



Désintégration des systèmes hadroniques dans des modèles de quarks constituants

Raphaël Bonnaz

► To cite this version:

Raphaël Bonnaz. Désintégration des systèmes hadroniques dans des modèles de quarks constituants. Physique mathématique [math-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2001. Français. NNT : . tel-00001428

HAL Id: tel-00001428

<https://theses.hal.science/tel-00001428>

Submitted on 14 Jun 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
GRENOBLE I

THESE

pour obtenir le titre de :

DOCTEUR
DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER -
GRENOBLE I

Discipline : Physique Théorique Nucléaire

présentée et soutenue publiquement
le 25 septembre 2001
par :

BONNAZ Raphaël

DESINTEGRATION DES SYSTEMES HADRONIQUES
DANS DES MODELES DE QUARKS CONSTITUANTS

Directeur de thèse :
SILVESTRE-BRAC Bernard

JURY

C. Gignoux
F. Fernández
C. Semay
B. Silvestre-Brac

Rapporteur
Rapporteur

RESUME en français :

Cette étude porte sur la désintégration de mésons dans des modèles de quarks constituants. Ces derniers sont présentés ainsi que les différents potentiels d'interaction $q\bar{q}$ employés. La désintégration forte d'un méson en deux ou trois mésons fait l'objet de la seconde partie. Le modèle 3P_0 original est présenté ainsi que la recherche d'une fonction de vertex $\gamma(p)$ dépendant de l'impulsion de la paire $q\bar{q}$ créée. On montre qu'une fonction $\gamma(p)$ de type "constante + gaussienne" se révèle supérieure à la constante utilisée habituellement. La deuxième partie est consacrée aux transitions électromagnétiques étudiées à travers l'émission d'un photon réel ou virtuel. Dans le cadre de l'émission d'un photon réel les approximations rencontrées dans la littérature sont passées en revue puis comparées à un formalisme dépassant l'approximation des grandes longueurs d'ondes. Des angles de mélange sont testés pour certains mésons. Pour les photons virtuels, l'expression de la largeur obtenue par van Royen et Weisskopf est redémontrée puis étendue en prenant en compte la distribution des impulsions des quarks au sein du méson. Un habillage électromagnétique est ajouté aux quarks aboutissant à une amélioration des résultats. Tout au long de cette étude, des fonctions d'onde de divers degrés de sophistication sont utilisées. Les résultats de largeurs de désintégration sont comparés à un large éventail de données expérimentales.

TITRE en anglais :

Various decays of some hadronic systems in constituent quark models

RESUME en anglais :

The topic of this study is the decay of mesons in constituent quark models. Those models as well as the various quark-antiquark interaction potentials are presented. Strong decay of a meson into two or three mesons is studied in the second part. The original 3P_0 model is presented as well as the research of a vertex function $\gamma(p)$ depending on the momentum for the created $q\bar{q}$ pair. We show that a function $\gamma(p)$ of "constant+gaussian" type is superior than the constant usually used. The second part is dedicated to electromagnetic transitions studied through the emission of a real or a virtual photon. In the case of real photon emission, the different approximations found in the literature are reviewed and compared to the formalism going beyond the long wave length approximation. Mixing angles are tested for some mesons. In the case of virtual photon, the expression of decay width obtained by van Royen and Weisskopf is redemonstrated and then improved by taking into account the quark momentum distribution inside the meson. An electromagnetic dressing of quarks is introduced that improves the results. All along this study, wave functions of various sophistication degrees are used. The results of decay widths are compared to a large bulk of experimental data.

DISCIPLINE : Physique Théorique Nucléaire

MOTS-CLES :

Modèles de quarks constituants

Désintégrations fortes

Désintégrations électromagnétiques

Potentiel d'interaction quark-antiquark
modèle 3P_0

émission d'un photon réel ou virtuel

INTITULE ET ADRESSE DU LABORATOIRE :

Institut des Sciences Nucléaires, 53 av. des Martyrs, 38026 Grenoble Cedex.

Remerciements

Tout d’abord, je tiens à exprimer ma gratitude à Bernard Silvestre-Brac pour m’avoir permis de réaliser cette thèse. Merci pour ta patience Bernard, et pour le temps que tu m’as consacré.

Merci aux membres du jury pour leur intérêt pour mon travail et pour leur lecture attentive de ma thèse.

Merci également aux membres du groupe de physique théorique qui m’ont bien accueillis.

Merci au groupe de physique nucléaire de Salamanca pour notre collaboration. Merci à Luis et Bruno pour m’avoir rendu encore plus agréables mes séjours en Espagne.

Merci à toi, Lukas “Kangou” Theussl, pour toutes nos bonnes discussions, tes encouragements et nos parties de squash pas si tranquilles!

Merci à ma Famille pour tout ce qu’elle m’apporte, en particulier à mes parents, entre autres pour m’avoir donné la possibilité de faire cette thèse.

Merci à toi ma Belle Céline, pour ton amour, ton soutien, et pour supporter mes chansons répétitives :) .

Enfin merci à vous les Amis. Le temps passe vite quand on est en bonne compagnie et je n’ai pas vu passer mes années d’étude! Merci donc pour toutes les invitations (tout particulièrement à Steph & David et Titel & Seb pour supporter les fréquents “débarquements” chez eux de toute la bande), les parties toujours délirantes de jeux de rôle et nos discussions partant en tous sens.

Merci à Stéphanie pour ses conseils de lecture, à Titel pour sa gaieté, à Aline pour ses nombreux mails, à David, Florent, Fred, Seb, Raf(u), Philippe, Carinne et Jean-Philippe ...Merci à tous mes autres Amis que je ne cite pas mais que je n’oublie pas pour autant.

Table des matières

Remerciements	5
I Les potentiels d'interaction quark-antiquark	11
1 Présentation succincte du modèle standard	13
2 L'interaction forte	15
2.1 Modèle de quarks constituants	16
2.1.1 Les potentiels $V_{q\bar{q}}$	17
2.1.2 Les potentiels étudiés	18
2.1.3 L'énergie cinétique T	19
2.1.4 Conclusion de cette partie	20
2.1.5 Les mésons étudiés	21
II Les désintégrations fortes et le modèle 3P_0	25
3 Les désintégrations fortes	27
3.1 Le modèle 3P_0 originel	28
3.2 Le modèle 3P_0 modifié	30
3.2.1 L'opérateur de transition T_{mod} modifié	30
3.2.2 Largeur de désintégration	31
3.2.3 Fonctions d'onde des mésons	33
3.3 Amplitude de transition	37
3.3.1 Lien entre les différents diagrammes	39
3.3.2 Calcul de la seconde contraction.	40
3.4 Etude de la fonction de vertex $\gamma_\mu(p)$	46
3.4.1 Remarques sur le cas $\gamma(p) = A = \text{Constante}$	46
3.4.2 Choix des fonctions tests	47
3.4.3 Vertex Gaussien	59
3.5 Méson large dans la voie finale	61
3.5.1 Prescription de Capstick	61
3.5.2 Prise en compte partielle de l'impulsion k du méson B	63
3.5.3 Distribution de probabilité	64
3.5.4 Importance de la qualité des fonctions d'ondes	65

3.6	Différents potentiels	67
3.6.1	Résultats pour le potentiel χ_{QM}	68
3.6.2	Largeurs pour le Groupe I	69
3.6.3	Largeurs pour le Groupe II	72
3.6.4	Largeurs pour le Groupe II pour différents potentiels	74
3.6.5	Rapports d'amplitude en ondes partielles	75
3.6.6	Largeurs pour le Groupe III	77
3.7	Fonctions d'onde sophistiquées	78
3.7.1	Habillage des quarks	79
3.7.2	L'instanton	79
3.7.3	La force spin-orbite	80
3.7.4	La force tenseur	80
3.7.5	Modification du 3P_0	81
3.7.6	Les résultats pour les états stables	82
3.7.7	Les résultats pour les états larges	82
3.8	Conclusion	85
4	Rayons carrés et facteurs de forme	87
4.1	Rayons carrés	87
4.1.1	Rayons carrés de masse	87
4.1.2	Rayons carrés de charge	91
4.2	Facteur de forme électromagnétique	92
4.2.1	Les résultats	94
III	Désintégrations électromagnétiques	103
5	Déexcitation par émission d'un photon virtuel	107
5.1	Présentation des notations	107
5.2	Expressions générales	109
5.2.1	Cas de quarks libres	110
5.2.2	Pour une paire $q\bar{q}$ formant un méson	113
5.3	Largeur de désintégration	115
5.4	Habillage électromagnétique des quarks	118
5.4.1	Densité de charge gaussienne	120
5.5	Les résultats	120
6	Déexcitation par émission d'un photon réel	127
6.1	L'opérateur de transition électromagnétique	128
6.2	Elément de matrice $\mathcal{M}_{A \rightarrow B\gamma}$	129
6.2.1	Etats initial et final	130
6.2.2	Emission par le quark	131
6.2.3	Emission par l'antiquark	132
6.2.4	Opérateur charge	132
6.3	Expression de la largeur	133
6.3.1	Espace de phase relativiste	134

6.3.2	Espace de phase non relativiste	134
6.3.3	Espace de phase mixte	135
6.4	Approximation des grandes longueurs d'onde	135
6.4.1	Terme électrique $\vec{\mathcal{E}}$	135
6.4.2	Approximation dipolaire	137
6.4.3	Terme magnétique $\vec{\mathcal{M}}$	138
6.5	Cas général	140
6.5.1	Cas $L_B = 0$	141
6.5.2	Cas $L_A = 0$	144
6.6	Les résultats	144
6.6.1	Espace de phase	144
6.6.2	Approximation dipolaire et GLO	147
6.6.3	Cas général	148
6.6.4	Angle de mélange	152
6.7	Conclusion	154
IV	Annexes	159
A	Les potentiels d'interactions $q\bar{q}$	161
A.1	AL1 et AP1	161
A.2	χ QM	161
A.3	DNR et NRAL	163
B	Lois de conservation	167
B.1	La parité	167
B.2	La conservation de charge	167
B.2.1	La parité et conservation de charge pour le 3P_0	168
B.3	La G -parité	169
C	Détail du calcul de la seconde contraction	171
D	Expressions particularisées de $\Gamma_{A \rightarrow BC}$	177
D.1	Terme d'espace	177
D.1.1	Moment orbital $L_A = 0$	177
D.1.2	Moment orbital $L_A = 1$	178
D.1.3	Moment orbital $L_A = 2$	178
D.1.4	Moment orbital $L_A = 3$	178
D.2	Transitions de l'échantillon	179
E	Quantification canonique du champ de Dirac	183
E.1	Formalisme de l'hélicité	185
E.2	Formalisme de " S_z "	186
E.2.1	Comportement des opérateurs b et d vis à vis de l'opérateur de spin $\vec{S}$	186

F	Quelques formules utiles	193
F.1	Approximation des grandes longueurs d'onde	193

Première partie

Les potentiels d'interaction quark-antiquark

Chapitre 1

Présentation succincte du modèle standard

Notations

Dans ce mémoire les constantes $\hbar$ et c sont prises égales à 1 pour alléger les notations. Pour repasser aux unités standard il suffit de multiplier toutes les quantités par des combinaisons de puissances de $\hbar$ et de c donnant la bonne dimension.

q désigne un quark, g un gluon et une barre surmontant une lettre comme par exemple $\bar{q}$ désigne une antiparticule, ici un antiquark.

Généralement Ψ_α représente une fonction d'onde dont α est l'ensemble des nombres quantiques permettant de décrire l'état.

Sauf précision contraire, m est la masse et E l'énergie.

$[A, B]^C$ signifie que les grandeurs A et B sont couplées pour donner C .

$C_{l_1, m_1; l_2, m_2}^{L, M}$ désigne le coefficient de Clebsh-Gordan associé au couplage de l_1 avec l_2 , de projection m_1 et m_2 pour donner L de projection M sur l'axe de quantification.

L désigne le moment orbital, S le spin et J le moment angulaire total résultat du couplage de L et de S .

Introduction

Dans le modèle standard, la matière est composée de deux catégories de particules : les leptons et les quarks. Ces particules sont dites élémentaires dans la mesure où elles ne possèdent pas de sous-structure ; il n'existe donc pas de "blocs" de matière plus fondamentaux. De plus elles sont ponctuelles, ou autrement dit, possèdent une extension spatiale considérée comme nulle au vu de nos appareils de mesure. Il s'agit de fermions, c'est à dire des particules de spin demi-entier obéissant à la statistique de Fermi-Dirac. Ces deux catégories, leptons et quarks sont soumises aux interactions gravitationnelle, électrofaible (l'électrodynamique quantique ou Q.E.D. plus l'interaction faible). Seuls les quarks ressentent en plus l'interaction forte. Ces interactions sont propagées par des particules de spin entier que l'on nomme bosons vecteurs.

Les leptons regroupent, par ordre croissant de masse : l'électron e , le muon μ et le tau τ

ainsi que les neutrinos associés. Ils se classent habituellement en trois familles :

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Quant aux quarks, ceux-ci n'étaient initialement que des artifices mathématiques permettant de reproduire les classements par multiplets des particules. Désormais, leur existence n'est plus remise en question et les six saveurs : up u , down d , strange s , charm c , bottom ou beauty b , top ou truth t ont été confirmées expérimentalement. Comme pour les leptons, on les classe en trois familles :

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Il est difficile de comparer la “force” relative de ces interactions car cette notion est ambiguë et dépend de la distance entre les deux particules test. Cependant, cette mise en garde effectuée et pour fixer les idées, on a, en comparant les constantes de couplages associées à ces forces :

Interaction	Constante de couplage	(1.3)
forte	1	
électromagnétique	10^{-2}	
faible	10^{-7}	
gravitationnelle	10^{-40}	

Néanmoins chaque interaction a son importance ; on laissera de côté la gravitation qui est négligeable dans les problèmes étudiés ici. L'interaction forte donne naissance aux forces nucléaires, l'interaction faible explique les changements de saveurs des quarks aboutissant à la désintégration du neutron en proton notamment. Quant à l'interaction électromagnétique, qui nous est plus familière, elle gère par exemple la répulsion de deux électrons.

Chapitre 2

L'interaction forte

Elle est l'objet principal de cette étude. Le rôle de cette interaction est primordiale puisque c'est elle qui est responsable de la cohésion nucléaire. En effet, les forces nucléaires qui s'exercent entre nucléons et qui permettent la formation des noyaux atomiques, sont des réminiscences de la force forte entre quarks composant les nucléons. C'est une interaction de très courte portée mais très intense, caractérisée par une constante de couplage α_s pouvant valoir l'unité. Cette dernière remarque a une conséquence assez fâcheuse ; il n'est pas possible de calculer, dans ce cas, de façon perturbative les processus de l'interaction forte car le développement en puissances de α_s diverge ! On parle de régime non perturbatif.

Tout comme l'électromagnétisme régit les interactions entre particules chargées électriquement, l'interaction forte est ressentie par les particules portant une charge dite de couleur. Cette notion de couleur n'a rien à voir avec le concept habituel de couleur. Ce nom vient du fait qu'il existe trois états de base de couleur que l'on a nommé r (rouge), v (vert) et b (bleu) par analogie avec les couleurs primaires. La couleur a été inventée pour expliquer le fait que des fermions pouvaient se trouver dans le même état quantique, chose a priori interdite par le principe de Pauli. Il existait donc un nouveau nombre quantique : la couleur, pouvant prendre trois valeurs permettant de différencier ces états.

La théorie quantique des champs pour l'interaction forte se nomme la chromodynamique quantique ou QCD pour les initiales en anglais de Quantum Chromo Dynamics. Les bosons vecteurs associés sont les gluons ; ils sont au nombre de huit et, contrairement au photon qui transporte l'interaction électromagnétique sans porter de charge électrique, portent une charge de couleur. Étant colorés, deux gluons peuvent interagir. De ceci découle une propriété de la QCD que l'on nomme *liberté asymptotique*. De quoi s'agit-il ? En théorie quantique des champs le nombre de particules n'est pas fixe ; même dans le vide se créent puis s'annihilent des paires particules-antiparticules. Si une charge électrique est présente, celle-ci va polariser le vide c.-à-d. attirer les positrons et repousser les électrons (dans le cas d'une paire e^-e^+). Il se crée un phénomène d'écrantage qui occulte la vraie valeur de la charge ; de ce fait, la charge électrique mesurée varie en fonction de la distance. Si on entre très profondément dans ce cortège électronique (ou de façon équivalente, en se plaçant à haute énergie) la constante de couplage électromagnétique augmente. En QCD le même phénomène d'écrantage se produit mais cette fois les interactions entre gluons aboutissent à l'effet inverse, la constante de couplage forte α_s tend vers zéro à haute énergie, donc les quarks semblent libres.

Au sein des hadrons, états liés de quarks et de gluons, l'interaction forte est si attractive qu'on ne peut séparer ses constituants. Cette propriété est appelée *le confinement*. Il se traduit par une énergie d'interaction croissant avec la distance de séparation entre les quarks et l'impossibilité pour des objets, autre que ceux singlet de couleur, d'être observables physiquement.

Les différents hadrons auxquels on peut penser sont :

les mésons composés d'un quark q et d'un antiquark $\bar{q}$.

les baryons composés de trois quarks qqq .

les diquonia : $q^2\bar{q}^2$

les pentaquark : $q^4\bar{q}$

les dibaryons : q^6

les hybrides composés de gluons g et de quarks, ex : qqg .

les "glueballs" constitués uniquement de gluons.

En résumé à haute énergie on sait résoudre la QCD pour des exemples pratiques par méthode perturbative mais pour des énergies plus faibles, on se retrouve avec une théorie insoluble. Les alternatives sont généralement : la QCD sur réseau, les règles de somme et le modèle des quarks non relativistes NRQM.

La QCD sur réseau utilise un maillage de l'espace-temps pour travailler sur le lagrangien exact de la théorie. Elle est à l'origine de beaux succès comme la vérification du confinement, de la brisure de symétrie chirale. Mais elle reste malgré tout une méthode difficile à mettre en oeuvre, réclamant de gros moyens informatiques. Les règles de somme permettent de relier les largeurs de désintégration et les rapports de branchement aux condensats de quarks et gluons. Cependant ces deux moyens d'étude restent lourds d'emploi, ne peuvent être utilisés pour tous les calculs et enfin il est souvent difficile d'en faire ressortir la physique.

Nous avons choisi le modèle des quarks non relativistes avec un potentiel d'interaction quark-antiquark $q\bar{q}$: $V_{q\bar{q}}$.

2.1 Modèle de quarks constituants

Dans ce modèle, on abandonne l'idée de travailler avec le lagrangien de la QCD si ce n'est pour s'en inspirer. Le modèle des quarks constituants est un modèle phénoménologique dans lequel les degrés de liberté des gluons disparaissent et les quarks *nus* de la QCD sont remplacés par des quarks *constituants*. Il s'agit de quasi-particules de nombres quantiques identiques à ceux de la QCD fondamentale mais différant par certaines propriétés dynamiques telles que la masse. Ces quarks constituants possèdent : des masses plus importantes, une extension spatiale résultant du nuage gluonique. Ils sont pris comme étant non relativistes ; ceci peut sembler une grossière approximation pour les saveurs les plus légères u , d et s mais est justifié a posteriori par le succès du modèle.

L'hypothèse de base de ce modèle est que les quarks constituants obéissent à l'équation

non relativiste (2.1).

$$H|\Psi_\alpha\rangle = i\frac{d|\Psi_\alpha\rangle}{dt} \quad (2.1)$$

où dans sa version stationnaire :

$$(T + V) |\Psi_\alpha\rangle = E |\Psi_\alpha\rangle = m |\Psi_\alpha\rangle \quad (2.2)$$

L'écriture du hamiltonien H nécessite un choix de traitement relativiste (équation de Salpether) ou non (équation de Schrödinger) de l'énergie cinétique (voir plus loin) et également l'écriture d'un potentiel *simulant* l'interaction forte. Une bonne connaissance de la QCD est primordiale pour la mise au point de ce dernier.

La résolution de l'équation pour les solutions stationnaires (2.2) nous fournit la fonction d'onde de l'état lié. Il faut souligner ici le problème de la définition de la masse pour un système instable. L'état instable se définit comme une résonance dans la diffusion de particules stables. Un pôle dans le plan complexe de l'énergie signale également un tel état.

Une conséquence de l'utilisation de l'équation de Schrödinger est que le nombre de particules est fixé. Ainsi les hadrons étudiés auront un nombre de quarks constituants bien défini.

L'avantage du modèle des quarks couplé au potentiel d'interaction forte est qu'il est facile de faire ressortir la physique en jugeant l'importance de tel ou tel terme. La méthode de calcul est bien connue puisqu'on regarde les éléments de matrice associés aux processus étudiés... Le modèle des quarks est à l'origine de nombreux succès et a suggéré certaines propriétés de la QCD.

2.1.1 Les potentiels $V_{q\bar{q}}$

La méthode des potentiels consiste en la mise au point d'un potentiel d'interaction quark-quark (ou antiquark) dit "QCD inspired", c.-à-d. reproduisant les caractéristiques de la QCD. Ce potentiel $V_{q\bar{q}}$ simule d'une certaine façon le rôle des gluons qui ont disparu dans ce cadre d'étude ; les quarks ressentant ce potentiel sont dénommés constituants pour les différencier des particules élémentaires de la QCD fondamentale.

Nous allons présenter ci-dessous les termes habituels intervenant dans $V_{qq}(r)$, potentiel à deux corps, où r désigne la distance relative entre les deux quarks. Les potentiels étudiés comprendront un plus ou moins grand nombre de ces termes suivant leur complexité. Ces termes dérivent principalement de l'observation des spectres des mésons et baryons et de comparaison entre lagrangiens de la QED et de la QCD. Pour des raisons de symétries les termes habituels, basés sur les degrés de liberté de spin et d'espace, permettant de construire le potentiel sont :

$$1, \vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_{\bar{q}}, (\vec{r} \wedge \vec{p}) \cdot (\vec{\sigma}_q \pm \vec{\sigma}_{\bar{q}}), (\vec{\sigma}_q \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_{\bar{q}} \cdot \vec{r}) \quad (2.3)$$

De façon générale le potentiel s'écrit :

$$V = V_c + V_{hyp} + V_{SO} + V_T \quad (2.4)$$

- V_c terme central. Suivant le potentiel, il peut comprendre jusqu'à trois parties :

$$V_c(r) = V_{conf}(r) + V_{coulomb}(r) + V_{instanton}(r)$$

à savoir le confinement, qui est en puissance de r , l'échange d'un gluon, interaction de courte portée de type Coulombien, et l'instanton n'intervenant de fait que pour les mésons de spin zéro.

- V_{hyper} terme hyperfin qui est une interaction de type spin-spin résultant de corrections relativistes. Il lève la dégénérescence, entre autres, dans l'état fondamental entre les états $J^P = 0^-$ et 1^- .

$$V_{hyper} = f_{hyper}(r)(\vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_{\bar{q}})$$

- V_{SO} terme spin-orbite, résulte de corrections relativistes.

$$V_{SO} = f_{SO}(r)(\vec{r} \wedge \vec{p})(\vec{\sigma}_q \pm \vec{\sigma}_{\bar{q}})$$

Responsable de la levée de dégénérescence pour les états 3L_J pour $J = L - 1, L, L + 1$ pour la partie symétrique (signe +); le terme antisymétrique couplant les états $^1L_{J=L}$ et $^3L_{J=L}$.

- V_T terme tensoriel.

$$V_T = f_T \left[\frac{(\vec{\sigma}_q \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_{\bar{q}} \cdot \vec{r})}{r^2} - \frac{\vec{\sigma}_q \cdot \vec{\sigma}_{\bar{q}}}{3} \right]$$

Couple les états $^3L_{J=L+1}$ et $^3(L+2)_{J=L+1}$

Une remarque : une fois un potentiel quark-antiquark mis au point, celui-ci peut servir également à l'étude des baryons, ou plus généralement pour n'importe quel état lié de quark. Il faut tenir compte de la différence d'état de couleur entre une particule et une antiparticule. Ceci étant fait, on aboutit à la relation suivante :

$$V_{qq} = \frac{1}{2} V_{q\bar{q}} \quad (2.5)$$

exacte pour le potentiel d'échange d'un seul gluon, mais que l'on extrapole à tous les cas.

2.1.2 Les potentiels étudiés

Les différents potentiels utilisés, détaillés en appendice (A), sont :

- Le potentiel de Bhaduri [1]; il comprend le confinement linéaire en r , le terme d'échange de gluon et un terme hyperfin de type Yukawa.
- Le potentiel AL1 [2]; il comprend un terme de confinement linéaire en r , un terme hyperfin régularisé par une fonction gaussienne dont la taille dépend de la masse des quarks et le terme d'échange de gluon.
- Le potentiel AP1 [2]; il comprend un terme de confinement en puissance $\frac{2}{3}$ de r afin de reproduire au mieux les trajectoires de Regge dans un formalisme non relativiste, un terme hyperfin régularisé par une gaussienne et le terme d'échange de gluon. Par

rapport à AL1 et Bhaduri, le confinement moins intense va donner une fonction d'onde plus étalée ; on pourra donc percevoir des différences entre ces potentiels au travers d'observables faisant intervenir des moments plus importants.

- Le potentiel BSR [3], comme AL1 mais avec un habillage des quarks et un traitement semi-relativiste de l'énergie.
- Le potentiel DNR [3], comme AL1 mais avec un habillage des quarks et prise en compte des effets de l'instanton.
- Le potentiel NRAL [4] qui est notre forme la plus sophistiquée. En plus de la base commune à tous les potentiels : le confinement, le terme dit coulombien d'échange de gluon, le terme hyperfin il ajoute un habillage aux quarks, et prend en compte les effets de l'instanton, de la force spin-orbite et tenseur.
- Le potentiel χ QM [5]. Sa forme est quelque peu différente des potentiels précités, il n'en conserve que le terme d'échange d'un gluon pour les hautes énergies et celui du confinement pour les basses énergies. Dans la région intermédiaire, entre 200 MeV et 1 GeV, l'interaction est véhiculée, entre les quarks constituants, par des bosons de Goldstone résultant de la brisure spontanée de la symétrie chirale.

Il est possible de se faire une idée de la qualité des spectres AL1 et DNR sur la figure (2.1). De même les fonctions d'onde du méson π sont tracées pour différents potentiels, voir figure (2.2). On remarque que les fonctions d'onde se différencient principalement à l'origine et pour les grandes valeurs de r .

Bien qu'au cours de cette étude nous allons nous intéresser uniquement aux mésons, ces mêmes potentiels peuvent être utilisés pour le calcul des spectres des baryons. Ainsi pour reproduire les spectres des baryons, une force à trois corps n'est pas primordiale. Les potentiels AL1 et AP1 donnent de bons résultats pour ces systèmes contrairement aux potentiels DNR et NRAL. En effet, bien que ces derniers donnent de meilleurs résultats pour les mésons que AL1 et AP1, du fait de leur degré de sophistication supérieur, ils ne conservent pas cette supériorité lors de leur utilisation pour les baryons.

2.1.3 L'énergie cinétique T

L'utilisation de potentiel implique une approche Hamiltonienne.

$$H = T + V$$

- Cas non relativiste :

$$T = m_q + m_{\bar{q}} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu}$$

$\vec{p}$ impulsion relative associée à la variable $r = r_q - r_{\bar{q}}$, μ masse réduite du système. Une énergie cinétique non relativiste permet de traiter de façon exacte le mouvement du centre de masse.

- Cas semi-relativiste :

$$T = \sqrt{\vec{p}_q^2 + m_q^2} + \sqrt{\vec{p}_{\bar{q}}^2 + m_{\bar{q}}^2}.$$

qui, en se plaçant dans le référentiel du centre de masse, redonne le cas non-relativiste à la limite $p_i \ll m_i$.

Le mouvement du centre de masse ne peut être correctement retiré. La prescription usuelle est de se placer dans le système du centre de masse est de considérer $\vec{p}$ comme étant l'impulsion commune aux quarks dans ce système.

Seul le potentiel BSR [3] utilise cette formulation pour T .

2.1.4 Conclusion de cette partie

Ces quarks obéissent à l'équation de Schrödinger non relativiste dont la résolution nous fournit la fonction d'onde de l'état lié ainsi que son énergie. La comparaison de cette énergie avec la mesure expérimentale de la masse du système étudié nous renseigne sur la qualité du potentiel. Néanmoins la qualité du spectre d'énergie n'est pas un critère suffisant car des potentiels relativement différents peuvent conduire à des spectres de qualités similaires. Il est donc nécessaire de tester les fonctions d'onde obtenues au travers de calculs d'observables plus révélatrices. C'est un des buts de cette étude : tester la qualité des potentiels développés par B. Silvestre-Brac et C. Semay au travers de calculs de largeurs de désintégration. L'approche choisie peut être qualifiée de "dépendant du modèle" car on développe de pair notre connaissance de la QCD (au travers du potentiel) et du processus physique étudié. Ainsi des résultats théoriques ne reproduisant pas les mesures expérimentales peuvent s'expliquer soit par une méconnaissance de la physique intervenant dans le processus (par exemple un mauvais opérateur de transition) ou bien une fonction d'onde incorrecte issue d'un potentiel manquant une propriété importante de la QCD pour ce processus. En effet, concernant ce dernier point, il est important de tester la fonction d'onde au travers de plusieurs processus qui pourront faire intervenir des régions différentes de cette dernière. Ainsi les différents termes du potentiel pourront être étudiés. On peut donc s'intéresser aux facteurs de forme, aux rayons carrés moyens de charge, aux largeurs de désintégration forte, électromagnétique...

Nous avons choisi de nous intéresser aux désintégrations des mésons. Ce choix relève de plusieurs constatations :

- Richesse des données expérimentales cf [6].
- Méson : système simple mais non évident.
- Variété des modes de désintégration. Du fait de sa composition, un quark et un anti-quark, le méson est caractérisé par un nombre baryonique nul ; ainsi suivant les modes de désintégration envisagés il n'y aura pas nécessairement de hadron dans la voie finale contrairement au cas des baryons. Si on étudiait les baryons, certains canaux présenteraient des mésons dans la voie finale ce qui imposerait que le potentiel d'interaction permette de décrire aussi bien les baryons que les mésons. Cela peut être une source de difficulté supplémentaire. Pour les mésons, on peut avoir des processus purement radiatif ou leptonique. De ce fait ils présentent des canaux de désintégrations beaucoup plus variés.

2.1.5 Les mésons étudiés

Ici sont présentés les différents mésons apparaissant tout au long de cette étude. Les données telles que les masses, largeurs, canaux de désintégration, et J^P sont issus du Particle Data Group [6]. Au cours de nos calculs, il nous faudra caractériser complètement ces mésons. Du point de vue des nombres quantiques il nous faudra : n le nombre quantique radial, L le moment orbital, S le spin, J le moment cinétique total résultant du couplage de L et S . La fonction d'onde de saveur doit également être connue. Cependant, pour certains mésons, les valeurs de L , S et la saveur ne sont pas définies de façon certaine. En effet L et S sont déduits des valeurs de J et de la parité P , il n'y a donc pas de solution unique cf (B.1-B.2). Ces problèmes se posent surtout pour les états excités moins bien connus expérimentalement. Dans la table (2.1) sont référencés les valeurs admises pour certains mésons pour nos études, sauf indication contraire dans le texte comme l'étude des angles de mélanges cf (3.6.2) .

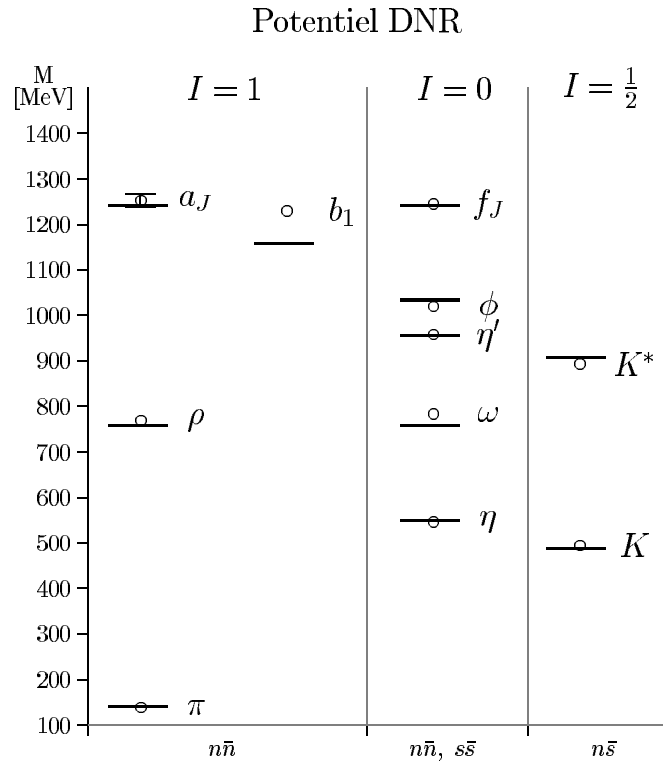
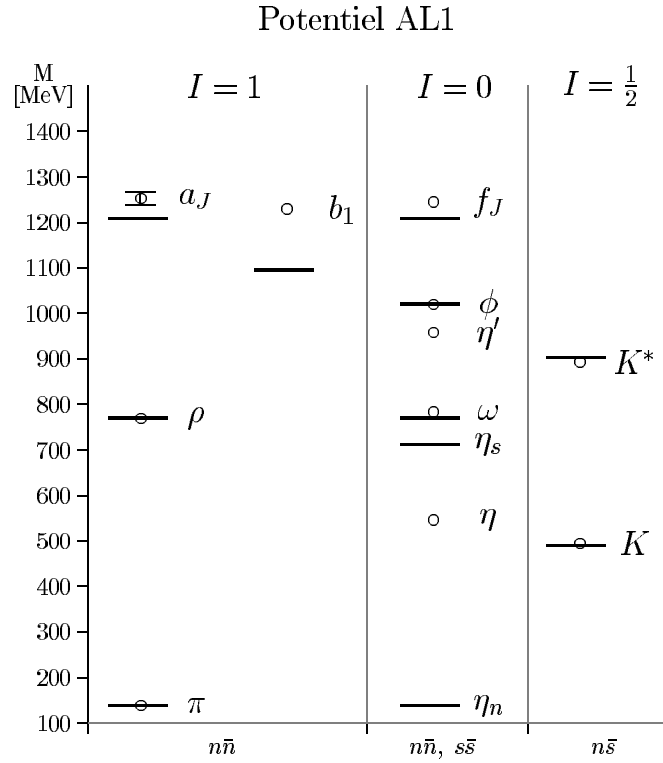


FIG. 2.1 – Spectre des mésons légers pour les états de plus basse énergie, obtenus pour les saveurs u , d et s . Les potentiels AL1 et DNR sont ici représentés.

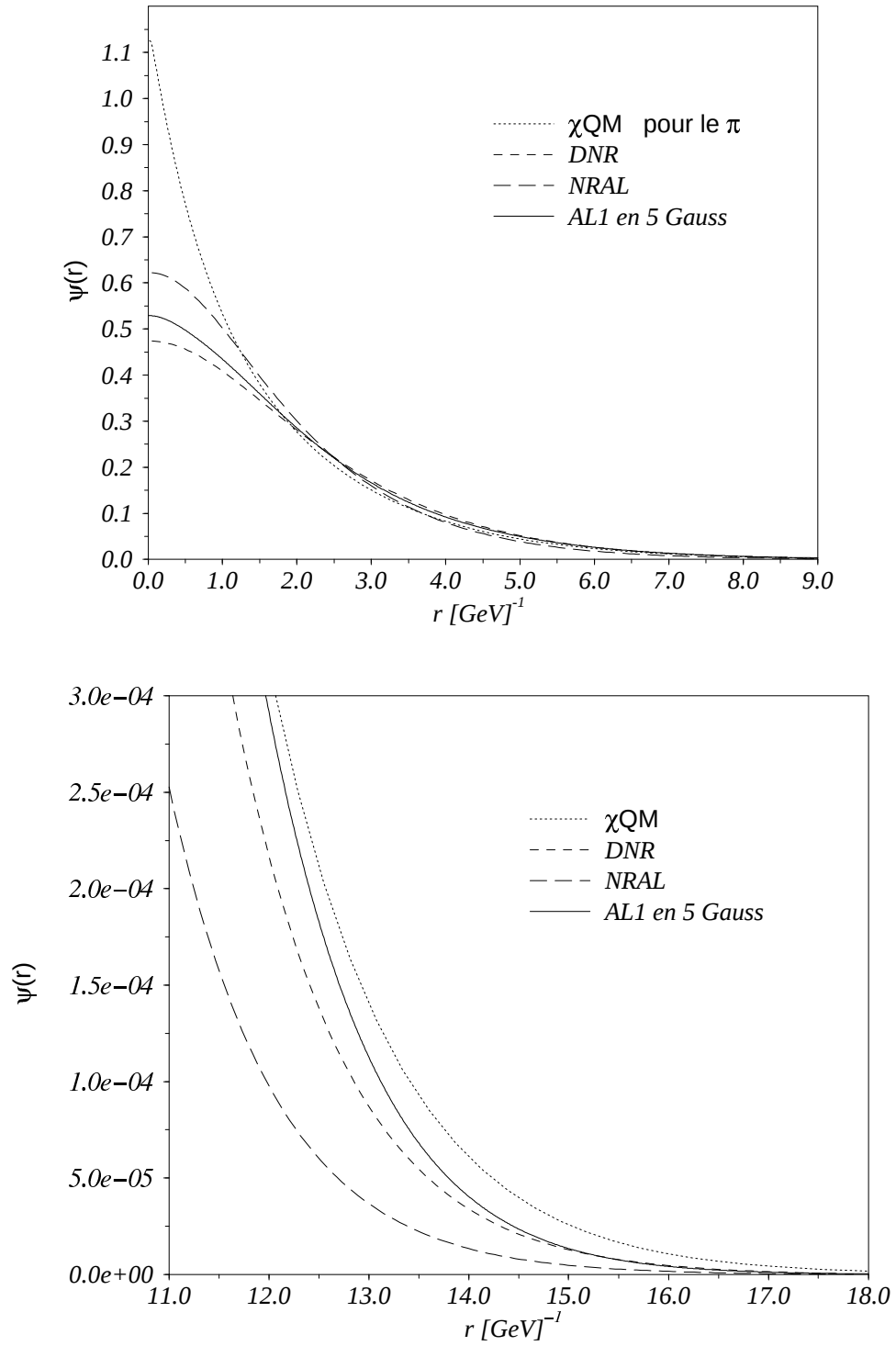


FIG. 2.2 – Comparaison de la fonction d'onde du pion pour divers potentiels étudiés. La deuxième figure correspond à un zoom sur la queue de la fonction d'onde.

TAB. 2.1 – Nombres quantiques en notation spectroscopique : $n^{2S+1}L_J$ employés pour nos calculs sauf précisions contraires telles que des angles de mélanges.

saveurs $u\bar{d}$, $u\bar{u}$, $d\bar{d}$	saveurs $u\bar{s}$, $d\bar{s}$
$1^1S_0 : \pi$	$1^1S_0 : K$
$2^1S_0 : \pi(1300)$	$1^3S_1 : K^*(892)$
$3^1S_0 : \pi(1800)$	$2^3S_1 : K^*(1410)$
$1^3S_1 : \rho, \omega$	$1^1P_1 : K_1(1270)$
$2^3S_1 : \rho(1450), \omega(1420)$	$1^3P_0 : K_0^*(1430)$
$1^1P_1 : b_1(1235), h_1(1170)$	$1^3P_1 : K_1(1400)$
$1^3P_0 : a_0(980), f_0(980)$	$1^3P_2 : K_2^*(1430)$
$2^3P_0 : a_0(1450), f_0(1370)$	$1^1D_2 : K_2(1770)$
$3^3P_0 : f_0(1500)$	$1^3D_1 : K^*(1680)$
$1^3P_1 : a_1(1260), f_1(1285)$	$1^3D_2 : K_2(1820)$
$1^3P_2 : a_2(1320), f_2(1270)$	$1^3D_3 : K_3^*(1780)$
$1^1D_2 : \pi_2(1670)$	$1^3F_4 : K_4^*(2045)$
$1^3D_1 : \rho(1700), \omega(1600)$	saveurs $c\bar{u}$, $c\bar{d}$
$1^3D_3 : \rho_3(1690), \omega_3(1670)$	$1^1S_0 : D$
$1^3F_4 : a_4(2040), f_4(2050)$	$1^3S_1 : D^*(2010)$
saveurs $s\bar{s}$	$1^3P_2 : D_{s2}(2573)$
$1^3S_1 : \phi$	$1^1P_1 : D_1(2420)$
$2^3S_1 : \phi(1680)$	$1^3P_2 : D_2^*(2460)$
$1^3P_1 : f_1(1420)$	saveurs $c\bar{c}$
$1^3P_2 : f_2'(1525)$	$1^3S_1 : J/\Psi$
$2^3P_2 : f_2(2010)$	$2^3S_1 : \psi(2S)$
$1^3D_3 : \phi_3(1850)$	$3^3S_1 : \psi(4040)$
saveurs $c\bar{s}$	$4^3S_1 : \psi(4415)$
$1^1S_0 : D_s$	$1^3D_1 : \psi(3770)$
$1^3S_1 : D_s^*(2010)$	$2^3D_1 : \psi(4160)$
$1^1P_1 : D_{s1}(2536)$	$\eta, \eta' = \frac{1}{\sqrt{2}}(n\bar{n} \pm s\bar{s})$
$1^3P_2 : D_{sj}(2573) \text{ (avec } J=2)$	$1^1S_0 : \eta, \eta'$
saveurs $b\bar{b}$	$2^1S_0 : \eta(1295), \eta(1440)$
$1^3S_1 : \Upsilon(1S)$	
$2^3S_1 : \Upsilon(2S)$	
$3^3S_1 : \Upsilon(3S)$	
$4^3S_1 : \Upsilon(4S)$	
$5^3S_1 : \Upsilon(10860)$	
$6^3S_1 : \Upsilon(11020)$	

Deuxième partie

Les désintégrations fortes et le modèle
 3P_0

Chapitre 3

Les désintégrations fortes

Introduction

Cette partie porte sur les désintégrations fortes que l'on étudie au moyen des largeurs de désintégration des mésons. Le problème principal est la détermination d'un opérateur de transition T provoquant le passage d'un état initial i à l'état final f . Contrairement au cas de l'électromagnétisme, l'opérateur de désintégration forte n'est pas connu exactement et ne peut être dérivé perturbativement du lagrangien de la QCD. D'ailleurs il n'existe pas un opérateur mais bien des opérateurs suivant le hadron étudié. Il y a plusieurs processus possibles suivant qu'il s'agisse d'une transition avec deux hadrons ou plus dans la voie finale. Il y a les mécanismes de création de paire $q\bar{q}$ qui peuvent expliquer les désintégrations du style méson $\rightarrow$ deux mésons et baryon $\rightarrow$ méson + baryon ; les processus de réarrangement des constituants du hadron initial pour les transitions telles que diquonia $\rightarrow$ deux mésons ou pentaquark $\rightarrow$ méson + baryon ; pour les hybrides on peut imaginer la réaction $g \rightarrow q\bar{q}$. On le voit, suivant la transition étudiée on aura un T bien spécifique.

Toutes ces transitions peuvent être classées en deux catégories : les transitions O.Z.I. (de Okubo Zweig Iizuka cf [7]) autorisées et les O.Z.I. interdites. Un processus est dit O.Z.I. interdit si, dans la représentation diagrammatique en ligne de quarks, il peut être divisé en deux parties ne contenant que des hadrons (donc singlet de couleur) sans briser aucune ligne de quarks (mais coupant les lignes de gluons). Sinon il est dit O.Z.I. autorisé. Une désintégration O.Z.I. interdite verra sa largeur de désintégration plus faible que la valeur attendue pour une désintégration forte. Ceci explique la durée de vie anormalement longue du charmonium ou la décroissance préférentielle du ϕ en deux K au lieu de trois π . Il faudrait obtenir une meilleure connaissance de la QCD pour comprendre cette règle O.Z.I.. Comme première explication, il faut remarquer que les processus interdits font intervenir des gluons "durs", c.-à-d. d'énergie suffisamment importante pour créer une paire $q\bar{q}$, or pour les hautes énergies on se trouve dans le secteur perturbatif avec une constante de couplage faible. Tandis que pour les processus autorisés, ce sont des gluons "mous", c.-à-d. de faible énergie, qui entrent en compte, ce qui correspond à une valeur de α_s proche de 1. La différence de valeur de α_s permet d'intuiter la suppression des processus dit interdits.

Nous allons étudier, pour les transitions O.Z.I. autorisées, la décroissance forte d'un méson.

Plusieurs modèles ont été proposés pour expliquer cette désintégration. On peut citer :

- le modèle d’émission élémentaire [7] dans lequel le méson émis est considéré comme une particule élémentaire couplée à un quark de l’état initial, l’autre n’étant que spectateur.
- le modèle de tube de flux [8] où une paire $q\bar{q}$ est générée par le champ électrique gluonique qui est confiné dans un tube entourant la ligne reliant le quark à l’antiquark du méson initial.
- le modèle de Cornell [9] qui utilise le même potentiel d’interaction $V_{q\bar{q}}$ pour la formation de l’état lié que pour sa désintégration.
- le modèle 3S_1 qui considère la création d’une paire $q\bar{q}$ par un gluon d’où, en notation spectroscopique $^{2S+1}L_J$, les nombres quantiques du gluon donnant au modèle son nom.
- le 3P_0 qui est celui retenu pour cette étude.

3.1 Le modèle 3P_0 originel

Il s’agit d’un modèle phénoménologique, non relativiste, s’appuyant sur l’idée des quarks constituants. Il fut originellement proposé par L. Micu [10] puis développé par Le Yaouanc et al. ; le modèle est présenté dans les livres [7] et [11]. Le but du modèle est d’étudier parmi les processus obéissant à la règle O.Z.I., la décroissance d’un hadron en deux hadrons. C’est une catégorie très importante dans la mesure où les processus à plus de deux corps dans la voie finale peuvent souvent être vus comme une désintégration en deux hadrons instables intermédiaires.

$$M_{initial} \rightarrow \underbrace{M_{inst.}^*}_{\rightarrow M_2 M_3} M_1 \rightarrow M_1 M_2 M_3 \quad (3.1)$$

Ces états très instables ne peuvent généralement pas être mesurés expérimentalement. Il est donc très utile de pouvoir simuler ces désintégrations de la sorte, ce qui nous permet d’obtenir des informations sur ces résonances de durée de vie très courte qui ne seraient pas accessibles autrement.

Dans le modèle 3P_0 , la décroissance du hadron initial est vue comme la conséquence de l’apparition, à partir du vide, d’une paire quark-antiquark ($q\bar{q}$). En effet les réactions 1 méson ($q\bar{q}$) $\rightarrow$ 2 mésons, 1 baryon (qqq) $\rightarrow$ 1 baryon + 1 méson s’expliquent naturellement ainsi. Maintenant quelles sont les caractéristiques de cette paire $q\bar{q}$? Dans le modèle 3S_1 cette paire est créée à partir d’un gluon et en possède donc les caractéristiques, cependant dans le modèle 3P_0 la paire est considérée comme issue du vide. Il s’agit d’une généralisation de la propriété d’additivité du modèle d’émission élémentaire où seul le quark émettant le quantum est considéré comme actif, les autres étant spectateurs. Une première conséquence est que la paire créée a les caractéristiques du vide, à savoir : singlet de

couleur, de saveur, de charge électrique totale nulle (condition automatiquement réalisée pour une paire quark-antiquark de même saveur) et son impulsion totale est nulle. Les nombres quantiques du vide $J^{PC} = 0^{++}$ (P : parité et C : conjugaison de charge cf (B.1, B.2, B.2.1)) impliquent pour la paire un moment orbital $L = 1$ (onde P), un spin $S = 1$ couplés pour donner un moment cinétique total nul soit en notation spectroscopique $^{2S+1}L_J : ^3P_0$ d'où le nom de cette théorie. Deuxièmement, la paire $q\bar{q}$ constituant le méson initial n'étant que spectatrice (le quark et l'antiquark ne se désintègrent pas ici) elle doit obligatoirement se retrouver dans l'état final. En effet nous pouvons imaginer, pour les processus O.Z.I. interdits, une annihilation du quark et de l'antiquark du méson initial en plusieurs gluons qui vont à leur tour créer des paires $q\bar{q}$ de différentes saveurs mais ces réactions sortent du cadre du modèle 3P_0 .

Quelques remarques :

- Cette paire, bien qu'issue du vide, acquiert de l'énergie par des échanges multiples de gluons avec la paire provenant du méson initial.
- La parité est conservée par cet opérateur comme on l'attend pour un processus de l'interaction forte. En effet, la parité pour une paire $q\bar{q}$ est $P = (-1)^{L+1}$ ((B.1)), ainsi la création en une onde P ($L = 1$) donne $P = +$. La parité de l'état final devra donc redonner la valeur de l'état initial.

L'opérateur, tel qu'il fut proposé par L. Micu, s'écrit :

$$T_{Micu} = \gamma \int d\vec{p}d\vec{p}' \delta(\vec{p} + \vec{p}') \left[\mathcal{Y}_1 \left(\frac{\vec{p} - \vec{p}'}{2} \right) b^\dagger(\vec{p}) d^\dagger(\vec{p}') \right]^{\text{VIDE}} \quad (3.2)$$

[...]VIDE désigne l'ensemble des couplages pour reproduire les nombres quantiques du vide.

$\mathcal{Y}_1(p) = p.Y_1$ représente l'harmonique solide de l'onde P de la paire créée.

$b^\dagger(\vec{p})$ crée le quark d'impulsion $\vec{p}$ et $d^\dagger(\vec{p}')$ l'antiquark d'impulsion $\vec{p}'$.

La conservation de l'impulsion est imposée par la fonction de Dirac $\delta(\vec{p} + \vec{p}')$.

Enfin, γ désigne la fonction de vertex. Il s'agit, dans ce modèle, d'une constante reliée à la facilité de créer une paire $q\bar{q}$. Attention cependant, il ne s'agit pas d'une probabilité, il n'y a pas de normalisation de cette fonction. Disons simplement qu'elle englobe la physique de la création de la paire, de son interaction avec le méson (de l'état initial) et de la réorganisation de tous les constituants aboutissant à la désintégration !

Contrairement au modèle de brisure de tube de flux, dans le cadre du modèle 3P_0 , la paire $q\bar{q}$ n'est pas contrainte à être créée dans une région particulière de l'espace, l'opérateur T ne contient aucune dépendance vis à vis de la position des quarks composant le méson se désintégrant. Autre constatation, le quark et l'antiquark sont créés en un même point de l'espace contrairement à certains modèles qui prennent en compte cette possibilité [12].

3.2 Le modèle 3P_0 modifié

Il nous semble surprenant que la fonction de vertex γ puisse être remplacée par une constante. Cette simplification est “justifiée” par les résultats somme toute corrects malgré tout. Néanmoins, nous avons dépassé cette approximation et développé un formalisme tenant compte de la saveur et de l’impulsion relative de la paire créée. En effet, il semble logique que la fonction de vertex différencie la création d’une paire $q\bar{q}$ de saveur n (n doublet d’isospin u et d) d’une paire de saveur s par exemple. Pour le potentiel AL1, l’énergie de seuil pour la création de la paire n vaut 630 MeV contre 1152 MeV pour la paire s ; la fonction de vertex γ devra donc refléter cette différence. Deuxième dépendance de γ , l’impulsion relative du quark et de l’antiquark créés ; une impulsion grande nécessitera une énergie importante et d’autant moins probable. Ainsi, notre vertex modifié se présente sous la forme :

$$\gamma_{mod} \rightarrow \gamma_\mu(|\vec{p} - \vec{p}'|) = f(\mu, |\vec{p} - \vec{p}'|^2) \quad (3.3)$$

μ désigne la saveur de la nouvelle paire, la dépendance en le carré de la différence des impulsions est imposée par l’invariance par rotation et l’isotropie de l’espace. Pour l’instant nous ne ferons aucune supposition quant à la forme analytique de γ . Nous allons développer le formalisme le plus général possible.

3.2.1 L’opérateur de transition T_{mod} modifié

Pour la suite, on sous entend l’indice “mod” en ce qui concerne le vertex γ . L’opérateur s’écrit :

$$\begin{aligned} T = & -3 \sum_{\mu} \int d\vec{p} d\vec{p}' \delta(\vec{p} + \vec{p}') \gamma_\mu \left(\frac{|\vec{p} - \vec{p}'|}{2} \right) \\ & \times \left[\mathcal{Y}_1 \left(\frac{\vec{p} - \vec{p}'}{2} \right) b_\mu^\dagger(\vec{p}) d_\nu^\dagger(\vec{p}') \right]^{C=1, I=0, S=1, J=0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le facteur -3 a été ajouté pour des raisons de commodités ultérieures.

Si l’on compare les opérateurs (3.2) et (3.4), on remarque en plus des modifications déjà présentées, l’ajout pour notre version d’une sommation sur l’indice μ c.-à-d. sur la saveur de la paire créée. Il n’y a pas de sommation sur l’indice ν car la conservation de la saveur implique que la saveur de l’antiquark ν soit identique à celle du quark μ . Comme notre opérateur dépend de la saveur, il faut sommer sur toutes les saveurs, en pratique cette sommation comprendra au plus deux termes comme nous le verrons plus loin, ceci est lié au fait que nous nous sommes restreints à l’étude des processus OZI autorisés et donc que la paire $q\bar{q}$ composant le méson initial se retrouve obligatoirement dans l’état final. Pour notre étude, où seuls se présenteront les cas de création de paire de $q\bar{q}$ de saveur n et de saveur s , la fonction de vertex γ s’écrit :

$$\gamma = \gamma_n P^{n\bar{n}} \pm \gamma_s P^{s\bar{s}} \quad (3.5)$$

où P désigne le projecteur sur l’état de saveur.

3.2.2 Largeur de désintégration

L'observable que l'on se propose de calculer est la largeur de désintégration noté Γ . Elle est définie comme l'inverse du temps de vie moyen τ du système étudié et en caractérise donc la stabilité. En mécanique quantique, un traitement par perturbation au 1^{er} ordre conduit à l'expression, connue sous le nom de règle d'or de Fermi :

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} \quad (3.6)$$

$$\Gamma = 2\pi |\mathcal{M}|^2 \Phi \quad (3.7)$$

$\mathcal{M}$ désigne l'élément de matrice $\langle final|T|initial\rangle$, appelé également amplitude de probabilité. Il contient toute la physique du processus.

Φ représente l'espace de phase, appelé aussi la densité d'état final. C'est un terme purement cinématique. Plusieurs descriptions existent selon que l'on prend une expression relativiste ou non pour l'énergie. De façon la plus générale possible, l'espace de phase s'écrit :

$$\Phi = \int (\Pi_j d\vec{p}_j) \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \delta(E_i - E_f) \quad (3.8)$$

qui représente en fait la somme sur tous les états finaux respectant la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Ici $(\Pi_j d\vec{p}_j)$ signifie que l'on intègre sur toutes les impulsions des particules de l'état final intervenant dans le processus.

Maintenant, particularisons ces expressions pour la désintégration d'un méson, que l'on note A , en deux mésons notés B et C . L'élément de matrice s'écrit $\mathcal{M} = \langle BC|T|A\rangle$ et l'on a pour la largeur totale :

$$\Gamma = 2\pi \sum_{\text{états finaux}} \int d\vec{K} d\vec{k} |\langle BC|T|A\rangle|^2 \delta(E_A - E_{BC}) \delta(\vec{K} - \vec{K}_A) \quad (3.9)$$

où $\vec{K}$ est l'impulsion totale du système, $\vec{k}$ est l'impulsion relative de B et C , $\vec{K}_A$ l'impulsion totale du méson A , l'énergie initiale du système est E_A et celle de l'état final est E_{BC} . On ne considère aucune interaction dans l'état final entre nos mésons.

On voit apparaître ici une ambiguïté : dans quel référentiel doit-on se placer pour étudier le processus ? En effet le modèle 3P_0 n'est pas invariant de Galilée, nos résultats dépendront donc du référentiel choisi. On choisit communément le système du centre de masse du méson se désintégrant. Ce référentiel semble en effet le plus naturel. Si on applique l'opérateur C conjugaison de charge à la transition méson ρ en deux pions, on obtient :

$$C (\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) = \rho^0 \rightarrow \pi^-\pi^+ \quad (3.10)$$

ainsi, π^+ et π^- doivent avoir la même énergie, cette condition est automatiquement vérifiée dans le système du centre de masse.

En se plaçant dans le centre de masse de A et en utilisant dans un premier temps l'écriture relativiste de l'énergie, nous obtenons :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{K}_A = 0 \\ E_A = m_a \end{array} \right\} \Rightarrow \delta(E_A - E_{BC}) \delta(\vec{K} - \vec{K}_A) = \delta(m_A - E_B(\vec{K}_B) - E_C(\vec{K}_C)) \delta(\vec{K}) \quad (3.11)$$

or

$$\delta(\vec{K}) = \delta(\vec{K}_B + \vec{K}_C) \Rightarrow |\vec{K}_B| = |\vec{K}_C| = k_0$$

ce qui, après intégration, aboutit à :

$$\Gamma_{rel} = 2\pi \sum_{\text{états finaux}} \frac{|\langle BC|T|A \rangle|^2 E_B(k_0) E_C(k_0)}{m_A k_0} \quad (3.12)$$

avec :

$$E_B(k) = \sqrt{k^2 + m_B^2}; \quad E_C(k) = \sqrt{k^2 + m_C^2} \quad (3.13)$$

et k_0 solution de l'équation : $m_A - E_B(k_0) - E_C(k_0) = 0$.

soit :

$$k_0 = \frac{\sqrt{(m_A^2 - (m_B - m_C)^2)(m_A^2 - (m_B + m_C)^2)}}{2m_A} \quad (3.14)$$

De la même façon pour une énergie non relativiste nous obtenons :

$$\Gamma_{nrel} = 2\pi \sum_{\text{états finaux}} \frac{|\langle BC|T|A \rangle|^2 m_B m_C}{(m_B + m_C) k_0} \quad (3.15)$$

avec :

$$k_0 = \sqrt{\frac{2m_B m_C (m_A - m_B - m_C)}{(m_B + m_C)}} \quad (3.16)$$

Quel que soit l'espace de phase retenu, ce seront toujours les masses expérimentales des mésons qui seront utilisées dans les formules. Nous procédons de cette façon car les valeurs théoriques peuvent être assez différentes selon le potentiel utilisé ; cela pourrait entraîner des facteurs d'espace de phase par trop différents. Pour certains potentiels, un état final pourrait être permis, alors qu'il serait interdit avec un autre. Un autre problème se poserait pour les mésons η dans les potentiels n'incluant pas les effets de l'instanton. En effet dans

ces cas, le méson η est construit à partir de deux états : le 1S_0 $n\bar{n}$ couplé à $I = 0$ et le 1S_0 $s\bar{s}$ qui n'ont pas la même masse théorique (pour le potentiel AL1 : 138 MeV pour la partie de saveur n et 712 MeV pour la partie s), on ne saurait donc quelle masse prendre pour le calcul de l'espace de phase.

3.2.3 Fonctions d'onde des mésons

Maintenant que nous avons les expressions de l'opérateur de transition et de la largeur de désintégration, il ne nous manque plus que les expressions de nos états initial $|A\rangle$ et final $|BC\rangle$.

Les fonctions d'onde sont écrites dans le formalisme de la seconde quantification, avec les opérateurs de création et d'annihilation. b réfère aux quarks et d aux antiquarks, ces opérateurs obéissent aux lois d'anticommutation. Le formalisme de la seconde quantification nous permettra de traiter facilement le principe de Pauli pour les permutations des particules.

État initial $|A\rangle$

$\vec{r}_1$ dénote la position du quark dont l'ensemble des nombres quantiques permettant de définir complètement l'état est $\alpha = \{c_\alpha, f_\alpha, t_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha\}$ où c_α est l'indice de couleur, f_α repère la saveur, t_α l'isospin ($t_\alpha = \frac{1}{2}$ pour les quarks u et d) de projection τ_α ($\tau_\alpha = -\frac{1}{2}$ pour le d et $+\frac{1}{2}$ pour le u), enfin σ_α est la projection le long de l'axe z du spin $\frac{1}{2}$. Pour l'antiquark, la position est $\vec{r}_2$ et ses nombres quantiques sont symbolisés par β .

$$|A\rangle = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \left[\Psi_{\alpha,\beta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) b_\alpha^\dagger(\vec{r}_1) d_\beta^\dagger(\vec{r}_2) \right]^{I, M_I, (LS)JM, 1_{coul.}} |0\rangle \quad (3.17)$$

qui de façon plus détaillée et en faisant le changement de variable unitaire (valable uniquement pour une expression non relativiste de l'énergie cinétique) :

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

avec r distance relative entre les constituants et R position du centre de masse, on a :

$$\langle \vec{r} \vec{R} | A \rangle = \mathcal{C}_1 \mathcal{F}[t_\alpha t_\beta]^{IM_I} [\phi_{nLS}(\vec{r}) \chi_S(\sigma_\alpha \sigma_\beta)]^{JM} \frac{e^{i\vec{K}_A \cdot \vec{R}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.19)$$

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{F}$ désignent respectivement la fonction d'onde de couleur (dans l'état singlet) et la fonction d'onde de saveur, ces deux fonctions seront sous-entendues par la suite. χ représente la fonction d'onde de spin que l'on couple avec la partie spatiale pour aboutir à la bonne valeur de moment cinétique total J . L'onde plane $\frac{e^{i\vec{K}_A \cdot \vec{R}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$ est la fonction d'onde normalisée associée au mouvement du centre de masse de A d'impulsion $\vec{K}_A$. $\phi_{nLS}(\vec{r})$

représente la fonction d'onde du mouvement relatif. Pour nos différents calculs, cette fonction sera prise comme une somme de gaussiennes que multiplie une harmonique solide :

$$\phi_{nLS}(\vec{r}) = \sum_i^{nb \text{ gauss.}} c_i e^{-B_i r^2} \mathcal{Y}_{Lm_L}(\vec{r}) \quad (3.20)$$

Les coefficients amplitude c et largeur A des gaussiennes sont obtenues par un principe variationnel sur l'équation de Schödinger.

On suppose de plus que la fonction est normée :

$$\langle \phi | \phi \rangle = 1 \Rightarrow \langle A | A \rangle = 1 \quad (3.21)$$

Dans l'espace des impulsions, on a :

$$\tilde{\Psi}_{\alpha,\beta}(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \tilde{\Psi}_{\alpha,\beta}(\vec{p}, \vec{P}) = TF[\Psi_{\alpha,\beta}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)] \quad (3.22)$$

$$= \int \frac{d\vec{r}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\vec{R}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{i\vec{K}_A \cdot \vec{R}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \phi_{\alpha,\beta}(\vec{r}) e^{-i\vec{P} \cdot \vec{R}} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}} \quad (3.23)$$

$$= \delta(\vec{K}_A - \vec{P}) \int \frac{d\vec{r}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \phi_{\alpha,\beta}(\vec{r}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}} \quad (3.24)$$

$$\tilde{\Psi}_{\alpha,\beta}(\vec{p}, \vec{P}) = \delta(\vec{K}_A - \vec{P}) \tilde{\phi}_{\alpha,\beta}(\vec{p}) \quad (3.25)$$

où le tilde indique la transformée de Fourier TF. $\vec{p}$ est l'impulsion relative et $\vec{P}$ l'impulsion totale du système.

$$\begin{pmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{p} = \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Enfin, on peut montrer que :

$$\tilde{\phi}_{\alpha,\beta}(\vec{p}) = \sum_i^{nb \text{ gauss.}} d_i e^{-A_i p^2/2} \mathcal{Y}_{Lm_L}(\vec{p}) \quad (3.27)$$

avec les relations suivantes entre les coefficients des représentations $\vec{r}$ et $\vec{p}$:

$$d_i = \frac{(-i)^L}{(2B_i)^{L+\frac{3}{2}}} c_i \quad (3.28)$$

$$A_i = \frac{1}{2B_i} \quad (3.29)$$

Ainsi, dans le formalisme de la seconde quantification et dans la représentation d'impulsion, l'état initial s'écrit :

$$|A\rangle = \int d\vec{p} d\vec{P} \delta(\vec{K}_A - \vec{P}) \left[\tilde{\phi}_{\alpha,\beta}(\vec{p}) b_{\alpha}^{\dagger}(\vec{p}_1) d_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}_2) \right]^{I, M_I, (LS) JM, 1_{coul.}} |0\rangle \quad (3.30)$$

avec la convention (3.26) pour le changement d'impulsion.

Par la suite, afin de ne pas alourdir inutilement les notations, on omettra les tildes $\sim$ sur les fonctions transformées de Fourier que l'on repèrera uniquement à partir de la variable impulsion.

État final $|BC\rangle$

L'état final est constitué de deux mésons s'éloignant à l'infini l'un de l'autre. Il est caractérisé par la donnée des mésons B et C dont les fonctions d'onde sont de la forme (3.30). Afin de tenir compte du principe de Pauli, on l'écrit aussi en seconde quantification. Nous allons définir plusieurs types d'états finals selon le type de couplage employé. En effet, pour notre étude de la désintégration forte d'un méson en deux mésons, l'opérateur de transition T crée la paire quark-antiquark dans un état $J = 0$, l'état final $|BC\rangle$ doit donc être couplé pour redonner J_A . Tout d'abord, on considère les deux mésons de façon totalement découplés, dans des états d'impulsion donnée avec des projections de spin et d'isospin bien déterminées. On le notera $|\widetilde{BC}\rangle$ ce qui signifie explicitement :

$$|\widetilde{BC}\rangle = |BC; M_{I_b} M_b \vec{K}_B; M_{I_c} M_c \vec{K}_C\rangle \quad (3.31)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} |\widetilde{BC}\rangle &= \mathcal{N} \int d\vec{p}_3 d\vec{p}_4 d\vec{p}_5 d\vec{p}_6 \left[\Psi_B(\vec{p}_3, \vec{p}_4) b_\delta^\dagger(\vec{p}_3) d_\epsilon^\dagger(\vec{p}_4) \right]^B \\ &\quad \left[\Psi_C(\vec{p}_5, \vec{p}_6) b_\lambda^\dagger(\vec{p}_5) d_\rho^\dagger(\vec{p}_6) \right]^C |0\rangle \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} |\widetilde{BC}\rangle &= \mathcal{N} \sum_{\text{nb. magn}} \mathcal{C}_{\delta\epsilon}^B \mathcal{C}_{\lambda\rho}^C \int \Pi_i d\vec{p}_i \Psi_B(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \Psi_C(\vec{p}_5, \vec{p}_6) \\ &\quad b_\delta^\dagger(\vec{p}_3) d_\epsilon^\dagger(\vec{p}_4) b_\lambda^\dagger(\vec{p}_5) d_\rho^\dagger(\vec{p}_6) |0\rangle \end{aligned} \quad (3.33)$$

$\mathcal{C}_{\delta\epsilon}^B$ regroupe l'ensemble des coefficients de Clebsch-Gordan effectuant le couplage des quarks δ et ϵ pour donner les bons nombres quantiques de B et de même pour C . La constante $\mathcal{N}$ est une constante de normalisation. On la calcule en effectuant la produit scalaire $\langle \widetilde{B'C'} | \widetilde{BC} \rangle$ en seconde quantification.

$$\langle \widetilde{B'C'} | \widetilde{BC} \rangle \propto \sum \langle 0 | d_{\rho'} b_{\lambda'} d_{\epsilon'} b_{\delta'}^\dagger d_\epsilon^\dagger b_\lambda^\dagger d_\rho^\dagger | 0 \rangle = \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} &+ \delta_{\delta\delta'} \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\rho\rho'} \delta(\vec{p}_3 - \vec{p}_3') \delta(\vec{p}_4 - \vec{p}_4') \delta(\vec{p}_5 - \vec{p}_5') \delta(\vec{p}_6 - \vec{p}_6') \\ &- \delta_{\delta\delta'} \delta_{\epsilon\rho'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\rho\epsilon'} \delta(\vec{p}_3 - \vec{p}_3') \delta(\vec{p}_4 - \vec{p}_6') \delta(\vec{p}_5 - \vec{p}_5') \delta(\vec{p}_6 - \vec{p}_4') \\ &- \delta_{\delta\lambda'} \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{\lambda\delta'} \delta_{\rho\rho'} \delta(\vec{p}_3 - \vec{p}_5') \delta(\vec{p}_4 - \vec{p}_4') \delta(\vec{p}_5 - \vec{p}_3') \delta(\vec{p}_6 - \vec{p}_6') \\ &+ \delta_{\delta\lambda'} \delta_{\epsilon\rho'} \delta_{\lambda\delta'} \delta_{\rho\epsilon'} \delta(\vec{p}_3 - \vec{p}_5') \delta(\vec{p}_4 - \vec{p}_6') \delta(\vec{p}_5 - \vec{p}_3') \delta(\vec{p}_6 - \vec{p}_4'). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Par application du théorème de Wick, on voit apparaître un système de 4 contractions. Deux d'entre elles, sans être rigoureusement nulles donnent une contribution négligeable car elles correspondent au recouvrement de deux fonctions d'onde décalées ; aussi lorsque l'une est maximale l'autre est ridiculement petite et réciproquement. On considère qu'elles sont nulles exactement. Une autre contraction donne un terme $\delta_{BB'} \delta_{CC'}$ ce qui implique l'égalité de tous les nombres quantiques de B et de B' ainsi que le facteur $\delta(\vec{K}_B - \vec{K}_C)$ et la même chose pour le méson C . L'autre contraction donne le terme $\delta_{BC'} \delta_{CB'}$. Par conséquent nous parvenons à l'expression suivante :

$$\langle \widetilde{B'C'} | \widetilde{BC} \rangle = \mathcal{N}^2 (\delta_{BB'} \delta_{CC'} + \delta_{BC'} \delta_{CB'}) \quad (3.36)$$

$$\langle \widetilde{BC} | \widetilde{BC} \rangle = \mathcal{N}^2 (1 + \delta_{BC}) \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow \mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{BC}}} \quad (3.38)$$

En posant, dans l'équation (3.36), $B' = C$ et $C' = B$, on obtient directement :

$$\langle \widetilde{CB} | \widetilde{BC} \rangle = \frac{1}{1 + \delta_{BC}} (\delta_{BC} \delta_{CB} + \delta_{BB} \delta_{CC}) = \langle \widetilde{BC} | \widetilde{BC} \rangle = 1 \quad (3.39)$$

$$| \widetilde{BC} \rangle = + | \widetilde{CB} \rangle \quad (3.40)$$

Notre état final, complètement découplé, est donc symétrique par échange de B et C , on retrouve ainsi le fait que B et C , qui sont des mésons, sont des bosons.

L'état précédent peut être considéré comme complètement découplé. On peut, si on veut, introduire plutôt un état couplé :

$$\begin{aligned} | \overline{BC} \rangle &= | BC; [I_b I_c]^{I_a M_{I_a}}; [J_b J_c]^{J_{bc} M_{bc}}; \vec{K}_B, \vec{K}_C \rangle \\ &= \sum_{M_{I_b}, M_{I_c}, M_b, M_c} C_{I_b M_{I_b}; I_c M_{I_c}}^{I_a M_{I_a}} C_{J_b M_b; J_c M_c}^{J_{bc} M_{bc}} | \widetilde{BC} \rangle \end{aligned} \quad (3.41)$$

Il vérifie aussi la propriété de normalisation suivante fortement liée au principe de Pauli :

$$\langle \overline{B'C'} | \overline{BC} \rangle = \mathcal{N}^2 (\delta_{BB'} \delta_{CC'} + (-1)^\phi \delta_{BC'} \delta_{CB'}) \quad (3.42)$$

$$\phi = I_b + I_c - I_a + J_b + J_c - J_{bc} \quad (3.43)$$

Du fait de la phase (3.43), on constate que pour deux mésons identiques dans la voie finale tous les couplages ne seront pas possibles. L'état $| \overline{BC} \rangle$ ne sera un état physique que si la phase (3.43) est paire.

Enfin, il sera plus astucieux de considérer un état final pour lequel les deux mésons sortant ne sont pas dans des ondes planes mais dans une onde sphérique de moment angulaire donné l et d'impulsion relative radiale donnée k_0 , afin de gérer au mieux la conservation du moment angulaire total. Le centre de masse total du système reste dans une onde plane $\vec{K}_0$. On introduit donc le coefficient de couplage :

$$\langle \vec{K}_B, \vec{K}_C | \vec{K}_0 l m k_0 \rangle = \delta(\vec{K} - \vec{K}_0) \frac{Y_{lm}(\hat{k})}{k} \delta(k - k_0) \quad (3.44)$$

où $\vec{k}$ est l'impulsion relative des 2 mésons et $\vec{K}$ l'impulsion totale du système définies par les conventions :

$$\vec{K} = \vec{K}_B + \vec{K}_C \quad ; \quad \vec{k} = \frac{m_c \vec{K}_B - m_b \vec{K}_C}{m_b + m_c} \quad (3.45)$$

Le Jacobien de la transformation est l'unité. L'état intéressant sera donc :

$$|BC\rangle = \left| BC; [I_b I_c]^{I_a M_{I_a}}; [(J_b J_c) J_{bc} l]^{J_a M_a}; \vec{K}_0, k_0 \right\rangle \quad (3.46)$$

$$|BC\rangle = \sum_{M_{bc}, m} C_{J_{bc} M_{bc}; l m}^{J_a M_a} \int d\vec{K}_B d\vec{K}_C \left\langle \vec{K}_B, \vec{K}_C \left| \vec{K}_0 l m k_0 \right\rangle \overline{|BC\rangle} \right. \quad (3.47)$$

La condition de normalisation s'écrit encore, cf annexe :

$$\langle B' C' | BC \rangle = \mathcal{N}^2 (\delta_{BB'} \delta_{CC'} + (-1)^{\phi+l} \delta_{BC'} \delta_{CB'}) \quad (3.48)$$

De la relation (3.48), se déduit :

- Dans le cas de deux mésons B et C différents, le coefficient de normalisation $\mathcal{C}$ vaut 1.
- Toujours pour B différent de C , le système vérifie la propriété suivante :

$$\langle CB | BC \rangle = \mathcal{N}^2 (0 + (-1)^{I_b + I_c - I_a + J_b + J_c - J_{bc} + l}) \quad (3.49)$$

$$|CB\rangle = (-1)^{I_b + I_c - I_a + J_b + J_c - J_{bc} + l} |BC\rangle \quad (3.50)$$

- Dans le cas de deux mésons identiques $B = C$ (tous les nombres quantiques identiques y compris les parités et les nombres radiaux), $\mathcal{C} = 1/\sqrt{2}$ si la phase $(-1)^{\phi+l}$ est paire sinon il vaut 0. Seuls les états donnant la phase paire sont des états physiques. C'est le reflet du principe de Pauli pour les bosons.

3.3 Amplitude de transition

L'amplitude de transition $A \rightarrow B + C$ n'est pas invariante de Galilée à cause du terme $\delta(\vec{p} + \vec{p}')$ de l'opérateur de transition. Le résultat pour l'amplitude dépend donc du référentiel. Il semble que le meilleur soit celui du centre de masse c.-à-d. celui où A est au repos, ce qui implique $\vec{K}_A = \vec{0}$. La conservation de l'impulsion va nous donner un terme $\delta(\vec{K}_0)$ pour l'état final et on écrira l'amplitude sous la forme :

$$\langle BC | T | A \rangle = \delta(\vec{K}_0) M_{A \rightarrow BC} \quad (3.51)$$

Du point de vue des opérateurs de création et d'annihilation, on a pour :

$$\begin{aligned} T|A\rangle &\Rightarrow b_\mu^\dagger(\vec{p}) d_\nu^\dagger(\vec{p}') b_\alpha^\dagger(\vec{p}_1) d_\beta^\dagger(\vec{p}_2) |0\rangle \\ \langle BC| &\Rightarrow \langle 0 | d_\rho(\vec{p}_6) b_\lambda(\vec{p}_5) d_\epsilon(\vec{p}_4) b_\delta(\vec{p}_3) \end{aligned}$$

Il apparaît donc le terme :

$$\langle 0 | d_\rho(\vec{p}_6) b_\lambda(\vec{p}_5) d_\epsilon(\vec{p}_4) b_\delta(\vec{p}_3) b_\mu^\dagger(\vec{p}) d_\nu^\dagger(\vec{p}') b_\alpha^\dagger(\vec{p}_1) d_\beta^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle$$

qui donne lieu à 4 contractions par utilisation du théorème de Wick (on aboutit au même résultat en faisant usage des relations d'anticommutation et des relations $b|0\rangle = 0$ et $d|0\rangle = 0$).

1) $\left\langle d_\rho \overbrace{b_\lambda d_\epsilon b_\delta b_\mu^\dagger d_\nu^\dagger b_\alpha^\dagger d_\beta^\dagger} \right\rangle$ dont la représentation diagrammatique est :

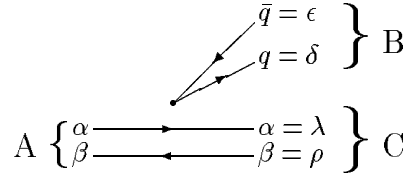


schéma n^0 1

C'est un diagramme OZI interdit ; on ne le prend pas en compte.

2) $\left\langle d_\rho \overbrace{b_\lambda d_\epsilon b_\delta b_\mu^\dagger d_\nu^\dagger b_\alpha^\dagger d_\beta^\dagger} \right\rangle$ dont la représentation diagrammatique est :

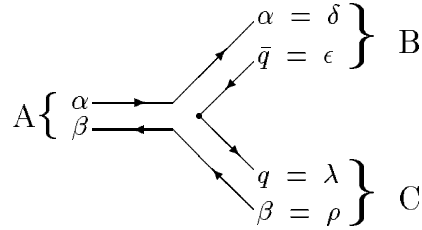


schéma n^0 2

3) $\left\langle d_\rho \overbrace{b_\lambda d_\epsilon b_\delta b_\mu^\dagger d_\nu^\dagger b_\alpha^\dagger d_\beta^\dagger} \right\rangle$ dont la représentation diagrammatique est :

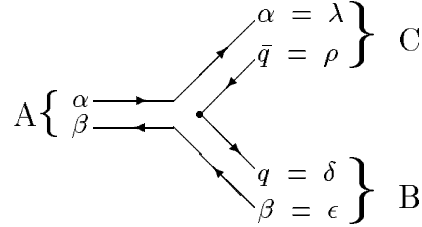


schéma n^0 3

4) $\left\langle d_\rho \overbrace{b_\lambda d_\epsilon b_\delta b_\mu^\dagger d_\nu^\dagger b_\alpha^\dagger d_\beta^\dagger} \right\rangle$ dont la représentation diagrammatique est :

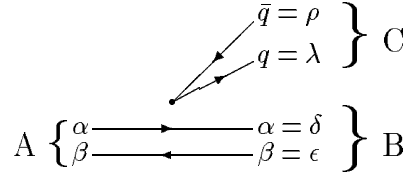


schéma n^0 4

C'est aussi un diagramme OZI interdit ; on ne le prend pas en compte.

On remarque que les diagrammes n° 1 et n° 4 peuvent être séparés en deux hadrons sans couper de ligne de quarks, ce sont donc des processus OZI interdits qui ne sont pas pris en compte dans le modèle 2P_0 . On considère leur contribution comme rigoureusement nulle. Ici, on peut expliquer exactement pourquoi ces 2 diagrammes donnent des termes nuls. En effet, la désintégration est étudiée dans le système du centre de masse de A , la conservation de l'impulsion impose donc $\vec{K}_B = -\vec{K}_C$ mais pour les schémas n° 1 et n° 4, l'un de mésons de l'état final (ici disons le méson B) est constitué de la paire $q\bar{q}$ créée à partir du vide, or cette paire a une impulsion nulle d'où $\vec{K}_B = \vec{0}$. Ainsi pour respecter à la fois ces deux relations : $\vec{K}_B = -\vec{K}_C$ et $\vec{K}_B = \vec{0}$, il faut impérativement que : $m_A = m_B + m_C$. C'est une condition très particulière qui n'est jamais vérifiée en pratique.

3.3.1 Lien entre les différents diagrammes

La désintégration du méson A aura donc des contributions de la part des processus n° 2 et n° 3. Que valent-elles ?

Nous allons montrer que, par un réétiquetage de B et C , le calcul d'une seule contraction suffit. Précisons un peu les choses. Du point de vue de la saveur, la contraction n° 2 fait apparaître un terme $\delta_{f_\alpha, f_\delta} \cdot \delta_{f_\beta, f_\rho}$ et la contraction n° 3 fait apparaître un terme $\delta_{f_\alpha, f_\lambda} \cdot \delta_{f_\beta, f_\epsilon}$

Regardons la composition en saveur du méson A :

1. Soit $A = \alpha\bar{\beta}$ avec $f_\alpha \neq f_\beta$.

Dès lors, trois cas sont possibles suivant la saveur de la paire du vide :

- (a) $f_q = f_\alpha$ donc l'état final se compose d'un méson de saveur $\alpha\bar{\alpha}$ et d'un second méson de saveur $\alpha\bar{\beta}$, soit $B=\alpha\bar{\alpha}$ et $C=\alpha\bar{\beta}$. Pour la contraction n° 2, les relations $\delta_{f_\alpha, f_\delta} \cdot \delta_{f_\beta, f_\rho}$ sont vérifiées tandis que pour la contraction n° 3, les delta de Dirac font apparaître un terme $\delta_{\beta, \epsilon} = \delta_{\beta, \alpha} = 0$. Donc seul le diagramme n° 2 contribue au processus. Si on a $B = \alpha\bar{\beta}$ et $C = \alpha\bar{\alpha}$; dans ce cas-là c'est l'inverse mais on peut toujours convenir d'appeler B le méson $\alpha\bar{\alpha}$ et C le méson $\alpha\bar{\beta}$. Dans ce cas, seule la seconde contraction intervient.

- (b) $f_q = f_\beta$. On raisonne de façon identique, seule la contraction n° 2 contribue avec la définition $B=\alpha\bar{\beta}$ et $C=\beta\bar{\beta}$.

- (c) $f_q \neq f_\alpha; f_\beta$. En posant $B=\alpha\bar{q}$ et $C=q\bar{\beta}$ seul le second diagramme est non nul.

2. Soit $A = \alpha\bar{\alpha}$.

Ce qui donne lieu à deux possibilités :

- (a) $f_q \neq f_\alpha$. En posant $B=\alpha\bar{q}$ et $C=q\bar{\alpha}$ seul le second diagramme est non nul.
- (b) $f_q = f_\alpha$. Cette fois on a $B=\alpha\bar{\alpha}$ et $C=\alpha\bar{\alpha}$, l'on constate que les deux diagrammes contribuent. Ce cas se décline en deux nouvelles possibilités :

- i. $B=C$. C'est à dire égalité de tous leurs nombres quantiques.

$$M_{A \rightarrow BB}^{total} = M_{A \rightarrow BB}^{n^o 2} + M_{A \rightarrow BB}^{n^o 3} = 2M_{A \rightarrow BB}^{n^o 2} \quad (3.52)$$

Pour de tels cas, le facteur de normalisation de la fonction d'onde $\frac{1}{\sqrt{1+\delta_{BC}}}$ intervient aussi ; nous prenons comme convention pour ceux-ci de nous occuper que de la seconde contraction mais avec un facteur de normalisation $\sqrt{1+\delta_{BC}} = \sqrt{2}$

- ii. $B \neq C$. Comme le diagramme n° 3 correspond au réétiquetage de B en C et de C en B , ainsi qu'à l'inversion de deux mésons finaux, du fait de (3.50), ceci fait apparaître la phase $(-1)^{\phi=I_b+I_c-I_a+J_b+J_c-J_{bc}+l}$. On a en définitive :

$$M_{A \rightarrow BC}^{total} = M_{A \rightarrow BC}^{n^o 2} + M_{A \rightarrow BC}^{n^o 3} = M_{A \rightarrow BC}^{n^o 2} + (-1)^\phi M_{A \rightarrow CB}^{n^o 2} \quad (3.53)$$

Ainsi, comme nous l'avons montré, dans tous les cas on peut se rapporter au calcul d'une seule contraction.

3.3.2 Calcul de la seconde contraction.

Dans le cas considéré, la seconde contraction élémentaire vaut :

$$\left\langle d_\rho b_\lambda d_\epsilon b_\delta b_\mu^\dagger d_\nu^\dagger b_\alpha^\dagger d_\beta^\dagger \right\rangle = -\delta_{\alpha\delta} \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \delta_{\beta\rho} \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_6) \delta_{\mu\lambda} \delta(\vec{p} - \vec{p}_5) \delta_{\nu\epsilon} \delta(\vec{p}' - \vec{p}_4)$$

En introduisant cette valeur dans l'expression de l'amplitude on obtient :

$$\begin{aligned} M_{A \rightarrow BC}^{n^o 2} = & -3\mathcal{N}_{BC} \sum_{nb.magn.} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p}_3 d\vec{p}_4 d\vec{p}_5 d\vec{p}_6 d\vec{p} d\vec{p}' d\vec{K}_B d\vec{K}_C \delta(\vec{P}_A) \frac{\delta(k-k_0)}{k} \\ & \delta(\vec{K}_B - \vec{P}_B) \delta(\vec{K}_C - \vec{P}_C) \delta(\vec{K} - \vec{K}_0) \delta(\vec{p} + \vec{p}') (-1) \cdot \delta_{\alpha\delta} \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \delta_{\beta\rho} \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_6) \\ & \delta_{\mu\lambda} \delta(\vec{p} - \vec{p}_5) \delta_{\nu\epsilon} \delta(\vec{p}' - \vec{p}_4) \left\langle [(t_\delta t_\epsilon)^{I_B} (t_\lambda t_\rho)^{I_C}]^{I_A} \mid [(t_\alpha t_\beta)^{I_A} (t_\mu t_\nu)^{0}]^{I_A} \right\rangle \\ & \left\langle [(c_\delta c_\epsilon)^1 (c_\lambda c_\rho)^1]^1 \mid [(c_\alpha c_\beta)^1 (c_\mu c_\nu)^1]^1 \right\rangle \left\langle \left[[\phi_B(\vec{p}_b) (s_\delta s_\epsilon)^{S_B}]^{J_B} \right. \right. \\ & \left. \left. [\phi_C(\vec{p}_c) (s_\lambda s_\rho)^{S_C}]^{J_C} \right]^{J_{BC}} Y_l(\hat{k}) \right]^{J_A} \mid \left[[\phi_A(\vec{p}_a) (s_\alpha s_\beta)^{S_A}]^{J_A} \left[\mathcal{Y}_1\left(\frac{\vec{p} - \vec{p}'}{2}\right) (s_\mu s_\nu)^1 \right]^0 \right]^{J_A} \right\rangle \\ & \times \gamma_\mu \left(\frac{|\vec{p} - \vec{p}'|}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

qui donne après intégration et du fait des fonctions delta de Dirac :

$$M_{A \rightarrow BC}^{n^o 2} = 3\mathcal{N}_{BC} \sum_{nb.magn.} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p} d\vec{K}_B d\vec{K}_C \delta(\vec{P}_A) \frac{\delta(k-k_0)}{k} \delta(\vec{K}_B - \vec{P}_B)$$

$$\begin{aligned}
& \delta(\vec{K}_C - \vec{P}_C) \delta(\vec{K} - \vec{K}_0) \left\langle [(t_\alpha t_\epsilon)^{I_B} (t_\lambda t_\beta)^{I_C}]^{I_A} \mid [(t_\alpha t_\beta)^{I_A} (t_\lambda t_\epsilon)^0]^{I_A} \right\rangle \\
& \left\langle [(c_\alpha c_\epsilon)^1 (c_\lambda c_\beta)^1]^1 \mid [(c_\alpha c_\beta)^1 (c_\lambda c_\epsilon)^1]^1 \right\rangle \left\langle \left[[\phi_B(\vec{p}_b) (s_\alpha s_\epsilon)^{S_B}]^{J_B} \times \right. \right. \\
& \left. \left. [\phi_C(\vec{p}_c) (s_\lambda s_\beta)^{S_C}]^{J_C} \right]^{J_{BC}} Y_l(\hat{k}) \right]^{J_A} \mid \left[[\phi_A(\vec{p}_a) (s_\alpha s_\beta)^{S_A}]^{J_A} [\mathcal{Y}_1(\vec{p})(s_\lambda s_\epsilon)^1]^0 \right]^{J_A} \right\rangle \\
& \times \gamma_\lambda(|\vec{p}|)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Passons au calcul des différents termes contribuant à l'amplitude.

Contribution de la couleur.

Ce terme vaut $\left\langle [(c_\alpha c_\epsilon)^1 (c_\lambda c_\beta)^1]^1 \mid [(c_\alpha c_\beta)^1 (c_\lambda c_\epsilon)^1]^1 \right\rangle$ avec l'indice 1 signifiant le couplage au singlet de couleur. Pour faire le calcul de ce 9J du groupe SU(3)_c, nous écrivons l'expression de la fonction de couleur :

$$(c_\alpha c_\beta)^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + v\bar{v} + b\bar{b}) \tag{3.56}$$

Nous avons une expression analogue pour $(c_\lambda c_\epsilon)^1$. En utilisant ces expressions, en faisant les permutations sur les états de couleur dans le vecteur bra, et en calculant le produit scalaire (en tenant compte de l'orthogonalité des états de couleur), on obtient finalement :

$$\left\langle [(c_\alpha c_\epsilon)^1 (c_\lambda c_\beta)^1]^1 \mid [(c_\alpha c_\beta)^1 (c_\lambda c_\epsilon)^1]^1 \right\rangle = \frac{1}{3} \tag{3.57}$$

Ce facteur, allié au signe $-$ dû à la contraction, se simplifie avec le facteur -3 introduit par commodité pour l'opérateur T .

Contribution de l'isospin.

Le terme d'isospin est simplement : $\left\langle [(t_\alpha t_\epsilon)^{I_B} (t_\lambda t_\beta)^{I_C}]^{I_A} \mid [(t_\alpha t_\beta)^{I_A} (t_\lambda t_\epsilon)^0]^{I_A} \right\rangle$

C'est un symbole 9J (cf référence [13] p 333) qui possède un 0 et qui, par conséquent, se ramène à un 6J. En tenant compte proprement des phases, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(A \rightarrow BC) &= \left\langle [(t_\alpha t_\epsilon)^{I_B} (t_\lambda t_\beta)^{I_C}]^{I_A} \mid [(t_\alpha t_\beta)^{I_A} (t_\lambda t_\epsilon)^0]^{I_A} \right\rangle \\
&= (-1)^{2t_\lambda + t_\epsilon + t_\beta - I_c} \widehat{I}_a \widehat{I}_b \widehat{I}_c \begin{Bmatrix} t_\alpha & t_\epsilon & I_b \\ t_\beta & t_\lambda & I_c \\ I_a & 0 & I_a \end{Bmatrix} \\
&= (-1)^{t_\alpha + t_\beta + I_a} \frac{\widehat{I}_b \widehat{I}_c}{\widehat{t}_\lambda} \begin{Bmatrix} t_\alpha & t_\beta & I_a \\ I_c & I_b & t_\lambda \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

et où, comme d'habitude $\widehat{I} = \sqrt{2I + 1}$.

Contribution du spin et de l'espace.

Il nous reste maintenant un terme qui couple le spin et l'espace. Celui-ci vaut :

$$\begin{aligned}
 M_{A \rightarrow BC}^{n_o 2} = & \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p} d\vec{K}_B d\vec{K}_C \delta(\vec{P}_A) \frac{\delta(k - k_0)}{k} \delta(\vec{K}_B - \vec{P}_B) \delta(\vec{K}_C - \vec{P}_C) \\
 & \delta(\vec{K} - \vec{K}_0) \left\langle \left[\left[\phi_B(\vec{p}_b) [s_\alpha s_\epsilon]^{S_B} \right]^{J_B} \left[\phi_C(\vec{p}_c) [s_\lambda s_\beta]^{S_C} \right]^{J_C} \right]^{J_{BC}} Y_l(\hat{k}) \right]^{J_A} \Big| \\
 & \left[\left[\phi_A(\vec{p}_a) [s_\alpha s_\beta]^{S_A} \right]^{J_A} [\mathcal{Y}_1(\vec{p}) [s_\lambda s_\epsilon]^1]^{J_A} \right] \Big\rangle \times \gamma_\lambda(|\vec{p}|)
 \end{aligned} \quad (3.59)$$

La méthode de calcul consiste à découpler la partie purement spatiale de la partie due au spin. Ceci s'accomplit de façon habituelle en utilisant l'algèbre de Racah. On va donc écrire cette contribution spin-espace sous la forme :

$$\sum_{L_{bc}, L, S} \mathcal{C}(A \rightarrow BC) \mathcal{E}(A \rightarrow BC) \quad (3.60)$$

où on fait apparaître un coefficient géométrique $\mathcal{C}$ faisant intervenir les nombres quantiques des états de spin et des moments angulaires de l'espace et un terme $\mathcal{E}$, faisant intervenir les fonctions d'onde des mésons et le vertex de la création de paire, et qui contient toute la dynamique du problème.

La suite du calcul consiste à découpler la partie spin de la partie espace à l'aide de l'algèbre de Racah, ici nous ne présentons que les grandes étapes, les détails techniques du calcul étant relégués en appendice (C).

Nous aboutissons donc à des contributions du spin et de l'espace totalement découplées. Celle du spin vaut :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}(A \rightarrow BC) = & (-1)^{l+L+J_{BC}+L_A+J_A+S_C} \hat{L}_{BC} \hat{J}_{BC} \hat{J}_B \hat{J}_C \hat{S}_A \hat{S}_B \hat{S}_C \hat{L}^2 \hat{S}^2 \left\{ \begin{matrix} L_A & S_A & J_A \\ S & L & 1 \end{matrix} \right\} \\
 & \left\{ \begin{matrix} S & L_{BC} & J_{BC} \\ l & J_A & L \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_B \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_C \\ S_A & 1 & S \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L_B & S_B & J_B \\ L_C & S_C & J_C \\ L_{BC} & S_{BC} & J_{BC} \end{matrix} \right\}
 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Quand à la contribution spatiale, celle-ci nécessite encore des traitements, elle s'écrit pour l'instant :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(A \rightarrow BC) = & \mathcal{N}_{BC} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p} d\vec{K}_B d\vec{K}_C \delta(\vec{P}_A) \frac{\delta(k - k_0)}{k} \delta(\vec{K}_B - \vec{P}_B) \delta(\vec{K}_C - \vec{P}_C) \\
 & \delta(\vec{K} - \vec{K}_0) \gamma_\lambda(|\vec{p}|) \left\langle \left[\left[\phi_B(\vec{p}_b) \phi_C(\vec{p}_c) \right]^{L_{BC}} Y_l(\hat{k}) \right]^L \left[\phi_A(\vec{p}_a) \mathcal{Y}_1(\vec{p}) \right]^L \right\rangle
 \end{aligned} \quad (3.62)$$

L'étape suivante consiste en des changements de variables, permettant de faire apparaître les impulsions relatives et totales des mésons.

L'“astuce” consiste à garder les variables : p qui intervient dans la fonction de vertex inconnue, et k du fait du $\delta(k - k_0)$. Du fait de la fonction $\delta(\vec{p} + \vec{p}') = \delta(\vec{P})$, on a $\vec{P} = \vec{0}$, de même pour $\vec{P}_A$ la fonction $\delta(\vec{P}_A) \Rightarrow \vec{P}_A = \vec{0}$ qui nous permet donc d'intégrer très facilement. Après quelques manipulations ne présentant pas de difficulté notre intégrale devient :

$$\mathcal{E}(A \rightarrow BC) = \mathcal{N}_{BC} \int d\vec{k} d\vec{p} \delta(\vec{K}_0) \frac{\delta(k - k_0)}{k} \gamma_\lambda(|\vec{p}|) \left\langle \left[[\phi_B(\vec{p}_b) \phi_C(\vec{p}_c)]^{L_{BC}} Y_l(\hat{k}) \right]^L \mid [\phi_A(\vec{p}_a) \mathcal{Y}_1(\vec{p})]^L \right\rangle \quad (3.63)$$

Avec les expressions suivantes pour les variables :

$$\begin{aligned} \vec{p}_a &= \vec{k} + \vec{p} \\ \vec{p}_b &= \frac{\omega_\epsilon \vec{p}_a + \omega_\alpha \vec{p}}{\omega_{\alpha\epsilon}} = \frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} \vec{k} + \vec{p} \\ \vec{p}_c &= \frac{\omega_\lambda \vec{p}_a + \omega_\beta \vec{p}}{\omega_{\lambda\beta}} = \frac{\omega_\lambda}{\omega_{\lambda\beta}} \vec{k} + \vec{p} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Pour la suite des calculs, il faut préciser la forme des fonctions d'onde. Comme déjà mentionné, nous allons prendre une décomposition en somme de gaussiennes que multiplie une harmonique solide soit :

$$\begin{aligned} \phi_A(\vec{p}_a) &= \sum_i d_i^a e^{-\frac{A_i}{2} p_a^2} \mathcal{Y}_{L_A}(\hat{p}_a); & \phi_B(\vec{p}_b) &= \sum_j d_j^b e^{-\frac{B_j}{2} p_b^2} \mathcal{Y}_{L_B}(\hat{p}_b) \\ \phi_C(\vec{p}_c) &= \sum_k d_k^c e^{-\frac{C_k}{2} p_c^2} \mathcal{Y}_{L_C}(\hat{p}_c) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Ce qui nous permet de réécrire le terme spatial sous la forme d'une somme :

$$\mathcal{E}(A \rightarrow BC) = \sum_{i,j,k} d_i^a d_j^b d_k^c \mathcal{E}_{ijk}(A_i \rightarrow B_j C_k) \quad (3.66)$$

Pour ne pas alourdir inutilement nos expressions, on fixe les valeurs des indices i, j, k et on les sous-entend. Ainsi :

$$\mathcal{E}_{ijk}(A \rightarrow BC) = \mathcal{N}_{BC} \int d\vec{k} d\vec{p} \delta(\vec{K}_0) \frac{\delta(k - k_0)}{k^{l+1}} \gamma_\lambda(|\vec{p}|) e^{-\frac{A}{2} p_a^2 - \frac{B}{2} p_b^2 - \frac{C}{2} p_c^2} \quad (3.67)$$

$$\left\langle \left[\left[\mathcal{Y}_{L_B}(\vec{p}_b = \frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} \vec{k} + \vec{p}) \mathcal{Y}_{L_C}(\vec{p}_c = \frac{\omega_\lambda}{\omega_{\lambda\beta}} \vec{k} + \vec{p}) \right]^{L_{BC}} \mathcal{Y}_l(\hat{k}) \right]^L \mid \left[\mathcal{Y}_{L_A}(\vec{p}_a = \vec{k} + \vec{p}) \mathcal{Y}_1(\vec{p}) \right]^L \right\rangle$$

On s'emploie ensuite à transformer nos expressions de sorte que les harmoniques solides ne soient fonctions que d'une seule variable. Ceci nous permet de calculer les produits scalaires facilement. Il ne nous reste ensuite qu'à intégrer sur la partie angulaire des harmoniques. Pour la partie radiale, on introduit une nouvelle notation car on ne peut pas avancer plus le calcul sans spécifier de forme pour la fonction de vertex γ .

$$I_\lambda(m, n; D, G; k) = \int_0^\infty dp \gamma_\lambda(p) p^m \exp(-Dp^2) (-i)^n j_n(iGkp) \quad (3.68)$$

$j_n(x)$ est la fonction de Bessel sphérique usuelle. Elle peut être reliée à la fonction de Bessel modifiée d'indice demi-entier, de façon à obtenir un résultat de l'intégrale toujours réel.

Au final on obtient, pour une fonction de vertex γ quelconque, l'expression suivante pour l'élément de matrice de transition $\langle BC|T|A\rangle = \delta(K_0) M_{A \rightarrow BC}^{n^0 2}$:

$$M_{A \rightarrow BC}^{n^0 2}(J_{BC}, l; k_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{BC}}} \mathcal{I}(A \rightarrow BC) \sum_{L_{BC}, L, S} \mathcal{C}(A \rightarrow BC) \mathcal{E}(A \rightarrow BC) \quad (3.69)$$

Avec :

$$\mathcal{I}(A \rightarrow BC) = (-1)^{t_\alpha + t_\beta + I_a} \frac{\widehat{I_b} \widehat{I_c}}{\widehat{t_\lambda}} \left\{ \begin{matrix} t_\alpha & t_\beta & I_a \\ I_c & I_b & t_\lambda \end{matrix} \right\} \quad (3.70)$$

$$\mathcal{C}(A \rightarrow BC) = (-1)^{L_a + J_a + J_{bc} + l + L + S_c} \widehat{J_b} \widehat{J_c} \widehat{J_{bc}} \widehat{L_{bc}} \widehat{S_a} \widehat{S_b} \widehat{S_c} \widehat{L^2} \widehat{S^2} \times \quad (3.71)$$

$$\left\{ \begin{matrix} L_a & S_a & J_a \\ S & L & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} S & L_{bc} & J_{bc} \\ l & J_a & L \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_b \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_c \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L_b & S_b & J_b \\ L_c & S_c & J_c \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L_b & S_b & J_b \\ L_{bc} & S & J_{bc} \end{matrix} \right\}$$

$$\mathcal{E}(A \rightarrow BC) = \sum_{i,j,k} d_i^a d_j^b d_k^c \mathcal{E}_{ijk}(A_i \rightarrow B_j C_k) \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ijk}(A_i \rightarrow B_j C_k) &= \frac{\sqrt{3}}{(4\pi)^2} \widehat{L_a} \widehat{L_b} \widehat{L_c} \widehat{L_{bc}} \exp(-F_{ijk} k_0^2) (-1)^{1+L_b+L_c} \\ &\sum_{l_1, l_2, l_3, l_8} (-1)^{l_1+l_2+l_3} C_{l_1}^{L_a} C_{l_2}^{L_b} C_{l_3}^{L_c} (\widehat{L_a - l_1}) (\widehat{L_b - l_2}) (\widehat{L_c - l_3}) \widehat{l_1} \widehat{l_2} \widehat{l_3} \widehat{l_8}^2 \left(\frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} \right)^{L_b - l_2} \\ &\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega_{\beta\lambda}} \right)^{L_c - l_3} k_0^{L_a + L_b + L_c + 1 - l_1 - l_2 - l_3} I_\lambda(3 + l_1 + l_2 + l_3, l_8; D_{ijk}, G_{ijk}; k_0) \\ &\sum_{l_4, l_5, l_6, l_7} \widehat{l_4}^2 \widehat{l_5}^2 \widehat{l_6}^2 \widehat{l_7}^2 \begin{pmatrix} 1 & l_1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_8 & l_5 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & l_3 & l_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} L_b - l_2 & L_c - l_3 & l_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_6 & l & l_7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_8 & l_7 & L_a - l_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} 1 & l_1 & l_4 \\ L_a - l_1 & L & L_a \end{matrix} \right\} \\ &\left\{ \begin{matrix} l_5 & l_6 & L_{bc} \\ l & L & l_7 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_5 & l_7 & L \\ L_a - l_1 & l_4 & l_8 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_2 & L_b - l_2 & L_b \\ l_3 & L_c - l_3 & L_c \\ l_5 & l_6 & L_{bc} \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.73)$$

avec les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} D_{ijk} &= \frac{1}{2}(A_i + B_j + C_k) ; F_{ijk} = \frac{1}{2}\left(A_i + \frac{\omega_\epsilon^2}{\omega_{\alpha\epsilon}^2} B_j + \frac{\omega_\lambda^2}{\omega_{\beta\lambda}^2} C_k\right) \\ G_{ijk} &= A_i + \frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} B_j + \frac{\omega_\lambda}{\omega_{\beta\lambda}} C_k ; \omega_i = m_i/m ; \omega_{ij} = \omega_i + \omega_j \end{aligned} \quad (3.74)$$

m est une masse de référence nous permettant de définir une quantité sans dimension ω , m_i la masse du quark i .

Cette formulation est la plus générale possible. Elle nous permet d'appliquer le modèle 3P_0 avec des fonctions d'onde de mésons exactes (si un nombre suffisant de termes est employé dans le développement en somme de gaussiennes) pour une fonction de vertex quelconque et pour n'importe quel canal de désintégration.

Une fois l'amplitude $M_{A \rightarrow BC}$ calculée, l'espace de phase choisi, la largeur de désintégration s'obtient par application de la formule (3.12) ou (3.15). Il ne faut pas oublier dans le cas où les mésons initial et finaux sont composés d'une seule et même saveur, les modifications à faire pour passer de l'amplitude n° 2 à l'amplitude totale (cf section 3.3.1). De plus, une fois la largeur partielle $\Gamma_{A \rightarrow BC}(J_{BC}, l)$ calculée, il faut encore sommer sur J_{BC} , couplage des deux moments cinétiques des mésons finaux, et sur l , leur moment angulaire relatif.

$$\Gamma_{A \rightarrow BC} = \sum_{J_{BC}, l} \Gamma_{A \rightarrow BC}(J_{BC}, l) \quad (3.75)$$

Voyons déjà ce que l'équation (3.69) nous enseigne. Nous avons vu que l'amplitude s'écrit à l'aide de trois termes : le terme d'espace $\mathcal{E}$ qui prend en compte la dynamique en faisant intervenir les fonctions d'onde des mésons, le terme géométrique $\mathcal{C}$ qui contient les couplages de spin-espace (sa valeur dépend donc des nombres quantiques du processus), et enfin le terme d'isospin $\mathcal{I}$ en facteur général qui dépend de la saveur des mésons. Ce qui est intéressant dans ceci est que, pour des fonctions d'onde d'aspect semblable et des nombres quantiques identiques les termes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ seront proches, par exemple le ρ et le ω ne diffèrent que par leur valeur d'isospin, dans un potentiel tel que AL1, qui ne contient pas une dépendance en isospin, ces deux mésons sont dégénérés et possèdent donc la même fonction d'onde. Ainsi, si l'on regarde les transitions $A \rightarrow B\rho$ et $A \rightarrow B\omega$ seuls les termes d'isospin et leur légères différences de masses expérimentales (769 MeV pour le rho et 782 pour le omega) les séparent. En faisant l'approximation d'une même masse, donc d'une même impulsion, pour ces deux transitions les termes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ doivent être strictement égaux. On a alors pour les rapports de branchements (RB) :

$$\frac{RB(A \rightarrow B\rho)}{RB(A \rightarrow B\omega)} = \frac{\mathcal{I}^2(A \rightarrow B\rho)}{\mathcal{I}^2(A \rightarrow B\omega)} \quad (3.76)$$

En testant ceci sur des transitions pour lesquelles existent des données expérimentales, on trouve un accord relativement bon, comme on peut le voir sur la table (3.1).

D'autres données expérimentales sont disponibles comme c'est le cas pour les rapports des transitions suivantes : $J/\Psi \rightarrow \rho\pi, \omega\pi; J/\Psi \rightarrow \rho\pi, \rho\eta$. Cependant aucune prédiction n'est possible pour ces cas là car soit ces transitions ne correspondent pas à des processus entrant dans le cadre du modèle 3P_0 tels que des processus OZI interdits ($J/\Psi \rightarrow \rho\pi$), soit les mésons ont des masses bien différentes comme pour le π et le η (qui dans le cadre du potentiel AL1 possède la même fonction d'onde que le π pour sa composante de saveur n) et donc des impulsions différentes empêchant l'égalité de leur terme spatial $\mathcal{E}$.

TAB. 3.1 – Rapports des pourcentages de désintégration suivant des canaux ne différant, d’après nos approximations (voir texte), que par leur valeur d’isospin.

canaux	théo.	exp.	canaux	théo	exp
$\frac{K_1(1400) \rightarrow K\rho}{K_1(1400) \rightarrow K\omega}$	3.0	3.0	$\frac{K_1(1270) \rightarrow K\rho}{K_1(1270) \rightarrow K\omega}$	3.0	3.8
$\frac{K_2(1430) \rightarrow K\rho}{K_2(1430) \rightarrow K\omega}$	3.0	3.0	$\frac{D^*(2010)^+ \rightarrow D^0 \pi^+}{D^*(2010)^+ \rightarrow D^+ \pi^0}$	2.0	2.2

3.4 Etude de la fonction de vertex $\gamma_\mu(p)$

3.4.1 Remarques sur le cas $\gamma(p) = A = \text{Constante}$

Habituellement dans le modèle 3P_0 , la fonction de vertex employée est une constante. De plus, on ne différencie pas les créations de saveur s de celles d’une paire n (n désigne le doublet d’isospin u ou d), ceci en prétextant la simplicité des formules (voir annexe) au vu de la qualité des résultats. Pour tester cela, dans le cas d’une fonction de vertex constante $\gamma(p) = A$, nous avons étudié 14 transitions. Pour chacune d’entre elles, nous avons calculé la valeur de A permettant de reproduire exactement la valeur expérimentale de la largeur de désintégration et ceci aussi bien pour l’espace de phase relativiste que non relativiste. Les résultats sont rassemblés dans les Tables (3.2) et (3.3).

TAB. 3.2 – Valeurs de $\gamma_1(p) = A$ permettant de reproduire une à une chaque transition, pour un espace de phase relativiste et des fonctions d’onde issue du potentiel AL1.

1	$\rho \rightarrow \pi\pi$	$A = 9.18$	8	$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K$	$A = 5.27$
2	$\phi \rightarrow K\bar{K}$	$A = 6.66$	9	$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$	$A = 5.26$
3	$K^*(892) \rightarrow \pi K$	$A = 8.60$	10	$K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$	$A = 4.78$
4	$f_2(1270) \rightarrow \pi\pi$	$A = 7.13$	11	$K_2^*(1430) \rightarrow \omega K$	$A = 5.31$
5	$f_2(1270) \rightarrow \eta\eta$	$A = 7.15$	12	$a_2 \rightarrow K\bar{K}$	$A = 3.91$
6	$K_0^*(1430) \rightarrow \pi K$	$A = 11.00$	13	$f_2(1270) \rightarrow K\bar{K}$	$A = 6.11$
7	$f_2'(1525) \rightarrow K\bar{K}$	$A = 5.66$	14	$f_2'(1525) \rightarrow \eta\eta$	$A = 3.89$

Pour cette petite étude, les fonctions d’onde ne sont exprimées qu’avec une seule gaussienne. De façon générale, on constate que les valeurs de A sont loin d’être identiques comme le modèle original le voudrait. Pour l’espace de phase relativiste, A varie d’un facteur 3 entre la plus petite et la plus grande valeur et cette constation empire pour l’espace de phase non relativiste qui présente une variation de A d’un facteur 8 ! Il serait donc difficile d’en conclure que $\gamma = A$ est une bonne approximation. Les résultats avec le potentiel AP1 ne sont pas indiqués ici mais aboutissent à la même conclusion.

TAB. 3.3 – Même chose que pour la Table (3.2) mais pour un espace de phase non relativiste.

1	$\rho \rightarrow \pi\pi$	$A = 23.23$	8	$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K$	$A = 20.89$
2	$\phi \rightarrow K\bar{K}$	$A = 6.85$	9	$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$	$A = 15.83$
3	$K^*(892) \rightarrow \pi K$	$A = 15.54$	10	$K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$	$A = 5.60$
4	$f_2(1270) \rightarrow \pi\pi$	$A = 44.92$	11	$K_2^*(1430) \rightarrow \omega K$	$A = 6.07$
5	$f_2(1270) \rightarrow \eta\eta$	$A = 8.57$	12	$a_2 \rightarrow K\bar{K}$	$A = 5.43$
6	$K_0^*(1430) \rightarrow \pi K$	$A = 10.97$	13	$f_2(1270) \rightarrow K\bar{K}$	$A = 8.14$
7	$f_2'(1525) \rightarrow K\bar{K}$	$A = 8.97$	14	$f_2'(1525) \rightarrow \eta\eta$	$A = 5.73$

3.4.2 Choix des fonctions tests

Nous avons développé le formalisme le plus général possible de façon à étudier l'influence de la création de vertex dans la largeur de désintégration. Pour cela, nous avons choisi 10 fonctions d'essai labellées $\gamma_i(p)$ dépendant de plusieurs paramètres. Notre objectif est de déterminer les caractéristiques principales de la forme reproduisant au mieux les largeurs de désintégration expérimentales. Du fait de la décroissance exponentielle des fonctions d'onde pour les grandes valeurs d'impulsion, des fonctions à croissance lente seraient autorisées. Cependant d'un point de vue physique, il nous semble naturel que la fonction de vertex doit être décroissante ou au plus constante. Les formes tests satisfont toutes ces exigences ; elles sont présentées dans la Table (3.4). Les formes avec p_0 comme paramètre ($\gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_9, \gamma_{10}$) présente une “bosse” aux environs de $p \approx p_0$ et celles composées de deux termes ($\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}$) peuvent, suivant les valeurs des paramètres, présenter un noeud. $\gamma_1 = A$ correspond au modèle original mais est cependant inclus pour servir de référence.

Cette détermination de la fonction de vertex va être effectuée dans un premier temps avec des fonctions d'onde pour les mésons provenant des potentiels AL1 et AP1. Ces derniers ont une forme simple car n'incluant pas d'effets d'instanton, de force spin-orbite et tenseur mais donnent des spectres de bonnes qualités. Les deux espaces de phase relativiste et non relativiste vont également être testés.

La détermination s'effectue à l'aide d'une procédure de moindres carrés appliquée à un jeu de 14 transitions présentées dans la Table (3.5). Parmi celles-ci, 11 correspondent à la création d'une paire quark-antiquark “ordinaire” n et 3 à celle d'une paire de saveur étrange. La création de saveur plus lourde n'est pas traitée bien qu'elle pourrait l'être de la même façon si des données expérimentales étaient disponibles.

Ces transitions ont été choisies pour plusieurs raisons. Tout d'abord, des données expérimentales fiables sont disponibles [6] ; leurs nombres quantiques sont bien définis ainsi que leur saveur ; elles font intervenir différentes valeurs d'isospin, de spin et de moment cinétique et ce aussi bien dans l'état initial que final, ce qui nous permet de tester les coefficients de Racah qui apparaissent dans le formalisme ; enfin les largeurs de désintégration expérimentales se répartissent sur une large échelle de valeurs. Il faut noter également que

TAB. 3.4 – Expressions des différentes fonctions de vertex $\gamma_i(p)$ testées. Les paramètres A , B , C , D doivent être déterminés par une procédure de minimisation. Pour chaque forme la colonne de droite indique le nombre de paramètres libres.

nom	expression /	nb par	nom	expression /	nb par
$\gamma_1(p)$	A	1	$\gamma_6(p)$	$\frac{A}{(p-p_0)^2+B}$	3
$\gamma_2(p)$	$(A + Bp^2)e^{-Cp^2}$	3	$\gamma_7(p)$	$A + Be^{-C(p-p_0)^2}$	4
$\gamma_3(p)$	$A + Be^{-Cp^2}$	3	$\gamma_8(p)$	$A + (B + Cp^2)e^{-Dp^2}$	4
$\gamma_4(p)$	$A + Bp^2e^{-Cp^2}$	3	$\gamma_9(p)$	$(A + Bp^2)e^{-C(p-p_0)^2}$	4
$\gamma_5(p)$	$Ae^{-B(p-p_0)^2}$	3	$\gamma_{10}(p)$	$A + Bp^2e^{-C(p-p_0)^2}$	4

deux des transitions choisies : $K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$ et $K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$ font intervenir des mésons larges (largeur de 50 MeV ou plus) dans la voie finale. Ces mésons instables qui vont se désintégrer à leur tour, nécessitent normalement une modification de la théorie, néanmoins ils sont inclus pour donner un caractère général à notre échantillon. Nous avons vérifié a posteriori que ces deux transitions étaient néanmoins assez bien décrites même dans ce modèle simple et qu'elles ne détérioraient point la qualité du fit.

Puisqu'il ne s'agit de dégager que les caractéristiques générales de la fonction de vertex, les mésons de la voie finale ont tous un moment orbital nul, ce qui simplifie grandement les formules.

Parmi les 10 formes testées pour reproduire la fonction de vertex, 1 (γ_1) a un seul para-

TAB. 3.5 – Transitions utilisées pour déterminer les paramètres des fonctions de vertex $\gamma_\mu(p)$.

création de $n\bar{n}$			création de $s\bar{s}$
$\rho \rightarrow \pi\pi$	$\phi \rightarrow K\bar{K}$	$K^*(892) \rightarrow \pi K$	$a_2(1320) \rightarrow K\bar{K}$
$f_2(1270) \rightarrow \pi\pi$	$f_2(1270) \rightarrow \eta\eta$	$K_0^*(1430) \rightarrow \pi K$	$f_2(1270) \rightarrow K\bar{K}$
$f_2'(1525) \rightarrow K\bar{K}$	$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K$	$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$	$f_2'(1525) \rightarrow \eta\eta$
$K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$	$K_2^*(1430) \rightarrow \omega K$		

mètre, 5 ($\gamma_2 - \gamma_6$) en ont 3 et 4 ($\gamma_7 - \gamma_{10}$) en possèdent 4. La valeur du chi carré :

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{théo.} - \text{exp.})^2}{(\text{incertitude})^2}$$

va dépendre de la forme (si une forme est plus adaptée que les autres) et du nombre de paramètres (pour le chi carré par degré de liberté). La détermination par minimisation des meilleurs paramètres étant coûteux en temps, il faut essayer de la simplifier au maximum. Pour ce faire, premièrement, les fonctions d'onde des mésons sont exprimées comme une seule gaussienne (on ne peut donc pas décrire les états excités radiaux qui ont un noeud dans leur fonction d'onde). Deuxièmement, la quantité que l'on cherche à reproduire n'est pas la largeur $\Gamma_{A \rightarrow BC}$ mais $|M_{A \rightarrow BC}(k_0)|$, quantité s'obtenant en otant de la largeur l'espace de phase ϕ . Attention cependant, il faut bien noter que $|M_{A \rightarrow BC}^{rel.}(k_0)|$ relativiste et $|M_{A \rightarrow BC}^{nonrel.}(k_0)|$ non relativiste ne diffèrent pas seulement par les valeurs de ϕ mais également par les différences d'impulsion k_0 . Pour éviter d'accorder trop de poids dans le χ^2 aux transitions très bien connues expérimentalement, nous utilisons comme pondération soit 3% de la largeur expérimentale soit l'incertitude expérimentale quand celle-ci est plus grande. Comme nous autorisons des fonctions de vertex différentes suivant la saveur de la paire créée, il faut minimiser séparément le χ^2 correspondant aux 11 transitions découlant de la création d'une paire n du χ^2 résultant des 3 transitions de saveur étrange. La minimisation a été effectuée à l'aide d'un code en Fortran 90 utilisant des procédures de la NAG.

Espace de phase relativiste

Un espace de phase et une impulsion k_0 relativistes sont utilisés dans cette partie. Les résultats sont présentés dans la table (3.6) pour le potentiel AL1. Il apparaît immédiatement qu'une fonction de vertex γ dépendant de l'impulsion permet de mieux reproduire les valeurs expérimentales, les χ^2 absolu des formes 2 à 10 étant tous plus faibles, environ 73, que celui provenant de calcul effectué avec $\gamma_1 = \text{constante}$, $\chi^2 \approx 107$. Bien sûr il est plus facile de reproduire des données avec 3 ou 4 paramètres qu'avec 1 seul, c'est pourquoi afin de juger de cet effet sont également indiqués dans les tables les valeurs de χ^2 par degré de liberté (d.d.l), ces derniers étant égaux au nombre de transitions (utilisées pour la détermination de γ) moins le nombre de paramètres libres intervenant dans la fonction de vertex. On note que les fonctions "test" à trois paramètres aboutissent à un chi carré par d.d.l. inférieur (environ 9.2) au cas $\gamma_1 = \text{constante}$ ($\chi^2/\text{d.d.l.} = 10.7$) qui représente le modèle habituel. Une chose inattendue est que, hormis la fonction γ_1 , toutes les fonctions donnent la même valeur de χ^2 absolu. Pour comprendre ceci, sont tracées sur la figure (3.1) les fonctions $\gamma(p)$ avec les valeurs de paramètres résultant du "fit", pour une impulsion p comprise entre 0 et 6 GeV. Elles semblent bien différentes mais si on fait un zoom pour p allant de 0 à 1 GeV, on s'aperçoit qu'elles décrivent toutes (sauf bien sûr le cas constant) la même courbe. Ainsi la dynamique du processus n'est sensible qu'aux valeurs de p inférieures à 1 GeV, les valeurs supérieures étant supprimées par la décroissance exponentielle de la queue des fonctions d'onde.

Ces résultats ont été confirmés par une analyse complètement différente. Toujours sur le principe de moindre carré, la fonction de vertex γ a été construite comme une somme

TAB. 3.6 – Racines carrées des largeurs de désintégration pour les 10 formes testées $\gamma_i(p)$ (voir table (3.4)) pour un espace de phase relativiste et le potentiel AL1. Les chi carrés absolu χ^2 et par degré de liberté $\chi^2 / \text{d.d.l.}$ sont également indiqués.

$\Gamma^{\frac{1}{2}}(MeV^{\frac{1}{2}})$						
transition	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	expérience
$\rho \rightarrow \pi\pi$	8.43	9.81	9.81	9.81	9.81	12.28 ± 0.37
$\phi \rightarrow K\bar{K}$	1.82	2.08	2.08	2.08	2.08	1.92 ± 0.06
$K^*(892) \rightarrow \pi K$	5.19	5.95	5.95	5.95	5.95	7.08 ± 0.21
$f_2(1270) \rightarrow \pi\pi$	11.08	10.43	10.44	10.43	10.43	$12.53^{+0.23}_{-0.13}$
$f_2(1270) \rightarrow \eta\eta$	0.80	0.48	0.48	0.48	0.48	0.91 ± 0.10
$K_0^*(1430) \rightarrow \pi K$	9.36	18.39	18.38	18.39	18.39	16.34 ± 1.10
$f_2'(1525) \rightarrow K\bar{K}$	8.97	9.28	9.29	9.28	9.28	8.06 ± 0.56
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K$	8.35	8.43	8.43	8.43	8.43	7.01 ± 0.21
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$	5.97	5.19	5.18	5.19	5.19	4.98 ± 0.16
$K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$	3.87	3.08	3.08	3.08	3.08	2.95 ± 0.14
$K_2^*(1430) \rightarrow \omega K$	2.02	1.59	1.59	1.59	1.59	1.70 ± 0.23
χ^2	106.6	73.3	73.0	73.3	73.3	
$\chi^2 / \text{d.d.l.}$	10.7	9.2	9.1	9.2	9.2	
transition	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9	γ_{10}	expérience
$\rho \rightarrow \pi\pi$	9.80	9.81	9.81	9.81	9.81	12.28 ± 0.37
$\phi \rightarrow K\bar{K}$	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	1.92 ± 0.06
$K^*(892) \rightarrow \pi K$	5.95	5.95	5.95	5.96	5.95	7.08 ± 0.21
$f_2(1270) \rightarrow \pi\pi$	10.39	10.42	10.43	10.42	10.44	$12.53^{+0.23}_{-0.13}$
$f_2(1270) \rightarrow \eta\eta$	0.49	0.48	0.48	0.48	0.48	0.91 ± 0.10
$K_0^*(1430) \rightarrow \pi K$	18.39	18.38	18.39	18.38	18.36	16.34 ± 1.10
$f_2'(1525) \rightarrow K\bar{K}$	9.27	9.28	9.28	9.28	9.29	8.06 ± 0.56
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K$	8.41	8.43	8.43	8.43	8.44	7.01 ± 0.21
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$	5.21	5.20	5.19	5.20	5.18	4.98 ± 0.16
$K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$	3.10	3.08	3.08	3.08	3.08	2.95 ± 0.14
$K_2^*(1430) \rightarrow \omega K$	1.60	1.59	1.59	1.59	1.59	1.70 ± 0.23
χ^2	74.3	73.7	73.3	73.6	73.1	
$\chi^2 / \text{d.d.l.}$	9.3	10.5	10.5	10.5	10.4	

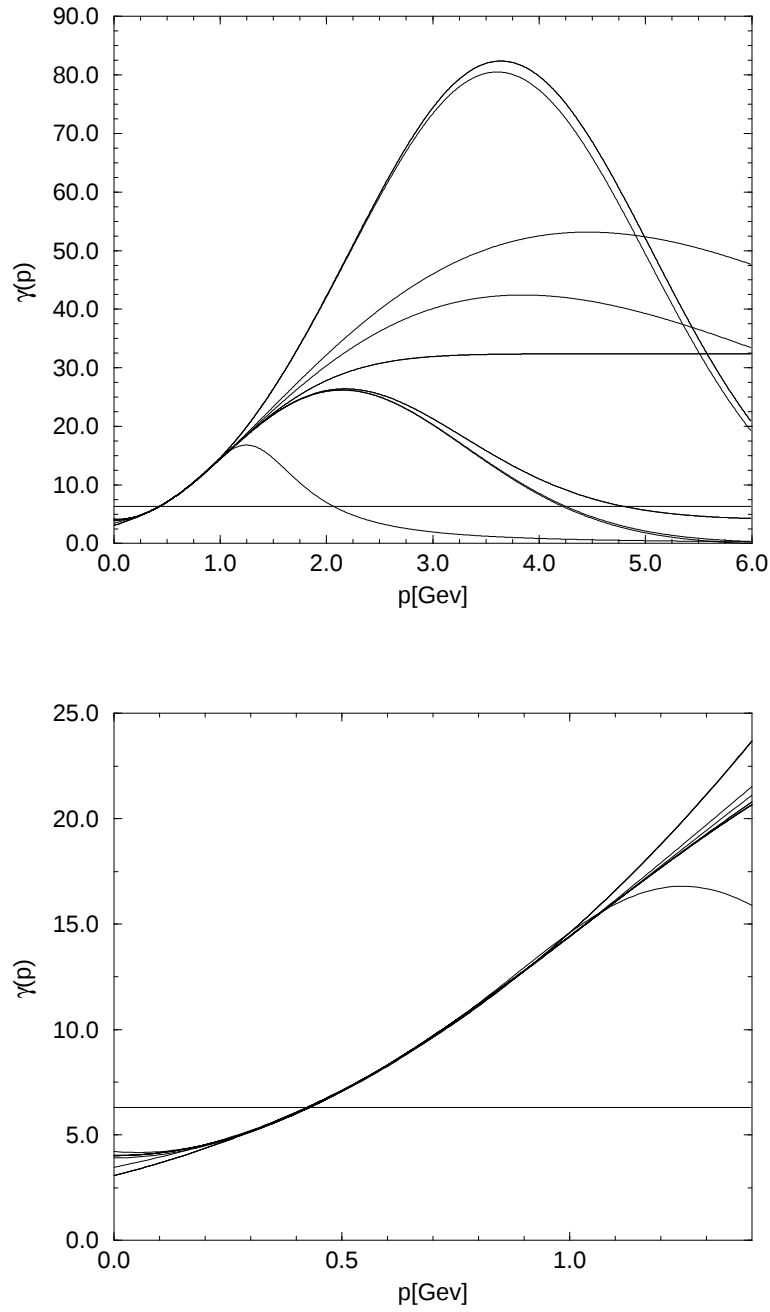


FIG. 3.1 – Tracé des 10 fonctions de vertex $\gamma_i(p)$ testées avec les valeurs des paramètres issues de la minimisation pour une création de paire $n\bar{n}$, un espace de phase relativiste et le potentiel AL1. La première figure correspond à un domaine d'impulsion p de 0 à 6 GeV tandis que la deuxième se restreint de 0 à 1.4 GeV.

TAB. 3.7 – Racines carrées des largeurs de désintégration pour les 10 formes testées $\gamma_i(p)$ (voir table (3.4)) pour un espace de phase relativiste et le potentiel AP1. Les chi carrés absolu χ^2 et par degré de liberté $\chi^2/\text{d.d.l.}$ sont également indiqués.

$\Gamma^{\frac{1}{2}}(MeV^{\frac{1}{2}})$						
transition	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	expérience
$\rho \rightarrow \pi\pi$	8.32	10.08	10.08	9.93	10.08	12.28 ± 0.37
$\phi \rightarrow K\bar{K}$	1.71	2.06	2.06	2.03	2.05	1.92 ± 0.06
$K^* \rightarrow \pi K$	5.03	6.02	6.02	5.93	6.01	7.08 ± 0.21
$f_2 \rightarrow \pi\pi$	11.05	10.40	10.40	10.67	10.50	$12.53^{+0.23}_{-0.13}$
$f_2 \rightarrow \eta\eta$	0.83	0.40	0.40	0.35	0.40	0.91 ± 0.10
$K_0 \rightarrow \pi K$	6.46	17.32	17.31	17.18	17.18	16.34 ± 1.10
$f'_2 \rightarrow \bar{K}K$	8.72	9.36	9.36	9.37	9.39	8.06 ± 0.56
$K_2^* \rightarrow \pi K$	8.16	8.43	8.44	8.56	8.48	7.01 ± 0.21
$K_2^* \rightarrow \pi K^*$	6.20	5.25	5.25	5.02	5.22	4.98 ± 0.16
$K_2^* \rightarrow \rho K$	4.08	3.07	3.07	3.24	3.02	2.95 ± 0.14
$K_2^* \rightarrow \omega K$	2.13	1.58	1.58	1.70	1.55	1.70 ± 0.23
χ^2	132.6	72.3	73.0	69.5	69.7	
$\chi^2/\text{d.d.l.}$	13.3	9.0	9.1	8.7	8.7	
transition	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9	γ_{10}	expérience
$\rho \rightarrow \pi\pi$	10.07	10.10	10.08	10.10	10.08	12.28 ± 0.37
$\phi \rightarrow K\bar{K}$	2.06	2.06	2.06	2.06	2.06	1.92 ± 0.06
$K^* \rightarrow \pi K$	6.01	6.02	6.02	6.02	6.02	7.08 ± 0.21
$f_2 \rightarrow \pi\pi$	10.27	10.34	10.40	10.34	10.40	$12.53^{+0.23}_{-0.13}$
$f_2 \rightarrow \eta\eta$	0.41	0.40	0.40	0.40	0.40	0.91 ± 0.10
$K_0 \rightarrow \pi K$	17.40	17.40	17.32	17.39	17.32	16.34 ± 1.10
$f'_2 \rightarrow \bar{K}K$	9.34	9.34	9.36	9.35	9.36	8.06 ± 0.56
$K_2^* \rightarrow \pi K$	8.38	8.41	8.43	8.40	8.43	7.01 ± 0.21
$K_2^* \rightarrow \pi K^*$	5.30	5.27	5.25	5.27	5.25	4.98 ± 0.16
$K_2^* \rightarrow \rho K$	3.12	3.07	3.07	3.07	3.07	2.95 ± 0.14
$K_2^* \rightarrow \omega K$	1.61	1.58	1.58	1.58	1.58	1.70 ± 0.23
χ^2	76.3	74.0	72.3	73.8	72.3	
$\chi^2/\text{d.d.l.}$	9.5	10.6	10.3	10.5	10.3	

de gaussiennes décentrées (une centaine au maximum). Les paramètres de ces gaussiennes résultent soit d’une méthode purement stochastique soit stochastique avec minimisation, c.-à-d. pour chaque nouvelle gaussienne ajoutée à la fonction γ , un tirage aléatoire des paramètres est effectué pour servir de condition initiale à la minimisation, minimisation que l’on effectue en maintenant fixe les caractéristiques des précédentes gaussiennes. Différents exemples des résultats obtenus par cette méthode, sont présentés dans les figures (3.2) où l’on retrouve le même début de courbe obtenue pour nos fonctions “test”. Ces derniers résultats sont presque symétriques par rapport à l’axe $\gamma = 0$, ceci est lié au fait que le signe de la fonction gamma n’est pas déterminé lorsqu’une seule saveur contribue à la désintégration (le chi carré est calculé à partir du module de l’élément de matrice seule quantité accessible à partir de l’expérience). Nous reviendrons sur ce point plus tard.

Mis à part la forme $\gamma = \text{constante}$, toutes les fonctions reproduisent les trois transitions correspondant à des créations de saveur étrange, ces transitions ne sont donc pas incluses dans les tables de “fit”. Que nos fonctions d’essai possèdent 3 ou 4 paramètres n’implique nullement ce résultat du fait de la non linéarité de notre problème. C’est donc malgré tout un bon point.

Pour tester une première fois la généralité de nos conclusions, la même étude a été menée avec le potentiel AP1. Les résultats sont présentés dans la table (3.7). La supériorité d’une fonction de vertex dépendant de l’impulsion est confirmée ici.

D’autres formes analytiques, telles que des fonctions Yukawa, des sommes de gaussiennes, etc, ont également été employées mais cela ne nous a pas apporté d’information supplémentaire et les résultats ne sont donc pas présentés.

Quelques commentaires concernant les potentiels AL1 et AP1 sont les bienvenus. Etant donné qu’aucun de ces potentiels n’inclut les effets des forces spin-orbite et tenseur, le moment orbital L et le spin S sont des bons nombres quantiques; les multiplets d’un moment angulaire total J donné sont donc dégénérés en énergie et possèdent la même fonction d’onde radiale. Cependant leur largeur de désintégration théorique diffère du fait des coefficients de Racah différents. Ceci est notamment le cas des mésons $K_0^*(1430)$ et $K_2^*(1430)$ qui bien que se désintégrant dans la même voie (en $\rightarrow \pi K$) donne des largeurs différentes, permettant ainsi de tester la partie couplage de nombres quantiques. Le cas du méson η est aussi intéressant. Les effets de l’instanton n’étant pas pris en compte dans les potentiels employés pour cette étude, il faut inclure à la main un angle de mélange entre la saveur n et la saveur s au sein du η . L’angle de mélange pris est de 50% ici; on verra avec le potentiel DNR, qui inclut lui l’instanton, qu’il ne s’agit pas d’une valeur irréaliste puisque ce dernier donne 55.3 % de saveur n pour 44.7 % de saveur s . On écrit donc :

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_n - \eta_s) \\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left([n\bar{n}]^{I=0} - [s\bar{s}]^{I=0}\right)\end{aligned}\tag{3.77}$$

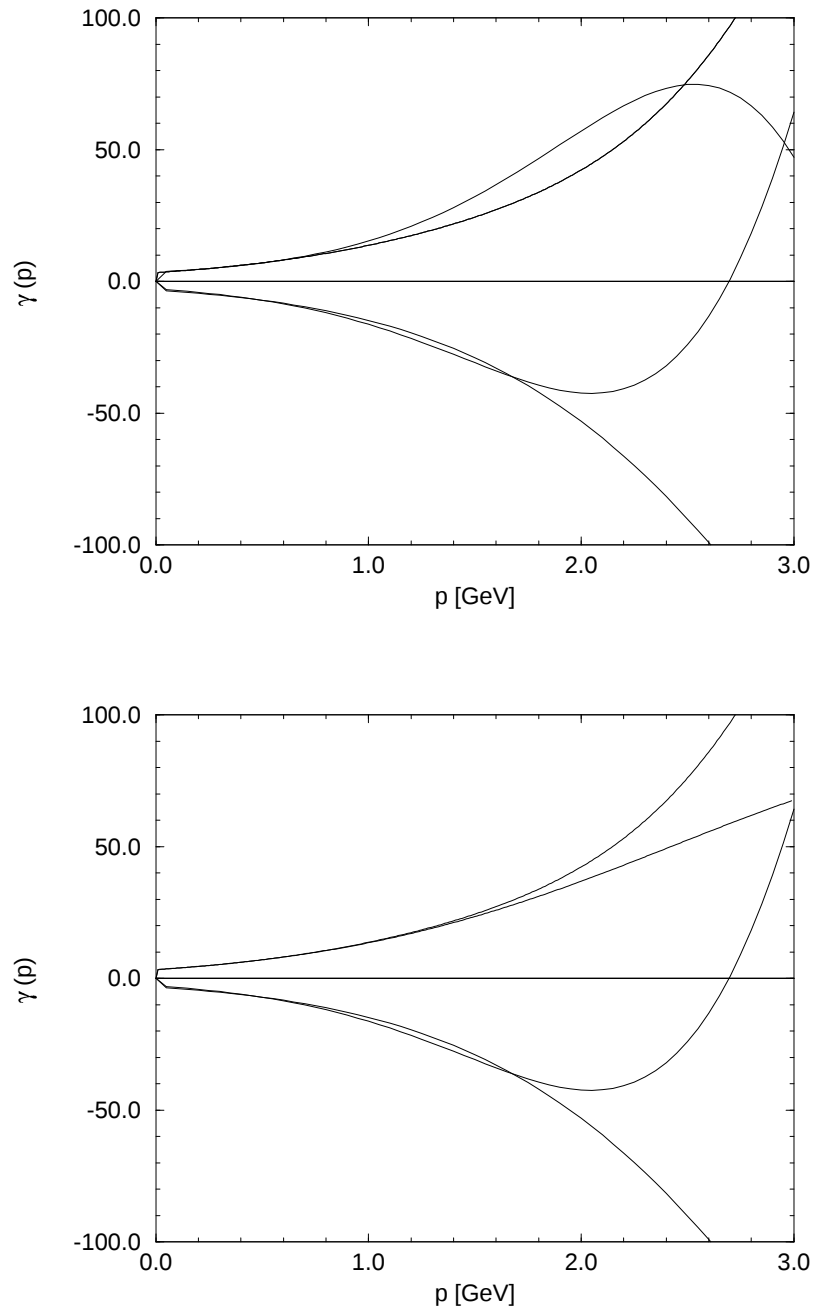


FIG. 3.2 – Diverses formes de fonctions de vertex obtenues par méthode stochastique.

et

$$\eta' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_n + \eta_s) \quad (3.78)$$

pour respecter l'orthogonalité des fonctions d'onde. Dans le calcul de l'espace de phase et de l'impulsion relative k_0 les masses expérimentales sont utilisées. On voit que pour le cas du méson η , du fait de ce mélange de saveur, cela est une nécessité puisque la composante η_n n'est pas solution de l'équation de Schrödinger avec la même énergie que la composante de η_s . De plus, puisque les fonctions d'onde ne sont décrites ici qu'avec une seule gaussienne, on ne peut espérer reproduire correctement les valeurs expérimentales des masses.

Ci-dessus, la partie $\eta_n = [n\bar{n}]^{I=0}$ correspond en fait à la fonction d'onde du pion puisque qu'il n'y a pas de dépendance en isospin pour AL1 et AP1.

Espace de phase non relativiste

La recherche de la fonction de vertex la plus apte à reproduire les données expérimentales est maintenant effectuée pour un espace de phase et une impulsion k_0 non relativistes. La table (3.8) présente les résultats obtenus pour le potentiel AL1 et ceux découlant du potentiel AP1 sont consignés dans la table (3.9). La figure (3.3) montre les 10 fonctions test avec les paramètres issus de la minimisation.

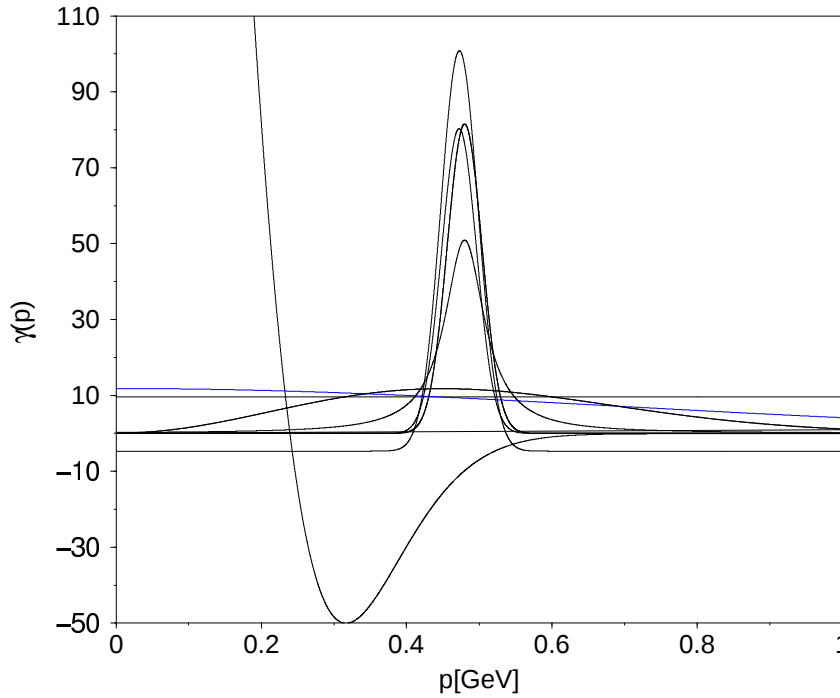


FIG. 3.3 – Comme pour la figure (3.1) mais avec un espace de phase non relativiste.

On voit de suite que l'utilisation d'un espace de phase non relativiste détériore la qualité des résultats puisque l'on obtient des χ^2 augmenté d'un facteur 9 pour AL1 et 7 pour AP1 en comparaison du cas relativiste. Il s'agit de plus de valeur minimale car contrairement

TAB. 3.8 – Racines carrées des largeurs de désintégration pour les 10 formes testées $\gamma_i(p)$ (voir table (3.4)) pour un espace de phase non relativiste et le potentiel AL1.

$\Gamma^{\frac{1}{2}}(MeV^{\frac{1}{2}})$						
transition	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	expérience
$\rho \rightarrow \pi\pi$	5.07	5.17	4.94	5.17	5.99	12.28 ± 0.37
$\phi \rightarrow K\bar{K}$	2.70	2.70	2.59	2.69	2.65	1.92 ± 0.06
$K^*(892) \rightarrow \pi K$	4.41	4.44	4.25	4.44	6.42	7.08 ± 0.21
$f_2(1270) \rightarrow \pi\pi$	2.68	3.26	2.94	3.26	2.93	$12.53^{+0.23}_{-0.13}$
$f_2(1270) \rightarrow \eta\eta$	1.03	1.20	1.14	1.20	0.79	0.91 ± 0.10
$K_0^*(1430) \rightarrow \pi K$	14.31	12.78	12.90	12.79	11.90	16.34 ± 1.10
$f_2'(1525) \rightarrow K\bar{K}$	8.80	9.91	8.84	9.91	13.43	8.06 ± 0.56
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K$	3.23	3.84	3.40	3.84	6.55	7.01 ± 0.21
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$	3.00	3.08	3.15	3.08	4.24	4.98 ± 0.16
$K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$	5.02	4.98	5.31	4.98	2.97	2.95 ± 0.14
$K_2^*(1430) \rightarrow \omega K$	2.68	2.64	2.83	2.64	1.46	1.70 ± 0.23
χ^2	1105.5	992.8	1071.7	991.7	857.0	
$\chi^2 / \text{d.d.l}$	110.6	124.1	134.0	124.0	107.1	
transition	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9	γ_{10}	expérience
$\rho \rightarrow \pi\pi$	5.85	5.99	5.80	5.99	6.13	12.28 ± 0.37
$\phi \rightarrow K\bar{K}$	2.83	2.65	2.88	2.65	2.65	1.92 ± 0.06
$K^*(892) \rightarrow \pi K$	5.87	6.42	4.85	6.42	6.23	7.08 ± 0.21
$f_2(1270) \rightarrow \pi\pi$	2.81	2.93	5.14	2.93	3.58	$12.53^{+0.23}_{-0.13}$
$f_2(1270) \rightarrow \eta\eta$	0.81	0.79	1.74	0.79	0.95	0.91 ± 0.10
$K_0^*(1430) \rightarrow \pi K$	11.7	11.9	10.17	11.90	9.65	16.34 ± 1.10
$f_2'(1525) \rightarrow K\bar{K}$	12.14	13.43	12.22	13.43	13.60	8.06 ± 0.56
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K$	6.05	6.54	5.55	6.55	7.35	7.01 ± 0.21
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$	4.28	4.24	2.99	4.24	3.86	4.98 ± 0.16
$K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$	2.92	2.97	3.56	2.97	2.66	2.95 ± 0.14
$K_2^*(1430) \rightarrow \omega K$	1.47	1.46	1.67	1.46	1.25	1.70 ± 0.23
χ^2	898.3	857.0	684.3	857.0	777.0	
$\chi^2 / \text{d.d.l}$	112.3	122.4	97.8	122.4	111.0	

TAB. 3.9 – Racines carrées des largeurs de désintégration pour les 10 formes testées $\gamma_i(p)$ (voir table (3.4)) pour un espace de phase non relativiste et le potentiel AP1.

$\Gamma^{\frac{1}{2}}(MeV^{\frac{1}{2}})$						
transition	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	expérience
$\rho \rightarrow \pi\pi$	5.10	5.38	5.64	5.37	5.34	12.28 ± 0.37
$\phi \rightarrow K\bar{K}$	2.56	2.65	2.88	2.65	2.81	1.92 ± 0.06
$K^* \rightarrow \pi K$	4.35	4.55	4.86	4.55	6.04	7.08 ± 0.21
$f_2 \rightarrow \pi\pi$	2.80	3.24	2.67	3.24	6.74	$12.53^{+0.23}_{-0.13}$
$f_2 \rightarrow \eta\eta$	1.08	1.16	0.91	1.16	2.25	0.91 ± 0.10
$K_0 \rightarrow \pi K$	12.31	11.83	14.73	11.84	11.89	16.34 ± 1.10
$f'_2 \rightarrow \bar{K}K$	8.80	10.04	9.84	10.04	7.62	8.06 ± 0.56
$K_2^* \rightarrow \pi K$	3.34	3.93	3.50	3.93	4.89	7.01 ± 0.21
$K_2^* \rightarrow \pi K^*$	3.22	3.18	2.82	3.17	4.19	4.98 ± 0.16
$K_2^* \rightarrow \rho K$	5.38	5.09	4.35	5.09	3.29	2.95 ± 0.14
$K_2^* \rightarrow \omega K$	2.88	2.69	2.31	2.69	1.61	1.70 ± 0.23
χ^2	1087.5	982.8	1067.0	983.4	489.5	
$\chi^2 / \text{d.d.l}$	108.8	122.9	133.4	122.9	61.2	
transition	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9	γ_{10}	expérience
$\rho \rightarrow \pi\pi$	4.61	5.98	6.17	6.21	4.87	12.28 ± 0.37
$\phi \rightarrow K\bar{K}$	1.91	2.82	2.88	2.46	2.17	1.92 ± 0.06
$K^* \rightarrow \pi K$	5.39	5.00	5.08	4.94	3.95	7.08 ± 0.21
$f_2 \rightarrow \pi\pi$	6.10	4.52	5.13	6.23	4.41	$12.53^{+0.23}_{-0.13}$
$f_2 \rightarrow \eta\eta$	2.36	1.42	1.62	1.89	1.49	0.91 ± 0.10
$K_0 \rightarrow \pi K$	6.64	10.47	9.88	5.58	5.49	16.34 ± 1.10
$f'_2 \rightarrow \bar{K}K$	9.34	12.08	12.20	14.92	12.15	8.06 ± 0.56
$K_2^* \rightarrow \pi K$	4.73	5.27	5.66	6.97	5.18	7.01 ± 0.21
$K_2^* \rightarrow \pi K^*$	6.82	3.04	3.02	3.32	3.47	4.98 ± 0.16
$K_2^* \rightarrow \rho K$	3.94	4.13	3.60	3.72	5.64	2.95 ± 0.14
$K_2^* \rightarrow \omega K$	2.04	2.08	1.67	1.79	3.02	1.70 ± 0.23
χ^2	591.0	746.8	665.2	539.7	856.3	
$\chi^2 / \text{d.d.l}$	73.9	106.7	95.0	77.1	122.3	

TAB. 3.10 – Comparaison des facteurs de l'espace de phase ϕ et d'impulsion k_0 (en MeV) selon le type de traitement : relativiste ou non. Le potentiel AL1 est utilisé ainsi que la fonction de vertex γ_3 gaussienne.

transition	$k_0^{rel.}$	$k_0^{non\ rel.}$	$\phi^{rel.}$	$\phi^{non\ rel.}$	$\Gamma^{\frac{1}{2}}(MeV^{\frac{1}{2}})$		
					<i>rel.</i>	<i>nonrel.</i>	<i>exp.</i>
$\rho \rightarrow \pi\pi$	357.99	157.53	3.37	1.68	9.81	4.94	12.28 ± 0.37
$\phi \rightarrow K\bar{K}$	126.71	123.70	12.64	12.33	2.08	2.59	1.92 ± 0.06
$K^* \rightarrow \pi K$	287.99	199.83	4.48	2.88	5.95	4.25	7.08 ± 0.21
$f_2 \rightarrow \pi\pi$	622.03	174.47	3.22	1.18	10.44	2.94	$12.53^{+0.23}_{-0.13}$
$f_2 \rightarrow \eta\eta$	326.74	291.03	6.13	5.47	0.48	1.14	0.91 ± 0.10
$K_0 \rightarrow \pi K$	620.53	277.04	3.57	1.64	18.38	12.90	16.34 ± 1.10
$f'_2 \rightarrow \bar{K}K$	581.09	414.55	4.12	3.01	9.29	8.84	8.06 ± 0.56
$K_2^* \rightarrow \pi K$	618.48	276.76	3.58	1.65	8.43	3.40	7.01 ± 0.21
$K_2^* \rightarrow \pi K^*$	417.99	262.38	4.58	2.46	5.19	3.08	4.98 ± 0.16
$K_2^* \rightarrow \rho K$	324.93	294.75	6.69	6.06	3.08	5.31	2.95 ± 0.14
$K_2^* \rightarrow \omega K$	311.48	284.85	6.95	6.31	1.59	2.83	1.70 ± 0.23

au cas relativiste, les χ^2 diffèrent suivant la forme choisie. Le cas $\gamma_1 = \text{constante}$, du point de vue $\chi^2/\text{d.d.l.}$ donnent notamment des résultats meilleurs que certaines autres formes. Un tel changement se comprend au vu de la table (3.10). La largeur de désintégration est linéaire en l'espace de phase mais de dépendance plus complexe en l'impulsion. Il est remarquable qu'une différence faible d'impulsion entre les valeurs relativiste et non relativiste puisse entraîner des modifications importantes de la largeur. Par exemple, pour la transition $\phi \rightarrow K\bar{K}$ les valeurs, relativistes et non relativistes, de l'espace de phase sont proches et les impulsions ne diffèrent que de 3 MeV pour une différence de 25 % de la racine carrée de la largeur. Une bonne détermination de l'impulsion est donc une caractéristique indispensable pour le succès de nos calculs. En cela, on retrouve, une fois de plus, l'obligation d'utiliser les masses expérimentales.

Si l'on trace les fonctions de vertex obtenues par procédure des moindres carrés, cf figure (3.3) pour le potentiel AL1, on constate qu'un certain nombre de formes présentent un pic autour de $p=0.5$ GeV. Je ne pense pas que cela représente réellement la physique du problème mais plus un artefact lié à l'étalement des valeurs $\gamma = \text{constante}$ permettant de reproduire une à une les transitions (cf table (3.3)). En effet, cette bosse permet d'accroître la valeur de la fonction de vertex pour les transitions sensibles aux impulsions p supérieures ou égales à 0.5 GeV, quant aux autres transitions faisant intervenir des fonctions d'onde de faible moment, elles ne bénéficient pas de cette augmentation de la valeur de γ .

Conclusion de cette partie

Nous avons modifié le formalisme du modèle 3P_0 pour inclure dans la fonction de vertex γ une dépendance en l'impulsion relative p de la paire $q\bar{q}$ créée ainsi qu'une dépendance en saveur. Nous avons montré qu'avec un espace de phase relativiste, une fonction de vertex $\gamma(p)$ représente toujours une amélioration, du moment que celle-ci ait la bonne

forme (cf figure (3.1)) dans le domaine d'impulsion $p < 1$ GeV. En cela, la fonction essai $\gamma_3 = A + Be^{-Cp^2}$ est particulièrement intéressante puisqu'elle satisfait cette condition et est très pratique d'emploi. Nous verrons qu'elle permet des calculs entièrement analytiques pour des fonctions d'onde décomposées en somme de gaussiennes. Nous allons donc dériver une nouvelle fois l'expression de la largeur de désintégration pour cette fonction γ_3 d'une façon qui permet de simplifier sensiblement les formules. Concernant la limite $p < 1$ GeV, pour des états très excités avec des fonctions d'onde de rayon carré grand, il est fort à parier que γ aurait une dépendance de plus longue portée en impulsion. Essayons de comprendre la forme particulière de la courbe γ . Il peut paraître surprenant que cette fonction augmente avec l'impulsion mais il faut se souvenir que γ n'est pas seulement liée à la probabilité de création d'une paire $q\bar{q}$ mais également au fait que cette paire doit encore interagir avec les quarks du méson se désintégrant. La croissance de γ en fonction de p peut peut-être s'expliquer par le fait que si la paire créée a une impulsion trop faible, cela signifie que le quark et l'antiquark ne vont pas s'éloigner l'un de l'autre rapidement, et risque de s'annihiler avant d'avoir pu interagir avec le méson A . Maintenant une création avec une impulsion élevée va être plus coûteuse en énergie et sera moins probable bien que plus susceptible d'interagir avec le méson A .

3.4.3 Vertex Gaussien

Dans cette partie, on adopte comme fonction de vertex, la fonction :

$$\gamma_\mu(p) = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 e^{-\mathcal{B}p^2} = \sum_{n=1}^2 \mathcal{A}_n e^{-\mathcal{B}_n p^2} \quad (3.79)$$

qui permet de décrire la fonction d'essai n° 3 en prenant $\mathcal{B}_1 = 0$; de même le cas $\gamma = \text{constante}$ se retrouve en prenant $\mathcal{B}_1 = 0$ et $\mathcal{A}_2 = 0$. En insérant cette expression dans le calcul de la section (3.3.2), seul le terme d'espace est modifié. Ainsi :

$$\mathcal{E}(A \rightarrow BC) = \sum_{i,j,k,n} d_i^a d_j^b d_k^c \mathcal{A}_n \mathcal{E}_{ijkn}(A_i \rightarrow B_j C_k) \quad (3.80)$$

maintenant $\mathcal{E}_{ijkn}(A_i \rightarrow B_j C_k)$ s'écrit (avec les indices sous entendus) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(A \rightarrow BC) = & \int d\vec{k} d\vec{p} \delta(\vec{K}_0) \frac{\delta(k - k_0)}{k^{l+1}} \gamma_\lambda(p) \exp\left(-\frac{1}{2}(Ap_a^2 + Bp_b^2 + Cp_c^2 + \mathcal{B}p^2)\right) \\ & \left\langle \left[\left[\mathcal{Y}_{LB}\left(\frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}}\vec{k} + \vec{p}\right) \mathcal{Y}_{LC}\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega_{\lambda\beta}}\vec{k} + \vec{p}\right) \right]^{L_{BC}} \mathcal{Y}_l(\vec{k}) \right]^L \mid \left[\mathcal{Y}_{LA}(\vec{k} + \vec{p}) \mathcal{Y}_1(\vec{p}) \right]^L \right\rangle \end{aligned} \quad (3.81)$$

où les impulsions relatives $\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{p}_c$ s'expriment en fonction de $\vec{p}$ et $\vec{k}$ suivant (3.64).

L'astuce consiste à introduire une nouvelle variable $\vec{q} = \vec{p} - x\vec{k}$, sans fixer pour l'instant la valeur de x , puis on effectue le changement de variable unitaire suivant $d\vec{p}d\vec{k} \rightarrow d\vec{q}d\vec{k}$, ainsi :

$$\begin{cases} \vec{p}_a &= \vec{q} + (1+x)\vec{k} \\ \vec{p}_b &= \vec{q} + \left(\frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} + x\right)\vec{k} \\ \vec{p}_c &= \vec{q} + \left(\frac{\omega_\lambda}{\omega_{\lambda\beta}} + x\right)\vec{k} \end{cases} \quad (3.82)$$

L'argument de l'exponentielle de (3.81) contient maintenant des termes en k^2 , q^2 et $\vec{k} \cdot \vec{q}$. On choisit la valeur de x de façon à annuler le terme croisé en $\vec{k} \cdot \vec{q}$. Le terme spatial devient :

$$\mathcal{E}(A \rightarrow BC) = \delta(\vec{K}_0) \int d\vec{k} d\vec{q} \frac{\delta(k - k_0)}{k^{l+1}} \exp(-Dq^2 - Fk^2) \left\langle \left[\left[\mathcal{Y}_{L_B}(\vec{q} + v\vec{k}) \mathcal{Y}_{L_C}(\vec{q} + w\vec{k}) \right]^{L_{BC}} \mathcal{Y}_l(\vec{k}) \right]^L \mid \left[\mathcal{Y}_{L_A}(\vec{q} + u\vec{k}) \mathcal{Y}_1(\vec{q} + x\vec{k}) \right]^L \right\rangle \quad (3.83)$$

Le reste du calcul s'effectue de façon identique à la section (3.3.2). L'intégrale cette fois aboutit à une forme analytique :

$$\int_0^\infty dq q^{3+L} e^{-Dq^2} = \frac{\Gamma(2 + L/2)}{2D^{2+L/2}} \quad (3.84)$$

Au final, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda(A \rightarrow BC) &= (-1)^{1+L_a+L_{bc}} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{(4\pi)^{5/2}} \widehat{L_a} \widehat{L_b} \widehat{L_c} \widehat{L_{bc}} \widehat{l} \exp(-Fk_0^2) \\ &\sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} (-1)^{l_1+l_2} C_{l_1}^{L_a} C_{l_2}^1 C_{l_3}^{L_b} C_{l_4}^{L_c} u^{l_1} x^{l_2} v^{l_3} w^{l_4} (\widehat{L_a - l_1}) (\widehat{1 - l_2}) (\widehat{L_b - l_3}) (\widehat{L_c - l_4}) \\ &\widehat{l_1} \widehat{l_2} \widehat{l_3} \widehat{l_4} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(L_a + 4 + L_b + L_c - l_1 - l_2 - l_3 - l_4))}{D^{\frac{1}{2}(L_a + 4 + L_b + L_c - l_1 - l_2 - l_3 - l_4)}} k_0^{1+l_1+l_2+l_3+l_4} \sum_{l_5, l_6, l_7} \widehat{l_5}^2 \widehat{l_6}^2 \widehat{l_7}^2 \\ &\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_a - l_1 & 1 - l_2 & l_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 & l_4 & l_7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_5 & l_7 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} L_b - l_3 & L_c - l_4 & l_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} l_6 & l_7 & L_{bc} \\ l & L & l_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_1 & L_a - l_1 & L_a \\ l_2 & 1 - l_2 & 1 \\ l_5 & l_6 & L \end{matrix} \right\} \\ &\left\{ \begin{matrix} l_3 & L_b - l_3 & L_b \\ l_4 & L_c - l_4 & L_c \\ l_7 & l_6 & L_{bc} \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.85)$$

avec les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} D_{ijkn} &= \frac{1}{2}(A_i + B_j + C_k + \mathcal{B}_n) ; \quad G_{ijk} = A_i + B_j \frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} + C_k \frac{\omega_\lambda}{\omega_{\beta\lambda}} \\ x_{ijkn} &= -\frac{G_{ijkn}}{2D_{ijk}} ; \quad u_{ijkn} = 1 + x_{ijkn} \\ v_{ijkn} &= \frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} + x_{ijkn} ; \quad w_{ijkn} = \frac{\omega_\lambda}{\omega_{\beta\lambda}} + x_{ijkn} \\ F_{ijkn} &= \frac{1}{2} \left[A_i (1 + x_{ijkn})^2 + B_j (x_{ijkn} + \frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}})^2 + C_k (x_{ijkn} + \frac{\omega_\lambda}{\omega_{\beta\lambda}})^2 + \mathcal{B}_n x_{ijkn}^2 \right] \end{aligned} \quad (3.86)$$

Cette expression (3.85) est plus simple à utiliser que l'expression générale (3.73) du fait d'un nombre plus petit de termes dans la somme. De plus ici, aucune intégration numérique n'est à effectuer : nous avons un résultat complètement analytique. Nous avons vérifié, analytiquement et numériquement sur certains cas que l'expression générale se réduisait bien à notre expression obtenue pour le vertex gaussien.

3.5 Méson large dans la voie finale

Jusqu'ici nous avons considéré que les mésons fils B et C avaient une masse m_b et m_c bien définie. Nous supposons à présent que le méson B (ou C) se désintègre lui-même pour donner deux mésons fils, notés B_1 et B_2 , et possède donc une largeur Γ_B . En pratique nous considérons comme instable un méson de largeur expérimentale $\Gamma \geq 50$ MeV.

Le processus étudié peut se schématiser de la sorte :

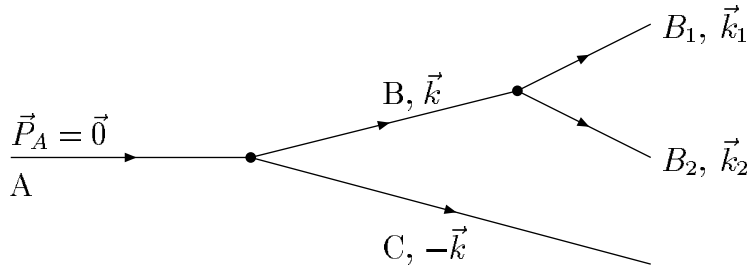


FIG. 3.4 – Représentation schématique de la désintégration vers un méson instable.

Le méson A est supposé être au repos d'où $E_i = E_A = m_a$. Les mésons B et C possèdent une impulsion k et donc une énergie $E_B(k)$ et $E_C(k)$. Les mésons B_1 et B_2 ont, quant à eux, respectivement une impulsion et énergie k_1 , E_{B1} et k_2 , E_{B2} . Comment traiter ce processus compliqué ?

3.5.1 Prescription de Capstick

Nous allons adopter la prescription de Capstick et Roberts [14]. Leur méthode de calcul est basée sur la constatation suivante. Si on considère les mésons B et C comme ayant une largeur nulle donc une masse précise m_b et m_c respectivement, alors on a, pour une impulsion $k = k_0$ fixée par la conservation de l'énergie $\delta(E_i - E_f)$, $\Gamma_{A \rightarrow BC}(J_{BC}, l, k_0) = 2\pi \int dk \delta(E_i - E_f) |M_{A \rightarrow BC}(k)|^2$. Cependant le terme $\delta(E_i - E_f) = \delta(m_a - E_B - E_C)$ peut être considéré comme la limite à largeur nulle de :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} = \frac{1}{m_a - E_B - E_C - i\epsilon} = PP. \frac{1}{m_a - E_B - E_C} + i\pi \delta(m_a - E_B - E_C) \quad (3.87)$$

où PP désigne la partie principale au sens de la théorie des distributions.

Maintenant pour le processus regardé, B n'a pas une masse bien définie du fait de son instabilité et possède une largeur Γ_B non nulle, il faut donc dans la formule ci-dessus faire le remplacement $E_B \rightarrow E_B - i\frac{\Gamma_B}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_a - E_B - E_C - i\frac{\Gamma_B}{2}} &= \frac{m_a - E_B - E_C + i\frac{\Gamma_B}{2}}{(m_a - E_B - E_C)^2 + \frac{\Gamma_B^2}{4}} \\ &= \frac{m_a - E_B - E_C}{(m_a - E_B - E_C)^2 + \frac{\Gamma_B^2}{4}} + i\frac{\Gamma_B/2}{(m_a - E_B - E_C)^2 + \frac{\Gamma_B^2}{4}} \end{aligned} \quad (3.88)$$

A la limite $\Gamma_B \rightarrow 0$, cette formule doit tendre vers le second membre de (3.87). Il est donc tentant de faire le remplacement :

$$2\pi\delta(m_a - E_B - E_C) = \frac{\Gamma_B}{(m_a - E_B - E_C)^2 + \frac{\Gamma_B^2}{4}} \quad (3.89)$$

Ainsi, pour un méson B de largeur Γ_B , l'expression de la largeur de désintégration de A vers $(B_1 B_2)_B C$ s'écrit (formule de "Breit-Wigner") :

$$\Gamma_{A \rightarrow (B_1 B_2)_B C}(J_{BC}, l) = \int_{k_{min}}^{k_{max}} dk \frac{|M_{A \rightarrow BC}(k)|^2 \Gamma_B(k)}{(m_a - E_B - E_C)^2 + \frac{\Gamma_B^2(k)}{4}} \quad (3.90)$$

Regardons les bornes d'intégration. L'état final comprend trois corps B_1 , B_2 et C . k représente aussi bien l'impulsion du méson B que celle du méson C ($\vec{K}_C = -\vec{k}$). $k_{min} = 0$ cela correspond au cas où B_1 et B_2 sont dos à dos donc $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ et C au repos $\vec{K}_C = \vec{0}$. L'impulsion sera maximale quand B_1 et B_2 seront colinéaires $\vec{K}_C = \vec{k}_{max} = -\vec{k}_1 - \vec{k}_2$.

$$k_{max} = \frac{\sqrt{(m_a^2 - (m_c - m_{B1} - m_{B2})^2)(m_a^2 - (m_c + m_{B1} + m_{B2})^2)}}{2m_a}$$

Il faut noter que pour le premier vertex de notre figure (3.4) représentant la désintégration A vers BC , il y a conservation de l'impulsion mais pas conservation de l'énergie étant donné que l'on a effectué la substitution (3.90), c'est pourquoi la norme de l'impulsion k n'est pas fixée.

Maintenant voyons comment s'interprète la formule (3.90). L'élément de matrice $M_{A \rightarrow BC}(k)$ se calcule à l'aide des formules développées dans la section (3.4.3), c.-à-d. que l'on considère le méson B comme stable donc avec une masse m_b bien définie, mais pour une valeur de l'impulsion k et non pas k_0 valeur fixée par la conservation de l'énergie. Pour le dénominateur, les énergies E_B et E_C dépendent de l'impulsion k également suivant : $E_B = \sqrt{k^2 + m_b^2}$ et $E_C = \sqrt{k^2 + m_c^2}$. Le terme Γ_B est plus délicat à interpréter, il représente la deuxième partie de la figure (3.4) : c.-à-d. la désintégration du méson B d'impulsion k et non plus au repos en deux mésons B_1 et B_2 . Le modèle 3P_0 n'étant pas invariant de Galilée, cela pose problème. Ne sachant pas traiter le cas de la désintégration d'un méson en mouvement, on fait l'approximation suivante, sans doute grossière, de supposer B au repos, on ne conserve pas l'énergie (on ne suit pas la relation $\vec{k} = \vec{k}_{B1} + \vec{k}_{B2}$) et

on prend une impulsion k commune pour B_1 et B_2 , cf (3.5). Cela revient au remplacement suivant :

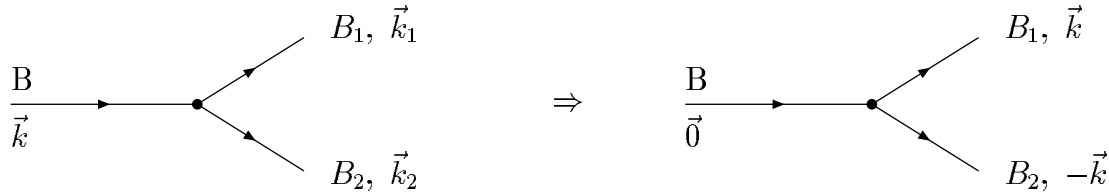


FIG. 3.5 – Représentation schématique des approximations employées pour le traitement de la désintégration secondaire.

Ainsi, on a :

$$\Gamma_B(k) = \Gamma_{B \rightarrow B_1 B_2}(k) = \sum_{J_{B_1 B_2}, l_{B_1 B_2}} \Gamma_{B \rightarrow B_1 B_2}(J_{B_1 B_2}, l_{B_1 B_2}, k)$$

$$\Gamma_{B \rightarrow B_1 B_2}(J_{B_1 B_2}, l_{B_1 B_2}, k) = 2\pi \frac{E_{B_1}(k) E_{B_2}(k) |M_{B \rightarrow B_1 B_2}(k)|^2}{m_b k} \quad (3.91)$$

On voit apparaître une seconde difficulté dans ce traitement, Γ_B est sensée représenter la largeur totale du méson B , Γ_B est donc la somme des largeurs de désintégration suivant tous les canaux c.-à-d. non seulement les canaux $B_1 B_2$, mais les autres hadroniques (3 mésons ou plus), électromagnétiques et leptoniques. Le calcul de Γ_B est hélas largement hors de notre portée. De plus, les bornes d'intégration de k , c.-à-d. le k_{max} de l'équation (3.90), dépend du canal $B \rightarrow B_1 B_2$, cela complique encore le calcul de $\Gamma_{A \rightarrow BC}$ qui suppose une intégrale unique. Ceci nous amène donc à la constatation suivante : le méson B , pour que notre formule soit valide, doit se désintégrer à 100% dans un seul canal hadronique en $B_1 B_2$.

Pour le cas d'un méson large dans la voie finale, le calcul de la largeur n'est plus analytique et nécessite désormais une intégration numérique même pour le cas d'un vertex gaussien.

3.5.2 Prise en compte partielle de l'impulsion k du méson B

Une façon d'essayer de tenir compte de l'impulsion du méson se désintégrant dans la voie finale est de remplacer dans le calcul de Γ_B la masse nominale m_b par son énergie E_B . Ainsi la dépendance en k est incluse. On applique la formule (3.90), avec $M_{A \rightarrow BC}(k)$ et $(m_a - E_b(k) - E_c(k))^2$ calculés comme précédemment. Ensuite on introduit une nouvelle impulsion $\tilde{k}$, impulsion relative entre B_1 et B_2 .

$$\tilde{k} = \frac{\sqrt{[E_b(k)^2 - (m_{B_1} + m_{B_2})^2][E_b(k)^2 - (m_{B_1} - m_{B_2})^2]}}{2E_b(k)}; \quad E_b(k) = \sqrt{m_b^2 + k^2}$$

$$E_{B1}(\tilde{k}(k)) = \sqrt{m_{B1}^2 + \tilde{k}^2} ; \quad E_{B2}(\tilde{k}(k)) = \sqrt{m_{B2}^2 + \tilde{k}^2}$$

$$\Gamma_{B \rightarrow B_1 B_2}(J_{B_1 B_2}, l_{B_1 B_2}, k) = 2\pi \frac{E_{B1}(\tilde{k}) E_{B2}(\tilde{k}) |M_{B \rightarrow B_1 B_2}(\tilde{k})|^2}{E_b(k) \tilde{k}(k)} \quad (3.92)$$

L'élément de matrice est calculé avec les formules habituelles du 3P_0 mais pour l'impulsion $\tilde{k}$.

3.5.3 Distribution de probabilité

Nous avons vu que la principale difficulté pour l'application de la formule (3.90) est le fait qu'elle suppose un seul canal. Afin de contourner ce problème, nous allons tester une prescription basée sur une distribution de probabilité pour la masse du méson B se désintégrant dans la voie finale. Nous comparerons plus loin (voir les tables (3.14)-(3.15)-(3.22)) les résultats obtenus dans ce cadre avec ceux issus de la prescription de Capstick et Roberts.

Ainsi, on suppose que la masse m du méson B (masse qui n'est pas définie exactement du fait de l'instabilité de B) est distribuée suivant une certaine loi de probabilité $\rho(m)$ autour de la valeur moyenne de la masse m_b . Cette distribution est bien entendue normée : $\int_0^\infty dm \rho(m) = 1$. Nous allons donc poser de façon phénoménologique, que la largeur de désintégration du méson A vers les mésons B et C est la somme des largeurs (de $A \rightarrow BC$) calculées de la manière habituelle mais pour *une masse m* pour le méson B .

$$\Gamma_{A \rightarrow BC}(J_{BC}, l) = \int_0^\infty dm \rho_b(m) \Gamma_{A \rightarrow BC}(J_{BC}, l, m) \quad (3.93)$$

L'expression finale de la largeur va dépendre évidemment du choix de la distribution $\rho(m)$. On va imposer de retrouver les formules traditionnelles dans le cas d'une faible largeur Γ_B , c.-à-d. que notre distribution de probabilité doit tendre vers une fonction $\delta(m - m_b)$ à la limite $\Gamma_B \rightarrow 0$. Les deux distributions testées ci-dessous satisfont cette exigence. Tout comme pour l'espace de phase on prenait la masse expérimentale des mésons, ici on fera de même pour m_b intervenant dans la distribution.

Dans les distributions testées, va intervenir la largeur Γ_B expérimentale totale. On perd donc le caractère complètement prédictif de nos calculs pour une désintégration simple. Les résultats seront présentés plus loin pour différents potentiels.

Distribution gaussienne

Pour une distribution gaussienne, on prendra :

$$\rho(m) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma_B} e^{-\left(\frac{m-m_b}{\Gamma_B}\right)^2} \quad (3.94)$$

Il nous faut relier maintenant la valeur de Γ_B de la formule à la valeur expérimentale de la largeur $\tilde{\Gamma}_B = \Gamma_B(\text{exp.})$. Expérimentalement $\tilde{\Gamma}_B$ définit la largeur à mi-hauteur, on a

donc la relation suivante :

$$\rho(m_b + \tilde{\Gamma}_B) = \frac{1}{2} \rho(m_b) \quad \Rightarrow \quad \Gamma_B = \frac{\tilde{\Gamma}_B}{\sqrt{2}}$$

Distribution lorentzienne

Pour une distribution lorentzienne, on prendra :

$$\rho(m) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_B/2}{(m - m_b)^2 + (\Gamma_B/2)^2} \quad (3.95)$$

Ici le lien entre $\tilde{\Gamma}_B$ et Γ_B est trivial car la distribution utilisée pour représenter les données expérimentales est une lorentzienne.

$$\rho(m_b + \tilde{\Gamma}_B) = \frac{1}{2} \rho(m_b) \quad \Rightarrow \quad \Gamma_B = \tilde{\Gamma}_B$$

3.5.4 Importance de la qualité des fonctions d'ondes

Jusqu'à présent, les fonctions d'onde utilisées pour la détermination de la fonction de vertex γ n'étaient décrites que par une seule gaussienne que multiplie une harmonique solide. Nous allons maintenant prendre pour la partie radiale une somme de N_g gaussiennes de tailles différentes. Ceci afin d'améliorer la correspondance avec la fonction d'onde réelle d'une part mais aussi afin de pouvoir décrire les états excités possédant des noeuds dans leur fonction d'onde. Suivant le potentiel utilisé et donc suivant le code numérique employé (codes développés par B. Silvestre-Brac et C. Semay), la fonction d'onde est obtenue après résolution de l'équation de Schrödinger (avec minimisation de l'énergie de la résonance et orthogonalisation des états de plus basses énergies) soit directement sous forme d'une somme de gaussiennes soit point par point. Pour ce dernier cas, j'ai mis au point un code numérique en Fortran 90 qui par méthode de moindres carrés permet le passage d'une description point par point à une somme de gaussiennes.

Sur la figure (3.6), est présentée l'évolution de la qualité du fit en fonction du nombre de gaussiennes pour le pion, qui est un cas assez sensible. Tout d'abord on voit clairement qu'une seule gaussienne dévie notablement du cas exact, cependant l'écart exact-approché décroît rapidement lorsque N_g augmente ; le cas $N_g=2$ suit de beaucoup plus près le cas exact et $N_g=3$ s'en différenciant uniquement à l'origine. Par rapport à la fonction d'onde exacte, la somme de gaussiennes ne pourra pas reproduire la pente à l'origine, pente qui est obligatoirement nulle dans le cas de gaussiennes.

Comment cette évolution de la fonction d'onde se répercute-t-elle au niveau de la fonction γ ? On utilise pour ce calcul, comme partout par la suite sauf précision contraire, une fonction de vertex gaussienne. Comme pour la section (3.4.2), les paramètres de la fonction γ_n sont déterminés par minimisation du χ^2 calculé sur les 11 transitions de l'échantillon (table (3.5)). On ne s'occupe pas du cas de création de saveur étrange qui était déjà parfaitement reproduit pour $N_g=1$.

Les χ^2 obtenus pour les potentiels AL1 et AP1 sont rassemblés dans la table (3.11).

Aussi bien pour AL1 que pour AP1, une meilleure description des fonctions d'onde se répercute par un plus faible χ^2 . Le passage $N_g=1$ à $N_g=2$ représente une nette amélioration

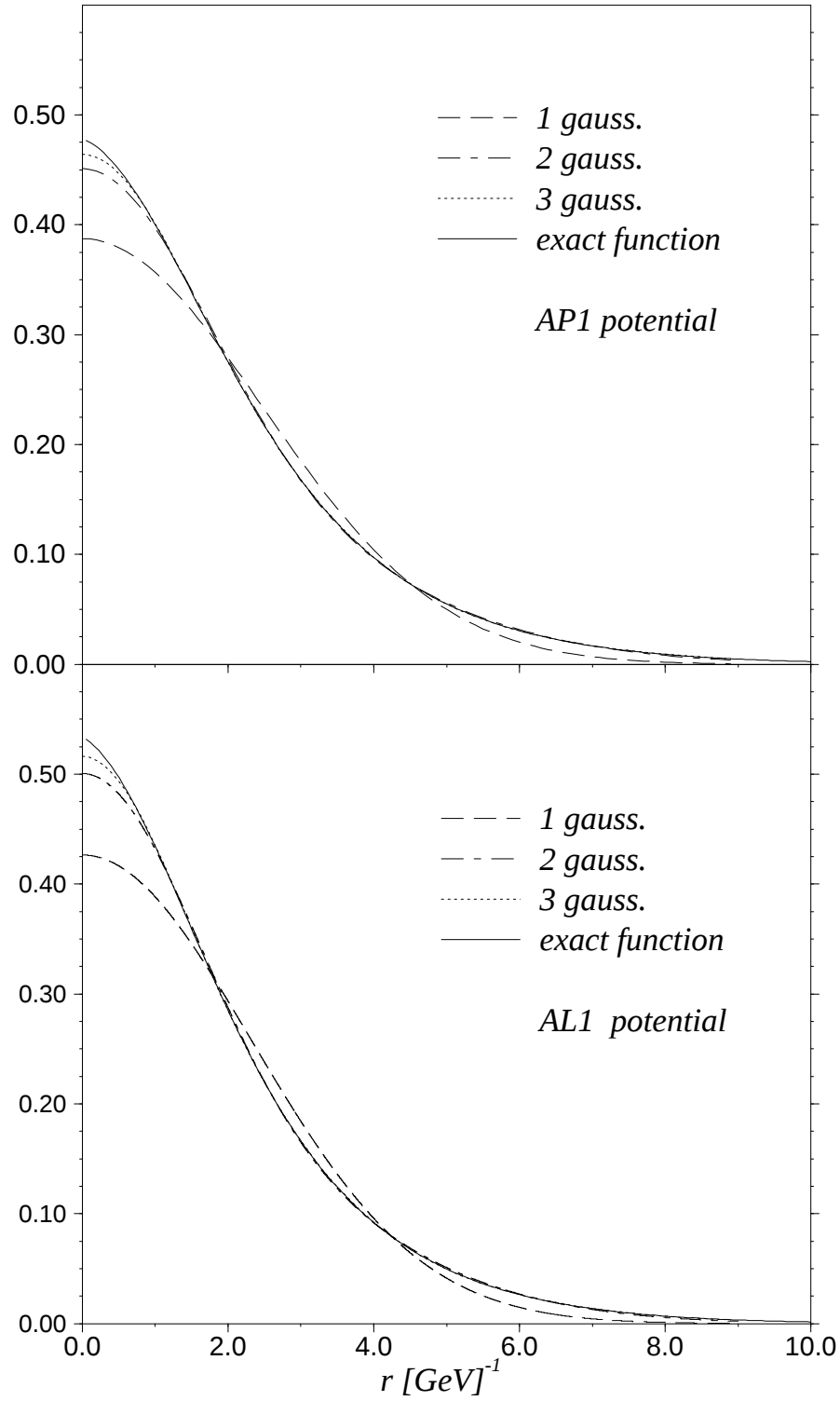


FIG. 3.6 – Comparaison, pour le π et les potentiels AL1 et AP1, entre la fonction $R(r)$ exacte et la partie radiale approximée par une expansion sur des gaussiennes.

TAB. 3.11 – Valeurs du χ^2 (basé sur $\sqrt{\Gamma}$) pour des fonctions d’onde des mésons décrites par Ng=1, 2, 3 gaussiennes pour la partie radiale pour les 11 transitions sélectionnées (cf table(3.5)) correspondant à la création d’une saveur n , pour une fonction de vertex $\gamma = cte + gauss.$ et un espace de phase relativiste.

χ^2 , potentiel AL1			χ^2 , potentiel AP1		
1 gauss.	2 gauss.	3 gauss.	1 gauss.	2 gauss.	3 gauss.
73.0	47.8	47.7	69.5	54.1	54.8

des résultats tandis que le passage Ng=2 à Ng=3 n’apporte quasiment aucune variation. Ceci est dû au fait que le cas Ng=2 reproduit déjà bien la fonction d’onde exacte. De plus, dans ce cas les fonctions d’onde ne diffèrent qu’à l’origine ; cela montre qu’il ne s’agit clairement pas de la zone testée dans les désintégrations fortes.

On peut s’imaginer que la redétermination des paramètres de γ compense en partie l’imprécision de la fonction d’onde. Afin de mesurer cet effet, pour le potentiel AL1, la fonction de vertex obtenue à partir de Ng=3 est maintenue fixe et est employée pour le calcul avec des fonctions d’onde décrites par Ng=1, 2. On a $\chi^2(Ng = 2) = 49.6$ et $\chi^2(N = 1) = 153.9$ à comparer à $\chi^2(N = 3) = 47.7$. Ainsi on n’obtient qu’une légère variation pour Ng=2, confirmant la similitude des fonctions d’onde Ng=2 et Ng=3 montrée sur la figure (3.6) tandis que pour Ng=1 la détérioration des résultats est bien marquée. En conclusion la qualité de la fonction d’onde a une influence notable sur les calculs de largeurs de désintégrations, influence qui peut cependant être atténuée par une nouvelle détermination des paramètres de γ . Pour indication et pour le potentiel AL1 combiné à un espace de phase relativiste et des fonctions d’onde développées sur 3 gaussiennes, la minimisation aboutit aux fonctions de vertex suivantes : $\gamma_n = 5.8385$, $\gamma_s = 3.9564$ pour une fonction de vertex constante et $\gamma_n = 2154.29 - 2151.73 \exp(-0.008p^2)$, $\gamma_s = 12.40 - 31.91 \exp(-7.875p^2)$ pour le cas “constante+gaussienne”.

Pour la suite de l’étude, les fonctions d’onde utilisées posséderont au minimum trois termes dans le développement en gaussiennes.

3.6 Différents potentiels

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus pour les potentiels AL1, AP1 et χ QM, pour les formalismes développés précédemment. Pour ce faire, nous avons classé les transitions calculées en trois groupes : le premier groupe (noté I) contient les transitions avec des mésons considérés comme stables (nous pensons que $\Gamma < 50$ MeV est une limite raisonnable) dans la voie finale (ce groupe contient l’échantillon de transitions nous permettant de paramétrer γ), le second groupe (noté II) contient des transitions avec des mésons instables dans la voie finale, nécessitant donc l’utilisation du formalisme développé dans la section (3.5) enfin le dernier groupe (appelé groupe III) contient des transitions, avec mésons stables ou instables dans la voie finale, pour lesquelles on ne dispose pas de données expérimentales précises contrairement aux deux premiers groupes.

Puisque l’on différencie maintenant les cas contenant des mésons larges dans l’état fi-

nal des cas avec mésons stables, il faut retirer de notre échantillon les deux transitions $K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$ et $K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$ nécessitant la double application du 3P_0 et redéterminer les paramètres de la fonction γ . Ceci ne modifie pas nos précédentes conclusions car ces deux transitions sont bien reproduites même lorsqu'on les considère comme stables dans la voie finale, la valeur du χ^2 servant à la paramétrisation de γ n'est donc pas brutalement modifiée.

3.6.1 Résultats pour le potentiel χ QM

TAB. 3.12 – Racines carrées des largeurs de désintégration obtenues pour le potentiel χ QM avec un espace de phase relativiste. Ces transitions composent l'échantillon permettant de déterminer les paramètres de la fonction γ . Pour les résultats de la colonne intitulée “flux tube” se référer à [12].

transition	$\gamma_3 = A_1 + A_2 e^{-B_2 p^2}$	$\gamma_1 = A$	Flux tube	exp.
$\rho \rightarrow \pi\pi$	9.44	7.85	12.4	12.28 ± 0.37
$\phi \rightarrow K\bar{K}$	2.12	1.97	2.5	1.92 ± 0.06
$K^*(892) \rightarrow \pi K$	6.12	5.38	7.8	7.08 ± 0.21
$f_2(1270) \rightarrow \pi\pi$	10.61	11.05	8.9	$12.53^{+0.23}_{-0.13}$
$f_2(1270) \rightarrow \eta\eta$	1.41	2.11	0.9	0.91 ± 0.10
$K_0^*(1430) \rightarrow \pi K$	15.39	4.85	-	16.34 ± 1.24
$f_2'(1525) \rightarrow K\bar{K}$	11.48	11.15	6.5	8.06 ± 0.56
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K$	9.88	9.45	6.5	7.01 ± 0.21
$K_2^*(1430) \rightarrow \omega K$	1.94	2.77	1.4	1.70 ± 0.23
$a_2(1320) \rightarrow K\bar{K}$	2.29	3.04	2.8	2.29 ± 0.19
$f_2(1270) \rightarrow K\bar{K}$	2.96	2.49	2.7	2.92 ± 0.13
$f_2'(1525) \rightarrow \eta\eta$	1.94	2.76	2.5	2.80 ± 0.46

Dans la table (3.12) sont présentées les $\Gamma^{\frac{1}{2}}$ pour les transitions permettant de déterminer les paramètres de γ associés au potentiel χ QM, pour un espace de phase relativiste. Pour ce potentiel, le développement en gaussiennes comprend de Ng=3 à 6 gaussiennes pour les fonctions d'onde. Pour indication, les résultats obtenus par Kokoski et Isgur [12] ont été ajoutés. Ces valeurs proviennent d'une variante du 3P_0 , le modèle du tube de flux (voir [12]), et de l'utilisation d'un espace de phase modifié de façon ad hoc qui améliore considérablement les résultats; par contre il ne nécessite qu'un seul paramètre libre qui est fixé uniquement sur la transition $\rho \rightarrow \pi\pi$.

Les trois transitions correspondant à une création de saveur s ont été incluses car pour le potentiel χ QM, la fonction γ gaussienne ne permet pas de reproduire exactement ces trois transitions, cela provient du fait que la fonction d'onde du η pour le χ QM est très différente de celle obtenue avec le AL1 comme on peut le voir sur la figure (3.7). De même, pour la transition $f_2(1270) \rightarrow \eta\eta$, on obtient $\Gamma^{\frac{1}{2}} = 1.41 \text{ MeV}^{\frac{1}{2}}$ pour χ QM à comparer à $0.45 \text{ MeV}^{\frac{1}{2}}$ pour le potentiel AL1, on constate donc que pour certaines transitions, les potentiels se différencient nettement (hélas sans pouvoir en tirer de conclusion ici puisque la valeur expérimentale est de $0.91 \pm 0.10 \text{ MeV}^{\frac{1}{2}}$).

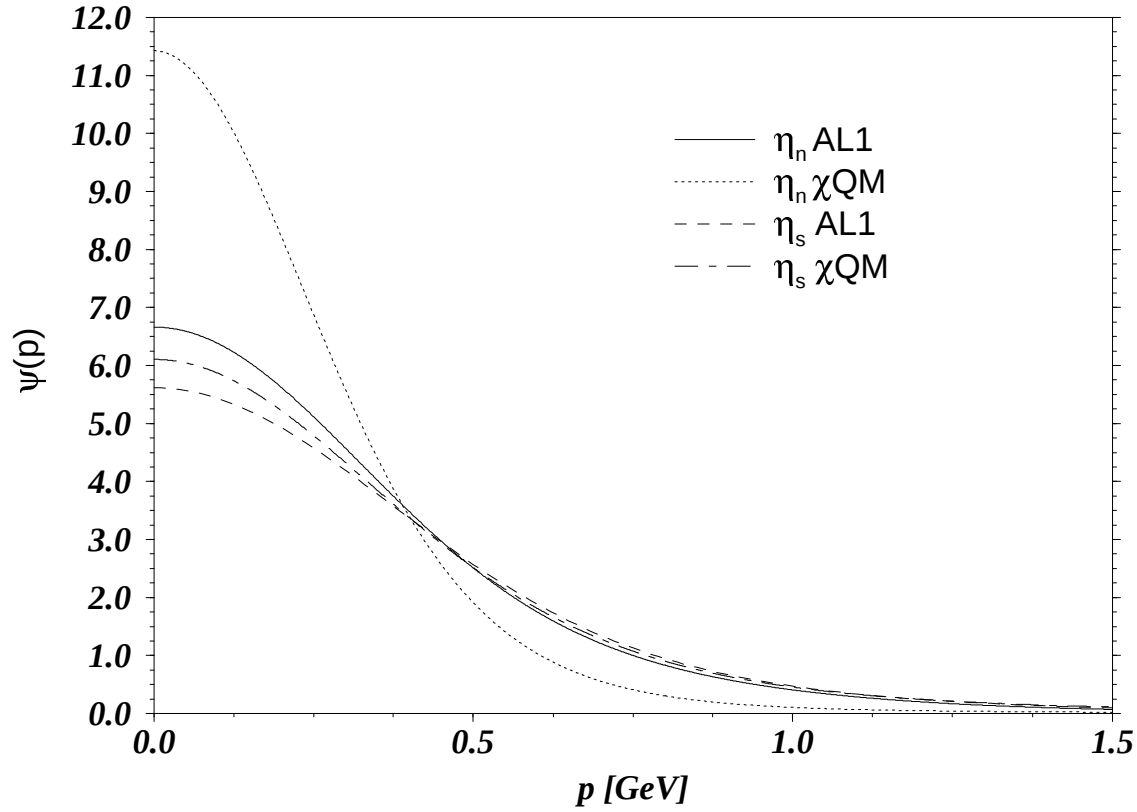


FIG. 3.7 – Comparaison des fonctions d’onde, en représentation impulsion, du méson η pour les potentiels AL1 et χ QM (η_n désigne la composante de saveur $n\bar{n}$ et η_s la partie en $s\bar{s}$).

Nous rappelons que χ QM, tout comme les potentiels AL1 et AP1, ne contient pas de force spin-orbite ni tenseur ; L et S sont donc des bons nombres quantiques. Par contre, χ QM contient une dépendance en l’isospin ce qui fait que la partie $n\bar{n}$ du eta n’est pas dégénérée avec la fonction d’onde du pion. On constate sur ces premiers résultats que le potentiel χ QM confirme la supériorité de la fonction de vertex gaussien sur le cas d’une fonction constante.

3.6.2 Largeurs pour le Groupe I

Les racines carrées des largeurs de désintégration pour le groupe I sont présentées dans la table (3.13). Avant de les commenter quelques précisions sont nécessaires.

Il est souvent supposé que les résonances $K_1(1270)$ et $K_1(1400)$ sont des mélanges des états 1P_1 et 3P_1 . Etant donné que les potentiels utilisés ici ne contiennent pas de force spin-orbite, cet angle de mélange doit être ajouté à la main :

$$\begin{aligned}\Psi(K_1(1270)_\pm) &= \cos \theta. \Psi(^1P_1) \pm \sin \theta. \Psi(^3P_1) \\ \Psi(K_1(1400)_\mp) &= \mp \sin \theta. \Psi(^1P_1) + \cos \theta. \Psi(^3P_1)\end{aligned}$$

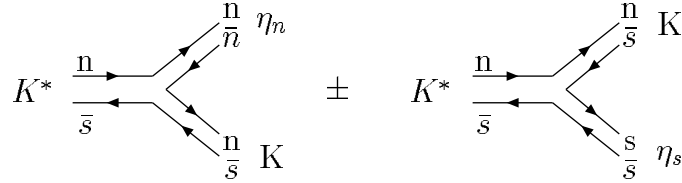
TAB. 3.13 – Racines carrées des largeurs partielles de désintégration pour le groupe I (autre que celles utilisées dans l'échantillon), c.-à-d. pour des mésons stables dans la voie finale, pour un espace de phase relativiste et deux types de fonction de vertex : le cas constant et le cas gaussien. Pour les résultats de la colonne intitulée “flux tube” se référer à [12].

transition	$\Gamma_{\frac{1}{2}} \text{ [MeV}_{\frac{1}{2}}]$					Flux tube	Exp.
	$\gamma_3 = A_1 + A_2 e^{-B_2 p^2}$			$\gamma_1 = A$			
	AL1	AP1	χ QM	AL1	χ QM		
$a_2(1320) \rightarrow \eta\pi$	4.25	4.24	6.65	5.64	7.40	4.1	3.94 ± 0.19
$a_2(1320) \rightarrow \eta'\pi$	1.23	1.22	1.01	1.60	1.75	0.8	0.75 ± 0.07
$\rho_3(1690) \rightarrow \pi\pi$	8.41	9.71	7.08	9.75	7.55	4.6	6.14 ± 0.26
$\rho_3(1690) \rightarrow K\bar{K}$	1.71	1.26	0.71	2.84	3.14	2.3	1.59 ± 0.14
$\rho_3(1690) \rightarrow \omega\pi$	7.08	7.97	7.62	10.15	9.86	3.9	5.06 ± 0.96
$f_4(2050) \rightarrow \pi\pi$	8.92	11.03	6.84	9.82	6.43	3.4	5.95 ± 0.32
$f_4(2050) \rightarrow K\bar{K}$	0.72	1.30	3.78	2.26	2.58	1.5	$1.19^{+0.30}_{-0.16}$
$f_4(2050) \rightarrow \eta\eta$	0.87	1.07	5.57	1.89	5.16	0.7	0.66 ± 0.13
$f_4(2050) \rightarrow \omega\omega$	7.90	7.63	8.22	8.67	8.88	-	7.35 ± 0.88
$K_1(1270)_+ \rightarrow \omega K$	3.65	3.07	4.19	4.16	4.70	4.0	3.15 ± 0.45
$K_1(1270)_- \rightarrow \omega K$	0.04	0.05	0.09	0.03	0.10	4.0	3.15 ± 0.45
$K_1(1400)_+ \rightarrow \omega K$	8.53	7.37	9.78	8.00	8.97	1.9	1.32 ± 0.66
$K_1(1400)_- \rightarrow \omega K$	3.35	2.89	3.88	3.57	4.09	1.9	1.32 ± 0.66
$K^*(1410) \rightarrow \pi K$	0.41	1.28	1.07	1.06	0.01	-	3.91 ± 0.42
$(K_2^*(1430) \rightarrow \eta K)_+$	1.36	1.30	2.93	0.33	1.24	0.7	$0.38^{+0.44}_{-0.13}$
$(K_2^*(1430) \rightarrow \eta K)_-$	2.34	2.28	3.68	5.15	6.22	0.7	$0.38^{+0.44}_{-0.13}$
$K^*(1680) \rightarrow \pi K$	9.01	7.79	6.61	3.50	2.08	7.1	11.16 ± 1.94
$K_3^*(1780) \rightarrow \pi K$	7.24	7.74	8.27	8.24	8.25	4.0	5.47 ± 0.39
$(K_3^*(1780) \rightarrow \eta K)_+$	1.35	1.20	2.86	0.15	2.09	2.9	6.91 ± 1.56
$(K_3^*(1780) \rightarrow \eta K)_-$	2.23	2.49	5.23	5.12	6.69	2.9	6.91 ± 1.56
$K_4^*(2045) \rightarrow \pi K$	5.24	5.86	6.13	6.47	5.99	2.2	4.43 ± 0.29

Un calcul de ces deux résonances avec le potentiel NRAL qui contient une force spin-orbite aboutit à une valeur de $\theta = 23^\circ$, cependant on trouve dans la littérature [15] une valeur de 45° . Nous avons pris comme dans [16] une valeur intermédiaire de 34° qui donne un meilleur accord avec les données expérimentales. Dans la table (3.13), l'indice - ou +, à la suite du nom du méson, indique si l'on a pris des contributions additives ou soustractives. Bien sûr pour conserver l'orthogonalité de ces deux résonances, il faudra prendre des signes contraires pour le $K_1(1270)$ et pour le $K_1(1400)$.

Pour la transition $K_1(1270) \rightarrow \omega K$, pour l'espace de phase et pour que le canal soit permis par la conservation de l'énergie, nous avons pris comme masse la valeur limite supérieure autorisée par les incertitudes expérimentales à savoir 1280 MeV.

Un autre problème, qui n'existait pas dans le cas d'une fonction de vertex constante et indépendante de la saveur, est le signe relatif entre γ_n et γ_s . En effet jusqu'à présent pour les transitions calculées, une seule création de saveur était possible et comme la largeur de désintégration ne dépend que du carré de γ , le choix d'un signe pour la fonction γ n'était pas nécessaire. Cependant dans certaines transitions faisant intervenir les mésons η et un kaon telles que : $K_2^*(1430) \rightarrow \eta K$ et $K_3^*(1780) \rightarrow \eta K$, il y a à la fois création d'une paire $q\bar{q}$ de saveur n et création de saveur s . Ceci est dû au mélange de saveur $n\bar{n}$ et $s\bar{s}$ dans le méson η . On a schématiquement :



Ces deux schémas contribuent mais l'un fait intervenir la fonction de vertex γ_n (associée à la composante $n\bar{n}$ du η) et l'autre la fonction γ_s (associée à la composante $s\bar{s}$). Ici il faut donc bien faire attention dans le calcul du processus à prendre la bonne composante des fonctions d'onde des mésons, lorsque plusieurs saveurs existent, et respecter notre convention pour la bonne valeur des phases. À savoir que le quark du méson A se désintégrant se retrouve dans le méson B , cf (3.3.1). Ainsi dans le cas $K^* \rightarrow \eta K$ on aura $M(K^* \rightarrow \eta K) = M(K^* \rightarrow \eta_n K) \pm M(K^* \rightarrow K \eta_s)$. Le seul réel problème est de savoir si il s'agit de contributions additives ou non. Une fois encore nous faisons confiance aux données expérimentales et choisissons le signe donnant les meilleurs résultats. Pour ne pas risquer de confondre ce problème de signe de la fonction de vertex avec le signe de l'angle de mélange entre $K_1(1270)$ et $K_1(1400)$, on le précise en index général de la transition notée entre parenthèse. La fonction γ_s changeant de signe en fonction de l'impulsion p , valeur pour $p=0$ négative puis devenant positive, on prend comme convention de comparer les signes à l'origine.

Pour les valeurs de Kokoski et Isgur pas d'angle de mélange ni de problème de signe relatif entre γ_n et γ_s étant donné l'utilisation d'un seul paramètre pour toutes les créations de paires indépendamment de la saveur.

Ces précisions étant faites, regardons les résultats qui sont, pour les trois groupes (excepté l'échantillon de transition servant à la détermination du vertex), toutes des prédictions. De façon générale, il faut remarquer que l'ordre de grandeur est correct pour les deux types de vertex. Par contre en comparant les résultats issus du vertex gaussien avec ceux provenant du vertex constant, par ex pour le potentiel AL1, on trouve que le cas gaussien est presque toujours supérieur (c.-à-d. suivant mieux les données expérimentales), seules deux transitions sont mieux reproduites par le vertex constant sur un total de 21.

Pour le vertex gaussien, le potentiel AP1 semble donner légèrement de meilleurs résultats que AL1 et χ QM. AL1 et AP1 diffèrent principalement sur les grandes ou petites valeurs, le potentiel χ QM pouvant donner, quant à lui, des résultats bien différents des deux autres potentiels. C'est le cas par exemple des transitions faisant intervenir le $f_4(2050)$ et le η ,

la transition la plus marquante étant celle réunissant ces deux mésons : $f_4(2050) \rightarrow \eta\eta$. La “similarité” des largeurs des potentiels AL1 et AP1 provient du fait que, pour ces potentiels, seul le confinement diffère donc la portée de leurs fonctions d’onde.

Un cas surprenant est celui de la transition $K^*(1410) \rightarrow \pi K$ pour le potentiel χ QM dont l’ordre de grandeur est correctement reproduit pour le vertex gaussien mais est complètement faux pour le cas d’un vertex constant, nous n’avons pas d’explication pour ce cas.

En ce qui concerne l’angle de mélange dans le $K_1(1270)$ et le $K_1(1400)$, le meilleur accord entre théorie et expérience est obtenu pour une contribution additive des composantes 1P_1 et 3P_1 pour le $K_1(1270)$ et soustractive pour le $K_1(1400)$ comme préconisé dans [15]. Pour ce qui est du signe relatif γ_n, γ_s , en se plaçant du point de vue du vertex gaussien, la situation n’est hélas pas claire puisqu’une transition $K_2^*(1430) \rightarrow \eta K$ indique un signe + mais l’autre transition $K_3^*(1780) \rightarrow \eta K$ favorise le signe - !

Les résultats de Kokoski et Isgur sont relativement bons compte tenu du fait que le paramètre de création de paire n’a été déterminé que sur une seule transition $\rho \rightarrow \pi\pi$. Cependant leur espace de phase modifié contribue fortement à cette qualité, nous avons vérifié en utilisant notre formalisme et leur espace de phase que nos transitions étaient également améliorées. Nous n’employons cependant pas cet espace de phase qui nous semble mal justifié.

3.6.3 Largeurs pour le Groupe II

Dans la table (3.14) sont présentées les racines carrées des largeurs de désintégration pour le groupe II. Cette table montre les résultats obtenus pour les différentes prescriptions (3.5) proposées pour traiter le cas de méson large dans l’état final avec le potentiel AL1. Ici on ne cherche pas à qualifier le potentiel mais plus à comparer les différents formalismes.

Pour les colonnes 2 et 3 ; il y a double application du 3P_0 selon les formalismes développés en (3.5.1)-(3.5.2) ; ici il faut supposer que la seconde désintégration se réalise à 100% dans un seul canal. Les transitions secondaires rencontrées sont ([6]) : $\rho \rightarrow \pi\pi$ (branching ratio br $\approx 100\%$) ; $K^*(892) \rightarrow \pi K$ (branching ratio br $\approx 100\%$) ; $f_2(1270) \rightarrow \pi\pi$ (branching ratio br $\approx 85\%$) ; $K_0^*(1430) \rightarrow \pi K$ (branching ratio br $\approx 93\%$). Pour ces transitions, l’hypothèse d’un rapport de branchement de 100% dans un seul canal est donc valide.

Pour la colonne 4 “larg.tot” signifie que la transition secondaire $B \rightarrow B_1 B_2$ n’a pas été calculée suivant le 3P_0 mais que la largeur totale expérimentale de B a été utilisée à la place. Cette façon de faire nous permettra de savoir au cas où les résultats ne sont pas de bonne qualité, si cela provient des incertitudes de la double application du 3P_0 qui s’ajoutent ou si il s’agit clairement d’un formalisme non adapté.

Enfin l’avant-dernière colonne présente des largeurs obtenues en considérant les mésons larges de la voie finale comme stables, on ne s’occupe donc que de la transition $A \rightarrow BC$ sans tenir compte de la largeur de B . Le fait de considérer comme stables des mésons finaux peut suivant les transitions poser des problèmes de fermeture de canal, c’est le cas notamment de : $K_1^*(1270) \rightarrow \pi K_0^*(1430)$ car ici on ne peut satisfaire l’équation $m_A = E_B + E_C$ (même pour des mésons finaux créés avec une impulsion nulle, il n’y a pas assez d’énergie de masse m_A) ; ce cas n’est pas nul si l’on considère la double désintégration car dans ce

TAB. 3.14 – Racines carrées des largeurs partielles de désintégration pour le groupe II : méson large ($\Gamma \geq 50$ MeV) dans la voie finale, pour un espace de phase relativiste, le potentiel AL1 et une fonction de vertex gaussienne. “2 fois 3P_0 ” pour les colonnes 2 et 3 signifie une double application du modèle 3P_0 sans tenir compte de l’impulsion du méson se désintégrant dans l’état final (colonne 2) et en tenant compte (colonne 3). larg. tot signifie que la largeur totale expérimentale a été utilisée et stable indique que la transition a été calculée sans tenir compte de la désintégration successive de B .

transition	2 fois 3P_0		larg. tot	stable	exp
	-	$\tilde{k}$			
$a_2(1320) \rightarrow \rho\pi$	8.46	9.57	8.98	7.78	8.66 ± 0.26
$\pi_2(1670) \rightarrow \rho\pi$	5.78	11.9	13.37	13.89	8.94 ± 0.66
$\pi_2(1670) \rightarrow K\bar{K}^*$	6.21	7.74	7.61	7.65	2.33 ± 0.56
$\pi_2(1670) \rightarrow f_2(1270)\pi$	14.67	12.6	11.49	11.51	12.04 ± 0.54
$K_1(1270)_+ \rightarrow \rho K$	8.79	8.48	8.05	7.59	6.15 ± 0.81
$K_1(1270)_- \rightarrow \rho K$	2.14	2.07	1.90	0.11	6.15 ± 0.81
$K_1(1270)_+ \rightarrow \pi K^*(892)$	3.04	2.65	2.52	2.28	3.80 ± 0.73
$K_1(1270)_- \rightarrow \pi K^*(892)$	13.14	12.61	12.50	13.14	3.80 ± 0.73
$K_1(1270)_+ \rightarrow \pi K_0^*(1430)$	0.27	0.37	0.36	0.00	5.02 ± 0.66
$K_1(1270)_- \rightarrow \pi K_0^*(1430)$	0.37	0.39	0.39	0.00	5.02 ± 0.66
$K_1(1400)_+ \rightarrow \pi K^*(892)$	6.87	7.24	7.17	7.26	12.79 ± 0.63
$K_1(1400)_- \rightarrow \pi K^*(892)$	12.64	14.24	14.47	15.18	12.79 ± 0.63
$K_1(1400)_+ \rightarrow \rho K$	15.02	12.81	12.46	14.90	2.28 ± 1.15
$K_1(1400)_- \rightarrow \rho K$	7.28	6.40	6.01	5.96	2.28 ± 1.15
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$	4.59	4.90	4.74	4.66	4.98 ± 0.16
$K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$	4.50	4.22	3.81	2.61	2.95 ± 0.14
$K^*(1680) \rightarrow \rho K$	2.56	4.18	4.71	5.40	$10.06^{+1.88}_{-1.76}$
$K^*(1680) \rightarrow \pi K^*(892)$	2.96	4.94	5.38	5.65	$9.81^{+1.71}_{-1.85}$
$K_3^*(1780) \rightarrow \rho K$	2.36	5.23	5.49	5.19	7.02 ± 1.12
$K_3^*(1780) \rightarrow \pi K^*(892)$	2.66	5.53	5.80	5.88	5.64 ± 0.80

cas nous avons vu que la conservation de l’énergie n’est plus à prendre en compte par rapport à la masse nominale du méson large de l’état final. Du fait de la largeur Γ_B , il existe une solution à la relation $m_A > E_B + E_C$. Pour limiter ces cas de fermeture de canal, on prend toujours la limite supérieure (autorisée expérimentalement c.-à-d. masse nominale plus incertitude supérieure) sur la masse du méson A pour le calcul de l’impulsion pour les transitions presque interdites comme le $K_1^*(1270) \rightarrow \rho K$.

Les résultats obtenus à l’aide des distributions de probabilité (3.5.3) seront traités plus loin, cf section (3.7.7).

Que nous apprennent ces résultats ? Tout d’abord, si on regarde transition par transition quel formalisme s’approche le plus de la largeur expérimentale : aucun se révèle supérieur aux autres. L’ordre de grandeur est en principe reproduit excepté pour la transition $K_1(1270) \rightarrow \pi K_0^*(1430)$ mais cela est sans doute lié à l’angle de mélange. On note, concer-

nant l'angle de mélange entre $K_1(1270) - K_1(1400)$, comme pour la table (3.13), qu'il faut choisir des contributions additives pour le $K_1(1270)$ et soustractives pour le $K_1(1400)$ pour reproduire les données expérimentales, c'est le choix que nous ferons pour la suite de nos calculs.

Maintenant, si dans un premier temps nous comparons les résultats d'une double application du 3P_0 (colonnes 2 et 3), on constate que le fait de tenir compte de l'impulsion $\vec{k}$ du méson B améliore de suite la situation, en effet sur les quinze transitions, 11 sont mieux reproduites par utilisation des formules de la section (3.5.2). On remarque que le fait de tenir compte en partie de l'impulsion du méson B change radicalement les résultats sur certaines transitions ($\pi_2(1670) \rightarrow \rho\pi$, $K_3^*(1780) \rightarrow \rho\pi$).

Lorsque l'on compare de la même façon la colonne 3 et la colonne 4, on obtient 5 transitions mieux décrites par l'expression avec $\vec{k}$, 8 mieux décrites en prenant la largeur totale pour la seconde désintégration et 2 qui sont de qualité égale dans ces deux formalismes. A partir d'un si petit écart il est difficile d'avancer de manière définitive la supériorité du formalisme incluant la largeur totale. Néanmoins ceci semble indiquer que la prescription de Capstick et Roberts est correcte mais que le problème provient du calcul de la seconde désintégration, certainement du fait que le mouvement du méson B se désintégrant est mal pris en compte.

Enfin la comparaison colonne 4 et colonne 5 donne 9 transitions mieux décrites pour une largeur de la désintégration secondaire prise égale à la valeur expérimentale et 6 pour une description des mésons B et C considérés comme stables. Compte tenu du fait que pour le cas des mésons considérés à tort comme stables, certains canaux sont interdits du fait de la conservation de l'énergie, il faut préférer l'utilisation de la largeur totale pour la seconde désintégration lorsque l'on possède des données expérimentales. Si ce n'est pas le cas, on utilisera le formalisme dépendant de l'impulsion de B (3.5.2) (si l'approximation d'un seul canal de désintégration pour la réaction $B \rightarrow B_1 B_2$ est valide).

3.6.4 Largeurs pour le Groupe II pour différents potentiels

Maintenant sont présentés les résultats pour les potentiels χ QM, AP1 et AL1 (pour comparaison). Le formalisme retenu utilise la largeur totale expérimentale pour la désintégration secondaire. Au vu de la table (3.15), si l'on regarde transition par transition, les meilleurs résultats sont obtenus dans le cas d'une fonction de vertex gaussien et pour le potentiel AL1, donc présentés dans la colonne 2. Les autres colonnes sont difficilement partageables. Cependant du point de vue des χ^2 absolus la situation est bien moins nette puisque ceux du potentiel AL1 pour le cas constant et gaussien sont quasi-identiques. Néanmoins on ne peut pas dire que AL1 est nettement meilleur que les potentiels AP1 et χ QM; avec un plus grand nombre de transitions, la situation pourrait fort bien être différente. De façon générale les déviations entre la théorie et l'expérience sont plus marquées que dans le cas des mésons stables (Gr I), ceci n'incrimine donc pas la qualité des fonctions d'onde mais plus le formalisme de double désintégration, certainement lié au problème de la non-invariance de Galilée du 3P_0 .

TAB. 3.15 – Racines carrées des largeurs de désintégration pour le Gr II, espace de phase relativiste. La largeur expérimentale totale du méson large dans la voie finale est utilisée. Pour les résultats de la colonne intitulée “flux tube” se référer à [12].

transition	$\gamma_3 = A_1 + A_2 e^{-B_2 p^2}$			$\gamma_1 = A$		Flux tube	Exp.
	AL1	AP1	χ QM	AL1	χ QM		
$a_2(1320) \rightarrow \rho\pi$	8.98	9.08	9.84	11.51	11.76	7.9	8.66 ± 0.26
$\pi_2(1670) \rightarrow \rho\pi$	13.37	13.70	13.47	14.33	14.07	9.5	8.94 ± 0.66
$\pi_2(1670) \rightarrow K\bar{K}^*(892)$	7.61	7.08	7.42	3.73	3.02	4.2	2.33 ± 0.56
$\pi_2(1670) \rightarrow f_2(1270)\pi$	11.49	10.62	10.94	9.33	9.12	9.2	12.04 ± 0.54
$K_1(1270) \rightarrow \rho K$	8.05	6.91	8.96	7.84	8.80	10.0	6.15 ± 0.81
$K_1(1270) \rightarrow \pi K^*(892)$	2.52	2.36	2.90	3.62	3.96	2.9	3.80 ± 0.73
$K_1(1270) \rightarrow \pi K_0^*(1430)$	0.36	0.34	0.38	0.20	0.19	1.3	5.02 ± 0.66
$K_1(1400) \rightarrow \pi K^*(892)$	14.47	12.82	13.86	10.74	10.10	21.0	12.79 ± 0.63
$K_1(1400) \rightarrow \rho K$	6.01	5.43	6.94	6.54	7.58	4.0	2.28 ± 1.15
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$	4.74	4.56	5.20	6.13	6.28	4.1	4.98 ± 0.16
$K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$	3.81	3.70	5.10	4.91	6.15	3.4	2.95 ± 0.14
$K^*(1680) \rightarrow \rho K$	4.71	4.04	4.54	3.64	3.31	3.9	$10.06^{+1.88}_{-1.76}$
$K^*(1680) \rightarrow \pi K^*(892)$	5.38	4.67	5.08	3.70	3.27	4.5	$9.81^{+1.71}_{-1.85}$
$K_3^*(1780) \rightarrow \rho K$	5.49	5.87	7.57	7.33	9.03	3.4	7.02 ± 1.12
$K_3^*(1780) \rightarrow \pi K^*(892)$	5.80	5.92	5.98	7.83	7.46	3.3	5.64 ± 0.80
$K_4^*(2045) \rightarrow K^*(892)\phi$	9.06	7.60	9.30	2.41	1.98		1.66 ± 0.43

3.6.5 Rapports d’amplitude en ondes partielles

Nous avons vu dans la section (3.4.2) que la largeur de désintégration est relativement sensible au choix de l’espace de phase. Afin de limiter cet effet, nous avons calculé des rapports d’amplitude d’ondes partielles (c.-à-d. des amplitudes avec des valeurs du moment orbital relatif l entre les deux mésons finaux différents) pour plusieurs transitions. Ainsi on se concentre plus sur la physique et on se débarrasse de l’espace de phase mais le choix relativiste-non relativiste transparaît encore dans la valeur de l’impulsion. Il a été argumenté [17] que le rapport d’amplitude constitue une bonne observable, puisqu’il s’agit ici d’amplitudes et non de largeurs, les résultats peuvent être soit de signe positif soit de signe négatif. Cependant il existe peu de valeurs expérimentales auxquelles se rattacher. Dans la table (3.16) sont présentés quelques uns de nos résultats; il existe en effet un grand nombre de transitions présentant à la fois dans l’état final des ondes $l=0, 2$ (noté S et D); ou $l=1, 3$ (noté P et F); $l=2, 4$ (noté D et G) parfois avec des valeurs différentes de J_{BC} .

Lorsque les transitions font intervenir un méson large dans l’état final ce dernier est considéré comme stable sinon le calcul (du fait de l’intégration (cf équation (3.90))) n’est pas possible (on n’a pas accès à l’amplitude seule). Compte tenu du peu de valeurs expérimentales ici, il est difficile de dire quoi que ce soit; néanmoins il existe de profonde différence entre le cas fonction de vertex gaussien et fonction de vertex constant, différence de facteur 2 à 4 et parfois même changement de signe comme c’est le cas de la transition :

TAB. 3.16 – Selection de quelques rapports d’amplitude d’ondes partielles, pour les potentiels AL1 et χ QM et pour les deux types de vertex $\gamma_1 = Cte = A$ et $\gamma_3 = Gauss. = A_1 + A_2 e^{-B_2 p^2}$. Les valeurs expérimentales, quand elles sont connues, sont présentées entre parenthèses. Certaines transitions telle que $\pi_2 \rightarrow f_2 \pi$ comprennent un mélange $l = 0, 2, 4$ et donc apparaissent à la fois dans les rapports D/S et G/D.

onde partielle	transition	AL1		χ QM	
		Gauss.	Cte	Gauss.	Cte
D/S	$b_1 \rightarrow \omega \pi$ (+ 0.29 $\pm$ 0.04)	+ 0.332	+ 0.624	+ 0.363	+ 0.686
	$a_1 \rightarrow \rho \pi$ (− 0.100 $\pm$ 0.028)	− 0.181	− 0.353	− 0.215	− 0.399
	$h_1 \rightarrow \rho \pi$	+ 0.247	+ 0.458	+ 0.295	+ 0.539
	$\pi_2 \rightarrow f_2 \pi$	+ 0.298	+ 0.470	+ 0.369	+ 0.595
	$K_2(1770) \rightarrow \pi K_2^*(1430)$	+ 0.245	+ 0.355	+ 0.273	+ 0.401
	$K_2(1770) \rightarrow f_2 K$	+ 0.007	+ 0.009	+ 0.008	+ 0.010
	$K_2(1820) \rightarrow \pi K_2^*(1430)$	+ 0.120	+ 0.153	+ 0.133	+ 0.174
F/P	$K_2(1820) \rightarrow \omega K$	− 0.683	− 1.618	− 1.013	− 2.510
	$\pi_2 \rightarrow \rho \pi$	+ 0.973	+ 2.610	+ 1.398	+ 3.960
	$\pi_2 \rightarrow K K^*$	− 2.069	+ 0.369	− 2.220	+ 0.465
	$K_2(1770) \rightarrow \pi K^*$	+ 0.952	+ 2.210	+ 1.201	+ 2.849
G/D	$\pi_2 \rightarrow f_2 \pi$	+ 0.074	+ 0.084	+ 0.089	+ 0.107
	$K_2(1770) \rightarrow \pi K_2^*(1430)$	+ 0.067	+ 0.086	+ 0.077	+ 0.100
	$K_2(1770) \rightarrow f_2 K$	+ 0.002	+ 0.002	+ 0.002	+ 0.002
	$K_2(1820) \rightarrow \pi K_2^*(1430)$	− 0.169	− 0.256	− 0.198	− 0.293
	$K_3^*(1780) \rightarrow \pi K_2^*(1430)$	+ 0.063	+ 0.075	+ 0.068	+ 0.082
	$\omega_3(1670) \rightarrow b_1 \pi$	+ 0.081	+ 0.106	+ 0.112	+ 0.141
$\frac{G(J_{bc}=0)}{D(J_{bc}=2)}$	$f_4 \rightarrow \omega \omega$	− 0.231	− 0.554	− 0.876	− 0.351
$\frac{G(J_{bc}=2)}{D(J_{bc}=2)}$	$f_4 \rightarrow \omega \omega$	+ 0.457	+ 1.097	+ 1.736	+ 0.696
$\frac{G(J_{bc}=0)}{D(J_{bc}=2)}$	$K_4^*(2045) \rightarrow K^*(892)\phi$	− 0.139	− 0.044	− 0.174	− 0.050
$\frac{G(J_{bc}=2)}{D(J_{bc}=2)}$	$K_4^*(2045) \rightarrow K^*(892)\phi$	+ 0.276	+ 0.087	+ 0.345	+ 0.100

$\pi_2 \rightarrow KK^*$. On note que les valeurs issues d'une fonction de vertex gaussien sont plus proches des données expérimentales que le vertex constant, ce qui tend à confirmer une fois de plus la supériorité du vertex dépendant de l'impulsion.

Les valeurs obtenues à partir des fonctions d'onde de AL1 et χ QM ont toujours le même signe et sont généralement du même ordre de grandeur, les rapports d'ondes élevées se démarquant plus. Dans certains cas l'onde partielle la plus élevée est nettement dominante par rapport à celle de moment orbital plus bas comme c'est le cas pour $\pi_2 \rightarrow KK^*$.

Enfin comme précisé dans [17], nous vérifions le fait que les rapports des rapports d'onde D/S des transitions $a_1 \rightarrow \rho\pi/b_1 \rightarrow \omega\pi$ est quasi-indépendant du modèle avec une valeur proche (-1/2) de celle obtenue à partir d'un oscillateur harmonique.

3.6.6 Largeurs pour le Groupe III

TAB. 3.17 – Racines carrées des largeurs de désintégration pour le groupe III, espace de phase relativiste, potentiels AL1 et AP1 et fonction de vertex gaussien. La dernière colonne indique la racine carrée de la largeur totale du méson A .

transition	$\Gamma^{\frac{1}{2}} [\text{MeV}^{\frac{1}{2}}]$			$\Gamma_{tot}^{\frac{1}{2}}$
	AP1	AL1	exp.	
$f_0(980) \rightarrow \pi\pi$	25.55	27.16	dominant	<10.00
$f_0(980) \rightarrow K\bar{K}$	1.07	1.61	vu	
$a_0(980) \rightarrow \eta\pi$	12.28	13.43	dominant	<10.00
$a_0(980) \rightarrow K\bar{K}$	0.00	0.00	vu	
$b_1(1235) \rightarrow \omega\pi$	8.80	9.84	dominant	< 12.29
$f_0(1370) \rightarrow \pi\pi$	16.02	15.69	vu	< 22.36
$f_0(1370) \rightarrow \eta\eta$	3.66	3.50	vu	
$f_0(1370) \rightarrow K\bar{K}$	5.84	3.02	vu	
$a_0(1450) \rightarrow \pi\eta$	9.40	9.11	vu	< 16.67
$a_0(1450) \rightarrow \pi\eta'(958)$	7.95	9.72	vu	
$a_0(1450) \rightarrow K\bar{K}$	7.81	4.67	vu	
$\rho(1450) \rightarrow \pi\pi$	8.99	6.63	vu	<19.24
$\rho(1450) \rightarrow K\bar{K}$	1.12	0.35	< 0.70	
$f_0(1500) \rightarrow \eta\eta'(958)$	0.00	0.00	vu	<10.58
$f_0(1500) \rightarrow \eta\eta$	2.70	2.47	vu	
$f_0(1500) \rightarrow \pi\pi$	11.10	10.05	vu	
$f_0(1500) \rightarrow K\bar{K}$	3.92	3.27	vu	
$\phi(1680) \rightarrow K\bar{K}$	1.47	2.34	vu	<12.25
$\rho(1700) \rightarrow \pi\pi$	8.85	10.60	vu	<17.32
$\rho(1700) \rightarrow K\bar{K}$	14.86	16.60	vu	
$\rho(1700) \rightarrow \omega\pi$	5.31	6.38	vu	

Parmi toutes les transitions appartenant au groupe III, nous ne présentons que celles faisant intervenir des mésons stables dans la voie finale car ce sont nos prédictions les plus fiables. De plus pour certaines transitions de grande largeur, la largeur expérimentale n'est

TAB. 3.18 – Identique à la table (3.17).

transition	$\Gamma^{\frac{1}{2}} [\text{MeV}^{\frac{1}{2}}]$			
	AP1	AL1	exp.	$\Gamma_{tot}^{\frac{1}{2}}$
$\phi_3(1850) \rightarrow K\bar{K}$	8.43	8.20	vu	< 10.72
$f_2(2010) \rightarrow \phi\phi$	14.55	17.00	vu	< 14.21
$a_4(2040) \rightarrow K\bar{K}$	0.72	0.11	vu	< 19.67
$a_4(2040) \rightarrow \eta\pi$	3.75	3.00	vu	
$K_2(1770) \rightarrow K\phi$	5.84	6.18	vu	< 13.64
$K_2(1770) \rightarrow \omega K$	4.25	4.52	vu	
$K_2(1820) \rightarrow \omega K$	4.68	5.13	vu	
$D_1(2420)^0 \rightarrow D^+\pi^-$	0.00	0.00	non vu	< 4.35
$D_1(2420)^0 \rightarrow D^*(2010)^+\pi^-$	7.46	8.23	vu	
$D_2^*(2460) \rightarrow D\pi$	5.45	5.51	vu	< 4.80
$D_2^*(2460) \rightarrow D^*(2010)\pi$	3.49	3.69	vu	
$D_{s1}(2536)^+ \rightarrow D^+K^0$	0.00	0.00	non vu	< 1.52
$D_{s1}(2536)^+ \rightarrow D^*(2010)^+K^0$	6.73	7.32	vu	
$D_{s1}(2536)^+ \rightarrow D^*(2007)^0K^+$	6.87	7.48	vu	
$D_{sJ}(2536)^+ \rightarrow D^0K^+$	3.33	3.34	vu	< 3.87
$D_{sJ}(2536)^+ \rightarrow D^*(2007)^0K^+$	1.04	1.10	non vu	
$\psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$	5.95	6.27	dominant	< 4.86
$\psi(4040) \rightarrow D^0\bar{D}^0$	2.24	1.84	vu	< 7.21
$\psi(4040) \rightarrow D^0\bar{D}^*(2007)^0$	2.62	3.51	vu	

pas toujours bien mesurée comme c'est le cas pour le $f_0(1370)$, avec Γ comprise entre 200 et 500 MeV (ce méson intervient par exemple dans la transition vue expérimentalement $\pi(1800) \rightarrow f_0(1370)\pi$) ou pour le $a_0(980)$ avec une largeur allant de 50 à 100 MeV suivant les mesures. Les résultats sont rapportés dans les tables (3.17) et (3.18). Puisque l'on ne dispose pas de données expérimentales, on a indiqué en dernière colonne la racine carrée de la largeur totale (donc comprenant tous les processus de décroissance aussi bien forte qu'électro-faible) du méson se désintégrant, notre prédiction devant toujours être inférieure ou égale à cette valeur.

3.7 Fonctions d'onde sophistiquées

Dans cette partie nous allons tester sur des fonctions d'onde les plus raffinées possibles la stabilité de nos précédentes conclusions à savoir que le modèle 3P_0 pour un vertex dépendant de l'impulsion permet de reproduire correctement les largeurs de désintégration d'un méson en deux mésons. Pour cela nous utilisons deux potentiels DNR [3] et NRAL [4] qui prennent compte, tous deux, des effets de l'instanton, de l'habillage des quarks, et en plus pour NRAL des forces spin-orbite et tenseur. Les spectres obtenus à partir de ces deux potentiels sont de très bonne qualité.

3.7.1 Habillage des quarks

Nous avons vu que les quarks utilisés dans nos modèles de potentiels sont dit “constituants” pour les différencier des particules élémentaires de la théorie fondamentale. Ces quarks constituants sont des quasi-particules de taille finie, et non plus ponctuelle, du fait de la présence d’un nuage de gluons et de paires quark-antiquark. Un autre effet de ce nuage est la modification de la masse, moins de 10 MeV pour la masse nue (également appelée masse courante) d’un quark ordinaire à environ 300 MeV pour le quark habillé.

Techniquement dans la construction d’un potentiel prenant en compte cet effet, il faut introduire une densité gluonique de distribution des probabilités de présence du quark “ i ”.

$$\rho_i(\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{\sigma_i^3}{\pi^{3/2}} \exp(-\sigma_i^2(\vec{r} - \vec{r}_i)^2) \quad (3.96)$$

dont le paramètre de taille est lié à la masse par la relation [18] :

$$\sigma_i = \sigma_0 m_i^\delta \quad (3.97)$$

La condition d’une valeur positive pour δ reflète le fait que l’étendue d’un quark massif est moindre de celui d’un quark léger. Une telle forme se réduit à une distribution delta de Dirac à la limite d’une masse infiniment lourde.

Une fois la distribution de probabilité fixée, il faut convoluer les différents opérateurs $O(\vec{r})$ constituant le potentiel “nu” avec celle-ci, pour un opérateur à un corps, on a :

$$\tilde{O}_i(\vec{r}_i) = \int d\vec{r} O_i(\vec{r}) \rho_i(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (3.98)$$

Pour plus de détails se référer à [4].

3.7.2 L’instanton

Les instantons sont des solutions particulières des équations d’un champ non-abélien pour une métrique euclidienne. Ces solutions possèdent une extension spatiale (et dans la composante imaginaire du temps) fortement restreinte. Etant donné que ces solutions ne peuvent être déformées de façon continue en des solutions classiques correspondant à des champs de gluons, cela conduit à une interaction effective entre quarks qui ne peut être obtenue par méthode perturbative [19].

Après une réduction non relativiste, le potentiel instanton se caractérise par les expressions suivantes pour les différentes valeurs de l’isospin du méson :

$$\begin{aligned} V_i(r) &= -8gh(r)\delta_{S,0}\delta_{L,0} && \text{pour } I=1 \\ &= -8g'h(r)\delta_{S,0}\delta_{L,0} && \text{pour } I=1/2 \\ &= 8 \begin{pmatrix} g & \sqrt{2}g' \\ \sqrt{2}g' & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |n\bar{n}, I=0\rangle \\ |s\bar{s}, I=0\rangle \end{matrix} h(r)\delta_{S,0}\delta_{L,0} && \text{pour } I=0 \end{aligned} \quad (3.99)$$

Dans cette expression, g et g' sont des constantes de couplages et $h(r)$ une fonction de courte portée qui dans l’expression originale est une fonction $\delta(r)$ de Dirac. Pour nos

calculs non relativistes cette distribution de Dirac doit être régularisée, ceci est effectuée en prenant pour $h(r)$ une gaussienne.

A cause des contraintes sur le spin S et le moment orbital L du méson, lié au fait que les effets de l'instanton ne sont effectifs que pour les quarks u , d et s seules les résonances : π , K et η sont concernées. C'est surtout pour cette dernière que l'instanton est intéressant puisqu'il couple de façon dynamique le secteur $|n\bar{n}; I = 0\rangle$ et $|s\bar{s}; I = 0\rangle$. L'angle de mélange n'aura plus à être posé à la main comme précédemment ; de plus ici il sera différent de la valeur de 50% comme on peut le constater dans la table (3.19).

TAB. 3.19 – Pourcentage des mélanges des composantes n et s du fait de l'instanton dans les mésons η et η' , pour les potentiels DNR et NRAL.

	$ n\bar{n}; I = 0\rangle$		$ s\bar{s}; I = 0\rangle$	
	DNR	NRAL	DNR	NRAL
η	55.3	49.2	44.7	50.8
η'	49.3	53.8	50.7	46.2

3.7.3 La force spin-orbite

Cette force est d'origine relativiste et correspond au couplage du mouvement orbital angulaire des quarks avec leur spin. Elle contient deux parties : une symétrique $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ et une antisymétrique $\vec{\Delta} = \vec{s}_1 - \vec{s}_2$, on a donc dans le potentiel ;

$$V_{so}(r) = V_{LS}(r) \vec{L} \cdot \vec{S} + V_{L\Delta}(r) \vec{L} \cdot \vec{\Delta} \quad (3.100)$$

La partie symétrique est responsable de la levée de dégénérescence des états 3L_J . Ici L et S sont toujours des bons nombres quantiques mais l'énergie de la résonance dépend maintenant de la valeur de J . Quant à la partie antisymétrique, qui est inopérante pour des mésons composés d'une seule saveur, elle couple les états $^1L_{J=L}$ et $^3L_{J=L}$. Cette fois S n'est plus un bon nombre quantique.

3.7.4 La force tenseur

La forme communément admise est :

$$V_T = \frac{S_{12}}{m_1 m_2} f_T(r) \quad (3.101)$$

avec

$$S_{12} = (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})/r^2 - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)/3 \quad (3.102)$$

Son effet est de coupler les états $^3L_{J=L+1}$ avec les états $^3(L+2)_{J=L+1}$. L n'est donc plus une bonne observable. L'importance de ces mélanges est présentée pour quelques résonances dans la table (3.20).

TAB. 3.20 – Mélange des états du fait des effets de la force spin-orbite antisymétrique et tenseur pour les résonances les plus importantes, dans le cas du potentiel NRAL.

π, K, D	fonction d'onde		fonction d'onde	
	1S_0	$K_0^*(1430)$	3P_0	
ρ, ω	98 % 3S_1 + 2 % 3D_1	$a_2(1320)$	$\sim ^3P_2$	
K^*	99.2 % 3S_1 + 0.8 % 3D_1	$f_2(1270)$		
ϕ	99.4 % 3S_1 + 0.6 % 3D_1	$K_2^*(1430)$		
$D^*(2010)$	99.9 % 3S_1 + 0.1 % 3D_1	$f_2'(1525)$		
$K_1^*(1410)$	93.3 % $2 ^3S_1$ + 6.7 % 3D_1	$\rho_3(1690)$	$\sim ^3D_3$	
$K_1^*(1680)$	6.1 % $2 ^3S_1$ + 93.9 % 3D_1	$K_3(1780)$		
$K_1^*(1270)$	84.8 % 1P_1 + 15.2 % 3P_1	$f_4(2050)$	$\sim ^3F_4$	
$K_1^*(1400)$	15.2 % 1P_1 + 84.8 % 3P_1	$K_4(2045)$		

3.7.5 Modification du 3P_0

Quelles sont les modifications à apporter au formalisme 3P_0 pour tenir compte de ces nouvelles composantes du potentiel d'interaction $q\bar{q}$?

Nous avons pris en compte la taille finie des quarks dans le potentiel en le convoluant avec une densité gluonique (gaussienne), pour être consistant il faut donc faire de même pour la fonction de vertex γ . Notre fonction de γ retenue est de forme constante plus gaussienne dans l'espace des impulsions. La nouvelle expression de $\gamma(p)$ sera donc :

$$\gamma_{hab.}(\vec{r}) = \int d\vec{r}' \gamma_{nue}(\vec{r}') \rho(\vec{r}' - \vec{r}) \xrightarrow{TF} \gamma_{hab.}(\vec{p}) = \gamma_{nue}(\vec{p}) . TF(\rho) \quad (3.103)$$

Nous avons utilisé la propriété suivante : la transformée de Fourier (TF) d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier. De plus, la TF à 3 dimensions d'une gaussienne est une gaussienne, ce qui nous permet d'écrire :

$$\gamma_{nue}(\vec{p}) = A_1 + A_2 e^{-B_2 p^2} \xrightarrow{\text{habillage}} \gamma_{hab.}(\vec{p}) = (A_1 + A_2 e^{-B_2 p^2}) . e^{-p^2/4\sigma^2} \quad (3.104)$$

Ainsi la fonction de vertex habillée s'écrit désormais comme la somme de deux gaussiennes mais, le modèle 3P_0 étant phénoménologique, nous conservons la forme habituelle γ_3 constante plus gaussienne. Nous sommes confortés dans ce choix par le fait que deux gaussiennes comme fonction de vertex donne des résultats identiques à la forme retenue γ_3 ; ceci avait été testé lors de notre recherche de fonction de vertex.

En résumé, l'habillage de la fonction γ est remplacé ici par une nouvelle détermination des paramètres sur l'échantillon habituel des transitions. De même on conserve la forme $\gamma_1 = \text{constante}$ pour comparaison.

Pour ce qui est des modifications dues à l'instanton, elles sont minimales et ont déjà été abordées précédemment avec l'angle de mélange inclus de façon artificielle pour le η . Il s'agit de bien faire correspondre à la fonction γ_n le terme d'espace $\mathcal{E}$ calculé à partir de la fonction d'onde de saveur n et de même pour la partie étrange avec γ_s .

Le potentiel NRAL nécessite le même raisonnement que ci-dessus mais il faut de plus tenir compte du fait que L et S ne sont plus des bons nombres quantiques et varient entre les bornes déterminées par les inégalités triangulaires. Ainsi dans le calcul de l'élément de matrice M (3.69), la sommation sur L, S, L_{BC} est étendue à $L_A, S_A, L_B, S_B, L_C, S_C$. Chaque terme d'espace comprend donc maintenant un grand nombre de termes (plusieurs dizaines pour certains cas, sans compter la décomposition en somme de gaussiennes). Cependant notre choix de fonction d'onde exprimée comme une somme de gaussiennes permet toujours un calcul analytique même lorsque la force tenseur est prise en compte. Pour ces deux potentiels, suivant les résonances étudiées le développement de leurs fonctions d'onde peut contenir jusqu'à six gaussiennes.

3.7.6 Les résultats pour les états stables

Les résultats pour les transitions du groupe I sont consignés dans la table (3.21) pour les fonctions de vertex constante et gaussienne. Comme toujours un espace de phase relativiste est employé.

Les 12 premières transitions de la table sont celles employées pour déterminer les paramètres de la fonction de vertex, 9 pour la détermination de γ_n et 3 pour γ_s .

Concernant les colonnes 4 et 7, s.t.f signifie que ces résultats ont été obtenus à partir des fonctions d'onde du potentiel NRAL mais en otant, sans renormaliser, la contribution minoritaire dans le mélange des états de nombres quantiques différents. Par exemple pour le ρ on ne retient que la composante 3S_1 qui constitue 98 % de l'état réel (d'après la théorie). Ceci afin de juger, grossièrement puisque la fonction d'onde n'est plus normalisée à l'unité, l'importance des mélanges et donc de la force tenseur.

D'un point de vue global, le cas d'un vertex gaussien donne des résultats bien meilleurs que le cas γ constante et cela est vérifié pour les deux potentiels, ce qui confirme la tendance déjà remarquée pour les autres potentiels. NRAL n'est que légèrement mieux adapté puisque l'on obtient un χ^2 de 157 contre 174 pour DNR. De plus, ces résultats ne sont que légèrement meilleurs à ceux obtenus à partir des potentiels AL1, AP1. Ceci montre que pour les calculs de largeur de transition, clairement l'élément essentiel est une bonne description du processus de désintégration.

Du point de vue de l'importance des effets de la force tenseur, on constate des petites modifications des résultats lorsque l'on ne garde que la composante dominante dans la fonction d'onde (en cas d'existence de mélange) pour la plupart des cas. Cependant pour certaines transitions, celles faisant intervenir le ω , le $K^*(1410)$ ou le $K^*(1680)$, les effets deviennent importants. Par exemple, dans la transition $f_4(2050) \rightarrow \omega\omega$, on obtient une variation de 70 % après avoir supprimé la contribution de 2 % dans la fonction d'onde de la composante 3D_1 du ω . Les variations les plus importantes correspondent aux transitions faisant intervenir des pourcentages de mélange les plus élevés (3.20).

3.7.7 Les résultats pour les états larges

Les tables (3.22) et (3.23) contiennent les résultats obtenus dans le cas de mésons instables dans la voie finale. Sont présentés 3 formalismes : la double désintégration successive donc formule (3.90) basée sur la prescription de Capstick et Roberts, une formule de largeur

TAB. 3.21 – Racines carrées des largeurs de désintégration pour des mésons stables dans la voie finale. Deux types de fonction de vertex γ sont testées, le cas constant et le cas gaussien, cela pour un espace de phase relativiste et des fonctions d'onde provenant des potentiels sophistiqués DNR et NRAL. s.f.t, signifie la f.o. issue de NRAL mais sans tenir compte du mélange des états dû à la force tenseur (voir le texte).

transition	$\gamma_1 = A$			$\gamma_3 = A_1 + A_2 e^{-B_2 p^2}$			exp.
	DNR	NRAL	s.f.t.	DNR	NRAL	s.f.t	
$\rho \rightarrow \pi\pi$	8.57	8.61	8.91	10.19	9.72	10.01	12.28 ± 0.37
$\phi \rightarrow K\bar{K}$	1.62	1.82	1.86	1.93	2.02	2.07	1.92 ± 0.06
$K^*(892) \rightarrow \pi K$	4.91	5.21	5.35	5.80	5.82	5.96	7.08 ± 0.21
$f_2(1270) \rightarrow \pi\pi$	13.10	12.64	12.69	12.36	12.01	12.05	$12.53^{+0.23}_{-0.13}$
$f_2(1270) \rightarrow \eta\eta$	1.36	1.22	1.22	0.79	1.01	1.01	0.91 ± 0.10
$K_0^*(1430) \rightarrow \pi K$	7.01	13.23	13.23	19.75	21.35	21.35	16.34 ± 1.10
$f_2'(1525) \rightarrow K\bar{K}$	8.49	9.26	9.26	8.55	9.10	9.10	8.06 ± 0.56
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K$	8.78	9.03	9.03	8.69	8.81	8.81	7.01 ± 0.21
$K_2^*(1430) \rightarrow \omega K$	1.83	1.92	1.91	1.20	1.65	1.65	1.70 ± 0.23
$a_2(1320) \rightarrow K\bar{K}$	3.06	3.02	3.03	2.29	2.29	2.31	2.29 ± 0.19
$f_2(1270) \rightarrow K\bar{K}$	2.50	2.47	2.47	2.93	2.92	2.94	2.92 ± 0.13
$f_2'(1525) \rightarrow \eta\eta$	2.67	3.15	3.15	2.76	2.80	2.80	2.80 ± 0.46
$a_2(1320) \rightarrow \eta\pi$	6.67	3.11	3.11	5.45	2.83	2.84	3.94 ± 0.19
$a_2(1320) \rightarrow \eta'\pi$	1.71	0.90	0.90	1.02	0.75	1.51	0.75 ± 0.07
$\rho_3(1690) \rightarrow \pi\pi$	10.11	9.02	9.02	8.64	7.86	7.86	6.14 ± 0.26
$\rho_3(1690) \rightarrow K\bar{K}$	2.86	2.78	2.78	2.61	2.85	2.85	1.59 ± 0.14
$\rho_3(1690) \rightarrow \omega\pi$	9.06	4.31	4.28	5.86	3.58	3.53	5.06 ± 0.96
$f_4(2050) \rightarrow \omega\omega$	7.98	5.60	9.10	7.24	4.86	8.49	7.35 ± 0.88
$f_4(2050) \rightarrow \pi\pi$	10.33	8.64	8.64	8.90	7.29	7.29	5.95 ± 0.32
$f_4(2050) \rightarrow K\bar{K}$	2.26	2.17	2.17	0.26	0.50	0.50	$1.19^{+0.30}_{-0.16}$
$f_4(2050) \rightarrow \eta\eta$	3.22	2.62	2.62	2.20	2.15	2.15	0.66 ± 0.13
$K_1(1270) \rightarrow \omega K$	4.20	4.70	2.85	3.98	4.80	2.89	3.15 ± 0.45
$K_1(1400) \rightarrow \omega K$	3.52	5.40	8.15	3.60	5.62	8.75	1.32 ± 0.66
$K^*(1410) \rightarrow \pi K$	2.72	5.50	3.42	1.93	4.83	2.54	3.91 ± 0.42
$K_2^*(1430) \rightarrow \eta_- K$	5.14	5.28	5.28	1.51	1.85	1.85	$0.38^{+0.44}_{-0.13}$
$K^*(1680) \rightarrow \pi K$	4.33	7.44	6.61	10.19	10.38	9.13	11.16 ± 1.94
$K_3^*(1780) \rightarrow \pi K$	8.12	7.73	7.73	6.96	6.85	6.85	5.47 ± 0.39
$K_3^*(1780) \rightarrow \eta_- K$	5.24	5.09	5.09	2.39	2.90	2.90	6.91 ± 1.56
$K_4^*(2045) \rightarrow \pi K$	6.39	5.68	5.68	4.80	4.66	4.66	4.43 ± 0.29

TAB. 3.22 – Racines carrées des largeurs de désintégration pour des mésons instables dans la voie finale, obtenue suivant la prescription de Capstick et Roberts [14], ou avec des distributions de probabilité de la masse du méson secondaire se désintégrant. Fonction de vertex constante et espace de phase relativiste.

	Gauss.		$\gamma_1 = A$ Lorentz.		Capstick		exp.
	DNR	NRAL	DNR	NRAL	DNR	NRAL	
$a_2(1320) \rightarrow \rho\pi$	11.04	5.58	11.07	5.61	10.57	5.34	8.66 ± 0.26
$\pi_2(1670) \rightarrow \rho\pi$	14.51	7.71	14.13	7.48	13.52	7.17	8.94 ± 0.66
$\pi_2(1670) \rightarrow K\bar{K}^*$	4.06	4.53	4.04	4.50	3.91	4.37	2.33 ± 0.56
$\pi_2(1670) \rightarrow f_2(1270)\pi$	9.32	5.77	9.60	5.87	9.42	5.77	12.04 ± 0.54
$K_1(1270) \rightarrow \rho K$	9.03	10.68	8.53	10.13	8.49	10.04	6.15 ± 0.81
$K_1(1270) \rightarrow \pi K^*(892)$	3.44	5.31	3.92	5.57	3.49	5.22	3.80 ± 0.73
$K_1(1270) \rightarrow \pi K_0^*(1430)$	0.10	0.08	0.63	0.52	0.15	0.10	5.02 ± 0.66
$K_1(1400) \rightarrow \pi K^*(892)$	11.13	15.89	10.87	15.39	10.72	15.26	12.79 ± 0.63
$K_1(1400) \rightarrow \rho K$	10.74	8.80	10.53	8.76	10.34	8.50	2.28 ± 1.15
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$	5.73	6.00	5.94	6.25	5.62	5.90	4.98 ± 0.16
$K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$	4.45	4.72	4.60	4.89	4.33	4.60	2.95 ± 0.14
$K^*(1680) \rightarrow \rho K$	4.49	6.57	4.22	6.18	4.10	6.00	$10.06^{+1.88}_{-1.76}$
$K^*(1680) \rightarrow \pi K^*(892)$	4.46	6.31	4.35	6.14	4.30	6.08	$9.81^{+1.71}_{-1.85}$
$K_2^*(1780) \rightarrow \rho K$	6.74	6.78	6.63	6.69	6.32	6.37	7.02 ± 1.12
$K_2^*(1780) \rightarrow \pi K^*(892)$	7.37	7.35	7.38	7.39	7.11	7.10	5.64 ± 0.80

basée sur une distribution de masse (formule (3.93)) soit gaussienne soit lorentzienne. Pour ces deux derniers cas la masse varie de 0 à l'infini mais en pratique est limitée par la largeur Γ_B expérimentale fixant la dispersion de la fonction de distribution. Pour la double application du 3P_0 , on a fait le choix de prendre pour Γ_B de la formule (3.90), la valeur expérimentale pour une meilleure qualité de résultats comme discuté dans la section (3.6.3).

Commentons les résultats. Tout d'abord, on constate qu'une fois le choix de la fonction de vertex effectué, le formalisme employé pour le calcul de la largeur de désintégration n'intervient que peu dans les résultats, les trois prescriptions aboutissant toutes à des valeurs relativement proches. Ensuite, l'accord théorie-expérience est loin d'être parfait, puisque des facteurs 4 ou 5 de différence ne sont pas rares. Comme précédemment, on retrouve le fait que *pour des mésons larges dans la voie finale*, vertex gaussien ou constant, les résultats sont de la même qualité. Enfin sur ces deux dernières tables, le potentiel DNR semble un peu meilleur, sans que nous ayons toutefois d'explication à cela.

TAB. 3.23 – Identique à la table (3.22) mais pour une fonction de vertex $\gamma_3 = A_1 + A_2 e^{-B_2 p^2}$.

	$\gamma_3 = A_1 + A_2 e^{-B_2 p^2}$						exp.
	Gauss.		Lorentz.		Capstick		
	DNR	NRAL	DNR	NRAL	DNR	NRAL	
$a_2(1320) \rightarrow \rho\pi$	8.47	5.05	8.88	5.16	8.28	4.87	8.66 ± 0.26
$\pi_2(1670) \rightarrow \rho\pi$	14.12	7.42	13.83	7.21	13.18	6.90	8.94 ± 0.66
$\pi_2(1670) \rightarrow K\bar{K}^*$	8.29	9.39	8.51	9.57	8.17	9.23	2.33 ± 0.56
$\pi_2(1670) \rightarrow f_2(1270)\pi$	11.92	6.49	12.55	6.64	12.19	6.51	12.04 ± 0.54
$K_1(1270) \rightarrow \rho K$	10.01	11.58	9.49	11.01	9.37	10.87	6.15 ± 0.81
$K_1(1270) \rightarrow \pi K^*(892)$	2.40	5.55	3.02	5.78	2.48	5.44	3.80 ± 0.73
$K_1(1270) \rightarrow \pi K_0^*(1430)$	0.43	0.30	0.50	0.36	0.46	0.32	5.02 ± 0.66
$K_1(1400) \rightarrow \pi K^*(892)$	14.74	18.58	14.39	18.03	14.17	17.85	12.79 ± 0.63
$K_1(1400) \rightarrow \rho K$	12.69	9.14	12.39	9.09	12.16	8.82	2.28 ± 1.15
$K_2^*(1430) \rightarrow \pi K^*(892)$	4.45	5.46	4.86	5.78	4.43	5.39	4.98 ± 0.16
$K_2^*(1430) \rightarrow \rho K$	3.42	4.27	3.76	4.53	3.42	4.20	2.95 ± 0.14
$K^*(1680) \rightarrow \rho K$	5.63	6.84	5.38	6.48	5.19	6.27	$10.06^{+1.88}_{-1.76}$
$K^*(1680) \rightarrow \pi K^*(892)$	6.30	6.94	6.14	6.76	6.04	6.67	$9.81^{+1.71}_{-1.85}$
$K_3^*(1780) \rightarrow \rho K$	4.66	5.78	4.76	5.77	4.49	5.48	7.02 ± 1.12
$K_3^*(1780) \rightarrow \pi K^*(892)$	5.14	6.28	5.35	6.39	5.03	6.09	5.64 ± 0.80

3.8 Conclusion

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à la désintégration forte d'un méson en deux mésons au travers du modèle 3P_0 . Nous l'avons, en particulier, modifié en introduisant une fonction de vertex dépendant de l'impulsion relative p de la paire $q\bar{q}$ créée. Sur des fonctions d'onde simples d'abord (une seule gaussienne dérivant d'un potentiel AL1 ne contenant que les éléments essentiels pour simuler la QCD : confinement, terme coulombien d'échange d'un gluon et terme hyperfin) puis plus sophistiquées ensuite (prise en compte des effets de taille finie des quarks, de l'instanton, des forces spin-orbite et tenseur, développement jusqu'à 6 gaussiennes) nous avons montré que notre version modifiée du modèle 3P_0 donnaient des largeurs de désintégration plus en accord avec les données expérimentales, aussi bien du point de vue du χ^2 absolu que par degrés de liberté. Cette dépendance en p a été simulée par une forme $\gamma = \text{constante} + \text{gaussienne}$ pour une question d'analyticité des résultats lorsque les fonctions d'onde sont exprimées par une somme de gaussiennes (pour la partie radiale). D'autres fonctions peuvent être retenues du moment qu'elles reproduisent la forme nécessaire (3.1). Nous avons vérifié que, quel que soit le potentiel utilisé, un espace de phase relativiste est toujours préférable au cas non-relativiste, en grande partie du fait d'une meilleure détermination de l'impulsion relative des mésons dans l'état final.

Le formalisme a également été modifié de plusieurs façons pour tenir compte d'états larges dans la voie finale mais avec peu de succès, la fonction de vertex γ constante donnant ici

des résultats de qualité similaire au cas gaussien.

Différents potentiels ont été testés : AL1, AP1, χ QM, DNR, NRAL, (BNR et BSR dont les résultats n'apportent aucune nouveauté n'ont pas été présentés) cependant il n'est pas possible d'avancer une quelconque supériorité de l'un d'entre eux sur les autres au vu des largeurs de désintégration. Cela est dû à la formule de calcul de la largeur qui fait intervenir une intégrale sur tout l'espace des trois fonctions d'onde des mésons, produisant un effet de moyenne. Pour espérer départager ces potentiels, dont la partie intermédiaire en énergie est assez similaire, il faut tester des zones particulières de la fonction d'onde telles que leur valeur à l'origine. C'est ce que nous nous proposons de faire dans la partie suivante au travers des désexcitations radiatives des mésons.

Chapitre 4

Rayons carrés et facteurs de forme

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux calculs des rayons carrés de charge, de masse donc gluonique et aux facteurs de forme électromagnétique. Nous allons dans un premier temps redériver les relations non relativistes concernant ces observables puis les mettre en pratique pour les potentiels DNR, NRAL et BNR. Gavin et collaborateurs [20] indiquent que, malgré son succès dans la prédiction des spectres d'énergie des baryons et mésons, le modèle des quarks constituants n'est pas apte à reproduire les valeurs expérimentales des facteurs de forme ni les rayons carrés de charge (la valeur obtenue pour le proton est trop faible). D'après eux, ceci découle du fait que l'on ne prend pas en compte le couplage du quark de valence à la mer $q\bar{q}$. Nous allons voir ce qu'il en est avec les potentiels pour lesquels les quarks sont habillés.

4.1 Rayons carrés

Pour un méson (de masse M et de rayon vecteur centre de masse $\vec{R}$), état lié de quarks ponctuels d'indice i de rayon vecteur $\vec{r}_i$ et de masse m_i , l'opérateur rayon carré de masse s'écrit :

$$r_m^2 = \sum_i \frac{m_i}{M} (\vec{r}_i - \vec{R})^2 \quad (4.1)$$

De même, l'opérateur rayon carré de charge s'écrit :

$$r_c^2 = \sum_i e_i (\vec{r}_i - \vec{R})^2 \quad (4.2)$$

Pour tenir compte de la taille finie des quarks, nous introduisons pour ces derniers une densité de distribution qui représente l'étalement spatial du quark, avec toujours comme limite pour une taille nulle une distribution tendant vers une distribution $\rho_i(\vec{r}) \rightarrow \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ de Dirac. Il nous faut ensuite, comme dans la section (3.7.1), convoluer cette distribution avec l'opérateur étudié.

4.1.1 Rayons carrés de masse

Dans ce cas-là, c'est bien sûr la répartition gluonique qui entre en jeu. Distribution gluonique qui intervient déjà dans la mise au point de potentiel avec quark de taille finie. Cela

donne :

$$r_m^2 = \sum_i \frac{m_i}{M} \int d\vec{r} \rho_i(\vec{r} - \vec{r}_i) (\vec{r}_i - \vec{R})^2 \quad (4.3)$$

où $\rho_i(\vec{r})$ est une fonction plus ou moins piquée et centrée sur la position $\vec{r}_i$. Posons :

$$\langle \psi | r_m^2 | \psi \rangle = \sum_i \frac{m_i}{M} g_i \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} g_i &= \langle \psi_{\vec{p}} | \int d\vec{r} \rho_i(\vec{r} - \vec{r}_i) (\vec{r}_i - \vec{R})^2 | \psi_{\vec{p}} \rangle \\ &= \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r} \psi_{\vec{p}}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rho_i(\vec{r} - \vec{r}_i) (\vec{r}_i - \vec{R})^2 \psi_{\vec{p}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour calculer cette intégrale, on pose le changement de variable unitaire suivant $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \rightarrow \vec{R}, \vec{x}$:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \\ \vec{x} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

Attention de ne pas confondre $\vec{r}$ dans (4.5) avec la position relative $\vec{x}$ des quarks au sein du méson. Calculons cette intégrale pour $i = 1$.

$$g_1 = \int d\vec{R} d\vec{x} d\vec{r} \frac{e^{i\vec{p}' \cdot \vec{R}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \psi^*(\vec{x}) \rho_1(\vec{r} - \vec{r}_1) (\vec{r} - \vec{R})^2 \frac{e^{-i\vec{p} \cdot \vec{R}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \psi(\vec{x}) \quad (4.7)$$

On effectue un second changement de variable pour éviter la complication de terme croisé $\vec{r}, \vec{R}, \vec{r}, \vec{R} \rightarrow \vec{Y}, \vec{Z}$:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{Z} + \frac{\vec{Y}}{2} \\ \vec{R} = \vec{Z} - \frac{\vec{Y}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{Y} = \vec{r} - \vec{R} \\ \vec{Z} = \frac{\vec{r} + \vec{R}}{2} \end{cases} \quad (4.8)$$

. Notre intégrale se réécrit donc :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{Z} e^{i(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{Z}} \int d\vec{Y} d\vec{x} Y^2 \rho_1(\vec{Y} - \frac{m_2}{M} \vec{x}) |\psi(\vec{x})|^2 e^{i(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{Y}/2} \quad (4.9)$$

l'intégrale sur $\vec{Z}$ fait apparaître le terme $\delta(\vec{p} - \vec{p}')$ qui impose $\vec{p} = \vec{p}'$ (le rayon carré de masse est donc une quantité statique qui ne fait pas évoluer l'impulsion du méson). Ceci fait disparaître la seconde exponentielle. On a donc

$$g_1 = \int d\vec{x} |\psi(\vec{x})|^2 \int d\vec{Y} Y^2 \rho_1(\vec{Y} - \frac{m_2}{M} \vec{x}) \quad (4.10)$$

qui devient, en posant $\vec{u} = \vec{Y} - \frac{m_2}{M} \vec{x}$:

$$g_1 = \int d\vec{x} |\psi(\vec{x})|^2 \int d\vec{u} (u^2 + 2\frac{m_2}{M} \vec{u} \cdot \vec{x} + \frac{m_2^2}{M^2} x^2) \rho_1(\vec{u}) \quad (4.11)$$

Occupons nous pour l'instant uniquement de la seconde intégrale :

$$\underbrace{\int d\vec{u} u^2 \rho_1(\vec{u})}_{g_{1M}} + 2 \frac{m_2}{M} \vec{x} \underbrace{\int d\vec{u} \vec{u} \rho_1(\vec{u})}_{=0} + \frac{m_2^2}{M^2} x^2 \underbrace{\int d\vec{u} \rho_1(\vec{u})}_{=1} \quad (4.12)$$

Pour le deuxième terme nous avons à intégrer le produit d'une fonction impaire $\vec{u}$ par une fonction paire $\rho_1(\vec{u})$, le résultat vaut donc zéro. Quant au dernier terme, il fait tout simplement appel à la normalisation de la densité de probabilité. Ainsi, il nous reste :

$$g_1 = \int d\vec{x} |\psi(\vec{x})|^2 (g_{1M} + \frac{m_2^2}{M^2} x^2) = g_{1M} \underbrace{\int d\vec{x} |\psi(\vec{x})|^2}_1 + \frac{m_2^2}{M^2} \int d\vec{x} x^2 |\psi(\vec{x})|^2 \quad (4.13)$$

En se rappelant que :

$$r_m^2 = \frac{m_1}{M} g_1 + \frac{m_2}{M} g_2 \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{M} (m_1 g_{1M} + m_2 g_{2M}) + \underbrace{\frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{M^3}}_{\frac{\mu}{M}} \int d\vec{x} x^2 |\psi(\vec{x})|^2 \quad (4.15)$$

où l'on a introduit la masse réduite μ du système. Le second terme se réécrit :

$$\frac{\mu}{M} \int d\vec{x} x^2 |\psi(\vec{x})|^2 = \frac{\mu}{M} \int dx x^4 \phi(x)^2 = \sum_i \frac{m_i}{M} \langle \psi | (\vec{r}_i - \vec{R})^2 | \psi \rangle \quad (4.16)$$

qui fait apparaître le rayon carré de masse $r_{m \text{ nu}}^2$ pour un méson constitué de *quarks ponctuels*.

Ainsi, de façon générale, le rayon carré de masse $r_{m \text{ hab.}}^2$ pour des *quarks habillés* est :

$$r_{m \text{ hab.}}^2 = r_{m \text{ nu}}^2 + \Delta r_m^2 \quad (4.17)$$

$$r_{m \text{ nu}}^2 = \frac{\mu}{M} \int_0^\infty dx x^4 \phi(x)^2 \quad \text{contribution des quarks nus} \quad (4.18)$$

$$\Delta r_m^2 = \frac{1}{M} (m_1 g_{1M} + m_2 g_{2M}) \quad \text{correction due à l'habillage} \quad (4.19)$$

$$g_{iM} = \int d\vec{u} u^2 \rho_i(\vec{u}) \quad (4.20)$$

Nos fonctions d'onde sont exprimées comme une somme de gaussiennes que multiplie une harmonique solide. Ceci nous permet de prolonger le calcul pour la contribution des quarks nus.

$$\int_0^\infty dx x^4 \phi(x)^2 = \sum_{n,m} b_n b_m \int_0^\infty dx x^4 e^{-\frac{\alpha_n + \alpha_m}{2} x^2} \quad (4.21)$$

$$\Rightarrow r_{m \text{ nu}}^2 = \frac{\mu}{M} \sum_{n,m} b_n b_m \frac{\Gamma(5/2)}{2(\frac{\alpha_n + \alpha_m}{2})^{5/2}} \quad (4.22)$$

Pour calculer l'importance de la contribution due à l'habillage, il faut choisir la fonction de distribution $\rho(\vec{r})$. Nous allons en étudier trois. Pour chacune d'entre elles, on s'assure qu'elle soit bien normée à l'unité et qu'elle tende vers une distribution delta de Dirac comme limite de largeur nulle.

Habillage gaussien

Il s'agit de l'habillage considéré dans la construction des potentiels de l'étude. On a :

$$\rho_i(\vec{r}_i - \vec{r}) = \frac{\sigma_i^3}{\pi^{3/2}} e^{-\sigma_i^2(\vec{r}_i - \vec{r})^2} \quad (4.23)$$

avec $\sigma_i = m_i^\delta$. Après intégration on obtient au final :

$$g_{iM} = \frac{3}{2\sigma_i^2} \quad (4.24)$$

$$\text{d'où} \quad \Delta r_m^2 = \frac{3}{2M} \left(\frac{m_1}{\sigma_1^2} + \frac{m_2}{\sigma_2^2} \right) = \frac{3}{2M\sigma_0^2} (m_1^{1-2\delta} + m_2^{1-2\delta}) \quad (4.25)$$

Habillage exponentiel

Il se caractérise par une densité :

$$\rho_i(\vec{r}_i - \vec{r}) = \frac{\sigma_i^3}{8\pi} e^{-\sigma_i|\vec{r}_i - \vec{r}|} \quad (4.26)$$

ce qui aboutit à une correction au rayon carré de :

$$\Delta r_m^2 = \frac{12}{M} \left(\frac{m_1}{\sigma_1^2} + \frac{m_2}{\sigma_2^2} \right) = \frac{12}{M\sigma_0^2} (m_1^{1-2\delta} + m_2^{1-2\delta}) \quad (4.27)$$

Habillage par une fonction de Yukawa

Pour une distribution de type Yukawa, normalisée à l'unité, on a :

$$\rho_i(\vec{r}_i - \vec{r}) = \frac{\sigma_i^2}{4\pi} \frac{e^{-\sigma_i|\vec{r}_i - \vec{r}|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}|} \quad (4.28)$$

Après calcul, on obtient :

$$\Delta r_m^2 = \frac{6}{M} \left(\frac{m_1}{\sigma_1^2} + \frac{m_2}{\sigma_2^2} \right) = \frac{6}{M\sigma_0^2} (m_1^{1-2\delta} + m_2^{1-2\delta}) \quad (4.29)$$

On constate, en comparant ces trois formes, que pour une même largeur σ , l'habillage exponentiel va aboutir à une modification du rayon carré de masse 8 fois plus importante que celle provenant d'un habillage gaussien et 2 fois plus qu'un habillage de Yukawa.

4.1.2 Rayons carrés de charge

Le rayon carré de charge est défini de façon similaire au rayon carré de masse. Il représente en quelque sorte la distribution spatiale des charges, ici des quarks composant le méson. Les calculs sont très similaires à ceux effectués précédemment pour r_m^2 .

Pour des quarks nus, on a :

$$r_c^2 = \sum_i e_i (\vec{r}_i - \vec{R})^2 \quad (4.30)$$

expression qui, en tenant compte d'une extension spatiale des quarks, devient :

$$r_c^2 = \sum_i e_i \int d\vec{r} \rho_i(\vec{r} - \vec{r}_i) (\vec{r}_i - \vec{R})^2 \quad (4.31)$$

Ici e_i est la charge en unité de charge élémentaire e (charge du proton) du quark i , c.-à-d. il s'agit du résultat de l'opérateur charge $\hat{e}_i$ appliqué à l'état de saveur $|\eta\rangle$ du méson soit $e_i = \langle \eta | \hat{e}_i | \eta \rangle$. La distribution de charge ρ_i qui apparaît dans l'expression ci-dessus ne doit pas être confondue avec la distribution de masse déjà rencontrée précédemment dans l'équation (4.3).

Comme précédemment, on recherche :

$$\langle \psi | r_c^2 | \psi \rangle = \sum_i e_i g_i \quad (4.32)$$

$$g_i = \langle \psi_{\vec{p}} | \int d\vec{r} \rho_i(\vec{r} - \vec{r}_i) (\vec{r}_i - \vec{R})^2 | \psi_{\vec{p}} \rangle \quad (4.33)$$

$$g_{ic} = e_i \int d\vec{u} u^2 \rho_i(\vec{u}) \quad (4.34)$$

$$\langle \psi | r_c^2 | \psi \rangle = \underbrace{\sum_i g_{ic}}_{\Delta r_c^2} + \underbrace{\sum_i e_i \alpha_i^2 \int dx x^4 \phi(x)^2}_{\sum_i e_i \alpha_i^2 \langle x^2 \rangle = r_{c\ nu}^2} \quad (4.35)$$

avec $\alpha_1 = \frac{m_2}{M}$ et $\alpha_2 = -\frac{m_1}{M}$.

Pour le rayon de charge nu, après calcul dans le formalisme de l'isospin on obtient :

$$r_{c\ nu}^2 = (e_1 \alpha_1^2 + e_2 \alpha_2^2) \langle x^2 \rangle \begin{cases} t_1 = t_2 = 0 \\ t_1 = 1/2, t_2 = 0 & \begin{matrix} e_1 = 2/3 & si\ I_z = 1/2 \\ e_1 = -1/3 & si\ I_z = -1/2 \end{matrix} \\ t_1 = 0, t_2 = 1/2 & \begin{matrix} e_2 = -2/3 & si\ I_z = -1/2 \\ e_2 = 1/3 & si\ I_z = 1/2 \end{matrix} \end{cases} \quad (4.36)$$

$$= I_z \cdot \frac{\langle x^2 \rangle}{4} \quad t_1 = 1/2, t_2 = 1/2 \quad (4.37)$$

Habillage gaussien

La densité de probabilité a déjà été définie pour le rayon carré de masse, les calculs sont identiques ; on a donc :

$$\Delta r_c^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{e_1}{\sigma_1^2} + \frac{e_2}{\sigma_2^2} \right) = \frac{3}{2\sigma_0^2} (e_1 m_1^{-2\delta} + e_2 m_2^{-2\delta}) \quad (4.38)$$

$$= \frac{3}{2\sigma_1^2} I_z = \frac{3I_z}{2\sigma_0^2} m_n^{-2\delta} \quad \text{si } t_1 = 1/2, \ t_2 = 1/2 \quad (4.39)$$

Habillage exponentiel

A nouveau, on exploite directement nos résultats obtenus pour le rayon carré de masse. La correction due à l'habillage vaut :

$$\Delta r_c^2 = 12 \left(\frac{e_1}{\sigma_1^2} + \frac{e_2}{\sigma_2^2} \right) = \frac{12}{\sigma_0^2} (e_1 m_1^{-2\delta} + e_2 m_2^{-2\delta}) \quad (4.40)$$

$$= \frac{12I_z}{\sigma_1^2} = \frac{12I_z}{\sigma_0^2} m_n^{-2\delta} \quad \text{si } t_1 = 1/2, \ t_2 = 1/2 \quad (4.41)$$

Habillage par une fonction de Yukawa

On a comme correction :

$$\Delta r_c^2 = 6 \left(\frac{e_1}{\sigma_1^2} + \frac{e_2}{\sigma_2^2} \right) = \frac{6}{\sigma_0^2} (e_1 m_1^{-2\delta} + e_2 m_2^{-2\delta}) \quad (4.42)$$

$$= \frac{6I_z}{\sigma_1^2} = \frac{6I_z}{\sigma_0^2} m_n^{-2\delta} \quad \text{si } t_1 = 1/2, \ t_2 = 1/2 \quad (4.43)$$

4.2 Facteur de forme électromagnétique

Le facteur de forme électromagnétique $F(q)$ est la transformée de Fourier de la distribution de charge dans le méson. Soit :

$$F(\vec{q}) = \int d\vec{r} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} D(\vec{r}) \quad (4.44)$$

où $D(\vec{r})$ est le résultat de l'application de l'opérateur densité $\hat{D}(\vec{r})$ sur la fonction d'onde du méson étudié, soit :

$$D(\vec{r}) = \langle \psi | \hat{D}(\vec{r}) | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_i e_i \hat{\rho}_i(\vec{r}) | \psi \rangle \quad (4.45)$$

Ainsi, on a :

$$F(\vec{q}) = \sum_i \int d\vec{r} \langle \psi_{\vec{p}'} | e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} e_i \hat{\rho}_i(\vec{r}_i - \vec{r}) | \psi_{\vec{p}} \rangle \quad (4.46)$$

$$= \sum_i \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r} \psi_{\vec{p}}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} e_i \rho_i(\vec{r}_i - \vec{r}) \psi_{\vec{p}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (4.47)$$

$$= \sum_i \int d\vec{x} d\vec{Y} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{Y}} |\psi(\vec{x})|^2 e_i \rho_i(\vec{Y} - \alpha_i \vec{x}) \quad (4.48)$$

$$= \sum_i \underbrace{\int d\vec{x} |\psi(\vec{x})|^2 e_i e^{-i\alpha_i \vec{q} \cdot \vec{x}}}_{\text{fact. de forme du quark nu : } F_{nu}(\alpha_i \vec{q})} \underbrace{\int d\vec{u} \rho_i(\vec{u}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{u}}}_{\rho_i(\vec{q})} \quad (4.49)$$

$$F(\vec{q}) = \sum_{i=1}^2 \rho_i(\vec{q}) F_{nu}(\alpha_i \vec{q}) \quad (4.50)$$

où $\vec{Y} = \vec{r} - \vec{R}$, $\vec{x} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ et $\vec{u} = \vec{Y} - \alpha_i \vec{x}$.

Nous allons nous intéresser aux facteurs de forme du π et du K qui sont tous les deux des mésons 1S_0 . Leur fonction d'onde est donc de la forme $\psi(\vec{x}) = \phi(x) Y_{00}(\hat{x}) = \frac{\phi(x)}{\sqrt{4\pi}}$. L'intégrale à calculer est donc, pour un axe Oz orienté selon la direction de $\vec{q}$:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dx x^2 |\phi(x)|^2 \times \int_0^\pi e^{-i\alpha_i q x \cos \theta} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (4.51)$$

$$= \int_0^\infty dx x |\phi(x)|^2 \frac{\sin(\alpha_i q x)}{\alpha_i q} \quad (4.52)$$

$$\text{on pose } I_i(q) = \int_0^\infty dx x |\phi(x)|^2 \sin(\alpha_i q x) \quad (4.53)$$

$$\Rightarrow F(q) = \sum_{i=1}^2 e_i \rho_i(q) \frac{I_i(\alpha_i q)}{\alpha_i q} \quad (4.54)$$

pour nos fonctions d'onde développées sur une somme de gaussiennes, on a de plus :

$$\frac{I_i(\alpha_i q)}{\alpha_i q} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sum_{n,m} b_n b_m \frac{e^{-\frac{\alpha_i^2 q^2}{2(\alpha_n + \alpha_m)}}}{\left(\frac{\alpha_n + \alpha_m}{2}\right)^{3/2}} \quad (4.55)$$

Dans l'équation (4.44), on voit que pour un moment q nul, le facteur de forme correspond à l'intégrale sur l'espace de la densité de charge qui correspond donc à la charge totale Z du méson. Cette propriété nous permet de vérifier la cohérence de notre dernière expression, en faisant tendre q vers zéro, $\frac{I_i(\alpha_i q)}{\alpha_i q}$ tend vers $\int_0^\infty dx |\phi(x)|^2 x^2 = 1$. En tenant compte de ceci dans l'équation (4.54), aboutit à $F(0) = \sum_{i=1}^2 e_i = Z$ comme attendu.

Un autre test, également validé, est la formule reliant le facteur de forme électromagnétique au rayon carré moyen de charge. On peut vérifier que l'on a :

$$-\frac{1}{6} r_c^2 = \left. \frac{dF}{dq^2} \right|_{q^2=0} \quad (4.56)$$

Le facteur de forme d'un méson de fonction d'onde ψ , état lié de deux quarks de taille finie représentée par ρ_i est donc le produit du facteur de forme de la distribution de chaque quark que multiplie le facteur de forme nu (c.-à-d. de densité delta dans (4.45)) mais pour une impulsion $\vec{q}' = \alpha_i \vec{q}$.

D'un point de vue pratique le facteur de forme permet de relier la section efficace sur un centre diffuseur ponctuel (section efficace de Rutherford liée à celle de Mott) à la section efficace sur un centre diffuseur dont l'extension de charge est donnée par $\hat{D}(\vec{r})$. En théorie, la mesure du facteur de forme électromagnétique pour une infinité de moment de transfert q permettrait d'accéder, par transformée de Fourier inverse, à la distribution de charge.

Regardons maintenant la contribution de l'habillage au facteur de forme pour nos trois types de densité électromagnétique déjà discuté auparavant.

Habillage gaussien

Après calcul, on obtient :

$$\rho_i(\vec{q}) = \int d\vec{u} \rho_i(\vec{u}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{u}} = e^{-\frac{q^2}{4\sigma_i^2}} \quad (4.57)$$

Habillage exponentiel

L'habillage exponentiel contribue pour :

$$\rho_i(\vec{q}) = \frac{\sigma_i^4}{(q^2 + \sigma_i^2)^2} \quad (4.58)$$

Habillage de type Yukawa

L'habillage par une fonction de Yukawa contribue pour :

$$\rho_i(\vec{q}) = \frac{\sigma_i^2}{q^2 + \sigma_i^2} \quad (4.59)$$

4.2.1 Les résultats

Compte tenu du peu de données expérimentales disponibles, nous nous sommes intéressés uniquement aux mésons π et K . Nous avons procédé de la sorte : une méthode de moindre carré, appliqué au facteur de forme électromagnétique, nous permet d'obtenir la valeur de σ . Cette valeur de σ caractérise l'étalement "électrique" du méson. Enfin, de la connaissance de σ peut se calculer le rayon carré moyen de charge.

Chaque saveur de quark est caractérisée par une extension spatiale, donc une valeur de σ bien particulière. Dans le formalisme d'isospin, nous avons bien sûr pris la même valeur pour le quark u que pour le quark d . Pour le kaon, composé d'un quark u et d'un anti-quark s , nous avons utilisé la valeur de σ_u pour le quark u provenant du fit effectué sur la

TAB. 4.1 – Valeurs des χ^2 calculés pour l'accord théorie-expérience pour les facteurs de forme du π et du K , pour les potentiels : BNR, DNR et NRAL. r_c^2 signifie que les valeurs du paramètre σ pour les différents potentiels n'ont pas été fixé par minimisation mais de façon à reproduire les rayons carrés de charge expérimentaux. Gluon signifie que les paramètres utilisés sont ceux apparaissant dans la distribution gluonique du potentiel.

Meson	DNR						
	minimisation			r_c^2			gluon
	Gauss.	expo.	Yukawa	Gauss.	expo.	Yukawa	Gauss.
	π	97.8	47.9	25.2	882	300	74.3
K	14.9	13.2	12.3	14.3	12.6	12.2	38.6
Meson	NRAL						
	minimisation			r_c^2			gluon
	Gauss.	expo.	Yukawa	Gauss.	expo.	Yukawa	Gauss.
	π	99.5	39.6	19.2	888	243	35.2
K	15.2	13.1	12.2	15.6	12.9	12.2	59.4
Meson	BNR						
	minimisation			r_c^2			gluon
	Gauss.	expo.	Yukawa	Gauss.	expo.	Yukawa	Gauss.
	π	96.3	36.5	18.0	877	229	29.8
K	14.8	12.9	12.2	14.1	12.4	12.3	76.6

facteur de forme du pion. Ensuite, nous avons pu déterminé, toujours par moindre carré, la valeur de σ_s pour le quark étrange sur le facteur de forme du K .

Les χ^2 obtenus à partir des facteurs de forme électromagnétique sont présentés dans la table (4.1). Tout d'abord, il est bon de préciser que la différence importante entre les valeurs obtenues pour le pion et le kaon sont dues au fait que le domaine en énergie étudié pour le pion est plus important ; avec des valeurs pour les facteurs de forme à grand q^2 plus difficiles à reproduire.

Dans l'ensemble, pour de faibles moments, les trois types d'habillage se différencient peu. On peut se rendre compte graphiquement des résultats sur les figures (4.1) à (4.6).

La combinaison du potentiel BNR et de l'habillage de Yukawa donne les meilleurs résultats. Le fait de tenir compte d'une extension spatiale améliore grandement les résultats, la courbe du facteur de forme nu passant bien en dessus des valeurs expérimentales. On remarque également que l'habillage issu du potentiel d'interaction $q\bar{q}$ ne convient pas non plus ; les rayons carrés moyen de masse et de charge sont bien différents.

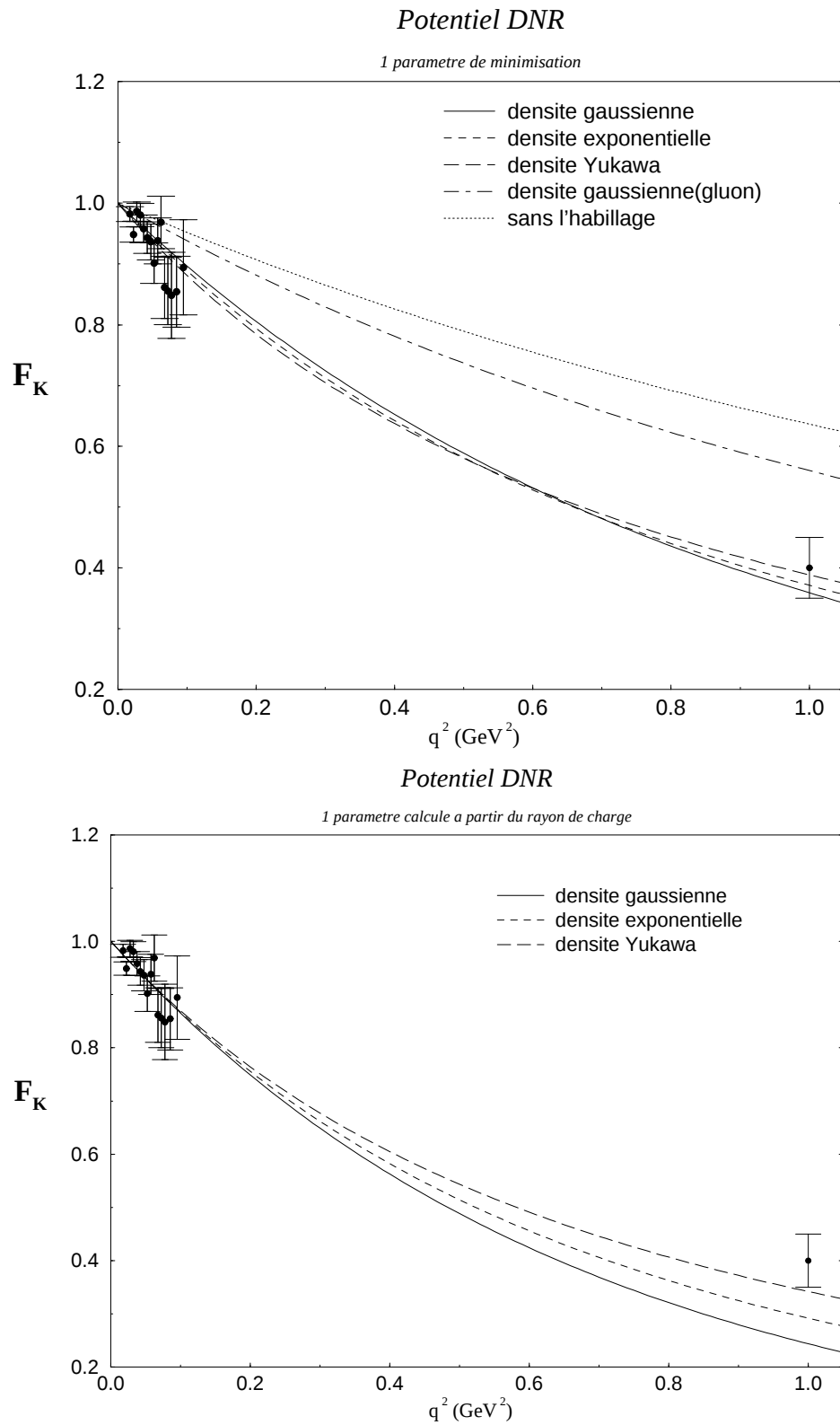
Les rayons carrés de charge du π et du K pour les potentiels : BNR, DNR et NRAL sont présentés dans la table (4.2). Pour ces trois potentiels, les valeurs théoriques sont toutes trop petites et cela pour les deux mésons. Le meilleur accord est obtenu pour un habillage de type Yukawa car c'est pour cette fonction que la contribution de Δr_c^2 est la plus importante. Du point de vue des potentiels, pour le pion, le plus satisfaisant semble ici être le potentiel BNR avec une déviation de la valeur théorique par rapport à la mesure de seulement 8 % contre 15 % dans le pire des cas pour le potentiel DNR. Pour le kaon, la moins bonne valeur est également due au potentiel DNR : désaccord de 9 % contre 5 % pour BNR.

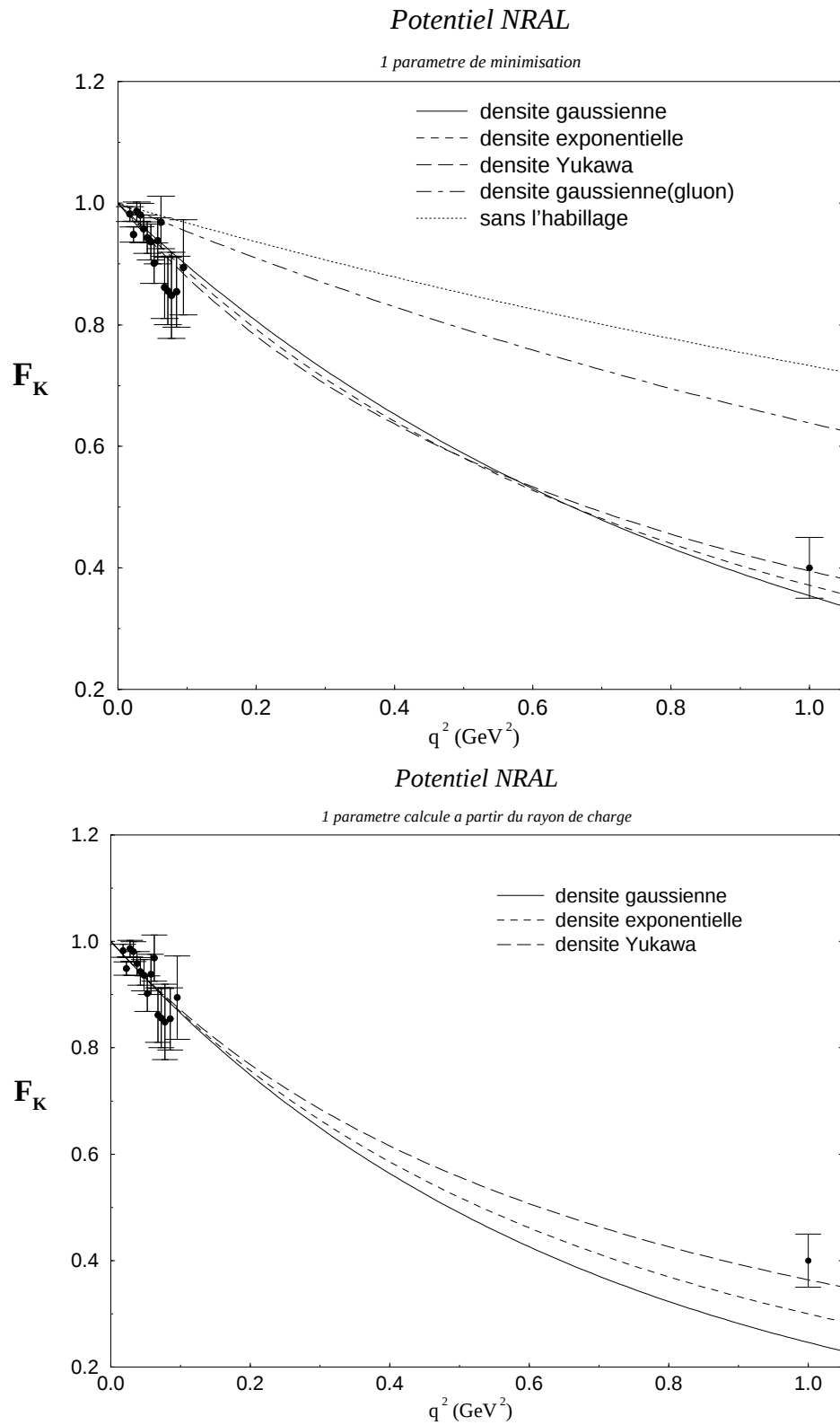
Entre parenthèses sont indiquées les valeurs obtenues en utilisant les paramètres de la distribution gluonique. Dans ce cas, les résultats sont très mauvais, indiquant à nouveau clairement que la taille du nuage gluonique et de paires $q\bar{q}$ ne caractérise pas la répartition des charges. On vérifie notamment, que la taille du nuage gluonique, donc liée à la portée de l'interaction forte est plus faible que celle due à l'interaction électromagnétique.

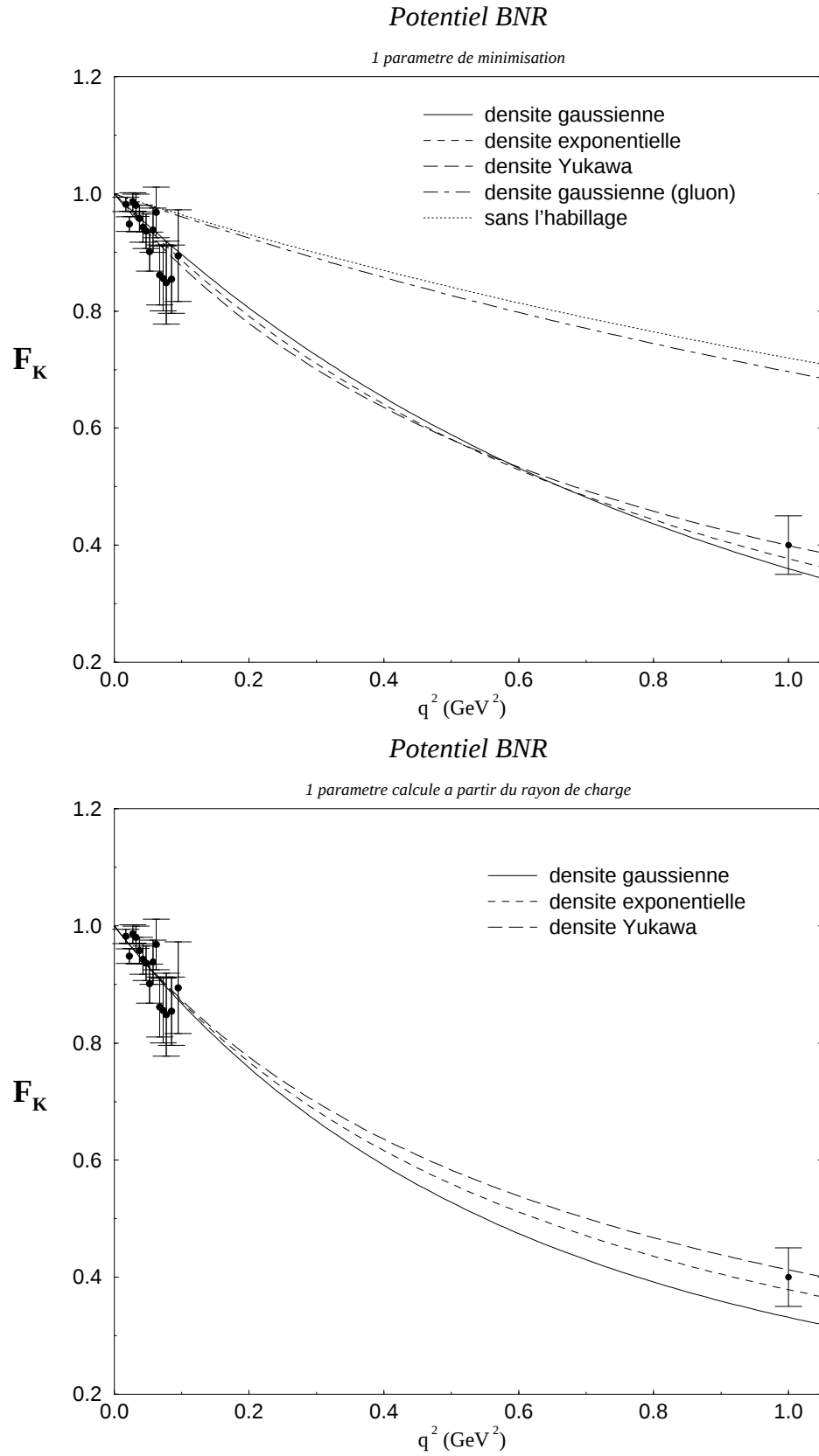
TAB. 4.2 – Valeurs des rayons carrés de charge en GeV^{-2} pour le π et le K pour trois potentiels non relativistes : BNR, DNR, NRAL. Trois formes de distributions de probabilité de présence sont testées pour les quarks pour leur conférer une extension spatiale. Les valeurs entre parenthèses indiquent le rayon obtenu à partir de l'habillage du potentiel, c.-à-d. la distribution gluonique.

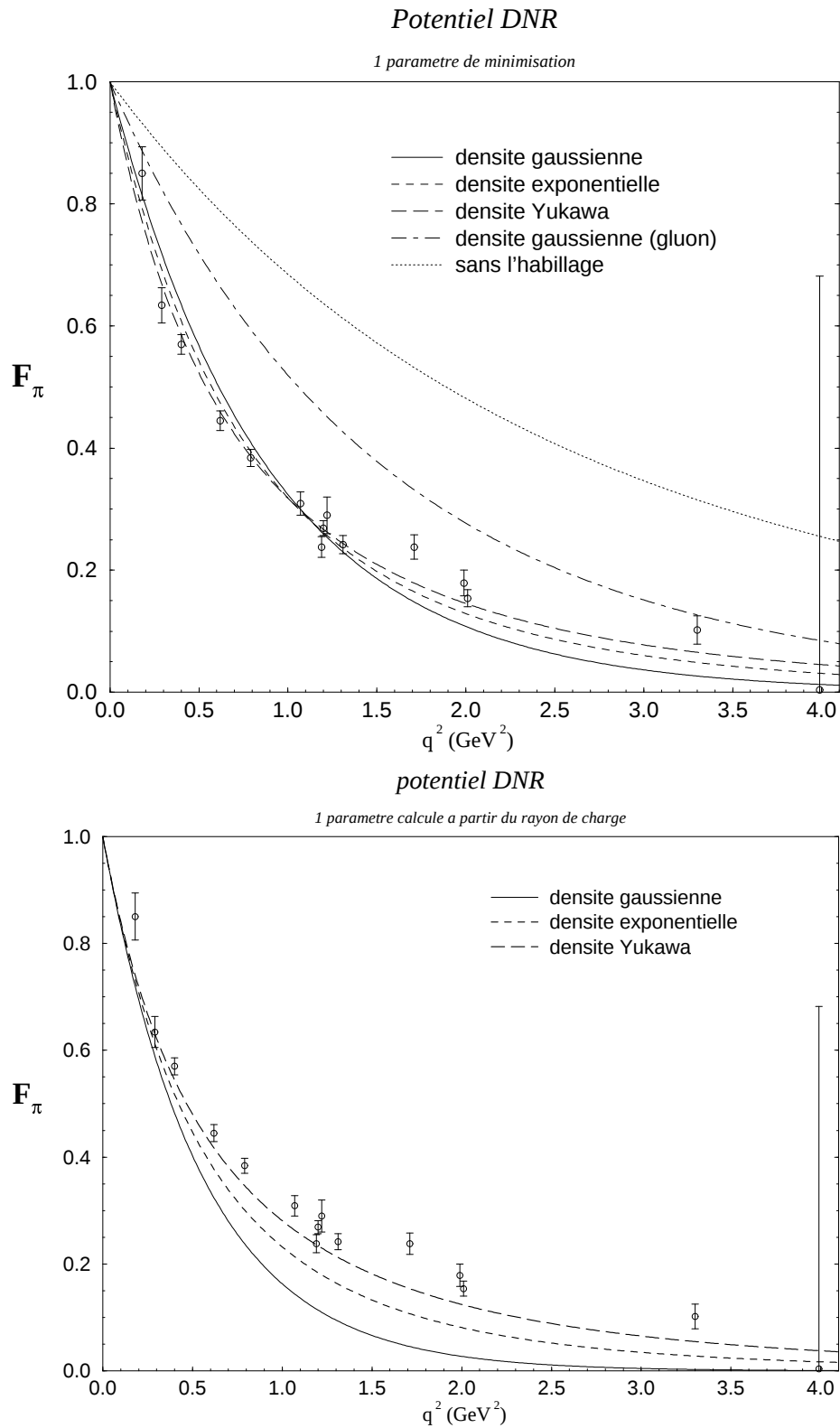
Meson	DNR				NRAL				Exp.
	nu	Gauss.	expo.	Yukawa	nu	Gauss.	expo.	Yukawa	
π	2.35	6.84 (4.01)	7.95	9.28	1.75	6.82 (2.91)	8.23	9.98	10.97
K	2.65	6.57 (3.86)	7.22	7.95	2.00	6.51 (2.88)	7.31	8.54	8.73

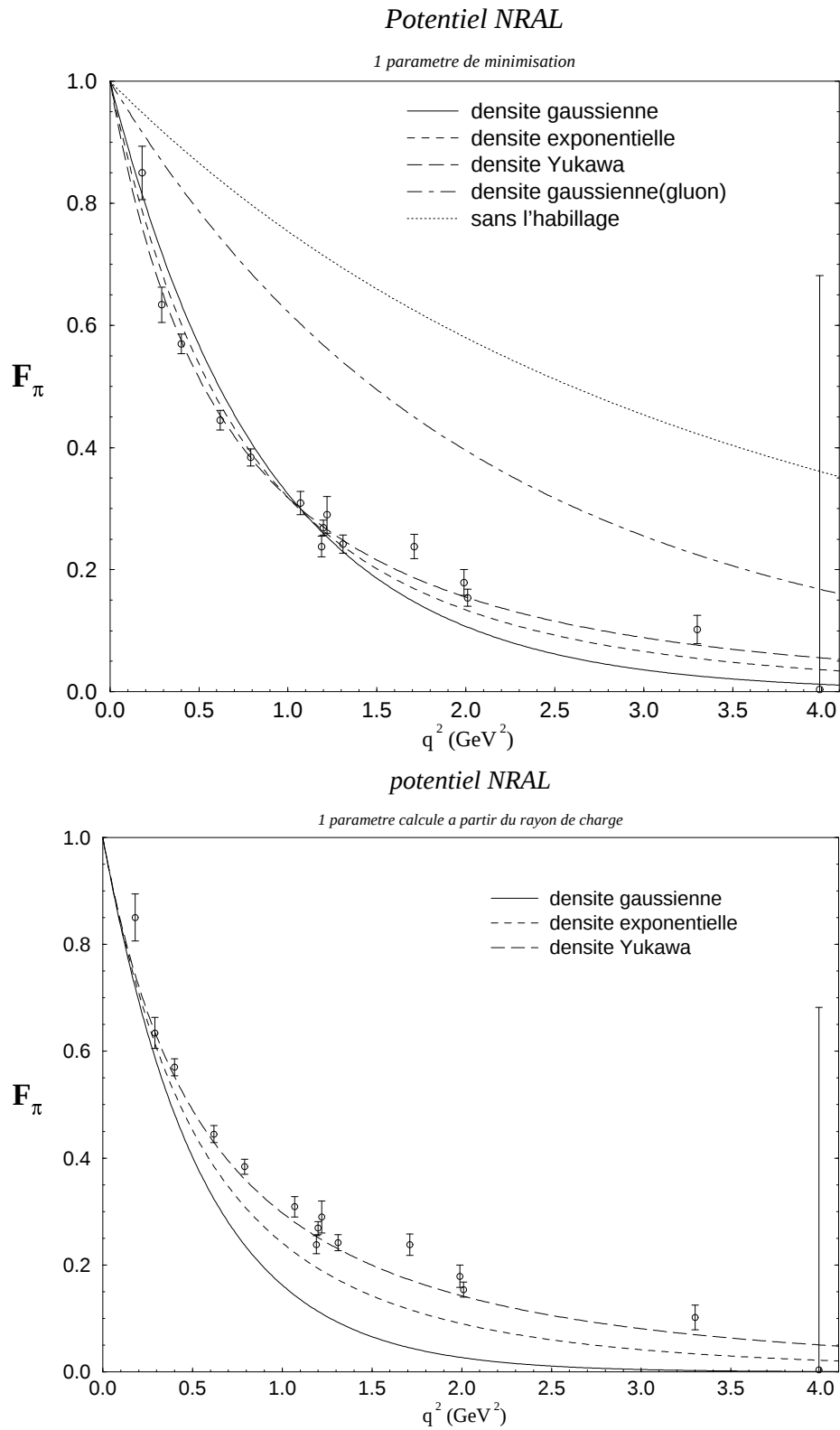
Meson	BNR				Exp.
	nu	Gauss.	expo.	Yukawa	
π	1.73	6.86 (2.00)	8.31	10.12	10.97
K	2.20	6.60 (2.41)	7.42	8.42	8.73

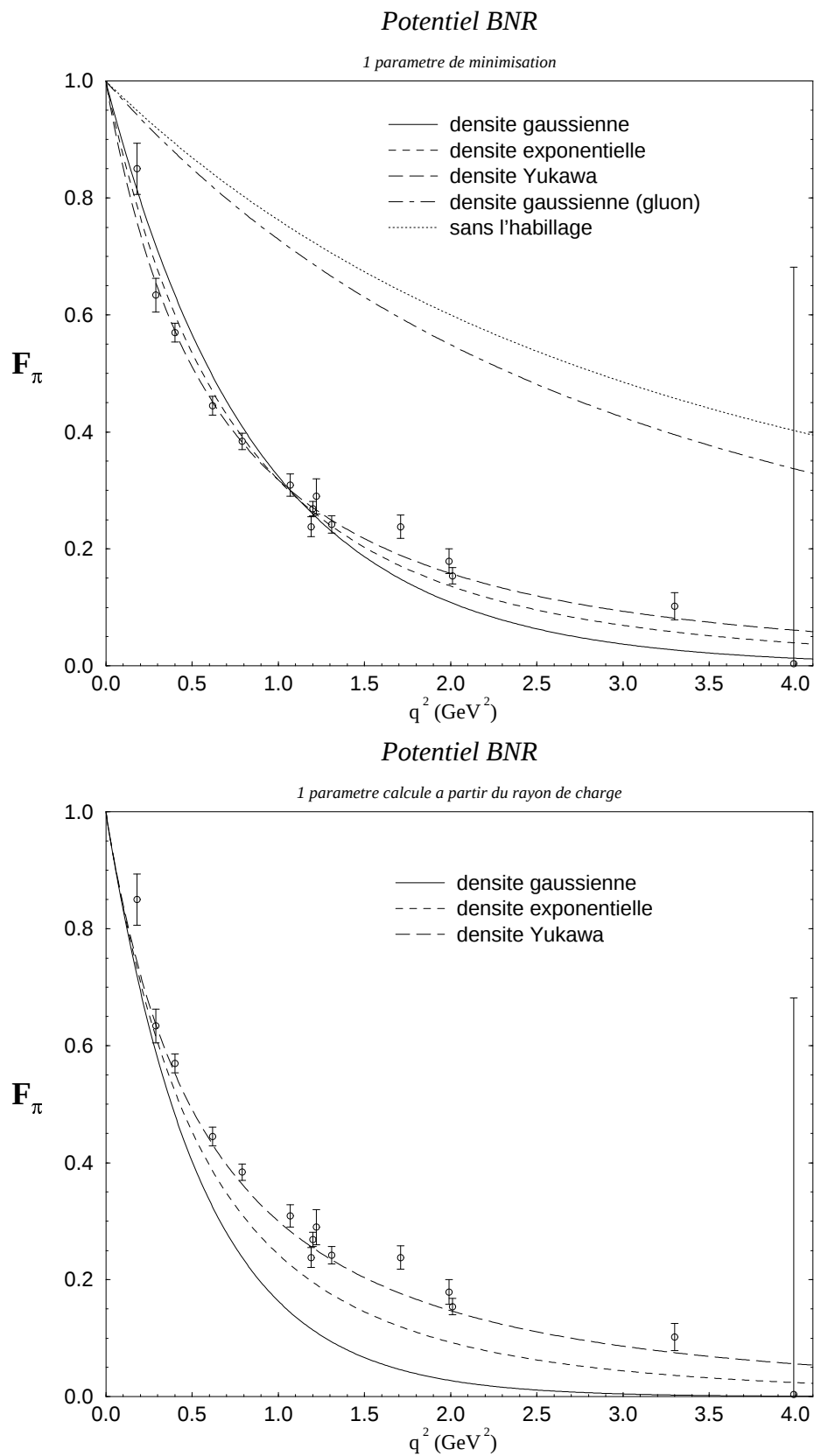
FIG. 4.1 – Facteurs de forme électromagnétique pour le méson K et le potentiel DNR.

FIG. 4.2 – Facteurs de forme électromagnétique pour le méson K et le potentiel NRAL.

FIG. 4.3 – Facteurs de forme électromagnétique pour le méson K et le potentiel BNR.

FIG. 4.4 – Facteurs de forme électromagnétique pour le méson π et le potentiel DNR.

FIG. 4.5 – Facteurs de forme électromagnétique pour le méson π et le potentiel NRAL.

FIG. 4.6 – Facteurs de forme électromagnétique pour le méson π et le potentiel BNR.

Troisième partie

Désintégrations électromagnétiques

Dans cette partie, nous nous intéressons à la désexcitation d'un méson par processus électromagnétique. L'opérateur électromagnétique responsable de la désintégration est donc parfaitement connu. Ainsi, contrairement au cas des désintégrations fortes suivant le modèle 3P_0 , il n'y a aucun paramètre libre dans les calculs suivants, hormis ceux issus du potentiel d'interaction $q\bar{q}$ qui donnent les fonctions d'onde des mésons. De plus, concernant ces paramètres, ceux-ci ont été choisis pour reproduire au mieux les spectres de masse et nullement pour reproduire les propriétés électromagnétiques des mésons. On peut donc s'attendre à un test beaucoup plus fin de nos fonctions d'onde que dans nos précédents calculs.

Bien que l'opérateur électromagnétique de transition soit connu, il faut nuancer ceci par le fait que l'on regarde dans notre approche, des quarks constituants avec une taille finie. Le couplage du photon à un quark constituant n'est donc pas évident.

Nous regardons deux cas de figure :

- la transition $M_A \xrightarrow{\gamma} l\bar{l}$, c.-à-d. la désintégration du méson initial en un photon virtuel qui donne naissance à une paire de leptons. Ce cas de figure est étudié dans le chapitre suivant.
- la transition $M_A \rightarrow M_B\gamma$, c.-à-d. l'émission d'un photon réel par le méson initial. Il y a modification des nombres quantiques du méson entre l'état initial et l'état final. Ce cas de figure est étudié dans le dernier chapitre.

Chapitre 5

Désexcitation par émission d'un photon virtuel

Ici le méson initial se désintègre en un photon virtuel, qui ensuite donne lieu à la création d'une paire $\ell\bar{\ell}$. Cette paire pourra être, selon l'énergie du photon, soit une paire e^-e^+ , soit une paire $\mu^-\mu^+$ ou encore $\tau^-\tau^+$. La paire $\ell\bar{\ell}$ de l'état final présente les nombres quantiques de l'état initial.

Pour cette étude, on utilise l'électrodynamique quantique, notamment la technique des diagrammes de Feynman. Dès lors, plusieurs difficultés apparaissent :

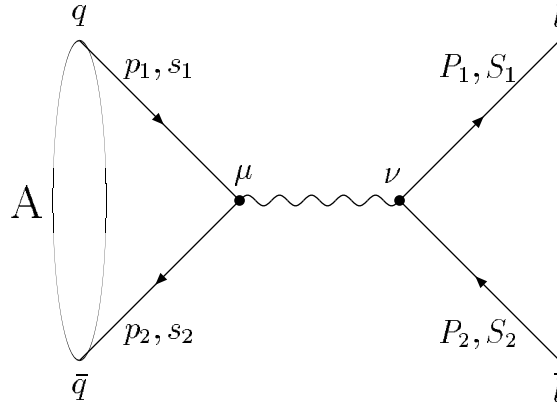
1. Utilisation conjointe de formalismes relativiste (pour la gestion du processus de désintégration) et non relativiste (pour la description du méson : résolution de l'équation de Schrödinger pour obtenir la fonction d'onde de ce dernier).
2. Diagramme de Feynman décrivant des particules libres alors que les quarks sont liés en un méson.
3. Particule élémentaire ponctuelle dans la théorie de Dirac versus quasi-particule : quarks constituants avec une taille finie.
4. Description habituelle en terme d'hélicité pour les diagrammes de Feynman (car contrairement à S_z l'opérateur hélicité commute avec le hamiltonien libre de Dirac) et en terme de projection suivant l'axe de quantification $\hat{O}_z$ pour le méson.

On ne prendra pas en compte pour l'instant la taille finie des quarks. Les effets de la relativité seront pris en compte en ne gardant que le premier terme du développement en $\frac{p}{m}$ (cf E.2.1).

5.1 Présentation des notations

Le processus nous intéressant peut être schématisé de la sorte :

- Le quark q est caractérisé par une quadri-impulsion $p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$, une projection de spin s_1 et une masse m_q .

FIG. 5.1 – Représentation schématique de la désintégration d'un méson en une paire $l\bar{l}$.

- L'antiquark $\bar{q}$ est caractérisé par une quadri-impulsion p_2 , une projection de spin s_2 . La conservation de la saveur aux vertex électromagnétiques implique que la paire de quark est composée d'une même saveur ce qui implique que la masse du quark et de l'antiquark sont égales : $m_{\bar{q}} = m_q$.
- Cette paire $q\bar{q}$ forme le méson A caractérisé par une masse m_A , une quadri-impulsion P_A . Du point de vue nombres quantiques son spin est S_A de projection σ_A , son moment orbital est L_A de projection μ_A et son moment angulaire total vaut J_A de projection M_A .
- le lepton l est caractérisé par une quadri-impulsion P_1 , une projection de spin S_1 et une masse m_l .
- l'antilepton $\bar{l}$ est caractérisé par une quadri-impulsion P_2 , une projection de spin S_2 et une masse m_l .

On constate que dans le cadre de cette étude, le méson se désintégrant ne doit pas contenir de mélange de saveur pour que la transition méson donne photon soit possible. Pour les autres mésons présentant différentes saveurs de quark, les désintégrations éventuelles peuvent s'expliquer par d'autres processus plus complexes. De même, la conservation de la charge électrique combinée avec le fait qu'un photon ne transporte pas de charge implique que seuls les mésons neutres pourront se désintégrer. Un photon a un spin $J = 1^-$; dans le cadre de notre étude, on doit donc avoir pour le moment cinétique total du méson $J_A = 1$. De plus la parité d'un méson étant $(-1)^{L+1}$, la conservation de la parité impose une valeur de L pair, les seules valeurs possibles sont donc $L = 0, 2$ en raison de la valeur maximale du spin $S = 1$ pour un méson.

Pendant des années, les transitions mésons donnant $l\bar{l}$ ont été étudiées suivant le formalisme de van Royen-Weisskopf [21]. Leur travail est basé, comme le nôtre, sur un diagramme de Feynman du second ordre. Le processus de désintégration est schématisé sur la figure (5.1). Leur principale approximation consiste à prendre une impulsion $\vec{p}$ nulle pour les quarks dans le méson. Nous allons étudier pour notre part le cas plus général avec $\vec{p} \neq \vec{0}$ mais restant cependant faible : $|\vec{p}| \ll m$. Cette supposition est indispensable pour la validité des formules (E.52)-(E.53). Pour le formalisme de van Royen-Weisskopf, le fait de prendre une impulsion nulle pour les quarks aboutit à une largeur de désintégration

proportionnelle à la fonction d'onde à l'origine $\phi(0)$. On conçoit donc que ce soit un test très fin de la qualité des fonctions d'onde. $\phi(0)$ étant nulle pour des moments orbitaux différents de 0, on a donc une contribution nulle des ondes 3D_1 au processus de désintégration bien qu'expérimentalement de tels cas de figures soient observés. On constate donc des limitations à ce calcul.

D'autres études sont disponibles dans la littérature. La référence [22] présente la désintégration en leptons, de mésons vecteurs légers, calcul effectué dans le centre de masse du système pour un modèle modifié de "sac". La référence [23], utilise un formalisme similaire mais pour un confinement des mésons de type "scalar-vector harmonic". Ces deux précédentes approches négligent l'interaction résiduelle telle que l'échange de gluon en ce qui concerne l'interaction $q\bar{q}$. Des généralisations du formalisme de van Royen-Weisskopf ont été proposées : la référence [24] tient compte de termes en p/m , ce qui apporte une modification entre 5 % et 15 % pour les ondes 3S_1 et une contribution non-nulle, bien que très faible, de l'onde 3D_1 . La référence [25] par le biais du formalisme du cône de lumière, prend en compte des corrections relativistes pour des différences, vis à vis des résultats obtenus par van Royen et Weisskopf, atteignant jusqu'à 60 % pour les mésons charmés et 30 % pour les mésons beaux.

Pour notre étude, nous allons essayer d'étendre le formalisme de van Royen-Weisskopf en prenant en compte l'impulsion des quarks au sein du méson. Ce calcul est effectué pour des fonctions d'onde sophistiquées issues de deux potentiels χ QM et DNR. Dans un second temps, on introduira, au moyen d'une distribution électromagnétique gaussienne une taille finie pour les quarks constituants.

5.2 Expressions générales

On étudie cette désintégration dans le référentiel du centre de masse du méson A ; son impulsion $\vec{P}_A = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$ implique $E_A = m_A$.

L'expression de la largeur de désintégration différentielle est :

$$d\Gamma(i \rightarrow f) = 2\pi |T_{i \rightarrow f}|^2 \delta^4(P_f - P_i) d\beta \quad (5.1)$$

où P_i et P_f désignent les sommes des 4-impulsions des états initial i et final f et $d\beta = \Pi_f d\vec{P}_f = d\vec{P}_1 d\vec{P}_2$ dans notre cas. Cette expression est valable dans le cas où les polarisations sont bien définies. Cependant ce n'est pas le cas pour les mesures expérimentales dont nous disposons, il faut donc moyenner sur les polarisations initiales, ici sur la projection du moment angulaire total soit M_A et sommer sur les polarisations finales S_1 et S_2 . Soit :

$$d\Gamma(A \rightarrow l\bar{l}) = 2\pi \sum_{M_A, S_1, S_2} \frac{|T_{A \rightarrow l\bar{l}}|^2}{2J_A + 1} \delta^4(P_1 + P_2 - P_A) d\vec{P}_1 d\vec{P}_2 \quad (5.2)$$

Regardons tout d'abord le processus sans tenir compte du fait que la paire $q\bar{q}$ est liée dans un méson ; cependant on se place quand même dans le centre de masse donc $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$ ce qui entraîne, en relation avec le fait que la paire n'est formée que d'une seule saveur, $E_q = E_{\bar{q}}$.

La matrice T se déduit de la matrice S grâce à la relation suivante :

$$S_{i \rightarrow f} = -2\pi i \delta^4(P_f - P_i) T_{i \rightarrow f} \quad (5.3)$$

Il nous reste encore à trouver l'expression de la matrice S qui s'écrit en fonction de l'amplitude de Feynman $\mathcal{M}'$ (le ' signifie qu'ici les quarks sont libres) :

$$S_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_i \sqrt{\frac{1}{2E_i(2\pi)^3}} \Pi_f \sqrt{\frac{1}{2E_f(2\pi)^3}} \Pi_D \sqrt{2m_D} \mathcal{M}' \quad (5.4)$$

où D désigne l'ensemble des particules de Dirac (c.-à-d. fermions de spin 1/2) intervenant dans le processus et m_D leur masse.

5.2.1 Cas de quarks libres

Pour un état initial composé de deux quarks libres et dans le système du centre de masse on a :

$$\begin{aligned} S_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}} &= (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - p_1 - p_2) \sqrt{\frac{1}{2E_q(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{1}{2E_{\bar{q}}(2\pi)^3}} \\ &\quad \sqrt{\frac{1}{2E_l(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{1}{2E_{\bar{l}}(2\pi)^3}} 2m_l 2m_q \mathcal{M}' \end{aligned} \quad (5.5)$$

Soit

$$T_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}} = i (2\pi)^3 \frac{m_q}{E_q(2\pi)^3} \frac{m_l}{E_l(2\pi)^3} \mathcal{M}' \quad (5.6)$$

Pour la dernière expression on a posé $E_l = E_{\bar{l}}$; ceci est justifié par la conservation de l'impulsion et le fait que l'on étudie la réaction dans le centre de masse du système donc on a $|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2|$.

Le calcul de la largeur va donc consister à calculer $\mathcal{M}'$; pour ceci nous utilisons les règles de Feynman.

$$\mathcal{M}'_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}} = [\bar{v}_q(p_2, s_2) i e e_q \gamma^\mu u_q(p_1, s_1)] \left(\frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \right) [\bar{u}_l(P_1, S_1) i e \gamma^\nu v_l(P_2, S_2)] \quad (5.7)$$

où k désigne la 4-impulsion du photon virtuel et est contrainte par la conservation de l'énergie impulsion, donc $k^2 = (p_1 + p_2)^2 = P_A^2 = E_A^2 - \vec{P}_A^2 = m_A^2$ dans le référentiel du centre de masse. e est la charge du proton, e_q celle du quark en unité de e . γ^μ , γ^ν sont des matrices de Dirac, donc à 4 dimensions. u désigne le bi-spineur de Dirac pour la particule, v celui associé à l'antiparticule. Les bi-spineurs sont définis par, cf (E.11) :

$$u(p, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \text{ et } v(p, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_{-s} \\ \chi_{-s} \end{pmatrix}$$

où σ sont les matrices de Pauli.

χ_s est défini par (E.23). Il est important de remarquer que pour une antiparticule c'est χ_{-s} qui intervient ; ceci est à relier au fait qu'on peut considérer une antiparticule comme une particule d'impulsion opposée.

Terme des quarks : t_q^μ

On note t_q^μ , le terme des quarks correspondant à la composante μ . Celui-ci vaut :

$$\begin{aligned} t_q^\mu &= [\bar{v}_q(-p_1, s_2) i e e_q \gamma^\mu u_q(p_1, s_1)] \\ &= \frac{E_{p_1} + m_q}{2m_q} i e e_q \left(-\chi_{-s_2}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E_{p_1} + m_q}; \chi_{-s_2}^\dagger \right) \gamma^0 \gamma^\mu \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E_{p_1} + m_q} \chi_{s_1} \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

On a remplacé $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ car on travaille dans le centre de masse de A.

Composante temporelle $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} t_q^0 &\propto \bar{v}_q(-p_1, s_2) \gamma^0 u_q(p_1, s_1) = v_q^\dagger(-p_1, s_2) \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{\mathbb{I}} u_q(p_1, s_1) \\ &= \left(-\chi_{-s_2}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{2m_q}; \chi_{-s_2}^\dagger \right) \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{2m_q} \chi_{s_1}(p_1) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

On a utilisé les propriétés $\gamma_0 = \gamma^0$ et $\gamma_0^2 = \mathbb{I}$.

Composantes spatiales $\mu = i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \bar{v}_q(-p_1, s_2) \gamma^i u_q(p_1, s_1) &= v_q^\dagger(-p_1, s_2) \gamma^0 \gamma^i u_q(p_1, s_1) \\ &= -v_q^\dagger(-p_1, s_2) \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} u_q(p_1, s_1) \\ &= -\frac{E_{p_1} + m_q}{2m_q} \left(-\chi_{-s_2}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E_{p_1} + m_q}; \chi_{-s_2}^\dagger \right) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E_{p_1} + m_q} \chi_{s_1} \right) \\ &= -\frac{E_{p_1} + m_q}{2m_q} \left(-\chi_{-s_2}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E_{p_1} + m_q}; \chi_{-s_2}^\dagger \right) \begin{pmatrix} \sigma_i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E_{p_1} + m_q} \chi_{s_1} \\ \sigma_i \chi_{s_1} \end{pmatrix} \\ \bar{v}_q \gamma^i u_q &= -\frac{E_{p_1} + m_q}{2m_q} \chi_{-s_2}^\dagger \left(-\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{(E_{p_1} + m_q)^2} \sigma_i \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 + \sigma_i \right) \chi_{s_1} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$= -\frac{E_{p_1} + m_q}{2m_q} \chi_{-s_2}^\dagger \left(-\frac{2(\vec{p}_1)_i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1)}{(E_{p_1} + m_q)^2} + \left(1 + \frac{p_1^2}{(E_{p_1} + m_q)^2} \right) \sigma_i \right) \chi_{s_1} \quad (5.11)$$

$$= -\chi_{-s_2}^\dagger \left(\frac{E_{p_1}}{m_q} \sigma_i - \frac{(\vec{p}_1)_i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1)}{m_q (E_{p_1} + m_q)} \right) \chi_{s_1} \quad (5.12)$$

$$= -\frac{E_{p_1}}{m_q} \chi_{-s_2}^\dagger \sigma_i \chi_{s_1} + \frac{(\vec{p}_1)_i (\vec{p}_1)^j}{m_q (E_{p_1} + m_q)} \chi_{-s_2}^\dagger \sigma_j \chi_{s_1} \quad (5.13)$$

Le passage de (5.10) à (5.11) s'effectue à l'aide de la formule (E.43).

Terme photonique $(t_\gamma)_{\mu\nu}$

Ce terme correspond juste au propagateur du photon : $\frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$. Dans le référentiel du centre de masse, l'énergie disponible pour le photon correspond à l'énergie de masse du méson se désintégrant d'où :

$$(t_\gamma)_{\mu\nu} = \frac{-i g_{\mu\nu}}{m_A^2} \quad (5.14)$$

. Le tenseur $g_{\mu\nu}$ avec la règle de sommation sur les indices doubles impliquent en ce qui concerne les matrices γ de Dirac $\gamma^\mu (t_\gamma)_{\mu\nu} \gamma^\nu = -i \frac{\gamma^\mu \gamma_\mu}{m_A^2}$.

Terme des leptons : $(t_{lep})_\mu$

Il ressemble dans sa structure à celui des quarks mis à part les faits qu'il s'agit ici de l'état final et que la charge apparaissant au vertex est entière et non fractionnelle comme c'est le cas pour les quarks avec e_q . Explicitement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{ie} (t_{lep})_\mu &= [\bar{u}_l(P_1, S_1) \gamma_\mu v_l(P_2, S_2)] = u_l^\dagger(P_1, S_1) \gamma^0 \gamma_\mu v_l(P_2, S_2) \\ &= \sqrt{\frac{E_l + m_l}{2m_l}} \left(\chi_{S_1}^\dagger; \chi_{S_1}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{P}_1}{E_l + m_l} \right) \gamma^0 \gamma_\mu \sqrt{\frac{E_l + m_l}{2m_l}} \left(\begin{array}{c} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{P}_2}{E_l + m_l} \chi_{-S_2} \\ \chi_{-S_2} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Pour simplifier l'expression, on utilise le fait que l'on calcule la largeur de désintégration dans le référentiel du centre de masse donc $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$; et comme $m_q = m_{\bar{q}}$, il en découle $E_{\bar{l}} = E_l$. Après ces modifications notre expression devient :

$$(t_{lep})_\mu = \frac{E_l + m_l}{2m_l} \left(\chi_{S_1}^\dagger; \chi_{S_1}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{P}_1}{E_l + m_l} \right) \gamma^0 \gamma_\mu \left(\begin{array}{c} \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{P}_1}{E_l + m_l} \chi_{-S_2} \\ \chi_{-S_2} \end{array} \right) \quad (5.16)$$

Composante temporelle $\mu = 0$:

$$(t_{lep})_0 = \frac{E_l + m_l}{2m_l} \left(\chi_{S_1}^\dagger; \chi_{S_1}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{P}_1}{E_l + m_l} \right) \underbrace{\gamma^0 \gamma_0}_{\mathbb{I}} \left(\begin{array}{c} \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{P}_1}{E_l + m_l} \chi_{-S_2} \\ \chi_{-S_2} \end{array} \right) = 0 \quad (5.17)$$

Composantes spatiales $\mu = i$:

Elles ont déjà été calculées pour le cas des quarks.

$$\begin{aligned} (t_{lep})_i &= \frac{E_l + m_l}{2m_l} \left(\chi_{S_1}^\dagger; \chi_{S_1}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{P}_1}{E_l + m_l} \right) \underbrace{\gamma^0 \gamma_i}_{-\gamma^0 \gamma^i} \left(\begin{array}{c} \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{P}_1}{E_l + m_l} \chi_{-S_2} \\ \chi_{-S_2} \end{array} \right) \\ &= \frac{E_l}{m_l} \chi_{S_1}^\dagger \sigma_i \chi_{-S_2} - \frac{(\vec{P}_1)_i (\vec{P}_1)^k}{m_l (E_l + m_l)} \chi_{S_1}^\dagger \sigma_k \chi_{-S_2} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Calcul du produit $t_q^\mu \cdot (t_\gamma)_{\mu\nu} \cdot t_{lep}^\nu$

Pour des quarks libres l'amplitude de Feynman de ce processus s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}} &= t_q^\mu \cdot (t_\gamma)_{\mu\nu} \cdot t_{lep}^\nu \\ &= -e^2 e_q \sum_{i=0,\pm 1} \left[-\frac{E_{p_1}}{m_q} \chi_{-s_2}^\dagger \sigma_i \chi_{s_1} + \frac{(\vec{p}_1)_i (\vec{p}_1)^j}{m_q(E_{p_1} + m_q)} \chi_{-s_2}^\dagger \sigma_j \chi_{s_1} \right] \\ &\quad \times \frac{-i}{m_A^2} \times \left[\frac{E_l}{m_l} \chi_{s_1}^\dagger \sigma_i \chi_{-s_2} - \frac{(\vec{P}_1)_i (\vec{P}_1)^k}{m_l(E_l + m_l)} \chi_{s_1}^\dagger \sigma_k \chi_{-s_2} \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

Maintenant en exprimant la valeur du produit scalaire :

$$\chi_{s'}^\dagger \sigma_i \chi_s = 2 \langle \frac{1}{2} s' | S_i | \frac{1}{2} s \rangle = 2 \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)} C_{\frac{1}{2}s'; 1i}^{\frac{1}{2}s'} = \sqrt{3} C_{\frac{1}{2}s'; 1i}^{\frac{1}{2}s'} \quad (5.20)$$

Ainsi notre amplitude vaut, en passant en coordonnées sphériques $-1, 0, +1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}} &= \frac{ie^2 e_q}{m_A^2} \sum_{i=0,\pm 1} \left[-\frac{E_{p_1}}{m_q} \sqrt{3} C_{\frac{1}{2}s_1; 1i}^{\frac{1}{2}-s_2} + \sum_{j=0,\pm 1} \frac{(\vec{p}_1)_i (\vec{p}_1)^j}{m_q(E_{p_1} + m_q)} \sqrt{3} C_{\frac{1}{2}s_1; 1j}^{\frac{1}{2}-s_2} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{E_l}{m_l} \sqrt{3} C_{\frac{1}{2}-s_2; 1i}^{\frac{1}{2}s_1} - \sum_{k=0,\pm 1} \frac{(\vec{P}_1)_i (\vec{P}_1)^k}{m_l(E_l + m_l)} \sqrt{3} C_{\frac{1}{2}-s_2; 1k}^{\frac{1}{2}s_1} \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.2.2 Pour une paire $q\bar{q}$ formant un méson

L'amplitude $\mathcal{M}'$ concerne des quarks libres d'impulsion et de projection de spin bien définies ; cependant en réalité la paire $q\bar{q}$ forme un méson.

Pour tenir compte de cet état lié plusieurs modifications sont nécessaires, il faut :

- pondérer $\mathcal{M}'$ par la fonction d'onde du méson $\phi(\frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2})$ et intégrer sur les impulsions des quarks. Une distribution $\delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ assure que l'on travaille bien dans le référentiel du centre de masse de A.
 - coupler correctement les spins s_1 et s_2 afin de redonner le spin total du méson à savoir S_A, σ_A .
 - coupler le spin S_A au moment orbital L_A pour redonner le moment cinétique total J_A .
- La fonction d'onde d'un méson A s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_A &= \sum_{s_1, s_2, \sigma_A, \mu_A} C_{1/2 \ s_1; 1/2 \ s_2}^{S_A \ \sigma_A} C_{L_A \ \mu_A; S_A \ \sigma_A}^{J_A \ M_A} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \phi\left(\frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}\right) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \\ &\quad B^\dagger(p_1, s_1) D^\dagger(p_2, s_2) |0\rangle \end{aligned} \quad (5.22)$$

où l'on a utilisé, pour exprimer la fonction d'onde, les opérateurs concernant les quarks constituants non relativistes, B et D . Pour faire le lien avec l'amplitude de Feynman, il faut repasser à b et d sans oublier la phase qui accompagne ce changement (E.69).

Ainsi l'amplitude de Feynman $\mathcal{M}_{A \rightarrow l\bar{l}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{A \rightarrow l\bar{l}}(P_A, P_1, P_2, M_A, S_1, S_2) &= \sum_{s_1, s_2, \sigma_A, \mu_A} (-1)^{\frac{1}{2}-s_2} C_{\frac{1}{2} s_1; \frac{1}{2} s_2}^{S_A \sigma_A} C_{L_A \mu_A; S_A \sigma_A}^{J_A M_A} \\ &\int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \phi\left(\frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}\right) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \times \mathcal{M}'_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}}(p_1, p_2, P_1, P_2, s_1, s_2, S_1, S_2) \end{aligned} \quad (5.23)$$

L'expression de la matrice T devient à présent, cf (5.6) :

$$\begin{aligned} T_{A \rightarrow l\bar{l}} &= \sum_{\substack{s_1, s_2, \\ \sigma_A, \mu_A}} (-1)^{\frac{1}{2}-s_2} C_{\frac{1}{2} s_1; \frac{1}{2} s_2}^{S_A \sigma_A} C_{L_A \mu_A; S_A \sigma_A}^{J_A M_A} \\ &\int d\vec{p}_1 \phi(\vec{p}_1) \frac{i m_q m_l}{(2\pi)^3 E_{p_1} E_l} \mathcal{M}'_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}} \\ &= \frac{-3e^2 e_q}{(2\pi)^3 m_A^2} \sum_{i, \sigma_A, \mu_A} C_{L_A \mu_A; S_A \sigma_A}^{J_A M_A} \left[\underbrace{\sum_{s_1, s_2} (-1)^{\frac{1}{2}-s_2} C_{\frac{1}{2} s_1; \frac{1}{2} s_2}^{S_A \sigma_A} C_{\frac{1}{2} s_1; 1i}^{\frac{1}{2}-s_2}}_{(-1)^{1+\sigma_A} \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{S_A, 1} \delta_{i, -\sigma_A}} \underbrace{\int d\vec{p}_1 \phi(\vec{p}_1)}_{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \phi(0) \delta_{L_A, 0} \delta_{\mu_A, 0}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_j \sum_{s_1, s_2} \underbrace{(-1)^{\frac{1}{2}-s_2} C_{\frac{1}{2} s_1; \frac{1}{2} s_2}^{S_A \sigma_A} C_{\frac{1}{2} s_1; 1j}^{\frac{1}{2}-s_2}}_{(-1)^{1+\sigma_A} \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{S_A, 1} \delta_{j, -\sigma_A}} \underbrace{\int d\vec{p}_1 \phi(\vec{p}_1) \frac{(\vec{p}_1)_i (\vec{p}_1)^j}{E_{p_1} (E_{p_1} + m_q)}}_{\frac{\sqrt{4\pi L_A}}{3} I_A(m_q) C_{L_A 0; 10}^{10} C_{L_A \mu_A; 1i}^{1-\sigma_A}} \right] \\ &\quad \times \left[C_{\frac{1}{2}-S_2; 1i}^{\frac{1}{2} S_1} - \sum_k \frac{(\vec{P}_1)_i (\vec{P}_1)^k}{E_l (E_l + m_l)} C_{\frac{1}{2}-S_2; 1k}^{\frac{1}{2} S_1} \right] \end{aligned} \quad (5.25)$$

où l'on a défini, pour une fonction d'onde notée $\phi(\vec{p}) = R_{n,L}(p) Y_{L,\mu}(\hat{p})$:

$$I_A(m_q) = \int_0^\infty dp_1 \frac{p_1^4 R_A(p_1)}{E_{p_1} (E_{p_1} + m_q)} \quad (5.26)$$

De plus, la sommation sur le coefficient de Clebsch-Gordan et la contribution des quarks donne :

$$\sum_{\sigma_A, \mu_A} C_{L_A \mu_A; S_A \sigma_A}^{J_A M_A} [quark] = \sum_{\sigma_A, \mu_A} C_{L_A \mu_A; S_A \sigma_A}^{J_A M_A} (-1)^{1+\sigma_A} \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{S_A, 1}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\delta_{M_A, -i} (2\pi)^{\frac{3}{2}} \phi(0) \delta_{L_A, 0} \delta_{\mu_A, 0} - \frac{\sqrt{4\pi} \widehat{L}_A}{3} I_A(m_q) C_{L_A 0; 10}^{10} C_{L_A \mu_A; 1i}^{1-\sigma_A} \right] \\
& = (-1)^{1-i} 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{3}} \delta_{S_A, 1} \delta_{J_A, 1} \delta_{M_A, -i} \underbrace{\left[\phi(0) \delta_{L_A, 0} - \frac{\sqrt{2} \widehat{L}_A}{6\pi} I_A(m_q) C_{L_A 0; 10}^{10} \right]}_{\tilde{\phi}(0)} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

d'où, il advient :

$$\begin{aligned}
T_{A \rightarrow l\bar{l}} &= (-1)^{M_A} \frac{\sqrt{6} e^2 e_q}{(2\pi)^{3/2} m_A^2} \delta_{S_A, 1} \delta_{J_A, 1} \tilde{\phi}(0) \left[C_{\frac{1}{2}-S_2; 1-M_A}^{\frac{1}{2}S_1} - \right. \\
& \quad \left. \sum_k \frac{(\vec{P}_1)_{M_A} (\vec{P}_1)^k}{E_l (E_l + m_l)} C_{\frac{1}{2}-S_2; 1k}^{\frac{1}{2}S_1} \right] \quad (5.28)
\end{aligned}$$

5.3 Largeur de désintégration

On rappelle l'expression de la largeur différentielle :

$$d\Gamma(A \rightarrow l\bar{l}) = 2\pi \sum_{M_A, S_1, S_2} \frac{|T_{A \rightarrow l\bar{l}}|^2}{2J_A + 1} \delta(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 - \underbrace{\vec{P}_A}_{=\vec{0}}) \delta(E_1 + E_2 - \underbrace{E_A}_{=m_A}) d\vec{P}_1 d\vec{P}_2 \quad (5.29)$$

La fonction $\delta(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$ permet d'intégrer sans difficulté sur l'impulsion $\vec{P}_2$.

$$\Gamma(A \rightarrow l\bar{l}) = \frac{2\pi}{2J_A + 1} \sum_{M_A, S_1, S_2} \int |T_{A \rightarrow l\bar{l}}|^2 \delta(2E_l - m_A) d\vec{P}_1 \quad (5.30)$$

Or :

$$d\vec{P}_1 = P_1^2 dP_1 d\Omega = E_l^2 \sqrt{1 - \frac{m_l^2}{E_l^2}} dE_l d\Omega \quad (5.31)$$

d'où, pour l'expression de la largeur :

$$\Gamma(A \rightarrow l\bar{l}) = \frac{2\pi}{2J_A + 1} \sum_{M_A, S_1, S_2} \int |T_{A \rightarrow l\bar{l}}|^2 E_l^2 \sqrt{1 - \frac{m_l^2}{E_l^2}} \delta(2E_l - m_A) dE_l d\Omega \quad (5.32)$$

Il nous faut maintenant l'expression complète de $|T_{A \rightarrow l\bar{l}}|^2$.

A partir de (5.28), on a :

$$\sum_{M_A, S_1, S_2} |T_{A \rightarrow l\bar{l}}|^2 = \frac{6 e^4 e_q^2}{(2\pi)^3 m_A^4} |\tilde{\phi}(0)|^2 \sum_{M_A, S_1, S_2} |t_l|^2 \delta_{J_A, 1} \delta_{S_A, 1} \quad (5.33)$$

où t_l désigne la contribution des leptons :

$$t_l = \left[C_{\frac{1}{2}-S_2; 1-M_A}^{\frac{1}{2}S_1} - \sum_k \frac{(\vec{P}_1)_{M_A} (\vec{P}_1)^k}{E_l(E_l + m_l)} C_{\frac{1}{2}-S_2; 1k}^{\frac{1}{2}S_1} \right] \quad (5.34)$$

$$\Rightarrow \sum_{M_A, S_1, S_2} |t_l|^2 = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{m_l^2}{2E_l^2} \right) \quad (5.35)$$

Il n'y a plus de dépendance angulaire dans notre expression, donc $\int d\Omega = 4\pi$. L'intégration sur E_l implique, du fait de la distribution delta de Dirac, le remplacement de E_l par $m_A/2$. On obtient donc pour la largeur :

$$\Gamma(A \rightarrow l\bar{l}) = \frac{16\pi \alpha^2 e_q^2}{3m_A^2} |\tilde{\phi}(0)|^2 \sqrt{1 - 4\frac{m_l^2}{m_A^2}} \left(1 + 2\frac{m_l^2}{m_A^2} \right) \delta_{S_A,1} \delta_{J_A,1} \quad (5.36)$$

Il nous reste encore à traiter les degrés de liberté de couleur et d'isospin que l'on a pu omettre jusqu'à présent compte tenu du fait que l'opérateur de transition électromagnétique ne modifie pas ceux-ci. L'amplitude intervenant dans l'écriture de Γ concerne un état de couleur $c\bar{c}$ et de saveur $f\bar{f}$. En fait l'amplitude est indépendante de la couleur et la dépendance en saveur au travers du terme m_q a finalement disparu. Par contre la saveur intervient encore dans la valeur de e_q et de la fonction d'onde (suivant les potentiels $q\bar{q}$ étudiés). Ainsi $\mathcal{M} = a_q e_q \phi_q(0) K$, où K regroupe la partie constante de l'amplitude et a_q désigne l'amplitude de probabilité de saveur q dans la fonction d'onde du méson. L'amplitude s'obtient en sommant sur toutes les composantes de saveur du méson. En n'oubliant pas la fonction d'onde singlet de couleur du méson, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum_{\text{saveur}} a_q e_q \tilde{\phi}_q(0) \frac{1}{\sqrt{3}} [K(r\bar{r}) + K(v\bar{v}) + K(b\bar{b})] \\ &= \sqrt{3}K \sum_{\text{saveur}} a_q e_q \tilde{\phi}_q(0) \end{aligned} \quad (5.37)$$

d'où l'expression définitive de la largeur :

$$\Rightarrow \Gamma_{A \rightarrow l\bar{l}} = \frac{16\pi\alpha^2}{m_A^2} \left| \sum_{\text{saveur}} a_q e_q \tilde{\phi}_q(0) \right|^2 \left[1 + \frac{2m_l^2}{m_A^2} \right] \sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{m_A^2}} \delta_{A,V} \quad (5.38)$$

dans laquelle $\delta_{A,V}$ signifie A méson vecteur c.-à-d. $\delta_{J_A,1} \delta_{S_A,1}$.

Pour retrouver l'expression de van Royen-Weisskopf, il faut prendre une impulsion nulle pour les quarks composant le méson. En faisant ceci dans l'expression (5.21), il ne nous reste du terme des quarks que la partie aboutissant à la fonction d'onde à l'origine, ce qui implique que la contribution $L_A = 2$ de la fonction d'onde disparaît. Ainsi, l'expression de la largeur dans le formalisme de van Royen-Weisskopf est :

$$\Gamma_{A \rightarrow l\bar{l}} = \frac{16\pi\alpha^2}{m_A^2} \left| \sum_{\text{saveur}} a_q e_q \phi_q(0) \right|^2 \left[1 + \frac{2m_l^2}{m_A^2} \right] \sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{m_A^2}} \delta_{A,V} \quad (5.39)$$

Cette expression diffère d'un facteur 3 par rapport à l'article de van Royen-Weisskopf du fait de l'ignorance à l'époque des degrés de liberté de couleur.

Ce qu'il y a de notable dans notre formalisme complet :

- On retrouve une expression similaire à celle obtenue dans le cadre de l'approximation de van Royen-Weisskopf mais avec la substitution $\phi(0) \rightarrow \tilde{\phi}(0)$.
- La répartition des impulsions des quarks au sein du méson contribue désormais au travers de l'intégrale $I_A(m_q)$. De plus, le remplacement dans cette intégrale de $m_q \rightarrow E_q$ tient compte d'une correction cinématique relativiste.
- Une différence capitale par rapport à l'approximation de van Royen-Weisskopf est l'existence d'une transition dans le cas $L_A = 2$. Ceci vient du fait de la présence du coefficient de Clebsch-Gordan $C_{L_A 0; 10}^{10}$. Maintenant les transitions du type 3D_1 comme le $\omega(1650) \rightarrow e^+e^-$ sont autorisées. Le fait que L_A soit pair est lié à la conservation de la parité.
- Il est intéressant de noter que, dans le cadre de l'approximation de van Royen-Weisskopf, seule la fonction d'onde à l'origine contribue au processus. Cela va donc être un test très fin de la qualité des fonctions d'onde. Test beaucoup plus sensible que pour les désintégrations fortes qui font intervenir toute la fonction d'onde au moyen d'une intégrale. Seule $\phi(0)$ intervient car ici on traite le cas de particules élémentaires ponctuelles donc la désintégration ne peut avoir lieu que si la distance relative entre les deux quarks vaut zéro. Toute l'information pertinente concernant le méson pour ce processus est contenu dans $\phi(0)$! Cela cesse d'être valable pour le cas de quarks constituant possédant une extension spatiale, pour le cas d'un vertex avec facteur de forme ou lorsque l'on prend en compte la répartition d'impulsion dans le méson. En effet, que ce soit pour la composante 3S_1 ou 3D_1 , les effets relativistes font intervenir toute la fonction d'onde au travers de $I_A(m_q)$ cf (5.26). La présence de ce terme correctif modifie également la valeur de la largeur de désintégration d'un état 3S_1 .
- Que nous apprend le terme cinématique $f(l, A) = [1 + \frac{2m_l^2}{m_A^2}] \sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{m_A^2}}$? Seuls les mésons lourds ($m_A > 2m_\tau = 3550$ MeV) peuvent se désintégrer en deux τ . Pour la plupart des mésons donc, seules des paires e^+e^- ou $\mu^+\mu^-$ pourront être créées. Dans ces cas, la plus grande valeur de $x = \frac{m_l^2}{m_A^2}$ est obtenue pour le méson ρ (le plus léger des mésons vecteurs) se désintégrant en $\mu^+\mu^-$ et vaut $x = 0.0189$. En faisant un développement limité, on obtient en première approximation $f(l, A) \approx 1 - \frac{2x}{3}$. Ainsi en remplaçant $f(l, A)$ par l'unité, on commet une erreur au pire de 1 %. Comme conséquence, la dépendance vis à vis du canal leptonique a disparu ; donc si l'énergie du centre de masse dépasse $2m_\mu$, il sera créé indifféremment des paires e^+e^- ou $\mu^+\mu^-$ avec un rapport de branchement quasiment l'unité.

5.4 Habillage électromagnétique des quarks

Comme on l'a déjà vu dans la première partie, les quarks sont entourés d'un nuage de paire $q\bar{q}$ leur conférant une étendue spatiale. Nous nous intéressons ici à la taille de la distribution de charge que possède le quark. Pour le potentiel DNR, les quarks possèdent déjà une extension spatiale de leur distribution de masse mais nous avons vu dans le chapitre sur les facteurs de forme que les tailles électromagnétique et massique sont deux choses séparées avec leurs paramètres propres. Nos quarks auparavant “nus” c.-à-d. ponctuels vont être habillés par une distribution de charge $\rho_q(\vec{r})$. On note $a^\dagger(\vec{r})$ l'opérateur de création d'un quark “nu” à la position $\vec{r}$, de même $A^\dagger(\vec{r})$ désigne la création d'un quark constituant “habillé” toujours au point $\vec{r}$. L'opérateur $A^\dagger$ se construit, tout comme pour la mise au point de potentiel avec taille finie des quarks : par convolution de l'opérateur du quark ponctuel, ici $a^\dagger$, avec la distribution de charge. Noter hypothèse de base repose sur la définition :

$$A^\dagger(\vec{r}) = \int d^3r' \rho_q(\vec{r} - \vec{r}') a^\dagger(\vec{r}'). \quad (5.40)$$

Pour une densité de distribution $\rho_q(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r})$, on retrouve le cas des quarks ponctuels $A^\dagger(\vec{r}) = a^\dagger(\vec{r})$.

Il faut noter que du fait de l'équation (5.40), les opérateurs $A^\dagger(\vec{r})$ ne vérifient pas les relations de commutations des opérateurs de création. Cependant, pour une distribution piquée, il s'agit d'une bonne approximation. Ceci est la conséquence de notre approche phénoménologique.

Qu'en est-il de ces opérateurs en représentation impulsion ? Par transformée de Fourier, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{A}^\dagger(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r A^\dagger(\vec{r}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \\ \tilde{a}^\dagger(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r a^\dagger(\vec{r}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \\ \tilde{\rho}_q(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r \rho_q(\vec{r}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

d'où il découle par propriétés des transformées de Fourier sur un produit de convolution :

$$\tilde{A}^\dagger(\vec{p}) = (2\pi)^{3/2} \tilde{\rho}_q(\vec{p}) \tilde{a}^\dagger(\vec{p}). \quad (5.42)$$

Maintenant, nous pouvons écrire les opérateurs de création d'un méson $d^\dagger$ pour un système $q\bar{q}$ ponctuels et d'un méson composé de $q\bar{q}$ habillés. Pour ne pas surcharger nos notations, nous sous-entendons les coefficients de couplage appropriés aux différents degrés de liberté.

$$\begin{aligned} d^\dagger &= \int d^3p \phi(\vec{p}) \tilde{a}^\dagger(\vec{p}) \tilde{b}^\dagger(-\vec{p}), \\ D^\dagger &= \int d^3p \phi(\vec{p}) \tilde{A}^\dagger(\vec{p}) \tilde{B}^\dagger(-\vec{p}), \end{aligned} \quad (5.43)$$

$b^\dagger$ et $B^\dagger$ désignent respectivement les opérateurs de création “nu” et “habillé” pour un antiquark. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} D^\dagger &= (2\pi)^3 \int d^3p \phi(\vec{p}) \tilde{\rho}_q(\vec{p}) \tilde{\rho}_{\bar{q}}(-\vec{p}) \tilde{a}^\dagger(\vec{p}) \tilde{b}^\dagger(-\vec{p}) \\ &= (2\pi)^3 \int d^3p \phi(\vec{p}) \tilde{\rho}_{q\bar{q}}(\vec{p}) \tilde{a}^\dagger(\vec{p}) \tilde{b}^\dagger(-\vec{p}), \end{aligned} \quad (5.44)$$

où l’on a posé :

$$\tilde{\rho}_{q\bar{q}}(\vec{p}) = \tilde{\rho}_q(\vec{p}) \tilde{\rho}_{\bar{q}}(-\vec{p}). \quad (5.45)$$

Dans le processus étudié, le quark et antiquark ont même saveur et donc même masse, de plus la distribution ne peut dépendre que de p^2 , ce qui nous permet de poser : $\tilde{\rho}_q(\vec{p}) = \tilde{\rho}_{\bar{q}}(-\vec{p})$, et donc :

$$\tilde{\rho}_{q\bar{q}}(p) = \tilde{\rho}_q(p)^2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\rho}_{q\bar{q}}(\vec{p}) = \tilde{\rho}_{q\bar{q}}(-\vec{p}) \quad (5.46)$$

ce qui fait apparaître :

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \int d^3p \phi(\vec{p}) \tilde{\rho}_{q\bar{q}}(\vec{p}) &= (2\pi)^3 \int d^3p \phi(\vec{p}) \tilde{\rho}_{q\bar{q}}(-\vec{p}) \\ &= (2\pi)^3 \int d^3p \phi(\vec{p}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \rho_{q\bar{q}}(\vec{r}) \\ &= (2\pi)^3 \int d^3r \Psi(\vec{r}) \rho_{q\bar{q}}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (5.47)$$

Cet opérateur $D^\dagger$ agissant sur le vide $|0\rangle$ crée les bi-spineurs u_q et $\bar{v}_{\bar{q}}$ associés au méson A . En ce qui concerne la désintégration du méson A en une paire $l\bar{l}$, seul le terme des quarks de l’équation (5.25) est modifié par le remplacement de $\phi(\vec{p})$ par $\phi(\vec{p}) \tilde{\rho}_{q\bar{q}}(\vec{p})$. Le calcul de la largeur est donc similaire à celui déjà effectué. Il suffit de faire les substitutions suivantes :

$$\Psi(0) \rightarrow (2\pi)^{3/2} \int d^3r \rho_{q\bar{q}}(\vec{r}) \Psi(\vec{r}), \quad (5.48)$$

$$I_A \equiv \int \frac{p^4 dp R_p(p)}{E_p(E_p + m_q)} \rightarrow (2\pi)^3 \int \frac{p^4 dp R_p(p)}{E_p(E_p + m_q)} \tilde{\rho}_{q\bar{q}}(p). \quad (5.49)$$

dans la formule (5.38), pour obtenir la largeur de désintégration d’un méson état lié de d’une paire $q\bar{q}$ possédant une distribution de charge $\rho_{q\bar{q}}$.

Du fait de l’habillage des quarks, même dans le cas d’une onde S , c’est toute la fonction d’onde qui est testée et plus seulement sa valeur à l’origine.

Même pour des fonctions d’ondes exprimées par une somme de gaussiennes, l’intégrale I_A doit être calculée de façon numérique. Pour notre part, nous avons employé une méthode d’intégration de Gauss-Laguerre.

5.4.1 Densité de charge gaussienne

Nous avons retenu une distribution gaussienne pour étudier notre habillage phénoménologique des quarks. Soit :

$$\rho_q(\vec{r}) = \frac{\sigma_q^3}{\pi^{3/2}} e^{-\sigma_q^2 r^2}. \quad (5.50)$$

qui dans la limite $\sigma_q \rightarrow \infty$, correspondant à une taille nulle pour le quark, redonne comme convenu une fonction delta de Dirac pour la distribution $\rho_q(\vec{r}) \rightarrow \delta^{(3)}(\vec{r})$. La transformée de Fourier de la densité gaussienne s'écrit :

$$\tilde{\rho}_q(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{4\sigma_q^2}}. \quad (5.51)$$

En tenant compte du fait que $\sigma_q = \sigma_{\bar{q}}$, on obtient :

$$\sigma_{q\bar{q}} = \frac{\sigma_q \sigma_{\bar{q}}}{\sqrt{\sigma_q^2 + \sigma_{\bar{q}}^2}} = \frac{\sigma_q}{\sqrt{2}} \quad (5.52)$$

Ceci aboutit à une densité quark-antiquark s'écrivant :

$$\tilde{\rho}_{q\bar{q}}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-\frac{p^2}{2\sigma_q^2}} \quad \Rightarrow \quad \rho_{q\bar{q}}(\vec{r}) = \frac{\sigma_q^3}{(2\pi)^3} e^{-\frac{\sigma_q^2 r^2}{2}} \quad (5.53)$$

5.5 Les résultats

Dans nos tableaux de résultats (5.1)-(5.2) ne sont présentées que les transitions expérimentales qui peuvent être décrites dans notre théorie. Sont donc exclues les mésons présentant des mélanges de saveur comme les K , B ... Cependant, nous avons inclus, à titre de prédictions, nos résultats pour des transitions ne faisant pas l'objet de mesure précise. Nous rappelons que pour les quarks "nus", nos résultats ne font intervenir aucun paramètre libre (hormis ceux du potentiel déterminés pour reproduire au mieux le spectre d'énergie).

Dernière précision : tout comme pour les désintégrations fortes, les valeurs expérimentales des masses des mésons sont employées pour le calcul de l'espace de phase.

Tout d'abord, on remarque que les résultats pour les canaux e^-e^+ et $\mu^-\mu^+$ diffèrent très peu comme attendu. Des différences de largeurs sont notables pour les voies de désintégrations en $\tau^+\tau^-$, du fait de la masse importante du τ . L'importance de cette masse $m_\tau = 1.777$ GeV fait que le canal $\tau^+\tau^-$ est fermé pour les mésons légers (ρ , ω et ϕ).

Concernant les différents canaux finaux, nos calculs donnent toujours des largeurs plus grandes pour les leptons les plus légers alors qu'expérimentalement c'est le contraire qui se produit. Il se peut qu'une interaction dans l'état final, effet qui n'a été pas pris en compte dans notre calcul, soit responsable de ce comportement.

Regardons les deux premières colonnes de valeurs des tableaux (5.1)-(5.2) pour les résultats obtenus à partir de la formule de van Royen-Weisskopf. Nous ne commentons pas les

transitions 3D_1 qui donnent dans ce cas des largeurs nulles puisque la fonction d'onde à l'origine est nulle. Pour le potentiel DNR, les largeurs sont systématiquement trop grandes, avec des différences théorie-expérience pouvant atteindre un facteur 3, indiquant une valeur de $\phi(0)$ trop importante. Néanmoins ce désaccord diminue pour les mésons lourds. Une valeur de la fonction à l'origine trop grande signifie une portée trop courte pour le potentiel d'interaction $q\bar{q}$, car $\phi(0)$ diminue si la largeur du puit de potentiel augmente. En ce qui concerne le potentiel χ QM, il existe une différence importante entre les mésons légers qui donnent des largeurs trop faibles et les mésons lourds aboutissant à des résultats trop grands. Ceci s'explique par le fait que la force spin-spin est répulsive pour $S=1$, cas de tous les mésons étudiés ici. Ceci est également vrai pour les autres potentiels, cependant dans le cas du potentiel χ QM, la paramétrisation de ce dernier fait que, la force spin-spin qui est proportionnelle à $1/m_q$ (donc importante pour les mésons légers) donne lieu à un creux très accentué à l'origine de la fonction d'onde. Si l'on compare globalement les deux potentiels sur leurs résultats obtenus pour les mésons lourds, on note une supériorité du potentiel DNR.

Concernant $\phi(0)$, notre décomposition de la fonction d'onde en une somme de N gaussiennes, bien que nous permettant d'obtenir des résultats analytiques, présente ici un revers. Si le potentiel possède une singularité en $\frac{1}{r}$, cela se concrétise par une pente à l'origine de la fonction d'onde non nulle. Or il nous est impossible de reproduire ceci par des fonctions gaussiennes ! Néanmoins on peut contrôler graphiquement que la valeur obtenue par la somme des gaussiennes ne se différencie que très peu de la valeur exacte.

Qu'en est-il des résultats obtenus à partir de notre formule "relativiste" (5.38) ?

Pour les mésons lourds, la modification est négative pour les deux potentiels, ce qui a pour effet de toujours rapprocher les valeurs théoriques des mesures expérimentales. Du point de vue ordre de grandeur, ces modifications varient entre 10 et 30 % de la valeur obtenue par application de la formule de van Royen-Weisskopf. Pour le potentiel DNR, cette conclusion reste vraie pour les mésons légers contrairement au potentiel χ QM pour lequel la contribution est positive et donc augmente la valeur trop faible obtenue pour la formule van Royen-Weisskopf. Ainsi, quelle que soit la valeur obtenue pour la contribution de la fonction d'onde à l'origine, les corrections relativistes vont toujours dans le sens d'un rapprochement théorie-expérience. En plus de cet encourageant résultat, un autre point positif est que nous obtenons des largeurs de désintégrations non nulles pour les ondes D , contrairement au cas de van Royen-Weisskopf. Cependant pour ces cas, les résultats théoriques sont bien trop faibles pour reproduire les mesures expérimentales. Toute la physique n'est donc pas incluse dans ce formalisme.

Pour l'application de la formule avec habillage des quarks, ils nous faut déterminer les paramètres de la distribution pour chacun des potentiels. La largeur caractéristique σ de la distribution est prise égale à :

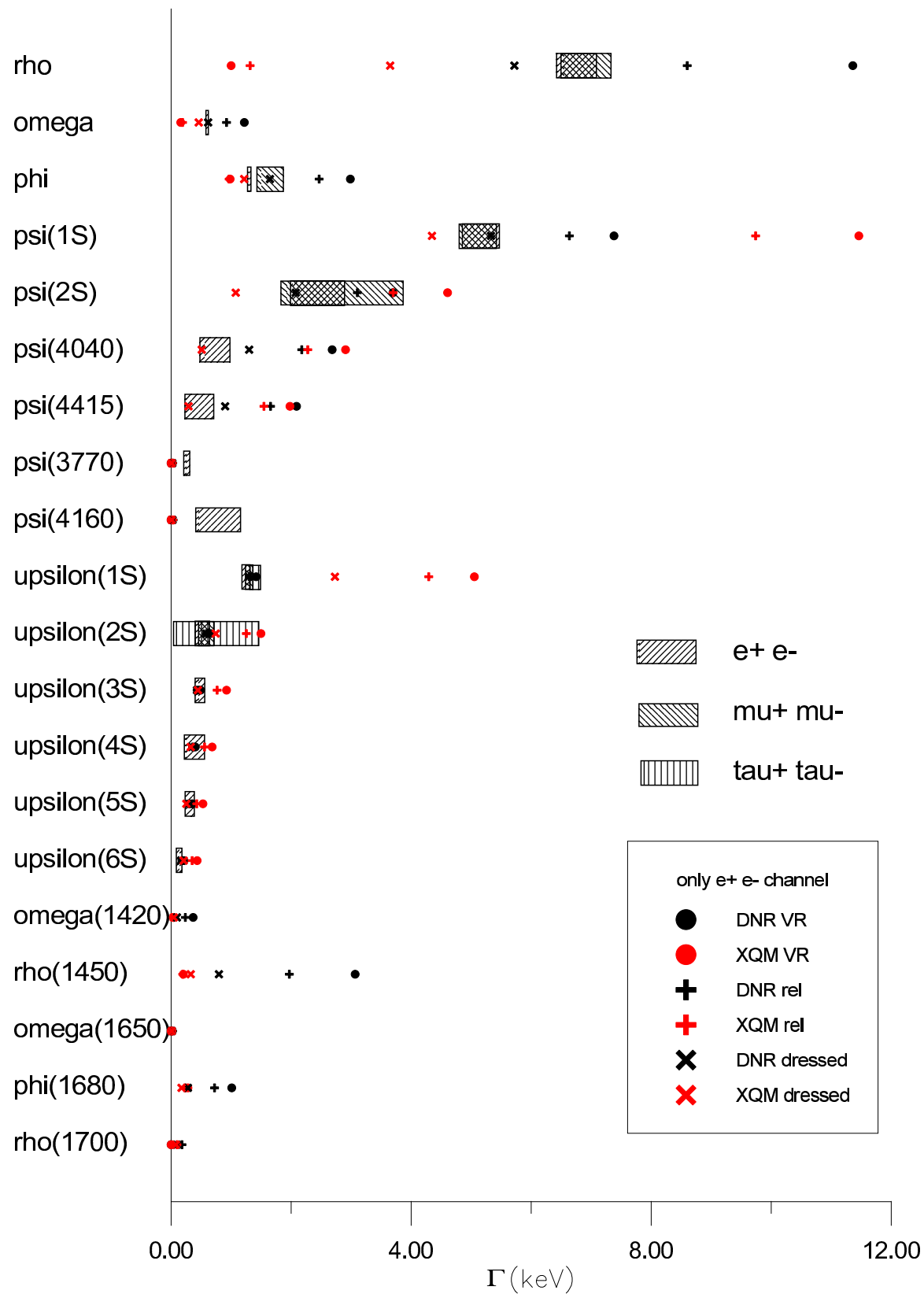
$$\sigma_q = \sigma_0 e^{m_q/m_0}, \quad (5.54)$$

où m_q est la masse constituante du quark composant le méson. Les paramètres σ_0 et m_0 sont choisis pour reproduire au mieux les transitions pour lesquelles on dispose de données expérimentales. Ainsi, on obtient $(\sigma_0, m_0) = (0.6 \text{ GeV}, 1.25 \text{ GeV})$ pour le potentiel DNR et $(0.7 \text{ GeV}, 2.11 \text{ GeV})$ pour le potentiel χ QM.

Pour DNR, l'habillage a pour conséquence de toujours diminuer la valeur obtenue à partir de la formule (5.38) prenant en compte les effets relativistes. Cela améliore la plupart des résultats. Les rapprochements théorie-expérience les plus importants ont lieu pour les mésons légers.

Concernant les mésons ρ et ω , il est intéressant de regarder leur rapport de largeur. Pour des mésons dégénérés et possédant donc la même fonction d'onde, comme c'est le cas pour le potentiel DNR, ce rapport doit valoir 9 du fait de la différence de saveur entre le $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$ et le $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$. En pratique pour DNR, bien que les mésons soient dégénérés leur différence de masse expérimentale (qui entre en compte dans l'espace de phase) fait que le rapport, qui expérimentalement est proche de 11, n'est pas exactement 9. Pour le χ QM, comme le potentiel dépend de l'isospin, les fonctions d'onde du ρ et du ω ne sont pas identiques. Le rapport obtenu sur les résultats théoriques est plus petit que 9 et donc moins bon que celui obtenu pour DNR.

Pour les mésons lourds donnant de faibles largeurs < 1 keV, les modifications apportées par l'habillage sont très faibles. Pour le potentiel χ QM, il faut différencier à nouveau les secteurs léger et lourd qui ont des comportements différents vis à vis de l'habillage des quarks. Pour les mésons légers, les largeurs trop faibles auparavant, sont augmentées de façon importante se rapprochant des mesures expérimentales. Pour les mésons lourds, le contraire se produit : les largeurs trop grandes obtenues de notre formule "relativiste" sont diminuées et se rapprochent de l'expérience. Le seul point négatif à l'habillage des quarks est la diminution des largeurs pour les ondes D , or les valeurs provenant de notre formule avec correction relativiste sont déjà trop faibles. Mais à part ce désagrément, compte tenu du fait que seulement deux paramètres libres sont employés, la taille finie des quarks apporte une amélioration non négligeable aux résultats (cf figure 5.2).

FIG. 5.2 – Largeurs de désintégration pour les potentiels χ QM et DNR en keV.

TAB. 5.1 – Largeurs de désintégration obtenues pour les potentiels χ QM et DNR, en keV. Les résultats expérimentaux sont issus de [6]. “V. R.” signifie application de la formule originale de van Royen-Weisskopf, “rel.” indique l’utilisation de la formule (5.38) incluant des effets relativistes et des effets d’impulsion non nulle pour les quarks à l’intérieur des mésons. Enfin, “habillé” indique les résultats obtenus lorsque la distribution gaussienne est utilisée pour habiller les quarks en plus des effets correctifs précédents. Les 5 dernières transitions, marquées d’une *, possèdent une largeur théorique $\Gamma_{\mu\mu} \simeq \Gamma_{ee}$, mais les transitions en $\mu^+\mu^-$ n’ont pas été observées expérimentalement.

transition	DNR V. R.	χ QM V. R.	DNR rel.	χ QM rel.	DNR habillé	χ QM habillé	Exp.
$\rho \rightarrow e^+e^-$	11.360	0.998	8.601	1.315	5.719	3.648	6.75 ± 0.33
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	11.335	0.996	8.582	1.312	5.707	3.640	6.91 ± 0.42
$\omega \rightarrow e^+e^-$	1.217	0.160	0.922	0.187	0.613	0.460	0.60 ± 0.02
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	1.215	0.160	0.920	0.187	0.612	0.459	<1.52
$\phi \rightarrow e^+e^-$	2.984	0.982	2.464	0.964	1.643	1.214	1.30 ± 0.03
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	2.982	0.981	2.462	0.963	1.642	1.213	1.65 ± 0.22
$J/\psi(1S) \rightarrow e^+e^-$	7.381	11.461	6.634	9.740	5.330	4.346	5.16 ± 0.31
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	7.381	11.461	6.634	9.740	5.330	4.346	5.11 ± 0.31
$\psi(2S) \rightarrow e^+e^-$	3.696	4.603	3.101	3.697	2.074	1.075	2.44 ± 0.45
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	3.696	4.603	3.101	3.697	2.074	1.075	2.85 ± 1.02
$\rightarrow \tau^+\tau^-$	1.436	1.788	1.204	1.436	0.806	0.418	non vu
$\psi(4040) \rightarrow e^+e^-$	2.681	2.904	2.175	2.273	1.300	0.507	0.73 ± 0.25
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	2.681	2.904	2.175	2.273	1.300	0.507	vu
$\rightarrow \tau^+\tau^-$	1.768	1.915	1.434	1.500	0.858	0.334	non vu
$\psi(4415) \rightarrow e^+e^-$	2.087	1.979	1.653	1.543	0.900	0.287	0.47 ± 0.24
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	2.087	1.979	1.653	1.543	0.900	0.287	non vu
$\rightarrow \tau^+\tau^-$	1.640	1.554	1.298	1.212	0.707	0.225	non vu
$\psi(3770) \rightarrow e^+e^-$	0	0	0.023	0.019	0.017	0.009	0.26 ± 0.05
pur $^3D_1 \rightarrow \mu^+\mu^-$	0	0	0.023	0.019	0.017	0.009	non vu
$\rightarrow \tau^+\tau^-$	0	0	0.011	0.009	0.008	0.004	non vu
$\psi(4160) \rightarrow e^+e^-$	0	0	0.032	0.023	0.021	0.009	0.78 ± 0.37
pur $^3D_1 \rightarrow \mu^+\mu^-$	0	0	0.032	0.023	0.021	0.009	non vu
$\rightarrow \tau^+\tau^-$	0	0	0.023	0.016	0.015	0.006	non vu
$\Upsilon(1S) \rightarrow e^+e^-$	1.415	5.052	1.299	4.291	1.287	2.727	1.25 ± 0.07
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	1.415	5.052	1.299	4.291	1.287	2.727	1.30 ± 0.06
$\rightarrow \tau^+\tau^-$	1.404	5.012	1.288	4.257	1.277	2.706	1.40 ± 0.09
$\Upsilon(2S) \rightarrow e^+e^-$	0.654	1.496	0.588	1.252	0.583	0.742	0.52 ± 0.12
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	0.654	1.496	0.588	1.252	0.583	0.742	0.58 ± 0.13
$\rightarrow \tau^+\tau^-$	0.650	1.487	0.585	1.244	0.580	0.737	0.75 ± 0.71
$\Upsilon(3S) \rightarrow e^+e^-$	0.488	0.922	0.432	0.765	0.428	0.446	vu
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	0.488	0.922	0.432	0.765	0.428	0.446	0.48 ± 0.08
$\rightarrow \tau^+\tau^-$	0.485	0.917	0.430	0.761	0.426	0.444	non vu

TAB. 5.2 – Suite de la table (5.1).

transition	DNR V. R.	χ QM V. R.	DNR rel.	χ QM rel.	DNR habillé	χ QM habillé	Exp.
$\Upsilon(4S) \rightarrow e^+e^-$	0.402	0.682	0.353	0.556	0.350	0.326	0.39 ± 0.17
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	0.402	0.682	0.353	0.556	0.350	0.326	non vu
$\rightarrow \tau^+\tau^-$	0.400	0.679	0.352	0.553	0.348	0.324	non vu
$\Upsilon(5S) \rightarrow e^+e^-$	0.351	0.528	0.306	0.424	0.303	0.252	0.31 ± 0.08
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	0.351	0.528	0.306	0.424	0.303	0.252	non vu
$\rightarrow \tau^+\tau^-$	0.349	0.526	0.305	0.422	0.301	0.251	non vu
$\Upsilon(6S) \rightarrow e^+e^-$	0.208	0.432	0.179	0.347	0.161	0.207	0.13 ± 0.05
$\rightarrow \mu^+\mu^-$	0.208	0.432	0.179	0.347	0.161	0.207	non vu
$\rightarrow \tau^+\tau^-$	0.207	0.430	0.178	0.346	0.160	0.206	non vu
$\omega(1420) \rightarrow e^+e^-$	0.363	0.039	0.233	0.033	0.094	0.041	vu *
$\rho(1450) \rightarrow e^+e^-$	3.063	0.202	1.970	0.192	0.794	0.326	vu *
$\omega(1650) \rightarrow e^+e^-$	0	0	0.021	0.012	0.011	0.009	vu *
$\phi(1680) \rightarrow e^+e^-$	1.010	0.280	0.722	0.231	0.278	0.172	vu *
$\rho(1700) \rightarrow e^+e^-$	0	0	0.179	0.094	0.091	0.077	vu *

Chapitre 6

Désexcitation par émission d'un photon réel

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la désexcitation radiative d'un méson par émission d'un photon réel, c.-à-d. à la transition :

$$A \rightarrow B + \gamma \quad (6.1)$$

Nos buts sont multiples :

- tester la validité des nombreuses approximations habituellement employées :
 - approximation dipolaire pour les transitions électriques E1 (variation d'une unité pour le moment cinétique orbital). Cela correspond, à un facteur près, au remplacement de l'opérateur $\vec{p}$ par le commutateur $[\vec{r}, H_{int}]$ où H_{int} désigne le hamiltonien d'interaction électromagnétique.
 - approximation des grandes longueurs d'onde (GLO) qui revient à négliger le mouvement de recul du méson B.
 - utilisation d'un espace de phase non relativiste ou mixte.Ces approximations sont des reminiscences de la physique nucléaire ou atomique.
- Poursuivre la caractérisation de nos potentiels d'interaction $q\bar{q}$ à travers l'utilisation des fonctions d'onde des mésons employés ici.
- Développer le formalisme pour aller au delà de l'approximation des grandes longueurs d'onde.

Nous étudions toutes les transitions pour lesquelles on dispose de mesures expérimentales. Celles-ci peuvent être classées en deux catégories :

- Les transitions qui peuvent être reproduites dans l'approximation des grandes longueurs d'onde c.-à-d. M_1 (de type magnétique avec variation d'une unité du spin mais parité inchangée) telles que, par exemple : $^3S_1 \rightarrow ^1S_0$, $^1S_0 \rightarrow ^3S_1$, et $E1 : ^3P_J \rightarrow ^3S_1$, $^3S_1 \rightarrow ^3P_J$, $^1P_1 \rightarrow ^1S_0 \dots$

- Les transitions qui n'existent pas dans le cadre des GLO, telles que : $^3P_J \rightarrow ^1S_0$, $^3S_1 \rightarrow ^3S_1$ et $^1P_1 \rightarrow ^3S_1$.

De nombreux travaux ont déjà été effectués sur le sujet des transitions radiatives. On peut citer les modèles de dominance vectorielle [26, 27], le modèle des sacs de quarks du MIT [28, 29, 30], les calculs basés sur le modèle des quarks non relativistes [31, 32, 33] et relativistes [34, 35], ou encore ceux issus d'une équation de Dirac pour un système à deux corps [36, 37, 38]. Cependant même dans les travaux les plus complets, il y a toujours une approximation ou une contradiction dans les calculs, notamment un mauvais traitement du centre de masse dans les systèmes relativistes.

6.1 L'opérateur de transition électromagnétique

Nous traitons par l'approche classique ce calcul comme il est d'usage en physique nucléaire, mais il est également possible de dériver les équations à partir de la théorie des champs, selon la philosophie adoptée dans le chapitre précédent.

En l'absence de champ électromagnétique, l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V\right) \Psi \quad (6.2)$$

avec H hamiltonien d'interaction, V potentiel d'interaction ressenti par le système. Maintenant, pour faire apparaître le spin, il faut utiliser la propriété suivante des matrices de Pauli :

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) \quad \Rightarrow \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2 \quad (6.3)$$

Pour un système soumis à un champ électromagnétique défini par le potentiel vecteur $\vec{A}$ et le potentiel électrostatique φ , il faut modifier l'équation (6.2) de manière à conserver l'invariance de jauge. Pour cela, le couplage minimal consiste au remplacement de l'impulsion $\vec{p}$ par $\vec{p} - e\vec{A}$. Ainsi :

$$H = \frac{(\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}))^2}{2m} + V + e\varphi \quad (6.4)$$

En se limitant au premier ordre en A , on a :

$$\frac{(\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}))^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left[\vec{p}^2 - e \left(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{p} + \vec{p} \wedge \vec{A}) \right) \right] \quad (6.5)$$

Attention, il ne faut pas par précipitation faire commuter $\vec{A}$ et $\vec{p}$. En effet, $\vec{A}(\vec{x})$ nous renseigne sur le champ de photon ressenti par la particule au point $\vec{x}$, et comme x et p_x ne commutent pas il en va de même de $\vec{A}(\vec{x})$ avec $\vec{p}$.

Maintenant en faisant agir $\vec{A} \wedge \vec{p} + \vec{p} \wedge \vec{A}$ sur une fonction d'onde test ϕ , on arrive à :

$$(\vec{A} \wedge \vec{p} + \vec{p} \wedge \vec{A})\phi = \frac{1}{i}(\vec{A} \wedge \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \wedge \vec{A})\phi \quad (6.6)$$

$$= \frac{1}{i}(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})\phi = \frac{1}{i}\vec{B}\phi \quad (6.7)$$

où on a fait apparaître le champ magnétique $\vec{B}$, rotationnel du potentiel vecteur $\vec{A}$. Dans l'équation (6.7), l'opérateur de différentiation ∇ n'agit que sur le potentiel vecteur. Donc l'équation (6.4) peut se réécrire :

$$H = H_{\text{libre}} + H_{\text{interaction}} \quad (6.8)$$

$$= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V - \frac{e}{2m}(\vec{A} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{A}) - \frac{e}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e\varphi \quad (6.9)$$

Dans notre cas, le champ électrostatique extérieur est nul : $\varphi = 0$ et donc :

$$H_{\text{interaction}} = -\frac{e}{2m}(\vec{A} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{A}) - \frac{e}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (6.10)$$

Dans le formalisme de la seconde quantification, avec les opérateurs de création $a^\dagger$ et d'annihilation a d'un photon, le champ électromagnétique s'écrit :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda=\pm 1} \sqrt{\frac{1}{2\omega_k \epsilon_0 V}} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \left[a(\vec{k}, \lambda) e^{i\phi} + a^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{-i\phi} \right] \quad (6.11)$$

où l'on a choisi un volume de quantification V . On peut se placer en jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ et donc $\vec{k} \perp \vec{\epsilon}$, $A^0 = 0$. $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$ est le vecteur de polarisation pris réel et $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t$ avec $\omega_k = k$. Les champs électrique et magnétique se dérivent sans difficulté des relations :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \sum_{\vec{k}, \lambda=\pm 1} \sqrt{\frac{1}{2\omega_k \epsilon_0 V}} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) i\omega_k \left[-a(\vec{k}, \lambda) e^{i\phi} + a^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{-i\phi} \right] \quad (6.12)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \sum_{\vec{k}, \lambda=\pm 1} \sqrt{\frac{1}{2\omega_k \epsilon_0 V}} i\vec{k} \wedge \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \left[a(\vec{k}, \lambda) e^{i\phi} - a^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{-i\phi} \right] \quad (6.13)$$

6.2 Élément de matrice $\mathcal{M}_{A \rightarrow B\gamma}$

On s'intéresse à la désexcitation d'un méson par émission d'un photon. Il nous faut donc calculer $\langle B\gamma | H_{\text{int.}} | A \rangle$ avec pour un méson, l'hamiltonien d'interaction basé sur (6.10) :

$$H_{\text{int.}} = -e \sum_{i=1}^2 \left(\frac{e_i}{2m_i} (\vec{A} \cdot \vec{p}_i + \vec{p}_i \cdot \vec{A}) + \frac{e_i}{2m} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{B} \right) \quad (6.14)$$

où l'indice 1 réfère au quark et 2 à l'antiquark. Attention, ci-dessus $\vec{\sigma}_i$ désigne la matrice de Pauli agissant sur la particule i et non la i ème composante de la matrice $\vec{\sigma}$!

e désigne la charge du proton et e_i celle de la particule i en unité de e .

Pour le terme $\vec{p}_i \cdot \vec{A}$, il faut se rappeler qu'il va agir sur la fonction d'onde de l'état initial. On a donc :

$$\vec{p}_i \cdot \vec{A} \Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{i} \vec{\nabla}_i (\vec{A} \Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2)) \quad (6.15)$$

$$= \frac{1}{i} \left(\underbrace{(\vec{\nabla}_i \vec{A})}_{=0 \text{ Jauge}} \Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \vec{A} \vec{\nabla}_i \Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right) \quad (6.16)$$

$$= \frac{1}{i} \vec{A} \vec{\nabla}_i \Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{p}_i + \vec{p}_i \cdot \vec{A} = 2 \vec{A} \cdot \vec{p}_i \quad (6.18)$$

Il n'existe pas de photon dans l'état initial du processus étudié, ce qui implique que pour $H_{int}|A\rangle = H_{int} b^\dagger d^\dagger |0\rangle$ la composante en $a(\vec{k}, \lambda)$ de l'opérateur H_{int} va donner une contribution nulle du fait de : $a(\vec{k}, \lambda)|0\rangle = 0$. Ceci combiné aux équations (6.13)-(6.18) permet de réécrire le hamiltonien (6.14) sous la forme :

$$H_{int} = -e \sum_{i=1}^2 \frac{e_i}{2m_i} \sum_{\vec{k}, \lambda=\pm 1} \sqrt{\frac{1}{2\omega_k \epsilon_0 V}} a^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{-i\phi} \left(2\vec{\epsilon} \cdot \vec{p}_i - i\vec{\sigma}_i \cdot (\vec{k} \wedge \vec{\epsilon}) \right) \quad (6.19)$$

Par la suite, on n'écrit plus l'opérateur $a^\dagger(\vec{k}, \lambda)$ qui va disparaître avec l'opérateur $a(\vec{k}', \lambda')$ de l'état final imposant $\vec{k} = \vec{k}'$ et $\lambda = \lambda'$.

On fait apparaître la constante de structure fine $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$, ainsi le facteur multiplicatif se réécrit :

$$\frac{e}{2m_i} \sqrt{\frac{1}{2\omega_k \epsilon_0 V}} = \sqrt{\frac{2\pi \alpha}{V \omega_k}} \frac{1}{2m_i} \quad (6.20)$$

, nous permettant de réécrire le hamiltonien sous la forme :

$$H_{int} = - \sum_{i=1}^2 \sum_{\vec{k}, \lambda=\pm 1} \sqrt{\frac{2\pi \alpha}{V \omega_k}} \frac{1}{2m_i} e^{-i\phi} \vec{\epsilon} \cdot \left[2\vec{p}_i - i(\sigma_i \wedge \vec{k}) \right] \quad (6.21)$$

Dans l'exponentielle $e^{-i\phi}$, on ne tient plus compte de la dépendance temporelle car celle-ci va, lors de l'intégration sur le temps, aboutir simplement à la conservation de l'énergie entre états initial et final. En conclusion :

$$H_{int} = - \sqrt{\frac{2\pi \alpha}{V \omega_k}} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{M} \quad (6.22)$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^2 \frac{e_i}{2m_i} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} (2\vec{p}_i - i\vec{\sigma}_i \wedge \vec{k}) \quad (6.23)$$

6.2.1 Etats initial et final

La fonction d'onde spatiale d'un méson contenue dans le volume de quantification V s'écrit :

$$\Psi_{JM\vec{R}}(\vec{r}, \vec{R}) = \frac{e^{-i\vec{K} \cdot \vec{R}}}{\sqrt{V}} \phi_{JM}(\vec{r}) \quad (6.24)$$

qui est normée si $\phi_{JM}(\vec{r})$ l'est. Pour la transformée de Fourier, introduisons les impulsions relative $\vec{p} = \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{(m_1 + m_2)}$ et totale $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

$$\phi_{JM}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}} \phi_{JM}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (6.25)$$

$$\phi_{JM}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \phi_{JM}(\vec{p}) d\vec{p} \quad (6.26)$$

$$(6.27)$$

On étudie la désexcitation dans le référentiel du centre de masse de A, d'où $\vec{K}_A = \vec{0}$. Ainsi les fonctions d'onde s'écrivent :

$$\Psi_i = \Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 V}} \int e^{i\vec{p}_a \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \phi_A(\vec{p}_a) d\vec{p}_a \quad (6.28)$$

$$\Psi_f = \Psi_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{e^{i\vec{K}_B \cdot \vec{R}}}{\sqrt{(2\pi)^3 V}} \int e^{i\vec{p}_b \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \phi_B(\vec{p}_b) d\vec{p}_b \quad (6.29)$$

Maintenant écrivons

$$\langle B\gamma | H_{int.} | A \rangle = \mathcal{M}_{A \rightarrow B\gamma} = -\sqrt{\frac{2\pi \alpha}{V \omega_k}} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{M}_{A \rightarrow B} \quad (6.30)$$

Cependant, la fonction d'onde comprend également une partie de couleur, d'isospin et de spin. L'émission d'un photon ne change pas l'état de couleur du méson l'ayant émis, on a donc l'unité comme opérateur de couleur et son produit scalaire entre état initial et final vaut donc 1. En ce qui concerne l'isospin, celui-ci n'intervient qu'au travers de la charge e_i et est traité en (6.2.4). Le traitement de la partie spin-espace dépend du terme regardé dans l'élément de matrice M .

6.2.2 Emission par le quark

Regardons dans un premier temps, l'émission du photon par le quark, soit $\vec{M}_{A \rightarrow B}^{(1)}$. Ce processus est schématisé par le diagramme (1) de la figure (6.1).

$$\begin{aligned} \vec{M}_{A \rightarrow B}^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^3 V} \frac{e_1}{2m_1} & \int e^{-i\vec{K}_B \cdot \vec{R}} e^{-i\vec{p}_b \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \phi_B^*(\vec{p}_b) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} (2\vec{p}_i - i\vec{\sigma}_i \wedge \vec{k}) \\ & \times e^{i\vec{p}_a \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \phi_A(\vec{p}_a) d\vec{p}_a d\vec{p}_b d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \end{aligned} \quad (6.31)$$

Les étapes suivantes consistent au changement de variables $(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow (\vec{r}, \vec{R})$ (positions relative et du centre de masse). L'intégration sur $\vec{R}$ donne lieu au symbole delta de Kronecker $\delta_{\vec{K}_B, -\vec{k}}$, une seconde intégrale sur la variable $\vec{r}$ aboutit à une fonction $\delta(\vec{p}_a - \vec{p}_b - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{k})$ qui nous permet d'intégrer immédiatement sur $\vec{p}_b$, donc $\vec{p}_a = \vec{p} = \vec{p}_b + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{k}$. On aboutit à :

$$\vec{M}_{A \rightarrow B}^{(1)} = \int d^3p \phi_B^*(\vec{p} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{k}) (2\vec{p} - i\vec{\sigma}_1 \wedge \vec{k}) \frac{e_1}{2m_1} \phi_A(\vec{p}) \quad (6.32)$$

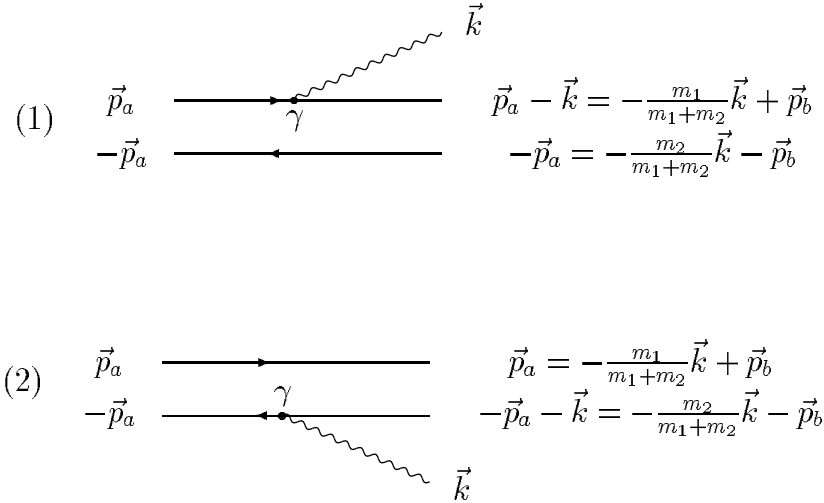


FIG. 6.1 – Représentation diagrammatique des processus élémentaires d'émission d'un photon par le quark (schéma (1)) et par l'antiquark (schéma (2)). Les valeurs d'impulsion sont indiquées dans le référentiel du centre de masse du méson initial A.

6.2.3 Emission par l'antiquark

Pour l'émission du photon par l'antiquark, on procède de façon identique pour aboutir à :

$$\vec{M}_{A \rightarrow B}^{(2)} = \int d^3p \phi_B^* \left(\vec{p} + \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{k} \right) (-2\vec{p} - i\vec{\sigma}_2 \wedge \vec{k}) \frac{e_2}{2m_2} \phi_A(\vec{p}) \quad (6.33)$$

Ce processus est schématisé par le diagramme (2) de la figure (6.1). Ainsi pour le processus total, c.-à-d. lorsque l'on étudie la désexcitation d'un méson sans préciser quelle particule est responsable de l'émission du photon, l'élément de matrice $\vec{M}_{A \rightarrow B}$ de l'équation (6.30) vaut :

$$\vec{M}_{A \rightarrow B} = \delta_{\vec{K}_B, -\vec{k}} [\vec{M}_{A \rightarrow B}^{(1)} + \vec{M}_{A \rightarrow B}^{(2)}] \quad (6.34)$$

6.2.4 Opérateur charge

Puisque nous travaillons dans le formalisme de l'isospin, les charges e_1 et e_2 de nos expressions doivent être comprises comme les opérateurs charge électromagnétique en unité de e (charge du proton) pris entre les états d'isospin initial (I_a, M_{I_a}) et final (I_b, M_{I_b}) . Ces produits scalaires valent, en fonction de l'isospin t_i :

$$\begin{aligned} \langle e_i \rangle &= e_i \delta_{I_a I_b} \delta_{M_{I_a} M_{I_b}} & t_i &= 0 \\ \langle e_1 \rangle &= \delta_{M_{I_a} M_{I_b}} \left[\frac{1}{6} \delta_{I_a I_b} + (-1)^{I_a+t_2-1/2} \sqrt{3(I_a+1/2)} \right. \\ &\quad \left. C_{I_a M_{I_a}; 10}^{I_b M_{I_b}} \begin{Bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ t_2 & I_a & I_b \end{Bmatrix} \right] & t_1 &= 1/2 \\ \langle e_2 \rangle &= \delta_{M_{I_a} M_{I_b}} \left[-\frac{1}{6} \delta_{I_a I_b} + (-1)^{I_b+t_1-1/2} \sqrt{3(I_a+1/2)} \right] \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$C_{I_a M_{I_a}; 10}^{I_b M_{I_b}} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1/2 & 1/2 \\ t_1 & I_a & I_b \end{array} \right\} \quad t_2 = 1/2$$

6.3 Expression de la largeur

Maintenant que nous avons obtenu l'expression de $\vec{M}_{A \rightarrow B}$, nous devons calculer le produit $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{M}_{A \rightarrow B}$. Pour cela, il nous faut préciser le vecteur polarisation du photon $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$. En choisissant $\vec{k}$ le long de l'axe O_z , du fait de notre choix de jauge ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$), cela implique $(\vec{\epsilon})_z = 0$. Il nous faut ensuite deux autres vecteurs pour former un trièdre droit. On pourrait prendre $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ mais le choix des coordonnées sphériques simplifie la suite de notre calcul. On retient donc :

$$\vec{e}_{+1} = -\frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}; \quad \vec{e}_0 = \vec{e}_z; \quad \vec{e}_{-1} = -\frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \quad (6.36)$$

Pour notre photon transverse, qui possède deux polarisations possibles $\lambda = \pm 1$, il nous faut définir $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda = +1)$ et $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda = -1)$. On a comme possibilité commode :

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) = \delta_{\mu, \lambda} \quad (6.37)$$

Ainsi

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{M}_{A \rightarrow B} = \sum_{\mu=0, \pm 1} \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \cdot (M_{A \rightarrow B})_\mu = \sum_{\mu=0, \pm 1} \delta_{\mu, \lambda} \cdot (M_{A \rightarrow B})_\mu = (M_{A \rightarrow B})_\lambda$$

L'expression de la largeur de désintégration est donnée par la règle d'or de Fermi :

$$\Gamma(A \rightarrow B\gamma) = 2\pi \sum_{\text{états finaux}} \int dE \delta(E_f - E_i) |\langle B\gamma | H_{int.} | A \rangle|^2 \quad (6.38)$$

La sommation sur les états finaux fait appel à la densité d'états. Du fait de notre choix d'une boîte de quantification d'arête L et de volume V et de condition périodique sur les bords, le moment k est quantifié :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad \text{avec } n_i \text{ entier positif ou négatif} \quad (6.39)$$

Un état occupe donc le volume élémentaire $8\pi^3/V$ et donc la densité d'état par unité d'énergie est :

$$\frac{dN}{dE} = \frac{E^2}{2\pi^2} \cdot V \quad (6.40)$$

La largeur peut être écrite sous la forme générale :

$$\Gamma(A \rightarrow B\gamma) = \Phi(E_0) V X(E_0) \quad (6.41)$$

où $\Phi(E_0)$ est l'espace de phase calculé pour la valeur d'énergie E_0 satisfaisant la fonction $\delta(E_f - E_i)$. Le volume de quantification V annule celui du dénominateur de (6.30) pour donner une expression de Γ indépendante de celui-ci.

$$X = \frac{1}{\hat{j}_A^2} \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{M_A, M_B} |\langle B\gamma | H_{int.} | A \rangle|^2 \quad (6.42)$$

où l'on a moyenné sur la polarisation initiale M_A et sommé sur les polarisations finales M_B et λ pour pouvoir comparer aux données expérimentales [6].

L'étape suivante consiste à choisir quel type d'espace de phase utiliser.

6.3.1 Espace de phase relativiste

Pour une expression relativiste de l'énergie et en vertu de l'égalité $K_B = k$, on a :

$$\begin{aligned} \delta(E_B + E - m_A) &= \delta(\sqrt{m_B^2 + E^2} + E - m_A) = \delta(f(E)) \\ &= \frac{1}{f'(E_0)} \delta(E - E_0) = \frac{m_A}{E_B(E_0)} \delta(E - E_0) \end{aligned} \quad (6.43)$$

avec :

$$E_B(E_0) = \frac{m_A^2 + m_B^2}{2m_A} \quad (6.44)$$

Pour une expression relativiste, on obtient :

$$\Phi(E_0)^{rel} = \frac{E_0^2 E_B(E_0)}{\pi m_A}; \quad E_0^{rel} = \frac{m_A^2 - m_B^2}{2m_A} \quad (6.45)$$

De même que pour nos précédents calculs de désintégrations fortes, nous utilisons toujours les valeurs expérimentales des masses des mésons. C'est un impératif pour une bonne détermination de l'impulsion du photon.

6.3.2 Espace de phase non relativiste

Si l'on se situe dans un domaine en énergie non relativiste, c.-à-d. une énergie du photon très faible en comparaison des masses des mésons : $E_0 \ll m_A, m_B$, puisque l'énergie du photon est faible, les masses des mésons sont très proches alors E_0 de (6.44) devient :

$$E_0 = (m_A - m_B) \frac{m_A + m_B}{2m_A} \approx m_A - m_B \quad (6.46)$$

de même :

$$\frac{E_B(E_0)}{m_A} = \frac{m_A^2 + m_B^2}{2m_A^2} \approx \frac{2m_A^2}{2m_A^2} = 1 \quad (6.47)$$

Pour un espace de phase non relativiste, on a :

$$\Phi(E_0)^{nonrel.} = \frac{E_0^2}{\pi}; \quad E_0^{nonrel.} = m_A - m_B \quad (6.48)$$

6.3.3 Espace de phase mixte

On trouve parfois dans la littérature [37] l'utilisation d'un espace de phase "mixte" c.-à-d. basé sur une impulsion relativiste mais une expression de $\Phi(E_0)$ non relativiste.

$$\Phi(E_0) = \frac{E_0^2}{\pi}; \quad E_0 = \frac{m_A^2 - m_B^2}{2m_A} \quad (6.49)$$

6.4 Approximation des grandes longueurs d'onde

Cette approximation consiste à supposer $k \cdot R \ll 1$ où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde émis par le photon et R une longueur caractéristique du système (c.-à-d. la fonction d'onde $\Psi(r)$ du système est importante si $r \ll R$). Pour les mésons, la dimension caractéristique R peut valoir jusqu'à 10 GeV^{-1} et pour les photons émis lors des transitions radiatives, on a k de l'ordre de la centaine de MeV , donc $k \cdot R \approx 1$. On voit que si cette approximation est valable en physique atomique ou nucléaire, cela ne semble pas être le cas pour les mésons. Nous allons néanmoins l'étudier et comparer les résultats obtenus dans ce cas avec ceux du cas général. Pour les GLO, on pose $k = 0$ dans l'argument de la fonction d'onde du méson B, ce qui revient à négliger le terme de recul (ou encore à remplacer $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ par 1 dans (6.23)).

On désigne par $\vec{\mathcal{E}}$ la partie électrique (c.-à-d. le terme en $\vec{p}$) de l'élément de matrice et par $\vec{\mathcal{M}}$ la partie magnétique ($\vec{\sigma} \wedge \vec{k}$).

6.4.1 Terme électrique $\vec{\mathcal{E}}$

Il vaut pour le quark (mais est de forme semblable pour l'antiquark) :

$$\vec{\mathcal{E}}_{A \rightarrow B}^{(1)} = \frac{\langle e_1 \rangle}{2m_1} \int d^3p \phi_B^*(\vec{p}) 2\vec{p} \phi_A(\vec{p}) \quad (6.50)$$

Le terme électrique ne contient pas de dépendance en spin, on a donc $\langle \chi_{S_B} | \chi_{S_A} \rangle = \delta_{S_B, S_A}$. D'un point de vue de la parité π , le vecteur $\vec{p}$ est un opérateur impair on a donc obligatoirement $\pi_A \neq \pi_B$. En résumé, le terme électrique contribue au processus uniquement si on a $S_A = S_B$ et $\pi_A \neq \pi_B$, ce qui du point de vue des transitions expérimentales observées correspond principalement aux types : $^3S_1 \leftrightarrow ^3P_J$ et $^1S_0 \leftrightarrow ^1P_1$. Pour les transitions magnétiques, on va voir plus loin que pour contribuer on doit avoir $L_A = L_B$. Donc les deux parties de l'opérateur, pour les GLO, ne contribuent jamais ensemble dans une transition, c'est pourquoi on peut parler de transition électrique ou magnétique.

En tenant compte du terme du quark et de celui de l'antiquark, on a pour la partie électrique, en explicitant les couplages des nombres quantiques :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{A \rightarrow B} &= \delta_{\vec{K}_B, -\vec{k}} \left[\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \right] \sum_{\mu_A, \sigma_A; \mu_B, \sigma_B} C_{L_A, \mu_A; S_A, \sigma_A}^{J_A, M_A} C_{L_B, \mu_B; S_B, \sigma_B}^{J_B, M_B} \langle \chi_{S_B} | \chi_{S_A} \rangle \\ &\times \int d^3p \phi_B^*(\vec{p}) \vec{p} \phi_A(\vec{p}) \end{aligned} \quad (6.51)$$

Les fonctions d'onde sont prises sous forme d'une somme de gaussiennes :

$$\phi_A(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{nb \text{ gauss.}} c_i^A e^{-\frac{A_i}{2} p^2} \mathcal{Y}_{L_A \mu_A}$$

Pour la composante covariante μ , on utilise la propriété suivante :

$$(\vec{p})_\mu = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} p Y_{1\mu}(\hat{p}) \quad (6.52)$$

Evaluons l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_\mu &= \int d^3p \phi_B^*(\vec{p}) (\vec{p})_\mu \phi_A(\vec{p}) = \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{i,j} c_i^A c_j^B \int dp p^{3+L_A+L_B} e^{-\frac{A_i+B_j}{2} p^2} \int d\Omega_p Y_{L_B \mu_B}^*(\hat{p}) Y_{1\mu}(\hat{p}) Y_{L_A \mu_A}(\hat{p}) \end{aligned} \quad (6.53)$$

La partie angulaire vaut :

$$\int d\Omega_p Y_{L_B \mu_B}^*(\hat{p}) Y_{1\mu}(\hat{p}) Y_{L_A \mu_A}(\hat{p}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\hat{L}_A}{\hat{L}_B} C_{1,0;L_A,0}^{L_B,0} C_{1,\mu;L_A,\mu_A}^{L_B,\mu_B} \quad (6.54)$$

tandis que la partie radiale est reliée à la fonction $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$, d'où :

$$\int dp p^{3+L_A+L_B} e^{-\frac{A_i+B_j}{2} p^2} = \int dp p^{3+L_A+L_B} e^{-D_{ij} p^2} = \frac{\Gamma(\frac{L_A+L_B+4}{2})}{2D_{ij}^{\frac{L_A+L_B+4}{2}}} \quad (6.55)$$

avec $D_{ij} = \frac{A_i+B_j}{2}$.

Ainsi :

$$I_\mu = \sum_{i,j} c_i^A c_j^B \frac{\hat{L}_A}{\hat{L}_B} C_{1,0;L_A,0}^{L_B,0} C_{1,\mu;L_A,\mu_A}^{L_B,\mu_B} \frac{\Gamma(\frac{L_A+L_B+4}{2})}{2D_{ij}^{\frac{L_A+L_B+4}{2}}} \quad (6.56)$$

L'étape suivante consiste à sommer les coefficients de Clebsch-Gordan d'abord sur l'indice σ_B puis sur μ_A, μ_B, σ_A , soit :

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_A, \mu_B, \sigma_A} C_{L_A, \mu_A; S_A, \sigma_A}^{J_A, M_A} C_{L_B, \mu_B; S_B, \sigma_B}^{J_B, M_B} C_{1, \mu; L_A, \mu_A}^{L_B, \mu_B} = \\ (-1)^{L_A+S_A+J_A} \hat{J}_A \hat{L}_B C_{J_A, M_A; 1, \mu}^{J_B, M_B} \left\{ \begin{matrix} L_A & S_A & J_A \\ J_B & 1 & L_B \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (6.57)$$

et au final :

$$\begin{aligned} (\vec{\mathcal{E}}_{A \rightarrow B})_\mu &= \delta_{\vec{K}_B, -\vec{k}} \delta_{S_B, S_A} \left[\frac{\langle e_1 \rangle}{2m_1} - \frac{\langle e_2 \rangle}{2m_2} \right] (-1)^{L_A+S_A+J_A} \hat{J}_A \hat{L}_A \\ &C_{1,0;L_A,0}^{L_B,0} C_{J_A, M_A; 1, \mu}^{J_B, M_B} \left\{ \begin{matrix} L_A & S_A & J_A \\ J_B & 1 & L_B \end{matrix} \right\} \sum_{i,j} c_i^A c_j^B \frac{\Gamma(\frac{L_A+L_B+4}{2})}{2D_{ij}^{\frac{L_A+L_B+4}{2}}} \end{aligned} \quad (6.58)$$

Il nous reste à calculer le terme $X(E)$ de l'équation (6.42) pour avoir l'expression de la largeur. Avec notre choix de vecteur de polarisation, nous avons vu que $\vec{\epsilon} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{A \rightarrow B} = (\vec{\mathcal{E}}_{A \rightarrow B})_\lambda$. Seul le coefficient $C_{J_A, M_A; 1, \lambda}^{J_B, M_B}$ est concerné par la sommation sur M_A, M_B, λ .

$$\frac{1}{\hat{J}_A^2} \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{M_A, M_B} |C_{J_A, M_A; 1, \lambda}^{J_B, M_B}|^2 = \frac{\hat{J}_B^2}{3\hat{J}_A^2} \sum_{\lambda=\pm 1} 1 = \frac{2\hat{J}_B^2}{3\hat{J}_A^2} \quad (6.59)$$

Finalement, la largeur de désintégration pour le terme électrique, dans le cadre de l'approximation des grandes longueurs d'onde et pour un espace de phase relativiste, est :

$$\begin{aligned} \Gamma = & \delta_{S_A, S_B} \frac{\alpha}{3} \frac{E_0 E_B}{m_A} \left[\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \right]^2 \hat{L}_A^2 \hat{J}_B^2 (C_{1,0; L_A, 0}^{L_B, 0})^2 \\ & \left\{ \begin{array}{ccc} L_A & S_A & J_A \\ J_B & 1 & L_B \end{array} \right\}^2 \Gamma \left(\frac{L_A + L_B + 4}{2} \right)^2 \left(\sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B}{D_{ij}^{\frac{L_A + L_B + 4}{2}}} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.60)$$

Il faut noter que la formule de la largeur est complètement analytique.

Les formules particularisées pour certaines valeurs des nombres quantiques sont présentées en (F.1).

6.4.2 Approximation dipolaire

Aussi appelée approximation de Siegert, elle consiste à remplacer, pour le terme électrique, l'opérateur $\vec{p}$ par le commutateur de $\vec{r}$ avec le hamiltonien. En effet pour un système de masse réduite μ , on a :

$$\left[\frac{p^2}{2\mu}, \vec{r} \right] = \frac{\vec{p}}{2\mu} \cdot \underbrace{[\vec{p}, \vec{r}]}_{-i} + [\vec{p}, \vec{r}] \cdot \frac{\vec{p}}{2\mu} = -i \frac{\vec{p}}{\mu} \quad (6.61)$$

$$\Rightarrow \langle B | \vec{p} | A \rangle = -\frac{\mu}{i} \langle B | \left[\frac{p^2}{2\mu}, \vec{r} \right] | A \rangle \quad (6.62)$$

L'opérateur $V(r)$ potentiel d'interaction commutant avec la position nous permet d'écrire :

$$\left[\frac{p^2}{2\mu}, \vec{r} \right] = \left[\frac{p^2}{2\mu} + V(r), \vec{r} \right] = [H_{int.}, \vec{r}] \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle B | \vec{p} | A \rangle &= -\frac{\mu}{i} \langle B | [H_{int.}, \vec{r}] | A \rangle = -\frac{\mu}{i} \langle B | E_l^B \vec{r} - \vec{r} E_l^A | A \rangle \\ &= -\frac{\mu}{i} (E_l^B - E_l^A) \langle B | \vec{r} | A \rangle \end{aligned} \quad (6.64)$$

où l'hermiticité du hamiltonien a été employée et E_l désigne l'énergie de liaison (car correspond au mouvement relatif des particules). Pour faire apparaître l'énergie totale du système, il nous faut ajouter les masses des constituants.

$$E_l^B - E_l^A = E_l^B + m_1 + m_2 - (E_l^A + m_1 + m_2) = m_B - m_A \quad (6.65)$$

car la saveur des quarks est inchangée par l'opérateur électromagnétique.

$$\Rightarrow \quad \langle B|\vec{p}|A \rangle = \frac{\mu}{i}(m_A - m_B)\langle B|\vec{r}|A \rangle \quad (6.66)$$

L'approximation provient du fait que l'on remplace m_A et m_B par les valeurs expérimentales des masses, cela suppose que notre description des mésons est exacte (ce n'est pas le cas puisque l'on a pas l'égalité entre les masses théoriques et expérimentales). Il faut noter que l'équation (6.63) cesse d'être valable dans le cas d'un potentiel dépendant des vitesses.

Le calcul de $\langle B|\vec{r}|A \rangle$ est identique à celui de $\langle B|\vec{p}|A \rangle$ mais dans la représentation r . Nos fonctions d'onde s'écrivent comme une somme de gaussiennes aussi bien dans l'espace des impulsions que dans l'espace des r .

$$\phi_{nL\mu}(\vec{r}) = \sum_i^{nb \text{ gauss.}} d_i e^{-B_i r^2} \mathcal{Y}_{L\mu}(\vec{r}); \quad \tilde{\phi}_{nL\mu}(\vec{p}) = \sum_i^{nb \text{ gauss.}} c_i e^{-A_i p^2/2} \mathcal{Y}_{L\mu}(\vec{p}) \quad (6.67)$$

Dans nos formules du terme électrique des GLO, on remplace donc $c_i \rightarrow d_i$ et $A_i \rightarrow 2B_i$, sans oublier le facteur $\frac{\mu}{i}$.

Une approximation supplémentaire est possible pour les systèmes non relativistes, le remplacement de $m_A - m_B$ par k_0 .

$$\Gamma = \delta_{S_A, S_B} \frac{\alpha E_0 E_B}{3 m_A} \left[\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \right]^2 \hat{L}_A^2 \hat{J}_B^2 \mu^2 \times \begin{matrix} (m_A - m_B)^2 \\ \text{ou} \\ E_0^2 \end{matrix} \\ (C_{1,0;L_A,0}^{L_B,0})^2 \left\{ \begin{matrix} L_A & S_A & J_A \\ J_B & 1 & L_B \end{matrix} \right\}^2 \Gamma\left(\frac{L_A + L_B + 4}{2}\right)^2 \left(\sum_{i,j} \frac{d_i^A d_j^B}{(2\tilde{D}_{ij})^{\frac{L_A + L_B + 4}{2}}} \right)^2 \quad (6.68)$$

6.4.3 Terme magnétique $\vec{\mathcal{M}}$

Il s'écrit, en tenant compte des contributions du quark et de l'antiquark :

$$\vec{M}_{A \rightarrow B} = -i \delta_{\vec{K}_B, -\vec{k}} \int d^3 p \phi_B^*(\vec{p}) \phi_A(\vec{p}) \sum_{\mu_A, \sigma_A; \mu_B, \sigma_B} C_{L_A, \mu_A; S_A, \sigma_A}^{J_A, M_A} C_{L_B, \mu_B; S_B, \sigma_B}^{J_B, M_B} \\ \left[\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} (\vec{\sigma}_1 \wedge \vec{k}) \sum_{s_1, s_2, s'_1} C_{\frac{1}{2}, s_1; \frac{1}{2}, s_2}^{S_A, \sigma_A} C_{\frac{1}{2}, s'_1; \frac{1}{2}, s_2}^{S_B, \sigma_B} + \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} (\vec{\sigma}_2 \wedge \vec{k}) \sum_{s_1, s_2, s'_2} C_{\frac{1}{2}, s_1; \frac{1}{2}, s_2}^{S_A, \sigma_A} C_{\frac{1}{2}, s'_2; \frac{1}{2}, s_2}^{S_B, \sigma_B} \right] \quad (6.69)$$

L'intégrale est proportionnelle à δ_{L_A, L_B} mais n'impose aucune condition sur le spin. Ainsi pour que le terme magnétique intervienne il faut que $L_A = L_B$. Expérimentalement les transitions magnétiques sont principalement du type : $^3S_1 \leftrightarrow ^1S_0$.

Pour l'intégrale, on a :

$$\int d^3 p \phi_B^*(\vec{p}) \phi_A(\vec{p}) = \sum_{i,j} c_i^A c_j^B \int dp p^{2+L_A+L_B} e^{-D_{ij} p^2} \int d\Omega_p Y_{L_B \mu_B}^*(\hat{p}) Y_{L_A \mu_A}(\hat{p})$$

$$= \sum_{i,j} c_i^A c_j^B \frac{\Gamma(\frac{L_A+L_B+3}{2})}{2D_{ij}^{\frac{L_A+L_B+3}{2}}} \delta_{L_A,L_B} \delta_{\mu_A,\mu_B} \quad (6.70)$$

pour la composante covariante μ :

$$(-i\vec{\sigma}_1 \wedge \vec{k})_\mu = -\sqrt{2} \sum_{\nu,\rho} C_{1,\nu;1,\rho}^{1,\mu} (\vec{\sigma}_1)_\nu (\vec{k})_\rho \quad (6.71)$$

et en appliquant entre les états de spin initial $|\frac{1}{2}, s_1\rangle$ et final $\langle\frac{1}{2}, s'_1|$ du quark, l'opérateur de spin σ_1 agissant sur le quark uniquement (opérateur unité pour l'antiquark); on a :

$$\langle\frac{1}{2}, s'_1|(\vec{\sigma}_1)_\nu|\frac{1}{2}, s_1\rangle = \sqrt{3} C_{\frac{1}{2}, s_1; 1, \nu}^{\frac{1}{2}, s'_1} \quad (6.72)$$

d'où pour nouvelle écriture de (6.71) :

$$(-i\vec{\sigma}_1 \wedge \vec{k})_\mu = -\sqrt{8\pi} \sum_{\nu,\rho} C_{1,\nu;1,\rho}^{1,\mu} C_{\frac{1}{2}, s_1; 1, \nu}^{\frac{1}{2}, s'_1} \mathcal{Y}_{1,\rho}(\vec{k}) \quad (6.73)$$

Pour la partie émission par le quark, on a donc comme somme de coefficients de Clebsch-Gordan :

$$\sum_{nb\ mag.} C_{\frac{1}{2}, s_1; \frac{1}{2}, s_2}^{S_A, \sigma_A} C_{\frac{1}{2}, s'_1; \frac{1}{2}, s_2}^{S_B, \sigma_B} C_{\frac{1}{2}, s_1; 1, \nu}^{\frac{1}{2}, s'_1} C_{1,\nu;1,\rho}^{1,\mu} C_{L_A, \mu_A; S_A, \sigma_A}^{J_A, M_A} C_{L_B, \mu_B; S_B, \sigma_B}^{J_B, M_B} \delta_{L_A, L_B} \delta_{\mu_A, \mu_B} \quad (6.74)$$

or :

$$\sum_{s_1, s_2, s'_1} C_{\frac{1}{2}, s_1; \frac{1}{2}, s_2}^{S_A, \sigma_A} C_{\frac{1}{2}, s'_1; \frac{1}{2}, s_2}^{S_B, \sigma_B} C_{\frac{1}{2}, s_1; 1, \nu}^{\frac{1}{2}, s'_1} = (-1)^{S_A} \sqrt{2} \hat{J}_A C_{S_A, \sigma_A; 1, \nu}^{S_B, \sigma_B} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_A \\ S_B & 1 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \quad (6.75)$$

qui en réinjectant dans (6.74) fait apparaître la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu, \rho, \mu_A, \sigma_A, \sigma_B} C_{L_A, \mu_A; S_A, \sigma_A}^{J_A, M_A} C_{L_B, \mu_B; S_B, \sigma_B}^{J_B, M_B} C_{S_A, \sigma_A; 1, \nu}^{S_B, \sigma_B} = \\ (-1)^{S_A+L_A+J_B+1} \hat{J}_A \hat{S}_B C_{J_A, M_A; 1, \nu}^{J_B, M_B} \left\{ \begin{matrix} S_A & L_A & J_A \\ J_B & 1 & S_B \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (6.76)$$

Ainsi, (6.74) vaut :

$$(-1)^{L_A+J_B+1} \sqrt{2} \hat{J}_A \hat{S}_A \hat{S}_B \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_A \\ S_B & 1 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} S_A & L_A & J_A \\ J_B & 1 & S_B \end{matrix} \right\} \sum_{\nu, \rho} C_{1,\nu;1,\rho}^{1,\mu} C_{J_A, M_A; 1, \nu}^{J_B, M_B} \quad (6.77)$$

Ce qui donne finalement pour la contribution du quark :

$$\begin{aligned} (\vec{M}_{A \rightarrow B}^{(1)})_\mu = \delta_{\vec{K}_B, -\vec{k}} \delta_{L_A, L_B} \frac{\langle e_1 \rangle}{2m_1} (-1)^{L_A+J_B} \sqrt{4\pi} \hat{J}_A \hat{S}_A \hat{S}_B \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_A \\ S_B & 1 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} S_A & L_A & J_A \\ J_B & 1 & S_B \end{matrix} \right\} \sum_{i,j} c_i^A c_j^B \frac{\Gamma(\frac{L_A+L_B+3}{2})}{2D_{ij}^{\frac{L_A+L_B+3}{2}}} \sum_{\nu, \rho} C_{1,\nu;1,\rho}^{1,\mu} C_{J_A, M_A; 1, \nu}^{J_B, M_B} \mathcal{Y}_{1,\rho}(\vec{k}) \end{aligned} \quad (6.78)$$

Le terme magnétique pour l'émission du photon par l'antiquark relève de calculs similaires et au total le terme magnétique s'écrit pour les GLO :

$$\begin{aligned}
 (\vec{M}_{A \rightarrow B})_\mu &= \delta_{\vec{K}_B, -\vec{k}} \delta_{L_A, L_B} (-1)^{L_A + J_B} \sqrt{4\pi} \hat{J}_A \hat{S}_A \hat{S}_B \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_A \\ S_B & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} S_A & L_A & J_A \\ J_B & 1 & S_B \end{array} \right\} \\
 &\quad \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{2m_1} + (-1)^{S_A + S_B} \frac{\langle e_2 \rangle}{2m_2} \right) \sum_{i,j} c_i^A c_j^B \frac{\Gamma(\frac{L_A + L_B + 3}{2})}{2D_{ij}^{\frac{L_A + L_B + 3}{2}}} \sum_{\nu, \rho} C_{1, \nu; 1, \rho}^{1, \mu} C_{J_A, M_A; 1, \nu}^{J_B, M_B} \mathcal{Y}_{1, \rho}(\vec{k})
 \end{aligned} \tag{6.79}$$

On rappelle que l'on a orienté $\vec{k}$ suivant l'axe z donc $\mathcal{Y}_{1, \rho}(\vec{k}) = \delta_{0, \rho} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} k$, ce qui donne :

$$\sum_{\nu, \rho} C_{1, \nu; 1, \rho}^{1, \lambda} C_{J_A, M_A; 1, \nu}^{J_B, M_B} \mathcal{Y}_{1, \rho}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} k C_{1, \lambda; 1, 0}^{1, \lambda} C_{J_A, M_A; 1, \lambda}^{J_B, M_B} \tag{6.80}$$

Ce sont les seuls termes pour le calcul X(E) de (6.42) dépendants des indices de sommations M_A, M_B, λ .

$$\frac{1}{\hat{J}_A^2} \sum_{\lambda=\pm 1} (C_{1, \lambda; 1, 0}^{1, \lambda})^2 \underbrace{\sum_{M_A, M_B} (C_{J_A, M_A; 1, \lambda}^{J_B, M_B})^2}_{\frac{\hat{J}_B^2}{3}} = \frac{\hat{J}_B^2}{3\hat{J}_A^2} \sum_{\lambda=\pm 1} \underbrace{(C_{1, \lambda; 1, 0}^{1, \lambda})^2}_{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\hat{J}_B^2}{3\hat{J}_A^2} \tag{6.81}$$

Au final, l'expression de la largeur de désintégration pour le terme magnétique dans le cadre de l'approximation des grandes longueurs d'onde et pour un espace de phase relativiste est :

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \delta_{L_A, L_B} \frac{\alpha E_0^3 E_B}{2 m_A} \left[\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} + (-1)^{S_A + S_B} \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \right]^2 \hat{S}_A^2 \hat{S}_B^2 \hat{J}_B^2 \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_A \\ S_B & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right\}^2 \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{ccc} S_A & L_A & J_A \\ J_B & 1 & S_B \end{array} \right\}^2 \Gamma\left(\frac{L_A + L_B + 3}{2}\right)^2 \left(\sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B}{D_{ij}^{\frac{L_A + L_B + 3}{2}}} \right)^2
 \end{aligned} \tag{6.82}$$

Là encore, notre expression de la largeur est analytique.

Les formules particularisées pour certaines valeurs des nombres quantiques sont présentées en (F.1).

6.5 Cas général

Cette partie vise à calculer la largeur de désintégration en tenant compte du terme de recul. Du fait de notre choix d'écriture des fonctions d'onde comme somme de gaussiennes, le calcul est complètement analytique même dans ce cas complètement général. On va faire le schéma du calcul dans le cas d'une gaussienne de largeur A pour le méson initial et de largeur B pour le final. On fera la somme sur les amplitudes ultérieurement.

Pour la contribution due au quark, il apparaît dans l'intégrale des gaussiennes les arguments (cf (6.32)) : $\frac{A}{2}\vec{p}^2 + \frac{B}{2}(\vec{p} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{k})^2$. Le terme croisé en $\vec{p} \cdot \vec{k}$ est gênant ; pour s'en débarrasser on fait un changement de variables $\vec{p} \rightarrow \vec{q} = \vec{p} - x\vec{k}$ et on utilise la liberté laissée à x pour diagonaliser la forme quadratique, argument de l'exponentielle. Explicitement on prend $x = \frac{m_2 B}{(m_1+m_2)(A+B)}$. Dans le terme électrique, l'opérateur $2\vec{p}$ devient $2(\vec{q} + x\vec{k})$ mais notre choix de jauge $\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$ fait que l'on peut laisser de côté le terme $2x\vec{k}$. En faisant de même pour la partie due à l'antiquark, on obtient les expressions suivantes :

$$\vec{M}_{A \rightarrow B}^{(1)} = \int d\vec{p} \phi_B^*(\vec{p} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{k})(2\vec{p} - i\vec{\sigma}_1 \wedge \vec{k}) \frac{e_1}{2m_1} \phi_A(\vec{p}) = \frac{\langle e_1 \rangle}{2m_1} \times \int d\vec{q} e^{-Dq^2 - F^{(1)}k^2} \left[\mathcal{Y}_{L_B}^*(\vec{q} - z^{(1)}\vec{k}) \chi_{S_B} \right]_{J_B, M_B} [2\vec{q} - i\vec{\sigma}_1 \wedge \vec{k}] \left[\mathcal{Y}_{L_A}(\vec{q} + x^{(1)}\vec{k}) \chi_{S_A} \right]_{J_A, M_A} \quad (6.83)$$

$$\vec{M}_{A \rightarrow B}^{(2)} = \int d\vec{p} \phi_B^*(\vec{p} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{k})(-2\vec{p} - i\vec{\sigma}_2 \wedge \vec{k}) \frac{e_2}{2m_2} \phi_A(\vec{p}) = -\frac{\langle e_2 \rangle}{2m_2} \times \int d\vec{q} e^{-Dq^2 - F^{(2)}k^2} \left[\mathcal{Y}_{L_B}^*(\vec{q} + z^{(2)}\vec{k}) \chi_{S_B} \right]_{J_B, M_B} [2\vec{q} + i\vec{\sigma}_2 \wedge \vec{k}] \left[\mathcal{Y}_{L_A}(\vec{q} - x^{(2)}\vec{k}) \chi_{S_A} \right]_{J_A, M_A} \quad (6.84)$$

avec pour les divers coefficients introduits ($i = 1, 2$) :

$$D = \frac{A+B}{2} ; x^{(i)} = \frac{m_{3-i}B}{(m_1+m_2)(A+B)} \quad (6.85)$$

$$z^{(i)} = \frac{m_{3-i}A}{(m_1+m_2)(A+B)} ; F^{(i)} = Dx^{(i)}z^{(i)} \quad (6.86)$$

Pour toutes les transitions observées expérimentalement, on a soit $L_A = 0$ soit $L_B = 0$. Bien qu'il soit possible de poursuivre les calculs pour des moments orbitaux quelconques, nous allons particulariser nos expressions pour ces moments nuls, ce qui permet de simplifier notablement les calculs.

6.5.1 Cas $L_B = 0$

On regarde la partie quark, $L_B = 0$ implique $\mathcal{Y}_{L_B}^*(\vec{q} - z^{(1)}\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\delta_{\mu_B, 0}$. Ensuite, on transforme $\mathcal{Y}_{L_A}(\vec{q} + x^{(1)}\vec{k})$ en $[\mathcal{Y}_{l_1}(\vec{q}) \mathcal{Y}_{L_A-l_1}(\vec{k})]_{L_A}$ à l'aide de la formule (C.20).

Terme électrique

Pour le quark, on a, pour la composante covariante μ :

$$(\vec{\mathcal{E}}^{(1)})_\mu = \delta_{J_B, S_B} \frac{\langle e_1 \rangle}{2m_1} \frac{e^{-F^{(1)}k^2}}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\mu_A, \sigma_A} C_{L_A, \mu_A; S_A, \sigma_A}^{J_A, M_A} \underbrace{\langle \chi_{J_B} | \chi_{S_A} \rangle}_{\delta_{J_B, S_A}} \int d\vec{q} e^{-Dq^2} \mathcal{Y}_{L_A}(\vec{q} + x^{(1)}\vec{k}) q_\mu \quad (6.87)$$

Après transformation de l'hamonique solide en un produit de deux harmoniques d'argument $\vec{q}$ et $\vec{k}$, nous aboutissons à l'intégrale suivante :

$$\int d\vec{q} e^{-Dq^2} 2(\vec{q})_\mu \mathcal{Y}_{l_1 m_1}(\vec{q}) = (-1)^\mu \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\Gamma(l_1/2 + 2)}{D^{l_1/2+2}} \delta_{1,l_1} \delta_{m_1,-\mu} \quad (6.88)$$

Après sommation sur les nombres quantiques $\sigma_A, \sigma_B, \mu_A$, on arrive à :

$$\begin{aligned} (\vec{\mathcal{E}}^{(1)})_\mu &= \delta_{S_A, S_B} \delta_{J_B, S_A} \frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \frac{4\pi}{6} \frac{\Gamma(5/2)}{D^{5/2}} e^{-F^{(1)}k^2} (x^{(1)})^{L_A-1} \sqrt{L_A} \hat{L}_A \\ &\cdot (-1)^\mu C_{1,-\mu; L_A-1, M_A-M_B+\mu}^{L_A, M_A-M_B} C_{L_A, M_A-M_B; J_B, M_B}^{J_B, M_B} \mathcal{Y}_{L_A-1, M_A-M_B+\mu}(\vec{k}) \end{aligned} \quad (6.89)$$

Terme magnétique

L'opérateur $(\vec{\sigma} \wedge \vec{k})$ peut être sorti du signe de l'intégrale, on a donc :

$$\int d\vec{q} e^{-Dq^2} \mathcal{Y}_{l_1 m_1}(\vec{q}) = \frac{\Gamma(3/2)}{2D^{3/2}} \sqrt{4\pi} \delta_{l_1,0} \delta_{m_1,0} \quad (6.90)$$

Quant au spin, on doit calculer :

$$\langle \chi_{J_B} | (\vec{\sigma}_1)_\nu | \chi_{S_A} \rangle = (-1)^{S_A} \sqrt{6} \hat{S}_A C_{S_A, \sigma_A; 1, \nu}^{J_B, M_B} \left\{ \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & S_A & J_B \end{matrix} \right\} \quad (6.91)$$

En regroupant les différents termes, on aboutit pour la partie magnétique due au quark à :

$$\begin{aligned} (\vec{\mathcal{M}}^{(1)})_\mu &= \delta_{J_B, S_B} \frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \frac{2\pi \Gamma(3/2)}{D^{3/2}} e^{-F^{(1)}k^2} (x^{(1)})^{L_A} \hat{S}_A (-1)^{1+S_A} \left\{ \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & S_A & J_B \end{matrix} \right\} \\ &\sum_{\mu_A, \sigma_A, \nu, \rho} C_{L_A, \mu_A; S_A, \sigma_A}^{J_A, M_A} C_{S_A, \sigma_A; 1, \nu}^{J_B, M_B} C_{1, \nu; 1, \rho}^{1, \mu} \mathcal{Y}_{1, \rho}(\vec{k}) \mathcal{Y}_{L_A, \mu_A}(\vec{k}) \end{aligned} \quad (6.92)$$

Amplitude totale

Pour l'antiquark, la technique de calcul est identique et n'est donc pas détaillée. Au final, en regroupant le terme dû au quark avec celui de l'antiquark et en réintroduisant la somme sur les gaussiennes, on arrive à :

$$\begin{aligned} (\vec{\mathcal{E}})_\mu &= \delta_{S_A, S_B} (-1)^\mu \frac{4\pi}{6} \sqrt{L_A} \hat{L}_A \Gamma(5/2) \times \\ &C_{1,-\mu; L_A-1, M_A-M_B+\mu}^{L_A, M_A-M_B} C_{L_A, M_A-M_B; J_B, M_B}^{J_B, M_B} \mathcal{Y}_{L_A-1, M_A-M_B+\mu}(\vec{k}) \times \\ &\left[\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B (x_{ij}^{(1)})^{L_A-1} e^{-F_{ij}^{(1)}k^2}}{D_{ij}^{5/2}} + (-1)^{L_A} \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B (x_{ij}^{(2)})^{L_A-1} e^{-F_{ij}^{(2)}k^2}}{D_{ij}^{5/2}} \right] \end{aligned} \quad (6.93)$$

et pour le terme magnétique dans le cas général :

$$(\vec{\mathcal{M}})_\mu = (-1)^{1+S_A} 2\pi \Gamma(3/2) \hat{S}_A \left\{ \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & S_A & J_B \end{matrix} \right\} \times \quad (6.94)$$

$$\sum_{\mu_A, \sigma_A, \nu, \rho} C_{L_A, \mu_A; S_A, \sigma_A}^{J_A, M_A} C_{S_A, \sigma_A; 1, \nu}^{J_B, M_B} C_{1, \nu; 1, \rho}^{1, \mu} \mathcal{Y}_{1, \rho}(\vec{k}) \mathcal{Y}_{L_A, \mu_A}(\vec{k}) \times$$

$$\left[\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i, j} \frac{c_i^A c_j^B (x_{ij}^{(1)})^{L_A} e^{-F_{ij}^{(1)} k^2}}{D_{ij}^{3/2}} + (-1)^{L_A + S_A + J_B} \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i, j} \frac{c_i^A c_j^B (x_{ij}^{(2)})^{L_A} e^{-F_{ij}^{(2)} k^2}}{D_{ij}^{3/2}} \right]$$

Pour obtenir l'expression de la largeur dans le cas général, il nous faut maintenant calculer :

$$\frac{1}{\hat{j}_A^2} \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{M_A, M_B} |\langle B\gamma | H_{int.} | A \rangle|^2 \quad (6.95)$$

Cette fois, contrairement à l'approximation des grandes longueurs d'onde, il existe une contribution du terme électrique et du terme magnétique.

$$\langle B\gamma | H_{int.} | A \rangle = -\delta_{J_B, S_B} \delta_{\vec{K}_B, -\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{V\omega_k}} [(\vec{\mathcal{E}})_\lambda + (\vec{\mathcal{M}})_\lambda] \quad (6.96)$$

Après avoir effectué les sommations sur les coefficients dépendant de λ, M_A, M_B , on trouve finalement l'expression de la largeur pour le cas $L_B = 0$ au delà des GLO :

$$\Gamma_{A \rightarrow B\gamma} = \delta_{S_B, J_B} 2\alpha \frac{E_B(E_0)}{m_A} [\mathcal{E}\mathcal{E} + \mathcal{E}\mathcal{M} + \mathcal{M}\mathcal{M}] \quad (6.97)$$

Les termes $\mathcal{E}\mathcal{E}, \mathcal{E}\mathcal{M}, \mathcal{M}\mathcal{M}$ sont les contributions électrique-électrique, électrique-magnétique (terme d'interférence absent de l'approximation des GLO) et magnétique-magnétique résultant du carré de l'amplitude. Ils s'écrivent avec $k_0 = E_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\mathcal{E} &= \delta_{S_A, S_B} \frac{\Gamma(5/2)^2}{36} L_A (L_A + 1) k_0^{2L_A - 1} \mathcal{A}^2 \\ \mathcal{E}\mathcal{M} &= \delta_{S_A, S_B} (-1)^{L_A + S_A + J_A + J_B + 1} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(5/2)}{2\sqrt{6}} \sqrt{L_A (L_A + 1)} \hat{S}_A \hat{L}_A \hat{J}_B \\ &\quad \left\{ \begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & S_A & J_b \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L_a & S_a & J_a \\ J_b & L_A & 1 \end{matrix} \right\} k_0^{2L_A + 1} \mathcal{A}\mathcal{B} \end{aligned} \quad (6.98)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\mathcal{M} &= \frac{3}{4} \Gamma(3/2)^2 \hat{S}_A^2 \hat{L}_A^2 \hat{J}_B^2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & S_A & J_b \end{matrix} \right\}^2 k_0^{2L_A + 3} \mathcal{B}^2 \\ &\quad \sum_J (C_{11 L_A 0}^{J1})^2 \left\{ \begin{matrix} L_A & S_A & J_A \\ J_B & J & 1 \end{matrix} \right\}^2 \end{aligned} \quad (6.99)$$

La dépendance en fonctions d'onde n'apparaît qu'au travers des coefficients dynamiques $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i, j} \frac{c_i^A c_j^B (x_{ij}^{(1)})^{L_A - 1} \exp(-F_{ij}^{(1)} k_0^2)}{D_{ij}^{5/2}} \\ &\quad + (-1)^{L_A} \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i, j} \frac{c_i^A c_j^B (x_{ij}^{(2)})^{L_A - 1} \exp(-F_{ij}^{(2)} k_0^2)}{D_{ij}^{5/2}} \end{aligned} \quad (6.100)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} = & \frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B (x_{ij}^{(1)})^{L_A} \exp(-F_{ij}^{(1)} k_0^2)}{D_{ij}^{3/2}} \\
& + (-1)^{L_A+S_A+J_B} \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B (x_{ij}^{(2)})^{L_A} \exp(-F_{ij}^{(2)} k_0^2)}{D_{ij}^{3/2}}
\end{aligned} \tag{6.101}$$

6.5.2 Cas $L_A = 0$

Le passage du cas $L_B = 0$ au cas $L_A = 0$ se réalise grâce aux changements suivants : remplacer les quantités relatives à A par celles de B ; changer le signe de μ , remplacer x par z , prendre le complexe conjugué et multiplier par la phase $(-1)^{L_B-1-\mu}$. Soit pour le terme électrique :

$$\mathcal{E}_\mu(B; z) = (-1)^{L_B-1-\mu} \mathcal{E}_{-\mu}^*(A = B; x = z) \tag{6.102}$$

et de même pour la partie magnétique.

Les formules de largeur particularisées à certains nombres quantiques sont reléguées en appendice.

6.6 Les résultats

Tout d'abord, nous tenons à rappeler que, compte tenu du fait que l'opérateur de transition électromagnétique est connu, tous les résultats présentés ne font intervenir aucun paramètre libre (exception faite des angles de mélange introduits pour certains mésons).

6.6.1 Espace de phase

Pour étudier la variation de nos résultats en fonction de l'espace de phase, nous utilisons le potentiel AL1 et l'approximation des grandes longueurs d'onde (GLO). Les largeurs obtenues ainsi que les valeurs d'impulsion et de rapport E_B/m_A sont présentées dans les tables (6.1)-(6.2). On constate de suite qu'un espace de phase relativiste donne des largeurs du bon ordre de grandeur tandis que l'utilisation d'un espace non-relativiste détériore grandement la qualité des résultats avec des valeurs théoriques trop grandes (excepté pour les mésons lourds). Pour certaines transitions, pour $\Phi^{nonrel.}$, les écarts relativiste-non relativiste peuvent atteindre un facteur 10 comme pour $\rho \rightarrow \pi\gamma$ ou $\omega \rightarrow \pi\gamma$. On peut voir que ces mauvais résultats sont dus en partie à une valeur surestimée du rapport E_B/m_A qui est prise comme étant égale à l'unité dans l'espace de phase non relativiste ($E_B/m_A = 0.52$ pour $\rho \rightarrow \pi\gamma$). Néanmoins la différence importante entre l'impulsion relativiste et celle non relativiste explique également nos grandes différences de résultats. L'espace de phase mixte qui utilise une impulsion relativiste mais avec le rapport $E_B/m_A = 1$ donne, quant à lui, des résultats intermédiaires. En conclusion : bien que l'espace de phase soit un élément cinématique et, même si l'on fait, par ailleurs des approximations non relativistes pour la fonction d'onde ou pour le vertex quark-photon, il est indispensable d'employer un espace de phase relativiste avec une détermination exacte de l'énergie du photon. De ce fait, le reste de notre étude est basée sur un espace de phase relativiste.

TAB. 6.1 – Largeurs de désintégration obtenues à partir de l’approximation des GLO pour le potentiel AL1. Comparaison des résultats pour un espace de phase relativiste (rel), mixte ou non relativiste (nrel). L’impulsion $k_0 = E_0$ est en MeV tandis que les largeurs sont en keV.

${}^3S_1 \rightarrow {}^1S_0$							
transition	k_0^{rel}	k_0^{nrel}	$\frac{E_B}{m_A}$	rel.	mixte	nrel.	exp.
$\rho^+ \rightarrow \pi^+ \gamma$	372	630	0.52	56.98	110.32	535.23	67.82 ± 7.55
$\rho^0 \rightarrow \pi^0 \gamma$	373	634	0.52	57.24	111.05	547.02	102.48 ± 25.69
$\rho^0 \rightarrow \eta \gamma$	190	222	0.75	49.79	66.12	105.52	36.18 ± 13.57
$\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$	380	648	0.51	543.44	1055.48	5238.71	714.85 ± 42.74
$\omega \rightarrow \eta \gamma$	200	235	0.74	6.37	8.56	13.96	5.47 ± 0.84
$\phi(1020) \rightarrow \eta \gamma$	363	472	0.64	45.90	71.26	157.04	55.82 ± 2.73
$\phi(1020) \rightarrow \eta'(958) \gamma$	60	62	0.94	0.30	0.32	0.35	0.53 ± 0.31
$K^*(892)^0 \rightarrow K^0 \gamma$	310	398	0.65	111.19	169.95	361.34	116.15 ± 10.19
$K^*(892)^+ \rightarrow K^+ \gamma$	309	398	0.65	97.47	149.21	318.28	50.29 ± 4.66
$D^*(2007)^0 \rightarrow D^0 \gamma$	137	142	0.93	35.08	37.65	41.95	$< 800.10 \pm 60.90$
$D^*(2010)^+ \rightarrow D^+ \gamma$	136	141	0.93	2.68	2.87	3.19	$< 1.44^{+2.75}_{-0.92}$
$D_s^{*+} \rightarrow D_s^+ \gamma$	139	144	0.93	0.28	0.29	0.33	$< 1789.80 \pm 47.50$
$B^{*+} \rightarrow B^+ \gamma$	46	46	0.99	0.97	0.98	0.99	vu
$B^{*0} \rightarrow B^0 \gamma$	45	46	0.99	0.28	0.29	0.29	vu
$J/\Psi \rightarrow \eta_c \gamma$	115	117	0.96	1.85	1.93	2.04	1.13 ± 0.35
$\psi(2S) \rightarrow \eta_c(1S) \gamma$	639	706	0.83	2.15	2.60	3.52	0.78 ± 0.19

${}^1S_0 \rightarrow {}^3S_1$							
transition	k_0^{rel}	k_0^{nrel}	$\frac{E_B}{m_A}$	rel.	mixte	nrel.	exp.
$\eta'(958) \rightarrow \rho^0 \gamma$	170	188	0.82	116.80	141.99	193.73	61.31 ± 5.51
$\eta'(958) \rightarrow \omega \gamma$	159	175	0.83	10.81	12.97	17.29	6.11 ± 0.78

TAB. 6.2 – Suite de la table (6.1).

$^3S_1 \rightarrow ^3P_J$							
transition	k_0^{rel}	k_0^{nrel}	$\frac{E_B}{m_A}$	rel.	mixte	nrel.	exp.
$\psi(2S) \rightarrow \chi_{c0}(1P)\gamma$	261	271	0.93	17.70	19.04	19.77	25.76 ± 3.81
$\psi(2S) \rightarrow \chi_{c1}(1P)\gamma$	171	175	0.95	35.75	37.49	38.40	24.10 ± 3.49
$\psi(2S) \rightarrow \chi_{c2}(1P)\gamma$	127	130	0.97	44.90	46.51	47.35	21.61 ± 3.28
$\Upsilon(2S) \rightarrow \chi_{b0}(1P)\gamma$	162	163	0.98	0.43	0.44	0.44	1.89 ± 0.53
$\Upsilon(2S) \rightarrow \chi_{b1}(1P)\gamma$	130	131	0.99	1.04	1.05	1.06	2.95 ± 0.61
$\Upsilon(2S) \rightarrow \chi_{b2}(1P)\gamma$	110	111	0.99	1.47	1.48	1.49	2.90 ± 0.61
$\Upsilon(3S) \rightarrow \chi_{b0}(2P)\gamma$	122	123	0.99	0.68	0.69	0.70	1.42 ± 0.25
$\Upsilon(3S) \rightarrow \chi_{b1}(2P)\gamma$	100	100	0.99	1.67	1.69	1.69	2.97 ± 0.43
$\Upsilon(3S) \rightarrow \chi_{b2}(2P)\gamma$	86	87	0.99	2.42	2.44	2.45	3.00 ± 0.45

$^3P_J \rightarrow ^3S_1$							
transition	k_0^{rel}	k_0^{nrel}	$\frac{E_B}{m_A}$	rel.	mixte	nrel.	exp.
$f_1(1285) \rightarrow \rho^0\gamma$	410	513	0.68	939.73	1381.81	1727.12	1296.00 ± 295.20
$\chi_{c0}(1P) \rightarrow J/\psi(1S)\gamma$	303	318	0.91	233.40	256.15	268.67	92.40 ± 41.52
$\chi_{c1}(1P) \rightarrow J/\psi(1S)\gamma$	389	414	0.89	292.29	328.75	349.33	240.24 ± 40.73
$\chi_{c2}(1P) \rightarrow J/\psi(1S)\gamma$	430	459	0.88	319.01	362.85	387.90	270.00 ± 32.78
$\chi_{b0}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	392	400	0.96	28.82	30.01	30.63	vu
$\chi_{b1}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	423	432	0.96	31.03	32.42	33.14	vu
$\chi_{b2}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	442	452	0.96	32.37	33.88	34.67	vu
$\chi_{b0}(2P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	743	772	0.93	12.12	13.07	13.58	vu
$\chi_{b0}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S)\gamma$	207	209	0.98	13.07	13.34	13.47	vu
$\chi_{b1}(2P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	764	795	0.93	12.45	13.45	13.99	vu
$\chi_{b1}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S)\gamma$	229	232	0.98	14.47	14.80	14.97	vu
$\chi_{b2}(2P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	776	808	0.92	12.63	13.66	14.22	vu
$\chi_{b2}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S)\gamma$	242	245	0.98	15.27	15.63	15.82	vu

$^1P_1 \rightarrow ^1S_0$							
transition	k_0^{rel}	k_0^{nrel}	$\frac{E_B}{m_A}$	rel.	mixte	nrel.	exp.
$b_1(1235)^+ \rightarrow \pi^+\gamma$	607	1090	0.51	209.95	414.55	744.58	227.20 ± 58.60

On peut noter au passage les valeurs importantes de l'impulsion pour certaines transitions mettant sérieusement en doute la justification de l'approximation des grandes longueurs d'onde.

6.6.2 Approximation dipolaire et GLO

TAB. 6.3 – Approximation dipolaire pour les GLO, appliquée au potentiel AL1 et pour un espace de phase relativiste. Les deux approximations présentées ici dépendent du remplacement (AD2) ou non (AD1) du coefficient $(m_A - m_B)$ par E_0 .

${}^3S_1 \rightarrow {}^3P_J$					
transition	$k_0[\text{MeV}]$	$\frac{E_B}{m_A}$	AD1	AD2.	exp.[keV]
$\psi(2S) \rightarrow \chi_{c0}(1P)\gamma$	261	0.93	49.92	53.80	25.76 ± 3.81
$\psi(2S) \rightarrow \chi_{c1}(1P)\gamma$	171	0.95	43.43	45.57	24.10 ± 3.49
$\psi(2S) \rightarrow \chi_{c2}(1P)\gamma$	127	0.97	30.23	31.32	21.61 ± 3.28
$\Upsilon(2S) \rightarrow \chi_{b0}(1P)\gamma$	162	0.98	1.52	1.54	1.89 ± 0.53
$\Upsilon(2S) \rightarrow \chi_{b1}(1P)\gamma$	130	0.99	2.34	2.37	2.95 ± 0.61
$\Upsilon(2S) \rightarrow \chi_{b2}(1P)\gamma$	110	0.99	2.39	2.41	2.90 ± 0.61
$\Upsilon(3S) \rightarrow \chi_{b0}(2P)\gamma$	122	0.99	1.65	1.67	1.42 ± 0.25
$\Upsilon(3S) \rightarrow \chi_{b1}(2P)\gamma$	100	0.99	2.67	2.69	2.97 ± 0.43
$\Upsilon(3S) \rightarrow \chi_{b2}(2P)\gamma$	86	0.99	2.91	2.93	3.00 ± 0.45
${}^3P_J \rightarrow {}^3S_1$					
transition	k_0	$\frac{E_B}{m_A}$	AD1	AD2	exp.
$f_1(1285) \rightarrow \rho^0\gamma$	410	0.68	824.56	1288.17	1296.00 ± 295.20
$\chi_{c0}(1P) \rightarrow J/\psi(1S)\gamma$	303	0.91	144.59	159.06	92.40 ± 41.52
$\chi_{c1}(1P) \rightarrow J/\psi(1S)\gamma$	389	0.89	298.24	336.75	240.24 ± 40.73
$\chi_{c2}(1P) \rightarrow J/\psi(1S)\gamma$	430	0.88	396.53	453.17	270.00 ± 32.78
$\chi_{b0}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	392	0.96	20.36	21.21	vu
$\chi_{b1}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	423	0.96	25.59	26.74	vu
$\chi_{b2}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	442	0.96	29.14	30.52	vu
$\chi_{b0}(2P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	743	0.93	11.32	12.22	vu
$\chi_{b0}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S)\gamma$	207	0.98	9.37	9.56	vu
$\chi_{b1}(2P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	764	0.93	12.30	13.31	vu
$\chi_{b1}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S)\gamma$	229	0.98	12.77	13.06	vu
$\chi_{b2}(2P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	776	0.92	12.89	13.97	vu
$\chi_{b2}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S)\gamma$	242	0.98	15.04	15.41	vu
${}^1P_1 \rightarrow {}^1S_0$					
transition	k_0	$\frac{E_B}{m_A}$	AD1	AD2	exp.
$b_1(1235)^+ \rightarrow \pi^+\gamma$	607	0.51	84.33	272.06	227.20 ± 58.60

Les résultats concernant l'approximation dipolaire pour les transitions électriques sont consignés dans la table (6.3) pour le potentiel AL1. Nous testons les deux prescriptions possibles notées AD1 : utilisation du facteur d'espace de phase $E_0(m_A - m_B)^2$ et AD2 :

remplacement de ce facteur par E_0^3 . Il est difficile de tirer des conclusions du fait du peu de valeurs expérimentales disponibles. Cependant, on ne remarque qu'une faible différence (moins de 15 %) entre AD1 et AD2 du fait que les données exploitables concernent principalement les mésons lourds pour lesquels les deux prescriptions tendent à redonner les mêmes résultats. On constate en effet que pour les deux transitions faisant intervenir des quarks ordinaires : $f_1(1285) \rightarrow \rho^0 \gamma$ et $b_1(1235)^+ \rightarrow \pi^+ \gamma$ les différences sont conséquentes. Il semble que l'approximation dipolaire donne de meilleurs résultats que les GLO sur les largeurs faibles ($< 1\text{keV}$) et que ce soit l'inverse pour les transitions de valeurs importantes.

Concernant l'approximation des GLO qui est souvent employée : tout d'abord, un certain nombre de transitions observées expérimentalement ne peuvent être reproduites car tout simplement interdites dans ce formalisme, c'est donc déjà un aspect négatif de cette approximation. Ensuite, pour les transitions : $^3P_J \rightarrow ^3S_1$, $^3S_1 \rightarrow ^3P_J$ un traitement exact prédit une contribution du terme d'interférence $\mathcal{EM}$, chose impossible pour les GLO. Des écarts de 25 % ont lieu pour ces cas par rapport aux résultats exacts.

Pour $L_A = L_B = 0$ seul le terme magnétique contribue tandis que pour $^1P_1 \rightarrow ^1S_0$ la largeur n'est due qu'au terme électrique. Bien que ce ne soit pas toujours le cas, il semble que les GLO donnent des résultats plus proches de l'expérience que le cas général indiquant soit l'utilisation de fonctions d'onde non réalistes soit un mauvais processus de désexcitation pour expliquer nos transitions.

6.6.3 Cas général

Nous présentons dans cette partie le formalisme le plus "sophistiqué" : dépassement du cadre des grandes longueurs d'onde, utilisation d'un espace de phase relativiste et test de trois potentiels d'interaction $q\bar{q}$ pour étudier la sensibilité de nos résultats en la dynamique des quarks au sein du méson. Les largeurs sont consignées dans les tables (6.4)-(6.5)-(6.6). On voit que les transitions $^1P_1 \rightarrow ^3S_1$ et $^3P_J \rightarrow ^1S_0$ qui ne peuvent être reproduites dans l'approximation des GLO sont ici obtenues avec le bon ordre de grandeur.

D'un point de vue global, les largeurs théoriques obtenues pour les différents potentiels AL1, AP1 et DNR sont assez similaires. Les résultats issus du potentiel AL1 se situent généralement entre ceux de DNR et du potentiel AP1. Les valeurs plus faibles obtenues à partir de AL1 comparées à celles obtenues de AP1 peuvent se comprendre comme la conséquence du terme différent du confinement de ses deux potentiels. Pour AP1, le confinement est plus faible d'où un étalement plus important de la fonction d'onde qui contribue donc plus à l'intégration spatiale. Mais de façon générale, aucun potentiel n'est plus adapté à ces calculs que les autres quel que soit le secteur de mésons étudiés. DNR donne de meilleurs résultats pour les mésons lourds, AP1 pour les transitions $L_A = L_B = 0$ et à AL1 pour les transitions où le terme électrique domine.

Les différences avec l'expérience excèdent rarement les 50 %, ce qui peut être considéré comme encourageant compte tenu du fait qu'il n'y a aucun paramètre libre. Il est très difficile de comparer notre travail avec les précédentes études car peu d'auteurs ont utilisé un traitement unifié pour tous les types de transitions. Le travail de Godfrey et Isgur [34] fait figure d'exception et nos résultats sont de qualité similaire. Très souvent, Godfrey et Isgur obtiennent des valeurs trop grandes tandis que nos valeurs sont trop faibles.

Contrairement à nos calculs, ils utilisent deux paramètres libres pour leurs transitions et une version modifiée de l'espace de phase qui nous semble artificielle.

Le fait que nos trois potentiels, donnant par ailleurs de bons résultats pour le spectre en énergie, donnent globalement les mêmes résultats (bien que des différences de 20 % existent) indiquent que la fonction d'onde ne peut être tenue comme unique responsable du désaccord théorie-expérience. Il manque donc un élément au processus de désintégration regardé bien que la caractéristique principale soit correcte.

Regardons maintenant de plus près certaines transitions particulières. Un cas intéressant est la comparaison du canal neutre et chargé de la transition $\rho \rightarrow \pi\gamma$. Expérimentalement la largeur pour le canal chargé est 68 keV tandis que pour le canal neutre, cette valeur s'élève à 102 keV. Dans notre calcul, la petite variation ne provient que de la différence de masse expérimentale entre π^+ et π^0 . Notre largeur de désintégration a la même expression du fait du terme $[\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2}]$ (pour les mésons composés d'une seule saveur). Ce facteur vaut $[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}]^2$ pour la voie chargée et $[\frac{1}{6} - \frac{-1}{6}]^2$ pour la voie neutre. Comment donc expliquer la variation observée ? Tout d'abord, si l'on regarde les largeurs et leurs erreurs expérimentales 67.8 ± 7.6 et 102.5 ± 25.7 on remarque que les données sont presque compatibles avec une valeur de 76 keV. Donc ce problème de différence canal chargé-canal neutre peut très bien ne pas exister. Cependant, si ce n'est pas le cas, un début d'explication peut venir de la transition $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$, qui est identique à la transition $\rho^0 \rightarrow \pi^0\gamma$ mais avec un facteur 9 dû à l'isospin. La valeur expérimentale de 715 keV pour cette dernière est en accord avec ce point. Ainsi même un faible angle de mélange entre le ρ^0 et le ω pourrait expliquer ces données. Cette hypothèse sera testée dans la section suivante. Nous remarquons les mêmes variations entre canal chargé et canal neutre pour les transitions du K^* en K et du B^* en B . Cependant, pour ces cas-ci, le facteur d'isospin explique le changement. Concernant les kaons, il apparaît un facteur $[\frac{1}{3m_n} + \frac{1}{3m_s}]^2$ pour le canal neutre (m_n masse du quark u ou d et m_s masse du quark étrange) et un facteur $[\frac{2}{3m_n} - \frac{1}{3m_s}]^2$ pour le canal chargé dans l'approximation des GLO (il est compliqué d'estimer la variation du terme d'isospin dans le cas général). En utilisant les données expérimentales et en faisant l'approximation que les deux éléments de matrice sont identiques (hormis le terme d'isospin), on obtient la relation : $m_s = 1.24m_n$. Pour nos potentiels le rapport m_s/m_n vaut : 1.83, 1.78, 1.78 pour AL1, AP1 et DNR respectivement.

La transition $a_1^0 \rightarrow \pi^0\gamma$ est obtenue avec une largeur nulle car les transitions de type $^3P_J \rightarrow ^1S_0$ sont proportionnelles à $[\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} + \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2}]$ qui est nul pour les mésons composés d'une seule saveur.

Les potentiels utilisés n'ont pas de dépendance en isospin pour les états $S = 1$, donc les mésons ρ , ω possèdent la même fonction d'onde radiale ; ceci est également vrai pour le π et η_n pour les potentiels AL1 et AP1 (pas d'effet d'instanton) tandis que le potentiel DNR donne en principe une bonne description des résonances η et η' . Cependant, pour les transitions faisant intervenir ces mésons, DNR n'est pas supérieur aux autres potentiels indiquant que la fonction d'onde n'est pas l'élément clef du calcul.

Il n'est pas sûr que la désexcitation du $D_{s_1}(2536)^{*+}$ en D_s^* ait été observée expérimentalement ; cependant nos résultats pour cette transition semblent indiquer qu'elle devrait l'être.

TAB. 6.4 – Largeurs pour le formalisme allant au delà des GLO avec un espace de phase relativiste et pour les potentiels AL1, AP1 et DNR. Pour ces transitions, les contributions du terme électrique et du terme d'interférence sont nulles.

$^3S_1 \rightarrow ^1S_0$				
transition	tot(AL1)	tot(AP1)	tot(DNR)	exp.
$\rho^+ \rightarrow \pi^+\gamma$	48.48	60.41	44.64	67.82 ± 7.55
$\rho^0 \rightarrow \pi^0\gamma$	48.66	60.64	44.81	102.48 ± 25.69
$\rho^0 \rightarrow \eta\gamma$	47.73	60.63	51.53	36.18 ± 13.57
$\omega \rightarrow \pi^0\gamma$	459.30	571.79	423.19	714.85 ± 42.74
$\omega \rightarrow \eta\gamma$	6.08	7.72	6.56	5.47 ± 0.84
$\phi(1020) \rightarrow \eta\gamma$	41.27	44.12	31.95	55.82 ± 2.73
$\phi(1020) \rightarrow \eta'(958)\gamma$	0.30	0.32	0.27	0.53 ± 0.31
$K^*(892)^0 \rightarrow K^0\gamma$	98.28	116.41	85.93	116.15 ± 10.19
$K^*(892)^+ \rightarrow K^+\gamma$	79.07	104.46	66.99	50.29 ± 4.66
$D^*(2007)^0 \rightarrow D^0\gamma$	33.60	41.74	28.22	$< 800.10 \pm 60.90$
$D^*(2010)^+ \rightarrow D^+\gamma$	2.48	3.58	1.84	$< 1.44^{+2.75}_{-0.92}$
$D_s^{*+} \rightarrow D_s^+\gamma$	0.26	0.31	0.18	$< 1789.80 \pm 47.50$
$B^{*+} \rightarrow B^+\gamma$	0.97	1.26	0.78	vu
$B^{*0} \rightarrow B^0\gamma$	0.28	0.36	0.23	vu
$J/\Psi \rightarrow \eta_c\gamma$	1.85	1.87	1.75	1.13 ± 0.35
$\psi(2S) \rightarrow \eta_c(1S)\gamma$	4.97	6.34	7.13	0.78 ± 0.19

$^1S_0 \rightarrow ^3S_1$				
transition	tot(AL1)	tot(AP1)	tot(DNR)	exp.
$\eta'(958) \rightarrow \rho^0\gamma$	112.90	143.62	107.50	61.31 ± 5.51
$\eta'(958) \rightarrow \omega\gamma$	10.50	13.36	10.01	6.11 ± 0.78

TAB. 6.5 – Identique à la table (6.4) sauf que les trois termes électrique, magnétique et d'interférence contribuent à la largeur. Les colonnes 2, 3 et 4 réfèrent au potentiel DNR.

$^3S_1 \rightarrow ^3P_J$							
transition	elec.	interfer.	magn.	tot(AL1)	tot(AP1)	tot(DNR)	exp.
$\psi(2S) \rightarrow \chi_{c0}(1P)\gamma$	22.48	-4.15	0.19	14.12	14.06	18.52	25.76 ± 3.81
$\psi(2S) \rightarrow \chi_{c1}(1P)\gamma$	45.14	-1.83	0.04	34.25	34.23	43.34	24.10 ± 3.49
$\psi(2S) \rightarrow \chi_{c2}(1P)\gamma$	56.58	1.28	0.02	46.39	46.43	57.88	21.61 ± 3.28
$\Upsilon(2S) \rightarrow \chi_{b0}(1P)\gamma$	0.86	-0.03	0.00	0.41	0.54	0.82	1.89 ± 0.53
$\Upsilon(2S) \rightarrow \chi_{b1}(1P)\gamma$	2.06	-0.02	0.00	1.02	1.35	2.04	2.95 ± 0.61
$\Upsilon(2S) \rightarrow \chi_{b2}(1P)\gamma$	2.92	0.02	0.00	1.49	1.97	2.94	2.90 ± 0.61
$\Upsilon(3S) \rightarrow \chi_{b0}(2P)\gamma$	1.12	-0.03	0.00	0.66	0.73	1.09	1.42 ± 0.25
$\Upsilon(3S) \rightarrow \chi_{b1}(2P)\gamma$	2.73	-0.02	0.00	1.65	1.84	2.71	2.97 ± 0.43
$\Upsilon(3S) \rightarrow \chi_{b2}(2P)\gamma$	3.96	0.03	0.00	2.44	2.71	3.98	3.00 ± 0.45

$^3P_J \rightarrow ^3S_1$							
transition	elec.	interfer.	magn.	tot(AL1)	tot(AP1)	tot(DNR)	exp.
$f_1(1285) \rightarrow \rho^0\gamma$	718.41	354.45	87.44	1232.83	1376.96	1160.31	1296.00 ± 295.20
$\chi_{c0}(1P) \rightarrow J/\psi(1S)\gamma$	237.70	29.16	0.89	255.40	260.24	267.75	92.40 ± 41.52
$\chi_{c1}(1P) \rightarrow J/\psi(1S)\gamma$	291.39	29.39	1.48	306.63	312.43	322.27	240.24 ± 40.73
$\chi_{c2}(1P) \rightarrow J/\psi(1S)\gamma$	314.28	-38.59	3.32	262.05	266.99	279.01	270.00 ± 32.78
$\chi_{b0}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	28.02	2.01	0.04	30.10	30.85	30.06	vu
$\chi_{b1}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	30.07	1.26	0.03	31.51	32.26	31.35	vu
$\chi_{b2}(1P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	31.30	-1.43	0.05	30.39	31.03	29.91	vu
$\chi_{b0}(2P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	7.01	1.02	0.04	14.01	11.80	8.07	vu
$\chi_{b0}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S)\gamma$	14.01	0.49	0.00	13.31	13.52	14.50	vu
$\chi_{b1}(2P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	7.21	0.56	0.02	13.53	11.38	7.80	vu
$\chi_{b1}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S)\gamma$	15.45	0.33	0.00	14.51	14.72	15.79	vu
$\chi_{b2}(2P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$	7.33	-0.59	0.03	11.80	9.90	6.78	vu
$\chi_{b2}(2P) \rightarrow \Upsilon(2S)\gamma$	16.28	-0.39	0.01	14.63	14.82	15.89	vu

TAB. 6.6 – Identique à la table (6.4). La transition $^1P_1 \rightarrow ^1S_0$ est électrique tandis que les deux autres types de transitions sont purement magnétiques.

$$^1P_1 \rightarrow ^1S_0$$

transition	tot(AL1)	tot(AP1)	tot(DNR)	exp.
$b_1(1235)^+ \rightarrow \pi^+\gamma$	148.68	152.76	118.27	227.20 ± 58.60

$$^3P_J \rightarrow ^1S_0$$

transition	tot(AL1)	tot(AP1)	tot(DNR)	exp.
$a_1(1260)^+ \rightarrow \pi^+\gamma$	179.53	229.90	171.45	vu
$a_1(1260)^0 \rightarrow \pi^0\gamma$	-	-	-	vu
$a_2(1320)^+ \rightarrow \pi^+\gamma$	142.01	179.27	136.64	299.60 ± 65.71

$$^1P_1 \rightarrow ^3S_1$$

transition	tot(AL1)	tot(AP1)	tot(DNR)	exp.
$D_{s1}(2536)^{*+} \rightarrow D_s^{*+}\gamma$	10.97	11.99	8.63	peut-être vu

6.6.4 Angle de mélange

La QED conserve la saveur des particules au vertex, ce qui implique que le contenu en quarks du méson initial doit obligatoirement se retrouver dans le méson final pour notre processus élémentaire (6.1). Cependant, les données expérimentales indiquent des largeurs non nulles pour les transitions suivantes : $\phi \rightarrow \omega\gamma$ et $\phi \rightarrow \rho\gamma$. Pour un méson ϕ décrit comme un pur état de saveur $s\bar{s}$, comme c'est le cas habituellement, cela semble indiquer une violation de la conservation de la saveur. L'instanton ne peut être imaginé pour régler le problème puisqu'il est inactif pour $S = 1$. Ces réactions ne peuvent s'expliquer que par des processus plus compliqués. On peut imaginer par exemple la désintégration de la paire $q\bar{q}$ du méson A en un ou plusieurs gluons virtuels qui donnent lieu ensuite à une nouvelle paire $q\bar{q}$ (de saveur différente ou non de celle initiale) qui interagissent et émettent un photon. Ceci est possible seulement pour les mésons neutres. Ces transitions avec changement de saveur ne se produisent pas pour les kaons par exemple du fait de leur mélange de saveur. Une façon de prendre en compte phénoménologiquement ceci dans notre schéma de processus élémentaire est d'inclure une composante étrange dans la fonction du ω et/ou d'inclure une composante de quark n dans la fonction du ϕ . Une difficulté se présente immédiatement pour le cas du ρ qui est isovecteur tandis qu'une composante étrange ne peut créer qu'un isoscalaire. Pour le ω et le ϕ on peut introduire un angle de mélange de saveur θ_f . Les mésons physiques sont donc maintenant une combinaison des états de saveur pure : $\phi_0 = s\bar{s}$ et $\omega_0 = (n\bar{n})_{I=0}$.

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_f & \sin \theta_f \\ -\sin \theta_f & \cos \theta_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}$$

Avec ces modifications, la transitions $\phi \rightarrow \omega\gamma$ peut être comprise comme le résultat de deux contributions : $\phi(s\bar{s}) \rightarrow \omega(s\bar{s})\gamma$ et $\phi(n\bar{n}) \rightarrow \omega(n\bar{n})\gamma$. Pour le cas $\phi \rightarrow \rho\gamma$ seule la composante n du ϕ contribue.

D'un point de vue électromagnétique seule la charge est conservée, c.-à-d. la projection de l'isospin et non la valeur de l'isospin. Ainsi, on est libre d'imaginer un angle de mélange d'isospin θ_I entre l'état neutre du ρ et le ω . En conséquence de quoi le ρ peut se coupler au ϕ au second ordre. Un autre indice en faveur de ce possible angle de mélange est, comme déjà cité dans le texte auparavant, la différence entre les canaux neutre et chargé pour la transition $\rho \rightarrow \pi\gamma$. Le mélange d'isospin peut être compris comme la conséquence de la “presque” dégénérescence en masse du ρ et du ω [39].

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_I & \sin \theta_I \\ -\sin \theta_I & \cos \theta_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0(I=1) \\ \omega_0(I=0) \end{pmatrix}$$

Nos angles de mélange sont introduits de façon à retrouver les mésons usuels lorsque $\theta = 0$.

Ce problème est étudié dans le formalisme général, pour un espace de phase relativiste et compte tenu du peu de dépendance des résultats en le potentiel, on retient seulement les potentiels AL1 et DNR.

Mélange de saveur

Dans cette section, nous regardons le mélange de saveur entre ϕ et ω . Il nous faut déterminer la valeur de l'angle de mélange, pour cela nous utilisons les données expérimentales. Un bon candidat de transition permettant de déterminer l'angle est la transition : $\phi \rightarrow \pi^0\gamma$ qui ne s'explique que par un mélange de saveur (seule la composante $n\bar{n}$ du ϕ contribue au processus). On obtient un faible mélange de $\theta_f = 4.5$ degrés pour AL1, $\theta_f = 4.6$ pour DNR. On aurait pu choisir $\omega \rightarrow \eta\gamma$ pour fixer la valeur de l'angle mais le mélange de saveur du η aurait engendré des termes d'interférence. La transition $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ n'est pas plus appropriée, même si seule la composante $\omega(n\bar{n})$ contribue au processus car la largeur obtenue pour un pur état $n\bar{n}$ est de 459.30 keV, valeur déjà trop faible pour reproduire la mesure expérimentale de 714.85 keV. Donc l'introduction d'une composante $s\bar{s}$ dans le ω ne ferait que plus diminuer cette valeur.

Les transitions modifiées en conséquence par ce mélange de saveur sont présentées dans la table (6.7). Certaines transitions, observées expérimentalement, sont interdites sans cet angle de mélange. Mais les valeurs obtenues sont bien trop faibles pour reproduire l'expérience. Concernant les transitions pouvant s'expliquer sans le mélange, l'effet introduit est également faible et très souvent dans le mauvais sens. L'angle de mélange ne permet donc pas de régler les désaccords entre la théorie et l'expérience.

Mélange d'isospin

Pour l'angle de mélange entre le ω et la composante neutre du ρ (les états chargés du ρ ont des projections d'isospin $M_I = \pm 1$), les résultats se trouvent dans la table (6.8). Les angles obtenus sont $\theta_I = 8.9$ degrés pour AL1 et $\theta_I = 10.1$ degrés pour DNR déterminés sur $\rho^0 \rightarrow \pi^0\gamma$ et ainsi résoudre le problème concernant cette transition. Cependant, les

TAB. 6.7 – Largeurs obtenues pour un angle de mélange $\theta_f = 4.48^\circ$ entre les mésons ϕ et ω pour le potentiel AL1 et $\theta_f = 4.64^\circ$ pour le potentiel DNR, valeurs déduites de la transition $\phi \rightarrow \pi^0\gamma$. Les calculs sont basés sur le formalisme général pour un espace de phase relativiste.

$^3S_1 \rightarrow ^1S_0$					
transition	k_0	$\frac{E_B}{m_A}$	AL1	DNR	exp.
$\omega \rightarrow \pi^0\gamma$	380	0.51	456.49	420.42	714.85 ± 42.74
$\omega \rightarrow \eta\gamma$	200	0.74	7.22	7.62	5.47 ± 0.84
$\phi(1020) \rightarrow \pi^0\gamma$	501	0.51	«fitté»	«fitté»	5.617 ± 0.447
$\phi(1020) \rightarrow \eta\gamma$	363	0.64	35.88	26.92	55.82 ± 2.73
$\phi(1020) \rightarrow \eta'(958)\gamma$	60	0.94	0.34	0.31	0.53 ± 0.31

$^1S_0 \rightarrow ^3S_1$					
transition	k_0	$\frac{E_B}{m_A}$	AL1	DNR	exp.
$\eta'(958) \rightarrow \omega\gamma$	159	0.83	8.58	8.16	6.11 ± 0.78

$^3P_J \rightarrow ^3S_1$					
transition	k_0	$\frac{E_B}{m_A}$	AL1	DNR	exp.
$f_1(1285) \rightarrow \phi\gamma$	236	0.82	0.48	0.50	17.76 ± 6.30

$^3S_1 \rightarrow ^3P_J$					
$\phi \rightarrow f_0(980)\gamma$	39	0.96	0.03	0.03	1.52 ± 0.18
$\phi \rightarrow a_0(980)\gamma$	34	0.97	0.23	0.24	< 22.29

résultats ne vont pas dans le sens de l'existence d'un tel mélange car 4 transitions sont détériorées pour 2 améliorées mais pas de façon suffisante. Notre angle de mélange est peut-être faux, indiquant que le problème $\rho^0 \rightarrow \pi^0\gamma$ a une autre origine.

6.7 Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié en détail la désintégration d'un méson en un méson plus un photon réel. Les différentes approximations trouvées dans la littérature : approximation des grandes longueurs d'onde, approximation dipolaire, utilisation d'espace de phase non relativiste ou mixte, ont été discutées. Nous avons montré que l'utilisation d'un espace de phase relativiste est essentiel pour reproduire le bon ordre de grandeur des largeurs. L'approximation dipolaire, bien que n'ayant pas beaucoup de conséquence sur la qualité des résultats (pour les transitions pour lesquelles on dispose de données expérimentales) peut être évitée. Ceci compte tenu de la facilité d'emploi de notre formule exacte pour des fonctions d'onde décomposées en une somme de gaussiennes que multiplie une harmonique

TAB. 6.8 – Largeurs obtenues pour un angle de mélange $\theta = 8.88^\circ$ entre les mésons ρ et ω pour le potentiel AL1 et $\theta_f = 10.13^\circ$ pour le potentiel DNR, valeurs déduites de la transition $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \gamma$. Les calculs sont basés sur le formalisme général pour un espace de phase relativiste.

$^3S_1 \rightarrow ^1S_0$					
transition	k_0	$\frac{E_B}{m_A}$	AL1	DNR	exp.
$\rho^0 \rightarrow \pi^0 \gamma$	373	0.52	«fitté»	«fitté»	102.48 ± 25.69
$\rho^0 \rightarrow \eta \gamma$	190	0.75	51.57	56.06	36.18 ± 13.57
$\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$	380	0.51	402.85	362.69	714.85 ± 42.74
$\omega \rightarrow \eta \gamma$	200	0.74	1.68	1.37	5.47 ± 0.84

$^1S_0 \rightarrow ^3S_1$					
transition	k_0	$\frac{E_B}{m_A}$	AL1	DNR	exp.
$\eta'(958) \rightarrow \rho^0 \gamma$	170	0.82	121.99	116.95	61.31 ± 5.51
$\eta'(958) \rightarrow \omega \gamma$	159	0.83	2.89	2.09	6.11 ± 0.78

$^3P_J \rightarrow ^3S_1$					
transition	k_0	$\frac{E_B}{m_A}$	AL1	DNR	exp.
$f_1(1285) \rightarrow \rho^0 \gamma$	410	0.68	1332.09	1262.35	1296.00 ± 295.20

solide (pour la partie radiale).

Nous avons développé le formalisme pour l'étendre au delà des grandes longueurs d'onde, ceci nous a permis le calcul de termes d'interférence électrique-magnétique et de transitions interdites dans l'approximation des GLO telles que : $^1S_0 \rightarrow ^3P_J$. Nous avons regardé la sensibilité des résultats en fonction du potentiel d'interaction $q\bar{q}$ (AL1, AP1 et DNR) responsable de la formation du méson. Aucun des trois potentiels ne s'est révélé supérieur aux autres.

Enfin nous avons étudié les effets d'angle de mélange de saveur et d'isospin. Ceci nous a permis d'expliquer certaines transitions observées expérimentalement et interdites sans cela, mais la détérioration d'autres transitions mettent en doute l'existence de tels angles.

Bien que d'un point de vue global, nos calculs aboutissent à des valeurs de largeurs du bon ordre de grandeur, sans faire appel à des paramètres libres, il semble qu'une part de la physique soit absente de ce modèle de désexcitation. Il faudrait dans une prochaine étape, tenir compte des effets relativistes dans la fonctions d'onde (comme dans nos calculs en $A \rightarrow l\bar{l}$) et dans l'opérateur de transition ou encore modifier le vertex quark-photon pour introduire un facteur de forme.

Conclusion

Tout au long de cette étude, nous avons eu pour but de tester différents potentiels d'interaction $q\bar{q}$. Pour cela, nous nous sommes restreints au secteur des mésons, qui a l'avantage d'être simple sans pour autant être évident. Les fonctions d'onde obtenues à partir des divers potentiels ont été testées au travers de plusieurs processus de désintégrations de mésons. Dans la première partie nous avons examiné un processus de désintégration forte : le modèle phénoménologique 3P_0 tandis que pour la seconde, il s'agissait de la désexcitation par émission d'un photon virtuel (redonnant une paire $\bar{l}l$) ou réel.

Pour la désintégration forte nous avons, dans un premier temps, présenté le modèle 3P_0 tel qu'il est habituellement employé (fonction de vertex constante) puis nous avons développé le formalisme pour inclure une dépendance en l'impulsion et la saveur de la paire $q\bar{q}$ créée. Nous avons dès lors recherché la forme de la fonction de vertex $\gamma(p)$ la plus à même de reproduire les résultats expérimentaux. Nous avons trouvé pour cela plusieurs formes analytiques satisfaisantes et avons constaté, après paramétrisation, qu'elles avaient toutes le même comportement en impulsion dans la région 0-1 GeV. Ainsi l'écriture analytique de $\gamma(p)$ n'est pas unique du moment qu'elle reproduit le bon comportement en p dans la région d'intérêt.

Nous avons opté pour une fonction de vertex de la forme "constante + gaussienne", ce qui, pour des fonctions d'ondes radiales écrites comme une somme de gaussiennes que multiplie une harmonique solide, nous a permis d'obtenir une expression de la largeur de désintégration complètement analytique. Notre formalisme modifié du modèle 3P_0 s'est révélé être une nette amélioration du modèle original. Nous avons appliqué deux fois notre formalisme modifié (en une double désintégration) pour essayer de reproduire la désexcitation d'un méson dans un état instable et donc se désintégrant à son tour. Pour cela nous avons testé plusieurs prescriptions : celle de Capstick et Roberts (remplacement de la fonction delta de Dirac assurant la conservation de l'énergie par une fonction de Breit-Wigner de largeur non nulle) ou une distribution de masse (distribution de Gauss et de Lorentz) pour le méson large de l'état final. Cependant les résultats montrent que toute la physique n'est pas incluse dans de telles descriptions.

Différents potentiels, du plus simple au plus sophistiqués, ont été testés ; nous avons notamment pris en compte les effets de l'instanton, des forces spin-orbite et tenseur et de l'habillage des quarks. Bien que se différenciant sur certaines transitions, dans l'ensemble nous n'avons pas trouvé de potentiel supérieur aux autres, ceci est principalement dû au fait de l'intégrale spatiale apparaissant dans nos calculs qui a tendance à lisser les différences de nos fonctions d'onde.

La seconde partie de notre étude a porté sur les désintégrations radiatives, celles-ci pré-

sentent l'avantage de faire intervenir, en théorie, un opérateur de transition parfaitement connu et donc les seules imprécisions proviennent des fonctions d'onde employées. En réalité, le couplage quark constituant-photon ainsi que le processus de désexcitation utilisé pour expliquer la transition sont tous deux sources de nouvelles inconnues. Nous nous sommes intéressés dans un premier temps aux transitions en une paire de leptons. Pour cela, nous avons redémontré la formule de van Royen-Weisskopf dans un premier temps. Puis nous avons été au delà de cette approximation en prenant en compte les effets relativistes dans la fonction d'onde et également en habillant phénoménologiquement (avec deux paramètres libres) les quarks pour leur donner une extension spatiale. Nos modifications nous ont permis d'améliorer nettement, surtout pour le potentiel DNR, l'accord-théorie expérience et d'autoriser des transitions de mésons d'onde D, chose impossible à reproduire dans l'approximation de van Royen-Weisskopf. L'habillage, bien que phénoménologique, améliore encore les résultats sauf pour les cas où seule l'onde D contribue.

Enfin, nous avons calculé les désintégrations d'un méson en un méson plus un photon réel. Nous avons ici testé les approximations des grandes longueurs d'onde (GLO), approximation dipolaire, utilisation d'espace de phase non relativiste. En développant également un formalisme allant au delà de l'approximation des grandes longueurs d'onde, nous avons pu comparer nos résultats à ceux obtenus pour les précédentes approximations. Bien que correspondant au bon ordre de grandeur, les résultats théoriques obtenus dans le formalisme le plus général ne sont supérieurs en qualité à ceux obtenus pour les GLO que dans la mesure où ils donnent des largeurs non nulles à des transitions interdites dans les GLO ; sinon les résultats sont de qualité similaire. Une partie de la physique est donc manquante dans notre schématisation du processus radiatif : méson $\rightarrow$ méson+photon. Il serait intéressant de poursuivre l'étude en prenant en compte les effets relativistes dans la fonction d'onde et/ou de modifier le formalisme en incorporant un facteur de forme au vertex quark-photon.

En conclusion, nous avons utilisé dans différents processus forts ou radiatifs, les fonctions d'onde non-relativistes issues de potentiels d'interaction $q\bar{q}$. Pour cela, nous avons développés les formalismes théoriques expliquant de telles transitions, cependant toute cette approche peut être qualifiée de dépendant du modèle car au vu des résultats, il est difficile, sinon impossible, de dire si les désaccords théorie-expérience proviennent des fonctions d'onde (et donc de potentiels d'interaction $q\bar{q}$ incomplets) ou de la schématisation incorrecte ou incomplète du processus permettant d'expliquer la désintégration. Cependant à l'heure actuelle les modèles de potentiel permettent de tester un large éventail de situations physiques.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Les potentiels d'interactions $q\bar{q}$

Nous présentons ici la forme des potentiels utilisés au cours de notre étude.

A.1 AL1 et AP1

Ces deux potentiels sont les plus simples considérés tout au long de cette étude, ils nous servent de référence. Ils ont été développés par B. Silvestre-Brac et C. Semay.

AL1 et AP1 contiennent les éléments indispensables à un potentiel dit “QCD-inspired” : soit le confinement ar^p , le terme coulombien d'échange de gluon α/r et le terme hyperfin responsable de la levée de dégénérescence $\rho - \pi$. On a :

$$V_{ij}(r) = -\frac{3}{16} \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j v_{ij}(r) \quad (\text{A.1})$$

$$v_{ij}(r) = -\frac{\kappa}{r} + \lambda r^p + \Lambda + \frac{2\pi}{3m_i m_j} \kappa' \frac{\exp(-r^2/r_0^2)}{\pi^{3/2} r_0^3} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \quad (\text{A.2})$$

avec $r_0(m_i, m_j) = A(\frac{2m_i m_j}{m_i + m_j})^{-B}$.

Les paramètres sont présentés dans la table (A.1).

A.2 χ QM

Le potentiel χ QM est basé sur le postulat que la masse constituante des quarks découle de la brisure spontanée de la symétrie chirale. F. Fernández et collaborateurs ont bâti ce potentiel sur ce fait. Ce potentiel comprend le confinement et le terme d'échange de gluon. Pour la partie intermédiaire en énergie (200 MeV- 1 GeV), V_S et V_{PS} décrivent l'interaction associée aux différents modes provenant de la brisure de la symétrie chirale cf [40]. On a donc un potentiel de forme générale :

$$V_{qq}(\vec{r}) = V_{OGE}(\vec{r}) + V_{CON}(\vec{r}) + V_{PS}(\vec{r}) + V_S(\vec{r}), \quad (\text{A.3})$$

TAB. A.1 – Paramètres employés pour les potentiels AL1 et AP1.

paramètre	AL1	AP1
$m_u = m_d (GeV)$	0.315	0.277
$m_s (GeV)$	0.577	0.553
$m_c (GeV)$	1.836	1.819
$m_b (GeV)$	5.227	5.206
p	1	$\frac{2}{3}$
κ	0.5069	0.4242
κ'	1.8609	1.8025
λ	0.1653 (GeV^2)	0.3898 ($GeV^{5/3}$)
$\Lambda (GeV)$	-0.8321	-1.1313
B	0.2204	0.3263
$A (GeV^{B-1})$	1.6553	1.5296

avec :

$$V_{PS}(\vec{r}_{ij}) = \frac{1}{3} \alpha_{ch} \frac{\Lambda_{CSB}^2}{\Lambda_{CSB}^2 - m_{PS}^2} m_{PS} \left[Y(m_{PS} r_{ij}) - \frac{\Lambda_{CSB}^3}{m_{PS}^3} Y(\Lambda_{CSB} r_{ij}) \right] (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j)(\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j), \quad (A.4)$$

$$V_S(\vec{r}_{ij}) = -\alpha_{ch} \frac{4m_n^2}{m_{PS}^2} \frac{\Lambda_{CSB}^2}{\Lambda_{CSB}^2 - m_S^2} m_S \left[Y(m_S r_{ij}) - \frac{\Lambda_{CSB}}{m_S} Y(\Lambda_{CSB} r_{ij}) \right], \quad (A.5)$$

α_{ch} est la constante de couplage chirale et Λ_{CSB} détermine l'échelle d'énergie pour laquelle la symétrie chirale est brisée. m_{PS} est la masse du boson de Goldstone pseudo-scalaire (fixée par la valeur expérimentale de la masse du π). m_S est la masse scalaire du boson de Goldstone, reliée à m_{PS} par :

$$m_S^2 = m_{PS}^2 + (2m_n)^2 \quad (A.6)$$

$\vec{\sigma}_i, \vec{\tau}_i$ sont respectivement les matrices de Pauli pour le spin et l'isospin.

$Y(x)$ représente la fonction de Yukawa définie par :

$$Y(x) = \frac{e^{-x}}{x}. \quad (A.7)$$

La constante de couplage α_{ch} est reliée à la constante de couplage πNN : $g_{\pi NN}^2$ par la relation :

$$\alpha_{ch} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{g_{\pi NN}^2}{4\pi} \frac{m_\pi^2}{4m_N^2}. \quad (A.8)$$

La forme prise pour l'échange de gluon est [41] :

$$V_{OGE}(\vec{r}_{ij}) = \frac{1}{4} \alpha_s \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \left\{ \frac{1}{r_{ij}} - \pi \left[\left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} \right) + \frac{2}{3m_i m_j} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \right] \delta(\vec{r}_{ij}) \right\}, \quad (A.9)$$

où α_s désigne la constante de couplage forte effective et $\vec{\lambda}_i$ sont les matrices SU(3) de Gell-man pour la couleur.

Comme pour les autres potentiels, la fonction delta de Dirac doit être régularisée :

$$\delta(\vec{r}) \rightarrow \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-r/r_0}}{r_0^2 r} \quad (\text{A.10})$$

Enfin, un phénomène d'écrantage (dû à la création de paire $q\bar{q}$ [42]) est pris en compte dans le terme de confinement, qui reste néanmoins linéaire pour les courtes distances [43] :

$$V_{CON}(\vec{r}_{ij}) = -a \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j (1 - e^{-\mu r_{ij}}) . \quad (\text{A.11})$$

Les paramètres du potentiel sont réunis dans la table (A.2)

TAB. A.2 – Paramètres employés pour le potentiel χ QM.

$m_{u,d}(\text{MeV})$	313	
$m_s(\text{MeV})$	560	
α_s	0.485	
α_{ch}	0.028	
$m_S(\text{fm}^{-1})$	3.42	
$m_{PS}(\text{fm}^{-1})$	0.7	
$\Lambda_{CSB}(\text{fm}^{-1})$	4.2	
$a(\text{MeV})$	500.0	} $a_c = a \cdot \mu = 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-1}$
$\mu(\text{fm}^{-1})$	0.4	
$r_0(\text{fm})$	0.094	

A.3 DNR et NRAL

Ces deux potentiels ont été développés par B. Silvestre-Brac et C. Sema [3]-[4]. Ils contiennent une partie de confinement, un terme d'échange de gluon, un terme hyperfin ; ils prennent aussi en compte la taille finie des quarks, au moyen d'une densité de distribution de probabilité de présence ($\rho_i(\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{\sigma_i^3}{\pi^{3/2}} \exp(-\sigma_i^2(\vec{r} - \vec{r}_i)^2)$ avec $\sigma_i = \sigma_0 m_i^\delta$), et l'instanton. De plus le potentiel NRAL inclut une contribution de la part des forces spin-orbite et tenseur.

$$V_c(r) = ar - \frac{4}{3} \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\text{erf}(\tau_k r)}{r} + C \quad (\text{A.12})$$

où :

$$\frac{1}{\tau_k^2} = \frac{1}{\gamma_k^2} + \frac{1}{\sigma^2} \quad (\text{A.13})$$

proviennent d'un "fit" sur $\alpha_s(Q)$. On a $\gamma_1 = 0.5$ GeV, $\gamma_2 = \sqrt{2.5}$ GeV, $\gamma_3 = \sqrt{250}$ GeV et $\sigma^2 = \sigma_0^2 \mu^2 [m_1^{2(\delta-1)} + m_2^{2(\delta-1)}]$ avec μ la masse réduite du système. Le confinement demeure (plus ou moins) linéaire après convolution, le terme coulombien, quant à lui, devient une somme de fonctions d'erreurs.

V_h désigne le terme phénoménologique hyperfin, somme de deux gaussiennes l'une de courte et l'autre de longue portée. Ce terme reste une somme de gaussiennes après convolution avec ρ :

$$V_h(r) = \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}{m_1 m_2} \sum_{k=1}^2 \kappa_k \frac{\exp(-r^2/\eta_k^2)}{(\eta_k \sqrt{\pi})^3} \quad (\text{A.14})$$

avec σ^2 défini comme précédemment et :

$$\eta_k^2 = \eta_{0k}^2 + \frac{1}{\sigma^2} \quad (\text{A.15})$$

Le terme d'instanton vaut :

$$\begin{aligned} V_i(r) &= -8gh(r)\delta_{S,0}\delta_{L,0} && \text{pour } I=1 \\ &= -8g'h(r)\delta_{S,0}\delta_{L,0} && \text{pour } I=1/2 \\ &= 8 \begin{pmatrix} g & \sqrt{2}g' \\ \sqrt{2}g' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |n\bar{n}, I=0\rangle \\ |s\bar{s}, I=0\rangle \end{pmatrix} h(r)\delta_{S,0}\delta_{L,0} && \text{pour } I=0 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

avec une fonction $h(r)$ gaussienne de courte portée :

$$h(r) = \frac{1}{(R\sqrt{\pi})^3} \exp(-r^2/R^2) \quad (\text{A.17})$$

avec :

$$R^2 = r_0^2 + \frac{1}{\sigma^2} \quad (\text{A.18})$$

Pour le potentiel NRAL s'ajoutent à cela les effets des forces spin-orbite et tenseur. Dès lors, on a :

$$V = V_\bullet + V_i + V_h + V_{so} + V_T \quad (\text{A.19})$$

La force spin-orbite contient deux parties : une symétrique basée sur $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ et une antisymétrique basée sur $\vec{\Delta} = \vec{s}_1 - \vec{s}_2$, on a donc dans le potentiel :

$$V_{so}(r) = V_{LS}(r) \vec{L} \cdot \vec{S} + V_{L\Delta}(r) \vec{L} \cdot \vec{\Delta} \quad (\text{A.20})$$

avec :

$$\begin{aligned} V_{LS}(r) &= \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \sum_{k=3}^4 \kappa_k \frac{\exp(-r^2/\eta_{k-2}^2)}{(\eta_{k-2}\sqrt{\pi})^3} \\ &+ \left(\frac{1}{m_1 m_2} \right) \sum_{k=5}^6 \kappa_k \frac{\exp(-r^2/\eta_{k-4}^2)}{(\eta_{k-4}\sqrt{\pi})^3} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

TAB. A.3 – Valeurs, en puissance de GeV, des paramètres employés dans les potentiels DNR et NRAL.

paramètre	DNR	NRAL
m_n	0.350	0.400
m_s	0.622	0.630
m_c	1.865	1.860
m_b	5.246	5.243
a	0.176	0.161
α_1	0.176	0.434
α_2	0.158	0.137
α_3	0.220	0.221
C	-0.828	-0.661
g	20.12	11.54
g'	8.845	4.963
r_0	3.404	2.668
η_{01}	0.257	0.481
η_{02}	3.611	1.488
κ_1	0.977	1.214
κ_2	2.726	0.927
κ_3	-	-6.905
κ_4	-	1.427
κ_5	-	5.429
κ_6	-	8.484
κ_7	-	9.802
κ_8	-	3.382
σ_0	4.304	3.820
δ	1.438	1.318

et :

$$V_{L\Delta}(r) = \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m_2^2} \right) \sum_{k=3}^4 \kappa_k \frac{\exp(-r^2/\eta_{k-2}^2)}{(\eta_{k-2}\sqrt{\pi})^3} \quad (\text{A.22})$$

La force tenseur, quant à elle, s'écrit :

$$V_T = \frac{S_{12}}{m_1 m_2} f_T(r) \quad (\text{A.23})$$

avec

$$S_{12} = (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})/r^2 - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)/3 \quad (\text{A.24})$$

$$f_T(r) = \sum_{k=7}^8 \kappa_k \frac{\exp(-r^2/\eta_{k-6}^2)}{(\eta_{k-6}\sqrt{\pi})^3} \quad (\text{A.25})$$

Annexe B

Lois de conservation

B.1 La parité

La parité est liée à la symétrie d'inversion par rapport à l'origine du repère. Elle est liée à la conservation du moment angulaire orbital. Pour une fonction d'onde $\Psi(\vec{r})$ état propre de l'opérateur parité, on a :

$$P \Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}) = \pi \Psi(\vec{r}) \quad (\text{B.1})$$

$$P^2 \Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) = \pi^2 \Psi(\vec{r}) \quad (\text{B.2})$$

$$\Rightarrow \pi = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Cette symétrie est conservée par toutes les interactions sauf la force faible.

Pour une paire quark-antiquark, la parité sera le produit (nombre quantique multiplicatif avec cette notation cf discussion p 127 [44]) de trois termes : la parité intrinsèque d'un quark, parité intrinsèque d'un antiquark et la parité du système $q\bar{q}$ dans l'état de moment orbital relatif L . Par définition la parité d'un quark est positive, celle de l'antiparticule est donc négative (pour les fermions uniquement) et celle du système de moment orbital L vaut $(-1)^L$. Au total on a donc :

$$P = 1(-1)(-1)^L = (-1)^{L+1} \quad (\text{B.4})$$

B.2 La conservation de charge

L'opérateur C de conjugaison de charge fait correspondre à une particule son antiparticule. Ne sont donc états propres que les systèmes qui sont leurs propres antiparticules. Pour les mésons cela impose une seule saveur pour la paire $q\bar{q}$ et correspond à des mésons neutres. Une double application successive de l'opérateur conjugaison de charge nous redonne le système initial, donc comme pour la parité, il n'existe que deux valeurs propres ± 1 . Appliquons C à un méson composé d'une saveur unique (omise ici) :

$$C |q_s, \bar{q}_{s'}\rangle = C \left(N \int d\vec{p} \Psi(\vec{p}) b_s^\dagger(\vec{p}) d_{s'}^\dagger(-\vec{p}) |0\rangle \right) \quad (\text{B.5})$$

$$= N \int d\vec{p} \Psi(\vec{p}) d_s^\dagger(\vec{p}) b_{s'}^\dagger(-\vec{p}) |0\rangle \quad (\text{B.6})$$

$$= N \int (-1) d\vec{p} \Psi(\vec{p}) b_{s'}^\dagger(-\vec{p}) d_s^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \quad (\text{B.7})$$

où l'on a utilisé :

$$C b_s^\dagger(\vec{p}) = d_s^\dagger(\vec{p}) \quad (\text{B.8})$$

$$C d_s^\dagger(\vec{p}) = b_s^\dagger(\vec{p}) \quad (\text{B.9})$$

et l'anticommuation des opérateurs $b^\dagger$ et $d^\dagger$. s représente le spin $\frac{1}{2}$ de projection m_s . De même pour s' .

On fait ensuite le changement de variable $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, puis on utilise la relation :

$$\psi(-\vec{p}) = (-1)^L \psi(\vec{p}) \quad (\text{B.10})$$

pour la fonction d'onde d'un méson de moment orbital L . Ainsi :

$$C |q_s, \bar{q}_{s'}\rangle = (-1)^{L+1} N \int d\vec{p} \Psi(\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}) d_s^\dagger(-\vec{p}) |0\rangle \quad (\text{B.11})$$

Il nous reste à permuter les états de spin s et s' pour retrouver l'état initial. Ceci revient, pour un méson de spin total $\vec{S} = \vec{s} + \vec{s}'$, à transformer le coefficient de Clebsch-Gordan :

$$C_{s', m_{s'}; s, m_s}^{S, M_S} \rightarrow C_{s, m_s; s', m_{s'}}^{S, M_S} = (-1)^{s+s'-S} C_{s', m_{s'}; s, m_s}^{S, M_S} \quad (\text{B.12})$$

Pour des spins demi-entiers, S vaut 0 ou 1, donc $(-1)^{s+s'-S} = (-1)^{1+S}$. En réinjectant cette phase dans l'expression (B.11), on obtient finalement :

$$C |q_s, \bar{q}_{s'}\rangle = (-1)^{L+1+S+1} N \int d\vec{p} \Psi(\vec{p}) b_s^\dagger(\vec{p}) d_{s'}^\dagger(-\vec{p}) |0\rangle \quad (\text{B.13})$$

$$C |q_s, \bar{q}_{s'}\rangle = (-1)^{L+S} |q_s, \bar{q}_{s'}\rangle \quad (\text{B.14})$$

B.2.1 La parité et conservation de charge pour le 3P_0

La paire $q\bar{q}$ du modèle 3P_0 est issue du vide et possède donc les caractéristiques suivantes : $J^{PC} = 0^{++}$.

Pour une paire $q\bar{q}$:

$$\begin{aligned} \text{la parité est définie par} & \quad P = (-1)^{L+1} \\ \text{la conjugaison de charge par} & \quad C = (-1)^{L+S} \end{aligned}$$

Ainsi les seuls nombres quantiques acceptables sont $L = 1$, $S = 1$ couplés à $J = 0$ ou dans nos notations : $[1, 1]^{J=0}$ et d'où la dénomination du modèle en notation spectroscopique.

B.3 La G -parité

Cet opérateur est né du désir d'élargir la notion de conjugaison de charge. En effet, cette dernière n'est définie que pour les cas très limité où le système est sa propre antiparticule. Pour généraliser la symétrie de conjugaison de charge aux particules chargées, on incorpore une rotation de 180° suivant I_y dans l'espace d'isospin pour transformer I_z en $-I_z$. Donc l'opérateur de G -parité s'écrit :

$$G = C e^{i\pi I_y} \quad (\text{B.15})$$

qui appliqué à un état propre, donne :

$$G |\Psi_{L,S}\rangle = (-1)^{L+S} (-1)^I |\Psi_{L,S}\rangle \quad (\text{B.16})$$

Tous les mésons composés uniquement des saveur u et d sont états propres de G . La valeur propre est le produit de la valeur propre $(-1)^{L+S}$ associé à l'opérateur conjugaison de charge C , appliqué au méson neutre, par $(-1)^I$ où I est la valeur de l'isospin du système.

Annexe C

Détail du calcul de la seconde contraction

Pour le calcul de la contribution spin-espace nous partons de l'expression 3.59. Commençons par séparer dans le ket le spin du moment orbital :

$$\begin{aligned}
& \left| \left[[L_A S_A]^{J_A} [\mathcal{Y}_1 1]^0 \right]^{J_A} \right\rangle \\
&= \sum_{L,S} \left\langle \left[[L_A \mathcal{Y}_1]^L [S_A 1]^S \right]^{J_A} \middle| \left[[L_A S_A]^{J_A} [\mathcal{Y}_1 1]^0 \right]^{J_A} \right\rangle \left| \left[[L_A \mathcal{Y}_1]^L [S_A 1]^S \right]^{J_A} \right\rangle \\
&= \sum_{L,S} \hat{J}_A \hat{L} \hat{S} \begin{Bmatrix} L_A & S_A & J_A \\ 1 & 1 & 0 \\ L & S & J_A \end{Bmatrix} \left| \left[[L_A \mathcal{Y}_1]^L [S_A 1]^S \right]^{J_A} \right\rangle \\
&= \sum_{L,S} (-1)^{L_A+J_A+S+1} \frac{\hat{L} \hat{S}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} L_A & S_A & J_A \\ S & L & 1 \end{Bmatrix} \left| \left[[L_A \mathcal{Y}_1]^L [S_A 1]^S \right]^{J_A} \right\rangle \quad (C.1)
\end{aligned}$$

Maintenant faisons la même chose pour le bra, que l'on traite en deux temps :

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left[[L_B S_B]^{J_B} [L_C S_C]^{J_C} \right]^{J_{BC}} \right| \\
&= \sum_{L_{BC}, S_{BC}} \left\langle \left[[L_B S_B]^{J_B} [L_C S_C]^{J_C} \right]^{J_{BC}} \middle| \left[[L_B L_C]^{L_{BC}} [S_B S_C]^{S_{BC}} \right]^{J_{BC}} \right\rangle \\
& \quad \left\langle \left[[L_B L_C]^{L_{BC}} [S_B S_C]^{S_{BC}} \right]^{J_{BC}} \right| \\
&= \sum_{L_{BC}, S_{BC}} \hat{J}_B \hat{J}_C \hat{S}_{BC} \hat{L}_{BC} \begin{Bmatrix} L_B & S_B & J_B \\ L_C & S_C & J_C \\ L_{BC} & S_{BC} & J_{BC} \end{Bmatrix} \left\langle \left[[L_B L_C]^{L_{BC}} [S_B S_C]^{S_{BC}} \right]^{J_{BC}} \right| \quad (C.2)
\end{aligned}$$

en tenant compte de l'onde l , on a :

$$\left\langle \left[[L_{BC} S_{BC}]^{J_{BC}} l \right]^{J_A} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l_1} \left\langle \left[[L_{BC} S_{BC}]^{J_{BC}} l \right]^{J_A} \right| \left[[L_{BC} l]^{l_1} S_{BC} \right]^{J_A} \right\rangle \left\langle \left[[L_{BC} l]^{l_1} S_{BC} \right]^{J_A} \right| \\
&= \sum_{l_1} (-1)^{S_{BC}+J_{BC}+l+l_1} \hat{J}_{BC} \hat{l}_1 \left\{ \begin{matrix} S_{BC} & L_{BC} & J_{BC} \\ l & J_A & l_1 \end{matrix} \right\} \left\langle \left[[L_{BC} l]^{l_1} S_{BC} \right]^{J_A} \right| \quad (C.3)
\end{aligned}$$

En recombinaut les expressions des équations (C.2) et (C.3) cela permet l'écriture du bra sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left[\left[[L_B S_B]^{J_B} [L_C S_C]^{J_C} \right]^{J_{BC}} l \right]^{J_A} \right| \\
&= \sum_{l_1, L_{BC}, S_{BC}} (-1)^{S_{BC}+J_{BC}+l+l_1} \hat{L}_{BC} \hat{S}_{BC} \hat{J}_B \hat{J}_C \hat{J}_{BC} \hat{l}_1 \left\{ \begin{matrix} S_{BC} & L_{BC} & J_{BC} \\ l & J_A & l_1 \end{matrix} \right\} \\
&\quad \left\{ \begin{matrix} L_B & S_B & J_B \\ L_C & S_C & J_C \\ L_{BC} & S_{BC} & J_{BC} \end{matrix} \right\} \left\langle \left[\left[[L_B L_C]^{L_{BC}} l \right]^{l_1} [S_B S_C]^{S_{BC}} \right]^{J_A} \right| \quad (C.4)
\end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons effectuer le produit scalaire avec les parties spin et espace découplées. En partant des expressions (C.1) et (C.4), on écrit :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left[\left[[L_B S_B]^{J_B} [L_C S_C]^{J_C} \right]^{J_{BC}} l \right]^{J_A} \right| \left[[L_A S_A]^{J_A} [\mathcal{Y}_1 1]^0 \right]^{J_A} \right\rangle \\
&= \sum_{\substack{L, S, l_1 \\ L_{BC}, S_{BC}}} (-1)^{S_{BC}+J_{BC}+l+l_1+L_A+J_A+S+1} \frac{\hat{L} \hat{S} \hat{L}_{BC} \hat{S}_{BC} \hat{J}_B \hat{J}_C \hat{J}_{BC} \hat{l}_1}{\sqrt{3}} \\
&\quad \left\{ \begin{matrix} L_A & S_A & J_A \\ S & L & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} S_{BC} & L_{BC} & J_{BC} \\ l & J_A & l_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L_B & S_B & J_B \\ L_C & S_C & J_C \\ L_{BC} & S_{BC} & J_{BC} \end{matrix} \right\} \\
&\quad \left\langle \left[\left[[L_B L_C]^{L_{BC}} l \right]^{l_1} [S_B S_C]^{S_{BC}} \right]^{J_A} \right| \left[[L_A \mathcal{Y}_1]^L [S_A 1]^S \right]^{J_A} \right\rangle \quad (C.5)
\end{aligned}$$

Le dernier terme braket vaut :

$$\delta_{l_1, L} \delta_{m_{l_1}, m_L} \delta_{S_{BC}, S} \delta_{M_{S_{BC}}, M_S} \left\langle \left[[L_B L_C]^{L_{BC}} l \right]^L \right| [L_A 1]^L \right\rangle \left\langle [S_B S_C]^S \right| [S_A 1]^S \right\rangle \quad (C.6)$$

$$\begin{aligned}
\left\langle [S_B S_C]^S \right| [S_A 1]^S \right\rangle &= \left\langle \left[[s_\alpha s_\epsilon]^{S_B} [s_\lambda s_\beta]^{S_C} \right]^S \right| \left[[s_\alpha s_\beta]^{S_A} [s_\lambda s_\epsilon]^1 \right]^S \right\rangle \\
&= (-1)^{S_C-1} \hat{S}_A \hat{S}_B \hat{S}_C \sqrt{3} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_B \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_C \\ S_A & 1 & S \end{matrix} \right\} \quad (C.7)
\end{aligned}$$

Ce qui inclus dans l'expression du couplage spin-espace donne :

$$\begin{aligned}
\langle \cdot | \cdot \rangle &= \sum_{L,S,L_{BC}} (-1)^{l+L+J_{BC}+L_A+J_A+S_C} \hat{L}_{BC} \hat{J}_{BC} \hat{J}_B \hat{J}_C \hat{S}_A \hat{S}_B \hat{S}_C \hat{L}^2 \hat{S}^2 \\
&\quad \left\{ \begin{matrix} L_A & S_A & J_A \\ S & L & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} S & L_{BC} & J_{BC} \\ l & J_A & L \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_B \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_C \\ S_A & 1 & S \end{matrix} \right\} \\
&\quad \left\{ \begin{matrix} L_B & S_B & J_B \\ L_C & S_C & J_C \\ L_{BC} & S_{BC} & J_{BC} \end{matrix} \right\} \left\langle \left[[L_B L_C]^{L_{BC}} l \right]^L \middle| [L_A 1]^L \right\rangle \\
&= \sum_{L_{bc}, L, S} \mathcal{C}(A \rightarrow BC) \mathcal{E}(A \rightarrow BC)
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Cette fois les contributions du spin et de l'espace sont complètement découplées. Celle du spin vaut :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(A \rightarrow BC) &= (-1)^{l+L+J_{BC}+L_A+J_A+S_C} \hat{L}_{BC} \hat{J}_{BC} \hat{J}_B \hat{J}_C \hat{S}_A \hat{S}_B \hat{S}_C \hat{L}^2 \hat{S}^2 \left\{ \begin{matrix} L_A & S_A & J_A \\ S & L & 1 \end{matrix} \right\} \\
&\quad \left\{ \begin{matrix} S & L_{BC} & J_{BC} \\ l & J_A & L \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_B \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S_C \\ S_A & 1 & S \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L_B & S_B & J_B \\ L_C & S_C & J_C \\ L_{BC} & S_{BC} & J_{BC} \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Quant à la contribution spatiale, celle-ci nécessite encore des traitements, elle s'écrit pour l'instant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(A \rightarrow BC) &= \mathcal{N}_{BC} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p} d\vec{K}_B d\vec{K}_C \delta(\vec{P}_A) \frac{\delta(k - k_0)}{k} \delta(\vec{K}_B - \vec{P}_B) \delta(\vec{K}_C - \vec{P}_C) \\
&\quad \delta(\vec{K} - \vec{K}_0) \gamma_\lambda(|\vec{p}|) \left\langle \left[[\phi_B(\vec{p}_b) \phi_C(\vec{p}_c)]^{L_{BC}} Y_l(\hat{k}) \right]^L \middle| [\phi_A(\vec{p}_a) \mathcal{Y}_1(\vec{p})]^L \right\rangle
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Les variables apparaissant ci-dessus sont :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} \vec{P}_A = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \vec{p}_a = \frac{m_\beta \vec{p}_1 - m_\alpha \vec{p}_2}{m_\alpha + m_\beta} \end{matrix} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \vec{p}_1 = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \vec{P}_A + \vec{p}_a \\ \vec{p}_2 = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \vec{P}_A - \vec{p}_a \end{matrix} \right\} \\
\left\{ \begin{matrix} \vec{P} = \vec{p} + \vec{p}' \\ \vec{\pi} = \frac{\vec{p} - \vec{p}'}{2} \end{matrix} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \vec{p} = \frac{\vec{P}}{2} + \vec{\pi} \\ \vec{p}' = \frac{\vec{P}}{2} - \vec{\pi} \end{matrix} \right\} \\
\left\{ \begin{matrix} \vec{K} = \vec{K}_B + \vec{K}_C \\ \vec{k} = \frac{m_C \vec{K}_B - m_B \vec{K}_C}{m_B + m_C} \end{matrix} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \vec{K}_B = \frac{m_B}{m_B + m_C} \vec{K} + \vec{k} \\ \vec{K}_C = \frac{m_C}{m_B + m_C} \vec{K} - \vec{k} \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{C.11}$$

où $\omega_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_{ref}}$ et $\omega_{\alpha\beta} = \omega_\alpha + \omega_\beta$. Nous avons des expressions similaires pour les variables

concernant les mésons B et C . A savoir :

$$\begin{cases} \vec{P}_B = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = \vec{p}_1 + \vec{p}' = \frac{\omega_\alpha}{\omega_{\alpha\beta}} \vec{P}_A + \vec{p}_a + \frac{\vec{P}}{2} - \vec{\pi} \\ \vec{p}_b = \frac{m_\epsilon \vec{p}_3 - m_\delta \vec{p}_4}{m_\epsilon + m_\delta} = \frac{m_\epsilon \vec{p}_1 - m_\alpha \vec{p}'}{m_\epsilon + m_\alpha} = \frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_{\alpha\beta}} \vec{P}_A + \vec{p}_a \right) + \frac{\omega_\alpha}{\omega_{\alpha\epsilon}} \left(\vec{\pi} - \frac{\vec{P}}{2} \right) \end{cases} \quad (C.12)$$

$$\begin{cases} \vec{P}_C = \vec{p}_5 + \vec{p}_6 = \vec{p} + \vec{p}_2 = \frac{\omega_\beta}{\omega_{\alpha\beta}} \vec{P}_A - \vec{p}_a + \frac{\vec{P}}{2} + \vec{\pi} \\ \vec{p}_c = \frac{m_\rho \vec{p}_5 - m_\lambda \vec{p}_6}{m_\rho + m_\lambda} = \frac{m_\beta \vec{p} - m_\lambda \vec{p}_2}{m_\beta + m_\lambda} = \frac{\omega_\beta}{\omega_{\lambda\beta}} \left(\frac{\vec{P}}{2} + \vec{\pi} \right) + \frac{\omega_\lambda}{\omega_{\lambda\beta}} \left(\vec{p}_a - \frac{\omega_\beta}{\omega_{\alpha\beta}} \vec{P}_A \right) \end{cases}$$

On fait ensuite les changements de variables unitaires suivants :

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2 \rightarrow \vec{p}_a, \vec{P}_A; \quad \vec{p}, \vec{p}' \rightarrow \vec{\pi}, \vec{P}; \quad \vec{K}_B, \vec{K}_C \rightarrow \vec{k}, \vec{K}$$

qui permet de passer à des impulsions représentant des quantités plus physiques : les impulsions relatives des quarks au sein des mésons et les impulsions totales notées par des lettres majuscules.

L'“astuce” consiste à garder les variables π , qui intervient dans la fonction de vertex inconnue, et k du fait du $\delta(k - k_0)$. Du fait de la fonction $\delta(\vec{p} + \vec{p}') = \delta(\vec{P})$, on a $\vec{P} = \vec{0}$ (et donc $p = \pi$), de même pour $\vec{P}_A$ la fonction $\delta(\vec{P}_A) \Rightarrow \vec{P}_A = \vec{0}$ qui nous permet donc d'intégrer très facilement. Après quelques manipulations ne présentant pas de difficulté notre intégrale devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(A \rightarrow BC) &= \mathcal{N}_{BC} \int d\vec{k} d\vec{\pi} \delta(\vec{K}_0) \frac{\delta(k - k_0)}{k} \gamma_\lambda(|\vec{\pi}|) \\ &\quad \left\langle \left[[\phi_B(\vec{p}_b) \phi_C(\vec{p}_c)]^{L_{BC}} Y_l(\hat{k}) \right]^L \mid [\phi_A(\vec{p}_a) \mathcal{Y}_1(\vec{p})]^L \right\rangle \end{aligned} \quad (C.13)$$

Avec les expressions suivantes pour les variables :

$$\begin{aligned} \vec{p}_a &= \vec{k} + \vec{\pi} \\ \vec{p}_b &= \frac{\omega_\epsilon \vec{p}_a + \omega_\alpha \vec{\pi}}{\omega_{\alpha\epsilon}} = \frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} \vec{k} + \vec{\pi} \\ \vec{p}_c &= \frac{\omega_\lambda \vec{p}_a + \omega_\beta \vec{\pi}}{\omega_{\lambda\beta}} = \frac{\omega_\lambda}{\omega_{\lambda\beta}} \vec{k} + \vec{\pi} \end{aligned} \quad (C.14)$$

Pour la suite des calculs, il faut préciser la forme des fonctions d'onde. Comme déjà mentionné, nous allons prendre une décomposition en somme de gaussiennes que multiplie une harmonique solide soit :

$$\begin{aligned} \phi_A(\vec{p}_a) &= \sum_i d_i^a e^{-\frac{A_i}{2} p_a^2} \mathcal{Y}_{L_A}(\vec{p}_a); & \phi_B(\vec{p}_b) &= \sum_j d_j^b e^{-\frac{B_j}{2} p_b^2} \mathcal{Y}_{L_B}(\vec{p}_b) \\ \phi_C(\vec{p}_c) &= \sum_k d_k^c e^{-\frac{C_k}{2} p_c^2} \mathcal{Y}_{L_C}(\vec{p}_c) \end{aligned} \quad (C.15)$$

Ce qui nous permet de réécrire le terme spatial sous la forme d'une somme :

$$\mathcal{E}(A \rightarrow BC) = \sum_{i,j,k} d_i^a d_j^b d_k^c \mathcal{E}_{ijk}(A_i \rightarrow B_j C_k) \quad (C.16)$$

Pour ne pas alourdir inutilement nos expressions, on fixe les valeurs des indices i, j, k et on les sous-entend. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ijk}(A \rightarrow BC) &= \mathcal{N}_{BC} \int d\vec{k} d\vec{\pi} \delta(\vec{K}_0) \frac{\delta(k - k_0)}{k^{l+1}} \gamma_\lambda(|\vec{\pi}|) e^{-\frac{A}{2} p_a^2 - \frac{B}{2} p_b^2 - \frac{C}{2} p_c^2} \\ &\quad \left\langle \left[\left[\mathcal{Y}_{L_B}(\vec{p}_b = \frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} \vec{k} + \vec{\pi}) \mathcal{Y}_{L_C}(\vec{p}_c = \frac{\omega_\lambda}{\omega_{\lambda\beta}} \vec{k} + \vec{\pi}) \right]^{L_{BC}} \mathcal{Y}_l(\hat{k}) \right]^L \mid \left[\mathcal{Y}_{L_A}(\vec{p}_a = \vec{k} + \vec{\pi}) \mathcal{Y}_1(\vec{\pi}) \right]^L \right\rangle \end{aligned} \quad (C.17)$$

En remplaçant p_a, p_b, p_c par leur expression en fonction de π et k , on obtient pour les exponentielles la relation :

$$e^{-\frac{A}{2}p_a^2 - \frac{B}{2}p_b^2 - \frac{C}{2}p_c^2} = e^{-D\pi^2 - Fk^2 - G\vec{k} \cdot \vec{\pi}}$$

avec :

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}(A + B + C) ; & F &= \frac{1}{2}\left(A + \frac{\omega_\epsilon^2}{\omega_{\alpha\epsilon}^2}B + \frac{\omega_\lambda^2}{\omega_{\beta\lambda}^2}C\right) \\ G &= A + \frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}}B + \frac{\omega_\lambda}{\omega_{\beta\lambda}}C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ijk}(A \rightarrow BC) &= \mathcal{N}_{BC} \int d\vec{k} d\vec{\pi} \delta(\vec{K}_0) \frac{\delta(k - k_0)}{k^{l+1}} \gamma_\lambda(\pi) e^{-D\pi^2 - Fk^2 - G\vec{k} \cdot \vec{\pi}} \\ &\left\langle \left[\left[\mathcal{Y}_{LB}\left(\frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}}\vec{k} + \vec{\pi}\right) \mathcal{Y}_{LC}\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega_{\beta\lambda}}\vec{k} + \vec{\pi}\right) \right]^{L_{BC}} \mathcal{Y}_l(\hat{k}) \right]^L \mid \left[\mathcal{Y}_{LA}(\vec{k} + \vec{\pi}) \mathcal{Y}_1(\vec{\pi}) \right]^L \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Pour la fonction exponentielle faisant intervenir un terme en $\vec{k} \cdot \vec{\pi}$, on utilise le développement en harmoniques sphériques, [13] :

$$\begin{aligned} e^{-G\vec{k} \cdot \vec{\pi}} &= e^{i(iG)\vec{k} \cdot \vec{\pi}} = 4\pi \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m_l=-l}^{m_l=+l} i^l j_l(iGk\pi) Y_{lm_l}^*(\hat{k}) Y_{lm_l}(\hat{\pi}) \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{+\infty} (-i)^l j_l(iGk\pi) \hat{l} \pi^{-l} k^{-l} \left[\mathcal{Y}_l(\vec{k}) \mathcal{Y}_l(\vec{\pi}) \right]^0 \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Maintenant l'expression obtenue présente des harmoniques solides avec des arguments fonction à la fois de π et de k . On va donc développer toutes les harmoniques de la sorte :

$$\mathcal{Y}_{lm}(a\vec{p}_1 + b\vec{p}_2) = \sum_{l_1=0}^l C_{l_1}^l a^{l_1} b^{l-l_1} [\mathcal{Y}_{l_1}(\vec{p}_1) \mathcal{Y}_{l-l_1}(\vec{p}_2)]_{lm} \quad (\text{C.20})$$

avec la définition suivante pour le coefficient géométrique :

$$C_{l_1}^l = \sqrt{\frac{4\pi(2l+1)!}{(2l_1+1)!(2(l-l_1)+1)!}} \quad (\text{C.21})$$

Une fois toutes les harmoniques solides ainsi réécrites, elles sont découplées puis recouplées avec d'un côté les fonctions de k et séparément celles de π . Puis les produits d'une seule variable sont réduits à un terme grâce à la formule de contraction :

$$[\mathcal{Y}_{l_1}(\vec{p}) \mathcal{Y}_{l_2}(\vec{p})]_{lm} = B_{l_1 l_2}^l p^{l_1+l_2-l} \mathcal{Y}_{lm}(\vec{p}) \quad (\text{C.22})$$

avec :

$$B_{l_1 l_2}^l = (-1)^l \frac{\widehat{l_1} \widehat{l_2}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.23})$$

Une fois ces opérations effectuées, le bra se réécrit :

$$\begin{aligned}
& \left[\mathcal{Y}_l(\vec{k}) \mathcal{Y}_l(\vec{\pi}) \right]^0 \left\langle \left[\left[\mathcal{Y}_{L_B} \left(\frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} \vec{k} + \vec{\pi} \right) \mathcal{Y}_{L_C} \left(\frac{\omega_\lambda}{\omega_{\lambda\beta}} \vec{k} + \vec{\pi} \right) \right]^{L_{BC}} \mathcal{Y}_l(\hat{k}) \right]^L \right\rangle \\
&= \sum_{\substack{l_3, l_4, l_5, l_6 \\ l_{10}, l_{12}, l_{13}}} (-1)^{l_5+l_6+l+L} \hat{L}_B \hat{L}_C \hat{L}_{BC} \hat{l}_5 \hat{l}_6 \hat{l}_{10} \left(\frac{\omega_\epsilon}{\omega_{\alpha\epsilon}} \right)^{L_B-l_3} \left(\frac{\omega_\lambda}{\omega_{\lambda\beta}} \right)^{L_C-l_4} C_{l_3}^{L_B} C_{l_4}^{L_C} \\
& \quad B_{l_3, l_4}^{l_5} B_{l_6, l}^{l_{10}} B_{L_B-l_3, L_C-l_4}^{l_6} B_{l_8, l_8, 0, l_5, l_{10}, L}^{l_{12}, l_{13}, L} \pi^{l_3+l_4+l_8-l_{12}} k^{L_B+L_C+l+l_8-l_3-l_4-l_{13}} \\
& \quad \left\{ \begin{matrix} l_5 & l_6 & L_{BC} \\ l & L & l_{10} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_3 & L_B-l_3 & L_B \\ l_4 & L_C-l_4 & L_C \\ l_5 & l_6 & L_{BC} \end{matrix} \right\} \left\langle \left[\mathcal{Y}_{l_{12}}(\vec{\pi}) \mathcal{Y}_{l_{13}}(\vec{k}) \right]^L \right\rangle \quad (C.24)
\end{aligned}$$

et le ket :

$$\begin{aligned}
& \left| \left[\mathcal{Y}_{L_A}(\vec{k} + \vec{\pi}) \mathcal{Y}_1(\vec{\pi}) \right]^L \right\rangle \\
&= \sum_{l_1, l_2} C_{l_1}^{L_A} B_{1, l_1}^{l_2} \hat{l}_2 \hat{L}_A \left\{ \begin{matrix} 1 & l_1 & l_2 \\ L_A-l_1 & L & L_A \end{matrix} \right\} \pi^{1+l_1-l_2} \left| \left[\mathcal{Y}_{l_2}(\vec{\pi}) \mathcal{Y}_{L_A-l_1}(\vec{k}) \right]^L \right\rangle \quad (C.25)
\end{aligned}$$

L'intégration, avec notre expression transformée, donne pour la partie angulaire du fait de l'orthogonalité des harmoniques sphériques :

$$\int d\hat{k} d\hat{\pi} \left[Y_{l_{12}}(\hat{\pi}) Y_{l_{13}}(\hat{k}) \right]^{*L} \left[Y_{l_2}(\hat{\pi}) Y_{L_A-l_1}(\hat{k}) \right]^L = \delta_{l_{12}, l_{13}} \delta_{m_{l_{12}}, m_{l_{13}}} \delta_{l_2, L_A-l_1} \delta_{l_2, m_{L_A-l_1}} \quad (C.26)$$

$\delta(k - k_0)$ fixe la valeur de k à k_0 qui est relié à la conservation de l'énergie. Il ne reste plus que l'intégrale sur la partie radiale de π .

Annexe D

Expressions particularisées de $\Gamma_{A \rightarrow BC}$

Dans cette annexe sont présentées quelques expressions de l'amplitude de transition $M_{A \rightarrow BC}$ pour des valeurs particulières des moments orbitaux et pour les transitions ayant servi à la détermination de la fonction de vertex γ .

D.1 Terme d'espace

Ci-dessous sont présentées les expressions du terme d'espace $\mathcal{E}$ pour un vertex de forme "constante + gaussienne" pour les valeurs les plus courantes de moments orbitaux. Pour rappel, on a :

$$\gamma_\mu(p) = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 e^{-\mathcal{B}p^2} = \sum_{n=1}^2 \mathcal{A}_n e^{-\mathcal{B}_n p^2} \quad (\text{D.1})$$

$$\mathcal{E}(A \rightarrow BC) = \sum_{i,j,k,n} d_i^a d_j^b d_k^c \mathcal{A}_n \mathcal{E}_{ijkn}(A_i \rightarrow B_j C_k) \quad (\text{D.2})$$

On ne présente que les formules relatives au terme $\mathcal{E}_{ijkn}(A_i \rightarrow B_j C_k)$ dans lesquelles on sous entend les indices. Les formules 3.86 présentent les valeurs des divers coefficients $D, F \dots$

D.1.1 Moment orbital $L_A = 0$

Voilà comment se transforme les expressions dans ce cas là.

– $L_B = L_C = L_{BC} = 0; l = L = 1$

$$\mathcal{E} = \frac{x k_0^2}{8D^{3/2}} e^{-F k_0^2}$$

– $L_B = L_{BC} = 1; L_C = 0$

– $l = 0; L = 1$

$$\mathcal{E} = \frac{k_0}{16D^{5/2}} e^{-F k_0^2} [3 + 2xv D k_0^2]$$

$$- l = 2; L = 1$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\sqrt{2}xv k_0^3}{8D^{3/2}} e^{-F k_0^2}$$

$$- L_C = L_{BC} = 1; L_B = 0$$

$$- l = 0; L = 1$$

$$\mathcal{E} = \frac{k_0}{16D^{5/2}} e^{-F k_0^2} [3 + 2xwDk_0^2]$$

$$- l = 2; L = 1$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\sqrt{2}xw k_0^3}{8D^{3/2}} e^{-F k_0^2}$$

D.1.2 Moment orbital $L_A = 1$

$$- L_B = L_C = L_{BC} = 0; l = L = 0$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\sqrt{3}k_0}{16D^{5/2}} e^{-F k_0^2} [3 + 2uxDk_0^2]$$

$$- L_B = L_C = L_{BC} = 0; l = L = 2$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{uxk_0^3}{8D^{3/2}} e^{-F k_0^2}$$

D.1.3 Moment orbital $L_A = 2$

$$- L_B = L_C = L_{BC} = 0; l = L = 1$$

$$\mathcal{E} = -\frac{uk_0^2}{8\sqrt{2}D^{5/2}} e^{-F k_0^2} [5 + 2uxDk_0^2]$$

$$- L_B = L_C = L_{BC} = 0; l = L = 3$$

$$\mathcal{E} = \frac{3u^2xk_0^4}{8\sqrt{7}D^{3/2}} e^{-F k_0^2}$$

D.1.4 Moment orbital $L_A = 3$

$$- L_B = L_C = L_{BC} = 0; l = L = 2$$

$$\mathcal{E} = -\frac{3u^2k_0^3}{16\sqrt{5}D^{5/2}} e^{-F k_0^2} [7 + 2uxDk_0^2]$$

$$- L_B = L_C = L_{BC} = 0; l = L = 4$$

$$\mathcal{E} = \frac{u^3xk_0^5}{4\sqrt{3}D^{3/2}} e^{-F k_0^2}$$

D.2 Transitions de l'échantillon

Il s'agit ici des éléments de matrice total, donc inclut les contributions des deux schémas lorsque les deux existent.

– $\rho \rightarrow \pi\pi$:

Il s'agit d'un exemple de transition faisant intervenir les deux schémas n°2 et 3 de contraction.

$$M(\rho \rightarrow \pi\pi) = \frac{k_0^2}{16\sqrt{3}} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n x_{ijkn} \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (D.3)$$

– $\phi \rightarrow K\bar{K}$:

Le résultat est le même que ci-dessus car, mis à part l'isospin, les nombres quantiques sont identiques. La différence de contribution d'isospin est compensée par le facteur $\sqrt{1 + \delta_{BC}}$ qui apparaît pour une transition ne faisant intervenir qu'une seule saveur. Ainsi on a :

$$M(\phi \rightarrow K\bar{K}) = \frac{k_0^2}{16\sqrt{3}} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (D.4)$$

– $K^*(892) \rightarrow \pi\bar{K}$:

$$M(K^*(892) \rightarrow \pi\bar{K}) = \frac{k_0^2}{32} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n x_{ijkn} \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (D.5)$$

– $f_2(1275) \rightarrow \pi\pi$:

$$M(f_2(1275) \rightarrow \pi\pi) = \frac{\sqrt{3} k_0^3}{16\sqrt{5}} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n u_{ijkn} x_{ijkn} \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (D.6)$$

– $f_2(1275) \rightarrow \eta\eta$:

Une subtilité est présente dans cette transition : le $f_2(1275)$ est pris comme étant un pur état de saveur $n\bar{n}$ tandis que pour le η on a pour les potentiels ne tenant pas compte de l'instanton $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(n\bar{n} - s\bar{s})$ d'où l'état final $\eta\eta = \frac{1}{2}(n\bar{n}n\bar{n} - n\bar{n}s\bar{s} - s\bar{s}n\bar{n} + s\bar{s}s\bar{s})$. Les termes contenant une partie $s\bar{s}$ sont OZI interdits. Il existe donc un facteur $\frac{1}{2}$ de saveur en plus dans le calcul habituel de M. Soit :

$$M(f_2(1275) \rightarrow \eta\eta) = -\frac{k_0^3}{32\sqrt{5}} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n u_{ijkn} x_{ijkn} \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (D.7)$$

– $K_0^*(1430) \rightarrow \pi \bar{K}$:

$$M(K_0^*(1430) \rightarrow \pi \bar{K}) = -\frac{\sqrt{3}k_0}{64} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{5/2}} (2u_{ijkn} x_{ijkn} D_{ijkn} k_0^2 + 3) \quad (\text{D.8})$$

– $f_2'(1525) \rightarrow \bar{K} K$:

$$M(f_2'(1525) \rightarrow \bar{K} K) = \frac{k_0^3}{8\sqrt{10}} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n u_{ijkn} x_{ijkn} \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (\text{D.9})$$

– $K_2^*(1425) \rightarrow \pi \bar{K}$:

$$M(K_2^*(1425) \rightarrow \pi \bar{K}) = \frac{\sqrt{3}k_0^3}{16\sqrt{10}} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n u_{ijkn} x_{ijkn} \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (\text{D.10})$$

– $K_2^*(1425) \rightarrow \pi \bar{K}^*(892)$:

$$M(K_2^*(1425) \rightarrow \pi \bar{K}^*(892)) = \frac{3k_0^3}{32\sqrt{5}} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n u_{ijkn} x_{ijkn} \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (\text{D.11})$$

– $K_2^*(1425) \rightarrow \rho \bar{K}$:

$$M(K_2^*(1425) \rightarrow \rho \bar{K}) = -\frac{3k_0^3}{32\sqrt{5}} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n u_{ijkn} x_{ijkn} \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (\text{D.12})$$

– $K_2^*(1425) \rightarrow \omega \bar{K}$:

$$M(K_2^*(1425) \rightarrow \omega \bar{K}) = \frac{\sqrt{3}k_0^3}{32\sqrt{5}} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n u_{ijkn} x_{ijkn} \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (\text{D.13})$$

– $a_2(1320) \rightarrow K \bar{K}$:

$$M(a_2(1320) \rightarrow K \bar{K}) = -\frac{k_0^3}{8\sqrt{10}} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n u_{ijkn} x_{ijkn} \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (\text{D.14})$$

– $f_2(1275) \rightarrow K \bar{K}$:

$$M(f_2(1275) \rightarrow K \bar{K}) = -\frac{k_0^3}{16\sqrt{5}} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n u_{ijkn} x_{ijkn} \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (\text{D.15})$$

– $f_2'(1525) \rightarrow \eta\eta$:

$$M(f_2'(1525) \rightarrow \eta\eta) = \frac{k_0^2}{\sqrt{3}} \sum_{i,j,k,n} d_i^A d_j^B d_k^C \mathcal{A}_n \frac{e^{-F_{ijkn} k_0^2}}{D_{ijkn}^{3/2}} \quad (\text{D.16})$$

Annexe E

Quantification canonique du champ de Dirac

En seconde quantification, les champs de particule deviennent des opérateurs vérifiant les relations d'anticommutation suivantes :

$$\{\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_\beta^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (\text{E.1})$$

$$\{\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_\beta(\vec{x}', t)\} = \{\hat{\Psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_\beta^\dagger(\vec{x}', t)\} = 0 \quad (\text{E.2})$$

Ceci est à relier au fait que les particules de spin 1/2 sont gouvernées par la statistique de Fermi-Dirac. L'opérateur de champ quantifié vérifie l'équation de Dirac libre. En utilisant les solutions en onde plane, le champ s'exprime par :

$$\hat{\Psi}(x, t) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} (b(p, s) u(p, s) e^{-ipx} + d^\dagger(p, s) v(p, s) e^{ipx}) \quad (\text{E.3})$$

avec $p_0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, de même pour le champ conjugué avec :

$$\hat{\Psi}^\dagger(x, t) \gamma^0 = \bar{\hat{\Psi}}(x, t) \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.4})$$

où u et v désignent les bi-spineurs associés aux particules et antiparticules respectivement. Pour exprimer ces spineurs, on utilise les conventions de Bjorken et Drell [45]. De façon tout à fait générale, ces derniers doivent vérifier les relations d'orthogonalité et de fermeture suivantes :

$$\begin{aligned} u^\dagger(p, s') u(p, s) &= \frac{E_p}{m} \delta_{s, s'} & \bar{u}(p, s') u(p, s) &= \delta_{s, s'} \\ v^\dagger(p, s') v(p, s) &= \frac{E_p}{m} \delta_{s, s'} & \bar{v}(p, s') v(p, s) &= -\delta_{s, s'} \\ v^\dagger(-p, s') u(p, s) &= 0 & \bar{v}(p, s') u(p, s) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

ainsi que :

$$u(p, s) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(E_p + m)}} u(0, s) \quad \text{et} \quad v(p, s) = \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(E_p + m)}} v(0, s) \quad (\text{E.6})$$

représentant le boost de Lorentz depuis un référentiel où la particule est au repos à celui de quadri-impulsion p . Ce qui implique :

$$(\not{p} - m)u(p, s) = 0, \quad \text{et} \quad (\not{p} + m)v(p, s) = 0 \quad (\text{E.7})$$

Jusqu'à présent, les relations citées sont générales et doivent être toujours vérifiées. On est libre du choix de bi-spineurs d'impulsion nulle $u(0, s)$ et $v(0, s)$ (tant que les relations ci-dessus sont vraies).

Maintenant, en notation de Pauli-Dirac, on choisit :

$$u(0, s) = \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v(0, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{-s} \end{pmatrix} \quad (\text{E.8})$$

d'où les expressions des bi-spineurs :

$$u(p, s) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{\sqrt{2m(E_p + m)}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned} \not{p} + m &= \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \mathbb{1} = \begin{pmatrix} E_p + m & 0 \\ 0 & -E_p + m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_p + m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E_p + m \end{pmatrix} \\ \Rightarrow [\not{p} + m] \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_p + m & \chi_s \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & \chi_s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

$$\Rightarrow u(p, s) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi_s \end{pmatrix} \quad (\text{E.11})$$

De même, on montre que :

$$v(p, s) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi_{-s} \\ \chi_{-s} \end{pmatrix} \quad (\text{E.12})$$

Ici s est juste un indice, pouvant prendre deux valeurs, permettant de distinguer les 2 solutions (à énergie positive, donc pour le bi-spineur u) formant des états orthogonaux. Pour ce choix, les relations (E.5) se réécrivent :

$$\chi_{s'}^\dagger \chi_s = \delta_{s,s'} \quad (\text{E.13})$$

qui est la seule relation imposée aux χ_s pour leur définition.

b et $b^\dagger$ (d et $d^\dagger$) dénotent les opérateurs d'annihilation et de création de particules (d'antiparticules). Ils sont liés de façon intime aux spineurs u et v par la définition (E.3). Ainsi

dès qu'une expression de χ_s est retenue, les opérateurs de création et d'annihilation sont fixés. Les relations d'anticommutation se réécrivent en fonction de ces opérateurs :

$$\{b(p, s), b^\dagger(p', s')\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{s, s'} \quad (\text{E.14})$$

$$\{d(p, s), d^\dagger(p', s')\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{s, s'} \quad (\text{E.15})$$

$$\{b(p, s), b(p', s')\} = \{b^\dagger(p, s), b^\dagger(p', s')\} = 0 \quad (\text{E.16})$$

$$\{d(p, s), d(p', s')\} = \{d^\dagger(p, s), d^\dagger(p', s')\} = 0 \quad (\text{E.17})$$

De plus b et d anticommulent.

Ces opérateurs permettent de construire n'importe quel état de Fock en agissant comme point de départ sur le vide défini ainsi :

$$b(p, s)|0\rangle = 0 \quad d(p, s)|0\rangle = 0 \quad \forall p, s \quad (\text{E.18})$$

c.-à-d. un état ne contenant ni particule ni antiparticule.

E.1 Formalisme de l'hélicité

Très souvent, on choisit le formalisme d'hélicité. L'opérateur d'hélicité commutant avec le hamiltonien, on peut mesurer simultanément l'énergie et la projection du spin 1/2 sur la direction de l'impulsion des particules. Ainsi s peut repérer les deux états d'hélicité mais ce n'est pas une nécessité.

En représentation d'hélicité, s désigne la projection du spin 1/2 le long de la direction de mouvement ($s = \pm 1/2$). Ainsi, on a :

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} b^\dagger(p, s)|0\rangle = \sigma_p \cdot b^\dagger(p, s)|0\rangle = 2s b^\dagger(p, s)|0\rangle \quad (\text{E.19})$$

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} d^\dagger(p, s)|0\rangle = \sigma_p \cdot d^\dagger(p, s)|0\rangle = 2s d^\dagger(p, s)|0\rangle \quad (\text{E.20})$$

Maintenant, on définit des opérateurs $(\sigma_p)_+$ et $(\sigma_p)_-$ qui jouent le même rôle que les opérateurs de rotation S_+ et S_- mais pour l'opérateur hélicité. En orientant l'axe O_z selon $\vec{p}$, et les axes O_x et O_y orthogonaux à $\vec{p}$ (donc mobiles), il advient :

$$\sigma_p = (\vec{\sigma}_p)_z; \quad (\sigma_p)_+ = (\vec{\sigma}_p)_x + i(\vec{\sigma}_p)_y; \quad (\sigma_p)_- = (\vec{\sigma}_p)_x - i(\vec{\sigma}_p)_y \quad (\text{E.21})$$

$b^\dagger$ associé à ces définitions vérifie alors :

$$\begin{aligned} (\sigma_p)_+ \cdot b^\dagger(p, s = -\frac{1}{2})|0\rangle &= b^\dagger(p, s = +\frac{1}{2})|0\rangle \\ (\sigma_p)_- \cdot b^\dagger(p, s = +\frac{1}{2})|0\rangle &= b^\dagger(p, s = -\frac{1}{2})|0\rangle \\ (\sigma_p)_+ \cdot b^\dagger(p, s = +\frac{1}{2})|0\rangle &= 0 \\ (\sigma_p)_- \cdot b^\dagger(p, s = -\frac{1}{2})|0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

et des relations semblables pour $d^\dagger$.

E.2 Formalisme de “ S_z ”

Nous avons, pour nos calculs, retenu un autre choix de χ_s :

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.23})$$

les deux valeurs de s sont notées, par commodité, soit $+1/2$ soit $-1/2$ pour rappeler la valeur $1/2$ du spin de nos particules. “ S_z ” est noté entre guillemets car il est impossible de trouver des χ_s auxquels sont associés des opérateurs vérifiant exactement la relation :

$$\sigma_z b^\dagger(p, s)|0\rangle = 2s b^\dagger(p, s)|0\rangle \quad (\text{E.24})$$

étant donné que le hamiltonien libre de Dirac ne commute pas avec S_z . Cependant cette relation devient vraie pour une impulsion $\vec{p} = \vec{0}$. De plus, nous allons montrer que la relation (E.24) est vérifiée à l'ordre le plus bas d'un développement en p/m . Les opérateurs associés $b^\dagger(p, s)$ et $d^\dagger(p, s)$ employés pour le calcul du diagramme de Feynman doivent ensuite être reliés aux opérateurs de création $B^\dagger(p, s)$ et $D^\dagger(p, s)$ des composants du méson. $B^\dagger(p, s)$ crée un quark constituant non relativiste, d'impulsion $\vec{p}$, de spin $1/2$ dont la projection le long de l'axe O_z est s . Ici le spin est quantifié le long de l'axe O_z car nos fonctions d'onde de méson sont obtenues suivant cette prescription.

Comment relier (de façon obligatoirement approchée) nos B et D aux opérateurs b et d ? Les relations que doivent vérifier les opérateurs B et D sont les suivantes :

$$S_z B^\dagger(p, s)|0\rangle = s B^\dagger(p, s)|0\rangle \quad (\text{E.25})$$

$$S_+ B^\dagger(p, s = +\frac{1}{2})|0\rangle = 0 \quad (\text{E.26})$$

$$S_- B^\dagger(p, s = -\frac{1}{2})|0\rangle = 0 \quad (\text{E.27})$$

$$S_+ B^\dagger(p, s = -\frac{1}{2})|0\rangle = B^\dagger(p, s = +\frac{1}{2})|0\rangle \quad (\text{E.28})$$

$$S_- B^\dagger(p, s = +\frac{1}{2})|0\rangle = B^\dagger(p, s = -\frac{1}{2})|0\rangle \quad (\text{E.29})$$

et les relations équivalentes pour l'opérateur D . Ces relations correspondent au bon comportement vis à vis des rotations du spin.

E.2.1 Comportement des opérateurs b et d vis à vis de l'opérateur de spin $\vec{S}$

Les opérateurs B et D , permettant d'écrire la fonction d'onde des mésons, doivent être écrits en fonction des b et d , qui apparaissent lors de l'écriture du diagramme de Feynman.

Il faut donc connaître les résultats de ces derniers lorsqu'on leur applique S_z , S_+ et S_- . Ces calculs sont détaillés ici car ils sont peu développés, voire oubliés généralement dans la littérature.

Commençons par trouver l'expression des opérateurs de spin (E.30) dans le formalisme de la seconde quantification.

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \int d^3x : \Psi^\dagger(x, t) \vec{\Sigma} \Psi(x, t) : \quad \text{avec} \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (\text{E.30})$$

Le symbole $:$ désigne le produit normé. Cela consiste à inverser éventuellement l'ordre des opérateurs de création par rapport à ceux de destruction, en n'oubliant pas le changement de signe résultant de l'anticommutation, pour que ces premiers soient toujours situés à gauche. Physiquement cela permet de se débarrasser des valeurs infinies qui vont de pair avec la mer de Dirac.

$\vec{S}$ appliqué à $b^\dagger(p, s)|0\rangle$

On applique $\vec{S}$ à une particule d'impulsion p_1 et d'indice de spin s_1 défini par :

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.31})$$

, la fonction décrivant cet état est donc $\Phi = b^\dagger(p_1, s_1)|0\rangle$.

$$\Psi^\dagger(x, t) \vec{\Sigma} \Psi(x, t) \propto (b^\dagger + d) \vec{\Sigma} (b + d^\dagger) \quad (\text{E.32})$$

Le produit ordonné dans le temps : $\Psi^\dagger \vec{\Sigma} \Psi$: est donc proportionnel à :

$$b^\dagger b + b^\dagger d^\dagger + db - d^\dagger d \quad (\text{E.33})$$

En appliquant $\vec{S}$ à Φ , il apparaît les contributions suivantes :

$$(b^\dagger b b^\dagger + b^\dagger d^\dagger b^\dagger + db b^\dagger - d^\dagger d b^\dagger) |0\rangle \quad (\text{E.34})$$

dont seules les deux premières donnent des contributions différentes de zéro. En tenant compte de tous les termes, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \vec{S} \Phi = & \frac{1}{2} \sum_{s, s'} \int d^3x \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sqrt{\frac{m}{E_{p'}}} \left[u^\dagger(p', s') \vec{\Sigma} u(p, s) e^{i(p-p')x} b^\dagger(p', s') b(p, s) \right. \\ & \left. b^\dagger(p_1, s_1) |0\rangle + u^\dagger(p', s') \vec{\Sigma} v(p, s) e^{i(p+p')x} b^\dagger(p', s') d^\dagger(p, s) b^\dagger(p_1, s_1) |0\rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

Pour le premier terme $b^\dagger(p', s') b(p, s) b^\dagger(p_1, s_1) |0\rangle$, en utilisant (E.14), on a :

$$b(p, s) b^\dagger(p_1, s_1) |0\rangle = -b^\dagger(p_1, s_1) \underbrace{b(p, s) |0\rangle}_{=0} + \delta(\vec{p} - \vec{p}_1) \delta_{s, s_1} |0\rangle \quad (\text{E.36})$$

$$\Rightarrow b^\dagger(p', s') b(p, s) b^\dagger(p_1, s_1) |0\rangle = \delta(\vec{p} - \vec{p}_1) \delta_{s, s_1} b^\dagger(p', s') |0\rangle \quad (\text{E.37})$$

De plus, en utilisant :

$$\int d^3x e^{i(p-p')x} = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (\text{E.38})$$

puis en intégrant sur $d^3\vec{p}$ et $d^3\vec{p}'$, il ne nous reste plus qu'une seule valeur de l'impulsion : $p = p_1 = p'$. La sommation sur s s'effectue également sans problème du fait du terme δ_{s, s_1} . Le premier terme de (E.35) se réduit à :

$$\vec{S} \Phi(1^{\text{er}} t.) = \frac{1}{2} \sum_{s'} \frac{m}{E_{p_1}} u^\dagger(p_1, s') \vec{\Sigma} u(p_1, s_1) b^\dagger(p_1, s') |0\rangle \quad (\text{E.39})$$

Maintenant calculons la contribution des spineurs :

$$\begin{aligned} u^\dagger \vec{\Sigma} u &= \frac{E_{p_1} + m}{2m} \left(\chi_{s'}^\dagger, \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E_{p_1} + m} \right) \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{s_1} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E_{p_1} + m} \chi_{s_1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{E_{p_1} + m}{2m} \left(\chi_{s'}^\dagger, \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E_{p_1} + m} \right) \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \chi_{s_1} \\ \vec{\sigma} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1}{E_{p_1} + m} \chi_{s_1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{E_{p_1} + m}{2m} \chi_{s'}^\dagger \left(\vec{\sigma} + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) \vec{\sigma} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1)}{(E_{p_1} + m)^2} \right) \chi_{s_1} \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

En utilisant :

$$\sigma_j \sigma_i = \delta_{ji} + i \epsilon_{jik} \sigma_k \quad (\text{E.41})$$

$$\sigma_j \sigma_i \sigma_k = \delta_{ji} \sigma_k + \delta_{ik} \sigma_j - \delta_{jk} \sigma_i + i \epsilon_{jik} \quad (\text{E.42})$$

, avec ϵ_{jik} tenseur unité parfaitement antisymétrique, le produit des matrices de Pauli se réécrit :

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) \vec{\sigma} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) = 2(\vec{p}_1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) - p_1^2 \vec{\sigma} \quad (\text{E.43})$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma} + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) \vec{\sigma} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1)}{(E_{p_1} + m)^2} = \frac{2m \vec{\sigma}}{E_{p_1} + m} + \frac{2(\vec{p}_1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1)}{(E_{p_1} + m)^2} \quad (\text{E.44})$$

Dans le cadre de notre approximation non relativiste ($p \ll m$), $E_{p_1} \approx m$ et le second membre de la partie de droite de (E.44) est nul car à l'ordre 2 du développement en puissance $\frac{p}{m}$.

$$\text{d'où} \quad u^\dagger \vec{\Sigma} u \approx \chi_{s'}^\dagger \vec{\sigma} \chi_{s_1} \quad (\text{E.45})$$

En appliquant cette propriété à la composante z :

$$\Rightarrow \quad S_z \Phi(1^{er}t.) \approx \frac{1}{2} \sum_{s'} \underbrace{\chi_{s'}^\dagger \sigma_z \chi_{s_1}}_{2s_1 \delta_{s',s_1}} b^\dagger(p_1, s')|0\rangle \quad (E.46)$$

$$S_z \Phi(1^{er}t.) \approx s_1 b^\dagger(p_1, s')|0\rangle = s_1 \Phi \quad (E.47)$$

On regarde maintenant la contribution du second terme de (E.35). L'intégration sur d^3x donne une fonction $\delta(\vec{p} + \vec{p}')$ qui nous permet d'intégrer directement sur $d^3\vec{p}'$. Ainsi, notre expression devient :

$$\begin{aligned} \vec{S} \Phi(2^{nd}t.) = \\ \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \int d^3p \frac{m}{E_p} u^\dagger(-p, s') \vec{\Sigma} v(p, s) b^\dagger(-p, s') d^\dagger(p, s) b^\dagger(p_1, s_1)|0\rangle \end{aligned} \quad (E.48)$$

$$\begin{aligned} u^\dagger(-p, s') \vec{\Sigma} v(p, s) &= \frac{1}{2m} \chi_{s'}^\dagger (\vec{\sigma} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \vec{\sigma}) \chi_{-s} \\ &= \frac{1}{2m} \chi_{s'}^\dagger 2i(\vec{p} \wedge \vec{\sigma}) \chi_{-s} \end{aligned} \quad (E.49)$$

De plus,

$$(\vec{p} \wedge \vec{\sigma})_\mu = -2\sqrt{2}i \sum_{\nu, \lambda} C_{1\nu, 1\lambda}^{10} p_\nu S_\lambda \quad (E.50)$$

mais $p_\nu = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} p Y_{1\nu}(\hat{p})$ contient la seule dépendance angulaire en $\vec{p}$. En intégrant sur tout l'espace d^3p , il apparaît :

$$\int d\Omega_p Y_{1\nu}(\hat{p}) = 0 \quad (E.51)$$

et par suite :

$$\vec{S} \Phi(2^{nd}t.) = 0.$$

Ainsi, au final, on a démontré qu'à l'ordre $\frac{p^2}{m^2}$ près :

$$S_z b^\dagger(p_1, s_1)|0\rangle = s_1 b^\dagger(p_1, s_1)|0\rangle \quad (E.52)$$

S_z appliqué à $d^\dagger(p, s)|0\rangle$

L'opérateur S_z peut être appliqué de la même façon à un état à une antiparticule de spin s_1 et d'impulsion $\vec{p}_1$. La méthode de calcul est identique à celle employée précédemment dans (E.2.1). De même, à l'ordre $\frac{p^2}{m^2}$ on aboutit à :

$$S_z d^\dagger(p_1, s_1)|0\rangle = s_1 d^\dagger(p_1, s_1)|0\rangle \quad (E.53)$$

Comportement vis à vis des opérateurs de renversement du spin S_+ et S_-

Les opérateurs de renversement du spin sont définis par :

$$S_+ = S_x + iS_y \quad (\text{E.54})$$

$$S_- = S_x - iS_y \quad (\text{E.55})$$

Nous avons démontré précédemment que, à la limite non relativiste, $p \ll m$:

$$\vec{S} b^\dagger(p_1, s_1) |0\rangle = \sum_s \chi_s \frac{\vec{\sigma}}{2} \chi_{s_1} b^\dagger(p_1, s) |0\rangle \quad (\text{E.56})$$

$$\vec{S} d^\dagger(p_1, s_1) |0\rangle = - \sum_s \chi_{-s_1} \frac{\vec{\sigma}}{2} \chi_{-s} d^\dagger(p_1, s) |0\rangle \quad (\text{E.57})$$

Ceci est couplé avec les relations suivantes, facilement vérifiables :

$$\sigma_z \chi_s = 2s \chi_s \quad (\text{E.58})$$

$$\sigma_+ \chi_{+1/2} = 0 \quad (\text{E.59})$$

$$\sigma_+ \chi_{-1/2} = \chi_{+1/2} \quad (\text{E.60})$$

$$\sigma_- \chi_{+1/2} = \chi_{-1/2} \quad (\text{E.61})$$

$$\sigma_- \chi_{-1/2} = 0 \quad (\text{E.62})$$

Ainsi, on peut s'assurer que les relations (E.25) à (E.29) sont vérifiées pour la fonction $b^\dagger(p_1, s_1)|0\rangle$. L'opérateur B recherché est donc tout simplement :

$$\underline{B^\dagger(p, s) = b^\dagger(p, s)} \quad (\text{E.63})$$

Cependant, pour l'antiparticule les choses sont différentes et il apparaît une différence de signe dans le comportement attendu vis à vis des opérateurs de renversement du spin. On a en effet à partir de (E.57) couplé aux relations (E.58-E.62) :

$$S_z d^\dagger(p, s)|0\rangle = s d^\dagger(p, s)|0\rangle \quad (\text{E.64})$$

$$S_+ d^\dagger(p, s = +\frac{1}{2})|0\rangle = 0 \quad (\text{E.65})$$

$$S_- d^\dagger(p, s = -\frac{1}{2})|0\rangle = 0 \quad (\text{E.66})$$

$$S_+ d^\dagger(p, s = -\frac{1}{2})|0\rangle = - d^\dagger(p, s = +\frac{1}{2})|0\rangle \quad (\text{E.67})$$

$$S_- d^\dagger(p, s = +\frac{1}{2})|0\rangle = - d^\dagger(p, s = -\frac{1}{2})|0\rangle \quad (\text{E.68})$$

Pour rétablir le signe adéquat, il nous faut définir l'opérateur création d'antiparticule non relativiste par :

$$\underline{D^\dagger(p, s) = (-1)^{\frac{1}{2}-s} d^\dagger(p, s)} \quad (\text{E.69})$$

On vérifie en effet que :

$$\begin{aligned} S_z D^\dagger(p, s)|0\rangle &= S_z (-1)^{\frac{1}{2}-s} d^\dagger(p, s)|0\rangle = s (-1)^{\frac{1}{2}-s} d^\dagger(p, s)|0\rangle \\ &= s D^\dagger(p, s)|0\rangle \end{aligned} \quad (\text{E.70})$$

$$S_+ D^\dagger(p, +\frac{1}{2})|0\rangle = 0 \quad (\text{E.71})$$

$$S_- D^\dagger(p, -\frac{1}{2})|0\rangle = 0 \quad (\text{E.72})$$

$$\begin{aligned} S_+ D^\dagger(p, -\frac{1}{2})|0\rangle &= S_+ (-1)^{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})} d^\dagger(p, -\frac{1}{2})|0\rangle = -(-1) d^\dagger(p, +\frac{1}{2})|0\rangle \\ &= d^\dagger(p, s = +\frac{1}{2})|0\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} D^\dagger(p, +\frac{1}{2})|0\rangle \\ &= D^\dagger(p, +\frac{1}{2})|0\rangle \end{aligned} \quad (\text{E.73})$$

$$\begin{aligned} S_- D^\dagger(p, +\frac{1}{2})|0\rangle &= S_- (-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} d^\dagger(p, +\frac{1}{2})|0\rangle = -d^\dagger(p, -\frac{1}{2})|0\rangle \\ &= (-1)^{1+\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})} D^\dagger(p, s = -\frac{1}{2})|0\rangle \end{aligned} \quad (\text{E.74})$$

$$= D^\dagger(p, s = -\frac{1}{2})|0\rangle \quad (\text{E.75})$$

Définis par (E.63) et (E.69), les opérateurs $B^\dagger$ et $D^\dagger$ nous permettent d’insérer de façon consistante la fonction d’onde non relativiste du méson dans nos calculs et de l’exprimer par les opérateurs $b^\dagger$ et $d^\dagger$ plus traditionnels dans l’écriture des diagrammes de Feynman.

Annexe F

Quelques formules utiles

F.1 Approximation des grandes longueurs d'onde

Dans cette partie, sont présentées les formules des largeurs de désintégration pour les cas expérimentaux les plus courants et dans le cadre de l'approximation des grandes longueurs d'onde. Ce ne sont que les applications des formules générales avec les nombres quantiques correspondants.

Terme électrique

$$\begin{aligned}\Gamma(^3S_1 \rightarrow ^3P_J) &= \frac{\pi\alpha}{48} \frac{E_B(E_0)}{m_A} E_0 \delta_{f_A, f_B} \delta_{\bar{f}_A, \bar{f}_B} \hat{J}^2 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \right)^2 \left[\sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B}{D_{i,j}^{5/2}} \right]^2 \\ \Gamma(^3P_J \rightarrow ^3S_1) &= \frac{\pi\alpha}{16} \frac{E_B(E_0)}{m_A} E_0 \delta_{f_A, f_B} \delta_{\bar{f}_A, \bar{f}_B} \hat{J}^2 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \right)^2 \left[\sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B}{D_{i,j}^{5/2}} \right]^2 \\ \Gamma(^1P_1 \rightarrow ^1S_0) &= \frac{\pi\alpha}{16} \frac{E_B(E_0)}{m_A} E_0 \delta_{f_A, f_B} \delta_{\bar{f}_A, \bar{f}_B} \hat{J}^2 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \right)^2 \left[\sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B}{D_{i,j}^{5/2}} \right]^2\end{aligned}$$

Terme magnétique

$$\begin{aligned}\Gamma(^3S_1 \rightarrow ^1S_0) &= \frac{\pi\alpha}{48} \frac{E_B(E_0)}{m_A} E_0^3 \delta_{f_A, f_B} \delta_{\bar{f}_A, \bar{f}_B} \hat{J}^2 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \right)^2 \left[\sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B}{D_{i,j}^{3/2}} \right]^2 \\ \Gamma(^1S_0 \rightarrow ^3S_1) &= \frac{\pi\alpha}{16} \frac{E_B(E_0)}{m_A} E_0^3 \delta_{f_A, f_B} \delta_{\bar{f}_A, \bar{f}_B} \hat{J}^2 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \right)^2 \left[\sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B}{D_{i,j}^{3/2}} \right]^2 \\ \Gamma(^3S_1 \rightarrow ^3S_1) &= \frac{\pi\alpha}{24} \frac{E_B(E_0)}{m_A} E_0^3 \delta_{f_A, f_B} \delta_{\bar{f}_A, \bar{f}_B} \hat{J}^2 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} + \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \right)^2 \left[\sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B}{D_{i,j}^{3/2}} \right]^2\end{aligned}$$

On constate, pour la dernière formule, que cette transition sera nulle dans le cas d'un méson composé d'une seule saveur, du fait du terme d'isospin.

Transitions interdites

Les transitions suivantes sont interdites dans le cadre des GLO.

- $^1S_0 \rightarrow ^3P_J$
- $^3P_J \rightarrow ^1S_0$
- $^1P_1 \rightarrow ^3S_1$

Cas général

Nous présentons ici les formules de largeur pour le formalisme général (c.-à-d. au delà de l'approximation des grandes longueurs d'onde) pour des valeurs particulières des nombres quantiques L , S , J .

$$L_B = 0$$

Nous adoptons la notation suivante pour nos formules de largeur de désintégration :

$$\Gamma_{A \rightarrow B\gamma} = \delta_{S_B, J_B} \delta_{f_A, f_B} \delta_{\bar{f}_A, \bar{f}_B} 2\alpha \frac{E_B(E_0)}{m_A} [\mathcal{E}^2 + \mathcal{E}M + \mathcal{M}^2]$$

$$- ^1S_0 \rightarrow ^1S_0$$

$$\Gamma_{A \rightarrow B\gamma} = 0$$

$$- ^1S_0 \rightarrow ^3S_1$$

$$\mathcal{M}^2 = \frac{\pi}{32} E_0^3 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} \right)^2$$

$$- ^3S_1 \rightarrow ^1S_0$$

$$\mathcal{M}^2 = \frac{\pi}{96} E_0^3 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} \right)^2$$

$$- ^3S_1 \rightarrow ^3S_1$$

$$\mathcal{M}^2 = \frac{\pi}{48} E_0^3 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} + \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} \right)^2$$

$$- {}^1P_1 \rightarrow {}^3S_1$$

$$\mathcal{E}M = 0; \quad \mathcal{M}^2 = 0$$

$$\mathcal{E}^2 = \frac{\pi}{32} E_0 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{5/2}} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{5/2}} \right)^2$$

$$- {}^1P_1 \rightarrow {}^3S_1$$

$$\mathcal{E}^2 = 0; \quad \mathcal{E}M = 0$$

$$\mathcal{M}^2 = \frac{\pi}{32} E_0^5 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B x_{ij}^{(1)} e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} + \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B x_{ij}^{(2)} e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} \right)^2$$

$$- {}^3P_J \rightarrow {}^1S_0$$

$$\mathcal{E}^2 = 0; \quad \mathcal{E}M = 0$$

$$- J = 0 \quad \mathcal{M}^2 = 0$$

$$- J = 1 \quad \mathcal{M}^2 = \frac{\pi}{64} E_0^5 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B x_{ij}^{(1)} e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} + \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B x_{ij}^{(2)} e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} \right)^2$$

$$- J = 2 \quad \mathcal{M}^2 = \frac{3\pi}{320} E_0^5 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B x_{ij}^{(1)} e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} + \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B x_{ij}^{(2)} e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} \right)^2$$

$$- {}^3P_J \rightarrow {}^3S_1$$

$$- J=0$$

$$\mathcal{E}^2 = \frac{\pi}{32} E_0 \mathcal{A}^2(E_0); \quad \mathcal{E}M = \frac{\pi}{16} E_0^3 \mathcal{A}(E_0) \mathcal{B}(E_0); \quad \mathcal{M}^2 = \frac{\pi}{32} E_0^5 \mathcal{B}^2(E_0)$$

$$- J=1$$

$$\mathcal{E}^2 = \frac{\pi}{32} E_0 \mathcal{A}^2(E_0); \quad \mathcal{E}M = \frac{\pi}{32} E_0^3 \mathcal{A}(E_0) \mathcal{B}(E_0); \quad \mathcal{M}^2 = \frac{\pi}{64} E_0^5 \mathcal{B}^2(E_0)$$

$$- J=2$$

$$\mathcal{E}^2 = \frac{\pi}{32} E_0 \mathcal{A}^2(E_0); \quad \mathcal{E}M = -\frac{\pi}{32} E_0^3 \mathcal{A}(E_0) \mathcal{B}(E_0); \quad \mathcal{M}^2 = \frac{7\pi}{320} E_0^5 \mathcal{B}^2(E_0)$$

où :

$$\mathcal{A}(E_0) = \frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{5/2}} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{5/2}}$$

$$\mathcal{B}(E_0) = \frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B x_{ij}^{(1)} e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B x_{ij}^{(2)} e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}}$$

$$L_A = 0$$

Nous adoptons la notation suivante pour nos formules de largeur de désintégration :

$$\begin{aligned} \Gamma_{A \rightarrow B\gamma} &= \delta_{S_A, J_A} \delta_{f_A, f_B} \delta_{f_A, f_B} 2\alpha \frac{E_B(E_0)}{m_A} [\mathcal{E}^2 + \mathcal{E}M + \mathcal{M}^2] \\ - {}^1S_0 \rightarrow {}^1P_1 & \quad \mathcal{E}M = 0; \quad \mathcal{M}^2 = 0 \\ \mathcal{E}^2 &= \frac{3\pi}{32} E_0 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{5/2}} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{5/2}} \right)^2 \\ - {}^1S_0 \rightarrow {}^3P_J & \quad \mathcal{E}^2 = 0; \quad \mathcal{E}M = 0 \\ - J=0 & \quad \mathcal{M}^2 = 0 \\ - J=1 & \quad \mathcal{M}^2 = \frac{3\pi}{64} E_0^5 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B z_{ij}^{(1)} e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} + \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B z_{ij}^{(2)} e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} \right)^2 \\ - J=2 & \quad \mathcal{M}^2 = \frac{3\pi}{64} E_0^5 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B z_{ij}^{(1)} e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} + \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B z_{ij}^{(2)} e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} \right)^2 \\ - {}^3S_1 \rightarrow {}^1P_1 & \quad \mathcal{E}^2 = 0; \quad \mathcal{E}M = 0 \\ \mathcal{M}^2 &= \frac{\pi}{32} E_0^5 \left(\frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B z_{ij}^{(1)} e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} + \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B z_{ij}^{(2)} e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} \right)^2 \\ - {}^3S_1 \rightarrow {}^3P_J & \\ - J=0 & \quad \mathcal{E}^2 = \frac{\pi}{96} E_0 \mathcal{A}^2(E_0); \quad \mathcal{E}M = \frac{\pi}{48} E_0^3 \mathcal{A}(E_0) \mathcal{B}(E_0); \quad \mathcal{M}^2 = \frac{\pi}{96} E_0^5 \mathcal{B}^2(E_0) \\ - J=1 & \quad \mathcal{E}^2 = \frac{\pi}{32} E_0 \mathcal{A}^2(E_0); \quad \mathcal{E}M = \frac{\pi}{32} E_0^3 \mathcal{A}(E_0) \mathcal{B}(E_0); \quad \mathcal{M}^2 = \frac{\pi}{64} E_0^5 \mathcal{B}^2(E_0) \\ - J=2 & \quad \mathcal{E}^2 = \frac{5\pi}{96} E_0 \mathcal{A}^2(E_0); \quad \mathcal{E}M = -\frac{5\pi}{96} E_0^3 \mathcal{A}(E_0) \mathcal{B}(E_0); \quad \mathcal{M}^2 = \frac{7\pi}{192} E_0^5 \mathcal{B}^2(E_0) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(E_0) &= \frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{5/2}} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{5/2}} \\ \mathcal{B}(E_0) &= \frac{\langle e_1 \rangle}{m_1} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B z_{ij}^{(1)} e^{-F_{ij}^{(1)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} - \frac{\langle e_2 \rangle}{m_2} \sum_{i,j} \frac{c_i^A c_j^B z_{ij}^{(2)} e^{-F_{ij}^{(2)} E_0^2}}{D_{i,j}^{3/2}} \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] R.K. Bhaduri, L.E. Cohler, Y. Nogami, *Il Nuovo Cimento* **A65**, 376 (1981).
- [2] B. Silvestre-Brac, C. Semay : ISN **93-69** (unpublished).
- [3] C. Semay, B. Silvestre-Brac : *Nucl. Phys.* **A618**, 455 (1997).
- [4] C. Semay, B. Silvestre-Brac : *Nucl. Phys.* **A647**, 72 (1999).
- [5] L.A. Blanco, F. Fernandez, A. Valcarce : *Phys Rev* **C59**, 428 (1999).
- [6] Particule Data Group, *Phys. Rew.* **D 54** (1996).
- [7] A. le Yaouanc et al. : *Hadron transitions in the quarks model*, Gordon and Breach Science Publishers, (1988).
- [8] J. W. Alcock et W. N. Cottingham : *Z. Phys.* **C 25**, 161 (1984).
R. Kokoski et N. Isgur : Toronto Report UTPT-85-05 (1985).
- [9] E. Eichten et al. : *Phys. Rev.* **D 17**, 3090 (1978).
- [10] L. Micu : *Nucl. Phys.* **B10**, 521 (1969).
- [11] F.E. Close : *An introduction to quarks and partons*, Academic Press, (1989).
- [12] R. Kokoski, N. Isgur : *Phys. Rev.* **D 35**, 907 (1987).
- [13] D.A Varshalovich et al. : *Quantum theory of angular momentum*, World Scientific, (1988).
- [14] S. Capstick, W. Roberts : *Phys. Rev.* **D49**, 4570 (1994).
- [15] H.G. Blundell, S. Godfrey, B. Phelos, *Phys. Rev.* **D 53**, 3712 (1996).
- [16] W. Roberts, B. Silvestre-Brac : *Phys. Rev.* **D 57**, 1964 (1998).
- [17] E.S. Ackleh, T. Barnes, and E.S. Swanson, *Phys. Rev.* **D 54**, 681 (1996).
- [18] S. Ono and F. Schöberl, *Phys. Lett. B* **118**, 419 (1982).
- [19] C.R. Münz et collaborateurs, *Nucl Phys* **A 578**, 418 (1994).
- [20] E.J.O Gavin et collaborateurs, *Few Body Systems* **19**, 59-76 (1995).
- [21] R. Van Royen, V. F. Weisskopf, *Il Nuovo Cimento* ; **N3** 617 (1967).
- [22] B. Margolis, R.R. Mendel, *Phys. Rev.* **D 28** (1983) 468.
- [23] N. Barik, P.C. Dash, A.R. Panda, *Phys. Rev.* **D 47** (1993) 1001.
- [24] M. Beyer, U. Bohn, M.G. Huber, B.C. Metsch, J. Resag, *Z. Phys.* **C 55** (1992) 307.
- [25] S. Louise, J.-J. Dugne, J.-F. Mathiot, *Phys. Lett.* **B 472** (2000) 357.
- [26] P. Singer *Phys. Rev.* **D1**, 86 (1970).

- [27] L.M. Brown, P. Singer Phys. Rev. **D15**, 3484 (1977).
- [28] P. Hays, M.V.K. Ulehla, Phys. Rev. **D13**, 1339 (1976).
- [29] R.H. Hackman, N.G. Deshpande, D.A. Dicus, V.L. Teplitz Phys. Rev. **D18**, 2537 (1978).
- [30] P.K. Chatley, C.P. Singh, M.P. Khanna Phys. Rev **D29**, 96 (1984).
- [31] P.J. O'Donnell, Rev. Mod. Phys. **53**, 673 (1981).
- [32] T. Barnes, Phys. Lett. **B63**, 65 (1976).
- [33] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K.D. Lane, J.M. Yan, Phys. Rev. **D17**, 3090 (1978); **D21**, 203 (1980).
- [34] S. Godfrey, N. Isgur, Phys. Rev. **D32**, 189 (1985).
- [35] El hassan El aaoud, Riazuddin Phys. Rev. **D47**, 1026 (1993).
- [36] R. Mc Clary, N. Byers, Phys. Rev. **D28**, 1692 (1983).
- [37] N. Barik, P.C. Dash, A.R Panda, Phys. Rev. **D46**, 3856 (1992).
- [38] N. Barik, S. Kar, P.C. Dash, Phys. Rev. **D57**, 405 (1998).
- [39] A.R. Panda, K.C. Roy, Int. J. Mod. Phy. **E6**, 121 (1997).
- [40] F. Fernández, A. Valcarce, U. Straub, and A. Faessler, J. Phys. **G 19** , 2013 (1993).
- [41] A. de Rújula, H. Georgi, and S.L. Glashow, Phys. Rev. **D 12**, 147 (1975).
- [42] K.D. Born *et al.*, Phys. Rev. **D 40**, 1653 (1989).
- [43] G.S. Bali, K. Schilling, and A. Wachter, Phys. Rev. **D 56**, 2566 (1997); G.S. Bali, Fizika **38**, 229 (1999).
- [44] D. Griffiths : *Introduction to elementary particles*, John Wiley and sons, (1987).
- [45] J. D. Bjorken et S. D. Drell : *Relativistic quantum fields*, McGraw-Hill Book Company, (1965).