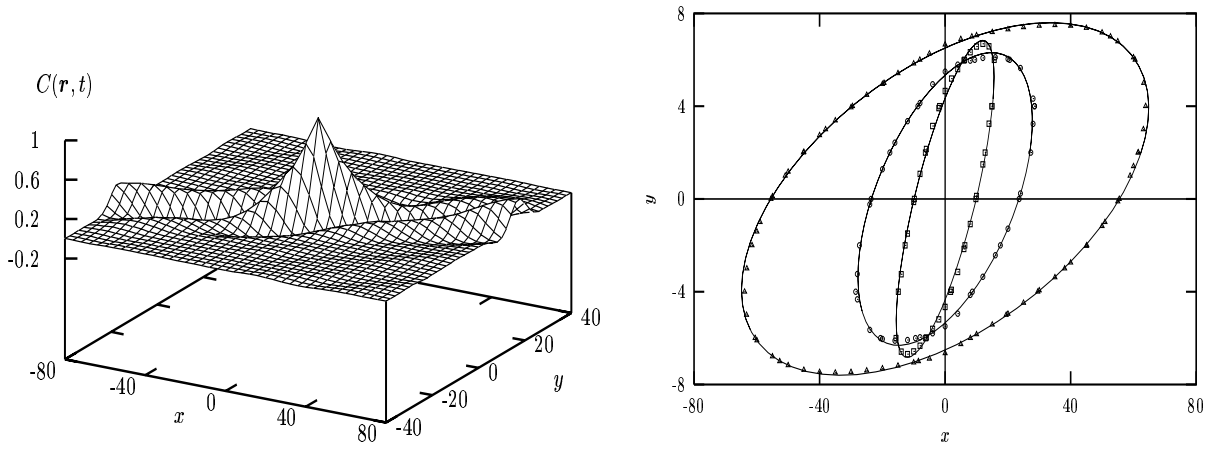


Fig. 3.2: Étude de la fonction de corrélation à 2 points, Eq. (2.6), en présence du cisaillement. À gauche, la fonction $C(\mathbf{r}, t)$ pour $\gamma = 0.01$ et $\gamma t = 5$. À droite, évolution de l'intersection de cette surface avec le plan horizontal $z = 0.5$, pour $\gamma = 0.01$ et les temps $\gamma t = 5$ (carrés), 10 (cercles) et 20 (triangles). Ces données sont fittées par une forme elliptique avec des lignes continues. Dans les 2 cas, les axes (Ox) et (Oy) sont gradués avec une échelle différente.

de l'ellipse, que nous notons $R_{\parallel}(t)$ (grand axe) et $R_{\perp}(t)$ (petit axe), ainsi que l'orientation de l'ellipse, notée $\theta(t)$ (angle entre le grand axe et la direction (Ox)).

Il est étonnant de constater que cette analyse naturelle des données, qui apparaît dans les premières expériences de Beysens et ses collaborateurs [187, 188, 193], n'a pas été reprise dans les travaux numériques qui se contentent de mesurer $R_x(t)$ et $R_y(t)$. Seuls Wagner et Yeomans [197] ont montré l'évolution temporelle de $\theta(t)$, mais leurs données ne permettent pas une analyse quantitative. Nous décrivons maintenant l'évolution temporelle de ces 3 paramètres.

L'orientation des domaines apparaît clairement sur les configurations de la Fig. 3.1. On voit qu'elle décroît avec le temps, puisque les domaines sont asymptotiquement alignés avec l'écoulement. On peut s'attendre à ce que l'orientation des domaines soit inversement proportionnelle à γt : ce serait en effet la direction indiquée par un bâtonnet rigide advecté par l'écoulement,

$$\theta(t) \simeq \frac{\theta_0(\gamma)}{\gamma t}. \quad (3.5)$$

Cette relation est testée avec succès sur la Fig. 3.3, où $\theta_0(\gamma)$ est utilisé comme un paramètre ajustable. Les résultats numériques montrent que $\theta_0(\gamma)$ décroît très lentement avec le taux de cisaillement. On mesure par exemple $\theta_0(0.00125) \simeq 0.975$ et $\theta_0(0.04) \simeq 2.0$. Ce résultat est assez logique puisque, par définition, θ_0 correspond à l'orientation des domaines pour le temps $t = \gamma^{-1}$. Plus le taux de cisaillement est petit, plus les domaines sont grands au temps γ^{-1} . Les gros domaines étant plus aisément déformables que les petits, l'influence de l'écoulement est plus forte et ils sont donc plus alignés avec l'écoulement que les petits.

Les lois de croissance des domaines sont représentées sur la Fig. 3.4 pour tous les taux de cisaillement pour lesquels nous avons pu obtenir des résultats fiables. Ces données sont délicates à obtenir, car la croissance dans la direction (Ox) est très rapide: les domaines

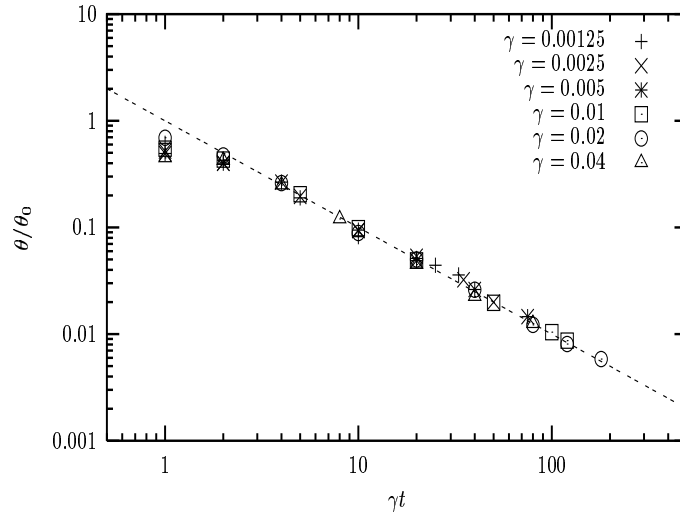


Fig. 3.3: Orientation moyenne des domaines, représentée en fonction de γt pour différents taux de cisaillement γ . L'orientation $\theta(t)$ est normalisée par un facteur θ_0 , choisi pour que les différentes courbes se superposent. La ligne pointillée représente la relation $\theta/\theta_0 = (\gamma t)^{-1}$, Eq. (3.5).

atteignent vite la taille de la boîte de la simulation. Nous avons donc utilisé des systèmes rectangulaires très grands et la plupart des résultats présentés sont pour $L_x = 8192$, $L_y = 512$. Les configurations de la Fig. 3.1 représentent un système de taille $L_x = 2048$, $L_y = 512$ (1/4 du système total).

Les courbes de la Fig. 3.4 indiquent que les lois de croissance $R_{\parallel}(t)$ et $R_{\perp}(t)$ sont bien décrites par des lois de puissance,

$$R_{\parallel}(t) \simeq R_{\parallel 0} \cdot (\gamma t)^{\alpha_{\parallel}}, \quad R_{\perp}(t) \simeq R_{\perp 0} \cdot (\gamma t)^{\alpha_{\perp}}, \quad (3.6)$$

ce qui définit les exposants α_{\parallel} et α_{\perp} , qui vont retenir notre attention. Notons tout d'abord que les travaux de Padilla et Toxvaerd [204] avaient déjà suggéré que les lois de croissance sont algébriques, résultat confirmé depuis [191, 194, 203]. Les données pour $R_{\parallel}(t)$ sont très bien décrites par un exposant α_{\parallel} aux temps longs. Nous avons ainsi utilisé les données pour $\gamma t \geq 10$ pour mesurer α_{\parallel} avec une bonne précision. Les données pour $R_{\perp}(t)$ sont moins claires, puisque cette longueur varie très peu lors de la simulation. Nous proposons donc 2 alternatives pour α_{\perp} . La première correspond à $\alpha_{\perp} = 0$, i.e. le petit axe de l'ellipse est constant, la seconde à $\alpha_{\perp} = \alpha_{\parallel} - 1$, en suivant les résultats analytiques existant. Les 2 propositions sont équivalentes si $\alpha_{\parallel} = 1$, ce qui est le cas pour les plus faibles taux de cisaillement. Remarquons finalement que des corrections logarithmiques aux lois algébriques sont toujours possibles : elles émergent en effet de l'étude du modèle $O(n)$ [206] ou de l'approximation OJK [207]. Nous n'espérons pas pouvoir les déterminer dans cette simulation.

Nous n'obtenons pas non plus le phénomène d'oscillations' détecté dans la Ref. [194]. Notre méthode de mesure des échelles de longueur étant différente, nous suspectons que ces oscillations soient un artefact de la mesure proposée par Corberi *et al.* [194]. Étonnamment, Qiu *et al.* [191] utilisent la même mesure que Corberi *et al.* [194] mais sans trouver d'oscillations non plus. Enfin, des oscillations apparaissent aussi dans la so-

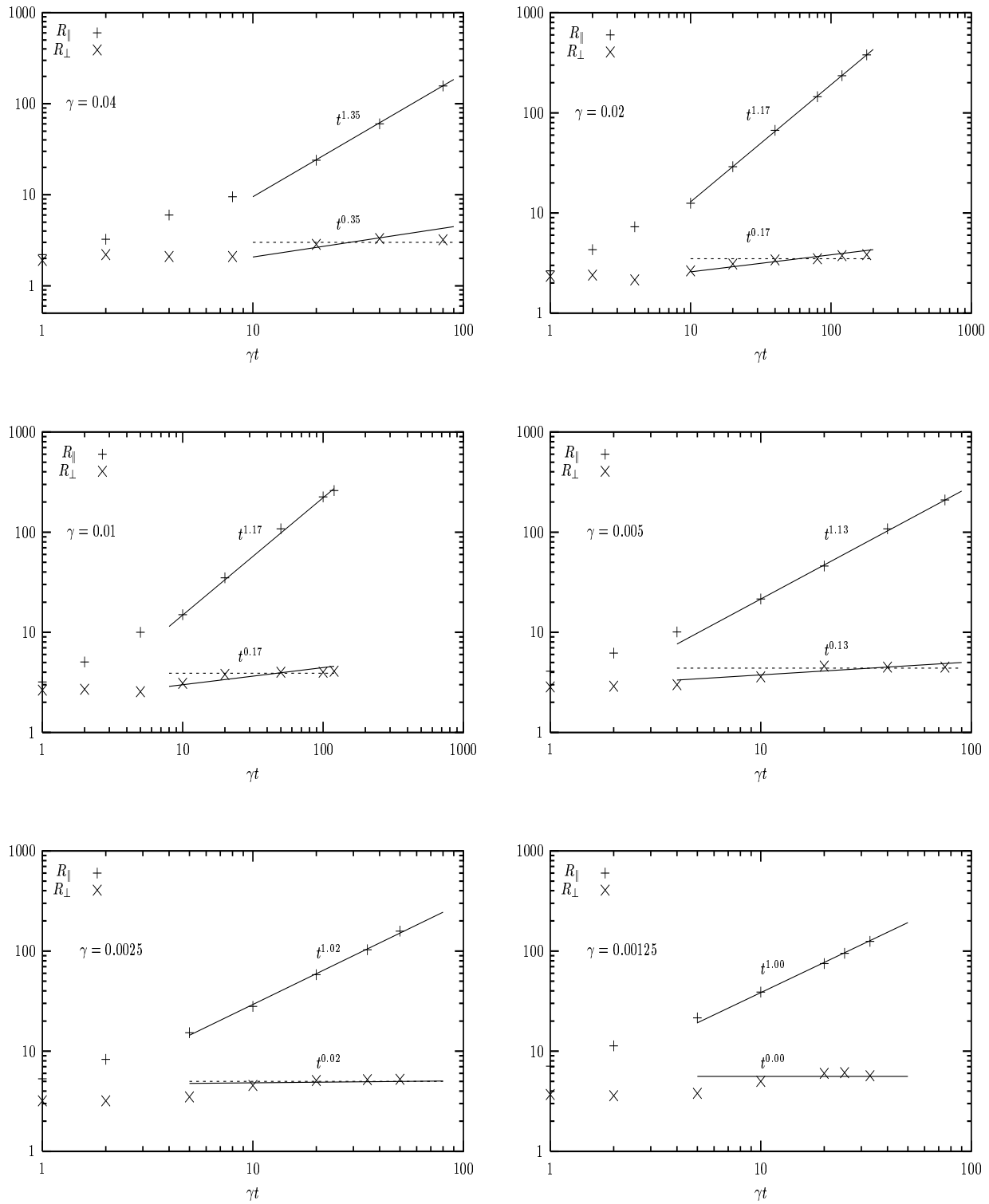


Fig. 3.4: Les 2 échelles de longueur $R_{\perp}(t)$ et $R_{\parallel}(t)$ sont représentées en fonction de la variable γt . On a indiqué sur chaque figure la valeur du taux de cisaillement correspondant. Les symboles sont les données numériques tandis que les lignes continues fitted les données par des lois de puissance, Eq. (3.6), dont les exposants sont indiqués sur les figures. Pour les taux de cisaillement les plus élevés, une ligne horizontale pointillée a été ajoutée : elle représente la loi (3.6) avec $\alpha_{\perp} = 0$.

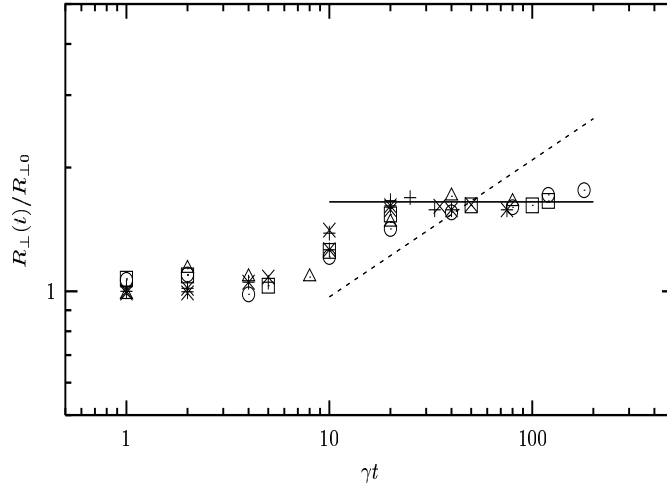


Fig. 3.5: Test de la relation (3.6) pour le petit axe de l'ellipse. La ligne continue représente le cas $\alpha_{\perp} = 0$, tandis que la ligne pointillée représente la loi $\alpha_{\perp} = 1/3$. Les symboles sont les mêmes que sur la Fig. 3.3. La loi $R_{\perp}(t) \simeq t^{1/3}$ est clairement invalidée par nos résultats.

lution numérique du modèle $O(n)$ par les mêmes auteurs [200], alors qu'elles sont absentes de la solution analytique [206]...

Les résultats trouvés montrent bien la nécessité de réaliser une étude numérique extensive du phénomène, puisque les exposants que nous mesurons semblent dépendre du taux de cisaillement considéré. On passe en effet de $\alpha_{\parallel} \simeq 1.35$ à $\gamma = 0.04$ à $\alpha_{\parallel} \simeq 1.0$ pour les plus petits taux de cisaillement $\gamma = 0.0025$ et $\gamma = 0.00125$. Pour α_{\perp} , même si on peut aussi passer des valeurs 0.35 à 0.0, la Fig. 3.5 démontre de manière assez convaincante que les données pour tous les taux de cisaillement sont bien décrites par $\alpha_{\perp} = 0$. En particulier, $R_{\perp}(t)$ varie (au plus) d'un facteur 2 au cours. Une nouvelle fois, nous n'écartons pas l'hypothèse d'une variation logarithmique de cette longueur. Des exposants qui varient indiquent que dans certains cas nous mesurons plutôt un exposant effectif et que le régime asymptotique n'est pas atteint. Ici, le régime asymptotique est décrit par les conditions $\xi_{\text{eq}} \ll R_{\parallel}(t) \ll L_x$ et $\xi_{\text{eq}} \ll R_{\perp}(t) \ll L_y$. La condition $\xi_{\text{eq}} \ll R_{\perp}(t)$ implique en particulier de travailler avec $\gamma^{-1} \gg t_0$, point que nous avons déjà souligné. Le 'bon' comportement est donc obtenu à faible γ , et nous concluons que les exposants qui décrivent la décomposition spinodale sous cisaillement sont $\alpha_{\perp} = 0$ et $\alpha_{\parallel} = 1$.

L'étude des propriétés d'échelle des domaines décrites au paragraphe suivant va renforcer cette conclusion.

3.1.3 Généralisation de l'hypothèse d'échelle standard

Nous avons décrit en détail au chapitre 2 les propriétés d'échelle de la séparation de phase sans écoulement. En particulier, la fonction de corrélation à 2 points prend la forme

$$C(\mathbf{r}, t) = \mathcal{C} \left(\frac{|\mathbf{r}|}{L(t)} \right), \quad (3.7)$$

que nous avons observée sur les résultats numériques de la Fig. 2.1. En présence des 2 échelles de longueur $R_{\parallel}(t)$ et $R_{\perp}(t)$, cette forme ne peut évidemment plus être satisfaite,

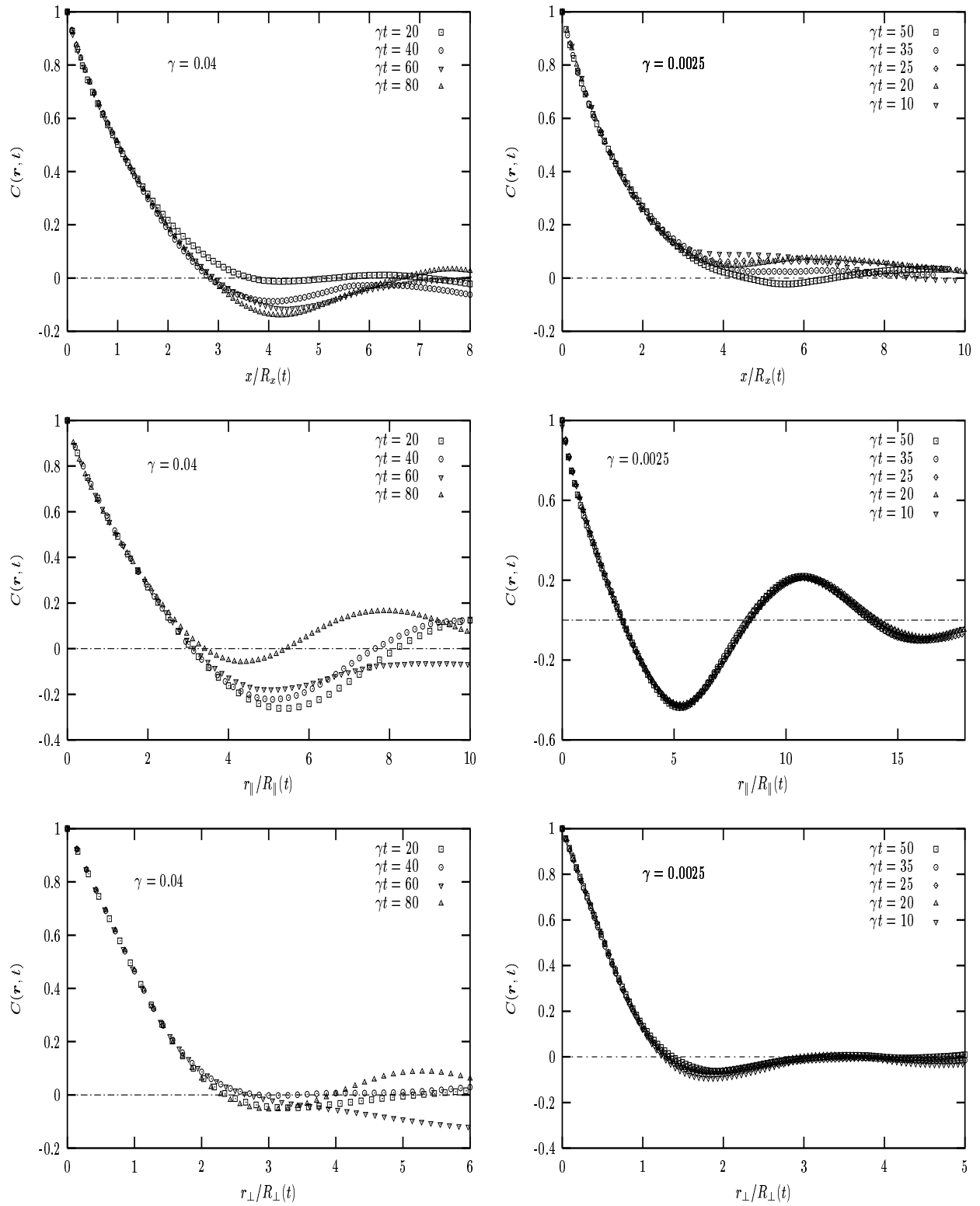


Fig. 3.6: Test de l'hypothèse d'échelle dans les directions (Ox) (en haut), (O_{\parallel}) (au milieu), et (O_{\perp}) (en bas), pour les taux de cisaillement $\gamma = 0.04$ (à gauche) et $\gamma = 0.0025$ (à droite). La superposition des courbes n'est satisfaisante que pour les directions (O_{\parallel}) et (O_{\perp}) dans le cas $\gamma = 0.0025$.

et on doit en envisager la généralisation. Les travaux analytiques de Bray et ses collaborateurs ont suggéré 2 formes d'échelle différentes pour cette fonction. La première provient de la solution du modèle $O(n)$, $n \rightarrow \infty$ pour lequel on obtient [206]

$$C(\mathbf{r}, t) = \mathcal{C} \left(\frac{x}{R_x(t)}, \frac{y}{R_y(t)} \right), \quad (3.8)$$

où $R_x(t)$ et $R_y(t)$ représentent la taille des domaines dans les directions x et y , respectivement. Cette forme est aussi à la base de l'argument RG proposé dans la Ref. [194] pour déterminer les lois de croissance (qui aboutit aux valeurs $\alpha_x = 4/3$ et $\alpha_y = 1/3$).

L'approximation OJK pour le paramètre d'ordre non conservé suggère une forme d'échelle différente [207]

$$C(\mathbf{r}, t) = \mathcal{C} \left(\frac{r_{\parallel}}{R_{\parallel}(t)}, \frac{r_{\perp}}{R_{\perp}(t)} \right). \quad (3.9)$$

Cette loi se place donc explicitement dans le référentiel que nous avons déduit de la forme elliptique des domaines. Notons que la différence entre ces 2 formes n'est pertinente que pour les directions (Ox) et ($O \parallel$), car le support de la fonction $C(\mathbf{r}, t)$ dans les directions (Oy) et ($O \perp$) est si restreint que ces 2 directions en deviennent équivalentes lorsque l'angle $\theta(t)$ devient petit.

Nous discutons maintenant les résultats numériques sur la Fig. 3.6. Les courbes pour la direction (Ox) montrent nettement que la forme (3.8) ne fonctionne pas dans les 2 cas d'un fort et d'un faible taux de cisaillement. Sur la Fig. 3.6, nous testons aussi la forme (3.9) dans les directions ($O \parallel$) et ($O \perp$) pour les taux de cisaillement $\gamma = 0.04$ et 0.0025 . Il y a maintenant une différence qualitative très nette entre les 2 taux de cisaillement. Pour $\gamma = 0.04$, pour lequel $\alpha_{\parallel} \simeq 1.35$, les courbes pour différents temps ne se superposent pas de manière satisfaisante. Pour $\gamma = 0.0025$, pour lequel $\alpha_{\parallel} \simeq 1.02$, la remise à l'échelle est excellente. Ces courbes démontrent clairement la validité de la forme (3.9) pour décrire les données numériques que nous avons obtenues pour les plus faibles taux de cisaillement.

3.1.4 Un argument heuristique

Tous nos résultats indiquent que la décomposition spinodale sous cisaillement homogène est bien décrite, pour des temps suffisamment longs $\gamma t \gg 1$, par un régime auto-similaire que l'on peut résumer par les relations

$$\begin{aligned} R_{\parallel}(t) &\simeq R_{\parallel 0} \cdot \gamma t, & R_{\perp}(t) &\simeq R_{\perp 0}, & \theta(t) &\simeq \frac{\theta_0}{\gamma t}, \\ C(\mathbf{r}, t) &\simeq \mathcal{C} \left(\frac{r_{\parallel}}{R_{\parallel}(t)}, \frac{r_{\perp}}{R_{\perp}(t)} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ces relations montrent de plus que la croissance des domaines n'est pas stoppée par l'écoulement dans le cas présent où l'hydrodynamique n'est pas prise en compte, et donnent finalement une réponse à chacune des questions (1)-(4) que nous posions en début de paragraphe. Ces relations sont de plus en accord quantitatif avec les résultats expérimentaux de Chan *et al.* [188, 193] obtenus avec un mélange eau / acide butyrique et ceux de Qiu *et al.* [191] obtenus avec un mélange polystyrene / poly-(vynil methyl ether)

. Ces expériences sont donc très certainement réalisées dans un régime où l'hydrodynamique intervient peu. Les lois de croissance sont aussi compatibles avec celles obtenues numériquement par Qiu *et al.* [191] et Corberi *et al.* [194]. Ces derniers comparent toutefois leurs résultats avec les lois $\alpha_x = 4/3$ et $\alpha_y = 1/3$ déduites de leur approche RG, basée sur la forme d'échelle (3.8) dont nous avons montré qu'elle était incompatible avec les données numériques. Enfin, c'est la première fois que la quantité $\theta(t)$ est systématiquement étudiée et que l'hypothèse d'échelle (3.9) est suggérée par une simulation numérique.

Si ces résultats semblent désormais clairement établis sur le plan numérique, nous voyons aussi qu'ils ne reposent sur aucune explication théorique, la généralisation de l'approche RG donnant un résultat incorrect. Nous avons déjà mentionné le fait que les calculs en présence de loi de conservation sont délicats, même sans l'écoulement [51]. De façon étonnante, personne n'a essayé d'utiliser l'argument simple (2.8) conduisant à la loi de Lifshitz-Slyozov-Wagner [129]. C'est ce que nous proposons ici. L'argument consiste à décrire le processus comme résultant de la compétition de 2 effets :

- L'advection du paramètre d'ordre, qui devient pertinente pour des temps $t \gtrsim \gamma^{-1}$, déforme les domaines quasi-circulaires qui existent à $t \simeq \gamma^{-1}$. Il est très simple de calculer qu'en présence de l'advection seule, un domaine initialement circulaire est déformé en une ellipse dont les axes principaux se comportent, pour $\gamma t \gg 1$, comme $R_{\perp}(t) \simeq (\gamma t)^{-1}$ et $R_{\parallel}(t) \simeq \gamma t$, son orientation suivant la loi $\theta(t) \simeq (\gamma t)^{-1}$.
- La séparation de phase qui est gouvernée par l'existence des gradients de potentiel chimique $\mu = \delta F / \delta \phi$ près des interfaces. Ces gradients résultent en une force qui met une interface de courbure R en mouvement à la vitesse $dR/dt \simeq \sigma / R^2$. Un domaine elliptique a alors tendance à devenir plus circulaire, son orientation $\theta(t)$ n'étant pas affectée. Dans ce cas, un ordre de grandeur pour l'évolution des rayons de courbure est $dR_{\parallel}/dt \simeq -\sigma / R_{\perp}^2$ et $dR_{\perp}/dt \simeq +\sigma / R_{\parallel}^2$.

En faisant l'hypothèse (très forte) que ces 2 effets sont simplement additifs, on déduit les relations suivantes pour les 3 paramètres décrivant la forme elliptique moyenne des domaines

$$\frac{dR_{\perp}(t)}{dt} = -\frac{1}{\gamma t^2} + \frac{\sigma}{R_{\parallel}(t)^2}, \quad (3.11)$$

$$\frac{dR_{\parallel}(t)}{dt} = +\gamma - \frac{\sigma}{R_{\perp}(t)^2}, \quad (3.12)$$

$$\theta(t) = \frac{1}{\gamma t}, \quad (3.13)$$

qui redonnent bien les relations (3.10).

Bien que simple et heuristique, cet argument semble capturer la physique sous-jacente à la séparation de phase sous cisaillement, lorsque les domaines sont suffisamment grands pour que des grandeurs telles que la vitesse de l'interface aient un sens. Il est clair, toutefois, que des effets plus subtils comme la présence de corrections logarithmiques seront sans doute ignorés par l'argument. On peut appliquer ce raisonnement au cas du paramètre d'ordre non conservé. Il conduit dans ce cas aux lois de croissance $R_{\perp}(t) \simeq \text{const}$ et $R_{\parallel}(t) \simeq t$, ce qui n'est pas loin des résultats de l'approximation OJK [207] qui donnent $R_{\perp}(t) \simeq (\ln t)^{-1/4}$ et $R_{\parallel}(t) \simeq t(\ln t)^{1/4}$.

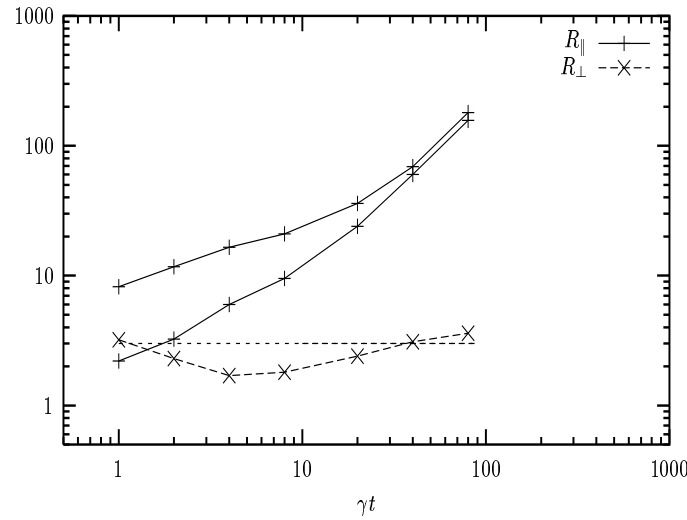


Fig. 3.7: Loi de croissance lorsque l'écoulement n'est pas appliqué dès le début de la décomposition spinodale qui commence à $t_1 = -400$. L'écoulement, avec $\gamma = 0.04$, est appliqué au temps $t = 0$. Nous avons ajouté une ligne horizontale près des données $R_{\perp}(t)$ pour montrer l'inhabituelle décroissance initiale. Nous avons aussi superposé les données pour $t_1 = 0$ (courbe $R_{\parallel}(t)$ la plus basse) pour montrer que la croissance est initialement ralentie dans le cas où $t_1 < 0$.

Enfin, cet argument est suffisant pour expliquer ce qui se passe si on réalise la simulation suivante. Le système est placé sous la ligne spinodale au temps $t_1 < 0$, mais sans l'écoulement qui n'est appliqué qu'au temps $t = 0$. Si $-t_1 \gg \gamma^{-1}$, l'écoulement advecte et déforme des domaines qui sont initialement plus gros que lorsque $t_1 = 0$. Des équations (3.11)-(3.13), on attend le comportement suivant. Aux temps $\gamma t \ll 1$, les domaines sont assez grands, le terme diffusif dans l'Eq. (3.11) est donc négligeable. La conséquence est donc que R_{\perp} diminue. Par l'Eq. (3.12), on voit que cela ralentit la croissance de R_{\parallel} . Ce comportement initial $\gamma t \simeq 1 - 10$ est qualitativement différent des études précédentes. Après cet inhabituel début, $\gamma t \gtrsim 10$, la croissance redevient identique au cas précédent. C'est précisément ce qui est observé numériquement. Les résultats sont présentés sur la Fig. 3.7. On observe en particulier que la croissance de $R_{\parallel}(t)$ est la plus faible lorsque $R_{\perp}(t)$ est à son minimum, un fait lui aussi prédit par l'Eq. (3.12).

3.2 Advection chaotique d'un mélange binaire passif

Une tourniquette

Pour faire la vinaigrette

B. VIAN, *La complainte du progrès.*

Une conclusion de notre étude sur le cisaillement homogène est que la croissance de domaines (ou, de manière équivalente, le vieillissement) n'est pas stoppée par l'écoulement. Dans la mesure où nous voulions précisément décrire par cet exemple la phénoménologie des systèmes vitreux rendus stationnaires par application d'un forçage [42], le point de départ, bien que très intéressant en lui-même, n'était pas le bon.

Notre intuition et notre expérience quotidienne nous apprennent cependant qu'une

manière de stopper une séparation de phase est d'agiter ou de remuer le mélange binaire (l'exemple alimentaire standard est huile / vinaigre). Nous avons évoqué en début de chapitre les rares études faites sur le sujet de la séparation de phase en présence d'un écoulement turbulent ou chaotique, ainsi que l'intérêt pratique de telles études. Nous avons donc réalisé la simulation numérique de la séparation de phase en présence d'un écoulement chaotique. Une nouvelle fois, le champ de vitesse est imposé et le champ $\phi(\mathbf{x}, t)$ ne le modifie pas (pas d'interactions hydrodynamiques). Cette étude généralise donc l'étude du scalaire passif dans un écoulement chaotique [218, 219] en celle de *l'advection chaotique d'un mélange binaire passif*.

3.2.1 De la vinaigrette avec un batteur à œuf

Le point de départ de notre description est une nouvelle fois l'équation de Cahn-Hilliard pour le paramètre d'ordre conservé $\phi(\mathbf{x}, t)$ en présence d'un écoulement $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = \Gamma \nabla^2 \left(\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} \right), \quad (3.14)$$

la température étant toujours prise égale à 0. Nous devons maintenant préciser le champ de vitesse que nous utilisons. Plusieurs possibilités s'offrent à nous, inspirées par les très nombreuses études sur l'advection d'un scalaire passif, la 'turbulence scalaire' [223].

Une première possibilité, ayant l'avantage d'être proche des expériences de turbulence évoquées plus haut [211, 212, 213], serait de prendre un champ de vitesse obtenu par la solution directe des équations de Navier-Stokes. Ce serait bien évidemment la solution la plus 'coûteuse' numériquement [224].

La deuxième solution consiste à employer un champ de vitesse synthétique, c'est-à-dire ne provenant pas de l'équation de Navier-Stokes, mais qui en simule les propriétés. C'est cette solution, plus simple, que nous adoptons. Ici encore, nous pouvons choisir le champ de vitesse de diverses manières. La première, utilisée dans la Ref. [214], consiste à prendre un champ de vitesse aléatoire, mais avec une distribution de probabilité dont les moments suivent les lois d'échelle telles qu'elles apparaissent dans la turbulence 2D. La Ref. [225] présente un exemple d'étude de l'advection turbulente d'un scalaire passif basée sur cette méthode. La seconde méthode utilise le fait que pour un fluide bidimensionnel incompressible, on peut définir une fonction de courant par la relation [218, 219]

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla \wedge (\psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_z). \quad (3.15)$$

On obtient les équations

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}. \quad (3.16)$$

En faisant les changements $q \leftrightarrow x$, $p \leftrightarrow y$, et $H \leftrightarrow \psi$, on reconnaît les équations de Hamilton pour un système à un degré de liberté caractérisé par ses variables position (q), moment (p), et par son Hamiltonien $H(q, p, t)$. Un tel système est intégrable si l'Hamiltonien ne dépend pas du temps. Lorsque l'Hamiltonien contient une dépendance temporelle explicite, par contre, l'intégrabilité est perdue et on peut éventuellement obtenir des trajectoires chaotiques [6]. Il faut maintenant choisir l'Hamiltonien et, une nouvelle fois, de

multiples choix s'offrent à nous, provenant de la littérature de la turbulence scalaire à 2D. Babiano *et al.* [226] montrent par exemple comment la fonction de courant

$$\psi(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{4\pi} \ln [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] \quad (3.17)$$

conduit à des propriétés chaotiques de l'écoulement très proches de la turbulence réelle. Cela revient en fait à ne garder de la turbulence 2D que les vortex qu'elle génère. Le nombre de vortex est N , la vorticité du vortex i est Γ_i , sa position (x_i, y_i) , et les vortex interagissent par l'Hamiltonien $H_{\text{vortex}} = -(4\pi)^{-1} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j \ln \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$. Pour $N \geq 4$, le système peut devenir chaotique [226].

Enfin, une classe de fonctions de courant, suggérée par l'étude des systèmes dynamiques, contient une dépendance explicite en temps. Ces fonctions sont périodiques, et en jouant sur la valeur de la période T , on obtient une situation intégrable lorsque $T \rightarrow 0$, l'intégrabilité étant préservée pour $T = 0^+$ (théorème KAM [6]), puis progressivement perdue lorsque $T > 0$ [218, 219, 227]. Une motivation pour utiliser ce type d'Hamiltonien est que les écoulements qu'ils produisent sont réalisables expérimentalement. Les expériences consistent en l'utilisation de cylindres contra/co-rotatifs, dont le sens de rotation est périodiquement changé [216, 217]. Ces écoulements peuvent ainsi être réalisés à faible nombre de Reynolds, $Re \ll 1$, et ne sont donc pas turbulents. Par contre, l'écoulement est chaotique, ce qui signifie que son exposant de Lyapunov maximal λ est positif. Cet exposant est défini par [6]

$$\lambda \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\mathbf{r}(t)|}{|\mathbf{r}(0)|}, \quad (3.18)$$

où $\mathbf{r}(t)$ désigne la position relative au temps t de 2 conditions initiales ($t = 0$) voisines. On voit donc que λ introduit une nouvelle constante de temps dans le système, λ^{-1} . Un tel écoulement est utilisé industriellement pour ses propriétés de mélange. La revue d'Ottino donne une classification des écoulements possibles, avec leur efficacité relative [219].

Nous choisissons l'un de ces écoulements, qui, dans la classification d'Ottino, est dans la classe des écoulements de type 'batteur à œuf'. Il est défini par la fonction de courant

$$\psi(x, y, t) = -\alpha \left[\cos \left(\frac{2\pi x}{L} \right) U(t) + \cos \left(\frac{2\pi y}{L} \right) (1 - U(t)) \right], \quad (3.19)$$

où la fonction $U(t)$ est périodique de période T , avec $U(0 < t < T/2) = 1$ et $U(T/2 < t < T) = 0$. La version intégrable ($T \rightarrow 0$) de l'Hamiltonien correspondant est appelé Hamiltonien de Harper. L'expression (3.19) conduit à un écoulement qui alterne entre directions (Ox) et (Oy) , le champ de vitesse s'écrivant

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{2\pi\alpha L}{T} \sin \left(\frac{2\pi y}{L} \right), & v_y &= 0, & n &< \frac{t}{T} < n + \frac{1}{2} \\ v_y &= \frac{2\pi\alpha L}{T} \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right), & v_x &= 0, & n + \frac{1}{2} &< \frac{t}{T} < n + 1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

On peut se faire une idée plus précise de l'écoulement ainsi réalisé en itérant des conditions initiales par le champ de vitesse (3.20), et en représentant leur position ultérieure

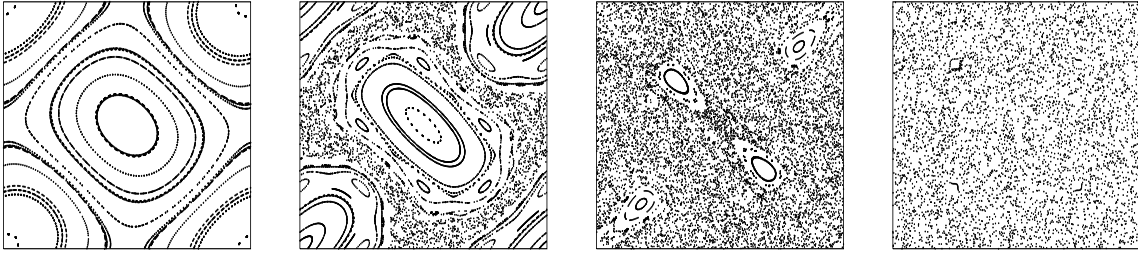


Fig. 3.8: Représentation graphique du champ de vitesse (3.20) pour différentes valeurs de α . Les courbes sont obtenues en visualisant la trajectoire de plusieurs conditions initiales dont on a représenté la position pour des temps de la forme $t = nT$, où n est un entier (sections de Poincaré). On a, de gauche à droite, $\alpha = 0.1, 0.25, 0.4, 1.0$. On part ainsi d'une situation intégrable ($\alpha = 0.1$), puis mixte ($\alpha = 0.25$ et 0.4), et enfin complètement chaotique ($\alpha = 1.0$).

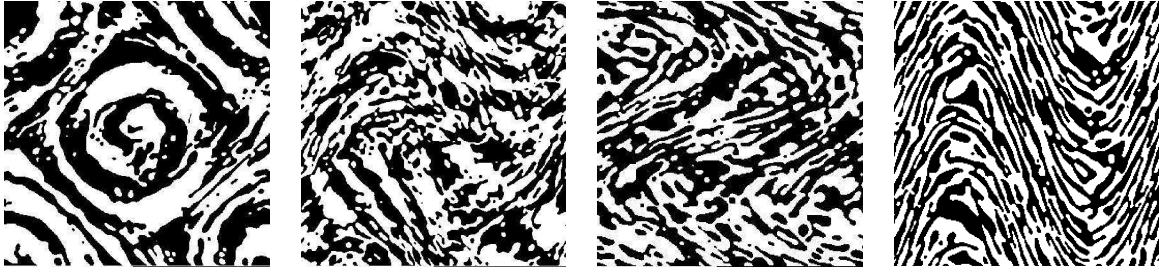


Fig. 3.9: Configurations à temps longs, $t \gg T$, correspondant aux 4 écoulements de la Fig. 3.8, dans le même ordre.

à des temps de la forme $t = nT$, où n est entier. On obtient ainsi les sections de Poincaré des trajectoires, représentées sur la Fig. 3.8. On voit clairement comment la situation complètement intégrable ($\alpha = 0.1$) devient progressivement ($\alpha = 0.25$) chaotique ($\alpha \gtrsim 0.4$). Dans ce cas, les trajectoires subissent des successions d'étirement / repliement, typiques des systèmes dynamiques chaotiques.

L'équation (3.14) est intégrée numériquement. Le champ de vitesse étant spatialement périodique de période L , on peut utiliser la méthode spectrale semi-implicite du chapitre précédent, la transformée de Fourier de la relation (3.14) s'écrivant simplement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + U(t) \frac{\pi \alpha k_y}{L} \left[\phi\left(\mathbf{k} - \frac{2\pi}{L} \mathbf{e}_x, t\right) - \phi\left(\mathbf{k} + \frac{2\pi}{L} \mathbf{e}_x, t\right) \right] \\ + (1 - U(t)) \frac{\pi \alpha k_x}{L} \left[\phi\left(\mathbf{k} - \frac{2\pi}{L} \mathbf{e}_y, t\right) - \phi\left(\mathbf{k} + \frac{2\pi}{L} \mathbf{e}_y, t\right) \right] = \Gamma k^2 [(1 - k^2) \phi(\mathbf{k}, t) + \phi^3(\mathbf{k}, t)]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Le temps est désormais compté en unités de T , tandis que l'espace reste compté en unités de $\xi_{\text{eq}}^2 / \Gamma$. On peut quantifier les effets relatifs de la séparation de phase et de l'écoulement à travers 2 nombres sans dimension. Le coefficient de diffusion réduit $D \equiv \Gamma T / \xi_{\text{eq}}^2$ contrôle l'efficacité de la décomposition spinodale. Le paramètre α , ou de manière équivalente l'exposant de Lyapunov réduit λT , contrôlent la chaoticité de l'écoulement. L'exposant de Lyapunov peut être simplement calculé pour chaque valeur de α à partir de sa définition



Fig. 3.10: Évolution d'une assemblée de (grosses) gouttes dans un écoulement chaotique, $\alpha = 0.4$, pour des temps $t = 0, 0.65, 1.50, 11.8$, de gauche à droite. La dernière configuration est typique de l'état stationnaire dynamique atteint.

(3.18). La relation $\lambda T \simeq 1.96 \ln(3.35\alpha)$ fitte très bien les résultats dans tout le régime chaotique étudié, $\alpha \geq 0.4$. Nous nous concentrons sur le régime $D \gg \lambda T$, ce qui signifie une nouvelle fois que nous étudions un régime où des domaines bien définis sont advectés et déformés par l'écoulement.

L'effet de ces écoulements sur la décomposition spinodale est représenté sur la Fig. 3.9. Dans chaque cas, le système a été placé sous sa ligne spinodale à l'instant initial en présence de l'écoulement (3.20). Les configurations de la Fig. 3.9 sont prises à des temps $t \gg T$. L'écoulement non chaotique, $\alpha = 0.1$, ne stoppe pas la séparation de phase, tout comme en présence d'un cisaillement homogène (cf paragraphe précédent). Les domaines sont ici simplement déformés par les lignes de courant et créent la figure de spirale observée. Pour la situation mixte, $\alpha = 0.25$, la croissance se fait dans les zones intégrables, mais les domaines sont cassés dans les zones chaotiques de l'écoulement. On atteint un état stationnaire inhomogène difficile à caractériser. Dans la situation chaotique, $\alpha = 0.4$ et 0.1 , on atteint un état stationnaire homogène isotrope, comme en témoignent les configurations de la Fig. 3.9. Nous concluons donc que la présence de chaos Lagrangien dans un écoulement est capable de stopper la séparation de phase, même en l'absence de tout effet inertiel.

Cette conclusion est renforcée par les observations de la Fig. 3.10, où nous avons représenté l'évolution d'une assemblée de gouttelettes, que nous avons laissées croître sans écoulement dans un premier temps. L'écoulement est alors appliqué au temps $t = 0$. La première configuration de la Fig. 3.10 représente la condition initiale. Les configurations suivantes montrent comment les grosses gouttes se cassent rapidement en de plus petites gouttelettes. Comme dans le cas où les 2 phases sont en concentration égale, un état stationnaire dynamique est atteint, que nous caractérisons maintenant plus quantitativement.

3.2.2 Étude de l'état stationnaire dynamique

Nous analysons maintenant les propriétés de l'état stationnaire dynamique en fonction des paramètres D et λ , pour la situation où les 2 espèces du mélange binaire sont présentes en égale concentration ($\langle \phi \rangle = 0$) et dans le cas où l'un des composants est majoritaire, l'autre formant alors des gouttelettes ($\langle \phi \rangle > 0$). Les Figs 3.9 et 3.10 montre que l'état stationnaire obtenu dans le cas chaotique est homogène, isotrope et caractérisé par une taille typique des domaines $L^*(D, \lambda)$, ou de manière équivalente, une surface typique de

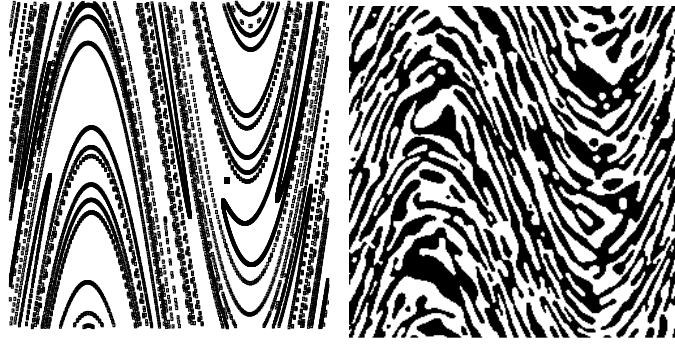


Fig. 3.11: Illustration de la compétition dispersion / décomposition spinodale. À gauche, on a représenté l'advection chaotique d'un scalaire passif, initialement concentré dans un carré de taille $L/200 \times L/200$ (point isolé visible près du centre de la figure), après $t = 3$ pour $\alpha = 1.0$, i.e. $\lambda = 2.36$. À droite, advection chaotique d'un mélange binaire passif pour $\alpha = 1.0$.

gouttelettes $S^* \simeq (L^*)^2$.

Comme dans le cas sans écoulement, on peut s'attendre à ce que le système présente des propriétés d'échelle dans le régime défini par $\xi_{\text{eq}} \ll L^* \ll L$. Un argument physique simple nous permet d'évaluer la longueur L^* . Le processus observé résulte en effet de la compétition entre l'advection chaotique qui disperse exponentiellement rapidement 2 particules voisines, et la décomposition spinodale qui cherche au contraire à rassembler les particules de même espèce. L'advection seule aurait l'effet décrit sur la Fig. 3.11, à gauche. On a représenté l'état après $t = 3$ d'un domaine initialement carré de taille initiale $L/200 \times L/200$: les particules sont dispersées dans tout le système (advection chaotique d'un scalaire passif). À droite, on a ajouté l'effet de la séparation de phase, qui tente de rassembler ce que l'advection disperse. Quantitativement, on peut donc écrire que la croissance des domaines avec la loi $L(t) \simeq (Dt)^{1/3}$ est stoppée par la dispersion exponentielle due à l'écoulement après un temps de l'ordre de λ^{-1} . Ceci résulte en une taille typique

$$L^*(D, \lambda) \simeq L(t = \lambda^{-1}) \simeq \left(\frac{D}{\lambda}\right)^{1/3}. \quad (3.22)$$

Nous nous attachons maintenant à démontrer la validité de cette relation dans nos résultats numériques.

Dans le cas $\langle \phi \rangle > 0$, on peut caractériser les gouttelettes observées par la distribution de surfaces $f(S)$. La propriété que la surface d'une goutte soit dans l'intervalle $[S, S + dS]$ est $f(S)dS$. Numériquement, cette distribution est calculée en moyennant sur un grand nombre de configurations prises dans l'état stationnaire, pour chaque couple (D, λ) . Nous trouvons que toutes nos données peuvent se mettre sous la forme d'échelle

$$f(S) \simeq \frac{1}{S^*} \mathcal{F}\left(\frac{S}{S^*}\right), \quad (3.23)$$

où $\mathcal{F}(x)$ est une fonction d'échelle. Ceci nous donne accès, en particulier, à la taille

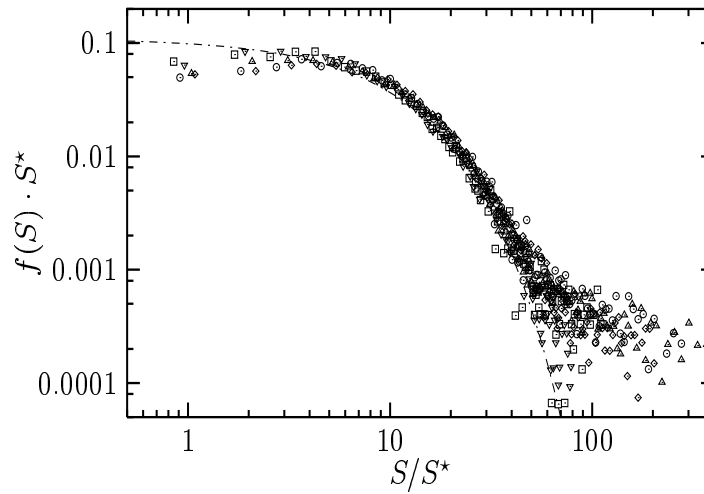


Fig. 3.12: Distributions $f(S)$ de la surface des gouttes, remises à l'échelle suivant la relation (3.23). La surface moyenne des gouttes S^* varie ici comme $S^* \simeq (D/\lambda)^{0.62}$. La ligne pointillée est une forme exponentielle. Les données couvrent le domaine $\alpha \in [0.4, 3.0]$ et $D \in [100, 2000]$.

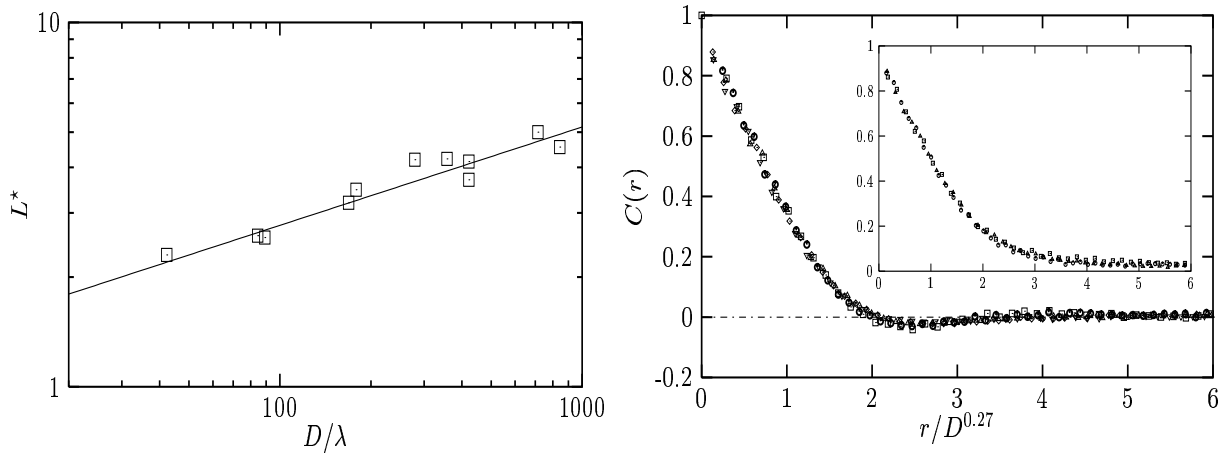


Fig. 3.13: À gauche: variation de la longueur typique des domaines en fonction du rapport D/λ . La ligne est une loi de puissance avec un exposant 0.27. À droite: Fonction de corrélation à 2 points $C(r, D, \lambda)$ à λ fixé pour différentes valeurs de D , en fonction de la variable d'échelle $r/D^{0.27}$. Figure principale: $\alpha = 1.0$ et $D = 100, 200, 400, 1000, 2000$. Encart: $\alpha = 0.4$ et $D = 100, 200, 400$.

moyenne des gouttes $S^* = S^*(D, \lambda)$ qui se comporte comme

$$S^*(D, \lambda) \simeq \left(\frac{D}{\lambda}\right)^{0.62}. \quad (3.24)$$

Ce résultat est très proche du comportement attendu (3.22). La Fig. 3.12 montre de plus que la fonction \mathcal{F} est très bien représentée par une forme exponentielle, $\mathcal{F}(x) \simeq e^{-x}$. Cette forme d'échelle est aussi obtenue dans l'étude expérimentale de la Ref. [215].

Pour caractériser la structure bicontinue obtenue dans le cas $\langle \phi \rangle = 0$, nous utilisons de nouveau la fonction de corrélation à 2 points (2.6). Cette fonction est isotrope, et on peut donc effectuer une moyenne circulaire pour obtenir la fonction $C(r, D, \lambda)$, qui permet d'extraire la taille typique des domaines par la relation $C(L^*, D, \lambda) = \text{const}$. Les résultats sont présentés sur la Fig. 3.13, qui décrit les variations de L^* avec la variable D/λ . Nous obtenons la loi

$$L^*(D, \lambda) \simeq \left(\frac{D}{\lambda}\right)^{0.27}. \quad (3.25)$$

Là aussi, le résultat correspond assez bien à la prédiction (3.22). Un exposant inférieur au résultat 1/3 attendu est probablement la conséquence du fait que nous mesurons un exposant effectif qui tendrait, dans des simulations avec de plus gros domaines (et donc une condition $L^* \gg \xi_{\text{eq}}$ mieux satisfaite), vers 1/3. On peut là aussi s'attendre à une propriété d'échelle pour la fonction de corrélation

$$C(r, D, \lambda) \simeq \mathcal{C}\left(\frac{r}{L^*(D, \lambda)}\right). \quad (3.26)$$

Cette forme est testée sur la Fig. 3.13, où les fonctions $C(r, D, \lambda)$, obtenues pour différentes valeurs de D à λ fixé, se superposent de manière très satisfaisante. Par contre, nous observons aussi que différentes valeurs de λ conduisent à une forme fonctionnelle différente de la fonction d'échelle $\mathcal{C}(x)$. Ceci invalide donc l'Eq. (3.26). Nous attribuons ceci au fait que lorsque λ augmente, la morphologie des domaines change elle aussi : ceci est visible en comparant les configurations pour $\alpha = 0.4$ et $\alpha = 1.0$ sur la Fig. 3.9. Une morphologie différente des domaines implique alors naturellement une forme différente de la fonction $C(r, D, \lambda)$, ce qui est observé sur la Fig. 3.13.

4. RHÉOLOGIE NON LINÉAIRE DES SYSTÈMES VITREUX

Quoi de neuf pour rajeunir?
Elle, N^o 2854, 11/9/2000.

Dans ce chapitre, nous décrivons comment la théorie champ moyen peut être utilisée pour décrire le comportement rhéologique des liquides surfondus, et plus généralement des ‘matériaux vitreux mous’ pour lesquels nous avons présenté un exemple de courbes d’écoulement $\eta - \dot{\gamma}$ sur la Fig. 1.3 de l’introduction.

L’appellation ‘matériaux vitreux mous’ a été proposée par Sollich *et al.* [228] et désigne des matériaux tels que les mousses, les émulsions denses, les colloïdes, etc. qui ont en commun d’être des fluides complexes ayant un comportement vitreux. Ce sont encore Sollich *et al.* [228] qui ont les premiers suggéré l’existence d’un lien profond existant entre les systèmes vitreux ‘classiques’ (verres structuraux, verres de spin) et ces fluides complexes. Ceci les a amenés à proposer une généralisation du modèle de pièges de Bouchaud incluant des degrés de liberté élastiques: c’est le modèle SGR (pour ‘Soft Glassy Rheology’) [228]. Ce modèle phénoménologique a ensuite été analysé en grand détail dans les Refs. [229, 230, 231], donnant ainsi une description très précise de la rhéologie linéaire (avec, éventuellement, la présence de vieillissement [230]) et non linéaire (cette fois sans vieillissement [229]) de ces matériaux. À la suite des travaux de Sollich et ses collaborateurs, deux autres modèles, toujours phénoménologiques mais ne faisant partie d’aucune des trois familles de modèles pour le vieillissement décrits dans l’introduction, ont été proposés pour décrire la rhéologie des systèmes vitreux mous [30, 232, 233]. Le principe de tous ces modèles consiste à proposer une description mésoscopique du système sous cisaillement, le cisaillement ayant pour effet d’induire des réarrangements collectifs à cette échelle. On essaie alors d’obtenir une équation constitutive décrivant l’évolution de la contrainte $\sigma(t)$ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}(t)$ imposé. On obtient typiquement une loi du type [228]

$$\sigma \simeq \sigma_0 + a\dot{\gamma}^n. \quad (4.1)$$

Le cas $n = 1$ correspond au ‘fluide de Bingham’, tandis que pour $n < 1$, on a la ‘loi de Hershel-Bulkeley’ [15]. Dans le cas où $\sigma_0 > 0$, on parle de ‘fluide à seuil’, sinon de ‘fluide en loi de puissance’ [15]. Ce type de comportement a été très étudié et on en trouve de nombreux exemples dans une littérature désormais très vaste. Le passionnant livre de Larson en donne un très bon aperçu [15].

Le fait que ces modèles simples capturent le comportement de systèmes très différents microscopiquement suggère une sorte d’‘universalité’ dans les comportements rhéologiques de cette classe de matériaux. Cette universalité n’est pas sans rappeler celle que nous avons décrite dans l’introduction à propos du phénomène de vieillissement. Ceci suggère que désordre, frustration et leur corollaire la dynamique lente, sont une nouvelle fois à l’œuvre dans ces systèmes: c’est précisément la voie proposée par Sollich *et al.* [228], dans

laquelle nous nous engouffrons maintenant.

Il est naturel en effet d'essayer de capturer ces phénomènes par la théorie champ moyen (ou de façon équivalente par l'approximation de couplages de modes), généralisée pour tenir compte de la présence d'un terme de forçage. Cette approche a le mérite d'être beaucoup plus microscopique, dans le sens où comme pour le régime de vieillissement, nous décrivons par une équation de Langevin la dynamique d'un système défini par son Hamiltonien. Notre étude consiste alors à résoudre cette dynamique forcée en tentant de répondre à 2 types de questions. (1) L'approche champ moyen reproduit-elle au niveau macroscopique les comportements observés numériquement ou expérimentalement (courbes d'écoulement $\eta - \gamma$ de la Fig. 1.3, forme de la relaxation, échelles de temps, etc.)? Même si c'est le minimum que l'on puisse exiger de la théorie, c'est déjà un succès que de reproduire ce comportement rhéologique complexe par une approche 'microscopique'. (2) D'un point de vue plus fondamental, on peut se demander si la dynamique hors équilibre de ces systèmes peut, comme dans le régime de vieillissement, être décrite par une température effective. Même si cette seconde question n'est pas nécessairement naturelle pour le champ de la rhéologie, nous avons déjà vu dans l'introduction l'intérêt fondamental de l'existence d'une température effective (mécanique statistique pour des systèmes hors équilibre, liens possibles avec des quantités statiques). Plus concrètement ensuite, une telle propriété renforcerait le lien entre verres et fluides complexes, justifiant ainsi l'universalité des résultats obtenus pour ces différents systèmes. Notons enfin qu'une des hypothèses sur lesquelles est bâti le modèle SGR est que les réarrangements collectifs auxquels il s'intéresse sont décrits par un processus thermiquement activé [228]. L'existence d'une température effective pourrait donner un fondement microscopique à cette hypothèse phénoménologique¹.

Notre approche peut être vue à la fois comme l'étude d'un modèle désordonné champ moyen en présence d'un forçage extérieur, ou comme une extension hors équilibre des théories de couplage de modes schématiques. Le premier point de vue (approche 'verres de spin') rejoint une série d'études commencée au milieu des années 80 dans le contexte des réseaux de neurones [236]. Le forçage, qui consiste en des constantes de couplages asymétriques, est alors utilisé pour détruire la phase vitreuse qui gêne le processus d'apprentissage [237, 238]. Les travaux de Horner [239] et de Thalmann [240] sont plus directement reliés aux nôtres. Ils ont en effet porté sur le comportement d'une particule ponctuelle dans un espace de dimension $N \rightarrow \infty$ (approximation de champ moyen) en présence d'un potentiel désordonné. Le forçage consiste en une force constante F dans une direction particulière de l'espace, dans laquelle on mesure la vitesse v de la particule. Ce problème est directement relié à celui des supraconducteurs et la caractéristique $v - F$ est l'analogue de la caractéristique $V - I$ de la Fig. 1.3 et de la courbe d'écoulement $\sigma - \gamma$ que nous allons étudier plus bas. Enfin, notre travail s'inscrit dans la continuité de la Ref. [241], qui ouvrait la voie à notre étude. En ce qui concerne le second point de vue (approche 'couplage de modes'), il n'existe pas, à l'heure actuelle, de travaux théoriques utilisant cette approche pour décrire la rhéologie non linéaire. Seule la rhéologie linéaire à l'approche de la transition vitreuse a pour l'instant pu être décrite [242], la théorie de couplage de modes standard étant une théorie d'équilibre [73].

1. Le lien entre la température du modèle de pièges et la température effective mesurée par le FDT est cependant loin d'être clair, les propriétés de fluctuation-dissipation du modèle de Bouchaud étant quelque peu exotiques [234, 235]. Nous préférons pour notre part faire le lien en utilisant la relation entre température effective T_{eff} et barrières d'énergie effectives ΔE_{eff} décrite au paragraphe 2.1.4.

Nous présentons maintenant les résultats théoriques obtenus. Nous justifions tout d'abord soigneusement la généralité du modèle étudié, ainsi que la forme choisie pour le terme de forçage en rappelant le lien entre systèmes désordonnés et approximation de couplages de modes. Nous analysons ensuite analytiquement et numériquement les équations dynamiques obtenues en traduisant nos résultats dans le contexte de la rhéologie ; ces résultats sont résumés dans un diagramme des phases Contrainte - Température (cf Fig. 1.4). Nous comparons ensuite ces résultats théoriques à la simulation numérique d'un liquide surfondu de type Lennard-Jones sous cisaillement. Yamamoto et Onuki ont récemment décrit le comportement rhéologique de ce système [243, 244]. Nous complétons ici cette étude par la mesure des violations du FDT dans ce fluide cisailé, ce qui constitue la première étude de ce type dans un verre structural.

4.1 Une approche microscopique pour la rhéologie non linéaire

4.1.1 Approximation de couplage de modes et systèmes désordonnés

Notre ambition est d'étudier le comportement d'un liquide, qui subit une transition vitreuse à basse température, en présence d'un cisaillement homogène. Il est bien évident que la tâche est ardue, et il s'agit simplement ici de justifier l'approche que nous utilisons par la suite. L'idée est de garder la présentation aussi générale que possible pour arriver en fin de paragraphe à la définition du modèle que nous étudions concrètement dans le reste du chapitre. Notre présentation est inspirée de la Ref. [72].

En l'absence du cisaillement, on peut décrire la dynamique du liquide par une équation de Langevin pour la densité $\rho(\mathbf{x}, t)$ [245, 246]

$$m \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = [-\mu(t) + \Delta] \rho(\mathbf{x}, t) - gF(\rho) + \zeta(\mathbf{x}, t), \quad (4.2)$$

où ζ est le bruit thermique (variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance $2T$), $F[\rho]$ est un terme de couplage qui contient les non-linéarités du problème, g étant la 'constante de couplage'. Les termes linéaires sont contenus dans $\mu(t)$ et l'opérateur Δ (dérivations, convolutions). Un exemple concret de ce type de dynamique peut être obtenu [247] en utilisant la fonctionnelle de densité de Ramakrishnan et Yussouff [248].

Le problème étant non-linéaire, la dynamique ne peut pas être résolue exactement. Une solution est alors de construire un développement perturbatif en puissances de la constante de couplage g , qui capture la physique du problème. L'approximation de couplage de modes constitue un type de développement perturbatif consistant à ne resommer qu'une partie de la série de perturbation [72].

Dans ce contexte, on peut tout d'abord écrire des équations dynamiques qui sont formellement exactes en termes des fonctions à 2 points $C(\mathbf{k}, t, t')$ et $R(\mathbf{k}, t, t')$ définies dans l'espace de Fourier par

$$\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') C(\mathbf{k}, t, t') \equiv \langle \delta \rho(\mathbf{k}, t) \delta \rho(\mathbf{k}', t') \rangle, \quad (4.3)$$

$$\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') R(\mathbf{k}, t, t') \equiv \frac{\delta \langle \delta \rho(\mathbf{k}, t) \rangle}{\delta \zeta(\mathbf{k}', t')}, \quad (4.4)$$

où $\delta \rho(\mathbf{x}, t) \equiv \rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0$ sont les fluctuations de densité par rapport à une densité uniforme ρ_0 . Les équations dynamiques découlent de l'équation de Langevin (4.2), ce sont

des équations de Dyson

$$\begin{aligned}
 m \frac{\partial^2 C(\mathbf{k}, t, t')}{\partial t^2} + \frac{\partial C(\mathbf{k}, t, t')}{\partial t} &= [-\mu(t)\delta(\mathbf{k}') + \Delta_{\mathbf{k}'}]C(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t, t') + 2TR(\mathbf{k}, t', t) \\
 &+ \int_{-\infty}^{t'} dt'' D(\mathbf{k}', t, t'')R(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t', t'') + \int_{-\infty}^t dt'' \Sigma(\mathbf{k}', t, t'')C(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t'', t'), \\
 m \frac{\partial^2 R(\mathbf{k}, t, t')}{\partial t^2} + \frac{\partial R(\mathbf{k}, t, t')}{\partial t} &= [-\mu(t)\delta(\mathbf{k}') + \Delta_{\mathbf{k}'}]R(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t, t') + \delta(t - t') \\
 &+ \int_{t'}^t dt'' \Sigma(\mathbf{k}', t, t'')R(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t'', t'),
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

où les noyaux $\Sigma(\mathbf{k}, t, t')$ et $D(\mathbf{k}, t, t')$ sont des fonctionnelles de C et R obtenues de manière auto-cohérente dans un développement perturbatif en puissance de g . Dans une représentation diagrammatique, ces noyaux ne font apparaître que des diagrammes à 1-particule irréductible. L'approximation de couplage de modes consiste alors à estimer ces noyaux à l'ordre g^2 du développement [72]. La conséquence est que Σ et D deviennent de simples fonctions de C et R . On doit finalement résoudre des équations, certes compliquées, mais qui ne font intervenir que les fonctions C et R .

Bien qu'obtenues différemment, les équations dynamiques (4.5) sont similaires aux équations étudiées par la théorie de couplage de modes. En effet, si l'on rajoute dans le système d'équations précédentes les propriétés d'équilibre que sont l'invariance par translation dans le temps, $C(\mathbf{k}, t, t') = C(\mathbf{k}, t - t')$, $R(\mathbf{k}, t, t') = R(\mathbf{k}, t - t')$, et le théorème de fluctuation-dissipation reliant R et C par $TR(\mathbf{k}, t) = -\partial_t C(\mathbf{k}, t)$, on obtient une unique équation d'évolution pour C , qui reste la seule quantité indépendante du problème. Cette équation est de la forme

$$m \frac{\partial^2 C(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial C(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -\mu' C(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{T} \int_0^t dt' D(\mathbf{k}, t - t') \frac{\partial C(\mathbf{k}, t')}{\partial t'}. \tag{4.6}$$

C'est précisément le type d'équations dérivées à l'aide du formalisme de Mori-Zwanzig par la théorie de couplages de mode de la transition vitreuse [73]. Dans ce dernier cas, l'approximation a porté sur l'évaluation du noyau D de l'Eq. (4.6), le principe étant de factoriser des fonctions de corrélation à n points en termes des fonctions à 2 points.

Ces équations restant très difficiles à analyser, à cause notamment de leur dépendance en \mathbf{k} , Bengtzelius, Götze et Sjölander d'une part [249], et Leutheusser [250] d'autre part, ont proposé une théorie de couplage de modes simplifiée (on dit maintenant 'schématique') pour ne tenir compte que d'un seul mode \mathbf{k} . Quantitativement, l'approximation consiste à remplacer le facteur de structure statique $S(\mathbf{k}, t)$ par une forme du type $1 + A\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$, puis à ne s'intéresser qu'à l'évolution de la quantité $C(t, t') \equiv C(\mathbf{k}_0, t, t')$. Les équations de Dyson deviennent dans ces conditions

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C(t, t')}{\partial t} &= -\mu(t)C(t, t') + 2TR(t', t) + \int_{-\infty}^{t'} dt'' D(C(t, t''))R(t', t'') + \int_{-\infty}^t dt'' \Sigma(t, t'')C(t'', t'), \\
 \frac{\partial R(t, t')}{\partial t} &= -\mu(t)R(t, t') + \delta(t - t') + \int_{t'}^t dt'' \Sigma(t, t'')R(t'', t'), \\
 \mu(t) &= T + \int_{-\infty}^t dt' [D(C(t, t'))R(t, t') + \Sigma(t, t')C(t, t')],
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

la dernière équation provenant de la normalisation de la corrélation, $C(t, t) = 1$. Les dérivées secondes ont été ôtées, car elles ne sont pertinentes que dans le régime à temps court qui ne nous intéresse pas vraiment ici. C'est seulement dans ce passage au modèle schématique que l'information spatiale a été perdue et on pourrait donc très bien envisager une étude de type couplage de modes de la dynamique forcée des systèmes vitreux en gardant une dépendance spatiale dans le cadre de modèles non schématiques.

C'est à ce stade qu'interviennent les travaux de Kirkpatrick, Thirumalai et Wolynes [74] faisant la remarque fondamentale que les équations (4.7) sont les mêmes que celles obtenues *sans approximations* en partant de modèles désordonnés champ moyen ('verres de spin'). En particulier, les modèles schématiques appelés F_{p-1} dans la classification de la théorie de couplage de modes [73], avec $D(x) \equiv \frac{p}{2} x^{p-1}$, conduisent à des équations dynamiques qui sont celles obtenues de manière exacte par le formalisme en intégrale fonctionnelle de Martin, Siggia et Rose à partir de l'Hamiltonien du modèle p -spin. Alors que la théorie de couplage de modes arrive à ce résultat après des approximations dont la qualité est incontrôlable, on voit que la théorie schématique finale n'est en fait rien d'autre que l'étude de la dynamique d'équilibre d'un verre de spin généralisé. Les 2 communautés s'enrichissent donc soudain d'un point de vue complètement nouveau : la théorie de couplage de modes dispose de modèles bien définis pour lesquels ses approximations sont exactes, tandis que l'étude des verres de spin prend un intérêt nouveau en vue de son application aux verres structuraux.

Si l'on veut maintenant incorporer un cisaillement dans la dynamique du liquide, l'équation de Langevin (4.2) doit être résolue avec un terme d'advection de la densité par l'écoulement, par exemple $\mathbf{v} = \gamma y \mathbf{e}_x$,

$$m \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho(\mathbf{x}, t) = [-\mu(t) + \Delta] \rho(\mathbf{x}, t) - gF(\rho) + \zeta(\mathbf{x}, t). \quad (4.8)$$

On doit alors reformuler le développement perturbatif, redériver les équations de Dyson, etc. pour pouvoir obtenir des équations dynamiques fermées en termes des fonctions à 2 points. C'est un problème extraordinairement difficile. Ce n'est donc pas l'approche que nous avons suivie, puisque nous voulions formuler les équations dynamiques 'les plus simples possibles', dans l'esprit des modèles schématiques de la théorie de couplage de modes. Notre approche a donc été de modifier directement les équations dynamiques schématiques (4.7) pour rendre compte du fait que la dynamique du système est forcée. Comme nous l'avons décrit dans l'introduction, la dynamique d'un système forcé ne satisfait plus à la relation du bilan détaillé. Nous proposons donc de tenir compte du cisaillement en étudiant des équations dynamiques (4.7) qui violent explicitement cette relation, l'espoir étant de capturer ainsi l'effet du terme d'advection dans l'Eq. (4.8). La version supersymétrique du formalisme de Martin, Siggia et Rose conduisant très directement aux équations dynamiques (4.7) permet aussi d'identifier la relation du bilan détaillé à une supersymétrie de l'action [72, 251]. Ceci permet d'exprimer cette propriété par une relation simple entre les noyaux D et Σ ,

$$\Sigma(t, t') = D'(C(t, t'))R(t, t'), \quad D'(x) \equiv \frac{dD}{dx}. \quad (4.9)$$

Ainsi, un système avec $\Sigma(t, t') - D'(C(t, t'))R(t, t') \neq 0$ ne satisfait pas à la règle du bilan détaillé. Nous choisissons donc d'étudier une version forcée du modèle schématique F_{p-1}

en prenant pour les noyaux,

$$D(C) = \frac{p}{2}C^{p-1} + \varepsilon^2(t)\frac{k}{2}C^{k-1}, \quad \Sigma(t, t') = \frac{p(p-1)}{2}C^{p-2}(t, t')R(t, t'), \quad (4.10)$$

où le terme $\varepsilon(t)\frac{k}{2}C^{k-1}$, choisi pour conserver la forme des modèles F_{p-1} (ou p -spin), viole donc explicitement la règle du bilan détaillé.

Une nouvelle fois, la correspondance avec les systèmes désordonnés champ moyen nous permet de mieux comprendre le sens des équations dynamiques que nous proposons d'étudier. En effet, les équations (4.7), complétées des définitions (4.10), décrivent de manière exacte la dynamique du modèle p -spin sphérique, forcée par des couplages asymétriques. Nous explicitons maintenant cette dynamique qui décrit le comportement de N variables de spin réelles s_i ($i = 1, \dots, N$) évoluant par l'équation de Langevin

$$\frac{\partial s_i(t)}{\partial t} = -\mu(t)s_i(t) - \frac{\delta H_J[\mathbf{s}]}{\delta s_i(t)} + \varepsilon(t)f_i^{\text{drive}} + \zeta_i(t). \quad (4.11)$$

Dans cette équation, $\zeta_i(t)$ est le bruit thermique : il s'agit d'une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance $2T$, où T est la température du bain thermique. Le paramètre $\mu(t)$ est choisi de manière autocohérente pour imposer la contrainte sphérique satisfaite par les spins, $\sum_i s_i^2(t) = N$. L'Hamiltonien est celui du modèle p -spin et s'écrit

$$H_J[\mathbf{s}] = \sum_{j_1 < \dots < j_p} J_{j_1 \dots j_p} s_{j_1} \dots s_{j_p}, \quad (4.12)$$

tandis que le terme f_i^{drive} représente un forçage par des couplages asymétriques dont l'amplitude est contrôlée par $\varepsilon(t)$. Nous nous concentrons dans la suite sur le cas où $\varepsilon(t) = \varepsilon$ est une constante. Le terme de forçage f_i^{drive} conduisant aux équations (4.7) et (4.10) est de la forme

$$f_i^{\text{drive}} = \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_{k-1} \\ j_1, \dots, j_{k-1} \neq i}} \tilde{J}_i^{j_1 \dots j_{k-1}} s_{j_1} \dots s_{j_{k-1}}. \quad (4.13)$$

Les couplages J dans l'Hamiltonien sont des variables aléatoires Gaussiennes de moyenne nulle, symétriques par permutations de (j_1, \dots, j_p) , de variance $p!/(2N^{p-1})$. Les couplages \tilde{J} dans f_i^{drive} sont des variables aléatoires Gaussiennes de moyenne nulle, symétriques par permutations de (j_1, \dots, j_{k-1}) , mais (c'est le point essentiel) contiennent une partie antisymétrique telle que

$$\overline{\left(\tilde{J}_i^{j_1 \dots j_{k-1}}\right)^2} = \frac{k!}{2N^{k-1}}, \quad \overline{\tilde{J}_i^{j_1 \dots j_{k-1}} \tilde{J}_{j_r}^{j_1 \dots i \dots j_{k-1}}} = 0. \quad (4.14)$$

La conséquence est que le terme de forçage ne peut pas être écrit comme la dérivée d'une énergie potentielle. La force résultante est donc non conservative, tout comme l'était le terme d'advection dans l'équation initiale (4.8). Les équations (4.7) et (4.10) sont alors les équations exactement satisfaites par

$$C(t, t') = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overline{s_i(t)s_i(t')}, \quad R(t, t') = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\overline{\delta \langle s_i(t) \rangle}}{\delta \zeta_i(t')}, \quad (4.15)$$

dans la limite thermodynamique, $N \rightarrow \infty$. Le calcul de ces équations à partir de (4.11)-(4.13) suit pas à pas celle donnée dans la Ref. [74], pour le cas conservatif. L'effet de la force non conservative est d'ajouter un terme proportionnel à ε^2 dans l'action, conduisant à la contribution $\varepsilon^2 \frac{k}{2} C^{k-1}$ à la fonction D , sans sa contrepartie dans Σ . Nous ne reproduisons pas ce calcul ici. La densité d'énergie $e(t)$ du système est reliée à la contrainte $\mu(t)$ par la relation

$$e(t) \equiv \frac{1}{N} \overline{\langle H_J[\mathbf{s}] \rangle} = \frac{1}{p} [T - \mu(t)]. \quad (4.16)$$

Les équations (4.7) et (4.10) ayant été proposées sans passer par la dynamique microscopique (4.8), le lien entre l'écoulement (taux de cisaillement γ , contrainte σ) et le paramètre de forçage ε n'est pas immédiat. L'analyse de la puissance injectée dans le système se révèle utile ici. On montre en effet (toujours par un calcul utilisant le formalisme de Martin, Siggia et Rose et que nous ne reproduisons pas) que la puissance injectée se met sous la forme (en supposant une dynamique stationnaire)

$$P \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overline{\langle \varepsilon f_i^{\text{drive}} \frac{\partial s_i}{\partial t} \rangle} = \varepsilon^2 \frac{k}{2} \int_0^\infty dt C(t)^{k-1} \frac{dR(t)}{dt} \simeq \frac{\varepsilon^2}{t_r}. \quad (4.17)$$

Pour le liquide décrit par l'Eq. (4.8), on aurait $P = \sigma\gamma = \sigma^2/\eta$. On peut donc identifier les grandeurs rhéologiques contrainte σ , viscosité η , taux de cisaillement γ , par les relations

$$\sigma \leftrightarrow \varepsilon, \quad \eta \leftrightarrow t_r, \quad \gamma \leftrightarrow \frac{\varepsilon}{t_r}, \quad (4.18)$$

où l'on a utilisé le fait que le temps de relaxation, formellement défini par $t_r \equiv \int_0^\infty dt C(t)$, est une mesure directe de la viscosité, $\eta \simeq t_r$.

4.1.2 Deux échelles de temps...

Les équations (4.7) et (4.10) pour les quantités à 2 temps $C(t, t')$ et $R(t, t')$ sont associées à des conditions initiales désordonnées au temps $t_i = -\infty$, moment où le cisaillement est appliqué. Cugliandolo *et al.* [241] ont résolu numériquement ces équations en prenant cette fois $t_i = 0$, pour des temps $t_w > 0$ assez courts. Ils ont pu toutefois obtenir de bonnes indications sur l'existence d'un état stationnaire pour toute valeur de ε et pour toute température. Dans la suite du chapitre, nous nous concentrons sur l'étude de cet état stationnaire, ce qui nous autorise à effectuer les simplifications $C(t, t') = C(t - t')$ et $R(t, t') = R(t - t')$. Les équations dynamiques à résoudre sont alors

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)}{dt} &= -\mu C(t) + \int_0^t dt' \Sigma(t-t') C(t') + \int_0^\infty dt' [\Sigma(t+t') C(t') + D(t+t') R(t')], \\ \frac{dR(t)}{dt} &= -\mu R(t) + \int_0^t dt' \Sigma(t-t') R(t'), \quad \mu = T + \int_0^\infty dt' [D(t') R(t') + \Sigma(t') C(t')], \\ D(t) &= \frac{p}{2} C(t)^{p-1} + \varepsilon^2 \frac{k}{2} C(t)^{k-1}, \quad \Sigma(t) = \frac{p(p-1)}{2} C(t)^{p-2} R(t), \end{aligned} \quad (4.19)$$

associées aux conditions $C(0) = 1$, $R(0^+) = 1$, $R(t < 0) = 0$ (causalité) et $t_i = -\infty$. Pour obtenir ces équations, la condition $C(-t) = C(t)$ a été utilisée, changeant les bornes $-\infty$

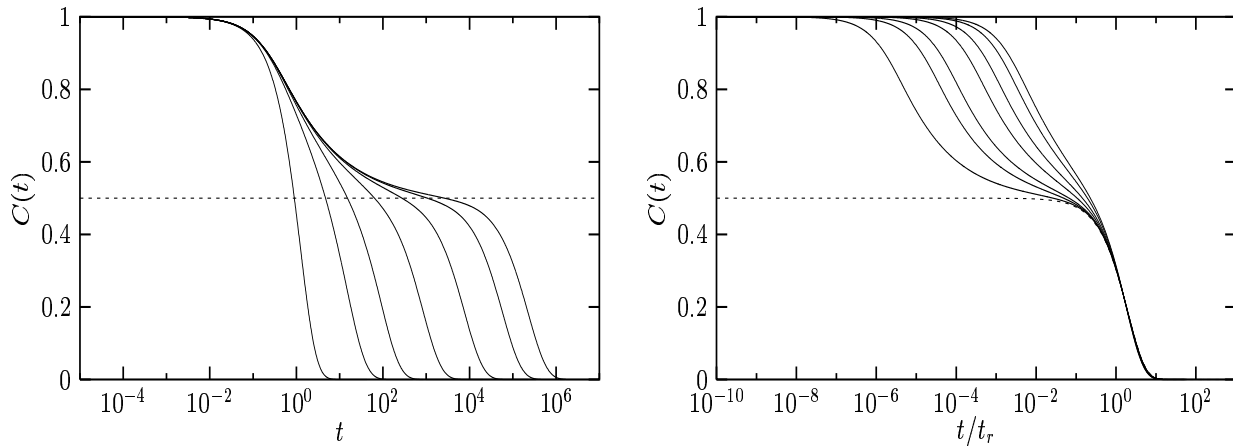


Fig. 4.1: À gauche, fonctions de corrélation $C(t)$ en fonction de t pour $T = 0.613 > T_c \simeq 0.61237$ pour différentes valeurs de ε . De gauche à droite, on a $\varepsilon = 5, 0.333, 0.143, 0.05, 0.0158, 0.00447$ et 0 . La ligne pointillée est le paramètre d'Edwards-Anderson à la transition dynamique, $q_{EA} = 0.5$. À droite, les mêmes fonctions sont représentées en fonction de la variable t/t_r . La ligne pointillée est une exponentielle simple $C(t) = q_{EA} \exp(-t/t_r)$.

des intégrales en $+\infty$. La conséquence est que ces équations sont devenues non causales en la différence des temps $t - t'$, comme en témoignent la seconde intégrale de l'équation pour la corrélation et l'intégrale figurant dans l'équation de la contrainte μ . Pour la solution numérique de ces équations, la simplicité due au fait que les fonctions dynamiques sont stationnaires est malheureusement contrebalancée par cette absence de causalité.

Analytiquement, une solution complète de ces équations intégral-différentielle non linéaires couplées n'est possible que dans le cas où $p = 2$, les équations devenant alors linéaires [81]. Comme nous l'avons mentionné au premier chapitre, le modèle p -spin pour $p = 2$ est équivalent au modèle $O(n)$, $n \rightarrow \infty$, et ne présente pas les propriétés qui nous intéressent ici. Pour $p \geq 3$, seule une analyse asymptotique, $\varepsilon \rightarrow 0$, est possible (cf paragraphe 4.1.4). Elle ne nous renseigne toutefois pas sur ce qui se passe pour ε fini, comportement que nous voulons aussi décrire. Une solution numérique est alors indispensable : nous l'avons effectuée par une combinaison des méthodes numériques de la Ref. [252] (solution d'une équation intégral-différentielle sur un maillage logarithmique) et de la Ref. [253] (itération rendue nécessaire par la non causalité des équations). Nous ne détaillons pas plus l'algorithme ici et passons directement aux résultats obtenus. Les courbes présentées sont pour les paramètres $p = k = 3$. Les cas $k = 2, p = 3$ et $k = p = 4$ ont aussi été analysés, donnant les mêmes résultats, y compris pour l'exposant de rhéofluidification (cf plus bas). L'intégration numérique des équations dynamiques nous donne accès aux fonctions $C(t)$ et $R(t)$ pour chaque valeur du couple (ε, T) .

En l'absence de cisaillement [254], la relaxation est très rapide à haute température, $T \gg T_c$. En s'approchant de T_c , la décroissance de la corrélation se fait en 2 échelles de temps, α et β . La relaxation β est quasiment indépendante de la température, $t_\beta \simeq \text{const}$, tandis que la seconde échelle de temps diverge à la transition dynamique, dans le présent modèle comme une loi de puissance ; on a ici $t_0 \equiv t_r(\varepsilon = 0) \simeq (T - T_c)^{-1.765}$ [254]. La relaxation α contrôle donc entièrement le temps de relaxation. Sous la transition [68], toujours sans le cisaillement, la relaxation est de la même forme, mais cette fois avec

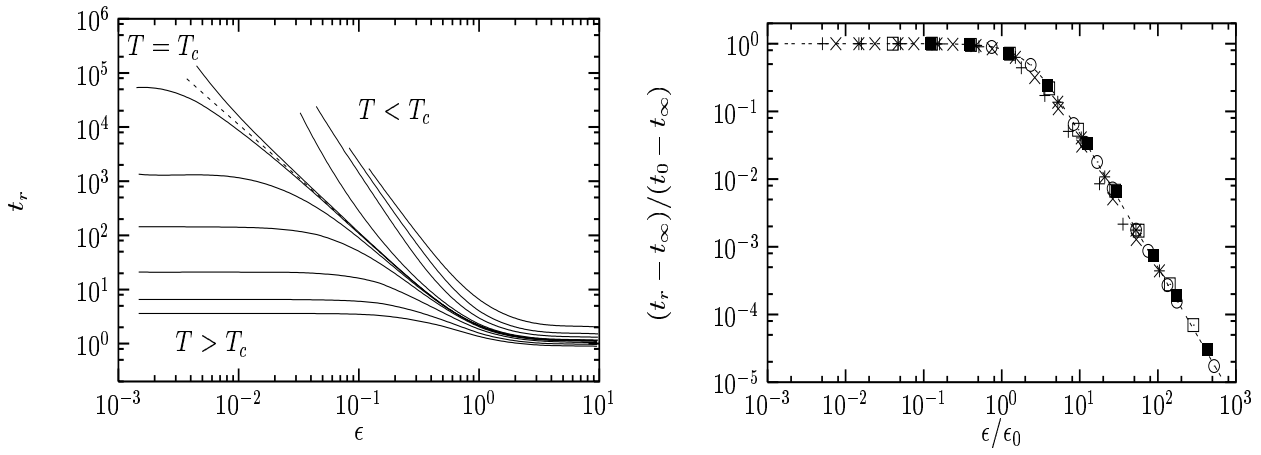


Fig. 4.2: À gauche, variations du temps de relaxation t_r ($\sim \eta$) avec l'amplitude du forçage ε ($\sim \sigma$) pour différentes températures $T = 0.9, 0.8, 0.7, 0.64, 0.62, 0.613, T_c \simeq 0.61237, 0.6115, 0.58, 0.45, 0.3,$ et 0.01 (de bas en haut). À droite, les courbes pour $T > T_c$ sont remises à l'échelle en utilisant la relation (4.21). La ligne pointillée est la relation $[1 + (\varepsilon/\varepsilon_0)^2]^{-1}$.

$t_\beta \simeq \text{const}$ et $t_r(\varepsilon = 0) \simeq t_w \rightarrow \infty$ (comme sur la Fig. 1.2) et le système vieillit, son temps de relaxation (ou sa viscosité) étant une mesure directe de son 'âge'.

La Fig. 4.1 donne l'allure des fonctions de corrélation que nous obtenons en présence du cisaillement, pour $T \gtrsim T_c$. Le temps de relaxation à $\varepsilon = 0$ est grand, mais fini. Lorsqu'un forçage $\varepsilon > 0$ est appliqué, la relaxation β est très peu affectée, $t_\beta \simeq \text{const}$, tandis que le temps de relaxation diminue très vite avec ε , $t_r = t_r(\varepsilon)$. La viscosité diminue donc fortement lorsque la contrainte augmente: c'est le phénomène de rhéofluidification. À plus forte contrainte, la relaxation β est elle aussi légèrement influencée, et l'on ne peut plus distinguer entre relaxations α et β . La Fig. 4.1 démontre aussi que la partie lente de la relaxation se produit sur une unique échelle de temps t_r , puisque $C(t)$ est une fonction d'échelle du rapport t/t_r . Cette relaxation est bien décrite par une forme exponentielle

$$C(t) \underset{t \gg t_\beta}{\simeq} \exp\left(-\frac{t}{t_r(\varepsilon)}\right). \quad (4.20)$$

Cette remise à l'échelle est en fait l'analogie directe du 'principe de superposition Temps / Température' [73], et on pourrait l'appeler 'principe de superposition Temps / Cisaillement'. Une décroissance exponentielle simple est typique des modèles schématiques F_{p-1} de la théorie de couplages de modes² [73].

À basse température, $T < T_c$, les courbes ont la même allure qualitative. Le paramètre d'Edwards-Anderson (la hauteur du plateau séparant les 2 relaxations) augmente lorsque T diminue, il tend vers la valeur $q_{EA} = 1$ à $T = 0$. La relaxation lente est encore bien représentée par la forme (4.20). Insistons une nouvelle fois sur le fait que ceci implique que le temps de relaxation est fini dans la phase vitreuse, $T < T_c$. En particulier, il ne diverge pas avec l'âge du système: *le cisaillement a donc stoppé le vieillissement* [42], et maintient la viscosité à une valeur constante. Mieux, celle-ci dépend très fortement de la

2. Le modèle F_{12} donne lieu, quant à lui, à des relaxations du type exponentielle étirée [255].

contrainte imposée, $t_r \simeq t_r(\varepsilon)$ (à nouveau l'effet de rhéofluidification), et augmenter la contrainte permet donc au système de 'rajeunir' sous l'action du cisaillement.

La Fig. 4.2 décrit quantitativement le comportement rhéologique obtenu par l'étude des fonctions de corrélation. Elle représente pour différentes températures T l'évolution du temps de relaxation t_r en fonction de l'amplitude du forçage ε . En utilisant les relations (4.18), on voit que ces courbes sont analogues à des courbes d'écoulement $\eta - \sigma$. Pour une température $T > T_c$, on observe que la viscosité est finie à contrainte nulle (le temps $t_0 = t_r(\varepsilon = 0)$ est fini). Lorsque la contrainte devient non nulle, la viscosité reste tout d'abord constante : on observe donc un régime où le comportement est typique d'un fluide Newtonien (viscosité indépendante de l'écoulement) : c'est le 'régime linéaire' de la rhéologie [15]. Lorsque la contrainte augmente encore, la viscosité commence à diminuer, typiquement comme une loi de puissance, et le système n'est plus Newtonien mais rhéofluidifiant : c'est le 'régime non-linéaire'. La valeur ε_0 du forçage pour laquelle le système quitte la réponse linéaire est d'autant plus petite que la température est proche de T_c . (Une définition pratique de ε_0 est donnée par la relation $t_r(\varepsilon_0) \equiv 0.8t_0$, nous suivons ici la référence classique [256]). Enfin, à plus forte contrainte, un nouveau régime linéaire est atteint où la viscosité est très faible. On peut alors définir $t_\infty \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} t_r(\varepsilon)$, qui se comporte comme $t_\infty \simeq t_\beta$, et qui est donc quasiment indépendant de la température. La Fig. 4.2 montre encore que toutes les courbes $t_r(\varepsilon)$ pour $T > T_c$ sont bien décrites par la forme

$$t_r(\varepsilon) \simeq t_\infty + \frac{t_0 - t_\infty}{1 + (\varepsilon/\varepsilon_0)^2}, \quad (4.21)$$

la valeur de l'exposant dans cette expression — 2 — étant un résultat numérique. Cette valeur nous permet de décrire le régime rhéofluidifiant par une loi de puissance liant viscosité et taux de cisaillement, cf Eqs. (1.2)-(4.18),

$$\eta \simeq \gamma^{-2/3}. \quad (4.22)$$

Pour $T = T_c$, la viscosité est infinie à contrainte nulle ($t_0 = \infty$). Pour une valeur non nulle de la contrainte, par contre, la viscosité devient finie, et sa variation est bien décrite par une loi de puissance pure, et on retrouve l'exposant de rhéofluidification précédent, $\eta \simeq \gamma^{-2/3}$.

Pour $T > T_c$, de même, la viscosité à contrainte nulle est infinie et redevient finie dès qu'une contrainte est appliquée. La divergence du temps de relaxation est de la forme $t_r \simeq \varepsilon^{-2}$ (comme à $T = T_c$) pour ε pas trop petit, puis la divergence devient plus rapide, $t_r \simeq \varepsilon^{-\alpha(T)}$ avec $\alpha(T) > 2$, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. À faible contrainte, on a donc encore un comportement rhéofluidifiant en loi de puissance, mais la valeur de l'exposant s'est rapprochée de 1, $\eta \simeq \gamma^{-\alpha(T)/(1+\alpha(T))}$. Par exemple, pour $T = 0.3$, nous trouvons $\alpha(T = 0.3) \simeq 3.2$, et donc une loi de puissance pour la rhéofluidification $\eta \simeq \gamma^{-0.75}$.

Nous avons à ce point atteint notre premier objectif, qui était de décrire le comportement macroscopique des matériaux vitreux mous en présence d'un cisaillement en partant d'une théorie microscopique. Nos résultats décrivent ainsi le comportement d'un fluide en loi de puissance, cf Eq. (4.1). Nous reviendrons plus bas sur la question de la contrainte seuil σ_0 .

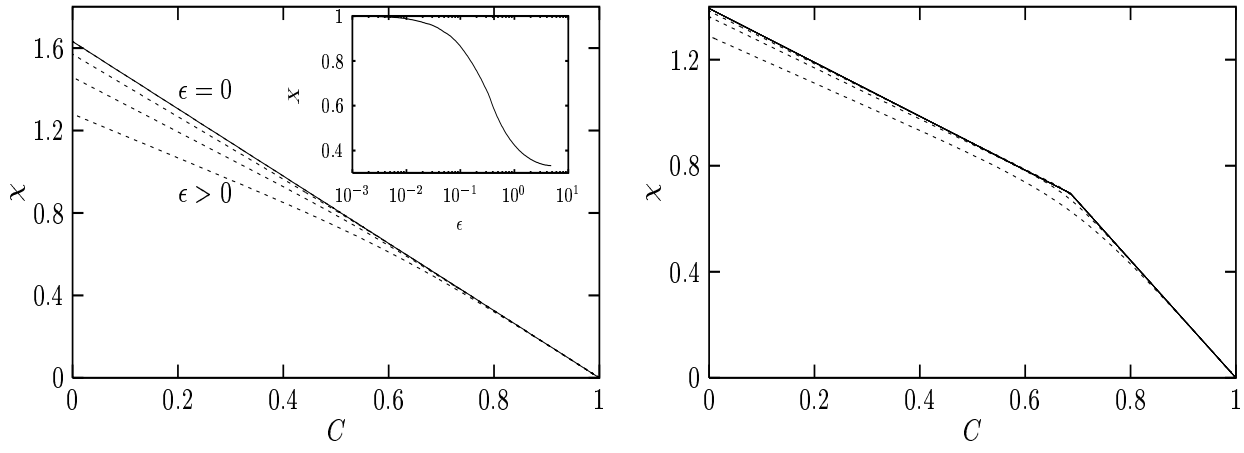


Fig. 4.3: Courbes paramétriques susceptibilité – corrélation pour $T = 0.613 > T_c$ (à gauche) et les forçages $\epsilon = 0.333, 0.143, 0.05$ et 0 (de bas en haut), et $T = 0.45$ (à droite) avec des forçages $\epsilon = 0.333, 0.143$ et 0.0442 (de bas en haut). Dans chaque cas, les courbes sont en lignes pointillées, tandis que les traits pleins résultent de l’analyse asymptotique des équations dynamiques du paragraphe 4.1.4. L’encart de la figure de gauche représente les variations de $X = T/T_{\text{eff}}$ en fonction du forçage ϵ pour $T = 0.613$.

4.1.3 ... et deux températures

Nous pouvons maintenant nous consacrer à notre deuxième objectif, l’étude des propriétés de fluctuation-dissipation du liquide sous cisaillement vues par la théorie champ moyen.

Nous présentons les résultats obtenus sous la forme graphique dont nous avons déjà fait usage plusieurs fois, représentant les variations de $\chi(t) = \int_0^t dt' R(t')$ en fonction de $C(t)$, paramétrées par le temps t . Les courbes obtenues pour deux températures, au-dessus et au-dessous de T_c , et pour diverses valeurs du forçage ϵ sont représentées sur la Fig. 4.3.

Lorsque $T > T_c$, en l’absence du forçage, le système équilibre en un temps fini t_0 , le FDT est satisfait. La courbe $\epsilon = 0$ se superpose donc à la relation d’équilibre $\chi(t) = [1 - C(t)]/T$. Lorsque ϵ augmente, la relation du bilan détaillé n’est plus satisfaite, le système est donc (par construction) hors équilibre. Les courbes quittent alors la relation d’équilibre, Fig. 4.3. Le FDT est donc violé, comme il se doit.

Deux points remarquables émergent cependant de la Fig. 4.3. Le premier est que lorsque la courbe s’écarte de la relation d’équilibre, elle peut être très correctement approximée par une ligne brisée ayant pour pente $-1/T$ pour $C > q_{EA}$ (relaxation rapide β), et une pente $-1/T_{\text{eff}}$ pour $C < q_{EA}$ (relaxation lente α). La Fig. 4.3 montre de plus que $T_{\text{eff}} > T$. Par analogie avec le régime de vieillissement, nous appelons T_{eff} la ‘température effective’ associée aux degrés de liberté lents.

Le second point remarquable apparaît dans l’encart de la Fig. 4.3, où nous avons représenté les variations du rapport $X \equiv T/T_{\text{eff}}$ en fonction de ϵ . Pour de faibles valeurs de ϵ , on a $X \simeq 1$, puis lorsque le forçage augmente, T_{eff} s’écarte notablement de sa valeur d’équilibre. On peut donc définir une zone où la ‘réponse linéaire’, cette fois au sens de la physique des phénomènes irréversibles [10], s’applique. Le comportement de X est en fait très similaire à celui du temps de relaxation, Fig. 4.2, qui variait assez peu pour les faibles valeurs de ϵ . On voit ici apparaître une corrélation profonde entre un

comportement rhéologique linéaire (Newtonien) et un comportement de ‘quasi-équilibre’ ($T_{\text{eff}} \simeq T$) au sens de la thermodynamique. À plus fort ε , le système s’écarte en même temps de l’équilibre ($T_{\text{eff}} > T$), et du comportement Newtonien (rhéofluidification).

Pour $T < T_c$, la situation à ε fini est très similaire avec l’existence très claire, Fig. 4.3 des deux températures T et T_{eff} . La différence provient de la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, pour laquelle on obtenait $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{\text{eff}}(\varepsilon, T) = T$ au-dessus de la transition ; nous obtenons sous la transition $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{\text{eff}}(\varepsilon, T) > T$. Cette limite est réminiscente du régime de vieillissement pour lequel la température effective est aussi $T_{\text{eff}} > T$ dans la limite $t_w \rightarrow \infty$. Nous montrons dans le paragraphe suivant que les 2 limites $t_w \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ conduisent, dans le cadre de notre modèle, à la même valeur asymptotique de la température effective. La limite de faible contrainte montre bien qu’un verre même très faiblement forcé ($\varepsilon \rightarrow 0$), ou très vieux ($t_w \rightarrow \infty$), est toujours très loin de son état d’équilibre, $T_{\text{eff}} \neq T$.

4.1.4 Température effective, processus activés, et contrainte seuil

Nous avons jusqu’ici discuté les résultats de l’étude numérique des équations dynamiques. Nous présentons ici l’analyse analytique asymptotique qui peut en être faite. ‘Asymptotique’ signifie que la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ est prise. Cette analyse suit de près la solution obtenue pour le régime de vieillissement [68, 70], et nous ne la reformulons donc que très brièvement dans le contexte de la dynamique forcée.

Comme l’indique la solution numérique, les fonctions dynamiques font clairement apparaître l’existence de deux échelles de temps. Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on peut donc décomposer ces fonctions en une partie rapide ‘ f (pour ‘fast’) et une partie lente ‘ s ’ (pour ‘slow’) selon $C(t) = C_f(t) + C_s(t)$ et $R(t) = R_f(t) + R_s(t)$. Le paramètre d’Edwards-Anderson est $q_{EA} = \lim_{t \rightarrow \infty} C_f(t)$. On peut alors obtenir les équations satisfaites par les parties rapides et les parties lentes. Les équations pour les parties rapides sont résolues en ajoutant le FDT, $T R_f(t) = -\text{d}_t C_f(t)$. La limite $t \rightarrow \infty$ conduit alors à la relation

$$\mu + \frac{p}{2T}(q_{EA}^{p-1} - 1) = \frac{T}{1 - q_{EA}}. \quad (4.23)$$

Les équations pour les parties lentes s’écrivent quant à elles

$$\begin{aligned} \frac{dC_s(t)}{dt} &= -\mu C_s(t) + \int_0^t dt' \Sigma_s(t-t') C_s(t') + \int_0^\infty dt' [\Sigma_s(t+t') C_s(t') + D_s(t+t') R_s(t')] \\ &\quad + \frac{p}{2T}(1 - q_{EA}^{p-1}) C_s(t) + \frac{1 - q_{EA}}{T} D_s(t), \\ \frac{dR_s(t)}{dt} &= -\mu R_s(t) + \int_0^t dt' \Sigma_s(t-t') R_s(t') + \frac{p}{2T}(1 - q_{EA}^{p-1}) R_s(t) + \frac{1 - q_{EA}}{T} \Sigma_s(t), \\ \mu &= T + \int_0^\infty dt' [D_s(t') R_s(t') + \Sigma_s(t') C_s(t')] + \frac{p}{2T}(1 - q_{EA}^p), \\ D_s(t) &\equiv \frac{p}{2} C_s(t)^{p-1}, \quad \Sigma_s(t) \equiv \frac{p(p-1)}{2} C_s(t)^{p-2} R_s(t). \end{aligned} \quad (4.24)$$

En s’inspirant de la solution numérique, ce second jeu d’équations est résolu par l’ansatz

$$R_f(t) = -\frac{1}{T_{\text{eff}}} \frac{dC_f(t)}{dt} \quad (4.25)$$

En injectant cette relation dans le système (4.24), et en éliminant μ par la relation (4.23), on obtient 2 équations pour les 2 inconnues que sont $q_{EA}(T)$ et $T_{\text{eff}}(T)$,

$$\frac{T}{T_{\text{eff}}} = \frac{(p-2)(1-q_{EA})}{q_{EA}}, \quad \frac{1}{p-1} = \frac{p}{2T^2} q_{EA}^{p-2} (1-q_{EA})^2, \quad (4.26)$$

la condition $T_{\text{eff}} = T$ permettant de déterminer la température de la transition dynamique T_c ,

$$T_c = \sqrt{\frac{p(p-1)^{p-2}}{2(p-1)^{p-1}}}. \quad (4.27)$$

Nous avons utilisé les équations (4.26) pour tracer les lignes continues de la Fig. 4.3. On retrouve en particulier le fait que $T_{\text{eff}} = \infty$ dans le cas $p = 2$, correspondant à un modèle de type croissance de domaines. Ces équations les mêmes que celles obtenues pour le régime de vieillissement [68], ce qui démontre que les valeurs de T_{eff} et q_{EA} sont égales dans les 2 situations.

Les équations (4.23) et (4.26) permettent enfin de calculer la densité d'énergie lors de la dynamique forcée, et d'interpréter cette dynamique dans la phase vitreuse en termes de l'espace des phases du modèle p -spin, décrit dans l'introduction (ce que ne permettrait pas de faire une analyse couplages de modes seule, sans la connexion avec les systèmes désordonnés). La dynamique de vieillissement ($\varepsilon = 0$, $T < T_c$) peut être comprise comme une descente très lente du système vers la valeur de l'énergie libre en dessous de laquelle apparaît une complexité $\Sigma(f, T)$ non nulle, notée $f_{\text{max}}(T)$ dans l'introduction. L'effet du forçage est de stopper cette lente descente à un niveau $f(\varepsilon, T) > f_{\text{max}}(T)$ dépendant de ε . Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, l'énergie libre atteint la valeur $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon, T) = f_{\text{max}}(T)$, qu'elle atteint aussi lorsque $t_w \rightarrow \infty$ pendant le régime de vieillissement. Les dynamiques forcée et de vieillissement visitent des parties de l'espace de phases similaires, et il n'est donc pas étonnant que certaines propriétés de ces 2 situations se ressemblent. En particulier, on comprend pourquoi les températures effectives asymptotiques ($\varepsilon \rightarrow 0$ et $t_w \rightarrow \infty$) peuvent être égales. Elles sont reliées à la complexité (une quantité calculée à l'équilibre) par la relation (1.13),

$$\frac{1}{T_{\text{eff}}} = \left. \frac{\partial \Sigma(f, T)}{\partial f} \right|_{f=f_{\text{max}}(T)}. \quad (4.28)$$

Cette vision 'dans l'espace des phases' nous permet de plus de discuter les limites de notre approche champ moyen, qui sont donc aussi celles de la théorie de couplages de modes dans son ensemble. Que le système ne puisse accéder aux états situés sous la valeur $f_{\text{max}}(T)$ résulte du fait que les barrières d'énergie pour y accéder divergent avec la taille N du système. Dans un modèle plus réaliste, on s'attend à ce que le système puisse accéder à ces états métastables plus profonds, et effectuer une dynamique thermiquement activée entre ces états : ce sont les fameux 'processus activés' qui sont invoqués pour expliquer le fait que la transition dynamique prédite par la théorie de couplage de modes n'existe pas expérimentalement [73].

D'un point de vue rhéologique, on s'attend donc, dans un modèle plus réaliste, à ce que le système puisse accéder à ces états très profonds, à temps très longs, ou de façon équivalente, à faible forçage. Dans ce cas, l'effet de ces états est de 'bloquer' la

dynamique. On s'attend alors à l'existence d'une valeur seuil de la contrainte en-dessous de laquelle le système répond élastiquement, et au-delà de laquelle il peut s'échapper de ces états métastables. En d'autres mots, l'effet de ces états est de *donner naissance à une contrainte seuil* σ_0 , Eq. (4.1).

Dans le cadre de notre description champ moyen, la dynamique partant d'une condition initiale désordonnée à $t_i = -\infty$ finit inéluctablement au niveau du seuil $f_{\max}(T)$. Il est possible toutefois d'imposer des conditions initiales différentes et de placer le système au temps t_i dans un état métastable avec une énergie libre $f \in [f_{\min}(T), f_{\max}(T)]$. Les études menées dans ce cas en l'absence de forçage montrent que le système est piégé dans cet état sans pouvoir en sortir [257]. Nous n'avons pas étudié ces conditions initiales en détail, mais une valeur seuil de ε apparaîtrait très certainement, même au niveau de cette description champ moyen. De bonnes indications dans cette direction ont été obtenues dans la Ref. [241]. On peut aussi tenter d'aller au-delà de l'approximation de champ moyen. Une possibilité, proposée dans la Ref. [241] est d'étudier le comportement du modèle p -spin avec un nombre de spins N fini. Dans ce cas, les barrières d'énergie sont finies et la dynamique peut alors visiter des états qui lui sont interdits dans la limite thermodynamique au niveau champ moyen. En mesurant l'évolution de $e(t)$, on voit alors clairement [241] que le système peut rester bloqué de longues périodes dans ces états métastables, pour finalement en sortir sous le double effet de la température et du forçage. Nous reprendrons cette proposition au cours de notre étude du forçage alternatif auquel le dernier chapitre est consacré.

4.1.5 Diagramme des phases Contrainte – Température

Nous résumons maintenant nos résultats sur un diagramme des phases (ε, T) sur la Fig. 4.4. Ce diagramme s'intéresse donc à 2 des 3 directions du diagramme des phases suggéré par Liu et Nagel [48], représenté sur la Fig. 1.4. Dans ce diagramme, l'axe $\varepsilon = 0$ décrit la physique de la transition vitreuse qui intervient à la température $T = T_c$. La phase vitreuse, caractérisée par $t_r = \infty$ et donc par du vieillissement, n'existe que sur le segment $(\varepsilon = 0, T \in [0, T_c])$. L'axe $T = 0$ décrit quant à lui la rhéologie des systèmes athermiques. Dans cette analogie, nos résultats (en particulier l'existence d'une température effective) sont *applicables à la rhéologie de matériaux comme les mousses ou les matériaux granulaires*.

Chaque point du plan (ε, T) peut être caractérisé par la valeur du temps de relaxation t_r et de la température effective T_{eff} (ou de manière équivalente du rapport de fluctuation-dissipation $X = T/T_{\text{eff}}$). Nous avons ainsi représenté sur la Fig. 4.4 les courbes de niveau de t_r ('iso- t_r ') et de X ('iso- X '). On retrouve donc sur ce diagramme le comportement rhéologique décrit plus haut : augmenter la valeur de ε fait traverser les iso- t_r , la rhéofluidification. De même, lorsque le forçage augmente, la valeur de X diminue, et le système s'éloigne de son état d'équilibre. La zone sous la courbe $X = 0.99$ est la région caractérisée par des propriétés de quasi-équilibre, $X \simeq 1$, et c'est aussi le régime Newtonien de la rhéologie, $t_r \simeq \text{const}$.

L'effet du forçage est quelque peu paradoxal, puisqu'il rend à la fois la phase basse température plus 'liquide' (en fluidifiant le verre), mais il rend aussi des propriétés jusqu'ici réservées au verre (une température effective $T_{\text{eff}} > T$) observables à $T > T_c$.

La Fig. 4.4 tente aussi de donner une image des modifications que pourraient apporter les 'processus activés'. L'axe $\varepsilon = 0$ est lui-même modifié. Dans la pratique en effet, aucune

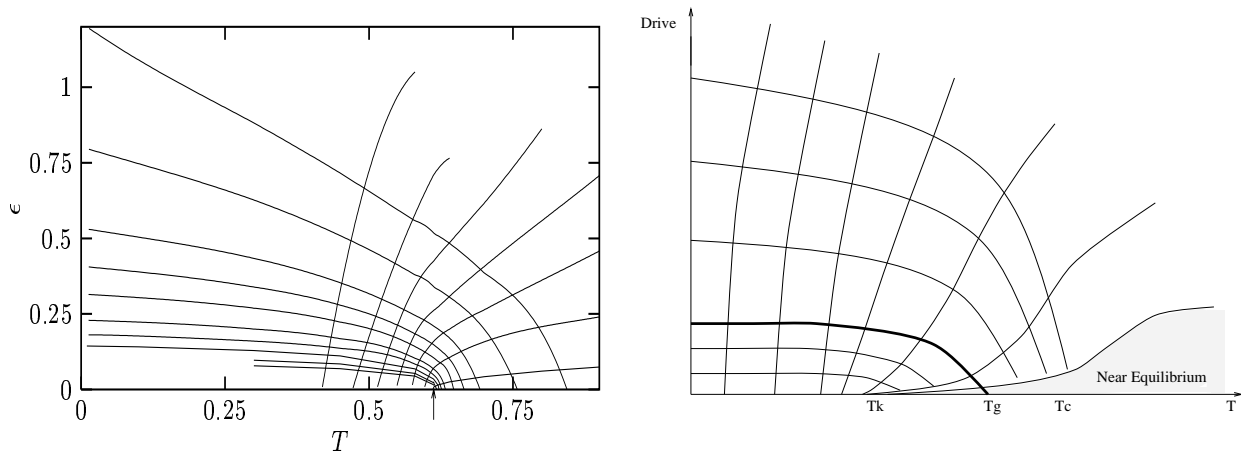


Fig. 4.4: Diagrammes des phases Contrainte – Température. À gauche sont résumés les résultats obtenus dans l’approche champ moyen. Les courbes inclinées vers la gauche sont les courbes d’iso- t_r , avec $t_r = 5, 10, 25, 50, \dots, 5000$ (de haut en bas). Les courbes inclinées vers la droite sont les courbes d’iso- X avec $X = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ (de gauche à droite). La flèche indique la température de la transition dynamique T_c . À droite, on a représenté schématiquement l’influence probable des processus activés sur le diagramme des phases (voir texte).

divergence n’a lieu à $T = T_c$ (prédite par la théorie de couplages de modes). À $T = T_g$, le système ne peut plus équilibrer sur les échelles de temps expérimentales, c’est la ‘transition vitreuse’. À plus basse température, enfin, on trouve la température de Kauzmann T_k , où a lieu une (hypothétique) transition de phase thermodynamique. Pour $\varepsilon > 0$, nous retrouvons la zone de quasi-équilibre (grisée), les iso- t_r et les iso- X : nous pensons ainsi que le comportement à ε fini est robuste vis-à-vis de la présence des processus activés. La ligne continue en gras désigne la courbe où la viscosité vaut $\eta(\varepsilon, T) = 10^{13}$ Poise, qui se termine au point $(\varepsilon = 0, T_g)$. Sous cette ligne, le système ne peut plus être équilibré : c’est la phase ‘jammed’ de Liu et Nagel. L’effet des processus activés est de permettre, dans cette phase, l’existence d’une contrainte seuil σ_0 , mal (ou indirectement) décrite par notre approche champ moyen. Nous proposons donc que l’allure générale de ces 2 diagrammes soit toutefois la même, et donc que les comportements décrits par 2 échelles de temps et 2 températures soient très similaires.

Ces résultats sont maintenant testés dans la simulation numérique d’un liquide sous cisaillement.

4.2 Un pas vers l’expérience : Étude numérique d’un liquide cisailé

Notre étude théorique a permis de dégager une image à la fois macroscopique et microscopique du comportement d’un matériau vitreux mou en présence d’un cisaillement homogène (écoulement de type Couette). Le comportement rhéologique obtenu, typique d’un fluide en loi de puissance, ainsi que la forme d’échelle (4.21) sont très couramment rencontrés expérimentalement, nous l’avons déjà signalé. Les prédictions obtenues sur les propriétés de fluctuation-dissipation en présence de l’écoulement sont par contre complètement nouvelles pour le champ de la rhéologie et n’ont par conséquent pas (en-

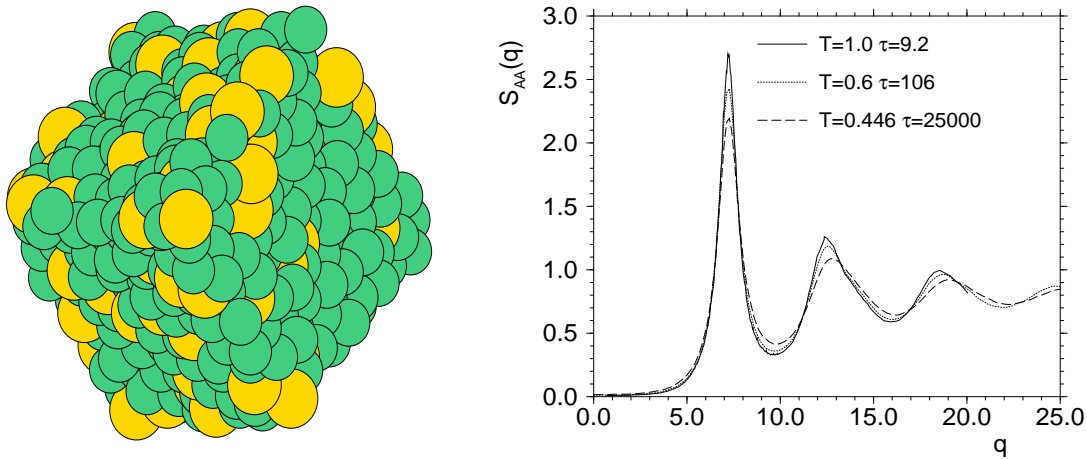


Fig. 4.5: À gauche, une représentation de la boîte de simulation, pour les paramètres décrits dans le texte. À droite, facteur de structure statique pour différentes températures; la figure indique aussi les temps de relaxation correspondant à chaque température, d'après la Ref. [260].

core!) été mesurées expérimentalement. Nous proposons un premier pas dans cette voie grâce à l'étude numérique par dynamique moléculaire d'un fluide cisailé. Notre choix s'est porté sur un liquide simple, dans le sens où il est composé de particules non structurées (sphériques), mais qui présente cependant des propriétés de dynamique lente à basse température.

Notre étude théorique suggère que des propriétés similaires devraient être observées dans des fluides plus complexes (colloïdes, émulsions, etc.), et même dans des systèmes comme les mousses pour lesquels l'énergie thermique d'agitation $k_B T$ est complètement négligeable devant les échelles d'énergie mécanique mises en jeu lors du mouvement [43]. La mesure d'une température effective macroscopique aurait alors un très grand intérêt théorique [258]. Nous laissons ces tests pour des travaux ultérieurs et nous concentrons maintenant sur l'exemple du liquide de Lennard-Jones.

4.2.1 La rhéologie vue par la dynamique moléculaire

L'intérêt immédiat de la simulation numérique est de pouvoir réaliser l'ambition énoncée en début du paragraphe 4.1.1: étudier le comportement d'un liquide, pouvant éventuellement devenir vitreux, lorsqu'il est cisailé de façon homogène. Le modèle que nous considérons est désormais bien connu dans la littérature, et sert de 'modèle standard' pour l'étude numérique des verres structuraux. Il décrit un liquide comportant 2 types de particules A et B , en quantités N_A et N_B , de masses respectives m_A et m_B , 2 particules (i, j) interagissant par un potentiel $V(\mathbf{r}_{ij})$ de type Lennard-Jones,

$$V(\mathbf{r}_{ij}) = 4\varepsilon_{ij} \left[\left(\frac{\sigma_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \right)^6 \right]. \quad (4.29)$$

Dans la simulation, σ_{AA} fixe l'échelle de longueur, ε_{AA} l'échelle d'énergie, et m_A l'échelle de masse. L'échelle de temps est donc fixée et s'exprime en unités de $t_0 \equiv \sqrt{m_A \sigma_{AA}^2 / \varepsilon_{AA}}$.

Les études très complètes de Kob et Andersen [259, 260] ont montré que pour une densité $\rho = 1.2$, le choix suivant des paramètres conduit à des propriétés intéressantes : $(N_A/N_B) = 4$, $\varepsilon_{AB} = 1.5\varepsilon_{AA}$, $\varepsilon_{BB} = 0.5\varepsilon_{AA}$, $\sigma_{BB} = 0.88\sigma_{AA}$, $\sigma_{AB} = 0.8\sigma_{AA}$, et $m_B = m_A$. La Fig. 4.5 montre une image de la boîte de simulation contenant 2916 particules décrites par ces paramètres. On comprend avec cette image pourquoi la dynamique du liquide peut devenir extrêmement lente. À basse température, en effet, le système ne cristallise pas à cause de la frustration induite par la présence de 2 types de particules [259], mais subit une ‘transition vitreuse numérique’ où son temps de relaxation devient plus grand que la durée maximale accessible par la simulation. Le système est bien décrit pour $T \gtrsim 0.45$ par la théorie de couplage de modes, ce qui permet de mesurer la valeur de la transition dynamique $T_c \simeq 0.435$. Pour $T \lesssim 0.45$, la théorie de couplage de modes n’est plus capable de décrire correctement le comportement du système [259, 260].

La dynamique moléculaire est la méthode de simulation la plus simple conceptuellement puisqu’il s’agit de résoudre les équations du mouvement de cet ensemble de particules [261]. La simulation consiste à mettre les particules dans un cube de volume L^3 , et à intégrer les équations de Newton. Les subtilités ne sont ici ‘que’ techniques (mémorisation de la position des particules voisines, calcul efficace de la force exercée sur chaque particule, etc.), et nous avons utilisé pour cela l’algorithme proposé, décrit et rendu public par Plimpton [262]. Le programme a ensuite été modifié pour prendre en compte un écoulement de type Couette, avec $\mathbf{v} = \gamma y \mathbf{e}_x$. Pour cela, les équations suivantes, connues sous le nom d’équations SLLOD [263], doivent être intégrées,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} &= \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} + \mathbf{q}_i \cdot \nabla \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} &= - \sum_{j \neq i} \frac{\partial V(\mathbf{r}_{ij})}{\partial \mathbf{r}_{ij}} - \mathbf{p}_i \cdot \nabla \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

où $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)$ sont respectivement l’impulsion et la position de la particule i . Ces équations du mouvement, implémentées avec les conditions aux limites de Lees Edwards, permettent d’établir l’écoulement de Couette voulu dans le système [261, 263]. Un thermostat est facilement simulé en multipliant, à chaque pas de temps, les vitesses des particules par un facteur permettant de garder constante l’énergie cinétique totale du système. La remarque fondamentale, comme dans le paragraphe précédent, est que ces équations ne dérivent pas d’un Hamiltonien, la dynamique est donc une nouvelle fois forcée.

Par rapport à nos calculs théoriques, c’est ici le taux de cisaillement γ qui est imposé, et non plus la contrainte de cisaillement σ . Pour étudier la rhéologie du système, nous mesurons pour un taux de cisaillement donné, la contrainte σ_{xy} définie microscopiquement par

$$\sigma_{xy} \equiv \frac{1}{L^3} \left(\sum_{i=1}^{N_A+N_B} -\frac{p_{ix}p_{iy}}{m_i} + \sum_{i=1}^{N_A+N_B} \sum_{j>i} r_{ijx} \frac{\partial V(\mathbf{r}_{ij})}{\partial r_{ijy}} \right). \quad (4.31)$$

On peut alors en déduire la viscosité par la relation $\eta = \sigma_{xy}/\gamma$.

Pour comparer le comportement du liquide à nos calculs théoriques, nous mesurons aussi une fonction de corrélation à 2 points et portons notre attention sur les corrélations

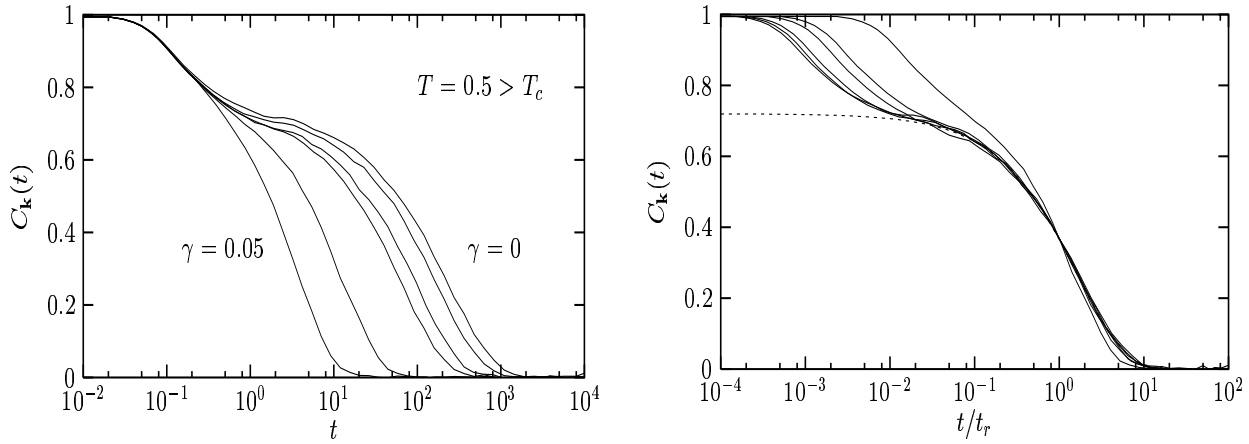


Fig. 4.6: À gauche, fonctions de corrélation (4.32) pour $T = 0.5 > T_c$ et des taux de cisaillement $\gamma = 0, 0.0001, 0.0005, 0.001, 0.01, 0.05$ (de droite à gauche). Sur la figure de droite, les mêmes courbes sont représentées en fonction de la variable d'échelle t/t_r , et la ligne pointillée représente un fit à la forme exponentielle étirée $q_{EA} \exp(-(t/t_r)^{0.77})$.

des fluctuations de densité de l'espèce majoritaire A , cf Eq. (4.4),

$$C_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{N_A} \sum_{j=1}^{N_A} \left\langle \exp \left(i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}_j(t + t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)] \right) \right\rangle, \quad (4.32)$$

où t_0 est un temps initial quelconque. Le système sous cisaillement étant stationnaire à toute température, les fonctions de corrélation à 2 temps ne dépendent que de la différence des 2 temps. Cette remarque a des conséquences pratiques tout à fait intéressantes, puisque nous pouvons ainsi étudier le liquide de Lennard-Jones sans trop nous soucier de la façon dont il a été préparé : l'histoire thermique n'intervient pas, ce qui est un fait remarquable pour qui a l'habitude de travailler avec des systèmes vitreux. La Fig. 4.5 montre l'allure de la partie réelle de la fonction $S_{AA}(q) \equiv C_{|q|}(t = 0)$ qui est utilisée pour décrire la structure du liquide (mais pas sa dynamique). On voit sur cette figure que la structure du liquide ne change que très peu à l'approche de la transition vitreuse : les propriétés dynamiques, elles, changent drastiquement. Par la suite, les courbes numériques seront pour un vecteur d'onde \mathbf{k} correspondant à la direction \mathbf{e}_z (i.e. dans la direction transverse à l'écoulement) et un module $|\mathbf{k}|$ correspondant au premier pic du facteur de structure de la Fig. 4.5.

Nous présentons maintenant les résultats obtenus numériquement, en suivant le même ordre de présentation que celui adopté pour le modèle théorique, et commençons donc par le comportement des fonctions de corrélation. La Fig. 4.6 présente l'allure de la partie réelle des fonctions de corrélation (4.32) pour la température $T = 0.5 > T_c$, où il est donc possible d'équilibrer le système en l'absence du cisaillement. Cette figure doit être comparée à la Fig. 4.1 de l'étude champ moyen. On distingue clairement la présence des relaxations α et β pour $\gamma = 0$. En présence d'un écoulement, $\gamma > 0$, seule la relaxation α est affectée, le temps de relaxation diminuant avec le cisaillement : le liquide surfondu est donc fluidifié par l'écoulement : c'est le phénomène de rhéofluidification. La relaxation se produit toujours sur une unique échelle de temps t_r , puisque la Fig. 4.6 montre aussi que

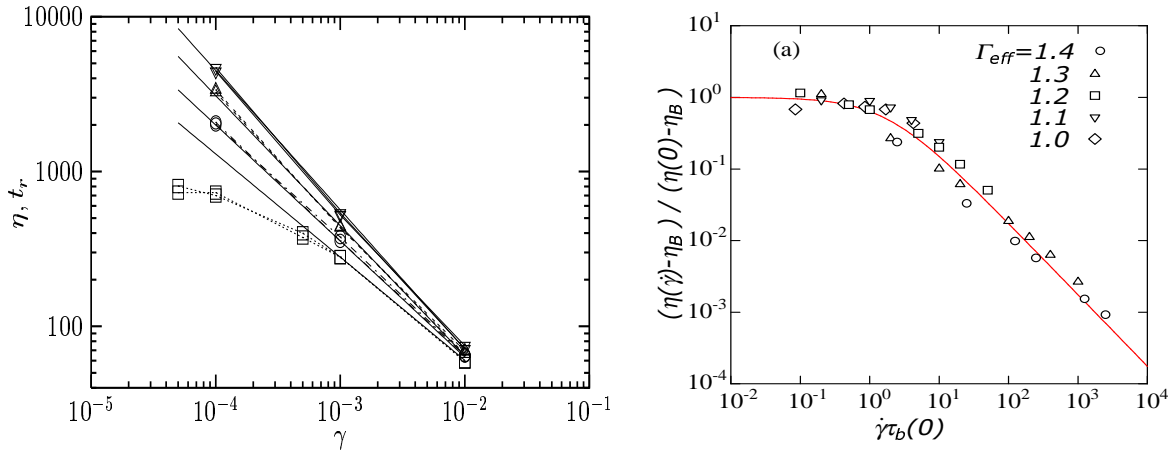


Fig. 4.7: À gauche: évolution de la viscosité η et du temps de relaxation t_r pour différentes températures $T = 0.5, 0.45, 0.4$, et 0.3 (de bas en haut). Pour chaque température, nous avons représenté η et t_r avec les mêmes symboles. Les lignes continues sont des lois de puissance $\eta, t_r \simeq \gamma^{-\alpha(T)}$ avec les exposants $0.66, 0.75, 0.84$ et 0.9 (de bas en haut). À droite, remise à l'échelle des données rhéologiques de Yamamoto et Onuki, cette figure est tirée de la Ref. [244].

la fonction $C_{\mathbf{k}}(t)$ est une fonction d'échelle de la variable t/t_r . Ici, t_r est traditionnellement défini par la relation $C_{\mathbf{k}}(t_r) \equiv e^{-1}$. Enfin, la relaxation lente est bien représentée par une forme exponentielle étirée

$$C_{\mathbf{k}}(t) \simeq \exp \left[- \left(\frac{t}{t_r(\gamma)} \right)^\alpha \right], \quad (4.33)$$

avec un exposant $0 < \alpha < 1$. Nous voyons que le 'principe de superposition Temps / Cisaillement', qui émerge du modèle théorique, est remarquablement bien vérifié dans la simulation numérique. Il n'est pas surprenant de retrouver la forme fonctionnelle (4.33), puisque c'est celle obtenue dans les simulations initiales d'équilibre de Kob et Andersen [260]. La différence est que leur paramètre de contrôle était la température, $t_r = t_r(T)$ pour $T \gtrsim T_c$.

Nous présentons sur la Fig. 4.7 les résultats que nous avons obtenus pour le comportement rhéologique du liquide de Lennard-Jones. Cette figure doit être comparée à la Fig. 4.2 de l'étude champ moyen. Pour diverses températures, nous montrons l'évolution de la viscosité η en fonction du taux de cisaillement imposé γ . Nous avons superposé sur ces courbes le temps de relaxation t_r . Il est donc clair que le temps de relaxation est directement proportionnel à la viscosité $t_r \simeq \eta$, ce qui valide le choix fait pour décrire cette quantité dans notre étude théorique.

Pour $T \gtrsim T_c$, la viscosité tend vers une valeur finie lorsque le taux de cisaillement tend vers 0, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \eta(\gamma) \equiv \eta_0$, puis lorsque γ augmente, la viscosité décroît comme une loi de puissance, $\eta \simeq \gamma^{-\alpha(T)}$. Pour $T \lesssim T_c$, $\eta_0 = \infty$ et seule la loi de puissance $\eta \simeq \gamma^{-\alpha(T)}$ est observée. Les données ne font pas clairement apparaître un crossover de l'exposant comme dans l'étude théorique précédente. Il faudrait sans doute ici essayer de baisser encore la température, le crossover se produisant, dans le modèle théorique, à un cisaillement d'autant plus élevé que la température est basse. Cependant, une différence qualitative

majeure déjà signalée entre le modèle et la simulation est l'absence pour cette dernière d'une température critique bien définie. On ne s'attend donc pas à un comportement 'critique' du liquide près de ' T_c '. Nous mesurons les exposants $\alpha(0.5) = 0.66$, $\alpha(0.45) = 0.75$, $\alpha(0.4) = 0.84$ et $\alpha(0.3) = 0.90$. Sur les échelles de temps et de températures explorées, les données ne donnent pas de signe de l'existence d'une contrainte seuil σ_0 , puisque $\sigma_0 = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \eta \gamma \simeq \lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{1-\alpha(T)} = 0$.

Nous n'avons pas étudié l'aspect rhéologique plus en détail, les travaux de Yamamoto et Onuki présentant des résultats très détaillés de ce point de vue [243, 244]. Nous mentionnons simplement ici le fait qu'ils trouvent dans la phase liquide surfondu, $T \gtrsim T_c$, une forme d'échelle pour la viscosité très similaire à l'Eq. (4.21) prédite par notre étude théorique. Nous présentons leurs résultats sur la Fig. 4.7, par souci d'exhaustivité.

4.2.2 Mesure de la température effective

Dans ce paragraphe, nous testons la prédiction résultant de notre étude théorique de l'existence d'une température effective dans le liquide sous cisaillement. L'étude des propriétés de fluctuation-dissipation du liquide de Lennard-Jones a été conduite dans le régime de vieillissement [77, 264], et nous reprenons la méthode employée pour considérer le cas où la dynamique est forcée. Comme dans le modèle champ moyen, nous voulons comparer les fonctions dynamiques à 2 points conjuguées que sont la corrélation et la réponse.

Ce test peut se faire sur un couple *quelconque* (prédiction majeure de la théorie champ moyen!) d'observables $A(t)$ et $B(t)$, la corrélation étant donnée par $C_{AB}(t) = \langle A(t+t_0)B(t) \rangle$ (t_0 est un temps quelconque, la dynamique étant stationnaire) tandis que la fonction de réponse s'écrit $R_{AB}(t) = \delta \langle A(t+t_0) \rangle / \delta h_B(t_0)$, où $h_B(t)$ est le champ thermodynamiquement conjugué à l'observable $B(t)$. En définissant le couple d'observables

$$A_{\mathbf{k}}(t) \equiv \frac{1}{N_A} \sum_{j=1}^{N_A} \varepsilon_j \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j), \quad B_{\mathbf{k}}(t) \equiv \frac{1}{N_A} \sum_{j=1}^{N_A} \varepsilon_j \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j), \quad (4.34)$$

avec une variable aléatoire bimodale $\varepsilon_j = \pm 1$, la fonction de corrélation (4.32) étudiée dans le paragraphe précédent peut se réécrire

$$C_{\mathbf{k}}(t) = 2 \overline{\langle A_{\mathbf{k}}(t+t_0) B_{\mathbf{k}}(t_0) \rangle}, \quad (4.35)$$

où la barre horizontale désigne une moyenne sur les réalisations de la distribution des variables aléatoires $\{\varepsilon_j\}$. Pour calculer la fonction de réponse, nous devons ajouter une force

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{k}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left(- h_B B_{\mathbf{k}}(t) \right) \quad (4.36)$$

sur chaque particule A . La susceptibilité s'écrit alors

$$\chi_{\mathbf{k}}(t) \equiv 2 \int_0^t dt' \left. \frac{\delta \langle A_{\mathbf{k}}(t'+t_0) \rangle}{\delta h_B} \right|_{h_B=0} \simeq 2 \frac{\langle A_{\mathbf{k}}(t) \rangle}{h_B}, \quad (4.37)$$

où la dernière égalité ne vaut que dans le régime de réponse linéaire, $h_B \rightarrow 0$. La relation de fluctuation-dissipation que nous voulons tester s'écrit alors

$$\chi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{T} \left(C_{\mathbf{k}}(0) - C_{\mathbf{k}}(t) \right). \quad (4.38)$$

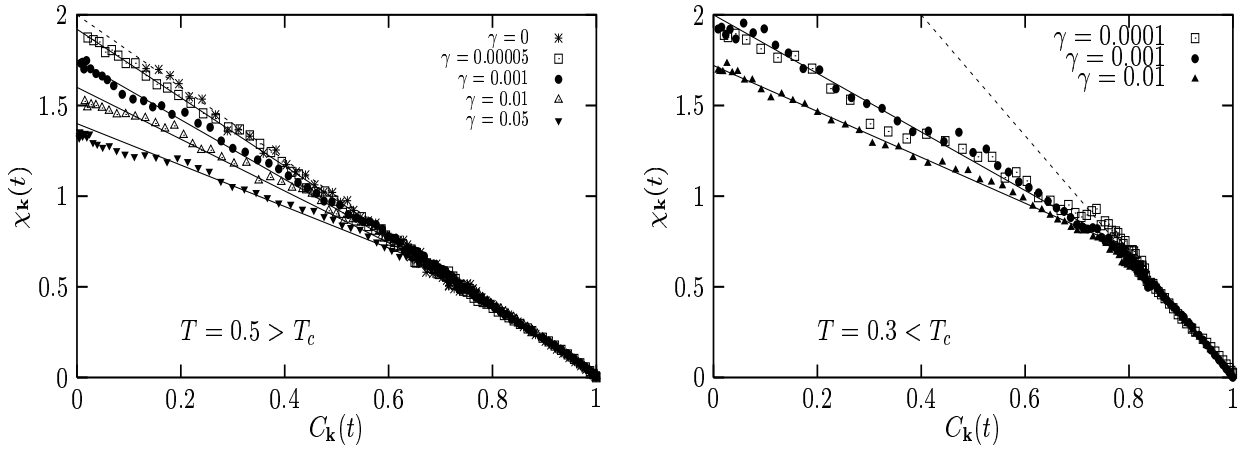


Fig. 4.8: Courbes $\chi_{\mathbf{k}}(t)$ vs $C_{\mathbf{k}}(t)$ paramétrées par le temps t , pour les températures $T = 0.5$ (à gauche) et $T = 0.3$ (à droite), et différents taux de cisaillement γ indiqués sur les figures. Les lignes pointillées représentent dans chaque cas la relation d'équilibre (4.38), tandis que les lignes continues sont des fits linéaires aux données numériques.

Les résultats numériques sont présentés sur la Fig. 4.8, pour 2 températures, au-dessus et au-dessous de T_c . Cette figure doit être comparée à la Fig. 4.3 de l'étude champ moyen. Pour $T = 0.5$ et $\gamma = 0$, le système est à l'équilibre, le FDT (4.38) étant très bien satisfait par les données numériques. Lorsque $\gamma > 0$, la dynamique est forcée, le bilan détaillé n'est plus vérifiée, Eqs. (4.30), et les données ne suivent plus la relation d'équilibre, comme il se doit. Comme dans notre étude champ moyen, il émerge le fait remarquable que la relaxation lente correspondant à $C < q_{EA}$ peut toujours être décrite par une relation linéaire, avec une pente $-1/T_{\text{eff}}(\gamma, T)$, où $T_{\text{eff}}(\gamma, T) > T$. La relaxation rapide, $C > q_{EA}$, suit quant à elle toujours le FDT (4.38) montrant que le cisaillement affecte principalement les degrés de liberté lents du système.

Pour $T = 0.3$ de même, les données sont clairement linéaires dans les 2 parties $C > q_{EA}$, avec la pente $-1/T$, et $C < q_{EA}$, avec une pente $-1/T_{\text{eff}}(\gamma, T)$. Comme dans l'étude champ moyen, la valeur de $T_{\text{eff}}(\gamma, T)$ semble converger vers une valeur asymptotique $T_{\text{eff}}(T) \equiv \lim_{\gamma \rightarrow 0} T_{\text{eff}}(\gamma, T)$, avec la propriété que $T_{\text{eff}}(T) > T$: même faiblement sollicité, le verre ne tend pas vers l'équilibre et sa température effective reste différente de celle du bain thermique.

Une autre des prédictions de l'étude champ moyen est que cette température asymptotique $T_{\text{eff}}(T)$ est identique à celle atteinte dans la limite $\lim_{t_w \rightarrow \infty} T_{\text{eff}}(t_w, T)$, lorsque le système vieillit. La Fig. 1.6 de l'introduction présente les données pour $T = 0.3$ obtenues dans le régime de vieillissement [77]. Une comparaison quantitative des 2 familles de courbes montre qu'elles coïncident, aux incertitudes numériques près. On obtient numériquement $T_{\text{eff}}(T = 0.3) \simeq 0.62$. Nous n'excluons pas, bien évidemment, que cette température soit en fait une fonction extrêmement lente du taux de cisaillement (ou du temps d'attente t_w dans les simulations [77, 264]). Il en est d'ailleurs probablement ainsi, puisque nous obtenons des résultats similaires pour la température $T = 0.4$, qui se situe bien au-dessus de toutes les estimations raisonnables pour la valeur de la (toujours hypothétique) température de transition thermodynamique pour ce système, $T_k \simeq 0.3$ [97, 109].

Cette dernière remarque démontre en fait que nos résultats, théoriques et numériques, sont des résultats purement dynamiques résultant simplement de l'existence de 2 échelles de temps très séparées, chacune étant affectée différemment par le cisaillement. Les données obtenues le sont sur des échelles de temps extrêmement courtes par rapport aux échelles de temps expérimentales pour l'étude des liquides surfondus. Traduites en unités appropriées pour les systèmes colloïdaux, les échelles de temps que nous avons explorées sont moins déraisonnables. Nous espérons nos résultats néanmoins suffisamment convaincants pour qu'ils puissent motiver des tests expérimentaux. Une nouvelle fois, les matériaux vitreux mous sont les systèmes idéaux pour un test et une application de ces travaux.

5. ÉCHELLES DE TEMPS ET TEMPÉRATURES EFFECTIVES DANS LES VERRES DE SPIN

*Et c'est dans le désordre qu'ils sèment en nous
que nous nous donnons pourtant la réplique.*

A. FERNEY, *La conversation amoureuse.*

Nous poursuivons dans ce chapitre notre étude de la dynamique forcée des systèmes vitreux en portant notre attention sur les verres de spin. Disons tout de suite que cette étude n'est pas directement pertinente pour les expériences, dans la mesure où nous ne connaissons pas de moyen expérimental simple pour 'cisailer' un verre de spin. La question de leur dynamique en présence d'une perturbation non-Hamiltonienne n'est donc pas directement motivée par des considérations expérimentales, mais cette fois-ci plutôt théoriques.

On peut toutefois injecter de l'énergie dans ces systèmes par l'action d'un champ magnétique dépendant du temps: c'est ce type de perturbation que nous considérons dans le chapitre suivant. De plus, nous avons déjà mentionné que l'origine de ces études remonte au milieu des années 80, lorsque la communauté des verres de spin a "essayé de résoudre le problème du cerveau avec les verres de spin, faute d'avoir pu...". Ces études ont maintenant dérivé du côté des marchés financiers, puisque des modèles de type 'verres de spin' émergent lorsque l'on veut, par exemple, modéliser le comportement d'une assemblée de traders, interagissant tous entre eux d'une façon plus ou moins aléatoire. Les équations dynamiques obtenues peuvent être très similaires à celles que nous allons étudier ci-dessous. Nous ne nous sommes pas posé la question de la définition d'une température effective pour les marchés financiers...

Nos motivations réelles ici sont plutôt de pouvoir revisiter la dynamique hors équilibre (basse température) des verres de spin dans le cas plus simple où celle-ci est stationnaire. Comme dans le paragraphe précédent, en effet, le forçage résulte en un arrêt du processus de vieillissement. À basse température, on étudie alors un état stationnaire dynamique où les conditions initiales ne sont plus pertinentes, la dynamique n'étant contrôlée que par un seul paramètre, l'intensité ε du forçage. Une nouvelle fois, on peut comprendre la dynamique obtenue en comparant les rôles de ε et du temps d'attente t_w dans le régime de vieillissement, avec une relation du type $\varepsilon \sim t_w^{-1}$.

Nous reformulons donc tout d'abord les résultats obtenus par la théorie champ moyen du vieillissement dans le contexte de la dynamique forcée qui nous occupe ici. La propriété d'ultramétrie dynamique, en particulier, prend un sens très simple en termes de la forme de la relaxation de la fonction de corrélation. Nous analysons de plus le comportement préasymptotique de cette dynamique, pour mieux comprendre comment elle apparaît progressivement lorsque le forçage diminue. Enfin, nous comparons ces résultats champ moyen à ceux obtenus à 3 dimensions, en réalisant une étude numérique de la dynamique forcée du modèle d'Edwards-Anderson.

5.1 Théorie champ moyen : Ultramétrie dynamique

5.1.1 Dynamique forcée des verres de spin

Dans ce premier paragraphe, nous nous concentrons sur la dynamique d'un modèle champ moyen de verre de spin forcée par des couplages asymétriques. Cette étude est donc techniquement similaire à celle que nous avons faite du modèle p -spin dans le chapitre précédent. Même si notre objectif est quelque peu différent, mentionnons tout de même qu'après les premières approches déjà citées [237, 238], deux simulations numériques plus récentes se sont intéressées à cette situation, l'une dans le cadre du modèle champ moyen de Sherrington-Kirkpatrick [265], l'autre concernant le modèle d'Edwards-Anderson à 4 dimensions [266]. Dans ces deux cas, la dynamique est encore forcée par des couplages asymétriques. Ces deux études se concentrent sur l'interruption du vieillissement plutôt que sur le régime stationnaire qui nous intéresse.

Les théoriciens ne manquant pas de ressources, d'autres moyens ont été imaginés pour forcer la dynamique d'un verre de spin. On peut par exemple considérer un modèle où les constantes de couplage aléatoires qui interviennent dans l'Hamiltonien ne sont plus gelées, mais ont une dynamique lente qui leur est propre [267, 268]. On comprend bien que la situation puisse devenir stationnaire, puisque le système se dirige lentement vers un état d'équilibre qui dépend lui-même du temps. Une autre possibilité serait encore de coupler le verre de spin à un bain thermique qui ne serait plus delta-corrélé en temps (un bain thermique 'lent'). La Ref. [269] montre explicitement que le vieillissement peut aussi être stoppé dans cette situation.

Le point commun à tous ces forçages est qu'ils introduisent une nouvelle constante de temps dans le problème, un peu comme le ferait un taux de cisaillement γ qui introduit une échelle de temps γ^{-1} . Le système acquiert un temps de relaxation t_r qui dépend de cette nouvelle constante de temps, $t_r = t_r(\gamma^{-1})$. Pour des couplages asymétriques, la constante de temps du forçage extérieur n'est pas immédiatement visible. En fait, les équations dynamiques que l'on obtient, par exemple les Eqs. (4.19), montrent que l'effet de ces couplages est similaire à celui d'un bain thermique lent $\zeta_s(t)$, dont le second moment serait donné par $\langle \zeta_s(t)\zeta_s(t') \rangle \propto C(t-t')^{k-1}$. Les couplages asymétriques peuvent donc être vus comme un bain thermique dont la constante de temps serait déterminée de façon autocohérente par la dynamique du système.

Nous spécifions maintenant le modèle étudié, qui décrit la dynamique de N variables de spin réelles s_i ($i = 1, \dots, N$) évoluant par l'équation de Langevin

$$\frac{\partial s_i(t)}{\partial t} = -\mu(t)s_i(t) - \frac{\delta H_J[\mathbf{s}]}{\delta s_i(t)} + \varepsilon f_i^{\text{drive}} + \zeta_i(t). \quad (5.1)$$

Dans cette équation, $\zeta_i(t)$ est le bruit thermique, variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance $\langle \zeta_i(t)\zeta_j(t') \rangle = 2T\delta_{ij}\delta(t-t')$. Le paramètre $\mu(t)$ assure la contrainte sphérique $\sum_i s_i^2(t) = N$. L'Hamiltonien est donné par

$$H_J[\mathbf{s}] = \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{j_1 < \dots < j_p} J_{j_1 \dots j_p} s_{j_1} \dots s_{j_p}, \quad (5.2)$$

qui constitue donc une généralisation du modèle p -spin sphérique. La force non conservative f_i^{drive} est toujours définie par l'Eq. (4.13), les propriétés de symétrie et l'intensité

des couplages \tilde{J} sont elles aussi inchangées. Les constantes de couplage J sont à nouveau complètement symétriques, mais avec une variance $p!J_p/(2N^{p-1})$. En définissant la fonction $g(C)$ par

$$g(C) \equiv \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{\infty} J_p^2 C^p, \quad (5.3)$$

on obtient les équations dynamiques satisfaites par les fonctions $C(t)$ et $R(t)$ (toujours définies par les Eqs. (4.15)),

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)}{dt} &= -\mu C(t) + \int_0^t dt' \Sigma(t-t') C(t') + \int_0^\infty dt' [\Sigma(t+t') C(t') + D(t+t') R(t')], \\ \frac{dR(t)}{dt} &= -\mu R(t) + \int_0^t dt' \Sigma(t-t') R(t'), \quad \mu = T + \int_0^\infty dt' [D(t') R(t') + \Sigma(t') C(t')], \\ D(t) &\equiv g'(C(t)) + \varepsilon^2 \frac{k}{2} C(t)^{k-1}, \quad \Sigma(t) \equiv g''(C(t)) R(t), \end{aligned} \quad (5.4)$$

associées aux conditions $C(0) = 1$, $R(0^+) = 1$, $R(t < 0) = 0$ (causalité). Comme précédemment, ces équations représentent l'évolution d'un système préparé dans un état complètement désordonné à l'instant initial $t_i = -\infty$, moment où le forçage est appliqué.

Le modèle que nous étudions, Eq. (5.2), a été introduit dans la Ref. [270], son intérêt provenant du fait que sa statique est exactement soluble. Le cas qui nous intéresse dans ce paragraphe est lorsque des couplages quadratiques, quartiques et/ou d'ordre supérieur sont présents. Dans ce cas, le modèle se trouve dans la classe d'universalité du modèle de Sherrington-Kirkpatrick [270]. Il subit donc une transition de phase du second ordre entre une phase paramagnétique et une phase verre de spin, caractérisée par une brisure continue de la symétrie des répliques. Ceci se traduit dans les propriétés de la distribution de probabilité des recouvrements, la fonction de Parisi $P(q)$, qui peut être calculée exactement [270]. Elle est reliée à la fonction $g(C)$ par la relation

$$x(C < q_{EA}) \equiv \int_0^C dq' P(q') = T \frac{g'''(C)}{2[g''(C)]^{3/2}}; \quad x(C > q_{EA}) = 1, \quad (5.5)$$

Rappelons ici qu'avec des couplages quadratiques seuls, $g(C) \propto C^2$, la symétrie des répliques n'est pas brisée à basse température, tandis que pour $g(C) \propto C^3$, la symétrie des répliques est brisée à 1 pas ('one step'). La relation (5.5) n'est valable que si J_2 est assez grand pour que soit satisfaite la condition $x'(C) = P(C) > 0$. La 'dynamique d'équilibre' de ce modèle a été récemment étudiée [271], les différentes combinaisons des couplages dans la fonction $g(C)$ conduisant à des transitions dynamiques qualitativement différentes, le même modèle contenant essentiellement toutes les familles de transitions dynamiques identifiées par la théorie de couplage de modes.

5.1.2 Relation ultramétrique et violations du FDT

Nous analysons ici les équations dynamiques (5.4) dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Ceci va nous permettre de justifier le terme d'ultramétrie dynamique' [69]. La solution asymptotique de ces équations suit d'assez près celle obtenue pour le régime de vieillissement du

modèle de Sherrington-Kirkpatrick [69], pour lequel les équations étudiées ne sont qu'approximatives (seuls les termes quartiques et quadratiques dans un développement valable près de T_c sont retenus, ce qui explique la similitude des 2 modèles). Ici, les équations (5.4) sont exactes pour le modèle (5.2) étudié.

Pour résoudre ces équations, le premier pas consiste à effectuer la décomposition entre parties 'lentes' ('s') et 'rapides' ('f') dans les fonctions dynamiques, $C(t) = C_s(t) + C_f(t)$, et $R(t) = R_s(t) + R_f(t)$. On en déduit ensuite les équations dynamiques vérifiées par chaque couple de fonctions. Les équations pour C_f et R_f sont résolues en écrivant que ces fonctions satisfont au FDT, $TR_f(t) = -d_t C_f(t)$. En prenant la limite $t \rightarrow \infty$ on obtient la relation

$$\mu + \frac{g'(q_{EA}) - g'(1)}{T} = \frac{T}{1 - q_{EA}}, \quad (5.6)$$

où $q_{EA} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(t)$ est le paramètre d'Edwards-Anderson. Les parties lentes vérifient alors les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dC_s(t)}{dt} &= -\mu C_s(t) + \int_0^t dt' \Sigma_s(t-t') C_s(t') + \int_0^\infty dt' [\Sigma_s(t+t') C_s(t') + D_s(t+t') R_s(t')] \\ &\quad + \frac{g'(1) - g'(q_{EA})}{T} C_s(t) + \frac{1 - q_{EA}}{T} D_s(t), \\ \frac{dR_s(t)}{dt} &= -\mu R_s(t) + \int_0^t dt' \Sigma_s(t-t') R_s(t') + \frac{g'(1) - g'(q_{EA})}{T} R_s(t) + \frac{1 - q_{EA}}{T} \Sigma_s(t), \\ \mu &= T + \int_0^\infty dt' [D_s(t') R_s(t') + \Sigma_s(t') C_s(t')] + \frac{g'(1) - q_{EA} g'(q_{EA})}{T}, \\ D_s(t) &\equiv g'(C_s(t)), \quad \Sigma_s(t) \equiv g''(C_s(t)) R_s(t). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Le second pas du calcul utilise l'observation, essentielle pour ce qui suit, que lorsque les dérivées premières sont négligées (ce qui est justifié dans le régime lent), les équations (5.7) deviennent invariantes par la reparamétrisation du temps selon la transformation $t \rightarrow h(t)$, où $h(t)$ est une fonction croissante continue quelconque. Ceci suggère que les fonctions C_s et R_s sont reliées par une relation elle aussi indépendante de cette reparamétrisation,

$$R_s(t) = -\frac{1}{T_{\text{eff}}(C_s(t))} \frac{dC_s(t)}{dt}. \quad (5.8)$$

De même, on introduit une fonction f selon

$$C_s(t_1 + t_2) \equiv f(C_s(t_1), C_s(t_2)), \quad (5.9)$$

dans le but de faire finalement disparaître le temps des équations dynamiques. Notons ici que cette propriété d'invariance par reparamétrisation du temps a récemment été utilisée pour implémenter une procédure de renormalisation des équations dynamiques [272]. Dans ce langage, la forme (5.8) implique une relation simple entre les 'dimensions' des fonctions C_s et R_s , et la solution des équations (5.7) est facilement obtenue [272]. Insistons enfin sur le fait que l'hypothèse principale de notre analyse asymptotique est que les fonctions $T_{\text{eff}}(C_s, \varepsilon)$ et $f(C_1, C_2, \varepsilon)$ ont une limite continue dans la limite asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$ où toutes les relations ci-dessus sont obtenues. Nous définissons enfin la fonction \bar{f} par

$C_s(t_1) \equiv \bar{f}(C_s(t_2), C_s(t_1 + t_2))$. Le système d'équations (5.7) peut alors se réécrire sous la forme voulue, sans que le temps n'intervienne. En utilisant l'Eq. (5.6), on obtient

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{T}{1-q_{EA}}C_s + \frac{1-q_{EA}}{T}g'(C_s) + \int_{C_s}^{q_{EA}} dC'_s g''(C'_s) \frac{1}{T_{\text{eff}}(C'_s)} \bar{f}(C'_s, C_s) \\
 &\quad + \int_0^{C_s} dC'_s \frac{1}{T_{\text{eff}}(C'_s)} g''(C'_s) \bar{f}(C_s, C'_s) - \int_0^{C_s} dC'_s g''(C'_s) F[\bar{f}(C_s, C'_s)], \\
 0 &= -\frac{T}{1-q_{EA}}F[C_s] + \frac{1-q_{EA}}{T}H[C_s] + \int_{C_s}^{q_{EA}} dC'_s g''(C'_s) \frac{1}{T_{\text{eff}}(C'_s)} F[\bar{f}(C'_s, C_s)], \\
 F[C_s] &\equiv -\int_{C_s}^{q_{EA}} dC'_s \frac{1}{T_{\text{eff}}(C'_s)}, \quad H[C_s] \equiv -\int_{C_s}^{q_{EA}} dC'_s \frac{1}{T_{\text{eff}}(C'_s)} g''(C'_s).
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

La dernière étape consiste à calculer explicitement les fonctions $T_{\text{eff}}(C)$ et $f(C_1, C_2)$ à partir des équations dynamiques (5.10). Ceci peut se faire en introduisant les ‘points fixes’ q^* de la fonction f définis par la relation $f(q^*, q^*) \equiv q^*$. Pour l'état stationnaire que nous étudions, l'interprétation physique de ces points fixes est très clair, puisqu'en utilisant la définition de f , on obtient

$$q^* = C_s(t) \quad \Rightarrow \quad C_s(2t) = f(C_s(t), C_s(t)) = C_s(t), \tag{5.11}$$

ce qui signifie simplement qu'à la valeur $C_s = q^*$ se trouve un plateau de la fonction de corrélation C_s ; $q^* = 0$ et $q^* = 1$ sont 2 exemples simples de points fixes. Il ne reste plus qu'un peu d'algèbre pour arriver à la solution, la partie difficile de cette analyse étant bien sûr d'utiliser astucieusement l'invariance par reparamétrisation [69]. On obtient d'abord la température effective pour $C \in [0, q_{EA}]$,

$$\frac{1}{T_{\text{eff}}(C)} = \frac{g'''(C)}{2[g''(C)]^{3/2}}, \tag{5.12}$$

tandis que l'utilisation de l'Eq. (5.6) détermine q_{EA} par la relation $T = (1-q_{EA})\sqrt{g''(q_{EA})}$. Nous retrouvons la propriété remarquable, d'abord (et uniquement...) remarquée dans le modèle de Sherrington Kirkpatrick [69], que la fonction $T_{\text{eff}}(C)$ satisfait à la relation (1.14), $x(C) = T/T_{\text{eff}}(C)$, où $x(C)$ est la quantité d'équilibre définie dans l'Eq. (5.5).

On peut enfin calculer la fonction f . On montre tout d'abord que $\forall C \in [0, q_{EA}]$, $f(C, C) = C$. Il existe donc un continuum de points fixes, ce qui signifie en termes imagés qu'à chaque valeur de la corrélation $C < q_{EA}$ se trouve un plateau. On calcule enfin que

$$\forall (C_1, C_2) \in [0, 1]^2 \setminus [q_{EA}, 1]^2 \quad f(C_1, C_2) = \min\{C_1, C_2\}. \tag{5.13}$$

C'est cette dernière équation qui est appelée ‘relation ultramétrique’, donnant logiquement naissance à la propriété d’‘ultramétrie dynamique’. La relation avec l'organisation hiérarchique entre états purs décrite dans l'introduction par l'Eq. (1.12) est formelle. Statiquement en effet, on a une relation liant les recouvrements statiques (ou de manière équivalente les distances) entre états purs

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \quad q_{\alpha\beta} \geq \min\{q_{\alpha\gamma}, q_{\gamma\beta}\}, \tag{5.14}$$

tandis que nous avons ici une relation dynamique liant les fonctions de corrélation à 2 temps, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\forall(t_\alpha, t_\beta, t_\gamma) \text{ avec } t_\alpha > t_\beta > t_\gamma \gg 1, \quad C_s(t_\alpha, t_\beta) = \min\{C_s(t_\alpha, t_\gamma), C_s(t_\gamma, t_\beta)\}. \quad (5.15)$$

Les deux faits essentiels qui ressortent de cette analyse asymptotique sont contenus dans les relations (5.12) et (5.13). L'état stationnaire hors équilibre est donc caractérisé par des violations du FDT quantifiées par une fonction $T_{\text{eff}}(C)$ qui est non constante sur l'intervalle $0 < C < q_{EA}$: on a donc une relaxation avec des 'températures effectives multiples' [273]. Ensuite, la fonction de corrélation suit la relation ultramétrique (5.13). Nous allons montrer au paragraphe suivant que ceci est équivalent à l'existence d'une hiérarchie d'échelles de temps. Ce comportement est donc la généralisation à une infinité d'échelles de temps de ce que nous avons trouvé dans le modèle p -spin. La relaxation lente est décomposée en une hiérarchie d'échelles de temps, chacune d'elle étant associée à une température effective différente.

Ce comportement asymptotique est la contrepartie directe de la solution de Parisi statique de ces modèles. Il n'est pas inintéressant de noter qu'en supposant ces résultats dynamiques, on peut démontrer, par des arguments assez généraux [274] et dans un esprit similaire aux premiers travaux dynamiques de Sompolinsky [275], que la statique est caractérisée par une brisure continue de la symétrie des répliques.

Remarquons enfin que le même formalisme (conduisant à l'élimination des temps dans les équations dynamiques lentes) peut être utilisé pour résoudre les équations dynamiques dans le cas du modèle p -spin. Les équations (5.10) sont obtenues de la même manière, mais elles impliquent cette fois l'existence de seulement 3 points fixes, $q^* = 0$, q_{EA} , et 1, et il n'y a donc qu'un seul plateau dans la fonction de corrélation. La température effective est constante sur chaque intervalle, $[0, q_{EA}]$ et $[q_{EA}, 1]$. Elle vaut respectivement T_{eff} et T , T_{eff} et q_{EA} étant évidemment toujours solutions des mêmes équations (4.26).

5.1.3 À quoi ressemble l'ultramétrie?

L'analyse précédente a montré comment la relation ultramétrique apparaît dans la dynamique des verres de spin. Cependant, cette relation ne nous renseigne pas sur la divergence des échelles de temps avec le paramètre de contrôle ε (ou t_w pour le vieillissement); c'est d'ailleurs une des lacunes de la théorie dynamique champ moyen. De plus, on s'aperçoit immédiatement que la relation ultramétrique (5.13) implique que $\forall C < q_{EA}, C = \text{const}$, ce qui nous (re)dit que chaque valeur de C est asymptotiquement un plateau, mais n'est pas très utile pour la description 'pratique' du comportement de la fonction de corrélation.

On peut toutefois facilement comprendre que cette relation implique l'existence d'une hiérarchie d'échelles de temps, qui n'existe pas dans la solution du modèle p -spin. Pour ce dernier, en effet, nous avons obtenu une forme d'échelle du type 'principe de superposition Temps / Forçage',

$$C_s(t) \simeq \mathcal{C}\left(\frac{t}{t_r(\varepsilon)}\right), \quad (5.16)$$

où la fonction d'échelle \mathcal{C} est donnée par une exponentielle simple, $\mathcal{C}(x) \simeq e^{-x}$, tandis que le temps de relaxation diverge avec une loi de puissance, $t_r(\varepsilon) \simeq \varepsilon^{-\alpha(T)}$. En inversant la

relation $C_s(t)$ pour obtenir $t_s(C)$, on voit alors que

$$\forall (C_1, C_2) < q_{EA} \quad \frac{t_s(C_1)}{t_s(C_2)} \simeq \frac{\mathcal{D}(C_1)}{\mathcal{D}(C_2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \text{const}, \quad (5.17)$$

en définissant la fonction inverse de \mathcal{C} par $\mathcal{D}(x) \equiv \mathcal{C}^{-1}(x)$. Dans le cas où $\mathcal{C}(x)$ est une exponentielle, on obtient la fonction $f(C_1, C_2)$ pour $(C_1, C_2) \in [0, q_{EA}]^2$,

$$f(C_1, C_2) \simeq C_1 \times C_2 \neq \min\{C_1, C_2\}. \quad (5.18)$$

La relation ultramétrique n'est donc pas obtenue lorsque la relaxation lente ne comporte qu'une seule échelle de temps, Eq. (5.16). Par contre, lorsque celle-ci *comporte une hiérarchie d'échelles de temps*, au sens où

$$\forall (C_1, C_2) \quad \text{avec} \quad C_1 < C_2 < q_{EA}, \quad \frac{t_s(C_1)}{t_s(C_2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty, \quad (5.19)$$

on obtient $f(C_1, C_2) = C(t_s(C_1) + t_s(C_2)) \simeq C(t_s(C_1)) = \min\{C_1, C_2\}$, i.e. la relation ultramétrique. Cette hiérarchie d'échelles de temps peut être obtenue très simplement, par exemple lorsque

$$t_s(C) \simeq t_r(\varepsilon)^{\mathcal{D}(C)} \quad \Leftrightarrow \quad C_s(t) \simeq \mathcal{C} \left(\frac{\ln t}{\ln t_r(\varepsilon)} \right), \quad (5.20)$$

où $\mathcal{D}(C)$ est une fonction décroissante de la corrélation. Dans ce contexte, on voit que la traduction concrète de la présence de l'ultramétrie est qu'une forme d'échelle pour la corrélation n'est pas obtenue en utilisant la variable $t/t_r(\varepsilon)$, mais en utilisant plutôt la variable $\ln t / \ln t_r(\varepsilon)$. Ainsi présentée, l'ultramétrie est une notion qui perd beaucoup de son mystère, puisqu'elle résulte en un 'principe de superposition $\log(\text{Temps}) / \log(\text{Forçage})$ '.

Ces remarques simples sur le comportement asymptotique des échelles de temps ne s'appliquent pas au régime de vieillissement. Dans ce dernier cas en effet, la relation ultramétrique est toujours satisfaite, mais elle n'est plus équivalente à la relation (5.19) sur la divergence relative des temps de relaxation. Par exemple, dans le cas où $C(\tau + t_w, t_w) \simeq \ln t_w / \ln(\tau + t_w)$, on a simultanément (avec $C_1 < C_2$)

$$C(t_3, t_1) = C(t_3, t_2) \times C(t_2, t_1), \quad \text{et} \quad \frac{\tau(C_1)}{\tau(C_2)} = t_w^{1/C_1 - 1/C_2} \xrightarrow{t_w \rightarrow \infty} \infty, \quad (5.21)$$

i.e. il y a divergence des rapports entre 2 temps de relaxation, mais la relation ultramétrique n'est pas satisfaite. Il n'existe en fait aucune prédiction concrète de la forme fonctionnelle de la corrélation $C(\tau + t_w, t_w)$ dans la théorie champ moyen des verres de spin [22], qui prédit simplement que la relation générale $C(\tau + t_w, t_w) = \mathcal{C}[h(\tau + t_w)/h(t_w)]$, qui décrit pourtant toutes les données numériques et expérimentales, *ne s'applique pas aux verres de spin* de type Sherrington-Kirkpatrick. Les études numériques du vieillissement dans des modèles champ moyen de verres de spin ont montré que la forme t/t_w ne s'applique pas [276, 277, 278], comme il se doit, mais n'ont pas pu dégager une forme précise pour la relaxation. La Ref. [277] a proposé la variable d'échelle $\ln t / \ln t_w$ en la qualifiant à tort de compatible avec la relation ultramétrique: ce ne peut donc être qu'une approximation.

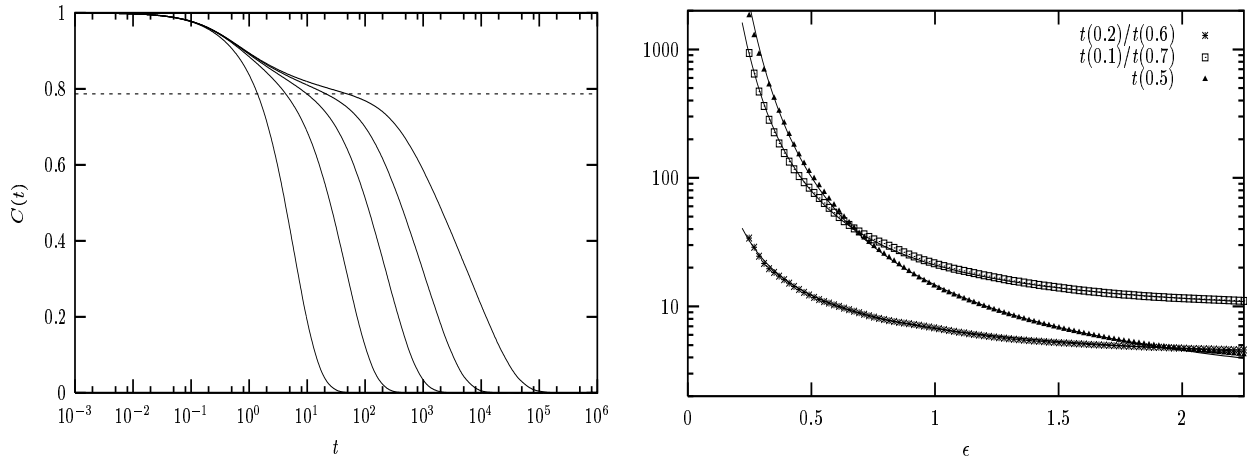


Fig. 5.1: À gauche : fonctions de corrélation pour $\epsilon = 2.25, 0.8, 0.5, 0.35$ et 0.248 (de gauche à droite). La ligne horizontale pointillée est le paramètre d'Edwards-Anderson $q_{EA} \simeq 0.787$. À droite : divergence des temps de relaxation et des rapports des temps de relaxation à faible forçage. Les données provenant de la solution numérique des équations dynamiques sont représentées par des points, les lignes continues étant des fits utilisant les Eqs. (5.22)-(5.23).

Nous présentons maintenant les résultats obtenus en résolvant numériquement, pour une amplitude du forçage ϵ finie, les équations dynamiques (5.4) dans le cas où seules les constantes de couplage J_2 et J_6 sont non nulles. Dans ce cas, $T_c = J_2$, et la condition $x'(C) > 0$ implique la relation $J_6^2 \leq J_2^2/15$. Les résultats numériques que nous présentons sont pour les paramètres $T/T_c = 0.25$, $k = 2$ et $J_6/J_2 = 1/\sqrt{15}$. On a alors $q_{EA} \simeq 0.787$. Nous utilisons pour cela la même méthode numérique qu'au chapitre précédent, les équations dynamiques conservant la même structure.

La Fig. 5.1 présente les fonctions de corrélation pour différentes valeurs de ϵ . Le résultat de base, déjà rencontré à plusieurs reprises, est que lorsque ϵ diminue, la relaxation de $C(t)$ se déroule clairement en 2 temps : une première relaxation rapide, $C > q_{EA}$, peu affectée par le forçage, suivie pour $C < q_{EA}$ d'une relaxation qui est d'autant plus lente que l'amplitude du forçage est faible. Cet effet est attendu puisqu'il est aussi présent dans un modèle sans ultramétrie dynamique, comme le modèle p -spin.

Nous nous concentrons maintenant sur les aspects spécifiquement liés à la présence de l'ultramétrie dans la relaxation. D'après la discussion précédente, on s'attend à voir émerger une hiérarchie d'échelles de temps. Nous testons d'abord la séparation des échelles de temps, Eq. (5.19), en présentant l'évolution des rapports $t(0.2)/t(0.6)$ et $t(0.1)/t(0.7)$ en fonction de l'amplitude du forçage ϵ . Ces 2 rapports divergent très nettement dans la limite de faible forçage indiquant que la relaxation est composée d'une superposition d'échelles de temps se séparant les unes des autres dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$. L'analyse asymptotique de la section précédente ne nous permet pas de prédire la forme précise de la divergence de ces échelles de temps. La solution numérique indique que celle-ci est plus rapide qu'une loi de puissance. Nous trouvons en effet que la loi

$$t_s(C) \simeq t_r(\epsilon)^{\mathcal{D}(C)}, \quad t_r(\epsilon) \simeq \exp\left(\frac{1}{\epsilon^\mu}\right), \quad \mu \simeq 0.65, \quad (5.22)$$

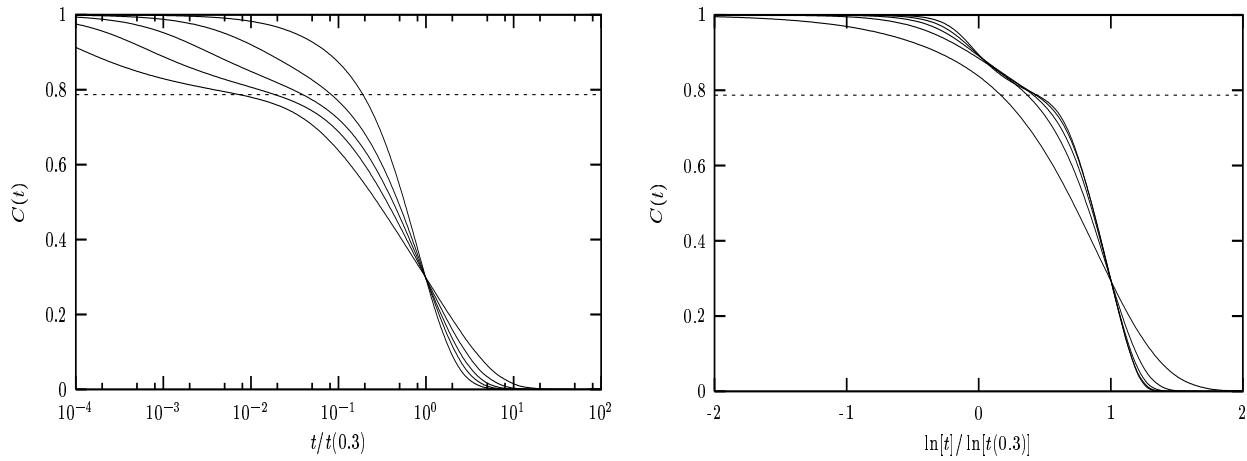


Fig. 5.2: À gauche : fonctions de corrélation en fonction de la variable $t/t(0.3)$. À droite : fonctions de corrélation en fonction de la variable $\ln t/\ln t(0.3)$.

décrit très bien les résultats obtenus. Cette forme est similaire à l'Eq. (5.20), et conduit donc naturellement à la relation ultramétrique dans la limite de faible forçage. La fonction $\mathcal{D}(C)$ est numériquement compatible avec une variation linéaire $\mathcal{D}(C) \simeq \mathcal{D}(C = 0) - aC$, avec $a > 0$. Une remarque intéressante peut être faite sur la forme obtenue pour la divergence de $t_r(\varepsilon)$ qui n'est pas une loi de puissance, comme c'est le cas pour le modèle p -spin, et plus généralement dans les modèles champ moyen étudiés jusqu'ici [239, 240]. Il est en effet très remarquable que nous retrouvons ici la forme de fluage rencontrée dans les caractéristiques $V - I$ des supraconducteurs de type-II, ainsi que nous l'avons décrit dans l'introduction, Fig. 1.3 et Eq. (1.3). Cette coïncidence soulève selon nous l'intéressante possibilité que la théorie champ moyen sur laquelle nous nous appuyons puisse être utilisée pour décrire le comportement des vortex magnétiques en présence d'un courant électrique [279]. Nous n'avons pas étudié en détail les propriétés de l'exposant μ , qui a été le sujet de beaucoup de travaux dans le contexte des supraconducteurs [18, 49, 53, 280]. Nous ne savons donc pas, par exemple si sa valeur dépend de la température, ou si c'est une caractéristique intrinsèque du modèle (par exemple $\mu = 2/3$?).

La relation (5.22) montre aussi que le rapport de 2 temps de relaxation est donné par

$$\frac{t(C_1)}{t(C_2)} \simeq t_r(\varepsilon)^{\mathcal{D}(C_1) - \mathcal{D}(C_2)} \simeq t_r(\varepsilon)^{a(C_1 - C_2)}, \quad (5.23)$$

et diverge donc, pour $C_1 < C_2$, avec la même forme fonctionnelle (5.22) que les temps de relaxation eux-mêmes. C'est ce que l'on observe aussi sur la Fig. 5.1, où la même loi de fluage décrit très bien toutes les courbes présentées.

La Fig. 5.2 présente les propriétés d'échelle de la fonction de corrélation. Nous observons tout d'abord, comme il se doit pour un système ultramétrique, qu'une simple remise à l'échelle du temps, $t/t_r(\varepsilon)$, ne permet pas de décrire les courbes de façon correcte. Le comportement est donc qualitativement différent de notre étude sur la rhéologie non linéaire, par exemple Fig. 4.1, qui faisait clairement apparaître une seule échelle de temps pour la relaxation lente. L'utilisation de la variable $t/t(0.3)$ montre bien que le temps $t(C > 0.3)$ devient de plus en plus petit par rapport à $t(0.3)$, inversement pour $t(C < 0.3)$; les courbes s'«aplatissent» donc autour de $C = 0.3$ lorsque ε diminue. Cette

figure aurait pu être obtenue avec n'importe quelle valeur de C autre que 0.3, pourvu que $0 < C < q_{EA}$.

Nous voyons sur la Fig. 5.2 que la variable d'échelle $\ln t / \ln t_r(\varepsilon)$ permet une excellente remise à l'échelle des fonctions de corrélation. Insistons sur le fait que ceci *démontre* la présence de l'ultramétrie dynamique dans le cas de la dynamique forcée stationnaire. Pour démontrer sa présence dans le cas du régime de vieillissement, il faut revenir à la fonction $f(C_1, C_2)$ et montrer qu'elle satisfait à la relation ultramétrique dans la limite des grands t_w .

Pour être complets, mentionnons enfin que la solution numérique valide l'analyse asymptotique des équations dynamiques qui prédit la forme de la courbe $\chi(C)$ atteinte dans la limite de faible forçage par les courbes paramétriques susceptibilité - corrélation. Cette forme est obtenue par la relation $\chi(C) = \int_0^C dC' T_{\text{eff}}^{-1}(C')$, où $T_{\text{eff}}(C)$ est donnée par la relation (5.12). Nous obtenons donc la confirmation du scénario avec échelles de temps et températures multiples pour les modèles champ moyen.

5.2 Dynamique forcée du modèle d'Edwards-Anderson en 3 dimensions

Notre étude champ moyen d'un verre de spin présentant statiquement une brisure continue de la symétrie des répliques, a montré la forme assez complexe (Fisher et Huse diraient "exotique" [155]) que doit prendre la dynamique forcée d'un tel système. La relaxation est composée d'une hiérarchie d'échelles de temps, dans le sens de l'Eq. (5.19), chacune de ces échelles étant associée à une valeur différente de la température effective, mesurée par les violations du théorème de fluctuation-dissipation.

Nous comparons dans ce paragraphe ce comportement à celui des verres de spin en dimension finie, et réalisons à cet effet la simulation numérique de la dynamique forcée du modèle d'Edwards-Anderson en 3 dimensions.

5.2.1 L'ultramétrie dynamique est-elle observable?

Si les études numériques de la dynamique de vieillissement des verres de spin en dimension finie ont montré l'existence de violations du FDT très réminiscentes de la situation champ moyen, les fonctions de corrélation ne donnent en revanche aucun signe de l'existence d'une hiérarchie d'échelles de temps. Par exemple, la relaxation de la fonction de corrélation dans le régime de vieillissement est décrite par la relation $C(t, t_w) \simeq (t - t_w)^{-\alpha} \mathcal{C}(t/t_w)$ [149], qui est incompatible avec l'existence de l'ultramétrie dynamique. C'est par contre la forme que nous avons obtenue dans notre étude de la dynamique du modèle XY.

Expérimentalement, c'est plutôt la réponse à un champ magnétique qui est mesurée [31]. L'échantillon est refroidi dans sa phase verre de spin en présence d'un petit champ magnétique qui est coupé au temps t_w . On mesure alors la décroissance de l'aimantation 'thermorémanente', notée $M(t, t_w)$. Dans un système ultramétrique, on attend alors la relation suivante, dans la limite où les temps $t_1 > t_2 > t_3$ sont grands,

$$M(t_1, t_3) = \min \{ M(t_1, t_2), M(t_2, t_3) \}, \quad (5.24)$$

et, une nouvelle fois, une relaxation de $M(t, t_w)$ faisant intervenir une hiérarchie d'échelles de temps. Les expériences sont au contraire bien représentées, dans le régime lent, par

une loi de vieillissement simple,

$$M(t, t_w) \simeq \mathcal{M} \left(\frac{h(t)}{h(t_w)} \right) \simeq \mathcal{M} \left(\frac{t}{t_w} \right), \quad (5.25)$$

au phénomène de sous-vieillissement près [31]. Cette observation expérimentale est *incompatible* avec la présence de l’ultramétrie dynamique. Il est bien évidemment possible d’argumenter sur le fait que l’ultramétrie dynamique est extrêmement difficile à tester sous les formes (5.15) et (5.24), les fenêtres de temps expérimentales ou numériques pouvant être trop courtes pour permettre son observation. Cette difficulté a récemment été contournée en utilisant un test indirect consistant à étudier numériquement la dynamique de 2 copies couplées du même système [281]. Nous proposons ici au contraire d’étudier l’ultramétrie de manière directe en nous concentrant sur la dynamique forcée, dont nous avons vu qu’elle rendait les tests de l’existence de l’ultramétrie dynamique très simples.

Nous étudions le modèle d’Edwards-Anderson [102], qui décrit $N = L^3$ spins d’Ising, $s_i = \pm 1$, situés sur les sites d’un réseau cubique simple de taille linéaire L , avec des conditions aux limites périodiques, interagissant par l’Hamiltonien

$$H = \sum_{\langle i, j \rangle} J_{ij} s_i s_j, \quad (5.26)$$

où la somme porte sur les couples de plus proches voisins, les couplages étant des variables bimodales, $J_{ij} = \pm 1$, de moyenne nulle. Ce modèle est le ‘modèle standard’ pour l’étude des verres de spin (avec la version où les couplages sont des variables Gaussiennes) [141]. Il subit une transition de phase du second ordre à la température $T_c = 1.11 \pm 0.04$ entre une phase paramagnétique et une phase verre de spin [162]. Pour forcer la dynamique du système nous ajoutons sur chaque lien du réseau des couplages \tilde{J}_{ij} qui sont antisymétriques, $\tilde{J}_{ij} = -\tilde{J}_{ji}$, aléatoires, tirés d’une distribution bimodale, $\tilde{J}_{ij} = \pm \varepsilon$, de moyenne nulle.

Nous observons numériquement que la dynamique du système devient stationnaire pour toute température dès que l’intensité des couplages asymétriques ε est non nulle : le vieillissement est stoppé. Dans le régime stationnaire, nous calculons la fonction de corrélation spin-spin,

$$C(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overline{\langle s_i(t + t_0) s_i(t_0) \rangle}, \quad (5.27)$$

où la barre horizontale indique une moyenne sur les réalisations des couplages aléatoires, les crochets indiquant une moyenne thermique. Notons aussi que le temps initial t_0 ne joue aucun rôle dans cette expression : toute l’histoire thermique du système est oubliée du fait de la présence du terme de forçage. La Fig. 5.3 présente l’allure des fonctions de corrélation pour différentes valeurs de ε et une température $T = 0.6 \simeq 0.54T_c$. L’allure de cette fonction est une nouvelle fois bien décrite par une zone à temps courts peu affectée par le forçage, suivie d’une zone à temps longs qui est d’autant plus lente que le forçage est faible, observation que nous avons faite à plusieurs reprises. Notons une différence qualitative ici : la partie rapide ne fait pas clairement apparaître la valeur du paramètre d’Edwards-Anderson q_{EA} , le plateau vers lequel décroissent théoriquement les

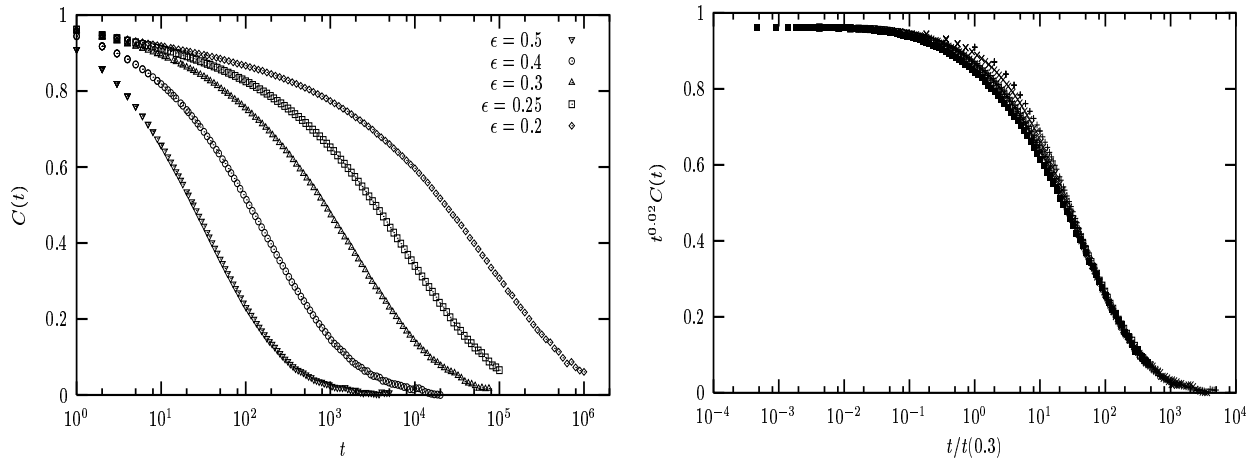


Fig. 5.3: À gauche : fonctions de corrélation du modèle d'Edwards-Anderson en présence de couplages asymétriques, pour $T = 0.54T_c$ et différentes valeurs de ϵ indiquées sur la figure. À droite : les mêmes fonctions sont remises à l'échelle en utilisant la forme (5.28).

parties rapides dans les fonctions de corrélation. Nous avons déjà mentionné ce fait dans notre discussion du caractère 'critique' des verres de spin au paragraphe 2.4.

Le point crucial de notre étude consiste maintenant à tenter de détecter la présence d'une hiérarchie d'échelles de temps attendue dans un système ultramétrique. Un premier test simple est de regarder si la relaxation lente se fait sur une seule échelle de temps, le principe de superposition Temps / Forçage. Cette remise à l'échelle est très bonne pour les faibles valeurs de la corrélation, semblant révéler l'existence d'une unique échelle de temps pour décrire la relaxation lente.

Toutefois, le fait que q_{EA} ne soit pas clairement apparent sur les données nous empêche d'apprécier vraiment la qualité de cette remise à l'échelle, qui doit s'effectuer sur toute la gamme $0 < C < q_{EA}$ pour être concluante. Nous contournons cette difficulté en faisant l'hypothèse, inspirée à la fois des simulations faites dans le régime de vieillissement [149] et des études de la croissance de domaines au point critique (paragraphe 2.3), que la forme d'échelle pour la corrélation est donnée par

$$C(t) \simeq t^{-\alpha} \mathcal{C}\left(\frac{t}{t_r(\epsilon)}\right). \quad (5.28)$$

Nous testons cette relation sur la Fig. 5.3, avec la valeur de l'exposant α pour seul paramètre ajustable. Pour $T = 0.6$, nous trouvons la valeur $\alpha(0.6) \simeq 0.02$, en très bon avec l'exposant obtenu dans la Ref. [149] étudiant le régime de vieillissement. Nous déterminons numériquement la fonction d'échelle $\mathcal{C}(x)$. De façon surprenante, la forme $\mathcal{C}(x) \simeq x^{-\lambda}$, obtenue dans le régime de vieillissement du modèle d'Edwards-Anderson et du modèle XY n'est pas correcte ici. Nous trouvons à la place une exponentielle étirée; pour la température $T = 0.6$, nous obtenons $\mathcal{C}(x) \simeq \exp(-x^{0.45})$. L'Eq. (5.28) implique que la relaxation rapide est différente de celle observée dans le modèle champ moyen, puisqu'il s'agit d'une loi de puissance $t^{-\alpha}$ analogue à la relaxation d'équilibre dans un système critique, Eq. (2.64). La seconde implication de cette forme d'échelle est que la relaxation lente est bien décrite par une unique échelle de temps, *sans la présence d'ultramétrie dynamique*.

Bien évidemment, ces données numériques ne peuvent suffire à elles seules à écarter définitivement la présence éventuelle d'ultramétrie, et donc d'une séparation des échelles de temps qui se produirait sur une plus large fenêtre temporelle. C'est en fait l'argument déjà invoqué ci-dessus pour justifier la forme de vieillissement simple obtenue expérimentalement. Le point qui émerge cependant clairement de notre étude est que pour voir une éventuelle séparation des échelles de temps, une fenêtre temporelle *beaucoup plus large* doit être utilisée. Nous couvrons ici un peu plus de 4 décades, $t \in [10, 10^5] t_0$, tandis que les expériences se font sur au plus 6 décades, typiquement $t \in [10^{-2}, 10^4]s$. La différence ne nous paraît pas suffisante pour permettre aux expériences de détecter cette séparation des échelles de temps, ce qu'elles ne font en effet pas [31].

Dans ces conditions, on peut conclure que l'ultramétrie dynamique, si elle est présente, ne pourra que difficilement être mise en évidence dans une étude dynamique à 3 dimensions. N'en pas tenir compte permet donc une interprétation correcte des résultats numériques ou expérimentaux.

5.2.2 Températures effectives

Nous testons enfin la présence de températures effectives multiples, ainsi que le prédit notre étude champ moyen. Pour cela, nous devons mesurer la susceptibilité associée à la corrélation (5.27). La procédure est désormais bien connue [141]. Un champ magnétique h_i constant, spatialement aléatoire, tiré d'une distribution Gaussienne, de moments $\overline{h_i} = 0$ et $\overline{h_i h_j} = h_0^2 \delta_{ij}$, est appliqué en chaque site du réseau au temps t_0 . La susceptibilité est alors définie par

$$\chi(t) = \frac{1}{N h_0^2} \sum_{i=1}^N \langle \overline{h_i s_i(t + t_0)} \rangle, \quad (5.29)$$

relation valable dans la limite de la réponse linéaire, $h_0 \rightarrow 0$. À l'équilibre, le FDT s'écrit $\chi(t) = [1 - C(t)]/T$. Nous testons cette relation sur la Fig. 5.4.

Ces courbes montrent que pour les fortes valeurs de la corrélation, $C \gtrsim 0.85$, le FDT est bien vérifié, tandis que pour $C \lesssim 0.85$, les courbes paramétriques s'écartent de la relation d'équilibre. Les degrés de liberté lents apparaissent donc hors équilibre, comme il se doit pour une dynamique forcée. Là encore, nous devons commenter la forme de la violation du FDT obtenue. Plusieurs remarques peuvent être faites sur ces courbes.

- Elles sont tout d'abord assez similaires à celles que l'on attend d'après notre étude champ moyen : une première partie, $C > 0.85$ qui suit le FDT, puis une seconde partie, $C < 0.85$ qui s'en écarte. Dans cette seconde partie, la courbe obtenue n'est pas linéaire, et suggère donc, comme dans la théorie champ moyen, l'existence de températures effectives multiples.
- Ces courbes sont qualitativement très similaires à celles obtenues en étudiant le modèle d'Edwards-Anderson dans le régime de vieillissement, cf Fig. 1.6 [78]. N'ayant pas réalisé nous-mêmes ces simulations, nous ne pouvons malheureusement pas réaliser une comparaison plus quantitative. Il serait toutefois intéressant de tester plus précisément la prédiction que les 2 régimes ($\varepsilon \rightarrow 0$ et $t_w \rightarrow \infty$) conduisent aux mêmes violations du FDT.

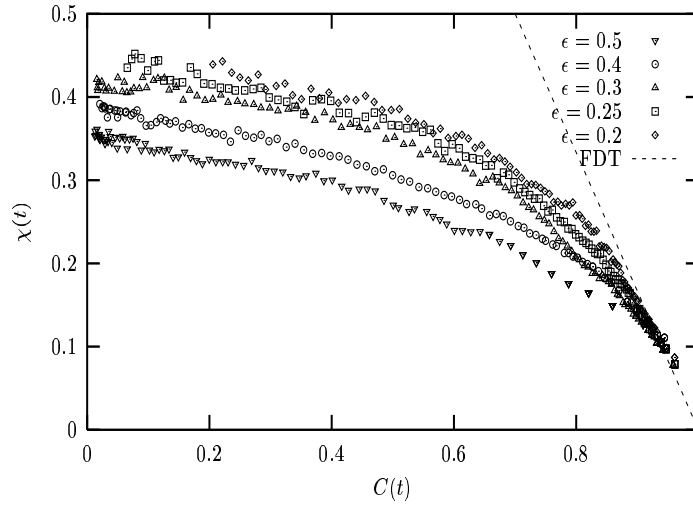


Fig. 5.4: Courbes paramétriques susceptibilité - corrélation pour le modèle d'Edwards-Anderson à 3 dimensions, pour différentes valeurs du forçage ε indiquées sur la figure, et la température $T = 0.54T_c$. La ligne droite pointillée représente la relation linéaire d'équilibre (FDT).

- Une étude plus attentive de ces courbes révèle toutefois qu'elles évoluent encore pour les plus faibles valeurs de ε que nous avons pu simuler. Nous ne sommes donc pas sûrs, comme c'était déjà le cas pour le liquide de Lennard-Jones, qu'une courbe limite $\chi(C)$, différente de la relation d'équilibre, est atteinte dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. La forme d'échelle (5.28) proposée pour la fonction de corrélation tend même à démontrer une évolution systématique de ces courbes, donc très réminiscente des violations du FDT rencontrées dans le modèle XY au paragraphe 2.3. Cette forme d'échelle ne permet enfin pas la séparation additive entre parties lentes et rapides dans les fonctions dynamiques, qui est la base de l'analyse asymptotique des équations dynamiques champ moyen.
- Même si l'on accepte l'existence de températures effectives multiples, on voit qu'elles ne sont associées qu'à une seule échelle de temps $t_r(\varepsilon)$, en contradiction avec la théorie champ moyen dans laquelle chaque échelle de temps est 'quasi-équilibrée' à sa propre température. On peut alors se demander la valeur de la température effective qu'indiquerait un thermomètre dont le temps de réponse τ serait de l'ordre de $\tau \sim t_r(\varepsilon)$.

Nous nous trouvons face à des résultats numériques qui ressemblent aux résultats champ moyen sur certains points, mais qui en diffèrent sur d'autres. Si la théorie champ moyen semble donner qualitativement la bonne direction pour les violations du FDT, les tests que nous avons réalisés à 3 dimensions ne permettent pas de conclure à l'existence de l'ultramétrie dynamique, les résultats étant une nouvelle fois plutôt réminiscent d'une dynamique au point critique.

Dans la publication à laquelle a donné lieu ce chapitre, nous suggérons d'étudier le même modèle, mais à 4 dimensions, pour voir si l'absence d'ultramétrie à 3 dimensions pouvait être due à la trop grande proximité de la dimension critique inférieure du modèle (dont personne ne sait exactement ce qu'elle vaut, les estimations se situant entre 2 et

3). La simulation a depuis été réalisée par Stariolo [282], qui trouve que la remise à l'échelle des fonctions de corrélation se fait plutôt mieux en suivant l'Eq. (5.20) qu'en suivant l'Eq. (5.16). Ces résultats semblent donc indiquer la présence de l'ultramétrie dynamique à 4 dimensions.

6. DYNAMIQUE FORCÉE PAR UN CHAMP OSCILLANT : CAS DES MATÉRIAUX GRANULAIRES

Mais pour l'essentiel, il régnait un certain effet vitreux.

V. AXIONOV, *Une saga moscovite.*

Nous étudions dans ce dernier chapitre la dynamique des systèmes vitreux lorsque celle-ci est forcée par une perturbation Hamiltonienne qui dépend du temps. La dépendance temporelle est cruciale ici, puisqu'une force Hamiltonienne constante ne permet pas d'injecter de l'énergie dans le système. Un exemple 'bien connu' est celui d'un matériau ferromagnétique perturbé par un champ magnétique sinusoïdal. Si l'on observe la courbe d'aimantation $h(t) - m(t)$, on peut obtenir une courbe d'hystérésis, l'aire $A \equiv \oint mdh$ étant égale à la quantité d'énergie injectée dans le système en un cycle. Nous devons en fait relativiser les mots 'bien connu', puisque le problème de l'hystérésis, d'une très grande importance industrielle, fait encore l'objet de nombreuses recherches, pour comprendre par exemple le comportement de $A = A(h, \omega)$ en fonction de l'amplitude h et de la pulsation ω du champ magnétique [283].

Plus fondamentalement, la dynamique du modèle d'Ising en champ magnétique uniforme oscillant pour $T < T_c$ a très récemment donné lieu à plusieurs travaux [284]. Si l'on définit en effet la quantité $Q(h, \omega) \equiv \oint m(t)dt$, on s'aperçoit rapidement de l'existence d'une transition de phase dans le plan (h, T) , pour une pulsation ω fixée, entre une phase où $Q = 0$, et une phase où la symétrie du cycle est brisée, avec $Q \neq 0$ [285]. Des études plus précises [284] montrent que cette transition de phase présente toutes les caractéristiques d'une transition de phase du second ordre (exposants critiques, croisement des cumulants de Binder, etc.), qui semble être dans la même classe d'universalité que la transition d'équilibre ayant lieu à $T = T_c$. C'est donc un intéressant exemple de transition de phase dans un système hors équilibre.

Mentionnons aussi les travaux de Sethna et ses collaborateurs [286, 287] sur le problème de l'effet Barkhausen dans les matériaux ferromagnétiques. Il est bien connu que les courbes d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique réel sont en fait discontinues, donnant lieu au phénomène du 'bruit Barkhausen'. Cet effet peut être décrit, par exemple [286], par la dynamique à température nulle du modèle d'Ising en champ aléatoire qui donne lieu, elle aussi, à une transition de phase dynamique du second ordre, que l'on peut alors étudier par les méthodes du groupe de renormalisation [287].

Ce dernier modèle est en fait assez proche de l'étude qui va suivre, puisque nous nous concentrons dans ce chapitre sur le problème de la dynamique de modèles désordonnés champ moyen en présence d'un champ oscillant. Nous avons déjà justifié dans les chapitres précédents l'utilité de ces modèles pour capturer la physique des liquides surfondus ou des matériaux vitreux mous. Notre motivation est un peu différente ici, puisque nous désirons revenir sur le diagramme des phases de la Fig. 1.4, en vue d'appliquer les résultats de notre étude du plan (Forçage - Température) non pas à la physique de la transition

vitreuse, $(1/\text{Densité} - \text{Température})$, mais à celle des matériaux granulaires, (Forçage $- 1/\text{Densité}$). Plus simplement, cette étude est la logique conclusion de notre travail sur la dynamique forcée des systèmes vitreux, nous permettant d'envisager une seconde classe de perturbations imposées au système. Enfin, l'analyse du diagramme des phases $(h - \omega - T)$ d'un modèle de type verre de spin nous paraît suffisamment intéressante en elle-même pour justifier cette étude, une telle analyse théorique n'ayant encore jamais été menée, à notre connaissance.

Ce chapitre s'organise de la façon suivante. Nous présentons tout d'abord nos résultats pour la dynamique forcée par un champ oscillant dans le cadre des modèles champ moyen étudiés dans les chapitres précédents. Les résultats sont ici qualitativement différents, avec l'apparition d'une transition de phase dynamique. Nous tentons ensuite d'aller au-delà de l'approximation de champ moyen en étudiant numériquement la dynamique du modèle p -spin, mais en gardant fini le nombre de spins qui interagissent. Enfin, nous interprétons nos résultats dans le cadre de l'analogie communément admise entre matériaux granulaires et systèmes vitreux, sur laquelle nous revenons en détail.

6.1 Une transition de phase hors équilibre

Nous nous concentrons dans ce paragraphe sur le modèle p -spin sphérique, défini au paragraphe 4.1.1. L'Hamiltonien est donné par l'Eq. (4.12) et nous étudions sa dynamique en présence d'une force conservative qui dépend du temps

$$\frac{\partial s_i(t)}{\partial t} = -\mu(t)s_i(t) - \frac{\delta H_J[\mathbf{s}]}{\delta s_i(t)} + f_i^{\text{tapping}}(t) + \zeta_i(t), \quad (6.1)$$

dans laquelle nous avons introduit le terme de forçage $f_i^{\text{tapping}}(t)$ (le sens de la notation deviendra clair à la fin du chapitre). Le forçage que nous étudions est un champ magnétique qui dépend du temps. Nous le choisissons sinusoïdal, $f_i^{\text{tapping}}(t) \equiv h_i \cos(\omega t)$. La dépendance spatiale de h_i n'est pas pertinente puisqu'un champ magnétique constant ou aléatoire a le même effet sur l'Hamiltonien désordonné (4.12). Par la suite, nous choisirons par commodité entre le cas $h_i \equiv h \equiv \text{const}$ et le cas où le champ est aléatoire Gaussien avec $\overline{h_i} = 0$ et $\overline{h_i h_j} = h^2 \delta_{ij}$. Nous associons à cette dynamique des conditions initiales où le système est complètement désordonné au temps $t_i = 0$, simulant ainsi l'effet d'une trempe à l'instant initial depuis la température $T = \infty$. Nous étudions successivement les cas $p = 2$ et $p \geq 3$.

6.1.1 Un cas simple : Le modèle de Sherrington-Kirkpatrick sphérique

Le premier cas, $p = 2$, n'est rien d'autre que la version sphérique du modèle de Sherrington-Kirkpatrick. Elle a été introduite par Kosterlitz, Thouless et Jones [288] en tant que modèle soluble de verre de spin, avant la solution de Parisi de la version non sphérique [101]. Ici, la symétrie des répliques n'est pas brisée à basse température. Nous avons déjà mentionné que ce modèle est équivalent au modèle $O(n)$, $n \rightarrow \infty$ en 3 dimensions. Son comportement dynamique est donc bien connu [81], et nous l'avons étudiée au paragraphe 2.2 dans le cas particulier où $T = 0$. La dynamique dans un champ constant a été étudiée dans la Ref. [289].

Le cas $p = 2$ est plus simple que $p \geq 3$, car les équations dynamiques en termes des fonctions C et R deviennent linéaires. On peut en fait se passer de ce système d'équations

intégré-différentielles, et intégrer directement l'équation de Langevin en diagonalisant la matrice aléatoire symétrique $J_{j_1 j_2}$. En notant $\boldsymbol{\lambda}$ le vecteur propre associé à la valeur propre λ , et en définissant $s_\lambda \equiv \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{s}$, $h_\lambda \equiv \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{h}$ et $\zeta_\lambda \equiv \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\zeta}$ les projections des spins, du champ et du bruit thermique sur le vecteur propre $\boldsymbol{\lambda}$, on obtient

$$\frac{\partial s_\lambda(t)}{\partial t} = [\lambda - \mu(t)]s_\lambda(t) + h_\lambda \cos(\omega t) + \zeta_\lambda(t). \quad (6.2)$$

Dans la limite $N \rightarrow \infty$, c'est un résultat classique de la théorie des matrices aléatoires que la densité $\rho(\lambda)$ de valeurs propres est donnée par $\rho(\lambda) = \sqrt{4 - \lambda^2}$ pour $\lambda \in [-2, 2]$. On peut directement intégrer l'Eq. (6.2) pour obtenir, à $T = 0$,

$$s_\lambda(t) = \frac{e^{\lambda t}}{\Omega(t)} \left[1 + h_\lambda \int_0^t dt' \cos(\omega t') e^{-\lambda t'} \Omega(t') \right], \quad (6.3)$$

où la fonction $\Omega(t) \equiv \exp \left[\int_0^t dt' \mu(t') \right]$ a été définie. La contrainte sphérique détermine $\Omega(t)$ par l'équation implicite suivante,

$$\Omega(t)^2 = f(t) + h^2 \int_0^t dt' \int_0^t dt'' f \left(t - \frac{t' + t''}{2} \right) \Omega(t') \Omega(t'') \cos(\omega t') \cos(\omega t''), \quad (6.4)$$

avec $f(t)$ donnée par $f(t) \equiv \int_{-2}^2 d\lambda \rho(\lambda) e^{2\lambda t}$. On peut alors calculer les fonctions dynamiques $C(t, t_w)$, $R(t, t_w)$ et la densité d'énergie $e(t)$. On obtient

$$\begin{aligned} C(t, t_w) &= \int_{-2}^2 d\lambda \rho(\lambda) \langle s_\lambda(t) s_\lambda(t_w) \rangle = \frac{1}{\Omega(t)\Omega(t_w)} \left[f \left(\frac{t + t_w}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + h^2 \int_0^t dt' \int_0^{t_w} dt'' \cos(\omega t') \cos(\omega t'') \Omega(t') \Omega(t'') f \left(\frac{t + t_w - t' - t''}{2} \right) \right], \quad (6.5) \\ R(t, t_w) &= \frac{1}{2T} \int_{-2}^2 d\lambda \rho(\lambda) \langle s_\lambda(t) \zeta_\lambda(t_w) \rangle = \frac{\Omega(t_w)}{\Omega(t)} f \left(\frac{t - t_w}{2} \right), \\ e(t) &= -\frac{\mu(t)}{2} = -\frac{1}{2} \frac{d \ln[\Omega(t)]}{dt}. \end{aligned}$$

Ainsi posé, le problème se ramène à la résolution de l'Eq. (6.4), qui détermine ensuite les fonctions dynamiques par l'Eq. (6.5). L'Eq. (6.4) n'a pas de solution immédiate en présence d'un champ oscillant. On peut toutefois résoudre cette équation dans 2 cas limites. En l'absence de champ [81], on a $\Omega(t) = \sqrt{f(t)} \simeq e^{2t}/t^{3/4}$. En injectant cette forme dans la corrélation, on obtient l'Eq. (2.35) avec $d = 3$. Le temps de relaxation est infini, le système vieillit avec une variable d'échelle t/t_w pour la corrélation, et la densité d'énergie converge vers sa valeur asymptotique ($e_\infty = -1$) comme une loi de puissance $e(t) \simeq -1 + 3t^{-1}/8$.

Lorsque le champ est constant [289], $\omega = 0$, on obtient $\Omega(t) \simeq e^{\Lambda^0(h)t}$, avec $\Lambda^0(h) \equiv (2 + h^2)/\sqrt{1 + h^2} > 2$. L'effet du champ est d'introduire un temps de relaxation fini $t_r^0(h) \equiv [\Lambda^0(h) - 2]^{-1}$. Pour $t_w \ll t_r^0(h)$, on observe du vieillissement, interrompu lorsque $t_w \gtrsim t_r^0(h)$. L'énergie converge alors vers sa valeur finale $e_\infty(\omega = 0, h) = -(2 + h^2)/(2\sqrt{1 + h^2})$.

Pour ω et h finis, la solution numérique de l'Eq. (6.4) indique le comportement suivant, représenté sur la Fig. 6.1,

$$\begin{aligned} h < h^*(\omega) &\quad \Omega(t) \simeq c \frac{e^{2t}}{t^{3/4}} (b \cos(2\omega t + \phi) + 1), \\ h > h^*(\omega) &\quad \Omega(t) \simeq c' \exp[\Lambda(\omega, h)t + a \cos(2\omega t + \phi)], \end{aligned} \quad (6.6)$$

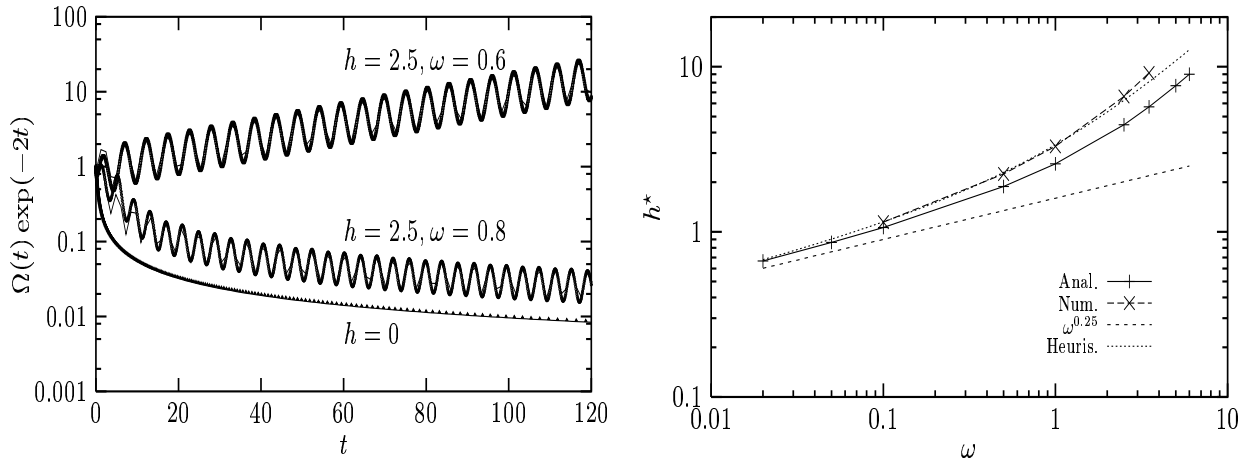


Fig. 6.1: À gauche : la solution numérique de l'Eq. (6.4) est représentée avec des points, tandis que les lignes continues sont des fits utilisant les formes (6.6). La courbe ($h = 2.5, \omega = 0.6$) est dans la phase liquide, la courbe ($h = 2.5, \omega = 0.8$) dans la phase vitreuse. À droite, les différentes estimations, analytique (6.10), numérique, heuristique (6.7), et asymptotique $h^* \simeq \omega^{0.25}$, de la ligne de transition dynamique $h^*(\omega)$. La phase 'vitreuse' se trouve sous la ligne de transition, la phase 'liquide' au-dessus.

où $c, c', a, b < 1$ et ϕ sont des constantes numériques, et avec $\Lambda(\omega, h) > 2$. À pulsation ω fixée, on voit donc apparaître deux régimes distincts. Le premier, $h < h^*$, est caractérisé par un temps de relaxation infini, comme en champ nul, tandis que le second, $h > h^*$, possède un temps de relaxation fini $t_r(\omega, h) \equiv [\Lambda(\omega, h) - 2]^{-1}$. Par analogie avec la transition qui a lieu sans champ magnétique, nous appelons les 2 phases obtenues respectivement 'vitreuse' et 'liquide'. Nous obtenons donc une 'transition vitreuse dynamique'. Dans la suite, nous évaluons la ligne de transition dans le plan (ω, h) , et caractérisons le comportement du système dans chacune des 2 phases.

On peut comprendre assez simplement l'existence de la transition par le fait qu'à pulsation nulle, le champ introduit une échelle de temps $t_r^0(h)$ qui stoppe le vieillissement. Un argument heuristique simple dit alors que lorsque $\omega t_r^0(h) \ll 1$ le champ a le même effet que lorsque $\omega = 0$, tandis que si $\omega t_r^0 \gg 1$, le champ n'a essentiellement aucun effet. Ceci donne alors une estimation simple de la relation entre ω et h^* ,

$$\omega t_r^0(h^*) \simeq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega \propto \left[\frac{2 + h^{*2}}{\sqrt{1 + h^{*2}}} - 2 \right]. \quad (6.7)$$

Cet argument heuristique peut être complété d'une estimation plus précise de la transition. Dans le cas où $h > h^*$, la condition $\Lambda > 2$ permet de négliger le terme $f(t)$ dans le membre de droite de l'Eq. (6.4),

$$\Omega(t)^2 \simeq h^2 \int_{-2}^2 d\lambda \rho(\lambda) e^{2\lambda t} \left[\int_0^t dt' \cos(\omega t') \Omega(t') e^{-\lambda t'} \right]^2. \quad (6.8)$$

En s'aidant de la solution numérique, Eq. (6.6), on injecte la forme $\Omega(t) = \exp(\Lambda(\omega, h)t +$

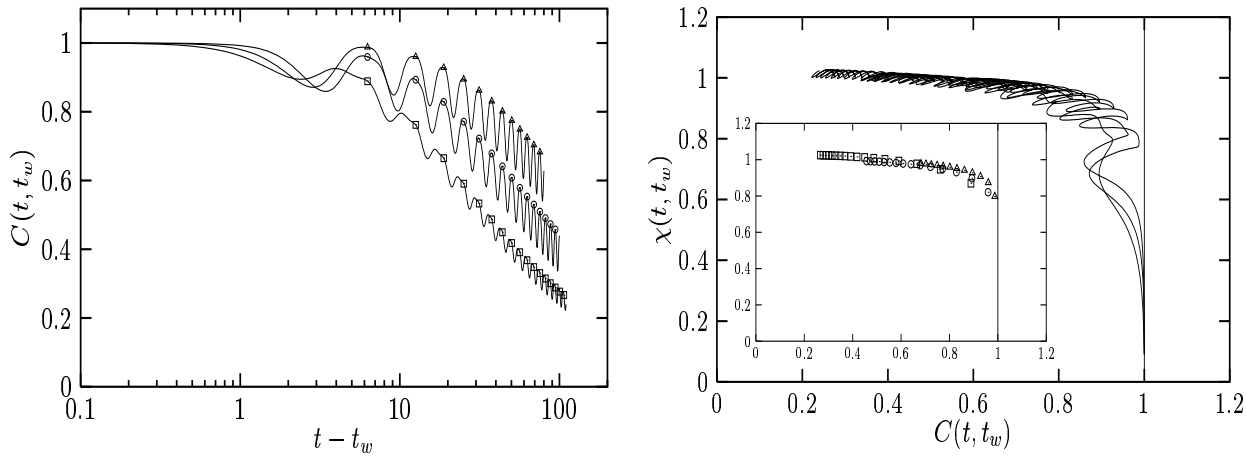


Fig. 6.2: À gauche : fonctions de corrélation pour le modèle $p = 2$, avec un champ $h = 0.5$ de pulsation $\omega = 1$, et des temps $t_w = 5, 10$ et 20 (de gauche à droite). À droite : courbes paramétriques $\chi(t, t_w)$ vs $C(t, t_w)$ pour les mêmes paramètres. Sur la figure de gauche et dans l'encart de celle de droite, on a représenté par des points les temps de la forme $t - t_w = 2\pi n/\omega$, avec n entier.

$B(t)$), dans cette dernière relation. Intégrer formellement par partie conduit à

$$e^{B(t)} = h^2 \int_{-2}^2 d\lambda \rho(\lambda) \left[\Re \left(e^{i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\Lambda(\omega, h) - \mu + i\omega)^{k+1}} \cdot \frac{d^k e^{B(t)}}{dt^k} \right) \right]^2. \quad (6.9)$$

Ce développement est en fait un développement en puissance de ω , car la fonction $B(t)$ est périodique de pulsation 2ω . Dans la limite de basse fréquence, on peut fermer cette expression en ne gardant que les premiers termes du développement, ce qui conduit à une relation entre les 3 paramètres (Λ, ω, h) :

$$\frac{\pi}{h^2} \simeq \int_{-1}^1 dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{(\Lambda - 2x)^2 + \omega^2}, \quad (6.10)$$

valable pour $\omega \ll 1$. La ligne de transition est ensuite déterminée par la divergence du temps de relaxation, ce qui revient à la condition $\Lambda(\omega, h^*) = 2$. Les estimations (6.7) et (6.10) donnent des résultats très raisonnables, ainsi que le démontre la Fig. 6.1. À basse fréquence, on obtient la loi $h^* \simeq \omega^{1/4}$. Enfin, l'Eq. (6.10) implique la relation $\lim_{\omega \rightarrow 0} \Lambda(\omega, h) = \Lambda^0(h/\sqrt{2})$, ce qui signifie que l'effet d'un champ de très basse fréquence d'amplitude h est le même que celui d'un champ constant d'amplitude $h/\sqrt{2}$, un résultat physiquement raisonnable malgré une limite $\omega \rightarrow 0$ singulière.

Le comportement du système dans la phase vitreuse est essentiellement le même, aux oscillations près, que lorsque le champ magnétique est absent. Les Eqs. (6.5) et (6.6) montrent que la densité d'énergie converge vers la valeur asymptotique -1 (comme lorsque $h = 0$) comme une loi de puissance, $e(t) + 1 \propto t^{-1}$, sur laquelle s'ajoutent des oscillations de pulsation 2ω .

La corrélation est dominée par le terme $C(t, t_w) \simeq f[(t + t_w)/2]/[\Omega(t)\Omega(t_w)]$, ce qui signifie qu'elle est une fonction de la variable d'échelle t/t_w , aux oscillations près. Nous avons représenté sur la Fig. 6.2 les fonctions de corrélations pour $h = 0.5$ et $\omega = 1$, pour

différents temps d'attente t_w . Il est clair d'après cette figure que le vieillissement survit à la présence de la perturbation sinusoïdale. En mesurant les données pour des temps de la forme $t - t_w = 2\pi n/\omega$, où n est entier, on obtient une vision 'stroboscopique' du processus (représentée par les points sur la Fig. 6.2). Les courbes obtenues sont alors qualitativement similaires à celles que l'on trouve sans champ. Pour un entier n donné, nous trouvons de plus que $C(2\pi n/\omega + t_w, t_w)$ est une fonction décroissante de h . Encore une fois, nous retrouvons le fait que le forçage essaie d''accélérer la dynamique. C'est cette compétition entre dynamique lente et forçage qui donne lieu à cette transition vitreuse dynamique. Dans le cas de la perturbation non conservative constante, la transition n'existait pas, le temps de relaxation devenant immédiatement fini en présence du terme de forçage.

Nous étudions enfin les violations du FDT dans la phase vitreuse. Le résultat est en fait quasiment immédiat, puisque les termes dominants dans les fonctions dynamiques sont les mêmes qu'en l'absence du champ magnétique. Nous retrouvons donc le résultat du paragraphe 2.2, Eq. (2.51), qui donnait la divergence de la température effective avec t_w , $T_{\text{eff}} \simeq t_w^{1/2} \rightarrow \infty$ (toujours aux oscillations près). Le modèle de Sherrington-Kirkpatrick sphérique étant dans la famille des modèles de croissance de domaines, il n'est pas étonnant de retrouver le résultat $T_{\text{eff}} = \infty$. Ceci signifie donc que les courbes paramétriques susceptibilité - corrélation seront de plus en plus plates dans le régime de vieillissement, ce qui est confirmé par les courbes de la Fig. 6.2. Une différence qualitative tout de même avec le régime de vieillissement est que les oscillations affectent aussi l'échelle de temps rapide, pour laquelle la relation χ vs C ne suit pas la relation linéaire d'équilibre. Dans le cas d'une perturbation sinusoïdale, les degrés de liberté rapides sont donc eux aussi hors équilibre, sans que l'on puisse parler pour eux de la notion de température effective. Pour les degrés de liberté lents au contraire, la notion de température effective apparaît de nouveau pertinente pour quantifier les violations du FDT rencontrées, un aspect majeur qui émerge de notre étude.

La phase liquide est moins intéressante de notre point de vue, puisque le temps de relaxation y est fini, $t_r(\omega, h) = [\Lambda(\omega, h) - 2]^{-1}$. Il n'y a donc aucun effet de dynamique lente. La densité d'énergie oscille autour de la valeur $-\Lambda(\omega, h)/2$ avec une pulsation 2ω , les fonctions de corrélation ne font pas apparaître d'échelles de temps longues et décroissent très rapidement vers 0, valeur autour de laquelle elles oscillent. Un point à noter est que le FDT n'est pas satisfait dans cette phase que nous avons pourtant appelée liquide : le système est en fait dans un état stationnaire hors équilibre que les outils utilisés jusqu'ici ne peuvent décrire. Ceci nous permet de constater une nouvelle fois que l'existence d'une température effective pour un système hors équilibre est étroitement liée à l'existence d'une ou plusieurs échelles de temps longues, i.e. bien plus grandes que le temps microscopique intrinsèque à la dynamique du système.

6.1.2 Résultats qualitatifs pour le modèle p -spin, $p \geq 3$

Nous étudions ici le cas où $p \geq 3$, pour lequel la dynamique ne peut pas être résolue par la méthode du paragraphe précédent. Nous devons alors revenir aux équations intégrodifférentielles couplées. De l'équation de Langevin (6.1), on déduit les équations dyna-

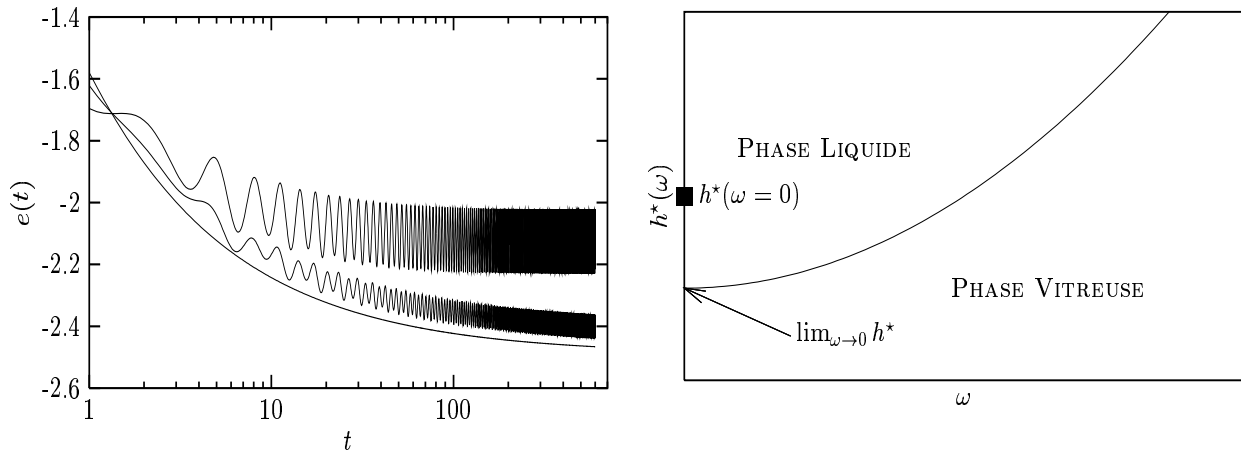


Fig. 6.3: À gauche : relaxation de la densité d'énergie après une trempe pour $p = 3$, $T = 0.6$, $\omega = 1$ et des amplitudes du champ $h = 0, 0.6$ et 1 (de bas en haut). À droite : allure schématique de la ligne de transition $h^*(\omega)$ pour le modèle $p = 3$.

miques suivantes, qui font usage des mêmes notations que dans les chapitres précédents,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(t, t')}{\partial t} &= -\mu(t)C(t, t') + \frac{p(p-1)}{2} \int_0^t dt'' C^{p-2}(t, t'') R(t, t'') C(t'', t') \\ &\quad + \frac{p}{2} \int_0^{t'} dt'' C^{p-1}(t, t'') R(t', t'') + h^2 \cos(\omega t) \int_0^{t'} dt'' \cos(\omega t'') R(t', t'') \\ \frac{\partial R(t, t')}{\partial t} &= -\mu(t)R(t, t') + \frac{p(p-1)}{2} \int_{t'}^t dt'' C^{p-2}(t, t'') R(t, t'') R(t'', t'), \\ \mu(t) &= T + \frac{p^2}{2} \int_0^t dt'' C^{p-1}(t, t'') R(t, t'') + h^2 \cos(\omega t) \int_0^t dt'' \cos(\omega t'') R(t, t''). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Contrairement aux chapitres précédents, par contre, nous avons conservé la notation à 2 temps des fonctions dynamiques. La présence du champ alternatif rend la solution de ces équations très difficile, l'analyse asymptotique ne pouvant même plus être menée. Nous présentons ci-dessous quelques résultats qualitatifs, provenant de la solution numérique de ces équations causales à 2 temps, obtenue grâce à l'algorithme développé par L. F. Cugliandolo [69].

Nous obtenons des résultats qui sont qualitativement similaires au cas $p = 2$ étudié précédemment, avec des signes assez clairs en faveur de l'existence de la transition dynamique dans ce cas aussi. Celle-ci n'est cependant pas facile à localiser numériquement à partir des fonctions de corrélation, à cause des oscillations qui se superposent à leur décroissance, lente ou non. Nous observons tout de même clairement sur la Fig. 6.3 un changement de comportement de la relaxation de la densité d'énergie lorsque l'intensité du champ augmente. Pour un champ très faible, on obtient une relaxation (en loi de puissance) très lente de $e(t)$, comme lorsque $h = 0$ ¹. À fort champ, il est clair que $e(t)$

1. Nous n'excluons évidemment pas par cette analyse très qualitative que le temps de relaxation soit long, mais fini. Nous n'avons malheureusement pas directement accès à la quantité $\Omega(t)$ qui nous a permis de déterminer sans ambiguïté l'existence de la transition dans le cas $p = 2$.

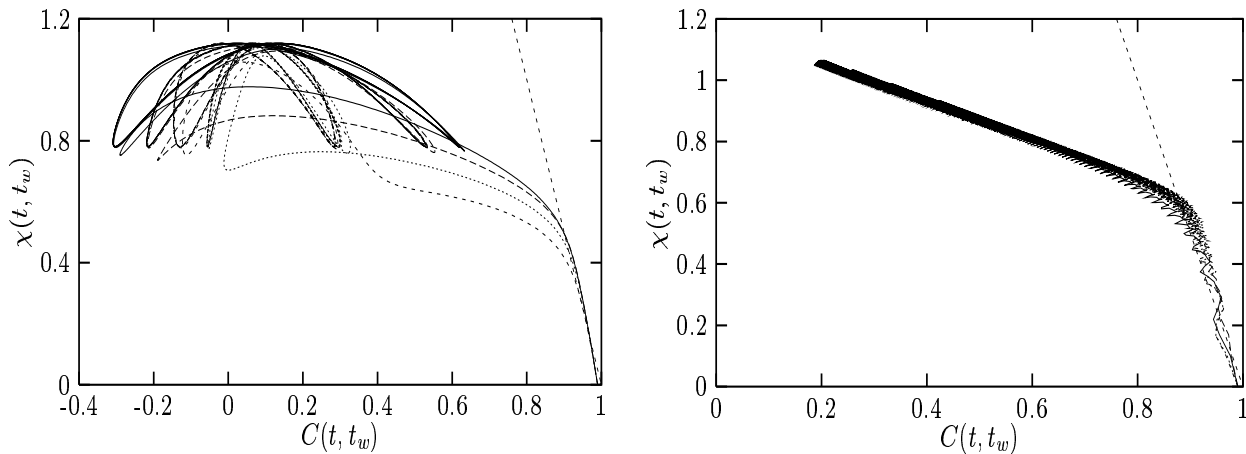


Fig. 6.4: Courbes paramétriques χ vs C pour $T = 0.2$, $h = 1$, et les fréquences $\omega = 0.1$ (à gauche, phase ‘liquide’) et $\omega = 10$ (à droite, phase ‘vitreuse’) et différents temps d’attente $t_w = 6, 12, 24$ et 49 .

se met rapidement à osciller autour de sa valeur asymptotique, qui semble dépendre de l’amplitude du champ appliqué.

Nous traçons sur la Fig. 6.3 l’allure qualitative de la transition dans le plan (ω, h) , telle que nous avons pu la déterminer numériquement. La différence principale avec le cas $p = 2$ provient de la limite $\omega \rightarrow 0$. Dans le cas $p \geq 3$, en effet, il existe une valeur finie du champ statique sous laquelle existe la phase vitreuse (‘ligne de Almeida-Thouless’) [290]. Nous observons de plus que $\lim_{\omega \rightarrow 0} h^*(\omega) < h^*(\omega = 0)$, la limite de faible fréquence étant donc singulière, comme dans le cas $p = 2$. Nous décrivons l’allure de la ligne $h^*(\omega)$ sur la Fig. 6.3. Nous ne pouvons là encore exclure une variation de la ligne de transition à basse fréquence qui soit non monotone, mais continue, en dehors de notre fenêtre numérique.

Nous étudions enfin l’allure qualitative des courbes paramétriques du modèle $p = 3$ en champ magnétique sur la Fig. 6.4. La première figure décrit les courbes obtenues dans la phase liquide du diagramme des phases. Le FDT n’est pas satisfait dans ce système dont la dynamique est forcée, mais les courbes paramétriques ne révèlent aucune structure particulière. Nous avons fait la même remarque dans le cas $p = 2$.

La seconde figure décrit par contre les violations du FDT dans la phase vitreuse du diagramme des phases. C’est un des résultats centraux de nos travaux que la température effective soit robuste vis-à-vis des perturbations extérieures imposées au système. Ici, on peut clairement décrire la partie lente des courbes paramétriques par une relation linéaire (ce serait encore plus clair si l’on utilisait la représentation ‘stroboscopique’ du paragraphe précédent). Ceci permet donc de parler une nouvelle fois de température effective pour les degrés de liberté lents dans un système dont la dynamique est forcée. Nous avons enfin tenté de caractériser la dépendance de $T_{\text{eff}} = T_{\text{eff}}(\omega, h)$, mais nous trouvons numériquement que la valeur de la température effective est seulement très faiblement dépendante de ces 2 paramètres.

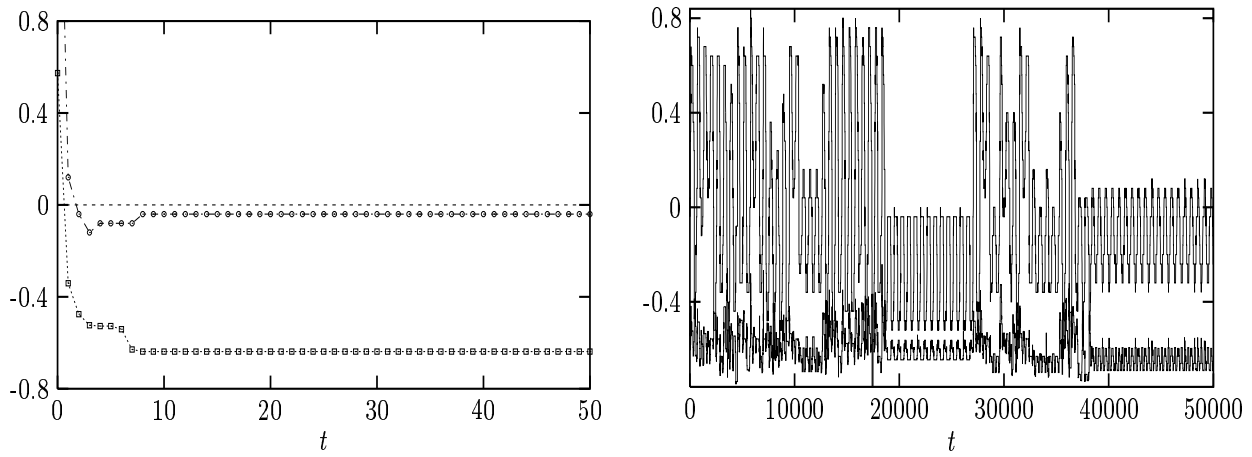


Fig. 6.5: Évolution de $e(t)$ (courbes du haut) et $m(t)$ (courbes du bas) en fonction du temps. À gauche, on a $h=0$, tandis qu'à droite, $h=2$ et $\omega=0.01$. L'axe du temps est gradué différemment dans les deux cas.

6.2 Au-delà du champ moyen : Rôle des états métastables

Nous avons interprété au paragraphe 4.1.4 la dynamique hors équilibre du modèle p -spin en termes de son paysage d'énergie libre. Nous avons suggéré alors que la dynamique que nous observions serait différente si l'approximation de champ moyen n'empêchait pas le système de pénétrer sous la valeur $f_{\max}(T)$, où se trouvent un nombre exponentiellement grand d'états métastables. Pour voir l'effet de ces états sur la dynamique forcée par un champ oscillant, nous étudions la dynamique du modèle p -spin avec un nombre fini de spins, $N < \infty$. Dans ce cas, les barrières entre états métastables ne sont plus infinies, et les 'processus activés' sont inclus dans la dynamique [241]. Cette propriété a récemment été mise à profit pour étudier le paysage d'énergie d'un modèle champ moyen similaire au modèle p -spin par la méthode des structures inhérentes [291]. Nous nous concentrons ici sur le cas $p=3$ et étudions numériquement l'Hamiltonien

$$H_J[\mathbf{s}] = \sum_{j_1 < j_2 < j_3} J_{j_1 j_2 j_3} s_{j_1} s_{j_2} s_{j_3}, \quad (6.12)$$

qui décrit N spins en interactions. Nous présentons des résultats pour $N=50$, l'étude du cas $N=150$ révélant un comportement identique. Par commodité, nous étudions la version du modèle p -spin où les spins sont de type Ising, $s_i = \pm 1$, par la méthode de Monte Carlo. Les courbes sont pour une très basse température, $T=0.01$. L'influence des états métastables est analysée en mesurant la densité d'énergie $e(t) = N^{-1}H_J[\mathbf{s}]$ et l'aimantation $m(t) \equiv N^{-1} \sum_{i=1}^N s_i$.

L'évolution de ces grandeurs est présentée sur la Fig. 6.5. En l'absence de forçage, le système tombe rapidement dans un état métastable dont il peut plus s'échapper dans le temps de la simulation. Nous n'avons représenté $e(t)$ et $m(t)$ que pour $t \leq 50$, car ces fonctions ne varient pas pour des temps plus longs : le système est 'piégé' dans un état qui dépend du choix des conditions initiales, révélant ainsi la structure complexe de l'espace des phases.

La force oscillante a un effet drastique puisque l'on voit sur la Fig. 6.5 que l'énergie n'est

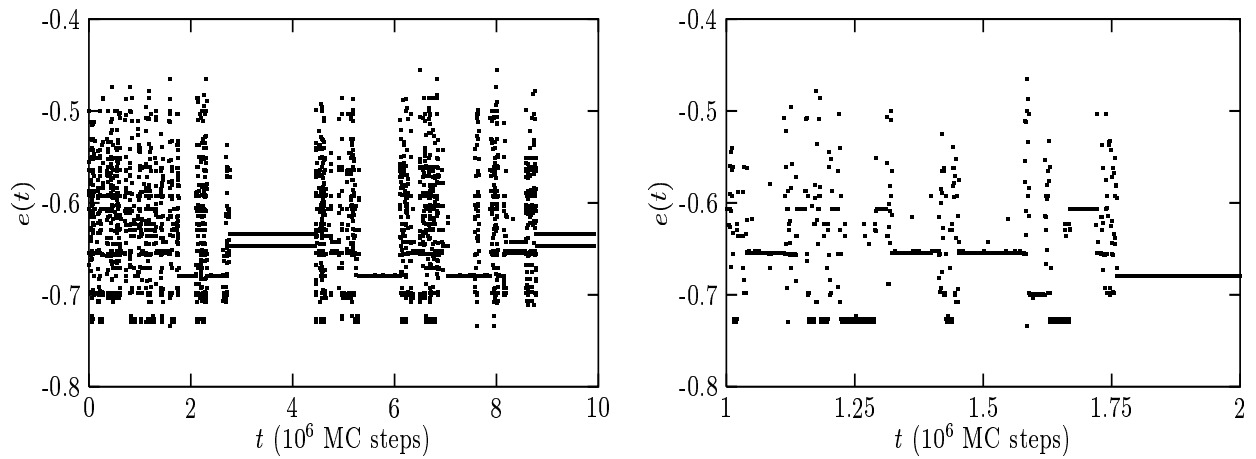


Fig. 6.6: Évolution de $e(t)$, avec un seul point par période. La courbe de droite n'est qu'un zoom sur une partie de la courbe de gauche, obtenue pour $h = 2$ et $\omega = 0.01$.

pas constante. Le forçage est donc capable de faire sortir le système des états métastables. Les fonctions $e(t)$ et $m(t)$ oscillent, mais leur comportement est intermittent. Sur certaines plages de temps, elles ont une évolution qui varie beaucoup d'une période à l'autre. Sur d'autres plages de temps, au contraire, les périodes consécutives sont très similaires. L'interprétation est que le système est piégé par les états métastables, dans lesquels il oscille. De temps en temps, le forçage le fait sortir de ces états, et le système a alors un comportement très erratique, jusqu'à ce qu'il soit de nouveau piégé dans un nouvel état métastable.

Cet effet peut être rendu plus net en ne mesurant l'énergie que pour des temps de la forme $t = 2\pi n/\omega$, i.e. en ne prenant qu'un seul point par période. C'est la courbe que nous présentons sur la Fig. 6.6. Les moments où le système est piégé apparaissent comme des plateaux de l'énergie, tandis que ces plateaux sont séparés par des plages où le système semble 'rebondir' sur un paysage d'énergie sans réussir à trouver un état métastable. Comme dans la Ref. [241], nous observons que cette évolution est 'auto-similaire', dans le sens où regarder l'évolution de $e(t)$ sur une échelle de temps plus fine fait apparaître de plus petits plateaux, l'allure générale restant la même.

Enfin, pour faire le lien avec la discussion du début de chapitre, nous présentons sur la Fig. 6.7 les courbes d'hystérésis que nous obtenons, pour les mêmes paramètres du champ magnétique que précédemment. Ces courbes démontrent aussi, que même à l'intérieur d'une période, l'évolution du système se fait d'une manière très discontinue. Nous obtenons des cycles d'hystérésis très irréguliers. Les petits sauts observés sont les analogues du bruit Barkhausen discuté plus haut. Notons enfin que la forme du cycle dépend très fortement du fait que le système se trouve dans un état métastable ou non, et que cette forme varie beaucoup d'un état métastable à l'autre.

Nous n'avons pas mené d'études plus quantitatives (statistique des temps de piégeages ou des états métastables, dépendance de ces quantités avec le nombre N de spins, etc.). Nous pensons toutefois qu'il y aurait beaucoup à apprendre du régime $N < \infty$ des modèles champ moyen étudiés jusqu'ici. La thermodynamique du modèle p -spin pourrait même être étudiée de cette façon. Ceci pourrait donner, par exemple, un moyen de comprendre comment les fameux 'processus activés' empêchent la transition dynamique à $T = T_c$.

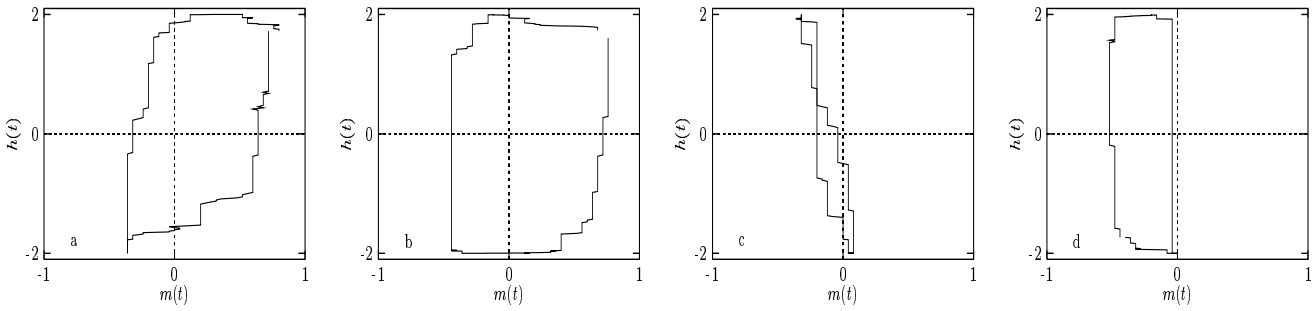


Fig. 6.7: Boucles d'hystérésis obtenues en représentant l'évolution de $h(t)$ vs $m(t)$, paramétrée par le temps. Les boucles (a) et (b) sont mesurées lorsque l'évolution du système est 'libre', (c) et (d) lorsque le système est piégé dans un état métastable.

6.3 Dynamique lente des matériaux granulaires

Nous concluons ce dernier chapitre par une discussion de la comparaison qui peut être faite entre matériaux granulaires et systèmes vitreux 'classiques', qui est renforcée, selon nous, par les 2 paragraphes précédents. C'est le point que nous mettons en avant dans ce paragraphe. Signalons tout d'abord qu'avec la définition de l'introduction d'un système vitreux, $t_r \gg t_{\text{exp}}$, les matériaux granulaires peuvent naturellement, dans certaines conditions expérimentales que nous discutons plus bas, être qualifiés de vitreux.

La physique des matériaux granulaires a connu un très grand essor dans les dernières années [44, 45, 46], sous la double impulsion de motivations industrielles considérables [292], mais aussi de questions plus fondamentales que posent ces milieux. La singularité de la matière granulaire provient du caractère macroscopique des grains qui la composent. L'énergie thermique ne peut jouer le même rôle que dans un liquide ou un gaz, et de l'énergie doit être injectée dans le système pour qu'il puisse s'écouler. Celle-ci est alors dissipée dans des degrés de liberté internes par friction entre les grains [292].

La matière granulaire peut donc être étudiée dans divers régimes. Le premier cas ne nous occupera pas ici, consiste à ne rien faire : c'est la physique du tas de sable, qui se révèle, d'une façon un peu surprenante, très complexe d'un point de vue théorique [293], mais aussi expérimental [294]. Un cadre satisfaisant pour décrire la mécanique des tas de sable n'existe pas encore à l'heure actuelle, malgré d'assez intenses recherches dans cette direction ces dernières années.

Si l'on veut étudier l'écoulement des poudres, il faut nécessairement injecter de l'énergie dans le système. Ceci peut se faire en cisillant ou en agitant le système. À forte sollicitation, le système devient similaire à un gaz de particules dissipatives. Dans ce régime, la description théorique consiste à inclure la dissipation par collisions entre grains dans les théories cinétiques usuelles. Là encore, c'est un domaine de recherches à part entière, que nous ne discutons pas ici [44, 45].

Le cas intéressant pour notre étude est lorsque l'intensité du forçage n'est 'pas trop grande'. Les expériences, désormais classiques, auxquelles nous pensons ici ont été menées à Chicago [295]. Elles consistent à étudier la dynamique d'un matériau granulaire dans un cylindre soumis à une vibration périodique, des 'taps' d'amplitude a et de pulsation ω . Dans ce cas, 'pas trop grande' signifie que l'accélération donnée par les impulsions est de l'ordre de l'accélération g de la gravité, $a\omega^2/g \sim 0.1 - 10$. Le résultat remarquable obtenu

dans les expériences de Chicago est que sous l'action des taps (on parle donc de 'tapping'), le système subit une compaction extrêmement lente, dans la mesure où la densité $\rho(t)$ du matériau varie encore après $t = 10^5$ taps. *C'est en ce sens bien précis que nous qualifions les matériaux granulaires de vitreux.* Les expériences de Chicago montrent de plus que cette compaction lente est très bien décrite par une loi logarithmique $\rho(t) - \rho(\infty) \simeq [1 + \ln t]^{-1}$, à des constantes numériques d'ajustement près [295, 296].

Ce résultat fondamental a alors entraîné une activité expérimentale, numérique et théorique réellement considérable au cours de ces dernières années. Nous tentons de résumer ici la situation. Expérimentalement, les expériences de Chicago ont d'abord été affinées pour étudier plus en détail les propriétés de la compaction lente [297, 298, 299] : fluctuations de $\rho(t)$, évolution des paramètres de fits avec l'amplitude du forçage, influence de la forme des grains, etc. Ces expériences ont de plus assez clairement démontré l'existence d'une transition dans l'amplitude du forçage en-dessous de laquelle se font sentir des effets vitreux (relaxation lente, hystérésis, effet mémoire, etc.). Ce n'est que très récemment qu'une alternative aux expériences de Chicago a été proposée par Nicolas *et al.* [300], qui ont imposé un faible cisaillement alternatif à un matériau granulaire. Si la compaction lente est bien présente dans ces expériences, la loi logarithmique n'y est pas. Enfin, des expériences de cycle en intensité du forçage, inspirées des expériences de cycles en température initialement proposées dans le contexte des verres de spin, ont aussi révélé le caractère vitreux de la matière granulaire faiblement sollicitée [297, 301].

La modélisation théorique de ces résultats a motivé une large communauté de physiciens. Signalons d'abord que les premières études numériques de Mehta et Barker ont été commencées avant les expériences de Chicago [302]. Leur description consiste à distinguer 2 types de relaxations microscopiques, la première décrivant le mouvement individuel des grains, l'autre plus longue, décrivant les réarrangements structuraux collectifs survenant dans une poudre [302]. Cette image est très similaire à celle des 'cages' pour les liquides surfondus. Après les résultats de Chicago, des modèles d'abord très phénoménologiques [303, 304, 305, 306, 307, 308], puis plus détaillés [309, 310, 311, 312] ont obtenu un résultat logarithmique pour la densité. Deux modèles, le modèle 'Tétris' (Tetris model) [313] et le modèle du 'Parking' (parking lot model ou encore adsorption-desorption model) [314, 315], ont été plus particulièrement étudiés et semblent rendre assez bien compte des résultats expérimentaux² Les simulations numériques ont pu démontrer l'existence de vieillissement pendant la compaction lente, par la mesure des fonctions de corrélation densité-densité, et ont retrouvé les principaux aspects vitreux mentionnés plus haut [310, 311, 312, 313, 316, 317]. Ce caractère vitreux est même directement à la base de certains des modèles proposés [309, 310, 313, 318], qui sont des traductions plus ou moins directes de modèles utilisés dans le contexte des verres structuraux ou des verres de spins. Ces descriptions font toutefois l'hypothèse très crue que l'on peut assimiler la vibration à un bain thermique dont la température serait contrôlée par l'amplitude du forçage. Sur la Fig. 1.4, cette hypothèse consiste à identifier directement le plan (Forçage - 1/Densité) au plan (Température - 1/Densité). La relation supposée entre forçage et température n'est justifiée, à notre connaissance, par aucune approche microscopique. Il est même tout à fait probable qu'elle soit fautive, les mouvements individuels des grains étant athermiques.

Notre approche consiste à *ne pas faire l'économie de l'étude du plan (Forçage -*

2. Les très récents résultats expérimentaux obtenus dans la Ref. [299] ne semblent toutefois pas compatibles avec le modèle de parking.

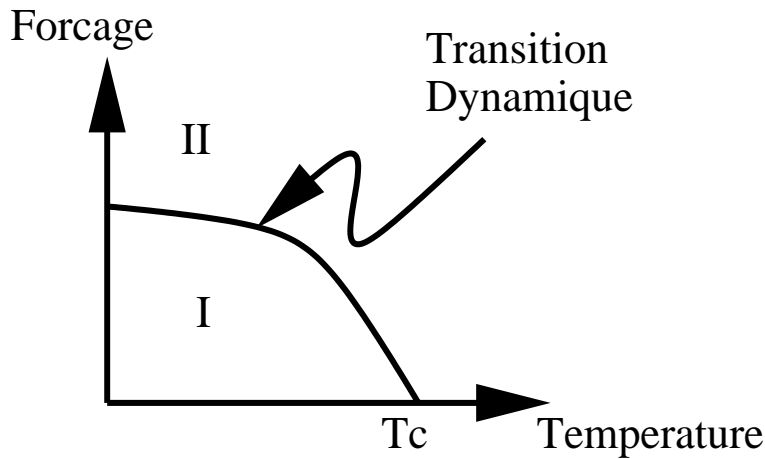


Fig. 6.8: Diagramme des phases d'un système vitreux en présence d'un forçage alternatif. La ligne de 'transition vitreuse dynamique' sépare une phase vitreuse (I), d'une phase liquide (II). L'axe Température = 0 peut décrire la physique des matériaux granulaires, l'axe Forçage = 0 celle de la transition vitreuse.

Température) pour concilier verres et granulaires, et donc à étudier d'un point de vue microscopique le comportement générique d'un système vitreux en présence d'une vibration : ce sont précisément les résultats que nous venons de présenter dans les 2 paragraphes précédents. Nous les résumons par le diagramme des phase de la Fig. 6.8 qui montre que nos résultats sont pertinents à la fois vis-à-vis des systèmes vitreux classiques (axe Forçage = 0) et vis-à-vis des matériaux granulaires (axe Température = 0). Par là-même, nous voulons aussi insister sur le fait que nous ne prétendons nullement proposer ici un nouveau modèle microscopique pour les matériaux granulaires, mais plutôt proposer une étude théorique permettant d'établir un lien concret entre systèmes vitreux classiques (par exemple les liquides moléculaires) et matériaux granulaires.

Notre analyse a ainsi montré l'existence d'une transition dynamique dans le plan (Forçage - Température) entre une phase vitreuse (I) et une phase liquide (II), cf Fig. 6.8. Cette ligne de transition relie la transition dynamique standard du modèle p -spin à $T = T_c$ à celle ayant lieu à $T = 0$ lorsque l'amplitude de la vibration est variée. Cette dernière est l'analogue directe de celle rencontrée expérimentalement dans les expériences de Chicago³ [297]. L'existence de cette 'transition vitreuse dynamique' donne donc un cadre théorique très naturel pour interpréter les résultats expérimentaux. Sous la transition, le système est dans une phase vitreuse, caractérisée par un temps de relaxation infini. Ceci explique donc pourquoi on peut observer des effets vitreux typiques, tels que vieillissement ou hystérésis : toute l'histoire de l'échantillon devient pertinente, la dynamique n'est pas stationnaire.

Le deuxième point majeur qui émerge de notre étude est que la notion de température effective définie par les violations du FDT, reste bien définie en présence d'une perturbation sinusoïdale. Cette prédiction théorique forte demande bien sûr à être testée numériquement ou expérimentalement. À cet égard, les premiers résultats dans cette direction sont extrêmement positifs [319, 320].

3. La gamme de forçage explorée par Nicolas *et al.* [300] est pour l'instant trop petite pour pouvoir conclure à l'existence de cette transition dans leurs expériences (communication privée de M. Nicolas).

Ce dernier résultat soulève bien sûr la très intéressante question d'une possible description de la matière granulaire faiblement sollicitée par la physique statistique. L'apparition d'une notion clairement définie de température dans un système (1) athermique, (2) forcé par une contrainte extérieure, est un signe assez prometteur. Nous avons donné l'interprétation statique de la température effective dans les modèles champ moyen en termes de la complexité Σ , Eq. (1.13). Cette relation permet de faire le contact avec une approche qui date de la fin des années 80, développée par Edwards et ses collaborateurs [321], consistant à proposer une mécanique statistique adaptée aux matériaux granulaires. Dans ce contexte, on postule l'existence de relations thermodynamiques où le volume V remplace l'énergie interne U . L'entropie S dénombre alors le nombre de configurations stables (c'est-à-dire où chaque grain est immobile, ou bloqué) ayant le volume V , conduisant à la définition de l'analogie de la température, la 'compactivité' X , par $X^{-1} \equiv \partial S / \partial V$. La traduction de ce formalisme pour les modèles champ moyen permet l'identification $S \leftrightarrow \Sigma$ [322]. La conséquence est donc que dans notre approche, *la température effective et la compactivité coïncident*, $T_{\text{eff}} = X$ [98]. Le modèle p -spin fournit donc un modèle microscopique où les idées mises en avant par Edwards se réalisent exactement.

Notons enfin que l'étude que nous avons réalisée du modèle p -spin avec un nombre fini de spins constitue une des façons d'aller au-delà de l'approximation de champ moyen. Il est intéressant dans ce contexte de rappeler le parallèle entre l'existence des états métastables, de leur influence sur la dynamique, avec la notion de contrainte seuil discutée au paragraphe 4.1.4. L'analogie dans le contexte des milieux granulaires est l'effet bien connu de la 'dilatance de Reynolds' [323] : pour faire s'écouler un milieu granulaire dense, celui-ci doit d'abord augmenter son volume (il se dilate) avant de s'écouler. De même, dans notre approche, le système piégé dans un état métastable doit d'abord élever son énergie pour pouvoir ensuite s'en échapper. Cet effet trouve donc ici une interprétation simple en termes de la structure de l'espace des phases du modèle.

Nos résultats, obtenus à partir d'un modèle microscopique, permettent donc d'interpréter simplement le comportement des matériaux granulaires faiblement sollicités par l'existence d'une 'transition vitreuse dynamique'. Cette approche donne de plus une justification théorique à l'approche thermodynamique d'Edwards et ses collaborateurs. Ces résultats, et plus généralement les concepts issus de la théorie champ moyen, demandent bien sûr à être testés dans des modèles plus réalistes. C'est le programme qui a été commencé dans les Refs. [111], où 2 modèles ont été étudiés numériquement en dimension finie. Signalons enfin 2 travaux très récents qui étudient des modèles de spin sur des graphes aléatoires : s'ils ne sont pas plus réalistes pour décrire la matière granulaire que le modèle p -spin, ils ont le mérite d'être définis en dimension finie et de permettre des développements analytiques [324, 325].

7. CONCLUSION

“N’est-ce pas là la conclusion de ma pensée inachevée...?”

V. AXIONOV, *Une saga moscovite.*

L’étude de la dynamique des systèmes vitreux présente un double intérêt pratique et fondamental, et concerne une large variété de systèmes microscopiques. Nous avons abordé certains des problèmes théoriques liés à cette dynamique hors équilibre dans deux situations expérimentales assez différentes : le régime de vieillissement, puis plus longuement le régime où la dynamique est forcée. Si la première situation avait donné lieu à de nombreux travaux, la seconde est un aspect plus original de ce travail.

Nous avons abordé la question du vieillissement des systèmes vitreux avec le but de comparer quantitativement les deux approches que sont les modèles de croissances de domaines, critiques ou non, et la théorie de champ moyen (chapitre 2). Nous avons ainsi montré que si les phénomènes de croissance de domaines fournissent une modélisation simple du vieillissement observé sur les courbes de la Fig. 1.2, le calcul des fonctions de réponse révèle des violations du FDT qualitativement différentes de celles observés à la fois dans les verres structuraux et les verres de spin.

Nous avons ensuite montré que la croissance de domaines au point critique, où les fluctuations critiques s’équilibrent d’autant plus vite que leur longueur d’onde est petite, permet de reproduire quantitativement le comportement observé dans les verres de spin de dimension finie, tant au niveau de la corrélation que de la susceptibilité. Ceci nous a conduit en retour à apporter un éclairage tout à fait nouveau sur la relation statique / dynamique formulée initialement dans le contexte des modèles champ moyen de verres de spin. Nous en avons proposé une généralisation, qui étend son domaine de validité au domaine physiquement accessible, tout en tenant compte d’une description spatiale du processus de vieillissement. Les conséquences physiques de cette correspondance entre temps fini dans la dynamique et taille finie dans la statique nous paraissent importantes, et nous en avons abordé quelques-unes à travers l’étude numérique d’un verre de spin à 2 dimensions.

Par ailleurs, le test de notre conjecture (2.69) reliant temps fini à taille finie serait particulièrement intéressante dans le cas des verres structuraux, puisque nos connaissances sur la taille, la forme et la dynamique des ‘excitations’ qui régissent les comportements d’équilibre et hors équilibre de ces systèmes sont encore assez réduites. De même, il serait intéressant de posséder un modèle de type croissance de domaines susceptibles de reproduire le comportement des verres structuraux. Dans ce contexte, les modèles ferromagnétiques frustrés à longue portée par une interaction antiferromagnétique paraissent d’excellents candidats, dont l’étude mérite d’être encore approfondie. C’est aussi l’une des voies dans laquelle nous voulons maintenant nous engager.

Une grande partie de notre travail a porté sur la description théorique de la dynamique forcée des systèmes vitreux. Là aussi, nous avons suivi les deux pistes que constituent les

modèles de croissance de domaines (chapitre 3) et la théorie champ moyen (chapitres 4, 5, 6). Si le problème de la séparation de phase sous cisaillement homogène nous paraît désormais relativement fermé dans le cas où l'hydrodynamique est négligée, la question des effets inertiels reste entière. Toutefois, son investigation numérique nécessitant d'importants moyens, ce problème devra sans doute attendre sa solution quelque temps encore. Nous n'avons exploré ici qu'une toute petite partie du problème des écoulement plus complexes, et c'est une voie dans laquelle nous souhaitons encore porter notre effort de recherche. Des travaux analytiques, dans l'esprit des méthodes employées pour étudier le problème de l'advection d'un scalaire passif, pourraient en particulier apporter une description plus quantitative des propriétés de l'état stationnaire dynamique atteint en présence de chaos Lagrangien.

Une dernière et importante partie de nos travaux a porté sur l'étude de la dynamique forcée de modèles désordonnés de type champ moyen. Nous nous sommes ainsi intéressés à des systèmes tels que verres structuraux, matériaux vitreux mous (chapitre 4), et verres de spin (chapitre 5) en présence d'un forçage non-Hamiltonien constant. Le cas d'un forçage Hamiltonien alternatif a aussi été considéré (chapitre 6).

Nos résultats nous ont ainsi permis de donner une description quantitative du diagramme des phases Température – Forçage pour un système vitreux, en nous attachant à des aspects microscopiques (forme de la relaxation) et macroscopiques (courbes d'écoulement, existence d'une transition dynamique) du comportement du système forcé. Un aspect nouveau pour cette classe de systèmes est la prédiction de l'existence d'une température effective pour les degrés de liberté lents. Si ce dernier point était présent lors de précédentes études du régime de vieillissement, nous avons très clairement démontré sa robustesse vis-à-vis d'un forçage extérieur.

Nous avons testé avec succès cette dernière prédiction dans la simulation numérique d'un liquide de type Lennard-Jones. Il nous semble toutefois que plusieurs aspects du comportement rhéologique de ce système seraient encore à étudier. Par exemple, le modèle champ moyen prédit que toutes les observables lentes du système doivent conduire à la même valeur de la température effective. Cette prédiction forte mérite d'être testée. Par là-même, nous espérons aussi stimuler les groupes expérimentaux concernés. Une mesure alternative de la température effective consiste par exemple à ajouter dans le système des particules plus massives jouant le rôle de traceurs. L'étude de leurs propriétés de diffusion et de la relation d'Einstein associée donne alors accès à une relation de fluctuation-dissipation indépendante de celle étudiée au chapitre 4. Cette méthode aurait de plus l'avantage d'être plus commodément réalisable expérimentalement. Enfin, la théorie champ moyen ne prédit rien sur l'influence de l'écoulement sur les propriétés de relaxation des différentes échelles de longueur, ni sur les éventuelles hétérogénéités présentes dans un système réel, questions auxquelles la simulation numérique peut apporter une réponse.

Enfin, si le comportement générique des différents systèmes vitreux mentionnés dans l'introduction est bien décrit par les modèles simples étudiés dans ce travail, il n'en reste pas moins que chacun d'entre eux est susceptible de présenter des caractéristiques qui lui sont propres. Passer de notre description simple et générale à des résultats expérimentaux peut alors nécessiter de s'intéresser à des détails plus microscopiques permettant ainsi, par exemple, de tester la robustesse de nos résultats au-delà de l'approximation du champ moyen dans des systèmes plus réalistes.

...et c'est tout! Les Têtes Raides.

8. ANNEXE : PUBLICATIONS

“Tes articles paraissent en revue, on te considère comme un théoricien. Rassemble [...] à la fin!”
V. AXIONOV, *Une saga moscovite.*

L. Berthier, J.-L. Barrat and J. Kurchan

Response Function of Coarsening Systems, Eur. Phys. J. B **11**, 635 (1999).

L. Berthier

Sub-aging in a domain growth model, Eur. Phys. J. B **17**, 689 (2000).

L. Berthier, P. C. W. Holdsworth and M. Sellitto

Nonequilibrium critical dynamics of the 2D XY model, J. Phys. A **34**, 1805 (2001).

A. Barrat and L. Berthier

Real space application of the mean-field description of spin glass dynamics, preprint cond-mat/0102151.

L. Berthier

Phase separation in an homogeneous shear flow: Morphology, growth laws and dynamic scaling, Phys. Rev. E **63**, 051503 (2001).

L. Berthier, J.-L. Barrat and J. Kurchan

Phase separation in a chaotic flow, Phys. Rev. Lett. **86**, 2014 (2001).

L. Berthier, J.-L. Barrat and J. Kurchan

A two-time-scale, two-temperature scenario for nonlinear rheology, Phys. Rev. E **61**, 5464 (2000).

J.-L. Barrat and L. Berthier

Fluctuation-dissipation relation in a sheared fluid, Phys. Rev. E **63**, 012503 (2001).

L. Berthier, J.-L. Barrat and J. Kurchan

Dynamic ultrametricity in spin glasses, Phys. Rev. E **63**, 016105 (2001).

L. Berthier, L. F. Cugliandolo and J. L. Iguain

Glassy systems under time-dependent driving forces: application to slow granular rheology, Phys. Rev. E **63**, 051302 (2001).

F. Vandenbrouck, L. Berthier and F. Gheusi

Coriolis force in Geophysics: an elementary introduction and examples, Eur. J. Phys. **21**, 359 (2000).

BIBLIOGRAPHIE

- [...] *À neuf heures, j'étais déjà là, au bureau, à passer en revue les papiers que je passe en revue depuis des années, les articles que les auteurs eux-mêmes ne se souviennent plus d'avoir écrits.* Z. VALDÈS, *Le néant quotidien*.
- [1] H. B. Callen, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics* (Wiley, New York, 1985).
- [2] S. K. Ma, *Statistical mechanics* (World Scientific, Singapore, 1985).
- [3] M. Lesieur, *Turbulence in Fluids* (Kluwer, Amsterdam, 1997).
- [4] W. H. Zurek, *Decoherence and the transition from quantum to classical*, Phys. Today **44**, 36 (1991).
- [5] J. Villain and A. Pimpinelli, *Physique de la croissance cristalline* (Aléa Saclay, Paris, 1995).
- [6] E. Ott, *Chaos in dynamical systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [7] S. K. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena* (Benjamin, New York, 1976).
- [8] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin, *Theory of dynamic critical phenomena*, Rev. Mod. Phys. **49**, 435 (1977).
- [9] *Spin glasses and random fields*, Ed.: A. P. Young (World Scientific, Singapore, 1998).
- [10] S. R. de Groot and P. Mazur, *Non-equilibrium Thermodynamics* (Dover, New York, 1984).
- [11] S. Datta, *Electronic transport in mesoscopic systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [12] S. Brawer, *Relaxation in Viscous Liquids and Glasses* (The American Ceramic Society, Columbus, 1985).
- [13] C. A. Angell, *Formation of glasses from liquids and biopolymers*, Science **267**, 1924 (1995).
- [14] M. Mézard, G. Parisi, M. A. Virasoro, *Spin glass theory and beyond* (World Scientific, Singapore, 1987); K. H. Fischer and J. A. Hertz, *Spin glasses* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991); K. Binder and A. P. Young, *Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts and open questions*, Rev. Mod. Phys. **58**, 801 (1986).

- [15] R. G. Larson, *The structure and rheology of complex fluids* (Oxford University Press, New York, 1999).
- [16] *Soft and fragile matter: nonequilibrium dynamics, metastability and flow*, Eds.: M. E. Cates and M. R. Evans (Institute of Physics Publishing, Bristol, 2000).
- [17] *Granular Matter: An interdisciplinary approach*, Ed.: A. Mehta (Springer Verlag, Berlin, 1994).
- [18] T. Nattermann and S. Scheidl, *Vortex-glass phases in type-II superconductors*, Adv. Phys. **49**, 607 (2000); G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin and A. M. Vinokur, *Vortices in high-temperature superconductors*, Rev. Mod. Phys. **66**, 1125 (1994).
- [19] K. Biljakovic, J. C. Lasjaunias and P. Monceau, *Aging effects and nonexponential energy relaxations in charge-density wave systems*, Phys. Rev. Lett. **62**, 1512 (1989); K. Biljakovic, J. C. Lasjaunias, P. Monceau and F. Levy, *Towards equilibrium ground state in charge-density-wave systems*, Phys. Rev. Lett. **67**, 1902 (1991).
- [20] M. Fisher, *Vortex glass superconductivity: A possible new phase in bulk High- T_c oxides*, Phys. Rev. Lett. **62**, 1415 (1989).
- [21] G. Toulouse, *Theory of the frustration effect in spin glasses*, Comm. Phys. **2**, 115 (1977).
- [22] J.-P. Bouchaud, L. F. Cugliandolo, J. Kurchan and M. Mézard, *Out of equilibrium dynamics in spin glasses and other glassy systems*, in Ref. [9].
- [23] J.-P. Bouchaud, *Aging in glassy systems: new experiments, simple models, and open questions*, in Ref. [16].
- [24] L. C. E. Struik, *Physical aging in amorphous polymers and other materials* (Elsevier, Amsterdam, 1978).
- [25] L. Cipelletti, S. Manley, R. C. Ball and D. A. Weitz, *Universal aging features in the restructuring of fractal colloidal gels*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2275 (2000).
- [26] W. Kob and J.-L. Barrat, *Aging effects in a Lennard-Jones glass*, Phys. Rev. Lett. **78**, 4581 (1997).
- [27] M. Kroon, G. Wegdam and R. Sprik, *Dynamic light scattering studies on the sol-gel transition of a suspension of anisotropic colloidal particles*, Phys. Rev. E **54**, 1 (1996); D. Bonn, H. Tanaka, G. Wegdam, H. Kellay and J. Meunier, *Aging of a colloidal 'Wigner' glass*, Europhys. Lett. **45**, 52 (1999); A. Knaebel, M. Bellour, J.-P. Munch, V. Viasnoff, F. Lequeux and J. L. Harden, *Aging behavior of Laponite clay particle suspension*, Europhys. Lett. **52**, 73 (2000).
- [28] C. Rossel, Y. Maeno and I. Morgenstern, *Memory effects in a superconducting Y-Ba-Cu-O single crystal: A similarity to spin-glasses*, Phys. Rev. Lett. **62**, 681 (1989).
- [29] M. Cloitre, R. Borrega and L. Leibler, *Rheological Aging and Rejuvenation in Microgel Pastes*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4819 (2000).

- [30] C. Dérec, A. Ajdari, G. Ducouret and F. Lequeux, *Rheological characterization of aging in a concentrated colloidal suspension*, C. R. Acad. Sci. Paris IV **1**, 1115 (2000).
- [31] E. Vincent, J. Hamman, M. Ocio, J.-P. Bouchaud and L. F. Cugliandolo, *Slow dynamics and aging in spin glasses*, in *Complex behavior of glassy systems*, Ed.: M. Rubi (Springer Verlag, Berlin, 1997); P. Nordblad and P. Svendlidh, *Experiments on spin glasses*, in Ref. [9].
- [32] H. Yoshino, *Off-equilibrium dynamics of a (1+1)-dimensional directed polymer in random media*, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 1421 (1996); *Aging effects of an elastic string in a disordered media*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1493 (1998).
- [33] A. Vaknin, Z. Ovadyahu and M. Pollak, *Aging effects in an Anderson insulator*, Phys. Rev. Lett. **84**, 3402 (2000).
- [34] K. Jonason, E. Vincent, J. Hammann, J.-P. Bouchaud and P. Nordblad, *Memory and chaos effects in spin glasses*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3243 (1998).
- [35] L. Bellon, S. Ciliberto and C. Laroche, *Memory in the aging of a polymer glass*, Europhys. Lett. **51**, 551 (2000).
- [36] F. Alberici-Kious, J.-P. Bouchaud, L. F. Cugliandolo, P. Doussineau and A. Levelut, *Aging in $K_{1-x}Li_xTaO_3$: A domain growth interpretation*, Phys. Rev. Lett. **81**, 4987 (1998); J.-P. Bouchaud, P. Doussineau, T. de Lacerda-Aroso and A. Levelut, *Frequency dependence of aging, rejuvenation and memory in a disordered ferroelectric*, preprint cond-mat/0011190.
- [37] J. O. Andersson, J. Mattson and P. Svedlindh, *Monte Carlo studies of Ising spin glass systems: aging behavior and crossover between equilibrium and nonequilibrium dynamics*, Phys. Rev. B **46**, 8297 (1992).
- [38] D. Mukamel, *Phase transitions in nonequilibrium systems*, in Ref. [16].
- [39] P. A. Nommensen, M. H. G. Duits, D. van den Ende and J. Mellema, *Steady shear behavior of polymerically stabilized suspensions: experiments and lubrication based modelling*, Phys. Rev. E **59**, 3147 (1999).
- [40] D. R. Strachan, M. C. Sullivan, P. Fournier, S. P. Pai, T. Venkatesan and C. J. Lobb, *Is there a vortex glass transition in high- T_c superconductors?*, preprint cond-mat/0011014.
- [41] R. K. Koch, V. Foglietti, W. J. Gallagher, G. Koren, A. Gupta and M. P. A. Fisher, *Experimental evidence for vortex glass superconductivity in Y-Ba-Cu-O*, Phys. Rev. Lett. **63**, 1511 (1989).
- [42] J. Kurchan, *Rheology, or how to stop aging*, in *Jamming and Rheology: Constrained dynamics on microscopic and macroscopic scales*, Eds.: A. Liu and S. R. Nagel (Taylor and Francis, New York, 2001).
- [43] *Foams and emulsions*, Eds.: J. F. Sadoc and N. Rivier (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999).

- [44] H. M. Jaeger and S. R. Nagel, *Physics of the granular state*, Science **255**, 1523 (1992).
- [45] H. M. Jaeger, S. R. Nagel and R. P. Behringer, *Granular solids, liquids and gases*, Rev. Mod. Phys. **68**, 1259 (1996).
- [46] P. G. de Gennes, *Granular matter: A tentative view*, Rev. Mod. Phys. **71**, S374 (1999).
- [47] B. Schiener, R. V. Chamberlin, G. Diezemann and R. Böhmer, *Nonresonant dielectric hole burning spectroscopy of supercooled liquids*, J. Chem. Phys. **107**, 7746 (1997); R. V. Chamberlin, *Nonresonant spectral hole burning in a spin glass*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5134 (1999).
- [48] A. J. Liu and S. R. Nagel, *Jamming is not just cool any more*, Nature **396**, 21 (1998).
- [49] V. M. Vinokur, M. C. Marchetti and L. W. Chen, *Glassy motion of elastic manifolds*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1845 (1996).
- [50] J. D. Gunton, M. San Miguel and P. S. Sahni, *The dynamics of first-order phase transitions*, in *Phase transitions and critical phenomena*, vol. 8, Eds: C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic Press, New York, 1988).
- [51] A. J. Bray, *Theory of phase ordering kinetics*, Adv. Phys. **43**, 357 (1994).
- [52] D. S. Fisher and D. A. Huse, *Ordered phase of short-range Ising spin-glasses*, Phys. Rev. Lett. **56**, 1601; *Equilibrium behavior of the spin-glass ordered phase*, Phys. Rev. B **38**, 386 (1988); *Nonequilibrium dynamics of spin glasses*, Phys. Rev. B **38**, 373 (1988).
- [53] D. S. Fisher, M. P. A. Fisher and D. Huse, *Thermal fluctuations, quenched disorder, phase transitions, and transport in type-II superconductors*, Phys. Rev. B **43**, 130 (1991).
- [54] G. Tarjus, D. Kivelson and P. Viot, *Viscous slowing down of supercooled liquids as a temperature-controlled super-Arrhenius activated process: A description in terms of frustration-limited domains*, J. Phys. C: Condens. Matter **12**, 6497 (2000).
- [55] T. R. Kirkpatrick, D. Thirumalai and P. G. Wolynes, *Scaling concepts for the dynamics of viscous liquids near an ideal glassy state*, Phys. Rev. A **40**, 1045 (1989).
- [56] R. M. Ernst, S. R. Nagel and G. S. Grest, *Search for a correlation length in a simulation of the glass transition*, Phys. Rev. B **43**, 8070 (1991).
- [57] D. N. Perera and P. Harrowell, *Origin of the difference in the temperature dependences of diffusion and structural relaxation in a supercooled liquid*, Phys. Rev. Lett. **81**, 120 (1998).
- [58] R. Yamamoto and A. Onuki, *Heterogeneous diffusion in highly supercooled liquids*, Phys. Rev. Lett. **81**, 4915 (1998).
- [59] C. Donati, S. C. Glotzer, P. H. Poole, W. Kob and S. J. Plimpton, *Spatial correlations of mobility and immobility in a glass-forming Lennard-Jones liquid*, Phys. Rev. E **60**, 3107 (1999).

- [60] U. Tracht, M. Wilhelm, A. Heuer, H. Feng, K. Schmidt-Rohr and H. W. Spiess, *Length scale of dynamic heterogeneities at the glass transition determined by multi-dimensional nuclear magnetic resonance*, Phys. Rev. Lett. **81**, 2727 (1998).
- [61] C.-Y. Wang and M. D. Ediger, *How long do regions of different dynamics persist in supercooled o-terphenyl?*, J. Phys. Chem. B **103**, 4177 (1999).
- [62] E. Vidal Russell and N. E. Israeloff, *Direct observation of molecular cooperativity near the glass transition*, Nature **408**, 695 (2000).
- [63] Gross and Mézard, *The simplest spin glass*, Nucl. Phys. B **240**, 431 (1984); A. Crisanti and H. J. Sommers, *The spherical p-spin interaction spin glass: The statics*, Z. Phys. B **87**, 341 (1992).
- [64] D. Sherrington and S. Kirkpatrick, *Solvable model of a spin glass*, Phys. Rev. Lett. **35**, 1792 (1975).
- [65] C. De Dominicis, *Dynamics as a substitute for replicas in systems with quenched random impurities*, Phys. Rev. B **18**, 4913 (1978).
- [66] P. C. Martin, E. D. Siggia and H. A. Rose, *Statistical dynamics of classical systems*, Phys. Rev. A **8**, 423 (1973).
- [67] H. Sompolinsky and A. Zippelius, *Dynamic theory of the spin glass phase*, Phys. Rev. Lett. **47**, 359 (1981); *Relaxational dynamics of the Edwards-Anderson model and the mean-field theory of spin glasses*, Phys. Rev. B **25**, 6860 (1982).
- [68] L. F. Cugliandolo and J. Kurchan, *Analytical solution of the off-equilibrium dynamics of a long-range spin glass model*, Phys. Rev. Lett. **71**, 173 (1993).
- [69] L. F. Cugliandolo and J. Kurchan, *On the out of equilibrium relaxation of the Sherrington-Kirkpatrick model*, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 5749 (1994).
- [70] L. F. Cugliandolo and J. Kurchan, *Weak ergodicity breaking in mean-field spin glass models*, Philos. Mag. B **71**, 501 (1995).
- [71] S. Franz and M. Mézard, *Off-equilibrium glassy dynamics: A simple case*, Europhys. Lett. **26**, 209 (1994); *On mean-field glassy dynamics out of equilibrium*, Physica A **210**, 48 (1994).
- [72] J.-P. Bouchaud, L. F. Cugliandolo, J. Kurchan and M. Mézard, *Mode-Coupling approximation, glass theory and disordered systems*, Physica A **226**, 243 (1996).
- [73] W. Götze, *Aspects of structural glass transitions*, in *Liquids, Freezing and Glass Transition*, Eds.: J.P. Hansen, D. Levesque and J. Zinn-Justin, Les Houches 1989, (North Holland, Amsterdam, 1991); W. Götze and L. Sjögren, *Relaxation processes in supercooled liquids*, Rep. Prog. Phys. **55**, 241 (1992); W. Götze, *Recent tests of the mode-coupling theory for glassy dynamics*, J. Phys. C: Condens. Matter **11**, A1 (1999).
- [74] T. R. Kirkpatrick and D. Thirumalai, *p-spin interaction spin glass models: Connections with the structural glass problem*, Phys. Rev. B **36**, 5388 (1987); T. R. Kirkpatrick and P. G. Wolynes, *Connections between some kinetic and equilibrium theories of the glass transition*, Phys. Rev. A **35**, 3072 (1987).

- [75] A. Latz, *Nonequilibrium mode-coupling theory for supercooled liquids and glasses*, J. Phys. C: Condens. Matter **12**, 6353 (2000).
- [76] L. F. Cugliandolo, J. Kurchan and L. Peliti, *Energy flow, partial equilibration and effective temperatures in systems with slow dynamics*, Phys. Rev. E **55**, 3898 (1997).
- [77] J.-L. Barrat and W. Kob, *Fluctuation-dissipation ratio in an aging Lennard-Jones glass*, Europhys. Lett. **46**, 637 (1999).
- [78] E. Marinari, G. Parisi, F. Ricci-Tersenghi and J. J. Ruiz-Lorenzo, *Violation of the fluctuation dissipation theorem in finite dimensional spin glasses*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 2611 (1998).
- [79] S. Franz and H. Rieger, *Fluctuation-dissipation ratio in three-dimensional spin glasses*, J. Stat. Phys. **79**, 749 (1995); E. Marinari, G. Parisi, F. Ricci-Tersenghi and J. J. Ruiz-Lorenzo, *Off-equilibrium dynamics at very low temperatures in three-dimensional spin glasses*, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 2373 (2000).
- [80] A. Barrat, *Monte-Carlo simulations of the violation of the fluctuation-dissipation theorem in domain growth processes*, Phys. Rev. E **57**, 3629 (1998).
- [81] L. F. Cugliandolo and D. S. Dean, *Full dynamical solution for a spherical spin-glass model*, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 4213 (1995).
- [82] S. A. Cannas, D. A. Stariolo and F. A. Tamarit, *Dynamics of ferromagnetic spherical spin models with power law interactions: exact solution*, preprint cond-mat/0010319; D. A. Stariolo and S. A. Cannas, *Violation of the Fluctuation-Dissipation Theorem in a Two-Dimensional Ising Model with Dipolar Interactions*, Phys. Rev. B **60**, 3013 (1999).
- [83] G. Parisi, F. Ricci-Tersenghi and J. J. Ruiz-Lorenzo, *Generalized off-equilibrium fluctuation-dissipation relations in random Ising systems*, Eur. Phys. J. B **11**, 317 (1999).
- [84] M. Sellitto, *Fluctuation-dissipation ratio in lattice-gas models with kinetic constraints*, Eur. Phys. J. B **4**, 135 (1998).
- [85] G. Parisi, *Off-equilibrium fluctuation-dissipation relation in fragile glasses*, Phys. Rev. Lett. **79**, 3660 (1997); R. di Leonardo, L. Angelani, G. Parisi and G. Ruocco, *Off-equilibrium effective temperature in monoatomic Lennard-Jones glass*, Phys. Rev. Lett. **84**, 6054 (2000).
- [86] T. S. Grigera and N. E. Israeloff, *Observation of fluctuation-dissipation theorem violations in a structural glass*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5038 (1999).
- [87] L. Bellon, S. Ciliberto and C. Laroche, *Fluctuation-dissipation theorem violation during the formation of a colloidal glass*, Europhys. Lett. **53**, 511 (2001).
- [88] L. Bellon, *Vieillissement des systèmes vitreux et rapport fluctuation-dissipation*, Thèse de l'ENS-Lyon (2001).

- [89] J. Kurchan, *Recent theories of glasses as out of equilibrium systems*, C. R. Acad. Sci. Paris (à paraître).
- [90] E. D. Zanotto, *Do cathedral glasses flow?*, Am. J. Phys. **66**, 392 (1998).
- [91] C. A. Angell, *Ten questions on glassformers, and a real space 'excitations' model with some answers on fragility and phase transition*, J. Phys. C: Condens. Matter **12**, 6463 (2000).
- [92] G. Tarjus and D. Kivelson, *The viscous slowing down of supercooled liquids and the glass transition: Phenomenology, concepts and models*, in *Jamming and Rheology: Constrained dynamics on microscopic and macroscopic scales*, Eds.: A. Liu and S. R. Nagel (Taylor and Francis, New York, 2001).
- [93] J. Kurchan, G. Parisi and M. A. Virasoro, *Barriers and metastable states as saddles in the replica approach*, J. Phys. I (France) **3**, 1819 (1993).
- [94] A. Cavagna, I. Giardina and G. Parisi, *Stationary points of the Thouless-Anderson-Palmer free energy*, Phys. Rev. B **57**, 11251 (1998).
- [95] D. J. Thouless, P. W. Anderson and R. G. Palmer, *Solution of 'Solvable model of a spin glass'*, Phil. Mag. **35**, 593 (1977).
- [96] M. Mézard and G. Parisi, *Thermodynamics of glasses: A first-principle computation*, Phys. Rev. Lett. **82**, 747 (1999); *A first-principle computation of the thermodynamics of glasses*, J. Chem. Phys. **111**, 1076 (1999).
- [97] B. Coluzzi, G. Parisi and P. Verrocchio, *Thermodynamical liquid-glass transition in a Lennard-Jones binary mixture*, Phys. Rev. Lett. **84**, 306 (2000); *Lennard-Jones binary mixture: A thermodynamical approach to glass transition*, J. Chem. Phys. **112**, 2933 (2000).
- [98] R. Monasson, *Structural glass transition and the entropy of metastable states*, Phys. Rev. Lett. **75**, 2847 (1995).
- [99] K. Broderix, K. K. Batthacharya, A. Cavagna, A. Zippelius and I. Giardina, *Energy landscape of a Lennard-Jones liquid: Statistics of stationary points*, Phys. Rev. Lett. **85**, 5360 (2000); L. Angelani, R. Di Leonardo, G. Ruocco, A. Scala and F. Sciortino, *Saddles in the energy landscape probed by supercooled liquids*, Phys. Rev. Lett. **85**, 5356 (2000).
- [100] A. Cavagna, *Fragile vs strong liquids: a saddles ruled scenario*, Europhys. Lett. **53**, 490 (2001).
- [101] Les papiers originaux de G. Parisi conduisant à la solution du modèle de Sherrington-Kirkpatrick sont reproduits dans la Ref. [14].
- [102] S. F. Edwards and P. W. Anderson, *Theory of spin glasses*, J. Phys. F **5** 965 (1975).
- [103] G. Parisi, *Order parameter for spin glasses*, Phys. Rev. Lett. **50**, 1946 (1983).

- [104] M. Mézard, G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse and M. A. Virasoro, *Replica symmetry breaking and the nature of the spin glass phase*, J. Phys. **45**, 843 (1985); M. Mézard and M. A. Virasoro, *The microstructure of ultrametricity*, J. Phys. **46**, 1293 (1985).
- [105] R. Rammal, G. Toulouse and M. A. Virasoro, *Ultrametricity for physicists*, Rev. Mod. Phys. **58**, 765 (1986).
- [106] M. Picco, F. Ricci-Tersenghi and F. Ritort, *Chaotic, memory and cooling rate effects in spin glasses: Evaluation of the Edwards-Anderson model*, Phys. Rev. B **63**, 174412 (2001).
- [107] Th. M. Nieuwenhuizen, *Thermodynamics of the glassy state: Effective temperature as an additional system parameter*, Phys. Rev. Lett. **80**, 5580 (1998).
- [108] F. H. Stillinger and T. A. Weber, *Hidden structure in liquids*, Phys. Rev. A **25**, 978 (1982); *Packing structures and transitions in liquids and solids*, Science **225**, 983 (1984); F. H. Stillinger, *A topographic view of supercooled liquids and glass formation*, Science **267**, 1935 (1995).
- [109] S. Sastry, *Evaluation of configurational entropy of a model liquid from computer simulations*, J. Phys. C: Condens. Matter **12**, 6515 (2000); S. Buechner and A. Heuer, *Metastable states as a key to the dynamics of supercooled liquids*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2168 (2000); F. Sciortino, W. Kob, P. Tartaglia, *Inherent Structure Entropy of Supercooled Liquids*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3214 (1999); A. Crisanti and F. Ritort, *Activated processes and inherent structure dynamics of finite-size mean-field models for glasses*, Europhys. Lett. **52**, 640 (2000).
- [110] G. Biroli and J. Kurchan, *Metastable states in glassy systems*, Phys. Rev. E (à paraître).
- [111] A. Barrat, J. Kurchan, V. Loreto and M. Sellitto, *Edwards measures for powders and glasses*, Phys. Rev. Lett. **85**, 5034 (2000); *Edwards' measures: A thermodynamic construction for dense granular media and glasses*, Phys. Rev. E **63**, 051301 (2001).
- [112] S. Franz, M. Mézard, G. Parisi and L. Peliti, *Measuring equilibrium properties in aging systems*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1758 (1998); *The response of glassy systems to random perturbations: A bridge between equilibrium and off-equilibrium*, J. Stat. Phys. **97**, 459 (1999).
- [113] S. Franz and M. A. Virasoro, *Quasi-equilibrium interpretation of ageing dynamics*, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 891 (2000).
- [114] L. Berthier, J.-L. Barrat and J. Kurchan, *Response Function of Coarsening Systems*, Eur. Phys. J. B **11**, 635 (1999).
- [115] L. Berthier, *Sub-aging in a domain growth model*, Eur. Phys. J. B **17**, 689 (2000).
- [116] L. Berthier, P. C. W. Holdsworth and M. Sellitto, *Nonequilibrium critical dynamics of the 2D XY model*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 1805 (2001).
- [117] A. Barrat and L. Berthier, *Real space application of the mean-field description of spin glass dynamics*, preprint cond-mat/0102151.

- [118] L. Berthier, *Phase separation in an homogeneous shear flow: Morphology, growth laws and dynamic scaling*, Phys. Rev. E **63**, 051503 (2001).
- [119] L. Berthier, J.-L. Barrat and J. Kurchan, *Phase separation in a chaotic flow*, Phys. Rev. Lett. **86**, 2014 (2001).
- [120] L. Berthier, J.-L. Barrat and J. Kurchan, *A two-time-scale, two-temperature scenario for nonlinear rheology*, Phys. Rev. E **61**, 5464 (2000).
- [121] J.-L. Barrat and L. Berthier, *Fluctuation-dissipation relation in a sheared fluid*, Phys. Rev. E **63**, 012503 (2001).
- [122] L. Berthier, J.-L. Barrat and J. Kurchan, *Dynamic ultrametricity in spin glasses*, Phys. Rev. E **63**, 016105 (2001).
- [123] L. Berthier, L. F. Cugliandolo and J. L. Iguain, *Glassy systems under time-dependent driving forces: application to slow granular rheology*, Phys. Rev. E **63**, 051302 (2001).
- [124] C. Godrèche and J.-M. Luck, *Response of non-equilibrium systems at criticality: Exact results for the Glauber-Ising chain*, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 1151 (2000).
- [125] C. Godrèche and J.-M. Luck, *Response of non-equilibrium systems at criticality: Ferromagnetic models in dimension two and above* J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 9141 (2000).
- [126] E. Lippiello and M. Zannetti, *Fluctuation dissipation ratio in the one dimensional kinetic Ising model*, Phys. Rev. E **61**, 3369 (2000).
- [127] F. Corberi, E. Lippiello and M. Zannetti, *Interface fluctuations, bulk fluctuations and dimensionality in the off-equilibrium response of coarsening systems*, preprint cond-mat/0007021.
- [128] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [129] D. A. Huse, *Corrections to late-stage behavior in spinodal decomposition: Lifshitz-Slyosov scaling and Monte Carlo simulations*, Phys. Rev. B **34**, 7845 (1986).
- [130] L. F. Cugliandolo, J. Kurchan and G. Parisi, *Off equilibrium dynamics and aging in unfrustrated systems*, J. Phys. I (France) **4**, 1641 (1994).
- [131] T. Ohta, D. Jasnow and K. Kawasaki, *Universal scaling in the motion of random interfaces*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1223 (1982).
- [132] J. Kurchan and L. Laloux, *Phase space geometry and slow dynamics*, J. Phys A: Math. Gen. **29**, 1929 (1996).
- [133] D. S. Fisher, *Dynamics and domain walls: Is the “landscape paradigm” instructive?”*, Physica D **107**, 204 (1997).
- [134] G. F. Mazenko and M. Zannetti, *Instability, spinodal decomposition and nucleation in a system with continuous symmetry*, Phys. Rev. B **32**, 4565 (1985).

- [135] A. J. Bray and K. Humayun, *Scaling and multiscaling in the ordering kinetics of a conserved order parameter*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1559 (1992).
- [136] A. Coniglio and M. Zannetti, *Multiscaling in growth kinetics*, Europhys. Lett. **10**, 575 (1989).
- [137] J.-P. Bouchaud, E. Vincent, J. Hammann, J. Phys. I (France), *Towards an experimental determination of the number of metastable states in spin glasses?*, J. Phys. I (France) **4**, 139 (1994).
- [138] Y. G. Joh, R. Orbach, G. G. Wood, J. Hammann and E. Vincent, *Finite size effects on spin glass dynamics*, J. Phys. Soc. Jpn **69**, Suppl. A 215 (2000).
- [139] B. Rinn, P. Maass, J.-P. Bouchaud, *Multiple scaling regimes in simple aging models*, Phys. Rev. Lett. **84**, 5403 (2000); *Hopping in the glass configuration space: Subaging and generalized scaling laws*, preprint cond-mat/0104304.
- [140] L. Laloux and P. Le Doussal, *Aging and diffusion in low dimensional environments*, Phys. Rev. E **57**, 6296 (1998).
- [141] E. Marinari, G. Parisi and J. J. Ruiz-Lorenzo, *Numerical simulations of spin glass systems*, in Ref. [9].
- [142] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *Metastability and phase transitions in two-dimensional systems*, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).
- [143] H. K. Janssen, B. Schaub and B. Schmittmann, *New universal short-time scaling behaviour of critical relaxation processes*, Z. Phys. B **73**, 539 (1989).
- [144] N. Goldenfeld, *Lectures on phase transitions and the renormalization group* (Addison wesley, Reading, 1992).
- [145] A. D. Rutenberg and A. J. Bray, *Phase ordering of two-dimensional XY systems below the Kosterlitz-Thouless transition temperature*, Phys. Rev. B **51**, R1641 (1995).
- [146] T. J. Newman, A. J. Bray and M. A. Moore, *Growth of order in vector spin systems and self-organized criticality*, Phys. Rev. B **42**, 4514 (1990).
- [147] A. J. Bray, A. J. Briant and D. K. Jarvis, *Breakdown of scaling in the nonequilibrium critical dynamics of the two-dimensional XY model*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1503 (2000).
- [148] A. J. Bray, *Random walks in logarithmic and power-law potentials, nonuniversal persistence, and vortex dynamics in the two-dimensional XY model*, Phys. Rev. E **62**, 103 (2000).
- [149] J. Kisker, L. Santen, M. Schreckenberg and H. Rieger, *Off-equilibrium dynamics in finite-dimensional spin glass models*, Phys. Rev. B **53**, 6418 (1996).
- [150] K. Binder, *Finite size scaling analysis of Ising model block distribution functions*, Z. Phys. B **43**, 119 (1981).

- [151] S. T. Bramwell, K. Christensen, J.-Y. Fortin, P. C. W. Holdsworth, H. J. Jensen, S. Lise, J. López, M. Nicodemi, J.-F. Pinton and M. Sellitto, *Universal fluctuations in correlated systems*, Phys. Rev. Lett. **84**, 3744 (2000).
- [152] S. T. Bramwell, J.-Y. Fortin, P. C. W. Holdsworth, S. Peysson, J.-F. Pinton, B. Portelli and M. Sellitto, *Magnetic fluctuations in the classical XY model: the origin of an exponential tail in a complex system*, Phys. Rev. E (à paraître).
- [153] P. Archambault, S. T. Bramwell and P. C. W. Holdsworth, *Magnetic fluctuations in a finite two-dimensional XY model*, J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 8363 (1997).
- [154] D. Iñiguez, E. Marinari, G. Parisi and J. J. Ruiz-Lorenzo, *3D spin glass and 2D ferromagnetic XY model: a comparison*, J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 7337 (1997).
- [155] D. A. Huse and D. S. Fisher, *On the behavior of Ising spin glasses in a uniform magnetic field*, J. Phys. I (France) **1**, 621 (1991).
- [156] D. A. Huse and D. S. Fisher, *Pure states in spin glasses*, J. Phys. A: Math. Gen. **20**, L997 (1987).
- [157] R. Mélin, J. C. d'Anglès d'Auriac, P. Chandra and B. Douçot, *Glassy behaviour in the ferromagnetic Ising model on a Cayley tree*, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 5773 (1996).
- [158] H. Bokil, B. Drossel and M. Moore, *The influence of critical behavior on the spin glass phase*, Phys. Rev. B **62**, 946 (2000).
- [159] B. Drossel, H. Bokil, M. A. Moore and A. J. Bray, *The link overlap and finite size effects for the 3D Ising spin glass*, Eur. Phys. J. B **13**, 369 (2000).
- [160] M. A. Moore, H. Bokil and B. Drossel, *Evidence for the droplet picture of spin glasses*, Phys. Rev. Lett. **81**, 4252 (1998).
- [161] E. Marinari, G. Parisi and F. Ritort, *On the 3D Ising spin glass*, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 2687 (1994).
- [162] N. Kawashima and A. P. Young, *Phase transition in the three-dimensional $\pm J$ Ising spin glass*, Phys. Rev. B **53**, R484 (1996).
- [163] M. Palassini and S. Caracciolo, *Universal finite-size scaling functions in the 3D Ising spin glass*, Phys. Rev. Lett. **82**, 5128 (1999).
- [164] H. G. Ballesteros, A. Cruz, L. A. Fernández, V. Martín-Mayor, J. Pech, J. J. Ruiz-Lorenzo, A. Tarancón, P. Téllez, C. L. Ullod and C. Ungil, *Critical behavior of the three-dimensional Ising spin glass*, Phys. Rev. B **62**, 14237 (2000).
- [165] A. J. Bray and M. A. Moore, *Finite size effects in spin glass overlap functions*, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, L683 (1985).
- [166] C. De Dominicis, I. Kondor and T. Temesvári, *Beyond the Sherrington-Kirkpatrick model*, in Ref. [9].

- [167] E. Marinari, G. Parisi, J. Ruiz-Lorenzo, and F. Ritort, *Numerical evidence for spontaneously broken replica symmetry in 3D spin glasses*, Phys. Rev. Lett. **76**, 843 (1996).
- [168] D. A. Huse, *Monte-Carlo simulation study of domain growth in an Ising spin glass*, Phys. Rev. B **43**, 8673 (1991).
- [169] T. Komori, H. Yoshino and H. Takayama, *Numerical study on aging dynamics in the 3D Ising spin glass model. I. Energy relaxation and domain coarsening*, J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 3387 (1999); *Numerical study on aging dynamics in the 3D Ising spin glass model. II. Quasi-equilibrium regime of spin autocorrelation function*, J. Phys. Soc. Jpn. **69**, 1192 (2000); *Numerical study on aging dynamics in the 3D Ising spin glass model. III. Temperature-change protocols*, J. Phys. Soc. Jpn. **69**, Suppl. A 228 (2000).
- [170] Y. G. Joh, R. Orbach, G. G. Wood, J. Hammann and E. Vincent, *Extraction of the spin glass correlation length*, Phys. Rev. Lett. **82**, 438 (1999).
- [171] J.-P. Bouchaud, communication privée (Janvier 2001).
- [172] H. Rieger, L. Santen, U. Blasum, M. Diehl, M. Jünger and G. Rinaldi, *The critical exponents of the two-dimensional Ising spin glass revisited: Exact ground state calculations and Monte-Carlo simulations*, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 3939 (1996).
- [173] H. Rieger, B. Steckemetz and M. Schreckenberg, *Aging and domain growth in the two-dimensional Ising spin glass model*, Europhys. Lett. **27**, 485 (1994).
- [174] C. M. Newman and D. L. Stein, *Simplicity of state and overlap structure in finite-volume realistic spin glasses*, Phys. Rev. E **57**, 1356 (1998).
- [175] J. Houdayer, F. Krzakala and O. C. Martin, *Large-scale excitations low-energy excitations in 3D spin glasses*, Eur. Phys. J. B **18**, 467 (2000).
- [176] J. R. L. de Almeida and D. J. Thouless, *Stability of the Sherrington-Kirkpatrick solution of a spin glass model*, J. Phys. A: Math. Gen. **11**, 983 (1978).
- [177] M. Picco and F. Ritort, *Tempering simulations in the four dimensional $\pm J$ Ising spin glass in a magnetic field*, Physica A **250**, 46 (1998).
- [178] E. Marinari, C. Naitza, F. Zuliani, G. Parisi, M. Picco and F. Ritort, *General method to determine replica symmetry breaking transitions*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1698 (1998).
- [179] E. R. Granna and R. E. Hetzel, *Susceptibility of two-, three-, and four-dimensional spin glasses in a magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **67**, 907 (1991).
- [180] E. Marinari, G. Parisi and F. Zuliani, *Four-dimensional spin glasses in a magnetic field have a mean-field like phase*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 1181 (1998).
- [181] E. Marinari, G. Parisi and F. Zuliani, *Comment on "Ising spin glasses in a magnetic field"*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1056 (2000).
- [182] G. Parisi, F. Ricci-Tersenghi and J. J. Ruiz-Lorenzo, *On the Dynamics of the 4D spin glass in a magnetic field*, Phys. Rev. B **57**, 13617 (1998).

- [183] A. P. Young, *Statics and dynamics of a two-dimensional Ising spin glass model*, Phys. Rev. Lett. **50**, 917 (1983).
- [184] W. Kinzel and K. Binder, *Static and dynamic critical magnetic fields in Ising spin glasses*, Phys. Rev. Lett. **50**, 1509 (1983).
- [185] A. Onuki, *Phase transitions of fluids in shear flow*, J. Phys. C: Condens. Matter **9**, 6119 (1997).
- [186] J. M. Ottino, P. DeRoussel, S. Hansen, and D. V. Khakhar, *Mixing and dispersion of viscous liquids and powdered solids*, Adv. Chem. Eng. **25**, 105 (1999).
- [187] D. Beysens, M. Gbadamassi and B. Moncef-Bouanz, *New developments in the study of binary fluids under shear flow*, Phys. Rev. A **28**, 2491 (1983).
- [188] C. K. Chan, F. Perrot and D. Beysens, *Effect of hydrodynamics on growth: spinodal decomposition under shear flow*, Phys. Rev. Lett. **61**, 412 (1988).
- [189] T. Hashimoto, K. Matsuzaka, E. Moses and A. Onuki, *String phase in phase-separating fluids in shear flow*, Phys. Rev. Lett. **74**, 126 (1995); K. Matsuzaka, T. Koga and T. Hashimoto, *Rheological response from phase separated domains as studied by shear microscopy*, Phys. Rev. Lett. **80**, 5441 (1998).
- [190] E. K. Hobbie, S. Kim and C. C. Han, *Stringlike pattern in critical polymer mixtures under shear flow*, Phys. Rev. E **54**, R5909 (1996).
- [191] F. Qiu, J. Ding and Y. Yang, *Real-time observation on deformation of bicontinuous phase under simple shear flow*, Phys. Rev. E **58**, R1230 (1998).
- [192] J. Lauger, C. Laubner and W. Gronski, *Correlation between shear viscosity and anisotropic domain growth during spinodal decomposition under shear flow*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3576 (1995).
- [193] C. K. Chan, F. Perrot and D. Beysens, *Experimental study and model simulation of spinodal decomposition in a binary mixture under shear*, Phys. Rev. A **43**, 1826 (1991).
- [194] F. Corberi, G. Gonnella and A. Lamura, *Two-scale competition in phase separation under shear*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4057 (1999); le cas 3D est considere dans: F. Corberi, G. Gonnella and A. Lamura, *Phase separation of binary fluids in shear flow: a numerical study*, preprint cond-mat/0009168.
- [195] M. E. Cates, V. M. Kendon, P. Bladon and J.-C. Desplat, *Inertia, coarsening and fluid motion in binary mixtures*, Faraday Disc. Roy. Chem. Soc. **112**, 1 (1999).
- [196] Z. Shou and A. Chakrabarti, *Ordering of viscous liquid mixtures under a steady shear flow*, Phys. Rev. E **61**, R2200 (2000).
- [197] A. J. Wagner and J. M. Yeomans, *Phase separation under shear in two-dimensional binary fluids*, Phys. Rev. E **59**, 4366 (1999).

- [198] Z. Zhang, H. Zhang and Y. Yang, *The effect of shear flow on morphology and rheology of phase separating binary mixtures*, J. Chem. Phys. **113**, 8348 (2000).
- [199] R. Yamamoto and X. C. Zeng, *Molecular dynamics study of a phase separating fluid mixture under shear flow*, Phys. Rev. E **59**, 3223 (1999).
- [200] F. Corberi, G. Gonnella and A. Lamura, *Spinodal decomposition of binary mixtures in uniform shear flow*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3852 (1998); *Structure and rheology of binary mixtures in shear flow*, Phys. Rev. E **61**, 6621 (2000).
- [201] D. H. Rothman, *Deformation, growth, and order in sheared spinodal decomposition*, Phys. Rev. Lett. **65**, 3305 (1990); D. H. Rothman, *Complex rheology in a model of a phase separating fluid*, Europhys. Lett. **14**, 337 (1991).
- [202] C. K. Chan and L. Lin, *Effects of shear on the phase transition of binary mixtures*, Europhys. Lett. **11**, 13 (1990).
- [203] F. Qiu, H. Zhang and Y. Yang, *Chain stretching effect on domain growth during spinodal decomposition of binary polymer mixtures under simple shear flow*, J. Chem. Phys. **108**, 9529 (1998).
- [204] P. Padilla and S. Toxvaerd, *Spinodal decomposition under shear flow*, J. Chem. Phys. **106**, 2342 (1997).
- [205] T. Ohta, H. Nozaki and M. Doi, *Computer simulation of domain growth under steady shear flow*, J. Chem. Phys. **93**, 2664 (1990).
- [206] N. P. Rapapa and A. J. Bray, *Dynamics of phase separation under shear: a soluble model*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3856 (1999); N. P. Rapapa, *The effect of shear on phase ordering dynamics with order parameter dependent mobility: The large- n limit*, Phys. Rev. E **61**, 247 (2000).
- [207] A. J. Bray and A. Cavagna, *Coarsening dynamics of a nonconserved field advected by a uniform shear flow*, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, L305 (2000); A. Cavagna, A. J. Bray and R. D. M. Travasso, *Ohta-Jasnow-Kawasaki approximation for non-conserved coarsening under shear*, Phys. Rev. E **62**, 4702 (2000).
- [208] A. J. Bray, *Coarsening dynamics of nonequilibrium phase transitions*, in Ref. [16].
- [209] A. Frischknecht, *Effect of shear flow on the stability of domains in two-dimensional phase-separating binary fluids*, Phys. Rev. E **56**, 6970 (1997); *Stability of cylindrical domains in phase separating binary fluids in shear flow*, Phys. Rev. E **58**, 3495 (1998).
- [210] A. Onuki and K. Kawasaki, *Nonequilibrium steady state of critical fluids under shear flow: A renormalization group approach*, Ann. Phys. (N. Y.) **121**, 456 (1979).
- [211] D. J. Pine, N. Easwar, J. V. Maher and W. I. Goldberg, *Turbulent suppression of spinodal decomposition*, Phys. Rev. A **29**, 308 (1984).
- [212] P. Tong, W. I. Goldberg, J. Stavans and A. Onuki, *Temporal fluctuations in a turbulently stirred binary mixture*, Phys. Rev. Lett. **62**, 2668 (1989).

- [213] K. Y. Min, J. Stavans, R. Piazza and W. I. Goldburg, *Steady state nucleation in a binary mixture: the effect of stirring*, Phys. Rev. Lett. **63**, 1070 (1989).
- [214] A. M. Lacasta, J. M. Sancho and F. Sagués, *Phase separation dynamics under stirring*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1791 (1995).
- [215] F. J. Muzzio, M. Tjahjadi and J. M. Ottino, *Self-similar drop-size distributions produced by breakup in chaotic flows*, Phys. Rev. Lett. **67**, 54 (1991).
- [216] J. M. Ottino, C. W. Leong, H. Rising and P. D. Swanson, *Morphological structures produced by mixing in chaotic flows*, Nature **333**, 419 (1988).
- [217] J. M. Ottino, F. J. Muzzio, M. Tjahjadi, J. G. Franjone, S. C. Jana and H. A. Kusch, *Chaos, symmetry, and self similarity: exploiting order and disorder in mixing process*, Science **257**, 754 (1992).
- [218] H. Aref, *Stirring by chaotic advection*, J. Fluid. Mech. **143**, 1 (1984).
- [219] J. M. Ottino, *Mixing, chaotic advection and turbulence*, Ann. Rev. Fluid. Mech. **22**, 207 (1990).
- [220] V. M. Kendon, J.-C. Desplat, P. Bladon and M. E. Cates, *3D spinodal decomposition in the inertial regime*, Phys. Rev. Lett. **83**, 576 (1999).
- [221] A. J. Bray, *Renormalization-group approach to domain growth scaling*, Phys. Rev. B **41**, 6724 (1990).
- [222] A. Onuki, *A new computer method of solving dynamic equations under externally applied deformations*, J. Phys. Soc. Jpn. **66**, 1836 (1997).
- [223] B. I. Shraiman and E. D. Siggia, *Scalar turbulence*, Nature **405**, 639 (2000).
- [224] L'exemple d'un tel algorithme est donné dans: A. Celani, A. Lanotte, A. Mazzino and M. Vergassola, *Universality and saturation of intermittency in passive scalar turbulence*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2385 (2000).
- [225] M. Holzer and E. D. Siggia, *Turbulent mixing of a passive scalar*, Phys. Fluids **6**, 1820 (1994).
- [226] A. Babiano, G. Boffeta, A. Provenzale and A. Vulpiani, *Chaotic advection in point vortex models and two-dimensional turbulence*, Phys. Fluids **6**, 2465 (1994).
- [227] G. M. Zaslavskii, R. Z. Sagdeev and A. A. Chernikov, *Stochastic nature of streamlines in steady-state flows*, Zh. Eksp. Teo. Fiz. **94**, 102 (1988).
- [228] P. Sollich, F. Lequeux, P. Hébraud and M. E. Cates, *Rheology of soft glassy materials*, Phys. Rev. Lett. **78**, 2020 (1997).
- [229] P. Sollich, *Rheological constitutive equation for a model of soft glassy materials*, Phys. Rev. E **58**, 738 (1998).
- [230] R. M. L. Evans, M. E. Cates and P. Sollich, *Diffusion and rheology in a model of glassy materials*, Eur. Phys. J. B **10**, 705 (1999).

- [231] S. M. Fielding, P. Sollich and M. E. Cates, *Ageing and rheology in soft materials*, J. Rheol. **44**, 323 (2000).
- [232] P. Hébraud and F. Lequeux, *Mode-coupling theory for the pasty rheology of soft glassy materials*, Phys. Rev. Lett. **78**, 4657 (1997).
- [233] C. Dérec, A. Ajdari and F. Lequeux, *Mechanics near a jamming transition: a minimalist model*, Faraday Discuss. **112**, 195 (1999); *Rheology and aging: a simple approach*, Eur. Phys. J. E **4**, 355 (2001).
- [234] S. Fielding, *Ageing, driving and effective temperatures: from “soft rheology” to glassy dynamics*, Thèse de Doctorat de l’Université d’Edinburgh (2000).
- [235] J.-P. Bouchaud and D. Dean, *Aging on Parisi’s tree*, J. Phys. I (France) **5**, 265 (1995).
- [236] M. Mézard and G. Toulouse, *Des verres de spin aux réseaux de neurone*, La Recherche **232**, 615 (1991).
- [237] G. Parisi, *Asymmetric neural networks and the process of learning*, J. Phys. A **19**, L675 (1986).
- [238] A. Crisanti and H. Sompolinsky, *Dynamics of spin systems with randomly asymmetric bonds: Langevin dynamics and a spherical model*, Phys. Rev. A **36**, 4922 (1987); *Dynamics of spin systems with randomly asymmetric bonds: Ising and Glauber dynamics*, Phys. Rev. A **37**, 4865 (1988).
- [239] H. Horner, *Drift, creep and pinning of a particle in a correlated random potential*, Z. Phys. B **100**, 243 (1996).
- [240] F. Thalmann, *Geometrical approach for the mean-field dynamics of a particle in a short-range correlated random potential*, Eur. Phys. J. B **19**, 49 (2001); *Aging and non linear glassy dynamics in a mean-field model*, Eur. Phys. J. B **19**, 65 (2001).
- [241] L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, P. Le Doussal and L. Peliti, *Glassy behaviour in disordered systems with non-relaxational dynamics*, Phys. Rev. Lett. **78**, 350 (1997).
- [242] A. J. Banchio, J. Bergenholtz and G. Nägele, *Rheology and dynamics of colloidal suspensions*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1792 (1999).
- [243] R. Yamamoto and A. Onuki, *Nonlinear rheology of a highly supercooled liquid*, Europhys. Lett. **40**, 61 (1997).
- [244] R. Yamamoto and A. Onuki, *Dynamics of highly supercooled liquids: heterogeneity, rheology, and diffusion*, Phys. Rev. E **58**, 3515 (1998).
- [245] S. P. Das and G. F. Mazenko, *Fluctuating nonlinear hydrodynamics and the liquid-glass transition*, Phys. Rev. A **34**, 2265 (1986).
- [246] D. S. Dean, *Langevin equation for the density of a system of interacting Langevin processes*, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, L613 (1996).

- [247] L. M. Lust, O. Valls and C. Dasgupta, *Nonlinear hydrodynamics of a hard-sphere fluid near the glass transition*, Phys. Rev. E **48**, 1787 (1993).
- [248] T. V. Ramakrishnan and M. Yussouff, *First-principles order-parameter theory of freezing*, Phys. Rev. B **19**, 2775 (1979).
- [249] U. Bengtzelius, W. Götze and A. Sjölander, *Dynamics of supercooled liquids and the glass transition*, J. Phys. C: Solid State Phys. **17**, 5915 (1984).
- [250] E. Leutheusser, *Dynamical model of the liquid-glass transition*, Phys. Rev. A **29**, 2765 (1984).
- [251] J. Kurchan, *Supersymmetry in spin glass dynamics*, J. Phys. I (France) **2**, 1333 (1992).
- [252] M. Fuchs, W. Götze, I. Hofacker and A. Latz, *Comments on α -peak shapes for relaxation in supercooled liquids*, J. Phys. C: Condens. Matter **3**, 5047 (1991).
- [253] K. C. Ng, *Hypernetted chain solutions for the classical one-component plasma up to $\Gamma = 7000$* , J. Chem. Phys. **61**, 2680 (1974).
- [254] A. Crisanti, H. Horner and H. J. Sommers, *The spherical p -spin interaction spin-glass model: The dynamics*, Z. Phys. B **92**, 257 (1992).
- [255] W. Götze, *Some aspects of phase transitions described by the self consistent current relaxation theory*, Z. Phys. B **56**, 139 (1984).
- [256] J. D. Ferry, *Viscoelastic properties of polymers* (Wiley, New York, 1980).
- [257] A. Barrat, R. Burioni and M. Mézard, *Dynamics within metastable states in a mean-field spin glass*, J. Phys. A **29**, L81 (1996).
- [258] S. A. Langer and A. J. Liu, *Sheared foam as a supercooled liquid?*, Europhys. Lett. **49**, 68 (2000).
- [259] W. Kob and H. C. Andersen, *Scaling behavior in the β -relaxation regime of a supercooled Lennard-Jones mixture*, Phys. Rev. Lett. **73**, 1376 (1994); *Testing mode-coupling theory for a supercooled binary Lennard-Jones mixture: The van Hove correlation function*, Phys. Rev. E **51**, 4626 (1995).
- [260] W. Kob and H. C. Andersen, *Testing mode-coupling theory for a supercooled binary Lennard-Jones mixture II: Intermediate scattering function and dynamic susceptibility*, Phys. Rev. E **52**, 4134 (1995).
- [261] M. P. Allen and D. J. Tildesley, *Computer simulations of liquids* (Oxford University Press, Oxford, 1987).
- [262] S. Plimpton, *Fast parallel algorithms for short-range molecular dynamics*, J. Comput. Phys. **117**, 1 (1995). [<http://www.cs.sandia.gov>]
- [263] D. J. Evans and G. P. Morriss, *Statistical mechanics of nonequilibrium liquids* (Academic Press, London, 1990). Cet ouvrage n'étant plus disponible, ses auteurs l'ont rendu public à l'adresse <http://rsc.anu.edu.au/~evans/evansmorrissbook.htm>

- [264] W. Kob and J.-L. Barrat, *Fluctuations, response and aging dynamics in a simple glass-forming liquid out of equilibrium*, Eur. Phys. J. B **13**, 319 (2000).
- [265] G. Iori and E. Marinari, *On the stability of the mean-field spin glass broken phase under non-Hamiltonian perturbations*, J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 4489 (1997).
- [266] E. Marinari and D. A. Stariolo, *Off-equilibrium dynamics of a four-dimensional spin glass with asymmetric couplings*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 5021 (1998).
- [267] H. Horner, *Dynamical mean-field theory of the SK spin glass I: regularization by bond dynamics*, Z. Phys. B **57**, 29 (1984).
- [268] A. E. Allahverdyan and D. B. Saakian, *Spin-glass model with partially annealed asymmetric bonds*, Phys. Rev. E **58**, R5201 (1998).
- [269] L. F. Cugliandolo and J. Kurchan, *Thermal properties of slow dynamics*, Physica A **263**, 242 (1999).
- [270] T. M. Nieuwenhuizen, *Exactly solvable model of a quantum spin glass*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4289 (1995).
- [271] S. Ciuchi and A. Crisanti, *Different scenarios for critical glassy dynamics*, Europhys. Lett. **49**, 754 (2000).
- [272] M. P. Kennett and C. Chamon, *Time reparametrization group and the long time behaviour in quantum glassy systems*, Phys. Rev. Lett. **86**, 1622 (2001).
- [273] L. F. Cugliandolo and J. Kurchan, *A scenario for the dynamics in the small entropy production limit*, J. Phys. Soc. Jpn. **69**, Suppl. A 247 (2000).
- [274] J. van Mourik and A. C. C. Coolen, *Cluster derivation of Parisi's RSB solution for disordered systems*, preprint cond-mat/0009151.
- [275] H. Sompolinsky, *Time-dependent order parameters in spin glasses*, Phys. Rev. Lett. **47**, 935 (1981).
- [276] H. Takayama, H. Yoshino and K. Hukushima, *Monte Carlo simulation on aging processes within one 'pure state' of the SK spin glass model*, J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 3891 (1997).
- [277] E. Marinari, G. Parisi and D. Rossetti, *Numerical simulations of the dynamical behavior of the SK model*, Eur. Phys. J. B **2**, 495 (1998).
- [278] A. Baldassari, *Numerical study of the out of equilibrium phase space of a mean-field spin glass model*, Phys. Rev. E **58**, 7047 (1998).
- [279] P. Le Doussal, L. F. Cugliandolo and L. Peliti, *Dynamics of particles and manifolds in a quenched random force field*, Europhys. Lett. **39**, 111 (1997).
- [280] P. Chauve, T. Giamarchi and P. Le Doussal, *Creep and depinning in disordered media*, Phys. Rev. B **62**, 6241 (2000).

- [281] S. Franz and F. Ricci-Tersenghi, *Ultrametricity in three-dimensional Edwards-Anderson spin glasses*, Phys. Rev. E **61**, 1121 (2000).
- [282] D. A. Stariolo, *Dynamic ultrametricity in finite dimensional spin glasses*, preprint cond-mat/0010495.
- [283] B. K. Chakrabarti and M. Acharyya, *Dynamic transitions and hysteresis*, Rev. Mod. Phys. **71**, 847 (1999).
- [284] G. Korniss, C. J. White, P. A. Rikvold, M. A. Novotny, *Dynamic phase transition, universality, and finite-size scaling in the two-dimensional kinetic Ising model in an oscillating field*, preprint cond-mat/0008155; H. Fujisaka, H. Tutu and P. A. Rikvold *Dynamic phase transition in a time-dependent Ginzburg-Landau model in an oscillating field*, preprint cond-mat/0009284.
- [285] T. Tomé and J. de Oliveira, *Dynamic phase transition in the kinetic Ising model under a time-dependent oscillating field*, Phys. Rev. A **41**, 4251 (1990).
- [286] J. P. Sethna, K. Dahmen, S. Kartha, J. A. Krumhansl, B. W. Roberts and J. D. Shore, *Hysteresis and hierarchies: dynamics of disorder-driven first-order phase transformations*, Phys. Rev. Lett. **70**, 3347 (1993).
- [287] K. A. Dahmen and J. P. Sethna, *Hysteresis, avalanches, and disorder induced critical scaling: A renormalization group approach*, Phys. Rev. B **53**, 14872 (1996).
- [288] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless and R. C. Jones, *Spherical model of a spin glass*, Phys. Rev. Lett. **36**, 1217 (1976).
- [289] L. F. Cugliandolo and D. S. Dean, *On the dynamics of a spherical spin-glass in a magnetic field*, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, L453 (1995).
- [290] A. Cavagna, J. P. Garrahan and I. Giardina, *Quenched complexity of the mean-field p -spin spherical model with external field*, J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 711 (1999).
- [291] A. Crisanti and F. Ritort, *Potential energy landscape of finite-size mean-field models for glasses*, Europhys. Lett. **51**, 147 (2000); *Activated processes and inherent structure dynamics of finite-size mean-field models for glasses*, Europhys. Lett. **52**, 640 (2000).
- [292] J. Duran, *Sables, poudres et grains* (Eyrolles, Paris, 1997).
- [293] J.-P. Bouchaud, M. E. Cates, and P. Claudin, *Stress distributions in granular media and nonlinear wave equation*, J. Phys. I (France) **5**, 639 (1995); J. P. Wittmer, M. E. Cates and P. Claudin, *Stress propagation and arching in static sandpiles*, J. Phys. I (France) **7**, 39 (1997).
- [294] L. Vanel, *Étude expérimentale de l'équilibre d'un milieu granulaire : exemples du silo et du tas de sable*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6 (1999).
- [295] J. B. Knight, C. G. Fandrich, C. N. Lau, H. M. Jaeger and S. R. Nagel, *Density relaxation in a vibrated granular material*, Phys. Rev. E **51**, 3957 (1995).

- [296] H. M. Jaeger, C.-H. Liu and S. R. Nagel, *Relaxation at the angle of repose*, Phys. Rev. Lett. **62**, 40 (1989).
- [297] E. R. Nowak, J. B. Knight, E. Ben-Naim, H. M. Jaeger and S. R. Nagel, *Density fluctuations in vibrated granular materials*, Phys. Rev. E **57**, 1971 (1998).
- [298] F. X. Villarruel, B. E. Lauderdale, D. M. Mueth and H. M. Jaeger, *Compaction of rods: Relaxation and ordering in vibrated, anisotropic granular material*, Phys. Rev. E **61**, 6914 (2000).
- [299] E. R. Nowak, A. Grushin, A. C. B. Barnum and M. B. Weissman, *Density-noise power fluctuations in vibrated granular media*, Phys. Rev. E **63**, 020301 (2001).
- [300] M. Nicolas, P. Duru and O. Pouliquen, *Compaction of a granular material under cyclic shear*, Eur. Phys. J. E **3**, 309 (2000).
- [301] C. Josserand, A. Tkachenko, D. M. Mueth and H. M. Jaeger, *Memory effects in granular materials*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3632 (2000).
- [302] A. Mehta and G. C. Barker, *Vibrated powders: A microscopic approach*, Phys. Rev. Lett. **67**, 394 (1991); G. C. Barker and A. Mehta, *Vibrated powders: Structure, correlations and dynamics*, Phys. Rev. A **45**, 3435 (1992); G. C. Barker and A. Mehta, *Transient phenomena, self-diffusion and orientational effects in vibrated powders*, Phys. Rev. E **47**, 184 (1993); A. Mehta and G. C. Barker, *Glassy dynamics in granular compaction*, J. Phys. C: Condens. Matter **12**, 6619 (2000).
- [303] D. C. Hong, S. Yue, J. K. Rudra, M. Y. Choi and Y. W. Kim, *Granular relaxation under tapping and the traffic problem*, Phys. Rev. E **50**, 4123 (1994).
- [304] S. J. Linz, *Phenomenological modeling of the compaction dynamics of shaken granular systems*, Phys. Rev. E **54**, 2925 (1996).
- [305] T. Boutreux and P. G. de Gennes, *Compaction of granular mixtures: A free volume model*, Physica A **244**, 59 (1997).
- [306] K. L. Gavrilov, *Cluster model for compaction of vibrated granular materials*, Phys. Rev. E **58**, 2107 (1998).
- [307] D. A. Head and G. J. Rodgers, *A coarse-grained model for granular compaction and relaxation*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 107 (1998).
- [308] G. Peng and T. Ohta, *Logarithmic density relaxation in compaction of granular materials*, Phys. Rev. E **57**, 829 (1998).
- [309] S. F. Edwards and D. V. Grinev, *Statistical mechanics of vibration-induced compaction of powders*, Phys. Rev. E **58**, 4758 (1998).
- [310] D. A. Head, *Phenomenological glass model for vibratory granular compaction*, Phys. Rev. E **62**, 2439 (2000).

- [311] J. J. Brey, A. Prados and B. Sanchez-Rey, *Simple model with facilitated dynamics for granular compaction*, Phys. Rev. E **60**, 5685 (1999); *Thermodynamic description in a simple model for granular compaction* Physica A **275**, 310 (2000); J. J. Brey and A. Prados, *Linear response of vibrated granular systems to sudden changes in the vibration intensity*, preprint cond-mat/0101218.
- [312] P. Philippe and D. Bideau, *Numerical model for granular compaction under vertical tapping*, Phys. Rev. E **63**, 051304 (2001).
- [313] Une revue des résultats obtenus dans le modèle Tétris est : A. Coniglio and M. Nicodemi, *The jamming transition of granular media*, J. Phys. C: Condens. Matter **12**, 6601 (2000).
- [314] P. L. Krapivsky and E. Ben-Naim, *Collective properties of adsorption-desorption processes*, J. Chem. Phys. **100**, 6778 (1994); X. Jin, G. Tarjus and J. Talbot, *An adsorption-desorption process on a line: kinetics of the approach to closest packing*, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, L195 (1994).
- [315] A. J. Kolan, E. R. Nowak and A. V. Tkachenko, *Glassy behavior of the parking lot model*, Phys. Rev. E **59**, 3094 (1999); J. Talbot, G. Tarjus and P. Viot, *Adsorption-desorption model and its application to vibrated granular materials*, Phys. Rev. E **61**, 5429 (2000).
- [316] J. Talbot, G. Tarjus and P. Viot, *Aging and response properties in the parking lot model*, preprint cond-mat/0008183.
- [317] A. Barrat and V. Loreto, *Response properties in a model for granular matter*, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 4401 (2000); *Memory in aged granular media*, Europhys. Lett. **53**, 297 (2001).
- [318] M. Sellitto and J. J. Arenzon, *Free-volume kinetic models of granular matter*, Phys. Rev. E **62**, 7793 (2000).
- [319] M. Sellitto, *On the effective temperature of an aging powder*, preprint cond-mat/0012273.
- [320] H. Makse and J. Kurchan, *Thermodynamic approach to dense granular matter: a numerical realization of a decisive experiment*, preprint (2001).
- [321] Cette approche est résumée dans S. F. Edwards, *The role of entropy in the specification of a powder*, in Ref. [17].
- [322] R. Monasson and O. Pouliquen, *Entropy of particle packing: An illustration on a toy model*, Physica A **236**, 395 (1997).
- [323] O. Reynolds, *On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. With experimental illustrations*, Phil. Mag. S. 5 **20**, 469 (1885).
- [324] J. Berg and A. Mehta, *On random graphs and the statistical mechanics of granular matter*, preprint cond-mat/0012416.
- [325] D. S. Dean and A. Lefèvre, *Tapping spin glasses*, preprint cond-mat/0101166.

Dynamique forcée des systèmes vitreux : des verres de spin aux fluides complexes

Nous présentons une étude théorique de la dynamique hors équilibre d'une large classe de systèmes microscopiques, dont la caractéristique commune est de présenter, dans certaines conditions expérimentales, une relaxation extrêmement lente ('systèmes vitreux').

Nous abordons tout d'abord le problème du vieillissement de ces systèmes en nous attachant à une comparaison quantitative des deux descriptions théoriques que sont (i) les processus de croissance de domaines, (ii) la solution analytique de modèles désordonnés champ moyen de type verres de spin.

Nous abordons ensuite le cas où la dynamique est forcée par une contrainte extérieure. Cette situation est importante en vue des applications (rhéologie des liquides surfondus et des fluides complexes, compaction lente des matériaux granulaires, etc.), et son étude systématique est un des aspects nouveaux de ce travail.

Dans ce cadre, nous étudions tout d'abord numériquement l'influence d'un écoulement sur la séparation de phase d'un mélange binaire. Le diagramme des phases (Température, Forçage) des verres structuraux et des verres de spin est ensuite étudié dans l'approximation de champ moyen. Nous envisageons les deux cas d'un forçage constant non-Hamiltonien, puis Hamiltonien mais dépendant du temps. Ces études fournissent une description à la fois microscopique – forme de la relaxation, température effective définie via le théorème de fluctuation-dissipation –, et macroscopique – courbes d'écoulement, transitions de phase dynamiques. Les principaux résultats sont testés numériquement sur un liquide surfondu et un verre de spin modèles.

Mots-Clés: Dynamique hors équilibre, Vieillissement, Rhéologie, Température effective, Verres, Verres de spin, Modèle XY, Fluides complexes, Granulaires, Croissance de domaines.

Driven dynamics of glassy systems: from spin glasses to complex fluids

We present a theoretical study of the off-equilibrium dynamics of a large class of microscopic systems, whose common feature is to present, under specific experimental conditions, an extremely slow ('glassy') relaxation.

We first tackle the question of aging in glassy systems, developing a quantitative comparison between two theoretical descriptions, namely (i) domain growth processes, (ii) analytical solution of mean-field disordered spin models.

We next study the case where the dynamics is driven by an external force. This situation is important for applications (rheology of supercooled liquids and complex fluids, slow compaction of granular materials, etc.), and its systematic investigation is an original aspect of this work.

In this context, we first numerically study the effect of a flow on the phase separation of a binary mixture. The (Temperature, Drive) phase diagram of structural and spin glasses is then investigated in the mean-field approximation. We consider the two cases of a constant, nonconservative and then conservative but time-dependent, driving force. These studies result in a microscopic – shape of the relaxation, effective temperature defined via the fluctuation-dissipation theorem –, and macroscopic – flow curves, dynamic phase transition – description. The main results are numerically tested on realistic models for supercooled liquids and spin glasses.

Key-words: Off-equilibrium dynamics, Aging, Rheology, Effective temperature, Glasses, Spin glasses, XY model, Complex fluids, Granular materials, Domain growth.