



HAL
open science

Systemes Integrables en Mecanique Classique et Quantique

Vadim Zeitlin

► **To cite this version:**

Vadim Zeitlin. Systemes Integrables en Mecanique Classique et Quantique. Mathématiques [math].
Université Paris-Diderot - Paris VII, 2002. Français. NNT : . tel-00001770

HAL Id: tel-00001770

<https://theses.hal.science/tel-00001770>

Submitted on 4 Oct 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Systemes Intégrables en Mécanique Classique et Quantique

V. Zeitlin

4 octobre 2002

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Fedor Smirnov, qui a accepté de diriger mon travail pendant toutes ses années, tout particulièrement pour la patience surhumaine avec laquelle il a toujours répondu à toutes mes questions. Son aide m'a été inestimable tout au long de ma thèse qui n'aurait jamais pu être écrite sans lui.

Bien sûr, les discussions avec les autres experts des systèmes intégrables que j'ai eu la chance de côtoyer au laboratoire – Olivier Babelon, Michel Talon, Jean Avan, Claude Viallet, Mark Bellon – m'ont aussi été extrêmement utiles et je leur en suis très reconnaissant.

Je voudrais également dire merci à Laurent Baulieu grâce à qui j'ai pu commencer (et continuer!) ma thèse au L.P.T.H.E. et aussi à toutes les personnes de ce laboratoire au sein duquel j'ai été accueilli si chaleureusement, en particulier à Bruno Machet pour sa gentillesse exemplaire (et son thé excellent) et à Marco Picco avec qui j'ai eu le plaisir de discuter autant de fois devant une tasse de café.

Un grand merci spécial à Mark Bellon qui a très gentiment accepté de relire cette copie et qui m'a aidé à corriger des centaines de fautes de frappe et aussi quelques erreurs de Français – je lui exprime ma profonde gratitude.

Je ne peux passer sous silence l'aide de Marie-Christine Lévy, Sylvie Dalla-Foglia et Annie Richard grâce à qui je n'ai jamais eu de soucis avec des problèmes administratifs et aussi à Denis Bernia qui a su faire face à mes demandes d'approvisionnement en café exorbitantes sans broncher.

Finalement, un grand merci à mes parents de qui j'ai appris pratiquement tout ce que je connais et qui m'ont toujours encouragé à poursuivre mes études; et à ma famille qui n'a jamais arrêté de me supporter.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Les systèmes intégrables classiques	1
1.2	Les systèmes intégrables quantiques	3
1.3	La motivation et le plan	4
2	Rappels de géométrie algébrique	7
2.1	Les surfaces de Riemann	7
2.2	Les différentielles abéliennes	8
2.3	La variété de Jacobi	9
2.3.1	Les diviseurs	9
2.3.2	Les théorèmes d'Abel et Jacobi	11
2.3.3	La fonction thêta de Riemann	12
2.4	Le théorème de Riemann-Roch	13
3	Les systèmes intégrables classiques	15
3.1	L'introduction	15
3.2	Paire de Lax	18
3.3	La matrice r classique	20
3.3.1	Matrice r abstraite	21
3.3.2	La matrice r et les systèmes intégrables	22
3.4	Séparation des variables	24
3.4.1	Définition	24
3.4.2	Exemple générique	26
3.5	Méthodes algébro-géométriques	29
3.5.1	La courbe spectrale	29
3.5.2	Le diviseur dynamique	31
3.5.3	Les fonctions de Baker-Akhiezer	33
4	Les jacobiennes des courbes spectrales	37
4.1	Description générale	37
4.2	La courbe spectrale	38

4.2.1	Définitions	38
4.2.2	Les observables	40
4.3	Le modèle affine	42
4.3.1	Le cas hyperelliptique	43
4.3.2	Le crochet de Poisson	45
4.3.3	Le choix de la jauge	47
4.4	Les variables séparées	49
4.4.1	La fonction de Baker-Akhiezer	50
4.4.2	La détermination de w_i	52
4.4.3	Le calcul du crochet de Poisson	54
4.5	La reconstruction de $l(z)$	68
4.5.1	Les polynômes X_k	68
4.5.2	La reconstruction de $l(z)$ à partir de X_k	70
4.6	L'étude de l'algèbre des observables	74
4.6.1	L'anneau affine	75
4.6.2	Les groupes de cohomologie	78
4.6.3	La q -caractéristique d'Euler	79
4.6.4	Le lien entre les cohomologies et l'algèbre des observables	82
5	Les systèmes intégrables quantiques	89
5.1	L'introduction	89
5.1.1	La méthode du problème inverse (QISM)	89
5.1.2	Les variables séparées	90
5.2	Les idées de base de QISM	91
5.2.1	La matrice R et les algèbres \mathcal{T}_R	91
5.2.2	L'exemple de la chaîne XXX	92
5.2.3	L'ansatz de Bethe fonctionnel	95
5.3	La quantification de la jacobienne affine	97
5.3.1	Le modèle quantique	98
5.3.2	La réduction quantique	99
5.3.3	Les observables quantiques	102

Chapitre 1

Introduction

1.1 Les systèmes intégrables classiques

Nous allons commencer par une courte introduction historique sur les systèmes (ou modèles) intégrables. Plus de détails peuvent être trouvés dans [2] et [3] par exemple.

Les systèmes intégrables classiques sont tout simplement les systèmes dont les solutions exactes s'expriment sous forme de quadratures, c'est-à-dire par un nombre fini de calculs d'intégrales et d'autres opérations algébriques. Au-delà de la possibilité d'obtenir la solution exacte du système lui-même, ces systèmes se prêtent beaucoup mieux à l'analyse qualitative et à la généralisation que des problèmes où les solutions ne peuvent être trouvées que par des méthodes numériques approchées ou même des systèmes possédant une solution exacte mais qui ne s'exprime pas en quadratures (par exemple, le célèbre problème de N corps admet une telle solution ([38]) mais elle n'est pas d'une grande utilité en pratique). C'est pour ces raisons que les systèmes intégrables jouent un rôle particulier dans la mécanique classique mais aussi la mécanique statistique et, de plus en plus, la mécanique quantique.

Bien que l'histoire de ce sujet soit aussi ancienne que la mécanique classique elle-même – la résolution par Newton du problème de Kepler étant historiquement le premier exemple d'un système intégrable non trivial – très peu de modèles intégrables ont été découverts jusqu'à une époque relativement récente. Le premier développement moderne déterminant dans ce sujet fut le théorème de Liouville qui a permis de réunir tous les exemples de modèles intégrables connus à l'époque dans le cadre général d'un système Hamiltonien possédant le nombre maximal d'*intégrales du mouvement*. Le théorème assure aussi l'existence des variables canoniques appelées les *variables d'action-angle* dans lesquelles les équations de mouvement se li-

néarisent et peuvent donc être immédiatement résolues. Mais le problème de détermination effective de ces variables est resté un peu en marge de la physique mathématique pendant assez longtemps ensuite.

La révolution qui a mené à la théorie moderne a commencé avec les travaux de Gardner, Green, Kruskal et Miura ([12]) sur les solutions exactes de l'équation de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\dot{u} = 6uu' - u''' \quad (1.1)$$

et la découverte du formalisme des paires de Lax par Lax ([11]), Faddeev, Zakharov et Gardner – tous datant du dernier tiers du vingtième siècle. L'article [12] a présenté un changement de variables astucieux linéarisant l'équation (1.1) et permettant de trouver ses solutions exactes (les solitons). Les travaux suivants ont d'abord reformulé ce résultat en termes de paires de Lax et ensuite montré qu'il n'était pas spécifique à l'équation KdV mais pouvait aussi s'appliquer à d'autres équations, par exemple, l'équation de Schrödinger non-linéaire ([13])

$$i\dot{\psi} = -\psi'' + 2\kappa|\psi|^2\psi$$

On peut mentionner ici aussi que la *méthode du problème inverse* (qui est le nom sous lequel la construction de [12] est connue) peut être développée en utilisant la *représentation de courbure nulle* qui permet de remplacer l'équation à résoudre par une condition de compatibilité d'un système d'équations auxiliaire. Il a été démontré que l'existence d'une telle représentation était équivalente à l'existence d'une paire de Lax mais avec l'avantage d'une formulation plus géométrique du problème.

Au cours de développement de ce sujet, l'importance des méthodes hamiltoniennes et le rôle central joué par l'existence de la paire de Lax ou la représentation de courbure nulle devenaient de plus en plus claire. La combinaison de l'approche hamiltonienne avec des idées de la mécanique statistique a permis à Sklyanin de généraliser la méthode du problème inverse classique aux modèles quantiques en 1978–1980. Une des innovations de cette méthode du problème inverse quantique était la *matrice R quantique* introduite par Sklyanin qui a mené un peu plus tard à l'idée de la *matrice r classique*. Le développement suivant dans la théorie des modèles intégrables fut la reformulation de la théorie à l'aide de la matrice r qui remplaça, à son tour, la condition d'existence d'une paire de Lax ou d'une représentation de courbure nulle. Nous allons voir dans la suite en détail pourquoi ces changements d'approche successifs ont été fructueux même si ce sont “seulement” des formulations différentes de la même idée, mais l'on peut déjà donner quelques

indications:

1. le crochet de Poisson s'écrit sous une forme plus compacte à l'aide de la matrice r ce qui facilite les calculs
2. de plus, sous cette forme il a une interprétation naturelle en termes des représentations d'algèbres de Lie
3. finalement, la raison probablement la plus importante est qu'une telle formulation se généralise directement aux modèles intégrables quantiques comme on le verra dans la suite

Pour conclure cette section, remarquons que la théorie des systèmes intégrables ne s'applique pas seulement aux modèles continus mais aussi aux modèles discrets ce qui explique pourquoi ces méthodes sont aussi importantes en mécanique statistique (où les réseaux apparaissent naturellement) et en théorie des champs qui est liée intimement à cette dernière.

1.2 Les systèmes intégrables quantiques

L'histoire des modèles intégrables quantiques est bien plus brève que celle de la théorie classique. Comme indiqué ci-dessus, elle n'a commencé qu'en 1978 avec la synthèse de deux idées qui, jusque là, se sont développées indépendamment: la méthode de l'ansatz de Bethe, datant de 1931 et du célèbre article de Hans Bethe qui l'a introduit, et la méthode du problème inverse classique brièvement exposée ci-dessus. Le résultat fut la méthode du problème inverse quantique qui n'a pas mis longtemps pour prouver son efficacité car elle a rapidement permis de calculer les fonctions de corrélation pour plusieurs modèles importants. Elle a aussi eu des conséquences mathématiques importantes car c'est à partir de là que la théorie des groupes quantiques a pris son essor.

Malgré tous ces succès, cette théorie n'est pas encore aussi bien développée que la théorie classique. Peut-être un peu paradoxalement, on ne possède toujours pas la définition de l'objet principal d'études de ce domaine, qui est un système quantique complètement intégrable. En effet, l'idée évidente d'essayer de généraliser le théorème de Liouville au cas quantique rencontre très vite des problèmes même dans le cas de systèmes à nombre fini de degrés de liberté.

Heureusement, ce manque de définition n'empêche pas de travailler avec les systèmes quantiques intégrables qui, d'un point vue pratique ne sont rien d'autre que les systèmes que l'on sait intégrer, c'est-à-dire où l'on peut trouver d'une façon exacte les quantités physiques importantes comme le spectre du système ou les fonctions de corrélation.

Nous donnerons une introduction plus étendue à la méthode du problème inverse quantique (QISM) plus tard et nous allons alors voir comment elle s'applique aux exemples concrets.

1.3 La motivation et le plan

Notre motivation principale est de développer des méthodes d'étude des systèmes intégrables classiques qui peuvent se généraliser au cas quantique. En effet, même s'il n'y a pas de méthode générale permettant de résoudre un système quantique correspondant à un système classique donné, pour beaucoup de modèles les constructions quantiques peuvent être obtenues d'une façon très similaire à la résolution classique.

Notre méthode sera basée sur l'étude approfondie de la structure de l'algèbre des observables. Effectivement, on se doute bien qu'elle va être importante car même si l'espace de phases ne "survit" pas lors du passage du cas classique au cas quantique, l'algèbre des fonctions sur cet espace s'obtient par déformation à partir de celle des observables classiques. En fait, la procédure standard de quantification consiste à déformer l'algèbre des observables classiques d'une façon qui conserve ses propriétés essentielles – et c'est exactement cela que l'on propose de faire.

Le deuxième ingrédient principal dans notre approche sera la méthode de la séparation des variables. Pour comprendre son importance, revenons à la théorie des systèmes intégrables classiques. En suivant [17] nous pouvons remarquer qu'il y a trois problèmes principaux auxquels on peut s'intéresser dans ce cadre:

1. La construction des variables d'action-angle
2. La résolution des équations de mouvement
3. La séparation des variables

Le dernier problème est le plus facile (quoiqu'il vaudrait probablement mieux dire le moins insurmontable) des trois et c'est aussi celui auquel on s'intéresse le plus directement car il correspond exactement au même problème dans le cas quantique. Un autre avantage est que la séparation des variables est intimement liée au modèle affine que l'on va construire dans le cas classique comme quantique.

Donnons maintenant le plan: comme nous allons utiliser quelques méthodes de géométrie algébrique dans notre traitement des systèmes intégrables classiques, nous allons commencer par un bref survol de quelques résultats classiques dans le chapitre 2. Dans le chapitre suivant nous allons revoir les systèmes intégrables classique plus en détail pour montrer avec plus

de substance l'importance des méthodes de géométrie algébrique dans ce domaine. Nous allons aussi parler de la méthode de la séparation de variables basée sur les idées de Sklyanin (mise en pratique en [17] pour $N = 2, 3$) et donnerons déjà, mais sans démonstration, notre généralisation de ses résultats pour le cas de dimension N quelconque.

Après cette introduction étendue, nous allons présenter nos résultats dans le chapitre 4. Nous allons faire une étude détaillée des jacobiniennes affines de courbes spectrales en utilisant un nouveau modèle affine que nous allons construire en généralisant ainsi, de nouveau, les résultats connus précédemment dans le cas hyperelliptique ($N = 2$) au cas de N arbitraire. Grâce à la possibilité d'introduire la graduation sur l'algèbre des observables dans un cas très particulier et au théorème de [22] qui prouve que la caractéristique d'Euler du diviseur thêta est la même pour ce cas dégénéré et le cas général, nous allons calculer la q -caractéristique d'Euler qui mènera à une formule simple pour la caractéristique d'Euler habituelle. Ce sera le premier résultat intéressant, au moins d'un point de vue mathématique, que nous donnerons ici.

D'un point de vue physique, il est surtout important que l'algèbre des observables ait une structure très simple: toutes les observables s'obtiennent par l'action des polynômes en champs vectoriels hamiltoniens à partir d'un nombre fini de fonctions. Ces fonctions sont les coefficients du groupe de cohomologie supérieure de certaines cohomologies singulières. On verra l'importance de cette propriété pour les cas classiques et quantiques ultérieurement, mais l'on peut déjà dire que grâce à cela, en utilisant la méthode de séparation des variables, nous pouvons – mais dans le cas hyperelliptique seulement – exprimer les éléments matricielles de n'importe quelle observable à l'aide de certaines intégrales abéliennes déformées ([20]) au lieu des intégrales multiples dans lesquelles elles s'expriment naturellement. Nous discuterons aussi la situation pour $N > 2$ et montrerons sur un exemple la différence de ce cas-là avec le cas hyperelliptique.

Après avoir fini notre étude du cas classique, nous allons passer au cas quantique – c'est-à-dire, de notre point de vue, déformer l'algèbre des observables \mathcal{A} en $\mathcal{A}(q)$. Nous verrons que la structure d'algèbre des observables est encore la même après la déformation ce qui nous permettra d'utiliser la propriété remarquable de l'algèbre classique ci-dessus après la quantification: toute observable quantique s'écrit encore sous la forme

$$p_L(t_1, \dots, t_g)g(b_1, \dots, b_g)p_R(t_1, \dots, t_g)$$

où t_i sont les hamiltoniens, b_i – les coefficients de cohomologies supérieures et p_L , g et p_R – des polynômes. On comprend que grâce à cela, il est facile de calculer les fonctions de corrélation entre les vecteurs propres de t_i .

Finalement, la construction faite pour obtenir ce résultat révèle une relation très intéressante entre le modèle en question et le modèle dual qui lui correspond par inversion de la constante de Planck. Ces deux modèles ont les mêmes vecteurs propres et leurs observables respectives commutent et, en plus, les cohomologies du modèle initial correspondent aux homologies du modèle dual et vice versa. De cette manière, la dualité

$$\hbar \longleftrightarrow \frac{1}{\hbar}$$

semble correspondre à la dualité entre les cohomologies et les homologies sur la jacobienne affine.

En résumé, cette thèse présentera quelques résultats très intéressants obtenus auparavant par F. Smirnov et A. Nakayashiki pour les modèles classiques et quantiques dans le cas hyperelliptique pour ensuite étudier leur généralisation au cas de N quelconque. Nous allons trouver que la plupart de résultats admettent une telle généralisation mais, malheureusement, à l'exception de la conjecture sur la structure du groupe de cohomologie supérieur qui a une structure bien plus compliquée dans le cas général, ce qui explique pourquoi on n'a pas pu, jusque là, décrire l'algèbre des observables d'une manière aussi concrète que dans le cas hyperelliptique. Malgré cela on peut formuler quelques hypothèses à son sujet qui formeront la base d'investigations ultérieures.

Chapitre 2

Rappels de géométrie algébrique

Dans ce chapitre nous allons rappeler aussi brièvement que possible quelques résultats de base de géométrie algébrique que nous utiliserons dans la suite. On pourra consulter les livres [4] et [10] pour une introduction très accessible aux surfaces de Riemann et [5] pour leur étude plus systématique. D'autres livres de référence sont [6] et [7].

2.1 Les surfaces de Riemann

Historiquement, les surfaces de Riemann ont fait leur apparition dans le domaine de l'analyse complexe comme un moyen de travailler avec les fonctions à valeurs multiples. L'idée de Riemann fut de remplacer le domaine de définition de la fonction avec un recouvrement à plusieurs feuilles du plan complexe construit de façon à avoir au-dessus de chaque point du plan autant de feuilles qu'il y a de valeurs de la fonction en ce point. De cette manière, la fonction devient bien définie et l'on peut dire que sa surface de Riemann est son domaine de définition naturel.

On peut aussi voir les surfaces de Riemann d'une façon abstraite en oubliant qu'il y a un plan complexe au-dessous. Cette approche mène à la

Définition 1. Une *surface de Riemann* est une variété X de dimension (réelle) 2 munie d'une structure complexe, c'est-à-dire d'un recouvrement ouvert U_α de X et d'une famille d'applications $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ surjectives qui sont *holomorphiquement compatibles* dans le sens que l'application

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

est biholomorphe.

Nous pouvons définir les fonctions holomorphes et méromorphes sur une surface de Riemann en utilisant les définitions habituelles pour les fonctions

complexes:

Définition 2. Une fonction $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un sous-ensemble ouvert Y d'une surface de Riemann X est holomorphe si la fonction

$$f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap Y) \rightarrow \mathbb{C}$$

est holomorphe pour tout α dans le sens habituel.

Une fonction $g : Y' \rightarrow \mathbb{C}$ sur $Y' \subset Y$ est méromorphe si $Y - Y'$ ne contient que des points isolés (qui sont appelés les pôles de g) et

$$\forall p_0 \in Y - Y' \quad \lim_{p \rightarrow p_0} |g(p)| = \infty$$

En particulier, selon cette définition les fonctions coordonnées ϕ sont, bien sûr, des fonctions holomorphes. L'algèbre des fonctions holomorphes et le corps des fonctions méromorphes sur X seront notés $\mathcal{O}(X)$ et $\mathcal{M}(X)$ respectivement.

Par une généralisation facile de la définition précédente on peut aussi définir les fonctions holomorphes à valeurs dans une autre surface de Riemann. Ceci nous permet, par exemple, de voir les fonctions méromorphes comme des applications holomorphes à valeurs dans la sphère de Riemann. Finalement, les résultats classiques de l'analyse complexe, tel que le théorème de Liouville, se généralisent aux surfaces de Riemann.

Nous n'allons pas développer ici la théorie générale des surfaces de Riemann mais citerons juste, sans démonstration le

Théorème 1. Soit X une surface de Riemann et $P(T) \in \mathcal{M}(X)[T]$ un polynôme irréductible de degré n . Alors il existe une surface de Riemann Y , un recouvrement à n feuilles $\pi : Y \rightarrow X$ et une fonction méromorphe F sur Y tels que $(P \circ \pi)(F) = 0$. De plus, le triplet (Y, π, F) est unique à isomorphisme biholomorphe entre recouvrements près.

qui fait le contact avec la motivation historique expliquée ci-dessus dans le cas $X = \mathbb{P}^1$. Remarquons que dans ce cas la surface Y sera compacte et on ne s'intéressera qu'aux surfaces compactes dans la suite.

2.2 Les différentielles abéliennes

Commençons par définir les différentielles abéliennes. Soit Σ une surface de Riemann compacte de genre g . Nous supposons donnée une base homologique canonique, c'est-à-dire $2g$ cycles $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ avec les indices d'intersection

$$\begin{cases} \alpha_i \cdot \alpha_j &= 0 \\ \beta_i \cdot \beta_j &= 0 \\ \alpha_i \cdot \beta_j &= \delta_{ij} \end{cases} \quad (2.1)$$

Les différentielles de la *première espèce* sont les différentielles holomorphes sur Σ . Elles sont (par exemple par conséquence du théorème de Riemann-Roch) au nombre de g : $\omega_1, \dots, \omega_g$. On dira qu'elles sont normalisées si la matrice de leurs périodes α est l'identité:

$$\oint_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}$$

On définit la matrice de périodes β naturellement par

$$\oint_{\beta_i} \omega_j = B_{ij} \tag{2.2}$$

Les relations bilinéaires de Riemann disent que c'est une matrice symétrique dont la partie imaginaire est positive définie en tant que forme bilinéaire.

Les différentielles de la *deuxième espèce* sont celles qui n'ont pas de pôles simples: en d'autres termes, tous leurs pôles sont d'ordre supérieur ou égal à 2 ou encore, leur résidu est 0 à chacun des pôles. Pour un point $P \in \Sigma$ donné il existe toujours une différentielle du second type avec un seul pôle en P . De plus, par addition d'une combinaison linéaire de différentielles du premier type on peut faire disparaître toutes les périodes α – dans ce cas on dira que c'est une différentielle du *second type normalisée*. Une telle différentielle avec un pôle en P est unique à une constante additive près, c'est-à-dire devient unique si l'on demande en plus qu'elle s'annule en un point donné.

Finalement, les différentielles du *troisième type* sont toutes les autres, à savoir celles qui ont des pôles simples. Comme par le théorème de Cauchy la somme des résidus d'une différentielle méromorphe est nulle, il est naturel d'appeler différentielles du troisième type élémentaires celles qui ont un pôle simple avec le résidu 1 en un point P donné et un pôle simple avec le résidu -1 en un autre point Q (fixé aussi). Comme ci-dessus, une telle différentielle est normalisée si toutes ces périodes α sont nulles et elle est unique dès que l'on impose la condition supplémentaire de s'annuler en un autre point quelconque.

On utilisera les notations $\Omega(U)$ et $\mathcal{M}^{(1)}(U)$ pour les 1-formes holomorphes et méromorphes, respectivement, sur une partie ouverte U .

2.3 La variété de Jacobi

2.3.1 Les diviseurs

Un *diviseur* sur la courbe Σ est une application D sur Σ à valeurs dans \mathbb{Z} nulle presque partout, c'est-à-dire il n'existe qu'un nombre fini de points

P_i où $D(P_i) = n_i \neq 0$. On peut donc écrire les diviseurs comme des sommes formelles $\sum_i n_i P_i$. Avec cette notation la somme et la différence de deux diviseurs sont définies d'une manière évidente et l'on voit que les diviseurs sur Σ forment un groupe abélien que l'on notera $\text{Div}(\Sigma)$. On peut aussi définir une relation d'ordre (non totale) sur $\text{Div}(\Sigma)$ par

$$\sum_i n_i P_i \geq 0 \iff \forall i \quad n_i \geq 0$$

On associe un diviseur noté (f) à toute fonction méromorphe f ayant des zéros en des points P_i (avec les multiplicités n_i) et des pôles en des points Q_j (avec les multiplicités m_j) en posant

$$(f) = \sum_i n_i P_i - \sum_j m_j Q_j$$

Inversement, à un diviseur D on associe l'espace \mathcal{O}_D des fonctions méromorphes f telles que $(f) \geq (-D)$. Une conséquence immédiate de cette définition est l'équivalence

$$f \text{ holomorphe} \iff (f) \geq 0$$

et aussi

$$\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$$

Un diviseur est dit *effectif* s'il existe une fonction méromorphe f telle qu'il soit égal à (f) . Deux diviseurs sont dits équivalents si et seulement si leur différence est un diviseur effectif:

$$D_1 \sim D_2 \iff \exists f \quad D_1 - D_2 = (f)$$

Les diviseurs effectifs forment un sous-groupe $\text{Div}_E(\Sigma)$ de $\text{Div}(\Sigma)$ car $(f_1) + (f_2) = (f_1 f_2)$ et $(1/f) = -(f)$. Si deux diviseurs D_1 et D_2 sont équivalents, leurs espaces associés \mathcal{O}_{D_1} et \mathcal{O}_{D_2} sont isomorphes: en effet, si $D_1 - D_2 = (g)$, la multiplication par g établit l'isomorphisme de \mathcal{O}_{D_1} sur \mathcal{O}_{D_2} .

Le degré d'un diviseur est défini par

$$\text{deg} \sum_i n_i P_i = \sum_i n_i$$

et l'on notera $\text{Div}_0(\Sigma)$ le sous-groupe des diviseurs de degré 0. Comme une fonction méromorphe a le même nombre de pôles et de zéros, on voit que $D_1 \sim D_2 \Rightarrow \text{deg} D_1 = \text{deg} D_2$. La réponse à la question inverse est donnée par le théorème d'Abel ci-dessous.

2.3.2 Les théorèmes d'Abel et Jacobi

Pour les formuler, définissons l'application (ou la transformation) d'Abel avec point de base P_0 par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{P_0} : \Sigma &\rightarrow \mathbb{C}^g \text{ (mais pas tout à fait)} \\ P &\mapsto \int_{P_0}^P \omega + \Delta(P_0) \end{aligned}$$

où $\Delta(P_0)$ est un vecteur de constantes (il ne dépend que de la courbe et du point de base) appelé la *caractéristique de Riemann*.

La remarque à côté de \mathbb{C}^g ci-dessus s'explique par le fait que l'application \mathcal{A} dans \mathbb{C}^g n'est pas bien définie car le résultat dépend de chemin d'intégration. En effet, si l'on déforme ce chemin par α_i ou β_i on change la j -ième composante du vecteur dans la partie droite par δ_{ij} ou B_{ij} , respectivement. Pour que le résultat soit indépendant du choix de chemin d'intégration il suffit de définir \mathcal{A} comme une application de Σ dans le tore complexe $J(\Sigma)$

$$J(\Sigma) \equiv \frac{\mathbb{C}^g}{\mathbb{Z}^g + B\mathbb{Z}^g}$$

Alors, en effet, n'importe quelle déformation du chemin – qui se présente comme combinaison linéaire de α et β – laisse invariant le point sur $J(\Sigma)$.

Pour un diviseur de degré nul $D = \sum_i (P_i - Q_i)$ (avec P_i et Q_i pas nécessairement distincts) on étend naturellement la définition de \mathcal{A} par

$$\mathcal{A}(D) = \sum_i \mathcal{A}(P_i) - \mathcal{A}(Q_i) = \sum_i \int_{P_i}^{Q_i} \omega$$

Alors on a deux théorèmes fondamentaux suivants:

Théorème d'Abel. *Le diviseur D de degré 0 est effectif si et seulement si $\mathcal{A}(D) = 0$*
et

Théorème de Jacobi. *Pour tout $\xi \in J(\Sigma)$ et un diviseur donné $D_0 = \sum_{i=1}^g Q_i$ il existe un diviseur $D = \sum_{i=1}^g P_i$ tel que $\mathcal{A}(D - D_0) = \xi$.*

Démonstration. Voir [4], paragraphes 20 et 21. □

Finalement, donnons deux dernières définitions: on appelle *groupe de Picard* de Σ le groupe abélien

$$\text{Pic}(\Sigma) = \text{Div}(\Sigma)/\text{Div}_E(\Sigma)$$

et l'on appelle *variété jacobienne* de Σ (quoique ici on ne la définit que comme un groupe abélien)

$$\mathcal{J} \equiv \text{Pic}_0(\Sigma) = \text{Div}_0(\Sigma)/\text{Div}_E(\Sigma)$$

Dans ces termes on peut voir la signification des théorèmes ci-dessus d'une manière suivante: on a vu que la transformation d'Abel définissait une application $\text{Div}_0(\Sigma) \rightarrow J(\Sigma)$. Le théorème d'Abel affirme que le noyau de cette application est $\text{Div}_E(\Sigma) \cap \text{Div}_0(\Sigma)$ et donc, par passage au quotient, on obtient une injection $\mathcal{J} \rightarrow J(\Sigma)$. Quant au théorème de Jacobi (historiquement connu aussi sous le nom du "problème inverse de Jacobi"), il affirme que cette application est surjective.

Ainsi les théorèmes ci-dessus établissent un isomorphisme entre le tore complexe $J(\Sigma)$ et la variété \mathcal{J} et on utilisera le qualificatif "jacobienne" pour les deux à partir de maintenant.

2.3.3 La fonction thêta de Riemann

Nous supposons dans cette section que nous avons une base homologique canonique (c'est-à-dire vérifiant (2.1)) donnée. Rappelons alors que la matrice des périodes B associée définie par (2.2) est symétrique et que sa partie imaginaire est positive définie par conséquence directe des relations bilinéaires de Riemann: pour toutes les formes holomorphes ω, η sur Σ

$$\sum_{i=1}^g \int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \eta - \sum_{i=1}^g \int_{\beta_i} \omega \int_{\alpha_i} \eta = 0$$

et pour toute forme holomorphe ω

$$\Im \left(\sum_{i=1}^g \overline{\int_{\alpha_i} \omega} \int_{\beta_i} \omega \right) > 0$$

Cela assure la convergence absolue de la série dans la partie droite de la définition de la *fonction thêta de Riemann*:

$$\theta(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp 2\pi i \left(\frac{1}{2} {}^t n B n + {}^t n \xi \right)$$

Nous ne prétendons pas faire l'étude de la fonction thêta ici (voir le livre [8] pour cela) et nous nous bornerons ici à donner juste quelques unes de ses propriétés élémentaires, en particulier nous ignorerons complètement la dépendance de θ en B (que l'on considère comme étant fixe ici) et la théorie des formes modulaires sous-jacente.

La première propriété importante est que θ est quasi périodique: pour tout $m, n \in \mathbb{Z}^g$ on a

$$\theta(\xi + m + Bn) = \exp \left[-2\pi i \left(\frac{1}{2} {}^t n B n + {}^t n \xi \right) \right] \theta(\xi)$$

ce qui montre qu'elle est bien définie sur la variété jacobienne \mathcal{J} .

Ensuite nous citerons le théorème fondamental de Riemann:

Théorème 2. *Pour un point de base $P_0 \in \Sigma$ fixé, il existe un vecteur de constantes $\Delta(P_0) \in \mathbb{C}^g$ qui ne dépend que de P_0 tel que pour tout $z \in \mathbb{C}^g$ la fonction*

$$P \mapsto \theta(\mathcal{A}_{P_0}(P) - z)$$

est soit identiquement nulle, soit a exactement g zéros Q_1, \dots, Q_g tels que $\sum_i \mathcal{A}(Q_i) = z + \Delta$.

Démonstration. La démonstration se fait en utilisant le théorème de Stokes, voir [8] pages 149-151. \square

En d'autres mots, quand on plonge la courbe Σ dans sa jacobienne par l'application d'Abel, soit son image est entièrement incluse dans le *diviseur thêta* qui est une sous-variété (en général singulière) de \mathcal{J} de dimension $g - 1$ $\mathcal{X} \equiv \theta^{-1}(0)$, soit elle la rencontre en exactement g points.

Le théorème de Riemann a aussi un corollaire important que l'on utilisera:

Corollaire 3. *On possède la caractérisation du diviseur thêta suivante:*

$$\theta(z) = 0 \Leftrightarrow \exists P_1, \dots, P_{g-1} \in \Sigma \text{ tels que } z = \Delta - \sum_{i=1}^{g-1} \int_{P_0}^{P_i} \omega$$

Donc le diviseur thêta est l'image par la transformation d'Abel de diviseurs à $g - 1$ points.

2.4 Le théorème de Riemann-Roch

C'est un des théorèmes les plus importants de la théorie des surfaces de Riemann compactes. En gros, il donne le nombre de fonctions méromorphes linéairement indépendantes ayant certaines restrictions sur leurs pôles. En particulier, c'est un théorème d'existence très efficace.

Pour énoncer la théorème nous avons besoin de la

Définition 3. Soit D un diviseur sur Σ . On rappelle que le *système linéaire* associé à D est l'espace vectoriel

$$\mathcal{O}_D = \{f \in \mathcal{M}(\Sigma) \mid (f) \geq -D\}$$

D'une façon analogue on définit l'espace linéaire

$$\Omega_D = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(\Sigma) \mid (\omega) \geq -D\}$$

On appelle *dimension de D* la dimension du système linéaire associé:

$$r(D) \equiv \dim \mathcal{O}_D$$

et l'on appelle *indice de spécialité de D*

$$i(D) \equiv \dim \Omega_D$$

Avec ces notations nous pouvons formuler le

Théorème de Riemann-Roch. *Sur une surface de Riemann Σ de genre g la relation suivante est vérifiée:*

$$r(D) = \deg D - g + 1 + i(-D) \quad (2.3)$$

Il y a un cas dans lequel cette relation est particulièrement facile à comprendre: c'est celui d'un diviseur effectif $D = (P_1, \dots, P_k)$. Alors, le théorème affirme que la différence entre le nombre de fonctions méromorphes linéairement indépendantes ayant des pôles simples en P_i et le nombre de différentielles holomorphes indépendantes ayant des zéros en P_i est à $k - g + 1$.

On voit que, en général, il y a deux quantités inconnues dans une seule équation. Mais on peut quand même l'utiliser dans beaucoup de cas particuliers soit en utilisant les valeurs particulières de $r(D)$ ou $i(D)$, soit en obtenant les inégalités à partir de l'égalité (2.3). Donnons quelques exemples:

- Si $\deg D < 0$, alors $\mathcal{O}_D = \{0\}$ et $i(D) = \deg D - g + 1$
- Comme $\deg(\omega) = 2g - 2$ pour toute forme méromorphe, si $\deg D > 2g - 2$, alors $i(D) = 0$ et donc $\dim \mathcal{O}_D = \deg D - g + 1 > g - 1$
- Il existe une fonction méromorphe non triviale ayant au plus $g + 1$ pôles aux points P_1, \dots, P_{g+1} donnés: effectivement, si l'on considère le diviseur $D = \sum P_i$ on a $\dim \mathcal{O}_D \geq \deg D + 1 - g = 2$ et donc il y a bien une fonction non constante ayant les pôles en P_i .

Chapitre 3

Les systèmes intégrables en mécanique classique

Nous allons présenter dans ce chapitre la formulation de la théorie des systèmes intégrables à l'aide de la matrice r . Mais d'abord on rappellera brièvement les notions de base de la mécanique classique.

3.1 L'introduction

Les systèmes auxquels on s'intéresse en mécanique classique sont décrits par un point dans un certain espace symplectique qui s'appelle l'espace des phases du système. Localement, cet espace est isomorphe à \mathbb{R}^{2n} , où n est le nombre de degrés de liberté du système, avec les coordonnées locales q_i (les positions) et p_i (les impulsions).

La dynamique du système est déterminée par la donnée d'une fonction H sur l'espace des phases appelé hamiltonien et qui permet d'écrire les équations du mouvement sous la forme

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (3.1)$$

Ici, le point signifie, comme d'habitude, la dérivée par rapport au temps.

L'algèbre des fonctions sur l'espace des phases (*l'algèbre des observables*) est munie d'une forme bilinéaire antisymétrique que l'on appelle un crochet de Poisson. Dans les coordonnées locales il s'écrit comme

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right)$$

Le crochet de Poisson satisfait à une identité supplémentaire – l'identité de Jacobi:

$$\{F, \{G, K\}\} + \{G, \{K, F\}\} + \{K, \{F, G\}\} = 0$$

et il prend une forme particulièrement simple pour les variables p_i et q_i elles-mêmes:

$$\begin{cases} \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \\ \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \end{cases} \quad (3.2)$$

Les variables vérifiant les relations (3.2) sont dites canoniquement conjuguées.

Pour n'importe quelle observable F , la dépendance par rapport au temps est décrite par l'équation

$$\dot{F} = \{H, F\}$$

et donc la valeur de F ne change pas au cours de l'évolution du système si elle commute avec le hamiltonien. En particulier, la valeur du hamiltonien lui-même (l'énergie totale du système) est toujours conservée. Ceci implique que le mouvement du système est confiné à la sous variété de l'espace des phases définie comme la surface de niveau $H = \text{const}$.

Après cette introduction nous pouvons maintenant définir la notion de système intégrable:

Définition 4. Un système défini dans un espace des phases de dimension $2n$ (avec les coordonnées (p_i, q_i) ($i = 1, \dots, n$)) et un Hamiltonien $H(p, q)$ est intégrable dans le sens de Liouville s'il exist n fonctions $I_1(p, q), \dots, I_n(p, q)$ conservées indépendantes qui sont en involution, c'est-à-dire commutent entre elles:

$$\begin{aligned} \{H, I_i\} &= 0 & \forall i \\ \{I_i, I_j\} &= 0 & \forall i, j \end{aligned}$$

L'intérêt de cette définition devient clair grâce au théorème de Liouville qui affirme qu'il est possible de résoudre les équations du mouvement d'un système intégrable en quadratures. Plus précisément:

Théorème de Liouville-Arnold. *Etant données les n intégrales du mouvement I_k en involution indépendantes sur l'ensemble de niveau*

$$M_f = \{x | I_k(x) = I_k^{(0)}\}$$

on a:

- La variété M_f est invariante par le flot du hamiltonien $H = I_1$
- Si M_f est compacte et connexe, alors elle est difféomorphe à un tore de dimension n
- Le mouvement du système sur M_f est quasi-périodique

– Les équation canoniques associées à H sont intégrables en quadratures

Démonstration. Voir [1], chapitre 10. \square

Donc même s'il n'y a pas de méthode pour résoudre les équations (3.1) d'une manière exacte dans le cas général, pour les modèles intégrables nous savons que, en principe, nous sommes toujours capables de trouver un changement de variables $(p, q) \rightarrow (I, \phi)$ tel que les équations du mouvement se linéarisent en nouvelles coordonnées:

$$\begin{cases} \dot{I} &= \{H, I\} &= 0 \\ \dot{\phi} &= \{H, \phi\} &= \omega I \end{cases}$$

ce qui permet de résoudre le problème. Les variables (I, ϕ) sont appelées les *variables d'action-angle*, les ϕ étant, effectivement, les coordonnées angulaires sur les tores M_f du théorème et les I ayant la dimension d'action.

L'exemple probablement le plus simple de système intégrable – qui est, bien sûr, complètement trivial comme tout système à un degré de liberté est intégrable simplement à cause de l'existence du hamiltonien – est celui d'un oscillateur harmonique. Nous considérons une particule avec le hamiltonien $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ où p et q sont les variables canoniques: $\{p, q\} = 1$. L'espace des phases ici est donc \mathbb{R}^2 et il se décompose en ellipses $H = \text{const}$ (qui dégénèrent en un point pour $H = 0$) et les coordonnées qui linéarisent les équations du mouvement

$$\begin{cases} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 q \end{cases} \quad (3.3)$$

sont (ρ, ϕ) définies par

$$p = \rho \cos \phi, \quad q = \frac{\rho}{\omega} \sin \phi$$

Dans ces variables l'équation du mouvement s'écrit

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt{2H} \\ \dot{\phi} &= \omega t + \phi_0 \end{cases}$$

où H est la valeur (constante) du hamiltonien, c'est-à-dire le mouvement de la particule est uniforme sur la surface de niveau de H .

Le théorème de Liouville montre que cette foliation de l'espace des phases en tores invariants est, en fait, générale pour les systèmes intégrables. De plus, il est intéressant de remarquer, même si l'on ne développera pas ces idées dans cette thèse, qu'elle reste encore valable pour les systèmes proches d'un système intégrable. Cette assertion est connue sous le nom du théorème KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) et constitue la base de la théorie des perturbations.

3.2 Paire de Lax

Même si le théorème de Liouville nous montre que la structure de l'espace des phases d'un système intégrable a une structure générale assez simple et que, quitte à faire un changement de variables, les équations du mouvement se linéarisent, l'étude des systèmes intégrables ne s'arrête pas là. En effet, il y a deux problèmes importants: premièrement, il est loin d'être facile de trouver le changement de variables donnant les variables action-angle en pratique, même si le théorème assure son existence. Deuxièmement, les exemples de systèmes intégrables sont rares et il n'est pas clair à priori comment construire de nouveaux exemples de tels systèmes.

La découverte de la notion de la paire de Lax, qui était le premier développement majeur de la théorie moderne des systèmes intégrables, permet d'apporter les éléments de réponse à ces deux questions à la fois.

Définition 5. Une paire de Lax est un couple de fonctions matricielles L et M définies sur l'espace des phases telles que les équations du mouvement soient équivalentes à l'équation suivante:

$$\dot{L} = [M, L] \equiv ML - LM \quad (3.4)$$

Le premier avantage de pouvoir écrire les équations du mouvement sous cette forme est que cela permet de trouver facilement les expressions conservées. En effet, les solutions de (3.4) sont

$$L(t) = g(t)L(0)g(t)^{-1}$$

avec la matrice $g(t)$ définie par

$$\dot{g}(t) = M(t)g(t)$$

Donc le polynôme caractéristique de $L(t)$ est préservé par l'évolution ce qui implique que ses valeurs propres le sont aussi – ce sont donc les intégrales du mouvement et l'on dit que l'équation (3.4) est *isospectrale*. Ceci implique que toutes les quantités $\text{tr } L^k$ sont conservées et, bien sûr, elles sont en involution en tant que polynômes en valeurs propres de L .

On peut construire une paire de Lax triviale pour tout système intégrable à partir des variables séparées de ce système. Cette construction ne présente cependant aucune utilité car, si l'on connaît déjà les variables séparées, en pratique cela veut dire que l'on sait résoudre les équations du mouvement et donc on n'a plus besoin de paire de Lax. Il est plus intéressant de remarquer que, inversement, si l'on trouve une nouvelle paire de Lax on peut construire

un système mécanique correspondant qui sera intégrable et que donc la correspondance entre les système intégrable et les paires de Lax est à double sens.

Pour illustrer cette correspondance sur l'exemple le plus simple possible (et, admettons-le, pas vraiment représentatif car ce n'est sûrement pas la meilleure méthode pour résoudre un problème aussi simple), voilà une paire de Lax (remarquons qu'elles ne sont jamais uniques) pour l'oscillateur harmonique décrit plus haut:

$$L = \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega/2 \\ \omega/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que l'équation (3.4) pour ces matrices nous redonne l'équation (3.3) précédente.

Pour comprendre les autres avantages de la formulation en termes de paires de Lax, il est nécessaire d'élargir un peu la définition et, à première vue, de compliquer la situation même davantage en introduisant un paramètre supplémentaire que l'on appelle le *paramètre spectral*. Cela revient à dire que les matrices de la paire de Lax dépendent maintenant d'une façon analytique d'un paramètre complexe additionnel et (3.4) se réécrit comme

$$L(\lambda) = [M(\lambda), L(\lambda)] \tag{3.5}$$

D'un point vue (très) pragmatique, l'introduction du paramètre λ nous permet d'avoir "plus de degrés de liberté": dans certains cas, la paire de Lax peut se révéler être triviale dans le sens que les quantités $\text{tr } L^k$ s'annulent ou simplement ne sont pas indépendantes et le hamiltonien n'apparaît pas dans cette famille. Le paramètre spectral peut être utile pour lever cette dégénérescence car (3.5) contient plus d'équations que (3.4): comme les expressions à droite et à gauche sont analytiques en λ , on peut en déduire l'égalité des coefficients pour chaque puissance de λ au lieu d'une seule équation (3.4) (bien sûr, toutes ces équations ne sont pas indépendantes).

D'un point vue plus global, l'intérêt de cette généralisation est double. D'abord, maintenant il devient possible d'étudier les propriétés analytique de L et M comme fonction de λ . En particulier, on peut s'intéresser à la structure polaire de M et l'on trouve que l'équation (3.5) fixe la forme possible de M (et vice versa: la méthode de Zakharov-Shabat permet aussi de construire une paire de Lax étant données les propriétés analytiques des matrices L et M). Cette approche permet aussi de faire, dans certains cas particuliers, le lien avec la théorie des groupes de Lie et, par le biais du crochet de Berezine-Kostant-Kirillov, d'introduire une structure symplectique naturelle.

Deuxièmement, cela fait apparaître aussi la structure géométrique sous-jacente. En effet, à une paire de Lax avec un paramètre spectral l'on peut associer une *courbe spectrale* définie par l'équation

$$\det(L(\lambda) - \mu) = 0$$

Remarquons que, grâce au caractère isospectral de l'équation, cette courbe ne dépend pas du temps. C'est une surface de Riemann et l'on peut utiliser les méthodes de la géométrie algébrique pour l'étudier. Le résultat principal ici est que l'évolution dans le temps du diviseur des pôles de $L(\lambda)$ est linéaire sur la Jacobienne de la courbe spectrale ce qui implique directement que les solutions des équations du mouvement s'expriment à l'aide des fonctions θ de Riemann.

Nous allons voir l'application concrète des idées du dernier paragraphe dans la suite, mais nous allons d'abord introduire le dernier objet fondamental de la théorie des systèmes intégrables.

3.3 La matrice r classique

La matrice r classique est la dernière addition à l'arsenal des outils de la théorie des systèmes intégrables classiques. Contrairement à la démarche habituelle selon laquelle on généralise les notions classiques au cas quantique, la matrice r est apparue comme l'analogue classique de la matrice R quantique qui avait été découverte auparavant. Historiquement donc, la matrice r a été introduite après coup dans la méthode du problème inverse classique, tandis que la méthode du problème inverse quantique a été formulée dès le début en utilisant la matrice R .

Sachant cela, il n'est pas surprenant que l'un des avantages de la formulation de la théorie classique à l'aide de la matrice r est la possibilité de généraliser d'une manière assez directe les résultats classiques aux modèles quantiques. Mais il y en a d'autres: premièrement, d'un point de vue technique, il est beaucoup plus facile de calculer les crochets de Poisson entre les différentes quantités en utilisant la forme matricielle abrégée qui permet d'alléger notablement les notations. Ensuite, la formulation de la méthode à l'aide de la matrice r explique un certain nombre de relations qui apparaissent "magiquement" dans les calculs. Finalement, l'existence de la matrice r caractérise les structures de Poisson pour lesquelles les valeurs propres d'une matrice de Lax sont en involution comme on le verra bientôt.

3.3.1 Matrice r abstraite

Commençons par donner une définition d'une matrice r classique abstraite, c'est-à-dire sans référence aux systèmes intégrables (voir [14] pour plus de détails):

Définition 6. Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie et $r \in \text{End } \mathcal{G}$. L'endomorphisme r est une matrice r classique si et seulement si l'application $[\cdot, \cdot]_r$ définie par

$$[X, Y]_r = [rX, Y] + [X, rY]$$

est un crochet de Lie (c'est-à-dire vérifie l'identité de Jacobi comme cette application est évidemment bilinéaire et antisymétrique).

Ainsi, d'un point vue abstrait, la matrice r se définit dans le contexte des algèbres de Lie doubles. Remarquons en passant que l'identité de Jacobi pour le crochet $[\cdot, \cdot]_r$ mène à l'équation de Yang-Baxter classique

$$[rX, rY] - r([X, Y]_r) = 0$$

et/ou l'équation de Yang-Baxter modifiée

$$[rX, rY] - r([X, Y]_r) = -[X, Y]$$

mais, malgré son importance, nous n'allons pas en parler ici.

Une matrice r de la définition 6 permet d'introduire un crochet de Poisson naturel dans l'algèbre des observables simplement comme le crochet de Lie-Poisson-Berezin-Kirillov-Kostant¹ correspondant: pour $f, g \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ et $\forall L \in \mathcal{G}^*$

$$\{f, g\}(L) \equiv L([df(L), dg(L)]) \quad (3.6)$$

Pour faire le contact avec la notation plus habituelle de la matrice r nous devons d'abord remarquer que le crochet (3.6) peut être étendu aux applications linéaires arbitraires car il préserve la linéarité. Plus précisément, pour $A \in \text{Hom}(\mathcal{G}^*, V)$ et $B \in \text{Hom}(\mathcal{G}^*, W)$ nous pouvons définir $\{A \otimes B\} \in \text{Hom}(\mathcal{G}^*, V \otimes W)$. Dans le cas particulier de $V = W = \mathcal{G}^*$ et $A = B = I_{\mathcal{G}}$ nous pouvons définir

$$\{L_1, L_2\} \equiv \{L \otimes 1, 1 \otimes L\} = \{I \otimes I\}(L)$$

En d'autres mots, $\{L_1, L_2\}$ contient tous les crochets de Poisson des différents éléments de L :

$$\{L_1, L_2\}_{ij,kl} = \{L_1 \otimes L_2\}_{ij,kl} = \{L_{ik}, L_{jl}\}$$

1. Cette définition a été donnée par Lie mais est restée pratiquement inconnue jusqu'à sa redécouverte par Berezin d'un côté et Kirillov et Kostant de l'autre bien plus tard

où la convention utilisée pour les indices est la même que pour le produit tensoriel habituel:

$$(A \otimes B)_{ij,kl} = A_{ik}B_{jl}$$

La matrice r (linéaire) est habituellement introduite dans la théorie des systèmes intégrables par la formule

$$\{L_1 \otimes L_2\} = [r, L_1 + L_2]$$

où $r \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$. Il est facile de voir que cette relation s'obtient à partir de la définition 6 dans le cas particulier où les deux conditions supplémentaires suivantes sont vérifiées:

- (a) Il existe une forme bilinéaire invariante non dégénérée sur \mathcal{G}
- (b) La fonction r est antisymétrique

La première condition implique que l'on peut identifier \mathcal{G} et \mathcal{G}^* ce que l'on doit pouvoir faire car pour nous $r \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^*$. Remarquons aussi que quand ces deux conditions sont satisfaites, l'algèbre de Lie double $(\mathcal{G}, [], []_r)$ devient une bialgèbre de Lie et l'on rejoint la formulation de Drinfeld [16].

3.3.2 La matrice r et les systèmes intégrables

Nous allons maintenant voir que l'on peut associer une matrice r , au moins localement, à n'importe quel système intégrable classique. Pour cela revenons aux paires de Lax: comme on l'a vu ci-dessus, les valeurs propres de la matrice L commutent. Mais le crochet de Poisson n'apparaît pas pour autant explicitement dans la description basée sur les paires de Lax. Néanmoins on connaît sa forme générale grâce au théorème suivant ([15]):

Théorème 4. *Les valeurs propres d'une matrice de Lax L sont en involution si et seulement s'il existe une fonction r telle que*

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2] \quad (3.7)$$

Démonstration. Supposons que la matrice L puisse être diagonalisée comme

$$L = P \Lambda P^{-1}$$

Alors les valeurs propres de L sont les éléments diagonaux de Λ : $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Supposons d'abord qu'ils commutent entre eux: $\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0$. Alors dans le développement de $\{L \otimes L\}$ le terme $\{\Lambda \otimes \Lambda\}$ disparaît. Il nous reste 4 termes avec $\{P \otimes P\}$ et 4 termes avec $\{\Lambda \otimes P\}$ ou $\{P \otimes \Lambda\}$. Introduisons les notations:

$$\begin{cases} k_{12} &= \{P_1, P_2\} P_1^{-1} P_2^{-1} \\ q_{12} &= P_2 \{P_1, \Lambda_2\} P_1^{-1} P_2^{-1} \end{cases}$$

Alors les 4 premiers termes s'écrivent comme (vérification immédiate)

$$[[k_{12}, L_2], L_1] = [[k_{12}, L_1], L_2]$$

Ou, aussi, vu que $k_{21} = -k_{12}$

$$\dots = \frac{1}{2} [[k_{12}, L_2], L_1] - \frac{1}{2} [[k_{21}, L_1], L_2]$$

D'une manière similaire, les 4 termes non nuls restants s'écrivent comme

$$[q_{12}, L_1] - [q_{21}, L_2]$$

et on obtient donc l'expression (3.7) si l'on pose $r_{12} = q_{12} + \frac{1}{2} [k_{12}, L_2]$.

Inversement, supposons que le crochet de Poisson ait la forme (3.7). Alors il est clair que, grâce à la commutativité de la trace, $\{\text{tr } L_1, \text{tr } L_2\} = 0$ et, par calcul direct, $\text{tr } L_1^n$ et $\text{tr } L_2^m$ commutent encore pour tous les n et m ce qui implique que (en fait, est équivalent à) les valeurs propres de L sont aussi en involution. \square

Bien sûr, la fonction r de l'énoncé est effectivement une matrice r selon la définition précédente modulo l'identification de \mathcal{G} et \mathcal{G}^* . Encore une fois, la matrice r "historique", telle qu'elle est apparue dans la méthode du problème inverse classique, à savoir la matrice r de

$$\{L_1 \otimes L_2\} = [r_{12}, L_1 + L_2]$$

n'est qu'un cas particulier correspondant à une matrice r antisymétrique constante. Un autre exemple d'une matrice r bien connue et très important en pratique car apparaissant naturellement dans beaucoup de systèmes intégrables est celui d'une *matrice r quadratique* (opposé à la matrice r linéaire de ci-dessus):

$$\{L_1 \otimes L_2\} = \left[r_{12}^{\text{quad}}, L_1 L_2 \right] \quad (3.8)$$

Il se met encore sous la forme (3.7) en posant

$$r_{12}^{\text{lin}} = \frac{1}{2} (-L_2 r_{21}^{\text{quad}} + r_{12}^{\text{quad}} L_2)$$

ou, pour une matrice r quadratique antisymétrique

$$r_{12}^{\text{lin}} = \frac{1}{2} (L_2 r_{12}^{\text{quad}} + r_{12}^{\text{quad}} L_2)$$

Ceci explique que les cas des matrices r linéaires et quadratiques ne sont pas fondamentalement différents et que même si les calculs sont, en pratique,

souvent plus difficiles dans le cas quadratique (car une matrice r quadratique constante ne correspond pas à une matrice r linéaire constante comme on le voit ci-dessus), néanmoins les mêmes idées peuvent souvent être appliquées aux deux cas. Par exemple, on verra que l'exemple de la section (3.4.2) est très similaire aux systèmes considérés dans le chapitre suivant malgré le fait que le premier est formulé à l'aide d'une matrice r quadratique tandis que dans la suite nous utiliserons une matrice r linéaire.

Donnons un exemple trivial d'une matrice r associée à une paire de Lax pour conclure cette section. Dans le cas de l'oscillateur harmonique la matrice de Lax

$$L = \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}$$

a les valeurs propres 1 et -1 et se diagonalise à l'aide de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} \cos \phi/2 & \sin \phi/2 \\ \sin \phi/2 & -\cos \phi/2 \end{pmatrix} = p^{-1}$$

Donc $\{P_1, P_2\} = 0$ et $r_{12} = q_{12}$ ou, après un calcul facile,

$$r_{12} = \frac{\omega}{2\rho^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes L$$

et l'on peut vérifier que le crochet de Poisson a effectivement la forme (3.7). Bien sûr, dans un cas aussi simple on ne gagne pas grand chose à écrire le crochet de Poisson sous la forme r -matricielle – les vrais avantages de cette approche n'apparaîtront clairement que dans les exemples non triviaux de la section 3.4.2 et surtout tout au long du chapitre 4.

3.4 Séparation des variables

Nous allons parler ici de la séparation des variables en mécanique classique qui sera un des ingrédients principaux de notre construction du modèle algébrique de la jacobienne affine plus tard.

3.4.1 Définition

Les variables séparées s'utilisent en mécanique classique pour résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi. Rappelons que l'idée de cette méthode est de trouver la transformation canonique (c'est-à-dire préservant la forme symplectique canonique) qui ramène le hamiltonien $H(p, q)$ à la forme $K(Q)$ où (Q, P) sont les nouvelles variables. En effet, les équations du mouvement se

résolvent sans problème dans les nouvelles coordonnées et le théorème de Jacobi (voir [1]) affirme qu'une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi est suffisante pour intégrer le système en quadratures.

Il reste la partie difficile qui est de trouver une telle transformation canonique. Sa fonction génératrice S satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi qui a la forme

$$\Phi \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; q_1, \dots, q_n \right) = 0 \quad (3.9)$$

Supposons que la variable q_1 et la dérivée partielle par rapport à cette variable $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ n'entrent dans (3.9) que comme combinaison $\phi_1 \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1 \right)$. On dit alors que la variable q_1 est séparée et l'on peut alors chercher la solution de (3.9) sous la forme

$$S = S_1(q_1) + S'(q_2, \dots, q_n)$$

en supposant que l'on sache résoudre l'équation

$$\Phi' \left(\frac{\partial S'}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_n}; q_2, \dots, q_n; c_1 \right) = 0 \quad (3.10)$$

qui s'obtient à partir de (3.9) en remplaçant $\phi_1 \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1 \right)$ par une constante c_1 . Donc si l'on connaît la famille de solutions $S' = S'(q_2, \dots, q_n; c_1)$, on obtient les solutions de (3.9) sous la forme $S_1(q_1, c_1) + S'$, où S_1 est la solution d'une équation différentielle ordinaire

$$\phi_1 \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1 \right) = c_1$$

Bien sûr, pour trouver les solutions de (3.10) on peut essayer de séparer la variable q_2 en répétant cette procédure. En particulier, il est clair que si toutes les variables sont séparables, on pourra trouver la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi.

Ceci justifie la définition suivante ([17]): dans un système à N degrés de liberté complètement intégrable la séparation des variables est la construction de N couples de variables canoniques (x_i, p_i)

$$\{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

et N fonctions Φ_i telles que

$$\Phi_i(x_i, p_i, H_1, \dots, H_N) = 0$$

où H_i sont les intégrales du mouvement en involution. Remarquons que l'on ne se limite pas seulement aux changements de variables mais que la transformation canonique peut très bien agir aussi de façon non triviale sur les impulsions (ce qui est rarement le cas dans les problèmes classiques).

3.4.2 Exemple générique

Nous allons considérer ici l'exemple de la chaîne magnétique $SL(N)$ classique – le même que Sklyanin a utilisé pour présenter ses résultats dans [17]. Au-delà de ce modèle particulier, cet exemple est générique pour bien d'autres modèles associés à une matrice r $SL(N)$ -invariante (par exemple, la même construction s'applique à la chaîne de Toda [19]). On ne va donc pas rentrer dans les détails de ce modèle particulier mais juste illustrer la démarche générale (on pourra toujours se référer à l'article de Sklyanin qui contient toutes les étapes de la construction).

Remarquons aussi que cette méthode se généralise aussi au cas quantique et est en fait la base de l'Ansatz de Bethe fonctionnel [31] qui, dans les mots de Sklyanin, peut être décrit par la "remarque obscure" suivante: il suffit de prendre un polynôme $B(u)$ (où u est le paramètre spectral) dont les coefficients commutent entre eux:

$$\forall u, v \quad \{B(u), B(v)\} = 0$$

Alors les racines de ce polynôme sont les coordonnées séparées (et les impulsions correspondantes s'obtiennent à partir d'eux).

Passons maintenant à notre exemple: on considère un modèle décrit en termes de variables $S_{\alpha\beta}^{(m)}$ où $\alpha, \beta = 1, \dots, N$ et $m = 1, \dots, M$ et $\sum_{\alpha} S_{\alpha\alpha}^{(m)} = 0$. Le crochet de Poisson est donné par

$$\left\{ S_{\alpha_1\beta_1}^{(m_1)}, S_{\alpha_2\beta_2}^{(m_2)} \right\} = \delta_{m_1 m_2} \left(S_{\alpha_1\beta_2}^{(m_1)} - S_{\alpha_2\beta_1}^{(m_2)} \right)$$

Le centre de l'algèbre de Poisson est engendré par les valeurs propres $l_{\alpha}^{(m)}$ des matrices $S^{(m)}$ que l'on supposera être fixées ce qui nous définit une variété de dimension $MN(N-1)$ sur laquelle, dans le cas générique, le crochet de Poisson est non dégénéré.

Nous pouvons former la matrice $N \times N$ suivante (la matrice de monodromie):

$$T(u) = Z(u - \delta_M + S^{(M)}) \dots (u - \delta_1 + S^{(1)})$$

où Z est une certaine matrice inversible avec N valeurs propres distinctes et δ_i sont des constantes numériques.

Il est facile de voir que le crochet de Poisson de $T(u)$ s'écrit sous une forme r -matricielle avec la matrice r la plus simple possible:

$$\{T_1(u), T_2(v)\} = \frac{1}{u-v} [P, T_1(u)T_2(v)] \quad (3.11)$$

où P est l'opérateur de permutation dans $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$.

Ensuite on remarque que les polynômes symétriques en valeurs propres de $T(u)$

$$t_k(u) = \text{tr } \wedge^k T(u)$$

commutent entre eux et en comptant le nombre de leurs coefficients on trouve qu'il est égal à $\frac{1}{2}MN(N-1)$, c'est-à-dire la moitié de la dimension de l'espace des phases ou exactement le nombre de degrés de liberté du système ce qui prouve qu'il est complètement intégrable.

Ce qui était une conjecture dans l'article de Sklyanin devient ici la proposition suivante:

Proposition 5. *Il existe un polynôme B et une fraction rationnelle A sur $GL(N)$ tels que les variables (x_i, P_j) définies par*

$$B(T(x_i)) = 0, \quad P_i = A(T(x_i))$$

vérifient les relations suivantes:

$$\{x_i, x_j\} = \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{P_i, x_j\} = \delta_{ij}P_i \quad (3.12)$$

et, de plus,

$$\det (P_i - T(x_i)) = 0 \quad (3.13)$$

Ces variables sont donc presque les variables séparées: pour trouver ces dernières il suffit de définir p_i par $P_i = \exp p_i$ et alors (x_i, p_i) sont canoniquement conjugués.

Nous verrons la preuve de cette conjecture plus tard (quoique dans un cas légèrement différent), pour l'instant nous allons juste donner des exemples.

Commençons par le cas $N = 2$ qui a servi de base pour la construction générale et qui explique aussi les notations utilisées. Nous pouvons écrire la matrice $T(u)$ sous la forme suivante:

$$T(u) = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ c(u) & d(u) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Le choix des notations n'est pas dû au hasard: si nous définissons $B(u) = b(u)$ et $A(u) = a(u)$ et x_i et P_i comme ci-dessus (en supposant que $B(u)$ n'a pas de racines multiples), la matrice $T(u)$ devient triangulaire pour $u = x_i$ et donc l'élément diagonal P_i est une valeur propre et vérifie donc (3.13) qui dans ce cas prend la forme

$$P_i^2 - \text{tr } T(x_i)P_i + \det T(x_i) = 0$$

(remarquons que cette équation définit une courbe spectrale hyperelliptique).

Pour démontrer que les variables sont réellement séparées il nous faut aussi calculer leurs crochets de Poisson. Commençons par utiliser la formule (3.11) pour obtenir

$$\begin{aligned}\{A(u), A(v)\} &= 0 \\ \{B(u), B(v)\} &= 0 \\ \{A(u), B(v)\} &= \frac{A(u)B(v) - B(u)A(v)}{u - v}\end{aligned}$$

La commutativité de $B(u)$ entraîne la commutativité de x_i . Pour calculer $\{P_i, x_j\}$, on utilise la définition implicite de x_i à partir de $B(x_i) = 0$: pour toute fonction F on a

$$0 = \{F, B(x_i)\} = \{F, B(u)\}|_{u=x_i} + B'(x_i)\{F, x_i\}$$

et donc

$$\{F, x_i\} = -\frac{\{F, B(u)\}|_{u=x_i}}{B'(x_i)}$$

De la même manière, on a

$$\{P_i, F\} = \{A(x_i), F\} = \{A(u), F\}|_{u=x_i} + A'(x_i)\{x_i, F\}$$

Finalement

$$\{P_i, x_j\} = \{A(u), x_j\}|_{u=x_i} = -\frac{\{A(u), B(v)\}|_{u=x_i, v=x_j}}{B'(x_j)}$$

et en utilisant l'expression ci-dessus pour le crochet de A et B et en appliquant la règle de l'Hôpital on trouve $\{P_i, x_j\} = \delta_{ij}P_i$. Le crochet de P_i et P_j se calcule de la même façon mais ceci ne sera pas fait ici puisque l'on fera ce calcul pour N arbitraire plus tard.

Au lieu de présenter ici la construction de Sklyanin pour $N = 3$ (qui fait apparaître les fonctions B et A assez mystérieusement et n'explique pas vraiment pourquoi les variables séparées prennent une telle forme – ce qui est aussi une reproche que l'on peut faire à sa généralisation à N quelconque dans [23]) comme le cas $N = 3$ est déjà complètement générique, nous donnerons le résultat de notre construction pour N quelconque directement. Pour cela commençons par écrire la matrice $T(u)$ sous une forme similaire à (3.14):

$$T(u) = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ c(u) & d(u) \end{pmatrix}$$

où $b(u)$ est maintenant un vecteur-ligne de taille $N-1$ et $d(u)$ est une matrice $(N-1) \times (N-1)$.

Définissons le polynôme

$$B(u) = \det \begin{vmatrix} b(u) \\ b(u)d(u) \\ \dots \\ b(u)d^{N-2}(u) \end{vmatrix}$$

et la fraction rationnelle

$$A(u) = - \frac{\det \begin{vmatrix} b(u) \\ b(u)d(u) \\ \dots \\ b(u)d^{N-3}(u) \\ \xi d(u) \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} b(u) \\ b(u)d(u) \\ \dots \\ b(u)d^{N-3}(u) \\ \xi \end{vmatrix}}$$

où ξ est un vecteur-ligne de taille $N - 1$ tel que le dénominateur de $A(u)$ ne s'annule pas. Nous affirmons que ces deux fonctions définissent les variables séparées exactement comme ci-dessus. Nous allons voir dans la suite pourquoi un tel vecteur existe et, surtout, pourquoi les variables (x_i, P_i) définies avec ces expressions pour A et B sont canoniquement conjuguées. Pour l'instant on peut se contenter de remarquer que ces expressions se réduisent à la construction pour $N = 2$ car $\text{tr} T(u) = a(u) + d(u)$ commute avec $b(u)$ et donc $-d(u)$ a les mêmes relations de commutation que $a(u)$ dans le cas $N = 2$.

3.5 Méthodes algèbre-géométriques

Dans cette section nous allons définir une surface de Riemann associée à un système intégrable possédant une paire de Lax avec un paramètre spectral et nous montrerons comment l'évolution temporelle du système se réduit à un flot linéaire sur la Jacobienne de cette surface.

3.5.1 La courbe spectrale

On considère ici une paire de Lax avec un paramètre spectral (pour lequel on utilisera la lettre z – qui dénote d'habitude la coordonnée complexe – au

lieu de λ ci-dessus), c'est-à-dire une paire de matrices $L(z)$ et $M(z)$ vérifiant l'équation de Lax

$$\dot{L}(z) = [M(z), L(z)] \quad (3.15)$$

Alors on peut considérer l'équation

$$R(w, z) \equiv \det(L(z) + w) = 0 \quad (3.16)$$

qui définit une courbe algébrique Σ dans \mathbb{C}^2 que l'on supposera être lisse. Les points de cette courbe sont (w, z) tels que $-w$ est une valeur propre de la matrice $L(z)$ (le signe moins ici s'explique par notre décision de préférer avoir le signe plus dans (3.16)). Comme on a vu que l'équation de Lax est isospectrale, c'est-à-dire que les valeurs propres de L ne dépendent pas du temps, la courbe (3.16) que l'on appelle la *courbe spectrale* n'en dépend pas non plus. Si les matrices L et M sont d'ordre N , l'équation de Σ s'écrit plus explicitement sous la forme

$$R(w, z) = w^N + t_1(z)w^{N-1} + \dots + t_N(z) = 0$$

où les coefficients $t_k(z)$ sont les polynômes en $L_{ij}(z)$ et, bien sûr, eux non plus ne dépendent pas du temps. Sous cette forme on voit que la courbe en question est un revêtement à N couches de la sphère de Riemann. Ses autres propriétés — notamment le genre g et/ou le nombre de points de branchements b — dépendent de la forme exacte de la matrice L mais nous pouvons déjà dire que la formule de Riemann-Hurwitz (voir [4] par exemple) donne

$$g = N(g_{\text{sphère}} - 1) + \frac{1}{2}b + 1 = \frac{1}{2}b - N + 1 \quad (3.17)$$

où b est le nombre de points de branchements.

Grâce à la définition ci-dessus nous avons donc pour tout $(w, z) \in \Sigma$ un vecteur propre $\psi(w, z)$ de $L(z)$ pour la valeur propre $-w$:

$$(L(z) + w)\psi(w, z) = 0 \quad (3.18)$$

On peut montrer (voir chapitre 5 de [2]) que pour une matrice de Lax L générique, les espaces propres sont encore unidimensionnels même aux points de branchements ce qui nous permet de définir $\psi(P)$ sans ambiguïté pour tout $P \equiv (w, z) \in \Sigma$. Dans la suite nous allons nous intéresser aux propriétés analytiques de $\psi(P)$ comme fonction sur Σ .

Pour commencer, remarquons que les composantes de $\psi(w, z)$ sont des fractions rationnelles de coefficients de $L(z)$ et sont donc des fonctions méromorphes sur la courbe Σ . De plus, si l'on considère le vecteur propre normalisé par la condition $\psi_1^0 = 1$, c'est-à-dire

$$\psi^0 \equiv \psi_1^{-1}\psi$$

ses composantes seront encore des fonctions méromorphes.

3.5.2 Le diviseur dynamique

Dans cette section nous allons introduire un diviseur spécial $D(t)$ qui s'appelle le *diviseur dynamique* car il contient toutes les variables dynamiques du système: après le choix de la courbe spectrale (qui revient à fixer les valeurs des intégrales du mouvement), toutes les autres quantités s'y retrouvent. De plus, ce diviseur évolue linéairement dans le temps et donc toutes les variables dynamiques s'en déduisent à l'aide de l'inversion de Jacobi.

Le diviseur $D(t)$ correspond aux zéros du vecteur propre normalisé ψ^0 qui sont dynamiques, c'est-à-dire dépendent du temps, car il en a aussi d'autres, qui n'ont pas de signification physique et apparaissent en pratique comme des conséquences des choix de jauge sur la paire de Lax. Pour justifier ces explications un peu vagues, nous devons préciser la forme des matrices L et M : il est clair que l'on peut diagonaliser la matrice $L(z_0)$ en un point z_0 en la conjuguant par une matrice constante sans changer quoi que ce soit. Nous supposons donc que ∞ n'est pas un point de branchement et que $L(\infty)$ est diagonale. Dans ces conditions on a les deux théorèmes suivants ([2]):

Théorème 6. *Le vecteur propre normalisé $\psi^0(P)$ a $g + N - 1$ pôles.*

Démonstration. Considérons la fonction suivante:

$$W(z) = \det \begin{pmatrix} \psi_1^0(P_1) & \psi_1^0(P_2) & \cdots & \psi_1^0(P_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_N^0(P_1) & \psi_N^0(P_2) & \cdots & \psi_N^0(P_N) \end{pmatrix}^2$$

où $P_i = (w_i, z)$ sont les N points au-dessus le point z . La fonction $W(z)$ est bien définie car elle ne dépend pas de l'ordre exact de P_i puisque le carré du déterminant reste invariant si on les échange.

Elle a aussi un pôle double partout où ψ^0 a un pôle simple et donc il suffit de compter la multiplicité totale de ses pôles et la diviser par deux pour trouver le nombre de pôles de ψ^0 . Et comme W est une fonction méromorphe, le nombre de ses pôles est égal au nombre de ses zéros.

Regardons donc quand $W(z)$ peut s'annuler: comme il n'est pas possible que le déterminant s'annule quand tous les w_i sont distincts (car les vecteurs propres leur correspondants seraient alors linéairement dépendants) et comme ψ^0 lui-même ne s'annule jamais (vu que $\psi^0 = 1$) la seule possibilité est que les zéros de $W(z)$ soient aux points de branchement de la courbe.

Plaçons-nous donc à un point de branchement P_0 . Supposons d'abord que nous sommes dans le cas général: alors l'ordre du point de branchement est 2 et on peut donc prendre w pour paramètre local. Ainsi la projection $u : \Sigma \mapsto \mathbb{C}$ s'écrit, localement, comme

$$z(P) = z(P_0) + Kw^2 + \mathcal{O}(w^3)$$

et donc le déterminant (qui s'annule en P_0) a un zéro d'ordre simple en w et son carré un zéro d'ordre 2 ce qui revient à dire, grâce à la relation ci-dessus, que $W(z)$ a un zéro simple en z .

Un raisonnement similaire peut aussi être fait² pour les points de branchement d'ordres supérieurs: supposons que P_0 soit un point de branchement d'ordre k . Vu que l'on passe d'une branche de la courbe à l'autre par la multiplication de w par une racine $(k+1)$ -ième de l'unité, on peut se convaincre que le déterminant s'annule alors à l'ordre k en w et $W(z)$ – à l'ordre $k-1$.

Il suffit maintenant d'utiliser la formule de Riemann-Hurwitz (3.17) pour trouver le résultat. \square

Nous avons donc $g+N-1$ pôles en tout mais seulement g entre eux sont dynamiques:

Théorème 7. *Soient Q_1, \dots, Q_N les N points (distincts par hypothèse) au dessus de $z = \infty$. Alors pour $k = 2, \dots, N$ la k -ième composante $\psi_k^0(P)$ du vecteur propre normalisé a un pôle simple en Q_k .*

Démonstration. Les vecteurs propres de L sont proportionnels aux éléments de la base e_i en Q_i car $L(\infty)$ est diagonale par hypothèse. Donc quand $z \mapsto \infty$ les espaces propres de $L(z)$ sont engendrés par les vecteurs $e_k(z) = e_k + \mathcal{O}(1/z)$. Pour obtenir un vecteur propre normalisé on doit diviser $e_k(z)$ par sa première composante $e_k^1(z) = \delta_{k1} + \mathcal{O}(1/z)$ ce qui résulte en $\mathcal{O}(z)$ dans $\psi_k^0(P)$ quand $P \mapsto Q_k$. \square

Nous voyons que $N-1$ pôles de ψ^0 sont la conséquence directe du choix de jauge qui consiste à diagonaliser $L(\infty)$: ils ne dépendent donc pas du temps ni ne peuvent contenir d'information dynamique. A cause de cela, on est amené à définir le diviseur dynamique $D(t)$ comme la somme de tous les pôles de $\psi^0(P)$ restants.

Ce diviseur suffit effectivement pour décrire complètement la dynamique du système car si l'on se donne $D(t)$ et les points Q_i on peut rétablir la fonction ψ^0 uniquement à partir de là (par le théorème de Riemann-Roch). Et ensuite on peut reconstruire sans ambiguïté la matrice $L(z)$ à partir de ψ^0 et la condition de diagonalisation à l'infini ce qui prouve bien que toutes les informations dynamiques sont encodées dans le diviseur $D(t)$. Dans la section suivante on s'intéressera à l'évolution dans le temps du diviseur $D(t)$ pour démontrer le deuxième résultat énoncé ci-dessus, à savoir que $\dot{D}(t)$ est tout simplement une constante.

2. Merci à O. Babelon pour me l'avoir indiqué

3.5.3 Les fonctions de Baker-Akhiezer

Ce sont des fonctions singulières sur la surface de Riemann qui apparaissent naturellement dans la théorie des systèmes intégrables. Pour voir comment, nous devons parler brièvement de la construction de Zakharov-Shabat déjà mentionnée dans la section 3.1. C'est une méthode qui permet de construire des paires de Lax avec paramètre spectral à partir des propriétés analytiques des fonctions $L(z)$ et $M(z)$.

Plus précisément, soit $\{z_k\}$ l'ensemble des pôles de $L(z)$ et $M(z)$. On cherche à écrire L et M sous la forme

$$\begin{aligned} L(z) &= L_0 + \sum_k L_k(z) \\ M(z) &= M_0 + \sum_k M_k(z) \end{aligned}$$

où L_0 et M_0 sont des constantes et $L_k(z)$ et $M_k(z)$ sont les parties principales (ou polaires) de L et M , respectivement, autour de z_k :

$$f_k(z) = \sum_{l=1}^{n_k} \frac{f_{kl}}{(z - z_k)^l}$$

On utilisera aussi la notation

$$(f(z))_- \equiv f_k(z) \quad \text{au voisinage de } z_k$$

pour la partie principale de la fonction f . Alors on peut montrer (voir [2]) que la matrice M en général aura une telle forme avec, en plus,

$$M_k = (P^{(k)}(L, z))_- \quad (3.19)$$

où $P^{(k)}$ sont des polynômes en L et des fractions rationnelles en z .

Intéressons-nous maintenant aux propriétés analytiques des composantes du vecteur propre ψ , par exemple à $f(w, z) \equiv \psi_1(w, z)$. En utilisant l'équation de Lax (3.15) et la définition de ψ (3.18) on voit immédiatement que

$$(L(w, z) + w)(\dot{\psi} - M\psi) = 0$$

et comme l'espace propre est de dimension 1 (voir ci-dessus) on a

$$\dot{\psi} = (M + c)\psi \quad c = \text{const}$$

Nous supposerons ici que nous avons tout simplement

$$\dot{f} = (M\psi)_1 \quad (3.20)$$

car cela ne change rien dans nos considérations. En effet, la seule chose importante est qu'il n'y a que deux possibilités pour les pôles de $\dot{f}(w, z)$: soit c'est un pôle au-dessus d'un point z_k où $M(z)$ a un pôle, soit c'est un pôle de ψ .

Dans le premier cas, on se place à un point (w, z_k) où l'on peut utiliser (3.19) pour écrire

$$\dot{f} = ((P^{(k)}(L, z)_- + \text{rég.}) \psi)_1 = (P^{(k)}(w, z)_- + \text{rég.}) f$$

(où "rég." dénote les termes réguliers au voisinage de z_k) car pour tout polynôme P on a $P(L)\psi(w, z) = P(w)\psi(w, z)$. Cela montre que la fonction \dot{f}/f a des pôles aux points (w, z) où $P^{(k)}(w, z)_- \neq 0$. Comme $P^{(k)}$ ne dépend pas du temps, nous voyons que f a une singularité essentielle en ces points de la forme

$$f(t, w, z) = e^{tP^{(k)}(w, z)_-} \times \text{rég.}$$

Regardons maintenant ce qui se passe aux pôles de ψ . D'abord, à l'infini $M(z)$ s'annule et donc on ne peut rien dire d'intéressant sur f . Soit, donc, u un pôle fini, c'est-à-dire un point appartenant au diviseur dynamique $D(t)$. Alors par l'analyse locale du comportement de ψ dans son voisinage on trouve que

$$\frac{d \log f}{dt} = \frac{d \log z - u}{dt} + \text{rég.}$$

d'où l'on voit que $f(u) = 0$, donc le diviseur dynamique est le diviseur des zéros de $f(t)$.

Tout ceci montre justement que f est une fonction de Baker-Akhiezer en accord avec la définition générale suivante ([2]):

Définition 7. Soient P_1, \dots, P_g des points sur une surface de Riemann Σ de genre g et $z_k(P)$ les paramètres locaux tels que $z_k(P_k) = 0$. Si l'on se donne les parties principales $S_k(P) = \sum_{l < 0} S_{kl} z_k^l$ autour de ces points et un diviseur D sur Σ , la fonction de Baker-Akhiezer Φ_{BA} qui leur est associée est une fonction qui

- est méromorphe sur Σ à l'extérieur des points P_k
- telle que $(\Phi_{BA}) + D \geq 0$
- $\Phi_{BA}(P)e^{-S_k(w_k(P))}$ est analytique au voisinage de P_k

Le résultat fondamental sur les fonctions de Baker-Akhiezer est la formule qui les exprime en fonction des fonctions thêta – et qui prouve aussi leur existence. Pour obtenir cette formule nous commençons par définir la différentielle abélienne de second ordre $\Omega^{(S)}$. C'est une différentielle normalisée (avec les périodes α nuls) et les parties polaires aux points P_k données

par dS_k . Soit $U^{(S)}$ le vecteur des périodes β de $\Omega^{(S)}$:

$$U_k^{(S)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_k} \Omega^{(S)}$$

Soit P_0 un point de base quelconque, alors l'expression suivante définit une fonction de Baker-Akhiezer associée aux données ci-dessus:

$$\Phi_{BA}(P) = \text{const} \times e^{\int_{P_0}^P \Omega^{(S)}} \frac{\theta(\mathcal{A}(P) + U^{(S)} - \xi)}{\theta(\mathcal{A}(P) - \xi)} \quad (3.21)$$

où \mathcal{A} est la transformation d'Abel de point de base P_0 définie dans la section 2.3.

Pour prouver ce résultat, il suffit de vérifier que cette fonction est bien définie (c'est-à-dire ne dépend pas du chemin d'intégration) et possède les propriétés analytiques requises ce qui se fait sans difficultés. De plus, si l'on forme le rapport de deux fonctions de Baker-Akhiezer, on obtient une fonction méromorphe avec $\deg D$ pôles. La dimension de l'espace de ces fonctions est $\deg D - g + 1$ selon le théorème de Riemann-Roch et donc, en particulier, si $\deg D = g$ la fonction de Baker-Akhiezer est unique à une constante multiplicative près.

Revenons maintenant à notre fonction f : on avait déjà déterminé ses zéros. Pour trouver le diviseur complet de $f(t)$ il suffit de remarquer que ses pôles ne dépendent pas du temps car si c'était le cas ils auraient les ordres différents à gauche et à droite de l'équation (3.20). Donc, quitte à fixer la valeur $f(0) = 1$, nous avons $(f) = D(t) - D(0)$. Cela démontre que f est l'unique fonction possédant les parties principales données par $P^{(k)}$ correspondant au diviseur $D(0)$ ce qui nous donne le droit de l'écrire sous la forme (3.21):

$$f(t, P) = e^{\int_{P_0}^P t\Omega^{(M)}} \frac{\theta(\mathcal{A}(P) + tU^{(M)} - \xi_{D(0)})}{\theta(\mathcal{A}(P) - \xi_{D(0)})}$$

avec t en numérateur nécessaire pour compenser la monodromie de l'exponentielle.

Alors on voit que le diviseur de zéros de $f(t, P)$ doit satisfaire à

$$\mathcal{A}(D(t)) - \mathcal{A}(D_0) = -tU^{(M)} = -\frac{1}{2i\pi} \oint_b \Omega^{(M)} t$$

et donc, comme énoncé, évolue linéairement avec le temps.

Chapitre 4

Les jacobiennes des courbes spectrales

4.1 Description générale

Ce chapitre constitue la partie la plus importante de cette thèse. Ici nous allons mettre ensemble tout ce dont on a parlé dans les chapitres précédents et présenterons les résultats nouveaux que nous avons obtenus en utilisant les approches discutées auparavant.

Mais avant de le faire, rappelons la motivation derrière l'étude des courbes spectrales que l'on va entreprendre. Comme on l'a déjà vu dans la section 3.5, il existe une relation intime entre les systèmes intégrables et la variété jacobienne de sa courbe spectrale: en bref, si l'espace des phases du système \mathcal{M} est plongé dans \mathbb{R}^N , on peut aussi considérer sa complexification $\mathcal{M}^{\mathbb{C}}$ qui sera alors une partie de \mathbb{C}^N . L'intérêt de complexifier l'espace des phases est que maintenant on a une description particulièrement simple des surfaces de niveau des intégrales de mouvement. Plus précisément, ces surfaces sont isomorphes à la jacobienne affine de la courbe spectrale, c'est-à-dire la variété jacobienne privée d'un certain diviseur particulier (qui est le diviseur de la fonction θ dans les cas les plus simples). De plus, on peut revenir à l'espace réel dont on était parti $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$ en prenant son intersection avec la jacobienne affine: le résultat sera un tore réel. Donc à partir de ces considérations générales, on est tenté de dire que les tores de Liouville correspondent exactement aux parties réelles des jacobiennes. Malheureusement, une simple comparaison de dimensions dans des exemples particuliers simples montre que cela ne peut être le cas. Néanmoins, ceci est presque vrai et une de nos premières tâches sera de réduire proprement le modèle pour se ramener à une telle situation.

Ensuite nous allons nous intéresser à certaines cohomologies singulières des complexes de de Rham à coefficients dans l'algèbre des observables. Pour comprendre comment on en est arrivé à considérer ces groupes cohomologiques et pourquoi ils sont importants, il faut penser aux modèles intégrables quantiques et aux résultats de [19] et [18] qui ont servi de points de départ aux articles [21] et [27] qui forment la base de cette thèse.

Finalement, quelques mots sur l'organisation de ce chapitre: même si, historiquement, le cas des modèles à symétrie $\widehat{sl}(2)$ fut traité avant le cas général de $\widehat{sl}(N)$ pour N quelconque, nous allons développer les deux cas parallèlement, c'est-à-dire nous considérerons le cas général tout de suite mais reviendrons sur les particularités du cas hyperelliptique quand nous les rencontrerons et nous donnerons aussi les exemples principalement pour $N = 2$. Nous espérons que la présentation de résultats pour N quelconque sera ainsi plus compréhensible sans que nous ayons à tout refaire deux fois. On pourra aussi dire que notre exposé ici est la synthèse des travaux [21], [22] et [27] où l'on pourra retrouver tous les détails techniques.

4.2 La courbe spectrale

L'objet de base de notre étude est une surface de Riemann Σ que l'on définira dans cette section. On a déjà vu comment cette surface apparaissait dans le contexte des systèmes intégrables dans la section 3.5.1, mais ici l'on va adopter une approche plus abstraite car, en fait, la situation où l'on se place est complètement générique et est pratiquement la même quel que soit le système intégrable (ou, en d'autres mots, la paire de Lax) initial.

4.2.1 Définitions

La courbe Σ est définie par l'équation

$$r(w, z) \equiv w^N + t_1(z)w^{N-1} + \dots + t_N(z) = 0 \quad (4.1)$$

avec $t_k(z)$ étant des polynômes en z du degré inférieur ou égal à $kn - 1$ et le degré de $t_N(z)$ exactement égal à $Nn - 1$. Dans le cas $N = 2$ et après un changement de variables évident, on retrouve la forme canonique de l'équation d'une courbe hyperelliptique

$$y^2 = f(z) \quad (4.2)$$

où $f = \frac{1}{4}t_1^2 - t_2$ est aussi un polynôme en z . Ci-dessous nous utiliserons le fait que son degré est toujours impair:

$$\deg f(z) = \max(2 \deg t_1, \deg t_2) = \deg t_2 = 2n - 1$$

Pour vraiment définir une surface de Riemann compacte, nous avons bien sûr besoin d'ajouter les points à l'infini. Pour le faire on définit une deuxième carte sur Σ en récrivant l'équation (4.1) dans les variables

$$\begin{cases} z' &= \frac{1}{z} \\ w' &= \frac{w}{z^N} \end{cases}$$

Par exemple, dans le cas hyperelliptique si l'on factorise f comme

$$f(z) = \prod_{k=1}^{2n-1} (z - z_k)$$

on aura

$$y'^2 = z' \prod_{k=1}^{2n-1} (1 - z_k z') \quad (4.3)$$

Pour N quelconque on a encore l'expression de la forme

$$w'^N = z' \times (\text{polynôme en } z' \text{ et } w') \quad (4.4)$$

ce qui montre que dans les deux cas il n'y a qu'un seul point à l'infini comme $z' = 0 \rightarrow w' = 0$. On notera ce point ($z' = 0, w' = 0$) simplement comme ∞ et l'on peut aussi remarquer que c'est le seul point singulier de Σ dans le cas général.

Les deux équations (4.1) et (4.3) ou (4.4) raccordées sur les parties ouvertes $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ de la sphère de Riemann définissent une courbe à N feuilles au-dessus de la sphère. Les points de branchements sont les points où $\partial_w r(w, z) = 0$. Parmi eux il y aura toujours le point ∞ et leur nombre total est $N(N-1)n$. La situation est particulièrement simple dans le cas hyperelliptique car les points de branchements à la distance finie sont alors simplement les $2n-1$ zéros du polynôme $f(z)$.

En utilisant la formule de Riemann-Hurwitz (3.17) on trouve immédiatement le genre de Σ :

$$g = \frac{1}{2}b + 1 - N = \frac{1}{2}(N-1)(Nn-2) \quad (4.5)$$

Le genre, c'est aussi le nombre de différentielles abéliennes du premier type, qui est donc connu. Mais on peut même les écrire explicitement ici comme

$$\sigma_i = \frac{w^{N-m-1} z^k}{\partial_w r(w, z)} dz \quad i = 1, \dots, g \quad (4.6)$$

avec

$$\begin{cases} m &= \max \left\{ l \mid i > \frac{1}{2}(ln-2)(l-1) \right\} \\ k &= i - \frac{1}{2}(mn-2)(m-1) - 1 \end{cases}$$

En d'autres termes, les termes $w^{N-m-1}z^k$ dans le numérateur d'une différentielle abélienne doivent satisfaire à

$$\begin{cases} 1 \leq m \leq N-1 \\ 0 \leq k \leq mn-2 \end{cases} \quad (4.7)$$

Ces conditions se trouvent en imposant le comportement régulier à l'infini. Il suffit de les relâcher pour trouver la forme des différentielle du second type: c'est la même que (4.6) mais sans restrictions sur m et k .

Nous rappelons que pour définir la fonction thêta de Riemann sur Σ il faut d'abord choisir une base homologique canonique, c'est-à-dire $2g$ cycles $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ avec les indices d'intersection données par (2.1) ce qui nous permet de définir la matrice des périodes A par

$$A_{ij} \equiv \oint_{\alpha_i} \sigma_j$$

et de l'utiliser pour définir les différentielles abéliennes suivantes:

$$\omega_i = \sum_{j=1}^g (A^{-1})_{ij} \sigma_j$$

qui sont normalisées, c'est-à-dire vérifient

$$\begin{cases} \oint_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij} \\ \oint_{\beta_i} \omega_j = B_{ij} \end{cases}$$

Alors la fonction θ est la fonction associée à la matrice symétrique et avec la partie imaginaire définie positive B (voir 2.3.3) et nous pouvons finalement définir le divisieur thêta

$$\mathcal{X} = \{\xi \mid \theta(\xi) = 0\}$$

qui est une sous-variété (peut être singulière) de \mathcal{J} de dimension $(g-1)$. La *jacobienne affine* que l'on étudiera dans la suite est, par définition, la variété non compacte $\mathcal{J} - \mathcal{X}$.

4.2.2 Les observables

Comme on l'a vu auparavant, les observables physiques du modèle sont les fonctions méromorphes sur la jacobienne avec les singularités se trouvant seulement sur \mathcal{X} ou, en d'autres termes, ce sont les fonctions holomorphes sur la jacobienne affine. On va donc s'intéresser à l'anneau de telles fonctions.

Il sera important pour la suite de pouvoir reconnaître facilement les fonctions de cette classe. Une méthode simple pour les décrire est encore d'utiliser

les fonctions thêta (y compris celles d'ordres supérieures) mais la description que l'on obtient ainsi n'est pas suffisamment explicite pour nous être utile et nous proposons donc une caractérisation alternative.

Commençons par rappeler que la transformation d'Abel est le plongement analytique de la courbe dans sa jacobienne définie par

$$A_{p_0} : \Sigma \rightarrow \mathcal{J}$$

$$p \mapsto \int_{p_0}^p \omega + \Delta(p_0)$$

où p_0 est le point de base de l'application, fixe, que l'on choisit de prendre égal à ∞ dans notre cas, ω est le vecteur composé des ω_j et Δ est la caractéristique de Riemann. On peut étendre A au produit symétrique de g copies de Σ :

$$A^\times : \Sigma^{\times g} \rightarrow \mathcal{J}$$

$$(p_1, \dots, p_g) \mapsto \sum_{k=1}^g \int_{\infty}^{p_k} \omega + \Delta(p_0)$$

Considérons maintenant un point $\xi \in \mathcal{X}$. D'un côté, le théorème de Riemann (2) nous permet de le caractériser par l'existence de $g-1$ points q_i tels que

$$\xi = \sum_{j=1}^{g-1} \int_{\infty}^{q_j} \omega + \Delta(\infty)$$

Donc si nous avons aussi

$$\xi = A(p_1, \dots, p_g)$$

alors, par le théorème d'Abel, les deux diviseurs suivants sont équivalents:

$$(p_1, \dots, p_g) \simeq (q_1, \dots, q_{g-1}, \infty) \quad (4.8)$$

Ici le cas hyperelliptique se distingue du cas général car, grâce à l'existence de l'involution hyperelliptique, on peut décrire l'image réciproque de \mathcal{X} par A^\times . Rappelons que cette involution est définie par

$$\tau : (y, z) \mapsto (-y, z)$$

c'est-à-dire consiste à échanger les deux feuilles de la surface. Il est facile de voir à partir de (4.8) que l'image réciproque de \mathcal{X} est composée de deux parties:

$$A^{\times-1}(\mathcal{X}) \equiv X = X_\infty \cup X_0 \quad (4.9)$$

où

$$X_\infty = \{(p_1, \dots, p_g) \mid \exists i \quad p_i = \infty\}$$

$$X_0 = \{(p_1, \dots, p_g) \mid \exists i \neq j \quad p_i = \tau(p_j)\}$$

Donc, quoique les variétés compactes $\Sigma^{\times g}$ et J ne soient pas isomorphes, A^\times induit un isomorphisme entre la jacobienne affine et $\Sigma^{\times g} - X$, d'où l'on peut trouver la forme des fonctions méromorphes sur J avec les pôles sur \mathcal{X} .

Nous ne disposons pas d'une telle description explicite dans le cas général mais nous pouvons pourtant décrire ces fonctions. La situation la plus simple est celle où tous les points p_i sont distincts. Alors, pour qu'il y ait une fonction avec un pôle en ξ il faut qu'il existe une fonction sur Σ avec des pôles simples en p_i ce qui est possible si et seulement si

$$\delta(p_1, \dots, p_g) \equiv \det(\omega_i(p_j)) = 0 \quad (4.10)$$

ce qui nous invite à considérer les fonctions sur $\Sigma^{\times g}$ ayant $\delta(p_i)$ au dénominateur.

Mais on réalise que l'on obtiendrait alors des pôles supplémentaires indésirables dès qu'il y a deux points (ou plus) coïncidents. La solution consiste à les compenser en prenant des fonctions de la forme

$$\frac{\tilde{\delta}(p_1, \dots, p_g)}{\delta(p_1, \dots, p_g)} \equiv \frac{\det(\tilde{\omega}(p_j))}{\delta(p_1, \dots, p_g)} \quad (4.11)$$

où les $\tilde{\omega}$ sont des différentielles du premier ou second type. Une fonction de type (4.11) est holomorphe sur la jacobienne affine par construction et, de plus, les conditions ci-dessus sont nécessaires et donc toutes ces fonctions s'obtiennent comme produit de fonctions (4.11).

4.3 Le modèle affine

Le modèle de la jacobienne affine, c'est-à-dire l'isomorphisme entre la jacobienne et un certain espace de matrices, que l'on va construire dans cette section, est le cœur de notre méthode. En effet, il est bien plus simple d'étudier les fonctions définies sur les éléments matriciels que sur $\Sigma^{\times g}$. L'idée de le faire n'est pas vraiment nouvelle car elle était déjà exploitée avec succès par Mumford en [9], mais seulement pour le cas hyperelliptique qui est bien plus simple que le cas général où le résultat final est, certes, presque le même, mais qui demande beaucoup plus d'efforts à obtenir et sa déduction pose plus de problèmes techniques en cours de route.

D'ailleurs, nous commencerons par expliquer la situation pour $N = 2$ qui est très simple et explicite. De plus, ce cas montre déjà bien la relation entre la construction de cet isomorphisme et la séparation de variables. Ensuite nous discuterons le cas général mais sans donner tous les détails que l'on pourra toujours retrouver dans [27]. Nous insisterons surtout sur les différences entre ce cas-là et le cas hyperelliptique.

4.3.1 Le cas hyperelliptique

On considère ici la matrice 2×2 suivante

$$m(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

dont les éléments matriciels sont des polynômes en z de degrés donnés par

$$\deg_z m(z) = \begin{pmatrix} n-2 & n-1 \\ n & n-1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Le polynôme caractéristique de $m(z)$ a alors la forme requise par (4.1): $\deg \operatorname{tr} m(z) \leq n-1$ et $\deg \det m(z) = 2n-1$ pourvu que les coefficients dominants de $b(z)$ et $c(z)$ ne s'annulent pas. En fait, nous allons considérer l'espace de matrice $m(z)$ dont le polynôme caractéristique est le même que l'équation définissant Σ , c'est-à-dire que l'on impose la condition

$$\xi_{m(z)}(w) = r(w, z) \quad (4.14)$$

Ecrivons explicitement les polynômes apparaissant dans $m(z)$ comme

$$\begin{cases} a(z) &= a^{(0)}z^{n-2} + a^{(1)}z^{n-3} + \dots + a^{(n-2)} \\ b(z) &= b^{(0)}z^{n-1} + b^{(1)}z^{n-2} + \dots + b^{(n-1)} \\ c(z) &= c^{(0)}z^n + c^{(1)}z^{n-1} + \dots + c^{(n)} \\ d(z) &= d^{(0)}z^{n-1} + d^{(1)}z^{n-2} + \dots + d^{(n-1)} \end{cases}$$

On fixera (pour des raisons qui deviendront claires dans la discussion du cas général) les valeurs des coefficients dominants de $b(z)$ et $c(z)$:

$$b^{(0)} = c^{(0)} = 1 \quad (4.15)$$

ce qui nous laisse $4n-2$ degrés de liberté dans la matrice $m(z)$. L'équation (4.14) écrite en composantes impose $3n-1$ conditions (après avoir fixé les valeurs de $b^{(0)}$ et $c^{(0)}$ nous n'avons que $2n-1$ équations venant de l'égalité des termes libres car celle pour le coefficient dominant devient triviale). Donc la dimension de la sous-variété \mathcal{M} de l'espace de matrices ayant la forme (4.12), (4.13) définie par (4.14) et (4.15) est $n-1$ ce qui est exactement égal à g obtenu à partir de (4.5).

Nous allons montrer que, en fait, cette sous-variété est isomorphe à la jacobienne affine de Σ . De plus, dans ce cas très particulier de $N=2$ il est possible de construire explicitement l'isomorphisme d'une façon simple: prenons une matrice $m(z)$ vérifiant (4.14) et (4.15). Factorisons $b(z)$:

$$b(z) = \prod_{k=1}^g (z - z_k) \quad (4.16)$$

et posons

$$w_k = -a(z_k) \quad (4.17)$$

(le signe moins est ici pour les mêmes raisons que celui dans les formules de la section 3.5.1). Alors $\det m(z_k)$ se réduit au terme $a(z_k)d(z_k)$ et il est clair que $(w_k, z_k) \in \Sigma$ car le point satisfait l'équation (4.1) et donc nous avons construit une application $\mathcal{M} \rightarrow \Sigma^g$.

Inversement, prenons g points $(w_k, z_k) \in \Sigma$ et définissons

$$\begin{aligned} a(z) &= -\sum_{i=1}^g w_i \prod_{j \neq i} \frac{z - z_j}{z_i - z_j} \\ b(z) &= \prod_{k=1}^g (z - z_k) \\ c(z) &= \frac{a(z)(t_1(z) - a(z)) - t_2(z)}{b(z)} \\ d(z) &= t_1(z) - a(z) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Bien sûr, on ne peut définir ainsi une application de Σ^g dans \mathcal{M} que si les fonctions ci-dessus sont vraiment des polynômes. Regardons donc quelles sont les conditions pour qu'elles n'aient pas de singularités:

- $b(z)$ est singulière si l'un des z_i est égal à ∞
- $a(z)$ est aussi singulière si $z_i = \infty$ mais également si $z_i = z_j$ mais $w_i \neq w_j$
- $c(z)$ et $d(z)$ n'ont pas d'autres pôles et l'on peut vérifier que $c(z)$ est effectivement un polynôme et non pas une fraction rationnelle

Cela revient à dire que, comme $z_i = z_j$ et $w_i \neq w_j$ implique que (z_i, w_i) est l'image de (z_j, w_j) par l'involution hyperelliptique, que cette application est définie partout sauf sur $X_\infty \cup X_0$. Comme en plus il est clair que les deux applications ci-dessus sont inverses l'une de l'autre, on a construit l'isomorphisme annoncé entre \mathcal{M} et $\mathcal{J} - \mathcal{X}$ et, qui plus est, d'une manière absolument explicite.

Avant de passer au cas général, quelques remarques sur la construction que l'on vient de faire:

1. On aurait pu faire le changement de variables $w \mapsto y$ comme au début de la section. Alors l'équation de la courbe se réduirait à (4.2) et la matrice $m(z)$ serait de trace nulle: $d(z) = -a(z)$ ce qui simplifierait même un peu plus la construction ci-dessus. On a décidé d'utiliser l'approche "brute" ici car ce changement de variables est particulier au cas hyperelliptique et empêcherait de voir sa similitude avec le cas général.

2. En particulier, grâce à l'isomorphisme ci-dessus, on a réussi à plonger $\mathcal{J} - \mathcal{X}$ dans \mathbb{C}^{4g+2} mais après la réduction des degrés de liberté à cause de $\text{tr } m(z) = 0$ on aurait même un plongement dans \mathbb{C}^{3g+1} . Les deux nombres sont de toute façon remarquables comparés à la dimension de l'espace \mathbb{C}^{3g-1} dans lequel on peut plonger n'importe quelle variété abélienne selon la théorie générale: on voit que les jacobiniennes sont très spéciales car elles peuvent être plongées dans un espace de dimension bien plus petite.
3. On n'a pas encore parlé de la structure symplectique de \mathcal{M} mais l'on peut déjà dire que les variables z_i et w_i définies par (4.16) et (4.17) sont les variables séparées que l'on avait décrites dans la section 3.4.2

4.3.2 Le crochet de Poisson

Nous avons vu que les coefficients de la matrice $m(z)$ devaient avoir une forme spécifique (4.13) et, de plus, on a dû imposer la condition (4.15) pour que l'on ait l'isomorphisme avec la jacobienne affine hyperelliptique. Dans cette section nous allons expliquer comment on arrive à ces conditions et décrire notre modèle pour N quelconque.

Le point de départ est le crochet de Poisson: nous en avons défini un sur l'espace des phases et donc nous devrions avoir aussi un crochet de Poisson matriciel. Il est naturel de considérer un crochet r -matriciel:

$$\{m(z_1) \otimes m(z_2)\} = [r_{12}(z_1, z_2), m(z_1) \otimes I + I \otimes m(z_2)] \quad (4.19)$$

Nous prendrons ici la matrice r rationnelle définie par

$$r_{12}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{1}{2}(z_1 + z_2)t^{00} + z_1 t^{-+} + z_2 t^{+-} \right) \quad (4.20)$$

avec

$$\begin{aligned} t^{00} &= \sum E_{ii} \otimes E_{ii} \\ t^{+-} &= \sum_{i < j} E_{ij} \otimes E_{ji} \\ t^{-+} &= \sum_{i > j} E_{ij} \otimes E_{ji} \end{aligned}$$

où les matrices E_{ij} sont les éléments de la base canonique de l'espace de matrices:

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.21)$$

Comme les éléments de $m(z)$ sont des polynômes en z la question suivante évidente est quels sont leurs degrés. Notons qu'ils doivent satisfaire plusieurs conditions: premièrement, le polynôme caractéristique $\det(m(z) + w)$ doit avoir les coefficients du même degré que (4.1). Deuxièmement, il faut qu'ils soient compatibles avec (4.19). Ces deux conditions nous mènent à la forme suivante pour les degrés:

$$\begin{cases} m_{ij}(z) = m_{ij}^{(0)} z^{n-1} + \dots + m_{ij}^{(n-1)} & \text{si } i \leq j \\ m_{ij}(z) = m_{ij}^{(0)} z^n + \dots + m_{ij}^{(n-1)} z & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.22)$$

Effectivement, si l'on écrit

$$\det(m(z) + w) = w^N + t_1(z)w^{N-1} + \dots + t_N(z) \quad (4.23)$$

on voit que $\deg t_k(z) = kn - 1$ et le crochet de Poisson de deux matrices ayant de tels degrés des coefficients a encore la même forme.

Pour résumer, on voit que l'on arrive naturellement à considérer l'espace \mathcal{M}^+ des matrices de taille N dont les coefficients sont des polynômes en z vérifiant (4.22) et dont le polynôme caractéristique est égal à $r(w, z)$ ou, en d'autres mots, définit la courbe Σ . Mais, comme on a voulu le montrer avec l'exposant $+$, ce n'est pas encore l'espace isomorphe à la jacobienne affine – rappelons que déjà dans le cas hyperelliptique on a dû rajouter la condition (4.15) sur les coefficients dominants. Ceci est dû à l'existence d'une certaine "symétrie de jauge" discutée dans la section suivante.

Mais avant d'y passer, quelques mots sur la structure de l'algèbre de Poisson: nous pouvons voir que tous les $t_k^{(i)}$ – coefficients de $t_k(z)$ définis par

$$t_k(z) = z^{kn-1} t_k^{(0)} + \dots + t_k^{(kn-1)} \quad (4.24)$$

sont en involution entre eux. Cela vient de l'identité suivante:

$$\begin{aligned} & \{\log \det(w + m(z_1)), m(z_2)\} = \\ & = \operatorname{tr} \otimes I \left(((w + m(z_1) \otimes I))^{-1} [r_{12}(z_1, z_2), I \otimes m(z_2)] \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

qui se démontre sans problèmes en utilisant "log det = tr log" et en développant le crochet de Poisson du log par la formule de Leibnitz.

Certains des $t_k^{(i)}$ appartiennent même au centre de l'algèbre. En particulier, il est clair que les coefficients $t_k^{(0)} \dots t_k^{(n-1)}$ y sont car ils sont devant des puissances de z trop grandes pour apparaître dans la partie droite de (4.25).

4.3.3 Le choix de la jauge

Comme on vient de le dire, l'espace \mathcal{M} ne peut être le modèle affine recherché. Il y a deux façons de voir pourquoi ce n'est pas possible. D'un point de vue purement formel, il suffit de calculer la dimension de cet espace: celle de l'espace des matrices avec les termes de la forme (4.19) est nN^2 . L'imposition de la condition $\det(m(z) + w) = r(w, z)$ résulte en $n + 2n + \dots + Nn$ équations scalaires supplémentaires et donc

$$\dim \mathcal{M} = nN^2 - \frac{1}{2}nN(N+1) = \frac{1}{2}nN(N-1) = g + N - 1$$

Comme la dimension de la jacobienne affine est g , cela montre que nous devons nous débarrasser de $N - 1$ degrés de liberté si nous voulons avoir un isomorphisme.

Il y a aussi une explication simple de l'origine de cette différence entre les dimensions: si l'on remplace la matrice $m(z)$ par $sm(z)s^{-1}$ avec une matrice s quelconque, le polynôme caractéristique $\det(sm(z)s^{-1} + w)$ correspond encore à la même courbe Σ et donc il y a une redondance dans $m(z)$. Bien sûr, la matrice s ne peut être complètement arbitraire non plus car il y a d'autres conditions sur $m(z)$.

Nous allons définir explicitement le passage de $m(z)$ à la matrice $l(z)$ réduite

$$l(z) = sm(z)s^{-1}$$

qui fixe la jauge dans le sens qu'il n'y a plus de degrés de liberté non physiques dans $l(z)$. La matrice s est la matrice triangulaire inférieure constante (c'est-à-dire ne dépendante pas de z) définie par

$$s = \begin{pmatrix} \mu_1(\mu^-)^{N-1} \\ \vdots \\ \mu_1\mu^- \\ \mu_1 \end{pmatrix}$$

où μ^- est une matrice (strictement) triangulaire inférieure et μ_1 est la première ligne d'une matrice triangulaire supérieure μ . Ces deux matrices sont définies par le comportement de $m(z)$ quand $z \rightarrow \infty$:

$$m(z) = z^n \mu^- + z^{n-1} \mu + \mathcal{O}(z^{n-2}) \quad \text{quand } z \rightarrow \infty$$

qui est justifié par (4.22).

Pour montrer que l'on a effectivement éliminé les degrés de liberté indésirables de $l(z)$, regardons les degrés des coefficients polynômiaux de $l(z)$: pour cela écrivons d'abord la forme de $l(z)$ quand $z \rightarrow \infty$:

$$l(z) = s\mu^-s^{-1}z^n + \mathcal{O}(z^{n-1}) = Uz^n + \mathcal{O}(z^{n-1}) \quad (4.26)$$

où on a introduit la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Donc le degré de tous les éléments sauf ceux sur la diagonale au-dessous de la diagonale principale de la matrice est strictement inférieur à n .

De plus, le degré des éléments de la première ligne est encore plus restreint:

$$\begin{aligned} (s\mu s^{-1})_{1j} &= s_{11}(\mu s^{-1})_{1j} \\ &= s_{11}(s s^{-1})_{Nj} \\ &= \delta_{Nj} s_{11} \end{aligned}$$

d'où nous obtenons

$$\begin{cases} l_{1j} = \mathcal{O}(z^{n-2}) & (j \leq N-1) \\ l_{1N} = s_{11}z^{N-1} + \mathcal{O}(z^{n-2}) \end{cases}$$

Et finalement les degrés des éléments de $l(z)$ sont donnés par

$$\deg_z l(z) = \begin{pmatrix} n-2 & n-2 & n-2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 \\ n-1 & n & n-1 & \dots & n-1 & n-1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & \dots & \dots & \dots & n & n-1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Pour calculer correctement la dimension de l'espace de telles matrices il est aussi nécessaire de comprendre que certains coefficients dominants sont fixes: ce sont ceux de $l_{21}(z), \dots, l_{NN-1}$ à cause de (4.26) et aussi celui de $l_{1N}(z)$. Ce dernier est égal au coefficient dominant de $\det l(z) = \det m(z)$ et grâce à la remarque de la fin de la dernière section, on sait que ce coefficient-là est dans le centre de l'algèbre de Poisson. Donc c'est une constante du mouvement fixée et non pas une variable dynamique et nous ne devons pas le comptabiliser dans les degrés de liberté du système. Et si l'on compte les vrais degrés de liberté en tenant compte de toutes ces considérations on arrive à exactement g . Ainsi, la situation maintenant est beaucoup plus satisfaisante car on n'a plus de symétrie "non-physique" par conjugaison de $l(z)$ par une matrice constante et on a un espace \mathcal{M} de dimension correcte.

Mais il y a aussi un prix à payer pour cette transformation de $m(z)$ dans $l(z)$: le crochet de Poisson pour $l(z)$ n'a plus tout la forme simple de (4.20). Nous pouvons le calculer (voir la section 3.3 de [27] pour les détails) en utilisant, encore une fois, le comportement asymptotique de $l(z)$ quand $z \rightarrow \infty$. Au bout du calcul on arrive encore à un crochet r -matriciel

$$\{l(z_1) \otimes l(z_2)\} = [\hat{r}_{12}(z_1, z_2), l(z_1) \otimes I + I \otimes l(z_2)]$$

mais avec une matrice r différente:

$$\hat{r}_{12}(z_1, z_2) = \frac{z_2}{z_1 - z_2} (t^{00} + t^{-+} + t^{+-}) + z_2 \sum_{j,k} E_{jk} U^{N+1-j} \otimes E_{k1}$$

Pour conclure cette section, remarquons qu'il n'était pas, strictement parlant, nécessaire de faire tout cela. En effet, on aurait pu commencer par introduire directement l'espace \mathcal{M} et le crochet de Poisson associé à \hat{r} sur \mathcal{M} mais il serait alors assez difficile de comprendre pourquoi on a besoin d'une telle matrice r bizarre. En partant de la matrice r standard (4.20) on voit que, en fait, on y arrive naturellement (quoique ceci n'explique toujours pas pourquoi elle a une telle forme).

4.4 Les variables séparées

Nous avons déjà montré sur un exemple le lien entre le modèle affine et la séparation des variables dans la section 3.4.2. Nous allons préciser cette idée et démontrer que la construction présentée marche pour tout N et pas seulement dans le cas hyperelliptique.

Avant de le faire, quelques remarque sur l'histoire de ce problème: comme on l'a dit précédemment, l'idée de construire les variables séparées à partir du modèle affine vient de l'article de Sklyanin [17] où elle a été réalisée pour les cas $N = 2$ et $N = 3$, mais ce dernier cas n'a pas été traité d'une manière suffisamment générique. Cet article a ainsi laissé certaines questions sur les symétries "mystérieuses" du polynôme B qui y a été introduit sans réponse. Remarquons aussi que nous avons appris, après le développement de notre méthode, que la construction de Sklyanin fut généralisée, toujours en utilisant l'approche de l'Ansatz de Bethe fonctionnel, à $SL(N)$ avec N quelconque dans [23]. Certainement, cette approche ne permet pas de voir les vraies raisons pour lesquelles on arrive à construire les variables séparées de cette façon.

D'un autre côté, ce problème a aussi été étudié dans les travaux [24] et [25] du point de vue purement algèbro-géométrique. Mais cette approche n'a

pas permis l'isomorphisme aussi explicitement que celui de Sklyanin ni révélé l'existence de la graduation dans l'algèbre des observables qui est tellement importante pour nous.

Finalement, l'article [26] contient une méthode de construction des variables séparées algèbro-géométrique élégante et suffisamment explicite assez proche de celle proposée ici, mais il ne décrit pas l'étape cruciale du choix de jauge fait ci-dessus et donc ne peut être utilisé pour arriver à la construction de l'isomorphisme entre la jacobienne affine et un certain espace de matrices. C'est pourquoi nous allons faire ici une construction purement algébrique et explicite des variables séparées qui a aussi l'avantage important de se généraliser assez directement au cas quantique. Mais tout d'abord, nous allons essayer d'expliquer comment on arrive à une telle définition des variables séparées naturellement du point de vue des systèmes intégrables.

4.4.1 La fonction de Baker-Akhiezer

Rappelons que nous avons défini la fonction $\psi(w, z)$ dans la section 3.5.1 comme le vecteur propre de $l(z)$ pour la valeur propre $-w$:

$$(l(z) + w) \psi(w, z) = 0 \tag{4.29}$$

et que toute composante $\psi_i(w, z)$ du vecteur normalisé $\psi^0(w, z)$ est une fonction de Baker-Akhiezer comme on l'a vu dans la section 3.5.3. De plus, on rappelle que les pôles de ψ_i sont fixes tandis que ses zéros forment le diviseur dynamique qui décrit complètement la dynamique du système et, en particulier, ses variables séparées. Ici, en fait, on n'utilisera pas les propriétés analytiques des fonctions de Baker-Akhiezer mais juste la définition (4.29), donc on ne pourra pas utiliser la description ci-dessus pour dire que les variables que l'on définira sont effectivement séparées, mais l'on gardera quand même cette situation générale à l'esprit.

Il est donc tout à fait naturel de définir (w_i, z_i) comme les g zéros de la fonction $\psi_1(w, z)$ sur Σ et prouver que ce sont bel et bien des variables séparées. Mais pour le faire il faut d'abord leur trouver une description plus explicite et pour cela on va suivre la démarche du cas hyperelliptique où l'on pouvait écrire

$$l(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$$

et mettons ici la matrice $l(z)$ sous la forme

$$l(z) = \left(\begin{array}{c|c} l_{11}(z) & b(z) \\ \hline * & \\ \vdots & d(z) \\ * & \end{array} \right)$$

Faisons aussi la même chose pour ψ après l'avoir normalisé en fixant

$$\psi_N(w, z) \equiv 1$$

et

$$\psi(w, z) = \begin{pmatrix} \psi_1(w, z) \\ \psi_2(w, z) \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(w, z) \\ \hat{\psi}(w, z) \end{pmatrix}$$

Alors, pour tout z_i on obtient par décomposition de l'équation vectorielle (4.29) les deux équations suivantes:

$$\begin{cases} b(z_i)\hat{\phi}(w_i, z_i) = 0 \\ d(z_i)\hat{\phi}(w_i, z_i) = -w_i\hat{\phi}(z_i) \end{cases} \quad (4.30)$$

ou, en les combinant maintenant:

$$b(z_i)d^k(z_i)\hat{\phi}(w_i, z_i) = 0 \quad \forall k \geq 0 \quad (4.31)$$

Cette équation mène directement à l'idée d'introduire la matrice $(N - 1) \times (N - 1)$

$$Z(z) = \begin{pmatrix} b(z) \\ b(z)d(z) \\ \vdots \\ b(z)d^{N-2}(z) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

car (4.31) implique

$$\det Z(z_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, g$$

comme $Z(z_i)\hat{\phi}(w_i, z_i) = 0$ et $\hat{\phi} \neq 0$ car sa dernière composante est 1.

En se rappelant la forme des degrés des éléments matriciels de $l(z)$ donnée par (4.28) on voit que le degré maximal de z dans $\det Z(z)$ apparaît dans le

produit de l_{1N} par la diagonale du mineur de la matrice lui correspondante et donc

$$\deg \det Z(z) = \sum_{k=1}^{N-2} (kn - 1) = g$$

d'où l'on voit que $\det Z(z)$ est un polynôme de degré g en z et, en plus, son coefficient dominant est une constante, c'est-à-dire appartient au centre de l'algèbre de Poisson comme on l'avait vu ci-dessus. Comme cette constante n'a pas de signification dynamique, on peut supposer qu'elle est égale à 1.

Finalement, on voit donc que

$$\det Z(z) = \prod_{i=1}^g (z - z_i)$$

ce qui nous permet de complètement oublier le vecteur $\psi(w, z)$ et les fonctions de Baker-Akhiezer et de définir z_i comme les g racines du polynôme $\det Z(z)$. On insiste sur le fait que l'on n'utilise pas du tout les propriétés de $\psi(w, z)$ et que la construction des z_i (et w_i ci-dessous) est purement algébrique et que l'on a parlé des fonctions de Baker-Akhiezer juste pour expliquer d'où vient l'idée de définir une telle matrice $Z(z)$.

4.4.2 La détermination de w_i

On a vu dans la section précédente que l'on pouvait définir g points z_i à partir des éléments de la matrice $l(z)$. Nous allons montrer ici que l'on peut faire de même pour w_i . Pour cela, considérons la matrice $N \times (N - 1)$ suivante:

$$X(w, z) = \begin{pmatrix} b(z) \\ d(z) + w \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Les relations (4.30) montrent que $X(w_i, z_i) \hat{\psi}(w_i, z_i) = 0$ et donc les N déterminants X_k que l'on obtient en enlevant la $k + 1$ -ième (la première, par convention, pour $k = N$) ligne de la matrice $X(w, z)$ sont nuls. Alors pour n'importe quelle matrice A de taille $(N - 1) \times N$ on a

$$\det \left(A \begin{pmatrix} b(z_i) \\ d(z_i) + w_i \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (4.34)$$

Appliquons cette relation avec la matrice A particulière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & b(z_i) \\ 0 & b(z_i)d(z_i) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b(z_i)d^{N-4}(z_i) \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$$

où ξ est un vecteur-ligne de taille $N - 1$ arbitraire. Alors, après la simplification (par opérations sur les lignes) du déterminant (4.34) on obtient

$$\det \begin{pmatrix} b(z_i) \\ b(z_i)d(z_i) \\ \vdots \\ b(z_i)d^{N-3}(z_i) \\ \xi(d(z_i) + w_i) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.35)$$

et nous voyons que w_i peut être défini par

$$w_i = - \frac{\det \begin{pmatrix} b(z_i) \\ b(z_i)d(z_i) \\ \vdots \\ b(z_i)d^{N-3}(z_i) \\ \xi d(z_i) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} b(z_i) \\ b(z_i)d(z_i) \\ \vdots \\ b(z_i)d^{N-3}(z_i) \\ \xi \end{pmatrix}} \quad (4.36)$$

qui satisfait évidemment l'équation (4.35).

Mais pour pouvoir définir w_i comme cela il faut trouver un ξ tel que le déterminant dans le dénominateur est non nul. Il est toujours possible de le faire mais nous allons nous restreindre au cas le plus simple quand z_i est un zéro simple de $\det Z(z)$. La raison pour cette hypothèse de généricité supplémentaire est que l'on en aurait de toute façon besoin dans la section 4.5 et donc on supposera à partir de maintenant que $\det Z(z)$ n'a que des zéros simples.

Avec cette hypothèse il est facile de voir que la matrice

$$\begin{pmatrix} b(z_i) \\ b(z_i)d(z_i) \\ \vdots \\ b(z_i)d^{N-3}(z_i) \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

est de rang $N - 2$. En effet, si tel n'était pas le cas on aurait

$$\sum_{k=1}^{N-2} \lambda_k b(z_i) d^{k-1}(z_i) = 0$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{N-2} \lambda_k b(z) d^{k-1}(z) = \mathcal{O}(z - z_i)$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{N-2} \lambda_k b(z) d^k(z) = \mathcal{O}(z - z_i)$$

mais les deux dernières équations impliquent

$$\det Z(z) = \mathcal{O}((z - z_i)^2)$$

ce qui contredit notre hypothèse.

Et puisque la matrice (4.37) est de rang maximal il est possible de trouver ξ qui la complète en une matrice inversible ce qui justifie la définition de w_i ci-dessus.

Conclusion: nous avons explicitement défini g points (w_i, z_i) appartenants à la courbe (4.1) (c'est la conséquence de (4.23)) à partir des éléments matriciels de $l(z)$. La tâche suivante sera de montrer que ce sont effectivement les variables séparées dans la section suivante.

4.4.3 Le calcul du crochet de Poisson

Le but de cette section est de calculer les crochets de Poissons $\{z_i, z_j\}$, $\{w_i, w_j\}$ et $\{w_i, z_j\}$.

Les notations

Cette section est assez technique et pour simplifier les calculs que l'on va présenter ici au maximum nous allons introduire quelques notations abrégées. Tout d'abord, comme on ne travaillera ci-dessous qu'avec deux valeurs

de z (z_1 et z_2) simultanément, nous omettrons les arguments de toutes les fonctions de z et mettrons une prime sur les fonctions de z_2 :

$$\begin{aligned} f(z_1) &\equiv f \\ f(z_2) &\equiv f' \end{aligned}$$

Ensuite, nous utiliserons les notations de la section 3.3 pour le crochet de Poisson:

$$\{x \otimes x'\}_{ij,kl} = \{x \otimes I, I \otimes x'\}_{ij,kl} = \{x_{ik}, x'_{jl}\}$$

et avec les notations

$$\begin{cases} x_1 &\equiv x(z_1) \otimes I = x \otimes I \\ x_2 &\equiv I \otimes x(z_2) = I \otimes x' \end{cases}$$

on écrira même tout simplement

$$\{x \otimes x'\} = \{x_1, x_2\}$$

Enfin, une remarque qui simplifie considérablement nos calculs: nous pouvons supposer que z_i et w_i sont définis comme dans la section précédente mais à partir de la matrice $Z(z)$ construite avec les éléments de $m(z)$ et non pas de $l(z)$. En effet, comme cette dernière s'obtient par conjugaison par une matrice s à partir de $m(z)$, les différents déterminants ci-dessus ne changent pas si l'on remplace $l(z)$ par $m(z)$. En d'autres mots, on va redéfinir $b(z)$ et $d(z)$ comme étant les parties correspondantes de la matrice $m(z)$:

$$m(z) = \begin{pmatrix} m_{11}(z) & b(z) \\ \vdots & d(z) \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

au lieu de $l(z)$ mais on gardera la définition (4.32) de la matrice $Z(z)$ et les définitions de z_i et w_i .

Finalement, on va introduire une notation spéciale $a^{(k)}$ pour la k -ième ligne de la matrice $Z(z)$:

$$a^{(k)}(z) \equiv b(z)d^{k-1}(z)$$

et on notera par e_i et f_i la base canonique des vecteurs lignes et colonnes respectivement, c'est-à-dire les lignes ou colonnes ayant 1 dans la i -ième position et 0 partout ailleurs.

Le crochet $\{z_i, z_j\}$

On va commencer par calculer le crochet le plus simple et montrer que

$$\{z_i, z_j\} = 0 \quad \forall i, j$$

Pour cela il suffit de calculer le crochet de $\det Z(z)$ et de montrer que

$$\{\det Z(z_1), \det Z(z_2)\} = 0$$

car si ces deux polynômes commutent, leur racines font de même.

A partir de maintenant on utilisera les notations abrégées introduites ci-dessus et donc le crochet précédent s'écrit comme $\{\det Z, \det Z'\}$. Pour le calculer, utilisons l'identité

$$\begin{aligned} \{\det Z, \det Z'\} &= \\ &= \frac{\partial \det Z}{\partial Z_{ij}} \frac{\partial \det Z'}{\partial Z'_{kl}} \{Z_{ij}, Z'_{kl}\} \\ &= \det Z \det Z' (Z^{-1})_{ji} (Z'^{-1})_{lk} \{Z_{ij}, Z'_{kl}\} \\ &= \det Z \det Z' ((Z^{-1} \otimes Z'^{-1}) \{Z \otimes Z'\})_{jl, ji} \\ &= \det Z \det Z' (\text{tr} \otimes \text{tr}) (Z_1^{-1} Z_2^{-1} \{Z_1, Z_2\}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

qui nous permet de ramener le calcul à celui de $\{Z_1, Z_2\}$. Pour le faire, nous allons calculer les crochets entre toutes les lignes $a^{(k)}$ de Z individuellement et pour cela nous avons besoin des crochets $\{b_1, b_2\}$, $\{b_1, d_2\}$ et $\{d_1, d_2\}$ que l'on va trouver directement à partir du crochet de $m(z)$ (4.19)

$$\{m_1, m_2\} = [r(z_1, z_2), \Delta m(z_1, z_2)] \quad (4.40)$$

où l'on a introduit la notation

$$\Delta m(z_1, z_2) \equiv m_1 + m_2 = m \otimes I + I \otimes m'$$

Nous allons décomposer la relation (4.40) selon la décomposition de $m(z)$ (4.38) qui fait apparaître $b(z)$ et $d(z)$ en introduisant la matrice ρ qui est la même que la matrice r mais à l'ordre $N - 1$ ou, explicitement:

$$\rho_{ij,kl} = r_{i+1 j+1, k+1 l+1} \quad (4.41)$$

Alors on obtient immédiatement

$$\{d_1, d_2\} = [\rho(z_1, z_2), d_1 + d_2]$$

et, comme $\Delta m(z_1, z_2)_{ij,kl} = 0$ à moins que $i = k$ ou $j = l$ et $r_{ij,kl} \neq 0$ seulement si $i = l$ et $j = k$ nous voyons que (4.40) donne aussi

$$\begin{aligned}
\{m_{1,i+1}, m'_{1,j+1}\} &= [r(z_1, z_2), \Delta m(z_1, z_2)]_{11, i+1 j+1} \\
&= r(z_1, z_2)_{11, kl} \Delta m(z_1, z_2)_{kl, i+1 j+1} - \\
&\quad \Delta m(z_1, z_2)_{11, kl} r(z_1, z_2)_{kl, i+1 j+1} \\
&= \Delta m(z_1, z_2)_{11, i+1 j+1} r(z_1, z_2)_{11, 11} - \\
&\quad \Delta m(z_1, z_2)_{11, j+1 i+1} r(z_1, z_2)_{j+1 i+1, i+1 j+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'où

$$\{b_1, b_2\} = 0$$

Le seul crochet intéressant est celui entre b et d' que l'on trouve en utilisant la forme explicite (4.20) de la matrice r

$$\{b_1, d_2\} = \frac{z_2}{z_1 - z_2} \Phi b_2 - b_1 \rho \quad (4.42)$$

où Φ est formellement défini par

$$\Phi = \sum_{i=1}^N e_i \otimes f_i$$

C'est un objet qui agit sur le produit tensoriel d'une matrice par un vecteur ligne et le transpose en produit d'une ligne par matrice. Explicitement, appliqué à $b_2 \equiv I \otimes b'$ cela donne

$$(\Phi b_2)_{i,jk} = \delta_{ij} b'_k$$

Nous allons aussi définir la transposée ${}^t\Phi$:

$${}^t\Phi = \sum_{i=1}^N f_i \otimes e_i$$

qui, elle, agit sur le produit tensoriel d'une ligne dans le premier espace par une matrice dans le deuxième:

$$({}^t\Phi b_1)_{i,jk} = \delta_{ik} b_j$$

et qui apparaît dans le crochet de b_2 et d_1 qui est symétrique par rapport à (4.42):

$$\{b_2, d_1\} = \frac{z_1}{z_2 - z_1} {}^t\Phi b_1 - b_2 \rho$$

Avec ces notations il est facile de voir que nous avons aussi

$$\begin{aligned} \{b_1, d_2^l\} &= -b_1 \sum_{p=1}^l d_2^{p-1} \rho d_2^{l-p} + \sum_{p=1}^l d_2^{p-1} \frac{z_2}{z_1 - z_2} \Phi b_2 d_2^{l-p} \\ \{d_1^k, b_2\} &= -b_2 \sum_{q=1}^k d_1^{q-1} \rho d_1^{k-q} + \sum_{q=1}^k d_1^{q-1} \frac{z_1}{z_1 - z_2} {}^t \Phi b_1 d_1^{k-q} \end{aligned} \quad (4.43)$$

et nous pouvons aussi écrire

$$\begin{aligned} \{d_1^k, d_2^l\} &= \left(\sum_{p=1}^l d_2^{p-1} \rho d_2^{l-p} \right) d_1^k + \left(\sum_{q=1}^k d_1^{q-1} \rho d_1^{k-q} \right) d_2^l - \\ &- d_1^k \left(\sum_{p=1}^l d_2^{p-1} \rho d_2^{l-p} \right) - d_2^l \left(\sum_{q=1}^k d_1^{q-1} \rho d_1^{k-q} \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

car tous les autres termes se compensent deux par deux.

En utilisant ces deux équations nous pouvons calculer les crochets entre $a^{(k)}$ que l'on cherche:

$$\begin{aligned} \{a_1^{(k)}, a_2^{(l)}\} &= \{b_1 d_1^{k-1}, b_2 d_2^{l-1}\} \\ &= b_2 \{b_1, d_2^{l-1}\} d_1^{k-1} + b_1 \{d_1^{k-1}, b_2\} d_2^{l-1} + \\ &+ b_1 b_2 \{d_1^{k-1}, d_2^{l-1}\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Mais avant de continuer, encore deux nouvelles notations pour simplifier (4.43):

$$\begin{cases} \hat{a}_{12}^{(k)} &\equiv b_1 \sum_{q=1}^{k-1} d_1^{q-1} \rho d_1^{k-q-1} \\ \hat{a}_{21}^{(l)} &\equiv b_2 \sum_{p=1}^{l-1} d_2^{p-1} \rho d_2^{l-p-1} \end{cases}$$

avec lesquelles on peut développer (4.45) en

$$\begin{aligned} \{a_1^{(k)}, a_2^{(l)}\} &= -a_2^{(l)} \hat{a}_{12}^{(k)} - a_1^{(k)} \hat{a}_{21}^{(l)} + \\ &+ \sum_{p=1}^{l-1} a_2^{(p)} \frac{z_2}{z_1 - z_2} \Phi a_2^{(l-p)} d_1^{k-1} + \\ &+ \sum_{q=1}^{k-1} a_1^{(q)} \frac{z_1}{z_2 - z_2} {}^t \Phi a_1^{(k-q)} d_2^{l-1} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Tout ce qu'il reste à faire maintenant est de récrire (4.46) sous une forme matricielle. Pour les deux premiers termes de (4.46), il suffit de définir la

matrice \hat{Z}_{21} dans le produit tensoriel dont les lignes seront $\hat{a}_{21}^{(k)}$ (qui sont elles-mêmes des matrices dans le premier espace et des lignes dans le deuxième):

$$\hat{Z}_{21}(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{N-1} (I \otimes f_k) \hat{a}_{21}^{(k)}$$

et $\hat{Z}_{12}(z_1, z_2)$ de la même manière mais en utilisant $\hat{a}_{12}^{(l)}$:

$$\hat{Z}_{12}(z_1, z_2) = \sum_{l=1}^{N-1} (f_l \otimes I) \hat{a}_{12}^{(l)}$$

Pour les deux termes restants on aura besoin d'une matrice spéciale

$$D_r(z) = \begin{pmatrix} e_r \\ e_r d(z) \\ \vdots \\ e_r d^{N-2}(z) \end{pmatrix}$$

qui est définie expressément pour que (4.46) soit équivalent à

$$\begin{aligned} \{Z_1, Z_2\} &= -Z_1 \hat{Z}_{21} - Z_2 \hat{Z}_{12} + \\ &+ \frac{1}{z_1 - z_2} \sum_{r,s} (z_2 Z'_{rs} (D_s \otimes U^r Z') + z_1 Z_{rs} (U^r Z \otimes D'_s)) \end{aligned} \quad (4.47)$$

La matrice U qui apparaît ici était définie dans (4.27) et permet juste d'écrire la somme sur toutes les valeurs de r au lieu d'avoir de les limiter à l'intervalle $1 \leq r \leq i$ pour l'élément matriciel ij, kl .

Injectons maintenant (4.47) dans (4.39). Nous allons le faire pour chacun des quatres termes indépendamment ou, plutôt, comme les deux premiers et les deux derniers sont symétriques, juste pour le premier et le troisième. Commençons donc par le premier terme qui contient \hat{Z}_{21} et donne la contribution suivante:

$$\det Z \det Z' (\text{tr} \otimes \text{tr}) \left(Z_2^{-1} \hat{Z}_{21}(z_2, z_1) \right)$$

La trace sur le premier espace se calcule facilement car seule la matrice ρ y contribue et, en utilisant sa forme explicite (4.41) et la définition de la matrice r (4.20) on trouve

$$(\text{tr} \otimes I) \rho(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} I$$

et donc la contribution du premier terme est, à un facteur près, tout simplement $\text{tr}_2 \left(Z_2^{-1} \hat{Z}_{21} \right)$. Cette expression est facile à calculer car, à l'intérieur de

la trace, on peut d'abord faire disparaître ρ de $\hat{a}_{21}^{(k)}$ (en faisant la permutation cyclique de (4.46)) ce qui nous réduit \hat{Z}_{21} à (encore à un facteur près) $(k-1)b_2d_2^{k-1}$ dans la k -ième ligne ce qui n'est rien d'autre que la k -ième ligne de Z_2 multipliée par $k-1$. Dans la forme matricielle la trace se récrit donc comme

$$\text{tr}(KZ_2Z_2^{-1})$$

avec

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & N-2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

et donc elle disparaît parce que $\text{tr} K = 0$ et on peut finalement conclure que la contributions du premier terme est nulle, et donc, par symétrie, celle du deuxième l'est aussi.

Il reste à voir qu'est-ce qui se passe pour celle du troisième: elle contient la somme des expressions

$$(Z^{-1} \otimes Z'^{-1}) Z'_{rs} (D_s \otimes U^r Z')$$

et l'on voit que les Z' se compensent et la seule contribution dans la trace par rapport au deuxième espace vient de $\text{tr} U^r$ qui est nulle pour la matrice U nilpotente. Le quatrième terme ne donne bien sûr rien non plus ce qui prouve que l'on a effectivement $\{\det Z, \det Z'\} = 0$ comme énoncé au début de cette section et donc tous les z_i commutent.

Le crochet $\{z_i, w_j\}$

La prochaine étape est le calcul du seul crochet non trivial, celui de z avec w . On rappelle qu'ils existent un polynôme $B(z)$ et une fraction rationnelle $A(z)$ tels que

$$\begin{cases} B(z_i) & = 0 \\ w_i & = -A(z_i) \end{cases}$$

$B(z)$ est tout simplement $\det Z(z)$ et $A(z)$ est définie par (4.36). On utilise ces notations pour montrer que ce sont bien les mêmes fonctions que l'on avait déjà vues dans la section 3.4.2.

Pour calculer le crochet entre z_i et w_j il suffit de calculer celui de $B(z_i) = B$ et $A(z_j) = A'$ car on rappelle que

$$0 = \{B(z_i), w_j\} = \{B(z), w_j\}|_{z=z_i} + B'(z_i) \{z_i, w_j\}$$

et donc

$$\{z_i, w_j\} = -\frac{\{B(z), A(z_j)\}|_{z=z_i}}{B'(z_i)} \quad (4.49)$$

Pour trouver $\{B, A'\}$ nous allons réutiliser les résultats de la section précédente. En effet, on peut écrire

$$A(z) = \frac{\det X(z)}{\det Y(z)} \quad (4.50)$$

avec

$$X \equiv \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(N-2)} \\ \xi d \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Y \equiv \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(N-2)} \\ \xi \end{pmatrix}$$

et donc pour avoir le crochet de Z avec A il suffit de trouver les crochets de Z avec X et Y qui se calculent à peu près de la même manière que $\{Z, Z'\}$, avec la seule différence de la dernière ligne.

Nous commençons l'exécution de ce programme en introduisant les notations similaires à celles utilisées dans la dernière section:

$$\hat{X}_{21} \equiv \begin{pmatrix} \hat{a}_{21}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{a}_{21}^{(N-2)} \\ \xi_2 \rho \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{Y}_{21} \equiv \begin{pmatrix} \hat{a}_{21}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{a}_{21}^{(N-2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

correspondent à \hat{Z}_{21} . Et comme pour \hat{Z}_{21} , ces matrices sont définies dans le produit tensoriel et les lignes ci-dessus sont par rapport au deuxième espace, \hat{a}_{21} étant déjà des matrices par rapport au premier. \hat{X}_{12} et \hat{Y}_{12} sont définies exactement de la même façon mais en utilisant \hat{a}_{12} et ξ_1 pour la dernière ligne (par rapport au premier espace dans ce cas-là) respectivement.

Le calcul de $\{Z, Y'\}$ est simple car nous connaissons déjà, en fait, le résultat: il sera le même que précédemment pour toutes les lignes (par rapport au deuxième espace) sauf la dernière pour laquelle on trouvera, bien sûr, 0. Il reste à adopter la formule (4.47) pour qu'elle soit conforme à ce résultat ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \{Z_1, Y_2\} &= -Z_1 \hat{Y}_{21} - Y_2 \hat{Z}_{12} + \\ &+ \frac{1}{z_1 - z_2} \sum_{r,s} \left(z_2 Y'_{rs} \left(D_s \otimes \tilde{U}^r Y' \right) + z_1 Z_{rs} \left(U^r Z \otimes \tilde{I} D'_s \right) \right) + \\ &+ (I \otimes f_{N-1}) \xi_2 \hat{Z}_{12} \end{aligned} \quad (4.51)$$

où \tilde{I} et \tilde{U} sont, respectivement, la matrice identité et U privées de la dernière ligne:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons, en passant, que $U^r Z = U^r Y = U^r X$ pour tout indice r de toute façon et nous utilisons $U^r Y$ au lieu de $U^r Z$ ci-dessus seulement pour les raisons “esthétiques”.

Mais ce qui nous intéresse réellement est le crochet des déterminants de ces matrices et donc on refait la même chose que pour Z et injecte (4.51) dans l’identité (4.39). La plupart des termes qui apparaissent sont encore nuls mais il y a quand même la contribution de la dernière ligne:

$$\{\det Z_1, \det Y_2\} = \det Z_1 \det Y_2 \text{tr}_2 (1 \otimes f_{N-1}) \eta_2 Y_2^{-1} \quad (4.52)$$

où

$$\eta_2 \equiv \xi_2 \text{tr}_1 \left(Z_1^{-1} \hat{Z}_{12} \right) \quad (4.53)$$

La trace ci-dessus est une certaine expression compliquée que l’on ne veut surtout pas calculer explicitement car nous n’en avons pas besoin: nous allons voir un peu plus tard que la même expression apparaîtra aussi dans le crochet de $\det Z$ et $\det X'$.

Regardons donc ce dernier: ici nous avons encore la même expression que pour le crochet de Z avec lui-même pour toutes les lignes sauf la dernière dans laquelle on doit avoir, à ξ_2 près, $\{a_1^{(k)}, d_2\}$ que l’on peut calculer aisément en utilisant (4.43) et (4.44):

$$\{a_1^{(k)}, d_2\} = \frac{z_2}{z_1 - z_2} \Phi b_2 d_1^{k-1} - a_1^{(k)} \rho + [\hat{a}_{12}^{(k)}, d_2] \quad (4.54)$$

On en déduit une formule similaire, quoiqu’un peu plus compliquée, à celle pour $\{Z, Y'\}$:

$$\begin{aligned} \{Z_1, X_2\} &= -Z_1 \hat{X}_{21} - X_2 \hat{Z}_{12} + \\ &+ \frac{1}{z_1 - z_2} \sum_s z_2 D_s \otimes \left(\left(\sum_r X'_{rs} \tilde{U}^r \right) + \xi_s J \right) X' + \\ &+ \frac{1}{z_1 - z_2} \sum_{r,s} z_1 Z_{rs} \left(U^r Z \otimes \tilde{I} D'_s \right) + \\ &+ (I \otimes f_{N-1}) \xi_2 \hat{Z}_{12} d_2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Nous avons encore introduit une nouvelle notation, cette fois-ci pour la matrice

$$J \equiv \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

qui est nécessaire justement pour avoir (4.54) tandis que le dernier terme du (4.55) assure que l'on a ce qu'il faut dans la dernière ligne.

Comme avant, nous devons maintenant calculer le crochet des déterminants à partir de (4.55) et en utilisant (4.39) mais nous avons ici deux termes que nous n'avions pas encore eu jusque là: celui contenant \hat{X}_{21} et le dernier. Le premier de ces deux-là est le plus difficile à traiter, commençons donc par lui.

Se rappelant le calcul de $\text{tr}_1 \hat{Z}_{21}$, on peut voir que l'on a

$$\text{tr}_1 \hat{X}_{21} = \frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \left(\tilde{K} X_1 + (I \otimes f_{N-1}) \xi_2 \right)$$

où \tilde{K} est juste la matrice K de (4.48) sans la dernière ligne:

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N-2 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exactement comme ci-dessus, le premier terme ne contribue pas comme $\text{tr} \tilde{K}$ est encore 0. Le deuxième donne

$$\text{tr}_2 \left(\text{tr}_1 \hat{X}_{21} \right) X_2^{-1} = \frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \text{tr} \left(f_{N-1} \xi (X')^{-1} \right)$$

que nous devons calculer. Pour le faire, on va décomposer ξ dans la base formée par les lignes de la matrice X :

$$\xi = \sum_{k=1}^{N-2} \lambda_k a^{(k)} + \lambda \xi d'$$

parce que cela nous permet d'écrire

$$\text{tr} \left(f_{N-1} \xi (X')^{-1} \right) = \sum_{k=1}^{N-2} \lambda_k (X' X'^{-1})_{k, N-1} + \lambda (X' X'^{-1})_{N-1, N-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \\
&= \frac{a'^{(1)} \wedge \cdots \wedge a'^{(N-2)} \wedge \xi}{a'^{(1)} \wedge \cdots \wedge a'^{(N-2)} \wedge \xi d'} \\
&= \frac{\det Y'}{\det X'}
\end{aligned}$$

Revenons maintenant à la contribution du dernier terme de (4.55). Nous n'allons pas, comme on l'a déjà dit précédemment, le calculer explicitement mais nous remarquerons juste que nous pouvons l'écrire comme

$$\det Z_1 \det X_2 \operatorname{tr}_2 (I \otimes f_{N-1}) \eta_2 d_2 X_2^{-1}$$

avec le même η_2 que dans (4.53).

Tous les autres termes s'annulent comme avant et donc en mettant tout ensemble nous n'avons finalement que deux termes:

$$\begin{aligned}
&\{\det Z_1, \det X_2\} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \det Z_1 \det Y_2 + \\
&+ \det Z_1 \det X_2 \operatorname{tr}_2 (1 \otimes f_{N-1}) \eta_2 d_2 X_2^{-1} \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Ceci nous permet de continuer avec notre calcul de $\{B, A'\}$:

$$\begin{aligned}
\{B_1, A_2\} &= \left\{ \det Z_1, \frac{\det X_2}{\det Y_2} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \det Z_1 + \\
&+ \left[\operatorname{tr}_2 (1 \otimes f_{N-1}) (\eta_2 d_2 X_2^{-1} - \eta_2 Y_2^{-1}) \right] \det A_1 \frac{\det X_2}{\det Y_2}
\end{aligned}$$

Le deuxième terme peut, heureusement, être simplifié en utilisant la même approche que pour le calcul de la trace de \hat{X}_{21} : on décompose η dans la base des lignes de Y'

$$\eta = \sum_{k=1}^{N-2} \mu_k a'^{(k)} + \mu \xi$$

Donc nous avons

$$\eta d' = \sum_{k=1}^{N-3} \mu_k a'^{(k+1)} + \mu_{N-2} a'^{(N-1)} + \mu \xi d'$$

et

$$\begin{aligned}
& \text{tr}_2(1 \otimes f_{N-1})(\eta_2 d_2 X_2^{-1} - \eta_2 Y_2^{-1}) = \\
&= \sum_{k=1}^{N-2} (\mu_k (X' X'^{-1})_{k+1, N-1} - \mu_k (Y' Y'^{-1})_{k, N-1}) + \\
&+ \mu_{N-1} ((X' X'^{-1})_{N-1, N-1} - (Y' Y'^{-1})_{N-1, N-1}) + \\
&+ \mu_{N-2} \text{tr}_2(I \otimes f_{N-1}) a'^{(N-1)} X'^{-1} \\
&= \mu_{N-2} (Z' X'^{-1})_{N-1, N-1} \\
&= \mu_{N-2} \frac{\det Z_2}{\det X_2}
\end{aligned}$$

Remplaçant le deuxième terme dans la formule précédente par cette expression et en restaurant les arguments de toutes les fonctions on arrive à

$$\{B(z_1), A(z_2)\} = -\frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} B(z_1) + \left(\mu_{N-2} \frac{\det Z(z_1)}{\det Y(z_2)} \right) B(z_2) \quad (4.57)$$

qui n'est pas sans rappeler les expressions de la section 3.4.2. Il reste maintenant à utiliser (4.49) avec (4.57): on voit que le crochet s'annule toujours comme $B(z_1) = B(z_2) = 0$ (utilisant la définition de z_i comme racines de $B(z)$) sauf si $z_1 = z_2 = z$. Dans ce cas-là il suffit de fixer z_i et calculer la limite simple $z \rightarrow z_i$ par la règle de l'Hôpital pour obtenir exactement z_i . Donc, en général, nous avons

$$\{z_i, w_j\} = \delta_{ij} z_i$$

qui est la relation recherchée (on rappelle que les vraies variables séparées sont w_i et x_i définies par $z_i = \exp x_i$ et ces dernières ont donc les relations de commutation canoniques).

Le crochet $\{w_i, w_j\}$

Il reste à calculer le crochet entre deux w_i . C'est le calcul le plus difficile, mais notre tâche sera simplifiée par les résultats précédents que l'on va réutiliser ici.

Le plan est simple: nous allons calculer $\{A, A'\}$ et montrer que le crochet s'annule pour z_1 et z_2 racines de $B(z)$. Pour faire ce calcul nous utiliserons l'expression (4.50) et nous aurons donc besoin de tous les crochets entre X et Y . Comme les crochets de Z et X ou Y ils auront tous la même forme que (4.47) à l'exception de la dernière ligne.

Commençons par calculer le crochet le plus difficile: $\{X, X'\}$. Ici nous allons avoir l'expression suivante dans la dernière ligne:

$$\{\xi_1 d_1, \xi_2 d_2\} = \xi_1 \xi_2 [\rho, d_1 + d_2]$$

et donc en répétant les étapes du calcul de $\{Z, X'\}$ on arrive à

$$\begin{aligned} \{X_1, X_2\} &= -X_1 \hat{X}_{21} - X_2 \hat{X}_{12} + \\ &+ \frac{1}{z_1 - z_2} \sum_s z_2 \tilde{I} D_s \otimes \left(\left(\sum_r X'_{rs} \tilde{U}^r \right) + \xi_s J \right) X' + \\ &+ \frac{1}{z_1 - z_2} \sum_s z_1 \left(\left(\sum_r X_{rs} \tilde{U}^r \right) + \xi_s J \right) X \otimes \tilde{I} D'_s + \\ &+ (I \otimes f_{N-1}) \xi_2 \hat{X}_{12} d_2 + (f_{N-1} \otimes I) \xi_1 \hat{X}_{21} d_1 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Ensuite on injecte encore cette expression dans l'identité (4.39) pour obtenir de la manière similaire à celle de la section précédente

$$\begin{aligned} \frac{\{\det X_1, \det X_2\}}{\det X_1 \det X_2} &= -\frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \left(\frac{\det Y_2}{\det X_2} + \frac{\det Y_1}{\det X_1} \right) \\ &+ \operatorname{tr}_2 \left((I \otimes f_{N-1}) \zeta_2 d_2 X_2^{-1} \right) + \\ &+ \operatorname{tr}_1 \left((f_{N-1} \otimes I) \zeta_1 d_1 X_1^{-1} \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

avec ζ qui remplacent η :

$$\begin{cases} \zeta_1 \equiv \operatorname{tr}_1 \xi_2 (X_1^{-1} \hat{X}_{12}) \\ \zeta_2 \equiv \operatorname{tr}_2 \xi_1 (X_2^{-1} \hat{X}_{21}) \end{cases}$$

Comme auparavant, nous n'allons pas calculer explicitement ces traces mais les ferons apparaître aussi dans les autres crochets pour les simplifier à la fin. En effet, pour le crochet de X et Y on trouve de façon analogue

$$\begin{aligned} \frac{\{\det X_1, \det Y_2\}}{\det X_1 \det Y_2} &= -\frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \frac{\det Y_1}{\det X_1} + \\ &+ \operatorname{tr}_2 \left((I \otimes f_{N-1}) \zeta_2 Y_2^{-1} \right) + \\ &+ \operatorname{tr}_1 \left((f_{N-1} \otimes I) \kappa_1 d_1 X_1^{-1} \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

avec

$$\kappa_1 \equiv \operatorname{tr}_2 \left(\xi_1 \hat{Y}_{21} Y_2^{-1} \right)$$

et aussi l'expression symétrique pour $\{\det Y_1, \det X_2\}$.

Le calcul du crochet de Y avec soi-même est le plus simple et le résultat est

$$\begin{aligned} \frac{\{\det Y_1, \det Y_2\}}{\det Y_1 \det Y_2} &= \operatorname{tr}_2 \left((I \otimes f_{N-1}) \kappa_2 Y_2^{-1} \right) + \\ &+ \operatorname{tr}_1 \left((f_{N-1} \otimes I) \kappa_1 Y_1^{-1} \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

On peut maintenant rassembler les formules (4.59), (4.60) et (4.61) pour trouver le crochet de A avec A' :

$$\begin{aligned} \frac{\{A_1, A_2\}}{A_1 A_2} &= -\frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \left(\frac{\det Y_1}{\det X_1} + \frac{\det Y_2}{\det X_2} - \frac{\det Y_1}{\det X_1} - \frac{\det Y_2}{\det X_2} \right) + \\ &+ \operatorname{tr}_2 (I \otimes f_{N-1}) \left(\zeta_2 d_2 X_2^{-1} - \zeta_2 Y_2^{-1} - \kappa_2 d_2 X_2^{-1} + \kappa_2 Y_2^{-1} \right) \\ &+ \operatorname{tr}_1 (f_{N-1} \otimes I) \left(\zeta_1 d_1 X_1^{-1} - \zeta_1 Y_1^{-1} - \kappa_1 d_1 X_1^{-1} + \kappa_1 Y_1^{-1} \right) \end{aligned}$$

ce qui ne nous laisse que deux termes non nuls que l'on peut récrire comme

$$\operatorname{tr}_1 (f_{N-1} \otimes I) (\nu_1 d_1 X_1^{-1} - \nu_1 Y_1^{-1}) + \operatorname{tr}_2 (I \otimes f_{N-1}) (\nu_2 d_2 X_2^{-1} - \nu_2 Y_2^{-1})$$

avec $\nu \equiv \zeta - \kappa$.

Pour simplifier cette expression nous allons, bien sûr, encore décomposer ν dans la base formée par les lignes de Y :

$$\nu = \sum_{i=1}^{N-2} \lambda_i a^{(i)} + \lambda_{N-1} \xi$$

Alors nous avons aussi

$$\nu d = \sum_{i=1}^{N-2} \lambda_i a^{(i+1)} + \lambda_{N-1} \xi d$$

La trace $\operatorname{tr} f_{N-1} \times$ matrice est juste l'élément $N-1, N-1$ de la matrice et on voit que la seule contribution vient des termes en λ_{N-2} et λ_{N-1} car $(a^{(k)} Y^{-1})_{N-1} = \delta_{k, N-1}$ pour $k \leq N-2$ (et la même chose pour X). Mais les termes en λ_{N-1} se compensent mutuellement et il ne nous reste que λ_{N-2} et son coefficient n'est rien d'autre que $\det Z$. Donc la formule finale est

$$\left\{ \frac{\det X_1}{\det Y_1}, \frac{\det X_2}{\det Y_2} \right\} = \frac{\det X_1}{\det Y_1} \frac{\det X_2}{\det Y_2} \left(\lambda_{N-2}^{(1)} \det Z_1 + \lambda_{N-2}^{(2)} \det Z_2 \right)$$

d'où l'on voit que, effectivement

$$\{A(z_i), A(z_j)\} = 0 \quad \forall i, j$$

et donc w_i commutent.

En résumé, les variables z_i et w_i construites d'une manière purement algébrique à partir des éléments de la matrice $l(z)$ ont les relations de commutation canoniques.

4.5 La reconstruction de $l(z)$

Dans la section 4.4 nous avons construit l'application qui associe à une matrice $l(z)$ g points sur la courbe Σ ce qui est la même chose (voir la section 2.3) qu'un point sur la jacobienne. Ici nous allons attaquer le problème inverse: étant donnés les g points sur la courbe, nous voulons construire la matrice $l(z)$ avec les propriétés requises, c'est-à-dire ayant le polynôme caractéristique $r(w, z)$ de (4.1) et les degrés de ses coefficients définis par (4.28).

Nous avons vu que dans le cas hyperelliptique (considéré dans la section 4.3.1) l'application inverse était donnée explicitement par les équations très simples (4.18). Malheureusement, nous n'avons plus de telles formules explicites pour N général. Néanmoins, nous allons trouver un système d'équation *triangulaire* pour les coefficients des polynômes $l_{ij}(z)$ ce qui démontrera l'existence de la transformation inverse et même donnera un algorithme de construction de $l(z)$ à partir des variables séparées.

4.5.1 Les polynômes X_k

Nous allons commencer par reconstruire les polynômes $X_k(w, z)$ introduits dans (4.33) à partir de w_i et z_i donnés. On rappelle que pour $k = 1, \dots, N-1$

$$X_k(w, z) \equiv \det \begin{pmatrix} b(z) \\ (d(z) + w)_1 \\ \vdots \\ (d(z) + w)_{k-1} \\ (d(z) + w)_{k+1} \\ \vdots \\ (d(z) + w)_{N-1} \end{pmatrix}$$

et

$$X_N(w, z) \equiv \det (d(z) + w)$$

où $b(z)$ et $d(z)$ sont maintenant inconnues mais doivent toujours avoir les degrés comme dans (4.28). Aussi, si la matrice $l(z)$ est la solution recherchée, on devrait avoir

$$\begin{cases} b(z_i) \phi(z_i) & = 0 \\ (d(z_i) + w_i) \phi(z_i) & = 0 \end{cases}$$

Comme avant, une condition nécessaire évidente que l'on doit avoir est

$$X_k(w_i, z_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, g \quad \forall k = 1, \dots, N$$

Il est remarquable que cette condition nous permette de trouver entièrement les polynômes X_k . Pour le voir, il faut distinguer deux cas car le polynôme X_N est un peu différent des autres. Commençons donc par considérer X_k avec $k = 1, \dots, N-1$: ces déterminants peuvent être développés en une somme des termes $z^k w^l$ avec les coefficients que l'on cherche à trouver et $l = 0, \dots, N-2$. Comme les degrés de tous les éléments de $b(z)$ sont $n-2$ sauf un, le dernier, qui est de degré $n-1$, il est facile de voir que si l'on fait le développement du déterminant selon la première ligne, presque tous les termes obtenus satisfont à

$$k \leq (N-1-l)n-2 \quad (4.62)$$

et que les seuls termes avec le degré supérieur en z proviennent du terme contenant le dernier élément de la première ligne mais ceux-là auront le coefficient dominant égal à celui de $l_{1N}(z)$ ou encore à celui de $\det l(z)$ qui, selon la discussion suivant l'équation (4.28), est une constante (c'est-à-dire appartient au centre de l'algèbre de Poisson). En d'autres mots, c'est une constante du mouvement qui ne contient pas d'informations dynamiques et que l'on ne peut de toute façon pas retrouver à partir des variables séparées.

La deuxième remarque importante est que la condition (4.62) est exactement la même que (4.7) qui impose la restriction sur les degrés de z pouvant apparaître dans le numérateur d'une différentielle abélienne du premier ordre. Donc si l'on prend le système d'équations

$$X_k(w_i, z_i) = 0 \quad (1 \leq i \leq g)$$

et déplace les rares termes qui ne satisfont pas à (4.62) dans la partie droite, on arrive à un système d'équations linéaires non homogènes sur les g coefficients de X_k restants qui aura la forme

$$\sum_{I=1}^g (\text{coeff de } X_k)_I \omega_I(w_i, z_i) = \tilde{\omega}_k(w_i, z_i) \quad (4.63)$$

et donc en résolvant ce système on obtiendra la solution X_k sous la forme de (4.11) qui, on le rappelle, n'a de pôles que sur le diviseur thêta. Donc si le point de départ (w_i, z_i) appartient à la jacobienne affine, on peut résoudre le système (4.63) et trouver les coefficients des polynômes X_k .

Le cas de $X_N(w, z) = \det(d(z) + w)$ se traite presque de la même manière sauf qu'ici nous n'avons pas un seul terme dont le degré en z dépasse juste de 1 le degré maximal pouvant apparaître dans une différentielle du premier ordre, mais il y a beaucoup de tels termes et nous avons aussi un terme en w^{N-1} qui, lui non plus, n'est pas holomorphe. Mais le raisonnement suivant

montre que les coefficients de tous ces termes sont encore des constantes dans le sens précédent: effectivement, par définition de $d(z)$ comme la partie inférieure droite de la matrice $l(z)$, le coefficient du monôme $w^l z^{(N-1-l)n-1}$ dans le développement de X_N est le même que le coefficient de $w^{l+1} z^{(N-1-l)n-1}$ dans le développement de $\det(l(z) + w)$. Mais ce dernier est le coefficient dominant du polynôme t_{N-l-1} entrant dans le polynôme caractéristique et par la remarque de la fin de la section 4.3.2 il appartient au centre de l'algèbre de Poisson.

Donc après avoir déplacé ces termes non holomorphes dans la partie droite de l'équation, on se retrouve encore avec un système d'équations linéaires du même type que (4.63), ce qui montre par le même raisonnement que précédemment que X_N s'exprime à l'aide des fonctions holomorphes sur la jacobienne affine.

La première étape de notre construction est achevée: nous avons réussi à reconstruire tous les polynômes X_k à partir du point sur la jacobienne pourvu qu'il n'appartienne pas au diviseur thêta. Maintenant nous allons exprimer la matrice $l(z)$ en fonction de ces polynômes.

4.5.2 La reconstruction de $l(z)$ à partir de X_k

Comme énoncé ci-dessus, nous allons montrer que les coefficients de $l(z)$ se trouvent par résolution d'un système d'équations triangulaire à partir des coefficients des polynômes X_k (que l'on suppose connus maintenant grâce à la section précédente) et aussi ceux du polynôme caractéristique $\det(l(z) + w)$ connu, lui aussi, dès le début.

Nous allons regarder de plus près la structure des éléments de la matrice $l(z)$. Pour cela, introduisons deux nouvelles matrices: la première est de taille $N \times (N - 1)$ et est définie comme

$$L'(z) = \begin{pmatrix} zb(z) \\ d(z) \end{pmatrix} - z^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & l_{1N}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'intérêt de cette définition est que $L'(z) = \mathcal{O}(z^{n-1})$ comme nous avons enlevé exactement les termes contenant z^n .

La deuxième matrice est aussi de taille $N \times (N - 1)$:

$$L(w, z) = \begin{pmatrix} zb(z) \\ d(z) \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et nous définissons aussi $2N$ matrices de taille $(N-1) \times (N-1)$ que l'on notera $L'_k(z)$ et $L_k(w, z)$ et qui s'obtiennent de $L'(z)$ et $L(w, z)$ respectivement par suppression de la $(k+1)$ -ième ligne (par convention, pour $k = N$ on supprime la première ligne).

Maintenant, ces définitions ont été faites pour avoir les relations

$$\det L_k(w, z) = \begin{cases} zX_k(w, z) & \text{si } k < N \\ X_N(w, z) & \text{si } k = N \end{cases} \quad (4.64)$$

à partir desquelles on compte retrouver les composantes de L_k en fonction de celles de X_k . On ne peut certainement pas le faire directement à partir de (4.64) et donc on va linéariser ces équations ou, ce qui revient au même, extraire la partie du déterminant linéaire en L' . Pour cela on définit la matrice V_k par

$$L_k(w, z) = V_k(w, z) + L_k(z)$$

c'est-à-dire

$$V_k(w, z) = \begin{pmatrix} & & & & & l_{1N}^{(0)} z^n \\ w & & & & & \\ z^n & w & & & & \\ & & z^n & w & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & z^n & w \end{pmatrix} \begin{matrix} k-1 \text{ lignes} \\ N-k-1 \text{ lignes} \end{matrix}$$

(on n'a pas la première ligne du tout pour $k = N$).

Alors

$$\det L_k(w, z) = \det V_k(w, z) (1 + \text{tr}(V_k^{-1}(w, z)L'_k(z)) + \mathcal{O}(L'^2))$$

et le déterminant de V_k est facile à calculer:

$$\det V_k(w, z) = (-1)^N l_{1N}^{(0)} w^{k-1} z^{(N-k)n} \quad (4.65)$$

(sauf qu'il n'y a pas de facteur $(-1)^N l_{1N}^{(0)}$ pour $k = N$).

Maintenant, calculons aussi la trace: d'abord, la matrice V_k est facile à inverser à cause de peu d'éléments non nuls qu'elle a:

$$V_k^{-1}(w, z) = \begin{pmatrix} & w^{-1} & & & \\ & -w^{-2}z^n & w^{-1} & & \\ \frac{w^2 z^{-3n}}{l_{1N}^{(0)}} & & z^{-n} & -wz^{-2n} & \\ \frac{-wz^{-2n}}{l_{1N}^{(0)}} & & & z^{-n} & \\ \frac{z^{-n}}{l_{1N}^{(0)}} & & & & \end{pmatrix}$$

ou, plus formellement:

$$(V_k^{-1})_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+1-j} w^{-(i+2-j)} z^{n(i+1-j)} & 1 \leq i \leq k-1, 2 \leq j \leq i+1 \\ (-1)^{N-1-i} l_{1N}^{(0)} w^{N-1-i} z^{-n(N-i)} & k \leq i \leq N-1, j=1 \\ (-1)^{j-i-1} w^{j-i-1} z^{-n(j-i)} & k \leq i \leq N-1, j \geq i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors la trace se calcule:

$$\begin{aligned} \text{tr}(V_k^{-1}(w, z)L'_k(z)) &= \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j w^{-j-1} z^{nj} (L'_k)_{i-j+1, i} + \\ &+ \sum_{i=k}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1-i} (-1)^j w^j z^{-n(j+1)} (L'_k)_{i+j+1, i} \\ &= \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j w^{-j-1} z^{nj} \sum_{i=j+1}^{k-1} (L'_k)_{i-j+1, i} + \\ &+ \sum_{j=0}^{N-1-k} (-1)^j w^j z^{-n(j+1)} \sum_{i=k}^{N-1-j} (L'_k)_{i+j+1, i} \end{aligned}$$

et cette équation ensemble avec (4.65) nous permet d'écrire la partie de $\det L_k(w, z)$ linéaire en $L'(z)$ explicitement comme

$$\begin{aligned} \det V_k(w, z) \text{tr}(V_k^{-1}(w, z)L'_k(z)) &= \\ &= (-1)^{k-2} (L'_k)_{2, k-1} z^{(N-2)n} + w^{k-2} z^{(N-k)n} \pm \\ &\pm \dots - \\ &- ((L'_k)_{22} + (L'_k)_{33} + \dots + (L'_k)_{k-1, k-1}) w^{k-3} z^{(N-k+1)n} + \\ &+ ((L'_k)_{21} + (L'_k)_{32} + \dots + (L'_k)_{k, k-1}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ((L'_k)_{k+1,k} + \dots + (L'_k)_{N-1,N-2} + (L'_k)_{1,N-1})w^{k-1}z^{(N-k-1)n} - \\
& - ((L'_k)_{k+2,k} + \dots + (L'_k)_{N-1,N-3} + (L'_k)_{1,N-2})w^kz^{(N-k-2)n} \pm \\
& \pm \dots + \\
& + (-1)^{N-k-1}(L'_k)_{1,k}w^{N-2}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Regardons attentivement maintenant l'équation que nous avons obtenue. Dans sa partie gauche nous avons une quantité connue (voir (4.64)) tandis que dans sa partie droite on retrouve tous les coefficients de $b(z)$ et $d(z)$ sans exception: en effet, par définition de L'_k

$$(L'_k)_{i,j} = \begin{cases} zb_{j+1} \pmod{z^n} & \text{si } i = 1 \text{ et } k \neq N \\ d_{i-1,j} \pmod{z^n} & \text{si } i < k \text{ mais } i > 1 \\ d_{i,j} \pmod{z^n} & \text{si } i \geq k \end{cases}$$

donc ils sont tous là. De plus, nous affirmons que il est possible de résoudre ces N équations et trouver $b(z)$ et $d(z)$.

Pour le voir, introduisons d'abord les notations pour les coefficients de $L'(z)$:

$$L'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k L'^{(k)}$$

On voit que l'équation (4.66) possède une structure triangulaire par rapport aux éléments de $L'(z)$ et que donc on peut les trouver en termes des fonctions holomorphes de la partie gauche ligne par ligne (on trouve d'abord la première ligne en utilisant toutes les équations de proche en proche, ensuite la deuxième etc.). De plus, remarquons que $L'^{(n-1)}$ n'aura que des pôles simples sur le diviseur thêta (tout comme les polynômes X_k) tandis que $L'^{(n-2)}$ pourra avoir des pôles doubles et $L'^{(n-k)}$, en général, aura des pôles d'ordre k .

La partie linéaire (4.66) ayant joué son rôle, revenons maintenant au déterminant de $L_k(w, z)$ complet que nous allons récrire comme

$$\det L_k(w, z) = \sum_{p=0}^{N-1} w^p L_k^p(z)$$

avec $L_k^p(z)$ étant des polynômes en z seulement. On peut voir, directement à partir de la définition de $L(w, z)$ que le degré maximal de z qui peut se trouver dans un monôme $w^p z^q$ faisant partie du développement de $\det L_k(w, z)$ est $(N - p - 1)n - 1$ comme on peut toujours trouver un mineur contenant w^p avec les $l_{ij}(z)$ du degré maximal - sauf si $k = N$ et $p = N - 1$ dans quel cas on n'a que le terme w^{N-1} . Donc, normalement, $\deg L_k^p = (N - p - 1)n - 1$ et il est nul dans le cas particulier de ci-dessus.

Intéressons-nous maintenant au coefficient dominant de $L_k^p(z)$: la description du mineur du déterminant dans lequel ce coefficient apparaît montre qu'il est une fonction linéaire des éléments de $L^{(n-1)}$. Effectivement, il contient soit un certain $l_{1j}^{(0)}$ (multiplié par $l_{i,i+1}^{(0)}$ qui est une constante), soit $l_{1N}^{(0)}$ qui est alors multiplié par $l_{ij}^{(0)}$ avec $i \neq j + 1$. Comme on avait vu que l'on pouvait trouver $L^{(n-1)}$, cela implique que l'on peut aussi trouver le coefficient dominant de $L_k^p(z)$.

Maintenant regardons le coefficient de $L_k^p(z)$ suivant: ici, on n'aura pas que le terme linéaire en $L^{(n-2)}$ mais aussi des termes quadratiques en $L^{(n-1)}$. L'important est qu'il ne peut y avoir d'autres termes car ce coefficient peut avoir un pôle double, au maximum, sur le diviseur thêta, ce qui exclut toutes les autres possibilités. Et comme nous connaissons déjà ces deux-là, on connaît aussi le deuxième coefficient de $L_k^p(z)$ et, de proche en proche, tous les autres. Ainsi, nous pouvons exprimer le polynôme $L_k^p(z)$ et donc tous les coefficients des polynômes $l_{ij}(z)$ qui y apparaissent en tant que fonctions holomorphes sur la jacobienne affine.

Notre reconstruction est presque terminée, il ne reste qu'à trouver les éléments de $l(z)$ qui n'entrent pas dans $L(w, z)$ et ne peuvent donc pas être exprimés en fonction de X_k . Ce sont les éléments de la première colonne $l_{k1}(z)$ et on les retrouve directement à partir du polynôme caractéristique: sa partie linéaire en $l_{k1}(z)$ est de la forme

$$l_{11}(z)w^{N-1} + l_{21}(z)w^{N-2}z^n + \dots + l_{N1}(z)z^{(N-1)n}$$

d'où on trouve les coefficients de $l_{k1}(z)$ en fonction de ceux de $r(w, z)$.

Finalement, nous avons montré qu'il était possible de construire une matrice $l(z)$ d'une manière algébrique à partir du point (w_i, z_i) sur la jacobienne affine. Par construction, cette application est inverse à celle de la section précédente qui donnait les variables séparées en fonction des éléments matriciels de $l(z)$. On a donc établi un isomorphisme algébrique entre l'espace des matrices $l(z)$ décrites précédemment et la jacobienne affine d'une courbe quelconque (pas nécessairement hyperelliptique). On utilisera ce résultat maintenant dans les sections suivantes pour explorer la structure de l'algèbre des observables que l'on peut maintenant voir comme des fonctions sur cet espace de matrices au lieu de fonctions sur la jacobienne.

4.6 L'étude de l'algèbre des observables

Nous allons utiliser ici l'isomorphisme construit précédemment entre la jacobienne affine $\mathcal{J} - \mathcal{X}$ et l'espace affine de dimension g qui s'obtient naturellement à partir de l'espace plus grand de toutes les matrices de la forme

(4.28) en imposant la condition (4.23). Pour un choix très particulier (et uniquement celui-ci) de cette condition (correspondant à la courbe la plus singulière possible), l'anneau affine devient gradué et cela nous permet de calculer facilement la caractéristique d'Euler de $\mathcal{J} - \mathcal{X}$ (et donc de \mathcal{X}) qui est, en fait, indépendante du choix que l'on avait fait.

4.6.1 L'anneau affine

Le but de cette section est de calculer la caractéristique de l'anneau affine dans le cas où il devient gradué: le caractère d'un anneau gradué est défini comme la fonction génératrice des dimensions des sous-espaces homogènes.

Ce caractère nous sera utile ensuite pour calculer la caractéristique d'Euler.

L'anneau \mathbb{A}

Nous allons considérer l'anneau polynômial librement engendré par les coefficients des éléments matriciels de $l(z)$:

$$\mathbb{A} = \mathbb{C}[l_{ij}^{(k)}]$$

Cet anneau admet une gradation naturelle induite par le choix d'attribuer le degré N à z et le degré $Nn - 1$ à w . Les constantes doivent, bien sûr, avoir le degré 0 et donc les polynômes unitaires $l_{1N}(z)$ et $l_{i+1,i}(z)$ de degré $n - 1$ et n en z (par (4.28)) ont le degré Nn et $N(n - 1)$ respectivement dans \mathbb{A} . Alors, pour que les autres termes dans la décomposition du déterminant soient homogènes, il faut que le degré des autres éléments de $l(z)$ soit défini par

$$\deg l_{ij}(z) = Nn + i - j - 1$$

Finalement, appliquant les considérations d'homogénéité à l'expression

$$l_{ij}(z) = l_{ij}^{(0)} z^{\deg_z l_{ij}} + l_{ij}^{(1)} z^{\deg_z l_{ij} - 1} + \dots + l_{ij}^{(\deg_z l_{ij})}$$

on obtient l'expression suivante pour le degré d'un coefficient général:

$$\deg l_{ij}^{(\alpha)} = N(n - \deg_z l_{ij} + \alpha) + i - j - 1$$

Remarquons que la gradation choisie ici est différente de celle utilisée pour le cas hyperelliptique dans [21] où le degré de z était fixé à 1 ce qui était plus commode dans ce cas-là mais menait à des degrés demi-entiers qui deviendraient des degrés en $1/N$ dans le cas général: notre choix d'affecter le degré N à z permet d'éviter des degrés fractionnels.

Comme l'anneau \mathbb{A} est librement engendré, on peut calculer facilement son caractère:

$$\begin{aligned} \text{ch } \mathbb{A} &= \left(\prod_{j=1}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{1}{1 - q^{N\alpha + N-j}} \right) \prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{1}{1 - q^{N\alpha}} \times \\ &\times \prod_{i=1}^{N-1} \left(\left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \prod_{\alpha=1}^n \frac{1}{1 - q^{N\alpha + i - j}} \right) \prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{1 - q^{N\alpha}} \right) \end{aligned}$$

Nous allons simplifier cette expression en utilisant les notations standards pour les q -nombres:

$$\begin{aligned} [n] &\equiv 1 - q^n \\ [N]! &\equiv [1][2] \dots [N] \end{aligned}$$

Avec ces notation le produit dans la première ligne devient

$$\prod_{\alpha=1}^{n-1} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{1}{1 - q^{N\alpha + j}} = \frac{[N-1]!}{[Nn-1]!}$$

tandis que le reste de l'expression s'écrit

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{N-1} (\dots) &= \prod_{i=1}^{N-1} \prod_{j=1}^N \prod_{\alpha=1}^n \frac{1}{1 - q^{N\alpha + i - j}} \\ &= \prod_{\alpha=1}^n \prod_{i=1}^{N-1} \prod_{k=-(N-i)}^{i-1} \frac{1}{1 - q^{N\alpha + k}} \\ &= \prod_{i=1}^{N-1} \frac{[i-1]!}{[Nn + i - 1]!} \end{aligned}$$

et en combinant les deux on trouve une formule simple pour le caractère

$$\text{ch } \mathbb{A} = \prod_{i=1}^N \frac{[i-1]!}{[Nn + i - 2]!}$$

L'anneau \mathbb{A}_0

L'anneau qui nous intéresse vraiment n'est pas l'anneau \mathbb{A} mais celui des observables qui s'obtient en factorisant \mathbb{A} par l'idéal engendré par les relations

$\det(l(z) + w) = r(w, z)$. En d'autres mots, il faut prendre le quotient de \mathbb{A} par les relations $t_k^{(l)}(l_{ij})^{(\alpha)} = t_k^{(l)0}$ où les t_k à gauche sont des polynômes dans les coefficients des éléments de $l(z)$ tandis que les nombres à droite proviennent des polynômes (donnés) apparaissant dans $r(w, z)$. Définissons maintenant deux anneaux suivants:

$$\mathbb{A}_0 = \frac{\mathbb{A}}{\sum (t_k^{(\alpha)} \mathbb{A})} \quad \mathbb{A}_{t^0} = \frac{\mathbb{A}}{\sum (t_k^{(\alpha)} - t_k^{(\alpha)0} \mathbb{A})}$$

Le deuxième est l'anneau affine auquel on s'intéresse et le premier correspond à un cas très spécial d'une courbe la plus singulière possible. Ces anneaux sont complètement différents, en particulier, l'anneau \mathbb{A}_0 est gradué mais \mathbb{A}_{t^0} ne l'est pas à moins que tous les coefficients soient nuls. Mais malgré cela l'article [22] démontre que la caractéristique d'Euler que l'on va introduire ci-dessous est la même pour les complexes construits à partir de \mathbb{A}_0 et \mathbb{A}_{t^0} (même si les cohomologie individuelles peuvent être différentes). Ceci explique pourquoi nous allons nous intéresser seulement à l'anneau \mathbb{A}_0 à partir de maintenant.

Commençons par calculer son caractère et introduisons pour le faire un autre anneau \mathbb{F} qui est librement engendré par les coefficients des polynômes $t_k(z)$ de (4.23). La proposition 1 de [22] montre que

$$\text{ch } \mathbb{A}_0 = \frac{\text{ch } \mathbb{A}}{\text{ch } \mathbb{F}} \quad (4.67)$$

et donc pour calculer le caractère de \mathbb{A}_0 il suffit de calculer celui de \mathbb{F} ce qui est, bien sûr, facile comme \mathbb{F} est librement engendré: pour que l'équation

$$\det(l(z) + w) = w^N + t_1(z)w^{N-1} + \dots + t_N(z)$$

soit homogène il faut que $\deg t_k(z)$ soit égal à $(Nn - 1)k$ et les degrés de ses coefficients $t_k^{(l)}$ définis par (4.24) sont

$$\deg t_k^{(l)} = N(l + 1) - k$$

d'où

$$\text{ch } \mathbb{F} = \prod_{k=1}^N \prod_{i=(1)}^{nk} \frac{1}{1 - q^{Ni-k}}$$

où les parenthèses autour de 1 signifient que le facteur avec $k = N$ et $i = 1$ est exclu du produit (qui est alors bien défini) et donc finalement

$$\text{ch } \mathbb{A}_0 = \prod_{k=1}^N \frac{[k-1]!}{[Nn+k-2]!} \prod_{i=(1)}^{nk} [Ni-k]$$

4.6.2 Les groupes de cohomologie

Nous allons définir ici les espaces des k -formes différentielles C^k et C_0^k aux coefficients dans \mathbb{A} et \mathbb{A}_0 respectivement et la différentielle extérieure $d : C^k \rightarrow C^{k+1}$ qui définit les complexes C^* et C_0^* .

Les champs de vecteurs D_i

A chaque 1-forme holomorpe

$$\omega_{ik}(w, z) = \frac{w^{N-k-1} z^{i-1}}{\partial_w r(w, z)} dz$$

avec

$$\begin{cases} k &= 1, \dots, N-1 \\ i &= 1, \dots, kn-1 \end{cases}$$

on peut associer un opérateur différentiel D_{ik} qui agit sur l'anneau \mathbb{A} d'une manière suivante:

$$D_{ik}x \equiv \left\{ t_k^{(kn-i-1)}, x \right\} \quad (4.68)$$

Les opérateurs D_{ik} forment une famille des champs de vecteurs qui est commutative parce que tous les coefficients $t_k^{(l)}$ sont en involution et il suffit donc d'utiliser l'identité de Jacobi pour trouver $\{D_{ik}, D_{i'k'}\} = 0$.

Considérons l'anneau \mathbb{D} librement engendré par les D_{ik} . La gradation de l'anneau \mathbb{A} induit une gradation sur cet anneau:

$$\deg D_{ik} = -\deg \omega_{ik} = (Nn-1)k - Ni$$

qui est naturelle dans le sens que, comme $\deg\{x, y\} = \deg x + \deg y - \deg w$ (si x et y ne commutent pas), on a alors

$$\deg Dx = \deg D + \deg x$$

Le caractère de l'anneau \mathbb{D} est de nouveau évident à calculer:

$$\text{ch } \mathbb{D} = \prod_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^{nk-1} \frac{1}{1 - q^{Ni-k}} \quad (4.69)$$

Par définition de D_{ij} (4.68) et la commutativité de $t_k^{(i)}$, on a $D_{ij}t_k^{(l)} = 0$ et donc l'action de l'anneau \mathbb{D} passe par factorisation aussi à \mathbb{A}_0 .

Pour conclure cette section, remarquons que les opérateurs D_{ik} peuvent être vus aussi comme les champs $\partial/\partial\tau_{ik}$ où les τ_{ik} sont les temps correspondants aux intégrales de mouvement $t_k^{(kn-i-1)}$ qui sont les coordonnées sur la Jacobienne. Il est important de voir que les champs de vecteurs D_{ik} sont parallèles aux feuilles isomorphes à la jacobienne affine et n'ont pas de composantes transversales ce qui est clair si on les définit à l'aide de τ_{ik} .

Les complexes des formes différentielles

On introduit maintenant les différentielles duales aux champs de vecteurs D_{ik} que l'on notera $d\tau_{ik}$ et les espaces de k -formes différentielles aux coefficients dans $\mathbb{A} C^k$ pour $k = 0, \dots, g$ engendrés par

$$\{x_{i_1 \dots i_k} d\tau_{i_1} \wedge \dots \wedge d\tau_{i_k} \mid x_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{A}\} \quad (4.70)$$

Nous définissons aussi le complexe C^* :

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{d} C^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C^g \rightarrow 0$$

où d est défini par

$$d = \sum_{i,k} d\tau_{ik} D_{ik} \quad (4.71)$$

et transforme une k -forme en une $(k+1)$ -forme: on applique d'abord D_{ik} aux coefficients et ensuite on fait le produit extérieur avec $d\tau_{ik}$. La propriété $d \circ d = 0$ découle de la commutativité des opérateurs D_{ij} .

Comme les D_{ij} agissent encore sur \mathbb{A}_0 , on peut définir de la même manière le complexe C_0^*

$$0 \rightarrow C_0^0 \xrightarrow{d} C_0^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C_0^g \rightarrow 0$$

où les espaces C_0^k sont les mêmes que (4.70) mais avec les coefficients dans \mathbb{A}_0 .

Si l'on donne à $d\tau_{ik}$ le degré opposé à celui de D_{ik} :

$$\deg d\tau_{ik} = -\deg D_{ik} = \deg \omega_{ik} \quad (4.72)$$

les espaces C^k et C_0^k deviennent gradués tout comme les complexes C^* et C_0^* car la différentielle d est alors de degré nul.

4.6.3 La q -caractéristique d'Euler

Nous pouvons définir maintenant la q -caractéristique d'Euler d'un complexe gradué C de longueur g :

$$\chi_q(C^*) = \text{ch } C^0 - \text{ch } C^1 \pm \dots + (-1)^g C^g$$

Elle possède toutes les propriétés habituelles de la caractéristique d'Euler. En particulier, on peut voir que dans la limite $q \rightarrow 1$ elle devient la caractéristique d'Euler habituelle car $\lim_{q \rightarrow 1} \text{ch } C^k = \dim C^k$ et donc si $\chi_q(C^*)$ admet une limite finie (ce qui sera le cas), elle ne peut être que $\chi(C^*)$. Intuitivement,

on ne peut pas calculer $\chi(C^*)$ directement car les dimensions de C^k sont infinies, mais la q -caractéristique d'Euler est néanmoins bien définie et son calcul montre que les dimensions se compensent mutuellement pour donner une caractéristique d'Euler finie, même si elle croît très rapidement. Ainsi, le fait que l'on ait une gradation sur l'anneau \mathbb{A}_0 nous permet de définir $\chi_q(C^*)$ et grâce à cela calculer la caractéristique d'Euler habituelle – c'est surtout remarquable si l'on considère que l'anneau \mathbb{A}_0 est l'unique cas dans lequel on peut introduire la gradation, mais à cause des explications de la section 4.6.1 la caractéristique d'Euler est encore la même dans le cas général.

Dans le cas hyperelliptique, on peut calculer directement le caractère de C^k et trouver la q -caractéristique d'Euler directement à partir de sa définition. Mais pour $N \geq 3$ il existe un moyen plus simple de la calculer qui se trouve en écrivant d'abord

$$\text{ch } C^k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq g} q^{\sum_j \deg d\tau_{i_j}} \text{ch } \mathbb{A}$$

et en utilisant l'identité

$$\prod_{i=1}^g (1 + xq^{\alpha_i}) = \sum_{k=0}^g \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq g} q^{\sum_j \alpha_{i_j}} x^k$$

pour ensuite écrire

$$\chi_q(C^*) = \sum_{k=0}^g (-1)^k \text{ch } C^k = \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_{k=0}^g (-1)^k x^{-k-1} \prod_{i=1}^g (1 + xq^{\deg d\tau_i}) dx \text{ch } \mathbb{A}$$

où le contour d'intégration entoure 0 et -1 . La somme sur k ci-dessus de 0 à g peut être remplacée par la somme jusqu'à ∞ car les termes de degrés supérieurs à $g+1$ ne donnent pas de résidu en 0 de toute façon. Finalement on a donc

$$\chi_q(C^*) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x+1} \prod_{i=1}^g (1 + xq^{\deg d\tau_i}) \text{ch } \mathbb{A}$$

Compte tenu de (4.69) et de (4.72), on trouve la formule qui nous permet de calculer effectivement la q -caractéristique d'Euler suivant (où l'on utilise un indice simple $i = 1, \dots, g$ pour les D_{mk} avec m, k définis par (4.7)):

$$\chi_q(C^*) = (-1)^g q^{-\sum_i \deg D_i} \frac{\text{ch } \mathbb{A}}{\text{ch } \mathbb{D}} \quad (4.73)$$

Maintenant en utilisant (4.73) et (4.67) on obtient

$$\chi_q(C_0^*) = (-1)^g q^{-\sum_{ik} \deg D_{ik}} \prod_{k=1}^N \frac{[k-1]!}{[Nn+k-2]!}$$

$$\times \prod_{k=1}^{N-1} \left([(Nn-1)k] \prod_{i=1}^{nk-1} [Ni-k]^2 \right) \prod_{i=1}^{Nn-1} [Ni] \quad (4.74)$$

Nous avons le même nombre de q -nombres au numérateur et au dénominateur de (4.74) et donc χ_q a une limite finie quand $q \rightarrow 1$ qui est, comme on l'avait déjà dit, juste la caractéristique d'Euler habituelle:

$$\begin{aligned} \chi(C_0^*) &= (-1)^g (Nn-1)^{N-1} N^{Nn-1} (N-1)! \prod_{k=1}^{N-1} \frac{k!}{(Nn+k-1)!} \\ &\times \prod_{k=1}^{N-1} \left(k \prod_{i=1}^{nk-1} (Ni-k)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Il est intéressant de remarquer, même si nous ne connaissons pas de raison pour cette relation, que l'on peut aussi écrire (4.75) sous une forme simple suivante:

$$\chi(C_0^*) = \prod_{k=0}^{N-1} \prod_{m=1}^{Nn-1} \frac{Nm - (Nn-1)k}{m+k} \quad (4.76)$$

qui admet une interprétation géométrique simple en termes des tableaux de Young (on peut vérifier facilement qu'en développant le double produit on obtient effectivement (4.75)).

Les formule (4.75) et (4.76) représentent le premier résultat intéressant que l'on a obtenu. Elle permettent de calculer la caractéristique d'Euler du diviseur thêta grâce à la relation

$$\chi(\mathcal{X}) = -\chi(\mathcal{J} - \mathcal{X}) \quad (4.77)$$

La fin de l'article [22] contient quelques exemples d'application de (4.75) qui montrent que (4.77) donne les résultats attendus dans les cas particuliers pour lesquels la caractéristique d'Euler du diviseur thêta avait déjà été calculée auparavant.

Pour illustrer la vitesse de croissance de la caractéristique d'Euler, donnons quelques exemples de ses valeurs (approximatives car il n'est probablement pas très utile d'écrire précisément les nombres à 55 chiffres ...):

N, n	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	-1	2	-5	14	-42
4	-1	21	-1690	225264	-3.93 10 ⁷	8.12 10 ⁹
5	-6	-97682	-1.43 10 ¹⁰	-5.02 10 ¹⁵	-2.85 10 ²¹	-2.19 10 ²⁷
6	484	4.03 10 ¹¹	8.69 10 ²¹	7.18 10 ³²	1.25 10 ⁴⁴	3.47 10 ⁵⁵

4.6.4 Le lien entre les cohomologies et l'algèbre des observables

Les cohomologies supérieures

On considère ici les cohomologies $H^k(C_0^*)$ associées au complexe (C_0^*, d) défini par (4.71). Comme $\deg d = 0$, le complexe de cohomologie est encore gradué et l'on a

$$\chi_q(C^*) = \sum_{k=0}^g (-1)^k \operatorname{ch} H^k(C_0^*) \quad (4.78)$$

Bien sûr, le fait que la q -caractéristique d'Euler admette une limite finie ne suffit pas pour démontrer que $\dim H^k < \infty$ mais nous supposons ici que c'est effectivement le cas:

Conjecture 8. *Tous les espaces $H^k(C_0^*)$ sont de dimension finie.*

L'intérêt que l'on porte à ces cohomologies s'explique par le lien remarquable qui existe entre le groupe $H^g(C_0^*)$ et l'algèbre des observables \mathbb{A} . On peut commencer par montrer la

Proposition 9. *Soient (h_α) une base homogène de $H^g(C_0^*)$. Alors l'application définie sur les éléments h_α par*

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \otimes H^g(C_0^*) &\rightarrow \mathbb{A}_0 \\ (P(D), h_\alpha) &\mapsto P(D)h_\alpha \end{aligned}$$

et étendue par linéarité sur l'espace tout entier est surjective.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{A}_0$, on considère

$$\Omega = x d\tau_1 \wedge \cdots \wedge d\tau_g \in C_0^g$$

qui s'écrit donc comme

$$\Omega = \Omega_0 + d\Omega_1 \quad \text{avec } \Omega_0 \in H^g(C_0^*) \text{ et } \Omega_1 \in C_0^{g-1}$$

Si $\Omega_0 = x_0 d\tau_1 \wedge \cdots \wedge d\tau_g$ cela se traduit par

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^g D_i x_i$$

avec $x_i \in \mathbb{A}_0$. Mais comme $\deg D_i > 0$, $\deg x_i < \deg x$ et donc si l'on applique la même décomposition à chacun des x_i on finira avec une expression de la forme $x = \sum_j P_j(D)x_{0j}$ avec $P_j(D)$ des polynômes en D_i et $x_{0j} d\tau_1 \wedge \cdots \wedge d\tau_g \in H^g(C_0^*)$ au bout d'un nombre fini d'étapes. \square

Remarquons que l'expression de x sous la forme

$$x = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(D_1, \dots, D_g) h_{\alpha} \quad (4.79)$$

n'est pas unique. Pour le voir on peut revenir à la formule (4.73) qui peut être réécrite, à l'aide de (4.78), comme

$$\text{ch } \mathbb{A}_0 \equiv \text{ch } \mathbb{D}(\text{ch } H^g(C_0^*) - \text{ch } H^{g-1}(C_0^*) \pm \dots)$$

Si une telle représentation était unique, alors A_0 aurait le même caractère que le premier terme à droite, c'est-à-dire serait isomorphe à l'espace librement engendré par $H^g(C_0^*)$ sur \mathbb{D} . Mais en fait il y a un second terme qui exprime l'existence des relations linéaires entre les différentes expressions de la forme (4.79), tandis que le troisième terme exprime que ces expressions ne sont pas toutes indépendantes etc.

L'application ci-dessus n'est donc pas injective. Par contre, elle reste surjective même étendue à l'anneau \mathbb{A} tout entier: en fait, toutes les observables s'obtiennent par l'action des D_i sur un nombre fini de fonctions apparaissant comme les coefficients des éléments de $H^g(C_0^*)$:

Proposition 10. *La même application que ci-dessus mais avec les polynômes $P(D)$ ayant leurs coefficients dans \mathbb{F} est surjective sur \mathbb{A} .*

Démonstration. La démonstration se fait de nouveau par récurrence sur le degré de x . L'équation (4.67) implique en particulier $\mathbb{A} \simeq \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{A}_0$ ce qui nous permet de décomposer x comme

$$x = x_0 + \sum_i f_i x_i$$

où $f_i \in \mathbb{F}$ et $x_i \in \mathbb{A}_0$. Ici $\deg x_0 = \deg x$ et $\deg x_i < \deg x$ pour $i > 0$ car $\deg f_i > 0$. Il suffit maintenant d'appliquer la proposition 9 à x_0 et l'hypothèse de récurrence aux x_i pour achever la démonstration. \square

L'existence d'une telle correspondance entre les observables et les cohomologies supérieures est déjà remarquable en soi car il est loin d'être évident *a priori* que l'on puisse obtenir toutes les observables par l'action des hamiltoniens sur un nombre fini de fonctions. De plus, elle tient encore dans le cas des systèmes intégrables quantiques (voir le chapitre suivante) et non pas seulement dans le cas classique. Cette correspondance est valable pour tout N , mais elle est surtout efficace conjugué à la conjecture **3** de [21] qui décrit le groupe de cohomologie supérieur en termes de fonctions holomorphes sur $\mathcal{J} - \mathcal{X}$ de la forme (4.11) comme nous allons le voir dans la section suivante.

La comparaison du cas hyperelliptique et cas général

Quoique nous ne soyons pas encore capables de démontrer les conjectures sur les cohomologies, on a des fortes raisons de croire qu'elles sont vraies et l'on va discuter ici quelques unes de leurs conséquences.

Pour voir quelle est la forme des cohomologies (dans le cas hyperelliptique) introduisons d'abord

$$\mu_k = \frac{z^{g-k} dz}{y} \quad -g+1 \leq k \leq g$$

une base de $H^1(\mathcal{J} - \mathcal{X}, \mathbb{C})$ (on rappelle que y est défini par l'équation de la courbe hyperelliptique (4.2) dans ce cas). On peut aussi définir la forme associée à μ sur la jacobienne affine en posant

$$\tilde{\mu}(P_1, \dots, P_g) \equiv \sum_{i=1}^g \mu(P_i)$$

et définir les espaces W^k engendrés par les formes

$$\tilde{\mu}_{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{\mu}_{i_k}$$

Considérons maintenant l'application naturelle

$$i' : W^k \equiv H^k(\mathcal{J} - \mathcal{X}, \mathbb{C}) \rightarrow H^k(\Sigma^g - (\mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_\infty), \mathbb{C})$$

où $\mathcal{X} \simeq \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_\infty$ selon (4.9). La proposition 5 de [21] montre que le noyau de cette application est

$$\text{Ker } i' = \omega \wedge W^{k-2}$$

où

$$\omega \equiv \sum_{k=1}^g \tilde{\mu}_k \wedge \tilde{\mu}_{-k}$$

La conjecture 3 du même article consiste à supposer que l'application i' est aussi surjective et que donc les cohomologies sont données par

$$H^k(C^*) = \frac{W^k}{\omega \wedge W^{k-2}} \quad (4.80)$$

L'essence géométrique de cette conjecture – qui montre pourquoi elle est non triviale – est que même si, en général, une forme différentielle peut avoir des singularités soit sur \mathcal{X}_0 , soit sur \mathcal{X}_∞ on peut éliminer le premier type de singularités en ajoutant les formes exactes. D'une façon équivalente, on

peut aussi formuler la conjecture sur les cycles (sur lesquels l'opération \wedge est définie par dualité).

La première conséquence de la conjecture est qu'elle permet de calculer les dimensions de cohomologies: comme $\dim W^k = \binom{2g}{k}$ nous avons

$$\begin{aligned} \dim H^0(C^*) &= 1 \\ \dim H^1(C^*) &= 2g \\ \dim H^k(C^*) &= \binom{2g}{k} - \binom{2g}{k-2} \quad \forall k \geq 2 \end{aligned} \quad (4.81)$$

En particulier, pour le groupe $H^g(C^*)$ cela implique que coefficients h_α apparaissant dans l'expression des formes appartenantes à $H^g(C^*)$ sont tous de la forme (4.11), c'est-à-dire se présentent comme le quotient d'un déterminant contenant les différentielles du premier et du second ordres par le déterminant δ qui ne contient que les différentielles du premier ordre. C'est une propriété extrêmement importante car elle implique que l'on peut réduire le calcul des intégrales multidimensionnelles de g -formes sur les g -cycles sur la Jacobienne affine (qui correspondent aux quantités physiquement intéressantes) aux intégrales des 1-formes apparaissant au numérateur de (4.11) (le dénominateur étant simplement la forme de volume).

Malheureusement, une des informations que l'on peut extraire de la formule (4.75) est que cette conjecture ne tient plus dans le cas $N \geq 3$. Pour voir cela intéressons-nous à la dépendance de χ sur n :

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{n+1}}{\chi_n} &= \prod_{k=1}^N \prod_{i=1}^N \frac{1}{(nN + k - 2 + i)} \\ &\times \prod_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^k ((nk + i - 1)N - k) \\ &\times \prod_{k=1}^N \prod_{i=1}^k ((nk + i)N - k) \end{aligned}$$

Donc quand $n \rightarrow \infty$ nous avons

$$\frac{\chi_{n+1}}{\chi_n} \sim e^{2 \sum_{k=1}^{N-1} k \log k + N \log N}$$

et l'on voit que $\chi(n)$ croit plus vite que N^{2g} tandis que si la conjecture de [21] était vérifiée, sa vitesse de croissance asymptotique devrait être juste 4^g comme elle aurait été, en gros, égale à C_{2g}^g (les fonctions de la forme (4.11) s'obtiennent en choisissant g différentielles parmi $2g$ différentielles du premier et second ordre).

Déjà pour $N = 3$ nos résultats ne sont pas compatibles avec la structure des cohomologies conjecturée pour le cas hyperelliptique ce qui nous laisse présager une situation bien plus complexe dans le cas général. Intuitivement, dans le cas hyperelliptique il a été possible de remplacer toutes les intégrales multiples par des intégrales des produits extérieurs de 1-formes ayant des pôles simples tandis que dans le cas général on voit apparaître des formes aux pôles multiples comme on va le voir dans l'exemple suivant. En d'autres mots, les puissances de $\delta(p_1, \dots, p_g)$ supérieures à 1 vont apparaître dans le dénominateur et donc l'intégrale ne va plus se scinder en intégrales simples comme dans le cas hyperelliptique.

Exemple non hyperelliptique

L'exemple le plus simple possible où l'on peut voir que les fonctions de la forme (4.11) ne suffisent pas pour générer les cohomologies est le cas de $N = 4$ avec $n = 1$. Dans ce cas-là on a une courbe de genre 3 décrite par l'équation

$$w^4 + t_1^{(0)} w^3 + (t_2^{(0)} z + t_2^{(1)}) w^2 + (t_3^{(0)} z^2 + t_3^{(1)} z + t_3^{(2)}) w + (z^3 + t_4^{(1)} z^2 + t_4^{(2)} z + t_4^{(3)}) = 0$$

On a ici 9 paramètres mais 3 parmi eux peuvent être éliminés par les transformations de la forme

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + \alpha w + \beta \\ w &\mapsto w + \gamma \end{aligned}$$

et les deux autres – par les homothéties

$$\begin{aligned} z &\mapsto a^4 z \\ w &\mapsto a^2 w \end{aligned}$$

donc il n'y a que 5 paramètres effectifs.

Les différentielles holomorphes ici sont données par (4.6):

$$\sigma_1 = \frac{w dz}{\partial_w r(w, z)}, \quad \sigma_2 = \frac{dz}{\partial_w r(w, z)}, \quad \sigma_3 = \frac{z dz}{\partial_w r(w, z)}$$

et donc le déterminant

$$\delta(P_1, P_2, P_3) = \Delta(P_1, P_2, P_3) \frac{dz_1}{\partial_{w_1} r(w_1, z_1)} \frac{dz_2}{\partial_{w_2} r(w_2, z_2)} \frac{dz_3}{\partial_{w_3} r(w_3, z_3)}$$

a la forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

où $P_i = (w_i, z_i)$.

La caractéristique d'Euler ici est égale à -6 comme on peut calculer en utilisant la formule (4.75) – mais on peut aussi remarquer que comme le diviseur thêta dans le cas d'une courbe non hyperelliptique de genre 3 est non singulier, on sait aussi que sa caractéristique d'Euler doit être égale à $g! = 6$ par la théorie générale (voir [10]) ce qui est en accord avec nos résultats par (4.77). Dans ce cas les dimensions de toutes les cohomologies sauf la dernière sont faciles à calculer parce que elles ont encore la même forme (4.80) que dans le cas hyperelliptique et donc la même dimension (4.81):

$$\begin{aligned}\dim H^0 &= 1 \\ \dim H^1 &= C_{2g}^1 = 6 \\ \dim H^2 &= C_{2g}^2 - 1 = 14\end{aligned}$$

d'où $\dim H^3 = 15$. On voit que H^3 ne peut être engendré juste par les produits de 3 différentielles car (n'oublions pas qu'il faut quotienter par un espace isomorphe à H^1) sa dimension serait alors égale à $C_{2g}^3 - C_{2g}^1 = 14$. Nous avons donc une forme supplémentaire ν dans H^3 qui ne se présente pas sous la forme (4.11).

Mieux, dans cet exemple on peut même décrire cette forme explicitement: comme on a vu que les différentielles $\tilde{\Delta}/\Delta$ ne suffisaient pas, on cherche à écrire

$$\nu = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta \Delta} \Delta$$

avec Δ_i étant les déterminants contenant les fonctions polynômiales venant des numérateurs des différentielles du premier ou second ordre et Δ ne contenant que des termes holomorphes.

On a ici $\deg w = 3$ et $\deg z = 4$ et donc $\deg \Delta = 7$ et $\deg \frac{dz}{\partial_w r(w,z)} = -5$. A partir de la forme de la q -caractéristique d'Euler on peut déduire que $\deg \nu = 0$ ce qui implique

$$\deg \Delta_1 + \deg \Delta_2 = 2 \deg \Delta + 8 \quad (4.82)$$

La différence entre $\deg \Delta_i$ et $\deg \Delta$ ne peut être qu'une combinaison linéaire de 3 ($\deg z$) et de 4 ($\deg w$) et doit être strictement positive. On n'a donc donc qu'une seule solution de (4.82)

$$\begin{aligned}\deg \Delta_1 &= \deg \Delta + 4 \\ \deg \Delta_2 &= \deg \Delta + 4\end{aligned}$$

ce qui laisse 2 possibilités pour la forme de Δ_i :

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_1 w_1 & z_2 w_2 & z_3 w_3 \end{vmatrix}$$

et l'on a donc 3 choix possibles (toutes les deux égales au premier ou au second déterminants ou Δ_1 égale au premier et Δ_2 égale au second).

Il se trouve que, en fait, ces choix sont équivalents car chacun de trois s'obtiennent comme combinaison linéaire de deux autres avec les fonctions proportionnelles à Δ (et qui sont donc déjà comptées dans H^3). Finalement, on peut écrire $\nu = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta^2}$ d'une seule façon. On voit que, comme énoncé, on se retrouve ici avec une fonction ayant des pôles doubles (à cause de Δ^2 au dénominateur).

Chapitre 5

Les systèmes intégrables en mécanique quantique

Le but de ce chapitre est de donner d'abord une brève introduction à la méthode du problème inverse quantique (QISM) basé sur les idées de Sklyanin qui nous servira dans nos investigations de la structure de l'algèbre des observables plus tard. Nous ne prétendons pas du tout d'être exhaustif et allons laisser complètement à côté bien d'idées très importantes qui ont grandement contribué au développement de ce sujet, en particulier tous les résultats venants de la théorie de groupes.

Nous allons commencer par introduire QISM dans le cas de $N = 2$ et montrer comment les variables séparées apparaissent dans l'approche connue sous le nom de *l'Ansatz de Bethe fonctionnel*. Ensuite nous appliquerons ces idées à l'étude du système quantique correspondant au système classique étudié le long de chapitre 4.

5.1 L'introduction

5.1.1 La méthode du problème inverse (QISM)

Comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, QISM a été créée par Sklyanin et Faddeev dans les années 1978–1980 ([28], [29], [30]) en tant que généralisation au cas quantique de la méthode du problème inverse classique (CISM). Les premières applications de cette méthode furent la quantification de l'équation de Schrödinger non linéaire (1.1) et du modèle XYZ de Heisenberg. Ensuite elle a été appliquée pour la quantification exacte de l'équation de sine-Gordon et le calcul des fonctions de corrélation pour bien d'autres modèles.

Initialement QISM a été formulée d'un point de vue plutôt analytique mais avec le temps les aspects algébriques sous-jacents ont pris plus d'importance. En particulier, ils se sont cristallisés dans l'approche à QISM basée sur la théorie des algèbres de Hopf quasitriangulaires et de yangiens due à V. Drinfeld. Quoique nous n'allons pas parler de cette formulation de QISM ici, notre approche sera néanmoins essentiellement algébrique, en suivant [31].

Nous n'allons pas non plus faire plus que mentionner en passant la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique même si, historiquement, cette méthode était à l'origine de beaucoup de résultats et a été utilisé pour résoudre les modèles de sine-Gordon, les chaînes XXX et XXZ et d'autres. Mais comme l'ansatz de Bethe algébrique est basé sur l'existence d'une représentation du plus grand poids, il ne s'applique pas à d'autres modèles intéressants tels que sinh-Gordon ou la chaîne de Toda. L'ansatz de Bethe fonctionnel ne souffre pas de telles limitations et, étant basé, en partie, sur l'idée de la séparation des variables, arrive naturellement après les considérations de la section suivante.

5.1.2 Les variables séparées

La première question évidente qui peut apparaître consiste à se demander quelle est la définition d'un système intégrable quantique. Malheureusement, la réponse à cette question a déjà été donnée dans l'introduction: une telle définition n'existe pas car l'intégrabilité dans le sens de Liouville repose sur le fait que l'existence d'une famille maximale des intégrales de mouvement en involution permet d'intégrer les équations de mouvement en quadratures (même si en pratique il faut utiliser CISM ou une méthode équivalente pour le faire). L'analogue de cette propriété dans le cas quantique serait la possibilité de trouver les valeurs propres communes (et les vecteurs propres) d'une telle famille d'intégrales mais son existence n'est pas d'une grande utilité pour résoudre ce problème.

Néanmoins, il existe un autre concept de la théorie classique qui, lui, a un équivalent directe dans le cas quantique: c'est celui de la séparation de variables dans l'équation de Hamilton-Jacobi dont on avait parlé dans la section 3.4. Il y a plusieurs avantages à baser l'approche aux systèmes intégrables quantiques sur ce point de vue:

- dans le cas classique on sait que la séparabilité est plus ou moins équivalente à l'intégrabilité
- la définition des variables séparées se généralise directement au cas quantique
- la propriété de séparation de variables dans un système quantique per-

met de réduire un problème multidimensionnel à un système d'équations unidimensionnelles (mais avec des paramètres) et donc il est clair que cela facilite sa résolution.

5.2 Les idées de base de QISM

5.2.1 La matrice R et les algèbres \mathcal{T}_R

Dans la théorie quantique, les algèbres de Lie apparaissent naturellement comme les algèbres contenant les opérateurs physiques du problème. Par exemple, si l'on a une famille de Hamiltoniens $\{I_k\}$ en involution on peut plonger l'algèbre commutative engendrée par cette famille dans une algèbre de Lie plus grande telle que l'espace des états du système devient une représentation (d'habitude irréductible) de cette algèbre. Alors on peut trouver les valeurs propres communes à toutes les $\{I_k\}$ par des moyens purement algébriques. Dans les cas habituels on peut se ramener (par factorisation, si nécessaire) au cas d'une algèbre de Lie de dimension finie.

La nouveauté de QISM consiste dans le fait que les algèbres utilisées ici ne sont pas de dimension finie ni même des algèbres de Lie. A leur place on considère les algèbres engendrées par les générateurs $T_{\alpha\beta}(u)$ avec $1 \leq \alpha, \beta \leq N$ avec u un paramètre complexe appelé le *paramètre spectrale*. L'algèbre en question n'est pas libre mais déterminées par les relations

$$R(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R(u-v) \quad (5.1)$$

où l'on a repris les notations de la section 3.3 avec $T(u)$ étant une matrice $N \times N$ dont les éléments sont $T_{\alpha\beta}$ et R est appelée, d'une manière peu surprenante, *la matrice R* .

La matrice R n'est pas arbitraire mais doit satisfaire à une certaine condition de compatibilité

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(v)$$

qui n'est rien d'autre que *l'équation de Yang-Baxter*.

Etant donnée une solution R de l'équation de Yang-Baxter, on peut donc définir l'algèbre quadratique \mathcal{T}_R lui associée. Ensuite, étant donnée une représentation de l'algèbre \mathcal{T}_R , on peut la voir comme un système quantique intégrable dont l'espace des états est l'espace de représentation de \mathcal{T}_R et les intégrales de mouvement en involution sont les éléments de la sous-algèbre commutative maximale de \mathcal{T}_R . Dans le cas $N = 2$ cette sous-algèbre est engendrée par la famille des opérateurs $(t(u))_{u \in \mathbb{C}}$ où $t(u) \equiv \text{tr} T(u)$ et dans le

cas de N arbitraire – par les coefficients du déterminant quantique que l'on définira un peu plus loin. Le problème principal de QISM est alors de trouver le spectre commun des opérateurs de cette famille et, ensuite, les fonctions de corrélation des quantités physiquement intéressantes.

Toujours selon Sklyanin, on peut donc dire qu'il y a quatre étapes:

1. Résoudre l'équation de Yang-Baxter et trouver la matrice R
2. Trouver une représentation de l'algèbre \mathcal{T}_R
3. Déterminer le spectre des $t(u)$
4. Calculer les fonctions de corrélation

Nous allons nous intéresser ici surtout à la troisième étape mais insistons sur le fait que déjà la première est non triviale. Historiquement, les premières solutions de l'équation de Yang-Baxter ont été trouvées par des méthodes empiriques. Cela a changé après les travaux de Drinfeld [36] qui a créé l'approche axiomatique à QISM basée sur les algèbres de Hopf. De ce point de vue, les deux premières étapes ne font qu'une car les matrices R correspondent aux représentations des matrices Hopf quasi-triangulaires dont une classe d'exemples importants a été construite par Drinfeld lui-même: c'est celle des algèbres de Hopf quasi-triangulaires particulières $\mathcal{Y}[\mathcal{G}]$ appelées les yangiens qui forment une famille paramétrisée par les algèbres de Lie simples \mathcal{G} .

Mais, encore une fois, nous allons supposer ici que nous avons déjà une matrice R donnée. En plus, nous allons illustrer le QISM sur l'exemple d'une matrice R très simple et dans le cas $N = 2$.

5.2.2 L'exemple de la chaîne XXX

Nous allons considérer la matrice $T(u)$ d'ordre 2

$$T(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

et la matrice R définie par

$$R(u) = u + \eta P = \begin{pmatrix} u + \eta & & & \\ & u & \eta & \\ & \eta & u & \\ & & & u + \eta \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

où P est la matrice de permutation dans le produit tensoriel $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$:

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^2 \quad P(x \otimes y) = y \otimes x$$

Cette matrice R est un exemple d'une matrice R rationnelle et correspond à une chaîne magnétique XXX avec les opérateurs de spin S_n définis ci-dessous. Ici, η est le paramètre de déformation ("constante de Planck").

Comme indiqué dans la section précédente, R engendre l'algèbre \mathcal{T}_R . Intéressons-nous aux représentations de cette algèbre. La première chose à remarquer est que, en fait, c'est une *bi-algèbre*, c'est-à-dire il existe une opération de *comultiplication* sur \mathcal{T}_R . En termes de représentations cela veut dire que si $T_1(u)$ et $T_2(u)$ sont des représentations de \mathcal{T}_R dans les espaces V_1 et V_2 respectivement, alors $T(u) = T_1(u)T_2(u)$ est encore une représentation de \mathcal{T}_R dans l'espace $V_1 \otimes V_2$. On a donc une possibilité de construire une famille infinie de représentations à partir d'un jeu de représentations simples donnés par la comultiplication. Ces représentations simples sont traditionnellement appelés les *opérateurs* L en QISM et leur produit

$$T(u) = L_n(u) \dots L_1(u)$$

est la *matrice de monodromie*.

Avant de passer aux exemples de représentations, introduisons un élément important du centre de l'algèbre \mathcal{T}_R appelé *le déterminant quantique*. Il sera défini plus tard dans le cas général mais dans notre exemple il a la forme simple suivante:

$$\begin{aligned} \det_q T(u) &= A(u + \eta/2)D(u - \eta/2) - B(u + \eta/2)C(u - \eta/2) \\ &= A(u - \eta/2)D(u + \eta/2) - C(u - \eta/2)B(u + \eta/2) \\ &= \dots \\ &= \operatorname{tr} \frac{1 - P}{2} T_1(u - \eta/2) T_2(u + \eta/2) \end{aligned}$$

L'autre propriété importante du déterminant quantique (en plus du fait qu'il commute avec tous les éléments de l'algèbre) est qu'il respecte la comultiplication:

$$\det_q T_1(u) T_2(u) = \det_q T_1(u) \det_q T_2(u)$$

Le déterminant quantique se calcule facilement pour les représentations les plus simples de \mathcal{T}_R qui sont les représentations unidimensionnelles engendrées par une matrice constante K telle que

$$\forall u \quad [R(u), K \otimes K] = 0 \quad (5.4)$$

Dans ce cas on a simplement

$$\det_q K = \det K$$

En fait, à cause de la forme particulière de la matrice R , toute matrice constante K vérifie (5.4) ce qui nous fournit donc une première classes de représentations de \mathcal{T}_R . La classes suivante en complexité est celle des opérateurs L linéaires en u :

$$L(u) = u + \eta \sum_{\alpha=1}^3 S_{\alpha} \sigma_{\alpha}$$

où σ sont les matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et les opérateurs S_{α} forment la base de la représentation de $sl(2)$ de poids l (de dimension $2l + 1$):

$$\begin{aligned} [S_{\alpha}, S_{\beta}] &= i \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\gamma} \\ S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &= l(l + 1) \end{aligned}$$

Il est commode d'introduire aussi les notations habituelles

$$S_{\pm} \equiv S_1 \pm iS_2$$

avec

$$\begin{aligned} [S_3, S_{\pm}] &= \pm S_{\pm} \\ [S_+, S_-] &= 2S_3 \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{2}(S_+ S_- + S_- S_+) + S_3^2 = l(l + 1)$$

dans lesquelles on a

$$L(u) = \begin{pmatrix} u + \eta S_3 & \eta S_- \\ \eta S_+ & u - \eta S_3 \end{pmatrix}$$

Pour une telle représentation on peut calculer

$$\det_q L(u) = (u - l\eta - \frac{1}{2}\eta)(u + l\eta + \frac{1}{2}\eta)$$

Comme la matrice R ne dépend que de la différence des paramètres spectraux on peut voir que le décalage du paramètre spectrale $L(u) \mapsto L(u - \delta)$

est un automorphisme de \mathcal{T}_R et donc on peut aussi considérer une classe de représentations légèrement plus large.

Ainsi, à l'aide de la comultiplication, on peut construire une famille de représentations de cette algèbre de la forme

$$T(u) = KL_n(u - \delta_n) \dots L_1(u - \delta_1) \quad (5.5)$$

paramétrisée par une matrice constante K , le nombre n des opérateurs L dans le produit et les nombres l_k et δ_k .

Pour la plupart des valeurs de δ_k cette représentation est irréductible. En plus on peut prouver que cette famille contient toutes les représentations irréductibles de dimension finie du yangien $\mathcal{Y}[sl(2)]$ (qui s'obtiennent toutes pour $K = 1$). On peut aussi voir que (de nouveau, sauf pour des valeurs particulières de δ_k) les représentations qui ne diffèrent que par l'ordre des opérateurs L sont équivalentes.

5.2.3 L'ansatz de Bethe fonctionnel

La définition rigoureuse (c'est-à-dire au-delà de la remarque de la section 3.4.2) de l'ansatz de Bethe fonctionnel n'est pas facile à donner et au lieu de le faire nous allons juste montrer comment il s'applique dans l'exemple de la chaîne XXX .

Pour cela, on part de l'expression pour la matrice de monodromie (5.5) qui s'écrit aussi comme (5.2):

$$T(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^n u^k \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$$

Une des conséquences des relations de commutation données par la matrice R rationnelle (5.3) est que

$$\forall u, v \quad [B(u), B(v)] = 0$$

L'idée de base de l'ansatz de Bethe fonctionnel est que, tout comme dans le cas classique (rappelons l'exemple de la section 3.4.2), les opérateurs x_k racines de $B(u)$ sont des variables séparées.

Le premier problème dans le cas quantique est de définir les racines du polynôme $B(u)$ dont les coefficients sont les opérateurs. L'article [31] montre comment on peut le faire à condition de disposer de quelques hypothèses supplémentaires. Ici nous n'allons pas nous occuper de ce problème et disons juste que, en bref, le rôle principal est joué par les polynômes symétriques

de racines et non pas par les racines elles-mêmes et que les polynômes symétriques peuvent être définis relativement sans problèmes. Mais, encore une fois, ici nous allons tout simplement nous donner les opérateurs x_k tels que

$$B(u) = B_N \prod_{k=1}^n (u - x_k)$$

La tâche suivante est de calculer l'expression des intégrales de mouvement $t(u)$ en fonction des x . Pour cela, introduisons d'abord les impulsions X associées aux coordonnées x :

$$\begin{aligned} X_k^- &= \sum_{p=1}^n x_k^p A_p \\ X_k^+ &= \sum_{p=1}^n x_k^p D_p \end{aligned}$$

On ne peut pas écrire simplement $X_k^- = A(x_k)$ parce que il faut d'abord choisir l'ordre dans lequel on doit écrire x_p et D_p (qui ne commutent pas entre eux). Par convention, on choisit de substituer toujours u par x par la gauche, comme ci-dessus, ce qui donne le sens à la notation $A(x_k)$.

Directement à partir des relations de commutation (5.1) on peut trouver que

$$[X_m^\pm, x_k] = \pm \eta \delta_{mk} X_m^\pm \quad \forall k, m$$

et

$$\begin{aligned} [X_m^\pm, X_k^\pm] &= 0 & \forall k, m \\ [X_m^+, X_k^-] &= 0 & \forall k, m \quad k \neq m \\ X_k^\pm X_k^\mp &= \det_q(x_k \pm \frac{\eta}{2}) & \forall k \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant voir la séparation de variables dans le problème spectrale: rappelons que l'on cherche à résoudre

$$t(u)\phi = \tau(u)\phi$$

Remplaçons u par x_k (par la gauche). On obtient alors un système de n équations

$$\tau(x_k)\phi(x) = \Delta_k^+(x)\phi(E_k^-x) + \Delta_k^-\phi(E_k^+x)$$

où E^\pm sont les opérateurs de déplacement:

$$E_k^\pm : (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k \pm \eta, \dots, x_n)$$

et Δ sont définis par

$$X_k^\pm = \Delta_k^\pm E_k^\pm$$

On voit que le système se sépare d'une manière évidente:

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n Q_k(x_k)$$

et que l'on se retrouve avec n problèmes 1-dimensionnels

$$\tau(x_k)Q_k(x_k) = \Delta_k^+(x_k)Q_k(x_k - \eta) - \Delta_k^-Q_k(x_k + \eta)$$

Donc finalement on arrive à la même équation de Baxter que celle qui apparaît dans l'ansatz de Bethe algébrique. Mais son sens ici est différent: les fonctions Q_k n'ont pas la même signification (ici ce sont des fonctions sur les ensembles discrets et non pas des polynômes) et, surtout, cette équation se résout facilement pour les petits N par récurrence tandis que dans l'autre cas la méthode standard consiste à considérer la limite $N \rightarrow \infty$ et donc on peut dire que les deux approches sont complémentaires.

Pour conclure ce survol de l'ansatz de Bethe fonctionnel, il faut dire que, bien évidemment, il ne s'applique pas seulement à la chaîne XXX , ni seulement aux algèbres de rang 1 (comme $\mathcal{Y}[sl(2)]$) comme on va le voir dans la suite.

5.3 La quantification de la jacobienne affine

Dans cette section nous allons présenter un modèle quantique qui, dans un certain sens, donne la quantification de la jacobienne affine étudiée dans le chapitre 4. Comme d'habitude en mécanique quantique, nous décrirons l'algèbre des observables quantique au lieu de décrire la variété déformée elle-même. Nous verrons que cette algèbre a encore la propriété remarquable du cas classique, à savoir que tout observable s'obtient par l'action des hamiltoniens à partir d'un nombre fini des observables qui sont les (déformations de) coefficients des cohomologies supérieures.

Une conséquence immédiate de cette propriété est que les fonctions de corrélations de toutes les observables se ramènent à un nombre fini d'intégrales. Une autre propriété très intéressante que l'on trouve uniquement dans le cas quantique est l'existence d'une description duale: il existe le modèle dual, avec la constante de Planck inverse, avec le même spectre. En plus, la dualité $\hbar \leftrightarrow 1/\hbar$ correspond à la dualité entre les cohomologies et les homologies: les cohomologies du modèle dual jouent le rôle des homologies pour le problème d'origine et vice versa.

5.3.1 Le modèle quantique

En suivant [34] (inclus en appendice) nous considérons un modèle intégrable quantique décrit par un opérateur $M(z)$ polynômial en z (de degré au plus n) satisfaisant les relations de commutation habituelles

$$R(z, z')M_1(z)M_2(z') = M_2(z')M_1(z)R(z, z') \quad (5.6)$$

et nous allons supposer que, comme dans le cas classique (voir (4.22)), la matrice des coefficients dominants de $M(z)$ est triangulaire inférieure.

La matrice R est donnée par

$$R(z, z') = zR_{12}(q) - z'R_{21}(q)^{-1}$$

avec

$$R_{12}(q) = \sum_{k=1}^N q^{E_{kk}} \otimes q^{E_{kk}} + (q - q^{-1}) \sum_{j>k} E_{jk} \otimes E_{kj}$$

où $q = e^{ih}$ est le paramètre de déformation noté multiplicativement (pour retrouver la matrice R rationnelle de la section 5.2.2 il faudrait écrire $z = e^u$ et $q = e^{\eta/2}$ dans la limite $q \rightarrow 1$). Les matrices E_{ij} ont été définies dans (4.21).

La forme de degrés de M :

$$M(z) = z^n \mu + \mathcal{O}(z^{n-1})$$

avec

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{N1} & \mu_{N2} & \mu_{N3} & \cdots & \mu_{NN} \end{pmatrix}$$

est compatible avec les relations de commutation (5.6). Nous avons fait le choix de fixer $\mu_{11} = 0$ car cela correspond à un modèle particulièrement simple étudié dans l'article [33].

Le déterminant quantique est défini dans le cas général par

$$\det_q M(u) = \sum_{\sigma \in S_n} (-q)^{|\sigma|} \prod_{k=1}^n M_{k, \sigma(k)}(zq^{\frac{1}{2}(N+1)-k})$$

où $|\sigma|$ est le nombre minimal de transpositions dans la décomposition de σ (cette définition se ramène à celle de la section 5.2.2 avec les identifications ci-dessus). Comme dans le cas classique – et pour les mêmes raisons de comptage de degrés de liberté – les intégrales de mouvement apparaissent toutes dans le développement de $\det_q(M(z) + w)$.

5.3.2 La réduction quantique

Toujours en suivant le cas classique, nous cherchons à remplacer la matrice $M(z)$ par

$$L(z) = SM(z)S^{-1}$$

Pour cela, soit ν la première ligne de $M(z)$:

$$e_1 M(z) = z^{n-1}\nu + O(z^{n-2})$$

et définissons la matrice S de taille $N \times N$ correspondante à s classique (avec la différence que les éléments de S sont maintenant des opérateurs) par

$$S = \begin{pmatrix} e_1 \\ \nu\mu^{N-2} \\ \vdots \\ \nu\mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

Nous pouvons montrer que nous avons l'égalité

$$S\mu = US$$

avec U définie par

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -t_1 & \cdots & -t_{N-2} & -t_{N-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où les t_j sont définis par

$$\prod_{i=2}^N (x - q^{-1}\mu_{ii}) = \sum_{j=0}^{N-1} x^{N-1-j} t_j$$

La seule relation non triviale à vérifier est l'égalité des secondes lignes de $S\mu$ et US qui s'écrit comme

$$\sum_{k=0}^{N-1} t_k \mu^{N-1-k} \nu = 0 \quad (5.7)$$

Pour le prouver, on remarque deux choses: premièrement, directement à partir des relations de commutation (5.6) on trouve

$$\begin{aligned}\mu_{ii}q^{E_{ii}}\mu &= \mu q^{E_{ii}}\mu_{ii} \\ \nu\mu_{ii} &= \mu_{ii}\nu\end{aligned}$$

et, deuxièmement, l'expression μ^k ne contient que des termes

$$\mu_{j_1j_2}\mu_{j_2j_3}\mu_{j_3j_4}\cdots \quad \text{avec } j_1 \geq j_2 \geq j_3 \geq j_4 \geq \cdots \quad (5.8)$$

On peut donc faire passer tous les μ_{ii} qui apparaissent dans μ^k à gauche les remplaçant par $q^{-1}\mu_{ii}$ et il ne restera que des termes de la forme (5.8). A ce moment-là on peut remarquer que l'équation (5.7) découle de l'équation classique correspondante pour une matrice dont les éléments commutent.

Finalement, donc, on voit que si l'on définit la matrice $L(z)$ par

$$L(z) = SM(z)S^{-1}$$

alors

$$L(z) = z^n U + \mathcal{O}(z^{n-1})$$

et, en plus, comme ν est la dernière ligne de S on a aussi

$$e_1 L(z) = z^{n-1} e_N + \mathcal{O}(z^{n-2})$$

tout à fait comme dans le cas classique (4.28).

Nous poursuivons donc dans la même voie en écrivant

$$L(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}$$

avec $D(z)$ étant une matrice $(N-1) \times (N-1)$, $B(z)$ un vecteur-ligne de taille $N-1$ etc. Leur coefficients dominants ont aussi la même forme qu'avant:

$$\begin{aligned}B(z) &= z^{n-1} e_{N-1} + \tilde{B}(z) \\ D(z) &= \tilde{U} z^n + \tilde{D}(z)\end{aligned}$$

où $\tilde{B}(z)$ et $\tilde{D}(z)$ sont des polynômes de degré $n-2$ et $n-1$ respectivement et \tilde{U} est une matrice $(N-1) \times (N-1)$ qui s'obtient à partir de U par élimination de la première ligne et de la première colonne.

Nous considérons l'algèbre A_q générée par les coefficients de $L(z)$. Comme t_k commutent avec tous les éléments de $L(z)$ on peut les voir en tant que les paramètres numériques de cette algèbre.

Le problème maintenant est de calculer les relations de commutation vérifiées par $L(z)$. En suivant [34] nous introduisons, pour le faire, une matrice dans le produit tensoriel $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$ avec les éléments qui ne commutent pas entre eux

$$\widehat{S}_{12} = qE_{11} \otimes q^{E_{11}} + \sum_{i=2}^N (\nu \otimes I)(R_{12}(q)(\mu \otimes I))^{N-i}(E_{ii} \otimes I)$$

Il est possible de vérifier la validité des relations auxiliaires suivantes:

$$\begin{aligned} Y_{12}(S \otimes I)\widehat{S}_{21} &= (I \otimes S)\widehat{S}_{12}R_{12}(q) \\ (S \otimes I)\widehat{S}_{21}(T(z) \otimes I) &= Z_{12}(z)(L(z) \otimes I)(S \otimes I)\widehat{S}_{21}R_{21}(q) \end{aligned} \quad (5.9)$$

où Y_{12} et Z_{12} sont les matrices numériques définies à partir de la matrice

$$C_{12} = (I - E_{11}) \otimes I + \sum_{j=1}^{\infty} V^j \otimes U^j$$

où

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} Y_{12} &= qI - (q - q^{-1})C_{12}(I - P) \\ Z_{12}(z) &= I - (q - q^{-1})zU_2C_{12}(E_{N1})_1 \end{aligned}$$

Ensuite on peut calculer que

$$(C_{12}(I - P))^2 = C_{12}(I - P)$$

et que donc $C_{12}(I - P)$ est un projecteur ce qui montre pourquoi on obtient une formule simple pour l'inverse de Y_{12} :

$$Y_{12}^{-1} = q^{-1}I + (q - q^{-1})C_{12}(I - P)$$

Les relations de commutations pour $L(z)$ se trouvent maintenant en prenant (5.6) et en le multipliant par $S_2\widehat{S}_{12}$ à gauche et par $(S_1\widehat{S}_{21})^{-1}$ à droite. Utilisant (5.9) on arrive finalement à trouver

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(z_1, z_2)K_{12}(z_1)(L(z_1) \otimes I)K_{21}(z_2)(I \otimes L(z_2)) &= \\ = K_{21}(z_2)(I \otimes L(z_2))K_{12}(z_1)(L(z_1) \otimes I)\widetilde{R}(z_1, z_2) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{R}(z_1, z_2) &= z_1 Y_{12} - z_2 Y_{21}^{-1} \\ K_{12}(z) &= Y_{12}^{-1} Z_{12}(z)\end{aligned}$$

5.3.3 Les observables quantiques

Les variables séparées

Nous avons vu dans la section précédente que nous pouvons réduire le modèle quantique par une procédure très similaire à celle utilisée dans le cas classique. Nous avons toutes les raisons de croire que cette analogie peut être développée plus loin.

Pour commencer, nous pouvons définir les variables séparées quantiques (w_i, z_i) avec

$$\begin{aligned}[z_i, z_j] &= 0 \\ [w_i, w_j] &= 0 \\ w_i z_j &= q^{2\delta_{ij}} z_j w_i\end{aligned}$$

à partir de $L(z)$ de la même manière. Techniquement, le calcul des relations de commutations est bien plus difficile dans le cas quantique mais l'article [35] contient la dérivation des relations ci-dessus pour tout N (on pourrait aussi consulter [32] pour un exemple d'application de la procédure de séparation de variables dans le cas $N = 3$ qui est beaucoup plus simple). Il est intéressant de remarquer que dans le cas classique les variables séparées appartenaient à la courbe spectrale, c'est-à-dire satisfaisaient à l'équation (4.1), alors que dans le cas quantique elles satisfont à l'équation de Baxter: par exemple, dans le cas d'une équation hyperelliptique

$$w + w^{-1} - t(z) = 0$$

en représentant l'opérateur de z après la quantification comme la multiplication par $e^{2\zeta}$ et celui de w comme le décalage $\zeta \rightarrow \zeta + ih$ nous obtenons l'équation de Baxter

$$Q(\zeta + ih) + Q(\zeta - ih) - t(z)Q(\zeta) = 0$$

L'étape suivante devrait être la démonstration que toutes les observables quantiques peuvent être exprimées en termes des variables séparées. C'est une affirmation qui est loin d'être triviale à prouver (surtout dans le cas de N arbitraire) mais si l'on fait l'hypothèse raisonnable que la structure – et

le caractère – de l'algèbre des observables est la même dans le cas quantique que dans le cas classique, cela devrait être le cas.

Dans le cas hyperelliptique ($N = 2$), si l'on regarde l'algèbre $\mathcal{A}(q)$, la déformation de l'algèbre \mathcal{A} classique, nous supposons qu'elle est engendrée, en tant que l'espace vectoriel, par les éléments de la forme

$$p_L(t_1, \dots, t_g)g(b_1, \dots, b_g)p_R(t_1, \dots, t_g) \quad (5.10)$$

avec les mêmes notations que précédemment (t_i sont les coefficients de la trace, b_i – les coefficients de l'élément 12 de la matrice de monodromie). Cette formule donne bien celles des propositions 9 et 10 dans le cas classique car symétrisation ou antisymétrisation, respectivement, de t_i correspond à la multiplication par t_i ou l'application de $d\tau_i$ classiquement. Dans le cas de N quelconque, on suppose que l'on a encore cette propriété mais avec les éléments de l'anneau \mathbb{F} au lieu de t_i et les coefficients des cohomologies supérieures (classiques) au lieu de b_i .

L'exemple hyperelliptique

Avant de continuer avec nos investigations de l'algèbre des observables, faisons un bref détour par l'exemple particulier de [33]. Dans cet article, le modèle suivant a été considéré: les variables du modèle sont x_1, \dots, x_{2g+2} et y avec les relations de commutation non triviales

$$\begin{aligned} x_i x_j &= q^2 x_j x_i & i < j \\ y x_i &= q^2 x_i y & \forall i \end{aligned}$$

Le hamiltonien du système est

$$h = q^{-1} \sum_{i=1}^{2g+2} x_i x_{i-1}^{-1}$$

(avec la convention $x_{2g+3} \equiv qy x_1$), qui correspond, physiquement, à une régularisation particulièrement simple d'un champ de Bose chiral sur le réseau. Pour voir comment ce modèle est lié à celui de la section (5.3.1) il faut introduire les variables auxiliaires u et v qui satisfont à

$$uv = qvu$$

et en termes desquelles les variables x et y s'expriment comme

$$x_k = v_k \prod_{i=1}^{k-1} u_i^{-2} \quad y = \prod_{i=1}^{2g+2} u_i$$

Si l'on définit l'opérateur l par

$$l(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \begin{pmatrix} zu & -quv \\ zv^{-1}u^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

alors la matrice de monodromie

$$m(z) \equiv l_{2g+2}(z) \cdots l_1(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$$

aura la forme vue précédemment.

Pour voir apparaître la dualité $h \leftrightarrow 1/h$ nous devons d'abord définir l'opérateur de Baxter \mathcal{Q} . Pour cela nous réalisons les opérateurs u et v dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ comme

$$v = e^\phi \quad u = e^{ih \frac{d}{d\phi}}$$

et, en accord avec [37], l'espace de Hilbert où les observables agissent est celui de fonctions de

$$\zeta \equiv \frac{1}{2} \log z$$

et l'on peut montrer qu'il existe \mathcal{Q} tel qu'il commute avec t et satisfait à

$$(-1)^{(g+1)} t(z) \mathcal{Q}(\zeta) = \mathcal{Q}(\zeta + ih) + \mathcal{Q}(\zeta - ih) \quad (5.11)$$

D'un autre côté, si l'on définit les opérateurs z_i comme les racines de $b(z)$ et

$$w_i = (-1)^{(g+1)} qd(z_i)$$

(où la substitution de z se fait toujours par la gauche), alors on peut montrer que l'équation

$$w_i^2 - w_i t(q^2 z_i) + 1 = 0$$

est vérifiée. Cette relation implique, à cause des considérations généralisantes celles de la section 5.2.3 que les équations pour la fonction d'onde correspondante aux valeurs propres t_1, \dots, t_g des intégrales de mouvement (dans la représentation ζ) se séparent et l'on peut chercher cette fonction sous la forme

$$\langle \zeta_1, \dots, \zeta_g | t_1, \dots, t_g \rangle = Q(\zeta_1) \cdots Q(\zeta_g)$$

où $Q(\zeta)$ sont les valeurs propres de l'opérateur \mathcal{Q} de l'équation (5.11).

Cette équation possède une propriété intéressante: sa solution $Q(\zeta)$ satisfait aussi à l'équation duale

$$(-1)^{(g+1)} T(Z) Q(\zeta) = Q(\zeta + \pi i) + Q(\zeta - \pi i)$$

où

$$Z = e^{\frac{2\pi}{h}\zeta}$$

et $T(Z) = \text{tr } M(Z)$ avec la matrice $M(Z)$ définie de la même manière à partir de Z que $m(z)$ – à partir de z (voir [33] pour plus de précisions). En conclusion, nous pouvons aussi définir l'algèbre $\mathcal{A}(Q)$ avec

$$Q = e^{\frac{\pi^2 i}{h}}$$

agissant dans le même espace de fonctions. On peut voir aussi que u et v commutent avec U et V et anticommulent avec V et U , respectivement. Finalement, la condition importante est que t commute avec T .

Nous supposons, bien sûr, que l'algèbre $\mathcal{A}(Q)$ est encore engendrée par les éléments de la forme (5.10). Alors l'algèbre $\mathcal{A}(q)\mathcal{A}(Q)$ l'est aussi dans le sens que pour n'importe quel élément xX de cette algèbre, ses coefficients matriciels sont donnés par

$$\begin{aligned} \langle t; T | xX | t'T' \rangle &= p_L(t)p_R(t')P_L(T)P_R(T') \\ &\times \int d\zeta_1 \cdots \int d\zeta_g h(z)H(Z) \prod Q(\zeta)Q'(\zeta) \end{aligned}$$

où h et H sont les antisymétrisations des polynômes g et G respectivement. Les valeurs des polynômes en t_i se calculent aisément sur leurs vecteurs propres et donc, finalement, on voit que l'on peut ramener le calcul des fonctions de corrélation à celui des intégrales *simples*. Remarquons que c'est une conséquence plus ou moins directe de la proposition 10 ce qui explique son importance pour les modèles intégrables quantiques dont on avait parlé précédemment.

L'interprétation géométrique de la dualité

Quoique ceci n'est pas directement lié aux résultats présentés dans cette thèse, nous ne pouvons pas ne pas mentionner la signification géométrique de la dualité $q \leftrightarrow Q$ (ou, ce qui est la même chose, $h \leftrightarrow \pi^2/h$).

Remarquons d'abord que à cause de l'existence de cette dualité, nous n'avons pas un mais deux limites classiques du système quantique: $h \rightarrow 0$ et $h \rightarrow \infty$. En analysant ces deux limites il devient claire que, grâce à la structure particulière des intégrales dominantes les fonctions de corrélation, les cohomologies d'une de ces limites correspondent aux homologies pour l'autre – et vice versa, bien sûr. De cette manière, il apparaît que la dualité entre le couplage faible et le couplage fort correspond dans notre cas à la dualité entre les homologies et les cohomologies.

Le cas général

Revenons maintenant au cas de N quelconque. Comme indiqué à la fin de l'article [34], formellement nous y avons presque la même situation: nous avons toujours la dualité $h \leftrightarrow \pi^2/h$ et l'on peut encore introduire les variables Z et W duales:

$$Z_j = \exp\left(\frac{2\pi}{h}\zeta_j\right), \quad W_j = \exp\left(\pi i \frac{\partial}{\partial \zeta_j}\right)$$

qui, formellement, commutent avec z et w . Nous avons aussi l'analogie de (5.11) qui s'écrit

$$\sum_k f_k(q^{2k}z)Q(\zeta + ikh) = 0$$

où les f_k sont les déformations des éléments de l'anneau \mathbb{F} du chapitre 4.

Bien sûr, cela ne prouve pas encore grande chose et pour rendre tout cela un peu moins vague il faudrait introduire l'espace de Hilbert où les différents opérateurs agissent et faire la même analyse que dans le cas de la section (5.3.3). Mais en admettant que la situation est toujours similaire à celle de ce cas-là, on pourrait conjecturer que le produit scalaire dans l'espace de fonctions de ζ est donné par

$$\begin{aligned} \langle F | G \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_g \overline{F(\zeta_1, \dots, \zeta_g)} \\ &\times \det(f_i(w_j, z_j)) \det(f_i(W_j, Z_j)) G(\zeta_1, \dots, \zeta_g) \end{aligned}$$

où f_i sont les polynômes coefficients des formes holomorphes, c'est-à-dire

$$f(w, z) = w^{N-m-1} z^k$$

où m et k satisfont à (4.7).

Cette conjecture est basée, bien sûr, sur la situation du cas $N = 2$ étudiée dans [33] mais aussi sur le résultat analogue pour le cas classique où le même déterminant apparaît comme le coefficient dans la mesure de Liouville écrite en variables séparées: la fonction d'onde ψ est normalisée par la condition

$$|\phi|^2 = dV$$

dans la limite quasi-classique, où dV est l'élément du volume de l'espace des phases qui s'écrit comme $d\phi_1 \wedge \cdots \wedge d\phi_g$ dans les variables d'angle et donc, le changement de variables fait par la transformation d'Abel inverse résulte en apparition de la jacobienne de cette application qui est justement $\det \omega_i(P_j)$.

Bibliographie

- [1] V. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*.
- [2] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*.
- [3] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*.
- [4] Otto Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics **81** (1981)
- [5] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics **52** (1977)
- [6] Phillip Griffiths and Joseph Harris, *Principles of Algebraic Geometry*. Pure and Applied Mathematics, Wiley Interscience (1978)
- [7] I.R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*. Springer-Verlag (1977)
- [8] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta*, vol. I, Birkhäuser, Boston (1983)
- [9] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta*, vol. II, Birkhäuser, Boston (1983)
- [10] Hershel M. Farkas and Irwin Kra, *Riemann Surfaces*. Springer-Verlag (1980)
- [11] P.D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*. Comm. Pure. Appl. Math. *21*, 467-490 (1968)
- [12] C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal, R.M. Miura, *Method for solving the Kortevog-de Vries equation*. Phys. Rev. Lett. *19*, 1095-1097 (1967)
- [13] V.E. Zakharov, L.D. Faddeev, *Kortevog-de Vries equation, a completely integrable Hamiltonian system*. Funct. Anal. Appl. *5*, 280-287 (1971)
- [14] M.A. Semenov-Tyan-Shanskii, *What is a Classical r-matrix?*, Funct. Anal. Appl. **17** (1984) 259-272
- [15] O. Babelon, C-M. Viallet, *Hamiltonian Structures and Lax Equations*. Phys. Lett. B *237*, 411-416 (1990)
- [16] V.G. Drinfeld, *Hamiltonian Structures on Lie Groups, Lie bialgebras and the Geometrical Meaning of the Yang-Baxter Equations*. Dokl. Akad. Nauk SSSR **268**, No. 2, 285-287 (1983)

- [17] E.K. Sklyanin, *Separation of Variables in the Classical Integrable $SL(3)$ Magnetic Chain*. hep-th/9211126
- [18] O. Babelon, D. Bernard, F.A. Smirnov, *Comm. Math. Phys.* **186** (1997) 601
- [19] F.A. Smirnov, *Structure of Matrix Elements of Quantum Toda Chain*. math-ph/9805011
- [20] F.A. Smirnov, *Math. Phys. Lett.* **36** (1996) 267
- [21] A. Nakayashiki and F.A. Smirnov, *Cohomologies of Affine Jacobi Varieties and Integrable Systems*. math-ph/0001017
- [22] A. Nakayashiki and F.A. Smirnov, *Euler Characteristics of Theta Divisors of Jacobians for Spectral Curves*. math-ag/0012251
- [23] D.R.D. Scott, *Classical Functional Bethe Ansatz for $SL(N)$: Separation of Variables for the Magnetic Chain*. hep-th/9403030
- [24] A. Beauville, *Jacobiennes des courbes spectrales et systèmes hamiltoniens complètement intégrables*, *Acta Math.*, **164** (1990), 211–235
- [25] M. R. Adams, J. Harnad, J. Hurtubise, *Coadjoint orbits, spectral curves and Darboux coordinates*. The geometry of Hamiltonian systems (Berkeley, CA, 1989), 9–21, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, **22**, Springer, New York, 1991.
- [26] P. Diener and B.A. Dubrovin, *Algebraic-Geometrical Darboux Coordinates in R-Matrix Formalism*. SISSA ISAS 88/94/FM
- [27] F.A. Smirnov and V. Zeitlin, *Affine Jacobians of Spectral Curves and Integrable Models* math-ph/0203037
- [28] E.K. Sklyanin and L.D. Faddeev, *Quantum Mechanical Approach to Completely Integrable Models of Field Theory*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **243**, No. 6, 1430-1433 (1978)
- [29] E.K. Sklyanin, *Quantum Version of the Method of the Inverse Scattering Problem*, Candidates Dissertation, Leningrad Branch of the Mathematics Institute (1980)
- [30] E.K. Sklyanin, *Quantum Version of the Method of Inverse Scattering Problem*, *J. Soviet Math.* **19** 1546-1596 (1982)
- [31] E.K. Sklyanin, *Quantum Inverse Scattering Method. Selected Topics*.
- [32] E.K. Sklyanin, *Separation of Variables in the Quantum Integrable Models Related to the Yangian $\mathcal{Y}[sl(3)]$* , hep-th/9212076
- [33] F.A. Smirnov, *Dual Baxter Equations and Quantization of the Affine Jacobian*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 3385-3405 (2000)
- [34] F.A. Smirnov and V. Zeitlin, *On Quantization of Affine Jacobi Varieties of Spectral Curves*, math-ph/0111038
- [35] F.A. Smirnov, *Separation of Variables for Quantum Integrable Models Related to $U_q(\widehat{sl}_N)$* , math-ph/0109013

- [36] V.G. Drinfeld, *Sov. Math. Docl.* **32**, 254-258 (1985)
- [37] V. Pasquier, M. Gaudin *J. Phys. A: Math. Gen.* 5243 (1992)
- [38] Malte Henkel, *Sur la solution de Sundman du probleme des trois corps.*
physics/0203001