



HAL
open science

Instabilités hydrodynamiques dans les écoulements en rotation différentielle

Denis Richard

► **To cite this version:**

Denis Richard. Instabilités hydrodynamiques dans les écoulements en rotation différentielle. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2001. Français. NNT: . tel-00001393

HAL Id: tel-00001393

<https://theses.hal.science/tel-00001393>

Submitted on 12 Jun 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Doctorale d'Astronomie - Astrophysique d'Ile de France
Université Paris 7 Denis Diderot

THESE

présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Paris 7

Spécialité Astrophysique

par

Denis Richard

Instabilités Hydrodynamiques dans les Ecoulements en Rotation Différentielle

Soutenue le 6 décembre 2001 devant le Jury composé de

Jacques Le Bourlot *Président*

Antonello Provenzale *Rapporteur*

Michel Rieutord *Rapporteur*

Olivier Dauchot *Examineur*

Bérengère Dubrulle *Examineur*

Jean Heyvaerts *Examineur*

Jean-Paul Zahn *Directeur de Thèse*

Département d'Astrophysique Stellaire et Galactique,

Observatoire de Paris

Groupe Instabilités et Turbulence, Service de Physique de l'Etat Condensé,
Commissariat à l'Énergie Atomique - Saclay

A Jacques

« Croyez ceux qui cherchent la vérité, doutez de ceux qui la trouvent. »

A.Gide

Remerciements

Cette thèse a été préparée au Département d'Astrophysique Stellaire et Galactique (DASGAL) de l'Observatoire de Paris et au Groupe Instabilités et Turbulence (GIT) du Service de Physique de l'Etat Condensé du CEA. Je tiens à remercier les responsables successifs de ces deux laboratoires pour m'avoir donné les moyens de mener à bien ce travail. Elle a été financée en partie par le CEA et le Programme National de Physique Stellaire (PNPS). Je remercie les membres de ce jury et les rapporteurs pour avoir accepté de prendre de leur temps pour s'intéresser à ce travail.

Dans tout voyage initiatique il y a des guides. Au long de ce chemin, et dans l'ordre de leur apparition, il y aura eu d'abord Jean-Paul Zahn, le directeur de cette thèse, Jean-Marc Huré et Bérengère Dubrulle pour l'Astrophysique, Olivier Dauchot et François Daviaud pour l'Hydrodynamique expérimentale. Ils ont tous tenté, parfois en vain, de me transmettre une part de leur expérience. Il y a également les compagnons de route ; Franck Hersant, Arnaud Prigent, Daniel Bonamy, Louis Marié, avec qui j'ai partagé la condition de « Thésard » ; Cécile Gasquet et Vincent Padilla, les deux sauveteurs du GIT qui ont pris l'habitude de résoudre les problèmes techniques les plus saugrenus, sans oublier Christian Paris, emblème de l'Observatoire de Meudon. Il y a également ceux que l'on croise, les membres et nombreux stagiaires du GIT, du DASGAL et de l'Observatoire. Toutes ces personnes sont devenues mes « proches » dans « ma famille scientifique ».

De cette thèse, écartelée entre deux laboratoires et entre deux disciplines, je retiendrai l'importance de mélanger les savoirs et le savoir-faire venus de différents horizons. Jean-Paul m'aura appris à être passionné tout en restant lucide et objectif, Jean-Marc m'a montré un exemple de rigueur et d'honnêteté et Bérengère un exemple de vivacité d'esprit et d'imagination. Olivier m'a appris la « réalité » de la Physique, au sortir de mes débuts restreints au monde virtuel de l'Astrophysique et François a tout fait pour me permettre, comme à tous les membres du GIT, de disposer des moyens de travailler, tout en gardant un œil et une oreille attentifs à nos résultats. Je les remercie tous d'avoir fait de ces quelques années des moments riches en émotions et en expérience humaine. Je veux également remercier Alain Vincent, qui m'a mis le pied à l'étrier, bien avant ma thèse, lors de mon stage de maîtrise à Montréal.

A la fin de cette nouvelle étape, j'ai évidemment une pensée pour ma toute ma famille. Mes parents et mon frère bien sûr, qui m'ont supporté – dans tous les sens du terme – depuis quelques vingt et six années. Ce qu'ils sont pour moi ne peut pas se résumer en quelques lignes. Mes grands-parents Colette et Jacques avec qui j'ai eu la chance de passer de nombreuses semaines au long de mon enfance. Cette thèse est dédiée à Jacques, en espérant que les heures passées « en arpentant ensemble les lieux si propices à l'éclosion de l'«Honnête Homme» » aient su porter leurs fruits, et parce que j'ai souvent eu le sentiment au cours de ces années d'avoir la chance d'accomplir ce dont on n'avait pas voulu lui donner l'opportunité.

Finally, there is no words to thanks my beloved “half”, Ana Marie. For everything she means to me I will never thank her enough, but by loving her as well as she loves me. And the very last “thank you” will go to our little fur-ball.

I	Introduction et Généralités	6
1	Introduction	7
1.1	Un Univers Fluide	7
1.1.1	Les Etoiles	8
1.1.2	Les Disques d'Accrétion	9
1.2	Philosophie	10
2	Hydrodynamique et Turbulence	11
2.1	Les Équations de l'Hydrodynamique	11
2.2	Écoulements et Instabilités	12
2.2.1	Écoulements Laminaires et Écoulements Turbulents	12
2.2.2	Stabilité	13
2.3	Les Effets de la Turbulence	16
2.3.1	La Cascade Turbulente	17
2.3.2	Ecoulement Moyen	18
2.3.3	Diffusion Turbulente	19
2.4	Instabilités de Cisaillement	20
2.4.1	Instabilités Linéaires	21
2.4.2	Instabilités Non-Linéaires	22
2.5	Conséquences en Astrophysique	23
II	Instabilités aux Amplitudes Finies dans le Couette-Taylor	24
3	État des Lieux et Exploitation des Expériences Antérieures	25
3.1	L'écoulement de Couette-Taylor	25
3.1.1	L'expérience	26
3.1.2	Travaux Antérieurs	28
3.2	Les Pionniers : F.Wendt & G.I.Taylor	30
3.3	Seuils d'Instabilité	33
3.4	Influence sur les profils moyens	35
3.4.1	Instabilité Centrifuge	35
3.4.2	Instabilité aux Amplitudes Finies	36
3.5	Transport Turbulent	39

3.5.1	Instabilité Centrifuge	39
3.5.2	Transition vers la Domination du Cisaillement	43
3.5.3	Instabilité aux Amplitudes Finies	43
3.6	Discussion	46
4	Le Laboratoire	52
4.1	Dispositif Expérimental	52
4.1.1	Description Technique	52
4.1.2	Conditions aux Limites	54
4.1.3	Mesures Accessibles	54
4.2	Effets de Bords	54
4.3	Stabilité	56
4.3.1	Domaine $\partial_r \Omega > 0$	58
4.3.2	Domaine $\partial_r \Omega < 0$	59
4.4	Évolution du Champ Moyen	60
4.5	Évolution des Fluctuations	63
4.6	Discussion	67
5	Une Tentative d'Interprétation	68
5.1	Équations du Transport Turbulent	68
5.1.1	Équations Générales	68
5.2	Couplage Grandes Échelles - Fluctuations	70
5.3	De l'Importance des Termes Non-Linéaires	70
5.3.1	Production	70
5.3.2	Contraintes	70
5.4	Critère de Stabilité & Amplitude Critique	71
5.5	Discussion	71
5.5.1	Paramètres de Stabilité	71
5.5.2	Amplitudes Critiques et Hystérésis	73
5.5.3	Viscosité Turbulente	73
5.6	Conclusion	73
III	Une Application aux Disques d'Accrétion	74
6	Application au Transport dans les Disques d'Accrétion	75
6.1	Rotation Keplerienne	75
6.2	Instabilités Linéaires et Développement Non-Linéaire	76
6.3	Une Autre Viscosité pour les Disques	78
7	Conclusion	97

Bibliographie

98

Première partie

Introduction et Généralités

1.1 Un Univers Fluide

Une grande partie des systèmes étudiés par les astrophysiciens sont – totalement ou en partie – fluides. Notre planète, la Terre, possède une atmosphère, des océans, et sous sa croûte, un manteau fluide. La planète géante Jupiter, en dehors de son cœur solide est elle aussi essentiellement « liquide », et les structures d'écoulement tels que la célèbre grande tache rouge visible à sa surface sont des sujets d'étude pour la dynamique des fluides. Les intérieurs stellaires, les nébuleuses planétaires, et plus généralement les disques d'accrétion, sont des systèmes essentiellement gazeux. Plus généralement, l'Univers observable nous présente une variété de systèmes dont la composition physique va du vide spatial à l'état solide, en passant par des états très dilués ou très denses de la matière. Beaucoup de ces objets sont inhomogènes et il faut pour les décrire développer des modèles complexes qui font appel à des connaissances de physique des solides, des milieux continus, des milieux dilués, des plasmas, sans mentionner la physique nucléaire, la physique des particules, la thermodynamique, le transfert de rayonnement ou encore la chimie. Très souvent, ces objets sont suffisamment « exotiques » pour que les conditions physiques dans lesquelles ils évoluent soient impossibles à reproduire dans un environnement terrestre.

Le développement de modèles complexes a été facilité dans les dernières décennies par l'avènement des simulations numériques. La puissance de calcul permet aujourd'hui d'inclure de plus en plus de processus physiques et chimiques dans ces modèles. Loin de vouloir se lancer dans un débat philosophique sur l'utilisation des outils numériques, on peut en discerner deux types d'utilisation. La première est celle décrite précédemment, c'est à dire la modélisation de systèmes complexes à partir des propriétés connues des processus physiques pertinents. La seconde consiste à choisir des systèmes physiques simples et à les explorer pour en tirer une meilleure compréhension d'un phénomène physique particulier. Ces deux approches complémentaires sont présentes dans la communauté Astrophysique.

Cependant, les limites de la puissance de calcul demeurent, et même certains phénomènes physiques ne nécessitant l'étude que de systèmes simples sont encore inaccessibles aux simulations numériques. Lorsque la physique fait défaut, on utilise en général des « recettes », souvent basées sur l'intuition, ou sur des modèles simplistes pour lesquels les observations en laboratoire ou astronomiques ne sont pas suffisantes imposer des contraintes fortes. C'est, entre autre, le cas pour la modélisation des écoulements turbulents.

La turbulence échappe aux tentatives de compréhension globale depuis plus d'un siècle. Aucune théorie complète n'est capable de prédire la naissance et le comportement des écoulements turbulents de façon générale. En Astrophysique,

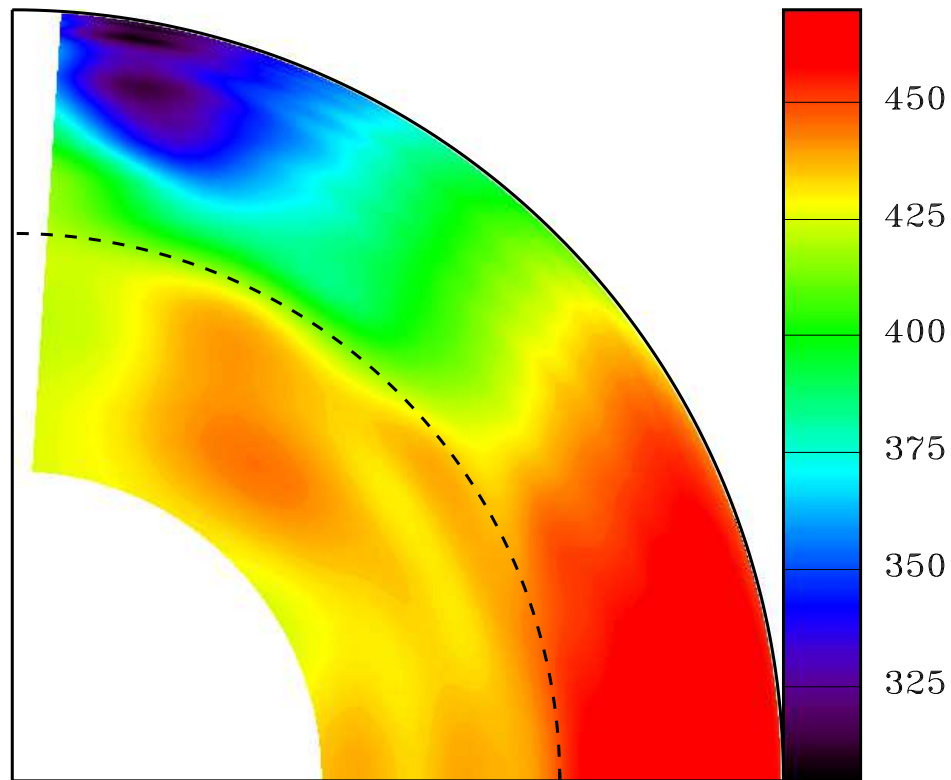


Fig. 1.1: Fréquence de rotation du soleil (en μHz) en fonction du rayon et de la latitude (données MDI).

les très grandes échelles spatiales et les faibles viscosités des fluides, par exemple dans les disques d'accrétion, dans le milieu interstellaire, ou dans les intérieurs stellaires créent des conditions propices à la turbulence. Or, grâce à la modification des propriétés de transport, la turbulence peut modifier sensiblement l'évolution dynamique – transport de moment, de moment cinétique – et la composition chimique – transport de masse, concentration des réactifs – des systèmes où elle est présente.

1.1.1 Les Etoiles

Les boules de gaz géantes que sont les étoiles, car elles ont conservées une partie du moment cinétique du nuage primordial dont elles sont issues par effondrement, sont animées d'une rotation d'ensemble. Cette rotation n'est pas uniforme, comme le montre la figure 1.1 qui représente la fréquence de rotation du soleil en fonction du rayon et de la latitude. Ces données sont issues de l'inversion de mesures d'héliosismologie (instrument MDI). Elles montrent que la zone convective – au dessus de la ligne pointillée sur la figure – du soleil est en rotation différentielle – les pôles ayant une fréquence de rotation inférieure à l'équateur – alors que son cœur radiatif est pratiquement en rotation solide. La transition entre ces deux zones aux régimes de rotation différent donne naissance à une zone de fort cisaillement nommée Tachocline. Pour expliquer la faible épaisseur de cette couche, il est nécessaire de faire appel à un champ

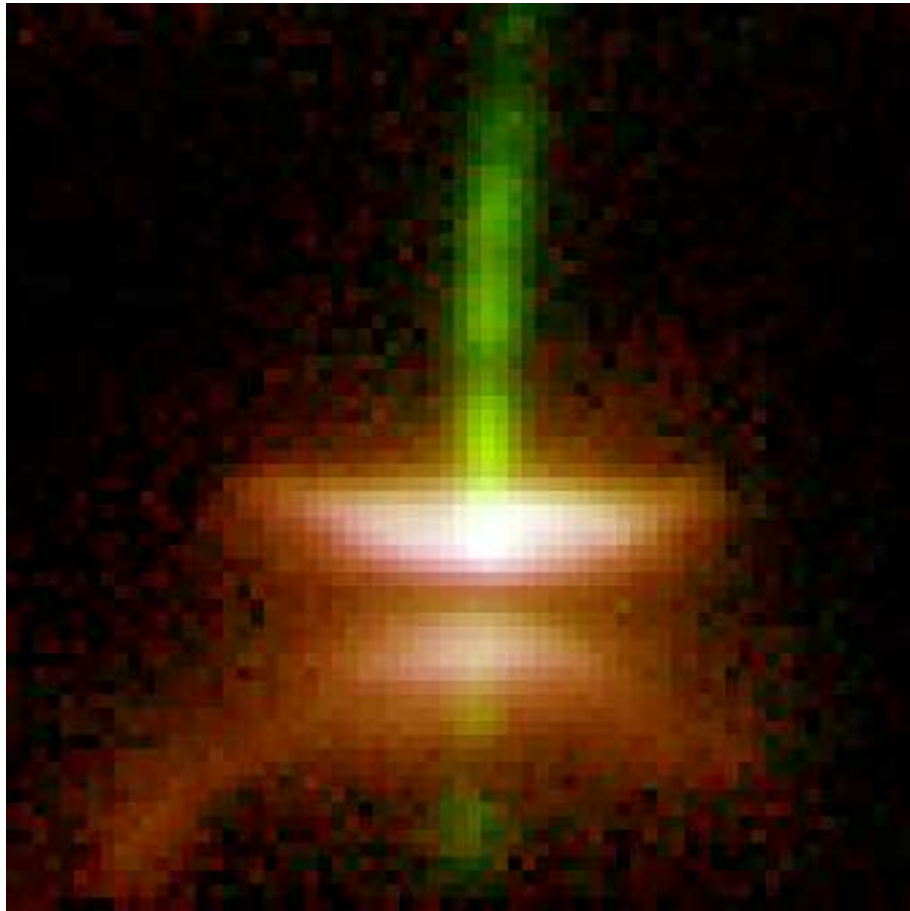


Fig. 1.2: Image de l'étoile Herbig-Haro 30 (HH 30) prise par le HST. La nébuleuse environnante est éclairée par l'étoile centrale. Le disque de poussières et de gaz optiquement épais la coupe visuellement en deux parties. On discerne également nettement deux jets, qui font de cette image un parfait exemple de système accrétion - éjection autour d'une étoile jeune.

magnétique (Gough & Sekii 1997) ou à un transport de moment anistope qui serait dû à l'instabilité de cisaillement (Spiegel & Zahn 1992).

Pour les rotateurs rapides, la cause de la rotation différentielle est le transport de moment cinétique par une circulation à grande échelle. Cette circulation méridienne est due à la rotation d'ensemble, qui entraîne un écart à la sphéricité (aplatissement aux pôles). Cette « contradiction » entre la géométrie de l'étoile et la tendance du flux radiatif à conserver la symétrie sphérique a pour conséquence un déséquilibre thermique qui induit ces mouvements à grande échelle (Talon, 1997).

1.1.2 Les Disques d'Accrétion

Sous le terme générique de disques d'accrétion se cachent des systèmes très différents. Leur point commun est l'existence d'un disque de gaz et de poussières, en rotation autour d'un objet massif central, sur lequel la matière est lentement accrétée. Il peut ainsi s'agir des restes d'un nuage moléculaire qui s'est contracté pour former une étoile, d'un Noyau Actif de Galaxie où le disque est en rotation autour d'un trou noir, ou il peut naître de l'échange de masse dû aux effets de marées dans un couple d'étoiles binaires serrées. La figure 1.2 est une image d'une étoile jeune prise

par le télescope spatial Hubble. On y distingue le disque de gaz et de poussières ainsi que les jets d'éjection associés à l'accrétion de matière sur l'étoile centrale.

Pour peu que le disque soit assez plat, on peut supposer en première approximation qu'il est en rotation keplerienne, telle que sa vitesse angulaire décroisse comme la puissance $-3/2$ de la distance à l'objet central. Pour permettre à la matière de chuter vers le corps central en régime stationnaire, c'est à dire en conservant un profil de rotation constant, il est nécessaire de faire appel à un processus dynamique qui puisse évacuer le moment angulaire vers l'extérieur du disque. Or la viscosité moléculaire est trop faible pour remplir ce rôle. On invoque alors généralement une diffusion turbulente du moment angulaire.

La modélisation de cette viscosité turbulente est primordiale pour l'étude de la dynamique des disques, puisqu'elle influe sur leur évolution dynamique, thermodynamique, et chimique. Elle est essentielle pour l'explication de certaines sources variables cataclysmiques, et pour une meilleur compréhension de la formation des systèmes planétaires.

1.2 Philosophie

Ce manuscrit présente les résultats d'une étude sur les écoulements en rotation différentielle, en particulier sur leur stabilité et les propriétés de transport de la turbulence qu'ils peuvent engendrer. La philosophie du présent travail est de les étudier d'abord d'une façon générale, indépendamment de leur cadre Astrophysique. Les lois de la physique étant « la chose au monde la mieux partagée », celles du laboratoire terrestre sont les mêmes que celles que l'on rencontre au cœur du soleil, ou des disques d'accrétion. Nous discutons ensuite de la pertinence des résultats dans les cas particuliers qui peuvent nous intéresser.

La première partie est une étude expérimentale et théorique des instabilités dites « aux amplitudes finies », en particulier dans une expérience de laboratoire nommée Couette-Taylor. Elle comprend une analyse de données issues de travaux expérimentaux antérieurs, qui a permis d'extraire des résultats originaux quant aux seuils de stabilité et aux propriétés de transport de la turbulence pour une classe d'écoulements. Nous présentons également les résultats d'une nouvelle expérience de laboratoire, ayant pour objectif de compléter les données précédentes. Quelques considérations analytiques suivent, qui tentent de déterminer les paramètres fondamentaux gouvernant les instabilités des écoulements en rotation différentielle.

Dans la seconde partie, nous présentons une application aux disques d'accrétion sous la forme d'une prescription pour leur viscosité turbulente, ainsi que la détermination du champ d'application de cette viscosité dans le cadre d'un modèle de disque mince.

Enfin, nous concluons sur les perspectives offertes à l'issue de ce travail.

Hydrodynamique et Turbulence

« As far as the laws of Mathematics refer to reality, they are not certain ; as far as they are certain, they do not refer to reality » A. Einstein

Ce chapitre a pour objectif d'exposer les notions fondamentales de l'hydrodynamique ainsi que les concepts de base de la turbulence. Compte tenu des nombreux modèles de description de la turbulence existant, il n'a pas la prétention d'être exhaustif mais simplement de rendre compréhensible la suite de ce manuscrit.

2.1 Les Équations de l'Hydrodynamique

Les équations de Navier-Stokes expriment les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un milieu continu. Elles s'écrivent – de façon générale pour une particule fluide :

$$D_t \rho \vec{V} = \nabla \cdot \sigma + \vec{f} \quad (2.1)$$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (2.2)$$

où \vec{V} est le champ de vitesse de l'écoulement, ρ la densité du fluide, D_t est la dérivée Lagrangienne, f représente les forces extérieures et σ est le tenseur des contraintes, qui modélise les interactions entre particules fluides :

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \mu \left[(\partial_j V_i + \partial_i V_j) + \frac{2}{3} \nabla \cdot V \delta_{ij} \right] \quad (2.3)$$

où P est le champ de pression et μ la viscosité dynamique du fluide. Pour un écoulement incompressible – pour lequel la densité est constante – et Newtonien – dont la viscosité ne dépend que de la température – ces équations deviennent :

$$\partial_t \vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f} \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.5)$$

où nous avons introduit $\nu = \mu/\rho$ la viscosité cinématique du fluide.

2.2 Écoulements et Instabilités

Les équations de l'hydrodynamique permettent dans certains cas de dériver l'expression analytique d'un écoulement. Ceci est vrai tant que la géométrie du problème reste simple. Pour les écoulements cisailés, les symétries naturelles conduisent à des solutions pour lesquelles les termes non-linéaires $-(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$ – sont nuls. Pour des forçage importants, ces écoulements peuvent être instables et bifurquer vers des solutions plus complexes, qui ne possèdent plus les symétries de base, et pour lesquelles les non-linéarités sont non-nulles.

On comprend bien également que la valeur de la viscosité qui quantifie les échanges de moment entre les particules fluides, qui aplanit les irrégularités de l'écoulement, et qui assure la cohésion du fluide doit être un paramètre d'importance critique.

2.2.1 Écoulements Laminaires et Écoulements Turbulents

laminaire *adj.* : 1. Composé de lames parallèles. 2. *PHYS* Écoulement, régime laminaire, dans lequel les diverses couches d'un fluide glissent les unes sur les autres sans se mélanger (par oppos. à turbulent).

turbulence *n.f.* : 1. Caractère d'une personne turbulente. 2. Agitation, désordre bruyant. 3. *PHYS* Irrégularité du mouvement d'un fluide (ayant un écoulement turbulent). — *METEO* Turbulence atmosphérique : agitation de l'atmosphère due aux variations thermiques, aux courants, au relief, etc.

Ces définitions extraites du *Dictionnaire Universel Francophone*, (*HACHETTE/EDICEF*) donnent un aperçu intuitif des différences qualitatives entre écoulements laminaires et turbulents. On pourra dire qu'un écoulement est turbulent lorsque son champ de vitesse est fortement instationnaire – variations sur des temps courts – et que la dispersion des valeurs instantanées par rapport à la valeur moyenne est importante. De façon plus générale, la caractéristique d'un écoulement turbulent est l'existence d'un grand nombre d'échelles spatiales et temporelles. L'écoulement laminaire se définit alors – par opposition – comme étant caractérisé par de faibles fluctuations de vitesse tant temporelles que spatiales.

L'étude expérimentale de la stabilité des écoulements fluides peut être datée de la fin du XIX^{ème} siècle avec les expériences de Reynolds sur les différents régimes d'écoulements dans les tuyaux. Reynolds, notant que la nature de l'écoulement dépend de la vitesse V du fluide, de sa viscosité ν , et du diamètre d du tuyau, introduit le nombre sans dimension Vd/ν – qui porte aujourd'hui son nom. Pour des valeurs proches d'une certaine valeur critique l'écoulement montre des « taches » turbulentes pour ensuite devenir pleinement turbulent à des valeurs supérieures de ce nombre. Les quantités telles que le nombre de Reynolds sont appelées *paramètres de contrôle* en ce sens qu'elle définissent de façon univoque le régime d'écoulement d'un système fluide.

Ce paramètre peut nous servir à donner une définition différente de la turbulence. En effet, si l'on reprend l'équation (2.4), et que l'on estime le terme non-linéaire et le terme de diffusion visqueuse à l'aide de la vitesse V et de la taille d caractéristiques de l'expérience, il s'en suit que :

$$\begin{aligned}(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} &\sim \frac{V^2}{d} \\ \nu \vec{\Delta} \vec{V} &\sim \frac{\nu V}{d^2}\end{aligned}\quad (2.6)$$

et par conséquent,

$$\frac{Vd}{\nu} \sim \frac{(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}}{\nu \vec{\Delta} \vec{V}}. \quad (2.7)$$

Ainsi, le nombre sans dimension de Reynolds apparaît comme une estimation du rapport des termes non-linéaires sur les termes de dissipation visqueuse. L'état turbulent peut alors être redéfini comme étant un état de l'écoulement dans lequel les termes non-linéaires des équations du mouvement sont prépondérants sur les termes de dissipation visqueuse. Les termes non-linéaires sont responsables des interactions amenant à la population du spectre spatial d'un écoulement. Deux modes spatiaux de nombre d'onde k_1 et k_2 interagissent pour former un mode $\|k_1 - k_2\|$ et un mode $\|k_1 + k_2\|$. Pour peu que le régime le permette – influence de la dissipation visqueuse sur les petites échelles, contraintes, comme la rotation, sur les grandes échelles – l'interaction des ces deux modes va peupler le spectre à des échelles spatiales à la fois plus grandes et plus petites. Ce développement du spectre va produire deux effets majeurs sur lesquels nous nous attarderons dans la section suivante : 1 - cascade de l'énergie vers l'échelle de dissipation visqueuse. 2 - modifications de l'écoulement moyen à grande échelle. En terme spatial, la turbulence développée se caractérise par un spectre large entre les plus grandes échelles et l'échelle de dissipation visqueuse (échelle de Kolmogorov).

Cependant, si l'on regarde par exemple l'écoulement de Taylor – première instabilité linéaire de l'écoulement de Couette –, la dominance des non-linéarités à grande échelle donne naissance à un motif toroïdal – les rouleaux de Taylor – laminaire (cf. Fig. 3.3). Ces rouleaux se déstabilisent lorsque le nombre de Reynolds augmente, et développent des modes spatiaux de plus en plus élevés, de comportement temporel de plus en plus complexe, conduisant progressivement à la turbulence pleinement développée. Dans d'autres cas, la transition peut être beaucoup plus « brutale », passant directement de l'écoulement laminaire à la turbulence. Dans le premier cas le chemin vers l'état turbulent se fait de façon continue, grâce à une succession de transitions vers des états étant chacun stable dans un domaine restreint de l'espace des paramètres de contrôle. Le spectre se « développe » de transition en transition et il est difficile de définir rigoureusement un « seuil de turbulence ».

Ces deux types de transition vers la turbulence sont caractéristiques des deux familles d'instabilités des écoulements fluides : les instabilités aux perturbations infinitésimales – ou instabilités « linéaires » – et les instabilités aux perturbations d'amplitude finie – dites également instabilités non-linéaires.

2.2.2 Stabilité

L'objectif de l'analyse de stabilité est de déterminer dans quel domaine de paramètres une solution particulière des équations de Navier-Stokes est effectivement observable. Un écoulement est dit stable si et seulement s'il est stable

vis à vis de toute perturbation. Certains écoulements sont instables vis à vis de perturbations infinitésimales. Dans la pratique, il existe toujours un « bruit de fond » et ce type de solution bifurque toujours vers un autre état. D'autres écoulements stables vis à vis de toute perturbation infinitésimale sont instables pourvu que l'amplitude de ces perturbations soit supérieure à un certain seuil. Dans ce cas, pour un même domaine de paramètres, il existe deux solutions différentes observables. Le « choix » fait par le système entre les deux états possibles sera alors conditionné par son histoire. Pour le premier type d'écoulement, on dira qu'il est instable aux perturbations infinitésimales ou encore linéairement instable. Pour le second type, on parlera d'instabilité aux amplitudes finies, ou bien d'instabilité non-linéaire.

Analyses Linéaires et Non-Linéaires

Connaissant un état stationnaire nous pouvons y superposer des perturbations et étudier leur évolution temporelle grâce aux équations du mouvement. Sachant que la stabilité s'entend pour toutes les perturbations possibles, l'analyse doit être faite sur une base complète de modes normaux. Par exemple, sur la base des modes de Fourier, on étudie la stabilité d'un mode arbitraire (k, σ) , k étant le nombre d'onde spatial de la perturbation, et σ son taux de croissance temporel. Si l'on suppose que l'amplitude ϵ de la perturbation est infinitésimale, on peut alors se contenter d'un développement au premier ordre et négliger les termes non-linéaires en ϵ . Les équations du mouvement fournissent alors une relation de dispersion entre k et σ permettant de déduire dans tous les régimes pour quels modes spatiaux il y aura croissance de la perturbation. L'hypothèse forte de l'analyse linéaire est donc que les perturbations doivent être d'amplitude infinitésimale.

Mais l'analyse linéaire ne suffit pas à décrire grand nombre d'instabilités observées en laboratoire ou dans la nature. Leur étude nécessite de prendre en compte les termes non-linéaires précédemment négligés. L'analyse devient beaucoup plus complexe et il n'existe pas aujourd'hui de théorie générale de la stabilité non-linéaire.

Transitions Sous-Critiques, Super-Critiques et Ecoulements Métastables

Ces deux types d'instabilités conduisent en pratique à des comportements différents lors de la transition vers la turbulence. On peut différencier grossièrement deux familles de transitions : les transitions *super-critiques* et les transitions *sous-critiques*.

La figure 2.1 présente le schéma de principe d'une transition supercritique. Elle représente la stabilité des solutions dans un diagramme amplitude - Re. L'axe $A = 0$ représente l'état de base – fluctuations nulles. En dessous d'une valeur critique du paramètre de contrôle Re_c , l'écoulement est *inconditionnellement stable* (stable vis-à-vis de toute perturbation). Au dessus de cette valeur, il est *inconditionnellement instable* (instable vis-à-vis de toute perturbation). Dans ce cas, l'analyse linéaire décrira correctement la stabilité.

Le principe d'une transition sous-critique est illustré sur la figure 2.2. Comme dans le cas d'une transition super-critique, il existe une valeur du paramètre de contrôle au dessus de laquelle l'écoulement de base est inconditionnellement in-

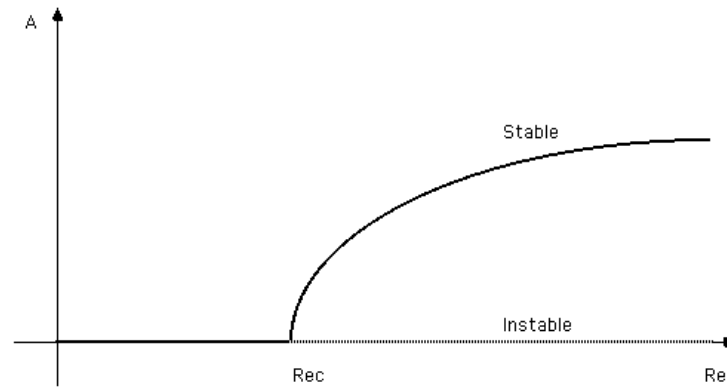


Fig. 2.1: Transition super-critique. Branches stables et instables dans un diagramme (A, Re) ; A est l'amplitude des fluctuations par rapport à l'état de base; Re est le paramètre de contrôle.

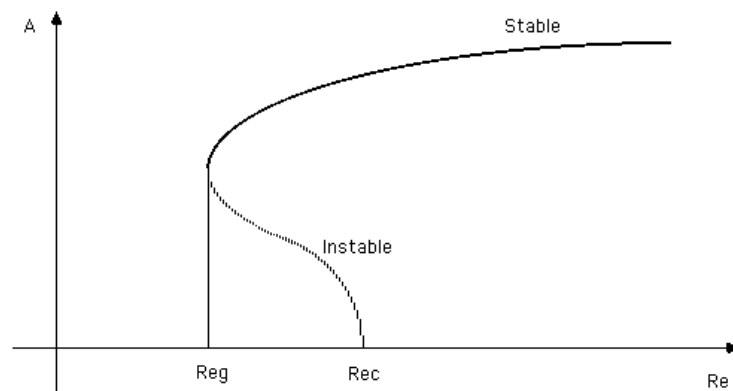


Fig. 2.2: Transition sous-critique.

stable. Cependant, en-dessous de cette valeur, il existe une plage de *stabilité conditionnelle* dans laquelle il peut être déstabilisé par des perturbations d'amplitude finie mais reste stable aux perturbations infinitésimales : l'écoulement est métastable. En dessous de la limite dite de stabilité conditionnelle – notée *Reg* Fig.2.2) – l'écoulement est inconditionnellement stable. Une analyse de stabilité linéaire ne sera capable que de prédire la limite d'instabilité inconditionnelle.

Enfin, la figure 2.3 s'attarde sur une transition *globalement sous-critique*. L'unique différence avec une transition sous-critique simple est l'absence de régime d'instabilité inconditionnelle. L'écoulement est métastable partout au dessus du seuil de stabilité conditionnelle. Dans ce dernier cas de figure, l'analyse linéaire prédira la valeur infinie du paramètre critique.

La stabilité non-linéaire introduit une nouvelle variable, l'amplitude de la perturbation. Alors que dans le cas d'une instabilité linéaire le seuil est défini seulement par le nombre de Reynolds (ou un autre paramètre de contrôle pertinent), le seuil d'une instabilité d'amplitude finie est donné par le couple amplitude-Reynolds. Plus précisément, pour toute valeur du Reynolds, il existe une amplitude critique en dessous de laquelle les perturbations seront amorties. Au dessus de cette amplitude critique, les perturbations seront amplifiées.

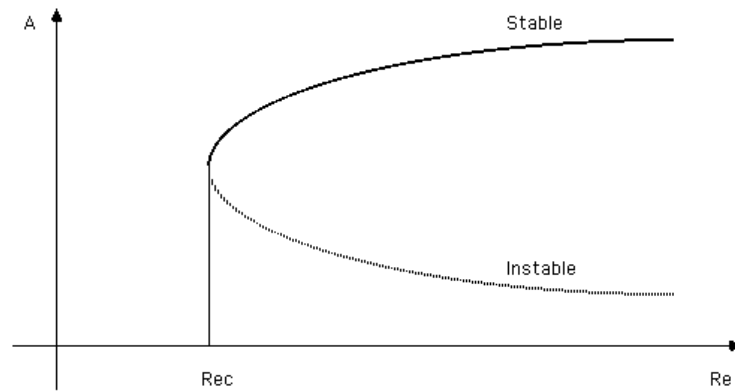


Fig. 2.3: Transition globalement sous-critique.

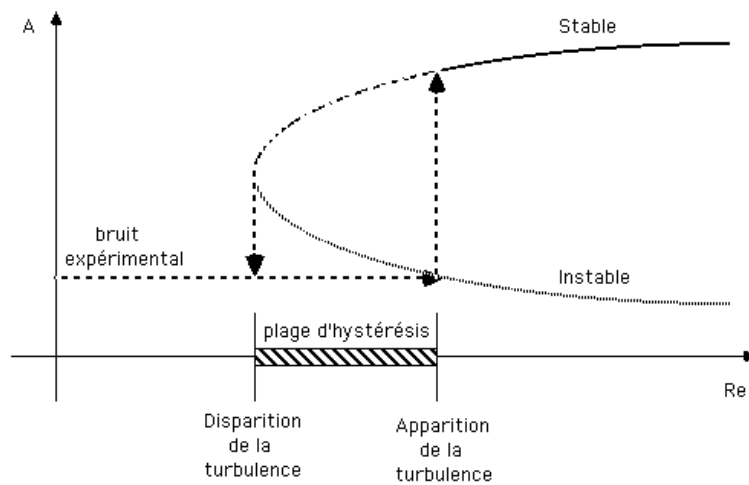


Fig. 2.4: Hystérésis dans une transition sous-critique

Lorsque les perturbations ne sont pas contrôlées, il faut s'en remettre aux fluctuations « naturelles » de l'écoulement – ou en laboratoire, au bruit expérimental – pour déclencher la transition. Suivant le niveau de fluctuations dans l'état de base, la turbulence apparaîtra pour des valeurs différentes du paramètre de contrôle (cf Fig.2.4). Cependant, si l'on suit un chemin provenant d'un état turbulent pour atteindre l'état laminaire, la turbulence disparaîtra à la limite de stabilité conditionnelle. Expérimentalement, ce phénomène d'hystérésis – existence de deux états possibles pour un même régime – est la signature des instabilités sous-critiques.

2.3 Les Effets de la Turbulence

Après avoir survolé quelques mécanismes et manifestations de la turbulence, nous nous intéressons maintenant aux propriétés dynamiques d'un écoulement turbulent, en particulier en comparaison avec son écoulement de base.

2.3.1 La Cascade Turbulente

Échelles Caractéristiques

La théorie de la turbulence développée – introduite par Kolmogorov en 1941 (REF) – définit deux échelles spatiales fondamentales ; l'échelle intégrale – ou d'injection L – est l'échelle à laquelle l'énergie est injectée dans l'écoulement ; l'échelle de Kolmogorov – ou de dissipation visqueuse, λ_k – est l'échelle à laquelle l'énergie est dissipée par frottement visqueux. Ce sont les bornes inférieures et supérieures de l'extension en nombres d'ondes du *domaine inertiel* du spectre de l'écoulement, L étant la plus grande et λ la plus petite échelle de cette plage.

L'hypothèse forte de la théorie de Kolmogorov est que, dans le domaine inertiel, le taux de transfert d'énergie cinétique des grandes échelles aux petites est indépendant du nombre d'onde. Il est défini comme :

$$\epsilon = \frac{v^3}{l}. \quad (2.8)$$

Or ce taux de transfert est imposé à l'échelle intégrale par le taux d'*injection* d'énergie cinétique. Comme il est indépendant d'échelle, il est donc aussi égal au taux de dissipation visqueuse à l'échelle de Kolmogorov :

$$\epsilon = \frac{U^3}{L} = \frac{v_k^3}{\lambda_k} = cste \quad (2.9)$$

où U^3 et v_k^3 sont les vitesses caractéristiques aux échelles intégrales et de Kolmogorov respectivement. On définit un nombre Reynolds localement dans le spectre de l'écoulement à toute échelle, tel que $Re_i = v_i/\nu k_i = v_i.l_i/\nu$ pour le mode k_i . L'échelle de Kolmogorov étant celle à partir de laquelle les termes visqueux dominent la dynamique, il s'en suit que :

$$Re_k = \frac{v_k \lambda_k}{\nu} = 1. \quad (2.10)$$

Le nombre de Reynolds global de l'écoulement est quant à lui défini par l'échelle intégrale :

$$Re = \frac{UL}{\nu}. \quad (2.11)$$

Nous pouvons maintenant estimer le rapport des deux échelles fondamentales. En utilisant les équations (2.9),(2.10) et(2.11) il vient :

$$\frac{L}{\lambda_k} = Re^{3/4}. \quad (2.12)$$

Cette relation exprime que plus le nombre de Reynolds est grand, plus l'échelle de dissipation est petite, et plus le spectre de la turbulence sera étendu. La densité spectrale d'énergie dans le cas de la turbulence homogène isotrope tri-dimensionnelle est, à partir de la relation (2.8),

$$E(k) = C_k \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.13)$$

où C_k est la constante universelle de Kolmogorov. La conséquence immédiate est que, pour un mode k donné, la densité d'énergie est fixée par le taux d'injection ϵ . Intuitivement, pour que la turbulence se développe il faut que l'injection à grandes échelles soit suffisante pour que le taux d'énergie cascade vers les petites échelles domine le taux de dissipation visqueuse.

Il est intéressant de noter que le raisonnement conduisant à cette cascade est valable pour tout écoulement. Il serait naïf de penser qu'elle n'est présente que dans les écoulements turbulents. Un écoulement laminaire possède bien sûr des fluctuations autour de sa vitesse moyenne, et ces fluctuations obéissent aux équations du mouvement. La différence essentielle est que pour un écoulement laminaire, l'énergie cinétique des modes introduits soit par un forçage extérieur soit créés par les termes non-linéaires est dissipée trop vite pour permettre le développement du régime inertiel définie par l'équation (2.13) pour la turbulence homogène isotrope.

2.3.2 Ecoulement Moyen

Quand le petit mange le plus grand

La cascade turbulente prend l'énergie à grande échelle pour nourrir les plus petites jusqu'à l'échelle de dissipation. L'effet résultant est la modification de l'écoulement moyen. Une règle générale est que la turbulence agit de manière à réduire la cause de l'instabilité. Dans les écoulements cisailés, la turbulence réduit les gradients de vitesse ; dans le cas de l'instabilité centrifuge dans le Couette-Taylor, elle annule le gradient de moment cinétique (cf Fig.2.5). Le système tend à minimiser son énergie totale en la prenant là où elle est disponible pour aller la dissiper.

Dans le cas de l'instabilité centrifuge, le système possède une solution simple qui consiste à advecter le moment cinétique pour annihiler le gradient énergétiquement instable. Le moment cinétique étant la quantité conservée par advection axisymétrique, l'écoulement développe l'instabilité des rouleaux de Taylor dès que le nombre de Reynolds est suffisant pour permettre aux grandes échelles de survivre. Or pour les petits modes, il suffit de Reynolds modérés (cf. Eq. (2.12)) ce qui explique intuitivement que l'instabilité naisse à bas nombre de Reynolds.

Les couches limites : l'œuf ou la poule ?

Etant donnée la dissipation de l'énergie cinétique en chaleur par la viscosité, il n'existe pas d'écoulement stationnaire – turbulent ou non – qui ne soit pas forcé d'une manière ou d'un autre. Au laboratoire le forçage prend la forme d'un gradient de pression ou bien d'une vitesse imposée aux bords. Dans des situations « naturelles » il peut s'agir de gradients de température – atmosphère terrestre, intérieurs stellaires – ou encore du champ gravitationnel – rivières, disques d'accrétion.

Dans un écoulement confiné où la valeur de la vitesse est fixée aux parois, le profil turbulent doit se raccorder aux

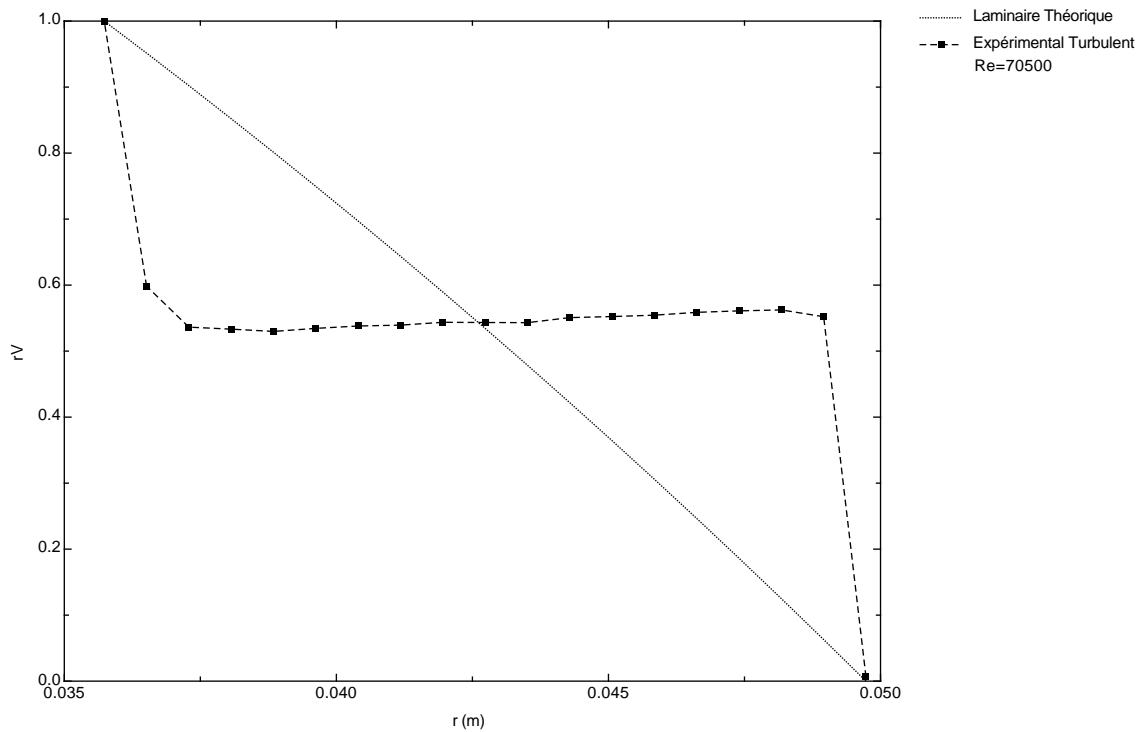


Fig. 2.5: Profil turbulent de moment cinétique en fonction du rayon dans le cas de l'instabilité centrifuge dans l'expérience de Couette-Taylor. Pointillé : profil laminaire théorique ; Cercles : mesures expérimentales.

conditions limites imposées. Il se développe alors des *couches limites* qui assurent la transition entre le profil altéré par la turbulence au centre de l'écoulement et la couche visqueuse proche des parois. Au sein de ces couches limites, le fluide est généralement soumis à de forts gradients de vitesse et de la turbulence de cisaillement se développe. On parle alors de couches limites turbulentes.

On peut distinguer deux types de couches limites turbulentes. Les premières sont celles évoquées ci-dessus, qui se développent parce que le cœur de l'écoulement est turbulent. Le second type de couche limite se rencontre par exemple dans l'écoulement d'un fluide au dessus d'une paroi fixe. Dans ce cas, la couche limite se crée au voisinage de la surface immobile, se déstabilise et rend le reste de l'écoulement turbulent. Dans le premier cas, la couche limite est la conséquence de l'instabilité du cœur de l'écoulement, dans le second elle est la cause de la turbulence.

2.3.3 Diffusion Turbulente

Hormis l'étude de la stabilité, le problème du physicien est de décrire les propriétés de transport dans un écoulement turbulent. Les structures à petite échelle – tout comme l'écoulement moyen – advectent les quantités vectorielles comme la quantité de mouvement ou le moment angulaire ainsi que les scalaires tels que des colorants, des réactifs chimiques ou encore la chaleur. La turbulence agit ainsi sur l'évolution dynamique et chimique des systèmes fluides.

Le problème posé est de décrire l'advection par un champ de vitesse complexe dont on ne connaît pas d'expression analytique. Pour cela, on utilise des modélisations du transport turbulent qui font appel aux propriétés statistiques

de l'écoulement. On le sépare en deux composantes, l'écoulement moyen auquel se superposent des fluctuations turbulentes. Les moyennes des quantités linéaires en fluctuations étant nulles, les équations du mouvement résultantes de cette décomposition sont identiques aux équations de Navier-Stokes pour le champ moyen auxquelles s'ajoute une contribution supplémentaire que l'on inclut dans le tenseur des contraintes. Il s'écrit alors pour un écoulement incompressible :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu(\partial_j V_i + \partial_i V_j) - \rho \overline{u'_i u'_j} \quad (2.14)$$

où $\overline{u'_i u'_j}$ sont les produits de corrélation d'ordre deux des fluctuations et sont les composantes du *tenseur de Reynolds*. Cette description permet de ne considérer que l'écoulement moyen et de décrire son évolution pour peu que l'on connaisse les propriétés statistiques du champ turbulent. La modélisation du produit de corrélation $\overline{u'_i u'_j}$ est connue sous le nom du *problème de fermeture* des équations de la turbulence. Une modélisation classique consiste à approximer le tenseur de Reynolds par une *viscosité turbulente*, telle que

$$\mu_t = \rho \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\partial_j V_i + \partial_i V_j} \quad (2.15)$$

le tenseur des contraintes s'écrivant alors :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + (\mu + \mu_t)(\partial_j V_i + \partial_i V_j). \quad (2.16)$$

Dans les modèles les plus simples, la viscosité est estimée à l'aide d'un raisonnement type longueur de mélange :

$$\mu_t = \rho v_t l_t \quad (2.17)$$

où v_t est une vitesse caractéristique des fluctuations turbulentes et l_t est une longueur « effective » de diffusion généralement associée à la taille des plus grandes structures participant au transport turbulent. Ces deux grandeurs sont les analogues de la vitesse d'agitation et du libre parcours moyen de la théorie cinétique des gaz. Tout comme la viscosité moléculaire perd son sens lorsque l'on regarde le mouvement à l'échelle microscopique, il en est de même pour la viscosité turbulente. Les échelles turbulentes qu'elle modélise doivent être petites devant l'extension spatiale de l'écoulement moyen. Si cette condition n'est pas remplie, l'approximation diffusive n'est plus valable et la description dynamique doit se faire en terme d'advection. On notera que puisqu'elle dépend explicitement du champs de vitesse, μ_t est une fonction des coordonnées spatiales.

2.4 Instabilités de Cisaillement

Les écoulements cisailés ont été et sont toujours l'objet d'études intensives, la raison principale étant qu'ils sont analytiquement simples mais que leur propriétés sont non-triviales. Il s'agit généralement d'écoulements en couche dont le profil ne dépend que d'une coordonnée spatiale. Bien que les termes non-linéaires d'advection soient nuls, l'existence

de gradients de vitesse due au cisaillement permet de coupler efficacement l'écoulement de base aux fluctuations des champs, et donc le développement de la turbulence.

2.4.1 Instabilités Linéaires

Certains écoulements cisailés subissent à des instabilités aux perturbations infinitésimales. Le **théorème du point d'inflexion** de Rayleigh (1880) fournit un critère général d'instabilité linéaire :

Pour un écoulement non-visqueux, une condition suffisante d'instabilité est l'existence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse de base.

Pour les écoulements en rotation, Rayleigh encore dérive en 1916 le **critère sur la circulation** qui porte son nom :

Pour un écoulement non-visqueux en rotation une condition suffisante d'instabilité est la décroissance de la circulation : $\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr}(r^2\Omega)^2 > 0$ en un point quelconque.

Les écoulements qui violent cette condition sont soumis à une instabilité dite *centrifuge*. Ce critère a l'élégance de pouvoir être montré par des arguments physiques simples. Considérons le cas d'un écoulement cylindrique non-visqueux axisymétrique ($u = (u_r, u_\theta = \Omega r, u_z)$). Les équations du mouvement se réduisent à :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{\partial}{\partial r}(P/\rho) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}(P/\rho) \quad (2.20)$$

L'équation (2.19) peut être écrite,

$$\frac{d}{dt}(r u_\theta) = \frac{d}{dt}(r^2 \Omega) \equiv \frac{d}{dt} L = 0 \quad (2.21)$$

et exprime la conservation lagrangienne du moment cinétique azimutal. Les équation (2.18) et (2.20) montrent que, pour les mouvements radiaux et axiaux, la composante azimutale n'est présente que sous la forme d'une accélération centrifuge que l'on peut formellement interpréter comme une force radiale extérieure $\frac{u_\theta^2}{r} = L^2/r^3$. Etant donné que L est une constante du mouvement, on peut associer à cette force une énergie potentielle définie par unité de masse comme $E_{pc} = L^2/2r^2$. Imaginons maintenant deux anneaux fluides de même masse, initialement situés en r_1 et r_2 ($r_2 > r_1$) et possédant les moments cinétiques L_1 et L_2 . Si l'on échange leurs positions, la variation de l'énergie potentielle est alors :

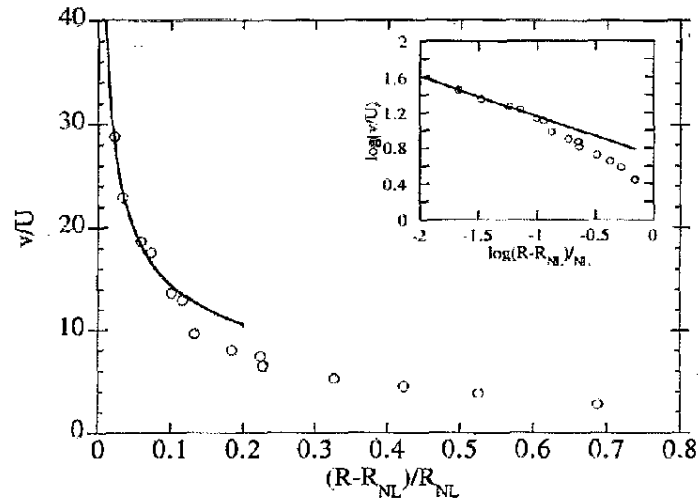


Fig. 2.6: Amplitude critique de perturbation en fonction de l'écart au seuil de stabilité inconditionnelle dans une expérience de Couette plan. (Dauchot & Daviaud 1994)

$$\Delta E_{pc} = (L_2^2/r_1^2 + L_1^2/r_2^2) - (L_1^2/r_1^2 + L_2^2/r_2^2) = (L_2^2 - L_1^2) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right). \quad (2.22)$$

La variation d'énergie lors d'un tel échange est donc négative (instabilité) si $L_2 < L_1$ et positive si $L_2 > L_1$. Pour la stabilité globale de l'écoulement, cette variation doit être positive partout dans l'écoulement. On retrouve ainsi le critère de stabilité de Rayleigh : la distribution du moment cinétique $L = \Omega r^2$ doit être monotone croissante. L'effet de la viscosité est de stabiliser l'écoulement, de sorte qu'il faille atteindre une valeur seuil du gradient de moment cinétique non-infinitésimale pour déclencher l'instabilité.

2.4.2 Instabilités Non-Linéaires

L'expérience de Couette est un fluide cisailé entre deux plaques parallèles en mouvement. L'écoulement de base a un profil de vitesse linéaire $V_x(y)$ si x est la direction parallèle aux plaques et y la direction perpendiculaire (cf. Fig.3.1). L'analyse linéaire montre que cet écoulement est stable aux perturbations infinitésimales. Cependant, en laboratoire, il devient turbulent spontanément pour des nombres de Reynolds ($Re = V \Delta y / \nu$) de l'ordre de 2000 (Le Reynolds pour cette expérience est souvent défini par la demi-vitesse de cisaillement et la demi-distance entre les plaques, et prends donc une valeur critique de l'ordre de 500.). Le travail expérimental de Dauchot & Daviaud (1994) met en évidence le caractère non-linéaire de cette instabilité en étudiant son déclenchement grâce à des perturbations contrôlées d'amplitude finie. La figure 2.6 montre la dépendance de l'amplitude critique en fonction du nombre de Reynolds.

L'écoulement développe près du seuil de stabilité inconditionnelle des « tâches » turbulentes dont la structure a fait l'objet d'une étude détaillée par S.Bottin (1998).

2.5 Conséquences en Astrophysique

Les écoulements astrophysiques en rotation différentielle tels que les disques d'accrétion ou les intérieurs stellaires sont stable vis-à-vis du critère de Rayleigh sur la circulation. Les instabilités centrifuges ne sont donc pas pertinentes pour ces systèmes. Ils sont également stables du point de vue du théorème du point d'inflexion. Il faut se tourner vers l'étude des instabilités non-linéaires, ou bien inclure d'autres ingrédients tels le champ magnétique (Chandrasekhar 1960; Balbus & Hawley 1991) ou encore la stratification en densité qui sont susceptibles de rendre linéairement instables des écoulements « Rayleigh-stable ».

Deuxième partie

**Instabilités aux Amplitudes Finies dans
le Couette-Taylor**

État des Lieux et Exploitation des Expériences Antérieures

« Its seems doubtful whether we can expect to understand fully the instability of fluid flow without obtaining a mathematical representation of the motion of a fluid in some particular case in which instability can actually be observed, so that a detailed comparison can be made between the results of analysis and those of experiment. »G.I.Taylor (1923)

Dans le chapitre précédent nous avons vu dans les grandes lignes les mécanismes de base qui conduisent d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent. Si ces mécanismes sont de mieux en mieux compris, il manque toujours une théorie analytique capable de fournir les domaines de stabilité et les propriétés statistiques de tout écoulement turbulent.

Les modèles numériques sont donc une aide précieuse pour l'exploration des comportements de la turbulence. Cependant, elles ont également leurs limitations. Deux grands types de modèles existent : les simulations « directes »(DNS) et les simulations « grandes échelles »(LES). Les premières simulent les équations de la dynamique des fluides sans approximation, des plus grandes échelles jusqu'à l'échelle de dissipation visqueuse. Les simulations directes sont très coûteuses en terme de ressources informatiques, tant en terme d'espace mémoire qu'en temps de calcul. Étant données les caractéristiques techniques des ordinateurs disponibles à ce jour, elles sont limitées à des nombres de Reynolds de l'ordre de 5000 à 10000 (pour une simulation 1000^3). Les secondes ne calculent que les plus grandes échelles spatiales de l'écoulement à l'aide d'une modélisation de l'impact des structures « sous-maille ». Ces simulations LES nécessitent l'ajustement de paramètres libres qui sont susceptibles de polluer les résultats.

L'étude des écoulements turbulents reste donc encore le domaine privilégié des expériences de laboratoire dans lesquelles on peut atteindre des nombres de Reynolds supérieurs à ceux des simulations numériques par de nombreux ordres de grandeur.

Dans ce chapitre nous nous attacherons à décrire les travaux de laboratoire antérieurs et à en extraire les informations concernant la stabilité des écoulements en rotation différentielle ainsi que les propriétés de transport de la turbulence.

3.1 L'écoulement de Couette-Taylor

L'écoulement de Couette-Taylor est un écoulement azimutal axisymétrique et cisailé. C'est le prototype de laboratoire pour l'étude de la rotation différentielle. Il a fait l'objet d'études intensives, mais essentiellement dans les régimes de rotation instables du point de vue du critère de Rayleigh sur la circulation. Quelques résultats d'expériences dans

les régimes linéairement stables ont été publiées. Les deux références les plus complètes demeurent Taylor (1936) et Wendt (1933).

3.1.1 L'expérience

L'écoulement de Couette-Taylor est la version cylindrique de l'écoulement plan cisailé de Couette – fluide entre deux plaques en mouvement (Fig.3.1). L'appareil expérimental se compose de deux cylindres coaxiaux mobiles, le fluide étant contenu dans l'intervalle qui les sépare. On définit R_i et R_o les rayons respectifs des cylindres interne et externe, Ω_i et Ω_o leur vitesse angulaire. On notera d l'intervalle $R_o - R_i$ et h leur hauteur – généralement $h \gg d$. La figure 3.2 est un schéma de ce protocole expérimental.

Le profil de rotation de base dans une expérience du type Couette-Taylor se dérive en cherchant une solution azimutale et axisymétrique ($V = (0, V_\theta = r.\Omega(r), 0)$) des équations de Navier-Stokes, qui dans ce cas se réduisent simplement à :

$$\begin{aligned} \frac{V_\theta^2}{r} &= -\partial_r P \\ \frac{\nu}{r} \partial_r (r \partial_r V_\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

ce qui conduit à des solutions de la forme générale :

$$\frac{V_\theta}{r} = \Omega(r) = A + B/r^2 \quad (3.2)$$

où A et B sont dictés par les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} \Omega(R_i) &= \Omega_i \\ \Omega(R_o) &= \Omega_o \end{aligned}$$

Soit,

$$\begin{aligned} A &= -\left(\frac{1-\mu/\eta^2}{1-\eta^2}\right)\Omega_i\eta^2 \\ B &= \left(\frac{1-\mu}{1-\eta^2}\right)\Omega_i R_i^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $\mu = \Omega_i/\Omega_o$ est la rapport des vitesses angulaires et $\eta = R_i/R_o$ est le rapport d'aspect radial.

Dans le chapitre précédent nous avons vu qu'une condition nécessaire pour la stabilité linéaire d'un fluide en rotation est donnée par la condition :

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^2 \Omega)^2 > 0 \quad (3.4)$$

partout dans l'écoulement. Dans le cas des profils donnés par (3.2) et (3.3) ce critère se réduit à :

$$\Omega_o R_o^2 > \Omega_i R_i^2 \quad (3.5)$$

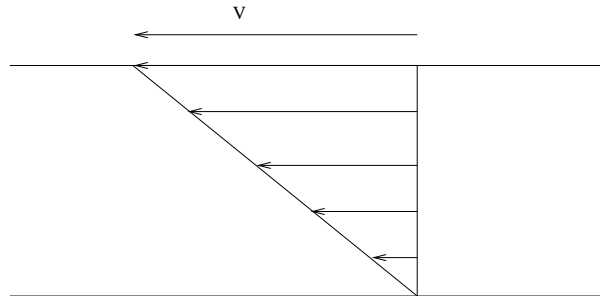


Fig. 3.1: Expérience de Couette plan : le fluide est cisailé entre deux plaques de vitesse différentielle V . Le profil de vitesse laminaire de l'écoulement résultant est linéaire.

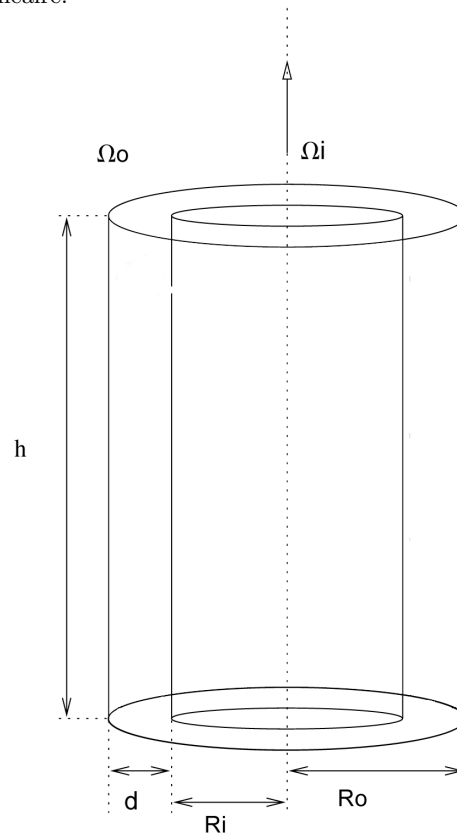


Fig. 3.2: Expérience de Couette-Taylor : le fluide est cisailé entre deux cylindres coaxiaux. Le profil de rotation laminaire de l'écoulement est de la forme $V = V_\theta(r) = A.r + B/r$.

Une analyse de stabilité linéaire permet de calculer le nombre de Reynolds critique ($Re = \Omega_i R_i d / \nu$) pour un fluide visqueux lorsque le rapport des rayons est proche de 1 ($d \ll R$) :

$$Re_c = 41,2 \sqrt{R/d} \quad (3.6)$$

lorsque le cylindre extérieur est au repos ($\Omega_o = 0$). l'instabilité centrifuge est caractérisée par l'apparition de rouleaux axisymétriques – dits *rouleaux de Taylor* – dont l'extension radiale est égale à l'écartement des cylindres d . Ces structures sont semblables à celles qui apparaissent dans le cas de la convection thermique. Il existe une analogie formelle entre ces deux instabilités, dans laquelle la force centrifuge du système en rotation est l'équivalent de la force d'Archimède dans un fluide stratifié en densité.

Lorsque le nombre de Reynolds augmente, l'écoulement subit une série de transitions au cours desquelles les modes non-axisymétriques se développent jusqu'à ce qu'il devienne totalement turbulent. C'est sur cette suite d'instabilités que s'est focalisé l'essentiel des expériences de laboratoire, puisqu'elle conduit progressivement par étapes identifiables d'un écoulement simple et ordonné à un écoulement chaotique.

3.1.2 Travaux Antérieurs

Le Couette-Taylor tient une place importante dans l'histoire de la dynamique des fluides. C'est en effet le premier cas d'écoulement pour lequel l'analyse de stabilité fut confirmée par l'expérience de laboratoire (Taylor 1923). L'article de revue de Tagg (1994) est l'une des références les plus exhaustives concernant l'historique et les avancées de la recherche sur ce sujet. Depuis l'époque des travaux fondateurs de Taylor, plus de 2000 publications scientifiques sont parues concernant le Couette-Taylor. On notera également l'existence d'un colloque bi-annuel entièrement consacré à cette expérience – « Couette-Taylor Workshop » – dont la 12ème édition s'est tenue cette année à Chicago.

En raison de la richesse et de la complexité de leurs structures, la très grande majorité de ces articles se concentre sur la description des différentes bifurcations qui suivent la première instabilité, dans les régimes linéairement instables (Fig. 3.4). L'étude expérimentale de Coles – maintenant classique – explore une large gamme de régimes de rotation dans le plan (Ω_i, Ω_o) . La publication centrale de ce travail (Coles, 1965) qui consiste essentiellement en une description des nombreux écoulements observables dans le système, est extrêmement riche en photographies. Pour une exploration semblable, on pourra également se reporter à Boubnov et al. (1995). De la même façon, les simulations numériques, pour lesquelles on se reportera à Marcus (1984), Hua et al. (1997), ou encore Fazel et al. (1984), ne s'écartent pas du domaine Rayleigh-instable. La structure de la première instabilité est étudiée dans Barcion et al. (1979) et Barcion et al. (1984). Pour les analyses de stabilité, on consultera Riley (1976, 1977), Esser et al. (1996), ou bien Johnson (1963). Il existe également de nombreuses références traitant du cas où les cylindres sont en contre-rotation comme Andereck et al. (1986), ou Wang et al. (1970) qui contient de nombreuses mesures expérimentales. On notera également les travaux de Lathrop et al. (1992), qui se sont penchés sur le comportement des propriétés de transport du cas linéairement instable à haut Reynolds et ont montré une transition vers un régime caractéristique des instabilités de cisaillement. D'autres études concernent des écoulements de Couette modifiés, soit par l'utilisation de fluides « exotiques » – par exemple viscoélastiques – ou plus directement en imposant un gradient de température, un écoulement axial, ou bien encore des oscillations harmoniques des cylindres le long de leur axe.

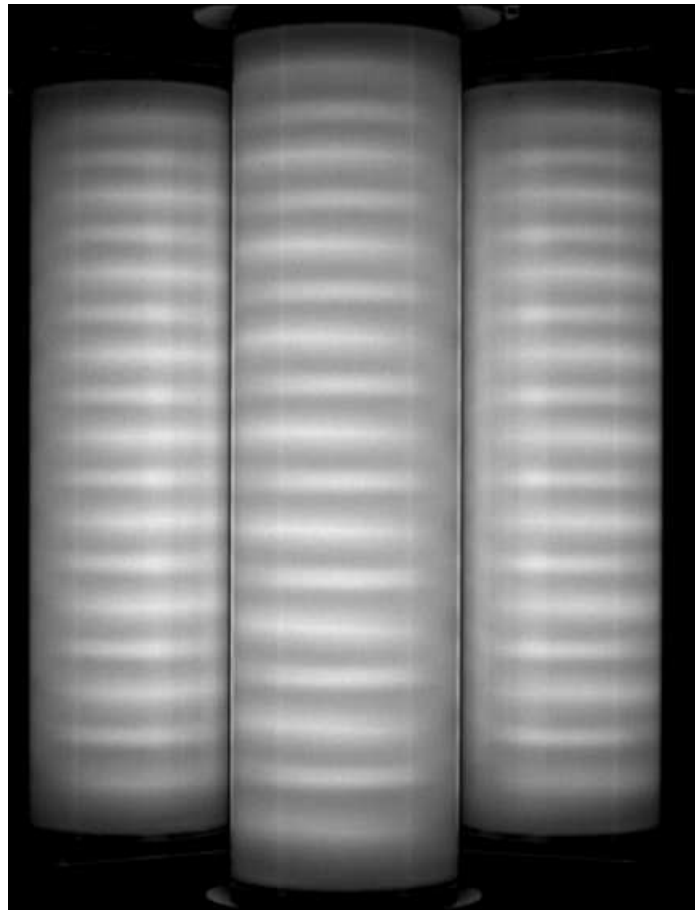


Fig. 3.3: Instabilité centrifuge : Rouleaux de Taylor. Les zones les plus sombres correspondent à des parties de l'écoulement dans lesquelles la composante radiale de la vitesse est nulle ; les plus claires indiquent les endroits où les mouvements radiaux sont les plus intenses. Sur cette image, la totalité de la circonférence de l'expérience est visible grâce à un jeu de miroirs (Image : Arnaud Prigent.)

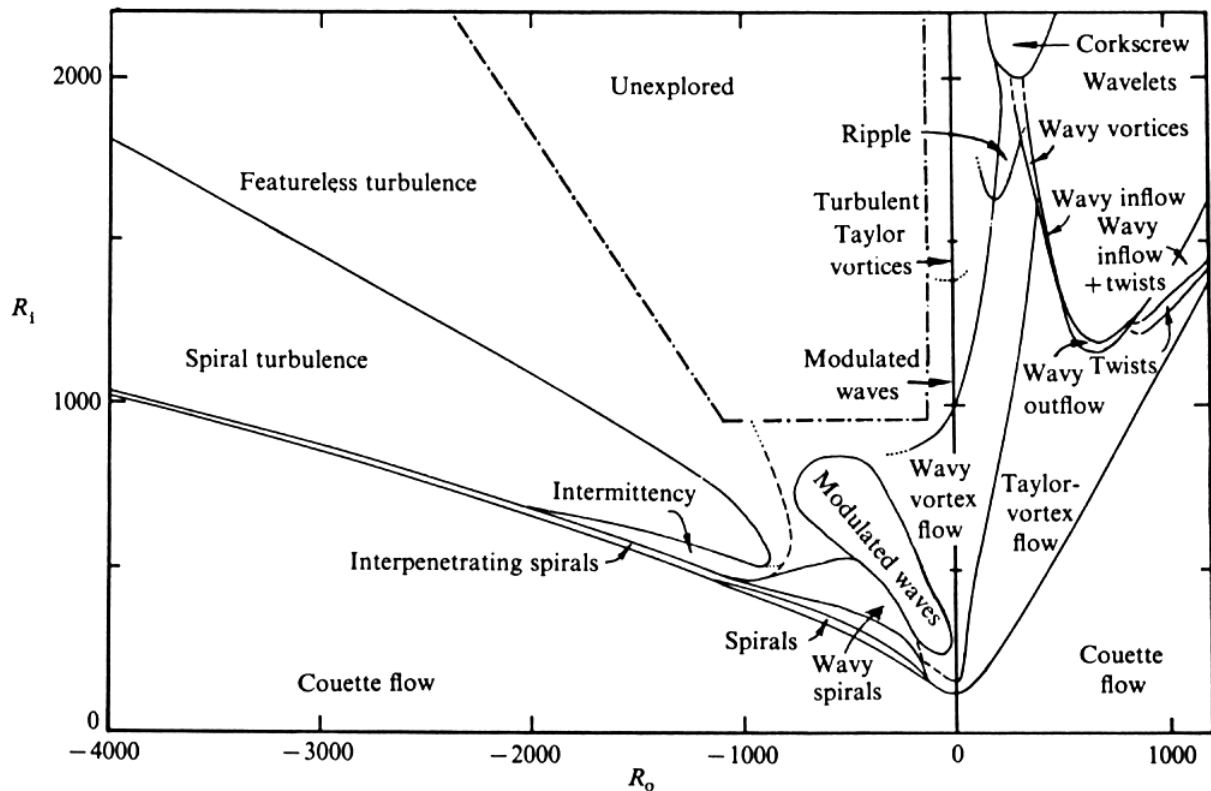


Fig. 3.4: Écoulements observables dans une expérience de Couette-Taylor (Andereck et al. 1986), dans un diagramme $Ri, o = \Omega_{i,o} R_{i,o}^2 / \nu$

Si les domaines linéairement instables ont fait l'objet d'études intensives, il n'en va pas de même pour les autres régimes de rotation. La majorité des travaux sur les instabilités aux amplitudes finies se sont portées sur les écoulements de type Poiseuille ou Couette plan, le premier possédant un régime de transition sous-critique, et le second étant linéairement stable quel que soit le nombre de Reynolds. Pourtant, parmi les mesures expérimentales de Taylor (1933 et 1936) et de Wendt (1936), des instabilités non-linéaires étaient déjà clairement identifiés. Mais depuis cette époque, aucune expérience ne s'est intéressée à ce problème.

3.2 Les Pionniers : F.Wendt & G.I.Taylor

Sans doute car elles se situent historiquement aux débuts de l'exploration expérimentale du Couette-Taylor, les deux références citées ci-dessus contiennent des informations sur une gamme de régimes de rotation bien plus large que la majorité des travaux plus récents.

Les travaux fondateurs de Taylor contiennent de précieuses mesures dans une grande gamme de rapports d'aspect R_i/R_o . Dans sa publications de 1936, il utilise onze différentes tailles pour le cylindre intérieur et se focalise sur la mesure du couple exercé par le fluide (Fig. 3.5). Cependant, la technique utilisée ne permet l'accès à cette quantité qu'avec un seul des cylindres en rotation. En effet, le couple est mesuré grâce à un système de contre-poids qui maintient le second cylindre au repos.

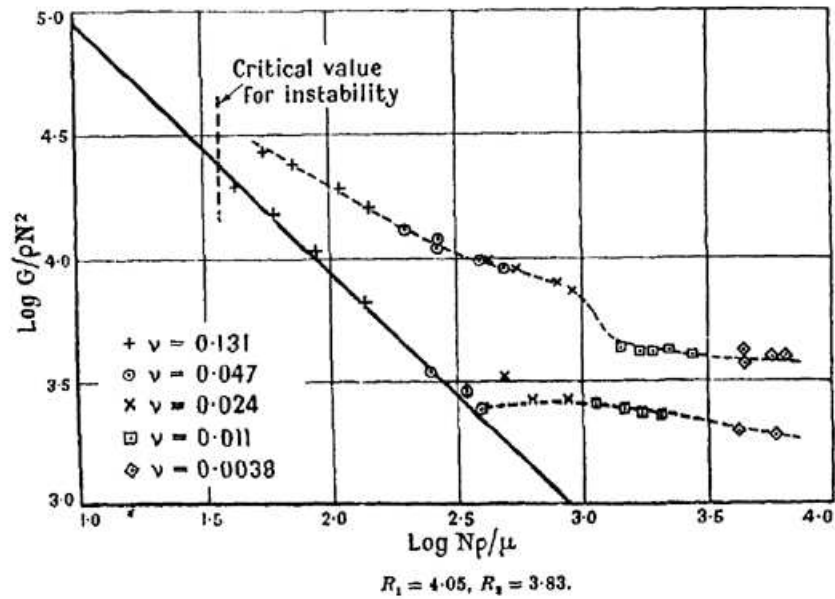
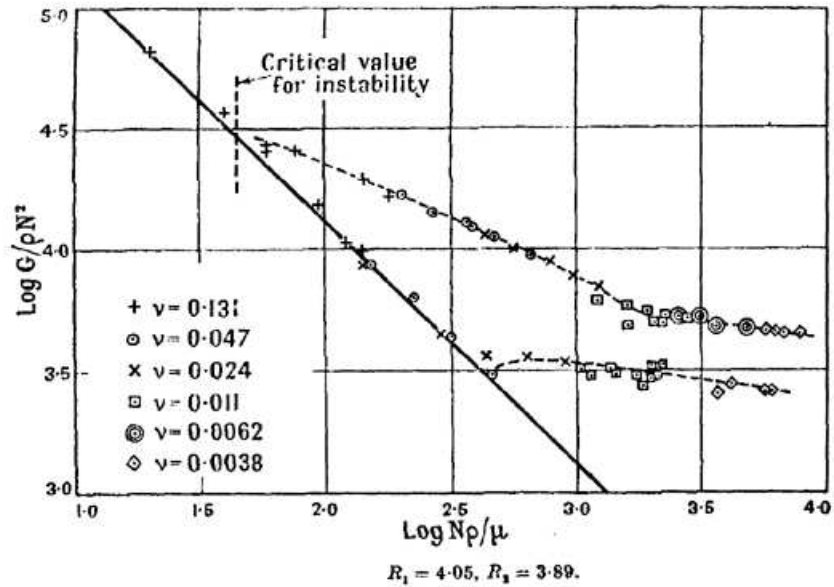


Fig. 3.5: Couple appliqué au cylindre au repos, normalisé par la densité du fluide et la fréquence de rotation, en fonction du nombre de Reynolds, pour deux valeurs du rayon du cylindre intérieur ; en haut, $R_i = 3,89cm$ et en bas $R_i = 3,83cm$ ($R_o = 4,05cm$) d'après Taylor (1936). Ligne continue : valeur du couple théorique pour un écoulement de Couette azimutal. Points : mesures avec différents fluides de viscosités variables. Les mesures supérieures sont faites avec cylindre extérieur au repos, celles inférieures avec cylindre intérieur au repos.

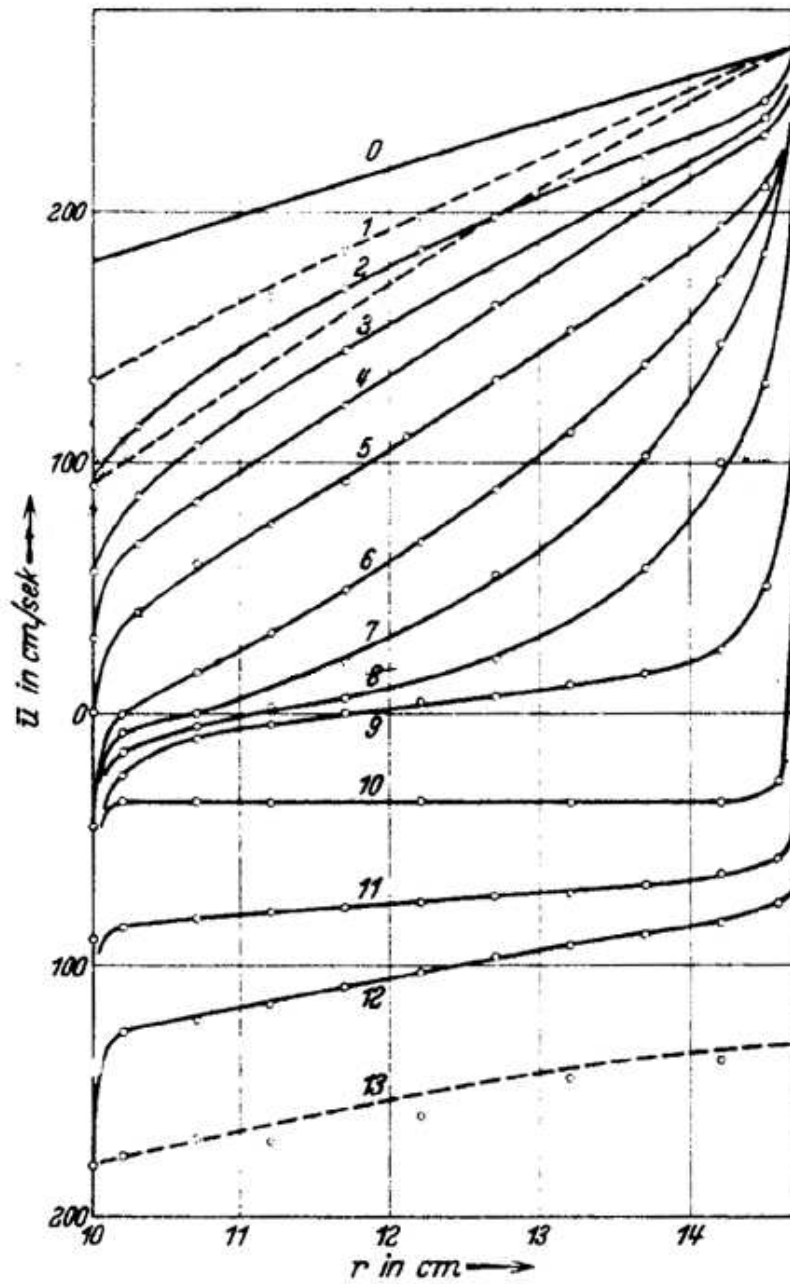


Fig. 3.6: Profils de vitesse azimutale entre les deux cylindres en fonction du rayon publiés par Wendt (1933). L'axe des ordonnées de gauche indique la vitesse linéaire du cylindre intérieur ; l'axe de droite celle du cylindre extérieur. Courbes pointillées : profils théoriques laminaires. Les points représentent les valeurs mesurées. Les lignes continues servent à guider l'œil. Pour cette expérience, $R_i = 10\text{cm}$ et $R_o = 14,6\text{cm}$.

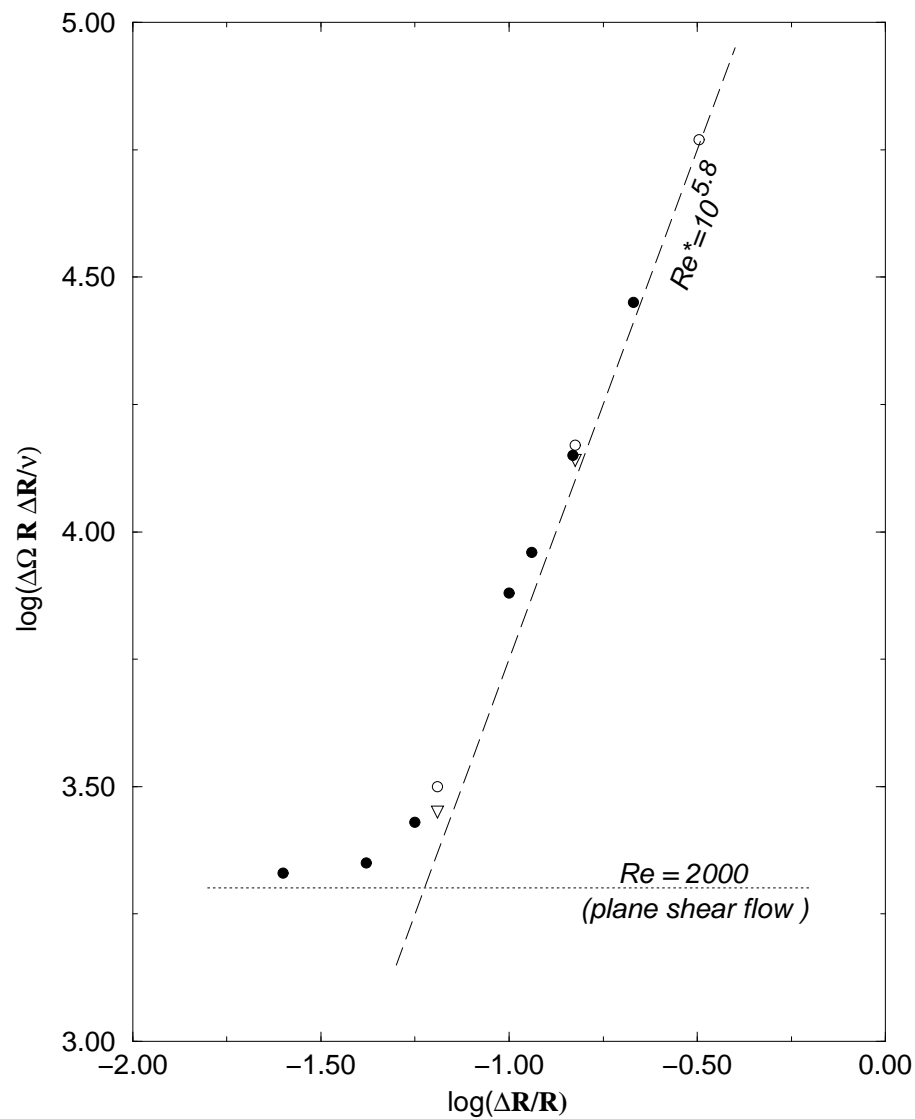


Fig. 3.7: Nombre de Reynolds critique en fonction du rapport d'aspect $\Delta R/R$; cercles pleins d'après les mesures de Taylor (1936), cercles blanc d'après les mesures de Wendt (1933). Ligne pointillée : Reynolds critique d'un écoulement de Couette plan. ; ligne discontinue : Reynolds de cisaillement critique dans la limite grand écartement des cylindres.

La publication de Wendt (1933) est complémentaire de celle de Taylor. S'il n'utilise « que » 3 rapports d'aspect, Wendt mesure, en plus des couples, les profils de rotation (Fig. 3.6) grâce à une ingénieuse technique de mesure de l'élévation du ménisque de la surface – laissée libre – du fluide. Il explore également des régimes où les deux cylindres sont en mouvement.

3.3 Seuils d'Instabilité

La comparaison des couples mesurés au couple théorique prédit pour un écoulement de Couette azimutal permet de discerner les seuils d'instabilités, comme illustré par la figure 3.5. On y identifie clairement le régime pour lequel la mesure s'écarte sensiblement de la valeur prédite. Il apparaît clairement que dans le cas linéairement stable (cylindre

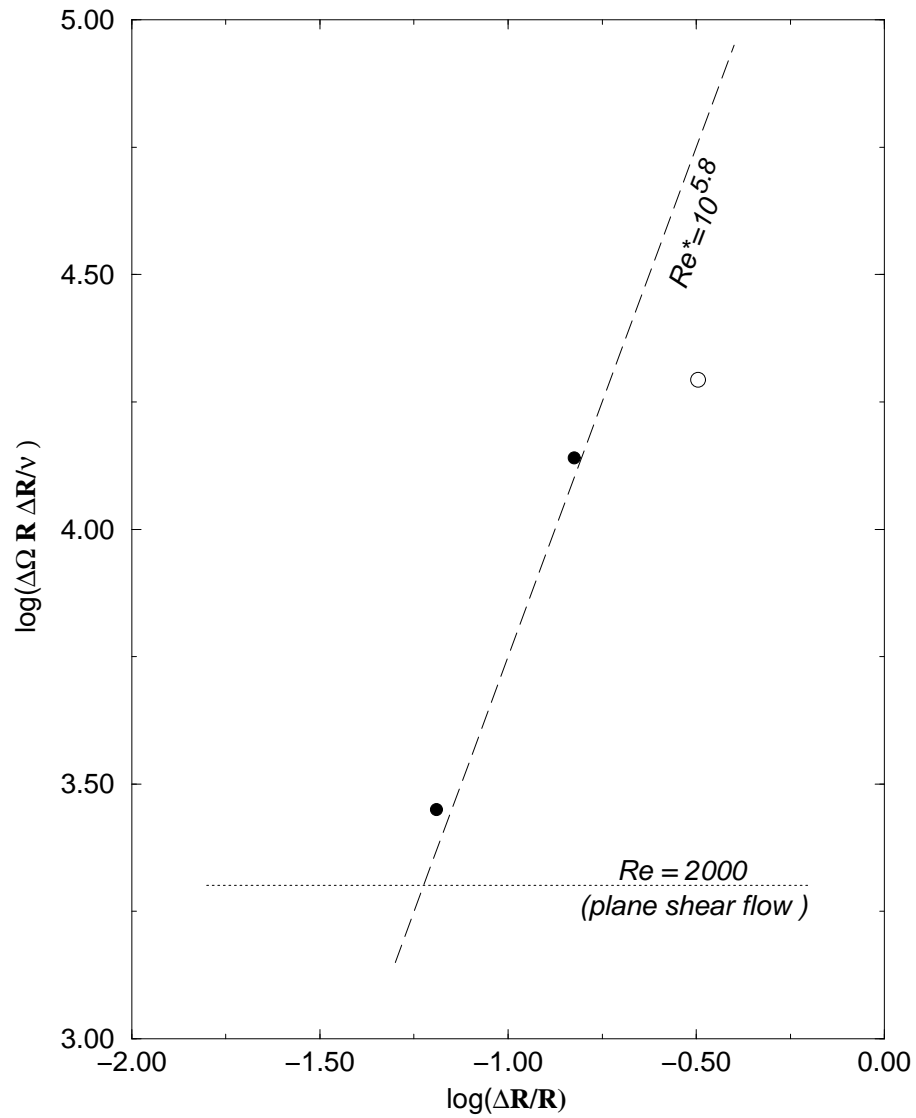


Fig. 3.8: Nombre de Reynolds critique en fonction du rapport d'aspect $\Delta R/R$ pour les trois mesures d'écoulements « neutre » tirées de Wendt. Les points noirs correspondent à des écoulements identifiés comme étant turbulents. Le point blanc correspond à un écoulement laminaire. Les deux courbes de Reynolds critiques de la figure 3.7 sont reportées pour comparaison

intérieur au repos), le seuil d'apparition de la turbulence est beaucoup plus élevé que dans le cas de l'instabilité centrifuge. La lecture de ces seuils, à la fois dans les mesures de Wendt et de Taylor, a permis de tracer la courbe de stabilité de l'écoulement. Elle est présentée en figure 3.7 sous la forme du Reynolds critique en fonction du rapport d'aspect d/R de l'expérience, où R est le rayon moyen entre les cylindres. La première constatation est la concordance dans le comportement des seuils pour les deux séries d'expériences.

Pour les petits rapports d'aspect d/R , le nombre de Reynolds classique $Re = \Delta\Omega \cdot \Delta R \cdot R / \nu$ apparaît comme étant le paramètre de contrôle pertinent. De plus sa valeur critique est proche de celle rencontrée dans les expériences de Couette plan. Pour les valeurs de d/R supérieures à environ $1/20$, le Reynolds ainsi défini n'est plus constant sur la courbe de stabilité. Il varie en fonction du rapport d'aspect avec une loi de puissance proche de 2. Écrivons alors Re , sous la forme

$$Re = \frac{R^3}{\nu} \frac{\Delta\Omega}{\Delta R} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2 = Re^* \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2, \quad (3.7)$$

et le paramètre de contrôle pertinent – c'est à dire constant le long de la courbe de stabilité – semble donc être

$$Re^* = \frac{R^3}{\nu} \frac{\Delta\Omega}{\Delta R}. \quad (3.8)$$

La valeur critique de ce nombre de Reynolds basé sur le cisaillement imposé au fluide est d'après les données expérimentales

$$Re_c^* \simeq 6 \cdot 10^5. \quad (3.9)$$

Les points reportés sur la figure 3.7 sont associés à des expériences pour lesquels le cylindre intérieur est maintenu au repos, de sorte que l'on ne puisse pas discerner Ω_i de $\Delta\Omega$. Heureusement, Wendt mesura 3 profils de vitesse proches de la courbe de stabilité marginale de l'instabilité centrifuge ($\Omega_i R_i^2 = \Omega_o R_o^2$). Sur ces trois profils, il en identifie deux comme étant turbulents et le troisième comme étant laminaire. L'emplacement de ces trois points dans le plan $(d/R, Re)$ est visible figure 3.8. Les deux écoulements turbulents se situent au dessus de la courbe définie par $Re_c^* = 6 \cdot 10^5$, alors que le troisième – laminaire – se place au dessous. En conclusion, le Re^* paraît être la paramètre pertinent également dans les cas où les deux cylindres sont en rotation, avec la même valeur critique.

3.4 Influence sur les profils moyens

3.4.1 Instabilité Centrifuge

L'effet de l'instabilité centrifuge sur le profil de rotation moyen – visible sur les figures 3.6 et 2.5 – est le développement de couches limites aux parois des cylindres et l'aplatissement du profil de moment cinétique. Le cœur de l'écoulement se trouve ainsi dans une configuration marginalement stable d'après le critère de Rayleigh, l'instabilité étant entretenue par le forçage imposé par les cylindres qui se traduit par l'apparition des deux couches limites. On notera la similarité avec l'évolution du profil de température dans une expérience de convection thermique entre deux plaques maintenues

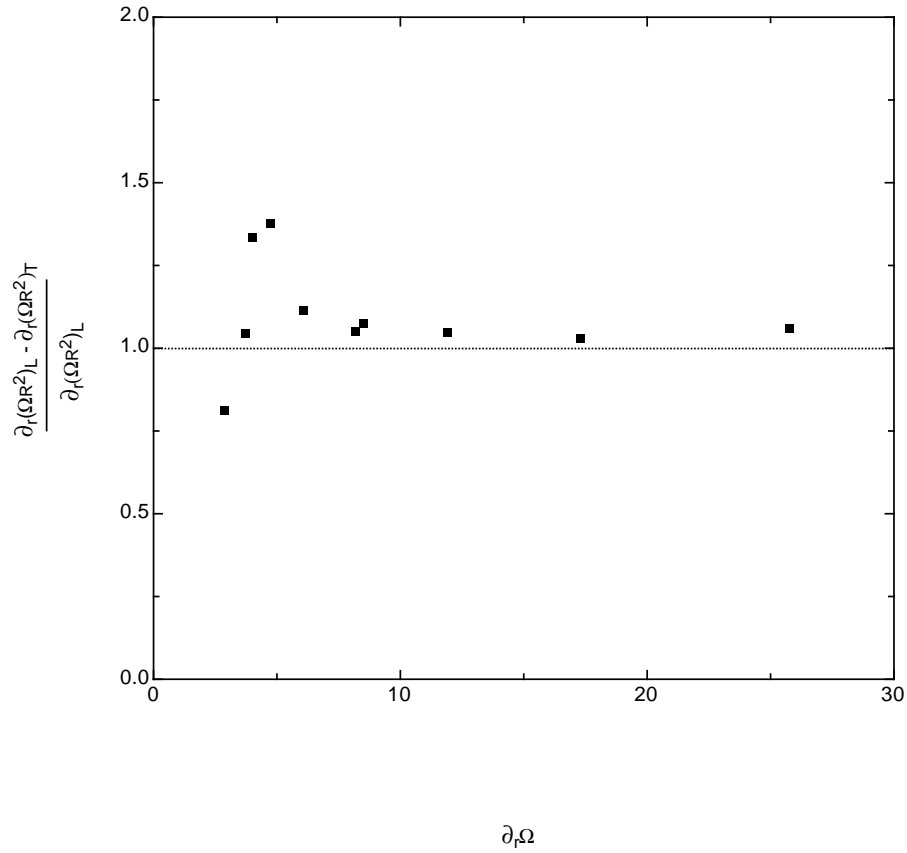


Fig. 3.9: Égalisation du moment cinétique au cœur de l'écoulement par l'instabilité de Taylor (d'après les données de Wendt (1936)) : écart relatif du gradient de moment cinétique au cœur de l'écoulement turbulent par rapport au même gradient dans le régime laminaire théorique, en fonction du différentiel de rotation imposé aux cylindres.

à température constante.

Les mesures de Wendt ont été traitées pour extraire l'évolution du moment cinétique. La figure 3.9 montre la réduction relative du gradient de moment cinétique au centre de l'écoulement $((\partial_r \Omega r^2)_L - (\partial_r \Omega r^2)_T) / (\Delta \Omega r^2)_L$, – où les quantités indicées par L se rapportent aux valeurs laminares théoriques et celles par T aux valeurs mesurées pour les écoulements turbulents – en fonction du cisaillement laminaire théorique. Ces quantités sont évaluées au centre de l'écoulement. La valeur 1 indique un gradient de moment cinétique nul. Prés du seuil de l'instabilité on observe un renversement du gradient de moment cinétique qui devient positif au cœur de l'écoulement. A plus hauts régimes, il demeure toujours positif.

3.4.2 Instabilité aux Amplitudes Finies

Les profils turbulents dans les régimes linéairement stables ne montrent pas d'évolution aussi violente (figures 3.6 et 3.10), mais au contraire une réduction progressive du cisaillement. Comme dans le cas Rayleigh-instable, on pourrait intuitivement s'attendre à ce que le cisaillement responsable de l'instabilité converge vers une valeur asymptotique pour les grands nombres de Reynolds (saturation). La figure 3.11 montre l'évolution du cisaillement résiduel en fonction du cisaillement théorique au cœur de l'écoulement. On observe effectivement une réduction du gradient de vitesse angulaire mais sans atteindre de valeur de saturation.

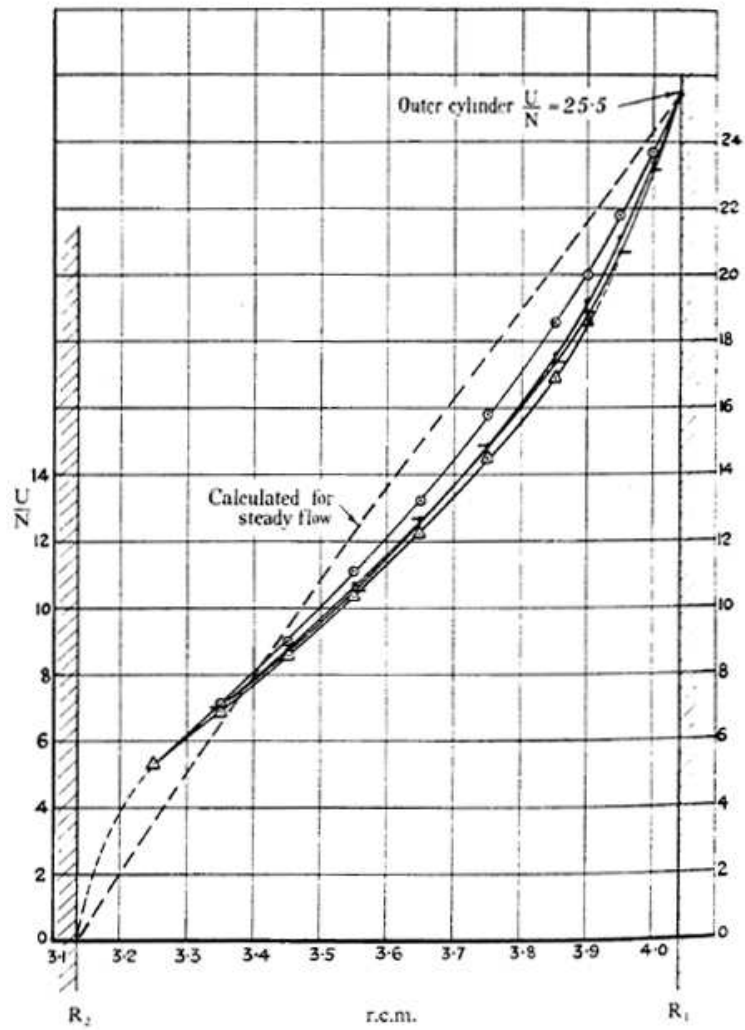


Fig. 3.10: Profils de rotation (Taylor, 1936) à cylindre intérieur fixe, pour différentes valeurs de la fréquence de rotation du cylindre extérieur N ; triangles, $N=33,0$ Hz; points barrés, $N=30,0$ Hz; points, $N= 26,7$ Hz; cercles, $N= 23,0$ Hz.

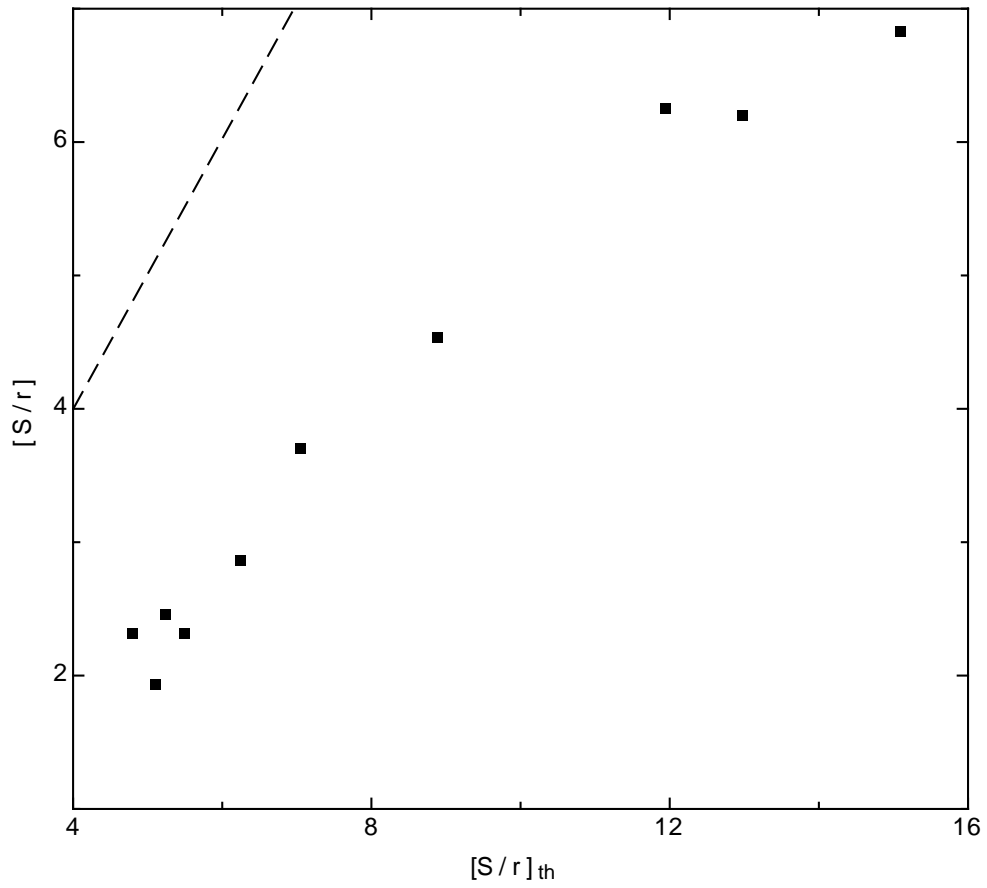


Fig. 3.11: Effet de la turbulence sur le profil de vitesse angulaire ; Cisaillement $S/r = \partial_r \Omega$ au centre de l'écoulement en fonction de la même quantité calculée pour l'écoulement laminaire théorique (d'après les données de Wendt (1936) . Ligne discontinue : bissectrice.

3.5 Transport Turbulent

Continuant d'exploiter les mesures de couple disponibles, on se penche maintenant sur les propriétés de transport de la turbulence. Le couple exercé par un fluide de densité ρ et de viscosité ν sur une surface cylindrique de hauteur h situé au rayon r est donné, pour un écoulement purement azimutal, par

$$M = 2\pi\nu\rho hr^3|\partial_r\Omega|. \quad (3.10)$$

On définit le couple spécifique linéique tel que :

$$G = \frac{M}{2\pi\rho h} = \nu r^3|\partial_r\Omega|. \quad (3.11)$$

Cette quantité décrit le transport de moment cinétique par le fluide entre les cylindres. Les données expérimentales suggèrent que G se comporte comme $\Omega^{3/2}$ après le déclenchement de l'instabilité centrifuge, puis évolue vers une loi de puissance Ω^2 à plus haut régime. Pour l'instabilité non-linéaire, ce même couple semble converger asymptotiquement vers une loi en Ω^2 . Ce paragraphe a pour objectif de discerner la nature de ces deux lois de puissance et d'essayer comprendre pourquoi les régimes à haut Reynolds du cas linéaire et du cas non-linéaire ont des propriétés similaires.

3.5.1 Instabilité Centrifuge

Nous nous proposons dans ce paragraphe de dériver le comportement du transport de moment cinétique par des structures telles que les rouleaux de Taylor. Notant v_r la composante radiale de la vitesse, le couple par unité de longueur et de densité s'exprime comme le flux de moment cinétique transporté entre les deux cylindres

$$G = v_r \cdot 2\pi r \cdot \Delta(\Omega r^2). \quad (3.12)$$

Si l'on note \mathcal{A} l'amplitude des vortex de Taylor, et comme seul le cylindre intérieur est en mouvement, il vient

$$G \simeq \mathcal{A}\Omega_i R_i^3 \quad (3.13)$$

La littérature ne fournit pas le comportement de l'amplitude de l'instabilité, mais on dispose par contre de la relation de dispersion, impliquant le taux de croissance σ . On se propose donc d'en dériver une expression de σ , puis de \mathcal{A} , et enfin un pronostique pour l'évolution du couple.

Dérivation du taux de croissance de l'instabilité

Les équations du mouvement, en tenant compte de la viscosité, sont :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}(P/\rho) + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_\theta + \frac{u_r \cdot u_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(P/\rho) + \nu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_z = -\frac{\partial}{\partial z}(P/\rho) + \nu \nabla^2 u_z \quad (3.16)$$

où $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, auxquelles il faut ajouter l'équation de continuité,

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

Ces équations autorisent l'écoulement stationnaire décrit par :

$$u_r = u_z = 0 \quad u_\theta = V(r) \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{V^2}{r} \quad (3.19)$$

$$\nu \frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) V = 0 \quad (3.20)$$

l'équation (3.20) justifiant le profil (3.2). On perturbe cet écoulement, et on le décrit alors par :

$$u_r, \quad V(r) + u_\theta, \quad u_z, \quad \delta p / \rho = \omega. \quad (3.21)$$

On suppose de plus que les perturbations sont axisymétriques. La linéarisation conduit à :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - 2 \frac{V}{r} u_\theta = -\frac{\partial \omega}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right) \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u_r = \nu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z \quad (3.24)$$

où maintenant $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, et l'équation de continuité,

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.25)$$

On développe les perturbations en modes normaux,

$$\begin{aligned} u_r &= e^{pt} u(r) \cos kz & u_\theta &= e^{pt} v(r) \cos kz \\ u_z &= e^{pt} w(r) \sin kz & \omega &= e^{pt} \omega(r) \cos kz \end{aligned} \quad (3.26)$$

k est le nombre d'onde axial, p est une constante complexe dont la partie réelle est le taux de croissance recherché.

En utilisant ces expressions dans les équations linéarisées, on obtient,

$$\nu \left(DD_* - k^2 - \frac{p}{\nu} \right) u + 2 \frac{V}{r} v = \frac{d\omega}{dr} \quad (3.27)$$

$$\nu \left(DD_* - k^2 - \frac{p}{\nu} \right) v + (D_* V) v = 0 \quad (3.28)$$

$$\nu \left(D_* D - k^2 - \frac{p}{\nu} \right) w = -k\omega \quad (3.29)$$

$$D_* u = -kw \quad (3.30)$$

où l'on a défini les opérateurs $D = \frac{d}{dr}$ et $D_* = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}$. En éliminant w dans (3.29) et (3.30),

$$\frac{\nu}{k^2} \left(D_* D - k^2 - \frac{p}{\nu} \right) D_* u = \omega \quad (3.31)$$

avec l'équation (3.27), on trouve,

$$\frac{\nu}{k^2} \left(D_* D - k^2 - \frac{p}{\nu} \right) (DD_* - k^2) u = 2 \frac{V}{r} v \quad (3.32)$$

En effectuant le changement d'unités $a^2 = k^2 R_o^2$ et $\sigma = p R_o^2 / \nu$, et en introduisant le profil (3.2) on obtient finalement les deux équations :

$$\left(D_* D - a^2 - \sigma \right) (DD_* - a^2) u = a^2 \frac{2B}{\nu} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{AR_o^2}{B} \right) v \quad (3.33)$$

$$\left(D_* D - a^2 - \sigma \right) v = \frac{2AR_o^2}{\nu} u. \quad (3.34)$$

La dérivation détaillée de ces relations se trouve dans Chandrasekhar (1961). Ce sont ces deux dernières qui vont nous permettre d'estimer le taux de croissance σ . On se place toujours dans l'approximation $\Delta R \ll R$. l'opérateur D_* peut alors être approché par l'opérateur D . On pose $C = \frac{1}{r^2} + \frac{AR_o^2}{B}$. Éliminant v entre (3.33) et (3.34), on tire,

$$\left(D^2 - a^2 - \sigma \right)^2 (D^2 - a^2) u = 4a^2 \frac{ABC}{\nu^2} R_o^2 u. \quad (3.35)$$

Pour les vortex de Taylor, la dépendance en r de la composante u est $u(r) \propto e^{ilr}$, où l est le nombre d'onde radial ($l \simeq \frac{\pi}{\Delta R} R_o$ dans les unités choisies). Introduisant cette forme dans la relation précédente, on a,

$$\left(l^2 + a^2 + \sigma \right)^2 (l^2 + a^2) = -4a^2 \frac{ABC}{\nu^2} R_o^2 = 4a^2 \frac{|A|BC}{\nu^2} R_o^2 \quad (3.36)$$

Cette formule donne le comportement explicite du taux de croissance, en fonction des nombres d'ondes radial et axial (dont on a une idée assez précise), de la géométrie, et de la vitesse de rotation du cylindre interne. A et B prennent les valeurs données en (3.3), où $\mu = \Omega_o / \Omega_i = 0$. Ainsi,

$$A = -\Omega_i \frac{R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \quad B = \Omega_i \frac{R_i^2 R_o^2}{R_o^2 - R_i^2} = -R_o^2 A. \quad (3.37)$$

On obtient une estimation de C en prenant la valeur moyenne dans l'écoulement,

$$C = \frac{1}{r^2} + \frac{AR_o^2}{B} \simeq \frac{4R_o^2}{(R_i + R_o)^2} - 1. \quad (3.38)$$

Finalement, la relation de dispersion se réduit à,

$$\sigma + l^2 + a^2 = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + l^2}} \frac{R_o}{\nu} \sqrt{|A|BC} = \frac{\Omega_i R_i^2}{\nu} \frac{\sqrt{4 - (1 + \eta)^2}}{(1 - \eta^2)(1 + \eta)} \frac{2a}{\sqrt{a^2 + l^2}}. \quad (3.39)$$

On remarque immédiatement que le taux de croissance croît linéairement avec le moment cinétique fourni par le cylindre interne, cause de l'instabilité, et d'un facteur géométrique. Bien que le Reynolds le plus habituel pour ce problème soit $\Omega_i R_i \Delta R / \nu$, la quantité sans dimension $\Omega_i R_i^2 / \nu$ est souvent utilisée dans la littérature comme le Reynolds associé au cylindre interne, \mathcal{R}_i . Son utilisation apparaît pertinente puisqu'on montre ici que $\sigma \propto \mathcal{R}_i$.

Amplitude de l'instabilité

Connaissant σ , il nous faut maintenant estimer l'amplitude \mathcal{A} , qui nous donnera l'évolution du transport en fonction de la vitesse de rotation du cylindre. Pour cela, on peut appliquer un raisonnement de type "Landau". Dans les premiers instants de l'instabilité, l'amplitude évolue comme

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\sigma \mathcal{A}}{\tau} \quad (3.40)$$

τ est l'échelle de temps caractéristique du développement de l'instabilité. Si la croissance n'était pas limitée, l'amplitude croîtrait à l'infini. Pour traduire l'effet de saturation due aux non-linéarités, on ajoute au taux de croissance un terme supplémentaire proportionnel au carré de l'amplitude.

$$\tau \frac{d\mathcal{A}}{dt} = (\sigma - \kappa |\mathcal{A}|^2) \mathcal{A} \quad (3.41)$$

Cherchant une solution stationnaire, on en conclut que

$$|\mathcal{A}| = \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \quad (3.42)$$

En faisant l'hypothèse que κ varie peu au seuil de l'instabilité, et qu'il ne dépend pas explicitement de Ω_1 , on peut se contenter en première approximation de décrire \mathcal{A} uniquement en fonction de σ . En se focalisant sur l'évolution en fonction de la rotation, et en imposant que le taux de croissance σ s'annule au seuil de l'instabilité, on conclut,

$$|\mathcal{A}| \sim \sqrt{\Omega_i - \Omega_{ic}} \quad (3.43)$$

où Ω_{ic} est la vitesse angulaire critique. Revenant maintenant à la forme (3.13) pour le transport, elle implique,

$$G \sim -\mathcal{A} \Omega_i \sim \Omega_i \sqrt{\Omega_i - \Omega_{ic}}. \quad (3.44)$$

Par conséquent, en s'éloignant du seuil, le couple tend vers un comportement tel que

$$G \sim \Omega_t^{\frac{3}{2}} \quad (3.45)$$

Ce résultat montre qu'un modèle simple de rouleaux de Taylor permet d'expliquer une advection du moment cinétique se traduisant par la loi d'échelle observée expérimentalement pour le couple induit par l'écoulement sur les cylindres.

3.5.2 Transition vers la Domination du Cisaillement

Les mesures de Taylor (Fig. 3.5) semblent suggérer que le couple suit la même loi de puissance à très haut Reynolds que dans le cas de l'instabilité non-linéaire, ce qui suggère que dans ces régimes des mécanismes semblables sont responsables du transport de moment cinétique. La mesure « locale » de l'exposant α défini par $G \sim Re^\alpha$, faite par Lathrop et al. (1992), met en évidence un changement de régime dans l'évolution du couple pour un nombre de Reynolds de l'ordre de $1,2 \cdot 10^4$. Ils trouvent que cet exposant local se comporte asymptotiquement comme celui dérivé par des arguments du type Kolmogorov dans le cas d'un écoulement purement cisailé.

Cette similarité des lois d'évolution peut être interprétée comme l'expression du développement d'une instabilité de cisaillement dans le profil de rotation déjà altéré par l'instabilité centrifuge. Elle semble indiquer, en tout cas, des lois d'évolution semblables pour le transport turbulent dans les deux types d'instabilités en régimes non-linéaires.

3.5.3 Instabilité aux Amplitudes Finies

Suivant la même philosophie que précédemment, on recherche une expression du transport turbulent sous la forme d'un coefficient de diffusion de la quantité de mouvement. Le couple exprimé en fonction de cette viscosité turbulente est,

$$G = - \nu_t r^3 \frac{d(U/r)}{dr} \quad (3.46)$$

qui se comporte, en première approximation, comme :

$$G \simeq - \nu_t \bar{R}^3 \frac{\Omega}{\Delta R}. \quad (3.47)$$

Dans le même esprit que la viscosité α utilisée pour les disques d'accrétion, on peut essayer de modéliser ν_t à partir des bornes supérieures pour les échelles de vitesse et spatiales des structures turbulentes, soit :

$$\nu_t = \alpha \Delta \Omega \bar{R} \Delta R. \quad (3.48)$$

où ΔV est le différentiel de vitesse des cylindres et ΔR leur écartement, le coefficient α devant être inférieur à 1. Les données expérimentales fournissent la valeur numérique du coefficient α , pour différentes géométries, via

$$\alpha = \frac{G}{\Omega^2 \bar{R}^3 R_o} \quad (3.49)$$

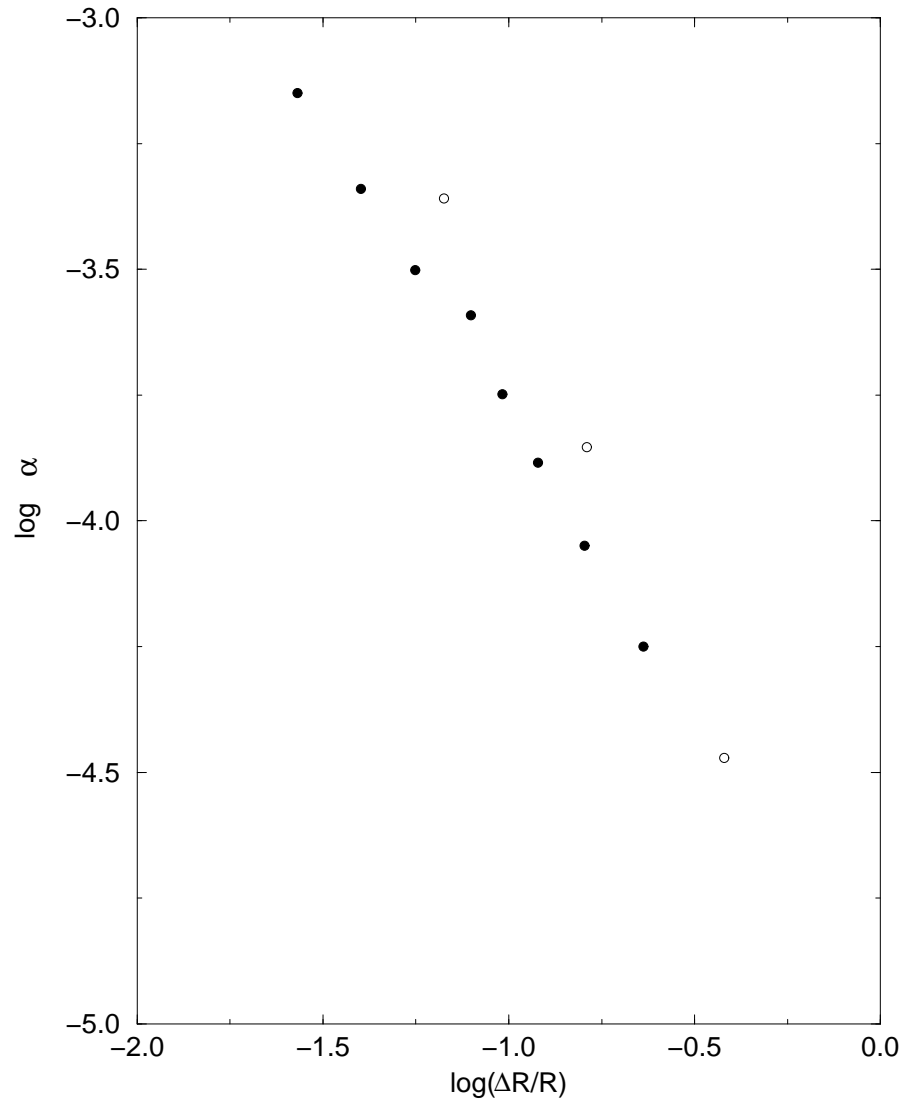


Fig. 3.12: Valeur du paramètre α pour une prescription de la viscosité turbulente du type $\nu_t = \alpha R \Delta \Omega \Delta R$, d'après les mesures de Taylor (1936) (points noirs) et Wendt (1933) (point blancs).

Ces valeurs sont tracés figure 3.12. Comme on pouvait s'y attendre, la valeur de α n'est pas indépendante de ΔR . Le tracé en échelle log-log montre qu'il se comporte comme $1/\Delta R$ pour les petites valeurs de $\Delta R/R$ et que la pente s'infléchit pour de plus grandes valeurs. Utilisant les valeurs de Wendt pour ses deux plus larges expérience, on déduit $\delta \ln \alpha / \delta \ln(\Delta R/R) = -1.83$, suggérant que l'exposant puisse tendre vers la valeur 2 pour $\Delta R \gg R$, et que la viscosité se comporte comme :

$$\bar{\nu}_t \simeq \left(\frac{\alpha \Delta R}{R} \right)^2 R^3 \frac{\Delta \Omega}{\Delta R} = \beta^* R^3 \frac{\Delta \Omega}{\Delta R}, \quad (3.50)$$

avec $\beta^* \approx 4 \cdot 10^{-6}$.

On peut alors intuitiver une valeur locale de la viscosité, indépendante de l'écartement des cylindres, qui n'est fonction que du cisaillement présent dans le fluide et du rayon de courbure de l'écoulement

$$\nu_t = \beta r^3 \left| \frac{d\Omega}{dr} \right|, \quad (3.51)$$

qui peut être réécrite ,

$$\frac{\nu_t}{\nu} = \beta Re^*. \quad (3.52)$$

Cette prescription peut être vérifiée grâce aux profils moyens en invoquant la conservation du moment cinétique moyen entre les deux cylindres. Son flux

$$\mathcal{F} = \left[\nu + \left| \beta r^3 \frac{d\Omega}{dr} \right| \right] r^2 \frac{d\Omega}{dr} \quad (3.53)$$

doit varier comme $1/r$ là où la prescription s'applique. En conséquence, $r^3 \frac{d\Omega}{dr}$ et donc Re^* doit être constant. Les quatre profils à plus haut régime de rotation de Wendt, dans l'expérience à plus grand écartement des cylindres ($\Delta R/R = 0.38$) sont compatibles avec $Re^* = \text{cste}$ au cœur de l'écoulement. La valeur du coefficient β déduite est :

$$\beta = 1.5 \pm 0.5 \cdot 10^{-5}. \quad (3.54)$$

La forte barre d'erreur est due à la qualité des reproductions des publications et aux techniques qui permettent d'en extraire des données quantitatives. La différence entre cette valeur de β et la valeur trouvée précédemment est due au fait que la première est estimée à partir de quantités globale ($\Delta \Omega$, ΔR) alors que la seconde est dérivée localement à partir des profils de vitesse. Il est marquant que ce facteur β soit constant dans toutes les mesures analysées. Si l'on décompose la viscosité turbulente comme

$$\nu_t \simeq v_t \cdot l_t = (\beta^{1/2} r) \cdot \beta^{1/2} r \partial_r \Omega \quad (3.55)$$

cela semble indiquer que les l'échelle turbulente est une fraction constante du rayon, et que les fluctuations turbulentes de la vitesse caractéristiques sont une fraction constante également du cisaillement.

3.6 Discussion

Cette analyse de travaux expérimentaux antérieurs nous a permis de dériver un critère d'instabilité et une expression de la viscosité turbulente pour les domaines de rotation tels que $\partial_r \Omega r^2 > 0$ et $\partial_r \Omega > 0$. Elle nous permet également de soupçonner que les écoulements pour lesquels $\partial_r \Omega < 0$ peuvent devenir turbulents en dehors du domaine d'instabilité centrifuge, ceci étant étayé seulement par les écoulements « neutres » décrits par Wendt (cf. Richard & Zahn, 1999). Il manque donc une exploration plus systématique permettant de cartographier les écoulements instables pour une large gamme de régimes de rotation – en particulier dans le domaine $\partial_r \Omega r^2 > 0$ et $\partial_r \Omega < 0$ – et d'obtenir des informations plus quantitatives sur les états turbulents.

C'est pourquoi, en collaboration avec Olivier Dauchot et François Daviaud du *Groupe Instabilités et Turbulence* du CEA à Saclay, nous nous sommes lancés dans une étude expérimentale de l'écoulement de Couette-Taylor. L'objectif de cette étude est l'identification des régimes turbulents et leurs propriétés de transport.

Turbulence in differentially rotating flows

What can be learned from the Couette-Taylor experiment

Denis Richard and Jean-Paul Zahn

Département d’Astrophysique Stellaire et Galactique/CNRS-UMR8633, Observatoire de Paris-Meudon,
F-92195 Meudon Cedex, France

Received 25 November 1998 / Accepted 23 March 1999

Abstract. The turbulent transport of angular momentum plays an important role in many astrophysical objects, but its modelization is still far from satisfactory. We discuss here what can be learned from laboratory experiments. We analyze the results obtained by Wendt (1933) and Taylor (1936) on the classical Couette-Taylor flow, in the case where angular momentum increases with distance from the rotation axis, which is the most interesting for astrophysical applications. We show that when the gap between the coaxial cylinders is wide enough, the criterion for the onset of the finite amplitude instability can be expressed in terms of a gradient Reynolds number. Based on Wendt’s results, we argue that turbulence may be sustained by differential rotation when the angular velocity decreases outward, as in keplerian flows. From the rotation profiles and the torque measurements we deduce a prescription for the turbulent viscosity which is independent of gap width; with some caution it may be applied to stellar interiors and to accretion disks.

Key words: hydrodynamics – instabilities – turbulence

1. Introduction

Differential rotation is observed in various astrophysical objects, from planets to galaxies, and one suspects that it gives rise to turbulence, since shear flows are liable to hydrodynamical and MHD instabilities. When these instabilities are of the linear type, they are relatively easy to study by perturbing slightly the equilibrium state. But some of them occur only at finite amplitude, in which case the answer must be sought in computer simulations or laboratory experiments, with their inherent limitations.

There has been some debate recently on whether a keplerian disk, which is linearly stable (Rayleigh 1916), may be unstable to finite amplitude perturbations. It may look as if this question presents little interest, since it has been proved that a very weak magnetic field suffices to render such a disk linearly unstable (Chandrasekhar 1960; Balbus and Hawley 1991). However the properties of angular momentum transport depend sensitively on which instability dominates in the considered regime, and a finite amplitude instability can overpower the linear instability

which is the first to occur, as the relevant control parameter increases. One example is the Couette-Taylor flow, with the outer cylinder at rest and the inner cylinder rotating with angular velocity Ω . When Ω is increased, the transport of angular momentum first scales as $\Omega^{3/2}$, but thereafter it varies as Ω^2 , once the flow has become fully turbulent (Taylor 1936), as if the initial linear instability were superseded by a stronger shear instability (see also Lathrop et al. 1992). By extrapolating the $\Omega^{3/2}$ law to high Ω one would clearly underestimate the transport.

In the present article, we take as working assumption that any differentially rotating flow experiences, at high Reynolds number, the turbulent regime observed in the Couette-Taylor (CT) experiment, and that this turbulence will then transport angular momentum in the same way as in that experiment. The CT flow has been chosen as reference because it is the simplest flow to realize in the laboratory, with both shear and rotation that can be varied independently. We examine whether the experimental data suggest a prescription for the angular momentum transport, which may be used to model astrophysical objects. A similar approach has been taken by Zeldovich (1981), but our conclusions will differ from his (see Appendix).

2. The Couette-Taylor experiment

The CT experimental apparatus consists of two coaxial rotating cylinders of radius R_1 and R_2 separated by a gap $\Delta R = R_2 - R_1$, which is filled with a fluid of viscosity ν . The cylinders can rotate with different angular velocities Ω_1 and Ω_2 ; their height is in general much larger than their radius, to minimize the effect of the boundaries. The Reynolds number is usually defined in terms of the differential rotation $\Delta\Omega = |\Omega_2 - \Omega_1|$ and by taking the gap width as characteristic length:

$$Re = \frac{\Delta\Omega R \Delta R}{\nu}, \quad (1)$$

where R is the mean radius $R = (R_1 + R_2)/2$.

2.1. Critical parameters and transition to turbulence

When the inner cylinder is rotating and the outer one is at rest, angular momentum decreases outward and the flow is linearly unstable for Reynolds numbers higher than $Re_c = 41.2 \sqrt{R/\Delta R}$

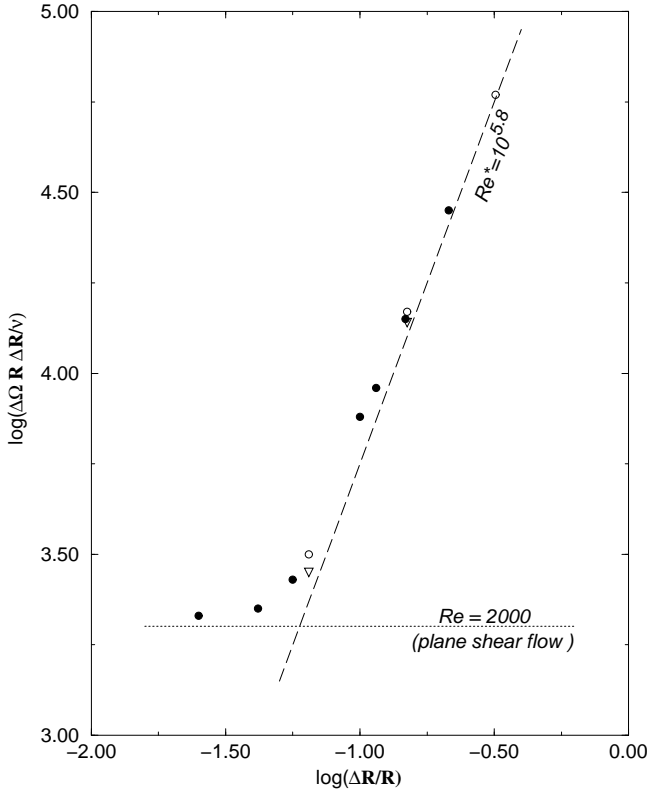


Fig. 1. Critical Reynolds number vs. aspect ratio; filled circles from Taylor (1936), open circles from Wendt (1933). Dotted line: critical Reynolds number for plane shear flow instability; dashed line: critical gradient Reynolds Re^* for circular shear flow in the limit of large gap (see text).

(for narrow gap, cf. Taylor 1923). This well known instability takes first the shape of steady toroidal, axisymmetric cells (the Taylor vortices); it is very efficient in transporting angular momentum, whose gradient is strongly reduced. At higher Re a wavy pattern appears and after a series of bifurcations the flow becomes fully turbulent. This case has been studied by many experimental teams, and it is extremely well documented (see Andereck et al. 1986). It has also been modeled successfully in three-dimensional numerical simulations (Marcus 1984; Coughlin & Marcus 1996).

In the opposite case, when the outer cylinder is rotating and the inner one is at rest, the angular momentum increases outward and the flow is linearly stable. The only theoretical prediction concerning the non-linear behavior is that by Serrin (1959), later refined by Joseph and Munson (1970), who established that the flow is stable against finite amplitude perturbations below $Re = 2\pi^2$ (in the narrow gap limit).

To this date, no numerical simulation has been able to demonstrate the finite amplitude instability. But this instability does occur in the laboratory, and it has been described already by Couette (1890). It was studied in detail by Wendt (1933) and Taylor (1936), who showed that for Reynolds numbers exceeding $Re_c \simeq 2 \cdot 10^3$, the flow becomes unstable and immediately displays turbulent motions. The critical Reynolds number depends on whether the angular speed is increased or decreased

in the experiment, a typical property of finite amplitude instabilities. Moreover, it is sensitive to gap width, as demonstrated by Taylor. Fig. 1 displays results from Wendt and Taylor: Re_c is roughly constant below $\Delta R/R = 1/20$, but above it increases as $\approx (\Delta R/R)^2$, as was already noticed by Zeldovich (1981), a behavior for which an explanation was proposed by Dubrulle (1993). In the latter regime one can define another critical Reynolds number Re_c^* involving, instead of gap width, the gradient of angular velocity; since

$$Re_c = \frac{R^3}{\nu} \frac{\Delta\Omega}{\Delta R} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2 = Re_c^* \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2, \quad (2)$$

the instability condition becomes

$$Re^* = \frac{R^3}{\nu} \frac{\Delta\Omega}{\Delta R} \geq Re_c^* \simeq 6 \cdot 10^5. \quad (3)$$

We see that two conditions must be satisfied for the finite amplitude instability to occur: the first $Re \geq Re_c$ is the classical criterion of shear instability, valid also for plane parallel flows, whereas the second $Re^* \geq Re_c^*$, involving what we shall call the *gradient* Reynolds number, is genuine to differential rotation. In addition, to trigger the instability the strength of the perturbation must exceed a certain threshold, which presumably also depends on Re or Re^* .

2.2. Transport of angular momentum

In the turbulent regime, the torque measured by Taylor scales approximately as $G \propto (\Omega_2)^n$ for a given gap width, where the exponent n tends to 2 for large Ω_2 . The measurements made by Wendt confirm that scaling with $n \approx 2$. It suggests that the transport of angular momentum may be considered as a diffusive process, and that the mean turbulent viscosity $\bar{\nu}_t$ increases linearly with Ω_2 , or $\Delta\Omega$. It is then natural to examine whether this viscosity may be expressed as

$$\bar{\nu}_t = \alpha R \Delta\Omega \Delta R \quad (4)$$

with α being a constant of order unity, since the largest turbulent eddies would have a size $\approx \Delta R$ and a peripheral velocity $\approx R \Delta\Omega/2$. The parameter α is easily derived from the torque measurements, and the surprising result is that it decreases with gap width (Fig. 2). For the smallest gaps, α scales as the inverse of $\Delta R/R$, but the slope steepens farther as if the scaling would tend asymptotically to

$$\alpha \propto \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^{-2} \quad \text{for} \quad \left(\frac{\Delta R}{R} \right) \rightarrow 1. \quad (5)$$

(Comparing Wendt's experimental data of his two largest gaps, one deduces an exponent $\delta \ln \alpha / \delta \ln(\Delta R/R_2) = -1.83$.)

We may therefore conclude that, in the limit of large gap, the mean turbulent viscosity actually scales as

$$\bar{\nu}_t \simeq \left(\frac{\alpha \Delta R}{R} \right)^2 R^3 \frac{\Delta\Omega}{\Delta R} = \beta^* R^3 \frac{\Delta\Omega}{\Delta R}, \quad (6)$$

with $\beta^* \approx 4 \cdot 10^{-6}$.

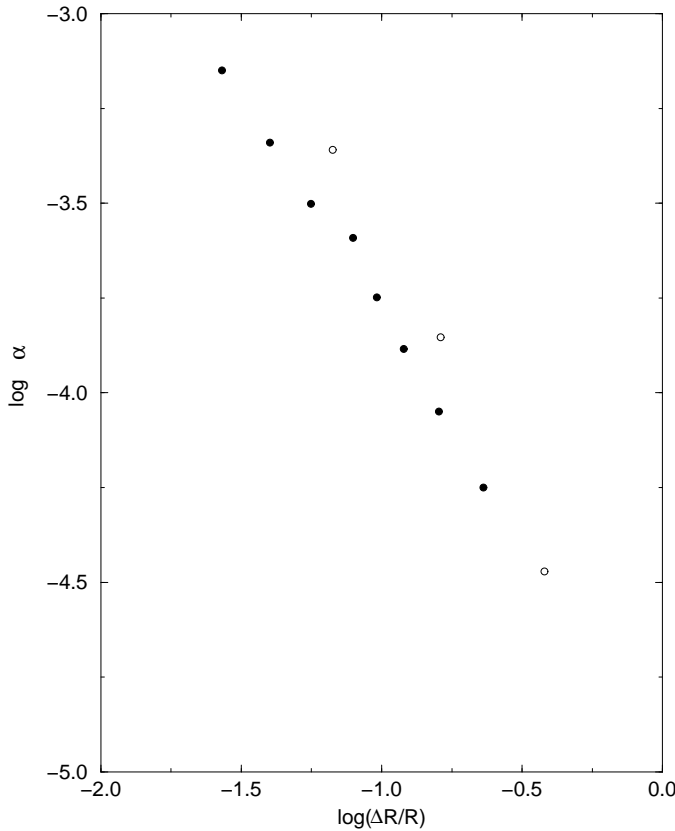


Fig. 2. Value of parameter α in the classical viscosity prescription $\nu_t = \alpha R \Delta \Omega \Delta R$, derived from Taylor (1936) in filled circles and from Wendt (1933) in open circles.

This strongly suggests that the *local* value of the turbulent viscosity is then independent of gap width, and that it is determined only by the local shear:

$$\nu_t = \beta r^3 \left| \frac{d\Omega}{dr} \right|, \quad (7)$$

r being the radial coordinate.

In principle, one should be able to verify this prescription for ν_t by examining the rotation profiles measured by Taylor and Wendt. According to (7), the conservation of angular momentum requires that its flux, given by

$$\mathcal{F} = \left[\nu + \left| \beta r^3 \frac{d\Omega}{dr} \right| \right] r^2 \frac{d\Omega}{dr}, \quad (8)$$

varies as $1/r$ between the cylinders. Therefore $r^3(d\Omega/dr)$ should be constant in the turbulent part of the profile (as it is in the laminar flow).

But this constancy can be expected only if the transport of angular momentum is achieved by the viscous and turbulent stresses alone. That is not the case in Taylor's experiment: as acknowledged by him, an Ekman circulation is induced by the ends of his apparatus, although he tries to minimize the boundary effects by choosing a large aspect ratio (height/radius). Moreover his rotation profiles are deduced from pressure measurements made with a Pitot tube located at half height of the cylinders,

where the radial return flow has its maximum intensity. Consequently, the torque inferred from these profiles is about half of that measured directly at the inner cylinder.

The aspect ratio is less favorable in Wendt's experiment, but there the top boundary is a free surface, and most of his measurements have been made with the bottom boundary split in two annuli, attached respectively to the inner and the outer cylinders, which reduces drastically the circulation and renders his results more reliable. We examined his rotation profiles obtained for the largest gap width ($\Delta R/R = 0.38$) and with 4 different speeds of the inner cylinder ($0 \leq \Omega_1 \leq \Omega_2/2$); we found that in the bulk of the fluid, these profiles are compatible with the constancy of the gradient Reynolds number, as predicted by (8). However we cannot rule out a mild variation of β within the profile. Unfortunately, Wendt gives the torque only for the case where the inner cylinder is at rest; we draw from it the following value of the coefficient β :

$$\beta = 1.5 \pm 0.5 \cdot 10^{-5}. \quad (9)$$

The estimated uncertainty reflects that of the velocity measurements: β results from second derivation of the shape of the fluid surface.

3. Are keplerian flows unstable?

More precisely, the question we address is whether the Couette flow is unstable when the angular velocity decreases outwards and the angular momentum increases outwards, as in keplerian flow.

There is no definite answer yet, because this regime has not been explored at high enough Reynolds number. But some information can be gleaned from Wendt's study. He reports the results of experiments where the two cylinders rotate such that $\Omega_2 R_2^2 = \Omega_1 R_1^2$. At low Reynolds number, this setup enforces a laminar flow of constant angular momentum (neutral flow), but at high Reynolds number this flow becomes turbulent for two of the three gaps used by Wendt.

The angular velocity and angular momentum profiles for one of these turbulent flows are reproduced in Fig. 3. (According to Wendt's data, $\Omega_2 R_2^2$ actually exceeds $\Omega_1 R_1^2$ by a half a percent.) The profiles clearly demonstrate the flow instability, with angular momentum being transported down the angular velocity gradient, which becomes somewhat flatter far enough from the boundaries, whereas the angular momentum profile steepens substantially.

In the turbulent bulk of the flow $q = -d \ln \Omega / d \ln r \approx 1.4$, compared to the initial $q = 2$. We recall that $q = 1.5$ in keplerian flow, and that in the numerical simulations performed by Balbus et al. (1996, 1998), the instability is lost already at about $q = 1.95$. A crude estimate of the parameter β in the viscosity formulation (7) indicates that the size of the turbulent eddies is much smaller than the gap width: $\ell = \sqrt{\beta R} \approx \Delta R/100$.

The corresponding values of Re^* for the three experiments are reported in Fig. 4 together with the critical line of Fig. 1. They are located respectively above and below this line for the unstable and stable flows. The data are too scarce to locate pre-

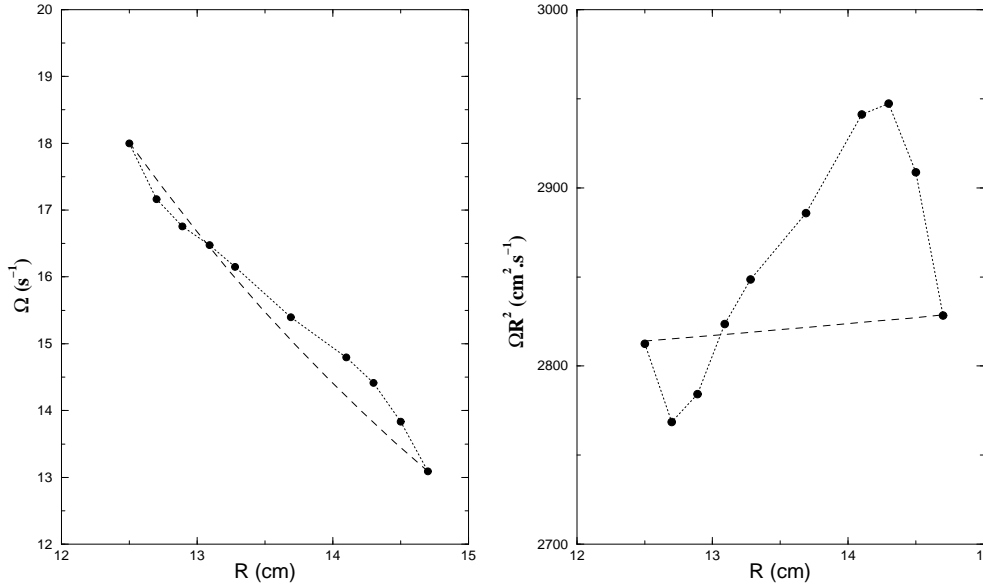


Fig. 3. Angular velocity and momentum profiles in the case of decreasing angular velocity and initially constant angular momentum – dotted line (experimental data from Wendt 1933).

cisely the critical line of these “neutral” flows, but we can conclude that the critical gradient Reynolds number Re^* then lies between $2 \cdot 10^5$ and $6 \cdot 10^5$.

4. Discussion

The firmest result of our analysis of the Couette-Taylor experiment is that the criterion for finite amplitude instability may be expressed in terms of the gradient Reynolds number $Re^* = R^3(\Delta\Omega/\Delta R)/\nu$, where the critical Reynolds number $Re_c^* \lesssim 6 \cdot 10^5$ is independent of the width of the gap between cylinders, for wide enough gap. The turbulent transport of angular momentum then seems also to be independent of gap width; it proceeds always down the angular velocity gradient, as confirmed by the behavior of the initially “neutral” flows examined by Wendt.

Though the experimental evidence is somewhat less compelling, we have established empirically an expression which links the turbulent viscosity to the local shear. The value of Re_c^* , and that of β in Eq. (7), have been derived from Wendt’s experiment with the inner cylinder at rest, and it is not obvious that these parameters would be the same for different ratios of cylinder speeds. Also, the linear scaling $\nu_t/\nu = \beta Re^*$ may be valid only for those moderate gradient Reynolds numbers which could be reached in the laboratory

Nevertheless, it is tempting to apply this expression (7) to accretion disks, as an alternate for the commonly used prescription $\nu_t = \alpha c_s H$, where H is the scale height of the disk and c_s the local sound speed (Shakura & Sunyaev 1973). Some caution is required because this viscosity has been derived from experiments performed with an incompressible fluid. Moreover (7) implies that the eddies which dominate in the transport of angular momentum have a size of order $\ell \approx \sqrt{\beta} r$, independent of the strength of the local shear, and that their velocity is of order $\ell r d\Omega/dr$. When applying this prescription to a compressible flow, one has to make sure that this velocity is smaller

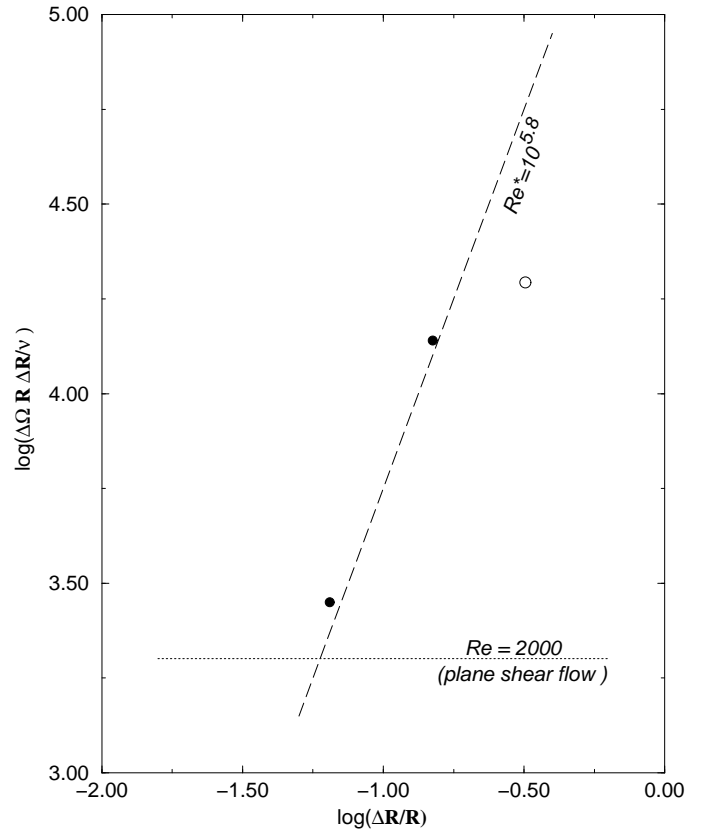


Fig. 4. Reynolds number vs. aspect ratio for the three “neutral” experiments from Wendt: the two filled circles correspond to the unstable flows, the open circle to the stable flow. The stability curve obtained for the inner cylinder at rest (Fig. 1) is displayed for comparison.

than the sound speed and, in the case of an accretion disk, that the size ℓ of the eddies, which are three-dimensional, does not largely exceed the scale height H . The behavior of “neutral” flows demonstrates that the shear instability always transports

angular momentum down the angular velocity gradient, which means outward for accretion disks.

Note that in a keplerian disk our expression is equivalent to

$$\nu_t = \beta' r^2 \Omega \quad \text{with} \quad \beta' = \frac{3}{2} \beta. \quad (10)$$

Such a prescription has been suggested originally by Lynden-Bell and Pringle (1974), and recently it was used again by Duschl et al. (1998). As a test, it is being applied to the modelling of accretion discs in active galactic nuclei (Huré & Richard 1999).

The reader may wonder why we have only used experimental results dating from the thirties, namely those of Wendt (1933) and Taylor (1936). The reason is that no one, since then, has studied in such extent the regime of outward increasing angular momentum.¹ We suspect that it is because the flow becomes then turbulent at once, without undergoing a series of bifurcations associated with enticing patterns. But we hope that experimentalists will turn again to this classical problem, which is of such great interest for geophysical and astrophysical fluid dynamics, and that they will explore the rotation regimes for which the data are so incomplete. In the meanwhile, the quest will continue to detect the finite amplitude instability in computer simulations.

Acknowledgements. We thank our anonymous referee for his sharp remarks, which incited us to strengthen our case and to dig even deeper into Wendt's experimental data.

Appendix A: on Zeldovich's analysis of Taylor's results

Zeldovich (1981) had a similar goal in mind when he analyzed the results of Taylor's experiment. But he started from the idea that the turbulent flow was governed by the epicyclic frequency N_Ω and the turnover frequency ω , where

$$N_\Omega^2 = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^2 \Omega)^2 \quad \text{and} \quad \omega^2 = \left(r \frac{d\Omega}{dr} \right)^2,$$

since they measure respectively the stability of the flow and the strength of the shear. He defines a non-dimensional parameter $Ty = N_\Omega^2 / \omega^2$, akin to the Richardson number used in stratified shear flow, and he seeks the confirmation of his intuition that

Ty be constant in Taylor's turbulent rotation profiles, in which case the angular velocity would obey a power law

$$\Omega \propto r^q.$$

His best fit yields $q = 5.5$. However these profiles are contaminated by the Ekman circulation mentioned above, and they differ markedly from those obtained by Wendt.

A consequence of this constant Ty would be that the parameter α in (4) would vary as

$$\alpha \propto \left(1 - \frac{\Delta R}{R} \right)^{2q+4} = \left(1 - \frac{\Delta R}{R} \right)^{15}$$

a property which is not substantiated by the combined results of Taylor and Wendt, as can be seen in Fig. 2.

References

- Andereck C.D., Liu S.S., Swinney H.L., 1986, *J. Fluid Mech.* 164, 155
 Balbus S.A., Hawley J.F., 1991, *ApJ* 376, 214
 Balbus S.A., Hawley J.F., Stone J.M., 1996, *ApJ* 467, 76
 Balbus S.A., Hawley J.F., Winters W.F., 1998, submitted to *ApJ* (astro-ph/9811057)
 Chandrasekhar S., 1960, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 46, 53
 Coles D., 1965, *J. Fluid Mech.* 21, 385
 Couette T., 1890, *Ann. Chim. Phys.* 21, 433
 Coughlin K., Marcus P., 1996, *Phys. Rev. Letters.* 77, 2214
 Dubrulle B., 1993, *Icarus* 106, 59
 Duschl W.J., Strittmatter P.A., Biermann P.L., 1998, *AAS Meet.* 192, #66.17
 Huré J.-M., Richard D., 1999 (preprint)
 Joseph D.D., Munson B.R., 1970, *J. Fluid Mech.* 43, 545
 Lathrop D.P., Fineberg J., Swinney H.L., 1992, *Phys. Rev. Letters.* 68, 1515
 Lynden-Bell D., Pringle J.E., 1974, *MNRAS* 168, 603
 Marcus P.S., 1984, *J. Fluid Mech.* 146, 45 & 65
 Rayleigh, Lord, 1916, *Proc. Roy. Soc. London A* 93, 148
 Serrin J., 1959, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 3, 1
 Shakura N.I., Sunyaev R.A., 1973, *A&A* 24, 337
 Taylor G.I., 1923, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* 223, 289
 Taylor G.I., 1936, *Proc. Roy. Soc. London A* 157, 546
 Wendt F., 1933, *Ing. Arch.* 4, 577
 Zeldovich Y.B., 1981, *Proc. Roy. Soc. London A* 374, 299

¹ For instance, the Reynolds numbers explored by Coles (1965) are one order of magnitude lower than those reached by Wendt, which explains why he did not encounter the finite amplitude instability of neutral flows.

4.1 Dispositif Expérimental

4.1.1 Description Technique

La figure 4.1 est une photographie du dispositif expérimental utilisé pour cette étude. La conception et la réalisation du montage original sont dues à Arnaud Prigent, Olivier Dauchot et Vincent Padilla. Ce dispositif utilisé pour l'étude des régimes turbulents intermittents (spirale turbulent) dans une configuration « petit gap » a été dupliqué et adapté pour notre étude.

Le cylindre interne est composé d'aluminium. Son rayon est de 35mm. Le cylindre externe est en verre de 5mm d'épaisseur et de rayon 50mm. La longueur utile est de 380mm. Ces paramètres ont été choisis en fonction de la courbe de stabilité observée chez Wendt ainsi que chez Taylor, pour se placer dans une géométrie dans laquelle les effets de courbure puissent être observés tout en conservant une valeur du paramètre critique raisonnable. La hauteur est limitée par les contraintes mécaniques, en particulier la torsion s'exerçant sur le cylindre en verre.

Les cylindres sont montés sur un châssis micro-control fixé sur un marbre. Les deux moteurs assurant l'entraînement sont placés sur un châssis métallique indépendant et sont reliés à des servopacks commandés par logiciel. La transmission est assurée par des courroies dont la particularité principale est de ne pas nécessiter de forte tension. Ainsi, la transmission des vibrations mécaniques, et donc le bruit expérimental sont minimisés. Lors de l'utilisation de la vélocimétrie laser (LDV), une cuve rectangulaire en plexiglas est assemblée autour du cylindre extérieur et remplie d'eau. Ces interfaces supplémentaires modifient le chemin optique des faisceaux laser et permettent une meilleure résolution spatiale de l'écoulement.

Le dispositif est refroidi par une circulation d'eau parcourant le cylindre intérieur et la cuve plexiglas. Cette eau est maintenue à température constante par un système de réfrigération et un bain chauffant thermostaté montés en série. La pièce est également climatisée.

La vitesse de rotation maximale des moteurs est de 2400 tr/min. La vitesse maximale explorée ici est de 1800 tr/min. A cette fréquence, la vitesse tangentielle du cylindre extérieur est de 36 km/h, et la force centrifuge au rayon maximum est de 180 g, où g est l'accélération due à la gravité terrestre. Durant la totalité de ce travail, on peut estimer la distance parcourue par un point du cylindre extérieur à environ 43000 km, soit un peu plus que la circonférence du globe terrestre.



Fig. 4.1: Dispositif expérimental en configuration LDV. La cuve rectangulaire autour des cylindres est emplie d'eau à température constante. Le cylindre interne en aluminium est recouvert d'un revêtement noir pour éviter la réflexion des faisceaux laser (la tête laser est visible à droite). L'ensemble est monté entre deux plaques d'aluminium fixées sur un châssis micro-control solidaire du marbre. Un des deux moteurs est visible en bas de l'image : ils sont montés sur un châssis indépendant sans contact avec le marbre pour minimiser la transmission des vibrations.

4.1.2 Conditions aux Limites

Trois différentes conditions aux limites pour le fond et le haut de l'expérience ont été testés :

- Conditions libres : deux volumes de fluide servent de « tampons » au dessus et au dessous des cylindres.
- Fond et haut en rotation solide avec le cylindre extérieur.
- Séparation du fond et du haut en deux anneaux, chacun en rotation solide avec un des cylindres.

Ces différentes configurations ont pour but d'étudier les effets de finitude des cylindres sur l'écoulement laminaire. En effet, l'écoulement de Couette est calculé pour des cylindres de longueur infinie. Les parois en haut et au fond de l'expérience entraînent visqueusement le fluide. Cette entraînement peut être la cause de cellules de recirculation sur toute la hauteur des cylindres, qui redistribuent le moment cinétique et modifient l'écoulement.

4.1.3 Mesures Accessibles

Domaines Turbulents

Deux systèmes de visualisation de l'écoulement ont été employés. Le premier fait appel à un éclairage par tubes néons recouverts d'un filtre ne laissant passer que la partie ultra-violet du spectre émis. Le cylindre intérieur est recouvert d'un adhésif fluorescent. Le fluide de travail est composé d'eau osmosée et de 5% en volume de Kalioscope. Les paillettes contenues dans le Kalioscope s'orientent préférentiellement dans le sens du cisaillement de l'écoulement. Lorsque les paillettes sont vues de face, elles réfléchissent presque totalement l'éclairage et l'écoulement présente un aspect blanchâtre. Lorsque les paillettes sont vues par la tranche et l'éclairage UV va se réfléchir sur le revêtement du cylindre intérieur qui apparaît alors dans une élégante couleur saumonée. La seconde technique est similaire, mais utilise un éclairage en lumière blanche et un revêtement noir du cylindre intérieur. Les contrastes apparaissent alors en niveaux de gris. La lumière UV est surtout intéressante pour les prises de vues, étant donné le peu de réflexions parasites visibles sur le cylindre en verre.

Profils de Rotation et Fluctuations Turbulentes par Vélocimétrie Laser

Les mesures de vitesse dans l'écoulement sont réalisées par vélocimétrie laser doppler (LDV). La technique de mesure consiste à faire interférer deux faisceaux lasers, la vitesse étant mesurée à l'endroit où se croisent ces deux faisceaux. Dans ce petit volume, l'interférence crée une alternance de franges de luminosité variable. Le fluide est parsemé de paillettes micrométriques qui suivent l'écoulement et qui réfléchissent ces franges. La fréquence du signal renvoyé fournit la vitesse de la paillette. La vitesse moyenne en un point est calculée à partir de plusieurs milliers de mesures. La précision relative de cette technique est de l'ordre de 0,1% pour un échantillon de dix mille valeurs individuelles.

4.2 Effets de Bords

La figure 4.2 présente deux profils moyens de vitesse azimutale pour deux conditions aux limites différentes, dans un régime laminaire où le cylindre intérieur est au repos. Dans le cas où le fond et le haut de l'expérience sont en rotation avec le cylindre extérieur, le profil mesuré présente une forte déformation par rapport au profil théorique obtenu pour des cylindres de hauteur infinie, ayant pour cause la circulation induite par la rotation du fond et du haut. Dans la configuration pour laquelle le fond est divisé en deux parties égales, une solidaire du cylindre intérieur, l'autre du cylindre extérieur, le profil mesuré est très proche du profil théorique. Ces deux profils sont mesurés à mi-hauteur des

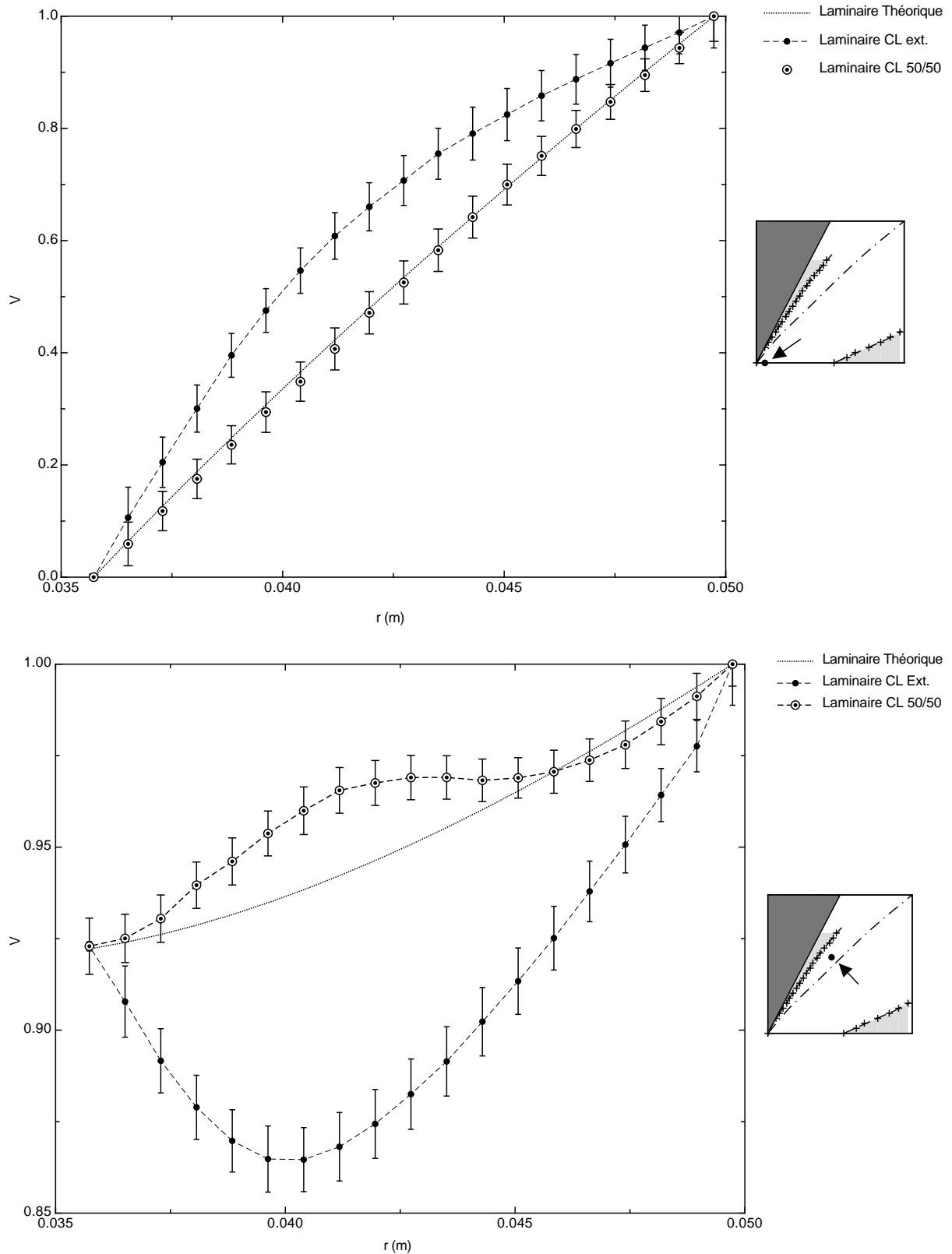


Fig. 4.2: Profils de rotation (vitesse azimutale) laminaires pour deux conditions aux bords différentes; En haut : $Re_i = 0$, $Re_o = Re = 4700$; En bas : $Re_i = 35300$, $Re_o = 27100$, $Re = 8200$; Points noirs : fond et haut sont en rotation avec le cylindre extérieur. Points cerclés : fond et haut sont divisés en deux « rondelles » chacune en rotation avec un des cylindres. Lignes pointillées : profil de Couette laminaire théorique (cylindres de longueur infinie). Notes : tous les profils présentés par la suite sont normalisé à la valeur maximale imposée aux cylindres ; Les barres reportées sur les points de mesures sont proportionnelles à la variance de la distribution de vitesse mesurée.

cylindres. Les profils pour d'autres valeurs de la position axiale ne présentent aucune différence sur toute la hauteur accessible pour les mesures par vélocimétrie laser, c'est à dire jusqu'à un centimètre des bords.

Les mêmes mesures pour un régime où les deux cylindres sont en rotation sont visibles figure 4.2. Si l'on note également que l'écoulement se rapproche du profil théorique pour les secondes conditions aux limites, il présente toujours une déformation qui à son maximum atteint une amplitude relative d'environ 5%.

A notre connaissance, seul Coles et al. (1966) ont publiés des résultats semblables pour des conditions limites identiques. La solution particulière « moitié-moitié » est celle suggérée pour les mêmes raisons, et utilisée déjà par Wendt (1933). C'est dans cette configuration que les résultats présentés par la suite sont obtenus.

4.3 Stabilité

La stabilité de l'écoulement laminaire est explorée en utilisant la technique d'éclairage fluorescent décrite précédemment. La différenciation entre écoulement laminaire et turbulent est faite visuellement et par diagramme spatio-temporel. Les diagrammes spatio-temporels sont des images constituées de la concaténation d'acquisitions visuelles par caméra d'une ligne verticale, prise sur la hauteur des cylindres, au cours du temps. Les contrastes de couleur permettent d'identifier les modifications de l'écoulement. Cette cartographie de la stabilité a été faite pour les différentes conditions aux limites mentionnées précédemment et aucune différence notable n'a été observée.

Le diagramme de stabilité résultant de cette exploration est présenté figure 4.3. Il met en évidence les régimes de rotation pour lesquels un état turbulent auto-entretenu de l'écoulement peut être observé. La mesure des seuils de transition turbulent-laminaire est faite, en partant d'un état turbulent, en diminuant progressivement le nombre de Reynolds par marches (typiquement $\Delta Re = 45$) puis en laissant relaxer le système. Les valeurs indiquées sont donc les seuils en dessous desquels l'écoulement est trouvé inconditionnellement stable.

Le domaine turbulent observé sous la courbe de rotation solide correspond à des régimes tels que les gradients de vitesse angulaire et de moment cinétique sont tous deux croissants. Il s'agit du même cas de figure que les instabilités identifiées par Wendt et Taylor avec le cylindre intérieur au repos.

Dans l'autre domaine, situé entre la courbe théorique de stabilité marginale pour l'instabilité centrifuge et la courbe de rotation solide, les gradients de vitesse angulaire et de moment cinétique sont respectivement négatif et positif. De ce point de vue, il s'agit d'écoulements du même type que les profils de rotation kepleriens. C'est la première fois que ce régime est exploré expérimentalement et identifié comme turbulent. La raison principale est, comme nous l'avons mentionné plus haut, que la majorité des études expérimentales se sont cantonnées à des régimes linéairement instables. Ces régimes ne demandent pas d'explorer des grands nombres de Reynolds, et dans les plages étudiées par exemple par Coles (1965) ou Andereck et al. (1986), même une excursion sous la courbe de stabilité marginale linéaire n'aurait pas montrée d'écoulements turbulents. Ce résultat est important puisqu'il montre que des écoulements comparables

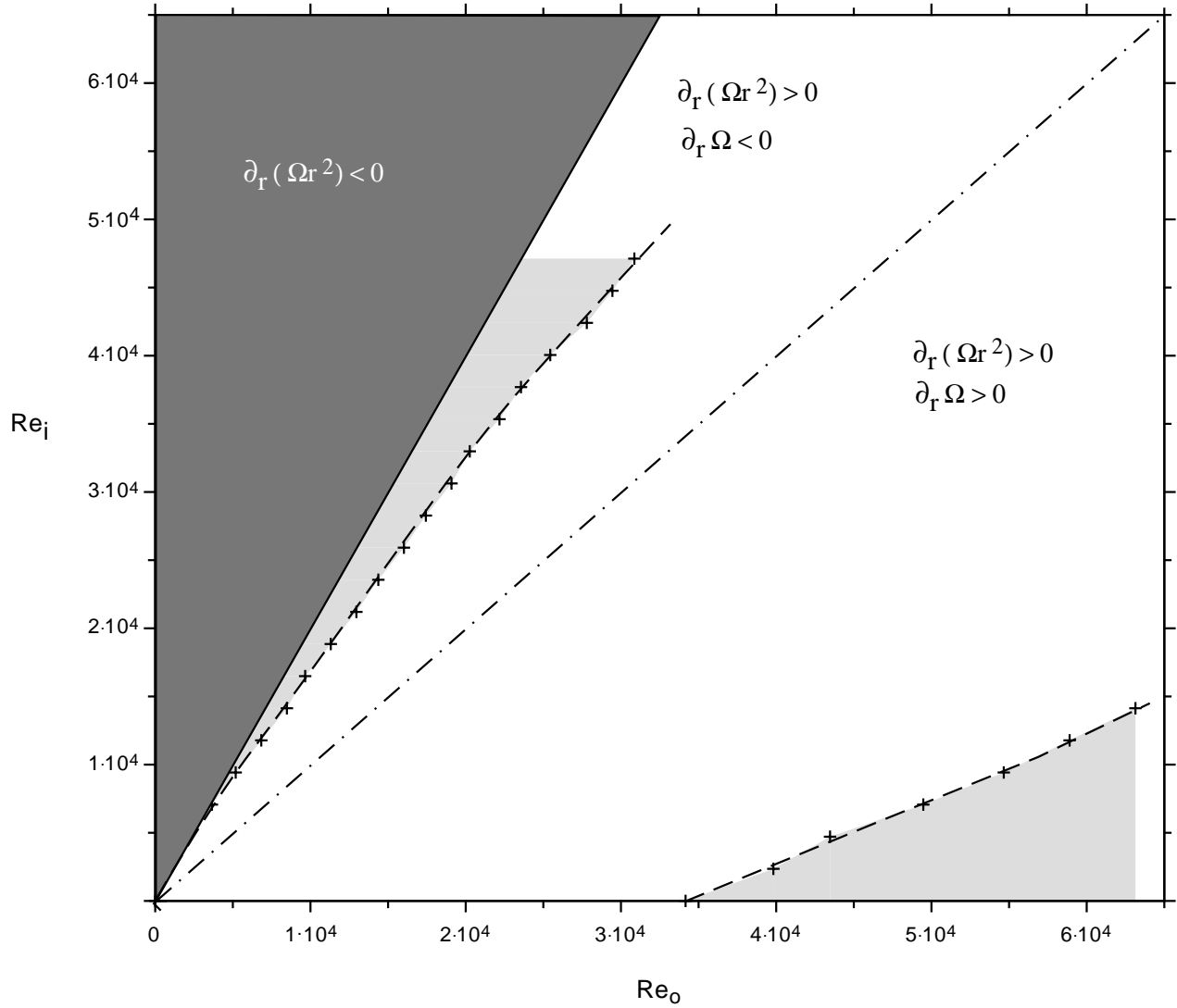


Fig. 4.3: Diagramme de stabilité expérimental; $Re_o = \Omega_o R_o d / \nu$, $Re_i = \Omega_i R_o d / \nu$; Aire gris foncé : domaine théorique de l'instabilité centrifuge; Aires gris clair : domaines linéairement stables où la turbulence est auto-entretenu expérimentalement.

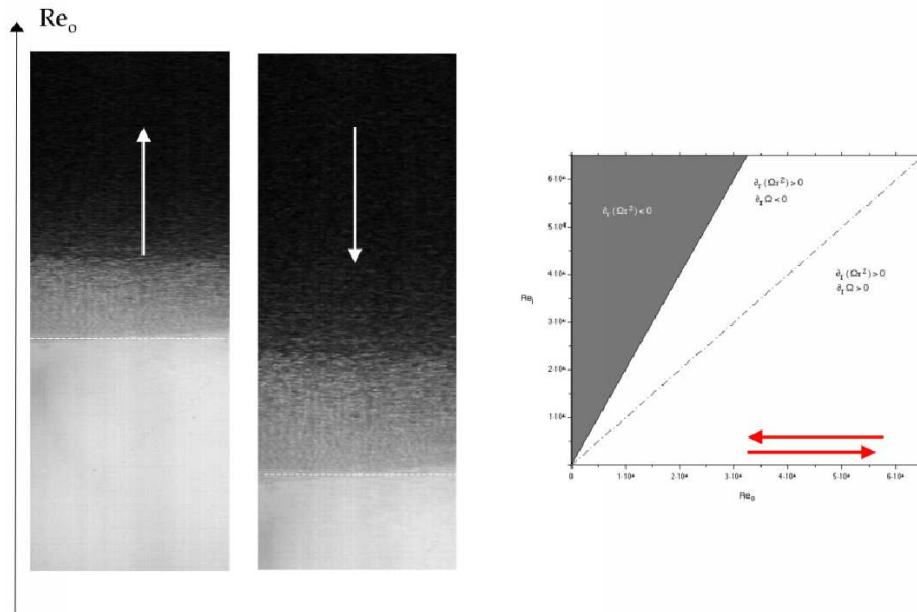


Fig. 4.4: Hystérésis au seuil de l'instabilité. Diagrammes spatio-temporels pour des écoulements entre $Re_o = 3.10^4$ et $Re_o = 5.10^4$. Le diagramme de gauche est obtenu en augmentant progressivement le nombre de Reynolds, celui de droite en le diminuant. La figure de droite représente les deux chemins suivis sur le diagramme $Re_o - Re_i$.

aux écoulements kepleriens peuvent être non-linéairement instables.

4.3.1 Domaine $\partial_r \Omega > 0$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre consacré à la turbulence, une des caractéristiques des instabilités non-linéaires est l'existence de régimes pour lesquels il existe plusieurs états stables. Expérimentalement, cela se traduit d'abord par un seuil pour la transition laminaire-turbulent plus élevé que le seuil turbulent-laminaire. Ceci est vrai pour des expériences comme celle-ci, où l'écoulement n'est pas volontairement perturbé, mais l'est simplement par le bruit expérimental. La largeur de cette plage d'hystérésis entre les deux seuils est variable. En effet, si le seuil de transition turbulent-laminaire ne varie pas – dans les limites de la précision de mesure –, le seuil de déclenchement de l'instabilité en provenance d'un régime laminaire n'est pas fixe. Il dépend des perturbations présentes dans l'écoulement, et est sensible aux moindres variations du bruit expérimental, c'est à dire aux caprices du montage expérimental. Le seuil au dessous duquel la turbulence n'est plus observable se situe à $Re = 34500$ dans notre montage, lorsque le cylindre intérieur est au repos. Le seuil d'apparition de la turbulence en provenance d'un état laminaire se situe typiquement autour de $Re = 45000$.

La figure 4.4 présente deux diagrammes spatio-temporels acquis pour des écoulements pour lesquels $\Omega_i = 0$ en faisant varier le nombre de Reynolds Re_o entre 3.10^4 et 5.10^4 . Ces diagrammes sont construits en faisant l'acquisition par caméra d'un ligne génératrice des cylindres au cours du temps. Le diagramme de gauche est obtenu en augmentant progressivement le nombre de Reynolds, c'est-à-dire en provenant d'un état laminaire pour déclencher la turbulence. Celui de droite est obtenu en diminuant le nombre de Reynolds, donc en provenant d'un écoulement turbulent vers

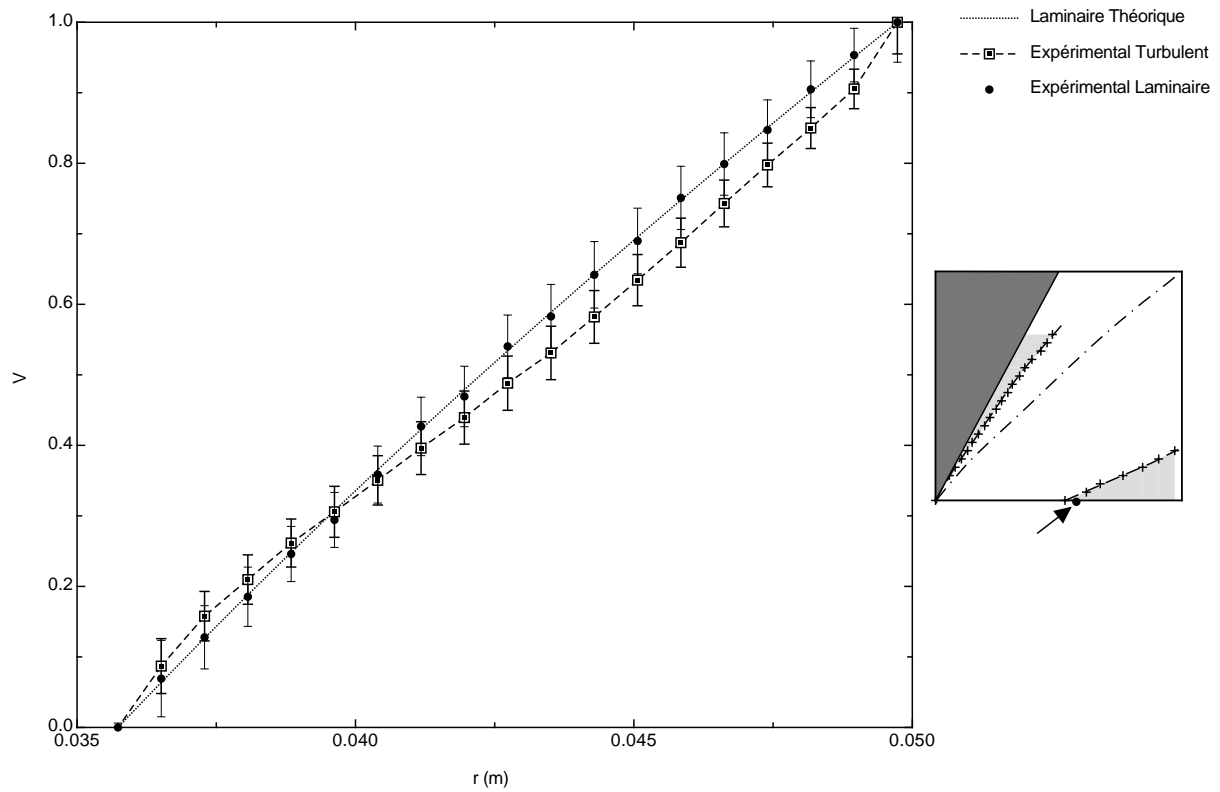


Fig. 4.5: Hystérésis au seuil de l'instabilité. Profil moyen de vitesse azimutale pour un même régime de rotation, atteint par deux chemins différents ($Re = Re_o = 37000$).

unécoulement laminaire, avec la même accélération que le diagramme précédent. Les parties sombres correspondent à des écoulements turbulents. On voit ainsi clairement apparaître la zone d'hystérésis où l'écoulement peut être soit laminaire, soit turbulent, en fonction de son histoire.

La figure 4.5 est une illustration de l'existence de deux états stables pour un même régime de rotation. Le profil de vitesse azimutale est mesuré pour $Re = 37000$ à cylindre extérieur seul en rotation. Les mesures symbolisées par les points noirs sont effectués en parvenant à ce Reynolds en partant d'un état laminaire et en augmentant progressivement la rotation. Cet écoulement est clairement identifiable comme étant encore laminaire par comparaison au profil théorique – ligne pointillée. Le second profil est obtenu en partant d'un état turbulent. L'écoulement demeure turbulent comme le montrent la réduction du gradient de vitesse au centre par rapport au profil laminaire, et la présence de couches limites près des parois.

Cette métastabilité du profil de base – ou bi-stabilité du système – est la preuve de l'existence d'une instabilité aux amplitudes finies.

4.3.2 Domaine $\partial_r \Omega < 0$

L'étude des écoulements dans ce domaine est plus délicate. En effet, si le profil de moment cinétique est déformé par rapport à l'écoulement théorique, il peut en résulter un déplacement de la courbe de stabilité marginale de l'instabilité linéaire, et la turbulence observée pourrait être due à l'instabilité centrifuge.

Le profil de moment cinétique visible figure 4.6 possède un gradient monotone croissant, ce qui exclut la présence de l'instabilité linéaire. La difficulté majeure rencontrée dans l'étude de ces régimes et la persistance de la déformation des profils moyens due aux conditions aux bords. Si la turbulence est bien identifiée visuellement, il n'est pas possible de faire la différence entre les profils obtenus dans les deux cas, laminaire et turbulent, comme ce l'est dans les cas où le gradient de vitesse angulaire est croissant vers l'extérieur. Le phénomène d'hystérésis, clairement établi lorsque le gradient de vitesse angulaire est croissant, n'a pas pu être mis en évidence expérimentalement sur cette seconde courbe de stabilité. Il est dommage d'être ainsi privé de cette signature caractéristique des instabilités aux amplitudes finies. Dans le chapitre suivant nous donnerons une explication possible à cette difficulté de mesurer la métastabilité de l'écoulement près du seuil.

Les nombres de Reynolds des écoulements turbulents explorés dans ce domaine étant plus faibles – en raison de la co-rotation des cylindres – que dans le domaine où Ω est croissant, il est probable que les écoulements observés ne soient pas pleinement turbulents mais intermittents. On peut alors se demander si la signature sur les profils moyens serait aussi franche dans cette hypothèse que dans un écoulement où la turbulence est pleinement développée. Pour ces raisons, dans la suite de ce manuscrit, pour l'étude des mesures quantitatives, nous nous focaliserons essentiellement sur les régimes $\partial_r \Omega > 0$.

4.4 Évolution du Champ Moyen

Les profils moyens de vitesse azimutale, vitesse angulaire et de moment cinétique moyens sont tracés figure 4.7 pour un régime à nombre Reynolds de 70000. Les principales modifications apportées à l'écoulement sont le développement de couches limites près des parois de l'expérience et la linéarisation du profil de vitesse angulaire, de façon comparable aux observations dans un écoulement de Couette plan. On notera par contre la dissymétrie des couches limites. On peut l'expliquer intuitivement en se rappelant que le transport de moment cinétique dans les couches limites visqueuses est donné par le couple :

$$G = \nu r^3 \partial_r \Omega \quad (4.1)$$

où ν est la viscosité *moléculaire*. En régime stationnaire, la valeur moyenne de ce couple doit être égale sur les deux cylindres – conservation du moment cinétique. On en dérive la relation,

$$\frac{[\partial_r \Omega]_{R_i}}{[\partial_r \Omega]_{R_o}} = \left(\frac{R_o}{R_i} \right)^3 \quad (4.2)$$

qui impose la non-symétrie des gradients de vitesse angulaire aux rayons extrêmes, et par conséquent des couches limites visqueuses et turbulentes.

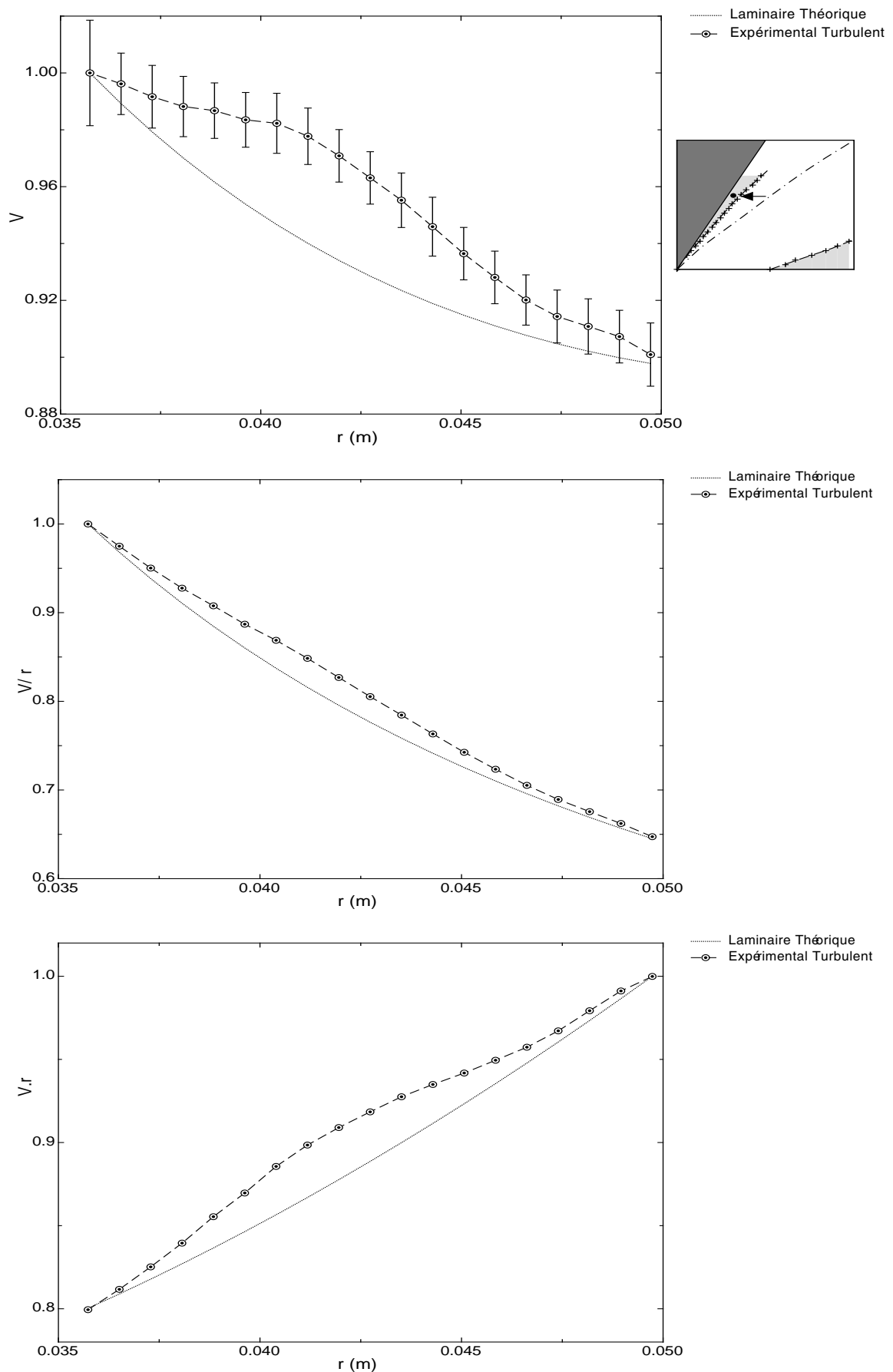


Fig. 4.6: Profils moyens de vitesse azimutale, vitesse angulaire et moment cinétique dans un régime $\Omega_i > \Omega_o$ turbulent. $Re_i = 35350$, $Re_o = 22350$, $Re = 13000$

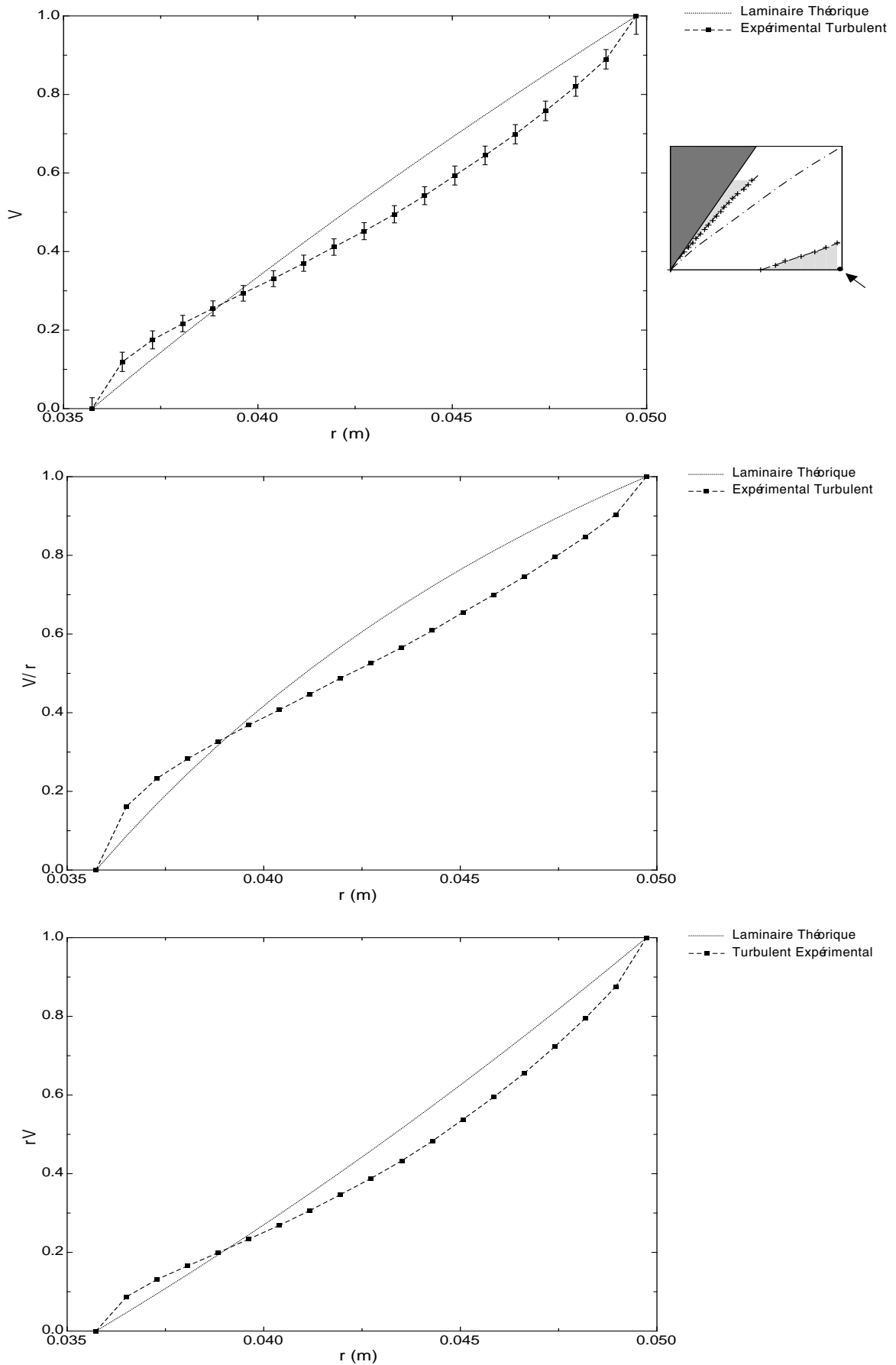


Fig. 4.7: Profils moyens de vitesse azimutale, vitesse angulaire et moment cinétique dans un régime $\Omega_i = 0$ turbulent à $Re = Re_o = 70000$

La mesure de la vitesse azimutale moyenne au centre de l'écoulement permet de suivre l'évolution du fléchissement du profil en fonction du nombre de Reynolds, ce qui est illustré en figure 4.8 (les mesures sont faites à Reynolds décroissant). L'amplitude de la vitesse suit une loi linéaire évidente en régime laminaire. Dans le régime turbulent, l'évolution en fonction du Reynolds demeure linéaire, mais avec pente moindre d'un facteur 0,7.

La courbe équivalente pour le gradient de vitesse angulaire est visible en figure 4.9. Là encore, les deux régimes – turbulent et laminaire – exhibent des comportements linéaires, dont le rapport des pentes est d'environ 0,54. Cela veut dire que contrairement à ce qui est observé dans le cas de l'instabilité centrifuge où le gradient de moment cinétique devient pratiquement nul, il existe toujours un cisaillement résiduel dans le profil turbulent, quel que soit le nombre de Reynolds – du moins dans la plage expérimentale explorée.

4.5 Évolution des Fluctuations

Si les mesures des vitesses moyennes sont d'une très grande précision avec la vélocimétrie laser, il convient d'être un peu plus prudent en ce qui concerne les signaux instantanés, et par conséquent les mesures de fluctuations. En plus des fluctuations propres à l'écoulement, viennent s'ajouter un « bruit » expérimental et un bruit de traitement du signal. La quantité sur laquelle nous nous focalisons dans ce paragraphe – qui sera dénommée *amplitude* des fluctuations – est la variance de la distribution de vitesses mesuré en un point – généralement au centre de l'écoulement.

La figure 4.10 représente l'évolution de l'amplitude des fluctuations de la composante azimutale en fonction du nombre de Reynolds $Re = Re_o$, ainsi que cette même quantité normalisée par la valeur moyenne de la vitesse et par le cisaillement – mesurés au même point. Ces mesures sont faites en allant des hauts vers les bas Reynolds, le cylindre intérieur étant au repos. Une fois encore, l'amplitude des fluctuations suit deux régimes linéaires distincts. Elle sature à environ 0,075 fois la valeur de la vitesse moyenne, et 0,011 fois la valeur du cisaillement $S = r\partial_r\Omega$. Cette saturation des fluctuations en fonction de S paraît assez intuitive étant donné que le cisaillement est la cause de l'instabilité. La valeur de $(u'_\phi)^2 / S = 0.011$ peut être interprétée comme la valeur limite qui peut être atteinte dans l'écoulement turbulent. L'instabilité se développe en altérant le profil de rotation de façon à ce que les fluctuations produites par le cisaillement résiduel ne dépassent pas ce seuil. Une explication de ce comportement sera donnée dans le chapitre suivant.

Les fluctuations de la composante axiale de la vitesse ont une évolution comparable (Fig. 4.11). Leur amplitude beaucoup plus faible que celles de la composante azimutale – environ un ordre de grandeur – dans le régime laminaire, devient comparable dans le régime turbulent. Le rapport de leurs amplitudes sature à une valeur proche de 1,5 (cf. Fig. 4.12). Cette quantité est une mesure de l'anisotropie de la turbulence pour ces deux directions. Il faut pondérer cette valeur numérique par « l'anisotropie » de la mesure elle-même. En effet, la vitesse moyenne azimutale est de l'ordre du mètre par seconde, alors que la valeur moyenne pour la vitesse axiale est proche de la valeur nulle. L'erreur de mesure est donc a priori plus grande sur la composante azimutale, et cette valeur de 1,5 doit être alors comprise comme une borne supérieure.

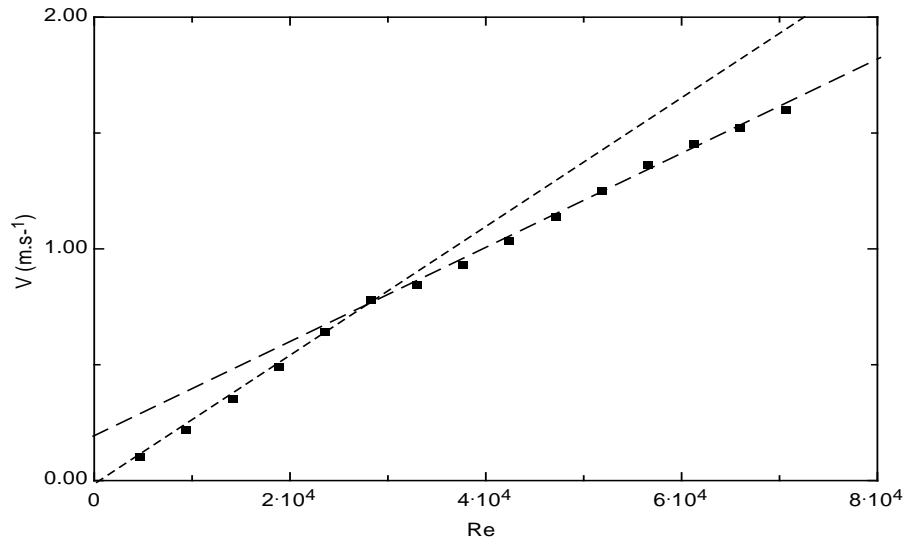


Fig. 4.8: Vitesse azimutale moyenne au centre de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds.

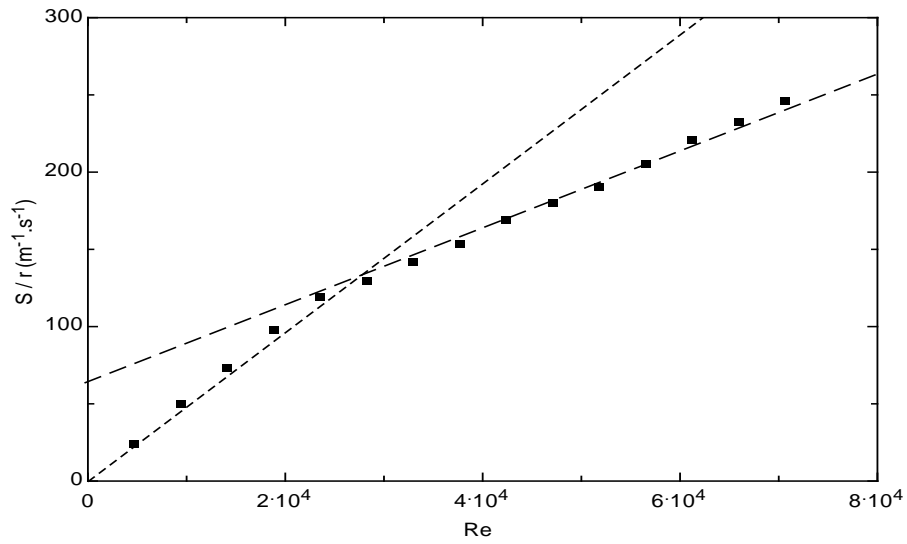


Fig. 4.9: Gradient de vitesse angulaire $S/r = \partial_r \Omega$ au centre de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds.

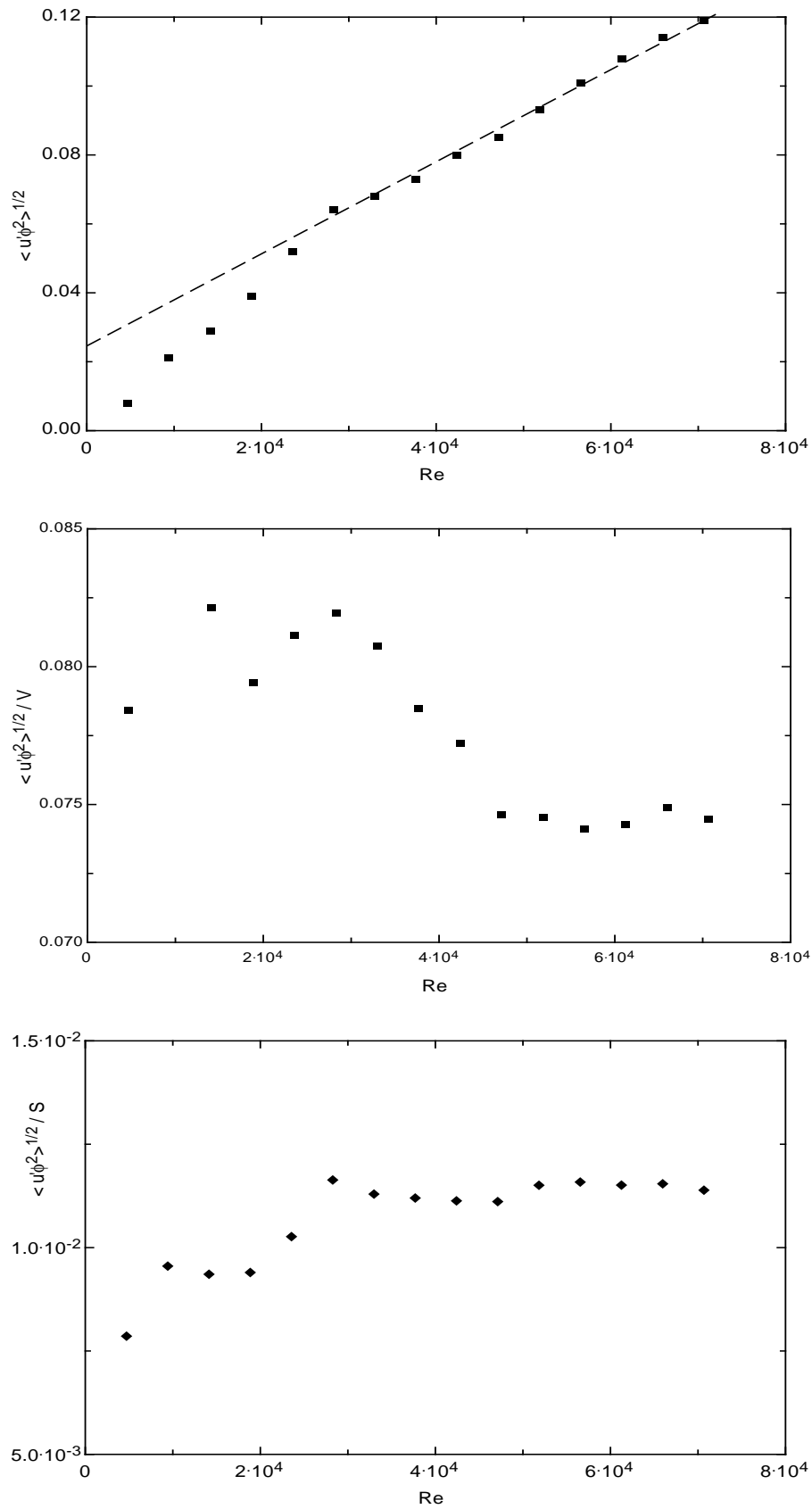


Fig. 4.10: Amplitude des fluctuations de la vitesse azimutale par rapport à sa valeur moyenne au centre de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds; en haut : valeurs brutes; au centre : valeurs normalisées par la valeur moyenne de la vitesse V au même point; en bas : valeurs normalisées par la valeur moyenne du cisaillement S au même point.

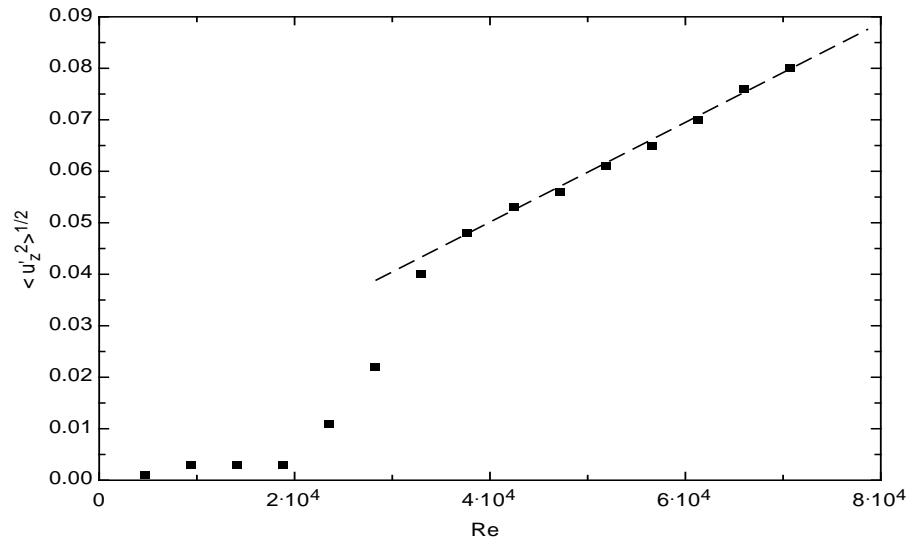


Fig. 4.11: Amplitude des fluctuations de la vitesse axiale en fonction du nombre de Reynolds.

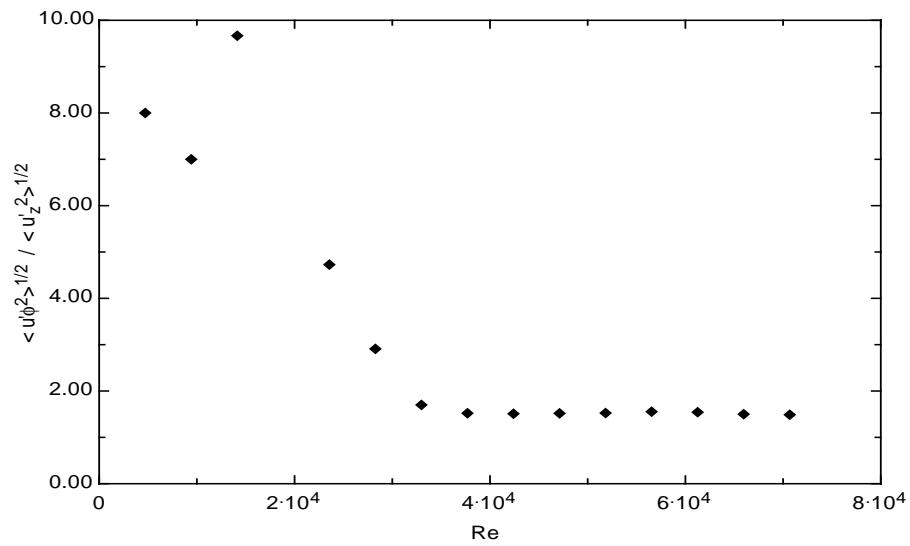


Fig. 4.12: Rapport des amplitudes des fluctuations azimutales et axiales en fonction du nombre de Reynolds.

4.6 Discussion

Cette étude expérimentale du Couette-Taylor a permis de mettre en évidence les domaines de paramètres pour lesquels un écoulement cisaillé en rotation est susceptible de devenir turbulent. Deux domaines distincts ont été trouvés dans des régimes stables pour l'analyse linéaire, c'est à dire dont le gradient de moment cinétique est croissant vers l'extérieur.

Le premier domaine se situe entre la courbe de stabilité marginale de l'instabilité linéaire et la rotation solide. Il s'agit d'écoulements pour lesquels le gradient de vitesse angulaire est décroissant vers l'extérieur. Pour l'Astrophysique, ces régimes sont similaires aux profils de rotation kepleriens rencontrés dans les modèles de disques minces. A la fois l'instabilité et le régime turbulent sont difficiles à caractériser dans notre expérience. Nous n'avons pas pu démontrer le caractère non-linéaire de l'instabilité et les données acquises sur le régime turbulent sont difficilement exploitables. Une amélioration des conditions aux bords paraît inévitable pour une étude plus poussée dans ce cas. Elle pourrait passer par l'ajout d'un troisième anneau au fond et en haut de l'expérience, dont la vitesse de rotation serait réglable par l'expérimentateur de façon à minimiser la déformation du profil. Du point de vue technique, cette solution n'apparaît cependant pas triviale à mettre en œuvre. Il serait également intéressant d'explorer des régimes à plus haut Reynolds, mais il paraît délicat de la faire sans être dominé par le bruit expérimental.

Le second domaine concerne des écoulements pour lesquels le gradient de vitesse angulaire est croissant vers l'extérieur. En Astrophysique, cette situation se rencontre en particulier dans les intérieurs stellaires. L'instabilité présente des signes évidents caractéristiques des instabilités aux amplitudes finies tels que les régimes de bi-stabilité et leur expression par le phénomène d'hystérésis. Nous avons pu mettre en évidence le comportement des fluctuations turbulentes et des principales quantités moyennes des écoulements. En particulier, contrairement à l'idée intuitive que le cisaillement devrait saturer asymptotiquement pour les grands nombres de Reynolds, il apparaît que c'est le rapport des fluctuations turbulentes sur le cisaillement qui présente cette propriété. A la fois les fluctuations turbulentes et le cisaillement évoluent linéairement en fonction du nombre de Reynolds de façon à ce que cette quantité reste constante.

Une donnée cruciale nous manque encore. Il s'agit du couple exercé par le fluide sur les cylindres, qui permettrait une mesure du transport de moment cinétique turbulent. Les solutions commercialisées se sont avérées insuffisantes pour notre expérience en raison des couples créés par les composantes mécaniques du montage expérimental lui-même (joints, roulements,...). Pour s'en affranchir, des techniques permettant la mesure de ce couple directement dans l'écoulement sont en cours de réalisation. D'autre part, une grande quantité de données expérimentales acquises au cours de ce travail restent à être analysées.

Il serait également intéressant d'étudier la structure spatio-temporelle de la turbulence, notamment au seuil de l'instabilité par des techniques similaires à celles employées par Bottin (1998). Cependant ce type d'étude nécessite des modifications importantes du montage expérimental.

Une Tentative d'Interprétation

« *Everything should be made as simple as possible, but not simpler* » A.Einstein

Nous ne prétendons pas ici fournir une analyse de stabilité des écoulements en rotation différentielle, mais plutôt fournir quelques indices et traquer les mécanismes de base à l'œuvre dans l'instabilité, par des arguments simples et intuitifs. L'objectif est d'essayer de se faire une idée sur les paramètres pertinents qui pourraient jouer un rôle dans la stabilité de l'écoulement en regardant les équations qui gouvernent l'évolution des fluctuations turbulentes en liaison avec le champ moyen.

5.1 Équations du Transport Turbulent

5.1.1 Équations Générales

Considérons un écoulement en géométrie cylindrique et décomposant le en écoulement moyen et en perturbations

$$\vec{U} = \vec{u} + \vec{u}' \quad (5.1)$$

où \vec{U} est le champ de vitesse total, \vec{u} est l'écoulement moyen et \vec{u}' est le champ de fluctuations turbulentes. L'équation du mouvement est :

$$\partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U}. \quad (5.2)$$

En décomposant le champ tel qu'en Eq.(5.1), multipliant l'Eq.(5.2) par \vec{u}' le champ de perturbations, en effectuant une moyenne spatiale, on trouve l'équation d'évolution pour chaque composante des fluctuations turbulentes (sauf erreur typographique...)

$$\begin{aligned} & \overline{\partial_t u_r'^2} + \overline{u_r \partial_r u_r'^2} + \frac{\overline{u_\phi}}{r} \partial_\phi \overline{u_r'^2} + \overline{u_z} \partial_z \overline{u_r'^2} - 2 \frac{\overline{u_\phi}}{r} \overline{u_r' u_\phi'} \\ & = - 2 \left(\overline{u_r'^2} \partial_r \overline{u_r} + \overline{u_r' u_\phi'} \left(\frac{\partial_\phi \overline{u_r}}{r} - \frac{\overline{u_\phi}}{r} \right) + \overline{u_r' u_z} \partial_z \overline{u_r} \right) \\ & \quad - \overline{2 u_r' \left(\frac{1}{r} \partial_r (r u_r'^2) + \frac{1}{r} \partial_\phi (u_r' u_\phi') - \frac{u_\phi'^2}{r} + \partial_z (u_r' u_z') \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\frac{1}{\rho}\overline{p'\partial_r u_r'} - 2\frac{1}{\rho}\overline{\partial_r(p'u_r')} \\
 & - \nu \left[2\overline{(\partial_r u_r')^2} + \overline{(\partial_r u_\phi')^2} + \overline{(\partial_r u_z')^2} + \overline{\left(\frac{1}{r}\partial_\phi u_r' - \frac{u_\phi'}{r}\right)^2} + \overline{(\partial_z u_r')^2} \right] \\
 \\
 \partial_t \overline{u_\phi'^2} & + \overline{u_r} \partial_r \overline{u_\phi'^2} + \frac{\overline{u_\phi}}{r} \partial_\phi \overline{u_\phi'^2} + \overline{u_z} \partial_z \overline{u_\phi'^2} + 2\frac{\overline{u_\phi}}{r} \overline{u_r' u_\phi'} \\
 & = - 2 \left(\overline{u_r' u_\phi'} \partial_r \overline{u_\phi} + \overline{u_\phi'^2} \left(\frac{\partial_\phi \overline{u_\phi}}{r} + \frac{\overline{u_r}}{r} \right) + \overline{u_\phi' u_z'} \partial_z \overline{u_\phi} \right) \\
 & - \overline{2u_\phi' \left(\frac{1}{r} \partial_\phi (u_\phi'^2) + \partial_r (u_r' u_\phi') + 2\frac{u_r' u_\phi'}{r} + \partial_z u_\phi' u_\phi' \right)} \\
 & + 2\frac{1}{\rho} \overline{p' \left(\frac{1}{r} \partial_\phi u_\phi' \right)} - 2\frac{1}{\rho} \overline{\left(\frac{1}{r} \partial_\phi (p'u_\phi') \right)} \\
 & - \nu \left[\overline{(\partial_r u_\phi')^2} + \frac{1}{r^2} \overline{(\partial_\phi u_z')^2} + \overline{(\partial_z u_\phi')^2} + 2\overline{\left(\frac{1}{r} \partial_\phi u_\phi' + \frac{u_r'}{r} \right)^2} + \overline{\left(\frac{1}{r} \partial_\phi u_r' + \frac{u_\phi'}{r} \right)^2} \right] \\
 \\
 \partial_t \overline{u_z'^2} & + \overline{u_r} \partial_r \overline{u_z'^2} + \frac{\overline{u_\phi}}{r} \partial_\phi \overline{u_z'^2} + \overline{u_z} \partial_z \overline{u_z'^2} \\
 & = - 2 \left(\overline{u_r' u_z'} \partial_r \overline{u_z} + \overline{u_z' u_\phi'} \frac{\partial_\phi \overline{u_z}}{r} + \overline{u_z'^2} \partial_z \overline{u_z} \right) \\
 & - \overline{2u_z' \left(\frac{1}{r} \partial_r (r u_r' u_z') + \frac{1}{r} \partial_\phi (u_\phi' u_z') + \partial_z u_z'^2 \right)} \\
 & + 2\frac{1}{\rho} \overline{p' \partial_z u_z'} - 2\frac{1}{\rho} \overline{\partial_z (p'u_z')} \\
 & - \nu \left[2\overline{(\partial_r u_\phi')^2} + \frac{1}{r^2} \overline{(\partial_z u_z')^2} + \overline{(\partial_r u_z')^2} + 2\overline{(\partial_z u_r')^2} + \overline{(\partial_z u_\phi')^2} \right].
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Nous considérons un écoulement moyen azimuthal ($\overline{u_r} = \overline{u_z} = 0$), à symétries axiale et azimuthale. On pose $\frac{\overline{u_\phi}}{r} = \Omega$. On définit U et L les vitesses et échelle de variation caractéristiques de l'écoulement à grande échelle et u' et $\lambda = (\overline{\partial_x u' / u'})^{-1}$ ces mêmes grandeurs pour les fluctuations. Les équations précédentes peuvent s'écrire :

$$\frac{1}{2} \partial_t \overline{u_r'^2} = 2\Omega \overline{u_r' u_\phi'} + O\left(\frac{u'^3}{\lambda}\right) + O\left(\frac{u'^3}{r}\right) \tag{5.4}$$

$$\frac{1}{2} \partial_t \overline{u_\phi'^2} = -\frac{\partial_r \Omega r^2}{r} \overline{u_r' u_\phi'} + O\left(\frac{u'^3}{\lambda}\right) + O\left(\frac{u'^3}{r}\right) \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{2} \partial_t \overline{u_z'^2} = O\left(\frac{u'^3}{\lambda}\right). \tag{5.6}$$

Les termes de couplage au champ moyen des composantes radiale et azimutale (Eq. (5.4) et Eq. (5.5)) sont d'ordre de grandeur $U\overline{u'^2}/r$. On suppose que $\lambda \ll r$ et par conséquent les termes d'ordre $\overline{u'^3}/r$ sont négligeables devant termes d'ordre $\overline{u'^3}/\lambda$. On notera que les termes de fluctuation de pression sont inclus dans les termes d'ordre $O(\overline{u'^3}/\lambda)$.

5.2 Couplage Grandes Échelles - Fluctuations

Dans chacune des équations (5.4) et (5.5) le premier terme du second membre représente le couplage entre les fluctuations turbulentes et le champs de vitesse à grande échelle. On note que, dans le cas d'un écoulement dont la stratification de moment angulaire est stable ($\partial_r \Omega r^2 > 0$), ces termes apparaissent avec des signes opposés. Il semble donc que si l'on ne considère que le couplage grandes-petites échelles on ne puisse faire croître simultanément les fluctuations pour les composantes radiales et azimutales de la vitesse. Pourtant, le terme correspondant à ce couplage dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente totale s'écrit :

$$\partial_t k = -\overline{u'_r u'_\phi} r \partial_r \Omega + O(u'^3/\lambda). \quad (5.7)$$

Cette dernière équation fournit une condition sur le signe de $\overline{u'_r u'_\phi}$ pour que ce terme de la dérivée de l'énergie cinétique turbulente totale soit positif :

$$\text{Si } \partial_r \Omega > 0 \text{ (resp. } < 0\text{), alors } \overline{u'_r u'_\phi} < 0 \text{ (resp. } > 0\text{)} .$$

Or, $\overline{u'_r u'_\phi} > 0$ (respectivement, < 0) implique que le moment cinétique ΩR^2 , et donc la vitesse angulaire Ω , sont transportés vers les rayons croissants (respectivement, décroissants). Ce terme met en évidence la tendance des fluctuations turbulentes à réduire le cisaillement moyen dans l'écoulement.

5.3 De l'Importance des Termes Non-Linéaires

5.3.1 Production

L'équation pour l'énergie turbulente totale (5.7) nous indique que, en régime stationnaire, les fluctuations de vitesses se comportent comme

$$\frac{u'}{\lambda} \sim r \partial_r \Omega, \quad (5.8)$$

5.3.2 Contraintes

Les seuls termes de couplage entre champ moyen et fluctuations ne permettent a priori pas de maintenir la turbulence. Or, ces termes sont linéaires alors que les instabilités de cisaillement sont de nature non-linéaire. On cherche donc les conditions sur u' et λ pour que les termes d'ordre trois soient supérieurs aux contraintes et à la dissipation visqueuse. Pour la dissipation visqueuse, il suffit que

$$u' \cdot \lambda \gtrsim \nu. \quad (5.9)$$

Lorsque $\partial_r \Omega < 0$ le terme de couplage avec l'écoulement moyen pour la composante azimutale des fluctuations est un puits. La condition sur u' et λ pour que les termes non-linéaires soient d'importance au moins égale au couplage et que la turbulence puisse s'auto-entretenir est

$$u'^2 \frac{\partial_r \Omega r^2}{r} \lesssim \frac{u'^3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{\lambda} \gtrsim \frac{\partial_r \Omega r^2}{r}. \quad (5.10)$$

En utilisant l'équation (5.9),

$$u'^2 \gtrsim \nu \frac{\partial_r \Omega r^2}{r}. \quad (5.11)$$

Lorsque $\partial_r \Omega > 0$, c'est pour la composante radiale des fluctuations que le couplage est un puits. La condition précédente sur les fluctuations devient alors :

$$u'^2 2\Omega \lesssim \frac{u'^3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{\lambda} \gtrsim 2\Omega \quad (5.12)$$

et de la même façon,

$$u'^2 \gtrsim 2\Omega \nu. \quad (5.13)$$

Les équations (5.11) et (5.13) décrivent le comportement de l'amplitude critique des perturbations nécessaires pour déclencher la turbulence en fonction du profil de rotation, dans les deux différents régimes qui nous intéressent.

5.4 Critère de Stabilité & Amplitude Critique

Cherchons maintenant dans quels régimes il est possible d'entretenir un écoulement turbulent. Il suffit pour cela que la production d'énergie cinétique turbulente soit supérieure aux contraintes. Dans le cas des régimes pseudo-keplériens ($\partial_r \Omega < 0$, $\partial_r(\Omega r^2) > 0$), la condition nécessaire s'exprime par :

$$u'^2 \sim \lambda^2 (r \partial_r \Omega)^2 \gtrsim \frac{\nu \partial_r \Omega r^2}{r} \quad (5.14)$$

soit,

$$X = \frac{\lambda r \partial_r \Omega}{\sqrt{\nu \frac{1}{r} \partial_r \Omega r^2}} \gtrsim O(1) \quad (5.15)$$

Dans le régime pour lequel $\partial_r \Omega > 0$, $\partial_r(\Omega r^2) > 0$, le même raisonnement conduit à

$$Y = \frac{\lambda r \partial_r \Omega}{\sqrt{2\nu \Omega}} \gtrsim O(1). \quad (5.16)$$

5.5 Discussion

5.5.1 Paramètres de Stabilité

L'analyse des données expérimentales de Wendt et Taylor nous a montré que l'échelle caractéristique des fluctuations turbulentes semble être constante, quelque soit le régime de rotation ou la géométrie de l'expérience. On fait donc

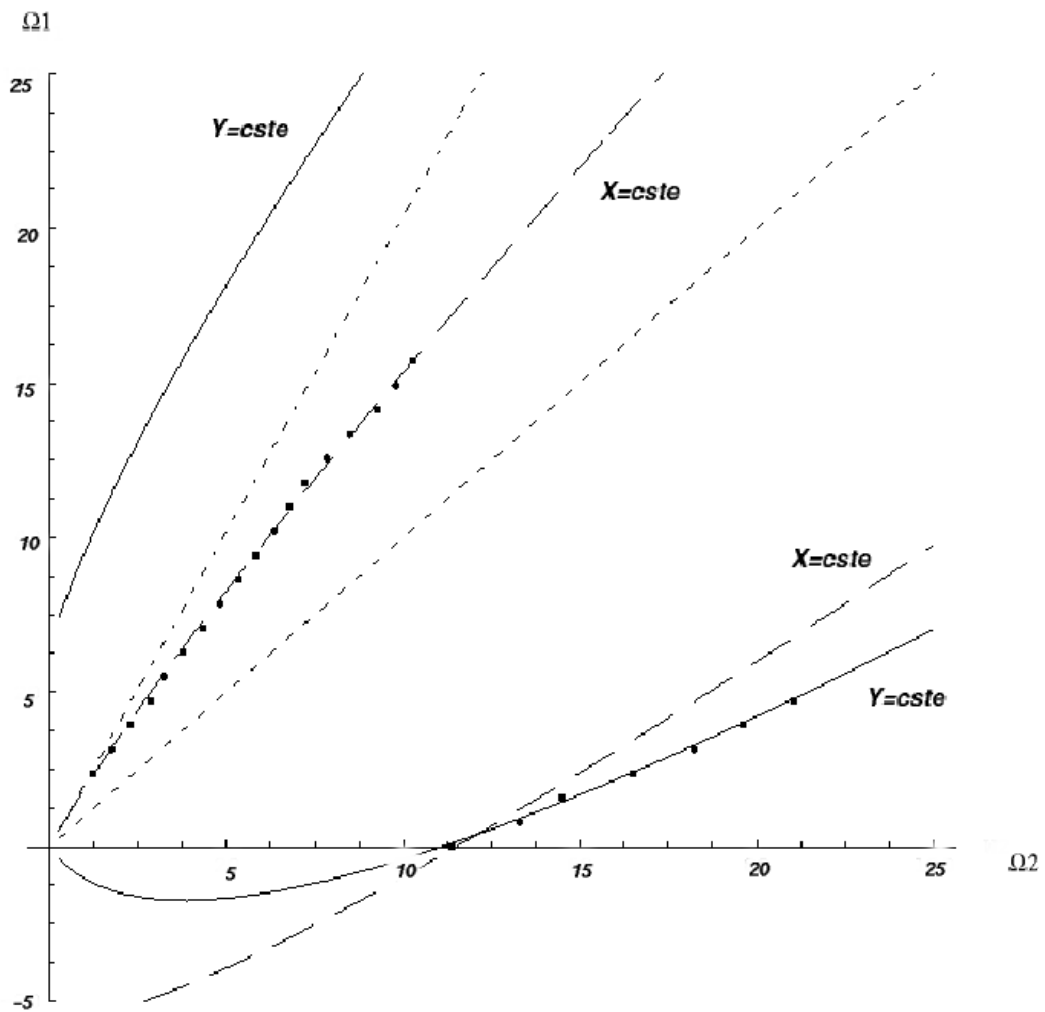


Fig. 5.1: Courbes d'iso-valeurs des paramètres X et Y (5.15 - 5.16) s'ajustant au mieux aux seuils expérimentaux. La courbe en trait plein est valable dans le demi-plan $\partial, \Omega > 0$, la courbe en traits interrompus dans le demi-plan $\partial, \Omega < 0$. Elles sont tracées sur tout le plan pour information.

l'hypothèse que le paramètre λ est une constante. La figure 5.1 montre que les points expérimentaux semblent bien se placer sur des courbes où les paramètres (5.15) et (5.16) sont constants – dans leurs domaines d'application respectifs. Malgré la « naïveté » de l'analyse de la section précédente, les paramètres qu'elle suggère semblent donc pertinents pour la stabilité.

5.5.2 Amplitudes Critiques et Hystérésis

Le comportement de l'amplitude critique des perturbations pour déclencher l'instabilité est donné par les relations (5.11) et (5.13). Dans les régimes $\partial_r \Omega > 0$, cette amplitude est une fonction croissante du cisaillement. Pour $\partial_r \Omega < 0$, elle est d'autant plus faible que le gradient de moment cinétique est faible. On notera qu'elle s'annule sur la courbe de stabilité linéaire. Ce comportement peut expliquer l'absence d'hystérésis expérimentale pour ce régime. En effet, le gradient de moment cinétique étant faible sur la courbe de stabilité que nous observons, l'amplitude critique est également faible et le bruit expérimental pourrait être suffisant pour déclencher spontanément l'instabilité au seuil de stabilité inconditionnel, et ainsi empêcher l'observation d'un état stable dans la zone de bi-stabilité.

On notera également que l'équation (5.8) implique que les fluctuations turbulentes varient linéairement par rapport au cisaillement moyen, comme il est observé expérimentalement.

5.5.3 Viscosité Turbulente

Nous pouvons également rechercher une expression de la viscosité turbulente, en utilisant la modélisation classique $\nu_t \propto u' \lambda$, avec $u' \propto \lambda r \partial_r \Omega$, et en faisant l'hypothèse que λ est proportionnel à r il s'en suit que

$$\nu_t \propto r^3 \partial_r \Omega, \quad (5.17)$$

ce qui est en accord avec l'analyse des données de Wendt (1933) et Taylor (1936) (cf. section 3.5.3).

5.6 Conclusion

Malgré la naïveté des arguments de ce chapitre, il semble que les paramètres de contrôle et le comportement des fluctuations turbulentes qui en découlent ne soient pas totalement dénués d'intérêt pour notre problème. Quelques expériences supplémentaires telles que l'utilisation de perturbations d'amplitudes contrôlées, ou l'utilisation de différents rapports d'aspects R_i/R_o pourraient permettre de vérifier la pertinence des variations prédites pour les amplitudes critiques et les paramètres de contrôle.

Troisième partie

Une Application aux Disques d'Accrétion

Application au Transport dans les Disques d'Accrétion

Ce chapitre a pour but d'examiner dans quelles conditions une viscosité turbulente de la forme de celle dérivée à partir des expériences de laboratoire sur les fluides en rotation différentielle peut être appliquée aux disques d'accrétion.

6.1 Rotation Keplerienne

Le modèle standard utilisé pour la modélisation des disques d'accrétion est un modèle stationnaire uni-dimensionnel en équilibre hydrostatique. Dans l'hypothèse où le disque est mince, c'est à dire si sa hauteur $H(r)$ est petite devant le rayon local r , il peut être considéré en première approximation comme étant en rotation Keplerienne circulaire. Sa vitesse azimutale est donné par la balance des forces centrifuge et de gravité :

$$\frac{u_\phi^2}{r} = \frac{GM}{r^2}, \quad (6.1)$$

où G est la constante de la gravitation universelle, et M la masse de l'objet central. La vitesse angulaire du disque est donc

$$\Omega(r) = \Omega_K = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}. \quad (6.2)$$

Pour que cette approximation soit valable, il faut que la vitesse d'accrétion du gaz u_r soit petite devant la vitesse de rotation. La composante radiale des équations du mouvement s'écrit en régime stationnaire :

$$u_r \partial_r u_r - \frac{u_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \partial_r P - \frac{GM}{r^2}. \quad (6.3)$$

Le disque étant en équilibre hydrostatique, il vérifie :

$$\frac{1}{\rho} \partial_z P = -\frac{GMz}{r^3} \quad (6.4)$$

où z est la distance au plan équatorial. En estimant $z \propto H$, $\partial_z P \propto P/H$ et $P \propto \rho c_s^2$, où c_s est la vitesse du son locale, il s'en suit que

$$H \propto c_s \left(\frac{r}{GM} \right)^{1/2} r. \quad (6.5)$$

La condition sur l'épaisseur du disque $H/r \ll 1$ revient donc à imposer que la vitesse du son soit très petite devant la vitesse de rotation keplerienne. Il en découle que le terme de pression de l'équation 6.1, qui est de l'ordre de c_s^2/r est négligeable devant la force de gravité. De même, si l'on impose que la vitesse radiale demeure subsonique, alors le terme non-linéaire est également négligeable. Les termes restant en balance sont donc bien la force centrifuge et la gravité.

Pour permettre l'accrétion en régime stationnaire, sans l'action de forces extérieures, il est indispensable pour le disque de trouver un mécanisme interne qui puisse évacuer du moment angulaire vers l'extérieur. La viscosité moléculaire du gaz est bien trop faible pour expliquer les taux d'accrétion observés. On fait donc en général appel à la viscosité turbulente. La prescription la plus employée date de 1973 et est due à Shakura et Sunyaev. Considérant que la taille des structures turbulentes dans un disque ne pouvait pas excéder sa hauteur, et que leur vitesse devait demeurer sub-sonique, ils proposèrent la prescription maintenant dénommée « alpha » :

$$\nu_t = \alpha c_s H \quad (6.6)$$

où α doit être inférieur à l'unité. Cette prescription n'est donc pas basée sur un quelconque processus physique à l'origine de la turbulence, mais sur des contraintes simples imposées à ces échelles caractéristiques. Malgré cela, les modèles utilisant cette « recette » ont permis de mieux comprendre les disques d'accrétion. Les contraintes observationnelles étant peu nombreuses pour ces objets, cela signifie essentiellement que l'on comprend leur dynamique générale, et non que les modèles α sont réalistes.

6.2 Instabilités Linéaires et Développement Non-Linéaire

L'origine de la turbulence dans les disques a été considérée comme problématique depuis les premiers modèles de type standard. Shakura & Sunyaev proposèrent déjà en 1973 la rotation différentielle comme possible source. Les nombres de Reynolds étant si élevés dans les disques, il paraissait peu probable qu'un tel écoulement puisse demeurer laminaire. En effet, il n'a jamais été observé d'écoulement qui au dessus d'un nombre de Reynolds de quelques milliers ne trouve de moyens d'exprimer ses non-linéarités. Mais la stabilité linéaire de la rotation keplerienne, et le manque de certitudes ou d'observations expérimentales d'instabilités non-linéaires troublèrent la communauté Astrophysique. En 1991, Balbus & Hawley revisitèrent une instabilité magnéto-hydrodynamique dérivée en 1960 par Chandrasekhar. L'instabilité magnéto-rotationnelle est une instabilité linéaire qui naît du couplage entre un champ magnétique faible et l'écoulement cisailé. Balbus & Hawley l'appliquèrent aux disques d'accrétion.

On pourrait alors penser que le problème de la turbulence dans les disques d'accrétion est réglé. Pourtant il subsiste quelques zones d'ombre au tableau. Tout d'abord cette instabilité ne fonctionne pas pour tous les disques d'accrétion, en particulier dans les disques peu ionisés tels que les nébuleuses proto-planétaires. Ensuite, il se pose le problème de l'évolution non-linéaire de l'instabilité. Nous avons vu dans le cas du Couette-Taylor comment le transport de moment

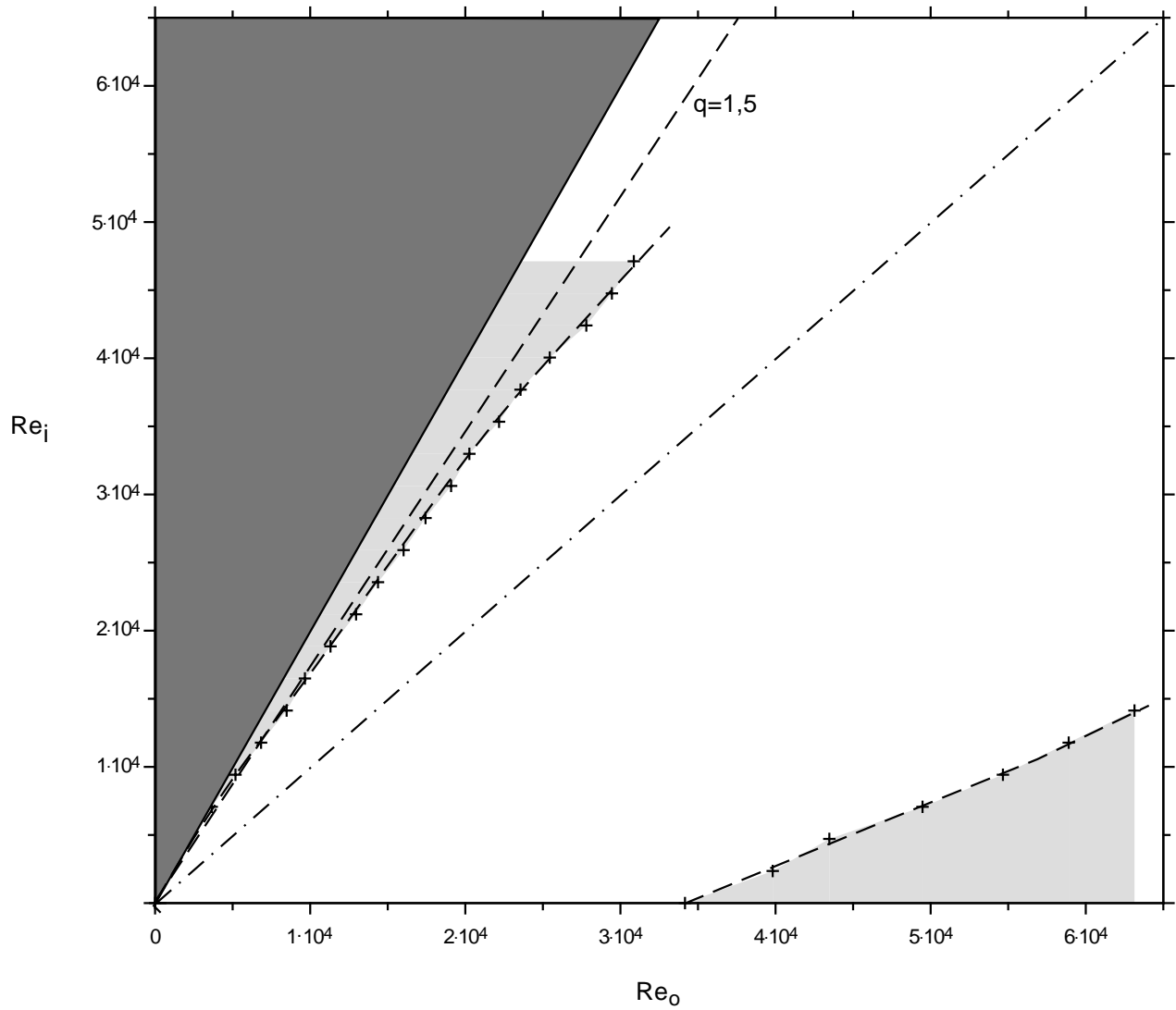


Fig. 6.1: Position des écoulements $q = -\Delta \ln(\Omega)/\Delta \ln(R)$ – « type Keplerien » – dans le diagramme de stabilité expérimental.

cinétique n'a pas le même comportement après le seuil de l'instabilité centrifuge et à plus haut régime. Nous y avons soupçonné le développement d'une autre instabilité semblable à l'instabilité de cisaillement. Extrapoler le comportement près du seuil pour des hauts Reynolds serait donc une erreur. Par conséquent, trouver une instabilité dans un système ne signifie pas comprendre son comportement pour tous les régimes qui lui sont accessibles.

La compréhension des disques d'accrétion passe par la connaissance des propriétés dynamiques dans les régimes non-linéaires. Il est probable que cette dynamique ne soit comprise que lorsqu'il sera possible de simuler des disques tri-dimensionnels incluant toute la physique présente dans ces objets. En attendant, il nous reste à tenter de les modéliser en utilisant des prescriptions dérivées de nos connaissances des processus physiques de base. C'est que nous allons essayer de faire dans la suite.

6.3 Une Autre Viscosité pour les Disques

La figure 6.1 place les écoulements de « type Keplerien » dans le diagramme de stabilité expérimental. Il s'agit des régimes de rotation tels que $q = -\Delta \ln(\Omega) / \Delta \ln(R)$ est égal à 1.5. Ces écoulements se situent à l'intérieur du domaine turbulent identifié sous la courbe de stabilité linéaire. Au vu de ce résultat, il est légitime de se demander si un modèle de disques d'accrétion comme le modèle standard reste viable avec une viscosité turbulente de la forme de celle déduite pour la turbulence en laboratoire. Pour un écoulement en rotation keplerienne, elle se réduit à (prescription β) :

$$\nu_t = \beta \Omega_K r^2 \quad (6.7)$$

Il est intéressant de noter que ce type de viscosité a déjà été employé dans le passé et justifié avec des arguments totalement différents des nôtres. La première apparition de cette forme date de 1974 par Lynden-Bell & Pringle. Plus récemment, elle a été réintroduite par Duschl et al. (2000) en argumentant que les seules quantités pertinentes dans la dynamique d'un disque en rotation keplerienne sont la vitesse angulaire et le rayon.

La publication reproduite ci-après est l'étude de quelques propriétés fondamentales d'un modèle de disque mince, semblable au modèle standard, utilisant la prescription β . Nous y explorons les conditions dans lesquelles cette prescription peut être appliquée – en terme de contraintes sur l'épaisseur du disque et sur le nombre de Mach turbulent – ainsi que les propriétés de stabilité visqueuse et thermique. Elle est suivie du compte-rendu d'une présentation aux rencontres de l'EAS qui se sont déroulées Toulouse en 1999.

Accretion discs models with the β -viscosity prescription derived from laboratory experiments

J.-M. Huré^{1,2}, D. Richard^{2,3}, and J.-P. Zahn³

¹ DAEC et UMR 8631 du CNRS, Observatoire de Paris, Place Jules Janssen, 92195 Meudon Cedex, France

² Université Paris 7 Denis Diderot, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

³ DASGAL et UMR 8633 du CNRS, Observatoire de Paris, Place Jules Janssen, 92195 Meudon Cedex, France

Received 7 September 2000 / Accepted 20 November 2000

Abstract. We examine under which conditions one may apply, to steady state Keplerian accretion discs, the β -viscosity prescription which has been derived from rotating shear flow experiments ($\nu = \beta\Omega R^2$, where Ω is the angular velocity at radius R and β is a constant of order 10^{-5} ; Richard & Zahn 1999). Using a vertically averaged model, we show that this law may be suitable for all three families of known systems: in young stellar objects, evolved binary stars and Active Galactic Nuclei discs (except in their outer gas pressure dominated regions where turbulence becomes hypersonic). According to the standard criterion for viscous stability, β -discs are always stable throughout. Using realistic opacities and equation of state, we demonstrate that these discs are thermally unstable in the temperature domain where hydrogen recombines, when they are optically thick, and this could lead to limit cycle behavior. Radiation pressure dominated regions are thermally stable, in contrast with α -discs. This results in a fully stable solution for the innermost parts of AGN discs.

Key words. accretion, accretion discs – instabilities – hydrodynamics – galaxies: active – galaxies: nuclei

1. Introduction

What causes the transport of matter and angular momentum in accretion discs? This question is the subject of a longstanding debate, but most of those working in this field tend now to agree that it has been answered, since even a very weak magnetic field leads to a linear instability (Chandrasekhar 1961) which, in its fully developed regime, is able to provide the necessary stresses (Balbus & Hawley 1991; Hawley & Balbus 1991). However, it is unlikely that this mechanism operates in cold neutral discs (e.g. Gammie & Menou 1998). Besides, the issue which has not been settled yet is whether this magnetic instability is the only instability responsible for the “anomalous viscosity”, or whether a purely hydrodynamic instability, generated by shear in differentially rotating discs, may not be of comparable or even higher efficiency. Since a non-magnetic Keplerian disc is linearly stable, this hydrodynamic instability needs a finite amplitude perturbation to be triggered and laboratory experiments indicate that it appears only above Reynolds numbers of the order of 10^4 . Such conditions are still out of reach of the most ambitious numerical simulations; therefore, these cannot be used yet to prove or to disprove the occurrence of shear instability.

It is worth noting that the widely used α -prescription for turbulent viscosity (Shakura & Sunyaev 1973) does not invoke any particular mechanism at the origin of turbulence: it is a simple parameterization which is tailored to yield turbulent velocities that remain subsonic (or sub-alfvénic) for $\alpha < 1$. It is often asserted that the main success of the α -prescription is the prediction of recurrent outbursts of dwarf novae (e.g. Cannizzo 1993). However, if such eruptive phenomena are indeed of thermal origin, as is commonly thought, it is likely that many ad-hoc viscosities, not only the α -prescription, could work as well.

For these multiple reasons it makes sense to investigate the basic properties of accretion discs built with the alternate β -prescription, which is observed in laboratory rotating shear flows, as explained below. This is our intention in this paper. We first present in Sect. 2 some properties of β -viscosity, and examine in Sect. 3 to which regimes it may be applied, allowing for subsonic turbulent velocities in geometrically thin, radiatively cooled accretion discs. In Sect. 4 we study the viscous and thermal stabilities of β -discs, using standard criteria, and draw our conclusions in the last section. The Appendix contains the vertically averaged equations for β -discs and the derivation of the criterion of thermal instability.

2. Comparing the α and β -viscosities

The laboratory experiment which is the most pertinent to studies of hydrodynamical instabilities in differentially

Send offprint requests to: J.-M. Huré,
 e-mail: Jean-Marc.Hure@obspm.fr

rotating flows is the Couette-Taylor experiment: a fluid is sheared between two cylinders rotating at different speeds. Only a few experiments have been run in the case where the angular momentum increases outwards, as in a Keplerian disc, but from the torque measurements that are available, it appears that the turbulent viscosity scales as

$$\nu_t \propto R^3 \left| \frac{d\Omega}{dR} \right|, \quad (1)$$

where R is the distance from the rotation axis and Ω is the angular velocity (Richard & Zahn 1999). In a Keplerian disc, this relation is equivalent to

$$\nu_\beta = \beta \Omega R^2, \quad (2)$$

which we shall call the β -prescription.

This prescription was originally proposed by Lynden-Bell & Pringle (1974) and some aspects of it have been discussed in later papers (De Freitas Pacheco & Steiner 1976; Thompson et al. 1977; Lin & Papaloizou 1980; Williams 1980; Hubeny 1990). It has been recently revived by Biermann & Duschl (1998; see also Duschl et al. 2000) on the grounds that the only relevant scales in a Keplerian disc are the angular velocity and the radius, since they contain all the information about the rotation and the curvature of the flow. These authors make the sensible choice of equating the parameter β with the inverse of the critical Reynolds number $\mathcal{R}e$, which they assume to be the same as in plane-parallel shear flows (i.e. $\mathcal{R}e \approx 10^3$ and therefore $\beta \approx 10^{-3}$).

However, in the following we shall use a smaller value for this β -parameter, which is derived from the Couette-Taylor experiment. The only experimental data available, in the case where angular momentum increases outwards, are those obtained by Wendt (1933) and Taylor (1936), in which the inner cylinder is at rest; from these one derives $\beta \approx 10^{-5}$. This value is compatible with the critical gradient Reynolds number which characterizes these experiments (see Richard & Zahn 1999):

$$\mathcal{R}e_c^* = \frac{R^3}{\nu} \left| \frac{d\Omega}{dR} \right| \approx 6 \cdot 10^5, \quad (3)$$

where ν is the molecular viscosity of the fluid. Clearly, new experiments are required to measure this parameter in regimes which resemble more the Keplerian flow; in the meanwhile, until new results are obtained, we shall adopt the value quoted above.

One important property of this β -viscosity is that it depends only on the radius in a Keplerian disc, and does not involve local physical conditions. On the contrary, the standard α -prescription (Shakura & Sunyaev 1973) depends on the local values of the pressure scale height H and sound velocity c_s (taken in a broad sense – it is the Alfvén velocity if magnetic pressure dominates):

$$\nu_\alpha = \alpha c_s H. \quad (4)$$

To emphasize the difference between the present prescription and the standard law, we use the relation $c_s = \Omega H$

which expresses the hydrostatic equilibrium in a Keplerian vertically averaged disc, and rewrite Eq. (4) as

$$\nu_\alpha = \alpha \Omega R^2 \left(\frac{H}{R} \right)_\alpha^2 = \nu_\beta \times \frac{\alpha}{\beta} \times \left(\frac{H}{R} \right)_\alpha^2. \quad (5)$$

We see that the ratio ν_α/ν_β depends on the aspect ratio of the α -disc. In general, the quantity $(H/R)_\alpha$ is weakly sensitive to both R and α , but it depends strongly on the central mass and the accretion rate, and is typically in the range 0.001–0.1 (e.g. Huré 1998).

The α -prescription has been designed such that the Mach number is smaller than unity for $\alpha \leq 1$. In contrast, subsonic turbulence is not guaranteed with the β -prescription. This restriction on subsonic turbulent velocities is dictated by the fact that supersonic turbulence would be highly dissipative and therefore difficult to sustain. Moreover, the turbulent viscosity used here has been measured in a liquid, and its application to compressible fluids can only be justified in the subsonic range. Therefore one has to check whether the β -prescription predicts subsonic turbulence in a given disc. By making the reasonable assumption that the vorticity v_t/ℓ_t of the turbulent eddies is of order Ω (v_t and ℓ_t denoting respectively the typical velocity and length scales of turbulence), and setting $\nu_\beta = v_t \ell_t$, the Mach number in a β -disc is given by

$$\mathcal{M}_t = \frac{v_t}{c_s} \simeq \sqrt{\beta} \frac{\Omega R}{c_s} = \sqrt{\beta} \left(\frac{H}{R} \right)_\beta^{-1} \quad (6)$$

where $(H/R)_\beta$ is the aspect ratio of the β -disc. We note that $\mathcal{M}_t < 1$ provided $H/R > \sqrt{\beta}$, which is not a too severe requirement with our low value of β (the situation would be more problematic with $\beta = 10^{-3}$, conflicting with the Keplerian assumption).

3. Application range of the β -viscosity

Let us now examine under which conditions the β -prescription allows for subsonic turbulence in geometrically thin accretion discs in active galactic nuclei (AGN), evolved binary systems (EBS) and young stellar objects (YSO). For this first exploration, we will be content with the usual one-dimensional steady state approach to compute the sound speed and the aspect ratio, the vertical structure being reduced to vertical averages. The reader can find the relevant equation set in Appendix A.

In a stationary Keplerian disc characterized by a steady accretion rate \dot{M} , the surface density Σ is determined by the conservation of mass and momentum:

$$\dot{M} = 3 \pi \nu \Sigma, \quad (7)$$

ignoring a correcting factor which is negligible sufficiently far from the center (see Frank et al. 1992). Applying the β -prescription (2), we find

$$\begin{aligned} \Sigma &\simeq 2.43 \cdot 10^5 \beta_{-5}^{-1} f_{\text{edd}} x^{-1/2} && \text{g cm}^{-2} \\ &\simeq 92 \beta_{-5}^{-1} \dot{m}_{16} M_0^{-1/2} r_{10}^{-1/2} && \text{g cm}^{-2} \\ &\simeq 70 \beta_{-5}^{-1} \dot{M}_{-8} M_0^{-1/2} r_{\text{AU}}^{-1/2} && \text{g cm}^{-2} \end{aligned} \quad (8)$$

where $f_{\text{edd}} \simeq 4.5 \dot{M}_0 M_8^{-1}$ is the Eddington factor (around 0.1 typically), $M = M_8 10^8 M_\odot = M_0 M_\odot$, $\dot{M} = \dot{M}_0 M_\odot = \dot{m}_{16} 10^{16} \text{ g/s} = \dot{M}_{-8} 10^{-8} M_\odot/\text{yr}$, $R = x R_S = R_{10} 10^{10} \text{ cm} = r_{\text{AU}} \text{ AU}$ ($R_S = 2GM/c^2$ being the Schwarzschild radius of the black hole), and $\beta_{-5} = \beta 10^5$. These dimensionless variables are well suited to describe the three families of discs quoted above. Note that Eq. (8) is quite general and does not depend on the vertical structure.

Thermal equilibrium between radiative cooling and viscous heating provides another equation. Assuming that the disc is optically thick, we have (Frank et al. 1992):

$$\frac{16 \sigma T^4}{3 \kappa_R \Sigma} = \frac{3 \Omega^2 \dot{M}}{8 \pi} \quad (9)$$

where σ is the Stefan constant and κ_R the Rosseland mean opacity.

3.1. Regimes compatible with subsonic turbulence

In *gas pressure supported discs*, the hydrostatic equation yields directly the mid-plane temperature T :

$$\frac{P_g}{\rho} = \Omega^2 H^2 = \frac{kT}{\mu m_H}, \quad (10)$$

with the usual notations for the gas pressure P_g , the density ρ , the Boltzmann constant k , the molecular weight μ and the mass of the hydrogen atom m_H . It then follows from Eqs. (6), (8), (9) and (10) that the turbulent Mach number in those discs is

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_t &\simeq 3.1 \beta_{-5}^{5/8} \kappa_R^{-1/8} \mu^{1/2} f_{\text{edd}}^{-1/4} M_8^{1/8} x^{-1/16} \\ &\simeq 0.3 \beta_{-5}^{5/8} \kappa_R^{-1/8} \mu^{1/2} \dot{m}_{16}^{-1/4} M_0^{7/16} r_{10}^{-1/16} \\ &\simeq 4 \cdot 10^{-2} \beta_{-5}^{5/8} \kappa_R^{-1/8} \mu^{1/2} \dot{M}_{-8}^{-1/4} M_0^{7/16} r_{\text{AU}}^{-1/16}. \end{aligned} \quad (11)$$

Note the relatively strong dependence of the Mach number on the viscosity parameter and its weak dependence on the opacity and specially the radius.

We conclude that the β -prescription is certainly applicable to gas pressure dominated accretion discs around forming stars, white dwarfs, neutrons stars and stellar black holes, but not to such discs around supermassive black holes, where this prescription would imply super-sonic turbulence.

The innermost part of accretion discs may be dominated by *radiation pressure* if they reach a sufficiently high temperature; this occurs for instance in standard discs surrounding black holes or compact objects. In such a case, the hydrostatic equation is written

$$\frac{P_r}{\rho} = \Omega^2 H^2 = \frac{8\sigma T^4 H}{3c \Sigma}, \quad (12)$$

and therefore, according to (9), H depends only on the accretion rate, and not on the viscosity prescription:

$$H = \frac{3\kappa_R}{16\pi c} \dot{M}. \quad (13)$$

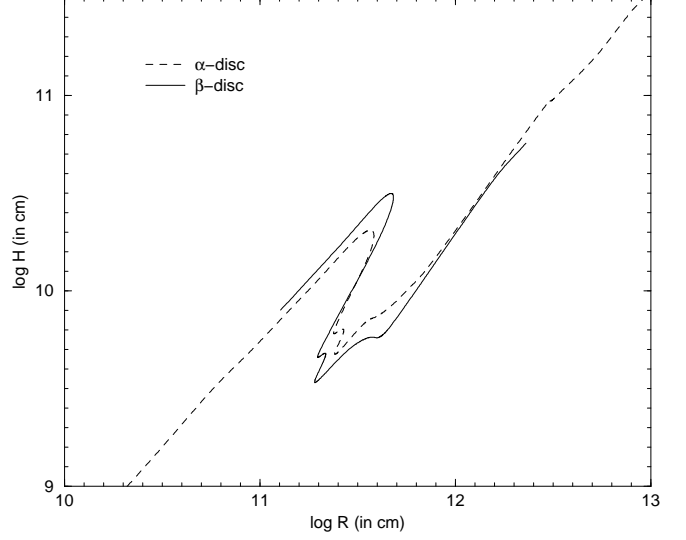


Fig. 1. Disc thickness versus radius for a β -disc with $\beta = 10^{-5}$ (solid line) and for a standard disc with $\alpha = 0.01$ (dashed line), for $M = 1 M_\odot$ and $\dot{M} = 10^{-8} M_\odot/\text{yr}$

Thus the Mach number is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_t &\simeq 3 \cdot 10^{-3} \beta_{-5}^{1/2} \kappa_R^{-1} f_{\text{edd}}^{-1} x \\ &\simeq 5 \cdot 10^{-2} \beta_{-5}^{1/2} \kappa_R^{-1} \dot{m}_{16}^{-1} M_0 x \end{aligned} \quad (14)$$

meaning that turbulence is expected to be subsonic in the inner part of radiation pressure dominated discs.

3.2. Thin Keplerian discs assumption

In this paper, we restrict ourselves to Keplerian discs, which are necessarily geometrically thin, i.e. $H/R \ll 1$. Eq. (6) shows that the turbulent Mach number increases as the aspect ratio decreases; therefore the disc cannot be thinner than $\sqrt{\beta} \times R$. One easily finds from Eq. (11) that

$$\begin{aligned} \left(\frac{H}{R}\right)_\beta &\simeq 1.5 \cdot 10^{-3} \kappa_R^{1/8} \beta_{-5}^{-1/8} \mu^{-1/2} m_0^{-7/16} \dot{m}_{16}^{1/4} r_{10}^{1/16} \\ &\simeq 0.08 \kappa_R^{1/8} \beta_{-5}^{-1/8} \mu^{-1/2} m_0^{-7/16} \dot{m}_{-7}^{1/4} r_{\text{AU}}^{1/16} \end{aligned} \quad (15)$$

within the gas pressure dominated regions. It is interesting again to make the comparison with standard discs. Using power law solutions of α -discs (Huré 1998) and Eq. (15), we obtain

$$\frac{H_\beta}{H_\alpha} \simeq 0.9 \beta_{-5}^{1/8} \alpha^{1/10}, \quad (16)$$

indicating that β -discs globally should have about the same shape as standard α -discs. This is confirmed in Fig. 1, where we have plotted the disc thickness computed from vertically averaged equations with realistic opacities and equations of state, for the two viscosity laws and for $M = 1 M_\odot$ and $\dot{M} = 10^{-8} M_\odot/\text{yr}$ which could represent both a YSO disc and a EBS disc. In the innermost part of AGN, where the radiation pressure dominates, the disc thickness is independent of the viscosity prescription,

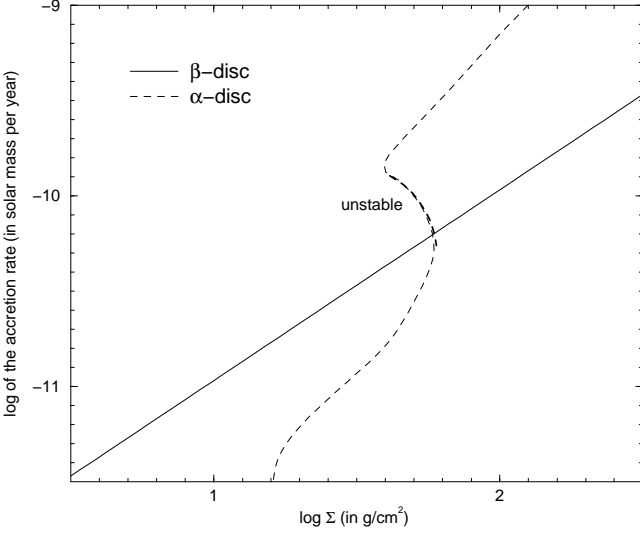


Fig. 2. Relation between the accretion rate and the surface density, from vertical structure computations, at $R = 10^{10}$ cm from the center and with $M = 1 M_{\odot}$, using the α -viscosity prescription (with $\alpha = 0.1$) and the β -prescription ($\beta = 10^{-5}$)

as we have already pointed out, and therefore $H_{\beta} = H_{\alpha}$. We thus conclude that, despite the flaring, β -discs are expected to be thin and Keplerian, provided that the accretion rate does not reach too large values. Note that α -discs are subject to the same constraint.

4. Stability of β -discs

We shall now examine two kinds of instability that an accretion disc can undergo: viscous instability which can lead to disc fragmentation and thermal instability.

4.1. Viscous stability

A general condition for viscous stability is (Frank et al. 1992)

$$\left(\frac{\partial \ln \dot{M}}{\partial \ln \Sigma} \right)_{\Omega} > 0. \quad (17)$$

In a standard α -disc, the equilibrium relation $\dot{M}(\Sigma)$ takes the famous “S”-shape with the instability occurring on the intermediate branch of negative slope (Cannizzo 1993). On the contrary, according to Eqs. (2) and (7) β -discs are viscously stable everywhere, since in Eq. (17) is always fulfilled. We illustrate this important property in Fig. 2, with two typical $\dot{M}(\Sigma)$ -relations obtained through vertical structure computations for a β -disc and a α -disc (Huré 2000).

4.2. Thermal stability

Thermal instability occurs when the energy balance between radiative losses and viscous heating can no longer

be maintained after perturbation of the equilibrium state. The condition for stability is written (Pringle 1981):

$$\left(\frac{\partial \ln Q^+}{\partial \ln T} \right)_{\Sigma, \Omega} - \left(\frac{\partial \ln Q^-}{\partial \ln T} \right)_{\Sigma, \Omega} < 0 \quad (18)$$

where Q^+ is the heating rate (right-hand-side of Eq. (9)) and Q^- is the cooling rate (with $Q^+ = Q^-$ at equilibrium). The above criterion is quite general and can be applied to non standard viscosity prescriptions, provided that the vertical dynamical time scale $t_z \sim H/c_s$ is smaller than the thermal time scale $t_{th} \sim PH/Q^+$. The requirement of a subsonic turbulence discussed in the previous section automatically ensures that $t_z \lesssim t_{th}$ since we have the relation

$$\frac{t_{th}}{t_z} \sim \frac{1}{\beta} \left(\frac{H}{R} \right)^2 = \frac{1}{\mathcal{M}_t^2}. \quad (19)$$

It is easy to see that $Q^+ \propto \Omega^3 R^2 \Sigma$ with the β -prescription and so the thermal stability of a β -disc is only governed by properties of the cooling function. The situation is different in an α -disc where the heating rate $Q^+ \propto \Omega^3 H^2 \Sigma$ is implicitly a function of T through H . To determine the slope of the cooling function $Q^-(T)$, we have used vertically averaged equations (see Appendix A) and computed the term $(\partial \ln Q^- / \partial \ln T)$ analytically (see Appendix B).

The resulting expression Eq. (B.7) may be used to analyze the thermal stability for very simple ideal cooling functions: electron scattering and free-free processes, as considered already by Piran (1978). We have distinguished 4 cases: optically thick, optically thin, gas pressure dominated and radiation pressure dominated. This can easily be handled by suitable settings in Eq. (B.7) (see Eqs. (B.8) and (B.11)). The results are summarized in Table 1. The remarkable point is that β -discs are always thermally stable for these ideal cooling mechanisms, which is in complete agreement with the conclusions drawn by Piran (1978). Note that the optically thin gas pressure dominated regime with free-free emission is marginally stable whereas it is unstable with the standard viscosity law, as noticed by Pringle et al. (1973).

The situation is quite different when using realistic Rosseland and Planck opacities as well as an accurate equation of state. A typical result is displayed in Fig. 3, where we have considered a disc surrounding a one solar mass central object and $\dot{M} = 10^{-8} M_{\odot}/\text{yr}$. We find that the disc is thermally unstable when the midplane temperature is in the range 5000–9000 K (zone 2 in the figure), due to the steep rise in the opacity. Like in a standard disc, this unstable regime corresponds to the partial ionization of hydrogen. A specially interesting case is displayed in Fig. 4 where the accretion rate is $\dot{M} = 10^{-12} M_{\odot}/\text{yr}$, typical for an EBS disc in quiescence. There is a (multi-valued) optically thin solution with $T \lesssim 6600$ K (zone 2bis in the figure). We have checked that this regime is also compatible with both $H/R \ll 1$ and $\mathcal{M}_t < 1$. We see that the hottest branch of this solution, which has already been investigated by Williams (1980), is thermally stable.

Table 1. Quantity $(\partial \ln Q^- / \partial \ln T)_{\Sigma, \Omega}$ and inferred thermal stability for ideal opacity sources (disregarding self-gravitation). Values and comments in parenthesis concern the α -prescription. Various cases are considered: $\tilde{\beta} = 1$ ($\tilde{\beta}$ is the ratio of the gas pressure to the total pressure); $\tilde{\beta} = \frac{1}{2}$ and $\tilde{\beta} = 0$ (radiative pressure only); Thompson scattering only ($\kappa \equiv \sigma_T$); free-free opacity only ($\kappa \equiv \kappa_{\text{ff}} \propto \rho T^{-7/2}$); both absorption processes (with $x = \frac{\kappa_{\text{ff}}}{\kappa_{\text{ff}} + \sigma_T} \leq 1$)

β	opacity	optically thick limit (see Eq. (B.8))			optically thin limit (see Eq. (B.11))		
1	σ_T	-4	stable	(-3, stable)	-4	stable	(-3, stable)
	κ_{ff}	-8	stable	(-7, stable)	0	stable	(+1, unstable)
	$\sigma_T + \kappa_{\text{ff}}$	$-4(1+x) < 0$	stable		$-4(1-x) \leq 0$	stable	
$\frac{1}{2}$	σ_T	-4	stable	($-\frac{2}{3}$, stable)	-4	stable	($-\frac{2}{3}$, stable)
	κ_{ff}	$-\frac{55}{6}$	stable	($-\frac{35}{6}$, stable)	$-\frac{1}{8}$	stable	($+\frac{13}{8}$, unstable)
	$\sigma_T + \kappa_{\text{ff}}$	$-4 - \frac{31}{6}x < 0$	stable		$-4 + (\frac{10-7x}{6+2x} + \frac{7}{2})x < 0$	stable	
0	σ_T	-4	stable	(+4, unstable)	-4	stable	(+4, unstable)
	κ_{ff}	$-\frac{23}{2}$	stable	($-\frac{7}{2}$, stable)	$-\frac{1}{4}$	stable	($+\frac{1}{4}$, unstable)
	$\sigma_T + \kappa_{\text{ff}}$	$-4 - \frac{15}{2}x < 0$	stable		$-4 + (\frac{8-7x}{2+2x} + \frac{7}{2})x < 0$	stable	

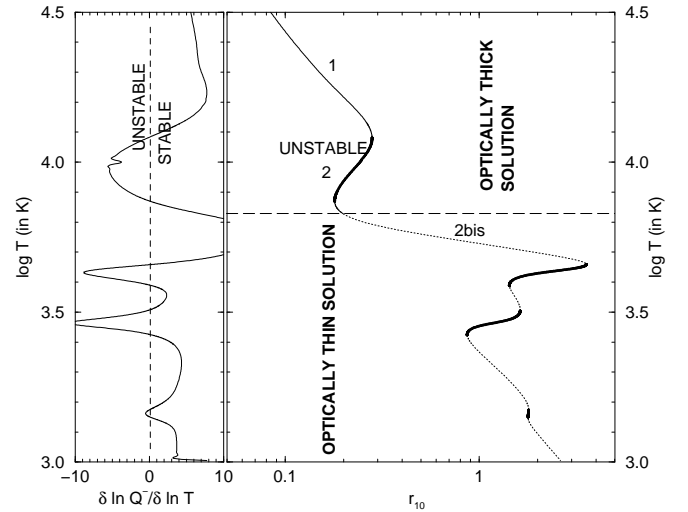
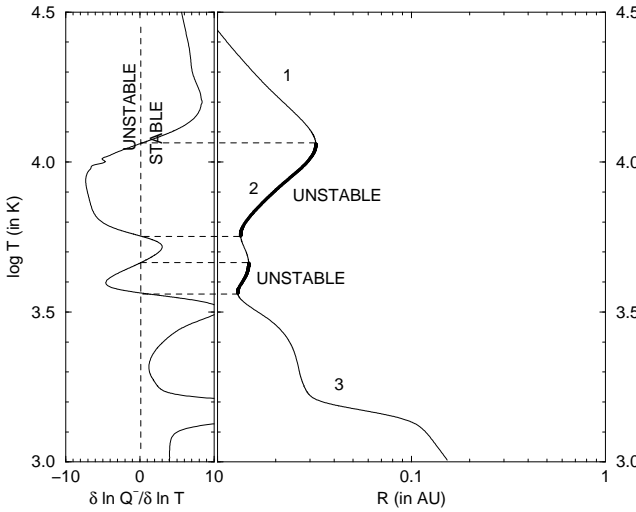


Fig. 3. *Right panel:* temperature radial profile (*thin line*) and thermally unstable regions (*bold line*) in a “realistic” β -disc for $M = 1 M_{\odot}$ and $\dot{M} = 10^{-8} M_{\odot}/\text{yr}$. *Left panel:* the quantity $(\partial \ln Q^- / \partial \ln T)_{\Sigma, \Omega}$ versus T computed from Eq. (B.7)

Fig. 4. Same legend as for Fig. 3 but for $\dot{M} = 10^{-12} M_{\odot}/\text{yr}$ typical of a quiescent EBS disc. The optically thick/thin limit is reached at $r_{10} \simeq 0.2$ where $T \simeq 6600$ K. The optical thickness τ goes through a minimum for $T \simeq 4500$ K where $\tau \simeq 4 \cdot 10^{-4}$

Similar computations have been carried out for many input pairs (M, \dot{M}) corresponding to AGN, EBS and YSO discs and the overall conclusions are the following:

- the hot optically thick solution which extends down to the central object (zone 1 in Figs. 3 and 4) is always thermally stable (this includes the radiative pressure dominated solution);
- the region where hydrogen recombines (zone 2) is always unstable if the disc is optically thick;
- the hottest branch of the optically thin solution with $7000 \text{ K} \gtrsim T \gtrsim 4000 \text{ K}$ and $dT/dR < 0$ (zone 2bis), when it exists, is always stable, even if hydrogen recombination occurs;
- the cold branches of the optically thin solution with $T \lesssim 4000 \text{ K}$ and $dT/dR > 0$ are always unstable;
- the outermost parts (zone 3) are globally stable. Thin unstable zones can be present.

5. Conclusion

In this paper, we have examined some properties of thin accretion discs built with the β -prescription for the turbulent viscosity, which has been derived from the transport of angular momentum observed in differentially rotating laboratory flows (Richard & Zahn 1999). This prescription may be applied whenever it predicts a turbulent velocity that is subsonic, and we have verified that, with the value we have taken for β (i.e. 10^{-5}), this condition is fulfilled in most discs, around stellar objects or massive black holes, except in the outer part of AGN discs where gas pressure dominates. Only radiatively cooled discs have been surveyed; it would be interesting to investigate ADAF-type solutions with this prescription. Let us recall that our conclusions have been obtained here with vertically averaged models, and it is plausible that a more realistic 2D-model would extend somewhat the domain of applicability of the β -prescription (Huré & Richard 2000).

Although the β -viscosity and the α -viscosity may have comparable magnitudes, they have very different effects both on the structure and on the stability of steady Keplerian discs. An important property of β -discs is that they are viscously stable and do not tend to fragment into concentric rings, contrary to α -discs. Also, unlike α -discs, they are thermally stable for ideal cooling processes, such as Thomson scattering and free-free absorption, as was shown by Piran (1978). However, with more realistic opacities and equation of state, models of β -discs contain a thermally unstable region corresponding to the recombination of hydrogen, much like standard α -discs. It remains to be seen with time-dependent models whether this instability can lead, as we suspect, to a limit cycle behavior.

Acknowledgements. The authors wish to thank the referee for his competent remarks and suggestions.

Appendix A: Vertically averaged equations for a steady state Keplerian β -disc

In a steady state Keplerian accretion disc where the viscosity is given by Eq. (2), the mass accretion rate \dot{M} is linked to the surface density Σ by the relation

$$\dot{M} = 3\pi\beta\Omega R^2\Sigma, \quad (\text{A.1})$$

where Ω is the Keplerian angular velocity and R the radius. The surface density is $\Sigma = 2\rho H$, with ρ being the mass density and H the total pressure scale height, which is determined from the equation of hydrostatic equilibrium

$$\frac{P}{\rho H} = \Omega^2 H(1 + \zeta) \quad \text{with} \quad \zeta = \frac{4\pi G\rho}{\Omega^2}, \quad (\text{A.2})$$

where ζ represents the effect of self-gravity. The total pressure P is the sum of the gas pressure P_g and of the radiation pressure P_r :

$$P = P_g + P_r = \frac{P_g}{\beta}. \quad (\text{A.3})$$

We draw P_g from the perfect gas equation

$$P_g = \frac{\rho kT}{\mu m_H}, \quad (\text{A.4})$$

where T is the midplane temperature and μ the mean mass per particle in units of the proton mass. The disc temperature in the equatorial plane is fixed by the balance $Q^+ = Q^-$ between viscous heating (Frank et al. 1992)

$$Q^+ = \frac{3\Omega^2\dot{M}}{8\pi} \quad (\text{A.5})$$

and radiative losses (Hubeny 1990)

$$Q^- = \frac{8\sigma T^4}{3\kappa_R\rho H + \frac{2}{\kappa_P\rho H} + 2\sqrt{3}}, \quad (\text{A.6})$$

where κ_R and κ_P are respectively the Rosseland and Planck mean opacities (in cm^2g^{-1}). The general expression for the radiative pressure is then

$$P_r = \frac{Q^-}{c} \left(\frac{1}{2}\kappa_R\rho H + \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad (\text{A.7})$$

Note that in the optically thick limit the radiation pressure tends to its LTE value (labeled with an asterisk)

$$P_r = \frac{4\sigma T^4}{3c} \equiv P_r^*. \quad (\text{A.8})$$

The above equation set can in fact be reduced to a system of two non linear algebraic equations with Σ as the unknown. From Eqs. (A.1)–(A.7), the first equation is

$$P^* - \pi G\Sigma^2 - \frac{\pi^6\beta^6 G^4 M^4 \Sigma^8}{256\dot{M}^6} - \frac{16\sigma T^4}{9c\kappa_R\kappa_P\mathcal{S}(\Sigma)} = 0, \quad (\text{A.9})$$

where the function $\mathcal{S}(\Sigma)$ is

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \frac{\Sigma^2}{2} + \frac{2\Sigma}{\sqrt{3}\kappa_R} + \frac{4}{3\kappa_R\kappa_P}. \quad (\text{A.10})$$

The second equation is obtained from Eqs. (A.1), (A.5) and (A.6)

$$\frac{\sigma\dot{M}^5 T^4}{3^{14}\pi^{11}\kappa_R} = G^4 M^4 \beta^6 \mathcal{S}(\Sigma)\Sigma^5. \quad (\text{A.11})$$

We can follow the method described in Huré (1998) to solve the system of Eqs. (A.9) and (A.11). Note that the solution is valid in all cases: optically thick or thin, pressure dominated by gas or radiation, self-gravitating or not.

A.1. The optically thick limit

If we set $\mathcal{S}(\Sigma) = \frac{1}{2}\Sigma^2$ in Eqs. (A.9) and (A.11), and omit the last term of Eq. (A.9) we recover the optically thick limit ($\tau \gg 1$), and there is a single equation to solve:

$$\dot{M}^{12/7} + \lambda_1 \dot{M}^{2/7} + \lambda_0 = 0. \quad (\text{A.12})$$

The coefficients λ_0 and λ_1 are respectively

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 16 \left(\frac{\pi^{5/6}\beta\sigma M^{2/3}}{3\sqrt{G}\kappa_R} \right)^{6/7} \frac{T^{24/7}}{\rho} \quad \text{and} \\ \lambda_1 &= -\frac{3}{4} \left(\frac{3\kappa_R\pi\beta^6\sqrt{\pi GM^4}}{\sigma} \right)^{2/7} \frac{P^*}{T^{8/7}}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Note that the solution of Eq. (A.12) must satisfy $\tau \gg 1$.

A.2. The optically thin limit

In the optically thin limit ($\tau \ll 1$), $\mathcal{S}(\Sigma) = 4/3\kappa_R\kappa_P$ and the last term of Eq. (A.9) is identical to P_r^* . There is also a single equation to solve, namely

$$\begin{aligned} &\left[4\pi G\rho + \left(\frac{16\sigma\kappa_P}{3\beta G^{2/3}M^{2/3}} T^4 \right)^{6/5} \right] \dot{M}^2 \\ &- \frac{3k\rho^2}{\mu m_H T^{3/5}} \left(\frac{6\pi^5\beta^6 G^4 M^4}{\sigma\kappa_P} \right)^{2/5} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

and its solution must be such that $\tau \ll 1$.

Appendix B: Criterion for the thermal instability

Setting $\tau = \kappa_R \Sigma + 8/3 \kappa_P \Sigma + 4/\sqrt{3}$, and differentiating Eq. (A.6) while keeping Σ constant, we obtain

$$\left(\frac{\partial \ln Q^-}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega} = 4 - \frac{1}{\tau} \left[\tau_R b_R - \frac{8b_P}{3\tau_P} \right] - \frac{1}{\tau} \left[\tau_R a_R - \frac{8a_P}{3\tau_P} \right] \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega}, \quad (\text{B.1})$$

where $\tau_R = \kappa_R \Sigma$ and $\tau_P = \kappa_P \Sigma$ are the total Rosseland and Planck optical thicknesses respectively, and

$$a_R = \left(\frac{\partial \ln \kappa_R}{\partial \ln \rho}\right)_T, \quad b_R = \left(\frac{\partial \ln \kappa_R}{\partial \ln T}\right)_\rho, \\ a_P = \left(\frac{\partial \ln \kappa_P}{\partial \ln \rho}\right)_T, \quad b_P = \left(\frac{\partial \ln \kappa_P}{\partial \ln T}\right)_\rho.$$

Note that this expression does not depend on the actual viscosity prescription. For Thompson scattering, we have simply $a_R = b_R = a_P = b_P = 0$, and for free-free opacity, $a_R = a_P = 1$ and $b_R = b_P = -\frac{7}{2}$. For a combination of both sources, we have $a_R = a_P = x$ and $b_R = b_P = -\frac{7}{2}x$ where $x \equiv \kappa_{\text{ff}}/(\kappa_{\text{ff}} + \sigma_T)$.

To compute the derivative $(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_{\Sigma, \Omega}$, we use the two different expressions of the total pressure at the midplane. First, by differentiation of Eq. (A.2), keeping Σ and Ω constant, we have

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega} = -\frac{1}{1+\zeta} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega}. \quad (\text{B.2})$$

Note that $(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_{\Omega, \Sigma}$ is always negative. Second, from Eq. (A.3) which is written

$$P = P_g + \frac{Q^-}{c} \left(\frac{\tau_R}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (\text{B.3})$$

and setting $\chi_\rho^g = (\partial \ln P_g / \partial \ln T)_\rho$, $\chi_T^g = (\partial \ln P_g / \partial \ln \rho)_T$ and $\tilde{\beta} = P_g / P$, we have

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega} = \left[\tilde{\beta} \chi_T^g + (1 - \tilde{\beta}) a_R \frac{\tau_R}{\tau_R + \frac{4}{\sqrt{3}}} \right] \times \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega} + \tilde{\beta} \chi_\rho^g + (1 - \tilde{\beta}) \times \frac{\tau_R}{\tau_R + \frac{4}{\sqrt{3}}} b_R + (1 - \tilde{\beta}) \left(\frac{\partial \ln Q^-}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega}. \quad (\text{B.4})$$

Combining now Eqs. (B.2) and (B.4), we find

$$-\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega} \left[\frac{1}{1+\zeta} + \tilde{\beta} \chi_T^g + (1 - \tilde{\beta}) a_R \frac{\tau_R}{\tau_R + \frac{4}{\sqrt{3}}} \right] = \tilde{\beta} \chi_\rho^g + (1 - \tilde{\beta}) \frac{\tau_R}{\tau_R + \frac{4}{\sqrt{3}}} b_R + (1 - \tilde{\beta}) \left(\frac{\partial \ln Q^-}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega}. \quad (\text{B.5})$$

Finally, from Eqs. (B.1) and (B.5) and after rearrangement

$$\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega} = \left[4(1 - \tilde{\beta}) - (1 - \tilde{\beta}) \frac{\tau_R b_R - \frac{8b_P}{3\tau_P}}{\tau} + \tilde{\beta} \chi_\rho^g + (1 - \tilde{\beta}) \frac{\tau_R}{\tau_R + \frac{4}{\sqrt{3}}} b_R \right] \times \left[(1 - \tilde{\beta}) \frac{\tau_R a_R - \frac{8a_P}{3\tau_P}}{\tau} - \left(\frac{1}{1+\zeta} + \tilde{\beta} \chi_T^g + (1 - \tilde{\beta}) a_R \frac{\tau_R}{\tau_R + \frac{4}{\sqrt{3}}}\right) \right]^{-1} \quad (\text{B.6})$$

and so Eq. (B.1) becomes

$$\left(\frac{\partial \ln Q^-}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega} = \left[\tilde{\beta} \chi_\rho^g + (1 - \tilde{\beta}) \frac{\tau_R}{\tau_R + \frac{4}{\sqrt{3}}} b_R + \left(\frac{1}{1+\zeta} + \tilde{\beta} \chi_T^g + (1 - \tilde{\beta}) \times a_R \frac{\tau_R}{\tau_R + \frac{4}{\sqrt{3}}}\right) \left(\frac{4\tau - \tau_R b_R + \frac{8b_P}{3\tau_P}}{\tau_R a_R - \frac{8a_P}{3\tau_P}}\right) \right] \times \left[\frac{\tau}{\tau_R a_R - \frac{8a_P}{3\tau_P}} \left(\frac{1}{1+\zeta} + \tilde{\beta} \chi_T^g + (1 - \tilde{\beta}) a_R \frac{\tau_R}{\tau_R + \frac{4}{\sqrt{3}}}\right) + \tilde{\beta} - 1 \right]^{-1}. \quad (\text{B.7})$$

It is then easy to derive from Eq. (B.7) the following asymptotic expressions:

- in the optically thick limit ($\tau \sim \tau_R$ and $\tau_P \gtrsim \tau_R \gg 1$)

$$-\left(\frac{\partial \ln Q^-}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega} = b_R - 4 - a_R \frac{\tilde{\beta} \chi_\rho^g + 4(1 - \tilde{\beta})}{\tilde{\beta} \chi_T^g + \frac{1}{1+\zeta}}; \quad (\text{B.8})$$

- in the radiative pressure dominated limit ($\tilde{\beta} \sim 0$)

$$-\left(\frac{\partial \ln Q^-}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega} = b_R - 4 - 4a_R(1 + \zeta); \quad (\text{B.9})$$

- in the gas pressure dominated limit ($\tilde{\beta} \sim 1$)

$$-\left(\frac{\partial \ln Q^-}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega} = b_R - 4 - a_R \frac{1 + \zeta}{2 + \zeta}; \quad (\text{B.10})$$

- in the optically thin limit ($\tau \sim \frac{8}{3\tau_P}$ and $\tau_P \ll 1$)

$$-\left(\frac{\partial \ln Q^-}{\partial \ln T}\right)_{\Sigma, \Omega} = -b_P - 4 + a_P \frac{\tilde{\beta} \chi_\rho^g + 4(1 - \tilde{\beta}) + (1 - \tilde{\beta}) b_P}{(1 - \tilde{\beta}) a_P + \tilde{\beta} \chi_T^g + \frac{1}{1+\zeta}}. \quad (\text{B.11})$$

References

- Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1991, *ApJ*, 376, 214
- Biermann, P. L., & Duschl, W. J. 1998, in *Dynamics of Galaxies and Galactic Nuclei*, Proc. Ser. vol. 2, Institut für Theoretische Astrophysik, 13
- Cannizzo, J. K. 1993, in *Accretion disks in compact stellar systems*, ed. J. C. Wheeler (World Scientific), 6
- Chandrasekhar, S. 1961, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 46, 53
- Duschl, W. J., Strittmatter, P. A., & Biermann, P. L. 2000, *A&A*, 357, 1123
- Frank, J., King, A., & Raine, D. 1992, in *Accretion power in astrophysics*, 2nd edition (Cambridge Univ. Press)
- De Freitas Pacheco, J. A., & Steiner, J. E. 1976, *A&SS*, 39, 487
- Gammie, C. F., & Menou, K. 1998, *ApJL*, 492, 75
- Hawley, J. F., & Balbus, S. A. 1991, *ApJ*, 376, 223
- Hubeny, I. 1990, *ApJ*, 351, 632
- Huré, J. M., & Richard, D. 2000, *Proceedings of the EAS meeting held in Toulouse France, 1999*, ed. H. Sol, & B. Rocca-Volmerange (EDP Sciences)
- Huré, J. M. 1998, *A&A*, 337, 625
- Lasota, J.-P., & Hameury, J.-P. 1998, in *Accretion processes in astrophysical systems: some like it hot*, *Proceedings of the 8th AIP Conference*, ed. S. T. Holt, & T. R. Kallman, 351
- Lin, D. N. C., & Papaloizou, J. 1980, *MNRAS*, 191, 37
- Lynden-Bell, D., & Pringle, J. 1974, *MNRAS*, 168, 603
- Piran, T. 1978, *ApJ*, 221, 652
- Pringle, J. 1981, *ARA&A*, 19, 137
- Richard, D., & Zahn, J.-P. 1999, *A&A*, 347, 734
- Shakura, N. I., & Sunyaev, R. A. 1973, *A&A*, 24, 337
- Siemiginowska, A., Czerny, B., & Kostyunin, V. 1996, *ApJ*, 458, 491
- Taylor, G. I. 1936, *Proc. Roy. Soc. London A*, 157, 546
- Thompson, R. I., Strittmatter, P. A., Erickson, E. F., Witteborn, F. C., & Strecker, D. W. 1977, *ApJ*, 218, 170
- Tylenda, R. 1981, *Acta Astron*, 31, 127
- Wendt, F. 1933, *Ing. Arch.*, 4, 577
- Williams, R. E. 1980, *ApJ*, 235, 939

ACCRETION DISCS IN AGN, VISCOSITY AND SHEAR INSTABILITY

Jean-Marc Hure^{1, 2} and Denis Richard³

Abstract

Early, it has been suggested that keplerian flows should be unstable regarding shear instabilities. This hypothesis, not seriously considered nowadays, is strongly sustained by a recent re-analysis of experimental data on shear flows and new laboratory experiments. We review some consequences on steady state accretion discs of a viscosity law derived from shear experiments. In particular, we show that it wholly suppresses the thermal and viscous instabilities within the radiation pressure dominated region, unlike the standard theory.

1 Turbulence driven accretion

Accretion of gas at high rates onto a central black hole of large mass is widely recognized as the primary radiation mechanism of quasars and Active Galactic Nuclei (AGN) (Shields 1978; see also the papers by Collin, Courvoisier and Terlevitch in these proceedings). Our understanding of processes occurring within the accretion disc are however very limited and many aspects remain to be elucidated, such as the outward transport of angular momentum allowing matter to spiral downwards. It is well known that astrophysical discs can neither form nor evolve rapidly enough under the effect of molecular viscosity only (Frank, King & Raine, 1992). For instance, it would take a Hubble time for fluid particles to drift radially over a distance of ~ 5000 km only in a laminar flow having a viscosity $\nu_{\text{mol}} \approx 1 \text{ cm}^2/\text{s}$ typical of gases and liquids. The requested viscosity — at least 15 orders of magnitude larger than the above value — can be produced by turbulence. Shear is able to destabilize a differentially rotating flow and generate turbulence in laboratory experiments (Richard & Zahn, 1999), but this has not been

¹ DAEC/Observatoire de Paris-Meudon, Place Jules Janssen, 92195 Meudon Cedex, France (e-mail: Jean-Marc.Hure@obspm.fr)

² Université Paris 7 Denis Diderot, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

³ DASGAL/Observatoire de Paris-Meudon, Place Jules Janssen, 92195 Meudon Cedex, France (e-mail: Denis.Richard@obspm.fr)

theoretically proven yet in an astrophysical context. Numerical simulations have failed so far because a *non-linear instability* is difficult to trigger: it requires the excitation of certain modes, with special amplitudes. In addition, current computations are limited to relatively small Reynolds numbers ($Re \leq 10^3$ typically), orders of magnitude below what would be necessary to derive relevant conclusions. Keplerian discs are hydrodynamically, *linearly stable* (Rayleigh 1916) whereas the presence of a magnetic field suffices to make them magneto-hydrodynamically (MHD), *linearly unstable* (Chandrasekhar 1960; Balbus & Hawley 1991). For these theoretical reasons, the MHD instability is generally believed to be the only mechanism leading to turbulence. Meanwhile, it surely does not work in cold neutral discs, of any kind (Dubrulle 1993; Gammie & Menou 1998).

Today, the most widespread way to mimic turbulent transport is the α -prescription for viscosity (Shakura & Sunyaev 1973) which assumes that the turbulent velocity scale v_t and length scale l_t are limited by the local sound speed c_s and disc thickness H respectively, namely the law

$$\nu_* = \alpha c_s H, \quad (1.1)$$

where α is a “half-free” parameter (the usual choice is $\alpha \leq 1$ in order to ensure a subsonic turbulence). Two major criticisms can be addressed to this formulation. First, it is not based on an identified mechanism causing turbulence. Second, H is a vertical scale whereas the angular momentum is transported in the perpendicular direction. Indeed, nothing excludes that $l_t \gg H$ radially, which would imply a non-isotropic turbulence as often observed in geophysics. In some sense, the α -prescription is not very physical. Paradoxically, the standard theory of steady state keplerian discs which is built upon Eq.(1.1) (Pringle 1981) quite successfully explains some properties of (non steady) discs in Cataclysmic Variables and in Young Stellar Objects (Lasota & Hameury 1999; Bell & Lin 1994; Kenyon 1999). Also, it roughly accounts for the Big Blue Bump of AGN and quasars, but some key predictions of this theory disagree with observations (Koratkar & Blaes 1999). From this point of view, it must be realized that any viscosity law making an AGN disc optically thick (i.e., a wide variety of *ad-hoc* viscosity laws) would inevitably raise the same kinds of problems as the α -prescription, like the Lyman edge problem (Sincell & Krolik 1997). It is tempting to argue that existing discs models for AGN are far from containing the right physics. A reverse point of view is to consider that these have reached the correct level of complexity/simplicity and that the underlying viscosity prescription is, despite appearances, not the good one. Note that the success of the α -theory mainly resides in the prediction of limit cycle behaviors (Cannizzo 1993), but there is, to our knowledge, no demonstration that the α -prescription is a necessary ingredient to disc instability models (i.e. the only viscosity law able to trigger recurrent eruptions). Studying the effects of other viscosity prescriptions is therefore worthwhile (e.g. Bardou et al 1998).

2 Viscosity from experiments

Laboratory experiments on plane parallel shear flows show that turbulence appears when the Reynolds number exceeds a certain limit $\sim 10^2 - 10^3$. This is the ground of the “critical Reynolds number” model which postulates that turbulence in astrophysical discs has a

purely hydrodynamical origin and develops above the same threshold (Lynden-Bell & Pringle 1974). The viscosity law derived from this analogy is $\nu = \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Omega_k R^2$, Ω_k being the keplerian rotation law and R the radius. It is rather surprising that the critical Reynolds number model which, by construction, is as *ad-hoc* as the standard prescription, was applied in a few cases only (De Freitas Pacheco & Steiner 1976; Thompson et al 1977; Lin & Papaloizou 1980; Williams 1980; Hubeny 1990). Duschl et al (2000) argue that this viscosity model is better than the α -prescription in self-gravitating parts of discs.

The re-analysis of experimental data along with new laboratory experiments on rotating shear flows strongly supports the hypothesis of a shear instability (Richard & Zahn 1999; Richard, 2001). In presence of rotation, the relevant critical number is rather $\mathcal{R}e^* = \nu_{\text{mol}}^{-1} r^3 d\Omega/dr \approx 10^6$, where r is the distance to the axis and Ω the local angular rotation within the fluid. The inferred viscosity prescription, valid for flows with angular velocity and angular momentum profiles close to the keplerian case, is of the form $\nu \propto r^3 |d\Omega/dr|$. Applied to keplerian discs, it is found that (hereafter, the “ β -viscosity”)

$$\nu = \beta \Omega_k R^2 \quad (2.1)$$

with $\beta \simeq 10^{-5}$. This expression shows the same scaling as in the critical Reynolds number model and only differs by a multiplying factor $\sim 10^{-2}$.

3 Properties of β -discs around supermassive black holes

The effects of the β -viscosity on the structure and stability of steady state keplerian discs¹ can be tested at the scale of AGN using the classical set of vertically averaged equations (Huré, Richard & Zahn, 2001). A consequence of Eq.(2.1) is that $\nu/\nu_* \gg 1$ in gas pressure dominated regions. Accretion is therefore more effective at large radii than in the standard case and the viscous time scale $t_{\text{vis}} \sim R^2/\nu$ is reduced. This point is very important since a current problem with the fuelling of an AGN through an α -disc is that this time scale, at ~ 1 pc from the center say, is larger than the activity lifetime of the nucleus (Shlosman, Begelman & Franck 1990). The self-consistent computation of the disc structure reveals a physical difficulty which is not present in a standard disc: turbulence is found to be (slightly) supersonic in these outer regions. Actually, since the midplane temperature globally decreases with radius in an optically thick disc, the Mach number defined as $\mathcal{M}_t \sim \sqrt{\beta} \Omega_k R / c_s$ automatically increases outwards. Note that the situation would be worst with larger β -parameters as considered, for instance, in Duschl et al. (2000). We do not know if supersonic turbulence can be maintained or not in a disc. The point is that supersonic turbulence implies shocks in which energy dissipation would be enhanced until the recovering of a subsonic level of turbulence.

Interestingly, the situation described above is reversed in the inner part of discs where radiation pressure dominates on gas pressure: we have $\nu/\nu_* < 1$ and $\mathcal{M}_t < 1$ over almost the whole domain. This is illustrated in Fig.1 which shows the disc density field obtained

¹Such a β -disc model must not be confounded with a sub-class of α -disc models, also called β -disc models, where the radiation pressure is not taken into account in the α -prescription (e.g. Siemiginowska, Czerny & Kostyunin, 1996).

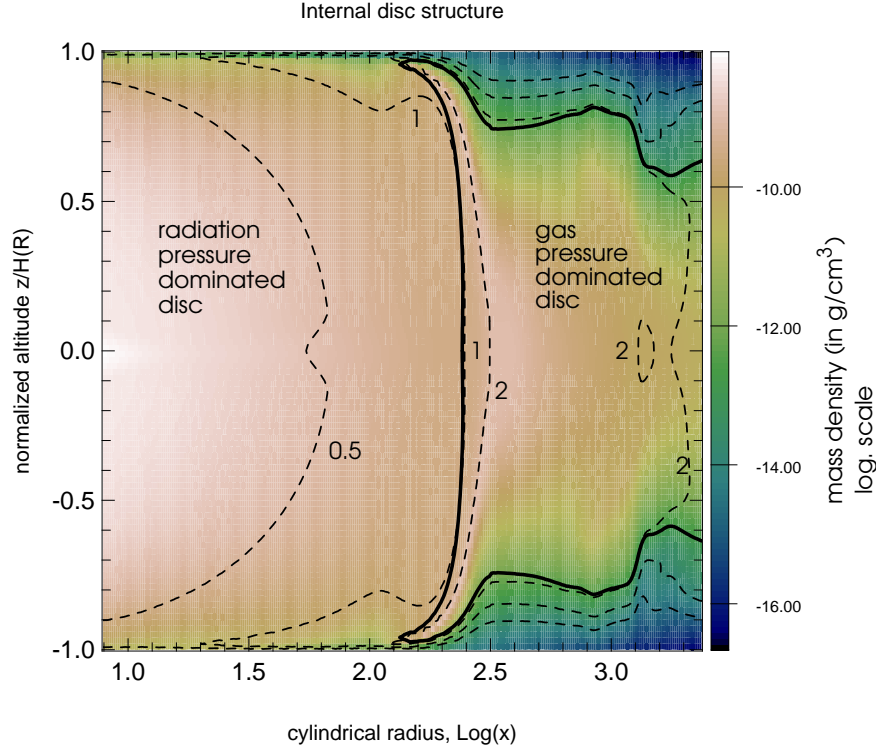


Fig. 1. Density field (ρ is in g/cm^3) within an β -disc for $M = 10^8 M_\odot$, $\dot{M} = 0.1 M_\odot/\text{yr}$ and $\beta = 10^{-5}$. For clarity, the altitude z has been normalized to the local thickness of the disc (in fact, the disc is flaring) and the radius $R = xR_S$ is given in units of the Schwarzschild radius $R_S = 2GM/c^2$ with M the central mass. The limit between the radiative pressure dominated zone and the gas pressure dominated zone is in bold line. Thin lines mark zones where $\mathcal{M}_t = 0.5, 1$ and 2 .

from vertical structure computations (see Huré, 2000) for a typical AGN as well as iso-values of the turbulent Mach number. We see that the radiative pressure dominated disc extends down to $\sim 230 R_S$ (R_S is the Schwarzschild radius) and $\mathcal{M}_t < 1$ in this whole region. The turbulent Mach number exceeds unity below the photosphere within the gas pressure dominated region but is barely larger than ~ 3 . It is possible that the obtention of this (slightly) supersonic turbulence regime is due to the assumptions made in the model, in particular to the fact that it is two dimensional only and to the decoupling between the radial and vertical structures. We show in Fig. 2 the turbulent Mach number at the midplane computed in the bi-dimensional model and in a one zone model (i.e. from vertically averaged equations), in the same conditions as for Fig. 1. It appears that the turbulent Mach number is lower by a factor ~ 3 in the bi-dimensional model within the gas pressure dominated region. It would therefore be very interesting to check if a better physical model would finally lead to $\mathcal{M}_t < 1$ everywhere. We might finally conclude that

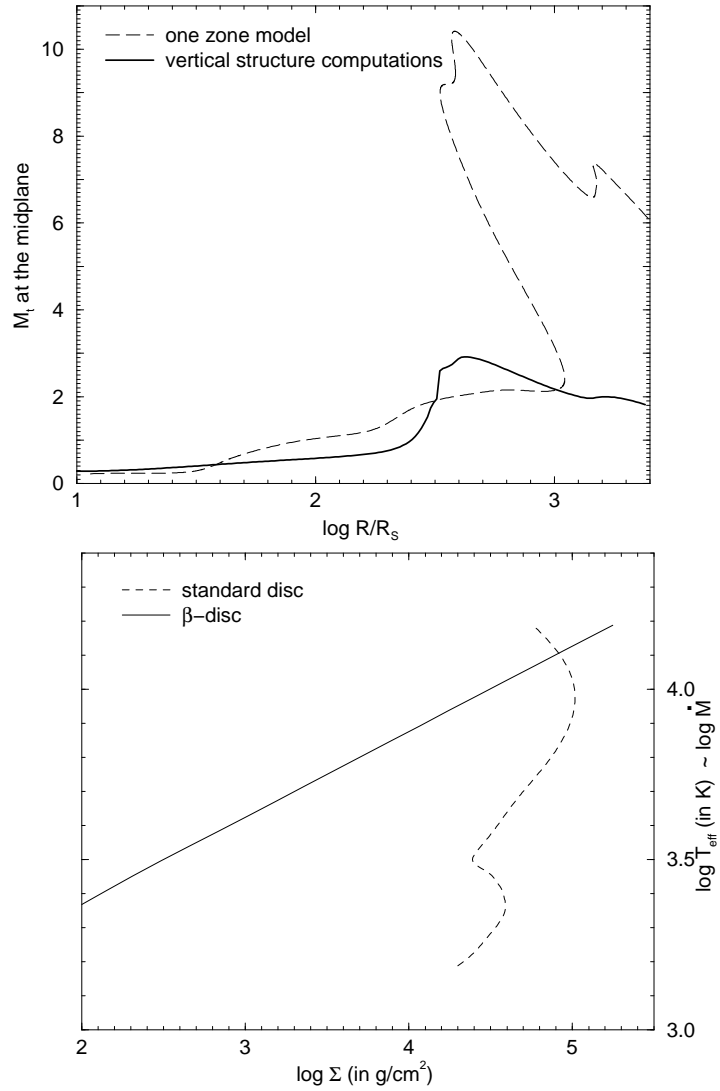


Fig. 2. Turbulent Mach number (*left panel*) at the midplane obtained from a one zone model and from vertical structure computations. Curves of viscous stability (*right panel*) computed at $100 R_S$ for a standard disc with $\alpha = 0.1$ and for the β -viscosity with $\beta = 10^{-5}$. In both cases, parameters are the same as in Fig. 1.

the β -prescription can be applied to AGN discs (see below). However, the transport of angular momentum in discs probably involves different mechanisms in competition and applying a single prescription everywhere might be too restrictive.

Another consequence of the β -viscosity is the self-similarity of the surface density

6

The title will be set by the publisher.

distribution

$$\Sigma \simeq 2 \times 10^3 \left(\frac{\beta}{10^{-5}} \right) \left(\frac{\dot{M}}{1 M_{\odot}/\text{yr}} \right) \left(\frac{M}{10^8 M_{\odot}} \right)^{-1/2} \left(\frac{R}{10^{16} \text{ cm}} \right)^{-1/2} \text{ g/cm}^2 \quad (3.1)$$

where M is the central mass and \dot{M} is the accretion rate. This result which is valid in the one zone as well as in the bi-dimensional model, implies that the disc is viscously stable everywhere. In other words, the standard criterion

$$\left(\frac{\partial \ln \dot{M}}{\partial \ln \Sigma} \right)_{\Omega} > 0 \quad (3.2)$$

is satisfied everywhere, and for any kind of disc. We show in Fig. 2 the solution computed at $100 R_S$ for a standard disc (note the usual “S”-shape curve) and for a β -disc. Let us remind that a standard disc is viscously unstable and tends to fragment into concentric rings in relatively short time scales (Lightman & Eardley 1974).

A disc can also be thermally unstable. Mainly, two regions are unstable in a standard disc: the innermost region where radiation pressure dominates on gas pressure and the region (generally optically thick and gas pressure supported) where hydrogen recombines (Shakura & Sunyaev 1976; Meyer & Meyer-Hofmeister 1982). This latter instability is thought to be responsible for recurrent outbursts observed in dwarf novae, soft X-ray transients and probably Fu-Orionis objects (Lasota & Hameury 1998; Kenyon 1999). It could also cause the variability of AGN discs (Siemiginowska et al. 1998) but with much larger time scales. The instability occurs when

$$\left(\frac{\partial \ln Q^+}{\partial \ln T} \right)_{\Sigma, \Omega} - \left(\frac{\partial \ln Q^-}{\partial \ln T} \right)_{\Sigma, \Omega} > 0 \quad (3.3)$$

where Q^+ and Q^- are the internal heating and cooling rates respectively and T the midplane temperature. Piran (1978) showed that the critical Reynolds number model leads to thermally stable discs. However, his results are restricted to some special cooling mechanisms, like optically thin or thick free-free cooling, Thomson diffusion, etc. We have checked the above criterion for a wide range of central masses and accretion rates using realistic opacities. We found that the radiative pressure dominated disc is always thermally stable, unlike standard discs. Further, assuming that the β -prescription applies everywhere, the region where hydrogen recombines is found to be unstable if it is optically thick, as in the standard case.

Another issue is that a β -disc can turn out to be optically thin (in a “grey” sense). This requires special conditions. A systematic survey inside the parameter space performed with the one zone model shows that the optically thin phase is present if the accretion rate satisfies

$$\dot{M} \leq 0.04 \left(\frac{\beta}{10^{-5}} \right)^{1.645} \left(\frac{M}{10^8 M_{\odot}} \right)^{0.0965} M_{\odot}/\text{yr} \quad (3.4)$$

This regime which has already been reported by Williams (1980) with the critical Reynolds number model applied to discs in binaries (see also Wood et al 1992), stands

within the gas pressure dominated part. It involves quasi-constant midplane temperatures $\sim 4000 - 6000$ K and is both viscously and thermally stable. In fact, the occurrence of the optically thin regime is the combination of two effects: the monotonic decrease of the surface density with radius and the drastic decrease of grey absorption coefficients where hydrogen becomes neutral. It is more likely to occur in very low luminosity objects (that is, for low accretion rates). However, in the case of AGN discs only, this regime is such that $\mathcal{M}_t > 1$ and stands beyond the scope of this viscosity model.

4 Concluding remarks

The main informations we have about the α -parameter describing turbulent viscosity within the framework of the standard theory comes from observations of Young Stellar Objects and Cataclysmic Variables where discs are spatially resolved and experience non stationary phenomena. Almost no constraint has been set yet from AGN studies on this theory and proofs that the α -prescription is the good choice are still lacking. The weaknesses of the α -model for AGN (e.g. Koratkar & Blaes, 1999) question back the reliability of the viscosity prescription. Quite obviously, the actual description of mechanisms which are able to evacuate the disc angular momentum and in particular turbulence seems well deficient compared to the other ingredients of models, like radiative transfer (Czerny & Dumont 1998; Nayakshin et al 1999). It is also likely that the effects of turbulence can not be modeled by a simple viscosity prescription.

The β -viscosity strongly departs from the standard prescription especially regarding to the structure and stability of keplerian discs. Testing this attractive viscosity prescription within an AGN disc from observations seems an unachievable task yet. It has been shown (Huré, Richard & Zahn, 2001) that the β -model fully applies in protostellar discs and discs in binaries (specially, it is predicted that $\mathcal{M}_t \ll 1$ everywhere). Moreover, the possible existence of an optically thin regime (e.g. Williams, 1980) which can give rise to spectral features in emission an optically thick α -disc can not produce with $\alpha \leq 1$ is attractive. This would then offer a powerful tool to probe the disc state (temperature, density, mass, etc.) and central star.

As a matter of fact, the β -prescription which is more physical than the α -prescription has almost not been explored. It can be used to build very sophisticated disc models (illuminated discs, advective discs, thick discs, discs with corona, etc.). This means a huge amount of work.

We are grateful to A. Abrassart, C. Boisson, S. Collin, A.M. Dumont, M. Mouchet and J.P. Zahn for many suggestions to improve the oral presentation and for comments about this paper. We also thank O. Balaszynski and A.M. Romales.

References

- Balbus S.A., Hawley J.F., 1991, ApJ, 376, 214
- Bardou A., Heyvaerts J., Dusch W., 1998, A&A, 337, 966
- Bell K.R., Lin D.N.C., 1994, ApJ, 427, 987

- Cannizzo J.K., 1993, in *"Accretion disks in compact stellar systems"*, Ed. J.C.Wheeler, World Scientific, 6
- Chandrasekhar S. 1960, Proc. Nat. Acad. Sci. 46, 53
- Czerny B., Dumont A.M., 1998, 338, 386
- De Freitas Pacheco J.A., Steiner J.E. 1976, A&SS, 39, 487
- Dubrulle B., 1993, Icarus, 106, 59
- Duschl, W. J., Strittmatter, P. A., & Biermann, P. L. 2000, A&A, 357, 1123
- Frank J., King A., Raine D. 1992, in *"Accretion power in astrophysics"*, 2nd Ed., Cambridge Uni. Press.
- Gammie C.F., Menou K. 1998, ApJ Let., 492, 75
- Hubeny I., 1990, ApJ, 351, 632
- Huré J.M., 2000, A&A, 358, 378
- Huré J.M., Richard D., Zahn J.P., 2001, A&A, 367, 1087
- Kenyon S.J., 1999, in *"The physics of star formation and early stellar evolution"*, Eds. C.J. Lada and N. Kyladis
- Koratkar A. & Blaes O., 1999, PASP, 111, 1
- Lasota J.-P., Hameury J.-P. 1998, in *"Accretion processes in astrophysical systems: some like it hot"*, Proceedings of the 8th AIP Conference, Ed. S.T. Holt, Kallman T.R., 351
- Lightman A.P., Eardley D.M. 1974, ApJ, 187, L1-L3
- Lin D.N.C., Papaloizou J., 1980, MNRAS, 191, 37
- Lynden-Bell D., Pringle J., 1974, Mon. Not. R. astr. Soc., 168, 603
- Meyer F., Meyer-Hofmeister E., 1982, A&A, 106, 34
- Nayakshin S., Kazanas D. & Kallman T.R., 1999, preprint/astro-ph/9909359
- Piran T. 1978, ApJ, 221, 652
- Pringle J. 1981 ARA&A, 19, 137
- Rayleigh Lord, 1916, Proc. Roy. Soc. London A 93, 148
- Richard D., Zahn J.-P. 1999, A&A, 347, 734
- Richard D., 2001, Thèse de l'Université Paris 7
- Shakura N.I., Sunyaev R.A. 1973, A&A, 24, 337
- Shakura N.I., Sunyaev R.A. 1976, MNRAS, 175, 613
- Shields G., 1978, Nature, 272, 20
- Shlosman I., Begelman M.C., Frank J., 1990, Nature, 345, 679
- Siemiginowska A., Czerny B., Kostyunin V., 1996, ApJ, 458, 491
- Thompson R.I., Strittmatter P.A., Erickson E.F., Witteborn F.C., Strecker D.W. 1977, Ap. J., 218, 170
- Williams R.E., 1980 Ap. J., 235, 939
- Wood J.H., Horne K., Vennes S., 1992, Ap.J., 385, 294

Conclusion

Le travail entamé dans cette thèse se veut être une ouverture vers une meilleure compréhension à la fois de la turbulence due à la rotation différentielle, et des objets astrophysiques dont la dynamique est dominée ou simplement influencée par de tels écoulements. L'exploration en laboratoire nous a permis de mettre en évidence quelques unes de leurs propriétés, telles que leurs domaines d'instabilité, les lois d'évolution des champs moyens ou des fluctuations turbulentes. Il a été mis en évidence que des écoulements semblables aux écoulements kepleriens sont instables et peuvent devenir turbulents. Des résultats restent à interpréter comme le fait que les plus grandes échelles turbulentes semblent être de taille constante quel que soit le nombre de Reynolds. Ces échelles paraissent être très inférieures à l'écartement des cylindres et ne sont donc pas contraintes par la géométrie de l'expérience. Il reste donc à comprendre ce qui définit ces échelles de transport. Nous avons aussi pu tirer de cette étude des indications sur les paramètres de base qui gouvernent leur stabilité, ainsi que sur une modélisation du transport turbulent du moment cinétique. Nous avons également montré que cette prescription pouvait décrire – dans un modèle simple – des disques d'accrétion viables.

Par ailleurs, nous disposons d'une grande quantité de données expérimentales. Ces données renferment encore un grand potentiel, tant par ce qui pourra encore en être extrait et l'interprétation qu'elles demandent, que par l'utilisation qui peut en être faite pour la validation de modèles théoriques ou numériques.

A moins de voir apparaître prochainement une théorie générale de la stabilité non-linéaire, ces modèles numériques sont maintenant la prochaine étape pour la compréhension de ces données expérimentales. En effet, si des simulations directes restent encore lourdes et extrêmes, l'existence de ces données ouvre la porte à la validation d'autres modèles numériques du type "LES". Une fois ces modèles validés, ils nous permettront de déterminer les grandeurs qui ne sont pas accessibles en laboratoire et d'avancer d'un pas supplémentaire vers la compréhension de ces écoulements. Enfin l'étape suivante sera l'utilisation de ces mêmes modèles numériques, ainsi que de ce que nous aurons appris de la turbulence, dans des modèles plus réalistes des objets astrophysiques.

- [1] Andereck, C.D., Liu, S.S., Swinney, H.L., 1986, J. Fluid Mech. 164, 155
- [2] Balbus, S.A., Hawley, J.F., Stone, J.M., 1996, ApJ. 467, 76
- [3] Balbus S.A., Hawley J.F. 1991, ApJ 376, 214
- [4] Barcilon, A., Brindley, J., Lessen, M., Mobbs, F.R., 1979, J. Fluid Mech. 94, 453
- [5] Barcilon, A., Brindley, J., 1984, J. Fluid Mech. 143, 429-449
- [6] Bottin, S., 1998, Thèse de Doctorat, Université Paris 7
- [7] Boubnov, B.M., Gledzer, E.B., Hopfinger, E.J., 1995, J. Fluid Mech. 292, 333
- [8] Brun, S., 1998, Thèse de Doctorat, Université Paris 11
- [9] Cannizzo J.K., 1993, in "*Accretion disks in compact stellar systems*", ed. J.C.Wheeler, World Scientific, 6
- [10] Canuto, V.M., Minotti, F.O., Schilling, O., 1994, ApJ. 425, 303
- [11] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Clarendon Press
- [12] Chandrasekhar, S. 1961, Proc. Nat. Acad. Sci. 46, 53
- [13] Coles, D., 1965, J. Fluid Mech. 21, 385
- [14] Coles, D., Van Atta, C., 1966, J. Fluid Mech. 25, 513
- [15] Dauchot, O., Daviaud, F., 1994, Phys. Fluids 7, 335
- [16] De Freitas Pacheco J.A., Steiner J.E. 1976, A&SS, 39, 487
- [17] Doering, C.R., Constantin, P., 1992, Phys. Rev. Lett. 69, 1648
- [18] Dubrulle B. 1993, Icarus 106, 59
- [19] Dubrulle, B., 1990, Thèse de Doctorat, Université de Toulouse 3
- [20] Duschl W.J., Strittmatter P.A., Biermann P.L. 2000, A&A 357, 1123
- [21] Esser, A., Grossmann, S., 1996, Phys. Fluids 8, 1814
- [22] Fasel, H., Booz, O., 1984, J. Fluid Mech. 138, 21
- [23] Frank J., King A., Raine D. 1992, in "*Accretion power in astrophysics*", 2nd ed., Cambridge Univ. Press.
- [24] Gammie, C.F., Menou, K. 1998, ApJ Lett. 492, 75
- [25] Gough, D.O., Sekii, T., 1997, in IAU Symp. 181, Kluwer
- [26] Hawley J.F., Balbus S.A. 1991, ApJ 376, 223
- [27] Hua, B.L., Le Gentil, S., Orlandi, P., 1997, Phys. Fluids 9, 365

- [28] Hubeny I. 1990, ApJ 351, 632
- [29] Huré J.M., Richard D., 2000, Proceedings of the EAS meeting held in Toulouse France, 1999, eds. H. Sol & B. Rocca-Volmerange, EDP Sciences
- [30] Huré J.M., 1998, A&A 337, 625
- [31] Johnson, J.A., 1963, J. Fluid Mech. 17, 337
- [32] Joseph D.D., Munson B.R. 1970, J. Fluid Mech. 43, 545
- [33] Kato S., Yoshizawa A., 1997, Publ. Astron. Soc. Japan, 49, 213
- [34] Lasota J.-P., Hameury J.-P. 1998, in "*Accretion processes in astrophysical systems : some like it hot*", Proceedings of the 8th AIP Conference, ed. S.T. Holt, Kallman T.R., 351
- [35] Lathrop, D.P., Fineberg, J., Swinney, H.L. 1992, Phys. Rev. Lett. 68, 1515
- [36] Lathrop, D.P., Fineberg, J., Swinney, H.L. 1992, Phys. Rev. A 46, 6390
- [37] Lin D.N.C., Papaloizou J. 1980, MNRAS 191, 37
- [38] Lynden-Bell D., Pringle J.E. 1974, MNRAS 168, 603
- [39] Madanshetty, S.I., Nadim, A., Stone, H.A., 1996, Phys. Fluids 8, 2011
- [40] Maloy, K.J., Goldburg, W., Phys. Rev. E 48, 322
- [41] Marcus, P.S., 1984, J. Fluid Mech. 146, 45
- [42] Piran T. 1978, ApJ 221, 652
- [43] Pringle J. 1981, ARA&A 19, 137
- [44] Rabaud, M., Couder, Y., 1983, J. Fluid Mech. 136, 291
- [45] Rayleigh, Lord 1916, Proc. Roy. Soc. London A 93, 148
- [46] Richard D., Zahn J.-P. 1999, A&A 347, 734
- [47] Riechelmann, D., Nanbu, K., 1997, Phys. Fluids 9, 811
- [48] Riley, P.J., Laurence, R.L., 1976, J. Fluid Mech. 75, 625
- [49] Riley, P.J., Laurence, R.L., 1977, J. Fluid Mech. 79, 535
- [50] Serrin J. 1959, Arch. Ration. Mech. Anal. 3, 1
- [51] Shakura N.I., Sunyaev R.A. 1973, A&A 24, 337
- [52] Siemiginowska A., Czerny B and Kostyunin V. 1996, ApJ 458, 491
- [53] Spiegel, E.A., Zahn, J.P., 1992, A&A 265, 106
- [54] Tagg, R.R., 1994, Nonlinear Science Today 4, 1
- [55] Talon, S, 1997, Thèse de Doctorat, Université Paris 7
- [56] Tam, W.Y., Swinney, H.L., 1987, Phys. Rev. A 36, 1374
- [57] Taylor, G.I. 1923, Phil. Trans. Roy. Soc. London A 223, 289
- [58] Taylor, G.I., 1936, Proc. R. Soc. Lond. A 157, 546
- [59] Taylor, G.I., 1936, Proc. R. Soc. Lond. A 157, 565

- [60] Thompson R.I., Strittmatter P.A., Erickson E.F., Witteborn F.C., Strecker D.W. 1977, ApJ 218, 170
- [61] Smith, G.P., Townsend, A.A., 1982, J. Fluid Mech. 123, 187
- [62] Townsend, A.A., 1984, J. Fluid Mech. 144 , 329
- [63] Tylanda R. 1981, Acta Astron 31, 127
- [64] Wang, A.K.M., Gelhar, L.W, 1970, MIT, Dept Civil Eng. report
- [65] Wendt F. 1933, Ing. Arch. 4, 577
- [66] Zahn, J.P., 1992, A&A 265 , 115
- [67] Zeldovich Y.B. 1981, Proc. Roy. Soc. London A 374, 299

Résumé

Cette thèse présente les résultats d'une étude expérimentale et théorique sur la stabilité non-linéaire des écoulements hydrodynamiques en rotation différentielle. Une analyse de mesures antérieures à ce travail effectuées dans des expériences de laboratoire de type Couette-Taylor nous a permis de dériver un critère de stabilité ainsi qu'une prescription du type viscosité turbulente pour le transport du moment cinétique. L'étude expérimentale complémentaire que nous avons menée nous a permis de mettre en évidence des régimes de rotation instables vis à vis de perturbations aux amplitudes finies, qui demeureraient jusqu'à maintenant inexplorés. Nous présentons également quelques propriétés des écoulements moyens turbulents ainsi que des fluctuations de vitesse, en particulier leur évolution en fonction du nombre de Reynolds. Par des arguments physiques simples, nous dérivons des paramètres de stabilité, des lois d'évolution des fluctuations turbulentes, ainsi qu'une expression de la viscosité turbulente compatible avec notre première prescription. Finalement, nous concluons par une application de cette viscosité à un modèle simple de disques d'accrétion.

Abstract

This dissertation presents the results of an experimental and theoretical study on the non-linear stability of differentially rotating flows. From an analysis of previous experimental data from Couette-Taylor laboratory experiments, we derive a stability criterion along with a prescription for turbulent viscosity for angular momentum. Our new experimental study shows rotation regimes unstable to finite amplitude perturbations, that were still undiscovered. We present the properties and evolution with respect to the Reynolds number of the mean flow and the velocity fluctuations. We also derive stability parameters and laws for the behavior of turbulent fluctuations, along with an expression for turbulent viscosity which is compatible with our previous prescription. Finally, we conclude with an application of that viscosity to a simple model of accretion disks.