



**HAL**  
open science

# Quelques résultats sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles faisant intervenir l'opérateur $p$ -Laplacien.

Karim Chaib

► **To cite this version:**

Karim Chaib. Quelques résultats sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles faisant intervenir l'opérateur  $p$ -Laplacien.. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2002. Français. NNT: . tel-00001828

**HAL Id: tel-00001828**

**<https://theses.hal.science/tel-00001828>**

Submitted on 17 Oct 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quelques résultats sur les systèmes  
d'équations aux dérivées partielles  
faisant intervenir l'opérateur  
 $p$ -Laplacien



# Remerciements

Tout ce travail n'aurait pas pu être réalisé sans les conseils et l'aide précieuse de F. de Thélin. Il m'a initié à l'univers du  $p$ -Laplacien et m'a donné goût à la recherche. Sa compétence dans le domaine n'eut d'égal que sa gentillesse et sa disponibilité. Jamais, je ne pourrais oublier tout le temps passé en son agréable compagnie.

Je voudrais remercier aussi J.-P. Gossez et J. Hernández qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse mais aussi d'avoir bien voulu venir jusqu'à Toulouse pour faire partie du jury de soutenance.

Je tiens à remercier vivement J. Fleckinger, I. Schindler et J.M. Roquejoffre qui ont aussi accepté de participer au jury de cette thèse. Et plus particulièrement J. Fleckinger pour son soutien lors des moments difficiles ; grâce à son énergie et son dévouement j'ai pu rencontrer au laboratoire Ceremath de nombreux chercheurs travaillant dans mon domaine.

Ces remerciements s'adressent aussi à tous mes collègues jeunes chercheurs aussi bien du Ceremath que du Mip avec lesquels j'ai partagé ces années. Ce serait trop long de les citer nommément mais je suis sûr qu'ils se reconnaîtront. N'est-ce pas ? Fouzia, Naziha, Jihène, Nabil, Renaud, Pierre, Sophie, Guillaume, Matthias, Nasredine, Olivier, Samuel, Claudia, Marion, Hélène, Sandrine, Pascal, Abdelhak, Mounir...

Enfin, je n'oublie pas mes parents qui m'ont toujours encouragé dans ce que je faisais et mes amis qui sont restés très proches. Mais aussi, mon épouse, Catherine, qui a partagé un moment ma passion pour les mathématiques et qui supporte maintenant avec indulgence ce travers. Ma petite fille, Maurine, ne m'a pas encore fait de reproches mais j'attends son avis avec impatience...

A mon grand-père et à ma fille.



# Introduction

L'objet de ce travail a été l'étude d'équations aux dérivées partielles faisant intervenir l'opérateur  $p$ -Laplacien défini par

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad \text{avec } p > 1.$$

Cet opérateur sous forme divergence est elliptique dégénéré lorsque  $p \neq 2$  et est équivalent à l'opérateur Laplacien  $\Delta$  usuel lorsque  $p = 2$ .

Il apparaît aussi bien en mathématiques fondamentales, par exemple dans les problèmes de courbure, qu'en mathématiques appliquées. En effet, il intervient dans de nombreux domaines en sciences expérimentales : problèmes de réaction-diffusion non linéaires, dynamique des populations, écoulements de fluides non-newtoniens, etc. En particulier, dans sa thèse de doctorat en 1975 [35], M.C. Pélissier modélise l'écoulement des glaciers de montagne par des équations aux dérivées partielles faisant apparaître le  $p$ -Laplacien. Elle explique sa présence par le fait que la glace peut-être considérée comme un fluide pseudo-plastique et satisfait une loi de déformation non linéaire.

La littérature sur l'étude théorique de telles équations est très vaste à l'heure actuelle, elle a réellement commencé il y a une vingtaine d'années. M. Otani [33] en dimension un puis F. de Thélin [39] en dimension  $N$  ont obtenu en 1984 les premiers résultats sur une équation de la forme  $-\Delta_p u = \lambda u^{\gamma-1}$ . Indépendamment, F. de Thélin [39] et W.M. Ni J. Serrin [32] ont prouvé l'unicité de la solution pour des solutions radiales dans  $\mathbb{R}^N$  et M. Otani [34] l'a généralisé à des ouverts quelconques. En 1987, F. de Thélin [40] a étendu ces résultats pour l'équation  $\Delta_p u = g(x, u)$  où  $g$  peut être contrôlée par des fonctions polynômiales. Citons aussi, parmi les précurseurs, G. Barles [4], S. Sakaguchi [36] et A. Anane [2] qui obtiennent des résultats d'unicité pour des problèmes aux valeurs propres de la forme

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u \quad \text{dans } \Omega \text{ (domaine borné).}$$

Par ailleurs, P. Lindqvist [30] a établi en 1990 différents résultats sur ce type d'équation qui font suite à l'article de A. Anane [2]. D'autres théorèmes d'unicité ont été énoncés par J.I. Díaz et J.E. Saa dès 1987 pour une équation du type  $-\Delta_p u = f(x, u)$  sous la condition  $r \mapsto \frac{f(x,r)}{r^{p-1}}$  est décroissante. On peut citer aussi les travaux de R.F. Manásevich et M.A. del Pino [31] sur la bifurcation depuis la première valeur propre et ceux de A. Anane et J.P. Gossez [3] sur les problèmes de non résonance associés au  $p$ -Laplacien. Dans tout ce qui précède, les auteurs ont étudié des équations aux dérivées partielles dans des domaines bornés ; en ce qui concerne le cas des ouverts non bornés tels que  $\mathbb{R}^N$ , il a été

abordé par P. Drabek [17], P. Drabek X.Y. Huang [18] et A. Bechah, K. Chaïb, F. de Thélin [7]. Ces articles répondent aux questions sur l'existence et l'unicité aussi bien pour des problèmes de valeurs propres que pour des problèmes non-linéaires.

Les travaux sur les systèmes de  $p$ -Laplaciens ont été initiés par F. de Thélin [41] et P. Felmer, R.F. Manásevich et F. de Thélin [20]. Dans le premier article, il est montré l'existence et l'unicité de la première valeur propre d'un système du type

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{\alpha-1} |v|^{\beta+1} & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = \lambda |u|^{\alpha+1} |v|^{\beta-1} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec  $\frac{\alpha+1}{p} + \frac{\beta+1}{q} = 1$ . Dans le second, les auteurs étudient l'existence et l'unicité de la solution positive d'un système variationnel (ou dérivant d'un potentiel)

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = \frac{\partial H}{\partial v}(x, u, v) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

généralisant ainsi au cas des systèmes les résultats de J.I. Díaz et J.E. Saa [16]. Puis, F. de Thélin, J. Vélin [42] et J. Chabrowski [11] ont poursuivi l'étude de tels problèmes variationnels et ont commencé une approche du cas non variationnel en faisant des hypothèses sur la croissance des non-linéarités. Tous ces travaux concernant le cas variationnel ont été généralisés pour le cas de domaines non bornés tels que  $\mathbb{R}^N$  par J. Fleckinger, R.F. Manásevich, N.M. Stavrakakis et F. de Thélin [22] et A. Bechah, K. Chaïb et F. de Thélin [7]. L'étude des systèmes de  $p$ -Laplaciens dans  $\mathbb{R}^N$  a été inspirée par celle faite pour des systèmes de Laplaciens classiques par M.F. Bidaut-Véron [8]. Il faut aussi noter que l'existence de solutions pour des systèmes de  $p$ -Laplaciens purement non variationnels a été abordée par Ph. Clément, J. Fleckinger, E. Mitidieri et F. de Thélin [12] et Ph. Clément, R.F. Manásevich et E. Mitidieri [13] pour des domaines bornés. Et ce n'est que récemment que ces résultats ont été complétés par A. Bechah [5] [6] dans le cas non borné.

Actuellement, de nombreuses recherches sont en cours, en particulier sur le principe de l'antimaximum de Ph. Clément et L.A. Peletier [14] comme l'article en préparation de T. Godoy, J.P. Gossez et S. Paczka [24] dans lequel ils complètent les résultats déjà obtenus par N.M. Stavrakakis, F. de Thélin [38] et J. Fleckinger, P. Takac [23]. Évidemment, l'historique que nous venons de tracer ci-dessus est loin d'être exhaustif, néanmoins il est à la base de notre travail dans cette thèse.

Avant d'aller plus loin, décrivons un problème aux valeurs propres de la forme

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

qui peut être résolu de façon explicite. En effet, on peut trouver la fonction propre positive correspondant à la première valeur propre.

Cela revient à résoudre un problème de la forme :

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda g(x)|u|^{p-2}u & \text{dans } \mathbb{R} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

D'après les résultats de K.J. Brown, C. Cosner et J. Fleckinger [10] pour  $p = 2$  et de X.Y. Huang [29] pour  $p > 1$ , la fonction poids  $g$  doit changer de signe dans  $\mathbb{R}$  pour avoir l'espoir de trouver une telle solution positive. Nous verrons par la suite que ces deux résultats ainsi que le fait que la fonction propre principale pour un poids positif est unique, pourront être démontrés de façon rapide grâce au résultat du chapitre 2. De fait, nous allons choisir la fonction poids  $g$  changeant de signe une fois :

$$g(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in [-T_0, T_0] \\ -1 & \text{si } |x| > T_0 \end{cases}$$

où  $T_0$  sera déterminé plus tard. Maintenant, nous séparons  $\mathbb{R}$  en deux parties  $[-T_0, T_0]$  et  $[-T_0, T_0]^c$  et examinons chacun des sous problèmes.

Commençons par étudier cette solution sur  $[-T_0, T_0]^c$ . En choisissant  $u(x) = e^{-|x|}$  sur  $[-T_0, T_0]^c$  on constate aisément que  $u$  vérifie bien l'équation avec  $\lambda = p - 1$  et bien sûr les conditions aux limites.

Ensuite, sur l'intervalle  $[-T_0, T_0]$  l'équation devient :

$$(\mathcal{E}_q) -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda g(x)|u|^{p-2}u \quad \text{sur } [-T_0, T_0]$$

avec pour conditions initiales et au bord :

$$(\mathcal{E}_c) \begin{cases} u(T_0) = u(-T_0) = e^{-T_0} \\ -u'(T_0) = u'(-T_0) = e^{-T_0}. \end{cases}$$

Pour trouver une fonction qui satisfait l'équation  $(\mathcal{E}_q)$  nous nous inspirons de l'article de M. Del Pino, P. Drabek et R. Manásevich [19]. Ils définissent une fonction  $\sin_p$  (et un réel  $\pi_p$ ) solution du problème :

$$(\mathcal{E}_0) \begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = (p-1)u^{p-1} & \text{sur } [0, \pi_p] \\ u(0) = u(\pi_p) = 0. \end{cases}$$



Pour notre étude choisissons comme solution une fonction de la forme  $u(x) = \alpha \sin_p(t + \beta)$  où  $\sin_p$  est définie sur  $[0, \pi_p/2]$  par la donnée de sa fonction réciproque  $\arcsin_p$  :

$$\arcsin_p t = \int_0^t \frac{ds}{(1 - s^p)^{\frac{1}{p}}}.$$

Des raisons de symétrie par rapport à l'axe des ordonnées imposent que  $\beta = \pi_p/2$ .

Il est à noter que l'on retrouve une certaine analogie au cas  $p = 2$ . En effet, dans le cas  $p = 2$ , nous aurions pris une solution de la forme  $\alpha \cos t$  qui n'est rien d'autre que  $\alpha \sin(t + \pi/2)$ . Par contre,  $\alpha \cos_p t := (\alpha \sin_p t)'$  n'est pas solution de  $(\mathcal{E}_0)$  ce qui souligne la particularité du cas  $p = 2$ .

A présent, il ne reste plus qu'à vérifier les égalités  $(\mathcal{E}_c)$  qui nous donneront un raccordement  $C^1$  avec la solution sur  $[-T_0, T_0]^c$ . La définition de la fonction  $\sin_p$  nous donne déjà

$$\sin_p(t + \pi_p/2) = \sin_p(\pi_p/2 - t) \quad \text{et} \quad \sin'_p(t + \pi_p/2) = -\sin'_p(\pi_p/2 - t).$$

Pour le reste, il faut déterminer les valeurs de  $\alpha$  et  $T_0$  adéquates :

$$\begin{cases} \alpha \sin_p(\pi_p/2 - T_0) = e^{-T_0} \\ \alpha \sin'_p(\pi_p/2 - T_0) = e^{-T_0}. \end{cases}$$

Comme  $\sin_p$  est croissante bijective de  $[0, \pi_p/2]$  dans  $[0, 1]$  et  $\sin'_p$  est décroissante bijective de  $[0, \pi_p/2]$  dans  $[0, 1]$ , il existe une valeur  $\pi_0$  telle que  $\sin_p \pi_0 = \sin'_p \pi_0$ . Choisissons  $T_0 \in (0, \pi_p/2)$  tel que  $\pi_p/2 - T_0 = \pi_0$  et on arrive à

$$\alpha = \frac{e^{\pi_0 - \pi_p/2}}{\sin_p(\pi_0)}.$$

De plus, on a  $\sin_p^p \pi_0 + \sin_p'^p \pi_0 = 1$  et  $\sin_p \pi_0 = \sin_p' \pi_0$ , donc  $\sin_p \pi_0 = 2^{-1/p}$ .

Ainsi, la fonction propre positive associée à  $p - 1$  et au poids  $g$  est définie par :

$$u(x) = \begin{cases} 2^{1/p} e^{\pi_0 - \pi_p/2} \sin_p(\pi_p/2 + x) & \text{si } x \in [\pi_0 - \pi_p/2, \pi_p/2 - \pi_0] \\ e^{-|x|} & \text{si } |x| > \pi_p/2 - \pi_0 \end{cases}$$

$$\text{avec } \pi_p = \frac{2\pi}{p \sin(\pi/p)} \quad \text{et} \quad \pi_0 = \int_0^{2^{-1/p}} \frac{ds}{(1 - s^p)^{\frac{1}{p}}}.$$

Voici quelques représentations graphiques des fonctions propres associées à  $p - 1$  et au poids  $g$  selon les valeurs du paramètre  $p$  :

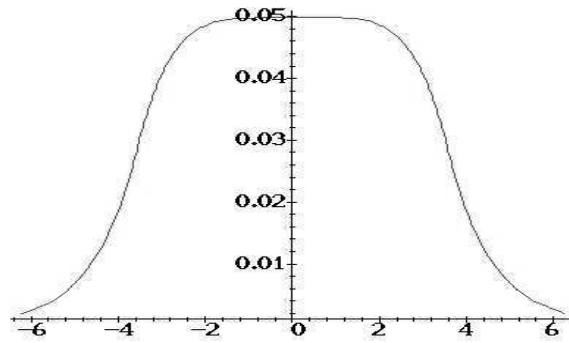
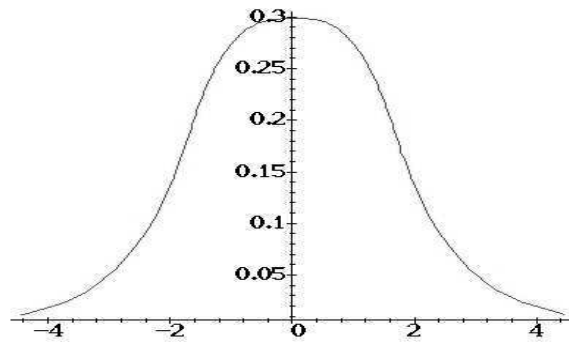
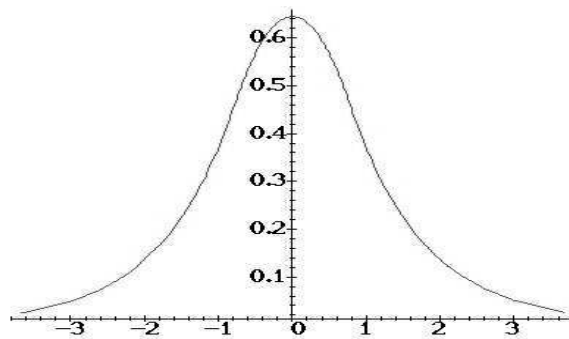
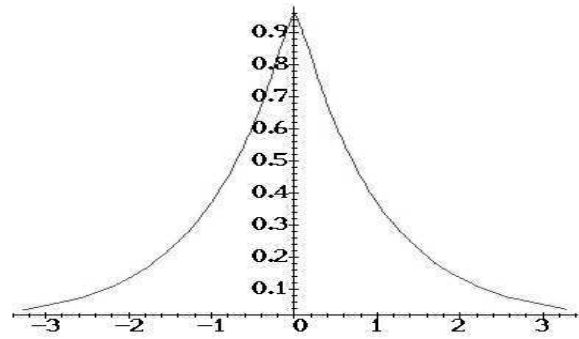
FIG. 1 – *Fonction propre pour  $p = 5/4$* FIG. 2 – *Fonction propre pour  $p = 3/2$* FIG. 3 – *Fonction propre pour  $p = 2$* 

FIG. 4 – *Fonction propre pour  $p = 5$* 

# Présentation

Cette thèse a été motivée par le fait que certains résultats sur les systèmes de  $p$ -Laplaciens dans des ouverts non bornés méritaient d'être complétés. Nous nous sommes attachés à établir pour le cas non borné lorsque ce fut possible des théorèmes d'existence et d'unicité. Cette démarche est périlleuse car nous perdons l'injection compacte de  $W^{1,p}(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega)$  ce qui nous oblige à introduire des fonctions poids dans nos problèmes. De plus, certains outils classiques dans les domaines bornés n'ont pas leur équivalent dans les domaines non bornés. Le deuxième objectif était de généraliser à un système d'équations faisant intervenir le  $p$ -Laplacien certains résultats obtenus pour une équation. Ici, la principale difficulté était de faire apparaître une certaine symétrie pour résoudre ces problèmes.

## CHAPITRE 1

Dans [9], H. Brézis et L. Oswald étudient l'existence et l'unicité de la solution positive de  $-\Delta u = f(x, u)$  dans  $\Omega$  où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ . Ils ont montré l'unicité sous la condition de stricte décroissance de la fonction  $u \mapsto \frac{f(x,u)}{u}$  et l'existence a été prouvée sous la condition nécessaire et suffisante  $\lambda_1(-\Delta - a_0) < 0$  et  $\lambda_1(-\Delta - a_\infty) > 0$  avec  $a_0 = \lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{f(x,u)}{u}$  et  $a_\infty = \lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(x,u)}{u}$ . Par la suite, J.I. Díaz et J.E. Saa ont étendu ce résultat pour l'équation  $-\Delta_p u = f(x, u)$  dans  $\Omega$ . Dans ce chapitre, notre propos a été de généraliser ce type de résultat pour la même équation dans le cas où  $\Omega$  est un domaine non borné tel que  $\mathbb{R}^N$ . Nous ne pouvons pas utiliser, comme l'ont fait J.I. Díaz et J.E. Saa, l'inégalité du même nom (inégalité de Díaz-Saa) :

$$\int_{\Omega} \left( -\frac{\Delta_p z_1}{z_1^{p-1}} + \frac{\Delta_p z_2}{z_2^{p-1}} \right) (z_1^p - z_2^p) dx \geq 0 \quad (1)$$

avec pour  $i \neq j, i, j = 1, 2$   $\frac{z_i}{z_j} \in L^\infty(\Omega)$ .

Mais, nous employons une méthode locale comme dans l'article de J. Fleckinger, R.F. Manásevich, N.M. Stavrakakis et F. de Thélin ([22]) pour prouver l'unicité. En ce qui concerne la condition nécessaire nous adaptions les démonstrations de [22] et [9].

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous obtenons le même type de résultat pour le système variationnel :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, v) & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = \frac{\partial H}{\partial v}(x, u, v) & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x). \end{cases}$$

Il est à noter que pour le cas borné ce système a été étudié par P. Felmer, R.F. Manásevich et F. de Thélin [20].

## CHAPITRE 2

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent l'inégalité de Díaz-Saa (1) ne peut pas être appliquée en l'état lorsque nous avons affaire à des domaines non bornés. En effet, dans le cas borné, le principe du maximum de Hopf permet de vérifier l'hypothèse  $\frac{z_i}{z_j} \in L^\infty(\Omega)$ ; cette propriété est fautive en général lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Notre propos dans ce chapitre 2 sera d'étendre à des ouverts non bornés tels que  $\mathbb{R}^N$  cette inégalité grâce à l'identité de Picone présentée par W. Allegretto et X. Y. Huang [1]. Elle est un outil essentiel dans l'étude du  $p$ -Laplacien. En particulier, elle est utilisée dans les démonstrations d'unicité de la première valeur propre comme l'ont fait A. Anane [2] et J.I. Díaz, J.E. Saa [16] dans le cas borné. La généralisation de ces résultats d'isolation et de simplicité pour un système de  $p$ -Laplacien a fait l'objet de la seconde partie de ce chapitre. On complète ainsi les résultats de J. Fleckinger, R.F. Manásevich, N.M. Stavrakakis et F. de Thélin [22] où un système légèrement différent est considéré.

## CHAPITRE 3 ET 4

La présentation de ces chapitres 3 et 4 peut se faire en parallèle car les résultats obtenus sont identiques. Nous établissons dans ces chapitres des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solution. Ces conditions portent sur le paramètre  $\mu$  intervenant dans ces systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p u = \mu f(x, u, v) \quad x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = \mu g(x, u, v) \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x). \end{array} \right.$$

La différence essentielle entre ces deux chapitres est que le premier utilise les propriétés des systèmes variationnels tandis que le second utilise celles des systèmes hamiltoniens. En effet, on étudie ici des systèmes de  $p$ -Laplaciens non linéaires dans  $\mathbb{R}^N$  dont les non linéarités sont encadrées par des fonctions polynômiales. Ces fonctions polynômiales ont un caractère variationnel pour le système du chapitre 3 et ont un caractère hamiltonien pour le système du chapitre 4.

Pour la condition suffisante, nous utilisons la méthode des sous,sur-solutions présentée dans [15] et [28] par J.I. Díaz et J. Hernández. Nous remarquons que  $(0, 0)$  est sous-solution de ces systèmes et nous trouvons la sur-solution par le lemme du col. En ce qui concerne la condition nécessaire, notre étude fait suite à un résultat de R. Shivaji [37] où il étudie le cas semi-linéaire ( $p = 2$ ). Nous verrons ici une nouvelle application de l'identité de Picone pour étendre le résultat de R. Shivaji au cas des systèmes de  $p$ -Laplaciens.

En appendice, nous montrerons des propriétés de régularité de la solution pour le cas non borné, mais nous décrirons aussi comment les résultats ci-dessus peuvent être obtenus plus simplement dans le cas borné.

## CHAPITRE 5

Dans le chapitre 5, nous étudions le comportement de la solution d'un système de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu f(u, v) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_p v = \mu g(u, v) & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce travail fait suite aux travaux de Z. M. Guo [26] [27] [25] où il examine le cas d'une seule équation. Les principales hypothèses sur les fonctions  $f$  et  $g$  sont leur comportement à l'infini et à l'origine. Le résultat que nous obtenons est que le comportement de la solution, lorsque  $\mu$  tend vers l'infini dépend essentiellement du comportement de  $f$  et  $g$  à l'infini. Il est à noter qu'un des arguments récurrents dans la preuve est le lemme de Hopf. Ceci nous empêche d'espérer étendre ce résultat au cas non borné, car il est difficile d'imaginer un équivalent à ce lemme de Hopf dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}^N$ .



# Bibliographie

- [1] W. ALLEGRETTO X. Y. HUANG. A Picone's identity for the  $p$ -Laplacian and applications. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 32(7) :819–830, 1998.
- [2] A. ANANE. Simplicité et isolation de la première valeur propre du  $p$ -Laplacien avec poids. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 305(16) : 725-728, 1987.
- [3] A. ANANE J.P. GOSSEZ. Strongly nonlinear elliptic problems near resonance : a variational approach. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(8) : 1141-1159, 1990.
- [4] G. BARLES. Remarks on uniqueness results of the first eigenvalue of the  $p$ -Laplacian. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 9(1) : 65-75, 1988.
- [5] A. BECHAH. Nontrivial positive solutions for systems with the  $p$ -Laplacian in  $\mathbb{R}^N$  involving critical exponents. *Rostock. Math. Kolloq.*, 55 : 73-88, 2001.
- [6] A. BECHAH. Positive solutions for a nonvariational quasilinear elliptic system in  $\mathbb{R}^N$ . *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat.*, 94(1) : 1-7, 2000.
- [7] A. BECHAH K. CHAÏB F. DE THÉLIN. Existence and uniqueness of positive solution for subhomogeneous elliptic problems in  $\mathbb{R}^N$ . *Rev. Mat. Apl.*, 21(1-2) : 1-17, 2000.
- [8] M.F. BIDAUT-VÉRON. Local behavior of the solutions of a class of nonlinear elliptic systems. *Adv. Differential Equations*, 5(1-3) : 147-192, 2000.
- [9] H. BRÉZIS L. OSWALD. Remarks on sublinear elliptic equation. *Nonlinear Anal. TMA*, 10(1) :55–64, 1986.
- [10] K.J. BROWN C. COSNER J. FLECKINGER. Principal eigenvalues for problems with indefinite weight function on  $\mathbb{R}^N$ . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 109(1) :147–155, 1990.
- [11] J. CHABROWSKI. On multiple solutions for nonhomogeneous system of elliptic equations. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 9(1) : 207-234, 1996.
- [12] PH. CLÉMENT J. FLECKINGER R.F. MANÁSEVICH F. DE THÉLIN. Existence of positive solutions for a nonvariational quasilinear elliptic system. *J. Differential Equations*, 166(2) : 455-477, 2000.
- [13] PH. CLÉMENT R.F. MANÁSEVICH E. MITIDIERI. Positive solutions for a quasilinear system via blow up. *Comm. Partial Differential Equations*, 18(12) : 2071-2106, 1993.
- [14] PH. CLÉMENT L. PELETIER. An antimaximum principle for second order elliptic operators. *J. Differential Equations*, 34 : 218-229, 1979.
- [15] J. I. DÍAZ J. HERNÁNDEZ. Free boundary problems for some stationary reaction-diffusion systems. In *Res. Notes in Math*, number 89 in Contributions to nonlinear partial differential equations (Madrid, 1981), pages 176–182, Pitman, Boston, Mass.-London, 1983.



- [16] J.I. DÍAZ J.E. SAA. Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilineaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 305 Série I : 521-524, 1987.
- [17] P. DRÁBEK. Nonlinear eigenvalue problem for  $p$ -Laplacian in  $\mathbb{R}^N$ . *Math. Nachr.*, 173 : 131-139, 1995.
- [18] P. DRÁBEK Y.X. HUANG. Bifurcation problems for the  $p$ -Laplacian in  $\mathbb{R}^N$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(1) : 171-188, 1997.
- [19] P. DRÁBEK R.F. MANÁSEVICH M.A. DEL PINO. The Fredholm alternative at the first eigenvalue for the one-dimensional  $p$ -Laplacian. *J. Differential Equations*, 151(2) :386–419, 1999.
- [20] P. FELMER R.F. MANÁSEVICH F. DE THÉLIN. Existence and uniqueness of positive solutions for certain quasilinear elliptic systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 17(11-12) : 2013-2029, 1992.
- [21] J. FLECKINGER J.P. GOSSEZ P. TAKÁČ F. DE THÉLIN. Nonexistence of solutions and an antimaximum principle for cooperative systems with the  $p$ -Laplacian. *Math. Nachr.*, 194 : 49-78, 1998.
- [22] J. FLECKINGER R.F. MANÁSEVICH N.M. STAVRAKAKIS F. DE THÉLIN. Principal eigenvalues for some quasilinear elliptic equations on  $\mathbb{R}^N$ . *Adv. Differential Equations*, 2(6) : 981-1003, 1997.
- [23] J. FLECKINGER P. TAKÁČ. Maximum and antimaximum principles for some elliptic problems. *Advances in differential equations and mathematical physics*, 217 : 19-32, 1998.
- [24] T. GODOY J.P. GOSSEZ S. PACZKA. On the antimaximum principle for the  $p$ -Laplacian with indefinite weight. *To appear*.
- [25] Z. M. GUO. Some existence and multiplicity results for a class of quasilinear elliptic eigenvalue problems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 18(10) :957–971, 1992.
- [26] Z. M. GUO. On the number of positive solutions for quasilinear elliptic eigenvalue problems. *Nonlinear Analysis, Theory & Applications*, 27(2) :229–247, 1996.
- [27] Z. M. GUO J. R. L. WEBB. Uniqueness of positive solutions for quasilinear elliptic equations when a parameter is large. *Proceedings of Royal Society of Edinburgh*, 124A :189–198, 1994.
- [28] J. HERNÁNDEZ. Positive solutions for the logistic equation with unbounded weights. In *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, number 194 in Reaction diffusion systems (Trieste, 1995), pages 183–197, Dekker, New York, 1998.
- [29] Y.X. HUANG. Eigenvalues of the  $p$ -Laplacian in  $\mathbb{R}^N$  with indefinite weight. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 36(3) :519–527, 1995.
- [30] P. LINDQVIST. On the equation  $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$ . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 109(1) : 157-164, 1990.
- [31] R.F. MANÁSEVICH M.A. DEL PINO. Global bifurcation from the eigenvalues of the  $p$ -Laplacian. *J. Differential Equations*, 92(2) : 226-251, 1991.

- [32] W.M. NI J. SERRIN. Existence and nonexistence theorems for ground states of quasilinear partial differential equations of the anomalous case. *Acad. Naz. Lincei*, 77 : 231-287, 1986.
- [33] M. ÔTANI. On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincaré-type inequalities. *Nonlinear Anal.*, 8(11) : 1255-1270, 1984.
- [34] M. ÔTANI. Existence and nonexistence of nontrivial solution of some nonlinear degenerate elliptic equations. *J. Funct. Anal.*, 76(1) : 140-159, 1988.
- [35] M.C. PÉLISSIER. Sur quelques problèmes nonlinéaires en glaciologie. Thèse de doctorat de l'Université Paris XI. *Publication mathématiques d'Orsay*, 1975.
- [36] S. SAKAGUCHI. Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 14(4) : 403-421, 1987.
- [37] C. MAYA R. SHIVAJI. Multiple positive solutions for a class of semilinear elliptic boundary value problems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 38 :497-504, 1999.
- [38] N.M. STAVRAKAKIS F. DE THÉLIN. Principal eigenvalues and antimaximum principle for some quasilinear elliptic equations on  $\mathbb{R}^N$ . *Math. Nachr.*, 212 : 155-171, 2000.
- [39] F. DE THÉLIN. Quelques résultats d'existence et de nonexistence pour une EDP elliptique nonlinéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 229 Série I, 18 : 839-844, 1984.
- [40] F. DE THÉLIN. Résultats d'existence et de non existence pour la solution positive et bornée d'une EDP. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 3 : 375-389, 1987.
- [41] F. DE THÉLIN. Première valeur propre d'un système elliptique non linéaire. *Rev. Mat. Apl.*, 13(1) : 1-8, 1992.
- [42] F. DE THÉLIN J. VÉLIN. Existence and nonexistence of nontrivial solutions for some nonlinear elliptic systems. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 6(1) : 153-194, 1993.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Problème sous-homogène</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction.	1
1.2	Étude de l'équation $(\mathcal{E})$ .	3
1.2.1	Existence de la solution de l'équation.	4
1.2.2	Unicité de la solution de l'équation.	10
1.2.3	Condition nécessaire d'existence.	11
1.3	Étude du système $(\mathcal{S})$ .	20
1.3.1	Existence de la solution du système.	21
1.3.2	Unicité de la solution du système.	27
1.4	Appendice.	28
<b>2</b>	<b>Inégalité de Díaz-Saa dans <math>\mathbb{R}^N</math></b>	<b>33</b>
2.1	Inégalité de Díaz-Saa	34
2.2	Première valeur propre d'un système de $p$ -Laplaciens	39
<b>3</b>	<b>Existence dans le cas variationnel</b>	<b>47</b>
3.1	Condition suffisante d'existence	49
3.2	Condition nécessaire d'existence	55
3.3	Appendice 1 : Condition de Palais-Smale	57
3.4	Appendice 2 : Cas borné	60
<b>4</b>	<b>Existence dans le cas hamiltonien</b>	<b>67</b>
4.1	Condition suffisante d'existence	69
4.2	Condition nécessaire d'existence	74
4.3	Appendice 1 : Résultat de régularité	76
4.4	Appendice 2 : Cas borné	81
<b>5</b>	<b>Comportement asymptotique</b>	<b>85</b>



# Chapitre 1

## Existence et unicité de la solution pour un problème de $p$ -Laplacien sous-homogène sur $\mathbb{R}^N$ .

### 1.1 Introduction.

Notre étude s'inscrit dans la suite des nombreuses publications qui ont pour origine l'article de H. Brézis, L. Oswald [6].

Dans ce papier de H. Brézis, L. Oswald, il est question de l'existence et l'unicité de la solution faible positive de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ .

L'unicité de la solution positive a été obtenue grâce à la stricte décroissance de la fonction  $u \mapsto \frac{f(x, u)}{u}$ , tandis que l'existence a été vérifiée sous la condition nécessaire et suffisante

$$\lambda_1(-\Delta - a_0) < 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1(-\Delta - a_\infty) > 0$$

$$\text{avec } a_0 = \lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{f(x, u)}{u} \quad \text{et} \quad a_\infty = \lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{u}.$$

Ce résultat a été généralisé par J. I. Díaz et J. E. Saa [8] pour une équation faisant intervenir l'opérateur  $p$ -Laplacien

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x, u) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $1 < p < N$  et  $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ .

Bien que leur démonstration de l'existence utilise un argument variationnel classique,

celles de l'unicité de la solution et de la condition nécessaire d'existence sont basées sur l'inégalité suivante

$$\int_{\Omega} \left( \frac{-\Delta_p w_1^{\frac{1}{p}}}{w_1^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{-\Delta_p w_2^{\frac{1}{p}}}{w_2^{\frac{p-1}{p}}} \right) (w_1 - w_2) \geq 0 \quad (1.1)$$

pour tout  $\left(\frac{w_i}{w_j}\right) \in L^\infty(\Omega)$  où  $i \neq j, i, j = 1, 2$ . Cette inégalité qui traduit la monotonie de l'opérateur  $w \mapsto \frac{-\Delta_p w^{1/p}}{w^{\frac{p-1}{p}}}$ , a elle-même été fréquemment utilisée par la suite.

Ici, nous présentons quelques résultats concernant ce type d'équation mais dans des domaines non bornés tels que  $\mathbb{R}^N$ . Tout d'abord, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution pour le problème suivant :

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} -\Delta_p u = f(x, u) & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

Définissons  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  l'adhérence de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  (l'ensemble des fonctions infiniment différentiables à support compact dans  $\mathbb{R}^N$ ) par rapport à la norme

$$\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \quad (1.2)$$

Nous dirons que  $u$  est une solution faible de  $(\mathcal{E})$  si  $u$  est une fonction non triviale dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  vérifiant  $(\mathcal{E})$  au sens faible. Nous procéderons comme dans les articles [8], [6] pour montrer l'unicité de la solution positive et nous adapterons les démonstrations de [9], [6] pour prouver la condition nécessaire d'existence.

Il est à noter que l'inégalité de Díaz-Saa (1.1) ne peut pas être appliquée en l'état car nous ne pouvons pas affirmer que le quotient de deux solutions de  $(\mathcal{E})$  est borné dans  $\mathbb{R}^N$ .

Dans la seconde partie de ce travail nous étendrons nos résultats à un système de  $p$  et  $q$  Laplaciens dérivant d'un potentiel

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, v) & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = \frac{\partial H}{\partial v}(x, u, v) & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} v(x) \end{cases}$$

Nous généraliserons ainsi les résultats de P. Felmer, R. F. Manásevich et F. de Thélin ([10]) qui étudient ce type de système dans des domaines bornés.

En ce qui concerne l'unicité de la solution du système  $(\mathcal{S})$ , nous utiliserons comme dans [10] et [11] la stricte concavité de la fonction  $(r, s) \mapsto H(x, r^{\frac{1}{p}}, s^{\frac{1}{q}})$ .

Ce travail a été publié en 2000 dans la revue chilienne *Revista de Matemáticas Aplicadas* [7]

## 1.2 Étude de l'équation ( $\mathcal{E}$ ).

Dans cette partie, nous allons montrer sous quelles conditions nous pouvons affirmer l'existence et l'unicité d'une solution faible dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  du problème ( $\mathcal{E}$ ). Nous déterminerons aussi la condition nécessaire pour l'existence d'une telle solution.

Faisons quelques hypothèses sur la fonction  $f$  :

( $\mathcal{H}_e1$ ) Pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^N$  la fonction  $r \mapsto f(x, r)$  est continue sur  $[0, +\infty)$  et  $x \mapsto f(x, r)$  est mesurable (i.e.  $f$  est une fonction de Carathéodory). Nous prolongeons cette fonction par  $f(x, 0)$  pour les valeurs négatives de  $r$  ;

( $\mathcal{H}_e2$ ) Il existe  $A \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $B \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  telles que pour tout  $u \geq 0$  et tout  $x \in \mathbb{R}^N$

$$|f(x, u)| \leq A(x)u^{p_0-1} + B(x)u^{p-1}$$

où  $1 \leq p_0 < p$  et  $p_1 = \frac{Np}{Np - p_0(N-p)}$  ;

( $\mathcal{H}_e3$ ) Il existe  $b_0 \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  telle que

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x, u)}{u^{p-1}} \geq b_0(x) \text{ uniformément ;}$$

( $\mathcal{H}_e4$ ) Il existe  $b_\infty \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  telle que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{u^{p-1}} = b_\infty(x) \text{ uniformément ;}$$

( $\mathcal{H}_e5$ ) Pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , la fonction  $r \mapsto \frac{f(x, r)}{r^{p-1}}$  est strictement décroissante sur  $[0, +\infty)$ .

Nous considérons aussi la fonction  $F$  donnée par  $F(x, u) = \int_0^u f(x, s)ds$  pour tout  $u \geq 0$ .

**Remarque 1.1** *Sous les hypothèses ( $\mathcal{H}_e1$ ) – ( $\mathcal{H}_e4$ ), on peut expliciter des propriétés supplémentaires sur la fonction  $F$ . En effet,*

$$F(x, \phi) = \int_0^\phi f(x, z)dz = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{1}{s} f(x, s^{\frac{1}{p}}\phi) s^{\frac{1}{p}}\phi ds \quad ,$$

où on a posé  $z = s^{\frac{1}{p}}\phi$ .

Ainsi, par le lemme de Fatou et les hypothèses ( $\mathcal{H}_e2$ ) et ( $\mathcal{H}_e3$ ), on a

$$\liminf_{\phi \rightarrow 0^+} \frac{F(x, \phi)}{\phi^p} \geq \frac{1}{p} b_0(x). \quad (\mathcal{H}'_e3)$$

Et de même, par les hypothèses ( $\mathcal{H}_e2$ ) et ( $\mathcal{H}_e4$ ), on a

$$\limsup_{\phi \rightarrow +\infty} \frac{F(x, \phi)}{\phi^p} \leq \frac{1}{p} b_\infty(x). \quad (\mathcal{H}'_e4)$$



### 1.2.1 Existence de la solution de l'équation.

Avant d'énoncer le résultat d'existence, nous étudions un problème de valeur propre dont nous aurons besoin dans le théorème suivant.

**Définition 1.1** Soient  $1 < p < N$ ,  $a \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $b \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $a > 0$ .

Nous définissons  $\lambda_1(b, a)$  comme la première valeur propre du problème

$$(\mathcal{V}_p) \begin{cases} \text{Trouver } u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad u \neq 0 \text{ telle que} \\ -\Delta_p u - b(x)|u|^{p-2}u = \lambda a(x)|u|^{p-2}u \text{ sur } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

En résolvant ce problème de valeur propre, nous obtenons

$$\lambda_1(b, a) = \inf_{\Lambda} \left\{ \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \right\}$$

$$\text{où } \Lambda = \left\{ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ tels que } \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p dx = 1 \right\}$$

**Lemme 1.1** Soit  $a \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  strictement positive et vérifiant

$$\forall R > 0 \quad \exists \mu_R > 0 \text{ tel que } \inf_{B_R} a \geq \mu_R > 0.$$

Alors pour tout  $b \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $\lambda_1(b, a)$  existe.

Preuve du lemme 1.1

Nous définissons les fonctionnelles  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  par

$$\tilde{A}(u) = \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \quad \text{et} \quad \tilde{B}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p dx.$$

D'abord, nous allons montrer les quatre assertions suivantes :

- (i)  $\tilde{A}$  est faiblement semi-continue inférieurement ;
- (ii)  $\Lambda = \left\{ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ tels que } \tilde{B}(u) = 1 \right\}$  est faiblement fermé ;
- (iii)  $\tilde{A}$  est coercive sur l'ensemble  $\Lambda$  ;
- (iv) Si  $\tilde{B}(u) = 0$  alors  $u = 0$ .

Ensuite, le reste de la preuve de ce lemme est simplement une application du théorème 6.3.2 de M. S. Berger [4].

(i) (ii) La démonstration de la faible semi-continuité inférieure de  $\tilde{A}$  et de la fermeture faible de  $\Lambda$  est classique.

(iii) Grâce à l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev, nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{A}(u) &= \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^p dx \\ &= \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \int_{B_R} b(x)|u|^p dx - \int_{B_R^c} b(x)|u|^p dx \\ &\geq \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{B_R} |u|^p dx - C_s \|b\|_{L^{\frac{N}{p}}(B_R^c)} \|u\|_{D^{1,p}}^p,\end{aligned}$$

où  $B_R$  est la boule centrée en 0, de rayon  $R$ ,  $B_R^c$  son complémentaire dans  $\mathbb{R}^N$  et  $C_s$  la constante de Sobolev.

Choisissons  $R$  de telle sorte que  $C_s \|b\|_{L^{\frac{N}{p}}(B_R^c)} \leq \frac{1}{2}$  ce qui est possible puisque  $b \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$ .

Par conséquent

$$\tilde{A}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{B_R} |u|^p dx.$$

Comme  $\tilde{B}(u) = 1$ , il vient que

$$\mu_R \int_{B_R} |u|^p dx \leq \int_{B_R} a(x)|u|^p dx \leq 1$$

donc

$$\tilde{A}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \frac{1}{\mu_R} \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Ainsi,  $\lim_{\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \rightarrow \infty} \tilde{A}(u) = +\infty$ .

(iv) Nous avons  $\tilde{B}'(u)u = \frac{1}{p}\tilde{B}(u)$ , ce qui montre que  $u = 0$  est l'unique solution de  $\tilde{B}'(u) = 0$ .

◆

**Théorème 1.1** *On considère que les hypothèses  $(\mathcal{H}_e1) - (\mathcal{H}_e4)$  sont satisfaites. S'il existe une fonction poids  $a \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  strictement positive telle que  $\lambda_1(b_\infty, a) > 0$  et  $\lambda_1(b_0, a) < 0$  alors le problème ( $\mathcal{E}$ ) admet une solution non triviale dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ . De plus, si  $(\mathcal{H}_e5)$  est vérifiée et  $f(x, 0) \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^N$  alors le problème ( $\mathcal{E}$ ) admet une solution strictement positive dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$  ( $0 < \alpha < 1$ ).*

**Remarque 1.2** *Dans le théorème 1.1, on peut choisir indépendamment deux fonctions poids  $a_\infty \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $a_0 \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  toutes deux strictement positives telles que  $\lambda_1(b_\infty, a_\infty) > 0$  et  $\lambda_1(b_0, a_0) < 0$ , mais pour simplifier l'écriture nous noterons  $a \equiv a_0 \equiv a_\infty$ .*

**Remarque 1.3** *Dans la deuxième partie de ce théorème, on peut remplacer l'hypothèse  $(\mathcal{H}_e5)$  par la décroissance au sens large de la fonction  $r \mapsto \frac{f(x, r)}{r^{p-1}}$  sur  $[0, +\infty)$  p. p. sur  $\mathbb{R}^N$ .*

Preuve du théorème 1.1

Pour  $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ , on pose  $J(u) = \frac{1}{p} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx$ . Nous montrerons que :

- (i)  $J$  est faiblement semi-continue inférieurement ;
- (ii)  $J$  est coercive ;
- (iii) Il existe  $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  telle que  $J(\phi) < 0$ .

(i) La fonction  $u \mapsto \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p$  est convexe continue (car  $p > 1$ ) donc elle est faiblement sci. Ainsi, il ne reste plus qu'à voir que  $u \mapsto - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx$  est faiblement sci.

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  convergeant faiblement vers  $u$ , on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (F(x, u_n) - F(x, u)) dx \right| \leq \underbrace{\int_{B_R^c} |F(x, u_n) - F(x, u)| dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_{B_R} |F(x, u_n) - F(x, u)| dx}_{I_2}.$$

Nous montrons d'abord, que  $I_1$  tend vers 0 quand  $R$  tend vers l'infini indépendamment de  $n$ . Grâce à la propriété  $(\mathcal{H}_e 2)$ , l'inégalité de Hölder et le théorème d'injection de Sobolev on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \left[ \|A\|_{L^{p_1}(B_R^c)} \left( \|u_n\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{p_0} + \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{p_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + \|B\|_{L^{\frac{N}{p}}(B_R^c)} \left( \|u_n\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p \right) \right] \end{aligned}$$

car  $p_1 = \frac{Np}{Np - p_0(N - p)}$  et  $\frac{(N - p)p_0}{Np} + \frac{1}{p_1} = 1$ . Comme  $A \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$  et  $B \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$ , on peut choisir rendre  $I_1$  aussi petit que l'on veut pour  $R > R_0$  en choisissant  $R_0$  assez grand.

D'autre part, nous montrons que pour  $R_0$  fixé,  $I_2$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. En effet, nous définissons  $D^{1,p}(B_{R_0})$  comme l'ensemble des éléments de  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  restreints à la boule  $B_{R_0}$ , par suite  $D^{1,p}(B_{R_0}) = W^{1,p}(B_{R_0})$ . Nous en déduisons que  $D^{1,p}(B_{R_0})$  s'injecte de façon compacte dans  $L^p(B_{R_0})$ .  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement dans  $D^{1,p}(B_{R_0})$  alors il existe une sous-suite encore notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge fortement vers  $u$  dans  $L^p(B_{R_0})$ . Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u$  presque partout sur  $B_{R_0}$  et utilisant le fait que  $F$  est continue, on a  $F(x, u_n)$  qui converge vers  $F(x, u)$  presque partout sur  $B_{R_0}$ .

De plus, sachant que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u$  dans  $L^p(B_{R_0})$ , il existe  $\hat{u} \in L^r(B_{R_0})$  avec  $1 \leq r \leq p$  telle que  $|u|, |u_n| \leq \hat{u}$  presque partout dans  $B_{R_0}$  au moins pour une sous-suite (voir [5]). Il en résulte que  $F(x, u_n) \leq C(A(x)|\hat{u}|^{p_0} + B(x)|\hat{u}|^p) \in L^1(B_{R_0})$ . Ainsi par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on trouve que  $I_2$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Ce qui assure que  $J$  est faiblement semi-continue inférieurement.

(ii) On suppose qu'il existe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  telle que  $\|u_n\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$  tend vers  $+\infty$  et  $J(u_n) \leq C$ .

Soit  $t_n = \|u_n\|_{D^{1,p}}^p$ , nous définissons  $u_n = t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n$  ainsi  $\|\tilde{u}_n\|_{D^{1,p}} = 1$  donc  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  et il existe une sous-suite encore notée  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $\tilde{u}$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  et  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $\tilde{u}$  dans  $L^p(B_R)$ .

Pour la suite de la démonstration de ce point, nous utiliserons le résultat suivant :

**Lemme 1.2** *Sous les hypothèses  $(\mathcal{H}_e1)$ ,  $(\mathcal{H}_e2)$  et  $(\mathcal{H}_e4)$  on a*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n)}{t_n} dx \leq \frac{1}{p} \int_{\{\tilde{u} > 0\}} b_\infty(x) \tilde{u}^p dx \quad (1.3)$$

où  $\tilde{u}_n$  et  $\tilde{u}$  sont définis ci-dessus.

Preuve du lemme 1.2

Nous définissons

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } \tilde{u} \leq 0 \text{ et } \tilde{u}_n > 0\} \quad , \quad \Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } \tilde{u}_n \leq 0\} \\ &\text{et } \Omega_3 = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } \tilde{u} > 0 \text{ et } \tilde{u}_n > 0\}. \end{aligned}$$

Comme dans l'article de H. Brézis et L. Oswald [6], on écrit

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n)}{t_n} dx = \int_{\Omega_1} \frac{F(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n)}{t_n} dx + \int_{\Omega_2} \frac{F(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n)}{t_n} dx + \int_{\Omega_3} \frac{F(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n)}{t_n} dx \quad (1.4)$$

et nous allons estimer séparément les trois intégrales précédentes.

Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \frac{F(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n)}{t_n} dx &= \frac{1}{t_n} \int_{\Omega_1} \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{1}{s} f(x, s^{\frac{1}{p}} t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n) s^{\frac{1}{p}} t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n ds dx \\ &\leq \frac{1}{t_n} \int_{\Omega_1} \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{1}{s} \left[ A(x) (st_n)^{\frac{p_0}{p}} |\tilde{u}_n|^{p_0} + B(x) st_n |\tilde{u}_n|^p \right] ds dx \\ &\leq t_n^{\frac{p_0}{p} - 1} \frac{1}{p_0} \int_{\Omega_1} A(x) |\tilde{u}_n|^{p_0} dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega_1} B(x) |\tilde{u}_n|^p dx. \end{aligned}$$

$$\text{donc } \int_{\Omega_1} \frac{F(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n)}{t_n} dx \quad \text{tend vers } 0. \quad (1.5)$$

En effet,  $\int_{\mathbb{R}^N} A(x) |\tilde{u}_n|^{p_0} dx$  étant bornée et  $p_0 < p$  on a bien  $t_n^{\frac{p_0}{p} - 1} \int_{\Omega_1} A(x) |\tilde{u}_n|^{p_0} dx$  qui tend vers 0. De plus, nous avons vu dans le (i) de la preuve du théorème 1.1 qu'à une sous-suite près  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque partout vers  $\tilde{u}$  et que  $\int_{\mathbb{R}^N} B(x) |\tilde{u}_n|^p dx$  converge

vers  $\int_{\mathbb{R}^N} B(x)|\tilde{u}|^p dx$ . Or sur  $\Omega_1$ ,  $\tilde{u} \leq 0$  donc  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 presque partout sur  $\Omega_1$  et de fait on a  $\int_{\Omega_1} B(x)|\tilde{u}_n|^p dx$  qui tend vers 0.

Ensuite, on prolonge la fonction  $r \mapsto F(x, r)$  par  $rf(x, 0)$  sur  $(-\infty, 0]$ , ainsi d'après  $(\mathcal{H}_e 2)$

$$\text{si } p_0 > 1 \quad f(x, 0) = 0, \quad \text{donc} \quad \int_{\Omega_2} \frac{F(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n)}{t_n} dx = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (1.6)$$

$$\text{et si } p_0 = 1 \quad \int_{\Omega_2} \frac{F(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n)}{t_n} dx \leq \int_{\Omega_2} \left| f(x, 0) \frac{t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n}{t_n} \right| dx \leq \underbrace{t_n^{\frac{1}{p}-1} \int_{\Omega_2} |A(x) \tilde{u}_n| dx}_{\text{tend vers 0}}$$

Enfin, d'après  $(\mathcal{H}'_e 4)$ , nous avons

$$\limsup_{\phi \rightarrow \infty} \frac{F(x, \phi)}{\phi^p} \leq \frac{1}{p} b_\infty(x)$$

et donc par le lemme de Fatou

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_3} \frac{F(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n)}{t_n \tilde{u}_n^p} \tilde{u}_n^p dx \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega_3} b_\infty(x) \tilde{u}^p dx \quad (1.8)$$

car  $t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n \rightarrow \infty$  presque partout dans  $\Omega_3$ .

Ainsi, en utilisant (1.5), (1.6), (1.7) et (1.8) dans (1.4), on achève la démonstration du lemme. ◆

Comme  $J(u_n) \leq C$  on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \|u_n\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx &\leq C \\ \text{donc } \frac{1}{p} \|\tilde{u}_n\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n)}{t_n} dx &\leq \frac{C}{t_n}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Nous avons défini  $\tilde{u}_n$  de telle façon que  $\|\tilde{u}_n\|_{D^{1,p}} = 1$ , en passant à la limite inférieure dans (1.9) nous obtenons par l'inégalité (1.3) du lemme 1.2

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{t_n} + \frac{1}{p} \int_{\{\tilde{u} > 0\}} b_\infty(x) \tilde{u}^p dx \\ \text{donc } 1 &\leq \int_{\{\tilde{u} > 0\}} b_\infty(x) \tilde{u}^p dx. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Or  $\lambda_1(b_\infty, a) = \inf_{\Lambda} \left\{ \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty(x)|u|^p dx \right\}$   
 où  $\Lambda = \left\{ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ tels que } \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p dx = 1 \right\}$ .

En particulier pour  $\tilde{u}^+$  on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_1(b_\infty, a) \left( \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\tilde{u}^{+p} dx \right) &\leq \| \tilde{u}^+ \|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty(x)\tilde{u}^{+p} dx \\ &\leq \| \tilde{u} \|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty(x)\tilde{u}^{+p} dx \\ &\leq 1 - \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty(x)\tilde{u}^{+p} dx \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lambda_1(b_\infty, a) \left( \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\tilde{u}^{+p} dx \right) \leq 0.$$

Comme  $\lambda_1(b_\infty, a) > 0$  et  $a > 0$  on obtient finalement que  $\tilde{u}^+ = 0$  presque partout sur  $\mathbb{R}^N$ , ce qui contredit (1.10). Nous avons, ainsi, démontré que  $J$  est coercive.

(iii) Par hypothèse, nous avons  $\lambda_1(b_0, a) < 0$ . Alors il existe  $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  (on peut supposer que  $\phi \geq 0$ ) et  $\epsilon > 0$  tels que

$$\| \phi \|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \int_{\{\phi > 0\}} b_0(x)\phi^p dx < -\epsilon.$$

De plus, en utilisant ( $\mathcal{H}'_e 3$ ) et le lemme de Fatou on obtient

$$\frac{1}{p} \int_{\{\phi > 0\}} b_0(x)\phi^p dx \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \int_{\{\phi \neq 0\}} \frac{F(x, t^{\frac{1}{p}}\phi)}{t} dx.$$

Donc, pour  $t$  suffisamment petit ( $t > 0$ ) on arrive à

$$\frac{t}{p} \int_{\{\phi > 0\}} b_0(x)\phi^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} F(x, t^{\frac{1}{p}}\phi) dx + \frac{\epsilon t}{p}.$$

Il en résulte que  $J(t^{\frac{1}{p}}\phi) < 0$ .

Finalement, en appliquant un résultat classique d'optimisation, on peut conclure qu'il existe bien une fonction  $u_0 \not\equiv 0$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  telle que

$$J(u_0) = \inf_{u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} J(u).$$

Et d'après l'hypothèse ( $\mathcal{H}_e 1$ ) on a  $J$  qui est  $C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ , ainsi  $J'(u_0) = 0$  ce qui correspond exactement à la formulation variationnelle de ( $\mathcal{E}$ ).

En ce qui concerne la démonstration de la seconde partie du théorème, considérons  $u_0^+ = \max(u_0, 0)$  où  $u_0$  est une solution de ( $\mathcal{E}$ ) définie comme précédemment. On peut alors écrire

$$J(u_0^+) - J(u_0) = \int_{\{u_0 \leq 0\}} \left( -\frac{1}{p} |\nabla u_0|^p + F(x, u_0) \right) dx.$$

D'après l'hypothèse  $(\mathcal{H}_e1)$ , nous avons  $F(x, u) = f(x, 0)u$  pour tout  $u \leq 0$ , donc

$$J(u_0^+) - J(u_0) \leq \int_{\{u_0 \leq 0\}} f(x, 0)u_0 dx.$$

Or  $f(x, 0) \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^N$  et par conséquent

$$J(u_0^+) \leq J(u_0).$$

Cela signifie que  $u_0^+$  est aussi un minimisant de la fonction d'énergie  $J$ , autrement dit  $u_0^+$  est solution de  $(\mathcal{E})$ .

Ainsi, nous avons prouvé l'existence d'une solution positive (au sens large) non triviale du problème  $(\mathcal{E})$ , appelons  $u$  cette solution ( $u \geq 0$ ).

Dans l'article de A. Bechah [3], il est prouvé, par une méthode de "bootstrap" que  $u \in L^\tau(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $\tau \in \left[\frac{Np}{N-p}, +\infty\right)$ . De plus, en utilisant les inégalités de type J. Serrin [12] et le théorème de régularité de P. Tolksdorf [14], nous obtenons que pour tout  $r > 0$ ,  $u \in C^{1,\alpha}(B_r)$  où  $\alpha = \alpha(r) > 0$ .

Comme  $u \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$  sur  $\mathbb{R}^N$  nous avons, d'après  $(\mathcal{H}_e5)$

$$\frac{f(x, u)}{u^{p-1}} \geq \frac{f(x, \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})}{\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-1}},$$

donc  $f(x, u) \geq -Mu^{p-1}$  avec  $M = \|b_\infty\|_\infty + 1 > 0$ . Nous obtenons, en fait, au sens des distributions, l'inégalité suivante

$$-\Delta_p u + Mu^{p-1} \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N,$$

ce qui nous permet finalement d'appliquer le Principe du Maximum Fort de Vázquez (Théorème 5 [15]). Ceci achève la preuve de ce théorème car nous obtenons une solution régulière de  $(\mathcal{E})$  strictement positive sur tout  $\mathbb{R}^N$ .

◆

### 1.2.2 Unicité de la solution de l'équation.

Nous avons vu dans la sous-section précédente l'existence de solution positive de  $(\mathcal{E})$  sous certaines hypothèses, étudions maintenant ce qu'il en est de l'unicité.

**Théorème 1.2** *Supposons que les hypothèses  $(\mathcal{H}_e1)$  et  $(\mathcal{H}_e5)$  sont satisfaites. Si  $u_1, u_2 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$  ( $\alpha > 0$ ) sont deux solutions de  $(\mathcal{E})$  strictement positives sur  $\mathbb{R}^N$  alors  $u_1 = u_2$ .*

Preuve du théorème 1.2

Soit  $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$  une solution strictement positive de  $(\mathcal{E})$ . Si on pose  $v = u^p$ , on peut écrire que  $v$  est une solution strictement positive de

$$(\mathcal{E}') \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p v^{\frac{1}{p}} = f(x, v^{\frac{1}{p}}) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} v(x) = 0 \end{array} \right.$$

Pour tout  $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ , notons  $w = \frac{1}{p} \frac{\zeta}{v} v^{\frac{1}{p}}$  qui est dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  puisque  $v > 0$  sur  $\mathbb{R}^N$ . En choisissant  $w$  comme fonction test, nous obtenons pour tout  $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} -\Delta_p v^{\frac{1}{p}} \frac{\zeta}{v} v^{\frac{1}{p}} dx = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, v^{\frac{1}{p}}) \frac{\zeta}{v} v^{\frac{1}{p}} dx. \quad (1.11)$$

Considérons la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla v^{\frac{1}{p}} \right|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, v^{\frac{1}{p}}) dx$$

qui est définie sur l'ensemble ouvert

$$\overset{o}{V}_+ := \left\{ w : \mathbb{R}^N \rightarrow (0, \infty) \text{ tels que } w^{\frac{1}{p}} \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^0(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Nous pouvons ré-écrire l'égalité (1.11) ainsi

$$J'(v)\zeta = 0 \quad \text{pour tout } \zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

De plus grâce à l'hypothèse  $(\mathcal{H}_e5)$  et au lemme 1 de Díaz-Saa dans [8] (voir aussi l'appendice dans [11]), la fonctionnelle  $J$  est strictement convexe et possède au plus un point critique qui fait le minimum de  $J$  sur  $\overset{o}{V}_+$ . Ce qui signifie que le problème  $(\mathcal{E}')$  et par conséquent  $(\mathcal{E})$  possède au plus une solution. ◆

### 1.2.3 Condition nécessaire d'existence.

Pour préciser un peu plus le théorème d'existence, énonçons le résultat suivant traduisant le fait que les conditions  $\lambda_1(b_\infty, a) > 0$  et  $\lambda_1(b_0, a) < 0$  sont nécessaires pour l'existence de la solution de  $(\mathcal{E})$ .

$$(\mathcal{E}) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p u = f(x, u) \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{array} \right.$$

Nous détaillerons suffisamment les preuves pour rendre cette partie plus indépendante.

**Théorème 1.3** *On suppose que les hypothèses  $(\mathcal{H}_e1) - (\mathcal{H}_e5)$  sont satisfaites. Si le problème  $(\mathcal{E})$  admet une solution strictement positive dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$  ( $0 < \alpha < 1$ ), alors il existe une fonction poids  $a$  telle que  $\lambda_1(b_\infty, a) > 0$  et  $\lambda_1(b_0, a) < 0$ .*



Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, définissons l'ensemble  $\Omega_k$  avec  $k > 0$ ,

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } u(x) < k\phi(x)\}$$

et les fonctions  $\Theta_k$ ,  $\hat{\Theta}_k$ ,  $\beta_k$  et  $\hat{\beta}_k$ .

$$\Theta_k(R) = \int_{B_R \cap \Omega_k} \left\{ k^p |\nabla \phi|^p + (p-1) \left( \frac{k\phi}{u} \right)^p |\nabla u|^p - pk^p \nabla \phi \nabla u |\nabla u|^{p-2} \left( \frac{\phi}{u} \right)^{p-1} \right\} dx, \quad (1.12)$$

$$\hat{\Theta}_k(R) = \int_{B_R \cap \Omega_k} \left\{ |\nabla u|^p + (p-1) \left( \frac{u}{\phi} \right)^p |\nabla \phi|^p - p \nabla u \nabla \phi |\nabla \phi|^{p-2} \left( \frac{u}{\phi} \right)^{p-1} \right\} dx, \quad (1.13)$$

$$\beta_k(R) = \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} \frac{(k\phi)^p}{u^{p-1}} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad \hat{\beta}_k(R) = \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} \frac{u^p}{\phi^{p-1}} |\nabla \phi|^{p-2} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (1.14)$$

$$\tilde{\Theta}_k(R) = \Theta_k(R) + \hat{\Theta}_k(R) \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}_k(R) = \beta_k(R) + \hat{\beta}_k(R). \quad (1.15)$$

**Lemme 1.3** *On suppose que  $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  est solution de  $(\mathcal{E})$  ( ou de  $(\mathcal{V}_p)$  ). Alors pour  $k$  fixé*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} u |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

Preuve du lemme 1.3

Nous allons procéder à une démonstration par l'absurde, supposons qu'il existe une suite  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui tend vers l'infini telle que

$$\lim_{R_n \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_{R_n} \cap \Omega_k} u |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} dS = L \neq 0,$$

prenons par exemple  $L > 0$ . C'est-à-dire qu'il existe un  $\epsilon > 0$  et  $n_0$  assez grand tel que nous ayons pour tout  $n \geq n_0$

$$\int_{\partial B_{R_n} \cap \Omega_k} u |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} dS \geq \epsilon.$$

Comme

$$\int_{\partial B_{R_n} \cap \Omega_k} u |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} dS \leq \int_{\partial B_{R_n} \cap \Omega_k} \left| u |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} \right| dS \leq \int_{\partial B_{R_n}} \left| u |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} \right| dS,$$

par l'inégalité de Hölder nous obtenons pour tout  $n \geq n_0$

$$0 < \epsilon \leq \left( \frac{1}{R_n^{\frac{p}{p'}}} \int_{\partial B_{R_n}} |u|^p dS \right)^{\frac{1}{p}} \left( R_n \int_{\partial B_{R_n}} |\nabla u|^p dS \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_{R_n}} |u|^p dS &\leq \left( \int_{\partial B_{R_n}} |u|^{\frac{Np}{N-p}} dS \right)^{\frac{N-p}{N}} \left( \int_{\partial B_{R_n}} 1 dS \right)^{\frac{p}{N}} \\ &\leq K R_n^{\frac{(N-1)p}{N}} \left( \int_{\partial B_{R_n}} |u|^{\frac{Np}{N-p}} dS \right)^{\frac{N-p}{N}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{R_n^{\frac{p}{p'}}} \int_{\partial B_{R_n}} |u|^p dS \leq K \left( R_n \int_{\partial B_{R_n}} |u|^{\frac{Np}{N-p}} dS \right)^{\frac{N-p}{N}}$$

car  $\frac{(N-1)p}{N} + \frac{p-N}{N} - \frac{p}{p'} = 0$ . Ainsi,

$$0 < \frac{\epsilon}{K} \leq \left( R_n \int_{\partial B_{R_n}} |u|^{\frac{Np}{N-p}} dS \right)^{\frac{N-p}{N}} \left( R_n \int_{\partial B_{R_n}} |\nabla u|^p dS \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Par suite, on peut affirmer qu'il existe  $\eta, \eta' > 0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$

$$R_n \int_{\partial B_{R_n}} |u|^{\frac{Np}{N-p}} dS \geq \eta \quad \text{ou} \quad R_n \int_{\partial B_{R_n}} |\nabla u|^p dS \geq \eta'. \quad (1.16)$$

D'autre part,  $\nabla u$  appartenant à  $(L^p(\mathbb{R}^N))^N$  et  $u$  appartenant à  $L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N)$  implique que

$$\lim_{R_n \rightarrow +\infty} \int_{R_n}^{2R_n} \int_{\partial B_{R_n}} \left( |\nabla u|^p + |u|^{\frac{Np}{N-p}} \right) dS dr = 0$$

ce qui contredit les inégalités (1.16). En effet, d'après (1.16) et le théorème de la moyenne du calcul intégral, nous avons pour tout  $n \geq n_0$

$$\int_{R_n}^{2R_n} \int_{\partial B_{R_n}} \left( |\nabla u|^p + |u|^{\frac{Np}{N-p}} \right) dS dr \geq \min(\eta, \eta') > 0.$$

Finalement, nous avons montré que  $L = 0$ . ◆

**Lemme 1.4** *On suppose que  $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$  solution strictement positive de ( $\mathcal{E}$ ) et  $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$  solution strictement positive de ( $\mathcal{V}_p$ ). Alors pour tout  $R > 0$  et  $k$  fixé,  $\Theta_k$  est non décroissante et satisfait  $\Theta_k(R) \geq 0$ .*

*De plus, si  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \Theta_k(R) = 0$  alors  $u = k\phi$  sur  $\Omega_k$ .*

Preuve du lemme 1.4

Rappelons tout d'abord ce qu'est  $\Theta_k$  :

$$\Theta_k(R) = \int_{B_R \cap \Omega_k} \left\{ k^p |\nabla \phi|^p + (p-1) \left( \frac{k\phi}{u} \right)^p |\nabla u|^p - pk^p \nabla \phi \nabla u |\nabla u|^{p-2} \left( \frac{\phi}{u} \right)^{p-1} \right\} dx.$$

De façon évidente nous pouvons écrire

$$\nabla(k\phi)\nabla u|\nabla u|^{p-2}\left(\frac{k\phi}{u}\right)^{p-1} \leq |\nabla(k\phi)||\nabla u|^{p-1}\left(\frac{k\phi}{u}\right)^{p-1}. \quad (1.17)$$

En utilisant l'inégalité de Young on obtient

$$p\nabla(k\phi)\nabla u|\nabla u|^{p-2}\left(\frac{k\phi}{u}\right)^{p-1} \leq |\nabla(k\phi)|^p + (p-1)|\nabla u|^p\left(\frac{k\phi}{u}\right)^p. \quad (1.18)$$

On constate ainsi que l'intégrande de  $\Theta_k(R)$  est positive ou nulle, il s'en suit que  $\Theta_k$  est croissante et  $\Theta_k(R) \geq 0$ .

Supposons maintenant que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \Theta_k(R) = 0$ ,  $\Theta_k$  étant croissante on a pour tout  $R > 0$

$$\int_{B_R \cap \Omega_k} \left( |\nabla(k\phi)|^p - (p-1)|\nabla u|^p \left(\frac{k\phi}{u}\right)^p - p\nabla(k\phi)\nabla u|\nabla u|^{p-2} \left(\frac{k\phi}{u}\right)^{p-1} \right) dx = 0.$$

Donc presque partout sur  $\Omega_k$  on a

$$|\nabla(k\phi)|^p - (p-1)|\nabla u|^p \left(\frac{k\phi}{u}\right)^p - p\nabla(k\phi)\nabla u|\nabla u|^{p-2} \left(\frac{k\phi}{u}\right)^{p-1} = 0 \quad (1.19)$$

et par (1.17) on obtient presque partout sur  $\Omega_k$

$$|\nabla(k\phi)|^p - (p-1)|\nabla u|^p \left(\frac{k\phi}{u}\right)^p - p|\nabla(k\phi)||\nabla u|^{p-1} \left(\frac{k\phi}{u}\right)^{p-1} = 0.$$

On définit  $N := \left\{ x \in \Omega_k \text{ tels que } \frac{k\phi}{u}|\nabla u| = 0 \right\} \subset \Omega_k$ .

Il est clair que presque partout sur  $N$

$$\frac{k\phi}{u}\nabla u = \nabla(k\phi) = 0. \quad (1.20)$$

D'autre part, presque partout sur  $N^c$  on a  $|\nabla(k\phi)| = \frac{k\phi}{u}|\nabla u|$  et en introduisant ceci dans (1.19) on arrive à

$$\frac{k\phi}{u}\nabla u = \nabla(k\phi) \quad \text{presque partout sur } N^c. \quad (1.21)$$

Ainsi par (1.20) et (1.21) on obtient  $\frac{k\phi}{u}\nabla u = \nabla(k\phi)$  presque partout sur  $\Omega_k$  ce qui signifie que  $\nabla\left(\frac{k\phi}{u}\right) = 0$  presque partout sur  $\Omega_k$ .

Finalement, il existe  $C_i$  sur chaque composante connexe  $\Omega^i$  de  $\Omega_k$  telle que  $u = C_i\phi$ . Mais, comme sur le bord de  $\Omega_k$  nous avons  $u = k\phi$  et les fonctions  $u$  et  $\phi$  sont continues sur  $\mathbb{R}^N$  alors tous les  $C_i = k$ , c'est-à-dire  $u = k\phi$  sur tout  $\Omega_k$ .



**Remarque 1.4** *Le lemme reste vrai pour  $\hat{\Theta}_k$  et la démonstration est identique à celle faite pour  $\Theta_k$ .*

**Remarque 1.5** *La preuve du lemme précédent sera reprise de façon un peu plus fine dans la démonstration de l'identité de Picone du chapitre suivant.*

**Lemme 1.5** *On suppose que  $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  et  $\phi(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}^N$ . Alors pour tout  $R_1 > 0$  fixé on a*

$$\int_{R_1}^{+\infty} \frac{dr}{(H_k(r))^{\frac{p'}{p}}} = +\infty \quad \text{où} \quad H_k(r) = \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} \phi(S)^p dS.$$

Preuve du lemme 1.5

On utilise l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\begin{aligned} H_k(r) &= \int_{\partial B_r \cap \Omega_k} \phi(S)^p dS \leq \int_{\partial B_r} \phi(S)^p dS \\ &\leq \left( \int_{\partial B_r} \phi(S)^{\frac{Np}{N-p}} dS \right)^{\frac{N-p}{N}} \left( \int_{\partial B_r} 1 dS \right)^{\frac{p}{N}} \\ &\leq K r^{\frac{(N-1)p}{N}} I(r)^{\frac{N-p}{N}} \end{aligned}$$

$$\text{où } I(r) = \int_{\partial B_r} \phi(S)^{\frac{Np}{N-p}} dS.$$

Donc

$$\int_{R_1}^R \frac{dr}{H_k(r)^{\frac{p'}{p}}} \geq \left( \frac{1}{K} \right)^{\frac{p'}{p}} \int_{R_1}^R r^{-\frac{p'(N-1)}{N}} I(r)^{-\frac{p'(N-p)}{Np}} dr \quad (1.22)$$

Nous allons minorer le second membre de l'inégalité ci-dessus. Par Hölder on a

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{R}{R_1} \right) &= \int_{R_1}^R \frac{1}{r} I(r)^\delta I(r)^{-\delta} dr \\ &\leq \left( \int_{R_1}^R I(r)^{\delta q'} dr \right)^{\frac{1}{q'}} \left( \int_{R_1}^R r^{-q} I(r)^{-\delta q} dr \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

On choisit  $q = \frac{(N-1)p}{N(p-1)}$  et  $\delta = \frac{N-p}{(N-1)p} = \frac{1}{q'}$  et on arrive à

$$\log \left( \frac{R}{R_1} \right) \leq \left( \int_{R_1}^R I(r) dr \right)^{\frac{1}{q'}} \left( \int_{R_1}^R r^{-\frac{p'(N-1)}{N}} I(r)^{-\frac{p'(N-p)}{Np}} dr \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.23)$$

Finalement grâce à (1.22) et (1.23) on conclut

$$\int_{R_1}^{+\infty} \frac{dr}{H_k(r)^{\frac{p'}{p}}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{R_1}^R \frac{dr}{H_k(r)^{\frac{p'}{p}}} \geq K' \lim_{R \rightarrow \infty} \log \frac{R}{R_1} = +\infty.$$



Nous pouvons à présent aborder la preuve du théorème principal de cette sous-section.

Preuve du théorème 1.3

Dans tout ce qui suit on notera  $u$  une solution strictement positive dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$  de  $(\mathcal{E})$  et  $\phi$  une fonction propre associée à la première valeur propre  $\lambda_1(b_\infty, a)$ . Commençons par montrer que, sous les hypothèses du théorème,  $\lambda_1(b_0, a) < 0$ . Pour cela, nous considérons  $u$ , une solution strictement positive de  $(\mathcal{E})$  sur  $\mathbb{R}^N$ ; par définition de  $\lambda_1(b_0, a)$  nous avons

$$\lambda_1(b_0, a) \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^p dx \leq \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p - \int_{\mathbb{R}^N} b_0(x)u^p dx. \quad (1.24)$$

Or  $b_0(x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x, u)}{u^{p-1}}$  et comme l'application  $r \mapsto \frac{f(x, r)}{r^{p-1}}$  est strictement décroissante pour  $r > 0$ , ( $\mathcal{H}_\varepsilon 5$ ), nous obtenons que

$$f(x, u) < b_0(x)u^{p-1} \text{ p. p. sur } \mathbb{R}^N. \quad (1.25)$$

De plus,  $u$  est solution de  $(\mathcal{E})$  et par les inégalités (1.24) et (1.25) nous arrivons à

$$\lambda_1(b_0, a) \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u)u dx - \int_{\mathbb{R}^N} b_0(x)u^p dx < 0.$$

La fonction poids  $a$  étant strictement positive p. p. sur  $\mathbb{R}^N$ , nous en déduisons que  $\lambda_1(b_0, a) < 0$ .

Maintenant, nous montrons que  $\lambda_1(b_\infty, a) > 0$ . Pour cela choisissons comme fonctions test  $\eta = \frac{u^p - k^p \phi^p}{u^{p-1}}$  dans l'équation  $(\mathcal{E})$  et  $\zeta = \frac{u^p - k^p \phi^p}{(k\phi)^{p-1}}$  dans  $(\mathcal{V}_p)$  puis en intégrant sur  $B_R \cap \Omega_k$ , nous arrivons à

$$\begin{aligned} & \int_{B_R \cap \Omega_k} \left( -\Delta_p u \frac{u^p - k^p \phi^p}{u^{p-1}} + -\Delta_p(k\phi) \frac{u^p - k^p \phi^p}{(k\phi)^{p-1}} \right) dx \\ &= \int_{B_R \cap \Omega_k} \left( f(x, u) \frac{u^p - k^p \phi^p}{u^{p-1}} - (b_\infty(x) + \lambda_1(b_\infty, a)a(x)) |k\phi|^{p-2} k\phi \frac{u^p - k^p \phi^p}{(k\phi)^{p-1}} \right) dx. \end{aligned}$$

On intègre par parties et on obtient,

$$\begin{aligned} & \int_{B_R \cap \Omega_k} \left( |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \left( \frac{u^p - k^p \phi^p}{u^{p-1}} \right) - |\nabla(k\phi)|^{p-2} \nabla(k\phi) \nabla \left( \frac{u^p - k^p \phi^p}{(k\phi)^{p-1}} \right) \right) dx \\ & - \int_{\partial(B_R \cap \Omega_k)} \left( |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot n \left( u - \frac{k^p \phi^p}{u^{p-1}} \right) - |\nabla(k\phi)|^{p-2} \nabla(k\phi) \cdot n \left( \frac{u^p}{(k\phi)^{p-1}} - k\phi \right) \right) dx \\ &= \int_{B_R \cap \Omega_k} \left( \frac{f(x, u)}{u^{p-1}} - (b_\infty(x) + \lambda_1(b_\infty, a)a(x)) \right) (u^p - k^p \phi^p) dx. \end{aligned}$$

Posons

$$A_R^k := \int_{B_R \cap \Omega_k} \left( \frac{f(x, u)}{u^{p-1}} - (b_\infty(x) + \lambda_1(b_\infty, a)a(x)) \right) (u^p - k^p \phi^p) dx$$

et regardons ce que deviennent les termes de gauche. Comme

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{u^p - k^p \phi^p}{u^{p-1}} \right) &= \nabla u - p k^p \frac{\phi^{p-1}}{u^{p-1}} \nabla \phi + (p-1) \nabla u k^p \frac{\phi^p}{u^p} \\ \text{et } \nabla \left( \frac{u^p - k^p \phi^p}{(k\phi)^{p-1}} \right) &= -k \nabla \phi + p \frac{u^{p-1}}{(k\phi)^{p-1}} \nabla u - (p-1) \frac{k \nabla \phi u^p}{(k\phi)^p}, \end{aligned}$$

la première intégrale vaut  $\tilde{\Theta}_k(R)$  d'après nos notations (1.12) et (1.13). Reste à voir maintenant ce que valent les termes résiduels sur le bord de  $B_R \cap \Omega_k$ .

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial(B_R \cap \Omega_k)} \left( |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot n \left( u - \frac{k^p \phi^p}{u^{p-1}} \right) - |\nabla(k\phi)|^{p-2} \nabla(k\phi) \cdot n \left( \frac{u^p}{(k\phi)^{p-1}} - k\phi \right) \right) dx \\ &= \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} \frac{(k\phi)^p}{u^{p-1}} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} \frac{u^p}{\phi^{p-1}} |\nabla \phi|^{p-2} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \\ &+ \int_{B_R \cap \partial \Omega_k} \frac{(k\phi)^p}{u^{p-1}} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{B_R \cap \partial \Omega_k} \frac{u^p}{\phi^{p-1}} |\nabla \phi|^{p-2} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \\ &- \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} |\nabla u|^{p-2} u \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} k^p |\nabla \phi|^{p-2} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \\ &- \int_{B_R \cap \partial \Omega_k} |\nabla u|^{p-2} u \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{B_R \cap \partial \Omega_k} k^p |\nabla \phi|^{p-2} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS. \end{aligned}$$

On reconnaît dans les intégrales ci-dessus le terme  $\beta_k(R) + \hat{\beta}_k(R) = \tilde{\beta}_k(R)$  (1.14). De plus, sur le bord de  $\Omega_k$  on a  $u = k\phi$  donc

$$\begin{aligned} & \int_{B_R \cap \partial \Omega_k} \frac{(k\phi)^p}{u^{p-1}} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{B_R \cap \partial \Omega_k} |\nabla u|^{p-2} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \\ \text{et } & \int_{B_R \cap \partial \Omega_k} \frac{u^p}{\phi^{p-1}} |\nabla \phi|^{p-2} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS - \int_{B_R \cap \partial \Omega_k} k^p |\nabla \phi|^{p-2} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = 0. \end{aligned}$$

Après ces calculs on obtient,

$$\tilde{\Theta}_k(R) + \tilde{\beta}_k(R) - \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} u |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} k^p \phi |\nabla \phi|^{p-2} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = A_R^k. \quad (1.26)$$

Nous choisissons aussi  $k$  de telle sorte que pour tout  $R > 0$  on ait  $|\Omega_k \cap B_R| \neq 0$

Dans la suite de cette démonstration nous étudions ce qui se passe pour le membre de gauche de (1.26) suivant le signe de  $A_R^k$ .

Premièrement, si on suppose que pour tout  $k > 0$  il existe  $R > 0$  tel que  $A_R^k \geq 0$  ce qui se traduit par :

$$\forall k > 0 \quad \exists x_0 \in B_R \quad \text{et} \quad R' \in (0, R) \quad \text{tel que}$$

$$\left( \frac{f(x, u)}{u^{p-1}} - (b_\infty + \lambda_1(b_\infty, a)a) \right) (u^p - k^p \phi^p) \geq 0 \quad \text{p. p. sur } B(x_0, R') \cap \Omega_k$$

avec  $B(x_0, R') \cap \Omega_k$  de mesure non nulle. Donc,

$$\frac{f(x, u)}{u^{p-1}} - (b_\infty + \lambda_1(b_\infty, a)a) \leq 0 \quad \text{p. p. sur } B(x_0, R') \cap \Omega_k$$

et  $\lambda_1(b_\infty, a) > 0$  car  $b_\infty u^{p-1} < f(x, u)$  et  $a > 0$  p. p. sur  $\mathbb{R}^N$ .

Ainsi, dans ce cas  $\lambda_1(b_\infty, a) > 0$ ; il reste à voir ce qui se passe dans l'autre cas.

Si on suppose qu'il existe  $k > 0$  tel que pour tout  $R > R_0$   $A_R^k < 0$ , ce qui signifie :

$$\exists k > 0 \quad \text{tel que pour tout } R > R_0$$

$$\tilde{\Theta}_k(R) + \tilde{\beta}_k(R) - \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} u |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} k^p \phi |\nabla \phi|^{p-2} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS < 0. \quad (1.27)$$

On déduit directement du lemme 1.4 que  $\tilde{\Theta}_k(R)$  a une limite dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  quand  $R$  tend vers l'infini. D'après l'égalité (1.26) et l'inégalité (1.27), on peut dire que  $\tilde{\beta}_k(R)$  possède une limite dans  $\mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$

• Supposons que  $-\infty < \lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_k(R) < 0$ .

En utilisant (1.27) et le lemme 1.3 on a  $\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{\Theta}_k(R) < \infty$ . Par l'inégalité de Young on obtient

$$\text{pour tout } \mu > 1 \quad \nabla u \nabla \phi |\nabla \phi|^{p-2} \left( \frac{u}{\phi} \right)^{p-1} \leq \frac{\mu^p}{p} |\nabla u|^p + \frac{p-1}{p\mu^{p'}} |\nabla \phi| \left( \frac{u}{\phi} \right)^p$$

et

$$\text{pour tout } \mu > 1 \quad \nabla(k\phi) \nabla u |\nabla u|^{p-2} \left( \frac{k\phi}{u} \right)^{p-1} \leq \frac{\mu^p}{p} |\nabla(k\phi)|^p + \frac{p-1}{p\mu^{p'}} |\nabla u| \left( \frac{k\phi}{u} \right)^p$$

Par conséquent, pour tout  $\mu > 1$

$$\Theta_k(R) + (\mu^p - 1) \int_{B_R \cap \Omega_k} k^p |\nabla \phi|^p dx \geq \left( 1 - \frac{1}{\mu^{p'}} \right) (p-1) \underbrace{\int_{B_R \cap \Omega_k} \left( \frac{k\phi}{u} \right)^p |\nabla u|^p dx}_{=\Gamma_k(R)}.$$

De même, pour tout  $\mu > 1$

$$\hat{\Theta}_k(R) + (\mu^p - 1) \int_{B_R \cap \Omega_k} |\nabla u|^p dx \geq \left( 1 - \frac{1}{\mu^{p'}} \right) (p-1) \underbrace{\int_{B_R \cap \Omega_k} \left( \frac{u}{\phi} \right)^p |\nabla \phi|^p dx}_{=\hat{\Gamma}_k(R)}.$$

En posant  $\tilde{\Gamma}_k(R) = \Gamma_k(R) + \hat{\Gamma}_k(R)$  on a

$$\tilde{\Theta}_k(R) + (\mu^p - 1) \left( \int_{B_R \cap \Omega_k} k^p |\nabla \phi|^p dx + \int_{B_R \cap \Omega_k} |\nabla u|^p dx \right) \geq \left( 1 - \frac{1}{\mu^{p'}} \right) (p-1) \tilde{\Gamma}_k(R). \quad (1.28)$$

Donc  $\tilde{\Gamma}_k(R)$  est convergente car  $\tilde{\Gamma}_k$  est croissante et bornée. Ainsi on peut trouver  $\tau \in (0, 1)$  et  $R_1$  assez grand tels que

$$\tau \tilde{\Gamma}_k(R) \leq -\tilde{\beta}_k(R) \quad \text{pour tout } R > R_1.$$

• Supposons que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_k(R) = -\infty$ .

Grâce à l'inégalité (1.27) on a

$$\tilde{\Theta}_k(R) \leq -\tilde{\beta}_k(R) + Cte$$

et d'après l'inégalité (1.28) nous avons pour tout  $\mu > 1$

$$(p-1) \left(1 - \frac{1}{\mu^{p'}}\right) \tilde{\Gamma}_k(R) \leq \tilde{\Theta}_k(R) + (\mu^p - 1) \left( \int_{B_R \cap \Omega_k} |\nabla(k\phi)|^p dx + \int_{B_R \cap \Omega_k} |\nabla u|^p dx \right).$$

Ainsi, nous arrivons au même résultat que précédemment : on peut trouver  $\tau \in (0, 1)$  et  $R_1$  assez grand tels que

$$\tau \tilde{\Gamma}_k(R) \leq -\tilde{\beta}_k(R) \quad \text{pour tout } R \geq R_1. \quad (1.29)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} -\tilde{\beta}_k(R) &\leq \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} \frac{(k\phi)^p}{u^{p-1}} |\nabla u|^{p-1} dS + \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} \frac{u^p}{\phi^{p-1}} |\nabla \phi|^{p-1} dS \\ &\leq \left( \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} (k\phi)^p dS \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} \left( \frac{k\phi}{u} \right)^p |\nabla u|^p dS \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\quad + \left( \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} u^p dS \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} \left( \frac{u}{\phi} \right)^p |\nabla \phi|^p dS \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq k H_k(R)^{\frac{1}{p}} \Gamma'_k(R)^{\frac{1}{p'}} + \hat{H}_k(R)^{\frac{1}{p}} \hat{\Gamma}'_k(R)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq (k+1) \tilde{H}_k(R)^{\frac{1}{p}} \tilde{\Gamma}'_k(R)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

avec  $H_k(R) = \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} (k\phi)^p dS$ ,  $\hat{H}_k(R) = \int_{\partial B_R \cap \Omega_k} u^p dS$  et  $\tilde{H}_k(R) = H_k(R) + \hat{H}_k(R)$ . Il est à noter aussi que l'application  $r \mapsto \Gamma(r)$  est croissante et donc pour tout  $R > 0$   $\Gamma'(R)$  est positif; il en est de même pour  $\hat{\Gamma}'(R)$  et  $\tilde{\Gamma}'(R)$ .

Par (1.29), on obtient que pour  $R_1$  assez grand, on peut trouver  $\tau \in (0, 1)$  tel que

$$\tilde{\Gamma}'_k(R) \geq \left(\frac{\tau}{2}\right)^{p'} \frac{\tilde{\Gamma}_k(R)^{p'}}{\tilde{H}_k(R)^{\frac{p'}{p}}}$$

en intégrant sur  $(R_1, R)$  on trouve

$$\frac{1}{\tilde{\Gamma}_k(R)^{p'-1}} - \frac{1}{\tilde{\Gamma}_k(R_1)^{p'-1}} + K \int_{R_1}^R \frac{dr}{\tilde{H}_k(r)^{\frac{p'}{p}}} \leq 0.$$



En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus on aboutit à une contradiction du lemme 1.5. Donc  $\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_k(R) = 0$ , ce qui implique par (1.27) et le lemme 1.3 que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{\Theta}_k(R) = 0$ . Et finalement, au vu de la deuxième partie du lemme 1.4 on conclut que  $u = k\phi$  donc

$$-\Delta_p u = b_\infty(x)u^{p-1} + \lambda_1(b_\infty, a)au^{p-1} \quad \text{pour } x \in \Omega_k.$$

De plus,  $-\Delta_p u = f(x, u)$  sur  $\mathbb{R}^N$ ,  $b_\infty(x)u^{p-1} < f(x, u)$  et  $a > 0$  p. p. sur  $\mathbb{R}^N$  alors  $\lambda_1(b_\infty, a) > 0$ . ◆

### 1.3 Étude du système (S).

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'existence et l'unicité de la solution non triviale du système suivant

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, v) & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = \frac{\partial H}{\partial v}(x, u, v) & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} v(x) \end{cases}$$

avec  $1 < p < N$  et  $1 < q < N$ , qui est une généralisation de l'étude qui a été faite dans la première partie.

Affirmer que le système (S) admet une solution revient à dire qu'il existe un couple de fonctions, non triviales,  $(u, v)$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  satisfaisant au sens faible le système (S).

Pour cela, nous allons faire les hypothèses sur la fonction  $H$  qui sont une adaptation de celles énoncées pour l'équation (E).

(H<sub>s</sub>,1) On suppose que la fonction  $H$  appartient à  $C^1(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \times [0, +\infty))$  et on prolonge  $H(x, \cdot, \cdot)$  de la manière suivante :

$$\left. \begin{array}{l} H(x, u, v) = H(x, 0, v) \text{ pour } u \leq 0 \\ H(x, u, v) = H(x, u, 0) \text{ pour } v \leq 0 \\ H(x, 0, 0) = 0 \end{array} \right\} \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^N;$$

(H<sub>s</sub>,2) Il existe  $A \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $B \in L^{p_2}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $C \in L^{p_3}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  avec  $p_1 = \frac{Np}{Np - p_0(N - p)}$ ,  $p_2 = \frac{N}{\alpha + \beta + 2}$  et  $p_3 = \frac{Nq}{Nq - q_0(N - q)}$  telles que

$$\left| \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, v) \right| \leq A(x)u^{p_0-1} + B(x)u^\alpha v^{\beta+1} \text{ pour tout } u, v \geq 0,$$

$$\left| \frac{\partial H}{\partial v}(x, u, v) \right| \leq C(x)v^{q_0-1} + B(x)u^{\alpha+1}v^\beta \text{ pour tout } u, v \geq 0,$$

où  $1 \leq p_0 < p$ ,  $1 \leq q_0 < q$ ,  $\frac{\alpha+1}{p} + \frac{\beta+1}{q} = 1$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\alpha + \beta + 2 < N$ .

Nous définissons la fonction

$$t \longmapsto h(t, x, u, v) = \frac{1}{t} \left[ \frac{1}{p} \frac{\partial H}{\partial u}(x, t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v) t^{\frac{1}{p}}u + \frac{1}{q} \frac{\partial H}{\partial v}(x, t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v) t^{\frac{1}{q}}v \right].$$

( $\mathcal{H}_s3$ ) Il existe  $b_0 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(t, x, u, v)}{u^{\alpha+1}v^{\beta+1}} \geq b_0(x) \text{ uniformément pour tout } u, v \geq 0;$$

( $\mathcal{H}_s4$ ) Il existe  $b_\infty \in L^{p_2}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t, x, u, v)}{u^{\alpha+1}v^{\beta+1}} = b_\infty(x) \text{ uniformément pour tout } u, v \geq 0;$$

( $\mathcal{H}_s5$ ) La fonction  $H$  vérifie :

$$\limsup_{(u_n, v_n) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{H(x, u_n, v_n)}{u_n^{\alpha+1}v_n^{\beta+1}} \leq b_\infty(x);$$

( $\mathcal{H}_s6$ ) Nous supposons que la fonction  $(r, s) \longmapsto H(x, r^{\frac{1}{p}}, s^{\frac{1}{q}})$  est strictement concave.

**Remarque 1.6** Dire que la fonction  $g : (r, s) \longmapsto H(x, r^{\frac{1}{p}}, s^{\frac{1}{q}})$  est strictement concave, ( $\mathcal{H}_s6$ ), cela signifie que pour tout  $(r_1, s_1) \neq (r_2, s_2)$  dans  $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$  on a

$$\langle \nabla g(r_1, s_1) - \nabla g(r_2, s_2), (r_1, s_1) - (r_2, s_2) \rangle < 0$$

$$\text{avec } \nabla g(r, s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} \frac{\partial H}{\partial u}(x, r^{\frac{1}{p}}, s^{\frac{1}{q}}) / r^{\frac{p-1}{p}} \\ \frac{1}{q} \frac{\partial H}{\partial v}(x, r^{\frac{1}{p}}, s^{\frac{1}{q}}) / s^{\frac{q-1}{q}} \end{bmatrix}$$

c'est à dire que pour tout  $(r_1, s_1) \neq (r_2, s_2)$  dans  $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \left( \frac{\partial H}{\partial u}(x, r_1^{\frac{1}{p}}, s_1^{\frac{1}{q}}) / r_1^{\frac{p-1}{p}} - \frac{\partial H}{\partial u}(x, r_2^{\frac{1}{p}}, s_2^{\frac{1}{q}}) / r_2^{\frac{p-1}{p}} \right) (r_1 - r_2) \\ & + \frac{1}{q} \left( \frac{\partial H}{\partial v}(x, r_1^{\frac{1}{p}}, s_1^{\frac{1}{q}}) / s_1^{\frac{q-1}{q}} - \frac{\partial H}{\partial v}(x, r_2^{\frac{1}{p}}, s_2^{\frac{1}{q}}) / s_2^{\frac{q-1}{q}} \right) (s_1 - s_2) < 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

### 1.3.1 Existence de la solution du système.

Comme dans [10], nous définissons le problème de valeurs propres correspondant au système ( $\mathcal{S}$ ).

**Définition 1.2** Nous notons  $\lambda_1(b, a, c)$  la première valeur propre du problème

$$(\mathcal{SV}_p) \begin{cases} -\Delta_p u - (\alpha + 1)b(x)|u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta-1}v = \lambda a(x)|u|^{p-2}u \text{ sur } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v - (\beta + 1)b(x)|u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta-1}v = \lambda c(x)|v|^{q-2}v \text{ sur } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

$$\text{où } a \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad a > 0,$$

$$c \in L^{\frac{N}{q}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad c > 0 \text{ et } b \in L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

De plus, les indices vérifient  $1 < p < N$ ,  $1 < q < N$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta + 2 < N$  et  $\frac{\alpha+1}{p} + \frac{\beta+1}{q} = 1$ .

Nous obtenons, en résolvant ce problème de valeur propre (voir appendice),

$$\lambda_1(b, a, c) = \inf_{\Lambda} \left\{ \frac{1}{p} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q - \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1} dx \right\}$$

$$\text{où } \Lambda = \left\{ (u, v) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N) \text{ tels que } \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} c(x)|v|^q dx = 1 \right\}.$$

**Théorème 1.4** Supposons que les hypothèses  $(\mathcal{H}_s1) - (\mathcal{H}_s5)$  sont satisfaites. S'il existe deux fonctions poids  $a \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $c \in L^{\frac{N}{q}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  strictement positives telles que  $\lambda_1(b_\infty, a, c) > 0$  et  $\lambda_1(b_0, a, c) < 0$ . Alors le système  $(\mathcal{S})$  admet une solution non triviale dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ .

De plus, si  $(\mathcal{H}_s6)$  est vérifiée alors le problème  $(\mathcal{S})$  admet une solution strictement positive dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N) \cap C_{loc}^{1,\gamma}(\mathbb{R}^N) \times C_{loc}^{1,\delta}(\mathbb{R}^N)$ .

Preuve du théorème 1.4

$$\text{Nous définissons la fonctionnelle } J(u, v) = \frac{1}{p} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q - \int_{\mathbb{R}^N} H(x, u, v) dx$$

et nous montrons que :

(i)  $J$  est faiblement semi-continue inférieurement ;

(ii)  $J$  est coercive ;

(iii) Il existe  $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  telle que  $J(\phi) < 0$ .

(i) La fonction  $(u, v) \mapsto \frac{1}{p} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q$  est convexe continue, elle est donc faiblement sci. Et nous montrons que  $(u, v) \mapsto -\int_{\mathbb{R}^N} H(x, u, v) dx$  est faiblement sci en considérant une suite  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  faiblement convergente vers  $(u, v)$  et en écrivant

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (H(x, u_n, v_n) - H(x, u, v)) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |H(x, u_n, v_n) - H(x, u, v)| dx \\ &\leq \underbrace{\int_{B_R^c} |H(x, u_n, v_n) - H(x, u, v)| dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_{B_R} |H(x, u_n, v_n) - H(x, u, v)| dx}_{=I_2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on utilise le même raisonnement que dans le cas d'une équation pour conclure que  $J$  est faiblement sci. En effet, il résulte de  $(\mathcal{H}_s1)$ ,  $(\mathcal{H}_s2)$ , de l'inégalité de Hölder et de l'inégalité de Sobolev que

$$I_1 \leq c \left( \|A\|_{L^{p_1}(B_R^c)} (\|u_n\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{p_0} + \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{p_0}) + \|C\|_{L^{p_3}(B_R^c)} (\|v_n\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^{q_0} + \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^{q_0}) \right. \\ \left. + \|B\|_{L^{p_2}(B_R^c)} \|u_n\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha+1} \|v_n\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^{\beta+1} + \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha+1} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^{\beta+1} \right).$$

Comme  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ ,  $A \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ ,  $B \in L^{p_2}(\mathbb{R}^N)$  et  $C \in L^{p_3}(\mathbb{R}^N)$ , on peut choisir un  $R_0$  assez grand pour rendre  $I_1$  aussi petit que l'on veut pour tout  $R \geq R_0$ .

De plus, en vertu de la compacité de l'injection de Sobolev, il existe une sous-suite encore notée  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et un couple  $(\hat{u}, \hat{v}) \in L^p(B_{R_0}) \times L^q(B_{R_0})$  tels que, pour  $R_0$  fixé,

$$(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } (u, v) \text{ dans } L^p(B_{R_0}) \times L^q(B_{R_0})$$

$$|u|, |u_n| \leq \hat{u} \text{ presque partout sur } B_{R_0}$$

$$|v|, |v_n| \leq \hat{v} \text{ presque partout sur } B_{R_0}.$$

Pour plus de détails le lecteur peut se référer au livre de H. Brézis [5]. Ce qui implique, par  $(\mathcal{H}_s1)$ ,  $(\mathcal{H}_s2)$

$$H(x, u_n, v_n) \leq c (A(x)\hat{u}^{p_0} + B(x)\hat{u}^{\alpha+1}\hat{v}^{\beta+1} + C(x)\hat{v}^{q_0})$$

où le majorant est dans  $L^1(B_{R_0})$ . En appliquant le théorème de la convergence dominée, on obtient la semi-continuité faible de  $J$ .

(ii) Nous supposons qu'il existe  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  telle que

$$\|(u_n, v_n)\|_{D^{1,p} \times D^{1,q}} \rightarrow +\infty \text{ et } J(u_n, v_n) \leq C.$$

Notons  $t_n = \max \{ \|u_n\|_{D^{1,p}}^p, \|v_n\|_{D^{1,q}}^q \}$  et définissons  $u_n = t_n^{-\frac{1}{p}} \tilde{u}_n$  et  $v_n = t_n^{-\frac{1}{q}} \tilde{v}_n$ , il est clair que la suite  $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ . Il existe donc une sous-suite encore notée  $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  telle que

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n \text{ converge faiblement } \tilde{u} \text{ dans } D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad , \quad \tilde{u}_n \text{ converge fortement } \tilde{u} \text{ dans } L^p(B_R), \\ \tilde{v}_n \text{ converge faiblement } \tilde{v} \text{ dans } D^{1,q}(\mathbb{R}^N) \quad , \quad \tilde{v}_n \text{ converge fortement } \tilde{v} \text{ dans } L^q(B_R). \end{aligned}$$

Comme  $J(u_n, v_n) \leq C$  on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \|u_n\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{1}{q} \|v_n\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q - \int_{\mathbb{R}^N} H(x, u_n, v_n) dx \leq C \\ \text{et } \frac{1}{p} \|\tilde{u}_n\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{1}{q} \|\tilde{v}_n\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H(x, t_n^{-\frac{1}{p}} \tilde{u}_n, t_n^{-\frac{1}{q}} \tilde{v}_n)}{t_n} dx \leq \frac{C}{t_n}. \end{aligned}$$

Pour la suite de la démonstration, nous avons besoin le résultat intermédiaire suivant :

**Lemme 1.6** *Sous les hypothèses  $(\mathcal{H}_s1)$ ,  $(\mathcal{H}_s2)$  et  $(\mathcal{H}_s5)$  on a*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n, t_n^{\frac{1}{q}} \tilde{v}_n)}{t_n} dx \leq \int_{\{\tilde{u} > 0, \tilde{v} > 0\}} b_\infty(x) \tilde{u}^{\alpha+1} \tilde{v}^{\beta+1} dx$$

où  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  sont définis ci-dessus.

Preuve du lemme 1.6

Nous définissons comme dans l'article de P. Felmer, R.F. Manásevich et F. de Thélin [10]

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } (\tilde{u} \leq 0 \text{ ou } \tilde{v} \leq 0), (\tilde{u}_n > 0 \text{ et } \tilde{v}_n > 0)\} \\ \Omega_2 &= \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } \tilde{u}_n \leq 0\} \quad \Omega_3 = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } \tilde{u}_n > 0, \tilde{v}_n \leq 0\} \\ \Omega_4 &= \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } \tilde{u} > 0, \tilde{v} > 0, \tilde{u}_n > 0, \tilde{v}_n > 0\} \end{aligned}$$

et nous écrivons

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{H(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n, t_n^{\frac{1}{q}} \tilde{v}_n)}{t_n} dx = \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} \frac{H(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n, t_n^{\frac{1}{q}} \tilde{v}_n)}{t_n} dx.$$

Posons  $J_i^n := \int_{\Omega_i} \frac{H(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n, t_n^{\frac{1}{q}} \tilde{v}_n)}{t_n} dx$  pour  $i = 1..4$ . D'après  $(\mathcal{H}_s1)$ ,  $(\mathcal{H}_s2)$ ,

$$J_1^n \leq t_n^{\frac{p_0}{p}-1} \int_{\Omega_1} A(x) \tilde{u}_n^{p_0} dx + t_n^{\frac{q_0}{q}-1} \int_{\Omega_1} C(x) \tilde{u}_n^{q_0} dx + \int_{\Omega_1} B(x) \tilde{u}_n^{\alpha+1} \tilde{v}_n^{\beta+1} dx \quad (1.31)$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} J_1^n = 0.$$

En effet, il faut d'une part constater que les suites  $\int_{\Omega_1} A(x) \tilde{u}_n^{p_0} dx$  et  $\int_{\Omega_1} C(x) \tilde{u}_n^{q_0} dx$  sont bornés et  $p_0 < p$ ,  $q_0 < q$ . Donc les deux premiers termes de (1.31) tendent vers 0. D'autre part, la convergence presque partout dans  $\mathbb{R}^N$  de  $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  implique la convergence presque partout sur  $\Omega_1$  de  $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $(0, 0)$ . De plus, par l'hypothèse de prolongement de la fonction  $H$  par 0 pour les valeurs négatives de  $u$  et  $v$   $(\mathcal{H}_s1)$ , nous déduisons, grâce à  $(\mathcal{H}_s2)$

$$J_2^n \leq t_n^{\frac{q_0}{q}-1} \int_{\Omega_2} C(x) \tilde{v}_n^{q_0} dx \quad (1.32)$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} J_2^n = 0.$$

$$\text{De même } \lim_{n \rightarrow \infty} J_3^n = 0. \quad (1.33)$$

Enfin, d'après  $(\mathcal{H}_s5)$ , nous avons

$$\limsup_{(\phi, \psi) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{H(x, \phi, \psi)}{|\phi|^{\alpha+1} |\psi|^{\beta+1}} \leq b_\infty(x)$$

et par le lemme de Fatou

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_4} \frac{H(x, t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n, t_n^{\frac{1}{q}} \tilde{v}_n)}{t_n \tilde{u}_n^{\alpha+1} \tilde{v}_n^{\beta+1}} \tilde{u}_n^{\alpha+1} \tilde{v}_n^{\beta+1} dx \leq \int_{\Omega_4} b_\infty \tilde{u}^{\alpha+1} \tilde{v}^{\beta+1} dx \quad (1.34)$$

car  $t_n^{\frac{1}{p}} \tilde{u}_n$  et  $t_n^{\frac{1}{q}} \tilde{v}_n \rightarrow \infty$  presque partout dans  $\Omega_4$ .

Ce qui, en utilisant les résultats (1.31), (1.32), (1.33) et (1.34), démontre le lemme 1.6.  $\blacklozenge$

Comme les applications  $u \mapsto \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p$  et  $v \mapsto \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q$  sont faiblement sci, en passant à la limite inférieure (lemme 1.6), on obtient

$$\frac{1}{p} \|\tilde{u}\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{1}{q} \|\tilde{v}\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q - \int_{\{\tilde{u}>0, \tilde{v}>0\}} b_\infty \tilde{u}^{\alpha+1} \tilde{v}^{\beta+1} dx \leq 0. \quad (1.35)$$

Par définition de  $\lambda_1(b_\infty, a, c)$  on a

$$\begin{aligned} & \lambda_1(b_\infty, a, c) \left( \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \tilde{u}^p dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} c(x) \tilde{v}^q dx \right) \\ & \leq \frac{1}{p} \|\tilde{u}^+\|_{D^{1,p}}^p + \frac{1}{q} \|\tilde{v}^+\|_{D^{1,q}}^q - \int_{\mathbb{R}^N} b_\infty (\tilde{u}^+)^{\alpha+1} (\tilde{v}^+)^{\beta+1} dx. \end{aligned} \quad (1.36)$$

En mettant bout à bout les inégalités (1.35) et (1.36) on arrive à

$$\lambda_1(b_\infty, a, c) \left( \frac{1}{p} \int_{\{\tilde{u}>0\}} a(x) \tilde{u}^p dx + \frac{1}{q} \int_{\{\tilde{v}>0\}} c(x) \tilde{v}^q dx \right) \leq 0.$$

Comme  $\lambda_1(b_\infty, a, c) > 0$ ,  $a > 0$  et  $c > 0$  on obtient finalement que  $\tilde{u}^+ = 0$ ,  $\tilde{v}^+ = 0$  presque partout sur  $\mathbb{R}^N$ . C'est-à-dire, par (1.35), que  $\tilde{u} = 0$  et  $\tilde{v} = 0$  ce qui contredit le fait que  $\max\{\|\tilde{u}\|_{D^{1,p}}, \|\tilde{v}\|_{D^{1,q}}\} = 1$ . Donc  $J$  est coercive.

(iii) Comme  $\lambda_1(b_0, a, c) < 0$ , il existe  $(\phi, \psi) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  (on peut supposer que  $\phi$  et  $\psi \geq 0$ ) et  $\epsilon > 0$  tels que

$$\frac{1}{p} \|\phi\|_{D^{1,p}}^p + \frac{1}{q} \|\psi\|_{D^{1,q}}^q - \int_{\{\phi>0, \psi>0\}} b_0(x) \phi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1} dx < -\epsilon. \quad (1.37)$$

De plus, on a

$$\frac{H(x, t^{\frac{1}{p}} \phi, t^{\frac{1}{q}} \psi)}{t \phi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1}} = \int_0^1 \frac{h(st, x, \phi, \psi)}{\phi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1}} ds$$

ce qui permet de dire, grâce aux hypothèses  $(\mathcal{H}_s1) - (\mathcal{H}_s3)$  et au lemme de Fatou que

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{H(x, t^{\frac{1}{p}} \phi, t^{\frac{1}{q}} \psi)}{t} & \geq b_0(x) \phi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1} \\ \text{i.e.} \quad \int_{\{\phi>0, \psi>0\}} b_0(x) \phi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1} dx & \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \int_{\{\phi>0, \psi>0\}} \frac{H(x, t^{\frac{1}{p}} \phi, t^{\frac{1}{q}} \psi)}{t} dx. \end{aligned}$$

Donc, pour  $t$  suffisamment petit ( $t > 0$ ) on a

$$t \int_{\{\phi > 0, \psi > 0\}} b_0(x) \phi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} H(x, t^{\frac{1}{p}} \phi, t^{\frac{1}{q}} \psi) + \epsilon t. \quad (1.38)$$

Il en résulte de (1.37) et (1.38) que  $J(t^{\frac{1}{p}} \phi, t^{\frac{1}{q}} \psi) < 0$ .

Finalement, par un résultat classique d'optimisation, on conclut qu'il existe un couple de fonctions  $(u_0, v_0)$  non triviales dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  tel que

$$J(u_0, v_0) = \inf_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)} J(u, v).$$

Et d'après l'hypothèse  $(\mathcal{H}_s 1)$  on a  $J$  qui est  $C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ , ainsi  $J'(u_0, v_0) = 0$  qui est exactement l'écriture variationnelle du problème  $(\mathcal{S})$ .

Pour la preuve de la seconde partie du théorème, considérons  $u_0^+ = \max(0, u_0)$  et  $v_0^+ = \max(0, v_0)$ .

$$J(u_0^+, v_0^+) - J(u_0, v_0) = -\frac{1}{p} \int_{\{u_0 \leq 0\}} |\nabla u_0|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\{v_0 \leq 0\}} |\nabla v_0|^q dx + \int_{\{u_0 \leq 0, v_0 \leq 0\}} H(x, u_0, v_0) dx$$

comme  $H(x, u_0, v_0) = 0$  sur  $\{u_0 \leq 0, v_0 \leq 0\}$

$$J(u_0^+, v_0^+) \leq J(u_0, v_0).$$

Donc,  $(u_0^+, v_0^+)$  est aussi un minimisant de  $J$ , notons cette solution de  $(\mathcal{S})$  :  $(u, v)$ .

Grâce à une méthode proche de celle utilisée dans le cas d'une équation, nous obtenons un résultat de régularité pour les solutions du système  $(\mathcal{S})$  ([2], [12], [14], [13]) : pour tout  $r > 0$ ,  $u \in C^{1,\alpha}(B_r)$  et  $v \in C^{1,\beta}(B_r)$  où  $\alpha = \alpha(r) > 0$  et  $\beta = \beta(r) > 0$ . Et pour conclure à la stricte positivité des solutions  $(u, v)$ , on peut appliquer le Principe du Maximum Fort de Vázquez [15] car

$$\begin{cases} -\Delta_p u + M_u u^{p-1} \geq 0 \\ -\Delta_q v + M_v v^{q-1} \geq 0 \end{cases}$$

En effet, de  $(\mathcal{H}_s 6)$ , on en déduit que les fonctions  $u \mapsto \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, v)/u^{p-1}$  et  $v \mapsto \frac{\partial H}{\partial v}(x, u, v)/v^{q-1}$  sont décroissantes sur  $[0, +\infty)$  et par conséquent, nous obtenons deux constantes positives  $M_u$  et  $M_v$  telles que

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, v) \geq -M_u u^{p-1} \text{ et } \frac{\partial H}{\partial v}(x, u, v) \geq -M_v v^{q-1} \text{ pour tout } u \text{ et } v \geq 0.$$

Ce qui achève la démonstration de ce théorème.  $\blacklozenge$

**Remarque 1.7** Dans la démonstration de l'existence de solutions de  $(\mathcal{S})$ , on peut supposer que  $H(\cdot, 0, 0) \in L^1(\mathbb{R}^N)$  au lieu de  $H(x, 0, 0) = 0$ , mais il faut examiner de plus près le cas  $p_0 = 1$  et  $q_0 = 1$  comme ce qui a été fait dans la première partie pour l'équation.

### 1.3.2 Unicité de la solution du système.

**Théorème 1.5** *On suppose que l'hypothèse (H<sub>s</sub>6) est satisfaite. Si  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N) \cap C_{loc}^{1,\gamma}(\mathbb{R}^N) \times C_{loc}^{1,\delta}(\mathbb{R}^N)$  sont deux solutions du système (S) strictement positives sur  $\mathbb{R}^N$  alors  $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ .*

Preuve du théorème 1.5

Notons

$$\begin{aligned} \Theta(R) &= \int_{B_R} \left\{ |\nabla u_2|^p + (p-1) \left( \frac{u_2}{u_1} \right)^p |\nabla u_1|^p - p \nabla u_2 \nabla u_1 |\nabla u_1|^{p-2} \left( \frac{u_2}{u_1} \right)^{p-1} \right\} dx \\ &+ \int_{B_R} \left\{ |\nabla v_2|^q + (q-1) \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^q |\nabla v_1|^q - q \nabla v_2 \nabla v_1 |\nabla v_1|^{q-2} \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{q-1} \right\} dx \end{aligned}$$

et

$$\beta(R) = \int_{\partial B_R} \frac{u_2^p}{u_1^{p-1}} |\nabla u_1|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial n} dS + \int_{\partial B_R} \frac{v_2^q}{v_1^{q-1}} |\nabla v_1|^{q-2} \frac{\partial v_1}{\partial n} dS.$$

De la même façon, on obtient les fonctions  $\hat{\Theta}$  et  $\hat{\beta}$  en permutant les rôles de  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$ . Définissons aussi  $\tilde{\Theta}(R) = \frac{1}{p}\Theta(R) + \frac{1}{q}\hat{\Theta}(R)$  et  $\tilde{\beta}(R) = \frac{1}{p}\beta(R) + \frac{1}{q}\hat{\beta}(R)$ .

Comme dans le cas d'une équation, nous choisissons, d'une part la fonction test  $\eta = \left( \frac{1}{p} \frac{u_1^p - u_2^p}{u_1^{p-1}}, \frac{1}{q} \frac{v_1^q - v_2^q}{v_1^{q-1}} \right)$  pour le problème associé à  $(u_1, v_1)$  et, d'autre part la fonction test  $\zeta = \left( \frac{1}{p} \frac{u_2^p - u_1^p}{u_2^{p-1}}, \frac{1}{q} \frac{v_2^q - v_1^q}{v_2^{q-1}} \right)$  pour le problème associé à  $(u_2, v_2)$ , puis on intègre sur  $B_R$ . En additionnant les deux équations ainsi obtenues nous arrivons à

$$\begin{aligned} &\tilde{\Theta}(R) - \frac{1}{p} \int_{\partial B_R} \left( u_1 |\nabla u_1|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_2 |\nabla u_2|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) dS \\ &- \frac{1}{q} \int_{\partial B_R} \left( v_1 |\nabla v_1|^{q-2} \frac{\partial v_1}{\partial n} - v_2 |\nabla v_2|^{q-2} \frac{\partial v_2}{\partial n} \right) dS + \tilde{\beta}(R) \\ &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{\partial H}{\partial u}(x, u_1, v_1) / u_1^{p-1} - \frac{\partial H}{\partial u}(x, u_2, v_2) / u_2^{p-1} \right) (u_1^p - u_2^p) dx \\ &+ \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{\partial H}{\partial v}(x, u_1, v_1) / u_1^{q-1} - \frac{\partial H}{\partial v}(x, u_2, v_2) / u_2^{q-1} \right) (v_1^q - v_2^q) dx. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Finalement, d'après l'inégalité (1.30) de la remarque 1.6 sur la stricte concavité, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\tilde{\Theta}(R) - \frac{1}{p} \int_{\partial B_R} \left( u_1 |\nabla u_1|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_2 |\nabla u_2|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) \\ &- \frac{1}{q} \int_{\partial B_R} \left( v_1 |\nabla v_1|^{q-2} \frac{\partial v_1}{\partial n} - v_2 |\nabla v_2|^{q-2} \frac{\partial v_2}{\partial n} \right) + \tilde{\beta}(R) < 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$



La méthode que nous utilisons ici pour montrer l'unicité est similaire à celle que nous avons utilisée pour une équation. En effet, nous appliquons les lemmes suivants, qui sont une réplique, adaptée au cas du système, de ceux énoncés précédemment et dont les démonstrations utilisent les mêmes arguments.

**Lemme 1.7** *Si  $(u, v) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  est une solution de  $(\mathcal{S})$  alors*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_R} u |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_R} v |\nabla v|^{q-2} \frac{\partial v}{\partial n} dS.$$

**Lemme 1.8** *Si  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N) \cap (C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N))^2$  sont deux solutions strictement positives de  $(\mathcal{S})$  alors  $\Theta$  et  $\hat{\Theta}$  sont croissantes sur  $\mathbb{R}_*^+$  et satisfont  $\Theta(R) \geq 0, \hat{\Theta}(R) \geq 0$  pour tout  $R \geq 0$ .*

*De plus, si  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \hat{\Theta}(R) = 0$  alors il existe deux constantes  $C$  et  $C'$  telles que  $u_1 = Cu_2$  et  $v_1 = C'v_2$ .*

**Lemme 1.9** *Si  $(u, v) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  et  $(u, v)$  sont strictement positives alors pour tout  $R_1 > 0$  fixé, on a*

$$\int_{R_1}^{+\infty} \frac{dr}{(H(r))^{\frac{p'}{p}}} = +\infty = \int_{R_1}^{+\infty} \frac{dr}{(\hat{H}(r))^{\frac{q'}{q}}}$$

où  $H(r) = \int_{\partial B_r} u^p dS$  et  $\hat{H}(r) = \int_{\partial B_r} v^q dS$ .

On déduit directement du lemme 1.7 que  $\tilde{\Theta}(R)$  a une limite dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  quand  $R$  tend vers l'infini. De plus, d'après l'égalité (1.39) et l'inégalité (1.40), on peut dire que  $\tilde{\beta}(R)$  possède une limite dans  $\mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$ . Ainsi, en procédant par l'absurde comme nous l'avons fait dans la preuve du théorème 1.3, on aboutit à  $\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{\beta}(R) = 0$  et encore par (1.40) on obtient  $\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{\Theta}(R) = 0$  ce qui signifie par le lemme 1.8 qu'il existe deux constantes  $C$  et  $C'$  telles que  $u_1 = Cu_2$  et  $v_1 = C'v_2$  ce qui achève la preuve du théorème 1.5. En effet, si  $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$  sont solutions de  $(\mathcal{S})$  et  $(u_1, v_1) = (Cu_2, C'v_2)$  alors nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u}(x, u_2, v_2)/u_2^{p-1} = \frac{\partial H}{\partial u}(x, Cu_2, C'v_2)/(Cu_2)^{p-1} \\ \frac{\partial H}{\partial v}(x, u_2, v_2)/v_2^{q-1} = \frac{\partial H}{\partial v}(x, Cu_2, C'v_2)/(C'v_2)^{q-1}. \end{cases}$$

Ce qui contredit  $(\mathcal{H}_s6)$  (plus précisément l'inégalité (1.30) de la remarque 1.6) sauf si  $C = C' = 1$ , c'est-à-dire  $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ . ◆

## 1.4 Appendice.

Dans cette partie, nous allons vérifier que le problème  $(\mathcal{SV}_p)$  possède bien une solution pour certaines fonctions poids  $a$  et  $c$ .

$$(\mathcal{SV}_p) \begin{cases} -\Delta_p u - (\alpha + 1)b(x)|u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta-1}v = \lambda a(x)|u|^{p-2}u \text{ sur } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v - (\beta + 1)b(x)|u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta-1}v = \lambda c(x)|v|^{q-2}v \text{ sur } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

**Théorème 1.6** *Si  $a, c$  sont deux fonctions strictement positives, appartenant respectivement aux espaces  $L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $L^{\frac{N}{q}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  vérifiant*

$$\forall R > 0 \quad \exists \mu_R, \nu_R > 0 \text{ tels que } \inf_{B_R} a \geq \mu_R \text{ et } \inf_{B_R} c \geq \nu_R.$$

*Alors pour tout  $b \in L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  il existe une valeur propre,  $\lambda_1(a, c, b)$ , associée au problème  $(\mathcal{SV}_p)$ .*

*Preuve du théorème 1.6*

Nous définissons

$$\tilde{A}(u, v) = \frac{1}{p} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q - \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1} dx,$$

et

$$\tilde{B}(u, v) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} c(x)|v|^q dx.$$

Nous allons montrer sous les hypothèses décrites dans le théorème les quatre points suivants :

(i)  $\tilde{A}$  est faiblement semi-continue inférieurement.

(ii)  $\Lambda = \{(u, v) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N) \text{ tels que } \tilde{B}(u, v) = 1\}$  est faiblement fermé ;

(iii)  $\tilde{A}$  est coercive sur l'ensemble  $\Lambda$  ;

(iv) Si  $\tilde{B}'(u, v) = 0$  alors  $(u, v) = 0$ .

(i) (ii) La démonstration de la faible semi-continuité inférieure de  $\tilde{A}$  et de la fermeture faible de  $\Lambda$  est classique.

(iii) Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1} dx &= \int_{B_R} b(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1} dx \\ &+ \int_{B_R^c} b(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1} dx. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Grâce à l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{B_R^c} b(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1} dx &\leq c \|b\|_{L^{p_2}(B_R^c)} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha+1} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^{\beta+1} \\ &\leq c \|b\|_{L^{p_2}(B_R^c)} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + c \|b\|_{L^{p_2}(B_R^c)} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Choisissons  $R > 0$  de telle façon que  $c\|b\|_{L^{p_2}(B_R^c)} \leq \min\{\frac{1}{2p}, \frac{1}{2q}\}$ , alors

$$\int_{B_R^c} b(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx \leq \frac{1}{2p}\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{1}{2q}\|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q. \quad (1.43)$$

D'un autre côté, comme  $\tilde{B}(u, v) = 1$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_{B_R} a|u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{B_R} c|v|^q dx &\leq 1 \\ \text{donc } \frac{\mu_R}{p} \int_{B_R} |u|^p dx + \frac{\nu_R}{q} \int_{B_R} |v|^q dx &\leq 1. \end{aligned}$$

Ce qui implique qu'il existe  $c > 0$ , tel que

$$\max \left\{ \int_{B_R} |u|^p dx, \int_{B_R} |v|^q dx \right\} \leq \max \left\{ \frac{p}{\mu_R}, \frac{q}{\nu_R} \right\} \leq c.$$

De l'inégalité de Young, nous déduisons

$$\int_{B_R} b(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx \leq c \left[ \int_{B_R} |u|^p dx + \int_{B_R} |v|^q dx \right] \leq c'. \quad (1.44)$$

Il résulte de (1.43), (1.44) que

$$\tilde{A}(u, v) \geq \frac{1}{2p}\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{1}{2q}\|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q - c. \quad (1.45)$$

Par conséquent,  $\lim_{\|(u,v)\|_{D^{1,p} \times D^{1,q}} \rightarrow +\infty} \tilde{A}(u, v) = +\infty$ , ce qui traduit la coercivité de  $\tilde{A}$ .

(iv) Enfin, nous avons,

$$\tilde{B}'(u, v)\left(\frac{u}{p}, \frac{v}{q}\right) = \tilde{B}(u, v),$$

ce qui montre que  $(u, v) = (0, 0)$  est l'unique solution de  $\tilde{B}'(u, v) = 0$ .

Grâce aux assertions ci-dessus, on peut appliquer le théorème 6.3.2 de M.S. Berger [4], ce qui achève la démonstration du théorème 1.6.



# Bibliographie

- [1] A. ANANE. Simplicité et isolation de la première valeur propre du  $p$ -laplacien avec poids. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. Math.* I(305) :725–728, 1987.
- [2] A. BECHAH. *Systèmes elliptiques quasilineaires sur des ouverts non bornés*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Soutenue en mai 2000.
- [3] A. BECHAH. Local and global estimates of solutions of systems involving  $p$ -Laplacian in unbounded domain. *Electronic Journal of Differential Equations*, 19 :1–14, 2001.
- [4] M. S. BERGER. *Nonlinearity and Functionnal Analysis*. Academic Press, New-York, 1977.
- [5] H. BRÉZIS. *Analyse Fonctionnelle. Théories et Applications*. Masson, Paris, 1983.
- [6] H. BRÉZIS L. OSWALD. Remarks on sublinear elliptic equation. *Nonlinear Anal. TMA*, 10(1) :55–64, 1986.
- [7] K. CHAÏB A. BECHAH and F. DE THÉLIN. Existence and uniqueness of positive solution for subhomogeneous elliptic problems in  $\mathbb{R}^n$ . *Revista de Matemáticas aplicadas*, 21(1-2) :1–18, 2000.
- [8] J.I. DÍAZ J. E. SAA. Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilineaires. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. Math.* I(305) :521–524, 1987.
- [9] J. FLECKINGER R. F. MANÁSEVICH N. M. STAVRAKAKIS F. DE THÉLIN. Principal eigenvalues for some quasilinear elliptic equations on  $\mathbb{R}^n$ . *Adv. Differential Equations*, 2(6) :981–1003, 1997.
- [10] P. FELMER R. F. MANÁSEVICH F. DE THÉLIN. Existence and uniqueness of positive solutions for certains quasilinear elliptic systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 17(11/12) :2013–2029, 1992.
- [11] J. FLECKINGER J. HERNÁNDEZ P. TAKÁC F. DE THÉLIN. Uniqueness and positivity for solutions of equations with the  $p$ -laplacian. In E. Mitidieri G. Caristi, editor, *Reaction diffusion systems (Trieste 1995)*, number 194 in Lectures Notes in Pure and Appl. Math., pages 141–155, 1998.
- [12] J. SERRIN. Local behavior of solutions of quasilinear equations. *Acta Mathematica*, 111 :247–302, 1964.
- [13] F. DE THÉLIN. Première valeur propre d’un système elliptique non linéaire. *Rev. Mat. Apl.*, 13(1) :1–8, 1992.
- [14] P. TOLKSDORF. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, 51(1) :126–150, 1984.

- [15] J. L. VÁZQUEZ. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations.  
*Appl. Math. Optim.*, 12(3) :191–202, 1984.

## Chapitre 2

# Extension de l'inégalité de Díaz-Saa dans $\mathbb{R}^N$ .

Dans la première partie de ce chapitre, notre propos sera d'utiliser l'identité de Picone présentée par W. Allegretto et X. Y. Huang dans [2] pour étendre à des ouverts non bornés l'inégalité de Díaz-Saa. Cette identité pour  $p > 1$  se présente sous la forme :

$$\int_{\Omega} \left( -\frac{\Delta_p z_1}{z_1^{p-1}} + \frac{\Delta_p z_2}{z_2^{p-1}} \right) (z_1^p - z_2^p) dx \geq 0.$$

Elle a été démontrée par J. I. Díaz et J. E. Saa dans [8] avec les hypothèses suivantes :

Pour  $i = 1, 2$ ,  $z_i \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$  telles que  $z_i \geq 0$  p. p. sur  $\Omega$  et  $\Delta_p z_i \in L^\infty(\Omega)$  ;

Pour  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2$   $\frac{z_i}{z_j} \in L^\infty(\Omega)$ .

Cette inégalité permet d'obtenir des résultats d'unicité et de condition nécessaire d'existence comme ceux obtenus par H. Brézis et L. Oswald ([6]) dans le cas du Laplacien usuel ( $p=2$ ). Dans leur démonstration, ils utilisent en particulier le caractère autoadjoint du Laplacien ( $\Delta$ ), ce qui n'est pas possible pour le  $p$ -Laplacien ( $\Delta_p$ ). Ainsi, une façon de contourner ce problème est d'utiliser l'inégalité ci-dessus qui traduit la monotonie de l'opérateur  $w \mapsto \frac{-\Delta_p w^{\frac{1}{p}}}{w^{\frac{p-1}{p}}}$ .

Dans le cas borné, le principe du maximum de Hopf permet de vérifier l'hypothèse  $\frac{z_i}{z_j} \in L^\infty(\Omega)$  qui est nécessaire dans la démonstration originale de ce résultat. Mais lorsque nous travaillons dans des domaines non bornés tel que  $\mathbb{R}^N$  cette condition n'est pas satisfaite en général.

Ici, sous des hypothèses adaptées aux solutions de problèmes elliptiques, nous établissons une inégalité de type Díaz-Saa valide sur tout  $\mathbb{R}^N$ . Lorsque nous disons que les hypothèses sont bien adaptées, cela signifie que ce sont celles qui apparaissent naturellement dans les problèmes de  $p$ -Laplacien avec poids sur  $\mathbb{R}^N$ .

Dans une seconde partie, nous appliquerons cette inégalité de type Díaz-Saa pour obtenir un résultat d'unicité de la première valeur propre d'un système de  $p$ -Laplaciens dans  $\mathbb{R}^N$ .

$$(\mathcal{S}_\lambda) \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda b(x)|u|^\alpha |v|^\beta v & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = \lambda b(x)|u|^\alpha |v|^\beta u & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} v(x). \end{cases}$$

Ce travail fait suite à l'article de A. Anane [3] où il étudie le cas d'une seule équation et à celui de J. Fleckinger, R. F. Manásevich, N. M. Stavrakakis et F. de Thélin [9] où un système légèrement différent est considéré. Dans ce dernier, une méthode locale est présentée afin d'éviter l'éventuelle explosion du quotient  $\frac{z_i}{z_j}$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Seulement, lors de l'intégration par parties, des intégrales sur le bord apparaissent ce qui alourdit la démonstration.

Enfin, dans la continuité de l'article de A. Anane [3], nous clôturerons cet article en démontrant l'isolation de la première valeur propre du système  $(\mathcal{S}_\lambda)$ . Comme dans cet article, nous utiliserons le théorème d'Egorov. Cette propriété d'isolation n'a pas été montrée dans l'article [9], d'ailleurs il semble que la technique utilisée ici ne peut pas l'être pour leur système car intuitivement le signe de  $u$  doit dépendre du signe de  $v$  et vice versa.

Ce travail a été accepté pour publication dans la revue espagnole *Publicacions Matemàtiques de Barcelona*.

## 2.1 Inégalité de Díaz-Saa

Les résultats suivants sont des conséquences des théorèmes principaux qui seront énoncés plus loin.

**Proposition 2.1 (Inégalité de Díaz - Saa dans le cas  $1 < p < N$ )** *Pour  $i = 1, 2$ , soient  $z_i \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  telles que  $z_i \geq 0$  ( $\neq 0$ ) et différentiables. Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left( -\frac{\Delta_p z_1}{z_1^{p-1}} + \frac{\Delta_p z_2}{z_2^{p-1}} \right) (z_1^p - z_2^p) dx \geq 0$$

*si l'on suppose que  $\frac{\Delta_p z_i}{z_i^{p-1}} \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  pour  $i = 1, 2$ .*

*Si on a égalité alors il existe une constante  $C$  telle que  $z_1 = Cz_2$ .*

**Proposition 2.2 (Inégalité de Díaz - Saa dans le cas  $p \geq N$ )** *Pour  $i = 1, 2$ , soient  $z_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  telles que  $z_i \geq 0$  ( $\neq 0$ ) et différentiables. Alors les assertions ci-dessus restent vraies si l'on suppose que pour  $N = p$ , il existe  $s > 1$  tel que  $\frac{\Delta_p z_i}{z_i^{p-1}} \in L^s(\mathbb{R}^N) \cap$*

*$L^\infty(\mathbb{R}^N)$  ou pour  $N < p$ ,  $\frac{\Delta_p z_i}{z_i^{p-1}} \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  avec  $i = 1, 2$ .*

La démonstration des théorèmes que nous présenterons fait appel à l'identité de Picone pour le  $p$ -Laplacien décrite par exemple dans [2] par W. Allegretto X. Y. Huang. Le résultat de Picone est une égalité valide presque partout ce qui évite certains problèmes

d'intégration lorsqu'on travaille sur des ouverts non bornés. Énonçons à présent une identité de Picone pour le  $p$ -Laplacien un peu plus générale que celle de [2] car on n'impose une condition de signe que sur l'une des deux fonctions.

**Proposition 2.3 (Identité de Picone généralisée pour le  $p$ -Laplacien)** *Soient  $u, v$  différentiables et  $v > 0$  p. p. sur  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$ . Notons*

$$\begin{aligned} L(u, v) &= |\nabla u|^p + (p-1) \frac{|u|^p}{v^p} |\nabla v|^p - p \frac{|u|^{p-2} u}{v^{p-1}} \nabla u \cdot \nabla v |\nabla v|^{p-2} \text{ p. p. sur } \Omega \\ R(u, v) &= |\nabla u|^p - \nabla \left( \frac{|u|^p}{v^{p-1}} \right) |\nabla v|^{p-2} \nabla v \text{ p. p. sur } \Omega. \end{aligned}$$

Alors  $L(u, v) = R(u, v) \geq 0$ .

De plus,  $L(u, v) = 0$  p. p. sur  $\Omega$  si et seulement si  $\nabla \left( \frac{u}{v} \right) = 0$  p. p. sur  $\Omega$ .

Preuve de la proposition 2.3

Par simple développement de  $R(u, v)$ , on montre que  $R(u, v) = L(u, v)$ , car

$$\nabla \left( \frac{|u|^p}{v^{p-1}} \right) = p \frac{|u|^{p-2} u \nabla u}{v^{p-1}} - (p-1) \frac{|u|^p \nabla v}{v^p}.$$

Pour prouver la positivité, on observe que

$$\frac{|u|^{p-2} u}{v^{p-1}} \nabla u \cdot \nabla v |\nabla v|^{p-2} \leq \frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}} |\nabla v|^{p-1} |\nabla u| \quad (2.1)$$

et d'après l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} \frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}} |\nabla v|^{p-1} |\nabla u| &\leq \frac{p-1}{p} \left( \frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}} |\nabla v|^{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{p} |\nabla u|^p \\ &\leq \frac{p-1}{p} \frac{|u|^p}{v^p} |\nabla v|^p + \frac{1}{p} |\nabla u|^p \\ \text{donc } p \frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}} |\nabla v|^{p-1} |\nabla u| &\leq (p-1) \frac{|u|^p}{v^p} |\nabla v|^p + |\nabla u|^p \end{aligned} \quad (2.2)$$

Les inégalités (2.1) et (2.2) impliquent

$$|\nabla u|^p + (p-1) \frac{|u|^p}{v^p} |\nabla v|^p - p \frac{|u|^{p-2} u}{v^{p-1}} \nabla u \cdot \nabla v |\nabla v|^{p-2} = L(u, v) \geq 0.$$

De plus, si  $L(u, v) = 0$  alors d'après (2.1) et (2.2)

$$|\nabla u|^p + (p-1) \frac{|u|^p}{v^p} |\nabla v|^p - p \frac{|u|^{p-1}}{v^{p-1}} |\nabla v|^{p-1} |\nabla u| = 0 \text{ p. p. sur } \Omega. \quad (2.3)$$

On définit  $N := \left\{ x \in \Omega \text{ tels que } \frac{|u|}{v} |\nabla v| = 0 \right\} \subset \Omega$ .



Sur  $N$ , on a grâce à l'équation (2.3)

$$\frac{|u|}{v} |\nabla v| = |\nabla u| = 0 \text{ p. p. sur } N \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{v} \nabla v = \nabla u \text{ p. p. sur } N.$$

et donc

$$\frac{u}{v} \nabla v = \nabla u = 0 \quad \text{presque partout sur } N. \quad (2.4)$$

Sur  $N^c$ , on pose  $Q = \frac{|\nabla u|}{|\nabla v| \frac{|u|}{v}}$  et en substituant dans (2.3) on obtient

$$Q^p - pQ + p - 1 = 0 \quad \text{qui a pour unique solution } Q = 1 \quad \text{car } p > 1.$$

$$\text{Ainsi, } |\nabla u| = \frac{|u|}{v} |\nabla v| \text{ p. p. sur } N^c. \quad (2.5)$$

En utilisant (2.5) dans  $L(u, v) = 0$ , on arrive à

$$p|\nabla u|^p - p\nabla u \cdot \nabla v \frac{u}{v} |\nabla u|^{p-2} = 0 \text{ p. p. sur } N^c$$

$$\text{donc } p|\nabla u|^2 - p\nabla u \cdot \nabla v \frac{u}{v} = 0 \text{ p. p. sur } N^c$$

$$\text{et } \nabla u \cdot \left( \nabla u - \nabla v \frac{u}{v} \right) = 0 \text{ p. p. sur } N^c$$

$$\text{donc } \frac{u}{v} \nabla v = \nabla u \text{ p. p. sur } N^c \quad \text{car } |\nabla u| = \frac{|u|}{v} |\nabla v|. \quad (2.6)$$

En effet  $\nabla v$  ne peut pas être orthogonal à  $\frac{u}{v} \nabla v - \nabla u$  car ça reviendrait à dire que  $\nabla u$  est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés  $\frac{u}{v} \nabla v$  et  $\frac{u}{v} \nabla v - \nabla u$ , ce qui n'est pas possible car  $\frac{u}{v} |\nabla v| = |\nabla u|$ .

Par (2.4) et (2.6) on a  $\frac{u}{v} \nabla v = \nabla u$  p. p. sur  $\Omega$  et finalement,

$$\nabla \left( \frac{u}{v} \right) = 0 \text{ p. p. sur } \Omega.$$

◆

Il est facile de constater que dans l'identité de Picone, l'ensemble  $\Omega$  peut être pris tout à fait quelconque, par exemple non connexe et non borné. Maintenant, nous sommes en mesure d'établir le théorème suivant dont la démonstration a pour argument principal l'identité citée ci-dessus.

**Théorème 2.1** *Pour  $1 < p < N$ . Soient  $\Phi$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  et  $z \geq 0$  ( $\neq 0$ ) dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  toutes deux différentiables.*

Alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{-\Delta_p z}{z^{p-1}} \right) |\Phi|^p dx,$$

si l'on suppose que  $\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

De plus, si on a égalité alors il existe  $C$  telle que  $z = C\Phi$  sur  $\mathbb{R}^N$ .

Preuve du théorème 2.1

Tout d'abord remarquons que  $z \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  est une solution non triviale du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \left( \frac{-\Delta_p z}{z^{p-1}} \right) v^{p-1} \\ v \geq 0 \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N.$$

Comme  $\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ , on peut appliquer le Principe du Maximum Fort de Vázquez ([15]) pour prouver que  $z > 0$  sur  $\mathbb{R}^N$ . De plus, on utilise le théorème de régularité de P. Tolksdorf ([14]) pour montrer que pour tout  $r > 0$ , il existe  $\alpha(r) > 0$  tel que  $z \in C^{1,\alpha}(B_r)$ . Et en particulier pour  $\Omega_0$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ , il existe  $\alpha_0 > 0$  tel que  $z \in C^{1,\alpha_0}(\Omega_0)$ .

Soit  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  telle que  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\Phi$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ . On applique l'identité de Picone aux fonctions  $\Phi_n$  et  $z$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} L(\Phi_n, z) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} R(\Phi_n, z) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \left( \frac{|\Phi_n|^p}{z^{p-1}} \right) |\nabla z|^{p-2} \nabla z dx. \end{aligned}$$

Or  $\Phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $z > 0$  donc  $\frac{\Phi_n^p}{z^{p-1}}$  est une fonction test admissible ; par intégration par parties on arrive à

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} |\Phi_n|^p dx.$$

Comme  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\Phi$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ , on a  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\Phi$  dans  $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$  et  $(|\Phi_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $|\Phi|^p$  dans  $L^{\frac{p^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$ . Ainsi

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} (|\Phi_n|^p - |\Phi|^p) dx \right| \leq \underbrace{\left\| \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \right\|_{L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)} \left\| |\Phi_n|^p - |\Phi|^p \right\|_{L^{\frac{p^*}{p}}(\mathbb{R}^N)}}_{\text{tend vers 0}}. \quad (2.7)$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} |\Phi|^p dx \\ \text{d'où le résultat} \quad &\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left( -\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \right) |\Phi|^p dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Considérons le cas de l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left( -\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \right) |\Phi|^p dx.$$

Soit  $\Omega_0$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie comme précédemment.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega_0} L(\Phi_n, z) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} L(\Phi_n, z) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} |\Phi_n|^p dx \quad \text{tend vers 0 quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Or  $\int_{\Omega_0} L(\Phi_n, z) dx$  converge vers  $\int_{\Omega_0} L(\Phi, z) dx$  car  $\Omega_0$  est borné et  $z \in C^{1,\alpha_0}(\Omega_0)$ . Donc  $L(\Phi, z) = 0$  p. p. sur  $\Omega_0$ , l'ensemble  $\Omega_0$  étant pris de façon arbitraire dans  $\mathbb{R}^N$  on peut donc conclure que  $L(\Phi, z) = 0$  p. p. sur  $\mathbb{R}^N$ . Et d'après l'identité de Picone, il existe  $C > 0$  tel que  $\Phi = Cz$ .

◆

**Théorème 2.2** *Pour  $p \geq N$ . Soient  $\Phi$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  et  $z \geq 0$  ( $\neq 0$ ) dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  toutes deux différentiables.*

Alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{-\Delta_p z}{z^{p-1}} \right) |\Phi|^p dx,$$

si l'on suppose que pour  $p = N$ , il existe  $s > 1$  tel que  $\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \in L^s(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  ou pour  $p > N$ ,  $\frac{\Delta_p z}{z^{p-1}} \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

De plus, si l'intégrale ci-dessus est nulle alors il existe  $C$  telle que  $z = C\Phi$  sur  $\mathbb{R}^N$ .

La démonstration de ce théorème est presque la même que celle du premier théorème. On résout le problème de la convergence dans (2.7) grâce aux injections particulières de l'espace  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  dans le cas  $p \geq N$  (voir [5]) :

si  $p = N$ ,  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  s'injecte continûment dans  $L^q(\mathbb{R}^N)$  où  $q \in [p, +\infty)$ ;

si  $p > N$ ,  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  s'injecte continûment dans  $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

Des résultats d'existence de solution dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  pour le  $p$ -Laplacien quand  $p \geq N$  ont été établis par W. Allegretto et X. Y. Huang dans [1].

### Preuve des propositions 2.1 et 2.2 (Inégalité de Díaz-Saa)

Il suffit d'appliquer les théorèmes précédents au couple de fonctions  $(z_1, z_2)$  et on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_1|^p dx &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{-\Delta_p z_2}{z_2^{p-1}} \right) z_1^p dx \\ \text{donc} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \left( -\frac{\Delta_p z_1}{z_1^{p-1}} + \frac{\Delta_p z_2}{z_2^{p-1}} \right) z_1^p dx &\geq 0. \end{aligned}$$

Puis en faisant de même pour le couple de fonctions  $(z_2, z_1)$  et en additionnant les deux inégalités ainsi obtenues on arrive au résultat escompté. A remarquer que dans l'inégalité de Díaz-Saa on suppose que les fonctions sont positives ce qui nous économise l'emploi des valeurs absolues comme dans les théorèmes.

Suite à une discussion avec P. Takác, il apparaît que l'inégalité de Díaz-Saa dans  $\mathbb{R}^N$  ainsi que les deux théorèmes précédents peuvent être prouvés en utilisant de façon plus fine la méthode de J. I. Díaz et J. E. Saa. Pour ceci, il faut remarquer d'abord que si cette inégalité est vérifiée pour des fonctions  $\Phi$  positives elle l'est aussi pour des fonctions  $\Phi$  changeant de signe ("Chain rule" Lemme 7.6 dans [11]). Ensuite, il suffit de

prouver la convexité de l'application  $w \mapsto |\nabla w^{\frac{1}{p}}|^p$  et calculer la dérivée directionnelle de  $J(w) = \int_{\Omega} |\nabla w^{\frac{1}{p}}|^p dx$  qui vaut formellement :

$$J'(w)v = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla w^{\frac{1}{p}}|^{p-2} \nabla w^{\frac{1}{p}} \nabla (w^{\frac{1}{p}-1} v) dx.$$

Pour en savoir plus sur cette méthode voir l'article de J. Fleckinger, P. Takáč et F. de Thélin [10]. Contrairement à la démonstration que nous avons détaillée dans cette partie, celle de [10] fait appel à des notions assez fines et une attention particulière est de mise lors des calculs car ils font intervenir des termes à définir correctement. Par exemple, il faut donner un sens à la dérivée de  $J$ .

## 2.2 Propriétés de la première valeur propre d'un système de $p$ -Laplaciens

Dans cette seconde partie, nous étudions différentes propriétés de la première valeur propre d'un système de  $p$ -Laplaciens dérivant d'un potentiel :

$$(\mathcal{S}_{\lambda}) \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda b(x) |u|^{\alpha} |v|^{\beta} v & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = \lambda b(x) |u|^{\alpha} |v|^{\beta} u & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} v(x). \end{cases}$$

Considérons les conditions suivantes sur les exposants et la fonction poids :  
( $\mathcal{H}1$ )

$$N > p > 1, \quad N > q > 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \\ \frac{\alpha + 1}{p} + \frac{\beta + 1}{q} = 1 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta + 2 < N.$$

( $\mathcal{H}2$ )  $b \in C_{loc}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^N)$  avec  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $b \in L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$  et  $b \geq 0$ .

Dans un premier temps, nous établissons l'existence de la première valeur propre de  $(\mathcal{S}_{\lambda})$  et la régularité des fonctions propres associées.

**Théorème 2.3** *On suppose que les hypothèses ( $\mathcal{H}1$ ) et ( $\mathcal{H}2$ ) sont vérifiées.*

(i) *Le système  $(\mathcal{S}_{\lambda})$  admet une première valeur propre positive  $\lambda_1$  définie par*

$$\lambda_1 := \inf_{\Gamma} \left\{ \frac{\alpha + 1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{\beta + 1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^q dx \right\}$$

$$\text{où } \Gamma = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |u|^{\alpha} |v|^{\beta} u v dx = 1 \right\};$$

(ii) *Si  $(u, v)$  est un couple de fonctions propres associées à  $\lambda_1$  solution de  $(\mathcal{S}_{\lambda_1})$  alors pour tout  $r > 0$ ,  $u \in C^{1,\rho}(B_r)$  et  $v \in C^{1,\gamma}(B_r)$  où  $\rho = \rho(r) > 0$  et  $\gamma = \gamma(r) > 0$ ;*

- (iii) *Il existe un couple de fonctions propres de  $(\mathcal{S}_{\lambda_1})$  strictement positives sur  $\mathbb{R}^N$ .*  
 (iv) *Si  $u \geq 0$  alors on a  $v \geq 0$  et vice-versa.*

La preuve des trois premiers points de ce théorème est sensiblement la même que celle faite par J. Fleckinger, R. F. Manásevich, N. M. Stavrakakis et F. de Thélin dans [9] pour le système :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda b(x)|u|^{\alpha-1}u|v|^{\beta+1} & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = \lambda b(x)|u|^{\alpha+1}|v|^{\beta-1}v & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

L'approche qui en est faite dans [9] est classique car leur problème comme  $(\mathcal{S}_\lambda)$  est variationnel.

Pour le point (iv), il s'agit simplement d'une application du principe du maximum pour le  $p$ -Laplacien. Cette propriété est spécifique au système  $(\mathcal{S}_\lambda)$  que nous étudions ici.

Citons à présent un résultat d'unicité et d'isolation de la première valeur propre. Grâce à l'étude faite dans la première partie nous démontrerons les deux premières assertions. La démarche en est simplifiée par rapport à [9] par l'utilisation du théorème 2.1 ce qui représente une application intéressante de ce théorème.

**Théorème 2.4** *On suppose que les hypothèses  $(\mathcal{H}1)$  et  $(\mathcal{H}2)$  sont vérifiées.*

- (i) *L'espace propre correspondant à la valeur propre principale  $\lambda_1$  est de dimension 1 dans l'ensemble des fonctions continues ;*  
 (ii)  *$\lambda_1$  est la seule valeur propre de  $(\mathcal{S}_{\lambda_1})$  à laquelle il correspond un vecteur propre de signe constant ;*  
 (iii)  *$\lambda_1$  est isolée i. e. il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \epsilon]$  le système  $(\mathcal{S}_\lambda)$  n'a pas de solution.*

Preuve du théorème 2.4

(i)-(ii) Soient  $(u, v)$  une solution positive de  $(\mathcal{S}_\lambda)$  et  $(\phi, \psi)$  une solution de  $(\mathcal{S}_{\lambda_1})$ . D'après la définition de  $\lambda_1$ , il est clair que  $\lambda_1 \leq \lambda$ . On applique le théorème 2.1 aux fonctions  $(\phi, u)$  et  $(\psi, v)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left( -\frac{\Delta_p u}{u^{p-1}} \right) |\phi|^p dx \quad (2.9)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi|^q dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left( -\frac{\Delta_q v}{v^{q-1}} \right) |\psi|^q dx. \quad (2.10)$$

D'autre part, d'après la définition de  $(\phi, \psi)$  on a

$$\begin{aligned} J &:= \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi|^q dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |\phi|^\alpha |\psi|^\beta \phi \psi dx \\ &\leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |\phi|^{\alpha+1} |\psi|^{\beta+1} dx \\ &\leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} b(x) \frac{|\phi|^{\alpha+1} |\psi|^{\beta+1}}{u^{\alpha+1} v^{\beta+1}} u^{\alpha+1} v^{\beta+1} dx. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
J &\leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} b(x) u^{\alpha+1} v^{\beta+1} \left( \frac{\alpha+1}{p} \frac{|\phi|^p}{u^p} + \frac{\beta+1}{q} \frac{|\psi|^q}{v^q} \right) dx \\
&\leq \lambda \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} b(x) \frac{u^\alpha v^{\beta+1}}{u^{p-1}} |\phi|^p dx + \lambda \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} b(x) \frac{u^{\alpha+1} v^\beta}{v^{q-1}} |\psi|^q dx \\
&\leq \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} \right) |\phi|^p dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}} \right) |\psi|^q dx.
\end{aligned}$$

Donc, d'après (2.9) et (2.10) on arrive à

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi|^q dx &= \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} \right) |\phi|^p dx \\
&+ \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}} \right) |\psi|^q dx.
\end{aligned}$$

Encore par (2.9) et (2.10) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}} \right) |\phi|^p dx \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{-\Delta_q v}{v^{q-1}} \right) |\psi|^q dx.$$

Et appliquant le deuxième résultat du théorème 2.1 on conclut l'existence de deux constantes  $c$  et  $\hat{c}$  telles que  $u = c\phi$  et  $v = \hat{c}\psi$ . Grâce à la forme du problème étudié et au principe du maximum on peut dire que si  $c > 0$  alors  $\hat{c} > 0$  et  $c^p = \hat{c}^q$ . Autrement dit, les fonctions d'un couple de solutions de signe constant sont de même signe.

En ce qui concerne l'unicité de la valeur propre à laquelle correspond un vecteur propre de signe constant, on suppose  $\phi > 0$ ,  $\psi > 0$  et on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^q dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |u|^\alpha |v|^\beta uv dx \\
\text{donc } \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |\phi|^\alpha |\psi|^\beta \phi \psi dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |\phi|^\alpha |\psi|^\beta \phi \psi dx \\
\text{et finalement } \lambda &= \lambda_1.
\end{aligned}$$

(iii) Soit  $(u_0, v_0)$  un vecteur propre correspondant à  $\lambda_0$  ( $\lambda_0 > \lambda_1 > 0$ ) associé au problème  $(\mathcal{S}_{\lambda_0})$  tel que  $\int b|u_0|^\alpha |v_0|^\beta u_0 v_0 = 1$ . Nous venons de voir que les solutions  $u_0$  et  $v_0$  changent de signe car  $\lambda_0 \neq \lambda_1$ , ainsi on note :

$$U_0^- = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } u_0(x) < 0\} \quad \text{et} \quad V_0^- = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } v_0(x) < 0\}.$$

En multipliant la première équation par  $u_0^- = \max(0, -u_0)$ , la seconde par  $v_0^- = \max(0, -v_0)$  et en intégrant sur  $\mathbb{R}^N$  on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0^-|^p dx &= \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |u_0^-|^\alpha |v_0^-|^\beta u_0^- v_0^- dx - \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |u_0^-|^\alpha |v_0^+|^\beta u_0^- v_0^+ dx \\
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0^-|^q dx &= \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |u_0^-|^\alpha |v_0^-|^\beta u_0^- v_0^- dx - \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |u_0^+|^\alpha |v_0^-|^\beta u_0^+ v_0^- dx.
\end{aligned}$$

où  $u_0 = u_0^+ - u_0^-$ ,  $v_0 = v_0^+ - v_0^-$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0^-|^p dx &\leq \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |u_0^-|^\alpha |v_0^-|^\beta u_0^- v_0^- dx \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0^-|^q dx &\leq \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |u_0^-|^\alpha |v_0^-|^\beta u_0^- v_0^- dx. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les inégalités de Hölder et de Sobolev, on a :

$$\begin{aligned} \|u_0^-\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p &\leq \lambda_0 \|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^- \cap V_0^-)} \|u_0^-\|_{L^{\frac{Np}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha+1} \|v_0^-\|_{L^{\frac{Nq}{\beta+1}}(\mathbb{R}^N)}^{\beta+1} \\ \text{donc } \|u_0^-\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} &\leq (\lambda_0 C_S)^{\frac{1}{p}} \|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^- \cap V_0^-)}^{\frac{1}{p}} \|u_0^-\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{\alpha+1}{p}} \|v_0^-\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{\beta+1}{p}} \\ \text{et } \|u_0^-\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{q}} &\leq (\lambda_0 C_S)^{\frac{1}{p(\beta+1)}} \|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^- \cap V_0^-)}^{\frac{1}{p(\beta+1)}} \|v_0^-\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

car  $\frac{1}{q} = \frac{1}{\beta+1} - \frac{\alpha+1}{p(\beta+1)}$ . De façon analogue

$$\|v_0^-\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{p}} \leq (\lambda_0 C_S)^{\frac{1}{q(\alpha+1)}} \|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^- \cap V_0^-)}^{\frac{1}{q(\alpha+1)}} \|u_0^-\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{q}}.$$

Ce qui permet d'écrire en mettant les inégalités bout à bout, qu'il existe une constante  $C > 0$  (indépendante de  $\|u_0^-\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$  et  $\|v_0^-\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}$ ) telle que :

$$\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_0^- \cap V_0^-)} \geq \frac{C}{\lambda_0} > 0. \quad (2.11)$$

On suppose que  $\lambda_1$  n'est pas isolée i.e. il existe une suite  $(\lambda_n, u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $(u_n, v_n)$  est le couple de fonctions propres associées à la valeur propre  $\lambda_n$ , telle que  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\lambda_1$ . On peut supposer, sans perte de généralité, que  $\int_{\mathbb{R}^N} b(x) |u_n|^\alpha |v_n|^\beta u_n v_n dx = 1$  et que  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  et  $2\lambda_1 > \lambda_n > \lambda_1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On note

$$\begin{aligned} U_n^- &= \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } u_n(x) < 0\}, \quad V_n^- = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } v_n(x) < 0\}, \\ U_n^+ &= \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } u_n(x) > 0\} \quad \text{et} \quad V_n^+ = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } v_n(x) > 0\}. \end{aligned}$$

D'après (2.11), il existe une constante  $C$  indépendante de  $n$  telle que

$$\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(U_n^- \cap V_n^-)} \geq \frac{C}{\lambda_n} \geq \frac{C}{2\lambda_1} > 0 \quad (2.12)$$

Soit  $K$  tel que  $\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(B_K^c)} < \frac{C}{4\lambda_1}$  on en déduit que  $\|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(B_K \cap U_n^- \cap V_n^-)} \geq \frac{C}{4\lambda_1}$ .

Or

$$\left( \int_{B_K \cap U_n^- \cap V_n^-} b(x)^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}} dx \right)^{\frac{\alpha+\beta+2}{N}} \leq \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} |B_K \cap U_n^- \cap V_n^-|^{\frac{\alpha+\beta+2}{N}}$$

donc

$$|B_K \cap U_n^- \cap V_n^-| \geq \left( \frac{C}{4\lambda_1} \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}} = C_0 \quad (2.13)$$

où  $C_0$  est indépendant de  $N$ . On montrerait de même que :

$$|B_K \cap U_n^+ \cap V_n^+| \geq C_0 \quad (2.14)$$

Dans la suite, on choisit  $K$  de telle sorte que (2.13) soit vérifiée et nous laisserons au lecteur le soin d'extraire les sous-suites quand ce sera nécessaire.

D'abord, on observe que pour tout  $(\Phi, \Psi) \in (L^p(\mathbb{R}^N))^N \times (L^p(\mathbb{R}^N))^N$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} (|\Phi|^{p-2}\Phi - |\Psi|^{p-2}\Psi)(\Phi - \Psi)dx = \int_{\mathbb{R}^N} (|\Phi|^p + |\Psi|^p - |\Phi|^{p-2}\Phi\Psi - |\Psi|^{p-2}\Psi\Phi)dx \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^N} (|\Phi|^p + |\Psi|^p)dx - \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi|^p dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} - \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi|^p dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ & = \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} - \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} - \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

A l'aide de (2.15) nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 & \leq \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} - \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_m|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} - \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_m|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m)(\nabla u_n - \nabla u_m)dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |\nabla u_m|^p)dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_m dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla u_n dx \\ & \leq \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_n|^\alpha |u_n| |v_n|^\beta v_n dx + \lambda_m \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_m|^\alpha |u_m| |v_m|^\beta v_m dx \\ & \quad - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_n|^\alpha |u_m| |v_n|^\beta v_n dx - \lambda_m \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_m|^\alpha |u_n| |v_m|^\beta v_m dx \\ & \leq \int_{B_R} b(x)(\lambda_n |u_n|^\alpha |v_n|^\beta v_n - \lambda_m |u_m|^\alpha |v_m|^\beta v_m)(u_n - u_m)dx \\ & \quad + \lambda_n \int_{B_R^c} (b(x)|u_n|^\alpha |v_n|^\beta v_n)(u_n - u_m)dx + \lambda_m \int_{B_R^c} (b(x)|u_m|^\alpha |v_m|^\beta v_m)(u_m - u_n)dx \\ & \leq \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \left\| \lambda_n |u_n|^\alpha |v_n|^\beta v_n - \lambda_m |u_m|^\alpha |v_m|^\beta v_m \right\|_{L^{p'}(B_R)} \|u_n - u_m\|_{L^p(B_R)} \\ & \quad + \lambda_n \|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(B_R^c)} \| |u_n|^\alpha |v_n|^\beta v_n \|_{L^{\frac{Nq}{N-p}}(\mathbb{R}^N)} \left( \|u_n\|_{L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N)} + \|u_m\|_{L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N)} \right) \\ & \quad + \lambda_m \|b\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(B_R^c)} \| |u_m|^\alpha |v_m|^\beta v_m \|_{L^{\frac{Nq}{N-p}}(\mathbb{R}^N)} \left( \|u_m\|_{L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N)} + \|u_n\|_{L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N)} \right) \end{aligned}$$

Les deuxième et troisième termes peuvent être pris aussi petits que l'on veut et indépendamment de  $n$  à condition de choisir  $R$  assez grand car  $b \in L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N)$  et  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est borné dans  $L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N) \times L^{\frac{Nq}{N-p}}(\mathbb{R}^N)$ . Pour  $R$  ainsi fixé, le premier terme tend vers 0 car  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $L^p(B_R)$  et  $(|u_n|^\alpha |v_n|^\beta v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $L^{p'}(B_R)$  ( $\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta+1}{q} = \frac{p-1}{p}$ )



d'après l'injection compacte de  $D^{1,p}(B_R)$  dans  $L^p(B_R)$ . Il en résulte que  $\nabla u_n$  et  $\nabla v_n$  sont des suites de Cauchy respectivement de  $(L^p(\mathbb{R}^N))^N$  et de  $(L^q(\mathbb{R}^N))^N$ .

En effectuant le même travail pour  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on arrive à la conclusion que  $(\nabla u_n, \nabla v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en norme  $(L^p(\mathbb{R}^N))^N \times (L^q(\mathbb{R}^N))^N$  vers  $(\nabla \tilde{u}, \nabla \tilde{v})$  et comme  $(\nabla u_n, \nabla v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $(\nabla \tilde{u}, \nabla \tilde{v})$  dans  $(L^p(\mathbb{R}^N))^N \times (L^q(\mathbb{R}^N))^N$ , on en déduit que  $(\nabla u_n, \nabla v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $(\nabla \tilde{u}, \nabla \tilde{v})$  dans  $(L^p(\mathbb{R}^N))^N \times (L^q(\mathbb{R}^N))^N$  à une sous-suite près.

On peut donc passer à la limite dans le système  $(\mathcal{S}_{\lambda_n})$  et on obtient que  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  est solution de  $(\mathcal{S}_{\lambda_1})$ .

Comme  $\lambda_1$  est simple et  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_1$  avec  $\int_{\mathbb{R}^N} b|\tilde{u}|^\alpha |\tilde{v}|^\beta \tilde{u}\tilde{v} dx = 1$  ( en effet  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  et  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  s'injecte continûment dans  $L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N) \times L^{\frac{Nq}{N-q}}(\mathbb{R}^N)$  ), cela implique que  $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (-u_1, -v_1)$  ou  $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_1, v_1)$ .

• Supposons que  $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_1, v_1)$ .

Par conséquent, en considérant la convergence de  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $(u_1, v_1)$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ , on a aussi  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge fortement vers  $(u_1, v_1)$  dans  $L^p(B_R) \times L^q(B_R)$  (à une sous-suite près) où  $R$  est fixé de telle sorte que (2.13) soit vérifiée. Et par le théorème d'Egorov  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $(u_1, v_1)$  sur  $B_R$  sauf sur un ensemble de mesure arbitrairement petite. Ce qui signifie que pour  $n$  assez grand,  $u_n$  et  $v_n$  sont strictement positives sur  $B_R$  sauf sur un ensemble de mesure arbitrairement petite : ce qui contredit l'assertion (2.13).

• Supposons que  $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (-u_1, -v_1)$

On suit le même cheminement en remplaçant les ensembles  $U_n^-$  et  $V_n^-$  par  $U_n^+$  et  $V_n^+$  et on contredit l'inégalité (2.14).

Ainsi, par l'absurde on conclut que la première valeur propre principale  $\lambda_1$  est isolée. ◆

# Bibliographie

- [1] W. ALLEGRETTO Y. X. HUANG. Eigenvalues of the indefinite-weight  $p$ -Laplacian in weighted  $\mathbb{R}^n$  spaces. *Funkc. Ekvac.*, 38 :233–242, 1995.
- [2] W. ALLEGRETTO X. Y. HUANG. A Picone’s identity for the  $p$ -Laplacian and applications. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 32(7) :819–830, 1998.
- [3] A. ANANE. Simplicité et isolation de la première valeur propre du  $p$ -laplacien avec poids. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. Math.* I(305) :725–728, 1987.
- [4] M. S. BERGER. *Nonlinearity and Functionnal Analysis*. Academic Press, New-York, 1977.
- [5] H. BRÉZIS. *Analyse Fonctionnelle. Théories et Applications*. Masson, Paris, 1983.
- [6] H. BRÉZIS L. OSWALD. Remarks on sublinear elliptic equation. *Nonlinear Anal. TMA*, 10(1) :55–64, 1986.
- [7] K. CHAÏB A. BECHAH and F. DE THÉLIN. Existence and uniqueness of positive solution for subhomogeneous elliptic problems in  $\mathbb{R}^n$ . *Revista de Matemáticas aplicadas*, 21(1-2) :1–18, 2000.
- [8] J. I. DÍAZ J. E. SAA. Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilineaires. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. Math.* I(305) :521–524, 1987.
- [9] J. FLECKINGER R. F. MANÁSEVICH N. M. STAVRAKAKIS F. DE THÉLIN. Principal eigenvalues for some quasilinear elliptic equations on  $\mathbb{R}^n$ . *Adv. Differential Equations*, 2(6) :981–1003, 1997.
- [10] J. FLECKINGER J. HERNÁNDEZ P. TAKÁC F. DE THÉLIN. Uniqueness and positivity for solutions of equations with the  $p$ -laplacian. In E. Mitidieri G. Caristi, editor, *Reaction diffusion systems (Trieste 1995)*, number 194 in Lectures Notes in Pure and Appl. Math., pages 141–155, 1998.
- [11] D. GILBARG N. S. TRUDINGER. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983.
- [12] J. SERRIN. Local behavior of solutions of quasilinear equations. *Acta Mathematica*, 111 :247–302, 1964.
- [13] F. DE THÉLIN. Première valeur propre d’un système elliptique non linéaire. *Rev. Mat. Apl.*, 13(1) :1–8, 1992.
- [14] P. TOLKSDORF. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, 51(1) :126–150, 1984.

- [15] J. L. VÁZQUEZ. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations.  
*Appl. Math. Optim.*, 12(3) :191–202, 1984.

# Chapitre 3

## Condition nécessaire et suffisante d'existence : cas de systèmes de $p$ et $q$ -Laplaciens comparables à des systèmes variationnels.

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier l'existence de solution pour un système non linéaire de la forme :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta_p u = \mu f(x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = \mu g(x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec  $1 < p < N$ ,  $1 < q < N$  et  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^N$ . Rappelons que, lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , la condition  $u = v = 0$  sur  $\partial\Omega$  se traduit par

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x).$$

Nous allons en fait établir une condition nécessaire et une condition suffisante sur le paramètre  $\mu$  pour l'existence de solution d'un tel problème. Les hypothèses que nous ferons sur les fonctions  $f$  et  $g$  sont d'une part des hypothèses sur leur régularité et d'autre part des hypothèses sur leur croissance. En effet, nous supposons que  $f$  et  $g$  peuvent être contrôlées par des fonctions polynomiales en  $u$  et  $v$ . Dans cette partie de la thèse, nous supposerons que ces fonctions polynomiales majorantes et minorantes ont un caractère variationnel. Contrairement à ce qui sera fait dans le chapitre suivant où nous supposerons que ces fonctions ont un caractère plutôt hamiltonien.

Ainsi pour prouver l'existence de solution positive, nous utilisons la méthode des sous, sur-solutions (voir par exemple J.I. Díaz - J. Hernández [6], J. Hernández [11]). Et évidemment, les propriétés des fonctions polynomiales contrôlant  $f$  et  $g$  nous y aident beaucoup.

Dans la démonstration de la condition nécessaire d'existence, nous généralisons un résultat dû à R. Shivaji [16]. Il étudie le cas semilinéaire ( $p = 2$ ), et dans sa démarche le fait que le Laplacien ( $\Delta = \Delta_2$ ) soit autoadjoint est essentiel. Pour palier l'absence de cette propriété pour le  $p$ -Laplacien  $\Delta_p$ , nous utilisons, dans le cas borné, l'inégalité de Díaz-Saa ([8]). Mais si  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , nous ne pouvons plus appliquer ce résultat en l'état. Par conséquent, nous utilisons une méthode basée sur l'identité de Picone présentée par W. Allegretto et X. Y. Huang [1] pour obtenir un résultat identique.

Dans ce qui suit, nous nous bornerons à l'étude du cas non borné  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . En ce qui concerne le cas borné qui est plus simple, nous indiquerons les étapes de la démonstration en appendice (Appendice 2).

Avant d'énoncer les hypothèses faites sur les fonctions  $f$  et  $g$ , voici quelques notations et conditions sur les exposants qui interviendront dans les hypothèses de croissance faites sur  $f$  et  $g$  :

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{Np}{N-p}, & q^* &= \frac{Nq}{N-q} \\ \frac{1}{s} &= \frac{\alpha' + 1}{p^*} + \frac{\beta' + 1}{q^*} < 1 \\ \frac{1}{r} &= \frac{\alpha' + 1}{p} + \frac{\beta' + 1}{q} > 1 \\ 1 &= \frac{\alpha + 1}{p} + \frac{\beta + 1}{q}. \end{aligned}$$

(H1) On suppose que les fonctions  $(r, s) \mapsto f(x, r, s)$  et  $(r, s) \mapsto g(x, r, s)$  sont continues sur  $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^N$  et que  $x \mapsto f(x, r, s)$  et  $x \mapsto g(x, r, s)$  sont mesurables (i. e.  $f$  et  $g$  sont des fonctions de Carathéodory) ;

(H2) Il existe des fonctions  $a, b, c, d, e$  et des exposants  $p < p_1 < p^*$ ,  $q < q_1 < q^*$  tels que pour tout  $u, v \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x, u, v) &\leq a(x)u^{\alpha'}v^{\beta'+1} + b(x)u^{p_1-1} + c(x) \text{ presque partout sur } \mathbb{R}^N \\ 0 \leq g(x, u, v) &\leq a(x)u^{\alpha'+1}v^{\beta'} + d(x)v^{q_1-1} + e(x) \text{ presque partout sur } \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

où

$$a \in L^\delta(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N), \quad b \in L^{\delta_p}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N), \quad d \in L^{\delta_q}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N),$$

$$c \in L^{\gamma_p}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N), \quad e \in L^{\gamma_q}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N),$$

avec

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{s}{s-1}, & \delta_p &= \frac{Np}{Np - p_1(N-p)}, & \delta_q &= \frac{Nq}{Nq - q_1(N-q)}, \\ \gamma_p &= \frac{Np}{Np - N + p}, & \gamma_q &= \frac{Nq}{Nq - N + q}; \end{aligned}$$

( $\mathcal{H}3$ ) La fonction  $x \mapsto f(x, 0, 0) + g(x, 0, 0)$  est non identiquement nulle ;

( $\mathcal{H}4$ ) Il existe  $A \in L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$  telle que pour tout  $u, v \geq 0$

$$f(x, u, v) \geq A(x)u^\alpha v^{\beta+1} \text{ p. p. sur } \mathbb{R}^N$$

$$g(x, u, v) \geq A(x)u^{\alpha+1}v^\beta \text{ p. p. sur } \mathbb{R}^N$$

avec  $\alpha, \beta \geq 0, p, q > 1$  et  $\frac{\alpha+1}{p} + \frac{\beta+1}{q} = 1$ .

### 3.1 Condition suffisante d'existence

Avant d'énoncer le premier résultat de ce chapitre donnant une condition suffisante d'existence pour les solutions de ( $\mathcal{P}$ ), insistons sur le caractère variationnel de la minoration dans ( $\mathcal{H}4$ ) ce qui ne sera pas le cas dans le chapitre suivant.

**Théorème 3.1** *Soit  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , sous les hypothèses ( $\mathcal{H}1$ ) – ( $\mathcal{H}3$ ), il existe une constante  $\mu^*$  dépendant des exposants  $N, p, q, p_1, q_1$  et des fonctions  $a, b, c, d, e$  telle que pour tout  $\mu \in (0, \mu^*)$  le problème ( $\mathcal{P}$ ) admette une solution positive non triviale dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ .*

#### Preuve du théorème 3.1

Pour prouver l'existence de solution positive, nous allons appliquer le théorème de Leray-Schauder après avoir montré l'existence d'un couple de sous,sur-solution dont voici la définition.

**Définition 3.1**  $(u_0, v_0) - (u^0, v^0)$  est sous,sur-solution de ( $\mathcal{P}$ ) si ces fonctions vérifient :

(S1)  $(u_0, v_0) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  et  $(u^0, v^0) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$

(S2)  $u_0 \leq u^0$  et  $v_0 \leq v^0$

(S3)  $-\Delta_p u_0 - \mu f(x, u_0, v) \leq 0 \leq -\Delta_p u^0 - \mu f(x, u^0, v) \quad \forall v \in [v_0, v^0]$

(S4)  $-\Delta_q v_0 - \mu g(x, u, v_0) \leq 0 \leq -\Delta_q v^0 - \mu g(x, u, v^0) \quad \forall u \in [u_0, u^0]$

**Remarque 3.1** *Modulo une condition de croissance sur les fonctions  $f$  et  $g$ , on peut rapprocher cette définition de celle introduite par J. I. Díaz - J. Hernández [6].*

Tout d'abord, l'hypothèse ( $\mathcal{H}2$ ) nous donne  $(0, 0)$  comme sous-solution ; mais  $(0, 0)$  n'est pas solution d'après ( $\mathcal{H}3$ ). Donc il ne reste plus qu'à trouver une sur-solution, c'est-à-dire une solution de

$$(\mathcal{VP}) \begin{cases} -\Delta_p u = \mu (a(x)u^{\alpha'} v^{\beta'+1} + b(x)u^{p_1-1} + c(x)) & \text{sur } \Omega \\ -\Delta_q v = \mu (a(x)u^{\alpha'+1} v^{\beta'} + d(x)v^{q_1-1} + e(x)) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Dans ce qui suit nous nous intéressons à l'existence de solutions positives, pour cela nous appliquons le théorème du col à une fonctionnelle choisie à cet effet :

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \frac{\alpha'+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{\beta'+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^q dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} H(x, u, v) dx \\ &- \mu \int_{\mathbb{R}^N} h_u(x, u) dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} h_v(x, v) dx \end{aligned}$$

où

$$H(x, u, v) = \begin{cases} a(x)u^{\alpha'+1}v^{\beta'+1} & \text{si } u \text{ et } v \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$h_u(x, u) = \begin{cases} (\alpha' + 1)\left(\frac{1}{p_1}b(x)u^{p_1} + c(x)u\right) & \text{si } u \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } h_v(x, v) = \begin{cases} (\beta' + 1)\left(\frac{1}{q_1}d(x)v^{q_1} + e(x)v\right) & \text{si } v \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  est un espace de Banach réflexif,  $J \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$  et satisfait la condition de Palais-Smale (voir l'appendice de ce chapitre). Il reste à voir que  $J$  a bien une géométrie de col, c'est-à-dire qu'elle vérifie les deux points suivants :

1. Il existe  $R > 0$  et  $c > 0$  tel que

$$\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)} = R \quad \text{implique} \quad J(u, v) > c;$$

2. Il existe  $(u_0, v_0)$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  tel que

$$\|u_0\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)} > R \quad \text{et} \quad J(u_0, v_0) < c.$$

1. Prenons  $(u, v)$  tel que  $\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)} = 1$  on aura aussi

$$\frac{\alpha' + 1}{p} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{\beta' + 1}{q} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q \geq \min\left(\frac{\alpha' + 1}{p2^p}, \frac{\beta' + 1}{q2^q}\right)$$

$$\text{et } \frac{\alpha' + 1}{p_1} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{p_1} + \frac{\beta' + 1}{q_1} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^{q_1} \leq \max\left(\frac{\alpha' + 1}{p_1}, \frac{\beta' + 1}{q_1}\right).$$

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \frac{\alpha' + 1}{p} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{\beta' + 1}{q} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^q \\ &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^N} H(x, u, v) dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} h_u(x, u) dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} h_v(x, v) dx. \end{aligned}$$

Nous utilisons les inégalités de Hölder et de Sobolev pour estimer chacun des termes ci-dessus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} H(x, u, v) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u|^{\alpha'+1} |v|^{\beta'+1} dx \\ &\leq \|a\|_{L^\delta(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha'+1} \|v\|_{L^{q^*}(\mathbb{R}^N)}^{\beta'+1} \\ &\leq \|a\|_{L^\delta(\mathbb{R}^N)} C(N, p)^{\alpha'+1} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha'+1} C(N, q)^{\beta'+1} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^{\beta'+1} \\ &\leq \|a\|_{L^\delta(\mathbb{R}^N)} C(N, p)^{\alpha'+1} C(N, q)^{\beta'+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} h_u(x, u) dx &\leq \frac{\alpha' + 1}{p_1} \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |u|^{p_1} dx + (\alpha' + 1) \int_{\mathbb{R}^N} c(x) |u| dx \\
&\leq \frac{\alpha' + 1}{p_1} \|b\|_{L^{\delta p}(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^{p_1^*}(\mathbb{R}^N)}^{p_1} + (\alpha' + 1) \|c\|_{L^{\gamma p}(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^{p_1^*}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C(N, p)^{p_1} \frac{\alpha' + 1}{p_1} \|b\|_{L^{\delta p}(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^{p_1} \\
&\quad + C(N, p)(\alpha' + 1) \|c\|_{L^{\gamma p}(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et } \int_{\mathbb{R}^N} h_v(x, v) dx &\leq C(N, q)^{q_1} \frac{\beta' + 1}{q_1} \|d\|_{L^{\delta q}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}^{q_1} \\
&\quad + C(N, q)(\beta' + 1) \|e\|_{L^{\gamma q}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{D^{1,q}(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
J(u, v) &\geq \min\left(\frac{\alpha' + 1}{p_1}, \frac{\beta' + 1}{q_1}\right) - \mu C(N, p)^{\alpha' + 1} C(N, q)^{\beta' + 1} \|a\|_{L^{\delta}(\mathbb{R}^N)} \quad (3.1) \\
&\quad - \mu (C(N, p)^{p_1} + C(N, q)^{q_1}) \max\left(\frac{\alpha' + 1}{p_1}, \frac{\beta' + 1}{q_1}\right) (\|b\|_{L^{\delta p}(\mathbb{R}^N)} + \|d\|_{L^{\delta q}(\mathbb{R}^N)}) \\
&\quad - \mu (C(N, p) + C(N, q)) \max(\alpha' + 1, \beta' + 1) (\|c\|_{L^{\gamma p}(\mathbb{R}^N)} + \|e\|_{L^{\gamma q}(\mathbb{R}^N)}) =: c.
\end{aligned}$$

On choisit  $\mu^*$  tel que pour tout  $\mu < \mu^*$  on ait  $c > 0$  où  $c$  est donné dans (3.1). Par conséquent, dès que  $\mu < \mu^*$ ,  $J$  satisfait la première condition avec  $R = 1$ .

2. Soient  $(w, z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  positif fixé tel que  $a(x)wz > 0$  sur une boule de  $\mathbb{R}^N$  et  $k$  une constante positive vérifiant

$$\begin{aligned}
J(k^{\frac{1}{p}}w, k^{\frac{1}{q}}z) &= k \frac{\alpha' + 1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p dx + k \frac{\beta' + 1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^q dx \\
&\quad - k^{\frac{\alpha' + 1}{p} + \frac{\beta' + 1}{q}} \mu \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |w|^{\alpha' + 1} |z|^{\beta' + 1} - k^{\frac{p_1}{p}} \mu \int_{\mathbb{R}^N} b(x) w^{p_1} dx \\
&\quad - k^{\frac{q_1}{q}} \mu \int_{\mathbb{R}^N} d(x) z^{q_1} dx - k^{\frac{1}{p}} \mu \int_{\mathbb{R}^N} c(x) w dx - k^{\frac{1}{q}} \mu \int_{\mathbb{R}^N} e(x) z dx.
\end{aligned}$$

Comme  $\frac{\alpha' + 1}{p} + \frac{\beta' + 1}{q} > 1$ ,  $\frac{p_1}{p} > 1$  et  $\frac{q_1}{q} > 1$ ,  $J(k^{\frac{1}{p}}w, k^{\frac{1}{q}}z)$  tend vers  $-\infty$  quand  $k$  tend vers  $+\infty$  ce qui permet de satisfaire le deuxième point.

Finalement, grâce au théorème du col, on prouve l'existence d'une solution positive du problème  $(\mathcal{VP})$ , notée  $(u^s, v^s)$ , qui est aussi une sur-solution du problème  $(\mathcal{P})$ . Maintenant que nous avons fait cette étude préliminaire, nous sommes en mesure d'appliquer les résultats dus à la méthode des sous,sur-solutions. En effet,  $(0, 0) - (u^s, v^s)$  est bien un couple de sous,sur-solution pour le problème  $(\mathcal{P})$  :



(S1)  $(u^s, v^s) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$

(S2)  $u^s \geq 0$  et  $v^s \geq 0$

(S3) D'après (H4) on a

$$-\mu f(x, 0, v) \leq 0 \quad \text{pour tout } v \in [0, v^s].$$

De plus, d'après (H2)

$$\begin{aligned} -\Delta_p u^s - \mu f(x, u^s, v) &= \mu \left( a(x) u^{s^{\alpha'}} v^{s^{\beta'+1}} + b(x) u^{s^{p_1-1}} + c(x) \right) \\ &- \mu f(x, u^s, v) \geq 0 \quad \text{pour tout } v \in [0, v^s]. \end{aligned}$$

(S4) De façon identique on obtient

$$\begin{aligned} -\mu g(x, u, 0) &\leq 0 \quad \text{pour tout } u \in [0, u^s] \\ \text{et } -\Delta_q v^s - \mu g(x, u, v^s) &\geq 0 \quad \text{pour tout } u \in [0, u^s] \end{aligned}$$

Pour utiliser le théorème du point fixe de Leray-Schauder on a besoin de définir un opérateur  $T : K \rightarrow E$  avec  $E = L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \times L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$  et  $K = [u_0, u^0] \times [v_0, v^0] = K_u \times K_v \subset E$ . Pour tout  $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$ ,  $(w, z) = T(\bar{u}, \bar{v})$  est l'unique solution du système découplé  $(\mathcal{S}_d)$

$$(\mathcal{S}_d) \begin{cases} -\Delta_p w + M k_p(x) |w|^{p_1-2} w = \mu f(x, \bar{u}, \bar{v}) + M k_p(x) \bar{u}^{p_1-1} & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q z + M k_q(x) |z|^{q_1-2} z = \mu g(x, \bar{u}, \bar{v}) + M k_q(x) \bar{v}^{q_1-1} & \text{dans } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

où on a choisi les fonctions  $k_p$  et  $k_q$  telles que  $k_p \in L^{\delta_p}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $k_q \in L^{\delta_q}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$  et pour tout  $R > 0$  il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\inf_{B_R} k_p(x) > \epsilon$  et  $\inf_{B_R} k_q(x) > \epsilon$ . Dans ce système on considère que  $M$  est une constante strictement positive quelconque.

L'opérateur  $T$  possède un point fixe dans  $K$  si les quatre assertions suivantes sont satisfaites :

(LS1)  $K$  est convexe, borné et fermé dans  $E$ .

(LS2)  $T$  est bien défini sur  $K$ .

(LS3)  $K$  est stable par  $T$  i.e.  $T(K) \subset K$ .

(LS4)  $T$  est un opérateur compact.

(LS1) Il est facile de vérifier ce premier point car  $u_0, u^0$  sont dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  et  $v_0, v^0$  sont dans  $D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  qui sont des espaces de Banach réflexifs.

(LS2) Pour montrer que  $T$  est bien défini il suffit de montrer que le problème  $(\mathcal{S}_d)$  admet une unique solution pour tout  $(\bar{u}, \bar{v})$  dans  $K$ . Comme nous considérons un système découplé, nous avons seulement à étudier l'existence et l'unicité de chacune des équations prises séparément, qui s'obtient simplement par minimisation d'une fonction convexe s.c.i. (voir par exemple O. Kavian [13]).

(LS3) Pour prouver la stabilité de  $K$  par l'opérateur  $T$ , nous allons montrer que  $w \geq u_0$ , pour les autres inégalités on procéderait de la même manière.

Le couple  $(u_0, v_0)$  est une sous-solution du problème  $(\mathcal{P})$  et satisfait

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 - \mu f(x, u_0, v) \leq 0 & \forall v \in [v_0, v^0] \\ -\Delta_q v_0 - \mu g(x, u, v_0) \leq 0 & \forall u \in [u_0, u^0]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Le couple  $(w, z)$  est défini par  $(w, z) = T(\bar{u}, \bar{v})$  où  $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$  et satisfait

$$\begin{cases} -\Delta_p w + M k_p(x) w^{p_1-1} = \mu f(x, \bar{u}, \bar{v}) + M k_p(x) \bar{u}^{p_1-1} \\ -\Delta_q z + M k_q(x) z^{q_1-1} = \mu g(x, \bar{u}, \bar{v}) + M k_q(x) \bar{v}^{q_1-1}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Dès que  $(\bar{u}, \bar{v})$  est dans  $K$  nous avons

$$\begin{cases} -\Delta_p w + M k_p(x) w^{p_1-1} \geq \mu f(x, \bar{u}, \bar{v}) + M k_p(x) u_0^{p_1-1} \\ -\Delta_q z + M k_q(x) z^{q_1-1} \geq \mu g(x, \bar{u}, \bar{v}) + M k_q(x) v_0^{q_1-1}. \end{cases} \quad (3.4)$$

On suppose que  $(u_0 - w)_+ \not\equiv 0$ . Nous multiplions les premières équations de (3.2) et (3.4) par  $(u_0 - w)_+ = \max(0, u_0 - w)$ , nous intégrons sur  $\mathbb{R}^N$  et soustrayons les inégalités ainsi obtenues :

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta_p u_0 + \Delta_p w)(u_0 - w)_+ dx + \int_{\mathbb{R}^N} [\mu(f(x, \bar{u}, \bar{v}) - f(x, u_0, \bar{v})) \\ &\quad + M k_p(x)(u_0^{p_1-1} - w^{p_1-1})] (u_0 - w)_+ dx. \end{aligned}$$

Puisque  $k_p(x)(u_0^{p_1-1} - w^{p_1-1})(u_0 - w)_+ \not\equiv 0$ , on peut choisir  $M$  tel que la seconde intégrale soit positive. Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta_p u_0 + \Delta_p w)(u_0 - w)_+ dx < 0$$

ce qui contredit la monotonie de l'opérateur  $-\Delta_p$ ; par conséquent  $(u_0 - w)_+ = 0$  i.e.  $u_0 \leq w$ . On a prouvé que  $K$  est stable par  $T$ .

(LS4) Maintenant, nous devons démontrer que  $T$  est continu de  $K$  dans  $K$  et que l'image par  $T$  de tout borné de  $K$  est relativement compact dans  $K$ . Nous allons voir en détails la preuve du second point; quant à la continuité, la démonstration utilise les mêmes arguments.

Soit  $(\bar{u}_n, \bar{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $K$  convergeant faiblement vers  $(\bar{u}, \bar{v})$  pour la norme de  $L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \times L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$ . Grâce à la stabilité de  $T$ , on peut dire que  $(T(\bar{u}_n, \bar{v}_n))_{n \in \mathbb{N}} = (w_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ . Par exemple, nous montrerons qu'il existe une sous-suite de  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge fortement dans  $K_u$  pour la norme de  $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ ; pour la convergence dans  $K_v$  de l'autre sous-suite de  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la méthode est la même.

D'abord, nous déduisons de la majoration du terme  $I_n$  que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est borné dans  $K_u$  pour la norme de  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  :

$$I_n := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx + M \int_{\mathbb{R}^N} k_p(x) w_n^{p_1} dx.$$

$$\begin{aligned} I_n &= \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x, \bar{u}_n, \bar{v}_n) w_n dx + M \int_{\mathbb{R}^N} k_p(x) \bar{u}_n^{p_1-1} w_n dx \\ &\leq \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x, \bar{u}_n, \bar{v}_n) u^0 dx + M \int_{\mathbb{R}^N} k_p(x) u^{0p_1} dx \\ &\leq \mu \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u^{0\alpha'+1} v^{0\beta'+1} dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} b(x) u^{0p_1} dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} c(x) u^0 dx + M \int_{\mathbb{R}^N} k_p(x) u^{0p_1} dx \\ &\leq C(\mu, M) \left[ \|a\|_{L^\delta(\mathbb{R}^N)} \|u^0\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha'+1} \|v^0\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{\beta'+1} \right. \\ &\quad \left. + \left( \|b\|_{L^{\delta p}(\mathbb{R}^N)} + \|k_p\|_{L^{\delta p}(\mathbb{R}^N)} \right) \|u^0\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{p_1} + \|c\|_{L^{\gamma p}(\mathbb{R}^N)} \|u^0\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \right]. \end{aligned}$$

Or  $a \in L^\delta(\mathbb{R}^N)$ ,  $b, k_p \in L^{\delta p}(\mathbb{R}^N)$ ,  $c \in L^{\gamma p}(\mathbb{R}^N)$ ,  $u^0, v^0 \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ , donc il existe  $C > 0$  tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx < C.$$

On peut extraire une sous-suite encore noté  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant faiblement dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ . Alors  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement dans  $L^m(B_R)$  pour tout  $R > 0$  et tout  $m < p^*$ , elle converge donc presque partout et est dominée par la sur-solution  $u^0 \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ . Par conséquent, elle converge dans  $K_u$  pour la norme de  $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ .

Nous faisons le même travail pour  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et nous prouvons que l'opérateur  $T : K \rightarrow K \subset E = L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \times L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$  est compact.

Après ces résultats, nous pouvons appliquer le théorème du point fixe de Leray-Schauder pour cet opérateur  $T$ . Donc, il existe  $(u, v)$  dans  $K$  tel que  $(u, v) = T(u, v)$ . Cela signifie que  $(u, v)$  est une solution positive de  $(\mathcal{P})$ .

De plus, par le principe du maximum fort et des résultats de régularité, nous prouvons dire que cette solution  $(u, v)$  est strictement positive. Nous avons simplement utilisé le Principe du Maximum Fort de Vázquez. En effet dès que  $\mu > 0$  et  $(\mathcal{H}3)$  est satisfaite, on a  $-\Delta_p u \geq 0$  et  $-\Delta_p v \geq 0$ . Le Principe du Maximum Fort de Vázquez dit que si le problème admet une solution régulière  $(C_{loc}^{1,\delta}(\mathbb{R}^N))$  non triviale satisfaisant  $u \geq 0, v \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^N$  alors cette solution est strictement positive :  $u > 0, v > 0$  sur  $\mathbb{R}^N$ . La régularité des solutions nécessaire pour l'application du Principe du Maximum Fort s'obtient grâce aux estimations  $L^\infty$  de type J. Serrin (voir J. Serrin [18] et A. Bechah [3]) et aux résultats de P. Tolksdorf [19].

◆

## 3.2 Condition nécessaire d'existence

Dans cette section, nous établissons une condition nécessaire sur le paramètre  $\mu$  pour l'existence de solution du système

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta_p u = \mu f(x, u, v) \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = \mu g(x, u, v) \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) \end{cases}$$

Nous considérons aussi le problème de valeur propre

$$(\mathcal{V}_p) \begin{cases} -\Delta_p \varphi = \lambda_1 A(x) \varphi^\alpha \psi^{\beta+1} \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q \psi = \lambda_1 A(x) \varphi^{\alpha+1} \psi^\beta \text{ dans } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

avec  $A \in L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

Nous utiliserons l'identité de Picone pour généraliser le résultat de R. Shivaji [16]. Une présentation de cette identité a été faite dans le chapitre précédent (Proposition 2.3).

**Proposition 3.1 (Identité de Picone généralisée pour le  $p$ -Laplacien)** *Soient  $u, v$  différentiables et  $v > 0$  p. p. sur  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$ . Notons*

$$\begin{aligned} L(u, v) &= |\nabla u|^p + (p-1) \frac{|u|^p}{v^p} |\nabla v|^p - p \frac{|u|^{p-2} u}{v^{p-1}} \nabla u \cdot \nabla v |\nabla v|^{p-2} \text{ p. p. sur } \Omega \\ R(u, v) &= |\nabla u|^p - \nabla \left( \frac{|u|^p}{v^{p-1}} \right) |\nabla v|^{p-2} \nabla v \text{ p. p. sur } \Omega. \end{aligned}$$

Alors  $L(u, v) = R(u, v) \geq 0$ .

De plus,  $L(u, v) = 0$  p. p. sur  $\Omega$  si et seulement si  $\nabla \left( \frac{u}{v} \right) = 0$  p. p. sur  $\Omega$ .

**Théorème 3.2** *Soit  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , on suppose que les hypothèses  $(\mathcal{H}1)$  et  $(\mathcal{H}4)$  sont satisfaites. Si  $(u, v)$  est une solution positive ( $u > 0$  et  $v > 0$ ) du problème  $(\mathcal{P})$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N) \cap C^{1,\gamma}(\mathbb{R}^N) \times C^{1,\delta}(\mathbb{R}^N)$  alors  $\mu \leq \lambda_1$ .*

Preuve du théorème 3.2

On considère deux suites  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strictement positives dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  qui convergent respectivement vers  $\varphi$  et  $\psi$  solutions de  $(\mathcal{V}_p)$ . Appliquons l'inégalité de Picone aux fonctions  $\varphi_n, u$  et  $\psi_n, v$  qui sont strictement positives et différentiables respectivement dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  et  $D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ .

$$0 \leq \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} L(\varphi_n, u) dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} L(\psi_n, v) dx \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_n|^p dx - \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \left( \frac{\varphi_n^p}{u^{p-1}} \right) |\nabla u|^{p-2} \nabla u dx \\ &+ \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_n|^q dx - \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \left( \frac{\psi_n^q}{v^{q-1}} \right) |\nabla v|^{q-2} \nabla v dx \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les fonctions tests  $\frac{\varphi_n^p}{u^{p-1}}$  et  $\frac{\psi_n^q}{v^{q-1}}$  sont admissibles puisque  $u, v > 0$  et  $\varphi_n, \psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ .  
En intégrant par parties on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_n|^p dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_n|^q dx \\ &+ \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi_n^p}{u^{p-1}} \Delta_p u dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\psi_n^q}{v^{q-1}} \Delta_q v dx \\ &\leq \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_n|^p dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_n|^q dx \\ &- \mu \left( \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi_n^p}{u^{p-1}} f(x, u, v) dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\psi_n^q}{v^{q-1}} g(x, u, v) dx \right). \end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse (H4) on a  $f(x, u, v) \geq A(x)u^\alpha v^{\beta+1}$  et  $g(x, u, v) \geq A(x)u^{\alpha+1}v^\beta$  donc

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_n|^p dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_n|^q dx &- \mu \left( \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} A(x) \varphi_n^p u^{\alpha+1-p} v^{\beta+1} dx \right. \\ &\left. + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} A(x) \psi_n^q v^{\alpha+1} v^{\beta+1-q} dx \right). \end{aligned}$$

en passant à la limite on obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi|^q dx &= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} A(x) \varphi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1} dx \quad (3.7) \\ &\geq \mu \left( \frac{\alpha+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} A(x) u^{\alpha+1-p} v^{\beta+1} \varphi^p dx \right. \\ &\left. + \frac{\beta+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} A(x) u^{\alpha+1} v^{\beta+1-q} \psi^q dx \right). \end{aligned}$$

En effet, puisque  $\frac{\alpha+1-p}{p^*} + \frac{\beta+1}{q^*} + \frac{p}{p^*} + \frac{\alpha+\beta+2}{N} = 1$  on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} A(x) u^{\alpha+1-p} v^{\beta+1} (\varphi_n^p - \varphi^p) \right| \leq \underbrace{\|A\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\beta+2}}(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha+1-p} \|v\|_{L^{q^*}(\mathbb{R}^N)}^{\beta+1} \|\varphi_n^p - \varphi^p\|_{L^{\frac{p^*}{p}}(\mathbb{R}^N)}}_{\text{tend vers 0}}$$

car  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\varphi$  dans  $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ . Et de même pour le second terme.

D'après l'inégalité de Hölder-Young on a

$$\mathcal{A}^{\alpha+1} \mathcal{B}^{\beta+1} \leq \frac{\alpha+1}{p} \mathcal{A}^p + \frac{\beta+1}{q} \mathcal{B}^q \text{ pour tout } \mathcal{A}, \mathcal{B} \geq 0.$$

Si on pose  $\mathcal{A} = u^{\frac{\alpha+1}{p}-1} v^{\frac{\beta+1}{p}} \varphi$  et  $\mathcal{B} = u^{\frac{\alpha+1}{q}} v^{\frac{\beta+1}{q}-1} \psi$  on arrive à

$$\frac{\alpha+1}{p} u^{\alpha+1-p} v^{\beta+1} \varphi^p + \frac{\beta+1}{q} u^{\alpha+1} v^{\beta+1-q} \psi^q \geq \varphi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1} (u^{\frac{\alpha+1}{p}-1} v^{\frac{\beta+1}{p}})^{\alpha+1} (u^{\frac{\alpha+1}{q}} v^{\frac{\beta+1}{q}-1})^{\beta+1}$$

Or  $\frac{\alpha+1}{p} - 1 = -\frac{\beta+1}{q}$  et  $\frac{\beta+1}{q} - 1 = -\frac{\alpha+1}{p}$ , donc

$$(u^{\frac{\alpha+1}{p}-1} v^{\frac{\beta+1}{p}})^{\alpha+1} = \left( \frac{v^{\frac{1}{p}}}{u^{\frac{1}{q}}} \right)^{(\alpha+1)(\beta+1)} \quad \text{et} \quad (u^{\frac{\alpha+1}{q}} v^{\frac{\beta+1}{q}-1})^{\beta+1} = \left( \frac{u^{\frac{1}{q}}}{v^{\frac{1}{p}}} \right)^{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

ce qui signifie  $(u^{\frac{\alpha+1}{p}-1} v^{\frac{\beta+1}{p}})^{\alpha+1} (u^{\frac{\alpha+1}{q}} v^{\frac{\beta+1}{q}-1})^{\beta+1} = 1$ .

Ainsi on obtient

$$\frac{\alpha+1}{p} u^{\alpha+1-p} v^{\beta+1} \varphi^p + \frac{\beta+1}{q} u^{\alpha+1} v^{\beta+1-q} \psi^q \geq \varphi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1}. \quad (3.8)$$

Finalement, en utilisant (3.8) dans (3.7) on conclut que

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} A(x) \varphi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1} dx \geq \mu \int_{\mathbb{R}^N} A(x) \varphi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1} dx$$

i. e.  $\lambda_1 \geq \mu$ .

◆

### 3.3 Appendice 1 : Condition de Palais-Smale

Pour compléter la démonstration de l'existence de solution du système  $(\mathcal{VP})$ , on se propose de vérifier la condition de Palais-Smale pour la fonctionnelle  $J$  :

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \frac{\alpha'+1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{\beta'+1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^q dx \\ &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^N} H(x, u, v) dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} h_u(x, u) dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} h_v(x, v) dx \end{aligned}$$

où les fonctions  $H$ ,  $h_u$  et  $h_v$  sont définies dans la preuve du théorème 3.1.

**Définition 3.2** Dire que  $J$  dans  $C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$  vérifie la condition de Palais-Smale signifie que toute suite  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  qui vérifie :

1.  $|J(u_n, v_n)| < C$  ;
2.  $J'(u_n, v_n)$  tend vers 0 dans  $(D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N))'$

admet une sous-suite convergente dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ .

**Proposition 3.2** *J vérifie la condition de Palais-Smale.*

Preuve de la proposition 3.2

Considérons une suite  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  vérifiant les deux assertions 1. et 2. de la définition 3.2. Tout d'abord, nous montrons que cette suite est bornée dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ .

Puisque  $J'(u_n, v_n)$  tend vers 0 dans  $(D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N))'$ , on peut donc dire qu'il existe une suite  $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante tendant vers 0 telle que

$$|J'(u_n, v_n) \cdot (\varphi, \psi)| \leq \epsilon_n \|(\varphi, \psi)\|_{D^{1,p} \times D^{1,q}} \text{ pour tout } (\varphi, \psi) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N).$$

En particulier, en prenant  $\varphi = \frac{1}{p}u_n$  et  $\psi = \frac{1}{q}v_n$  on obtient

$$\begin{aligned} \epsilon_n \| (u_n, v_n) \|_{D^{1,p} \times D^{1,q}} &\geq -\frac{\alpha' + 1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \frac{\beta' + 1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^q dx \quad (3.9) \\ &+ \mu \left( \frac{\alpha' + 1}{p} + \frac{\beta' + 1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u_n^{+\alpha'+1} v_n^{+\beta'+1} dx \\ &+ \mu \frac{\alpha' + 1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} b(x) u_n^{+p_1} dx + \mu \frac{\beta' + 1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} d(x) v_n^{+q_1} dx \\ &+ \mu \frac{\alpha' + 1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} c(x) u_n dx + \mu \frac{\beta' + 1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} e(x) v_n dx. \end{aligned}$$

De plus,  $|J(u_n, v_n)| < C$  donc

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha' + 1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx + \frac{\beta' + 1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^q dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u_n^{+\alpha'+1} v_n^{+\beta'+1} dx \quad (3.10) \\ &- \mu \frac{\alpha' + 1}{p_1} \int_{\mathbb{R}^N} b(x) u_n^{+p_1} dx - \mu \frac{\beta' + 1}{q_1} \int_{\mathbb{R}^N} d(x) v_n^{+q_1} dx \\ &\leq C + \mu(\alpha' + 1) \int_{\mathbb{R}^N} c(x) u_n^+ dx + \mu(\beta' + 1) \int_{\mathbb{R}^N} e(x) v_n^+ dx \\ &\leq C + \mu(\alpha' + 1) \int_{\mathbb{R}^N} c(x) u_n dx + \mu(\beta' + 1) \int_{\mathbb{R}^N} e(x) v_n dx. \end{aligned}$$

Multiplions la première inégalité (3.9) par un coefficient  $\rho$  que nous déterminerons plus tard et additionnons la avec la seconde (3.10), on arrive à

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha' + 1}{p}(1 - \rho) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx + \frac{\beta' + 1}{q}(1 - \rho) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^q dx \\
& + \mu \left( \rho \left( \frac{\alpha' + 1}{p} + \frac{\beta' + 1}{q} \right) - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u_n|^{\alpha' + 1} |v_n|^{\beta' + 1} dx \\
& + \mu(\alpha' + 1) \left( \frac{\rho}{p} - \frac{1}{p_1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} b(x) |u_n|^{p_1} dx + \mu(\beta' + 1) \left( \frac{\rho}{q} - \frac{1}{q_1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} d(x) |v_n|^{q_1} dx \\
& \leq C + \rho \epsilon_n \| (u_n, v_n) \|_{D^{1,p} \times D^{1,q}} \\
& + \mu(\alpha' + 1) \left( \frac{\rho}{p} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} c(x) u_n dx + \mu(\beta' + 1) \left( \frac{\rho}{q} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} e(x) v_n dx.
\end{aligned}$$

En choisissant  $\rho$  tel que  $\max\left(\frac{p}{p_1}, \frac{q}{q_1}, \left(\frac{\alpha' + 1}{p} + \frac{\beta' + 1}{q}\right)^{-1}\right) < \rho < 1$ , on arrive à

$$\begin{aligned}
(1 - \rho) \left( \frac{\alpha' + 1}{p} \|u_n\|_{D^{1,p}}^p + \frac{\beta' + 1}{q} \|v_n\|_{D^{1,q}}^q \right) & \leq \mu(\alpha' + 1) \left(1 - \frac{\rho}{p}\right) C(N, p) \|c\|_{L^{\gamma_p}} \|u_n\|_{D^{1,p}} \\
& + \mu(\beta' + 1) \left(1 - \frac{\rho}{q}\right) C(N, q) \|e\|_{L^{\gamma_q}} \|v_n\|_{D^{1,q}} \\
& + C + \epsilon'_n \left( \frac{\alpha' + 1}{p} \|u_n\|_{D^{1,p}} + \frac{\beta' + 1}{q} \|v_n\|_{D^{1,q}} \right).
\end{aligned}$$

Les exposants  $p$  et  $q$  étant strictement supérieurs à 1, on obtient finalement que  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ .

Par la suite nous nous contenterons de vérifier la relative compacité de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  en ce qui concerne  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  le travail est tout à fait identique. Pour cela, montrons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Premièrement, on peut observer que pour tout  $(\varphi, \psi) \in (L^p(\mathbb{R}^N))^N \times (L^q(\mathbb{R}^N))^N$  on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} (|\varphi|^{p-2}\varphi - |\psi|^{p-2}\psi) (\varphi - \psi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} (|\varphi|^p + |\psi|^p - |\varphi|^{p-2}\varphi\psi - |\psi|^{p-2}\psi\varphi) dx \\
& \geq \int_{\mathbb{R}^N} (|\varphi|^p + |\psi|^p) dx - \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} - \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^p dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\
& = \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} - \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} - \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \geq 0. \quad (3.11)
\end{aligned}$$



Ainsi, à l'aide de (3.11) nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} - \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_m|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} - \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_m|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m) (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \\
&\leq \frac{1}{\alpha' + 1} (J'(u_n, v_n) - J'(u_m, v_m)) (u_n - u_m, 0) \\
&+ \mu \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \left( u_n^{+\alpha'} v_n^{+\beta'+1} - u_m^{+\alpha'} v_m^{+\beta'+1} \right) (u_n - u_m) dx \\
&+ \mu \int_{\mathbb{R}^N} b(x) \left( u_n^{+p_1-1} - u_m^{+p_1-1} \right) (u_n - u_m) dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} c(x) (u_n - u_m) dx \\
&\leq \frac{1}{\alpha' + 1} (J'(u_n, v_n) - J'(u_m, v_m)) (u_n - u_m, 0) \\
&+ \mu \|a\|_{L^\infty(B_R)} \left\| u_n^{+\alpha'} v_n^{+\beta'+1} - u_m^{+\alpha'} v_m^{+\beta'+1} \right\|_{L^{p'}(B_R)} \|u_n - u_m\|_{L^p(B_R)} \\
&+ \mu \|b\|_{L^\infty(B_R)} \left\| u_n^{+p_1-1} - u_m^{+p_1-1} \right\|_{L^{p'}(B_R)} \|u_n - u_m\|_{L^p(B_R)} \\
&+ \mu \|c\|_{L^{p'}(B_R)} \|u_n - u_m\|_{L^p(B_R)} \\
&+ \mu \|a\|_{L^\delta(B_R^c)} \|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha'} \|v_n\|_{L^{q^*}(\mathbb{R}^N)}^{\beta'+1} (\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} + \|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}) \\
&+ \mu \|a\|_{L^\delta(B_R^c)} \|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha'} \|v_m\|_{L^{q^*}(\mathbb{R}^N)}^{\beta'+1} (\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} + \|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}) \\
&+ \mu \|b\|_{L^{\delta p}(B_R^c)} \left( \|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha'} + \|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{\alpha'} \right) (\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} + \|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}) \\
&+ \mu \|c\|_{L^{\gamma p}(B_R^c)} (\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} + \|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}).
\end{aligned}$$

Les quatre derniers termes peuvent être pris aussi petit que l'on veut indépendamment de  $n$  en choisissant  $R$  assez grand car  $a \in L^\delta(\mathbb{R}^N)$ ,  $b \in L^{\delta p}(\mathbb{R}^N)$  et  $c \in L^{\gamma p}(\mathbb{R}^N)$ . Pour un  $R$  ainsi fixé, le premier terme tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini d'après la définition de  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ; les deuxième, troisième et quatrième termes tendent aussi vers 0 car  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $L^p(B_R)$ ,  $(u_n^{+\alpha'} v_n^{+\beta'+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_n^{+p_1-1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées dans  $L^{p'}(B_R)$  d'après l'injection compacte de  $D^{1,p}(B_R)$  dans  $L^\gamma(B_R)$  avec  $1 \leq \gamma < p^*$ . Il s'ensuit que  $(\nabla u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et de même  $(\nabla v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des suites de Cauchy dans  $(L^p(\mathbb{R}^N))^N$  et  $(L^q(\mathbb{R}^N))^N$  respectivement i. e. :

$(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$  (à une sous-suite près).

◆

### 3.4 Appendice 2 : Cas borné

Dans cet appendice, nous étudions l'existence de solution pour le système  $(\mathcal{P})$  dans le cas où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ .

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta_p u = \mu f(x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = \mu g(x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

( $\mathcal{H}_b1$ ) On suppose que les fonctions  $f$  et  $g$  sont des fonctions de Carathéodory ;

( $\mathcal{H}_b2$ ) Il existe des fonctions  $a, b, c, d, e$  et des exposants  $p < p_1 < p^*$ ,  $q < q_1 < q^*$  tels que pour tout  $u, v \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x, u, v) &\leq a(x)u^{\alpha'}v^{\beta'+1} + b(x)u^{p_1-1} + c(x) && \text{presque partout sur } \Omega \\ 0 \leq g(x, u, v) &\leq a(x)u^{\alpha'+1}v^{\beta'} + b(x)v^{q_1-1} + e(x) && \text{presque partout sur } \Omega \end{aligned}$$

où  $a, b, c, d, e \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\frac{\alpha'+1}{p} + \frac{\beta'+1}{q} > 1$  et  $\frac{\alpha'+1}{p^*} + \frac{\beta'+1}{q^*} < 1$  ;

( $\mathcal{H}_b3$ ) La fonction  $x \mapsto f(x, 0, 0) + g(x, 0, 0)$  est non identiquement nulle ;

( $\mathcal{H}_b4$ ) Il existe  $A \in L^\infty(\Omega)$  telle que pour tout  $u, v \geq 0$

$$\begin{aligned} f(x, u, v) &\geq A(x)u^\alpha v^{\beta+1} && \text{presque partout sur } \Omega \\ g(x, u, v) &\geq A(x)u^{\alpha+1}v^\beta && \text{presque partout sur } \Omega \end{aligned}$$

avec  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $p, q > 1$  et  $\frac{\alpha+1}{p} + \frac{\beta+1}{q} = 1$ .

**Théorème 3.3** Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ , sous les hypothèses ( $\mathcal{H}_b1$ )-( $\mathcal{H}_b3$ ), il existe une constante  $\mu^*$  dépendant des exposants  $N, p, q, p_1, q_1$  et des fonctions  $a, b, c, d, e$  telle que pour tout  $\mu \in (0, \mu^*)$  le problème ( $\mathcal{P}$ ) admette une solution non triviale dans  $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ .

Preuve du théorème 3.3

Comme dans le cas non borné, nous prouvons l'existence d'un couple de sous,sur-solution  $(0, 0) - (u^s, v^s)$  où  $(u^s, v^s)$  est solution dans  $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$  de

$$(\mathcal{VP}) \begin{cases} -\Delta_p u = \mu (a(x)u^{\alpha'}v^{\beta'+1} + b(x)u^{p_1-1} + c(x)) & \text{sur } \Omega \\ -\Delta_q v = \mu (a(x)u^{\alpha'+1}v^{\beta'} + d(x)v^{q_1-1} + e(x)) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Pour appliquer le théorème de point fixe de Leray-Schauder à ce couple de sous,sur-solution, nous définissons un opérateur  $\tilde{T} : K \rightarrow \tilde{E} = L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$  et  $K = [u_0, u^0] \times [v_0, v^0] = K_u \times K_v = \tilde{E}$ . Pour tout  $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$   $(w, z) = \tilde{T}(\bar{u}, \bar{v})$  est l'unique solution du système découplé ( $\tilde{\mathcal{S}}_d$ )

$$(\tilde{\mathcal{S}}_d) \begin{cases} -\Delta_p w + M|w|^{p_1-2}w = \mu f(x, \bar{u}, \bar{v}) + M\bar{u}^{p_1-1} & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q z + M|z|^{q_1-2}z = \mu g(x, \bar{u}, \bar{v}) + M\bar{v}^{q_1-1} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où  $M$  est une constante positive.

Nous montrons comme dans la preuve du théorème 3.1 que :

$K$  est convexe, borné et fermé dans  $E$  ;

$\tilde{T}$  est bien défini sur  $K$  ;

$K$  est stable par  $\tilde{T}$  ;

$\tilde{T}$  est un opérateur compact.

Un argument essentiel dans la démonstration du dernier point est l'injection compacte de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega)$ . Ainsi, nous appliquons le théorème de point fixe de Leray-Schauder à l'opérateur  $\tilde{T}$  pour obtenir l'existence de  $(u, v)$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$  solution de  $(\mathcal{P})$ .

Maintenant, cherchons une condition nécessaire d'existence ; pour cela considérons le problème de valeur propre suivant

$$(\tilde{\mathcal{V}}_p) \begin{cases} -\Delta_p \varphi = \lambda_1 A(x) \varphi^\alpha \psi^{\beta+1} & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q \psi = \lambda_1 A(x) \varphi^{\alpha+1} \psi^\beta & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec  $A \in L^\infty(\Omega)$ .

**Théorème 3.4** *Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ , on suppose que les hypothèses  $(\mathcal{H}_b1)$  et  $(\mathcal{H}_b4)$  sont satisfaites. Si  $(u, v)$  est une solution positive ( $u > 0, v > 0$ ) du problème  $(\mathcal{P})$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega) \cap C^{1,\gamma}(\Omega) \times C^{1,\delta}(\Omega)$  alors  $\mu \leq \lambda_1$ .*

Preuve du théorème 3.4

Puisque nous sommes dans le cas  $\Omega$  borné, nous pouvons appliquer l'inégalité de Díaz-Saa aux solutions  $(u, v)$  de  $(\mathcal{P})$  et  $(\varphi, \psi)$  de  $(\tilde{\mathcal{V}}_p)$ . Tout d'abord remarquons que si le couple  $(\varphi, \psi)$  est solution de  $(\tilde{\mathcal{V}}_p)$ , pour tout  $k > 0$  le couple  $(k^{\frac{1}{p}}\varphi, k^{\frac{1}{q}}\psi)$  l'est aussi. Ainsi on peut choisir un couple de fonctions propres de telle sorte que  $\varphi \geq u$  et  $\psi \geq v$ . On applique l'inégalité de Díaz-Saa aux fonctions  $u, \varphi$  puis  $v, \psi$  et après avoir multiplié respectivement par  $\frac{\alpha+1}{p}$  et  $\frac{\beta+1}{q}$  les deux inégalités, nous les additionnons :

$$\frac{\alpha+1}{p} \int_{\Omega} \left( -\frac{\Delta_p \varphi}{\varphi^{p-1}} + \frac{\Delta_p u}{u^{p-1}} \right) (\varphi^p - u^p) dx + \frac{\beta+1}{q} \int_{\Omega} \left( -\frac{\Delta_q \psi}{\psi^{q-1}} + \frac{\Delta_q v}{v^{q-1}} \right) (\psi^q - v^q) dx \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\alpha+1}{p} \int_{\Omega} \left( \lambda_1 A(x) \varphi^{\alpha+1-p} \psi^{\beta+1} - \mu \frac{f(x, u, v)}{u^{p-1}} \right) (\varphi^p - u^p) dx \\ &+ \frac{\beta+1}{q} \int_{\Omega} \left( \lambda_1 A(x) \varphi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1-q} - \frac{g(x, u, v)}{v^{q-1}} \right) (\psi^q - v^q) dx. \end{aligned}$$

D'après ( $\mathcal{H}_b4$ ) on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\alpha+1}{p} \int_{\Omega} (\lambda_1 A(x) \varphi^{\alpha+1-p} \psi^{\beta+1} - \mu A(x) u^{\alpha+1-p} v^{\beta+1}) (\varphi^p - u^p) dx \\ &+ \frac{\beta+1}{q} \int_{\Omega} (\lambda_1 A(x) \varphi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1-q} - \mu A(x) u^{\alpha+1} v^{\beta+1-q}) (\psi^q - v^q) dx \end{aligned}$$

et en développant, on arrive à

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mu A(x) u^{\alpha+1} v^{\beta+1} + \lambda_1 \varphi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1}) &\geq \lambda_1 \int_{\Omega} \left( \frac{\alpha+1}{p} \varphi^{\alpha+1-p} \psi^{\beta+1} u^p + \frac{\beta+1}{q} \varphi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1-q} v^q \right) \\ &+ \mu \int_{\Omega} \left( \frac{\alpha+1}{p} u^{\alpha+1-p} v^{\beta+1} \varphi^p + \frac{\beta+1}{q} u^{\alpha+1} v^{\beta+1-q} \psi^q \right). \end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.8) on a

$$\int_{\Omega} (\mu A(x) u^{\alpha+1} v^{\beta+1} + \lambda_1 \varphi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1}) \geq \lambda_1 \int_{\Omega} A(x) u^{\alpha+1} v^{\beta+1} dx + \mu \int_{\Omega} A(x) \varphi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1} dx$$

donc

$$(\mu - \lambda_1) \int_{\Omega} A(x) (u^{\alpha+1} v^{\beta+1} - \varphi^{\alpha+1} \psi^{\beta+1}) dx \geq 0.$$

Comme  $\varphi \geq u$  et  $\psi \geq v$  on conclut que  $\mu \leq \lambda_1$ .

◆



# Bibliographie

- [1] W. ALLEGRETTO X. Y. HUANG. A Picone's identity for the  $p$ -Laplacian and applications. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 32(7) :819–830, 1998.
- [2] W. ALLEGRETTO X. Y. HUANG. Principal eigenvalues and Sturm comparison via Picone's identity. *Journal of Differential Equations*, 156 :427–438, 1999. doi :10.1006/jdeq.1998.3596.
- [3] A. BECHAH. Local and global estimates of solutions of systems involving  $p$ -Laplacian in unbounded domain. *Electronic Journal of Differential Equations*, 19 :1–14, 2001.
- [4] K. CHAÏB. Extension of Díaz-Saa inequality in  $\mathbb{R}^n$  and applications to a system of  $p$ -Laplacian. Submitted.
- [5] K. CHAÏB A. BECHAH and F. DE THÉLIN. Existence and uniqueness of positive solution for subhomogeneous elliptic problems in  $\mathbb{R}^n$ . *Revista de Matemáticas aplicadas*, 21(1-2) :1–18, 2000.
- [6] J. I. DÍAZ J. HERNÁNDEZ. Free boundary problems for some stationary reaction-diffusion systems. In *Res. Notes in Math*, number 89 in Contributions to nonlinear partial differential equations (Madrid, 1981), pages 176–182, Pitman, Boston, Mass.-London, 1983.
- [7] J. I. DÍAZ and M. A. HERRERO. Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Sect. A*, 89(3-4) :249–258, 1981.
- [8] J. I. DÍAZ J. E. SAA. Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilineaires. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. Math.* I(305) :521–524, 1987.
- [9] J. FLECKINGER R. F. MANÁSEVICH N. M. STAVRAKAKIS F. DE THÉLIN. Principal eigenvalues for some quasilinear elliptic equations on  $\mathbb{R}^n$ . *Adv. Differential Equations*, 2(6) :981–1003, 1997.
- [10] P. FELMER R. F. MANÁSEVICH F. DE THÉLIN. Existence and uniqueness of positive solutions for certains quasilinear elliptic systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 17(11/12) :2013–2029, 1992.
- [11] J. HERNÁNDEZ. Positive solutions for the logistic equation with unbounded weights. In *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, number 194 in Reaction diffusion systems (Trieste, 1995), pages 183–197, Dekker, New York, 1998.
- [12] X. Y. HUANG. A note on asymptotic behavior of positive solution for some elliptic equation. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 29(5) :533–537, 1997.

- [13] O. KAVIAN. Introduction à la théorie des points critiques. *Springer Verlag*, 1993.
- [14] O. A. LADYZHENSKAYA N. N. URALTSEVA. *Linear and quasilinear elliptic equations*. Academic Press, New-York, 1968.
- [15] G. M. LIEBERMAN. Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 12(11) :1203–1219, 1988.
- [16] C. MAYA R. SHIVAJI. Multiple positive solutions for a class of semilinear elliptic boundary value problems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 38 :497–504, 1999.
- [17] P. H. RABINOVITZ. Minimax method in critical point theory [...]. *Conf. Board of the Math. Sciences, AMS*, 65, 1984.
- [18] J. SERRIN. Local behavior of solutions of quasilinear equations. *Acta Mathematica*, 111 :247–302, 1964.
- [19] P. TOLKSDORF. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, 51(1) :126–150, 1984.
- [20] J. L. VÁZQUEZ. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. *Appl. Math. Optim.*, 12(3) :191–202, 1984.

# Chapitre 4

## Condition nécessaire et suffisante d'existence : cas de systèmes de $p$ -Laplaciens comparables à des systèmes hamiltoniens.

Dans ce travail, nous étudions le système elliptique non linéaire et non variationnel suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta_p u = \mu f(x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_p v = \mu g(x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

avec certaines hypothèses de régularité et de croissance sur les fonctions  $f$  et  $g$ . En effet, nous supposons que les fonctions  $f$  et  $g$  sont contrôlées par des fonctions polynomiales. Contrairement à ce qui a été fait précédemment ces fonctions ne sont pas supposées avoir un caractère variationnel, mais plutôt un caractère hamiltonien.

Rappelons que, lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , la condition  $u = v = 0$  sur  $\partial\Omega$  se traduit par

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x).$$

Le résultat que nous allons présenter dans ce travail est un résultat d'existence. En effet, nous établissons une condition nécessaire et une condition suffisante pour l'existence d'une solution positive du problème  $(\mathcal{P})$  :

- il existe  $\mu^* \in \mathbb{R}_*^+$  tel que  $\mu \in (0, \mu^*) \Rightarrow (\mathcal{P})$  admet une solution positive ;
- il existe  $\mu_* \in \mathbb{R}_*^+$  tel que  $(\mathcal{P})$  admet une solution positive  $\Rightarrow \mu \in (0, \mu_*)$ .

De plus, ces réels  $\mu^*$  et  $\mu_*$  dépendent des fonctions poids introduites dans le problème. Ainsi en choisissant ces fonctions poids de façon particulière, on obtient même une condition nécessaire et suffisante : il existe  $\mu_0 \in \mathbb{R}_*^+$  tel que  $(\mathcal{P})$  admet une solution positive si



et seulement si  $\mu \in (0, \mu_0)$ . Pour aborder un tel sujet nous avons employé deux méthodes tout à fait distinctes pour montrer la condition suffisante et la condition nécessaire.

Dans la démonstration de l'existence de solution positive, nous utilisons la méthode des sous,sur-solutions (voir par exemple J. I. Díaz - J. Hernández [6], J. Hernández [11]). Par le théorème du col, on montre l'existence d'une sur-solution et grâce à des estimations de type J. Serrin ([18]), on peut appliquer le Principe du Maximum Fort de Vázquez ([20]) pour établir la positivité de la solution ainsi obtenue.

En ce qui concerne la condition nécessaire, cette étude fait suite à un résultat dû à R. Shivaji ([16]) pour le cas semilinéaire  $p = 2$ . Dans sa démarche le caractère autoadjoint du Laplacien  $\Delta$  est essentiel. Pour palier l'absence de cette propriété pour le  $p$ -Laplacien  $\Delta_p$ , nous utilisons, dans le cas borné, l'inégalité de Díaz-Saa ([8]). Mais si  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , nous ne pouvons plus appliquer ce résultat. Par conséquent, nous utilisons une méthode basée sur l'identité de Picone présentée par W. Allegretto et X. Y. Huang [1] pour obtenir un résultat identique.

Nous donnerons des indications de la preuve du résultat obtenu dans le cas borné en appendice (Appendice 2).

Les hypothèses sur les fonctions  $f$  et  $g$  sont :

( $\mathcal{H}1$ )  $f$  et  $g$  sont des fonctions de Carathéodory i.e. : les fonctions  $(r, s) \mapsto f(x, r, s)$  et  $(r, s) \mapsto g(x, r, s)$  sont continues sur  $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $x \mapsto f(x, r, s)$  et  $x \mapsto g(x, r, s)$  sont mesurables .

( $\mathcal{H}2$ ) Pour tout  $u, v \geq 0$  il existe deux fonctions régulières  $A, B \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $A, B > 0$  telles que

$$\begin{aligned} f(x, u, v) &\geq A(x)v^{p-1} \text{ p. p. sur } \mathbb{R}^N \\ g(x, u, v) &\geq B(x)u^{p-1} \text{ p. p. sur } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

( $\mathcal{H}3$ ) Pour tout  $u, v \geq 0$  il existe quatre fonctions régulières  $a, c \in L^\delta(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $b, d \in L^\gamma(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  telles que

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x, u, v) &\leq \frac{1}{2}a(x)(u^{q-1} + v^{q-1}) + b(x) \text{ p. p. sur } \mathbb{R}^N \\ 0 \leq g(x, u, v) &\leq \frac{1}{2}c(x)(u^{q-1} + v^{q-1}) + d(x) \text{ p. p. sur } \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \delta &= Np(Np - q(N - p))^{-1}, \quad \gamma = Np(Np - N + p)^{-1}; \\ p &< q < p^* \text{ et } 1 < p < N; \end{aligned}$$

$a, c \geq 0$  et  $a, c > 0$  sur des ensembles de mesure non nulle notés respectivement  $\mathcal{A}^+, \mathcal{C}^+$ ;

$b, d \geq 0$  et  $b, d$  non identiquement nulle.

( $\mathcal{H}4$ ) L'ensemble  $\text{supp } f(x, 0, 0) \cup \text{supp } g(x, 0, 0)$  est de mesure non nulle.

En regardant de plus près les hypothèses ( $\mathcal{H}2$ ) et ( $\mathcal{H}3$ ), on remarque que les majorations et les minoration n'ont pas un caractère variationnel comme c'était le cas dans le chapitre 3. De plus, il apparaît que les minoration ont plutôt un caractère hamiltonien.

## 4.1 Condition suffisante d'existence

Dans toute la suite, on peut considérer sans perte de généralité que  $a \equiv c$  et  $b \equiv d$ .

**Théorème 4.1** *Soit  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , sous les hypothèses  $(\mathcal{H}1)$ ,  $(\mathcal{H}3)$  et  $(\mathcal{H}4)$ , si  $\mu$  vérifie*

$$0 < \mu < \min \left( \frac{p}{q} \mu_q, (2pC(N, p) \|b\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)})^{-1} \right)$$

alors le problème  $(\mathcal{P})$  admet une solution positive non triviale dans  $(D^{1,p}(\mathbb{R}^N))^2$ .

De plus, grâce à l'hypothèse  $(\mathcal{H}3)$ , si  $(u, v)$  est une solution positive de  $(\mathcal{P})$  alors pour tout  $r > 0$ , il existe  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  tels que  $(u, v) \in C^{1,\alpha}(B_r) \times C^{1,\beta}(B_r)$  et  $u > 0, v > 0$  sur  $\mathbb{R}^N$ .

Preuve du théorème 4.1

Pour montrer l'existence de solution pour ce problème  $(\mathcal{P})$ , il faut d'abord prouver l'existence d'un couple de sous,sur-solution dont la définition a été donnée au chapitre précédent (Définition 3.1).

Pour commencer, il est clair que  $(0, 0)$  est une sous-solution de  $(\mathcal{P})$  (hypothèse  $(\mathcal{H}3)$ ). Mais  $(0, 0)$  n'est pas solution de ce problème grâce à l'hypothèse  $(\mathcal{H}4)$ . Ainsi, il ne reste plus qu'à montrer l'existence d'une sur-solution positive de  $(\mathcal{P})$ . D'après  $(\mathcal{H}3)$ , cela revient à chercher une solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu(\frac{1}{2}a(x)(|u|^{q-2}u + |v|^{q-2}v) + b(x)) \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_p v = \mu(\frac{1}{2}a(x)(|u|^{q-2}u + |v|^{q-2}v) + b(x)) \text{ dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Le système précédent étant parfaitement symétrique, nous pouvons chercher les solutions dans les couples de la forme  $(u, v) = (w, w)$  où  $w$  est elle-même solution de

$$(\mathcal{P}^0) \quad -\Delta_p w = \mu(a(x)|w|^{q-2}w + b(x)) \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

Pour l'existence d'une solution de  $(\mathcal{P}^0)$ , nous allons appliquer le théorème du col de la montagne (voir par exemple P. H. Rabinovitz [17]) à la fonctionnelle d'énergie

$$J(w) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p dx - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|w|^q dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} b(x)w dx.$$

Montrer que  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  est un espace de Banach (réflexif) et que  $J \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$  vérifie la condition de Palais-Smale sont des résultats classiques (voir [17], [13]). Il reste à prouver les deux points suivants pour que la fonctionnelle  $J$  ait une géométrie de col :

(C1) Il existe  $R > 0$  et  $a > 0$  tels que  $\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = R$  implique  $J(u) \geq a$ ;

(C2) Il existe  $u_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  tel que  $\|u_0\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} > R$  et  $J(u_0) < a$ .

(C1) Soit  $\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p < 1$

$$J(w) = \frac{\epsilon}{p} - \frac{\mu}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|w|^q dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} b(x)w dx.$$

D'après l'inégalité de Hölder et l'injection de Sobolev, on arrive à

$$J(w) \geq \frac{\epsilon}{p} - \frac{\mu}{q} C(N, p)^q \|a\|_{L^\delta(\mathbb{R}^N)} \epsilon^q - \mu C(N, p) \|b\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)} \epsilon.$$

où  $C(N, p)$  est la constante de Sobolev. On peut choisir  $\epsilon$  assez petit de telle sorte que

$$\frac{C(N, p)^q \|a\|_{L^\delta(\mathbb{R}^N)} \epsilon^q}{q} < C(N, p) \|b\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)} \epsilon,$$

$$\text{ainsi } J(w) \geq \epsilon \left( \frac{1}{p} - 2\mu C(N, p) \|b\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)} \right).$$

Finalement, lorsque  $\mu < (2pC(N, p) \|b\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)})^{-1}$ , si on choisit  $R = \epsilon > 0$  et  $a = \epsilon \left( \frac{1}{p} - 2\mu C(N, p) \|b\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)} \right) > 0$  la fonctionnelle  $J$  vérifie la première condition.

(C2) Soit  $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  fixé tel que  $w > 0$  sur  $\mathcal{A}^+$  et  $w \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^N$ .

$$J(kw) = \frac{k^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p dx - \frac{\mu}{q} k^q \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |w|^q dx - \mu k \int_{\mathbb{R}^N} b(x) w dx \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Comme  $a > 0$  sur  $\mathcal{A}^+$  et  $q > p > 1$ , on obtient un polynôme dont le coefficient du monôme de plus haut degré est strictement négatif. Ce qui signifie que

$$J(kw) \rightarrow -\infty \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

Autrement dit, il existe un  $k$  assez grand de telle sorte que, en posant  $w^0 = kw$ , on ait  $\|w^0\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} > R$  et  $J(w^0) < a$  ce qui traduit exactement (C2).

On obtient ainsi l'existence d'une solution non triviale pour le problème  $(\mathcal{P}^0)$ . Avant d'affirmer que cette solution va nous donner la sur-solution de  $(\mathcal{P})$ , il reste à montrer qu'elle est positive au sens large c'est-à-dire supérieure à la sous-solution.

Soit  $w \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  solution de  $(\mathcal{P}^0)$

$$-\Delta_p w = \mu(a(x)|w|^{q-2}w + b(x)) \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

Notons par  $w^- = \max(0, -w)$  la fonction valeur négative de  $w$ . On suppose que  $w^- \not\equiv 0$ . On multiplie l'équation  $(\mathcal{P}^0)$  par  $w^-$  et on intègre sur  $\mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla w^- dx = \mu \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |w|^{q-2} w w^- dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} b(x) w^- dx$$

$$\text{ce qui signifie } \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w^-|^p dx = \mu \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |w^-|^q dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} b(x) w^- dx.$$

Or  $b \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w^-|^p dx \leq \mu \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |w^-|^q dx.$$

On peut supposer sans perte de généralité que  $\frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |w^-|^q dx = 1$  car  $w^- \not\equiv 0$  et  $a \not\equiv 0$ . Introduisons le problème non homogène

$$(\mathcal{V}_q) \quad -\Delta_p \phi = \mu_q a(x) |\phi|^{q-2} \phi \text{ dans } \mathbb{R}^N.$$

On détermine  $\mu_q$  de la façon suivante

$$\mu_q := \inf_{\phi \in \Gamma_q} \left\{ \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx \right\}$$

$$\text{où } \Gamma_q := \left\{ \phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ tel que } \phi \not\equiv 0 \text{ et } \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |\phi|^q dx = 1 \right\}$$

Pour plus de détails sur les propriétés de  $\mu_q$  voir les travaux de X. Y. Huang [12]. Choisissons  $\mu$  suffisamment petit de telle sorte que  $\mu < \frac{p}{q} \mu_q$  ( $w^- \not\equiv 0$ ); ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w^-|^p dx < p \mu_q. \quad (4.1)$$

Or d'après la définition de  $\mu_q$

$$\text{pour tout } \phi \in \Gamma_q \quad \mu_q \leq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx.$$

Comme  $w^- \in \Gamma_q$ , on aboutit à une contradiction avec l'inégalité (4.1). Par conséquent  $w \geq 0$ .

Par la suite, ayant obtenu  $(0, 0) - (w, w)$  comme couple de sous,sur-solution de  $(\mathcal{P})$  nous allons utiliser le théorème de point fixe de Leray-Schauder pour montrer l'existence d'une solution positive au problème  $(\mathcal{P})$ .

Notons  $E = (L^{p^*}(\mathbb{R}^N))^2$  et  $K = [u_0, u^0] \times [v_0, v^0] = K_u \times K_v$  et définissons l'opérateur  $T : K \rightarrow E$  par :

$\forall (\bar{u}, \bar{v}) \in K \quad (w, z) = T(\bar{u}, \bar{v})$  est l'unique solution du système découpé  $(\mathcal{S}_d)$ .

$$(\mathcal{S}_d) \begin{cases} -\Delta_p w + Mk(x) |w|^{q-2} w = \mu f(x, \bar{u}, \bar{v}) + Mk(x) \bar{u}^{q-1} \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_p z + Mk(x) |z|^{q-2} z = \mu g(x, \bar{u}, \bar{v}) + Mk(x) \bar{v}^{q-1} \text{ dans } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

avec  $k \in L^\delta(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $\forall R > 0 \quad \exists \epsilon_R$  tel que  $\inf_{B_R} k(x) > \epsilon_R$ . Comme dans le chapitre précédent, on considère une constante  $M$  strictement positive quelconque.

L'opérateur  $T$  possède un point fixe dans  $K$  si les quatre assertions suivantes sont vérifiées :

- (LS1)  $K$  est un ensemble convexe fermé borné dans  $E$ .
- (LS2)  $T$  est bien défini sur  $K$ .
- (LS3)  $K$  est stable par  $T$  i.e.  $T(K) \subset K$ .
- (LS4)  $T$  est un opérateur compact.

(LS1) Il est simple de vérifier ce premier point puisque  $u_0, u^0, v_0$  et  $v^0$  sont dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  qui est un Banach réflexif.

(LS2) Montrer que  $T$  est bien défini revient à montrer que le problème  $(\mathcal{S}_d)$  admet une solution unique pour tout  $(\bar{u}, \bar{v})$  dans  $K$ . Comme nous avons affaire à un système découpé,

il suffit d'étudier l'existence et l'unicité de la solution pour chacune des équations séparément, qui s'obtient par minimisation de fonctions convexe continue (voir par exemple O. Kavian [13]).

(LS3) Pour montrer que  $K$  est stable par  $T$  nous allons montrer uniquement que  $w \geq u_0$  car pour les autres inégalités la méthode est identique.

Le couple  $(u_0, v_0)$  est sous-solution du problème  $(\mathcal{P})$  et vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 - \mu f(x, u_0, v) \leq 0 & \forall v \in [v_0, v^0] \\ -\Delta_p v_0 - \mu g(x, u, v_0) \leq 0 & \forall u \in [u_0, u^0] \end{cases} \quad (4.2)$$

Le couple  $(w, z)$  est défini par  $(w, z) = T(\bar{u}, \bar{v})$  où  $(\bar{u}, \bar{v}) \in K$  et vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p w + Mk(x)w^{q-1} = \mu f(x, \bar{u}, \bar{v}) + Mk(x)\bar{u}^{q-1} \\ -\Delta_p z + Mk(x)z^{q-1} = \mu g(x, \bar{u}, \bar{v}) + Mk(x)\bar{v}^{q-1}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Dès que  $(\bar{u}, \bar{v})$  est dans  $K$ , nous avons

$$\begin{cases} -\Delta_p w + Mk(x)w^{q-1} \geq \mu f(x, \bar{u}, \bar{v}) + Mk(x)u_0^{q-1} \\ -\Delta_p z + Mk(x)z^{q-1} \geq \mu g(x, \bar{u}, \bar{v}) + Mk(x)v_0^{q-1} \end{cases} \quad (4.4)$$

On multiplie les premières équations de (4.2) et (4.4) par  $(u_0 - w)_+ = \max(0, u_0 - w)$ , on intègre sur  $\mathbb{R}^N$  et on fait la différence des inégalités ainsi obtenues. On suppose que  $(u_0 - w)_+ \not\equiv 0$  et on va essayer d'aboutir à une contradiction.

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta_p u_0 + \Delta_p w)(u_0 - w)_+ dx + \int_{\mathbb{R}^N} [\mu(f(x, \bar{u}, \bar{v}) - f(x, u_0, \bar{v})) \\ &\quad + Mk(x)(u_0^{q-1} - w^{q-1})] (u_0 - w)_+ dx. \end{aligned}$$

Comme  $Mk(x)(u_0^{q-1} - w^{q-1})(u_0 - w)_+ \not\equiv 0$ , on peut choisir  $M$  de telle façon que la deuxième intégrale soit strictement positive. Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta_p u_0 + \Delta_p w)(u_0 - w)_+ dx < 0$$

ce qui contredit la monotonie de l'opérateur  $-\Delta_p$  et par suite  $(u_0 - w)_+ = 0$  i.e.  $u_0 \leq w$ .

Nous avons donc prouvé que  $K$  est stable par  $T$ .

(LS4) Montrer que  $T : K \rightarrow K$  est compact revient à montrer que  $T$  est continue de  $K$  dans  $K$  et que l'image de tout borné de  $K$  par  $T$  est compact. Nous détaillerons ce deuxième point ; en ce qui concerne la continuité, la démonstration utilise des arguments semblables.

Donnons nous une suite  $(\bar{u}_n, \bar{v}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  convergeant faiblement vers  $(\bar{u}, \bar{v})$  pour la norme

de  $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ . Grâce au point précédent, nous pouvons déjà affirmer que  $(T(\bar{u}_n, \bar{v}_n))_{n \in \mathbb{N}} = (w_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ . Montrons par exemple qu'il existe une sous-suite de  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge fortement dans  $K_u$  pour la norme de  $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ ; pour la convergence dans  $K_v$  de l'autre suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la démarche est analogue.

Tout d'abord, nous montrons que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $K_u$  pour la norme de  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ .

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx + M \int_{\mathbb{R}^N} k(x) w_n^q dx &= \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x, \bar{u}_n, \bar{v}_n) w_n dx + M \int_{\mathbb{R}^N} k(x) \bar{u}_n^{q-1} w_n dx \\
&\leq \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x, \bar{u}_n, \bar{v}_n) u^0 dx + M \int_{\mathbb{R}^N} k(x) u^{0q} dx \\
&\leq \frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) (u^{0q} + v^{0q-1} u^0) dx \\
&\quad + \mu \int_{\mathbb{R}^N} b(x) u^0 dx + M \int_{\mathbb{R}^N} k(x) u^{0q} dx \\
&\leq C(\mu, M) \left[ \|a\|_{L^\delta(\mathbb{R}^N)} \left( \|u^0\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^q + \|v^0\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^q \right) \right. \\
&\quad \left. + \|b\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)} \|u^0\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} + \|k\|_{L^\delta(\mathbb{R}^N)} \|u^0\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^q \right].
\end{aligned}$$

Comme  $a \in L^\delta(\mathbb{R}^N)$ ,  $b \in L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ ,  $k \in L^\delta(\mathbb{R}^N)$ ,  $u^0, v^0 \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ , il existe  $C > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx + M \int_{\mathbb{R}^N} k(x) w_n^q dx < C$$

$$\text{donc } \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^p dx < C$$

Ensuite, on peut extraire une sous-suite encore notée  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant faiblement dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ . Par suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement dans  $L^q(B_R)$  pour tout  $R > 0$  et tout  $q < p^*$  donc converge presque partout et est dominée par la sur-solution  $u^0$ . Par conséquent, elle converge en norme  $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$  dans  $K_u$  fermé.

On utilise le même argument pour  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et on démontre ainsi que l'opérateur  $T : K \rightarrow K \subset E = (L^{p^*}(\mathbb{R}^N))^2$  est compact.

A présent, nous sommes en mesure d'appliquer le théorème de point fixe de Leray Schauder à cet opérateur  $T$  :

$$\text{Pour tout } (u, v) \in K \quad \text{tel que} \quad (u, v) = T(u, v)$$

ce qui signifie que  $(u, v)$  est une solution positive pour  $(\mathcal{P})$ .

De plus, grâce au principe du maximum et à des résultats de régularité (voir annexe), on peut même montrer que la solution positive  $(u, v)$  est strictement positive. Il suffit d'utiliser le Principe du Maximum Fort de Vázquez. En effet par  $\mu > 0$ ,  $(\mathcal{H}3)$ , on a  $-\Delta_p u \geq 0$  et  $-\Delta_p v \geq 0$ . Ainsi, le PMF de Vázquez affirme que si le problème admet

une solution régulière ( $C_{loc}^{1,\delta}(\mathbb{R}^N)$ ) vérifiant  $u \geq 0, v \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^N$  alors cette solution est strictement positive :  $u > 0, v > 0$  sur  $\mathbb{R}^N$ . ◆

## 4.2 Condition nécessaire d'existence

Rappelons le problème que nous sommes en train d'étudier dans ce travail

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta_p u = \mu f(x, u, v) \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_p v = \mu g(x, u, v) \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) \end{cases}$$

Nous considérons aussi le problème de valeur propre

$$(\mathcal{V}_p) \quad -\Delta_p \phi = \lambda_1 C(x) \phi^{p-1} \text{ dans } \mathbb{R}^N$$

avec  $C \in L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $C \not\equiv 0$  et  $A(x) \geq C(x) \geq 0$  p. p. sur  $\mathbb{R}^N$ .

**Théorème 4.2** *Soit  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , on suppose que les hypothèses  $(\mathcal{H}1)$  et  $(\mathcal{H}2)$  sont satisfaites. Si  $(u, v)$  est une solution strictement positive dans  $(D^{1,p}(\mathbb{R}^N))^2 \cap C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \times C_{loc}^{1,\gamma}(\mathbb{R}^N)$  ( $\alpha, \gamma \in (0, 1)$ ) de  $(\mathcal{P})$  alors  $\mu \leq \lambda_1$ .*

Preuve du théorème 4.2

Lorsque nous étudions  $(\mathcal{P})$  sur un domaine borné  $\Omega$  et seulement dans ce cas, on peut appliquer l'inégalité de Díaz - Saa pour des solutions positives dans  $D^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\delta}(\Omega)$  ( $\delta \in (0, 1)$ ). Par contre, si  $\Omega = \mathbb{R}^N$  il est possible d'utiliser une méthode introduite par J. Fleckinger, R. F. Mánasevich, N. M. Stavrakakis, F. de Thélin ([9]) et reprise par A. Bechah, K. Chaïb, F. de Thélin ([5]). Ici, nous préférons un procédé plus simple car nous n'aurons besoin que de l'identité de Picone dont certaines de ses applications sont présentée par W. Allegretto et X. Y. Huang dans [1].

**Proposition 4.1 (Identité de Picone généralisée pour le  $p$ -Laplacien)** *Soient  $u, v$  différentiables et  $v > 0$  p. p. sur  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$ . Notons*

$$L(u, v) = |\nabla u|^p + (p-1) \frac{|u|^p}{v^p} |\nabla v|^p - p \frac{|u|^{p-2} u}{v^{p-1}} \nabla u \cdot \nabla v |\nabla v|^{p-2} \text{ p. p. sur } \Omega$$

$$R(u, v) = |\nabla u|^p - \nabla \left( \frac{|u|^p}{v^{p-1}} \right) |\nabla v|^{p-2} \nabla v \text{ p. p. sur } \Omega.$$

Alors  $L(u, v) = R(u, v) \geq 0$ .

De plus,  $L(u, v) = 0$  p. p. sur  $\Omega$  si et seulement si  $\nabla \left( \frac{u}{v} \right) = 0$  p. p. sur  $\Omega$ .

La preuve de cette proposition a été faite dans le chapitre 2 (Proposition 2.3).

Considérons une suite de fonctions positives  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  convergeant vers  $\phi$  solution de  $(\mathcal{V}_q)$  pour la norme de  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ . Une telle suite existe car  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  est

dense dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ . Si  $(u, v)$  est une solution strictement positive de  $(\mathcal{P})$ , on applique l'identité de Picone aux fonctions  $\phi_n$ ,  $u$  puis  $\phi_n$ ,  $v$  et on somme les inégalités

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} L(\phi_n, u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} L(\phi_n, v) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} R(\phi_n, u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} R(\phi_n, v) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \left( \frac{\phi_n^p}{u^{p-1}} \right) |\nabla u|^{p-2} \nabla u dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \left( \frac{\phi_n^p}{v^{p-1}} \right) |\nabla v|^{p-2} \nabla v dx. \end{aligned}$$

Les fonctions test  $\frac{\phi_n^p}{u^{p-1}}$  et  $\frac{\phi_n^p}{v^{p-1}}$  sont admissibles car  $\phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $u > 0$  et  $v > 0$ . On peut donc utiliser le théorème de la divergence

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi_n^p}{u^{p-1}} \Delta_p u dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi_n^p}{v^{p-1}} \Delta_p v dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_n|^p dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi_n^p}{u^{p-1}} f(u, v) dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\phi_n^p}{v^{p-1}} g(u, v) dx. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse  $(\mathcal{H}2)$ ,  $f(u, v) \geq A(x)v^{p-1}$  et  $g(u, v) \geq A(x)u^{p-1}$  donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_n|^p dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} A(x) \frac{\phi_n^p}{u^{p-1}} v^{p-1} dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} A(x) \frac{\phi_n^p}{v^{p-1}} u^{p-1} dx. \\ \text{or } \frac{u^{p-1}}{v^{p-1}} + \frac{v^{p-1}}{u^{p-1}} &\geq 2 \text{ ainsi} \\ 0 &\leq 2 \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_n|^p dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} A(x) \phi_n^p dx \right]. \end{aligned}$$

On passe à la limite quand  $n \rightarrow \infty$  dans la dernière inégalité. En effet, comme  $\phi_n$  converge vers  $\phi$  dans  $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  on a  $\phi_n$  qui converge vers  $\phi$  dans  $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$  et  $\phi_n^p$  qui converge vers  $\phi^p$  dans  $L^{\frac{p^*}{p}}(\mathbb{R}^N)$

$$\text{donc } \int_{\mathbb{R}^N} A(x) (\phi_n^p - \phi^p) dx \leq \|A\|_{L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)} \|\phi_n^p - \phi^p\|_{L^{\frac{p^*}{p}}(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

$$\text{donc } \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx \geq \mu \int_{\mathbb{R}^N} A(x) \phi^p dx.$$

Maintenant, en utilisant le fait que  $\phi$  est une fonction propre positive associée à la valeur propre  $\lambda_1$ , on arrive au résultat escompté :

$$\mu \leq \lambda_1.$$

◆



**Remarque 4.1** Sur la condition nécessaire et suffisante

$$\exists \mu_0 \text{ tel que } (\mathcal{P}) \text{ admet une solution positive} \Leftrightarrow 0 < \mu < \mu_0$$

En fait, dans ce papier on a montré :

- Si  $\mu < \min\left(\frac{p}{q}\mu_q, (2pC(N, p)\|b\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)})^{-1}\right)$  alors  $(\mathcal{P})$  admet une solution positive.
- Si  $(\mathcal{P})$  admet une solution positive alors  $\mu < \lambda_1$ .

Choisissons la fonction  $b$  telle que  $\|b\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)}$  soit suffisamment petite pour que :

$$\min\left(\frac{p}{q}\mu_q, (2pC(N, p)\|b\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)})^{-1}\right) = \frac{p}{q}\mu_q \text{ dans la première assertion.}$$

Pour la seconde, notons  $\phi_q$  la solution associée à  $\mu_q$  dans  $(\mathcal{V}_q)$  on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_q|^p dx = \frac{p}{q}\mu_q \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\phi_q|^q dx.$$

De plus, comme  $\lambda_1$  est la première valeur propre de  $(\mathcal{V}_p)$ , on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_q|^p dx \geq \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} C(x)|\phi_q|^p dx.$$

En choisissant  $a$  telle que  $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\phi_q|^q dx < \int_{\mathbb{R}^N} C(x)|\phi_q|^p dx$  on obtient que  $\lambda_1 < \frac{p}{q}\mu_q$ . Ainsi en prenant  $\mu_0 = \frac{p}{q}\mu_q$ , on obtient le résultat concernant la condition nécessaire et suffisante.

### 4.3 Appendice 1 : Résultat de régularité

En nous inspirant d'un travail effectué par A. Bechah dans [3], nous prouvons la régularité locale des solutions du système  $(\mathcal{P}')$ . Le système traité par A. Bechah est plus général que celui-ci, ainsi la démonstration s'en trouve simplifiée.

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} -\Delta_p u = \mu f(x, u, v) \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_p v = \mu g(x, u, v) \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ u \geq 0 \text{ et } v \geq 0 \text{ p. p. sur } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

avec  $1 < p < q < p^*$  et  $p < N$ . Sous les hypothèses de croissance sur  $f$  et  $g$  :

$$\begin{aligned} f(x, u, v) &\leq \frac{1}{2}a(x)(u^{q-1} + v^{q-1}) + b(x) \\ g(x, u, v) &\leq \frac{1}{2}a(x)(u^{q-1} + v^{q-1}) + b(x) \end{aligned}$$

où  $a \in L^\delta(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C_{loc}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^N)$  et  $b \in L^{\delta'}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C_{loc}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^N)$ .

$$\delta = \frac{Np}{Np - q(N - p)} \quad \delta' = \frac{Np}{Np - N + p}.$$

Dans ce qui suit, nous montrons des propriétés de régularité pour les solutions du problème  $(\mathcal{P}')$ .

**Théorème 4.3** *Sous les hypothèses décrites ci-dessus. Si  $(u, v) \in (D^{1,p}(\mathbb{R}^N))^2$  est solution de  $(\mathcal{P})$  alors pour tout  $r > 0$  il existe  $\alpha(r)$  et  $\beta(r)$  dans  $(0, 1)$  tels que :*

$$u \in C^{1,\alpha}(B_r) \text{ et } v \in C^{1,\beta}(B_r).$$

PREUVE

Soit  $x \in \mathbb{R}^N$  et  $R > 0$ . Pour tout  $y \in B_{2R}(x)$  et toute fonction  $h$  définie sur  $B_{2R}(x)$ , on pose  $\hat{h}(t) = h(x)$  où  $t = \frac{y-x}{R}$ .

Comme  $(u, v) \in (D^{1,p}(\mathbb{R}^N))^2$  est solution de  $(\mathcal{P}')$ ,  $(\hat{u}, \hat{v})$  satisfait

$$(\mathcal{P}'') \begin{cases} -\Delta_p \hat{u} \leq \mu R^p \left[ \frac{1}{2} \hat{a}(x) (\hat{u}^{q-1} + \hat{v}^{q-1}) + \hat{b}(x) \right] & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_p \hat{v} \leq \mu R^p \left[ \frac{1}{2} \hat{a}(x) (\hat{u}^{q-1} + \hat{v}^{q-1}) + \hat{b}(x) \right] & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u \geq 0 \text{ et } v \geq 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Par le théorème d'injection de Sobolev, pour toute boule  $B \subset B_2(0)$  il existe  $\tau = \frac{N}{N-p} > 1$  tel que

$$\|w\|_{L^{\tau p}(B)} \leq S_p \|\nabla w\|_{L^p(B)} \text{ pour tout } w \in W_0^{1,p}(B).$$

Construisons les suites suivantes

$$p_k = p\tau^k \text{ et } m_k = p(\tau^k - 1) \text{ pour tout } k \geq 0, \\ \rho_0 = 2 \text{ et } \rho_k = 2 - \frac{1}{\sigma} \sum_{j=0}^{k-1} \tau^{-\frac{j}{p'}} \text{ pour tout } k \geq 1 \text{ où } \sigma = \sum_{j=0}^{\infty} \tau^{-\frac{j}{p'}} \text{ et } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Considérons une fonction  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  telle que :

$$0 \leq \eta \leq 1;$$

$$\eta = 1 \text{ sur } D_{k+1} = B_{\rho_{k+1}};$$

$$\text{supp } \eta \subset D_k;$$

$$|\nabla \eta(t)| \leq K \tau^{\frac{k}{p'}} \text{ pour tout } t \in D_k.$$

En multipliant par  $\hat{u}^{m_k+1} \eta^p$  et intégrant sur  $D_k$  la première inégalité de  $(\mathcal{P}'')$  on a

$$\underbrace{(1 + m_k) \int_{D_k} |\nabla \hat{u}|^p \hat{u}^{m_k} \eta^p dx}_{T_1} + p \underbrace{\int_{D_k} |\nabla \hat{u}|^{p-2} \nabla \hat{u} \nabla \eta \hat{u}^{m_k+1} \eta^{p-1} dx}_{T_2} \\ \leq \mu R^p \int_{D_k} \left[ \frac{1}{2} \hat{a}(x) (\hat{u}^{m_k+q} + \hat{v}^{q-1} \hat{u}^{m_k+1}) + b \hat{u}^{m_k+1} \right] \eta^p dx.$$

Définissons les ensembles  $U$  et  $V$  de la manière suivante

$$U := \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } \hat{u}(x) \geq \hat{v}(x)\} \text{ et } V := \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } \hat{v}(x) \geq \hat{u}(x)\}.$$

Donc

$$T_1 + T_2 \leq \mu R^p \int_{D_k \cap U} (\hat{a}(x) \hat{u}^{m_k+q} + \hat{b}(x) \hat{u}^{m_k+1}) \eta^p dx + \mu R^p \int_{D_k \cap V} (\hat{a}(x) \hat{v}^{m_k+q} + \hat{b}(x) \hat{v}^{m_k+1}) \eta^p dx$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_{D_k} \hat{b}(x) \hat{u}^{m_k+1} \eta^p dx &\leq \left( \int_{D_k} \hat{b}(x) \frac{m_k+p}{m_k+1} \hat{u}^{m_k+p} dx \right)^{\frac{m_k+1}{m_k+p}} \text{Vol}(D_k)^{\left(\frac{p-1}{m_k+p}\right)} \\ &\leq \|\hat{b}(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \text{Vol}(D_k) \left( \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p} dx \right)^{\frac{m_k+1}{m_k+p}} \end{aligned}$$

car  $\text{Vol}(D_k) > 1$  et  $D_k \subset D_0$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_{D_k} \hat{b}(x) \hat{u}^{m_k+1} \eta^p dx &\leq c \left( \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p} dx \right)^{\frac{m_k+1}{m_k+p}}. \\ \text{Et } \int_{D_k} \hat{a}(x) \hat{u}^{m_k+q} \eta^p dx &\leq c \left( \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p^*} \eta^p dx \right)^{\frac{m_k+q}{m_k+p^*}} \text{ car } \eta^p \frac{m_k+p^*}{m_k+q} \leq \eta^p \end{aligned}$$

De même pour  $v$

$$\begin{aligned} \int_{D_k} \hat{b}(x) \hat{v}^{m_k+1} \eta^p dx &\leq c \left( \int_{D_k} \hat{v}^{m_k+p} dx \right)^{\frac{m_k+1}{m_k+p}} \\ \text{et } \int_{D_k} \hat{a}(x) \hat{v}^{m_k+q} \eta^p dx &\leq c \left( \int_{D_k} \hat{v}^{m_k+p^*} \eta^p dx \right)^{\frac{m_k+q}{m_k+p^*}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient,

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &\leq c\mu R^p \underbrace{\left( \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p} dx \right)^{\frac{m_k+1}{m_k+p}}}_{T_3} + c\mu R^p \underbrace{\left( \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p^*} \eta^p dx \right)^{\frac{m_k+q}{m_k+p^*}}}_{T_4} \\ &\quad + c\mu R^p \underbrace{\left( \int_{D_k} \hat{v}^{m_k+p} dx \right)^{\frac{m_k+1}{m_k+p}}}_{T_5} + c\mu R^p \underbrace{\left( \int_{D_k} \hat{v}^{m_k+p^*} \eta^p dx \right)^{\frac{m_k+q}{m_k+p^*}}}_{T_6}. \end{aligned}$$

Oublions volontairement les termes  $T_5$  et  $T_6$ . Nous verrons, lorsque nous travaillerons sur la seconde équation de  $(\mathcal{P}'')$ , que ces mêmes termes apparaîtront de nouveau et nous pourrons les traiter ensemble.

$$\begin{aligned} |T_2| &= p \left| \int_{D_k} \nabla \eta \nabla \hat{u} |\nabla \hat{u}|^{p-2} \hat{u}^{m_k+1} \eta^{p-1} dx \right| \\ &\leq p \int_{D_k} |\nabla \hat{u}|^{p-1} \eta^{p-1} |\nabla \eta| \hat{u}^{(p-1)(\tau^k-1)} \hat{u}^{\tau^k} dx \text{ car } 1 + m_k = (p-1)(\tau^k-1) + \tau^k. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young on a pour tout  $s > 0$

$$|T_2| \leq (p-1) \frac{m_k+p}{p} s^p \int_{D_k} |\nabla \hat{u}|^p \eta^p \hat{u}^{m_k} dx + \frac{1}{s^{p(p-1)}} \left( \frac{m_k+p}{p} \right)^{1-p} \int_{D_k} |\nabla \eta|^p \hat{u}^{m_k+p} dx.$$

On choisit  $s$  suffisamment petit de telle sorte que  $(p-1)s^p < \frac{1}{2}$ , de plus comme  $\frac{m_k+p}{p} < m_k + 1$  et  $|\nabla\eta| < K\tau^{\frac{k}{p'}} = K\left(\frac{m_k+p}{p}\right)^{\frac{1}{p'}}$  sur  $D_k$ , on arrive à

$$|T_2| \leq \frac{T_1}{2} + c \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p} dx.$$

Donc

$$T_1 \leq 2c\mu R^p(T_3 + T_4) + c \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p} dx.$$

D'autre part, grâce à l'inégalité de Sobolev on a

$$\begin{aligned} \|\eta \hat{u}^{\frac{m_k+p}{p}}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^p &\leq S_p \|\nabla(\eta \hat{u}^{\frac{m_k+p}{p}})\|_{L^p(D_k)}^p \\ &\leq S_p \int_{D_k} \left| |\nabla\eta \hat{u}^{\frac{m_k+p}{p}}| + |\eta \nabla \hat{u}^{\frac{m_k+p}{p}}| \right|^p dx. \\ \text{Or } (a+b)^p &\leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \text{ pour tout } a, b \geq 0 \text{ et donc} \\ \|\eta \hat{u}^{\frac{m_k+p}{p}}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^p &\leq 2^{p-1} S_p \left[ \int_{D_k} |\nabla\eta \hat{u}^{\frac{m_k+p}{p}}|^p dx + \int_{D_k} |\eta \nabla \hat{u}^{\frac{m_k+p}{p}}|^p dx \right] \\ &\leq 2^{p-1} S_p \left[ \int_{D_k} |\nabla\eta|^p \hat{u}^{m_k+p} dx + \left(\frac{m_k+p}{p}\right)^p \int_{D_k} \eta^p |\nabla \hat{u}|^p \hat{u}^{m_k} dx \right] \\ &\leq 2^{p-1} S_p \left[ K \left(\frac{m_k+p}{p}\right)^{p-1} \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p} dx + \left(\frac{m_k+p}{p}\right)^{p-1} T_1 \right] \\ &\leq 2^{p-1} S_p \left(\frac{m_k+p}{p}\right)^{p-1} \left[ K \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p} dx + T_1 \right] \\ &\leq \left(\frac{m_k+p}{p}\right)^{p-1} \left( c \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p} dx + 2^p c\mu S_p R^p(T_3 + T_4) \right) \end{aligned}$$

$$\|\eta \hat{u}^{\frac{m_k+p}{p}}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^p \leq \left(\frac{m_k+p}{p}\right)^{p-1} \left( c \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p} dx + 2^p c\mu S_p R^p(T_3 + T_4) \right). \quad (4.5)$$

A présent, faisons des estimations sur le terme  $T_3$

$$T_3 = c \left( \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p} \right)^{\frac{m_k+1}{m_k+p}} \leq c \|\hat{u}\|_{L^{p_k}(D_k)}^{p_k \frac{m_k+1}{m_k+p}} \quad (4.6)$$

et des estimations sur le terme  $T_4$

$$\begin{aligned}
T_4 &= c \left( \int_{D_k} \hat{u}^{m_k+p^*} \eta^p dx \right)^{\frac{m_k+q}{m_k+p^*}}. \\
\text{Or } m_k + p^* &= p(\tau - 1) + m_k + p \quad \text{et} \quad \frac{m_k + p}{p_{k+1}} + \frac{p(\tau - 1)}{p^*} = 1 \\
\Rightarrow T_4 &\leq c \left( \int_{D_k} \hat{u}^{p(\tau-1)} \hat{u}^{m_k+p} \eta^{\tau p \frac{m_k+p}{p_{k+1}}} dx \right)^{\frac{m_k+q}{m_k+p^*}} \\
\Rightarrow T_4 &\leq c \|\hat{u}\|_{L^{p^*}(D_k)}^{p(\tau-1) \frac{m_k+q}{m_k+p^*}} \left( \int_{D_k} \hat{u}^{p_{k+1}} \eta^{\tau p} dx \right)^{\frac{m_k+p}{p_{k+1}} \frac{m_k+q}{m_k+p^*}} \\
\Rightarrow T_4 &\leq c \|\hat{u}\|_{L^{p^*}(D_k)}^{p(\tau-1) \frac{m_k+q}{m_k+p^*}} \|\hat{u}^{\tau k} \eta\|_{L^{p\tau}(D_k)}^{p \frac{m_k+q}{m_k+p^*}} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

avec

$$\|\hat{u}\|_{L^{p^*}(D_k)}^{p(\tau-1) \frac{m_k+q}{m_k+p^*}} \leq (1 + \|\hat{u}\|_{L^{p^*}(D_k)})^{p(\tau-1)} < C \text{ste.}$$

Maintenant, en utilisant les inégalités précédentes (4.5), (4.6) et (4.7) on arrive à

$$\begin{aligned}
\|\eta \hat{u}^{\tau k}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^p &\leq \tau^{k(p-1)} \left( c \|\hat{u}\|_{L^{p_k}(D_k)}^{p_k} + 2^p c \mu S_p R^p \left( c \|\hat{u}\|_{L^{p_k}(D_k)}^{p_k \frac{m_k+1}{m_k+p}} + c \|\eta \hat{u}^{\tau k}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^{p \frac{m_k+q}{m_k+p^*}} \right) \right) \\
\|\eta \hat{u}^{\tau k}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^p &- c 2^p \mu S_p R^p \tau^{k(p-1)} \|\eta \hat{u}^{\tau k}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^{p \frac{m_k+q}{m_k+p^*}} \leq c \tau^{k(p-1)} \left( \|\hat{u}\|_{L^{p_k}(D_k)}^{p_k} + R^p \|\hat{u}\|_{L^{p_k}(D_k)}^{p_k \frac{m_k+1}{m_k+p}} \right).
\end{aligned}$$

De plus, si l'on tient compte des termes en  $v$  on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\|\eta \hat{u}^{\tau k}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^p &- c 2^p \mu S_p R^p \tau^{k(p-1)} \left( \|\eta \hat{u}^{\tau k}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^{p \frac{m_k+q}{m_k+p^*}} + \|\eta \hat{v}^{\tau k}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^{p \frac{m_k+q}{m_k+p^*}} \right) \\
&\leq c \tau^{k(p-1)} \left( \|\hat{u}\|_{L^{p_k}(D_k)}^{p_k} + R^p \left( \|\hat{u}\|_{L^{p_k}(D_k)}^{p_k \frac{m_k+1}{m_k+p}} + \|\hat{v}\|_{L^{p_k}(D_k)}^{p_k \frac{m_k+1}{m_k+p}} \right) \right).
\end{aligned}$$

De même pour  $v$

$$\begin{aligned}
\|\eta \hat{v}^{\tau k}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^p &- c 2^p \mu S_p R^p \tau^{k(p-1)} \left( \|\eta \hat{u}^{\tau k}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^{p \frac{m_k+q}{m_k+p^*}} + \|\eta \hat{v}^{\tau k}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^{p \frac{m_k+q}{m_k+p^*}} \right) \\
&\leq c \tau^{k(p-1)} \left( \|\hat{v}\|_{L^{p_k}(D_k)}^{p_k} + R^p \left( \|\hat{u}\|_{L^{p_k}(D_k)}^{p_k \frac{m_k+1}{m_k+p}} + \|\hat{v}\|_{L^{p_k}(D_k)}^{p_k \frac{m_k+1}{m_k+p}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
\Theta_{k+1} &= \max \left\{ \|\eta \hat{u}^{\tau k}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^p, \|\eta \hat{v}^{\tau k}\|_{L^{p\tau}(D_k)}^p \right\} \\
E_k &= \max \left\{ \|\hat{u}\|_{L^{p_k}(D_k)}, \|\hat{v}\|_{L^{p_k}(D_k)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\Theta_{k+1} - c 2^p \mu S_p R^p \tau^{k(p-1)} \Theta_{k+1}^{\frac{m_k+q}{m_k+p^*}} \leq c \tau^{k(p-1)} \left( E_k^{p_k} + R^p E_k^{p_k \frac{m_k+1}{m_k+p}} \right).$$

On peut supposer sans perte de généralité que  $\Theta_k$  et  $E_k$  sont supérieurs à 1. De plus, pour  $k$  fixé, il existe  $R_0 > 0$  tel que pour tout  $R < R_0$

$$c2^p \mu S_p R^p \tau^{k(p-1)} < \frac{1}{2}$$

et comme  $\Theta_{k+1} \geq E_{k+1}^{p_k}$ , on obtient

$$\begin{aligned} E_{k+1}^{p_k} &\leq 2c\tau^{k(p-1)}(1+R^p)E_k^{p_k} \\ \Rightarrow E_{k+1} &\leq \tau^{-\frac{k(p-1)}{p_k}} [c(1+R^p)]^{\frac{1}{p_k}} E_k. \end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence on trouve

$$E_{k+1} \leq \tau^{(p-1)\sum_{i=1}^k \frac{i}{p_i}} [c(1+R^p)]^{\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i}} E_0. \quad (4.8)$$

Ici, nous n'avons pas besoin de prendre une autre suite et refaire le travail pour arriver à l'infini. Nous pouvons directement passer à la limite dans l'inégalité (4.8) puisque les séries convergent.

Donc,

$$E_\infty \leq c(1+R^p)^{\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{p_i}} \tau^{(p-1)\sum_{i=1}^\infty \frac{i}{p_i}} E_0$$

Et finalement,  $\hat{u}, \hat{v} \in L^\infty(D_{\frac{1}{2}})$  ce qui signifie que  $u, v \in L^\infty(B_{\frac{R}{2}}(x))$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ .

Maintenant, le fait que la solution du problème ( $\mathcal{P}'$ ) soit localement bornée, nous permet de conclure, grâce au résultat de P. Tolksdorf ([19]), que pour tout  $r > 0$  il existe  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  tels que

$$u \in C^{1,\alpha}(B_r) \quad \text{et} \quad v \in C^{1,\beta}(B_r).$$

◆

## 4.4 Appendice 2 : Cas borné

Ici, nous étudions l'existence de solution pour le système ( $\mathcal{P}$ ) dans le cas où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ .

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta_p u = \mu f(x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_p v = \mu g(x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

( $\mathcal{H}_b1$ ) On suppose que les fonctions  $f$  et  $g$  sont des fonctions de Carathéodory ;

( $\mathcal{H}_b2$ ) Pour tout  $u, v \geq 0$  il existe deux fonctions régulières  $A, B \in L^\infty(\Omega)$  et  $A, B > 0$  telles que

$$\begin{aligned} f(x, u, v) &\geq A(x)v^{p-1} && \text{presque partout sur } \Omega \\ g(x, u, v) &\geq A(x)u^{p-1} && \text{presque partout sur } \Omega \end{aligned}$$

( $\mathcal{H}_b3$ ) Pour tout  $u, v \geq 0$ , il existe des fonctions  $a, b, c, d$  telles que

$$0 \leq f(x, u, v) \leq \frac{1}{2}a(x)(u^{q-1} + v^{q-1}) + b(x) \quad \text{p. p; sur } \Omega$$

$$0 \leq g(x, u, v) \leq \frac{1}{2}c(x)(u^{q-1} + v^{q-1}) + d(x) \quad \text{p. p; sur } \Omega$$

où  $p < q < p^*$  et  $1 < p < N$ ;

$a, c \geq 0$  et  $a, c > 0$  sur un ensemble de mesure non nulle;

$b, d \geq 0$  et  $b, d$  non identiquement nulle.

( $\mathcal{H}_b4$ ) L'ensemble  $\text{supp } f(x, 0, 0) \cup \text{supp } g(x, 0, 0)$  est de mesure non nulle.

**Théorème 4.4** Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ , sous les hypothèses ( $\mathcal{H}_b1$ ), ( $\mathcal{H}_b3$ ) et ( $\mathcal{H}_b4$ ), il existe  $\mu^*$  dépendant des exposants  $p, q$  et des fonctions  $a, b$  telle que si  $\mu \in (0, \mu^*)$  alors le problème ( $\mathcal{P}$ ) admet une solution positive non triviale dans  $(W^{1,p}(\Omega))^2$ .

Preuve du théorème 4.4

Comme dans la preuve du théorème 3.3, on montre l'existence d'une sur-solution du problème ( $\mathcal{P}$ ) et par l'hypothèse ( $\mathcal{H}_b3$ ), on constate que  $(0, 0)$  est sous-solution. Ensuite, on applique le théorème de point fixe de Leray-Schauder pour prouver l'existence d'une solution de ( $\mathcal{P}$ ).

Pour déterminer une condition nécessaire d'existence pour la solution de ( $\mathcal{P}$ ), considérons le problème de valeur propre suivant

$$(\tilde{\mathcal{V}}_p) \quad -\Delta_p \Phi = \lambda_1 C(x) \Phi \quad \text{dans } \Omega$$

avec  $C \in L^\infty(\Omega)$ ,  $C \not\equiv 0$ ,  $A(x) \geq C(x) \geq 0$  p. p. sur  $\Omega$ .

**Théorème 4.5** Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ , on suppose que les hypothèses ( $\mathcal{H}_b1$ ) et ( $\mathcal{H}_b2$ ) sont satisfaites. Si  $(u, v)$  est une solution strictement positive de ( $\mathcal{P}$ ) dans  $(W^{1,p}(\Omega))^2$  alors  $\mu \leq \lambda_1$ .

Preuve du théorème 4.5

Nous appliquons l'inégalité de Díaz-Saa aux fonctions  $u, \Phi$  puis  $v, \Phi$  et on arrive à

$$\int_{\Omega} \left( -\frac{\Delta_p \Phi}{\Phi^{p-1}} + \frac{\Delta_p u}{u^{p-1}} \right) (\Phi^p - u^p) dx + \int_{\Omega} \left( -\frac{\Delta_p \Phi}{\Phi^{p-1}} + \frac{\Delta_p v}{v^{p-1}} \right) (\Phi^p - v^p) dx \geq 0.$$

Donc

$$\int_{\Omega} \left( \lambda_1 C(x) - \mu \left( \frac{v}{u} \right)^{p-1} \right) (\Phi^p - u^p) dx + \int_{\Omega} \left( \lambda_1 C(x) - \mu \left( \frac{u}{v} \right)^{p-1} \right) (\Phi^p - v^p) dx \geq 0.$$

D'après l'hypothèse ( $\mathcal{H}_b2$ ) on obtient

$$2\lambda_1 \int_{\Omega} A(x) (\Phi^p - u^p) dx \geq \mu \int_{\Omega} \left( \frac{v^{p-1}}{u^{p-1}} + \frac{u^{p-1}}{v^{p-1}} \right) (\Phi^p - u^p) dx$$

c'est à dire  $\lambda_1 \geq \mu$ .

◆

# Bibliographie

- [1] W. ALLEGRETTO X. Y. HUANG. A Picone's identity for the  $p$ -Laplacian and applications. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 32(7) :819–830, 1998.
- [2] W. ALLEGRETTO X. Y. HUANG. Principal eigenvalues and Sturm comparison via Picone's identity. *Journal of Differential Equations*, 156 :427–438, 1999. doi :10.1006/jdeq.1998.3596.
- [3] A. BECHAH. Local and global estimates of solutions of systems involving  $p$ -Laplacian in unbounded domain. *Electronic Journal of Differential Equations*, 19 :1–14, 2001.
- [4] K. CHAÏB. Extension of Díaz-Saa inequality in  $\mathbb{R}^n$  and applications to a system of  $p$ -Laplacian. Submitted.
- [5] K. CHAÏB A. BECHAH and F. DE THÉLIN. Existence and uniqueness of positive solution for subhomogeneous elliptic problems in  $\mathbb{R}^n$ . *Revista de Matemáticas aplicadas*, 21(1-2) :1–18, 2000.
- [6] J. I. DÍAZ J. HERNÁNDEZ. Free boundary problems for some stationary reaction-diffusion systems. In *Res. Notes in Math*, number 89 in Contributions to nonlinear partial differential equations (Madrid, 1981), pages 176–182, Pitman, Boston, Mass.-London, 1983.
- [7] J. I. DÍAZ and M. A. HERRERO. Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Sect. A*, 89(3-4) :249–258, 1981.
- [8] J. I. DÍAZ J. E. SAA. Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilineaires. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. Math.* I(305) :521–524, 1987.
- [9] J. FLECKINGER R. F. MANÁSEVICH N. M. STAVRAKAKIS F. DE THÉLIN. Principal eigenvalues for some quasilinear elliptic equations on  $\mathbb{R}^n$ . *Adv. Differential Equations*, 2(6) :981–1003, 1997.
- [10] P. FELMER R. F. MANÁSEVICH F. DE THÉLIN. Existence and uniqueness of positive solutions for certains quasilinear elliptic systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 17(11/12) :2013–2029, 1992.
- [11] J. HERNÁNDEZ. Positive solutions for the logistic equation with unbounded weights. In *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, number 194 in Reaction diffusion systems (Trieste, 1995), pages 183–197, Dekker, New York, 1998.
- [12] X. Y. HUANG. A note on asymptotic behavior of positive solution for some elliptic equation. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 29(5) :533–537, 1997.



- [13] O. KAVIAN. Introduction à la théorie des points critiques. *Springer Verlag*, 1993.
- [14] O. A. LADYZHENSKAYA N. N. URALTSEVA. *Linear and quasilinear elliptic equations*. Academic Press, New-York, 1968.
- [15] G. M. LIEBERMAN. Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 12(11) :1203–1219, 1988.
- [16] C. MAYA R. SHIVAJI. Multiple positive solutions for a class of semilinear elliptic boundary value problems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 38 :497–504, 1999.
- [17] P. H. RABINOVITZ. Minimax method in critical point theory [...]. *Conf. Board of the Math. Sciences, AMS*, 65, 1984.
- [18] J. SERRIN. Local behavior of solutions of quasilinear equations. *Acta Mathematica*, 111 :247–302, 1964.
- [19] P. TOLKSDORF. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, 51(1) :126–150, 1984.
- [20] J. L. VÁZQUEZ. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. *Appl. Math. Optim.*, 12(3) :191–202, 1984.

# Chapitre 5

## Comportement asymptotique pour la solution d'un système de $p$ -Laplaciens.

Nous étudions le comportement de la solution du système de  $p$ -Laplaciens suivant lorsque le paramètre ( $\mu > 0$ ) tend vers l'infini.

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta_p u = \mu f(u, v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_p v = \mu g(u, v) \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous allons dans ce papier appliquer des résultats dûs à Zong Ming Guo, établis dans le cas d'une seule équation ([3]). Pour cela nous ferons des hypothèses sur le comportement autour de l'origine et à l'infini sur les fonctions  $f$  et  $g$ . Le résultat de cette étude montrera que le comportement à l'infini des termes non homogènes détermine le comportement de la solution quand  $\mu$  tend vers l'infini. Les méthodes de Zong Ming Guo font appel à des notions n'ayant un sens que dans le cas où  $\Omega$  est un domaine borné régulier. En effet on va utiliser des résultats du type "Boundary Point Lemma" de Hopf qui n'ont pas leur équivalent dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}^N$ .

On suppose que les termes non linéaires  $f$  et  $g$  apparaissant dans  $(\mathcal{P})$  ont les propriétés de régularité et de croissance suivantes :

( $\mathcal{H}1$ ) Les fonctions  $f$  et  $g$  sont strictement positives sur  $\mathbb{R}_{+*}^2$ .

( $\mathcal{H}2$ ) Les applications  $s \mapsto f(s, t)$  et  $s \mapsto g(s, t)$  ( respectivement  $t \mapsto f(s, t)$  et  $t \mapsto g(s, t)$  ) sont croissantes pour tout  $t > 0$  ( respectivement  $s > 0$  ).

( $\mathcal{H}3$ ) Il existe  $\alpha'$  et  $\beta'$  deux réels positifs vérifiant

$$\eta = \frac{\alpha' + \beta' + 1}{p - 1} < 1$$

tels que pour tout  $u, v \geq 1$  on a

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(tu, tv)}{t^{\alpha'+\beta'+1} u^{\alpha'} v^{\beta'+1}} = K_u > 1 \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(tu, tv)}{t^{\alpha'+\beta'+1} u^{\alpha'+1} v^{\beta'}} = K_v > 1.$$

(H4) On peut trouver  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels positifs vérifiant  $\alpha \leq \alpha'$  et  $\beta \leq \beta'$  et deux constantes  $C_f$  et  $C_g$  indépendantes de  $u$  et  $v$  tels que

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tu, tv)}{t^{\alpha+\beta+1} u^{\alpha} v^{\beta+1}} &> C_f > 0 \text{ pour tout } u, v \in (0, 1]; \\ \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(tu, tv)}{t^{\alpha+\beta+1} u^{\alpha+1} v^{\beta}} &> C_g > 0 \text{ pour tout } u, v \in (0, 1]. \end{aligned}$$

On posera pour simplifier les résultats  $K = \min(K_u, K_v)$  et  $C = \min(C_f, C_g)$ . Dans ce qui suit, on notera aussi  $d(x)$  la distance de  $x$  au bord de  $\Omega$  ( $\partial\Omega$ ) et  $s(x)$  le point de  $\partial\Omega$  le plus proche de  $x$  ( $\Omega$  étant suffisamment régulier). Ce point là est unique à condition de prendre  $x$  suffisamment près du bord. On définit l'ensemble  $\Omega_\delta$  comme suit :

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega \text{ tels que } 0 < d(x) < \delta\}.$$

Rappelons le lemme de Hopf pour le  $p$ -Laplacien qui sera un outil essentiel dans ce travail.

**Lemme 5.1** (*Lemme de Hopf*)

Soient  $\Omega$  domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ) à bord régulier  $\partial\Omega$  et  $u$  satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ u > 0 \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors  $\frac{\partial u}{\partial n}(x) < 0$  sur  $\partial\Omega$ .

Nous utiliserons aussi le lemme suivant dont une démonstration a été faite par Z. M. Guo et J. R. L. Webb dans [4] et qui est une conséquence du lemme de Hopf.

**Lemme 5.2** Soient  $\rho \geq 0$ ,  $\rho \not\equiv 0$  dans  $\Omega$ . Si  $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$  est l'unique solution positive de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \rho(x) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors il existe  $l, k > 0$  tels que  $kd(x) \leq u(x) \leq ld(x)$  dans  $\bar{\Omega}$ .

**Remarque 5.1** Grâce à ce lemme on peut comparer sur des ouverts bornés des solutions d'équations du type  $-\Delta_p u = \rho(x)$  dans  $\Omega$ ;  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  dont le second membre est positif non identiquement nul.

**Lemme 5.3** (*Principe de comparaison faible*)

Soient  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N > 2$ ) à bord régulier  $\partial\Omega$  et  $w_1, w_2 \in W^{1,p}(\Omega)$  satisfaisant

$$-\Delta_p w_1 \leq -k\Delta_p w_2 \text{ dans } \Omega \text{ au sens faible,}$$

où  $k$  est un réel strictement positif. Si  $w_1 \leq k^{\frac{1}{p-1}} w_2$  sur  $\partial\Omega$  alors  $w_1 \leq k^{\frac{1}{p-1}} w_2$  dans  $\Omega$ .

**Corollaire 5.1** Soient  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N > 2$ ) à bord régulier  $\partial\Omega$  et  $w_1, w_2 \in W^{1,p}(\Omega)$  satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta_p w_i = f_i(x) \text{ dans } \Omega \\ w_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour  $i = 1, 2$ .

Si  $f_1 \geq C f_2$  avec  $C$  une constante positive alors  $w_1 \geq C^{\frac{1}{p-1}} w_2$ .

Énonçons le résultat principal de ce chapitre sur le comportement asymptotique de la solution de  $(\mathcal{P})$ .

**Théorème 5.1** On suppose que les hypothèses  $(\mathcal{H}1) - (\mathcal{H}4)$  sont satisfaites. Si  $(u_\mu, v_\mu)$  est une solution positive du problème  $(\mathcal{P})$  alors elle vérifie

$$\begin{aligned} u_\mu \mu^{\frac{-1}{(p-1)(1-\eta)}} & \text{ tend vers } C_u^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} \hat{u} \text{ dans } C_0^1(\bar{\Omega}) \text{ lorsque } \mu \text{ tend vers l'infini.} \\ v_\mu \mu^{\frac{-1}{(p-1)(1-\eta)}} & \text{ tend vers } C_v^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} \hat{v} \text{ dans } C_0^1(\bar{\Omega}) \text{ lorsque } \mu \text{ tend vers l'infini.} \end{aligned}$$

où  $(\hat{u}, \hat{v})$  est solution de

$$\begin{cases} -\Delta_p \hat{u} = \hat{u}^{\alpha'} \hat{v}^{\beta'+1} \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_p \hat{v} = \hat{u}^{\alpha'+1} \hat{v}^{\beta'} \text{ dans } \Omega \\ \hat{u}(x) = \hat{v}(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

Les constantes  $C_u$  et  $C_v$  sont données par

$$C_u := K_u^{1-\frac{\beta'+1}{p(p-1)}} K_v^{\frac{\beta'+1}{p(p-1)}}, \quad C_v := K_u^{\frac{\alpha'+1}{p(p-1)}} K_v^{1-\frac{\alpha'+1}{p(p-1)}}.$$

### Exemple

Pour avoir une vision plus concrète du résultat obtenu, nous allons prendre un exemple de fonctions  $f$  et  $g$  vérifiant les hypothèses  $(\mathcal{H}1) - (\mathcal{H}4)$  :

$$f(u, v) = K_u u^{\alpha'} v^{\beta'+1} + C_u u^{\alpha''} v^{\beta''+1} + u^{p_1} + v^{q_1}$$

$$g(u, v) = K_v u^{\alpha'+1} v^{\beta'} + C_v u^{\alpha''+1} v^{\beta''} + u^{p_2} + v^{q_2}.$$

Les constantes  $K_u, K_v, C_u, C_v$  et les exposants  $\alpha', \beta'$  sont ceux apparaissant dans le théorème. En ce qui concerne les exposants  $\alpha'', \beta'', p_1, p_2, q_1$  et  $q_2$  (tous positifs) nous imposons les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha'' & < \alpha' \\ \beta'' & < \beta' \\ \alpha' + \beta' + 2 & < p \\ \alpha' + \beta' + 1 & > p_0 = \max(p_1, p_2, q_1, q_2). \end{aligned}$$

Ainsi, on peut choisir deux réels positifs  $\alpha, \beta$  de telle sorte que l'hypothèse  $(\mathcal{H}4)$  soit satisfaite; l'hypothèse  $(\mathcal{H}3)$  l'étant grâce aux conditions ci-dessus. En effet, nous allons

le vérifier pour la fonction  $f$  en prenant  $\alpha'' = \alpha$  et  $\beta'' = \beta$ . Pour  $(\mathcal{H}3)$  on a pour tout  $u, v \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{f(tu, tv)}{t^{\alpha'+\beta'+1}u^{\alpha'}v^{\beta'+1}} &= \underbrace{K_u + C_f t^{\alpha''+\beta''-(\alpha'+\beta')} u^{\alpha''-\alpha'} v^{\beta''-\beta'}}_{\text{tend vers } K_u \text{ quand } t \text{ tend vers } \infty} \\ &+ \underbrace{t^{p_1-(\alpha'+\beta'+1)} u^{p_1-\alpha'} v^{-(\beta'+1)}}_{\text{tend vers } 0 \text{ quand } t \text{ tend vers } \infty} \\ &+ \underbrace{t^{q_1-(\alpha'+\beta'+1)} u^{-\alpha'} v^{q_1-(\beta'+1)}}_{\text{tend vers } 0 \text{ quand } t \text{ tend vers } \infty}. \end{aligned}$$

Et enfin pour  $(\mathcal{H}4)$  on obtient pour tout  $(u, v) \in (0, 1]^2$

$$\begin{aligned} \frac{f(tu, tv)}{t^{\alpha+\beta+1}u^\alpha v^{\beta+1}} &= \underbrace{K_u t^{\alpha'+\beta'-(\alpha+\beta)} u^{\alpha'-\alpha} v^{\beta'-\beta} + C_f}_{\text{tend vers } C_f \text{ quand } t \text{ tend vers } 0^+} \\ &+ \underbrace{t^{p_1-(\alpha+\beta+1)} u^{p_1-\alpha} v^{-(\beta+1)} + t^{q_1-(\alpha+\beta+1)} u^{-\alpha} v^{q_1-(\beta+1)}}_{>0}. \end{aligned}$$

Il est clair que les hypothèses  $(\mathcal{H}1)$  et  $(\mathcal{H}2)$  sont vérifiées grâce à la positivité des constantes et des exposants intervenant dans  $f$  et  $g$ .

#### Preuve du théorème 5.1

Par la suite, nous noterons  $(u, v)$  le couple solution de  $(\mathcal{P})$  au lieu de  $(u_\mu, v_\mu)$ , tout en gardant à l'esprit qu'il dépend du paramètre  $\mu$ .

Le lemme suivant est la clé de la démonstration du théorème 5.1. Nous verrons dans sa preuve que ce résultat est spécifique aux domaines bornés et qu'il est difficile d'imaginer un équivalent pour le cas non borné.

#### **Lemme 5.4** (Principe de balayage)

Soient  $p > 1$  et  $\Omega$  un domaine borné régulier dans  $\mathbb{R}^N$ . En supposant que les fonctions  $f$  et  $g$  satisfont les hypothèses  $(\mathcal{H}1)$  et  $(\mathcal{H}2)$ , on considère une famille de sous-solutions positives du problème  $(\mathcal{P})$  qui vérifient :

**a** Pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $(\varphi_t, \psi_t) \in (C_0^1(\Omega))^2$

$$\begin{cases} -\Delta_p \varphi_t - \mu f(\varphi_t, \psi_t) < 0 \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_p \psi_t - \mu g(\varphi_t, \psi_t) < 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

**b** Pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $\varphi_t = \psi_t = 0$ ,  $\frac{\partial \varphi_t}{\partial n} < 0$  et  $\frac{\partial \psi_t}{\partial n} < 0$  sur  $\partial\Omega$ .

**c** L'application  $t \in [a, b] \mapsto (\varphi_t, \psi_t) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  est continue pour  $\|\cdot\|_1$ .

Si  $(u, v) \in (C_0^1(\Omega))^2$  est une solution positive de  $(\mathcal{P})$  et s'il existe  $t_0 \in [a, b]$  tel que  $u(x) > \varphi_{t_0}(x)$  et  $v(x) > \psi_{t_0}(x)$  dans  $\Omega$  alors pour tout  $t \in [a, b]$   $u(x) > \varphi_t(x)$  et  $v(x) > \psi_t(x)$  dans  $\Omega$ .

*Preuve du lemme 5.4*

Soit  $E := \{t \in [a, b], u > \varphi_t \text{ et } v > \psi_t \text{ dans } \Omega\}$ . Nous montrons dans ce qui suit que  $E$  est ouvert et fermé dans  $[a, b]$ .

$E$  EST OUVERT

Prenons  $t_1 \in E$  et  $(u, v)$  solution de  $(\mathcal{P})$ ; par  $\mathbf{a}$  on a

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \Delta_p \varphi_{t_1} \geq \mu (f(u, v) - f(\varphi_{t_1}, \psi_{t_1})) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_p v + \Delta_p \psi_{t_1} \geq \mu (g(u, v) - g(\varphi_{t_1}, \psi_{t_1})) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Or d'après l'hypothèse  $(\mathcal{H}2)$

$$f(u, v) - f(\varphi_{t_1}, \psi_{t_1}) = f(u, v) - f(\varphi_{t_1}, v) + f(\varphi_{t_1}, v) - f(\varphi_{t_1}, \psi_{t_1}) \geq 0.$$

Et de même  $g(u, v) - g(\varphi_{t_1}, \psi_{t_1}) \geq 0$ . Donc

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \Delta_p \varphi_{t_1} \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_p v + \Delta_p \psi_{t_1} \geq 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

On utilise le lemme de Hopf pour montrer qu'il existe  $\omega$  dans  $(0, +\infty)$  et  $\delta$  dans  $(0, \delta_0)$  tels que

$$\frac{\partial u}{\partial n_s(x)}(x) < -\omega, \quad \frac{\partial v}{\partial n_s(x)}(x) < -\omega \quad \text{sur } \Omega_\delta,$$

$$\frac{\partial \varphi_{t_1}}{\partial n_s(x)}(x) < -\omega, \quad \frac{\partial \psi_{t_1}}{\partial n_s(x)}(x) < -\omega \quad \text{sur } \Omega_\delta.$$

Donc, pour tout  $\tau \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial u}{\partial n_s(x)}(x) + (1 - \tau) \frac{\partial \varphi_{t_1}}{\partial n_s(x)}(x) &< -\omega \text{ sur } \Omega_\delta, \\ \tau \frac{\partial v}{\partial n_s(x)}(x) + (1 - \tau) \frac{\partial \psi_{t_1}}{\partial n_s(x)}(x) &< -\omega \text{ sur } \Omega_\delta. \end{aligned} \quad (5.2)$$

On sait construire en utilisant le théorème de la moyenne deux opérateurs  $L_1$  et  $L_2$  définis comme suit

$$L_1 w = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_1^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} w \right] \quad \text{et} \quad L_2 w = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_2^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} w \right]$$

$$\text{où } a_1^{i,j}(x) = \int_0^1 \frac{\partial a^i}{\partial \zeta_j} [\tau Du + (1 - \tau) D\varphi_{t_1}] d\tau \quad ,$$

$$a_2^{i,j}(x) = \int_0^1 \frac{\partial a^i}{\partial \zeta_j} [\tau Dv + (1 - \tau) D\psi_{t_1}] d\tau \quad \text{et} \quad a^i(\zeta) = |\zeta|^{p-2} \zeta_i.$$

De plus, grâce au résultat précédent (5.2), on en déduit que ces deux opérateurs sont uniformément elliptiques sur  $\Omega_\delta$  et ils satisfont le système suivant

$$\begin{cases} -L_1(u - \varphi_{t_1}) = -\Delta_p u + \Delta_p \varphi_{t_1} \\ -L_2(v - \psi_{t_1}) = -\Delta_p v + \Delta_p \psi_{t_1}. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{cases} -L_1(u - \varphi_{t_1}) \geq 0 \text{ dans } \Omega_\delta \\ u > \varphi_{t_1} \text{ dans } \Omega_\delta \\ u - \varphi_{t_1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega(\subset \partial\Omega_\delta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -L_2(v - \psi_{t_1}) \geq 0 \text{ dans } \Omega_\delta \\ v > \psi_{t_1} \text{ dans } \Omega_\delta \\ v - \psi_{t_1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par le lemme du point au bord (D. Gilbarg N.S. Trudinger [1]), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial n_s}(u - \varphi_{t_1}) < 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial n_s}(v - \psi_{t_1}) < 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Par conséquent, on écrit

$$\begin{aligned} u(x) - \varphi_{t_1}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial(u - \varphi_{t_1})}{\partial \tau}(\tau x + (1 - \tau)s(x)) d\tau \\ &= -d(x) \int_0^1 \frac{\partial(u - \varphi_{t_1})}{\partial n_{s(x)}}(x + \zeta d(x)s(x)) d\zeta, \end{aligned}$$

et de même pour  $v - \psi_{t_1}$ . Alors il existe  $\theta' > 0$  tel que

$$u(x) \geq \varphi_{t_1}(x) + \theta' d(x) \quad \text{et} \quad v(x) \geq \psi_{t_1}(x) + \theta' d(x) \text{ pour } x \in \Omega_\delta.$$

Or  $\Omega \setminus \Omega_\delta$  est compact et  $t_1 \in E$  donc il existe  $\theta > 0$  tel que

$$u(x) \geq \varphi_{t_1}(x) + \theta d(x) \quad \text{et} \quad v(x) \geq \psi_{t_1}(x) + \theta d(x) \text{ pour } x \in \Omega. \quad (5.3)$$

Ensuite, de la même façon

$$\begin{aligned} \varphi_t(x) - \varphi_{t_1}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial(\varphi_t - \varphi_{t_1})}{\partial \tau}(\tau x + (1 - \tau)s(x)) d\tau \\ &= -d(x) \int_0^1 \frac{\partial(\varphi_t - \varphi_{t_1})}{\partial n_{s(x)}}(x + \zeta d(x)s(x)) d\zeta \end{aligned}$$

$$\text{donc } |\varphi_t(x) - \varphi_{t_1}(x)| \leq d(x) \int_0^1 |(\nabla \varphi_t - \nabla \varphi_{t_1})(x + \zeta d(x)s(x))| d\zeta.$$

De plus l'application  $t \mapsto \varphi_t$  est continue pour la norme  $\|\cdot\|_1$  i. e. il existe  $\delta_1 > 0$  tel que

$$\int_0^1 |(\nabla \varphi_t - \nabla \varphi_{t_1})(x + \zeta d(x)s(x))| d\zeta < \frac{\theta}{2} \text{ dès que } |t - t_1| < \delta_1$$

donc il existe  $\delta_1 > 0$  tel que  $|\varphi_t(x) - \varphi_{t_1}(x)| \leq \frac{\theta}{2} d(x)$  dans  $\Omega$  dès que  $|t - t_1| < \delta_1$

et de même  $|\psi_t(x) - \psi_{t_1}(x)| \leq \frac{\theta}{2} d(x)$  dans  $\Omega$  dès que  $|t - t_1| < \delta_1$ .

Par conséquent il existe  $\delta_1 > 0$  tel que pour tout  $|t - t_1| < \delta_1$  on a

$$\varphi_t(x) \leq \varphi_{t_1}(x) + \frac{\theta}{2}d(x) \quad \text{et} \quad \psi_t(x) \leq \psi_{t_1}(x) + \frac{\theta}{2}d(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.4)$$

En superposant les inégalités (5.3) et (5.4) on trouve qu'il existe  $\delta_1 > 0$  tel que pour tout  $|t - t_1| < \delta_1$  on a

$$u(x) \geq \varphi_t(x) + \frac{\theta}{2}d(x) \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad v(x) \geq \psi_t(x) + \frac{\theta}{2}d(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

Donc il existe  $\delta_1 > 0$  tel que pour tout  $|t - t_1| < \delta_1$  on a

$$u(x) > \varphi_t(x) \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad v(x) > \psi_t(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

Ce qui signifie que  $E$  est ouvert.

### $E$ FERMÉ

Nous allons procéder par contradiction pour prouver que toute suite convergente de  $E$  converge dans  $E$ . Prenons  $\hat{t} \notin E$  et supposons qu'il existe une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  qui converge vers ce  $\hat{t}$ . Comme  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ ,  $u > \varphi_{t_n}$  et  $v > \psi_{t_n}$  dans  $\Omega$  et par continuité  $u \geq \varphi_{\hat{t}}$  et  $v \geq \psi_{\hat{t}}$  dans  $\Omega$ . Ainsi, si  $\hat{t} \notin E$  alors il existe  $x', y' \in \Omega$  tels que  $u(x') = \varphi_{\hat{t}}(x')$  ou  $v(y') = \psi_{\hat{t}}(y')$ .

Nous affirmons qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $x' \in \Omega_\delta$  ou  $y' \in \Omega_\delta$ .

En effet, sinon  $u > \varphi_{\hat{t}}$  et  $v > \psi_{\hat{t}}$  dans  $\Omega_\delta$ ; on choisit  $\Omega_1 \subset \Omega$  tel que  $\partial\Omega_1 \subset \Omega_\delta$  et  $x', y' \in \Omega_1$ . Alors il existe  $\eta > 0$  tel que  $u \geq \varphi_{\hat{t}} + \eta$  et  $v \geq \psi_{\hat{t}} + \eta$  sur  $\partial\Omega_1$ .

En posant  $\tilde{\varphi} = \varphi_{\hat{t}} + \eta$  et  $\tilde{\psi} = \psi_{\hat{t}} + \eta$ , on arrive à

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \Delta_p \tilde{\varphi} \geq \mu (f(u, v) - f(\varphi_{\hat{t}}, \psi_{\hat{t}})) & \text{dans } \Omega_1 \\ -\Delta_p v + \Delta_p \tilde{\psi} \geq \mu (g(u, v) - g(\varphi_{\hat{t}}, \psi_{\hat{t}})) & \text{dans } \Omega_1 \\ u \geq \tilde{\varphi} \quad , \quad v \geq \tilde{\psi} & \text{sur } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

On utilise l'hypothèse (H2) pour obtenir

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \Delta_p \tilde{\varphi} \geq 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ -\Delta_p v + \Delta_p \tilde{\psi} \geq 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ u \geq \tilde{\varphi} \quad , \quad v \geq \tilde{\psi} & \text{sur } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

D'après le lemme de comparaison faible (lemme 5.3) appliqué à chacune des équations, on obtient :  $u \geq \tilde{\varphi}$  et  $v \geq \tilde{\psi}$  dans  $\Omega_1$  i.e.

$$u \geq \varphi_{\hat{t}} + \eta \quad \text{et} \quad v \geq \psi_{\hat{t}} + \eta \quad \text{dans } \Omega_1.$$



Ceci contredit le fait qu'il existe  $x', y' \in \Omega_1$  tels que  $u(x') = \varphi_{\hat{t}}(x')$  ou  $v(y') = \psi_{\hat{t}}(y')$ . Donc, il existe  $x' \in \Omega_\delta$  tel que  $(u - \varphi_{\hat{t}})(x') = 0$  ou  $y' \in \Omega_\delta$  tel que  $(v - \psi_{\hat{t}})(y') = 0$ .

Comme précédemment, on introduit les opérateurs uniformément elliptiques  $L_1$  et  $L_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} -L_1(u - \varphi_{\hat{t}}) \geq 0 \text{ dans } \Omega_\delta \\ u \geq \varphi_{\hat{t}} \text{ dans } \Omega_\delta \\ u(x') = \varphi_{\hat{t}}(x') \\ u \equiv \varphi_{\hat{t}} \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} -L_2(v - \psi_{\hat{t}}) \geq 0 \text{ dans } \Omega_\delta \\ v \geq \psi_{\hat{t}} \text{ dans } \Omega_\delta \\ v(y') = \psi_{\hat{t}}(y') \\ v \equiv \psi_{\hat{t}} \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

En appliquant le principe du maximum faible on arrive à  $u \equiv \varphi_{\hat{t}}$  ou  $v \equiv \psi_{\hat{t}}$  dans  $\Omega_\delta$ , ce qui contredit **a**. En effet, par exemple si  $u \equiv \varphi_{\hat{t}}$  on a

$$\begin{aligned} -\Delta_p \varphi_{\hat{t}} - \mu f(\varphi_{\hat{t}}, \psi_{\hat{t}}) &< 0 \text{ dans } \Omega_\delta (\subset \Omega) \\ \Rightarrow -\Delta_p u - \mu f(u, \psi_{\hat{t}}) &< 0 \text{ dans } \Omega_\delta \\ \Rightarrow \mu (f(u, v) - f(u, \psi_{\hat{t}})) &< 0 \text{ dans } \Omega_\delta. \end{aligned}$$

Mais  $v \geq \psi_{\hat{t}}$  et d'après  $(\mathcal{H}2)$ ,  $f(u, \cdot)$  est croissante.

Donc pour tout  $\hat{t} \notin E$ , il n'existe pas de suite de  $E$  convergeant vers  $\hat{t}$ , c'est-à-dire que  $E$  est fermé.

Finalement,  $E$  est ouvert et fermé dans  $[a, b]$ , s'il est non vide alors  $E = [a, b]$ . ◆

### Preuve du théorème 5.1 (suite)

#### ÉTAPE 1

Soit  $(\varphi, \psi)$  le couple de fonctions positives vérifiant le problème variationnel :

$$(\mathcal{PV}) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p \varphi = \tau \varphi^\alpha \psi^{\beta+1} \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_p \psi = \tau \varphi^{\alpha+1} \psi^\beta \text{ dans } \Omega \\ \varphi > 0, \quad \psi > 0 \text{ dans } \Omega \\ \varphi = \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

$\tau$  est choisi de telle sorte que  $\sup \{\max(\varphi(x), \psi(x)), \quad x \in \Omega\} = 1$ . Grâce à l'hypothèse  $(\mathcal{H}4)$ , on peut choisir  $1 > \gamma > 0$  tel que pour tout  $t \in (0, \gamma]$  et  $(u, v) \in (0, 1]^2$  on a

$$f(tu, tv) > Ct^{\alpha+\beta+1} u^\alpha v^{\beta+1} \quad \text{et} \quad g(tu, tv) > Ct^{\alpha+\beta+1} u^{\alpha+1} v^\beta. \quad (5.5)$$

Cette propriété est uniforme sur  $(0, 1]^2$  ce qui permet de l'appliquer aux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sur tout  $\Omega$ . Donc pour  $t \in (0, \gamma]$  et pour tout  $x \in \Omega$  on a

$$\begin{aligned} f(t\varphi(x), t\psi(x)) &> Ct^{\alpha+\beta+1} \varphi(x)^\alpha \psi(x)^{\beta+1}; \\ g(t\varphi(x), t\psi(x)) &> Ct^{\alpha+\beta+1} \varphi(x)^{\alpha+1} \psi(x)^\beta. \end{aligned}$$

Ainsi pour  $t \in (0, \gamma]$ , le couple  $(t\varphi, t\psi)$  est sous-solution de  $(\mathcal{P})$  sur  $\Omega$  dès que  $\mu \geq \frac{\tau}{C}$ .

On considère la boule  $B$  de telle sorte que  $B \subset\subset \Omega$ . Nous voulons montrer qu'il existe une constante positive indépendante de la solution  $(u_\mu, v_\mu)$  de  $(\mathcal{P})$  telle que  $u_\mu \geq \kappa, v_\mu \geq \kappa$  sur  $B$ ; mais pour cela il faut utiliser la généralisation du lemme de balayage dû à J. Serrin (lemme 5.4).

Comme les quatre fonctions  $u, v, \varphi$  et  $\psi$  sont strictement positives dans  $\Omega$  et que leurs dérivées normales sont strictement négatives sur  $\partial\Omega$ , on peut trouver  $\epsilon > 0$  tel que  $u(x) > \epsilon\varphi(x)$  et  $v(x) > \epsilon\psi(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ . Il est à noter que  $\epsilon$  dépend bien sûr de  $u$  et  $v$ , mais la constante  $\gamma$  qui a été introduite dans (5.5) est indépendante de  $u$  et  $v$ . Ainsi on applique le principe de balayage à la famille de sous-solutions  $(t\varphi, t\psi)$  avec  $t \in [\epsilon, \gamma]$  sur  $\Omega$ .

Donc

$$\text{pour tout } x \in \Omega \quad u(x) > \gamma\varphi(x) \quad \text{et} \quad v(x) > \gamma\psi(x) \quad \text{dès que } \mu > \frac{\tau}{C}. \quad (5.6)$$

Notons  $K_1 = \inf \{ \min(\varphi(x), \psi(x)); \quad x \in B \} > 0$ , donc

$$u(x) \geq \gamma K_1 \quad \text{et} \quad v(x) \geq \gamma K_1 \quad \text{dans } B(\subset\subset \Omega) \text{ pour } \mu > \frac{\tau}{C}.$$

On définit  $\tau_2 := \inf \{ \min(f(s, t), g(s, t)), \quad s \geq \gamma K_1, \quad t \geq \gamma K_1 \}$ ; d'après les hypothèses  $(\mathcal{H}1)$  et  $(\mathcal{H}2)$  on a  $\tau_2 > 0$ .

Par conséquent, si  $\mu > \frac{\tau}{C}$  alors  $\mu f(u, v) \geq \mu\tau_2\chi_B$  et  $\mu g(u, v) \geq \mu\tau_2\chi_B$  dans  $\Omega$ . Grâce au principe de comparaison (lemme 5.3) on obtient

$$u(x) \geq (\mu\tau_2)^{\frac{1}{p-1}} \tilde{w}(x) \quad \text{et} \quad v(x) \geq (\mu\tau_2)^{\frac{1}{p-1}} \tilde{w}(x) \quad \text{dans } \Omega$$

où  $\tilde{w}$  est solution de

$$\begin{cases} -\Delta_p \tilde{w} = \chi_B \text{ dans } \Omega \\ \tilde{w}(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Grâce au lemme 5.2, on peut aussi comparer les fonctions  $\tilde{w}$  et  $(\hat{u}, \hat{v})$  où  $(\hat{u}, \hat{v})$  est solution du problème sous linéaire (5.1) donné dans le théorème. Il existe  $K_2$  tel que  $\tilde{w}(x) \geq K_2\hat{u}(x)$  dans  $\Omega$  et  $\tilde{w}(x) \geq K_2\hat{v}(x)$  dans  $\Omega$ .

Finalement, si  $\mu > \frac{\tau}{C}$  alors

$$u(x) \geq (\mu\tau_2)^{\frac{1}{p-1}} K_2 \hat{u}(x) \quad \text{et} \quad v(x) \geq (\mu\tau_2)^{\frac{1}{p-1}} K_2 \hat{v}(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega$$

ce qu'on note par

$$u(x) \geq \mu^{\frac{1}{p-1}} M \hat{u}(x) \quad \text{et} \quad v(x) \geq \mu^{\frac{1}{p-1}} M \hat{v}(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega. \quad (5.7)$$

ÉTAPE 2

Soit  $(u_1, v_1)$  solution de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 = f_1(x) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_p v_1 = g_1(x) \text{ dans } \Omega \\ u_1(x) = v_1(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\text{où } f_1(x) := \begin{cases} \hat{u}^{\alpha'}(x)\hat{v}^{\beta'+1}(x) \text{ dans } \Omega \setminus \Omega_{\delta_1} \\ 0 \text{ dans } \Omega_{\delta_1} \end{cases} \quad \text{et } g_1(x) := \begin{cases} \hat{u}^{\alpha'+1}(x)\hat{v}^{\beta'}(x) \text{ dans } \Omega \setminus \Omega_{\delta_1} \\ 0 \text{ dans } \Omega_{\delta_1} \end{cases}.$$

Par la suite, nous allons utiliser l'hypothèse (H3), ainsi pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $t_\epsilon > 0$  tel que si  $t \geq t_\epsilon$  alors pour tout  $\zeta, \eta \geq 1$

$$f(t\zeta, t\eta) \geq (K - \epsilon)t^{\alpha'+\beta'+1}\zeta^{\alpha'}\eta^{\beta'+1} \quad \text{et} \quad g(t\zeta, t\eta) \geq (K - \epsilon)t^{\alpha'+\beta'+1}\zeta^{\alpha'+1}\eta^{\beta'}.$$

D'après le résultat (5.7) obtenu lors de l'ÉTAPE 1, on peut prendre  $\mu$  assez grand pour que  $u(x) \geq t_\epsilon$  et  $v(x) \geq t_\epsilon$  pour tout  $x \in \Omega \setminus \Omega_{\delta_1}$  car  $\hat{u}, \hat{v}$  sont strictement positives sur  $\Omega \setminus \Omega_{\delta_1}$  compact. En effet, dans (5.7) on a montré que  $u(x) \geq \mu^{\frac{1}{p-1}}M\hat{u}(x)$  et  $v(x) \geq \mu^{\frac{1}{p-1}}M\hat{v}(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ ; si on note  $M_2 := \min \left\{ \min_{\Omega \setminus \Omega_{\delta_1}} \hat{u}, \min_{\Omega \setminus \Omega_{\delta_1}} \hat{v} \right\}$  et si on pose  $A_0 := \max \left\{ \frac{\tau}{C}, (M^{-1}M_2^{-1}t_\epsilon)^{p-1} \right\}$  on a

$$\text{si } \mu \geq A_0 \quad \text{alors } u(x) \geq t_\epsilon \text{ et } v(x) \geq t_\epsilon \quad \text{pour tout } x \in \Omega \setminus \Omega_{\delta_1}.$$

Ainsi, pour  $\mu \geq A_0$  on obtient en prenant  $\zeta = \frac{u(x)}{t_\epsilon}$  et  $\eta = \frac{v(x)}{t_\epsilon}$

$$f(u(x), v(x)) \geq (K - \epsilon)u(x)^{\alpha'}v(x)^{\beta'+1} \quad \text{et} \quad g(u(x), v(x)) \geq (K - \epsilon)u(x)^{\alpha'+1}v(x)^{\beta'} \quad \text{dans } \Omega \setminus \Omega_{\delta_1}.$$

Grâce à (5.7) on arrive, pour  $\mu \geq A_0$ , à

$$\begin{aligned} f(u, v) &\geq (K - \epsilon)\mu^{\frac{\alpha'+\beta'+1}{p-1}}M^{\alpha'+\beta'+1}\hat{u}^{\alpha'}\hat{v}^{\beta'+1} \\ \text{et } g(u, v) &\geq (K - \epsilon)\mu^{\frac{\alpha'+\beta'+1}{p-1}}M^{\alpha'+\beta'+1}\hat{u}^{\alpha'+1}\hat{v}^{\beta'} \quad \text{dans } \Omega \setminus \Omega_{\delta_1} \end{aligned}$$

qui par définition de  $f_1$  et  $g_1$  donnent pour  $\mu \geq A_0$

$$\begin{aligned} \mu f(u, v) &\geq (K - \epsilon)\mu^{1+\frac{\alpha'+\beta'+1}{p-1}}M^{\alpha'+\beta'+1}f_1(x) \\ \text{et } \mu g(u, v) &\geq (K - \epsilon)\mu^{1+\frac{\alpha'+\beta'+1}{p-1}}M^{\alpha'+\beta'+1}g_1(x) \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Par le principe de comparaison faible (lemme 5.3), dès que  $\mu > A_0$

$$\begin{aligned} u &\geq \left[ (K - \epsilon)\mu^{1+\frac{\alpha'+\beta'+1}{p-1}}M^{\alpha'+\beta'+1} \right]^{\frac{1}{p-1}} u_1 \\ \text{et } v &\geq \left[ (K - \epsilon)\mu^{1+\frac{\alpha'+\beta'+1}{p-1}}M^{\alpha'+\beta'+1} \right]^{\frac{1}{p-1}} v_1, \end{aligned}$$

où le couple  $(u_1, v_1)$  est encore solution de (5.8). Or par le lemme 5.2, on peut trouver une constante positive  $M_1$  telle que  $u_1(x) \geq M_1 \hat{u}(x)$  et  $v_1(x) \geq M_1 \hat{v}(x)$  pour tout  $x$  dans  $\bar{\Omega}$ . Ainsi, dès que  $\mu > A_0$

$$\begin{aligned} u &\geq (K - \epsilon)^{\frac{1}{p-1}} \mu^{\frac{1}{p-1}} \left(1 + \frac{\alpha' + \beta' + 1}{p-1}\right) M^{\frac{\alpha' + \beta' + 1}{p-1}} M_1 \hat{u} \\ \text{et } v &\geq (K - \epsilon)^{\frac{1}{p-1}} \mu^{\frac{1}{p-1}} \left(1 + \frac{\alpha' + \beta' + 1}{p-1}\right) M^{\frac{\alpha' + \beta' + 1}{p-1}} M_1 \hat{v} \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Maintenant en posant  $\eta = \frac{\alpha' + \beta' + 1}{p-1} (< 1)$  et pour  $\mu > A_0$  on arrive à

$$\begin{aligned} u &\geq (K - \epsilon)^{\frac{1}{p-1}} \mu^{\frac{1+\eta}{p-1}} M^\eta M_1 \hat{u} \\ \text{et } v &\geq (K - \epsilon)^{\frac{1}{p-1}} \mu^{\frac{1+\eta}{p-1}} M^\eta M_1 \hat{v} \quad \text{dans } \Omega \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ensuite, on réitère le procédé. Pour que  $u(x) \geq t_\epsilon$  et  $v(x) \geq t_\epsilon$  pour tout  $x \in \Omega \setminus \Omega_{\delta_1}$ , il suffit de prendre  $\mu > \left[ (K - \epsilon)^{-\frac{1}{p-1}} M^{-\eta} M_1^{-1} M_2^{-1} t_\epsilon \right]^{\frac{p-1}{1+\eta}} =: A_1$ , mais pour que les étapes précédentes soient vérifiées on a aussi besoin de  $\mu > A_0$ . Donc, dès que  $\mu > \max\{A_0, A_1\}$  on arrive à

$$\mu f(u, v) \geq (K - \epsilon) \mu u^{\alpha'} v^{\beta'+1} \quad \text{et} \quad \mu g(u, v) \geq (K - \epsilon) \mu u^{\alpha'+1} v^{\beta'} \quad \text{dans } \Omega \setminus \Omega_{\delta_1}.$$

Grâce à (5.9), si  $\mu > \max\{A_0, A_1\}$  on obtient

$$\begin{aligned} \mu f(u, v) &\geq (K - \epsilon)^{1 + \frac{\alpha' + \beta' + 1}{p-1}} \mu^{1 + \frac{\alpha' + \beta' + 1}{p-1} (1+\eta)} M^{\eta(\alpha' + \beta' + 1)} M_1^{\alpha' + \beta' + 1} f_1(x) \\ \text{et } \mu g(u, v) &\geq (K - \epsilon)^{1 + \frac{\alpha' + \beta' + 1}{p-1}} \mu^{1 + \frac{\alpha' + \beta' + 1}{p-1} (1+\eta)} M^{\eta(\alpha' + \beta' + 1)} M_1^{\alpha' + \beta' + 1} g_1(x) \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Par le lemme 5.3 et le lemme 5.2 on obtient dès que  $\mu > \max\{A_0, A_1\}$

$$\begin{aligned} u &\geq (K - \epsilon)^{\frac{1}{p-1}(1+\eta)} \mu^{\frac{1}{p-1}(1+\eta+\eta^2)} M^{\eta^2} M_1^\eta \hat{u} \\ \text{et } v &\geq (K - \epsilon)^{\frac{1}{p-1}(1+\eta)} \mu^{\frac{1}{p-1}(1+\eta+\eta^2)} M^{\eta^2} M_1^\eta \hat{v} \quad \text{dans } \omega. \end{aligned}$$

En faisant un raisonnement par récurrence, on trouve que si  $\mu > \max\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$  où

$$A_n := \left[ (K - \epsilon)^{-\frac{1}{p-1}(\sum_{i=0}^{n-1} \eta^i)} M^{-\eta^n} M_1^{-\eta^{n-1}} M_2^{-1} t_\epsilon \right] \left( \frac{1}{p-1} \sum_{i=0}^n \eta^i \right)^{-1}$$

alors

$$\begin{aligned} u &\geq (K - \epsilon)^{\frac{1}{p-1} \sum_{i=0}^{n-1} \eta^i} \mu^{\frac{1}{p-1} \sum_{i=0}^n \eta^i} M^{\eta^n} M_1^{\eta^{n-1}} \hat{u} \\ \text{et } v &\geq (K - \epsilon)^{\frac{1}{p-1} \sum_{i=0}^{n-1} \eta^i} \mu^{\frac{1}{p-1} \sum_{i=0}^n \eta^i} M^{\eta^n} M_1^{\eta^{n-1}} \hat{v} \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Les suites mises en évidence ci-dessus sont toutes convergentes car  $\eta < 1$  :

$$A_n \text{ converge vers } A_\infty := \left[ (K - \epsilon)^{-\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} M_2^{-1} t_\epsilon \right]^{(p-1)(1-\eta)}$$

Par conséquent, si  $\mu > \max \{A_0, A_1, \dots, A_\infty\}$  alors

$$\begin{aligned} u &\geq \mu^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} (K - \epsilon)^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} \hat{u} \\ \text{et } v &\geq \mu^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} (K - \epsilon)^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} \hat{v} \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned} \quad (5.10)$$

### ÉTAPE 3

On écrit

$$\begin{aligned} f(s, t) &= K_u s^{\alpha'} t^{\beta'+1} r(s, t) \\ g(s, t) &= K_v s^{\alpha'+1} t^{\beta'} r'(s, t). \end{aligned}$$

Les fonctions  $r$  et  $r'$  ainsi définies sont bornées d'après  $(\mathcal{H}4)$  et  $\lim_{(s,t) \rightarrow \infty} r(s, t) = \lim_{(s,t) \rightarrow \infty} r'(s, t) = 1$  d'après  $(\mathcal{H}3)$ .

$(u, v)$  étant solution de  $(\mathcal{P})$ , soient  $u = (C_u \mu)^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} u'_\mu$  et  $v = (C_v \mu)^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} v'_\mu$ ;  $(u'_\mu, v'_\mu)$  sera noté simplement  $(u', v')$  et vérifie le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -(C_u \mu)^{\frac{1}{1-\eta}} \Delta_p u' = \mu K_u C_u^{\frac{\alpha'}{(p-1)(1-\eta)}} C_v^{\frac{\beta'+1}{(p-1)(1-\eta)}} \mu^{\frac{\alpha'+\beta'+1}{(p-1)(1-\eta)}} u'^{\alpha'} v'^{\beta'+1} r(u, v) \quad \text{dans } \Omega \\ -(C_v \mu)^{\frac{1}{1-\eta}} \Delta_p v' = \mu K_v C_u^{\frac{\alpha'+1}{(p-1)(1-\eta)}} C_v^{\frac{\beta'}{(p-1)(1-\eta)}} \mu^{\frac{\alpha'+\beta'+1}{(p-1)(1-\eta)}} u'^{\alpha'+1} v'^{\beta'} r'(u, v) \quad \text{dans } \Omega \\ u'(x) = v'(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Or  $1 + \frac{\alpha' + \beta' + 1}{(p-1)(1-\eta)} = 1 + \frac{\eta}{1-\eta} = \frac{1}{1-\eta}$ , ainsi, on peut simplifier par  $\mu$  dans les deux équations du système. Nous allons prendre

$$\left\{ \begin{array}{l} C_u = K_u^{1-\frac{\beta'+1}{p(p-1)}} K_v^{\frac{\beta'+1}{p(p-1)}} \\ C_v = K_u^{\frac{\alpha'+1}{p(p-1)}} K_v^{1-\frac{\alpha'+1}{p(p-1)}}. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Il en résulte que  $C_u$  et  $C_v$  satisfont la relation

$$\left\{ \begin{array}{l} C_u^{\frac{1}{1-\eta}} = K_u C_u^{\frac{\alpha'}{(p-1)(1-\eta)}} C_v^{\frac{\beta'+1}{(p-1)(1-\eta)}} \\ C_v^{\frac{1}{1-\eta}} = K_v C_u^{\frac{\alpha'+1}{(p-1)(1-\eta)}} C_v^{\frac{\beta'}{(p-1)(1-\eta)}}. \end{array} \right.$$

Alors le système vérifié par  $(u', v')$  est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p u' = u'^{\alpha'} v'^{\beta'+1} r \left( (C_u \mu)^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} u', (C_v \mu)^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} v' \right) \quad \text{dans } \Omega \\ -\Delta_p v' = u'^{\alpha'+1} v'^{\beta'} r' \left( (C_u \mu)^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} u', (C_v \mu)^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} v' \right) \quad \text{dans } \Omega \\ u'(x) = v'(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Ainsi, on peut établir les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u'|^p dx + \int_{\Omega} |\nabla v'|^p dx &= \int_{\Omega} u'^{\alpha'+1} v'^{\beta'+1} \left[ r \left( (C_u \mu)^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} u', (C_v \mu)^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} v' \right) \right. \\ &\quad \left. + r' \left( (C_u \mu)^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} u', (C_v \mu)^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} v' \right) \right] dx. \end{aligned}$$

Grâce aux hypothèses sur les exposants  $\alpha'$  et  $\beta'$  on peut trouver un réel  $\tilde{p} \in (1, p)$  tel que  $\frac{\alpha'+1}{\tilde{p}} + \frac{\beta'+1}{\tilde{p}} = 1$ . Donc, sachant que  $r$  et  $r'$  sont bornées,

$$\int_{\Omega} |\nabla u'|^p dx + \int_{\Omega} |\nabla v'|^p dx \leq \tilde{C} \left( \int_{\Omega} u'^{\tilde{p}} dx \right)^{\frac{\alpha'+1}{\tilde{p}}} \left( \int_{\Omega} v'^{\tilde{p}} dx \right)^{\frac{\beta'+1}{\tilde{p}}}$$

où  $\tilde{C}$  est indépendante de  $\mu$ . Par les injections de Sobolev on arrive à

$$\int_{\Omega} |\nabla u'|^p dx + \int_{\Omega} |\nabla v'|^p dx \leq \tilde{C} \|u'\|_{1,p}^{\alpha'+1} \|v'\|_{1,p}^{\beta'+1}.$$

Puisque les exposants vérifient  $\alpha' + \beta' + 1 < p$ , il existe une constante  $C_1$  indépendante de  $u'$  et  $v'$  telle que

$$\|u'\|_{1,p} + \|v'\|_{1,p} < C_1.$$

Si  $1 < p < N$ ,  $W_0^{1,p}(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$  alors  $u' \in L^{p^*}(\Omega)$  et  $v' \in L^{p^*}(\Omega)$ . Par le théorème 7.1 de Ladyzenskaya-Uraltseva [5], il existe une constante  $C_2$  telle que

$$\sup \{|u'(x)|, |v'(x)| \text{ tels que } x \in \Omega\} \leq C_2. \quad (5.12)$$

Si  $p \geq N$ , on obtient (5.12) grâce au théorème d'injection de Sobolev. Puis, en utilisant le théorème 1.1 de Ladyzenskaya-Uraltseva [5], on trouve une constante  $C_3$  telle que

$$\|u'\|_{C^\alpha} + \|v'\|_{C^\alpha} \leq C_3 \quad (0 < \alpha < 1).$$

Et enfin, le théorème 3.7 de Tolksdorf [6] prouve l'existence d'une constante  $C_4$  telle que

$$\|u'\|_{C^{1,\alpha}} + \|v'\|_{C^{1,\alpha}} \leq C_4.$$

Toutes les constantes  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) introduites dans les estimations ci-dessus sont indépendantes de  $u'$ ,  $v'$  et donc de  $\mu$ . Ainsi, comme  $C_0^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  s'injecte de façon compacte dans  $C_0^1(\bar{\Omega})$ , on peut extraire de toute suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers l'infini, une sous-suite encore notée  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$u'_{\lambda_n} \text{ converge vers } \bar{u} \text{ et } v'_{\lambda_n} \text{ converge vers } \bar{v} \text{ dans } C_0^1(\bar{\Omega}).$$

Le résultat de l'ÉTAPE 2, (5.10) permet de dire qu'il existe  $\tau > 0$  tel que

$$\bar{u}(x) \geq \tau \hat{u}(x) \text{ et } \bar{v}(x) \geq \tau \hat{v}(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } \bar{\Omega}.$$

Or  $\lim_{(s,t) \rightarrow \infty} r(s, t) = \lim_{(s,t) \rightarrow \infty} r'(s, t) = 1$ , il s'en suit que  $(\bar{u}, \bar{v})$  est solution de

$$\begin{cases} \Delta_p \bar{u} + \bar{u}^{\alpha'} \bar{v}^{\beta'+1} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \Delta_p \bar{v} + \bar{u}^{\alpha'+1} \bar{v}^{\beta'} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \bar{u} = \bar{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La solution d'un tel problème étant unique, on a  $\bar{u} = \hat{u}$ ,  $\bar{v} = \hat{v}$  et finalement

$$(u', v') \text{ converge vers } (\hat{u}, \hat{v}) \text{ dans } C_0^1(\bar{\Omega})$$

$$\text{donc } (u \mu^{\frac{-1}{(p-1)(1-\eta)}}, v \mu^{\frac{-1}{(p-1)(1-\eta)}}) \text{ converge vers } (C_u^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} \hat{u}, C_v^{\frac{1}{(p-1)(1-\eta)}} \hat{v}) \text{ dans } C_0^1(\bar{\Omega})$$

où  $C_u$  et  $C_v$  sont déterminés dans (5.11). ◆

# Bibliographie

- [1] D. GILBARG N. S. TRUDINGER. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983.
- [2] Z. M. GUO. Some existence and multiplicity results for a class of quasilinear elliptic eigenvalue problems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 18(10) :957–971, 1992.
- [3] Z. M. GUO. On the number of positive solutions for quasilinear elliptic eigenvalue problems. *Nonlinear Analysis, Theory & Applications*, 27(2) :229–247, 1996.
- [4] Z. M. GUO J. R. L. WEBB. Uniqueness of positive solutions for quasilinear elliptic equations when a parameter is large. *Proceedings of Royal Society of Edinburgh*, 124A :189–198, 1994.
- [5] O. A. LADYZHENSKAYA N. N. URALTSEVA. *Linear and quasilinear elliptic equations*. Academic Press, New-York, 1968.
- [6] P. TOLKSDORF. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, 51(1) :126–150, 1984.