

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
UMR 6618 INLN - CNRS

N^o attribué par la bibliothèque

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE NICE

Discipline : Mathématiques
présentée et soutenue publiquement

par

Nicola SOTTOCORNOLA

le 27/05/2002

Titre :

Classification des cycles homoclines forcés
par symétrie dans \mathbb{R}^4

Directeur de thèse : M. Pascal Chossat

JURY

M. Gérard Iooss
M. Reiner Lauterbach
M. Ian Melbourne
M. James Montaldi
M. Juan-Pablo Ortega
M. Robert Roussarie

*Questo lavoro è dedicato a mia madre per non
aver mai smesso di crederci e di incoraggiarmi;
a mio figlio Matteo che ha scelto di nascere
in tempo per vedermi finirlo e il cui sorriso
ha reso la mia vita un po' più leggera;
infine a mia moglie Nadia, lei sa perché ...*

Table des matières

Table des matières	3
Remerciements	5
1 Introduction	7
1.1 Le problème	7
1.2 Les systèmes dynamiques équivariants	8
2 Préliminaires algébriques	11
2.1 La valuation p-adique	11
2.2 Les extensions galoisiennes	14
2.3 La norme	18
2.4 Équations goniométriques à angles rationnels	19
2.5 Quaternions et rotations	21
3 La théorie des cycles homoclines robustes	23
3.1 Premières propriétés	23
3.2 Le problème de la stabilité dynamique	25
3.3 Le Théorème de Ashwin-Montaldi	26
3.4 Les exemples classiques	28
3.4.1 Le cycle à deux points	28
3.4.2 Les cycles à trois et six points	29
3.4.3 Les cycles à quatre et huit points	30
4 Les cycles homoclines de type C	33
5 Les cycles homoclines de type B	37
6 Les cycles homoclines de type A	39
6.1 Une caractérisation des cycles simples	39
6.2 Un résultat avec n impair	42
6.3 Les cycles avec groupe de symétrie contenu dans $\mathbf{SO}(4)$	44
6.3.1 Forme explicite du champs vectoriel X_{24}^+	48
6.4 Les cycles avec groupe de symétrie non contenu dans $\mathbf{SO}(4)$	49
6.4.1 Forme explicite du champs vectoriel X_6^-	57
6.4.2 Forme explicite du champ vectoriel X_8^-	59

7	La topologie des cycles homoclines sur S^3	61
8	Deux problèmes ouverts	65
A	L'article "Sur la classification des cycles homoclines"	67
A.1	Introduction	68
A.2	Les cycles de type B	68
A.3	Les cycles de type C	70
B	L'article "Robust homoclinic cycles in \mathbb{R}^4"	73
B.1	Introduction	74
B.2	A simple cycle	76
B.3	The geometrical structure	77
B.4	Type A cycles with symmetry group in $SO(4)$	82
B.5	Type A cycles with symmetry group not included in $SO(4)$	85
B.6	Type B cycles	91
B.7	Type C cycles	92
B.8	Examples of vector fields admitting non-simple cycles	93
B.8.1	G_6 -equivariant vector field	93
B.8.2	G_8 -equivariant vector field	94
B.8.3	Vector field equivariant under the MAG in $SO(4)$ generating a 12–24 points homoclinic cycle	96
B.9	Acknowledgements	96
C	L'article "Complete classification of homoclinic cycles in \mathbb{R}^4 in the case of a symmetry group $G \subset SO(4)$"	99
C.1	Introduction	100
C.2	Rotations and quaternions	101
C.3	The homoclinic cycles	101
C.4	The simple cycles	103
C.5	The non-simple cycles	103
D	Une famille de groupes finis	107
D.1	Formules de calcul et dénombrement	108
D.2	Étude de H_m , cas où m n'est pas une puissance de 2	113
D.3	Étude de H_m , cas où m est une puissance de 2	115
D.4	Le groupe dérivé $D(H_m)$	120
D.5	Le centre $Z(H_m)$	122
D.6	Une autre décomposition des groupes H_m	124
D.7	Les sous-groupes distingués dans H_m	127
	Bibliographie	131

Remerciements

Je voudrais remercier d'abord P. Chossat pour m'avoir proposé ce sujet de thèse et pour les très nombreuses discussions qui m'ont permis d'avancer dans la compréhension de la théorie des cycles homoclines. Ensuite j'ai le plaisir de remercier R. Lauterbach et J. Montaldi pour leur hospitalité à Hambourg et Manchester et pour les nombreux conseils qu'ils m'ont donnés. Un remerciement particulier va à I. Melbourne et R. Roussarie pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et pour m'avoir signalé plusieurs imprécisions dans la version préliminaire de ce travail. Enfin je ne peux oublier J. P. Ortega pour la disponibilité et la patience dont il a fait preuve en lisant et relisant mon anglais approximatif et, plus en général, pour l'amitié qu'il m'a toujours témoignée. Un dernier remerciement va à toute l'équipe de l'INLN pour le sérieux et la compétence dont ils ont toujours fait preuve et pour m'avoir permis de travailler dans des bonnes conditions.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Le problème

Considérons le problème de bifurcation donné par l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{x} = v(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

où λ est le paramètre de bifurcation. Si G est un groupe de Lie compact agissant sur \mathbb{R}^4 , d'après le Théorème 4.4.3 de [7], on supposera sans perte de généralité que G est un sous-groupe de $O(4)$.

Définition 1.1. *Le champ vectoriel (1.1) est **équivariant** par rapport à l'action de G (ou G -équivariant) si*

$$g \cdot v(x, \lambda) = v(g \cdot x, \lambda), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall g \in G, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Si $\lambda = 0$ est la valeur critique on supposera que la bifurcation se produit pour λ petit, positif (*bifurcation super-critique*). Il existe des cas où la bifurcation produit des points d'équilibre, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, qui sont connectés entre eux par des lignes intégrales du champ de vecteurs (1.1). Si l'on a les connexions

$$\xi_1 \longrightarrow \xi_2, \quad \xi_2 \longrightarrow \xi_3, \quad \dots \quad \xi_n \longrightarrow \xi_1. \quad (1.3)$$

on dit qu'on est en présence d'un *cycle hétérocline*. On dira que le cycle est *homocline* si tous les points d'équilibre appartiennent à une même G -orbite. Comme on pourrait s'y attendre ces cycles se présentent généralement sous une forme instable. Le rôle clef joué par les cycles dans la compréhension de la dynamique des systèmes symétriques (plus exactement *équivariants*, voir la Définition 1.1) apparaît clairement dans les années quatre-vingt. La présence de symétries garantit la *robustesse* du cycle ; ce qui signifie que le cycle persiste après une petite perturbation du champ de vecteurs, compatible avec les symétries (stabilité structurelle dans l'ensemble des champs G -équivariants). Le premier cycle homocline symétrique a été étudié par J. Guckenheimer et P. Holmes [13]. Il s'agit du cycle simple (cf. Définition 3.14) de \mathbb{R}^3 avec trois points d'équilibre

et groupe de symétries G fini (§ 3.4.2). Dans l'article on donne les équations polynomiales de degré trois qui engendrent le cycle et les conditions de stabilité dynamique : il s'agit plus exactement de conditions de stabilité asymptotique, dans le sens que toute orbite qui passe "assez proche" du cycle s'y approche indéfiniment. Ce cycle apparaît dans l'étude de la convection de Rayleigh-Bénard en rotation (cf. [4]) et dans certains modèles de la dynamique des populations (cf. [17]). Le cas d'un groupe de symétrie G d'ordre infini (qui ne sera pas abordé dans cette thèse) est apparu dans les mêmes années. En particulier dans [1] le cas $G = O(2)$ avec interaction des modes $m = 1$ et $m = 2$ est étudié (cf. aussi [18]). L'analyse de J. Guckenheimer et P. Holmes de 1988 a été généralisée au cas \mathbb{R}^4 par M. Field et J. Swift en 1991 (cf. [11] et [10]). Pour ce qui concerne la stabilité dynamique les résultats meilleurs sont donnés dans [16]. La classification des cycles en types A, B et C (Définition 3.3), qui sera utilisée tout au long de cette thèse, a été introduite dans l'article [3] sur le bifurcation transverse.

L'existence des cycles est parfois montrée à l'aide d'une méthode dite *des sphères invariantes* (cf. e.g. [7]). En particulier si on étudie les cycles d'un champs vectoriel équivariant de \mathbb{R}^3 on observe souvent l'apparition d'une famille de sphères invariantes par rapport au flot ; ce qui nous amène à étudier le problème de la stabilité sur une variété de dimension 2. Ce problème a été traité par G. L. Dos Reis [8]. Par contre nos démonstrations de l'existence des cycles s'appuient sur un résultat de P. Ashwin et J. Montaldi (Théorème 3.13). En général on peut affirmer que la théorie des cycles a permis d'éclaircir la dynamique de plusieurs phénomènes d'intermittence. Pour une bibliographie complète on renvoie à [7].

Dans le cas \mathbb{R}^4 avec groupe de symétrie fini, certains cycles sont bien connus (cf. [7]). Dans cette thèse on présente une classification des possibles cycles homoclines sur la base du nombre n de points d'équilibre. Plus précisément on se propose de :

- montrer que pour tout n pair il existe un cycle homocline qui possède n points d'équilibre ;
- montrer que le seul cycle avec un nombre impair de points est le cycle "classique" à trois points (§ 3.4) ;
- pour tout cycle fournir les générateurs du groupe de symétrie minimale ainsi qu'une présentation et son ordre ;
- écrire explicitement les équations de champs de vecteurs polynomiaux qui produisent les cycles homoclines les plus simples ;
- vérifier numériquement l'existence de ces cycles polynomiaux ;
- étudier la topologie de ces cycles sur S^3 .

On va maintenant définir exactement ces objets. Dans la suite, si aucune autre hypothèse n'est faite sur G , on le supposera fini et agissant sur \mathbb{R}^4 .

1.2 Les systèmes dynamiques équivariants

La présence de symétries a des conséquences importantes pour la géométrie du champ de vecteurs X . Pour les décrire on introduit les notations suivantes :

- $G \subset O(4)$ est un groupe de symétrie fini ;
- ξ , ou bien $\xi_1, \xi_2 \dots$, sont des points d'équilibre ;
- P , ou bien $P_1, P_2 \dots$, sont des plans invariants par rapport au flot ¹ ;
- $H (H_i)$ est le *groupe d'isotropie* de $\xi (\xi_i)$ i.e. le sous-groupe de G qui fixe le point $\xi (\xi_i)$:

¹De façon équivalente les vecteurs du champ sont tangents à P en tout point de P .

$$H = \{g \in G \mid g \cdot \xi = \xi\}; \quad (1.4)$$

– si $K \subset G$ fixe un point ξ , $Fix(K)$ est l'ensemble des points de \mathbb{R}^4 qui sont fixés par K :

$$Fix(K) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid g \cdot x = x, \forall g \in K\}. \quad (1.5)$$

La proposition suivante est fondamentale dans l'étude des systèmes symétriques :

Proposition 1.2. *$Fix(K)$ est un sous-espace de \mathbb{R}^4 invariant par rapport au flot de tout champ de vecteurs G -équivariant.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de (1.2) et (1.5). □

Définition 1.3. *Soit ξ un point singulier du champ de vecteur X et X_1 la partie linéaire de X en ξ . On dit que l'équilibre ξ est **hyperbolique** si toutes les valeurs propres de X_1 ont partie réelle non nulle.*

On arrive finalement à la définition de cycle homocline :

Définition 1.4. *Soit X un champ de vecteurs G -équivariant de \mathbb{R}^4 et soit $\xi \neq 0$ un col hyperbolique avec variété instable de dimension un. S'il existe un élément $\gamma \in G$ tel que :*

– $\gamma^{-1}\xi$ est un col dans le plan $P = Fix(K)$,

– ξ est un puits dans P ,

– il y a une connexion col–puits dans P connectant $\gamma^{-1}\xi$ à ξ ;

*alors l'ensemble de points $\gamma^j\xi$, avec leurs variétés instables, forme un **cycle homocline robuste** \mathcal{X} . La transformation γ s'appelle **twist** et G le **groupe de symétrie** du cycle.*

On remarque que le cycle \mathcal{X} , comme il a été défini dans la Définition 1.4, est effectivement robuste :

le plan P reste invariant par rapport à n'importe quelle perturbation équivariante du champ (cf. Proposition 1.2). Le problème de stabilité se réduit donc à un problème de stabilité dans le plan. Les points d'équilibre sont hyperboliques donc ils ne disparaissent pas par une petite perturbation et ils restent hyperboliques. Les variétés stables (de ξ) et instables (de $\gamma^{-1}\xi$) se coupent transversalement donc l'intersection résiste aux petites perturbations.

On remarquera aussi que l'intersection entre $\gamma^{-1}(P)$ et P donne une droite invariante : on peut obtenir les points d'équilibre par une bifurcation dans un espace de dimension un. La "robustesse" des cycles homoclines permet donc de les voir apparaître génériquement par bifurcation d'une famille de champs de vecteurs à un seul paramètre.

Chapitre 2

Préliminaires algébriques

Dans cette thèse on utilise une approche légèrement différente de celle utilisée dans la littérature ; certaines techniques de démonstration s'appuient sur des résultats classiques de théorie des corps. Dans ce paragraphe on se bornera à une exposition sommaire de ces résultats sans aucun souci d'exhaustivité. On renvoie le lecteur intéressé aux ouvrages [14], [20] et [27].

2.1 La valuation p -adique

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$ le n -ième corps cyclotomique et O l'anneau des entiers algébriques de \mathbb{K} .

Définition 2.1. ([20] § 5.7) Une **valuation** de \mathbb{Q} est une application de \mathbb{Q} dans $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ munie de la relation d'ordre de \mathbb{Z} élargie de la façon suivante : $\infty > a, \forall a \in \mathbb{Z}$. Cette application doit vérifier les propriétés suivantes :

$$v(x) = \infty \iff x = 0 \tag{2.1}$$

$$v(xy) = v(x) + v(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q} \tag{2.2}$$

$$v(x + y) \geq \min(v(x), v(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q} \tag{2.3}$$

Dans la suite on utilisera seulement la valuation p -adique (p premier). Sur \mathbb{Q} la définition est la suivante : si a et b sont premiers avec p , $v_p(p^s \frac{a}{b}) = s$.

Un des résultats classiques de la théorie de la valuation ([20] § 5.9) assure l'existence d'une extension de v_p (qu'on notera encore v_p) à \mathbb{K} , $v_p : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

De plus on a la :

Proposition 2.2. Si $x, y \in \mathbb{K}$ et $v(x) < v(y)$ alors

$$v(x) = v(-x); \quad v(x + y) = v(x).$$

Démonstration. $v(-1) = 0$ donc $v(-a) = v(-1 \times a) = v(-1) + v(a) = v(a)$. Pour démontrer la seconde affirmation on suppose $v(x) < v(y)$, ce qui donne immédiatement $v(x + y) \geq v(x)$. Mais $v(x) = v(x + y - y) \geq \min(v(x + y), v(-y))$ donc $v(x) \geq v(x + y)$ parce qu'on ne peut pas avoir $v(x) \geq v(y)$. \square

Lemme 2.3. Soit p un nombre premier; on a

$$v_p(1 - e^{\frac{2\pi i}{p^r}}) = v_p(1 - e^{\frac{2\pi im}{p^r}}) \quad (2.4)$$

pour tout entier positif m premier avec p .

Démonstration. Supposons il existe k , le plus petit entier positif premier avec p , tel que

$$v_p(1 - e^{\frac{2\pi i}{p^r}}) > v_p(1 - e^{\frac{2\pi ik}{p^r}}). \quad (2.5)$$

D'après la Proposition 2.2

$$v_p(1 - e^{\frac{2\pi i}{p^r}} - 1 + e^{\frac{2\pi ik}{p^r}}) = v_p(1 - e^{\frac{2\pi ik}{p^r}}) \quad (2.6)$$

c.à.d.

$$v_p(-e^{\frac{2\pi i}{p^r}} + e^{\frac{2\pi ik}{p^r}}) = v_p(1 - e^{\frac{2\pi ik}{p^r}}) \quad (2.7)$$

et donc

$$v_p(1 - e^{\frac{2\pi i(k-1)}{p^r}}) = v_p(1 - e^{\frac{2\pi ik}{p^r}}) < v_p(1 - e^{\frac{2\pi i}{p^r}}) \quad (2.8)$$

ce qui donne une contradiction. On doit donc conclure que

$$v_p(1 - e^{\frac{2\pi i}{p^r}}) \leq v_p(1 - e^{\frac{2\pi im}{p^r}}) \quad (2.9)$$

pour tout entier m premier avec p . De la même façon on montre que

$$v_p(1 - e^{\frac{2\pi i}{p^r}}) \geq v_p(1 - e^{\frac{2\pi im}{p^r}}). \quad (2.10)$$

\square

Lemme 2.4. Soit $\Phi_n(X)$ le n -ième polynôme cyclotomique. On a
 – $\Phi_n(1) = p$ si $n = p^k$, p premier;
 – $\Phi_n(1) = 1$ si n n'est pas une puissance d'un nombre premier.

Démonstration. Par définition on a

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X) \quad (2.11)$$

et on peut donc diviser par $X - 1$:

$$1 + X + \dots + X^{n-1} = \prod_{\substack{d|n \\ d>1}} \Phi_d(X) \quad (2.12)$$

Si l'on pose 1 à la place de X et si on suppose que $n = p^k$, on arrive à

$$p^k = \Phi_p(1) \times \Phi_{p^2}(1) \times \dots \times \Phi_{p^k}(1); \quad (2.13)$$

formule qui doit être vraie pour tout k et qui donne donc $\Phi_{p^h}(1) = p$ pour tout h .

Si n n'est pas une puissance d'un nombre premier il suffit de rappeler que tous les polynômes cyclotomiques sont des polynômes à coefficients entiers ([20] Théorème. 3.8.6) et que n est produit des $\Phi_d(1)$ avec d puissance d'un nombre premier, $d|n$. \square

On peut finalement démontrer la

Proposition 2.5. Soit u une r.p.u.¹ d'ordre r :

– si r n'est pas une puissance d'un nombre premier, $(1 - u)$ est un élément unitaire de O ;

– si $r = p^k$, $k > 0$, p premier, $v_p(1 - u) = \frac{1}{p^{k-1}(p-1)}$

Démonstration. Supposons $r = p^k$. D'après le Lemme 2.4, $v_p(\Phi_{p^h}(1)) = 1$ pour tout h . Si on appelle $\mu_{p^k}^*$ l'ensemble des r.p.u. d'ordre d on peut écrire

$$\Phi_{p^k}(1) = \prod_{\zeta \in \mu_{p^k}^*} (1 - \zeta) \quad (2.14)$$

et par évaluation

$$1 = \sum_{\zeta \in \mu_{p^k}^*} v_p(1 - \zeta) \quad (2.15)$$

et le Lemme 2.3 nous permet de conclure.

Si r n'est pas une puissance d'un nombre premier la thèse est une conséquence du Lemme 2.4. \square

Proposition 2.6. Si x est un élément inversible de O , $v(x) = 0$.

¹Racine primitive de l'unité.

Démonstration. D'après (2.2) il suffit de montrer que $v(x) \geq 0$. Soit $P(X)$ le polynôme unitaire minimal de x :

$$P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_i \in \mathbb{Z}. \quad (2.16)$$

On peut écrire

$$v(x^n) = v(a_1x^{n-1} + \cdots + a_n) \geq \min(v(a_1) + (n-1)v(x), \dots, v(a_n)) \quad (2.17)$$

et donc

$$nv(x) \geq \min((n-1)v(x), \dots, v(a_n)) \geq 0 \quad (2.18)$$

puisque $v(a_n) \geq 0$. □

2.2 Les extensions galoisiennes

On fixe un corps commutatif \mathbb{K} de caractéristique 0 et un sous-corps $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$. On appelle $\Gamma(\mathbb{E})$ l'ensemble des $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{K})$ tels que $x^\sigma = x$ pour tout x appartenant à \mathbb{E} ; $\Gamma(\mathbb{E})$ est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{K})$. On rappelle la définition suivante :

Définition 2.7. Le groupe $\Gamma(\mathbb{E})$ est appelé **groupe de Galois** de \mathbb{K} sur \mathbb{E} . On le notera aussi $\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{E})$.

Si G est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{K})$ on notera $\Phi(G)$ l'ensemble des $x \in \mathbb{K}$ tels que $x^\sigma = x$ pour tout $\sigma \in G$. $\Phi(G)$ est un sous-corps de \mathbb{K} .

Définition 2.8. Le corps $\Phi(G)$ est appelé **corps des invariants** de G dans \mathbb{K} .

Proposition 2.9. Si $G \subset \text{Aut}(\mathbb{K})$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\Gamma(\Phi(G)) = G$.
- (ii) Il existe un sous-corps \mathbb{E} de \mathbb{K} tel que $G = \Gamma(\mathbb{E})$.

S'il en est ainsi, on dit que G est un sous-groupe **stationnaire** de $\text{Aut}(\mathbb{K})$.

On a facilement le résultat suivant :

Proposition 2.10. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\Phi(\Gamma(\mathbb{E})) = \mathbb{E}$
- Il existe $G \in \text{Aut}(\mathbb{K})$ tel que $\mathbb{E} = \Phi(G)$.

Et finalement la définition qui nous intéresse le plus :

Définition 2.11. Si les conditions de la Proposition 2.10 sont vérifiées on dit que \mathbb{E} est un sous-corps **stationnaire** de \mathbb{K} ou que \mathbb{K} est une **extension galoisienne** de \mathbb{E} .

En d'autres termes \mathbb{K} est une extension galoisienne de \mathbb{E} si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{E}$ il existe $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{K})$ tel que $x^\sigma \neq x$. Le prochain résultat donne le lien entre le degré d'une extension de corps et l'indice des groupes de Galois :

Proposition 2.12. *On suppose que l'extension $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ soit de degré fini n . Alors $\Gamma(\mathbb{K})$ est d'indice fini dans $\Gamma(\mathbb{E})$ et $(\Gamma(\mathbb{E}) : \Gamma(\mathbb{K})) \leq n$.*

Démonstration. Le cas $n = 1$ est clair. Supposons $n > 1$, et raisonnons par récurrence.

- Supposons qu'il existe \mathbb{L} strictement compris entre \mathbb{E} et \mathbb{K} . On a $n > \max\{[\mathbb{L} : \mathbb{E}], [\mathbb{K} : \mathbb{L}]\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$(\Gamma(\mathbb{E}) : \Gamma(\mathbb{L})) \leq [\mathbb{L} : \mathbb{E}], \quad (\Gamma(\mathbb{L}) : \Gamma(\mathbb{K})) \leq [\mathbb{K} : \mathbb{L}].$$

- Supposons le cas précédent exclu. Soient $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{E}$, P le polynôme minimal de a sur \mathbb{E} . On a $\mathbb{K} = \mathbb{E}(a)$, $d^\circ(P) = n$. Soit \mathcal{R} l'ensemble des racines de P . Soient $\sigma, \tau \in \Gamma(\mathbb{E})$. Ils fixent les coefficients de P , donc $a^\sigma, a^\tau \in \mathcal{R}$. D'autre part :

$$a^\sigma = a^\tau \iff a^{\tau^{-1}\sigma} = a \iff \tau^{-1}\sigma|_{\mathbb{E}(a)} = \iota_{\mathbb{E}(a)} \iff \tau^{-1}\sigma \in \Gamma(\mathbb{K}).$$

L'application $\Gamma(\mathbb{E}) \rightarrow \mathcal{R}$, $a \rightarrow a^\sigma$, induit donc, par passage au quotient, une injection $(\Gamma(\mathbb{E})/\Gamma(\mathbb{K}))_g \rightarrow \mathcal{R}$. D'où $(\Gamma(\mathbb{E})/\Gamma(\mathbb{K})) \leq \text{card}(\mathcal{R}) \leq n$.

□

Corollaire 2.13. *Si $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ est une extension de degré fini n , le groupe $\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{E})$ est fini et $\text{card}(\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{E})) \leq n$.*

Proposition 2.14. *Soient G et H deux sous-groupes de $\text{Aut}(\mathbb{K})$ vérifiant $H \subset G$, $(G : H) = n \in \mathbb{N}$. Alors $[\Phi(H) : \Phi(G)] \leq n$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{S} = \{H = C_1, C_2, \dots, C_n\}$ les classes à gauche de G suivant H .

Soient $C \in \mathcal{S}$, $\alpha, \beta \in C$, $x \in \Phi(H)$. Alors $x^\alpha = x^\beta$, donc $\{x^\gamma \mid \gamma \in C\}$ est réduit à un point noté $a(x, C)$. Si $\gamma \in G$, il vient $(a(x, C))^\gamma = a(x, C^\gamma)$.

Supposons $[\Phi(H) : \Phi(G)] > n$. Il existe alors $x_1, \dots, x_{n+1} \in \Phi(H)$ linéairement indépendants sur $\Phi(G)$. De $n + 1 > n$ on déduit l'existence de $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ vérifiant :

$$\lambda_1 a(x_1, C_i) + \dots + \lambda_{n+1} a(x_{n+1}, C_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Fixons un tel Λ de sorte que le plus grand nombre possible de λ_i soient nuls. À réindexation des x_i près, on peut supposer que les a_i non nuls sont les r premiers. Enfin, quitte à changer λ_i en $\lambda_i \lambda_1^{-1}$, on se ramène à $\lambda_1 = 1$.

Comme $C_1 = H$, la première ligne du système précédent s'écrit :

$$x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0.$$

Les x_i étant indépendants sur $\Phi(G)$, on a, par exemple, $x_2 \notin \Phi(G)$. Soit $\sigma \in G$ vérifiant $\lambda_2^\sigma \neq \lambda_2$. Alors :

$$\lambda_1^\sigma a(x_1, C_i^\sigma) + \dots + \lambda_{n+1}^\sigma a(x_{n+1}, C_i^\sigma) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Or, $(C_1^\sigma, \dots, C_n^\sigma)$ se déduit de (C_1, \dots, C_n) par une permutation. On voit donc que $\Lambda - \Lambda^\sigma$ est une solution de système précédent. Elle est non nulle, car $\lambda_2^\sigma \neq \lambda_2$. D'autre part, $\lambda_1^\sigma = 1 = \lambda_1$, et $\lambda_i^\sigma = \lambda_i$ pour $i > r$. Ceci contredit le choix de Λ . \square

Lemme 2.15. *Soient $\mathbb{E} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ des extensions de \mathbb{E} . Si l'extension $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ est galoisienne et $[\mathbb{F} : \mathbb{E}] = n \in \mathbb{N}$, alors l'extension $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ est aussi galoisienne et $(\Gamma(\mathbb{E}) : \Gamma(\mathbb{F})) = n$.*

Démonstration. On a $[\Phi(\Gamma(\mathbb{F})) : \Phi(\Gamma(\mathbb{E}))] \leq (\Gamma(\mathbb{E}) : \Gamma(\mathbb{F})) \leq n$ (cf. Propositions 2.12 et 2.14), et $\mathbb{E} = \Phi(\Gamma(\mathbb{E}))$ (cf. Proposition 2.10). D'où $[\Phi(\Gamma(\mathbb{F})) : \mathbb{E}] \leq (\Gamma(\mathbb{E}) : \Gamma(\mathbb{F})) \leq n$.

Or, $\mathbb{F} \subset \Phi(\Gamma(\mathbb{F}))$, donc $[\Phi(\Gamma(\mathbb{F})) : \mathbb{E}] \geq [\mathbb{F} : \mathbb{E}] = n$. En particulier, $\mathbb{F} = \Phi(\Gamma(\mathbb{F}))$, et l'extension $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ est galoisienne. \square

Ce résultat se prouve comme le Lemme 2.15 :

Proposition 2.16. *Soient G et H deux sous-groupes de $\text{Aut}(\mathbb{K})$ tels que $H \subset G$, et $(G : H) = n \in \mathbb{N}$. On suppose que H est stationnaire (Proposition 2.9). Alors $[\Phi(H) : \Phi(G)] = n$ et G est stationnaire.*

Ce théorème établit la relation entre les sous-groupes d'un groupe de Galois et certains sous-corps :

Corollaire 2.17. (i) *Soit $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ une extension de degré fini. Alors tout sous-groupe de $\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{L})$ est stationnaire.*

(ii) *Si \mathbb{K} est de degré fini sur son sous-corps premier, tout sous-corps de $\text{Aut}(\mathbb{K})$ est stationnaire.*

Théorème 2.18. *Soient $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ une extension galoisienne de degré fini et $G = \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{E})$.*

(i) *L'application Φ définit une bijection de l'ensemble des sous-groupes de G sur l'ensemble des sous-corps de \mathbb{K} contenant \mathbb{E} .*

(ii) *Pour tout sous-groupe H de G , on a $H = \text{Gal}(\mathbb{K}/\Phi(H))$, $[\mathbb{K} : \Phi(H)] = \text{card}(H)$, et $(G : H) = [\Phi(H) : \mathbb{E}]$.*

Démonstration. L'assertion (i) résulte du Lemme 2.15 et du Corollaire 2.17. Prouvons (ii). Comme H est stationnaire (Corollaire 2.17), on a $H = \Gamma(\Phi(H)) = \text{Gal}(\mathbb{K}/\Phi(H))$. D'autre part, $(G : H) = [\Phi(H) : \mathbb{E}]$ (Lemme 2.15) et $[\mathbb{K} : \Phi(H)] = \text{card}(H)$ (Proposition 2.16). \square

Théorème 2.19. *Soient $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ une extension de degré n et $G = \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{E})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\text{card}(G) = n$

(ii) *L'extension $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ est galoisienne.*

Démonstration. L'implication (ii) \implies (i) résulte du Théorème 2.18. Prouvons (i) \implies (ii). D'après la Proposition 2.16 et le Corollaire 2.17 (avec $H = \iota_{\mathbb{K}}$), il vient $[\mathbb{K} : \Phi(G)] = n$. Or, $\mathbb{E} \subset \Phi(G)$, et $[\mathbb{K} : \mathbb{E}] = n$. D'où $\mathbb{E} = \Phi(G)$, et l'extension $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ est galoisienne. \square

Une propriété intéressante des extensions galoisiennes est la suivante :

Proposition 2.20. *Soit $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ une extension galoisienne, $P \in \mathbb{E}[X]$ un polynôme irréductible de coefficient dominant λ , $\alpha_1 \in \mathbb{K}$ une racine de P , et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les transformés deux à deux distincts de α_1 par $G = \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{E})$. Alors $P(X) = \lambda(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$.*

Démonstration. Soit $R(X) = \lambda(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n) \in \mathbb{K}[X]$. Tout $\sigma \in G$ permute les α_i , donc laisse R invariant. Les coefficients de R appartiennent donc à \mathbb{E} puisque l'extension est galoisienne. Ainsi $R \in \mathbb{E}[X]$. Les $X - \alpha_i$ divisent P et sont premiers entre eux deux à deux. Par conséquent, R divise P . Comme P est irréductible dans $\mathbb{E}[X]$, on a $R = P$. \square

On rappelle aussi un résultat qui caractérise les extensions galoisiennes :

Théorème 2.21. *Soit $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ une extension de degré fini. Cette extension est galoisienne si et seulement si \mathbb{K} est le corps de décomposition d'un polynôme de $\mathbb{E}[X]$.*

Démonstration. Si $[\mathbb{K} : \mathbb{E}]$ est fini, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{E}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Soit P_i le polynôme minimal de α_i sur \mathbb{E} . On peut supposer P_1, \dots, P_s deux à deux distincts, et $\{P_1, \dots, P_s\} = \{P_1, \dots, P_r\}$. Posons $Q = P_1 \dots P_s$. Les α_i sont des racines de Q .

(i) \implies (ii) Supposons \mathbb{K} galoisienne sur \mathbb{E} . Alors \mathbb{K} est un corps de décomposition de Q , et P_1, \dots, P_s n'ont que de racines simples (Proposition 2.20).

(ii) \implies (i) Soient $Q \in \mathbb{E}[X]$, n'ayant que des racines simples (Proposition 2.20), et \mathbb{K} est le corps de décomposition de Q . Posons $n = [\mathbb{K} : \mathbb{E}]$, $G = \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{E})$. Il faut prouver que $n = \text{card}(G)$ (Théorème 2.19). Si $n = 1$ on a $\mathbb{K} = \mathbb{E}$ et le résultat est clair.

Raisonnons par récurrence sur n .

Soient $P \in \mathbb{E}[X]$, irréductible, de degré $r > 1$, divisant Q , et $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{K}$ les racines deux à deux distinctes de P . Pour $1 \leq i \leq r$, il existe un isomorphisme $\alpha_i : \mathbb{E}(\alpha_1) \rightarrow \mathbb{E}(\alpha_i)$ tel que $\alpha_i(u_1) = u_i$, et $\alpha_i(x) = x$ pour $x \in \mathbb{E}$. Le corps \mathbb{K} est le corps de décomposition de Q sur $\mathbb{E}(u_1)$ et sur $\mathbb{E}(u_i)$. Donc α_i se prolonge en $\beta_i \in \text{Aut}(\mathbb{K})$. On a $\beta_i(u_1) = u_i$, et $\beta_i|_{\mathbb{E}} = \alpha_i|_{\mathbb{E}} = \text{id}_{\mathbb{E}}$.

Posons $s = [\mathbb{K} : \mathbb{E}(u_1)]$. Alors $n = rs$. Il existe $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in \text{Aut}(\mathbb{K})$, deux à deux distincts, et tels que $\gamma_i(x) = x$ pour $x \in \mathbb{E}(u_1)$ car $r > 1$ (hypothèse de récurrence). Pour $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$, soit $\delta_{ij} = \beta_i \circ \gamma_j \in G$. Il suffit de montrer que les δ_{ij} sont deux à deux distincts. Or, $\delta_{ij}(u_1) = \beta_i(u_1) = u_i$. D'où $\delta_{ij} \neq \delta_{pq}$ si $i \neq p$. D'autre part, $\gamma_j \neq \gamma_q$ pour $j \neq q$. \square

Voilà le théorème fondamental sur les sous-extensions galoisiennes

Théorème 2.22. *Soient $\mathbb{L} \subset \mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ des extensions de corps, $G = \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{L})$, $G' = \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{E})$, et $H = \text{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{L})$. On suppose que \mathbb{K} est une extension galoisienne de degré fini de \mathbb{L} . Alors :*

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'extension $\mathbb{L} \subset \mathbb{E}$ est galoisienne.*
2. *G' est un sous-groupe distingué de G .*
3. *$\gamma(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$ pour tout $\gamma \in G$.*

(ii) *Supposons ces conditions vérifiées. L'application $\gamma \rightarrow \gamma|_{\mathbb{E}}$ définit un morphisme surjectif $G \rightarrow H$, de noyau G' , et un isomorphisme $G/G' \simeq H$.*

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in G$. Dire que $x^\alpha = (x^\alpha)^\beta$ pour tout $x \in \mathbb{E}$ signifie que $\alpha^{-1}\beta\alpha \in G'$; soit $\beta \in \alpha G' \alpha^{-1}$.

3) \implies 2) C'est clair d'après ce qui précède.

2) \implies 3) Soit $\alpha \in G$. D'après Lemme 2.15, les extensions $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ et $\alpha(\mathbb{E}) \subset \mathbb{K}$ sont galoisiennes, donc $\mathbb{E} = \Phi(G')$, $\alpha(\mathbb{E}) = \Phi(\alpha G' \alpha^{-1})$, et le résultat est immédiat.

1) \implies 3) Si 1) est vraie, \mathbb{E} est le corps de décomposition de $P \in \mathbb{L}[X]$ dont les racines u_1, \dots, u_r sont simples (cf. Théorème 2.21). Pour $\gamma \in G$, les u_i^γ sont des racines de P dans \mathbb{K} , donc $\{u_1, \dots, u_r\} = \{u_1^\gamma, \dots, u_r^\gamma\}$. D'où $\mathbb{E} = \mathbb{L}(u_1, \dots, u_r) = \gamma(\mathbb{E})$.

3) \implies 1) Supposons $\gamma(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$ pour tout $\gamma \in G$. Soit

$$\begin{aligned} \theta : G &\longrightarrow H \\ \gamma &\longrightarrow \gamma|_{\mathbb{E}}. \end{aligned}$$

Alors θ est un morphisme de noyau G' . Il en résulte $\text{card}(H) \geq (G : G') = [\mathbb{E} : \mathbb{L}]$ (cf. Théorème 2.18). Or, $[\mathbb{E} : \mathbb{L}] \geq \text{card}(H)$ (cf. Corollaire 2.13). D'où $\text{card}(H) = [\mathbb{E} : \mathbb{L}]$. Par suite, \mathbb{E} est une extension galoisienne de \mathbb{L} (cf. Théorème 2.19) et θ est surjectif. \square

2.3 La norme

Soit $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ une extension de degré fini n , $x \in \mathbb{K}$, et u_x le \mathbb{E} -endomorphisme de \mathbb{K} défini par $y \longrightarrow xy$.

Définition 2.23. On définit la **norme** de x (relativement à \mathbb{E}) comme le nombre

$$N_{\mathbb{K}/\mathbb{E}}(x) = \det(u_x). \quad (2.19)$$

Pour $x, y \in \mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{E}$ les propriétés suivantes sont immédiates :

$$N(xy) = N(x)N(y), \quad N(\lambda x) = \lambda^n N(x), \quad N(\lambda) = \lambda^n. \quad (2.20)$$

Proposition 2.24. Soit $P(X) = X^r + \alpha_{r-1}X^{r-1} + \dots + \alpha_0$ le polynôme minimal de x sur \mathbb{E} . Alors :

$$\frac{n}{r} \in \mathbb{N}; \quad N_{\mathbb{K}/\mathbb{E}}(x) = (-1)^n \alpha_0^{n/r}. \quad (2.21)$$

Démonstration. Si $s = [\mathbb{K} : \mathbb{E}(x)]$, on a $n = rs$. D'où le premier point. Soit $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s\}$ une base de \mathbb{K} sur $\mathbb{E}(x)$. Alors $\{x^i \mathbf{e}_j \mid i \in \mathbb{N}_{r-1}^*, j \in \mathbb{N}_s^*\}$ est une base de \mathbb{K} sur \mathbb{E} . Posant $E_j = \mathbb{E}(x) \mathbf{e}_j$, $\mathbf{u}_j = \{x^i \mathbf{e}_j \mid i \in \mathbb{N}_{r-1}^*\}$ est une base de E_j et, comme \mathbb{E} -espaces vectoriels, \mathbb{K} est

la somme directe des E_j . Enfin, il est immédiat que, dans la base $\{\mathbf{u}_j\}$, la matrice de $(u_x)_{|E_j}$ est la matrice partenaire² $\kappa(P)$ de P . Les résultats sont alors clairs. \square

Proposition 2.25. *Soit $\mathbb{E} \subset \mathbb{K}$ une extension galoisienne de degré fini, $x \in \mathbb{K}$, et $G = Gal(\mathbb{K}/\mathbb{E})$. Alors :*

$$N_{\mathbb{K}/\mathbb{E}}(x) = \prod_{\sigma \in G} x^\sigma. \quad (2.22)$$

Démonstration. Posons $n = [\mathbb{K} : \mathbb{E}]$, $r = [\mathbb{E}(x) : \mathbb{E}]$, $s = [\mathbb{K} : \mathbb{E}(x)]$, et soit $H = Gal(\mathbb{K}/\mathbb{E}(x))$. On a $\text{card}(H) = s$ (Lemme 2.15). Il existe donc un système de représentants de classes à gauche de G modulo H formé de r éléments $\sigma_1 = \iota_{\mathbb{K}}, \sigma_2, \dots, \sigma_r$. Pour $\sigma, \tau \in G$, il vient :

$$x^\sigma = x^\tau \iff \tau^{-1}\sigma|_{\mathbb{E}(x)} = \iota_{\mathbb{E}(x)} \iff \tau^{-1}\sigma \in H \iff \sigma \in \tau H.$$

Les transformés deux à deux distincts de x par G sont donc $u_1 = x = \sigma_1(x), u_2 = \sigma_2(x), \dots, u_r = \sigma_r(x)$. Alors :

$$\prod_{\sigma \in G} \sigma(x) = \prod_{i=1}^r \prod_{\tau \in H} \sigma_i \tau(x) = \prod_{i=1}^r (\sigma_i(x))^s = (u_1, \dots, u_r)^s. \quad (2.23)$$

Le polynôme minimal de x sur \mathbb{L} est $(X - u_1) \dots (X - u_r)$ (Proposition 2.20). D'où le résultat d'après la Proposition 2.24. \square

2.4 Équations goniométriques à angles rationnels

Dans les années soixante Ron Graham proposa le problème suivant (cf. [23]) : trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation

$$\sin \pi x \sin \pi y = \frac{1}{4}. \quad (2.24)$$

La réponse a été donnée par Morris Newman [21] qui a fourni toutes les solutions rationnelles (x, y, r) de l'équation

²Si \mathbb{A} est un anneau commutatif non nul et $P(X) = X^m + \alpha_{m-1}X^{m-1} + \dots + \alpha_0 \in \mathbb{A}[X]$ il existe des matrices telles que le polynôme caractéristique $\chi_A = P$. C'est le cas de la matrice suivante, appelée *matrice partenaire* ou *matrice compagnon* de P :

$$\kappa(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\sin \pi x \sin \pi y = r. \quad (2.25)$$

Newman [22] a étudié aussi les équations

$$\sin \pi x_1 \dots \sin \pi x_n = r; \quad r \in \mathbb{Q}. \quad (2.26)$$

Pour ce qui est de notre travail le résultat suivant suffira :

Théorème 2.26. *Les seules valeurs rationnelles de x et y , $0 < x \leq y \leq 1/2$, telles que le produit $\sin \pi x \sin \pi y$ est un rationnel positif, sont présentées dans le tableau suivant :*

x	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/6$	$1/10$	$1/12$
y	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/6$	$3/10$	$5/12$

Démonstration. Voir [21]. □

Un algorithme plus puissant pour résoudre les équations du type (2.26) est donné dans [19]. Cet algorithme permet de résoudre complètement les cas avec $n \leq 4$. Pour $n > 4$ les calculs, même à l'aide d'ordinateurs puissants, ne semblent pas possibles. Voilà un résultat obtenu avec cet algorithme :

Théorème 2.27. *Pour tout ϕ on a*

$$\sin \frac{\pi}{6} \sin \phi = \sin \frac{\phi}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right). \quad (2.27)$$

Toutes les autres solutions rationnelles de

$$\sin \pi x_1 \sin \pi x_2 = \sin \pi x_3 \sin \pi x_4 \quad (2.28)$$

avec $0 < x_1 < x_3 \leq x_4 < x_2 \leq 1/2$ sont données dans le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4
1/21	8/21	1/14	3/14
1/14	5/14	2/21	5/21
4/21	10/21	3/14	5/14
1/20	9/20	1/15	4/15
2/15	7/15	3/20	7/20
1/30	3/10	1/15	2/15
1/15	7/15	1/10	7/30
1/10	13/30	2/15	4/15
4/15	7/15	3/10	11/30
1/30	11/30	1/10	1/10
7/30	13/30	3/10	3/10
1/15	4/15	1/10	1/6
2/15	7/15	1/6	3/10
1/12	5/12	1/10	3/10
1/10	3/10	1/6	1/6

Démonstration. Cf. Théorème 4 de [19].

□

2.5 Quaternions et rotations

On rappelle un résultat classique concernant la relation entre le corps des quaternions unitaires et les rotations de \mathbb{R}^4 . Pour plus de détails sur ce paragraphe on pourra se rapporter à [9].

Si

$$\mathbf{q} := (w, x, y, z); \quad \mathbf{q}' := (w', x', y', z') \quad (2.29)$$

les opérations d'addition et multiplication sont définies ainsi :

$$\mathbf{q} + \mathbf{q}' := (w + w', x + x', y + y', z + z') \quad (2.30)$$

$$\mathbf{q}\mathbf{q}' := (ww' - xx' - yy' - zz', wx' + xw' + yz' - zy', wy' - xz' + yw' + zx', wz' + xy' - yx' + zw') \quad (2.31)$$

avec

$$\mathbf{0} := (0, 0, 0, 0); \quad \mathbf{1} := (1, 0, 0, 0).$$

La norme d'un quaternion $\mathbf{q} = (w, x, y, z)$ est le produit de \mathbf{q} et de son conjugué $\tilde{\mathbf{q}} := (w, -x, -y, -z)$:

$$\mathbf{q}\tilde{\mathbf{q}} = (w, x, y, z)(w, -x, -y, -z) = (w^2 + x^2 + y^2 + z^2, 0, 0, 0)$$

qu'on identifie au nombre réel $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$. On appelle \mathcal{Q} le corps des quaternions unitaires. On parlera de façon équivalente des éléments de \mathcal{Q} et des vecteurs unitaires de \mathbb{R}^4 . On rappelle que tout quaternion $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{q} = (\cos \theta, \sin \theta \vec{v}) \quad (2.32)$$

où \vec{v} est un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 . Les opérations (2.30) et (2.31) peuvent s'écrire :

$$(x_1, \vec{v}) + (x_2, \vec{w}) = (x_1 + x_2, \vec{v} + \vec{w}) \quad (2.33)$$

$$(x_1, \vec{v})(x_2, \vec{w}) = (x_1x_2 - \vec{v} \cdot \vec{w}, x_1\vec{w} + x_2\vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w}) \quad (2.34)$$

où “ \cdot ” et “ \wedge ” représentent, respectivement, les produits scalaire et vectoriel de \mathbb{R}^3 .

On rappelle le résultat suivant dont la démonstration est une conséquence immédiate de l'équation (2.34) :

Remarque 2.28. Si le quaternion unitaire (2.32) est périodique ($\mathbf{q}^n = 1$ avec un $n > 0$), l'angle θ est rationnel.

Un résultat très connu est l'existence de l'homomorphisme

$$\mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \longrightarrow SO(4) \quad (2.35)$$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \longrightarrow \Psi_{\mathbf{p},\mathbf{r}} \quad (2.36)$$

défini de la façon suivante

$$\Psi_{\mathbf{p},\mathbf{r}} : \mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{pqr}^{-1}.$$

Le noyau de ce morphisme est $\{1, -1\}$.

Chapitre 3

La théorie des cycles homoclines robustes

3.1 Premières propriétés

Pour simplifier la formulation des résultats à suivre on introduit la

Définition 3.1. On appelle **groupe minimal admissible** (GMA) un sous-groupe fini G de $O(4)$ tel que :

- G est le groupe de symétrie d'un cycle homocline robuste \mathcal{X} (Définition 1.4),
- aucun sous-groupe de G ne peut être le groupe de symétrie de \mathcal{X} .

Dans l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes d'isotropie de G on peut définir une structure d'ordre partielle :

$$H_1 < H_2 \iff \exists g \in G : H_1 \subset g^{-1}H_2g. \quad (3.1)$$

Si K est un sous-groupe d'isotropie de G , on peut écrire \mathbb{R}^4 comme somme de sous-espaces K -irréductibles :

$$\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r. \quad (3.2)$$

la décomposition n'étant pas unique. On peut aussi regrouper les espaces V_i K -isomorphes, c'est à dire les espaces qui portent les mêmes représentations de K . On obtient alors la **décomposition isotypique** de \mathbb{R}^4 par rapport à K . Cette décomposition est unique.

Considérons maintenant le plan $P = \text{Fix}(K)$ de la Définition 1.4 et la décomposition isotypique associée à K . Deux cas sont possibles :

$$\mathbb{R}^4 = P \oplus W_1 \oplus W_2; \quad \dim(W_1) = \dim(W_2) = 1, \quad (3.3)$$

ou bien

$$\mathbb{R}^4 = P \oplus P'; \quad \dim(P') = 2. \quad (3.4)$$

On rappelle aussi que les différentes composantes isotypiques sont orthogonales (cf. Théorème 4.4.8 et Lemme 4.4.9 de [7]). Si ξ est un point d'équilibre appartenant à P alors la partie linéaire L du champ au point ξ , $L = (dX)_\xi$, commute avec K . Puisque les représentations de G dans les différentes composantes isotypiques ne sont pas isomorphes, on doit avoir $L(W) \subset W$ pour tout composante isotypique W et donc chaque vecteur propre de L doit appartenir à une composante isotypique. Puisque on a $\dim(W^u(\xi)) = 1$ la direction instable appartient à une composante isotypique différente de P . On a donc obtenu une propriété intéressante :

Remarque 3.2. Dans un cycle homocline de twist γ , deux plans successifs invariants par rapport au flot, P et $\gamma(P)$, sont orthogonaux.

La décomposition isotypique (3.3) suggère une autre remarque : il existe un élément k_1 de K qui agit comme l'identité (+1) sur W_1 et comme moins l'identité (-1) sur W_2 . Pour obtenir $\text{Fix}(K) = P$ il faut aussi que l'élément $k_2 \in K$ (k_2 agit comme l'identité (+1) sur W_2 et comme moins l'identité (-1) sur W_1); par conséquent les hyperplans $P \oplus W_1$ et $P \oplus W_2$ sont invariants par rapport au flot. Il nous semble donc justifié d'étudier séparément les cycles qui ont une décomposition du type (3.3) et ceux du type (3.4). Dans le cas (3.3) on peut encore distinguer les cycles qui sont complètement contenus dans $P \oplus W_1$ (cycles tridimensionnels). On résume ces remarques dans la définition suivante (cf. [6]) :

Définition 3.3. Soit \mathcal{X} un cycle de twist γ et de groupe de symétrie G . Si l'hyperplan $Q = P + \gamma(P)$ est invariant par rapport à tout flot G -équivariant, on dit que le cycle est de **type C** si $\mathcal{X} \not\subset Q$ et de **type B** si $\mathcal{X} \subset Q$. Dans tout autre cas on parle de cycle de **type A**.

La décomposition isotypique par rapport au groupe d'isotropie de ξ , H , a toujours la forme

$$\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \quad (3.5)$$

où

$$W_1 = P \cap \gamma(P), \quad W_2 = W_1^\perp \text{ dans } P, \quad W_3 = W_1^\perp \text{ dans } \gamma(P), \quad W_4 = (P + \gamma(P))^\perp.$$

On va maintenant construire une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ adaptée à la géométrie du cycle. Dans la suite, si rien n'est dit, les matrices et les vecteurs seront écrits dans cette base. On appelle P_1 un des plans invariants et P_{i+1} le plan $\gamma(P_i)$; le plan P_{i+1} étant orthogonal à P_i . L'hyperplan $P_{i-1} + P_i$ sera noté Q_i . On peut choisir \mathcal{B} de telle façon que l'action de γ soit la suivante :

$$P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \longrightarrow P_2 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \longrightarrow P_3 = \langle \cos(t) \mathbf{e}_2 + \sin(t) \mathbf{e}_3, \cos(s) \mathbf{e}_1 + \sin(s) \mathbf{e}_4 \rangle \quad (3.6)$$

avec l'introduction de deux angles s et t dont l'interprétation géométrique est immédiate : t est l'angle entre deux points d'équilibre successifs sur le plan invariant alors que s est l'angle de rotation des hyperplans Q_i sous l'action de γ .

Définition 3.4. On appelle **angle de connexion** l'angle t et **angle tilt des hyperplans** l'angle s . Ce sont les **angles de structure** du cycle.

On note A la matrice représentative du twist γ dans la base orthonormée directe \mathcal{B} (quitte à remplacer quelques \mathbf{e}_i avec $-\mathbf{e}_i$). D'après (3.6) on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(s) & -\sin(s) \\ \alpha \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ -\alpha \cos(t) & \sin(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}; \quad \alpha = \pm 1 \quad (3.7)$$

et $\det(A) = \alpha$.

Considérons le groupe K_1 tel que $P_1 = \text{Fix}(K_1)$ et un élément $k \in K_1$; il doit vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} k(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1, \\ k(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_2, \\ k(\mathbf{e}_3) &= \pm \mathbf{e}_3, \\ k &\in O(4). \end{aligned}$$

Une conséquence immédiate est la suivante :

Remarque 3.5. La matrice $S = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ appartient à K_1 et $\langle A, S \rangle \subset G$.

Le fait que la matrice $S \in G$ a des conséquences importantes. Premièrement la matrice $ASA^{-1} = \text{diag}(-1, 1, 1, -1)$ appartient aussi à G (il s'agit de la matrice qui fixe P_2) et son action sur P_1 est la symétrie par rapport à l'axe \mathbf{e}_2 . Elle appartient donc à $N(K_1)$, le normalisateur de K_1 en G . De même la restriction de $A^{-1}SA$ (qui fixe le plan P_n) à P_1 donne la symétrie par rapport à une direction invariante de P_1 qui forme un angle t avec \mathbf{e}_2 . Donc $N(K_1)$ est le groupe diédral D_k où $k = \pi/t \in \mathbb{N}$.

Deuxièmement on remarque que changer le signe de t revient à considérer le cycle symétrique par rapport à l'axe $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$ alors que changer le signe de s revient à considérer le cycle symétrique par rapport à l'hyperplan $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. On arrive à la conclusion suivante :

Remarque 3.6. Sans perte de généralité on peut limiter l'étude aux seuls cycles \mathcal{X} tels que :

- l'angle de connexion t est égal à π/k , $k = 1, 2, 3, \dots$;
- l'angle tilt $s \in [0, \pi]$.

3.2 Le problème de la stabilité dynamique

Ce problème a été étudié par beaucoup d'auteurs; ici on expose brièvement une condition nécessaire et suffisante de stabilité. Pour plus de détails on renvoie à l'article [16] de M. Krupa et I. Melbourne où cette condition est démontrée. Dans l'article cité les cycles hétéroclines sont

étudiés donc ce résultat est présenté sous une forme plus générale. Le cas où G n'est pas fini est aussi abordé.

On introduit d'abord les notations. Soit $(dX)_{\xi_1}$ la partie linéaire du champ X à l'équilibre ξ_1 et on considère ses valeurs propres. On rappelle que chaque vecteur propre doit appartenir à une composante isotypique (cf. discussion page 24).

- La valeur propre associée à la direction invariante $P_1 \cap P_2$ est appelée *radiale* et notée $-r$.
- La valeur propre restante associée à une direction de P_1 est appelée *contractante* et notée $-c$.
- La valeur propre d'*expansion* est celle qui a la plus grande valeur. Elle est notée e .
- La dernière est appelée *transversale* et notée t .

D'après la Définition 1.4 r , c et e sont positifs. Voilà un premier résultat de stabilité :

Proposition 3.7. *Supposons que le cycle \mathcal{X} soit contenu dans un sous-espace Q .*

- (a) \mathcal{X} est (asymptotiquement) stable si et seulement si \mathcal{X} est (asymptotiquement) stable dans Q .
- (b) \mathcal{X} est instable si et seulement si \mathcal{X} est instable dans Q .

Démonstration. Cf. Proposition 3.9 de [16]. □

Dans la suite on utilisera ce critère de stabilité :

Théorème 3.8. *Supposons que $c > e$ et $t < 0$. Alors génériquement le cycle homocline \mathcal{X} est asymptotiquement stable. Si $t > 0$ alors \mathcal{X} est instable.*

Démonstration. Cf. Théorème 5.1 de [16]. □

Un résultat plus précis est donné dans la Proposition suivante :

Proposition 3.9. *Si \mathcal{X} est un cycle de type A ou B, alors génériquement le cycle est asymptotiquement stable si et seulement si $c > e$ et $t < 0$. Si \mathcal{X} est de type C, alors génériquement le cycle est asymptotiquement stable si et seulement si $c - t > e$ et $t < 0$.*

Démonstration. Cf. Proposition 2.5 de [6]. □

3.3 Le Théorème de Ashwin-Montaldi

La démonstration de l'existence d'un cycle homocline est souvent traitée à l'aide du théorème de la sphère invariante (cf. [7]). Dans notre cas la connaissance directe des groupes H et K (cf. page 9) et leur forme particulièrement simple rendent facile l'utilisation du Théorème 3.13 qui donne des conditions suffisantes d'existence d'une RHT (*relative homoclinic trajectory*). On remarquera que dans notre cas l'existence d'une connexion est suffisante pour assurer l'existence du cycle tout entier ; les autres connexions étant images de la première par une transformation orthogonale. Ces résultats, tout comme la discussion qui suit, sont tirés de [2].

On commence par la définition suivante :

Définition 3.10. *Une RHT est une trajectoire dont l'image sur \mathbb{R}^4/G est une trajectoire homocline.*

On rappelle que les points d'une RHT ont tous groupes isotropie K_j de même type ; le résultat suivant donne une première condition nécessaire de "robustesse" :¹

Proposition 3.11. *Supposons que \mathcal{L} soit une RHT et que K soit son type d'isotropie. On appelle γ le twist et H l'isotropie de $\omega(\gamma)$. Alors :*

- (i) $\gamma H^{\gamma^{-1}} \cap N_G(K) = \emptyset$,
- (ii) $K < H^{\gamma^{-1}} \cap H$.

Démonstration. Pour montrer (i) on suppose qu'il existe un élément $g \in \gamma H^{\gamma^{-1}} \cap N_G(K)$ et on montre que la connexion ne peut être stable. \mathcal{L} , $\alpha(\mathcal{L})$ et $\omega(\mathcal{L})$ appartiennent tous à $P = \text{Fix}(K)$. On considère donc le flot sur P , équivariant par rapport à l'action de $N_G(K)/K$. Cette action est libre en tout point de \mathcal{L} . On pose $\xi = \omega(\mathcal{L})$.

On a $g \cdot (W^s(g^{-1}\xi) \cap P) = W^s(\xi) \cap P$ et donc $\dim(W^s(g^{-1}\xi) \cap P) = \dim(W^s(\xi) \cap P)$. Puisque $\dim(W^s(\xi) \cap P) + \dim(W^u(g^{-1}\xi) \cap P) \leq \dim(P)$ chaque intersection transversale doit être triviale ; ce qui prouve (i).

Pour montrer (ii) on remarque que $\xi \in P$ entraîne $\gamma \cdot \xi \in \gamma(P)$ et donc $\xi \in \text{Fix}(K^\gamma)$. D'après (i) $K \neq K^\gamma$ et donc H contient (strictement) soit K que K^γ . \square

Une conséquence intéressante de la Proposition 3.11 est qu'on ne peut pas avoir de RHT si le groupe G est abélien (cf. Corollaire 2.5 de [2]) ou si G est le groupe diédral \mathbb{D}_n avec n non multiple de quatre (cf. Proposition 3.4 de [2]). On introduit la définition suivante :

Définition 3.12. *Soit G est un groupe, $\gamma \in G$ et H , K deux sous-groupes de G . On dit que (K, g, H) est une **triplette homocline** pour G si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) $\gamma H^{\gamma^{-1}} \cap N_G(K) = \emptyset$,
- (ii) $K < H^{\gamma^{-1}} \cap H$ et $\dim(\text{Fix}(K)) = 2$.²

Pour montrer l'existence d'un cycle homocline le théorème suivant est très utile :

Théorème 3.13 (Ashwin–Montaldi). *Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes d'isotropie pour cette action et (K, γ, H) une triplette homocline pour G . Supposons les conditions suivantes vérifiées :*

- (iii) $H < N_G(K^\gamma) \cap N_G(K)$,
- (iv) il y a un point ξ avec isotropie H et une courbe continue de points avec isotropie K qui joint $\gamma^{-1}\xi \in \text{Fix}(H^{\gamma^{-1}})$ à ξ .

Alors il existe un ensemble ouvert non vide de champs vectoriels équivariants sur \mathbb{R}^4 avec une RHT d'isotropie K qui joint $\gamma^{-1}\xi$ à ξ .

Démonstration. Si K est un sous-groupe d'isotropie $K^{\gamma^{-1}}$ l'est aussi. Étant (K, γ, H) une triplette homocline, K et $K^{\gamma^{-1}}$ sont distincts tout comme leurs espaces de points fixes. Soit X_1 l'ensemble ouvert des champs de vecteurs équivariants de \mathbb{R}^4 qui ont un équilibre hyperbolique

¹La notation K^γ dénote le groupe conjugué de K , $\gamma K \gamma^{-1}$. Le normalisateur de K sera noté $N_G(K)$.

²La condition $\dim \text{Fix}(K) = 2$ n'est pas nécessaire pour la démonstration du Théorème 3.13. Toutefois on s'en servira car elle ne représente pas une restriction dans l'étude des cycles homoclines (cf. Définition 1.4).

en $\gamma^{-1}\xi$. X_1 contient le sous-ensemble ouvert X_2 des champs de vecteur tels que leurs partie linéaire au point $\gamma^{-1}\xi$ possède une seule valeur propre réelle positive λ_e . On considère maintenant le sous-ensemble X_3 de X_2 tel que l'image du vecteur propre associé à λ_e par le twist γ n'appartient pas à $Fix(K)$. X_3 n'est pas vide car $P = Fix(K) \neq Fix(K^\gamma)$ et il est clairement ouvert. Les membres de X_3 vérifient donc la condition

$$\dim(W^u(\gamma^{-1}\xi) \cap P) + \dim(W^s(\xi) \cap P) > 2,$$

car $\gamma \cdot (W^s(\gamma^{-1}\xi) \cap Fix(K^{\gamma^{-1}})) = W^s(\xi) \cap P$.

Considérons une courbe \mathcal{L} continue de longueur finie et d'isotropie K joignant $\gamma^{-1}\xi$ à ξ dans P . Soit N un voisinage tubulaire de \mathcal{L} tel que $\gamma(N) \cap N = \emptyset$. Il existe un sous-ensemble non vide X_4 de X_3 tel que $W^u(\gamma^{-1}\xi)$ coupe $W^s(\xi)$ dans N .

Puisque $\dim(W^u(\gamma^{-1}\xi) \cap P) + \dim(W^s(\xi) \cap P) \geq 2+1 = 3$, il existe un sous-ensemble ouvert $X_5 \subset X_4$ de flots tels que cette intersection est transversale ; i.e. la connexion est robuste. \square

3.4 Les exemples classiques

On va présenter des exemples de cycles qui sont facilement repérables dans la littérature. Dans le § 3.4.2 on propose une exposition rapide d'un problème physique qui a conduit à leur étude. Une analyse plus détaillée de ces phénomènes est disponible, par exemple, dans le Chapitre 9 de [7].

Dans \mathbb{R}^4 on rencontre des cycles qui sont entièrement contenus dans un hyperplan. Bien entendu ce sont les cycles les plus simples de \mathbb{R}^4 : on commencera donc par montrer ces exemples, les cycles de \mathbb{R}^3 .

3.4.1 Le cycle à deux points

Soit G_2 le groupe d'ordre 8 engendré par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Le plan $P_1 = \langle x_1, x_2 \rangle = Fix(\{I, S\})$ donc il est invariant par rapport au flot (cf. Proposition 1.2); de même le plan $P_2 = AP_1 = \langle x_2, x_3 \rangle$. On remarque aussi que l'intersection de deux sous-espaces invariants donne un sous-espace invariant, donc l'axe x_2 est aussi invariant. Il est facile de vérifier qu'il n'y a pas d'autre axes invariants dans les deux plans $\langle x_1, x_2 \rangle$ et $\langle x_2, x_3 \rangle$. On peut choisir une unité de mesure telle que le point d'équilibre ξ_1 qui se produit par bifurcation sur l'axe x_2 (et donc tous les autres points d'équilibre du cycle) appartient à la sphère unitaire.

D'après les définitions précédentes on a :

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \xi_2 = A \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (3.9)$$

et, par un calcul direct,

$$H_1 = \{I, \text{diag}(-1, 1, -1), \text{diag}(-1, 1, 1), \text{diag}(1, 1, -1)\}; \quad K_1 = \{I, S\}. \quad (3.10)$$

Le normalisateur $N_G(K_1)$ est constitué des quatre matrices diagonales de G . Pour montrer l'existence de la connexion entre ξ_2 et ξ_1 on utilise le Théorème 3.13 (la vérification est immédiate) :

(i) $A H_1^{A^{-1}} \cap N_G(K_1) = A H_2 \cap N_G(K_1) = \emptyset$;

(ii) $K_1 < H_2 \cap H_1$;

(iii) $H_1 < N_G(K_2) \cap N_G(K_1)$;

(iv) ξ_1 a isotropie H_1 et les points de l'arc de géodésique minimal de la sphère unitaire qui joint ξ_2 à ξ_1 ont isotropy K_1 .

On a donc démontré l'existence du cycle homocline a deux points, \mathcal{X}_2 .

Un exemple de champ de vecteur qui produit ce cycle est le suivant :

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 - a x_1 x_2 - c x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (3.11)$$

$$\dot{x}_2 = \lambda x_2 + b(x_1^2 - x_3^2) - c x_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (3.12)$$

$$\dot{x}_3 = \lambda x_3 + a x_2 x_3 - c x_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \quad (3.13)$$

L'angle de connexion est $t = \pi$.

3.4.2 Les cycles à trois et six points

Le problème d'instabilité de Küpper-Lortz. On se propose d'étudier les mouvements convectifs des particules d'un fluide placé entre deux plaques horizontales représentées (idéalement) par deux plans parallèles. La température de chaque plaque est constante et uniforme mais différente de celle de l'autre plaque. On introduit aussi une rotation des plaques $\Omega > 0$ autour d'un axe vertical. Les possibles paramètres de bifurcation sont Ω et R , le nombre de Rayleigh, qui est directement proportionnel à la différence de température entre les plaques. Si Ω devient trop grand on assiste à la création de systèmes de "rouleaux"; ces systèmes peuvent être observés pendant quelques instants, avant qu'ils ne se déforment pour se reformer avec une orientation différente. Les nouveaux rouleaux ressemblent aux vieux tournés d'un angle de 60° environs. Après quelques instants le processus recommence.

La modélisation de ce phénomène est due à F. H. Busse et K. E. Heikes [4] mais seulement l'analyse rigoureuse de Guckenheimer et P. Holmes [13], a permis de donner une interprétation mathématique satisfaisante de ce phénomène d'intermittence.

Soit G_3 le groupe d'ordre 24 engendré par les matrices³

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

On procède comme dans le § 3.4.1 :

³Ce groupe est souvent noté \mathbf{T}_d

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \xi_2 = A \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \xi_3 = A^2 \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

et encore

$$H_1 = \{I, \text{diag}(-1, 1, -1), \text{diag}(-1, 1, 1), \text{diag}(1, 1, -1)\}; \quad K_1 = \{I, S\}. \quad (3.16)$$

Le normalisateur $N_G(K_1)$ est constitué des huit matrices diagonales de G . Pour montrer l'existence de la connexion entre ξ_3 et ξ_1 on utilise toujours le Théorème 3.13 :

- (i) $A H_1^{A^{-1}} \cap N_G(K_1) = A H_3 \cap N_G(K_1) = \emptyset$;
- (ii) $K_1 < H_3 \cap H_1$;
- (iii) $H_1 < N_G(K_2) \cap N_G(K_1)$;
- (iv) ξ_1 a isotropy H_1 et les points de l'arc de géodésique minimal de la sphère unitaire qui joint ξ_3 à ξ_1 ont isotropy K_1 .

On a donc démontré l'existence du cycle homocline a trois points, \mathcal{X}_3 . L'angle de connexion est $t = \pi/2$.

Si on pense que les plans coordonnées sont des plans de symétrie, on se rend compte immédiatement que les six points d'intersection de la sphère unitaire avec les axes coordonnées sont des points d'équilibre et qu'ils sont connectés entre eux. La question de savoir s'il existe un cycle homocline, \mathcal{X}_6 , avec ces six points s'impose. La réponse à cette question est affirmative, $G_6 = G_3$ et le twist concerné est l'élément

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

L'angle de connexion est encore $\pi/2$. On pourrait dire que le cycle \mathcal{X}_3 est un *sous-cycle* de \mathcal{X}_6 . On verra d'autres exemples de ce phénomène.

La forme générale du champ de vecteurs équivariant par rapport à l'action de G_3 à l'ordre trois est :

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + a x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b x_1 x_2^2 + c x_1 x_3^2 \quad (3.18)$$

$$\dot{x}_2 = \lambda x_2 + a x_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b x_2 x_3^2 + c x_2 x_1^2 \quad (3.19)$$

$$\dot{x}_3 = \lambda x_3 + a x_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b x_3 x_1^2 + c x_3 x_2^2 \quad (3.20)$$

où λ est le paramètre de bifurcation.

3.4.3 Les cycles à quatre et huit points

Les cycles a quatre et huit points sont les équivalents, en \mathbb{R}^4 , des cycles à trois et six points. On peut imaginer les huit points d'équilibre comme les intersections des axes coordonnés avec

la sphère unitaire de \mathbb{R}^4 et le cycle à quatre points comme un sous-cycle du cycle à huit points (comme on avait déjà vu au § 3.4.2). Les générateurs du groupe G_8^+ et les angles de structure sont

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S = \text{diag}(1, 1, -1, -1); \quad t = s = \frac{\pi}{2}. \quad (3.21)$$

L'ordre de G_8^+ est 32 et $G_8^+ \subset SO(4)$. Pour obtenir le cycle à quatre points il suffit de choisir le twist suivant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad t = s = \frac{\pi}{2}. \quad (3.22)$$

La démonstration de l'existence de ces cycles est analogue à celle des cycles analysés ci-dessus. Il y a néanmoins deux différences entre le cas \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4 . D'abord le groupe G_4^- a aussi ordre 32 mais $G_4^- \not\subset SO(4)$ donc $G_4^- \neq G_8^+$. De plus les deux groupes ne sont pas isomorphes. La deuxième conséquence concerne les connexions dans les plans coordonnés. Dans \mathbb{R}^3 chaque plan coordonné contient quatre points d'équilibre connectés entre eux ; ceci n'est pas toujours vrai dans \mathbb{R}^4 . En effet les directions $(1, 0, 1, 0)$ et $(0, 1, 0, 1)$ sont invariantes.

Il est facile de vérifier que dans tous les exemples de cycle qu'on a rencontrés jusqu'ici les symétries étaient assez simples ; les plans et les axes invariants étant des plans et des axes coordonnés. Dans cette situation l'angle de connexion doit forcément être un multiple de $\pi/2$. Ceci justifie la définition suivante :

Définition 3.14. On appelle *simple* un cycle où l'un au moins des angles de structure (Définition 3.4) est un multiple de $\pi/2$.

On pourrait remarquer que dans les exemples qui précèdent il en est de même pour le deuxième angle de structure. Cette propriété sera démontrée par la suite (cf. Théorème 6.2).

Chapitre 4

Les cycles homoclines de type C

Dans la base \mathcal{B} (cf. page 24) la décomposition isotypique par rapport au sous-groupe K_1 a la forme

$$\mathbb{R}^4 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \oplus \langle \mathbf{e}_3 \rangle \oplus \langle \mathbf{e}_4 \rangle \quad (4.1)$$

où $P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ contient la connexion $\xi_n \rightarrow \xi_1$. La direction contractante en ξ_n ne peut pas être \mathbf{e}_3 car, dans ce cas, le cycle serait contenu dans l'hyperplan $Q_1 = P_1 + P_2$. On arrive à la conclusion que $Q_n = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4 \rangle$.

Remarque 4.1. Dans un cycle de type C et de twist γ , deux hyperplans successifs invariants par rapport au flot, Q_i et $\gamma(Q_i)$, sont orthogonaux ($s = \pi/2$).

L'action de γ est la suivante :

$$P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \longrightarrow P_2 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \longrightarrow P_3 = \langle \cos(t) \mathbf{e}_2 + \sin(t) \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle \quad (4.2)$$

et le twist γ s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ \alpha \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ -\alpha \cos(t) & \sin(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \pm 1. \quad (4.3)$$

Lemme 4.2. Soit A la matrice (4.3) avec $\alpha = 1$. Pour avoir $A^n = I$ avec un $n > 0$, t doit être un multiple de $\pi/2$.

Démonstration. Soient $z, 1/z, w, 1/w$ les valeurs propres de A , racines de l'équation $A^n = I$. Le polynôme caractéristique de A étant

$$\chi(x) = x^4 - \cos(t) x^3 - \cos(t) x + 1 \quad (4.4)$$

on a :

$$\cos(t) = z + \frac{1}{z} + w + \frac{1}{w} \quad (4.5)$$

$$-2 = \frac{1}{zw}(1+z^2)(1+w^2). \quad (4.6)$$

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$ le n -ième corps cyclotomique et O l'anneau des entiers algébriques de \mathbb{K} . D'après (4.6), $(1+z^2)$ et $(1+w^2)$ ne peuvent pas être à la fois inversibles dans O . On va donc analyser les deux cas suivants :

- (a) un des deux, (disons $(1+z^2)$), est inversible alors que l'autre ne l'est pas ;
- (b) les deux ne sont pas inversibles.

Dans le cas (a), d'après la Proposition 2.5, $-w^2$ doit être une r.p.u. d'ordre p^s , une puissance d'un nombre premier ; on déduit de (4.6), par valuation p -adique, $v_p(2) = 0 + 0 + v_p(1+w^2)$ (cf. Proposition 2.6). Ceci donne

$$v_p(2) = \frac{1}{p^{s-1}(p-1)} \quad (4.7)$$

c.à.d. $s = 1$, $p = 2$. Mais alors $-w^2 = -1$ et donc $\sin(t) = 0$.

Dans le cas (b) on va montrer que $-z^2$ et $-w^2$ sont des r.p.u. d'ordre une puissance de 2. Supposons que l'une des deux, disons $-z^2$, soit une r.p.u. d'ordre p^s avec $p \neq 2$. D'après (4.6) on aurait :

$$0 = 0 + v_p(1+z^2) + v_p(1+w^2) = \frac{1}{p^{s-1}(p-1)} + v_p(1+w^2) \geq \frac{1}{p^{s-1}(p-1)} \quad (4.8)$$

ce qui est impossible (l'inégalité est une conséquence de (2.3)). On arrive à la conclusion que $-z^2$ et $-w^2$ sont des r.p.u. d'ordres respectifs 2^s et 2^t :

$$1 = \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{2^{t-1}} \quad (4.9)$$

et donc que $s = t = 2$. z et w sont alors des r.p.u. d'ordre 8, $z + 1/z = \pm\sqrt{2}$ et $w + 1/w = \pm\sqrt{2}$. De plus d'après (4.6) $z + 1/z$ et $w + 1/w$ n'ont pas le même signe et alors (4.5) nous permet de conclure que $\cos(t) = 0$. \square

Il est facile maintenant de préciser l'affirmation suivante tirée de [6] :

Let $k \geq 1$ be the least positive integer such that $\gamma^k \xi = \xi$. [...] If \mathcal{X} is of type C, there is an even number of equilibria $\gamma^j \xi$ in the cycle, so k is even.

Théorème 4.3. *Un cycle de type C a quatre ou huit points d'équilibre.*

Démonstration. Supposons d'abord que $\det(A) = 1$. Soit (4.3) avec $\alpha = 1$ le twist du cycle. L'angle de connexion t ne peut pas être égal à π car, dans ce cas, $n = 2$ et le cycle est de type B. D'après les Remarques 3.6 et 4.1 et le Lemme 4.2 on doit avoir $t = s = \pi/2$: on vérifie directement que $n = 8$.

Soit maintenant $\det(A) = -1$. Si l'on note $\xi_i^{(j)}$ pour la composante j de ξ_i on a

$$\xi_4^{(3)} = \cos^2(t) \sin(t), \quad \xi_5^{(3)} = -\cos(t) \sin^3(t) \quad (4.10)$$

donc si $t \in]0, \pi/2[$ la connexion $\xi_4 \rightarrow \xi_5$ traverse l'hyperplan $x_3 = 0$. Or, cet hyperplan n'est rien d'autre que $Q_n = A^{-1}Q_1$ et il est donc invariant par rapport au flot. Pour éviter une contradiction il faut poser $t = s = \pi/2$, ce qui donne $n = 4$. \square

Corollaire 4.4. *Tous les cycles de type C sont simples.¹*

Démonstration. Ce résultat est contenu dans la démonstration du Théorème 4.3. \square

¹Dans les cycles de type B et C l'angle s est forcément un multiple de $\pi/2$. Contrairement aux cycles de type A, on pourrait dire qu'un seul angle t caractérise ces cycles. Bien entendu quand on dit qu'un de ces cycles est simple on veut dire que cet angle t est un multiple de $\pi/2$.

Chapitre 5

Les cycles homoclines de type B

Comme dans le cas des cycles de type C, la décomposition isotypique de \mathbb{R}^4 par rapport à K_1 , a la forme suivante dans la base \mathcal{B} :

$$\mathbb{R}^4 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \oplus \langle \mathbf{e}_3 \rangle \oplus \langle \mathbf{e}_4 \rangle. \quad (5.1)$$

Pour que le cycle soit de type B il doit être contenu dans l'hyperplan Q_1 et la direction $\langle \mathbf{e}_4 \rangle$ ne joue aucun rôle. On va étudier ces cycles dans \mathbb{R}^3 . L'action du twist γ sur les plans invariants est la suivante :

$$P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \longrightarrow P_2 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \longrightarrow P_3 = \langle \cos(t) \mathbf{e}_2 + \sin(t) \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle \quad (5.2)$$

Les matrices A (cf. (3.7)) et S (cf. Remarque 3.5) s'écrivent alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ -\alpha \cos(t) & \sin(t) & 0 \end{pmatrix}; \quad S = \text{diag}(1, 1, -1). \quad (5.3)$$

Lemme 5.1. *Tous les cycles de type B sont simples.*

Démonstration. La matrice $ASA^{-1} = \text{diag}(-1, 1, 1)$ appartient à G quel que soit le signe de α . Donc les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ -\cos(t) & \sin(t) & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ \cos(t) & \sin(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

appartiennent à G . Les parties réelles des valeurs propres complexes conjuguées de ces matrices doivent être égales aux cosinus de deux angles rationnels :

$$\frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} = \cos(a); \quad \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} = \cos(b) \quad (5.5)$$

où a et b sont deux angles rationnels. Les équations (5.5) entraînent

$$\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad (5.6)$$

et la thèse découle du Théorème 2.26. \square

Théorème 5.2. *Les cycles de type B ont deux, trois ou six points d'équilibre.*

Démonstration. Les seules valeurs possible pour t sont π et $\pi/2$ d'après le Lemme 5.1. Si $t = \pi$ on obtient le cycle à deux points. Si $t = \pi/2$ on a $n = 3$ si $\det(A) = 1$ et $n = 6$ si $\det(A) = -1$. \square

On aura remarqué que tous les cycles rencontrés jusqu'ici (exemples classiques, cycles de type B et C) sont simples et, de plus, leurs angles de structure sont des multiples de $\pi/2$. Dans ce cas, comme il est facile de vérifier, les points d'équilibre sont situés sur les axes coordonnés et les plans (éventuellement les hyperplans) invariants sont aussi les plans (hyperplans) coordonnés. Il est temps maintenant de s'occuper de ces deux questions :

- 1) ces propriétés sont-elles vérifiées par tout cycle simple ?
- 2) existe-t-il des cycles non simples ?

Les réponses, affirmatives, seront données dans le paragraphe 6.1 pour la première question, et dans les paragraphes 6.3 et 6.4 pour la deuxième.

Chapitre 6

Les cycles homoclines de type A

Dans les cycles de type A la décomposition isotypique par rapport à K_1 s'écrit, dans la base \mathcal{B} :

$$\mathbb{R}^4 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \oplus \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle. \quad (6.1)$$

Il n'y a pas d'hyperplans invariants et le cycle n'est contenu dans aucun hyperplan de \mathbb{R}^4 . Dans ces conditions le GMA (cf. Définition 3.1) est engendré par les matrices A et S . On aborde l'étude de cycles de type A par les cycles simples.

6.1 Une caractérisation des cycles simples

On veut montrer que dans un cycle simple les angles de structure sont des multiples de $\pi/2$; il s'agit donc des cycles déjà vus avec $n = 2, 3, 4, 6$ ou 8 .

Lemme 6.1. *Supposons que a et $b = a/(a-1)$ soient deux nombres complexes. Si a et b sont les parties réelles de deux racines de l'unité, alors $a = -1, 0$ ou $1/2$.*

Démonstration. Soit z une r.p.u. d'ordre n et $a = \Re(z)$. On a

$$a - 1 = \frac{(z - 1)^2}{2z} \quad (6.2)$$

et donc (cf. Proposition 2.25)

$$N(a - 1) = \frac{(N(1 - z))^2}{2^{\Phi(n)}}; \quad n > 2 \quad (6.3)$$

$$N(a - 1) = -1; \quad n = 2 \quad (6.4)$$

où $\Phi(n) = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ est la fonction d'Euler. La norme de $1 - z$ peut être évaluée en remplaçant 1 dans le polynôme minimal de z , Ψ_n . En appliquant le Lemme 2.4 on obtient

$$N(a-1) = \frac{p^2}{2^{\Phi(n)}} \quad (6.5)$$

si n est une puissance d'un nombre premier p , ou alors

$$N(a-1) = \frac{1}{2^{\Phi(n)}}. \quad (6.6)$$

On va montrer que ces normes ne sont pas compatibles avec la condition

$$(a-1)(b-1) = 1 \quad (6.7)$$

sauf dans les cas $a = -1, 0, 1/2$. D'après (6.7) les normes de $(a-1)$ et $(b-1)$ ne peuvent pas être toutes les deux de la forme (6.6). Supposons que $N(a-1)$ soit de la forme (6.5) et donc que n soit une puissance d'un nombre premier p . Si p est plus grand que 5,

$$N(a-1) = \frac{p^2}{2^{\Phi(n)}} \leq \frac{p^2}{2^{p-1}} < 1. \quad (6.8)$$

Il est facile de vérifier, par le calcul direct, que les seuls cas qui nous restent à examiner sont les cas $n = 1, 2, 3, 4$ et 5. On utilisera maintenant la *norme absolue*

$$N(x) = |N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(x)|^{1/\Phi(n)} \quad (6.9)$$

car cette valeur est indépendante de l'extension \mathbb{K} qui contient x . Les valeurs de la norme qui nous intéressent sont

n	1	2	3	4	5
$N(a-1)$	0	2	3/2	1	$\sqrt{5}/2$

On analyse chaque cas :

- $n = 1, a = 1$, incompatible avec l'équation (6.7) ;
- $n = 2, a = -1$, et $b = 1/2$;
- $n = 3, a = -1/2$, et donc $b = 1/3$, qui n'est pas la partie réelle d'une racine de l'unité ;
- $n = 4, a = 0$;
- $n = 5, a = (\sqrt{5} \pm 1)/4$ d'où $b = -1/\sqrt{5}$ ou $b = -2 - \sqrt{5}$, en aucun cas la partie réelle d'une racine de l'unité.

Le problème étant symétrique en a et b , il y a aussi la solution $b = -1$ et $a = 1/2$. □

On est maintenant à même de montrer que dans un cycle simple les points d'équilibre appartiennent aux axes coordonnés.

Théorème 6.2. *Si le cycle \mathcal{X} est simple les angles de structure sont des multiples de $\pi/2$.*

Démonstration. D'après la Définition 3.14 on a quatre cas à traiter : $\cos(t) = -1, \cos(s) = \pm 1, \cos(s) = 0$ et $\cos(t) = 0$.

- $\cos(t) = -1$. $\gamma(\xi) = -\xi$ donc le cycle possède deux points d'équilibre.
- $\cos(s) = \pm 1$. $A(\mathbf{e}_4) = \pm \mathbf{e}_4$ donc le cycle est tridimensionnel. Les cycles homoclines robustes de \mathbb{R}^3 sont les cycles de type B et ils ont $n = 2, 3$ ou 6 (cf. Chapitre 5).
- $\cos(s) = 0$. Si $\gamma \in SO(4)$ le résultat est une conséquence du Lemme 4.2.
Si $\gamma \notin SO(4)$ la partie réelle d'une valeur propre de A est $\cos(t)/2$. Donc

$$\cos(t) = 2 \cos\left(\frac{2h\pi}{N}\right); \quad -\frac{1}{2} \leq \cos\left(\frac{2h\pi}{N}\right) \leq \frac{1}{2}. \quad (6.10)$$

On va montrer que les seules possibilités sont $\cos(2h\pi/N) = -1/2, 0$ ou $1/2$. Les parties réelles des valeurs propres de A^2S (on rappelle que $G = \langle A, S \rangle$) sont

$$\frac{1}{4} \cos^2(t) \pm \frac{1}{4} \cos(t) \sqrt{8 + \cos^2(t)} \quad (6.11)$$

d'où on tire

$$a = \cos^2(2h\pi/N) + \cos(2h\pi/N) \sqrt{2 + \cos^2(2h\pi/N)} \quad (6.12)$$

$$b = \cos^2(2h\pi/N) - \cos(2h\pi/N) \sqrt{2 + \cos^2(2h\pi/N)} \quad (6.13)$$

avec a et b deux parties réelles de deux racines de l'unité. Ceci donne

$$a + b = -2 \cos^2\left(\frac{2h\pi}{N}\right) = ab. \quad (6.14)$$

Les hypothèses du Lemme 6.1 sont vérifiées, donc $a = -1, 0$ ou $1/2$ ce qui donne $\cos(t) = 0$ ou ± 1 .

- $\cos(t) = 0$. Si $\gamma \in SO(4)$

$$\chi(x) = x^4 - \cos(s) x^3 - \cos(s) x + 1 \quad (6.15)$$

est le polynôme caractéristique de A . La démonstration du Lemme 4.2 permet de conclure que s doit être un multiple de $\pi/2$. Si $\gamma \notin SO(4)$ la démonstration est la même que dans le cas $\cos(s) = 0$.

□

Entre les cycles simples on trouve aussi, comme on a vu au Chapitre 5, les cycles tridimensionnels. On peut les caractériser algébriquement de la façon suivantes :

Théorème 6.3. *Soit \mathcal{X} un cycle homocline de twist γ .*

- Si $\gamma \in SO(4)$ alors \mathcal{X} est tridimensionnel si et seulement si γ a une valeur propre réelle.
- Si $\gamma \notin SO(4)$ et toutes les valeurs propres de γ sont réelles, alors \mathcal{X} est le cycle tridimensionnel simple avec deux points d'équilibre.

Démonstration. Supposons d'abord que $\gamma \in SO(4)$. Les parties imaginaires d'un couple de valeurs propres complexes conjuguées de γ sont :

$$\lambda_i = \pm \frac{1}{4} \sqrt{2\sigma^2 - 2\sigma\sqrt{\sigma^2 + 8 - 8\tau} - 8 - 8\tau} \quad (6.16)$$

où $\sigma = \cos(t) + \cos(s)$ et $\tau = \cos(t)\cos(s)$. On vérifie par le calcul direct que :

$$\lambda_i = 0 \iff (\cos(t) - 1)(\cos(t) + 1)(\cos(s) - 1)(\cos(s) + 1) = 0. \quad (6.17)$$

Donc $\lambda_i = 0$ revient à $t = \pi$, $s = 0$ ou $s = \pi$. Dans les trois cas le cycle est contenu dans un hyperplan. La démonstration pour l'autre couple de valeurs propres est la même.

Supposons maintenant que $\gamma \notin SO(4)$. Les parties imaginaires du couple de valeurs propres non réelles sont

$$\lambda_i = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 - 4}. \quad (6.18)$$

Si $\lambda_i = 0$, $\cos(t) + \cos(s) = 2$ d'après la Remarque 3.6 et donc $t = s = \pi$. \square

6.2 Un résultat avec n impair

On se propose, dans ce paragraphe, d'étudier les cycles qui possèdent un nombre impair de points d'équilibre. La conclusion de cette analyse est que un seul cycle vérifie cette condition ; il s'agit, bien entendu, du cycle simple à trois points contenu dans un hyperplan de \mathbb{R}^4 . Pour démontrer ce résultat d'inexistence on utilisera des résultats classiques de la théorie de Galois. Pour commencer on démontre un résultat technique.

Lemme 6.4. *Soient θ et ϕ deux nombres de l'intervalle $]0, \pi[$. Il existe un entier positif k tel que¹*

$$\cos^2(2^k\theta) + \cos^2(2^k\phi) < 1. \quad (6.19)$$

Démonstration. Soit $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite de sous-ensembles du carré $D =]0, \pi[^2$ définis de la façon suivante :

¹Une façon équivalente d'écrire cette propriété est la suivante :
Si $P = (x, y)$ est un point de $]0, 1[^2$ et Φ l'application

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2 - 1 \\ 2y^2 - 1 \end{pmatrix},$$

il existe un entier naturel n tel que $\Phi^n(P)$ appartient à l'intérieur du cercle unitaire. L'application $x \mapsto 2x^2 - 1$ n'est rien d'autre que la *fonction logistique* (modulo un changement de coordonnées). Cette application est chaotique sur $[-1, 1]$. Une suite logistique peut aussi être engendrée à l'aide d'une application d'un cercle. On considère un point associé à un angle α et la suite de points associées aux angles $2\alpha, 4\alpha, 8\alpha, \dots$; les abscisses de cette suite de points donnent la suite logistique cherchée.

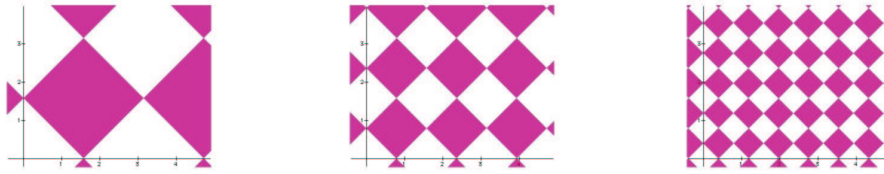


FIG. 6.1 – Les ensembles s_0 (gauche), s_1 (centre) et s_2 (droite).

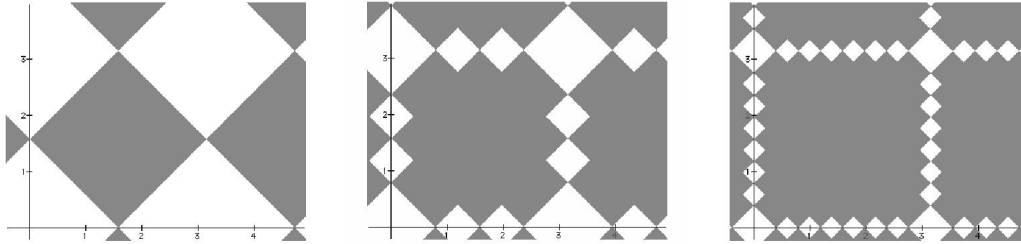


FIG. 6.2 – Les ensembles S_0 (gauche), S_1 (centre) et S_2 (droite).

$$s_i = \{(x, y) \in D \mid \cos^2(2^i x) + \cos^2(2^i y) < 1\}; \quad i \in \mathbb{N}. \quad (6.20)$$

On définit la suite monotone

$$S_i = \bigcup_{k=0}^i s_k. \quad (6.21)$$

La thèse découle du fait que $S_i \nearrow D$. (Les trois premiers termes des suites (s_i) et (S_i) sont esquissés dans les Figures 6.1 et 6.2. On remarquera qu’il est facile de construire une suite de rectangles $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $R_i \subset S_i$, qui converge, elle aussi, à D .)

□

Théorème 6.5. *Il n’y a pas de cycles homoclines avec un nombre impair n de points d’équilibre si $n > 3$.*

Démonstration. Soit n un entier impair plus grand que trois. On remarque que $\gamma^n = id$ donc que $\gamma \in SO(4)$. La partie réelle des valeurs propres de A doit être de la forme

$$\Re(\lambda_1) = \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right), \quad \Re(\lambda_2) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad \text{pgcd}(h, n, k) = 1. \quad (6.22)$$

La moitié de la somme des quatre valeurs propres de AS sera notée P :

$$P = \sqrt{\delta^2 + 8 + 8\tau}, \quad \delta = \cos(t) - \cos(s), \quad \tau = \cos(t) \cos(s). \quad (6.23)$$

On peut vérifier facilement que

$$P = \sqrt{\cos^2\left(\frac{2h\pi}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1}, \quad P \in \mathbb{R}. \quad (6.24)$$

De plus P , par sa définition, doit appartenir à \mathbb{K} , le sous-corps de \mathbb{C} engendré par toutes les racines de l'unité.

On va montrer que $P \notin \mathbb{K}$. Si $P \in \mathbb{K}$, P doit appartenir à \mathbb{K}_m , le m -ième corps cyclotomique, pour un m convenable. \mathbb{K}_m est une extension galoisienne de \mathbb{Q} (cf. Théorème 2.21); son groupe de Galois est abélien (cf. [14] § 4.7) et tous ses sous-corps sont des extensions galoisiennes de \mathbb{Q} (cf. Théorème 2.22).

Il suffit donc de montrer que $\mathbb{Q}(P)$ ne peut pas être une extension galoisienne de \mathbb{Q} . On supposera, par contradiction, que cette extension est galoisienne. De même $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(P, e^{2\pi i/n})$ doit être une extension galoisienne (Théorème 2.21). Le Théorème 2.22 nous assure que

$$\phi(\mathbb{Q}(P)) = \mathbb{Q}(P), \quad \forall \phi \in \text{Gal}\left(\mathbb{Q}(P, e^{2\pi i/n})/\mathbb{Q}\right). \quad (6.25)$$

Il nous reste à trouver un automorphisme ϕ en contradiction avec (6.25). Soit a un entier premier avec n et Φ_a l'automorphisme associé à a dans \mathbb{K}_n . L'extension $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(P, e^{2\pi i/n})$ est galoisienne donc on peut élargir Φ_a à un automorphisme de $\mathbb{Q}(P, e^{2\pi i/n})$ (Théorème 2.22). L'image de P par Φ_a est

$$P' = \phi_a(P) = \sqrt{\cos^2\left(\frac{2ha\pi}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{2ka\pi}{n}\right) - 1}. \quad (6.26)$$

On arrive à une contradiction si on trouve un a tel que

$$\cos^2\left(\frac{2ha\pi}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{2ka\pi}{n}\right) - 1 < 0. \quad (6.27)$$

Si n est un nombre impair plus grand que trois le cycle n'est pas simple donc

$$P_0 = \left(\frac{2h\pi}{n}, \frac{2k\pi}{n}\right) \quad (6.28)$$

appartient au carré ouvert D . Le Lemme 6.4 permet de conclure avec $a = 2^k$ pour une valeur de k . \square

6.3 Les cycles avec groupe de symétrie contenu dans $SO(4)$

Il s'agit d'étudier les cycles homoclines avec groupe de symétrie $G = \langle A, S \rangle \subset SO(4)$. Le twist γ a, dans la base \mathcal{B} (cf. page 24), la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ -\cos(t) & \sin(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

alors que $S = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$. D'après le Théorème 6.2 la recherche des cycles simple est immédiate. Voilà la liste complète :

Tableau des cycles simples de type A avec groupe de symétrie contenu dans $SO(4)$

n	t (connexion)	s (tilt)	 G
2	π	0	8
3	$\pi/2$	0	24
6	$\pi/2$	π	24
8	$\pi/2$	$\pi/2$	32

Considérons maintenant l'homomorphisme Ψ introduit au paragraphe 2.5 défini sur $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ à valeurs sur $SO(4)$; ici \mathcal{Q} est le corps des quaternions unitaires. Le noyau de Ψ est l'ensemble $\{1, -1\}$. Une des deux images réciproques de A est $((p_1, q_1, r_1, s_1), (P_1, Q_1, R_1, S_1))$ où

$$r_1 = -p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s+t}{2}\right); \quad q_1 = s_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{s+t}{2}\right) \quad (6.30)$$

et

$$R_1 = P_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s-t}{2}\right); \quad -Q_1 = S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{s-t}{2}\right). \quad (6.31)$$

Dans le cas de AS une des images réciproques est $((p_2, q_2, r_2, s_2), (P_2, Q_2, R_2, S_2))$ avec

$$r_2 = -p_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{s+t}{2}\right); \quad q_2 = s_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s+t}{2}\right) \quad (6.32)$$

et

$$R_2 = P_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{s-t}{2}\right); \quad -Q_2 = S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s-t}{2}\right). \quad (6.33)$$

Le lemme suivant est immédiat

Lemme 6.6. *Les angles s et t vérifient les conditions suivantes :*

$$\cos\left(\frac{s+t}{2}\right) = \sqrt{2} \cos(p\pi); \quad \cos\left(\frac{s-t}{2}\right) = \sqrt{2} \cos(q\pi) \quad (6.34)$$

$$\sin\left(\frac{s+t}{2}\right) = \sqrt{2} \cos(r\pi); \quad \sin\left(\frac{s-t}{2}\right) = \sqrt{2} \cos(u\pi) \quad (6.35)$$

où p , q , r , et u sont des nombres rationnels.

Démonstration. Le résultat découle du Lemme 4.2 et des équations (6.30), (6.31), (6.32) et (6.33). \square

On arrive finalement au théorème qui va nous permettre de classer tous les cycles homoclines :

Théorème 6.7. *Les angles de structure d'un cycle homocline de type A avec groupe de symétrie contenu dans $SO(4)$ sont des multiples de $\pi/4$.*

Démonstration. Le Lemme 6.6 donne

$$\cos^2(p\pi) + \cos^2(r\pi) = \frac{1}{2} \quad (6.36)$$

et donc

$$\cos(2p\pi) + \cos(2r\pi) = -1 \implies \cos((p+r)\pi) \cos((p-r)\pi) = -\frac{1}{2}. \quad (6.37)$$

On arrive alors à l'équation

$$\sin\left(\left(p+r-\frac{1}{2}\right)\pi\right) \sin\left(\left(-p+r+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = \frac{1}{2} \quad (6.38)$$

et le résultat découle du Théorème 2.26. \square

D'après la Remarque 3.6 ils nous restent à étudier deux cas :

a) $t = s = \pi/4$

b) $t = \pi/4$ et $s = 3\pi/4$.

Dans les deux cas le groupe engendré par A et S est le même ; on le notera G_{24}^+ . On peut montrer que

$$G_{24}^+ \approx \{a, s \mid s^2 = (a^3 s)^2 = [a, s]^2 = 1\}. \quad (6.39)$$

Théorème 6.8. *La solution $s = t = \pi/4$ donne un cycle homocline avec 24 points d'équilibre noté \mathcal{X}_{24}^+ .*

Démonstration. Le twist A a la forme

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

et le groupe $G_{24}^+ = \langle A, S \rangle$ a ordre 192. On peut vérifier, par le calcul direct, que les points $A^j \xi_1$, $j = 0, 1, \dots, 23$ sont distincts. Pour prouver l'existence du cycle il suffira de montrer qu'il existe, dans P_1 , la connexion hétérocline

$$\xi_{24} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.41)$$

Il est facile de vérifier que

$$H_{24} = \{I, A^{-1}SA, A^{-1}diag(-1, 1, 1, -1)A, A^{-1}diag(-1, 1, -1, 1)A\} \quad (6.42)$$

et $K_1 = \{I, S\}$. Les directions invariantes par rapport au flot de $P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ sont les directions coordonnées et $\mathbf{e}_1 = \pm \mathbf{e}_2$.

D'après ces calculs K_1 est effectivement un groupe d'isotropie ; on peut donc appliquer le Théorème 3.13 qui donné des conditions suffisantes pour l'existence d'une connexion hétérocline :

(i) $A \notin N_{G_{24}^+}(K_1)$.

$ASA^{-1} \notin K_1$ car $ASA^{-1} = diag(-1, 1, 1, -1)$.

(ii) Le sous-groupe d'isotropie H_{24} contient K_1 et $A^{-1}K_1A$.

Par construction.

(iii) $H_{24} \subset N_{G_{24}^+}(K_1) \cap N_{G_{24}^+}(A^{-1}K_1A)$.

C'est clair car $AH_{24}A^{-1}$ envoie P_1 sur P_1 et $P_2 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ sur P_2 .

(iv) Il y a une courbe continue de points avec isométrie K_1 qui joint $\xi_{24} \in Fix(H_{24}) \subset Fix(K_1)$ à $\xi_1 \in Fix(AK_1A^{-1})$.

Ceci est équivalent à l'absence d'obstructions topologiques à la connexion $\xi_{24} \longrightarrow \xi_1$ qui peut être vérifié par le calcul des plans invariants. □

On a aussi le résultat suivant :

Théorème 6.9. *La solution $t = \pi/4$, $s = 3\pi/4$ donne un cycle homocline avec 12 points d'équilibre, \mathcal{X}_{12}^+ .*

Démonstration. Comme pour le Théorème 6.8. □

La projection du cycle \mathcal{X}_{12}^+ sur le plan $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ est esquissée dans la Figure 6.3. Pour le cycle \mathcal{X}_{24}^+ se reporter à la Figure 6.4.

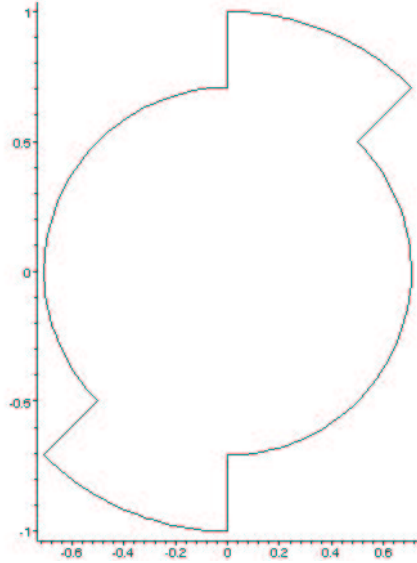


FIG. 6.3 – Le cycle “bonbon” \mathcal{X}_{12}^+ ; projection sur le plan $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$.

6.3.1 Forme explicite du champs vectoriel X_{24}^+

Il se pose le problème de construire explicitement un champ vectoriel G_{24}^+ -équivariant (ou plus exactement son développement limité à l’origine) et de vérifier l’apparition du cycle \mathcal{X}_{24}^+ avec **Dstool**, le programme de Kim et Guckenheimer qui permet de visualiser les courbes intégrales d’un système d’équations différentielles. On va calculer les générateurs de l’anneau des polynômes invariants de degré inférieur ou égal à cinq, \mathcal{R}_5 , et les générateurs de l’ \mathbb{R} -algèbre des applications équivariantes \mathcal{E}_5 . Pour obtenir ces résultats on a utilisé le package Maple **Symmetry** développé par K. Gatermann and F. Guyard (cf. [12]). Dans le cas du groupe G_{24}^+ l’ordre cinq n’est pas suffisant pour obtenir un champ hyperbolique mais les calculs deviennent assez compliqués à l’ordre sept (il n’y a pas d’équivariants non triviaux de degré six). De plus le cycle est déjà visible à l’ordre cinq.

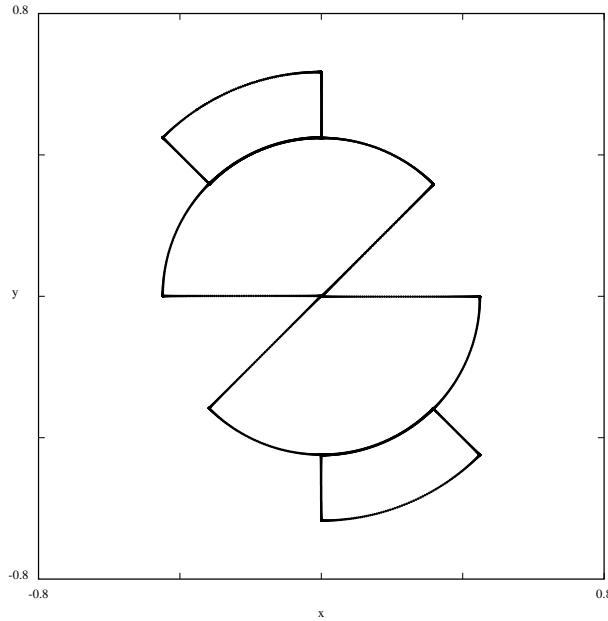
Le seul générateur de \mathcal{R}_5 est

$$\phi_2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

alors que les générateurs de \mathcal{E}_5 sont

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

et

FIG. 6.4 – Projection du cycle \mathcal{X}_{24}^+ sur le plan $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$.

$$\chi_5 = \begin{pmatrix} 3x^5 + 2y^3zw + 2yzw^3 + 7x^3w^2 + 6x^3z^2 + 2xw^4 + 3xz^4 + 4xy^4 + 5x^3y^2 \\ 2x^3zw + 2xz^3w + 4x^4y + 7y^3z^2 + 6y^3w^2 + 3yw^4 + 2yz^4 + 3yx^2w^2 \\ 2xw^3y + 2xy^3w + 3x^4z + 2y^4z + 5z^3w^2 + 7y^2z^3 + 6y^2zw^2 \\ 2xy^3z + 2x^3yz + 2x^4w + 3y^4w + 6w^3y^2 + 6x^2z^2w + 9x^2y^2w \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 9xz^2w^2 + 3xy^2z^2 + 6xy^2w^2 - 4yz^3w \\ 6x^2yz^2 + 5x^2y^3 + 9yz^2w^2 + 3y^5 - 4xzw^3 \\ 9x^2y^2z + 3x^2zw^2 + 6x^2z^3 + 4zw^4 + 3z^5 - 4x^3yw \\ 7x^2w^3 + 5z^2w^3 + 4z^4w + 3w^5 + 3wy^2z^2 - 4xy^3z \end{pmatrix}.$$

Le champs vectoriel G_{24}^+ -équivariant au degré cinq, a la forme

$$X_5 = (a + b\phi_2 + c\phi_2^2)\chi_1 + d\chi_5.$$

La Figure 6.4 montre la projection du cycle \mathcal{X}_{24}^+ sur le plan $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ obtenu avec les valeurs de coefficients $a = 10$, $b = -20$, $c = 0$ et $d = -4$ avec **Dstool**.

6.4 Les cycles avec groupe de symétrie non contenu dans $SO(4)$

Dans ce chapitre le groupe de symétrie $G = \langle A, S \rangle \not\subset SO(4)$. Le twist γ a, dans la base \mathcal{B} (cf. page 24), la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(s) & -\sin(s) \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ \cos(t) & \sin(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}; \quad \det(A) = -1. \quad (6.43)$$

Comme dans le Chapitre 6.3 on commence à montrer les cycles simples :

Tableau des cycles simples de type A avec groupe de symétrie $G \not\subset \text{SO}(4)$

n	t (connexion)	s (tilt)	G
2	π	0	8
4	$\pi/2$	$\pi/2$	32
6	$\pi/2$	0	48

D'après la Remarque 3.6 on sait que l'angle de connexion t est un angle rationnel. Bien qu'il semble probable qu'une telle propriété soit vraie pour s aussi, sa justification ne semble pas évidente. On va procéder autrement.

On considère les équations caractéristiques associée à A et AS :

$$x^4 - [\cos(s) + \cos(t)]x^3 + [\cos(s) + \cos(t)]x - 1 = 0 \quad (6.44)$$

$$x^4 + [\cos(s) - \cos(t)]x^3 - [\cos(s) - \cos(t)]x - 1 = 0 \quad (6.45)$$

qui entraînent

$$\cos(t) + \cos(s) = 2 \cos(a\pi), \quad 0 < a < \frac{2}{3} \quad (6.46)$$

$$\cos(t) - \cos(s) = -2 \sin(b\pi), \quad -\frac{1}{2} < b < \frac{1}{6} \quad (6.47)$$

avec a et b rationnels. Ceci donne

$$\cos(t) - \cos(a\pi) = -\sin(b\pi) \quad (6.48)$$

et finalement l'équation à angles rationnels

$$\sin\left(\frac{t+a\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{t-a\pi}{2}\right) = \sin b\pi \sin \frac{\pi}{6} \quad (6.49)$$

On peut maintenant établir un résultat qui se révélera fondamental dans la classification des cycles homoclines :

Théorème 6.10. *Les angles de structure d'un cycle non simple vérifient une des deux relations suivantes :*

- a) $t = s$
- b) $t + s = \pi$.

Démonstration. On considère l'équation (6.49) et on applique le Théorème 2.27. De l'équation

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) = \sin(-\phi) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \tag{6.50}$$

on tire $a = 1/2$ et donc $t + s = \pi$. Si l'on pose $t - a\pi = b = 0$ on a $s = t$.

Ils apparaissent aussi des solutions autres que celles ci-dessus. De telles solutions ne sont pas acceptables car elles n'engendrent pas un groupe G fini. On le montre avec une de telles solutions :

$$\cos(t) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \sin(t) = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad \cos(s) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \sin(s) = \frac{1}{4}\sqrt{2 + 6\sqrt{5}}.$$

Les matrices A et AS sont forcément périodiques ($A^6 = I$, $(AS)^{10} = I$) mais G n'est pas un groupe fini. Il suffira de montrer que la matrice A^2S n'est pas périodique. On appelle $p(x)$ son polynôme caractéristique et λ_i ses valeurs propres. On a

$$p(x) = x^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)x^3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)x + 1 \tag{6.51}$$

et

$$J = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{46 - 10\sqrt{5}}. \tag{6.52}$$

Par définition J doit appartenir à \mathbb{K} (le sous-corps de \mathbb{C} engendré par toutes les racines de l'unité) et donc à un corps cyclotomique \mathbb{K}_m pour un m convenable. Le groupe $Gal(\mathbb{K}_m/\mathbb{Q})$ est abélien donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(J)$ est aussi une extension normale (Théorème 2.22). Si $q(x)$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$ tel que $q(J) = 0$, alors $\mathbb{Q}(J)$ est le corps de décomposition de $q(x)$ (Théorème 2.21) donc le groupe de Galois de $q(x)$ doit être abélien (en effet un sous-groupe distingué de $Gal(\mathbb{K}_m/\mathbb{Q})$). Dans le cas présent

$$q(x) = x^4 - 23x^2 + 101 \tag{6.53}$$

et son groupe de Galois est isomorphe au sous-groupe de S_4 engendré par (13) et (1234). On en conclut que J n'appartient pas à \mathbb{K} et A^2S n'est pas périodique.

Les autres solutions se traitent de la même façon. □

Le cas b) du Théorème 6.10 est vite étudié :

Proposition 6.11. *Si $s + t = \pi$, $t = \pi/k$, $k > 1$, l'ordre du twist est quatre.*

Démonstration. Le polynôme caractéristique de A est $x^4 - 1$. □

Remarque 6.12. Il existe une famille infinie de cycles homoclines à quatre points. Le twist à la forme (6.43) avec $s + t = \pi$, $t = \pi/k$, $k > 1$.

On analyse les cycles les plus intéressants avec $s = t$. D'après la Remarque 3.6 on pose $t = s = 2\pi/k$ avec k pair.

Les groupes de symétrie sont isomorphes aux groupes H_m étudiés dans l'Annexe D :

Lemme 6.13. Soit $n = 2m > 0$ un entier pair. Le groupe G_n^- engendré par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) & 0 & 0 \\ \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} \quad (6.54)$$

et $S = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ est isomorphe à H_m et son ordre est $2n^2$. De plus les éléments de G_n^- s'écrivent sous l'une de deux formes suivantes

$$A^i S A^j, \quad A^i S A^j S. \quad (6.55)$$

Démonstration. On peut vérifier par le calcul direct que

$$|A| = n, \quad |S| = 2, \quad |AS| = 4, \quad |[A, S]| = 2. \quad (6.56)$$

D'après la Proposition D.3 chaque élément de G_n^- peut être écrit sous l'une des deux formes (6.55). Pour compléter la démonstration il faudra montrer que ces $2n^2$ éléments sont distincts.

On commence avec ces implications immédiates

$$|[A, S]| = 2 \implies SAS = ASA^{-1}SA, \quad |AS| = 4 \implies SAS = A^{-1}SA^{-1}SA^{-1} \quad (6.57)$$

et, en calculant les inverses,

$$SA^{-1}S = A^{-1}SASA^{-1} = ASASA. \quad (6.58)$$

Ces équations donnent $SAS = A^2SASA^2$ et donc

$$SAS = A^{2k}SASA^{2k}; \quad SAS = A^{2k+1}SA^{-1}SA^{2k+1}. \quad (6.59)$$

De (6.59) on a $SA^{2k}S = ASA^{-2k}SA^{-1}$ et donc, si p est un entier,

$$SA^{2k}S = A^p SA^{\pm 2k} SA^{-p} \quad (6.60)$$

(+ si p est pair et $-$ si p est impair). De la même façon on obtient

$$SA^{2k+1}S = A^p SA^{\pm(2k+1)} SA^p. \quad (6.61)$$

D'abord, s'il y a identité entre deux éléments de la deuxième forme (cf. (6.55)), ceci se réduit à une identité entre éléments de la première. De plus on ne peut pas avoir identité entre un élément de la première forme et un de la deuxième car

$$A^i SA^j = A^h SA^k S$$

donne

$$A^i SA^j = A^h A^{\pm j} SA^{\pm k} SA^j$$

grâce aux équations (6.60) et (6.61). Ceci entraîne que S est une puissance de A , qui n'est pas compatible avec les équations (6.57). Il nous reste à examiner le seul cas

$$A^i SA^j = A^I SA^J, \quad i \neq I, j \neq J,$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$SA^h S = A^k, \quad 0 \leq k \leq \frac{n}{2}.$$

De plus h ne peut pas être impair ou, d'après (6.61),

$$A^k = SA^h S = ASA^{-h}SA = AA^{-k}A = A^{2-k}$$

et $k = 1$. Avec cette valeur de k

$$[A, S] = A^{n/2},$$

ce qui est impossible comme on peut vérifier directement.

Supposons alors que h est pair :

$$A^k = ASA^{-h}SA^{-1} = AA^{-k}A^{-1} \implies A^{2k} = I \implies k = n/2$$

et la même chose doit valoir pour h : $h = n/2$. Avec ces valeurs de h et k

$$SA^{n/2} - A^{n/2}S = 0. \quad (6.62)$$

L'équation (6.62) est une relation indépendante et compatible avec les (6.57) mais $(A^{n/2}S - SA^{n/2})_{13} = 2$ si n est un multiple de 4 ou $1 - \cos(2\pi/n)$ autrement, donc $G_n^- \approx H_m$ avec $m = n/2$. \square

Cette famille infinie de groupes H_m a été étudiée dans l'Annexe D. On poursuit en montrant que, si G_n^- , n pair, est le GMA (cf. Définition 3.1) d'un cycle homocline \mathcal{X}_n^- , celui-ci doit avoir n points d'équilibre :

Lemme 6.14. *Soit A le twist (6.54) et $\xi_1 = (0, 1, 0, 0)$. Les n points*

$$\xi_{j+1} = A^j \xi_1; \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

sont distincts.

Démonstration. Pour faciliter les calculs on introduit une nouvelle base $\bar{\mathcal{B}}$; la matrice qui garantit le passage de la base \mathcal{B} (cf. page 24) à $\bar{\mathcal{B}}$ sera noté P :

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{1 - \cos(2\pi/n)} & \sqrt{1 + \cos(2\pi/n)} & \sqrt{1 - \cos(2\pi/n)} & \sqrt{1 + \cos(2\pi/n)} \\ -\sqrt{1 + \cos(2\pi/n)} & -\sqrt{1 - \cos(2\pi/n)} & \sqrt{1 + \cos(2\pi/n)} & -\sqrt{1 - \cos(2\pi/n)} \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (6.63)$$

On appelle $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ la matrice représentant le twist γ dans la nouvelle base :

$$\bar{A} = PAP^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ 0 & 0 & \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} \quad (6.64)$$

et $\bar{\xi}_1$ le "premier" point d'équilibre :

$$\bar{\xi}_1 = P\xi_1 = P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \cos(2\pi/n)} \\ -\sqrt{1 - \cos(2\pi/n)} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Il nous reste à montrer que $\bar{A}^i \bar{\xi}_1 \neq \bar{\xi}_1$ si $i = 1, \dots, n-1$.

Supposons que $\bar{A}^i \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_1$. L'égalité des quatrième composantes des vecteurs ci-dessus donne $\cos(2\pi i/n) = 1$, c'est à dire $i = 0 [n]$. \square

D'après le Lemme 6.13, plus grand est n et plus grand sera l'ordre de G_n^- . L'ensemble des sous-groupes de G_n^- correspondent aux sous-espaces de \mathbb{R}^4 invariants par rapport au flot (Proposition 1.2). Ces sous-espaces invariants ne peuvent pas être traversés par une ligne intégrale; si, par exemple, un hyperplan invariant sépare un points d'équilibre ξ_i du suivant ξ_{i+1} , la connexion entre les deux points est impossible. On parle alors d'une *obstruction topologique*. Le nombre de ces obstructions augmente donc avec n . On pourrait penser que si n est très grand l'existence des cycles devient impossible. Il faut toutefois remarquer que si n est très grand l'angle de connexion est très petit ($t = 2\pi/n$) donc le cycle est, pour ainsi dire, moins exposé aux obstructions topologiques :

Lemme 6.15. *Il n'y a pas d'obstructions topologiques aux connexions $\xi_i \longrightarrow \xi_{i+1}$ quel que soit n pair.*

Démonstration. Bien entendu on peut se borner à vérifier l'existence d'une seule connexion, par exemple dans le plan invariant $P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ on peut analyser la connexion $\xi_n \longrightarrow \xi_1$ (cf. Définition 1.4). Avec un calcul direct on obtient

$$A^{-1}\xi_1 = \xi_n = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2 + 2\pi/n) \\ \sin(\pi/2 + 2\pi/n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons que

$$V(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit une direction invariante de P_1 . Il nous reste à vérifier que $\theta \notin]\pi/2, \pi/2 + 2\pi/n[$. D'après la Proposition 1.2, la direction $V(\theta)$ doit être fixée par au moins un élément de G_n^- qui n'appartient pas à K_1 . Les éléments de G_n^- ont été partagés en deux classes dans le Lemme 6.13 :

$$B_{ij} = A^i S A^j, \quad C_{hk} = A^h S A^k S.$$

L'action sur P_1 de B_{ij} et C_{ij} est la même donc il suffira de considérer les éléments B_{ij} .

1^{er} cas : i et j pairs. La restriction de B_{ij} à P_1 est

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(2i\pi/n) + \cos(2j\pi/n) & \sin(2i\pi/n) + \sin(2j\pi/n) \\ -\sin(2i\pi/n) - \sin(2j\pi/n) & \cos(2i\pi/n) + \cos(2j\pi/n) \end{pmatrix}.$$

Si $(\cos \theta, \sin \theta)$ est une direction invariante on doit avoir

$$\cos\left(\theta - \frac{2i\pi}{n}\right) + \cos\left(\theta - \frac{2j\pi}{n}\right) = 2 \cos \theta \quad (6.65)$$

$$\sin\left(\theta - \frac{2i\pi}{n}\right) + \sin\left(\theta - \frac{2j\pi}{n}\right) = 2 \sin \theta. \quad (6.66)$$

En prenant la somme des carrés des termes à gauche et à droite on trouve

$$\cos\left(\frac{2(j-i)\pi}{n}\right) = 1 \implies \frac{2(j-i)\pi}{n} = 2k\pi$$

d'où $j = i + kn$. D'après (6.65) et (6.66) $i = j = 0 [n]$ donc $B_{ij} \in K_1$.

2^e cas : i pair et j impair. Les équations précédentes deviennent

$$-\cos\left(\theta + \frac{2(i-1)\pi}{n}\right) + \cos\left(-\theta + \frac{2j\pi}{n}\right) = 2 \cos \theta \quad (6.67)$$

$$\sin\left(\theta + \frac{2(i-1)\pi}{n}\right) - \sin\left(-\theta + \frac{2j\pi}{n}\right) = 2 \sin \theta \quad (6.68)$$

et la somme des carrées

$$\cos\left(\frac{2(i-1-j)\pi}{n} + 2\theta\right) = -1 \implies \frac{2(i-1-j)\pi}{n} + 2\theta = \pi + 2k\pi$$

d'où

$$\theta = \frac{(1-i+j)\pi}{n} + \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

La première valeur de $\theta > \pi/2$ est $\pi/2 + 2\pi/n$.

Les cas i, j impairs et i impair, j pair se traitent de la même façon. \square

Lemme 6.16. *Le groupe G_n^- , n pair, ne contient aucune matrice diagonale avec déterminant -1.*

Démonstration. D'après la Proposition D.6 les matrices d'ordre deux et de déterminant -1 dans G_n^- n'existent que si $m = n/2$ est impair et ce sont :

$$A^{2j}SA^mS, \quad A^mSA^{2j}S, \quad 0 \leq j < m \quad (6.69)$$

soit $2m = n$ matrices différentes. L'ensemble D des matrices diagonales de G_n^- forme un groupe commutatif puisque le corps de base \mathbb{Z}_2 est abélien. Or, S est dans D mais on vérifie sans mal (avec les formules du Lemme D.1) que S ne commute pas avec les matrices (3.12). Donc aucune de ces matrices n'est diagonale. \square

Théorème 6.17. *Soit n un entier pair. Il existe un cycle homocline \mathcal{X}_n^- qui connecte n points d'équilibre ; son GMA est G_n^- .*

Démonstration. Considérons le twist (6.54) et le groupe de symétries $G_n^- = \langle A, S \rangle$. D'après le Lemme 6.13 l'ordre de G_n^- est $2n^2$ et ses éléments s'écrivent sous l'une des formes suivantes :

$$A^iSA^j, \quad A^iSA^jS. \quad (6.70)$$

De plus les points $A^k\xi_1$, $k = 0, \dots, n-1$ sont distincts (cf. Lemme 6.14). Il ne reste qu'à montrer l'existence de la connexion

$$\xi_n = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2 + 2\pi/n) \\ \sin(\pi/2 + 2\pi/n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'après la formule (3.5) les matrices de H_1 sont diagonales et le Lemme 6.16 nous permet de conclure que

$$H_1 = \{I, S, \text{diag}(-1, 1, 1, -1), \text{diag}(-1, 1, -1, 1)\}$$

et donc $K_1 = \{I, S\}$. K_1 étant un groupe d'isotropie on peut appliquer le Théorème 3.13 :

(i) $A \notin N_{G_n^-}(K_1)$.

$ASA^{-1} = \text{diag}(-1, 1, 1, -1) \notin K_1$.

(ii) Le sous-groupe d'isotropie H_n contient K_1 et $A^{-1}K_1A$.

Par construction.

(iii) $H_n \subset N_{G_n^-}(K_1) \cap N_{G_n^-}(A^{-1}K_1A)$.

C'est clair car AH_nA^{-1} envoie P_1 sur P_1 et P_2 sur P_2 .

(iv) Il y a une courbe continue de points avec isométrie K_1 qui joint $\xi_n \in \text{Fix}(H_n) \subset \text{Fix}(K_1)$ to $\xi_1 \in \text{Fix}(AK_1A^{-1})$.

Cf. Lemme 6.15. □

On va résumer la discussion qui précède sur l'existence des cycles homoclines avec $\gamma \notin SO(4)$:

- $n = 2$, un cycle simple ;
- $n = 4$, une famille infinie de cycles (dont un simple) ;
- $n = 6$, deux cycles (dont un simple) ;
- $n > 6$ pair, un cycle (non simple).

6.4.1 Forme explicite du champs vectoriel X_6^-

On va maintenant montrer, comme dans le paragraphe 6.3.1, la forme explicite des développements limités à l'origine des champs vectoriels qui engendrent les cycles \mathcal{X}_6^- et \mathcal{X}_8^- . À l'aide de ces développements on obtiendra les projections des cycles sur le plan P_1 . Le développement limité est beaucoup plus simple dans le cas \mathcal{X}_6^- donc c'est ce cycle qu'on étudiera en détail.

On note λ_i la valeur propre dans la direction $\langle e_i \rangle$ du champs X_6^- au point $\xi_1 = e_2$. La condition de stabilité énoncée dans le Théorème 3.8 s'écrit

$$\lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 > 0, \quad \lambda_4 < 0, \quad \lambda_1 + \lambda_3 < 0. \quad (6.71)$$

Ces conditions ne sont pas vérifiées à l'ordre 3 ou 4 car, dans ces cas, $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. Les générateurs de \mathcal{R}_5 sont

$$\phi_2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

et

$$\phi_4 = 2x^2z^2 + 6x^2w^2 + 6x^2y^2 + 6y^2z^2 + 2y^2w^2 + 8xyzw + 3y^4 + 3x^4 + 3w^4 + 3z^4 + 6z^2w^2.$$

Ceux de \mathcal{E}_5 sont

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix};$$

$$\chi_3 = \begin{pmatrix} 3x^3 + 3xy^2 + xz^2 + 2yzw + 3xw^2 \\ 3yz^2 + 3x^2y + yw^2 + 3y^3 + 2xzw \\ 3zw^2 + 3z^3 + x^2z + 2xyw + 3y^2z \\ y^2w + 3x^2w + 2xyz + 3w^3 + 3wz^2 \end{pmatrix};$$

$$\chi_4 = \begin{pmatrix} -3zw^3 + x^3y - 3xy^3 + 3x^2zw + 3y^2zw + 3xyw^2 + 3xyz^2 + z^3w \\ 3x^2w^2 + 3x^2y^2 - 3y^2z^2 - x^4 + z^4 - 3z^2w^2 \\ 3xw^3 - x^3w + 3y^3z - 3x^2yz - 3xz^2w - 3xy^2w - 3zyw^2 - yz^3 \\ 2xz^3 - 2x^3z - 6x^2yw + 6yz^2w \end{pmatrix};$$

$$\chi_5^{(1)} = \begin{pmatrix} 60yzw^3 + 100yz^3w + 300x^2yzw + 105xy^4 + 25xz^4 + 105xw^4 + 101x^5 \\ 30y^3w^2 + 210y^3z^2 + 60xzw^3 + 100xz^3w + 150yz^2w^2 + 150x^2yw^2 + 90x^2yz^2 \\ 50x^2z^3 + 25x^4z + 190z^3w^2 + 101z^5 + 105zw^4 + 300xyz^2w + 105y^4z \\ 99w^5 + 210z^2w^3 + 210x^2w^3 + 95x^4w + 100xyz^3 + 90x^2z^2w + 150y^2z^2w \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} +90xz^2w^2 + 60y^3zw + 190x^3y^2 + 190x^3w^2 + 90xy^2z^2 + 150xy^2w^2 + 50x^3z^2 \\ 180xy^2zw + 100x^3zw + 99y^5 + 95x^4y + 210x^2y^3 + 15yw^4 + 95yz^4 \\ 60xyw^3 + 150y^2zw^2 + 190y^2z^3 + 60xy^3w + 100x^3yw + 90x^2zw^2 + 90x^2y^2z \\ 60xy^3z + 100x^3yz + 150x^2y^2w + 180xyzw^2 + 30y^2w^3 + 15y^4w + 95wz^4 \end{pmatrix}$$

et

$$\chi_5^{(2)} = \begin{pmatrix} 84yzw^3 - 4yz^3w - 12x^2yzw - 9xy^4 - xz^4 + 39xw^4 + 19 * x^5 + 126xz^2w^2 \\ -6y^3w^2 - 18y^3z^2 + 84xzw^3 - 4xz^3w - 6yz^2w^2 - 6x^2yw^2 - 18x^2yz^2 \\ -2x^2z^3 - x^4z - 22z^3w^2 + 19z^5 + 39zw^4 - 12xyz^2w - 9y^4z + 84xyw^3 \\ 9w^5 + 78z^2w^3 + 78x^2w^3 - 11x^4w - 4xyz^3 + 126x^2z^2w - 6y^2z^2w \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -12y^3zw + 122x^3y^2 - 2x^3z^2 - 22x^3w^2 - 18xy^2z^2 - 6xy^2w^2 \\ -36xy^2zw - 4x^3zw + 33y^5 + 61x^4y - 18x^2y^3 + 21yw^4 + 61yz^4 \\ -6y^2zw^2 + 122y^2z^3 - 12xy^3w - 4x^3yw + 126x^2zw^2 - 18x^2y^2z \\ -12xy^3z - 4x^3yz - 6x^2y^2w + 252xyzw^2 + 42y^2w^3 - 3y^4w - 11wz^4 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$X_5 = (a + b\phi_2 + c\phi_2^2 + d\phi_4)\chi_1 + (e + f\phi_2)\chi_3 + g\chi_4 + h\chi_5^{(1)} + i\chi_5^{(2)}$$

Si $h = 0$ le cycle apparaît, sous une forme stable, à la suite d'une bifurcation super-critique pour $a = 0$. Si l'on pose

$$A = 3e + b, \quad B = 3f + c + 3d + 33i, \quad C = 2b + 6e + 9f$$

la stabilité est atteinte pour des petites valeurs de a et

$$a > 0, \quad A < 0, \quad B > 0, \quad C < 0, \quad A^2 - 4B \geq 0, \quad g > 0, \quad i > 0, \quad e > 0.$$

En intégrant ces équations à l'aide du logiciel **Dstool** on a obtenu les Figures 6.5.

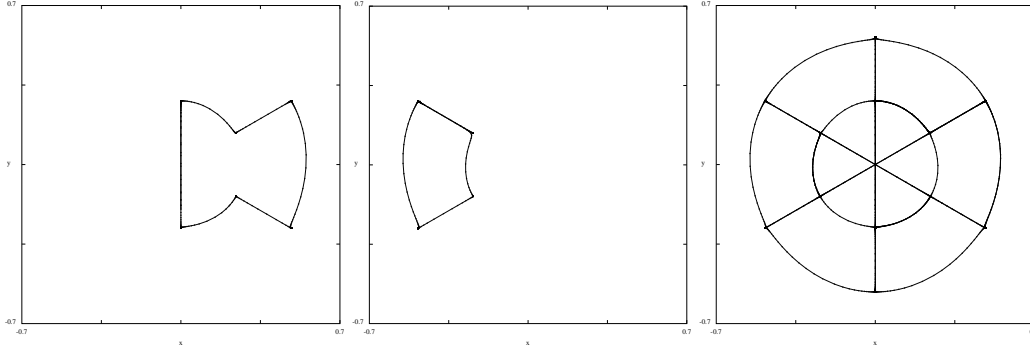


FIG. 6.5 – Le cycle \mathcal{X}_6^- projeté sur le plan P_1 : à gauche le cycle “bouchon de champagne” engendré par A . Au milieu le cycle à quatre points engendré par AS . À droite l’ensemble complet des connexions, dit aussi “ensemble hétérocline”

6.4.2 Forme explicite du champ vectoriel X_8^-

Comme dans le paragraphe 2.1 on se bornera au degré 5. Les générateurs de \mathcal{R}_5 sont

$$\phi_2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

et

$$\phi_4 = 8xyzw + 3y^4 + 6z^2w^2 + 3x^4 + 3w^4 + 3z^4 + 6x^2y^2 + 2x^2z^2 + 6x^2w^2 + 2y^2w^2 + 6y^2z^2.$$

Les générateurs de \mathcal{E}_5 sont

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix};$$

$$\chi_3 = \begin{pmatrix} xz^2 + 2yzw + 3xw^2 + 3xy^2 + 3x^3 \\ yw^2 + 2xzw + 3yz^2 + 3y^3 + 3x^2y \\ 3z^3 + 2xyw + 3y^2z + x^2z + 3zw^2 \\ 2xyz + y^2w + 3x^2w + 3w^3 + 3z^2w \end{pmatrix}$$

et

$$\chi_5 = \begin{pmatrix} 12x^2yzw + xz^4 - 3xw^4 + 18x^3w^2 + 2x^3z^2 + 2x^3y^2 + 13xy^4 + 4z^3wy + 5x^5 \\ 12xy^2zw + 2x^2y^3 + 18y^3z^2 + 2y^3w^2 + yw^4 - 3yz^4 + 5y^5 + 13x^4y + 6x^2yz^2 \\ 5z^5 + 2z^3w^2 + 13zw^4 + 12xyz^2w + 2x^2z^3 + x^4z + 18y^2z^3 - 3y^4z + 4x^3yw \\ 2z^2w^3 + y^4w + 13z^4w + 5w^5 + 12xyzw^2 - 3x^4w + 18x^2w^3 + 2y^2w^3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -12y^3zw - 18xy^2z^2 + 6xy^2w^2 + 30xz^2w^2 + 20yzw^3 \\ -12x^3zw - 18x^2yw^2 + 4xzw^3 + 20xz^3w + 30yz^2w^2 \\ +6y^2zw^2 + 30x^2y^2z - 18x^2zw^2 - 12xyw^3 + 20xy^3w \\ 30x^2y^2w + 20x^3yz - 18y^2z^2w + 6x^2z^2w - 12xyz^3 + 4xy^3z \end{pmatrix}.$$

La forme générale du champs G_8^- -équivariant à l'ordre 5 est

$$X_5 = (a + b\phi_2 + c\phi_2^2 + d\phi_4)\chi_1 + (e + f\phi_2)\chi_3 + g\chi_5.$$

Ce champs vectoriel ne peut pas donner de cycles stable car $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ (cf. Théorème 3.8). On a pu vérifier l'apparition d'un cycle stable à l'ordre 7 mais la forme du champ vectoriel devient assez encombrante.

Chapitre 7

La topologie des cycles homoclines sur S^3

La définition de cycle homocline ne permet pas d'apercevoir directement la topologie de ces cycles sur la sphère S^3 ; plus précisément la question qu'on se pose est de savoir s'il s'agit de courbes "nouées". La connaissance de leurs angles de structure ou les images de leurs projections sur des plans (ex. Figure 6.4) ne nous permettent pas, sauf dans les cas les plus simples, de répondre. On va montrer que la topologie des cycles est toujours "triviale".

On peut représenter S^3 dans \mathbb{C}^2 :

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

On considère deux nombres naturels n et m et le nœud $K(n, m)$ définit ainsi :

$$(z, w) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \exp(imt), \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(int) \right), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \text{pgcd}(n, m) = 1.$$

La propriété suivante est immédiate :

Remarque 7.1. Si $m = 1$ ou $n = 1$ le nœud $K(m, n)$ est isotope à une circonférence sur S^3 .

Dans la suite on utilisera le résultat suivant :

Proposition 7.2. Soit C une courbe continue sur $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ et V un plan vectoriel de \mathbb{R}^4 . Si \tilde{C} , projection orthogonale de C sur V , n'a pas d'auto-intersections, alors C est isotope à une circonférence sur S^3 .

Démonstration. Supposons que le plan soit $w = 0$ et que \tilde{C} soit une courbe simple fermée. Supposons que $\tilde{I}(t)$ soit une isotopie dans V telle que $\tilde{I}(0) = \tilde{C}$ et $\tilde{I}(1)$ est la circonférence $|z|^2 = 1/2$. Cette isotopie se relève en une isotopie de C sur S^3 de la façon suivante :

$$\tilde{I}(t) = (x(t), y(t)) \wedge (x(0), y(0), u, v) \in C \implies I(t) := (x(t), y(t), ku, kv)$$

où k est choisit de telle sorte à avoir $I(t) \in S^3$. Évidemment on a $I(0) = C$ et $I(1)$ est une courbe isotope à C appartenant au tore

$$T = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 = |w|^2 = \frac{1}{2}\}.$$

Puisque la projection de $I(1)$ sur V est $\tilde{I}(1)$, $I(1)$ est isotope, sur T , à $K(n, 1)$, où n est le degré de la projection de $I(1)$ sur le deuxième facteur de T . Alors $I(1)$, et donc C , forment des nœuds triviaux.¹ \square

On peut maintenant déterminer la topologie de la famille infinie de cycles dont l'existence a été montrée dans le Théorème 6.17 :

Théorème 7.3. *Les cycles \mathcal{X}_n^- , n pair, ont une topologie triviale sur S^3 .*

Démonstration. On procède comme dans la démonstration du Lemme 6.14. Dans la base $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_4\}$ le twist du cycle \mathcal{X}_n^- s'écrit

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ 0 & 0 & \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$$

et le premier équilibre

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \cos(2\pi/n)} \\ -\sqrt{1 - \cos(2\pi/n)} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La projection orthogonale sur le plan $\langle \bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_4 \rangle$ est une courbe simple et la conclusion suit de la Proposition 7.2. \square

La même démonstration ne s'applique pas dans le cas $SO(4)$ car le twist n'a pas de valeurs propres réelles sauf dans le cas d'un cycle de type B (cf. Théorème 6.3). Par contre on remarquera que dans le cas d'un cycle de type A il n'y a que deux cas à traiter : \mathcal{X}_{12}^+ et \mathcal{X}_{24}^+ (cf. les Théorèmes 6.8 et 6.9).

Théorème 7.4. *Les cycles \mathcal{X}_{12}^+ et \mathcal{X}_{24}^+ ont une topologie triviale sur S^3 .*

Démonstration. Pour le premier cycle le résultat est encore une fois une conséquence de la Proposition 7.2 d'après la projection du cycle sur le plan $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ (cf. Figure 6.3).

Pour ce qui concerne le cycle \mathcal{X}_{24}^+ sa projection sur le plan $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ n'est pas une courbe simple (cf. Figure 6.4) mais sa projection stéréographique sur \mathbb{R}^3 est une courbe clairement non nouée (cf. Figure 7.1), donc isotopique à une circonférence. La projection stéréographique permet de "transporter" cette isotopie sur S^3 . \square

¹Bien entendu si on considère la projection comme un ensemble (courbe non paramétrée) alors toute courbe $K(n, m)$, $n, m > 1$, donne un "contre-exemple" à la Proposition 7.2.

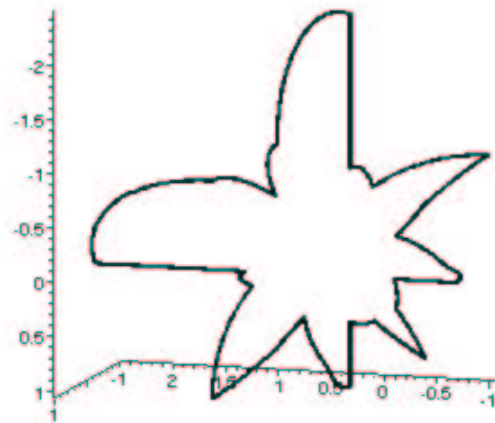


FIG. 7.1 – La projection stéréographique du cycle \mathcal{X}_{24}^+ sur \mathbb{R}^3 . La courbe est clairement non nouée.

Chapitre 8

Deux problèmes ouverts

On présentera, dans ce chapitre, deux directions de recherche qui se dégagent de ce travail et qui ont retenu notre attention. À notre connaissance ces problèmes n'ont pas encore été traités de façon satisfaisante.

Le problème des groupes continus. On remarque d'abord que la Définition 1.4 s'adapte aussi au cas d'un groupe de symétrie G continu. Il suffit d'interpréter les points d'équilibre ξ comme des *équilibres relatifs*, c'est à dire que ξ se projette sur un point dans l'espace quotient \mathbb{R}^4/G . L'exemple qui suit a été étudié dans [1] et [5].

On identifie \mathbb{R}^4 à \mathbb{C}^2 et on considère l'action suivante du groupe $O(2)$:

$$r_\phi : (z_1, z_2) \longrightarrow (e^{i\phi} z_1, e^{2i\phi} z_2), \quad \forall \phi \in S^1 \quad (8.1)$$

$$s : (z_1, z_2) \longrightarrow (\bar{z}_1, \bar{z}_2). \quad (8.2)$$

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, le plan $P = (x_1, x_2)$ est invariant par rapport au flot. Une connexion hétérocline dans P existe génériquement entre deux points d'équilibre ξ_1 et $\xi_2 = r_{\pi/2}(\xi_1)$. Les deux points appartiennent à la droite de P d'équation $x_1 = 0$. On obtient ainsi un cycle hétérocline entre ξ_1 et ξ_2 car la même transformation $r_{\pi/2}$ envoie ξ_2 sur ξ_1 . Par l'action de $O(2)$ on a le cycle homocline comme orbite de cycles hétéroclines.

Ce cycle est asymptotiquement stable pour un ensemble ouvert de valeurs des paramètres. Dans [5] on étudie l'effet d'une perturbation qui ne conserve pas "toutes" les symétries du système ; par exemple si elle conserve les symétries $SO(2)$ le cycle produit, par bifurcation, un flot quasi-périodique sur un 2-tore.

Le cas hamiltonien. Pour pouvoir introduire la définition de cycle homocline dans ce cadre on rappelle qu'un espace hamiltonien a une structure d'espace symplectique et a donc dimension paire. La Définition 1.4 ne peut pas s'appliquer telle quelle car elle entraîne l'existence de droites invariantes, c'est à dire d'espaces symplectiques de dimension impaire. De plus, d'après le Théorème de Liouville, un champ de vecteurs hamiltonien ne possède pas des puits ; il faudra donc se contenter de connexions $\text{col} \longrightarrow \text{col}$.

Dans le plan on a un cycle homocline qui connecte n points quel qu'il soit le nombre $n \geq 2$.

$$n = 2; \quad H_2 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{1}{4}q^4, \quad A = -Id, \quad G = \langle A \rangle \approx \mathbb{Z}_2.$$

Dans le plan (q, p) les points d'équilibre sont $\xi_1 = (1, 0)$ et $\xi_2 = A(\xi_1) = (-1, 0)$ et on montre facilement l'existence des connexions $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ et $\xi_2 \rightarrow \xi_1$. On a donc un cycle homocline. Pour $n > 2$ on identifie le plan (q, p) avec \mathbb{C} et on note z pour $q + ip$:

$$n \geq 3; \quad H_n = |z|^2 + \Re(z^n), \quad A = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \quad G = \langle A \rangle \approx \mathbb{Z}_n.$$

Ces cycles peuvent être plongés facilement dans \mathbb{R}^4 en ajoutant $(p_2^2 + q_2^2)/2$ à H_n néanmoins ces cycles ne sont pas très intéressants car les points d'équilibre et les connexions appartiennent au plan invariant (q_1, p_1) .

Une première étude devrait déterminer les cycles qui ne sont pas complètement contenus dans un plan. Un exemple est donné par la célèbre fonction hamiltonienne de Hénon-Heiles :

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3,$$

qui possède un groupe de symétries $G = \langle A, T \rangle \approx \mathbb{Z}_3 \cdot \mathbb{Z}_2$:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le cycle homocline qui connecte les trois points d'équilibre (en coordonnées (\mathbf{p}, \mathbf{q}))

$$\xi_1 = (0, 0, 0, 1), \quad \xi_2 = A(\xi_1) = \left(0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \xi_3 = A(\xi_2) = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

n'est pas contenu dans le plan $(0, 0, q_1, q_2)$.

Une question intéressante est de savoir s'ils existent des cycles homoclines avec $n > 3$ points d'équilibre non coplanaires. Déjà le cas $n = 4$ ne semble pas trivial.

Ces problèmes n'ont jamais fait l'objet de publications ou d'études approfondies et systématiques ; leur solution pourrait éclaircir la dynamique qualitative de certains systèmes hamiltoniens symétriques.

Annexe A

L'article "Sur la classification des cycles homoclines"

Résumé

Structurally stable homoclinic cycles are "natural" invariant sets for vector fields equivariant under the action of a symmetry group in \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. For the particular case of $n = 4$, such homoclinic cycles have been classified as of type A, B and C on the basis of the action of the symmetry group. It has been also suggested that type C cycles have an even number of equilibrium points.

In this paper we investigate the number of equilibrium points for type B and C cycles, using direct calculation in a given basis to find algebraic or topological obstructions. We demonstrate that the number of equilibrium points for type C cycles can only be 4 or 8. For type B cycles the number of equilibrium points is either 2, 3 or 6. A classification of type A cycles remains an open problem.

Les cycles homoclines structurellement stables sont des invariants "naturels" par l'action d'un groupe de symétrie dans \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Dans le cas particulier $n=4$, ces cycles homoclines ont été classés en type A, B et C sur la base de l'action du groupe de symétrie. L'idée que dans les cycles de type C les points d'équilibre sont en nombre pair a été avancée.

Dans cet article on étudie le nombre de points d'équilibre dans les cycles de type B et C par le calcul direct dans une base choisie. On démontre que le nombre de ces points est 4 ou 8 dans le cas C et 2, 3 ou 6 dans le cas B. La classification des cycles de type A est encore un problème ouvert.

A.1 Introduction

Supposons que Γ soit un sous-groupe fini de $O(4)$ et considérons un champ de vecteurs \mathcal{X} Γ -équivariant. Si ξ est un col hyperbolique avec variété instable $W^u(\xi)$ de dimension 1, on supposera que $W^u(\xi) \subset P$, où $P = \text{Fix}(\Sigma)$ est un plan de points fixes par l'action du sous-groupe Σ de Γ . Rappelons que l'équivariance de \mathcal{X} entraîne que $\text{Fix}(\Sigma)$ est invariant par le flot de \mathcal{X} (quel que soit $\Sigma \subset \Gamma$). On appelle $\text{Fix}(\Sigma)$ un *sous-espace de symétrie*. De plus soit γ un élément de Γ tel que $\gamma\xi \in P$ soit un puits dans P et supposons qu'il existe une connexion hétérocline entre ξ et $\gamma\xi$. Si n est le plus petit entier positif tel que $\gamma^n\xi = \xi$, les points $\xi, \gamma\xi, \dots, \gamma^{n-1}\xi$, ainsi que leurs variétés instables, forment un *cycle homocline*. On posera $Q = P + \gamma^{-1}P$. Par construction $P \cap \gamma^{-1}P$ est un axe invariant qui contient ξ , donc $\dim(Q)=3$.

Définition A.1. *Un cycle X est de type A si Q n'est pas un sous-espace de symétrie ; si Q est un sous-espace de symétrie X est de type B si $X \subset Q$ et de type C si $X \not\subset Q$.*

Notons que si X est un cycle de type B ou C, $Q = \text{Fix}(\tau)$ où $\det(\tau) = -1$ et $\tau^2 = \text{Id}$. Rappelons aussi que la décomposition isotypique de \mathbb{R}^4 par rapport à l'action de Σ est $P \oplus W$, $\dim(W) = 2$, pour les cycles de type A et $P \oplus W_1 \oplus W_2$, $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 1$, pour les cycles de type B et C. Les différentes composantes isotypiques sont orthogonales ([7] ch. 4.4).

A.2 Les cycles de type B

Théorème A.2. *Un cycle de type B a toujours 2, 3 ou 6 points d'équilibre.*

Remarque A.3. Le théorème permet de classer les cycles homoclines dans \mathbb{R}^3 .

Remarque A.4. Par inspection on vérifie que les seuls groupes capables d'engendrer un cycle homocline dans \mathbb{R}^3 sont D_{4d} et T_d .¹

Démonstration. Des exemples de cycles de type B avec 2, 3 et 6 points d'équilibre sont facilement repérables dans la littérature. Il nous suffira donc de montrer qu'il n'y en a pas d'autres. Les cycles de type B sont contenus dans un hyperplan invariant. On va choisir un repère de telle façon que cet hyperplan soit $x_4 = 0$. On se restreindra donc à l'espace tridimensionnel (x_1, x_2, x_3) muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ telle que :

$$\gamma^{-1}P = P_0 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \quad P = P_1 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \quad \gamma P = P_2 = \langle \cos \phi \mathbf{e}_2 + \sin \phi \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle.$$

La matrice A de la restriction de γ à cet espace tridimensionnel dans cette base sera :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta \\ \alpha \sin \phi & \beta \cos \phi & 0 \\ -\alpha \cos \phi & \beta \sin \phi & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta, \delta = \pm 1$. On posera $\xi_1 = (0, 1, 0)$ et $\xi_{j+1} = A^j \xi_1$. Il faut remarquer aussi que changer le signe de $\sin \phi$ revient à faire une symétrie par rapport à l'axe y donc on se bornera aux cas où $\sin \phi \geq 0$. On traitera d'abord le cas $\det(A) = 1$ et ensuite $\det(A) = -1$.

1^{er} cas : $\det(A) = 1$. On suppose $\alpha = \beta = \gamma = 1$ (les autres cas se traitent de la même façon). Les valeurs propres de A sont

$$1, \quad \frac{1}{2} \cos \phi - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{-\cos^2 \phi + 2 \cos \phi + 3}, \quad \frac{1}{2} \cos \phi - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{-\cos^2 \phi + 2 \cos \phi + 3}.$$

L'action de A correspond à une rotation d'un angle avec cosinus égale à $(\cos \phi - 1)/2$ autour du vecteur $[\sin \phi, 1 + \cos \phi, \sin \phi]$. Les points d'équilibre appartiennent donc à la circonférence intersection de la sphère unitaire et du plan orthogonal à $[\sin \phi, 1 + \cos \phi, \sin \phi]$ qui passe par ξ_1 . Il s'agit d'une rotation d'un angle plus grand au égal à $\pi/2$. Les seuls cas possibles sont $\pi/2, 2\pi/3$ et π qui correspondent à $\cos \phi = 1, 0$ et -1 . Dans le premier et le troisième cas on a $A^2 \xi_1 = \xi_1$, dans le deuxième $A^3 \xi_1 = \xi_1$.

2^e cas : $\det(A) = -1$. On va effectuer la démonstration avec $\alpha = -1, \beta = \delta = 1$ (les autres cas se traitent de la même façon). Les valeurs propres sont alors

$$-1, \quad \frac{1}{2} \cos \phi + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{-\cos^2 \phi - 2 \cos \phi + 3}, \quad \frac{1}{2} \cos \phi + \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{-\cos^2 \phi - 2 \cos \phi + 3}.$$

Avec un changement de base on peut réduire A à la forme

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

avec $\cos \phi = -1 + 2 \cos(2k\pi/n)$ et $0 \leq \cos(2k\pi/n)$. Les points d'équilibre sont distribués sur deux cercles parallèles. Les points ξ_0 et ξ_n doivent appartenir au même cercle sinon la connexion

¹ $D_{4d} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^2$ est le groupe engendré par $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, -x_2, x_1)$ et la symétrie par rapport au plan $x_1 = 0$.

$T_d \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2^3$ est engendré par $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3, x_1)$ et la symétrie par rapport au plan $x_1 = 0$.

$\xi_n \rightarrow \xi_{n+1}$ couperais le plan invariant P_0 . Donc n doit être un multiple de 2. On vérifie que, si $n = 2m$, m pair, et en notant $\xi_j^{(k)}$ pour la k -ième composante de ξ_j ,

$$\xi_{m+1}^{(3)} = \frac{2 \sin \phi}{\cos \phi + 3} = -\xi_m^{(3)},$$

ce qui ramène l'étude au seul cas $\sin \phi = 0$ où on a $A^2 \xi_1 = \xi_1$. Finalement si $n = 2m$ avec m impair on a $A^m = -I$ donc le plan $x_2 = 0$ est aussi invariant. On vérifie encore que $\xi_{\frac{m+1}{2}}^{(2)} = -\xi_{\frac{m+3}{2}}^{(2)}$ ce qui réduit l'étude au seul cas $\cos \phi = 0$ qui donne un cycle avec 6 points. \square

A.3 Les cycles de type C

Théorème A.5. *Un cycle de type C a toujours 4 ou 8 points d'équilibre.*

Remarque A.6. Le seul groupe capable d'engendrer un cycle de type C est le groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^4$ dont les générateurs sont la symétrie par rapport à l'hyperplan $x_1 = 0$ ainsi que $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_2, x_3, x_4, x_1)$.

Démonstration. Pour démontrer ce résultat on se place dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ telle que :

$$P_0 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \quad P_1 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \quad P_2 = \langle \cos \phi \mathbf{e}_2 + \sin \phi \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle.$$

Soit $A = [a_{ij}]$ la matrice de γ dans la base \mathcal{B} :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta \\ -\alpha \sin \phi & \beta \cos \phi & 0 & 0 \\ \alpha \cos \phi & \beta \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta, \epsilon, \delta = \pm 1$. On partagera la démonstration en deux, selon que le déterminant de A est +1 ou -1.

1^{er} cas : $\det(A) = 1$. On va effectuer la démonstration avec $\alpha = \beta = \epsilon = \delta = 1$ (les autres cas se traitent de la même façon).

Soient $z, 1/z, w, 1/w$ les valeurs propres de A , racines de l'unité d'après l'équation $A^n = I$. Le polynôme caractéristique de A étant

$$\chi(x) = x^4 - \cos \phi x^3 - \cos \phi x + 1$$

on a :

$$\cos \phi = z + \frac{1}{z} + w + \frac{1}{w} \tag{A.1}$$

$$-2 = \frac{1}{zw} (1 + z^2)(1 + w^2). \tag{A.2}$$

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$ le n -ième corps cyclotomique et \mathcal{O} l'anneau des entiers algébriques de \mathbb{K} .

Définition A.7. ([20] § 5.7) Une valuation de \mathbb{Q} est une application de \mathbb{Q} dans $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ muni de la relation d'ordre naturelle, qui vérifie les propriétés suivantes :

$$v(x) = \infty \iff x = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$v(xy) = v(x) + v(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (\text{A.4})$$

$$v(x + y) \geq \min(v(x), v(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (\text{A.5})$$

Dans la suite on utilisera seulement la valuation p -adique (p premier). Sur \mathbb{Q} la définition est : si a et b sont premiers avec p , $v_p(p^s \frac{a}{b}) = s$. Un des résultats classiques de la théorie de la valuation ([20] § 5.9) assure l'existence d'une extension de v_p (qu'on notera encore v_p) à \mathbb{K} , $v_p : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. De plus on a la :

Proposition A.8. Soit u une r.p.u. (racine primitive de l'unité) d'ordre r :

– si r n'est pas une puissance d'un nombre premier, $(1 - u)$ est un élément unitaire de O ;

– si $r = p^s$, $s > 0$, p premier, $v_p(1 - u) = \frac{1}{p^s - 1(p - 1)}$.

D'après (A.2), $(1 + z^2)$ et $(1 + w^2)$ ne peuvent pas être à la fois inversibles dans O . On va donc analyser les deux cas suivants :

(a) un des deux, (disons $(1 + z^2)$), est inversible alors que l'autre ne l'est pas ;

(b) les deux ne sont pas inversibles.

Dans le cas (a), si $-w^2$ est une r.p.u. d'ordre p^s , on déduit de (A.2), par valuation p -adique, $v_p(2) = 0 + 0 + v_p(1 + w^2)$.² Ceci donne

$$v_p(2) = \frac{1}{p^s - 1(p - 1)}$$

c.à.d. $s = 1$, $p = 2$. Mais alors $-w^2 = -1$ et donc $\sin \phi = 0$.

Dans le cas (b) on va montrer que $-z^2$ et $-w^2$ sont des r.p.u. d'ordre une puissance de 2. Supposons que l'une des deux, disons $-z^2$, soit une r.p.u. d'ordre p^s avec $p \neq 2$. D'après (A.2) on aurait :

$$0 = 0 + v_p(1 + z^2) + v_p(1 + w^2) = \frac{1}{p^s - 1(p - 1)} + v_p(1 + w^2) \geq \frac{1}{p^s - 1(p - 1)}$$

ce qui est impossible. On arrive à la conclusion que $-z^2$ et $-w^2$ sont des r.p.u. d'ordres respectifs 2^s et 2^t :

$$1 = \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{2^{t-1}}$$

et donc que $s = t = 2$. z et w sont alors des r.p.u. d'ordre 8, $z + 1/z = \pm\sqrt{2}$ et $w + 1/w = \pm\sqrt{2}$. De plus d'après (A.2) $z + 1/z$ et $w + 1/w$ n'ont pas le même signe et alors (A.1) nous permet de conclure que $\cos \phi = 0$.

²On utilise ici le fait que si $x \in O$ est inversible alors $v_p(x) = 0$. Pour le vérifier il suffit de se rappeler que x est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers et utiliser (A.5) pour obtenir $v_p(x) \geq 0$

Il nous reste donc à analyser les cas $\sin \phi = 0$ et $\cos \phi = 0$. Dans le premier cas la droite $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$ est invariante par rapport à γ . Le cycle possède deux points d'équilibre seulement, ξ et $-\xi$, il est contenu dans $Q = P + \gamma P$, et il n'est donc pas un cycle de type C. Dans le cas $\cos \phi = 0$ on a $A^8 = I$.

2^e cas : $\det(A) = -1$. On pose $\alpha = -1$, $\beta = \epsilon = \delta = 1$ dans A et on s'intéresse d'abord au cas $\cos \phi \neq 0$, $\sin \phi \neq 0$. Les valeurs propres deviennent :

$$1, \quad -1, \quad \frac{1}{2} \cos \phi + \frac{i}{2} \sqrt{4 - \cos^2 \phi}, \quad \frac{1}{2} \cos \phi - \frac{i}{2} \sqrt{4 - \cos^2 \phi}.$$

et on peut donc conclure que

$$\cos \phi = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ avec } -\frac{1}{2} < \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) < \frac{1}{2}$$

et k entier. À la différence du cas 1 on a ici un nombre infini de solutions de $A^n = I$ et il faudra alors examiner les contraintes topologiques liées à l'existence d'hyperplans invariants.

Si l'on change de signe à $\sin \phi$, cela revient à faire une symétrie par rapport à l'axe y . On peut donc se borner aux cas où $0 < \phi < \pi/2$ et $\pi/2 < \phi < \pi$.

En posant toujours $\xi_1 = (0, 1, 0, 0)$, $\xi_{j+1} = A^j \xi_1$ on a :

$$\xi_3^{(4)} = \sin \phi, \quad \xi_4^{(4)} = \sin \phi \cos \phi$$

donc, si $\pi/2 < \phi < \pi$, la connexion $\xi_2 \rightarrow \xi_3$ traverse l'hyperplan $x_4 = 0$; ce qui est impossible. On a aussi

$$\xi_4^{(3)} = \cos^2 \phi \sin \phi, \quad \xi_5^{(3)} = -\cos \phi \sin^3 \phi$$

ce qui permet de vérifier que, si $0 < \phi < \pi/2$, la connexion $\xi_4 \rightarrow \xi_5$ traverse l'hyperplan $x_3 = 0$ qui est également invariant.

On a réduit le problème à étudier les cas $\phi = \pi$ et $\phi = \pi/2$. Le premier donne un cycle avec deux points qui n'est donc pas de type C, le deuxième donne un cycle avec 4 points.

□

Annexe B

L'article "Robust homoclinic cycles in \mathbb{R}^4 "

Abstract

The conditions of existence of robust homoclinic cycles for G -equivariant vector fields in \mathbb{R}^4 with G a finite group are investigated. Depending on the action of G , such cycles are either of type A, B, or C. We first introduce a notion of minimal admissible group. The existence of robust homoclinic cycles for vector fields which are equivariant by such a group is generic. Then we show that for type A cycles, the number n of equilibria is either even or equal to three. In the case of type B cycles, n can only be equal to two, three, or six. Finally, for those of type C, n is either four or eight. Moreover, we provide expressions for the generators of the minimal admissible groups for each of the above mentioned cycles and we show the explicit form of vector fields generating three type A homoclinic cycles with 6, 8 and 24 equilibria respectively.

B.1 Introduction

Robust homoclinic cycles were introduced in the study of systems with symmetries. In some of these systems an intermittence behavior has been observed; the system reaches a steady state, after a while this configuration vanishes, and later on the system reappears in another steady state configuration, related to the previous one by a symmetry shift. Some classical examples like the *Küpper-Lortz instability* and the *Bénard problem* can be found in [7]. These situations are described mathematically by means of families of homoclinic connections between equilibria, whose members are related by symmetry shifts. Each of these connections being an image of a "first" connection by one element of the symmetry group. Some cycles can easily be found in the literature, either in \mathbb{R}^3 or in \mathbb{R}^4 . In these cycles the equilibria are on the coordinate axes and the flow-invariant planes and hyperplanes are the coordinate ones. Such well-known cycles are called *simple cycles* in this paper. It is easy to show that the number of equilibria for a homoclinic simple cycle in \mathbb{R}^4 can only be 2, 3, 6, 4, and 8; the first three cycles being in dimension 3 (but of course they can be embedded in \mathbb{R}^4). A first classification has been made in [6] between type A, B, and C cycles and the number of equilibria for cycles of type B and C has already been studied in [24]. Such results are inserted here for completeness.

In this Section we define a homoclinic cycle in \mathbb{R}^4 . We skip any general discussion on the existence, bifurcation and stability of homoclinic cycles referring the interested reader to [7], [15] and references therein. We will focus our attention on the problem of the determination of the possible number of equilibria in such cycles and the associated symmetry groups. Some other definitions are given and a basis of the space is defined according to the geometrical structure of the cycle. This basis will be used all along the paper to simplify the computations. In § B.2 an example of a simple homoclinic cycle is given whereas some general geometrical properties of homoclinic cycles are shown in § B.3.

Our approach is quite different from the usual one: a cycle is identified with a couple of angles, its *structure angles*, and some of its properties are obtained using some simple results in field theory. We follow the classification of homoclinic cycles in \mathbb{R}^4 given in [6] into types A, B, or C cycles. In § B.4 and B.5 we present a general description of cycles of type A and in Sections B.6 and B.7 we consider the simpler problem of cycles of types B and C respectively. Finally, in Section B.8 we give an explicit form for the equivariant vector fields admitting homoclinic cycles of type A.

The following definition can be found in [6]: let X be a vector field on \mathbb{R}^n , equivariant with

respect to the linear action of a finite group G . Without loss of generality we can assume that G acts faithfully and orthogonally, i.e. $G \subset O(4)$. Let $\xi \neq 0$ be a hyperbolic saddle point with a one-dimensional unstable manifold $W^u(\xi)$ and suppose that $W^u(\xi) \subset P = \text{Fix}(K)$, where P is a two-dimensional fixed-point subspace corresponding to an isotropy subgroup $K \subset G$.

Definition B.1. *If there is an element $\gamma \in G$ (twist) such that $\gamma\xi$ is a sink in P and there is a saddle-sink connection in P connecting ξ to $\gamma\xi$, then the collection of points $\gamma^j\xi$, $j \in \mathbb{N}$, together with their unstable manifolds, forms what we call a **robust homoclinic cycle**.*

Definition B.2. *We call **minimal admissible group (MAG)** a finite subgroup G of $O(4)$ such that:*

- G is the symmetry group of a robust homoclinic cycle X ,
- no proper subgroup of G can be the symmetry group of X .

In practice, the first condition is checked using Theorem 4.1 in [2] which guarantees it holds provided that:

- i) $\gamma H^{\gamma^{-1}} \cap N_G(K) = \emptyset$ ($N_G(K)$ is the normalizer of K in G),
- ii) $K < H^{\gamma^{-1}} \cap H$,
- iii) $H < N_G(K^\gamma) \cap N_G(K)$,
- iv) there is a point ξ with isotropy H and a continuous path of points with isotropy K that joins $\gamma^{-1}\xi \in \text{Fix}(H^{\gamma^{-1}})$ to ξ .

The second condition will be satisfied if G is generated by the twist γ and the elements fixing the flow-invariant planes and hyperplanes (see Definition B.14); in any case G must contain the subgroup generated, in a given basis, by a matrix A and $S = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ (Lemma B.6). In the sequel it will be clear that all the open problems in the classification of homoclinic cycles concern type A cycles (Definition B.14) and in this case a MAG must be of the form $\langle A, S \rangle$. We will focus on the search of finite groups generated by A and S .

Remark B.3. In the language of [2], a triple (K, γ, H) verifying i) and ii) is called a *homoclinic triple*.

We choose an orthonormal basis $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ of \mathbb{R}^4 in the following way: let P_1 be an invariant plane and $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ an orthonormal basis of P_1 such that $\mathbf{e}_2 = P_1 \cap \gamma(P_1)$. Let \mathbf{e}_3 be orthogonal to P_1 and such that $P_2 = \gamma(P_1) = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Finally we complete with \mathbf{e}_4 to obtain a direct orthonormal basis. The action of γ on such planes is as follows:

$$P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \longrightarrow P_2 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \longrightarrow P_3 = \langle \cos(t) \mathbf{e}_2 + \sin(t) \mathbf{e}_3, \cos(s) \mathbf{e}_1 + \sin(s) \mathbf{e}_4 \rangle$$

for some s and t . If A is the matrix representing γ in the basis \mathcal{B}' we can replace some \mathbf{e}_j with $-\mathbf{e}_j$ to obtain a direct basis \mathcal{B} in which

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(s) & -\sin(s) \\ \alpha \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ -\alpha \cos(t) & \sin(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

with $\alpha = \pm 1$. It is easy to show that $\det(A) = \alpha$. The equilibria are $\xi_{j+1} = A^j \xi_1$ where $\xi_1 = \mathbf{e}_2$.

Definition B.4. The angle t between two consecutive equilibria ξ_i and $\xi_{i+1} = A \xi_i$ in the flow-invariant plane P_{i+1} is called **connecting angle**. The angle s between the hyperplanes $Q_i = P_{i-1} + P_i$ and $Q_{i+1} = A Q_i$ is called **hyperplanes tilt angle**. We will refer to s and t as the **structure angles** of the cycle X .

Definition B.5. The cycles where at least one of the structure angles is a multiple of $\pi/2$ are called **simple cycles**.

B.2 A simple cycle

The instability problem of Küpper-Lortz. We study the convective movements of fluid particles convected by a temperature gradient maintained across a planar horizontal layer which rotates uniformly around a vertical axis. The bifurcation parameter is the angular speed $\Omega > 0$ with the usual assumption that the system is well approximated by a layer with infinite horizontal extension. If Ω becomes too big the steady configuration of rolls bifurcates supercritically into a new system of rolls and, after a while, it deforms again and reappears in a new system of rolls rotated by 60° . This process repeats itself in an almost periodic manner. The homoclinic cycle describing such a situation is the following:

Let G be the group of order 24 generated by the matrices (this group is usually called \mathbf{T}_d)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

The equilibria are:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \xi_2 = A \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \xi_3 = A^2 \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

The general form of the equivariant vector field up to order three is:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda x_1 + a x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b x_1 x_2^2 + c x_1 x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= \lambda x_2 + a x_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b x_2 x_3^2 + c x_2 x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= \lambda x_3 + a x_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b x_3 x_1^2 + c x_3 x_2^2 \end{aligned}$$

where λ is the bifurcation parameter. The existence and stability of the heteroclinic connection $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ can be checked using the invariant sphere theorem (see § 6.1 in [7]) in one of these two cases

$$(1) \ b < 0, \ a < -c < 0; \quad (2) \ c < 0, \ a < -b < 0.$$

This is the simple cycle with three equilibria \mathcal{X}_3 . Remark now that the coordinate planes are symmetry planes hence the equivariant vector field has six equilibria (you can think of the intersections of the unitary sphere with the axes). Now, a natural problem to study is the existence of a

homoclinic cycle with all the six equilibria. Such a cycle exist and its twist is

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In a sense \mathcal{X}_3 is a sub-cycle of \mathcal{X}_6 . We will encounter other examples of such a situation. These cycles have been introduced by Guckenheimer and Holmes (see [13]).

B.3 The geometrical structure

Lemma B.6. *a) If $P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \text{Fix}(K_1)$ then $\{I, S\} \subseteq K_1$ where $S = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$.
b) If H_1 is the isotropy subgroup of $\xi_1 = (0, 1, 0, 0)$,*

$$\{I, S, \text{diag}(-1, 1, 1, -1), \text{diag}(-1, 1, -1, 1)\} \subseteq H_1.$$

Proof. It is a direct consequence of the hypothesis $\dim(W^u(\xi)) = 1$ for each equilibrium point ξ . □

Remark B.7. In the sequel we will look for G , the smallest group which is admissible for a homoclinic cycle as defined above. Therefore we set $G = \langle A, S \rangle$, except where we need invariant hyperplanes. S is the matrix fixing the plane P_1 and A is the twist, the matrix “generating” the cycle: $A \xi_i = \xi_{i+1}$. We recall that in any case $G \supseteq \langle A, S \rangle$.

Lemma B.8. *Let a and $b = a/(a - 1)$ be two complex numbers. If a and b are the real parts of two roots of unity, then $a = -1, 0$ or $1/2$.*

Proof. If $a = \Re(z)$ and z is a primitive n th root of unity, $a - 1 = (z - 1)^2/(2z)$. The norm from $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(z)$ to \mathbb{Q} of $a - 1$ is ¹

$$N(a - 1) = \frac{(N(1 - z))^2}{2^{\Phi(n)}}$$

where $\Phi(n) = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ is the Euler function; the only exception in the case $n = 2$ where $N(z) = -1$. Now, $N(1 - z)$ may be evaluated by substituting 1 into the minimal polynomial of z which is Ψ_n , the n -nth cyclotomic polynomial. It is known that $\Psi_n(1) = 1$ unless n is a power of a prime p , in which case $\Psi_n(1) = p$. Thus

$$N(a - 1) = \frac{p^2}{2^{\Phi(n)}} \tag{B.2}$$

¹I recall that if $\text{Gal}(\mathbb{K}, \mathbb{Q}) = \{\eta_1 = 1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ and $u \in \mathbb{K}$ then ([14] § 4.15)

$$N(u) = \prod_{i=1}^n \eta_i(u)$$

if n is a power of a prime p ,

$$N(a-1) = \frac{1}{2^{\Phi(n)}} \quad (\text{B.3})$$

otherwise. We will show that these norms are inconsistent with the condition

$$(a-1)(b-1) = 1 \quad (\text{B.4})$$

except in the cases $a = -1, 0, 1/2$. From (4) the norms of a and b cannot be both of the form (3). Let $N(a-1)$ be of the form (2) and then n be a power of a prime p . Observe that $N(a-1)$ is not larger than $p^2/2^{p-1}$ and this is less than 1 when p is at least 7. A straightforward calculation shows that the only exceptions to $N(a-1) < 1$ are given by the cases $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

We will now work with the absolute norm

$$N(x) = |N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(x)|^{1/\Phi(n)}$$

since this value is independent of the field \mathbb{K} in which the algebraic number x lies. The values of $N(1-a)$ are 0, 2, 3/2, 1 and $\sqrt{5}/2$ for n equal, respectively, to 1, 2, 3, 4, 5. We examine directly the following cases:

- $n = 1, a = 1$, and equality (4) does not hold;
- $n = 2, a = -1$, and $b = 1/2$;
- $n = 3, a = -1/2$, and hence $b = 1/3$, not the real part of a root of unity;
- $n = 4, a = 0$;
- $n = 5, a = (\sqrt{5} \pm 1)/4$ making $b = -1/\sqrt{5}$ or $b = -2 - \sqrt{5}$, in neither case the real part of a root of unity.

The problem is clearly symmetric in a and b hence the solution $b = -1$ and $a = 1/2$ also exists. \square

Lemma B.9. *Let B be the following matrix:*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ -\cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*In order to have $B^n = I$ with some $n > 0$, ϕ must be a multiple of $\pi/2$.*²

Proof. Let $z, w, 1/z$ and $1/w$ be the eigenvalues of B and

$$\chi(x) = x^4 - \cos \phi x^3 - \cos \phi x + 1$$

²A more detailed proof can be found in [24].

the characteristic polynomial. We easily obtain

$$\cos \phi = z + \frac{1}{z} + w + \frac{1}{w} \quad (\text{B.5})$$

$$-2 = \frac{1}{zw}(1+z^2)(1+w^2). \quad (\text{B.6})$$

Let $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$ be the n -th cyclotomic field and O the ring of integers of \mathbb{K} . From (6), $1+z^2$ and $1+w^2$ cannot be both units in O , hence we have two cases to examine:

- (a) one of them, say $1+z^2$, is a unit;
- (b) none of them is a unit.

In the case (a), $-w^2$ is a primitive root of unity (p.r.u.) of order p^s , p prime number, and from (6)

$$v_p(2) = \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}$$

therefore $s = 1$ and $p = 2$. This give $-w^2 = -1$ and $\sin \phi = 0$.

In the case (b), $-z^2$ and $-w^2$ must be p.r.u. of orders powers of 2. Indeed if one of them, say $-z^2$, was a p.r.u. of order p^s , $p \neq 2$:

$$0 = 0 + v_p(1+z^2) + v_p(1+w^2) = \frac{1}{p^{s-1}(p-1)} + v_p(1+w^2) \geq \frac{1}{p^{s-1}(p-1)}$$

which is impossible. If the orders are 2^s and 2^t we have

$$1 = \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{2^{t-1}}$$

and hence $s = t = 2$. z and w are then p.r.u. of order 8, $z + 1/z = \pm\sqrt{2}$ and $w + 1/w = \pm\sqrt{2}$. From (6) $z + 1/z$ and $w + 1/w$ have opposite signs thereby (5) gives $\cos \phi = 0$. \square

The following theorem gives a geometrical characterization of the simple cycles:

Theorem B.10. *If X is a simple cycle the structure angles are multiples of $\pi/2$, the flow-invariant planes are the coordinate planes and the equilibria are on the coordinate axes.*

Proof. We examine the different cases: one of the two cosines must be 0, 1 or -1 .

(1) $\cos(t) = \pm 1$. $A \xi_1 = \pm \xi_1$ hence we do not have a cycle or it has 2 equilibria.

(2) $\cos(s) = \pm 1$. $A \mathbf{e}_4 = \pm \mathbf{e}_4$ and therefore we obtain a cycle in \mathbb{R}^3 . The robust homoclinic cycles of \mathbb{R}^3 are the well-known cycles with 2, 3 or 6 equilibria (see § 5).

(3) $\cos(s) = 0$. If $\det(A) = 1$ the statement is a consequence of Lemma B.9.

If $\det(A) = -1$ the real part of an eigenvalue of A is $\cos(t)/2$, hence $\cos(t) = 2 \cos(2h\pi/N)$ with $-1/2 \leq \cos(2h\pi/N) \leq 1/2$. We now show that the only possibilities are $\cos(2h\pi/N) = -1/2, 0$ or $1/2$.

The real parts of the eigenvalues of $A^2 S$ (Remark B.7) are

$$\frac{1}{4} \cos^2(t) \pm \frac{1}{4} \cos(t) \sqrt{8 + \cos^2(t)}$$

then we obtain

$$\cos^2(2h\pi/N) + \cos(2h\pi/N)\sqrt{2 + \cos^2(2h\pi/N)} = a$$

$$\cos^2(2h\pi/N) - \cos(2h\pi/N)\sqrt{2 + \cos^2(2h\pi/N)} = b$$

where a and b are real parts of roots of unity. This gives immediately

$$-2 \cos^2\left(\frac{2h\pi}{N}\right) = ab$$

$$-2 \cos^2\left(\frac{2h\pi}{N}\right) = a + b.$$

The hypotheses of Lemma B.8 hold for a and b and we can deduce $a = -1, 0$ or $1/2$ which give $\cos(t) = 0$ or ± 1 .

(4) $\cos(t) = 0$. If $\det(A) = 1$,

$$\chi(x) = x^4 - \cos(s)x^3 - \cos(s)x + 1$$

is the characteristic polynomial of A . Lemma B.9 gives that, in order to have $A^n = I$, s must be a multiple of $\pi/2$. If $\det(A) = -1$ the proof is the same as in the case $\cos(s) = 0$. \square

The set of homoclinic cycles in \mathbb{R}^4 obviously includes the 3-dimensional cycles; by which I mean cycles completely contained in a hyperplane of \mathbb{R}^4 . Of course for these cycles the hyperplane tilt angle is a multiple of π . The following theorem provides an algebraic property of these cycles:

Theorem B.11. *Let X be a homoclinic cycle with twist γ . We analyze the following two cases:
if $\gamma \in SO(4)$ then X is 3-dimensional if and only if γ has a real eigenvalue;
if $\gamma \notin SO(4)$ then X is 3-dimensional if all the eigenvalues of γ are reals.*

Proof. a) The imaginary parts of a couple of conjugate eigenvalues of A are

$$\lambda_i = \pm \frac{1}{4} \sqrt{2\sigma^2 - 2\sigma\sqrt{\sigma^2 + 8} - 8\tau - 8 - 8\tau}$$

where $\sigma = \cos(s) + \cos(t)$ and $\tau = \cos(s)\cos(t)$. The equation $\lambda_i = 0$ is the same as $(\cos(t) - 1)(\cos(t) + 1)(\cos(s) - 1)(\cos(s) + 1) = 0$. If $\cos(s) = \pm 1$ we have nothing to prove; if $\cos(t) = -1$, $n = 2$ and the cycle is contained in a hyperplane. The proof for the other couple of conjugate eigenvalues is the same.

b) The imaginary part of the non-real eigenvalues is

$$\lambda_i = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 - 4}$$

and hence $t = s = \pi$. \square

Next we prove the following lemma:

Lemma B.12. *Let θ and ϕ be two arbitrary angles in the interval $(0, \pi)$. Then there is a natural integer k such that*

$$\cos^2(2^k \theta) + \cos^2(2^k \phi) < 1. \quad (\text{B.7})$$

Proof. Let s_i , $i = 0, 1, 2 \dots$ be the set of points (x, y) inside the square $D = (0, \pi)^2$ such that

$$\cos^2(2^i x) + \cos^2(2^i y) < 1. \quad (\text{B.8})$$

The sequence $S_i = \bigcup_{k=0}^i s_k$ fills asymptotically the square D (for instance you can consider the larger rectangle T_i inscribable in S_i and with sides parallel to the coordinate axes and notice that these T_i also fill D asymptotically). □

Theorem B.13. *There are no homoclinic cycles with n equilibria if n is an odd number greater than 3.*

Proof. We have to show it only in the case of a cycle with twist $A \subset SO(4)$ because $A^n = I$ and n is odd. The real parts of the eigenvalues of A are

$$\Re(\lambda_1) = \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right), \quad \Re(\lambda_2) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad (h, n, k) = 1. \quad (\text{B.9})$$

Given that a half of the sum of the four eigenvalues of AS is $P = \sqrt{\delta^2 + 8 + 8\tau}$, with $\delta = \cos(t) - \cos(s)$, it is easy to verify that

$$P = \sqrt{\cos^2\left(\frac{2h\pi}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1}, \quad P \in \mathbb{R}.$$

Moreover, P must be in \mathbb{K} , the subfield of \mathbb{C} generated by the roots of unity.

We now show that $P \notin \mathbb{K}$.

If $\mathbb{Q}(P) \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{Q}(P) \subset \mathbb{K}_m$, the m -nth cyclotomic field for a given m . \mathbb{K}_m is a normal extension of \mathbb{Q} , its Galois group is abelian (see [14] § 4.7) and all its subfields are normal extensions of \mathbb{Q} (see [14] § 4.5).

We prove by contradiction that $\mathbb{Q}(P)$ is not a normal extension of \mathbb{Q} .

Set $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(P)$ and suppose that this extension is normal. As a direct consequence the same is true for the extension $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(P, e^{2\pi i/n})$ (see [14] § 4.5). A well-known result in Galois theory gives

$$\phi(\mathbb{Q}(P)) = \mathbb{Q}(P) \quad \forall \phi \in \text{Gal}\left(\mathbb{Q}(P, e^{2\pi i/n}), \mathbb{Q}\right). \quad (\text{B.10})$$

Therefore, we have to find an automorphism ϕ in contradiction with (10). Let a be an integer prime with n and Φ_a be the automorphism associated to a in the n th cyclotomic field. The extension $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(P, e^{2\pi i/n})$ is normal hence we can extend Φ_a to an automorphism of $\mathbb{Q}(P, e^{2\pi i/n})$. The image of P by Φ_a is

$$P' = \phi_a(P) = \sqrt{\cos^2\left(\frac{2ha\pi}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{2ka\pi}{n}\right) - 1}$$

and we have a contradiction if we find such an a which give

$$\cos^2\left(\frac{2ha\pi}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{2ka\pi}{n}\right) - 1 < 0.$$

If $n > 3$ the cycle is not simple hence the point

$$P_0 = \left(\frac{2h\pi}{n}, \frac{2k\pi}{n}\right)$$

lie inside the square D and Lemma B.12 give this result with $a = 2^k$ for a given k . \square

We recall the following definition from [6]:

Definition B.14. *The cycle X is of **type A** if $Q = P + \gamma P$ is not a fixed-point subspace; of **type B** if Q is a fixed-point subspace and $X \subset Q$; and of **type C** if Q is a fixed-point subspace and $X \not\subset Q$.*

Now we can refine Lemma B.6 for type A cycles:

Proposition B.15. *Let X be a type A cycle.*

- a) *If $P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \text{Fix}(K_1)$ then $K_1 = \{I, S\}$.*
- b) *If H_1 is the isotropy subgroup of $\xi_1 = (0, 1, 0, 0)$ then*

$$H_1 = \{I, S, \text{diag}(-1, 1, 1, -1), \text{diag}(-1, 1, -1, 1)\}.$$

Proof. a) is a consequence of the hypothesis $\dim(W^u(\xi)) = 1$ and of Definitions B.2 and B.14. In b) suppose T belongs to H_1 ; we have $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$ and $T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$ (if not, we compose with S).

This element belongs to K_2 , the isotropy group of the plane $P_2 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, then $A^{-1}TA \in K_1$. \square

B.4 Type A cycles with symmetry group in $SO(4)$

We have found type A cycles with symmetry group in $SO(4)$ and with 2, 3, 6, 8, 12, and 24 equilibria. These cycles correspond to finite groups of type $\langle A, S \rangle$ up to order 24. At present we don't know if this list is complete. The method we used in Theorem B.13 do not apply here because the powers of two are not prime with n if n is even. The first 4 cycles are the simple well-known cycles with $n = 2, 3, 6, 8$. The cycle with $n = 12$ is only "a half" of the 24 points cycle in the sense that it is included in it and the symmetry group is the same in the two cycles (but the twist, of course, is not). We found the same situation for the 3 – 6 points simple cycles and the 4 – 8 ones. We present now the cycle with 24 points, the more interesting one, and resume the data of the other cycles in a table (structure angles and order of G).

Theorem B.16. *There exists a MAG $G \subset SO(4)$ for a type A homoclinic cycle X with 24 equilibria. Its structure angles are equal to $\pi/4$.*

Proof. Assume that the structure angles are equal to $\pi/4$. From (1), the twist of X is

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

and the group $G = \langle A, S \rangle$ has order 192. As we can easily verify, the equilibria $A^k \xi_1$, $k = 0, \dots, 23$ are distinct. To show the existence of the cycle it is enough to show the existence of a robust heteroclinic connection between

$$\xi_{24} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Let H_{24} be the isotropy group of ξ_{24} and K_1 be the subgroup of all $g \in G$ fixing all vectors in $P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$. We have

$$H_{24} = \{I, A^{-1}SA, A^{-1}diag(-1, 1, 1, -1)A, A^{-1}diag(-1, 1, -1, 1)A\}$$

and $K_1 = \{I, S\}$. The flow-invariant directions in P_1 are the coordinate axes and $\mathbf{e}_1 = \pm \mathbf{e}_2$. (These directions are obtained by intersection between P_1 and the other flow-invariant planes.)

As a consequence K_1 is an isotropy group. We are now in a position to apply Theorem 4.1 in [2] which gives the following sufficient conditions for the existence of a robust homoclinic trajectory:

(i) $A \notin N_G(K_1)$.

$ASA^{-1} \notin K_1$ because $ASA^{-1} = diag(-1, 1, 1, -1)$.

(ii) The isotropy subgroup H_{24} contains both K_1 and $A^{-1}K_1A$.

By construction.

(iii) $H_{24} \subset N_G(K_1) \cap N_G(A^{-1}K_1A)$

This is clear because $AH_{24}A^{-1}$ maps P_1 on P_1 and $P_2 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ on P_2 .

(iv) There is a continuous path of points with isotropy K_1 that joins $\xi_{24} \in Fix(H_{24}) \subset Fix(K_1)$ to $\xi_1 \in Fix(AK_1A^{-1})$.

This is equivalent of the absence of topological obstructions to the connection $\xi_{24} \longrightarrow \xi_1$ which can be verified by computation of the invariant planes. \square

Remark B.17. More generally we can verify directly that, in a type A cycle,

$$(\{I, S\}, A, \{I, S, diag(-1, 1, -1, 1), diag(-1, 1, 1, -1)\})$$

is a homoclinic triple (see Remark B.3).

The following proposition give a partial answer to the problem of the possible number of equilibria in a cycle with symmetry group in $SO(4)$:

Proposition B.18. *If X is a non-simple homoclinic cycle with twist in $SO(4)$, the number n of equilibria is a multiple of 4.*

Proof. As in the proof of Theorem B.13 we have to show that

$$P = \sqrt{\cos^2\left(\frac{2h\pi}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1}$$

can not be in $\mathbb{R} \cap \mathbb{K}$ if $n = 2m$ and m is odd. Indeed we have

$$P = \sqrt{\cos^2\left(\frac{h\pi}{m}\right) + \cos^2\left(\frac{k\pi}{m}\right) - 1}$$

and the proof is the same as in Theorem B.13. \square

We give now a method to investigate the existence of a cycle with a given number n of equilibria. Using this method we have shown that no homoclinic cycle with $G \subset SO(4)$ exist if $n = 4, 16, 20$ (see the table below). This analysis can be pursued further on.

Let $H = \cos(2h\pi/n)$ and $K = \cos(2k\pi/n)$ be the real parts of the eigenvalues of A . The relationship between H , K and the structure angles is given by

$$\cos(t) + \cos(s) = 2(H + K), \quad \cos(t) \cos(s) = 1 + 2HK; \quad 0 < H < 1, \quad -1 < K < 0. \quad (\text{B.11})$$

The conditions should be $H \geq 0$ and $K \leq 0$ but we can study only non-simple cycles. Moreover n is the order of A and $(h, k, n) = 1$. It is easy to show that if $n = 4$ the conditions (11) are never satisfied thereby a cycle with $n = 4$ is impossible. Take $n = 16$. The first possibility is $h = 1, k = 5, n = 16$. Now let $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2$ be the eigenvalues of AS . $J = (\lambda_1 + \bar{\lambda}_1 - \lambda_2 - \bar{\lambda}_2)/2$ must be in $\mathbb{K} \cap \mathbb{R}$:

$$J = \sqrt{K^2 + H^2 + 3 + 4HK}.$$

In the present case

$$J = \sqrt{4 - \sqrt{2}}.$$

If J is in \mathbb{K} , J is in \mathbb{K}_m for a given m ; $Gal(\mathbb{K}_m, \mathbb{Q})$ is abelian hence $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(J)$ is a normal extension too. If $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ is an irreducible polynomial such that $q(J) = 0$, $\mathbb{Q}(J)$ is the splitting field of q and the Galois group of q must be abelian (indeed a quotient of $Gal(\mathbb{K}_m, \mathbb{Q})$). The polynomial

$$q(x) = x^4 - 8x^2 + 14$$

is irreducible in $\mathbb{Q}[x]$, J is one of its roots but its Galois group is isomorph to the subgroup of S_4 generated by $(1\ 3)$ and $(1\ 2\ 3\ 4)$, then it is not abelian. The other cases can be treated in the same way using J or P (see Theorem B.13). The cycle with 16 equilibria doesn't exist.

The same method applies for $n = 20$.

The following table show the results up to order 24.

Table of type A cycles with symmetry group in $SO(4)$

n	t (connection)	s (tilt)	 G
2	π	0	8
3	$\pi/2$	0	24
4	X	X	X
6	$\pi/2$	π	24
8	$\pi/2$	$\pi/2$	32
12	$\pi/4$	$3\pi/4$	192
16	X	X	X
20	X	X	X
24	$\pi/4$	$\pi/4$	192

The symbol X means that the cycle do not exist. The cycles with n odd are already been discussed in Theorem B.13 and the non-simple cycles with n even and not a multiple of 4 in Proposition B.18.

B.5 Type A cycles with symmetry group not included in $SO(4)$

We now set $\alpha = -1$ in A . The main result of this chapter is the proof of the existence of a homoclinic cycle for each even n . We also give the structure of its symmetry group G_n . To prove this result we need some lemmas. All along this Section n will be an even integer.

Lemma B.19. *Let H_n be the group defined by*

$$H_n = \langle a, s \mid a^n, s^2, (as)^4, [a, s]^2 \rangle;$$

i.e. H_n is the quotient of the free group with two generators, a and s , by the normal subgroup generated by $a^n, s^2, (as)^4$ and $[a, s]^2$.

Its elements can be written in one of the following forms:

$$a^i s a^j, \quad a^i s a^j s.$$

Proof. The following implications are straightforward

$$|[a, s]| = 2 \implies sas = asa^{-1}sa, \quad |as| = 4 \implies sas = a^{-1}sa^{-1}sa^{-1}$$

and by taking the inverses:

$$sa^{-1}s = a^{-1}sasa^{-1} = asasa.$$

From these equations we have $sas = a^2sasa^2$ and therefore

$$sas = a^{2k}sasa^{2k} \tag{B.12}$$

$$sas = a^{2k+1}sa^{-1}sa^{2k+1}. \tag{B.13}$$

From (B.12) $sa^{2k}s = asa^{-2k}sa^{-1}$ then, for an integer m ,

$$sa^{2k}s = a^m sa^{\pm 2k} sa^{-m} \quad (\text{B.14})$$

(+ if m is even and – if m is odd). In the same way we can obtain

$$sa^{2k+1}s = a^m sa^{\pm(2k+1)} sa^m. \quad (\text{B.15})$$

From equations (B.14) and (B.15) each element of H_n can be written in one of the forms

$$a^i sa^j, \quad a^i sa^j s.$$

□

Lemma B.20. *The group G_n generated by*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) & 0 & 0 \\ \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$$

and $S = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ is isomorphic to H_n and its order is $2n^2$.

Proof. By direct computation it is easy to verify that

$$|A| = n, \quad |S| = 2, \quad |AS| = 4, \quad |[A, S]| = 2. \quad (\text{B.16})$$

From Lemma B.19 each element of G_n can be written in one of the forms

$$A^i SA^j, \quad A^i SA^j S.$$

To complete the proof we show these $2n^2$ elements are distinct.

First of all if we have an identity between two elements of the second form, this reduces to an identity between elements of the first one. In addition an identity between an element of the first form and an element of the second one is impossible because

$$A^i SA^j = A^h SA^k S$$

give

$$A^i SA^j = A^h A^{\pm j} S A^{\pm k} SA^j$$

because of (14) or (15). This means that S is a power of A , which is not compatible with (16). In conclusion we have to examine only the case

$$A^i SA^j = A^I SA^J, \quad i \neq I, j \neq J,$$

which can be written in the form

$$SA^h S = A^k, \quad 0 \leq k \leq \frac{n}{2}.$$

Now h cannot be odd or, from (15),

$$A^k = SA^hS = ASA^{-h}SA = AA^{-k}A = A^{2-k}$$

and $k = 1$. With this value

$$[A, S] = A^{n/2},$$

which is impossible as we can verify directly.

Let now h be even.

$$A^k = ASA^{-h}SA^{-1} = AA^{-k}A^{-1} \implies A^{2k} = I \implies k = n/2$$

and the same is true for h : $h = n/2$. With these values

$$SA^{n/2} - A^{n/2}S = 0. \tag{B.17}$$

Finally (17) is an independent relation compatible with (16) but $(A^{n/2}S - SA^{n/2})_{13} = 2$ if n is a multiple of 4 and $1 - \cos(2\pi/n)$ otherwise, and therefore $|G_n| = 2n^2$. \square

We introduce now the symbol $N \times_\alpha H$ for the semi-direct product of the groups N and H . Here $\alpha \in \text{Hom}(H, \text{Aut}(N))$.

Proposition B.21. *The following relations hold:*

1) *If n is a power of 2, then*

$$G_n \simeq \left(\frac{\mathbb{Z}_{n/2} \times_\alpha \mathbb{Z}_n}{\mathbb{Z}_2} \times_\beta \mathbb{Z}_2 \right) \times_\gamma \mathbb{Z}_4$$

2) *If $n = 2^q p$, $p > 1$ odd, then*

$$G_n \simeq (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) \times_\delta G_{n/p}$$

with $G_2 \simeq D_4$ and α , β , γ , and δ defined below.

Proof. 1) Let $B = \langle A^2S, [A, S] \rangle$ be a subgroup of G_n . We start by noticing that B is normal in G_n . Indeed:

$$\begin{aligned} A(A^2S)A^{-1} &= A^2S[A, S]^{-1}; \\ S(A^2S)S &= [A, S](A^2S)^{-1}[A, S]; \\ A[A, S]A^{-1} &= [A^2S, [A, S]](A^2S)^{-2}[A, S]; \\ S[A, S]S &= [A, S]. \end{aligned}$$

B is a subgroup of $SO(4)$ hence $B \neq G_n$ and AS and $(AS)^2$ don't belong to B . This point provides the decomposition

$$G_n \simeq \langle A^2S, [A, S] \rangle \times_\gamma \langle AS \rangle$$

with $\gamma(AS)$ defined by

$$A^2S \longrightarrow (A^2S)^{-1}[A, S] \tag{B.18}$$

$$[A, S] \longrightarrow A^2S[A, S](A^2S). \tag{B.19}$$

Now we have to analyze B . First of all notice that A^4 is in B :

$$A^4 = (A^2S)^3[A, S]A^2S[A, S]$$

and

$$C = \langle A^2S, A^4 \rangle.$$

As before we show that C is normal in B and obtain the decomposition

$$G_n = (\langle A^2S, A^4 \rangle \times_{\beta} \langle [A, S] \rangle) \times_{\gamma} \langle AS \rangle$$

where $\beta([A, S])$ is the homomorphism generated by

$$A^2S \longrightarrow A^{-2}S \tag{B.20}$$

$$A^4 \longrightarrow A^{-4}. \tag{B.21}$$

The problem is now to split C but this subgroup cannot be seen as a semi-direct product.

By induction we can show that

$$[A^2, S]^k = [A^{2k}, S]$$

hence

$$[A^2, S](A^2S) = (A^2S)[A^2, S]^{-1}.$$

The subgroup $\langle [A^2, S] \rangle$ is normal in C but the intersection is not trivial:

$$\langle [A^2, S] \rangle \cap \langle A^2S \rangle = \langle (A^2S)^{n/2} \rangle,$$

which has order 2. The result follows with $\alpha(A^2S)$ the inverse homomorphism $x \longrightarrow 1/x$.

2) $\langle A^{2^q} \rangle$ and $\langle SA^{2^q}S \rangle$ are cyclic commuting subgroups of G_n ; their direct product is a subgroup too, it is normal and its order is p^2 ; the quotient group has order 2^{2q+1} . The 2-Sylows of G_n have this order and their intersection with the normal subgroup is trivial. We have only to find a 2-Sylow of G_n . For instance $\langle A^p, S \rangle$ is a 2-Sylow and it is isomorphic to $G_{n/p}$. For $\gamma(A^p)$ we obtain this expression

$$A^{2^q} \longrightarrow A^{2^q} \tag{B.22}$$

$$SA^{2^q}S \longrightarrow SA^{-2^q}S \tag{B.23}$$

and for $\gamma(S)$

$$A^{2^q} \longrightarrow SA^{2^q}S \tag{B.24}$$

$$SA^{2^q}S \longrightarrow A^{-2^q}. \tag{B.25}$$

□

Remark B.22. According to Lemma B.19, the element AS has order 4 for no matter what value of n is. Moreover, AS transforms the plane $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ as A does and $(AS)^j \xi_1 \neq \xi_1$ for $j = 1, 2, 3$. It follows that in any of these cases there exists a homoclinic cycle connecting only four equilibria.

Lemma B.23. *The cycle generated by A for a G_n -equivariant vector field, if it exists, has n equilibria.*

Proof. We use this matrix P to change the basis \mathcal{B} in another basis, say $\overline{\mathcal{B}}$:

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{1 - \cos(2\pi/n)} & \sqrt{1 + \cos(2\pi/n)} & \sqrt{1 - \cos(2\pi/n)} & \sqrt{1 + \cos(2\pi/n)} \\ -\sqrt{1 + \cos(2\pi/n)} & -\sqrt{1 - \cos(2\pi/n)} & \sqrt{1 + \cos(2\pi/n)} & -\sqrt{1 - \cos(2\pi/n)} \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.26})$$

We call $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]$ the matrix A in this new basis:

$$\overline{A} = PAP^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ 0 & 0 & \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$$

and $\overline{\xi}_1$ the first equilibrium point:

$$\overline{\xi}_1 = P\xi_1 = P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \cos(2\pi/n)} \\ -\sqrt{1 - \cos(2\pi/n)} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

We have to show that $\overline{A}^i \overline{\xi}_1 \neq \overline{\xi}_1$ if $i = 1, \dots, n-1$.

Suppose $\overline{A}^i \overline{\xi}_1 = \overline{\xi}_1$. The fourth component gives $\cos(2\pi i/n) = 1$ then $i = 0 [n]$. \square

Lemma B.24. *There are no topological obstructions to the connections $\xi_i \rightarrow \xi_{i+1}$.*

Proof. Of course we can prove the statement of the theorem only for the connection in the invariant plane $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, i.e. the connection between $A^{-1}\xi_1$ and ξ_1 . As we can compute directly

$$A^{-1}\xi_1 = \xi_n = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2 + 2\pi/n) \\ \sin(\pi/2 + 2\pi/n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Let

$$V(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

be an invariant direction; we have to verify that θ can not belong to the interval $(\pi/2, \pi/2 + 2\pi/n)$. We start the proof with an element B_{ij} of G_n of the form $A^i S A^j$, i and j even. The restriction of B_{ij} to the plane P_1 is

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(2i\pi/n) + \cos(2j\pi/n) & \sin(2i\pi/n) + \sin(2j\pi/n) \\ -\sin(2i\pi/n) - \sin(2j\pi/n) & \cos(2i\pi/n) + \cos(2j\pi/n) \end{pmatrix}.$$

If $(\cos \theta, \sin \theta)$ is an invariant direction we must have

$$\cos\left(\theta - \frac{2i\pi}{n}\right) + \cos\left(\theta - \frac{2j\pi}{n}\right) = 2 \cos \theta \quad (\text{B.27})$$

$$\sin\left(\theta - \frac{2i\pi}{n}\right) + \sin\left(\theta - \frac{2j\pi}{n}\right) = 2 \sin \theta \quad (\text{B.28})$$

and taking the sum of the squares

$$\cos\left(\frac{2(j-i)\pi}{n}\right) = 1 \implies \frac{2(j-i)\pi}{n} = 2k\pi$$

and therefore $j = i + kn$. From (B.27) and (B.28) $i = j = 0 [n]$ and we can deduce that, if a matrix of the form $A^i S A^j$, i and j even, fixe a direction in P_1 , it fixes the whole plane.

Let now i be even and j odd. The previous equations become:

$$-\cos\left(\theta + \frac{2(i-1)\pi}{n}\right) + \cos\left(-\theta + \frac{2j\pi}{n}\right) = 2 \cos \theta$$

$$\sin\left(\theta + \frac{2(i-1)\pi}{n}\right) - \sin\left(-\theta + \frac{2j\pi}{n}\right) = 2 \sin \theta.$$

The sum of the squares gives

$$\cos\left(\frac{2(i-1-j)\pi}{n} + 2\theta\right) = -1 \implies \frac{2(i-1-j)\pi}{n} + 2\theta = \pi + 2k\pi$$

and

$$\theta = \frac{(1-i+j)\pi}{n} + \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

The smallest value of $\theta > \pi/2$ is $\pi/2 + 2\pi/n$.

The other cases and the proof with the elements of the form $A^i S A^j S$ are similar. \square

We can finally prove the

Theorem B.25. *For every even n there is a MAG for a type A homoclinic cycle X with n equilibria. The twist $\gamma \notin SO(4)$ and its structure angles are equal to $2\pi/n$.*

Proof. Lemmas B.19 and B.20 give us some information about G_n . Its order is $2n^2$ and its elements are of the form $A^i S A^j$ or $A^i S A^j S$. If $\xi_1 = (0, 1, 0, 0)$, the equilibria $A^k \xi_1$, $k = 0, \dots, n-1$ are distinct (Lemma B.23). To show the existence of the cycle it suffices to show the existence of a robust heteroclinic connection between

$$\xi_n = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2 + 2\pi/n) \\ \sin(\pi/2 + 2\pi/n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Let H_n be the isotropy group of ξ_n and K_1 be the subgroup of all $g \in G_n$ fixing all vectors in P_1 . It is

$$H_n = \{I, A^{-1}SA, A^{-1}diag(-1, 1, 1, -1)A, A^{-1}diag(-1, 1, -1, 1)A\}$$

and $K_1 = \{I, S\}$. As a consequence of Lemma B.24, K_1 is an isotropy group. We are now in a position to apply Theorem 4.1 in [2] which gives the following sufficient conditions for the existence of a robust homoclinic trajectory:

(i) $A \notin N_{G_n}(K_1)$.

See Remark B.17.

(ii) The isotropy subgroup H_n contains both K_1 and $A^{-1}K_1A$.

See Remark B.17.

(iii) $H_n \subset N_{G_n}(K_1) \cap N_{G_n}(A^{-1}K_1A)$

This is clear because AH_nA^{-1} maps P_1 on P_1 and P_2 on P_2 .

(iv) There is a continuous path of points with isotropy K_1 that joins $\xi_n \in \text{Fix}(H_n) \subset \text{Fix}(K_1)$ to $\xi_1 \in \text{Fix}(AK_1A^{-1})$.

Proof as in lemma 8. □

B.6 Type B cycles

The results of this chapter and the following one are proved in [24]. To see explicitly the form of bifurcation equations for type B cycles, see [7] example 9.2.12. Of course the next theorem also gives the classification of homoclinic cycles in \mathbb{R}^3 .

Theorem B.26. *A type B cycle has 2, 3 or 6 equilibria.*

Proof. The cycle X is included in a hyperplane, say $x_4 = 0$, and we can restrict our analysis to this hyperplane. As in § 1, we can chose a basis \mathcal{B} such that the action of the twist γ become:

$$P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \gamma(P_1) = P_2 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \gamma P_2 = P_3 = \langle \cos(t) \mathbf{e}_2 + \sin(t) \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ -\alpha \cos(t) & \sin(t) & 0 \end{pmatrix}$$

with $\alpha = \pm 1$ and $\det(A) = \alpha$. (In this case it is not very interesting to discuss if $A \in SO(4)$ or not because the cycle is completely contained in the hyperplane $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. It makes no difference if $A \mathbf{e}_4 = \pm \mathbf{e}_4$).

1) $\det(A) = 1$. The eigenvalues of A are

$$1, \quad \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{-\cos^2(t) + 2 \cos(t) + 3}, \quad \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{-\cos^2(t) + 2 \cos(t) + 3}.$$

The action of A is a rotation of an angle with cosine equal to $(\cos(t) - 1)/2$ around the direction $[\sin(t), 1 + \cos(t), \sin(t)]$. The equilibria belong to a geodesic of the unit sphere; the only possible rotations are equal to $\pi/2$, $2\pi/3$ or π , which means $\cos(t) = \pm 1$ or 0 . In the first case $A^2 \xi_1 = \xi_1$, in the second $A^3 \xi_1 = \xi_1$.

2) $\det(A) = -1$. With a change of basis

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2k\pi/N) & -\sin(2k\pi/N) \\ 0 & \sin(2k\pi/N) & \cos(2k\pi/N) \end{pmatrix}.$$

with $\cos(t) = -1 + 2 \cos(2k\pi/N)$ and $0 \leq \cos(2k\pi/N)$. The equilibria belong to two parallel circles. ξ_1 and ξ_N must belong to the same circle or the connection $\xi_N \rightarrow \xi_{N+1}$ cuts the flow-invariant plane $P_1 = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$; then N is even. If $N = 2m$ and m is also even, writing $\xi_j^{(k)}$ for the k -nth component of ξ_j ,

$$\xi_{m+1}^{(3)} = \frac{2 \sin(t)}{\cos(t) + 3} = -\xi_m^{(3)},$$

and we obtain $\sin(t) = 0$ and $A^2 \xi_1 = \xi_1$. Finally if $N = 2m$ and m is odd $A^m = -I$ and the plane $x_2 = 0$ is also flow-invariant. But $\xi_{\frac{m+1}{2}}^{(2)} = -\xi_{\frac{m+3}{2}}^{(2)}$ which give $\cos(t) = 0$ and a cycle with 6 equilibria. \square

B.7 Type C cycles

To see explicitly the form of bifurcation equations for type C cycles see [7] example 9.2.13.

Theorem B.27. *A type C cycle has 4 or 8 equilibria.*

Proof. As usually we choose a basis \mathcal{B} such that

$$P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \quad P_2 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \quad P_3 = \langle \cos(t) \mathbf{e}_2 + \sin(t) \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$$

and γ in the basis \mathcal{B} become

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ \alpha \cos(t) & \sin(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

with $\det(A) = \alpha$.

1) $A \in SO(4)$ (i.e. $\alpha = 1$). Lemma 3 assure that t must be a multiple of $\pi/2$. If $t = \pi$ the cycle has two equilibria, it is included in $Q_2 = P_1 + P_2$, then it is not a type C cycle. If $t = \pi/2$ the cycle has 8 equilibria.

2) $A \notin SO(4)$ (i.e. $\alpha = -1$). In changing t with $-t$ we obtain a symmetry with respect to the y axes thereby we can take $0 < t < \pi$. If $\xi_1 = (0, 1, 0, 0)$, $\xi_{j+1} = A^j \xi_1$ we have :

$$\xi_3^{(4)} = \sin(t), \quad \xi_4^{(4)} = \sin(t) \cos(t)$$

then, if $\pi/2 < t < \pi$, the connection $\xi_3 \rightarrow \xi_4$ cuts the flow-invariant hyperplane $x_4 = 0$ which is impossible. We also have

$$\xi_4^{(3)} = \cos^2(t) \sin(t), \quad \xi_5^{(3)} = -\cos(t) \sin^3(t)$$

which blocks the connection $\xi_4 \rightarrow \xi_5$ if $0 < t < \pi/2$ ($x_3 = 0$ is also flow-invariant).

The only possibility is $t = \pi/2$ which gives a cycle with 4 equilibria. \square

B.8 Examples of vector fields admitting non-simple cycles

We now give three examples of polynomial equivariant vector fields admitting type A, non-simple homoclinic cycles. In the first two examples, the symmetry group is not included in $SO(4)$, while it is in the third example. We computed the corresponding equations by using the software package **Symmetry** developed by K. Gatermann and F. Guyard (see [12]).

In the following \mathcal{R}_d and \mathcal{E}_d denote the ring of invariant polynomials and the \mathbb{R} -algebra of equivariant polynomial maps respectively, of degree less or equal to d . Of course we look for equivariants which are not radial vector fields (i.e. not of the form $f(x, y, z, w) \mathbf{r}$ where f is an invariant function and \mathbf{r} is the radial vector). Moreover, for homoclinic cycles to exist, a necessary condition is that the vector field does not derive from a potential. We shall therefore need terms which are not the gradients of equivariant polynomials. The first example is much easier to carry out than the two others, and we will give a set of sufficient conditions for the asymptotic stability of the homoclinic cycle. For the two other examples, stability requires terms of order higher than 5 and the computations become tedious. Nevertheless we have been able to produce observable homoclinic cycles with a suitable choice of coefficients in both cases.

B.8.1 G_6 -equivariant vector field

In this case the homoclinic cycle have 6 equilibria and the structure angles are equal to $\pi/3$. The first non trivial equivariant can be obtained at degree 3 but the stability³ of the cycle cannot be guaranteed for a homoclinic cycle generated by X_3 , the general G_6 -equivariant vector field at degree 3, because in this case $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. The same thing is true for X_4 .

The generators of \mathcal{R}_5 are

$$\phi_2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

and

$$\phi_4 = 2x^2z^2 + 6x^2w^2 + 6x^2y^2 + 6y^2z^2 + 2y^2w^2 + 8xyzw + 3y^4 + 3x^4 + 3w^4 + 3z^4 + 6z^2w^2.$$

The generators of \mathcal{E}_5 are

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix};$$

$$\chi_3 = \begin{pmatrix} 3x^3 + 3xy^2 + xz^2 + 2yzw + 3xw^2 \\ 3yz^2 + 3x^2y + yw^2 + 3y^3 + 2xzw \\ 3zw^2 + 3z^3 + x^2z + 2xyw + 3y^2z \\ y^2w + 3x^2w + 2xyz + 3w^3 + 3wz^2 \end{pmatrix};$$

³In [16] it is shown that, for type A cycles, if λ_i is the eigenvalue at ξ_1 in the direction \mathbf{e}_i and

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 > 0, \quad \lambda_4 < 0,$$

the necessary and sufficient condition for the asymptotic stability of the cycle is

$$\lambda_1 + \lambda_3 < 0.$$

$$\chi_4 = \begin{pmatrix} -3zw^3 + x^3y - 3xy^3 + 3x^2zw + 3y^2zw + 3xyw^2 + 3xyz^2 + z^3w \\ 3x^2w^2 + 3x^2y^2 - 3y^2z^2 - x^4 + z^4 - 3z^2w^2 \\ 3xw^3 - x^3w + 3y^3z - 3x^2yz - 3xz^2w - 3xy^2w - 3zyw^2 - yz^3 \\ 2xz^3 - 2x^3z - 6x^2yw + 6yz^2w \end{pmatrix};$$

$$\chi_5^{(1)} = \begin{pmatrix} 60yzw^3 + 100yz^3w + 300x^2yzw + 105xy^4 + 25xz^4 + 105xw^4 + 101x^5 \\ 30y^3w^2 + 210y^3z^2 + 60xzw^3 + 100xz^3w + 150yz^2w^2 + 150x^2yw^2 + 90x^2yz^2 \\ 50x^2z^3 + 25x^4z + 190z^3w^2 + 101z^5 + 105zw^4 + 300xyz^2w + 105y^4z \\ 99w^5 + 210z^2w^3 + 210x^2w^3 + 95x^4w + 100xyz^3 + 90x^2z^2w + 150y^2z^2w \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} +90xz^2w^2 + 60y^3zw + 190x^3y^2 + 190x^3w^2 + 90xy^2z^2 + 150xy^2w^2 + 50x^3z^2 \\ 180xy^2zw + 100x^3zw + 99y^5 + 95x^4y + 210x^2y^3 + 15yw^4 + 95yz^4 \\ 60xyw^3 + 150y^2zw^2 + 190y^2z^3 + 60xy^3w + 100x^3yw + 90x^2zw^2 + 90x^2y^2z \\ 60xy^3z + 100x^3yz + 150x^2y^2w + 180xyzw^2 + 30y^2w^3 + 15y^4w + 95wz^4 \end{pmatrix}$$

and

$$\chi_5^{(2)} = \begin{pmatrix} 84yzw^3 - 4yz^3w - 12x^2yzw - 9xy^4 - xz^4 + 39xw^4 + 19 * x^5 + 126xz^2w^2 \\ -6y^3w^2 - 18y^3z^2 + 84xzw^3 - 4xz^3w - 6yz^2w^2 - 6x^2yw^2 - 18x^2yz^2 \\ -2x^2z^3 - x^4z - 22z^3w^2 + 19z^5 + 39zw^4 - 12xyz^2w - 9y^4z + 84xyw^3 \\ 9w^5 + 78z^2w^3 + 78x^2w^3 - 11x^4w - 4xyz^3 + 126x^2z^2w - 6y^2z^2w \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -12y^3zw + 122x^3y^2 - 2x^3z^2 - 22x^3w^2 - 18xy^2z^2 - 6xy^2w^2 \\ -36xy^2zw - 4x^3zw + 33y^5 + 61x^4y - 18x^2y^3 + 21yw^4 + 61yz^4 \\ -6y^2zw^2 + 122y^2z^3 - 12xy^3w - 4x^3yw + 126x^2zw^2 - 18x^2y^2z \\ -12xy^3z - 4x^3yz - 6x^2y^2w + 252xyzw^2 + 42y^2w^3 - 3y^4w - 11wz^4 \end{pmatrix}.$$

Let now

$$X_5 = (a + b\phi_2 + c\phi_2^2 + d\phi_4)\chi_1 + (e + f\phi_2)\chi_3 + g\chi_4 + h\chi_5^{(1)} + i\chi_5^{(2)}$$

If $h = 0$ the homoclinic cycle appear in a stable form as a supercritical bifurcation at $a = 0$. If we put

$$A = 3e + b, \quad B = 3f + c + 3d + 33i, \quad C = 2b + 6e + 9f$$

the stability can be checked for small a and

$$a > 0, \quad A < 0, \quad B > 0, \quad C < 0, \quad A^2 - 4B \geq 0, \quad g > 0, \quad i > 0, \quad e > 0.$$

Using Kim and Guckenheimer's package **Dstool** we have visualized the projection of one of these cycles on the plane $\langle x, y \rangle$ (see Figure B.8.1).

B.8.2 G_8 -equivariant vector field

In this case the homoclinic cycles have 8 equilibria and the structure angles are equal to $\pi/4$. The generators of \mathcal{R}_5 are

$$\phi_2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

and

$$\phi_4 = 8xyzw + 3y^4 + 6z^2w^2 + 3x^4 + 3w^4 + 3z^4 + 6x^2y^2 + 2x^2z^2 + 6x^2w^2 + 2y^2w^2 + 6y^2z^2.$$

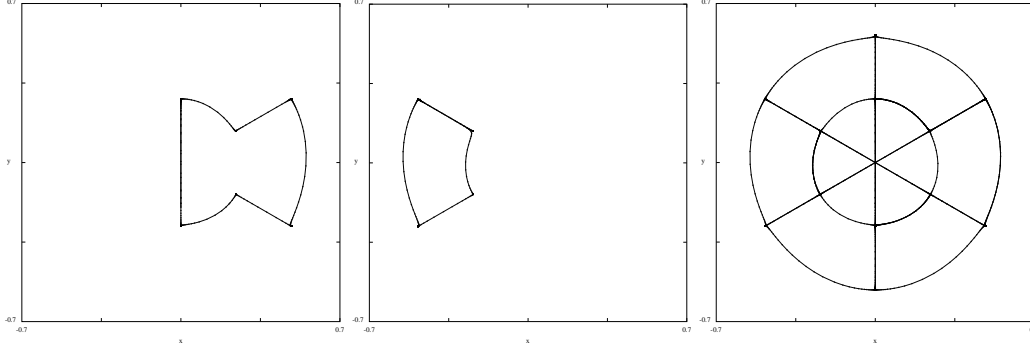


Figure B.1: Left: the cycle generated by A connecting six equilibria. Center: the cycle generated by AS connecting four equilibria. Right: the complete orbit of connections generated by the group.

The generators of \mathcal{E}_5 are

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix};$$

$$\chi_3 = \begin{pmatrix} xz^2 + 2yzw + 3xw^2 + 3xy^2 + 3x^3 \\ yw^2 + 2xzw + 3yz^2 + 3y^3 + 3x^2y \\ 3z^3 + 2xyw + 3y^2z + x^2z + 3zw^2 \\ 2xyz + y^2w + 3x^2w + 3w^3 + 3z^2w \end{pmatrix}$$

and

$$\chi_5 = \begin{pmatrix} 12x^2yzw + xz^4 - 3xw^4 + 18x^3w^2 + 2x^3z^2 + 2x^3y^2 + 13xy^4 + 4z^3wy + 5x^5 \\ 12xy^2zw + 2x^2y^3 + 18y^3z^2 + 2y^3w^2 + yw^4 - 3yz^4 + 5y^5 + 13x^4y + 6x^2yz^2 \\ 5z^5 + 2z^3w^2 + 13zw^4 + 12xyz^2w + 2x^2z^3 + x^4z + 18y^2z^3 - 3y^4z + 4x^3yw \\ 2z^2w^3 + y^4w + 13z^4w + 5w^5 + 12xyzw^2 - 3x^4w + 18x^2w^3 + 2y^2w^3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -12y^3zw - 18xy^2z^2 + 6xy^2w^2 + 30xz^2w^2 + 20yzw^3 \\ -12x^3zw - 18x^2yw^2 + 4xzw^3 + 20xz^3w + 30yz^2w^2 \\ +6y^2zw^2 + 30x^2y^2z - 18x^2zw^2 - 12xyw^3 + 20xy^3w \\ 30x^2y^2w + 20x^3yz - 18y^2z^2w + 6x^2z^2w - 12xyz^3 + 4xy^3z \end{pmatrix}.$$

The general G_8 -equivariant vector field at degree 5 is

$$X_5 = (a + b\phi_2 + c\phi_2^2 + d\phi_4)\chi_1 + (e + f\phi_2)\chi_3 + g\chi_5.$$

This vector field does not give any stable homoclinic cycle because $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. A stable example can be obtained adding an equivariant of degree seven. A similar picture as in the G_6 case can be observed in this case.

B.8.3 Vector field equivariant under the MAG in $SO(4)$ generating a 12–24 points homoclinic cycle

The connecting angles are now equal to $\pi/4$. The first non trivial equivariant can be done at degree 5.

The generator of \mathcal{R}_5 is

$$\phi_2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

and the generators of \mathcal{E}_5 are

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

and

$$\chi_5 = \begin{pmatrix} 3x^5 + 2y^3zw + 2yzw^3 + 7x^3w^2 + 6x^3z^2 + 2xw^4 + 3xz^4 + 4xy^4 + 5x^3y^2 \\ 2x^3zw + 2xz^3w + 4x^4y + 7y^3z^2 + 6y^3w^2 + 3yw^4 + 2yz^4 + 3yx^2w^2 \\ 2xw^3y + 2xy^3w + 3x^4z + 2y^4z + 5z^3w^2 + 7y^2z^3 + 6y^2zw^2 \\ 2xyz^3 + 2x^3yz + 2x^4w + 3y^4w + 6w^3y^2 + 6x^2z^2w + 9x^2y^2w \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 9xz^2w^2 + 3xy^2z^2 + 6xy^2w^2 - 4yz^3w \\ 6x^2yz^2 + 5x^2y^3 + 9yz^2w^2 + 3y^5 - 4xzw^3 \\ 9x^2y^2z + 3x^2zw^2 + 6x^2z^3 + 4zw^4 + 3z^5 - 4x^3yw \\ 7x^2w^3 + 5z^2w^3 + 4z^4w + 3w^5 + 3wy^2z^2 - 4xy^3z \end{pmatrix}.$$

The general equivariant field up to degree five is

$$X_5 = (a + b\phi_2 + c\phi_2^2)\chi_1 + d\chi_5.$$

The hyperbolism condition is not satisfy at degree five because $\lambda_4 = 0$. Figure 2 shows the projection on the (x, y) plane of the homoclinic cycle for coefficient values $a = 10$, $b = -20$, $c = 0$ and $d = -4$.

B.9 Acknowledgements

The author thanks P. Chossat of INLN, Sophia Antipolis, France, for many helpful discussions over the last two years and R. Lauterbach for hospitality at the University of Hamburg where the 24-points cycle in Theorem B.16 was worked out. The input received from M. Field and J. Montaldi is also gratefully acknowledged.

This work was partially supported by the European Commission funding for The Research Training Network *Mechanics and Symmetry in Europe* (MASIE).

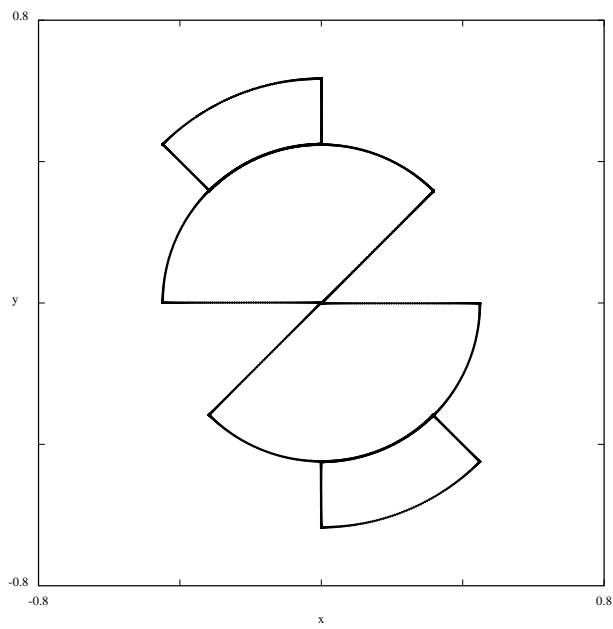


Figure B.2: The projection of the homoclinic cycle connecting 24 equilibria.

Appendix C

L'article "Complete classification of homoclinic cycles in \mathbb{R}^4 in the case of a symmetry group $G \subset \text{SO}(4)$ "

Résumé

Des cycles homoclines avec groupe de symétrie contenu dans $SO(4)$ sont déjà parus dans la littérature. Ces cycles ont 2, 3, 6, 8, 12 ou 24 points d'équilibre. Dans cette note on montre que cette classification est complète en utilisant un résultat sur les équations diophantines à angles rationnels.

Abstract

Some homoclinic cycles in \mathbb{R}^4 with symmetry group contained in $SO(4)$ have already appeared in the literature. These cycles have 2, 3, 6, 8, 12, or 24 equilibria. In this note we show that this classification is complete using a result in diophantine trigonometric equations with rational angles.

Version abrégée en français

Les cycles homoclines robustes (CHR) apparaissent dans l'étude des champs de vecteurs équivariants. Dans le cas d'un groupe de symétrie G fini ils ont été classés, sur la base de l'action de G , en cycles de type A, B et C (cf. [6]). La question de savoir quelles sont les valeurs possibles pour n , nombre de points d'équilibre du cycle, a été étudiée dans [24] pour les cycle de type B ($n = 2, 3$ ou 6) et C ($n = 4$ ou 8) et dans [25] pour les cycles de type A avec groupe de symétrie non contenu dans $SO(4)$ (n pair ou $n = 3$). Dans cette note on complète la classification dans le cas $G \subset SO(4)$.

On peut imaginer un CHR comme une suite finie de plans P_i invariants par rapport au flot qui sont, chacun, l'image du précédent par l'action d'un élément $\gamma \in G : \gamma(P_i) = P_{i+1}$. Chaque plan contient deux points d'équilibre connectés entre eux par une ligne intégrale. Pour classer les cycle on se sert de la notion d'*angle de structure* du cycle. Le premier angle de structure est noté t et représente l'angle entre deux points d'équilibre consécutifs sur le plan invariant (*angle de connexion*). Pour définir le deuxième angle de structure on considère la suite d'hyperplans Q_i sommes vectorielles de deux plans invariants consécutifs : $Q_i = P_{i-1} + P_i$. L'angle entre deux hyperplans consécutifs est noté s (*angle "tilt" des hyperplans*). Si les angles de structure sont des multiples de $\pi/2$ on dit que le cycle est *simple*. La liste complète des cycles simple est donnée dans le tableau à la section C.4.

Pour limiter la recherche de cycles non simples on utilise l'homomorphisme bien connu de $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ sur $SO(4)$, où \mathcal{Q} est le corps des quaternions unitaires. Ceci permet d'obtenir les conditions (C.12) et (C.13) sur les angles de structure. À l'aide d'un résultat sur les solutions rationnelles d'une équation trigonométrique (cf. [21]) on conclut que les angles de structure doivent être des multiples de $\pi/4$. On retrouve donc les cycles à 12 ($t = \pi/4, s = 3\pi/4$) et 24 points d'équilibre ($t = s = \pi/4$) déjà connus (cf. [25]). La classification est complète.

C.1 Introduction

Homoclinic cycles naturally appear in the study of bifurcations in symmetric systems. The presence of symmetries is necessary for these cycles to be robust i.e. stable with respect to perturbations compatible with the symmetries of the system. In this note we focus our attention on the case where the symmetry group G is finite, and its action on \mathbb{R}^4 is linear and faithful. We can suppose, without loss of generality, that $G \subset O(4)$. These cycles has been classified into type A, B, and C depending of the action of G (see [6]). A problem arises concerning the possible number

n of equilibria for a homoclinic cycle. The answer to this problem has been given in [24] for type B and C cycles and in [25] for type A cycles with symmetry group not included in $SO(4)$. For type B cycles the number of equilibria can only be 2, 3, or 6; for type C, n is 4 or 8 and for type A cycles with $G \not\subset SO(4)$ n is even or $n = 3$. In this note we investigate the case of type A cycles with $G \subset SO(4)$.

C.2 Rotations and quaternions

Let \mathcal{Q} be the noncommutative division algebra of unitary quaternions. In the sequel we identify the element (x, y, z, w) of \mathbb{R}^4 with the quaternion $x + y\vec{i} + z\vec{j} + w\vec{k}$, which we will frequently write as (x, \vec{v}) , with \vec{v} a 3-dimensional vector. The operations defined in the algebra of quaternions are

$$(x_1, \vec{v}) + (x_2, \vec{w}) = (x_1 + x_2, \vec{v} + \vec{w}) \quad (\text{C.1})$$

$$(x_1, \vec{v})(x_2, \vec{w}) = (x_1x_2 - \vec{v} \cdot \vec{w}, x_1\vec{w} + x_2\vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w}) \quad (\text{C.2})$$

where \cdot and \wedge denote the usual scalar and cross products (see [9] § 14).

The elements of \mathcal{Q} can be written in the form

$$\mathbf{q} = (\cos\theta, \sin\theta\vec{v}), \quad \theta \in S^1, \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\vec{v}\| = 1. \quad (\text{C.3})$$

Remark C.1. If the unitary quaternion

$$\mathbf{q} = (\cos\theta, \sin\theta\vec{v}) \quad (\text{C.4})$$

is periodic ($\mathbf{q}^n = 1$ for a given integer $n > 0$), the angle θ is rational.

It is a well-known result that we have an homomorphism Ψ from $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ on $SO(4)$ whose kernel is $\{1, -1\}$. The action of $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ on the quaternion \mathbf{x} is

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{p} \mathbf{x} \mathbf{q}^{-1}. \quad (\text{C.5})$$

C.3 The homoclinic cycles

The following definition can be found in [6]: let X be a vector field on \mathbb{R}^n , equivariant with respect to the linear action of a finite group G . Let $\xi \neq 0$ be a hyperbolic saddle point with a one-dimensional unstable manifold $W^u(\xi)$ and suppose that $W^u(\xi) \subset P = \text{Fix}(K)$, where P is a two-dimensional fixed-point subspace corresponding to an isotropy subgroup $K \subset G$.

Definition C.2. *If there is an element $\gamma \in G$ (twist) such that $\gamma\xi$ is a sink in P and there is a saddle-sink connection in P connecting ξ to $\gamma\xi$, then the collection of points $\gamma^j\xi$, $j \in \mathbb{N}$, together with their unstable manifolds, forms what we call a **robust homoclinic cycle**.*

We choose an orthonormal basis $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ of \mathbb{R}^4 in the following way: let P_1 be an invariant plane and $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ an orthonormal basis of P_1 such that $\mathbf{e}_2 = P_1 \cap \gamma(P_1)$. Let \mathbf{e}_3 be a vector orthogonal to P_1 and such that $P_2 = \gamma(P_1) = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Finally, we complete the basis \mathcal{B}' with \mathbf{e}_4 to obtain a direct orthonormal basis. The action of γ on the planes used to construct \mathcal{B}' is as follows:

$$P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \longrightarrow P_2 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \longrightarrow P_3 = \langle \cos(t) \mathbf{e}_2 + \sin(t) \mathbf{e}_3, \cos(s) \mathbf{e}_1 + \sin(s) \mathbf{e}_4 \rangle$$

for some s and t . If A is the matrix representing γ in the basis \mathcal{B}' we can replace some \mathbf{e}_j with $-\mathbf{e}_j$ to obtain a direct basis \mathcal{B} in which

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ -\cos(t) & \sin(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

It is easy to show that $\det(A) = 1$. The equilibria are $\xi_{j+1} = A^j \xi_1$ where $\xi_1 = \mathbf{e}_2$. The matrix fixing the first invariant plane $P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ is $S = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ and $G = \langle A, S \rangle$.

Definition C.3. *The angle t between two consecutive equilibria ξ_i and $\xi_{i+1} = A \xi_i$ in the flow-invariant plane P_{i+1} is called **connecting angle**. The angle s between the hyperplanes $Q_i = P_{i-1} + P_i$ and $Q_{i+1} = A Q_i$ is called **hyperplanes tilt angle**. We will refer to s and t as the **structure angles** of the cycle X . The cycles where at least one of the structure angles is a multiple of $\pi/2$ are called **simple cycles**.*

Lemma C.4. *a) If $P_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \text{Fix}(K_1)$ then $\{I, S\} \subseteq K_1$ where $S = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$. b) If H_1 is the isotropy subgroup of $\xi_1 = (0, 1, 0, 0)$,*

$$\{I, S, \text{diag}(-1, 1, 1, -1), \text{diag}(-1, 1, -1, 1)\} \subseteq H_1.$$

Proof. It is a direct consequence of the hypothesis $\dim(W^u(\xi)) = 1$ for each equilibrium point ξ . □

Finally we need the following

Definition C.5. *The cycle X is of **type A** if $Q = P + \gamma P$ is not a fixed-point subspace; of **type B** if Q is a fixed-point subspace and $X \subset Q$; and of **type C** if Q is a fixed-point subspace and $X \not\subset Q$.*

The following lemma will be useful in determining the possible values of n .

Lemma C.6. *In the case of a non-simple cycle the structure angles satisfy the inequalities*

$$0 \leq t \leq \pi/2; \quad 0 \leq s \leq \pi. \quad (\text{C.7})$$

Proof. By changing the sign of s we obtain a symmetric cycle with respect to the hyperplane $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$.

We can of course change t in $-t$ obtaining a symmetry with respect to the axis \mathbf{e}_2 so we can suppose $t \in [0, \pi]$. Furthermore, let K_1 be the subgroup of G fixing the plane P_1 . Because of Lemma C.4 the group $N(K_1)$, acting on P_1 , contains the symmetries with respect to all directions obtained from ξ_1 with a rotation by an angle equal to t . These directions being flow-invariant if $\pi/2 < t < \pi$ the connection in P_1 must go through an invariant direction which is impossible. □

C.4 The simple cycles

We start from a result from [25] which gives the fundamental property characterizing a simple cycle.

Theorem C.7. *The structure angles of a simple homoclinic cycle are multiples of $\pi/2$.*

Using this theorem it is easy to find all possible type A simple cycles. Here is the complete list:

Table of type A simple cycles with symmetry group in $SO(4)$

n	t (connection)	s (tilt)	 G
2	π	0	8
3	$\pi/2$	0	24
6	$\pi/2$	π	24
8	$\pi/2$	$\pi/2$	32

We now look for non-simple homoclinic cycles using the quaternion homomorphism to characterize the finite groups generated by A and S .

C.5 The non-simple cycles

Consider the homomorphism $\Psi : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow SO(4)$ introduced in section C.2. One of the two inverse images of A is the element $((p_1, q_1, r_1, s_1), (P_1, Q_1, R_1, S_1))$ where

$$r_1 = -p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s+t}{2}\right); \quad q_1 = s_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{s+t}{2}\right) \quad (\text{C.8})$$

and

$$R_1 = P_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s-t}{2}\right); \quad -Q_1 = S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{s-t}{2}\right). \quad (\text{C.9})$$

In the case of AS one of the inverse images is $((p_2, q_2, r_2, s_2), (P_2, Q_2, R_2, S_2))$ with

$$r_2 = -p_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{s+t}{2}\right); \quad q_2 = s_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s+t}{2}\right) \quad (\text{C.10})$$

and

$$R_2 = P_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{s-t}{2}\right); \quad -Q_2 = S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s-t}{2}\right). \quad (\text{C.11})$$

We can now state the following lemma:

Lemma C.8. *The angles s and t satisfy the following conditions:*

$$\cos\left(\frac{s+t}{2}\right) = \sqrt{2} \cos(p\pi); \quad \cos\left(\frac{s-t}{2}\right) = \sqrt{2} \cos(q\pi) \quad (\text{C.12})$$

$$\sin\left(\frac{s+t}{2}\right) = \sqrt{2} \cos(r\pi); \quad \sin\left(\frac{s-t}{2}\right) = \sqrt{2} \cos(u\pi) \quad (\text{C.13})$$

where p , q , r , and u are rational numbers.

Proof. It is a simple consequence of Remark C.1 and equations (C.8), (C.9), (C.10), and (C.11). \square

We recall the following Theorem from [21] (for a more general result see [19]):

Theorem C.9. *All rational values of x and y such that $\sin \pi x \sin \pi y$ is a positive rational, normalized so that $0 < x \leq y \leq 1/2$, are given by*

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/6 & 1/10 & 1/12 \\ \hline y & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/6 & 3/10 & 5/12 \end{array}$$

We can now state the Theorem:

Theorem C.10. *The structure angles of a type A homoclinic cycle in \mathbb{R}^4 , with symmetry group included in $SO(4)$, are multiples of $\pi/4$.*

Proof. From Lemma C.8 we obtain

$$\cos^2(p\pi) + \cos^2(r\pi) = \frac{1}{2} \tag{C.14}$$

and then

$$\cos(2p\pi) + \cos(2r\pi) = -1 \implies \cos((p+r)\pi) \cos((p-r)\pi) = -\frac{1}{2}. \tag{C.15}$$

We can finally write down the desired equation

$$\sin\left(\left(p+r-\frac{1}{2}\right)\pi\right) \sin\left(\left(-p+r+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = \frac{1}{2} \tag{C.16}$$

and the statement follows from Theorem C.9. \square

A consequence of Lemma C.6 is that the only possible non-simple cycles can be obtained with

- a) $t = s = \pi/4$
- b) $t = \pi/4$ and $s = 3\pi/4$.

It has been shown in [25] that these two cases give two homoclinic cycles with 24 and 12 equilibria respectively. The symmetry group is the same in the two cases and its order is 192. The projection of the 24-equilibria cycle on the plane $\langle e_1, e_2 \rangle$ is shown in the left hand side of Figure C.1. From this projection it is not so easy to guess the topology of the original curve on the sphere S^3 . A simple question is about this curve to be a (non-trivial) knot or not. The answer is negative, such a curve being isotopic to a circle on S^3 as it can be seen plotting its stereographic projection on \mathbb{R}^3 (see Figure C.1, right hand side).

To complete the classification we have to add the following two cycles to the table in section C.4:

n	t (connection)	s (tilt)	G
12	$\pi/4$	$3\pi/4$	192
24	$\pi/4$	$\pi/4$	192

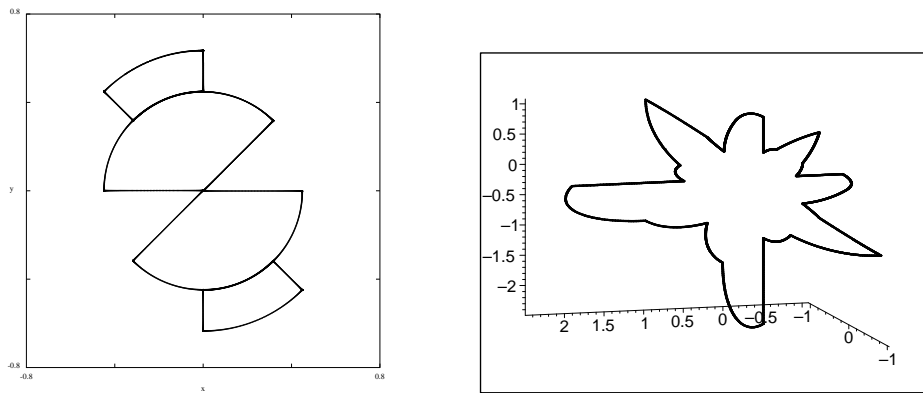


Figure C.1: The 24 equilibria homoclinic cycle. Left: the projection on the plane $\langle e_1, e_2 \rangle$. Right: the stereographic projection on \mathbb{R}^3 : this curve is clearly unknotted.

Annexe D

Une famille de groupes finis

Nous allons caractériser la famille de groupes définie par la présentation suivante pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$H_m = \{a, s \mid a^{2m} = s^2 = (as)^4 = [a, s]^2 = 1\}$$

Nous allons en premier lieu caractériser les éléments de H_m , en déterminant les formules qui permettront d'effectuer la composition des éléments dans le groupe.

D.1 Formules de calcul et dénombrement

Lemme D.1. Dans le groupe H_m les formules suivantes sont toujours vérifiées quel que soient i et j :

$$sa^{2i}sa^{2j} = a^{2j}sa^{2i}s \quad (D.1)$$

$$sa^{2i+1}sa^{2j} = a^{-2j}sa^{2i+1}s \quad (D.2)$$

$$sa^{2i}sa^{2j+1} = a^{2j+1}sa^{-2i}s \quad (D.3)$$

$$sa^{2i+1}sa^{2j+1} = a^{-(2j+1)}sa^{-(2i+1)}s \quad (D.4)$$

Démonstration. Remarquons que l'ordre de a est $2m$ pair, donc tous les entiers de la classe de $i \pmod{2m}$ ont la même parité, ce qui donne un sens à la séparation des formules selon la parité des exposants de a .

Partons des deux relations $(as)^4 = 1$ et $[a, s]^2 = 1$ pour obtenir :

$$a^{-1}(as)^4 = a^{-1} \implies sasa = a^{-1}sa^{-1}s \quad (D.5)$$

$$[a, s]^2 sasa^{-1} = sasa^{-1} \implies sasa^{-1} = asa^{-1}s. \quad (D.6)$$

Montrons par récurrence sur j les formules (D.1) à (D.4) :

$j = 0$: (D.1) et (D.2) sont trivialement vérifiées, (D.3) et (D.4) deviennent :

$$sa^{2i}sa = asa^{-2i}s \quad (D.7)$$

$$sa^{2i+1}sa = a^{-1}sa^{-(2i+1)}s \quad (D.8)$$

Montrons tout d'abord ces deux formules (D.7) et (D.8) par récurrence sur i :

$i = 0$: (D.7) est évidente, (D.8) n'est autre que (D.5).

Supposons (D.7) et (D.8) vraies pour $i \geq 0$,

$$\begin{aligned} sa^{2i+2}sa &= sas \cdot sa^{2i+1}sa \\ &= sas \cdot a^{-1}sa^{-(2i+1)}s && \text{par hypothèse de récurrence (D.8)} \\ &= asa^{-1}s \cdot sa^{-(2i+1)}s && \text{d'après (D.6)} \\ &= asa^{-(2i+2)}s \\ sa^{2i+3}sa &= sas \cdot sa^{2i+2}sa \\ &= sas \cdot asa^{-(2i+2)}s && \text{qui vient juste d'être montré} \\ &= a^{-1}sa^{-1}s \cdot sa^{-(2i+2)}s && \text{d'après (D.5)} \\ &= a^{-1}sa^{-(2i+3)}s \end{aligned}$$

donc par récurrence (D.7) et (D.8) sont vraies quel que soit $i \geq 0$.

Terminons la récurrence sur j ; supposons les formules (D.1) à (D.4) vraies pour $j \geq 0$:

$$\begin{aligned}
sa^{2i}sa^{2j+2} &= sa^{2i}sa^{2j+1} \cdot a \\
&= a^{2j+1}sa^{-2i}s \cdot a && \text{par hypothèse de récurrence (D.3)} \\
&= a^{2j+1} \cdot asa^{2i}s && \text{d'après (D.7)} \\
&= a^{2j+2}sa^{2i}s \\
sa^{2i+1}sa^{2j+2} &= sa^{2i+1}sa^{2j+1} \cdot a \\
&= a^{-(2j+1)}sa^{-(2i+1)}s \cdot a && \text{par hypothèse de récurrence (D.4)} \\
&= a^{-(2j+1)} \cdot a^{-1}sa^{2i+1}s && \text{d'après (D.8)} \\
&= a^{-(2j+2)}sa^{2i+1}s \\
sa^{2i}sa^{2j+3} &= sa^{2i}sa^{2j+2} \cdot a \\
&= a^{2j+2}sa^{2i}s \cdot a && \text{montré avec le 1^{er} cas ci-dessus} \\
&= a^{2j+2} \cdot asa^{-2i}s && \text{d'après (D.7)} \\
&= a^{2j+3}sa^{-2i}s \\
sa^{2i+1}sa^{2j+3} &= sa^{2i+1}sa^{2j+2} \cdot a \\
&= a^{-(2j+2)}sa^{2i+1}s \cdot a && \text{montré avec le 2^e cas ci-dessus} \\
&= a^{-(2j+2)} \cdot a^{-1}sa^{-(2i+1)}s && \text{d'après (D.8)} \\
&= a^{-(2j+3)}sa^{-(2i+1)}s
\end{aligned}$$

donc par récurrence les formules (D.1) à (D.4) sont vraies quels que soient $i, j \geq 0$. \square

Ainsi, quand un élément s'écrit avec plus de quatre lettres, les formules permettent de ramener son expression à quatre lettres au plus, la première étant la lettre a .

Proposition D.2. *L'application $\sigma : H_m \rightarrow \mathbb{Z}_2$ définie sur les générateurs par :*

$$\sigma(a) = 0, \quad \sigma(s) = 1$$

est un morphisme de groupes dont le noyau est :

$$\ker \sigma = \{a^i sa^j s \mid 0 \leq i < 2m, 0 \leq j < 2m\}.$$

Démonstration. Il faut vérifier que σ conserve les relations de H_m :

$$\begin{aligned}
\sigma(a^{2m}) &= 2m\sigma(a) &= 0 & \pmod{2} \\
\sigma(s^2) &= 2\sigma(s) &= 0 & \pmod{2} \\
\sigma((as)^4) &= 4(\sigma(a) + \sigma(s)) &= 0 & \pmod{2} \\
\sigma([a, s]^2) &= 2\sigma([a, s]) &= 0 & \pmod{2}
\end{aligned}$$

et donc σ est bien un morphisme $H_m \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

Remarquons que $\sigma(x)$ compte (mod 2) le nombre d'apparition de la lettre s dans la formulation de x . $\ker \sigma$ est donc l'ensemble des éléments de H_m composés d'un nombre pair de s , c'est donc $\{a^i sa^j s \mid 0 \leq i < 2m, 0 \leq j < 2m\}$. \square

Proposition D.3. H_m comporte $8m^2$ éléments qui s'écrivent de manière unique sous l'une des deux formes suivantes :

$$a^i sa^j s \ (\in \ker \sigma), \quad a^i sa^j; \quad 0 \leq i < 2m, \quad 0 \leq j < 2m$$

Démonstration. Les éléments de H_m sont de l'une des deux formes : $a^i sa^j s$ ou $a^i sa^j$. Les termes ainsi cités sont tous distincts car si deux termes sont identiques, ils sont :

– soit dans $\ker \sigma$:

$$a^i sa^j s = a^k sa^l s \implies a^{i-k} sa^{j-l} s = 1$$

– soit dans le complémentaire de $\ker \sigma$:

$$a^i sa^j = a^k sa^l \implies a^{i-k} sa^{j-l} s = 1.$$

dans les deux cas, cela rajoute une relation à la présentation de H_m , sauf si $i = k \pmod{2m}$ et $j = l \pmod{2m}$, auquel cas les deux éléments de départ sont le même élément.

Nous pouvons maintenant dénombrer les éléments (tous distincts) de H_m .

Comme $0 \leq i < 2m$ et $0 \leq j < 2m$, on a $2m \times 2m = 4m^2$ éléments dans $\ker \sigma$, et un total de $2 \times 4m^2 = 8m^2$ éléments dans H_m . \square

Nous pouvons alors dénombrer les éléments de H_m selon leur ordre. Nous commencerons par nous débarrasser des calculs fastidieux en les regroupant dans un lemme de calcul :

Lemme D.4. Formules donnant les puissances successives des éléments de H_m :

$$\begin{aligned} (a^{2i} sa^{2j} s)^k &= a^{2ki} sa^{2kj} s \\ (a^{2i+1} sa^{2j} s)^{2k} &= a^{2k(2i+1)} \\ (a^{2i+1} sa^{2j} s)^{2k+1} &= a^{(2k+1)(2i+1)} sa^{2j} s \\ (a^{2i} sa^{2j+1} s)^2 &= 1 \\ (a^{2i+1} sa^{2j+1} s)^2 &= 1 \\ (a^{2i} sa^{2j})^{2k} &= a^{2k(i+j)} sa^{2k(i+j)} s \\ (a^{2i} sa^{2j})^{2k+1} &= a^{2k(i+j)+2i} sa^{2k(i+j)+2j} \\ (a^{2i+1} sa^{2j})^2 &= a^{2i-2j+1} sa^{2i+2j+1} s \\ (a^{2i+1} sa^{2j})^4 &= 1 \\ (a^{2i} sa^{2j+1})^2 &= a^{2i-2j-1} sa^{-2i-2j-1} s \\ (a^{2i} sa^{2j+1})^4 &= 1 \\ (a^{2i+1} sa^{2j+1})^{2k} &= a^{2k(i+j+1)} sa^{-2k(i+j+1)} s \\ (a^{2i+1} sa^{2j+1})^{2k+1} &= a^{2(k+1)i+2k(j+1)+1} sa^{2k(i+1)+2(k+1)j+1} \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons d'abord les formules avec exposant 2 ou 4 :

$$\begin{aligned}
(a^{2i}sa^{2j+1}s)^2 &= a^{2i}sa^{2j+1}s \cdot a^{2i}sa^{2j+1}s && \text{formule (D.4)} \\
&= a^{2i}a^{-2i}sa^{-(2j+1)}ssa^{2j+1}s \\
&= 1 \\
(a^{2i+1}sa^{2j+1}s)^2 &= a^{2i+1}sa^{2j+1}s \cdot a^{2i+1}sa^{2j+1}s && \text{formule (D.4)} \\
&= a^{2i+1} \cdot a^{-(2i+1)}sa^{-(2j+1)}s \cdot sa^{2j+1}s \\
&= 1 \\
(a^{2i+1}sa^{2j})^2 &= a^{2i+1}sa^{2j} \cdot a^{2i+1}sa^{2j} && \text{formule (D.2)} \\
&= a^{2i+1} \cdot a^{-2j}sa^{2i+2j+1}s \\
&= a^{2i-2j+1}sa^{2i+2j+1}s \\
(a^{2i+1}sa^{2j})^4 &= 1 && \text{formule ci-dessus} \\
(a^{2i}sa^{2j+1})^2 &= a^{2i}sa^{2j+1} \cdot a^{2i}sa^{2j+1} && \text{formule (D.4)} \\
&= a^{2i} \cdot a^{-(2j+1)}sa^{-(2i+2j+1)}s \\
&= a^{2i-2j-1}sa^{-(2i+2j+1)}s \\
(a^{2i}sa^{2j+1})^4 &= 1 && \text{formule ci-dessus}
\end{aligned}$$

Montrons maintenant les formules d'exposant k par récurrence sur k .

Vrai pour $k = 0$. Supposons vrai pour k :

$$\begin{aligned}
(a^{2i}sa^{2j}s)^{k+1} &= a^{2ki}sa^{2kj}s \cdot a^{2i}sa^{2j}s && \text{hyp. récur.} \\
&= a^{2ki} \cdot a^{2i}s \cdot a^{2kj}s \cdot sa^{2j}s && \text{formule (D.1)} \\
&= a^{2(k+1)i}s \cdot a^{2(k+1)j}s \\
(a^{2i+1}sa^{2j}s)^{2k+2} &= a^{(2k+1)(2i+1)}sa^{2j}s \cdot a^{2i+1}sa^{2j}s && \text{hyp. récur.} \\
&= a^{(2k+1)(2i+1)} \cdot a^{2i+1}sa^{-2j}s \cdot sa^{2j}s && \text{formule (D.3)} \\
&= a^{(2k+2)(2i+1)} \\
(a^{2i+1}sa^{2j}s)^{2k+3} &= a^{(2k+2)(2i+1)} \cdot a^{2i+1}sa^{2j}s \\
&= a^{(2k+3)(2i+1)}sa^{2j}s \\
(a^{2i}sa^{2j})^{2k+2} &= a^{2k(i+j)+2i}sa^{2k(i+j)+2j} \cdot a^{2i}sa^{2j} && \text{hyp. récur.} \\
&= a^{2k(i+j)+2i} \cdot a^{2j}sa^{2k(i+j)+2j+2i}s && \text{formule (D.1)} \\
&= a^{2(k+1)(i+j)}sa^{2(k+1)(i+j)}s \\
(a^{2i}sa^{2j})^{2k+3} &= a^{2(k+1)(i+j)}sa^{2(k+1)(i+j)}s \cdot a^{2i}sa^{2j} && \text{formule (D.1)} \\
&= a^{2(k+1)(i+j)} \cdot a^{2i}sa^{2(k+1)(i+j)}s \cdot sa^{2j} \\
&= a^{2(k+1)(i+j)+2i}sa^{2(k+1)(i+j)+2j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a^{2i+1}sa^{2j+1})^{2k+2} &= a^{2(k+1)i+2k(j+1)+1}sa^{2k(i+1)+2(k+1)j+1} \cdot a^{2i+1}sa^{2j+1} \\
&= a^{2(k+1)i+2k(j+1)+1} \cdot a^{2j+1}sa^{-2(k+1)(i+1)-2(k+1)j}s \\
&= a^{2(k+1)(i+j+1)}sa^{-2(k+1)(i+j+1)}s \\
(a^{2i+1}sa^{2j+1})^{2k+3} &= a^{2(k+1)(i+j+1)}sa^{-2(k+1)(i+j+1)}s \cdot a^{2i+1}sa^{2j+1} \\
&= a^{2(k+1)(i+j+1)} \cdot a^{2i+1}sa^{2(k+1)(i+j+1)}s \cdot sa^{2j+1} \\
&= a^{2(k+2)i+2(k+1)(j+1)+1}sa^{2(k+1)(i+1)+2(k+2)j+1}
\end{aligned}$$

Donc par récurrence les formules sont prouvées. \square

Pour déterminer l'ordre des éléments de H_m , nous aurons encore besoin d'un lemme pour résoudre les équations dans l'anneau \mathbb{Z}_m .

Lemme D.5. Dans l'anneau \mathbb{Z}_m , l'équation de la variable x :

$$a \times x = 0 \pmod{m}$$

admet les solutions :

$$x = 0 \left(\text{mod } \frac{m}{\text{pgcd}(m, a)} \right).$$

Démonstration. Soit $d = \text{pgcd}(m, a)$, on a $a = d \times a'$ et $m = d \times m'$, avec $\text{pgcd}(m', a') = 1$. L'équation devient :

$$\begin{aligned} d \times a' \times x &= k_1 \times d \times m' \\ a' \times x &= k_1 \times m' \\ x &= k_2 \times m' && \text{car } a' \text{ est inversible dans } \mathbb{Z}_{m'} \\ x &= k_2 \times \frac{m}{\text{pgcd}(m, a)} && \text{ou encore} \\ x &= 0 \pmod{\frac{m}{\text{pgcd}(m, a)}} \end{aligned}$$

□

Proposition D.6. Ordre des éléments de H_m :

$$\begin{aligned} a^{2i}sa^{2j}s &\text{ est d'ordre } \text{ppcm} \left(\frac{m}{\text{pgcd}(m, i)}, \frac{m}{\text{pgcd}(m, j)} \right) \\ a^{2i+1}sa^{2j}s &\text{ est d'ordre } \frac{2m}{\text{pgcd}(m, 2i+1)} \\ a^{2i}sa^{2j+1}s &\text{ est d'ordre } \frac{2m}{\text{pgcd}(m, 2j+1)} \\ a^{2i+1}sa^{2j+1}s &\text{ est d'ordre } 2 \\ a^{2i}sa^{2j} &\text{ est d'ordre } \frac{2m}{\text{pgcd}(m, i+j)} \\ a^{2i+1}sa^{2j} &\text{ est d'ordre } 4 \\ a^{2i}sa^{2j+1} &\text{ est d'ordre } 4 \\ a^{2i+1}sa^{2j+1} &\text{ est d'ordre } \frac{2m}{\text{pgcd}(m, i+j+1)} \end{aligned}$$

Démonstration. C'est l'application des Lemmes D.4 et D.5. Par exemple :

$$(a^{2i}sa^{2j}s)^k = a^{2ki}sa^{2kj}s = 1 \iff 2ki = 0 \pmod{2m} \wedge 2kj = 0 \pmod{2m},$$

c'est à dire que k est multiple de $\frac{m}{\text{pgcd}(m, i)}$ et de $\frac{m}{\text{pgcd}(m, j)}$ donc k est le ppcm de ces deux quantités. Pour qu'une puissance de $a^i sa^j$ soit 1 = $a^0 sa^0 s$, il faut que la lettre s apparaisse un nombre pair de fois, et donc l'ordre de $a^i sa^j$ est toujours pair. □

Corollaire D.7. Si m est impair, il y a m^2 éléments dans H_m d'ordre impair. Ce sont : $\{a^{2i}sa^{2j}s, 0 \leq i, j < m\}$

Si $m = 2^q r$, r impair $\neq 1$, il y a r^2 éléments dans H_m d'ordre impair. Ce sont : $\{a^{2^{q+1}i}sa^{2^{q+1}j}s, 0 \leq i, j < r\}$

Démonstration. La première assertion est le cas particulier de la seconde pour $q = 0$. Prouvons la seconde assertion :

D'après la Proposition D.6, $\text{pgcd}(m, x)$ est un diviseur de m donc $\frac{2m}{\text{pgcd}(m, x)}$ est toujours pair à cause du coefficient 2 au numérateur. Les seuls cas où l'ordre est impair sont $a^{2^i} s a^{2^j} s$ avec $i = j = 2^q$ et leurs puissances. \square

D.2 Étude de H_m , cas où m n'est pas une puissance de 2

Pour tout m on peut poser $m = 2^q r$ avec r impair et $0 \leq q$. Dans cette section, nous nous limiterons aux cas m non puissance de 2, c'est à dire r impair > 1 .

L'ordre de H_m est alors $8(2^q r)^2 = 2^{2q+3} r^2$ et H_m admet la présentation :

$$\{a, s \mid a^{2^{q+1}r} = s^2 = (as)^4 = [a, s]^2 = 1\}$$

Proposition D.8. Soit K_r le sous-groupe de $H_{2^q r}$ engendré par $\{a^{2^{q+1}}, sa^{2^{q+1}}s\}$ alors :

$$K_r \approx \mathbb{Z}_r \oplus \mathbb{Z}_r, \quad K_r \triangleleft H_{2^q r}, \quad H_{2^q r}/K_r \approx H_{2^q}.$$

Démonstration. Remarquons que : $sa^{2^{q+1}}s = \Phi_s(a^{2^{q+1}})$ et $a^{2^{q+1}}$ ont le même ordre r , ils engendrent des sous-groupes cycliques isomorphes à \mathbb{Z}_r . D'après la formule (D.1) : $(sa^{2^{q+1}}s) \cdot a^{2^{q+1}} = a^{2^{q+1}} \cdot (sa^{2^{q+1}}s)$ ce qui montre que $a^{2^{q+1}}$ commute avec $sa^{2^{q+1}}s$.

Comme les puissances successives de $a^{2^{q+1}}$ ne contiennent pas la lettre s , alors que celles de $sa^{2^{q+1}}s$ la contiennent, on a $\langle a^{2^{q+1}} \rangle \cap \langle sa^{2^{q+1}}s \rangle = \{1\}$ et donc $K_r \approx \mathbb{Z}_r \oplus \mathbb{Z}_r$.

Montrons maintenant que K_r est distingué dans $H_{2^q r}$:

$$\begin{aligned} a \cdot (a^{2^{q+1}}) \cdot a^{-1} &= a^{2^{q+1}} && \in K_r \\ s \cdot (a^{2^{q+1}}) \cdot s &= sa^{2^{q+1}}s && \in K_r \\ a \cdot (sa^{2^{q+1}}s) \cdot a^{-1} &= sa^{-2^{q+1}}s && \in K_r, \text{ d'après la formule (D.3)} \\ s \cdot (sa^{2^{q+1}}s) \cdot s &= a^{2^{q+1}} && \in K_r \end{aligned}$$

et donc $K_r \triangleleft H_{2^q r}$. Soit $\pi : H_{2^q r} \rightarrow H_{2^q r}/K_r$ canonique, $H_{2^q r}/K_r$ est engendré par $\{\pi(a), \pi(s)\}$. Puisque $a^{2^{q+1}} \in K_r$, $\pi(a)^{2^{q+1}} = \pi(a^{2^{q+1}}) = 1$, les autres relations de $H_{2^q r}$ sont transportées sans changement par π dans le quotient. En posant $\alpha = \pi(a)$ et $\beta = \pi(s)$ le quotient admet alors la présentation :

$$\{\alpha, \beta \mid \alpha^{2^{q+1}} = \beta^2 = (\alpha\beta)^4 = [\alpha, \beta]^2 = 1\} \approx H_{2^q}$$

ce qui montre que $H_{2^q r}/K_r \approx H_{2^q}$. \square

Proposition D.9. Si r est impair > 1 alors :

$$H_{2^q r} = (\mathbb{Z}_r \oplus \mathbb{Z}_r) *_u H_{2^q} = \left(\langle a^{2^{q+1}} \rangle \oplus \langle sa^{2^{q+1}}s \rangle \right) *_u \langle a^r, s \rangle$$

avec $u : H_{2^q} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_r \oplus \mathbb{Z}_r)$ défini de la façon suivante :

$$u(a^r) = \left(\begin{array}{c} a^{2^{q+1}} \mapsto a^{2^{q+1}} \\ sa^{2^{q+1}}s \mapsto sa^{-2^{q+1}}s \end{array} \right), u(s) = \left(\begin{array}{c} a^{2^{q+1}} \mapsto sa^{2^{q+1}}s \\ sa^{2^{q+1}}s \mapsto a^{2^{q+1}} \end{array} \right)$$

C'est à dire que $H_{2^{q_r}}$ admet la présentation :

$$\{x, y, z, t \mid x^r = y^r = z^{2^{q+1}} = t^2 = 1, yx = xy, zx = xz, zy = y^{-1}z, tx = yt, \\ ty = xt, (zt)^4 = 1, [z, t]^2 = 1\} \quad (\text{D.9})$$

Démonstration. Le quotient est isomorphe à H_{2^q} d'ordre 2^{2q+3} qui est précisément l'ordre des 2-Sylow de $H_{2^{q_r}}$. Comme K_r est d'ordre impair, il est d'intersection triviale avec tout 2-Sylow, et donc $H_{2^{q_r}}$ se scinde en un produit semi-direct de K_r par un 2-Sylow. Il reste à déterminer l'un de ces 2-Sylow.

Soit S le sous-groupe de $H_{2^{q_r}}$ engendré par $\{a^r, s\}$.

a^r est d'ordre 2^{q+1} et s d'ordre 2, évaluons :

$$\begin{aligned} (a^r s)^4 &= a^r s a^r s a^r s a^r s \\ &= a^r \cdot a^{-r} s a^{-r} s \cdot s a^r s \quad \text{formule (D.4)} \\ &= 1 \\ [a^r, s]^2 &= a^r s a^{-r} s a^r s a^{-r} s \\ &= a^r \cdot a^{-r} s a^r s \cdot s a^{-r} s \quad \text{formule (D.4)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

En posant $\alpha = a^r$ et $\beta = s$, le sous-groupe S admet la présentation :

$$\{\alpha, \beta \mid \alpha^{2^{q+1}} = \beta^2 = (\alpha\beta)^4 = [\alpha, \beta]^2 = 1\} \approx H_{2^q}$$

dont l'ordre est 2^{2q+3} , c'est donc un 2-Sylow de $H_{2^{q_r}}$. Le morphisme

$$u : \langle a^r, s \rangle \rightarrow \text{Aut} \left(\langle a^{2^{q+1}} \rangle \oplus \langle sa^{2^{q+1}}s \rangle \right)$$

est la restriction à S des automorphismes intérieurs de $H_{2^{q_r}}$:

$$\begin{aligned} u(a^r) &= \left(\begin{array}{c} a^{2^{q+1}} \mapsto a^r \cdot (a^{2^{q+1}}) \cdot a^{-r} = a^{2^{q+1}} \\ sa^{2^{q+1}}s \mapsto a^r \cdot (sa^{2^{q+1}}s) \cdot a^{-r} = sa^{2^{q+1}}s \end{array} \right) \\ u(s) &= \left(\begin{array}{c} a^{2^{q+1}} \mapsto s \cdot (a^{2^{q+1}}) \cdot s = sa^{2^{q+1}}s \\ sa^{2^{q+1}}s \mapsto s \cdot (sa^{2^{q+1}}s) \cdot s = a^{2^{q+1}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

□

Corollaire D.10. Pour m non puissance de 2, voici les premiers groupes H_m , les u_i étant explicités dans la Proposition D.9 :

$$\begin{array}{ll}
 1 = 2^0 & H_1 = D_4 \\
 2 = 2^1 & H_2 \\
 3 = 2^0 \times 3 & H_3 = (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3) *_{u_3} D_4 \\
 4 = 2^2 & H_4 \\
 5 = 2^0 \times 5 & H_5 = (\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5) *_{u_5} D_4 \\
 6 = 2^1 \times 3 & H_6 = (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3) *_{u_6} H_2 \\
 7 = 2^0 \times 7 & H_7 = (\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7) *_{u_7} D_4 \\
 8 = 2^3 & H_8 \\
 9 = 2^0 \times 3^2 & H_9 = (\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_9) *_{u_9} D_4 \\
 10 = 2^1 \times 5 & H_{10} = (\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5) *_{u_{10}} H_2 \\
 11 = 2^0 \times 11 & H_{11} = \dots
 \end{array}$$

Démonstration. Hormis pour H_1 , c'est l'application de la Proposition D.9. Considérons maintenant H_1 :

$$H_1 = \{a, s \mid a^2 = s^2 = (as)^4 = [a, s] = 1\}$$

Si l'on pose $\alpha = as$, on a la relation de commutation :

$$\alpha^3 \cdot s = asasas \cdot s = a \cdot asas = s \cdot as = s \cdot \alpha$$

compte tenu de la formule (D.1) et du fait que $a^2 = 1$. Finalement on obtient la présentation :

$$H_1 = \{\alpha, s \mid \alpha^4 = s^2 = 1, s\alpha = \alpha^3 s\} \approx D_4$$

H_1 est le groupe diédral d'ordre 8. □

Nous venons d'exprimer H_m en fonction de H_{2^q} où 2^q est la plus grande puissance de 2 divisant m . Il nous reste maintenant à étudier les H_m où m est une puissance de 2.

D.3 Étude de H_m , cas où m est une puissance de 2

Lemme D.11. L'application $\tau : H_{2^q} \rightarrow \mathbb{Z}_4$ définie sur les générateurs par :

$$\tau(a) = 1 \text{ et } \tau(s) = 2$$

est un morphisme de groupes.

Démonstration. Il faut vérifier que τ conserve les relations de H_{2^q} :

$$\begin{array}{llll}
 \tau(a^{2^{q+1}}) & = & 2^{q+1} \times \tau(a) & = & 0 \pmod{4} \text{ car } q \geq 1 \\
 \tau(s^2) & = & 2 \times \tau(s) & = & 2 \times 2 = 0 \pmod{4} \\
 \tau((as)^4) & = & 4 \times (\tau(a) + \tau(s)) & = & 0 \pmod{4} \\
 \tau([a, s]^2) & = & 2 \times \tau(asa^{-1}s) & = & 2 \times 0 = 0 \pmod{4}
 \end{array}$$

et donc τ est bien un morphisme $H_{2^q} \rightarrow \mathbb{Z}_4$. □

Proposition D.12. Soit B le sous-groupe de H_{2^q} engendré par $\{a^2s, [a, s]\}$; alors :

$$B \triangleleft H_{2^q}, \quad H_{2^q} = B *_v \langle as \rangle, \quad v(as) = \left(\begin{array}{l} a^2s \mapsto (a^2s)^{-1} \cdot [a, s] \\ [a, s] \mapsto (a^2s) \cdot [a, s] \cdot (a^2s) \end{array} \right)$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que B est distingué dans H_{2^q}

$$\begin{aligned} a \cdot (a^2s) \cdot a^{-1} &= a^3sa^{-1} \\ &= (a^2s) \cdot [a, s]^{-1} && \in B \\ s \cdot (a^2s) \cdot s &= sa^2 \\ &= [a, s] \cdot (a^2s)^{-1} \cdot [a, s] && \in B \\ a \cdot [a, s] \cdot a^{-1} &= a^3sas \\ &= (a^2s) \cdot [a, s] \cdot (a^2s) && \in B \\ s \cdot [s, a] \cdot s &= asa^{-1}s \\ &= [a, s] && \in B \end{aligned}$$

et donc $B \triangleleft H_{2^q}$.

Remarquons que $s = [a, s] \cdot (as)^2 \cdot (a^2s)^{-1}$ donc $s \in \langle B, as \rangle$ et par conséquent $a = (as) \cdot s \in \langle B, as \rangle$ c'est à dire $H_{2^q} = \langle B, as \rangle$.

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} \tau(a^2s) &= 2\tau(a) + \tau(s) = 2 \cdot 1 + 2 = 0 \pmod{4} \\ \tau([a, s]) &= \tau(asa^{-1}s) = \tau(a) + \tau(s) - \tau(a) + \tau(s) = 0 \pmod{4} \\ \tau(as) &= \tau(a) + \tau(s) = 1 + 2 = 3 \text{ générateur de } \mathbb{Z}_4 \end{aligned}$$

donc $B \subset \ker \tau$, alors que $\tau|_{\langle as \rangle}: \langle as \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_4$ est un isomorphisme, ce qui montre que $B \cap \langle as \rangle = \{1\}$. On en conclut que H_{2^q} se décompose en produit semi-direct :

$$H_{2^q} = B *_v \mathbb{Z}_4 = \langle a^2s, [a, s] \rangle *_v \langle as \rangle$$

avec v comme indiqué dans la proposition; en conséquence τ est la projection canonique $H_{2^q} \rightarrow \mathbb{Z}_4 \approx H_{2^q}/B$. \square

Nous aurons besoin de connaître les puissances successives des deux termes $[a^2, s]$ et de (a^2s) , qui vont être les générateurs d'un sous-groupe de B .

Lemme D.13. Dans H_m les puissances successives de $[a^2, s]$ et de (a^2s) vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} [a^2, s]^n &= [a^{2n}, s] && \text{l'ordre de } [a^2, s] \text{ est } 2^q \\ (a^2s)^{2n} &= a^{2n}sa^{2n}s \text{ et } (a^2s)^{2n+1} = a^{2n+2}sa^{2n} && \text{l'ordre de } a^2s \text{ est } 2^{q+1} \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons $[a^2, s]^n = [a^{2n}, s]$ par récurrence.

Vrai de manière évidente pour $n = 0$. Supposons vrai pour n :

$$\begin{aligned} [a^2, s]^{n+1} &= [a^{2n}, s] \cdot [a^2, s] && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= a^{2n}sa^{-2n}s \cdot a^2sa^{-2}s \\ &= a^{2n} \cdot a^2sa^{-2n}s \cdot sa^{-2}s && \text{formule (D.1)} \\ &= a^{2n+2}sa^{-2n-2}s \\ &= [a^{2(n+1)}, s] \end{aligned}$$

$[a^2, s]^n = a^{2n} s a^{-2n} s = 1$ si et seulement si $2n = -2n = 0 \pmod{2^{q+1}}$ c'est à dire $n = 2^q$.
L'ordre de $[a^2, s]$ est donc 2^q

Le Lemme D.4 pour $a^2 s = a^2 s a^0$ nous donne ses puissances successives, la Proposition D.6 nous donne son ordre : $\frac{2m}{\text{pgcd}(m,1)} = 2m = 2^{q+1}$. \square

Proposition D.14. Soit C_q le sous-groupe de H_{2^q} engendré par $\{[a^2, s], a^2 s\}$ alors :

$$C_q \subset B, \quad C_q \triangleleft B, \quad B = C_q *_w \langle [a, s] \rangle$$

avec

$$w([a, s]) = \left(\begin{array}{l} [a^2, s] \mapsto [a^2, s]^{-1} \\ a^2 s \mapsto [a^2, s]^{-1} \cdot (a^2 s)^{-1} \end{array} \right)$$

Démonstration. Appliquons τ sur les générateurs de C_q :

$$\begin{aligned} \tau([a^2, s]) &= 2 \times \tau(a) + \tau(s) - 2 \times \tau(a) + \tau(s) = 0 \\ \tau(a^2 s) &= 2 \times \tau(a) + \tau(s) = 2 \times 1 + 2 = 0 \pmod{4} \end{aligned}$$

et donc $C_q \subset \ker \tau = B$

On constate que si $q \geq 2$ alors C_q n'est pas distingué dans H_{2^q} . Montrons par contre que $\forall q \geq 1$, C_q est distingué dans B :

$$\begin{aligned} (a^2 s) \cdot [a^2, s] \cdot (a^2 s)^{-1} &\in C_q \\ (a^2 s) \cdot (a^2 s) \cdot (a^2 s)^{-1} &= a^2 s \in C_q \\ [a, s] \cdot [a^2, s] \cdot [a, s] &= a s a^{-1} s \cdot a^2 s a^{-2} s \cdot a s a^{-1} s \\ &= a \cdot a^{-2} s a^{-1} s \cdot s a^{-2} \cdot a s a^{-1} s \cdot s \quad \text{formules (D.2) et (D.4)} \\ &= a^{-1} s a^{-2} s a^{-1} \\ &= a^{-1} \cdot a^{-1} s a^2 s \quad \text{formule (D.3)} \\ &= [a^2, s]^{-1} \in C_q \\ [a, s] \cdot (a^2 s) \cdot [a, s] &= a s a^{-1} s \cdot a^2 s \cdot a s a^{-1} s \\ &= a \cdot a^{-2} s a^{-1} s \cdot s a s a^{-1} s \quad \text{formule (D.2)} \\ &= a^{-2} s \\ &= a^{-2} s a^2 s \cdot s a^{-2} \\ &= [a^2, s]^{-1} \cdot (a^2 s)^{-1} \in C_q \end{aligned}$$

et donc $C_q \triangleleft B$.

Par construction $\langle C_q, [a, s] \rangle = \langle a^2 s, [a, s] \rangle = B$

Comme $[a, s] \notin C_q$ et que $[a, s]$ est d'ordre 2, $C_q \cap \langle [a, s] \rangle = \{1\}$. Et donc B se décompose en produit semi-direct :

$$C_q *_w \langle [a, s] \rangle \text{ avec } w([a, s]) = \Phi_{[a, s]} : C_q \rightarrow C_q$$

$$w([a, s]) = \left(\begin{array}{l} [a^2, s] \mapsto [a, s] \cdot [a^2, s] \cdot [a, s] = [a^2, s]^{-1} \\ a^2 s \mapsto [a, s] \cdot a^2 s \cdot [a, s] = [a^2, s]^{-1} \cdot (a^2 s)^{-1} \end{array} \right)$$

\square

Il nous reste maintenant à décomposer C_q . On constate que C_q ne se décompose pas en produit semi-direct dès que $q \geq 3$, car bien que $\langle [a^2, s] \rangle$ soit un sous-groupe distingué dans C_q , on ne sait pas trouver de sous-groupe $K \subset C_q$ tel que $C_q = \langle K, [a^2, s] \rangle$ et $K \cap \langle [a^2, s] \rangle = 1$. Nous allons malgré tout pouvoir exprimer C_q sous la forme d'un quotient oduit semi-direct.

Proposition D.15. Dans $C_q = \langle [a^2, s], a^2s \rangle$ on a $\langle [a^2, s] \rangle \triangleleft C_q$

$$\langle [a^2, s] \rangle \cap \langle a^2s \rangle = \langle [a^2, s]^{2^{q-1}} \rangle = \langle (a^2s)^{2^{q+1}} \rangle = \langle a^{2^q} sa^{2^q} s \rangle \approx \mathbb{Z}_2.$$

Si $q \geq 3$:

$$C_q = \frac{\mathbb{Z}_{2^q} *_r \mathbb{Z}_{2^{q+1}}}{\langle \alpha^{2^{q-1}} \beta^{2^q} \rangle}, \quad r(\beta) = (\alpha \mapsto \alpha^{-1});$$

Si $q = 2$:

$$C_2 = \langle a^2s \rangle *_s \langle a^4 \rangle, \quad s(a^4) = (a^2s \mapsto (a^2s)^5);$$

Si $q = 1$:

$$C_1 = \langle a^2s \rangle \approx \mathbb{Z}_4$$

Démonstration. On calcule d'abord

$$(a^2s) \cdot [a^2, s] \cdot (a^2s)^{-1} = a^2s(a^2sa^{-4}s)s = [a^{-2}, s] = [a, s]^{-1}$$

et donc $\langle [a^2, s] \rangle \triangleleft C_q$.

Un élément commun à $\langle [a^2, s] \rangle$ et à $\langle a^2s \rangle$ s'écrit $[a^2, s]^i = a^{2i}sa^{-2i}s$, mais aussi $(a^2s)^{2j} = a^{2j}sa^{2j}s$; il faut et il suffit que :

$$\begin{aligned} 2i &= 2j \pmod{2^{q+1}} & \text{et} & & -2i &= 2j \pmod{2^{q+1}} \\ i &= -i \pmod{2^q} & \text{et} & & j &= i \pmod{2^q} \\ 2i &= 0 \pmod{2^q} & \text{et} & & j &= i \pmod{2^q} \\ i &= 0 \pmod{2^{q-1}} & \text{et} & & j &= i \pmod{2^q} \end{aligned}$$

qui n'admet que $i = j = 2^{q-1}$ comme solution non triviale. Posons $\alpha = [a^2, s]$ et $\beta = a^2s$, nous avons la relation $\alpha^{2^{q-1}} = [a^2, s]^{2^{q-1}} = a^{2^q}sa^{2^q}s = (a^2s)^{2^q} = \beta^{2^q}$.

Recherchons maintenant la formule de commutation de α avec β :

$$\begin{aligned} \beta \alpha &= a^2s \cdot [a^2, s] \\ &= a^2s \cdot a^2sa^{-2}s \\ &= a^2 \cdot a^{-2}sa^2s \cdot s && \text{formule (D.2)} \\ &= sa^2 \\ &= sa^2 \cdot sa^{-2} \cdot a^2 \cdot s \\ &= [s, a^2] \cdot a^2s \\ &= [a^2, s]^{-1} \cdot (a^2s) \\ &= \alpha^{-1}\beta \end{aligned}$$

et C_q admet la présentation :

$$\{\alpha, \beta; \alpha^{2^q} = \beta^{2^{q+1}} = 1, \beta\alpha = \alpha^{-1}\beta, \beta^{2^q} = \alpha^{2^{q-1}}\}.$$

Si $q = 1$, $a^4 = 1$ donc $a^{-2} = a^2$ et $[a^2, s] = a^2sa^2s = (a^2s)^2$

donc $C_1 = \langle [a^2, s], a^2 s \rangle = \langle a^2 s \rangle \approx \mathbb{Z}_4$

Si $q = 2$, $a^8 = 1$ et $a^4 = (a^2 s) \cdot [a^2, s]^{-1} \cdot (a^2 s) \in C_2$ d'où on tire :

$[a^2, s] = (a^2 s) \cdot a^{-4} (a^2 s)$ et donc $\{a^2 s, a^4\}$ engendre C_2 . D'autre part $\langle a^2 s \rangle$ est distingué dans C_2 parce que $a^4 \cdot a^2 s \cdot a^{-4} = a^6 s a^4 = (a^2 s)^5 \in \langle a^2 s \rangle$

C'est à dire que, comme indiqué dans la proposition, lorsque $q = 2$, C_2 se décompose en produit semi-direct en choisissant différemment les générateurs. Malheureusement, ce n'est plus vrai dès que $q \geq 3$, en effet $\langle a^2 s \rangle$ n'est alors, entre autre, même pas distingué dans C_q . \square

Corollaire D.16. *Explicitons la décomposition de H_{2^q} .*

Si $q = 1$,

$$H_2 = (\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2) *_v \mathbb{Z}_4; \quad v(z) = \begin{pmatrix} x \mapsto x^{-1}y \\ y \mapsto x^2y \end{pmatrix}$$

de présentation :

$$\{x, y, z \mid x^4 = y^2 = z^4 = 1, y \cdot x = x \cdot y, z \cdot x = x^{-1} \cdot y \cdot z, z \cdot y = x^2 \cdot y \cdot z\}.$$

Si $q = 2$,

$$H_4 = ((\mathbb{Z}_8 *_s \mathbb{Z}_2) *_w \mathbb{Z}_2) *_v \mathbb{Z}_4$$

avec

$$s(y) = (x \mapsto x^5), \quad w(z) = \begin{pmatrix} x \mapsto x^5y \\ y \mapsto y \end{pmatrix}, \quad v(t) = \begin{pmatrix} x \mapsto x^{-1}z \\ y \mapsto x^4y \\ z \mapsto x^{-2}yz \end{pmatrix}$$

de présentation

$$\{x, y, z, t \mid x^8 = y^2 = z^2 = t^4 = 1, y \cdot x = x^5 \cdot y, z \cdot x = x^5 \cdot y \cdot z, z \cdot y = y \cdot z, t \cdot x = x^{-1} \cdot z \cdot t, t \cdot y = x^4 \cdot y \cdot t, t \cdot z = x^{-2} \cdot y \cdot z \cdot t\}.$$

Si $q \geq 3$,

$$H_{2^q} = \left(\left(\frac{\mathbb{Z}_{2^q} *_r \mathbb{Z}_{2^{q+1}}}{\langle x^{2^{q-1}} y^{2^q} \rangle} \right) *_w \mathbb{Z}_2 \right) *_v \mathbb{Z}_4$$

avec

$$r(y) = (x \mapsto x^{-1}), \quad w(z) = \begin{pmatrix} x \mapsto x^{-1} \\ y \mapsto x^{-1}y^{-1} \end{pmatrix}, \quad v(t) = \begin{pmatrix} x \mapsto y^{-2} \\ y \mapsto y^{-1}z \\ z \mapsto xz \end{pmatrix}$$

de présentation :

$$\{x, y, z, t \mid x^{2^q} = y^{2^{q+1}} = z^2 = t^4 = 1, y \cdot x = x^{-1} \cdot y, y^{2^q} = x^{2^{q-1}}, z \cdot x = x^{-1} \cdot z \\ z \cdot y = x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot z, t \cdot x = y^{-2} \cdot t, t \cdot y = y^{-1} \cdot z \cdot t, t \cdot z = x \cdot z \cdot t\}.$$

Démonstration. C'est l'application des propositions D.12, D.14 et D.15. \square

D.4 Le groupe dérivé $D(H_m)$

Lemme D.17. Dans H_m les commutateurs entre les puissances des générateurs vérifient : $\forall k \geq 0$

$$\begin{aligned} [a^{2^k}, s] &= [a^2, s]^k && [a^2, s] \text{ d'ordre } m \\ [a^{2^{k+1}}, s] &= (a^2 s)^{2^k} \cdot [a, s] \end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons prouver ce lemme par récurrence sur k .

Vrai de manière évidente pour $k = 0$.

Supposons vrai pour k

$$\begin{aligned} [a^2, s]^{k+1} &= [a^{2^k}, s] \cdot [a^2, s] && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= a^{2^k} s a^{-2^k} s \cdot a^2 s a^{-2} s \\ &= a^{2^k} \cdot a^2 s a^{-2^k} s \cdot s a^{-2} s && \text{formule (D.1)} \\ &= a^{2^{k+2}} s a^{-2^{k-2}} s \\ &= [a^{2^{(k+1)}}, s] \\ (a^2 s)^{2^{(k+1)}} \cdot [a, s] &= (a^2 s)^2 \cdot [a^{2^{k+1}}, s] && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= a^2 s a^2 s \cdot a^{2^{k+1}} s a^{-2^{k-1}} s \\ &= a^2 \cdot a^{2^{k+1}} s a^{-2} s \cdot s a^{-2^{k-1}} s && \text{formule (D.3)} \\ &= a^{2^{k+3}} s a^{-2^{k-3}} s \\ &= [a^{2^{k+3}}, s] \end{aligned}$$

donc par récurrence, les formules sont prouvées.

Pour que $a^{2^k} s a^{-2^k} s = 1$ il faut et il suffit que $2k = 0 \pmod{2m}$, c'est à dire $k = 0 \pmod{m}$ et donc $[a^2, s]$ est d'ordre m . \square

Lemme D.18. Le sous-groupe dérivé de H_m est engendré par $\{[a, s], a^4, a^2 s a^2 s\}$, en particulier $s \notin D(H_m)$ et on a les règles de commutation :

$$\begin{aligned} (a^4) \cdot (a^2 s a^2 s) &= (a^2 s a^2 s) \cdot (a^4) \\ [a, s] \cdot (a^2 s a^2 s) &= (a^2 s a^2 s)^{-1} \cdot [a, s] \\ [a, s] \cdot (a^4) &= (a^4)^{-1} \cdot [a, s] \end{aligned}$$

Démonstration. Le sous-groupe dérivé d'un groupe de type fini est engendré par les commutateurs entre les puissances successives de ses générateurs.

Comme H_m est engendré par $\{a, s\}$ et que $a^{2^m} = s^2 = 1$, $D(H_m)$ est engendré par $\{[a, s], [a^2, s], \dots, [a^{2^{m-1}}, s]\}$. Le lemme D.17 permet de réduire cette liste à $\{[a, s], [a^2, s], (a^2 s a^2 s)\}$. Considérons alors la formule :

$$[a^2, s] = a^2 s a^{-2} s = a^4 \cdot a^{-2} s a^{-2} s = a^4 \cdot (a^2 s a^2 s)^{-1}.$$

Elle permet de choisir la famille génératrice $\{[a, s], a^4, a^2 s a^2 s\}$ comme indiqué dans la proposition.

Reprenons le morphisme $\sigma : H_m \rightarrow \mathbb{Z}_2$ défini dans la Proposition D.2, qui compte (*mod* 2) le nombre de fois où la lettre s apparaît dans l'expression des éléments de H_m . L'image par σ des générateurs de $D(H_m)$ est 0 et donc $D(H_m) \subset \ker \sigma$, or $s \notin \ker \sigma$ donc $s \notin D(H_m)$.

Prouvons maintenant les formules de commutation :

$$\begin{aligned} (a^2 s a^2 s) \cdot (a^4) &= a^2 s a^2 s \cdot a^4 \\ &= a^2 \cdot a^4 s a^2 s && \text{formule (D.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a, s] \cdot (a^2 s a^2 s) &= a s a^{-1} s \cdot a^2 s a^2 s \\ &= a \cdot a^{-2} s a^{-1} s \cdot s a^2 s && \text{formule (D.2)} \\ &= a^{-1} s a s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2 s a^2 s)^{-1} \cdot [a, s] &= a^{-2} s a^{-2} s \cdot a s a^{-1} s \\ &= a^{-2} \cdot a s a^2 s \cdot s a^{-1} s && \text{formule (D.3)} \\ &= a^{-1} s a s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a, s] \cdot (a^4) &= a s a^{-1} s \cdot a^4 \\ &= a \cdot a^{-4} s a^{-1} s && \text{formule (D.2)} \\ &= a^{-3} s a^{-1} s \\ &= (a^4)^{-1} \cdot [a, s] \end{aligned}$$

□

Proposition D.19. *Si m est impair, le sous-groupe dérivé de H_m est :*

$$D(H_m) = (\langle a^4 \rangle \oplus \langle a^2 s a^2 s \rangle) *_r \langle [a, s] \rangle \approx (\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_m) *_r \mathbb{Z}_2$$

où $r : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_m)$ est défini par $\begin{pmatrix} x \mapsto x^{-1} \\ y \mapsto y^{-1} \end{pmatrix}$.

$D(H_m)$ admet la présentation :

$$\{x, y, z \mid x^m = y^m = z^2 = 1, yx = xy, zx = x^{-1}z, zy = y^{-1}z\}$$

et $H_m/D(H_m) \approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

Démonstration. Considérons D le sous-groupe de $D(H_m)$ engendré par $\{a^4, a^2 s a^2 s\}$. Le Lemme D.18 montre que D est commutatif et que $D \triangleleft D(H_m)$.

Ensuite $\langle a^4 \rangle$ et $\langle a^2 s a^2 s \rangle$ sont disjoints parce que les puissances successives de $(a^2 s a^2 s)$ contiennent la lettre s , alors que celles de (a^4) ne la contiennent pas.

Par le Lemme D.4 on sait que $(a^2 s a^2 s)$ est d'ordre m et comme m est impair a^4 est d'ordre $\frac{2m}{\text{pgcd}(2m, 4)} = m$. On en déduit : $D \approx \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_m$.

Enfin $[a, s] \notin D$ car les éléments de D ont tous des puissances paires sur a , alors que dans $[a, s]$ elles sont impaires. Finalement on obtient $D(H_m)$ et r comme indiqués dans la proposition.

Si $\pi : H_m \rightarrow H_m/D(H_m)$, le quotient est engendré par $\{\pi(a), \pi(s)\}$. D'après le Lemme D.18, $s \notin D(H_m)$ donc $\pi(s)$ est d'ordre 2.

m étant impair, $(m+1)/2$ est un entier et $(a^4)^{\frac{m+1}{2}} = a^{2m+2} = a^2 \in D(H_m)$ donc $\pi(a)$ est d'ordre 2. Finalement $\pi(D(H_m)) \approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ \square

Proposition D.20. *Si m est pair, le sous-groupe dérivé de H_m est :*

$$D(H_m) = (\langle a^4 \rangle \oplus \langle a^2 s a^2 s \rangle) *_r \langle [a, s] \rangle \approx (\mathbb{Z}_{m/2} \oplus \mathbb{Z}_m) *_r \mathbb{Z}_2$$

où $r : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_{m/2} \oplus \mathbb{Z}_m)$ est défini par $\begin{pmatrix} x \mapsto x^{-1} \\ y \mapsto y^{-1} \end{pmatrix}$

$D(H_m)$ admet la présentation :

$$\{x, y, z \mid x^{m/2} = y^m = z^2 = 1, yx = xy, zx = x^{-1}z, zy = y^{-1}z\}$$

et $H_m/D(H_m) \approx \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$

Démonstration. La même démonstration que pour la Proposition D.19 montre que D , engendré par $\{a^4, a^2 s a^2 s\}$ est commutatif et distingué dans H_m , que $\langle a^4 \rangle$ et $\langle a^2 s a^2 s \rangle$ sont disjoints, et que D est disjoint de $\langle [a, s] \rangle$.

La différence avec la Proposition D.19 arrive parce que, m étant pair, a^4 est d'ordre $2m/4 = m/2$. Et donc

$$D = (\langle a^4 \rangle \oplus \langle a^2 s a^2 s \rangle) *_r \langle [a, s] \rangle \approx (\mathbb{Z}_{m/2} \oplus \mathbb{Z}_m) *_r \mathbb{Z}_2$$

où r est comme indiqué dans la proposition.

Soit maintenant $\pi : H_m \rightarrow H_m/D(H_m)$, le quotient est engendré par $\{\pi(a), \pi(s)\}$. Comme $s \notin D(H_m)$, $\pi(s)$ est d'ordre 2, comme $a^4 \in D(H_m)$, $\pi(a^4) = 1$ mais $a^2 \notin D(H_m)$ donc $\pi(a)$ est d'ordre 4. $H_m/D(H_m) \approx \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$. \square

D.5 Le centre $Z(H_m)$

Pour l'étude du centre nous aurons besoin de définir la famille des groupes H'_m , $m \geq 2$:

$$\forall m \text{ pair, } H'_m = \{a, s \mid a^{2m} = s^2 = (as)^4 = [a, s]^2 = (a^m s)^2 = 1\}$$

obtenue à partir de la présentation de H_m en ajoutant la relation $(a^m s)^2 = 1$.

Proposition D.21. *Si m est pair, on a*

$$\langle a^m s a^m s \rangle \subset Z(H_m), \quad \frac{H_m}{\langle a^m s a^m s \rangle} \approx H'_m.$$

L'ordre de H'_m est $4m^2$.

Démonstration. Montrons que $a^m s a^m s$ commute avec les générateurs de H_m :

$$\begin{aligned} (a^m s a^m s) \cdot a &= a^m s a^m s a \\ &= a^m \cdot a s a^{-m} s && \text{formule (D.3) } m \text{ étant pair} \\ &= a \cdot (a^m s a^m s) && \text{car } a^{-m} = a^m \\ s \cdot (a^m s a^m s) &= (a^m s a^m s) \cdot s && \text{formule (D.1)} \end{aligned}$$

et donc $\langle a^m s a^m s \rangle \subset Z(H_m)$ en particulier $\langle a^m s a^m s \rangle \triangleleft H_m$. Par définition de H'_m , on ajoute aux relations de H_m la relation $(a^m s)^2 = 1$, donc H'_m est bien le quotient $H_m / \langle a^m s a^m s \rangle$. Enfin $a^m s a^m s$ étant d'ordre 2 dans H_m , l'ordre de H'_m est $8m^2/2 = 4m^2$. \square

Proposition D.22. *Le Centre de H_m , $m \geq 1$, vérifie :*

$$Z(H_m) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } m \text{ est impair } \neq 1, \\ \langle a^m s a^m s \rangle \approx \mathbb{Z}_2 & \text{si } m = 1 \text{ ou est pair.} \end{cases}$$

Démonstration. $\forall z \in Z(H_m)$, z est de l'une des formes : $a^i s a^j$, $a^i s a^{2j+1}$, $a^i s a^{2j}$.

Si z est de la forme $z = a^i s a^j$, $a \cdot z = a^{i+1} s a^j = z \cdot a = a^i s a^{j+1}$

D'après l'unicité de la décomposition des éléments dans H_m , $i = i + 1 \pmod{2m}$. Ce qui est impossible, un des membres de l'équation est pair et l'autre pas.

Si z est de la forme $z = a^i s a^{2j+1} s$,

$$\begin{aligned} z \cdot a &= a^i s a^{2j+1} s \cdot a \\ &= a^i \cdot a^{-1} s a^{-2j-1} s \quad \text{formule (D.4)} \\ &= a^{i-1} s a^{-2j-1} s \\ a \cdot z &= a^{i+1} s a^{2j+1} s \end{aligned}$$

d'où on tire : $i + 1 = i - 1 \pmod{2m}$ c'est à dire $2 = 0 \pmod{2m}$ impossible, sauf si $m = 1$ et dans ce cas $H_1 \approx D_4$ dont le centre est $\langle a s a s \rangle \approx \mathbb{Z}_2$

Si z est de la forme $z = a^i s a^{2j} s$,

$$\begin{aligned} z \cdot a &= a^i s a^{2j} s \cdot a \\ &= a^i \cdot a s a^{-2j} s \quad \text{formule (D.3)} \\ &= a^{i+1} s a^{-2j} s \\ a \cdot z &= a^{i+1} s a^{2j} s \end{aligned}$$

d'où on tire : $2j = -2j \pmod{2m}$ c'est à dire $4j = 0 \pmod{2m}$ qui n'a de solution non triviale que si m est pair.

Si m est impair, $j = 0$, $z = a^i$ et donc $z \cdot s = a^i s = s \cdot z = s a^i$ qui n'a qu'une solution $i = 0$ et alors $z = 1$.

Si m est pair, $2j = m$ et $z = a^i s a^m s$. Discutons alors selon la parité de la puissance du premier a dans z :

Si $z = a^{2i+1} s a^m s$

$$\begin{aligned} s \cdot z &= s a^{2i+1} s a^m s \\ &= a^{-m} s a^{2i+1} s \cdot s \quad \text{formule (D.2)} \quad m \text{ est pair} \\ &= a^{-m} s a^{2i+1} \\ z \cdot s &= a^{2i+1} s a^m \end{aligned}$$

d'où on tire $2i + 1 = -m \pmod{2m}$ ce qui est impossible, la partie gauche de l'égalité est impaire alors que la droite est paire.

Si $z = a^{2i} s a^m s$

$$\begin{aligned} s \cdot z &= s a^{2i} s a^m s \\ &= a^m s a^{2i} s \cdot s \quad \text{formule (D.1)} \\ &= a^m s a^{2i} \\ z \cdot s &= a^{2i} s a^m \end{aligned}$$

d'où on tire $2i = m \pmod{2m}$ et $z = a^m s a^m s$ d'ordre 2. Si m est pair $Z(H_m) \subset \langle a^m s a^m s \rangle$. Réciproquement la Proposition D.21 a montré que si m est pair ≥ 2 , $a^m s a^m s$ est dans le centre $Z(H_m)$. \square

D.6 Une autre décomposition des groupes H_m

Une autre décomposition des H_m qui emploie les groupes diédraux est possible. Les cas m pair et m impair donnent lieu à des décompositions semblables :

Proposition D.23. *Si m est impair on a*

$$H_m \approx (\mathbb{D}_m \times \mathbb{D}_m) *_v \mathbb{Z}_2 \quad (\text{D.10})$$

Si m est pair, $-I \in \mathbb{D}_m$, et on a

$$H_m \approx \frac{\mathbb{D}_m \times \mathbb{D}_m}{\mathbb{Z}_2} *_w \mathbb{Z}_4, \quad (\text{D.11})$$

où $\mathbb{Z}_2 \approx \langle (-I, -I) \rangle$.

Démonstration. Supposons d'abord m impair. D'après la Proposition D.9 et le Corollaire D.10, comme m est impair, $q = 0$ et on a la décomposition :

$$H_m = (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m) *_u \mathbb{D}_4$$

qu'on exprime avec les éléments de H_m :

$$H_m = (\langle a^2 \rangle \times \langle s a^2 s \rangle) *_u \langle a^m, s \rangle$$

avec

$$u(a^m) = \begin{pmatrix} a^2 \mapsto a^2 \\ s a^2 s \mapsto s a^{-2} s \end{pmatrix}, \quad u(s) = \begin{pmatrix} a^2 \mapsto s a^2 s \\ s a^2 s \mapsto a^2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne la présentation suivante de H_m (m impair)

$$\langle x, y, z, t \mid x^m = y^m = z^2 = t^2 = 1, [x, y] = [x, z] = 1, zy = y^{-1}z, (zt)^4 = [z, t]^2 = 1, tx = yt, ty = xt \rangle.$$

Posons $p = tzt = \Phi_t(z)$, donc p a même ordre que z : $p^2 = 1$. Regardons les commutations de p avec les autres générateurs (cf. (D.4)) :

$$\begin{aligned} px &= tzt x = tzyt = ty^{-1}zt = x^{-1}tzt = x^{-1}p \\ py &= tzt y = tzt y = tzt y = tzt y = yp \\ pz &= tzt z = ztzt = zp. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\langle x, p \rangle = \langle x, p \mid x^m = p^2 = 1, px = x^{-1}p \rangle$$

isomorphe à \mathbb{D}_m ;

$$\langle y, z \rangle = \langle y, z \mid y^m = z^2 = 1, zy = y^{-1}z \rangle$$

isomorphe à \mathbb{D}_m et $\langle x, p \rangle$ commute avec $\langle y, z \rangle$.

Il reste à montrer que $\langle x, p \rangle$ et $\langle y, z \rangle$ sont disjoints, en tant que sous groupes de H_m . Or les éléments de $\langle x, p \rangle$ s'écrivent de manière unique dans H_m sous la forme :

x^i ou bien $x^i \cdot p = x^i \cdot tzt$, $0 \leq i < m$.

Les éléments de $\langle y, z \rangle$ s'écrivent de manière unique dans H_m

y^j ou bien $y^j \cdot z$, $0 <= j < m$.

Ils n'ont donc aucun élément en commun sauf $1 = x^0 = y^0$.

Donc H_m admet le sous-groupe $\langle x, p \rangle \times \langle y, z \rangle$ isomorphe à $\mathbb{D}_m \times \mathbb{D}_m$ et contient $4 \times m^2$ éléments, est d'indice 2 dans H_m , donc distingué dans H_m (un sous-groupe d'indice le plus petit entier premier divisant l'ordre du groupe est distingué).

Le même argument que ci-dessus montre que t n'appartient pas à $\langle x, p \rangle \times \langle y, z \rangle$ car sinon cela ajouterait une relation dans la présentation de H_m . Donc

$$H_m = (\mathbb{D}_m \times \mathbb{D}_m) *_v \mathbb{Z}_2 = (\langle x, p \rangle \times \langle y, z \rangle) *_v \langle t \rangle$$

avec

$$v(t) = \begin{pmatrix} x \mapsto y \\ p \mapsto t \\ y \mapsto x \\ z \mapsto t \end{pmatrix}.$$

c'est à dire que l'action de t consiste à permuter les facteurs directs $\langle x, p \rangle$ et $\langle y, z \rangle$ par $x \longleftrightarrow y$ et $p \longleftrightarrow t$.

Si on reprends la présentation de H_m initiale avec les lettres a et s , on a l'isomorphisme :

$$\phi(x) = a^2 \tag{D.12}$$

$$\phi(p) = sa^m s \tag{D.13}$$

$$\phi(y) = sa^2 s \tag{D.14}$$

$$\phi(z) = a^m \tag{D.15}$$

$$\phi(t) = s \tag{D.16}$$

d'où

$$H_m = (\langle a^2, sa^m s \rangle \times \langle a^m, sa^2 s \rangle) *_v \langle s \rangle.$$

Remarquons qu'il existe aussi un autre isomorphisme :

$$\psi(x) = a^2 s a^2 s \quad (\text{D.17})$$

$$\psi(p) = a^{-1} s a \quad (\text{D.18})$$

$$\psi(y) = a^{-2} s a^2 s \quad (\text{D.19})$$

$$\psi(z) = s \quad (\text{D.20})$$

$$\psi(t) = s a^m s \quad (\text{D.21})$$

et donc

$$H_m = \langle (a^2 s)^2, a^{-1} s a \rangle \times \langle [a^{-2}, s], s \rangle *_v \langle s a^m s \rangle.$$

Supposons maintenant m pair. On vérifie, comme dans le cas m impair, que $\langle (a^2 s)^2, a^{-1} s a \rangle$ et $\langle [a^{-2}, s], s \rangle$ sont des sous-groupes isomorphes à \mathbb{D}_m et qu'ils commutent entre eux. À la différence du cas impair les deux sous-groupes ne sont pas disjoints :

$$\langle (a^2 s)^2, a^{-1} s a \rangle \cap \langle [a^{-2}, s], s \rangle = \langle (a^m s)^2 \rangle \approx \mathbb{Z}_2.$$

Le sous-groupe $\langle (a^m s)^2 \rangle$ est le centre de H_m (cf. Proposition D.22) donc il est isomorphe au sous-groupe $\langle -Id \rangle$ centre de \mathbb{D}_m . On a

$$L = \langle (a^2 s)^2, a^{-1} s a, [a^{-2}, s], s \rangle \approx \frac{\mathbb{D}_m \times \mathbb{D}_m}{\mathbb{Z}_2}$$

où $\mathbb{Z}_2 \approx \langle (-I, -I) \rangle$ et $L \triangleleft G$.

Il nous reste à trouver un sous-groupe W d'ordre 4 = $|H_m|/|L|$ tel que $H_m/L \approx W$. On montre que $\langle as \rangle \approx \mathbb{Z}_4$ fait l'affaire. Considérons le morphisme

$$\mathcal{T} : G_n \longrightarrow \mathbb{Z}_4; \quad \mathcal{T}(a) = 1, \quad \mathcal{T}(s) = 1.$$

\mathcal{T} envoie les générateurs de L en 0 (mod 4) mais pas (as) et $(as)^2$ donc L est dans le noyau de \mathcal{T} . L et $\langle as \rangle$ sont disjoints et $H_m \approx L *_w \langle as \rangle$ avec

$$w(as) = \begin{pmatrix} (a^2 s)^2 \mapsto [a^{-2}, s]^{-1} \\ a^{-1} s a \mapsto s \\ [a^{-2}, s] \mapsto (a^2 s)^2 \\ s \mapsto (a^2 s)^2 \cdot a^{-1} s a \end{pmatrix}.$$

$$as \cdot a^2 s a^2 s \cdot (as)^{-1} = asa^2 s \cdot a = sa^{-2} s a \cdot a = [a^{-2}, s]^{-1} \text{ (formule D.3);}$$

$$as \cdot a^{-1} s a \cdot (as)^{-1} = s;$$

$$as \cdot [a^{-2}, s] \cdot (as)^{-1} = a \cdot sa^{-2} s a \cdot as \cdot (as)^{-1} = a^2 s a^2 s = (a^2 s)^2 \text{ (formule D.3);}$$

$$as \cdot s \cdot (as)^{-1} = asa^{-1} = a^2 \cdot a^{-1} s a^{-1} = a^2 \cdot a^{-1} s a^{-1} s \cdot s = a^2 s \cdot a^2 s \cdot asas = (a^2 s) \cdot a \cdot sasa^{-1} \cdot a = (a^2 s) \cdot a \cdot asa^{-1} s \cdot a = (a^2 s)^2 \cdot a^{-1} s a \text{ (formule D.4).}$$

□

D.7 Les sous-groupes distingués dans H_m

La démonstration de la Proposition D.8 peut s'appliquer pratiquement tel quel pour tout entier h diviseur de m .

Proposition D.24. *Soit h un diviseur de m et K_h le sous-groupe de H_m engendré par $\{a^{2m/h}, sa^{2m/h}s\}$ alors :*

$$K_h \approx \mathbb{Z}_h \oplus \mathbb{Z}_h, \quad K_h \triangleleft H_m, \quad H_m/K_h \approx H_{m/h}.$$

On a la suite exacte :

$$1 \rightarrow K_h \hookrightarrow H_m \xrightarrow{\rho} H_{m/h} \rightarrow 1.$$

Démonstration. Remarquons que $2m/h$ est pair puisque h est un diviseur de m , ainsi que $sa^{2m/h}s = \Phi_s(a^{2m/h})$ et $a^{2m/h}$ ont le même ordre h , ils engendrent des sous-groupes cycliques isomorphes à \mathbb{Z}_h .

D'après la formule (D.1) : $(sa^{2m/h}s) \cdot a^{2m/h} = a^{2m/h} \cdot (sa^{2m/h}s)$ ce qui montre que $a^{2m/h}$ commute avec $sa^{2m/h}s$.

Comme les puissances successives de $a^{2m/h}$ ne contiennent pas la lettre s , alors que celles de $sa^{2m/h}s$ la contiennent, on a $\langle a^{2m/h} \rangle \cap \langle sa^{2m/h}s \rangle = \{1\}$ et donc $K_h \approx \mathbb{Z}_h \oplus \mathbb{Z}_h$ qui est donc d'ordre h^2 .

Montrons maintenant que K_h est distingué dans H_m :

$$\begin{aligned} a \cdot (a^{2m/h}) \cdot a^{-1} &= a^{2m/h} && \in K_h \\ s \cdot (a^{2m/h}) \cdot s &= sa^{2m/h}s && \in K_h \\ a \cdot (sa^{2m/h}s) \cdot a^{-1} &= sa^{-2m/h}s && \text{formule (D.3)} \\ &= (sa^{2m/h}s)^{-1} && \in K_h \\ s \cdot (sa^{2m/h}s) \cdot s &= a^{2m/h} && \in K_h \end{aligned}$$

et donc $K_h \triangleleft H_m$. Soit $\rho : H_m \rightarrow H_m/K_h$ canonique, H_m/K_h est engendré par $\{\rho(a), \rho(s)\}$. Puisque $a^{2m/h} \in K_h$, $\rho(a)^{2m/h} = \rho(a^{2m/h}) = 1$, les autres relations de H_m sont transportées sans changement par ρ dans le quotient. En posant $\bar{a} = \rho(a)$ et $\bar{s} = \rho(s)$ le quotient admet alors la présentation :

$$\{\bar{a}, \bar{s} \mid \bar{a}^{2m/h} = \bar{s}^2 = (\bar{a}\bar{s})^4 = [\bar{a}, \bar{s}]^2 = 1\} \approx H_{m/h}$$

ce qui montre que $H_m/K_h \approx H_{m/h}$, d'où la suite exacte comme indiquée dans la proposition. \square

Proposition D.25. *Si h divise k qui divise m alors :*

$$\begin{aligned} K_h &\triangleleft K_k, \\ K_k/K_h &\approx \mathbb{Z}_{k/h} \oplus \mathbb{Z}_{k/h} \text{ et} \\ K_k/K_h &= K_{k/h} \text{ dans le quotient } H_{m/h}. \end{aligned}$$

Démonstration. Puisque h divise k qui divise m , $a^{2m/h} = (a^{2m/k})^{k/h}$ et le morphisme :

$$\left(\begin{array}{cc} a^{2m/h} & \mapsto & (a^{2m/k})^{k/h} \\ sa^{2m/h}s & \mapsto & (sa^{2m/k}s)^{k/h} \end{array} \right)$$

est l'injection canonique $K_h \hookrightarrow K_k$, c'est à dire $K_h \subset K_k$. Comme $K_h \triangleleft H_m$ on a $K_h \triangleleft K_k$. $\rho(K_k)$ est engendré par :

$$\left\{ \rho(a^{2m/k}), \rho(sa^{2m/k}s) \right\}$$

Comme $a^{2m/h} = (a^{2m/k})^{k/h}$, $\rho(a^{2m/k})$ et $\rho(sa^{2m/k}s)$ sont tout deux d'ordre k/h . Enfin $\langle a^{2m/k} \rangle \cap \langle sa^{2m/k}s \rangle = \{1\}$ indique qu'il en est de même pour leur image par ρ et donc :

$$\rho(K_k) = \langle \rho(a^{2m/k}) \rangle \oplus \langle \rho(s)\rho(a^{2m/k})\rho(s) \rangle \approx \mathbb{Z}_{(k/h)} \oplus \mathbb{Z}_{(k/h)}$$

Cela montre aussi que $K_k/K_h = \rho(K_k) = K_{k/h}$ dans $H_{m/h}$. \square

Nous avons ainsi montré que pour chaque h diviseur de m , les groupes K_h , d'ordre h^2 sont tous distingués dans H_m . Nous avons aussi montré que le quotient H_m/K_h est $H_{m/h}$ groupe de la famille H_m , et que dans le passage au quotient, les sous-groupes K_h s'envoient par ρ dans les groupes $K_{m/h}$ du quotient. Lorsque m/h est pair, nous allons aussi exhiber des sous-groupes distingués d'ordre $2h^2$.

Proposition D.26. *Soit h un diviseur de m tel que m/h soit pair, et K'_h le sous-groupe de H_m engendré par $\{a^{2m/h}, a^{m/h}sa^{m/h}s\}$, $h \neq m$ alors :*

$$K'_h \approx \mathbb{Z}_h \oplus \mathbb{Z}_{2h}, \text{ l'ordre de } K'_h \text{ est } 2h^2.$$

$$K'_h \triangleleft H_m \text{ et } H_m/K'_h \approx H'_{m/h}.$$

$$K_h \triangleleft K'_h \text{ et } K'_h/K_h \approx \mathbb{Z}_2.$$

Démonstration. D'après la Proposition D.6, l'ordre de $a^{m/h}sa^{m/h}s$ est $\frac{2m}{\text{pgcd}(m, m/h)} = 2h$. Il engendre un sous-groupe cyclique isomorphe à \mathbb{Z}_{2h} , et nous avons déjà vu que $\langle a^{2m/h} \rangle \approx \mathbb{Z}_h$. Puisque m/h est pair, les puissances successives de $a^{m/h}sa^{m/h}s$ contiennent la lettre s , alors que celles de $a^{2m/h}$ ne la contiennent pas. Les deux sous-groupes cycliques sont donc disjoints. D'autre part :

$$\begin{aligned} (a^{m/h}sa^{m/h}s) \cdot (a^{2m/h}) &= a^{m/h} \cdot a^{2m/h}sa^{m/h}s && \text{formule (D.1)} \\ &= (a^{2m/h}) \cdot (a^{m/h}sa^{m/h}s) \end{aligned}$$

montre que les générateurs de K'_h commutent entre eux.

Finalement si m/h est pair, $K'_h \approx \mathbb{Z}_h \oplus \mathbb{Z}_{2h}$ qui est donc d'ordre $2h^2$.

Montrons maintenant que K'_h est distingué dans H_m .

$$\begin{aligned} a \cdot (a^{m/h}sa^{m/h}s) \cdot a^{-1} &= a^{m/h+1} \cdot a^{-1}sa^{-m/h}s && \text{formule (D.3)} \\ &= a^{2m/h} \cdot a^{-m/h}sa^{-m/h}s \\ &= (a^{2m/h}) \cdot (a^{m/h}sa^{m/h}s)^{-1} && \in K'_h \\ s \cdot (a^{m/h}sa^{m/h}s) \cdot s &= a^{m/h}sa^{m/h}s && \in K'_h, \text{ formule (D.1)} \\ a \cdot (a^{2m/h}) \cdot a^{-1} &= a^{2m/h} && \in K'_h \\ s \cdot (a^{2m/h}) \cdot s &= a^{-2m/h} \cdot a^{2m/h}sa^{2m/h}s \\ &= (a^{2m/h})^{-1} \cdot (a^{m/h}sa^{m/h}s)^2 && \in K'_h \end{aligned}$$

On a bien $K'_h \triangleleft H_m$. Soit $\rho' : H_m \rightarrow H_m/K'_h$ canonique, H_m/K'_h est engendré par $\{\rho'(a), \rho'(s)\}$. Comme $a^{2m/h} \in K'_h$, $\rho'(a)$ est d'ordre $2m/h$, les relations de H_m sont transportées dans le

quotient, et comme $(a^{m/h}s)^2 \in K'_h$, on obtient la relation supplémentaire : $(\rho'(a)^{m/h}\rho'(s))^2 = 1$. En posant $\bar{a} = \rho'(a)$ et $\bar{s} = \rho'(s)$, le quotient admet la présentation :

$$H_m/K'_h = \{\bar{a}, \bar{s} \mid \bar{a}^{2m/h} = \bar{s}^2 = (\bar{a}\bar{s})^4 = [\bar{a}, \bar{s}] = (\bar{a}^{m/h}\bar{s})^2 = 1\} \approx H'_{m/h}.$$

La relation :

$$sa^{2m/h}s = (a^{2m/h})^{-1} \cdot (a^{m/h}sa^{m/h}s)^2$$

montre que $K_h \subset K'_h$. Comme K'_h est commutatif, $K_h \triangleleft K'_h$, et la relation ci-dessus transportée dans le quotient K'_h/K_h montre que celui-ci est d'ordre 2, donc isomorphe à \mathbb{Z}_2 . \square

Proposition D.27. *Si h divise k qui divise m alors :*

$$\begin{aligned} K'_h &\triangleleft K'_k, \\ K'_k/K'_h &\approx \mathbb{Z}_{(k/h)} \oplus \mathbb{Z}_{(k/h)}. \end{aligned}$$

Si en plus k/h est pair :

$$K'_k/K_h = K'_{k/h} \text{ dans } H_{m/h}.$$

Démonstration. Si h divise k , comme m/k est pair il en est de même de m/h , K'_h est bien défini. $a^{2m/h} = (a^{2m/k})^{k/h}$, $a^{m/h}sa^{m/h}s = (a^{m/k}sa^{m/k}s)^{k/h}$ et donc le morphisme :

$$\left(\begin{array}{cc} a^{\frac{2m}{h}} & \mapsto & (a^{\frac{2m}{k}})^{\frac{k}{h}} \\ a^{\frac{m}{h}}sa^{\frac{m}{h}}s & \mapsto & (a^{\frac{m}{k}}sa^{\frac{m}{k}}s)^{\frac{k}{h}} \end{array} \right)$$

est l'injection canonique $K'_h \hookrightarrow K'_k$, c'est à dire $K'_h \subset K'_k$. Comme $K'_h \triangleleft H_m$ on a $K'_h \triangleleft K'_k$. $\rho'(K'_k)$ est engendré par :

$$\left\{ \rho'(a^{\frac{2m}{k}}), \rho'(a^{\frac{m}{k}}sa^{\frac{m}{k}}s) \right\}.$$

Là encore $a^{m/h}sa^{m/h}s = (a^{m/k}sa^{m/k}s)^{k/h}$ et $a^{2m/h} = (a^{2m/k})^{k/h}$, montre que $\rho'(a^{\frac{m}{k}}sa^{\frac{m}{k}}s)$ et $\rho'(a^{\frac{2m}{k}})$ sont tout deux d'ordre k/h . Enfin $\langle a^{2m/k} \rangle \cap \langle a^{m/k}sa^{m/k}s \rangle = \{1\}$ indique qu'il en est de même pour leur image par ρ' et donc :

$$\rho'(K'_k) = \langle \rho'(a^{\frac{2m}{k}}) \rangle \oplus \langle \rho'(a^{\frac{m}{k}})\rho'(s)\rho'(a^{\frac{m}{k}})\rho'(s) \rangle \approx \mathbb{Z}_{(k/h)} \oplus \mathbb{Z}_{(k/h)}.$$

Reprenons la projection canonique $\rho : H_m \rightarrow H_{m/h}$. Comme maintenant k/h est pair, le sous-groupe $K'_{k/h}$ est défini dans $H_{m/h}$. Considérons $\rho(K'_k)$ engendré par :

$$\left\{ \rho(a^{\frac{2m}{k}}), \rho(a^{\frac{m}{k}}sa^{\frac{m}{k}}s) \right\}$$

En posant encore $\bar{a} = \rho(a)$ et $\bar{s} = \rho(s)$, \bar{a} est d'ordre k/h pair, et

$$\bar{s}^{2k/h} = \rho(a^{\frac{m}{k}}sa^{\frac{m}{k}}s)^{\frac{2k}{h}} = \bar{a}^{\frac{2m}{h}}\bar{s}\bar{a}^{\frac{2m}{h}}\bar{s} = (\bar{a}^{\frac{2m}{h}}) \cdot (\bar{s}\bar{a}^{\frac{2m}{h}}\bar{s}) = 1$$

donc \bar{s} est d'ordre $2k/h$ d'où on tire $\rho(K'_k) \approx \mathbb{Z}_{(k/h)} \oplus \mathbb{Z}_{(2k/h)}$ et $\rho(K'_k)$ est $K'_{k/h}$ dans le quotient $H_{m/h}$. \square

Avec les Propositions D.24 et D.25, nous avons montré que au cours du quotientage de H_m par K_h , les sous-groupes de type K_h dans H_m s'envoient dans des sous-groupes de même type K_h dans le quotient $H_{m/h}$. Avec les Propositions D.26 et D.27, moyennant des conditions de parité sur les indices, nous avons prouvé la même chose avec les sous-groupes de type K'_h .

Bibliographie

- [1] D. Armbruster, J. Guckenheimer & P. Holmes. Heteroclinic cycles and modulated waves in systems with $O(2)$ symmetry. *Physica D*, 29, 257-282, 1988.
- [2] P. Ashwin, J. Montaldi. Conditions for existence of robust relative homoclinic trajectories. To appear in *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 2002.
- [3] I. Bosch-Vivancos, P. Chossat & I. Melbourne. New planform of systems of partial differential equations with Euclidian symmetry. *Arch. Rat. Anal.*, 131(3), 199-224, 1995.
- [4] F. H. Busse, K. E. Heikes, Convection in a rotating layer, *Science* 208, (1980), 173-175.
- [5] P. Chossat. Forced reflectional symmetry breaking of an $O(2)$ -symmetric homoclinic cycle. *Nonlinearity*, 6, 723-731, 1993.
- [6] P. Chossat, M. Krupa, I. Melbourne, A. Scheel. Transverse bifurcation of homoclinic cycles. *Physica D* 100, 1997, 85–100.
- [7] P. Chossat, R. Lauterbach. Methods in equivariant bifurcation and dynamical systems. *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*, 15. *World Scientific*. 2000.
- [8] G. L. Dos Reis. Structural stability of equivariant vector fields on two manifolds. *Trans. Am. Math. Soc.*, 283(2), 633-643, 1984.
- [9] P. Du Val. Homographies quaternions and rotations. *Oxford University Press*, 1964.
- [10] M. Field. Lectures on bifurcation, dynamics and symmetry, *Pitman Research Notes in Mathematics Series 336*. Longman, 1996.
- [11] M. Field & J. W. Swift. Stationary bifurcation to limit cycles and heteroclinic cycles. *Nonlinearity*, 4, 1001-1043, 1991.
- [12] K. Gatermann, F. Guyard. The symmetry package in Maple V.3 Version 2.0. Available by www by address <http://www.zib.de/gatermann/symmetry.html>.
- [13] J. Guckenheimer, P. Holmes. Structurally stable heteroclinic cycles, *Math. Proc. Camb. Soc.*, 103, 189–192, 1988.
- [14] N. Jacobson. Basic Algebra I. *Freeman and Company* 1985.
- [15] M. Krupa. Robust heteroclinic cycles. *J. Nonl. Sc.*, 7, 129–176, 1997.
- [16] M. Krupa, I. Melbourne. Asymptotic stability of heteroclinic cycles in systems with symmetry. *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 15(1), 121–147, 1995.
- [17] R. M. May, W. Leonard, Nonlinear aspects of competition between three species, *SIAM J. Appl. Math.* 29, (1975), 243-252.
- [18] I. Melbourne, P. Chossat & M. Golubitsky. Heteroclinic cycles involving periodic solutions in mode iterations with $O(2)$ symmetry. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 113(5), 315-345, 1989.

- [19] G. Myerson. Rational products of sines of rational angles. *Aeq. Math.*, 45, 70–82, 1993.
- [20] M. Nagata. Field theory. *Marcel Dekker Inc.* 1977.
- [21] M. Newman. Some results on roots of unity, with an application to a diophantine problem. *Aeq. Math.*, 2, 163–166, 1969.
- [22] M. Newman. A diophantine equation. *J. London Math. Soc.* 43 (1968), 105–107. MR 37, 150.
- [23] Proceedings of the Conference on Number Theory, *Boulder*, Colorado. 1963, pp. 98.
- [24] N. Sottocornola. Sur la classification des cycles homoclines. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I, 332, 695–698, 2001.
- [25] N. Sottocornola. Robust homoclinic cycles in \mathbb{R}^4 . Soumis à *Nonlinearity*.
- [26] N. Sottocornola. Complete classification of homoclinic cycles in \mathbb{R}^4 in the case of a symmetry group $G \subset SO(4)$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I, 334, 859–864, 2002.
- [27] P. Tauvel. Mathématiques générale pour l’agrégation. *Masson*, 1995.