HAL
open science

FLUCTUATIONS QUANTIQUES DE LA SIGNATURE DE LA METRIQUE A L'ECHELLE DE PLANCK

Grichka Bogdanoff

To cite this version:

Grichka Bogdanoff. FLUCTUATIONS QUANTIQUES DE LA SIGNATURE DE LA METRIQUE A L'ECHELLE DE PLANCK. Mathématiques [math]. Université de Bourgogne, 1999. Français. NNT : . tel-00001502

HAL Id: tel-00001502

https://theses.hal.science/tel-00001502v1

Submitted on 18 Jul 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE
DE BOURGOGNE
DIJON

DEPARTEMENT
DE
MATHEMATIQUES

LABORATOIRE GEVREY DE
MATHEMATIQUE-PHYSIQUE
UMR 5029

THESE

présentée par

Grichka BOGDANOFF

En vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Spécialité : Mathématiques

FLUCTUATIONS QUANTIQUES DE LA SIGNATURE DE LA MÉTRIQUE À L'ÉCHELLE DE PLANCK

Soutenue publiquement à l'Ecole Polytechnique
le 26 Juin 1999

devant le jury composé de

Gabriel SIMONOFF	Président
Dimitri GOUREVITCH	Rapporteur
Costas KOUNNAS	Rapporteur
Shahn MAJID	Rapporteur
Igniatios ANTONIADIS	Examinateur
Michel SEMENOFF-TIAN SHANSKI	Examinateur
Daniel STERNHEIMER	Examinateur

Manuscrit déposé le 31 Janvier 2000

REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu à exprimer toute l'émotion suscitée par la disparition brutale de Moshé Flato qui avait accepté d'être à la fois le fondateur et le guide irremplaçable de cette recherche. Un hommage tout spécial lui est donc destiné pour son soutien continuel, sa disponibilité amicale et créative ainsi que l'expérience scientifique unique dont il m'a généreusement fait profiter et qui donne toute sa signification à ce travail. Daniel Sternheimer, qui a bien voulu en diriger la soutenance et n'a jamais ménagé sa présence aux moments les plus difficiles, trouvera ici la marque de notre amitié et de notre profonde gratitude.

Je veux aussi saluer la mémoire d'André Lichnerowicz, dont les conseils exceptionnels et toujours amicaux ont vivement éclairé ma compréhension de la gravitation et contribué à l'orientation de ce travail.

Je tiens également à remercier les membres du Laboratoire de Physique Mathématique de l'Université de Bourgogne pour leur accueil et l'aide scientifique qu'ils m'ont apportée au cours de ces dernières années. Mes remerciements vont plus particulièrement à Daniel Sternheimer, Georges Pinczon, Michel Semenov- Tian-Shanski , Jacques Simon, Christiane Martin et Jean-Claude Cortet. Je remercie également Marylise Debret pour les aimables démarches effectuées par elle dans l'administration de la présente thèse.

La phase préliminaire de cette recherche a été élaborée grâce à Gabriel Simonoff, du Laboratoire de Physique de Bordeaux I . Son aide extrêmement amicale, sa profonde vision d'homme de science et ses conseils m'ont été précieux dès l'origine de cette longue recherche, voici déjà bien des années. Qu'il trouve ici le témoignage de ma gratitude particulière. Que Joël Sternheimer, dont la pensée libre et originale a fortifié mon engagement dans cette recherche, soit également remercié pour les mêmes raisons. Et mon amical hommage va vers Jean-Claude Simon, mon tout premier maître en science.

Quant au fond, je tiens à dire ma plus profonde gratitude à Shahn Majid, du Laboratoire de Mathématiques du Queen Mary et Westfield College, pour les très nombreux échanges et l'aide constante qu'il a bien voulu m'apporter tout au long de ce travail. Sans ses conseils infaillibles et son exceptionnelle créativité dans le domaine des groupes quantiques, cette recherche n'aurait jamais atteint les objectifs que je m'étais fixé.

Ma reconnaissance va également à Costas Kounnas, de l'Ecole Normale Supérieure, dont la pensée généreuse et la vision étonnamment intuitive éclairent ce travail, notamment dans les domaines de la gravité quantique. Les échanges toujours stimulants que j'ai eu le privilège d'avoir avec lui ont été le fondement de nombre de mes idées ou résultats les plus significatifs. Igniatios Antoniadis, de l' École Polytechnique, a quant à lui orienté ma progression en théorie des cordes et je l'en remercie. De même, Gabriel Veneziano, du CERN, a enrichi de sa vision mon approche de la cosmologie primordiale. Et tout comme Shahn Majid, Dimitri Gourévitch de l'Université de Valenciennes a inspiré certaines de mes recherches dans le domaine de la q-déformation. Qu'il en soit également remercié, comme tous ceux qui ont accepté de faire partie du jury.

Que A.M. Poliakov, S. Deser, M. Takesaki, E. Witten, M.Dubois-Violette, G. t'Hooft, J. Demaret, F. Combes, D. Lambert, S.K. Donaldson, C. Vafa, L.L. Vaksman, M. Shifman, R. Jackiw, R. Engeldinger, O. Ogievetsky, N.Yu. Reshetikhin, S. Ferrara, C. Kiefer, R. Haag, T. Damour, L. Alvarez-Gaumé, J.M. Souriau, J. Fröhlich, A. Ashtekar, S. Parmentier, R. Stora, A. Chakrabarti, M. Gromov, P. Fré, E.V. Shuryak, C. Olive, S. Helgason, S.Coleman , M.A. Rieffel, M. Winnink, S.L. Woronowicz, et bien d'autres tout au long des années trouvent ici le témoignage de mes remerciements pour les échanges particulièrement enrichissants que nous avons pu avoir et l'accueil toujours chaleureux qu'ils m'ont réservé.

Enfin, ma reconnaissance sincère va vers ceux qui ont relu et supervisé la dernière version de ce travail : S. Majid et D. Gourévitch pour la partie groupes quantiques, C. M. Marle, de Paris VI, pour la partie groupes classiques et géométrie, E. Leichtnam, de l'ENS, pour les algèbres d'opérateurs, C. Kounnas pour les aspects physiques. Je remercie également P. Cartier et M. Enock qui m'ont fait l'honneur de lire attentivement certaines parties de ce travail. Qu'ils soient tous remerciés pour le temps qu'ils m'ont consacré.

Dans le même esprit, je salue avec reconnaissance Martine Bauer, dont l'aide si généreuse a permis la réalisation matérielle de ce travail.

Enfin, mon affection me porte vers Jacqueline Beytout, inspiratrice de mon tout premier engagement dans cette longue recherche et indéfectible soutien depuis.

Nous tenons à remercier le général Novacq, Directeur Général de l'Ecole Polytechnique et toutes les autorités compétentes qui ont permis la soutenance de cette thèse de Doctorat de l'Université de Bourgogne au sein de l'Ecole Polytechnique.

INTRODUCTION GENERALE

Les premiers fondements d'une théorie cosmologique explicitement fondée sur l'hypothèse d'un changement de signature de la métrique de l'espace-temps ont été développés par S. Hawking en 1978 [268]. L'hypothèse de Hawking postule le changement discret de la métrique de Lorentz à la métrique Euclidienne définie positive. Inspirée des méthodes Euclidiennes de C. Lanczos [324][325] puis J. Schwinger [454] ou Nakano [408] en théorie constructive des champs, cette hypothèse est aujourd'hui considérée en cosmologie quantique, notamment par G. Gibbons [238] , G.F.R. Ellis *et al* [198] et d'autres, sur des bases qui restent cependant plutôt formelles.

Notre étude, fondée sur les aspects mathématiques des chapitres 1, 2 et 3 (notamment le chap. 3 où nous analysons le changement de signature dans le cadre de la théorie des groupes quantiques) va dans le même sens, mais en introduisant, à l'échelle de Planck, une phase de transition (i.e. *superposition*) de la signature au cours du passage Lorentzien $\rightarrow$ Euclidien.

01.1 En général, pour $0 < t \leq$ temps de Planck $\approx 10^{-43}$ s, les modèles à changement de signature de la métrique proposent la transformation globale, par rotation de Wick ($\tau = - i t$) et sans phase intermédiaire, de la métrique Lorentzienne (+ + + -) en une métrique statique purement Euclidienne (+ + + +), décrite par la fonction d'onde :

$$\Psi = < (h'_{ij}, \phi', S_2) \mid (h_{ij}, \phi, S_1) > = \int \delta[g_{\mu\nu}] \, \delta [\phi] \exp [- \mathbf{I} (g_{\mu\nu}, \phi)] \qquad (0.1)$$

Contrairement au cas Lorentzien, tous les champs commutent dans le cadre Euclidien ($\hbar = 0$), de sorte que les directions genre espace et genre temps, dissymétriques à l'échelle relativiste, sont symétrisées à l'échelle de Planck au sein d'une variété quadri-dimensionnelle sans bords, sans échelle et sans origine, sur laquelle agît SO(4). Ce type de géométrie définit l'hypersphère du type S^4 postulée par Hartle-Hawking [266] en gravité quantique. La compatibilité de cette hypothèse avec les contraintes relativistes a été établie par G.F.R. Ellis *et al* [198] en 1991. Toutefois, dans les modèles cités ci-dessus, (**i**) la principale justification à l'introduction de la métrique Euclidienne est de permettre la résolution de l'intégrales de chemins Ψ par les méthodes de l'analyse complexe. La rotation de Wick n'est alors qu'une transformation de coordonnées, sans fondement physique. Par ailleurs, (**ii**) l'existence d'une métrique à signature fixe (Lorentzienne ou Euclidienne) à l'échelle de Planck ne paraît pas compatible avec les contraintes de la gravité quantique. Enfin, (**iii**) l'approche Euclidienne efface la notion de singularité initiale et entre donc en contradiction avec les théorèmes relativistes de singularité prédisant une origine singulière à l'espace-temps.

Dès le début de notre travail, il nous est apparu que la méthode consistant à "transporter" à l'échelle de Planck la métrique Lorentzienne $g_{\mu\nu}$ sans modifier sa signature $\mathbf{s}_{\underline{f}} \mapsto (3, 1)$, est difficilement compatible avec les contraintes de la gravité quantique. Par ailleurs, l'intéressante proposition de S.Hawking *et al* [265][268] d'une métrique statique Euclidienne (++++), (récemment développée avec N. Turok [271] sous la forme d'un instanton singulier raccordé à l'espace-temps Lorentzien au voisinage de l'échelle de Planck) outre son aspect formel, ne résout que partiellement ces difficultés tout en en créant d'autres au moins aussi profondes.

01.2 Nous proposons ici une solution nouvelle, fondée sur une possible *fluctuation* (3, 1) $\leftrightarrow$ (4, 0) de la signature de la métrique à l'échelle de Planck. Du point de vue mathématique, nous partons des travaux pionniers de M. Flato, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer sur les déformations d'algèbres et produits - $*$ (1974) [211], ceux de V.G. Drinfeld (1985) [189], M. Jimbo (1985) [290]291] et S. Majid (1988) [356][357] sur les groupes quantiques, ceux d'A. Connes (1973) [139] sur la classification des facteurs de type III. Du point de vue physique, nous considérons la théorie KMS (1967) [260] et les travaux de A.M. Polyakov (1975) [68] et G. t'Hooft (1976) [488] sur les configurations du type monopoles et instantons. Enfin, - à partir notamment de certains résultats de C.M. Hull *et al* [282], C. Kounnas *et al* [[311] - nous considérons la théorie topologique de E.Witten [518], Euclidienne et effective à l'échelle 0, comme *duale* (i - duale) de la théorie quantique des champs (qui, elle, est Lorentzienne). Dans la suite, nous indiquons alors que l'intégrale de chemins décrivant l'espace-temps entre l'échelle 0 et l'échelle

de Planck devrait contenir deux formes d'actions, duales l'une de l'autre : l'action Lorentzienne $\mathcal{L}_{(-)}$ et l'action Euclidienne $\mathcal{L}_{(+)}$, combinées sous la forme $\mathcal{L}_{(\pm)}$:

$$\mathcal{L}_{(\pm)} = \int d^4x\sqrt{g}\left[\vartheta(\tfrac{1}{2}l_p - x_0)\mathcal{L}_{(+)} + \vartheta(x_0 - \tfrac{1}{2}l_p)\mathcal{L}_{(-)}\right] \qquad (0.\ 2)$$

Nous suggérons que le poids de la signature physique Lorentzienne dans l'intégrale fonctionnelle $\mathbf{I}_f$, dominant à l'échelle de Planck $\ell_P = \left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{1/2} \approx 1,\ 7.\ 10^{-33}$ cm diminue à l'approche de l'échelle $\ell_0 \approx 0$. A l'inverse, celui de la signature topologique Riemannienne, faible à grande échelle, doit devenir dominant au voisinage de la singularité initiale. Nos résultats semblent donc indiquer qu'en deçà de la phase d'expansion physique de l'espace-temps (à l'échelle ß > ℓ_p), il pourrait exister, au voisinage de l'échelle ß = 0, une phase d'"expansion topologique" (au sens de la théorie topologique de Witten [518]), dans le secteur non perturbatif de la théorie, *i* - duale de la phase physique. Nous appelons "flot topologique dilatant" le flot obtenu en temps imaginaire pur en remplaçant t par it dans le flot temporel associé à l'évolution de Heisenberg. Ce flot est caractérisé par un courant tensoriel antisymétrique $\mathbf{B}_{\mu\nu}$ du type axion (partenaire du dilaton en supergravité N=2), et sa source est située à l'échelle 0.

01.3 Notre premier objectif a été de définir certains aspects mathématiques de la fluctuation de la signature. Nous nous efforçons d'abord de mettre en évidence (chap. 1 et chap. 2) l'existence et les propriétés de la *superposition* entre $ds^2_{(3,1)}$, métrique (3, 1) de l'espace-temps et $ds^2_{(4)}$, métrique (4, 0) de l'espace quadridimensionnel Euclidien. Notre méthode consiste à "unifier" (dans l'esprit de Flato) [210] les deux algèbres de Lie so(3, 1) et so(4) associées au deux groupes SO(3, 1) et SO(4) agissant sur $\mathbb{R}^{3,1}$ et sur $\mathbb{R}^4$. Nous réalisons cette unification des deux groupes Lorentzien et Riemannien au sein de l'espace homogène symétrique

$$\Sigma_h = \frac{SO(3,1) \otimes SO(4)}{SO(3)}$$

A partir de Σ_h, nous construisons l'espace topologique quotient

$$\Sigma_{top} = \frac{\mathbb{R}^{3,1} \oplus \mathbb{R}^4}{SO(3)}$$

décrivant la superposition des deux classes de métriques Lorentzienne et Riemannienne. Nous montrons que Σ_{top} comporte une singularité à l'origine, ce qui indique que l'espace de superposition des métriques admet une origine singulière. Sur le plan cosmologique, la conséquence intéressate est que la notion de fluctuation de la signature semble alors constituer un argument en faveur de l'existence de la Singularité Initiale de l'espace-temps.

01.4 Notre hypothèse de fluctuation de la signature à l'échelle de Planck nous a ensuite conduit à rechercher un lien possible entre quantification de l'espace-temps et déformation de la signature de la métrique. Ceci est suggéré dans le contexte de la q-déformation et des groupes quantiques.

Par quantification d'un système, l'on peut entendre une $*$ - algèbre **A** (une $*$ - sous-algèbre d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$) contenant les observables de position et de quantité de mouvement comme $*$ - sous-algèbres telles que :

$$e^{t\hat{\xi}}\hat{f}\ e^{-t\hat{\xi}} = \widehat{\alpha_{e^{t\xi}}(f)}\ ,\quad \alpha_{e^{t\xi}}(f)(x) = f(\alpha_{e^{-t\xi}}(x)) \qquad (0.3)$$

α désignant l'action d'un groupe G sur une observable f, les positions observables étant des fonctions C(X). Dans ce cas, l'on a pour l'algèbre **A** : **A** = C(X) $\rtimes$ G. Soit alors le diagramme de Majid [382] :

$$\begin{array}{ccc} C(S^3)\otimes U(su(2)) & \xrightarrow{\text{Déformation}} & BS_q^3 \otimes U_q(su(2)) \sim U_q(so(4)) \\ \text{Quantification} \downarrow & & \downarrow \text{Quantification} \\ C(S^3) >\!\triangleleft\ U(su(2)) & \xrightarrow{\text{Déformation}} & BS_q^3 >\!\overline{\triangleleft}\ U_q(su(2)) \sim U_q(so(3,1)) \end{array} \tag{0.4}$$

Ici BS_q^3 est l'anneau de coordonnées tressé de la q-3-sphère [425]. Or, $BS_q^3 \cong BU_q(su(2))$. Pour $q\neq 1$, le membre supérieur de (0.4) est une version partiellement tressée de Uq(su(2) $\otimes$ Uq(su(2)) = Uq(so(4)). En revanche, $BS_q^3 >\!\overline{\triangleleft}\ U_q(su(2))$ est isomorphe au double quantique de Drinfeld $\mathfrak{D}$(Uq(su(2)) [189-190], lequel, pour $q \neq 1$, est isomorphe à Uq(so(3,1)). L'on observe ainsi à partir de (0.4) que la quantification paraît reliée à un possible changement de signature dans le cas q-déformé.

Une autre approche suggère le même résultat, soit :

$$Uq(so(3,1)) \cong \mathfrak{D}(Uq(su(2)) \approx Uq(su(2)) \otimes_{\mathfrak{R}} Uq(su(2)) \tag{0.5}$$

En effet, dans le cas du carré twisté de Reshetikhin - Semenov-Tian-Shanski [446], dual du double de Drinfeld [189][190], $\otimes_{\mathfrak{R}}$ représente un twisting supplémentaire du coproduit associé au cas Euclidien :

$$Uq(so(4)) = Uq(su(2)) \otimes Uq(su(2))$$

Un tel twisting correspond également à un type de quantification, dans l'approche de Drinfeld, de $U_q(g)$ en théorie de quasi-algèbres de Hopf [190]. Ces deux observations sont le point de départ de notre étude.

Spécifiquement, nous obtenons dans les sections 3.2 et 3.3 certaines constructions algébriques nouvelles, motivées par nos considérations physiques des chaps 4, 5 et 6. En particulier, nous montrons l'existence du nouveau produit bicroisé cocyclique

$$M_\chi(H) = H^{op} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} H_\chi \tag{0.6}$$

Une telle construction est inspirée par l'idée d'*unifier* les signatures Lorentzienne et Euclidienne au sein d'une structure unique de groupes quantique , ce que nous parvenons à faire sous la forme du produit bicroisé cocyclique

$$Uq(so(4))^{op} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} U_q(so(3,1)) \tag{0.7)}$$

Par ailleurs, nous suggérons que la "semidualisation", transformation proposée par S. Majid [382], permet de décrire la transition du groupe q-Euclidien vers le groupe q-Lorentzien (et inversement) :

$$Uq(su(2)) \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} Uq(su(2)) \cong Uq(so(4)) \xleftrightarrow{\textit{semidualisation}} Uq(su(2))^* \underset{\chi}{\triangleright\!\triangleleft} Uq(su(2)) \sim Uq(so(3,1))$$

En outre, nous avons montré en 3.4 que dans le domaine de la q-déformation de l'espace-temps, les structures naturelles $\mathbb{R}_q^4$ et $\mathbb{R}_q^{3,1}$, covariantes sous Uq(so(4)) et Uq(so(3,1)) sont reliées comme suit :

$$\begin{array}{ccc} U_q(su(2)) & \xleftrightarrow{\text{Dualité de } * \text{ - algèbres de Hopf}} & SU_q(2) \sim \mathbb{R}_q^4 / \rho = 1 \\ \textbf{Transmutation} \updownarrow \approx & & \updownarrow \textbf{q - changement de signature} \\ & \approx & \\ BU_q(su(2)) & \xleftrightarrow[\text{Autodualité de groupes } \bigstar\text{-tressés}]{} & BSU_q(2) = \mathbb{R}_q^{3,1} / \rho = 1 \end{array}$$

où nous mettons en évidence l'existence d'une dualité entre $\mathbb{R}_q^4$ à $\mathbb{R}_q^{3,1}$ comme un genre de T-dualité. Notons qu'une telle interprétation n'est possible que lorsque $q \neq 1$ - i.e. est un effet de l'échelle de Planck-.

Pour finir, nous étudions de la même manière les structures des groupes de q-Poincaré

$$\mathbb{R}_q^{3,1} \rtimes U_q(\widetilde{so}(3,1)) \tag{0.8}$$

etc.. et les relions au groupe de κ-Poincaré P_κ [374] ainsi qu'à leurs différentes déformations par twisting. Nous discutons alors la conjecture selon laquelle il existe peut être un lien général entre cocycle de déformation χ, courbure (généralement de l'espace des phases du sytème mais ici courbure du pré-espace-temps) et anomalie(s) de la théorie.

Nos constructions algébriques du chapitre 3 suggèrent ainsi que, pour être compatible avec les contraintes de la supergravité et de la géométrie non commutative à cette échelle, la superposition de signature $(+ + + \pm)$ devrait être envisagée comme un élément nouveau de la gravité quantique.

01.5 Notre deuxième objectif a été de mettre en évidence (parfois de manière heuristique) que le possible changement de signature de la métrique à l'échelle de Planck n'est pas seulement formel mais pourrait avoir un contenu effectif. Ainsi, notre propos n'a pas été de construire (dans les chapitres 4 et 8) de nouveaux résultats mathématiques concernant les algèbres d'opérateurs mais plutôt d'utiliser certaines notions de la théorie des algèbres de Von Neumann (groupe modulaire, état KMS), pour illustrer les motivations physiques de notre recherche. Nous espérons que de futurs développements mathématiques viendront étayer, dans ce domaine, nos premiers résultats.

Il apparaît (4.1.2) que du point de vue thermodynamique, la température de Planck

$$ß_{planck}^{-1} \approx T_p \approx \frac{E_P}{k_B} \approx \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{1/2} k_B^{-1} \approx 1{,}4 \times 10^{32}\,\mathrm{K}$$

marque la limite de température physique du système. Les résultats de S. Weinberg [509] paraissent indiquer que l'espace-temps à l'échelle de Planck forme un système globalement en équilibre thermique. D'un point de vue algébrique, un état d'équilibre est un état sur une C^*- algèbre quasi-locale, engendré par une sous-algèbre correspondant aux observables cinématiques du sous-système. Partant de l'état d'équilibre, nous tirons en 4.3.2 que le pré-espace-temps à l'échelle de Planck peut être vu comme soumis à la condition de Kubo-Martin-Schwinger (KMS [319][387]). Dans les limites de la bande holomorphe KMS, la quatrième direction de la métrique peut alors être considérée comme complexe. Nous suggérons donc l'existence d'un potentiel effectif à une boucle, couplé en supergravité N = 2 au dilaton complexe λ :

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1\,,\,1\,,\,1\,,\,e^{i\theta}) \tag{0.9}$$

La signature de la métrique (0.9), munie à présent d'un degré de liberté supplémentaire sur la composante g_{44}, est Lorentzienne pour $\theta = \pm\pi$ et peut devenir Euclidienne pour $\theta = 0$. La théorie modulaire de Tomita [482], suggère alors la "dualisation" de la signature, donnée par les automorphismes généralisés de **A** que l'on peut écrire :

$$\alpha_{\tau_c} = e^{\beta_c H} A\, e^{-\beta_c H} \tag{0.10}$$

Le flot temporel associé à (0.10) est formellement holomorphe en la variable $ß_c = ß_r + iß_i \in \mathbb{C}$. Le groupe des automorphismes modulaires α_{τ_c} engendre deux flots en dualité, soit d'une part :

$$\alpha_{\tau_r} = e^{i\beta_i H} A\, e^{-i\beta_i H} \tag{0.11}$$

correspondant à l'algèbre des observables et au flot Lorentzien en temps réel et, d'autre part, le courant dual

$$\alpha_{\tau_i} = e^{\beta_r H} A \; e^{-\beta_r H} \tag{0.12}$$

donnant sur **A** un semi-groupe d'opérateurs non bornés et non stellaires. Le flot α_{τ_i} de **A** n'est pas défini sur **A** toute entière mais sur un idéal $\{\mathfrak{F}\}$ de **A** et couplé au flot topologique en temps imaginaire pur ß = i t. Dans le modèle que nous proposons, l'algèbre des observables, décrite par (0.11) est remplacée à l'échelle 0 de l'espace-temps par une nouvelle algèbre en (0.12), que nous suggérons d'appeler "algèbre des pseudo-observables", duale selon nous de l'algèbre de Heisenberg α_{τ_r} sous la forme (0.12). A l'échelle singulière ß = 0, il n'est plus possible de conserver la notion d'observables physiques; à la place, l'on considère les cycles d'homologie dans l'espace des modules des instantons gravitationnels (de taille 0). Cette dernière conclusion reste vraie, en temps imaginaire pur, pour tout ß > 0 réel. Une telle approche nous a permis de distinguer trois domaines différents sur le "cône de lumière cosmologique", chacun de ces domaines étant décrit par une algèbre de Von Neumann spécifique. Plus précisément, si nous appelons $M_{0,1} = R \otimes F$ le facteur $R_{0,1}$ de type II_∞ correspondant à l'échelle singulière 0, comme toutes les transformations ergodiques à partir de $M_{0,1}$ (flots associés à l'échelle 0) sont faiblement équivalentes [149], $M_{0,1}$ est un facteur hyperfini, du type ITPFI d'Araki-Woods [31]. Le facteur $M_{0,1}$ est alors canonique. Plus généralement, il existe ainsi trois échelles (correspondant aux trois régions du cône de lumière cosmologique dans le shéma (0.1)) :

(i) l'échelle *topologique* (échelle 0 associée à ß=0) décrité par l'ITPFI de type II_∞ $M_{0,1}$;

(ii) l'échelle *quantique* de superposition ($0<ß<\lambda_{Planck}$) décrite par l'ITPFI de type III_λ, soit $R_\lambda = II_\infty \rtimes_\theta \mathbb{Z}$. Nous écrivons alors $M_q = M_{0,1} \rtimes_\theta \mathbb{Z}$.

(iii) l'échelle *classique* ($ß > \ell_{Planck}$), décrite par le facteur M_c de type I_∞.

Pour finir, remarquons que le flot des poids associé au facteur $M_{0,1}$ de type II_∞ à l'échelle 0 de l'espace-temps est un invariant de $M_{0,1}$. Or, nous allons voir au chapitre 7 que la singularité initiale est également décrite par un invariant topologique, $I_s = tr(-1)^s$, que nous appelons "invariant de singularité", isomorphe au premier invariant de Donaldson. Nous retrouvons alors, par un tout autre chemin, la même description de la singularité initiale sous la forme d'un invariant topologique. Ceci renforce notre description du "flot d'évolution Euclidienne" en termes de flot des poids.

01.6 Revenons aux aspects physiques de la théorie de superposition. Comme nous l'indiquons au chap. 4, il devrait exister, à l'échelle de Planck, une limite à la température - et à la courbure - du pré-espace-temps, limite postulée par Hagedorn, et précisée par Atick et Witten [38], au delà de laquelle l'on devrait considérer un secteur purement topologique, postulé par la théorie topologique des champs de Witten ou Donaldson. Le premier invariant de Donaldson est une forme algébrique "Riemannienne" dont nous suggérons en 7.3.2 l'isomorphisme avec l'invariant topologique caractérisant, selon notre approche, la limite d'échelle 0. A cette échelle "topologique", la théorie ne devrait donc plus être considérée comme singulière mais devrait plutôt être redéfinie sous une nouvelle forme Eucldienne. Cette approche repose sur deux idées essentielles :

((**i**) Conformément à certaines résultats en théorie des (super)cordes, notamment ceux de E. Kiritsis et C. Kounnas dans [313], nous considérons l'hypothèse selon laquelle, à très haute courbure (i.e. à l'échelle de Planck $T \sim M_{Planck}$) la gravitation classique, décrite par l'approximation $O(1/\mathbf{M}_{Planck})$ n'est plus valable. Nous proposons donc d'introduire, dans le Lagrangien "quantique" de la théorie, des termes de dérivées supérieures en R^2 (tout en considérant, en dimension 4, la possibilité d'un "cut off" des termes de dérivées plus hautes sur la limite R^2, ce qui élimine les termes en $R^3 + \ldots + R^n$ de la théorie des cordes). Nous conjecturons que ces termes peuvent autoriser la superposition (3, 1) $\leftrightarrow$ (4, 0) de la signature de la métrique dans le cadre d'une théorie élargissant la gravitation classique de type Einstein. A partir des indications du chap. 4 selon lesquelles l'espace-temps à l'échelle de Planck devrait être vu comme soumis à la condition KMS, nous postulons de manière naturelle l'existence de *deux* potentiels gravitationnels distincts. Nous conjecturons alors qu'en supergravité $R + R^2$ (et en N = 2), l'approximation linéarisée de la métrique de Schwartzschild peut être considérée comme une solution locale *exacte* de la théorie étendue. Nous en tirons la conjecture 4.1.1 selon laquelle la présence de termes non linéaires R^2 dans le Lagrangien effectif de supergravité peut autoriser la superposition (3, 1) / (4, 0) de la signature de la métrique à partir de l'échelle de Planck

Au deuxième paragraphe du chap. 5, nous précisons le contenu du Lagrangien quadratique qui nous paraît le plus naturellement adapté aux conditions de très hautes courbures de la variété, lorsque l'échelle $ß << l_{Planck}$ (i.e. pour des échelles de longueur "inférieures" à la longueur de Planck). Notons qu'au sens strict, la notion "inférieur à la longueur de Planck" n'a plus de signification en termes de distance, en raison même de la perturbation portant sur la métrique Lorentzienne. Notre Lagrangien étendu est donc :

$$\mathbf{L}_{supergravité} = \hat{\beta} R + \frac{1}{g^2} R^2 + \alpha RR^* \qquad (0.13)$$

avec une composante physique Lorentzienne (le terme d'Einstein $\hat{\beta} R$) et une composante topologique Euclidienne (le terme topologique αRR^*). L'interpolation entre ces deux composantes, selon un mécanisme que nous suggérons ci-dessous, nous incite donc à considérer que $\mathbf{L}_{supergravité}$ décrit correctement les deux pôles (physique et topologique) d'une *même* théorie (la superposition) ainsi que les deux métriques associées.

Nous indiquons ainsi qu'à la limite d'échelle $ß = 0$, la théorie, de dimension D = 4, réduite à αRR^*, dominée par des instantons gravitationnels de dimension 0, peut être vue comme purement topologique. Dans ce secteur, la métrique est statique, définie positive Euclidienne (+ + + +). Le domaine de validité de l'évolution Euclidienne s'étend jusqu'à l'échelle de Planck $ß \sim l_{Planck}$. Au delà de l'échelle de Planck ($ß > l_{Planck}$), la théorie est de type Lorentzien et également de dimension D = 4. Enfin, dans le secteur de gravité quantique ($0 < ß < l_{Planck}$), la théorie, définie par la quantification du groupe de Lorentz, possède une dimension supplémentaire (D = 5), laquelle autorise la superposition des deux classes Lorentzienne et Euclidienne (ce qui induit une phase de "superposition" des signatures (3, 1)$\leftrightarrow$(4, 0). La dynamique du pré-espace-temps correspondrait alors à l'expansion d'un monopôle gravitationnel de dimension 5 tandis que la superposition peut être associée (après compactification de la quatrième coordonnée spatiale du monopôle D = 5) à une dualité monopôle-Instanton d'un genre nouveau en dimension 4.

Enfin, lorsque $ß > l_{Planck}$, l'espace-temps entre dans la phase Lorentzienne conventionnelle de l'expansion cosmologique.

01.7 A partir de l'approche précédente, nous entreprenons d'approfondir au chap. 6 la notion de superposition effective des métriques. Pour cela, comme annoncé en 01.6, nous suggérons d'associer les métriques Lorentziennes à des configurations gravitationnelles du type monopôles de t'Hooft - Polyakov [488] à 4 dimensions. Ces monopôles de dimension 4 résultent de la compactification, au voisinage de l'échelle de Planck (limite infra-rouge de la théorie), de la quatrième coordonnée x^4 du monopôle de dimension 5. De même, nous associons la métrique Riemannienne à la configuration du type instanton gravitationnel. Nous considérons alors que le i-dual de la théorie monopôlaire D = 4 (+ + + -) est la théorie topologique du type instanton D = 4, de signature (+ + + +). Dans le cadre de la S / T - dualité construite en théorie des cordes - où existe une dualité entre les champs T et S, la i-dualité monopôle-instanton isodimensionelle (D = 4) est possible (il convient de noter ici que notre modèle de superposition, de dimension D = 5, se situe dans le secteur de basse dimension de la théorie des cordes et, de ce fait, peut se voir appliquer nombre de ses résultats). Nous suggérons alors que la métrique Euclidienne peut avoir une existence effective entre l'échelle 0 et l'échelle de Planck et n'éxerce plus qu'un effet purement topologique à l'échelle relativiste.

Plus généralement, à partir des S / T - dualités, nous suggérons que le secteur physique (échelle de Planck) et le secteur topologique (échelle 0) peuvent être vus comme reliés par une symétrie générale, du type U-dualité en théorie des cordes [282], telle que U = S $\otimes$ T. Cette U-dualité (qui échange la S-dualité entre couplages fort et faible avec la T-dualité) définit une dualité "de forme" (au sens de E. Verlinde [508]) entre l'origine singulière et la limite "à grande échelle" (échelle de Planck) de la variété, i.e. entre le vide topologique (échelle 0) et le vide physique (échelle de Planck) de la théorie :

Vide physique (ß = ℓ_{Planck}, monopole, (+ + + -)) $\xleftrightarrow{U-dualité}$ *Vide topologique (ß = 0, instanton,* (+ + + +))

La U-dualité, rappelée en 7.2.1, applique le secteur physique de la théorie sur le secteur topologique et vice-versa. La limite topologique de dimension D = 4 correspond, selon nous, à la limite de température du système physique D = 3+1. Partant de la variété fermée **M** de dimension (3+1) et **Ω** étant une variété lisse de dimension 3, l'invariant

Z(**M**) est donné par la fonction de partition Z, l'espace vectoriel Z(**Ω**) étant l'espace de Hilbert de la théorie. L'endomorphisme de Z(**Ω**) donné par Z(**Ω** × Id) est alors l'opérateur d'évolution en temps imaginaire $e^{-\beta H}$, avec ß = 0 sur la limite topologique non triviale associée à l'invariant de singularité $Tr(-1)^S$. Quoique la théorie topologique ne soit pas dynamique, il existe néanmoins un phénomène de "propagation topologique" (ou topologique), qui s'effectue suivant un cobordisme non trivial, analogue à celui déjà étudié par M. Atiyah [50] dans un autre contexte. Rappelons ici qu'une "amplitude topologique", au sens de Witten [518], représente une interaction, dans un système, indépendante des distances entre les points du système. Nous considérons au chapitre 7 que les amplitudes "physiques" (au sens de [24]) de la théorie topologique de la gravitation sont les invariants de Donaldson. De ce point de vue, les amplitudes considérées impliquent l'existence d'observables non locales (que nous appelons "pseudo-observables", reliées à la sphère S^3 (bord de l'instanton gravitationnel singulier muni de la topologie de la boule B^4).

Dans la perspective ci-dessus, nous considérons donc l'existence, au delà de l'échelle de supersymétrie, d'une échelle de symétrie plus haute, unifiant les deux seules composantes de l'espace-temps encore différenciées à l'échelle de Planck : la direction genre espace et la direction genre temps. Il s'agît d'une symétrie de jauge, réalisant l'équivalence entre les quatre directions du champ de jauge gravitationnel $g_{\mu\nu}$. La configuration de champ associée est du type instanton (super)gravitationnel de taille 0, construit par E. Witten en théorie de Yang et Mills [295] à l'échelle $\rho = 0$ de l'espace des modules d'instantons. A cet égard, une bonne image de la symétrie Euclidienne correspond, sur la variété Riemannienne sous-jacente de dimension 4, à une "entropie topologique" nulle, par oppostion au cas de la variété Lorentzienne habituelle. En effet, l'entropie topologique $h_{top}(g)$ sur une variété **M** est :

$$h_{top}(g) = \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \text{Log}\,(\#\{\gamma \,/\, \ell_g(\gamma) \leq \mathbf{R}\})$$

où γ est une géodésique périodique et $\ell_g(\gamma)$ sa longueur mesurée par la métrique g. A présent, sur une 4-variété munie d' une métrique dont la signature est Lorentzienne, l'entropie topologique du flot géodésique est non nulle. En effet, la signature (3, 1) de $g_{\mu\nu}$ sur **M** confère à **M** une structure hyperbolique. Or, selon G. Besson *et al* [79 - B.E.] toute variété hyperbolique **X** est un minima local de l'entropie topologique du flot géodésique. Par contraste, sur une variété Euclidienne $\mathbf{M}_0$ correspondant à l' échelle 0 de l'espace-temps, l'entropie topologique est nulle. En effet, s'agissant de la boule B^4 à bord S^3, il a été montré par A. Katok [306- B.E.] que son entropie topologique est nulle :

$$h_{top}(g)_{B^4} = 0$$

Parmi les conséquences de la nullité de l'entropie topologique au voisinage de l'origine de l'espace-temps $\mathbf{M}_0$, sachant que le taux de croissance exponentiel p(f) des orbites périodiques sur une variété **M** est égal à l'entropie topologique $h_{top}(f)$, nous déduisons de $h_{top}(g)_{\mathbf{M}_0} = 0$ que le système sous-jacent à la boule B^4 représentant $\mathbf{M}_0$ n' est pas un système dynamique. Plus précisément, l'on montre qu'il s'agît, justement, d'une "pseudo-dynamique Euclidienne", de nature ergodique. Dans un tel cadre théorique, la transition de signature s'exprime alors par le passage d'une entropie topologique nulle à une entropie non nulle.

Pour conclure, il est intéressant de remarquer que, hors mis cette dernière considération, l'on retrouve dans 01.6 et 01.7 une image plus physique de certains de nos résultats acquis en q-déformation, notamment ceux sur la semidualisation et les dualités d'algèbres de Hopf sous-jacentes à la transition de signature.

01.8 En quoi notre approche peut-elle, à ce stade, déboucher sur une solution possible du problême de la Singularité Initiale du modèle cosmologique type "Big Bang" ? Au chapitre 7, nous discutons notre représentation de l'échelle singulière 0. La singularité initiale, hors de portée de la théorie quantique mais bien définie par la théorie topologique des champs, peut donc être regardée ici non en termes de divergences de champs physiques mais en termes de symétries de champs topologiques et d'invariants associés (comme le premier invariant de Donaldson [178-179]) :

$$I = \sum_i (-1)^{n_i} \tag{0.14}$$

L'une des insuffisances (sans doute la plus préoccupante) du modèle type "Big Bang" reste en effet son impuissance à fournir une image de l'origine singulière de l'espace-temps. Or, une résolution possible de la Singularité Initiale, que nous proposons au chapitre 7, est de considérer que l'échelle 0, qui ne peut pas être décrite par la théorie physique (perturbative) devrait l'être par la théorie duale (non perturbative), de type topologique. L'on définit habituellement, à partir de Witten [518], la théorie topologique comme la quantification de zéro, le Lagrangien de la théorie étant (**i**) soit un mode 0, soit (**ii**) une classe caractéristique $c_n(V)$ d'un fibré vectoriel $V \xrightarrow{\pi} M$ construit sur l'espace-temps. Nous proposons alors en (7.1.3) une nouvelle limite topologique de la théorie, non triviale, fondée non plus sur H = 0 mais sur ß = 0 et donc *indépendante* de H. La limite topologique ordinaire de la théorie quantique des champs, décrite par l'invariant de Witten $Z = Tr(-1)^n$ est donnée par la limite de la fonction de partition $Z = Tr(-1)^n e^{-ßH}$ pour les valeurs nulles (ou invariantes) de H. En revanche, dans notre cas, nous choisissons le mode 0 de l'échelle (ß = 0). Alors Z devient (s représentant le nombre d'instantons de la théorie) :

$$\underset{ß=0}{Z} = Tr\,(-1)^s \tag{0.15}$$

Ce nouvel invariant, isomorphe à l'invariant de Witten $Z = Tr(-1)^n$, peut explicitement être associé à la singularité initiale du pré-espace-temps, atteinte pour la valeur ß = 0 de la fonction de partition des états. Nous proposons d'appeler "invariant de singularité" ce nouvel invariant, associé à l'instanton gravitationnel singulier de taille 0. L'on peut alors étendre la dualité monopôle-instanton proposée au chap. 6 en suggérant qu'une telle symétrie de dualité relie l'anneau de cohomologie BRST (secteur physique de la théorie) et l'anneau de cohomologie de l'espace des modules des instantons (secteur topologique). Les groupes de cohomologie BRST [217], ayant pour forme générique

$$H^{(g)}_{BRST} = \frac{\ker Q^{(g)}_{BRST}}{\mathrm{im} Q^{(g-1)}_{BRST}} \tag{0.16}$$

nous considérons que la théorie topologique réalise alors l'injection d'anneaux :

$$H^{\star}_{BRST} = \bigotimes_{g=0}^{\Delta U_k} H^g_{BRST} \xrightarrow{\iota} H^{\star}\left(\mathcal{M}^{(k)}_{\mathrm{mod}}\right) = \bigotimes_{i=0}^{d_k} H^{(i)}\left(\mathcal{M}^{(k)}_{\mathrm{mod}}\right) \tag{0.17}$$

qui fournit un chemin injectif du mode physique dans le mode topologique. En termes d'observables O_i et de cycles d'homologie $H_i \subset M_{mod}$ dans l'espace des modules M_{mod} des configurations du type instantons gravitationnels $\mathfrak{I}[\phi(x)]$ sur les champs gravitationnels ϕ de la théorie, nous relevons l'équivalence :

$$\langle O_1 O_2 \ldots O_n \rangle = \#(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n) \tag{0.18}$$

où le secteur physique de la théorie est décrit par les observables O_i et le secteur dual, de type topologique, par les cycles d'homologie $H_i \subset M_{mod}$. L'oscillation de signature entre secteur physique et secteur topologique est alors induite par la divergence $\Delta U_k = \int \partial^\mu j_\mu \, d^4x$ du courant-fantôme [73][217] j_μ. Lorsque ΔU = 0, comme il n'existe pas d'espace de plongement pour l'espace des modules, nous suggérons (Ch.7) que la théorie est alors projetée dans la branche de Coulomb, à l'origine de M_{mod}, sur un instanton singulier de taille 0 [524] que nous identifions à l'espace-temps à l'échelle 0. La théorie est ramifiée sur le secteur purement topologique H_i, la signature correspondant à ce secteur étant Euclidienne (+ + + +).

01.9 Nous suggérons alors, toujours au chap. 7, que l'image de la symétrie 0, décrite par le groupe de jauge non brisé du type SU(2) ⊗ SU(2), est donnée par le premier invariant de Donaldson [178][179], associé ici à l'exsitence d'une "amplitude topologique" caractérisant la théorie. Lorsque la dimension dim$\mathcal{M}$ de l'espace des modules des instantons est non nul, les invariants de Donaldson sont donnés par la fonction de corrélation de la théorie :

$$Z(\gamma_1 \ldots \gamma_r) = \int DX\, e^{-S} \prod_{i=1}^{r} \int_{\gamma i} W_{k_1} = \left\langle \prod_{i=1}^{r} \int_{\gamma_i} W_{k_i} \right\rangle \qquad (\mathrm{Dim}\ \mathcal{M}_k \neq 0) \tag{0.19}$$

Or, notre résultat formel le plus surprenant est qu'à l'échelle ß = 0 associée à la limite des hautes températures, l'espace des modules des instantons étant nul sur cette limite, la fonction de partition, donnée par

$$\underset{ß=0}{Z} = \mathrm{Tr}(-1)^s\ e^{-\beta H} \tag{0.20}$$

doit redonner le premier invariant de Donaldson

$$I = \sum_i (-1)^{n_i},$$

invariant topologique non polynomial, réduit à un entier pour dim $\mathcal{M}_k$ = 0 [178]. Cette limite

$$\underset{ß=0}{Z} = \mathrm{Tr}(-1)^s$$

de la fonction de partition (0.19) correspond à une symétrie généralisée de tous les états possibles de la métrique, tous les états instantoniques de $g_{\mu\nu}$, donnés par la charge topologique de l'instanton gravitationnel singulier, étant équivalents à l'échelle 0. Nous appelons "symétrie 0" la symétrie généralisée caractérisant l'échelle singulière 0. L'approche ci-dessus -combinée à celle du chap. 6 établissant, dans le cadre d'un modèle σ, le couplage à l'échelle de Planck entre une gravité Euclidienne de dimension 3 et un "target space" de dimension 2 (secteur scalaire) fournit une image qualitative de la singularité initiale d'espace-temps en tant qu'orbifod conique (ou conifold) G telle que $\Gamma_i = \frac{R^2}{Z_n}$. En élargissant ce dernier point de vue, une application conjecturale de la théorie des cycles d'évanescence et polyèdres d'effondrement [326 B.E.] suggère à nouveau que la limite de la théorie Lorentzienne est purement topologique. En effet, en théorie des effondrements Riemannien et des polyèdres d'évanescence donnant des cycles de singularité [419], la dégénérescence métrique à l' échelle 0 concerne non pas la métrique Euclienne, bien définie, mais la métrique Lorentzienne, dégénérée sur cette limite. L'on peut alors conjecturer que la signature physique devient évanescente (au sens de Milnor [401]) au voisinage de 0, la signature dominante étant Riemannienne. Nous tirons en effet de t ∈ ℂ l'existence d'un polyèdre d'effondrement (ou d'évanescence) au voisinage de l'échelle 0 tel que la métrique Lorentzienne s'effondre sur la métrique Riemannienne (+ + + +) autour du point isolé singulier 0. Nous retrouvons ici la notion d'effondrement de Cheeger et Gromov [419]. Nos recherches préliminaires nous ont permis de constater que la théorie des polyèdres d'effondrement en dimension 4 induit de manière naturelle d'une part l'existence d'un espace de superposition de dimension 5 (correspondant à la complexification de la direction t de la métrique) et, d'autre part, conduit à une solution de la Singularité Initiale comme limite Riemannienne de type B^4 effondré sur un point, limite du cycle d'effondrement d'une variété de dimension 5. Bien que les développements que nous avons effectué à cet égard ne soient pas inclus dans le présent travail, il a été pour nous encourageant de retrouver, par une toute autre voie, une structure topologique analogue à celle de l'instanton gravitationnel intervenant dans la théorie (la topologie de la boule B^4).

Nous suggérons en effet pour modèle géométrique de l'instanton la boule B^4 bornée par la sphère S^3. La propagation de la solution dépend alors du support de l'instanton gravitationnel : au voisinage de la limite 0, il existe une accumulation de la charge topologique au dessus du point singulier S_0 telle que la densité de charge topologique $RR^* \to \infty$; dans la situation duale, correspondant à l'état fondamental, le support de l'instanton est étendu à l'infini et $RR^* \to 0$. La transition de 0 à l'infini est alors décrite par les transformations conformes de la sphère.

01.10 Nos hypothèses du chap 8 suggèrent ainsi, de manière conjecturale, l'existence d'une première phase d'expansion purement topologique du pré-espace-temps, paramétrée par la croissance de la dimension de l'espace des modules dim$\mathcal{M}$ et décrite par la "pseudo-dynamique" Euclidienne. Cette "pseudo-dynamique" peut être vue heuristiquement comme un accroissement du diamètre de l'espace des états $d(\varphi, \psi)$ en temps Euclidien (dual de l'espace des observables en temps Lorentzien). Notre conjecture est que cette "dynamique Euclidienne" pourrait être décrite de manière naturelle par le flot des poids (au sens de Connes-Takesaki) de l'algèbre de type II_∞ décrivant les pseudo-états de la métrique à l'échelle ß = 0. Nous conjecturons également que le flot modulaire Euclidien représentant l'évolution d'un système en temps imaginaire pourrait correspondre à un accroissement de la distance spectrale séparant les états du système.

L'origine de l'espace-temps peut, in fine, être vue comme résultant de la brisure de la symétrie temps-espace à l'échelle 0, brisure qui, bien en deçà de la brisure de supersymétrie à l'échelle de Planck, engendre (**i**) l'émergence du temps comme direction privilégiée dans la 4-géométrie initiale (**ii**) l'expansion topologique du pré-espace-temps avant l'échelle de Planck et (**iii**) l'expansion physique au delà de l'échelle de Planck.

En conclusion du chap. 8, nous suggérons à partir de ce qui précède l'existence d'un "principe de singularité" que nous formulons ainsi :

Principe de singularité : *Tout point de l'espace-temps est relié à la singularité initiale par un flot topologique.*

Le principe de singularité, découle ici de l'invariant de singularité

$$\underset{ß=0}{Z} = \mathrm{Tr}(-1)^s$$

lequel repose sur le fait que le bord de l'espace-temps peut être identifié au bord S^3 de l'instanton gravitationnel singulier B^4 de taille 0 représentant la singularité initiale de l'espace-temps. La propagation de la singularité initiale est induite par l'existence d'une amplitude topologique - du type charge de l'instanton gravitationnel singulier de taille 0, soit $Q = \int d^4x\, R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu}$, détectable sur le bord S^3 de l'instanton gravitationnel singulier muni de la topologie B^4. Les pseudo-observables sont ici interprétés comme cocycles sur l'espace des modules des instantons et sont associées aux cycles γ_i de la 4-variété B^4 (application de Donaldson). Considérant un point X de B^4, l'amplitude topologique assurant la propagation de la charge instantonique prend alors la forme :

$$\langle 0_{S^3} \cdot\ 0_X \rangle = \#(S^3, X)$$

L'amplitude topologique de la théorie est donnée par les pseudo-observables du membre de gauche, tandis que le membre de droite désigne le nombre d'intersections des $\gamma_i \subset B^4$. La fonction $\#(S^3, X)$ est nulle si le point X est situé hors de la sphère S^3 et vaut 1 si X est à l'intérieur de S^3 (i.e. si $X \in B^4$), cas où il existe une amplitude topologique.

C'est dans cette perspective - et d'autres non évoquées dans ce préambule - que nous proposons de considérer dans la recherche qui suit le "modèle hypersymétrique" - i.e. symétrie décrite par SO(4) et fondée, à l'échelle singulière ß=0, sur l'équivalence des trois directions genre espace et de la direction genre temps dans la métrique d'espace-temps- .

01.12 La présente thèse est donc organisée comme suit :

Dans le chapitre **1**, nous introduisons nos résultats en termes de groupes clasiques et suggérons l'existence d'un "chemin" algébrique dans l'oscillation de signature **s** de la métrique : à partir de (3, 1) - resp. de (4, 0) - **s** peut évoluer vers (4, 0) - resp. vers (3, 1) - mais jamais vers (2, 2).

Dans le chap. **2**, nous construisons l'espace homogène symétrique susceptible de décrire l'unification des deux groupes Lorentzien et Riemannien, ainsi que l'espace topologique quotient $\sum_{top}$ dont l'on peut attendre une représentation correcte de la superposition des deux métriques Lorentzienne et Riemannienne. .

Le chap. **3** contient nos principaux résultats, acquis dans le domaine des groupes quantiques. Nous avons obtenu certaines constructions algébriques nouvelles, en particulier, les familles de produits bicroisés cocycliques. Ces constructions explicitent la transition du groupe q-Euclidien vers le groupe q-Lorentzien ainsi que celle des espaces sur lesquels agissent ces groupes.

Au chap. **4** nous abordons une approche plus physique et suggérons que l'espace-temps pourrait être en état KMS à l'échelle de Planck, d'où nous tirons que le paramètre temporel ß devrait alors être considéré comme complexe. Dans ce cas, les fluctuations quantiques du champ de température pourraient constituer la source des fluctuations quantiques de la signature de la métrique.

Au chap. **5**, nous proposons une extension de la gravité relativiste à partir de l'échelle de Planck et adoptons un Lagrangien de supergravité de la forme $R + R^2 + RR^*$. Dans ce nouveau cadre, à la limite infrarouge $ß \approx l_{Planck}$, , la théorie est décrite par le terme linéaire en R (secteur Lorentzien) tandis que sur la limite ultraviolette $ß \approx 0$, c'est le terme topologique RR^* qui domine, la théorie ayant un contenu purement topologique (secteur Euclidien).

Au chap. **6**, nous proposons une dualité nouvelle, isodimensionnelle, entre instantons et monopôles de dimension 4. La relation de dualité, à l'échelle de Planck, entre ces deux configurations du champ gravitationnel donne une bonne représentation semi-physique de la superposition des métriques (3, 1) et (4, 0).

Au chap. **7**, nous indiquons une possible résolution de la Singularité Initiale dans le cadre de la théorie topologique de Witten (Euclidienne), duale de la théorie physique (Lorentzienne). La Singularité Initiale peut alors être résolue sous la forme d'un instanton gravitationnel singulier de taille 0.

Au chap. **8**, nous discutons la question de l'expansion primordiale du pré-espace-temps, depuis l'échelle 0 jusqu'à l'échelle de Planck. Notre approche de la phase d'"expansion topologique" située dans la région quantique du cône de lumière est fondée sur des arguments algébriques (le flot des poids du facteur de type II_∞ associé à l'échelle 0) ainsi que sur des résultats liés à la théorie des instantons (en particulier la minimisation de la densité de charge topologique divergente de l'instanton singulier de taille 0). Nous énonçons en conclusion un "Principe de Singularité" fondé sur l'existence d'amplitudes topologiques, de portée par construction infinie, ayant pour source l'échelle 0 de l'espace-temps.

Enfin, nous proposons, outre les références citées dans le corps de notre recherche, une bibliographie indicative très exhaustive, rassemblant nombre de publication (environ cinq cents références) qui, directement mais aussi indirectement, nous ont paru apporter des contributions de nature à former les bases d'une théorie à venir de la superposition de la signature de l'espace-temps à l'échelle de Planck.

1

DOMAINE (3, 1) ↔ (4, 0)
DES FLUCTUATIONS DE LA SIGNATURE

Nous suggérons ici l'existence d'un "chemin" algébrique dans l'oscillation de signature **s** de la métrique : à partir de (3, 1) - resp. de (4, 0) - nous indiquons que **s** peut évoluer vers (4, 0) - resp. vers (3, 1) - mais jamais vers (2, 2). De même, à partir de (2, 2), **s** ne peut jamais évoluer vers (3, 1) ou vers (4, 0). La fluctuation de signature parait subir ainsi un *confinement* aux deux formes (3, 1) et (4, 0), dans les limites d'un "domaine de fluctuation" dépendant de contraintes algébriques.

1.1 CLASSE COMMUNE DE SIGNATURE (3, 1) ↔ (4, 0)

Nous commençons par remarquer que (3, 1) et (4, 0) appartiennent à une "classe de signatures" commune, liée au groupe fondamental $\pi_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ commun au deux groupes, à la différence de (2, 2).

Remarque 1.1.1 *SO(3, 1) et SO(4) appartiennent à la même classe fondamentale, l'un et l'autre possédant, en commun avec SO(3), le même groupe fondamental $\pi_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à deux éléments. SO(2, 2) a pour $\pi_1 = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ à une infinité d'éléments, et n'appartient pas à la même classe fondamentale.*

Comme rappelé en [405], les π_1 de SO(3, 1) et SO(4) sont identiques - $\pi_1(SO(3, 1)) = \pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ce qui n'est pas le cas de SO(2, 2), dont le groupe fondamental est $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$. Il est impossible de déformer continûment $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$.

$(3, 1) \rightarrow (4, 0) \not\rightarrow (2, 2)$.

Nous montrons à présent que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est également le groupe fondamental de l'espace homogène symétrique correspondant à l'unification généralisée (dans l'esprit de M. Flato) de SO(3, 1) et de SO(4).

Proposition 1.1.2 *L'espace homogène symétrique* $\sum_{\mathbf{h}} = \dfrac{SO(3,1) \otimes SO(4)}{SO(3)}$ *représentant l'unification entre le groupe de Lorentz et le groupe Euclidien a le même groupe fondamental que SO(3, 1) et SO(4), soit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Note : Nous utilisons ici une notation usuelle en physique exprimant, au niveau des groupes, le produit direct $G \times H$ par le produit tensoriel $G \otimes H$. Ainsi, $\dfrac{SO(3,1) \times SO(4)}{SO(3)}$ s' écrira $\dfrac{SO(3,1) \otimes SO(4)}{SO(3)}$. A partir de la théorie d'unification des algèbres de Lie proposée par M. Flato [210], nous indiquons au chap. 2 (2.1.2, 2.1.3) que $\sum h$ représente l'unification généralisée de SO(3, 1) et SO(4).

Démonstration L'on choisit une identification possible de SO(3) comme sous-groupe de SO(3,1) et de SO(4). Commençons par définir l'action de SO(3) sur le produit direct

$$\Gamma = SO(3,1) \times SO(4) \tag{1.1}$$

Soient les éléments $g_1 \in SO(3, 1)$, $g_2 \in SO(4)$ et $h \in SO(3)$. SO(3) étant un sous-groupe commun aux deux facteurs du produit (1.1), nous avons donc un plongement "semi-diagonal" caractérisé par une action à gauche de SO(3) sur le produit (1.1). Le couple (g_1 , g_2) s'identifie alors à :

$$(g_1 , g_2) \xrightarrow[h]{} (h\, g_1 , g_2\, h^{-1}) \tag{1.2}$$

L'action en (1.2) définit un fibré principal $\sum$ de groupe structural SO(3), l'espace des orbites de l'action de h sur l'espace total étant $\sum$. Dans notre construction du fibré $\sum$, l'espace total est $SO(4) \times SO(3, 1))$, la base est $\dfrac{SO(3, 1) \otimes SO(4)}{SO(3)}$ et la fibre est SO(3). Or, cette construction du fibré est équivalente à celle de R. Mnéimné et F. Testard [405] selon laquelle, considérant le fibré principal $G \to G/H$:

$$G \times_H F \to SO(4) \times_{SO(3)} SO(3, 1)) \tag{1.3}$$

En effet, dans ce cas, le groupe SO(3) opère librement à droite sur $SO(4) \times SO(3, 1))$ par :

$$(g_2 , g_1) \xrightarrow[h]{} (g_2\, h^{-1}, hg_1) \tag{1.4}$$

et l'on montre aisément que (1.2) est équivalent à (1.4). L'espace des orbites $SO(4) \times_{SO(3)} SO(3, 1))$ est une variété fibrée au dessus de $SO(4)/SO(3)$ de groupe structural SO(3) et de fibre type SO(4). Or, partant d'un fibré principal F, de base B et d' espace total T, x_0 étant un point de T et F la fibre passant par $F(x_0)$, l' on considère la fibration utile $F \to T \to B$. Alors, il a été établi [405] l' existence de la suite exacte des π_i :

$$\ldots \to \pi_2(B, \psi(x_0)) \xrightarrow{\delta_2} \pi_1(F_{(x_0)}, (x_0)) \xrightarrow{i^*} \pi_1(T, (x_0)) \xrightarrow{\varphi^*} \pi_1(B, \psi(x_0)) \ldots$$

$$\xrightarrow{\delta_1} \pi_0(F_{(x_0)}, (x_0)) \xrightarrow{i_0} \pi_0(T, x_0) \longrightarrow \ldots \tag{1.5}$$

de sorte que dans le cas du fibré (1.3), avec $B = SO(4)/SO(3) = S^3$, $F = (SO(3, 1)$ et $T = SO(4) \times_{SO(3)} SO(3, 1))$, nous avons la suite exacte :

$$\ldots \to \pi_2(S^3) \xrightarrow{\delta_2} \pi_1(SO(3, 1)) \xrightarrow{i^*} \pi_1(T) \xrightarrow{\varphi^*} \pi_1(S^3) \tag{1.6}$$

Or, d' après (405), $\pi_2(S^3) = \pi_1(S^3) = 0$, ce qui implique nécessairement l' égalité des deux termes médians :

$$\pi_1(SO(3, 1)) = \pi_1(T) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et le groupe fondamental du fibré $\sum = SO(4) \times_{SO(3)} SO(3, 1))$ est donc :

$$\pi_1(\sum) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,. \tag{1.7}$$

Comme nous avons montré l'équivalence entre (1.2) et (1.4), nous en tirons donc que le groupe fondamental de $\sum_h = \dfrac{SO(3, 1) \otimes SO(4)}{SO(3)}$ est bien $\pi_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, comme requis. □

Le résultat ci-dessus au niveau des groupes fondamentaux nous conduit à considérer dans la suite l'existence d'un chemin continu de revêtement auquel est associée l'oscillation de signature (3,1)- (4,0).

1.1.3 Fluctuation de signature et chemin de revêtements universels

Nous suggérons l'existence d'un "revêtement de superposition" d'ordre 2, susceptible de contenir alternativement soit le revêtement universel de SO(3, 1), soit le revêtement universel de SO(4). En revanche, ce revêtement d'ordre 2 ne peut être ramifié sur le revêtement de SO(2, 2).

Remarque 1.1.4 *Le revêtement universel du fibré* $\sum_h = \dfrac{SO(3,\ 1)\ \otimes\ SO(4)}{SO\ (3)}$ *décrivant l'unification généralisée entre le groupe de Lorentz SO(3, 1) et le groupe Euclidien SO(4) est* $\{\mathfrak{R}\}_{(\pm)} = SL(2,\ C) \otimes SU(2)$.

Démonstration Le revêtement universel $\{\mathfrak{R}\}$ de SO(3, 1) ⊗ SO(4) s'écrit :

$$\{\mathfrak{R}\}_{\{SO(3,\ 1)\ \otimes\ SO(4)\}} = SL(2,\ C) \otimes SU(2) \otimes SU(2)$$

De même :

$$\{\mathfrak{R}\}_{(SO(3))} = SU(2)$$

Or, à partir (**i**) de l'action semi-diagonale de SO(3) sur le produit SO(3, 1) × SO(4) définie en (1.2), puis (**ii**) de l'existence d'une bijection entre le π_1 et le revêtement universel de $\sum h$ et enfin (**iii**), du fait que le π_1 de $\sum_h$ calculé en (1.1.2) est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, nous pouvons conclure que le revêtement universel $\{\mathfrak{R}\}_{(\pm)}$ de $\sum_h = \dfrac{SO(3,\ 1)\ \otimes\ SO(4)}{SO\ (3)}$ est :

$$\{\mathfrak{R}\}_{(\pm)} = SL(2,\ C) \otimes SU(2) \tag{1.8}$$

comme requis. □

Considérons maintenant $\widetilde{SL}(2\ ,\ \mathbb{R})\ \otimes\ \widetilde{SL}(2\ ,\ \mathbb{R})$, revêtement universel de SO(2,2).

Corollaire 1.1.5 *La fluctuation de signature de la forme quadratique Lorentzienne s'effectue à l'intérieur du chemin de revêtement* $\{\mathfrak{R}\}_{(\pm)}$ *d'ordre 2 , simplement connexe, du type SL(2, C)* $\widetilde{\otimes}$ *SU(2) susceptible de se ramifier soit vers SL(2, C) soit vers SU(2)⊗SU(2).* $\{\mathfrak{R}\}_{(\pm)}$ *ne peut se ramifier vers* $\widetilde{SL}(2\ ,\ \mathbb{R})\ \otimes\ \widetilde{SL}(2\ ,\ \mathbb{R})$, *revêtement de SO(2, 2) d'ordre infini.*

Démonstration. Le revêtement universel de SO(3) est SU(2) ~ S^3, de centre fini et simplement connexe, celui de SO(3, 1) est, topologiquement, SL(2, C) ~ $S^3 \otimes \mathbb{R}^3$, également de centre fini et simplement connexe (par nappe) tandisque celui de SO(4) est SU(2) ⊗ SU(2) ~ $S^3 \otimes S^3$ et présente les mêmes caractéristiques. En revanche,

$$\{\mathfrak{R}\}_{(2,\ 2)} = \widetilde{SL}(2\ ,\ \mathbb{R})\ \otimes\ \widetilde{SL}(2\ ,\ \mathbb{R}) \tag{1.9}$$

a un centre infini et n'a pas de réalisation matricielle en dimension finie - i.e. $\{\mathfrak{R}\}_{(2,\ 2)}$ n'est pas un groupe de matrices [242]. Il existe donc entre $\{\mathfrak{R}\}_{(3,\ 1)}$ = SL(2, C) et $\{\mathfrak{R}\}_{(4)}$ = SU(2) ⊗ SU(2) un chemin continu, lié à la simple connexité et à l'ordre 2 des deux revêtements cités.Un tel chemin prend la forme d'un "revêtement de superposition", $\{\mathfrak{R}\}_{(\pm)} = SL(2,\ C) \otimes SU(2)$ d'ordre 2, simplement connexe, contenant soit $\{\mathfrak{R}\}_{(3,\ 1)}$ soit $\{\mathfrak{R}\}_{(4)}$. □

Note : SO(2, 2) n'a pas de représentation matricielle, ce qui supprime la notion usuelle d'état quantique.

Remarque 1.1.6 *A la différence de SO(3, 1) et SO(4), le revêtement universel de SO(2,2), d'ordre infini, n'admet pas de représentation matricielle. L'état de signature (2, 2) ne peut donc pas être un état quantique.*

Remarque Une représentation matricielle correspond ici à une représentation de groupe de Lie.

Démonstration Il résulte de la dém. (1.1.5) que SO(3, 1) et SO(4) ont chacun par bijection un revêtement d'ordre 2 alors que le revêtement de SO(2, 2) est d'ordre infini :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(SO(3,1)) = Z_{/2Z} & \xleftrightarrow{\text{2 éléments}} & Z_{/2Z} = \pi_1(SO(4)) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \{\mathfrak{R}\}_{(SL(2,\,C))} & \xleftrightarrow{\text{2 éléments}} & \{\mathfrak{R}\}_{(SU(2)\otimes SU(2))} \end{array}$$

Au contraire, dans le cas de SO(2, 2) :

$$\pi_1(SO(2,2)) = Z \otimes Z \xleftrightarrow{\text{infinité d'éléments}} \{\mathfrak{R}\}_{\{SL(\tilde{2}\,,\,R)\,\otimes\,SL(\tilde{2}\,,\,R)\}} \qquad (1.10)$$

Le revêtement universel $SL(\tilde{2}\,,\mathbb{R}) \otimes SL(\tilde{2}\,,\mathbb{R})$, de noyau infini, n'admet donc pas de représentations matricielles, $SL(\tilde{2}\,,\mathbb{R}) \otimes SL(\tilde{2}\,,\mathbb{R})$ étant un groupe sans matrices. SO(2, 2) n'admet donc pas de représentation projective, celle-ci étant fournie par la représentation matricielle de son revêtement universel. L'absence de représentation projective supprime l'espace de Hilbert et ne permet pas de définir l'espace des états quantiques. Le théorème de Wigner [438] a établi que les symétries de l'espace projectif proviennent des opérateurs unitaires de l'espace de Hilbert. L'absence d' espace projectif n'autorise pas la quantification en signature (2, 2). □

1.2 CHEMIN DE CONNEXITE ET DE LACETS (3, 1) ↔(4, 0))

Remarque 1.2.1 *$SO_o(3, 1)$ et SO(4) possèdent le même π_o.*

Soit le demi-cône de lumière orienté du passé vers le futur. Il n'existe qu'une seule composante connexe - donnée par π_o - dans l' espace sur lequel agît SO_o (3, 1). De même, SO(4) en tant que variété possède également une seule composante connexe. D'où :

$$\pi_o\{SO_o(3,\,1)\} = \pi_o\{SO(4)\}$$

Comme SO(2, 2) a deux composantes connexes, s'il est possible de passer continûment de (3, 1) à (4, 0) en longeant la même composante connexe, il n'existe pas de chemin continu de composantes connexes entre $SO_o(3,\,1)$ et SO(2, 2) ou entre SO(4) et SO(2, 2).

La transition SO(3, 1) ↔SO(4) n'existe pas seulement en terme de connexité mais en terme d'espace de lacets.

Proposition 1.2.2 *La déformation de la signature Lorentzienne s'effectue dans un espace de lacets correspondant à une déformation continue de l' espace des lacets Ω(SO(3, 1) vers Ω(SO(4). Une déformation continue de ce type n'est pas possible vers Ω(SO(2, 2) .*

Note Le symbole Ω désigne ici l' espace des lacets.

Elts de démonstration. S'il est possible de rétracter sur un point l'espace des lacets de SO(3, 1), SO(4) et SO(3), cette trivialisation n'existe pas pour SO(2, 2) ~ SO(2) ⊗ SO(2). Soient $\Gamma_{3,\,1}$, Γ_4 et $\Gamma_{2,\,2}$ les espaces topologiques associés à SO(3, 1), SO(4) et SO(2, 2). Or, $\Gamma_{3,\,1}$ et Γ_4 peuvent être rétractés sur le point $\mathbb{S}$ correspondant à leur sommet (Γ_4 a pour unique point réel son sommet $\mathbb{S}$) et les deux espaces de lacets associés peuvent être trivialisés. En revanche, SO(2, 2) ~ $S_1 \otimes S_1$ et l' espace des lacets associé se contracte sur le tore, non contractile sur un point. L' on a donc un homéomorphisme local entre $\Gamma_{3,\,1}$ et Γ_4 qui ne peut être étendu à $\Gamma_{2,\,2}$. □

Nous achevons sur la perspective d'un chemin d'oscillation en régime q-déformé.

1.3 CHEMIN QANTIQUE DE FLUCTUATION $(3, 1)_q \leftrightarrow (4, 0)_q$

Aux différentes contraintes sur la fluctuation de signature vers (2, 2) observées en classique doivent correspondre les obstructions en régime q-déformé. Sans entrer dans le détail des groupes quantiques impliqués, il est possible de faire certaines remarques à propos de ce que l'on peut attendre.

Premièrement, nous remarquons que tandisque les représentations irréductibles de SO(3, 1) et SO(4) -et donc celles des groupes quantiques SOq(3, 1) et SOq(4)- sont étroitement liées, celle de SO(2, 2) -et donc de SOq(2, 2)-, est très différente. Nous allons considérer au chapitre 3 l'équivalence algébrique des formes Lorentzienne et Euclidienne comme une possibilité d'effectuer une "transformation de jauge" [190] ou "q-twist" [377] des structures algébriques de SOq(4) à celles de SOq(3, 1)) (modulo les $*$ - structures donnant les formes réelles des groupes concernés). Une telle transformation de jauge est vue au chap. 3 comme un "chemin" dans l'espace des algèbres de Hopf, chemin le long duquel il est concevable que peut s'effectuer l'évolution de la signature de la métrique entre les deux formes. Toutefois, l'on ne devrait pas s'attendre à trouver l'existence d'un tel chemin en direction de SOq(2, 2). En outre, nous rencontrons même une difficulté au niveau des représentations fondamentales, qui suggèrent :

Conjecture 1.3.5 *Il n' existe pas de q-déformation usuelle du revêtement universel de $SO_q(2, 2)$.*

Arguments Comme $SL(2, \mathbb{R}) \otimes SL(2, \mathbb{R})$ est un groupe non linéaire et n'admet aucune représentation matricielle, il n'est donc pas possible de construire sa q-déformation à l'aide de matrices de générteurs de dimension fine. En effet, la R-matrice ne peut pas être construite à partir de $SL(2, \mathbb{R}) \otimes SL(2, \mathbb{R})$ et par conséquent, il n'existe aucune q-déformation usuelle du revêtement universel de $SO_q(2, 2)$. □

D'un autre point de vue, pour qu'une déformation continue soit concevalbe, nous suggérons que les revêtements des groupes agissant sur les espaces sous-jacents doivent être déformables l'un dans l'autre, à l'intérieur d'une même classe. Or, il est impossible de déformer un revêtement d' ordre 2 en un revêtement d' ordre infini et réciproquement. Nous en tirons donc qu'une déformation de signature n'est possible qu'entre les formes (3, 1) et (4, 0), sous le même groupe d'homotopie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, à l'exclusion de (2, 2). Alors:

Conjecture 1.3.6 *Le groupe fondamental $\pi_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ commun à SO(3), SO (3, 1) et SO(4), devrait rester rigide lors de la q-déformation de SO(3, 1) et / ou SO(4) et ne devrait donc pas être déformé vers $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$,* qui devrait rester rigide sous déformation de SO(2, 2).

La q-déformation ne modifiant pas les sous-groupes finis des groupes impliqués, (1.3.6) devrait donc être valide.

A partir des directions qui précèdent, nous suggérons que l'oscillation de signature (**i**) peut exister en miieu q-déformé et (**ii**) une telle oscillation devrait être confinée à deux (et seulement deux formes) possibles : la forme Lorentzienne (3, 1) et la forme Euclienne (4, 0).

2

ALGEBRE DE SUPERPOSITION DE SO(3, 1) ET DE SO(4)

Notre objectif consiste ici à mettre en évidence quelques propriétés typiques de la *superposition* entre la métrique d'espace-temps $ds^2_{(3,1)}$ et celle de l'espace quadridimensionnel Euclidien $ds^2_{(4)}$. La méthode consiste à unifier (dans l'esprit de M.Flato [210]) les deux algèbres de Lie so(3, 1) et so(4) associées aux deux groupes SO(3, 1) et SO(4) agissant sur $\mathbb{R}^{3,1}$ et sur $\mathbb{R}^4$.

Dans la suite, en (2.3), nous montrons qu'à partir de l'espace homogène symétrique $\sum_h = \frac{SO(3,1) \otimes SO(4)}{SO(3)}$ décrivant l'unification des deux groupes Lorentzien et Riemannien, l'on peut construire l'espace topologique quotient $\sum_{top} = \frac{\mathbb{R}^{3,1} \oplus \mathbb{R}^4}{SO(3)}$, espace topologique séparé susceptible de décrire la possible superposition des deux métriques Lorentzienne et Riemennienne. Nous montrons que $\sum_{top}$ comporte un point singulier unique S correspondant à l'origine de l'espace de superposition .

2.1 L'ALGEBRE UNIFIANTE DE SO(3, 1) ET DE SO(4)

2.1.1 Unification d' algèbre de Lie

Définition 2.1.2 (Flato) . *L'unification de deux algèbres de Lie sur un même corps commutatif K représente la somme d'espaces vectoriels U = $\lambda(\mathfrak{a}) + \mu(\mathfrak{a}')$ de deux adL $\lambda(\mathfrak{a})$ et $\mu(\mathfrak{a}')$ isomorphes respectivement à $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$. Une algèbre de Lie U est unifiante de $\mathfrak{a}_1$, ……, $\mathfrak{a}_n$ si l'on peut déterminer des isomorphismes λ_k de $\mathfrak{a}_k$ dans U (k = 1… n) tels que U = $\lambda_1(\mathfrak{a}_1) + \ldots + \lambda_n(\mathfrak{a}_n)$.*

Soit l'intersection {I}de $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$:

- si $\{I\} \neq \{0\} \Leftrightarrow \dim U < \dim \mathfrak{a}_1 + \dim \mathfrak{a}_2$

- si $\{I\} = \{0\} \Leftrightarrow \dim U = \dim \mathfrak{a}_1 + \dim \mathfrak{a}_2$

Précisons qu'une unification de 2 algèbres $\mathfrak{u} = U(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est dite :

- *triviale* si $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$ et $\mathfrak{b} \approx \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b}_2 \Rightarrow \mathfrak{u} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{b}_2$.

- *banale* si $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{u} \approx \mathfrak{a}$ ou réciproquement $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{u} \approx \mathfrak{b}$.

La distinction entre unification banale et triviale est importante dans la mesure où, pour une unification triviale, tout invariant de l'une des algèbres est un invariant de l'unification, ce qui n'est généralement pas le cas pour une unification banale.

2.1.3 Unification de so(3, 1) et de so(4)

$\mathfrak{L}$ = so(3, 1) et $\mathfrak{R}$ = so(4) ont en commun la sous-algèbre so(3). Sur $\mathbb{C}$, cette sous-algèbre est un facteur direct. D'après [210], si deux algèbres de Lie ont un facteur direct en commun, leur produit direct, quotienté par ce facteur direct, est une unification dont l'intersection I $\neq \{0\}$ est le facteur direct commun aux deux algèbres de départ. De ce point de vue, le produit direct quotienté

$$\sigma_C = \frac{so(3,1) \otimes so(4)}{so(3)}$$

est une unification des algèbres de Lie complexes so(3, 1) et so(4), au sens de (2.1.2). Sur $\mathbb{R}$, nous considérons donc l'espace quotient

$$\sigma_r = \frac{so(3,1) \otimes so(4)}{so(3)}$$

comme une unification généralisée des algèbres de Lie de SO(3, 1) et de SO(4).

Note so(3, 1) et so(4) apparaissent ici comme sous-espaces de l'espace vectoriel σ. La construction ci-dessus, valable au niveau de l'algèbre de Lie, peut être étendue au niveau des groupes. Ceci permet la construction de $\sum_h$ correspondant à l'unification des deux groupes SO(3, 1) et SO(4). $\sum_h$ n'est pas un groupe de Lie mais un espace homogène symétrique.

2.2 TOPOLOGIE DE L'ESPACE DE SUPERPOSITION DES METRIQUES

2.2.1 $\sum_h$ et singularité initiale

Partant de $\sum_h = \dfrac{SO(3,1) \otimes SO(4)}{SO(3)}$, donnant l'unification du groupe de Lorentz SO(3, 1) avec le groupe Euclidien SO(4), nous étudions à présent l'espace topologique quotient $\sum_{top}$, décrivant, dans notre approche, la situation physique associée à $\sum h$, i.e. la "superposition" (au sens quantique) des métriques Lorentzienne et Riemannienne. $\sum_{top}$ correspond à l'ensemble des orbites de SO(3) sur $\mathbb{R}^{3,1} \otimes \mathbb{R}^4$. Considérant les deux métriques $ds^2_{(3,1)}$ et $ds^2_{(4)}$ dont sont munis respectivement $\mathbb{R}^{3,1}$ et $\mathbb{R}^4$, nous proposons d'identifier $\sum_{top}$ à l'espace de superposition des métriques $ds^2_{(3,1)}$ et $ds^2_{(4)}$ (et de leurs signatures) chacune de simension 4. Le calcul établit que $\sum_{top}$ a la structure d'un cône plein convexe, possédant une origine singulière.

2.2.2 Espace des orbites de l'action de SO(3) sur $R^{7,1}$

Considérons l'action de SO(3, 1) sur $\mathbb{R}^{3,1}$ et de SO(4) sur $\mathbb{R}^4$ [405]. Pour identifier la structure topologique de $\sum_{top}$, nous considérons l'espace des orbites de l'action de SO(3) sur $\mathbb{R}^{3,1} \otimes \mathbb{R}^4$. Celui-ci est défini par le quotient $\dfrac{\mathbb{R}^{3,1} \oplus \mathbb{R}^4}{SO(3)}$. Il existe alors trois dimensions possibles de l'orbite de l'action de SO(3) sur $\mathbb{R}^{7,1} \approx \mathbb{R}^{3,1} \otimes \mathbb{R}^4$: la dimension 3, induite par les deux copies de $\mathbb{R}^3$ plongés dans $\mathbb{R}^{3,1}$ et dans $\mathbb{R}^4$, la dimension 2, associée au bord de l'espace topologique quotient $\sum_{top}$ et la dimension 0 correspondant à son origine singulière:

$$\text{Action (SO(3)) sur } \mathbb{R}^{7,1} \rightarrow \frac{\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3}{SO(3)} \otimes \mathbb{R}^{\pm}.$$

Nous établissons maintenant la structure de l'espace topologique séparé $\sum_{top}$.

2.2.3 Structure topologique de $\sum_{top}$

Soit la matrice $\mathcal{M}$ [274] donnant $\{\chi\}_3 \otimes \mathbb{R}^{\pm}$ composée de trois secteurs : (i) l'intérieur du demi - cône$\{\chi\}^3$, variété semi-algébrique issue de dét $\mathcal{M} > 0$, (ii) sa frontière dont l'équation est de la forme $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, et enfin (iii) son sommet - origine, ces trois régions correspondant respectivement à la variété quotient de superposition $\sum_{top}$ de dimension 5 (+ + + ±), au bord £ de dimension 4 et au point - origine singulier unique S (+ + + +).

Proposition 2.2.4 *Soit la matrice quotient $\mathcal{M}$ décrivant la variété $\{\chi\}_3 \otimes \mathbb{R}^{\pm}$. L'application qui, à $X_1 \in \mathbb{R}^3_{(1)}$ et $X_2 \in \mathbb{R}^3_{(2)}$ associe $\mathcal{M}$ est une application surjective, qui décrit l'ensemble des invariants résultant de l'action de SO(3) sur $X_1 \in \mathbb{R}^3_{(1)}$ et $X_2 \in \mathbb{R}^3_{(2)}$. Le déterminant de $\mathcal{M}$ est positif ssi X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires.*

Remarque : Il existe trois cas selon $\{X_1 , X_2\}$:

(**i**) $\{X_1 , X_2\}$ non colinéaires (et non nuls) : $\mathcal{M}$ est de rang 2 et dét $\mathcal{M} > 0$ et trace $\mathcal{M} > 0 \Rightarrow \mathbb{R}^{3\,|+1,1}$ représente l'intérieur du cône $\{\chi\}_3$;

(**ii**) $\{X_1 , X_2\}$ colinéaires (et non nuls) : $\mathcal{M}$ est de rang 1 et dét $\mathcal{M} = 0 \Rightarrow \mathcal{M}$ décrit le bord de $\mathbb{R}^{3\,|+1,1}$, i.e. l'enveloppe du cône$\{\chi\}_3$;

(**iii**) $\{X_1 , X_2\}$ nuls : $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 0 et dét $\mathcal{M} = 0 \Rightarrow \mathcal{M}$ décrit l'origine de $\mathbb{R}^3_{(1)} \otimes \mathbb{R}^3_{(2)}$, i.e. le sommet du cône $\{\chi\}_3$ correspondant au point singulier S, singularité initiale et origine de la variété de superposition $\mathbb{R}^{3\,|+1,1}$ et du bord de $\mathbb{R}^{3\,|+1,1}$.

Démonstration Considérons l'action de SO(3) sur les deux $\mathbb{R}^3$ inclus dans $\mathbb{R}^{7,1}$: les invariants de cette transformation sont les normes et les produits scalaires des deux vecteurs non-colinéaires $X_1 \leftarrow \mathbb{R}^3_{(1)}$ et $X_2 \leftarrow \mathbb{R}^3_{(2)}$ vivant dans les deux copies de $\mathbb{R}^3$ considérées. L' espace quotient $\mathbb{R}^{3\,|+1,1}$ donnant l' action de SO(3) sur $\mathbb{R}^{7,1}$ est canoniquement exprimé par la matrice quotient 2 x 2 réelle représentant les produits scalaires entre les deux vecteurs X_1 et X_2 des deux $\mathbb{R}^3$. L'action de SO(3) sur $\mathbb{R}^{7,1}$ se décompose selon :

$$\frac{\mathbb{R}^{7,1}}{SO(3)} = \frac{\mathbb{R}^3_{(1)} \otimes \mathbb{R}^+ \otimes \mathbb{R}^3_{(2)} \otimes \mathbb{R}^-}{SO(3)} \rightarrow \frac{\mathbb{R}^3_{(1)} \oplus \mathbb{R}^3_{(2)}}{SO(3)} \otimes \mathbb{R}^{\pm} \qquad (2.3)$$

SO(3) agît effectivement sur $\mathbb{R}^3_{(1)} \otimes \mathbb{R}^3_{(2)}$, $\mathbb{R}^{\pm}$ se situant hors de l'espace des orbites de l'action de SO(3) . La structure topologique de $\frac{\mathbb{R}^3_{(1)} \oplus \mathbb{R}^3_{(2)}}{SO(3)} \otimes \mathbb{R}^{\pm}$ est donc déterminée par la structure topologique de $\frac{\mathbb{R}^3_{(1)} \oplus \mathbb{R}^3_{(2)}}{SO(3)}$. Soit à présent deux vecteurs $X_1 \in \mathbb{R}^3_{(1)}$ et $X_2 \in \mathbb{R}^3_{(2)}$ linéairement indépendants. La matrice $\mathcal{M}$ représentant les produits scalaires des deux vecteurs est donnée par :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} X_1X_1 & X_1X_2 \\ X_2X_1 & X_2X_2 \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

avec $X_1 = x_1^k$ (k = 1, 2, 3) et $X_2 = x_2^k$ (k = 1, 2, 3). La matrice - quotient , dont 3 éléments sont linéairement indépendants, est une matrice de $\mathbb{R}^3$ et s' écrit :

$\mathcal{M}_{ij} = \sum x_1^k \; x_2^k$ (i, j = 1, 2)

Examinons le déterminant de $\mathcal{M}$. Si l'on définit la projection qui, à X_1 , X_2 associe X_1^2 , X_1X_2 , X_2^2, l'on construit une application invariante sous l' action de SO(3). Le déterminant de $\mathcal{M}$ définit ainsi une quadrique dont les variables sont X_1^2 , X_1X_2 , X_2^2 . Posons $X_1^2 = a$, $X_2^2 = b$ et $X_1X_2 = c$. Le déterminant prend la forme dét $\mathcal{M}$ = (ab - c^2). Nous observons alors trois cas possibles:

(i) dét $\mathcal{M} > 0$ ($X_1 \neq 0$ et $X_2 \neq 0$)

(ii) dét $\mathcal{M} = 0$ ($X_1 = 0$ et $X_2 = 0$)

(iii) $\mathcal{M} = 0$ (X_1X_1, X_1X_2, X_2X_1, $X_2X_2 = 0$)

Ces trois cas engendrent trois domaines dans $\sum_h$: l'intérieur de la variété, son bord et son origine. Selon que X_1 et X_2 sont colinéaires ou non, la dimension de l'orbite de l'action de SO(3) sur $\mathbb{R}^3_{(1)} \otimes \mathbb{R}^3_{(2)}$ change :

- si $X_1 \neq X_2$ (sont dans deux espaces différents), l'orbite de l'action de SO(3) sur $\mathbb{R}^3_{(1)} \otimes \mathbb{R}^3_{(2)}$ est de dimension 3.

- si $X_1 \equiv X_2$ (sont parallèles), alors le stabilisateur d'une action générique est SO(2) et l'orbite est de dimension 2.

- si $X_1 \equiv X_2 = 0$, alors $\mathcal{M}$ est de rang 0 et l'orbite de l' action de SO(3) est nulle.

$\mathcal{M}$ est symétrique et possède trois éléments linéairement indépendants : X_1X_1, X_2X_2 et $X_1 X_2$ ($X_1 X_2$ étant égal à X_2X_1). $\mathcal{M}$ détermine donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. Dans la mesure où X_1 et X_2 vivent dans l'espace des matrices symétriques, l'enveloppe linéaire de la variété est nécessairement de dimension 3. Ce résultat implique une conséquence majeure : le quotient $\dfrac{\mathbb{R}^3_{(1)} \oplus \mathbb{R}^3_{(2)}}{SO(3)}$ correspond à l'intérieur d'un cône tridimenisonnel $\{\chi\}_3$ de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière, donnée par dét $\mathcal{M} = 0$, représente le bord bidimensionnel. Le cône $\{\chi\}$ admet alors un unique point singulier S sommet du cône, exprimé lui-même par la matrice nulle $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Comme X_1 et X_2 vivent dans deux espaces différents (les deux copies de $\mathbb{R}^3$), considérons le cas où ils ne sont pas parallèles (donc non-colinéaires), le déterminant de $\mathcal{M}$ étant dans ce cas toujours positif. L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de poser, pour X_1, $X_2 \in$ vectoriel V :

$|X_1.X_2| < \|X_1\|. \|X_2\| \Leftrightarrow |X_1.X_2|^2 < \|X_1\|^2. \|X_2\|^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Par ailleurs, le déterminant de $\mathcal{M}$ a pour forme :

dét $\mathcal{M} = \|X_1\|^2. \|X_2\|^2 - |X_1.X_2|^2$

ce qui implique, en raison de l' inégalité de Cauchy-Schwartz :

$\|X_1\|^2. \|X_2\|^2 - |X_1.X_2|^2 > 0$,

dét $\mathcal{M} > 0$ si X_1 et X_2 sont linéairement indépendants : dét $\mathcal{M} > 0$ et trace $\mathcal{M} > 0$, $\mathcal{M}$ étant conservée par les rotations. L'image de l'application qui envoie $\mathbb{R}^3_{(1)} \otimes \mathbb{R}^3_{(2)}$ dans l'espace des matrices $\mathcal{M}$ est de dimension 3 et est singulière. $\mathcal{M}$ étant de rang 2 , dét $\mathcal{M} > 0$ et trace $\mathcal{M} > 0 \Rightarrow \sum_h$ correspond à l' intérieur tridimensionnel d' un

cône $\{\chi\}_3$ lisse dans R_3, dont le bord est donné par dét $\mathcal{M} = 0$. Notons que la projection (π) exprimée par $\dfrac{\mathbb{R}^3_{(1)} \oplus \mathbb{R}^3_{(2)}}{SO(3)}$ et conduisant de $\mathbb{R}^6$ à $\mathbb{R}^3$ dote l' intérieur du cône-cible de la métrique définie positive (+ + +). La signature du cône plein $\{\chi\}_3$ est donc σ_χ = (+ + +).

(ii) Si $\{X_1 , X_2\}$ colinéaires (et non nuls) : $\mathcal{M}$ est de rang 1 et dét $\mathcal{M} = 0 \Rightarrow \mathcal{M}$ décrit le bord de $\sum_h$. Posons

$X_1X_1 = z + y$, $X_2X_2 = z - y$ et $X_1X_2 = X_2X_1 = x$.

L'équation de $\{\chi\}_3$ correspondant à dét $\mathcal{M} \geq 0$ prend donc la forme : $x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$. L'image de l'application envoyant $\mathbb{R}^3_{(1)} \otimes \mathbb{R}^3_{(2)}$ dans l' espace des matrices $\mathcal{M}$ est donc le cône $\{\chi\}_3$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$, cette image étant conservée sous l'action des homothéties de centre S, sommet de la variété. Le bord $\partial\{\chi\}_3$ de $\{\chi\}_3$ est muni de la signature (+ +), la sous-variété $\partial\{\chi\}_3 \subset \{\chi\}_3$ héritant de la restriction de la signature (+ + +) de $\partial\{\chi\}_3$. Enfin, $X_1 = X_2 = 0$ implique que $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 0 et dét $\mathcal{M} = 0 \Rightarrow \mathcal{M}$ décrit l'origine de $\mathbb{R}^3_{(1)} \otimes \mathbb{R}^3_{(2)}$, c' est à dire le sommet du cône $\{\chi\}_3$ correspondant au point singulier $\mathbb{S}$, singularité initiale et origine de $\sum_h$ et du bord de $\sum_h$. □

Le fait de considérer X_1 ou X_2 alternativement nuls ne modifie pas le résultat général. En effet :

$$X_1 = 0 \text{ et } X_2 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_2X_2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}$ est de rang 1 et nous sommes renvoyés au cas correspondant au bord de $\sum h$. De même pour $X_1 \neq 0$ et $X_2 = 0$. Dans les deux cas, $\mathcal{M}$ décrit alors l' enveloppe du cône $\{\chi\}_3$.

2.2.5 Variété de superposition $\sum_h \equiv \{\chi\}_3 \otimes R^{\pm}$

Rappelons que $\mathbb{R}^{3\left|\begin{smallmatrix}+1\\,1\end{smallmatrix}\right.} \equiv \dfrac{\mathbb{R}^3_{(1)} \oplus \mathbb{R}^3_{(2)}}{SO(3)} \otimes \mathbb{R}^{\pm}$. Comme $\dfrac{\mathbb{R}^3_{(1)} \oplus \mathbb{R}^3_{(2)}}{SO(3)}$ est décrit par le cône à trois dimensions $\{\chi\}_3$, la variété $\mathbb{R}^{3\left|\begin{smallmatrix}+1\\,1\end{smallmatrix}\right.}$ à 5 dimensions résulte donc du produit du cône $\{\chi\}_3$ par $\mathbb{R}^{\pm}$:

$$\mathbb{R}^{3\left|\begin{smallmatrix}+1\\,1\end{smallmatrix}\right.} \equiv \{\chi\}_3 \otimes \mathbb{R}^{\pm} .$$

L'on a donc deux restrictions possibles de $\mathbb{R}^{3\left|\begin{smallmatrix}+1\\,1\end{smallmatrix}\right.}$: $E_1 = \{\chi\}_3 \otimes \mathbb{R}^+$ et $E_2 = \{\chi\}_3 \otimes \mathbb{R}^-$. $\{\chi\}_3 \otimes \mathbb{R}^{\pm}$, de signature (+ + + ±), est difféomorphe à un demi - cône à 5 dimensions et admet le long des deux projections deux géométries correspondant à deux métriques distinctes.

2.2.6 Sommet singulier du cône quantique $X_{\pm}$.

L'origine de $\mathbb{R}^{3}\Big|^{+1}_{,1}$ correspond à $\{X_1 , X_2\}$ nuls : $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 0 et dét $\mathcal{M} = 0 \Rightarrow \mathcal{M}$ décrit l'origine de $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$, i.e. le sommet du cône $\{\chi\}_3$ correspondant au point singulier S_0. Les deux cônes $X_4 = \{\chi\}_3 \otimes \mathbb{R}^+$ et $X_{3,1} = \{\chi\}_3 \otimes \mathbb{R}^-$ ont la même origine singulière S dans la géométrie affine de l'espace $\mathbb{R}^4$. S_0 hérite d'une métrique induite définie positive (+ + + +) non fluctuante. En effet, considérons à nouveau le produit général

$$\Sigma_{top} = \frac{\mathbb{R}^3_{(1)} \oplus \mathbb{R}^3_{(2)}}{SO(3)} \otimes \mathbb{R}^{\pm}$$

A l'origine du cône quantique, il existe le point singulier S_0 correspondant à $\frac{\mathbb{R}^3_{(1)} \oplus \mathbb{R}^3_{(2)}}{SO(3)} = 0$. Or, au voisinage du point singulier S, la demi-droite genre espace $\mathbb{R}^+$ inclut la demi-droite genre temps $\mathbb{R}^-$ de sorte que $\frac{\mathbb{R}^3_{(1)} \oplus \mathbb{R}^3_{(2)}}{SO(3)} \otimes \mathbb{R}^{\pm}$ au point S devient $\frac{\mathbb{R}^3_{(1)} \oplus \mathbb{R}^3_{(2)}}{SO(3)} \otimes \mathbb{R}^+$, dont la signature prend la forme liée à $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^+$ soit la forme Euclidienne (+ + + +). Un autre argument est que, topologiquement, $\mathbb{R}^{3,1}$ est inclus dans $\mathbb{R}^4$. En effet :

$\mathbb{R}^4$ - {1 point} = $\mathbb{R}^4$ - {Origine} $\equiv \mathbb{R}^{3,1}$

de sorte qu' à l' échelle 0, $\mathbb{R}^{3,1} \subset \mathbb{R}^4$.

Nous trouvons également la signature Euclidienne au point S en considérant la signature de l' espace tangent au cône quantique en ce point. En effet, considérons SU(2) inclus dans SO(6) correspondant à $\mathbb{R}^3_{(1)} \otimes \mathbb{R}^3_{(2)}$ ainsi que son extension par $\mathbb{R}$. Une fois établis les générateurs des deux adL concernées et de leur extension par $\mathbb{R}$, nous trouvons qu' il n' existe qu'une seule extension contenue dans l'algèbre de Lie de SO(6). Nous prenons alors sur cette extension unique la forme de Killing correspondante ainsi que sa restriction et nous trouvons qu'elle est définie positive (+ + + +). L'espace tangent en S au cône quantique de superposition est donc muni d'une signature Euclidienne (+ + + +) correspondant à la symétrie temps-espace en ce point.

3

Q-DEFORMATION DE LA SIGNATURE A L'ECHELLE DE PLANCK

Nous considérons dans ce chapitre la contrainte imposée sur la signature de l'espace-temps par la géométrie non commutative dans le contexte de la q-déformation. Il a été proposé [145][372] qu'au voisinage de l'échelle de Planck, la géométrie de l'espace-temps devrait être plutôt modélisée par des coordonnées d'espace-temps *non commutatives*, avec des symétries nouvelles associées aux groupes quantiques [376]. Il existe actuellement des modèles naturels fondés sur les groupes quantiques standard Uq(so(4)) et Uq(so(3,1)), modèles que nous considérons ici, avec les q-espace-temps associés. Ces derniers ont été développés en particulier par U. Carow-Watumara *et al* [116], J.Wess et B. Zumino [413], S. Majid [368] [377] [382] et d'autres. Il ne s'agît pas des seuls modèles possibles; toutefois, dans le présent contexte du moins, selon nos résultats des chaps 1 et 4, nous pouvons conclure qu'en dimension D=4, les seules signatures naturelles à l'échelle de Planck sont des déformations des signatures Lorentzienne (+ + + -) et Euclidienne (+ + + +). Ceci suggère que, pour être compatible avec la géométrie non commutative, seul le cas de la superposition des signatures (+ + + ±) devrait être envisagé à l'échelle de la gravité quantique, le cas ultra-hyperbolique (+ + - -) devant être exclu. Nous montrons ceci du point de vue de la symétrie q-Lorentzienne au § 3.2 et du point de vue du q-espace-temps associé au § 3.4. En même temps, nous obtenons dans ce contexte certaines constructions algébriques nouvelles, motivées par les considérations physiques développées aux chaps 4, 5 et 6. En particulier, nous avons construit le produit bicroisé cocyclique de la forme générale

$$M_\chi(H) = H^{op} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} H_\chi$$

où H est une algèbre de Hopf du type groupe quantique et χ un 2-cocycle du type "twist". Une telle construction et plusieurs autres du même type sont inspirées par l'idée d'*unifier* les signatures Lorentzienne et Euclidienne au sein d'une structure de groupe quantique unique, ce que nous parvenons à faire sous la forme du nouveau produit bicroisé cocyclique

$$Uq(so(4))^{op} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} U_q(so(3,1)) \tag{3.1}$$

Ceci est le principal résultat de 3.3. En tant qu'algèbre de Hopf, (3.1) est isomorphe au produit tensoriel, cependant sa structure sous-jacente implique également l'existence d'un double produit croisé cocyclique de la forme possible

$$U_q(so(3,1)) \underset{\chi}{\triangleright\!\triangleleft} U_q(so(4))^{op*} \tag{3.2}$$

quoique nous ne soyons pas parvenus à une construction explicite de (3.2). Par ailleurs, nous suggérons en section 3.3 que la "semidualisation" proposée par S. Majid [360] [382] permet d'accéder à une description de la transition du groupe q-Euclidien vers le groupe q-Lorentzien :

$$Uq(su(2)) \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} Uq(su(2)) \cong Uq(so(4)) \xleftrightarrow{\;semidualisation\;} Uq(su(2))^* \underset{\chi}{\triangleright\!\triangleleft} Uq(su(2)) \sim Uq(so(3,1)).$$

De même, du point de vue des q-espaces, l'on remarque en 3.4 que la transition de l'espace q-Euclidien à l'espace q-Minkowslien peut être vue comme une transformation de dualité d'algèbres de Hopf. Notons que la dualité d'algèbres de Hopf a été rapprochée de la T- dualité en théorie des supercordes par C. Klimcik et P. Sevara [308]. De telles dualités d'algèbres de Hopf dans le contecte des produits bicroisés ont déjà été proposées pour la physique à l'échelle de Planck dans [356]. Nos résultats donnent ainsi quelques idées nouvelles à propos du mécanisme mathématique sous-jacent au changement de signature.

Enfin, bien que nos principaux résultats soient mathématiques, remarquons qu'il a été récemment suggéré [355] que la structure (non commutative) du q-espace-temps résulte de manière naturelle des contraintes engendrées par la gravité quantique, avec $q = e^{2\pi i/k+2}, k = \frac{6\pi}{G^2\Lambda}$, Λ étant la constante cosmologique.

3. 1 PRELIMINAIRES : GROUPES QUANTIQUES ET GROUPES DE TRESSE

En préambule, nous effectuons quelques rappels à propos des structures algébriques destinées à intervenir dans la q-déformation de la signature.

Nous partons des travaux de M. Jimbo [290] et V.G. Drinfeld [189]. Une cogèbre (complexe) est un $\mathbb{C}$- espace vectoriel H muni d'un coproduit coassociatif C-linéaire $\Delta : H \to H \otimes H$ et d'une co-unité C-linéaire $\varepsilon: H \to C$.Une bigèbre complexe est consituée d'une algèbre et d'une cogèbre compatibles. Si une bigèbre H est également munie d' une antipode $S : H \to H$ telle que

$$m(S \otimes id) \circ \Delta = m(id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon,$$

(où m représente le produit) alors H est une algèbre de Hopf. Deux algèbres de hopf H et H^* sont dites duales l'une de l'autre s'il existe une relation d'appariement telle que le produit et l'unité de l'une soient adjoints au coproduit et à la counité de l'autre. Les antipodes de H et H^* sont également adjoints. H^* est le dual algébrique de H seulement dans le cas de dimension finie.

Définition 3.1.1 (Drinfeld) Une algèbre de Hopf quasitriangulaire est un couple (H, $\mathcal{R}$) où H est une bigèbre et $\mathcal{R} \in H \otimes H$ est tel que:

$(\Delta \otimes Id)\, \mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\, \mathcal{R}_{23}$ et $(Id \otimes \Delta)R = \mathcal{R}_{13}\, \mathcal{R}_{12}$.

$\tau \circ \Delta h = \mathcal{R}\, (\Delta h)\, \mathcal{R}^{-1}$, $\forall\, h \in H$, τ étant l'opérateur de transposition

Δ permet la définition du produit tensoriel de *deux* représentations V_1 et V_2 de H et la coassociativité de Δ implique l'existence d'un isomorphisme naturel $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$. Si en outre Δ est cocommutatif, i.e. si $\Delta = \tau \circ \Delta$, alors il existe un isomorphisme naturel $V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$. Pour une algèbre de Hopf quasitriangulaire, il existe un isomorphisme naturel appelé *tresse,* donné par l'action de $\mathcal{R}$ et la permutation usuelle. Ajoutons que lorsque, sur une algèbre de Hopf H ou sur sa duale H^*, l'algèbre est commutative sous $\mathcal{R}$, alors H est un *groupe quantique strict.*

Il est également naturel de chercher à affaiblir la condition de coassociativité sur Δ par une conjugaison conduisant à une "quasi-algèbre de Hopf".

Définition 3.1.2 (Drinfeld) *Une quasi-algèbre de Hopf (H, Δ , ε, S, α , ß, ϕ) est une algèbre de Hopf non nécessairement coassociative (H, Δ, Φ) munie d'un élément inversible Φ de $H \otimes H \otimes H$ tel que :*

$$(Id \otimes \Delta)\, \Delta(h) = \Phi[\, (\Delta \otimes Id)\, \Delta(h)\,]\, \Phi^{-1}$$

$$[(Id \otimes Id \otimes \Delta)\, (\Phi)\,]\, [\, (\Delta \otimes Id \otimes Id)(\Phi)\,] = (Id \otimes \Phi)\, [(Id \otimes \Delta \otimes Id)\, (\Phi)]\, (\Phi \otimes Id), \quad h \in H;\ \text{où}\ \Phi \in H \otimes H \otimes H$$

Φ satisfaisant des axiomes additionnels comprenant les éléments d'unité, de counité et d'antipode. Il exixte également une notion de structure quasitriangulaire $\mathcal{R}$.

A partir de (3.1.2), nous utilisons la notion de "twisting" introduite par Drinfeld [190] :

Définition 3.1.4 (Drinfeld) *Soit (H, $\mathcal{R}$) une algèbre de Hopf quasitriangulaire et soit χ un 2-cocycle counital. Alors il existe une nouvelle algèbre de Hopf (H_χ, $\mathcal{R}_\chi$), résultant du twist de H et définie par les mêmes algèbre et counité et par*

$$\Delta_\chi h = \chi\,(\Delta h)\chi^{-1}\ ,\ \mathcal{R}_\chi = \chi_{21}\mathcal{R}\ \chi^{-1}\ ,\quad S_\chi h = U(Sh)\,U^{-1}$$

pour tout $h \in H_\chi$. Ici, $U = \chi^{(1)}\left(S\,\chi^{(2)}\right)$ où $\chi = \chi^{(1)} \otimes \chi^{(2)}$ et les sommations sont comprises.

Considérant maintenant les formes réelles - ou $*$ - structures - associées aux q-groupes, nous rappelons la définition d'une $*$ - algèbre de Hopf [382].

Définition 3.1.5 (Woronowicz) *Une $*$ - algèbre de Hopf est une algèbre de Hopf H sur $\mathbb{C}$ équipée d'une involution antilinéaire $*$ telle que*

$$\Delta h^* = (\Delta h)^{*\otimes *}\ ,\ (S \circ *)^2 = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad \varepsilon(h^*) = \overline{\varepsilon(h)}$$

où le symbole $\overline{}$ *dénote la conjugaison complexe dans $\mathbb{C}$. Deux $*$ - algèbres de Hopf H et H^* sont dites couplées dualement s'il existe un couplage bilinéaire d'algèbres de Hopf tel que :*

$$\left\langle \phi^*, h \right\rangle = \overline{\left\langle \phi, (Sh)^* \right\rangle}\ ,\quad \forall h \in H,\ \phi \in H^*.$$

Une $*$ - algèbre de Hopf quasitriangulaire est dite de type réel [382] si $\mathcal{R}^{*\otimes *} = \tau(\mathcal{R})$. Elle est de type "anti-réel" lorsque $\mathcal{R}^{*\otimes *} = \mathcal{R}^{-1}$

La construction des groupes de q-Poincaré Lorentzien et Euclidien impliquent également une structure et une opération définies par Majid : les groupes de tresse [369] et la bosonisation [363].

Définition 3.1.6 (Majid) *Un groupe tressé B (ou une algèbre de Hopf tressée) est défini comme une algèbre de Hopf équipée du coproduit $\underline{\Delta} : B \to B \underline{\otimes} B$ où $B \underline{\otimes} B$ n'est plus le produit tensoriel d'algèbres usuel mais un produit tensoriel tressé tel que*

$$(a \otimes b)\,(c \otimes d) := a\,\Psi\,(b \otimes c)\,d$$

où Ψ est l'opérateur de tresse-transposition. L'on requiert également l'existence d'une counité tressée $\underline{\varepsilon}$ et d'une antipode tressée $\underline{S}$.

Nous munissons maintenant les groupes de tresses utilisés dans la suite d'une - ★- structure.

Définition 3.1.7 (Majid) *Un ★- groupe tressé est un groupe tressé B tel que B est une ★- algèbre et*

$$(★ \otimes ★) \circ \underline{\Delta} = \tau \circ \underline{\Delta} \circ ★,\quad \overline{\underline{\varepsilon}\,(\ )} = \varepsilon \circ ★\ ,\quad ★ \circ \underline{S} = \underline{S} \circ ★\,.$$

τ étant ici la transposition usuelle. Si B est un groupe de tresses quelconque dans une catégorie tressée de H-modules, B est un ★- groupe de tresse et H une $*$ - algèbre de Hopf agissant unitairement. Alors la "bosonisation" (cf. [382]) de B, sous la forme du groupe quantique $B \rtimes \overline{H}$, n'est ni quasitriangulaire ni une $*$- algèbre de Hopf mais est une quasi - $*$ - algèbre de Hopf comprenant B et H comme sous - $*$ - algèbres [379] . Nous effectuons cette construction en 3.4.9.

3.2 QUANTIFICATION DU GROUPE DE LORENTZ ET DOUBLE SIGNATURE

Nous commençons par la description de Uq(so(4)) et Uq(so(3, 1)) [388] en tant que $*$ - algèbres de Hopf [379]. Dans les différentes constructions, nous utilisons Uq(su(2)), algèbre non commutative engendrée par [189][290] :

$$1\,,\ X_+\,,\ X_-\,,\ q^{\frac{H}{2}}\,,\ q^{-\frac{H}{2}}$$

avec les relations

$$q^{\pm\frac{H}{2}}q^{\mp\frac{H}{2}} = 1\,,\quad q^{\frac{H}{2}}X_\pm q^{-\frac{H}{2}} = q^{\pm 1}X_\pm\,,\quad [X_+\,,X_-] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}\,. \tag{3.2}$$

Les rel. (3.2) engendrent une algèbre de Hopf telle que :

$$\Delta q^{\pm\frac{H}{2}} = q^{\pm\frac{H}{2}} \otimes q^{\pm\frac{H}{2}}\,,\quad \Delta X_\pm = X_\pm \otimes q^{\frac{H}{2}} + q^{-\frac{H}{2}} \otimes X_\pm\,,$$

avec

$$\varepsilon\, q^{\pm\frac{H}{2}} = 1\,,\quad \varepsilon\, X_\pm = 0\,,\quad SX_\pm = -q^{\pm 1}X_\pm\,,\ Sq^{\pm\frac{H}{2}} = q^{\mp\frac{H}{2}}$$

Il a été montré que sur C[[t]], H et $X_\pm$ peuvent être considérés comme des générateurs, l'algèbre de Hopf étant quasitriangulaire avec les relations :

$$\mathcal{R} = q^{\frac{H\otimes H}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{-2})^n}{[n]!} \left(q^{\frac{H}{2}}X_+ \otimes q^{-\frac{H}{2}}X_-\right)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\,,\quad [n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \tag{3.3}$$

avec $[n]\,! = [n]\,[\,n-1]\,\ldots\,[1]$. H est quasitriangulaire réel avec q réel et la $*$ - structure

$$X_\pm^* = X_\mp\,,\quad H^* = H$$

Remarquons dans des formules telles que (3.3) la necessité de trouver les produits $\otimes$ complets appropriés. Toutefois, en utilisant les algèbres de Hopf duales, toutes nos constructions peuvent être rendues complètement algébriques. Pour cette raison, nous n'allons pas discuter une telle complétude explicitement.

A présent, la théorie des groupes quantiques [382] nous donne :

$$U_q(so(4)) = \begin{cases} Uq(su(2)) \otimes Uq(su(2)) & \text{comme algèbre} \\ Uq(su(2)) \otimes Uq(su(2)) & \text{comme cogèbre} \end{cases} \tag{3.4}$$

correspondant à SO(4) comme produit direct de deux copies de SO(3). En revanche, la description naturelle de Uq(so(3, 1) est fondée sur la décomposition d' Iwasawa, exprimée par le double quantique de Drinfeld [189]:

$$Uq(so(3,1) = \mathcal{D}(Uq(su(2)) = \begin{cases} Uq(su(2) \triangleright\!\triangleleft Uq(su(2)^{*op} & \text{comme algèbre} \\ Uq(su(2)) \otimes\ Uq(su(2))^* & \text{comme cogèbre} \end{cases} \tag{3.5}$$

Ici, $Uq(su(2))^* \equiv Uq(su(2)^*)$ où $su(2)^*$ est l'algèbre de Lie duale de Drinfeld, duale de su(2) en tant que bigèbre de Lie. Il s'agît d'une algèbre de Lie tridimensionnelle soluble, correspondant classiquement à $SL(2, C) = SU(2) \triangleright\triangleleft SU(2)^{*op}$, où $SU(2)^{*op}$ est le groupe de Lie soluble dont l'algèbre de Lie est $su(2)^{*op}$.

A première vue, les deux groupes quantiques (3.4) et (3.5) paraissent très différents. Comme les axiomes d'algèbres de Hopf unifient l'algèbre et la cogèbre dans la même structure d'adH, l'on pourrait espérer associer la configuration Euclidienne à l'algèbre $\otimes$ et la configuration Lorentzienne à la cogébre twistée $\otimes$ (possiblement). L'analyse montre que ce n'est pourtant pas le cas. Toutefois, notre premier résultat est que les configurations Euclidienne et Lorentzienne admettent une description équivalente et sont construites sur la *même* algèbre, avec deux coproduits différents. D'où:

Proposition 3.2.1 *Soient l'algèbre de Hopf Euclidienne Uq(so(4)) et l'algèbre de Hopf Lorentzienne $\mathcal{D}$(Uq(su(2)), isomorphe à Uq(so(3, 1). Les deux algèbres de Hopf possèdent la même algébre Uq(su(2) $\otimes$ Uq(su(2)) et leurs cogèbres **C1** = Uq(su(2) $\otimes$ Uq(su(2)) et **C2** = Uq(su(2) $\blacktriangleright\blacktriangleleft$ Uq(su(2)) sont reliées par twisting.*

Elts de démonstration L'on sait d'après [378] que pour une algèbre de Hopf factorisable H (telle que Uq(su(2))), $\mathcal{D}(H) \cong H \blacktriangleright\blacktriangleleft H$, où $\blacktriangleright\blacktriangleleft$ désigne un coproduit twisté [189], noté $H \otimes_{\mathcal{R}} H$ dans la construction du "carré twisté" de [432]. Cette forme de double quantique a été appliquée à q-Lorentz dans [368][382]. L'on peut donc écrire pour l'adH Euclidienne :

$$Uq(so(4)) = \begin{cases} Uq(su(2)) \otimes Uq(su(2)) & \text{comme algèbre} \\ Uq(su(2)) \otimes Uq(su(2)) & \text{comme cogèbre } \mathbf{C1} \end{cases} \qquad (3.6)$$

Par contraste, l' adH Lorentzienne s' écrit :

$$Uq(so(3, 1)) = \begin{cases} Uq(su(2) \otimes Uq(su(2) & \text{comme algèbre} \\ Uq(su(2)) \blacktriangleright\blacktriangleleft Uq(su(2)) & \text{comme cogèbre } \mathbf{C2} \end{cases} = \mathcal{D}(Uq(su(2)) \qquad (3.7)$$

L' on observe (**i**) que l' algèbre Uq (su(2)) $\otimes$ Uq (su(2)) est identique dans les deux cas Lorentzien et Euclidien et (**ii**) que **C1** et **C2** -et donc les structures Lorentzienne et Euclidienne- sont reliées par twisting, le twist étant ici isomorphe à $\mathcal{R}$ dans la cogèbre. Plus précisément, nous considérons $\chi = \mathcal{R}_{23} \in H\otimes H\otimes H\otimes H$ comme un 2-cocycle dans $H \otimes H$ où H = Uq(su(2)). Ceci donne le coproduit

$$\Delta_{H \blacktriangleright\blacktriangleleft H} = \mathcal{R}_{23} (\Delta_{H\otimes H}) \mathcal{R}_{23}^{-1}$$

comme requis. □

L' application du twisting par $\mathcal{R}$ induit la modification de l'algèbre de Hopf appropriée au changement de signature. En même temps, le twisting du coproduit de $H \otimes H$ en $H \blacktriangleright\blacktriangleleft_{\mathcal{R}} H$ par la conjugaison induit une non-cocommutativité supplémentaire et est du même type que la quantification de l'algèbre enveloppante classique $U(g) \rightarrow Uq(g)$ comme twisting de quasi-algèbre de Hopf dans la théorie de Drinfeld [190]. Dans le language dual d'anneau de coordonnées, un tel twisting introduit une non cocommutativité supplémentaire dans l'adH et est directement lié au processus de quantification. Ceci établit le lien entre quantification et transition de la structure d'algèbre de Hopf, de celle appropriée à la signature Euclidienne à celle correspondant à la signature Lorentzienne (et inversement).

Nous allons aussi bien considérer ultérieurment les différentes $*$ - structures impliquées dans nos constructions. Celles-ci ne sont pas simplement reliées par twisting mais ont une origine plus profonde. Pour l'instant, nous procédons modulo les $*$ - structures. Cependant, l'on note que les structures algébriques ci-dessus sont les structures appropriées pour les $*$ - structures dans les deux cas. Nous allons montrer maintenant qu'il existe un chemin à un

paramètre les reliant. Ceci doit être important du point de vue des oscillations entre les deux secteurs Lorentzien et Euclidien.

Proposition 3.2.2 *Les deux groupes qantiques Uq(so(3, 1)) et Uq(so(4)) sont reliés de façon continue par une structure de quasi-algèbre de Hopf, modulo les $*$- strucutures.*

Démonstration Soit $U = U_q(so(4))$. Posons

$$Uq(so(4)) = Uq(su(2)) \otimes Uq(su(2)) = (Uq(su(2)) \otimes Uq(su(2)))_{\chi = 1} \tag{3.8}$$

et

$$Uq(so(3, 1)) = Uq(su(2)) \blacktriangleright\!\blacktriangleleft_{\chi} Uq(su(2)) = (Uq(su(2)) \otimes Uq(su(2)))_{\chi} \tag{3.9}$$

avec $\chi = \mathcal{R}_{23}$.

Dans l' espace des éléments de $Uq(su(2)) \otimes Uq(su(2))$, nous prenons $\chi_t = 1 - t + t\,\mathcal{R}_{23}$, de sorte que

$t = 0 \rightarrow$ cas Euclidien
$t = 1 \rightarrow$ cas Lorentzian

Soit à présent un élément arbitraire inversible $\chi \in U \otimes U$ tel que

$\varepsilon \otimes Id(\chi) = Id \otimes \varepsilon(\chi) = 1$

A partir de là, nous pouvons effectuer un twist de U via χ dans une catégorie d'algèbre quasi-Hopf, de manière à passer de l'algèbre de Hopf U à l'algèbre de Hopf U_χ par conjugaison du coproduit par χ. Dans ce cas, Drinfeld a montré [190] que le coproduit Δ_χ n'est plus généralement coassociatif, puisque

$$(Id \otimes \Delta_\chi)\,\Delta_\chi(h) = \Phi[\,(\Delta_\chi \otimes Id)\,\Delta_\chi(h)\,]\,\Phi^{-1}$$

où Φ est un élément inversible dans $U \otimes U \otimes U$ donné par $\Phi = \partial\chi$. C'est à dire

$$\Phi = \chi_{12}\,(\Delta \otimes Id)(\chi)\,(Id \otimes \Delta)(\chi)^{-1}\,\chi^{-1}_{23}$$

Soit alors $\Phi_t = \partial\chi_t$. Ici $\Phi_0 = 1$ et l' on trouve également que $\Phi_1 = 1$ (en utilisant les axiomes propres à une structure quasitriangulaire pour établir que $\chi_1 = \mathcal{R}_{23}$ est un cocycle). Mais $\Phi_t = \partial\chi_t \neq 1$ à un autre t générique. De ce point de vue, les extrémités du chemin sont les algèbres de Hopf

$Uq(so(4))$ $(t = 0)$

et

$Uq(so(3, 1))$ $(t = 1)$

Partant de Uq(so(4)), nous pouvons ainsi appliquer un twist à cette adH, correspondant à $t \neq 0$. Il en résulte une famille de quasi-algèbres de Hopf, définies par la perte de la coassociativité, reliant $U_q(so(4))$ et $U_q(so(3, 1))$. □

Remarque Nous notons que le chemin que nous avons indiqué n'est naturellement pas unique. Un autre chemin intéressant consiste à remplacer $\mathcal{R}$ dans le cocycle χ par

$$\mathcal{R}_\tau = q^{\frac{H\otimes H}{2}} e_{q^{-2}}^{\tau(1-q^{-2})q^{\frac{H}{2}}X_+\otimes q^{-\frac{H}{2}}X_-} \tag{3.10}$$

où $e_{q^{-2}}$ représente les mêmes séries de puissances qu'en (3.3), de sorte que :

$$\mathcal{R}_{\tau=1} = \mathcal{R}$$

comme dans le cas habituel, tandisque

$$\mathcal{R}_{\tau=0} = q^{\frac{H\otimes H}{2}}$$

Plus précisément, nous prenons $\chi_\tau = \left(q^{\frac{(\tau-1)}{2}H\otimes H} \mathcal{R}_\tau \right)_{23}$

Ici, l'on peut trouver que, dans le même sens que pour $\mathcal{R}$ dans [382] :

$$(\Delta\otimes \mathrm{id})\mathcal{R}_\tau = \mathcal{R}_{\tau 13}\mathcal{R}_{\tau 23}$$

et similairement pour $(\mathrm{id}\otimes\Delta)\mathcal{R}_\tau$.

Remarquons également que le twisting ne modifie pas les catégories de représentations, aux relations d'équivalence près. Puisque la représentation irréductible de SO(2, 2) est très différente de celles de SO(3, 1) et de SO(4), l'on ne peut s'attendre à l'existence d'aucun chemin d'évolution de la signature, même en terme de quasi-algèbres de Hopf, ni entre Uq(so((2, 2)) et Uq(so(3, 1)), ni entre Uq(so((2, 2)) et Uq(so(4)).

3.2.3 $*$ - structures Euclidienne et Lorentzienne

Nous sommes maintenant prêts à considérer les $*$ - structures pour Uq(so(4)) et Uq(so(3, 1)). Nous interprétons le twisting ci-dessus comme une sorte d'"équivalence de jauge", dans la mesure où il ne modifie pas les catégories de représentations. Nous allons voir que le changement de signature ne se réduit pas simplement à un tel artefact de jauge, i.e. ne peut pas être entièrement expliqué par le twisting. Afin de construire convenablement les différentes $*$ - structures impliquées, nous allons effectuer une "transformation de jauge inverse" sur la $*$ - structure de Uq(so(3, 1)), de façon à observer son allure en termes d'une algèbre de Hopf qui sera la même que celle de Uq(so(4)). De cette façon, nous allons voir que les deux $*$ - structures correspondant aux algèbres q-Lorentzienne et q-Euclidienne sont les deux seules possibilités naturelles dans ce contexte. Notons d'abord qu'en dehors du twisting, il existe une petite ambiguité de S^2 dans la structure de $*$ - algèbre de toute $*$ - algèbre de Hopf (classiquement $S^2 = 1$, de sorte que cette ambiguité n'est pas visible).

Lemme 3.2.4 *Si H est une $*$ - algèbre de Hopf munie de l'antipode S, alors $*^{nov} = S^{-2} \circ * = * \circ S^2$ forme également une algèbre de Hopf.*

Démonstration Celle-ci est élémentaire puisque S^2 est un automorphisme d'algèbre de Hopf et que

$* \circ S = S^{-1} \circ *$. Alors, $(*^{nov})^2 = S^{-2} \circ * \circ S^{-2} \circ * = *^2 = \mathrm{id}$ et $*^{nov} \circ S = S^{-1} \circ *^{nov}$

comme requis. □

De même, l'on peut maintenant se demander comment une telle transformation de jauge modifie les $*$ - structures correspondantes.

Lemme 3.2.5 (Majid) *Soit H une $*$ -algèbre de Hopf et χ un 2-cocycle réel tel que*

$(S \otimes S)(\chi^{*} \otimes {}^{*}) = \chi_{21}$. *Le twist de la $*$ - structure s' écrit* $*_{\chi} = (S^{-1} U)((...)^{*}) S^{-1} U^{-1}$

de sorte que H_{χ} est également une $*$- algèbre de Hopf.

Démonstration Nous rappelons la preuve de [382], utilisant la notation de Sweedler $\Delta h = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, avec la sommation comprise. L'on pose $U = \chi^{(1)} S \chi^{(2)}$. Nous avons $U^{*} = S^{-2}U$, et donc $S^{-1} U$ est auto-adjoint sous $*$. Le twist sur la $*$ - structure donne $(*_{\chi})^{2} = id$ et $(S_{\chi} \circ *_{\chi})^{2} = id$. Alors l'on obtient, à partir de $\Delta S^{-1} U$ donné dans [382] :

$$(*_{\chi} \otimes *_{\chi})(\Delta_{\chi} h) = (S^{-1}U)\chi^{-(1)*} h^{*}_{(1)} \chi^{(1)*} S^{-1} U^{-1} \otimes (S^{-1}U)\chi^{-(2)*} h^{*}_{(2)} \chi^{(2)*} S^{-1} U^{-1}$$

coïncide avec

$$\Delta_{\chi} \circ *_{\chi}(h) = \chi^{(1)} (S^{-1}U)_{(1)} h^{*}_{(1)} (S^{-1}U^{-1})_{(1)} \chi^{-(1)} \otimes \chi^{(2)} (S^{-1}U)_{(2)} h^{*}_{(2)} (S^{-1}U^{-1})_{(2)} \chi^{-(2)}$$

comme requis. L'on a également que $\mathcal{R}_{\chi}$ est réel si $\mathcal{R}$ est réel. □

Nous considérons à présent la $*$ - structure correspondant à Uq(so(4)) et Uq(so(3, 1)). Il est connu [382] que celles-ci confèrent à Uq(so(3, 1)) et Uq(so(4)) la structure d'algèbres de Hopf quasitriangulaires de type réel. Nous suggérons d'abord qu'il n'existe, sur Uq(su(2)) ⊗ Uq(su(2)), que deux classes de $*$ - structures différentes, que nous associons de manière naturelle à Uq(so(3, 1)) et Uq(so(4)). Nous souhaitons relever les véritables différences entre les $*$ - structures, modulo les "équivalences de jauge" mentionnées ci-dessus. En ce sens, nous suggérons :

Lemma 3.2.6 *Il existe sur Uq (su(2)) ⊗ Uq (su(2)) deux - et seulement deux - $*$ - structures naturelles, que nous associons à Uq(so(3,1)) et Uq(so(4)).*

Démonstration Par "naturel", nous entendons ici des structures de $*$ - algèbre de Hopf construites sur H ⊗ H pour toute $*$ - algèbre de Hopf H et utilisant seulement cette donnée. Clairement, pour H ⊗ H l'on a dans ce sens les deux possibilités :

$$* \otimes * \longrightarrow *_{4} = S^{-2} \circ * \otimes * \qquad \text{Structure Euclidienne} \qquad (3.11)$$

et

$$\tau \circ (* \otimes *) \longrightarrow *_{3,1} = \mathcal{R}_{21} \{\tau \circ (* \otimes *)\} \mathcal{R}^{-1}_{21} \qquad \text{Structure Lorentzienne} \qquad (3.12)$$

L'on observe alors que (3.11) , après le S^{-2} additionnel, est la $*$ - structure de Uq(so(4)) = Uq(su(2)) ⊗ Uq(su(2)) adoptée dans [382]. L'utilisation de $S^{-2} \circ *$ est naturelle dans la mesure où en fait, la forme spinorielle de l'action est plus correctement modélisée par $Uq(su(2))^{cop}$ ⊗ Uq(su(2)), qui devient Uq(su(2)) ⊗ Uq(su(2)) par twisting. Cet extra-twist nous introduit à S^{-2} .

Le second cas est précisément la $*$ - structure de Uq(so(3, 1)) après twisting par $\chi = \mathcal{R}_{23}$. Ceci parceque l'élément U dans la théorie générale s'exprime dans notre cas sous la forme :

$$U = \chi^{(1)} S_{H\otimes H}\, \chi^{(2)} = (1 \otimes \mathcal{R}^{-(1)})\,(S\, \mathcal{R}^{-(2)} \otimes 1) = \mathcal{R}_{21}$$

L' on peut également vérifier que

$$S_{H\otimes H}\, U = U$$

puisque $(S \otimes S)\, \mathcal{R} = \mathcal{R}$. □

Ces résultats sont légèrement plus propres si nous passons des q-algèbres enveloppantes aux q-algèbres de coordonnées i.e. aux $*$ - algèbres de Hopf duales. Dans ce cas, SOq(4) = SUq(2) ⊗ SUq(2), où SUq(2) est le groupe quantique de matrices 2 x 2 dual de Uq(su(2)) et dont la $*$ - structure est plus simplement :

$$*_4 = * \otimes *$$ (3.13)

tandisque l'on a pour SOq(3, 1) :

$$SOq(3, 1) = SUq(2) \triangleright\!\triangleleft SUq(2)$$ (3.14)

par un twisting dual par un 2-cocycle χ construit à partir de la structure quasitriangulaire duale de SUq(2). Cette description peut aussi être regardé comme un double produit croisé $\triangleright\!\triangleleft$ relié aux structures de produits bicroisés (cf. dans la suite) par semidualisation. Dans ce cas, la $*$ - structure est simplement :

$$*_{3,1} = \tau \circ (* \otimes *)$$ (3.15)

Le twisting n'entre pas directement dans les formules dans la mesure où les relations avec les $*$ - structures de Uq(so(3, 1)) implique une antipode S qui possède le même facteur de twisting que son $*$.

Ceci conclut nos discussions à propos des $*$ - structures. Nous avons observé le caractère "naturel" (au sens de (3.2.4)) des $*$ - structures de Uq(so(3, 1)), Uq(so(4)) et de leurs formes duales. Mais il n'existe aucune $*$ - structure donnant dans ce contexte, à partir de Uq (su(2)) ⊗ Uq (su(2)) (ou de son dual) Uq(so(2, 2)) (ou son dual).

3.3 UNIFICATION DES STRUCTURES Q-LORENTZIENNE ET Q-EUCLIDIENNE

Dans cette section, nous introduisons notre principal résultat du point de vue mathématique, consistant en un nouveau type de produit bicroisé cocyclique, dont l'existence est motivée par l'idée physique d'unifier les groupes quantiques Lorentzien et Euclidien.

Nous utilisons la théorie des "produits bicroisés d'algèbres de Hopf" H $\triangleright\!\blacktriangleleft$ A, où H agît sur A et A coagît sur H, théorie proposée par S.Majid en connexion avec la physique à l'échelle de Planck dans [359][360].

L'algèbre de H $\triangleright\!\blacktriangleleft$ A est donnée par le produit croisé et la cogèbre par le coproduit croisé. Ces constructions ont été étendues pour inclure les cocycles ${}^{\psi}\triangleright\!\blacktriangleleft_{\chi}$ dans [359][382] et représente la solution générale au problême de l'extension

$$A \rightarrow E \rightarrow H$$

dans un contexte donné. Le cas que nous recherchons est lorsque l'un de cocycles est trivial. Alors

$$H\, {}^{\psi}\triangleright\!\blacktriangleleft\, A$$

est un cas spécial de (6.3.9) dans [382] avec χ trivial et requiert les conditions suivantes:

(i) A est un H-module algébrique à droite par l'action

$$a \otimes h \mapsto a \triangleleft h$$

i.e. respectant le produit $(ab) \triangleleft h = (a \triangleleft h_{(1)})(b \triangleleft h_{(2)})$ et $1 \triangleleft h = 1 \in (h)$

(ii) H est un A-comodule cogébrique cocyclique à gauche par une coaction cocyclique du type :

$$\beta(h) = h^{(\bar{1})} \otimes h^{(\bar{2})}$$

i.e. telle que

$$(id \otimes \beta) \circ \beta(h_{(1)})\, \psi_{12}(h_{(2)}) = \psi_{12}(h_{(1)})(\Delta \otimes id) \circ \beta(h_{(2)}) \tag{3.16}$$

$$(\varepsilon \otimes id)\beta = id$$

ß respecte le coproduit

$$h^{(\bar{1})} \otimes \Delta h^{(\bar{2})} = h_{(1)}{}^{(\bar{1})} h_{(2)}{}^{(\bar{1})} \otimes h_{(1)}{}^{(\bar{2})} \otimes h_{(2)}{}^{(\bar{2})} \tag{3.17}$$

$$(id \otimes \varepsilon)\beta(h) = \varepsilon(h)$$

et ψ étant un cocycle dans le sens

$$(id \otimes \psi) \circ \beta(h_{(1)})((id \otimes \Delta) \circ \psi(h_{(2)}) = \psi_{12}(h_{(1)})(\Delta \otimes id) \circ \psi(h_{(2)}) \tag{3.18}$$

$$(\varepsilon \otimes id)\psi = (id \otimes \varepsilon)\psi = \varepsilon$$

(iii) Les actions et coactions sont compatibles dans le sens

$$\varepsilon(a \triangleleft h) = \varepsilon(a)\varepsilon(h)$$

ß(1) = $1 \otimes 1$, $\quad \psi(1) = 1 \otimes 1$

et

(A) $\quad \psi(h_{(1)})\Delta(a \triangleleft h_{(2)}) = (a_{(1)} \triangleleft h_{(2)}^{(\bar{1})} \otimes a_{(2)} \triangleleft h_{(2)}^{(\bar{2})}(\psi(h_{(3)})$`

(B) $\quad ß(hg) = h^{(\bar{1})} \triangleleft g_{(1)} g_{(2)}{}^{(\bar{1})} \otimes h^{(\bar{2})} g_{(2)}{}^{(\bar{2})}$`

(C) $\quad h_{(1)}{}^{(\bar{1})}(a \triangleleft h_{(2)}) \otimes h_{(1)}{}^{(\bar{2})} = (a \triangleleft h_{(1)}) h_{(2)}^{(\bar{1})} \otimes h_{(2)}^{(\bar{2})}$

(D) $\quad \psi(hg) = (\psi(h_{(1)})^{(1)} \triangleleft g_{(1)}) g_{(2)}^{(\bar{1})} \otimes (\psi(h_{(1)})^{(2)} \triangleleft g_{(2)}^{(\bar{2})}) \psi(g_{(3)})$

Dans un tel cas, l'algèbre de produit croisé est

$$(h \otimes a)(g \otimes b) = hg_{(1)} \otimes (a \triangleleft g_{(2)})b$$

et la cogèbre de coproduit croisé cocyclique est

$$\Delta(h\otimes a) = (h_{(1)} \otimes h_{(2)}^{(\bar{1})}\psi(h_{(3)})^{(1)} a_{(1)}) \otimes (h_{(2)}^{(\bar{2})} \otimes \psi(h_{(3)})^{(2)} a_{(2)}) \tag{3.19}$$

qui est connue [382] pour former une algèbre de Hopf du type $H \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} A$

Nous donnons à présent un important exemple de produit miroir muni du twist ψ :

Proposition 3.3.1(Majid) *Il existe un "produit miroir" [360] de la forme* $M(H) = H^{op} \triangleright\!\blacktriangleleft H$

avec les coactions adjointes

$$a \triangleleft h = h_{(1)}\ a\ Sh_{(2)}\ , \qquad \forall a \in H,\ h \in H^{op}$$

$$ß(h) = h_{(1)}\ Sh_{(3)} \otimes h_{(2)}, \qquad \forall\ h \in H^{op}$$

En tant qu'algèbre de Hopf, M(H) est isomorphe à $H^{op} \otimes H$; toutefois, son importance est due au fait que l'on obtient, par "semi-dualisation" [382]:

$$H^{op} \triangleright\!\blacktriangleleft H \ \leftrightarrow\ H \triangleright\!\triangleleft H^{op*}$$

Il s'agît d'une version du double de Drinfeld de H, object beaucoup plus compliqué que son équivalent M(H).

Nous présentons maintenant notre nouveau résultat : une généralisation du produit miroir lorsque l'une des composantes du produit est remplacé par un twist.

Théorème 3.3.2 *Soit $\chi \in H \otimes H$ un 2-cocycle et soit H_χ l'algèbre de Hopf twistée de Drinfeld associée à l'algèbre de Hopf H. Alors il existe un produit bicroisé cocyclique de la forme*

$$M_\chi(H) = H^{op} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} H_\chi$$

où $a \triangleleft h = h_{(1)}\ a\ Sh_{(2)}$

$$ß(h) = h_{(1)}\ Sh_{(3)} \otimes h_{(2)}$$

comme précédemment mais à présent avec le cocycle

$$\psi(h) = h_{(1)}\chi^{(1)} Sh_{(4)}\chi^{-(1)} \otimes h_{(2)}\chi^{(2)} Sh_{(3)}\chi^{-(2)}$$

et donnant une extension des algèbres de Hopf

$$H_\chi \to M_\chi(H) \to H^{op}$$

En outre, $M_\chi(H) \cong H^{op} \otimes H_\chi$ *en tant qu'algèbre de Hopf par* $h_{(1)} \otimes h_{(2)}a \leftarrow\!\!\dashv h \otimes a$

Démonstration Nous vérifions les conditions pour le produit bicroisé cocyclique $H^{op} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} H_\chi$ avec ψ tel qu'énoncé ci-dessus. Notons que H^{op} joue le rôle de H dans la théorie générale et H_χ le rôle de A. Ici, H est une algèbre de Hopf quelconque. Donc, H_χ a la même algèbre que H et reste un H^{op} - module algébrique, comme la forme usuelle $M(H) = H^{op} \triangleright\!\blacktriangleleft H$. Ensuite, l'on a :

$$(id \otimes ß) \circ ß(h_{(1)})\psi_{12}(h_{(2)}) = (h_{(1)(1)}Sh_{(1)(3)} \otimes h_{(1)(2)(1)}Sh_{(1)(2)(3)} \otimes h_{(1)(2)(2)})\,\psi_{12}(h_{(2)})$$

$$= h_{(1)(1)}Sh_{(1)(3)}h_{(2)}\chi^{(1)}Sh_{(5)}\chi^{-(1)} \otimes h_{(1)(2)(1)}Sh_{(1)(2)(3)}h_{(3)}\chi^{(2)}Sh_{(4)}\chi^{-(2)} \otimes h_{(1)(2)(2)}$$

$$= h_{(1)}Sh_{(5)}h_{(6)}\chi^{(1)}Sh_{(9)}\chi^{-(1)} \otimes h_{(2)}Sh_{(4)}h_{(7)}\chi^{(2)}Sh_{(8)}\chi^{-(2)} \otimes h_{(3)}$$

$$= h_{(1)}\chi^{(1)}Sh_{(5)}\chi^{-(1)} \otimes h_{(2)}\chi^{(2)}Sh_{(4)}\chi^{-(2)} \otimes h_{(3)}$$

tandisque

$$\psi_{12}(h_{(1)})(\Delta_\chi \otimes id)\,ß(h_{(2)}) = \psi_{12}(h_{(1)})(\chi^{(1)}h_{(2)(1)(1)}Sh_{(2)(3)(2)}\chi^{-(1)} \otimes \chi^{(2)}h_{(2)(1)(2)}Sh_{(2)(3)(1)}\chi^{-(2)}h_{(2)(2)})$$

$$= h_{(1)(1)}\chi^{(1)}Sh_{(1)(4)}h_{(2)(1)(1)}Sh_{(2)(3)(2)}\chi^{-(1)} \otimes h_{(1)(2)}\chi^{(2)}Sh_{(1)(3)}h_{(2)(1)(2)}Sh_{(2)(3)(1)}\chi^{-(2)}h_{(2)(2)}$$

$$= h_{(1)}\chi^{(1)}Sh_{(4)}h_{(5)}Sh_{(9)}\chi^{-(1)} \otimes h_{(2)}\chi^{(2)}Sh_{(3)}h_{(6)}Sh_{(8)}\chi^{-(2)} \otimes h_{(7)}$$

$$= h_{(1)}\chi^{(1)}Sh_{(5)}\chi^{-(1)} \otimes h_{(2)}\chi^{(2)}Sh_{(4)}\chi^{-(2)} \otimes h_{(3)}$$

comme requis. Nous avons utilisé ici les propriétés élémentaires des algèbres de Hopf et les notations de Sweedler pour les coproduits. Aussi, en utilisant la propriété de cocycle de χ, il est possible d'observer que ψ est un cocycle dans le sens requis, de sorte que H^{op} devient un H_χ-comodule cocyclique. Il est immédiatement clair que la coaction cocyclique résultante respecte le coproduit de H^{op} dans la mesure où ces applications sont les mêmes que pour $M(H) = H^{op} \triangleright\!\blacktriangleleft H$. Donc :

$$(id \otimes \psi) \circ ß(h_{(1)})((id \otimes \Delta_\chi)\psi(h_{(2)})) = (h_{(1)(1)}Sh_{(1)(3)} \otimes \psi(h_{(1)(2)}))\chi_{23}((id \otimes \Delta)\,\psi(h_{(2)}))\chi_{23}^{-1}$$

$$= h_{(1)(1)}Sh_{(1)(3)}h_{(2)(1)}\chi^{(1)'}Sh_{(2)(4)}\chi^{-(1)'} \otimes h_{(1)(2)(1)}\chi^{(1)}Sh_{(1)(2)(4)}(h_{(2)(2)}\chi^{(2)'}Sh_{(2)(3)}\chi^{-(2)'})_{(1)}\chi^{-(1)} \otimes$$
$$h_{(1)(2)(2)}\chi^{(2)}Sh_{(1)(2)(3)}(h_{(2)(2)}\chi^{(2)'}Sh_{(2)(3)}\chi^{-(2)'})_{(2)}\chi^{-(2)}$$

$$= h_{(1)}Sh_{(6)}h_{(7)}\chi^{(1)'}Sh_{(12)}\chi^{-(1)'} \otimes h_{(2)}\chi^{(1)}Sh_{(5)}h_{(8)}\chi^{(2)'}{}_{(1)}Sh_{(11)}\chi^{-(2)'}{}_{(1)}\chi^{-(1)} \otimes$$
$$h_{(3)}\chi^{(2)}Sh_{(4)}h_{(9)}\chi^{(2)'}{}_{(2)}Sh_{(10)}\chi^{-(2)'}{}_{(2)}\chi^{-(2)}$$

$$= h_{(1)}\chi^{(1)'}Sh_{(6)}\chi^{-(1)'} \otimes h_{(2)}\chi^{(1)}\chi^{(2)'}{}_{(1)}Sh_{(5)}\chi^{-(2)'}{}_{(1)}\chi^{-(1)} \otimes h_{(3)}\chi^{(2)}\chi^{(2)'}{}_{(2)}Sh_{(4)}\chi^{-(2)'}{}_{(2)}\chi^{-(2)}$$

où χ' est une autre copie de χ, tandisque

$$\psi_{12}(h_{(1)})(\Delta_\chi \otimes id)\psi(h_{(2)}) = \psi_{12}(h_{(1)})\chi_{12}(\Delta \otimes id)\psi(h_{(2)})\chi_{12}^{-1}$$

$$= h_{(1)(1)}\chi^{(1)}Sh_{(1)(4)}(h_{(2)(1)}\chi^{(1)'}Sh_{(2)(4)}\chi^{-(1)'})_{(1)}\chi^{-(1)} \otimes$$
$$h_{(1)(2)}\chi^{(2)}Sh_{(1)(3)}(h_{(2)(1)}\chi^{(1)'}Sh_{(2)(4)}\chi^{-(1)'})_{(2)}\chi^{-(2)} \otimes h_{(2)(2)}\chi^{(2)'}Sh_{(2)(3)}\chi^{-(2)'}$$

$$= h_{(1)}\chi^{(1)}Sh_{(4)}h_{(5)}\chi^{(1)'}{}_{(1)}Sh_{(10)}\chi^{-(1)'}{}_{(1)}\chi^{-(1)} \otimes$$
$$h_{(2)}\chi^{(2)}Sh_{(3)}h_{(6)}\chi^{(1)'}{}_{(2)}Sh_{(9)}\chi^{-(1)'}{}_{(2)}\chi^{-(2)} \otimes h_{(7)}\chi^{(2)'}Sh_{(8)}\chi^{-(2)'}$$

$$= h_{(1)}\chi^{(1)}\chi^{(1)'}_{(1)}Sh_{(6)}\chi^{-(1)'}_{(1)}\chi^{-(1)} \otimes h_{(2)}\chi^{(2)}\chi^{(1)'}_{(2)}Sh_{(5)}\chi^{-(1)'}_{(2)}\chi^{-(2)} \otimes h_{(3)}\chi^{(2)'}Sh_{(4)}\chi^{-(2)'}$$

ce qui est égal à l'expression au dessus, à cause de l'axiome de cocycle pour χ et sa version correspondante pour χ^{-1}. Nous obtenons donc un coproduit croisé cogébrique cocyclique de la forme $H^{op} \overset{\psi}{>\!\blacktriangleleft} H_\chi$ et un produit croisé $H^{op} \triangleright\!< H_\chi$. On peut alors vérifier les conditions de compatibilité (A)-(D) ci-dessus pour voir que l'une admet une algèbre de Hopf. Alternativement, l'on note que l'on a un isomorphisme d'algèbre

$$\vartheta : H^{op} \otimes H_\chi \xrightarrow{\sim} H^{op} \triangleright\!\blacktriangleleft H_\chi \quad , \quad \vartheta(h \otimes a) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}a \tag{3.20}$$

parceque l'algèbre est la même que pour $M(H) = H^{op} \triangleright\!\blacktriangleleft H$. L'on vérifie que θ est aussi un isomorphisme des cogèbres, prouvant donc que $H^{op} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} H_\chi$ est une algèbre de Hopf. Ici, son coproduit croisé est explicitement :

$$\Delta(h \otimes a) = h_{(1)} \otimes h_{(2)(1)}Sh_{(2)(3)}h_{(3)(1)}\chi^{(1)}Sh_{(3)(4)}a_{(1)}\chi^{-(1)} \otimes h_{(2)(2)} \otimes h_{(3)(2)}\chi^{(2)}Sh_{(3)(3)}a_{(2)}\chi^{-(2)}$$

$$= h_{(1)} \otimes h_{(2)}\chi^{(1)}Sh_{(6)}a_{(1)}\chi^{-(1)} \otimes h_{(3)} \otimes h_{(4)}\chi^{(2)}Sh_{(5)}a_{(2)}\chi^{-(2)}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que

$$\Delta\vartheta(h \otimes a) = \vartheta \otimes \vartheta(h_{(1)} \otimes \chi^{(1)}a_{(1)}\chi^{-(1)} \otimes h_{(2)} \otimes \chi^{(2)}a_{(2)}\chi^{-(2)})$$

comme requis. □

Nous poursuivons en proposant une nouvelle description de Uq(so(4)) en termes de produit bicroisé.

Proposition 3.3.3 *Il existe une description nouvelle de Uq(so(4)) sous la forme du produit bicroisé*

$Uq(su(2)) \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} Uq(su(2))$

Démonstration L'on observe que le produit miroir usuel

$M\{Uq(su(2))\} \cong \{Uq(su(2))\}^{op} \otimes Uq(su(2)) \cong U_{q^{-1}}(su(2)) \otimes Uq(su(2))$

en tant qu'algèbre de Hopf ne correspond pas exactement à

$Uq(so(4)) = Uq(su(2)) \otimes Uq(su(2))$

Pour obtenir exactement la forme canonique ci-dessus, nous devons utiliser notre nouvelle construction en termes de produit bicroisé cocyclique avec $H = Uq(su(2))^{op}$ et $\chi = \mathcal{R}^{-1}$ correspondant à la structure quasitriangulaire considérée comme un cocycle sur $\{Uq(su(2))\}^{op}$. χ obéit à l'axiome de cocycle puisque l'on a, dans Uq(su(2))

$$\mathcal{R}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{R}$$

où nous retrouvons l' équation de Yang-Baxter. Clairement, l'on a

$H_\chi = [Uq(su(2))^{op}]_\chi \cong \{Uq(su(2))\}^{op/cop} \cong \{Uq(su(2))\}$

par l'antipode (ici $\mathcal{R}^{-1}$ est une structure quasitriangulaire sur $\{Uq(su(2))\}^{op}$). L'on obtient alors le produit bicroisé cocyclique

$$Uq(su(2)) \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} Uq(su(2))$$

isomorphe à $Uq(su(2)) \otimes Uq(su(2)) = Uq(so(4))$. Explicitement, le cocycle est :

$$\psi(h) = h_{(1)\tilde{op}} \mathcal{R}^{-(1)}_{\tilde{op}} S^{-1} h_{(4)\tilde{op}} \mathcal{R}^{(1)} \otimes h_{(2)\tilde{op}} \mathcal{R}^{-(2)} S^{-1} h_{(3)\tilde{op}} \mathcal{R}^{(2)}$$

comme élément de $Uq(su(2))^{op/cop} \otimes Uq(su(2))^{op/cop}$. En appliquant l'isomorphisme

$$S : Uq(su(2))^{op/cop} \xrightarrow{\sim} Uq(su(2))$$

nous avons:

$$\begin{aligned} \psi(h) &= Sh_{(1)} \mathcal{R}^{(-1)} h_{(4)} \mathcal{R}^{(1)} \otimes Sh_{(2)} \mathcal{R}^{-(2)} h_{(3)} \mathcal{R}^{(2)} \\ &= Sh_{(1)} h_{(3)} \otimes Sh_{(2)} h_{(4)} \end{aligned} \tag{3.21}$$

en termes de la structure d'algèbre de Hopf de Uq(su(2)). Nous avons utilisé la propriété de S⊗S-invariance de $\mathcal{R}$ et les axiomes de quasitriangularité pour le coproduit.

D'autre part, l'action sur $Uq(su(2))^{op/cop}$ a pour forme

$$a \triangleleft h = h_{(1)\tilde{op}} a_{\tilde{op}} S^{-1} h_{(2)}$$

En termes d'action sur Uq(su(2)) l'on a:

$$\begin{aligned} a \triangleleft h &= S(h_{(1)\tilde{op}} S^{-1} a_{\tilde{op}} S^{-1} h_{(2)}) \\ &= Sh_{(1)} a h_{(2)} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Finallement, la coaction

$$ß(h) = h_{(1)\tilde{op}} S^{-1} h_{(3)} \otimes h_{(2)}$$

comme élément de $Uq(su(2))^{op/cop} \otimes Uq(su(2))$ devient :

$$\begin{aligned} ß(h) &= S(h_{(1)\tilde{op}} S^{-1} h_{(3)}) \otimes h_{(2)} \\ &= Sh_{(1)} h_{(3)} \otimes h_{(2)} \end{aligned} \tag{3.23}$$

comme la coaction cocyclique à gauche de Uq(su(2)). □

Notons que, bien qu'ayant utilisé la structure quasitriangulaire $\mathcal{R}$ dans la démonstration, celle-ci disparaît dans le cours de la démonstration. Ceci suggère qu'il est possible de prouver que pour toute algèbre de Hopf munie d'une antipode inversible, l'on a $H \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} H \cong H \otimes H$ par les (co)actions ci-dessus et le cocycle ψ. D'où :

Proposition 3.3.4 *Soit H une algèbre de Hopf quelconque munie d'une antipode bijective. Il existe un produit bicroisé cocyclique* $H \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} H$ *où*

$$a \triangleleft h = Sh_{(1)} a \; h_{(2)}$$
$$ß(h) = Sh_{(1)} h_{(3)} \otimes h_{(2)}$$
$$\psi(h) = Sh_{(1)} h_{(3)} \otimes Sh_{(2)} h_{(4)}$$

De plus, $H \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} H \cong H \otimes H$ *en tant qu'algèbres de Hopf.*

Remarque Ces formules sont motiviées par la dém. ci-dessus mais sont applicables pour toute algèbre de Hopf : l'on peut vérifier directement à ce niveau au cours de développements similaires que nous avons une coaction cocyclique à gauche etc. L'on note que ß est également une coaction à droite, mais sous l'effet du cocycle ψ, celle-ci devient une coaction cocyclique à gauche. Nous prouvons explicitement la dernière partie, soit :

$$\theta : H \otimes H \xrightarrow{\sim} H \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} H, \quad \vartheta(h \otimes g) = h_{(1)} \otimes Sh_{(2)} g \tag{3.24}$$

produit l'isomorphisme requis.

Démonstration Ici le produit de $H \triangleright\!\prec H$ est :

$$\begin{aligned}(h \otimes a)(g \otimes b) &= hg_{(1)} \otimes a \triangleleft g_{(2)} b \\ &= hg_{(1)} \otimes Sg_{(2)} a g_{(3)} b\end{aligned}$$

et θ fournit l'isomorphisme d'algèbres requis (cf. M(H) usuel [382]). Moins trivial, le coproduit de $H \overset{\psi}{\succ\!\blacktriangleleft} H$ est :

$$\begin{aligned}\Delta h \otimes a &= h_{(1)} \otimes Sh_{(2)(1)} h_{(2)(3)} \psi(h_{(3)})^{(1)} a_{(1)} \otimes h_{(2)(2)} \psi(h_{(3)})^{(2)} a_{(2)} \\ &= h_{(1)} \otimes Sh_{(2)} h_{(5)} a_{(1)} \otimes h_{(3)} \otimes Sh_{(4)} h_{(6)} a_{(2)}\end{aligned} \tag{3.25}$$

et nous vérifions :

$$\begin{aligned}\Delta \vartheta(h \otimes a) &= h_{(1)(1)} \otimes Sh_{(1)(2)} h_{(1)(5)} Sh_{(2)(2)} a_{(1)} \otimes h_{(1)(3)} \otimes Sh_{(1)(4)} h_{(1)(6)} Sh_{(2)(1)} a_{(2)} \\ &= h_{(1)} \otimes Sh_{(2)} a_{(1)} \otimes h_{(3)} \otimes Sh_{(4)} a_{(2)} \\ &= (\vartheta \otimes \vartheta)((h_{(1)} \otimes a_{(1)}) \otimes (h_{(2)} \otimes a_{(2)})) \\ &= (\vartheta \otimes \vartheta)\Delta_{H \otimes H}(h \otimes a)\end{aligned} \tag{3.26}$$

comme requis. □

Revenant à notre construction générale $M_\chi(H) = H^{op} \overset{\psi}{\succ\!\blacktriangleleft} H_\chi$, notre second exemple est avec H = Uq(so(4)).

Proposition 3.3.5 *lI existe un produit bicroisé cocyclique de la forme*

$$Uq(so(4))^{op} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} Uq(so(3,1))$$

Démonstration Partant de H = Uq(su(2)) ⊗ Uq(su(2)), nous avons ici H^{op} = $Uq(su(2))^{op}$ ⊗ $Uq(su(2))^{op}$, tandisque A = H_χ = Uq(su(2)) ▶◀ Uq(su(2)) ≅ Uq(so(3, 1)), où $\chi = \mathcal{R}_{23}$, comme expliqué au § 3.2. L'action et la coaction sont alors :

$$(a \otimes b) \triangleleft (h \otimes g) = h_{(1)} a S h_{(2)} \otimes g_{(1)} b S g_{(2)}$$

$$ß(h \otimes g) = (h_{(1)} \otimes g_{(1)}).(S h_{(3)} \otimes S g_{(3)}) \otimes h_{(2)} \otimes g_{(2)}$$

$$= h_{(1)} S h_{(3)} \otimes g_{(1)} S g_{(3)} \otimes h_{(2)} \otimes g_{(2)} \qquad (3.27)$$

est le produit tensoriel de l'action et de la coaction de la même forme que ci-dessus pour chaque copie de Uq(su(2)). D'autre part, le cocycle pour $h,g \in$ Uq(su(2)) est :

$$\psi(h \otimes g) = (h_{(1)} \otimes g_{(1)})(1 \otimes \mathcal{R}^{(1)})(S h_{(4)} \otimes S g_{(4)})(1 \otimes \mathcal{R}^{-(1)}) \otimes$$
$$(h_{(2)} \otimes g_{(2)})(\mathcal{R}^{(2)} \otimes 1)(S h_{(3)} \otimes S g_{(3)})(\mathcal{R}^{-(2)} \otimes 1)$$

où le produit est dans H = Uq(su(2)) ⊗ Uq(su(2)). Ceci donne :

$$\psi(h \otimes g) = h_{(1)} S h_{(4)} \otimes g_{(1)} \mathcal{R}^{(1)} S g_{(4)} \mathcal{R}^{-(1)} \otimes h_{(2)} \mathcal{R}^{(2)} S h_{(3)} \mathcal{R}^{-(2)} \otimes g_{(2)} S g_{(3)}$$

$$= h_{(1)} S h_{(4)} \otimes g_{(1)} \mathcal{R}^{(1)} S g_{(2)} \mathcal{R}^{-(1)} \otimes h_{(2)} \mathcal{R}^{(2)} S h_{(3)} \mathcal{R}^{-(2)} \otimes 1$$

pour les structures explicites des produits bicroisés. □

Dans la section suivante, nous considérons la transformation de semidualisation, destinée à éclairer certains mécanismes algébriques impliqués dans la transition Lorentzien ↔ Euclidien.

3.3.6 Semidualisation des produits bicroisés cocycliques

Comme annoncé au début de la section 3.3, nous allons construire ici la semidualisation des données correspondant à

$H \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} A$

Toutefois, la forme exacte de l'objet résultant $A^* \underset{\chi}{\triangleright\!\triangleleft} H$ demeure mystérieuse. Alors, en rapportant les conditions ci-dessus aux éléments de A^*, nous avons :

Proposition 3.3.7 *La donnée d'un produit bicroisé* $H \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} A$ *a la semidualisation suivante :*

deux bigèbres X et H telles que

(i) X est un H-module cogébrique à gauche, i.e. $\Delta(h \triangleright x) = h_{(1)} \triangleright x_{(1)} \otimes h_{(2)} \triangleright x_{(2)}$ *et*

$$\varepsilon(h \triangleright x) = \varepsilon(h)\varepsilon(x)$$

(ii) H est un X-module cogébrique cocyclique à droite dans le sens nouveau :

$$\Delta(h \triangleleft x) = h_{(1)} \triangleleft x_{(1)} \otimes h_{(2)} \triangleleft x_{(2)} \quad et \quad \varepsilon(h \triangleleft x) = \varepsilon(h)\varepsilon(x)$$

$$(h_{(1)} \triangleleft x_{(1)}) \triangleleft y_{(1)} \chi(h_{(2)}, x_{(2)}, y_{(2)}) = \chi(h_{(1)}, x_{(1)}, y_{(1)}) h_{(2)} \triangleleft (x_{(2)} y_{(2)})$$

où

$$\chi(h_{(1)} \triangleleft x_{(1)}, y_{(1)}, z_{(1)}) \chi(h_{(2)}, x_{(2)}, y_{(2)} z_{(2)}) = \chi(h_{(1)}, x_{(1)}, y_{(1)}) \chi(h_{(2)}, x_{(2)} y_{(2)}, z_{(2)})$$

$$\chi(h, 1, x) = \chi(h, x, 1) = \varepsilon(h)\varepsilon(x)$$

(iii) les deux adH étant compatibles dans le sens

$$h \triangleright 1 = \varepsilon(h), 1 \quad 1 \triangleleft x = \varepsilon(x), \quad \chi(1, x, y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$$

et

(A) $\chi(h_{(1)}, x_{(1)}, y_{(1)}) h_{(2)} \triangleright (x_{(2)} y_{(2)}) = h_{(1)} \triangleright x_{(1)} \quad (h_{(2)} \triangleleft x_{(2)}) \triangleright y$

(B) $(hg) \triangleleft x = h \triangleleft (g_{(1)} \triangleright x_{(1)}) \quad g_{(2)} \triangleleft x_{(2)}$

(C) $h_{(2)} \triangleright x_{(2)} \otimes h_{(1)} \triangleleft x_{(1)} = h_{(1)} \triangleright x_{(1)} \otimes h_{(2)} \triangleleft x_{(2)}$

(D) $\chi(hg, x, y) = \chi(h_{(1)}, g_{(1)} \triangleright x_{(1)}, (g_{(2)} \triangleleft x_{(2)}) \triangleright y_{(1)}) \chi(g_{(3)}, x_{(3)}, y_{(2)})$

Remarque Il résulte de ces données l'existence d'un certain type de double produit croisé cocyclique de la forme $X \underset{\chi}{\triangleright\!\triangleleft} H$, quoique nous n'ayons pas exactement identifié sa structure. Toutefois, à partir de (ii), il est clair qu'il devrait s'agîr d'une forme de quasi-algèbre de Hopf duale, où le produit serait associatif sous conjugaison par une fonctionnelle Φ constuite à partir de χ.

Demonstration Pour réaliser la semidualisation, l'on suppose que A est de dimension finie et nous posons $X = A^*$. Ensuite, nous allons voir que les conditions résutantes conservent leur signification pour tout X. D'abord le fait que A soit un H-module algébrique à droite implique que X est un H-module cogébrique à gauche, en accord avec

$$\langle a \triangleleft h, x\rangle = \langle a, h \triangleright x\rangle \quad \forall x \in A^*$$

Ensuite, nous définissons χ sur H $\otimes$ X $\otimes$ X

$$\chi(h,x,y) = \langle x \otimes y, \psi(h)\rangle$$

et vérifions que H devient un X-module cogébrique à droite, comme énoncé. Ici, l'ction de X est donnée par la coaction de A selon :

$$h \triangleleft x = \left\langle x, h^{(\bar{1})}\right\rangle h^{(\bar{2})} \quad \forall h \in H$$

Par exemple, évaluant (3.16) avec x $\otimes$ y , l'on a de manière équivalente :

$$\left\langle x \otimes y, (h_{(1)}{}^{(\bar{1})} \otimes h_{(1)}{}^{(\bar{2})\,(\bar{1})})\psi(h_{(2)})\right\rangle h_{(1)}{}^{(\bar{2})\,(\bar{2})}$$
$$= \left\langle x \otimes y\ ,\quad \psi\ (h_{(1)})(\ h_{(2)}{}^{(\bar{1})}{}_{(1)} \otimes h_{(2)}{}^{(\bar{2})}{}_{(2)})\right\rangle h_{(2)}{}^{(\bar{2})}$$

ou bien, en utilisant les définitions données et les axiomes de dualité d'algèbres de Hopf :

$$(h_{(1)} \triangleleft\ x_{(1)}) \triangleleft y_{(1)}\chi(h_{(2)}, x_{(2)}, y_{(2)}) = \chi(h_{(1)}, x_{(1)}, y_{(1)})\ \ h_{(2)} \triangleleft (x_{(2)}y_{(2)})$$

comme énoncé dans la condition (ii). Similairement, (3.17) devient immédiatement telle que l'action de X respecte le coproduit de H comme énoncé, tandisque (3.18) devient la condition selon laquelle χ devrait être un cocycle, comme énoncé.

Finalement, l'on semidualise les conditions de compatibilité (A) et (D) . Concernant (B) et (C), ils sont dualisés selon les formules [382] pour les produits bicroisés usuels (le cocycle n'intervient pas). Pour (A), nous évaluons avec x $\otimes$ y pour obtenir

$$\chi(h_{(1)}, x_{(1)}, y_{(1)})\langle x_{(2)}y_{(2)}, a \triangleleft h_{(2)}\rangle = \langle x_{(1)},\ a_{(1)} \triangleleft h_{(1)}\rangle\langle y,\ a_{(2)} \triangleleft (h_{(2)} \triangleleft x_{(2)})\rangle$$

ou, en utilisant les définitions ci-dessus :

$$\chi(h_{(1)}, x_{(1)}, y_{(1)})\langle h_{(2)} \triangleright (x_{(2)}y_{(2)}),\ a\rangle = \langle h_{(1)} \triangleright x_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle (h_{(2)} \triangleleft x_{(2)}) \triangleright y,\ a_{(2)}\rangle$$

$$= \langle (h_{(1)} \triangleright x_{(1)})(h_{(2)} \triangleleft x_{(2)}) \triangleright y,\ a\rangle$$

pour tout a $\in$ A, qui est la condition (A)- énéoncée. De même pour (D). $\square$

A présent, la signification de la semidualisation est, selon nous, la suivante. Tout d'abord, nous considérons le produit miroir standard M(H) = $H^{op} \triangleright\!\blacktriangleleft H$ (sans cocycle). Alors :

Proposition 3.3.8 $U_{q^{-1}}(su(2)) \otimes Uq(su(2)) \cong Uq(su(2))^{op} \triangleright\!\blacktriangleleft Uq(su2)$ *est relié par semidualisation à* $Uq(su(2)) \triangleright\!\triangleleft Uq(su(2))^{op*} \cong D(Uq(su(2)))$. *Alors, la semidualisation connecte donc une version de* Uq(so(4)) *à une version de* Uq(so(3, 1)).

Démonstration Il s'agit d'un exemple de l'application originale du produit miroir M(H) dans [360] [382] afin de comprendre le double de Drinfeld. A partir des résultats de la section (3.2), nous savons que D(Uq(su(2))) est (lorsque q $\neq$ 1) isomorphe à Uq(so(3, 1)). Par ailleurs, $Uq(su(2))^{op} \cong U_{q^{-1}}(su(2))$ et donc $M(Uq(su(2)) \cong U_{q^{-1}}(su(2)) \otimes Uq(su(2))$, qui est une version de $Uq(so(4)) = U_q(su(2)) \otimes Uq(su(2))$ d'un autre type. $\square$

Cependant, le produit bicroisé $U_{q^{-1}}(su(2)) \otimes Uq(su(2))$ ne représente pas exactement la version standard de Uq(so(4)). Pour avoir la version canonique, nous devons utiliser notre construction ci-dessus du cocycle $M_\chi(H)$. Alors nous avons la semidualisation :

$$Uq(su(2)) \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} Uq(su(2)) \cong Uq(so(4)) \xleftrightarrow{\textit{semidualisation}} Uq(su(2))^* \underset{\chi}{\triangleright\!\triangleleft} Uq(su(2)) \sim U_q(so(3,1)) \quad (3.28)$$

où le membre de droite de (3.28) est un type de double produit croisé cocyclique représentant une version de Uq(so(3, 1)). De ce point de vue, la transition de q-Euclidien à q-Lorentz correspond à une transformation de semidualisation et en même temps induit l'introduction d'un cocycle. De la même façon, le produit bicroisé cocyclique

$$Uq(so(4))^{op} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} Uq(so(3,1))$$

construit ci-dessus définit implicitement une sorte de double produit croisé cocyclique

$$Uq(so(4))^{op} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} Uq(so(3,1)) \cong Uq(so(4)) \xleftrightarrow{\textit{semidualisation}} SOq(3,1) \underset{\chi}{\triangleright\!\triangleleft} Uq(so(4))^{op} \quad (3.29)$$

où χ est construit à partir de ψ qui, à son tour, est construit à partir de la structure quasitriangulaire $\mathcal{R}$ de Uq(su(2)).

Naturellement, l'on peut également semidualiser à partir des autres facteurs pour construire certains types de quasi-algèbres de Hopf $A \overset{\chi}{\blacktriangleright\!\blacktriangleleft} H^*$, associé à $H \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} A$. Cette fois, la coaction cocyclique de A sur H est dualisée en une coaction cocyclique de A sur H^* tandisque l'action de H sur A est remplacée par une coaction de H^* sur A. La construction devient alors générale, de la forme $A \overset{\chi}{\blacktriangleright\!\blacktriangleleft} Y$ (où Y joue le rôle de H^*). L'on obtient alors des exemples du type $Uq(su(2)) \overset{\chi}{\blacktriangleright\!\blacktriangleleft} Uq(su(2))^*$, $Uq(so(3,1)) \overset{\chi}{\blacktriangleright\!\blacktriangleleft} SOq(4)^{cop}$ etc., par semidualisation de cette forme. Ceux-ci sont duaux des constructions précédentes.

Après notre étude des structures des groupes quantiques Uq(so(4)) et Uq(so(3, 1)), nous considérons à présent la transition de signature entre le domaine Lorentzien et le domaine Euclidien du point de vue de la "q-rotation de Wick" appliquée à la métrique de l'espace-temps [377]. Nous étudions dans la suite les espaces $\mathbb{R}_q^{3,1}$ et $\mathbb{R}_q^4$ sur lesquels agissent $U_q(so(3,1))$ et $U_q(so(4))$. A partir des travaux de Drinfeld sur le twist des algèbres de Hopf [190] évoqués ci-dessus, un 2-cocycle appliqué sur un groupe quantique permet de déformer celui-ci par "twisting". Or, le même cocycle peut être utilisé pour twister l'équivalent de la structure sur laquelle agît le groupe. Cette propriété permet donc d'envisager la déformation de l'espace q-Minkowski en espace q-Euclidien et autorise le changement de signature, par q- rotation de Wick [377], de la métrique associée. Il convient également à ce stade de travailler avec les groupes quantiques de matrices SUq(2) dual de Uq(su(2)) etc..

3.4 DEFORMATION DE LA SIGNATURE DE LA METRIQUE DE L'ESPACE-TEMPS PAR TWISTING

Appliquons à présent les résultats généraux de Majid [377] à la déformation (4, 0) $\leftrightarrow$ (3,1). Nous construisons une liaison entre l' algèbre $\overline{A}(R)$ correspondant à la bigèbre des matrices q- Euclidiennes et $A(R)$ correspondant à la

bigèbre des matrices quantiques usuelles. R étant un élément de matrice $M_n \otimes M_n$, rappelons que A(R) est la bigèbre "FRT" usuelle [382]:

Proposition 3.4.1 (Majid) *Le système covariant* $\{SU_q(2) \otimes SU_q(2)\ ,\ \overline{M_q(2)}\}$ *résulte de la déformation par twisting du système covariant* $\{SU_q(2)^{op} \otimes SU_q(2)\ ,\ M_q(2)\}$ *par le 2 - cocycle donné par*

$\chi\ (\ (a \otimes b) \otimes (c \otimes d) = \mathcal{R}^{-1}\ (a \otimes c)\epsilon\ (b\ )\ \epsilon\ (d).$

Ici, $\mathbb{R}^4_q = \overline{M_q(2)}$ *représente l'espace-temps q-Euclidien, décrit par l'algèbre des matrices (2 x 2) quantiques.*

Démonstration Nous rappelons ici les coordonnées. Soit R la R-matrice de sl_2. La bigèbre associée, notée $M_q(2)$, a la forme, à partir de $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$ab = q^{-1}\ ba\ ,\ \ ac = q^{-1}\ ca\ ,\ \ bd = q^{-1}\ db,\ \ cd = q^{-1}\ dc,\ \ bc = cb\ ,\ \ ad - da = (q^{-1} - q)\ bc.$

La relation additionnelle $ad - q^{-1}\ bc = 1$ donne le groupe quantiques de coordonnées SUq(2), dual de Uq(su(2)). La structure quasitriangulaire $\mathcal{R}$ ci-dessous définit la structure coquasitriangulaire :

$\mathcal{R}\ :\ SUq(2) \otimes SUq(2) \rightarrow \mathbb{C}$

Construisons à présent la déformation de l'algèbre ci-dessus par le twist de Drinfeld. La structure quasitriangulaire définit un cocycle $\chi = \mathcal{R}^{-1}$ sur $SUq(2)^{op}$. D'après les résultats de Drinfeld sous leur forme duale [382], la déformation par le 2-cocycle χ donne $SU_q(2)_\chi^{op} \rightarrow SU_q(2)$. Appliquons cette déformation au premier facteur de $SU_q(2)^{op} \otimes SU_q(2)$:

$$\left(SU_q(2)^{op} \otimes SU_q\ (2)\right)_\chi = SU_q(2)\ \otimes SU_q(2) = SOq(4) \qquad (3.30)$$

L'on doit également déformer toute algèbre sur laquelle agît le nouveau groupe quantique. Mq(2) est donc twisté en $\overline{M_q(2)}$ D'où le nouveau coproduit, avant identification des matrices de générateurs t aux générateurs "twistés" $(x^i{}_j)$:

$$t^i{}_j.\ \chi\ t^k{}_l = t^a{}_b\ t^c{}_d \chi^{-1}\ (\ (S\ t^i{}_a \otimes t^b{}_j) \otimes (S\ t^k{}_c \otimes t^d{}_l\ )\ ) = \lambda R^i{}_a{}^k{}_b\ t^a{}_j\ t^b{}_l \qquad (3.31)$$

si t = x , les relations entre les deux classes de générateurs deviennent $x_1 x_2 = \lambda\ R\ t_1 t_2$, où nous obtenons les relations correspondant à la matrice $\overline{M_q(2)}$. Il existe aussi un coproduit Δ additionnel tressé sur Mq(2), également twisté par χ selon $\Delta_\chi c = c_{(1)}^{(\bar{1})} \otimes c_{(2)}^{(\bar{1})} \chi\ (c_{(1)}^{(\bar{2})} c_{(2)}^{(\bar{2})})$. Notons qu'au sens strict, nous devrions effectuer une extension centrale des groupes quantiques coagissant pour que Mq(2), $\overline{M_q(2)}$ soient strictement des groupes tressés dans leur catégorie de comodule. Ceci explique la présence du facteur λ dans l'équation ci-dessus [377] . □

L'algèbre explicite $\mathbb{R}^4_q \equiv \overline{Mq(2)}$ que nous obtenons a pour générateur $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec les relations

$$ba = qab,\quad ca = q^{-1}ac,\quad da = ad,\quad db = q^{-1}bd \qquad dc = qcd,$$

$$bc = cb + (q - q^{-1})ad$$

très semblables (en fait isomorphe sous permutation $a \leftrightarrow c,\ b \leftrightarrow d$) à Mq(2) lui-même. Nous précisons maintenant la $*$ - structures Euclidienne.

Corollaire 3.4.2 *La ★- structure de* $\mathbb{R}^4_q \equiv \overline{\mathrm{Mq}(2)}$ *est* $\begin{pmatrix} a^\star & b^\star \\ c^\star & d^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -q^{-1}c \\ -qb & a \end{pmatrix}$ *et coïncide avec celle de la* $-*$ *- structure unitaire de Mq(2) sur l'identification des deux espaces vectoriels.*

Démonstration Comme nous l'avons vu dans la démonstration ci-dessus, $\overline{\mathrm{Mq}(2)}$ est identifié avec l'espace vectoriel de Mq(2) au niveau des générateurs x = t. Mais Mq(2) a une $*$ - structure unitaire correspondant à SUq(2) et nous l'adoptons pour ★ sur $\overline{\mathrm{Mq}(2)}$. En accord avec la théorie générale [382], ceci engendre un ★ - groupe de tresse. De manière équivalente, il existe une certaine $*$ - structure sur Mq(2) de type unitaire (non pas la forme usuelle mais équivalente sur la limite q → 1) telle que le twisting de (★ , Mq(2)) vu comme un groupe ★ - tressé sous coaddition tressée par le cocycle (comme pour la proposition (3.4.1.)) donne la ★ - structure énoncée. Une troisième façon est de noter l'isomorphisme $\overline{\mathrm{Mq}(2)} \cong$ Mq(2) en tant qu'algèbres. Ceci devient un isomorphisme de $*$ - algèbres si l'on équippe Mq(2) avec la $*$ - structure

$$\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -qd & c \\ b & -q^{-1}a \end{pmatrix}$$

qui, au signe - près est une autre q-déformation de la $*$ - structure de Mq(2) de type unitaire. □

Etant donnée cette ★ - structure, les coordonnées naturelles de l'espace-temps "hermitien" sont :

$$t = \frac{a-d}{2i} \quad , \quad z = \frac{a+d}{2i} \quad , \quad x = \frac{c-qb}{2} \quad , \quad y = \frac{c+qb}{2i} \tag{3.32}$$

et l'élément du "q-déterminant" de $\overline{\mathrm{Mq}(2)}$ est :

$$ad - qcb = \left(\frac{1+q}{2}\right)\ (t^2 + z^2) + (x^2 + y^2) \tag{3.33}$$

qui exhibe la signature q-Euclidienne.

Enusite, d'un point de vue dual de Uq(su(2)) développé au § 3.2, l'on peut poser l'existence d'un cocycle qui twiste SUq(2) ⊗ SUq(2) en SUq(2) ▷◁ SUq(2). Ce double produit croisé est dual de Uq(so(3,1)) = Uq(su(2)) ▶◀ Uq(su(2)) décrit au § 3.2. Sous semidualisation, celui-ci correspond au produit bicroisé Uq(su(2)) ▷◀ SUq(2).

Proposition 3.4.2 (Majid) *Le système covariant* $\{\mathrm{SU_q}(2) \otimes \mathrm{SU_q}(2)\ ,\ \overline{\mathrm{M_q}(2)}\}$ *est twisté sous l' action du 2 - cocycle* χ *(((a ⊗ b) (c ⊗ d)) = ε (a)* $\mathcal{R}^{-1}$ *(b ⊗ c) ε(d) en un nouveau système covariant*

$$\{\ \mathrm{SU_q}(2)\ \triangleright\!\triangleleft\ \mathrm{SU_q}(2)\ ,\ \mathrm{BM_q}(2)\}$$

où $\mathbb{R}^{3,\,1}_q = \mathrm{BM_q}(2)$ *représente l' espace q - Minkowskien, algèbre de coordonnées des matrices tressées 2 x 2.*

Démonstration Pour Uq(so(3, 1)) , le cocycle

$$\chi\ ((\ (a \otimes b)\ (c \otimes d)) = \varepsilon\ (a)\ \mathcal{R}^{-1}\ (b \otimes c)\ \varepsilon(d) \tag{3.34}$$

est dual de $\mathcal{R}^{-1}_{23}$ sur l' adH quasitriangulaire duale, de sorte que l'application du twist dual donne :

$[SOq(4)]_\chi = [SU_q(2) \otimes SU_q(2)]_\chi = SU_q(2) \triangleright\!\triangleleft SU_q(2) = SOq(3,1)$

où $SU_q(2) \triangleright\!\triangleleft SU_q(2)$ de [359] est muni du produit

$$a._\chi b = \chi(a_{(1)} \otimes b_{(1)})\, a_{(2)}\, b_{(2)}\, \chi^{-1}(a_{(3)} \otimes b_{(3)}) \tag{3.35}$$

De la même façon, considérons le dual du twist de $\overline{M_q(2)}$ en tant que groupe tressé, soit :

$$x^i{}_j \cdot_\chi x^k{}_l = x^a{}_b\, x^c{}_d\, \chi^{-1}(St^i{}_a \otimes t^b{}_j \otimes st^k{}_c \otimes t^a{}_l)$$

$$= x^i{}_a x^b{}_l\, \mathcal{R}(t^a{}_j \otimes st^k{}_b)$$

Si x = u, les relations entre les deux ensembles de générateurs deviennent :

$u_1\, R\, u_2 = x_1\, x_2$

En termes de Mq(2), la modification dite "transmutation" du produit s' écrit :

$u_1\, R\, u_2 = R\, t_1\, t_2$. □

En tant qu'algèbre, $\mathbb{R}_q^{3,1} \equiv$ BMq(2) est explicitement donnée par $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec les relations :

$$ba = q^2 ab, \quad ca = q^{-2} ac, \quad da = ad, \quad bc = cb + (1-q^{-2})a(d-a)$$

$$db = bd + (1-q^{-2})ab, \quad cd = dc + (1-q^{-2})ca \tag{3.36}$$

Cependant, les ★ - structures de $\mathbb{R}_q^{3,1}$ et de $\mathbb{R}_q^4$ ne sont pas reliées par ce twisting. Au lieu de celà, nous avons :

Proposition 3.4.3 *La ★- structure de $\mathbb{R}_q^{3,1}$ = BMq(2) est hermitienne au sens $\begin{pmatrix} a^\star & b^\star \\ c^\star & d^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et correspond, pour $q \neq 1$, à celle de Uq(su(2)) en tant que $*$ - algèbre.*

Démonstration Ici, BMq(2) a une description en tant que matrices hermitiennes tressées. Son quotient $\det_q \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 1$ est l'hyperboloîde unité dans l'espace q-Minkowskien et est le groupe ★ - tressé BSUq(2), version groupe tressé de SUq(2) (donnée par transmutation de SUq(2)). En tant que groupe ★ - tressé, pour $q \neq 1$, celui-ci est isomorphe à BUq(su(2)), qui est la version groupe tressé de l'algèbre q-enveloppante Uq(su(2)). En tant que ★ - algèbre, il est isomorphe à Uq(su(2)), soit, explicitement :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^H & q^{-\frac{1}{2}}(q-q^{-1})q^{\frac{H}{2}} X_- \\ q^{-\frac{1}{2}}(q-q^{-1})X_+ q^{\frac{H}{2}} & q^{-H} + q^{-1}(q-q^{-1})^2 X_+ X_- \end{pmatrix}.$$

□

Avec cette ★ - structure, les coordonnées naturelle de l'espace-temps "hermitien", sont :

$$t = \frac{qd + q^{-1}a}{2} \quad , \quad x = \frac{b+c}{2} \quad , \quad y = \frac{b-c}{2i} \quad , \quad z = \frac{d-a}{2} \tag{3.37}$$

et l'élément du "q-déterminant" est :

$$ad - q^2 cb = \frac{4q^2}{(q^2+1)^2} t^2 - q^2 x^2 - q^2 y^2 - \frac{2(q^4+1)q^2}{(q^2+1)^2} z^2 + 2q\left(\frac{q^2-1}{q^2+1}\right)^2 tz \tag{3.38}$$

qui exhibe la signature q-Lorentzienne.

A la lumière de ces constructions, nous arrivons maintenant à l'importante observation qui suit :

Corollaire 3.4.4 *Pour q≠ 1, la transition de la métrique q-Euclidienne à la métrique q-Lorentzienne au rayon unité est une dualité de ∗ -algèbre de Hopf Uq(su(2)) ↔ SUq(2).*

Démonstration Nous avons vu ci-dessus que la ★ - structure de $\mathbb{R}^4_q = \overline{\mathrm{Mq}(2)}$ est donnée par la ∗ - structure unitaire de Mq(2) qui, au rayon ρ = 1, donne le ∗ - groupe quantique SUq(2), duale de celle associée à la ∗ - algèbre de Hopf Uq(su(2)). Mais Uq(su(2)) ≅ B(Uq(su(2))) en tant que ∗ - algèbre sous transmutation [382]. Cette transformation, combinée avec l'auto-dualité de ces groupes de tresse donne l'isomorphisme de ∗ - algèbre Uq(su(2)) ≅ BSUq(2) comme expliqué ci-dessus. Nous proposons alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} U_q(su(2)) & \xleftrightarrow{\text{Dualité de } * \text{ - algèbres de Hopf}} & SU_q(2) \sim \mathbb{R}^4_q / \rho = 1 \\ \textbf{Transmutation} \updownarrow \approx & & \updownarrow \textbf{q - changement de signature} \\ & \approx & \\ BU_q(su(2)) & \xleftrightarrow[\text{Autodualité de groupes } \bigstar\text{-tressés}]{} & BSU_q(2) = \mathbb{R}^{3,1}_q / \rho = 1 \end{array} \tag{3.39}$$

complétant la démonstration selon laquelle le changement de signature est équivalent à une dualité de ∗ - algèbre de Hopf. □

En résumé, nous avons montré ci-dessus que dans le domaine de la q-déformation, les structures $\mathbb{R}^4_q$ et $\mathbb{R}^{3,1}_q$ naturelles, covariantes sous Uq(so(4)) et Uq(so(3, 1)) sont reliées comme suit. Pour simplier, nous considérons l'hyperboloïde et la sphère de "rayon" ρ = 1, mais en essence, la même idée s'étend à toute la structure de l'espace-temps.

Les résultats ci-dessus nous donnent certaines indications sur l'origine algébrique de la fluctuation de signature à l'échelle de Planck, considérée comme transformation de dualité. Une remarque importante est que certains des isomorphismes ci-dessus sont valides seulement lorsque $q \neq 1$, i.e. en théorie non classique. Notons également que la dualité d'algèbres de Hopf au niveau semi-classique est une dualité de bigèbres de Lie et a été comprise physiquement comme une T-dualité non abélienne pour des modèles σ sur G, G* [308], de sorte que la dualité mise en évidence ici est reliée à d'autres types de dualités en physique.

3.5 UNIFICATION DES Q-GROUPES DE POINCARE EUCLIDIEN ET LORENTZIEN

3.5.1 q-Groupes de Poincaré

Dans la section 3.4, nous avons décrit la structure du q-espace-temps sous la forme :

$$\mathbb{R}_q^4 = \overline{M_q(2)}\ , \qquad \mathbb{R}_q^{3,1} = BM_q(2)$$

en tant que systèmes covariants sous les coactions de $\widetilde{SOq(4)}$ et $\widetilde{SOq(3,1)}$ respectivement. Nous notons à présent par certaines extensions centrales requises pour conserver aux structures utilisées la pleine covariance en tant que groupes tressés additifs. Similairement, ils sont covariants sous les actions de $\widetilde{U_q(so\,(4))}$ et $\widetilde{U_q(so\,(3\,,\,1))}$. Pour compléter, nous expliquons comment les $\star$ - structures entre le q-espaces au § 3.4 et les q-groupes au § 3.2 relient les différentes structures de q-Poincaré.

Les dernières sont données par un produit semi-direct de groupe $\star$ - tressé et des $*$ - groupes quantiques ci-dessus. L'algèbre de produit croisé est donnée par l'action et il existe une coaction induite comme composante de l'opération de bosonisation que nous utilisons pour le coproduit croisé. Dans les cas Euclidien et Minkowskien, l'on a [382] :

$$U_q(\mathrm{iso}\,(4)) = \mathbb{R}_q^4 \triangleright\!\!\overline{\triangleleft}\ \widetilde{U_q(so\,(4))} = \overline{M_q(2)} \triangleright\!\!\overline{\triangleleft}\ \widetilde{U_q(su(2))} \otimes U_q(su(2)) \qquad (3.40)$$

tandisque le groupe inhomogène Lorentzien prend la forme :

$$U_q(\mathrm{iso}\,(3,1)) = \mathbb{R}_q^{3,1} \triangleright\!\!\overline{\triangleleft}\ \widetilde{U_q(so\,(3\,,\,1))} = BM_q(2) \triangleright\!\!\overline{\triangleleft}\ \widetilde{U_q(su(2))} \blacktriangleright\!\!\blacktriangleleft\ U_q(su(2)) \qquad (3.41)$$

comme produits croisés et coproduits croisés du même côté. Le symbole $\triangleright\!\!\overline{\triangleleft}$ que nous proposons correspond à cette double structure de produit croisé comme algèbre et comme cogèbre.

Il est connu que de tels objets ne sont pas quasitriangulaire et ne sont pas des $*$ - algèbres de Hopf mais présentent une structure intermédiaire, appelée "quasi - $*$ - algèbre de Hopf" [381]. Rappelons qu'une quasi - $*$ - algèbre de Hopf est une adH munie d'une $*$ - structure telle que

$$(* \otimes *) \circ \Delta \circ * = \mathcal{R}^{-1}(\tau \circ \Delta)\mathcal{R}, \qquad \varepsilon\overline{(\ )} = \varepsilon \circ *$$

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}\ , \quad (\Delta \otimes \mathrm{id})\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}\ , \quad \mathcal{R}^{* \otimes *} = \mathcal{R}_{21}$$

Commençons par la quasi - $*$ - adH Euclidienne.

Proposition 3.5.2 (Majid) *Le groupe quantique inhomogène* $\overline{M_q 2} \triangleright\!\!\triangleleft U_q(su(2)) \overset{\sim}{\otimes} U_q(su(2))$ *devient une quasi - $*$ - algèbre de Hopf du type q-Poincaré Euclidien.*

Démonstration Nous dénotons les deux générateurs de Uq(su(2) par $l^{\pm}$ et $m^{\pm}$, avec les $*$ - structures :

$$I^{\pm i}{}_j{}^* = S^{-1} I^{\mp j}{}_i \quad , \quad m^{\pm i}{}_j{}^* = S m^{\mp j}{}_i$$

tandisque la ★ - structure sur $\overline{M_q(2)}$, par construction unitaire, est de la forme:

$$p^{i\star}_j = \varepsilon_{ai} p^a{}_b \varepsilon^{bj}$$

où ε_{ij} est le tenseur invariant apparaissant dans le q-déterminant. L'on a également $\xi^* = \xi$ pour l'extension centrale.

L'action a pour forme :

$$l_1^+ \triangleright p_2 = \lambda^{-\frac{1}{2}} R_{21}^{-1} p_2 \quad , \quad l_1^- \triangleright p_2 = \lambda^{\frac{1}{2}} R p_2 \quad , \quad m_1^+ \triangleright p_2 = p_2 \lambda^{\frac{1}{2}} R_{21} \quad , \quad m_1^- \triangleright p_2 = p_2 \lambda^{-\frac{1}{2}} R^{-1}$$

L'on vérifie alors que le groupe quantique est quasitriangulaire réel dans la mesure où chacun des facteurs $U_q(su(2))$ est réel. Comme la ★ - structure sur $\overline{M_q(2)}$ est par construction unitaire, l'action doit également être unitaire dans le cas q- Euclidien et obéit donc à la contrainte $(h \triangleright b)^\star = (S\, h)^* \triangleright b^\star$. Pour le reste de la quasi - $*$ - structure, l'on se reporte à [381]. □

L'on utilise une construction du même type pour montrer que $U_q(so\ (3,\ 1))$ est également munie d' une structure de quasi - $*$ - algèbre de Hopf.

Proposition 3.5.3 (Majid) $BM_q(2) \triangleright\!\!\triangleleft U_q(su(2)) \overset{\sim}{\blacktriangleright\!\!\blacktriangleleft}_{\mathcal{R}} U_q(su(2))$ *devient une quasi - $*$ - algèbre de Hopf du type q-Poincaré Minkowskien.*

Démonstration Similairement, nous avons:

$$I^{\pm i}{}_j{}^* = S m^{\mp j}{}_i \quad , \quad m^{\pm i}{}_j{}^* = S l^{\mp j}{}_i$$

et

$$p^{i\star}_j = p^j{}_i \quad , \quad \xi^* = \xi$$

de sorte que $I^{\pm i}{}_j{}^* = U\ (S \circ m^{\mp j}{}_i)\ U^{-1}$ tandisque S_o est l'antipode de Uq(su(2)). Il s'agît également de $S m^{\mp j}{}_i$ quand S est l'antipode de $U_q(su(2)) \overset{\sim}{\blacktriangleright\!\!\blacktriangleleft} U_q(su(2))$. L'on vérifie de même que $(h \triangleright b)^\star = (S\, h)^* \triangleright b^\star$ pour une action similaire au cas ci-dessus. □

Finallement, dans la mesure où $\mathbb{R}_q^{3,\ 1}$ résulte du twist de $\mathbb{R}_q^4$ et que Uq(so(3, 1)) = Uq(su(2)) ▶◀ Uq(su(2)) est le twist de Uq(so(4)) = Uq(su(2)) ⊗ Uq(su(2)), l'on peut s'attendre à ce que les structures de q-Poincaré soient également

reliées par twisting. Les deux groupes de Poincaré Lorentzien et Euclidien sont en effet reliés par twisting par χ [377] en tant qu'algèbres de Hopf :

$$\mathbb{R}_q^{3,1} >\!\overline{\triangleleft}\ U_q(\widetilde{so}(3,1)) = \left(\mathbb{R}_q^4\right)_\chi >\!\overline{\triangleleft}\ \left(U_q(\widetilde{so}(4))\right)_\chi = \left(\mathbb{R}_q^4 >\!\overline{\triangleleft}\ U_q(\widetilde{so}(4))\right)_\chi$$

avec deux quasi - $*$ - structures différentes, où χ est vu comme cocycle sur $\mathbb{R}_q^4 >\!\overline{\triangleleft}\ U_q(\widetilde{so}(4))$. Ceci fait partie d'un théorème général selon lequel

$$B_\chi >\!\overline{\triangleleft}\ H_\chi = (B >\!\overline{\triangleleft}\ H)_\chi \tag{3.42}$$

concernant la bosonisation d'un groupe tressé quelconque, B étant dans la catégorie de H-module [382].

3.5.4 Groupe de Poincaré cocycliques

Notre idée dans cette section est à présent de tenter la construction d'objets hybrides, d'un genre nouveau, tels que

$$\mathbb{R}_q^4\ {}^{\psi}>\!\overline{\triangleleft}\ U_q(\widetilde{so}(3,1)) \tag{3.43}$$

Ceci est suggéré par notre produit bicroisé cocyclique hybride de la section 3.2. Plus précisément, dans [382], B_χ twisté a sa structure de produit et celle de coproduit modifiées. Ici, nous commençons avec

$$B >\!\overline{\triangleleft}\ H$$

mais ne soumettons à un twist que la partie H, et seulement la composante algébrique (non la cogèbre) de B. Ainsi, nous supposons que B est un groupe tressé dans la catégorie des H-modules, où H est quasitriangulaire. Nous assumons l'exsitence d'un cocycle $\chi \in H \otimes H$. Il est alors clair que B n'est plus un H_χ - module algébrique mais devient $\tilde{B}$ muni du produit $b \tilde{\bullet} c = \bullet \circ \chi^{-1} \triangleright (b \otimes c)$, où $\bullet$ est le produit de B [382]. Pour la cogèbre, nous laissons le coproduit non twisté et trouvons :

Proposition 3.5.5 *Si B est un H-comodule cogébrique, alors B est un H_χ - comodule cogébrique ψ - cocyclique par* $\psi(b) = \varepsilon(b)\chi^{-1}$.

Démonstration La condition de ψ-comodule (comme dans § 3.3) devient :

$$(id \otimes ß)\, ß(b)\chi_{12}^{-1} = (\Delta \otimes id)\, ß(b)\chi_{12}^{-1} = \chi_{12}^{-1}(\Delta_\chi \otimes id)\, ß(b)$$

comme requis, et

$$\chi_{23}^{-1}(id \otimes \Delta_\chi)\chi^{-1} = ((id \otimes \Delta)\chi^{-1})\chi_{23}^{-1} = ((\Delta \otimes id)\chi^{-1})\chi_{12}^{-1} = \chi_{12}^{-1}(\Delta_\chi \otimes id)\chi^{-1}$$

L'on obtient de la sorte le coproduit croisé cocyclique $B\ {}^{\psi}>\!\blacktriangleleft H_\chi$:

$$\Delta b \otimes h = b_{(1)} \otimes b_{(2)}{}^{(\bar{1})} \chi^{-(1)} h_{(1)} \otimes b_{(2)}{}^{(\bar{2})} \otimes \chi^{-(2)} h_{(2)} \tag{3.44}$$

en insérant la forme de ψ dans la formule générale. □

A ce stade, nous n'allons pas plus loin car nous notons que

$$\Delta 1 \otimes 1 = \chi_{24}^{-1} \neq 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$$

de sorte que même si nous twistons le produit de B pour obtenir une algèbre associative $\tilde{B} >\!\triangleleft H_{\chi}$, nous n'obtiendrons pas une algèbre de Hopf par cette méthode. En revanche, il est probablement envisageable de trouver un certain type "d'algèbre de Hopf faible", du genre $\tilde{B}\ {}^{\psi}\!>\!\overline{\triangleleft} H_{\chi}$. Et si nous utilisons le produit original de B, alors une telle structure n'est pas associative et $B\ {}^{\psi}\!>\!\overline{\triangleleft} H_{\chi}$ devrait être une sorte d'algèbre de Hopf faible, non associative. Ceci représente une direction pour une future recherche, suggérée par nos idées ci-dessus.

L'on note également que les q-groupes conformes peuvent être construits de manière similaire par ces méthodes [385]:

$$Uq(so(5,1)) = \mathbb{R}_q^4 >\!\overline{\triangleleft}\, U_q(\widetilde{so\,(4)})\, \overline{\triangleright}\!< \mathbb{R}_q^4 \tag{3.45}$$

De même :

$$Uq(so(3,2)) = \mathbb{R}_q^{2,1} >\!\overline{\triangleleft}\, U_q(\widetilde{so\,(2,1)})\, \overline{\triangleright}\!< \mathbb{R}_q^{2,1} \tag{3.46}$$

en principe. De même, l'on peut s'attendre à des doubles bosonisations cocycliques donnant des versions hybrides telles que :

$$\mathbb{R}_q^{3,1}\ {}^{\psi}\!>\!\overline{\triangleleft}\ U_q(\widetilde{so\,(4)})\overline{\triangleright}\!<^{\psi} \mathbb{R}_q^{3,1} \tag{3.47}$$

$$\mathbb{R}_q^{4}\ {}^{\psi}\!>\!\overline{\triangleleft}\ U_q(\widetilde{so\,(3,1)})\overline{\triangleright}\!<^{\psi} \mathbb{R}_q^{4} \tag{3.48}$$

Finalement, l'on observe dans cette perspective qu'une limite de contraction de Uq(so(3, 2)) ci-dessus donne un produit bicroisé du type groupe quantique "κ-Poincaré" : $\mathbb{R}_{\kappa}^{3,1} \blacktriangleright\!\triangleleft$ U(so(3, 1))). Ici $\mathbb{R}_{\kappa}^{3,1}$ est une algèbre de Hopf commune générée par $P\mu$ avec les coproduits donnés par

$$\Delta P_0 = P_0 \otimes 1 + 1 \otimes P_0\,, \quad \Delta P_i = P_i \otimes 1 + e^{-\frac{P_0}{k}} \otimes P_i$$

En fait, il s'agît de l'algèbre de fonctions $\mathbb{C}[M]$, où M est un groupe de Lie soluble.

Proposition 3.5.6 (Majid et Ruegg) *Le groupe de κ-Poincaré est un produit bicroisé* $\mathbb{R}_{\kappa}^{3,1} \blacktriangleright\!\triangleleft$ U(so(3, 1)) *donné par l'action* α

$$P_0 \triangleleft M_i = 0\,, \quad P_i \triangleleft M_j = \varepsilon_{ijk} P_k\,, \quad [P_0, N_i] = -P_i$$

$$P_i \triangleleft N_j = -\delta_{ij}\left(\frac{\kappa}{2}(1 - e^{-\frac{2P_0}{\kappa}}) + \frac{1}{2\kappa}\vec{\mathcal{P}}^2\right) + \frac{1}{\kappa}\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j$$

et par la coaction ß

$$ß(M_i) = 1 \otimes M_i$$

$$ß(N_i) = e^{-\frac{P_0}{\kappa}} \otimes N_i + \frac{\varepsilon_{ijk}}{\kappa} P_j \otimes M_k .$$

$\mathbb{R}^{3,1}_{\kappa}$ a pour générateurs P_μ et U(so(3, 1)) pour générateurs M_i, N_i avec les relations :

$$[P_i, M_j] = \varepsilon_{ij\kappa}P_\kappa, \ [N_i, P_0] = P_i ,$$

$$[P_i, N_j] = -\delta_{ij}\left(\frac{\kappa}{2}(1 - e^{-\frac{2P_0}{\kappa}}) + \frac{1}{2\kappa}\vec{\mathcal{P}}^2 + \frac{1}{\kappa}\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j\right.$$

avec les coproduits appropriés.

Remarquons que l'algèbre $\mathbb{R}^{3,1}_{\kappa} = \mathbb{C}[M]$ représente le moment de l'algèbre de κ -Poincaré et donc sa duale devrait être l'algèbre de coordonnées dans l'espace des positions de l'espace-temps. Ce dual est donc l'algèbre enveloppante U(m) où m est l'algèbre de Lie du groupe non abélien M. De telles coordonnées non commutatives pour l'espace-temps ont conduit directement à des prédictions pour la physique à l'échelle de Planck à propos de la propagation de rayons gamma d"origine cosmologique. [16].

Nous conjecturons finalement que les structures Lorentzienne et Euclidienne sont reliées par un cocycle χ construit à partir de $\mathcal{R}$.

Conjecture 3.5.7 *Les structures Lorentzienne* $\mathbb{R}^{3,1}_{\kappa} \blacktriangleright\!\triangleleft$ U(so(3, 1)) *et Euclidienne* $\mathbb{R}^{4}_{\kappa} \blacktriangleright\!\triangleleft$ U(so(4)) *sont reliées par twisting par un cocycle χ construit à partir de $\mathcal{R}$ avant la contraction.*

Elts de preuve Il est connu que $\mathbb{R}^{3,1}_{\kappa} \blacktriangleright\!\triangleleft$ U(so(3, 1)) peut être obtenu isomorphiquement par contraction à partir de Uq (so(3, 2)) [54] [346] . De même, l'on peut s'attendre au produit bicroisé $\mathbb{R}^{4}_{\kappa} \blacktriangleright\!\triangleleft$ U(so(4)) par contraction à partir de Uq(so(4, 1)). Ces deux groupes quantiques devraient être reliés par twisting de la même manière que les groupes de q-Poincaré dans la section (3.3) par un cocycle construit à partir de $\mathcal{R}$. L' on peut alors s'attendre à obtenir χ à la limite de contraction. □

A la lumière du résultat ci-dessus, nous formulons également la conjecture suivante :

Conjecture 3.5.8 *L'on peut s'attendre à l'existence du groupe quantique résultant du produit bicroisé cocyclique hybride* $\mathbb{R}^{3,1}_{\kappa} \ {}_{\chi}\!\blacktriangleright\!\triangleleft^{\psi}$ *U(so(4)).*

Eléments de preuve Le groupe quantique hybride $\mathbb{R}^{3,1}_{\kappa} \ {}_{\chi}\!\blacktriangleright\!\triangleleft^{\psi}$ U(so(4)) devrait résulter de la limite de contraction de la version cocyclique hybride de Uq(so(3, 2)) conjecturé ci-dessus. Si nous réussissons à obtenir une

version hybride $\mathbb{R}_q^{2,1}\ {}^{\psi}\!>\overline{\triangleleft}\, U_q(\widetilde{so}\,(3))\,\overline{\triangleright}\!<^{\psi}\mathbb{R}_q^{2,1}$ de (3.46), alors sa contraction devrait donner un tel produit bicroisé cocyclique. □

Une autre question intéressante est celle de l'existence d'un groupe quantique q-déformé et κ-déformé, que l'on peut s'attendre être de la forme :

$$\mathbb{R}^{3,\,1}_{(q,\,\kappa)}\blacktriangleright\!\triangleleft\ Uq(so(3,1)) \tag{3.49}$$

ainsi que, peut-être, la version hybride

$$\mathbb{R}^{3,\,1}_{(q,\,\kappa)_\chi}\blacktriangleright\!\triangleleft^{\psi}\ Uq(so(4)) \quad , \qquad \mathbb{R}^{4}_{(q,\,\kappa)_\chi}\blacktriangleright\!\triangleleft^{\psi}\ Uq(so(3,1)) \tag{3.50}$$

Dans la mesure où κ dans la structure de κ-Poincaré de la section 3.4 est relié au paramètre de déformation q de Uq(so(3, 1)), il paraît probable que les deux approches puissent être combinées, i.e. q-Poincaré de la section 3.3 et κ-Poincaré de la section 3.4. Toutefois, nous ne disposons pas, pour l'instant, d'évidence particulière en faveur de telles structures.

Dans la dernière section, nous discutons quelques considérations spéculatives, en guise d'ouverture vers des voies de recherches à approfondir ultérieurement .

3.6 DISCUSSION : GRAVITE QUANTIQUE ET DEFORMATION DE SIGNATURE

A la différence des résultats précédents, les considérations ci-dessous ont un caractère largement spéculatif. Toutefois, elles ouvrent des perspectives intéressantes quant à certains aspects physiques de la théorie de déformation de la signature, en suggérant en particulier l'existence d'un lien entre twist de déformation et courbure.

3.6.1 Twist de Drinfeld, quantification de l'espace-temps et déformation de signature

Le twist de Drinfeld a un large spectre d'application : modulo le fait que nous avons un 2-cocycle, nous observons que le *même* twist de Drinfeld est impliqué (**i**) pour quantifier un espace commutatif ordinaire et le rendre non commutatif et (**ii**) pour déformer la structure d' algèbre de Hopf correspondant à la signature Euclidienne en une nouvelle structure associée à la signature Lorentzienne. Nous avons vu (**ii**) en détail dans les sections 3.2 et 3.3. Nous donnons à présent un exemple précis de (**i**), de la forme $\mathbb{C}[x]\ \blacktriangleright\!\triangleleft_{\hbar,\,B}\,\mathbb{C}[p]$.

Pour être complet, il faut observer qu'il existe un autre groupe quantique du type produit bicroisé, également relié à la physique à l'échelle de Planck et aux idées de T-dualité. Il s'agît du groupe quantique à l'échelle de Planck proposé dans [356].

Lemme 3.6.2 *L'algèbre de Hopf à l'échelle de Planck* $\mathbb{C}[x]\ \blacktriangleright\!\triangleleft_{\hbar,\,B}\,\mathbb{C}[p]$ *donnée par*

$$[x, p] = i\,\hbar\,(1 - e^{-xB})$$

$\Delta p = p \otimes e^{-xB} + 1 \otimes p$

$\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$

résulte du twisting par un cocycle χ de l' algèbre enveloppante classique U(b+).

Remarque Puisque le produit $\mathbb{C}[x] \blacktriangleright\!\triangleleft \mathbb{C}[p]$ est auto-dual [382], cela signifie qu'il représente également le cotwisting de l'anneau de coordonnées classique $\mathbb{C}[X]$ par un cocyle dual χ, où $X = \mathbb{R} \triangleright\!\!< \mathbb{R}$ a pour algèbre de Lie b+. Alors, ce cocycle dual a également un effet sur la quantification de cet espace.

Démonstration Comme expliqué dans [356], la limite $\hbar \to 0$ envoie $\mathbb{C}[x] \blacktriangleright\!\triangleleft \mathbb{C}[p]$ dans $\mathbb{C}[X]$, où

$X = \{(s, u)\}$, $(s, u)(\sigma, \nu) = (s + \sigma, u e^{-B\sigma} + \nu)$

et p (s, u) = u et x (s, u) = s les fonctions de coordonnées sur X. Cette algèbre de fonctions est commutative, les coproduits étant déterminés par :

$(\Delta x)((s, u)(\sigma, \nu)) = x(s, u)(\sigma, \nu) = s + \sigma = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)((s, u)(\sigma, \nu))$

$(\Delta p)((s, u)(\sigma, \nu)) = p((s, u)(\sigma, \nu)) = u e^{-B\sigma} + \nu = (p \otimes e^{-Bx} + 1 \otimes p)((s, u)(\sigma, \nu))$ (3.51)

les relations (3.51) engendrent le modèle $\mathbb{C}[X]$ des fonctions sur X, $\mathbb{C}[X]$ représentant la limite classique de $\mathbb{C}[x] \blacktriangleright\!\triangleleft \mathbb{C}[p]$. Le groupe $X = \mathbb{R} \triangleright\!\!< \mathbb{R}$ est alors l'espace des phases du système. D'autre part, il est expliqué dans [382] que $x_+ = e^{Bx} - 1$ obéit aux relations $[p, x_+] = \hbar B x_+$, relations de l' algèbre de Lie b_+. Le coproduit peut alors être écrit sous la forme

$\Delta x_+ = \chi (x_+ \otimes 1 + 1 \otimes x_+) \chi^{-1}$

$\Delta p = \chi (p \otimes 1 + 1 \otimes p) \chi^{-1}$ (3.52)

où $\chi = e^{\frac{p \otimes x}{\hbar}}$ représente le twist cocyclique dans $\mathbb{C}[x] \blacktriangleright\!\triangleleft \mathbb{C}[p] = U(b+)_\chi$. □

Nous avons vu qu'il existait deux points de vue concernant le cocycle χ : d'une part il rend l'algèbre de Hopf cocommutative U(b+) non cocommutative. Si l'on se repsésente ceci comme les coordonnées d'un espace-temps non commutatif, χ introduit une "courbure" dans le sens que le groupe sous-jacent est rendu non abélien. D'autre part, le même cocycle χ peut être vu comme introduisant une non commutativité ou quantification.

Aussi l'autodualité de ce produit bicroiisé $\mathbb{C}[x] \blacktriangleright\!\triangleleft_{\hbar, B} \mathbb{C}[p]$ peut être vue comme une sorte de "T-dualité", plus précisément le dual a la même forme avec une inversion de certains de paramètres. Ceci a été proposé dans [356] comme un phénomène nouveau pour la physique de l'espace-temps. Plus récemment, la dualité d'algèbre de Hopf, au niveau des bigèbres de Lie a été proposée comme une T-dualité non abélienne pour certains modèles σ [308]. De cette manière, les algèbres de Hopf à l'échelle de Planck montrent des connections variées entre cocycle, courbure, produits bicroisés et physique à l'échelle de Planck.

En guise d'ouverture vers de futurs travaux, nous mentionnons brièvement l'existence d'une possible relation entre les idées ci-dessus et les anomalies de la théorie.

3.6.3 Anomalies et déformations en gravité R^2

Conformément aux hypothèses de la supergravité, nous proposons de considérer l'existence, à l'échelle de Planck, de termes de courbures quadratiques, en R^2 [109][25]. Notre conjecture est alors que, de même que les anomalies gravitationnelles sont liées à l'émergence dans le Lagrangien de termes en R^2, de même le cocycle de déformation χ, que Majid propose [367] d'interpréter comme une anomalie, peut être également vu comme un opérateur de

déformation de la signature du secteur Lorentzien au secteur Euclidien. Il existe, dans ce sens quelques indications encourageantes. En particulier, rappelons d'abord que les produits croisés ordinaires tels que

$\mathbb{C}[M] \triangleright\!\triangleleft U(g)$

utilisés dans les exemples ci-dessus peuvent être interprétés comme quantification au sens de Mackey [174]. En l'absence d'un cocycle, le "momentum" U(g) apparaît comme une sous-algèbre. Précisément, losqu'il existe un cocycle, ce n'est plus vrai. Dans de cas

$\mathbb{C}[M]_{\chi} \triangleright\!\triangleleft U(g)$

a les relations $[\hat{\xi}, \hat{f}] = \widehat{\tilde{\xi}(f)}$, $[\hat{\xi}, \hat{\eta}] = \widehat{[\xi, \eta]} + \widehat{\chi(\xi, \eta)}$ pour $\xi, \eta \in g$, $f \in \mathbb{C}[M]$, et où $\wedge$ désigne l'inclusion dans l'algèbre plus grande et $\chi : U(g) \otimes U(g) \to \mathbb{C}[M]$ est le cocycle utilisé. Ici, $\tilde{\xi}$ représente le champ vectoriel engendré par l'action de ξ. Ceci fournit une formulation mathématique des anomalies (il s'agît en fait d'une représentation purement algébrique; pour un système quantique réel, l'on doit également considérer les C^* -algèbres et les structures d'algèbres de Von Neumann). Cependant, il est intriguant d'observer que l'application de tels cocycles sous la forme duale ψ a été exactement établie dans la section 3.3 pour l'unificaiton des structures algébriques Lorentziennes et Euclidiennes. Dans la version duale de tels résultats, l'on a :

$SOq(4)^{Cop} \; {}_{\chi}\triangleright\!\triangleleft \; SOq(3, 1)$

etc.. Il existe ainsi une connection entre cocycles et unification de signatures.

Deuxièmement, il existe déjà une connection claire entre la "courbure" (sous une certaine forme) et le twist de Drinfeld. Ici, le twist au Lemma 3.6.2 rend non-cocommutative l'algèbre de Hopf cocommutative $U(b^+)$. Du point de vue de ces algèbres comme coordonnées "non-commutatives", cela signifie que le twist introduit une "courbure" (ou une structure non-abélienne) sur l'espace sous-jacent. D'autre part, nous avons vu que de tels twisting conduisent à des cocycles. Aussi, il existe une "évidence" pour les trois côtés du triangle :

cocycle

anomalie *courbure*

La relation *anomalie* $\leftrightarrow$ *courbure* relève des motivations physiques discutées dans les chapitres ultérieurs. Les relations *cocycle* $\leftrightarrow$ *courbure* et *cocycle* $\leftrightarrow$ *anomalie* représentent les considérations algébriques de ce chapitre. Nous avons réuni les trois aspects avec le changement de signature.

En conclusion, nous conjecturons que la superposition de signature associée aux résultats des sections 3.2 et 3.3 pourrait être décrite, au niveau q-déformé, par l'extension quantique de l'espace homogène symétrique $\sum$ construit (Chap 2) au niveau semi-classique. Ici encore, ce point de vue est largement spéculatif mais suggère la possible existence d'un espace quantique homogène.

3.6.4 Quantification de $\sum = \dfrac{SO(3,\ 1) \otimes SO(4)}{SO(3)}$

Dans cette section, nous allons effectuer quelques pas en direction de la q-déformation de l'espace

$$\sum = \frac{SO(3,\ 1) \otimes SO(4)}{SO(3)}$$

avec lequel nous avons commencé nos inverstigations aus chapitres 1 et 2. Nous travaillons algébriquement avec l'algèbre de coordonnées. Notre souhait serait alors de trouver une algèbre

$$\tilde{\Sigma}_q = \text{"SOq(3, 1)} \otimes \text{SOq(4)"}$$

équipée avec une coaction à droite

$$ß : \tilde{\Sigma}_q \longrightarrow \tilde{\Sigma}_q \otimes SO_q(3)$$

lui donnant la structure de SOq(3)-module algébrique à droite. Nous allons voir, toutefois, que le produit tensoriel usuel $\otimes$ n'est pas applicable ici. Alors nous pouvons déformer

$$\sum_q = (\tilde{\Sigma}_q)^{SO_q(3)} = \left\{ x \in \tilde{\Sigma}_q \ \middle|\ ß(x) = x \otimes 1 \right\} \tag{3.53}$$

comme sous-algèbre point fixe. Avec une condition technique, ceci devrait déformer $\sum_q$ en un espace homogène quantique et $\tilde{\Sigma}_q$ en un fibré principal quantique avec pour fibre SOq(3). Ceci suit les mêmes étapes que la construction de la sphère quantique de Podles [425] [109], $S_q^2 = (SOq(3))^{\mathbb{C}(SO(2))}$ où $\mathbb{C}[SO(2)]$ représente l'anneau de coordonnées de SO(2).

A présent, l'action classique du chapitre 1 provient du produit des actions régulières induites par les plongements SO(3) ⊂ SO(3, 1) et SO(3) ⊂ SO(4). Le premier de ces plongements ne présente pas de problême particulier :

$$SUq(2) \triangleright\!\triangleleft SUq(2) \xrightarrow{\pi} SUq(2)$$

où π = le produit d'applications de SUq(2). Nous ignorons la question de $\mathbb{Z}_2$ pour cette discussion. Alors :

Proposition 3.6.6 SOq(3, 1) = $SUq(2) \triangleright\!\triangleleft SUq(2)$ *devient un SUq(2)- comodule algébrique par*

$$ß(h \otimes g) = (id \otimes \pi)\Delta(h \otimes g) = h_{(1)} \otimes g_{(1)} \otimes h_{(2)} g_{(2)}$$

Démonstration Le fibré associé est déjà connu et discuté dans [109]. Notons que pour vérifier que π est une algèbre, il est nécessaire d'utiliser la structure quasitriangulaire duale $\mathcal{R}$ de SUq(2) dans le respect de la commutativité par conjugaison. □

Cependant, π tel qu'énoncé ne serait pas applicable à $SUq(2) \otimes SUq(2)$. Précisément, il ne s'agît pas d'une application d'algèbres parceque SUq(2) n'est pas commutatif, du fait de la q-déformation. L'on peut cependant progresser et utiliser la même forme de ß comme structure de comodule sur $SUq(2) \otimes SUq(2)$, mais l'on obtiendra pas une algèbre pour $\sum_q$ de cette manière, seulement un espace vectoriel.

A présent, si nous supposons l'existence de deux copies de SOq(3, 1), alors nous pouvons définir

$$\{ SOq(3, 1) \otimes SOq(3, 1) \}^{SUq(2)}$$

comme sous-algèbre fixe sous $ß_R$ comme ci-dessus et $ß_L = (\pi \otimes id)\,\Delta$ en tant que coaction à droite via l'antipode. Plus précisément, nous utilisons les produit cotensoriel :

$$SOq(3, 1) \,\square\, SOq(3, 1) = \left\{ x \in SOq(3, 1) \otimes SOq(3, 1) \,\middle|\, (id \otimes ß_L)(x) = (ß_R \otimes id)(x) \right\} \qquad (3.54)$$

qui donne une algèbre de "points fixes" comme requis. Dans notre cas, dans la mesure où il est nécessaire de remplacer l'un des facteurs ci-dessus par SOq(4), à la lumière des résultats ci-dessus, l'on peut s'attendre à l'existence d'un produit cotensoriel cocyclique de la forme :

$$\sum_q = SOq(3, 1) \;\underset{\chi}{\square}\; SOq(4) \qquad (3.55)$$

avec un cocylce χ construit à partir de $\mathcal{R}$.

L'on peut alors espérer que $\sum_q$ représente une autre description possible de la superposition des deux métriques Lorentzienne et Euclidienne en région quantique, par projections des facteurs de $\sum_q$ (dans notre language dual, cela signifie deux inclusions). En outre, il paraît intéressant de remarquer que $\sum_q$ donne une "modélisation" évocatrice des oscillations entre les deux copies (Lorentzienne et Euclidienne) d'espace-temps. Il est peut-être utile de poursuivre ces idées, en relation avec la géométrie non-commutative (notamment le modèle à deux points d'A. Connes en théorie de jauge $\mathbb{Z}_2$). Ceci représenterait un champ de recherche profond pour des travaux ultérieurs.

Nous proposons d'expliciter au chapitre suivant certaines conditions physiques rendant plausible l'hypothèse de "fluctuation quantique" de la signature.

4

ESPACE-TEMPS KMS

ET

DOUBLE SIGNATURE

En application possible de nos résultats mathématiques du chap. 3 en théorie de q-déformation, nous considérons dans ce chapitre qu'à la température de Planck T_p, la signature de la métrique de l'espace-temps subit une perturbation telle que la quatrième direction g_{44} (-) pourrait devenir holomorphe (±). En effet au voisinage de T_p, l'espace-temps peut être considéré comme un système à l'équilibre, i.e. le système obéit à la condition KMS [319][387]. Nous suggérons alors que dans les limites de la bande holomorphe KMS (entre l'échelle 0 et l'échelle de Planck), le paramètre temporel ß peut être considéré comme *complexe*. Les fluctuations quantiques du champ de température peuvent constituer alors la source des fluctuations quantiques de la signature de la métrique. Une fois acceptée l'hypothèse précédente, alors à l'échelle 0, I-duale (au sens de (7.1.3)) de l'échelle de Planck, le paramètre temporel devient imaginaire pur - au sens du chap. 8 - .

Note : *Dans ce chapitre, notre propos n'est pas de construire de nouveaux résultats mathématiques concernant les algèbres d'opérateurs mais plutôt d'utiliser certaines notions de la théorie des algèbres de Von Neumann (groupe modulaire, état KMS), parfois de manière heuristique, pour illustrer ou étayer les motivations physiques de notre recherche.*

4.1 - EQUILIBRE THERMIQUE DE L'ESPACE-TEMPS AU TEMPS DE PLANCK

4.1.1 Le pré-espace-temps à l'échelle de Planck

L'observation de l'univers à grande échelle conduit à constater localement des anisotropies thermiques telles que, d'une région à l'autre, la température ne peut être considérée comme étant à l'équilibre [134]. En revanche, l'une des caractéristiques du modèle cosmologique FRW est qu'à petite échelle -i.e. au voisinage de l'échelle de Planck - la densité d'énergie atteint une valeur critique, de l'ordre de 10^{19} Gev [134]. Il est donc naturel de conjecturer, au voisinage de l'échelle de Planck, une situation d'équilibre thermique pour le pré-espace-temps.

Conjecture 4.1.2 *A l'échelle de Planck, le pré-espace-temps est en état d'équilibre thermique.*

Arguments Soit T la température du gaz de (super)gravitons (gravitons supersymétriques en supergravité N = 2) à l'échelle de Planck λ_{Planck}. Il est admis qu'au voisinage de λ_{Planck} , la densité d'énergie totale, dominée par les (super)gravitons, prend la forme usuelle donnée par le modèle standard [134] :

$$\rho(T) = g^*(T)\frac{\sigma T^4}{2} \tag{4.1}$$

où g*(T) représente le nombre effectif de degrés de liberté du système pré-espace-temps Eq. Le nombre-densité n_G correspondant à chaque degré de liberté d'un graviton, tel que défini par S. Weinberg [509] est de la forme :

$$n_G = \frac{\zeta}{\pi^2}\left(\frac{k_G T}{\hbar c}\right)^2 \approx \frac{\rho_G c^2}{k_G T} \tag{4.2}$$

ζ étant la fonction zeta de Riemann, avec pour valeur approchée $\zeta(3) \approx 1,2$. La séparation moyenne $\bar{d}$ au sein du gaz de gravitons peut alors être donnée par :

$$\bar{d} \approx [g^*(T) n_G]^{\frac{1}{3}} \approx n_G^{\frac{1}{3}} \approx \frac{\hbar c}{k_G T}$$

Il a été établi par P.Coles et F. Lucchin [134] que $\bar{d}$ coïncide avec la "longueur d'onde thermique" du gaz gravitons / gravitons, analogue à leur rayon de Compton. A la limite de température asymptotique $T \to T_p$, la section-droite de toute particule s'écrit $\sigma_a = \alpha^2 \left(\frac{\hbar c}{k_G T} \right)^2$, de sorte que, étant donnée la valeur de $\alpha \approx 1/50$, le temps d'interaction t_{coll} peut être estimé à :

$$\tau_{coll} \approx \frac{1}{n \sigma_a c} \approx \frac{\hbar}{g^*(T) \alpha^2 k_G T} \tag{4.3}$$

Ce temps doit être comparé avec le taux d'expansion $\tau_h = \frac{a}{\dot{a}}$, ($\dot{a}$ désignant la dérivée de a). Compte tenu de la valeur de t_H, l'on en déduit le rapport entre temps de collision et facteur d'échelle :

$$\frac{\tau_{coll}}{\tau_H} \approx \frac{1}{g^*(T)^{\frac{1}{2}} \alpha^2} \frac{T}{T_p} \ll 1$$

ce résultat suggère l'hypothèse - généralement admise- d'équilibre thermique au voisinage de T_p. □

A partir de l'hypothèse d'équilibre thermique à λ_p, nous suggérons que l'espace-temps peut être considéré comme soumis à la condition KMS sur cette limite.

4.2 EQUILIBRE D'UN SYSTEME ET ETAT KMS

Rappelons, du point de vue de la théorie KMS, la définition d'un état d'équilibre d'un système.

Définition 4.2.1 *H étant l'opérateur autoadjoint et $\mathfrak{H}$ l'espace de Hilbert d'un système fini, les états d'équilibre ω du système sont décrits par la condition de Gibbs* $\omega(A) = \frac{Tr_{\mathfrak{H}}(e^{-\beta H} A)}{Tr_{\mathfrak{H}}(e^{-\beta H})}$ *et satisfont la condition KMS.*

Rappelons également la relation entre état d'équilibre d'un système et condition KMS.

Théorème 4.2.2 (HHW) : *Un état ω sur la C * - algèbre **A** et les automorphismes du groupe fortement continu à un paramètre α_t d'automorphismes de **A** à la température $\beta = 1 / k T$ vérifient la condition KMS si, pour tout couple **A**, **B** de la * - sous-algèbres de **A**, α_t invariante et de norme dense, il existe une fonction $f(t_c)$ holomorphe dans la bande $\{ t_c = t + i\beta \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\, t_c \in [0, \beta] \}$ telle que :*

(i) $f(t) = \omega(\mathbf{A}(\alpha_t \mathbf{B}))$,
(ii) $f(t + i\beta) = \omega(\alpha_t(\mathbf{B}) A)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

*En outre, un état ω sur la C * - algèbre **A** est dit séparateur si la représentation obtenue donne lieu à une algèbre de Von Neumann W^* munie d'un vecteur cyclique et séparateur. Les ensembles*

$I_l = \{A \in \mathbf{A} : \omega(\mathbf{A}^* \mathbf{A}) = 0\}$
et
$I_r = \{A \in \mathbf{A} : \omega(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = 0\}$

forment respectivement un idéal gauche et droit dans ***A****. Pour un état KMS nous avons* $I_l = I_r$.

Nous suggérons à présent l'application de (4.2.2) au pré-espace-temps Eq à l'échelle de Planck.

4.3 - ESPACE-TEMPS KMS ET FLOT MODULAIRE HOLOMORPHE A L'ECHELLE DE PLANCK

4.3.1 Espace-temps KMS à l'échelle de Planck

Nous considérons à l' échelle de Planck l'existence du flot modulaire généralisé, non trivial

$$A \mapsto \tau_t(A) = e^{itH} A \; e^{-itH}$$

avec t étendu dans l'ensemble du plan complexe. Conformément aux propriétés de la supergravité N = 2, L'hamiltonien H est ici décrit par $\not{D}^2$ (carré de l'opérateur de Dirac). L'état d'équilibre de l'espace-temps à l'échelle quantique suggère alors l'existence de *deux* flots temporels distincts, mais quantiquement superposés à l'échelle de Planck $0 < \lambda_\Sigma < \lambda_p$: (i) le flot physique Lorentzien et (ii) le flot topologique Euclidien, dépendant l'un et l'autre des automorphismes de la *même* algèbre **A** - même si les automorphismes de semi-groupe $\alpha_{t(+)} = e^{\beta H}\, \mathbf{A}\, e^{-\beta H}$ ne sont plus définis sur **A** entière mais sur un idéal $\{\mathfrak{I}\}$ de l'algèbre **A** . A ces deux flots, que nous interprétons comme deux états différents d'une même condition KMS reliés par un 2-cocycle (ou cocycle à deux variables) de Radon-Nikodym [144] unique -au sens que nous donnons en 4.4.5, nous associons deux pôles d'une même théorie hypersymétrique, reliés par une symétrie de dualité (I-dualité) à la Montonen et Olive [406]. D'où :

Proposition 4.3.2 *Un état normal fidèle* ω *de la métrique sur une W* - algèbre* $\mathfrak{U}$ *définit de manière unique un groupe d'automorphismes modulaire à un paramètre* α_t *(A) et satisfait la condition KMS associée à ce groupe d'automorphismes . Le groupe* α_t *(A) est un sous-groupe à un paramètre réel t du groupe étendu* α_τ *(A) à temps complexe* τ *contrôlant les symétries de translations dans le temps réel et les transformations de jauge (i.e. d'échelle) dans le temps imaginaire.*

Démonstration. Soit la représentation G.N.S. (π, $\mathfrak{H}$, Ψ) déterminée par ω. $\pi(\mathfrak{U})$ est une W^* - algèbre dans la mesure où ω est normal et fidèle, ce qui implique que π est également fidèle. $\pi(\mathfrak{U}) = \pi(\mathfrak{U})''$ et $\pi(\mathfrak{U})$ est isomorphe à $\mathfrak{U}$. Ψ est séparateur. Soit le groupe d'automorphismes modulaire à un paramètre α_t A et soit $B \in \alpha_\tau(A)$ un élément analytique si $f_a = \alpha_\tau(B)B\Psi$ est une fonction à valeur analytique, pour tout $\Psi \in \mathfrak{H}$. $\tilde{\mathfrak{U}}$ est l'ensemble des éléments analytiques. Soit $A \in \mathfrak{U}$ et $B \in \tilde{\mathfrak{U}}$ et soit

$$\Delta = e^{-H^\circ} \quad \Rightarrow \quad U(t) = e^{-itH^\circ}.$$

H° est un opérateur auto-adjoint représentant l'"hamiltonien modulaire", dont le spectre s'étend de 0 à + ∞. Nous appelons $\Psi \in \mathfrak{H}$ son vecteur propre, de valeur propre 0, et J la conjugaison modulaire. $\alpha_\tau(A)$ prend alors la forme, pour $A \in \mathfrak{U}$ et $B \in \tilde{\mathfrak{U}}$:

$$\begin{aligned}
\omega\,((\alpha_t A)B) &= \langle \Psi | AU^*(t)B | \Psi \rangle = \left\langle J\Delta^{1/2}A\Psi \middle| U^*(t)J\Delta^{1/2}B^*\Psi \right\rangle \\
&= \left\langle J\Delta^{1/2}A\Psi \middle| JU^*(t)J\Delta^{1/2}B^*\Psi \right\rangle = \left\langle U^*(t)J\Delta^{1/2}B^*\Psi \middle| \Delta^{1/2}A\Psi \right\rangle \\
&= \left\langle \Psi | B\Delta^{1/2}U(t)\Delta^{1/2}A\Psi \right\rangle = \langle \Psi | Be^{-(H^\circ + iH^\circ t)}A | \Psi \rangle = \langle \Psi | B\alpha_{t-i}A\Psi \rangle
\end{aligned} \tag{4.4}$$

ce qui nous conduit aux relations équivalentes :

$$\begin{cases} \langle \Psi | A \Delta B | \Psi \rangle = \langle \Psi | B A \Psi \rangle \\ \omega \ ((\alpha_t A) B) = \omega \ (B \alpha_{i-t} A) \end{cases} \tag{4.5}$$

si $\alpha_\tau = \alpha'_{(-ß\,t)}$, comme $\tilde{\mathfrak{U}}$ est fortement dense dans $\mathfrak{U}$, l'équ. (4.5) vérifie la condition KMS pour chaque valeur de ß. Les automorphismes $\alpha_\tau(A)$ s'écrivent :

$$\alpha_\tau(A) = e^{i H ß t} A \ e^{-i H ß t}$$

La présence du second paramètre dans le groupe d'automorphismes α_τ peut être interprétée soit comme une paramétrisation de t par un facteur réel ß soit comme un paramètre de longueur ß = i t. Or, l'analyticité de $B \in \tilde{\mathfrak{U}}$ nous conduit de façon naturelle à adopter la deuxième interprétation, d'où :

Un état d'équilibre à la température ß $^{-1}$ peut être caractérisé comme un état fidèle sur l'algèbre des observables $\mathfrak{U}$ dont le groupe α_t d'automorphismes modulaires est le groupe de translation temporelle, τ étant un paramètre relié au temps réel t par t = ßτ. Le groupe d'automorphisme modulaire de cet état fidèle est un sous-groupe à un paramètre des symétries comprenant les translations dans le temps réel et les transformations de jauge dans le temps imaginaire.

Comme vu en 4.1.2, l'espace-temps à l'échelle de Planck peut être considéré comme un système à l'équilibre et, par conséquent, peut également être vu comme soumis à la condition KMS présentée ci-dessus. □

4.3.3 Flot modulaire holomorphe à l'échelle de Planck

Il résulte de 4.3.2 que dans les limites de la bande KMS $0 < t < t_{Planck}$, le flot modulaire holomorphe associé aux automorphismes étendus $\alpha_\tau(A)$ engendre un flot temporel que nous considérons comme holomorphe $\tau = t + iß \in \mathbb{C}$. En effet, la théorie modulaire induit l'existence de l'opérateur linéaire S tel que :

$$S \ x \ |\Psi\rangle = x^* \ |\Psi\rangle \ ; \ \forall \ x \in \mathfrak{U}$$

Le groupe modulaire α_τ à partir de S est :

$$S \ A |h_0\rangle = A^* \ |h_0\rangle = |A^* \ h_0\rangle \quad , \qquad \forall \ A \in \mathfrak{U}$$

et comme $h_0 = \varphi^{1/2} = Z^{1/2} e^{-ßH/2}$:

$$S \ A \ e^{-ßH/2} = A^* \ e^{-ßH/2}$$

L'on a alors pour $\alpha_\tau(A)$:

$$\alpha_\tau(A) \ |h_0\rangle = A^* \ |h_0\rangle = \Delta^{-it} A \ \Delta^{it} |h_0\rangle = \Delta^{-it} A |h_0\rangle$$

d'où nous tirons :

$$\alpha_\tau(A) \ |h_0\rangle = |e^{i H ß t} A \ e^{-i H ß t} \ h_0\rangle \tag{4.6}$$

L'on en déduit la relation entre α_τ et le groupe d'évolution temporelle γ_t : $\alpha_\tau = \gamma_{ß\,t}$, de sorte que $\tau \rightarrow ß\,t$. ß admet deux interprétations possibles :

(**i**) soit comme paramètre de temps réel $ß = \dfrac{1}{k \ T}$, auquel cas

α_τ complexe $\xrightarrow{retriction}$ α_τ réel

et $\alpha_\tau(A) = e^{iH\beta t} A\ e^{-iH\beta t}$ doit être interprété comme une évolution en temps réel paramétrée par l'unité de temps ß. Le groupe $\alpha_\tau(A)$ est associé au groupe modulaire réel Δ^{it} A Δ^{-it}.

(**ii**) soit comme paramètre de "distance Euclidienne" ß = i t concernant la coordonnée (n+1) du n-système. Dans ce cas :

α_τ complexe $\xrightarrow{restriction}$ α_τ imaginaire pur

et nous considérons que α_τ continue d'exister en tant que groupe d'automorphisme, sous la forme nouvelle :

$\alpha_{\tau\ (im)}$ A = $e^{-\beta H} A\ e^{\beta H}$

Nous proposons en 4.4.1 de considérer le groupe d'automorphismes $\alpha_{\tau\ \text{imaginaire pur}}$ comme groupe d'automorphismes à un paramètre non plus, comme pour (4.6), de l'algèbre A entière mais de l'idéal ($\mathfrak{J}$)A de A. Le flot modulaire correspondant prend alors la forme Δ^{β} A $\Delta^{-\beta}$. Le flot temporel associé au flot modulaire [147] peut être alors regardé comme imaginaire pur dans le secteur singulier du cône de lumière, comme nous le suggérons au chapitre 8.

Nous considérons maintenant la partie Euclidienne du flot modulaire.

4.4 FLOT MODULAIRE EUCLIDIEN ET TEMPS IMAGINAIRE

Nous interprétons $\alpha_{\tau(im)}$ A engendrant le flot modulaire Euclidien comme une évolution en temps imaginaire, i.e. au sens de la géométrie spectrale, comme un accroissement des distances Lipshitziennes entre les différents états du système en signature Euclidienne. Soit M_e un facteur de type I (correspondant à l'échelle ß > L_{planck} semi-classique commutative sur le cône de lumière) et soit le facteur $M_{O,1}$ de type II_∞ correspondant à l'échelle ß = 0, échelle singulière sur le cône de lumière (cf. shéma 1.0). $M_{O,1}$ est un ITPFI (produit tensoriel infini $\otimes^\infty$ d'algèbres de matrices) d'Araki et Woods du type $R_{O,1}$ [31]. Considérant une matrice positive ρ, tout état normal et fidèle φ sur $M_{O,1}$ peut s'écrire φ(x) = Tr(ρx). Araki et Woods ont alors montré [31], à partir de la liste des valeurs propres de $\varphi_\nu, (\lambda_{\nu,j})_{j=1,\dots,n_\nu}$, qu'il est possible de calculer l'invariant suivant :

$$\rho(M_{0,1}) = \{\lambda \in]0,1[;\ M \otimes R_\lambda \ \text{ isomorphe à } R_\lambda\}$$

R_λ étant un facteur de Powers. Considérant le facteur hyperfini II_∞ correspondant à l'échelle singulière de notre modèle, échelle à laquelle aucune mesure sur les métriques singulières ne peut être considérée comme finie (i.e. la trace du système est semi-finie et notée Tr_∞) nous proposons alors de construire le groupe modulaire Euclidien résultant du prolongement analytique du groupe modulaire Lorentzien.

Proposition 4.4.1 *A la dynamique Δ_t en temps réel t, donnée pour des systèmes quantiques finis par le groupe à un paramètre des $*$ - automorphismes de l'algèbre stellaire classique des observables M_C*

$$M_c \mapsto \sigma_t(M_c) = e^{iHt} M_c\ e^{-iHt}$$

correspond une dynamique Δ_{it} en temps imaginaire, ou évolution Euclidienne, donnée par le semi-groupe à un paramètre des automorphismes de l'idéal $(\mathfrak{J})M_{O,1}$ de l'algèbre $M_{O,1}$

$$M_{O,1} \mapsto \sigma_{ß}(M_{O,1}) = e^{Hß} M_{O,1}\ e^{-Hß}.$$

$\sigma_t(M_c)$ *et* $\sigma_{ß}(M_{O,1})$ *étant reliés par une symétrie de* i *- dualité.*

Note: Les automorphismes $M_{O,1} \mapsto \sigma_{ß}(M_{O,1}) = e^{Hß} M_{O,1} e^{-Hß}$ ne sont pas définis sur tout $M_{O,1}$ mais sur un idéal de $M_{O,1}$, que nous écrivons $(\mathfrak{J})M_{O,1}$, domaine partout dense. L'espace de Hilbert est donné par $M_{O,1}$ et il existe alors un automorphisme à un paramètre de l'idéal de $M_{O,1}$. Celui-ci représente l'idéal des éléments de l'algèbre où la trace a une valeur finie. Le poids φ associé à tout élément de $M_{O,1}$ est alors une forme linéaire sur l'idéal de l'algèbre $(\mathfrak{J})M_{O,1}$. Pour tout $x \in (\mathfrak{J})M_{O,1}$, le poids φ associé à x a la forme $z \mapsto \mathrm{Tr}(x.\ z.\ x^*)$. Par ailleurs, nous utilisons ici le poids dominant φ d'un facteur de type III_λ, que nous appelons M_q –lequel est également hyperfini et intervient dans le secteur de superposition de la théorie ($0 <$ échelle $< l_{Planck}$). M_q est, comme $M_{0,1}$, un ITPFI, de la forme

$$M_q = M_{0,1} \rtimes_\theta \mathbb{Z},$$

avec $M_{0,1}$ isomorphe au facteur d'Araki-Woods [31] $R_{0,1}$ et $\theta \in \mathrm{Aut}(R_{0,1})$ satisfaisant $\mathrm{mod}(\theta) = \lambda$. Comme démontré par A. Connes [149], il existe donc (modulo les isomorphismes) seulement un et un seul facteur de type III_λ ITPFI hyperfini, qui est un facteur de Powers R_λ [149]. Par conséquent, le facteur de type II associé à l'échelle 0 de la théorie (i.e. l'ITPFI $M_{0,1}$) apparaît sous une forme et description explicite - et même *canonique* -. De ce point de vue, il est intéressant d'observer que l'échelle singulière du système (échelle 0 d'espace-temps) ne peut être décrite que par un facteur hyperfini $M_{0,1}$ type ITPFI, lequel est *unique*. Notre choix de $M_{0,1} = R_{0,1}$, facteur de type II_∞ pour décrire la singularité initiale S, nous a été dicté par deux raisons :

(i) à l'échelle singulière ß = 0, le système pré-espace-temps, comme montré aux chaps 6, 7 et 8, correspond à une configuration Euclidienne du type instanton gravitationnel singulier (de taille 0 lorsque ß = 0). Selon ce point de vue, toutes les mesures (au sens de la théorie de la mesure) effectuées sur les familles de métriques euclidiennes caractérisant le système sont ρ - équivalentes jusqu'à l'infini et le système est, par construction, ergodique. Or, comme montré par A. Connes dans [149], tout flot ergodique pour une mesure invariante dans la classe des mesures de Lebesgue donne le même facteur hyperfini de type II_∞. Ce résultat de Connes suggère fortement dans notre cas le choix d'un facteur de type II_∞ pour décrire l'échelle singulière.

(ii) d'autre part, l'on admet généralement en théorie quantique que la mesure, au sens de Lebesgue, n'est plus définie dans le domaine quantique. Il en résulte qu'à l'échelle quantique, il n'existe plus aucune mesure invariante "équivalente" à la mesure Riemannienne sur la métrique $g_{\mu\nu}$, de sorte que le "bon facteur" correspondant aux contraintes de fluctuations de la métrique quantique nous semble devoir être un facteur de type III - et, plus particulièrement, un facteur de type III_λ. Dans ce cas, la notion de trace doit obligatoirement être remplacée par celle de poids de l'algèbre sous-jacente (ce qui nous introduit de manière naturelle à la notion de flot des poids de l'algèbre A). Nous considérons au chap. 8 que le seul objet pertinent pour décrire une possible "évolution" à l'échelle quantique est le flot des poids de l'algèbre de type III_λ caractérisant le système pré-espace-temps à cette échelle. Or, si nous considérons le facteur M_q de type III_λ associé à l'échelle quantique du système pré-espace-temps, d'après les résultats d'A. Connes [149], il existe alors la décomposition suivante :

$$M_q = M_{0,1} \rtimes_\theta \mathbb{Z} \tag{4.7}$$

et ici, le facteur $M_{0,1}$ est obligatoirement un facteur de type II_∞.

Pour finir, notons que l'invariant sous-jacent (i.e. le poids dominant) peut également être relié à l'invariant de singularité (isomorphe, comme nous le montrons en 7.2.4 et 7.2.5 au premier invariant de Donaldson).

Démonstration Soit le système fini espace-temps classique E_c à l'échelle classique ß > L_{Planck} à la température T. Toute mesure sur la métrique Lorentzienne dans E_c étant finie et la géométrie de E_c étant commutative, nous proposons donc, de manière naturelle, de décrire les mesures sur la métrique de E_c par la C^* -algèbre "classique" M_c, facteur de type I. Soit à présent l'état de l'algèbre M_c associée à E et donné par

$$\omega(M_c) = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-ßH} M_c)}{\mathrm{Tr}(e^{-ßH})} \tag{4.8}$$

où H est le générateur du groupe à un paramètre d'évolution du système :

$$M_c \in U(\mathfrak{H}) \mapsto \sigma_t(M_c) = e^{iHt} M_c \; e^{-iHt} \in U(\mathfrak{H})$$

(**i**) Soit à présent l'espace-temps E_0 correspondant à l'échelle singulière ß = 0 (singularité initiale) associée à l'extrémité ß de la bande KMS. Les mesures dans E_0 ne sont plus finies. ß est réel et défini pour ß ≥ 0. Nous proposons alors de remplacer la notion usuelle d'état, donné par $\omega(M_c) = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-ßH} M_c)}{\mathrm{Tr}(e^{-ßH})}$ par la notion duale de "pseudo-état" ou "état euclidien", qui se déduit de manière naturelle de (4.8) par perte de ses propriétés traciales et qui peut alors être donné par :

$$\omega(M_{0,1}) = \frac{\mathrm{Tr}_\infty(e^{-ßH} M_{0,1})}{\mathrm{Tr}_\infty(e^{-ßH})}$$

d'où nous pouvons tirer, toujours de manière naturelle :

$$\sigma_ß(M_{0,1}) = e^{-ßH} \; M_{0,1} \; e^{ßH}$$

Considérant toutes les valeurs positives de ß, nous posons alors que $\sigma_ß(M_{0,1})$ peut être interprété comme le "flot des états euclidiens" sur $M_{0,1}$ et correspond à l'évolution du système en temps imaginaire pur. En effet, partant de la donnée de l'algèbre $M_{0,1}$, il existe un semi-groupe d'automorphismes de $M_{0,1}$, défini non pas sur tout $M_{0,1}$ mais sur l'idéal $(\mathfrak{I})M_{O,1}$ de $M_{0,1}$. Un tel groupe d'automorphismes "Euclidiens" résulte du prolongement analytique t → it et décrit l'évolution des pseudo-observables du système en temps imaginaire :

$$\sigma_ß(M_{0,1}) = e^{-ßH} \; M_{0,1} \; e^{ßH} \leftrightarrow \Delta^{ß} \; M_{0,1} \; \Delta^{-ß} \tag{4.9}$$

En effet, (4.9) correspond au prolongement analytique du groupe modulaire

$$\sigma_t(M_c) = e^{iHt} M_c \; e^{-iHt} \leftrightarrow \Delta^{it} \; M_c \; \Delta^{-it} \tag{4.10}$$

et, de même que le groupe modulaire usuel décrit, comme montré par Connes et Rovelli [147), le flot d'évolution temporelle, nous suggérons que le groupe modulaire "euclidien" donné par (4.9) décrit le *flot d'évolution en temps imaginaire pur* associé à l'échelle singulière ß = 0 du système.

(**ii**) Il existe naturellement une généralisation de la situation décrite ci-dessus et associée aux facteurs de type II_∞ correspondant à l'échelle singulière ß = 0 du modèle. Considérons à présent l'échelle quantique dans le cône de lumière, correspondant à l'échelle 0 < échelle < l_{Planck}, échelle à laquelle les mesures sur la métrique quantique ne sont plus invariantes. Désignant par M_q l'algèbre sous-jacente à l'échelle quantique, comme observé dans la note de (4.4.1), Mq est donc nécessairement un facteur de type III et, plus particulièrement, de type III_λ (par élimination évidente des facteurs de type III_0 et III_1 impropres). Défini par son poids dominant σ, le facteur M_q est hyperfini et intervient dans le secteur de superposition de la théorie (0 < échelle < l_{Planck}). Comme $M_{0,1}$, le facteur M_q est un ITPFI, de la forme $M_q = M_{0,1} \rtimes_\theta \mathbb{Z}$, avec $M_{0,1}$ de type II_∞ isomorphe à $R_{0,1}$ et $\theta \in \mathrm{Aut}(R_{0,1})$ satisfaisant mod (θ) = λ. Alors, $\sigma_ß(M_{0,1})$ représente bien le flot de tous les poids possibles sur M_q. A partir de la comparaison entre le groupe $\tau_{t_r}(M_c)$ des automorphismes de Mc

$$M_c \mapsto \tau_{t_r}(M_c) = e^{iHt} M_c \; e^{-iHt} \tag{4.11}$$

(H étant donné, en supergravité N = 2, par $\not{D}^2$ ($\not{D}$ opérateur de Dirac)) et

$$M_{O,1} \mapsto \sigma_{ß}(M_{O,1}) = e^{Hß} M_{O,1} \; e^{-Hß} \tag{4.12}$$

nous voyons que φ peut, de manière naturelle, compte tenu de la définion du flot des poids de Connes-Takesaki dans [140], être interprété comme le "flot des poids" de l'algèbre Mq.

Par ailleurs, nous considérons le groupe modulaire euclidien, trouvé à partir de :

$$\sigma_{ß}(M_{0,1}) = e^{-ß H} \; M_{0,1} \; e^{ß H}$$

et correspondant aux automorphismes de semi-groupe de l'idéal du facteur $M_{0,1}$. A. Connes a établi [146] que le flot des poids W(M) d'une algèbre est la restriction de l'action du groupe des automorphismes à un paramètre θ_λ au centre Z = Z(N). Nous suggérons alors que l'évolution des "pseudo-observables" (i.e. métriques euclidiennes en temps imaginaire) représente le "flot des poids" du facteur sous-jacent. Ce flot Euclidien est partout dilatant pour la norme et est isomorphe à k, élément multiplicateur du poids φ ⟶ k φ. L'évolution en temps réel des observables, décrite par (4.11), est prolongée en (4.12) par une " pseudo-évolution " des états en temps imaginaire, duale de l'évolution des observables et correspondant au flot des poids sur l'algèbre. Le groupe unitaire à un paramètre en temps réel associé à (4.10), $U(t) = \Delta^{i\,t}$ donne lieu au groupe modulaire de l'état ω sur A associé à la dynamique temporelle

$$\sigma_t(M_c) = \Delta^{it} \; M_c \; \Delta^{-it}. \tag{4.13}$$

Connes a montré [149] que la dynamique canonique δ, non commutative et décrite par (5.26) est intrinsèque et permet de définir l'invariant de M [149] tel que $\delta : \mathbb{R} \to$ Out M = Aut M / Int M. Cet invariant de M représente un flot ergodique **{**W (M) , W_λ**}** où W_λ est un groupe à un paramètre de transformations - i.e. un flot - qui admet une description en termes de classes de poids et dont le paramètre naturel est $\mathbb{R}_+^*$, groupe dual de $\mathbb{R}$. Nous retrouvons avec l'action multiplicative de $\mathbb{R}_+^*$ le flot des poids de M, dont la forme est discutée au chap. 8. Alors $U(t) = \Delta^{i\,t} \to H(t) = \Delta^{-ß}$ et le groupe modulaire est prolongé analytiquement par le groupe modulaire Euclidien correspondant à l'évolution en temps imaginaire du système :

$$\sigma_{ß}(M_{0,1}) = \Delta^{ß} \; M_c \; \Delta^{-ß}. \tag{4.14}$$

de sorte qu'à la dynamique physique, engendrée en temps réel par la donnée de l'algèbre M, correspond en temps imaginaire une " dynamique spectrale " (ou Euclidienne) engendrée par le flot des poids de M et décrivant la dilatation de l'espace des états du système - i.e. dilatation de la distance d'état entre métriques Riemanniennes -. □

Mettons à présent en évidence la propriété dilatante du flot modulaire Euclidien.

Conjecture 4.4.2 *Le flot modulaire $\alpha_{\tau(im)}$ ou flot modulaire Euclidien correspondant au paramètre de temps imaginaire ß = i t est de type toujours dilatant pour la norme de l'espace vectoriel décrivant les pseudo-observables et peut être interprété comme la dilatation des distances Lipshitziennes séparant les états.*

Note : L'on peut "tester" l'argument de dilatation de l'espace des pseudo-observables" pour $M_N(\mathbb{C})$. Un état de $M_N(\mathbb{C})$ s'écrit :

$$A \to \; < A(\alpha) \; ; \; \alpha >, \text{ où } \alpha \in \mathbb{C}^N$$

Alors, on peut écrire pour un "pseudo-état" :

$$< A e^{ßH}(\alpha) \; ; \; e^{-ßH}\alpha >$$

de sorte que l'accroissement de ß est ici équivalent à un accroissement dans l'espace des "pseudo-états" de la théorie (pour $M_N(\mathbb{C})$.Dans la suite, nous nous plaçons dans des cas généraux où nous désignons par A des algèbres de type II_∞ et III_λ générales.

Arguments Soit φ l'état d'équilibre d'un système et α_t (A) le flot modulaire à temps réel correspondant de la forme :

$$\alpha_t(A) = e^{iHt} A \; e^{-iHt} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{4.15}$$

Appliquons sur (4.15) une rotation de Wick $t \rightarrow i\,t$. L'automorphisme modulaire α_t (A) devient :

$$\alpha_{t\,im}(A) \rightarrow \alpha_ß(A) = e^{-ßH} A \; e^{ßH} \qquad \text{avec } ß = -i\,t \tag{4.16}$$

Le flot modulaire "Lorentzien" engendré par α_t (A) dans (4.15) est alors prolongé analytiquement par un nouveau flot modulaire : le "flot Euclidien" $\alpha_ß$ (A) en temps imaginaire pur, de la forme (4.16). Observons que $\alpha_ß$ (A) :

(**i**) *est toujours un automorphisme de A, non défini dans tout A mais dans l'idéal de A; au lieu de former un groupe,* $\alpha_ß$ (A) *a une structure de semi-groupe, non inversible dans la mesure où il existe une borne à l'origine du système pour t = 0.*

(**ii**) *l'opérateur H est borné et autoadjoint, à la différence de A qui cesse d'être stellaire; l'automorphisme* $\alpha_ß$ (A) *n'est plus unitaire et ne préserve plus les normes de l'opérateur et de l'espace vectoriel V(x) des pseudo-observables.*

En raison de (**ii**), le flot modulaire associé est toujours dilatant pour la norme de l'espace vectoriel V(x), et la norme de l'opérateur est toujours dilatée par les automorphismes donnés par $\alpha_ß$ (A) . Soit $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{H}$) l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés agissant dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. La topologie de $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ est donnée par la norme des opérateurs. Ainsi $A \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ est borné implique $\|A\| \equiv \sup_{\Psi \in H} \|A\| \,.\, \|\Psi\|^{-1} < \infty$, où $\| \; \|$ désigne la norme des vecteurs dans $\mathfrak{H}$ et $\|A\|$ la norme de l'opérateur A. Les conditions de norme sur W* montrent que $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{H}$) est un espace linéaire normé tel que :

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$
$$\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$$
$$\|A * A\| \leq \|A\|^2$$

Ces conditions de norme sur l'algèbre - notamment pour les types III - sont en fait des conditions de norme matricielle, de type subordonnée pour l'opérateur A : $\sup \dfrac{\|A.U\|}{\|U\|}$, de sorte que la norme de A , subordonnée au sup. de la norme de U, est le sup de tous les vecteurs de norme 1. L'espace vectoriel des états du système étant identifié à l'espace des matrices de l'algèbre de Von Neumann munie des conditions de sup. sur la norme, il en résulte que la conjugaison de l'opérateur A par le semi groupe $e^{ßH}$ implique une dilatation de la norme de A. Lorsque l'opérateur est appliqué à un vecteur propre de $\mathfrak{H}$, l'action correspondante est une dilatation (de valeur $e^{ßH}$) de tous les vecteurs propres de $\mathfrak{H}$. Nous appelons "flot modulaire dilatant" une telle action.

En effet, soit H l'hamiltonien du système positif et dont le spectre est borné et soit V_i le vecteur propre de H dont la valeur propre maximale (lorsqu'elle existe) est λ_i. Le vecteur propre correspondant s'écrit $V_x = \lambda_i \; V_i$. Appliquons la conjugaison par $e^{ßH}$ à l'opérateur A_λ :

$$A_\lambda \rightarrow e^{-ßH} A \; e^{ßH} = A_ß$$

Appliquons $A_ß$ (qui décrit le flot modulaire) à tous les vecteurs V de norme 1:

$$e^{-ßH} A_\lambda \; e^{ßH} \,.\, V = e^{-ßH} e^{ßH} V = V' \tag{4.17}$$

Si nous prenons à présent le sup. de la norme des vecteurs V', nous obtenons la norme de l'opérateur $A_ß$:

$$\sup\|V'\| = \|A_ß\|$$

Regardons l'action de A sur V_i . Nous obtenons

$$A(V_i) = a_{ij} V_j$$

soit $A(V_i) = \sum_j a_{ij} \; V_j$. Appliquons maintenant $A_ß$ à V_i :

$$A_ß(V_i) = e^{-ßH} A \; e^{ßλ_i} V_i \;\; = \;\; e^{ßλ_i} e^{-ßH} A \; V_i$$

Donc A agît directement sur V_i :

$$A_ß(V_i) = \sum_j e^{ßλ_i} e^{-ßH} a_{ij} \;\; V_j \;=\; \sum_j e^{ßλ_i} a_{ij} \;\; e^{-ßH} \;\; V_j$$

comme V_j est vecteur propre de H, l'on peut remplacer $e^{-ßH}$ appliqué à V_j par $e^{-ßλ_j} V_j$, d'où pour $A_ß(V_i)$:

$$A_ß(V_i) = \sum_j e^{ßλ_i} a_{ij} \;\; e^{-ßλ_j} \;\; V_j$$

soit, de manière équivalente mais plus explicite :

$$\sum_j a_{ij} \;\; e^{ß(λ_i - λ_j)} \;\; V_j \tag{4.18}$$

comme $λ_i$ représente la valeur propre maximale associée au vecteur propre V_i, tous les $λ_i - λ_j$ sont toujours positifs (sauf si $λ_i = λ_j$). Donc $e^{ß(λ_i - λ_j)}$ est toujours positif et diverge quand ß est grand. Ainsi :

$$\|A_ß V_i\|^2 \;\; = \;\; \sum_j a^2_{ij} \;\; \|e^{ß(λ_i - λ_j)}\|^2 \tag{4.19}$$

La norme de l'opérateur étant subordonnée au sup de la norme de l'espace vectoriel sous-jacent à l'espace des "pseudo-observables", nous tirons de la construction ci-dessus que tous les coefficients croissent avec ß. Le flot modulaire associé aux automorphismes de semi-groupe est donc un flot Euclidien toujours dilatant. □

Remarquons que le semi-groupe $e^{ßH}$ agît sur la norme des opérateurs représentant les métriques, ce qui conduit à un accroissement de la "distance" entre chaque opérateur. Une telle distance ne s'exprime pas en géométrie Riemannienne ordinaire mais en *géométrie spectrale* :

Définition 4.4.3 *La distance spectrale d (φ, ψ) mesure la distance entre les états φ, ψ sur* $\mathcal{A}$. *d (φ, ψ) est telle que :*

$$d(\varphi, \psi) = \sup \left\{ |\varphi(a) - \Psi(a)| \,;\; a \in \overline{\mathcal{A}} \,,\; \|[D,a]\| \le 1 \,,\; \varphi(1) = 1 \right\}$$

L'outil spectral nous permet à présent de formuler notre hypothèse principale sur la " dynamique spectrale " du pré-espace-temps, la distance spectrale entre les états (dualement entre les observables) étant croissante dans le temps imaginaire :

Conjecture 4.4.4 *Le flot modulaire Euclidien représentant l'évolution d'un système en temps imaginaire correspond à un accroissement de la distance spectrale séparant les états du système*.

Elts de démonstration (**i**). Soit M une variété Riemannienne ordinaire, O l'espace des observables, $\not{D}$ un opérateur de Dirac et $\not{D}^{-1}$ le ds^2 Riemannien sur M . $\not{D}$ a un spectre discret donné par les valeurs propres $\lambda_n \in \mathbb{R}$. La distance Riemannienne entre x , y $\in$ M est donnée par :

d (x , y) = Inf Longueur L où Longueur $L\, g = \int_0^1 \| g'(t) \| \, dt$

A l'échelle de Planck, nous proposons de remplacer la distance "géométrique" entre les points x et y par la distance "algébrique" entre les états φ et ψ de la métrique sur l'algèbre $\mathcal{A}$. Une mesure φ est une forme linéaire sur $\mathcal{A}$ telle que φ (1) = 1

$\varphi : \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(a^* a) \geq 0$, $\forall a \in \overline{\mathcal{A}}$, $\varphi(1) = 1$

Il en résulte une distance spectrale entre les états φ et ψ de la métrique, duale de d (x , y) et en général non commutative, dont la structure est fournie par le "triplet spectral" :

$(\mathcal{A}\ ,\ \mathfrak{H},\ \not{D})$

donné par l'algèbre d'opérateur involutive $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{H}$ et l'opérateur de Dirac $\not{D}$ autoadjoint tel que la résolvante $(\not{D} - \lambda)^{-1}$ $\lambda \notin \mathbb{R}$ de $\not{D}$ est compact et le commutateur $[\not{D}, a] = \not{D} a - a \not{D}$ est borné $\forall a \in \mathcal{A}$. La dimension de $(\mathcal{A}\ ,\ \mathfrak{H},\ \not{D})$ est gouvernée par la croissance des valeurs propres de λ_n. A partir de [149], la distance spectrale entre les états de la métrique est telle que :

$$d(\varphi, \psi) = sup \ \{ |\varphi(a) - \Psi(a)| \ ; \ a \in \overline{\mathcal{A}} \ , \ \| [D,a] \| \leq 1 \ , \ \varphi(1) = 1 \} \qquad (4.20)$$

Indiquons que (4.20) permet de retrouver la distance géodésique en régime Riemannien. Soit la variété Riemannienne compacte O munie d'une K-orientation (structure spinorielle) et soit f l'opérateur du produit de Clifford par le gradient ∇f de f . Le triplet $(\mathcal{A}\ ,\ \mathfrak{H},\ \not{D})$ est décrit par

$(f\, \xi)(x) = f(x)\, \xi(x)$, $\forall x \in O$, $f \in \mathcal{A}$, $\xi \in \mathfrak{H}$.

qui fournit la représentation de l'algèbre de fonctions sur O dans l'espace de Hilbert des sections de carré intégrable du fibré des spineurs $\mathfrak{H} = L^2$ (O , S). La norme Hilbertienne de f est alors donnée par la norme Lipschitzienne :

$$\| \not{D}, f \| = \sup_{x \in O} \| \nabla f \|$$

Considérons x , y $\in$ M et φ, ψ les états correspondants: $\varphi(f) = f(x)$, $\psi(f) = f(y)$.L'on observe que (4.20) redonne la distance Riemannienne ordinaire $\forall f \in \mathcal{A}$.

(**ii**) Soient à présent φ , ψ deux états du système pré-espace-temps décrits en (4.4.5). Nous avons proposé en (4.4.1)(4.4.2) l'existence d'un automorphisme modulaire α_t (A) en temps imaginaire - ou flot modulaire Euclidien- de la forme :

$$\alpha_t(A) \rightarrow \alpha_{t\,im}(A) = e^{-ßH} A\, e^{ßH} \qquad \text{avec } ß = -i\,t \qquad \text{et} \qquad t \in \mathbb{C}. \tag{4.21}$$

D'après (4.4..2), le flot Euclidien donné par (4.21) est partout dilatant. Comme la distance spectrale donnée par (4.20) est de la forme

$$d(\varphi, \psi) = sup \left\{ | \varphi - \psi | \right\}$$

conformément au résultat (4.4.2), l'application de l'automorphisme sur le sup de la norme des V_i accroît nécessairement la distance spectrale décrite par (5.26) entre deux états φ, ψ de A. La distance d'état d (φ, ψ) est donc nécessairement croissante dans la direction du temps imaginaire $\tau_1 \prec \tau_2$. En conséquence, la " dynamique Euclidienne " à l'échelle $\mathfrak{S} < \mathfrak{S}$ planck prend donc la forme d'un accroissement de la distance d'état (ou distance spectrale) d_s séparant deux états φ, ψ. □

Nous regardons à présent une autre approche de la relation entre les secteurs Lorentzien et Riemannien de la théorie. Nous suggérons que la théorie modulaire, fondée sur l'existence du 1- cocycle de Radon-Nykodym reliant les états d'un système, peut être étendue à un cocycle à deux variables reliant les deux signatures génériques σ^+ et σ^-.

Proposition 4.4.5 *Soient deux états* $\varphi \in \sigma^{\psi}_{\tau\,\text{réel}}(x)$, $\psi \in \sigma^{\varphi}_{\tau\,\text{im}}(x)$ *sur W, il existe un cocycle à deux variables canonique*

$$\tau \rightarrow u_\tau \;, \qquad u_{\tau_1+\tau_2} = u_{\tau_1} \sigma^{\varphi,\psi}_{\tau_1}(x)\, u_{\tau_2} \qquad \forall\ \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C}$$

à valeur dans le groupe unitaire de W pour τ_1 *et* τ_2 *réels et dans le semi-groupe de W pour* τ_1 *et* τ_2 *imaginaires purs , tel que :*

$$\sigma^{\psi,\varphi}_{\tau}(x) = u_\tau \sigma^{\varphi,\psi}_{\tau}(x) u^*_\tau \qquad \forall\ \tau \in \mathbb{C} \qquad \forall\ x \in W.$$

Note le 2-cocycle ci-dessus dépend de *deux* variables et correspond ici à l'extension de ß dans la bande holomorphe. A la différence du 1-cocycle habituel -qui est associé au temps réel t du système- le 2-cocycle évoqué ci-dessous généralise le paramètre d'évolution et peut être également associé au temps imaginaire du système.

Démonstration Soient la variable complexe $\tau = t + i\,ß$ et l'algèbre d'observables $A \in W$. L'équation du 1-cocycle réel contient deux variables additives t_1 et $t_2 \in \mathbb{R}$. Le cocycle de (4.4.5) contient deux variables complexes τ_1 *et* τ_2. L'extension $t \rightarrow \tau$ implique donc la transition d'un 1-cocycle à une variable t à un cocycle à deux variables τ_{re} et τ_{im}. Les automorphismes holomorphes prennent alors la forme :

$$\sigma^{\varphi,\psi}_{\tau}(A)^{t} = e^{(it - ß)H}\, A\, e^{-(it - ß)H} \tag{4.22}$$

Le cocycle (4.22) dépend donc de deux variables, étant un 2-cocycle ramifié (**i**) vers un 1 - cocycle unitaire et (**ii**) vers un 1- cocycle non unitaire.

(**i**) Pour τ_1 *et* τ_2 réels, l'état φ est réel et les automorphismes $\sigma^{\varphi}_{\tau}(x)$ obéissent à la structure de groupe :

$$\sigma^{\varphi}_{\tau}(x) = e^{-\tau H} x\, e^{\tau H} \tag{4.23}$$

En posant $\Delta = e^{-H}$, l'on retrouve les automorphismes "Lorentziens" à temps réel $\sigma^{\varphi}_{\tau}(x)^{-} = e^{iH\tau}\, x\, e^{-iH\tau}$ soit, sous intégration :

$$\sigma_\tau^\psi(x)^- = \sigma_1(x) + \sum_{n\geq 1} i^n \int_0^1 dt_1 \int_0^{t1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} d\,t_n [\sigma_{tn}(\Phi),[\ldots[\sigma_{t1}(\Phi),\sigma_t(x)]]]$$

avec la relation de cocycle mise en évidence par O. Bratelli et D. Robinson [105] :

$$\sigma_\tau^\psi(x)^- = \Gamma_\tau^\psi \;\; \sigma_\tau(x)\, \Gamma_\tau^{\psi *}$$

$\sigma_\tau^\psi \in \mathfrak{U}$ étant une famille d'unitaires à un paramètre telle que :

$$\Gamma_\tau^\psi = 1 + \sum_{n\geq 1} i^n \int_0^1 dt_1 \int_0^{t1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} d\,t_n \sigma_{tn}(\Phi) \ldots \sigma_{t1}(\Phi)$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} i^n \int_0^1 dt_1 \int_0^{t1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} d\,t_n \sigma^\psi_{t1}(\Phi) \ldots \sigma^\psi_{tn}(\Phi) \qquad (4.24)$$

qui satisfait la relation de cocycle $\Gamma^\psi_{t+s} = \Gamma^\psi_t \; \sigma_t \; \Gamma^\psi_s$.

(**ii**) Pour τ_1 *et* τ_2, imaginaires purs, l'équ. (4.23) est à valeur dans les automorphismes de semi-groupe :

$$\sigma_\tau^\psi(x) = \Delta^{-\tau}\, x\, \Delta^\tau \quad , \quad \forall\ \tau_{im} \in \mathbb{C} \qquad \forall\ x \in W$$

d'où nous tirons, avec $\tau = i\,ß$:

$$\Gamma^\psi_{i ß} = e^{-ß(H+\psi)}\, e^{ß H} \qquad (4.25)$$

qui représente l'extension analytique du cocycle Γ^ψ reliant σ^ψ et σ au point $i\,ß$. Cette identification résulte de la cyclicité de la trace. Nous avons donc le 1 - cocyle “euclidien” :

$$\Gamma^\psi_{i ß} = 1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \int_0^ß ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \ldots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \sigma_{is_n}(\psi) \ldots \sigma_{is_1}(\psi) \qquad (4.26)$$

l'état ψ prenant la forme :

$$\omega^\psi(x) = \frac{\omega\ ((\Gamma^\psi_{iß/2})^* x\, (\Gamma^\psi_{iß/2}))}{\omega\ ((\Gamma^\psi_{iß/2})^* (\Gamma^\psi_{iß/2}))} \qquad (4.27)$$

donnant un état KMS “euclidien”. La limite imaginaire pure correspond au bord imaginaire pur de la bande KMS (**re** $\tau = 0$) et au flot euclidien dilatant l'espace des “pseudo-observables”, dual de l'espace des observables et que nous appelons "espace des états". Le 2-cocycle holomorphe

$$\sigma_\tau^{\psi,\varphi}(x) = u_\tau \sigma_\tau^{\varphi,\psi}(x) u^*_\tau \qquad \forall\ \tau \in \mathbb{C} \qquad \forall\ x \in W$$

relie donc les deux 1-cocycles de (**i**) et (**ii**) et, par conséquent, les deux familles d'états correspondantes φ et ψ, avec l'état φ (réel) $\in \mathbb{R}$ et l'état ψ (imaginaire pur) $\in \mathbb{C}$. □

L'existence d'un état induit donc celle d'un flot modulaire, flot dont A. Connes a montré, à partir du théorème de Radon-Nikodym, qu'il s'agît d'une propriété intrinsèque de l'algèbre, modulo les automorphismes intérieurs Int M de cette algèbre. Un nouveau problême consiste maintenant à voir dans quelle mesure l'automorphisme $\alpha_t(x)$ est indépendant de l'état φ, ou de tout autre état. C' est précisément le cas pour les automorphismes liés aux facteurs de

type III, ceux-là même qui interviennent dans tout état KMS. A partir d'un facteur de type III, si l'on remplace le poids φ sur M par un poids ψ, on ne modifie le groupe a un paramètre $\alpha_t(x)$ que *par un automorphisme intérieur* de M. Rappelons qu'un automorphisme $\alpha_{\text{ntérieur}}$ est dit intérieur s'il existe un élément unitaire U dans M tel que :

$$\alpha_{\text{intérieur}} = U^{\star} A \; U$$

Autrement dit, il existe un homomorphisme canonique Out(M) de l'algèbre, indépendant du choix du poids - i.e. de l'état - φ, exprimé comme quotient des automorphismes Aut(M) de M par le sous-groupe normal Int(M) des automorphismes intérieurs $\alpha(x) = u \; x \; u^* \quad \forall x \in \mathbb{M}$:

$$\delta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Out M} = \text{Aut M} / \text{Int M} \tag{4.28}$$

Ce remarquable résultat obtenu par A. Connes est à l'origine de sa classification des facteurs de type III , algèbres dont le centre Z(M) est réduit à $\mathbb{C}$ et pour lesquelles $\delta \neq 1$. Or, comme il résulte de (4.28) que l'algèbre sous-jacente à la théorie possède une dynamique intrinsèque, l'interprétation profonde (mais naturelle) que proposent A. Connes et C. Rovelli [147] est d'identifer le flot modulaire au flot temporel physique dans un contexte généralement covariant. C'est ainsi la structure algébrique intrinsèque de l'algèbre de Von Neumann décrivant les observables qui implique l'existence et le comportement du flot temporel physique. Notre approche est identique, masi cette fois dans le cas du flot temporel imaginaire (ou "évolution Euclidienne).

4.4.6 - Evolution Euclidienne et flot des poids

Le fait que les automorphismes de l'algèbre des "pseudo-observables" cessent d'être stellaires pour t imaginaire pur (correspondant aux automorphismes de semi-groupe) implique la disparition de la notion d'évolution quantique et oblige à certaines précautions sur le spectre de H. Mais plus profondément, en temps imaginaire pur, la notion d'état (i.e. borné) du système induit par l'algèbre de Von Neumann W^* nous paraît devoir être étendue vers le poids de cette même algèbre, de sorte que le flot modulaire correspondant au temps réel peut être prolongé par le "flot des poids" - au sens fixé par A. Connes [140], F. Combes [137] et M. Takesaki [483] - de l'algèbre décrivant la pseudo-évolution du système - i.e. de la métrique - en temps imaginaire.

4.4.7 Flot des poids

Définition 4.4.8 *Le flot des poids U(M) représente la restriction au centre Z = Z(N) de l'action de* $(\theta_\lambda)_{\lambda \in R_+^*}$

.

Selon la construction de Connes-Takesaki [140], l'action multiplicative de $\mathbb{R}^*_+$ correspond à :

$$\varphi \mapsto e^{-t}\varphi \qquad t \in \mathbb{R}$$

et la forme de l'action ci-dessus caractérise le flot des poids par le semi groupe e^{-t}, dont les automorphismes engendrent une dilatation de l'espace des états non bornés (ou poids), que nous proposons d'interpréter comme "évolution des états Riemanniens" en temps imaginaire, mise en évidence dans les proposition (5.6.1) et (5.6.2). Nous avons pris appui sur la construction d'A. Connes concernant l'existence d'une dynamique canonique δ associée à un facteur M de type III. Si nous appelons U (M) un espace muni d'une classe de mesure et $(U_\lambda)_{\lambda \in R+}$ un groupe à un paramètre de transformations, la dynamique intrinsèque δ associée à M définit un invariant de M qui est un flot ergodique $\{U(M), U_\lambda\}$ où $(U_\lambda)_{\lambda \in R+}$ forme un flot qui a une description intrinsèque en termes de classes de poids et dont le paramètre naturel est le groupe $\mathbb{R}^*_+$ dual de $\mathbb{R}$. L'action de $\mathbb{R}^*_+$ est multiplicative, du type $\varphi \rightarrow \lambda \; \varphi$ et est désignée dans [140] comme le flot des poids de M. La définition ci-dessus a pour fondement la décomposition effectuée par A.Connes d'un facteur de type III en un produit croisé. Soit d'abord M un facteur de type III_0 . Il a été montré [139] que :

(i) *Il existe une algèbre de Von Neumann N de type* II_∞ *et une contraction* $\theta \in$ *Aut N telle que :*

$$M = N \rtimes_\theta \mathbb{Z}$$

(**ii**) *Soit* (N_j, θ_j) *comme dans (i) avec* $N_j \rtimes_{\theta_j} \mathbb{Z}$ *isomorphe à M ; il existe des projections non nulles* $e_j \in Z(N_j)$ *telles que les automorphismes induits* ${}_{e_j}N_{e_j}$ *de* θ_j, *sont conjugués.*

Il est intéressant de remarquer que le flot des poids associé au facteur $M_{0,1}$ de type II_∞ à l'échelle 0 de l'espace-temps est un invariant de $M_{0,1}$, que nous pouvons appeler $I(\pi)$. Or, nous allons voir au chapitre 7 que la singularité initiale est précisément décrite par un invariant topologique, $I_S = tr(-1)^S$, que nous appelons "invariant de singularité", et qui est isomorphe au premier invariant de Donaldson. Nous retrouvons alors, par un tout autre chemin, la même description de la singularité initiale sous la forme d'un invariant topologique. Ceci renforce notre choix quant à la description du "flot d'évolution Euclidienne" en termes de flot des poids.

Nous concluons en indiquant en quel sens l'espace des poids sur M peut être considéré comme dual de l'espace des observables.

Proposition 4.4.9 *A tout élément de la* $*$ *- algèbre M est associé une classe de cocycle à deux variables reliant le flot réel au flot des poids de M . Le flot Euclidien des poids peut être considéré comme dual du flot temporel associé à* $t \in \mathbb{R}$.

Elts de démonstration Soit M une algèbre de Von Neumann de type III. D'après [483], M admet la décomposition suivante :

$$M = N \rtimes_\theta \mathbb{R}$$

N étant de type II_∞ . Deux poids φ et φ' sur M sont reliés par un cocycle du type dérivée de Radon-Nikodym et l'action de $\mathbb{R}$ sur M est donnée par le groupe modulaire

$$\varphi(A) = \Delta^{it} A \Delta^{-it}$$

tandisque θ transforme une trace τ semi-finie fidèle et normale sur N selon :

$$\tau \circ \theta_s = e^{-s} \tau \qquad s \in \mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R}$$

Soit à présent le produit croisé dual

$$N = M \rtimes_{\sigma\varphi} \mathbb{R} \tag{4.29}$$

de M avec le groupe modulaire d'automorphismes σ^φ d'un poids φ semi-fini normal et fidèle, le produit croisé dual (5.87) étant également semi-fini. Par dualité, en posant $\theta = \hat{\sigma}^\varphi$ le groupe d'automorphismes dual, et en utilisant une construction proposée par Takesaki [482], nous obtenons :

$$M \otimes L(L^2(\mathbb{R}) = (M \rtimes_{\sigma\varphi} \mathbb{R}) \rtimes_\theta \mathbb{R} \tag{4.30}$$

Lorsque M est de type III, l'on a $M = M \overline{\otimes} L(L^2(\mathbb{R}))$. Considérons maintenant le poids $\tilde{\varphi}$ sur N dual de φ. Le théor. de Takesaki [483] sur les relations de dualité en présence de facteurs de type III nous permet de poser :

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(x) = \sigma_t^j(x)$$

et (4.31)

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(u(s)) = u(s)$$

avec $x \in M$ et $s, t \in \mathbb{R}$. Il en résulte :

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(x) = Ad(u(t)) \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

D'après la construction générale de Tomita -Takesaki [482] et l'application qui en a résulté en théorie des poids chez Connes - Takesaki [140], nous pouvons écrire :

$u(t) = h^{it}$, $(t \in \mathbb{R})$

de sorte que le groupe dual d'automorphismes $\sigma_t^{\tilde{\varphi}}$ sur N prend la forme :

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(x) = \mathrm{Ad}(h^{it}) \tag{4.32}$$

et nous obtenons attaché à $N_{\tilde{\varphi}}$ un opérateur h positif, non singulier et autoadjoint. L'on montre qu'il existe une trace τ normale, semi-finie et fidèle sur N telle que :

$$\tau(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{\varphi}\left(x^{1/2} h(h + (\varepsilon 1))^{-1} x^{1/2}\right), \quad x \in N_+ \tag{4.33}$$

et comme $\theta_t(u(s)) = e^{ist} u(s)$, il résulte de (5.94) que $\theta_t h = e^{-t} h$. $\tilde{\varphi}$ étant invariant sous θ, l'on a alors le flot des poids $\tau \circ \theta_s = e^{-s} \tau$. Calculons le flot dual $\tilde{\theta}_s$ sur $M = N \rtimes_\theta \mathbb{R}$. Ce flot est de la forme $\tilde{\theta}_s = e^{ist}$, i.e. est construit à partir d'un opérateur du type opérateur d'évolution. Le système covariant $\{N, \mathbb{R}, \theta\}$ est tel que $M = N \rtimes_\theta \mathbb{R}$ et $\tau \circ \theta_s = e^{-s} \tau$. Considérons le poids $\varphi = \tilde{\tau}$ dual du poids τ. Il résulte du th. de Takesaki que $\{\sigma_t^{\varphi}\}$ représente l'action duale de θ. M est donc semi-fini ssi il existe un groupe unitaire à un paramètre $\{v(t)\}$ dans le centre de C_N de N tel que $\tilde{\theta}_s(v(t)) = e^{ist} v(t)$ et l'action $\tilde{\theta}$ de $\mathbb{R}$ sur M est bien duale de celle de θ. $\tilde{\theta}$ représente le groupe modulaire d'automorphismes de $\{\sigma_t^{\varphi}\}$ ou poids dual $\tilde{\tau}$ de τ de sorte que, selon [483] $\{N \overline{\otimes} L(L^2(\mathbb{R})) \mathbb{R}, \theta \otimes \rho\}$ est conjugué de $\{M \rtimes_{\sigma_\varphi}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \hat{\sigma}^{\varphi}\}$. Comme N est de type II_∞ et que $\theta \otimes_L$ et $\theta \otimes \rho$ sont conjugués par un cocycle, θ et $\theta \otimes \rho$ sont aussi conjugués par un cocycle et θ est unique à une conjugaison de cocycle près. □

Des deux propositions qui précèdent, nous tirons que, de même qu'il existe une dynamique canonique en temps réel associée à la donnée d'un état ω et du groupe d'automorphismes modulaire de M, l'on peut aussi raisonablement considérer l'existence d'une "dynamique Euclidienne" intrinsèque, en temps imaginaire, liée au flot des poids de M, et qui est la source de la dynamique en temps réel. Cette dynamique Euclidienne est fondée sur l'existence, à l'instant t = 0, d'un secteur non physique de la théorie, dont le contenu purement topologique précède et conditionne la dynamique Lorentzienne.

5

ASPECTS PHYSIQUES DE LA SUPERPOSITION DE SIGNATURE

Nous proposons dans la suite de développer deux aspects plus directement physiques de la théorie de superposition. En effet, les caractéristiques de la gravitation classique, telles que définies par la relativité générale, font obstacle à tout changement possible, à l'échelle classique, de la signature Lorentzienne de la métrique. De ce point de vue, l'on remarque que les modèles de S.Hawking [266][268] ou G.F.R Ellis *et al* [198], dans lesquels sont envisagées de possibles formes Euclidiennes de la métrique à l'échelle de Planck, ne développent pas les conditions physiques de l'évolution de la signature. Ainsi, récemment dans [271], S. Hawking et N. Turok ont proposé un modèle de raccordement de la section Lorentzienne de l'espace-temps avec une éventuelle section Euclidienne, représentée par un instanton gravitationnel. Outre les problêmes de transition entre les deux topologies (à une échelle qui n'est d'ailleurs pas clairement déterminée dans le modèle), il n'existe dans ce type d'approche aucune relation explicite entre le changement de la signature et les caractéristiques physiques de l'espace-temps considéré, i.e. au voisinage du Big Bang. L'on peut cependant s'interroger sur l'existence d'un lien possible entre courbure de l'espace-temps et signature dans le contexte nouveau de la gravité quantique. En particulier, même si un tel lien n'existe pas à basse courbure, il paraît naturel de suggérer que les conditions de très hautes courbure à l'échelle de Planck, représentables par la présence de termes non linéaires en R^2 dans le Lagrangien, peuvent avoir pour conséquence de "déformer" la signature de la métrique sous-jacente. Il est intéressant de remarquer que certains de nos résultats mathématiques, en particulier ceux du chap. 3 sur la possible q-déformation de la métrique de l'espace-temps à l'échelle de Planck et ceux du chap. 4 sur l'espace-temps comme soumis à la condition KMS à la même échelle, paraissent aller dans ce sens.

Dans ce cadre nouveau, nous proposons un scénario cosmologique suggérant une solution au problême de la Singularité Initiale du Modèle type "Big Bang" et explicitant la possible évolution du pré-espace-temps depuis l'échelle 0 jusqu'à l'échelle de Planck. Selon les indications du chap. 4, il existe, à l'échelle de Planck, une limite à la température - et à la courbure - du pré-espace-temps, limite établie par Hagedorn et précisée par Atick et Witten [38], au delà de laquelle l'on doit considérer un secteur non physique de la théorie. Or, nous suggérons dans ce chapitre qu'il est possible d'identifier le secteur non physique, situé au voisinage de l'échelle 0, avec le secteur topologique postulé par la théorie topologique des champs de Witten [518] ou Donaldson [178]. Les invariants de Donaldson sont ainsi des configurations Riemanniennes, que nous proposons d'associer à la configuration d'échelle 0 du pré-espace-temps, échelle à laquelle la signature ne devrait pas être considérée comme singulière mais redéfinie sous la nouvelle forme Eucldienne dans le cadre de la théorie topologique des champs. Cette approche repose sur deux idées essentielles :

(**i**) Conformément à certaines conclusions de la théorie des supercordes, notamment celles de E. Kiritsis et C. Kounnas dans [313], nous considérons l'hypothèse selon laquelle, à très haute courbure (i.e. à l'échelle de Planck $T \sim M_{Planck}$) la gravitation classique, décrite par l'approximation $O(1 / M_{Planck})$ et donnée par le terme d'Einstein R, n'est plus valable. Dans cette perspective, à partir de nos conclusions du chap. 4 selon lesquels l'espace-temps à l'échelle de Planck peut être considéré comme soumis à la condition KMS, et tenant compte des conditions de supergravité (notamment N = 2 et D = 4), nous considérons donc l'existence, dans le Lagrangien de la théorie, à partir de l'échelle de Planck, de termes de dérivées supérieures, en R^2. Nous conjecturons que ces termes peuvent autoriser la superposition (3, 1) $\leftrightarrow$ (4, 0) de la signature de la métrique dans le cadre d'une théorie élargissant la théorie classique de type Einstein. L'extension de la gravité classique peut être décrite de manière naturelle par l'existence de *deux* potentiels gravitationnels distincts (et non pas d'un seul potentiel, comme c'est nécessairement le cas à l'échelle classique). Nous conjecturons alors qu'en supergravité $R + R^2$ (et en N = 2), l'approximation linéarisée de la métrique de Schwartzscild peut être considérée comme une solution locale *exacte* de la théorie étendue.

(**ii**) Au deuxième paragraphe, nous précisons la forme et le contenu du Lagrangien quadratique qui nous paraît le plus naturellement adapté aux conditions de très hautes courbures R du pré-espace-temps, à des niveaux d'énergie supérieurs à la courbure de Planck

$$R >> M_{Planck}^2$$

Nous suggérons alors qu'à la limite d'échelle $ß = 0$, la théorie, de dimension D = 4, n'est ni physique ni singulière mais devient purement *topologique,* dominée par des instantons gravitationnels de dimension 0. La métrique est alors statique, définie positive (+ + + +). Le domaine de validité de l'évolution Euclidienne s'étend depuis l'échelle 0 jusqu'à l'échelle de Planck ($R \sim M_{Planck}^2$). Dualement, à l'échelle de Planck et au delà ($ß \geq L_{Planck}$), la théorie est de type Lorentzien et également de dimension D = 4. Or, selon nos résultats du chap. 3 et du chap 4, à l'échelle de Planck, les métriques Lorentziennes et Riemanniennes doivent être considérées comme quantiquement superposées. C'est pourquoi, dans le domaine de gravité quantique

$$0 < R < M_{Planck}^2$$

la théorie, définie par la quantification du groupe de Lorentz, possède une dimension supplémentaire (D = 5). Ce nouveau degré de liberté sur g_{44}, combiné aux fluctuations quantiques de la courbure du pré-espace-temps, suggère naturellement l'existence d'une phase d'"oscilllation" de la signature (3, 1) $\leftrightarrow$(4, 0). *Globalement,* la dynamique du pré-espace-temps correspond à l'expansion d'un monopôle gravitationnel de dimension 5. Mais *localement,* l'on doit supposer l'existence de fluctuations de la théorie entre le pôle Lorentzien et le pôle Riemannien, en fonction de la compactification de la quatrième direction w genre espace de la métrique associée au monopôle cosmologique de dimension D=5. Enfin, pour des valeurs d'échelle telles que

$$R < M_{Planck}^2$$

échelle à laquelle la quatrième dimension genre espace du monopôle cosmologique est définitivement compactifiée, l'espace-temps entre dans la phase Lorentzienne conventionnelle de l'expansion cosmologique.

Il est intéressant de souligner que ces motivations physiques constituent une application directe de la théorie de la q-déformation de la signature construite au chap. 3.

5.1 COURBURE QUANTIQUE NON LINEAIRE R^2

Nous commençons en suggérant que la divergence de la courbure R à partir de l'échelle de Planck peut être décrite par l'introduction, dans le Lagrangien effectif, de termes non linéaires, en R^2 [109][110]. Comme rappelé par A. Gregori, C. Kounnas et P. M. Petropou!os [248] en modèles hétérotiques de dimension D = 4 et N = 2, sous dualité *corde hétérotique* $\leftrightarrow$ *type II*, la théorie induit généralement des corrections non-perturbatives et un couplage avec des termes de dérivées supérieures R^2 + ... , lesquels couplages sont de type BPS-saturés. Comme la théorie est ici en dimension 4, le développement des termes de dérivées peut être naturellement limité à R^2. L'existence de ces termes non linéaires est associée au champ S = dilaton + axion, portant la transformation

$$i\mathbf{S} \rightarrow \frac{ia\mathbf{S} + b}{ic\mathbf{S} + d}$$

et du couplage, en dimension 4 entre $g_{\mu\nu}R$ et le dilaton complexe $\lambda_c = \frac{1}{g^2} + ia$, nous tirons la possible oscillation (3, 1) $\xleftrightarrow{\lambda_c}$ (4,0) de la signature. A l'appui de cette approche, rappelons que nos résultats mathématiques du chap 3 ont mis en évidence une importante relation de "semidualité" (au sens de majid [382]) entre, d'une part les groupes q-Lorentzien et q-Euclidiens et, d'autre part, les espaces q-Minkoskien et q-Riemannien sur lesquels agissent ces groupes. La forme générale de cette semidualité, du type

$$\text{(q-Lorentz)} \xleftrightarrow{\textit{Semidualisation}} \text{(q-Euclide)}$$

permet d'entrevoir, pour la première fois, certains mécanismes mathématiques sous-jacents au changement de signature de la métrique à l'échelle de Planck. En tous cas, les représentations mises en évidence au chap. 3 semblent suggérer que la notion de "superposition de signature", dérivée des théories de dualité ci-dessus, a un contenu effectif. Il est intéressant de remarquer que la relation de dualité, que nous avons prouvée comme reliant $\mathbb{R}_q^4$ à $\mathbb{R}_q^{3,1}$, est du type dualité d'algèbres de Hopf. Ce type de dualité a été étudiée par C. Klimcik et P. Severa [308] comme ayant une relation profonde avec la T-dualité de la théorie des cordes en physique. Ceci suggère, par une autre voie, la plausibilité de l'introduction de termes en R^2 dans le Lagrangien de la théorie.

5.1.1 Gravité étendue en R + R^2

Nous considérons donc dans la suite qu'à l'échelle de Planck, la gravité d'Einstein ordinaire perd sa validité et doit être étendue vers une R+R^2- gravité. De ce point de vue, la R+R^2- gravité peut être considérée comme une théorie effective, son domaine d'application étant déterminé par l'échelle d'énergie de la théorie. Il a été montré [110] que le Lagrangien de R+R^2- gravité, de la forme générale

$$L = \int d^4x \sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{\kappa}R + \Lambda + \alpha R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \beta R^2 + \gamma R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} + d\,\Box R\right\}$$

fournit, en dimension 4, une base possible pour la construction d'une théorie quantique unifiée rassemblant toutes les interactions (y compris la gravitation). En effet, la théorie étendue présente deux propriétés qui rendent son application particulièrement attractive à l'échelle de Planck :

(**i**) *il s'agît d'une théorie multiplicativement renormalisable ;*

(**ii**) *la théorie est asymptotiquement libre.*

En outre, le problême de la non-unitarité de la théorie peut être résolu en utilisant une approche non perturbative [25][490]. Pour ces raisons (et d'autres exposées notamment dans [110] [296]), la $R+R^2$- gravité doit être considérée comme l'extension naturelle, à très haute courbure (échelle de Planck), de la gravité relativiste classique. Notons que, dans la mesure où la théorie est en dimension D = 4, nous tronquons le développement des termes de dérivée plus élevées aux termes en R^2. Les termes de type ... R^n, du fait de la dimension de l'espace sous-jacent, sont exclus de manière naturelle.

A présent, nous conjecturons que l'existence de termes de dérivées supérieures R^2 dans le Lagrangien, induite par les contraintes de la supergravité N = 2 [217], peut constituer une source de fluctuation de la signature de la métrique.

Conjecture 5.1.2 *La présence de termes non linéaires R^2 dans le Lagrangien effectif de supergravité peut autoriser la superposition de la signature de la métrique à partir de l'échelle de Planck.*

Remarque La théorie sous-jacente est ici D = 4 et N = 2, où existe une relation entre anomalies axiales et anomalies de dilatation.

(**i**) En gravité quantique, le Lagrangien effectif doit être considéré comme quadratique et contient des dérivées d'ordre supérieur :

$$L = \int d^4x \ \sqrt{g}\left\{l^2(\alpha R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \beta R^2) + R + \kappa L_M\right\} \tag{5.1}$$

où α et β sont sont des constantes numériques et l une constante dimensionnelle. Le tenseur de Riemann est défini par $R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\alpha} + \ldots$ et le tenseur de Ricci par $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}$. Alors, les termes non linéaires dans le Lagrangien et les équations du mouvement associées peuvent autoriser le changement de signature, à la différence des termes linéaires. En effet, le Lagrangien usuel de basse énergie s'écrit :

$$I = \frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}\ d^4x \tag{5.2}$$

et les équations du mouvement correspondantes sont naturellement :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi\kappa T_{\mu\nu} \tag{5.3}$$

Or, dans l'équ. ci-dessus, la partie algébrique des termes de plus haut degré est liée à la structure algébrique de la métrique de départ. Dans la mesure où les termes en R, dérivées secondes de la métrique $g_{\mu\nu}$ sont quasi-linéaires dans (5.3) - et comme la variété sous-jacente est différentiable - la signature est donc partout fixée (sous la forme Lorentzienne dans le cas de l'espace-temps) et ne peut pas évoluer d'un point à l'autre. L'équ. du mouvement (5.3) ne comporte qu'une seule solution associée au choix de la métrique.

En revanche, les systèmes d'équations en R^2 ne sont plus quasi-linéaires. En effet, à partir du Lagrangien (5.1), les équations du mouvement associées prennent la forme non linéaire :

$$\begin{aligned} & l^2[\alpha\Box R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\alpha + 2\beta)g_{\mu\nu}\Box R - (\alpha + 2\beta)R_{\mu\nu} + \\ & + 2\alpha R_{\mu\alpha\beta\nu}R^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\alpha g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + 2\beta RR_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\beta g_{\mu\nu}R^2] + \\ & + (R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = \kappa T_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Or, à partir de la mise en évidence par B. Malgrange de solutions locales dans le cas analytique et en appliquant les résultats de J. Gasqui [230] sur l'intégrabilité formelle de la linéarisation

$$\mathrm{Ric}'_g : C^\infty(S^2T^*) \longrightarrow C^\infty(S^2T^*) \tag{5.5}$$

(ou, plus généralement, la structure des solutions linéarisées autour d'un germe [230]), l'on trouve que la linéarisation de l'équ. (5.4) autour d'un point quelconque P comporte *soit* une solution elliptique *soit* une solution hyperbolique - i.e. en chaque point, la signature résultant de l'existence de termes quadratiques de courbure peut être soit Lorentzienne (3, 1) soit euclidienne (4, 0). La gravité non linéaire R^2, en conférant à $g_{\mu\nu}$ un degré de liberté supplémentaire, peut donc être considérée comme source de la superposition des signatures Lorentzienne et Euclidienne en régime quantique.

Nous discutons à présent l'idée selon laquelle la conséquence directe de la présence à l'échelle de Planck de termes gravitationnels quadratiques en R^2 est l'existence d'un potentiel gravitationnel quantique $\phi_q = a|\psi| + b|\psi|$, constitué non pas d'un potentiel unique (comme à l'échelle classique) mais de deux potentiels distincts, indépendants l'un de l'autre. A un tel potentiel peut naturellement être associée l'oscillation du signe de la composante g_{44}. En effet, ce type de potentiel gravitationnel "quantique" nous permet d'envisager l'extension du domaine de linéarisation de la métrique de Schwartzschild en champ fort.

5.1.3 Approximation linéaire en champ fort R + R²

Considérons l'approximation linéaire de la métrique de Schwartzschild (ou métrique du trou noir linéarisée):

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) dl^2 - \left(1 - \frac{|\phi|}{c^2}\right) dt^2 \qquad (\text{avec } dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Une telle métrique n'est évidemment valide qu'en champ faible, pour un potentiel gravitationnel petit ($\phi << 1$). En effet, lorsque la courbure atteint les limites de Planck, la métrique associée doit être globalement solution exacte du ds^2 de Schwartzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \qquad (\text{avec } d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Or, nous proposons, avec l'introduction de termes quadratiques R^2 dans le Lagrangien de supergravité, une modification adéquate de la théorie gravitationnelle à l'échelle quantique, telle que la solution linéarisée de la métrique de Schwartzschild puisse être considérée comme une solution locale *exacte* de la théorie modifiée. Une telle théorie, fondée sur l'existence de deux potentiels gravitationnels distincts, comporte alors deux limites: la limite Lorentzienne ($1 - |\phi|) > 0$ et la limite Euclidienne ($1 - |\phi|) < 0$.

Conjecture 5.1.4 *En supergravité $R + R^2$ et en $N = 2$, l'approximation linéarisée de la métrique de Schwartzschild peut être considérée comme une solution locale exacte de la théorie étendue.*

P. Teyssandier a montré [492] qu'en théorie $R + R^2$, définie par un Lagrangien de forme générale :

$$L = \sqrt{-g}\left(R + \frac{1}{2}aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right) - \kappa L_m \tag{5.6}$$

L'existence de termes de Yukawa implique de façon naturelle l'existence de *deux* potentiels gravitationnels φ et ψ de la forme :

$$\phi(x) = -\frac{\kappa}{12\pi}\int \rho(x')\frac{\exp(-\mu_0|x-x'|)}{|x-x'|}d^3x'$$

$$\psi(x) = -\frac{\kappa}{6\pi}\int \rho(x')\frac{\exp(-\mu_1|x-x'|)}{|x-x'|}d^3x'$$

μ_0 et μ_1 étant deux termes de masse indépendants. La métrique linéarisée devient alors :

$$\begin{aligned} ds^2 = c^2\Big[(1-\frac{\varphi}{c^2})(1+\frac{1}{3}K_{\mu_0}e^{-\mu_0 r} - \frac{4}{3}K_{\mu_1}e^{-\mu_1 r})\Big]dt^2 - \\ -\Big[(1+\frac{\varphi}{c^2})(1-\frac{1}{3}K_{\mu_0}e^{-\mu_0 r} - \frac{2}{3}K_{\mu_1}e^{-\mu_1 r})\Big]d\sigma^2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

avec

$$K_\mu = M_\mu / M$$

L'indépendance de μ_0 et μ_1 permet de postuler l'indépdance des deux potentiels φ et ψ , de sorte qu'en imposant l' indépendance de g_{44} et des g_{ij} dans $g_{\mu\nu}$, (5.7) peut être réécrit sous la nouvelle forme :

$$ds^2 = (1-\frac{\varphi}{c^2})dt^2 - (1+\frac{\psi}{c^2})d\sigma^2$$

Dans ce cas, les conditions d'indépendance des composantes spatiales et temporelle de la métrique permettent d'avoir $\varphi \to \infty$ et $\psi > 0$ et réciproquement. Il en résulte une application locale possible, en supergravité $R + R^2$, de la forme linéarisée de la métrique en champ φ fort, ψ restant positif.

Les hypothèses ci-dessus suggèrent donc une relation profonde, qui reste à expliciter dans de futures recherches, entre courbure et signature de la métrique.

En illustration des résultats ci-dessus, nous suggérons à présent que les deux classes de signatures (3, 1) et (4, 0) sont, d'un point de vue physique, superposées à l'échelle de Planck, la contribution effective de chacune des classes étant paramétrée par l'échelle ß de la théorie. Il en résulte un scénario cosmologique de nature à compléter certaines insuffisances du Modèle Standard. En effet, notre approche suggère (i) une possible résolution de la Singularité Initiale et (ii) une description de l'"expansion topologique" du pré-espace-temps, de l'échelle 0 jusqu'à l'échelle de P¨lanck.

5. 2 TRANSITION DE LA SIGNATURE DE L'ECHELLE 0 (ECHELLE TOPOLOGIQUE (4, 0)) A L'ECHELLE DE PLANCK (ECHELLE PHYSIQUE (3, 1)).

Nous proposons dans la suite une application de la théorie gravitationnelle quadratique à la cosmologie primordiale, à une époque où l'âge de l'univers est de l'ordre du temps de Planck :

$t \sim 10^{-43}$ seconde

Dans le modèle standard du type Big Bang, le calcul des données physiques du modèle (en particulier les densités d'énergie, de température et de courbure) conduit à l'existence de divergences non renormalisables pour toute échelle inférieures à l'échelle de Planck tandisque les dimensions spatiales et temporelles convergent vers 0. Dans un tel cadre, il existe donc une singularité initiale insoluble. A cet égard, comme l'ont établi S. Hawking, et G. Ellis dans le cadre des théorèmes relativistes de singularité [270], la relativité générale prédit l'existence d'une *incomplétude géodésique* située dans le passé de la variété espace-temps, celle-ci manifestant la présence d'une singularité initiale au voisinage d'un instant 0 bornant l'origine.

Par ailleurs, la théorie des champs ordinaire ne permet pas de décrire une possible dynamique caractérisant l'espace-temps à l'échelle de Planck.

Or, nous proposons, avec la théorie de superposition (1) d'apporter, *au niveau semi-classique,* une résolution de la singularité initiale et (2) de foumir une description du comportement dynamique de l'espace-temps dans le cadre de théories gravitationnelle et métrique étendues. Dans ce cadre nouveau, le pré-espace-temps, à l'échelle 0, ne comporte pas de singularité initiale. L'on doit remarquer que notre modèle est différent de celui de S. Hawking, dont la caractéristique est de raccorder à l'espace-temps Lorentzien, sans transition, un instanton gravitationnel de diamètre non nul, ce qui exclut l'idée d'échelle 0 de la théorie. Par contraste, notre approche implique (i) l'existence d'instantons de taille 0 à l'origine et (ii) l'idée d'une phase de transition entre le mode Euclidien et le mode Lorentzien, représentée par la "superposition de signatures" entre l'échelle 0 et l'échelle de Planck. A l'échelle 0, la théorie cesse d'être physique pour être remplacée par une théorie topologique, le point d'échelle 0 du modèle correspondant simplement à un instanton gravitationnel singulier de taille 0. Dans la phase topologique d'échelle 0, le pré-univers comporte alors trois caractéritiques :

(i) malgré l'échelle 0, le pré-espace-temps reste parfaitement défini par les propriétés de l'instanton, en particulier par l'invariant de charge topologique Q = $\vartheta \int d^4x \, \mathrm{Tr}\; R_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu}$. Sa dimension est déjà D = 4 et sa signature est purement Euclidienne (+ + + +). Nous considérons que sa topologie est alors celle de la boule B^4 ;

(ii) l'orientation de la quatrième direction x^4 de la métrique instanton étant du genre espace, le pré-espace-temps d'échelle 0 est défini par une solution *statique,* indépendante du temps. A cette échelle, le temps n'existe donc pas encore et les quatre directions de la métrique sont symétrisées. Il n'existe alors aucune dynamique à une telle échelle ;

(iii) conformément à nos résultats des chap. 4 et 8 sur le flot des poids caractérisant le facteur du type II_∞ décrivant la configuration de la métrique à l'échelle 0, il existe cependant à une telle échelle une *pseudo-dynamique,* ou "dynamique Euclidienne" caractérisée par la propagation d'amplitudes topologiques sur le bord S^3 de la configuration instanton, propagation saturant l'espace de dimension 4 de 0 à l'infini. Les seules "observables" de la théorie sont, à l'échelle 0, des observables topologiques 0_γ, de la forme :

$$0_\gamma = -\frac{1}{64\pi^2}\int_\gamma \hat{R}^{ab}\hat{R}^{cd}\varepsilon_{abcd} \equiv \int_\gamma \hat{Q}(x) \tag{5.8}$$

Les observables 0_γ sont interprétées dans (5.8) comme cocycles de l'espace des modules des instantons et sont associés avec les cycles γ_i de la 4-variété M. Plus précisément, les observables physiques sont remplacées à

cette échelle par les cycles d'homologie $H_i \subset \mathrm{M}_{\mathrm{mod}}$ dans l' espace des modules $\mathrm{M}_{\mathrm{mod}}$ des configurations du type instantons gravitationnels. Avec M construit dans $\mathbb{R}^4$, les seuls cycles non triviaux sont le point (associé à une 4-forme sur l'espace des modules) et la variété M elle-même. Nous retrouvons alors les amplitudes topologiques de Witten [518], données par les invariants de Donaldson de la théorie. Cette approche est développée au chapitre 7.

Nous précisons à présent notre choix du Lagrangien de la théorie, sachant que l'échelle concernée est l'échelle de supergravité (e.g. échelle de Planck) et que le Lagrangien doit contenir les deux limites de la théorie : la limite physique et la limite topologique.

Conjecture 5.2.1 *La théorie quantique de la courbure comporte deux limites, duales l'une de l'autre : la limite physique (à l'échelle ß ≥ ℓ_{Planck}) et la limite topologique (à l'échelle ß = 0).*

Plusieurs arguments rendent plausible une telle conjecture. En particulier, le Lagrangien général $\mathbf{L}_{supergravité}$ caractéristique de la supergravité est de la forme :

$$\mathbf{L}_{supergravité} = \hat{\beta} R + \frac{1}{g^2} R^2 + \alpha RR^* \qquad (5.9)$$

$\hat{\beta}$ donnant le rayon de compactification de la théorie et α représentant l'axion. Or, nous considérons, notamment à la faveur des arguments discutés en 5.1.2 que le Lagrangien (5.9) présente typiquement la structure d'un "Lagrangien de superposition", avec une composante physique Lorentzienne (le terme d'Einstein $\hat{\beta} R$) et une composante topologique Euclidienne (le terme topologique αRR^*). L'interpolation entre ces deux composantes, selon un mécanisme combinant réduction dimensionnelle et fluctuations d'échelle et que nous suggérons ci-dessous, nous incite donc à considérer que $\mathbf{L}_{supergravité}$ décrit correctement les deux pôles d'une *même* théorie (la superposition) ainsi que les deux métriques associées. De ce point de vue, (5.9) agît aussi bien sur le secteur physique (3, 1) du pré-espace-temps que sur le secteur topologique (4, 0). Au plan mathématique, rappelons que nos résultats du chap. 2 indiquent que la structure de l'espace de superposition Σ_{top} associé à l'échelle de gravité quantique et décrit par $\mathbf{L}_{supergravité}$ est du type $\mathrm{R}^3 \otimes \mathbb{C}$, et peut être définie par l'espace topologique quotient

$$\Sigma_{\mathrm{top}} = \frac{\mathbb{R}^{3,1} \oplus \mathbb{R}^4}{\mathrm{SO}(3)} ,$$

la signature associée à Σ_{top} étant formellement du type $\sigma_{\pm} = \{+ + + (+ -)\}$.

Par ailleurs, notre construction, en § 3.3, du produit bicroisé cocyclique d'unification

$$\mathrm{Uq}(\mathrm{so}(4)^{\mathrm{op}} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} \mathrm{Uq}(\mathrm{so}(3, 1))$$

suggère bien la possible superposition , dans le cadre d'une symétrie de dualité, entre les structures q-Lorentzienne et q-Euclidienne à l'échelle de Planck. Sur le plan physique, c'est ce type d'unification que l'on peut s'attendre à voir décrite par le Lagrangien de supergravité $\mathbf{L}_{supergravité}$. A cet égard, nous avons discuté au chap. 4 la possibilité de décrire la superposition des deux classes de métriques par la fonction de partition :

$$\mathrm{Zq} = \mathrm{Tr}\,(-1)^{S}\, e^{-ß_c \not{D}^2} \qquad (5.10)$$

avec $ß_c \in \mathbb{C}$ et S donné par le terme topologique RR^*. Nous remarquons ici que le carré de l'opérateur de Dirac est le Lagrangien typique de la géométrie non commutative, théorie que nous utilisons au chap. 3 dans le contexte de la

q-déformation. Or, l'utilisaiton de $\not{D}^2$ est équivalente à l'extension vers une théorie de gravité $R+R^2$. En effet le symbole de $e^{-ß\mathcal{D}^2_+}$ a la forme :

$$\sigma\left(e^{-\tau^2\mathcal{D}^2_+}\right)_{\frac{1}{\tau}} = (-1)^n\, n! \int_\Gamma e^{-\lambda}\ \Omega_\lambda(\tau)^{n+1} d\lambda$$

ce que nous pouvons réécrire pour extraire ß :

$$\sigma\left(e^{-ß\mathcal{D}^2_+}\right)_{1/\sqrt{ß}} = e^{-|\xi|^2+\frac{1}{2}R\left(\xi,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{16}(R\wedge R)\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+B} + O(\sqrt{t}) \qquad (5.11)$$

L'on observe qu'en espace-temps plat pour $R \to 0$, (5.11) est réduit au symbole principal Lorentzien. Au contraire, lorsque $R \uparrow$, le terme de courbure du fibré B reste borné, de même que le symbole principal, écrasé par le terme de courbure.

Ainsi, à grande ou a petite courbure, e.g. selon que ß → 0 ou ß → ∞, il existe deux limites possibles de Zq et donc, deux limites de l'espace de superposition, paramétrées par l'échelle (de longueur et / ou de température) du système, duales l'une de l'autre :

(**i**) ***Limite infra-rouge*** (ß ≥ ℓ_{Planck}). La théorie est semi-clasique et le terme en R est dominant dans le Lagrangie $\mathbf{L}_{supergravité} = \hat{\beta} R + \frac{1}{g^2}R^2 + \alpha RR^*$. Il existe alors une échelle et la théorie n'est pas topologique, de sorte que les termes en R^2 et RR^* n'ont naturellement aucune contribution effective à $\mathbf{L}_{supergravité}$ et disparaissent dans l'infra-rouge. Le seul terme effectif est donc le terme linéaire en R, représentant la limite physique classique de la théorie de superposition. L'on a alors sur cette limite le Lagrangien physique

$$\mathrm{L}^{\mathrm{Phys}}_{g\to\infty} = \hat{\beta} R \qquad (5.12)$$

Dans ce cas, la dimension supplémentaire genre espace x^4, donnée par g_{44} dans $\sigma_\pm$ est compactifiée sur le cercle S^1, le rayon r_e de compactification de x^4 étant une fonction inverse de ß : $r_e = f(1/ß)$. Plus précisément, comme montré en 5.5.2, le rayon de compactification est donné par la valeur du dilaton $\varphi = \frac{1}{g^2}$ de la théorie. L'espace métrique sous-jacent est de dimension D = 4 et de type Lorentzien. En effet, pour ß > ℓ_{Planck}, la direction t genre temps est décompactifiée, le rayon de compactification de la direction genre temps étant une fonction directe de ß, identifié à l'infini au delà de l'échelle de Planck. L'on retrouve sur cette limite l'espace-temps semi-classique en expansion décrit par le modèle cosmologique standard. Sur la limite infra-rouge, le vide de la théorie correspond au vide physique du modèle standard.

(**ii**) ***Limite ultra-violette*** (ß = 0). Sur cette limite, habituellement associée à une singularité, nous imposons comme conditions sur $\mathbf{L}_{supergravité}$: $\alpha = i\pi$. Alors dans ce cas, correspondant à la limite de haute énergie du système, le terme en R devient négligeable. Comme sur cette limite, la théorie devient autoduale, l'on a $R = R^*$, de sorte que le terme en R^2 disparaît et il ne subsiste que le terme topologique donné par RR^*. Ceci suggère qu'à l'échelle 0, la théorie devient purement topologique, le Lagrangien prenant la forme "topologique" suivante :

$$\underset{g\to 0}{L^{top}} = \alpha RR^{*} \tag{5.13}$$

Dans ce cas, la direction genre temps dans $\sigma_{\pm}$ est compactifiée sur le cercle de rayon ß = 0 et disparaît donc de la théorie. Dualement, la direction genre espace, dont le rayon de compactification est une fonction inverse de ß, est donc décompactifiée sur la droite pour ß = 0. La théorie sous-jacente est à nouveau de dimension 4 et de métrique Euclidienne (+ + + +). Dans ce cas, le vrai vide de la théorie est un vide de type topologique, dual du vide physique caractérisant l'espace-temps à l'échelle relativiste.

A présent, les contraintes de la gravitation quantique, en particulier les fluctuations quantiques introduites sur les échelles de longueur de la théorie (et, donc, sur l'échelle ß) induit un "mélange" (ou superposition quantique) de la limite infrarouge et de la limite ultraviolette. L'on peut préciser celà dans le cadre des relations de dualité explorées en haute dimension par la théorie des cordes mais qui restent valables en basse dimension. En effet, à partir de (**i**) et (**ii**) nous envisageons une relation de dualité (que nous nommons "I-dualité") entre secteur physique et secteur topologique de la théorie de superposition. Nous suggérons en effet d'associer les métriques Lorentziennes (secteur physique) aux configurations gravitationnelles du type monopôles de t'Hooft - Polyakov [488] à 4 dimensions. De même, nous associons la métrique Riemannienne (secteur topologique) à la configuration de champ du type instanton gravitationnel. Dans l'esprit de la S/T-dualité de Witten et Seiberg, nous suggérons alors que le I-dual de la théorie monopôlaire D = 4 (+ + + -) est la théorie topologique du type instanton D = 4 (+ + + +). Nous avons montré au chap. 3 l'existence d'une relation de dualité (plus exactement de "semidualité") entre (i) les groupes quantiques Lorentzien et Euclidien d'une part et (ii) entre les q-espaces Minkoskien et Riemannien. Il est important d'observer que ces relations de dualité sont "isodimensionnelles", i.e. sont réalisées en dimension 4. Par ailleurs, dans le cadre général de la S / T - dualité construite en théorie des cordes - où existe une symétrie de dualité entre les champs T et S, la I-dualité monopôle-instanton isodimensionelle (D = 4) est possible.

Nous discutons dans la suite la possibilité de superposition quantique des métriques Euclidienne et Lorentzienne entre l'échelle 0 et l'échelle de Planck.

5.5.2 Superposition quantique des métriques Lorentzienne et Euclidienne

La conjecture (5.2.1) nous incite à considérer, en fonction de ß, une possible "oscillation effective" de la signature de la métrique pour le domaine d'échelle 0 < ß < ℓ_{Planck}. Dans ce cas, le Lagrangien retrouve la forme générale

$$L_{planck} = \hat{\beta} R + \frac{1}{g^2} R^2 + \alpha RR^{*}$$

et tous les termes R, R^2 et RR^{*} contribuent à L_{planck}. La signature associée à la configuration est du type

$$\sigma\pm = (+ + + \{+ -\})$$

En effet, la solution statique de dimension D=4 associée, à l'échelle ß=0, à un instanton de taille 0, peut être regardée, en dimension D + 1, comme une solution du type monopole. Dans ce cas, la configuration correspondante est celle d'un monopôle gravitationnel de dimension D = 5. Le monopôle est considéré comme évoluant dans le temps. Dans notre approche, l'évolution du monopôle initial correspond à la première phase d'expansion du pré-espace-temps, depuis l'échelle 0 jusqu'à l'échelle de Planck.

Du point de vue métrique, comme indiqué en 5.5.1, la notion de superposition de signature (ou d'oscillation quantique) est induite par les fluctuations possibles de la valeur du paramètre d'échelle ß de la théorie. Sur la limite ß = 0, la théorie est projetée sur le pôle topologique Euclidien de dimension 4 et, dualement, pour ß → ∞, la théorie est projetée sur le secteur Lorentzien. Plus précisément, la métrique du "monopôle cosmologique" de dimension 5 à l'échelle quantique a pour forme générale :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{1}{g^2} dw^2 - dt^2 \qquad (5.14)$$

le rayon ρ de compactification de la quatrième direction genre espace de la métrique étant donné par la valeur du dilaton $\varphi = \frac{1}{g^2}$ (inverse de la constante de couplage) par l'équation $\varphi = -\operatorname{Log} \rho$. Le rayon de la dimension w étant donné par le dilaton de la théorie, il en résulte l'existence des deux pôles possibles de la même théorie, avec les conséquences sur la structure de la métrique monopôlaire :

(**i**) sur la limite infra-rouge, correspondant, à partir de l'échelle de Planck et au delà, aux grandes valeurs de la constante de couplage (g → ∞), le Lagrangien de la théorie est dominé par le terme d'Einstein. Le terme en R^2 et le terme topologique disparaissent, de sorte que l'on conserve la seule composante "physique" du Lagrangien :

$$\mathrm{L}^{\mathrm{Phys}}_{g\to\infty} = \hat{\beta} R$$

la direction w est alors compactifiée et son rayon tend vers 0. Dans ce cas, le monopôle cosmologique subit une réduction dimensionnelle D = 5 $\xrightarrow{\varphi = 1/g^2 \to 0}$ D = 4 et la métrique monopôlaire devient :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 \qquad (5.15)$$

L'on trouve le monopôle à 4 dimensions associé à la métrique d'espace-temps à grande échelle. Nous développons cette limite de la théorie monopôle D=4 au chapitre 6 dans le cadre de la dualité isodimensionnelle instanton / monopôle en D = 4 ;

(**ii**) à l'inverse, sur la limite ultra-violette, associée au secteur de petit couplage de la théorie (g → 0), le terme d'Einstein disparaît du Lagrangien de superposition et ce dernier, dominé par le terme topologique devient :

$$\mathrm{L}^{\mathrm{Top}}_{g\to 0} = \frac{1}{g^2} R^2 + \alpha RR^* \to \alpha RR^*$$

La valeur du dilaton, donnée par $\frac{1}{g^2}$, est très élevée et le rayon ρ de compactification de la direction w est très grand. Au contraire, dans la mesure où l'échelle de la théorie ß tend vers 0 et que la théorie devient purement topologique, la direction genre temps du monopôle subit un collapse (t → 0) et la métrique du monopôle cosmologique prend la forme nouvelle :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \qquad (5.16)$$

où nous retrouvons l'instanton gravitationnel singulier associé à la limite topologique de la théorie.

A partir de (**i**) et (**ii**), l'on observe que la limite ultra-violette (petite échelle) et la limite infra-rouge (grande échelle) représentent deux secteurs de la même théorie et sont reliées par une relation de dualité du type T-dualité en théorie des cordes, échangeant les échelles de la théorie : $r \xleftrightarrow{T-dualité} \frac{1}{r}$, de sorte que dans notre modèle, la limite d'échelle 0 est T-duale de la limite d'échelle de Planck :

$$\text{Echelle } ß = 0 \xleftrightarrow{T-dualité} \text{Echelle } ß = l_{\text{Planck}}$$

De ce point de vue, la T-dualité échange la singularité initiale et l'échelle de Planck. De même, l'on observe, toujours à partir de (**i**) et (**ii**), la relation de I-dualité déjà signalée entre le monopôle de dimension 4 et l'instanton de dimension 4, une telle dualité exprimant de manière naturelle une symétrie de transformation entre métrique Lorentzienne et métrique Riemannienne :

$$(+\ +\ +\ -) \xleftrightarrow{I-dualité} (+\ +\ +\ +)$$

Les fluctuations de ß de 0 à l'infini paramétrisent donc (i) la compactification de w et de t sur ces deux limites et (ii) l'oscillation de signature entre ces deux limites. La "signature de superposition", correspondant à la superposition quantique des deux échelles ß = 0 et ß ≥ ℓ_{Planck} est alors :

$\sigma\pm$ = (+ + + {±})

où l'on retrouve le couplage entre une pseudo-gravité tri-dimensionnelle Euclidienne (+ + +), et un modèle sigma bi-dimensionnel, du type $\phi_c\sqrt{-g}\ R$. Le contenu du modèle sigma est fourni par les champs scalaires de la théorie réduite par compactification de la coordonnée t genre temps et de la coordonnée supplémentaire w genre espace.

5.5.3 En conclusion, la construction ci-dessus, fondée sur le choix d'un Lagrangien du type R + R^2 + RR^* nous a conduit de manière naturelle à distinguer trois régions différentes sur le cône de lumière cosmologique :

- ***la région semi-classique***, correspondant à l'échelle ß ≥ ℓ_{Planck}, de signature Lorentzienne (+ + + -) ;

- ***la région quantique***, correspondant à 0 < ß < ℓ_{Planck}, de signature "superposée" (+ + + {±})

- ***la région topologique***, correspondant à ß = 0, de signature Euclidienne (+ + + +).

A grand échelle (secteur physique de la théorie de superposition) les termes en R^2 et en RR^* ne contribuent plus dans ℓ_{Planck}, seul le terme en R ayant une contribution effective. Dans ce cas la théorie est Lorentzienne, la quatrième direction genre espace étant compactifiée sur un cercle dont le rayon tend vers 0. Au contraire, à l'échelle 0, (et considérant une valeur spécifique de α) les termes en R et en R^2 sont exponentiellement supprimés, et la seule contribution effective dans ℓ_{Planck} provient des termes en RR^*, terme topologique de la théorie. Dans ce cas, la direction genre temps est compactifiée sur le cercle de rayon 0 et la signature sous-jacente est Euclidienne. Pour les valeurs intermédiaires de ß, de 0 à ℓ_{Planck} , la théorie peut être considérée comme fluctuant (en fonction des fluctuations de ß) entre le pôle Lorentzien et le pôle Euclidien.

Du point de vue du contenu en champs, nous approfondissons les hypothèses ci-dessus au chap. suivant et proposons de décrire la phase de superposition des métriques sous la forme d'un gaz monopoles + instantons isodimensionnels (D = 4) à l'échelle de Planck.

6

DUALITÉ INSTANTON / MONOPÔLE ET DOUBLE SIGNATURE

Nous avons suggéré aux chaps 4 et 7 qu'à la limite d'échelle $ß = 0$, la théorie devient purement topologique, au sens fixé par Witten en 1988 dans [518]. Notre point de vue est qu'à cette échelle, la théorie ne présente pas de singularité mais est dominée par des instantons gravitationnels de dimension 0. La métrique est alors statique et Euclidienne (+ + + +). Nous avons vu au chap. 5 que par dualité avec l'instanton de dimension 4, la dynamique du pré-espace-temps peut alors être décrite par l'expansion d'un monopôle gravitationnel de dimension 5. La signature associée à la configuration est du type $\sigma = (+ + + \{+ -\})$. Or, nous considérons ici que la quatrième direction genre espace de σ est compactifiée à l'échelle de Planck et au delà. Ceci nous amène à préciser les conditions d'"interpolation" entre les signatures Lorentzienne et Euclidienne suggérées au § 5.2.1 :

$$(3,\ 1) \xleftrightarrow{\ Fluctuations\ de\ ß\ } (4,\ 0)$$

Dans la conjecture 5.2.1, nous indiquons que la théorie quantique de la courbure comporte deux limites, duales l'une de l'autre : la limite physique (à l'échelle $ß \geq \ell_{Planck}$) et la limite topologique (à l'échelle $ß = 0$). Considérant les possibles fluctuations de la courbure à l'échelle de gravité quantique, nous proposons alors de décrire la limite physique (métriques Lorentziennes) par des configurations gravitationnelles du type monopôles de t'Hooft - Polyakov [488] à 4 dimensions. De même, nous associons la limite topologique (métrique Riemannienne) à la configuration de champ du type instanton gravitationnel. Partant de la S-dualité de Witten et Seiberg, nous suggérons alors que le I-dual de la théorie monopôlaire D = 4 (+ + + -) est la théorie topologique du type instanton D = 4, de signature (+ + + +), les deux théories étant *superposées* à l'échelle quantique. Nous proposons alors de réécrire la métrique sous la forme $\sigma_{\pm} = (+ + + \pm)$.

6.1 INSTANTONS ET MONOPOLES A L'ECHELLE DE PLANCK

La superposition des métriques à l'échelle de Planck suggère l'existence d'un gaz formé de monopôles D = 4 et d'instantons gravitationnels D = 4. Ces monopoles de dimension 4 résultent de la compactification, au voisinage de l'échelle de Planck (limite infra-rouge de la théorie), de la quatrième direction x^4 genre espace propre au monopôle de dimension 5 dual de l'instanton gravitationnel de dimension 4 caractérisant le pré-espace-temps au voisinage de l'échelle 0. Notre thèse est que la contribution de la configuration physique monopôle de dimension 4 à l'action de superposition S_s caractérisant le domaine de gravité quantique est dominante au voisinage de l'échelle de Planck (et au delà) et minimale au voisinage de l'échelle 0. Dualement, la contribution de la configuration topologique instanton est minimale au voisinage de l'échelle de Planck et dominante au voisinage de l'échelle 0. La théorie de superposition peut alors être comprise comme une interpolation entre les deux limites d'échelle $ß = 0$ et $ß = l_{Planck}$.

6.1.1 Monopoles gravitationnels

Nous considérons les configurations monopoles sur la limite de Prasad-Sommerfield.

Définition 6.1.2 *Le monopole gravitationnel de dimension 4 associé au pré-espace-temps à l'échelle de Planck est une configuration de champ gravitationnel caractérisée par l'action gravitationnelle $\mathscr{L}_m$ sur la limite BPS :*

$$\mathscr{L}_m = -\frac{g^2}{2}\int_M \left\{ \mathrm{Tr}(R \wedge {}^*R) + \mathrm{Tr}(D_\mu \phi \wedge {}^*D_\mu \phi) \right\} = \frac{g^2}{2}\left\{ \|R\|^2 + \|D_\mu \phi\|^2 \right\}. \quad A\ l'\ infini,\ D_\mu \phi^a = 0.$$

Nous associons la métrique Lorentzienne d'espace-temps aux configurations monopôles de dimension D=4. Remarquons que dans l'approche exposée au chap. 5, le monopôle "cosmologique" est de dimension D=5. Or, selon notre approche de 5.2.1, si nous considérons à l'échelle de Planck et au delà des classes de monopôles de dimension D = 5, c'est qu'à partir de cette échelle, la quatrième direction genre espace est *compactifiée* et n'est plus relevante dans la théorie métrique associée.

Venons-en à présent à l' instanton gravitationnel.

6.1.3 Instantons gravitationnels

Définition 6.1.4 *Soit **M** une variété Riemanienne de dimension 4. Un instanton (super)gravitationnel est un point critique (minima) de la fonctionnelle* $SG(\nabla) = \int_M |R|^2 \omega_g$ *donnant l'action du système. La seconde classe de Chern* $c_2(V)$ *de **M** étant donnée par* $c_2(V) = \frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{Tr}(R \wedge R)$, *l'action de la configuration instanton peut alors être décrite par* $\mathscr{L}_i = \frac{1}{g^2(\rho)}\int d^4x\, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \theta \int d^4x\, \mathrm{Tr}\, R_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu}$

Nous associons l'instanton gravitationnel de dimension D = 4 aux métriques Euclidiennes de dimension 4. Nous suggérons pour modèle géométrique de l'instanton la boule B^4 bornée par la sphère S^3. La propagation de la solution dépend alors du support de l'instanton gravitationnel : au voisinage de la limite 0, il existe une accumulation de la charge topologique au dessus du point singulier S_0 telle que la densité de charge topologique $RR^* \to \infty$; dans la situation duale, le support de l'instanton est étendu à l'infini et $RR^* \to 0$. La transition de 0 à l'infini peut être décrite de manière adéquate par les transformations conformes de la sphère (cf. § 7.4.2).

Nous considérons à présent une configuration (gaz) composée d'instantons et de monopoles D=4 à l'échelle de Planck.

Conjecture 6.1.5 *Le champ quantique à l'échelle de Planck est constitué de deux classes d'objets duales l'une de l'autre : les monopoles et les instantons gravitationnels. L'action quantique de superposition est alors:*

$$\mathscr{L}_{m+i} = \frac{1}{g^2(\rho)}\int d^4x\, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \theta \int d^4x\, \mathrm{Tr}\, R_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} + \frac{g^2(\bar{\rho})}{2}\left\{\|R\|^2 + \|D_\mu \phi\|^2\right\} \qquad (6.1)$$

Conformément aux résultats de E. Kiritsis et C. Kounnas sur une classe d'états fondamentaux hétérotiques en dimension 4 [311], (6.1) peut être vrai en N = 4 et seulement dans certaines classes de N = 2 (résultant de la brisure spontanée de N = 2). De tels Lagangiens contiennent un potentiel scalaire représentant les termes cinétiques et un potentiel Kählerien [217]. A partir de l'échelle de Planck, nous considérons la superposition quantique **{**instantons + monopôles**}** reliés par une symétrie du type S - dualité $\frac{1}{g^2} \to g^2$ de Montonen et Olive.

Regardons à présent le domaine de validité des deux configurations. Les indications de 6.1.6 permettent de préciser la notion de superposition, introduite, au chap. 5 entre théories Lorentzienne (monopôles) et Euclidienne (instantons) à l'échelle de Planck

Proposition 6.1.6 *Au voisinage de l'échelle de Planck, correspondant à* $g \to \infty$, *l'action de superposition quantique*

est dominée par la contribution monôpole - i.e. la métrique dominante est Lorentzienne - . A l'échelle 0, correspondant à $g = 0$, *l'action est dualement dominée par la configuration du type instanton -*

(i) ***Limite infrarouge*** $g \to \infty$. Cette limite correspond ici à l'échelle de Planck et donne la limite infrarouge (i.e. grande échelle) de l'espace de superposition des métriques. Sur cette limite, la solution instanton - dont le poids dans l'intégrale fonctionnelle, donné par $e^{-\frac{1}{g^2(\rho)}\int R^2}$, est maximal - subit un "cut off" et ne contribue plus à la théorie. En effet, l'intégrale fonctionnelle n'est plus approximée par la solutions classique. La mesure d'instanton

$$d\mu = k.\, d^4x_0\, \frac{d\rho}{\rho^5} \exp\left\{-\frac{8\pi^2}{g^2(\rho)}\right\} \qquad (6.2)$$

à une boucle devient dépendant de la taille de l'instanton. Pour $\rho \to \infty$, l'équ. (6.2) diverge et induit une instabilité infrarouge dans la mesure d'instanton. Or, G. t'Hooft a montré [488] que le cut off infrarouge résulte de l'existence dans l'action d'instanton d'un terme engendré par les composantes massives du champ de jauge gravitationnel. Ainsi, à l'action $S = \frac{8\pi^2}{g^2}$, nous devons adjoindre le terme de t'Hooft, et l'action à grande échelle devient :

$$S = \frac{8\pi^2}{g^2} + 2\,\pi^2\, v^2\, \rho^2 \tag{6.3}$$

v étant la valeur attendue du champ de Higgs dans le vide. Comme $S \to \infty$ quand $\rho \to \infty$, alors $e^{-2\pi^2 v^2 \rho^2}$ est convergente pour toutes les valeurs de ρ. En phase de Higgs, il n'existe donc aucune solution exacte des équations classiques du mouvement, exceptées les solutions induites par les instantons de taille 0.

En résumé, comme rappelé par M. Shifman [463], la contribution instanton aux quantités physiques est proportionnelle à $e^{(-1/g^2)}$. Celle-ci n'est bien définie que dans le domaine quasiclassique où $g \to 0$, quand le facteur $e^{(-1/g^2)} << 1$. Pour $g \to \infty$, l'action quantique de superposition $\mathscr{L}_{i+m}$ se réduit donc à l'action du type monopôle $\mathscr{L}_m$, soit :

$$\mathscr{L}_{i+m} \to \mathscr{L}_m = \frac{g^2(\overline{\rho})}{2}\left\{\|R\|^2 + \|D_\mu \phi\|^2\right\} \tag{6.4}$$

Or, à la différence de l'instanton, la configuration de champ du type monopôle est bien définie. En effet, localement, la courbure R ne s' annule pas lorsque $R \to 0$ dans le secteur instanton. Dans le cas de l'instanton, il n'existe pas d'échelle à la théorie, contrairement à la configuration monopole qui admet une échelle. Le rayon r_μ du monopole est donc défini, et la courbure R ne disparaît pas dans les limites de r_μ. Si M_μ est la masse du monopôle, son rayon s' écrit $r_\mu = \frac{1}{M_\mu}$ et lorsque $g \to \infty$, $r_\mu \to \infty$ et $M_\mu \to 0$. La configuration monopôle interagît fortement avec la théorie et le premier terme de $\mathscr{L}_m$, soit $\frac{g^2(\overline{\rho})}{2}\left\{\|R\|^2\right\}$, est bien défini. Voyons à présent le comportement de la composante scalaire $(D_\mu \phi^a)^2$. Pour $g \to \infty$, les valeurs probables dans le vide du champ ϕ ne s'annulent pas, conformément aux conditions asymptotiques des équations du mouvement du champ ϕ qui tendent vers une constante à l'infini : $g \to \infty$ et $r_\mu \to \infty$ $\Rightarrow D_\mu \phi^a \to 1$. Il en résulte que sur la limite gravitationnelle correspondant à l'échelle de Planck et pour laquelle $R^2 \to 0$, l'amplitude de probabilité d'observer une métrique Lorentzienne est maximale et l'amplitude de probabilité d'observer une métrique Euclidienne est minimale.

Nous considérons à présent la limite inverse correspondant à $g \to 0$.

(ii) ***Limite ultraviolette $g \to 0$.*** Voyons d'abord, dans l'action quantique de superposition, la composante monopole $\mathscr{L}_m$.

$$\mathscr{L}_m = \frac{g^2(\overline{\rho})}{2}\left\{\|R\|^2 + \|D_\mu \phi\|^2\right\} \tag{6.5}$$

$g \to 0 \Rightarrow \frac{g^2(\overline{\rho})}{2}\left\{\|R\|^2\right\} \to 0$, et $\mathscr{L}_{m\,(g\to 0)}$ ne dépend plus que de la composante scalaire dans l'équ. (6.6) :

$$\mathscr{L}_{m\,(g\to 0)} \propto \|D_\mu \phi\|^2 \tag{6.6}$$

Or, pour $g \to 0$, $r_\mu \to 0$ et $M_\mu \to \infty$, de sorte que la solution monopôle est fortement massive sur cette limite et n'interagît donc pas avec la théorie. Lorsque $r_\mu \to 0$, selon la formule de Weitzenbock [407], les équations de monopôles ne possèdent aucune solution L^2 non-constante sur $\mathbb{R}^4$, de sorte qu'un monopôle gravitationnel ne peut voir sa taille tomber à 0 sans passer par la réduction dimensionnelle $D = 4 \to D = 3$ (ou bien $D = 5 \to D = 4$ dans le cas du monopôle "cosmologique" de dimension 5). D'où $\|D_\mu \phi\|^2 \to 0$, de sorte que la composante monopôle $\mathscr{L}_{m\,(g\to 0)}$ dans l'action de

superposition $\mathscr{L}_{i+m}$ tend vers 0 lorsque $g \to 0$. La seule configuration de champ susceptible de contribuer à l'action est donc la composante topologique de la configuration instanton $\mathscr{L}_{i+m\,(g\to 0)} \propto \mathscr{L}_i$. Analysons maintenant le contenu de la contribution du type instanton à la théorie de superposition, sachant que $g \to 0$ projette la théorie au voisinage de la singularité initiale. Pour $g \to 0$ la composante perturbative de l'instanton $e^{-\frac{1}{g^2(\rho)}\int d^4x\, R^2}$ est supprimée exponentiellement pour toute valeur non nulle du champ de jauge gravitationnel. Cependant, considérant le terme topologique $\theta\int d^4x\, \mathrm{Tr}\; R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu}$, la contribution complète de l'action instanton est :

$$C_i = e^{-\frac{1}{g^2(\rho)}\int d^4x\, R^2} \;.\; e^{-\theta\int d^4x\; \mathrm{Tr}\; R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu}} \tag{6.7}$$

En appliquant l'approximation du point selle pour $g \to 0$, la contribution devient, au voisinage du minimum de l'action $R = 0$:

$$C_i \approx e^{-\theta\int d^4x\; \mathrm{Tr}\; R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu}} \tag{6.8}$$

Pour $R = 0$, le champ métrique $g_{\mu\nu}$ devient une pure jauge et le terme topologique $\theta\int d^4x\, \mathrm{Tr}\; R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu} \neq 0$ est donc conservé. La théorie, vide des contributions physiques du type effet tunnel de l'instanton, ne contient plus qu'une contribution de type topologique, indépendante du champ de jauge gravitationnel. Cette contribution non perturbative, induite par la charge topologique de l'instanton, a pour unique effet (non physique) de fixer la topologie Riemannienne de la configuration - i.e. la signature Euclidienne {+ + + +} du champ de jauge au voisinage de l'échelle 0 et au point 0.

Nous déduisons de (6.1.6) que la théorie de superposition est dominée à l'échelle 0 par les configurations topologiques de champ du type instanton gravitationnel. La signature de la métrique en dimension 4 est donc Euclidienne (+ + + +) au voisinage de l'échelle 0. Ce résultat renforce le contenu de la conjecture 5.2.1.

A présent, nous précisons la contribution de l'instanton à l'échelle 0.

Corollaire 6.1.7 *La contribution de l'instanton gravitationnel à l'échelle 0 est purement topologique et ne comporte aucune composante physique. L'action topologique de l'instanton induit une signature Euclidienne (+ + + +) sur la métrique sous-jacente identifiée à la configuration.*

Remarque Par existence effective, nous entendons effets physiques, mesurables par l'amplitude d'effet tunnel annulant la distance d'univers entre deux points séparés de l'espace-temps Lorentzien

L'action de l'instanton $S_i = \frac{1}{g^2(\rho)}\int d^4x\, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \theta\int d^4x\, \mathrm{Tr}\; R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu}$ a de deux composantes :

(**i**) la composante dynamique (physique)

$$S_{i\,(\mathrm{Physique})} = \frac{1}{g^2(\rho)}\int d^4x\, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \tag{6.9}$$

impliquée dans "l'effet-tunnel" de l'instanton ;

(**ii**) la composante topologique

$$S_{i\,(\mathrm{Topologique})} = \theta\int d^4x\, \mathrm{Tr}\; R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu} \tag{6.10}$$

La contribution de l'instanton à l'intégrale fonctionnelle est alors :

$$C_i = e^{-\frac{1}{g^2(\rho)}\int d^4x\, R^2} \cdot e^{-\theta\int d^4x\ \mathrm{Tr}\ R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu}} \tag{6.11}$$

et à l'échelle 0, donnée par g = 0, la contribution de l'instanton est purement topologique. Or, la charge topologique Q est donc entièrement déterminée par le comportement asymptotique du champ de jauge $R \xrightarrow{|x|\to\infty} 0$ mais ce n'est pas le cas pour le potentiel de jauge $g_{\mu\nu}$ qui devient une pure jauge: $g_{\mu\nu}(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} U(x)\partial_\mu U^{-1}(x)$, le vide de la théorie étant non trivial. Les éléments de jauge $U(x) \in \mathrm{SU}(2),\ x \in S^3$ sont tels que : U = $A + i\vec{\sigma}\,\vec{B},\ A^2 + \vec{B}^2 = 1$ et $U(x)$ représente $U\colon S^3 \to \mathrm{SU}(2) \cong S^3$ où nous trouvons les applications de la sphère S^3 représentant l'espace physique compact E^3, bord de l'espace E^4, sur l'espace isotopique de SU(2), également isomorphe à S^3. L'intégration sur la famille de sphères S^3 implique donc que la signature de l'espace sous-jacent à la configuration (identifié à l'espace "physique") est nécessairement Euclidienne (+ + + +).

Nous suggérons à présent qu'au voisinage de l'échelle 0, la symétrie Euclidienne est restaurée.

6.2 SYMETRIE INSTANTON 0

Nous proposons dans la suite le point de vue selon lequel la trace du noyau de la chaleur Tr $(-1)^s\, e^{-ß\not{D}^2}$ peut être évaluée de deux manières duales pour ß → 0 et pour ß → ∞.

Proposition 6.2.1 *Dans l'espace de superposition des métriques Lorentziennes et Euclidiennes, la différence entre les deux classes de signatures est un invariant topologique, donné par l'indice de l'opérateur de Dirac de la variété spinorielle pré- espace-temps, de la forme:*

Ind $\not{D}$ = *Tr* $(-1)^s\, e^{-ß\not{D}^2}$

avec $ß \in \mathbb{C}$, *s étant le nombre de métriques. L'indice, constant et égal à 1, donne une métrique Lorentzienne à l'échelle de Planck et une métrique Euclidienne à l'échelle 0.*

E. Witten a montré [522] qu'étant donnée une théorie quantique des champs supersymétrique, l'on peut définir la quantité I = Tr $(-1)^f$, f étant le nombre fermionique et I donnant la différence entre le états bosoniques et fermioniques dans l'espace de Hilbert de la théorie. Nous étendons en supergravité ce résultat en posant :

$$\dot{\mathfrak{t}} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S \tag{6.12}$$

$\dot{\mathfrak{t}}$ donne la différence entre le nombre d'instantons et de monopoles gravitationnels dans l'espace de Hilbert de la théorie de superposition à l'échelle 0 et S désigne le nombre de métriques de la théorie. L'indice supergravitationnel dépend seulement des modes 0 des états d'énergie - les valeurs propres de l'Hamiltonien $\not{D}^2$ étant l'énergie - , les états d'énergie non nuls induisant l'existence de paires monopôles - instantons. De plus, $\mathrm{Tr}(-1)^S$ est invariant sous les déformations continues de l'Hamiltonien et constitue donc un indice topologique de la théorie de déformation quantique de la signature d'espace-temps. Calculons à présent l'indice de l'opérateur de Dirac à partir de la régularisation de la trace. L'indice $\dot{\mathfrak{t}}$ de l'opérateur de Dirac est donné par :

$$\dot{\mathfrak{t}} = \mathrm{Tr}\,\Gamma\, e^{-ß\not{D}^2} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S\, e^{-ß\not{D}^2} = \int_{cpl} [Dx]\,[D\psi]\, e^{-\int_0^ß dt\, L} \tag{6.13}$$

où cpl représente une condition de périodicité aux limites. Le Lagrangien Euclidien est donné par :

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\,\psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{Dt}$$

D'après (5.3.1), la température T_c de la variété pré-espace-temps à l'échelle de Planck doit être considéré comme complexe. Nous posons donc ß complexe dans (6.17), de sorte que l'indice de l'opérateur de Dirac s'écrit :

$$\dot{\mathfrak{t}} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S\, e^{-ß_c \not{D}^2} = n_i^{E=0} - n_m^{E=0} \qquad (6.14)$$

où n_i représente le nombre d'instantons et n_m le nombre de monopôles dans l'espace de superposition. D'après (6.1.7) $ß_c$ joue le rôle de constante de couplage dynamique de la théorie (dilaton complexe λ_c) : $\lambda_c = \frac{1}{g^2} + \theta$ et l'indice de l'opérateur $\not{D}^2$ devient :

$$\dot{\mathfrak{t}} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S\, e^{-ß_r \not{D}^2} .\ e^{i ß_i \not{D}^2} \qquad (6.15)$$

l'exponentielle $Z = \mathrm{Tr} e^{-ß_r \not{D}^2}$ représente la fonction de partition des états de la théorie, construite en métrique Euclidienne et correspond au secteur instanton de l'espace de superposition. En revanche, $\hat{Z} = \mathrm{Tr}\ e^{i ß_i \not{D}^2}$ représente l'opérateur d'évolution de la théorie, défini seulement en métrique Lorentzienne et correspond au secteur monopôle de l'espace de superposition. Calculons séparément l'indice I^+ - associé à la variété Riemannienne sur laquelle est défini l'opérateur de Dirac - et le "pseudo-indice" I^- - associé à la variété Lorentzienne - :

$$I^+ = \mathrm{Tr}\,(-1)^S\, e^{-ß_r \not{D}^2} \quad \text{et} \quad I^- = \mathrm{Tr}\,(-1)^S\, e^{i ß_i \not{D}^2} \qquad (6.16)$$

(**i**) L'indice I^+ sur la 4-variété Riemannienne donne la différence entre le nombre de solutions self-duales du système - instantons $\mathtt{i}$ - et de solutions anti-self-duales - anti-instantons $\bar{\mathtt{i}}$ - : $I^+ = \mathrm{Tr}\,(-1)^S\, e^{-ß_r \not{D}^2} = \mathtt{i} - \bar{\mathtt{i}}$.

(1) L'indice étant indépendant de ß, nous posons ß = 0. Tous les états possibles de la théorie sont alors excités dans le cadre d'une théorie purement topologique et I^+ devient :

$$I^+_{ß=0} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S \qquad (6.17)$$

ce qui correspond à l'échelle 0 de la théorie de superposition, dominée par les configurations de champ du type instantons de taille 0. La relation entre l'indice donné par le théorème d'Atiyah-Singer et la caractéritique d'Euler d'une variété nous permet de poser la valeur de I^+ à l'échelle 0 :

$$I^+_{ß=0} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S\, e^{-ß_r \not{D}^2} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S = \mathtt{i}^{E=0} - \bar{\mathtt{i}}^{E=0} = 1 \qquad (6.18)$$

L'indice est calculé indépendamment du Hamiltonien et la théorie correspondante est nécessairement topologique. La différence entre nombre d'instantons et d'anti-instantons de la configuration Euclidienne est invariente et égale à 1, quelle que soit l'échelle de la théorie. Nous pouvons donc déduire de (6.18) le nombre d'instantons à l'échelle 0 correspondant à l'origine de la variété espace-temps :

à l'échelle 0, la charge topologique, ou nombre d'instantons est 1 - i.e. il existe à l'origine de la variété de superposition des métriques un instaton gravitationnel singulier de taille 0 - .

Conformément à la théorie de Witten [524], l'instanton singulier de taille 0 est le résultat de l'effondrement en un point des n instantons et anti-instantons gravitationnels existant à une échelle arbitraire. L'effondrement du gaz d'instantons en un point peut également être décrit comme un "effondrement Riemannien", dans l'esprit de P. Pansu [419].

(2) Définissons à présent I^+ sur la limite singulière correspondant à $ß \to \infty$. Sur cette limite, la solution classique instanton n'est plus définie, de sorte que le nombre topologique associé à la solution disparaît. L'on doit donc s'attendre à ce que l'indice de l'opérateur de Dirac tombe à 0 sur cette limite. En effet, partant de (6.18) :

$$I^+_{ß \to \infty} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S\, e^{-ß_r \not{D}^2} \qquad (6.19)$$

nous observons que lorsque ß → ∞, nous avons $e^{-ß_r \not{D}^2} \to 0$, de sorte que l'indice I^+ devient $I^+_{ß \to \infty} = 0$ sur la limite. L'indice de l'opérateur de Dirac est donc bien défini pour ß <∞ ; toutefois, ß → ∞ ⇒ T → 0, et l'infinité d'états excités sur la limite ß = 0 s'effondre à ß → ∞ sur un seul état possible. La variété Euclidienne D = 4 sous-jacente est déformée à l'infini en une variété-limite Lorentzienne de dimension D = 3 + 1, et l'indice $I^+_{ß \to \infty}$, correpondant à la caractéristique d'Euler sur une variété de dimension impaire, s'annule.

(**ii**) Calculons à présent le nombre de monopôles caractérisant la solution Lorentzienne sur les deux limites ß = 0 et ß → ∞. En métrique Lorentzienne, la notion d'indice au sens strict disparaît, mais il subsiste la possibilité de calculer le nombre monopôlaire, donné par :

$$I^- = \mathrm{Tr}\,(-1)^S e^{i ß_i \not{D}^2} = m^{E=0} - \overline{m}^{E=0} \tag{6.20}$$

(1) Sur la limite ß = 0, l'indice monopôlaire I^- donné par (9.24) devient :

$$I^-_{ß \to 0} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S \tag{6.21}$$

La limite (6.26) correspond à la limite de compactification de la théorie Lorentzienne (3, 1) évoquée en (7.2) et sur laquelle, pour t = 0, la dimension de la variété espace-temps passe, par réduction dimensionnelle, de 4 à 3 dimensions. E.Witten a mis en évidence cette réduction [517]. La variété a donc pour limite (i.e. pour bord) à t = 0 la 3-géométrie Euclidienne $\hat{E}^3$, dont la métrique est définie positive (+ + +). Or, dans ce cas, la variété sous-jacente étant de dimension impaire, la caractéristique d'Euler, donnée par $I^-_{ß \to 0} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S$ est donc nulle, de sorte que :

$$I^-_{ß \to 0} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S = 0 \tag{6.22}$$

et l'indice de la 3-géométrie résultant de la compactification de la théorie Lorentzienne à t = 0 est nul. Nous tirons de (6.22) que le nombre de monopôles est nul sur la limite d'échelle 0, l'on a $m^{E=0}_{t=0} - \overline{m}^{E=0}_{t=0} = 0$.

(2) Pour $ß_i \to \infty$ (ech. de Planck et au delà), la solution donnée par

$$I^-_{ß \to \infty} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S e^{i ß_i \not{D}^2} \tag{6.23}$$

devient fortement oscillante. Comme (6.23) n'est pas une distribution, pour $ß_i \to \infty$, l'opérateur oscillant $e^{i ß_i \not{D}^2}$ se comporte comme $(-1)^S$ et ne tend pas vers 0 mais vers la valeur constante finie 1. En effet, l'identité d'Euler permet de réécrire $e^{i ß_i \not{D}^2}$:

$$e^{i ß_i \not{D}^2} = \cos \not{D}^2 ß_i + i \sin \not{D}^2 ß_i \tag{6.24}$$

(6.24) est de module unité, de sorte que $e^{i ß_i \not{D}^2} \to 1$ lorsque $ß_i \to \infty$. Il en résulte pour l'indice sur cette limite : $I^-_{ß \to \infty} = 1$, et le nombre monopôlaire est 1 lorsque $ß_i \to \infty$.

(**iii**) Combinant (i) et (ii), nous pouvons maintenant calculer l'indice de la variété de superposition $I^\pm$: $I^\pm = I^+ - I^-$, $I^\pm$ correspondant à ß complexe. L'indice prend alors la forme construite ci-dessus :

$$I^\pm = \mathrm{Tr}\,(-1)^S e^{-ß_c \not{D}^2} = n^{E=0}_i - n^{E=0}_m = \mathrm{Tr}\,(-1)^S e^{-ß_r \not{D}^2} . e^{i ß_i \not{D}^2} \tag{6.25}$$

et comme l'opérateur matriciel de Dirac a la structure d'un projecteur, au produit des exponentielles (6.25) donnant $I^\pm$ correspond la somme des indices I^+ et I^-, de sorte que, i représentant les instantons et m les monopôles :

$$I^\pm = \mathrm{Tr}\,(-1)^S e^{-ß_r \not{D}^2} + \mathrm{Tr}\,(-1)^S e^{i ß_i \not{D}^2} = I^+ + I^- = (i - \overline{i}) + (m - \overline{m}) \tag{6.26}$$

Calculons l'indice de superposition aux limites $I_0^{\pm}$ et $I_\infty^{\pm}$ correspondant à $ß_c \to 0$ et $ß_c \to \infty$:

$$I_0^{\pm} = I_0^{+} + I_0^{-} = (i - \bar{i})_0 + (m - \bar{m})_0$$

soit :
$(i - \bar{i})_0 = 1$ et $(m - \bar{m})_0 = 0$, d'où $I_0^{\pm} = 1$. De même, $I_\infty^{\pm} = I_\infty^{+} + I_\infty^{-} = (i - \bar{i})_\infty + (m - \bar{m})_\infty$ et comme $(i - \bar{i})_\infty = 0$ et $(m - \bar{m})_\infty = 1$, nous trouvons pour l'indice de superposition à l'infini $I_\infty^{\pm}$:

$$I_\infty^{\pm} = 1$$

et aux deux limites l'indice est identique, de sorte que nous pouvons poser dans l'espace de superposition :

$$I^{\pm} = I^{+} + I^{-} = (i - \bar{i}) + (m - \bar{m}) = 1$$

soit encore, de manière équivalente :

$$I^{\pm} = I^{+} - I^{-} = (i - \bar{i}) - (\bar{m} - m) = 1 \qquad (6.27)$$

et la différence entre le nombre d'instantons et de monopôles donné par $I^{+} - I^{-}$ représente donc un invariant topologique de la variété de superposition. Nous retrouvons alors les deux limites :

$$ß_c = 0 : \ (i - \bar{i}) = 1 \Leftrightarrow (\bar{m} - m) = 0$$

et à l'échelle 0 la solution a pour charge topologique 1, si bien que l'espace de superposition est caractérisé par l'instanton gravitationnel singulier I^{+} de taille 0. Au contraire, sur la limite infinie - i.e. grande échelle - de l'espace-temps, la solution devient :

$ß_c \to \infty$: $-(\bar{m} - m) = 1$, soit $(m - \bar{m}) = 1$ et à l'infini, la solution désormais monopôlaire ne présente plus qu'un monopôle singulier m.

Nous tirons donc de ce qui précède qu'à grande échelle, l'indice de superposition est égal à 1 et la variété sous-jacente est non compacte, du type (3, 1). La configuration topologique correspondante est donc celle d'un monopôle gravitationnel. monopôlaire. Au contraire, à l'échelle 0, l'indice de la variété sous-jacente étant 1, la topologie correspondante est alors celle d'un instanton gravitationnel de taille 0. La configuration monopôlaire à l'échelle de Planck est "twistée" en une configuration du type instanton gravitationnel de taille 0 à l'échelle 0.

De la prop. (6.2.1), nous tirons donc que le point singulier $\mathbb{S}$ marquant l'origine du pré-espace-temps à l'échelle 0 correspond à un instanton gravitationnel singulier -i.e. de charge topologique 1 - de taille 0. La signature sur $\mathbb{S}$ est hypersymétrique - i.e. Euclidienne (+ + + +). Plus généralement, la métrique Euclidienne (+ + + +) portée par l'instanton de taille 0 domine la théorie de superposition au voisinage de l'échelle 0 et, dualement, la métrique Lorentzienne domine la théorie au voisinage de l'échelle de Planck. Une question intéressante, de nature à éclairer la première phase d'expansion de l'espace-temps dans le domaine de Planck consiste à comprendre les causes possibles de la transition conduisant l'instanton de la taille 0 au rayon de Planck. Nous évoquons cette question au chap. 8. et suggérons qu'il existe, antérieurement à la phase physique d'expansion de l'espace-temps, une phase non physique, de type topologique, induisant une nécessaire dilatation des métriques Riemanniennes (gaz d'instantons) depuis l'échelle 0 jusqu'à la longueur de Planck.

Dans le chapitre suivant, nous considérons qu'au voisinage de l'échelle 0, la théorie physique doit être remplacée par une théorie duale, i.e. la théorie topologique des champs. Nous proposons alors une solution possible de la singularité initiale de l'espace-temps dans le cadre de la théorie topologique.

7

THEORIE TOPOLOGIQUE DE LA SINGULARITE INITIALE

Au chap. 4, nous avons discuté, dans le cadre de la théorie KMS appliquée à l'espace-temps à très haute température (température de Planck), l'existence des deux classes possibles (3, 1) et (4, 0) de signatures de la métrique. Nous prolongeons ici les hypothèses des chap. 5 et 6 en discutant quelques arguments d'un genre différent de ceux utilisés jusqu'ici et suggérant, à leur tour, qu'à la limite d'échelle ß = 0 (correspondant à une limite de température), la théorie, de dimension D = 4, devient purement topologique. Dualement, à l'échelle de Planck (ß ≥ L_{Planck}), identifiée comme la limite de "grande échelle", la théorie est de type Lorentzien et également de dimension D = 4. Rappelons que le Lagrangien adopté au chap. 5 est de la forme

$$\mathbf{L}_{supergravité} = \hat{\beta} R + \frac{1}{g^2} R^2 + \alpha RR^*$$

Or, à l'échelle de Planck et, à fortiori, lorsque ß → 0, il ne subsiste que le terme topologique donné par αRR^*, la théorie étant alors purement topologique. Le Lagrangien "topologique" est donc :

$$\mathbf{L}_{top} = \alpha RR^*$$

De plus, il est intéressant de relever l'un des éléments du chapitre 5 d'après lequel, dans le domaine de gravité quantique (0 < ß < L_{Planck}), la théorie peut être vue, dans le cadre de la transformation

$$\text{instanton D = 4} \xleftrightarrow{\textit{transformation}} \text{monopôle D = 5}$$

comme possèdant une dimension supplémentaire (D = 5). Ceci indique l'existence d'un degré de liberté supplémentaire pour la métrique et rend possible l'existence d'une supergravité élargie, autorisant, dans l'esprit de la deuxième conjecture (5.2.1) du chap. 5, la superposition des deux classes Lorentzienne et Euclidienne de la signature. Nous considérons donc l'existence d'une deuxième limite topologique de la théorie physique, non triviale, située à l'échelle ß = 0 et donc duale de la limite de Witten (ß → ∞).

La limite d'échelle 0 (limite ultraviolette) duale de la limite à grande échelle (limite infrarouge) de la théorie a un contenu bien défini en théorie topologique, ce qui suggère une solution topologique au problême posé par la Singularité Initiale de l'espace-temps. Les conséquences cosmologiques d'une telle approche (notamment pour ce qui est de l'expansion du pré-espace-temps) sont à nouveau discutées et précisées au chapitre 8.

7.1 THEORIES TOPOLOGIQUES

Nous définissons la théorie topologique comme la quantification de zéro, le Lagrangien étant soit un mode 0, soit une classe caractéristique $c_n(V)$ d'un fibré vectoriel $V \xrightarrow{\pi} M$ sur l'espace-temps, de sorte que la valeur de l'action :

$$S_{class} = \int_M \mathcal{L}_{class} = \int_M c_n(V) = k \in \mathbb{Z} \tag{7.1}$$

est nulle ou correspond à un nombre topologique. Nous adoptons ici l'approche des théories cohomologiques, du type théorie de Donaldson en D = 4. La propriété de (7.1) est que les fonctions de corrélation des opérateurs locaux

$$G(x_1, \ldots\ldots x_n) = \langle O(x_1)\, O(x_2) \ldots\ldots\, O(x_n) \rangle \tag{7.2}$$

deviennent des *constantes de corrélation*, indépendantes des opérateurs $O(x_i)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} G\,(x_1, \ldots\ldots, x_n) = 0 \qquad \forall x_i$$

Définition 7.1.1 *La théorie topologique des champs est définie par un champ cohomologique tel qu'une fonction de corrélation de n observables physiques* $\langle O_1 O_2 \ldots\ldots O_n \rangle$ *peut être interprétée comme le nombre d'intersections*

$$\langle O_1 O_2 \ldots O_n \rangle = \#(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n)$$

de n cycles d'homologie $H_i \subset \boldsymbol{M}_{mod}$ *dans l'espace des modules* $\boldsymbol{M}_{mod}$ *de configurations de type instanton [$\phi(x)$] sur les champs ϕ de la théorie.*

Selon la définition habituelle de la théorie topologique (en D = 4), celle-ci est établie lorsque le Lagrangien du système est H = 0, et la théorie est indépendante de la métrique sous-jacente. Nous proposons d'étendre cette définition en posant qu'une théorie peut aussi être topologique *si elle ne dépend pas du Hamiltonien* (ou du Lagrangien).

Déf. 7.1.2 *Une théorie est topologique lorsque, le Lagrangien* **L** *étant non trivial, celle-ci ne dépend pas de* **L**.

A partir de cette définition, nous suggérons qu'il existe une *deuxième* limite topologique de la théorie, non triviale, duale de celle donnée par H = 0. Dans ce cas, H $\neq$ 0 correspondant à la limite d'échelle 0 associée à ß = 0. C'est précisément le cas lorsque $\mathbf{L}_{top} = \alpha RR^*$

Remarque 7.1.3 *Il existe sur la limite d'échelle ß = 0 une limite topologique non triviale de la théorie, duale de la limite topologique habituelle correspondant à ß* $\rightarrow \infty$.

Le contenu (thermo)dynamique de la théorie est génériquement décrit par la fonction de partition :

$$Z = \mathrm{Tr} e^{-ßH} \tag{7.3}$$

Or, à l'échelle ß = 0, la théorie ne dépend plus de H. En effet, sur cette limite telle que la température T $\rightarrow \infty$, (7.3) devient Z_0 = Tr (1) $\rightarrow$ n et H disparaît de (7.3) comptant le nombre d'états de la théorie. ß apparaît alors comme constante de couplage, de sorte qu'il existe une infinité d'états possibles indépendants de H. Malgré le fait que la courbure de la variété sous-jacente R $\rightarrow \infty$ (i.e. H $\neq$ 0) la contribution dynamique à la théorie est nulle à l'échelle 0, de sorte que l'on tombe sur une théorie D = 4 purement topologique, décrite par le premier invariant de Donaldson

$$I = \sum_i (-1)^{n_i} \tag{7.4}$$

La limite ß = 0 est naturellement duale de la limite topologique usuelle ß $\rightarrow \infty$ donnée par H = 0. L'opérateur densité du système pré-espace-temps s'écrit $\rho = e^{-\beta H + \lambda_0}$, λ_0 étant un facteur de renormalisation du système. Lorsque ß = 0, l'opérateur densité est alors réduit à $\rho = e^{\lambda_0}$, indépendant de H $\neq$ 0, caractéristique d'une deuxième limite topologique de la théorie, duale de la limite triviale associée à la température T = 0 et à l'échelle ß $\rightarrow \infty$.

Nous avons établi au chap. 4 l'existence d'une relation de dualité (i-dualité) entre secteur physique et secteur topologique de la théorie de superposition. Nous comparons à présent ce type de dualité avec les autres dualités possibles de la théorie à l'échelle de Planck, la théorie étant N = 2.

7.2 DUALITES ET CHANGEMENT DE SIGNATURE

La théorie N = 2 possède deux grandes symétries de dualité :

- la S-dualité a pour groupe SL(2, $\mathbb{Z}$) et le vecteur (F_D, F) est transformé en un doublet de la forme :

$$S : \begin{pmatrix} F_D \\ F \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_D \\ F \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

- la T-dualité a pour groupe O(p, q ; $\mathbb{Z}$) et donne la transformation :

$$T : \begin{pmatrix} F_D \\ F \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} F_D + F \\ F \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

Or, notre hypothèse est qu'à partir de l'échelle de Planck, la théorie peut être décrite par une symétrie plus générale, non perturbative, unifiant les dualités S et T et mélangeant le modèle sigma et les constantes de couplage de la corde. Il s'agît de la U-dualité. C.M. Hull et P.K. Townsend ont en effet établi [282] en dimension D = 6 que l'action effective pour la corde de type II compactifiée sur un 6-tore est la supergravité N = 8, caractérisée par une symétrie de dualité E_7. Or en régime quantique, celle-ci est brisée en un sous-groupe discret

$E_7(\mathbb{Z}) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}) \times O(6, 6; \mathbb{Z})$

contenant à la fois le groupe de T - dualité $O(6, 6; \mathbb{Z})$ et le groupe de S-dualité $SL(2, \mathbb{Z})$. Le groupe de symétrie-miroir $E_7(\mathbb{Z})$ est une "U-dualité" exacte de la théorie, telle que $U = S \otimes T$. En dimension 6, la corde de type IIA sur K3 est équivalente à la corde hétérotique sur T4, cette équivalence étant décrite par le groupe de U-dualité $O(4, 20, \mathbb{Z})$. Le 0-mode du dilaton est relié au couplage de la corde g et tous les champs scalaires de la théorie ont une contribution équivalente. La compactification en D = 4 sur le 2-tore donne l'équivalence entre le champ T de la corde de type IIA et le champ S de la corde hétérotique au sein du champ U de la corde de type IIB. Il en résulte la dualité générale $S/T \rightarrow U$ évoquée en (4.1.4) et vérifiée par C. Kounnas *et al* entre la corde hétérotique $E_8 \times E_8$ sur $K^3 \times T^2$ et la corde de type II sur les variétés Calabi-Yau.

(**iii**) Nous conjecturons, à partir de (**ii**), l'existence d'une U-dualité $U = S \otimes T$ entre le secteur physique (échelle de Planck) et le secteur topologique (échelle 0) de la théorie. Cette U-dualité, échangeant la dualité S entre couplages fort et faible et la dualité T entre échelle de Planck et échelle 0, nous permet de poser l'existence dans la variété de superposition d'une dualité "de forme" (au sens de E. Verlinde [508]) entre l'origine singulière et la limite "à grande échelle" (échelle de Planck) de la variété, i.e. entre le vide topologique (échelle 0) et le vide physique (échelle de Planck) de la théorie :

Vide physique (ß = ℓ_{Planck}, monopole, (+ + + + -)) $\xleftrightarrow{U-dualité}$ *Vide topologique (ß = 0, instanton,* (+ + + +))

Alors:

Conjecture 7.2.1 *Il existe une symétrie de U-dualité U = S ⊗ T entre le secteur physique (échelle de Planck) et le secteur topologique (échelle 0) de la théorie.*

A l'appui de cette conjecture, rappelons les résultats de C.M. Hull qui a montré [285] que la théorie duale de la corde Euclidienne compactifiée sur un cercle genre espace de rayon R est la corde Lorentzienne compactifiée sur un cercle genre temps de rayon 1/R. Considérons ainsi une théorie avec un "target space" plat muni d'une dimension de coordonnée $X \sim X + 1$, de sorte que l'action du "world-sheet" associée inclut

$$S = \lambda \frac{1}{2} \int d^2\sigma \partial_a X \partial^a X + \ldots \tag{7.7}$$

où $\lambda = R^2$ pour un cercle genre espace de rayon R et $\lambda = -R^2$ pour un cercle genre temps de rayon R. σ^a sont les coordonnées du "world-sheet". La T-dualité peut être étudiée en jaugeant la symétrie $X \rightarrow X + c$ selon [285], ce qui donne l'action $S = \int d^2\sigma \left(\frac{1}{2} \lambda D_a X D^a X + \epsilon^{ab} A_a \partial_b Y + \ldots \right)$ où $D_a X = \partial_a X - A_a$. Le multiplicateur de Lagrange impose la contrainte $F_{ab} = 0$ $(F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a)$ et implique que A soit une pure jauge. Le champ multiplicateur Y est a valeur sur le cercle $Y \sim Y + 1$. Les termes impliquant X peuvent être jaugés de sorte que A_a devient un champ auxillaire qui peut être émiminé pour donner $S = \lambda' \frac{1}{2} \int d^2\sigma \partial_a Y \partial^a Y + \ldots$ où $\lambda' = -\frac{\varepsilon}{\lambda}$, ε étant un coéfficient dans l'identité $\epsilon^{ab}\epsilon^{cd} = \varepsilon \left(h^{ac} h^{bd} - h^{ad} h^{bc} \right)$ où h_{ab} est la métrique du world-sheet. Alors $\varepsilon = -1$ pour un world-sheet Lorentzien et $\varepsilon = 1$ pour un world-sheet Euclidien. L'on observe alors qu'à partir d'un feuillet Euclidien, l'on a $\lambda' = -\frac{1}{\lambda}$ et un cercle genre espace (resp. genre temps) de rayon R (dans lequel X est à valeurs) est échangé avec un cercle genre temps (resp. genre espace) de rayon $1/R$ dans lequel Y est à valeurs, ce qui

montre que la signature de l'espace des X est modifiée. La T-dualité correspond alors à l'application $X \xrightarrow{T} Y$ où $\partial_a X = \epsilon_a{}^b \partial_b Y$, d'où $(\partial X)^2 = -\varepsilon(\partial Y)^2$. Nous pouvons en tirer en dimension D=3+1 la compactification, à l'échelle 0, de la direction genre temps de $\sigma\pm$ sur le cercle genre temps S_t^1 de rayon R = ß. Dualement, à l'échelle de Planck et au delà, la direction supplémentaire genre espace de $\sigma\pm$ est compactifiée sur le cercle S_e^1 genre espace, de rayon R = 1/ß, i-dual du cercle genre temps S_t^1.

Les résultats précédents suggèrent donc une possible interpolation, entre l'échelle 0 et l'échelle de Planck, entre la forme euclidienne et la forme Lorentzienne de la métrique. Ceci suggère l'image d'une pseudo-gravité tri-dimensionnelle couplée à deux modèles sigma bidimensionnel, couplage du type :

$$(+++) \times \frac{SL(2,\ \mathbb{R})}{SO(2)} \times \frac{SL(2,\ \mathbb{R})}{SO(2)}$$

D'une manière générale, nous proposons l'existence, à l'échelle quantique, d'un couplage entre le tenseur métrique et les champs scalaires complexes de la théorie. Considérant la fluctuation du champ de gravitation, nous nous intéressons aux fluctuations possibles de la signature de la métrique autour d'une solution classique, ce qui nous amène à réécrire $g_{\mu\nu}$ sous la forme $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. La composante $\eta_{\mu\nu}$ représente la partie non fluctuante de la métrique et $h_{\mu\nu}$ exprime les variations autour de la solution classique $\eta_{\mu\nu}$. Nous conjecturons alors que la nature complexe du champ scalaire dilatonique peut être considérée comme étant une source possible de la "double signature" de la métrique en phase de superposition. Cette approche est distincte de celle développée au chap. 4.

Conjecture 7.2.2 *Partant d'une signature Lorentzienne en dimension D = 4, en supergravité N = 2 et l'action restant hermitienne, le couplage entre un champ scalaire complexe ϕ_C et le champ métrique Lorentzien $g_{\mu\nu}$ R peut autoriser la fluctuation (3, 1) → (4, 0) → (3, 1) de la métrique $g_{\mu\nu}$. La réciproque reste vraie en partant d'une métrique Euclidienne.*

Soit g le déterminant de la métrique $g_{\mu\nu}$. Le couplage générique Γ entre le champ dilatonique complexe Φ_C - ou champ S de Syberg-Witten - et le champ métrique peut s'écrire en supergravité

$$\Gamma = \Phi_C \cdot \sqrt{-g}\ R \tag{7.8}$$

Le signe du déterminant de $g_{\mu\nu}$ dépend du dilaton complexe. En effet

$$\Gamma = (\Phi_r + i\ \Phi_i)\sqrt{-g}\ R = \Phi_r \sqrt{-g}\ R + i\ \Phi_i \sqrt{-g}\ R \tag{7.9}$$

d'où $\Gamma = \Phi_r \sqrt{-g}\ R + \Phi_i \sqrt{g}\ R$

et le couplage entre l'axion Φ_i et le déterminant de la métrique $\sqrt{-g}$ induit une possible "superposition" de signature (3, 1) → (4, 0) de la métrique, lesquelles expriment la superposition des théories Lorentzienne et Euclidienne à l'échelle de Planck..

Des approches précédentes, nous tirons l'existence d'une correspondance profonde, du type symétrie de dualité, entre théorie physique et théorie topologique.

Proposition 7.2.3 *Il existe, à l'échelle de Planck, une symétrie de dualité entre l'anneau de cohomologie BRST (secteur physique de la théorie) et l'anneau de cohomologie de l'espace des modules des instantons (secteur topologique).*

Soit, à l' échelle de Planck, les groupes de cohomologie BRST, dont la forme générique, rappelée dans [217] est :

$$H^{(g)}_{BRST} = \frac{\ker Q^{(g)}_{BRST}}{\mathrm{im} Q^{(g-1)}_{BRST}} \tag{7.10}$$

où $Q^{(g)}_{BRST}$ est la charge BRST agissant sur les opérateurs du nombre fantôme g. De la théorie de Donaldson [178][179], nous tirons l'existence, à l'échelle 0, des groupes de cohomologie construits par de Rham :

$$H^{(i)}(M^{(k)}_{\mathrm{mod}}) = \frac{\ker d^{(i)}}{\mathrm{im}\, d^{(i-1)}} \tag{7.11}$$

où $d^{(i)}$ représente la dérivée extérieure agissant sur les formes différentielles de degré i sur $M^{(k)}_{\mathrm{mod}}$. La théorie topologique réalise alors l' injection d' anneaux qui suit :

$$H^{\star}_{BRST} = \otimes_{g=0}^{\Delta U_k} H^{g}_{BRST} \xrightarrow{\iota} H^{\star}\left(\mathcal{M}^{(k)}_{\mathrm{mod}}\right) = \otimes_{i=0}^{d_k} H^{(i)}\left(\mathcal{M}^{(k)}_{\mathrm{mod}}\right) \tag{7.12}$$

qui, selon des conditions précisées dans [217], devient un isomorphisme d'anneau. Selon [217], il existe donc un chemin injectif du mode physique dans le mode topologique. Traduisons à présent cette idée à partir des observables et des cycles d'homologie de la théorie. Soient O_i les observables physiques considérées, telles qu'une fonction de corrélation de n observables est le nombre donné par la matrice d' intersections H_i :

$$\langle O_1\, O_2\, \ldots\, O_n \rangle = \#(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n) \tag{7.13}$$

nombre associé à n cycles d' homologie $H_i \subset M_{\mathrm{mod}}$ dans l' espace des modules M_{mod} des configurations du type instantons gravitationnels $\mathfrak{I}[\phi(x)]$ sur les champs gravitationnels ϕ de la théorie. Le secteur physique de la théorie est décrit par le membre de gauche de l' équ. (7.30) et le secteur topologique par le membre de droite. L'on observe que $\langle O_1 O_2\, \ldots\, O_n \rangle \neq 0$, i.e. la théorie a un contenu physique ssi :

$$\Delta U_k = \int \partial^{\mu} j_{\mu}\, d^4x \tag{7.14}$$

j_{μ} étant le courant fantôme de degré k, ΔU son anomalie intégrée. Par ailleurs

$$d_k = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}^{(k)}_{\mathrm{mod}} \tag{7.15}$$

est la dimension de l'espace des modules de degré k. A partir du th. d' Atiyah-Singer, l'on montre que $\Delta U_k = d_k$. De ce point de vue, les fonctions de corrélation d' un esemble d' observables locales

$$G(x_1 \ldots x_n) = \langle O(x_1) \ldots O(x_n) \rangle \tag{7.16}$$

se réduit à l' intégrale sur l' espace des modules du nombre de classes de cohomologie de l' espace. La charge BRST Q associée est de la forme :

$$Q = \sum (-1)^n \tag{7.17}$$

Lorsque la divergence du courant fantôme est non-nulle, i.e. $\partial^{\mu} j_{\mu} \neq 0$, alors la théorie oscille entre (O_i) et (H_i) - i.e entre la branche de Coulomb et la branche de Higgs dans l'espace de superposition des métriques - . Pour le mode 0 de l' échelle, $\partial^{\mu} j_{\mu} = 0$, alors

$$\langle O_1 O_2\, \ldots\, O_n \rangle = 0 \tag{7.18}$$

ce qui suggère que sur cette limite, la dimension de l'espace des modules M_{mod} tombe à 0. En effet, après intégration fonctionnelle sur les degrés de libertés vides de la théorie, les observables physiques sont réduites aux formes fermées Ω_i de degré d_i, ce qui signifie $\Delta U = \dim M_{\mathrm{mod}}$ et lorsque $\Delta U = 0$, comme il n'existe pas d' espace de plongement

pour l'espace des modules, la théorie est alors projetée dans la branche de Coulomb, à l' origine de M_{mod}, sur un instanton singulier de taille 0 identifié à l'espace-temps à l' échelle 0. La signature correspondante à ce secteur de la théorie est Euclidienne (+ + + +).

Pour renforcer notre hypothèse de limite topologique à l'échelle ß = 0, nous suggérons pour conclure qu'à l'échelle ß=0, l'on peut retrouver, sur la topologie Riemannienne de la variété décrivant le pré-espace-tems, le premier invariant de Donaldson. Ceci nous incite à voir dans la théorie topologique une solution au problême de la Singularité initiale.

7.3 SINGULARITE INITIALE ET PREMIER INVARIANT DE DONALDSON

Du point de vue topologique, les invariants de Donaldson sont obtenus à partir des classes caractéristiques d'un fibré de dimension infine sur la variété de dimension infinie canoniquement associée à une variété de dimension 4:

Définition 7.3.1 *Soit une variété M de dimension 4 et soit le fibré vectoriel :*

$$\mathcal{A}(M,P) \times_{\mathcal{G}(M,P)} \Gamma(\Lambda^2_+ \otimes \mathrm{Ad}P) \rightarrow \mathcal{B}(M,P)$$

Alors, la classe d'Euler de ce fibré, donnée par :

$$e\{\mathcal{A}(M,P) \times_{\mathcal{G}(M,P)} \Gamma(\Lambda^2_+ \otimes \mathrm{Ad}P)\} \in H^{\infty-k}\{\mathcal{B}(M,P)\ ;\ \mathbb{Z}\} = H_k\{\mathcal{B}(M,P)\ ;\ \mathbb{Z}\}$$

est l' invariant de Donaldson de M. L'on pose que k est un nombre fini et

$H^{\infty-k}\{\mathcal{B}(M,P)\ ;\ \mathbb{Z}\} = H_k\{\mathcal{B}(M,P)\ ;\ \mathbb{Z}\}$ *est la dualité de Poincaré.*

A partir des défs. ci-dessus, nous proposons de mettre en évidence que le point "singulier" d'échelle ß = 0, détecté par la théorie topologique, correspond au premier invariant de Donaldson de la théorie.

Proposition 7.3.2 *La limite des hautes températures de la théorie quantique des champs correspondant à ß = 0 dans la fonction de partition* $Z = \mathrm{Tr}\,(-1)^s e^{-ßH}$ *donne le premier invariant de Donaldson. La signature de la métrique de la variété sous-jacente de dimension 4 à l'échelle 0 est donc symétrique Euclidienne* (+ + + +).

Remarque La limite topologique ordinaire de la théorie quantique des champs, décrite par l'invariant de Witten $Z = \mathrm{Tr}(-1)^n$ est construite à partir de la fonction de partition $Z = \mathrm{Tr}\,(-1)^n e^{-ßH}$ pour les valeurs nulles (ou invariantes) de H. Or, nous proposons ici une nouvelle limite topologique de la théorie des champs, non triviale, construite non plus à partir de H = 0 mais de ß = 0. Le théor. de Gilkey-Patodi [240] [241] précise le contenu de l'information topologique sur la limite 0. Lorsque t = 0, à partir de $\underset{t\rightarrow 0}{\mathrm{Tr}}\,(-1)\, e^{-t\not{D}^2}$, la théorie devient indépendante du Hamiltonien $\not{D}^2$ (carré de l'opérateur de Dirac). On trouve alors le secteur topologique non trivial de la théorie, dual du secteur topologique habituel correspondant à H = 0. Dans ce cas, la fonction de partition redonne la structure topologique de l'invariant de Witten $Z = \mathrm{Tr}\,(-1)^n$, mais Z est alors associé au mode 0 (ß = 0) de l'échelle du système :

$$\underset{ß=0}{Z} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S$$

Ce nouvel invariant, isomorphe au premier invariant de Donaldson $Z = \sum_i (-1)^{n_i}$ est explicitement associé à la singularité initiale du pré-espace-temps, atteinte pourr la valeur ß = 0 de la fonction de partition des états. Pour cette raison, nous proposons d'appeler "invariant de singularité" ce nouvel invariant.

Arguments Soit $Z = \mathrm{Tr}\,(-1)^s e^{-ßH}$. Z peut être interprété comme la fonction de partition à la température $ß^{-1}$ associée à un ensemble décrit par la matrice densité $Q = (-1)^s e^{-ßH}$. Nous pouvons alors écrire :

$$\mathrm{Tr}\,(-1)^{s}\, e^{-ßH} = \int_{CPB} d\phi(t)\, d\psi(t) \exp - S_E(\phi,\ \psi) \tag{7.19}$$

A la suite des travaux de Witten [516], il a été montré par L. Alvarez-Gaumé [6] qu'étant donnée une théorie quantique des champs supersymétrique, l'on peut définir l'invariant topologique $I = \mathrm{Tr}\,(-1)^{f}$, f étant le nombre fermionique. Nous suggérons d'étendre en supergravité ce résultat, afin qu'il soit possible à partir de l'indice de l'opérateur de Dirac de la variété spinorielle pré-espace-temps, de définir l'invariant topologique

$$\dot{\mathfrak{t}} = \mathrm{Tr}\,(-1)^{S} \tag{7.20}$$

$\dot{\mathfrak{t}}$ donne la différence entre le nombre d'instantons et de monopoles gravitationnels dans l'espace de Hilbert de la théorie à l'échelle 0 et s désigne le nombre d'instantons. Les propriétés de la supergravité sont telles que l'indice supergravitationnel dépend seulement des modes 0 des états d'énergie - les valeurs propres de l'Hamiltonien $\not{D}^2$ paramétrant l'énergie - , les états d'énergie non nuls induisant l'existence de paires monopôles - instantons. $\mathrm{Tr}\,(-1)^{S}$ est invariant sous les déformations continues de $\not{D}^2$ et constitue donc un indice topologique de la théorie de déformation quantique de la signature d'espace-temps. Le calcul de l'indice de l'opérateur de Dirac à partir de la régularisation de la trace (7.22) donne l'indice $\dot{\mathfrak{t}}$ de l'opérateur de Dirac :

$$\dot{\mathfrak{t}} = \mathrm{Tr}\,\Gamma\, e^{-ß_c \not{D}^2} = \mathrm{Tr}\,(-1)^{S}\, e^{-ß_c \not{D}^2} = \int_{cpl} [Dx]\,[D\psi]\, e^{-\int_0^{ß} dt\, L} \tag{7.21}$$

avec $ß_c \in \mathbb{C}$. Lorsque $ß_c = 0$, la limite de la fonction de partition $Z = \mathrm{Tr}\,(-1)^{S}\, e^{-ß_c H}$ est :

$$Z_0 = \mathrm{Tr}\,(-1)^{S} \tag{7.22}$$

et Witten a montré que $\mathrm{Tr}\,(-1)^{n}$ peut être compris comme l'indice d'un opérateur agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ du système. Partageons $\mathcal{H}$ en un sous-espace monopôle et un sous-espace instanton $\mathcal{H} = \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_i$, Q étant un générateur de supersymétrie il résulte de (7.19) $Q|\psi\rangle = 0$, $Q^*|\psi\rangle = 0$. $\mathcal{H}_m$ et $\mathcal{H}_i$ définissent les états monopôles et instantons à l'échelle 0. Comme Q est adjoint de Q^* en regard de la norme de l'espace de Hilbert, l'on a $\mathrm{Tr}\,(-1)^{S} = \mathrm{Ker}\,Q - \mathrm{Ker}\,Q^*$, de sorte qu'en tant qu'indice topologique, $\mathrm{Tr}\,(-1)^{S}$ est invariant sous les déformations continues des paramètres de la théorie qui ne modifient pas le comportement asymptotique de l'Hamiltonien à haute énergie. Le Hamiltonien correspond au Laplacien sur les formes $H = dd^* + d^*d$ et l'espace des états d'énergie 0 est donné par l'ensemble des formes harmoniques paires sur M_n:

$$\mathrm{Tr}\,(-1)^{S}\, e^{-ßH} = \chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k \tag{7.23}$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de M et b_i le i ème nombre de Betti. $\Delta = \mathrm{Tr}\,(-1)^{S}$ est indépendant de ß, les seules contributions à Δ provenant du secteur topologique d'énergie 0 : $\Delta = n_{i\,(E=0)} - n_{m\,(E=0)}$. Δ est donc un invariant topologique. Montrons que cet invariant est le premier invariant de Donaldson. La constante de couplage g de la théorie est dimensionnelle : $g \rightarrow g'(\rho)$, ρ étant le rayon de l'instanton. La limite $ß = 0$ implique donc $\rho = 0$ et correspond au secteur des instantons de taille 0. Or, sur la limite $ß = 0$, $\mathrm{Dim}\, M_k = 0$.Lorsque la dimension de l'espace des modules des instantons est non nul, les invariants de Donaldson sont donnés par :

$$Z(\gamma_1 \ldots \gamma_r) = \int DX\, e^{-S} \prod_{i=1}^{r} \int_{\gamma i} W_{k_1} = \left\langle \prod_{i=1}^{r} \int_{\gamma_i} W_{k_i} \right\rangle \quad (\mathrm{Dim}\, M_k \neq 0) \tag{7.24}$$

Qu'en est-il de ces mêmes invariants lorsque l'espace des modules est de dimension 0 ? La solution est dans la correspondance entre les invariants de Donaldson sur les variétés de dimension 4 et les groupes d'homologie de A. Floer [216 - 518] sur les variétés de dimension 3. Coupons la 4 - variété M en deux parties non fermées M^+ et M^-:

$$M = M^+ \cup_h M^- \tag{7.25}$$

où les bords de M^+ et M^- sont des 3-sphères d'homologie. Soient S^+ et S^- les sphères d'homologie formant les bords de M^+ et M^-. Considérons leur homologie de Floer $HF_*(M^+)$ et $HF_*(M^-)$. Pour une charge topologique

donnée k, nous considérons les instantons gravitationnels sur les 4-variétés M^+ et M^-. Les solutions des conditions aux bords permettant de définir la connexion sur les bords $S^{\mp}$ sont notées $C^{\mp}$. Dans ce cas, C.Nash a montré [410] que l'espace des modules des instantons sur la variété fermée M devient $C^+ \cap C^- = M_k$. Les conditions au bord permettent de construire deux classes d'homologie de Floer $[C^{\mp}] = HF*(S^{\mp})$. Donaldson montre que le couplage de ces classes fondées sur la dualité de Poincaré donne $[C^+] \star [C^-] = q_d(M)$, où $\star$ représente le couplage des cycles d'homologie. Or, d = 0 correspond à la dimension 0 de l'espace des modules. Dans ce cas, il a été montré [410] que les invariants de Donaldson deviennent des entiers. En effet, l'évaluation de l'invariant $q_d(M)$ implique $d = \dim M_k / 2$. La charge topologique k doit donc satisfaire l'égalité de Witten, soit $\dim M_k = 8\, p_1(E) - \frac{3}{2}(\chi(M) + \sigma(M))$, où $p_1(E)$ est le premier nombre de Pontryagin du fibré donnant la charge topologique de la configuration, $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler et $\sigma(M)$ la signature de M. Nous avons alors $8p_1(E) - \frac{3}{2}(\chi(M) + \sigma(M)) = 0$ et l'espace modulaire M_k est réduit à un ensemble discret de points. Pour $\dim M_k = 0$, les invariants de Donaldson se réduisent à l'évaluation de la fonction de partition Z, exprimée comme une somme algébrique alternée sur les instantons :

$$Z = \sum_i (-1)^{n_i} \tag{7.26}$$

i désignant le i ème instanton et $n_i = 0$ ou 1 déterminant le signe de sa contribution à Z. Donaldson a montré sur des bases topologiques [178] que lorsque $\dim M_k = 0$, alors $\sum_i (-1)^{n_i}$ est un invariant topologique non polynomial, réduit à un entier. Nous retrouvons le même résultat à partir de $T_{\alpha\beta} = \{Q\ ,\ \lambda_{\alpha\beta}\}$. La fonction de partition Z à la température $ß^{-1}$ a la forme générale $Z_q = \mathrm{Tr}\,(-1)^S\, e^{-ßH}$. Pour ß = 0, Z_q devient $Z_{ß=0} = \mathrm{Tr}\,(-1)^S$. Or, $\mathrm{Tr}\,(-1)^S$ est isomorphe à $\sum_i (-1)^{n_i}$, s et n_i donnant dans les deux cas le nombre d'instantons de la théorie. $Z_{ß=0} = \mathrm{Tr}\,(1)^S$ redonne donc le premier invariant de Donaldson, et projette la théorie physique Lorentzienne sur la limite topologique Euclidiennepour $\dim M_k = 0$. Une autre manière de parvenir à ce résultat consiste à poser :

$$< P > = \frac{1}{Z}\sum_n DF \exp[-S]\ P(F)$$

Pour S = 0, l'on obtient, d' après Donaldson [179] $< P > = \frac{1}{Z}\sum_{\mathcal{M}_k} P_n$. Or, lorsque $\dim M_k = 0$, $< P >$ se réécrit :

$< P > = \frac{1}{Z}\sum_i (-1)^{n_i} = k$, de sorte que $Z = \sum_i (-1)^{n_i}$, comme requis.

A la limite des hautes températures $ß^{-1} = 0$ paramétrant l' échelle 0 de la théorie, la fonction de partition Z nous donne donc le premier invariant de Donaldson décrit par l'équ. (7.26), projetant la théorie physique Lorentzienne sur la limite topologique euclidienne.

Une question ouverte est, naturellement, celle du début de l'expansion du pré-espace-temps : comment expliquer la transition de l'échelle 0, représentée par un instanton singulier de taille 0, à une échelle non nulle ?

Dans le chap. suivant, nous considérons, entre l'échelle 0 et l'échelle de Planck, l'existence d'une phase d'"expansion topologique" précédant l'expansion physique standard. Nous nous efforçons ainsi de compléter le point de vue topologique sur la Singularité Initiale, en discutant notamment l'expansion de la solution instanton de taille 0 ainsi que l'amplitude topologique associée à l'échelle 0.

8

THEORIE TOPOLOGIQUE DE L'EXPANSION DU PRE-ESPACE-TEMPS

Le point de vue suggéré dans ce dernier chapitre par nos résultats et conjectures antérieurs (notamment ceux des chaps 5 et 6) est que l'on peut raisonnablement supposer l'existence, antérieurement à la phase physique d'expansion de l'espace-temps, d'une phase d'expansion de type topologique. Nous proposons l'hypothèse selon laquelle la source de ce "Big Bang topologique" réside justement dans le terme topologique αRR^* du Lagrangien de supergravité proposé au chapitre 5. En effet, ce terme représente la densité de charge topologique de l'instanton. Or, à l'échelle 0, ce terme devient divergent, de sorte que l'instanton 0 est instable et tend, pour rejoindre son état fondamental, à maximiser son rayon. De là l'expansion de la solution instanton singulier de taille 0. Certains arguments complémentaires présentés au chap. 6, en relation avec la théorie des instantons gravitationnels, rendent plausible l'hypothèse selon laquelle, durant la phase topologique décrite au chap. 7, peut être considérée, comme modèle d'une "expansion topologique" du pré-espace-temps, l'existence d'une dilatation de la métrique Riemannienne depuis l'échelle 0 jusqu'à la longueur de Planck, une telle expansion étant exactement décrite par le monopôle gravitationnel cosmologique de dimension 5 discuté au chap. 5. Nous décrivons cette expansion comme l'inverse de l'effondrement Riemannien de Cheeger et Gromov [419]. Dans une autre perspective associée aux précédentes, nous discutons également l'idée, esquissée au chap. 4, que le flot des poids de l'algèbre $M_{O,1}$ de type II_∞ correspondant à l'échelle 0 engendre une dynamique en temps imaginaire pur, duale de la dynamique en temps réel mise en évidence par A. Connes [149], et vue ici comme source de la dynamique en temps réel. Nous discutons, en conclusion, un Principe de Singularité possiblement fondé sur l'existence d'une amplitude topologique associée à l'échelle 0.

Note *De même que dans le chapitre 5, dans ce chapitre, notre propos n'est pas de construire de nouveaux résultats mathématiques mais plutôt d'utiliser certaines notions de la théorie des algèbres de Von Neumann pour étayer les motivations physiques de notre recherche.*

8.1 FLOT EUCLIDIEN A L'ECHELLE 0

8.1.1 Flot des poids de $M_{O,1}$ et pseudo-dynamique Euclidienne

Certains résultats obtenus au chapitre 4 à propos du flot des poids de l'algèbre $M_{O,1}$ de type II_∞ décrivant les états de la métriques singulière à l'échelle ß = 0, nous ont incité à discuter l'existence d'une "dynamique Euclidienne" à l'échelle 0, susceptible de fournir un modèle plausible de l'expansion du pré-espace-temps à partir de l'échelle 0 et dont la source, duale de la source Lorentzienne mise en évidence par A. Connes et C. Rovelli dans [147], est purement algébrique. Nous proposons d'associer cette dynamique Euclidienne au flot des poids du facteur $M_{O,1}$.

Conjecture 8.1.2 *Le flot des poids de l'algèbre $M_{O,1}$, ergodique, engendre à l'échelle ß = 0 une dynamique Euclidienne en temps imaginaire pur que l'on peut considérer comme source de la dynamique en temps réel.*

$M_{O,1}$ est un facteur hyperfini de type II_∞. Plus précisément, si nous appelons $M_{0,1} = R \otimes F$ le facteur du type $R_{0,1}$ correspondant à l'échelle singulière 0, comme toutes les transformations ergodiques à partir de $M_{0,1}$ (flots associés à l'éch. 0) sont faiblement équivalentes [149], $M_{0,1}$ est un facteur hyperfini, du type ITPFI d'Araki-Woods [31]. Le facteur $M_{0,1}$ est alors canonique. Plus généralement, il existe ainsi trois échelles (correspondant aux trois régions du cône de lumière cosmologique dans le shéma (0.1) :

(i) l'échelle singulière (échelle 0 associée à ß=0) décrite par l'ITPFI de type II_∞ , qui est $M_{0,1}$;

(ii) l'échelle quantique de superposition ($0<ß<\lambda_{Planck}$), non commutative, décrite par M_q , ITPFI de type III_λ , soit $R_\lambda = II_\infty \rtimes_\theta \mathbb{Z}$. Nous écrivons alors $M_q = M_{0,1} \rtimes_\theta \mathbb{Z}$.

(iii) l'échelle semi-classique ($ß > \lambda_{Planck}$), commutative, décrite par le facteur M_c de type I.

Nous proposons d'établir la plausibilité de (8.1.2) au terme des trois conjectures suivantes :

Conjecture 8.1.3 *Le flot des poids δ de l'algèbre M_q est conservé à l 'échelle 0 .*

Note : à l'échelle ß = 0, $M_q = M_{0,1} \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ est entièrement décrit par $M_{0,1}$, de sorte que le flot des poids de M_q se réduit alors au poids dominant de $M_{0,1}$. Pour illustrer le propos, nous continuons cependant à parler de flot des poids de M_q.

Soit à présent l'application $\alpha_t : M_q \mapsto M_q$ telle que :

$$\upsilon_t(M_q) = \Delta^{it} \; M_q \; \Delta^{-it} \quad \text{avec } t \in \mathbb{C}.$$

σ_t étant le groupe à un paramètre des automorphismes de l'algèbre M_q de type III correspondant à l'état ω de la métrique quantique. Dans ce cas (échelle quantique de superposition), selon nos résultats du chapitre 4, le paramètre d'évolution du système pré-espace-temps peut être considéré comme holomorphe.

A présent, considérons l'instant t = 0 (à l'échelle singulière ß = 0) du pré-espace-temps. Le groupe modulaire associé à l'état ω sur M_q à un instant t devient $\sigma_0 M = M$ et l'évolution temporelle paramétrée par $\upsilon_t(M_c) = e^{iHt} M_c \; e^{-iHt}$ avec $t \in \mathbb{R}$ redonne $M_c = M_{0,1}$ pour t = 0:

$$\tau_0 (M_c) = M_c = M_{0,1}$$

De même, l'évolution en temps imaginaire pur, donnée par $\upsilon_{ß}(M_{O,1}) = e^{Hß} M_{O,1} \; e^{-Hß}$ redonne $M_{0,1}$ à l'échelle ß = 0 du système. L'on peut en déduire que les automorphismes généralisés en temps holomorphe exprimés par $\upsilon_t(M_q) = \Delta^{it} \; M_q \; \Delta^{-it}$ avec $t \in \mathbb{C}$ redonnent encore $M_{0,1}$ pour $t_{complexe} = 0$. Une autre manière, plus suggestive, de parvenir au même résultat consiste à considérer le groupe des automorphismes en temps $ß_c$ complexe, de la forme :

$$\upsilon_{ß_c}(M_q) = e^{Hß_c} M_q \; e^{-Hß_c}$$

L'on observe que pour $ß_c = 0$, $\upsilon_{ß_c=0}(M_q) = M_q$, lequel s'écrit $M_q = M_{0,1} \rtimes_\theta \mathbb{Z}$. Mais sur la limite $ß_c = 0$, la factorisation semi-directe par $\mathbb{Z}$ disparaît et Mq devient isomorphe à $M_{0,1}$: $M_{q(ß_c = 0)} = M_{0,1}$. Or, sur t = 0, les théorème de Tomita et de Radon-Nikodym deviennent vides et il n'est plus possible d'engendrer une évolution temporelle correspondant aux constructions du type Connes ou Tomita-Takesaki. En revanche, la théorie des poids permet d'énoncer qu'à t = 0, l'algèbre M_q conserve (**i**) le poids φ qui la définit et (**ii**) le flot W_λ des poids de l'algèbre M sous l'action de R^*_+ . La définition tirée de l'action multiplicative de $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi \rightarrow \lambda\varphi$ est indépendante de t. De même dans notre approche, le flot des poids de M_q est entièrement défini par la trace de $M_{0,1}$ et correspond au poids dominant donné par

$$\varphi(A) = e^{-ß H} \; A \; e^{ß H} \tag{8.1}$$

et l'on observe que $\varphi(A)$ est indépendant de t. Lorsque t = 0, le flot des poids est donc conservé et est donné, conformément aux résultats du chap. 4, par les automorphismes de $M_{0,1}$ en temps imaginaire ß = i t engendrant le flot ergodique $\varphi(M_{0,1})$ des poids de l'algèbre.

Etablissons à présent le lien entre flot des poids et existence d'une dynamique Euclidienne.

Conjecture 8.1.4 *A l'échelle ß = 0, l'on peut considérer sur la variété pré-espace-temps donnée par la géomatrie de l'instanton singulier de taille 0 une pseudo-dynamique Riemannienne correspondant au flot des poids de l'algèbre* $M_{O,1}$.

Arguments F. Combes a montré [137] que l'existence d'une algèbre quelconque M et d'un état ω sur M implique nécessairement l'existence d'un flot des poids de M associé. Soit à présent $M_{0,1}$, l'ITPFI de type II∞ correspondant à l'échelle 0 de l'espace-temps. De même qu'en temps réel, il existe une dynamique canonique donnée par le groupe modulaire, il existe donc à l'instant t = 0 au niveau de l'algèbre $M_{0,1}$ une "pseudo-dynamique" intrinsèque, donnée par le poids dominant de $M_{O,1}$ dans l'espace des poids du facteur. La proposiiton 4.4.1 suggère que le poids dominant de $M_{O,1}$ - que nous interprétons comme flot dans l'espace des poids de $M_{O,1}$ - décrit un flot temporel Euclidien, correspondant aux automorphismes de M_q donnés, en temps imaginaire pur $ß = it$, par les automorphismes de $M_{O,1}$:

$$\sigma_{ß}(M_{O,1}) = e^{Hß} M_{O,1}\ e^{-Hß} \tag{8.2}$$

le flot temporel exprimé par les automorphismes Lorentziens $\sigma_t(M_c) = e^{iHt} M_c\ e^{-iHt}$ étant alors prolongé, à t = 0 par le flot Euclidien $\sigma_{ß}(M_{O,1}) = e^{Hß} M_{O,1}\ e^{-Hß}$. Le groupe unitaire à un paramètre en temps réel associé à $\sigma_t(M_c)$, soit U(t) = Δ^{it} conserve bien l'opérateur modulaire Δ pour t = 0, ce qui permet l'extension analytique de Δ : $\Delta_{\text{Lorentzien}} \rightarrow \Delta_{\text{Euclidien}}$ et il devient possible de construire le prolongement analytique du groupe modulaire Lorentzien $\sigma_t(M_c) = \Delta^{it}\ M_c\ \Delta^{-it}$ vers le groupe modulaire Euclidien :

$$\sigma_{ß}(M_{O,1}) = \Delta^{-ß}\ M_{O,1}\ \Delta^{ß}$$

Or, la dynamique Euclidienne est canoniquement associée à l'algèbre $M_{O,1}$. En effet, l'existence des poids est associée aux algèbres Hilbertiennes à gauche. Dans le cas de mesures non bornées relatives au domaine non commutatif, toute algèbre de Von Neumann est donc définie par un poids. Inversement, M.Tomita a montré que toute algèbre Hilbertienne à gauche est engendrée par un poids semi-fini, normal et fidèle sur une algèbre de Von Neumann à gauche. A toute algèbre M_q ou $M_{O,1}$, nous pouvons donc associer l'analogue d'une mesure qui prend la forme du triplet :

$$\{\varphi\ ,\ M_q,\ \Sigma_{\mathfrak{L}}\} \tag{8.3}$$

le groupe modulaire $\Sigma_{\mathfrak{L}}$, trivial pour Δ = 1, est unimodulaire. A l'instant t = 0, le groupe modulaire Lorentzien peut être prolongé par le semi-groupe modulaire Euclidien et le triplet (10.3) devient :

$$\{\varphi\ ,\ M_q,\ \Sigma_{\mathfrak{R}}\}$$

et nous retrouvons le flot des poids naturellement associé à M_q pour t = 0. Or, la nature ergodique d'un tel flot a été démontrée par Takesaki [484]. Considérant un point (p, q) dans un sous-espace S de l'espace des phases P et l'espace de Hilbert des fonctions dynamiques de carré intégrable sur S, selon le théorème de Von Neumann , le produit intérieur $(f,\ g) = \int_S f(q,\ p)\ g\ (q,\ p)\ d\mu_s$ définit une norme $\| f \|$ et il existe une fonction $\bar{f}$ telle que

$$\lim_{ß \rightarrow \infty} \| f - \bar{f} \| = 0$$

$ß^{-1}$ représentant la température du système. Pour que le th. principal de Von Neumann soit vrai, aucune trajectoire d'aucun point sur le flot des poids ne peut rester confinée à un sous-espace de l'espace des phases. Dans ce sens, soit {X , μ} une mesure standard σ - finie et $\{S_t\}$ un groupe à un paramètre de transformations sur {X , μ} tel que (t, x)

$\in \mathbb{R}$. $X \mapsto S_t x \in X$ est une application Borelienne. Soit $C = L^\infty(X, \mu)$ et soit $\theta_t(a)(x) = a(S_t^{-1} x)$, $a \in C$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$. M. Takesaki a montré que $\{C, \theta\}$ est ergodique en ce sens que $C^\theta = \mathbf{C}$. Le flot ergodique correspondant a été construit par A. Connes [149] et classifié par W. Krieger [318] et représente un invariant W(M) de l'algèbre M impliquant une action multiplicative $\varphi \mapsto \lambda\varphi$ de $\mathbb{R}^*$ sur les poids φ de l'algèbre. Cette action est ergodique et $\delta : \mathbb{R} \mapsto \text{Out } M = \text{Aut } M / \text{Int } M$ est indépendante du poids de l'algèbre. Il existe en effet un homomorphisme canonique de $\mathbb{R}$ dans Out M définissant une classe indépendante du choix de φ: $\delta(t)$ = Classe de σ^φ_t, l'image de δ étant contenue dans le centre du groupe Out M et T (M) = Ker δ formant un sous-groupe de $\mathbb{R}$, invariant de M. Nous proposons donc le remplacement sur M de la classe de poids φ Lorentziens par une classe de poids ψ Euclidiens sans modifier le résultat général de Connes. Le flot ergodique Euclidien représentant le flot des poids s' écrit donc δ_E :

$$\mathbb{R}^* \mapsto \text{Out } M = \text{Aut } M / \text{Int } M$$

et conduit à l'existence du groupe modulaire Euclidien construit en (4.4).

A présent, notre troisième conjecture est que le flot en temps réel peut être considéré comme engendré par le flot des poids en temps imaginaire

Conjecture 8.1.5 *Le flot d'évolution en temps réel sur l'espace de superposition S peut être considéré comme engendré à l'échelle ß = 0 par le flot des poids de l'algèbre $M_{0,1}$ de type II_∞*

Note : partout dans l'étude, $M_{0,1}$ intervenant dans $M_q = M_{0,1} \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ est un facteur hyperfini de type II_∞, ITPFI.

Arguments Nos arguments du chap. 4 indiquent qu'il est raisonnable de considérer qu'à l'échelle de Planck, l'espace-temps est soumis à la condition KMS . Une telle hypothèse implique, dans les limites de la bande holomorphe de largeur ß = L_{Planck} que le flot temporel soit également considéré comme holomorphe. Or, considérant une algèbre de Von Neumann M et un poids φ normal et fidèle sur M, (**i**) le théorème de Tomita montre que le groupe modulaire σ^φ_t A est l'unique groupe à un paramètre d'automorphismes de M_q vérifiant la condition KMS. L'on en tire qu'à tout poids fidèle sur M correspond un groupe unique d'automorphismes de Mq tel que :

$$\sigma_t^\varphi(M_q) = \Delta_\varphi^{it} \; M_q \; \Delta_\varphi^{-it} \tag{8.4}$$

où l'opérateur modulaire Δ_φ est le carré du module de l'involution $x \rightarrow x^*$, opérateur non borné dans $L^2(M,\varphi)$ complété de $\{x \in M, \varphi(x^* x) < \infty\}$ correspondant au produit scalaire $< x , y > = \varphi < y^* x >$. Par ailleurs, Araki et Woods [31] ont mis en évidence le lien entre tout facteur M et les deux invariants r_∞ et r_0 tels que :

$r_\infty(M) = \{\lambda , M \otimes R_\lambda \sim M\}$ et $r_0(M) = \{\lambda , M \otimes R_\lambda \sim R_\lambda\}$

Or, A. Connes a montré [149] que les invariants d'Araki et Woods sont isomorphes à S(M) et T(M) et liés au flot ergodique W(M) :

$$r_\infty(M) = S(M) = \bigcap \text{ spectre } \Delta_\varphi$$

$$r_0(M) = T(M) = \{ e^{\frac{2\pi}{T_0}}, \exists \; \varphi(M) : \sigma^\varphi_{T_0} = 1 \}$$

φ étant un état normal et fidèle sur M. S(M) couvre donc le spectre de l'opérateur modulaire Δ_φ et T(M) correspond aux périodes possibles du groupe d'automorphismes modulaires de M. La construction ci-dessus, complétée par la forme non commutative du théorème de Radon-Nikodym [149] achève de formaliser la correspondance entre tout poids φ sur M et les automorphismes σ^φ_t A de M. Le th. démontre en effet qu'étant donnés une algèbre M et un poids fidèle φ sur M, (**i**) pour tout poids fidèle ψ sur M, il existe une application continue unique de $\mathbb{R}$ dans le groupe unitaire U de M muni de σ (M, M*) telle que

$u_{t+t'} = u_t \, \sigma^{\varphi}_t (u_{t'})$

et, inversement, (**ii**) considérant l'application continue $t \mapsto u_t$ de $\mathbb{R}$ dans U telle que

$u_{t+t'} = u_t \, \sigma^{\varphi}_t (u_{t'}), \ \forall t, t' \in \mathbb{R},$

il existe un poids fidèle ψ unique sur M tel que $(D\psi : D\varphi) = u$. Le théorème de Radon-Nikodym montre donc que le groupe d'automorphisme modulaire change avec le poids φ, le changement de σ^{φ}_t A s'effectuant à l'intérieur d'une classe invariante (modulo, bien entendu, les automorphismes intérieurs Int M). Et nous retrouvons l'homomorphisme canonique de $\mathbb{R}$ dans Out M, Γ représentant la classe d'automorphismes indépendante de φ :

$\delta(t) = \Gamma(\sigma^{\varphi}_t)$

T (M) = ker δ étant un sous-groupe de R. Il est alors possible de calculer T(M) à partir de tout poids φ fidèle sur M, ce qui, dans le sens de notre démonstration, revient précisément à calculer les classes de t pour lesquelles σ^{φ}_t est un automorphisme intérieur. Ainsi, calculons le groupe d'automorphismes modulaires de $\varphi = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu$, M étant un facteur d'Araki - Woods [31] du type $M = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty} (M_\nu, \varphi_\nu)$. Nous obtenons :

$$\sigma_t^{\varphi} = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty} \sigma_t^{\varphi}$$

et T(M) est obtenu [149] à partir des valeurs propres $(f_{\nu,j})_{j=1\ldots n}$ de φ_ν :

$$T_0 \in T(M) \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \left| \sum_j f_{\nu,j}^{1+iT_0} \right| \right) < \infty$$

Il existe alors entre le flot des poids

$$\varphi(M_{0,1}) = e^{-ßH} M_{0,1} e^{ßH} \tag{8.5}$$

et le flot modulaire

$$\sigma^{\varphi}_t M_c = \Delta_{\varphi}^{it} M_c \Delta_{\varphi}^{-it} \Leftrightarrow \sigma_t(M_c) = e^{iHt} M_c e^{-iHt} \tag{8.6}$$

une correspondance biunivoque résultant d'une transformation de dualité du type i-dualité entre φ (A) et σ^{φ}_t A . A toute valeur de ß (imaginaire pur) du flot des poids est donc associée une valeur de t (réel) dans le flot modulaire dual, de sorte que (8.5) et (8.6) doivent être réécrits avec ß , t $\in \mathbb{C}$, d'où :

$\varphi_{ßc}(M_q) = e^{-ßH} M_q e^{ßH}$ avec $ß_c = ß_r + i t_r$ et

$\sigma_{t_c}(M_q) = e^{iHt_c} M_q e^{-iHt_c}$ avec $t_c = t_r + i ß_r$.

Le couplage entre flot Euclidien des poids et flot d'évolution temporelle résulte non seulement des théorèmes utilisés mais, plus profondément, de la construction KMS et de l'existence de la bande holomorphe ß. Considérant le pré-espace-temps, nous en concluons qu'à l'instant t = 0, i.e. avant l'existence du temps physique, il existe une évolution Euclidienne, paramétrée en temps imaginaire pur par les valeurs croissantes de ß = 1 / k T et induite par

les automorphismes de semi-groupe correspondant au flot ergodique des poids $\varphi(A)$, ce flot induisant à son tour l'existence du flot modulaire σ^{φ}_{t} A d'où est issu le flot temporel réel $\tau_{tc}(A)$.

Les conclusions ci-dessus nous conduisent de manière naturelle vers une nouvelle interprétation du modèle d'expansion de l'espace-temps. Notre point de vue est alors que la phase d' expansion topologique est caractérisée par l' expansion de l' espace des modules de l' instanton 0.

8.2 EXPANSION DE L'ESPACE DES MODULES DE L'INSTANTON 0

8.2.1 Instantons de taille 0 et expansion topologique

Montrons à présent que la solution instanton de taille 0 est par construction instable et est nécessairement soumise à une expansion topologique, dans la mesure où, comme établi ci-dessous, l'instanton gravitationnel singulier résulte de l'effondrement d'une infinité d'instantons de taille non nulle sur le même point S.

Proposition 8.2.2 *La solution instanton gravitationnel singulier de taille 0 caractérisant l'origine du pré-espace-temps résulte de l'effondrement d'une infinité d'instantons gravitationnels de taille non nulle sur le même point singulier S.*

Un instanton de taille 0 correspond à la valeur $\vec{g} = 0$ pour la partie réelle de la constante de couplage de la théorie. L'action gravitationnelle du type instanton est de la forme :

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{g^2(\rho)} \int d^4x\, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \vartheta \int d^4x\, \mathrm{Tr}\, R_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} \tag{8.7}$$

Comme $\mathcal{L}$ doit être sans dimension et que g a une dimension en théorie gravitationnelle, il est nécessaire de coupler g et ρ dans l'action. A la limite $\vec{g} = 0$ correspond donc l'instanton 0. Or, la taille 0, comme nous le montrons à la prop. suivante, est caractérisée par des valeurs divergentes de la densité d'action $\delta(S) = \frac{\mathrm{Tr}\, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}}{\rho^2} \to \infty$, de la densité de charge topologique $\delta(Q) = \frac{\mathrm{Tr}\, R_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu}}{\rho^2} \to \infty$ et de l'excitation topologique $\chi_t^V = \frac{\langle Q^2 \rangle}{V}$, V étant le volume de l'espace-cible, l'instanton 0 induit l'existence d'une singularité cônique dans l'espace des modules de l'instanton - dans la structure différentiable et dans la métrique -. Cette singularité est décrite par la mesure d'instanton dμ de t'Hooft [463] :

$$d\mu = k.\, d^4 x_0\, \frac{d\rho}{\rho^5} \exp\left\{ -\frac{8\pi^2}{g^2(\rho)} \right\} \tag{8.8}$$

Comme l'instanton gravitationnel est identifié au pré-espace-temps à l'échelle de superposition, la singularité dans l'espace des modules de l'instanton est également l'échelle 0 de l'espace de superposition $\mathbb{R}^{3}\Big|^{+1}_{,1}$ - i.e. la singularité initiale $\mathbb{S}$ de l'espace-temps - .

A présent, montrons que tous les instantons et anti-instantons du système convergent vers le même point singulier $\mathbb{S}$. C. Callan et al [463] ont établi que la densité de charge topologique entre un instanton I et un anti-instanton $\bar{I}$ est de la forme:

$$R\,R^* = \frac{1}{d^2 - \rho^2} \tag{8.9}$$

où d est la distance entre I et $\bar{I}$, ρ étant la taille des deux configurations. Au voisinage de la singularité initiale, la taille des (anti)instantons est voisine de 0. En revanche, la distance entre I et $\bar{I}$ peut être différente de 0. Supposons que nous ayons ρ = 0 et d ≠ 0. Alors, (8.9) devient :

$$R\,R^* \sim \frac{1}{d^2}$$

Or, si la distance d^2 entre I et $\bar{I}$ était finie, alors la densité topologique Tr $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu *}$ et la densité d'action Tr $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ demeureraient également finies, ce qui n'est pas le cas dans le modèle standard. Cette hypothèse conduirait en effet à la disparition de la singularité initiale $\mathbb{S}$ puisque, par construction, les mesures de Tr $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ et Tr $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu *}$ sont divergents sur le point $\mathbb{S}$. Nous en concluons donc que lorsque la taille des configurations instanton est nulle, la distance d séparant les (anti)instantons est nécessairement nulle. L'ensemble des paires {I - $\bar{I}$} s'effondre donc sur le même instanton gravitationnel singulier - ou instanton 0 - au point singulier $\mathbb{S}$.

L'intérêt de la limite correspondant à l'effondrement en temps imaginaire de S^3 engendrant l'instanton 0 est qu'il existe un éclatement Riemannien de $S^3 \otimes R$ en temps imaginaire, induisant la croissance du rayon d'injectivité de la solution instanton gravitationnel.

Proposition 8.2.3 *L'instanton BPS de taille 0 est instable à l'échelle 0 et est nécessairement soumis à une expansion de son rayon jusqu'à la limite $\rho \to \infty$ correspondant à l'état fondamental de la configuration. La croissance en temps imaginaire du rayon de l'instanton correspond à la phase d'expansion topologique du pré-espace-temps entre l'échelle 0 et l'échelle de Planck.*

L'instanton BPS (au sens de [463]) générique SU(2) ⊗ SU(2) est centré à l'origine. Comme la constante de couplage dynamique en gravité quantique a la forme du dilaton complexe

$$\lambda = 1/\,g^2(\rho) + i\,\theta$$

la théorie n'est pas invariante conforme et la limite $g \overset{\rightarrow}{=} 0$ correspond à une valeur divergente du dilaton de la théorie, comme souligné par C.G. Callan, J.A. Harvey et A. Strominger dans la définition du champ scalaire du type dilaton couplé aux instantons de taille 0 [113]. La densité d'action δ (S) de l'instanton 0 est une fonction Δ à l'échelle 0 : □δ (S) → ∞, de même que la densité de charge topologique : δ (Q) → ∞ et l'excitation topologique $\chi_t^V = \frac{\langle Q^2 \rangle}{V} \to \infty$. Les limites divergentes montrent que l'instanton 0 représente un choc de Dirac à l'origine. Il s' agît donc d'une configuration instable, qui a tendance à maximiser son rayon ρ. En effet, soit l'action :`

$$S = \frac{1}{g^2(\rho)} \int d^4x\, R_{\mu\nu}\, R^{\mu\nu} + \vartheta \int d^4x\, \mathrm{Tr}\; R_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} \tag{8.10}$$

S diverge sur la limite $g(\rho) \overset{\rightarrow}{=} 0$ et la contribution instanton à l'échelle 0 est donc:

$$Z_i = \exp(-S) = 0$$

pour tout R ≠ 0. Or, toute solution instanton cherchant par construction à minimiser l'action Euclidienne, l'instanton 0 tend à minimiser l'action (8.10). Cette contrainte implique donc pour l'instanton 0 l'existence d'un état fondamental correspondant à la limite asymptotiquement plate (ALE), l'action sur cette limite étant non seulement finie mais également minimale :

$$R_{\mu\nu}\, R^{\mu\nu} \to 0$$

et la densité d'action , comme la densité de charge topologique et l'excitation topologique, tendent vers 0 sur cette limite. Ajoutons que la hauteur de la barrière à franchir par effet tunnel via la configuration instanton varie en ρ^{-1} et est également nulle sur la limite. La minimisation de $R_{\mu\nu}\, R^{\mu\nu}$ implique donc :

$$\rho \to \infty$$

L'état d'instanton 0, supprimé exponentiellement de l'action pour tout $R \neq 0$ est donc moins probable que l'état correspondant à $R = 0$. L'état fondamental de la théorie, lié aux configurations les plus probables, est donc dominé par les instantons de rayon infini, qui ne sont plus des solutions exactes des équations du mouvement.

(8.2.3) suggère donc que l'instanton 0 passe nécessairement de l'échelle 0 à une échelle arbitrairement grande en temps imaginaire. Il en résulte une phase d'expansion topologique, caractérisant la nécessaire transformation d'échelle de la théorie depuis l'échelle 0 jusqu'à l'échelle de Planck. La phase d'expansion topologique (expansion Riemannienne de la variété) paraît d'autant plus probable qu'il existe, sous certaines conditions de constante de couplage mises en évidence par E.B. Bogomolny [94] puis par J. Zinn-Justin [534] une interaction répulsive au sein des couples instantons - anti-instantons. Dans le domaine où l'interaction instanton-anti-instanton est attractive, l'on doit changer le signe de l'énergie d'interaction, soit en changeant le signe de la constante de couplage (par prolongement analytique) soit en modifiant le contour d'intégration. Il en résulte une interaction répulsive entre les configurations. Nous proposons de considérer l'existence d'une telle interaction à l'échelle de Planck.

Conjecture 8.2.4 *Il existe, à partir de l'échelle de Planck, une interaction de type répulsif au sein des paires instantons - anti-instantons. Cette interaction répulsive induit l'expansion du gaz d'instantons gravitationnels formé au voisinage de l'échelle 0 par l'expansion de l'instanton 0 gravitationnel singulier .*

Nous partons de la construction des multi-instantons en régime quantique proposé par E.B. Bogomolny [94]. Les solutionss construite sont celles d'instantons généralisés, dont les constantes de couplage sont complexes. Afin de trouver le comportement de la théorie perturbative dans le cas d'un potentiel avec des minima dégénérés, il est nécessaire de poser l'existence d'une partie imaginaire de l'interaction $E^{(2)}(g)$ entre deux instantons $I - \bar{I}$. Dans le cas de l'état fondamental d'énergie, l'on trouve :

$$\mathrm{Im}\, E^{(2)}(g) \sim \pi\, [E^{(1)}(g)]^2$$

$E^{(1)}(g)$ représentant la contribution d'un instanton à l'état fondamental. Effectuons à présent le calcul du potentiel $I - \bar{I}$. L'on cherche un chemin classique Int (-) entre deux instantons séparés et l'on obtient :

$$\mathrm{Int}\,(-) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{1}{1+e^{-(t+\theta/2)}} - e^{(t-\theta/2)}\right] \quad (t < 0) \tag{8.11}$$

Or, il est nécessaire de modifier les solutions instanton au voisinage du point de rencontre entre $I - \bar{I}$, de sorte que nous obtenons Int (+) :

$$\mathrm{Int}\,(+) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{1}{1+e^{(t-\theta/2)}} - e^{-(t+\theta/2)}\right] \quad (t > 0) \tag{8.12}$$

L'action classique correspondante étant :

$$A(\theta) = \frac{1}{g}(-2e^{-\theta})$$

La somme (ß, g) des contributions de n instantons prend alors la forme :

$$S\,(ß, g) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \int_{\theta_i \geq 0} \prod_i d\vartheta_i\, \delta\,(\Sigma\vartheta_i - ß) \exp \frac{2}{g} \sum_{i=1}^{n} e^{-\theta_i} \tag{8.13}$$

et l'on observe que pour $g > 0$, la force entre les instantons est attractive et les paires $I - \bar{I}$ ont tendance à collapser dans le vide. Au contraire, pour $g < 0$, l'interaction d'instantons devient répulsive et les contributions de n - instantons sont bien défines. Une construction de ce type a été effectuée en détail par I.I Balitsky et A.V.Yung [60][61]. Nous proposons d'appliquer cette même hypothèse dans le cas des instantons gravitationnels, en ajoutant cependant (i) que le signe de l'interaction dépend de la constante de couplage g considérée comme complexe et (ii) que le signe de l'interaction change en fonction de la distance : à grande distance - i.e. au delà de l'échelle de Planck-, l'interaction $I - \bar{I}$ est attractive, alors qu'à partir de l'échelle de Planck - et à fortiori à l'échelle 0 - l'interaction $I - \bar{I}$ devient répulsive. L'interaction entre deux instantons $I - \bar{I}$ séparés par une distance d et de charges respectives Q et $\bar{Q}$ a été calculée pour g réel et est de la forme :

$$\text{Int (-)} = -\frac{1}{g^2}\frac{Q\,\overline{Q}}{d^4}$$

Cette interaction est de type attractif et obéit aux contraintes d'une gravité en R à grande échelle (au delà de l'échelle de Planck). En revanche, à petite distance, c'est le terme de courbure quadratique R^2 qui domine, de sorte qu'il est nécessaire de remplacer le couplage g par une nouvelle constante de couplage complexe g', dont la forme découle directement de la construction du dilaton complexe de supergravité proposé par Green, Schwartz et Witten [249] :

$$g = \hat{g} + i\vartheta$$

de sorte que Int (-) devient complexe et prend la forme :

$$\text{Int } (\pm) = -\frac{Q\,\overline{Q}}{(\hat{g}+i\vartheta)^2\, d^4} \tag{8.14}$$

lorsque la constante de couplage est réelle -i.e. à grande distance - , nous retrouvons l'interaction Int (-) :

$$\text{Int (-)} = -\frac{1}{\hat{g}^2}\frac{Q\,\overline{Q}}{d^4} \tag{8.15}$$

et Int (-) est de nature attractive. A présent, lorsque la distance I - $\bar{I}$ tombe au voisinage de l'échelle 0, la théorie asymptotiquement libre est couplée au rayon ρ de la configuration et la constante de couplage réelle g s'annule : $g(\rho) \rightarrow 0$. Dans ce cas, la constante de couplage est réduite à sa composante imaginaire pure $i\theta$ et l'interaction devient :

$$\text{Int}(+) = -\frac{Q\,\overline{Q}}{(i\vartheta)^2\, d^4} = \frac{Q\,\overline{Q}}{\vartheta^2 d^4} \tag{8.16}$$

et nous tirons du changement de signe de (8.15) que l'interaction instanton Int (+) devient répulsive au voisinage de la limite d'échelle 0. □

Ce résultat étend en gravitation celui obtenu par E.V. Shuryak [466][467] en instantons de jauge. Entre l'échelle 0 et l'échelle de Planck, l'interaction Int (±) est donc de nature complexe.Le caractère répulsif de Int (+), induit au voisinage de l'échelle 0 par la composante imaginaire pure de la constante de couplage, provoque l'expansion Riemannienne du gaz d'instanton jusqu'à l'échelle de Planck, limite à partir de laquelle la composante réelle de la constante de couplage devient à son tour dominante. A grande échelle, l'interaction Int (-), de nature attractive, domine la théorie, freinant l'expansion Riemannienne de la solution instanton. La distribution des valeurs réelles et imaginaires de la constante de couplage complexe dépend de l'échelle et des fluctuations de la courbure de la variété pré-espace-temps.

Située entre l'échelle 0 et l'échelle de Planck, cette expansion Riemannienne, dont le principe recouvre celui du flot des états initiaux de la théorie décrit en (8.1), correspond à la dilatation de la 3-géométrie S^3 en temps imaginaire. Au delà de l'échelle de Planck, l'expansion physique de l'espace-temps, correspondant aux valeurs purement réelles de la constante de couplage de la théorie, prolonge analytiquement la phase d'expansion topologique. Nous discutons en conclusion ce point de vue, de manière largement conjecturale, en énonçant un "Principe de Singularité" découlant, selon nous, d'une théorie topologique de la Singularité Initiale.

8.3 DISCUSSION : PRINCIPE DE SINGULARITE

Nos différents résultats et conjectures des chapitres 6, 7 et 8, tout en suggérant une résolution de la Singularité Initiale dans le cadre de la théorie topologique, nous ont incité à énoncer le "principe de singularité" suivant :

Principe 8.3.1 *Tout point de l' espace-temps est relié à la singularité initiale par un flot topologique.*

Selon les perspectives de (7.2.4)(7.2.5), la singularité initiale du pré-espace-temps, de nature purement topologique, correspond à un nouvel invariant, que nous appelons "invariant de singularité ", de la forme :

$$\underset{ß=0}{Z} = \mathrm{Tr}(-1)^{S} \tag{8.17}$$

$\underset{ß=0}{Z}$ est associé à l'échelle 0 du système et est isomorphe au premier invariant de Donaldson. L'on observe que l'invariant de singularité, à la différence de l'invariant de Witten $Z = \mathrm{Tr}(-1)^{n}$, n'est pas construit à partir de H = 0 mais est *indépendant* de H, la métrique sous-jacente étant Riemannienne. L'essentiel du principe de singularité repose alors sur le fait que le bord S^3 de l' espace-temps peut être identifié au bord S^3 de l' instanton gravitationnel singulier B^4 de taille 0 représentant la singularité initiale de l' espace-temps. B^4 a pour charge topologique :

$$Q = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\, R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu} = 1$$

Comme le point S est un point critique, la longueur de corrélation ξ du système est infinie et l'amplitude topologique de l'instanton, propageant la charge **Q** par cobordisme trivial, a une portée infinie (i.e. est invariante d'échelle) et impose une contrainte topologique non locale. Considérant un point X de B^4, l'amplitude topologique assurant la propagation de la charge instantonique a la forme :

$$\left\langle 0_{S^3} .\ 0_X \right\rangle = \#(S^3, X)$$

L'amplitude topologique de la théorie est donnée par les pseudo-observables du membre de gauche, tandis que le membre de droite désigne le nombre d'intersections des $\gamma_i \subset B^4$. La fonction $\#(S^3, X)$ est nulle si le point X est situé hors de la sphère S^3 et vaut 1 si X est à l'intérieur de S^3 (i.e. si $X \in B^4$), cas où il existe une amplitude topologique. Q dépend donc uniquement des propriétés globales de la fonction $A^a_\mu(|x| = r)$. A l' infini, l'on a:

$$F \xrightarrow{|x|\to\infty} 0$$

mais ce n'est pas (nécessairement) le cas pour le potentiel de jauge A^a_μ qui devient une pure jauge:

$$A(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \tag{8.18}$$

le vide de la théorie étant non trivial. Les éléments de jauge $U(x) \in \mathrm{SU}(2)$, $x \in S^3$ sont tels que :

$$U = A + i\vec{\sigma}\,\vec{B},\ A^2 + \vec{B}^2 = 1$$

et $U(x)$ représente $U\colon S^3 \to \mathrm{SU}(2) \cong S^3$ où nous trouvons les applications de la sphère S^3 représentant l'espace physique compact E^3, bord de l' espace E^4, sur l'espace isotopique de SU(2), également isomorphe à S^3. Nous tirons l' identification de S^3, bord de la solution instanton de dimension 4 à l' espace physique, du double plongement de SU(2) dans SL(2, C) -revêtement universel du groupe de Lorentz - et dans SU(2) $\otimes$ SU(2), revêtement de SO(4). Comme SU(2) $\to S^3$, nous proposons donc d'interpréter S^3 à la fois (**i**) comme bord de dimension 3 de la solution Euclidienne instanton B^4 de dimension 4 et (**ii**) également comme bord de dimension 3 de l' espace-temps.

Or, l'espace physique de dimension 3 correspondant précisément à S^3 - et comme la charge topologique **Q** de l'instanton est déterminée par le comportement du champ de jauge sur S^3-, il en résulte que chaque point de

l'espace-temps peut être identifié à la charge topologique **Q** de l'instanton gravitationnel singulier. De ce point de vue, la charge topologique de la singularité initiale, soit $\mathbf{Q_S} = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\, R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu}$ se propage en tout point de l'espace-temps, d'où le principe (8.3.1). Nous conjecturons en (8.3.2) l'existence d'un "flot de singularité" donné par le courant topologique de Chern-Simon.

Conjecture 8.3.2 *Il existe, à l'échelle 0 un "flot de singularité "donné par le courant topologique de Chern-Simon.*

Arguments (i) En théorie Yang et Mills, la densité de charge topologique s'écrit :

$$Q \doteq \frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{tr}\, F^2 \tag{8.19}$$

et est une forme fermée dQ = 0 dans la mesure où l'identité de Bianchi DF = 0 :

$$d\,\mathrm{tr}\, F^2 = 2\mathrm{tr}\, DFF = 0$$

D'après le théorème de Poincaré, (8.19) est également exacte sur le demi-hémisphère H^+ de S^4 :

$$Q = dK$$

et nous avons donc :

$$q = \frac{1}{8\pi^2}\int_{H+}\mathrm{tr}\, F^2 = \int_{H+} dK$$

soit :

$$q = \int_{S^3} K$$

Or, la 3-forme K représente le courant topologique

$$K = \frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{tr}\left(AdA + \frac{2}{3}A^3\right)$$

où nous retrouvons la forme de Chern-Simons

$$Q_3(A,F) = \mathrm{tr}\left(AdA + \frac{2}{3}A^3\right)$$

tandis qu'avec la charge Q, nous retrouvons l'anomalie du singlet $d*J_5 = \frac{1}{4\pi^2}\,\mathrm{tr}\, FF$ selon :

$d*J_5 = 2Q$.

(ii) Les résultats (i) sont transposables en supergravité. En effet, l'on montre que le courant topologique devient :

$$Q_2^1(v_\xi, \Gamma) \sim \mathrm{tr}\, v_\xi \mathrm{d}\Gamma$$

$$Q_2^1(\alpha, \omega) \sim \mathrm{tr}\, a\mathrm{d}\omega$$

et dans ce cas, le courant topologique est engendré par l' anomalie gravitationnelle axiale :

$$A^{grav} = d * j^5 = 2\, i\ \hat{A}(M_{2n})\big|_{n=2} = -i\frac{-1}{96\pi^2}\,\mathrm{tr}\, R\tilde{R}$$

où nous retrouvons pour source du courant topologique le terme topologique de l'instanton gravitationnel singulier.

De (i) et (ii), nous déduisons que la charge topologique Q = 1 portée par l'instanton gravitationnel singulier de taille 0 est donc propagée vers $\mathcal{F}$ par le courant topologique de Chern-Simons K, comme requis. □

A présent, nous considérons la propagation du flot singulier, sous la forme d'une amplitude topologique, et ses relations avec le groupe des transformations conformes de S^3. Ce modèle est développé dans [92].

8.3.3 Propagation du flot singulier et groupe conforme de S^3

Nous suggérons qu'un modèle de la propagation de l'interaction topologique $\mathbf{Int}_{top}$ peut être donné par les transformations conformes Conf (S^3) de la sphère S^3. Conf (S^3) peut être décrit par le groupe de Möbius [71], défini à partir de l' inversion de S^3. D' où :

Proposition 8.3.4 *Pour toute similitude $h \in$ Sim ($\mathbb{R}^3$), l'application définissant la charge topologique de l'instanton, soit $f : S^3 \to S^3$, définie par $f(n) = n$ et $f = g^{-1} \circ h \circ g$ sur $S^3 \setminus n$ appartient à Möb (3).*

Démonstration Soient **n** le pôle nord et **s** le pôle sud de la sphère S^3. L'on montre alors que

$\{S\} \to g^{-1} \circ h \circ g$,

convenablement prolongé sur S^3 tout entière, est dans Möb(3) si h est une inversion ou une symétrie hyperplane. Or, les h engendrent le groupe des similitudes Sim ($\mathbb{R}^3$). En effet, considérant $\vec{f}$, il a été montré que si le noyau

$$\mathrm{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{X}}) = \{0\}$$

alors f admet un point fixe unique correspondant à son centre. Par ailleurs, $f \in$ Sim (X)$\setminus$ Is (X), il existe $\omega \in$ X unique tel que $f(\omega) = \omega$. Le point ω est le centre de la similitude f et l'on peut écrire:

$$f = h \circ g = g \circ h, \qquad h \in H_{\omega,\mu} \ \text{ et } \ g \in \mathrm{Is}_{\omega}(X) \tag{8.20}$$

Ce qui précède suppose des prolongements convenables, le plus immédiat consistant à adjoindre un point à l'infini sur $\mathbb{R}^3$ et à prolonger g en $S^3 \to \mathbb{R}^3$ par g(n) = ∞. Or, d'après [72], il existe dans Möb(3) les applications

$$f_\lambda = g^{-1} \circ H_{0,\lambda} \circ g \ \mapsto e^{-\lambda} \circ H_{0,\lambda} \circ e^{\lambda}$$

associées aux homothéties vectorielles de $\mathbb{R}^3$. Si $\lambda > 1$, l'application f_λ admet le pôle nord comme attracteur et le pôle sud comme répulseur, i.e. les itérées $f_\lambda^{\,n}$ (**n** $\in \mathbb{N}$) font converger tout point de $S^3 \setminus$ **s** vers **n**. Le seul point de S^3 échappant à l'attraction de **n** est le pôle sud **s**. □

Nous poursuivons en suggérant dans la prop. (8.3.5) que Möb(3) est le groupe conforme Conf (S^3) de S^3. Posons que Conf (S^3) décrit l'invariance d'échelle (i.e. invariance conforme) de la sphère identifiée ici, suivant l'inclusion $S^3 \subset$ SL(2, C), à l' espace physique, compactifié de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 8.3.5 *Soit Möb$^{\pm}$ (3) = Conf$^{\pm}$ (S^3). $\forall$ le rayon r $\to$ 0 de S^3 engendrant $S^3_{r\to 0}$, et $\forall f \in$ Möb(3), alors $S^3_{r\to 0}$ appartient au faisceau f(S^3)de sphères S^3. Réciproquement, une bijection de S^3 vérifiant cette propriété appartient à Möb (3) . Le groupe Möb (3) présente un isomorphisme naturel avec PO(α) de la quadrique d' équation* $q = -\sum_{i=1}^{4} x^2 + x_5^2$.

Démonstration Soit $i_{c,\,\alpha}$ une inversion de X de dimension n. Soit sa dérivée $i'(x)$ composée de la symétrie d' hyperplan vectoriel $x^{\perp}$ et de l' homothétie de rapport $\alpha / \|x\|^2$. L' on montre alors que $i'(x)$ en tout $x \in X \setminus$ c est une similitude directe pour $\alpha^n < 0$ et indirecte pour $\alpha^n > 0$. $i'(x)$ conserve les angles des droites et des droites orientées. Comme la composée de deux applications conformes est conforme, alors Möb(3)$\subset$Conf(S^3). Réciproquement, comme Möb(3) $\subset$ Conf (S^3) est transitif sur S^3, alors $f \in$ Conf (S^3) laisse fixe le pôle nord n. Selon la projection stéréographique g de n, pour f(n) = n, l'on obtient :

$$g \circ f \circ g^{-1} \in \text{Conf}\,(\mathbb{R}^3)$$

g et f étant conformes. En application du théorème des similitudes de Liouville [72], l'on a

$$g \circ f \circ g^{-1} \in \text{Sim}\,(\mathbb{R}^3) \Rightarrow f \in \text{Möb}(3) \qquad (8.21)$$

Il résulte des propriétés de l'inversion [72] que $f(\sigma)$ conserve la structure de la sphère S^3 lorsque le rayon r $\to$ 0. Réciproquement, en posant f(n) = n, $g \circ f \circ g^{-1}$ transforme les (demi)-droites de $\mathbb{R}^3$ en (demi)-droites, de sorte que $S^3_{r\to 0}$ appartient au faisceau f(S^3)de sphères S^3. Enfin, il a été établi dans [71] que:

Möb(3) = $\left\{\Sigma \circ (f|\,\text{im}(\alpha)) \circ \Sigma^{-1} \;:\; f \in \text{PO}(\alpha)\right\}$

i.e. le groupe de Möbius de S^3 correspond à la restriction du groupe PO(α) sur im(α).$\square$

Une théorie topologique de propagation de la singularité a été suggérée dans [92]. A partir de ce qui précède, nous revenons pour conclure sur notre idée esquissée ci-dessus, selon laquelle la propagation de la singularité initiale pourrait être induite par l'existence d'une amplitude topologique du type charge topologique de l'instanton gravitationnel singulier $\mathbf{Q_S} = \int d^4x\, R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu}$. Les seules "observables" de la théorie sont, à l'échelle 0, des observables topologiques 0_γ , de la forme :

$$0_\gamma = -\frac{1}{64\pi^2}\int_\gamma \hat{R}^{ab}\hat{R}^{cd}\varepsilon_{abcd} \equiv \int_\gamma \hat{Q}(x)$$

Les observables 0_γ sont ici interprétées comme cocycles de l'espace des modules des instantons. et sont associés avec les cycles γ_i de la 4-variété M. Avec M = $\mathbb{R}^4$, les seuls cycles non triviaux sont le point (associé à une 4-forme sur l'espace des modules) et la variété M elle-même. Nous retrouvons alors les amplitudes topologiques de Witten [518], données par les invariants de Donaldson de la théorie.

Nous proposons de fonder la pertinence (ainsi que les conséquences cosmologiques) du Principe de Singularité dans une recherche ultérieure sur l'amplitude topologique possiblement associée à l'échelle 0 de l'espace-temps.

CONCLUSION

Nous avons esquissé dans la présente recherche, et en particulier au chapitre 3, les bases d'une théorie de la quantification (au sens q-déformation [382]) de la signature σ de la métrique de l'espace-temps à l'échelle de Planck. Nous espérons qu'une fois enrichie par des travaux ultérieurs, une telle théorie pourra constituer l'un des éléments effectifs de la gravité quantique, grâce à laquelle cette dernière sera peut-être plus complète.

La théorie de superposition, telle que proposée ici, présente trois grandes caractéristiques, qui la distinguent de tous les autres modèles fondés sur de possibles changements de la signature :

(**i**) la signature $\sigma(-)$ de la métrique de l'espace-temps paraît être dépendante de l'échelle - notamment, comme nous le montrons aux chaps. 4 et 5 -, des échelles de courbure **R** de température $ß^{-1}$ - à laquelle elle est considérée;

(**ii**) $\sigma(\pm)$ ne devrait plus être fixe à partir de l'échelle de Planck ℓ_{Planck} et est probablement soumise à des fluctuations quantiques induites, comme nous le suggérons au chapitre 6, par le couplage en gravité quantique entre la métrique $g_{\mu\nu}$ et le champ scalaire du type dilaton + axion $\lambda_c = \frac{1}{g^2} + i\,\theta$ caractéristique de la supergravité N = 2 [217].

(**iii**) La signature $\sigma(+)$ devrait être à nouveau fixée à l'échelle 0, mais sous la nouvelle forme Euclidienne, forme "topologique", i - duale de la forme physique Lorentzienne.

Nos conclusions reposent sur un résultat mathématique acquis au chap. 3, établissant l'existence du produit bicroisé cocyclique de la forme générale

$$M_\chi(H) = H^{op} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} H_\chi$$

où H est une algèbre de Hopf et χ un 2-cocycle du type "twist". Une telle construction nous a permis de chercher l'unification des signatures Lorentzienne et Euclidienne au sein d'une seule structure de groupe quantique, ce que nous sommes parvenus à faire sous la forme du produit bicroisé cocyclique d'un type nouveau :

$$Uq(so(4))^{op} \overset{\psi}{\triangleright\!\blacktriangleleft} U_q(so(3,1)) \qquad (3.1)$$

Avec l'aide de tels produits bicroisés, et aussi directement à partir de la structure de groupe tressé du q-espace-temps, nous avons établi que le changement de signature (4) → (3, 1) correspond à une sorte de T-dualité exprimée sous la forme d'une dualité d'algèbre de Hopf du type Uq(su(2)) ↔ SUq(2).

D'un point de vue physique, les résultats acquis en théorie de q-déformation débouchent sur les bases d'un modèle réaliste de la "q-déformation de la signature" et, d'ores et déjà, permettent de mieux comprendre certains des mécanismes mathématiques sous-jacents à la transition possible (3, 1) → (4, 0). Entre autres, nous avons observé que :

(**a**) l'espace topologique de superposition des signatures $\sum = \frac{\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3}{SO(3)} \otimes \mathbb{R}^{\pm}$ construit au chapitre 2 suggère l'existence, à l'échelle de Planck, d'un pré-espace-temps non-commutatif, relevant de la géométrie non commutative telle que définie par Alain Connes [149] et dont la structure est donnée par la q-déformation de l'espace sur lequel agît le groupe de Lorentz q-déformé. Dans une telle perspective, nous avons montré au chapitre 3 comment la quantification du groupe de Lorentz (associée à la quantification de l'espace-temps) induit une quantification (superposition) de la signature sous la forme (+++±) ;

(**b**) à partir des résultats ci-dessus, nous suggérons aux chapitres 7 et 8 que la théorie topologique est la seule théorie effective applicable à l'échelle 0. Son domaine de validité s'étend, par amplitude, de l'échelle 0 jusqu'à l'échelle de Planck.

(**c**) la signature Euclidienne $\sigma(+)$ correspond, à la température de Planck T_p, au secteur topologique de la théorie, dual du secteur physique ;

(**d**) à l'échelle initiale $ß_0 = 0$, associée à l'instant initial t = 0 et correspondant à la singularité initiale dans le modèle standard d'espace-temps, la température et la densité d'énergie (courbure) sont infinies. Toutefois, nous suggérons (en particulier au chapitre 7) une résolution possible (i.e. renormalisation) de la singularité initiale dans le cadre de la théorie topologique de Witten. Dans un tel cadre, la singularité initiale peut être décrite par un instanton gravitationnel singulier de taille 0, défini aux chapitres 7.

(**e**) A l'échelle 0, la limite singulière de la topologie du pré-espace-temps peut, comme nous l'indiquons au chap. 7, être décrite par le premier invariant de Donaldson associé à l'espace des modules de l'instanton gravitationnel singulier de taille 0. Considérant la fonction de partition $Z(ß) = \mathrm{Tr}\,(-1)^s\, e^{-ßH}$ introduite au chap. 4 et décrivant les états de la métrique d'espace-temps à l'échelle de Planck, la limite de Z(ß) lorsque $ß \to 0$ est un invariant que nous appelons "invariant de singularité", de la forme

$$\underset{ß=0}{Z} = \mathrm{Tr}\,(-1)^s$$

analogue à l'invariant de Witten et redonnant la structure du premier invariant de Donaldson

$$\mathrm{Tr}\,(-1)^S \sim \sum_i (-1)^{n_i}$$

réduit à l'unité pour dim $M_k = 0$ de l'espace des modules d'instanton . La signature de la métrique de la variété de dimension 4 à l'échelle 0 est donc symétrique Euclidienne (+ + + +).

Enfin, du point de vue cosmologique, nous tirons de notre recherche :

(**f**) que la singularité initiale S_0 dans le modèle standard, caractérisée par une courbure et une densité d'énergie infinies, doit pouvoir être résolue dans le cadre de la théorie topologique des champs ;

(**g**) que S_0 correspond à un instanton (super)gravitationnel singulier de taille $\rho = 0$, de dimension 4, de charge topologique $Q = \vartheta \int d^4x\, \mathrm{Tr}\; R_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} = 1$ et de densité de charge topologique $\delta(Q) = \dfrac{\mathrm{Tr}\; R_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu}}{\rho^2} \to \infty$. portant une signature Euclidienne (+ + + +) ;

(**h**) que du point de vue physique, le Lagrangien qui nous paraît le plus naturellement adapté aux conditions de très hautes courbures du pré-espace-temps au voisinage de l'échelle de Planck ($R(ß) >> M^2_{Planck}$) est fondé sur une extension des conditions relativistes et contient les termes de R^2 - gravité. Il est de la forme :

$$\mathbf{L}_{supergravité} = \hat{\beta} R + \frac{1}{g^2} R^2 + \alpha R R^*$$

avec une composante physique Lorentzienne (le terme d'Einstein $\hat{\beta} R$) et une composante topologique Euclidienne (le terme topologique $\alpha R R^*$). L'"interpolation" entre ces deux composantes, selon un mécanisme que nous avons suggéré en 5.2.1, nous incite donc à considérer que $\mathbf{L}_{supergravité}$ décrit correctement les deux pôles d'une *même* théorie (la superposition) ainsi que les deux métriques associées.

(**i**) que la phase d'expansion physique décrite par le modèle du Big-Bang au delà de l'échelle de Planck par le terme d'Einstein $\hat{\beta} R$ de $\mathbf{L}_{supergravité}$ devrait être précédée par une phase d'expansion topologique, donnée par $\alpha R R^*$ et effective entre l'échelle 0 et l'échelle de Planck ℓ_{Planck} ;

(**j**) que l'expansion du pré-espace-temps à partir de l'échelle 0 (expansion topologique) devrait correspondre à une dynamique Δ_{it} en temps imaginaire, ou évolution Euclidienne, que nous suggérons de décrire par le semi-groupe à un paramètre des automorphismes de l'algèbre $M_{0,1}$ des pseudo-observables :

$$\sigma_{ß}(M_{0,1}) = e^{Hß} M_{0,1}\ e^{-Hß}.$$

$M_{0,1}$ est un facteur de type II_∞. Plus exactement, il s'agît de l' ITPFI $R_{0,1}$ décrite aux chaps. 4 et 8. Les observables physiques n'étant plus utilisables à cette "échelle topologique", on considère alors des cycles d'homologie décrivant des états dans l'espace des modules des instantons gravitationnels. Ainsi, à l'échelle ß = 0, nous avons suggéré l'existence, sur la variété pré-espace-temps, d'une pseudo-dynamique Riemannienne correspondant au flot des poids de l'algèbre $M_{0,1}$. Nous précisons la relation entre évolution en temps imaginaire et flot des poids dans un article ultérieur. Il résulte d'une telle relation que le flot d'évolution à temps réel sur l'espace de superposition S peut être vu comme engendré à l'échelle ß = 0 par le flot des poids en temps imaginaire. Ce point de vue suggère ainsi que le changement d'échelle de la 4-géométrie représentant le pré-espace-temps depuis l'échelle 0 jusqu'à l'échelle de Planck est induit par une "expansion Riemannienne" de la métrique Euclidienne. Cette expansion dépend de l'existence (i) à l'échelle 0 - i.e. à l'origine de la variété de superposition $\sum_{top}$ décrite au chap. 2 -, d'une solution topologique Riemannienne à entropie topologique nulle et à caractéristique d'Euler $\chi = 1$ et, à l'infini -i.e. au bord de $\sum$top - (ii) d'une solution topologique Lorentzienne à entropie topologique non nulle (bien que minimale) et à caractéristique d'Euler $\chi = 0$. Les deux solutions sont superposées au sein de la variété de superposition $\sum_q$.

Les trois phases associées à l'échelle singulière ß = 0, à l'échelle quantique $0 <$ ß$< \ell_{Planck}$ et à l'échelle classique ß > 0 décrites ci-dessus correspondent respectivement au sommet, au secteur quantique et au secteur classique sur le cône de lumière cosmologique. Le secteur quantique de superposition correspond à une "transition de phase" entre la métrique Euclidienne marquant la singularité initiale et la métrique Lorentzienne à "symétrie brisée" caractérisant l'espace-temps. L'on observe également que la dimension genre temps est "locale" et discontinue durant la transition de phase quantique associée à l'échelle quantique et devient globale et continue au delà de l'échelle de Planck. Pour ß > ℓ_{Planck} apparaît le "facteur d'échelle" classique de la cosmologie.

Certains résultats récents - notamment ceux de C.M Hull [283] [284] de la théorie des supercordes (laquelle implique nécessairement l'existence d'un champ scalaire complexe couplé à la métrique) vont dans le sens des résultats (**a**) à (**j**). D'une manière générale, la théorie de fluctuation de la signature peut être inscrite de manière naturelle dans le secteur à basse dimension de la théorie des cordes.

Enfin, nous tirons en conclusion du chap. 8 un "Principe de Singularité", que nous formulons ainsi :

Principe de Singularité : *Tout point de l' espace-temps est relié à la singularité initiale par un flot topologique.*

Le principe de singularité repose sur le fait que le bord $\mathbb{R}^3 \to S^3$ de l' espace-temps (3, 1) peut être identifié au bord S^3 de l' instanton gravitationnel singulier B^4 (4, 0) de taille 0 représentant la singularité initiale de l' espace-temps. B^4 a pour charge topologique :

$$Q = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\, R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu} = 1$$

Comme le point S représentant la singularité initiale est un point critique, la longueur de corrélation ξ du système est infinie et l'"amplitude topologique" (au sens de Witten) de l'instanton, déterminée par la charge Q détectée sur le bord S^3 de B^4 a une portée infinie (i.e. est invariante d'échelle). Nous suggérons au chapitre 7 que la propagation de la charge topologique de l'instanton à partir de l'échelle 0 (ß = 0) vers l'infini (ß $\to \infty$) est induite par le fait que l'instanton gravitationnel singulier de taille 0 et de densité de charge topologique infinie $\delta(Q)$ tend vers on état fondamental, correspondant à $\delta(Q) \to 0$ et à ß = $\rho \to \infty$ (le rayon de l'instanton associé à l'état fondamental tend vers infini).

L'étude détaillée de l'interaction topologique évoquée au chapitre 7 a été effectuée de manière complémentaire à notre thèse par I. Bogdanov dans le cadre d'une théorie topologique de l'inertie (92). Certains des résultats de cette étude, fondés sur une interprétation nouvelle de l'expérience du pendule de Foucault, pourraient correspondre à une confirmation de la théorie de déformation de métrique à l'échelle de Planck ainsi que de la nature Euclidienne de la signature à l'échelle singulière 0.

BIBLIOGRAPHIE EXTENSIVE

Note : Pour une lecture complémentaire, on pourra consulter les articles et ouvrages suivants :

1. Abrikosov A., Gor'Kov L., Dzyaloshinski I.
« On the Application of Quantum-Field Therory Methods to Problems of Quantum Statistics at Finite Temperatures »
Soviet Physics JETP Vol. 36 (9) N° 3 636-641 (1959)

2. Acharya B.S. O'Loughlin M.
« Self-Duality in D< 8-dimensional Euclidean Gravity »
hep-th / 9612182 (1996)

3. Adams D.H. Sen S.
« Phase and Scaling Properties of Determinants arising in Topological Field Theories »
Physics Letters B 353 495-500 (1995)

4. Ahluwalia D.V.
« Quantum Measurement, Gravitation and Locality »
Physics Letters B Vol 339 301-303 (1994)

5. Albeverio S., Hoegh-Krohn R
« Dirichlet Forms and Markov Semigroups on $C^{\star}$ Algebras »
Commun. Math.Phys. 56, 173-187 (1977)

6. Alvarez Gaumé L.
« Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem »
Commun. Math. Phys. 90 161-173 (1983)

7. Alvarez Gaumé L. Witten E.
Nuclear Physics B 324 269 (1984)

8. Alvarez Gaumé L. Witten E.
« Gravitational Anomalies »
Nuclear Physics B234 269 (1983)

9. Alvarez E., Alvarez-Gaume L., Lozano Y.
« An Introduction to T-Duality in String Theory »
Nuclear Physics B41 1-20 (1995)

10. Alvarez-Gaume L., Ginsparg P.
Nucl. Phys. B 243 449 (1984)

11. Ambjorn J. Jurkiewicz J.
« Scaling in four-Dimensional Quantum Gravity »
Nuclear Physics B451 643-676 (1995)

12. Amelino-Camelia G.
« On local Observations in Quantum Gravity »
gr-qc / 9603013 (1996)

13. Amelino-Camelia G. Lukierski J. Nowicki A.
« k-Deformed Covariant Phase Space and Quantum Gravity Uncertainty Relations »
hep-th / 9706031 (1997)

14. Amelino-Camelia G.
« Classicality, Matter-Antimatter asymmetry, and Quantum Gravity Deformed Uncertainty Relations »
outp-97-26P (1997)

15. Amelino-Camelia G.
« Enlarged Bound on the Measurability of Distances and Quantum *k* -Poincaré Group »
Physics Letters B Vol 392 283-286 (1997)

16. Amelino-Camelia G. Majid S.
« Waves on non commutative Space Time »
hepth 9907 110 (1999)

17. Andrionopoli L., Bertolini M., Ceresole A., d'Auria R., Ferrara S., Fré P.
« General Matter Coupled N=2 Supergravity »
Nuclear Physics B476397-417 (1996)

18. Anne C. Besson G.
« Sur le Théorème de l'Indice d'après Ezra Getzler »
Seminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Chambery-Grenoble (1985-1985)

19. Anselmi D. Fre' P.
« Topological Twist in Four Dimensions, R-Duality and Hyperinstantons »
Nuclear Physics B 404 ,288-320 (1993)

20. Anselmi D. Fre' P.
« Twisted N =2 Supergravity as Topological Gravity in Four Dimensions »
Nuclear Physics B 392 401-427 (1993)

21. Anselmi D. Fre' P.
« Gauged Hyperinstantons and Monopoles Equations »
Physics Letters, B 347, 247-254 (1995)

22. Anselmi D
« Quantum Topological Invariants, Gravitational Instantons and the Topological Embedding »
hepth/9607206 (1996)

23. Anselmi D
« On Field Theory Quantization Around Instantons »
Class. Quantum Grav. 14 1015-1036 (1997)

24. Anselmi D.
« Topological Field Theory and Physics »
Class. Quantum Grav. 14 1 -20 (1997)

25. Antoniadis I. Tomboulis E.T.
« Gauge Invariance and Unitary in Higher-Derivative Quantum Gravity »
Phys.Review D Vol.33 N°10 2756-2775 (1986)

26. Antoniadis I. Mazur P.O. Mottola E.
« Scaling Behavior of Quantum four-Geometries »
Physics Letters B Vol 323 284-291 (1994)

27. Antoniadis I. Mazur P.O. Mottola E.
« Quantum Diffeomorphisms and Conformal Symmetry »
hep-th 9509168 (1995)

28. Antoniadis I. Mazur P.O. Mottola E.
« Physical States of the Quantum Conformal Factor »
hep-th 9509169 (1996)

29. Antoniadis I. Ferrara S. Gava E. Narain K.S. Taylor T.R.
« Perturbative Prepotential and Monodromies in N=2 Heterotic Superstring »
Nuclear Physics B258 18-28 (1985)

30. Aoyama S. van Holten J.W.
« Anomalies in Supersymmetric σ-Models »
Nuclear Physics B310 355-370 (1988)

31. Araki H. Woods E.J.
« A Classification of Factors »
Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A 4 51-130 (1968/69)

32. Araki H.
« Golden-Thomson and Peierls-Bogolubov Inequalities for a General Von Neuman Algebra »
Commun. Math.Phys. 34, 167-178 (1973)

33. Araki H. Ion P.D.F.
« On the Equivalence of KMS and Gibbs Conditions for States of Quantum Lattice Systems »
Commun. Math. Phys. 35 1-12 (1974)

34. Araki H.
« Relative Entropy of States of von Neuman Algebras I,II »
RIMS 11 N°3 803-833 (1977)

35. Arnal D. Cortet J.C. Molin P. Pinczon C.
« Covariance and Geometrical Invariance in *-quantization »

J. Math.Phys. Vol 24, N°2, (1983)

36. Argurio R. Houarts L.D.
Phys. Letters B 450 (1999)

37. Ashtekar A.
« A Generalized Wick Transform for Gravity »
gr-qc 9511083 (1995)

38. Atick J.J. Witten E.
« The Hagedorn Transition and the Number of Degrees of Freedom in String Theory »
Nuclear Physics B 310 291-334 (1988)

39. Atiyah M.F. Singer I.
« The Index of Elliptic Operators on Compact Manifolds »
Bll. Amer. Math. Soc. 69 422-433 (1963)

40. Atiyah M.F.
« K-Theory »
Benjamin, New-York (1967)

41. Atiyah M.F. Singer I.
« The Index of Elliptic Operators I »
Ann.of Math. (2) 87 484-530 (1968)

42. Atiyah M.F. Singer I.
« The Index of Elliptic Operators IV »
Ann.of Math. (2) 93 119-138 (1971)

43. Atiyah M.F. Bott R. Padoti V.K.
« On the Heat Equation and the Index Theorem »
Springer Verlarg (1973)

44. Atiyah M.F. Bott R. Patodi V.K.
« On the Heat Equation and the Index Theorem »
Invent. Math. 19 279-330 (1973)

45. Atiyah M.F.
« Elliptic Operators and Compact Groups »
Lectures Notes in Math. 401, Springer Berlin (1974)

46. Atiyah M.F.
« Elliptic Operators, Discrete Groups and von Neuman Algebras »
Analyse et Topologie, Soc. Math. France 43-72 (1976)

47. Atiyah M.F.
« Geometrical Aspects of Gauge Theories »
Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki Vol 2. 881-5 (1978)

48. Atiyah M.F.
« Geometry of Monopoles »
Monopoles in Quantum Field Theory. World Scientific Publishing 503-512 (1982)

49. Atiyah M.F.
« Instantons in Two and four Dimensions »
Commun. Math. Phys. 93 437-451 (1984)
.

50. Atiyah M.F.
« The Geometry and Physics of Knots »
Cambridge University Press (1990)

51. Auria d' D.
« Special and Quaternionic Isometries : General Coupling in N=2 Supergravity and the Scalar Potential »
Nuclear Physics B 359 705-740 (1991)

52. Avez A.
« Essais de Géométrie Riemannienne Hyperbolique Globale - Applications à la Relativité Générale »
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 13,2 105-190 (1963),

53. Azcarraga J.A. de Kulish P.P. Rodenas F.
« Twisted h -spacetimes and Invariant Equations »
q-alg/9702026 (1997)

54. Azcarraga J.A. de Olmo M.A.del Perez Bueno J.C. Santander M.
« Graded Contractions and Bicrossproduct Structure of Deformed Inhomogeneous Algebras »
J.Phys.A Math Gen. 30 3069-3086 (1997)

55. Back, A. Freund P.
« New Gravitational Instantons and Universal Spin Structures »
Physics Letters Volume 77 B N° 2, 181-184

56. Bakas I.
« Space-Time Interpretation of S-Duality and Supersymmetry violations of T-Duality »
hep-th / 9410104 (1994)

57. Bailin D. Love A. W.A. Sabra Simon S.
« Target Space Duality in Orbitfolds with Continuous and Discrete Wilson Lines »
Nuclear Physics B447 85-94 (1995)

58. Ballesteros A. Celeghini E. Giachetti R. Sorace E. Tarlini M.
« An R -Matrix Approach to the Quantization of the Euclidean Group E (2)
J.Phys A.Math Gen. 26 7495-7501 (1993)

59. Ballesteros A. Herranz F.J. del Olmo M.A. Santander M.
« Four-Dimensional Quantum Affine Algebras and Space-Time q -Symmetries »
J. Math.Phys. Vol 35, N°9 4928-4937 (1994)

60. Balitsky I., Yung A.
« Instanton Molecular Vacuum in N =1 Supersymmetric Quantum Mechanics »
Nuclear Physics B274(1986) 475-508

61. Balitsky I.I., Yung A.V.
« Collective-Coordinate Method for Quasizero Modes »
Physics Letters, Vol.168B, N°1,2113-119 (1986)

62. Bangoura M. Kosmann-Schwarzbach Y.
« The Double of a Jacobian Quasi-Bialgebra »
Letters in Mathematical Physics 28 13-29 (1993)

63. Banyaga A.
« Instantons and Hypercontacts Structures. Part II »
Journal of Geometry and Physics 21 136-148 (1997)

64. Bartocci C Bruzzo U. Carfora M. Marzuoli A.
« Entropy of Random Coverings and 4D Quantum Gravity »
Journal of Geometry and Physics 18 247-294 (1996)

65. Bayen F. Flato M. Fronsdal C. Lichnerowicz A. Sternheimer D.
« Quantum Mechanics as a Deformation of Classical Mechanics »
Letters in Mathematical Physics 1 521-530 (1977)

66. Bayen F. Flato M. Fronsdal C. Lichnerowicz A. Sternheimer D.
« Deformation Theory and Quantization I,II »
Ann.Phys. NY,111 61-110 111-151 (1978)

67. Beck C. Schlögl F.
« Thermodynamics of Chaotic Systems »
Cambridge University Press (1993)

68. Belavin A.A. Polyakov A.M. Schwartz A.S. Tyupkin Y.S.
« Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations »
Physics Letters B Vol 59 N°1 85-88 (1975)

69. Bellissard J.
« Ordinary Quantum Hall Effect and Noncommutative Cohomology »
Proc.on localization in disordered systems Bad Schaudau,1986)

70. Bengtsson I.
« Some Observations on Degenerate Metrics »
General Relativity and Gravitation Vol 25 N°1 (1993)

71. Berger M
« Géométrie »
Nathan (1990)

72. Bergshoeff E. Hull C. Ortin T.
« Duality in the Type II Superstring Effective Action »

Nuclear Physics B451 547-575 (1995)

73. Bertlman R.A.
« Anomalies in Quantum Field Theories »
Oxford Science Publications (1996)

74. Bekenstein J.D.
« The Quantum Mass Spectrum of the Kerr Black Hole »
Lettere al Nuovo Cimento Vol 11 N° 9 (1974)

75. Bekenstein J.D.
Phys.Review D 7 (1973)

76. Bershadsky M. Johansen A. Sadov V. Vafa C.
« Topological Reduction of 4D SYM to 2D σ-Models »
Nuclear Physics B448 166-186 (1995)

77. Bertlmann R.A.
« Anomalies in Quantum Field Theory »
Clarendon Press. Oxford (1996)

78. Besse A.L.
« Einstein Manifolds »
Springer Verlag, Berlin (1987)

79. Besson G. Courtois G. Gallot S.
« Les Variétés Hyperboliques sont des Minima Locaux de l'Entropie Topologique »
Invent. Math 117 : 403-445 (1994)

80. Besson G. Courtois G. Gallot S.
« Entropies et Rigidités des Espaces Localement Symétriques de Courbure Strictement Négative »
Geometric and Functional Analysis Vol.5 731-799 (1995)

81. Besson B. Courtois G. Gallot S.
« Minimal Entropy and Mostow's Rigidity Theorems »
Ergod. Th.&Dynam. Sys. 16 623-649 (1996)

82. Bianchi M. Fucito F. Rossi G.C. Martinelli M.
« Instantons in String Effective Theory »
Nuclear Physics B 440 129-170 (1995)

83. Bidegain F. Pinczon G.
« A Star-product Approach to Noncompact Quantum Groups »
Letters in Mathematical Physics 33 n° 3 231-240 (1995)

84. Bidegain F.
« Non-compact Topological Quantum Groups »
J.Bertrand et al. (eds) Modern Group Theoretical Methods in Physics, 51-62 (1995)

85. Billo M. Caselle M. D'Adda A. Panzeri S.
« Toward an Analytic Determination of the Deconfinement Temperature in SU(2) Lattice Gauge Theory »
Nuclear Physics B472 163-193 (1996)

86. Biquard O. Garcia-Prada O.
« Parabolic Vortex Equations and Instantons of Infinite Energy »
Journal of Geometry and Physics 21 238-254 (1997)

87. Birrell N.D. Davies P.C.W.
« Quantum Fields in Curved Space »
Cambridge University Press (1982)

88. Bismusth J.M.
« The Atiyah-Singer Theorems.A Probabilistic Approach. The Index Theorem »
Journal of Functional Analysis 57 56-99 (1984)

89. Bitar K.M. Chang S.J.
« Vacuum Tunneling of Gauge Theory in Minkowski Space »
Phys.Review D Vol.17 N°2 486-497 (1978)

90. Blatter M. Burkhalter M Hasenfratz P. Niedmermayer F
« Instantons and the Fixed Point Topological Charge in the two-dimensional O (3) σ Model »
Phys.Review D Vol.53 N°2 923-932 (1996)

91. Bogdanov G.
« Q-Déformation Euclidienne de la Métrique à l'Echelle 0 »
Thèse de Doctorat en Physique-Mathématiques. Université de Bourgogne, version complete non publiée (1999)

92. Bogdanov I.
« Théorie Topologique de l'Inertie »
Thèse de Doctorat en Physique-Mathématiques. Université de Bourgogne (1999)

93. Bogomolny E.B. Fateyev V.A.
« Large Order Calculations in Gauge Theories »
Physics Letters B Vol 71 N°1 93-96 (1977)

94. Bogomolny E.B.
« Calculations of Instantons-Anti-Instantons Contributions in Quantum Mechanics »
Physics Letters B vol 91 N° 3,4 431-435 (1980)

95. Bonechi F. Celeghinit E. Sorace E. Tarlini M.
« Heisenberg XXZ Model and Quantum Galilei Group »
J.Phys A.Math Gen. L939-L94325 (1992),

96. Bonechit F. Celeghinit E. Giachetti R. Sorace E. Tarlini M.
« Inhomogeneous Quantum Groups as Symmetries of Phonons »
Physical Review D Vol 68 N° 25 3718-3720 (1992)

97. Bonechit F. Celeghinit E. Giachetti R. Perena C.M. Sorace E. Tarlini M.
« Exponential Mapping for non-Semisimple Quantum Groups »
J.Phys. A: Math.Gen.27 1307-1315 (1994)

98. Bonneau P. Flato M. Pinczon G.
« A Natural and Rigid Model of Quantum Groups »
Letters in Mathematical Physics 25 75-84 (1992)

99. Bonneau P. Flato M. Gerstenhaber M. Pinczon G.
« The Hidden Group Structure of Quantum Groups : Strong Duality, Rigidity and Preferred Deformations »
Commun. Math.Phys. 161, 125-156 (1994)

100. Bonneau P.
« Topological Quantum Double »
Reviews in Mathematical Physics, Vol 6 N°2 305-318 (1994)

101. Bourbaki N.
« Espaces Vectoriels Topologiques »
Masson, Paris (1981)

102. Bourguignon J.P. Gauduchon P.
« Spineurs, Opérateurs de Dirac et Variations de Métriques »
Commun. Math.Phys.144 581-599 (1992)

103. Bowick M.J. Mariani E.
« Quantum Gravity, Random Geometry and Critical Phenomena »
General Relativity and Gravitation, Vol 24, N°12 (1992)

104. Branchina V. Polonyi J.
« Instantons in Cutoff Theories »
Nuclear Physics B433 (1995) 99-122

105. Bratelli O. Robinson D.W.
« Operators Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1 »
Springer Verlag, 1979

106. Brézin E. Le Guilou J.C. Zinn-Justin J.
« Perturbation Theory and large Order »
Physical Review D Vol 15 N° 6 1558-1563 (1977)

107. Brzezinski T.
« Crossed Products by a Coalgebra »
To be published in Commun. Alg.

108. Brzezinski T.
« Crossed Products Structure of Quantum Euclidean Groups »
Quantum Group Symposium 21 Heron Press 283-288 (1997)

109. Brzezinski T. Majid S.
« Quantum Gauge Theory in Quantum Spaces

Com. Math. Phys. vol 157 (1993

110. Buchbinder I.L. Odintsov S.. Shapiro I.L.
« Effective Action in Quantum Gravity »
Institute of Physics Publishing (1992)

111. Buchdahl N.P.
« Instantons on CP_2 »
J Differential Geometry 24 19-52 (1986)

112. Cahen M.
« Déformation et Quantification »
in Physique Quantique et Géométrie. Colloque Géométrie et Physique de 1986 en l'honneur de André Lichnerowicz , Herman Editeur (1988)

113. Callan C. G. *et al*
« World-brane Actions for String Solitons »
Nucl. Phys. B 367 60 (1991)

114. Cardy J.
« Scaling and Renormalization in Statistical Physics »
`Cambridge University Press (1966)

115. Carlini A. Greensite J.
« Why is Spacetime Lorentzian? »
Physical Review D Vol 49 N° 2 866-878 (1994)

116. Carow-Watamura U. Schlieker M. Scholl M. Watamura S.
« Tensor Representation of the Quantum Group Slq (2,C) and Quantum Minkowski Space »
Z.Phys. C - Particles and Fields 48, 159-165 (1990)

117. Carow-Watamura U. Schlieker M. Scholl M. Watamura S.
« A Quantum Lorentz Group »
International Journal of Modern Physics A Vol.6, N° 17, 3081-3108 (1990)

118. Cartan E.
« Les Groupes Projectifs Continus Réels qui... »
J.Math.Pures et Appliquées 10 149-186 (1914)

119. Cederwall M.
« Problems with Duality in N=2 super-Yang-Mills Theory »
hep-th / 9606096 (1996)

120. Celeghini E. Giachetti R. Rayman A. Sorace E. Tarlini M.
« SO_q (n +1, n -1) as a Real Form of So_q (2n ,C) »
Letters in Mathematical Physics 23 45-49 (1991)

121. Celeghini E. Giachetti R. Kulish P.P. Sorace E. Tarlini M.
« Hopf Superalgebra Contractions and R -Matrix for Fermions »
J.Phys A.Math Gen. 24 5675-5682 (1991),

122. Celeghini E. Giachetti R. Sorace E. Tarlini M.
« Quantum Groups of Motion and Rotational Spectra of Heavy Nuclei »
Physics Letters B Vol 280 180-186 (1992)

123. Ceresole A. d'Auria R. Ferrara S., Van Proeyen A.
« Duality Transformations in Supersymmetric Yang-Mills Theories coupled to Supergravity »
Nuclear Physics B444 92-124 (1995)

124. Chari V. Pressley A.
« A Guide to Quantum Groups »
Cambridge University Press (1994)

125. Chakrabarti A.
« Linear Fluctuations of Periodic and Quasiperiodic Instantons »
Phys.Review D Vol.40 N°8 2684-2691 (1989)

126. Chakrabarti A.
« Canonical Structure in $SO(4)_q$ and Relations to $E(3)_q$ and $SO(3,1)_q$
A169.0492 (1992)

127. Chamseddine A.H. Felder G. Frölich J.
« Gravity in Non-Commutative Geometry »
Commun. Math. Phys. 155 205-217 (1993)

128. Chamseddine A.H.
« Connection between Space-Time Supersymmetry and Non-Commutative Geometry »
hep-th/9404138 (1994)

129. Chamseddine Connes A.
« A Universal Action Formula »
hep-th / 9606056 (1996)

130. Christodoulou D.
Phys. Rev. Let. 25 1596 1597 (1970)

131. Chryssomalakos C., Drabant B., Shlieker M., Weich W. Zumino B
« Vector Fields on Complex Quantum Groups »
Commun. Math.Phys. 147, 635-646 (1992)

132. Chryssomalakos C., Engeldinger R., Jurco B., Shlieker M., Zumino B
« Complex Quantum Enveloping Algebras as Twisted Tensor Products »
lmu-tpw 93-2 (1993)

133. Ciccoli N. Giachetti R.
« The Two-Dimensional Euclidean Quantum Algebra at Roots of Unity »
in publication on Letters in Mathematical Physics

134. Coles P. Lucchin F.
« Cosmology »
Wiley ed (1995)

135. Coli B. Morales J.A.
« Symmetric Frames on Lorentzian Spaces »
J.Math. Phys. 32 9 (1991)

136. Coli B. Morales J.A.
« Comments on Space-Time Signature »
J. Math.Phys. Vol 34, N°6, (1993)

137. Combes F.
« Poids Associé à une Algebre Hilbertienne à Gauche »
Compos. Math. 23 49-77 (1971)

138. Combet E
« Solutions Elementaires des Dalembertiens Généralisés »
Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascicule 160, Gauthier-Villars 1965

139. Connes A
« Une Classification des Facteurs de Type III »
Ann.Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 6 133-252 (1973)

140. Connes A., Takesaki M.
« Flots des Poids sur les Facteurs de Type III »
C.R. Acad. Sci. Paris, t . 278, Série A, 945-948, (1974)

141. Connes A., Gromov M., Moscovici H.
« Conjecture de Novikov et Fibrés Presque Plats »
C.R. Acad. Sci. Paris, t . 310, Série 1, 273-277, (1990)

142. Connes A. Haagerup U. Stormer E.
« Diameters of State Spaces of Type III Factors »
Operators Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory , Busteni, 91-116 (1983)

143. Connes A.
« The Action Functional in Noncommutative Geometry »
Commun. Math. Phys. 117 673-683 (1988)

144. Connes A.
« Géométrie non-Commutative »
InterEditions, Paris (1990)

145. Connes A. Lott J.
« The Metric Aspect of Noncommutative Geometry »
New Symmetry Principles in Quantum Field Theory, Edited by J Frôlich et al. Plenum Press N.Y. (1992)

146. Connes A.
« Noncommutative Geometry and Physiscs »
Les Houches. Preprint IHES M93/32 (1992)

147. Connes A. Rovelli C.
« Von Neuman Algebra Automormphisms and Time-thermodynamics Relation in General Covariant Quantum Theories »
gr-qc - 9406019 (1994)

148. Connes A.
« Geometry from the Spectral Point of View »
Letters in Mathematical Physics 34 203-238 (1995)

149. Connes A.
« Non-Commutative Geometry »
Academic Press (1994)

150. Connes A.
« Non-Commutative Geometry and Reality »
J. Math.Phys. Vol 36, N°11, (1995)

151. Connes A.
« Gravity Coupled with Matter and the Foundation of Non Commutative Geometry »
hep-th / 9603053 (1996) Commun. Math.Phys. 128 , 155-176 (1996)

152. Coquereaux R. Esposito-Farese G. Vaillant G.
« Higgs Fields as Yang-Mills Fields and Discrete Symmetries »
Nuclear Physics B353 689-706 (1991)

153. Corrigan E. Goddard P.
« Constructions of Instantons and Monopoles Solutions and Reciprocity »
Ann.Phys. (NY) 154 253-279 (1984)

154. Costa S.
« Schwarzschild Solution and Mach's Principle »
gr-qc 9608056

155. Crawford J.P.
« Clifford Algebra : Notes on the Spinor metric and Lorentz, Poincaré and Conformal Groups »
J. Math. Phys. 32 (3) 576-583 (1991)

156. Cremmer E. Scherk J
« Spontaneous Compactification of Space in an Einstein-Yang-Mills-Higgs Model »
Nuclear Physics B 135-142 (1976)

157. Cremmer E. Scherk J.
« Spontaneous Compactification of Extra Space Dimensions »
Nuclear Physics B118 61-75 (1977)

158. Cremmer E. Scherk J
« The Supersymmetric non-Linear σ-Model in Four Dimensions and its Coupling to Supergravity »
Physics Letters B Vol 74 N°4,5 341-343 (1978)

159. Cuntz J.
« k-Theory for certain C* -Algebras II »
Operator Theory 5 101-108 (1981)

160. Cuntz J.
« k-Theory and C* -Algebras »
k- Theory, Number Theory, Geometry and Analysis (Bielfeld) 55-79 (1982)

161. Dabrowski L. Sobczyk J.
« Left Regular Representation and Contraction of sl_q (2) to e_q (2)
Letters in Mathematical Physics 32 249-258 (1994)

162. Damour T. Vilenkin A.
« String Theory and Inflation »
Physical Review D Vol 53 N° 6 2981-2989 (1996)

163. Demazure M.
« Catastrophes et Bifurcations »
Ec.Poly. Ellipses (1989)

164. Delbourgo R. Salam A.
Phys. Lett. 40 B 381 (1972)

165. Dereli T. Tucker R.W.
« Signature Dynamics in General Relativity »
Class. Quantum Grav. 10 365-373 (1993)

166. Dereli T. Onder M. Tucker R.W.
« Signature Transition In Quantum Cosmology »
Class. Quantum Grav. 10 1425-1434 (1993)

167. Dereli T. Onder M. Tucker R.W.
« A Spinor Model for Quantum Cosmology »
Physics Letters B Vol 324 134-140 (1994)

168. Dereli T. Onder M. Tucker R.W.
« Solutions of Neutral Axi-dilaton Gravity in Four Dimensions »
Class.Quantum Grav. 12 L25-L30 (1995)

169. Deser S. Jackiw R. Templeton S.
« Topologically Massive Gauge Theories »
Annals of Physics 140 372-411 (1982)

170. Diakonov D., Petrov Y.
« Instanton-Based Vacuum From the Feynman variational Principle »
Nuclear Physics B245 259-292 (1984)

171. Diakonov D. Petrov V.
« Nonperturbative Isotropic Multiparticle Production in Yang-Mills Theory »
Phys.Review D Vol.50 N°1 266-282 (1994)

172. Dijkgraaf R.
« Lectures on Four-Manifold and Topological Gauge Theories »
Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 45B,C 29-45 (1996)

173. Dixmier J.
« Les C* -algèbres et leurs Représentations »
Gauthier-Villars, Paris (1964)

174. Doebner H.D. Tolar J..
« Quantum mechanics on Homogeneous spaces »
J. Math. Phys. 16 : 975 - 984 , 1975

175. Donaldson S.K.
« An Application of Gauge Theory to Four Dimensional Topology »
J.Differential Geometry 18, 279-315 (1983)

176. Donaldson S.K.
« Connections, Cohomology and the Intersection Forms of 4-Manifolds »
J.Differential Geometry 24, 275-341 (1986)

177. Donaldson S.K. Sullivan D.
« Quasiconformal 4-manifold »
Acta Math. 163 181-252 (1989)

178. Donaldson S.K.
« Polynomial Invariants for Smooth Four Manifolds »
Topology Vol 29 N° 3 257-315 (1990)

179. Donaldson S.K. Kronheimer P.B.
« The Geometry of Four Manifolds »
Oxford Science Publications / Oxford University Press (1990)

180. Donin J. Gurevich D.
« Braiding of Lie Algebra *sl* (2) »
Max Planck Institut Fûr Mathematik 42 (1993)

181. Doplicher S. Fredenhagen K. Roberts J.E.
« The Quantum Structure of Spacetime at the Planck Scale and Quantum Fields »
Commun. Math. Phys. 172 187-220 (1995)

182. Dowker H.F.
« SO (4)-Invariant States in Quantum Cosmology »
Class. Quantum Grav. 10 1435-1446 (1993)

183. Drabant B. Schlieker M. Weich W. Zumino B.
« Complex Quantum Groups and Their Quantum Enveloping Algebras »
Commun. Math. Phys. 147 625-633 (1992)

184. Drabant B. Jurco B. Schlieker M. Weich W. Zumino B.
« The Hopf Algebra of Vector Fields on Complex Quantum Groups »

Letters in Mathematical Physics 26 91-96 (1992)

185. Drabant B. Ogievetsky O. Schlieker M.
« Cohomology of Quantum Enveloping Algebras »
mpi-ph/93-57 (1993)

186. Dray T. Manogue C.A. Tucker R.W.
« Scalar Fiel Equation in the Presence of Signature Change »
Physical Review D Vol 48 N° 6 2587-2590 (1993)

187. Dray T. Manogue C.A. Tucker R.W.
« Particle Production from Signature Change »
General Relativity and Gravitation Vol 23 N°8 (1991)

188. Drinfeld V.G.
« A Description of Instantons »
Commun. Math. Phys. 63 177-182 (1978)

189. Drinfeld V.G.
« Quantum Groups »
Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986 798-820 (1987)

190. Drinfeld V.G.
« Quasi-Hopf Algebras »
Leningrad Math.J. Vol 1 1419-1455 (1990)

191. Drinfeld V.G.
« On Almost Cocommutative Hopf Algebras »
Leningrad Math.J. Vol 1 321-342 (1990)

192. Dubois-Violette M. Launer G.
« The Quantum Group of a non-Degenerate Bilinear Form »
Physics Letters B Vol 245 N°2 175-177 (1990)

193. Dudas E.A.
« Planck Scale Effects and Axions in Supersymmetry »
Physics Letters B Vol 325 124-128 (1994)

194. Duff M.J.
Strong/Weak Coupling Duality from the Dual String »
Nuclear Physics B442 47-63 (1995)

195. Eguchi T. Freund P.G.O.
Phys. Rev. Lett. 37, 1251 (1976)

196. Eguchi T. Hanson A.J.
« Asymptotically Flat Solutions to Euclidean Gravity »
Phys. Lett. 74B 249 -251 (1978)

197. Elitzur S. Giveon A. Rabinovici E. Schwimmer A. Veneziano G.
« Remarks on non-Abelian Duality »
Nuclear Physics B435 147-171 (1995)

198. Ellis G et al
Class. Quantum Grav. 9 1535 (1992)

199. Ernst F. .
Phys. Rev. 167 (1968)
Phys Rev 168 (1968)

200. Embacher F.
« The Trace Left by Signature Change Induced Compactification »
Class. Quantum Grav.12 1723-1731 (1995)

201. Engeldinger R., Kempf A
« Lorentz Algebra and Twists »
Oziewick et al. (eds) Spinors, Twistors, Clifford Algebras and Quantum Deformations 281-284 Kluwer Academic Publishers (1993)

202. Engeldinger R., Kempf A.
« Sub-Hopf-Algebra-Induced Twist of Quantum Enveloping Algebras »
J.Math.Phys., Vol.35, N°4, April 94

203. Faddeev L.D. Reshetinkhin N.Y. Takhtajan L.A.
« Quantization of Lie Groups and Lie Algebras »
Leningrad Mathematical Journal Vol 1 193-226 (1990)

204. Fannes M., Verbeure A.
« Correlation Inequalities and Equilibrium States »
Commun. Math.Phys. 57,165-171 (1977)

205. Fayet P.
« R-Parity, the Supersymmetric Standard Model and the Phenomenology of Supersymmetry »
To be published by Plenum (1994)

206. Ferrara S. Kounas C. Porrati M . Zwirner F.
« Superstrings with Spontaneously Broken Supersymmetry and their Effective Theories »
Nuclear Physics B318 75-105 (1989)

207. Ferrara S., Sabharwal S.
« Dimensional Reduction of Type-II Superstrings »
Class. Quantum Grav.6L77-L82 (1989)

208. Ferrara S., Sabharwal S.
« Quaternionic Manifolds for Type II Superstring Vacua of Calabi-Yau Spaces »
Nuclear Physics B 332 317-332 (1990)

209. Fiore G.
« Many q-particles from One : a New Approach to Hopf *-Algebras »
lmu-tp / 94-15 (1994)

210. Flato M.
« Symétries de type Lorentzien et Interactions Fortes »
Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques
Série A N° 4560 N° d'ordre 5407, Gauthier Villars Editeur, Paris (1967)

211. Flato M. Lichnerowicz A. Sternheimer D.
« Deformation of Poisson Brackets, Dirac Brackets and Applications »
J.Math.Phys. 9 1754-1762 (1976)

212. Flato M. Lichnerowicz A. Sternheimer D.
« Crochet de Moyal-Vey et Quantification »
C.R.Acad. Sci. Paris 283 A 19-24 (1976)

213. Flato M. Fronsdal C.
« Singletons : Fundamental Gauge Theory »
in Physique Quantique et Géométrie. Colloque Géométrie et Physique de 1986 en l'honneur de André Lichnerowicz , Herman Editeur (1988)

214. Flato M. Sternheimer D.
« Quantum Groups, Star Products and Cyclic Cohomology »
H.Arraki et al. Quantum and Non Commutative Analysis 221-237
Kluwer Academic Publishers (1993)

215. Flato M. Sternheimer D.
« Closedness of Star-products and Cohomologies in Lie Theories and Geometry »
Progress in Mathematics, Birkhaûser, 241-260 (1995)

216. Floer A.
« An Instanton Invariant for 3-Manifolds »
Commun. Math. Phys. 118, 215-240 (1988)

217. Fre' P. Soriani P.
« The N=2 Wonderland. From Calabi-Yau Manifolds to Topological Field Theory »
World Scientific Publishing (1995)

218. Fre' P.
« Lectures on Special Kähler Geometry and Electric-Magnetic Duality Rotations »
Nuclear Physics B (Proc.Suppl.) 45B,C 59-114 (1996)

219. Frölich J. Osterwalder K.
« Is there an Euclidean Field Theory for Fermions? »
Helvetica Physica Acta Vol 47 781-804 (1974)

220. Frôlich J.
« Non-Perturbative Quantum Field Theory »
Adv. Ser. Math. Phys.15 World Scientific, River Edge N.J. (1992)

221. Friedan D. Windey P.
« Supersymmetric Derivation of the Atiyah-Singer Index and the Chiral Anomaly »
Nuclear Physics B 235 395-416 (1984)

222. Ford L.H.
« Gravitons and Light Cone Fluctuations »
Phys.Review D Vol.7 N°6 (1995)

223. Fubini S. Hanson A.J. Jackiw R.
« New Approach to Field Theory »
Physical Review D Vol 50 N° 2 1732-1760 (1973)

224. Fursaev D.F. Miele G.
« Cones, Spins and Heat Kernels »
Nuclear Physics B484 (PM) 697-723 (1997)

225. Fujikawa K.
« Phase Operators Problem and an Index Theorem for Q-deformed Oscillator »
UT-747, (1996)

226. Fukushima M. Sasaki S. Suganuma H. Tanaka A. Toki H. Diakonov D.
« Clustering of Monopoles in the Instanton Vacuum »
Physics Letters, B 399, 141-147 (1997)

227. Gaberdiel M.R. Green M.B.
« An SL(2, Z) anomaly in IIB supergravity and its F-theory interpretation »
Hepth - 98101153 v3 (1999)

228. Galperin A. Sokatchev E.
« Supersymmetric Sigma Models and ‘t Hooft Instantons »
Class. Quantum Grav.13 161-170 (1996)

229. Ganor O.J. Hanany A.
« Small E_8 Instantons and Tensionless non-critical Strings »
Nuclear Physics B 474 122-138 (1996)

230. Gasqui J.
« Formal Integrability of Systems of Partial `Differential Equations »
Institut Fourier BP 74 38402 St Marti d’Heres

231. Gauntlett J.P.
« S -Duality and H -Monopoles »
hep-th / 9506012 (1995)

232. Gavrilik A.M. Klimyk A.U.
« q -Deformed Orthogonal and Pseudo-Orthogonal Algebras and Their Representations »
Letters in Mathematical Physics 21 215-220 (1991)

233. Gavrilik A.M. Klimyk A.U.
« Representations of the q -deformed Algebras Uq $(SO_{2,1})$ and Uq $(SO_{3,1})$ »
J. Math.Phys. Vol 35, N°7, July 1994

234. Gasperini M. Veneziano G.
« Dilaton Production in String Cosmology »
Physical Review D Vol 50 N° 4 2519-2523 (1994)

235. Gervais J.L. Roussel J.F.
« Solving the Strongly Coupled 2D Gravity. Fractional-Spin Operators and Topological Three-Point Functions »
Nuclear Physics B426 140-186 (1994)

236. Gerstenhaber M. Schack S.
« Algebraic Cohomology and Deformation Theory »
Deformations Theory of Algebras and Structures and Applications, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math.Phys. 247 Kluwer Dordrecht 11-264 (1988)

237. Getzler E.
« Pseudodifferential Operators on Supermanifolds and the Atiyah-Singer Theorem »
Commun. Math. Phys. 92 163-178 (1983)

238. Gibbons G.W. Pope C.N.
« The Positive Action Conjecture and Asymptotical Euclidean Metrics in Quantum Gravity »
Commun. Math. Phys. 66 267-290 (1979)

239. Gibbons G.W. Hartle J.B.
« Real Tunneling Geometries and the Large-Scale Topology of the Universe »
Physical Review D Vol 42 N° 8 2458-2465 (1990)

240. Gilkey P.
« The Index Theorem and the Heat Equation »
Math.Lecture Ser. 4 Publish or Perish, Boston (1974)

241. Gilkey P.
« Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem »
Math.Lecture Ser. 11 Publish or Perish Wilmington (1984)

242. Gilmore R.
« Lie Groups, Lie Algebras »
Wiley Ed. (1974)

243. Giradello L., Giveon A., Porrati M.,. Zaffaroni A
« S-Duality in N=4 Yang-Mills Theories with General Gauge Groups »
Nuclear Physics B 448, 127-165 (1995)

244. Giveon A., Porrati M.,.Rabinovici
Phys. Rep. 244 (1994)

245. Glimm J. Jaffe A.
« Boson Quantum Field Models »
National Science Foundation NSF-GP-24003

246. Glimm J. Jaffe A.
« Quantum Physics »
Springer, New-York (1981)

247. Godbillon C. Vey J.
« Un Invariant des Feuilletages de Codimension 1 »
C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 273 (1971)

248. Gregori A. Kounnas C. Petropoulos P.M.
Nuclear Phys. B 537 (1999)

249. Green M.B. Schwarz J.H. Witten E.
« Superstring Theory »
`Cambridge University Press (1987)

250. Greensite J.
« Dynamical Origin of the Lorentzian Signature of Spacetime »
Physics Letters B300 34-37 (1993)

251. Gromov M. Lawson H.B.
« Positive Scalar Curvature and the Dirac Operator on Complete Riemanian Manifold »
IHES Publ. Math. N° 58 83-196 (1984)

252. Gromov M.
« Hyperbolic Groups »
Essay in Group Theory, Math. Sci. Res. Inst.Pub. 8, Springer N.Y. (1987)

253. Gross D.J. Pisarsky R.D. Yaffe L.G.
« QCD and Instantons at Finite Temperature »
Reviews of Modern Physics, Vol 53, N°1 43-80 (1981)

254. Guerra F. Ruggiero P.
« New Interpretation of Euclidean Markov Field in the Framework of Physical Minkowski Space-Time »
Physical Review Letters Vol 31 N°16 1022-1025 (1973)

255. Guillopé L.
« Entropies et Spectres »
Osaka J.Math 31 247-289 (1994)

256. Gurevich D.I.
« Algebraic Aspects of the Quantum Yang-Baxter Equation »
Leningrad Math.J. 2 801-828 (1991)

257. Gurevich D.I.
« Braided Vector Fields over Quantum Orbits »
Centre de Mathématiques. Ecole Polytechnique N°1078 (1994)

258. Gurevich D.I.
« Braided Groups of Hopf Algebras Obtained by Twisting »
Pacific Journal of Mathematics Vol162 N°1 (1994)

259. Guven J.
« The Isolation of Gravitational Instantons : Flat Tori vs. Flat R^4 »
gr-qc / 9403009 (1994)

260. Haag R., Hugenholz N., Winninck M.
« On the Equilibrium States in Quantum Statistical Mechanics »
Commun. Math.Phys. 5, 215-236 (1967)

261. Haag R. Trych-Pohlmeyer E.
« Stability Properties of Equilibrium States »
Commun. Math.Phys. 56,213-224 (1977)

262. Haag R.
« Local Quantum Physics »
Springer,Berlin (1992)

263. Haagerup U.
« The Standard Form of von Neuman Algebras »
Math. Scand. 37 271-283 (1975)

264. Haagerup U.
« Operator-valued Weights in von Neuman Algebras I »
J.Functional Anal. 32 175-206 (1979)

265. Haberman L.
« A Family of Metrics on the Moduli Space of CP^2 Instantons »
Commun. Math.Phys. 149, 209-216 (1992)

266. Hartle J. Hawking S
Phys. Rev. D28 (1983)

267. Hart A., Teper M.
« Instantons and Monopoles in the Maximally Abelian Gauge »
Physics Letters B371 261-269 (1996)

268. Hawking S.W.
« The Path Integral Approach to Quantum Gravity »
General Relativity, Cambridge University Press (1979)

269. Hawking S.W. Penrose R.
« Euclidean Quantum Gravity »
Cargese Lecture (1978)

270. Hawking S.W. Ellis G.F.R.
« The Large Structure of Spacetime »
Cambridge University Press (1973)

271. Hawking S.W.
« Particles Creation by Black Holes »
Commun. Math Phys. 43 (1975)

272. Hawkins E.
« Hamiltonian Gravity and Noncommutative Geometry »
gr-qc / 9605068 (1996)

273. Helgason S.
« The Radon Transform »
Birkhaüser, Boston (1980)

274. Helgason S.
« Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces »
Ac. Press (1978)

275. Hilsum M.
« Signature Operator on Lipschitz Manifolds and Unbound Kasparov Bimodules »
to be published

276. Hopf E.
« Ergodic Theory and the Geodesic Flow on Surfaces of Constant Negative Curvature »
Bull.Amer. Math. Soc. 77 863-877 (1971)

277. Horigushi T. Maeda K. Sakamoto M.
« Analysis of the Wheeler-Dewitt equation beyond Planck Scale and Dimensional Reduction »
Physics Letters B 344 105 109 (1977)

278. Huang K. Weinberg S.
« Ultimate Temperature and The Early Universe »
Physical Review Letters Vol 25 N°13 895-897 (1970)

279. Hucks J.
« Hyperbolic Complex Structures in Physics »
J. Math.Phys. Vol 34, N°12, (1993)

280. Hugenholz N.M.
« On the Factor Type of Equilibrium States in Quantum Statistical Mechanics »
Commun. Math. Phys. 6 189-193 (1967)

281. Hugenholz N.M.
« $C^{\star}$ Algebras and Statistical Mechanics »
Proceedings of Symposis in Pure Mathematics, Vol. 38 (1982)

282. Hull C.M. Townsend P.K.
Nuclear Phys. B 438 (1995)

283. Hull C.M. K.,
Hepth 9806146

284. Hull C.M. Julia B.
Hepth 9803239

285. Hull C.M.
Hepth 9807127

286. Israel W.
« Events Horizons in Static Vacuum Space-Times »
Physical Review Vol 164 N° 5 1776-1779 (1996)

287. Itzhaki N.
« Time Measurement in Quantum Gravity »
Physics Letters B Vol 328 274-276 (1994)

288. Jackiw R.
« Introduction to the Yang-Mills Quantum Theory »
Review of Modern Physics Vol 52 N°4 (1980)

289. Jaffe A.
« Noncommutative Geometry and Mathematical Physics »
New Symmetry Principles in Quantum Fields Theory. Edited by Frôlich et al.
Plenum Press N.Y. (1992)

290. Jimbo M.
« A q-difference Analog of U (g) and the Yang Baxter Equation »
Lett. Math.Phys. 10 63-69 (1985)

291. Jimbo M.
« Quantum R-Matrix Related to Generalized Toda System : an Algebraic Approach »
Lec. Notes in Phys. 246 335-361 (1986)

292. Jimbo M.
« « A q- Analog of U ($g\ l$ ($N + 1$)) Hecke Algebra and the Yang Baxter Equation »
Lett. Math.Phys. 11 247-252 (1986)

293. Julia B.
« Kac-Moody Symmetry of Gravitation and Supergravity Theories »
Lectures in Applied Mathematics Vol.21 (1985)

294. Kaku M.
« Strings, Conformal Fields and Topology »
Springer-Verlag (1991)

295. Kaku M.
« Quantum Field Theorie »
Oxford University Press (1993)

296. Kaku M.
« Intr. to superstrings and M-Theory »
Springer-Verlag (1999)

297. Kalau W. Walze M.
« Gravity, Non-Commutative Geometry and the Wodzicki Residue »
Journal of Geometry and Physics 16 327-344 (1995)

298. Kalyana Rama S. Sasanka Gosh
« Short-Distance Repulsive Gravity as a Consequence of the Non-Trivial PPN Parameters β and γ »
Physics Letters, B 383, N°1,2 31-38 (1996)

299. Kaniel S., Shinbrot M.
« The Bolzman Equation »
Commun. Math.Phys. 58, 65-84 (1978)

300. Kasparov G.
« K-Theory, Group C*-algebras and Higher Signatures »
Conspectus, Chernogolovka (1981)

301. Kastler D.
« The C*-algebras of a Free Boson Field I »
Discussion of the basic Facts. Commun. Math. Phys. 1 14-48 (1965)

302. Kastler D.
« Equilibrium States of Matter and Operator Algebras »
Istituto Nazionale di Alta Matematica. Symposia Mathematica Vol. XX (1976)

303. Kastler D.
« Does Ergocity Plus Locality Imply the Gibbs Structure? »
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol.38 Part 2 (1982)

304. Kastler D.
« Cyclic Cocycles from Graded KMS Functionals »
Commun. Math. Phys. 121 345-350 (1989)

305. Kastler D.
« The Dirac Operator and Gravitation »
Commun. Math.Phys. 166, 633-643 (1995)

306. Katok A. Hasselblatt B.
« Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems »
Cambridge University Press (1995)

307. Kempf A.
« Multiparameters R-Matrices, Sub-Quantum-Groups and Generalized Twisting Method »
A.LMU-TPW 91-4

308. Klimcik C Severa P.
« Poisson Lie T duality and Loup Groups of Drinfeld Doubles »
Phys.Let B vol 372 (1996)

309. Kempf A. Majid S.
« Algebraic q-Integration and Fourier Theory on Quantum and Braided Spaces »
damtp / 94-7

310. Kiefer C.
« Time and Quantum Cosmology »
thep-95/21 (1995)

311. Kiritsis E. Kounas C. Petropoulos P.M. Rizos J.
Nucl. Phys. B 540 (1999)

312. Kiritsis E. Kounas C.
Phys.Let B 320 (1993)

313. Kiritsis E. Kounas C.
« Dynamical Topology Change, Compactification and Waves in Strings Cosmology »
Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 41 311-330 (1993)

314. Kiritsis E. Kounas C.
« Infrared Regularization of Superstring Theory and the One-loop Calculation of Coupling Constants »
Nuclear Physics B442 472-493 (1995)

315. Kiritsis E. Kounas C.
« Curved Four Dimensions Space Time as Infrared Regulator in Superstring Theories »
Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 41 331-340 (1995)

316. Kounnas C.
Phys.Let. B 321 (1994)

317. Kounnas C. Porrati M.
« Spontaneous Supersymmetry Breaking in String Theory »
Nuclear Physics B310 355-370 (1988)

318. Krieger W.
« On Ergodics Flows and the Isomorphism of Factors »
Math.Ann. 223 19-70 (1976)

319. Kubo R.
« Statistical Mechanical Theory of Irreversible Processes »
Phys.Soc Japan 12 570-586 (1957)

320. Kung J.H.
« Strong Energy Condition in $R + R^2$ Gravity »
Physical Review D Vol 53 N° 6 3017-3021 (1996)

321. Labastida J.M.F. Marino M.
« A Topological Lagrangian for Monopoles on four-Manifolds »
Physics Letters B 351 146-152 (1995)

322. Labourie F.
« Métriques prescrites sur le Bord des Variétés Hyperboliques de Dimension 3 »
J.Differential Geometry 35 609-626 (1992)

323. Lance E.C.
« An Explicit Description of he Fundamental Unitary for SU $(2)_q$
Commun. Math. Phys. 164 1-15 (1994)

324. Lanczos C.
« Undulatory Riemannian Spaces »
Journal of Mathematical Physics Vol 4, N°7 951-959 (1963)

325. Lanczos C.
« Signal Propagation in a Positive Definite Riemannian Space »
Physical Review D Vol 134 N°2B 476-480 (1963)

326. Lê Dung Trang
« Polyedres Evanescents et Effondrements »
Congress of Topology, Academic Press, 293-328 (1988)

327. Lê Dung Trang
« Complex Analytic Functions with Isolated Singularities »
J.of Alg.Geom. Vol 1 93-99 (1994)

328. Lee T.D. Wick G.C.
« Negative Metric and the Unitary of the S-Matrix »
Nuclear Physics B9 209-243 (1969)

329. Lewandowski J.
« Volume and Quantizations »
Class. Quantum Grav. 14 71-76 (1997)

330. Linde A.
« Monopoles as Big as a Universe »
Physics Letters, B 327, 208-213 (1994)

331. Lichnerowicz A.
« Sur les Espaces Riemanniens Complètement Harmoniques »
Bull. Soc. Math. France 72 146-168 (1943)

332. Lichnerowicz A.
« Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme »
Masson Editeurs (1955)

333. Lichnerowicz A.
« Espace Fibrés et Espace-Temps »
General Relativity and Gravitation 1 235-245 (1971)

334. Lichnerowicz A.
« Variétés Kälhlériennes à Première Classe de Chern non-Négative et Situation Analogue dans le Cas Riemannien »
Symposia Mathematica 10 (1972)

335. Lichnerowicz A.
« Algèbres de Lie Attachées à un Feuilletage »
Ann. Fac.Sci. de Toulouse 1 45-76 (1979)

336. Lichnerowicz A.
« Déformations d'Algèbres Associées à une Vatriété Symplétique (les $*_v$-produits) »
Ann.Inst.Fourier (Grenoble) 32 157-209 (1982)

337. Lichnerowicz A.
« Quantum Mechanics and Deformations of Geometrical Dynamics »
Quantum Theory, Groups, Fields and Particles 3-82 Reidel Publ. Cie. Dordrecht (1983)

338. Lichnerowicz A.
« Propagateurs et Commutateurs en Relaitivité Générale »
Publication I.H.E.S. N°10 (1961)

339. Lopes Cardoso G. Lust D. Mohaupt T.
« Perturbative et non-Perturbative Results of N=2 Heterotic Strings »
Nuclear Physics (Proc. Suppl.) 45BC 167-176 (1996)

340. Lücher M.
« SO(4)-Symmetric Solutions of Minkowskian Yang-Mills Field Equations »
Physics Letters Vol 70B N°3 321-364 (1977)

341. Lukierski J. Nowicki A
« Euclidean Superconformal Symmetry and its Relation with Minkowski Supersymmetries »
Phys. Letters 127 B, 25-45 (1984)

342. Lukierski J. Nowicki A.
« On Superfield Formulation of Euclidean Supersymmetry »
J. Math.Phys. Vol 25, N°5, (1984)

343. Lukierski J. Nowicki A.
« Quaternionic Supergroups and D=4 Euclidean Extended Supersymmetries »
Annals of Physics 166 164-188 (1986)

344. Lukierski J.
« Euclidean Superalgebras for 3 <D<10 »
Reprinted from Supersymmetry and its Applications : Superstrings, Anomalies and Supergravity (Eds Gibbons/Hawking/Townsend. Cambridge University Press 1986)

345. Lukierski J. Zakrzewski W.J.
« Euclidean Supersymmetrization of Instantons and Self-Dual Monopoles »
International Center for Theoretical Physics, Miramare-Trieste (1986)

346. Lukierski J. Ruegg H.
« Quantum *k* -Poincaré in any Dimension »
Physics Letters B Vol 329 189-194 (1994)

347. Macorra A.de la, Ross G.G.
« Supersymmetry Breaking in 4D String Theory »
Nuclear Physics B443 127-154 (1995)

348. Madore J. Masson T. Mourad J.
« Linear Connections on Matrix Geometries »
hep-th-9411127

349. Madore J.
« Linear Connections on Fuzzy Manifolds »
hep-th-9506183 (1995)

350. Madore J.
« An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications »
Cambridge University Press (1995)

351. Magnen J., Sénéot R
« Phase Space Cell Expansion and Borel Summability for the EuclideanTheory »
Commun. Math.Phys. 56,237-276 (1977)

352. Magnon A.
« Ratio of Magnetic Charge to Charge and of Magnetic Mass to Mass »
International Journal of Theoretical Physics, Vol 27, N°1 3-7 (1988)

353. Magnon A.
« Ashtekar Variables and Unification of Gravitational and Electromagnetic Interactions »
Class. Quantum Grav. 9 169-181 (1992)

354. Magnon A.
« Commutative Asymptotic Limit of a Quasi-SU (2) Formulation of General Relativity »
International Journal of Theoretical Physics, Vol 31, N°6 1015-1023 (1992)

355. Major, Smolin
« Q déformation of Quantum Gravity »
Nuclear Physics B 473 (1996)

356. Majid S.
« Hopf Algebras for Physics at the Planck Scale »
J. Classical and Quantum Gravity 5 1587-1606 (1988)

357. Majid S.
« Equivalent Cross Products for a Hopf Algebra »
Comm. Algebra 17 3053-3085 (1989)

358. Majid S.
« Quasitriangular Hopf Algebras and Yang-Baxter Equations »
International Journal of Modern Physics A Vol.5, N° 1, 1-91 (1990)

359. Majid S.
« More Examples of Bicrossproducts and Double Cross Product Hopf Algebra »
Isr.J.Math 72 133-148 (1990)

360. Majid S.
« Physics for Algebrists : Non-commutative and Non-cocomutative Hopf Algebras by a Bicrossproduct Construction »
Journal of Algebra 130 17-64 (1990)

361. Majid S. Soibelman Ya.S.
« Rank of Quantized Universal Enveloping Algebras and Modular Functions »
Commun. Math.Phys. 137, 249-262 (1991)

362. Majid S.
« Examples of Braided Groups and Braided Matrices »
J. Math.Phys. Vol 32, N°12, Dec. 1991

363. Majid S.
« Braided Groups and Algebraic Quantum Field Theories »
Letters in Mathematical Physics 22 167-175 (1991)

364. Majid S.
« Tannaka-Krein Theorem for Quasi-Hopf Algebras and Other Results »
Contemporary Mathematics Vol 134 219-230 (1992)

365. Majid S.
« Hopf-von Neuman Albgebra Bicrossproducts, Kac Algebra Bicrossproducts, and the Classical Yang-Baxter Equations »
Journal of Functional Analysis 95 291-319 (1991)

366. Majid S.
« The Quantum Double As Quantum Mechanics »
J.Geom.Phys. (1993)

367. Majid S.
« Cross Product Quantisation, Non Abelian Cohomology and Twisting of Hopf Algebras »
damtp/93-63. Proc. Generalized Symmetries, Clausthal, Germany July 1993. World Sci.

368. Majid S.
« Braided Momentum in the q-Poincare Group »
J. Math.Phys. Vol 34, N°5 (1993)

369. Majid S.
« Braided Groups »
J. Pure and Applied Algebra 86 187-221 (1993)

370. Majid S.
« Some Remarks on Quantum Double »

(1994)

371. Majid S.
« *-Structures on Braided Spaces »
damtp /94-66 (1994)

372. Majid S.
« Introduction to Braided Geometry and q-Minkowski Space »
Cambridge University Press (1994)

373. Majid S.
« Duality Principle and Braided Geometry »
damtp / 94-69 (1994)

374. Majid S.,.Ruegg H
« Bicrossproduct Structure of κ-Poincare Group and Non-Commutative Geometry »
damtp/94-24 (1994)

375. Majid S.
« Bicrossproduct Structure of the Quantum Weyl Group »
J.Algebra 163 68-87 (1994)

376. Majid S. Meyer U.
« Braided Matrix Structure of *q* -Minkowski Space and *q* -Poincaré Group »
Z.Phys. C 63 357-362 (1994)

377. Majid S.
« q-Euclidean Space and Quantum Wick Rotation by Twisting »
J. Math.Phys. Vol 35, N°9, (1994)

378. Majid S.
« q-Epsilon Tensor for Quantum and Braided Spaces »
damtp/94-20 (1994)

379. Majid S.
« * -structures on Braided Spaces »
J. Math.Phys. Vol 36, N°8, (1995)

380. Majid S.
« Some Remarks on the q-Poincare Algebra in R-Matrix Form »
damtp /95-08 (1995)

381. Majid S.
« Quasi-* Structure on *q* -Poincare Algebras »
damtp 95/ 11 (1995)

382. Majid S.
« Foundations of Quantum Group Theory »
Cambridge University Press (1995)

383. Majid S.
« First Steps in Quantum and Braided Group Riemannian Geometry »
Damtp / 97-73 (1997)

384. Manin Y.I.
« Gauge Field Theory and Complex Geometry »
Springer Verlag (1988)

385. Manton N.
« Complex Structures of Monopoles »
Nuclear Physics B135 319-332 (1978)

386. Marcus N.
« The Other Topological Twisting of N=4 Yang-Mills »
Nuclear Physics B452 331-345 (1995)

387. Martin P.C. Schwinger J.
« Theory of Many Particles Systems »
Phys. Rev. 2 115 1342-1373 (1959)

388. Martin C. Zouagui M.
« A Non-Commutative Hopf Structure on C ∞ [SL (2,C)] as a Quantum Lorentz Group » (1996)

389. Martin J.
« Hamiltonian Quantization of General Relativity with the Change of Signature »
gr-qc-9402028 (1994)

390. Masuda T. Mimachi K. Nakagami Y. Noumi M. Saburi Y. Ueno K.
« Unitary Representations of the Quantum Group Suq 1,1) / Structure of the Dual Space of Uq (sl (2))

391. Mazur P.O.
« A Relationship between the Electrovacuum Ernts Equations and Nonlinear σ Model »
Acta Physica Polonica Vol B 14 N°4 (1983)

392. Mazur P.O.
« A Global Identity for Nonlinear σ Models »
Physics Letters A Vol 100 N°7 (1984)

393. Mazur P.O.
« Are there Topological Black Hole Solitons in String Theory? »
Gen. Rel. Grav. 19 1173 (1987)

394. Mazur P. O. Mottola E.
« The Path Integral Measure, Conformal Factor Problem and Stability of the Ground State of Quantum Gravity »
Nuclear Physics B341 187-212 (1990)

395. Mazur P.O.
« On the Quantum Theory of Graviting Particles »
Acta Physica Polonica Vol B 26 (1995)

396. Mazur P.O.
« Reply to Comment on Spinning Cosmic Strings and Quantization of Energy »
hep-th/9611206 (1996)

397. Mensky M.B.
« Time in Quantum Cosmology from the Self-Measurement of the Universe »
General Relativity and Gravitation Vol 23 N°2 1991

398. Meyer U.
« A new q -Lorentz Group and q -Minkowski Space with both Braided Coaddition and q -spinor decomposition »
damtp-93-45 (1993)

399. Meyer U.
« Wave Equations on q -Minkowski Space »
damtp / 94-10 (1994)

400. Meyer U.
« Projective Quantum Spaces »
damtp/94-81 (1994)

401. Milnor J.
« Morse Theory »
Ann.of Math. Stud., 51, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1963)

402. Milnor J. Moore J.C.
« On the Structure of Hopf Algebras »
Ann. of Math. (2) 81 211-264 (1965)

403. Misner C.W.
« The Flatter Regions of Newman, Unti, and Tamburino's Generalized Schwarzschild Space »
Journal of Mathematical Physics Vol 4, N°7 951-959 (1963)

404. Misner C.W. Thorne K.S. Wheeler J.A.
« Gravitation »
Freeman Ed. (1973)

405. Mnéimné R Testard F.
« Groupes de Lie Classiques Hermann (1986)

406. Montonen C. Olive C.
« Magnetic Monopoles as Gauge Particles »
Physics Letters B Vol 72 N°1 117-120 (1977)

407. Nakahara M.
« Geometry, Topology and Physics »
Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia (1990)

408. Nakano T.
« Quantum Field Theory in Terms of Euclidean Parameters »
Progress of Theoretical Physics Vol 4 N°7 924-938 (1963)

409. Neuman J.von
« On Ring Operators » III
Ann.of Math. 41 94-161 (1940)

410. Nash C.
« Differential Topology and Quantum Field Theory »
Academic Press (1996)

411. Nieuwenhuizen P. van
« Supergravity »
Phys.Rep. 68 189-398 (1981)

412. Noakes D.R.
« The Initial Value Formulation of Higher Derivative Gravity »
J. Math.Phys. Vol 24, N°7, (1983°

413. Ogievietski O. Schmidke W. Wess G. Zumino B.
Com.Math. 150 (1996)

414. Olive D.
« Exact Electromagnetic Duality »
Nuclear Physics B (Proc.Suppl.) 46 1-15 (1996)

415. Onder M. Tucker R.W.
« On the Relation between Classical and Quantum Cosmology in an Two-Dimensional Dilaton-gravity Model »
Class. Quantum Grav.11 1243-1253 (1994)

416. O'Neil C.M.
« Einstein-Yang-Mills Theory with a Massive Dilaton and Axion : String-inspired Regular and Black Hole Solutions »
Physical Review D Vol 50 N° 2 865-873 (1994)

417. Osborn T.A. Fujiwara Y.
« Time Evolution Kernels : Uniform Asymptotic Expansions »
J. Math. Phys. 24 (5) 1093-1103 (1983)

418. Ouvry S. Stora R. van Baal P.
« On the Algebraic Characterization of Witten's Topological Yang-Mills Theory »
cern-th 5224/88 (1988)

419. Pansu P.
« Effondrements des Variétés Riemanniennes d'après J. Cheeger et M.Gromov »
Séminaire Bourbaki, 36è année N°618 63-81 (1983/84)

420. Papastamatiou N.J. Umezawa H.
« Comment on a Model of Spontaneously Broken Scale Invariance »
Physical Review D Vol 7 N° 2 571-574 (1973)

421. Parmentier S.
« On Coproducts of Quasi-Triangular Hopf Algebras »
St.Petersbourg Math J. (1994)

422. Penrose R. MacCallum M.A.H.
« A Twistor Approach to Spacetime Quantization »
Physics Reports (Phys. Lett. Section C) 6 241-316 (1972)

423. Percival I.C.
« Quantum Spacetime Fluctuations and Primary State Diffusion »
to be printed

424. Podles P. Woronowicz S.L.
« Quantum Deformation of Lorentz Group »
Commun. Math.Phys. 130,381-431 (1990)

425. Podles P.
« Symmetries of Quantum Spaces. Subgroups and Quotient Spaces of Quantum *SU* (2) and *SO* (3) Groups »
Commun. Math.Phys. 170, 1-20 (1995)

426. Polyakov A.M.
« A Few Projects in String Theory »

pupt-1394 (1993)

427. Polyakov A.M.
« Compact Gauge Fields and the Infrared Catastrophe »
in Instantons in Gauge Theories. World Scientific Publishing (1975/ 1994)

428. Pisarski R.
« The Density of Instantons at Finite Temperature »
Nuclear Physics B97110-112 (1980)

429. Prugovecki E.
« On the General Covariance and Strong Equivalence Principles in Quantum General Relativity »
Foundations of Physics Vol 24 N° 7 (1994)

430. Pusz W. Woronowicz S.
« Passive States and KMS States for General Quantum Systems »
Commun. Math.Phys. 58,273-290 (1978)

431. Quevedo H.
« Determination of the Metric from the Curvature »
General Relativity and Gravitation, Vol 24 N°8 (1992)

432. Rebbi C.
« Self Dual Yang-Mills Fields in Minkowski Space-Time »
Brookhaven National Laboratory Upton N.Y. 11973 (1977)

433. Reshetikhin N. Y, Semenov-Tian-Shansky M.A.
« Quantum R-Matrices and Factorization Problems »
JGP-Vol.5,N°4 (1988)

434. Reshetikhin N. Y. Takhtajan L.A.
« Quantization of Lie Groups and Lie Algebras »
Leningrad Math.J. Vol 1 193-225 (1990)

435. Rey S-J
« Confining Phase of Superstrings and Axionic Strings »
Physical Review D Vol 43 N° 2 526-538 (1990)

436. Rieffel M.A.
« C*-Algebras Associated with Irrational Rotations »
Pacific J. Math. 93 415-429 (1981)

437. Rieffel M.A.
« Non-Compact Quantum Groups Associated with Abelian Subgroups »
Commun. Math. Phys. 171 181-201 (1995)

438. Roepstorff G.
« Path Integral Approach to Quantum Physics »
Springer Verlag Berlin (1994)

439. Rosen S.P.
« TCP Invariance and the Dimensionality of Space-Time »
J. Math.Phys. Vol 9, N°10, (1968)

440. Rossi P.
« Propagation Functions in the Field of a Monopole »
Nuclear Physics B149170-188 (1979)

441. Rosso M
« Comparaison des Groupes SU(2) Quantiques de Drinfeld et de Woronowicz »
CR.Acad. Sci. Paris 304 323-326 (1987)

442. Rovelli C.
« Statistical Mechanics of Gravity and the Thermodynamical Origin of Time »
Class.Quantum Grav. 101549-1566 (1993)

443. Rovelli C.
« The Statistical State of the Universe »
Class.Quantum Grav. 10 1567-1578 (1993)

444. Ruggeri T.
« Relativistic Extended Thermodynamics : General Assumptions and Mathematical Proceedure »
Conceptual Problems of Quantum Gravity A.Ashtekar J.Stachel Editors (1988)

445. Sakharov A.D.
« Cosmological Transitions with Changes in the Signature of the Metric »
Sov.Phys. JETP 60 (2) 214-218 (1984)

446. Semenov-Tian-Shansky M.A.
« What is a Classical R-Matrix »
Funct. Anal. Appl. 17 17 (1983)

447. Sen A. Vafa C.
« Dual Pairs of Type II String Compactification »
hutp-95 /A028 (1995)

448. Scherk J. Schwartz J.M.
« Spontaneous Breaking of Supersymmetry through Dimensional Reduction »
Physics Letters B Vol 82 N°1 60-64 (1979)

449. Schirrmacher A.
« Aspects of Quantizing Lorentz Symmetry »
New Symmetry Principles in Quantum Fields Theory, Plenum Press, N.Y. (1992)

450. Schlieker M. Weich W. Weixler R.
« Inhomogeneous Quantum Groups »
Z. Phys.C -Particles and Fields 53, 79-82 (1992)

451. Schlieker M. Zumino B.
« Braided Hopf Algebras and Differential Calculus »
ucb-pth-94/03 (1994)

452. Schirrmacher A.
« The Structure of Uq (sl(2,C)) »
mpi-ph/93-31

453. Schwartz J.M.
« Relations entre « Ring Groups » et Algèbres de Kak »
Bull. Sci. Math. 100 289-300 (1976)

454. Schwinger J.
« Euclidean Quantum Electrodynamics »
Physical Review D Vol 115 N° 3 721-731 (1959)

455. Seiberg N. Witten E.
« Electric-magnetic Duality, Monopole Condensation, and Confinement in N=2 Supersymmetric Yang-Mills Theory »
Nuclear Physics B 426 19-52 (1994)

456. Seiberg N. Witten E.
« Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in N=2 Supersymmetric QCD »
Nuclear Physics B431 484-550 (1994)

457. Seiberg N. Witten E.
« Gauge Dynamics and Compactification to Three Dimensions »
hep-th/9607163 (1996)

458. Sen A..
Int. J. of Mod. Phys. A9 (1994)
Phys. Letters B329 (1994)

459. Sewell G.
« KMS Conditions and Local Thermodynamical Stability of Quantum Lattice Systems »
Commun. Math. Phys. 55 53-61 (1977)

460. Sezgin P van Nieuwenhuizen E..
« Renormalizability Properties of Antisymmetric Tensor Fields Coupled to Gravity »
Phys.Review D Vol.22 N°2 301-307 (1980)

461. Shäfer T. Shuriak E.V.
« Instantons in QCD »
hep-ph / 9610451 (1996)

462. Shapiro I.L.
« Asymptotic Behaviour of Effective Yukawa Coupling Constants in Quantum R2 Gravity with matter »
Class. Quantum Grav. 6 1197-1201 (1989)

463. Shifman M.
« Instantons in Gauge Theories »
World Scientific Publishing (1994)

464. Shuryak E.V.
« Toward the Quantitative Theory of the Instanton Liquid »
Nuclear Physics B302 559-573 (1987)

465. Shuryak E.V. Verbaarschot J.J.M.
« Chiral Symmetry Breaking and Correlations in the Instanton Liquid »
Nuclear Physics B 341 1-26 (1990)

466. Shuryak E., Velkovsky M.
« Instantons Density at Finite Temperature »
Physical Review D Vol 50 N° 5 3323-3327 (1994)

467. Shuriak E.V.
« Instanton Size Distribution : Repulsion or and Infrared Fixed Point? »
Phys.Review D Vol.55 N°9 5370-5373 (1995)

468. Shuryak E.V. Verbaarschot J.J.M.
« Screening of the Topological Charge in a Correletad Instanton Vacuum »
Phys.Review D Vol.52 N°1 295-306 (1995)

469. Singer I.M.
« Some Remarks on Operator Theory and Index Theory »
K-Theory and Operator Algebras, Athens, Ga, 128-138 (1975)

470. Singer W.
« Extension Theory for Connected Hopf Algebras »
J.Alg. 21 1-16 (1972)

471. Sitarz A.
« Metric and Quantum Spaces »
Letters in Mathematical Physics 31 35-39 (1994)

472. Souriau J.M.
« Structures des Systèmes Dynamiques »
Dunod, Paris (1969)

473. Souriau J.M.
« Quantification Géométrique »
in Physique Quantique et Géométrie. Colloque Géométrie et Physique de 1986 en l'honneur de André Lichnerowicz , Herman Editeur (1988)

474. Stasheff J.
« Drinfel'd's Quasi-Hopf Algebras and beyond »
Contemporary Mathematics Vol 134 (1992)

475. Stora R. Thuillier F. Wallet J.C.
« Algebraic Structure of Cohomological Field Theory Models and Equivariant Cohomology »
enslapp-a 481/94 (1994)

476. Stora R.
« Exercices in Equivariant Cohomology and Topological Theories »
enslapp-a 604/96 (1996)

477. Stora R.
« Exercices in Equivariant Cohomology »
enslapp-a 619/96 (1996)

478. Stora R.
« De la Fixation de Jauge considérée comme un des Beaux Arts et de la Symétrie de Slavnov qui s'ensuit »
enslapp-a 620/96 (1996)

479. Stormer E.
« Types of Von Neumann Algebras Associated with Extremal Invariant States »
Commun. Math.Phys. 6, 194-204 (1967)

480. Sutcliffe P.
« BPS Monopoles »
To be published in the International Journal of Modern Physics A

481. Symanzik K.
« Euclidean Quantum Field Theory »

J. Math.Phys. Vol 7 , N°3, (1966)

482. Takesaki M.
« Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications »
Lecture Notes in Math, 128 Springer, New-York (1970)

483. Takesaki M.
« Duality for Crossed Products and the Structure of von Neuman Algebras of Type III »
Acta Math. 131 249-310 (1973)

484. Takesaki M.
« Theory of Operator Algebras »I
Springer, New-York (1979)

485. Teper M.
« Unmasking the Topological Charge Content of Fluctuating Lattice Gauge Fields »
Phys. Letters B Vol.235 N°2 227-234 (1989)

486. 'T Hooft G.
« Topology of the Gauge Condition and New Confinement Phases in Non-Abelian Gauge Theories »
Nuclear Physics B190[FS3] 455-478 (1981)

487. 'T Hooft G.
« A Physical Interpretation of Gravitational Instantons »
Nuclear Physics B 315 517-527 (1989)

488. 'T Hooft G.
« Under the Spell of the Gauge Principle »
Advanced Series in Mathematical Physics Vol 19 World Scientific (1994)

489. Thuillier F.
« Some Remarks on Topological 4d Gravity »
enslapp-a 648/97 (1997)

490. Tomboulis E.
« Renormalizability and Asymptotic Freedom in Quantum Gravity »
Physics Letters B Vol 97 N°1 77-80 (1980)

491. Tomboulis E.
« Exact Relation Between Einstein and Quadratic Quantum Gravity »
hep-th / 9601082 (1996)

492. Teyssandier P
« Linearised R + R2 gravity : a new gauge and new Solutions »
Class. Quantum Grav. 6 (1989)

493. Townsend P.K.
Phys. Letters B 350 (1995)

494. Twietmeyer E.
« Real Forms of U q (g) »
Letters in Mathematical Physics 21 287-292 (1991)

495. Tye S.H.H.
« The Limiting Temperature of the Universe and Superstrings »
Physics Letters Vol 158B N° 5 (1985)

496. Uhlenbrock D.
« Perturbation of Statistical Semigroups in Quantum Statistical Mechanics »
Jour.of Mathematical Physics, Vol.12, N° 12 2503-2507 (1971)

497. Unruh W. Wald R.M.
« Time and the Interpretation of Canonical Quantum Gravity »
Physical Review D Vol 40 N° 8 2598-2603 (1989)

498. Vafa C. Witten E.
« A Strong Coupling Test of S-Duality »
Nuclear Physics B 431 3-77 (1994)

499. Vaksman L.L. Korogodskii L.I.
« Spherical Functions on the Quantum Group *SU* (1, 1) and the *q* -Analogue of the Mehler-Fock Formula »
Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniva Vol 25 N°1 60-62 (1990)

500. Vandick M. Shanahan S.
« On a Multipole Expansion for Instantons : I »
Class.Quantum Grav. 8 2035-2048 (1991)

501. Veneziano G.
Nuevo Cim 57 A, 190 (1968)

502. Veneziano G.
« An Introduction to Dual Models of Strong Interactions and their Physical Motivations »
Phys Rev C9, 199 (1974)

503. Veneziano G.
Europhys Let 2 (1988)

504. Voigulescu D.
« A Non-Commutative Weyl-Von Neuman Theorem »
Rev.Roum.Math Pures et Appl. Tome XXI, N°1,97-118,Bucarest 1978

505. Wald R.M.
« On the Euclidean Approach to Quantum Field Theory in Curved Spacetime »
Commun. Math.Phys.70, 221-242 (1979)

506. Ward R.S.
« A Yang-Mills-Higgs Monopole of Charge 2 »
Commun. Math.Phys. 79, 317-325 (1981)

507. Walze M.
« Nichtkommutative Geometrie und Gravitation »
Dissertation zur Erlangung des Grades Doktor der Naturwissenschaften am Fachbereich Physic der Johannes Gutenberg-Universitât in Mainz (1996)

508. Wetterich C.
« Quantum Dynamics in Classical Time Evolution of Correlation Functions »
Physics Letters B Vol 399 N°4 123-129 (1997)

509. Weinberg S.
« Gauge and Global Symmetries at High Temperature »
Phys.Review D Vol.9 N°12 3367-3377 (1974)

510. Widom H.
« A Complete Symbolic Calculus for Pseudodifferential Operators »
Bull. Sc.math. 2è série 104 19-63 (1980)

511. Winnink M.
« Some General Properties of Thermodynamics States in an Algebraic Approach »
Statistical Mechanics and Field Theory, Sen&Weil Editors, (1971) 311-338

512. Winnink M.
« Algebraic Aspects of the Kubo-Martin-Schwinger Boundary Condition »
Cargèse Lectures in Physics 4 235-255 Gordon and Breach, New-York (1989)

513. Witten E.
« Instantons, the Quark Model and the 1/*N* Expansion »
Nuclear Physics B149 285-320 (1979)

514. Witten E.
« Search for a Realistic Kaluza-Klein Theory »
Nuclear Physics B186 412-428 (1981)

515. Witten E.
« Instability of the Kaluza-Klein Vacuum »
Nuclear Physics B195 481-492 (1982)

516. Witten E.
« Constraints on Supersymmetric Breaking »
Nuclear Physics B 202 253-316 (1982)

517. Witten E.
« Dimensional Reduction of Superstring Models »
Physics Letters B Vol 155 N°3 151-155 (1985)

518. Witten E.
« Topological Quantum Field Theory »
Commun. Math. Phys. 117 353-386 (1988)

519. Witten E.
« Topological Gravity »
Physics Letters B Vol 206 N°4 601-606 (1988)

520. Witten E.
« Quantum Field Theory and the Jones Polynomial »
Commun. Math. Phys. 121 351-399 (1989)

521. Witten E.
« Monopoles and Four Manifolds »
hep-th / 9411102 (1994)

522. Witten E.
« Supersymmetric Yang-Mills Theory on a Four-manifold »
J. Math.Phys. Vol 35, N°10, (Oct. 1994)

523. Witten E.
Nuclear Phys. B 433 (1995)

524. Witten E.
« Small Instantons in String Theory »
hep-th / 9511030 (1995)

525. Wodzicki M.
« Noncommutative Residue, Part I.Fundamentals »
K-Theory, Arithmetic and Geometry, Moscow 320-399 (1984)

526. Woronowicz S.L.
« Twisted SU(2) Group. An Example of Noncommutative differential Calculus »
Publ. Res. Inst. Math. Sci. 23 117-181 (1987)

527. Woronowicz S.L.
« Compact Matrix Pseudo Groups »
Commun. Math. Phys. 111 613-665 (1987)

528. Woronowicz S.L.
« Unbounded Elements Affiliated with $C^{\star}$ Algebras and Non-Compact Quantum Groups »
Commun. Math.Phys& 136, 399-432 (1991)

529. Yang C.N. Mills R.L.
« Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance »
Phys. Rev. 96 191-195 (1954)

530. Yurtserver U.
« On the Origin of Spacetime Topology and some Generalization of Quantum Field Theory »
Class. Quantum Grav. 11 1013-1026 (1994)

531. Zakrzewski S.
« Poisson Structures on the Lorentz Group »
Letters in Mathematical Physics 32 11-23 (1994)

532. Zakrzewski S.
« Quantum Poincaré Group Related to the κ-Poincaré Algebra »
J.Phys.A. 27 2075-2082 (1994)

533. Zarembo K.
« Monopole Determinant in Yang-Mills Theory at Finite Temperature »
Nuclear Physics B463 (1996) 73-95

534. Zinn-Justin J.
« Multi-Instanton Contributions in Quantum Mechanics »
Nuclear Physics B192 (1981) 125-140

535. Zung N.T.
« Singularities of Integrable Geodesic Flows on Multidimensional Torus and Sphere »
Journal of Geometry and Physics . Vol 18, (1996)

TABLE

I		**Introduction Générale**
1	*Chapitre 1*	**Domaine (3, 1) (4,0) des Fluctuations de la Signature**
7	*Chapitre 2*	**Algèbre de Superposition de SO(3, 1) et SO(4)**
13	*Chapitre 3*	**Q-déformation de la Signature à l' Echelle de Planck**
47	*Chapitre 4*	**Espace-temps KMS et Double Signature**
63	*Chapitre 5*	**Aspects Physiques de la Superposition de Signature**
75	*Chapitre 6*	**Dualité Instanton / Monopole et Double Signature**
83	*Chapitre 7*	**Théorie Topologique de la Singularité Initiale**
91	*Chapitre 8*	**Théorie topologique de l'Expansion du pré-Espace-Temps**
105		**Conclusion**
109		**Bibliographie extensive**
137		**Références citées**