



HAL
open science

Modélisation mathématique et résolution numérique de problèmes de fluides à plusieurs constituants.

Frédéric Lagoutière

► **To cite this version:**

Frédéric Lagoutière. Modélisation mathématique et résolution numérique de problèmes de fluides à plusieurs constituants.. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2000. Français. NNT: . tel-00001385

HAL Id: tel-00001385

<https://theses.hal.science/tel-00001385>

Submitted on 7 Jun 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ
PIERRE-ET-MARIE-CURIE**

spécialité :

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par

Frédéric LAGOUTIÈRE

pour obtenir le grade de docteur de l'université Pierre-et-Marie-Curie, Paris-VI

Sujet de la thèse :

**MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET RÉOLUTION
NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES DE FLUIDES
COMPRESSIBLES À PLUSIEURS CONSTITUANTS**

Organisme d'accueil :

COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE

centre de Bruyères-le-Châtel

Thèse soutenue jeudi 7 décembre 2000

après avis des rapporteurs

François BOUCHUT

Philippe LEFLOCH

devant le jury composé de

Pierre-Arnaud RAVIART – président du jury

Yvon MADAY – directeur de thèse

Bruno DESPRÉS – responsable CEA

François BOUCHUT

Benoît PERTHAME

Rémi SENTIS

Ces trois années de thèse ne se sont pas déroulées sans mal... pour les autres. Grand merci à Bruno Després pour sa science, sa patience. La découverte et l'apprentissage de la recherche ont été avec lui un bonheur constant. Frédéric Coquel m'a aussi beaucoup aidé, je le remercie et salue ses mêmes qualités. Merci à Yvon Maday d'avoir été mon directeur de thèse et de m'avoir plusieurs fois remis sur les rails de la rigueur. J'ai encore bénéficié des bons conseils d'Hervé Jourden, merci.

Je suis reconnaissant à François Bouchut et Philippe LeFloch d'avoir accepté d'être rapporteur pour ce mémoire, de nombreuses rectifications et précisions leur sont dues, merci beaucoup. Et merci aussi à Benoît Perthame, Pierre-Arnaud Raviart et Rémi Sentis d'avoir bien voulu être juges lors de ma soutenance.

Je suis redevable aussi à des esprits aiguisés d'avoir accepté de relire ce mémoire, me permettant de l'affiner. Merci à tous : Stéphane Dellacherie, Benoît Desjardins, David Hateau, Stéphane Jaouen, Pascal Loiseau.

Ici, c'est une allusion très amicale aux voisins, du couloir des thésards du CEA, Nicolas Mallejac, Jean-Marie Aubry, Fabienne Bezard, Stéphane Dellacherie, Pascal Loiseau, Carine Boudesocque, Philippe Cossé, David Hateau, Stéphane Jaouen, François de Gaufridy de Dortan et d'ailleurs (surtout d'ailleurs) : quelle ambiance – de travail aussi ! Et allez, bonjour aussi à Pascal Omnès, seulement compagnon de navette-CEA mais qui aurait presque mérité sa place dans notre couloir. Enfin, salut, merci et pardon pour le squat à P.6 à Christophe, Marjolaine, Gros-grouik, Paul, Simona, 43X22, Lagavulin 16, Petit-grouik.

Sommaire

Introduction	7
I Décentrage aval	17
1 Le cas de l'advection linéaire	21
1.1 Étude algorithmique en dimension un	21
1.1.1 Stabilité et convergence	22
1.1.2 Conditions suffisantes de convergence	24
1.1.3 Décentrage aval sous les contraintes de convergence	27
1.1.4 Convergence uniforme en temps	32
1.1.5 Résultats numériques	45
1.2 Extension en dimension deux	47
1.2.1 Algorithme	47
1.2.2 Convergence uniforme en temps	48
1.2.3 Résultats numériques	55
Petite conclusion (pour le chapitre 1)	56
2 Le cas des équations non linéaires	59
2.1 Rappels	59
2.2 Étude algorithmique en dimension un	61
2.2.1 Une première idée (naïve)	63
2.2.2 Convergence vers la solution entropique: quelques rappels	65
2.2.3 Décentrage aval et conditions entropiques	68
2.3 Résultats numériques	76
3 Équations d'Euler	79
3.1 Le système des équations d'Euler	80
3.2 Algorithme en dimension un	80
3.2.1 Étape lagrangienne	80
3.2.2 Étape de projection	82

3.3	Résultats numériques	91
3.4	Extension en dimension deux	95
3.4.1	Résolution numérique	95
3.4.2	Résultats numériques	96
	Petite conclusion (pour le chapitre 3)	98
II Modèles de mélange		101
1	Introduction	103
2	Le modèle générique	105
2.1	Les équations d'Euler	105
2.2	Un début de fermeture	106
3	Les relations de fermeture possibles	113
3.1	Relations entre les pressions et les volumes spécifiques	113
3.2	Relations entre les températures et les entropies	117
4	Dégénérescence des modèles	123
5	Évaluation des relations de fermeture	129
5.1	Entropie pour une solution régulière	129
5.2	Le système est-il hyperbolique?	130
6	Cas particuliers et modèles déjà existants	141
6.1	Une méthode de convection des paramètres	141
6.2	Un modèle utilisant la loi de Dalton	144
7	Ondes progressives	147
7.1	Quelques rappels	147
7.2	Exemples pour des modèles conservatifs	149
7.3	Les modèles non conservatifs	150
	Conclusion partielle (pour la partie II)	171
III Résolution numérique des problèmes de mélange en dimensions un et deux		173
1	Schéma numérique pour les mélanges	177
1.1	Introduction et précision du problème	177

1.2	Phase lagrangienne	181
1.3	Équations discrètes pour le modèle isobare isotherme	183
1.4	Équations discrètes pour le modèle de Dalton	183
1.5	Équations discrètes pour l'équirépartition des quantités de chaleur	184
1.5.1	Inégalité entropique pour le système isobare avec équirépartition des quantités de chaleur	185
1.6	Phase de projection	188
1.7	Équations discrètes pour le modèle isobare isotherme	192
1.8	Équations discrètes pour le modèle de Dalton	193
1.9	Équations discrètes pour l'équirépartition des quantités de chaleur	194
1.9.1	Inégalité entropique pour le système isobare avec équirépartition des quantités de chaleur	195
1.10	Calcul de flux des fractions massiques	202
1.10.1	Conditions de stabilité et de décroissance de la variation totale des fractions massiques	203
1.10.2	Les formules pour les flux	209
2	Résultats numériques	213
2.1	Interface entre les constituants	214
2.1.1	Tube à choc de Sod	214
2.1.2	Tube à choc fort	222
2.2	Constituants mélangés	225
2.2.1	Choc dans un mélange non homogène	226
2.2.2	Choc fort avec rebond	230
3	Extension en dimension deux	235
3.1	Les équations et la méthode numérique	235
3.2	Résultats numériques	236
3.2.1	Constituants séparés	237
3.2.2	Constituants mélangés	244
	Conclusion partielle (pour la partie III)	247
	Conclusion	251
A	Décentrage aval pour l'advection linéaire	253
A.1	Équation exacte	253
A.2	Équation discrète associée	253
A.3	Calcul des flux	253

A.3.1	Cas où $u > 0$	253
A.3.2	Cas où $u < 0$	254
A.4	Condition CFL à respecter	254
A.5	Dimension deux : décomposition direction par direction	254
B	Décentrage aval pour les équations convexes	255
B.1	Équation exacte	255
B.2	Équation discrète	255
B.3	Calcul des flux	255
B.3.1	Cas où $\exists \epsilon > 0$ tel que $f'(u_j) > \epsilon \forall j$	256
B.3.2	Cas où $\exists \epsilon > 0$ tel que $f'(u_j) < -\epsilon \forall j$	256
B.4	Condition CFL à respecter	257
C	Décentrage aval pour les équations d'Euler	259
C.1	Système exact	259
C.2	Système discret	259
C.2.1	Phase lagrangienne	259
C.2.2	Phase de projection	260
C.3	Condition CFL à respecter	263
C.4	Dimension deux : décomposition direction par direction	263
D	Décentrage aval – équations d'Euler bi-constituants	265
D.1	Système exact	265
D.2	Système discret	266
D.2.1	Phase lagrangienne	266
D.2.2	Phase de projection	266
D.3	Condition CFL à respecter	270
D.4	Dimension deux : décomposition direction par direction	270

Introduction

J'ai effectué l'essentiel de mon travail de thèse au Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA) et les développements du présent mémoire sont dus, pour la plupart, à des problèmes posés par un des grands projets actuels du CEA : le Laser Méga-Joule (LMJ).

Le LMJ doit permettre de réaliser la fusion thermonucléaire en laboratoire, par confinement inertiel. Afin de le dimensionner, de nombreuses études, allant de la modélisation à la simulation numérique, sont nécessaires.

L'objet de ce mémoire est la résolution numérique des problèmes de fluides à plusieurs espèces (nous dirons aussi fluides à plusieurs constituants, ou fluides multi-constituants) eulériens, c'est-à-dire régis par les équations d'Euler. C'est un champ d'étude très vaste aux applications nombreuses.

Dans un contexte physique et numérique différent, le récent article de R. Saurel et R. Abgrall [81] présente l'ensemble de la problématique commune aux fluides multi-espèces : modélisation sous forme de systèmes hyperboliques, méthodes et tests numériques. En ce qui concerne les fluides multi-espèces dans le cadre du LMJ, on peut se reporter à l'article de B. Scheurer [82].

Dans ce mémoire, nous aborderons la modélisation mathématique des problèmes de mélange et la résolution numérique des problèmes ainsi construits. La modélisation conduira à des systèmes d'équations aux dérivées partielles hyperboliques mais non forcément conservatifs. Nous nous attacherons pour la résolution numérique à mettre au point des méthodes précises et robustes.

Les conditions particulières des écoulements dans le LMJ (les fluides sont soumis à des chocs très forts, les phénomènes fluides doivent être couplés à des phénomènes physiques comme la fusion...) imposent des contraintes importantes aux méthodes numériques utilisées¹.

Premièrement, la présence de chocs forts, de grands gradients de densité, de vitesse et de pression nous oblige à faire le choix d'algorithmes robustes.

Deuxièmement, il est impératif que les algorithmes de résolution soient **conservatifs** pour toutes les variables conservatives globales : masse totale de fluide, quantité de mouvement totale, énergie totale. Cela est le cas de beaucoup de méthodes très répandues (schémas de type Godunov, Roe...), mais rend déjà problématique l'utilisation de méthodes de suivi d'interface (l'écriture d'algorithmes de suivi d'interface conservatifs est délicate). De plus, et c'est une caractéristique plus rarement exigée, les méthodes proposées devront être **conservatives** en la **masse de**

1. On trouvera une revue générale des problèmes et des solutions actuellement apportées dans [82].

chaque constituant : le passage d'un choc très fort peut créer une importante erreur numérique quant à la masse d'un constituant avec une méthode non exactement conservative, et cette erreur peut être d'une importance capitale lorsque le constituant en question entre en jeu dans une réaction nucléaire (très sensible à la masse des constituants présents). D'un point de vue plus général, ajoutons qu'il est risqué d'utiliser des schémas non conservatifs pour résoudre des problèmes de lois de conservation, leur convergence étant très problématique (voir [48], et [11]). Il existe de nombreuses méthodes ([80], [50], [66]), qui sont seulement quasi-conservatives pour chaque constituant. Nous ne pourrions les utiliser pour résoudre nos problèmes.

Troisièmement, la perspective d'ajouter ultérieurement une modélisation et une résolution numérique de phénomènes physiques tels que la fusion (très sensibles, nous le répétons, aux taux de présence de chaque constituant) nous impose la mise au point d'un algorithme qui introduirait très peu (voire pas du tout ?) de **dissipation numérique** sur les taux de présence ou les fractions massiques des constituants, que ce soit pour des constituants séparés (par des interfaces) ou pour des constituants mélangés.

Il faut noter que la première contrainte (robustesse) et la troisième (réduction de la dissipation numérique) sont traditionnellement considérées comme difficilement conciliables.

P P
R A
E R
M T
I I
È E
R
E

La recherche d'algorithmes non dissipatifs pour la résolution numérique des problèmes d'évolution est un enjeu du calcul numérique. Nous nous attaquons à cette question dans la première partie du mémoire.

La méthode usuelle pour obtenir des résultats numériques peu dégradés par la diffusion (ou dissipation) numérique est de choisir un schéma d'**ordre élevé**. En ce sens, la méthode que nous proposons est paradoxale, car elle est basée sur un algorithme d'**ordre un** ; de plus, il semble de peu d'intérêt, pour les problèmes qui nous concernent, de chercher à « passer » aux ordres supérieurs, car l'algorithme que nous proposons est **exempt de dissipation** au sens où il réalise l'advection exacte des fonctions en marches d'escalier (à la projection près de la solution exacte sur le maillage). Nous en expliquons ici brièvement le principe.

Pour les schémas de type « volumes finis » classiques, le calcul des flux réside dans un décentrage **amont** des variables (schémas de Godunov). Voici un résultat (figure 1) obtenu par cette méthode pour l'équation d'advection à vitesse unitaire de la quantité $\alpha(t,x)$

$$\partial_t \alpha + \partial_x \alpha = 0$$

avec pour condition initiale

$$\alpha(0,x) = \mathbf{1}_{[1/4,1/2]}(x).$$

Pour calculer la solution numérique, on se donne un maillage régulier de pas Δx et un pas de temps Δt (ceci sera détaillé au chapitre 1 de la partie I). La solution numérique est calculée au moyen de l'algorithme

$$\frac{\alpha_j^{n+1} - \alpha_j^n}{\Delta t} + \frac{\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n}{\Delta x} = 0$$

où α_j^n est l'approximation de la solution exacte dans la maille j au temps n . Nous ne rappelons pas dans cette introduction le calcul de α_j^0 . Les nombres $\alpha_{j+1/2}^n$ sont appelés flux numériques et sont définis pour le schéma décentré amont par $\alpha_{j+1/2}^n = \alpha_j^n$.

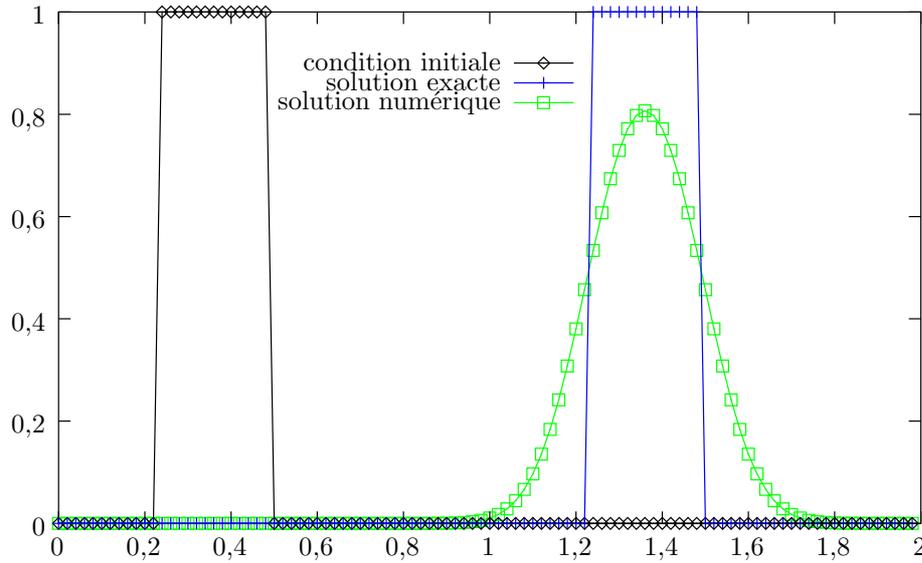


FIG. 1 – La dissipation numérique

La solution numérique, calculée au temps $t = 1$ avec cent pas de temps, est caractérisée par son étalement par rapport à la solution exacte. Ce phénomène d'étalement est appelé diffusion numérique ou encore dissipation numérique. En voici l'explication (cf. [76] ou [5]). Pour toute fonction $f(t,x)$, on pose $\bar{f}_j^n = f(n\Delta t, j\Delta x)$. Supposons que la solution exacte α est régulière et effectuons des développements de Taylor.

$$\begin{cases} \overline{\partial_t \alpha}_j^n = \frac{\bar{\alpha}_j^{n+1} - \bar{\alpha}_j^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \overline{\partial_{t,t}^2 \alpha}_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2), \\ \overline{\partial_x \alpha}_j^n = \frac{\bar{\alpha}_j^n - \bar{\alpha}_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \overline{\partial_{x,x}^2 \alpha}_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{cases}$$

Puisque α vérifie $\partial_t \alpha + \partial_x \alpha = 0$, il vérifie $\partial_{t,t}^2 \alpha = \partial_{x,x}^2 \alpha$ et en additionnant les deux équations ci-dessus on obtient

$$\frac{\bar{\alpha}_j^{n+1} - \bar{\alpha}_j^n}{\Delta t} + \frac{\bar{\alpha}_j^n - \bar{\alpha}_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta x - \Delta t}{2} \overline{\partial_{x,x}^2 \alpha_j^n} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_j^{n+1} - \alpha_j^n}{\Delta t} + \frac{\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n}{\Delta x} &= \frac{\bar{\alpha}_j^{n+1} - \bar{\alpha}_j^n}{\Delta t} + \frac{\bar{\alpha}_j^n - \bar{\alpha}_{j-1}^n}{\Delta x} \\ &\quad + \frac{\Delta x - \Delta t}{2} \overline{\partial_{x,x}^2 \alpha_j^n} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) = 0. \end{aligned}$$

Le terme $\frac{\Delta x - \Delta t}{2} \overline{\partial_{x,x}^2 \alpha_j^n} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$ est appelé **erreur de troncature** et la partie de plus haut degré, $\frac{\Delta x - \Delta t}{2} \overline{\partial_{x,x}^2 \alpha_j^n}$ (elle est de degré un, on dit que le schéma est d'ordre un) est un opérateur de diffusion de coefficient $(\Delta x - \Delta t)/2$ qui est positif en pratique car on impose $\Delta x \geq \Delta t$ (condition de Courant-Friedrichs-Lewy). C'est la raison pour laquelle on parle de **diffusion numérique** ou encore de **dissipation numérique**. La méthode classique pour diminuer la diffusion numérique est d'augmenter l'ordre du schéma en annulant les termes de plus haut degré dans l'erreur de troncature. Généralement, cela revient à choisir un flux moins décentré vers l'amont, en général une valeur comprise entre la valeur amont et la valeur aval (obtenue par une reconstruction d'ordre deux, trois...). Mais la valeur aval est la plupart du temps évitée (sauf parfois pour les schémas ENO, voir [85] et [86]), car elle conduit à un schéma instable. Ces techniques de montée en ordre foisonnent depuis les années quatre-vingt et voient l'arrivée de très nombreux algorithmes peu dissipatifs. Une classe importante de ces algorithmes est celle des limiteurs de flux (ou limiteurs de pente) développée et uniformisée par Sweby, Harten, Roe, Toro... On peut citer par exemple les limiteurs célèbres Superbee ou Minmod. Nous avons choisi une voie différente.

En nous ramenant à l'équation d'advection en dimension un (notre problème standard), nous écrivons sous un **formalisme nouveau** des conditions suffisantes explicites de convergence d'un schéma. Le choix que nous faisons est de **décentrer les flux au maximum vers l'aval tout en veillant à vérifier les conditions de convergence**, qui sont des conditions de stabilité en normes L^∞ et VB. Ceci peut être vu comme un problème d'optimisation sous contraintes (mais le calcul du flux est très simple). Cette approche conduit à un algorithme d'ordre un qui possède d'étonnantes propriétés antidissipatives. Par exemple, nous sommes munis avec ce schéma d'une estimation d'erreur **uniforme en temps** pour une classe de conditions initiales très grande (dense dans $L^1(\mathbb{R})$); de plus, nous conjecturons la même estimation pour toute condition initiale. Il s'agit à notre connaissance de la première estimation d'erreur uniforme en temps pour un schéma de transport.

Les conditions de stabilité que nous avons exhibées sont équivalentes (dans un autre formalisme) aux conditions obtenues par Sweby dans le formalisme des limiteurs, et il est étonnant que ce schéma n'ait pas été étudié en détail auparavant, d'autant plus étonnant que son équivalent dans le formalisme des limiteurs est connu, sous le nom de limiteur Ultrabee (Roe, Toro)². Nous pensons que le formalisme que nous avons introduit, plus explicite, permet une autre compréhension des schémas de type volumes finis. Les utilisations ultérieures de ce formalisme, rapportées dans ce mémoire, en sont l'illustration.

La suite de cette première partie est consacrée à l'extension de cet algorithme à des équations plus complexes : l'équation de Burgers puis les équations d'Euler. Ces études aboutissent à l'écriture d'un algorithme sans dissipation pour les chocs de l'équation de Burgers, et d'un algorithme antidissipatif pour les discontinuités de contact instationnaires des équations d'Euler.

Ces algorithmes pour l'advection et pour les équations d'Euler s'étendent facilement et avec succès aux mêmes équations en dimension deux grâce à une décomposition direction par direction. Nous obtenons ainsi, à part le caractère VTD (diminution de la variation totale), toutes les bonnes propriétés des schémas proposés en dimension un. En particulier, nous obtenons à nouveau pour l'équation d'advection une estimation de l'erreur **uniforme en temps** pour une classe de conditions initiales dense dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Dans la deuxième partie du mémoire, nous nous intéressons aux équations qui régissent le mouvement des fluides eulériens à plusieurs espèces. Le problème est le suivant : si les équations d'Euler sont **fermées** par la donnée de la loi d'état du fluide (cette loi permet de calculer sa pression connaissant sa densité, sa vitesse et son énergie totale), les équations d'Euler multi-constituants **ne sont pas fermées par la donnée des lois d'état de chaque constituant**, elles nécessitent l'introduction d'équations de fermeture.

Les principales études déjà effectuées sur les problèmes à plusieurs espèces (Abgrall, Saurel, Larrouturou, Karni, Osher, Fedkiw...) sont axées sur des fluides avec interfaces. Comme les fluides y sont supposés séparés, le système est fermé par la donnée de chaque loi d'état. Cependant, la diffusion numérique propre aux schémas utilisés introduit une zone de mélange (mélange numérique, artificiel) et le calcul de la pression ne va pas de soi dans les **mailles de mélange**. Deux voies (pour l'essentiel) sont alors proposées.

D P
E A
U R
X T
I I
È E
M
E

2. Nous remercions Bruno Scheurer pour nous avoir signalé l'existence du limiteur Ultrabee.

La première voie (dans laquelle se rejoignent, à peu de détails près, Abgrall, Saurel, Karni, Osher, Fedkiw...) oublie la présence du mélange en advectant les paramètres de la loi d'état pour calculer la pression. La diffusion numérique due à cette advection numérique se répercute donc sur la pression sans qu'un effort de modélisation soit nécessaire. La présence du mélange est transparente.

La seconde voie, proposée par Larrouturou, Larrouturou et Fezoui, et encore Abgrall, constate effectivement le mélange et en déduit la pression grâce à une modélisation du mélange. La modélisation choisie est la loi de Dalton.

Nous verrons en fait que ces deux voies, très différentes conceptuellement, sont équivalentes quant au résultat (l'advection des paramètres est équivalente au modèle de Dalton).

L'étude que nous avons menée concerne l'élaboration de **lois de fermetures**. Elle est donc proche de la seconde voie, choisie par Larrouturou, Abgrall, etc. Cependant, nous proposons des lois de fermeture différentes de la loi de Dalton, qui par certains côtés est assez peu satisfaisante (elle impose l'égalité locale des températures de tous les fluides). Nous construisons une classe de relations de fermeture sur la base de considérations thermodynamiques. Ce sont des modèles à plusieurs températures, plusieurs pressions, plusieurs entropies, plusieurs volumes spécifiques... Précisons dès maintenant qu'ils ne sont pas tous conservatifs. Ces modèles vérifient des propriétés telles que l'existence d'une température globale, d'une entropie physique globale, la croissance de cette entropie globale. Parmi ceux-ci, on peut citer les modélisations classiques : égalités des températures et des pressions, loi de Dalton. Un autre exemple de relation de fermeture est le modèle avec égalité des pressions et égalité des transferts de chaleur (nous dirons « équirépartition des quantités de chaleur »). Ce dernier par exemple n'est pas conservatif. Pour un fluide à deux constituants de volumes spécifiques τ_1, τ_2 , d'énergies internes spécifiques $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, de fractions massiques α_1, α_2 , densité totale ρ et de pression p , le système différentiel pour ce modèle est

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_1) + \operatorname{div}(\rho u \alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_2) + \operatorname{div}(\rho u \alpha_2) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho u e + p u) = 0, \\ \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 = 1/\rho, \\ \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = \varepsilon, \\ p_1 = p_2 = p, \\ \partial_t(\rho \varepsilon_1) + p \partial_t(\rho \tau_1) + \operatorname{div}(\rho u \varepsilon_1) + p \operatorname{div}(\rho u \tau_1) \\ \quad = \partial_t(\rho \varepsilon_2) + p \partial_t(\rho \tau_2) + \operatorname{div}(\rho u \varepsilon_2) + p \operatorname{div}(\rho u \tau_2). \end{array} \right.$$

Les cinq premières équations sont des équations de conservation de la masse totale, de la masse de chaque constituant, de la quantité de mouvement et de l'énergie totales. Les deux suivantes résultent d'hypothèses sur la nature du mélange. L'avant-dernière équation exprime l'égalité des pressions. La dernière équation, qui traduit l'équirépartition des quantités de chaleur, n'est pas conservative.

Les lois de mélanges construites seront utilisées aussi bien pour des mélanges numériques (interfaces diffusées) que pour des mélanges physiques (vraies zones de mélange).

Après avoir élaboré cette classe de lois de mélange, nous en faisons une sélection sur des critères mathématiques : symétrisabilité, hyperbolicité du système d'équations aux dérivées partielles qui en découle, existence d'une entropie mathématique. Parmi les lois de mélange proposées, certaines comportent des **équations non conservatives**. C'est le cas par exemple de la loi avec égalité des pressions et équirépartition des quantités de chaleur. Se pose pour elles la question de la définition de solutions discontinues puisque l'absence de formulation conservative interdit tout recours à une formulation faible classique. Nous apportons un début de réponse à cette question en prouvant l'existence de solutions-ondes progressives pour le système isobare avec équirépartition des quantités de chaleur (à deux constituants) régularisé au moyen d'un opérateur parabolique de type Navier-Stokes. Cette analyse donne une définition possible de la solution discontinue de type choc, c'est-à-dire associée à un champ vraiment non linéaire (définition liée à l'opérateur parabolique choisi), en s'appuyant sur les travaux de LeFloch et Sainsaulieu.

L'utilisation des différentes lois de mélange pour le mélange numérique (interfaces diffusées) pose un problème de fond. Les solutions numériques données dans ce cas par les différents modèles de mélange seront évidemment différentes, or il est évident que la solution exacte ne dépend d'aucune modélisation de mélange puisqu'elle ne comporte qu'une interface séparant des composants purs. La question importante est donc : « comment se comportent les solutions numériques données par les différents modèles de mélange lorsque l'on fait tendre la taille des mailles vers 0 ? ». La réponse est apportée par un résultat de type Lax-Wendroff. Sous des hypothèses techniques de stabilité et de convergence, nous montrons que la limite ne dépend pas du modèle de mélange choisi et est bien la solution avec advection de l'interface (précisons que cette solution limite, avec interface, est solution d'un système conservatif, c'est ce qui permet d'effectuer une analyse à la Lax-Wendroff).

Reste que l'analyse mathématique ne nous a pas permis de mettre en évidence la supériorité d'un des modèles par rapport aux autres. Peut-être pourrions-nous les départager en observant les résultats numériques ?

La troisième partie de ce rapport est consacrée à la résolution numérique des systèmes d'équations aux dérivées partielles étudiés dans la deuxième partie. Cette troisième partie se pose naturellement comme une synthèse des deux précédentes : nous y utilisons le formalisme et les techniques de décentrage aval développés dans la première partie pour approcher les inconnues advectées présentes dans les systèmes de la deuxième partie (les fractions massiques des différentes espèces). Le résultat est le **transport exact, sans diffusion numérique, des interfaces** (sans suivi d'interface proprement dit, ni reconstruction d'interface), c'est-à-dire que des fractions massiques initialement discontinues le restent (ce qui est le résultat attendu en l'absence de dissipation physique). De plus, nous obtiendrons aussi le **respect parfait des bords des zones de mélange** ; autrement dit, les zones de mélange resteront circonscrites et ne s'étendront pas indéfiniment en temps infini (ce qui est aussi le résultat attendu). La fin de cette partie, consacrée à l'extension en dimension deux de ces algorithmes par décomposition directionnelle, présente des résultats numériques équivalents, tant pour les zones de mélange que pour les interfaces, aux résultats obtenus en dimension un. En particulier, les résultats numériques pour les interfaces sont équivalents à ceux donnés par des algorithmes de suivi d'interface, avec cependant

- une **complexité algorithmique** bien moindre (il ne s'agit que de formules explicites de flux) ;
- la **conservation exacte** de chaque masse partielle, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale ;
- un passage à la dimension trois beaucoup plus aisément envisageable (grâce à une nouvelle décomposition directionnelle).

On observe ci-dessous les résultats numériques de la simulation d'une instabilité de Rayleigh-Taylor obtenus par un algorithme classique (dcentrage amont des flux) et l'algorithme que nous proposons ; la fonction représentée est la fraction massique d'un des constituants, la couleur rouge représente la valeur 1 et la couleur verte représente la valeur 0 (dans une version en noir et blanc, le sombre représente la valeur 1 tandis que le clair représente la valeur 0).

Dans cette partie, nous examinons aussi le comportement des différentes lois de mélange du point de vue numérique. Nous comparons les résultats numériques donnés dans le cas d'interfaces pour le modèle de Dalton, la loi isobare isotherme et la loi isobare avec équirépartition des quantités de chaleur. Le schéma proposé pour ce dernier modèle de mélange présente l'avantage théorique de posséder des propriétés entropiques. Les résultats obtenus avec la loi de Dalton et la loi isobare isotherme sont affectés d'oscillations en vitesse et en pression à la discontinuité de contact. Ces oscillations (« spurious oscillations ») sont classiques, signalées par

Abgrall, Larrouturou, Croisille, Karni, Osher... En revanche, le modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur ne crée pas ces oscillations à la discontinuité. La vitesse et la pression y sont rigoureusement constantes, comme c'est le cas avec les schémas modifiés d'Abgrall et Saurel, Osher et Fedkiw... Il est vraisemblable que cela provient du fait que le schéma proposé pour ce modèle est entropique.

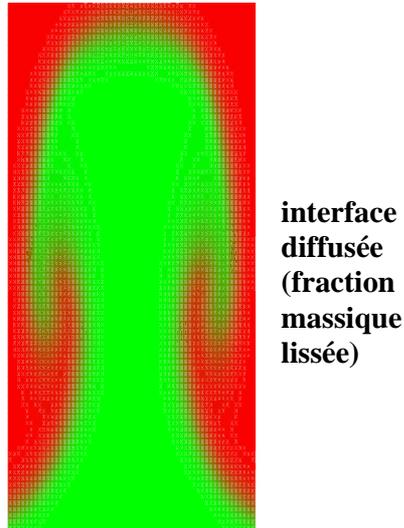


FIG. 2 – Avec le décentrage amont (calcul classique).

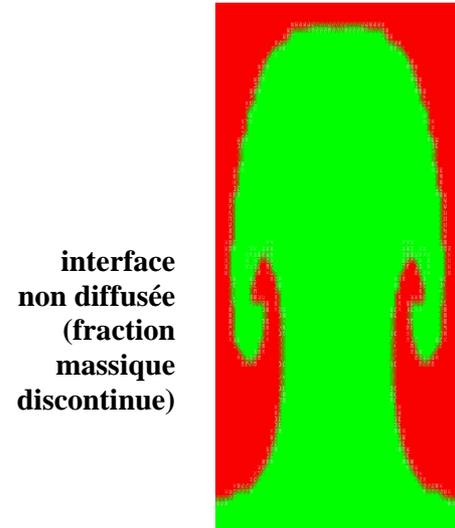


FIG. 3 – Avec les flux antidissipatifs proposés dans ce mémoire...

Première partie

Décentrage aval

Cette partie est consacrée à l'étude de la stabilité et de la convergence des schémas numériques pour les lois de conservation. Nous envisagerons l'équation d'advection linéaire, les équations scalaires non linéaires à flux convexe (de type « Burgers ») puis le système des équations d'Euler.

Nous chercherons à mettre en évidence des conditions de stabilité et de convergence qui soient explicites et facilement utilisables pour la mise au point de schémas numériques.

L'effort sera ensuite porté sur l'écriture d'algorithmes non dissipatifs, c'est-à-dire d'algorithmes qui n'introduisent pas de diffusion numérique (dans un sens qui sera précisé). La solution que nous proposerons est originale : elle ne fait appel ni aux méthodes habituelles de « montée en ordre » (cf. [44], [94], [41]...), le schéma pour l'advection sera d'ordre un, ni au raidissement artificiel de fronts (cf. [52]). Elle est même paradoxale puisqu'elle repose sur le décentrage **vers l'aval** des flux numériques (sous contraintes de stabilité), à l'opposé des méthodes traditionnelles de décentrage amont (schémas de type Godunov ou Roe, [77]). Les résultats principaux seront le transport exact des discontinuités pour l'équation d'advection, des chocs pour l'équation de Burgers, des discontinuités de contact pour les équations d'Euler. Pour l'équation d'advection, nous obtiendrons une **estimation d'erreur uniforme en temps** pour une classe de conditions initiales dense dans les espaces usuels.

Les travaux qui concernent l'équation d'advection et les équations d'Euler, effectués pour des équations en dimension un, seront étendus au cas d'équations en dimension deux par décomposition directionnelle (décomposition direction par direction), et nous retrouverons ainsi en dimension deux toutes les propriétés de transport exact et l'estimation d'erreur uniforme en temps obtenues en dimension un.

Chapitre 1

Équation d'advection linéaire et schéma antidissipatif

Nous présentons une étude détaillée des conditions de convergence d'un schéma de type « volumes finis » pour l'advection linéaire en dimension un. Nous proposons un schéma particulier dont la caractéristique est l'absence de dissipation numérique en un sens qui sera précisé. En particulier, des résultats de convergence en temps infini (estimations d'erreurs uniformes en temps) sont démontrés. Ils sont ensuite illustrés par des résultats numériques.

Nous présentons ensuite une extension simple de cet algorithme à la résolution de l'équation d'advection linéaire en dimension deux, par une décomposition directionnelle. Les mêmes estimations d'erreurs uniformes en temps sont démontrées, elles aussi illustrées par des résultats numériques.

1.1 Étude algorithmique en dimension un

Nous considérons l'équation d'advection linéaire à vitesse constante u strictement positive sur \mathbb{R}

$$\partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = 0, \quad (1.1)$$

$$u \in \mathbb{R}, \quad u > 0,$$

avec la condition initiale

$$\alpha(0, x) = \alpha^0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \quad (1.2)$$

(l'espace dans lequel on choisit la condition initiale sera par la suite précisé).

Nous discrétisons cette équation sous une forme « volumes finis ». Pour cela, nous définissons un maillage régulier de \mathbb{R} de pas Δx , dont les mailles sont les intervalles $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, $j \in \mathbb{Z}$ avec $x_{j+1/2} = (j + 1/2)\Delta x$, donc $x_{j+1/2} - x_{j-1/2} = \Delta x$. On

se donne un pas de temps Δt et on pose $\lambda = \Delta t / \Delta x$ (λ est le nombre de Courant). La condition initiale discrète pour α est définie par

$$\alpha_j^0 = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\alpha^0(x)}{\Delta x} dx \quad (1.3)$$

d'où l'utilité de l'hypothèse $\alpha^0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. L'équation discrète associée à (1.1) est

$$\frac{\alpha_j^{n+1} - \alpha_j^n}{\Delta t} + u \frac{\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n}{\Delta x} = 0,$$

soit

$$\alpha_j^{n+1} = \alpha_j^n - u\lambda(\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n). \quad (1.4)$$

Les nombres $\alpha_{j+1/2}^n$ sont des flux aux interfaces, et peuvent être considérés comme des valeurs de α aux bords des mailles, de sorte que le réel

$$\frac{\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n}{\Delta x}$$

est une approximation de $\partial_x \alpha(n\Delta t, j\Delta x)$. Le choix d'un schéma repose sur la détermination des flux.

Définition 1

On dit que le schéma (1.4) est explicite s'il existe un entier k et une fonction réelle g à $2k$ variables réelles tels que

$$\alpha_{j+1/2}^n = g(\alpha_{j-k+1}^n, \alpha_{j-k+2}^n, \dots, \alpha_j^n, \dots, \alpha_{j+k}^n) \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

■

Tous les schémas que nous considérons dans la suite sont explicites.

1.1.1 Stabilité et convergence

Nous rappelons quelques définitions (cf. [40]).

Définition 2

Un schéma de la forme (1.4), (1.5) est dit consistant s'il est explicite et si la fonction g de la définition 1 vérifie

$$g(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) = \alpha. \quad (1.6)$$

■

Définition 3

Le schéma (1.4) est dit stable L^∞ s'il existe un réel C indépendant de n et de Δt tel que

$$\max_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j^n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

■

Définition 4

La variation totale à l'étape en temps n de la solution discrète α_j^n est

$$VT^n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n|. \quad (1.8)$$

Le schéma (1.4) est à variation totale décroissante (VTD) si pour toute donnée $(\alpha_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_{j+1}^{n+1} - \alpha_j^{n+1}| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n|$. ■

Définition 5

Soit f une fonction réelle à variable réelle de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. La variation totale $VT(f)$ de f est donnée par

$$VT(f) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi'(x) dx; \phi \in C^1_0(\mathbb{R}); \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1 \right\} \in \overline{\mathbb{R}^+}. \quad (1.9)$$

Définition 6

L'espace $VB(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ dont la variation totale est bornée.

$$VB(\mathbb{R}) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}); VT(f) < +\infty\}.$$

Pour simplifier les énoncés des théorèmes de convergence dans la suite de ce chapitre, nous définissons maintenant la notion de schéma convergent. Notons

$$\overset{\Delta t, \Delta x}{\alpha}(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j^n \mathbf{1}_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[}(x) \mathbf{1}_{[n\Delta t, (n+1)\Delta t[}(t), \quad (1.10)$$

les α_j^n étant donnés par le schéma (1.3), (1.4). Il s'agit de la fonction constante par mailles en espace et en temps qui est la solution approchée de (1.1), (1.2).

Définition 7

Un schéma de la forme (1.3), (1.4) avec λ fixé est dit convergent vers $\alpha(t, x)$ dans $L^1(\mathbb{R})$ s'il existe une suite $(\Delta x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que

- $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta x_m = 0$;
- $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\overset{\Delta t_m, \Delta x_m}{\alpha}(t, \cdot) - \alpha(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$, Δt_m étant défini par $\Delta t_m = \lambda \Delta x_m$.

Ces définitions trouvent leur utilité dans le théorème suivant (voir [40]).

Théorème 1

Supposons que $\alpha^0(x) \in VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

On considère un schéma explicite de la forme (1.3), (1.4).

Supposons que ce schéma est consistant, stable L^∞ et VTD, et que ses flux sont localement lipschitziens.

Alors, il est convergent dans $L^1(\mathbb{R})$ vers la solution $\alpha(t, x) = \alpha^0(x - ut)$ de (1.1), (1.2). \blacksquare

Ce résultat nous incite à essayer de trouver des conditions (facilement exploitables) sous lesquelles un schéma est stable L^∞ et VTD. Décrivons la méthode que nous utilisons. Cette méthode, présentée ici dans le cadre de l'équation d'advection linéaire, s'est montrée aussi efficace pour les équations scalaires non linéaires ainsi que pour certains systèmes non linéaires (cf chapitres 2 et 3). Pour commencer, nous remarquons (nous le prouverons dans la démonstration du théorème 2) que pour avoir la stabilité L^∞ et la décroissance de la variation totale, il suffit d'avoir

$$\min(\alpha_{j-1}^n, \alpha_j^n) \leq \alpha_j^{n+1} \leq \max(\alpha_{j-1}^n, \alpha_j^n), \quad (1.11)$$

car alors,

$$\begin{aligned} \max_{j \in \mathbb{Z}}(\alpha_j^{n+1}) &\leq \max_{j \in \mathbb{Z}}(\alpha_j^n), \\ \min_{j \in \mathbb{Z}}(\alpha_j^{n+1}) &\geq \min_{j \in \mathbb{Z}}(\alpha_j^n), \end{aligned}$$

ce qui implique la stabilité L^∞ . La décroissance de la variation totale sera démontrée par la suite.

On rappelle que la vitesse u est supposée strictement positive. Afin de simplifier les calculs, posons pour tout entier relatif j

$$\begin{cases} m_{j-1/2}^n = \min(\alpha_{j-1}^n, \alpha_j^n), \\ M_{j-1/2}^n = \max(\alpha_{j-1}^n, \alpha_j^n). \end{cases} \quad (1.12)$$

Dans l'encadrement (1.11), on remplace α_j^{n+1} par son expression incrémentale (1.4) faisant intervenir les flux,

$$m_{j-1/2}^n \leq \alpha_j^n - u\lambda(\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n) \leq M_{j-1/2}^n.$$

Ceci permet d'obtenir une inégalité équivalente sur le flux $\alpha_{j+1/2}^n$, faisant intervenir $\alpha_{j-1/2}^n$, qui est nécessaire et suffisante pour avoir (1.11) :

$$\frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - M_{j-1/2}^n) + \alpha_{j-1/2}^n \leq \alpha_{j+1/2}^n \leq \frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - m_{j-1/2}^n) + \alpha_{j-1/2}^n. \quad (1.13)$$

Cet encadrement n'est pas constructif car les bornes dépendent du flux $\alpha_{j-1/2}^n$, donc il faut avoir calculé tous les $\alpha_{i-1/2}^n$ avec $i \leq j$ pour connaître les bornes de stabilité pour $\alpha_{j+1/2}^n$.

1.1.2 Conditions suffisantes de convergence

Considérons la définition 2. L'évidence, pour qu'un schéma de type (1.4) soit consistant, il suffit que

$$m_{j+1/2}^n \leq \alpha_{j+1/2}^n \leq M_{j+1/2}^n. \quad (1.14)$$

Nous appellerons « inégalité de consistance » ou « contrainte de consistance » l'inégalité (1.14).

Il paraît intéressant de remplacer dans (1.13) $\alpha_{j-1/2}^n$ par $\max(\alpha_{j-1}^n, \alpha_j^n)$ pour la borne inférieure, et par $\min(\alpha_{j-1}^n, \alpha_j^n)$ pour la borne supérieure et d'imposer la consistance des flux par l'inégalité de consistance (1.14). En effet, si

$$\begin{cases} \frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - M_{j-1/2}^n) + M_{j-1/2}^n \leq \alpha_{j+1/2}^n \leq \frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - m_{j-1/2}^n) + m_{j-1/2}^n, \\ m_{j-1/2}^n \leq \alpha_{j-1/2}^n \leq M_{j-1/2}^n, \end{cases} \quad (1.15)$$

l'encadrement (1.13) est *a fortiori* vérifié. On constate que les nouvelles inégalités proposées sont explicites (puisqu'elles ne dépendent plus du flux $\alpha_{j-1/2}^n$). Nous disons qu'elles sont constructives, car elles permettent de choisir des flux assurant la stabilité du schéma sans avoir calculé au préalable les flux dans les mailles voisines.

La question qui se pose est « est-il possible de trouver un flux qui vérifie simultanément les quatre inégalités de (1.15)? ». En d'autres termes, on se demande si les deux intervalles donnés par (1.15) sont d'intersection non vide. Le théorème 2 donne une réponse positive à cette question. Il affirme de plus que le décentrage amont (schéma classique, avec $\alpha_{j+1/2}^n = \alpha_j^n \forall j$) vérifie ces inégalités.

Pour continuer, nous introduisons de nouvelles notations. Pour tout entier relatif j , nous posons

$$\begin{cases} b_j^n = \frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - M_{j-1/2}) + M_{j-1/2}, \\ B_j^n = \frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - m_{j-1/2}) + m_{j-1/2}. \end{cases} \quad (1.16)$$

Cette définition est rendue possible par l'hypothèse $u > 0$.

Théorème 2

Considérons un schéma de type (1.3), (1.4) avec $u > 0$.

Supposons vérifiée la condition de type CFL¹ $u\lambda \leq 1$. Alors,

$$\alpha_j^n \in [m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n] \cap [b_j^n, B_j^n] \text{ qui n'est pas vide.}$$

Supposons de plus que les flux $(\alpha_{j+1/2}^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ vérifient $(\forall j \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} b_j^n &\leq \alpha_{j+1/2}^n \leq B_j^n, \\ m_{j+1/2}^n &\leq \alpha_{j+1/2}^n \leq M_{j+1/2}^n. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Alors, le schéma (1.3), (1.4) est stable L^∞ et VTD. Dans ce cas, le schéma est convergent si les flux sont localement lipschitziens (théorème 1). ■

Démonstration

Tout d'abord, il est évident que $\alpha_j^n \in [m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n]$ (cf. notations (1.12)). Donc il suffit de montrer que $\alpha_j^n \in [b_j^n, B_j^n]$. Montrons que $\alpha_j^n \leq B_j^n$. Sous la condition CFL

1. Condition de Courant-Friedrichs-Lewy, voir [64], [41]...

exprimée dans le théorème, $(1/(u\lambda) - 1) \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$. Par définition de $m_{j-1/2}$, $(\alpha_j - m_{j-1/2}) \geq 0$. D'où

$$\left(\frac{1}{u\lambda} - 1\right)(\alpha_j - m_{j-1/2}) \geq 0,$$

soit

$$B_j^n = \frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - m_{j-1/2}) + m_{j-1/2} \geq \alpha_j^n.$$

De la même manière, on montre que $b_j^n \leq \alpha_j^n$. Donc $\alpha_j^n \in [b_j^n, B_j^n]$ et $\alpha_j^n \in [m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n]$, donc $\alpha_j^n \in [m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n] \cap [b_j^n, B_j^n]$. L'intervalle $[b_j^n, B_j^n] \cap [m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n]$ n'est donc pas vide et il est possible de trouver un flux $\alpha_{j+1/2}^n$ vérifiant le double encadrement (1.17).

La suite de la démonstration est pour l'essentiel une redite, en sens inverse, de l'exposition de la méthode ci-dessus qui a abouti aux inégalités (1.15).

Soient donc $(\alpha_{j+1/2}^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ des flux tels que

$$\begin{aligned} b_j^n &\leq \alpha_{j+1/2}^n \leq B_j^n, \\ m_{j+1/2}^n &\leq \alpha_{j+1/2}^n \leq M_{j+1/2}^n. \end{aligned}$$

L'encadrement étant supposé vrai pour tout j , on a

$$m_{j-1/2}^n \leq \alpha_{j-1/2}^n \leq M_{j-1/2}^n,$$

et tous les $\alpha_{j+1/2}^n$ vérifient

$$\frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - M_{j-1/2}^n) + \alpha_{j-1/2}^n \leq \alpha_{j+1/2}^n \leq \frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - m_{j-1/2}^n) + \alpha_{j-1/2}^n,$$

soit

$$\frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - M_{j-1/2}^n) \leq \alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n \leq \frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - m_{j-1/2}^n).$$

Soit, puisque $u > 0$,

$$-M_{j-1/2}^n \leq u\lambda(\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n) - \alpha_j^n \leq -m_{j-1/2}^n$$

qui est équivalent à

$$m_{j-1/2}^n \leq \alpha_j^n - u\lambda(\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j-1/2}^n) \leq M_{j-1/2}^n,$$

et enfin

$$m_{j-1/2}^n \leq \alpha_j^{n+1} \leq M_{j-1/2}^n.$$

Il est maintenant facile de montrer que le schéma est stable L^∞ et VTD. Par exemple, on peut utiliser l'analyse incrémentale de Harten (cf. [45]). La valeur α_j^{n+1} est une combinaison convexe de α_{j-1}^n et de α_j^n , c'est-à-dire il existe $\kappa_{j-1/2}^n \in [0, 1]$ tel que

$$\alpha_j^{n+1} = \kappa_{j-1/2}^n \alpha_j^n + (1 - \kappa_{j-1/2}^n) \alpha_{j-1}^n,$$

que l'on peut écrire

$$\alpha_j^{n+1} = \alpha_j^n - D_{j-1/2}^n (\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n)$$

avec $D_{j-1/2}^n = 1 - \kappa_{j-1/2}^n$. Le fait que $D_{j-1/2}^n \in [0, 1]$ entraîne que le schéma est stable L^∞ et VTD d'après un résultat de [45]. Puis le théorème 1 assure la convergence du schéma sous l'hypothèse que les flux sont localement lipschitziens. ■

Le théorème 2 donne des conditions suffisantes de convergence d'un schéma de type (1.3), (1.4), sous forme de bornes sur les flux (1.17). Nous nous intéresserons désormais seulement aux flux situés entre ces bornes.

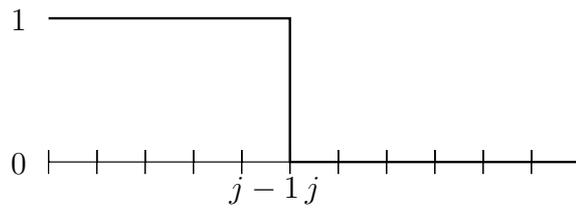
1.1.3 Décentrage aval sous les contraintes de convergence

Les conditions de convergence du théorème 2 sont facilement utilisables car les bornes peuvent être calculées explicitement (elles ne dépendent que des valeurs α_j^n et pas des α_j^{n+1}). D'autre part, la condition CFL n'est pas plus stricte que la condition habituelle pour les schémas explicites. Ce théorème montre au passage que le schéma standard décentré amont ($\alpha_{j+1/2}^n = \alpha_j^n$) est stable L^∞ et VTD, donc convergent. Cependant, nous sommes intéressés non pas par le schéma décentré amont (connu pour être dissipatif) mais par le schéma décentré aval. C'est en effet ce schéma qui présente les meilleures propriétés antidissipatives. L'exemple 1 ci-dessous permet d'en saisir la raison. Mais le schéma décentré aval est instable (il ne rentre pas dans le cadre des définitions 3 et 4). Une idée naturelle est donc de décentrer le flux « le plus possible » vers l'aval sous les contraintes de type inégalité (1.17) pour obtenir la stabilité. Le flux retenu peut alors être vu comme la solution du problème de minimisation sous contrainte

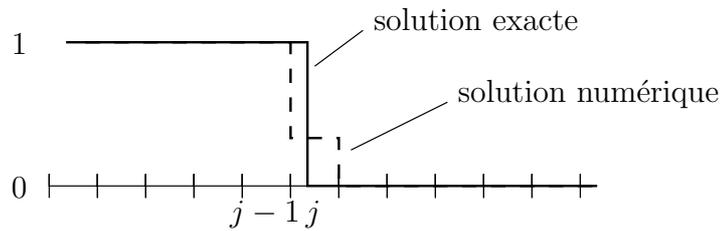
$$\begin{aligned} & \text{minimiser } |\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j+1}^n| \\ & \text{sous la contrainte (1.17).} \end{aligned}$$

Exemple 1

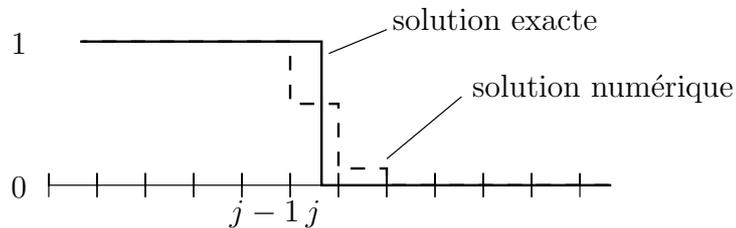
Cet exemple permet de comprendre pourquoi le choix du flux décentré vers l'aval peut être judicieux. Pour cela nous considérons le cas de l'advection à vitesse constante et égale à 1. La condition initiale est une fonction de Heavyside. Le nombre de Courant $\lambda = \Delta t / \Delta x$ vaut $1/3$, de sorte que la solution exacte progresse d'un tiers de maille vers la droite à chaque pas de temps. Représentons la condition initiale sur son maillage.



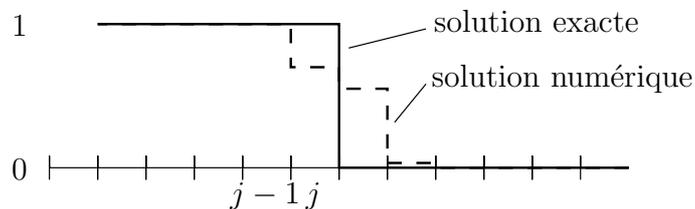
Pour le premier pas de temps, la seule manière d'avoir la stabilité L^∞ dans la maille $j - 1$ est de décentrer le flux $\alpha_{j-1/2}^0$ vers l'amont, ce qui donne α^1 :



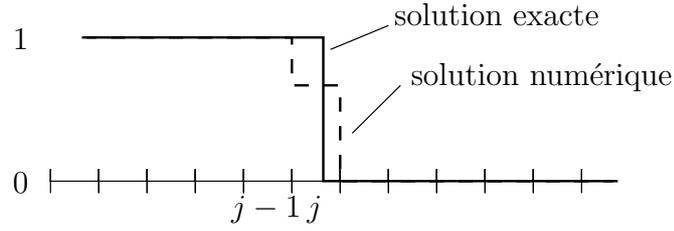
partir de cette étape, on a le choix pour le flux $\alpha_{j+1/2}$. Le choix classique est la valeur amont $\alpha_{j+1/2}^1 = \alpha_j^1 = 1/3$ et donne



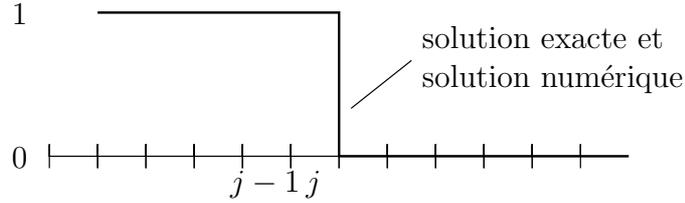
Puis un nouveau pas de temps avec des flux amont diffuse encore plus le front :



Si après la première étape on avait choisi $\alpha_{j+1/2}^1 = \alpha_{j+1}^1 = 0$, on n'aurait pas diffusé le front sur plus d'une maille et obtenu la projection de la solution exacte sur le maillage.



Une étape supplémentaire avec un flux aval $\alpha_{j+1/2}^2 = \alpha_{j+1}^2 = 0$ aboutit même à la solution exacte.



On voit qu'il suffit maintenant de répéter les opérations depuis le premier pas de temps pour garder un front étalé sur une maille au plus avec le décentrage aval, alors que le décentrage amont étale le front sur une maille supplémentaire à chaque pas de temps. Ceci incite à essayer de décentrer les flux vers l'aval plutôt que vers l'amont.

Par ailleurs, nous remarquons que le décentrage vers l'aval donne un flux d'ordre un (un flux d'ordre supérieur serait une valeur intermédiaire entre la valeur amont et la valeur aval). ■

Venons-en au côté pragmatique du calcul des flux (qui réalisent le minimum de $|\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j+1}^n|$ sous la contrainte (1.17)). La contrainte (1.17) est linéaire et le flux ne peut prendre que trois valeurs :

$$\begin{cases} \alpha_{j+1/2}^n = \max(b_j^n, m_{j+1/2}^n) & \text{si } \alpha_{j+1}^n \leq \max(b_j^n, m_{j+1/2}^n), \\ \alpha_{j+1/2}^n = \alpha_{j+1}^n & \text{si } \max(b_j^n, m_{j+1/2}^n) \leq \alpha_{j+1}^n \leq \min(B_j^n, M_{j+1/2}^n), \\ \alpha_{j+1/2}^n = \min(B_j^n, M_{j+1/2}^n) & \text{si } \min(B_j^n, M_{j+1/2}^n) \leq \alpha_{j+1}^n. \end{cases} \quad (1.18)$$

On démontre le petit lemme suivant, qui sera utilisé par la suite.

Lemme 1

La valeur prise par le flux déterminé par (1.18) (flux décentré aval sous contraintes amont) est

$$\begin{cases} \alpha_{j+1/2}^n = b_j^n & \text{si } \alpha_{j+1}^n \leq b_j^n, \\ \alpha_{j+1/2}^n = \alpha_{j+1}^n & \text{si } b_j^n \leq \alpha_{j+1}^n \leq B_j^n, \\ \alpha_{j+1/2}^n = B_j^n & \text{si } B_j^n \leq \alpha_{j+1}^n. \end{cases} \quad (1.19)$$

■

Cela signifie que la contrainte de consistance (1.14) n'est pas active, seule la contrainte de stabilité a un rôle.

Démonstration

Il suffit de montrer que le choix de flux (1.19) implique les inégalités de consistance (1.14). Considérons un flux calculé suivant les indications du lemme 1. Supposons que $\alpha_{j+1/2}^n = b_j^n$. Nous savons alors que $\alpha_{j+1}^n \leq b_j^n$, et donc $m_{j+1/2}^n \leq b_j^n$. Nous nous souvenons par ailleurs du fait que $b_j^n \leq M_{j+1/2}^n$ (cette inégalité a été trouvée lors de la démonstration du théorème 2), donc $m_{j+1/2}^n \leq b_j^n = \alpha_{j+1/2}^n \leq M_{j+1/2}^n$ et le flux vérifie (1.14). Supposons maintenant que $\alpha_{j+1/2}^n = \alpha_{j+1}^n$. Il est clair dans ce cas que le flux vérifie (1.14). Si enfin $\alpha_{j+1/2}^n = B_j^n$, on en déduit que $\alpha_{j+1}^n \geq B_j^n$, et le flux est consistant car on a aussi $B_j^n \geq m_{j+1/2}^n$ (inégalité qui peut être démontrée de la même façon que $b_j^n \leq M_{j+1/2}^n$), d'où $M_{j+1/2}^n \geq B_j^n = \alpha_{j+1/2}^n \geq m_{j+1/2}^n$. ■

Remarque 1.1.1

Dans la démonstration du théorème 2, la consistance est un élément essentiel et l'encadrement $b_j^n \leq \alpha_{j+1/2}^n \leq B_j^n$ n'est pas suffisant ! Ce qu'exprime le lemme 1, c'est que ce dernier encadrement associé à la minimisation de $|\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j+1}^n|$ est suffisant. Le fait de décentrer vers l'aval au maximum permet de rattraper la consistance. ■

Le flux donné par (1.19) est solution du problème de minimisation

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } |\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_{j+1}^n| \\ & \text{sous la contrainte } b_j^n \leq \alpha_{j+1/2}^n \leq B_j^n. \end{aligned}$$

Cette dernière contrainte ne dépend que des valeurs α_{j-1}^n et α_j^n , qui sont des valeurs « amont » pour le flux $\alpha_{j+1/2}^n$. Nous dirons donc que c'est une contrainte amont, et que le flux donné par (1.19) est le flux décentré **aval** sous contraintes **amont**.

Remarque 1.1.2

Nous pourrions choisir pour le flux n'importe quelle valeur vérifiant l'encadrement (1.17) (qui assure la stabilité et la consistance et qui définit un intervalle non vide puisqu'il contient la valeur amont). Par exemple, il est possible de choisir le flux de manière aléatoire dans l'intervalle. Mais le décentrage aval est le choix qui donne les meilleurs résultats. Il semble qu'il soit le seul à permettre des résultats d'advection exacte comme les théorèmes 3, 4, 5. ■

Le schéma décentré aval sous contraintes amont (1.19) possède une autre formulation simple ; il peut être écrit comme un limiteur de flux et ses propriétés de stabilité, convergence, peuvent être démontrées en utilisant le formalisme de Sweby et l'analyse incrémentale de Harten ([89], [69], [45]).

Proposition 1

Le schéma décentré aval sous contraintes amont (1.3), (1.4), (1.19) est équivalent au schéma avec limiteur Ultrabee (évoqué dans [91]). Le schéma Ultrabee s'écrit

$$\alpha_j^{n+1} = \alpha_j^n - u\lambda(\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n) - \frac{u\lambda(1-u\lambda)}{2}(\varphi_{j+1/2}^n(\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n) - \varphi_{j-1/2}^n(\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n))$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_{j+1/2}^n &= \varphi(r_{j+1/2}^n, u\lambda) \\ \text{où } r_{j+1/2}^n &= (\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n)/(\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n) \end{aligned}$$

et

$$\varphi(r, \nu) = \min\text{mod}\left(\frac{2r}{\nu}, \frac{2}{1-\nu}\right) = \max\left(0, \min\left(\frac{2r}{\nu}, \frac{2}{1-\nu}\right)\right).$$

On rappelle que $u\lambda > 0 \forall j, n$. ■

Remarquons que le schéma Ultrabee peut s'écrire sous forme d'un schéma « volumes finis » (i.e. sous la forme (1.4)) avec le flux suivant.

$$\begin{aligned} \alpha_{j+1/2}^n &= \alpha_j^n + \frac{1-u\lambda}{2}\varphi_{j+1/2}^n(\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n) \\ &= \alpha_j^n + \max\left(0, \min\left(\frac{1}{u\lambda} - 1, \frac{\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n}\right), 1\right)(\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n). \end{aligned}$$

Démonstration

Réécrivons les valeurs possibles pour le flux.

$$\alpha_{j+1/2}^n = \begin{cases} b_j^n & \text{si } \alpha_{j+1}^n \leq b_j^n, \\ \alpha_{j+1}^n & \text{si } b_j^n \leq \alpha_{j+1}^n \leq B_j^n, \\ B_j^n & \text{si } B_j^n \leq \alpha_{j+1}^n. \end{cases}$$

On en déduit les valeurs possibles pour $\frac{\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_j^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n}$.

$$\frac{\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_j^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n} = \begin{cases} \frac{b_j^n - \alpha_j^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n} & \text{si } \alpha_{j+1}^n \leq b_j^n, \\ \frac{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n} & \text{si } b_j^n \leq \alpha_{j+1}^n \leq B_j^n, \\ \frac{B_j^n - \alpha_j^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n} & \text{si } B_j^n \leq \alpha_{j+1}^n, \end{cases}$$

que l'on peut encore décomposer en

$$\frac{\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_j^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \begin{cases} \alpha_{j-1}^n \leq \alpha_j^n \\ \text{et } \alpha_{j+1}^n \leq b_j^n = \alpha_j^n, \end{cases} \\ \left(\frac{1}{u\lambda} - 1\right) \frac{\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n} & \text{si } \begin{cases} \alpha_j^n \leq \alpha_{j-1}^n \\ \text{et } \alpha_{j+1}^n \leq b_j^n = \frac{\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n}{u\lambda} + \alpha_{j-1}^n, \end{cases} \\ 1 & \text{si } b_j^n \leq \alpha_{j+1}^n \leq B_j^n, \\ 0 & \text{si } \begin{cases} \alpha_j^n \leq \alpha_{j-1}^n \\ \text{et } B_j^n = \alpha_j^n \leq \alpha_{j+1}^n, \end{cases} \\ \left(\frac{1}{u\lambda} - 1\right) \frac{\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n} & \text{si } \begin{cases} \alpha_{j-1}^n \leq \alpha_j^n \\ \text{et } B_j^n = \frac{\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n}{u\lambda} + \alpha_{j-1}^n \leq \alpha_{j+1}^n. \end{cases} \end{cases}$$

On obtient enfin sous une forme plus compacte

$$\frac{\alpha_{j+1/2}^n - \alpha_j^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n} \leq 0, \\ \left(\frac{1}{u\lambda} - 1\right) \frac{\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n} & \text{si } 0 \leq \frac{\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n} \leq \frac{1}{u\lambda} - 1, \\ \frac{1}{u\lambda} - 1 & \text{si } 1 \leq \frac{\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n}. \end{cases}$$

Pour le flux on trouve comme annoncé

$$\alpha_{j+1/2} = \alpha_j^n + \max(0, \min\left(\left(\frac{1}{u\lambda} - 1\right) \frac{\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n}{\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n}, 1\right)(\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n).$$

■

Nous évoquons maintenant la convergence de l'algorithme.

Proposition 2

On considère le problème d'advection (1.1), (1.2) avec $\alpha^0 \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$, et sa version discrète donnée par le schéma décentré aval sous contraintes amont (1.3), (1.4), (1.19). Sous la condition CFL $u\lambda \leq 1$, le schéma est convergent vers la solution de 1.1, 1.2. ■

On sait que le limiteur Ultrabee est convergent (cf. [89], [45], [91]), cela démontre la proposition 2.

1.1.4 Convergence uniforme en temps

L'étude des conditions initiales qui sont advectées de manière exacte par un schéma donné est classique. Par exemple, dans [78], Roe expose des schémas (de type limiteur) qui advectent exactement des conditions initiales affines, quadratiques, cubiques, à progression géométrique... Le schéma décentré amont advecte de manière

exacte les données initiales affines. En effet, si $\alpha_j^0 = aj + b$, on a avec le décentrage amont ($\alpha_{j+1/2}^n = \alpha_j^n$) $\alpha_j^1 = aj + b - u\lambda a$ et par récurrence sur l'indice de temps,

$$\alpha_j^n = a(j - nu\lambda) + b \quad \forall j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Donc α_j^n est la solution exacte (projetée sur le maillage fixe) de l'équation d'advection à vitesse u avec pour donnée initiale la fonction qui vaut α_j^0 dans la maille j .

La faiblesse de ce type de résultats réside dans le fait que les conditions initiales doivent être **globalement** linéaires, ou quadratiques, ou cubiques, etc. Ces résultats d'advection exacte ne garantissent pas le comportement des schémas pour des données initiales quelconques.

Pour le schéma décentré aval sous contraintes amont (c'est-à-dire aussi le limiteur Ultrabee), la classe des fonctions qui sont advectées de manière exacte est « dense » (au sens du lemme 2 suivant) dans l'espace $VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Cette classe de fonctions est exhibée dans le théorème 3.

Théorème 3

On considère le schéma décentré aval sous contraintes amont (1.19) (équivalent au limiteur Ultrabee) avec $u > 0$.

Supposons que la fonction discrète $(\alpha_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ vérifie

$\exists \kappa^n \in [0, 1[$ tel que $\forall j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} \alpha_{3j+1}^n = \alpha_{3j}^n, \\ \alpha_{3j+2}^n = \kappa^n \alpha_{3j+1}^n + (1 - \kappa^n) \alpha_{3j+3}^n \text{ (hypothèse de combinaison convexe)}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Supposons vérifiée la condition CFL $0 < u\lambda \leq 1$.

Alors,

– si $\kappa^n + u\lambda \leq 1$, on a pour tout j

$$\begin{cases} \alpha_{3j+1}^{n+1} = \alpha_{3j}^{n+1} = \alpha_{3j}^n, \\ \alpha_{3j+2}^{n+1} = \kappa^{n+1} \alpha_{3j+1}^{n+1} + (1 - \kappa^{n+1}) \alpha_{3j+3}^{n+1} \end{cases}$$

avec $0 \leq \kappa^{n+1} = \kappa^n + u\lambda \leq 1$;

– si $\kappa^n + u\lambda \geq 1$, on a pour tout j

$$\begin{cases} \alpha_{3j+2}^{n+1} = \alpha_{3j+1}^{n+1} = \alpha_{3j+1}^n, \\ \alpha_{3j+3}^{n+1} = \kappa^{n+1} \alpha_{3j+2}^{n+1} + (1 - \kappa^{n+1}) \alpha_{3j+4}^{n+1} \end{cases}$$

avec $0 \leq \kappa^{n+1} = \kappa^n + u\lambda - 1 \leq 1$.

■

En d'autres termes, après un pas de temps, la solution est encore du type (1.20) avec un nouveau coefficient de combinaison convexe, et éventuellement décalée d'une maille à droite.

Démonstration

La démonstration se fait en trois étapes.

– Montrons que

$$\alpha_{3j+1}^{n+1} = \alpha_{3j+1}^n.$$

Calculons les flux $\alpha_{3j+1/2}^n$ et $\alpha_{3j+3/2}^n$. La constance des flux implique $\alpha_{3j+1/2}^n = \alpha_{3j}^n = \alpha_{3j+1}^n$. D'autre part, $m_{j+1/2}^n = M_{j+1/2}^n = \alpha_{3j}^n$, donc $b_{3j+1}^n = B_{3j+1}^n = \alpha_{3j}^n$ et enfin $\alpha_{3j+3/2}^n = \alpha_{3j}^n$. Ainsi on a $\alpha_{3j+1}^{n+1} = \alpha_{3j}^n$.

– Supposons que $\alpha_{3j-1}^n \neq \alpha_{3j-2}^n$. Nous montrons alors les équivalences

$$\begin{aligned} \alpha_{3j}^{n+1} &= \alpha_{3j}^n \\ &\Downarrow \\ \kappa^n + u\lambda &\leq 1 \\ &\Downarrow \\ \alpha_{3j-1}^{n+1} &= (\kappa^n + u\lambda)\alpha_{3j-2}^{n+1} + (1 - (\kappa^n + u\lambda))\alpha_{3j}^{n+1}. \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu que $\alpha_{3j+1/2}^n = \alpha_{3j}^n$. Par suite, pour que $\alpha_{3j}^{n+1} = \alpha_{3j}^n$, il faut et suffit que $\alpha_{3j-1/2}^n = \alpha_{3j}^n$. Il nous faut donc trouver les conditions pour que $\alpha_{3j-1/2}^n = \alpha_{3j}^n$. D'après le lemme 1,

$$\begin{aligned} \alpha_{3j-1/2}^n &= \alpha_{3j}^n \\ &\Downarrow \\ b_{3j-1}^n &\leq \alpha_{3j}^n \leq B_{3j-1}^n, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \alpha_{3j-1/2}^n &= \alpha_{3j}^n \\ &\Downarrow \\ \frac{\alpha_{3j-1}^n - M_{3j-3/2}^n}{u\lambda} + M_{3j-3/2}^n &\leq \alpha_{3j}^n \leq \frac{\alpha_{3j-1}^n - m_{3j-3/2}^n}{u\lambda} + m_{3j-3/2}^n. \end{aligned}$$

Nous continuons la discussion en distinguant les deux éventualités $\alpha_{3j-1}^n > \alpha_{3j-2}^n$ et $\alpha_{3j-1}^n < \alpha_{3j-2}^n$ (rappelons que l'on a supposé $\alpha_{3j-1}^n \neq \alpha_{3j-2}^n$). Supposons que $\alpha_{3j-1}^n > \alpha_{3j-2}^n$. Alors, $m_{3j-3/2}^n = \alpha_{3j-2}^n$, $M_{3j-3/2}^n = \alpha_{3j-1}^n$ et $\alpha_{3j}^n \geq \alpha_{3j-1}^n > \alpha_{3j-2}^n$ (car α_{3j-1}^n est une combinaison convexe de α_{3j}^n et α_{3j-2}^n).

Donc

$$\begin{aligned} \alpha_{3j-1/2}^n &= \alpha_{3j}^n \\ &\Downarrow \\ \alpha_{3j-1}^n &\leq \alpha_{3j}^n \leq \frac{\alpha_{3j-1}^n - \alpha_{3j-2}^n}{u\lambda} + \alpha_{3j-2}^n. \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $\alpha_{3j}^n \geq \alpha_{3j-1}^n$, ceci est équivalent à

$$u\lambda\alpha_{3j}^n \leq \alpha_{3j-1}^n - \alpha_{3j-2}^n + u\lambda\alpha_{3j-2}^n,$$

et, avec l'hypothèse de combinaison convexe de (1.20),

$$(\kappa^n + u\lambda - 1)\alpha_{3j}^n \leq (\kappa^n + u\lambda - 1)\alpha_{3j-2}^n.$$

Comme $\alpha_{3j}^n > \alpha_{3j-2}^n$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_{3j-1/2}^n &= \alpha_{3j}^n \\ \Downarrow \\ \kappa^n + u\lambda &\leq 1. \end{aligned}$$

Étudions maintenant les conséquences de l'hypothèse $\alpha_{3j-1}^n < \alpha_{3j-2}^n$. Alors, $m_{3j-3/2}^n = \alpha_{3j-1}^n$, $M_{3j-3/2}^n = \alpha_{3j-2}^n$ et $\alpha_{3j}^n \leq \alpha_{3j-1}^n < \alpha_{3j-2}^n$ (car α_{3j-1}^n est une combinaison convexe de α_{3j-2}^n et α_{3j}^n).

$$\begin{aligned} \alpha_{3j-1/2}^n &= \alpha_{3j}^n \\ \Downarrow \\ \frac{\alpha_{3j-1}^n - \alpha_{3j-2}^n}{u\lambda} + \alpha_{3j-2}^n &\leq \alpha_{3j}^n \leq \alpha_{3j-1}^n \\ \Downarrow \\ (\kappa^n + u\lambda - 1)\alpha_{3j}^n &\leq (\kappa^n + u\lambda - 1)\alpha_{3j-2}^n \\ \Downarrow \\ \kappa^n + u\lambda &\leq 1. \end{aligned}$$

Pour l'instant, nous avons montré que si $\alpha_{3j-1}^n \neq \alpha_{3j-2}^n$,

$$\begin{aligned} \alpha_{3j}^{n+1} &= \alpha_{3j}^n \\ \Downarrow \\ \alpha_{3j-1/2}^n &= \alpha_{3j}^n \\ \Downarrow \\ \kappa^n + u\lambda &\leq 1. \end{aligned}$$

De plus, dans ces conditions, puisque $\alpha_{3j-3/2}^n = \alpha_{3j-2}^n$,

$$\begin{aligned} \alpha_{3j-1}^{n+1} &= \alpha_{3j-1}^n - u\lambda(\alpha_{3j-1/2}^n - \alpha_{3j-3/2}^n) = \\ &= \alpha_{3j-1}^n - u\lambda(\alpha_{3j}^n - \alpha_{3j-2}^n) \\ &= (\kappa^n + u\lambda)\alpha_{3j-2}^{n+1} + (1 - (\kappa^n + u\lambda))\alpha_{3j}^{n+1}. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du deuxième point.

– Le troisième point à montrer consiste en les équivalences

$$\begin{aligned} \alpha_{3j-1}^{n+1} &= \alpha_{3j-2}^{n+1} = \alpha_{3j-2}^n \\ &\Downarrow \\ \kappa^n + u\lambda &\geq 1 \\ &\Downarrow \\ \alpha_{3j}^{n+1} &= (\kappa^n + u\lambda - 1)\alpha_{3j-1}^{n+1} + (2 - (\kappa^n + u\lambda))\alpha_{3j+1}^{n+1}, \end{aligned}$$

toujours sous l'hypothèse $\alpha_{3j-1}^n \neq \alpha_{3j-2}^n$. Ce point peut être démontré de manière similaire au deuxième, nous ne répétons pas les opérations.

Résumons ce que nous avons montré. Supposons que $\alpha_{3j-1}^n \neq \alpha_{3j-2}^n$.

– Soit $\kappa^n + u\lambda < 1$ et le deuxième point indique

$$\begin{cases} \alpha_{3j+1}^{n+1} = \alpha_{3j}^{n+1} = \alpha_{3j}^n, \\ \alpha_{3j-1}^{n+1} = \kappa^{n+1}\alpha_{3j-2}^{n+1} + (1 - \kappa^{n+1})\alpha_{3j}^{n+1} \end{cases}$$

avec $0 \leq \kappa^{n+1} = \kappa^n + u\lambda \leq 1$;

– soit $\kappa^n + u\lambda > 1$ et le troisième point donne

$$\begin{cases} \alpha_{3j+2}^{n+1} = \alpha_{3j+1}^{n+1} = \alpha_{3j+1}^n, \\ \alpha_{3j+3}^{n+1} = \kappa^{n+1}\alpha_{3j+2}^{n+1} + (1 - \kappa^{n+1})\alpha_{3j+4}^{n+1} \end{cases}$$

avec $0 \leq \kappa^{n+1} = \kappa^n + u\lambda - E(\kappa^n + u\lambda) \leq 1$ ($E(\cdot)$ désigne la partie entière);

– soit $\kappa^n + u\lambda = 1$ et les trois points démontrés impliquent

$$\alpha_{3j+3}^{n+1} = \alpha_{3j+2}^{n+1} = \alpha_{3j+1}^{n+1} = \alpha_{3j}^n.$$

D'autre part, dans le cas particulier où $\alpha_{3j-1}^n = \alpha_{3j-2}^n$, toutes les égalités résumées ci-dessus sont trivialement vérifiées. Ceci termine la démonstration. \blacksquare

Un exemple de fonction numérique (constante par morceaux) faisant partie de cette classe est visible sur la figure 1.1.

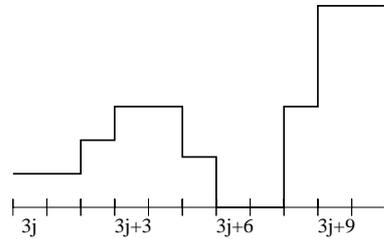


FIG. 1.1 – Un représentant de la classe pour $\kappa = 1/2$.

Nous expliquons maintenant en quel sens et dans quel espace la classe de fonction est dense. Pour cela nous utilisons les définitions classiques 5 et 6.

Lemme 2

Soit un réel donné $\kappa \in [0,1[$.

Soit $f \in VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

Il existe une constante réelle C (dépendant de f) telle que pour tout maillage régulier de pas Δx , il existe une fonction constante par maille $\overset{\Delta x}{f}$ (dont la valeur dans la maille j est f_j) telle que

$$- \forall j \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{cases} f_{3j+1} = f_{3j}, \\ f_{3j+2} = \kappa f_{3j+1} + (1 - \kappa) f_{3j+3} \end{cases}$$

($\overset{\Delta x}{f}$ est dans la classe des fonctions définie au théorème 3);

$$- \|f - \overset{\Delta x}{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C \Delta x.$$

■

Ce qui est important est que le réel C ne dépend pas du pas du maillage. Ainsi, on peut approcher (au sens de la norme de $L^1(\mathbb{R})$) toute fonction de $VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ aussi bien que l'on veut par une fonction constante par maille et dans la classe des fonctions du théorème 3; il suffit de prendre un maillage assez fin.

Démonstration

Nous montrons ce lemme pour $\kappa = 0$. Alors, $\overset{\Delta x}{f}$ est constante par groupe de trois mailles. On rappelle que toute fonction de $VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ peut être approchée à l'ordre un par une fonction constante par maille (ce résultat peut être trouvé dans [37]). Appliquant ceci à l'approximation $\overset{\Delta x}{f}$ de f sur un maillage de pas $3\Delta x$, nous obtenons

$$\|f - \overset{\Delta x}{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \tilde{C}(3\Delta x),$$

qui donne bien l'estimation du lemme pour $C = 3\tilde{C}$.

■

Le théorème 4 généralise le théorème 3 pour un nombre quelconque de pas de temps.

Théorème 4

Considérons le problème numérique d'advection (1.3), (1.4) à vitesse constante $u > 0$ où les flux sont décentrés aval sous contraintes amont (formules (1.19) ou limiteur Ultrabee).

Supposons que la condition initiale discrète est dans la classe des fonctions du théorème 3:

$\exists \kappa^0 \in [0,1[$ tel que $\forall j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} \alpha_{3j+1}^0 = \alpha_{3j}^0, \\ \alpha_{3j+2}^0 = \kappa^0 \alpha_{3j+1}^0 + (1 - \kappa^0) \alpha_{3j+3}^0 \end{cases} \text{ (hypothèse de combinaison convexe).}$$

Soit une séquence de pas de temps $(\Delta t^0, \Delta t^1, \dots, \Delta t^{n-1})$ vérifiant la condition CFL $0 \leq u\lambda^l = u\Delta t^l/\Delta x \leq 1$ pour tout $l \in (0, 1, \dots, n-1)$.

Posons

$$\begin{cases} z^n = \kappa^0 + \sum_{l=0}^{n-1} u\lambda^l, \\ \kappa^n = z^n - E(z^n) \end{cases}$$

($E(z)$ désigne la partie entière de z). Alors,

$$\begin{cases} \alpha_{3j+1+E(z^n)}^n = \alpha_{3j+E(z^n)}^n = \alpha_{3j}^0, \\ \alpha_{3j+2+E(z^n)}^n = \kappa^n \alpha_{3j+1+E(z^n)}^n + (1 - \kappa^n) \alpha_{3j+3+E(z^n)}^n \end{cases}$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$, et tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Ce résultat exprime que pour tout pas de temps, la solution numérique est de la forme (1.20) avec un coefficient de combinaison convexe et un décalage à droite connus explicitement.

Démonstration

Ce théorème est une conséquence directe du théorème 3 et s'en déduit par récurrence.

- Pour $n = 1$, le théorème 4 n'est autre que le théorème 3, donc il est vrai ;
- si le théorème est vrai pour $n = n_1$, la solution $\alpha_j^{n_1}$ est dans la classe des fonctions discrètes qui vérifient le théorème 3, au décalage d'indice près (les indices doivent être décalés de $E(z^{n_1})$). L'application du théorème 3 permet de prouver le théorème 4 à l'étape en temps $n_1 + 1$. ■

Corollaire 1

Faisons les mêmes hypothèses qu'au théorème 4.

Posons

$$\begin{cases} z(t) = \kappa^0 + ut/\Delta x \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ \kappa(t) = z(t) - E(z(t)). \end{cases}$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, définissons $\alpha_j(t)$ par

$$\begin{cases} \alpha_{3j+1+E(z(t))}(t) = \alpha_{3j+E(z(t))}(t) = \alpha_{3j}^0, \\ \alpha_{3j+2+E(z(t))}(t) = \kappa(t) \alpha_{3j+1+E(z(t))}(t) + (1 - \kappa(t)) \alpha_{3j+3+E(z(t))}(t). \end{cases} \quad (1.21)$$

Alors, quelle que soit la séquence de pas de temps $(\Delta t^0, \Delta t^1, \dots, \Delta t^{n-1})$ vérifiant $0 \leq u\lambda^l = u\Delta t^l/\Delta x \leq 1$ pour tout $l \in (0, 1, \dots, n-1)$, la solution numérique donnée par le schéma décentré aval sous contraintes amont vérifie

$$\alpha_j^n = \alpha_j \left(\sum_{l=0}^{n-1} \Delta t^l \right) \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

La suite $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ définit donc une solution numérique continue en temps.

Démonstration

Il suffit de remarquer que la solution numérique donnée par le théorème 4 ne dépend pas du nombre d'itérations mais seulement de $\sum_{l=0}^{n-1} \Delta t^l$. Et, bien sûr, que pour tout t réel, il existe un entier n et une séquence de pas de temps $(\Delta t^l)_{l=0}^{n-1}$ vérifiant la condition CFL et telle que $\sum_{l=0}^{n-1} \Delta t^l = t$. ■

Remarque 1.1.3

Notons que le théorème 3 prouve entre autres qu'une condition initiale de type « créneau » est advectée de manière exacte. Une condition initiale de type créneau est en effet dans la classe des fonctions advectées de manière exacte, et le coefficient de combinaison convexe initial κ^0 vaut 0 ou 1. Le théorème indique que la discontinuité du créneau ne sera jamais diffusée sur plus d'une maille (ce sera le cas pour les pas de temps où $\kappa^n \in]0,1[$). Ce résultat est à comparer avec le résultat expérimental rapporté par Arora et Roe dans [8] selon lequel la longueur d'une discontinuité diffusée numériquement augmente avec le temps et est de l'ordre de $t^{1/3}$ pour un limiteur d'ordre deux, $t^{1/4}$ pour un limiteur d'ordre trois. Cette longueur est avec le schéma décentré aval sous contraintes amont de l'ordre de t^0 . ■

Le théorème 4 est un résultat d'advection quasi-exacte pour les fonctions discrètes auxquelles il s'applique. En effet, les paliers ($\alpha_{3_j}^0 = \alpha_{3_{j+1}}^0$) sont conservés au cours du temps (en particulier les extrema placés sur des paliers sont conservés). De plus, ils sont déplacés à la bonne vitesse. En effet, si $\sum_{l=0}^n \Delta t^l = t$, les paliers de la solution exacte sont déplacés de ut ; d'autre part, le théorème 4 prouve que les paliers de la solution numérique sont déplacés d'un nombre de mailles égal à $E(z^n) = E(\kappa^0 + \sum_{l=0}^{n-1} u \lambda^l) = E(\kappa^0 + ut/\Delta x)$, soit d'une longueur $\Delta x E(\kappa^0 + ut/\Delta x)$. Évaluons la différence des deux décalages.

$$\kappa^0 + ut/\Delta x - 1 \leq E(\kappa^0 + ut/\Delta x) \leq \kappa^0 + ut/\Delta x,$$

donc

$$ut + (\kappa^0 - 1)\Delta x \leq \Delta x E(\kappa^0 + ut/\Delta x) \leq ut + \kappa^0 \Delta x,$$

donc

$$(\kappa^0 - 1)\Delta x \leq \Delta x E(\kappa^0 + ut/\Delta x) - ut \leq \kappa^0 \Delta x.$$

Comme $\kappa^0 \in [0,1[$, le décalage entre solution exacte et solution numérique est inférieur à une longueur de maille (en valeur absolue). Un tel décalage est inévitable avec un algorithme d'ordre un sur maillage fixe, car il donne une solution numérique constante par maille (il y a donc toujours une erreur de projection). Il est important de remarquer que le décalage est borné uniformément en temps. Le théorème 5

précise ceci en donnant une estimation de l'erreur qui est uniforme en temps, toujours pour la même classe de fonctions discrètes initiales.

Théorème 5

Considérons le problème d'advection (1.1), (1.2) à vitesse constante $u > 0$ et sa version discrète (1.3), (1.4) où les flux sont décentrés aval sous contraintes amont (formules (1.19) ou limiteur Ultrabee).

Supposons que la condition initiale α^0 est telle que la condition initiale discrète est dans la classe des fonctions des théorèmes 3 et 4 :

$\exists \kappa^0 \in [0,1[$ tel que $\forall j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} \alpha_{3j+1}^0 = \alpha_{3j}^0, \\ \alpha_{3j+2}^0 = \kappa^0 \alpha_{3j+1}^0 + (1 - \kappa^0) \alpha_{3j+3}^0. \end{cases}$$

Supposons de plus que la condition initiale est intégrable et à variation bornée, $\alpha^0 \in VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

Notons $\alpha(t,x)$ la solution exacte de l'équation d'advection à vitesse constante (1.1), (1.2) et $(\alpha_j(t))_{j \in \mathbb{Z}}$ la solution numérique continue en temps définie dans le corollaire 1.

Notons encore $\bar{\alpha}^{\Delta x}(t,x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j(t) \mathbf{1}_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[}(x)$; c'est la fonction constante par maille définie par la solution discrète continue en temps au temps t .

Alors, il existe un réel $C > 0$ ne dépendant que de α^0 tel que

$$\|\alpha(t, \cdot) - \bar{\alpha}^{\Delta x}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C \Delta x \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

■

Ce qui est notable est que C ne dépend pas de t . Cette estimation de l'erreur est vraie pour t aussi grand que l'on veut. notre connaissance, c'est un résultat nouveau qui n'est démontré pour aucun autre schéma.

Démonstration

Pour les besoins de la preuve, nous utilisons la solution exacte du problème d'advection (1.1) avec comme condition initiale $\bar{\alpha}^{\Delta x}(0,x)$ (c'est-à-dire la « projection » L^1 de $\alpha^0(x)$ sur le maillage). Notons $\bar{\alpha}(t,x)$ cette fonction. Elle vérifie

$$\bar{\alpha}(t,x) = \bar{\alpha}^{\Delta x}(0, x - ut).$$

Posons maintenant

$$\tilde{t} = \frac{\Delta x E(z(t))}{u}.$$

Ce temps \tilde{t} vérifie $z(\tilde{t}) = \kappa^0 + E(z(t))$, donc $E(z(\tilde{t})) = E(z(t))$. Donc $\kappa(\tilde{t}) = \kappa^0 + E(z(t)) - E(z(t)) = \kappa^0$. De plus,

$$\begin{aligned} |t - \tilde{t}| &= \left| \frac{\Delta x}{u}(z(t) - \kappa^0) - \frac{\Delta x}{u}E(z(t)) \right| \\ &= \left| \frac{\Delta x}{u}(z(t) - E(z(t)) - \kappa^0) \right| \\ &= \frac{\Delta x}{u} |\kappa(t) - \kappa^0|, \end{aligned}$$

qui donne une majoration de $|t - \tilde{t}|$ (majoration à retenir) :

$$|t - \tilde{t}| < \frac{\Delta x}{u}. \quad (1.22)$$

Maintenant on fait une majoration de $\|\alpha(t, \cdot) - \frac{\Delta x}{\alpha}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}$ en utilisant l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned} \|\alpha(t, \cdot) - \frac{\Delta x}{\alpha}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \|\alpha(t, \cdot) - \bar{\alpha}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\quad + \|\bar{\alpha}(t, \cdot) - \bar{\alpha}(\tilde{t}, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\quad + \|\bar{\alpha}(\tilde{t}, \cdot) - \frac{\Delta x}{\alpha}(\tilde{t}, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\quad + \|\frac{\Delta x}{\alpha}(\tilde{t}, \cdot) - \frac{\Delta x}{\alpha}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Il nous reste à majorer chacun des quatre termes du membre de droite.

Majoration du terme $\|\bar{\alpha}(\tilde{t}, \cdot) - \frac{\Delta x}{\alpha}(\tilde{t}, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}$

Comme $\bar{\alpha}(s, x) = \frac{\Delta x}{\alpha}(0, x - us)$, on a $\bar{\alpha}(\tilde{t}, x) = \frac{\Delta x}{\alpha}(0, x - E(z(t))\Delta x)$. Au temps \tilde{t} , $\bar{\alpha}$ est décalée de $E(z(t))$ mailles exactement par rapport à sa valeur initiale ($E(z(t))$ est un entier). D'autre part, \tilde{t} vérifie $E(z(\tilde{t})) = E(z(t))$ et $\kappa(\tilde{t}) = \kappa^0$. Donc, en utilisant la définition de $\alpha_j(t)$ donnée par les équations (1.21) du corollaire 1,

$$\begin{cases} \alpha_{3j+1+E(z(t))} = \alpha_{3j+E(z(t))} = \alpha_{3j}^0, \\ \alpha_{3j+2+E(z(t))} = \kappa^0 \alpha_{3j+1+E(z(t))} + (1 - \kappa^0) \alpha_{3j+3+E(z(t))} = \kappa^0 \alpha_{3j}^0 + (1 - \kappa^0) \alpha_{3j+3}^0. \end{cases}$$

Ceci exprime que $\frac{\Delta x}{\alpha}$ est décalé de $E(z(t))$ mailles par rapport à sa condition initiale, c'est-à-dire exactement comme $\bar{\alpha}$. Donc, ces deux fonctions sont égales au temps \tilde{t} .

$$\|\bar{\alpha}(\tilde{t}, \cdot) - \frac{\Delta x}{\alpha}(\tilde{t}, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0. \quad (1.24)$$

Majoration du terme $\|\alpha(t, \cdot) - \bar{\alpha}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}$

Les fonctions $\alpha(t, x)$ et $\bar{\alpha}(t, x)$ étant des solutions exactes de l'équation d'advection,

$$\begin{aligned} \|\alpha(t, \cdot) - \bar{\alpha}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \|\alpha(0, \cdot - ut) - \bar{\alpha}(0, \cdot - ut)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &= \|\alpha(0, \cdot) - \bar{\alpha}(0, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

D'après un résultat de [37], comme $\alpha^0 \in VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $\|\alpha(0, \cdot) - \bar{\alpha}(0, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq VT(\alpha^0)\Delta x$. Donc

$$\|\alpha(t, \cdot) - \bar{\alpha}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq VT(\alpha^0)\Delta x. \quad (1.25)$$

Majoration du terme $\|\bar{\alpha}^{\Delta x}(\tilde{t}, \cdot) - \bar{\alpha}^{\Delta x}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}$

Nous avons vu que $E(z(\tilde{t})) = E(z(t))$. Donc les paliers de ces deux solutions numériques à des instants proches sont situés sur les mêmes mailles, dont les indices sont $(3j + E(z(t)))_{j \in \mathbb{N}}$ et $(3j + 1 + E(z(t)))_{j \in \mathbb{R}}$. Seuls les coefficients de combinaison convexe sont différents : $\kappa(t)$ et κ^0 .

$$\begin{aligned} \|\bar{\alpha}^{\Delta x}(\tilde{t}, \cdot) - \bar{\alpha}^{\Delta x}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j(t) - \alpha_j(\tilde{t})| \Delta x \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_{3j+2+E(z(t))}(t) - \alpha_{3j+2+E(z(t))}(\tilde{t})| \Delta x \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\kappa(t) \alpha_{3j+1+E(z(t))}(t) + (1 - \kappa(t)) \alpha_{3j+3+E(z(t))}(t) \\ &\quad - \kappa^0 \alpha_{3j+1+E(z(t))}(t) + (1 - \kappa^0) \alpha_{3j+3+E(z(t))}(t)| \Delta x. \end{aligned}$$

On peut encore simplifier :

$$\begin{aligned} \|\bar{\alpha}^{\Delta x}(\tilde{t}, \cdot) - \bar{\alpha}^{\Delta x}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\kappa(t) \alpha_{3j}^0 + (1 - \kappa(t)) \alpha_{3j+3}^0 \\ &\quad - \kappa^0 \alpha_{3j}^0 + (1 - \kappa^0) \alpha_{3j+3}^0| \Delta x \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |(\kappa(t) - \kappa^0) (\alpha_{3j}^0 - \alpha_{3j+3}^0)| \Delta x. \end{aligned}$$

Les coefficients $\kappa(t)$ et κ^0 sont dans $[0, 1[$, donc

$$\|\bar{\alpha}^{\Delta x}(\tilde{t}, \cdot) - \bar{\alpha}^{\Delta x}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_{3j}^0 - \alpha_{3j+3}^0| \Delta x.$$

Or par suite des hypothèses (1.20) sur la condition initiale, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_{3j}^0 - \alpha_{3j+3}^0|$ est précisément la variation totale initiale VT^0 (voir l'équation (1.8) de la définition 4). Donc une majoration est

$$\|\bar{\alpha}^{\Delta x}(\tilde{t}, \cdot) - \bar{\alpha}^{\Delta x}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq VT^0 \Delta x. \quad (1.26)$$

Majoration du terme $\|\bar{\alpha}(t, \cdot) - \bar{\alpha}(\tilde{t}, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}$

La fonction $\bar{\alpha}(t, x)$ est une solution exacte, d'où

$$\begin{aligned} \|\bar{\alpha}(t, \cdot) - \bar{\alpha}(\tilde{t}, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \|\bar{\alpha}(0, \cdot - ut) - \bar{\alpha}(0, \cdot - u\tilde{t})\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &= \|\bar{\alpha}(0, \cdot) - \bar{\alpha}(0, \cdot + ut - u\tilde{t})\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Or on sait que si $f \in VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $\|f(x + \delta) - f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq |\delta| VT(f)$ (résultat rappelé dans [40], démontré dans [37]). Dans notre cas, cela donne

$$\|\bar{\alpha}(0, \cdot) - \bar{\alpha}(0, \cdot + ut - u\tilde{t})\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq u|t - \tilde{t}| VT(\alpha^0).$$

En utilisant maintenant la majoration de $|t - \tilde{t}|$ (1.22), nous obtenons

$$\|\bar{\alpha}(t, \cdot) - \bar{\alpha}(\tilde{t}, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq VT(\alpha^0) \Delta x. \quad (1.27)$$

Nous avons terminé la majoration des quatre termes du membre de droite de l'inégalité (1.23) : l'équation (1.24) et les inégalités (1.25), 1.26) et (1.27) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \|\alpha(t, \cdot) - \frac{\Delta x}{\alpha}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq VT(\alpha^0)\Delta x \\ &\quad + VT(\alpha^0)\Delta x \\ &\quad + 0 \\ &\quad + VT^0\Delta x. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} VT^0 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_{j+1}^0 - \alpha_j^0| \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+3/2}} \alpha^0(x) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \alpha^0(x) dx \right| \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (\alpha^0(x + \Delta x) - \alpha^0(x)) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\alpha^0(x + \Delta x) - \alpha^0(x)| / \Delta x dx. \end{aligned}$$

Grâce au résultat pour les fonctions de $VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ rappelé ci-dessus,

$$\int_{\mathbb{R}} |\alpha^0(x + \Delta x) - \alpha^0(x)| / \Delta x dx \leq VT(\alpha^0),$$

On obtient l'inégalité (classique)

$$VT^0 \leq VT(\alpha^0).$$

En définitive,

$$\|\alpha(t, \cdot) - \frac{\Delta x}{\alpha}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 3VT(\alpha^0)\Delta x.$$

Le membre de droite est le terme espéré, on obtient l'inégalité cherchée pour $C = 3VT(\alpha^0)$. ■

Remarque 1.1.4

Ce résultat pour la solution numérique continue en temps est bien sûr vrai pour la solution numérique discrète (pour peu que tous les pas de temps vérifient la condition CFL) puisqu'elle coïncide avec la solution numérique continue en temps (cf. corollaire 1). ■

Compte tenu du fait que l'ensemble des conditions initiales considérées est dense dans $VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ (au sens du lemme 2), c'est un résultat fort. Cependant, il n'est pas suffisant pour montrer la même estimation avec une condition initiale quelconque (cela vient en particulier du fait que le schéma décentré aval sous contraintes amont n'est pas monotone).

Pourtant, au vu de nombreux résultats numériques (dont on aura un aperçu dans la prochaine section) obtenus avec des conditions initiales de tous types, nous conjecturons que ce résultat de majoration uniforme en temps de l'erreur reste vrai pour une condition initiale quelconque.

Conjecture

Considérons le problème numérique d'advection (1.3), (1.4) à vitesse constante $u > 0$ où les flux sont décentrés aval sous contraintes amont (formules (1.19) ou limiteur Ultrabee).

Soit α^0 une condition initiale dans $VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

Soit une séquence de pas de temps $(\Delta t^0, \Delta t^1, \dots, \Delta t^{n-1})$ vérifiant la condition CFL $0 \leq u\lambda^l = u\Delta t^l/\Delta x \leq 1$ pour tout $l \in (0, 1, \dots, n-1)$, et soit $t = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t^j$.

Supposons aussi que $\forall l, u\lambda^l \neq 1/2$.

Notons $\overset{\Delta x^n}{\alpha}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j^n \mathbf{1}_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]}(x)$.

Alors, il existe un réel $C > 0$ ne dépendant que de α^0 tel que

$$\|\alpha(t, \cdot) - \overset{\Delta x^n}{\alpha}(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\Delta t \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

Un point curieux est la nécessité de l'hypothèse $u\lambda^l \neq 1/2$ (des résultats numériques prouvent qu'on ne peut s'en passer, il seront évoqués dans la prochaine section).

Remarque 1.1.5

Tout ce que nous avons présenté suppose que la vitesse d'advection est constante et strictement positive. Il est évident que dans le cas où la vitesse est constante et strictement négative, les résultats sont identiques (mais les indices des mailles amont et aval sont intervertis). Dans le cas où la vitesse est nulle (c'est un cas singulier dans la formule (1.16)), n'importe quelle valeur de flux est stable puisque ce flux est multiplié par la vitesse (nulle) pour former l'incrément.

D'autre part, il est possible de construire un algorithme décentré aval sous contraintes amont par la même méthode pour l'équation d'advection non conservative à vitesse non constante

$$\partial_t \alpha(t, x) + u(t, x) \partial_x \alpha(t, x) = 0$$

où $u(t, x)$ est une donnée. Le principe de construction est exactement le même (première étape : conditions couplées de stabilité sur les flux, seconde étape : découplage de ces conditions en ajoutant une condition de consistance). Nous ne détaillons pas cela ici, pour plusieurs raisons :

- dans la suite de ce mémoire, nous n'utilisons la technique de décentrage aval sous contraintes amont que pour des équations conservatives ;
- l'existence, l'unicité des solutions, de même que la convergence des schéma discrets comportent des difficultés importantes qui sortent du cadre de notre présent travail (voir par exemple [15], [14]) ;
- les solutions exactes de l'équation d'advection à vitesse non constante ne sont pas triviales, et donc les résultats numériques sont plus difficiles à interpréter.

■

1.1.5 Résultats numériques

L'algorithme de décentrage aval sous contraintes amont, utilisé ici, est explicitement et intégralement formulé dans l'annexe A.

Le domaine spatial est le segment $[0,1[$ périodisé, ce qui permet d'observer le comportement de la solution en temps long. La vitesse d'advection est unitaire, $u = 1$. Nous avons choisi $\lambda = 0,1$. Nous présentons les résultats sur trois conditions initiales : une fonction indicatrice (figure 1.2), une masse de Dirac (figure 1.3), et une gaussienne (figure 1.4). Sur les graphes 1.2, 1.3 et 1.4, nous comparons les solutions données par le schéma décentré amont ($\alpha_{j+1/2}^n = \alpha_j^n$), le limiteur Superbee de Roe et le schéma décentré aval sous contraintes amont (1.19) (ou limiteur Ultrabee). Le limiteur Superbee s'inscrit dans le formalisme des limiteurs exposé dans la proposition 1, il est obtenu pour $\varphi(r) = \max(0, \min(2r,1), \min(r,2))$ (cf. [8], [89], [69] et [91] par exemple).

On observe sur la figure 1.2 que le schéma décentré aval sous contraintes amont (1.19) n'étaie absolument pas les discontinuités de la fonction indicatrice (suivant le nombre de pas de temps, l'étalement est de 0 ou 1 maille de chaque côté). Ce résultat est d'ailleurs prévu par le théorème 4, car la fonction indicatrice fait partie de la classe des fonctions advectées de manière exacte.

La comparaison avec les schémas classiques est aussi frappante avec le choix d'une masse de Dirac (toute la masse est concentrée dans une seule maille). L'algorithme présenté ici n'étaie jamais le Dirac sur plus de trois mailles.

Pour bien voir la différence entre le limiteur Superbee et le schéma que nous avons introduit sur une condition initiale plus régulière comme une gaussienne, nous proposons des résultats en temps très long. Le défaut connu de Superbee est alors pleinement développé : la gaussienne est presque transformée en une fonction indicatrice. Nous avons changé l'échelle de représentation pour mieux voir les détails et seule une moitié de la gaussienne est figurée. La solution donnée par l'algorithme que nous proposons est beaucoup plus satisfaisante, elle coïncide très bien avec la solution exacte. Il faut noter que la condition initiale ne vérifie pas les hypothèses du théorème 3. L'apparition des marches d'escalier est caractéristique de ce schéma qui semble lors des premières itérations « projeter » la condition initiale sur la classe advectée exactement, c'est ce type de résultats qui nous incite à formuler la conjecture. Le résultat serait néanmoins beaucoup plus proche de la solution exacte si l'on avait projeté la condition initiale avant le calcul. Appelons « surcompressif » un schéma dont la tendance est au rassemblement de toute la masse dans une région du domaine de calcul, par opposition à un schéma qui « étaie » la masse (comme par exemple le schéma décentré amont). Cet exemple de l'advection de la gaussienne met particulièrement en valeur la différence entre les caractères surcompressif glo-

bal de Superbee et surcompressif **local** du schéma que nous étudions. La gaussienne est transformée en un seul grand « rectangle » par le limiteur Superbee (surcompressif globalement) mais en une multitude de rectangles de taille bornée (de l'ordre de quelques mailles) par le schéma décentré aval sous contraintes amont, pour lequel la transformation (surcompression) reste locale. Toutefois, nous signalons que si (et seulement si) le nombre de Courant vaut $1/2$ ($u\Delta t/\Delta x = 1/2$), le schéma décentré aval sous contraintes amont est surcompressif globalement. C'est la raison pour laquelle nous faisons l'hypothèse $u\lambda \neq 1/2$ dans la conjecture.

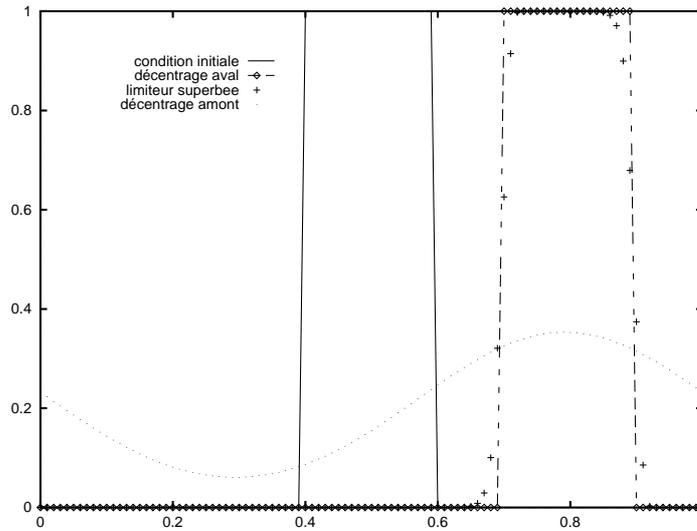


FIG. 1.2 – Condition initiale et résultats à $t = 5,3$ (après 5,3 tours).

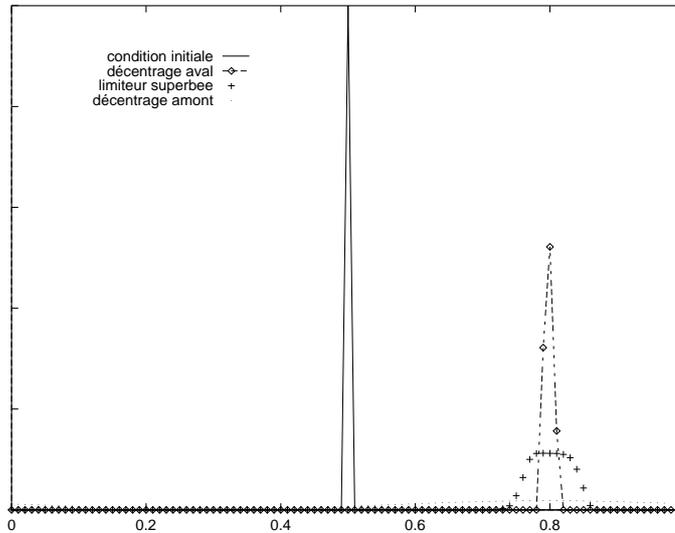
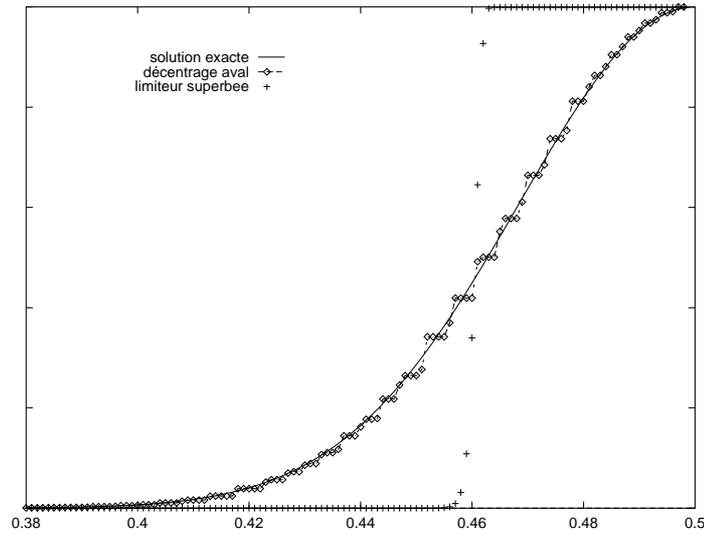


FIG. 1.3 – Condition initiale et résultats à $t = 5,3$ (après 5,3 tours).

FIG. 1.4 – *Solution exacte et résultats après 1000 tours.*

1.2 Extension en dimension deux

Nous nous intéressons dans cette section à l'équation d'advection à vitesse constante en dimension 2 :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha + u \partial_x \alpha + v \partial_y \alpha = 0, \\ \alpha(0, x, y) = \alpha^0(x, y). \end{cases} \quad (1.28)$$

où u et v sont les composantes horizontale (suivant x) et verticale (suivant y) de la vitesse, et sont supposées constantes et positives.

1.2.1 Algorithme

On se donne un maillage régulier de \mathbb{R}^2 , qui est le produit tensoriel d'un maillage « horizontal » associé à la variable x et de pas régulier Δx et d'un maillage « vertical » associé à la variable y et de pas régulier Δy . Les abscisses des bords verticaux des mailles sont $(x_{j-1/2})_{j \in \mathbb{Z}}$ et les ordonnées des bords horizontaux des mailles sont $(y_{k-1/2})_{k \in \mathbb{Z}}$. Appelons $(M_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ les mailles définies par ce maillage :

$$M_{j,k} =]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[\times]y_{k-1/2}, y_{k+1/2}[.$$

La discrétisation initiale est une projection sur le maillage.

$$\alpha_{j,k}^0 = \int_{M_{j,k}} \frac{\alpha^0(x,y)}{\Delta x \Delta y} dx dy. \quad (1.29)$$

La résolution numérique que nous proposons utilise la technique classique de la décomposition directionnelle. Cela consiste à résoudre alternativement les deux

équations d'advection unidimensionnelles :

$$\partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = 0$$

et

$$\partial_t \alpha + v \partial_y \alpha = 0.$$

Cette discrétisation introduit donc pour chaque pas de temps une étape en temps intermédiaire où seule l'advection horizontale a été effectuée. Nous noterons $\alpha_{j,k}^{n+1/2}$ cette valeur temporaire calculée entre $\alpha_{j,k}^n$ et $\alpha_{j,k}^{n+1}$. Chacune des phases est une résolution en dimension un et est effectuée au moyen d'un schéma de type volumes finis.

$$\begin{cases} \alpha_{j,k}^{n+1/2} = \alpha_{j,k}^n - u \lambda_x (\alpha_{j+1/2,k}^n - \alpha_{j-1/2,k}^n), \\ \alpha_{j,k}^{n+1} = \alpha_{j,k}^{n+1/2} - v \lambda_y (\alpha_{j,k+1/2}^{n+1/2} - \alpha_{j,k-1/2}^{n+1/2}) \end{cases} \quad (1.30)$$

avec $\lambda_x = u \Delta t / \Delta x$ et $\lambda_y = v \Delta t / \Delta y$. Pour chacune de ces résolutions, nous utilisons le schéma décentré aval sous contraintes amont des paragraphes précédents.

1.2.2 Convergence uniforme en temps

Les résultats du chapitre 1.1.4 s'étendent au schéma ainsi défini en dimension deux. Afin d'étendre ces résultats, nous aurions pu considérer la classe des fonctions discrètes tensorisées : $(\alpha_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ tels que $\alpha_{j,k} = \beta_j \gamma_k \forall j, l \in \mathbb{Z}$ avec $(\beta_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ et $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ dans la classe des fonctions advectées de manière exacte en dimension un, c'est-à-dire tensoriser cette classe de fonctions. Cependant, l'ensemble des fonctions discrètes qui sont un tel produit tensoriel est petit (il n'est pas dense dans $VB(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$). Il est possible d'identifier une classe de fonctions beaucoup plus grande, dense dans $VB(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, qui sont advectées de manière exacte. Les notations et les calculs en sont plus compliqués, mais les résultats plus forts.

La classe de ces fonctions advectées de manière exacte est la classe des fonctions discrètes dont chaque ligne et chaque colonne sont advectées de manière exacte en dimension un, avec un même coefficient de combinaison convexe κ_x pour toutes les lignes et κ_y pour toutes les colonnes. Le premier résultat (lemme 3) conclut à l'existence de telles fonctions : il pourrait en effet y avoir une incompatibilité, comme on le voit sur la figure 1.2.2. Les « paliers » y sont représentés par des mailles de couleur.

	h	h	$\begin{matrix} \kappa_x h + \\ (1-\kappa_x)g \end{matrix}$	g	g	$l+4$
	h	h	$\begin{matrix} \kappa_x h + \\ (1-\kappa_x)g \end{matrix}$	g	g	$l+3$
	$\begin{matrix} \kappa_y e + \\ (1-\kappa_y)h \end{matrix}$	$\begin{matrix} \kappa_y e + \\ (1-\kappa_y)h \end{matrix}$?	$\begin{matrix} \kappa_y f + \\ (1-\kappa_y)g \end{matrix}$	$\begin{matrix} \kappa_y f + \\ (1-\kappa_y)g \end{matrix}$	$l+2$
	e	e	$\begin{matrix} \kappa_x e + \\ (1-\kappa_x)f \end{matrix}$	f	f	$l+1$
	e	e	$\begin{matrix} \kappa_x e + \\ (1-\kappa_x)f \end{matrix}$	f	f	l
	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$	

Quelle valeur de α peut-on mettre dans la maille centrale sur cette figure (pour remplacer le point d'interrogation)? Doit-on choisir une combinaison convexe des valeurs de gauche et droite, ou une combinaison convexe des valeurs du bas et du haut? D'après le lemme 3, la combinaison convexe des valeurs horizontales avec un coefficient κ_x est aussi combinaison convexe des valeurs verticales avec un coefficient κ_y , il n'y a pas d'ambiguïté. C'est grâce à cette compatibilité que toute la suite en dimension deux est possible.

Lemme 3

Soit une fonction discrète $(\alpha_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ qui vérifie

$\exists \kappa_x \in [0,1[$ et $\exists \kappa_y \in [0,1[$ tels que $\forall j,k \in \mathbb{Z}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{3j+1,3k+1} = \alpha_{3j+1,3k} = \alpha_{3j,3k+1} = \alpha_{3j,3k}, \\ \alpha_{3j+2,3k} = \kappa_x \alpha_{3j+1,3k} + (1-\kappa_x) \alpha_{3j+3,3k} \\ \alpha_{3j+2,3k+1} = \kappa_x \alpha_{3j+1,3k+1} + (1-\kappa_x) \alpha_{3j+3,3k+1} \\ \alpha_{3j,3k+2} = \kappa_y \alpha_{3j,3k+1} + (1-\kappa_y) \alpha_{3j,3k+3} \\ \alpha_{3j+1,3k+2} = \kappa_y \alpha_{3j+1,3k+1} + (1-\kappa_y) \alpha_{3j+1,3k+3} \\ \alpha_{3j+2,3k+2} = \kappa_y \alpha_{3j+2,3k+1} + (1-\kappa_y) \alpha_{3j+2,3k+3} \end{array} \right. \quad (1.31)$$

(on choisit arbitrairement une combinaison convexe verticale pour la maille centrale).

Alors, elle vérifie

$$\begin{cases} \alpha_{3j+1,3k+1} = \alpha_{3j+1,3k} = \alpha_{3j,3k+1} = \alpha_{3j,3k}, \\ \alpha_{3j+2,k} = \kappa_x \alpha_{3j+1,k} + (1 - \kappa_x) \alpha_{3j+3,k} \\ \alpha_{j,3k+2} = \kappa_y \alpha_{j,3k+1} + (1 - \kappa_y) \alpha_{j,3k+3} \end{cases}$$

$\forall j, k \in \mathbb{Z}$. ■

Ce résultat montre qu'il n'y a pas conflit pour les valeurs du type $\alpha_{3j+2,3k+2}$ entre combinaison convexe horizontale et combinaison convexe verticale : les deux sont possibles simultanément.

Démonstration

La seule chose à montrer qui ne soit pas absolument triviale est que

$$\alpha_{3j+2,3k+2} = \kappa_x \alpha_{3j+1,3k+2} + (1 - \kappa_x) \alpha_{3j+3,3k+2}$$

car toutes les autres égalités sont dans la définition. La définition de la fonction numérique nous donne

$$\begin{aligned} \alpha_{3j+2,3k+2} &= \kappa_y \alpha_{3j+2,3k+1} + (1 - \kappa_y) \alpha_{3j+2,3k+3} \\ &= \kappa_y (\kappa_x \alpha_{3j+1,3k+1} + (1 - \kappa_x) \alpha_{3j+3,3k+1}) \\ &\quad + (1 - \kappa_y) (\kappa_x \alpha_{3j+1,3k+3} + (1 - \kappa_x) \alpha_{3j+3,3k+3}) \\ &= \kappa_x (\kappa_y \alpha_{3j+1,3k+1} + (1 - \kappa_y) \alpha_{3j+1,3k+3}) \\ &\quad + (1 - \kappa_x) (\kappa_y \alpha_{3j+3,3k+1} + (1 - \kappa_y) \alpha_{3j+3,3k+3}) \\ &= \kappa_x \alpha_{3j+1,3k+2} + (1 - \kappa_x) \alpha_{3j+3,3k+2}. \end{aligned}$$
■

Toute la suite de cette section concerne l'extension à la dimension deux des résultats de convergence uniforme en temps.

Définition 8 (Définition de la classe $\mathcal{E}_{a,b}(\kappa_x, \kappa_y)$)

Soit une fonction discrète $(\alpha_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ donnée.

Soient $\kappa_x \in [0,1[$ et $\kappa_y \in [0,1[$.

Soient $a \in \{0,1,2\}$ et $b \in \{0,1,2\}$ deux entiers. On dira que $(\alpha_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_{a,b}(\kappa_x, \kappa_y)$

si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha_{3j+1+a,3k+1+b} = \alpha_{3j+1+a,3k+b} = \alpha_{3j+a,3k+1+b} = \alpha_{3j+a,3k+b}, \\ \alpha_{3j+2+a,3k+b} = \kappa_x \alpha_{3j+1+a,3k+b} + (1 - \kappa_x) \alpha_{3j+3+a,3k+b} \\ \alpha_{3j+2+a,3k+1+b} = \kappa_x \alpha_{3j+1+a,3k+1+b} + (1 - \kappa_x) \alpha_{3j+3+a,3k+1+b} \\ \alpha_{3j+a,3k+2+b} = \kappa_y \alpha_{3j+a,3k+1+b} + (1 - \kappa_y) \alpha_{3j+a,3k+3+b} \\ \alpha_{3j+1+a,3k+2+b} = \kappa_y \alpha_{3j+1+a,3k+1+b} + (1 - \kappa_y) \alpha_{3j+1+a,3k+3+b} \\ \alpha_{3j+2+a,3k+2+b} = \kappa_y \alpha_{3j+2+a,3k+1+b} + (1 - \kappa_y) \alpha_{3j+2+a,3k+3+b}. \end{cases} \quad (1.32)$$
■

Les équations (1.32) sont les équations (1.31) à un décalage horizontal de a mailles et un décalage vertical de b mailles près.

Théorème 6

On considère le schéma en décomposition directionnelle où la phase horizontale et la phase verticale sont résolues grâce au décentrage aval sous contraintes amont (1.19).

Supposons que les vitesses u et v sont positives : $u > 0$ et $v > 0$.

Supposons que $\exists \kappa_x^n \in [0,1[$ et $\exists \kappa_y^n \in [0,1[$, $\exists a^n \in \{0,1,2\}$ et $\exists b^n \in \{0,1,2\}$ tels que

$$(\alpha_{j,k}^n)_{j,k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_{a^n, b^n}(\kappa_x^n, \kappa_y^n).$$

Supposons vérifiées les conditions CFL $u\lambda_x \leq 1$ et $v\lambda_y \leq 1$.

Alors,

$$(\alpha_{j,k}^{n+1})_{j,k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_{a^{n+1}, b^{n+1}}(\kappa_x^{n+1}, \kappa_y^{n+1}).$$

Les valeurs de κ_x^{n+1} , κ_y^{n+1} , a^{n+1} et b^{n+1} sont définies par :

$$\begin{aligned} & - \text{si } \kappa_x^n + u\lambda_x \leq 1, & \begin{cases} 0 \leq \kappa_x^{n+1} = \kappa_x^n + u\lambda_x \leq 1, \\ a^{n+1} = a^n ; \end{cases} \\ & - \text{si } \kappa_x^n + u\lambda_x \geq 1, & \begin{cases} 0 \leq \kappa_x^{n+1} = \kappa_x^n + u\lambda_x - 1 \leq 1, \\ a^{n+1} = (a^n + 1) \pmod{3} ; \end{cases} \\ & - \text{si } \kappa_y^n + v\lambda_y \leq 1, & \begin{cases} 0 \leq \kappa_y^{n+1} = \kappa_y^n + v\lambda_y \leq 1, \\ b^{n+1} = b^n ; \end{cases} \\ & - \text{si } \kappa_y^n + v\lambda_y \geq 1, & \begin{cases} 0 \leq \kappa_y^{n+1} = \kappa_y^n + v\lambda_y - 1 \leq 1, \\ b^{n+1} = (b^n + 1) \pmod{3} ; \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, les valeurs « plateaux » (valeurs communes à quatre mailles voisines) sont conservées :

$$\begin{aligned} & \alpha_{3j+1+a^{n+1}, 3k+1+b^{n+1}}^{n+1} \\ & = \alpha_{3j+1+a^{n+1}, 3k+b^{n+1}}^{n+1} \\ & = \alpha_{3j+a^{n+1}, 3k+1+b^{n+1}}^{n+1} \\ & = \alpha_{3j+a^{n+1}, 3k+b^{n+1}}^{n+1} \\ & = \alpha_{3j+a^n, 3k+b^n}^n. \end{aligned} \tag{1.33}$$

■

La fonction mod désigne l'opérateur modulo.

Démonstration

On commence par effectuer la phase horizontale du calcul, celle qui donne $(\alpha_{j,k}^{n+1/2})_{j,k \in \mathbb{Z}}$. Pour tout k fixé, la ligne $(\alpha_{j,k}^{n+1/2})_{j \in \mathbb{Z}}$ est une fonction discrète de dimension un advectée de manière exacte, dont le coefficient de combinaison convexe κ_x^n ne dépend pas de k . Le théorème 3 implique immédiatement que

$$- \text{ si } \kappa_x^n + u\lambda \leq 1,$$

$$(\alpha_{j,k}^{n+1/2})_{j,k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_{a^{n+1}, b}(\kappa_x^{n+1}, \kappa_y)$$

$$\text{ avec } 0 \leq \kappa_x^{n+1} = \kappa_x^n + u\lambda \leq 1, a^{n+1} = a^n ;$$

$$- \text{ si } \kappa_x^n + u\lambda \geq 1,$$

$$(\alpha_{j,k}^{n+1/2})_{j,k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_{a^{n+1}, b}(\kappa_x^{n+1}, \kappa_y)$$

$$\text{ avec } 0 \leq \kappa_x^{n+1} = \kappa_x^n + u\lambda - 1 \leq 1, a^{n+1} = (a^n + 1) \text{ mod } 3.$$

Avant d'effectuer la phase verticale du calcul, on remarque que pour tout j fixé, la colonne $(\alpha_{j,k}^{n+1/2})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une fonction discrète de dimension un advectée de manière exacte, dont le coefficient de combinaison convexe κ_y^n ne dépend pas de j . Alors, d'après le théorème 3,

$$- \text{ si } \kappa_y^n + v\lambda \leq 1,$$

$$(\alpha_{j,k}^{n+1})_{j,k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_{a^{n+1}, b^{n+1}}(\kappa_x^{n+1}, \kappa_y^{n+1})$$

$$\text{ avec } 0 \leq \kappa_y^{n+1} = \kappa_y^n + v\lambda \leq 1, b^{n+1} = b^n ;$$

$$- \text{ si } \kappa_y^n + v\lambda \geq 1,$$

$$(\alpha_{j,k}^{n+1})_{j,k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_{a^{n+1}, b^{n+1}}(\kappa_x^{n+1}, \kappa_y^{n+1})$$

$$\text{ avec } 0 \leq \kappa_y^{n+1} = \kappa_y^n + v\lambda - 1 \leq 1, b^{n+1} = (b^n + 1) \text{ mod } 3.$$

Le théorème 6 est démontré. ■

Comme en dimension un, ce théorème a pour conséquence les deux théorèmes et le corollaire suivants, dont nous ne ferons pas les démonstrations.

Théorème 7

Considérons le problème numérique d'advection (1.29), (1.30) où les flux sont décentrés aval sous contraintes amont (formules (1.18) ou limiteur Ultrabee) dans la phase horizontale et dans la phase verticale.

Supposons que les vitesses u et v sont positives : $u > 0$ et $v > 0$.

Supposons que la donnée discrète initiale vérifie $\exists \kappa_x^0 \in [0,1[$ et $\exists \kappa_y^0 \in [0,1[$, $\exists a^0 \in \{0,1,2\}$ et $\exists b^0 \in \{0,1,2\}$ tels que

$$(\alpha_{j,k}^0)_{j,k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_{a^0, b^0}(\kappa_x^0, \kappa_y^0).$$

Soit une séquence de pas de temps $(\Delta t^0, \Delta t^1, \dots, \Delta t^{n-1})$ vérifiant les conditions CFL $0 \leq u\lambda_x^l = u\Delta t^l/\Delta x \leq 1$ et $0 \leq v\lambda_y^l = v\Delta t^l/\Delta y \leq 1$ pour tout $l \in (0, 1, \dots, n-1)$.

Posons

$$\begin{cases} z_x^n = \kappa_x^0 + \sum_{l=0}^{n-1} u\lambda_x^l, \\ z_y^n = \kappa_y^0 + \sum_{l=0}^{n-1} v\lambda_y^l, \\ \kappa_x^n = z_x^n - E(z_x^n), \\ \kappa_y^n = z_y^n - E(z_y^n). \end{cases}$$

Alors,

$$(\alpha_{j,k}^0)_{j,k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_{a^n, b^n}(\kappa_x^n, \kappa_y^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec $a^n = (a^0 + E(z_x^n)) \bmod 3$ et $b^n = (b^0 + E(z_y^n)) \bmod 3$.

De plus, les plateaux sont conservés :

$$\begin{aligned} & \alpha_{3j+1+a^0+E(z_x^n), 3k+1+b^0+E(z_y^n)}^n \\ &= \alpha_{3j+1+a^0+E(z_x^n), 3k+b^0+E(z_y^n)}^n \\ &= \alpha_{3j+a^0+E(z_x^n), 3k+1+b^0+E(z_y^n)}^n \\ &= \alpha_{3j+a^0+E(z_x^n), 3k+b^0+E(z_y^n)}^n \\ &= \alpha_{3j+a^0, 3k+b^0}^0. \end{aligned} \tag{1.34}$$

■

Nous sommes comme en dimension un en mesure de définir une solution discrète en espace continue en temps. L'expression de cette solution (malgré la plus grande complexité d'écriture) est le pendant exact de l'expression de la solution en dimension un.

Corollaire 2

Faisons les mêmes hypothèses qu'au théorème 7. Posons

$$\begin{cases} z_x(t) = \kappa_x^0 + ut/\Delta x \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ z_y(t) = \kappa_y^0 + vt/\Delta y \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ \kappa_x(t) = z_x(t) - E(z_x(t)), \\ \kappa_y(t) = z_y(t) - E(z_y(t)), \\ a(t) = (a^0 + E(z_x(t))) \bmod 3, \\ b(t) = (b^0 + E(z_y(t))) \bmod 3. \end{cases}$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, définissons $\alpha_{j,k}(t)$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{3j+1+a(t),3k+1+b(t)}(t) = \alpha_{3j+1+a(t),3k+b(t)} \\ \quad = \alpha_{3j+a(t),3k+1+b(t)}(t) = \alpha_{3j+a(t),3k+b(t)}(t) = \alpha_{3j+a^0,3k+b^0}^0, \\ \alpha_{3j+2+a(t),3k+b(t)}(t) = \kappa_x(t)\alpha_{3j+1+a(t),3k+b(t)}(t) \\ \quad + (1 - \kappa_x(t))\alpha_{3j+3+a(t),3k+b(t)}(t), \\ \alpha_{3j+2+a(t),3k+1+b(t)}(t) = \kappa_x(t)\alpha_{3j+1+a(t),3k+1+b(t)}(t) \\ \quad + (1 - \kappa_x(t))\alpha_{3j+3+a(t),3k+1+b(t)}(t), \\ \alpha_{j,3k+2+b(t)}(t) = \kappa_y(t)\alpha_{j,3k+1+b(t)}(t) \\ \quad + (1 - \kappa_y(t))\alpha_{j,3k+3+b(t)}(t) \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Alors, quelle que soit la séquence de pas de temps $(\Delta t^0, \Delta t^1, \dots, \Delta t^{n-1})$ vérifiant $0 \leq u\lambda_x^l = u\Delta t^l/\Delta x \leq 1$ et $0 \leq v\lambda_y^l = v\Delta t^l/\Delta y \leq 1$ pour tout $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, la solution numérique donnée par le schéma décentré aval sous contraintes amont vérifie

$$\alpha_{j,k}^n = \alpha_{j,k} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \Delta t^l \right) \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

■

Afin d'énoncer comme en dimension un une estimation de l'erreur uniforme en temps, nous rappelons deux définitions déjà utilisées en dimension un (cf. [40]).

Définition 9

Soit f une fonction réelle de $L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$. La variation totale de f est le nombre $VT(f)$ de $\overline{\mathbb{R}^+}$ donné par

$$VT(f) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x)(\partial_x \phi + \partial_y \phi)(x) dx; \phi \in C_0^1(\mathbb{R}^2); \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 1 \right\}. \quad (1.36)$$

■

Définition 10

L'espace $VB(\mathbb{R}^2)$ est l'espace des fonctions de $L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ dont la variation totale est bornée.

$$VB(\mathbb{R}^2) = \{f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2); VT(f) < +\infty\}.$$

■

Théorème 8

Considérons le problème d'advection (1.28) à vitesse constante avec $u > 0$ et $v > 0$ et sa version discrète (1.29), (1.30) où les flux sont décentrés aval sous contraintes amont (formules (1.18) ou limiteur Ultrabee).

Supposons que la condition initiale $\alpha^0(x, y)$ est telle que la condition initiale discrète vérifie

$$(\alpha_{j,k}^0)_{j,k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_{a^0, b^0}(\kappa_x^0, \kappa_y^0)$$

pour $\kappa_x^0 \in [0,1[$, $\kappa_y^0 \in [0,1[$, $a^0 \in \{0,1,2\}$ et $b^0 \in \{0,1,2\}$.

Supposons de plus que la condition initiale est intégrable et à variation bornée, $\alpha^0 \in VB(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$.

Notons $\alpha(t,x,y)$ la solution exacte de l'équation d'advection à vitesse constante (1.28) et $(\alpha_{j,k}(t))_{j,k \in \mathbb{Z}}$ la solution numérique définie dans le corollaire 2.

Notons encore $\overset{\Delta x, \Delta y}{\alpha}(t,x,y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k}(t) \mathbf{1}_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[}(x) \mathbf{1}_{[y_{k-1/2}, y_{k+1/2}[}(y)$; c'est la fonction constante par maille définie par la solution discrète continue en temps au temps t .

Alors, il existe deux réels $C_x > 0$ et $C_y > 0$ ne dépendant que de α^0 tels que

$$\|\alpha(t, \cdot) - \overset{\Delta x, \Delta y}{\alpha}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C_x \Delta x + C_y \Delta y \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

■

1.2.3 Résultats numériques

Le domaine spatial est le carré $[0,1] \times [0,1]$ de \mathbb{R}^2 , avec des conditions périodiques en x et en y . Le vecteur vitesse choisi est le vecteur diagonal: $u = 1$, $v = 1$.

Les résultats présentés sur les figures 1.6, 1.12 pour une fonction indicatrice et une masse de Dirac sont équivalents aux résultats obtenus en dimension un : stabilité, convergence et absence de dissipation (maillage 50×50).

En revanche, le résultat obtenu pour une gaussienne initiale est moins bon (figure 1.10 obtenue avec un maillage 100×100), il est oscillant. En effet, le schéma décentré aval sous contraintes amont en décomposition directionnelle n'est pas VTD.

Cependant, si l'on projette initialement la gaussienne sur la classe des fonctions advectées de manière exacte $\mathcal{E}_{a,b}(\kappa_x, \kappa_y)$ (ici avec $\kappa_x = \kappa_y = 0$), on obtient le résultat prévu par le théorème 7 d'advection exacte (figure 1.12, maillage 50×50).

Les résultats sont donc très encourageant. Pour les parfaire, il faudrait trouver des conditions à ajouter pour que le schéma devienne VTD.

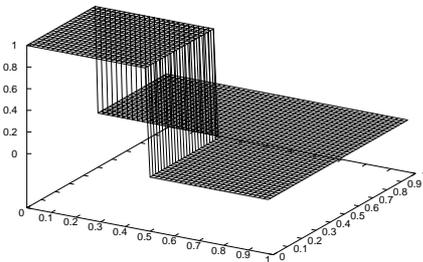


FIG. 1.5 – Condition initiale (fonction indicatrice).

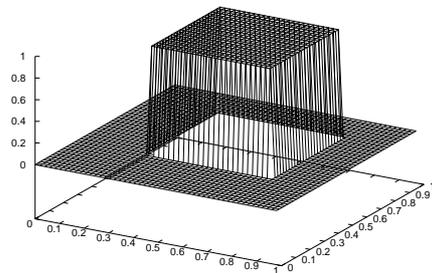


FIG. 1.6 – Résultat numérique après 5,3 tours.

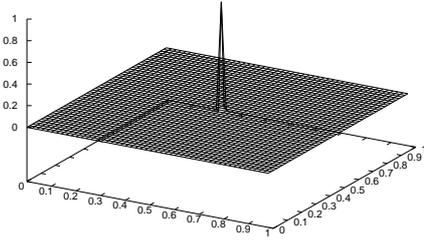


FIG. 1.7 – *Condition initiale (masse de Dirac).*

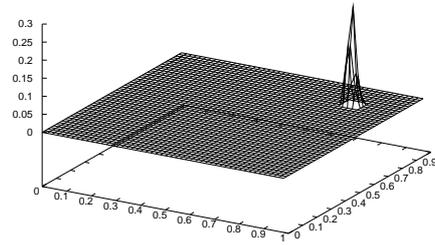


FIG. 1.8 – *Résultat après 5,3 tours.*

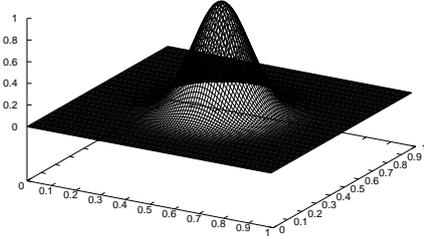


FIG. 1.9 – *Condition initiale (gaussienne).*

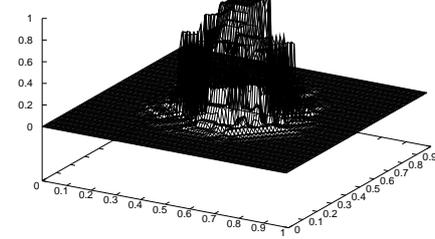


FIG. 1.10 – *Résultat après 5 tours.*

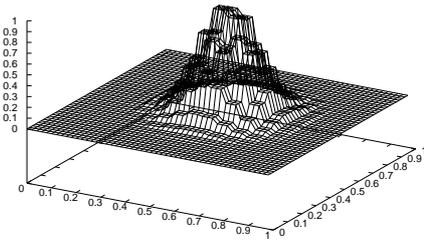


FIG. 1.11 – *Condition initiale (gaussienne projetée).*

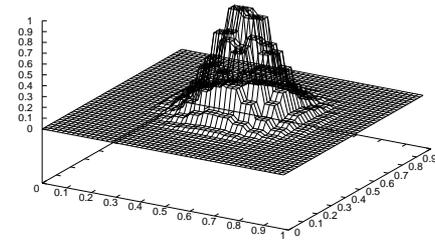


FIG. 1.12 – *Résultat après 5 tours.*

Petite conclusion (pour le chapitre 1)

Une analyse détaillée des conditions de convergence des schémas conservatifs pour l'advection linéaire nous a conduits à trouver un intervalle explicite pour les flux. l'intérieur de cet intervalle, c'est paradoxalement le flux le plus proche de la

valeur aval qui paraît avoir les propriétés les plus intéressantes (cf. les estimations uniformes en temps de l'erreur d'approximation).

Un point étonnant est que le schéma décentré aval sous ces contraintes amont se trouve être équivalent à un schéma déjà étudié : le limiteur Ultrabee. Le fait que ces propriétés soient passées inaperçues est sans doute dû à la recherche exclusive de limiteurs d'ordre supérieur à deux, considérés comme *a priori* plus précis que les schémas d'ordre un (dans [91], Ultrabee est qualifié de « pire des limiteurs envisageables »).

La présente formulation de ce schéma (décentrage aval sous contraintes amont) nous paraît plus exploitable que le limiteur (Ultrabee), la démarche étant constructive et généralisable à des cas plus complexes.

Dans les deux prochains chapitres, nous généralisons cette idée à la résolution des équations scalaires non linéaires (chapitre 2) puis des systèmes non linéaires (chapitre 3).

Dans la partie III de ce travail, elle sera utilisée pour construire un schéma pour l'hydrodynamique à plusieurs espèces.

Chapitre 2

Le cas des équations non linéaires

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode de construction de flux précédente (décentrage aval sous contraintes amont pour l'équation d'advection linéaire) aux équations non linéaires scalaires à flux strictement convexe. Ce chapitre sera illustré par des résultats numériques sur l'équation de Burgers. Ce travail a été effectué au Centre d'Été Mathématiques de Recherche Avancée en Calcul Scientifique 1999 (CEMRACS, Marseille).

La forme d'une équation non linéaire est la suivante.

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \tag{2.1}$$

où f est une fonction scalaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Elle est accompagnée d'une condition initiale

$$u(0, x) = u^0(x). \tag{2.2}$$

2.1 Rappels

Nous rappelons dans cette section les principaux résultats théoriques concernant le problème (2.1), (2.2). Ces résultats se trouvent par exemple dans [40], [83], [53], [58].

Les solutions de (2.1), (2.2) ne sont pas uniques et on définit la notion de « solution entropique » pour obtenir un critère d'unicité.

Définition 11

On appelle entropie S de l'équation (2.1) et flux d'entropie associé G deux fonctions de $C^1(\mathbb{R})$ telles que

- S est convexe ;

– G vérifie

$$S'f' = G'.$$

■

Toute fonction convexe de classe $C^1(\mathbb{R})$ S est une entropie pour (2.1) : il suffit de lui associer pour flux d'entropie une primitive de $S'f'$.

On remarque que si $u(t,x)$ est une solution de classe $C^1([0, +\infty] \times \mathbb{R})$ de (2.1), (2.2), elle vérifie

$$\begin{aligned} \partial_t(S(u)) + \partial_x(G(u)) &= S'(u)\partial_t u + G'(u)\partial_x u \\ &= S'(u)(\partial_t u + f'(u)\partial_x u) \\ &= S'(u)(\partial_t u + \partial_x f(u)) = 0. \end{aligned}$$

Définition 12

Une solution faible de (2.1), (2.2) est dite entropique si elle vérifie l'inégalité faible

$$\partial_t(S(u)) + \partial_x(G(u)) \leq 0 \tag{2.3}$$

pour tout couple entropie-flux d'entropie (S,G) . ■

Cette inégalité faible signifie que pour toute fonction $\varphi(t,x) \in C_0^\infty([0, +\infty] \times \mathbb{R})$ positive,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (S(u(t,x))\partial_t \varphi(t,x) + G(u(t,x))\partial_x \varphi(t,x)) dx dt \geq 0.$$

Nous pouvons énoncer le principal résultat d'existence et d'unicité d'une solution entropique.

Théorème 9

Supposons que $u^0 \in VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Supposons que $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Alors, le problème (2.1), (2.2) possède une unique solution faible entropique $u(t,x)$. Elle vérifie

- $u(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u^0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ pour presque tout t ;
- $u(\cdot, t) \in VB(\mathbb{R})$ et $VT(u(\cdot, t)) \leq VT(u^0(\cdot))$ pour tout $t \geq 0$.

■

C'est un résultat dû à Kruzkov (cf. [53]).

Il est parfois difficile de savoir si une solution est ou non entropique : l'inégalité entropique (2.3) doit être vérifiée pour toute entropie. Dans le cas d'une équation à flux strictement convexe (f est strictement convexe), les solutions entropiques sont caractérisées au moyen d'une seule inégalité entropique.

Théorème 10

Soit u une solution faible de (2.1), (2.2) de classe $C^1([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ par morceaux. Supposons qu'il existe un couple entropie-flux d'entropie (S, G) tel que l'inégalité entropique (2.3) soit vérifiée.

Alors, u est la solution entropique du problème (2.1), (2.2). ■

Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposons que f est une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$ et strictement convexe.

2.2 Étude algorithmique en dimension un

Concernant la discrétisation des équations scalaires non linéaires, nous nous référons à [45] (pour l'analyse incrémentale et les propriétés VTD), [89] et [69] (limites de flux), [47] (schémas d'ordre élevé, notion de nombre d'extrema de la solution), [85] and [86] (schéma essentiellement non oscillants), [23] and [24] (dimension d'espace supérieure à un), [65] (convergence du schéma MUSCL) et [62] (conditions d'entropie discrètes).

On se donne le même maillage que dans le cas linéaire et les notations sont les mêmes que dans le chapitre 1.

La condition initiale discrète est donnée par

$$u_j^0 = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{u^0(x)}{\Delta x} dx \quad (2.4)$$

(nous supposons que $u^0 \in VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$).

L'équation (2.1) est discrétisée sous une forme volumes finis :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n) \quad (2.5)$$

avec $\lambda = \Delta t / \Delta x$. Pour simplifier, nous étudierons l'algorithme sur un seul pas de temps. Cela permet de se passer des indices de temps n . Nous considérons donc le schéma sur un pas de temps

$$\hat{u}_j = u_j - \lambda(f_{j+1/2} - f_{j-1/2}) \quad (2.6)$$

Les définitions que nous avons rappelées dans le chapitre 1 s'étendent au cas non linéaire

Définition 13

On dit que le schéma (2.6) est explicite s'il existe un entier k et une fonction réelle g à $2k$ variables réelles tels que

$$f_{j+1/2} = g(u_{j-k+1}, u_{j-k+2}, \dots, u_j, \dots, u_{j+k}) \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

■

Tous les schémas que nous considérons dans la suite sont explicites.

Définition 14

Un schéma de la forme (2.6) est dit consistant s'il est explicite et si la fonction g de la définition 13 vérifie

$$g(u, u, \dots, u) = f(u). \quad (2.8)$$

■

Définition 15

Le schéma (2.6) est dit stable L^∞ s'il existe un réel C indépendant de n et de Δt tel que

$$\max_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

■

Définition 16

La variation totale à l'étape en temps n de la solution discrète u_j^n est

$$VT^n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j+1}^n - u_j^n|. \quad (2.10)$$

Le schéma (2.6) est à variation totale décroissante (VTD) si pour toute donnée $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j+1}^n - u_j^n|$. ■

Notons

$${}^{\Delta t, \Delta x} u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^n \mathbf{1}_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[}(x) \mathbf{1}_{[n\Delta t, (n+1)\Delta t[}(t). \quad (2.11)$$

Définition 17

Un schéma de la forme (2.4), (2.6) avec λ fixé est dit convergent vers $u(t, x)$ dans $L^1(\mathbb{R})$ s'il existe une suite $(\Delta x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que

- $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta x_m = 0$;
- $\lim_{m \rightarrow \infty} \| {}^{\Delta t_m, \Delta x_m} u(t, \cdot) - u(t, \cdot) \|_{L^1(\mathbb{R})} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$, Δt_m étant défini par $\Delta t_m = \lambda \Delta x_m$.

■

Nous avons un théorème équivalent au théorème 1 (cf. [40]).

Théorème 11

Supposons que $u^0 \in VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

On considère un schéma explicite de la forme (2.4), (2.6).

Supposons que ce schéma soit consistant, stable L^∞ et VTD, et que ses flux $f_{j+1/2}$ soient localement lipschitziens.

Alors, il est convergent dans $L^1(\mathbb{R})$ vers une solution faible de (2.1), (2.2). ■

Notons que le schéma n'est pas nécessairement convergent vers la solution entropique de (2.1), (2.2). Il faudra pour cela ajouter une condition entropique discrète (cf. théorème 12).

2.2.1 Une première idée (naïve)

Nous faisons ici le même raisonnement que dans le cas linéaire : puisque la solution exacte est stable L^∞ et à variation totale décroissante (cf. théorème 9), nous imposons ces conditions de stabilité à la solution numérique.

Supposons que $f'(u_j) > 0$. Nous posons

$$\begin{cases} m_{j-1/2} = \min(u_{j-1}, u_j), \\ M_{j-1/2} = \max(u_{j-1}, u_j), \\ \phi_{j-1/2} = \min(f(u_{j-1}), f(u_j)), \\ \Phi_{j-1/2} = \max(f(u_{j-1}), f(u_j)). \end{cases}$$

Alors, comme dans le cas linéaire, une condition suffisante pour obtenir la stabilité L^∞ et la décroissance de la variation totale est que $\forall j$,

$$\begin{aligned} \frac{u_j - M_{j-1/2}}{\lambda} + \Phi_{j-1/2} \leq f_{j+1/2} \leq \frac{u_j - m_{j-1/2}}{\lambda} + \phi_{j-1/2}, \\ \phi_{j+1/2} \leq f_{j+1/2} \leq \Phi_{j+1/2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nous posons comme dans le cas linéaire

$$\begin{cases} b_j = \frac{u_j - M_{j-1/2}}{\lambda} + \Phi_{j-1/2}, \\ B_j = \frac{u_j - m_{j-1/2}}{\lambda} + \phi_{j-1/2}. \end{cases}$$

La proposition suivante affirme que ces inégalités sont compatibles sous une condition de type CFL.

Proposition 3

Supposons que $f'(u_j) > 0$.

Supposons vérifiée la condition $\lambda f'(u_j) \leq 1$ (condition de type CFL).

Alors,

$$f(u_j) \in [\phi_{j+1/2}, \Phi_{j+1/2}] \cap [b_j, B_j] \text{ qui n'est pas vide.}$$

De plus, si les flux $f_{j+1/2}$ sont choisis dans les intervalles ci-dessus, le schéma (2.6) est stable L^∞ et VTD. ■

Le schéma est donc convergent vers une solution faible du problème (2.2), (2.1) si les flux sont lipschitziens.

Démonstration

Cette démonstration repose sur le même principe que dans le cas de l'advection linéaire (théorème 2). Comme $f(u_j) \in [\phi_{j+1/2}, \Phi_{j+1/2}]$, il reste à montrer que $f(u_j) \in [b_j, B_j]$. Nous nous contentons de montrer que $B_j \geq f(u_j)$. L'inégalité $b_j \leq f(u_j)$ se

montre de la même manière. Il nous faut distinguer deux éventualités : $u_j \leq u_{j-1}$ et $u_j > u_{j-1}$.

- Si $u_j \leq u_{j-1}$, on a $m_{j-1/2} = u_j$. Donc $B_j = \phi_{j-1/2}$. D'autre part, on a supposé $f'(u_j) > 0$, et comme f est convexe, f est croissante sur tout l'intervalle $[u_j, u_{j-1}]$. Par suite, $\phi_{j-1/2} = f(u_j)$. L'inégalité $B_j \geq f(u_j)$ est vraie car elle se résume à $f(u_j) \geq f(u_j)$.
- Si $u_j > u_{j-1}$, on a $m_{j-1/2} = u_{j-1}$. L'inégalité $B_j \geq f(u_j)$ est équivalente à

$$\lambda \frac{f(u_j) - \phi_{j-1/2}}{u_j - u_{j-1}} \leq 1.$$

Soit $\phi_{j-1/2} = f(u_j)$ et cette l'inégalité est triviale ($0 \leq 1$), soit $\phi_{j-1/2} = f(u_{j-1})$ et il faut montrer que

$$\lambda \frac{f(u_j) - f(u_{j-1})}{u_j - u_{j-1}} \leq 1.$$

La convexité de f permet de conclure, car

$$\lambda \frac{f(u_j) - f(u_{j-1})}{u_j - u_{j-1}} \leq \lambda f'(u_j) \leq 1$$

grâce à la condition CFL.

Il reste à montrer que si tous les flux vérifient (2.12), la solution numérique est stable L^∞ et VTD. Si tous les flux vérifient (2.12), on observe que

$$\frac{u_j - M_{j-1/2}}{\lambda} + f_{j-1/2} \leq f_{j+1/2} \leq \frac{u_j - m_{j-1/2}}{\lambda} + f_{j-1/2},$$

ce qui donne

$$m_{j-1/2} \leq u_j - \lambda(f_{j+1/2} - f_{j-1/2}) \leq M_{j-1/2},$$

soit

$$m_{j-1/2} \leq \hat{u}_j \leq M_{j-1/2}.$$

Un résultat d'analyse incrémentale de Harten permet de conclure à la stabilité L^∞ et à la décroissance de la variation totale (cf. démonstration du théorème 2). ■

La première idée que nous avons alors est de décentrer le flux vers l'aval sous les contraintes de type amont (2.12). Observons le résultat numérique obtenu pour l'équation de Burgers, $f(u) = u^2/2$, avec des conditions de bord périodiques. Sur la figure 2.1, nous avons représenté la condition initiale, la solution exacte entropique (les conditions de périodicité impliquent l'apparition d'une onde de détente en $x = 0$ qui est ensuite propagée), et la solution numérique.

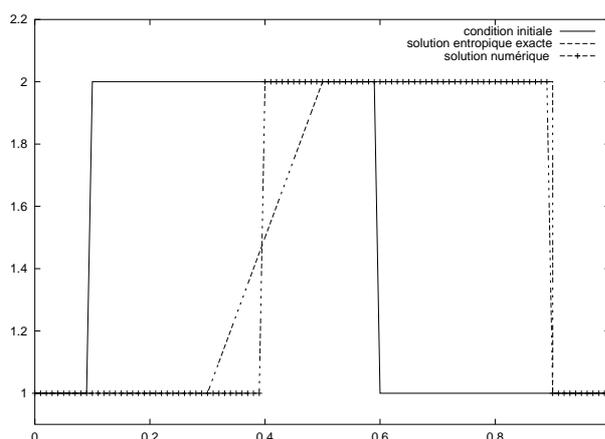


FIG. 2.1 – Condition initiale, résultat et solution exacte à $t = 0,2$.

Nous constatons que la solution numérique est bien une solution faible du problème, mais qu'elle n'est pas la solution entropique : un « choc de détente » a été calculé. La stabilité L^∞ et la décroissance de la variation totale ne sont pas des conditions suffisantes pour la convergence vers la solution entropique. Il est nécessaire d'introduire un nouveau critère afin de sélectionner une solution numérique qui converge vers la solution entropique.

2.2.2 Convergence vers la solution entropique : quelques rappels

Afin de savoir si une solution numérique converge vers la solution entropique lorsque le pas du maillage tend vers 0, on dispose du théorème 12. Il faut définir la notion d'inégalité entropique discrète pour l'énoncer.

Définition 18

On dit que le schéma (2.6) est consistant avec l'inégalité entropique (2.3) s'il existe une fonction réelle continue H de $2k$ variables réelles telle que

- H est consistante avec G :

$$H(u, u, \dots, u) = G(u); \quad (2.13)$$

- H vérifie l'inégalité entropique discrète

$$\frac{S(\hat{u}_j) - S(u_j)}{\Delta t} \leq \frac{H(u_{j-k+1}, \dots, u_{j+k}) - H(u_{j-k}, \dots, u_{j+k-1})}{\Delta x}. \quad (2.14)$$

■

La fonction H est appelée flux d'entropie numérique.

Les inégalités entropiques discrètes permettent de sélectionner la solution numérique qui converge vers la solution exacte entropique (unique d'après le théorème 9), comme en témoigne le théorème 12 (voir [40]).

Théorème 12

Supposons que $u^0 \in VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

On considère un schéma explicite de la forme (2.4), (2.6).

Supposons que ce schéma soit consistant, stable L^∞ et VTD, et que ses flux $f_{j+1/2}$ soient localement lipschitziens.

Supposons de plus que ce schéma soit consistant avec l'inégalité entropique (2.3) pour tout couple entropie-flux d'entropie (S, G) .

Alors, il est convergent dans $L^1(\mathbb{R})$ vers la solution faible entropique de (2.1), (2.2). ■

Dans le cas d'une équation à flux strictement convexe, on a un résultat plus fort.

Théorème 13

Supposons que $u^0 \in VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

On considère un schéma explicite de la forme (2.4), (2.6) pour un flux f strictement convexe.

Supposons que ce schéma soit consistant, stable L^∞ et VTD, et que ses flux $f_{j+1/2}$ soient localement lipschitziens.

Supposons de plus que ce schéma soit consistant avec l'inégalité (2.3) pour un couple entropie-flux d'entropie (S, G) .

Alors, il est convergent dans $L^1(\mathbb{R})$ vers la solution faible entropique de (2.1), (2.2). ■

Ce résultat est au théorème 12 ce que le théorème 10 est au théorème 9. Tant sur le plan numérique que sur le plan continu, une seule condition entropique suffit à sélectionner la solution entropique lorsque le flux f est strictement convexe.

Nous utiliserons dans la suite un résultat plus explicite (cf. [22]). Pour l'énoncer, nous définissons de nouvelles quantités.

$$\begin{cases} \widehat{u_{j+1/2,G}} = u_j - 2\lambda(f_{j+1/2} - f(u_j)) \\ \widehat{u_{j+1/2,D}} = u_{j+1} - 2\lambda(f(u_{j+1}) - f_{j+1/2}). \end{cases} \quad (2.15)$$

Ces nombres sont des valeurs de u dans les demi-maillages à gauche ($\widehat{u_{j+1/2,G}}$) et à droite ($\widehat{u_{j+1/2,D}}$) de $x_{j+1/2}$. Ils vérifient pour tout $j \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{u}_j = \frac{\widehat{u_{j+1/2,G}} + \widehat{u_{j-1/2,D}}}{2}. \quad (2.16)$$

Ils sont à l'origine de nombreuses estimations entropiques dans [23], [24]...

Lemme 4

On considère les notations (2.15). Supposons que le schéma (2.6) est explicite, consistant et que ses flux sont des fonctions continues de leurs arguments.

Supposons de plus que

$$\frac{S(\widehat{u_{j+1/2,G}}) + S(\widehat{u_{j+1/2,D}})}{2} - \frac{S(u_j) + S(u_{j+1})}{2} \leq -\lambda(G(u_{j+1}) - G(u_j)). \quad (2.17)$$

Alors, il est consistant avec l'inégalité entropique (2.3) (au sens de la définition 18).

■

Ce lemme donne une condition locale pour la convergence entropique globale, une condition ne faisant intervenir que le flux à droite de la maille courante j .

Démonstration

La démonstration consiste à trouver un flux d'entropie numérique continu et consistant avec G (équation (2.13)) et qui vérifie l'inégalité entropique discrète (2.14).

L'inégalité (2.17) se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{S(\widehat{u_{j+1/2,G}}) + S(\widehat{u_{j-1/2,D}})}{2} - S(u_j) + \frac{S(u_j) - S(\widehat{u_{j-1/2,D}}) - S(u_{j+1}) + S(\widehat{u_{j+1/2,D}})}{2} \\ \leq -\lambda(G(u_{j+1}) - G(u_j)), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{S(\widehat{u_{j+1/2,G}}) + S(\widehat{u_{j-1/2,D}})}{2} - S(u_j) \\ \leq -\lambda(G(u_{j+1}) - \frac{S(u_{j+1}) - S(\widehat{u_{j+1/2,D}})}{2\lambda} - (G(u_j) - \frac{S(u_j) - S(\widehat{u_{j-1/2,D}})}{2\lambda})). \end{aligned}$$

Or, S étant une fonction convexe, on a

$$\frac{S(\widehat{u_{j+1/2,G}}) + S(\widehat{u_{j-1/2,D}})}{2} \geq S\left(\frac{\widehat{u_{j+1/2,G}} + \widehat{u_{j-1/2,D}}}{2}\right) = S(\widehat{u}_j).$$

Posons pour tout $j \in \mathbb{Z}$

$$G_{j+1/2} = G(u_{j+1}) - \frac{S(u_{j+1}) - S(\widehat{u_{j+1/2,D}})}{2\lambda}. \quad (2.18)$$

On a

$$S(\widehat{u}_j) - S(u_j) \leq -\lambda(G_{j+1/2} - G_{j-1/2}),$$

soit

$$\frac{S(\widehat{u}_j) - S(u_j)}{\Delta t} \leq -\frac{G_{j+1/2} - G_{j-1/2}}{\Delta x}.$$

Si les flux $f_{j+1/2}$ sont explicites, continus et consistants, il existe un entier k et une fonction H tels que

$$G_{j+1/2} = H(u_{j-k+1}, \dots, u_{j+k})$$

et H est continue et consistante (équation (2.13)) : H et k sont donnés par l'équation (2.18).

Ceci termine la démonstration. ■

2.2.3 Décentrage aval et conditions entropiques

Afin de calculer la bonne solution, nous devons imposer de nouvelles conditions sur les flux, de sorte que le schéma vérifie une inégalité entropique discrète (2.14). Nous voulons que ces conditions soient de type inégalité pour pouvoir utiliser ensuite la même méthode de décentrage aval. Il faudra aussi bien sûr que les nouvelles inégalités soient compatibles avec les autres. Il est même souhaitable que le flux décentré amont soit dans le nouvel intervalle admissible, car ce flux est connu pour être entropique (lorsque $f'(u_j) \neq 0$). Le théorème 14 donne une condition suffisante de type inégalité pour la convergence vers la solution entropique.

Posons

$$\begin{cases} s_{m_{j+1/2}} = \min_{[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]} (S''(u)), \\ v_{m_{j+1/2}} = \min_{[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]} (f'(u)), \\ s_{M_{j+1/2}} = \max_{[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]} (S''(u)), \\ v_{M_{j+1/2}} = \max_{[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]} (f'(u)), \end{cases} \quad (2.19)$$

puis

$$\begin{cases} a_{j+1/2} = 2\lambda s_{M_{j+1/2}}, \\ c_{j+1/2} = S'(u_{j+1}) - S'(u_j) - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}(f(u_{j+1}) + f(u_j)), \\ d_{j+1/2} = G(u_{j+1}) - f(u_{j+1})S'(u_{j+1}) - (G(u_j) - f(u_j)S'(u_j)) \\ \quad + \lambda s_{M_{j+1/2}}(f(u_{j+1})^2 + f(u_j)^2), \\ r_{j+1/2} = \frac{-c_{j+1/2} - \sqrt{c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2}}}{2a_{j+1/2}}, \\ R_{j+1/2} = \frac{-c_{j+1/2} + \sqrt{c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2}}}{2a_{j+1/2}}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Lemme 5

On considère les notations (2.19) et (2.20).

Supposons que $f'(u_j) > 0$ et $f'(u_{j+1}) > 0$.

Supposons vérifiée la condition CFL

$$\lambda \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{s_{m_{j+1/2}}^2}{v_{M_{j+1/2}} s_{M_{j+1/2}}^2}.$$

Alors,

$$c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2} \geq 0.$$

Cela implique que $r_{j+1/2}$ et $R_{j+1/2}$ sont réels. ■

Démonstration

Nous cherchons une condition sur λ pour que le discriminant $c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2}$ soit positif. Pour cela, on commence par donner une expression plus simple de ce discriminant. Pour simplifier les notations, nous notons pour tout j

$$\begin{cases} f_j = f(u_j), \\ S'_j = s'(u_j), \\ G_j = g(u_j). \end{cases}$$

Le discriminant s'écrit alors

$$\begin{aligned} c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2} &= (S'_{j+1} - S'_j - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}(f_{j+1} + f_j))^2 \\ &\quad - 8\lambda s_{M_{j+1/2}}(G_{j+1} - G_j - (f_{j+1}S'_{j+1} - f_jS'_j) \\ &\quad + \lambda s_{M_{j+1/2}}(f_{j+1}^2 + f_j^2)). \end{aligned}$$

On commence par développer.

$$\begin{aligned} c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2} &= (S'_{j+1} - S'_j)^2 + 4\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 (f_{j+1} + f_j)^2 \\ &\quad - 4\lambda s_{M_{j+1/2}}(S'_{j+1} - S'_j)(f_{j+1} + f_j) \\ &\quad - 8\lambda s_{M_{j+1/2}}(G_{j+1} - G_j - (f_{j+1}S'_{j+1} - f_jS'_j)) \\ &\quad - 8\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 (f_{j+1}^2 + f_j^2). \end{aligned}$$

Puis on regroupe les termes qui nous permettrons de faire des développements limités.

$$\begin{aligned} c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2} &= (S'_{j+1} - S'_j)^2 + 4\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 (f_{j+1} + f_j)^2 \\ &\quad + 4\lambda s_{M_{j+1/2}}(S'_{j+1} - S'_j)(f_{j+1} - f_j) \\ &\quad - 8\lambda s_{M_{j+1/2}}(G_{j+1} - G_j - (f_{j+1} - f_j)S'_j) \\ &\quad - 8\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 (f_{j+1}^2 + f_j^2) \\ &= (S'_{j+1} - S'_j)^2 + 4\lambda s_{M_{j+1/2}}(S'_{j+1} - S'_j)(f_{j+1} - f_j) \\ &\quad - 4\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 (f_{j+1} + f_j)^2 + 16\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 f_{j+1}f_j \\ &\quad - 8\lambda s_{M_{j+1/2}}(G_{j+1} - G_j - (f_{j+1} - f_j)S'_j). \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2} &= (S'_{j+1} - S'_j)^2 - 4\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 (f_{j+1} - f_j)^2 \\ &\quad + 4\lambda s_{M_{j+1/2}}(S'_{j+1} - S'_j)(f_{j+1} - f_j) \\ &\quad - 8\lambda s_{M_{j+1/2}}(G_{j+1} - G_j - (f_{j+1} - f_j)S'_j). \end{aligned} \tag{2.21}$$

On peut exploiter cette formulation en faisant des développements limités avec reste intégral.

$$\begin{aligned} c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2} &= \left(\int_{u_j}^{u_{j+1}} S''(x) dx \right)^2 - 4\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 \left(\int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) dx \right)^2 \\ &\quad + 4\lambda s_{M_{j+1/2}} \int_{u_j}^{u_{j+1}} S''(x) dx \int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) dx \\ &\quad - 8\lambda s_{M_{j+1/2}} \int_{u_j}^{u_{j+1}} (G'(x) - f'(x)S'_j) dx. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $G'(x) = f'(x)S'(x)$, on écrit $G'(x) - f'(x)S'_j = f'(x)(S'(x) - S'_j)$, et un nouveau développement limité avec reste intégral donne

$$\begin{aligned} c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2} &= \left(\int_{u_j}^{u_{j+1}} S''(x) dx \right)^2 - 4\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 \left(\int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) dx \right)^2 \\ &\quad + 4\lambda s_{M_{j+1/2}} \int_{u_j}^{u_{j+1}} S''(x) dx \int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) dx \\ &\quad - 8\lambda s_{M_{j+1/2}} \int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) \int_{u_j}^x S''(y) dy dx. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant les hypothèses $f'(u_j) > 0$ et $f'(u_{j+1}) > 0$. La fonction f étant convexe, $f'(x)$ est compris entre f'_j et f'_{j+1} pour tout x compris entre u_j et u_{j+1} . Donc, $f'(x) > 0$ dans les intégrales ci-dessus. Et comme S est convexe aussi, $S''(x) > 0$. Donc, avec la définition de $s_{M_{j+1/2}}$ donnée en (2.19),

$$\int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) \int_{u_j}^x S''(y) dy dx < \int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) \left(\int_{u_j}^x s_{M_{j+1/2}} dy \right) dx,$$

quelles que soient les valeurs relatives de u_j et u_{j+1} ($u_{j+1/2} > u_j$ ou $u_{j+1/2} \leq u_j$). D'où

$$\begin{aligned} c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2} &> \left(\int_{u_j}^{u_{j+1}} S''(x) dx \right)^2 - 4\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 \left(\int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) dx \right)^2 \\ &\quad - 4\lambda s_{M_{j+1/2}} \int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) \left(\int_{u_j}^x s_{M_{j+1/2}} dy \right) dx. \end{aligned}$$

On fait à nouveau des minoration du discriminant en remplaçant les termes f' et S'' par leur valeurs minimales ou maximales dans l'intervalle $[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]$ définies en (2.19).

$$\begin{aligned} c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2} &> (u_{j+1} - u_j)^2 (s_{m_{j+1/2}}^2 - 4\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 v_{M_{j+1/2}}^2) \\ &\quad - 4\lambda s_{M_{j+1/2}} \frac{(u_{j+1} - u_j)^2}{2} s_{M_{j+1/2}} v_{M_{j+1/2}}. \end{aligned}$$

Nous avons démontré que

$$\begin{aligned} c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2} &> (u_{j+1} - u_j)^2 (s_{m_{j+1/2}}^2 - 4\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 v_{M_{j+1/2}}^2 \\ &\quad - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}^2 v_{M_{j+1/2}}). \end{aligned}$$

Il suffit de trouver une condition sous laquelle le terme de droite de l'inégalité ci-dessus est positif pour avoir une condition suffisante de positivité du discriminant.

Il suffit donc de trouver une condition qui assure la positivité du terme

$$s_{m_{j+1/2}}^2 - 4\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 v_{M_{j+1/2}}^2 - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}^2 v_{M_{j+1/2}}. \quad (2.22)$$

Ce terme est une expression polynomiale du second degré en λ dont le coefficient de degré deux est négatif. Il est positif lorsque λ est compris entre ses deux racines. Le discriminant de ce polynôme est

$$\Delta = 4s_{M_{j+1/2}}^4 v_{M_{j+1/2}}^2 + 16s_{M_{j+1/2}}^2 v_{M_{j+1/2}}^2 s_{m_{j+1/2}}^2.$$

Ce discriminant est positif et sa racine carrée est supérieure à la valeur absolue du coefficient de degré un. Le polynôme possède donc une racine positive et une racine négative. Seule la racine positive nous intéresse car nous savons que $\lambda > 0$. Cette racine, notée λ_+ , vaut

$$\lambda_+ = \frac{2s_{M_{j+1/2}}^2 v_{M_{j+1/2}} - 2\sqrt{s_{M_{j+1/2}}^4 v_{M_{j+1/2}}^2 + 4s_{M_{j+1/2}}^2 v_{M_{j+1/2}}^2 s_{m_{j+1/2}}^2}}{-8s_{M_{j+1/2}}^2 v_{M_{j+1/2}}^2}$$

ou peut encore s'écrire

$$\lambda_+ = \frac{1}{4v_{M_{j+1/2}}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4s_{m_{j+1/2}}^2}{s_{M_{j+1/2}}^2}} \right).$$

Nous cherchons à minorer λ_+ . Posons temporairement

$$x = \frac{4s_{m_{j+1/2}}^2}{s_{M_{j+1/2}}^2}.$$

Ce nombre est positif et un développement limité de la fonction $\sqrt{1+\cdot}$ nous assure qu'il existe un nombre $\tilde{x} \in [0, x]$ tel que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+\tilde{x}}}.$$

De plus, comme $x \leq 4$, on a $\tilde{x} \leq 4$ et

$$\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2\sqrt{5}}.$$

En remplaçant x par son expression, on trouve une majoration de la racine positive λ_+ :

$$\lambda_+ \geq \frac{1}{v_{M_{j+1/2}}} \frac{2s_{m_{j+1/2}}^2}{\sqrt{5}s_{M_{j+1/2}}^2}.$$

Pour conclure, nous rappelons que si $0 \leq \lambda \leq \lambda_+$, l'expression (2.22) est positive et $c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2}$ est positif aussi. Donc une condition suffisante de positivité de ce dernier est

$$\lambda \leq \frac{2}{\sqrt{5}v_{M_{j+1/2}}} \frac{s_{m_{j+1/2}}^2}{s_{M_{j+1/2}}^2}.$$

C'est la condition CFL du lemme. ■

Théorème 14

On considère un schéma du type (2.4), (2.6) et les notations (2.19) et (2.20).

Supposons que $f'(u_j) > 0$ et $f'(u_{j+1}) > 0$. Supposons vérifiée la condition CFL

$$\lambda \leq \frac{1}{v_{M_{j+1/2}}} \min \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \frac{s_{m_{j+1/2}}^2}{s_{M_{j+1/2}}^2}, \frac{1}{2} \frac{v_{m_{j+1/2}} s_{m_{j+1/2}}}{v_{M_{j+1/2}} s_{M_{j+1/2}}} \right).$$

Alors,

$$f(u_j) \in [\phi_{j+1/2}, \Phi_{j+1/2}] \cap [b_j, B_j] \cap [r_{j+1/2}, R_{j+1/2}] \text{ qui n'est pas vide.}$$

De plus, si le flux $f_{j+1/2}$ est choisi dans cet intervalle, la solution numérique donnée par le schéma (2.6) vérifie dans la maille j une inégalité entropique discrète du type (2.14) avec une fonction H consistante avec G . Si quel que soit j le flux $f_{j+1/2}$ est choisi dans cet intervalle (la condition CFL étant vérifiée pour tout j), le schéma est stable L^∞ , VTD, et consistant avec l'inégalité entropique (2.3). ■

La démonstration utilise le lemme 4

Démonstration

La condition CFL proposée ici étant plus stricte que celle de la proposition 3, nous savons grâce à cette proposition que $f(u_j) \in [\phi_{j+1/2}, \Phi_{j+1/2}] \cap [b_j, B_j]$. D'autre part, la condition CFL est aussi plus forte que celle du lemme 5, donc les nombres $r_{j+1/2}$ et $R_{j+1/2}$ sont réels. Il faut démontrer que $f(u_j) \in [r_{j+1/2}, R_{j+1/2}]$. Une fois de plus, nous montrons que $R_{j+1/2} \geq f(u_j)$ et l'autre inégalité peut se montrer de façon identique.

Comme pour le lemme 5, nous cherchons une condition suffisante exprimée sur le nombre de Courant λ pour que $R_{j+1/2} \geq f(u_j)$. Ceci revient à chercher une condition pour que

$$\sqrt{c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2}} \geq 2a_{j+1/2}f_j + c_{j+1/2},$$

soit

$$\sqrt{c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2}} \geq 4\lambda s_{M_{j+1/2}}f_j + S'_{j+1} - S'_j - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}(f_{j+1} + f_j)$$

ou encore

$$\sqrt{c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2}} \geq S'_{j+1} - S'_j - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}(f_{j+1} - f_j). \quad (2.23)$$

On commence par montrer que le terme de droite est du même signe que $(u_{j+1} - u_j)$ sous la condition CFL du théorème. Un développement limité donne

$$S'_{j+1} - S'_j - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}(f_{j+1} - f_j) = \int_{u_j}^{u_{j+1}} S''(x) dx - 2\lambda s_{M_{j+1/2}} \int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) dx.$$

Donc

– soit $(u_{j+1} - u_j) > 0$ et

$$S'_{j+1} - S'_j - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}(f_{j+1} - f_j) > (u_{j+1} - u_j)(s_{m_{j+1/2}} - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}v_{M_{j+1/2}});$$

– soit $(u_{j+1} - u_j) \leq 0$ et

$$S'_{j+1} - S'_j - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}(f_{j+1} - f_j) \leq (u_{j+1} - u_j)(s_{m_{j+1/2}} - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}v_{M_{j+1/2}}).$$

Il faut étudier le signe de $(s_{m_{j+1/2}} - 2\lambda s_{M_{j+1/2}} v_{M_{j+1/2}})$. La condition CFL implique

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \frac{v_{m_{j+1/2}} s_{m_{j+1/2}}}{v_{M_{j+1/2}} s_{M_{j+1/2}}} \leq \frac{1}{2v_{M_{j+1/2}}} \frac{s_{m_{j+1/2}}}{s_{M_{j+1/2}}}.$$

Ainsi

$$\lambda \leq \frac{1}{2v_{M_{j+1/2}}} \frac{s_{m_{j+1/2}}}{s_{M_{j+1/2}}},$$

et ceci est équivalent à

$$(s_{m_{j+1/2}} - 2\lambda s_{M_{j+1/2}} v_{M_{j+1/2}}) \geq 0.$$

Par suite, le terme de droite dans (2.23) est du signe de $(u_{j+1} - u_j)$. On remarque alors que l'inéquation (2.23) est vérifiée sans condition sur λ si $(u_{j+1} - u_j) \leq 0$. Nous n'avons donc plus qu'à envisager le cas $(u_{j+1} - u_j) > 0$. Dans ce cas, le terme de droite de (2.23) est positif et l'inéquation est équivalente à

$$c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2} d_{j+1/2} \geq (S'_{j+1} - S'_j - 2\lambda s_{M_{j+1/2}} (f_{j+1} - f_j))^2.$$

On utilise l'expression (2.21) du terme de gauche trouvée au cours de la démonstration du lemme 5 et on obtient

$$\begin{aligned} & (S'_{j+1} - S'_j)^2 - 4\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 (f_{j+1} - f_j)^2 \\ & + 4\lambda s_{M_{j+1/2}} (S'_{j+1} - S'_j) (f_{j+1} - f_j) \\ & - 8\lambda s_{M_{j+1/2}} (G_{j+1} - G_j - (f_{j+1} - f_j) S'_j) \geq (S'_{j+1} - S'_j)^2 \\ & \quad + 4\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 (f_{j+1} - f_j)^2 \\ & \quad - 4\lambda s_{M_{j+1/2}} (f_{j+1} - f_j) (S'_{j+1} - S'_j). \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{aligned} & -8\lambda^2 s_{M_{j+1/2}}^2 (f_{j+1} - f_j)^2 \\ & + 8\lambda s_{M_{j+1/2}} (f_{j+1} - f_j) (S'_{j+1} - S'_j) \\ & - 8\lambda s_{M_{j+1/2}} (G_{j+1} - G_j - (f_{j+1} - f_j) S'_j) \geq 0, \end{aligned}$$

ou

$$-\lambda s_{M_{j+1/2}} (f_{j+1} - f_j)^2 + (f_{j+1} - f_j) S'_{j+1} - (G_{j+1} - G_j) \geq 0$$

(nous sommes à la recherche d'une condition sur λ pour que cette inégalité soit vérifiée). Comme dans la démonstration du lemme 5, des développements limités donnent des inéquations équivalentes :

$$\begin{aligned} & -\lambda s_{M_{j+1/2}} \left(\int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) dx \right)^2 \\ & + \int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) S'_{j+1} dx - \int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) S'(x) dx \geq 0, \end{aligned}$$

$$-\lambda s_{M_{j+1/2}} \left(\int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) dx \right)^2 + \int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) \left(\int_x^{u_{j+1}} S''(y) dy \right) dx \geq 0.$$

Pour vérifier cette inégalité, il est suffisant de vérifier

$$-(u_{j+1} - u_j)^2 \lambda s_{M_{j+1/2}} v_{M_{j+1/2}}^2 + \int_{u_j}^{u_{j+1}} f'(x) (u_{j+1} - x) s_{m_{j+1/2}} dx \geq 0$$

(puisque nous n'envisageons plus que le cas $u_{j+1} > u_j$). Il suffit que λ soit tel que

$$-(u_{j+1} - u_j)^2 \lambda s_{M_{j+1/2}} v_{M_{j+1/2}}^2 + \frac{(u_{j+1} - u_j)^2}{2} v_{m_{j+1/2}} s_{m_{j+1/2}} \geq 0,$$

soit enfin

$$\lambda s_{M_{j+1/2}} v_{M_{j+1/2}}^2 + \frac{1}{2} v_{m_{j+1/2}} s_{m_{j+1/2}} \geq 0.$$

Cela donne naturellement la condition de type CFL

$$\lambda \leq \frac{1}{2 v_{M_{j+1/2}} v_{m_{j+1/2}} s_{m_{j+1/2}}}.$$

C'est la condition annoncée dans le théorème. Il faudrait encore montrer que sous cette condition $r_{j+1/2} \leq f(u_j)$ mais nous ne le faisons pas car le raisonnement est absolument identique.

Il nous faut maintenant montrer que le schéma vérifie l'inégalité entropique (2.14) dans la maille j pour une fonction H consistante avec G . Pour cela, nous montrons que la solution numérique vérifie l'inégalité (2.17) (suffisante) du lemme 4. Considérons le polynôme du second degré en la variable x : $P(x) = a_{j+1/2} x^2 + c_{j+1/2} x + d_{j+1/2}$. Nous avons pour l'instant montré que sous les condition CFL du théorème, ce polynôme avait deux racines réelles $r_{j+1/2}$ et $R_{j+1/2}$ et que $r_{j+1/2} \leq f(u_j) \leq R_{j+1/2}$ (cf. lemme 5). Le coefficient de degré deux de ce polynôme, $a_{j+1/2}$, est positif. Donc $P(x)$ est négatif entre $r_{j+1/2}$ et $R_{j+1/2}$. Soit $f_{j+1/2} \in [r_{j+1/2}, R_{j+1/2}]$ fixé. Ce nombre vérifie $P(f_{j+1/2}) \leq 0$. Cela s'écrit

$$\begin{aligned} & f_{j+1/2}^2 2\lambda s_{m_{j+1/2}} \\ & + f_{j+1/2} (S'_{j+1} - S'_j - 2\lambda s_{M_{j+1/2}} (f_{j+1} + f_j)) \\ & + G_{j+1} - f_{j+1} S'_{j+1} - (G_j - f_j S'_j) \\ & + \lambda s_{M_{j+1/2}} (f_{j+1}^2 + f_j^2) \leq 0. \end{aligned}$$

De manière équivalente,

$$\begin{aligned} & -(f_{j+1/2} - f_j) S'_j - (f_{j+1} - f_{j+1/2}) S'_{j+1} \\ & + \lambda (f_{j+1/2} - f_j)^2 s_{M_{j+1/2}} + \lambda (f_{j+1} - f_{j+1/2})^2 s_{M_{j+1/2}} \leq -(G_{j+1} - G_j). \end{aligned}$$

En multipliant tout par $\lambda > 0$, on réécrit ceci

$$\begin{aligned} & \frac{-2\lambda (f_{j+1/2} - f_j) S'_j + 2\lambda^2 (f_{j+1/2} - f_j)^2 s_{M_{j+1/2}}}{2} \\ & + \frac{-2\lambda (f_{j+1} - f_{j+1/2}) S'_{j+1} + 2\lambda^2 (f_{j+1} - f_{j+1/2})^2 s_{M_{j+1/2}}}{2} \leq -\lambda (G_{j+1} - G_j). \end{aligned}$$

La convexité de S implique pour tout couple réel (a, b)

$$S(b) \leq S(a) + (b - a)S'(a) + \frac{(b - a)^2}{2} \max_{[a; b]}(S''),$$

d'où

$$\begin{cases} -2\lambda(f_{j+1/2} - f_j)S'_j + 2\lambda^2(f_{j+1/2} - f_j)^2 s_{M_{j+1/2}} \\ \geq S(u_j - 2\lambda(f_{j+1/2} - f_j)) - S(u_j) \\ -2\lambda(f_{j+1} - f_{j+1/2})S'_{j+1} + 2\lambda^2(f_{j+1} - f_{j+1/2})^2 s_{M_{j+1/2}} \\ \geq S(u_{j+1} - 2\lambda(f_{j+1} - f_{j+1/2})) - S(u_{j+1}). \end{cases}$$

Donc, $f_{j+1/2}$ vérifie l'inégalité

$$\frac{S(u_j - 2\lambda(f_{j+1/2} - f_j)) - S(u_j)}{2} + \frac{S(u_{j+1} - 2\lambda(f_{j+1} - f_{j+1/2})) - S(u_{j+1})}{2} \leq -\lambda(G_{j+1} - G_j).$$

On obtient en remplaçant $u_j - 2\lambda(f_{j+1/2} - f_j)$ par $\widehat{u_{j+1/2, G}}$ et $u_{j+1} - 2\lambda(f_{j+1} - f_{j+1/2})$ par $\widehat{u_{j+1/2, D}}$

$$\frac{S(\widehat{u_{j+1/2, G}}) + S(\widehat{u_{j+1/2, D}})}{2} - \frac{S(u_j) + S(u_{j+1})}{2} \leq -\lambda(G(u_{j+1}) - G(u_j))$$

qui est l'inégalité entropique (2.17) du lemme 4. Ce lemme permet donc de conclure.

■

Le théorème 14 est constructif car il propose un intervalle explicite non vide pour le flux qui garantit la convergence de la solution numérique vers la solution entropique lorsque les pas de discrétisation tendent vers 0 (voir corollaire 3).

Remarque 2.2.1

Lorsque $f'(u_j) < 0$ et $f'(u_{j+1}) < 0$, on peut obtenir un résultat équivalent. Les conditions entropiques pour les flux sont trouvées lorsque f' a le même signe de part et d'autre du bord de maille, c'est-à-dire loin des points soniques. Pour être complet, il faudrait calculer les flux au voisinage des points soniques. Nous ne ferons pas ce travail. ■

Corollaire 3

Supposons que $u^0 \in VB(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

On considère un schéma explicite de la forme (2.4), (2.6).

Supposons que les flux $f_{j+1/2}$ soient localement lipschitziens de leurs arguments.

On considère les notations (2.19) et (2.20).

Supposons que $f'(u_j) > 0 \forall j \in \mathbb{Z}$.

Supposons vérifiée la condition CFL

$$\lambda \leq \min_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2v_{M_{j+1/2}}} \left(\min \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{s_{m_{j+1/2}}^2}{s_{M_{j+1/2}}^2}, \frac{v_{m_{j+1/2}} s_{m_{j+1/2}}}{v_{M_{j+1/2}} s_{M_{j+1/2}}} \right) \right) \right).$$

Supposons que

$$f_{j+1/2} \in [\phi_{j+1/2}, \Phi_{j+1/2}] \cap [b_j, B_j] \cap [r_{j+1/2}, R_{j+1/2}] \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

(cet intervalle contient $f(u_j)$).

Alors, le schéma est convergent vers la solution faible entropique de (2.1), (2.2).

■

Ce corollaire est une conséquence directe des théorèmes 13 et 14.

Le schéma numérique que nous proposons ici est le schéma décentré aval sous les contraintes de convergence entropique du corollaire 3, c'est-à-dire que les flux $f_{j+1/2}$ sont choisis le plus proche possible des valeurs dans les mailles aval, toujours dans l'intervalle $[\phi_{j+1/2}, \Phi_{j+1/2}] \cap [b_j, B_j] \cap [r_{j+1/2}, R_{j+1/2}]$. On peut consulter l'annexe B pour une formulation complète de l'algorithme de décentrage aval sous contraintes amont, dans sa version débrayée ou non¹.

2.3 Résultats numériques

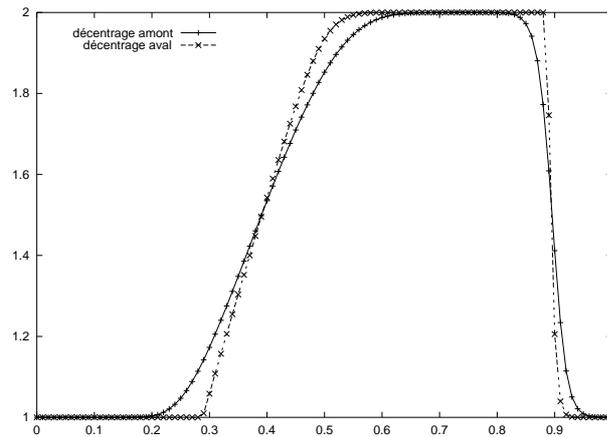
Ce que nous avons fait ci-dessus est valable pour toute équation scalaire à flux strictement convexe. Nous montrons des résultats numériques pour l'équation de Burgers, qui est l'archétype des équations non linéaires à flux strictement convexes.

L'équation de Burgers s'écrit ($t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$)

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0. \quad (2.24)$$

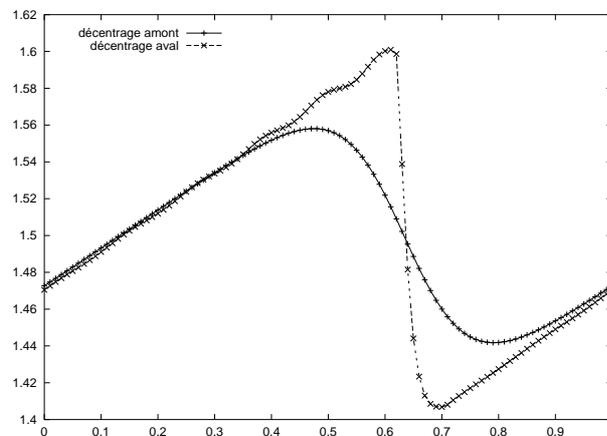
Un couple entropie-flux d'entropie possible est $(u^2/2, u^3/3)$. Nous présentons deux résultats, l'un en temps court et l'autre en temps long (avec des conditions périodiques sur les bords, comme dans le cas de l'advection). La condition initiale choisie est la même que pour la figure 2.1. Nous comparons les résultats donnés par le schéma décentré amont (schéma de Roe) et le schéma décentré aval sous les contraintes de convergence vers la solution entropique du théorème 14.

1. Pour la version « débrayée », voir ci-après.

FIG. 2.2 – Solutions numériques à $t = 0,2$.

Nous constatons que le décentrage aval sous contraintes est moins dissipatif que le décentrage amont (particulièrement au voisinage du choc), tout en restant entropique (la détente est bien calculée).

En temps long (figure 2.3), comme la « tête » de la détente avance plus vite que le choc, l'amplitude de la solution diminue avec le temps et la diffusion numérique due au décentrage amont se fait encore plus sentir.

FIG. 2.3 – Solutions numériques à $t = 4,7$.

Le choc est bien perceptible avec le décentrage aval, mais nous ne retrouvons pas l'exactitude qui caractérise le schéma décentré aval sous contraintes amont pour l'advection linéaire. Cependant, on peut apporter une grande amélioration en remarquant que les conditions entropiques ne sont pas nécessaires lorsque la solution est décroissante, car les endroits où la solution est décroissante sont générateurs de chocs pour les équations scalaires à flux convexe. Or, il y a unicité de la solution faible pour un choc. On peut donc « débrayer » l'algorithme dans les zones décroissantes

($u_j \geq u_{j+1}$) en éliminant les conditions entropiques, et en ne gardant que les conditions de stabilité (stabilité L^∞ et décroissance de la variation totale). Cela se traduit par le choix du flux $f_{j+1/2}$ le plus proche de $f(u_{j+1})$ et dans l'intervalle $[\phi_{j+1/2}, \Phi_{j+1/2}] \cap [b_j, B_j]$ au lieu de l'intervalle $[\phi_{j+1/2}, \Phi_{j+1/2}] \cap [b_j, B_j] \cap [r_{j+1/2}, R_{j+1/2}]$. Nous ne justifierons pas ceci rigoureusement. Nous indiquons seulement que LeFloch et Liu utilisent ce type de débrayage et démontrent sa validité ([62]). Les résultats du schéma débrayé sont à nouveau optimaux pour le choc (figure 2.4).

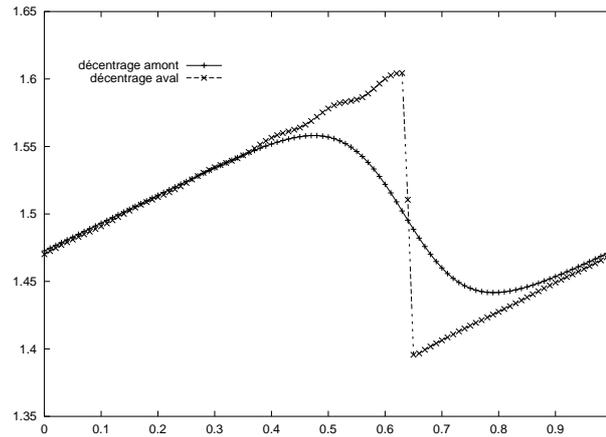


FIG. 2.4 – Solutions numériques à $t = 4,7$.

Chapitre 3

Un exemple de système non linéaire : les équations d'Euler

L'écriture d'algorithmes non dissipatifs de résolution numérique des équations scalaires (advection linéaire au chapitre 1 et équations scalaires à flux strictement convexe au chapitre 2) a été basée sur la connaissance d'estimations a priori sur les solutions exactes : stabilité L^∞ , décroissance de la variation totale, décroissance de l'entropie mathématique. Pour les systèmes non linéaires, les estimations a priori connues sont moins évidentes. La stabilité L^∞ et la décroissance de la variation totale de chaque composante ne sont pas la règle générale.

Dans certains systèmes non linéaires (la dynamique des gaz compressibles par exemple), il existe des champs « linéairement dégénérés » (cf. [41]). Ce comportement linéaire est associé entre autres à une stabilité L^∞ et à une stabilité de la variation totale, en un sens qui sera précisé. L'idée qui est à la base de ce chapitre sur les équations d'Euler est que l'on peut décomposer la solution en une partie non linéaire (associée aux champs vraiment non linéaires) et une partie linéaire (associée aux champs linéairement dégénérés). Cette décomposition est effectuée dans la résolution numérique par une décomposition d'opérateur. La partie non linéaire est résolue de manière classique (dissipative et entropique), tandis que la partie linéaire est résolue à la manière de l'équation d'advection linéaire dans le chapitre 1, c'est-à-dire en décentrage aval sous contraintes amont.

3.1 Le système des équations d'Euler

En dimension un ($t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$), la densité $\rho(t,x)$, la vitesse $u(t,x)$ et l'énergie totale spécifique $e(t,x)$ d'un fluide eulérien vérifient les équations de conservation

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans ce système, p est la pression du fluide et est donnée par la loi d'état de ce fluide. Nous considérerons un fluide parfait, dont la loi est donnée par

$$p = (\gamma - 1)\rho(e - u^2/2)$$

avec $\gamma > 1$.

Ce système est un système hyperbolique et ses valeurs propres sont $u - c$, u , $u + c$, c étant la vitesse du son donnée par $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ (cf. [41], [64] par exemple). La partie linéairement dégénérée est une 2-onde, qui se propage à la vitesse u (deuxième valeur propre). C'est une discontinuité de contact.

3.2 Algorithme en dimension un

Afin d'obtenir un schéma non dissipatif pour la discontinuité de contact, nous décomposons la résolution en

- la résolution de la partie vraiment non linéaire ;
- la résolution de la partie linéairement dégénérée.

Nous utilisons pour cela une décomposition « Lagrange + projection », c'est-à-dire que le schéma numérique est décomposé à chaque pas de temps en deux étapes :

- une étape lagrangienne ;
- une étape de projection (ou d'advection).

Pour alléger les notations, nous supprimons les indices de temps et ne présentons le schéma que sur un pas de temps. Les variables discrètes sont surmontées d'un tilde après la phase lagrangienne (étape intermédiaire) et d'un chapeau après l'étape de projection.

3.2.1 Étape lagrangienne

L'étape lagrangienne peut se voir comme une phase du calcul durant laquelle seuls les efforts de pression jouent un rôle.

Soit τ le volume spécifique du fluide :

$$\tau = \frac{1}{\rho}.$$

Il est aisé de montrer que pour les solutions régulières, (3.1) est équivalent à

$$\begin{cases} \rho D_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \rho D_t u + \partial_x p = 0, \\ \rho D_t e + \partial_x (pu) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où D_t est l'opérateur de dérivation lagrangienne : $D_t \cdot = \partial_t \cdot + u \partial_x \cdot$. Cette forme des équations est parfois appelée forme « pseudo-lagrangienne » des équations d'Euler. L'étape lagrangienne du schéma numérique est une discrétisation de ces équations.

Les notations pour la solution numérique sont les mêmes que dans les chapitres précédents : indices j pour les numéros de mailles, indices $j + 1/2$ pour les flux aux bords des mailles ($j \in \mathbb{Z}$).

Le schéma que nous choisissons pour cette phase lagrangienne est

$$\begin{cases} \rho_j \frac{\tilde{\tau}_j - \tau_j}{\Delta t} - \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \rho_j \frac{\tilde{u}_j - u_j}{\Delta t} + \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \rho_j \frac{\tilde{e}_j - e_j}{\Delta t} + \frac{p_{j+1/2} u_{j+1/2} - p_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

les valeurs des flux $u_{j+1/2}^n$ et $p_{j+1/2}^n$ étant données par les formules

$$\begin{cases} \rho^* c_{j+1/2} = \sqrt{\max(\rho_j c_j^2, \rho_{j+1} c_{j+1}^2) \min(\rho_j, \rho_{j+1})}, \\ p_{j+1/2} = \frac{p_j + p_{j+1}}{2} + \frac{\rho^* c_{j+1/2}}{2} (u_j - u_{j+1}), \\ u_{j+1/2} = \frac{1}{2\rho^* c_{j+1/2}} (p_j - p_{j+1}) + \frac{1}{2} (u_j + u_{j+1}). \end{cases} \quad (3.4)$$

Rappelons que $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ est la vitesse du son du fluide. Ce schéma est décrit avec précision dans [30], [34], [29]. Il sera réutilisé dans la partie III de ce travail.

Nous rappelons (sans le démontrer ici, voir pour cela [30] ou [29] ou un résultat équivalent pour le cas à plusieurs espèces, partie III, proposition 14) que ce schéma est entropique au sens du lemme 6. On note S l'entropie physique du système :

$$S = \ln(\varepsilon \tau^{\gamma-1})$$

en notant $\varepsilon = e - u^2/2$ l'énergie interne spécifique du fluide.

Lemme 6

Sous une condition de type CFL,

$$\tilde{S}_j \geq S_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

■

Cette phase du calcul est assez classique (et apparentée à un schéma de Roe). C'est dans la phase de projection (ou d'advection, ou de transport, ou encore de convection) que l'originalité et le caractère antidissipatif pour les discontinuités de contact apparaissent.

3.2.2 Étape de projection

Après la phase lagrangienne durant laquelle seuls les efforts de pression ont été pris en compte, cette phase de projection est en quelque sorte une phase durant laquelle on ne tient compte que du déplacement à la vitesse-matière u .

Le schéma proposé est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\hat{\rho}_j - \rho_j}{\Delta t} + \frac{\tilde{\rho}_{j+1/2} u_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\hat{\rho}_j \tilde{u}_j - \rho_j \tilde{u}_j}{\Delta t} + \frac{\tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{u}_{j+1/2} u_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{u}_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\hat{\rho}_j \tilde{e}_j - \rho_j \tilde{e}_j}{\Delta t} + \frac{\tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{e}_{j+1/2} u_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{e}_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Dans ces formules, les quantités $\tilde{\rho}_{j+1/2}$, $\tilde{u}_{j+1/2}$ et $\tilde{e}_{j+1/2}$ sont les flux aux bords des mailles, à déterminer (destinés à être décentrés aval sous contraintes amont). On peut vérifier que le schéma global (phase lagrangienne suivie de phase de transport) est bien « consistant » avec le système (3.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\hat{\rho}_j - \rho_j}{\Delta t} + \frac{\tilde{\rho}_{j+1/2} u_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\hat{\rho}_j \tilde{u}_j - \rho_j u_j}{\Delta t} + \frac{\tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{u}_{j+1/2} u_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{u}_{j-1/2} u_{j-1/2} + p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\hat{\rho}_j \tilde{e}_j - \rho_j e_j}{\Delta t} + \frac{\tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{e}_{j+1/2} u_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{e}_{j-1/2} u_{j-1/2} + p_{j+1/2} u_{j+1/2} - p_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Remarque 3.2.1

La forme (3.6) du schéma (forme globale) montre que c'est un schéma conservatif.

■

Dans les références déjà citées [30], [29], [34], le choix qui est fait pour les flux $\tilde{\rho}_{j+1/2}$, $\tilde{u}_{j+1/2}$ et $\tilde{e}_{j+1/2}$ est le choix du décentrage amont. Avec ce décentrage, le schéma est entropique sous condition CFL, au sens où

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_j \geq \min(\tilde{S}_j, \tilde{S}_{j-1}) \text{ si } u_{j+1/2} \geq 0 \text{ et } u_{j-1/2} \geq 0, \\ \hat{S}_j \geq \min(\tilde{S}_{j+1}, \tilde{S}_j) \text{ si } u_{j+1/2} \leq 0 \text{ et } u_{j-1/2} \leq 0. \end{array} \right.$$

Ce résultat est démontré dans [30], et nous démontrons un résultat du même type pour les équations d'Euler à plusieurs constituants (partie III, proposition 18).

Nous ne faisons pas le choix ici du décentrage amont et nous perdrons cette propriété.

Au cours de la phase de projection, les variations des quantités discrètes associées à ρ , ρu , ρe sont consistantes avec les équations d'advection

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho = 0, \\ \partial_t(\rho u) + u \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + u \partial_x(\rho e) = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

Pour s'en convaincre rapidement, il suffit de se rappeler que (3.6) est consistant avec (3.1) et que (3.3) est consistant avec (3.2). Alors, (3.5), qui peut être obtenu par soustraction de (3.3) à (3.6), est consistant avec le résultat de la soustraction de (3.2) à (3.1), c'est-à-dire les équations d'advection (3.7).

Les variables ρ , ρu , ρe étant solutions d'équations d'advection, il est légitime d'imposer aux variables discrètes des contraintes de stabilité L^∞ et de décroissance de la variation totale; nous appliquons la méthode (développée pour l'advection linéaire au chapitre 1.1.2) de décentrage aval sous contraintes amont.

Cependant, il faut remarquer que le mode de discrétisation de ces équations (système (3.5)) est un peu particulier car il couple les flux $\tilde{\rho}_{j+1/2}$ et $\tilde{u}_{j+1/2}$, ainsi que les flux $\tilde{\rho}_{j+1/2}$ et $\tilde{e}_{j+1/2}$. Le calcul direct des conditions de stabilité pourrait donc être compliqué. Nous décidons, pour simplifier tout cela, de ne faire dépendre ces trois flux que d'un seul paramètre $\tilde{\theta}_{j+1/2}$, qui représente le coefficient de combinaison linéaire entre la valeur amont et la valeur aval, identique pour les trois variables. Ce choix, qui a pour but de casser le couplage non linéaire entre les trois flux, a une autre utilité: il permet d'obtenir un schéma non oscillant à la discontinuité de contact (cf. lemme 4). Les flux de la phase de projection sont par définition tels que $\exists \tilde{\theta}_{j+1/2} \in [0,1]$ vérifiant

– si $u_{j+1/2} \geq 0$,

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_{j+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2} \tilde{\rho}_j + (1 - \tilde{\theta}_{j+1/2}) \tilde{\rho}_{j+1}, \\ \tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{u}_{j+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2} \tilde{\rho}_j \tilde{u}_j + (1 - \tilde{\theta}_{j+1/2}) \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{u}_{j+1}, \\ \tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{e}_{j+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2} \tilde{\rho}_j \tilde{e}_j + (1 - \tilde{\theta}_{j+1/2}) \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{e}_{j+1}; \end{cases} \quad (3.8)$$

– si $u_{j+1/2} \leq 0$,

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_{j+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2} \tilde{\rho}_{j+1} + (1 - \tilde{\theta}_{j+1/2}) \tilde{\rho}_j, \\ \tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{u}_{j+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2} \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{u}_{j+1} + (1 - \tilde{\theta}_{j+1/2}) \tilde{\rho}_j \tilde{u}_j, \\ \tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{e}_{j+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2} \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{e}_{j+1} + (1 - \tilde{\theta}_{j+1/2}) \tilde{\rho}_j \tilde{e}_j. \end{cases} \quad (3.9)$$

Cela signifie que l'on exprime les flux de ρ , ρu et ρe comme des combinaisons linéaires entre leurs valeurs amont et aval. En suivant toujours le même principe de décentrage aval sous contraintes amont, notre but est donc de choisir un $\tilde{\theta}_{j+1/2}$ le plus proche possible de 0 sous des contraintes de stabilité sur ρ , ρu et ρe .

Supposons que $u_{j+1/2} \geq 0 \forall j \in \mathbb{Z}$. Les flux vérifient les équations (3.8), qui peuvent se réécrire

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_{j+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2}(\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1}) + \tilde{\rho}_{j+1}, \\ \tilde{\rho}_{j+1/2}\tilde{u}_{j+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2}(\tilde{\rho}_j\tilde{u}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1}) + \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1}, \\ \tilde{\rho}_{j+1/2}\tilde{e}_{j+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2}(\tilde{\rho}_j\tilde{e}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1}) + \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1}. \end{cases} \quad (3.10)$$

On fait désormais l'hypothèse que $\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1} \neq 0$, $\tilde{\rho}_j\tilde{u}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1} \neq 0$ et $\tilde{\rho}_j\tilde{e}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1} \neq 0$. On a donc trois expressions de $\tilde{\theta}_{j+1/2}$.

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_{j+1/2} = (\tilde{\rho}_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j+1})/(\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1}), \\ \tilde{\theta}_{j+1/2} = (\tilde{\rho}_{j+1/2}\tilde{u}_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1})/(\tilde{\rho}_j\tilde{u}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1}), \\ \tilde{\theta}_{j+1/2} = (\tilde{\rho}_{j+1/2}\tilde{e}_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1})/(\tilde{\rho}_j\tilde{e}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1}). \end{cases} \quad (3.11)$$

Maintenant, on considère les trois équations d'advection (3.7) et leurs versions discrètes (3.5). Exactement comme dans le cas de l'advection linéaire au chapitre 1.1.2, on trouve des conditions de stabilité sur les flux pour chacune des équations de (3.5), et on en déduit des conditions de stabilité sur $\tilde{\theta}_{j+1/2}$ pour les trois équations, grâce à (3.11). Puis on peut calculer enfin les flux grâce à (3.8).

Posons

$$\begin{cases} \widetilde{m}^{\rho}_{j-1/2} = \min(\tilde{\rho}_{j-1}, \tilde{\rho}_j), \\ \widetilde{M}^{\rho}_{j-1/2} = \max(\tilde{\rho}_{j-1}, \tilde{\rho}_j), \\ \widetilde{m}^{\rho u}_{j-1/2} = \min(\tilde{\rho}_{j-1}\tilde{u}_{j-1}, \tilde{\rho}_j\tilde{u}_j), \\ \widetilde{M}^{\rho u}_{j-1/2} = \max(\tilde{\rho}_{j-1}\tilde{u}_{j-1}, \tilde{\rho}_j\tilde{u}_j), \\ \widetilde{m}^{\rho e}_{j-1/2} = \min(\tilde{\rho}_{j-1}\tilde{e}_{j-1}, \tilde{\rho}_j\tilde{e}_j), \\ \widetilde{M}^{\rho e}_{j-1/2} = \max(\tilde{\rho}_{j-1}\tilde{e}_{j-1}, \tilde{\rho}_j\tilde{e}_j). \end{cases} \quad (3.12)$$

Nous avons fait l'hypothèse $u_{j+1/2} > 0 \forall j \in \mathbb{Z}$. Comme d'habitude, nous posons $\lambda = \Delta t / \Delta x$. Nous posons encore

$$\begin{cases} \widetilde{b}^{\rho}_j = \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda}(\rho_j - \widetilde{M}^{\rho}_{j-1/2}) + \frac{u_{j-1/2}}{u_{j+1/2}}\widetilde{M}^{\rho}_{j-1/2}, \\ \widetilde{B}^{\rho}_j = \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda}(\rho_j - \widetilde{m}^{\rho}_{j-1/2}) + \frac{u_{j-1/2}}{u_{j+1/2}}\widetilde{m}^{\rho}_{j-1/2}, \\ \widetilde{b}^{\rho u}_j = \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda}(\rho_j\tilde{u}_j - \widetilde{M}^{\rho u}_{j-1/2}) + \frac{u_{j-1/2}}{u_{j+1/2}}\widetilde{M}^{\rho u}_{j-1/2}, \\ \widetilde{B}^{\rho u}_j = \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda}(\rho_j\tilde{u}_j - \widetilde{m}^{\rho u}_{j-1/2}) + \frac{u_{j-1/2}}{u_{j+1/2}}\widetilde{m}^{\rho u}_{j-1/2}, \\ \widetilde{b}^{\rho e}_j = \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda}(\rho_j\tilde{e}_j - \widetilde{M}^{\rho e}_{j-1/2}) + \frac{u_{j-1/2}}{u_{j+1/2}}\widetilde{M}^{\rho e}_{j-1/2}, \\ \widetilde{B}^{\rho e}_j = \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda}(\rho_j\tilde{e}_j - \widetilde{m}^{\rho e}_{j-1/2}) + \frac{u_{j-1/2}}{u_{j+1/2}}\widetilde{m}^{\rho e}_{j-1/2}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Lemme 7

Supposons que $u_{j+1/2} > 0 \forall j \in \mathbb{Z}$.

Supposons vérifiée la condition CFL $\max_{j \in \mathbb{Z}}(u_{j+1/2})\lambda \leq 1$.

Alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}_j \in [\tilde{b}^{\rho_j}, \tilde{B}^{\rho_j}] \cap [\tilde{m}^{\rho_{j+1/2}}, \tilde{M}^{\rho_{j+1/2}}] \text{ qui n'est pas vide,} \\ \tilde{\rho}_j \tilde{u}_j \in [\tilde{b}^{\rho_u_j}, \tilde{B}^{\rho_u_j}] \cap [\tilde{m}^{\rho_u_{j+1/2}}, \tilde{M}^{\rho_u_{j+1/2}}] \text{ qui n'est pas vide,} \\ \tilde{\rho}_j \tilde{e}_j \in [\tilde{b}^{\rho_e_j}, \tilde{B}^{\rho_e_j}] \cap [\tilde{m}^{\rho_e_{j+1/2}}, \tilde{M}^{\rho_e_{j+1/2}}] \text{ qui n'est pas vide.} \end{array} \right.$$

De plus, si pour tout $j \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}_j \in [\tilde{b}^{\rho_j}, \tilde{B}^{\rho_j}] \cap [\tilde{m}^{\rho_{j+1/2}}, \tilde{M}^{\rho_{j+1/2}}], \\ \tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{u}_{j+1/2} \in [\tilde{b}^{\rho_u_j}, \tilde{B}^{\rho_u_j}] \cap [\tilde{m}^{\rho_u_{j+1/2}}, \tilde{M}^{\rho_u_{j+1/2}}], \\ \tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{e}_{j+1/2} \in [\tilde{b}^{\rho_e_j}, \tilde{B}^{\rho_e_j}] \cap [\tilde{m}^{\rho_e_{j+1/2}}, \tilde{M}^{\rho_e_{j+1/2}}], \end{array} \right.$$

la phase de projection (3.5) est stable L^∞ et à variation totale décroissante pour chacune des variables $\tilde{\rho}$, $\tilde{\rho}u$, $\tilde{\rho}e$. ■

Ce lemme se démontre exactement comme le théorème 2 du chapitre 1 : écriture de conditions sur les flux en $j+1/2$ qui sont nécessaires et suffisantes pour la stabilité et qui font intervenir les flux en $j-1/2$, puis ajout de la condition de consistance qui permet de lever la dépendance vis à vis des flux en $j-1/2$. Nous ne répétons pas ici les détails.

Grâce aux formules (3.11), les trois intervalles de stabilité ci-dessus peuvent se convertir en trois intervalles de stabilité pour $\tilde{\theta}_{j+1/2}$. Si on choisit $\tilde{\theta}_{j+1/2}$ dans l'intersection de ces trois nouveaux intervalles (à supposer que leur intersection ne soit pas vide), on sera certain de la stabilité L^∞ de la phase de projection (3.5) et de la décroissance de la variation totale de chaque variable.

En premier lieu, les trois conditions de consistance $\tilde{\rho}_j \in [\tilde{m}^{\rho_{j+1/2}}, \tilde{M}^{\rho_{j+1/2}}]$, $\tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{u}_{j+1/2} \in [\tilde{m}^{\rho_u_{j+1/2}}, \tilde{M}^{\rho_u_{j+1/2}}]$, $\tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{e}_{j+1/2} \in [\tilde{m}^{\rho_e_{j+1/2}}, \tilde{M}^{\rho_e_{j+1/2}}]$ se traduisent par

$$\tilde{\theta}_{j+1/2} \in [0, 1].$$

Étudions les intervalles $[\tilde{b}^{\rho_j}, \tilde{B}^{\rho_j}]$, $[\tilde{b}^{\rho_u_j}, \tilde{B}^{\rho_u_j}]$ et $[\tilde{b}^{\rho_e_j}, \tilde{B}^{\rho_e_j}]$. Rappelons que l'on a fait l'hypothèse que $\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1} \neq 0$, $\tilde{\rho}_j \tilde{u}_j - \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{u}_{j+1} \neq 0$ et $\tilde{\rho}_j \tilde{e}_j - \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{e}_{j+1} \neq 0$. Les formules (3.11) permettent de trouver de nouvelles bornes pour $\tilde{\theta}_{j+1/2}$. Par exemple, la première ligne de (3.11) donne

$$\begin{array}{l} \text{si } \tilde{\rho}_j > \tilde{\rho}_{j+1}, \tilde{\theta}_{j+1/2} \in \left[\frac{\tilde{b}^{\rho_j} - \tilde{\rho}_{j+1}}{\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1}}, \frac{\tilde{B}^{\rho_j} - \tilde{\rho}_{j+1}}{\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1}} \right], \\ \text{si } \tilde{\rho}_j < \tilde{\rho}_{j+1}, \tilde{\theta}_{j+1/2} \in \left[\frac{\tilde{B}^{\rho_j} - \tilde{\rho}_{j+1}}{\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1}}, \frac{\tilde{b}^{\rho_j} - \tilde{\rho}_{j+1}}{\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1}} \right]. \end{array}$$

La même opération est possible pour chaque ligne de (3.11), et elle conduit au

lemme 8. On définit six nouveaux réels (mais ce sont les derniers de ce chapitre).

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{a}^{\rho}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\widetilde{b}^{\rho}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}}{\widetilde{\rho}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}} & \text{si } \widetilde{\rho}_j > \widetilde{\rho}_{j+1}, \\ \frac{\widetilde{B}^{\rho}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}}{\widetilde{\rho}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}} & \text{si } \widetilde{\rho}_j < \widetilde{\rho}_{j+1}, \end{cases} \\ \widetilde{A}^{\rho}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\widetilde{B}^{\rho}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}}{\widetilde{\rho}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}} & \text{si } \widetilde{\rho}_j > \widetilde{\rho}_{j+1}, \\ \frac{\widetilde{b}^{\rho}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}}{\widetilde{\rho}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}} & \text{si } \widetilde{\rho}_j < \widetilde{\rho}_{j+1}, \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{a}^{\rho u}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\widetilde{b}^{\rho u}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}}{\widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}} & \text{si } \widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j > \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}, \\ \frac{\widetilde{B}^{\rho u}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}}{\widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}} & \text{si } \widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j < \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}, \end{cases} \\ \widetilde{A}^{\rho u}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\widetilde{B}^{\rho u}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}}{\widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}} & \text{si } \widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j > \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}, \\ \frac{\widetilde{b}^{\rho u}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}}{\widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}} & \text{si } \widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j < \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}, \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{a}^{\rho e}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\widetilde{b}^{\rho e}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}}{\widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}} & \text{si } \widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j > \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}, \\ \frac{\widetilde{B}^{\rho e}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}}{\widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}} & \text{si } \widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j < \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}, \end{cases} \\ \widetilde{A}^{\rho e}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\widetilde{B}^{\rho e}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}}{\widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}} & \text{si } \widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j > \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}, \\ \frac{\widetilde{b}^{\rho e}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}}{\widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}} & \text{si } \widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j < \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}, \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Lemme 8

Supposons que $u_{j+1/2} > 0 \forall j \in \mathbb{Z}$.

Supposons que $\widetilde{\rho}_j - \widetilde{\rho}_{j+1} \neq 0$, $\widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1} \neq 0$ et $\widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1} \neq 0 \forall j \in \mathbb{Z}$.

Supposons vérifiée la condition CFL $\max_{j \in \mathbb{Z}} (u_{j+1/2})\lambda \leq 1$

Alors, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$1 \in [\widetilde{a}^{\rho}_{j+1/2}, \widetilde{A}^{\rho}_{j+1/2}] \cap [\widetilde{a}^{\rho u}_{j+1/2}, \widetilde{A}^{\rho u}_{j+1/2}] \cap [\widetilde{a}^{\rho e}_{j+1/2}, \widetilde{A}^{\rho e}_{j+1/2}] \cap [0, 1] \text{ qui n'est pas vide.}$$

De plus, si $\widetilde{\theta}_{j+1/2} \in [\widetilde{a}^{\rho}_{j+1/2}, \widetilde{A}^{\rho}_{j+1/2}] \cap [\widetilde{a}^{\rho u}_{j+1/2}, \widetilde{A}^{\rho u}_{j+1/2}] \cap [\widetilde{a}^{\rho e}_{j+1/2}, \widetilde{A}^{\rho e}_{j+1/2}] \cap [0, 1]$
 $\forall j \in \mathbb{Z}$, la phase de projection (3.5) où les flux sont donnés en fonction de $\widetilde{\theta}_{j+1/2}$ par (3.8) est stable L^∞ et à variation totale décroissante pour les variables ρ , ρu et ρe . ■

Pour $\widetilde{\theta}_{j+1/2} = 1$, on retrouve le schéma décentré amont.

Nous avons trouvé un intervalle de stabilité pour le coefficient $\widetilde{\theta}_{j+1/2}$. Le schéma que nous choisissons est le schéma décentré le plus possible vers l'aval sous ces

contraintes. Ceci s'effectue en choisissant le $\tilde{\theta}_{j+1/2}$ le plus proche de 0 et dans l'intervalle $[\tilde{a}^{\rho}_{j+1/2}, \tilde{A}^{\rho}_{j+1/2}] \cap [\tilde{a}^{\rho u}_{j+1/2}, \tilde{A}^{\rho u}_{j+1/2}] \cap [\tilde{a}^{\rho e}_{j+1/2}, \tilde{A}^{\rho e}_{j+1/2}] \cap [0, 1]$.

Remarque 3.2.2

On fait l'hypothèse $\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1} \neq 0$, $\tilde{\rho}_j \tilde{u}_j - \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{u}_{j+1} \neq 0$ et $\tilde{\rho}_j \tilde{e}_j - \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{e}_{j+1} \neq 0$ pour pouvoir diviser par ces quantités. En fait, si l'une de ces quantités est nulle, cela signifie que la valeur amont et la valeur aval sont égales, et dans ce cas, le schéma est stable pour toute valeur de $\tilde{\theta}_{j+1/2}$. Cette hypothèse est donc une hypothèse technique non restrictive. Cependant, dans un programme informatique, il faut tenir compte de cette singularité (cf. annexe C par exemple). ■

Nous montrons maintenant une propriété importante du schéma ainsi construit. Il s'agit d'une propriété de transport exact des discontinuités de contact. Dans la proposition 4, nous montrons que ni la pression ni la vitesse n'oscillent à la discontinuité de contact. Dans le théorème 15, nous montrons un résultat de transport exact de la densité pour une classe de densités initiales lorsque la vitesse et la pression sont constantes. Cette classe est la classe de fonctions numériques étudiée dans le chapitre 1.1.4 pour l'advection linéaire en dimension un.

Proposition 4

Considérons le schéma décentré aval sous contraintes amont défini ci-dessus, pour un gaz parfait de coefficient adiabatique γ . Supposons que

$$\begin{cases} \rho_j > 0 & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ u_j = u > 0 & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ p_j = p & \forall j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Supposons vérifiée la condition CFL $u\lambda \leq 1$.

Alors, après la phase lagrangienne,

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_j = \rho_j & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{u}_j = u & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{e}_j = e_j & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{p}_j = p & \forall j \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.17)$$

et après la phase de projection,

$$\begin{cases} \hat{u}_j = u & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ \hat{p}_j = p & \forall j \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.18)$$

■

Démonstration

La phase lagrangienne (équation (3.17)) ne pose pas de problème : les formules de quantités de bord (3.4) donnent $p_{j+1/2} = p$ et $u_{j+1/2} = u \forall j \in \mathbb{Z}$. Puis l'écriture de

la phase lagrangienne (3.3) donne

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_j = \tau_j & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{u}_j = u & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{e}_j = e_j & \forall j \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

donc $\tilde{p}_j = p(\tilde{\tau}_j, \tilde{e}_j, \tilde{u}_j) = p(\tau_j, e_j, u) = p_j$, et donc (3.17) est prouvé.

Pour montrer (3.18), on utilise l'hypothèse de gaz parfait. De plus, on utilise le fait que le coefficient de combinaison linéaire $\tilde{\theta}_{j+1/2}$ est le même pour ρ , ρu et ρe .

Commençons par montrer que $\hat{u}_j = u \forall j \in \mathbb{Z}$. La deuxième équation de (3.5) donne

$$\hat{\rho}_j \hat{u}_j = \rho_j u - u\lambda(\tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{u}_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{u}_{j-1/2}),$$

que la première équation de (3.5) permet de transformer en

$$\hat{u}_j(\rho_j - u\lambda(\tilde{\rho}_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2})) = u(\rho_j - \lambda(\tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{u}_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{u}_{j-1/2})).$$

Supposons maintenant que $u > 0$. Alors, d'après les expressions (3.8),

$$\begin{aligned} & \hat{u}_j(\rho_j - u\lambda(\tilde{\rho}_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2})) \\ &= u(\rho_j - \lambda(\tilde{\theta}_{j+1/2} \tilde{\rho}_j \tilde{u}_j + (1 - \tilde{\theta}_{j+1/2}) \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{u}_{j+1} - \tilde{\theta}_{j-1/2} \tilde{\rho}_{j-1} \tilde{u}_{j-1} - (1 - \tilde{\theta}_{j-1/2}) \tilde{\rho}_j \tilde{u}_j)), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & \hat{u}_j(\rho_j - u\lambda(\tilde{\rho}_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2})) \\ &= u(\rho_j - \lambda(\tilde{\theta}_{j+1/2} \rho_j u + (1 - \tilde{\theta}_{j+1/2}) \rho_{j+1} u - \tilde{\theta}_{j-1/2} \rho_{j-1} u - (1 - \tilde{\theta}_{j-1/2}) \rho_j u)). \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$\hat{u}_j(\rho_j - u\lambda(\tilde{\rho}_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2})) = u(\rho_j - u\lambda(\tilde{\rho}_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2})),$$

et donc

$$\hat{u}_j \tilde{\rho}_j = u \tilde{\rho}_j.$$

De plus, sous la condition CFL $u\lambda \leq 1$, ρ est stable L^∞ , donc $\tilde{\rho}_j \geq \min_{j \in \mathbb{Z}}(\rho_j) > 0$, donc on a forcément $\hat{u}_j = u$.

Montrons maintenant que $\hat{p}_j = p \forall j \in \mathbb{Z}$. La première et la troisième lignes de (3.5) donnent $\hat{\rho}_j$ et $\hat{\rho}_j \hat{e}_j$. Cela permet de calculer $\hat{p}_j = (\gamma - 1) \hat{\rho}_j (\hat{e}_j - \hat{u}_j^2/2) = (\gamma - 1) \hat{\rho}_j (\hat{e}_j - u^2/2)$.

$$\begin{aligned} \hat{p}_j &= (\gamma - 1)(\rho_j e_j - u\lambda(\tilde{\rho}_{j+1/2} \tilde{e}_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2} \tilde{e}_{j-1/2}) \\ &\quad - u^2/2(\rho_j - u\lambda(\tilde{\rho}_{j+1/2} - \tilde{\rho}_{j-1/2}))) \\ &= (\gamma - 1)(\rho_j (e_j - u^2/2) \\ &\quad - u\lambda(\tilde{\rho}_{j+1/2} (\tilde{e}_{j+1/2} - u^2/2) - \tilde{\rho}_{j-1/2} (\tilde{e}_{j-1/2} - u^2/2))) \\ &= p - (\gamma - 1)u\lambda(\tilde{\rho}_{j+1/2} (\tilde{e}_{j+1/2} - u^2/2) - \tilde{\rho}_{j-1/2} (\tilde{e}_{j-1/2} - u^2/2)) \end{aligned}$$

(on a utilisé de manière intensive l'hypothèse de gaz parfait). On utilise à nouveau l'expression de combinaison linéaire des flux. Supposons encore que $u > 0$. Alors, d'après les expressions (3.8),

$$\begin{aligned} \widehat{p}_j &= p - (\gamma - 1)u\lambda(\widetilde{\theta}_{j+1/2}(\widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j - u^2/2) + (1 - \widetilde{\theta}_{j+1/2})(\widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1} - u^2/2) \\ &\quad - \widetilde{\theta}_{j-1/2}(\widetilde{\rho}_{j-1}\widetilde{e}_{j-1} - u^2/2) - (1 - \widetilde{\theta}_{j-1/2})(\widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j - u^2/2)), \end{aligned}$$

soit

$$\widehat{p}_j = p - (\gamma - 1)u\lambda(\widetilde{\theta}_{j+1/2}p + (1 - \widetilde{\theta}_{j+1/2})p - \widetilde{\theta}_{j-1/2}p - (1 - \widetilde{\theta}_{j-1/2})p) = p.$$

Si la vitesse et la pression sont constantes initialement, elles le restent. ■

Théorème 15

Considérons le schéma décentré aval sous contraintes amont défini ci-dessus, pour un gaz parfait de coefficient adiabatique γ . Supposons que

$$\begin{cases} \rho_j > 0 & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ u_j = u > 0 & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ p_j = p & \forall j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Supposons que la fonction discrète $(\rho_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ vérifie

$\exists \kappa \in [0, 1[$ tel que $\forall j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} \rho_{3j+1} = \rho_{3j}, \\ \rho_{3j+2} = \kappa\rho_{3j+1} + (1 - \kappa)\rho_{3j+3} \text{ (hypothèse de combinaison linéaire)}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Supposons vérifiée la condition CFL $u\lambda \leq 1$.

Alors,

a) après la phase lagrangienne,

$$\begin{cases} \widetilde{\rho}_j = \rho_j & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ \widetilde{u}_j = u & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ \widetilde{e}_j = e_j & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ \widetilde{p}_j = p & \forall j \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.20)$$

b) et après la phase de projection,

$$\begin{cases} \widehat{u}_j = u & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ \widehat{p}_j = p & \forall j \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.21)$$

et la densité est donnée par

– si $\kappa + u\lambda \leq 1$, pour tout j ,

$$\begin{cases} \widehat{\rho}_{3j+1} = \widehat{\rho}_{3j} = \rho_{3j}, \\ \widehat{\rho}_{3j+2} = \widehat{\kappa}\widehat{\rho}_{3j+1} + (1 - \widehat{\kappa})\widehat{\rho}_{3j+3} \end{cases}$$

avec $0 \leq \widehat{\kappa} = \kappa + u\lambda \leq 1$;

– si $\kappa + u\lambda \geq 1$, pour tout j ,

$$\begin{cases} \widehat{\rho}_{3j+2} = \widehat{\rho}_{3j+1} = \rho_{3j+1}, \\ \widehat{\rho}_{3j+3} = \widehat{\kappa}\widehat{\rho}_{3j+2} + (1 - \widehat{\kappa})\widehat{\rho}_{3j+4} \end{cases}$$

avec $0 \leq \widehat{\kappa} = \kappa + u\lambda - 1 \leq 1$.

■

Démonstration

Les équations (3.20) et (3.21) découlent directement de la proposition 4. Le reste repose sur le fait que, puisque la vitesse et la pression sont constantes, la variable ρe est une fonction affine de ρ :

$$p = (\gamma - 1)\rho_j(e_j - u^2/2),$$

d'où

$$\rho_j e_j = \frac{u^2}{2}\rho_j + \frac{p}{\gamma - 1}.$$

Un calcul simple montre qu'alors les bornes de stabilité associées à ρe sont des fonctions affines de celles associées à ρ ,

$$\begin{cases} \widetilde{m}^{\rho e}_{j-1/2} = \frac{u^2}{2}\widetilde{m}^{\rho}_{j-1/2} + \frac{p}{\gamma-1}, \\ \widetilde{M}^{\rho e}_{j-1/2} = \frac{u^2}{2}\widetilde{M}^{\rho}_{j-1/2} + \frac{p}{\gamma-1}, \\ \widetilde{b}^{\rho e}_j = \frac{u^2}{2}\widetilde{b}^{\rho}_j + \frac{p}{\gamma-1}, \\ \widetilde{B}^{\rho e}_j = \frac{u^2}{2}\widetilde{B}^{\rho}_j + \frac{p}{\gamma-1}. \end{cases}$$

Puisque la vitesse est constante, on a

$$\begin{cases} \widetilde{m}^{\rho u}_{j-1/2} = u\widetilde{m}^{\rho}_{j-1/2}, \\ \widetilde{M}^{\rho u}_{j-1/2} = u\widetilde{M}^{\rho}_{j-1/2}, \\ \widetilde{b}^{\rho u}_j = u\widetilde{b}^{\rho}_j, \\ \widetilde{B}^{\rho u}_j = u\widetilde{B}^{\rho}_j. \end{cases}$$

Donc, pour les $j + 1/2$ tels que $\widetilde{\rho}_j \neq \widetilde{\rho}_{j+1}$, on a $\widetilde{\rho}_j \widetilde{u}_j \neq \widetilde{\rho}_{j+1} \widetilde{u}_{j+1}$ ainsi que $\widetilde{\rho}_j \widetilde{e}_j \neq \widetilde{\rho}_{j+1} \widetilde{e}_{j+1}$. Les formules (3.14), (3.15), (3.16) sont applicables et donnent

$$\begin{cases} \widetilde{a}^{\rho}_{j+1/2} = \widetilde{a}^{\rho u}_{j+1/2} = \widetilde{a}^{\rho e}_{j+1/2}, \\ \widetilde{A}^{\rho}_{j+1/2} = \widetilde{A}^{\rho u}_{j+1/2} = \widetilde{A}^{\rho e}_{j+1/2}, \end{cases}$$

Dans le cas où $\widetilde{\rho}_j = \widetilde{\rho}_{j+1}$, on a $\widetilde{\rho}_j \widetilde{u}_j = \widetilde{\rho}_{j+1} \widetilde{u}_{j+1}$ ainsi que $\widetilde{\rho}_j \widetilde{e}_j = \widetilde{\rho}_{j+1} \widetilde{e}_{j+1}$, donc la consistance implique que décentrage amont et décentrage aval sont équivalents. Ainsi, dans tous les cas, la seule stabilité de la variable ρ suffit pour la stabilité de ρ , ρu et ρe . Donc, les flux décentrés aval sous contraintes amont que nous choisissons dans cette phase de projection sont exactement les flux décentrés aval sous contraintes amont choisis pour l'advection linéaire à vitesse u de la quantité ρ . Donc, le théorème 3 peut être appliqué, ce qui démontre le présent théorème. ■

Bien entendu, ce résultat sur un pas de temps peut se prolonger pour un nombre quelconque de pas de temps, comme on l'a fait dans le cas de l'advection linéaire (théorème 4) ou donner une estimation uniforme en temps de l'erreur (pour la classe de fonctions considérée) dans le cas où la vitesse et la pression sont constantes.

D'après le théorème 15, la discontinuité de contact, caractérisée par une discontinuité de la densité et une vitesse et une pression constantes, est transportée de manière exacte (diffusée sur une maille au plus).

Remarque 3.2.3

Dans tout ce chapitre, comme dans les chapitres sur l'advection linéaire, nous avons fait l'hypothèse $u_{j+1/2} > 0 \forall j \in \mathbb{Z}$. Lorsque $u_{j+1/2} < 0 \forall j \in \mathbb{Z}$, on trouve bien entendu des conditions similaires de stabilité (en intervertissant les valeurs amont et aval). De plus, la notion de stabilité est locale et nous avons donc le même résultat de stabilité en décentrant les flux en $j + 1/2$ vers l'aval sous contraintes amont dans les deux cas :

- $u_{j+1/2} > 0$ et $u_{j-1/2} > 0$;
- $u_{j+1/2} < 0$ et $u_{j+3/2} < 0$.

Dans les autres cas (qui correspondent à un changement local du sens de transport), nous choisirons le décentrage amont, qui remplit dans tous les cas les conditions de stabilité exigées (se reporter à l'algorithme explicite en annexe C). De manière semblable, un problème pourrait se poser dans le cas où $\exists j \in \mathbb{Z}$ tel que $u_{j+1/2} = 0$, car on ne peut pas alors diviser par $u_{j+1/2}$ (formules (3.13)). Mais dans ce cas, on peut prendre n'importe quelle valeur de flux (pour ρ , ρu et ρe), puisque ce flux est multiplié par $u_{j+1/2} = 0$. Cette hypothèse est donc une hypothèse technique non restrictive. Nous tiendrons néanmoins compte de cette singularité lors de la programmation informatique de cet algorithme (voir annexe C). ■

3.3 Résultats numériques

Les modalités de la phase de projection en décentrage aval sous contraintes amont sont rappelées et condensées dans l'annexe C.

Nous ne présentons qu'un résultat numérique, résultat obtenu pour le tube à choc de Sod (voir [87]). Ce n'est pas un cas « difficile » (les schémas numériques se comportent pour la plupart correctement avec ces conditions initiales). Néanmoins, comme la solution développe les trois types d'onde des équations d'Euler – une détente, une discontinuité de contact et un choc, il permet de mettre en lumière les grandes caractéristiques du schéma proposé.

Les conditions initiales sont les suivantes.

$$\left. \begin{array}{l} \rho^0(x) = 1 \\ u^0(x) = 0 \\ p^0(x) = 1 \end{array} \right\} \text{ si } x \leq 1/2 ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho^0(x) = 0,125 \\ u^0(x) = 0 \\ p^0(x) = 0,1 \end{array} \right\} \text{ si } x > 1/2.$$

Le paramètre de gaz parfait est $\gamma = 1,4$.

On présente les résultats donnés au temps $t = 0,14$ par le schéma décentré amont dans la phase de projection et le schéma décentré aval sous contraintes amont dans la phase de projection (les phases lagrangiennes sont identiques). Nous faisons trois calculs : un calcul sur un maillage à cinquante mailles, un calcul sur un maillage à cent mailles et un calcul sur un maillage à cinq cents mailles.

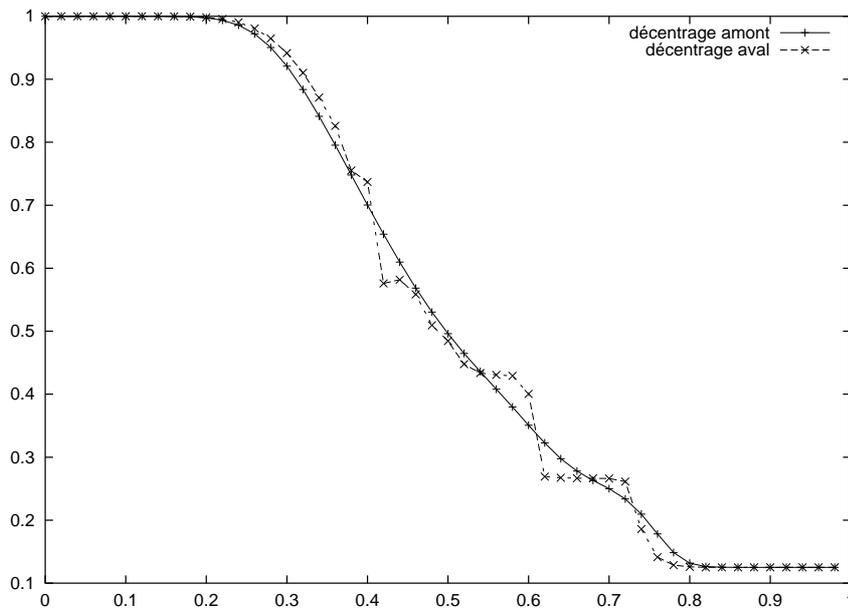
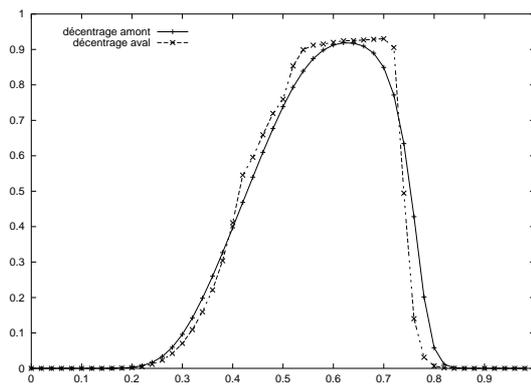
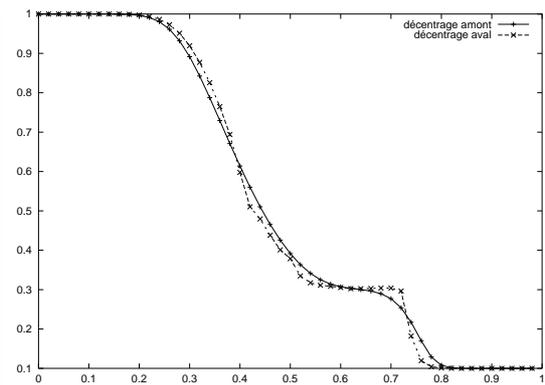
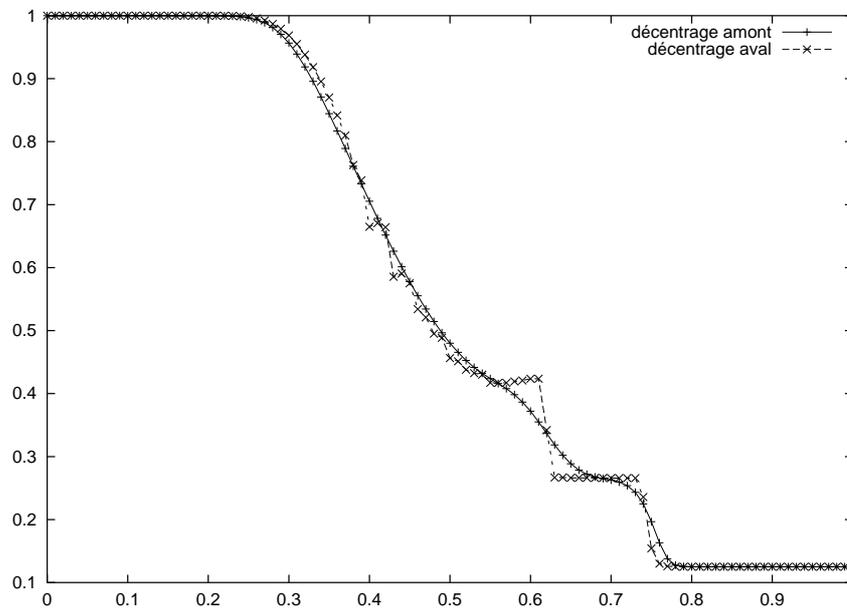
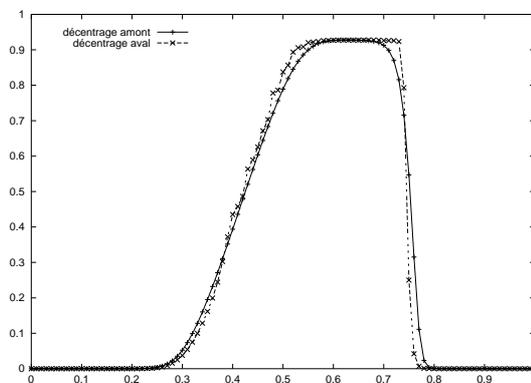
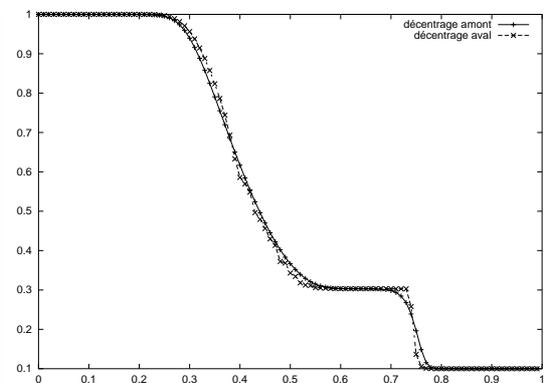


FIG. 3.1 – Densité avec cinquante mailles.

FIG. 3.2 – *Vitesse avec cinquante mailles.*FIG. 3.3 – *Pression avec cinquante mailles.*FIG. 3.4 – *Densité avec cent mailles.*FIG. 3.5 – *Vitesse avec cent mailles.*FIG. 3.6 – *Pression avec cent mailles.*

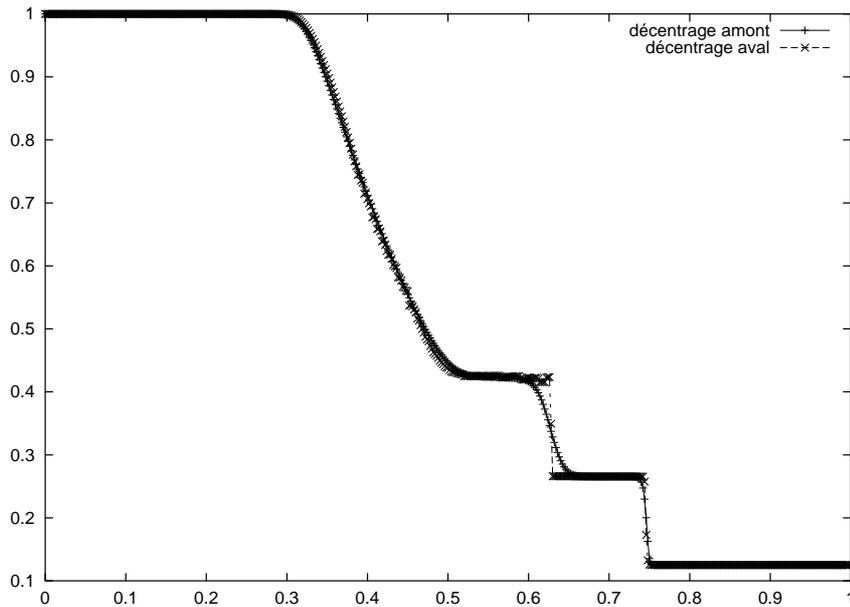


FIG. 3.7 – Densité avec cinq cents mailles.

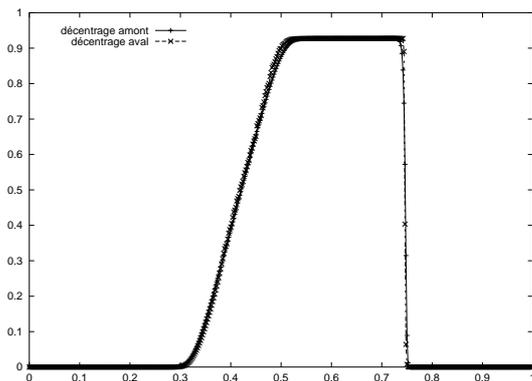


FIG. 3.8 – Vitesse avec cinq cents mailles.

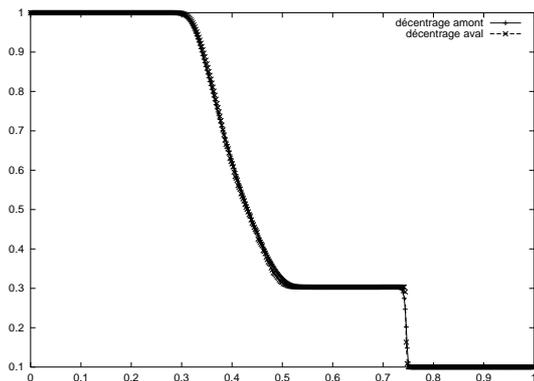


FIG. 3.9 – Pression avec cinq cents mailles.

Sur ces figures pour le tube de Sod, on constate les choses suivantes.

- Les solutions données par les deux schémas convergent conjointement (les plateaux sont bien calculés, même avec un maillage grossier) ;
- la détente est un peu « chahutée » avec le décentrage aval sous contraintes amont, elle n'est pas tout à fait entropique ; cependant, lorsque l'on fait tendre le pas du maillage Δx vers 0, la solution numérique semble tendre vers la solution entropique (« convergence numérique »).
- le choc est un peu moins diffusé en décentrage aval qu'en décentrage amont ;
- l'essentiel de la différence est observé sur la discontinuité de contact : très diffuse avec le décentrage amont, elle a une largeur d'une maille seulement

avec le décentrage aval sous contraintes amont.

Remarque 3.3.1

Le théorème 15 n'explique pas pourquoi la discontinuité de contact apparaît de manière correcte. En revanche, il prévoit qu'une fois que celle-ci est apparue, elle est transportée de manière exacte. ■

Remarque 3.3.2

Le schéma présenté dans ce chapitre est un schéma d'ordre un. La littérature foisonne de schémas d'ordre élevés, dont le but est de conserver les discontinuités, en particulier les discontinuités de contact. On fait référence par exemple

- aux schémas d'ordre deux et VTD (de type MUSCL, [93], [45], [44], [75], [74], [23], [24], [65], [71]);
- aux schémas ENO ([84], [3], [85], [86]);
- aux schémas spectraux (de type « Galerkin discontinu », [30], [29], [49]).

On peut comparer de nombreux schémas sur de nombreux cas-tests dans [10]. L'augmentation de l'ordre d'un schéma est en effet un bon moyen de réduire la dissipation numérique. Cependant, à notre connaissance, ces schémas ne permettent pas de situer la discontinuité de contact sur une seule maille; de plus, l'étalement de cette discontinuité augmente avec le temps (quand il ne s'agit pas d'une discontinuité stationnaire). ■

3.4 Extension en dimension deux

Les équations d'Euler en dimension deux sont

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) + \partial_y(\rho uv) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho ue + pu) + \partial_y(\rho ve + pv) = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

3.4.1 Résolution numérique

Nous résolvons numériquement ces équations grâce à une décomposition directionnelle (comme l'advection linéaire en dimension deux). Cela consiste à résoudre alternativement

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho ue + pu) = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

puis

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_y(\rho uv) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_y(\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_y(\rho ve + pv) = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Chacune de ces phases est résolue en décomposition Lagrange + projection comme dans le chapitre précédent. Pour résumer, on répète cycliquement les opérations suivantes :

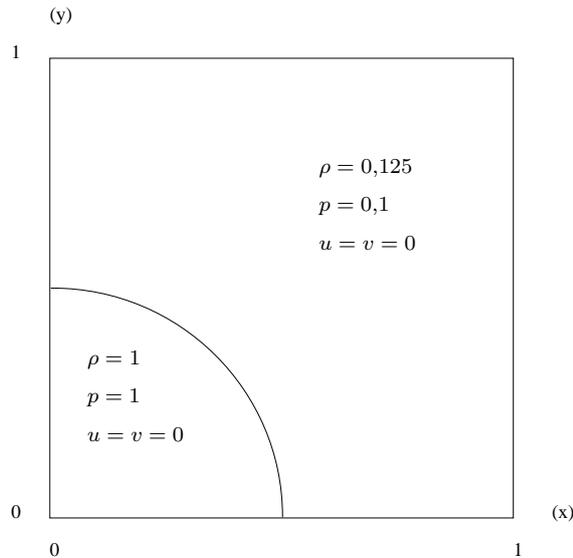
- phase lagrangienne horizontale ;
- phase de projection horizontale ;
- phase lagrangienne verticale ;
- phase de projection verticale.

Nous n'insistons pas sur la manière d'écrire le schéma (elle se déduit facilement du chapitre 3.1).

Les résultats de transport exact de la discontinuité de contact de dimension un se généralisent à la dimension deux pour la classe des fonctions du théorème 6 de la section 1.2.2. Nous ne détaillons pas ces résultats répétitifs.

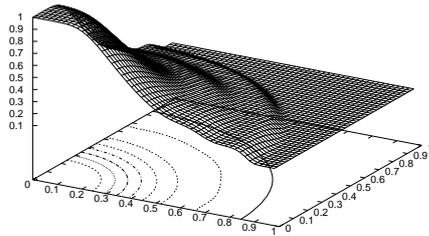
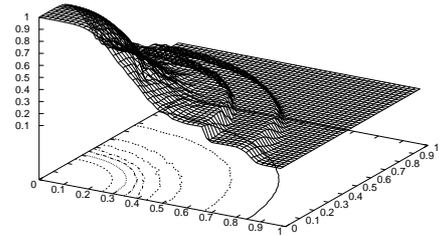
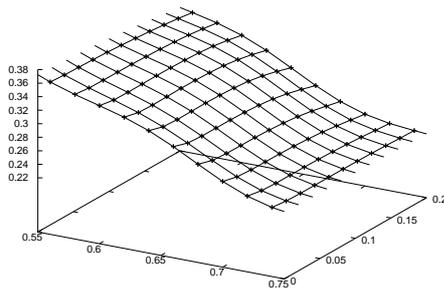
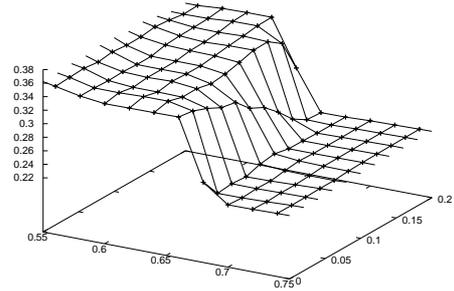
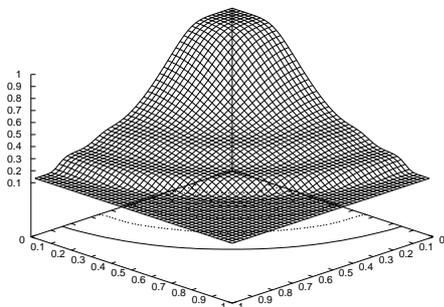
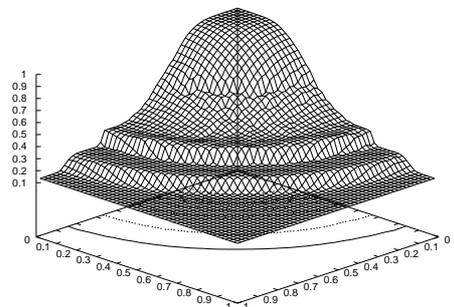
3.4.2 Résultats numériques

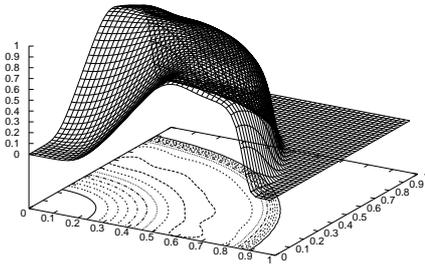
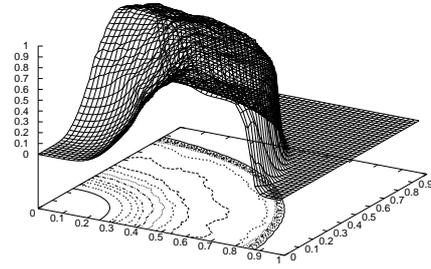
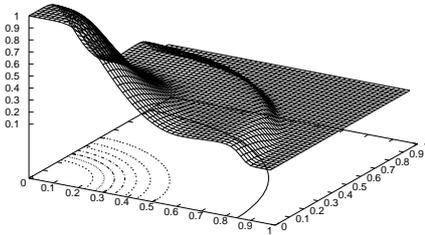
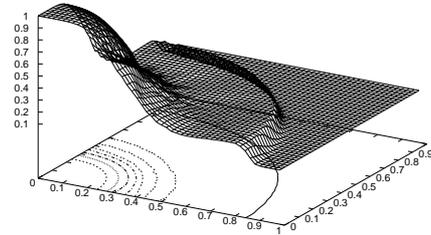
Le cas que nous présentons est un tube à choc de Sod divergent. Il s'agit d'une discontinuité des données initiales égale à la discontinuité des conditions initiales du tube à choc de Sod en dimension un, placée sur un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $0,5$.



L'exposant adiabatique est $\gamma = 1,4$.

Le maillage choisi a cinquante mailles en x et cinquante en y , c'est un maillage à 2500 mailles carrées. Nous présentons le résultat à $t = 0,2$ pour le décentrage amont dans les phases de projection (horizontale et verticale), puis celui pour le décentrage aval sous contraintes amont. On peut observer la densité sous deux angles différents, la vitesse et la pression.

FIG. 3.10 – *Densité, décentrage amont.*FIG. 3.11 – *Densité, décentrage aval.*FIG. 3.12 – *Densité, décentrage amont, zoom du précédent graphe.*FIG. 3.13 – *Densité, décentrage aval, zoom du précédent graphe.*FIG. 3.14 – *Densité sous un angle différent, décentrage amont.*FIG. 3.15 – *Densité sous un angle différent, décentrage aval.*

FIG. 3.16 – *Vitesse, décentrage amont.*FIG. 3.17 – *Vitesse, décentrage aval.*FIG. 3.18 – *Pression, décentrage amont.*FIG. 3.19 – *Pression, décentrage aval.*

Les caractéristiques du schéma sont les mêmes qu'en dimension un : calcul correct des plateaux, détente pas tout à fait régulière, choc assez raide et discontinuité de contact parfaite. En particulier, la figure 3.13 montre une discontinuité de contact située sur une maille dans chaque direction.

Petite conclusion (pour le chapitre 3)

Nous avons introduit un nouvel algorithme de résolution numérique des équations d'Euler. Cet algorithme est d'ordre un. Basé sur la technique de la décomposition Lagrange-projection, il s'apparente à de nombreux schémas qui voient le jour actuellement : voir [30], [29], [49], [13]... Il présente cependant une différence essentielle avec ces derniers : la phase de projection n'introduit pas de dissipation numérique. Elle utilise la technique du décentrage aval sous contraintes amont développée dans le chapitre 1 (et [32]). Le principal résultat est le transport exact des discontinuités de contact pour les gaz parfaits (théorème 15). Cela appelle quelques commentaires et comparaisons avec des algorithmes connus.

Nous faisons ici référence à quatre types de schémas dont les propriétés aux

discontinuités sont similaires. Ils s'agit de méthodes pseudo-lagrangiennes, de la méthode des fluides fantômes, d'une méthode de déplacement-ajustement automatique de maillage de Harten et Hyman, et du schéma de Glimm.

Des méthodes pseudo-lagrangiennes peuvent permettre dans certains cas un calcul exact de discontinuités de contact (voir [95]). Il faut noter que ces techniques font appel à une détection des discontinuités de contact puis à un déplacement eulérien de la discontinuité. Ces méthodes nous paraissent moins générales.

La méthode des fluides fantômes (ghost fluids method), qui repose sur la définition d'un fluide fictif dans chaque maille en plus du fluide réel, nécessite elle aussi la connaissance de la discontinuité (qu'il s'agisse d'une discontinuité de contact ou d'un choc) initiale. Cela constitue une restriction.

Une méthode intéressante de déplacement de maillage a été développée par Harten et Hyman dans [46]. Les résultats qu'ils obtiennent en dimension un sont comparables aux résultats présentés ici pour la discontinuité de contact et meilleurs pour le choc, qui est lui aussi exact. Cependant, ils doivent faire face à des problèmes entropiques : apparition de discontinuités où l'on attend une détente. Ce défaut peut être évacué grâce à un ajout de viscosité, ce qui altère la qualité de la discontinuité de contact.

Enfin, nous évoquons le schéma de Glimm ([38], [20], [21]). Ce schéma très particulier n'est pas un schéma de type différences finies, ni volumes finis. Il exploite de manière systématique la connaissance de la solution exacte du problème de Riemann. En dimension un, il donne des résultats meilleurs que l'algorithme présenté ici : même précision pour les discontinuités de contact, et quasi-exactitude pour les détentes et les chocs. Cependant, l'extension à la dimension deux (par décomposition directionnelle) se révèle problématique, avec l'apparition d'oscillations et d'erreurs résiduelles qui ne convergent vers 0 qu'« en moyenne ». Pour remédier à ceci, Colella propose dans [21] un algorithme hybride Glimm-Godunov. Celui-ci est dissipatif.

L'algorithme présenté ici de décentrage aval sous contraintes amont paraît être le seul à ce jour à permettre la résolution parfaite des discontinuités de contact en dimension deux en variables eulériennes et en maintenant la stabilité des chocs et le calcul correct des détentes. Cependant, ce schéma n'est pas positif, en particulier rien ne s'oppose à l'apparition d'une énergie interne négative. Il serait intéressant de corriger ce défaut.

Deuxième partie

Modèles de mélange

Chapitre 1

Introduction

Dans cette partie, nous construisons et étudions une classe de modèles qui décrivent le comportement des mélanges fluides eulériens compressibles et non réactifs. L'essentiel de cette partie (à part le chapitre 7) est tiré de [54].

Les modèles de mélange peuvent avoir deux applications différentes.

Soit ils sont utilisés pour décrire des mélanges **physiques** (figure 1.1), dans le cas d'une vraie zone de mélange étendue (mais alors notre modélisation est incomplète et doit n'être considérée que comme un point de départ pour l'élaboration de modèles de mélanges réellement pertinents).

Soit ils sont utilisés pour résoudre le problème du mélange **numérique** (figure 1.2). Ce problème apparaît lors de la discrétisation d'une interface qui sépare des fluides ayant des lois d'état différentes : la zone de mélange numérique est l'ensemble des mailles qui recouvrent l'interface.

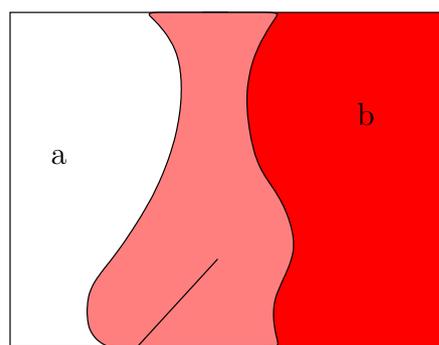


FIG. 1.1 – *Mélange physique*

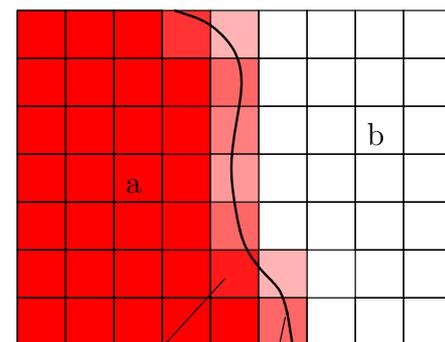


FIG. 1.2 – *Mélange numérique*

Notre attention sera essentiellement portée sur les mélanges numériques, pour les-

quels l'hypothèse de non-miscibilité (physique) apportera deux équations (la sixième et la huitième du système (2.4)). Il est important de souligner que même dans le cas du mélange seulement numérique, nous aurons à prendre en compte la présence en un même lieu (en une même maille) de plusieurs fluides. Ceci sera formalisé par la possibilité pour les fractions massiques de prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 1. Ce n'est pas en contradiction avec les équations qui découlent de l'hypothèse de non-miscibilité. Une manière de voir les choses est de considérer qu'il y a deux échelles d'observation : l'échelle physique à laquelle on observe la séparation des fluides, et l'échelle numérique, donnée par la finesse du maillage, à laquelle un mélange apparaît.

Nous envisageons dans cette partie les mélanges sous l'angle **mathématique** (aussi bien dans la phase d'élaboration que lors de leur étude). En particulier, nous montrerons au chapitre 4 un résultat de dégénérescence des modèles pour une zone de mélange non étendue (cas d'une interface) : cela justifie l'utilisation des modèles dans le cas du mélange numérique.

Tous ces modèles ont pour base le modèle classique des fluides compressibles non visqueux rappelé au chapitre 2, section 2.1. Nous abordons au chapitre 2 dans la section 2.2 le point central de l'élaboration de la classe de modèles : le postulat de l'existence d'une température et d'une entropie pour le fluide global, vérifiant une équation identique à celle du modèle classique. De cette équation sera dérivée toute une classe de modèles (chapitre 3). Nous aurons « au passage » construit une thermodynamique des systèmes à plusieurs températures. Viendront ensuite le chapitre 4 et la dégénérescence déjà évoquée. Le chapitre 5 étudie des propriétés mathématiques des modèles de la classe. Un grand nombre de modèles ayant de bonnes propriétés, nous ne sommes pas en mesure de faire un choix pour l'instant, il faudra attendre des résultats numériques pour déterminer les meilleures options.

Dans un dernier chapitre, nous abordons le cas des solutions non régulières en démontrant l'existence et l'unicité d'une solution de type « onde progressive » pour un des modèles proposés avec une régularisation de type « Navier-Stokes ».

Chapitre 2

Le modèle générique

2.1 Les équations d'Euler

Ces équations expriment pour un fluide parfait (*i.e.* newtonien non visqueux) en l'absence de forces extérieures au fluide la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Soit d la dimension de l'espace physique : $x \in \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$ ou 3) ; les équations sont au nombre de $d + 2$. Des conditions initiales sont données à l'instant $t = 0$ et nous ne considérerons que les temps t positifs. Si nous notons $\rho(t, x)$ la densité, $u(t, x)$ la vitesse, $e(t, x)$ la densité d'énergie, ces inconnues définies sur l'espace $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ ($t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d$) vérifient :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + pI) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho u e + pu) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où I est la matrice « identité » de l'espace \mathbb{R}^d . L'opérateur div est la divergence dans \mathbb{R}^d . La vitesse $u(t, x)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^d et les autres fonctions le sont dans \mathbb{R} . Le système est fermé par la loi d'état du fluide considéré, qui donne la pression en fonction des densité, vitesse et énergie : $p = p(\rho, u, e)$. Des hypothèses générales amènent à poser que la pression est telle qu'il existe deux fonctions T et S de $\varepsilon = e - u^2/2$ et $\tau = 1/\rho$ vérifiant :

$$TdS = d\varepsilon + pd\tau.$$

Cette équation résume les premier et deuxième principes de la thermodynamique pour un système thermodynamique subissant une transformation réversible ([9], [17]).

2.2 Un début de fermeture

Les équations voient leur nombre multiplié lorsque le fluide est composé de plusieurs constituants. En effet, pour chaque espèce, les densité, vitesse et énergie représentent de nouvelles inconnues. Dans la suite du travail, on considère un fluide à m constituants. Soient $(\rho_i)_{i=1}^m$ les densités partielles, et $(u_i, e_i, p_i)_{i=1}^m$ les vitesse, densité d'énergie totale et pression de chacun. Pour l'espèce i , la pression p_i est fonction de la densité d'énergie e_i , de la vitesse u_i et de la densité réelle (et non partielle) $\tilde{\rho}_i$ ($\tilde{\rho}_i \neq \rho_i$). Pour éclaircir les notations, nous n'utiliserons pas $\tilde{\rho}_i$ mais le volume spécifique $\tau_i = 1/\tilde{\rho}_i$. La densité du fluide global est $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$ et son volume spécifique $\tau = 1/\rho$. Les quantités conservées¹ sont :

- la masse de chaque constituant ;
- la quantité de mouvement totale ;
- la densité d'énergie totale.

Les équations aux dérivées partielles associées sont :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i u_i) = 0 & \text{pour } i = 1, \dots, m \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + pI) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho u e + p u) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où p , « pression globale », est encore inconnue ; elle n'est, à ce stade de la construction, que l'expression du tenseur des contraintes (voir [33]). Mais nous envisageons déjà d'en faire une fonction des pressions p_i des constituants. Nous devons ajouter à ce système les équations :

$$\begin{cases} \rho = \sum_{i=1}^m \rho_i \\ p_i = p_i(\tau_i, u_i, e_i) & \text{pour } i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ce système de $[2m + d + 2]$ équations a pour inconnues :

- $(\rho_i)_{i=1}^m, \rho$;
- $(u_i)_{i=1}^m, u$;
- $(e_i)_{i=1}^m, e$;
- $(p_i)_{i=1}^m, p$;
- $(\tau_i)_{i=1}^m$.

Elles sont au nombre de $[(d + 4)m + d + 3]$.

Il s'agit donc de trouver $[(d + 2)m + 1]$ relations de fermeture. Pour cela, il est

1. L'assimilation du fluide global à un fluide eulérien fait partie des trois « principes métaphysiques » mis en avant par C. Truesdell puis I. Müller et T. Ruggeri dans le cadre de la « thermodynamique rationnelle » ([92] et [70])

nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires, qui conduisent à l'élaboration d'un modèle, dont les bases sont jetées dans ce chapitre.

Nous expliquons ici les hypothèses qui permettent le choix du modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i u) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + pI) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho u e + p u) = 0 \\ \rho = \sum_{i=1}^m \rho_i \\ p_i = p_i(\tau_i, u_i, e_i) \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m \tau_i \rho_i = 1 \\ u_i = u \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \\ e = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \end{array} \right. \quad (2.4)$$

assorti de relations de fermeture explicitées plus loin.

Commençons par examiner la seule hypothèse qui ait été faite sur la structure du fluide : la non-miscibilité.

Proposition 5

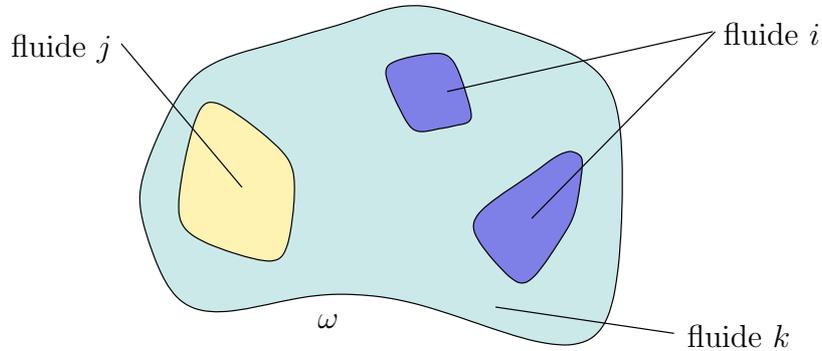
L'hypothèse de non-miscibilité se traduit mathématiquement par l'équation (2.5)² :

$$\boxed{\sum_{i=1}^m \tau_i \rho_i = 1.} \quad (2.5)$$

■

Démonstration

Soit ω un ouvert inclus dans l'ouvert Ω de \mathbb{R}^d contenant le fluide. Nous notons $V(\omega)$ le volume de cet ouvert et $V_i(\omega)$ le volume occupé par l'espèce i dans ω (ce terme, « volume », n'a un sens que parce que les constituants ne sont pas mélangés). Définissons encore $m_i(\omega)$ comme la masse de constituant i dans ω . Ces notations seront gardées dans toute la suite.



² Un point de vue différent mais avec des résultats équivalents est adopté dans [92], pour le cas spécifique des fluides non miscibles.

$$V(\omega) = \int_{\omega} 1 dV \quad \text{où } dV \text{ est l'élément de volume.}$$

Par définition de τ_i ,

$$V_i(\omega) = \int_{\omega} \tau_i dm_i \quad \text{où } dm_i \text{ est l'élément de masse de } i.$$

Or $m_i(\tilde{\omega}) = \int_{\tilde{\omega}} \rho_i dV \quad \forall \tilde{\omega} \subset \Omega$. Donc

$$V_i(\omega) = \int_{\omega} \tau_i \rho_i dV.$$

On peut écrire $\sum_{i=1}^m V_i(\omega) = V(\omega)$. Ainsi

$$\int_{\omega} \sum_{i=1}^m \tau_i \rho_i dV = \int_{\omega} 1 dV.$$

Ceci étant vrai pour tout ω , on en déduit le résultat. ■

Par la suite, nous appellerons « non miscibles » des constituants pour lesquels on écrit (2.5)³. On peut exprimer cette égalité d'une autre manière en utilisant les proportions massiques $(\alpha_i)_{i=1}^m$ des constituants définies par $\rho_i = \alpha_i \rho$. Donc,

$$\boxed{\sum_{i=1}^m \alpha_i \tau_i = \tau} \quad (2.6)$$

où $\tau = 1/\rho$.

Remarque 2.2.1

- L'équation $\sum_{i=1}^m \rho_i = \rho$ de (2.3) a son équivalent sur les α_i : $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$.
- Il en est de même pour les m premières équations de (2.2). En effet,

$$\partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i u) = 0 \quad \iff \quad \partial_t \alpha_i \rho + \operatorname{div}(\alpha_i \rho u) = 0,$$

soit, dans le cas où les solutions sont régulières,

$$\rho \partial_t \alpha_i + \rho u \cdot \operatorname{grad} \alpha_i + \alpha_i \partial_t \rho + \alpha_i \operatorname{div}(\rho u) = 0.$$

D'autre part,

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = \sum_{i=1}^m (\partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i u)) = 0$$

3. Dans l'ouvrage déjà cité [92], les paramètres supplémentaires ϕ_i , fractions volumiques, sont introduits, et un fluide multi-constituants non miscible est un fluide dont les équations constitutives ne font pas intervenir ces fractions volumiques. Cette définition est équivalente, car notre définition permet de calculer les fractions volumiques grâce aux autres variables ($\phi_i = \rho_i \tau_i$), et nous pouvons donc voir les équations constitutives comme dépendant des fractions volumiques.

et ainsi

$$\rho(\partial_t \alpha_i + u \cdot \text{grad} \alpha_i) = 0,$$

ce que l'on note encore

$$\boxed{\rho D_t \alpha_i = 0} \quad (2.7)$$

pour des solutions régulières. L'opérateur $D_t = \partial_t + u \cdot \text{grad}$ est l'opérateur de dérivation le long des lignes de courant (dérivation lagrangienne, ou encore dérivation particulaire). ■

Désormais, le système est composé de $[2m+d+3]$ équations, pour $[(d+4)m+d+3]$ inconnues.

On apporte une simplification de plus au problème en considérant que la vitesse est la même pour chaque espèce :

$$\boxed{u_i = u \quad \text{pour } i = 1, \dots, m.}$$

Ceci fait l'apport de md équations, et il n'en manque plus que $2m$.

Remarque 2.2.2

L'hypothèse d'égalité des vitesses n'est pas triviale. On peut d'ores et déjà noter que ce modèle n'est pas adapté à un liquide « traversé » par des bulles de gaz d'une taille inférieure à la taille des mailles (qui sont siège de mélange numérique). C'est une des caractéristiques qui distinguent notre modèle d'un modèle « diphasique » (comme les modèles à plusieurs vitesses présentés dans [88]).

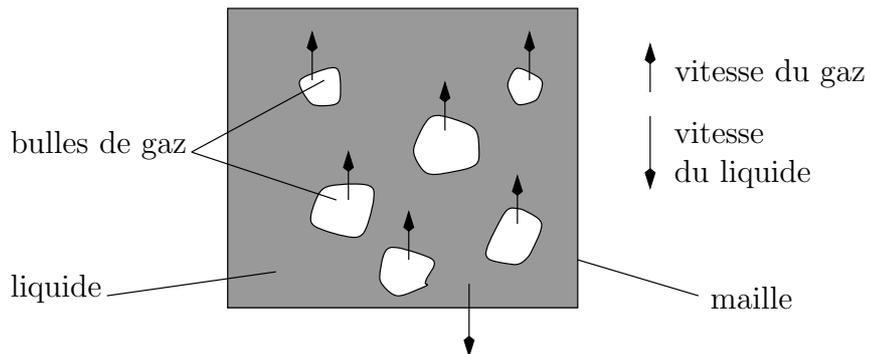


FIG. 2.1 – Situation diphasique

Les prochaines hypothèses sont d'ordre thermodynamique.

Définissons les densités d'énergie interne $(\varepsilon_i)_{i=1}^m$. Elles peuvent être calculées en

fonction des vitesses et des densités d'énergie : $\varepsilon_i = e_i - u_i^2/2 = e_i - u^2/2$.

On suppose que chaque constituant i admet une température T_i et une entropie $S_i = S_i(\tau_i, \varepsilon_i)$ (densité d'entropie) telles que

$$T_i dS_i = d\varepsilon_i + p_i d\tau_i.$$

Pour le fluide global, posons

$$S = \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i.$$

Nous faisons ici une hypothèse centrale : nous supposons qu'il existe T , *a priori* fonction de toutes les variables du problème, vérifiant :

$$TD_t S = D_t \varepsilon + p D_t \tau \quad (2.8)$$

pour des quantités S , ε et τ régulières, où $\varepsilon = e - u^2/2$ et p est la pression globale utilisée dans les équations (2.2). Cette équation est supposée vraie indépendamment du reste du système (par exemple pour les équations d'Euler diffusives⁴). Remarquons que pour des solutions régulières de l'équation d'Euler, elle ne fait qu'imposer la nullité de $D_t S$ (voir la proposition 8).

Remarque 2.2.3

Cette hypothèse est très forte. Elle assimile le fluide global à un fluide mono-constituant, avec toutefois la différence primordiale que nous n'écrivons pas $TdS = d\varepsilon + pd\tau$; cette écriture supposerait entre autres que S , T , et p seraient fonctions de ε et τ exclusivement, ce qui est faux dans le cas général (on s'en convainc dans la remarque 2.2.5). ■

Nous supposons ensuite que toutes les fonctions d'état propres p_i , T_i , S_i sont régulières en fonctions des variables d'état propres τ_i et ε_i .

La dernière hypothèse que nous faisons est que pour tout i , $(S_i)_{i=1}^m$ est strictement concave en fonction de (τ_i, ε_i) (fondements théoriques dans [9] et [17] par exemple).

L'énergie interne étant une variable extensive et les constituants n'étant pas mélangés,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_i = \varepsilon.$$

4. Nous écrivons $TD_t S = D_t \varepsilon + p D_t \tau$ pour toutes les variations possibles de $D_t \varepsilon$ et de $D_t \tau$. Ceci a une signification mathématique connue mais que nous décidons de ne pas exposer pour ne pas compliquer les notations ; elle suppose en effet l'introduction de formes différentielles non exactes sur des variétés différentiables ([16] et [57])... D'ailleurs, cette précision n'est utile que lorsqu'on étudie les solutions non régulières et les relations de saut.

Cette équation est obtenue par un raisonnement similaire à celui effectué pour les volumes spécifiques. En confrontant cette équation à l'hypothèse d'égalité des vitesses, on aboutit à une équation supplémentaire, sur les énergies totales :

$$\boxed{\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i = e.}$$

Nous avons ainsi écrit le système (2.4), système auquel il manque $[2m - 1]$ équations. Mais nous avons introduit une température globale (T), pour laquelle il n'y a pas de loi d'état, et nous l'ajoutons désormais dans les inconnues, ce qui porte le nombre d'équations manquantes à $[2m]$.

Remarque 2.2.4

Les équations $\tau = \sum_{i=1}^m \alpha_i \tau_i$ et $\varepsilon = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_i$ ont été montrées grâce à l'hypothèse de non-miscibilité. De même, sous cette hypothèse, l'entropie S définie par $S = \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i$ est l'entropie globale. Ces formules ne sont pas pertinentes dans le cas d'un vrai mélange. Pour l'entropie, on s'en assure par exemple grâce au théorème de Gibbs pour un mélange de gaz parfaits (lire [9]). Lorsque les constituants sont séparés, les interactions (surfiques) entre les différents constituants, qu'il semble logique de considérer comme proportionnelles à la surface de contact, sont négligeables en rapport aux interactions à l'intérieur d'un même constituant. Ceci devient faux lorsque le fluide est un mélange, et ces actions inter-constituants donnent lieu à des accroissements ou diminutions des variables globales τ , ε , S . ■

Cette remarque permet d'affiner l'hypothèse de non-miscibilité : nous négligeons entre autres les interactions surfiques.

Remarque 2.2.5

En thermodynamique classique à un constituant, on écrirait $S = S(\tau, \varepsilon)$, $T = T(\tau, \varepsilon)$, et $p = p(\tau, \varepsilon)$. On ne peut le faire ici car le modèle est un modèle à plusieurs températures et plusieurs pressions. En première analyse,

$$S = S(\tau_1, \dots, \tau_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m),$$

et il est impossible de parler de concavité de S en fonction de (τ, ε) . titre de contre-exemple, considérons le cas d'un fluide composé de deux gaz parfaits ($m = 2$). Supposons que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$. Les lois d'état sont :

$$\begin{cases} p_1 = (\gamma_1 - 1) \frac{\varepsilon_1}{\tau_1} \\ S_1 = \ln(\varepsilon_1 \tau_1^{\gamma_1 - 1}) \\ p_2 = (\gamma_2 - 1) \frac{\varepsilon_2}{\tau_2} \\ S_2 = \ln(\varepsilon_2 \tau_2^{\gamma_2 - 1}) \end{cases}$$

où γ_1 et γ_2 sont des réels strictement supérieurs à 1. L'entropie totale du système est

$$S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) = \frac{1}{2} \ln(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \tau_1^{\gamma_1-1} \tau_2^{\gamma_2-1})$$

et on ne peut pas écrire $S = S(\tau, \varepsilon)$ ⁵ où $\tau = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. ■

Les dernières hypothèses que nous avons faites (d'ordre thermodynamique) n'ont pas encore apporté d'équations. Il faut les interpréter ; elles conduisent à différentes relations de fermeture, que nous allons discuter. Tout d'abord, observons que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i T_i D_t S_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i (D_t \varepsilon_i + p_i D_t \tau_i) = D_t \varepsilon + \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i D_t \tau_i$$

car $D_t \alpha_i = 0 \quad \forall i$ par (2.7) dans une transformation admissible (*i.e.* vérifiant (2.4)) du fluide. Or $D_t \varepsilon = T D_t S - p D_t \tau$, par l'hypothèse centrale, et donc,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i T_i D_t S_i &= T \sum_{i=1}^m D_t (\alpha_i S_i) - p \sum_{i=1}^m D_t (\alpha_i \tau_i) + \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i D_t \tau_i \\ &= T \sum_{i=1}^m \alpha_i D_t S_i - p \sum_{i=1}^m \alpha_i D_t \tau_i + \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i D_t \tau_i. \end{aligned}$$

On écrit finalement une relation de compatibilité entre les températures, pressions, entropies et volumes spécifiques.

$$\boxed{\sum_{i=1}^m \alpha_i T_i D_t S_i - T \sum_{i=1}^m \alpha_i D_t S_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i D_t \tau_i - p \sum_{i=1}^m \alpha_i D_t \tau_i.} \quad (2.9)$$

Dans la prochaine section, nous analysons différentes relations de fermeture qui permettent de vérifier cette égalité.

Dans la suite, nous appelons « variables propres » du constituant i les variables définies pour ce constituant, portant l'indice i : pression propre, température propre...

5. Cependant, nous montrerons par la suite (proposition 7) que dans le cas d'un mélange isobare et isotherme, l'entropie totale S est fonction de τ et ε seulement.

Chapitre 3

Les relations de fermeture possibles

L'objectif est de trouver $2m$ relations de fermeture qui permettent de vérifier (2.9). Pour cela, nous procédons en proposant des conditions suffisantes. Nous faisons une première hypothèse simplificatrice : chacun des membres de l'équation (2.9) est nul. Cela a pour intérêt :

- de découpler les équations sur la pression et le volume spécifiques des équations sur la température et l'entropie (en ce sens, la réduction ne paraît pas trop arbitraire) ;
- de fournir par la suite le bon nombre ($2m$) de relations de fermeture.

Par « équations de compatibilité », on entend désormais :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i D_t \tau_i - p \sum_{i=1}^m \alpha_i D_t \tau_i = 0 \quad \text{(a)} \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i T_i D_t S_i - T \sum_{i=1}^m \alpha_i D_t S_i = 0. \quad \text{(b)} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

3.1 Relations entre les pressions et les volumes spécifiques

Nous trouvons dans cette section des équations supplémentaires, sur les pressions et les volumes spécifiques, au nombre de m (nous trouverons par la suite m équations semblables sur les températures et les entropies).

L'équation de compatibilité sur la pression est par exemple vérifiée si l'on force les égalités :

$$p_i = p_j \quad \forall (i, j).$$

Il s'agit alors d'un modèle isobare. Mais si nous ne voulons pas faire cette hypothèse, il existe d'autres solutions. Une idée naturelle, motivée par le calcul numérique (dans

lequel on cherche avant tout à connaître les accroissements), est de postuler des relations entre les dérivées lagrangiennes des différents volumes spécifiques propres. Nous supposons donc que nous connaissons des coefficients (λ_i) tels que

$$\frac{D_t \tau_i}{\lambda_i} = \frac{D_t \tau_j}{\lambda_j} \quad \forall i, j. \quad (3.2)$$

Par exemple, les λ_i peuvent valoir 1, mais nous proposerons d'autres choix. La relation de fermeture sur la pression permet alors d'introduire une formule pour la pression globale. En effet, l'équation de compatibilité donne

$$p \sum_{i=1}^m \alpha_i D_t \tau_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i D_t \tau_i,$$

ce qui revient avec (3.2) à

$$p \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i \frac{D_t \tau_i}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i \lambda_i \frac{D_t \tau_i}{\lambda_i}.$$

Ceci, par (3.2), devient

$$p \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i \lambda_i.$$

En posant

$$\delta_i = \frac{\alpha_i \lambda_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i}, \quad (3.3)$$

on peut donc en déduire l'expression de p :

$$p = \sum_{i=1}^m \delta_i p_i. \quad (3.4)$$

Remarque 3.1.1

- L'équation de compatibilité impose que si toutes les pressions p_i sont égales, leur valeur est aussi celle de p . Sur les δ_i , cela se traduit par :

$$\sum_{i=1}^m \delta_i = 1. \quad (3.5)$$

En conséquence, pour des coefficients δ_i ne dépendant pas des pressions p_i , nous aurons toujours (3.5).

- Les λ_i sont définis à un facteur multiplicatif près. C'est évident sur (3.2), par définition. Cependant, les coefficients δ_i , eux ne dépendent pas de ce facteur. On pourra dans la suite décider de normaliser les λ_i en imposant par exemple : $\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i = 1$.

■

Nous présentons quelques exemples de valeurs de (δ_i, λ_i) parmi les plus simples ou cohérents. Ces exemples ne sont qu'indicatifs, et l'on peut en imaginer de très variés tous aussi valables sur le plan mathématique.

Relation 1

Un cas particulier est celui où $\lambda_i = \tau_i$ pour tout i :

$$\boxed{\frac{D_t \tau_i}{\tau_i} = \frac{D_t \tau_j}{\tau_j} \quad \forall i, j.} \quad (3.6)$$

Dans ce cas, $\delta_i = \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau}$:

$$\boxed{p = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau} p_i.} \quad (3.7)$$

δ_i représente alors la fraction volumique du constituant i : $V_i(\omega) = \int_{\omega} \tau_i \rho_i dV = \int_{\omega} \tau_i \alpha_i \rho dV = \int_{\omega} \frac{\tau_i \alpha_i}{\tau} dV = \int_{\omega} \delta_i dV$.

Proposition 6

Pour $\delta_i = \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau}$,

$$\boxed{D_t \delta_i = 0 \quad \forall i.}$$

Cela s'interprète : les fractions volumiques n'évoluent pas le long des lignes de courant... ■

Démonstration

Si $\delta_i = \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau}$,

$$\begin{aligned} D_t \delta_i &= D_t \left(\frac{\alpha_i \tau_i}{\tau} \right) = \alpha_i D_t \left(\frac{\tau_i}{\tau} \right) \quad \text{car } D_t \alpha_i = 0 \\ &= \frac{\alpha_i}{\tau} D_t \tau_i - \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau^2} D_t \tau = \frac{\alpha_i}{\tau} D_t \tau_i - \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau^2} \sum_{i=1}^m \alpha_i D_t \tau_i \\ &= \frac{\alpha_i}{\tau} \left(D_t \tau_i - \frac{\tau_i}{\tau} \sum_{i=1}^m \alpha_i D_t \tau_i \right) = \frac{\alpha_i}{\tau} \left(\lambda_i \frac{D_t \tau_i}{\lambda_i} - \frac{\tau_i}{\tau} \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i \frac{D_t \tau_i}{\lambda_i} \right). \end{aligned}$$

On continue grâce à (3.2) :

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha_i}{\tau} \frac{D_t \tau_i}{\lambda_i} \left(\lambda_i - \frac{\tau_i}{\tau} \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i \right) \\ &= \frac{\alpha_i}{\tau} \frac{D_t \tau_i}{\lambda_i} \left(\lambda_i - \frac{\tau_i}{\tau} \frac{\alpha_i \lambda_i}{\delta_i} \right) = \frac{\alpha_i}{\tau} \frac{D_t \tau_i}{\lambda_i} \left(\lambda_i - \frac{\tau_i}{\tau} \alpha_i \lambda_i \frac{\tau}{\alpha_i \tau_i} \right) \\ &= \frac{\alpha_i}{\tau} \frac{D_t \tau_i}{\lambda_i} (\lambda_i - \lambda_i) = 0. \end{aligned}$$

■

Relation 2

Une autre idée est de poser

$$\boxed{p_i D_t \tau_i = p_j D_t \tau_j \quad \forall i, j,} \quad (3.8)$$

i.e. de considérer que $\lambda_i = 1/p_i \quad \forall i$. Physiquement, $p D_t \tau$ est un transfert d'énergie élémentaire sous forme de travail. L'équation (3.8) exprime donc l'« équirépartition » de travail sur les différents constituants. Effectuons un petit calcul :

$$(3.1.a) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i D_t \tau_i = p \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{p_i} p_i D_t \tau_i$$

et (3.8) $\Rightarrow 1 = p \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{p_i}$.

Enfin,

$$\boxed{\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{p_i}.} \quad (3.9)$$

On retrouve bien entendu ce résultat en utilisant directement l'expression (3.4) de la pression avec l'équation (3.3), $\delta_i = (\alpha_i/p_i) / \sum_{i=1}^m (\alpha_i/p_i)$. Il signifie que p est la moyenne harmonique des p_i pondérée par les α_i .

Relation 3

Une autre possibilité est d'imposer l'égalité des variations des volumes spécifiques :

$$\boxed{D_t \tau_i = D_t \tau_j \quad \forall i, j.} \quad (3.10)$$

Nous avons ici écrit l'équation (3.2) avec $\lambda_i = 1 \quad \forall i$. Par (3.1.a), nous obtenons alors

$$\boxed{p = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i,} \quad (3.11)$$

c'est-à-dire que p est la moyenne arithmétique des p_i pondérés par les α_i .

Relation 4

On peut aussi vouloir écrire

$$\boxed{\alpha_i D_t \tau_i = \alpha_j D_t \tau_j \quad \forall i, j,} \quad (3.12)$$

ce qui revient à calculer la pression comme une moyenne arithmétique des pressions p_i :

$$\boxed{p = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i.} \quad (3.13)$$

Relation 5

Enfin, rappelons la première fermeture que nous avons évoquée, le modèle isobare. Nous considérons que les pressions propres sont égales :

$$\boxed{p_i = p_j \quad \forall i, j.} \quad (3.14)$$

L'équation de compatibilité (3.1.a) impose alors

$$\boxed{p_i = p \quad \forall i.}$$

Remarque 3.1.2

Quel que soit le nombre de relations que nous avons postulées (équations (3.4), (3.14)), nous avons obtenu en utilisant l'équation de compatibilité m relations de fermeture indépendantes. ■

3.2 Relations entre les températures et les entropies

L'équation de compatibilité sur la température et l'entropie a la même structure que celle sur la pression et le volume spécifique (équations (3.1)). Les choix possibles de fermeture sont donc identiques aux précédents, et les calculs parfaitement semblables, même si leur signification physique est différente. Nous transposons telle quelle l'étude pour la pression à la température, avec comme résultat la présentation de cinq relations de fermeture.

Pour les quatre premières relations, les relations de fermeture que nous envisageons reviennent à considérer que T est une moyenne des T_i :

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^m \zeta_i T_i} \quad (3.15)$$

ou, d'une autre manière, qu'il existe $(\mu_i)_{i=1}^m$ tels que

$$\boxed{\frac{D_t S_i}{\mu_i} = \frac{D_t S_j}{\mu_j} \quad \forall i, j} \quad (3.16)$$

avec

$$\zeta_i = \frac{\alpha_i \mu_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu_i}.$$

Relation 6

On montre que si $\zeta_i = \frac{\alpha_i S_i}{S}$, $D_t \zeta_i = 0 \quad \forall i$. C'est alors la proportion volumique de S_i (par rapport à S). Les relations sont

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i S_i}{S} T_i}$$

et

$$\boxed{\frac{D_t S_i}{S_i} = \frac{D_t S_j}{S_j} \quad \forall i, j.}$$

Remarquons cependant que dans le cas où une des entropies est nulle, cette relation doit être réinterprétée.

Relation 7

En posant $\mu_i = 1/T_i \quad \forall i$, on écrit

$$\boxed{T_i D_t S_i = T_j D_t S_j \quad \forall i, j,} \quad (3.17)$$

qui signifie physiquement que la quantité de chaleur déposée sur le fluide global est uniformément répartie sur chaque constituant. La température T donnée par l'équation de compatibilité (3.1.b) est une moyenne harmonique :

$$\boxed{\frac{1}{T} = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{T_i}.}$$

Remarque 3.2.1

Nous remarquons (comme dans [28]) que ces relations de fermeture

$$T_i D_t S_i = T_j D_t S_j \quad \forall i, j$$

ne font pas intervenir les températures dans le système car elles s'écrivent d'une autre manière

$$D_t \tau_i + p_i D_t \varepsilon_i = D_t \tau_j + p_j D_t \varepsilon_j \quad \forall i, j.$$

C'est le cas pour un constituant unique (équations d'Euler (2.1)). Pour avoir un système similaire aux équations d'Euler à une espèce, on aura tendance à choisir la relation 7¹. ■

Relation 8

Fixer la valeur des coefficients μ_i à 1, c'est forcer l'égalité des variations d'entropie de chaque espèce, soit

$$\boxed{D_t S_i = D_t S_j \quad \forall i, j.}$$

Il en découle

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^m \alpha_i T_i.}$$

1. Pour une discussion détaillée de ce point de vue sur les équations d'état complètes ou incomplètes, on peut consulter [68].

Relation 9

On peut encore écrire

$$\boxed{\alpha_i D_t S_i = \alpha_j D_t S_j \quad \forall i, j} \quad (3.18)$$

et

$$\boxed{T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m T_i.} \quad (3.19)$$

Relation 10

On peut enfin écrire l'égalité de toutes les températures propres T_i , qui débouche sur les égalités :

$$\boxed{T_i = T \quad \forall i.}$$

Il s'agit alors d'un modèle isotherme, ou de ce que C. Truesdell nomme une « constrained mixture » ([92]).

Nous avons trouvé les $2m$ relations de fermeture qui nous manquaient.

Nous achevons ce chapitre en présentant un résultat particulier au modèle isobare et isotherme². Rappelons que l'entropie globale définie par $S = \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i$ s'écrit a priori comme une fonction de tous les α_i , ε_i , τ_i . pour simplifier les écritures, nous considérons que les α_i sont des constantes.

Proposition 7

Si $T_i = T$ et $p_i = p \forall i$, l'entropie totale S est une fonction de τ et ε seulement :

$$S = S(\tau, \varepsilon).$$

De plus, S est concave en fonction de (τ, ε) , et on peut écrire de manière rigoureuse

$$TdS = d\varepsilon + pd\tau.$$

■

Démonstration

Nous savons que pour chaque constituant, les variables (τ_i, ε_i) et $(1/T_i, p_i/T_i)$ sont en bijection. L'entropie S_i peut être comprise comme fonction de $1/T_i$ et p_i/T_i (pour une discussion complète sur les changements de variables licites en thermodynamique, nous renvoyons à [25]). Par suite, à fractions massiques constantes,

$$\begin{cases} S = \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i(1/T_i, p_i/T_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i(1/T, p/T) = S(1/T, p/T) \\ \varepsilon = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_i(1/T_i, p_i/T_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_i(1/T, p/T) = \varepsilon(1/T, p/T) \\ \tau = \sum_{i=1}^m \alpha_i \tau_i(1/T_i, p_i/T_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \tau_i(1/T, p/T) = \tau(1/T, p/T). \end{cases}$$

². Ce résultat est démontré pour un mélange de gaz parfaits dans la thèse de J.-P. Croisille (voir [25]). Il sera utilisé pour montrer l'hyperbolicité du modèle isobare isotherme (théorème 18).

On définit l'application F :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (1/T, p/T) & \longmapsto (\tau, \varepsilon). \end{cases}$$

On sait que F est de classe C^1 . D'autre part,

$$\nabla F = \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau \\ \varepsilon \end{pmatrix}}{\partial \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right)} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_i \\ \varepsilon_i \end{pmatrix}}{\partial \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right)}.$$

Les entropies S_i sont par hypothèse thermodynamique concaves, ce qui signifie que les matrices de leurs dérivées secondes (par rapport à (τ_i, ε_i)) sont définies négatives. Autrement dit, les matrices

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} 1/T \\ p/T \end{pmatrix}}{\partial (\tau_i, \varepsilon_i)}$$

sont définies négatives. Elles sont donc inversibles et leurs inverses sont définies négatives. L'expression de leurs inverses est

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_i \\ \varepsilon_i \end{pmatrix}}{\partial \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right)}.$$

La matrice ∇F est ainsi une somme de matrices définies négatives. Elle est par conséquent définie négative. Le théorème de l'inverse local (voir par exemple [90]) étendu au convexe $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ de \mathbb{R}^2 permet de conclure que l'application F est inversible sur tout le domaine $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$. On peut donc remplacer les variables intensives $(1/T, p/T)$ par les variables extensives (τ, ε) en écrivant :

$$\tilde{S}(\tau, \varepsilon) = S \circ F^{-1}(\tau, \varepsilon).$$

\tilde{S} est à nouveau notée S . Remarquons que le fait que F soit inversible exprime l'inversibilité du système :

$$\begin{cases} \tau = \sum_{i=1}^m \alpha_i \tau_i \\ \varepsilon = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_i \\ p_i = p_j \quad \forall i, j \\ T_i = T_j \quad \forall i, j, \end{cases} \quad (3.20)$$

c'est-à-dire que pour (τ, ε) donné, il existe une unique solution $((\tau_i)_{i=1}^m, (\varepsilon_i)_{i=1}^m)$ isobare isotherme.

Par définition, S est strictement concave si

$$S(\tau^0 + \delta\tau, \varepsilon^0 + \delta\varepsilon) + S(\tau^0 - \delta\tau, \varepsilon^0 - \delta\varepsilon) < 2S(\tau^0, \varepsilon^0)$$

pour tous accroissements $\delta\tau$, $\delta\varepsilon$ non nuls et en tout (τ^0, ε^0) .

Or pour chaque énergie interne globale, il existe des énergies internes propres dans le mélange isobare isotherme (c'est l'inversibilité du système (3.20)), et ainsi :

$$\begin{cases} \tau^0 + \delta\tau = \sum_{i=1}^m \alpha_i (\tau_i^0 + \delta\tau_i^+) \\ \tau^0 - \delta\tau = \sum_{i=1}^m \alpha_i (\tau_i^0 - \delta\tau_i^-) \\ \varepsilon^0 + \delta\varepsilon = \sum_{i=1}^m \alpha_i (\varepsilon_i^0 + \delta\varepsilon_i^+) \\ \varepsilon^0 - \delta\varepsilon = \sum_{i=1}^m \alpha_i (\varepsilon_i^0 - \delta\varepsilon_i^-). \end{cases}$$

On écrit donc pour les entropies :

$$\begin{aligned} S(\tau^0 + \delta\tau, \varepsilon^0 + \delta\varepsilon) + S(\tau^0 - \delta\tau, \varepsilon^0 - \delta\varepsilon) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i(\tau_i^0 + \delta\tau_i^+, \varepsilon_i^0 + \delta\varepsilon_i^+) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i(\tau_i^0 - \delta\tau_i^-, \varepsilon_i^0 - \delta\varepsilon_i^-). \end{aligned}$$

On fait des développements limités à l'ordre 2. Il existe $2m$ réels $(\bar{\tau}_i, \bar{\varepsilon}_i)_{i=1}^m$ tels que :

$$\begin{aligned} &S(\tau^0 + \delta\tau, \varepsilon^0 + \delta\varepsilon) + S(\tau^0 - \delta\tau, \varepsilon^0 - \delta\varepsilon) \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(S_i(\tau_i^0, \varepsilon_i^0) + \nabla S_i(\tau_i^0, \varepsilon_i^0) \begin{pmatrix} \delta\tau_i^+ \\ \delta\varepsilon_i^+ \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta\tau_i^+ \\ \delta\varepsilon_i^+ \end{pmatrix}^t \nabla^2 S_i(\bar{\tau}_i, \bar{\varepsilon}_i) \begin{pmatrix} \delta\tau_i^+ \\ \delta\varepsilon_i^+ \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(S_i(\tau_i^0, \varepsilon_i^0) - \nabla S_i(\tau_i^0, \varepsilon_i^0) \begin{pmatrix} \delta\tau_i^- \\ \delta\varepsilon_i^- \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta\tau_i^- \\ \delta\varepsilon_i^- \end{pmatrix}^t \nabla^2 S_i(\bar{\tau}_i, \bar{\varepsilon}_i) \begin{pmatrix} \delta\tau_i^- \\ \delta\varepsilon_i^- \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Les entropies S_i sont concaves en fonction de (τ_i, ε_i) , ce qui signifie que les matrices $\nabla^2 S_i$ sont définies négatives. De plus,

$$\nabla S_i(\tau_i^0, \varepsilon_i^0) = \begin{pmatrix} \frac{p(\tau_i^0, \varepsilon_i^0)}{T(\tau_i^0, \varepsilon_i^0)} \\ \frac{1}{T(\tau_i^0, \varepsilon_i^0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p^0}{T^0} \\ \frac{1}{T^0} \end{pmatrix}.$$

On en déduit la majoration :

$$\begin{aligned} &S(\tau^0 + \delta\tau, \varepsilon^0 + \delta\varepsilon) + S(\tau^0 - \delta\tau, \varepsilon^0 - \delta\varepsilon) \\ &< 2 \sum_{i=1}^m \alpha_i S_i(\tau_i^0, \varepsilon_i^0) \\ &\quad + \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i \begin{pmatrix} p^0/T^0 \\ 1/T^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\tau_i^+ \\ \delta\varepsilon_i^+ \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \begin{pmatrix} p^0/T^0 \\ 1/T^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\tau_i^- \\ \delta\varepsilon_i^- \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^m \alpha_i \delta\tau_i^+ = \sum_{i=1}^m \alpha_i \tau_i^- = \delta\tau$ et $\sum_{i=1}^m \alpha_i \delta\varepsilon_i^+ = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_i^- = \delta\varepsilon$, le terme entre crochets est nul. Nous avons bien l'inégalité attendue (inégalité de concavité) en rappelant que $\sum_{i=1}^m \alpha_i S_i(\tau_i^0, \varepsilon_i^0) = S(\tau^0, \varepsilon^0)$.

Il reste à montrer que

$$TdS = d\varepsilon + pd\tau,$$

c'est-à-dire que

$$\nabla S = \begin{pmatrix} p/T \\ 1/T \end{pmatrix}$$

(gradient de S par rapport à (τ, ε)). On sait que ce gradient existe. On a donc l'égalité

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_i}.$$

Or

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_i} = \alpha_i \frac{\partial S_i}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\alpha_i}{T}$$

et

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \alpha_i.$$

Donc, par identification, il vient

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{T}.$$

Le même raisonnement avec la dérivée par rapport à τ termine la démonstration de cette proposition. ■

Chapitre 4

Dégénérescence des modèles

Nous montrons dans ce chapitre que dans le cas d'une zone de mélange non étendue (qui peut correspondre à l'étalement numérique d'une interface), le résultat limite pour une longueur d'étalement tendant vers 0 ne dépend pas des relations de fermeture choisies. C'est un résultat de type « Lax-Wendroff » ([59]). Ce résultat est important pour la résolution numérique des équations, car la taille d'une zone de mélange provenant de la diffusion numérique d'une interface tend vers 0 lorsque le pas du maillage tend vers 0. Les solutions numériques trouvées avec les différents modèles convergent toutes vers la même limite lorsque le pas de discrétisation d'espace tend vers 0. Autrement dit, le comportement du modèle pour un fluide à interfaces dégénère. Commençons par poser le problème.

Nous considérons pour simplifier le cas physique où il y a deux constituants en dimension 1 seulement. L'espace de travail est $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ($t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}$). Notons D_1 la partie de l'espace occupée par le constituant 1 et D_2 celle occupée par le constituant 2. Dans les équations d'Euler (2.1), la pression p est alors définie par

$$p = p_1 \mathbf{1}_{D_1} + p_2 \mathbf{1}_{D_2},$$

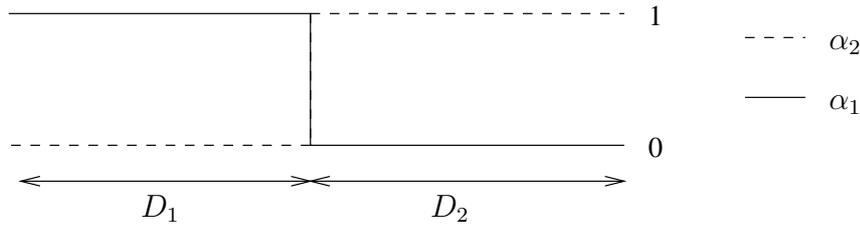
D_1 et D_2 sont séparés par une interface $x_I(t)$ régie par l'équation :

$$\partial_t x_I(t) = u(t, x_I(t)).$$

Le système total est donc (4.1).

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + pI) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + pu) = 0 \\ p = p_1 \mathbf{1}_{D_1} + p_2 \mathbf{1}_{D_2} \\ \partial_t x_I(t) = u(t, x_I(t)). \end{cases} \quad (4.1)$$

La condition initiale présente des constituants séparés par une interface :

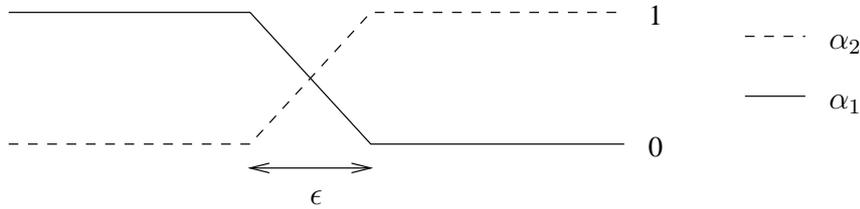


Nous notons

$$U^0(x) = \begin{pmatrix} \rho^0(x) \\ \rho u^0(x) \\ \rho e^0(x) \end{pmatrix}$$

le vecteur des valeurs initiales.

Pour simuler le mélange numérique, nous définissons un problème « approché » où la condition initiale est régularisée avec un paramètre ϵ :



et avec les mêmes valeurs initiales U^0 . Il faut bien sûr avoir $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ partout. Ce problème approché est modélisé par l'un, quelconque, des modèles de mélanges construits précédemment. Pour la discussion qui s'annonce, nous séparons le système en deux, d'un côté les équations d'Euler (4.2) et de l'autre les relations de fermeture (4.3) quelles qu'elles soient :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + pI) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + pu) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \text{relations} \\ \text{de} \\ \text{fermeture.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Nous considérons donc la solution (à supposer qu'elle existe) du système constitué de (4.2) et (4.3) et qui a pour condition initiale la situation régularisée. Précisons que ce sont les fractions massiques qui sont régularisées, pas les variables ρ , u , e . Cette

solution est appelée $U_\epsilon = \begin{pmatrix} \rho_\epsilon \\ \rho_\epsilon u_\epsilon \\ \rho_\epsilon e_\epsilon \end{pmatrix}$ et est définie pour tout ϵ positif. Rappelons que

la valeur initiale de U_ϵ , notée U_ϵ^0 , vérifie $U_\epsilon^0 = U^0$.

Théorème 16

Supposons que pour tout ϵ il existe une solution de (4.2), (4.3) telle que U_ϵ est solution au sens des distributions de (4.2).

Supposons que $U_\epsilon \in (L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}))^3 \quad \forall \epsilon$ et que $\exists A \in \mathbb{R}^3, \rho_{min} \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que

$$\begin{cases} \|U_\epsilon\|_{L^\infty} \leq A & \forall \epsilon \\ \rho_\epsilon \geq \rho_{min} > 0 & \forall \epsilon. \end{cases}$$

Supposons encore que $\exists U \in (L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}))^3$ tel que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (U_\epsilon - U) = (0) \in \mathbb{R}^3 \quad p.p.$$

Alors, la limite U est solution au sens des distributions du système (4.2) avec la condition initiale non régularisée et la loi de pression : $p = p_1$ lorsque $\alpha_1 = 1$ et $p = p_2$ lorsque $\alpha_2 = 1$, c'est-à-dire solution du système (4.1).

De plus, si pour tout $\epsilon > 0$ U_ϵ vérifie l'inégalité entropique

$$\partial_t(\rho_\epsilon S(U_\epsilon)) + \partial_x(\rho_\epsilon u_\epsilon S(U_\epsilon)) \geq 0$$

(avec $S(U_\epsilon) = \alpha_1 S_1(U_\epsilon) + \alpha_2 S_2(U_\epsilon)$), la solution limite U la vérifie aussi :

$$\partial_t(\rho S(U)) + \partial_x(\rho u S(U)) \geq 0,$$

où $S(U) = S_1(U) \mathbf{1}_{D_1} + S_2(U) \mathbf{1}_{D_2}$ (la solution limite est mise sous la forme $U = (\rho, \rho u, \rho e)$). ■

L'hypothèse de minoration uniforme de la densité est une précaution à prendre contre l'apparition du vide, qui est ainsi exclue.

Démonstration

On note

$$f(U_\epsilon) = \begin{pmatrix} \rho_\epsilon u_\epsilon \\ \rho_\epsilon u_\epsilon^2 + p_\epsilon \\ \rho_\epsilon u_\epsilon e_\epsilon \end{pmatrix}.$$

La solution au sens des distributions U_ϵ vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} U_\epsilon \partial_t \varphi + f(U_\epsilon) \partial_x \varphi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} U_\epsilon^0 \varphi^0 \, dx = 0$$

pour toute application $\varphi \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}))^3$ ($\varphi^0(x) = \varphi(0, x)$).

Tout d'abord, comme $U_\epsilon^0 = U^0$,

$$\int_{\mathbb{R}} U_\epsilon^0 \varphi^0 \, dx = \int_{\mathbb{R}} U^0 \varphi^0 \, dx.$$

Il suffit donc de prouver la convergence de la première intégrale. Un premier constat : sous les hypothèses du théorème, le théorème de convergence dominée de Lebesgue

assure la convergence de $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} U_\epsilon \partial_t \varphi dt dx$ vers $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} U \partial_t \varphi dt dx$. Une petite analyse est encore nécessaire pour le terme restant. On peut d'ores et déjà dire que

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\rho_\epsilon u_\epsilon - \rho u) = 0 & p.p. \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\rho_\epsilon u_\epsilon^2 - \rho u^2) = 0 & p.p. \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\rho_\epsilon u_\epsilon e_\epsilon - \rho u e) = 0 & p.p., \end{cases}$$

mais ce n'est pas suffisant : il faut savoir comment la pression réagit à ce passage à la limite.

Appelons $\epsilon(t)$ la longueur au temps t de l'ensemble des points transportés par l'écoulement et situés à $t = 0$ dans la zone de mélange artificiel ($\epsilon(0) = \epsilon$). Cet ensemble de points définit la zone de mélange, car quelles que soient les relations de fermeture, $D_t \alpha_{i\epsilon} = 0$. Cette longueur vérifie :

$$\epsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{\alpha_{1\epsilon}(t,x) \alpha_{2\epsilon}(t,x) \neq 0\}}(t,x) dx.$$

Soit $m_\epsilon(t)$ la masse de cet ensemble :

$$m_\epsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(t,x) \mathbf{1}_{\{\alpha_{1\epsilon}(t,x) \alpha_{2\epsilon}(t,x) \neq 0\}}(t,x) dx.$$

La première équation de (4.2) (conservation de la masse) implique que $m_\epsilon(t) = m_\epsilon(0) \quad \forall t$. D'autre part, l'hypothèse de non-apparition du vide implique :

$$m_\epsilon(t) \geq \rho_{min} \epsilon(t) \quad \forall \epsilon, \quad \forall t.$$

D'où une majoration de $\epsilon(t)$:

$$\epsilon(t) \leq \frac{m_\epsilon(0)}{\rho_{min}} < +\infty.$$

Comme $m_\epsilon(0)$ tend vers 0 lorsque ϵ tend vers 0, $\epsilon(t)$ tend vers 0 avec ϵ . Autrement dit, la longueur de mélange tend vers 0 pour tout t (lorsque la longueur au temps 0 tend vers 0). Ainsi, p_ϵ converge presque partout vers la pression correcte, c'est-à-dire calculée avec la bonne loi selon qu'on est dans le composé 1 ou 2. Selon les hypothèses du théorème, $p_{1\epsilon}$ et $p_{2\epsilon}$ sont bornés dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ indépendamment de ϵ car $\varepsilon_{1\epsilon}$, $\varepsilon_{2\epsilon}$, $\tau_{1\epsilon}$ et $\tau_{2\epsilon}$ le sont (toutes les lois d'état sont supposées régulières). On vérifie aisément que c'est alors aussi le cas de p_ϵ , quelle que soit la fermeture choisie (égalité des pressions ou moyenne pondérée). Finalement, $f(U_\epsilon)$ est borné en norme L^∞ indépendamment de ϵ et, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} f(U_\epsilon) \partial_t \varphi dt dx$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} f(U) \partial_t \varphi dt dx$, ce qui montre enfin que U est solution.

L'inégalité entropique pour U_ϵ signifie que pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ positive,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \rho_\epsilon S(U_\epsilon) \partial_t \phi + \rho_\epsilon u_\epsilon S(U_\epsilon) \partial_x \phi dt dx \leq 0.$$

La bornitude de la zone de mélange implique la convergence presque partout de $S(U_\epsilon)$ vers $S(U)$. L'inégalité entropique pour U découle donc de la régularité S , à nouveau par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. ■

Remarque 4.0.2

Les hypothèses du théorème sont très fortes. Dans l'état actuel des connaissances sur les équations d'Euler, on utilise souvent ce type d'hypothèses toujours à peu près équivalentes à l'existence de solutions. C'est par exemple une assertion semblable qui permet de montrer la croissance de l'entropie dans un choc par la méthode des viscosités évanescents (voir [41]). Dans notre cas il faut supposer de plus la densité ne vaut jamais 0. De manière générale, l'apparition du vide est une singularité dans les équations d'Euler. Un tel résultat a cependant un intérêt très fort sur le plan numérique : lors d'un calcul, on se rend compte si la solution calculée reste bornée (inférieurement et supérieurement) ou au contraire « explose ». Si elle n'explose pas, le théorème de cohérence 16 nous dit que la solution numérique est proche de la solution exacte (pour des pas de discrétisation assez petits). La régularisation de la condition initiale a joué le rôle « mélangeur » de la discrétisation. ■

Chapitre 5

Évaluation des relations de fermeture

Nous cherchons désormais à éliminer des relations de fermeture, celles n'ayant pas de bonnes propriétés. Elles vont être jugées selon deux qualités du système obtenu :

- caractère entropique ;
- hyperbolicité.

Nous allons voir qu'elles sont presque toutes correctes pour ces critères, ce qui ne permet pas de les départager.

5.1 Entropie pour une solution régulière

Supposons que le système admette une solution régulière, au moins de classe C^1 . Pour celle-ci, les équations (2.4) peuvent s'écrire, après une transformation élémentaire,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho D_t \tau = \operatorname{div} u \\ \rho D_t \alpha_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \rho D_t u = -\operatorname{grad} p \\ \rho D_t e = -\operatorname{div}(pu) \\ p_i = p_i(\tau_i, u, e_i) \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \\ S_i = S_i(\tau_i, u, e_i) \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i \tau_i = \tau. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Proposition 8

Pour une solution régulière, et quelles que soient les relations de fermeture,

$$D_t S = 0.$$

Cela signifie que l'entropie totale est constante le long des lignes de courant. ■

Démonstration

$$\begin{aligned} TD_t S &= D_t \varepsilon + p D_t \tau \\ &= D_t e - u D_t u + p D_t \tau \\ &= \tau(-\operatorname{div} p u + \operatorname{grad} p + p \operatorname{div} u) \quad \text{par (5.1)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Remarque 5.1.1

Nous ne pouvons rien dire sur l'entropie de chaque constituant. Pour affirmer que $D_t S_i = 0 \quad \forall i$, il faut en plus supposer que toutes les variations $D_t S_i$ sont de même signe (et leur nullité vient alors de (3.1.b) et du fait que tous les α_i , toutes les températures T_i et toutes les entropies S_i sont positifs). Cela est le cas pour les relations 6, 7, 8 et 9. ■

5.2 Le système est-il hyperbolique?

Dans ce chapitre, nous focalisons sur une propriété mathématique importante pour un système d'équations aux dérivées partielles en mécanique des fluides : l'hyperbolicité. Nous montrons que les modèles créés dans les pages précédentes sont, pour une grande partie, hyperboliques. Les résultats sont consignés dans les théorèmes 17 et 18 que nous avons choisi d'écrire séparément parce que les démonstrations proposées en sont différentes.

Théorème 17

Le système constitué par les équations de conservation (2.4) et la relation de fermeture 1, 3, 4 ou 5 pour la pression :

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau} p_i, & p &= \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i, \\ p &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i \quad \text{ou} \quad p = p_i \quad \forall i \end{aligned}$$

et la relation 6, 7, 8 ou 9 pour la température :

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i S_i}{S} T_i, & \frac{1}{T} &= \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{T_i}, \\ T &= \sum_{i=1}^m \alpha_i T_i \quad \text{ou} \quad T &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m T_i \end{aligned}}$$

est hyperbolique. ■

Théorème 18

Le modèle isobare isotherme :

$$\begin{cases} p_i = p & \forall i \\ T_i = T_j & \forall i, j \end{cases}$$

est hyperbolique. ■

Démonstration du théorème 17

La diversité des relations de fermeture envisagées nous fait sortir du cadre des systèmes de lois de conservation, cadre exclusif dans lequel le théorème de Godunov-Mock – qui permet de conclure à l’hyperbolicité – est applicable (voir [41], [83]). Pour montrer l’hyperbolicité, on essaie de mettre le système sous la forme $\rho D_t U = \sum_{\ell=1}^d A_\ell \partial_{x_\ell} U$ où U est le vecteur des inconnues, ∂_{x_ℓ} étant l’opérateur de dérivation par rapport à la composante ℓ de \mathbb{R}^d . La méthode choisie est une symétrisation par rapport à la pression, qui vise à remplacer $D_t \tau$ par une fonction de $D_t p$. Nous débutons la démonstration avec des relations de fermeture quelconques afin de voir comment les restrictions sur celles-ci apparaissent. Nous avons vu que les relations de fermeture envisagées pour la pression et le volume spécifique sont de deux types :

$$\begin{aligned} \text{soit } p &= \sum_{i=1}^m \delta_i p_i, \\ \text{soit } p_i &= p \quad \forall i. \end{aligned}$$

L’analyse de ces deux situations est faite séquentiellement.

Cas d’une relation de fermeture du type $p = \sum_{i=1}^m \delta_i p_i$

On a

$$\begin{aligned} D_t p &= \sum_{i=1}^m \delta_i D_t p_i + \sum_{i=1}^m p_i D_t \delta_i \\ &= \sum_{i=1}^m \delta_i \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i} D_t \tau_i + \sum_{i=1}^m \delta_i \left. \frac{\partial p_i}{\partial S_i} \right|_{\tau_i} D_t S_i + \sum_{i=1}^m p_i D_t \delta_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \frac{\delta_i \lambda_i}{\lambda_1} \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i} \right) D_t \tau_1 + \sum_{i=1}^m \delta_i \left. \frac{\partial p_i}{\partial S_i} \right|_{\tau_i} D_t S_i + \sum_{i=1}^m p_i D_t \delta_i \\ &\text{(où } \lambda_i \text{ et } \delta_i \text{ sont reliés par la formule (3.3))} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\delta_i \lambda_i}{\lambda_1} \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \lambda_i}{\lambda_1}} D_t \tau + \sum_{i=1}^m \delta_i \left. \frac{\partial p_i}{\partial S_i} \right|_{\tau_i} D_t S_i + \sum_{i=1}^m p_i D_t \delta_i. \end{aligned}$$

Pour continuer l'analyse nous supposons que

$$\boxed{\begin{cases} D_t S_i = 0 & \forall i \\ D_t \delta_i = 0 & \forall i. \end{cases}} \quad (5.2)$$

Les conclusions ne seront donc valables que pour les relations de fermeture menant aux égalités (5.2).

Nous nous permettons ainsi d'écrire

$$D_t p = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\delta_i \lambda_i}{\lambda_1} \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \Big|_{S_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \lambda_i}{\lambda_1}} D_t \tau = \frac{\sum_{i=1}^m \delta_i \lambda_i \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \Big|_{S_i}}{\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i} D_t \tau.$$

On se souvient que les λ_i sont définis à une constante multiplicative près. Nous pouvons donc décider arbitrairement que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i = 1. \quad (5.3)$$

Ce choix paraissait déjà naturel sur l'équation (3.3). Posons

$$\omega = \sum_{i=1}^m \delta_i \lambda_i \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \Big|_{S_i}$$

pour simplifier l'écriture de $D_t p$:

$$D_t p = \omega D_t \tau.$$

Sous l'hypothèse (5.2), on peut de plus remplacer les équations de fermeture sur l'entropie et la température par

$$D_t S_i = 0 \quad \forall i.$$

En réunissant ces m équations, on obtient l'équation sur l'énergie grâce aux formules $\sum_{i=1}^m \alpha_i \tau_i = \tau$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_i = \varepsilon$ et $T_i D_t S_i = D_t \varepsilon_i + p_i D_t \tau_i$. L'équation sur l'énergie est donc retirée du système (car elle y est redondante). Nous devons encore trouver une expression facilement exploitable des relations de fermeture sur les pressions et volumes spécifiques. Examinons les $[m - 1]$ relations

$$\frac{D_t \tau_i}{\lambda_i} = \frac{D_t \tau_j}{\lambda_j} \quad \forall i, j.$$

Elles ont pour conséquence

$$D_t \tau_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1} D_t \tau_1 = \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \lambda_i}{\lambda_1}} D_t \tau$$

soit enfin, avec la convention (5.3) :

$$\rho D_t \tau_i = \lambda_i \operatorname{div} u \quad \forall i.$$

Seules $[m - 1]$ de ces équations sont indépendantes de l'équation sur $D_t \tau$ ou $D_t p$. On ne doit donc en prendre que $[m - 1]$ en compte. Afin de simplifier beaucoup les écritures, supposons que $d = 1$ (mais le résultat reste vrai en dimension supérieure). Dans ces conditions, le système est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho D_t p = \omega \operatorname{div} u \\ \rho D_t u = -\operatorname{grad} p \\ \rho D_t \tau_i = \lambda_i \operatorname{div} u \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \rho D_t \alpha_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \rho D_t S_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i \tau_i = \tau \\ p_i = p_i(\tau_i, u, e_i) \\ S_i = S_i(\tau_i, u, e_i) \\ p = \sum_{i=1}^m \delta_i p_i, \end{array} \right.$$

soit

$$\rho D_t U = A \partial_x U$$

en posant

$$U = \begin{pmatrix} p \\ u \\ (\tau_i)_{i=1}^{m-1} \\ (\alpha_i)_{i=1}^{m-1} \\ (S_i)_{i=1}^m \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \lambda_{m-1} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice carrée de dimension $3m \times 3m$. Les valeurs propres de cette matrice sont les racines v (complexes *a priori*) du polynôme :

$$(-v)^{3m-2}(v^2 + \omega)$$

Rappelons que $\omega = \sum_{i=1}^m \delta_i \lambda_i \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \Big|_{S_i}$. D'après (3.3), cela implique

$$\omega = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i^2 \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \Big|_{S_i}.$$

La concavité de $S_i(\tau_i, \varepsilon_i)$ permet ainsi d'affirmer que les valeurs propres sont toutes réelles, car $\frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \Big|_{S_i} < 0 \quad \forall i$ et donc $\omega < 0$. D'autre part, A a une base de vecteurs propres. En effet, les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont tous ceux dont les deux premières composantes sont nulles (ils engendrent un espace de dimension $[3m-2]$). Ensuite, nous notons que les deux autres valeurs propres ne sont pas nulles et sont différentes, étant $\sqrt{-\omega}$ et $-\sqrt{-\omega}$. Les vecteurs propres associés $U^1 = (U_k^1)_{k=1}^{3m}$

et $U^2 = (U_k^2)_{k=1}^{3m}$ sont :

$$U^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{-\omega}} \\ \left(-\frac{\lambda_i}{\omega}\right)_{i=1}^{m-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad U^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{-\omega}} \\ \left(-\frac{\lambda_i}{\omega}\right)_{i=1}^{m-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A est diagonalisable et à valeurs propres réelles. Sous les hypothèses (5.2), le système est hyperbolique avec une relation de fermeture du type $p = \sum_{i=1}^m \delta_i p_i$ pour la pression si $D_t \delta_i = D_t S_i = 0$.

Cas de la relation de fermeture $p_i = p \quad \forall i$

nouveau, on symétrise le système par rapport à la pression. Posons

$$a_i = \frac{\alpha_i / \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i}}{\sum_{i=1}^m \alpha_i / \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i}}$$

et supposons comme précédemment (cf.(5.2)) que

$$\boxed{D_t S_i = 0 \quad \forall i.} \quad (5.4)$$

On a $\sum_{i=1}^m a_i = 1$. Par suite, puisque $p = p_i \quad \forall i$,

$$\begin{aligned} D_t p &= \sum_{i=1}^m a_i D_t p_i \\ &= \sum_{i=1}^m a_i \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i} D_t \tau_i + \sum_{i=1}^m a_i \left. \frac{\partial p_i}{\partial S_i} \right|_{\tau_i} D_t S_i. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Comme $D_t S_i = 0$ par hypothèse,

$$\begin{aligned} D_t p &= \sum_{i=1}^m a_i \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i} D_t \tau_i \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i / \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i}} D_t \tau_i \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^m \alpha_i / \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i}} D_t \tau. \end{aligned}$$

La suite du calcul est la même que dans le cas précédent. Le système est hyperbolique.

Afin maintenant de conclure, examinons les différentes relations de fermeture pour

déterminer lesquelles permettent d'obtenir un système hyperbolique. Il s'agit de trouver les relations pour lesquelles les égalités (5.2) sont vérifiées.

L'observation de la nullité des $D_t S_i$ pour toutes les relations autres que $T_i = T \quad \forall i$ est déjà faite en remarque 5.1.1. D'autre part, on a $D_t \delta_i = 0$ pour $\delta_i = \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau}$, $\delta_i = \alpha_i$ et $\delta_i = \frac{1}{m}$. Le théorème 17 est bien une conséquence de cette analyse. ■

Remarque 5.2.1

La conclusion du théorème 17 n'est qu'indicative. La conclusion la plus générale à laquelle nous avons abouti est l'hyperbolicité des systèmes tels que $D_t S_i = 0 \quad \forall i$ et $D_t \delta_i = 0 \quad \forall i$ (hypothèse (5.2)). ■

Remarque 5.2.2

La démonstration de ce théorème passe par le calcul d'un coefficient ω tel que $D_t p = \omega D_t \tau$. Pour une relation de fermeture du type $p = \sum_{i=1}^m \delta_i p_i$,

$$\omega = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i^2 \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i},$$

et pour la relation de fermeture isobare,

$$\omega = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \alpha_i / \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i}}.$$

Pour un fluide à un seul constituant, on a l'habitude de poser

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \tau} \right|_S = -\frac{c^2}{\tau^2},$$

et c est alors la vitesse du son dans le fluide. L'hypothèse thermodynamique de concavité de l'entropie stipule que c^2 est un nombre positif, c'est-à-dire que c est un nombre réel. Par analogie avec le cas mono-constituant, on peut dans le cas multi-constituants poser

$$\omega = -\frac{c^2}{\tau^2}.$$

Le modèle de mélange fournit alors une vitesse du son du mélange en fonction des vitesses du son dans chaque constituant. Pour une relation de fermeture du type $p = \sum_{i=1}^m \delta_i p_i$,

$$\frac{c^2}{\tau^2} = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \lambda_i^2}{\tau_i^2} c_i^2,$$

et pour la relation de fermeture isobare,

$$\frac{\tau^2}{c^2} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\tau_i^2}{c_i^2}.$$

■

Démonstration du théorème 18

Le système isobare isotherme s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\alpha_i \rho) + \operatorname{div}(\alpha_i \rho u) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + pI) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho u e + p u) = 0 \\ p_i = p \quad \forall i \\ T_i = T_j \quad \forall i, j. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Il est plus facile de montrer l'hyperbolicité du système exprimé sous forme lagrangienne. Afin d'avoir un système de lois de conservation, nous nous restreignons au cas de la dimension 1 (le cas général demanderait un peu plus de travail). Nous considérons donc les équations (5.7) suivantes. L'opérateur ∂_m est l'opérateur de dérivation par rapport à la variable de masse.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1 \\ \partial_t \tau + \partial_m u = 0 \\ \partial_t u + \partial_m p = 0 \\ \partial_t e + \partial_m(pu) = 0 \\ p_i = p \quad \forall i \\ T_i = T_j \quad \forall i, j. \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Pour la correspondance entre (5.6) et (5.7), voir [41]. L'équation sur les α_i vient de l'équation eulérienne $D_t \alpha_i = 0$. En plus de ce système, nous savons que l'entropie S , fonction strictement concave de (τ, ε) (proposition 7), vérifie : $\partial_t S = 0$ (en coordonnées lagrangiennes). Le lemme 9 prouve que S est strictement concave en fonction de (τ, u, e) avec $e = u^2/2 + \varepsilon$.

Notons que le flux d'entropie ainsi que les flux des fractions massiques sont nuls. Le lemme 10 prouve l'hyperbolicité d'un tel système. ■

Lemme 9

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- la fonction $S : (\tau, \varepsilon) \mapsto S(\tau, \varepsilon)$ est strictement concave ;
- la fonction $\tilde{S} : (\tau, u, e) \mapsto S(\tau, e - u^2/2)$ est strictement concave.

■

La preuve de ce lemme est donnée dans [41]. L'entropie \tilde{S} est à nouveau notée S .

Lemme 10

Soit U une application de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}^n vérifiant le système de lois de conservation (5.8) avec le flux $f(U)$ ($f(U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$) :

$$\partial_t U + \operatorname{div}(f(U)) = 0. \quad (5.8)$$

Supposons que

$$U = \begin{pmatrix} U^h \\ U^b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ f^b \end{pmatrix}$$

où $U^h = (U_k^h) \in \mathbb{R}^l$ ($k = 1 \dots l$) et $f^b \in \mathbb{R}^{n-l} \times \mathbb{R}^d$ ($l \leq n$).

On notera

- $f = (f_{kj})$, $k = 1 \dots n$, $j = 1 \dots d$;
- $f_j = (f_{kj})$, $k = 1 \dots n$;
- $f_j^b = (f_{jk})$, $k = l + 1 \dots n$.

Supposons que le système (5.8) admette une entropie S strictement concave en fonction de U^b à U^h fixé dont le flux soit nul, c'est-à-dire : $\exists S : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla S(U)^t \nabla f_j(U) = 0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall j \\ \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U_{k_1}^b \partial U_{k_2}^b} \right)_{k_1, k_2=1}^l \in \mathbb{R}^{n-l} \times \mathbb{R}^{n-l} \quad \text{est une matrice définie négative.} \end{array} \right.$$

Alors, le système (5.8) est hyperbolique. ■

Preuve du lemme 10

Le théorème de Godunov-Mock ne suffit pas car il demande la concavité stricte de S en fonction de toutes les variables du système.

Soit s une fonction de U^h strictement concave quelconque (par exemple, $s(U^h) = \sum_{k=1}^l U_k^h \ln U_k^h$). On pose pour tout réel A

$$S_A(U) = S(U) + As(U^h).$$

On commence par montrer qu'il existe un réel A (positif, assez grand) tel que S_A est strictement concave en fonction de U . Calculons pour cela la matrice des dérivées secondes de S_A . Nous notons $\nabla_{hh}^2 S$, $\nabla_{bb}^2 S$ les matrices de dérivées secondes de S de par rapport aux coordonnées de U^h et U^b , et $\nabla_{hb}^2 S = \nabla_{bh}^2 S$ les matrices de dérivées secondes croisées (de même, $\nabla_{hh}^2 S_A$, $\nabla_{bb}^2 S_A$ et $\nabla_{hb}^2 S_A = \nabla_{bh}^2 S_A$ pour S_A , et $\nabla_{hh}^2 s$ pour s).

$$\nabla^2 S_A = \begin{pmatrix} \nabla_{hh}^2 S + A \nabla_{hh}^2 s & \nabla_{hb}^2 S \\ \nabla_{bh}^2 S & \nabla_{bb}^2 S \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant ν un vecteur quelconque de \mathbb{R}^n . Ce vecteur est décomposé de manière naturelle en ν^h et ν^b ($\nu^h \in \mathbb{R}^l$).

$$\begin{aligned} \nu^t \nabla^2 S_A \nu &= \nu^{h^t} \nabla_{hh}^2 S \nu^h + A \nu^{h^t} \nabla_{hh}^2 s \nu^h \\ &\quad + 2 \nu^{h^t} \nabla_{hb}^2 S \nu^b + \nu^{b^t} \nabla_{bb}^2 S \nu^b. \end{aligned}$$

Or on peut majorer le terme mixte grâce à la continuité de l'application linéaire $\nabla_{hb}^2 S : \exists a_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$2\nu^{ht} \nabla_{hb}^2 S \nu^b \leq a_1 \|\nu^h\| \|\nu^b\|. \quad (5.9)$$

le symbole $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^l , \mathbb{R}^n ou \mathbb{R}^{n-l} . D'autre part, l'identité $(\|\nu^h\| - \eta \|\nu^b\|)^2 = \|\nu^h\|^2 + \eta^2 \|\nu^b\|^2 - 2\eta \|\nu^h\| \|\nu^b\|$ implique

$$\|\nu^h\| \|\nu^b\| \leq \frac{\|\nu^h\|^2}{2\eta} + \frac{\eta}{2} \|\nu^b\|^2 \quad \forall \nu, \quad \forall \eta > 0. \quad (5.10)$$

La continuité de l'application linéaire $\nabla_{hh}^2 S$ a pour conséquence : $\exists a_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nu^{ht} \nabla_{hh}^2 S \nu^h \leq a_2 \|\nu^h\|^2. \quad (5.11)$$

Soient c_s et c_S les constantes de coercivité de $\nabla_{hh}^2 s$ et $\nabla_{bb}^2 S$ (matrices définies négatives). Ce sont des réels strictement négatifs tels que

$$\begin{cases} \nu^{ht} \nabla_{hh}^2 s \nu^h \leq c_s \|\nu^h\|^2 & \forall \nu^h \\ \nu^{bt} \nabla_{bb}^2 S \nu^b \leq c_S \|\nu^b\|^2 & \forall \nu^b. \end{cases} \quad (5.12)$$

En enchaînant les majorations (5.9), (5.10), (5.11) et (5.12), nous obtenons

$$\nu^t \nabla^2 S_A \nu \leq (Ac_s + \frac{1}{\eta} + a_2) \|\nu^h\|^2 + (c_S + a_1 \eta) \|\nu^b\|^2.$$

Comme $c_S < 0$, on peut choisir η (positif et petit) de manière à ce que $(c_S + a_1 \eta) < 0$. Une fois ce terme fixé, c_s étant lui aussi strictement négatif, il est possible de trouver A (positif et grand) tel que $(Ac_s + \frac{1}{\eta} + a_2) < 0$. Ainsi posé, A définit une fonction $S_A(U)$ strictement concave. Remarquons que la régularité de l'entropie S (toujours supposée) et celle de s (imposée par choix) permet de fixer η puis A de manière à ce que $S_A(U)$ soit strictement concave dans tout un voisinage de U . C'est une propriété locale. Or cette fonction S_A est une entropie pour le système, avec un flux nul, car elle vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} \nabla S_A(U)^t \nabla f_j(U) &= \nabla S(U)^t \nabla f_j(U) + A \begin{pmatrix} \nabla s(U^h) \\ 0 \end{pmatrix}^t \nabla f_j(U) \\ &= A \begin{pmatrix} \nabla s(U^h) \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla f_j^b \end{pmatrix} = 0 \quad \forall j. \end{aligned}$$

Par application du théorème de Godunov-Mock (pour lequel la propriété locale de l'entropie suffit), il résulte que le système (5.8) est bien hyperbolique. \blacksquare

Chapitre 6

Cas particuliers et modèles déjà existants

Nous allons voir dans cette partie que l'une de nos fermetures a déjà été utilisée, sous des formalismes tout à fait différents. Il s'agit de la fermeture isotherme et moyenne avec fractions volumiques pour la pression : $p = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau} p_i$. Cette fermeture est équivalente à une méthode de R. Saurel et R. Abgrall pour les « stiffened gas » et à une méthode de B. Larrouturou et L. Fezoui pour les gaz parfaits (méthodes appliquées à des écoulements avec interfaces et mélanges numériques).

6.1 Une méthode de convection des paramètres

Il s'agit de la méthode proposée par R. Saurel et R. Abgrall dans [80]. Le formalisme n'est pas explicitement multi-constituants, mais la loi d'état varie dans le temps et l'espace, ce qui simule la présence de plusieurs fluides. La loi d'état du gaz est donnée en tout point de l'espace par :

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon - \gamma\pi$$

et les paramètres γ et π sont convectés à la vitesse de fluide. Le système résolu est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + pI) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho u e + p u) = 0 \\ D_t \gamma = 0 \\ D_t \pi = 0. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Proposition 9

Plaçons-nous dans le cas d'un mélange de m gaz de lois « stiffened ». On note

$(\gamma_i, \pi_i)_{i=1}^m$ les coefficients de loi d'état de chaque constituant :

$$p_i = (\gamma_i - 1)\varepsilon_i/\tau_i - \gamma_i\pi_i \quad \forall i.$$

Considérons le système multi-constituants suivant :

$$\begin{cases} p = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau} p_i \\ \frac{D_t \tau_i}{\tau_i} = \frac{D_t \tau_j}{\tau_j} \quad \forall i, j \\ T_i = T_j \quad \forall i, j, \end{cases} \quad (6.2)$$

les températures étant convenablement choisies pour la thermodynamique, de la forme

$$T_i = \frac{1}{c_i} \varepsilon_i - \frac{\pi_i}{c_i} \tau_i$$

(les c_i sont des constantes). La solution de ce système (avec ces relations de fermetures particulières) vérifie :

$\exists \gamma$ et ζ réels tels que

$$\begin{cases} p = (\gamma - 1)\varepsilon/\tau - \zeta \\ D_t \gamma = 0 \\ D_t \zeta = 0. \end{cases}$$

Elle est donc solution du système (6.1) avec $\pi = \zeta/\gamma$. ■

Démonstration

Avant toute chose, trouvons une loi de température $T_i(\tau_i, \varepsilon_i)$ pour chaque constituant (c'est nécessaire afin d'utiliser l'hypothèse isotherme). On demande que ces lois soient admissibles pour la thermodynamique, c'est-à-dire telles qu'il existe ($\forall i$) une entropie S_i vérifiant

$$T_i dS_i = d\varepsilon_i + p_i d\tau_i,$$

soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial S_i}{\partial \tau_i} = \frac{p_i}{T_i} \\ \frac{\partial S_i}{\partial \varepsilon_i} = \frac{1}{T_i}. \end{cases}$$

En écrivant l'égalité des dérivées secondes croisées de S_i , on obtient une équation sur la température seule :

$$\frac{\partial(p_i/T_i)}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\partial(1/T_i)}{\partial \tau_i},$$

qui se réécrit

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau_i} = p_i \frac{\partial T_i}{\partial \varepsilon_i} - T_i \frac{\partial p_i}{\partial \varepsilon_i}.$$

La loi en pression est donnée par les paramètres γ_i et π_i . On vérifie que la fonction

$$T_i = \frac{1}{c_i} \varepsilon_i - \frac{\pi_i}{c_i} \tau_i \quad (6.3)$$

est solution pour n'importe quelle constante c_i . Cette loi va nous servir dans le calcul de $D_t(\gamma - 1)$.

Soit la fonction du temps et de l'espace γ définie par

$$\gamma - 1 = p \frac{\tau}{\varepsilon} + \zeta \frac{\tau}{\varepsilon}$$

où ζ est une fonction indéterminée à dérivée lagrangienne nulle et p est donnée par la relation de fermeture (6.2). On veut que la fonction γ soit à dérivée lagrangienne nulle, c'est-à-dire que

$$D_t \left(p \frac{\tau}{\varepsilon} + \zeta \frac{\tau}{\varepsilon} \right) = 0.$$

En utilisant successivement la relation de fermeture, les lois de pression de chaque constituant et en introduisant les constantes c_i , il vient

$$\begin{aligned} D_t \left(p \frac{\tau}{\varepsilon} + \zeta \frac{\tau}{\varepsilon} \right) &= D_t \left(\left(\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau} p_i + \zeta \right) \frac{\tau}{\varepsilon} \right) \\ &= D_t \left[\left(\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau} ((\gamma_i - 1) \frac{\varepsilon_i}{\tau_i} - \gamma_i \pi_i) + \zeta \right) \frac{\tau}{\varepsilon} \right] \\ &= D_t \left[\left(\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \gamma_i c_i}{\tau} \left(\frac{\varepsilon_i}{c_i} - \frac{\pi_i \tau_i}{c_i} \right) - \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \varepsilon_i}{\tau} + \zeta \right) \frac{\tau}{\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Les constantes c_i sont telles que $T_i = \varepsilon_i / c_i - \pi_i \tau_i / c_i$. Cela permet de faire apparaître les températures :

$$\begin{aligned} D_t \left(p \frac{\tau}{\varepsilon} + \zeta \frac{\tau}{\varepsilon} \right) &= D_t \left(\left(\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \gamma_i c_i}{\tau} T_i + \zeta \right) \frac{\tau}{\varepsilon} - 1 \right) \\ &= D_t \left(\left(\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \gamma_i c_i}{\tau} T_i + \zeta \right) \frac{\tau}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

car $D_t(1) = 0$. Soit c la moyenne pondérée des c_i : $c = \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i$. La fermeture en température est isotherme : $T_i = T \quad \forall i$. On peut par conséquent écrire (c'est un artifice de calcul) :

$$T = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i T_i = \frac{1}{c} \varepsilon - \frac{1}{c} \sum_{i=1}^m \alpha_i \pi_i \tau_i = T_i \quad \forall i.$$

On vérifie que $D_t c = 0$ car $D_t c_i = 0$.

$$\begin{aligned} D_t \left(p \frac{\tau}{\varepsilon} + \zeta \frac{\tau}{\varepsilon} \right) &= D_t \left(\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \gamma_i c_i}{c} + \left(- \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \gamma_i c_i}{\tau} c \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \pi_i \tau_i}{c} + \zeta \right) \frac{\tau}{\varepsilon} \right) \\ &= D_t \left(\left(- \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \gamma_i c_i}{\tau} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \pi_i \tau_i}{c} + \zeta \right) \frac{\tau}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

puisque $D_t(\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \gamma_i c_i}{c}) = 0$. Le terme qui multiplie τ/ε dans l'expression ci-dessus est à dérivée lagrangienne nulle car c , α_i , γ_i , c_i , π_i , $(\alpha_i \tau_i)/\tau$, ainsi que ζ par hypothèse, le sont. L'équation $D_t(\gamma - 1) = 0$ se résume donc à

$$(\zeta - \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \gamma_i c_i}{c} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \pi_i \tau_i}{\tau}) D_t(\frac{\tau}{\varepsilon}) = 0.$$

Une condition suffisante est que

$$\zeta = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \gamma_i c_i}{c} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau} \frac{\pi_i}{c_i}.$$

Le nombre ζ vérifie alors bien $D_t \zeta = 0$. Nous sommes ainsi retombés sur le modèle (6.1).

■

Remarque 6.1.1

Nous n'avons pas eu besoin de fixer les coefficients c_i (mais bien sûr ζ en dépend). La fermeture isotherme permet de retrouver le modèle de R. Abgrall et R. Saurel quelles que soient les lois en température admissibles choisies. ■

Bien sûr, tout ce que l'on a fait ici s'applique à des gaz parfaits, puisqu'ils sont le cas particulier où $\pi_i = 0$. La relation de fermeture (6.2) est alors équivalente au modèle de gaz parfait avec convection du paramètre γ présenté dans [2].

6.2 Un modèle utilisant la loi de Dalton

Nous faisons une rapide présentation de la méthode de B. Larrouturou et L. Fezoui détaillée dans [56]. Nous n'envisageons par souci de simplicité que le cas des gaz parfaits (premiers chapitres de la référence citée). Le fluide global est explicitement considéré comme isotherme, de température T . Les pressions intervenant ici sont les pressions partielles \tilde{p}_i , calculées non pas avec les volumes spécifiques τ_i mais avec les densités partielles $\alpha_i \rho$:

$$\tilde{p}_i = (\gamma_i - 1) \alpha_i \rho \varepsilon_i. \quad (6.4)$$

Elles suivent donc des lois de gaz parfaits d'exposants adiabatiques γ_i . Et la pression globale satisfait la loi de Dalton :

$$p = \sum_{i=1}^m \tilde{p}_i. \quad (6.5)$$

Cela revient à poser¹

$$\begin{aligned} p &= (\gamma - 1)\rho\varepsilon \\ \text{avec } \gamma &= \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i c_{vi} \gamma_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i c_{vi}} \\ \text{et } \varepsilon &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Les paramètres c_{vi} sont des coefficients thermodynamiques (chaleurs spécifiques à volume constant) permettant de calculer les énergies internes² : $\varepsilon_i = c_{vi}T$. Enfin, les équations aux dérivées partielles sont les équations classiques (6.7) : conservation de la masse de chaque constituant, de la quantité de mouvement et de l'énergie totales.

$$\begin{cases} \partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i u) = 0 & \text{pour } i = 1, \dots, m \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u + pI) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}(\rho u e + pu) = 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

Proposition 10

On considère un mélange de m gaz parfaits de paramètres $(\gamma_i)_{i=1}^m$ et $(c_{vi})_{i=1}^m$:

$$\begin{cases} p_i = (\gamma_i - 1)\varepsilon_i/\tau_i \\ \varepsilon_i = c_{vi}T_i. \end{cases}$$

La solution du modèle

$$\begin{cases} p = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau} p_i \\ \frac{D_t \tau_i}{\tau_i} = \frac{D_t \tau_j}{\tau_j} \quad \forall i, j \\ T_i = T_j \quad \forall i, j. \end{cases}$$

vérifie les équations (6.6) et (6.7). ■

Démonstration

Par les hypothèses sur la pression,

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau} p_i \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \tau_i}{\tau} (\gamma_i - 1) \frac{\varepsilon_i}{\tau_i} \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^m \alpha_i c_{vi} T_i (\gamma_i - 1). \end{aligned}$$

1. Pour les calculs, nous renvoyons à l'article [56].

2. On constate que cette équation est de la forme de (6.3) avec $\pi_i = 0$.

Par l'hypothèse isotherme,

$$\begin{aligned} p &= \frac{T}{\tau} \sum_{i=1}^m \alpha_i c_{v_i} (\gamma_i - 1) \\ &= \frac{T}{\tau} (\gamma - 1) \sum_{i=1}^m \alpha_i c_{v_i} \end{aligned}$$

en ayant posé $\gamma = (\sum_{i=1}^m \alpha_i c_{v_i} \gamma_i) / \sum_{i=1}^m \alpha_i c_{v_i}$, qui est bien la formule de (6.6). Les températures T_i étant égales, on peut utiliser un artifice de calcul similaire à celui de la précédente démonstration : $T = (\sum_{i=1}^m \alpha_i c_{v_i} T_i) / \sum_{i=1}^m \alpha_i c_{v_i}$. Alors

$$\begin{aligned} p &= (\gamma - 1) \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i c_{v_i} T_i}{\tau} \\ &= (\gamma - 1) \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_i}{\tau} \\ &= (\gamma - 1) \frac{\varepsilon}{\tau}. \end{aligned}$$

Le fluide global est donc bien un gaz parfait, d'exposant adiabatique γ . ■

Chapitre 7

Ondes progressives

Tout ce que nous avons fait jusqu'à présent en ce qui concerne les modèles de mélange supposait la solution régulière. Lorsque la solution n'est pas régulière et dans le contexte des systèmes conservatifs, on peut parler de solution au sens des distributions, cela conduit aux relations classiques de Rankine-Hugoniot qui sont des relations entre la vitesse de propagation de la discontinuité et les états qu'elle sépare (pour ces relations, cf. [41], [83], [64]...). Cette notion de solution faible est suffisante pour prendre en compte les discontinuités et se passe des « solutions-ondes progressives » (voir ci-après, paragraphe 7.1).

Pour les systèmes non conservatifs, la définition des solutions au sens des distributions est inopérante (les produits non conservatifs n'ont pas de sens). La notion de solution-onde progressive permet de donner un sens aux équations, c'est cette notion que nous utilisons ici. De manière générale, en ce qui concerne les solutions discontinues de systèmes non conservatifs, on peut consulter [26], [63] ou [60]. Plus particulièrement, concernant les systèmes non conservatifs modélisant des fluides à plusieurs constituants (ou assimilés), on peut lire [79], [11], [61].

7.1 Quelques rappels

Considérons en dimension 1 le système hyperbolique non conservatif (7.1) ($U(t, x) \in \mathbb{R}^n$)

$$\partial_t U + A(U) \partial_x U = 0. \quad (7.1)$$

On le régularise au moyen d'un opérateur parabolique :

$$\partial_t U + A(U) \partial_x U = \mu \partial_x (D(U) \partial_x U), \quad (7.2)$$

où μ est un réel positif et $D(U)$ une matrice. Nous sommes intéressés par une certaine catégorie de solutions de ce système : les solutions-ondes progressives.

Définition 19

On appelle *solution-onde progressive* de (7.2) une solution $U(t,x)$ telle que

– il existe un réel σ (vitesse de progression) et une fonction $\hat{U}(\xi)$ vérifiant

$$U(t,x) = \hat{U}\left(\frac{x - \sigma t}{\mu}\right)$$

– il existe $\hat{U}_G \in \mathbb{R}^n$ (état gauche) et $\hat{U}_D \in \mathbb{R}^n$ (état droit) vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{U}(\xi) = \hat{U}_G, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{U}'(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{U}(\xi) = \hat{U}_D, \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{U}'(\xi) = 0; \end{array} \right. \quad (7.3)$$

■

Si $\sigma > 0$ (resp. $\sigma < 0$), \hat{U}_G est l'état après choc (resp. avant choc) et \hat{U}_D est l'état avant choc (resp. après choc). Lorsque $\sigma = 0$, la seule solution est $\hat{U}(\xi) = \hat{U}_G = \hat{U}_D \forall \xi$.

La fonction $\hat{U}(\xi)$ de la définition 19 vérifie le système différentiel ordinaire du second ordre

$$-\sigma \hat{U}' + A(\hat{U})\hat{U}' = (D(\hat{U})\hat{U}')'. \quad (7.4)$$

Remarquons que lorsque A dérive d'un potentiel ($\exists f(U)$ tel que $A(U) = \partial f / \partial U(U)$), le système (7.2) peut s'écrire sous la forme conservative

$$\partial_t U + \partial_x f(U) = \mu \partial_x (D(U) \partial_x U).$$

Le système différentiel ordinaire est dans ce cas

$$-\sigma \hat{U}' + f(\hat{U})' = (D(\hat{U})\hat{U}')'$$

et peut être intégré entre $-\infty$ et ξ . On obtient ce faisant

$$-\sigma(\hat{U} - \hat{U}_G) + f(\hat{U}) - f(\hat{U}_G) = D(\hat{U})\hat{U}' - \lim_{\xi \rightarrow -\infty} (D(\hat{U})\hat{U}') = D(\hat{U})\hat{U}'.$$

Si l'on intègre entre $-\infty$ et $+\infty$, on obtient les relations de Rankine-Hugoniot (voir la section 7.2 pour un peu plus de détails).

Si la matrice $D(\hat{U})$ est inversible, d'inverse $D^{-1}(\hat{U})$, \hat{U} vérifie le système différentiel ordinaire du premier ordre

$$\hat{U}' = D^{-1}(\hat{U})(-\sigma(\hat{U} - \hat{U}_G) + f(\hat{U}) - f(\hat{U}_G)).$$

7.2 Exemples pour des modèles conservatifs

Nous donnons dans ce paragraphe deux exemples de modèles de mélanges conservatifs avec leurs systèmes différentiels-ondes progressives associés. Nous ne prouvons pas l'existence de solutions à ces systèmes, réservant cette étude au cas plus difficile des systèmes non conservatifs (section 7.3).

Par exemple, parmi les modèles étudiés dans les chapitres précédents, le modèle isobare isotherme est totalement conservatif : les seules équations aux dérivées partielles sont les équations de conservation des masses de chaque constituant, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. En dimension 1 et en variable lagrangienne,

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m u = 0, \\ \partial_t \alpha_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1, \\ \partial_t u + \partial_m p = 0, \\ \partial_t e + \partial_m (pu) = 0. \end{cases}$$

Nous rappelons que ∂_m est l'opérateur de dérivation par rapport à la variable de masse (cf. [41], [83]).

On peut régulariser ce système ainsi

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m u = 0, \\ \partial_t \alpha_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1, \\ \partial_t u + \partial_m p = \mu \partial_m^2 u, \\ \partial_t e + \partial_m (pu) = \mu \partial_m (u \partial_m u) \end{cases}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$. C'est une régularisation de type « Navier-Stokes ». Dans ce cas, la matrice de dissipation n'est pas inversible, mais on peut tout de même obtenir un système différentiel de degré un :

$$\begin{cases} \hat{\tau} = \hat{\tau}_G - \frac{\hat{u} - \hat{u}_G}{\sigma}, \\ \hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_{iG} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1, \\ \hat{u}' = -\sigma(\hat{u} - \hat{u}_G) + (\hat{p} - \hat{p}_G), \\ \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_G + \frac{(\hat{u} - \hat{u}_G)^2}{2} + \frac{\hat{p}_G}{\sigma}(\hat{u} - \hat{u}_G). \end{cases} \quad (7.5)$$

Nous n'en ferons pas la démonstration explicite, mais cela peut se montrer de la même manière que le lemme 11 donné ci-dessous (lemme relatif à un modèle non conservatif). Nous renvoyons aussi à [41], [83], [28], [11]. Les relations $T_i = T_j$ et $p_i = p_j = p \forall i, j$ permettent de déduire de (7.5) les évolutions des variables propres (ε_i, τ_i) et de clore le problème.

Un autre exemple de système conservatif est le système isotherme avec $D_t \tau_i / \tau_i = D_t \tau_j / \tau_j \forall i, j$, système équivalent dans le formalisme développé ici à la loi de Dalton

(cf. section 6.2). Ce système paraît au premier abord non conservatif mais il possède en fait une forme équivalente conservative (et des relations de Rankine-Hugoniot associées). Pour l'obtenir, il suffit de remarquer que, sous l'hypothèse de régularité de la solution¹,

$$\frac{D_t \tau_i}{\tau_i} = D_t(\ln(\tau_i)).$$

Donc $D_t \tau_i / \tau_i = D_t \tau_j / \tau_j \iff D_t(\ln(\tau_i)) = D_t(\ln(\tau_j)) \iff D_t(\ln(\tau_i / \tau_j)) = 0$. La forme conservative suivante est donc équivalente (pour des solution régulières) à la forme étudiée jusqu'ici.

$$D_t\left(\frac{\tau_i}{\tau_j}\right) = 0,$$

ou aussi bien

$$D_t\left(\frac{\tau_i}{\tau}\right) = 0.$$

On pourra prendre comme système régularisé en variable de Lagrange

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m u = 0, \\ \partial_t \alpha_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1, \\ \partial_t u + \partial_m p = \mu \partial_m^2 u, \\ \partial_t e + \partial_m(pu) = \mu \partial_m(u \partial_m u) \\ \partial_t(\tau_i / \tau) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$. Ceci conduit au système différentiel

$$\begin{cases} \hat{\tau} = \hat{\tau}_G - \frac{\hat{u} - \hat{u}_G}{\sigma}, \\ \hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_{iG} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1, \\ \hat{u}' = -\sigma(\hat{u} - \hat{u}_G) + (\hat{p} - \hat{p}_G), \\ \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_G + \frac{(\hat{u} - \hat{u}_G)^2}{2} + \frac{\hat{p}_G}{\sigma}(\hat{u} - \hat{u}_G), \\ \frac{\hat{\tau}_i}{\hat{\tau}} = \frac{\hat{\tau}_{iG}}{\hat{\tau}_G} = \frac{\hat{\tau}_{iD}}{\hat{\tau}_D} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

C'est encore un système de degré un.

7.3 Les modèles non conservatifs

La difficulté de l'étude des systèmes non conservatifs provient du fait qu'on ne peut pas a priori intégrer le système (7.4). Le but est de montrer malgré cela l'existence et l'unicité d'une solution (pour un état avant choc ou après choc donné).

1. Si l'on suppose qu'il existe une solution-onde progressive au système sous forme non conservative régularisé, cette solution est régulière (voir ce qui est montré dans la suite pour un système non conservatif) et les formes conservatives suivantes sont bien équivalentes.

Parmi les systèmes que nous avons envisagés dans le chapitre de modélisation, certains ne peuvent pas se mettre sous une forme conservative. Il en est un sur lequel nous portons particulièrement notre attention (nous avons prouvé qu'il était hyperbolique au chapitre 5.2), c'est le modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur :

$$\begin{cases} p_i = p & \forall i, \\ T_i D_t S_i = T_j D_t S_j & \forall i, j. \end{cases}$$

Les équations $T_i D_t S_i = T_j D_t S_j$ ne sont pas conservatives.

C'est sur ce modèle particulier non conservatif que nous centrons l'étude des solutions-ondes progressives qui suit. Sous quelques hypothèses techniques, nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution-onde progressive pour ce modèle dans le cas où il y a deux gaz parfaits (théorème 19).

En variables de Lagrange, le système isobare avec équirépartition des quantités de chaleur à deux constituants s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m u = 0, \\ \partial_t \alpha_1 = 0, \\ \partial_t u + \partial_m p = 0, \\ \partial_t e + \partial_m (pu) = 0, \\ \partial_t \varepsilon_1 + p \partial_t \tau_1 = \partial_t \varepsilon_2 + p \partial_t \tau_2, \\ p_1 = p_2. \end{cases} \quad (7.6)$$

L'avant dernière ligne de (7.6) est équivalente à $\partial_t(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + p \partial_t(\tau_1 - \tau_2) = 0$.

Nous choisissons de régulariser ce système « à la Navier-Stokes », c'est à dire sans dissipation de masse. Nous proposons le système

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m u = 0, \\ \partial_t \alpha_1 = 0, \\ \partial_t u + \partial_m p = \mu \partial_m^2 u, \\ \partial_t e + \partial_m (pu) = \mu \partial_m (u \partial_m u), \\ \partial_t(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + p \partial_t(\tau_1 - \tau_2) = 0, \\ p_1 = p_2 = p. \end{cases} \quad (7.7)$$

Sous la réserve que ce système soit fermé (ce qui sera vérifié pour des gaz parfaits, voir la remarque 7.3.5), c'est un système de la forme (7.2) avec

$$U = (\tau, \alpha_1, u, e, (\varepsilon_1 - \varepsilon_2))^T,$$

$$D(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec la définition 19 et l'équation (7.4), une solution-onde progressive U de (7.7) est associée à une solution \hat{U} du système différentiel ordinaire de degré deux et de dimension cinq

$$\begin{cases} -\sigma\hat{\tau}' - \hat{u}' = 0, \\ \hat{\alpha}_1' = 0, \\ -\sigma\hat{u}' + \hat{p}' = \hat{u}'', \\ -\sigma\hat{e}' + (\hat{p}\hat{u})' = (\hat{u}\hat{u}')', \\ (\hat{\varepsilon}_1' - \hat{\varepsilon}_2') + \hat{p}(\hat{\tau}_1' - \hat{\tau}_2') = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{U}(\xi) = \hat{U}_G, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{U}'(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{U}(\xi) = \hat{U}_D, \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{U}'(\xi) = 0, \end{cases} \quad (7.9)$$

\hat{U} étant le vecteur des variables du système (7.8), $\hat{U} = (\hat{\tau}, \hat{\alpha}_1, \hat{u}, \hat{e}, \hat{\varepsilon}_1 - \hat{\varepsilon}_2)$, et en posant $\hat{U}_G = (\hat{\tau}_G, \hat{\alpha}_{1G}, \hat{u}_G, \hat{e}_G, \hat{\varepsilon}_{1G} - \hat{\varepsilon}_{2G})$ et $\hat{U}_D = (\hat{\tau}_D, \hat{\alpha}_{1D}, \hat{u}_D, \hat{e}_D, \hat{\varepsilon}_{1D} - \hat{\varepsilon}_{2D})$. Il faut noter que nous omettons systématiquement les équations de fermeture qui ne sont pas des équations différentielles (telles que $\hat{\alpha}_1\hat{\tau}_1 + \hat{\alpha}_2\hat{\tau}_2 = \hat{\tau}$, ou $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \hat{p}$).

Nous supposons dans la suite que $\sigma > 0$ car cela simplifie la discussion, mais ce n'est pas restrictif quant aux résultats. L'état avant choc est donc \hat{U}_D et l'état après choc est \hat{U}_G .

Nous considérons dans la suite un mélange de deux gaz parfaits. Leurs fonctions thermodynamiques sont données par

$$\begin{cases} p_1(\tau_1, \varepsilon_1) = (\gamma_1 - 1) \frac{\varepsilon_1}{\tau_1}, \\ \varepsilon_1 = c_{v1}T_1, \\ S_1(\tau_1, \varepsilon_1) = \ln(\varepsilon_1\tau_1^{\gamma_1-1}), \\ p_2(\tau_2, \varepsilon_2) = (\gamma_2 - 1) \frac{\varepsilon_2}{\tau_2}, \\ \varepsilon_2 = c_{v2}T_2, \\ S_2(\tau_2, \varepsilon_2) = \ln(\varepsilon_2\tau_2^{\gamma_2-2}), \end{cases} \quad (7.10)$$

γ_1 et γ_2 sont deux réels tels que $\gamma_1 > 1$ et $\gamma_2 > 1$, et c_{v1} et c_{v2} sont deux réels tels que $c_{v1} > 0$ et $c_{v2} > 0$.

Pour toute la suite, nous posons

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}_M = \max(\hat{\varepsilon}_{1G}, \hat{\varepsilon}_{2G}), \\ \hat{\varepsilon}_m = \min(\hat{\varepsilon}_{1G}, \hat{\varepsilon}_{2G}), \end{cases} \quad (7.11)$$

Ce sont des réels déterminés par la donnée après choc.

Théorème 19

On considère le problème (7.8), (7.9), (7.10) (problème d'ondes progressives pour un mélange de deux gaz parfaits isobare avec équirépartition des quantités de chaleur) avec $\sigma > 0$.

Supposons que les fractions massiques sont toutes deux non nulles : $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ et que les lois d'état sont différentes : $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Soit \hat{U}_G un état après choc donné tel que $\hat{p}_G > 0$, $\hat{\varepsilon}_{1G} > 0$, $\hat{\varepsilon}_{2G} > 0$, $\hat{\tau}_{1G} > 0$ et $\hat{\tau}_{2G} > 0$.

On suppose de plus que les deux hypothèses suivantes sont vérifiées.

- une hypothèse de type « hypothèse de Lax »² : σ vérifie

$$\sigma < \hat{\rho}_G \hat{c}_G ; \quad (7.12)$$

- une hypothèse de type « choc faible »³ : σ vérifie

$$\sigma^2 > \frac{\hat{p}_G^2}{2\hat{\varepsilon}_m} ; \quad (7.13)$$

Alors, il existe un unique état avant choc \hat{U}_D compressif (i.e. tel que $\hat{p}_G > \hat{p}_D$) tel que le problème (7.8), (7.9) ait une solution $\hat{U}(\xi)$. La solution est unique à une translation de ξ près. ■

Remarque 7.3.1

Les inégalités (7.12) et (7.13) ne sont pas a priori compatibles. Au cours de la démonstration, nous verrons que l'inégalité (7.14) est une condition suffisante pour que (7.12) et (7.13) soient compatibles.

$$2\hat{\varepsilon}_m > \frac{\hat{\alpha}_1(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1} \hat{\varepsilon}_{1G} + \frac{\hat{\alpha}_2(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2} \hat{\varepsilon}_{2G}. \quad (7.14)$$

■

Remarque 7.3.2

Les hypothèses techniques $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ne sont pas réductrices car si elles ne sont pas vérifiées le modèle de mélange dégénère (dans chacun de ces cas) vers un modèle mono-fluide et l'on est dans le cas conservatif (connu). ■

Remarque 7.3.3

L'hypothèse de choc faible (7.13) est une hypothèse technique sans laquelle nous n'arrivons pas au bout des calculs, mais elle ne nous paraît pas fondamentale et le théorème 19 doit rester vrai sans elle. ■

2. cf. [83].

3. L'encadrement $\frac{\hat{p}_G^2}{2\hat{\varepsilon}_m} < \sigma < \hat{\rho}_G \hat{c}_G$ implique (lorsqu'il est possible, i.e. sous la condition (7.14)) que σ est proche de $\hat{\rho}_G \hat{c}_G$, c'est-à-dire que la vitesse de l'onde est proche de la vitesse du son après choc, c'est pourquoi l'on parle de choc faible.

On trouve un résultat assez similaire à celui du théorème 19 dans [11] à propos des équations de Navier-Stokes à deux entropies et deux pressions. La démonstration que nous proposons est cependant différente.

Elle se fait en cinq étapes :

- lemme 11 : identification du problème à un système différentiel autonome de degré un et de dimension deux (réduction du problème) ;
- lemme 12 : démonstration de l'existence d'une solution locale autour de \hat{U}_G (par le théorème de la variété centrale et grâce à l'hypothèse de Lax) ;
- lemme 13 : prolongement sur \mathbb{R} entier de cette solution (par le théorème de Cauchy-Lipschitz et grâce à l'hypothèse de choc faible) ;
- lemme 15 : preuve du fait que la solution ainsi trouvée a une limite (et que sa dérivée converge vers 0) lorsque ξ tend vers $+\infty$;
- unicité à une translation de ξ près.

On note $[[\hat{U}(\xi)]] = \hat{U}(\xi) - \hat{U}_G$ ou, en omettant la variable ξ ,

$$[[\hat{U}]] = \hat{U} - \hat{U}_G. \quad (7.15)$$

Nous réutilisons ici des notations introduites lors de l'étude de l'hyperbolicité de ce système, nous les rappelons pour le cas de deux constituants.

$$a_i = \frac{\hat{\alpha}_i / \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i}}{\hat{\alpha}_1 / \left. \frac{\partial p_1}{\partial \tau_1} \right|_{S_1} + \hat{\alpha}_2 / \left. \frac{\partial p_2}{\partial \tau_2} \right|_{S_2}}. \quad (7.16)$$

Nous posons encore

$$\begin{cases} \omega = \frac{1}{\hat{\alpha}_1 / \left. \frac{\partial p_1}{\partial \tau_1} \right|_{S_1} + \hat{\alpha}_2 / \left. \frac{\partial p_2}{\partial \tau_2} \right|_{S_2}}, \\ \eta = \frac{a_1 \Gamma_1}{\hat{T}_1} + \frac{a_2 \Gamma_2}{\hat{T}_2}. \end{cases} \quad (7.17)$$

Les termes Γ_i ci-dessus sont les coefficients de Grüneisen des constituants (cf. [68]) :

$$\Gamma_i = \left. \frac{\partial p_i}{\partial S_i} \right|_{\tau_i}. \quad (7.18)$$

Comme les deux constituants sont des gaz parfaits, on a

$$\begin{cases} \Gamma_i = \gamma_i - 1, \\ \left. \frac{\partial p_i}{\partial \tau_i} \right|_{S_i} = -\frac{\gamma_i p_i}{\tau_i} \text{ pour } i = 1, 2, \\ \omega = \frac{\hat{\alpha}_1 \hat{\tau}_1}{\hat{\alpha}_1 \hat{\tau}_1 + \hat{\alpha}_2 \hat{\tau}_2}, \\ \eta = \frac{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 c_{v1} \hat{\varepsilon}_1} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 c_{v2} \hat{\varepsilon}_2}}{\frac{\hat{\alpha}_1 \hat{\tau}_1}{\gamma_1} + \frac{\hat{\alpha}_2 \hat{\tau}_2}{\gamma_2}}. \end{cases} \quad (7.19)$$

Lemme 11

Nous utilisons les notations (7.15), (7.16), (7.17).

Considérons la condition limite à gauche

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{U}(\xi) = \hat{U}_G, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \hat{U}'(\xi) = 0. \end{cases} \quad (7.20)$$

Supposons que $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$.

Alors, le système (7.8),(7.20) avec les lois de gaz parfaits (7.10) est équivalent au système différentiel autonome de degré un et de dimension deux

$$\begin{cases} \hat{u}' = -\sigma[[\hat{u}]] + [[\hat{p}]], \\ \hat{p}' = -\frac{\omega}{\sigma}(-\sigma[[\hat{u}]] + [[\hat{p}]]) - \frac{\eta}{\sigma}(-\sigma[[\hat{u}]] + [[\hat{p}]])^2 \end{cases} \quad (7.21)$$

associé aux formules suivantes (7.22) pour les autres variables du système.

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_{1G}, \\ \hat{\tau} = \hat{\tau}_G - \frac{[[\hat{u}]]}{\sigma}, \\ \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_G + \frac{[[\hat{u}]]^2}{2} + \frac{\hat{p}_G}{\sigma} [[\hat{u}]], \\ \hat{\varepsilon}_1 = \frac{\hat{p}\hat{\tau} - (\gamma_2 - 1)\hat{\varepsilon}}{\hat{\alpha}_1(\gamma_1 - \gamma_2)}, \\ \hat{\varepsilon}_2 = \frac{\hat{\varepsilon} - \hat{\alpha}_1\hat{\varepsilon}_1}{\hat{\alpha}_2}, \\ \hat{\tau}_1 = \frac{(\gamma_1 - 1)\hat{\varepsilon}_1}{\hat{p}}, \\ \hat{\tau}_2 = \frac{\hat{\tau} - \hat{\alpha}_1\hat{\tau}_1}{\hat{\alpha}_2}. \end{cases} \quad (7.22)$$

■

Remarque 7.3.4

ω et η sont des fonctions qui dépendent des variables propres du système $(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{T}_1, \hat{T}_2)$, donc le système différentiel (7.21) n'est pas découplé du système (7.22).

Ces fonctions ω et η sont très régulières tant que les variables propres sont strictement positives.

■

Preuve du lemme 11

La première étape est une intégration de toutes les équations intégrables du système (7.8) (c'est-à-dire des équations conservatives du système d'équations aux dérivées partielles régulier (7.7)). L'intégration des 4 premières équations de (7.8) donne

$$\begin{cases} -\sigma[[\hat{\tau}]] - [[\hat{u}]] = 0, \\ [[\hat{\alpha}_1]] = 0, \\ -\sigma[[\hat{u}]] + [[\hat{p}]] = [[\hat{u}']] = \hat{u}', \\ -\sigma[[\hat{\varepsilon}]] + [[\hat{p}\hat{u}]] = [[\hat{u}\hat{u}']] = \hat{u}\hat{u}'. \end{cases}$$

Ce système peut être écrit de manière plus explicite :

$$\begin{cases} \hat{\tau} = \hat{\tau}_G - \frac{[\hat{u}]}{\sigma}, \\ \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_{1G}, \\ \hat{u}' = -\sigma[\hat{u}] + [\hat{p}], \\ -\sigma[\hat{\varepsilon}] - \sigma\frac{[\hat{u}^2]}{2} + [\hat{p}\hat{u}] = \hat{u}\hat{u}'. \end{cases}$$

Nous avons obtenu la première équation de (7.8) et les deux premières équations de (7.22). D'autre part, la dernière équation du système ci-dessus donne, en y remplaçant \hat{u}' par son expression donnée par la troisième ligne,

$$\begin{aligned} [\hat{\varepsilon}] &= -\frac{[\hat{u}^2]}{2} + \frac{[\hat{p}\hat{u}]}{\sigma} - \hat{u}(-[\hat{u}] + \frac{[\hat{p}]}{\sigma}) \\ &= \frac{-\hat{u}^2 + \hat{u}_G^2}{2} + \frac{\hat{p}\hat{u} - \hat{p}_G\hat{u}_G}{\sigma} + \hat{u}^2 - \hat{u}\hat{u}_G + \frac{-\hat{u}\hat{p} + \hat{u}\hat{p}_G}{\sigma} \\ &= \frac{[\hat{u}]^2}{2} + \frac{\hat{p}_G}{\sigma}[\hat{u}], \end{aligned}$$

soit la troisième ligne du système (7.22). Pour montrer la seconde ligne de (7.8), nous utilisons les notations (7.16), (7.17), (7.18) et nous réécrivons une expression de \hat{p}' trouvée lors de l'étude de l'hyperbolicité de ce modèle (seconde partie du théorème 17) : $a_1 + a_2 = 1$ et $\hat{p}_1' = \hat{p}_2'$, donc $\hat{p}' = a_1\hat{p}_1' + a_2\hat{p}_2'$, donc

$$\hat{p}' = a_1 \left. \frac{\partial p_1}{\partial \tau_1} \right|_{S_1} \hat{\tau}_1' + a_1 \left. \frac{\partial p_1}{\partial S_1} \right|_{\tau_1} \hat{S}_1' + a_2 \left. \frac{\partial p_2}{\partial \tau_2} \right|_{S_2} \hat{\tau}_2' + a_2 \left. \frac{\partial p_2}{\partial S_2} \right|_{\tau_2} \hat{S}_2'.$$

De même que dans la démonstration de l'hyperbolicité du modèle,

$$\begin{aligned} a_1 \left. \frac{\partial p_1}{\partial \tau_1} \right|_{S_1} \hat{\tau}_1' + a_2 \left. \frac{\partial p_2}{\partial \tau_2} \right|_{S_2} \hat{\tau}_2' &= \omega(\hat{\alpha}_1\hat{\tau}_1' + \hat{\alpha}_2\hat{\tau}_2') \\ &= \omega\hat{\tau}'. \end{aligned}$$

Dans le théorème 17, \hat{S}_1' et \hat{S}_2' étaient nuls. Ce n'est pas le cas ici car le système a été régularisé au moyen d'un opérateur de dissipation. Nous avons

$$\hat{S}_i' = \frac{1}{\hat{T}_i}(\hat{\varepsilon}_i' + \hat{p}\hat{\tau}_i')$$

et (c'est notre choix de modèle de mélange ici)

$$\hat{\varepsilon}_1' + \hat{p}\hat{\tau}_1' = \hat{\varepsilon}_2' + \hat{p}\hat{\tau}_2' = \hat{\varepsilon}' + \hat{p}\hat{\tau}'.$$

On en déduit que

$$+a_1 \left. \frac{\partial p_1}{\partial S_1} \right|_{\tau_1} \hat{S}_1' + a_2 \left. \frac{\partial p_2}{\partial S_2} \right|_{\tau_2} \hat{S}_2' = \left(\frac{a_1\Gamma_1}{\hat{T}_1} + \frac{a_2\Gamma_2}{\hat{T}_2} \right) (\hat{\varepsilon}' + \hat{p}\hat{\tau}') = \eta(\hat{\varepsilon}' + \hat{p}\hat{\tau}')$$

(η est défini en (7.17)). Donc

$$\hat{p}' = \omega\hat{\tau}' + \eta(\hat{\varepsilon}' + \hat{p}\hat{\tau}'). \quad (7.23)$$

On fait maintenant un calcul de $\hat{\varepsilon}'$ en reprenant (7.8). La quatrième équation de ce système donne

$$-\sigma\hat{\varepsilon}' - \sigma\hat{u}\hat{u}' + (\hat{p}\hat{u})' = \hat{u}\hat{u}'' + (\hat{u}')^2,$$

soit, en remplaçant $\hat{u}\hat{u}''$ par $\hat{u}(-\sigma\hat{u}' + \hat{p}')$ (troisième ligne de (7.8)) et après simplification,

$$\hat{\varepsilon}' = \frac{\hat{p}\hat{u}'}{\sigma} - \frac{(\hat{u}')^2}{\sigma}.$$

La première ligne de (7.8) identifie $\hat{p}\hat{u}'/\sigma$ à $-\hat{p}\hat{\tau}'$, donc

$$\hat{\varepsilon}' + \hat{p}\hat{\tau}' = -\frac{(\hat{u}')^2}{\sigma}.$$

En conclusion de ce calcul,

$$\hat{p}' = \omega\hat{\tau}' - \frac{\eta}{\sigma}(\hat{u}')^2,$$

soit

$$\hat{p}' = -\frac{\omega}{\sigma}\hat{u}' - \frac{\eta}{\sigma}(\hat{u}')^2,$$

ce qui prouve la seconde ligne de (7.21). On a montré que la solution de (7.8),(7.9), si elle existe, est solution de (7.21), (7.22). En reprenant les mêmes arguments, on peut montrer que la solution de (7.21), (7.22), si elle existe, est solution de (7.8),(7.9). Ceci termine la démonstration du lemme 11. ■

Remarque 7.3.5

Au passage, nous avons vu que le système était fermé, puisque la donnée de \hat{u} et de \hat{p} permet de calculer toutes les variables du système grâce au système (7.22). ■

Nous avons identifié notre problème d'ondes progressives à un système différentiel ordinaire d'ordre un et de dimension deux :

$$X'(\xi) = f(X(\xi)) \tag{7.24}$$

avec

$$\begin{cases} X(\xi) = (\hat{u}(\xi), \hat{p}(\xi))^T, \\ f(\hat{u}, \hat{p}) = \begin{pmatrix} -\sigma[\hat{u}] + [\hat{p}] \\ -\frac{\omega}{\sigma}(-\sigma[\hat{u}] + [\hat{p}]) - \frac{\eta}{\sigma}(-\sigma[\hat{u}] + [\hat{p}])^2 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{7.25}$$

Remarque 7.3.6

Comme nous en avons déjà fait la remarque (remarque 7.3.4), les nombres ω et η sont eux-mêmes des fonctions de \hat{u} et \hat{p} , fonctions données par les formules (7.22) et (7.19). Notons E l'ensemble des points (\hat{u}, \hat{p}) de \mathbb{R}^2 tels que $\hat{\varepsilon}_1 > 0$, $\hat{\varepsilon}_2 > 0$, $\hat{\tau}_1 > 0$ et $\hat{\tau}_2 > 0$. Cet ensemble est l'image réciproque d'un ouvert de \mathbb{R}^4 (le quadrant des quatre coordonnées positives, que nous noterons F dans la suite) par une application

de classe C^∞ , celle qui à (\hat{u}, \hat{p}) associe $(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$ grâce aux formules (7.22) (cette application sera notée Γ dans la suite). Donc E est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Sur cet ouvert, ω et η sont des fonctions de classe C^∞ de (\hat{u}, \hat{p}) . Donc f est un champ de vecteurs de classe C^∞ sur E . Pour condenser les définitions introduites,

$$\Gamma : \begin{cases} E = \Gamma^{-1}(F) & \longrightarrow & F = (\mathbb{R}^{+*})^4, \\ (\hat{u}, \hat{p}) & \longmapsto & (\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2) \end{cases} \quad \text{par les formules (7.22).} \quad (7.26)$$

■

La difficulté de résolution de ce système différentiel vient du fait que ce n'est pas un problème de Cauchy : la donnée est la valeur de X en $-\infty$ qui est un point stationnaire :

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} f(X(\xi)) = f(\hat{u}_G, \hat{p}_G) = 0.$$

Comme la valeur de X est donnée en un point stationnaire et, on ne sait pas a priori si une solution peut « décoller » de cette donnée. En fait, cela est possible ; c'est la teneur du lemme 12 qui utilise un élément de la théorie de la linéarisation des système différentiels au voisinage de leurs points d'équilibre : le théorème de la variété centrale.

Lemme 12

Supposons que l'état après choc donné est tel que $\hat{p}_G > 0$, $\hat{\varepsilon}_{1G} > 0$, $\hat{\varepsilon}_{2G} > 0$, $\hat{\tau}_{1G} > 0$, $\hat{\tau}_{2G} > 0$, et notons ω_G la valeur de ω en ce point après choc.

Faisons l'hypothèse sur σ

$$\sigma^2 < -\omega_G$$

(hypothèse de Lax (7.12)).

Alors il existe au voisinage de (\hat{u}_G, \hat{p}_G) , dans le plan (\hat{u}, \hat{p}) , une courbe C , variété de dimension un de classe C^∞ , paramétrée par $s \mapsto (C_u(s), C_p(s))$ ($s \in \mathbb{R}$) telle que

- C passe par (\hat{u}_G, \hat{p}_G) , i.e. $\exists s_G$ tel que $(C_u(s_G), C_p(s_G)) = (\hat{u}_G, \hat{p}_G)$;
- C est tangente au vecteur $(1, -\omega_G/\sigma)$ en (\hat{u}_G, \hat{p}_G) , i.e. $\nabla(C_u, C_p)(s_G)$ est proportionnel à $(1, -\omega_G/\sigma)$;
- C est invariante par le flot de (7.24), (7.25), i.e. si $X(0) \in C$, $X(\xi) \in C \forall \xi$;
- si $X(0) \in C$, $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} X(\xi) = X_G = (\hat{u}_G, \hat{p}_G)$.

■

Ce lemme se montre facilement grâce au théorème de la variété centrale, que l'on trouvera dans [7] et que nous rappelons ici.

Théorème 20 (variété centrale)

Soit un problème différentiel dans \mathbb{R}^n

$$Y'(\xi) = g(Y(\xi))$$

où $g : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs de classe $C^{r+1}(\mathbb{R}^n)$ ($r \in \mathbb{N}$).
Supposons que $g(Y_0) = 0$ ($Y_0 \in \Omega$). Soient

- T^s l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres de partie réelle strictement négative de $\nabla g(Y_0)$;
- T^i l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres de partie réelle strictement positive de $\nabla g(Y_0)$;
- T^c l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres de partie réelle nulle de $\nabla g(Y_0)$.

(On a $\mathbb{R}^n = T^s \oplus T^i \oplus T^c$).

Alors, il existe trois variétés W^s , W^i et W^c de classe C^{r+1} , C^{r+1} et C^r telles que

- $Y_0 \in W^s \cap W^i \cap W^c$;
- en Y_0 , W^s est tangente à T^s , W^i est tangente à T^i et W^c est tangente à T^c ;
- si $\exists \xi$ tel que $Y(\xi) \in W^s$, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Y(\xi) = Y_0$;
- si $\exists \xi$ tel que $Y(\xi) \in W^i$, $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y(\xi) = Y_0$.

La variété W^s est appelée variété stable, W^i est la variété instable et W^c la variété centrale. ■

Preuve du lemme 12

La démonstration consiste d'abord à montrer que l'on est dans le cadre d'application du théorème de la variété centrale. Pour cela, on commence par remarquer qu'il existe un voisinage de (\hat{u}_G, \hat{p}_G) sur lequel le champ de vecteurs $f(\hat{u}, \hat{p})$ de (7.25) est de classe C^∞ : cela vient de l'hypothèse de positivité stricte de toutes les variables au point après choc : $(\hat{\varepsilon}_{1G}, \hat{\varepsilon}_{2G}, \hat{\tau}_{1G}, \hat{\tau}_{2G}) \in F = (\mathbb{R}^{+*})^4 \implies (\hat{u}_G, \hat{p}_G) \in E = \Gamma^{-1}(F)$.

Sur ce voisinage, on peut utiliser le théorème de la variété centrale (avec $n = 2$, $\Omega = E$ et $g = f$). Un calcul simple donne $\nabla f(\hat{u}_G, \hat{p}_G)$:

$$\nabla f(\hat{u}_G, \hat{p}_G) = \begin{pmatrix} -\sigma & 1 \\ \omega_G & -\frac{\omega_G}{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont 0 et $(-\sigma - \omega_G/\sigma)$, et les vecteurs propres associés sont respectivement $(1, \sigma)^T$ et $(1, -\omega_G/\sigma)^T$. Nous faisons dans toute la suite l'hypothèse que $-\sigma - \omega_G/\sigma > 0$, soit $\omega_G < -\sigma^2$ (voir à ce sujet la remarque 7.3.7). D'après le théorème de la variété centrale, il existe dans un voisinage de (\hat{u}_G, \hat{p}_G) une variété centrale W^c (associée à la valeur propre 0) de dimension un de classe C^∞ tangente à $(1, \sigma)$ en (\hat{u}_G, \hat{p}_G) , et une variété instable W^i (associée à la valeur propre $(-\sigma - \omega_G/\sigma)$ positive par hypothèse) de dimension un de classe C^∞ tangente à $(1, -\omega_G/\sigma)$ en (\hat{u}_G, \hat{p}_G) . Cette variété W^i , toujours d'après le théorème de la variété centrale, vérifie toutes les propriétés de la variété C du lemme 12. Donc on peut prendre $C = W^i$. C est de classe C^∞ . ■

Remarque 7.3.7

En reprenant l'équation intermédiaire (7.23) de la démonstration du lemme 11, on trouve immédiatement que les nombres ω et η sont tels que

$$\hat{p}' = \omega \hat{\tau}' + \eta \hat{S}'.$$

En faisant le même calcul pour le système d'équations aux dérivées partielles (non ondes progressives) en variable d'Euler, on trouverait

$$D_t p = \omega D_t \tau + \eta D_t S.$$

Par analogie avec le cas mono-constituant, ceci nous conduit à définir la vitesse du son c dans le fluide global en écrivant (nous l'avons déjà fait dans la remarque 5.2.2)

$$\omega = -\frac{c^2}{\tau^2}.$$

L'hypothèse $\omega_G < -\sigma^2$ revient à

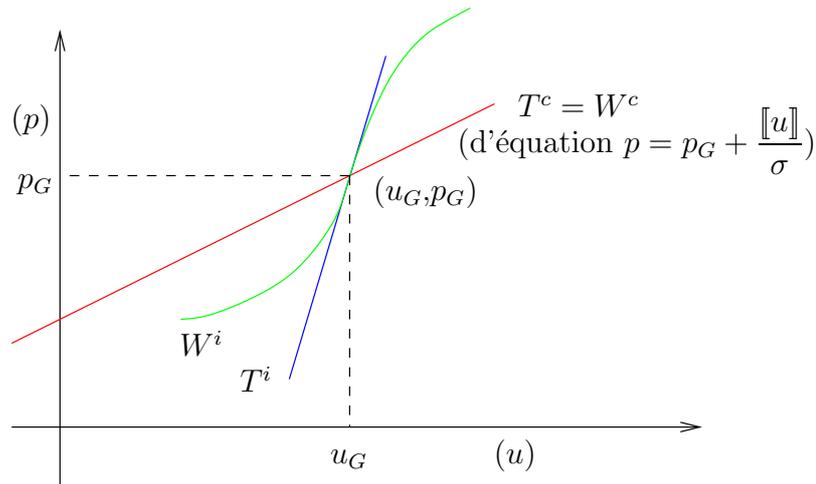
$$c_G^2 > \sigma^2 \tau_G^2,$$

ou encore

$$\rho_G c_G > \sigma.$$

C'est l'inégalité (7.12), condition de type « condition de choc de Lax » (cf. [83]). ■

Il est profitable de visualiser les variétés centrale et instable.



Maintenant que nous sommes assurés de l'existence de cette variété C instable de vecteur directeur $(1, -\omega/\sigma)^T$ en (\hat{u}_G, \hat{p}_G) , notons qu'elle n'est pas tangente à la droite $T^c = W^c$ d'équation

$$-\sigma[\hat{u}] + [\hat{p}] = 0,$$

car le vecteur directeur de cette droite est $(1, \sigma)^T$, il n'est pas colinéaire à $(1, -\omega/\sigma)^T$ sous l'hypothèse $\omega_G < -\sigma^2$. D'autre part, cette variété W^i étant de classe C^∞ , elle possède une unique branche au dessus de T^c et une unique branche au dessous de T^c (ces deux branches se raccordant de manière C^∞). Nous n'insisterons pas sur ce point, mais la régularité de la variété a ici une importance (elle doit être au minimum de classe C^1 , ce qui est assuré si le champ de vecteurs est de classe C^1 d'après le théorème de la variété centrale).

En conséquence, il existe un point (\hat{u}_0, \hat{p}_0) dans un voisinage de (\hat{u}_G, \hat{p}_G) tel que $(\hat{u}_0, \hat{p}_0) \in C$ et $(\hat{u}_0, \hat{p}_0) \notin T^c$. Ce couple (\hat{u}_0, \hat{p}_0) vérifie donc

- $-\sigma \llbracket \hat{u}_0 \rrbracket + \llbracket \hat{p}_0 \rrbracket \neq 0$;
- si $X(0) = (\hat{u}_0, \hat{p}_0)$, $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} X(\xi) = (\hat{u}_G, \hat{p}_G)$.

Plus précisément, on a le choix entre (\hat{u}_0, \hat{p}_0) tel que $-\sigma \llbracket \hat{u}_0 \rrbracket + \llbracket \hat{p}_0 \rrbracket > 0$ ou $-\sigma \llbracket \hat{u}_0 \rrbracket + \llbracket \hat{p}_0 \rrbracket < 0$ (un point de chaque côté de la droite T^c). Nous choisissons un point tel que $-\sigma \llbracket \hat{u}_0 \rrbracket + \llbracket \hat{p}_0 \rrbracket < 0$, car l'autre possibilité conduit à une solution non compressive (telle que $\hat{p}_G < \hat{p}_D$) comme nous le verrons dans la remarque 7.3.8. De plus, on peut prendre (\hat{u}_0, \hat{p}_0) aussi proche de (\hat{u}_G, \hat{p}_G) que l'on veut, donc on peut le prendre tel que $\hat{p}_0 > 0$, $\hat{\varepsilon}_{10} > 0$, $\hat{\varepsilon}_{20} > 0$, $\hat{\tau}_{10} > 0$ et $\hat{\tau}_{20} > 0$ (grâce à la régularité de la solution, et ces variables étant calculées à partir de \hat{u}_G et \hat{p}_G grâce aux formules (7.22)).

La prochaine étape consiste à choisir ce point compressif et à étudier le problème de Cauchy constitué de (7.21), (7.22) et de la donnée initiale $(\hat{u}(0), \hat{p}(0)) = (\hat{u}_0, \hat{p}_0)$.

Lemme 13

Considérons le problème différentiel (7.21), (7.22). Soit $(\hat{u}_0, \hat{p}_0, \hat{\varepsilon}_{10}, \hat{\varepsilon}_{20}, \hat{\tau}_{10}, \hat{\tau}_{20})$ tel que

- $(\hat{u}_0, \hat{p}_0) \in C$ (C est la courbe dont il est question dans le lemme 12) ;
- $-\sigma \llbracket \hat{u}_0 \rrbracket + \llbracket \hat{p}_0 \rrbracket < 0$;
- $\hat{\varepsilon}_{10}, \hat{\varepsilon}_{20}, \hat{\tau}_{10}$ et $\hat{\tau}_{20}$ sont calculés en fonction de \hat{u}_0 et \hat{p}_0 selon les formules (7.22) ;
- $\hat{p}_0 > 0, \hat{\varepsilon}_{10} > 0, \hat{\varepsilon}_{20} > 0, \hat{\tau}_{10} > 0, \hat{\tau}_{20} > 0$;

Faisons de plus l'hypothèse

$$\sigma^2 > \frac{\hat{p}_G^2}{2\hat{\varepsilon}_m}$$

(hypothèse de faiblesse du choc (7.13)).

Alors, le problème de Cauchy (7.21), (7.22) avec

$$(\hat{u}(0), \hat{p}(0)) = (\hat{u}_0, \hat{p}_0) \tag{7.27}$$

admet une solution définie sur \mathbb{R} entier ($\xi \in \mathbb{R}$). ■

Pour démontrer ce lemme, nous utilisons deux théorèmes de base de la théorie des systèmes d'équations différentielles ordinaires ; le théorème de Cauchy-Lipschitz

([67], [90]) et le théorème des bouts([67]). Nous les rappelons. Nous rappelons aussi deux définitions (définitions 20 et 21) auxquelles ils font appel.

Définition 20 (solution maximale)

Soit un système différentiel

$$\begin{cases} Y'(\xi) = g(\xi, Y(\xi)), \\ Y(0) = Y^0, \end{cases} \quad (7.28)$$

où $\xi \in \mathbb{R}$, $g : I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, I est un intervalle de \mathbb{R} , et soit $Y^0 \in \Omega$. Soit $Y :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (7.28).

On dit que Y est une solution maximale s'il n'existe pas de solution de (7.28) $\tilde{Y} :]\tilde{a}, \tilde{b}[\rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $]a, b[\subset]\tilde{a}, \tilde{b}[$ (avec inclusion stricte). ■

Une solution maximale est une solution définie sur le plus grand intervalle possible.

Théorème 21 (Cauchy-Lipschitz)

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'(\xi) = g(\xi, Y(\xi)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (7.29)$$

où $\xi \in \mathbb{R}$, $Y(\xi) \in \mathbb{R}^n$, et g est une application qui va de Ω dans \mathbb{R}^n , pour un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Supposons que

- g est continue sur Ω ;
- g est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.

Alors, il existe une unique solution maximale de (7.29). ■

Définition 21 (bout droit (resp. gauche))

Soit $Y :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution du système différentiel (7.29). On appelle bout droit (resp. gauche) de cette solution l'ensemble des valeurs d'adhérence de l'application G définie par

$$G : \begin{cases}]a, b[\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ \xi \mapsto (\xi, Y(\xi)) \end{cases}$$

lorsque ξ tend vers b (resp a). ■

Le bout droit (resp. gauche) est de la forme $\{b\} \times A$ (resp. $\{a\} \times A$), où A est l'ensemble des valeurs d'adhérence de $Y(\xi)$ lorsque ξ tend vers b (resp. a). L'intervalle $]a, b[$ est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$, on peut avoir en particulier $a = -\infty$ ou (et) $b = \infty$.

Théorème 22 (bouts)

Soit $Y(\xi)$ une solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'(\xi) = g(\xi, Y(\xi)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (7.30)$$

où $\xi \in \mathbb{R}$, $Y(\xi) \in \mathbb{R}^n$, et g est une application qui va de Ω dans \mathbb{R}^n , pour un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Supposons (comme pour le théorème de Cauchy-Lipschitz) que

- g est continue sur Ω ;
- g est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.

Alors, le bout droit et le bout gauche, s'ils ne sont pas vides, sont contenus dans la frontière de Ω (ouvert sur lequel g est définie et vérifie les conditions de Cauchy-Lipschitz). ■

Nous utiliserons aussi le lemme suivant pour démontrer le lemme 13.

Lemme 14

Soit $(\hat{u}, \hat{p}, \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$ une solution du problème de Cauchy (7.21), (7.22), (7.27), la condition initiale étant choisie comme au lemme 13.

Elle vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}' \leq 0, \\ \hat{p}' \leq 0, \\ \hat{\tau}' \geq 0, \\ \hat{T}_1 \hat{S}_1' \leq 0, \\ \hat{T}_2 \hat{S}_2' \leq 0, \\ \hat{\varepsilon}_1' \leq 0 \text{ tant que } \hat{T}_1 \geq 0, \\ \hat{\varepsilon}_2' \leq 0 \text{ tant que } \hat{T}_2 \geq 0. \end{array} \right. \quad (7.31)$$

■

Preuve du lemme 14

La condition initiale (\hat{u}_0, \hat{p}_0) est choisie telle que

$$[p] \leq \sigma[u].$$

Cela reste le cas pour tout $\xi \in]a, b[$, car s'il existait un ξ tel que $[p] > \sigma[u]$, la solution étant continue, il existerait ξ_s tel que $[p] = \sigma[u]$, ce qui annulerait f et rendrait la solution stationnaire pour $\xi \geq \xi_s$. Cela prouve que $\hat{u}' \leq 0$, et $\hat{\tau}' \geq 0$. D'autre part, pour tout $(\hat{u}, \hat{p}) \in E$, $\omega \leq 0$ et $\eta \geq 0$, donc $\hat{p}' \leq 0$.

On fait maintenant un petit calcul facile (en utilisant les relations données par (7.8)).

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 \hat{T}_1 \hat{S}_1' + \hat{\alpha}_2 \hat{T}_2 \hat{S}_2' &= \hat{\varepsilon}' + \hat{p} \hat{\tau}' \\ &= \hat{\varepsilon}' - \hat{u} \hat{u}' + \hat{p} \hat{\tau}' \\ &= \frac{(\hat{p} \hat{u})' - (\hat{u} \hat{u}')}{\sigma} - \hat{u} \hat{u}' - \frac{\hat{p} \hat{u}'}{\sigma} \\ &= -\frac{(\hat{u}')^2}{\sigma} + \frac{\hat{p}' \hat{u} - \hat{u} \hat{u}''}{\sigma} - \hat{u} \hat{u}' \\ &= -\frac{(\hat{u}')^2}{\sigma} \leq 0. \end{aligned}$$

(Cela signifie que $\hat{T}\hat{S}' \leq 0$). En utilisant maintenant l'équation d'équirépartition des quantités de chaleur $\hat{T}_1\hat{S}_1' = \hat{T}_2\hat{S}_2'$, on en déduit que $\hat{T}_1\hat{S}_1' = \hat{T}_2\hat{S}_2' \leq 0$.

Il ne reste à montrer que la décroissance des énergie internes propres. La loi de gaz parfait donne pour \hat{S}_1

$$\begin{aligned}\hat{S}_1 &= \ln(\hat{\varepsilon}_1\hat{\tau}_1^{\gamma_1-1}) \\ &= \ln((\gamma_1 - 1)^{\gamma_1-1}\hat{\varepsilon}_1^{\gamma_1}/\hat{p}^{\gamma_1-1}).\end{aligned}$$

Donc

$$\hat{\varepsilon}_1 = \sqrt[\gamma_1]{\frac{e^{\hat{S}_1}\hat{p}^{\gamma_1-1}}{(\gamma_1 - 1)^{\gamma_1-1}}}.$$

Si $\hat{T}_1 > 0$, \hat{S}_1 est décroissant. Comme \hat{p} est décroissant aussi, $\hat{\varepsilon}_1$ est décroissant. Il en est de même pour $\hat{\varepsilon}_2$ si $\hat{T}_2 > 0$. ■

Preuve du lemme 13

La démonstration que nous proposons pour ce lemme est un peu longue mais ne comporte aucun point difficile. Sa structure est la suivante.

- Nous montrons que sous l'hypothèse (7.13), la solution (tant qu'elle existe) reste dans un compact qui est inclus dans l'ouvert dans lequel le champ de vecteur f est défini et vérifie les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.
- En conséquence, grâce au théorème des bouts, nous montrons que la solution maximale est définie sur $] -\infty, \infty[$.

Le champ de vecteur f , donné par (7.25), ne dépend pas de ξ . Nous sommes en présence d'un système différentiel autonome. Puisque la condition initiale (\hat{u}_0, \hat{p}_0) est dans E (elle est telle que $\hat{\varepsilon}_{10} > 0$, $\hat{\varepsilon}_{20} > 0$, $\hat{\tau}_{10} > 0$ et $\hat{\tau}_{20} > 0$), ouvert de \mathbb{R}^2 sur lequel f est de classe C^∞ (et vérifie donc les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz), le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale au problème différentiel (7.21), (7.22) avec comme condition initiale

$$(\hat{u}(0), \hat{p}(0)) = (\hat{u}_0, \hat{p}_0).$$

Notons $]a, b[$ l'intervalle sur lequel cette solution maximale est définie. On sait que $a = -\infty$ car la condition initiale (\hat{u}_0, \hat{p}_0) est issue du point gauche (\hat{u}_G, \hat{p}_G) (cf. lemme 12). Il reste à montrer que $b = \infty$.

Montrons que cette solution maximale reste dans un compact contenu dans E . On reprend l'expression de $\hat{\varepsilon}$.

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} &= \hat{\varepsilon}_G + \frac{[\hat{u}]^2}{2} + \frac{\hat{p}_G}{\sigma}[\hat{u}] \\ &= \frac{1}{2}([\hat{u}] + \frac{\hat{p}_G}{\sigma})^2 + \hat{\varepsilon}_G - \frac{\hat{p}_G^2}{2\sigma^2} \\ &\geq \hat{\varepsilon}_G - \frac{\hat{p}_G^2}{2\sigma^2}.\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $\sigma^2 > \frac{\hat{p}_G^2}{2\hat{\varepsilon}_m}$, on sait qu'il existe un réel δ tel que $\hat{\varepsilon}_m > \delta > 0$ et

$$\sigma^2 = \frac{\hat{p}_G^2}{2(\hat{\varepsilon}_m - \delta)}.$$

En reportant cette expression de σ^2 dans l'inégalité sur $\hat{\varepsilon}$ que l'on vient d'obtenir, on a

$$\hat{\varepsilon} \geq \hat{\varepsilon}_G - (\hat{\varepsilon}_m - \delta) = \hat{\varepsilon}_M + \delta.$$

Nous en déduisons que $\hat{\varepsilon}_1$ reste borné par $\delta/\hat{\alpha}_1$:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_1 &= \frac{\hat{\varepsilon} - \hat{\alpha}_2 \hat{\varepsilon}_2}{\hat{\alpha}_1} \\ &\geq \frac{\hat{\varepsilon}_M + \delta - \hat{\alpha}_2 \hat{\varepsilon}_2}{\hat{\alpha}_1}. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 14, on sait que $\hat{\varepsilon}_2 \geq \hat{\varepsilon}_{2G}$, donc

$$\hat{\varepsilon}_1 > \frac{\hat{\varepsilon}_M + \delta - \hat{\alpha}_2 \hat{\varepsilon}_{2G}}{\hat{\alpha}_1} \geq \frac{\delta}{\hat{\alpha}_1} = \frac{\delta}{\hat{\alpha}_{1G}}$$

(rappelons que $\hat{\varepsilon}_M = \max(\hat{\varepsilon}_{1G}, \hat{\varepsilon}_{2G})$). On peut montrer de la même manière que

$$\hat{\varepsilon}_2 \geq \frac{\delta}{\hat{\alpha}_{2G}}.$$

D'autre part, comme $\hat{p}' \leq 0$ (cf. lemme 14), $\hat{p} \leq \hat{p}_G$, et

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1 &= \frac{(\gamma_1 - 1)\hat{\varepsilon}_1}{\hat{p}} \\ &\geq \frac{(\gamma_1 - 1)\delta/\hat{\alpha}_{1G}}{\hat{p}_G}. \end{aligned}$$

De même,

$$\hat{\tau}_2 \geq \frac{(\gamma_2 - 1)\delta/\hat{\alpha}_{2G}}{\hat{p}_G}.$$

De plus, on sait que la solution est telle que $\llbracket \hat{p} \rrbracket \leq \sigma \llbracket \hat{u} \rrbracket$ car la condition initiale (\hat{u}_0, \hat{p}_0) vérifie cette inégalité (elle est en dessous de la droite T^c du lemme 12), et si la solution ne la vérifiait pas, par continuité, il existerait un ξ tel que $\llbracket \hat{p} \rrbracket = \sigma \llbracket \hat{u} \rrbracket$, et la solution serait stationnaire à partir de ce ξ , le champ de vecteur f s'annulant.

Donc

$$\llbracket \hat{\tau} \rrbracket = \frac{\llbracket \hat{u} \rrbracket}{\sigma} \leq -\frac{\llbracket \hat{p} \rrbracket}{\sigma^2} < \frac{\hat{p}_G}{\sigma^2}$$

(\hat{p} est positif puisque les variables propres le sont). On retiendra que

$$\hat{\tau} \leq \hat{\tau}_G + \frac{\hat{p}_G}{\sigma^2}.$$

Cela assure les majorations

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\tau}_1 \leq \frac{\hat{\tau}_G + \hat{p}_G/\sigma^2}{\hat{\alpha}_{1G}}, \\ \hat{\tau}_2 \leq \frac{\hat{\tau}_G + \hat{p}_G/\sigma^2}{\hat{\alpha}_{2G}}. \end{array} \right.$$

Nous avons obtenu les encadrements des variables propres suivants.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta}{\hat{\alpha}_{1G}} \leq \hat{\varepsilon}_1 \leq \hat{\varepsilon}_{1G}, \\ \frac{\delta}{\hat{\alpha}_{2G}} \leq \hat{\varepsilon}_2 \leq \hat{\varepsilon}_{2G}, \\ \frac{(\gamma_1 - 1)\delta/\hat{\alpha}_{1G}}{\hat{p}_G} \leq \hat{\tau}_1 \leq \frac{\hat{\tau}_G + \hat{p}_G/\sigma^2}{\hat{\alpha}_{1G}}, \\ \frac{(\gamma_2 - 1)\delta/\hat{\alpha}_{2G}}{\hat{p}_G} \leq \hat{\tau}_2 \leq \frac{\hat{\tau}_G + \hat{p}_G/\sigma^2}{\hat{\alpha}_{2G}}. \end{array} \right. \quad (7.32)$$

Ces encadrements ne dépendent que des données à gauche et de σ . Ils expriment que $(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$ (le vecteur des variables propres associées à la solution maximale du problème de Cauchy) reste dans un compact contenu dans le quadrant des coordonnées positives de \mathbb{R}^4 noté F (pour les définitions de Γ , E et F , on renvoie au schéma (7.26)). Ceci achève la première partie de la démonstration.

Le vecteur solution (\hat{u}, \hat{p}) reste lui aussi dans un compact de \mathbb{R}^2 , puisque l'on a toujours

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p} \leq \hat{p}_G, \\ \hat{u} \leq \hat{u}_G, \\ \hat{p} \geq 0, \\ \hat{u} \geq \llbracket \hat{p} \rrbracket / \sigma + \hat{u}_G \geq \hat{u}_G - \hat{p}_G / \sigma. \end{array} \right.$$

Donc le vecteur (\hat{u}, \hat{p}) a des valeurs d'adhérence lorsque ξ tend vers b . Soit V_A l'ensemble des valeurs d'adhérence de (\hat{u}, \hat{p}) . Le bout droit de la solution n'est pas vide, il est $\{b\} \times V_A$. D'après le théorème des bouts, le bout droit est inclus dans le bord de $\mathbb{R} \times E$. Nécessairement, ou bien b appartient au bord de \mathbb{R} ou bien V_A est inclus dans le bord de E .

Nous montrons qu'il est impossible que V_A soit inclus dans le bord de E , ce qui prouve que b appartient au bord de \mathbb{R} . Soit (\hat{u}_A, \hat{p}_A) une valeur d'adhérence, et supposons qu'elle appartienne au bord de E . Cela signifie que $(\hat{u}_A, \hat{p}_A) \notin E$ et qu'il existe une suite de E $(\hat{u}_n, \hat{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{u}_n, \hat{p}_n) = (\hat{u}_A, \hat{p}_A).$$

D'une part, le fait que $(\hat{u}_A, \hat{p}_A) \notin E$ signifie exactement (par définition de E comme image réciproque de F par Γ) que

$$\Gamma(\hat{u}_A, \hat{p}_A) = (\hat{\varepsilon}_{1A}, \hat{\varepsilon}_{2A}, \hat{\tau}_{1A}, \hat{\tau}_{2A}) \notin \Gamma(E) = F.$$

D'autre part, comme l'application Γ , définie par les formules (7.22), qui à (\hat{u}, \hat{p}) associe $(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$ est régulière,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\varepsilon}_{1n}, \hat{\varepsilon}_{2n}, \hat{\tau}_{1n}, \hat{\tau}_{2n}) = (\hat{\varepsilon}_{1A}, \hat{\varepsilon}_{2A}, \hat{\tau}_{1A}, \hat{\tau}_{2A}) \in \overline{F}.$$

Donc $(\hat{\varepsilon}_{1A}, \hat{\varepsilon}_{2A}, \hat{\tau}_{1A}, \hat{\tau}_{2A})$ appartient au bord de F , ce qui est impossible puisque ce vecteur est dans un compact contenu dans F (cf. encadrements (7.32)). La conclusion est que V_A n'appartient pas au bord de E . Donc b appartient au bord de $\overline{\mathbb{R}}$. On a nécessairement $b = +\infty$. La solution maximale est définie sur \mathbb{R} entier ! ■

Nous sommes maintenant munis d'une solution définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Il nous reste à étudier ses propriétés en $+\infty$ pour vérifier que c'est une onde progressive.

Lemme 15

La solution du problème différentiel (7.21), (7.22) dont nous avons montré l'existence sur \mathbb{R} entier a une limite notée (\hat{u}_D, \hat{p}_D) en $\xi = +\infty$ et cette limite vérifie

$$f(\hat{u}_D, \hat{p}_D) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, sa dérivée (par rapport à ξ) a une limite en $\xi = +\infty$ et cette limite est $(0,0)$. ■

Preuve du lemme 15

Nous l'avons déjà remarqué et utilisé dans la démonstration précédente, le vecteur (\hat{u}, \hat{p}) reste dans un compact pour tout ξ . Il possède donc une valeur d'adhérence que nous notons $(\hat{u}_\circ, \hat{p}_\circ)$. Supposons qu'il existe une deuxième valeur d'adhérence, que nous notons alors $(\hat{u}_\square, \hat{p}_\square)$. Les composantes du vecteur étant monotones (cf. lemme 14), on a nécessairement $\hat{u}_\circ \geq \hat{u}_\square$ et $\hat{u}_\square \geq \hat{u}_\circ$, ainsi que $\hat{p}_\circ \geq \hat{p}_\square$ et $\hat{p}_\square \geq \hat{p}_\circ$. Donc, $\hat{u}_\circ = \hat{u}_\square$, et $\hat{p}_\circ = \hat{p}_\square$ ⁴. La valeur d'adhérence est donc unique, c'est une limite, nous la notons (\hat{u}_D, \hat{p}_D) .

Nous allons maintenant montrer que (\hat{u}', \hat{p}') converge vers 0. Comme

$$(\hat{u}, \hat{p}) \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} (\hat{u}_D, \hat{p}_D)$$

et que f est continue, on a

$$(\hat{u}', \hat{p}') = f(\hat{u}, \hat{p}) \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} f(\hat{u}_D, \hat{p}_D).$$

Il est évident que si $f(\hat{u}_D, \hat{p}_D)$ n'était pas nul, la solution ne serait pas stationnaire en (\hat{u}_D, \hat{p}_D) , c'est ce que nous précisons ci-après. Définissons la suite $(\hat{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\hat{u}_n = \hat{u}(n).$$

Par une intégration (formelle) de l'équation différentielle sur \hat{u} , on a pour tout entier n

$$\hat{u}_{n+1} - \hat{u}_n = \int_n^{n+1} -\sigma[\hat{u}] + [\hat{p}] d\xi,$$

4. $\circ = \square$!

d'où

$$|\hat{u}_{n+1} - \hat{u}_n| = \left| \int_n^{n+1} -\sigma[\hat{u}] + [\hat{p}] d\xi \right| = \int_n^{n+1} |-\sigma[\hat{u}] + [\hat{p}]| d\xi$$

car $-\sigma[\hat{u}] + [\hat{p}] \leq 0$. La convergence de $-\sigma[\hat{u}] + [\hat{p}]$ vers $-\sigma(\hat{u}_D - \hat{u}_G) + \hat{p}_D - \hat{p}_G$ implique que pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|-\sigma[\hat{u}] + [\hat{p}]| \geq |-\sigma(\hat{u}_D - \hat{u}_G) + \hat{p}_D - \hat{p}_G| - \epsilon$ si $n \geq N$. Pour tout $n \geq N$ on a donc

$$|\hat{u}_{n+1} - \hat{u}_n| \geq |-\sigma(\hat{u}_D - \hat{u}_G) + \hat{p}_D - \hat{p}_G| - \epsilon,$$

ce qui n'est compatible avec la convergence de la suite (\hat{u}_n) que si $-\sigma(\hat{u}_D - \hat{u}_G) + \hat{p}_D - \hat{p}_G \leq \epsilon$, et ceci quel que soit ϵ . Donc, le point avant choc (à droite) vérifie $f(\hat{u}_D, \hat{p}_D) = 0$. La solution est bien une onde progressive. ■

Remarque 7.3.8

Si l'on avait choisit la branche supérieure de la variété instable W^i , la solution (éventuelle) n'aurait pas pu être compressive : elle aurait nécessairement vérifié $\hat{p}_G < \hat{p}_D$. En effet, elle aurait vérifié $-\sigma[\hat{u}] + [\hat{p}] > 0$ et $\hat{u}' \geq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ (inégalités analogues à celles du lemme 14), donc $[\hat{u}] > 0$, donc $\hat{p} > \hat{p}_G + \sigma[\hat{u}] > \hat{p}_G$. Il s'agirait d'une onde progressive associée à un choc non compressif. Nous l'écartons de la discussion. ■

Nous avons réuni tous les éléments nécessaires à la démonstration du théorème 19.

Démonstration du théorème 19

D'après le lemme 11, il est équivalent d'étudier le problème (7.8) et le problème (7.21). Sous l'hypothèse (7.12), le lemme 12 assure l'existence d'une solution locale autour de \hat{U}_G vérifiant les hypothèses du théorème 19. Sous l'hypothèse (7.13), le lemme 13 assure le prolongement sur \mathbb{R} de cette solution. Les hypothèses (7.12) et (7.13) sont-elles compatibles? Oui, sous l'hypothèse (7.14). Montrons-le. L'hypothèse (7.14), à savoir

$$2\hat{\varepsilon}_m > \frac{\hat{\alpha}_1(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1} \hat{\varepsilon}_{1G} + \frac{\hat{\alpha}_2(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2} \hat{\varepsilon}_{2G},$$

est équivalente à

$$2\hat{\varepsilon}_m > \frac{\hat{\alpha}_1}{\gamma_1} \hat{p}_G \hat{\tau}_{1G} + \frac{\hat{\alpha}_2}{\gamma_2} \hat{p}_G \hat{\tau}_{2G}$$

(en utilisant les lois d'état (7.10)), ou encore

$$\frac{\hat{p}_G^2}{2\hat{\varepsilon}_m} < \frac{\hat{p}_G}{\frac{\hat{\alpha}_1}{\gamma_1} \hat{\tau}_{1G} + \frac{\hat{\alpha}_2}{\gamma_2} \hat{\tau}_{2G}}.$$

D'après l'expression (7.19), cela revient à

$$\frac{\hat{p}_G^2}{2\hat{\varepsilon}_m} < -\omega_G,$$

soit, selon l'expression de ω_G donnée dans la remarque 7.3.7,

$$\frac{\hat{p}_G^2}{2\hat{\varepsilon}_m} < \hat{\rho}_G^2 \hat{c}_G^2.$$

Sous cette hypothèse, il est bien possible de choisir σ tel que

$$\sigma^2 < \hat{\rho}_G^2 \hat{c}_G^2 \text{ (hypothèse (7.12))}$$

et

$$\sigma^2 > \frac{\hat{p}_G^2}{2\hat{\varepsilon}_m} \text{ (hypothèse (7.13)).}$$

(D'autre part, l'hypothèse (7.14) qui assure cette compatibilité est possible à vérifier : il suffit par exemple que $\hat{\alpha}_{1G}\hat{\varepsilon}_{1G}$ soit proche de $\hat{\alpha}_{2G}\hat{\varepsilon}_{2G}$, ou que γ_1 et γ_2 soient assez proches de 0.)

Il reste à démontrer l'unicité. Supposons qu'il existe deux solutions (\hat{u}_a, \hat{p}_a) et (\hat{u}_b, \hat{p}_b) qui ont la même valeur au point gauche, c'est-à-dire que

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\hat{u}_a, \hat{p}_a) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\hat{u}_b, \hat{p}_b) = (\hat{u}_G, \hat{p}_G).$$

Ces deux solutions définissent donc deux variétés (peut-être égales) de classe C^∞ de dimension un, qui sont des variétés instables pour le champ de vecteurs f au point (\hat{u}_G, \hat{p}_G) , que nous notons W_a^i et W_b^i :

$$\begin{cases} W_a^i = \{(\hat{u}_a, \hat{p}_a); \xi \in \mathbb{R}\}, \\ W_b^i = \{(\hat{u}_b, \hat{p}_b); \xi \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Par ailleurs, tout point (\hat{u}, \hat{p}) d'une de ces deux variétés vérifie

$$\hat{p} \leq \hat{p}_G + \sigma \llbracket \hat{u} \rrbracket$$

si nous écartons les solutions non compressives. Or d'après le théorème de la variété centrale il n'y a qu'une telle branche instable en dessous de la droite T^c au voisinage du point après choc (\hat{u}_G, \hat{p}_G) . Il en résulte que $W_a^i \cap \mathcal{O} = W_b^i \cap \mathcal{O}$ pour un certain voisinage \mathcal{O} de (\hat{u}_G, \hat{p}_G) , ce qui signifie que si $(\hat{u}_a(\xi), \hat{p}_a(\xi)) \in \mathcal{O}$ et $(\hat{u}_b(\xi), \hat{p}_b(\xi)) \in \mathcal{O}$, il existe $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(\hat{u}_a(\xi), \hat{p}_a(\xi)) = (\hat{u}_b(\xi - \xi_0), \hat{p}_b(\xi - \xi_0))$. Donc la solution est unique à une translation de la variable ξ près tant qu'elle reste dans \mathcal{O} . Le théorème de Cauchy-Lipshitz (théorème 21) assure l'unicité (à la même translation près) de la solution maximale. Une conséquence évidente est que la limite en $\xi = +\infty$, au point droit, est unique.

Le théorème 19 est démontré. ■

Conclusion partielle (pour la partie II)

Nous rappelons ici les principaux résultats que nous avons obtenus.

- Nous avons construit un ensemble de modèles de dynamique des fluides mélangés à une seule vitesse basé sur des considérations thermodynamiques ;
- la base thermodynamique de l'élaboration assure une cohérence avec les équations d'Euler classiques dans le cas où les fluides sont séparés par des interfaces (théorème 16) ; afin de prendre en compte le mélange numérique qui apparaît dans cette situation, nous avons autorisé dans nos jeux d'équations des fractions massiques différentes de 1 et 0 ;
- les systèmes obtenus sont constitués des équations conservatives habituelles (masse, quantité de mouvement, énergie totale) et d'équations non conservatives traduisant les échanges d'énergie ou d'entropie entre les constituants ;
- tous ces systèmes ont une écriture eulérienne et une écriture lagrangienne ;
- une grande partie de ces modèles se présente sous la forme de systèmes hyperboliques (théorème 17 et théorème 18) ;
- nous avons vérifié que cet ensemble inclut des modèles classiques et identifié la loi de Dalton dans notre formalisme ;
- enfin, nous nous sommes intéressés aux solutions discontinues (chocs) en étudiant les solutions-ondes progressives d'un modèle régularisé par un opérateur parabolique (existence et unicité d'une solution dans le théorème 19).

Troisième partie

Résolution numérique des problèmes de mélange en dimensions un et deux

Dans cette partie, nous nous attachons à la résolution numérique des problèmes de fluides eulériens compressibles à plusieurs lois d'état. Cette partie se présente naturellement comme l'application des techniques d'algorithmes non dissipatifs, développées dans la partie I, aux problèmes de fluides à plusieurs espèces que nous avons posés dans la partie II.

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction de la partie II, les modèles décrits peuvent être utilisés pour des problèmes de vrai mélange (mélange intime, figure 1.1) ou des problèmes d'interface (mélange numérique, figure 1.2).

La résolution numérique de ces problèmes est riche de méthodes différentes. Nous citons les trois les plus répandues :

- les méthodes de résolution directe, qui consistent à discrétiser les équations du fluide à plusieurs constituants « brut de fonderie » (cf. [1], [4], [18], [2], [2], [80], [81], [66], [43]...);
- les méthodes de suivi d'interface, qui reposent sur un calcul de la position de l'interface à chaque pas de temps (voir [12], [39]...);
- les méthodes de type « level-set » ou « volume of fluid », pour lesquelles on utilise une variable supplémentaire, advectée pour connaître la position de l'interface (cf. [35], [42]).

Les deux derniers types de méthodes sont utilisés pour résoudre des problèmes d'interfaces seulement.

Nous choisissons pour toute la suite une méthode de résolution numérique de type direct, parce que d'une part cette méthode permet de traiter le cas des mélanges aussi bien que des interfaces et d'autre part elle nous paraît la plus élémentaire, ne faisant intervenir que les équations de conservation de la physique. L'inconvénient récurrent de ce type de résolution directe est la dissipation numérique, le cas le plus défavorable étant celui des interfaces. Mais nous avons les moyens d'éviter cette dissipation : ils sont développés dans la partie I. L'idée d'utiliser le décentrage aval sous contraintes (pour ses propriétés de stabilité et d'antidissipation) est tout à fait naturelle car les fractions massiques des constituants sont régies par des équations d'advection.

Le mode de résolution numérique choisi est une décomposition Lagrange-projection des équations d'Euler. Nous proposons dans la phase de projection le décentrage aval sous contraintes amont des flux des fractions massiques. Il faut noter que nous n'avons pas tenté, comme dans le chapitre 3 de la partie I de décentrer vers l'aval les flux des variables thermodynamiques ρ , ρu et ρe . L'enjeu, qui nous paraît essentiel, est ici d'obtenir des interfaces parfaites.

Chapitre 1

Schéma numérique pour les équations d'Euler à plusieurs espèces

Le schéma que nous proposons est le schéma de type « Lagrange + projection » développé dans [28]. Il sera appliqué à chacun des systèmes (1.1), (1.2) et (1.3). Son grand intérêt est qu'il laisse libre le choix des flux pour la discrétisation des équations de concentration. Nous choisirons de décentrer les flux des fractions massiques vers l'aval sous des contraintes de stabilité du même type qu'au théorème 2 (contraintes « amont »). La prise en compte de ces contraintes est justifiée car les fractions massiques sont solutions d'équations d'advection.

1.1 Introduction et précision du problème

Pour simplifier le texte, nous nous restreignons au cas de deux constituants. Nous indiquons cependant que les algorithmes peuvent être écrits pour un nombre quelconque de constituants avec une faible augmentation de la difficulté.

Parmi tous les modèles évoqués dans la partie I, nous avons dû faire le choix de ceux que nous allons discrétiser. Nous en avons sélectionné trois :

- le modèle isobare isotherme, pour sa simplicité ;
- le modèle que nous avons identifié à la loi de Dalton, pour la généralité de son emploi ;
- le modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur, par goût.

Nous rappelons les équations auxquelles ils correspondent.

Modèle isobare isotherme

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_1) + \partial_x(\rho u \alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_2) + \partial_x(\rho u \alpha_2) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0, \\ \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 = \tau, \\ \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = \varepsilon, \\ p_1 = p_2 = p, \\ T_1 = T_2, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

les températures propres T_1 , T_2 et les pressions propres p_1 , p_2 étant calculées grâce à leur variables propres associées (τ_1, ε_1) , (τ_2, ε_2) . La vitesse du son du mélange est donnée pour des gaz parfaits par

$$c = \sqrt{\alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2}.$$

Remarque 1.1.1

Les termes « isobare » et « isotherme » signifient pour nous que $p_1 = p_2$ et $T_1 = T_2$ en chaque point du mélange et non que la pression et la températures sont constantes dans tout le mélange. ■

Modèle de Dalton

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_1) + \partial_x(\rho u \alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_2) + \partial_x(\rho u \alpha_2) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0, \\ \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 = \tau, \\ \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = \varepsilon, \\ p = \frac{\alpha_1 \tau_1}{\tau} p_1 + \frac{\alpha_2 \tau_2}{\tau} p_2, \\ \partial_t(\rho \frac{\tau_1}{\tau_2}) + \partial_x(\rho u \frac{\tau_1}{\tau_2}) = 0, \\ T_1 = T_2. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Nous avons montré que ce modèle était équivalent au modèle de Dalton ([56]) ainsi qu'à un modèle de convection des paramètres de pression ([80]). La vitesse du son dans le mélange vaut

$$c = \sqrt{\alpha_1 c_1^2 + \alpha_2 c_2^2}.$$

Modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur

Le terme « équirépartition des quantités de chaleur » signifie que les variables propres des constituants varient de manière à ce que

$$\delta Q_1 = \delta Q_2,$$

soit

$$T_1 D_t S_1 = T_2 D_t S_2,$$

soit aussi

$$D_t \varepsilon_1 + p_1 D_t \tau_1 = D_t \varepsilon_2 + p_2 D_t \tau_2,$$

où D_t est l'opérateur de dérivation lagrangienne, $D_t = \partial_t + u \partial_x$. Le modèle est par ailleurs isobare : $p_1 = p_2$. En définitive,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_1) + \partial_x(\rho u \alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_2) + \partial_x(\rho u \alpha_2) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0, \\ \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 = \tau, \\ \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = \varepsilon, \\ p_1 = p_2 = p, \\ T_1 D_t S_1 = T_2 D_t S_2. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

La formule qui donne la vitesse du son de mélange est

$$\frac{\tau^2}{c^2} = \alpha_1 \frac{\tau_1^2}{c_1^2} + \alpha_2 \frac{\tau_2^2}{c_2^2}.$$

Remarque 1.1.2

Ce dernier modèle n'est pas conservatif (équation $T_1 D_t S_1 = T_2 D_t S_2$). ■

Remarque 1.1.3

Pour tous les modèles de mélange, nous écrivons les deux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho \alpha_1) + \partial_x(\rho u \alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_2) + \partial_x(\rho u \alpha_2) = 0, \end{array} \right.$$

mais l'on pourrait écrire au lieu de cela

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho \alpha_1) + \partial_x(\rho u \alpha_1) = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \end{array} \right.$$

qui est équivalent, mais occulte la symétrie des équations pour les deux espèces. ■

Nous pouvons maintenant passer à la résolution numérique.

Nous avons choisi de résoudre ces système au moyen d'une décomposition Lagrange-projection. Le schéma général est développé dans [28]. Du point de vue des notations, les schémas « Lagrange + projection » étant très consommateurs d'indices de temps, nous ne présentons les schémas que sur un pas de temps ; les variables avant calcul ne portent pas d'indice de temps, les variables après la phase lagrangienne sont surmontées d'un tilde (\tilde{x}), et les variables en fin de calcul, après la phase de projection, sont surmontées d'un chapeau (\hat{x}). Afin d'améliorer la lisibilité, nous agrandissons les tildes et les chapeaux, et nous noterons $\widetilde{x_{j+1/2}}$, $\widetilde{y_{1,j}}$, $\widehat{y_{1,j}}$ (...) au lieu de $\tilde{x}_{j+1/2}$, $\widetilde{y}_{1,j}$, $\widehat{y}_{1,j}$ (...).

Nous avons déjà utilisé ce type de décomposition de flux dans la partie I et nous rappelons ici les deux étapes numériques pour les variables thermodynamiques ρ , ρu et ρe .

Phase lagrangienne

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j \frac{\widetilde{\tau_j} - \tau_j}{\Delta t} - \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \widetilde{\alpha_{1,j}} = \alpha_{1,j}, \\ \widetilde{\alpha_{2,j}} = \alpha_{2,j}, \\ \rho_j \frac{\widetilde{u_j} - u_j}{\Delta t} + \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \rho_j \frac{\widetilde{e_j} - e_j}{\Delta t} + \frac{p_{j+1/2} u_{j+1/2} - p_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0. \end{array} \right.$$

Phase de projection

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\widehat{\rho_j} - \rho_j}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} u_{j-1/2}}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho_j} \widetilde{\alpha_{1,j}} - \rho_j \alpha_{1,j}}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} \alpha_{1,j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} \alpha_{1,j-1/2} u_{j-1/2}}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho_j} \widetilde{\alpha_{2,j}} - \rho_j \alpha_{2,j}}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} \alpha_{2,j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} \alpha_{2,j-1/2} u_{j-1/2}}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho_j} \widetilde{u_j} - \rho_j u_j}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} u_{j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} u_{j-1/2} u_{j-1/2}}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho_j} \widetilde{e_j} - \rho_j e_j}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} e_{j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} e_{j-1/2} u_{j-1/2}}}{\Delta x} = 0. \end{array} \right.$$

Schéma global

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\rho}_j - \rho_j + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} u_{j-1/2}}}{\Delta t} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho}_j \widehat{\alpha}_{1,j} - \rho_j \alpha_{1,j}}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} \alpha_{1,j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} \alpha_{1,j-1/2} u_{j-1/2}}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho}_j \widehat{\alpha}_{2,j} - \rho_j \alpha_{2,j}}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} \alpha_{2,j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} \alpha_{2,j-1/2} u_{j-1/2}}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho}_j \widehat{u}_j - \rho_j u_j}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} u_{j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} u_{j-1/2} u_{j-1/2}} + p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho}_j \widehat{e}_j - \rho_j e_j}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} e_{j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} e_{j-1/2} u_{j-1/2}} + p_{j+1/2} u_{j+1/2} - p_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0. \end{array} \right.$$

Toute la spécificité du schéma réside dans le calcul des flux, en particulier des flux de la phase de projection.

1.2 Phase lagrangienne

Dans toute la phase lagrangienne, les inconnues sont les variables surmontées d'un tilde.

Cette phase du calcul numérique est une résolution approchée du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \partial_t \tau = \partial_x u, \\ \rho \partial_t u = -\partial_x p, \\ \rho \partial_t e = -\partial_x (pu), \\ \rho \partial_t \alpha_1 = 0, \\ \rho \partial_t \alpha_2 = 0, \end{array} \right. \quad (1.4)$$

complété par les relations de fermeture qui expriment le modèle du mélange choisi.

Pour le modèle isobare isotherme, on ajoute les lois implicites

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 = \tau, \\ \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = \varepsilon, \\ p_1 = p_2 = p, \\ T_1 = T_2. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Pour la loi de Dalton, la fermeture est

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 = \tau, \\ \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = \varepsilon, \\ p = \frac{\alpha_1 \tau_1}{\tau} p_1 + \frac{\alpha_2 \tau_2}{\tau} p_2, \\ \rho \partial_t \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right) = 0, \\ T_1 = T_2. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Et pour l'équirépartition des quantités de chaleur, les équations (1.7) complètent le système.

$$\begin{cases} \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 = \tau, \\ \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = \varepsilon, \\ p_1 = p_2 = p, \\ \partial_t \varepsilon_1 + p_1 \partial_t \tau_1 = \partial_t \varepsilon_2 + p_2 \partial_t \tau_2. \end{cases} \quad (1.7)$$

La discrétisation de ces équations repose sur la définition des quantités de bords suivantes (cf. [28], [30], [29]), qui sont équivalentes aux valeurs de bords données par un solveur de Riemann approché particulier.

$$\begin{cases} \rho^* c_{j+1/2} = \sqrt{\max(\rho_j c_j^2, \rho_{j+1} c_{j+1}^2) \min(\rho_j, \rho_{j+1})}, \\ p_{j+1/2} = \frac{p_j + p_{j+1}}{2} + \frac{\rho^* c_{j+1/2}}{2} (u_j - u_{j+1}), \\ u_{j+1/2} = \frac{1}{2\rho^* c_{j+1/2}} (p_j - p_{j+1}) + \frac{(u_j + u_{j+1})}{2}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Pour tous j, n , le nombre c_j est la vitesse du son dans la maille j au pas de temps n . Quand le fluide est un mélange de plusieurs constituants, la vitesse du son dépend du modèle de mélange choisi ; ces vitesses du son ont été explicitées lors du rappel sur les modèles. La convergence du schéma ne dépend pas de la manière dont on calcule cette vitesse du son dans le fluide ni de la formule qui donne le paramètre $\rho^* c_{j+1/2}$ et la formule donnée est celle qui rend la condition CFL la moins stricte (cf. [30]), mais on peut en choisir une autre, ce qui revient sans doute à utiliser un solveur de Riemann approché différent.

Nous posons comme d'habitude $\lambda = \Delta t / \Delta x$. Les équations discrètes associées au système (1.4) sont

$$\begin{cases} \rho_j (\widetilde{\tau}_j - \tau_j) = \lambda (u_{j+1/2} - u_{j-1/2}), \\ \rho_j (\widetilde{u}_j - u_j) = -\lambda (p_{j+1/2} - p_{j-1/2}), \\ \rho_j (\widetilde{e}_j - e_j) = -\lambda (p_{j+1/2} u_{j+1/2} - p_{j-1/2} u_{j-1/2}), \\ \widetilde{\alpha}_{1,j} = \alpha_{1,j}, \\ \widetilde{\alpha}_{2,j} = \alpha_{2,j}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les équations discrètes complètes de la phase lagrangienne pour chaque modèle.

1.3 Équations discrètes pour le modèle isobare isotherme

Le système discret pour ce modèle est constitué du système (1.9) et de

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha}_{1,j}\widetilde{\tau}_{1,j} + \widetilde{\alpha}_{2,j}\widetilde{\tau}_{2,j} = \widetilde{\tau}_j, \\ \widetilde{\alpha}_{1,j}\widetilde{\varepsilon}_{1,j} + \widetilde{\alpha}_{2,j}\widetilde{\varepsilon}_{2,j} = \widetilde{\varepsilon}_j, \\ \widetilde{p}_{1,j} = \widetilde{p}_{2,j}, \\ \widetilde{T}_{1,j} = \widetilde{T}_{2,j}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Le système (1.9) est explicite et découplé des équations (1.10), qui sont elles implicites et nécessitent dans le cas général l'utilisation d'un algorithme de Newton. Cependant, dans le cas de deux gaz parfaits, on trouve une formule explicite et exacte pour calculer les nouvelles valeurs des variables propres.

Proposition 11

Si les deux constituants sont des gaz parfaits d'exposants adiabatiques γ_1, γ_2 et de capacités calorifiques c_{v1}, c_{v2} , le système isobare isotherme est équivalent au système « explicite » (c'est un système triangulaire et on peut le résoudre directement dans l'ordre où les variables sont présentées).

$$\begin{cases} \rho_j(\widetilde{\tau}_j - \tau_j) = \lambda(u_{j+1/2} - u_{j-1/2}), \\ \rho_j(\widetilde{u}_j - u_j) = -\lambda(p_{j+1/2} - p_{j-1/2}), \\ \rho_j(\widetilde{e}_j - e_j) = -\lambda(p_{j+1/2}u_{j+1/2} - p_{j-1/2}u_{j-1/2}), \\ \widetilde{\alpha}_{1,j} = \alpha_{1,j}, \\ \widetilde{\alpha}_{2,j} = \alpha_{2,j}, \\ \widetilde{\varepsilon}_{1,j} = \frac{c_{v1}}{\widetilde{\alpha}_{1,j}c_{v1} + \widetilde{\alpha}_{2,j}c_{v2}}\widetilde{\varepsilon}_j, \\ \widetilde{\varepsilon}_{2,j} = \frac{c_{v2}}{\widetilde{\alpha}_{1,j}c_{v1} + \widetilde{\alpha}_{2,j}c_{v2}}\widetilde{\varepsilon}_j, \\ \widetilde{\tau}_{1,j} = \frac{\widetilde{\tau}_j}{\widetilde{\alpha}_{1,j} + \widetilde{\alpha}_{2,j}\frac{(\gamma_2-1)\widetilde{\varepsilon}_{2,j}}{(\gamma_1-1)\widetilde{\varepsilon}_{1,j}}}, \\ \widetilde{\tau}_{2,j} = \frac{\widetilde{\tau}_j}{\widetilde{\alpha}_{2,j} + \widetilde{\alpha}_{1,j}\frac{(\gamma_1-1)\widetilde{\varepsilon}_{1,j}}{(\gamma_2-1)\widetilde{\varepsilon}_{2,j}}}. \end{cases} \quad (1.11)$$

■

1.4 Équations discrètes pour le modèle de Dalton

Nous prenons en plus du système (1.9) les équations

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha}_{1,j}\widetilde{\tau}_{1,j} + \widetilde{\alpha}_{2,j}\widetilde{\tau}_{2,j} = \widetilde{\tau}_j, \\ \widetilde{\alpha}_{1,j}\widetilde{\varepsilon}_{1,j} + \widetilde{\alpha}_{2,j}\widetilde{\varepsilon}_{2,j} = \widetilde{\varepsilon}_j, \\ \widetilde{\tau}_{1,j}\widetilde{\tau}_{1,j} = \widetilde{\tau}_{2,j}\widetilde{\tau}_{2,j}, \\ \widetilde{T}_{1,j} = \widetilde{T}_{2,j}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Cette fois encore, les équations du mélange sont implicites. Et cette fois encore, le calcul est explicite dans le cas de deux gaz parfaits.

Proposition 12

Avec les hypothèses et les notations de la proposition 11, le système associé au modèle de Dalton se résume au système triangulaire (1.13) que l'on peut résoudre directement dans l'ordre de présentation des variables.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j(\tilde{\tau}_j - \tau_j) = \lambda(u_{j+1/2} - u_{j-1/2}), \\ \rho_j(\tilde{u}_j - u_j) = -\lambda(p_{j+1/2} - p_{j-1/2}), \\ \rho_j(\tilde{e}_j - e_j) = -\lambda(p_{j+1/2}u_{j+1/2} - p_{j-1/2}u_{j-1/2}), \\ \widetilde{\alpha}_{1,j} = \alpha_{1,j}, \\ \widetilde{\alpha}_{2,j} = \alpha_{2,j}, \\ \widetilde{\varepsilon}_{1,j} = \frac{c_{v1}}{\widetilde{\alpha}_{1,j}c_{v1} + \widetilde{\alpha}_{2,j}c_{v2}} \tilde{\varepsilon}_j, \\ \widetilde{\varepsilon}_{2,j} = \frac{c_{v2}}{\widetilde{\alpha}_{1,j}c_{v1} + \widetilde{\alpha}_{2,j}c_{v2}} \tilde{\varepsilon}_j, \\ \widetilde{\tau}_{1,j} = \frac{\tilde{\tau}_j}{\widetilde{\alpha}_{1,j} + \widetilde{\alpha}_{2,j} \frac{\tau_{2,j}}{\tau_{1,j}}}, \\ \widetilde{\tau}_{2,j} = \frac{\tilde{\tau}_j}{\widetilde{\alpha}_{2,j} + \widetilde{\alpha}_{1,j} \frac{\tau_{1,j}}{\tau_{2,j}}}. \end{array} \right. \quad (1.13)$$

■

1.5 Équations discrètes pour l'équirépartition des quantités de chaleur

Le système (1.9) est ici complété par

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\alpha}_{1,j}\widetilde{\tau}_{1,j} + \widetilde{\alpha}_{2,j}\widetilde{\tau}_{2,j} = \tilde{\tau}_j, \\ \widetilde{\alpha}_{1,j}\widetilde{\varepsilon}_{1,j} + \widetilde{\alpha}_{2,j}\widetilde{\varepsilon}_{2,j} = \tilde{\varepsilon}_j, \\ \widetilde{p}_{1,j} = \widetilde{p}_{2,j}, \\ (\widetilde{\varepsilon}_{1,j} - \varepsilon_{1,j}) + \tilde{p}_j(\widetilde{\tau}_{1,j} - \tau_{1,j}) \\ = (\widetilde{\varepsilon}_{2,j} - \varepsilon_{2,j}) + \tilde{p}_j(\widetilde{\tau}_{2,j} - \tau_{2,j}). \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Une fois de plus, on a des équations implicites. Et une fois de plus, le calcul est explicite dans le cas de deux gaz parfaits.

Proposition 13

Avec les hypothèses et les notations de la proposition 11, le système ci-dessus se

réécrit comme un système explicite.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j(\tilde{\tau}_j - \tau_j) = \lambda(u_{j+1/2} - u_{j-1/2}), \\ \rho_j(\tilde{u}_j - u_j) = -\lambda(p_{j+1/2} - p_{j-1/2}), \\ \rho_j(\tilde{e}_j - e_j) = -\lambda(p_{j+1/2}u_{j+1/2} - p_{j-1/2}u_{j-1/2}), \\ \widetilde{\alpha}_{1,j} = \alpha_{1,j}, \\ \widetilde{\alpha}_{2,j} = \alpha_{2,j}, \\ \tilde{p}_j = \frac{\tilde{\varepsilon}_j - \alpha_{1,j}/\gamma_1(\tilde{\varepsilon}_j - \varepsilon_j + \varepsilon_{1,j}) - \alpha_{2,j}/\gamma_2(\tilde{\varepsilon}_j - \varepsilon_j + \varepsilon_{2,j})}{\alpha_{1,j}/\gamma_1(\tilde{\tau}_j - \tau_j + \tau_{1,j}) - \alpha_{2,j}/\gamma_2(\tilde{\tau}_j - \tau_j + \tau_{2,j})}, \\ \widetilde{\varepsilon}_{1,j} = \frac{\tilde{\varepsilon}_j - \varepsilon_j + \tilde{p}_j(\tilde{\tau}_j - \tau_j) + \varepsilon_{1,j} + \tilde{p}_j\tau_{1,j}}{\gamma_1}, \\ \widetilde{\varepsilon}_{2,j} = \frac{\tilde{\varepsilon}_j - \varepsilon_j + \tilde{p}_j(\tilde{\tau}_j - \tau_j) + \varepsilon_{2,j} + \tilde{p}_j\tau_{2,j}}{\gamma_2}, \\ \widetilde{\tau}_{1,j} = (\gamma_1 - 1)\widetilde{\varepsilon}_{1,j}/\tilde{p}_j, \\ \widetilde{\tau}_{2,j} = (\gamma_2 - 1)\widetilde{\varepsilon}_{2,j}/\tilde{p}_j. \end{array} \right. \quad (1.15)$$

■

1.5.1 Inégalité entropique pour le système isobare avec équirépartition des quantités de chaleur

Un résultat de [28] dont nous répétons la démonstration est la proposition suivante.

Proposition 14

Considérons le système discret constitué de (1.9) et (1.14). Il existe un réel c tel que sous la condition de type CFL $c\lambda \leq 1$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{S}_{1,j} \geq S_{1,j} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \\ \widetilde{S}_{2,j} \geq S_{2,j} \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Le nombre c est une approximation de $\max_{j \in \mathbb{Z}}(c_j)$ (maximum de la vitesse du son dans les mailles). ■

Rappelons que les fonctions S_1 et S_2 sont les entropies physiques des constituants (fonctions concaves). Cette proposition est un résultat entropique, résultat de stabilité pour chaque constituant pour le système discret associé à la phase lagrangienne du modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur.

Démonstration

Tous les calculs sont faits dans la maille j et nous ôtons l'indice j dans cette démonstration. Dans un premier temps, nous supposons que les températures et

la pression restent positives :

$$\begin{cases} \widetilde{T}_1 > 0, \\ \widetilde{T}_2 > 0, \\ \widetilde{p} > 0. \end{cases}$$

Considérons par exemple l'entropie S_1 . En exprimant S_1 comme fonction de (τ_1, ε_1) , on peut faire un développement limité au voisinage de $(\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\varepsilon}_1)$. Il existe $\overset{\circ}{\tau}_1 \in [\tau_1, \widetilde{\tau}_1]$ et $\overset{\circ}{\varepsilon}_1 \in [\varepsilon_1, \widetilde{\varepsilon}_1]$ tels que

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_1 - S_1 &= \left. \frac{\partial S_1}{\partial \varepsilon_1} \right|_{\tau_1} (\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\varepsilon}_1) (\widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) + \left. \frac{\partial S_1}{\partial \tau_1} \right|_{\varepsilon_1} (\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\varepsilon}_1) (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) \nabla^2 S_1(\overset{\circ}{\tau}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_1) (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)^T \\ &= \frac{1}{\widetilde{T}_1} (\widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) + \frac{\widetilde{p}}{\widetilde{T}_1} (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) \nabla^2 S_1(\overset{\circ}{\tau}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_1) (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)^T. \end{aligned}$$

En utilisant la loi de mélange numérique $(\widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) + \widetilde{p}(\widetilde{\tau}_1 - \tau_1) = (\widetilde{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2) + \widetilde{p}(\widetilde{\tau}_2 - \tau_2)$, qui implique $(\widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) + \widetilde{p}(\widetilde{\tau}_1 - \tau_1) = (\widetilde{\varepsilon} - \varepsilon) + \widetilde{p}(\widetilde{\tau} - \tau)$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_1 - S_1 &= -\frac{1}{2} (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) \nabla^2 S_1(\overset{\circ}{\tau}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_1) (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)^T \\ &\quad + \frac{1}{\widetilde{T}_1} (\widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) + \frac{\widetilde{p}}{\widetilde{T}_1} (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1) \\ &= -\frac{1}{2} (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) \nabla^2 S_1(\overset{\circ}{\tau}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_1) (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)^T \\ &\quad + \frac{1}{\widetilde{T}_1} (\widetilde{\varepsilon} - \varepsilon) + \frac{\widetilde{p}}{\widetilde{T}_1} (\widetilde{\tau} - \tau) \\ &= -\frac{1}{2} (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) \nabla^2 S_1(\overset{\circ}{\tau}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_1) (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)^T \\ &\quad + \frac{1}{\widetilde{T}_1} ((\widetilde{e} - e) - (\widetilde{u}^2/2 - u^2/2)) + \frac{\widetilde{p}}{\widetilde{T}_1} (\widetilde{\tau} - \tau), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_1 - S_1 &= -\frac{1}{2} (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) \nabla^2 S_1(\overset{\circ}{\tau}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_1) (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)^T \\ &\quad + \frac{1}{\widetilde{T}_1} (\widetilde{e} - e + \frac{(\widetilde{u} - u)^2}{2} - \widetilde{u}(\widetilde{u} - u)) + \frac{\widetilde{p}}{\widetilde{T}_1} (\widetilde{\tau} - \tau). \end{aligned}$$

On utilise maintenant les expressions des accroissements de τ , u et e données par (1.9).

$$\begin{aligned} \rho(\widetilde{S}_1 - S_1) &= \frac{\rho}{2} ((\widetilde{u} - u)^2 - (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) \nabla^2 S_1(\overset{\circ}{\tau}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_1) (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)^T) \\ &\quad + \frac{\lambda}{\widetilde{T}_1} (-(p_+ u_+ - p_- u_-) + \widetilde{u}(p_+ - p_-) + \widetilde{p}(u_+ - u_-)), \end{aligned}$$

u_+ , p_+ , u_- , p_- désignant les flux en $j + 1/2$ et $j - 1/2$ (on a ôté les indices j). Cette égalité peut encore se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \rho(\widetilde{S}_1 - S_1) &= \frac{\rho}{2} ((\widetilde{u} - u)^2 - (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) \nabla^2 S_1(\overset{\circ}{\tau}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_1) (\widetilde{\tau}_1 - \tau_1, \widetilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)^T) \\ &\quad + \frac{\lambda}{\widetilde{T}_1} ((\widetilde{p} - p_-)(\widetilde{u} - u_-) - (\widetilde{p} - p_+)(\widetilde{u} - u_+)). \end{aligned}$$

Calculons précisément $(\tilde{p} - p_-)(\tilde{u} - u_-)$ grâce aux formules (1.8). Pour cela, on note u_G et p_G les valeurs de la vitesse et de la pression dans la maille de gauche (d'indice $j - 1$).

$$\begin{aligned} (\tilde{p} - p_-)(\tilde{u} - u_-) &= (\tilde{p} - \frac{p_G + \rho_{c-}^* u_G + (p - \rho_{c-}^* u)}{2})(\tilde{u} - \frac{p_G + \rho_{c-}^* u_G - (p - \rho_{c-}^* u)}{2\rho_{c-}^*}) \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{p} + \rho_{c-}^* \tilde{u} + (\tilde{p} - \rho_{c-}^* \tilde{u}) - (p_G + \rho_{c-}^* u_G + (p - \rho_{c-}^* u))) \\ &\quad \times \frac{1}{2\rho_{c-}^*}(\tilde{p} + \rho_{c-}^* \tilde{u} - (\tilde{p} - \rho_{c-}^* \tilde{u}) - (p_G + \rho_{c-}^* u_G - (p - \rho_{c-}^* u))). \end{aligned}$$

On regroupe encore puis on factorise.

$$\begin{aligned} (\tilde{p} - p_-)(\tilde{u} - u_-) &= \frac{1}{4\rho_{c-}^*}((\tilde{p} - p_G + \rho_{c-}^*(\tilde{u} - u_G)) + (\tilde{p} - p - \rho_{c-}^*(\tilde{u} - u))) \\ &\quad \times ((\tilde{p} - p_G + \rho_{c-}^*(\tilde{u} - u_G)) - (\tilde{p} - p - \rho_{c-}^*(\tilde{u} - u))) \\ &= \frac{1}{4\rho_{c-}^*}((\tilde{p} - p_G + \rho_{c-}^*(\tilde{u} - u_G))^2 - (\tilde{p} - p - \rho_{c-}^*(\tilde{u} - u))^2). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(\tilde{p} - p_-)(\tilde{u} - u_-) \geq -\frac{1}{4\rho_{c-}^*}(\tilde{p} - p - \rho_{c-}^*(\tilde{u} - u))^2.$$

Un calcul identique aboutit à une expression comparable de $(\tilde{p} - p_+)(\tilde{u} - u_+)$,

$$(\tilde{p} - p_+)(\tilde{u} - u_+) = \frac{1}{4\rho_{c+}^*}((\tilde{p} - p + \rho_{c+}^*(\tilde{u} - u))^2 - (\tilde{p} - p_D - \rho_{c+}^*(\tilde{u} - u_D))^2)$$

(u_D et p_D étant les vitesse et pression dans la maille de droite), d'où l'inégalité

$$(\tilde{p} - p_+)(\tilde{u} - u_+) \leq \frac{1}{4\rho_{c+}^*}(\tilde{p} - p + \rho_{c+}^*(\tilde{u} - u))^2.$$

On en déduit une minoration de la variation d'entropie,

$$\begin{aligned} \rho(\widetilde{S}_1 - S_1) &\geq \frac{\rho}{2}((\tilde{u} - u)^2 - (\tilde{\tau}_1 - \tau_1, \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)\nabla^2 S_1(\tau_1^\circ, \varepsilon_1^\circ)(\tilde{\tau}_1 - \tau_1, \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)^T) \\ &\quad - \frac{\lambda}{T_1}(\frac{1}{4\rho_{c-}^*}(\tilde{p} - p - \rho_{c-}^*(\tilde{u} - u))^2 + \frac{1}{4\rho_{c+}^*}(\tilde{p} - p + \rho_{c+}^*(\tilde{u} - u))^2). \end{aligned}$$

De plus, comme la loi de mélange est isobare, $p = p_1(\tau_1, \varepsilon_1)$ et $\tilde{p} = p_1(\tilde{\tau}_1, \tilde{\varepsilon}_1)$. Donc il existe $(\tau_1^\square, \varepsilon_1^\square)$ tels que

$$\tilde{p} - p = \frac{\partial p_1}{\partial \tau_1} \Big|_{\varepsilon_1} (\tau_1^\square, \varepsilon_1^\square)(\tilde{\tau}_1 - \tau_1) + \frac{\partial p_1}{\partial \varepsilon_1} \Big|_{\tau_1} (\tau_1^\square, \varepsilon_1^\square)(\tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1).$$

Il existe donc un réel C (dépendant de ρ_{c-}^* , ρ_{c+}^* , τ_1^\square , ε_1^\square) tel que

$$\begin{aligned} \rho(\widetilde{S}_1 - S_1) &\geq \frac{\rho}{2}((\tilde{u} - u)^2 - (\tilde{\tau}_1 - \tau_1, \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)\nabla^2 S_1(\tau_1^\circ, \varepsilon_1^\circ)(\tilde{\tau}_1 - \tau_1, \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)^T) \\ &\quad - \frac{\lambda}{T_1} C \|(\tilde{\tau}_1 - \tau_1, \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1, \tilde{u} - u)\|^2 \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

D'autre part, d'après les hypothèses thermodynamiques faites sur le fluide (cf. partie II), S_1 est concave. Donc $\nabla^2 S_1(\overset{\circ}{\tau}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_1)$ est une matrice définie négative. Donc la forme quadratique de la première ligne du membre de droite est positive, il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\frac{\rho}{2}((\tilde{u}-u)^2 - (\tilde{\tau}_1 - \tau_1, \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1) \nabla^2 S_1(\overset{\circ}{\tau}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_1) (\tilde{\tau}_1 - \tau_1, \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1)^T) > \delta \|(\tilde{\tau}_1 - \tau_1, \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1, \tilde{u} - u)\|^2.$$

Ainsi, on obtient la minoration de la variation d'entropie

$$\rho(\widetilde{S}_1 - S_1) \geq \delta \|(\tilde{\tau}_1 - \tau_1, \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1, \tilde{u} - u)\|^2 - \frac{\lambda}{\widetilde{T}_1} C \|(\tilde{\tau}_1 - \tau_1, \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1, \tilde{u} - u)\|^2.$$

Donc la variation d'entropie est positive sous la condition

$$\lambda \leq \frac{\widetilde{T}_1 \delta}{C}.$$

On trouvera dans [31] la preuve du fait que $\frac{\widetilde{T}_1 \delta}{C}$ peut être remplacé par une approximation de l'inverse de la vitesse du son locale. Nous renvoyons au même article pour la vérification de la positivité de \widetilde{T}_1 et de \widetilde{p} .

Le même raisonnement peut être fait pour l'entropie S_2 . ■

1.6 Phase de projection

Durant la phase de projection, les inconnues sont les variables surmontées d'un chapeau.

Cette phase peut être interprétée comme une phase de projection sur le maillage fixe après la résolution de la phase lagrangienne, ou une phase d'advection (de convection). Le système discret dans cette phase de projection est en effet une approximation du système d'advection

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho = 0, \\ \rho \partial_t (u) + \rho u \partial_x (u) = 0, \\ \rho \partial_t (e) + \rho u \partial_x (e) = 0, \\ \rho \partial_t (\alpha_1) + \rho u \partial_x (\alpha_1) = 0, \\ \rho \partial_t (\alpha_2) + \rho u \partial_x (\alpha_2) = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

Afin de fermer le système, il faut encore ajouter les équations du mélange. Pour le modèle isobare et isotherme,

$$\begin{cases} \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 = \tau, \\ \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = \varepsilon, \\ p_1 = p_2 = p, \\ T_1 = T_2. \end{cases} \quad (1.17)$$

Pour le modèle de Dalton,

$$\begin{cases} \alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2 = \tau, \\ \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 = \varepsilon, \\ p = \frac{\alpha_1\tau_1}{\tau}p_1 + \frac{\alpha_2\tau_2}{\tau}p_2, \\ \rho\partial_t\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right) + \rho u\partial_x\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right) = 0, \\ T_1 = T_2. \end{cases} \quad (1.18)$$

Pour le modèle à quantité de chaleur équirépartie,

$$\begin{cases} \alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2 = \tau, \\ \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 = \varepsilon, \\ p_1 = p_2 = p, \\ \rho\partial_t(\varepsilon_1) + \rho p\partial_t(\tau_1) + \rho u\partial_x(\varepsilon_1) + \rho up\partial_x(\tau_1) \\ \quad = \rho\partial_t(\varepsilon_2) + \rho p\partial_t(\tau_2) + \rho u\partial_x(\varepsilon_2) + \rho up\partial_x(\tau_2). \end{cases} \quad (1.19)$$

La méthode que nous utilisons est issue de [28]. La forme générale pour les variables ρ , u , e est classique. Nous supposons définis aux bords des mailles les flux des variables à transporter, $\widetilde{\rho_{j+1/2}}$, $\widetilde{u_{j+1/2}}$, $\widetilde{e_{j+1/2}}$, $\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}$, $\widetilde{\alpha_{2,j+1/2}}$. Nous discrétisons de manière naturelle.

$$\begin{cases} \widehat{\rho}_j = \rho_j - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}), \\ \widehat{\rho}_j\widehat{u}_j = \rho_j\widetilde{u}_j - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}}\widetilde{u_{j+1/2}} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\widetilde{u_{j-1/2}}), \\ \widehat{\rho}_j\widehat{e}_j = \rho_j\widetilde{e}_j - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}}\widetilde{e_{j+1/2}} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\widetilde{e_{j-1/2}}), \\ \widehat{\rho}_j\widehat{\alpha}_{1,j} = \rho_j\widetilde{\alpha}_{1,j} - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}}\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\widetilde{\alpha}_{1,j-1/2}), \\ \widehat{\rho}_j\widehat{\alpha}_{2,j} = \rho_j\widetilde{\alpha}_{2,j} - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}}\widetilde{\alpha}_{2,j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\widetilde{\alpha}_{2,j-1/2}). \end{cases} \quad (1.20)$$

Pour comprendre que la phase de projection est consistante avec les équations d'advection (1.16), il faut déduire du système (1.20) les accroissements dus à la seule phase lagrangienne, à savoir les quantités $\widehat{\rho}_j - \widetilde{\rho}_j$, $\widehat{\rho}_j\widehat{u}_j - \widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j$...

Proposition 15

Supposons que la phase lagrangienne discrète est donnée par (1.9). Alors, le système (1.20) est équivalent au système

$$\begin{cases} \rho_j(\widehat{\tau}_j - \widetilde{\tau}_j) = -\lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}}(\widetilde{\tau_{j+1/2}} - \widehat{\tau}_j) - u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}(\widetilde{\tau_{j-1/2}} - \widehat{\tau}_j)), \\ \rho_j(\widehat{u}_j - \widetilde{u}_j) = -\lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}}(\widetilde{u_{j+1/2}} - \widehat{u}_j) - u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}(\widetilde{u_{j-1/2}} - \widehat{u}_j)), \\ \rho_j(\widehat{e}_j - \widetilde{e}_j) = -\lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}}(\widetilde{e_{j+1/2}} - \widehat{e}_j) - u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}(\widetilde{e_{j-1/2}} - \widehat{e}_j)), \\ \rho_j(\widehat{\alpha}_{1,j} - \widetilde{\alpha}_{1,j}) = -\lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}}(\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} - \widehat{\alpha}_{1,j}) - u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}(\widetilde{\alpha}_{1,j-1/2} - \widehat{\alpha}_{1,j})), \\ \rho_j(\widehat{\alpha}_{2,j} - \widetilde{\alpha}_{2,j}) = -\lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}}(\widetilde{\alpha}_{2,j+1/2} - \widehat{\alpha}_{2,j}) - u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}(\widetilde{\alpha}_{2,j-1/2} - \widehat{\alpha}_{2,j})). \end{cases} \quad (1.21)$$

■

Démonstration

Nous démontrons ici le résultat pour l'accroissement du volume spécifique. La première équation de (1.21) s'écrit

$$\rho_j(\widehat{\tau}_j - \widetilde{\tau}_j) = -\lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2}\widetilde{\tau}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}\widetilde{\tau}_{j-1/2}) + \lambda\widehat{\tau}_j(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}),$$

donc elle donne

$$\widehat{\tau}_j(\rho_j - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2})) = -\lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2}\widetilde{\tau}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}\widetilde{\tau}_{j-1/2}) + \rho_j\widetilde{\tau}_j,$$

soit

$$\rho_j - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}) = -\lambda\widehat{\rho}_j(u_{j+1/2} - u_{j-1/2}) + \widehat{\rho}_j\rho_j\widetilde{\tau}_j.$$

En utilisant l'expression de $\widetilde{\tau}_j$ donné par la phase lagrangienne (1.9), cette équation devient

$$\rho_j - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}) = -\lambda\widehat{\rho}_j(u_{j+1/2} - u_{j-1/2}) + \widehat{\rho}_j(\rho_j\tau_j + \lambda(u_{j+1/2} - u_{j-1/2})),$$

qui se simplifie en

$$\rho_j - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}) = \widehat{\rho}_j\rho_j\tau_j = \widehat{\rho}_j.$$

On a donc

$$\widehat{\rho}_j - \rho_j = -\lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}),$$

qui est, conformément à l'assertion de la proposition, la forme discrète (1.20) de la phase de projection. Les égalités peuvent s'enchaîner dans l'autre sens, montrant l'équivalence des deux formulations. ■

Ces deux écritures discrètes sont formellement assez classiques. C'est le calcul des flux qui n'est pas classique. Il comporte deux points essentiels. La première originalité réside dans le fait que les flux des variables thermodynamiques ρ , u , e sont fonction des flux des fractions massiques α_1 et α_2 . La seconde originalité est le calcul des flux de α_1 et α_2 , qui s'inspire bien sûr des flux antidissipatifs du chapitre 1 de la partie I. Nous reportons ce calcul des flux des fractions massiques à la section 1.10 et donnons pour l'instant l'expression des flux des variables thermodynamiques (en fonction des flux des fractions massiques). Le calcul des flux des variables globales suppose la connaissance des flux des variables propres, $\widetilde{\tau}_{1,j+1/2}$, $\widetilde{\tau}_{2,j+1/2}$, $\widetilde{\varepsilon}_{1,j+1/2}$, $\widetilde{\varepsilon}_{2,j+1/2}$. On choisit pour ces variables un décentrage amont, à savoir

– si $u_{j+1/2} \geq 0$,

$$\begin{cases} \widetilde{\tau}_{1,j+1/2} = \widetilde{\tau}_{1,j}, \\ \widetilde{\tau}_{2,j+1/2} = \widetilde{\tau}_{2,j}, \\ \widetilde{\varepsilon}_{1,j+1/2} = \widetilde{\varepsilon}_{1,j}, \\ \widetilde{\varepsilon}_{2,j+1/2} = \widetilde{\varepsilon}_{2,j}; \end{cases} \quad (1.22)$$

– si $u_{j+1/2} < 0$,

$$\begin{cases} \widetilde{\tau}_{1,j+1/2} = \widetilde{\tau}_{1,j+1}, \\ \widetilde{\tau}_{2,j+1/2} = \widetilde{\tau}_{2,j+1}, \\ \widetilde{\varepsilon}_{1,j+1/2} = \widetilde{\varepsilon}_{1,j+1}, \\ \widetilde{\varepsilon}_{2,j+1/2} = \widetilde{\varepsilon}_{2,j+1}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Les flux des variables thermodynamiques globales sont donnés ainsi : $\widetilde{\tau}_{j+1/2} = \alpha_{1,j+1/2} \widetilde{\tau}_{1,j+1/2} + \alpha_{2,j+1/2} \widetilde{\tau}_{2,j+1/2}$, $\widetilde{\varepsilon}_{j+1/2} = \alpha_{1,j+1/2} \widetilde{\varepsilon}_{1,j+1/2} + \alpha_{2,j+1/2} \widetilde{\varepsilon}_{2,j+1/2}$, et le flux de vitesse est décentré vers l'amont. Ceci donne explicitement

– si $u_{j+1/2} \geq 0$,

$$\begin{cases} \widetilde{\rho}_{j+1/2} = \frac{1}{\widetilde{\tau}_{j+1/2}} = \frac{1}{\alpha_{1,j+1/2} \widetilde{\tau}_{1,j} + \alpha_{2,j+1/2} \widetilde{\tau}_{2,j}}, \\ \widetilde{u}_{j+1/2} = \widetilde{u}_j, \\ \widetilde{e}_{j+1/2} = \alpha_{1,j+1/2} \widetilde{\varepsilon}_{1,j} + \alpha_{2,j+1/2} \widetilde{\varepsilon}_{2,j} + \frac{1}{2} \widetilde{u}_j^2; \end{cases} \quad (1.24)$$

– si $u_{j+1/2} < 0$,

$$\begin{cases} \widetilde{\rho}_{j+1/2} = \frac{1}{\widetilde{\tau}_{j+1/2}} = \frac{1}{\alpha_{1,j+1/2} \widetilde{\tau}_{1,j+1} + \alpha_{2,j+1/2} \widetilde{\tau}_{2,j+1}}, \\ \widetilde{u}_{j+1/2} = \widetilde{u}_{j+1}, \\ \widetilde{e}_{j+1/2} = \alpha_{1,j+1/2} \widetilde{\varepsilon}_{1,j+1} + \alpha_{2,j+1/2} \widetilde{\varepsilon}_{2,j+1} + \frac{1}{2} \widetilde{u}_{j+1}^2. \end{cases} \quad (1.25)$$

Remarque 1.6.1

On pourrait être tenté d'écrire

$$\begin{cases} \widetilde{\rho}_{j+1/2} = \alpha_{1,j+1/2} \widetilde{\rho}_j + \alpha_{2,j+1/2} \widetilde{\rho}_j \text{ si } u_{j+1/2} \geq 0, \\ \widetilde{\rho}_{j+1/2} = \alpha_{1,j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1} + \alpha_{2,j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1} \text{ si } u_{j+1/2} < 0. \end{cases}$$

Mais cette discrétisation est contradictoire avec l'additivité des volumes que nous préférons imposer pour les flux aussi bien que pour les valeurs dans les mailles. C'est la seule façon d'obtenir un transport exact puisque les flux exacts (de la solution exacte) vérifient cette équation d'additivité des volumes. ■

Remarque 1.6.2

La première et la quatrième équation de 1.20 entraînent la cinquième si

$$\begin{cases} \alpha_{1,j+1/2} + \alpha_{2,j+1/2} = 1 \quad \forall j, \\ \alpha_{1,j} + \alpha_{2,j} = 1. \end{cases}$$

Ceci sera vérifié par la suite. ■

Remarque 1.6.3

Il est aisé de montrer que l'algorithme Lagrange-projection proposé est, en ce qui concerne les variables conservées, équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\widehat{\rho}_j - \rho_j}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} u_{j-1/2}}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho}_j \widehat{\alpha}_{1,j} - \rho_j \alpha_{1,j}}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} \alpha_{1,j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} \alpha_{1,j-1/2} u_{j-1/2}}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho}_j \widehat{\alpha}_{2,j} - \rho_j \alpha_{2,j}}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} \alpha_{2,j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} \alpha_{2,j-1/2} u_{j-1/2}}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho}_j \widehat{u}_j - \rho_j u_j}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} u_{j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} u_{j-1/2} u_{j-1/2}} + p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho}_j \widehat{e}_j - \rho_j e_j}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2} e_{j+1/2} u_{j+1/2}} - \widetilde{\rho_{j-1/2} e_{j-1/2} u_{j-1/2}} + p_{j+1/2} u_{j+1/2} - p_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0. \end{array} \right.$$

Cette formulation est conservative, nous voyons que le schéma est conservatif en masse totale, en quantité de mouvement, en énergie totale et en masse de chaque constituant. ■

Nous exposons maintenant les systèmes discrets pour chaque modèle de mélange.

1.7 Équations discrètes pour le modèle isobare isotherme

Comme dans la phase lagrangienne, nous fermons le système discret (1.20) par

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\alpha}_{1,j} \widehat{\tau}_{1,j} + \widehat{\alpha}_{2,j} \widehat{\tau}_{2,j} = \widehat{\tau}_j, \\ \widehat{\alpha}_{1,j} \widehat{\varepsilon}_{1,j} + \widehat{\alpha}_{2,j} \widehat{\varepsilon}_{2,j} = \widehat{\varepsilon}_j, \\ \widehat{p}_{1,j} = \widehat{p}_{2,j}, \\ \widehat{T}_{1,j} = \widehat{T}_{2,j}. \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Comme dans la phase lagrangienne, ces équations peuvent être remplacées par des formules explicites avec des gaz parfaits.

Proposition 16

Si les deux constituants sont des gaz parfaits d'exposants adiabatiques γ_1, γ_2 et de

capacités calorifiques c_{v1} , c_{v2} , le système ci-dessus est équivalent au système explicite

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\rho}_j = \rho_j - \lambda(u_{j+1/2}\widehat{\rho}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widehat{\rho}_{j-1/2}), \\ \widehat{\rho}_j\widehat{u}_j = \rho_j\widetilde{u}_j - \lambda(u_{j+1/2}\widehat{\rho}_{j+1/2}\widehat{u}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widehat{\rho}_{j-1/2}\widehat{u}_{j-1/2}), \\ \widehat{\rho}_j\widehat{e}_j = \rho_j\widetilde{e}_j - \lambda(u_{j+1/2}\widehat{\rho}_{j+1/2}\widehat{e}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widehat{\rho}_{j-1/2}\widehat{e}_{j-1/2}), \\ \widehat{\rho}_j\widehat{\alpha}_{1,j} = \rho_j\widetilde{\alpha}_{1,j} - \lambda(u_{j+1/2}\widehat{\rho}_{j+1/2}\widehat{\alpha}_{1,j+1/2} - u_{j-1/2}\widehat{\rho}_{j-1/2}\widehat{\alpha}_{1,j-1/2}), \\ \widehat{\rho}_j\widehat{\alpha}_{2,j} = \rho_j\widetilde{\alpha}_{2,j} - \lambda(u_{j+1/2}\widehat{\rho}_{j+1/2}\widehat{\alpha}_{2,j+1/2} - u_{j-1/2}\widehat{\rho}_{j-1/2}\widehat{\alpha}_{2,j-1/2}), \\ \widehat{\varepsilon}_{1,j} = \frac{c_{v1}}{\widehat{\alpha}_{1,j}c_{v1} + \widehat{\alpha}_{2,j}c_{v2}}\widehat{\varepsilon}_j, \\ \widehat{\varepsilon}_{2,j} = \frac{c_{v2}}{\widehat{\alpha}_{1,j}c_{v1} + \widehat{\alpha}_{2,j}c_{v2}}\widehat{\varepsilon}_j, \\ \widehat{\tau}_{1,j} = \frac{\widehat{\tau}_j}{\widehat{\alpha}_{1,j} + \widehat{\alpha}_{2,j}\frac{(\gamma_2-1)\widehat{\varepsilon}_{2,j}}{(\gamma_1-1)\widehat{\varepsilon}_{1,j}}}, \\ \widehat{\tau}_{2,j} = \frac{\widehat{\tau}_j}{\widehat{\alpha}_{2,j} + \widehat{\alpha}_{1,j}\frac{(\gamma_1-1)\widehat{\varepsilon}_{1,j}}{(\gamma_2-1)\widehat{\varepsilon}_{2,j}}}. \end{array} \right. \quad (1.27)$$

■

1.8 Équations discrètes pour le modèle de Dalton

Nous associons au système discret (1.20) les équations discrètes du mélange

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\alpha}_{1,j}\widehat{\tau}_{1,j} + \widehat{\alpha}_{2,j}\widehat{\tau}_{2,j} = \widehat{\tau}_j, \\ \widehat{\alpha}_{1,j}\widehat{\varepsilon}_{1,j} + \widehat{\alpha}_{2,j}\widehat{\varepsilon}_{2,j} = \widehat{\varepsilon}_j, \\ \widehat{\rho}_j \ln\left(\frac{\widehat{\tau}_{1,j}}{\widehat{\tau}_{2,j}}\right) = \rho_j \ln\left(\frac{\widetilde{\tau}_{1,j}}{\widetilde{\tau}_{2,j}}\right) - \lambda(u_{j+1/2}\widehat{\rho}_{j+1/2}\widehat{\zeta}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widehat{\rho}_{j-1/2}\widehat{\zeta}_{j-1/2}), \\ \widehat{T}_{1,j} = \widehat{T}_{2,j}, \end{array} \right. \quad (1.28)$$

où les $\widehat{\zeta}_{j+1/2}$ sont les flux décentrés amont de la variable $\ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)$:

si $u_{j+1/2} \geq 0$,

$$\widehat{\zeta}_{j+1/2} = \widetilde{\zeta}_j = \ln\left(\frac{\widetilde{\tau}_{1,j}}{\widetilde{\tau}_{2,j}}\right),$$

et si $u_{j+1/2} < 0$,

$$\widehat{\zeta}_{j+1/2} = \widetilde{\zeta}_{j+1} = \ln\left(\frac{\widetilde{\tau}_{1,j+1}}{\widetilde{\tau}_{2,j+1}}\right).$$

Dans le cas de gaz parfaits, les équations se condensent à nouveau pour former un système triangulaire.

Proposition 17

Sous les hypothèses de la proposition (16), le système ci-dessus est équivalent au

système totalement explicite

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \widehat{\rho}_j = \rho_j - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}), \\
 \widehat{\rho}_j\widehat{u}_j = \rho_j\widetilde{u}_j - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2}\widetilde{u}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}\widetilde{u}_{j-1/2}), \\
 \widehat{\rho}_j\widehat{e}_j = \rho_j\widetilde{e}_j - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2}\widetilde{e}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}\widetilde{e}_{j-1/2}), \\
 \widehat{\rho}_j\widehat{\alpha}_{1,j} = \rho_j\widetilde{\alpha}_{1,j} - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2}\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}\widetilde{\alpha}_{1,j-1/2}), \\
 \widehat{\rho}_j\widehat{\alpha}_{2,j} = \rho_j\widetilde{\alpha}_{2,j} - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2}\widetilde{\alpha}_{2,j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}\widetilde{\alpha}_{2,j-1/2}), \\
 \widehat{\rho}_j\widehat{\zeta}_j = \rho_j\widetilde{\zeta}_j - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2}\widetilde{\zeta}_{j+1/2} - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}\widetilde{\zeta}_{j-1/2}), \\
 \widehat{\varepsilon}_{1,j} = \frac{c_{v1}}{\widehat{\alpha}_{1,j}c_{v1} + \widehat{\alpha}_{2,j}c_{v2}}\widehat{\varepsilon}_j, \\
 \widehat{\varepsilon}_{2,j} = \frac{c_{v2}}{\widehat{\alpha}_{1,j}c_{v1} + \widehat{\alpha}_{2,j}c_{v2}}\widehat{\varepsilon}_j, \\
 \widehat{\tau}_{1,j} = \frac{\widehat{\tau}_j}{\widehat{\alpha}_{1,j} + \widehat{\alpha}_{2,j}e^{-\widehat{\zeta}_j}}, \\
 \widehat{\tau}_{2,j} = \frac{\widehat{\tau}_j}{\widehat{\alpha}_{2,j} + \widehat{\alpha}_{1,j}e^{\widehat{\zeta}_j}}.
 \end{array} \right. \quad (1.29)$$

■

Remarque 1.8.1

Nous transportons $\ln(\frac{\tau_1}{\tau_2})$ au lieu de $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ (c'est bien sûr équivalent pour les équations continues) pour des raisons de symétrie de l'algorithme. ■

1.9 Équations discrètes pour l'équirépartition des quantités de chaleur

Les équations que nous utilisons pour la phase de projection du mélange isobare isotherme sont celles de [28]. Elles sont moins naturelles que pour les deux précédents modèles mais conduisent à un schéma entropique pour chaque entropie physique spécifique du mélange (c'est un résultat de stabilité de [28]). Elle font intervenir les flux décentrés amont des variables propres : $\widetilde{\tau}_{1,j+1/2}$, $\widetilde{\tau}_{2,j+1/2}$, $\widetilde{\varepsilon}_{1,j+1/2}$, $\widetilde{\varepsilon}_{2,j+1/2}$, qui sont, nous le rappelons, décentrés vers l'amont. Les équations (1.30) sont singulières pour $\widehat{\alpha}_{1,j} = 0$ et pour $\widehat{\alpha}_{2,j} = 0$. Nous supposons donc dans la suite que $\widehat{\alpha}_{1,j} > 0$ et

que $\widehat{\alpha}_{2,j} > 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\alpha}_{1,j}\widehat{\tau}_{1,j} + \widehat{\alpha}_{2,j}\widehat{\tau}_{2,j} = \widehat{\tau}_j, \\ \widehat{\alpha}_{1,j}\widehat{\varepsilon}_{1,j} + \widehat{\alpha}_{2,j}\widehat{\varepsilon}_{2,j} = \widehat{\varepsilon}_j, \\ \widehat{p}_{1,j} = \widehat{p}_{2,j} = \widehat{p}_j, \\ \widehat{\rho}_j((\widehat{\varepsilon}_{1,j} - \widehat{\varepsilon}_{1,j}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{1,j} - \widehat{\tau}_{1,j}) - (\widehat{\varepsilon}_{2,j} - \widehat{\varepsilon}_{2,j}) - \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{2,j} - \widehat{\tau}_{2,j})) \\ \quad = \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1/2}(\frac{\alpha_{1,j+1/2}}{\alpha_{1,j}}((\widetilde{\varepsilon}_{1,j} - \widetilde{\varepsilon}_{1,j+1/2}) + \widehat{p}_j(\widetilde{\tau}_{1,j} - \widetilde{\tau}_{1,j+1/2})) \\ \quad \quad - \frac{\alpha_{2,j+1/2}}{\alpha_{2,j}}((\widetilde{\varepsilon}_{2,j} - \widetilde{\varepsilon}_{2,j+1/2}) + \widehat{p}_j(\widetilde{\tau}_{2,j} - \widetilde{\tau}_{2,j+1/2}))) \\ \quad - u_{j-1/2}\widetilde{\rho}_{j-1/2}(\frac{\alpha_{1,j-1/2}}{\alpha_{1,j}}((\widetilde{\varepsilon}_{1,j} - \widetilde{\varepsilon}_{1,j-1/2}) + \widehat{p}_j(\widetilde{\tau}_{1,j} - \widetilde{\tau}_{1,j-1/2})) \\ \quad \quad - \frac{\alpha_{2,j-1/2}}{\alpha_{2,j}}((\widetilde{\varepsilon}_{2,j} - \widetilde{\varepsilon}_{2,j-1/2}) + \widehat{p}_j(\widetilde{\tau}_{2,j} - \widetilde{\tau}_{2,j-1/2}))))). \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Le membre de droite de la dernière équation ci-dessus est une approximation de $\Delta t(\rho u \partial_x(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \rho u p \partial_x(\tau_2 - \tau_1))$. Cette équation est donc consistante avec $\rho \partial_t(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \rho p \partial_t(\tau_1 - \tau_2) + \rho u \partial_x(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \rho u p \partial_x(\tau_1 - \tau_2) = 0$.

Dans le cas de gaz parfaits, les équations sont explicites. On peut résoudre ce système sans utiliser d'algorithme de Newton, mais les expressions sont compliquées et nous ne les retranscrivons pas.

1.9.1 Inégalité entropique pour le système isobare avec équirépartition des quantités de chaleur

La proposition suivante (issue de [28]) fait l'intérêt du système (1.30).

Proposition 18

Supposons les conditions suivantes vérifiées.

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{T}_{1,j} > 0, \\ \widehat{T}_{2,j} > 0, \end{array} \right. \quad (1.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\alpha}_{1,j\pm 1/2} > 0, \\ \widetilde{\alpha}_{2,j\pm 1/2} > 0, \\ \widehat{\alpha}_{1,j\pm 1/2} > 0, \\ \widehat{\alpha}_{2,j\pm 1/2} > 0, \end{array} \right. \quad (1.32)$$

$$\widehat{\alpha}_{1,j} + \widehat{\alpha}_{2,j} = 1, \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \rho_j - \lambda \max(& \widetilde{u_{j+1/2\rho_{j+1/2}}}, \\ & -\widetilde{u_{j-1/2\rho_{j-1/2}}}, \\ & \widetilde{u_{j+1/2\rho_{j+1/2}} - u_{j-1/2\rho_{j-1/2}}}) \geq 0, \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \rho_j \alpha_{1j} - \lambda \max(& \widetilde{u_{j+1/2\rho_{j+1/2}\alpha_{1,j+1/2}}}, \\ & -\widetilde{u_{j-1/2\rho_{j-1/2}\alpha_{1,j-1/2}}}, \\ & \widetilde{u_{j+1/2\rho_{j+1/2}\alpha_{1,j+1/2}} - u_{j-1/2\rho_{j-1/2}\alpha_{1,j-1/2}}}) \geq 0, \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \rho_j \alpha_{2j} - \lambda \max(& \widetilde{u_{j+1/2\rho_{j+1/2}\alpha_{2,j+1/2}}}, \\ & -\widetilde{u_{j-1/2\rho_{j-1/2}\alpha_{2,j-1/2}}}, \\ & \widetilde{u_{j+1/2\rho_{j+1/2}\alpha_{2,j+1/2}} - u_{j-1/2\rho_{j-1/2}\alpha_{2,j-1/2}}}) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Alors, on a pour tout $j \in \mathbb{Z}$

– si $u_{j+1/2} \geq 0$ et $u_{j-1/2} \geq 0$,

$$\begin{cases} \widetilde{S_{1,j}} \geq \min(\widetilde{S_{1,j-1}}, \widetilde{S_{1,j}}), \\ \widetilde{S_{2,j}} \geq \min(\widetilde{S_{2,j-1}}, \widetilde{S_{2,j}}); \end{cases}$$

– si $u_{j+1/2} < 0$ et $u_{j-1/2} < 0$,

$$\begin{cases} \widetilde{S_{1,j}} \geq \min(\widetilde{S_{1,j}}, \widetilde{S_{1,j+1}}), \\ \widetilde{S_{2,j}} \geq \min(\widetilde{S_{2,j}}, \widetilde{S_{2,j+1}}); \end{cases}$$

– si $u_{j+1/2} \geq 0$ et $u_{j-1/2} < 0$,

$$\begin{cases} \widetilde{S_{1,j}} \geq \min(\widetilde{S_{1,j-1}}, \widetilde{S_{1,j}}, \widetilde{S_{1,j+1}}), \\ \widetilde{S_{2,j}} \geq \min(\widetilde{S_{2,j-1}}, \widetilde{S_{2,j}}, \widetilde{S_{2,j+1}}); \end{cases}$$

– si $u_{j+1/2} < 0$ et $u_{j-1/2} \geq 0$,

$$\begin{cases} \widetilde{S_{1,j}} \geq \widetilde{S_{1,j}}, \\ \widetilde{S_{2,j}} \geq \widetilde{S_{2,j}}. \end{cases}$$

■

En d'autres termes, l'entropie après la phase de projection est dans chaque maille supérieure au minimum parmi les mailles « amont » des entropies avant la phase de projection. C'est un résultat entropique pour chaque constituant dans la phase de projection. Il est remarquable que ce résultat ne dépendent pas des flux choisis (les flux des fractions massiques sont encore indéterminés).

Remarque 1.9.1

Les conditions (1.34), (1.35) et (1.36) expriment que les masses sortantes (masse totale, masse du constituant 1 et masse du constituant 2) sont pour chaque maille inférieures aux masses présentes. Les conditions de validité de la proposition imposées sur les flux (des fractions massiques) sont nombreuses; cependant, nous verrons dans la prochaine section que l'ensemble des flux qui les vérifient est un intervalle non vide si le pas de temps vérifie une condition CFL du type $\Delta t \leq \Delta x/u$ ou u est la vitesse locale.

Toutes ces conditions seront vérifiées par le schéma final. ■

Démonstration

Nous ne démontrons que l'inégalité pour l'entropie S_1 dans le cas où $u_{j+1/2} \geq 0$ et $u_{j-1/2} \geq 0$ (il s'agit d'un calcul rebutant mais pas difficile). Le reste se démontre exactement de la même manière. Posons

$$\begin{cases} \Delta Q_{i,j} = ((\widehat{\varepsilon}_{i,j} - \widetilde{\varepsilon}_{i,j}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{i,j} - \widetilde{\tau}_{i,j})) \\ \Delta Q_{i,j-1/2} = ((\widehat{\varepsilon}_{i,j} - \widetilde{\varepsilon}_{i,j-1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{i,j} - \widetilde{\tau}_{i,j-1/2})) \\ \Delta Q_{i,j+1/2} = ((\widehat{\varepsilon}_{i,j} - \widetilde{\varepsilon}_{i,j+1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{i,j} - \widetilde{\tau}_{i,j+1/2})) \end{cases}$$

pour $i = 1$ ou 2 . La loi de mélange numérique, dernière équation de (1.30), peut se réécrire

$$\begin{aligned} & \widehat{\rho}_j \Delta Q_{1,j} - \lambda(u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \frac{\alpha_{1,j+1/2}}{\alpha_{1,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{1,j} - \widetilde{\varepsilon}_{1,j+1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{1,j} - \widetilde{\tau}_{1,j+1/2})) \\ & \quad - u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} \frac{\alpha_{1,j-1/2}}{\alpha_{1,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{1,j} - \widetilde{\varepsilon}_{1,j-1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{1,j} - \widetilde{\tau}_{1,j-1/2}))) \\ & = \widehat{\rho}_j \Delta Q_{2,j} - \lambda(u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \frac{\alpha_{2,j+1/2}}{\alpha_{2,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{2,j} - \widetilde{\varepsilon}_{2,j+1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{2,j} - \widetilde{\tau}_{2,j+1/2})) \\ & \quad - u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} \frac{\alpha_{2,j-1/2}}{\alpha_{2,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{2,j} - \widetilde{\varepsilon}_{2,j-1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{2,j} - \widetilde{\tau}_{2,j-1/2}))) \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par $1 = \widehat{\alpha}_{1,j} + \widehat{\alpha}_{2,j}$ (hypothèse (1.33)), on obtient

$$\begin{aligned}
& \widehat{\rho}_j \Delta Q_{1,j} - \lambda(u_{j+1/2} \widehat{\rho}_{j+1/2} \frac{\widehat{\alpha}_{1,j+1/2}}{\widehat{\alpha}_{1,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{1,j} - \widehat{\varepsilon}_{1,j+1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{1,j} - \widehat{\tau}_{1,j+1/2}))) \\
& \quad - u_{j-1/2} \widehat{\rho}_{j-1/2} \frac{\widehat{\alpha}_{1,j-1/2}}{\widehat{\alpha}_{1,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{1,j} - \widehat{\varepsilon}_{1,j-1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{1,j} - \widehat{\tau}_{1,j-1/2}))) \\
& = \widehat{\alpha}_{1,j} (\widehat{\rho}_j \Delta Q_{1,j} - \lambda(u_{j+1/2} \widehat{\rho}_{j+1/2} \frac{\widehat{\alpha}_{1,j+1/2}}{\widehat{\alpha}_{1,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{1,j} - \widehat{\varepsilon}_{1,j+1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{1,j} - \widehat{\tau}_{1,j+1/2}))) \\
& \quad - u_{j-1/2} \widehat{\rho}_{j-1/2} \frac{\widehat{\alpha}_{1,j-1/2}}{\widehat{\alpha}_{1,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{1,j} - \widehat{\varepsilon}_{1,j-1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{1,j} - \widehat{\tau}_{1,j-1/2})))) \\
& + \widehat{\alpha}_{2,j} (\widehat{\rho}_j \Delta Q_{2,j} - \lambda(u_{j+1/2} \widehat{\rho}_{j+1/2} \frac{\widehat{\alpha}_{2,j+1/2}}{\widehat{\alpha}_{2,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{2,j} - \widehat{\varepsilon}_{2,j+1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{2,j} - \widehat{\tau}_{2,j+1/2}))) \\
& \quad - u_{j-1/2} \widehat{\rho}_{j-1/2} \frac{\widehat{\alpha}_{2,j-1/2}}{\widehat{\alpha}_{2,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{2,j} - \widehat{\varepsilon}_{2,j-1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{2,j} - \widehat{\tau}_{2,j-1/2}))))).
\end{aligned}$$

On a supposé que $u_{j-1/2} \geq 0$ et que $u_{j+1/2} \geq 0$, donc le décentrage amont pour les flux des variables propres permet de supprimer toutes les contributions en $j + 1/2$. Nous ne le faisons que pour le terme de gauche, obtenant

$$\begin{aligned}
& \widehat{\rho}_j \Delta Q_{1,j} + \lambda u_{j-1/2} \widehat{\rho}_{j-1/2} \frac{\widehat{\alpha}_{1,j-1/2}}{\widehat{\alpha}_{1,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{1,j} - \widehat{\varepsilon}_{1,j-1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{1,j} - \widehat{\tau}_{1,j-1/2})) \\
& = \widehat{\alpha}_{1,j} (\widehat{\rho}_j \Delta Q_{1,j} - \lambda(u_{j+1/2} \widehat{\rho}_{j+1/2} \frac{\widehat{\alpha}_{1,j+1/2}}{\widehat{\alpha}_{1,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{1,j} - \widehat{\varepsilon}_{1,j+1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{1,j} - \widehat{\tau}_{1,j+1/2}))) \\
& \quad - u_{j-1/2} \widehat{\rho}_{j-1/2} \frac{\widehat{\alpha}_{1,j-1/2}}{\widehat{\alpha}_{1,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{1,j} - \widehat{\varepsilon}_{1,j-1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{1,j} - \widehat{\tau}_{1,j-1/2})))) \\
& + \widehat{\alpha}_{2,j} (\widehat{\rho}_j \Delta Q_{2,j} - \lambda(u_{j+1/2} \widehat{\rho}_{j+1/2} \frac{\widehat{\alpha}_{2,j+1/2}}{\widehat{\alpha}_{2,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{2,j} - \widehat{\varepsilon}_{2,j+1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{2,j} - \widehat{\tau}_{2,j+1/2}))) \\
& \quad - u_{j-1/2} \widehat{\rho}_{j-1/2} \frac{\widehat{\alpha}_{2,j-1/2}}{\widehat{\alpha}_{2,j}} ((\widehat{\varepsilon}_{2,j} - \widehat{\varepsilon}_{2,j-1/2}) + \widehat{p}_j(\widehat{\tau}_{2,j} - \widehat{\tau}_{2,j-1/2}))))).
\end{aligned}$$

En remplaçant les termes en $(\widetilde{x}_j - \widetilde{x}_{j-1/2})$ par $(\widehat{x}_j - \widehat{x}_{j-1/2}) - (\widehat{x}_j - \widetilde{x}_j)$ dans l'égalité

ci-dessus et en utilisant la notation $\Delta Q_{i,j-1/2}$, on trouve une équation équivalente :

$$\begin{aligned}
 & (\widehat{\rho}_j - \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}}) \Delta Q_{1,j} + \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}} \Delta Q_{1,j-1/2} \\
 &= \widetilde{\alpha_{1,j}} ((\widehat{\rho}_j + (\lambda u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}} - \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}})) \Delta Q_{1,j} \\
 &\quad - \lambda (u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}} \Delta Q_{1,j+1/2} - u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}} \Delta Q_{1,j-1/2})) \\
 &\quad + \widetilde{\alpha_{2,j}} ((\widehat{\rho}_j + (\lambda u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{2,j+1/2}}}{\widetilde{\alpha_{2,j}}} - \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{2,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{2,j}}})) \Delta Q_{2,j} \\
 &\quad - \lambda (u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{2,j+1/2}}}{\widetilde{\alpha_{2,j}}} \Delta Q_{2,j+1/2} - u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{2,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{2,j}}} \Delta Q_{2,j-1/2})) \\
 &= (\widetilde{\alpha_{1,j}} \widehat{\rho}_j + (\lambda u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} - \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \widetilde{\alpha_{1,j-1/2}})) \Delta Q_{1,j} \\
 &\quad - \lambda (u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} \Delta Q_{1,j+1/2} - u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \widetilde{\alpha_{1,j-1/2}} \Delta Q_{1,j-1/2}) \\
 &\quad + (\widetilde{\alpha_{2,j}} \widehat{\rho}_j + (\lambda u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \widetilde{\alpha_{2,j+1/2}} - \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \widetilde{\alpha_{2,j-1/2}})) \Delta Q_{2,j} \\
 &\quad - \lambda (u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \widetilde{\alpha_{2,j+1/2}} \Delta Q_{2,j+1/2} - u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \widetilde{\alpha_{2,j-1/2}} \Delta Q_{2,j-1/2}).
 \end{aligned}$$

En utilisant au membre de gauche ainsi qu'au membre de droite la formule de projection discrète pour les fractions massiques (quatrième équation de (1.20)), on a une équation équivalente,

$$\begin{aligned}
 & (\rho_j - \lambda u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}}) \Delta Q_{1,j} + \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}} \Delta Q_{1,j-1/2} \\
 &= \alpha_{1,j} \rho_j \Delta Q_{1,j} - \lambda (u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} \Delta Q_{1,j+1/2} \\
 &\quad - u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \widetilde{\alpha_{1,j-1/2}} \Delta Q_{1,j-1/2}) \\
 &\quad + \alpha_{2,j} \rho_j \Delta Q_{2,j} - \lambda (u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \widetilde{\alpha_{2,j+1/2}} \Delta Q_{2,j+1/2} \\
 &\quad - u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \widetilde{\alpha_{2,j-1/2}} \Delta Q_{2,j-1/2}).
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \alpha_{1,j} \rho_j \Delta Q_{1,j} + \alpha_{2,j} \rho_j \Delta Q_{2,j}, \\ B = \lambda (u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} \Delta Q_{1,j+1/2} \\ \quad - u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \widetilde{\alpha_{1,j-1/2}} \Delta Q_{1,j-1/2}) \\ \quad + \lambda (u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \widetilde{\alpha_{2,j+1/2}} \Delta Q_{2,j+1/2} \\ \quad - u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \widetilde{\alpha_{2,j-1/2}} \Delta Q_{2,j-1/2}). \end{array} \right.$$

L'équation (1.37) est équivalente à

$$(\rho_j - \lambda u_{j+1/2} \widetilde{\rho_{j+1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}}) \Delta Q_{1,j} - \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}} \frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}} \Delta Q_{1,j-1/2} = A - B \tag{1.38}$$

Nous allons évaluer successivement A et B grâce aux formules de flux pour ε et τ (1.24) et (1.25).

Évaluation de A

$$\begin{aligned}
A &= \alpha_{1,j} \rho_j ((\widehat{\varepsilon}_{1,j} - \widetilde{\varepsilon}_{1,j}) + \widehat{p}_j (\widehat{\tau}_{1,j} - \widetilde{\tau}_{1,j})) \\
&\quad + \alpha_{2,j} \rho_j ((\widehat{\varepsilon}_{2,j} - \widetilde{\varepsilon}_{2,j}) + \widehat{p}_j (\widehat{\tau}_{2,j} - \widetilde{\tau}_{2,j})) \\
&= \rho_j ((\widehat{\varepsilon}_j - \widetilde{\varepsilon}_j + \widehat{p}_j (\widehat{\tau}_j - \widetilde{\tau}_j)) \\
&\quad - (\widehat{\alpha}_{1,j} - \alpha_{1,j}) (\widehat{\varepsilon}_{1,j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{1,j}) \\
&\quad - (\widehat{\alpha}_{2,j} - \alpha_{2,j}) (\widehat{\varepsilon}_{2,j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{2,j}))
\end{aligned}$$

En remplaçant $\widehat{\varepsilon}_{1,j}$ par $\widehat{e}_j - \widehat{u}_j^2/2$ et $\widetilde{\varepsilon}_{1,j}$ par $\widetilde{e}_j - \widetilde{u}_j^2/2$, on écrit

$$\begin{aligned}
A &= \rho_j ((\widehat{e}_j - \widetilde{e}_j - (\widehat{u}_j^2/2 - \widetilde{u}_j^2/2) + \widehat{p}_j (\widehat{\tau}_j - \widetilde{\tau}_j)) \\
&\quad - (\widehat{\alpha}_{1,j} - \alpha_{1,j}) (\widehat{\varepsilon}_{1,j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{1,j}) \\
&\quad - (\widehat{\alpha}_{2,j} - \alpha_{2,j}) (\widehat{\varepsilon}_{2,j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{2,j})) \\
&= \rho_j ((\widehat{e}_j - \widetilde{e}_j + (\widehat{u}_j - \widetilde{u}_j)^2/2 - \widehat{u}_j (\widehat{u}_j - \widetilde{u}_j) + \widehat{p}_j (\widehat{\tau}_j - \widetilde{\tau}_j)) \\
&\quad - (\widehat{\alpha}_{1,j} - \alpha_{1,j}) (\widehat{\varepsilon}_{1,j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{1,j}) \\
&\quad - (\widehat{\alpha}_{2,j} - \alpha_{2,j}) (\widehat{\varepsilon}_{2,j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{2,j}))
\end{aligned}$$

Nous utilisons la forme (1.21) des équations discrètes de la phase de projection pour trouver

$$\begin{aligned}
A &= \lambda u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} (\widehat{e}_j - \widetilde{e}_{j+1/2} - \widehat{u}_j (\widehat{u}_j - \widetilde{u}_{j+1/2}) + \widehat{p}_j (\widehat{\tau}_j - \widetilde{\tau}_{j+1/2})) \\
&\quad - (\widehat{\alpha}_{1,j} - \alpha_{1,j+1/2}) (\widehat{\varepsilon}_{1,j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{1,j}) - (\widehat{\alpha}_{2,j} - \alpha_{2,j+1/2}) (\widehat{\varepsilon}_{2,j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{2,j}) \\
&\quad - \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} (\widehat{e}_j - \widetilde{e}_{j-1/2} - \widehat{u}_j (\widehat{u}_j - \widetilde{u}_{j-1/2}) + \widehat{p}_j (\widehat{\tau}_j - \widetilde{\tau}_{j-1/2})) \\
&\quad - (\widehat{\alpha}_{1,j} - \alpha_{1,j-1/2}) (\widehat{\varepsilon}_{1,j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{1,j}) - (\widehat{\alpha}_{2,j} - \alpha_{2,j-1/2}) (\widehat{\varepsilon}_{2,j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{2,j}) \\
&\quad + \frac{\rho_j}{2} (\widehat{u}_j - \widetilde{u}_j)^2.
\end{aligned}$$

Évaluation de B

$$\begin{aligned}
B &= \lambda u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} ((\widehat{e}_j - \widetilde{e}_{j+1/2}) \\
&\quad + \widehat{p}_j (\widehat{\tau}_j - \widetilde{\tau}_{j+1/2}) \\
&\quad - (\widehat{\alpha}_{1j} - \alpha_{1j+1/2}) (\widehat{\varepsilon}_{1j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{1j}) - (\widehat{\alpha}_{2j} - \alpha_{2j+1/2}) (\widehat{\varepsilon}_{2j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{2j})) \\
&\quad - \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} ((\widehat{e}_j - \widetilde{e}_{j-1/2}) \\
&\quad + \widehat{p}_j (\widehat{\tau}_j - \widetilde{\tau}_{j-1/2}) \\
&\quad - (\widehat{\alpha}_{1j} - \alpha_{1j-1/2}) (\widehat{\varepsilon}_{1j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{1j}) - (\widehat{\alpha}_{2j} - \alpha_{2j-1/2}) (\widehat{\varepsilon}_{2j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{2j})).
\end{aligned}$$

En exprimant maintenant \widehat{e}_j en fonction de \widehat{e}_j , on obtient

$$\begin{aligned}
B &= \lambda u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} ((\widehat{e}_j - \frac{1}{2} \widehat{u}_j^2 - \widetilde{e}_{j+1/2} + \frac{1}{2} \widetilde{u}_{j+1/2}^2 \\
&\quad + \widehat{p}_j (\widehat{\tau}_j - \widetilde{\tau}_{j+1/2}) \\
&\quad - (\widehat{\alpha}_{1j} - \alpha_{1j+1/2}) (\widehat{\varepsilon}_{1j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{1j}) - (\widehat{\alpha}_{2j} - \alpha_{2j+1/2}) (\widehat{\varepsilon}_{2j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{2j})) \\
&\quad - \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} ((\widehat{e}_j - \frac{1}{2} \widehat{u}_j^2 - \widetilde{e}_{j-1/2} + \frac{1}{2} \widetilde{u}_{j-1/2}^2 \\
&\quad + \widehat{p}_j (\widehat{\tau}_j - \widetilde{\tau}_{j-1/2}) \\
&\quad - (\widehat{\alpha}_{1j} - \alpha_{1j-1/2}) (\widehat{\varepsilon}_{1j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{1j}) - (\widehat{\alpha}_{2j} - \alpha_{2j-1/2}) (\widehat{\varepsilon}_{2j} + \widehat{p}_j \widehat{\tau}_{2j})).
\end{aligned}$$

On en déduit la valeur de $A - B$.

$$A - B = \frac{1}{2}(\rho_j(\widehat{u}_j - \widetilde{u}_j)^2 - \lambda(u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}}(\widehat{u}_j - \widetilde{u_{j+1/2}})^2 - u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}(\widehat{u}_j - \widetilde{u_{j-1/2}})^2)).$$

On a supposé de plus que $u_{j-1/2} \geq 0$ et $u_{j+1/2} \geq 0$, donc $\widetilde{u_{j-1/2}} = \widetilde{u_{j-1}}$ et $\widetilde{u_{j+1/2}} = \widetilde{u}_j$.

$$A + B = \frac{1}{2}(\rho_j - \lambda u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}})(\widehat{u}_j - \widetilde{u}_j)^2 + \lambda u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}(\widehat{u}_j - \widetilde{u_{j-1/2}})^2$$

Sous l'hypothèse (1.34) de la proposition, $\rho_j - \lambda u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}} \geq 0$, donc

$$A - B \geq 0.$$

L'équation (1.38) assure ainsi l'inégalité

$$(\widehat{\rho}_j - \lambda u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}})\Delta Q_{1,j} + \lambda u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}}\Delta Q_{1,j-1/2} \geq 0.$$

D'autre part un développement limité à l'ordre deux de $S_1(\tau_1, \varepsilon_1)$ concave donne

$$\widehat{T_{1,j}}(\widehat{S_{1,j}} - \widetilde{S_{1,j}}) \geq (\widehat{\varepsilon_{1,j}} - \widetilde{\varepsilon_{1,j}}) + \widetilde{p}(\widehat{\tau_{1,j}} - \widetilde{\tau_{1,j}}) = \Delta Q_{1,j}, \quad (1.39)$$

et, de la même manière,

$$\widehat{T_{1,j}}(\widehat{S_{1,j}} - \widetilde{S_{1,j-1/2}}) \geq (\widehat{\varepsilon_{1,j}} - \widetilde{\varepsilon_{1,j-1/2}}) + \widetilde{p}_j(\widehat{\tau_{1,j}} - \widetilde{\tau_{1,j-1/2}}) = \Delta Q_{1,j-1/2}. \quad (1.40)$$

Les équations discrètes (1.20) donnent

$$\widehat{\rho}_j - \lambda u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}} = \frac{1}{\widetilde{\alpha_{1,j}}}(\rho_j\alpha_{1,j} - \lambda u_{j+1/2}\widetilde{\rho_{j+1/2}}\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}).$$

Donc l'hypothèse (1.35) et l'hypothèse (1.32) imposent

$$\widehat{\rho}_j - \lambda u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}} \geq 0 \quad (1.41)$$

De plus, nous avons supposé $u_{j-1/2} \geq 0$ et l'hypothèse (1.32), donc nous avons

$$\lambda u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}} \geq 0. \quad (1.42)$$

En combinant les estimations (1.39), (1.40), (1.41) et (1.42), on parvient à l'inégalité

$$\begin{aligned} & (\widehat{\rho}_j - \lambda u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}})\widehat{T_{1,j}}(\widehat{S_{1,j}} - \widetilde{S_{1,j}}) \\ & + \lambda u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}}\widehat{T_{1,j}}(\widehat{S_{1,j}} - \widetilde{S_{1,j-1/2}}) \\ & \geq \\ & (\widehat{\rho}_j - \lambda u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}})\Delta Q_{1,j} \\ & + \lambda u_{j-1/2}\widetilde{\rho_{j-1/2}}\frac{\widetilde{\alpha_{1,j-1/2}}}{\widetilde{\alpha_{1,j}}}\Delta Q_{1,j-1/2}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & (\widehat{\rho}_j - \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}}^{\frac{\alpha_{1,j-1/2}}{\alpha_{1,j}}}) \widetilde{T_{1,j}}(\widehat{S_{1,j}} - \widetilde{S_{1,j}}) \\ & + \lambda u_{j-1/2} \widetilde{\rho_{j-1/2}}^{\frac{\alpha_{1,j-1/2}}{\alpha_{1,j}}} \widetilde{T_{1,j}}(\widehat{S_{1,j}} - \widetilde{S_{1,j-1/2}}) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Les coefficients devant $(\widehat{S_{1,j}} - \widetilde{S_{1,j}})$ et $(\widehat{S_{1,j}} - \widetilde{S_{1,j-1/2}})$ étant positifs (cf. hypothèse (1.31)), l'inégalité (1.43) implique que ou bien $(\widehat{S_{1,j}} - \widetilde{S_{1,j}}) \geq 0$ ou bien $(\widehat{S_{1,j}} - \widetilde{S_{1,j-1/2}}) \geq 0$. De plus, $\varepsilon_{1,j-1/2} = \varepsilon_{1,j-1}$ et $\tau_{1,j-1/2} = \tau_{1,j-1}$, donc $\widetilde{S_{1,j-1/2}} = \widetilde{S_{1,j-1}}$. Donc, ou bien $(\widehat{S_{1,j}} - \widetilde{S_{1,j}}) \geq 0$ ou bien $(\widehat{S_{1,j}} - \widetilde{S_{1,j-1}}) \geq 0$, ce qui se résume par

$$\widehat{S_{1,j}} \geq \min(\widetilde{S_{1,j}}, \widetilde{S_{1,j-1}}),$$

qui est bien l'assertion de la proposition dans le cas où $u_{j-1/2} \geq 0$ et $u_{j+1/2} \geq 0$. La proposition est démontrée. ■

Nous avons exprimé toutes les équations nécessaires au calcul numérique. Seuls les flux des fonctions massiques n'ont pas encore été explicités. Ce calcul est l'objet de la prochaine section.

1.10 Calcul de flux des fractions massiques

Il faut rappeler que le travail de discrétisation n'est pas encore terminé puisque les flux des fractions massiques, dont dépendent explicitement les flux des variables thermodynamiques, n'ont pas été choisis. Le choix classique serait un décentrage amont, c'est-à-dire si $u_{j+1/2} \geq 0$,

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{1,j}}, \\ \widetilde{\alpha_{2,j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{2,j}}, \end{cases}$$

et si $u_{j+1/2} < 0$,

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{1,j+1}}, \\ \widetilde{\alpha_{2,j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{2,j+1}}. \end{cases}$$

Mais ce choix introduit une importante diffusion numérique des fractions massiques, comme on le verra dans le chapitre de résultats numériques. Pour éliminer cette diffusion numérique, nous nous inspirons du chapitre 1 de la partie I, c'est-à-dire que nous décentrons les flux au maximum vers l'aval, sous des contraintes assurant la stabilité des fractions massiques.

Même si les calculs paraissent compliqués, et les formules de flux non intuitives, le principe est rigoureusement le même que lors du choix des flux pour l'advection pure : il est de trouver des conditions de type inégalité sur les flux pour que la solution

numérique vérifie des estimations satisfaites par la solution exacte (en l'occurrence la stabilité L^∞ et la décroissance de la variation totale).

Tout d'abord, rappelons que (dans le cas régulier) les fractions massiques sont solutions des équations

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + u \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t \alpha_2 + u \partial_x \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

qui sont des équations d'advection. Les solutions exactes sont donc stables L^∞ et VTD.

Nous nous attachons maintenant à calculer les flux de α_1 . Il est bien entendu que les flux de α_2 peuvent se calculer de la même manière.

Remarque 1.10.1

Il faut cependant faire attention au fait qu'en résolvant ainsi indépendamment les deux équations, nous ne sommes pas assurés d'avoir en fin de phase de projection l'égalité absolument nécessaire

$$\widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2 = 1.$$

Celle-ci sera néanmoins vérifiée à la fin du chapitre, lorsque tous les calculs auront été faits, ce qui donne un moyen beaucoup plus simple de calculer les flux de α_2 (mais altère la symétrie et peut être générateur d'une plus grande erreur numérique, nous n'opérerons pas de la sorte)! ■

1.10.1 Conditions de stabilité et de décroissance de la variation totale des fractions massiques

Exactement comme dans le chapitre 1 de la partie I, nous trouvons des conditions de type inégalité explicites sous lesquelles la solution numérique est elle aussi stable L^∞ et VTD pour les fractions massiques. Nous commençons par rappeler la forme des équations discrètes pour les fractions massiques puis nous donnons un théorème équivalent au théorème 2.

$$\begin{cases} \widehat{\rho}_j \widehat{\alpha}_{1,j} = \rho_j \widehat{\alpha}_{1,j} - \lambda (u_{j+1/2} \widehat{\rho}_{j+1/2} \widehat{\alpha}_{1,j+1/2} - u_{j-1/2} \widehat{\rho}_{j-1/2} \widehat{\alpha}_{1,j-1/2}), \\ \widehat{\rho}_j \widehat{\alpha}_{2,j} = \rho_j \widehat{\alpha}_{2,j} - \lambda (u_{j+1/2} \widehat{\rho}_{j+1/2} \widehat{\alpha}_{2,j+1/2} - u_{j-1/2} \widehat{\rho}_{j-1/2} \widehat{\alpha}_{2,j-1/2}), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \widehat{\rho}_j = \rho_j - \lambda (u_{j+1/2} \widehat{\rho}_{j+1/2} - u_{j-1/2} \widehat{\rho}_{j-1/2}), \\ \widehat{\rho}_{j+1/2} = \frac{1}{\alpha_{1,j+1/2} \widehat{T}_{1,j} + \alpha_{2,j+1/2} \widehat{T}_{2,j}} \text{ si } u_{j+1/2} \geq 0, \\ \widehat{\rho}_{j+1/2} = \frac{1}{\alpha_{1,j+1/2} \widehat{T}_{1,j+1} + \alpha_{2,j+1/2} \widehat{T}_{2,j+1}} \text{ si } u_{j+1/2} < 0. \end{cases}$$

Nous introduisons à nouveau quelques notations. Pour tout entier j ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{m}_{j-1/2} = \min(\widetilde{\alpha}_{1,j-1}, \widetilde{\alpha}_{1,j}), \\ \widetilde{M}_{j-1/2} = \max(\widetilde{\alpha}_{1,j-1}, \widetilde{\alpha}_{1,j}), \\ \widetilde{b}_j = \frac{\rho_j}{\rho_{j+1/2}} \frac{1}{u_{j+1/2} \lambda} (\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{M}_{j-1/2}) + \widetilde{M}_{j-1/2}, \\ \widetilde{B}_j = \frac{\rho_j}{\rho_{j+1/2}} \frac{1}{u_{j+1/2} \lambda} (\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{m}_{j-1/2}) + \widetilde{m}_{j-1/2}. \end{array} \right. \quad (1.44)$$

Les calculs seront plus fastidieux que pour l'équation d'advection du chapitre 1 de la partie I, et afin de faire ressortir les similitudes avec ce cas simple, nous avons choisi de couper l'analyse en deux étapes. Les résultats de la première étape (théorème 23) ont une interprétation simple en relation avec le chapitre 1 (partie I) mais ne permettent pas encore un calcul effectif des flux.

Remarque 1.10.2

On rencontre ici une difficulté supplémentaire (par rapport au cas de l'advection linéaire), c'est l'intervention non linéaire du flux de α_1 dans l'équation incrémentale sur $\rho\alpha_1$: il est présent dans $\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2}$ ainsi que dans $\widetilde{\rho}_{j+1/2}$. C'est une difficulté importante qui est liée à l'hypothèse d'additivité des volumes que nous imposons pour les flux. ■

Dans la seconde étape, nous parviendrons à lever cette difficulté et nous aboutirons aux formules pour les flux.

Nous choisissons de porter maintenant notre attention sur la fraction massique α_1 et le cas de la seconde fraction massique sera réglé plus tard.

Théorème 23

Supposons que $u_{j+1/2} > 0$ et $u_{j-1/2} > 0$. Alors, sous la condition de type CFL $\max_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\rho_{j+1/2}}{\rho_j} |u_{j+1/2}| \right) \lambda \leq 1$,

$$\widetilde{\alpha}_{1,j} \in [\widetilde{b}_j, \widetilde{B}_j] \cap [\widetilde{m}_{j-1/2}, \widetilde{M}_{j-1/2}] \text{ qui n'est pas vide.}$$

De plus, si $u_{j+1/2} > 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$ et si les flux $(\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2})_{j \in \mathbb{Z}}$ vérifient $(\forall j \in \mathbb{Z})$

$$\begin{array}{l} \widetilde{b}_j \leq \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} \leq \widetilde{B}_j, \\ \widetilde{m}_{j+1/2} \leq \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} \leq \widetilde{M}_{j+1/2}, \end{array} \quad (1.45)$$

le schéma est stable L^∞ et VTD pour la fraction massique α_1 . ■

Remarque 1.10.3

L'encadrement (1.45) n'est pas explicite car le flux $\widetilde{\rho}_{j+1/2}$ qui y intervient dépend lui-même de $\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2}$. De plus, la condition CFL dépend elle aussi du flux $\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2}$. L'intérêt de cette formulation est que l'on y retrouve les termes du théorème 2, avec

en plus un facteur $\widetilde{\rho}_j/\widetilde{\rho}_{j+1/2}$. On retrouve de ce fait le théorème 2 dans le cas où la densité est constante. ■

Démonstration

Comme dans le théorème 2, et par un raisonnement similaire que nous ne répétons pas, on commence par montrer l'encadrement $\widetilde{b}_j \leq \widetilde{\alpha}_{1,j} \leq \widetilde{B}_j$. La suite présente une petite étape supplémentaire, mais reste assez semblable. Comme dans le théorème 2, l'encadrement implique $\widetilde{b}_j \leq \widetilde{B}_j$ et $\widetilde{m}_{j+1/2} \leq \widetilde{B}_j$ et $\widetilde{b}_j \leq \widetilde{M}_{j+1/2}$. On peut trouver des flux qui vérifient les inégalités (1.45). Ces flux vérifient

$$\begin{aligned} \frac{\rho_j}{\rho_{j+1/2}} \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda} (\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{M}_{j-1/2}) + \widetilde{\alpha}_{1,j-1/2} \\ \leq \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} \\ \leq \frac{\rho_j}{\rho_{j+1/2}} \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda} (\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{m}_{j-1/2}) + \widetilde{\alpha}_{1,j-1/2}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \rho_j \frac{\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{M}_{j-1/2}}{\lambda} + u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{M}_{j-1/2} \\ \leq u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} \\ \leq \rho_j \frac{\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{m}_{j-1/2}}{\lambda} + u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{m}_{j-1/2} \end{aligned}$$

car on a supposé $u_{j+1/2} \geq 0$. Puisque $u_{j-1/2} \geq 0$ on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \rho_j \frac{\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{M}_{j-1/2}}{\lambda} + u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{M}_{j-1/2} + u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} (\widetilde{\alpha}_{1,j-1/2} - \widetilde{M}_{j-1/2}) \\ \leq u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} \\ \leq \rho_j \frac{\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{m}_{j-1/2}}{\lambda} + u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{m}_{j-1/2} + u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} (\widetilde{\alpha}_{1,j-1/2} - \widetilde{m}_{j-1/2}), \end{aligned}$$

et ceci est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{\rho_j \widetilde{\alpha}_{1,j} - \widehat{\rho}_j \widetilde{M}_{j-1/2}}{\lambda} + u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} \widetilde{\alpha}_{1,j-1/2} \\ \leq u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} \\ \leq \frac{\rho_j \widetilde{\alpha}_{1,j} - \widehat{\rho}_j \widetilde{m}_{j-1/2}}{\lambda} + u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} \widetilde{\alpha}_{1,j-1/2}, \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}_j \widetilde{m}_{j-1/2} \\ \leq \rho_j \widetilde{\alpha}_{1,j} - \lambda (u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} - u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} \widetilde{\alpha}_{1,j-1/2}) \\ \leq \widehat{\rho}_j \widetilde{M}_{j-1/2}, \end{aligned}$$

soit

$$\widetilde{m}_{j-1/2} \leq \widetilde{\alpha}_{1,j} \leq \widetilde{M}_{j-1/2}.$$

Ceci implique la stabilité L^∞ ainsi que la décroissance de la variation totale. ■

Mais, nous l'avons dit dans la remarque 1.10.3, ce théorème n'est d'aucune utilité en pratique car les bornes sur le flux et la condition CFL dépendent du flux lui-même. Le théorème 24 fournit deux contraintes linéaires qui assurent la stabilité du schéma pour α_1 .

Théorème 24

Nous posons $\widetilde{\alpha}_{2,j+1/2} = 1 - \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2}$. Supposons que $u_{j+1/2} > 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$. Supposons aussi vérifiée la condition de type CFL

$$\max_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\rho_j \min(\widetilde{\tau}_{1,j}, \widetilde{\tau}_{2,j})} |u_{j+1/2}| \right) \lambda \leq 1.$$

Si les flux $(\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2})_{j \in \mathbb{Z}}$ vérifient $(\forall j \in \mathbb{Z})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} (\lambda u_{j+1/2} + \rho_j (\widetilde{M}_{j-1/2} - \widetilde{\alpha}_{1,j}) (\widetilde{\tau}_{1,j} - \widetilde{\tau}_{2,j})) \\ \geq \rho_j (\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{M}_{j-1/2}) \widetilde{\tau}_{2,j} + \widetilde{M}_{j-1/2} \lambda u_{j+1/2}, \\ \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} (\lambda u_{j+1/2} + \rho_j (\widetilde{m}_{j-1/2} - \widetilde{\alpha}_{1,j}) (\widetilde{\tau}_{1,j} - \widetilde{\tau}_{2,j})) \\ \leq \rho_j (\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{m}_{j-1/2}) \widetilde{\tau}_{2,j} + \widetilde{m}_{j-1/2} \lambda u_{j+1/2}, \\ \widetilde{m}_{j+1/2} \leq \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} \leq \widetilde{M}_{j+1/2}, \end{array} \right. \quad (1.46)$$

le schéma est stable L^∞ et VTD pour la fraction massique α_1 . De plus, les inégalités (1.46) sont compatibles et la valeur amont $\widetilde{\alpha}_{1,j}$ les vérifie. ■

Remarque 1.10.4

Le fait d'imposer $\widetilde{\alpha}_{2,j+1/2} = 1 - \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2}$ n'est qu'une manière de simplifier le calcul des bornes sur les flux des fractions massiques en ne faisant intervenir qu'un seul de ces flux dans les équations. Nous verrons par la suite que cela ne brise pas la symétrie concernant les deux fractions massiques. ■

Démonstration

Le schéma de la démonstration est le suivant. On commence par montrer que les inégalités (1.46) sont équivalentes aux inégalités (1.45), puis on montre que la condition CFL du nouveau théorème est plus stricte que celle du théorème 23. Montrons que la première des inégalités (1.46) est équivalente à la première des inégalités (1.45), $\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} \geq \widetilde{b}_j$. Grâce à la définition de \widetilde{b}_j , on voit que $\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} \geq \widetilde{b}_j$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \lambda u_{j+1/2} \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} \geq \rho_j (\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} \widetilde{\tau}_{1,j} + \widetilde{\alpha}_{2,j+1/2} \widetilde{\tau}_{2,j}) (\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{M}_{j-1/2}) \\ + \widetilde{M}_{j-1/2} \lambda u_{j+1/2} \end{aligned}$$

car $1/\widetilde{\rho_{j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}\widetilde{\tau_{1,j}} + \widetilde{\alpha_{2,j+1/2}}\widetilde{\tau_{2,j}}$. En tenant compte de $\widetilde{\alpha_{2,j+1/2}} = 1 - \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}$, c'est équivalent à

$$\begin{aligned} \lambda u_{j+1/2} \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} &\geq \rho_j \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} (\widetilde{\tau_{1,j}} - \widetilde{\tau_{2,j}}) (\widetilde{\alpha_{1,j}} - \widetilde{M_{j-1/2}}) \\ &\quad + \widetilde{M_{j-1/2}} \lambda u_{j+1/2} + \rho_j (\widetilde{\alpha_{1,j}} - \widetilde{M_{j-1/2}}) \widetilde{\tau_{2,j}}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} (\lambda u_{j+1/2} + \rho_j (\widetilde{M_{j-1/2}} - \widetilde{\alpha_{1,j}}) (\widetilde{\tau_{1,j}} - \widetilde{\tau_{2,j}})) \\ \geq \rho_j (\widetilde{\alpha_{1,j}} - \widetilde{M_{j-1/2}}) \widetilde{\tau_{2,j}} + \widetilde{M_{j-1/2}} \lambda u_{j+1/2}. \end{aligned}$$

L'équivalence entre les autres inégalités se montre de la même manière. Comme les inégalités (1.45) sont compatibles, les inégalités (1.46) le sont aussi.

Maintenant, on montre que sous l'hypothèse de consistance $\widetilde{m_{j+1/2}} \leq \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} \leq \widetilde{M_{j+1/2}}$,

$$\max_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\rho_j \min(\widetilde{\tau_{1,j}}, \widetilde{\tau_{2,j}})} u_{j+1/2} \right) \lambda \leq 1 \implies \max_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\widetilde{\rho_{j+1/2}}}{\rho_j} u_{j+1/2} \right) \lambda \leq 1$$

(la condition CFL du théorème 24 est plus forte que celle du théorème 23). On utilise pour cela le fait que $0 \leq \widetilde{\alpha_{1,j}} \leq 1 \forall j \in \mathbb{Z}$, d'où par consistance $0 \leq \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} \leq 1 \forall j \in \mathbb{Z}$. Bien sûr,

$$\min(\widetilde{\tau_{1,j}}, \widetilde{\tau_{2,j}}) \leq \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} \widetilde{\tau_{1,j}} + (1 - \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}) \widetilde{\tau_{2,j}},$$

donc

$$\frac{1}{\rho_j \min(\widetilde{\tau_{1,j}}, \widetilde{\tau_{2,j}})} u_{j+1/2} \lambda \geq \frac{\widetilde{\rho_{j+1/2}}}{\rho_j} u_{j+1/2} \lambda,$$

et ainsi comme prévu

$$\max_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\rho_j \min(\widetilde{\tau_{1,j}}, \widetilde{\tau_{2,j}})} u_{j+1/2} \right) \lambda \geq \max_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\widetilde{\rho_{j+1/2}}}{\rho_j} u_{j+1/2} \right) \lambda.$$

■

Moins simple que le théorème 2 pour l'advection linéaire, ce théorème est lui aussi constructif, car il donne une condition linéaire sous laquelle le schéma est stable pour la fraction massique α_1 . La proposition suivante exprime la symétrie en (α_1, α_2) des conditions de stabilité.

Proposition 19

Les flux $\widetilde{\alpha}_{2,j+1/2}$ définis dans le théorème 24 par $\widetilde{\alpha}_{2,j+1/2} = 1 - \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2}$ vérifient des inégalités symétriques des inégalités (1.46) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\alpha}_{2,j+1/2}(\lambda u_{j+1/2} + \rho_j((1 - \widetilde{m}_{j-1/2}) - \widetilde{\alpha}_{2,j})(\widetilde{\tau}_{2,j} - \widetilde{\tau}_{1,j})) \\ \quad \geq \rho_j(\widetilde{\alpha}_{2,j} - (1 - \widetilde{m}_{j-1/2}))\widetilde{\tau}_{1,j} + (1 - \widetilde{m}_{j-1/2})\lambda u_{j+1/2}, \\ \widetilde{\alpha}_{2,j+1/2}(\lambda u_{j+1/2} + \rho_j((1 - \widetilde{M}_{j-1/2}) - \widetilde{\alpha}_{2,j})(\widetilde{\tau}_{2,j} - \widetilde{\tau}_{1,j})) \\ \quad \leq \rho_j(\widetilde{\alpha}_{2,j} - (1 - \widetilde{M}_{j-1/2}))\widetilde{\tau}_{1,j} + (1 - \widetilde{M}_{j-1/2})\lambda u_{j+1/2}, \\ (1 - \widetilde{M}_{j+1/2}) \leq \widetilde{\alpha}_{2,j+1/2} \leq (1 - \widetilde{m}_{j+1/2}), \end{array} \right. \quad (1.47)$$

et bien sûr

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \widetilde{M}_{j-1/2}) = \min(\widetilde{\alpha}_{2,j-1}, \widetilde{\alpha}_{2,j}), \\ (1 - \widetilde{m}_{j-1/2}) = \max(\widetilde{\alpha}_{2,j-1}, \widetilde{\alpha}_{2,j}). \end{array} \right.$$

■

Démonstration

La première inégalité sur $\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2}$ est

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2}(\lambda u_{j+1/2} + \rho_j(\widetilde{M}_{j-1/2} - \widetilde{\alpha}_{1,j})(\widetilde{\tau}_{1,j} - \widetilde{\tau}_{2,j})) \\ \geq \rho_j(\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{M}_{j-1/2})\widetilde{\tau}_{2,j} + \widetilde{M}_{j-1/2}\lambda u_{j+1/2}. \end{aligned}$$

Elle est équivalente à

$$\begin{aligned} -\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2}(\lambda u_{j+1/2} + \rho_j(\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{M}_{j-1/2})(\widetilde{\tau}_{2,j} - \widetilde{\tau}_{1,j})) \\ \leq -\rho_j(\widetilde{\alpha}_{1,j} - \widetilde{M}_{j-1/2})\widetilde{\tau}_{2,j} - \widetilde{M}_{j-1/2}\lambda u_{j+1/2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\widetilde{\alpha}_{1,j+1/2}(\lambda u_{j+1/2} + \rho_j((1 - \widetilde{M}_{j-1/2}) - (1 - \widetilde{\alpha}_{1,j}))(\widetilde{\tau}_{2,j} - \widetilde{\tau}_{1,j})) \\ \leq -\rho_j((1 - \widetilde{M}_{j-1/2}) - (1 - \widetilde{\alpha}_{1,j}))\widetilde{\tau}_{2,j} + (1 - \widetilde{M}_{j-1/2})\lambda u_{j+1/2} - \lambda u_{j+1/2}. \end{aligned}$$

Donc $(1 - \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2}) = \widetilde{\alpha}_{2,j+1/2}$ vérifie

$$\begin{aligned} (1 - \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2})(\lambda u_{j+1/2} + \rho_j((1 - \widetilde{M}_{j-1/2}) - (1 - \widetilde{\alpha}_{1,j}))(\widetilde{\tau}_{2,j} - \widetilde{\tau}_{1,j})) \\ \leq -\rho_j((1 - \widetilde{M}_{j-1/2}) - (1 - \widetilde{\alpha}_{1,j}))\widetilde{\tau}_{2,j} \\ + \rho_j((1 - \widetilde{M}_{j-1/2}) - (1 - \widetilde{\alpha}_{1,j}))(\widetilde{\tau}_{2,j} - \widetilde{\tau}_{1,j}) \\ + (1 - \widetilde{M}_{j-1/2})\lambda u_{j+1/2} - \lambda u_{j+1/2} + \lambda u_{j+1/2}, \end{aligned}$$

et la deuxième inégalité sur $\widetilde{\alpha}_{2,j+1/2}$ apparaît :

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_{2,j+1/2}(\lambda u_{j+1/2} + \rho_j((1 - \widetilde{M}_{j-1/2}) - \widetilde{\alpha}_{2,j})(\widetilde{\tau}_{2,j} - \widetilde{\tau}_{1,j})) \\ \leq \rho_j(\widetilde{\alpha}_{2,j} - (1 - \widetilde{M}_{j-1/2}))\widetilde{\tau}_{1,j} + (1 - \widetilde{M}_{j-1/2})\lambda u_{j+1/2}. \end{aligned}$$

La première inégalité sur $\widetilde{\alpha_{2,j+1/2}}$ est déduite de façon symétrique de la deuxième inégalité sur $\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}$.

D'autre part, l'égalité $\widetilde{\alpha_{1,j}} + \widetilde{\alpha_{2,j}} = 1$ implique de manière triviale la fin de la proposition :

$$\begin{cases} (1 - \widetilde{M_{j-1/2}}) = \min(\widetilde{\alpha_{2,j-1}}, \widetilde{\alpha_{2,j}}), \\ (1 - \widetilde{m_{j-1/2}}) = \max(\widetilde{\alpha_{2,j-1}}, \widetilde{\alpha_{2,j}}). \end{cases}$$

■

1.10.2 Les formules pour les flux

Nous pouvons maintenant choisir les flux pour les fractions massiques avec la certitude que la solution numérique sera stable L^∞ et VTD. Nous supposons toujours $u_{j+1/2} > 0$ et $u_{j-1/2} > 0$. Pour le cas de vitesses négatives ou nulles ou changeant de signe d'une maille à l'autre, voir la remarque 1.10.7.

Le choix que nous faisons est cette fois encore le décentrage maximal vers l'aval, c'est-à-dire que nous résolvons le problème

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } |\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} - \alpha_{1,j+1}| \\ & \text{sous la contrainte (1.46).} \end{aligned}$$

Les contraintes (1.46) définissent comme dans le cas de l'advection linéaire une borne inférieure $\widetilde{\gamma_{j+1/2}}$ et une borne supérieure $\widetilde{\Gamma_{j+1/2}}$, mais ce qui est nouveau, c'est que l'expression de ces bornes dépend de l'écoulement. Nous donnons ci-dessous toutes les expressions possibles des bornes. Posons

$$\begin{cases} \widetilde{s_{j+1/2}} = \lambda u_{j+1/2} + \rho_j (\widetilde{M_{j-1/2}} - \widetilde{\alpha_{1,j}}) (\widetilde{\tau_{1,j}} - \widetilde{\tau_{2,j}}), \\ \widetilde{t_{j+1/2}} = \rho_j (\widetilde{\alpha_{1,j}} - \widetilde{M_{j-1/2}}) \widetilde{\tau_{2,j}} + \widetilde{M_{j-1/2}} \lambda u_{j+1/2}, \\ \widetilde{v_{j+1/2}} = \lambda u_{j+1/2} + \rho_j (\widetilde{m_{j-1/2}} - \widetilde{\alpha_{1,j}}) (\widetilde{\tau_{1,j}} - \widetilde{\tau_{2,j}}), \\ \widetilde{w_{j+1/2}} = \rho_j (\widetilde{\alpha_{1,j}} - \widetilde{m_{j-1/2}}) \widetilde{\tau_{2,j}} + \widetilde{m_{j-1/2}} \lambda u_{j+1/2}, \end{cases}$$

de sorte que les inégalités (1.46) du théorème 24 se réécrivent

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} \widetilde{s_{j+1/2}} \geq \widetilde{t_{j+1/2}}, \\ \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} \widetilde{v_{j+1/2}} \leq \widetilde{w_{j+1/2}}, \\ \widetilde{m_{j+1/2}} \leq \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} \leq \widetilde{M_{j+1/2}}. \end{cases}$$

Nous avons plusieurs cas à envisager, suivant les signes de $\widetilde{s_{j+1/2}}$ et $\widetilde{v_{j+1/2}}$. Remarquons que si $\widetilde{s_{j+1/2}} \leq 0$, $\widetilde{v_{j+1/2}} \geq 0$, donc ces deux nombres ne peuvent être négatifs simultanément. On pourra donc finalement retenir le formulaire suivant, où l'on définit les valeurs $\widetilde{\gamma_{j+1/2}}$ et $\widetilde{\Gamma_{j+1/2}}$ qui sont les valeurs minimales et maximale que peut prendre le flux de fraction massique.

– Si $\widetilde{s_{j+1/2}} > 0$ et $\widetilde{v_{j+1/2}} > 0$, on pose

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma}_{j+1/2} = \max(\widetilde{t}_{j+1/2}/\widetilde{s}_{j+1/2}, \widetilde{m}_{j+1/2}), \\ \widetilde{\Gamma}_{j+1/2} = \min(\widetilde{w}_{j+1/2}/\widetilde{v}_{j+1/2}, \widetilde{M}_{j+1/2}) ; \end{cases}$$

– si $\widetilde{s}_{j+1/2} > 0$ et $\widetilde{v}_{j+1/2} < 0$, on pose

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma}_{j+1/2} = \max(\widetilde{t}_{j+1/2}/\widetilde{s}_{j+1/2}, \widetilde{w}_{j+1/2}/\widetilde{v}_{j+1/2}, \widetilde{m}_{j+1/2}), \\ \widetilde{\Gamma}_{j+1/2} = \widetilde{M}_{j+1/2} ; \end{cases}$$

– si $\widetilde{s}_{j+1/2} < 0$, $\widetilde{v}_{j+1/2} > 0$ et on pose

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma}_{j+1/2} = \widetilde{m}_{j+1/2}, \\ \widetilde{\Gamma}_{j+1/2} = \min(\widetilde{t}_{j+1/2}/\widetilde{s}_{j+1/2}, \widetilde{w}_{j+1/2}/\widetilde{v}_{j+1/2}, \widetilde{M}_{j+1/2}). \end{cases}$$

– si $\widetilde{s}_{j+1/2} = 0$ (resp. $\widetilde{v}_{j+1/2} = 0$), la contrainte associée est automatiquement vérifiée car $\widetilde{t}_{j+1/2} < 0$ (resp. $\widetilde{w}_{j+1/2} < 0$), donc on peut poser $\widetilde{\gamma}_{j+1/2} = \widetilde{m}_{j+1/2}$ (resp. $\widetilde{\Gamma}_{j+1/2} = \widetilde{M}_{j+1/2}$). Cela en théorie du moins, voir la remarque 1.10.5.

Comme pour l'advection linéaire, le flux ne peut prendre que trois valeurs (qui sont fonction des valeurs de $\lambda u_{j+1/2}$, $\widetilde{\tau}_{1,j}$, $\widetilde{\tau}_{2,j} \dots$).

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} &= \widetilde{\gamma}_{j+1/2} && \text{si } \widetilde{\alpha}_{1,j+1} \leq \widetilde{\gamma}_{j+1/2}, \\ \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} &= \widetilde{\alpha}_{1,j+1} && \text{si } \widetilde{\gamma}_{j+1/2} \leq \widetilde{\alpha}_{1,j+1} \leq \widetilde{\Gamma}_{j+1/2}, \\ \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} &= \widetilde{\Gamma}_{j+1/2} && \text{si } \widetilde{\Gamma}_{j+1/2} \leq \widetilde{\alpha}_{1,j+1}. \end{aligned}$$

Remarque 1.10.5

Nous avons vu que lorsque $\widetilde{s}_{j+1/2} = 0$ (resp. $\widetilde{v}_{j+1/2} = 0$), la singularité pour le calcul de $\widetilde{\gamma}_{j+1/2}$ (resp. $\widetilde{\Gamma}_{j+1/2}$) était levée du fait que la contrainte de stabilité était automatiquement vérifiée. Pourtant, la résolution numérique de ce problème est beaucoup plus délicate (« singularités numériques ») et dans un programme informatique, il est plus sûr de choisir le décentrage amont classique, qui est toujours un facteur de stabilité) lorsque $\widetilde{s}_{j+1/2}$ (resp. $\widetilde{v}_{j+1/2}$) est très proche de zéro (cf. D). Ceci est sans grande importance car la nullité de $\widetilde{s}_{j+1/2}$ ou $\widetilde{v}_{j+1/2}$ est « exceptionnelle ». ■

Remarque 1.10.6

On remarque que le flux calculé ici est exactement le flux calculé pour l'advection linéaire dans le cas où $\widetilde{\tau}_{1,j} = \widetilde{\tau}_{2,j} = 1/\rho_j$. ■

Nous terminons ce chapitre en complétant le résultat de symétrie de la proposition 19.

Proposition 20

Les flux $\widetilde{\alpha}_{2,j+1/2}$ définis par $\widetilde{\alpha}_{2,j+1/2} = 1 - \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2}$ sont solution du problème

$$\begin{aligned} &\text{minimiser } |\widetilde{\alpha}_{2,j+1/2} - \widetilde{\alpha}_{2,j+1}| \\ &\text{sous la contrainte (1.47).} \end{aligned}$$

■

Démonstration

En utilisant les inégalités (1.47), on trouve sans peine l'encadrement de $\widetilde{\alpha_{2,j+1/2}}$:

$$(1 - \widetilde{\Gamma_{j+1/2}}) \leq \widetilde{\alpha_{2,j+1/2}} \leq (1 - \widetilde{\gamma_{j+1/2}}).$$

- Si $\widetilde{\alpha_{1,j+1}} \leq \widetilde{\gamma_{j+1/2}}$, $\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\gamma_{j+1/2}}$, $\widetilde{\alpha_{2,j+1}} \geq 1 - \widetilde{\gamma_{j+1/2}}$ et $\widetilde{\alpha_{2,j+1/2}} = 1 - \widetilde{\gamma_{j+1/2}}$, conformément au résultat annoncé ;
- si $\widetilde{\gamma_{j+1/2}} \leq \widetilde{\alpha_{1,j+1}} \leq \widetilde{\Gamma_{j+1/2}}$, $\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{1,j+1}}$, $1 - \widetilde{\Gamma_{j+1/2}} \leq \widetilde{\alpha_{2,j+1}} \leq 1 - \widetilde{\gamma_{j+1/2}}$ et $\widetilde{\alpha_{2,j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{2,j+1}}$, ce qui est encore en accord avec la proposition ;
- si $\widetilde{\Gamma_{j+1/2}} \leq \widetilde{\alpha_{1,j+1}}$, $\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\Gamma_{j+1/2}}$, $\widetilde{\alpha_{2,j+1}} \leq 1 - \widetilde{\Gamma_{j+1/2}}$ et $\widetilde{\alpha_{2,j+1/2}} = 1 - \widetilde{\Gamma_{j+1/2}}$, ceci prouve définitivement le résultat. ■

Remarque 1.10.7

Nous avons fait tous les calculs en supposant $u_{j+1/2} > 0$ et $u_{j-1/2} > 0$. On trouve des formules analogues dans le cas où $u_{j+1/2} < 0$ et $u_{j-1/2} < 0$. Dans le cas où les vitesses sont de signes différents, on choisira un décentrage amont (que l'on sait préserver dans tous les cas la stabilité L^∞ et la décroissance de la variation totale). On fera le même choix dans le cas où $u_{j+1/2} = 0$, mais dans ce cas le choix du flux n'a pas d'importance puisque l'advection se fait à vitesse nulle. ■

Le schéma numérique qui découle de l'analyse effectuée dans cette partie est intégralement rappelé dans l'annexe D.

Chapitre 2

Résultats numériques

Nous présentons des résultats numériques avec deux constituants. Dans un premier temps, les constituants sont séparés initialement. Ensuite, nous observons le cas de vrais mélanges, c'est dans ce cas que le choix du modèle de mélange a son importance.

Les deux fluides sont toujours supposés gaz parfaits. Leurs pression et température s'écrivent

$$\begin{cases} p_1 = (\gamma_1 - 1) \frac{\varepsilon_1}{\tau_1}, \\ p_2 = (\gamma_2 - 1) \frac{\varepsilon_2}{\tau_2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = c_{v1} \varepsilon_1, \\ T_2 = c_{v2} \varepsilon_2. \end{cases}$$

Dans tous les cas que nous présentons, le segment d'espace est $[0,1]$. Sauf indication différente, les calculs sont faits avec cent mailles d'espace. Pour chaque figure, le segment en espace est représenté par l'axe des abscisses et la valeur représentée en ordonnées est celle indiquée par la légende.

Remarque 2.0.8

Nous avons trois modèles de mélanges et deux discrétisations (décentrage amont et décentrage aval sous contraintes) à comparer. En fait, avec des gaz parfaits, le modèle isobare isotherme et le modèle de Dalton sont équivalents pourvu que l'initialisation soit isobare isotherme, c'est-à-dire si initialement $p_1 = p_2$ et $T_1 = T_2$ dans chaque maille. Nous ne présentons donc de résultats que pour le modèle de Dalton et le modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur, plus un résultat qui montre que les solutions numériques pour le modèle isobare isotherme et le modèle de Dalton sont équivalents (même en ce qui concerne leur version discrète). Initialement, $p_1 = p_2$ et $T_1 = T_2$. Si l'on utilise alors le modèle de Dalton, on aura toujours $T_1 = T_2$

(par définition du modèle de Dalton), et $D_t(\tau_1/\tau_2) = 0$. Or

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{p_1 \varepsilon_1}{\gamma_1 - 1} = \frac{p_1 c_{v1} T_1}{\gamma_1 - 1}, \\ \tau_2 = \frac{p_2 \varepsilon_2}{\gamma_2 - 1} = \frac{p_2 c_{v2} T_2}{\gamma_2 - 1}. \end{cases}$$

Donc

$$D_t\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = \frac{c_{v1} T_1 (\gamma_2 - 1)}{c_{v2} T_2 (\gamma_1 - 1)} D_t\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 0.$$

Ainsi on aura toujours $p_1 = p_2$, ce qui nous met dans une situation isobare isotherme.

■

2.1 Interface entre les constituants

2.1.1 Tube à choc de Sod

Les conditions initiales pour ce cas test sont les conditions du tube à choc de Sod avec une interface située sur la discontinuité de la densité et de la pression.

$$\left. \begin{array}{l} \rho^0(x) = 1 \\ u^0(x) = 0 \\ p^0(x) = 1 \\ \alpha_1^0(x) = 1 \end{array} \right\} \text{ si } x \leq 1/2 ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho^0(x) = 0,125 \\ u^0(x) = 0 \\ p^0(x) = 0,1 \\ \alpha_1^0(x) = 0 \end{array} \right\} \text{ si } x > 1/2.$$

On représente les données sur les quatre figures suivantes.

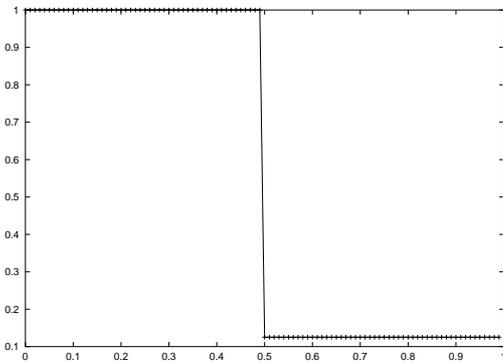


FIG. 2.1 – densité initiale

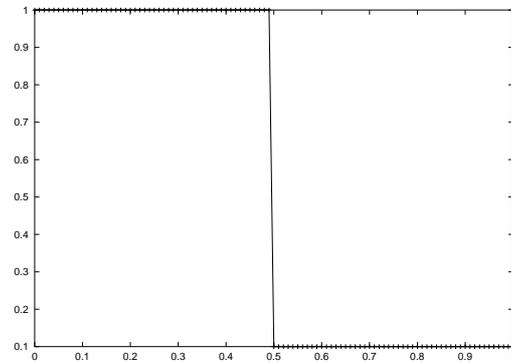
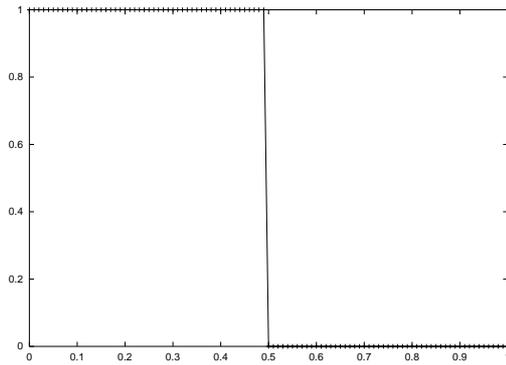
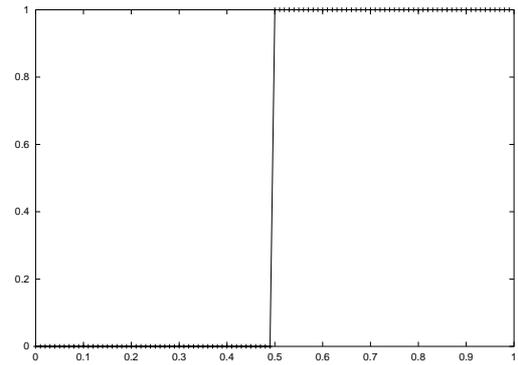


FIG. 2.2 – pression initiale

FIG. 2.3 – *fraction massique α_1 initiale*FIG. 2.4 – *fraction massique α_2 initiale*

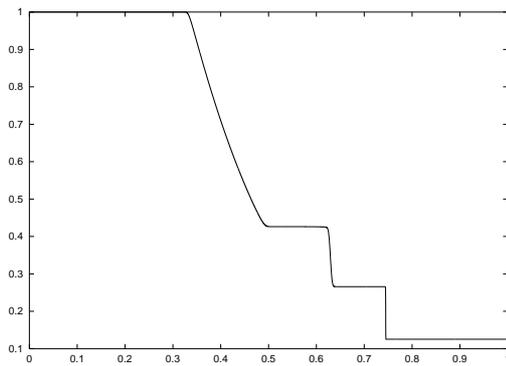
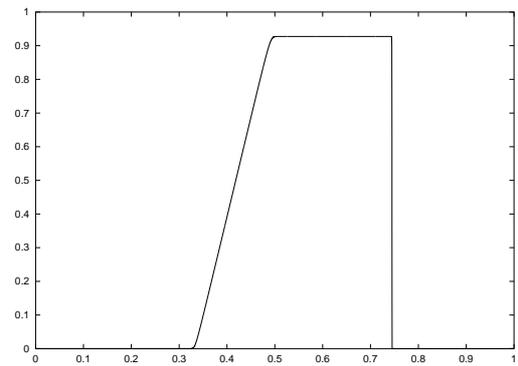
Nous regardons maintenant les résultats numériques donnés par le schéma avec décentrage amont (classique) pour les fractions massiques et le décentrage aval sous contraintes étudié dans le chapitre précédent. Les calculs sont fait avec la loi de mélange de Dalton puis la loi isobare avec équirépartition des quantités de chaleur. Les résultats sont obtenus pour un temps $t = 0,14$.

Nous montrons deux résultats : le premier est trouvé pour deux exposants adiabatiques égaux, le second pour des exposants différents.

Loi de Dalton,

$$\underline{\gamma_1 = \gamma_2 = 1,4, c_{v1} = c_{v2} = 1}$$

Puisque les exposants adiabatiques sont égaux, nous avons affaire à un tube à choc de Sod classique car la loi d'état est constante en espace. Nous présentons en premier lieu une solution « de référence », obtenue avec le décentrage amont et un nombre de mailles suffisamment important (dix mille) pour que les trois types d'ondes soient clairement identifiés (de gauche à droite : détente, discontinuité de contact et choc).

FIG. 2.5 – *densité à convergence*FIG. 2.6 – *vitesse à convergence*

Nous ne représentons pas les fractions massiques et nous nous contentons de préciser que α_s vaut 1 à gauche de la discontinuité de contact et 0 à droite.

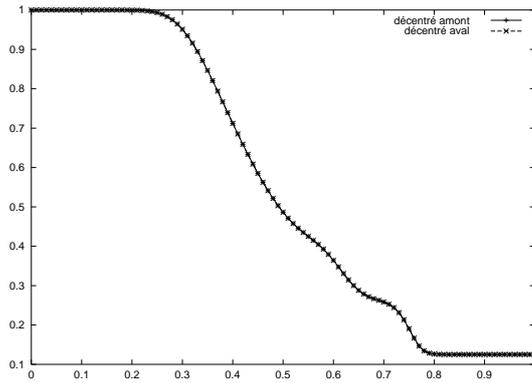


FIG. 2.7 – densité

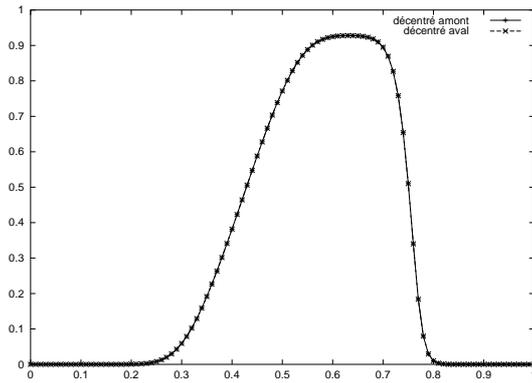
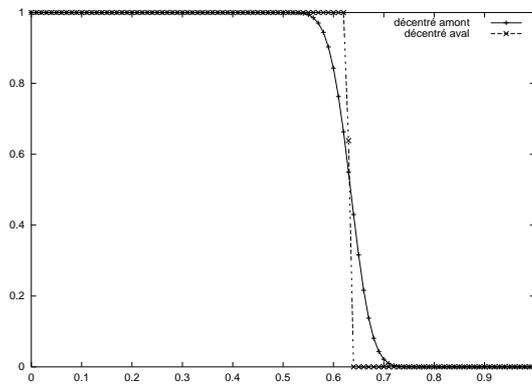
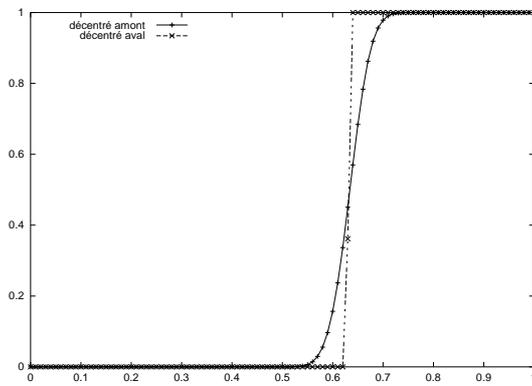


FIG. 2.8 – vitesse

FIG. 2.9 – fraction massique α_1 FIG. 2.10 – fraction massique α_2

Les solutions numériques avec le schéma décentré amont et le schéma décentré aval sont confondues en ce qui concerne les variables thermodynamiques (densité, vitesse, pression). En particulier, la diffusion numérique est importante (la discontinuité de contact est à peine visible pour ce calcul fait avec cent mailles). Cette diffusion numérique est la diffusion habituelle des schémas d'ordre un. En revanche, on constate sur les fractions massiques que le caractère antidissipatif du schéma de projection s'exprime de la même façon que pour l'équation d'advection linéaire (cf. partie I). L'interface numérique reste parfaitement résolue avec le décentrage aval sous contraintes alors que le décentrage amont diffuse les fractions de la même façon que la discontinuité de contact.

Les résultats (non présentés) obtenus avec la loi isobare avec équirépartition des quantités de chaleur sont identiques en tout point (c'est une autre conséquence naturelle du fait que les deux gaz parfaits ont la même loi d'état).

Loi de Dalton,

$$\underline{\underline{\gamma_1 = 1,4, \gamma_2 = 2,4, c_{v1} = c_{v2} = 1}}$$

Cette fois, les lois d'état des deux gaz parfaits situés de part et d'autre de la discontinuité initiale sont différentes, et l'on va observer que les résultats donnés par

les deux lois de mélange différentes sont différents. La solution de référence que nous donnons a été calculée avec dix mille mailles et un décentrage amont.

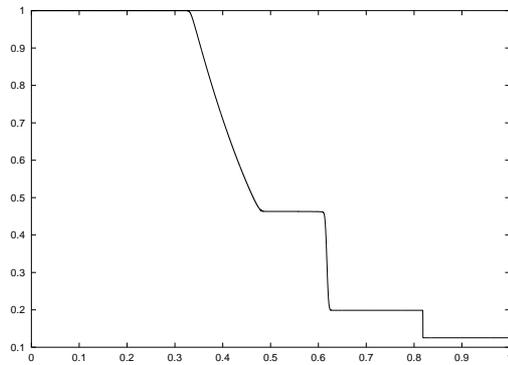


FIG. 2.11 – densité à convergence

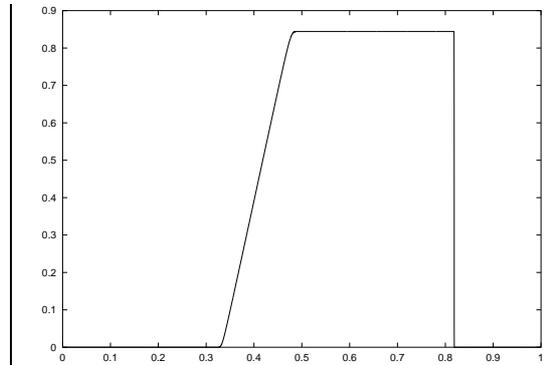


FIG. 2.12 – vitesse à convergence

Nous rapportons maintenant un résultat obtenu avec cent mailles.

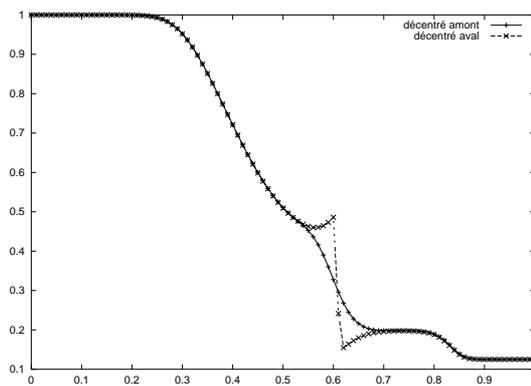


FIG. 2.13 – densité

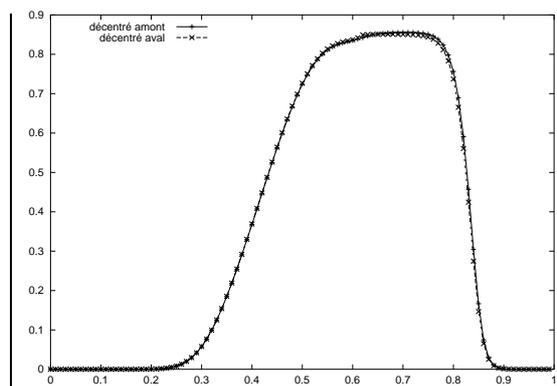
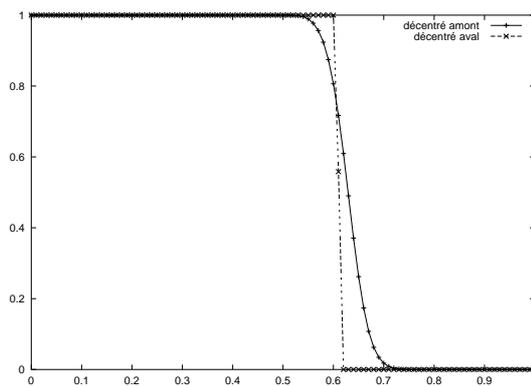
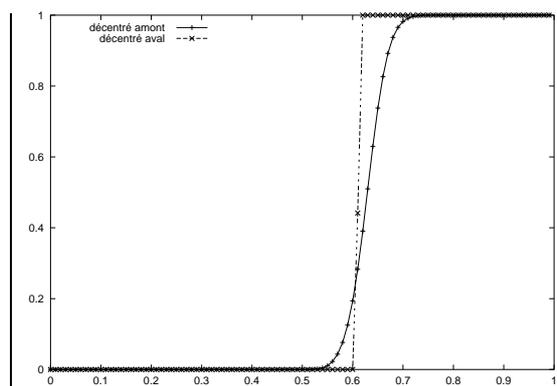


FIG. 2.14 – vitesse

FIG. 2.15 – fraction massique α_1 FIG. 2.16 – fraction massique α_2

Dans ce cas, la discontinuité de contact est diffusée en décentrage amont et pas en décentrage aval. En fait, le saut de densité à la discontinuité de contact est

entièrement déterminé par les valeurs de γ_1 , γ_2 , c_{v1} et c_{v2} . En effet, la pression étant égale de chaque côté de l'interface, dans la maille de mélange numérique (unique avec le décentrage aval), $p_1 = p_2$. Donc,

$$\begin{cases} (\gamma_1 - 1)c_{v1}T_1/\tau_1 = (\gamma_2 - 1)c_{v2}T_2/\tau_2, \\ T_1 = T_2, \end{cases}$$

qui implique que

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{(\gamma_1 - 1)c_{v1}}{(\gamma_2 - 1)c_{v2}}.$$

En faisant ensuite l'hypothèse (vérifiée sur les résultats numériques) que la température est diffusée par le schéma numérique, et que τ_1 est la valeur de τ à gauche de l'interface et τ_2 est la valeur de τ à droite de l'interface, on en déduit que

$$\frac{\text{valeur de } \tau \text{ à gauche de l'interface}}{\text{valeur de } \tau \text{ à droite de l'interface}} = (\gamma_1 - 1)c_{v1}/(\gamma_2 - 1)c_{v2}.$$

Dans le cas que nous avons choisi, ce rapport vaut $(1,4 - 1)/(2,4 - 1) = 0,29$. Le résultat numérique donne 0,33, qui est très proche. Une possibilité pour remédier à ce défaut est d'ajuster les coefficients c_{v1} et c_{v2} pour que le rapport ci-dessus prenne une valeur arbitraire. Cette opération est efficace mais très artificielle et nous ne l'effectuerons pas.

Fermeture isobare avec équirépartition des quantités de chaleur,

$$\gamma_1 = 1,4, \gamma_2 = 2,4, c_{v1} = c_{v2} = 1$$

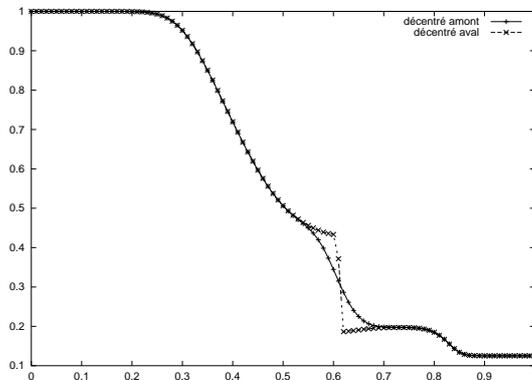


FIG. 2.17 – densité

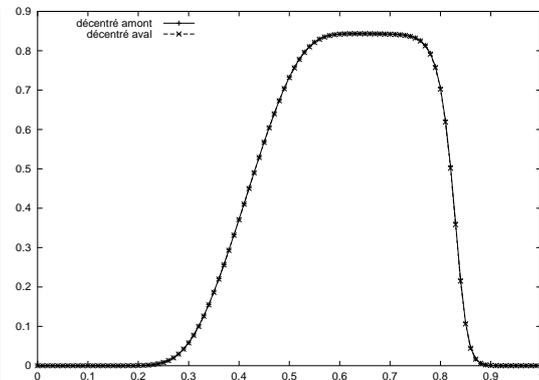
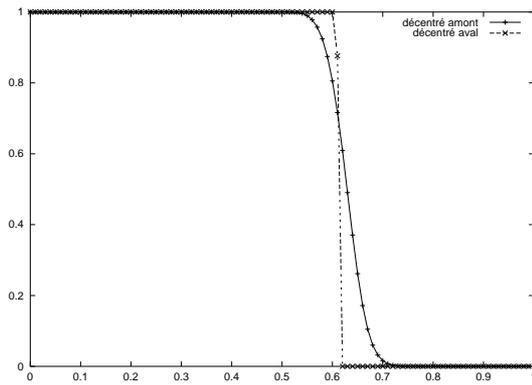
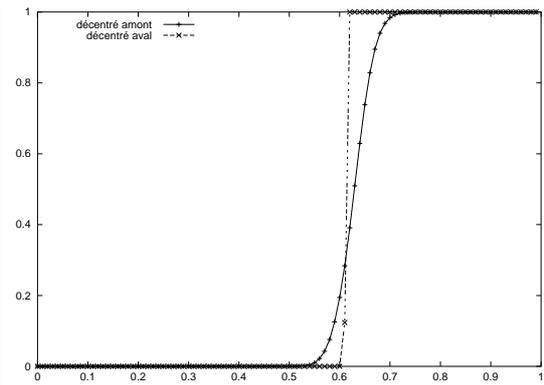


FIG. 2.18 – vitesse

FIG. 2.19 – fraction massique α_1 FIG. 2.20 – fraction massique α_2

On constate que le résultat est très proche du résultat calculé avec la loi de Dalton, et les deux calculs convergent vers la même solution si l'on fait tendre les pas de discrétisation vers 0 (on peut le vérifier pour la vitesse et la pression sur les figures 2.21 à 2.26). Cela vient du fait qu'il n'y a pas de zone de mélange étendue et est en accord avec le résultat de dégénérescence obtenu pour les modèles de mélange en présence d'interfaces dans la partie II. On note cependant que la discontinuité de contact est beaucoup plus stable. Cela tient sans doute au couplage fort qui existe entre la discrétisation des équations du mélange et des fractions massiques, ainsi qu'au fait que le schéma écrit pour ce modèle est entropique.

Il semble en analysant les résultats du modèle de Dalton et de l'équirépartition des quantités de chaleur que deux types d'erreurs numériques sont présents à la discontinuité de contact. La première erreur est de type « wall-heating ». Elle provient de la phase lagrangienne (c'est un phénomène connu dans les schémas lagrangiens, cf. [72]). Cette erreur est gommée par la diffusion numérique de la phase de projection en décentrage amont, mais le décentrage aval ne diffuse pas et la conserve. La deuxième erreur provient du modèle et a déjà été évoquée pour le modèle de Dalton où le saut de densité est fixé par les paramètres de loi d'état. Cette erreur est très faible ou absente pour le modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur.

Enfin, une analyse comparative des vitesses obtenues avec le modèle de Dalton et le modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur fait apparaître une légère « oscillation » pour le modèle de Dalton, oscillation totalement absente pour l'autre modèle. L'oscillation de la vitesse est un phénomène connu. Tous les schémas (d'ordre un et d'ordre deux) étudiés dans [18] présentent ce défaut. De nombreuses techniques ont été développées pour éliminer cette erreur. Cependant, toutes celles que nous connaissons — voir [80], [2], [66], [36], [50], [51] — ont abouti à l'écriture de schémas qui présentent des défauts de conservation ; au mieux, les solutions pro-

posées conservent la masse totale, la quantité de mouvement totale et l'énergie totale, mais pas la masse de chaque espèce, ce qui est inacceptable dans certains cas. Une étude numérique de l'erreur de conservation commise peut être trouvée dans [27]. Or, comme nous l'avons déjà noté dans la remarque 1.6.3, tous les schémas que nous proposons ici (quel que soit le décentrage des fractions massiques) sont conservatifs en les masses de chaque constituant (et donc en masse totale) ainsi qu'en quantité de mouvement et en énergie totale. L'oscillation de la vitesse créée par le modèle de Dalton est accompagnée (comme dans les références citées) d'une oscillation de la pression et nous présentons maintenant des résultats qui mettent en valeur les différences : le cas-test est un tube à choc de Sod avec une interface des constituants au même lieu que la discontinuité initiale des variables thermodynamiques ($x = 0,5$). Les exposants adiabatiques sont choisis de manière à rendre importantes les oscillations obtenues avec le modèle de Dalton. L'instant d'observation est $t = 0,1$. Les calculs sont fait avec le décentrage aval sous contraintes amont des flux de fractions massiques, mais les conclusions sont absolument identiques pour un choix différent.

$$\underline{\gamma_1 = 1,06, \gamma_2 = 1,6, c_{v1} = c_{v2} = 1}$$

Avec cent mailles, on obtient

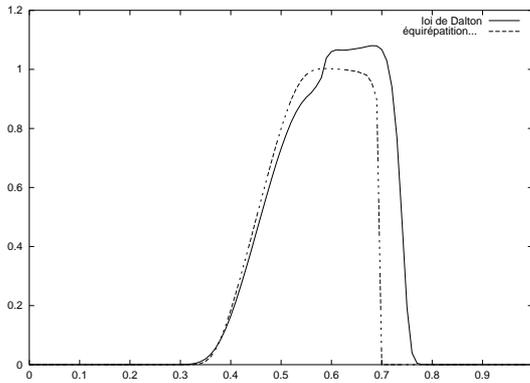


FIG. 2.21 – *vitesse*

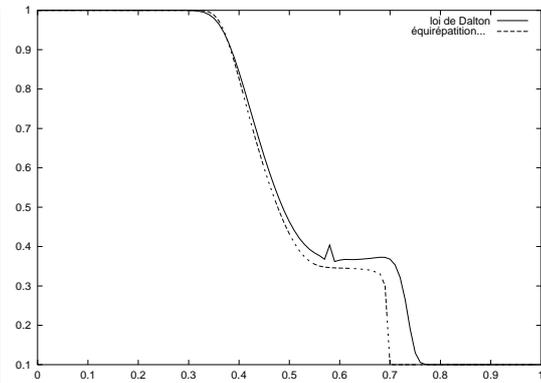
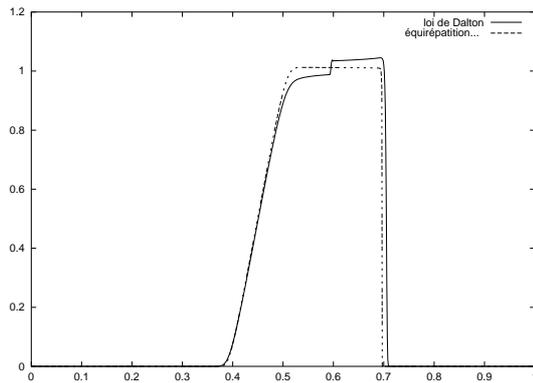
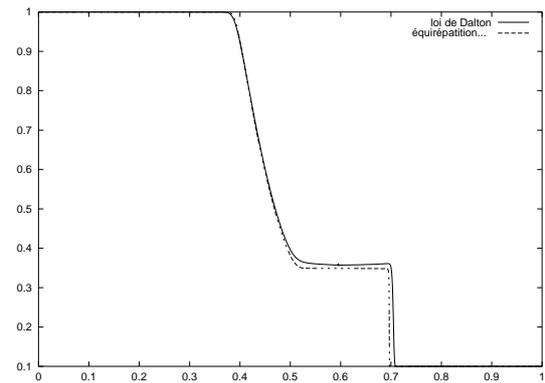


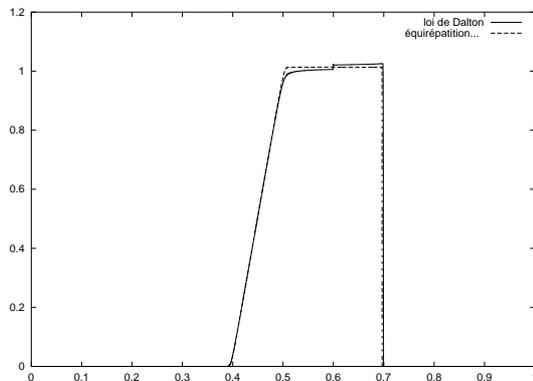
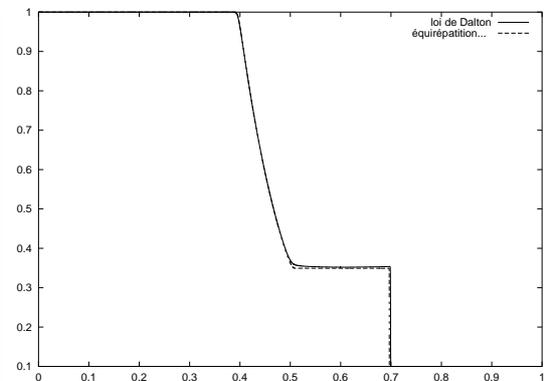
FIG. 2.22 – *pression*

Les résultats sont très dissemblables, tant pour les valeurs des « plateaux » que pour les vitesses de propagation. Avec mille mailles, on obtient

FIG. 2.23 – *vitesse*FIG. 2.24 – *pression*

Il est clair que le résultat donné par le modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur est très proche de la solution à convergence, et on note que les valeurs des plateaux et la vitesse de propagation de la discontinuité étaient atteints dans le calcul précédent avec cent mailles. Le modèle de Dalton, lui, ne donne pas la même vitesse de propagation, ni les mêmes plateaux, sa caractéristique la plus frappante étant la présence d'une discontinuité de la vitesse dans le plateau théorique. Cette discontinuité de la vitesse est située à l'interface entre les constituants (c'est-à-dire à la discontinuité de contact).

Nous présentons enfin un résultat obtenu avec dix mille mailles.

FIG. 2.25 – *vitesse*FIG. 2.26 – *pression*

Ce résultat confirme

- le meilleur comportement du modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur ;
- la convergence des solutions données par les modèles différents vers des limites égales (dans le cas de constituants séparés), qui est en accord avec le résultat théorique de dégénérescence de type Lax-Wendroff obtenu lors de l'étude des modèles de mélange, théorème 16 de la partie II.

La ressemblance entre les oscillations en pression et vitesse que nous obtenons avec le modèle de Dalton et les résultats publiés de schémas totalement conservatifs est une conséquence du fait que dans ces études d'interfaces, c'est un modèle de mélange équivalent au modèle de Dalton est qui implicitement choisi (nous l'avons démontré dans la partie II).

Le modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur paraît être mieux adapté à la résolution des problèmes d'interface. Il permet d'éviter un phénomène d'oscillation de la vitesse et de la pression quel que soit le décentrage des flux de fractions massiques (cf. figures 2.21 à 2.26) et permet une meilleure évaluation du saut de densité à l'interface-discontinuité de contact avec le décentrage aval sous contraintes (cf. figures 2.13 et 2.17).

2.1.2 Tube à choc fort

On étudie à nouveau le comportement d'une interface, mais cette fois, elle ne coïncide pas avec la discontinuité initiale des variables thermodynamiques, et elle est traversée par un choc « fort » (grand saut de pression initial).

$$\left. \begin{array}{l} \rho^0(x) = 1 \\ u^0(x) = 0 \\ p^0(x) = 20 \end{array} \right\} \text{ si } x \leq 1/2 ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho^0(x) = 0,125 \\ u^0(x) = 0 \\ p^0(x) = 0,1 \end{array} \right\} \text{ si } x > 1/2.$$

La discontinuité des constituants est placée en $x = 0,8$.

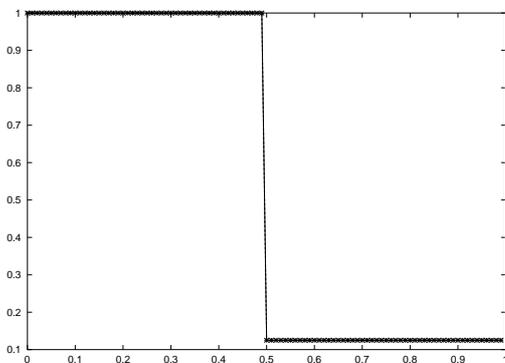


FIG. 2.27 – densité initiale

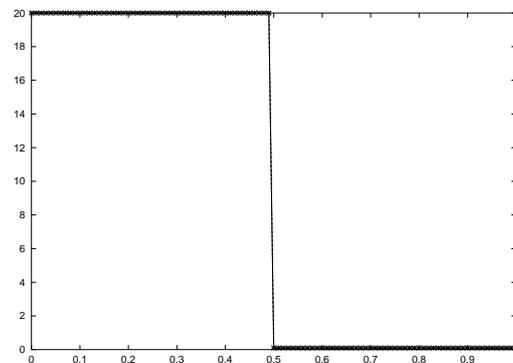
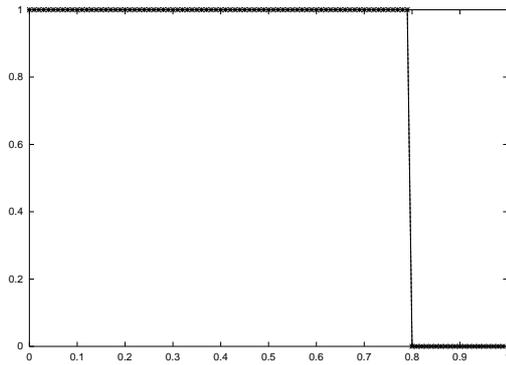
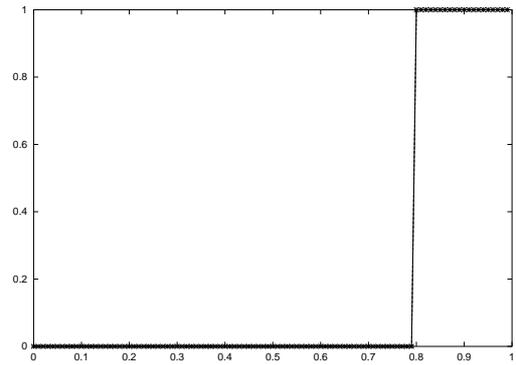


FIG. 2.28 – pression initiale

FIG. 2.29 – fraction massique α_1 initialeFIG. 2.30 – fraction massique α_2 initiale

Le temps choisi pour l'observation est $t = 0,07$. Nous n'étudions qu'une loi de fermeture.

Fermeture isobare avec équirépartition des quantités de chaleur,

$$\underline{\gamma_1 = 1,4, \gamma_2 = 2,4, c_{v1} = c_{v2} = 1}$$

La solution de référence (figures 2.31 et 2.32) est calculée avec dix mille mailles et le décentrage amont.

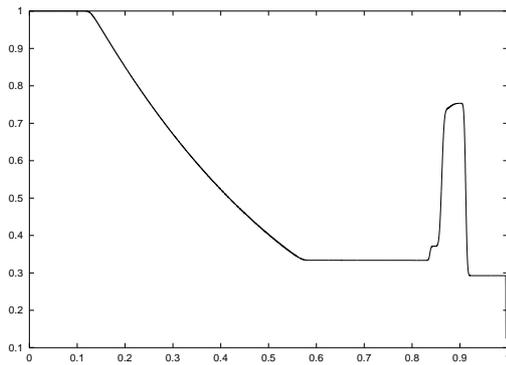


FIG. 2.31 – densité à convergence

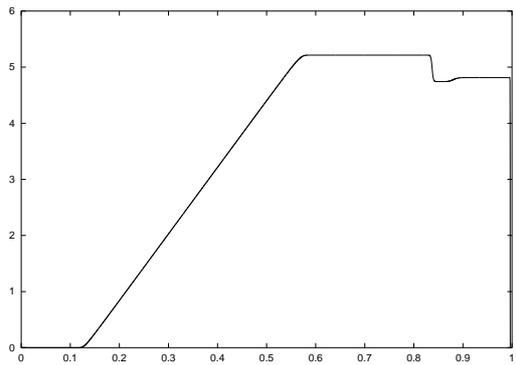


FIG. 2.32 – vitesse à convergence

Un calcul fait avec cent mailles donne les résultats suivants.

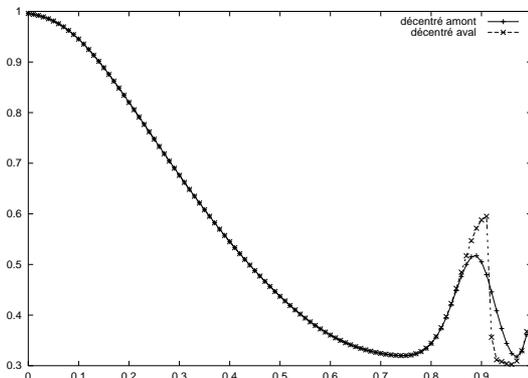


FIG. 2.33 – densité

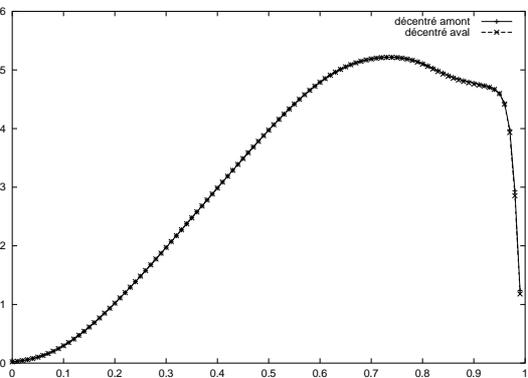
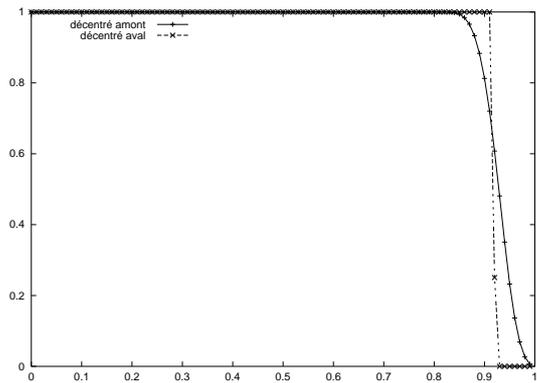
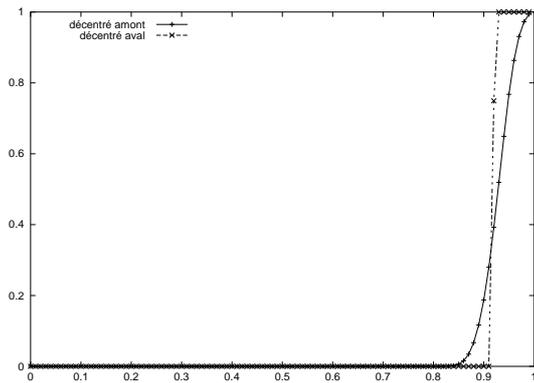
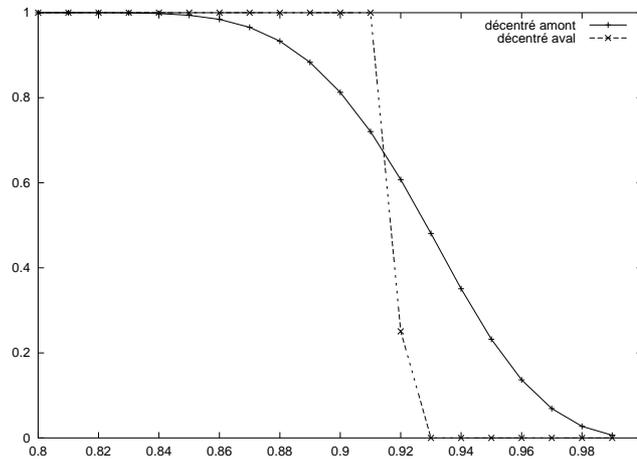


FIG. 2.34 – vitesse

FIG. 2.35 – fraction massique α_1 FIG. 2.36 – fraction massique α_2

Il est important de noter la résolution de l'interface pour les deux schémas, bien visible sur un agrandissement :

FIG. 2.37 – fraction massique α_1 (zoom)

Il faut faire un calcul avec mille mailles pour commencer à voir les résultats converger en ce qui concerne la densité et la vitesse.

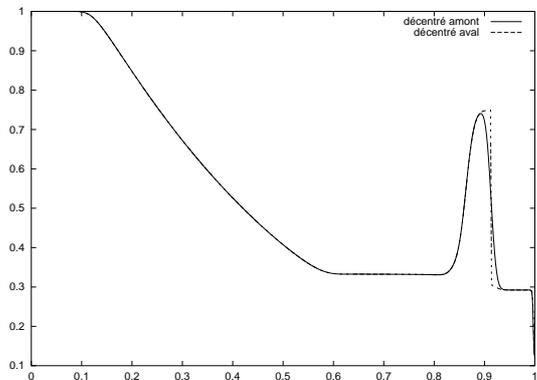


FIG. 2.38 – densité

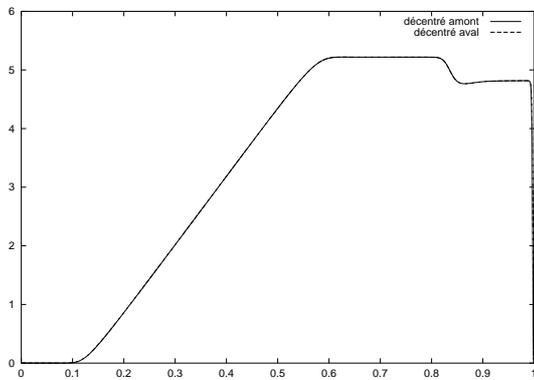


FIG. 2.39 – vitesse

Nous constatons à nouveau que l'interface est parfaitement respectée avec le décentrage aval sous contraintes amont. D'autre part, la discontinuité de contact (discontinuité de la densité qui coïncide avec l'interface, en $x = 0,92$ environ) est beaucoup mieux captée, elle est plus raide, avec ce nouveau décentrage.

2.2 Constituants mélangés

Nous commençons par examiner les résultats dans un mélange homogène avec deux modèles de mélanges différents, pour mettre en avant la différence entre ces modèles. La situation est donc celle d'un fluide homogène et l'algorithme choisi pour l'advection (la projection) des fractions massiques ne joue aucun rôle (les résultats avec le décentrage amont et le décentrage aval sont les mêmes et nous ne montrons que ceux du décentrage aval). La condition initiale est celle d'un tube à choc de Sod avec partout $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$.

Loi de Dalton et équirépartition des quantités de chaleur,

$\gamma_1 = 1,4, \gamma_2 = 2,4, c_{v1} = c_{v2} = 1$

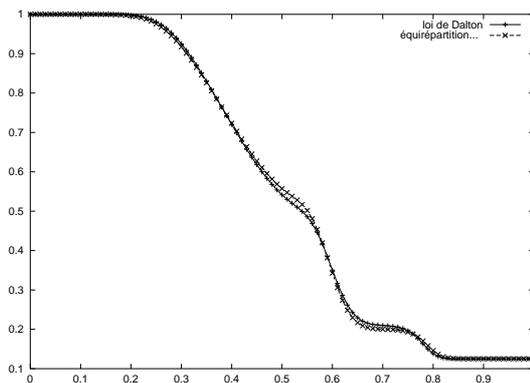


FIG. 2.40 – densité

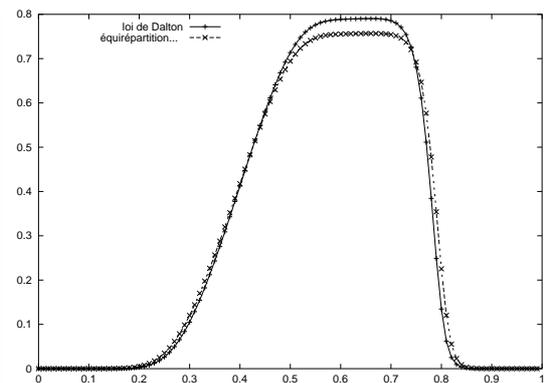


FIG. 2.41 – vitesse

Comme prévu, les résultats ne sont pas les mêmes pour des modèles de mélanges différents lorsque le mélange est étendu. Les paliers et les vitesses de propagation sont différents, le résultat avec mille mailles suivant le montre clairement.

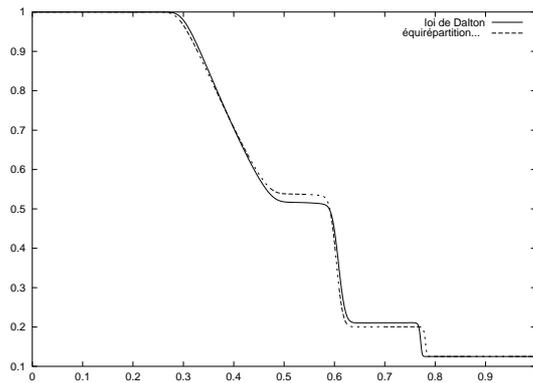


FIG. 2.42 – densité

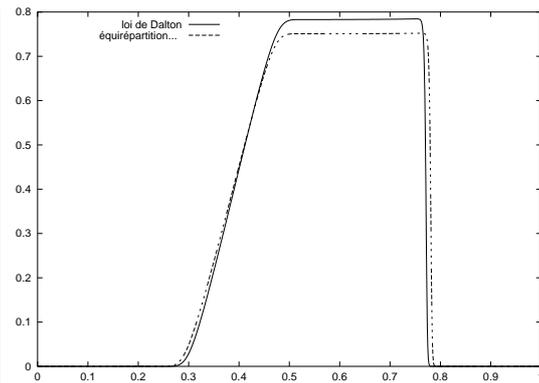


FIG. 2.43 – vitesse

Nous vérifions maintenant avec un calcul à cent mailles sur le même état initial (tube à choc de Sod dans un mélange homogène) que le modèle isobare isotherme et le modèle de Dalton sont équivalents. Nous utilisons ici le décentrage aval (résultats identiques avec le décentrage amont).

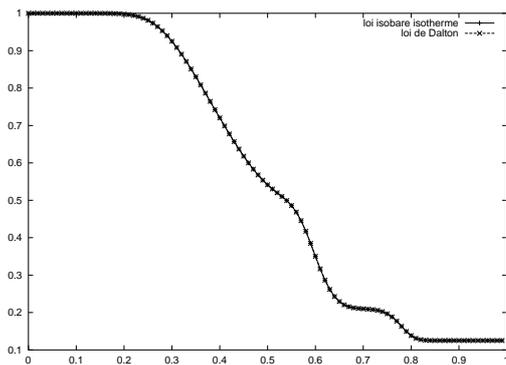


FIG. 2.44 – densité

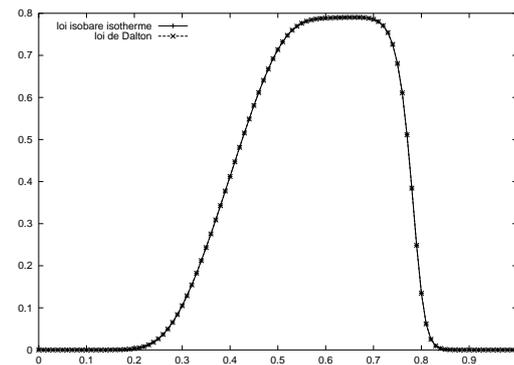


FIG. 2.45 – vitesse

Les résultats sont strictement semblables.

2.2.1 Choc dans un mélange non homogène

Nous observons ici le passage d'un choc dans une zone de mélange non homogène.

$$\left. \begin{array}{l} \rho^0(x) = 1 \\ u^0(x) = 0 \\ p^0(x) = 2,5 \end{array} \right\} \text{ si } x \leq 1/10 ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho^0(x) = 0,125 \\ u^0(x) = 0 \\ p^0(x) = 0,1 \end{array} \right\} \text{ si } x > 1/10.$$

D'autre part, le fluide global présente deux zones pures et une zone de mélange non homogène.

- $\alpha_1 = 1$ si $x \leq 2/10$;
- $\alpha_1 = 4/3 - 5/3x$ si $2/10 < x \leq 8/10$;
- $\alpha_1 = 0$ si $x > 8/10$.

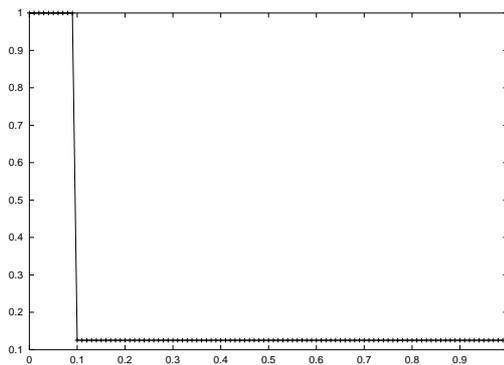


FIG. 2.46 – densité initiale

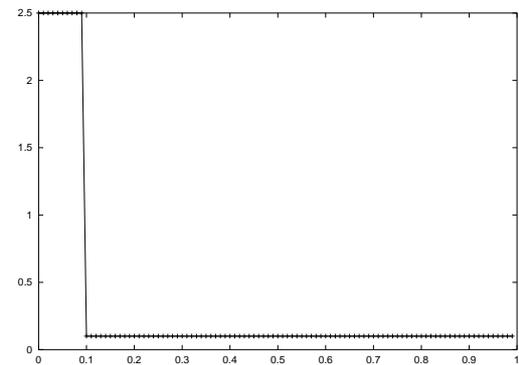
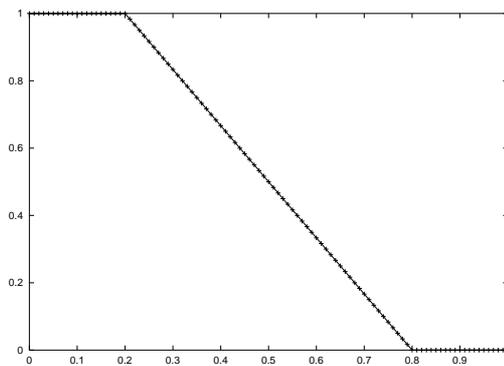
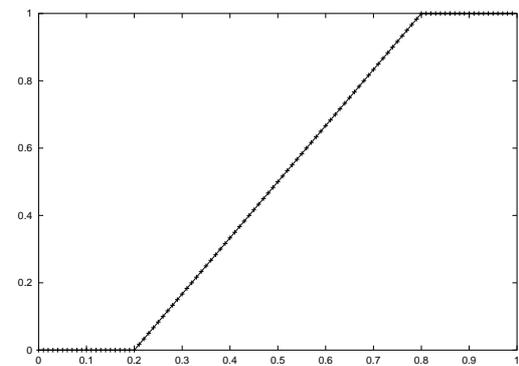


FIG. 2.47 – pression initiale

FIG. 2.48 – fraction massique α_1 initialeFIG. 2.49 – fraction massique α_2 initiale

Nous montrons le résultat avant que le choc soit sorti de la zone de mélange, à $t = 0,2$.

Loi isobare avec équirépartition des quantités de chaleur,

$$\underline{\gamma_1 = 1,4, \gamma_2 = 2,4, c_{v1} = c_{v2} = 1}$$

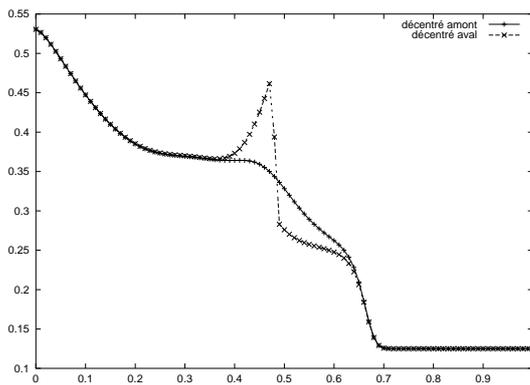


FIG. 2.50 – densité

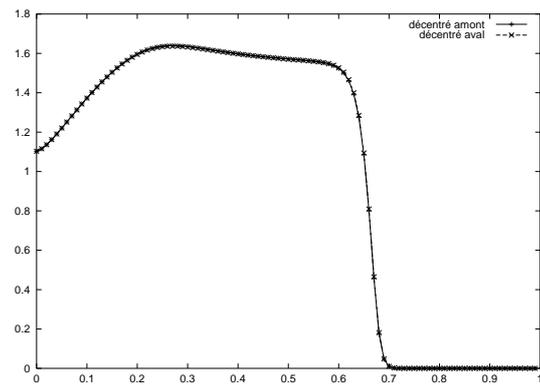
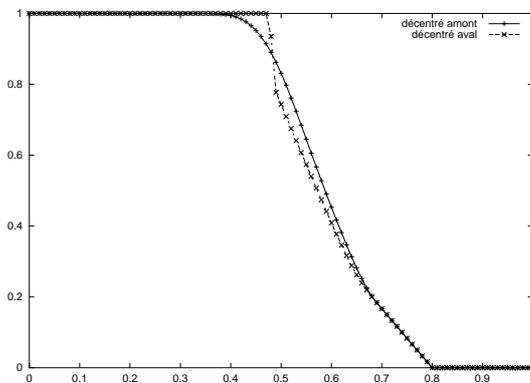
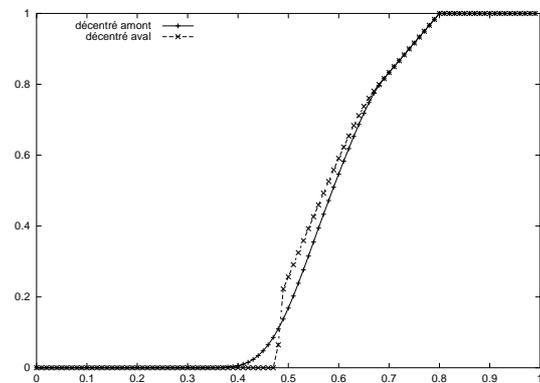


FIG. 2.51 – vitesse

FIG. 2.52 – fraction massique α_1 FIG. 2.53 – fraction massique α_2

La différence entre les décentrages amont et aval sous contraintes est dans ce cas très importante, y compris sur les variables thermodynamiques. Le décentrage aval fait apparaître un pic en densité à la frontière de la zone de mélange. Ce pic est totalement absent en décentrage amont. Une analyse de la convergence montre que c'est le schéma décentré aval qui donne le meilleur profil : il détecte une zone de forte densité révélée par les résultats suivants, obtenus avec mille mailles, puis dix mille mailles.

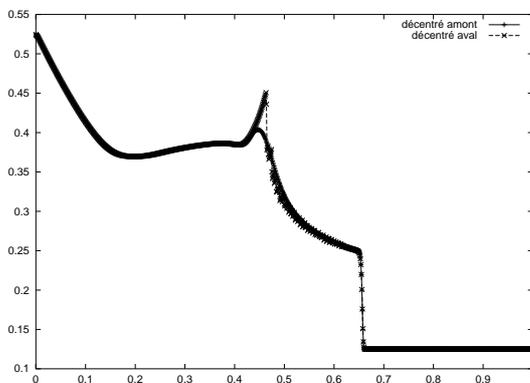


FIG. 2.54 – densité

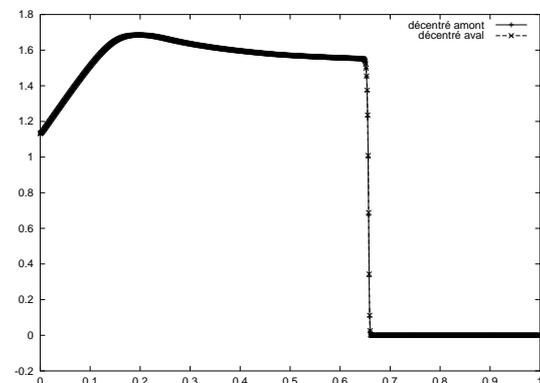
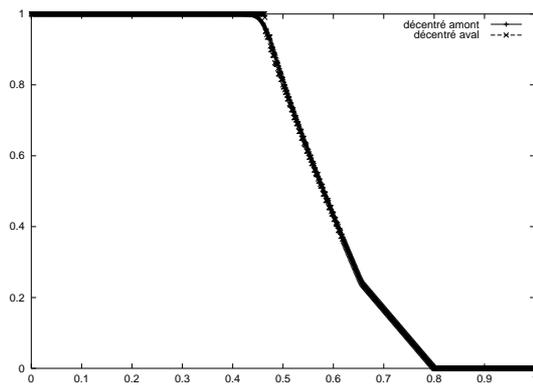
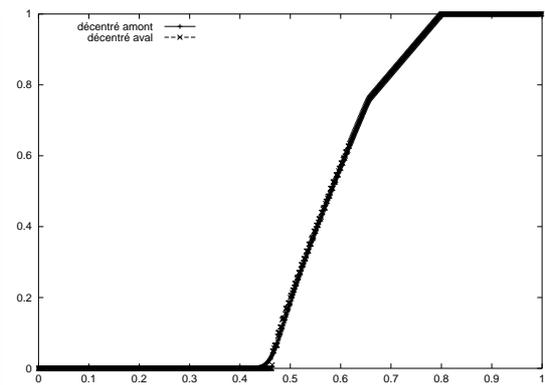
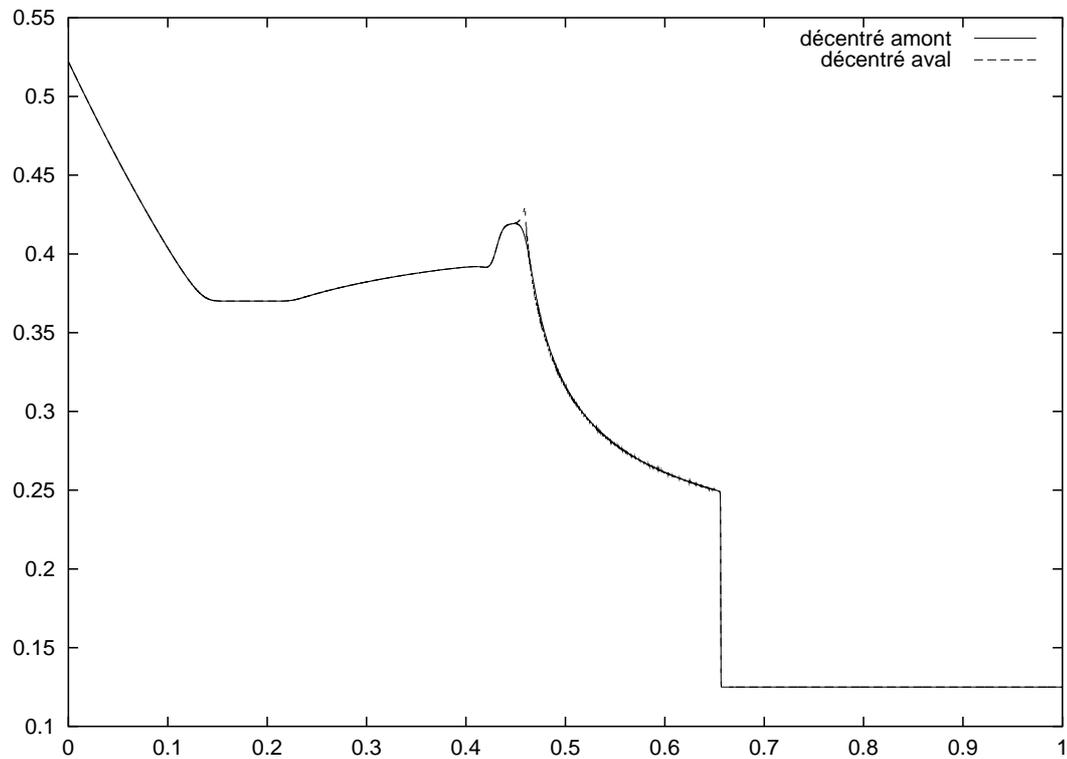


FIG. 2.55 – vitesse

FIG. 2.56 – *fraction massique α_1* FIG. 2.57 – *fraction massique α_2*

Avec dix mille mailles, les deux schémas sont manifestement très proches de la solution à convergence.

FIG. 2.58 – *densité*

Pour des chocs plus forts (avec saut de pression initial plus important), le schéma décentré amont détecte ce pic avec un moindre raffinement, mais sous-évalue toujours la valeur maximale. À l'inverse, pour des chocs faibles, il peut être extrêmement difficile de détecter ce phénomène avec le décentrage amont alors qu'il est sans équivoque mis en évidence par le décentrage aval. Le schéma décentré aval surévalue la densité maximale dans le cas de chocs faibles, mais la convergence est toujours beaucoup

plus rapide. Pour les valeurs du tube à choc de Sod par exemple, le décentrage amont nécessite environ cent fois plus de mailles que le décentrage aval pour donner une solution proche de la solution « exacte ». Il serait intéressant de calculer une solution analytique pour ce problème de mélange non homogène.

D'autre part, on peut faire une remarque sur le résultat pour les fractions massiques. On constate un effet légèrement surcompressif du décentrage aval sur les fractions massiques (aux alentours de $x = 0,45$ sur les figures). Cela n'a cependant aucune influence quant à la convergence.

Enfin, le phénomène de crénelage des fractions massiques se répercute légèrement sur la densité, induisant quelques oscillations. Il est à noter que l'amplitude de ses oscillations reste très faible, même pour des choc forts.

2.2.2 Choc fort avec rebond

Notre dernière étude porte sur un choc fort qui traverse une zone de mélange non homogène. Nous imposons des conditions de bord de type « mur » sur le bord de droite ($x = 1$) et nous attendons que le choc soit réfléchi. Les conditions initiales sont les mêmes que pour le précédent choc fort, translatées vers la gauche.

–

$$\left. \begin{array}{l} \rho^0(x) = 1 \\ u^0(x) = 0 \\ p^0(x) = 20 \end{array} \right\} \text{ si } x \leq 2/10 ;$$

–

$$\left. \begin{array}{l} \rho^0(x) = 0,125 \\ u^0(x) = 0 \\ p^0(x) = 0,1 \end{array} \right\} \text{ si } x > 2/10.$$

Les fractions massiques initiales sont continues pour simuler la présence d'un mélange (non homogène).

- $\alpha_1 = 1$ si $x \leq 4/10$;
- $\alpha_1 = 9/5 - 2x$ si $4/10 < x \leq 9/10$;
- $\alpha_1 = 0$ si $x > 9/10$.

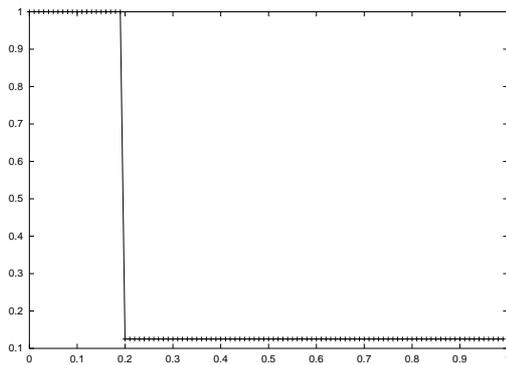


FIG. 2.59 – densité initiale

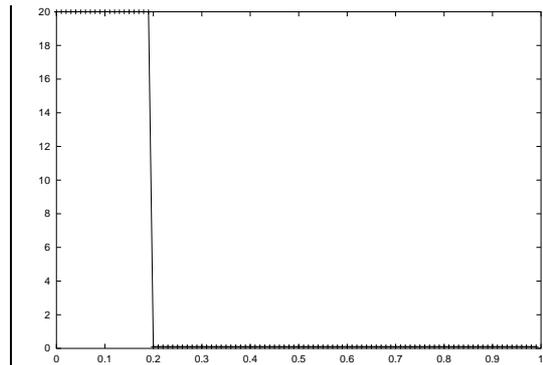
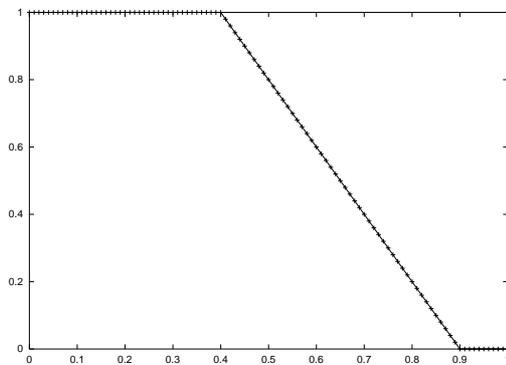
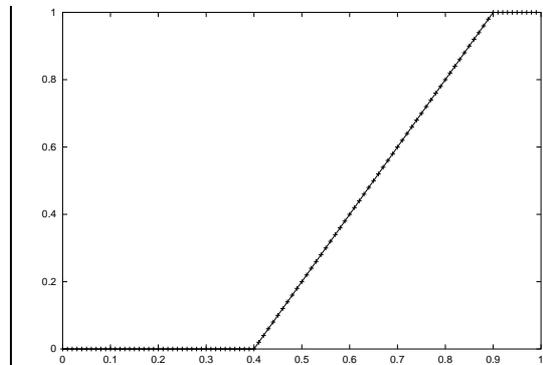


FIG. 2.60 – pression initiale

FIG. 2.61 – fraction massique α_1 initialeFIG. 2.62 – fraction massique α_2 initiale

Loi isobare avec équirépartition des quantités de chaleur,

$$\gamma_1 = 1,4, \gamma_2 = 2,4, c_{v1} = c_{v2} = 1$$

La solution de référence que nous proposons est une fois de plus obtenue par un calcul en décentrage amont avec dix mille mailles.

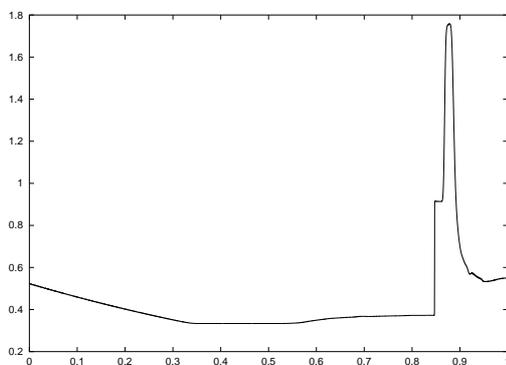


FIG. 2.63 – densité à convergence

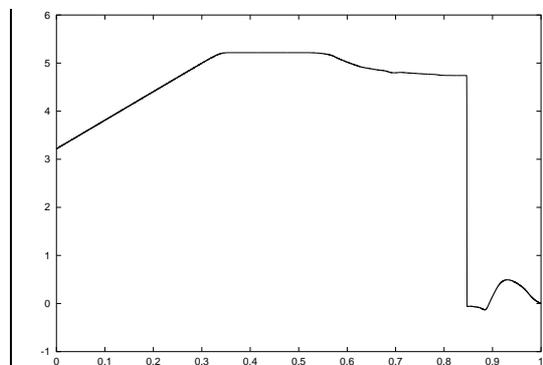


FIG. 2.64 – vitesse à convergence

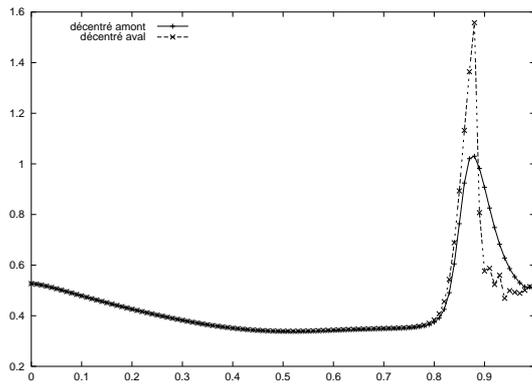


FIG. 2.65 – densité

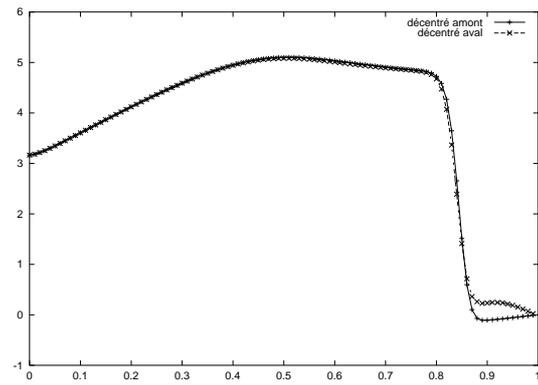
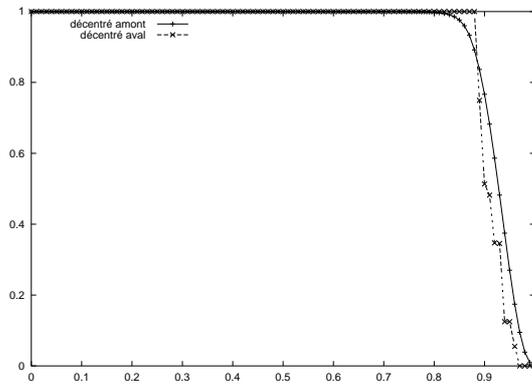
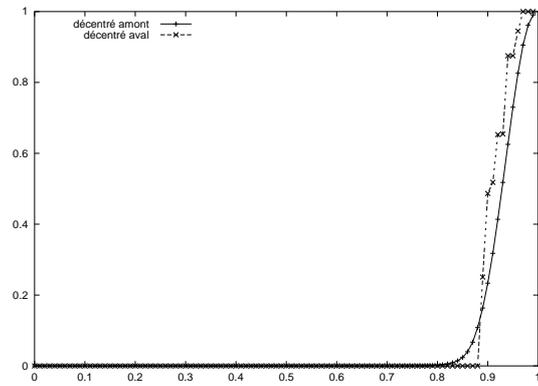


FIG. 2.66 – vitesse

FIG. 2.67 – fraction massique α_1 FIG. 2.68 – fraction massique α_2

On peut aussi regarder le résultat avec mille mailles au lieu de cent.

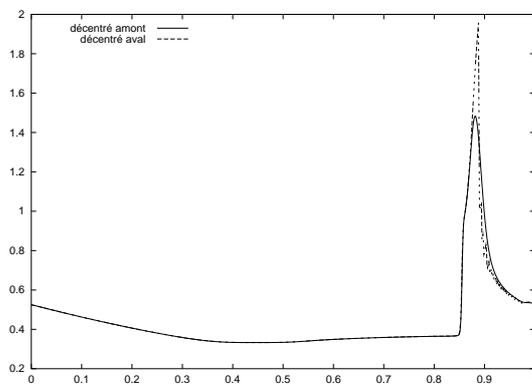


FIG. 2.69 – densité

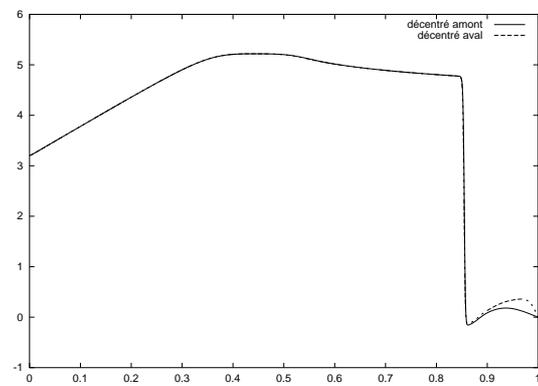
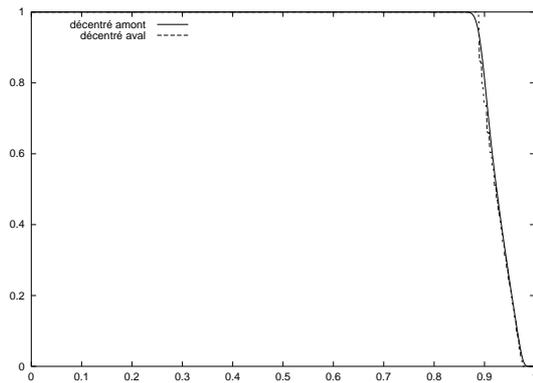
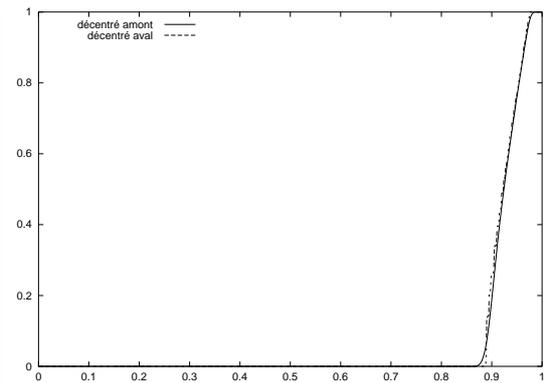
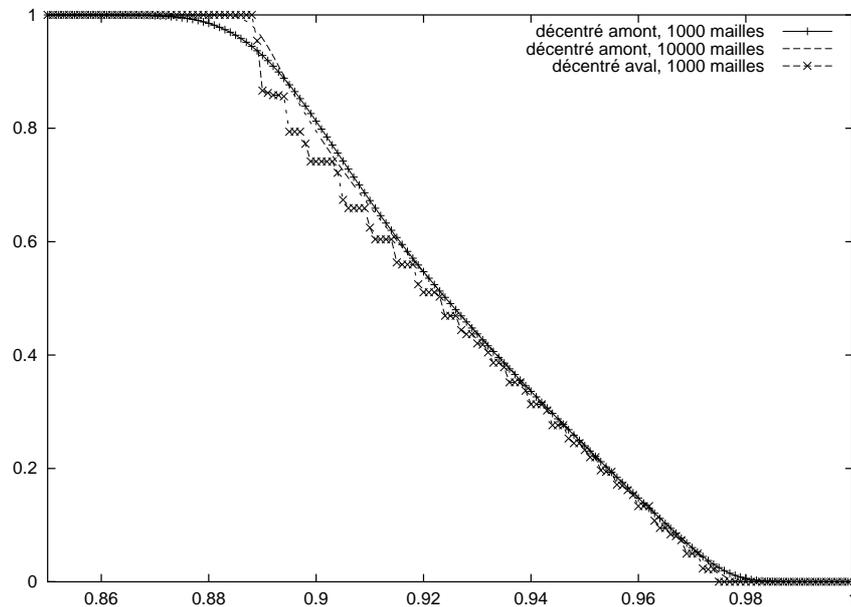


FIG. 2.70 – vitesse

FIG. 2.71 – fraction massique α_1 FIG. 2.72 – fraction massique α_2

Sur ces résultats, on voit que le schéma décentré aval détecte très bien le pic de densité qui apparaît juste après le rebond du choc, même avec seulement cent mailles. Le schéma décentré amont n'est pas aussi efficace.

Nous présentons maintenant un agrandissement permettant de comparer l'effet des décentrages amont et aval sous contraintes avec mille ou dix mille mailles.

FIG. 2.73 – fraction massique α_1 (zoom)

En prenant une échelle logarithmique pour abscisse, on obtient

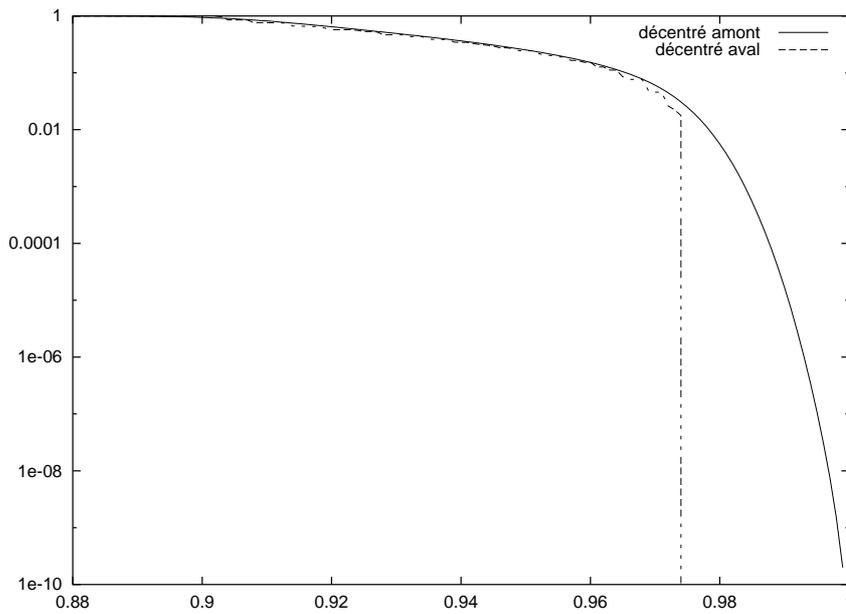


FIG. 2.74 – fraction massique α_1 (zoom et échelle logarithmique)

Il est clair avec cette dernière comparaison que la longueur de la zone de mélange est bien mieux respectée avec le schéma décentré aval, sans la moindre diffusion des bords. Une caractéristique très importante du schéma décentré aval est que la fraction massique peut prendre la valeur 0 ou 1 exactement, même après avoir pris des valeurs intermédiaires, ceci est particulièrement visible sur le résultat en échelle logarithmique. En contrepartie, l'effet de crénelage (antidissipation locale), déjà présent pour l'advection linéaire, réapparaît.

Chapitre 3

Extension en dimension deux

Nous nous intéressons maintenant à la résolution numérique des problèmes de fluides à plusieurs espèces en dimension deux. Pour simplifier, comme en dimension un, nous considérerons des fluides à deux constituants. D'autre part, nous ne considérerons qu'un modèle de mélange, le modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur.

3.1 Les équations et la méthode numérique

Il s'agit désormais de résoudre les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_1) + \partial_x(\rho u \alpha_1) + \partial_y(\rho v \alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_2) + \partial_x(\rho u \alpha_2) + \partial_y(\rho v \alpha_2) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) + \partial_y(\rho uv) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho ue + pu) + \partial_y(\rho ve + pv) = 0, \\ p_1 = p_2 = p, \\ T_1 D_t S_1 = T_2 D_t S_2. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Dans ces équations, D_t est toujours l'opérateur de dérivation lagrangienne, $D_t = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y$. L'équation $T_1 D_t S_1 = T_2 D_t S_2$ est donc équivalente à

$$\begin{aligned} \partial_t \varepsilon_1 + u \partial_x \varepsilon_1 + v \partial_y \varepsilon_1 + p(\partial_t \tau_1 + u \partial_x \tau_1 + v \partial_y \tau_1) \\ = \partial_t \varepsilon_2 + u \partial_x \varepsilon_2 + v \partial_y \varepsilon_2 + p(\partial_t \tau_2 + u \partial_x \tau_2 + v \partial_y \tau_2). \end{aligned}$$

Comme précédemment (chapitre 1.2 et 3.4 de la partie I), nous résolvons ces problèmes grâce à une décomposition directionnelle. La résolution est donc composée

– d’une phase horizontale, résolution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_1) + \partial_x(\rho u \alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_2) + \partial_x(\rho u \alpha_2) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho ue + pu) = 0, \\ p_1 = p_2 = p, \\ \partial_t \varepsilon_1 + u \partial_x \varepsilon_1 + p(\partial_t \tau_1 + u \partial_x \tau_1) = \partial_t \varepsilon_2 + u \partial_x \varepsilon_2 + p(\partial_t \tau_2 + u \partial_x \tau_2); \end{array} \right. \quad (3.2)$$

– d’une phase verticale, résolution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_1) + \partial_y(\rho v \alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_2) + \partial_y(\rho v \alpha_2) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_y(uv) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_y(\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_y(\rho ve + pv) = 0, \\ p_1 = p_2 = p, \\ \partial_t \varepsilon_1 + v \partial_y \varepsilon_1 + p(\partial_t \tau_1 + v \partial_y \tau_1) = \partial_t \varepsilon_2 + v \partial_y \varepsilon_2 + p(\partial_t \tau_2 + v \partial_y \tau_2). \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Nous résolvons chacune de ces deux phases comme nous le faisons pour les problèmes en dimension un : décomposition Lagrange-projection, avec décentrage aval sous contraintes amont des fractions massiques dans la phase de projection. Il n’y a pas de difficulté particulière attachée à la dimension deux et il est inutile de s’attarder, nous passons à la présentation des résultats !

3.2 Résultats numériques

Les résultats présentés sont de deux types : résultats pour des constituants séparés et résultats pour des constituants mélangés. Les résultats pour des constituants séparés sont destinés à montrer que les interfaces sont bien respectées avec le décentrage aval sous contraintes amont. Ce qui est important dans les résultats pour les constituants mélangés, c’est que les bords de la zone de mélange soient respectés (nous voulons éviter l’extension infinie de la taille de la zone de mélange par diffusion numérique).

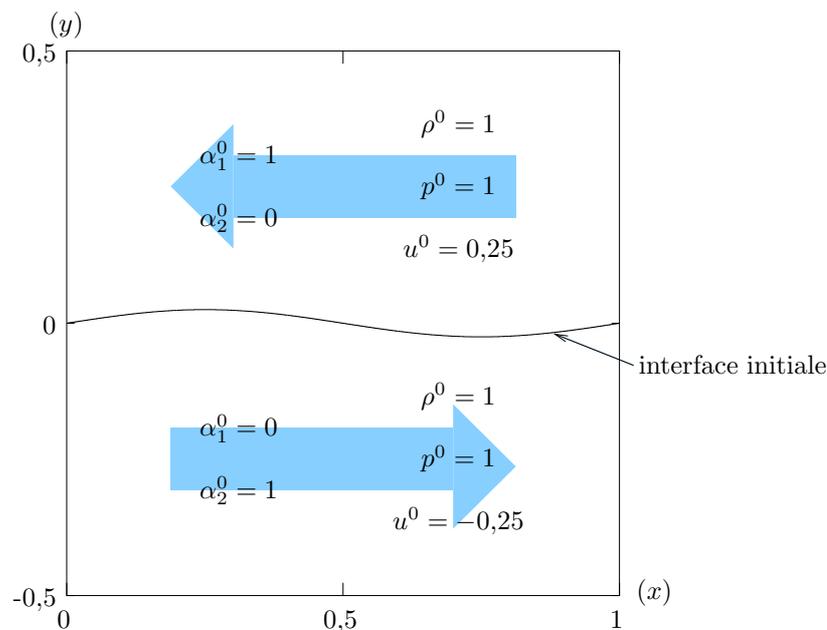
3.2.1 Constituants séparés

Dans le cas de constituants séparés (calcul d'interfaces), on dispose de plusieurs tests de référence. Nous retenons particulièrement ceux qui sont des calculs d'instabilités. Nous présentons trois de ceux-ci : l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, l'instabilité de Richtmyer-Meshkov et l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Tous les calculs concernent des situations à deux constituants qui sont des gaz parfaits de coefficients $\gamma_1 = \gamma_2 = 1,67$. Cela revient à un cas mono-constituant car les lois d'état sont les mêmes. C'est le comportement numérique de l'interface qui nous intéresse dans cette section.

Instabilité de Kelvin-Helmholtz

Il s'agit d'une instabilité due à une discontinuité tangentielle de la vitesse initiale. Cette instabilité, appelée parfois instabilité de couche de mélange plane, est présente dans de nombreux domaines naturels ou industriels et son étude numérique est donc intéressante. De nombreuses études physiques, mathématiques et numériques ont été menées sur ce sujet, on pourra se reporter à [6], [12] par exemple.

Les conditions initiales que nous choisissons ici sont celles de [12]. Elles consistent en la donnée de deux milieux uniformes séparés par une interface sinusoïdale. Dans les deux milieux, initialement, les pressions sont égales, les densités sont égales, et les vitesses verticales (v) sont nulles. Les vitesses horizontales sont opposées. Les valeurs sont données sur la figure 3.2.1.



L'interface a pour équation $y = f(x) = 0,025 \sin(2\pi x)$.

Dans ces conditions, l'interface est une discontinuité de contact où la vitesse est discontinue (la composante tangente à l'interface est discontinue), on l'appelle « feuille de tourbillon ». Au cours du temps, l'amplitude de la feuille (sinusoïdale) augmente, puis l'interface s'enroule pour former un tourbillon.

Sur les bords horizontaux ($x = 0$ et $x = 1$), nous imposons des conditions périodiques. Nous imposons des conditions de type « mur » sur les bords verticaux.

Nous présentons les résultats au temps $t = 6,1$, temps où le tourbillon est bien développé (de même que la diffusion numérique avec le décentrage amont !). Nous comparons les résultats obtenus (pour la fraction massique α_1) avec le décentrage amont (classique) et le décentrage aval sous contraintes amont qui a été présenté dans ce travail. Le nombre de mailles est dix mille (grille 100×100).

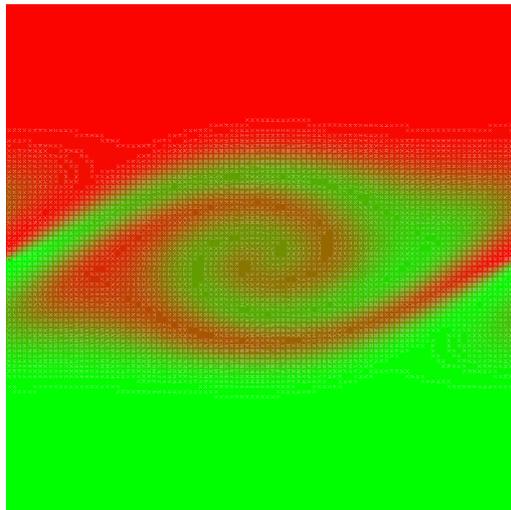


FIG. 3.1 – fraction massique α_1 avec le décentrage amont.

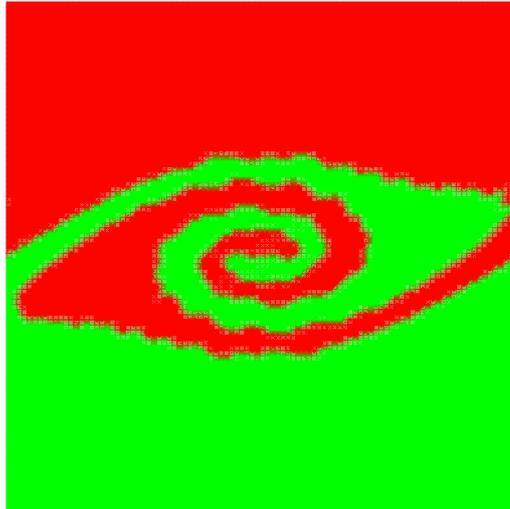


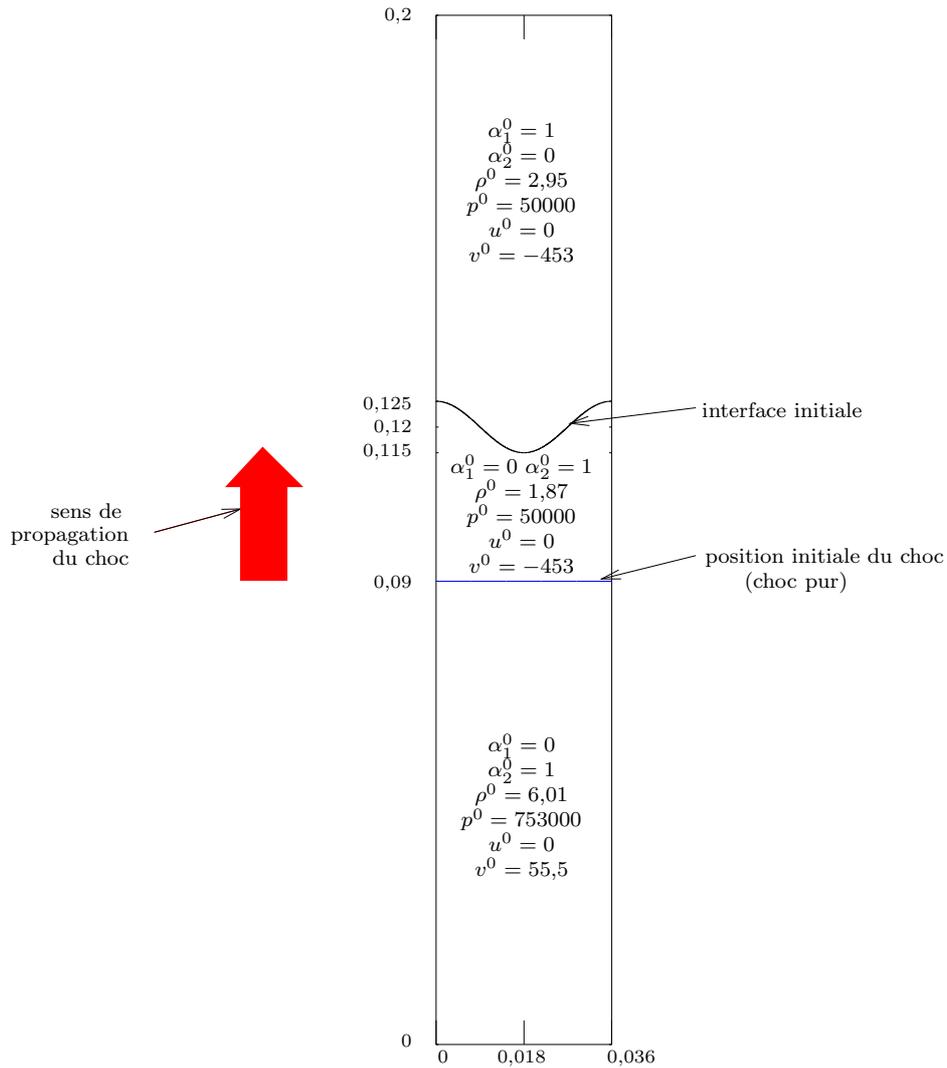
FIG. 3.2 – *fraction massique α_1 avec le décentrage aval sous contraintes amont.*

Sur ces deux figures, la couleur rouge représente la valeur 1 et le vert représente 0 (respectivement le sombre et le clair dans une version en noir et blanc). Nous constatons que le schéma avec flux décentrés aval sous contraintes amont n'introduit une fois de plus aucune dissipation numérique. Ceci permet de suivre avec plus de précision l'enroulement des deux constituants (enroulement fortement dégradé par la dissipation numérique due au schéma décentré amont). Le crénelage de la courbe interfaciale est une légère contrepartie. Le résultat obtenu avec le décentrage aval sous contraintes amont est tout à fait comparable aux résultats que des méthodes de suivi d'interface permettent d'obtenir (cf. [12], [19]).

Instabilité de Richtmyer-Meshkov

C'est une instabilité due au passage d'un choc sur l'interface entre les deux constituants.

Nous choisissons les conditions initiales du test dit de « Stony Brook ». Toutes les valeurs initiales sont données sur la figure 3.2.1, où l'interface initiale a pour équation $y = 0,005 \cos(2\pi x/0,036) + 0,12$ (consulter [12] ou [43] pour d'autres valeurs initiales pour le même type d'instabilité).



Après le passage du choc sur l'interface se développe une instabilité de type « champignon » : il y a apparition d'un bulbe et de tourbillons. Afin de réduire le temps de calcul, nous ne gardons que la partie gauche ($x \leq 0,018$) du domaine représenté par la figure 3.2.1, la partie droite étant simulée par les conditions de type « mur » à droite (ceci est équivalent car les données sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 0,018$). La condition de bord à gauche est aussi une condition de mur. Les conditions en haut et en bas sont des conditions de neutralité, obtenues en définissant les flux du bord comme égaux aux valeurs dans les mailles de bord associées.

Nous présentons les résultats pour les fractions massiques α_1 avec le décentrage amont et le décentrage aval sous contraintes amont sur deux maillages carrés de résolutions différentes, pour $t = 0,00105$.

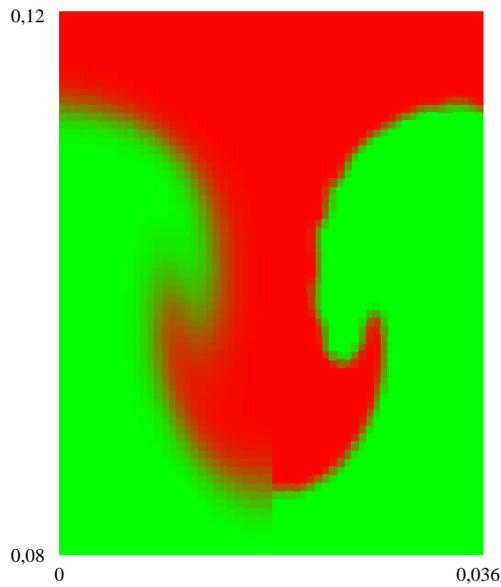


FIG. 3.3 – *Décentrages amont à gauche et aval à droite, avec 30×167 mailles pour chaque moitié.*

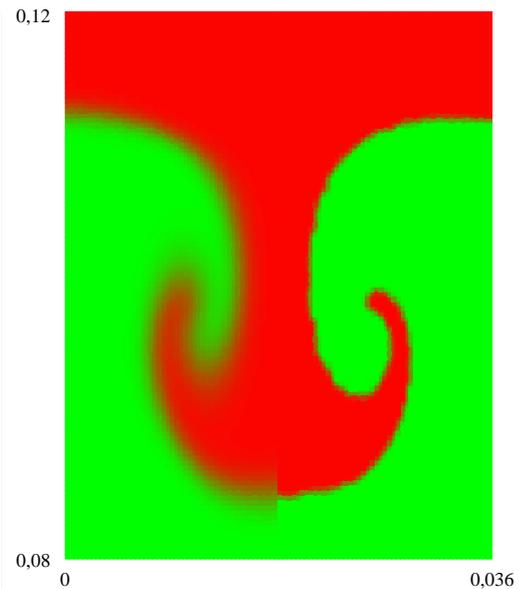


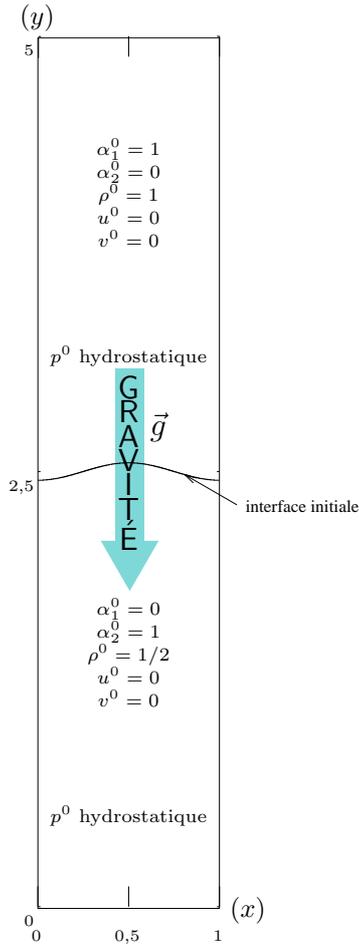
FIG. 3.4 – *Décentrages amont à gauche et aval à droite, avec 50×278 mailles pour chaque moitié.*

Ici encore, le rouge représente la valeur 1 et le vert la valeur 0 (respectivement le sombre et le clair dans une version en noir et blanc).

Instabilité de Rayleigh-Taylor

Il s'agit une fois de plus de l'évolution d'une interface initialement sinusoïdale. Cette fois, elle se déforme sous l'action d'une force volumique (gravité). L'interface initiale sépare deux milieux de densités différentes, le fluide lourd étant situé au dessus du fluide léger (et la gravité étant dirigée vers le bas). Nous renvoyons à [73] pour une étude détaillée.

Les conditions initiales sont données par la figure 3.2.1.



La force volumique est donnée par $\vec{F}(x,y) = \rho(x,y)\vec{g}$. La pression est initialement hydrostatique, c'est-à-dire qu'elle vérifie $\text{grad}p = -\rho\vec{g}$, soit $\partial_y p = -\rho g$ (g étant le module de \vec{g}). De plus nous avons fixé la valeur de la pression à 1 en $y = 5$. Pour déterminer la pression en tout point, on néglige la courbure de l'interface (on la suppose plane, sans perturbation) située en $y = 2,5$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{cases} p(x,y) = 1 + g(5 - y) & \text{si } 2,5 \leq y \leq 5, \\ p(x,y) = 1 + 2,5g + g(2,5 - y) & \text{si } 0 \leq y \leq 2,5. \end{cases}$$

Nous avons posé $g = 10$. Enfin, l'interface a pour équation $y = 2,5 - 0,05 \cos(2\pi x)$.

Dans un milieu soumis à la gravité, les équations d'Euler sont modifiées par l'ajout de termes source dans les équations de conservation de la quantité de mou-

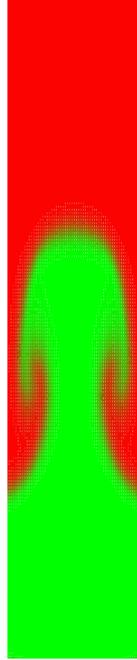
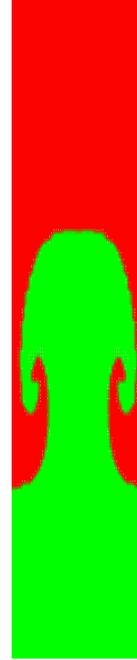
vement et de l'énergie totale.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_1) + \partial_x(\rho u \alpha_1) + \partial_y(\rho v \alpha_1) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_2) + \partial_x(\rho u \alpha_2) + \partial_y(\rho v \alpha_2) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) + \partial_y(uv) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2 + p) = -\rho g, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho ue + pu) + \partial_y(\rho ve + pv) = -\rho gv, \\ p_1 = p_2 = p, \\ T_1 D_t S_1 = T_2 D_t S_2. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Numériquement, l'effet de la gravité est obtenu par une décomposition supplémentaire : nous ajoutons une phase au calcul numérique, phase qui assure l'accroissement de v et e dû à l'attraction gravitationnelle. chaque pas de temps, le calcul est donc composé de cinq phases :

- phase lagrangienne horizontale ;
- phase de projection horizontale ;
- phase lagrangienne verticale ;
- phase de projection verticale ;
- phase pour la gravitation.

Nous présentons maintenant le résultat numérique au temps $t = 0,7$ pour le décentrage amont et le décentrage aval sous contraintes amont des phases de projection. Le maillage est composé de 40×200 mailles carrées.

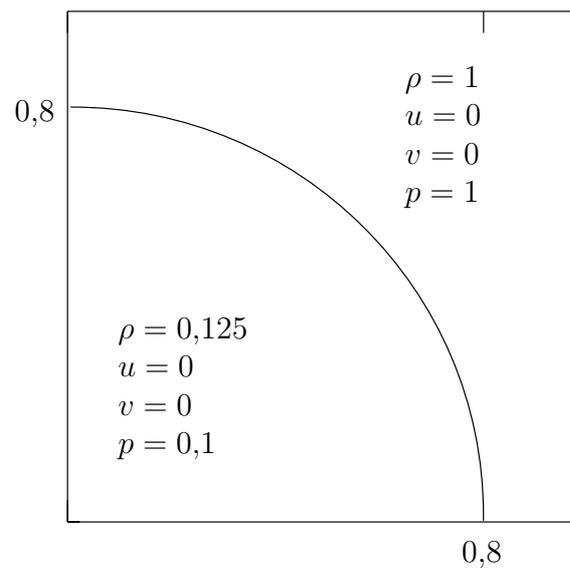
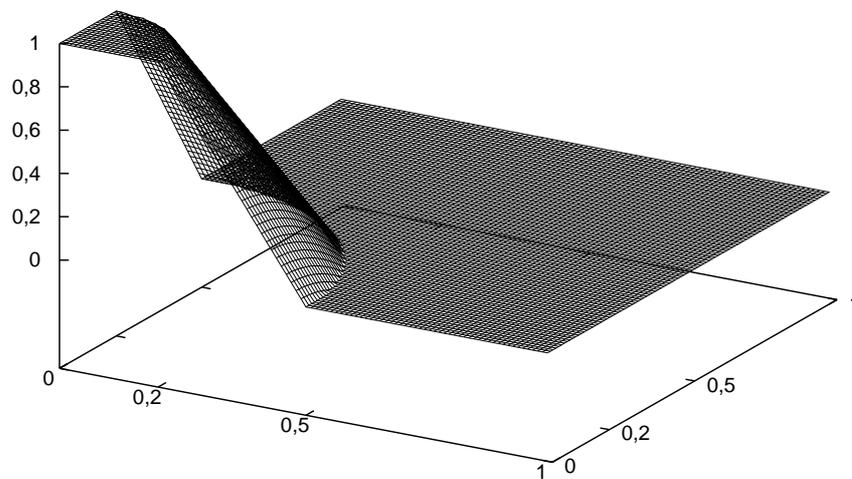
FIG. 3.5 – *Décentrage amont.*FIG. 3.6 – *Décentrage aval sous contraintes amont.*

On obtient le même type de résultat que précédemment, sans dissipation numérique pour les fractions massiques.

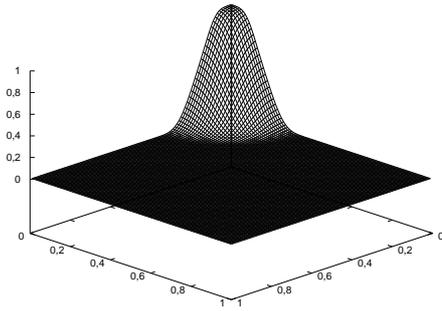
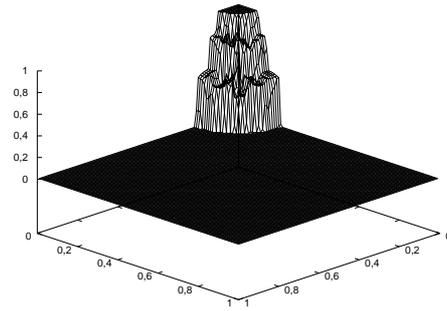
3.2.2 Constituants mélangés

Après avoir vérifié le bon comportement de l'algorithme en dimension deux pour des interfaces (constituants séparés), nous nous intéressons au cas d'un mélange, comme nous l'avons fait en dimension un.

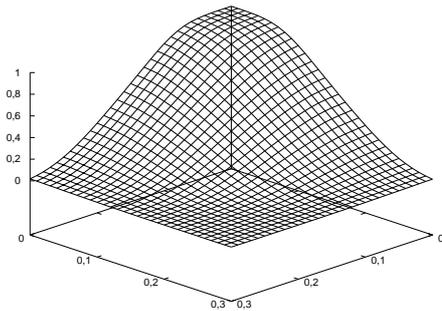
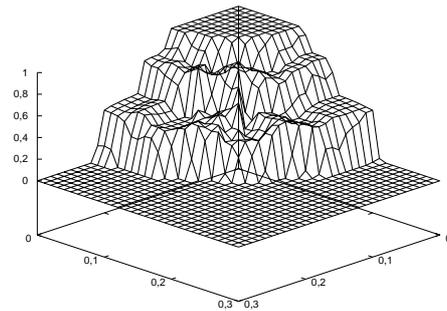
Nous présentons un résultat, résultat d'une simulation du passage d'un choc cylindrique convergent dans une zone de mélange. La loi de mélange choisie est la loi isobare assortie de l'équirépartition des quantités de chaleur. Les lois de gaz parfaits ont pour paramètres $\gamma_1 = 1,4$, $c_{v1} = 1$ et $\gamma_2 = 1,6$, $c_{v2} = 1$. Les conditions initiales, radiales, sont visualisables par les figures 3.7 et 3.8. La fraction massique α_1 vaut 1 si $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 0,2$, 0 si $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0,5$ et est linéaire si $0,2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0,5$.

FIG. 3.7 – Condition initiale pour ρ , u et p .FIG. 3.8 – Condition initiale pour α_1 .

Le calcul est effectué avec dix mille mailles carrées (100×100). Nous donnons le résultat à $t = 0,4$ pour la fraction massique α_1 , toujours obtenu par les deux algorithmes : décentrage amont (figure 3.9) et décentrage aval sous contraintes amont (figure 3.10). Le résultat est observé depuis un point du plan $x = y$ pour plus de visibilité.

FIG. 3.9 – *Décentrage amont.*FIG. 3.10 – *Décentrage aval sous contraintes amont.*

Un zoom permet d'observer mieux la diffusion due au décentrage amont (pollution jusqu'au centre, figure 3.11) ainsi que le respect des bords de la zone de mélange par le décentrage aval (figure 3.12).

FIG. 3.11 – *Décentrage amont (zoom).*FIG. 3.12 – *Décentrage aval sous contraintes amont (zoom).*

Nous constatons que, comme en dimension un, les bords de la zone de mélange sont respectés seulement par l'algorithme qui utilise le décentrage aval sous contraintes amont. Cependant, des oscillations apparaissent avec la méthode non dissipative (principalement sur la diagonale du carré). Ce défaut est exactement celui que nous avons déjà mis en évidence lors de la résolution de l'équation d'advection en dimension deux : la décomposition de dimension (telle que nous la proposons actuellement) ne permet pas d'obtenir un schéma VTD.

Conclusion partielle (pour la partie III)

Nous avons présenté dans cette partie une méthode de résolution des problèmes hydrodynamiques à deux constituants en dimension un et deux, avec interfaces et zones de mélange. Cette méthode utilise les outils développés dans les parties I et II: la résolution non dissipative de l'équation d'advection et la modélisation des mélanges.

En dimension un

Concernant l'évaluation des modèles de mélange, nous retenons ceci :

- pour les vrais mélanges, la solution dépend du modèle ; cependant, dans les cas testés, les différences sont assez faibles ;
- dans le cas de calculs d'interface (avec mélange numérique), d'une part les résultats présentés ont permis de vérifier que le modèle de mélange n'a pas d'incidence sur la solution convergée (ce que prévoit le théorème 16 de la partie II), d'autre part le modèle qui paraît le mieux adapté est le modèle isobare avec équirépartition des quantités de chaleur, car on a pour celui-ci une version discrète entropique, c'est un résultat de stabilité important sur le plan numérique.

Concernant l'évaluation du mode de discrétisation, nous commençons par rappeler des propriétés générales :

- les schémas proposés (décentré amont et décentré aval sous contraintes amont) sont par construction conservatifs en masse de chaque constituant, en masse totale, en quantité de mouvement et en énergie totale (ces caractéristiques, qui peuvent être essentielles dans des conditions hydrodynamiques extrêmes (cas de chocs très forts et convergents...), sont rarement vérifiées dans les algorithmes classiques) ;
- les schémas proposés sont stables en fractions massiques, caractéristique importante et qui n'est pas vérifiée pour tous les schémas existant (et qui est l'objet de [55]).

Nous nous sommes attachés à trouver un schéma numérique sans diffusion numérique sur les fractions massiques des constituants, ce qui nous paraît primordial. Pour cela, nous avons utilisé la technique présentée dans la première partie pour l'advection linéaire. Le schéma obtenu, comme pour l'advection linéaire, a pour inconvénient de créneler les fractions massiques, mais soulignons une fois de plus que cette antidissipation est locale, cet inconvénient nous paraît donc faible. Le schéma présente comme avantages

- de proposer un algorithme unique pour les mélanges et les interfaces (évitant d'utiliser des techniques de suivi d'interface) ;
- un respect parfait des interfaces ;
- un contrôle de la diffusion numérique dans les zones de mélange étendues ainsi qu'aux bords de ces zones ;
- une convergence beaucoup plus rapide des variables thermodynamiques pour le passage de chocs dans des zones de mélange non homogène (bonne détection des augmentations de densité).

En dimension deux

L'algorithme pour les équations bidimensionnelles est obtenu par décomposition directionnelle, comme pour l'advection (partie I). Les conclusions que l'on peut tirer de l'analyse des résultats numériques sont analogues à celles que l'on a faites au sujet de l'advection bidimensionnelle.

En ce qui concerne les calculs d'interfaces, l'antidissipation est retrouvée, avec une longueur d'interface réduite à une maille (dans la direction perpendiculaire à l'interface). L'algorithme présente le défaut de créneler l'interface. Cependant, ce défaut est léger car la taille des créneaux tend vers 0 avec la taille des mailles.

En ce qui concerne les calculs avec de vraies zones de mélange, nous avons fait les mêmes constatations que pour l'advection à vitesse constante : des oscillations apparaissent sur les fractions massiques malgré la stabilité L^∞ (l'algorithme n'est pas VTD pour les fractions massiques en dimension deux). Notons tout de même que les bords de la zone de mélange sont bien respectés (pas d'étalement).

Conclusion

Le problème initial, la résolution numérique des problèmes de fluides à plusieurs espèces, comporte à notre avis deux difficultés principales.

La première, d'ordre physique ou théorique, concerne le comportement physique d'un mélange, modélisé par sa loi d'état ou plus précisément par ses fonctions **pression** et **température**. Nous n'avons pas fait d'étude physique des mélanges (l'écriture générale de la loi d'état d'un mélange étant problématique), mais nous avons proposé (dans la partie II de ce texte) une famille de lois d'état **possibles** en fournissant un **cadre mathématique** rassurant, et en établissant des propriétés mathématiques qui, si elles ne garantissent pas le bien fondé physique des modèles, assurent néanmoins une certaine **cohérence** ou une **compatibilité avec les modèles physiques connus** ; de plus elles indiquent que la résolution numérique des systèmes ainsi construits ne sera pas trop délicate (hyperbolicité, existence de solutions-ondes progressives...).

La seconde difficulté principale concerne la résolution numérique proprement dite, le choix d'un algorithme pourvu de bonnes propriétés. Nous avons considéré que l'effort devait être porté sur la recherche d'un **algorithme non dissipatif et conservatif pour toutes les quantités conservées** : masse de chaque constituant (et donc masse totale), quantité de mouvement totale, énergie totale. Ceci nous a conduit à envisager la discrétisation de l'équation d'advection en dimension un (problème modèle) sous un angle nouveau. En reconsidérant les conditions de stabilité d'un algorithme, nous avons mis à jour des conditions explicites de stabilité d'un algorithme de type volumes finis (partie I). Le choix du décentrage aval des flux, sous ces conditions de stabilité, correspond à un algorithme possédant la propriété que nous recherchions, il n'est pas dissipatif (estimation d'erreur uniforme en temps pour un ensemble de conditions initiales dense dans $L^1(\mathbb{R})$). Des utilisations de ce nouveau formalisme sont proposées dans un premier temps pour les équation de Burgers et d'Euler. Dans la troisième partie du mémoire, nous avons utilisé le travail sur la modélisation mathématique des modèles de mélange et le formalisme nouveau pour les schémas de type volumes finis pour résoudre les équations d'Euler à deux espèces en dimension un puis en dimension deux. Des conclusions plus détaillées des différents parties ou chapitres ont déjà été consignées (aux pages 56, 98, 171 et 247).

De nombreuses extensions de ce travail sont possibles.

Tout d'abord, le nouveau formalisme pour les schémas de volumes finis demande à être utilisé de manière vraiment **bidimensionnelle**, c'est-à-dire sans décomposition directionnelle, et sur **maillage non uniforme** ; ce travail est en cours de rédaction.

D'autre part, une suite naturelle est la résolution numérique des **équations d'Euler à un nombre quelconque de constituants**. L'essentiel de ceci a déjà été fait : nous avons mis au point un algorithme non dissipatif (avec toujours les mêmes propriétés) de résolution numérique de l'équation d'advection de plusieurs « fractions » dont la somme fait toujours 1. La difficulté était précisément de faire en sorte que la somme des fractions reste 1, et le couplage avec les équations d'Euler ne devrait pas être différent d'avec deux constituants.

Le **couplage avec des phénomènes physiques supplémentaires**, comme la détonation, est en projet au CEA.

Enfin, une étude complémentaire du décentrage aval sous contraintes amont sera nécessaire pour démontrer la **conjecture** de la page 43.

Annexe A

Algorithme pour l'équation d'advection linéaire : décentrage aval sous contraintes amont

A.1 Équation exacte

$$\partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = 0.$$

A.2 Équation discrète associée

$$\widetilde{\alpha}_j = \alpha_j - u\lambda(\alpha_{j+1/2} - \alpha_{j-1/2})$$

avec $\lambda = \Delta t / \Delta x$.

A.3 Calcul des flux

On pose, pour tout j ,

$$\begin{cases} m_{j-1/2} = \min(\alpha_{j-1}, \alpha_j), \\ M_{j-1/2} = \max(\alpha_{j-1}, \alpha_j). \end{cases}$$

A.3.1 Cas où $u > 0$

On pose pour tout j

$$\begin{cases} b_j = \frac{1}{u\lambda}(\alpha_j - M_{j-1/2}) + M_{j-1/2}, \\ B_j = \frac{1}{u\lambda}(\alpha_j - m_{j-1/2}) + m_{j-1/2}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \omega_{j+1/2} = \max(m_{j+1/2}, b_j), \\ \Omega_{j+1/2} = \min(M_{j+1/2}, B_j), \end{cases}$$

et le flux $\alpha_{j+1/2}$ est défini par

$$\begin{cases} \alpha_{j+1/2} = \omega_{j+1/2} & \text{si } \alpha_{j+1} \leq \omega_{j+1/2}, \\ \alpha_{j+1/2} = \alpha_{j+1} & \text{si } \omega_{j+1/2} \leq \alpha_{j+1} \leq \Omega_{j+1/2}, \\ \alpha_{j+1/2} = \Omega_{j+1/2} & \text{si } \Omega_{j+1/2} \leq \alpha_{j+1}. \end{cases}$$

A.3.2 Cas où $u < 0$

On pose pour tout j

$$\begin{cases} b_j^n = \frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - M_{j+1/2}) + M_{j+1/2}, \\ B_j^n = \frac{1}{u\lambda}(\alpha_j^n - m_{j+1/2}) + m_{j+1/2}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \omega_{j+1/2} = \max(m_{j+1/2}^n, b_{j+1}^n), \\ \Omega_{j+1/2} = \min(M_{j+1/2}^n, B_{j+1}^n), \end{cases}$$

et le flux $\alpha_{j+1/2}$ est défini par

$$\begin{cases} \alpha_{j+1/2}^n = \omega_{j+1/2} & \text{si } \alpha_j^n \leq \omega_{j+1/2}, \\ \alpha_{j+1/2}^n = \alpha_j^n & \text{si } \omega_{j+1/2} \leq \alpha_j^n \leq \Omega_{j+1/2}, \\ \alpha_{j+1/2}^n = \Omega_{j+1/2} & \text{si } \Omega_{j+1/2} \leq \alpha_j^n. \end{cases}$$

A.4 Condition CFL à respecter

$$\Delta t / \Delta x \leq 1/u.$$

A.5 Dimension deux : décomposition direction par direction

Aucune difficulté particulière.

Annexe B

Algorithme pour les équations scalaires à flux strictement convexes : décentrage aval sous contraintes amont

B.1 Équation exacte

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$$

(f est une fonction strictement convexe).

Équation d'entropie associée :

$$\partial_t(S(u)) + \partial_x(G(u)) \leq 0.$$

B.2 Équation discrte

$$\tilde{u}_j = u_j - \lambda(f_{j+1/2} - f_{j-1/2})$$

avec $\lambda = \Delta t / \Delta x$.

B.3 Calcul des flux

On pose, pour tout j ,

$$\begin{cases} m_{j-1/2} = \min(u_{j-1}, u_j), \\ M_{j-1/2} = \max(u_{j-1}, u_j) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \phi_{j-1/2} = \min(f(u_{j-1}), f(u_j)), \\ \Phi_{j-1/2} = \max(f(u_{j-1}), f(u_j)). \end{cases}$$

B.3.1 Cas où $\exists \epsilon > 0$ tel que $f'(u_j) > \epsilon \forall j$

On pose pour tout j

$$\begin{cases} b_j = \frac{1}{\lambda}(\alpha_j - M_{j-1/2}) + \Phi_{j-1/2}, \\ B_j = \frac{1}{\lambda}(\alpha_j - m_{j-1/2}) + \phi_{j-1/2}, \\ \begin{cases} s_{m_{j+1/2}} = \min_{[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]}(S''(u)), \\ v_{m_{j+1/2}} = \min_{[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]}(f'(u)), \\ s_{M_{j+1/2}} = \max_{[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]}(S''(u)), \\ v_{M_{j+1/2}} = \max_{[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]}(f'(u)), \end{cases} \\ \begin{cases} a_{j+1/2} = 2\lambda s_{M_{j+1/2}}, \\ c_{j+1/2} = S'(u_{j+1}) - S'(u_j) - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}(f(u_{j+1}) + f(u_j)), \\ d_{j+1/2} = G(u_{j+1}) - f(u_{j+1})S'(u_{j+1}) - (G(u_j) - f(u_j)S'(u_j)) \\ \quad + \lambda s_{M_{j+1/2}}(f(u_{j+1})^2 + f(u_j)^2), \\ r_{j+1/2} = \frac{-c_{j+1/2} - \sqrt{c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2}}}{2a_{j+1/2}}, \\ R_{j+1/2} = \frac{-c_{j+1/2} + \sqrt{c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2}}}{2a_{j+1/2}}, \end{cases} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \omega_{j+1/2} = \begin{cases} \max(m_{j+1/2}, b_j, r_{j+1/2}) \text{ si } u_j \leq u_{j+1}, \\ \max(m_{j+1/2}, b_j) \text{ si } u_j > u_{j+1} \text{ (algorithme débrayé)}, \end{cases} \\ \Omega_{j+1/2} = \begin{cases} \min(M_{j+1/2}, B_j, R_{j+1/2}) \text{ si } u_j \leq u_{j+1}, \\ \min(M_{j+1/2}, B_j) \text{ si } u_j > u_{j+1} \text{ (algorithme débrayé)}. \end{cases} \end{cases}$$

Le flux $f_{j+1/2}$ est défini par

$$\begin{cases} f_{j+1/2} = \omega_{j+1/2} & \text{si } f(u_{j+1}) \leq \omega_{j+1/2}, \\ f_{j+1/2} = f(u_{j+1}) & \text{si } \omega_{j+1/2} \leq f(u_{j+1}) \leq \Omega_{j+1/2}, \\ f_{j+1/2} = \Omega_{j+1/2} & \text{si } \Omega_{j+1/2} \leq f(u_{j+1}). \end{cases}$$

B.3.2 Cas où $\exists \epsilon > 0$ tel que $f'(u_j) < -\epsilon \forall j$

On pose pour tout j

$$\begin{cases} b_j = \frac{1}{\lambda}(\alpha_j - M_{j+1/2}) + \Phi_{j+1/2}, \\ B_j = \frac{1}{\lambda}(\alpha_j - m_{j+1/2}) + \phi_{j+1/2}, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{m_{j+1/2}} = \min_{[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]} (S''(u)), \\ v_{m_{j+1/2}} = \min_{[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]} (f'(u)), \\ s_{M_{j+1/2}} = \max_{[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]} (S''(u)), \\ v_{M_{j+1/2}} = \max_{[m_{j+1/2}, M_{j+1/2}]} (f'(u)), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{j+1/2} = 2\lambda s_{M_{j+1/2}}, \\ c_{j+1/2} = S'(u_j) - S'(u_{j+1}) - 2\lambda s_{M_{j+1/2}}(f(u_j) + f(u_{j+1})), \\ d_{j+1/2} = G(u_j) - f(u_j)S'(u_j) - (G(u_{j+1}) - f(u_{j+1})S'(u_{j+1})) \\ \quad + \lambda s_{M_{j+1/2}}(f(u_j)^2 + f(u_{j+1})^2), \\ r_{j+1/2} = \frac{-c_{j+1/2} - \sqrt{c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2}}}{2a_{j+1/2}}, \\ R_{j+1/2} = \frac{-c_{j+1/2} + \sqrt{c_{j+1/2}^2 - 4a_{j+1/2}d_{j+1/2}}}{2a_{j+1/2}}, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{j+1/2} = \begin{cases} \max(m_{j+1/2}, b_{j+1}, r_{j+1/2}) & \text{si } u_{j+1} \leq u_j, \\ \max(m_{j+1/2}, b_{j+1}) & \text{si } u_{j+1} > u_j \text{ (algorithme débrayé)}, \end{cases} \\ \Omega_{j+1/2} = \begin{cases} \min(M_{j+1/2}, B_{j+1}, R_{j+1/2}) & \text{si } u_{j+1} \leq u_j, \\ \min(M_{j+1/2}, B_{j+1}) & \text{si } u_{j+1} > u_j \text{ (algorithme débrayé)}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Le flux $f_{j+1/2}$ est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{j+1/2} = \omega_{j+1/2} \quad \text{si } f(u_j) \leq \omega_{j+1/2}, \\ f_{j+1/2} = f(u_j) \quad \text{si } \omega_{j+1/2} \leq f(u_j) \leq \Omega_{j+1/2}, \\ f_{j+1/2} = \Omega_{j+1/2} \quad \text{si } \Omega_{j+1/2} \leq f(u_j). \end{array} \right.$$

B.4 Condition CFL à respecter

$$\Delta t / \Delta x \leq \frac{1}{v_{M_{j+1/2}}} \min \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \frac{s_{m_{j+1/2}}^2}{s_{M_{j+1/2}}^2}, \frac{1}{2} \frac{v_{m_{j+1/2}} s_{m_{j+1/2}}}{v_{M_{j+1/2}} s_{M_{j+1/2}}} \right).$$

Annexe C

Algorithme pour les équations d'Euler : décentrage aval sous contraintes amont dans la phase de projection

C.1 Système exact

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0, \end{cases}$$

avec $p = p(\rho, u, e)$, fonction donne. On connaît aussi la vitesse du son $c = c(\rho, u, e)$. On pose $\tau = 1/\rho$.

C.2 Système discret

Il est décomposé en une phase lagrangienne et une phase de projection.

C.2.1 Phase lagrangienne

$$\begin{cases} \rho_j \frac{\tilde{\tau}_j - \tau_j}{\Delta t} - \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \rho_j \frac{\tilde{u}_j - u_j}{\Delta t} + \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \rho_j \frac{\tilde{e}_j - e_j}{\Delta t} + \frac{p_{j+1/2} u_{j+1/2} - p_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \end{cases}$$

avec $\tau_j = 1/\rho_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$, les flux tant donnés par

$$\begin{cases} \rho_j^* c_{j+1/2} = \sqrt{\max(\rho_j c_j^2, \rho_{j+1} c_{j+1}^2) \min(\rho_j, \rho_{j+1})}, \\ p_{j+1/2} = \frac{p_j + p_{j+1}}{2} + \frac{\rho_j^* c_{j+1/2}}{2} (u_j - u_{j+1}), \\ u_{j+1/2} = \frac{1}{2\rho_j^* c_{j+1/2}} (p_j - p_{j+1}) + \frac{1}{2} (u_j + u_{j+1}), \end{cases}$$

avec $p_j = p(\rho_j, u_j, e_j)$ et $c_j = c(\rho_j, u_j, e_j) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

C.2.2 Phase de projection

$$\begin{cases} \frac{\widehat{\rho}_j - \rho_j}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho}_{j+1/2} u_{j+1/2} - \widetilde{\rho}_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho}_j \widetilde{u}_j - \rho_j \widetilde{u}_j}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{u}_{j+1/2} u_{j+1/2} - \widetilde{\rho}_{j-1/2} \widetilde{u}_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{\widehat{\rho}_j \widetilde{e}_j - \rho_j \widetilde{e}_j}{\Delta t} + \frac{\widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{e}_{j+1/2} u_{j+1/2} - \widetilde{\rho}_{j-1/2} \widetilde{e}_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0. \end{cases}$$

On pose, pour tout j ,

$$\begin{cases} \widetilde{m}^\rho_{j-1/2} = \min(\widetilde{\rho}_{j-1}, \widetilde{\rho}_j), \\ \widetilde{M}^\rho_{j-1/2} = \max(\widetilde{\rho}_{j-1}, \widetilde{\rho}_j), \\ \widetilde{m}^{\rho u}_{j-1/2} = \min(\widetilde{\rho}_{j-1} \widetilde{u}_{j-1}, \widetilde{\rho}_j \widetilde{u}_j), \\ \widetilde{M}^{\rho u}_{j-1/2} = \max(\widetilde{\rho}_{j-1} \widetilde{u}_{j-1}, \widetilde{\rho}_j \widetilde{u}_j), \\ \widetilde{m}^{\rho e}_{j-1/2} = \min(\widetilde{\rho}_{j-1} \widetilde{e}_{j-1}, \widetilde{\rho}_j \widetilde{e}_j), \\ \widetilde{M}^{\rho e}_{j-1/2} = \max(\widetilde{\rho}_{j-1} \widetilde{e}_{j-1}, \widetilde{\rho}_j \widetilde{e}_j). \end{cases}$$

On se donne deux réels $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ (très petits). On pose $\lambda = \Delta t / \Delta x$.

Cas où $u_{j+1/2} > \epsilon$

★ Si les quatre conditions

$$\begin{cases} u_{j-1/2} > \epsilon, \\ |\widetilde{\rho}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}| > \eta, \\ |\widetilde{\rho}_j \widetilde{u}_j - \widetilde{\rho}_{j+1} \widetilde{u}_{j+1}| > \eta, \\ |\widetilde{\rho}_j \widetilde{e}_j - \widetilde{\rho}_{j+1} \widetilde{e}_{j+1}| > \eta, \end{cases}$$

sont vérifiées, on pose

$$\begin{cases} \widetilde{b}^\rho_j = \frac{1}{u_{j+1/2} \lambda} (\rho_j - \widetilde{M}^\rho_{j-1/2}) + \frac{u_{j-1/2}}{u_{j+1/2}} \widetilde{M}^\rho_{j-1/2}, \\ \widetilde{B}^\rho_j = \frac{1}{u_{j+1/2} \lambda} (\rho_j - \widetilde{m}^\rho_{j-1/2}) + \frac{u_{j-1/2}}{u_{j+1/2}} \widetilde{m}^\rho_{j-1/2}, \\ \widetilde{b}^{\rho u}_j = \frac{1}{u_{j+1/2} \lambda} (\rho_j \widetilde{u}_j - \widetilde{M}^{\rho u}_{j-1/2}) + \frac{u_{j-1/2}}{u_{j+1/2}} \widetilde{M}^{\rho u}_{j-1/2}, \\ \widetilde{B}^{\rho u}_j = \frac{1}{u_{j+1/2} \lambda} (\rho_j \widetilde{u}_j - \widetilde{m}^{\rho u}_{j-1/2}) + \frac{u_{j-1/2}}{u_{j+1/2}} \widetilde{m}^{\rho u}_{j-1/2}, \\ \widetilde{b}^{\rho e}_j = \frac{1}{u_{j+1/2} \lambda} (\rho_j \widetilde{e}_j - \widetilde{M}^{\rho e}_{j-1/2}) + \frac{u_{j-1/2}}{u_{j+1/2}} \widetilde{M}^{\rho e}_{j-1/2}, \\ \widetilde{B}^{\rho e}_j = \frac{1}{u_{j+1/2} \lambda} (\rho_j \widetilde{e}_j - \widetilde{m}^{\rho e}_{j-1/2}) + \frac{u_{j-1/2}}{u_{j+1/2}} \widetilde{m}^{\rho e}_{j-1/2}, \end{cases}$$

$$\tilde{a}^{\rho}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\tilde{b}^{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1}}{\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1}} & \text{si } \tilde{\rho}_j > \tilde{\rho}_{j+1}, \\ \frac{\tilde{B}^{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1}}{\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1}} & \text{si } \tilde{\rho}_j < \tilde{\rho}_{j+1}, \end{cases}$$

$$\tilde{a}^{\rho u}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\tilde{b}^{\rho u}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1}}{\tilde{\rho}_j\tilde{u}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1}} & \text{si } \tilde{\rho}_j\tilde{u}_j > \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1}, \\ \frac{\tilde{B}^{\rho u}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1}}{\tilde{\rho}_j\tilde{u}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1}} & \text{si } \tilde{\rho}_j\tilde{u}_j < \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1}, \end{cases}$$

$$\tilde{a}^{\rho e}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\tilde{b}^{\rho e}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1}}{\tilde{\rho}_j\tilde{e}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1}} & \text{si } \tilde{\rho}_j\tilde{e}_j > \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1}, \\ \frac{\tilde{B}^{\rho e}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1}}{\tilde{\rho}_j\tilde{e}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1}} & \text{si } \tilde{\rho}_j\tilde{e}_j < \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1}, \end{cases}$$

puis on définit

$$\tilde{\omega}_{j+1/2} = \max(0, \tilde{a}^{\rho}_{j+1/2}, \tilde{a}^{\rho u}_{j+1/2}, \tilde{a}^{\rho e}_{j+1/2}),$$

et on pose $\tilde{\theta}_{j+1/2} = \tilde{\omega}_{j+1/2}$.

★ Si une des quatre conditions

$$\begin{cases} u_{j-1/2} > \epsilon, \\ |\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1}| > \eta, \\ |\tilde{\rho}_j\tilde{u}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1}| > \eta, \\ |\tilde{\rho}_j\tilde{e}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1}| > \eta, \end{cases}$$

n'est pas vérifiée, on pose $\tilde{\theta}_{j+1/2} = 1$.

On en déduit enfin les flux :

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_{j+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2}\tilde{\rho}_j + (1 - \tilde{\theta}_{j+1/2})\tilde{\rho}_{j+1}, \\ \tilde{\rho}_{j+1/2}\tilde{u}_{j+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2}\tilde{\rho}_j\tilde{u}_j + (1 - \tilde{\theta}_{j+1/2})\tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1}, \\ \tilde{\rho}_{j+1/2}\tilde{e}_{j+1/2} = \tilde{\theta}_{j+1/2}\tilde{\rho}_j\tilde{e}_j + (1 - \tilde{\theta}_{j+1/2})\tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1}; \end{cases}$$

Cas où $u_{j+1/2} < -\epsilon$

★ Si les quatre conditions

$$\begin{cases} u_{j+3/2} < -\epsilon, \\ |\tilde{\rho}_j - \tilde{\rho}_{j+1}| > \eta, \\ |\tilde{\rho}_j\tilde{u}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{u}_{j+1}| > \eta, \\ |\tilde{\rho}_j\tilde{e}_j - \tilde{\rho}_{j+1}\tilde{e}_{j+1}| > \eta, \end{cases}$$

sont vérifiées, on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{b}^\rho_{j+1} = \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda}(\rho_{j+1} - \widetilde{M}^\rho_{j+3/2}) + \frac{u_{j+3/2}}{u_{j+1/2}}\widetilde{M}^\rho_{j+3/2}, \\ \widetilde{B}^\rho_{j+1} = \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda}(\rho_{j+1} - \widetilde{m}^\rho_{j+3/2}) + \frac{u_{j+3/2}}{u_{j+1/2}}\widetilde{m}^\rho_{j+3/2}, \\ \widetilde{b}^{\rho u}_{j+1} = \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda}(\rho_{j+1}\widetilde{u}_{j+1} - \widetilde{M}^{\rho u}_{j+3/2}) + \frac{u_{j+3/2}}{u_{j+1/2}}\widetilde{M}^{\rho u}_{j+3/2}, \\ \widetilde{B}^{\rho u}_{j+1} = \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda}(\rho_{j+1}\widetilde{u}_{j+1} - \widetilde{m}^{\rho u}_{j+3/2}) + \frac{u_{j+3/2}}{u_{j+1/2}}\widetilde{m}^{\rho u}_{j+3/2}, \\ \widetilde{b}^{\rho e}_{j+1} = \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda}(\rho_{j+1}\widetilde{e}_{j+1} - \widetilde{M}^{\rho e}_{j+3/2}) + \frac{u_{j+3/2}}{u_{j+1/2}}\widetilde{M}^{\rho e}_{j+3/2}, \\ \widetilde{B}^{\rho e}_{j+1} = \frac{1}{u_{j+1/2}\lambda}(\rho_{j+1}\widetilde{e}_{j+1} - \widetilde{m}^{\rho e}_{j+3/2}) + \frac{u_{j+3/2}}{u_{j+1/2}}\widetilde{m}^{\rho e}_{j+3/2}, \end{array} \right.$$

$$\widetilde{a}^\rho_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\widetilde{b}^\rho_{j+1} - \widetilde{\rho}_j}{\widetilde{\rho}_{j+1} - \widetilde{\rho}_j} & \text{si } \widetilde{\rho}_{j+1} > \widetilde{\rho}_j, \\ \frac{\widetilde{B}^\rho_{j+1} - \widetilde{\rho}_j}{\widetilde{\rho}_{j+1} - \widetilde{\rho}_j} & \text{si } \widetilde{\rho}_{j+1} < \widetilde{\rho}_j, \end{cases}$$

$$\widetilde{a}^{\rho u}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\widetilde{b}^{\rho u}_{j+1} - \widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j}{\widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1} - \widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j} & \text{si } \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1} > \widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j, \\ \frac{\widetilde{B}^{\rho u}_{j+1} - \widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j}{\widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1} - \widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j} & \text{si } \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1} < \widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j, \end{cases}$$

$$\widetilde{a}^{\rho e}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\widetilde{b}^{\rho e}_{j+1} - \widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j}{\widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1} - \widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j} & \text{si } \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1} > \widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j, \\ \frac{\widetilde{B}^{\rho e}_{j+1} - \widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j}{\widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1} - \widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j} & \text{si } \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1} < \widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j, \end{cases}$$

puis on définit

$$\widetilde{\omega}_{j+1/2} = \max(0, \widetilde{a}^\rho_{j+1/2}, \widetilde{a}^{\rho u}_{j+1/2}, \widetilde{a}^{\rho e}_{j+1/2}),$$

et on pose $\widetilde{\theta}_{j+1/2} = \widetilde{\omega}_{j+1/2}$.

★ Si une des quatre conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{j+3/2} < -\epsilon, \\ |\widetilde{\rho}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}| > \eta, \\ |\widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1}| > \eta, \\ |\widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j - \widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1}| > \eta, \end{array} \right.$$

n'est pas vérifiée, on pose $\widetilde{\theta}_{j+1/2} = 1$.

On en déduit enfin les flux :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\rho}_{j+1/2} = \widetilde{\theta}_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1} + (1 - \widetilde{\theta}_{j+1/2})\widetilde{\rho}_j, \\ \widetilde{\rho}_{j+1/2}\widetilde{u}_{j+1/2} = \widetilde{\theta}_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{u}_{j+1} + (1 - \widetilde{\theta}_{j+1/2})\widetilde{\rho}_j\widetilde{u}_j, \\ \widetilde{\rho}_{j+1/2}\widetilde{e}_{j+1/2} = \widetilde{\theta}_{j+1/2}\widetilde{\rho}_{j+1}\widetilde{e}_{j+1} + (1 - \widetilde{\theta}_{j+1/2})\widetilde{\rho}_j\widetilde{e}_j. \end{array} \right.$$

C.3 Condition CFL à respecter

$$\Delta t / \Delta x \leq \frac{C}{\max_{j \in \mathbb{Z}} (u_{j+1/2}, \rho^* c_{j+1/2} / \min(\rho_j, \rho_{j+1}))},$$

où C , dans la pratique, doit être de l'ordre de 0,8.

C.4 Dimension deux : décomposition direction par direction

Les équations d'Euler en dimension deux sont

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) + \partial_y(\rho uv) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho ue + pu) + \partial_y(\rho ve + pv) = 0. \end{cases}$$

La phase horizontale est une résolution de

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho ue + pu) = 0. \end{cases}$$

Elle est décomposée en une phase lagrangienne et une phase de projection. La phase lagrangienne est la même qu'en dimension un (ρv n'y varie pas), et la phase de projection est calquée sur la phase de projection en dimension un décrite plus haut, avec cette fois quatre groupes de contraintes sur le coefficient $\tilde{\theta}_{j+1/2}$ au lieu de trois : un pour ρ , un pour ρu , un pour ρv et un pour ρe .

La phase verticale est une résolution de

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_y(\rho uv) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_y(\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_y(\rho ve + pv) = 0. \end{cases}$$

Elle est effectuée comme la phase horizontale.

Annexe D

Algorithme pour les équations d'Euler à deux constituants : décentrage aval sous contraintes amont des flux des fractions massiques dans la phase de projection

D.1 Système exact

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho \alpha_1) + \partial_x(\rho u \alpha_1) = 0, \\ (\partial_t(\rho \alpha_2) + \partial_x(\rho u \alpha_2) = 0, \text{équation redondante}), \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0, \\ \alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2 = \tau = 1/\rho, \\ \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = \varepsilon, \\ \text{et une loi de mélange (fermeture),} \end{array} \right.$$

où p est fonction de p_1 et p_2 (fonction donnée par la loi de mélange) avec $p_1 = p_1(\tau_1, \varepsilon_1)$ et $p_2 = p_2(\tau_2, \varepsilon_2)$. De manière générale on peut écrire $p = p(\alpha_1, \alpha_2, \tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. On connaît aussi la vitesse du son dans le mélange (donnée par la loi d'état en fonction des vitesses du son dans chacun des constituants purs) : $c = c(\alpha_1, \alpha_2, \tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

D.2 Système discret

Il est décomposé en une phase lagrangienne et une phase de projection.

D.2.1 Phase lagrangienne

$$\begin{cases} \rho_j \frac{\widetilde{\tau}_j - \tau_j}{\Delta t} - \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \rho_j \frac{\widetilde{u}_j - u_j}{\Delta t} + \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \rho_j \frac{\widetilde{e}_j - e_j}{\Delta t} + \frac{p_{j+1/2} u_{j+1/2} - p_{j-1/2} u_{j-1/2}}{\Delta x} = 0, \\ \widetilde{\alpha}_{1,j} = \alpha_{1,j}, \\ \widetilde{\alpha}_{2,j} = \alpha_{2,j}, \end{cases}$$

avec $\tau_j = 1/\rho_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

Calcul des flux

$$\begin{cases} \rho^* c_{j+1/2} = \sqrt{\max(\rho_j c_j^2, \rho_{j+1} c_{j+1}^2) \min(\rho_j, \rho_{j+1})}, \\ p_{j+1/2} = \frac{p_j + p_{j+1}}{2} + \frac{\rho^* c_{j+1/2}}{2} (u_j - u_{j+1}), \\ u_{j+1/2} = \frac{p_j - p_{j+1}}{2\rho^* c_{j+1/2}} + \frac{1}{2} (u_j + u_{j+1}), \end{cases}$$

avec $p_j = p(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \tau_{1,j}, \tau_{2,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j})$ et $c_j = c(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \tau_{1,j}, \tau_{2,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

Calcul des variables propres

Les équations $\widetilde{\alpha}_{1,j} \widetilde{\tau}_{1,j} + \widetilde{\alpha}_{2,j} \widetilde{\tau}_{2,j} = \widetilde{\tau}_j$, $\widetilde{\alpha}_{1,j} \widetilde{\varepsilon}_{1,j} + \widetilde{\alpha}_{2,j} \widetilde{\varepsilon}_{2,j} = \widetilde{e}_j$ et la loi de fermeture permettent alors de connaître $\widetilde{\tau}_{1,j}$, $\widetilde{\tau}_{2,j}$, $\widetilde{\varepsilon}_{1,j}$, $\widetilde{\varepsilon}_{2,j}$ et \widetilde{p}_j .

D.2.2 Phase de projection

On pose $\lambda = \Delta t / \Delta x$.

$$\begin{cases} \widehat{\rho}_j = \rho_j - \lambda(u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} - u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2}), \\ \widehat{\rho}_j \widehat{u}_j = \rho_j \widetilde{u}_j - \lambda(u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{u}_{j+1/2} - u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} \widetilde{u}_{j-1/2}), \\ \widehat{\rho}_j \widehat{e}_j = \rho_j \widetilde{e}_j - \lambda(u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{e}_{j+1/2} - u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} \widetilde{e}_{j-1/2}), \\ \widehat{\rho}_j \widehat{\alpha}_{1,j} = \rho_j \widetilde{\alpha}_{1,j} - \lambda(u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{\alpha}_{1,j+1/2} - u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} \widetilde{\alpha}_{1,j-1/2}), \\ \widehat{\rho}_j \widehat{\alpha}_{2,j} = \rho_j \widetilde{\alpha}_{2,j} - \lambda(u_{j+1/2} \widetilde{\rho}_{j+1/2} \widetilde{\alpha}_{2,j+1/2} - u_{j-1/2} \widetilde{\rho}_{j-1/2} \widetilde{\alpha}_{2,j-1/2}). \end{cases}$$

On pose, pour tout j ,

$$\begin{cases} \widetilde{m}_{j-1/2} = \min(\widetilde{\alpha}_{1,j-1}, \widetilde{\alpha}_{1,j}), \\ \widetilde{M}_{j-1/2} = \max(\widetilde{\alpha}_{1,j-1}, \widetilde{\alpha}_{1,j}). \end{cases}$$

On se donne deux réels $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ (très petits).

Calcul des flux dans le cas où $u_{j+1/2} > \epsilon$

On pose

$$\begin{cases} \widetilde{\tau_{1,j+1/2}} = \widetilde{\tau_{1,j}}, \\ \widetilde{\tau_{2,j+1/2}} = \widetilde{\tau_{2,j}}, \\ \widetilde{\varepsilon_{1,j+1/2}} = \widetilde{\varepsilon_{1,j}}, \\ \widetilde{\varepsilon_{2,j+1/2}} = \widetilde{\varepsilon_{2,j}}. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} \widetilde{s_{j+1/2}} = \lambda u_{j+1/2} + \rho_j (\widetilde{M_{j-1/2}} - \widetilde{\alpha_{1,j}}) (\widetilde{\tau_{1,j}} - \widetilde{\tau_{2,j}}), \\ \widetilde{t_{j+1/2}} = \rho_j (\widetilde{\alpha_{1,j}} - \widetilde{M_{j-1/2}}) \widetilde{\tau_{2,j}} + \widetilde{M_{j-1/2}} \lambda u_{j+1/2}, \\ \widetilde{v_{j+1/2}} = \lambda u_{j+1/2} + \rho_j (\widetilde{m_{j-1/2}} - \widetilde{\alpha_{1,j}}) (\widetilde{\tau_{1,j}} - \widetilde{\tau_{2,j}}), \\ \widetilde{w_{j+1/2}} = \rho_j (\widetilde{\alpha_{1,j}} - \widetilde{m_{j-1/2}}) \widetilde{\tau_{2,j}} + \widetilde{m_{j-1/2}} \lambda u_{j+1/2}. \end{cases}$$

★ Si les trois conditions

$$\begin{cases} u_{j-1/2} > \epsilon, \\ |\widetilde{s_{j+1/2}}| > \eta, \\ |\widetilde{v_{j+1/2}}| > \eta, \end{cases}$$

sont vérifiées,

– si $\widetilde{s_{j+1/2}} > 0$ et $\widetilde{v_{j+1/2}} > 0$, on pose

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma_{j+1/2}} = \max(\widetilde{t_{j+1/2}}/\widetilde{s_{j+1/2}}, \widetilde{m_{j+1/2}}), \\ \widetilde{\Gamma_{j+1/2}} = \min(\widetilde{w_{j+1/2}}/\widetilde{v_{j+1/2}}, \widetilde{M_{j+1/2}}); \end{cases}$$

– si $\widetilde{s_{j+1/2}} > 0$ et $\widetilde{v_{j+1/2}} < 0$, on pose

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma_{j+1/2}} = \max(\widetilde{t_{j+1/2}}/\widetilde{s_{j+1/2}}, \widetilde{w_{j+1/2}}/\widetilde{v_{j+1/2}}, \widetilde{m_{j+1/2}}), \\ \widetilde{\Gamma_{j+1/2}} = \widetilde{M_{j+1/2}}; \end{cases}$$

– si $\widetilde{s_{j+1/2}} < 0$, $\widetilde{v_{j+1/2}} > 0$ et on pose

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma_{j+1/2}} = \widetilde{m_{j+1/2}}, \\ \widetilde{\Gamma_{j+1/2}} = \min(\widetilde{t_{j+1/2}}/\widetilde{s_{j+1/2}}, \widetilde{w_{j+1/2}}/\widetilde{v_{j+1/2}}, \widetilde{M_{j+1/2}}). \end{cases}$$

Le flux $\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}$ est alors défini par

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\gamma_{j+1/2}} & \text{si } \widetilde{\alpha_{1,j+1}} \leq \widetilde{\gamma_{j+1/2}}, \\ \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{1,j+1}} & \text{si } \widetilde{\gamma_{j+1/2}} \leq \widetilde{\alpha_{1,j+1}} \leq \widetilde{\Gamma_{j+1/2}}, \\ \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\Gamma_{j+1/2}} & \text{si } \widetilde{\Gamma_{j+1/2}} \leq \widetilde{\alpha_{1,j+1}}. \end{cases}$$

★ Si une des trois conditions

$$\begin{cases} u_{j-1/2} > \epsilon, \\ |\widetilde{s_{j+1/2}}| > \eta, \\ |\widetilde{v_{j+1/2}}| > \eta, \end{cases}$$

n'est pas vérifiée, on choisit le décentrage amont (par sécurité) :

$$\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{1,j}}.$$

Les flux de la fraction massique α_2 peuvent être calculés au choix avec la même méthode (en remplaçant tous les indices 1 par 2 et tous les indices 2 par 1) ou par soustraction : $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$.

Les flux de densité, vitesse et énergie totale sont donnés par

$$\begin{cases} \widetilde{\rho_{j+1/2}} = \frac{1}{\widetilde{\tau_{j+1/2}}} = \frac{1}{\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}\widetilde{\tau_{1,j}} + \widetilde{\alpha_{2,j+1/2}}\widetilde{\tau_{2,j}}}, \\ \widetilde{u_{j+1/2}} = \widetilde{u_j}, \\ \widetilde{e_{j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}\widetilde{\varepsilon_{1,j}} + \widetilde{\alpha_{2,j+1/2}}\widetilde{\varepsilon_{2,j}} + \frac{1}{2}\widetilde{u_j}^2. \end{cases}$$

Calcul des flux dans le cas où $u_{j+1/2} < -\epsilon$

On pose

$$\begin{cases} \widetilde{\tau_{1,j+1/2}} = \widetilde{\tau_{1,j+1}}, \\ \widetilde{\tau_{2,j+1/2}} = \widetilde{\tau_{2,j+1}}, \\ \widetilde{\varepsilon_{1,j+1/2}} = \widetilde{\varepsilon_{1,j+1}}, \\ \widetilde{\varepsilon_{2,j+1/2}} = \widetilde{\varepsilon_{2,j+1}}. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} \widetilde{s_{j+1/2}} = \lambda u_{j+1/2} + \rho_{j+1}(\widetilde{M_{j+3/2}} - \widetilde{\alpha_{1,j+1}})(\widetilde{\tau_{1,j+1}} - \widetilde{\tau_{2,j+1}}), \\ \widetilde{t_{j+1/2}} = \rho_{j+1}(\widetilde{\alpha_{1,j+1}} - \widetilde{M_{j+3/2}})\widetilde{\tau_{2,j+1}} + \widetilde{M_{j+3/2}}\lambda u_{j+1/2}, \\ \widetilde{v_{j+1/2}} = \lambda u_{j+1/2} + \rho_{j+1}(\widetilde{m_{j+3/2}} - \widetilde{\alpha_{1,j+1}})(\widetilde{\tau_{1,j+1}} - \widetilde{\tau_{2,j+1}}), \\ \widetilde{w_{j+1/2}} = \rho_{j+1}(\widetilde{\alpha_{1,j+1}} - \widetilde{m_{j+3/2}})\widetilde{\tau_{2,j+1}} + \widetilde{m_{j+3/2}}\lambda u_{j+1/2}. \end{cases}$$

★ Si les trois conditions

$$\begin{cases} u_{j+3/2} < -\epsilon, \\ |\widetilde{s_{j+1/2}}| > \eta, \\ |\widetilde{v_{j+1/2}}| > \eta, \end{cases}$$

sont vérifiées,

– si $\widetilde{s_{j+1/2}} > 0$ et $\widetilde{v_{j+1/2}} > 0$, on pose

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma_{j+1/2}} = \max(\widetilde{t_{j+1/2}}/\widetilde{s_{j+1/2}}, \widetilde{m_{j+1/2}}), \\ \widetilde{\Gamma_{j+1/2}} = \min(\widetilde{w_{j+1/2}}/\widetilde{v_{j+1/2}}, \widetilde{M_{j+1/2}}); \end{cases}$$

– si $\widetilde{s_{j+1/2}} > 0$ et $\widetilde{v_{j+1/2}} < 0$, on pose

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma_{j+1/2}} = \max(\widetilde{t_{j+1/2}/s_{j+1/2}}, \widetilde{w_{j+1/2}/v_{j+1/2}}, \widetilde{m_{j+1/2}}), \\ \widetilde{\Gamma_{j+1/2}} = \widetilde{M_{j+1/2}}; \end{cases}$$

– si $\widetilde{s_{j+1/2}} < 0$, $\widetilde{v_{j+1/2}} > 0$ et on pose

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma_{j+1/2}} = \widetilde{m_{j+1/2}}, \\ \widetilde{\Gamma_{j+1/2}} = \min(\widetilde{t_{j+1/2}/s_{j+1/2}}, \widetilde{w_{j+1/2}/v_{j+1/2}}, \widetilde{M_{j+1/2}}). \end{cases}$$

Le flux $\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}}$ est alors défini par

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\gamma_{j+1/2}} & \text{si } \widetilde{\alpha_{1,j}} \leq \widetilde{\gamma_{j+1/2}}, \\ \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{1,j}} & \text{si } \widetilde{\gamma_{j+1/2}} \leq \widetilde{\alpha_{1,j}} \leq \widetilde{\Gamma_{j+1/2}}, \\ \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\Gamma_{j+1/2}} & \text{si } \widetilde{\Gamma_{j+1/2}} \leq \widetilde{\alpha_{1,j}}. \end{cases}$$

★ Si une des trois conditions

$$\begin{cases} \widetilde{u_{j+3/2}} > \epsilon, \\ |\widetilde{s_{j+1/2}}| > \eta, \\ |\widetilde{v_{j+1/2}}| > \eta, \end{cases}$$

n'est pas vérifiée, on choisit le décentrage amont (par sécurité) :

$$\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{1,j+1}}.$$

Les flux de la fraction massique α_2 peuvent être calculés au choix avec la même méthode (en remplaçant tous les indices 1 par 2 et tous les indices 2 par 1) ou par soustraction : $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$.

Les flux de densité, vitesse et énergie totale sont donnés par

$$\begin{cases} \widetilde{\rho_{j+1/2}} = \frac{1}{\widetilde{\tau_{j+1/2}}} = \frac{1}{\widetilde{\alpha_{1,j+1/2}\tau_{1,j+1}} + \widetilde{\alpha_{2,j+1/2}\tau_{2,j+1}}}, \\ \widetilde{u_{j+1/2}} = \widetilde{u_{j+1}}, \\ \widetilde{e_{j+1/2}} = \widetilde{\alpha_{1,j+1/2}\varepsilon_{1,j+1}} + \widetilde{\alpha_{2,j+1/2}\varepsilon_{2,j+1}} + \frac{1}{2}\widetilde{u_{j+1}}^2; \end{cases}$$

Calcul des variables propres

Les équations $\widetilde{\alpha_{1,j}\tau_{1,j}} + \widetilde{\alpha_{2,j}\tau_{2,j}} = \widetilde{\tau_j}$, $\widetilde{\alpha_{1,j}\varepsilon_{1,j}} + \widetilde{\alpha_{2,j}\varepsilon_{2,j}} = \widetilde{\varepsilon_j}$ et la loi de fermeture permettent alors de connaître $\widetilde{\tau_{1,j}}$, $\widetilde{\tau_{2,j}}$, $\widetilde{\varepsilon_{1,j}}$, $\widetilde{\varepsilon_{2,j}}$ et $\widetilde{p_j}$.

D.3 Condition CFL à respecter

$$\Delta t / \Delta x \leq \frac{C}{\max_{j \in \mathbb{Z}} (u_{j+1/2}, \rho_{j+1/2}^* / \min(\rho_j, \rho_{j+1}))},$$

où C , dans la pratique, doit être de l'ordre de 0,8.

D.4 Dimension deux : décomposition direction par direction

Voir l'annexe C.

Bibliographie

- [1] R. ABGRALL. Généralisation du schéma de Roe pour le calcul d'écoulements de mélanges de gaz à concentrations variables. *La recherche aérospatiale*, 1989.
- [2] R. ABGRALL. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations : a quasi-conservative approach. *Journal of Computational Physics*, 125:150–160, 1996.
- [3] R. ABGRALL et F. LAFON. ENO schemes on unstructured meshes. Rapport, INRIA, 1993.
- [4] R. ABGRALL et J.-L. MONTAGNÉ. Généralisation du schéma d'Osher pour le calcul d'écoulements de mélanges de gaz à concentrations variables et de gaz réels. *La recherche aérospatiale*, 1989.
- [5] W. F. AMES. *Nonlinear partial differential equations in engineering*. Academic press, 1965.
- [6] K. AMRAM. *Étude numérique des instabilités dans les couches de mélange compressibles*. Thèse de doctorat, École polytechnique, 1995.
- [7] D. V. ANOSOV et V. I. ARNOLD. *Dynamical systems I*. Birkhuser, 1992.
- [8] M. ARORA et P. L. ROE. A well-behaved TVD limiter for high-resolution calculus of unsteady flow. *Journal of Computational Physics*, 132(5):3–11, 1997.
- [9] I. BAZAROV. *Thermodynamique*. Mir, 1989.
- [10] A. BECCANTINI et H. PAILLÈRE. Upwind flux splitting schemes for the 1D Euler equation: application to shock tube and blast wave model problem. Rapport, CEA, 1997.
- [11] C. BERTHON. *Contribution à l'analyse numérique des équations de Navier-Stokes compressibles à deux entropies spécifiques. Application à la turbulence compressible*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1998.
- [12] F. BEZARD. *Approximation numérique de problèmes d'interfaces en mécanique des fluides*. Thèse de doctorat, École polytechnique, 1998.
- [13] F. BEZARD et B. DESPRÉS. An entropic solver for ideal lagrangian magneto-hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 154:65–89, 1999.

- [14] F. BOUCHUT et F. JAMES. Équations de transport unidimensionnelles à coefficients discontinus. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, série 1*, 320:1097–1102, 1995.
- [15] F. BOUCHUT et F. JAMES. One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients. *Nonlinear Analysis*, 32(7):891–933, 1998.
- [16] J.-P. BOURGUIGNON. *Calcul variationnel*. École polytechnique, 1993.
- [17] H. B. CALLEN. *Thermodynamics and introduction to thermostatistics*. John Wiley & sons, 1985.
- [18] D. CHARGY, R. ABGRALL, L. FEZOUI et B. LARROUTUROU. Comparisons of several upwind schemes for multi-component one-dimensional inviscid flows. Rapport, INRIA, 1990.
- [19] I.-L. CHERN, J. GLIMM, O. MCBRYAN, B. PLOHR et S. YANIV. Front tracking for gas dynamics. *Journal of Computational Physics*, 62:83–110, 1986.
- [20] A. J. CHORIN. Random choice solution of hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 22:517–533, 1976.
- [21] P. COLELLA. Glimm's method for gas dynamics. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 3(1):76–110, 1982.
- [22] F. COQUEL. Communication personnelle, aot 1999.
- [23] F. COQUEL et P. G. LEFLOCH. Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: the corrected antidiffusive approach. *Mathematics of Computation*, 57(195):169–210, 1991.
- [24] F. COQUEL et P. G. LEFLOCH. Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: a general theory. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 30(3):675–700, 1993.
- [25] J.-P. CROISILLE. *Contribution à l'étude théorique et à l'approximation par éléments finis du système hyperbolique de la dynamique des gaz multidimensionnelle et multiespèce*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1990.
- [26] G. DAL MASO, P. G. LEFLOCH et F. MURAT. Definition and weak stability of nonconservative products. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 74:483–548, 1995.
- [27] F. DE VUYST. *Schémas non-conservatifs et schémas cinétiques pour la simulation numérique d'écoulements hypersoniques non visqueux en déséquilibre thermo-chimique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1994.
- [28] B. DESPRÉS. Construction, analyse et discrétisation d'un modèle de dynamique des fluides compressibles multi-constituants. Rapport, CEA, 1997.

- [29] B. DESPRÉS. Inégalité entropique pour un solveur conservatif du système de la dynamique des gaz en coordonnées de Lagrange. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, série 1*, 324:1301–1306, 1997.
- [30] B. DESPRÉS. Inégalités entropiques pour un solveur de type Lagrange + convection des équations de l'hydrodynamique. Rapport, CEA, 1997.
- [31] B. DESPRÉS. Invariance properties of lagrangian systems of conservation laws, approximate Riemann solvers and the entropy condition. To appear in *Numerische Mathematik*, 2000.
- [32] B. DESPRÉS et F. LAGOUTIÈRE. Un schéma non linéaire anti-dissipatif pour l'équation d'advection linéaire. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, série 1*, 328:939–944, 1999.
- [33] G. DUVAUT. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1990.
- [34] L. ÉTIEMBLE et Ch. MÉRESSE. Schéma Lagrange + projection 1D et 2D en géométrie plane, cylindrique et sphérique. Rapport, CEA, 1997.
- [35] R. FEDKIW, T. ASLAM, B. MERRIMAN et S. OSHER. A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *Journal of Computational Physics*, 152:457–492, 1999.
- [36] R. P. FEDKIW, T. ASLAM, B. MERRIMAN et S. OSHER. A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). Rapport, UCLA, 1998.
- [37] E. GIUSTI. *Minimal surfaces and functions of bounded variations*. Birkhäuser, 1984.
- [38] J. GLIMM. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 18:697–715, 1965.
- [39] J. GLIMM, E. ISAACSON, D. MARCHESIN et O. MCBRYAN. Front tracking for hyperbolic systems. *Advances in Applied Mathematics*, 2:91–119, 1981.
- [40] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART. *Hyperbolic systems of conservation laws*. Ellipses, 1991.
- [41] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Springer, 1995.
- [42] D. GUEYFFIER, J. LI, R. SCARDOVELLI et S. ZALESKI. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics*, 152:423–456, 1999.
- [43] L. HALLO. *Étude de schémas numériques pour la simulation des écoulements tridimensionnels turbulents compressibles réactifs*. Thèse de doctorat, École centrale de Lyon, 1995.

- [44] A. HARTEN. High resolution schemes for conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49:357–393, 1983.
- [45] A. HARTEN. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 21(1):1–23, 1984.
- [46] A. HARTEN et J. M. HYMAN. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 50:235–269, 1983.
- [47] A. HARTEN et S. OSHER. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 24(2):279–309, 1987.
- [48] T. HOU et P. G. LEFLOCH. Why nonconservative schemes converge to wrong solutions: error analysis. *Mathematics of Computation*, 62(206):497–530, 1994.
- [49] S. JAOUEN et B. DESPRÉS. Solveur entropique d’ordre élevé pour les équations de l’hydrodynamique à deux températures. Rapport, CEA, 1997.
- [50] S. KARNI. Multicomponent flow calculations by a consistent primitive algorithm. *Journal of Computational Physics*, 112:31–43, 1993.
- [51] S. KARNI. Hybrid multifluid algorithms. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 17(5):1019–1039, 1996.
- [52] S. KOKH et G. ALLAIRE. Numerical simulation of 2-D two-phase flows with interface. In E. F. Toro, editor, To appear in *Godunov methods: theory and applications*. Kluwer academic / Plenum publishers, 2000.
- [53] S. KRUKOV. First order quasi-linear equations in several independent variables. *English Translation in Math. USSR. Sb.*, 10:217–243, 1970.
- [54] F. LAGOUTIÈRE et B. DESPRÉS. Étude mathématique de modèles de mélange. Rapport, CEA, 1999.
- [55] B. LARROUTUROU. How to preserve mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows. *Journal of Computational Physics*, 95(1):59–84, 1991.
- [56] B. LARROUTUROU et L. FEZOUI. On the equations of multi-component perfect or real gas inviscid flow. In *Lecture notes in mathematics, nonlinear hyperbolic problems*. Springer-Verlag, 1988.
- [57] F. LAUDENBACH. *Topologie différentielle*. École polytechnique, 1993.
- [58] P. D. LAX. Hyperbolic systems of conservation laws, II. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 10:537–566, 1957.
- [59] P. D. LAX et B. WENDROFF. Systems of conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13:217–237, 1960.

- [60] P. G. LEFLOCH. Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under nonconservative form. *Communication in partial differential equations*, 13(6):669–727, 1988.
- [61] P. G. LEFLOCH. Shock waves for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form. *IMA preprint series*, (593), 1989.
- [62] P. G. LEFLOCH et J.-G. LIU. Generalized monotone schemes, discrete paths of extrema, and entropy conditions. *Mathematics of Computation*, 68(227):1025–1055, 1999.
- [63] P. G. LEFLOCH et T.-P. LIU. Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form. *Forum mathematicum*, 5:261–280, 1993.
- [64] R. J. LEVEQUE. *Numerical methods for consevation laws*. Birkhuser, 1992.
- [65] P.-L. LIONS et P. E. SOUGANIDIS. Convergence of MUSCL and filtered schemes for scalar conservation laws and Hamilton-Jacobi equations. *Numerische Mathematik*, 69:441–470, 1995.
- [66] X.-D. LIU, R. P. FEDKIW et S. OSHER. A quasi-conservative approach to the multiphase Euler equations without spurious pressure oscillations. *Computational and Applied Mathematics 11*, UCLA, 1998.
- [67] C. M. MARLE. *Systèmes dynamiques*. Cours de maîtrise, université Pierre-et-Marie-Curie, 1994.
- [68] R. MENIKOFF et B. J. PLOHR. The Riemann problem for fluid flow of real materials. *Reviews of Modern Physics*, 1989.
- [69] K. W. MORTON et P. K. SWEBY. A comparison of flux limited difference methods and characteristic Galerkin methods for shock modelling. *Journal of Computational Physics*, 73:203–230, 1987.
- [70] I. MÜLLER et T. RUGGERI. *Rational extended thermodynamics*. Springer-Verlag, 1998.
- [71] C. D. MUNZ. On Godunov-type schemes for lagrangian gas dynamics. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 31(1):17–42, 1994.
- [72] W. F. NOH. Artificial viscosity (Q) and artificial heat flux (H) errors for spherically divergent shocks. Rapport, LLNL, 1983.
- [73] M. OLAZABAL. *Modélisation numérique de problèmes de stabilité linéarisée. Application aux équations de la dynamique des gaz et de la MHD idéale*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1998.
- [74] S. OSHER. Convergence of generalized MUSCL schemes. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29:947–961, 1985.
- [75] S. OSHER et S. CHAKRAVARTHY. High resolution schemes and the entropy conditions. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 21:955–984, 1984.

- [76] R. D. RICHTMYER et K. V. MORTON. *Difference methods for initial-value problems*. John Wiley & sons, 1957.
- [77] P. L. ROE. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational physics*, 43:357–372, 1981.
- [78] P. L. ROE. Some contribution to the modelling of discontinuous flows. *Lectures in Applied Mathematics*, 22:163–193, 1985.
- [79] L. SAINSAULIEU. Traveling waves solutions of convection-diffusion systems whose convection terms are weakly nonconservative: application to the modeling of two-phase fluid flows. *SIAM Journal in applied mathematics*, 55(6):1552–1576, 1995.
- [80] R. SAUREL et R. ABGRALL. A simple method for compressible multifluid flows, 1997.
- [81] R. SAUREL et R. ABGRALL. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 1999.
- [82] B. SCHEURER. Quelques méthodes pour la simulation numérique de la fusion par confinement inertiel. *Chocs*, 22:18–30, 1999.
- [83] D. SERRE. *Systèmes de lois de conservation I*. Diderot, 1996.
- [84] C.-W. SHU. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. Rapport, Brown university, 1997.
- [85] C.-W. SHU et S. OSHER. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77:439–471, 1988.
- [86] C.-W. SHU et S. OSHER. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II. *Journal of Computational Physics*, 83:32–78, 1989.
- [87] G. A. SOD. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic convection laws. *Journal of Computational Physics*, 27:1–31, 1978.
- [88] H. B. STEWART et B. WENDROFF. Two-phase flow: models and methods. *Journal of Computational Physics*, 1984.
- [89] P. K. SWEBY. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 21(5):995–1011, 1984.
- [90] M. E. TAYLOR. *Partial differential equations I*. Springer-Verlag, 1997.
- [91] E. F. TORO. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction*. Springer, 1997.
- [92] C. TRUESDELL. *Rational thermodynamics*. Springer-Verlag, 1984.
- [93] B. VAN LEER. Towards the ultimate conservative difference scheme, II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14:361–376, 1974.

-
- [94] J.-P. VILA. High-order schemes and entropy condition for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *Mathematics of Computation*, 50(181):53–73, 1988.
- [95] H. S. ZANG et R. M. C. SO. A flux-coordinate-splitting technique for flows with shocks and contact discontinuities. *Computers & Fluids*, 20(4):421–442, 1991.

Résumé

Ce travail concerne les fluides eulériens compressibles constitués de plusieurs espèces, qui peuvent être mélangées ou séparées par des interfaces. Le mémoire est composé de trois parties.

La première partie est consacrée à la résolution numérique de problèmes modèles : équation d'advection, équation de Burgers, équations d'Euler, en dimensions un et deux. L'accent est mis sur la précision des méthodes (en particulier pour des données initiales discontinues), et des algorithmes non dissipatifs sont développés. Ils sont basés sur un décentrage **aval** des flux (de type volumes finis) sous des **contraintes de stabilité**.

La seconde partie traite de la modélisation mathématique des mélanges de fluides. Nous y construisons et analysons une classe de modèles entropiques, symétrisables, hyperboliques, non forcément conservatifs. Ce sont des modèles à plusieurs températures et plusieurs pressions.

Dans la troisième partie, nous utilisons les idées introduites dans la première partie (décentrage aval et schémas non dissipatifs) pour la résolution numérique des problèmes aux dérivées partielles construits dans la deuxième partie. Nous présentons des résultats numériques en dimensions un et deux.

Mots-clés : équation d'advection, équations d'Euler, système hyperbolique, système non conservatif, interface, mélange, entropie, multi-températures, multi-pressions, onde progressive, volumes finis, algorithme non dissipatif.

Abstract

This work deals with eulerian compressible multi-species fluid dynamics, the species being either mixed or separated (with interfaces). The document is composed of three parts.

The first part is devoted to the numerical resolution of model problems: advection equation, Burgers equation, and Euler equations, in dimensions one and two. The goal is to find a precise method, especially for discontinuous initial conditions, and we develop non dissipative algorithms. They are based on a **downwind** finite-volume discretization under some **stability constraints**.

The second part treats of the mathematical modelling of fluids mixtures. We construct and analyse a set of multi-temperature and multi-pressure models that are entropic, symmetrizable, hyperbolic, not ever conservative.

In the third part, we apply the ideas developed in the first part (downwind discretization) to the numerical resolution of the partial differential problems we have constructed for fluids mixtures in the second part. We present some numerical results in dimensions one and two.

Key-words: advection equation, Euler equation, hyperbolic system, non conservative system, interface, mixture, entropy, multi-temperature, multi-pressure, travelling wave, finite volume, non dissipative algorithm.