



**HAL**  
open science

# Holomorphie discrète et modèle d'Ising

Christian Mercat

► **To cite this version:**

Christian Mercat. Holomorphie discrète et modèle d'Ising. Mathématiques [math]. Université Louis Pasteur - Strasbourg I, 1998. Français. NNT: . tel-00001851

**HAL Id: tel-00001851**

**<https://theses.hal.science/tel-00001851>**

Submitted on 22 Oct 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Strasbourg I — Louis Pasteur  
U.F.R. de mathématique et d'informatique

Année 1998

Numéro

# THÈSE

Pour obtenir le grade de docteur de l'Université Louis Pasteur

Discipline : Mathématiques

Présentée et soutenue publiquement le 27 Avril 1998 par

Christian MERCAT

Holomorphie discrète et modèle d'Ising

Devant le jury : M. Robert P. LANGLANDS : président

M. Daniel BENNEQUIN :	directeur de thèse
M. Yves COLIN DE VERDIÈRE	rapporteur externe
M. Marc ROSSO :	directeur de thèse
M. Marcus SLUPINSKI :	rapporteur interne
M. Jean-Bernard ZUBER :	rapporteur externe

## Résumé :

Ma thèse généralise la notion de criticalité pour le modèle d'Ising en dimension 2. J'y définis une nouvelle notion d'holomorphie discrète sur une décomposition cellulaire d'une surface de Riemann.

Le modèle d'Ising converge, à limite thermodynamique vers une théorie conforme continue, quand la limite est prise sur un réseau (carré, triangulaire), près de la température critique. J'étends cette criticalité à des décompositions cellulaires générales et je décompose le spineur en parties holomorphes et antiholomorphes discrètes, analogues discrets des blocs conformes.

On définit une équation de Cauchy-Riemann discrète sur le **double** d'une décomposition cellulaire. Des théorèmes classiques sont encore transposables: harmonicité, base des différentielles, pôle, théorème des résidus.

Il y a des différences, le produit point par point ne préserve pas l'holomorphie, les pôles sont d'ordre un, l'espace des formes holomorphes est de dimension double du genre.

Une carte est **semi-critique** si d'une fonction holomorphe discrète  $f$  et d'une carte locale plate  $Z$  on peut faire une 1-forme  $fdZ$  et **critique** si  $fdZ$  est holomorphe. Cette classe contient les réseaux mais bien plus. Une suite convergente de fonctions holomorphes discrètes sur une suite convergente de cartes critiques a pour limite une fonction holomorphe sur la surface de Riemann.

Dans le cas des réseaux triangulaires et carrés, on démontre que la criticalité statistique d'Ising équivaut à notre criticalité pour une structure conforme reliée aux constantes d'interaction.

On définit une équation de Dirac sans masse, l'existence d'une solution équivaut à la criticalité. Le spineur de Dirac permet alors de décomposer le fermion d'Ising en une partie holomorphe et une partie antiholomorphe.

## Discrete Holomorphy and the Ising Model

### Summary:

My thesis generalizes the notion of criticality for the Ising model in two dimensions and defines a new theory of discrete holomorphic functions on a cellular decomposition of a Riemann surface.

The Ising model converges in the thermodynamical limit to a continuous conformal field theory, on square or triangular lattices near the critical temperature. We extend criticality to more general cellular decompositions.

The key point is to **double** the decomposition, and to consider its **dual**. We define holomorphy with respect to a given metric by a straightforward discretization of the Cauchy-Riemann equation. Classical theorems still hold and are proved essentially the same way (Dirichlet principle): harmonicity, explicit abelian differentials, poles, residue theorem.

There are differences: pointwise product doesn't preserve holomorphy, poles of higher orders are *multipoles* of order one; the dimension of the space of abelian differentials is twice the genus.

We define the notion of **semi-criticality**, needed to define, given a discrete holomorphic function  $f$  and a local map  $Z$ , a discrete 1-form  $fdZ$ , it is holomorphic, on **critical maps**. This class contains lattices but much more. The continuous limit of a convergent sequence of discrete holomorphic functions on a converging sequence of semi-critical maps, is a holomorphic function.

We apply this theory to the **Ising model**. In the case of square, triangular and hexagonal lattices, we prove that our criticality is equivalent to statistical criticality, lengths and coupling constants being related.

On every map, we setup a discretized version of the **Dirac equation** without mass and the existence of a solution is equivalent to criticality. Using this solution, we contract the spinor into holomorphic and antiholomorphic parts on any critical map, exhibiting the existence of the analogue of discrete conformal blocks.

#### Classification AMS :

30G25	Discrete analytic functions	82B20	Lattice models in statistical mechanics
31A25	Harmonicity in 2D	30C75	Extremal problems for conformal mappings
52C15	Packing and covering in 2D	05B45	Tesselation and tiling problems

Mots clefs : Holomorphie discrète, modèle d'Ising, décomposition cellulaire, dimension deux, systèmes statistiques, application conforme, dualité, équation de Cauchy-Riemann.

Je remercie mon directeur de thèse Daniel BENNEQUIN, il est mon maître depuis mes débuts en mathématiques, je lui suis très reconnaissant de m'avoir guidé dans ce métier et de m'avoir fait partager sa vision panoramique de l'humain, je suis heureux d'être son élève. Je remercie Marc Rosso d'avoir parrainé cette direction à Strasbourg, ses conseils m'ont été précieux.

Je suis très honoré par la présence du professeur LANGLANDS qui a bien voulu présider le jury, je le remercie beaucoup. Sa profonde connaissance des modèles statistiques et de leur difficulté mathématique rend son appréciation primordiale à mes yeux.

Je pense avoir les rapporteurs les plus compétents pour juger mon travail, Yves COLIN DE VERDIÈRE pour son expertise en analyse discrète, sur les réseaux électriques et les empilements de cercles, Marcus SLUPINSKI pour sa relecture très attentive et sa connaissance des structures spin et Jean-Bernard ZUBER pour sa maîtrise de la physique statistique, des phénomènes critiques et de la théorie des champs. Je suis très honoré et heureux de leur présence à tous trois, je les remercie chaleureusement.

Je remercie V. I. ARNOLD, Michel BAUER et Jean-Bernard ZUBER, Yves COLIN DE VERDIÈRE, Moshe FLATO, Richard KENYON, C. M. RINGEL et l'équipe de Christian KASSEL, Marc ROSSO et Vladimir TOURAEV de m'avoir invité à leurs séminaires pour parler de mon travail.

Je remercie Olivier MATHIEU, Vladimir TOURAEV, Tilmann WURZBACHER, Michel RAUSCH, Pascal DEGIOVANNI et Philippe ROCHE pour des discussions déterminantes et de bons conseils. J'ai spécialement apprécié la disponibilité et la pédagogie de Michèle AUDIN. Je remercie également Athanase PAPADOPOULOS et Claudine MITSCHI. Je suis redevable à Olivier MATHIEU et Peter LITTELMANN pour le soutien efficace qu'ils m'ont apporté dans la recherche d'un post-doc. J'ai obtenu de beaucoup de gens très influents de nombreuses lettres de recommandation et je les en remercie.

Je pense affectueusement à mes camarades et amis de Strasbourg, Guillaume et toute la famille HAERINGER, Philippe pour sa relecture ainsi que Sophie, Pierre pour ses innombrables conseils, sa patience et ses gâteaux au chocolat, Olivier, Georges, Fabio, Olga, Anna, Alessandra, Véronique, Alain, Myriam, Aurélie, Gilles et Louise pour pleins de bons moments, Marc, Jens, Cyrille, Frédéric, Jeans, Muriel, Alexandre, Mohamed et Marie-Paule. Je pense également à mes amis plus éloignés géographiquement, Philippe et Anne, Jasmine et Elsa, Hervé, Frédéric, Olivier, Simon, Agnès, Paul, David, Jérôme, Rosane, Julien, Etienne, Jean-Luc, Pierre, Skal et Mélanie, et tous les autres. Enfin je remercie toute ma famille, Laetitia, mes parents et beaux-parents, cousins et cousines et spécialement tous mes frères à qui je dédie cette thèse, je leur dois ma curiosité.



# Table des matières

<b>A</b>	<b>Problème de Dirichlet</b>	<b>9</b>
<b>B</b>	<b>Théorie de Hodge discrète</b>	<b>17</b>
	B.1 Théorie classique . . . . .	17
	B.2 Complexe dual . . . . .	21
	B.3 Le double et l'étoile . . . . .	23
	B.4 Complexes cellulaires . . . . .	25
<b>C</b>	<b>Holomorphie discrète</b>	<b>27</b>
	C.1 En dimension deux . . . . .	27
	C.2 Formes holomorphes . . . . .	32
	C.3 Surfaces à bord . . . . .	35
	C.4 Propriétés générales . . . . .	36
<b>D</b>	<b>Intégrales abéliennes</b>	<b>43</b>
	D.1 Existence . . . . .	43
	D.2 Dimensions . . . . .	49
<b>E</b>	<b>Les graphes</b>	<b>55</b>
	E.1 Le graphe médial . . . . .	55
	E.2 Le graphe triple . . . . .	57
	E.3 Le graphe diamant . . . . .	58
<b>F</b>	<b>Cartes critiques</b>	<b>61</b>
	F.1 Définition . . . . .	61
	F.2 En termes de métrique plate . . . . .	63
	F.3 Intégration des fonctions . . . . .	76
	F.4 Produit sur une carte critique simplement connexe . . . . .	81
	F.5 Limite continue . . . . .	83

<b>G</b>	<b>Système statistique</b>	<b>93</b>
G.1	Définition . . . . .	93
G.2	Limite thermodynamique/limite continue critique . . . . .	97
G.3	Développement basse température . . . . .	99
G.4	Développement haute température . . . . .	102
G.5	Symétrie de dualité des spins . . . . .	106
G.6	L'opérateur désordre . . . . .	108
<b>H</b>	<b>Le champ <math>\psi</math></b>	<b>113</b>
H.1	Définition, équation de propagation . . . . .	113
H.2	La structure spin . . . . .	118
H.3	L'équation de Dirac . . . . .	122
H.4	Holomorphie de $\psi$ . . . . .	130
<b>A</b>	<b>Analogie électrique</b>	<b>133</b>
	<b>Index</b>	<b>142</b>

# Introduction

Cette thèse généralise la notion de criticalité dans le modèle d'Ising à deux dimensions. Elle fonde une nouvelle théorie des fonctions holomorphes discrètes sur la décomposition cellulaire d'une surface.

Le modèle d'Ising est connu pour converger, à la limite critique vers une théorie des champs conforme rationnelle. Dans la pratique, cette convergence a été prouvée dans très peu de cas, à savoir les décompositions cellulaires du tore (de genre un), par un réseau, carré, triangulaire ou hexagonal, avec un petit nombre de constantes d'interaction, typiquement deux ou trois, distribuées de manière invariante par translation. Une relation entre ces paramètres définit une hypersurface critique près de laquelle la limite continue peut être prise. C'est cette relation que nous avons étendue à l'ensemble de tous les paramètres, pas seulement deux ou trois, sur des décompositions cellulaires plus générales que les réseaux, sur des surfaces de genre quelconque.

Un outil essentiel dans l'étude des champs conformes est l'existence de **blocs conformes**, introduits par Belavin, Polyakov et Zamolodchikov [BPZ]. Les amplitudes des champs (spin, désordre, fermions, ...), à la limite critique, se décomposent en une somme de produits de deux sections, l'une holomorphe et l'autre antiholomorphe en les variables de position et de module du problème :

$$\langle A(\tau) \rangle = \sum_{f,g \in \mathcal{F}_A} f(\tau) \bar{g}(\tau).$$

L'objet de cette thèse était de trouver l'analogie de ces fonctions dans la théorie discrète. Pour l'instant, nous avons identifié dans l'opérateur fermionique  $\psi$  du modèle d'Ising, qui est un spineur chiral de la théorie continue, une partie holomorphe et une partie anti-holomorphe, sur n'importe quelle surface combinatoire critique.

Pour appréhender les blocs conformes discrets, nous avons défini une théorie des fonctions holomorphes discrètes. C'est une généralisation d'une

méthode employée par Lelong-Ferrand dans [LF] qui s'intéressait à la discrétisation des fonctions holomorphes sur un réseau carré. On en trouve aussi des prémisses, d'une autre nature, dans le travail de Lefschetz sur la dualité dans les réseaux électriques [Lef], développé également dans [CdV96]. L'idée essentielle est de considérer des fonctions non pas sur un graphe  $\Gamma$  mais sur le **couple**  $\Lambda = \Gamma \sqcup \Gamma^*$  d'un graphe et de son dual. La formule d'holomorphie à laquelle ces idées conduisent est alors une discrétisation naïve de l'équation de Cauchy-Riemann, à savoir, une fonction  $f$  est holomorphe (pour la structure métrique  $\ell$ ) si et seulement si elle vérifie

$$\frac{f(y) - f(y')}{\ell(y, y')} = i \frac{f(x) - f(x')}{\ell(x, x')}$$

pour toute couple d'arêtes duales  $(x, x')^* = (y, y')$ . Cette équation très simple porte en fait beaucoup de propriétés semblables au continu, on retrouve un certain nombre de théorèmes classiques sur les fonctions holomorphes, qu'on prouve essentiellement de la même façon, en faisant appel au théorème de Dirichlet.

Ainsi, une fonction holomorphe discrète est une fonction harmonique pour le laplacien discret ; l'espace des formes harmoniques est somme directe de l'espace des formes holomorphes et de l'espace des formes antiholomorphes (même définition que holomorphe mais avec  $-i$  à la place de  $i$ ) ; la dérivée extérieure se décompose en  $d = d' + d''$  ; il existe des formes abéliennes ; on définit les pôles d'ordre un et deux pour les formes et les singularités logarithmiques et les pôles simples sur les fonctions, on a un théorème des résidus ; on définit des structures spin et une structure spin universelle sur un revêtement.

Cependant, il y a des différences : Le produit point par point de deux fonctions holomorphes discrètes *n'est pas* une fonction holomorphe, les pôles d'ordre élevé ne sont que des *multipôles* d'ordre un ; la prolongement analytique d'une fonction méromorphe n'est en général pas unique ; l'espace des formes différentielles holomorphes n'est pas de dimension  $g$  sur une surface de genre  $g$  mais de dimension  $2g$ .

On montre également que la notion d'holomorphie discrète "passe" à la limite continue : Une décomposition cellulaire d'une surface de Riemann est **semi-critique** si sa métrique est telle que son graphe et son graphe dual se représentent isométriquement dans le plan complexe de manière à ce que deux arêtes duales soient orthogonales. Considérons une suite  ${}^k\Gamma$  de décompositions cellulaires semi-critiques de plus en plus fines (d'une même surface de Riemann), et une suite de fonctions  $(f_k)$ , où chaque  $f_k$  est ho-

lomorphic sur le double  ${}^k\Lambda$ , qui converge point par point vers une fonction bornée  $f$ ; alors, la limite  $f$  est holomorphe sur  $\Sigma$ .

Il existe une notion plus fine de criticalité : Une décomposition cellulaire est **critique** si son graphe  $\Gamma$  peut être réalisé isométriquement dans le plan de telle manière que les sommets d'une face sont cocycliques, tous les cercles ayant même rayon, les centres des cercles étant à l'intérieur des faces.

Nous appliquons cette théorie au modèle d'Ising. Sur les réseaux carré, triangulaire et hexagonal, on distribue des constantes d'interaction  $K_a$  sur chaque arête  $a$ , de manière invariante par translation. La criticalité du modèle d'Ising associé est équivalente à la criticalité du graphe pour la métrique  $\ell(a) = 1/\sqrt{\text{sh } 2K_a}$ . Notre notion de criticalité est donc une généralisation de la notion habituelle pour le modèle d'Ising. On peut envisager l'intégrabilité du modèle d'Ising sur une carte critique car les fermions réduisent beaucoup le nombre de degrés de liberté.

Le champ de fermions  $\psi$  du modèle d'Ising, introduit par Jordan et Wigner [KC] et développé par Dotsenko [DD] est décrit. Nous construisons son espace naturel de définition qui est la structure spin universelle de la surface. Il est possible de donner un sens à l'équation discrète de **Dirac sans masse**, c'est le couplage de l'équation de Dotsenko et Dotsenko [DD] et d'une condition de symétrie : sur deux côtés opposés d'un quadrilatère, les valeurs diffèrent par un facteur  $\pm i$ . L'existence d'une solution non nulle de cette équation équivaut à la criticalité de la métrique  $\ell(a) = 1/\sqrt{\text{sh } 2K_a}$ .

Étant donnée une section  $a$  du fibré spin satisfaisant cette équation, on définit une contraction avec  $\psi$  dont on montre l'holomorphic. De même pour l'antiholomorphic.

*Alors que l'étude des fonctions holomorphes discrètes forme une partie de ma thèse, dirigée par Daniel Bennequin de manière traditionnelle, ce qui concerne les cartes critiques et l'étude du modèle d'Ising est plutôt un travail en collaboration avec Daniel Bennequin. Chaque partie devrait donner lieu à un article, le premier sous mon nom sur les fonctions holomorphes discrètes, le deuxième, conjointement avec Daniel Bennequin, sur les cartes critiques et leurs applications aux systèmes statistiques.*

*Depuis ma première année à l'école Normale Supérieure, Daniel Bennequin me fait partager sa passion pour la recherche. Il m'a fait profiter de sa grande culture, de son humanisme, de ses idées eclectiques et de son goût de la perfection. Sous sa bienveillante direction, j'apprends humblement et avec plaisir le métier de mathématicien et si je peux parler de cette thèse comme étant mienne, il est évident qu'elle ne se serait jamais développée sans son aide continuelle, ses idées à des moments cruciaux et son crayon rageur. Je lui exprime ma profonde gratitude.*

Le plan est le suivant :

- A. Le premier chapitre traite du problème de Dirichlet et du problème de Neumann sur un graphe fini muni d'une métrique. Il n'y a rien de nouveau si ce n'est une formulation un peu générale du problème de Neumann.
- B. Le deuxième chapitre peut être sauté en première lecture. On y rappelle la théorie de Hodge discrète pour un complexe de dimension  $n$ . Nous construisons le double de ce complexe et nous le munissons d'une étoile de Hodge, ce qui est nouveau.
- C. Nous appliquons cette méthode en dimension deux, nous définissons l'holonomie discrète, les formes et fonctions holomorphes et méromorphes et nous y décrivons leurs principales propriétés.
- D. Nous construisons les formes holomorphes associées à une dissection canonique, avec des périodes et des pôles prescrits, et nous calculons la dimension de l'espace des formes holomorphes.
- E. Nous définissons trois complexes cellulaires  $K$ ,  $\Upsilon$  et  $\diamond$  associés à une décomposition cellulaire  $\Gamma$ .
- F. Nous définissons la criticalité et nous démontrons qu'une suite convergente de fonctions holomorphes discrètes sur des graphes semi-critiques est holomorphe dans le sens usuel. C'est le théorème principal de la partie mathématique.
- G. Ce chapitre est indépendant, nous y décrivons les systèmes statistiques et nous donnons, dans le cas du modèle d'Ising, une expression des corrélateurs des spin et du désordre comme somme sur des chaînes.
- H. Dans le dernier chapitre, nous appliquons la théorie au modèle d'Ising. Sur un graphe quelconque, une distribution de constantes d'interaction sur chaque arête définit une métrique sur le double. La criticalité généralise la notion de **température critique**: Dans le cas des réseaux carré, triangulaire et hexagonal avec des distributions de constantes d'interaction invariantes par translation, nous démontrons l'équivalence de la criticalité statistique et de la criticalité de la carte. Nous décrivons le champ de fermions  $\psi$  et définissons la structure spin universelle, le complexe cellulaire sur lequel il est bien défini. Nous introduisons l'équation de Dirac discrète sans masse et prouvons que l'existence d'une solution non nulle est équivalente à la criticalité. Un spineur de Dirac solution sur une carte critique permet d'associer à  $\psi$  une forme holomorphe et une forme antiholomorphe.

## Chapitre A

# Problème de Dirichlet

La théorie du laplacien discret est passée en revue dans l'article de Colin de Verdière [CdV92]. La référence sur la théorie des graphes est le livre de Serre [Ser] ou le livre de Berge [Ber].

**Définition 1** *Un **graphe orienté**  $\Gamma$  est la donnée de deux ensembles, les **sommets**  $\Gamma_0$  et les **arêtes**  $\Gamma_1$  et de deux applications :*

$$\begin{cases} \Gamma_1 & \rightarrow \Gamma_0 \times \Gamma_0 \\ a & \mapsto (s(a), b(a)) \end{cases}$$

*on appelle  $s(a)$  la **source** et  $b(a)$  le **but** de  $a$ , ce sont ses deux extrémités. On dit que les extrémités  $u = s(a)$  et  $v = b(a)$  d'une arête  $a$  sont **voisins** et on note  $u \sim v$  (ce n'est une relation d'équivalence que si le graphe est inorienté).*

*Si  $\Gamma_1$  est muni d'une involution sans point fixe  $\begin{cases} \Gamma_1 & \rightarrow \Gamma_1 \\ a & \mapsto \bar{a} \end{cases}$  le changement d'**orientation** telle que  $s(\bar{a}) = b(a)$  pour toute arête  $a$ ,  $\Gamma$  est un graphe **inorienté**, ou simplement, un **graphe**. Cela implique également que  $b(\bar{a}) = s(a)$ .  $\bar{a}$  est l'arête **opposée** à  $a$ .*

*On définit l'espace de Hilbert  $C^0 = \ell^2(\Gamma_0)$ , des fonctions réelles sur  $\Gamma_0$  de norme  $\ell^2$  finie :*

$$f \in C^0 \iff |f|^2 = \sum_{v \in \Gamma_0} f(v)^2 < \infty \quad (\text{A.1})$$

*Un **chemin**  $\gamma$  de  $\Gamma_1$  est une suite d'arêtes telles que le but de l'une est la source de la suivante. Le premier et le dernier point d'un chemin  $\gamma$  sont sa source  $s(\gamma)$  et son but  $b(\gamma)$ . Le graphe  $\Gamma$  est **connexe** si et seulement si,*

pour tout couple de sommets  $v, v' \in \Gamma_0$ , il existe un chemin de source  $v$  et de but  $v'$ .

Nous appellerons **structure conforme** sur  $\Gamma$ , un étiquetage des arêtes  $a \in \Gamma_1$  par des nombres strictement positifs  $\rho_a$ . Dans le cas d'un graphe inorienté, on réclame  $\rho_{\bar{a}} = \rho_a$ . Soit  $f \in C^0$ , si  $v \in \Gamma_0$  on définit  $\Delta f$  le **laplacien** de  $f$  en  $v$  pour la structure  $\rho$  par :

$$(\Delta f)(v) := \sum_{a \in s^{-1}(v)} \rho_a (f(v) - f(b(a))) \quad (\text{A.2})$$

Si  $\Delta f(v) = 0$ , on dit que  $f$  est **harmonique** en  $v$ .

L'écriture traditionnelle du laplacien est plutôt  $\sum_{a \in s^{-1}(v)} \frac{f(v) - f(b(a))}{\ell(a)^2}$  mettant en jeu une métrique. Notre laplacien n'est donc pas le laplacien usuel qui dépend de la métrique.

On se pose des problèmes d'existence de fonctions harmoniques ayant certaines propriétés, les deux principaux sont le problème de Dirichlet et le problème de Neumann. On se restreindra désormais à des graphes **finis**, avec un nombre fini de sommets et d'arêtes. L'outil essentiel est le lemme suivant :

**Lemme 1 Principe du maximum.** *Sur un graphe orienté, un point où une fonction non localement constante est harmonique n'est pas un maximum local.*

Si  $v$  est un maximum local de  $f$ , le laplacien de  $f$  en  $v$ ,  $(\Delta f)(v) = \sum_{a \in s^{-1}(v)} \rho_a (f(v) - f(b(a)))$  est une somme de nombres positifs et ne peut être nul que si tous sont nuls, c'est-à-dire si  $f$  est localement constante en  $v$ .  $\square$

**Corollaire :** *Seules les fonctions constantes sont harmoniques partout.*

**Théorème 1 Problème de Dirichlet.** *Soit  $\Gamma$  un graphe orienté fini connexe et  $M = \{s_1, \dots, s_m\} \subset \Gamma_0$  un ensemble non vide de points marqués. Associons une valeur  $f_k \in \mathbb{R}$  à chaque  $s_k$ . Il existe une unique fonction  $f \in C^0$ , telle que*

$$\forall v \in \Gamma_0, \quad v \notin M \Rightarrow \Delta f(v) = 0 \quad (\text{A.3})$$

et  $f(s_k) = f_k$  pour tout  $1 \leq k \leq m$ .

**Preuve :** L'application  $q : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$q(f) := \sum_{(v,v') \in \Gamma_1} \frac{1}{2} \rho(v, v') (f(v') - f(v))^2$$

est propre sur le sous-espace affine des fonctions valant  $f_k$  en  $s_k$  pour tout  $k$ , elle y admet donc un minimum. Ce minimum est atteint en une fonction harmonique partout sauf aux points  $s_k$ , en effet, sa dérivée selon la valeur en un point est exactement son laplacien en ce point. C'est donc une solution au problème de Dirichlet.

La différence entre deux telles fonctions est harmonique partout sauf en les  $s_k$ . Le principe du maximum nous indique qu'elle atteint son maximum en les points  $s_k$ . Mais par définition, elle y est nulle. Donc la différence est partout nulle, il y a unicité de la solution.  $\square$

**Définition 2** Nous définissons deux matrices dont les lignes et les colonnes sont indexées par  $\Gamma_0$  :

La **matrice d'adjacence métrique**,  $A^\rho$ , a pour coefficients

$$A_{ij}^\rho = \sum_{a \in \Gamma_1 / s(a)=i, b(a)=j} \rho_a \quad (\text{A.4})$$

La **matrice de valence métrique**,  $V^\rho$ , est la matrice diagonale de coefficients

$$V_{ii}^\rho = \sum_j A_{ij}^\rho \quad (\text{A.5})$$

**Théorème 2 Problème de Neumann.** Soit  $\Gamma$  un graphe orienté fini connexe et  $M = \{s_1, \dots, s_{m+1}\}$  un ensemble non vide de points de  $\Gamma_0$  tels que  $\Gamma$  privé des arêtes dont la source sont les  $s_p$ ,  $1 \leq p \leq m$  reste connexe. Choisissons un  $m$ -uplet de points  $(s'_1, \dots, s'_m)$  non nécessairement distincts entre eux mais disjoints des  $s_p$ , et  $m+1$  valeurs réelles  $\alpha_p \in \mathbb{R}$  pour tout  $1 \leq p \leq m$  et  $f_0$ . Il existe une unique fonction  $f \in C^0$ , harmonique sur  $\Gamma_0 \setminus M$  et qui vérifie  $f(s_p) - f(s'_p) = \alpha_p$  pour tout  $1 \leq p \leq m$  et  $f(s_{m+1}) = f_0$ .

Si  $f$  est harmonique en  $s_{m+1}$ , on dit que le système est **compatible**.

L'assignation des  $\alpha_p$  est appelée une condition normale au bord car les  $s'_p$  sont souvent pris voisins des  $s_p$  qui forment le bord, mais ce n'est pas nécessaire.

**Preuve :** Soit  $A^\rho$  la matrice d'adjacence métrique et  $V^\rho$  la matrice de valence métrique. Rangeons les sommets  $\{s_k\}_{1 \leq k \leq n}$  de telle manière que les points marqués soient les  $m + 1$  premiers  $\{s_p\}_{1 \leq p \leq m+1}$ , et définissons  $g(p)$  l'indice tel que  $s'_p = s_{g(p)}$  pour tout  $1 \leq p \leq m$ . On décompose en blocs

$$V^\rho - A^\rho = \begin{pmatrix} \overbrace{A}^m & \overbrace{F}^1 & \overbrace{B}^{n-m-1} & \} & m \\ K & h & J & \} & 1 \\ C & E & D & \} & n-m-1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

où  $F$  et  $E$  sont des matrices colonnes et  $K, J$  des matrices lignes. Soit  $G$  la matrice  $m \times (n - m - 1)$  contenant sur la ligne  $p$  un  $-1$  en position  $g(p) - (m + 1)$ . Dans ces conditions, l'équation vérifiée par  $F$ , le vecteur des valeurs de  $f$ , s'écrit :

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 & G \\ 0 & 1 & 0 \\ C & E & D \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ f_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Par des manipulations élémentaires

$$L_k \leftarrow L_k + \sum_{p \leq m} A_{kp}^\rho L_p \quad (\text{A.8})$$

pour tout point  $k > m + 1$ , on ramène le système à

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 & G \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & C' & D' \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ f_0 \\ \alpha_{m+2} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

pour certaines valeurs  $\alpha_k$ ,  $k > m + 1$ .

Soit  $\Gamma'$  le graphe issu de  $\Gamma$  en retirant les points marqués  $(s_p)_{1 \leq p \leq m}$  et en reportant toutes les arêtes *aboutissant* en un point marqué sur l'image

par  $g$  de ce point. C'est-à-dire pour une arête  $a$  de but  $b(a) = p \leq m$ , on considère une nouvelle arête  $a'$  définie par  $s(a') = s(a)$  et  $b(a') = g(p)$ , qu'on munit de la même longueur  $\rho_{a'} = \rho_a$ .  $\Gamma'$  est un graphe connexe par hypothèse. Explicitons ses matrices d'adjacence et de valence : L'adjacence dans  $\Gamma'$  d'un sommet  $k > m$  et d'un sommet  $l > m$  est :

$$A'_{kl}{}^\rho = A_{kl}{}^\rho + \sum_{p \in g^{-1}(l)} A_{kp}{}^\rho \quad (\text{A.10})$$

où la somme porte sur les sommets  $1 \leq p \leq m$  tels que  $g(p) = l$ . La valence d'un sommet  $k > m$  vaut donc,

$$\begin{aligned} V'_{kk}{}^\rho &= \sum_{m < l \leq n} A'_{kl}{}^\rho \\ &= \sum_{m < l \leq n} (A_{kl}{}^\rho + \sum_{p \in g^{-1}(l)} A_{kp}{}^\rho) \\ &= \sum_{m < l \leq n} A_{kl}{}^\rho + \sum_{p \in M} A_{kp}{}^\rho \\ &= V_{kk}{}^\rho \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Donc  $V'^\rho - A'^\rho$  est composée des lignes qu'on obtient après les manipulations élémentaires (A.8) (en opérant également la manipulation pour  $k = m + 1$ ), si bien qu'on a la décomposition par blocs suivante :

$$V'^\rho - A'^\rho = \begin{pmatrix} & \overbrace{\quad}^{n-m-1} & & & \\ a' & \widehat{B'} & \} & 1 & \\ C' & D' & \} & n-m-1 & \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

où  $a'$  est un nombre,  $B'$  une ligne et  $C'$  une colonne. Le bloc  $(n-m) \times (n-m)$  du système (A.9) est donc la matrice associée au problème de Dirichlet sur  $\Gamma'$  avec une valeur fixée en  $s_{m+1}$ . On sait que ce problème a une unique solution, donc le système est de Cramer.  $\square$

On peut mélanger plus de conditions au bord du type Dirichlet avec des conditions du type Neumann. On peut s'intéresser à des fonctions de laplacien donné, en particulier aux espaces propres du laplacien autres que le noyau [CdV97].

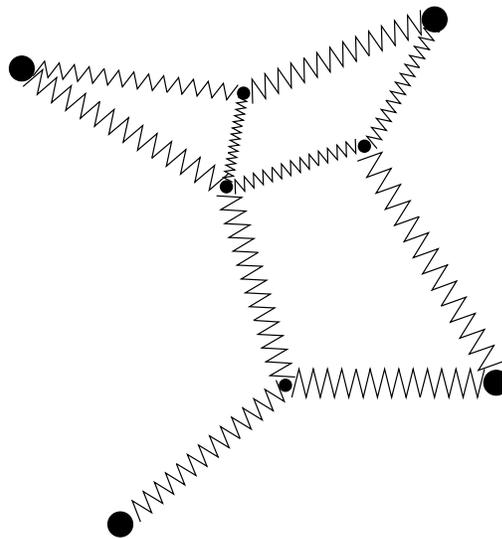
On peut étendre le problème à  $\mathbb{R}^n$  en prenant les composantes indépendantes, en particulier à  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ .

Il y a une interprétation physique très simple de ce qu'est une fonction harmonique complexe sur un graphe inorienté, supposez que vous ayez

des ressorts idéaux de longueur à vide nulle et de raideur constante  $\rho_a$ , n'interagissant entre eux qu'en leurs points d'attache (ils ne s'emmêlent pas). Que la longueur à vide des ressorts soit nulle signifie que la force exercée sur un ressort en ses extrémités est une fonction linéaire (et non pas affine) de la différence d'affixe entre celles-ci.

Construisez un modèle du graphe en attachant les ressorts entre eux comme indiqué par la matrice d'adjacence, un ressort par arête. Le problème se résume alors à chercher les positions d'équilibre du système sous certaines conditions. Une condition de Dirichlet revient à mettre un point du modèle à un endroit fixé du plan, une condition de Neumann en un point revient à y exercer une force (et sa réaction sur le reste du graphe) de manière à l'asservir à rester à une certaine distance et direction d'un autre point, que celui-ci lui soit directement relié ou non par un ressort. Relaxe le système sur le plan, la situation d'équilibre est une fonction harmonique en les points où on n'a pas imposé de condition, il suffit de lire l'affixe du point où s'est stabilisé un sommet du graphe pour savoir quelle valeur lui attribuer.

En représentant par un gros point une condition de Dirichlet (un point "punaisé" à un certain endroit du plan), on peut représenter une situation typique comme suit :



(A.13)

Il se peut que la fonction solution soit harmonique en un point où on a pourtant imposé une condition.

Il est clair que si on n'impose aucune contrainte, le système se contracte en un point : les seules fonctions harmoniques partout sont les constantes.

Physiquement, la relation de compatibilité des conditions de Neumann est que la somme des forces appliquées par l'opérateur sur le système est nulle, c'est la relation fondamentale de la mécanique à l'équilibre : le principe de l'action et de la réaction. En écrivant la nullité de leur couple, on a également une jolie propriété des fonctions harmoniques.

Dans le cas d'un graphe orienté, tous les ressorts sont, de la même façon que pour des conditions de Neumann, asservis par l'opérateur à ce que l'une des extrémités coïncide avec un point du modèle sans pour autant faire subir à ce point une réaction. La relation de compatibilité est que la somme des forces exercées par l'opérateur sur le système est nulle.

Une autre analogie physique très importante est l'analogie électrique : Le graphe est compris comme un circuit électrique, les constantes  $\rho$  comme des conductances (l'inverse de résistances) et une fonction harmonique comme une distribution de potentiels en les nœuds du circuit vérifiant la loi de Kirchoff. Le problème de Dirichlet revient à imposer un potentiel en un certain nombre de points tandis que le problème de Neumann revient à y imposer un courant. Nous verrons que cette analogie permet de comprendre l'équation de Cauchy-Riemann discrète comme l'équation d'Ohm écrite à l'aide des courants de Maxwell pour un circuit électrique planaire.

Une autre interprétation est donnée par les probabilités (la théorie des circuits électriques traite de la marche aléatoire des électrons) : Définissons une marche aléatoire sur  $\Gamma$  par la probabilité de transition d'un point  $v$  à un de ses voisins  $v'$ , qu'on pose égale à

$$p(v, v') := \frac{\rho(v, v')}{\sum_{u \sim v} \rho(u, v)}$$

(la somme est étendue à tous les voisins de  $v$ .) Alors, toute fonction de  $\Gamma_0$  qui est la probabilité d'un évènement le long d'une marche aléatoire partant de  $v$  est une fonction harmonique pour le laplacien défini plus haut. En effet, en chaque point  $v$ , cette probabilité  $h(v)$  va s'écrire en fonction des points voisins  $(v_1, \dots, v_V)$  :

$$h(v) = \sum_{i=1}^V p(v, v_i) h(v_i) = \sum_{i=1}^V \frac{\rho(v, v_i)}{\sum_{k=1}^V \rho(v, v_k)} h(v_i)$$

si bien que

$$\Delta h(v) = \sum_{i=1}^V \rho(v, v_i) (h(v) - h(v_i)) = 0$$

Par exemple la fonction  $f_{v_0, v_1}$  qui à un sommet  $v$  associe la probabilité qu'une marche aléatoire partant de  $v$  passe par le point  $v_1$  avant de passer

par le point  $v_0$  est la solution du problème de Dirichlet avec 1 en  $v_1$  et 0 en  $v_0$ .

Voyons maintenant une excursion dans des dimensions supérieures où l'on peut poser des problèmes similaires et construire des outils pour les appréhender, avant de revenir les appliquer en dimension deux.

## Chapitre B

# Théorie de Hodge discrète

Nous rappelons la théorie classique de Hodge puis nous introduisons le complexe dual et construisons sur le double une étoile.

### B.1 Théorie classique

Soit  $(C_\bullet, \partial)$  un complexe de degré fini sur  $\mathbb{Z}$ , chaque  $C_k$  étant un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang fini, son bord  $\partial$  est une application linéaire de degré  $-1$ , et de carré nul :

$$C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\partial} 0 \quad (\text{B.1})$$

Soit  $\Gamma_k$  une  $\mathbb{Z}$ -base de  $C_k$ .  $C_k$  est l'espace des  $k$ -chaînes de  $\Gamma$ . Cette base munit  $C_\bullet$  d'une forme bilinéaire symétrique définie positive canonique pour laquelle elle est orthonormale.

L'espace des cochaînes est le dual de l'espace des chaînes,  $C^k = \text{Hom}(C_k, \mathbb{Z})$  :

$$C^\bullet = C^0 \oplus C^1 \oplus \cdots \oplus C^n \quad (\text{B.2})$$

On adoptera la notation intégrale pour l'accouplement :

$$\begin{aligned} C^\bullet \times C_\bullet &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\alpha, A) &\mapsto \int_A \alpha \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

et la notation “*Bra-cket*” pour la dualité :

$$\begin{aligned} C_\bullet &\rightarrow C^\bullet \\ A &\mapsto \langle A | : (B \in C_\bullet \mapsto \langle A | B \rangle) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Pour les éléments  $a \in \Gamma$ , on utilisera également la notation des fonctions caractéristiques

$$\chi_a := \langle a | \quad (\text{B.5})$$

qui vaut 1 en  $a$  et zéro ailleurs. La réciproque de la dualité,  $C^\bullet \rightarrow C_\bullet$  sera notée  $\alpha \mapsto |\alpha\rangle \in C_\bullet$ . On remarque la *relation de fermeture*: pour toutes chaînes  $A, B \in C_\bullet$ ,

$$\langle A | B \rangle = \sum_{a \in \Gamma} \langle A | a \rangle \langle a | B \rangle \quad (\text{B.6})$$

L'application *cobord* ou *dérivée extérieure*  $d : C^k \rightarrow C^{k+1}$  est la transposée du bord  $\partial$ :

$$\text{Pour } A \in C_{k+1} \text{ et } \alpha \in C^k, \quad \int_A d\alpha := \int_{\partial A} \alpha \quad (\text{B.7})$$

C'est une application linéaire de degré +1 et de carré nul:

$$C^0 \xrightarrow{d} C^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C^{n-1} \xrightarrow{d} C^n \xrightarrow{d} 0 \quad (\text{B.8})$$

Une *métrique* sur  $\Gamma$  est la donnée d'un nombre réel strictement positif  $\rho_a \in \mathbb{R}^{+*}$  pour tout élément  $a \in \Gamma_\bullet$ . On peut voir cette métrique comme une matrice diagonale dans la base canonique. La forme bilinéaire associée définit un produit scalaire métrique défini positif  $\langle | \rangle_\rho$ , pour deux chaînes  $A, B \in C_\bullet(\Gamma)$ ,

$$\langle A | B \rangle_\rho = \sum_{a \in \Gamma} \rho_a \langle A | a \rangle \langle a | B \rangle \quad (\text{B.9})$$

Comme les longueurs ne sont pas forcément des entiers, on étend les modules aux réels, les chaînes et cochaînes sont maintenant à valeurs réelles. On définit alors l'adjoint  $d^* : C^\bullet(\Gamma) \rightarrow C^{\bullet-1}(\Gamma)$  du cobord  $d$  pour le produit scalaire métrique, c'est-à-dire pour deux formes  $\alpha, \beta \in C^\bullet$ ,

$$\langle d^* \alpha | \beta \rangle_\rho := \langle \alpha | d \beta \rangle_\rho \quad (\text{B.10})$$

On définit le *laplacien*  $\Delta = dd^* + d^*d$ , endomorphisme de  $C^k(\Gamma)$  pour chaque  $k$ . On note  $\mathcal{H} = \text{Ker } \Delta$  qu'on appelle les *formes harmoniques*.

**Proposition 1** *Le laplacien  $\Delta$  est un opérateur auto-adjoint pour le produit scalaire métrique et*

$$\mathcal{H} = \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^* \quad (\text{B.11})$$

**Preuve :**  $d^*d$  et  $dd^*$  sont auto-adjoints donc  $\Delta$  l'est également.

Soit une forme  $\alpha \in C^\bullet$ ,

$$\begin{aligned} \langle \Delta\alpha | \alpha \rangle_\rho &= \langle dd^*\alpha | \alpha \rangle_\rho + \langle d^*d\alpha | \alpha \rangle_\rho \\ &= \langle d^*\alpha | d^*\alpha \rangle_\rho + \langle d\alpha | d\alpha \rangle_\rho \\ &= \|d^*\alpha\|^2 + \|d\alpha\|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Donc si  $\alpha \in \mathcal{H}$ , alors  $d\alpha = 0$  et  $d^*\alpha = 0$ . Réciproquement, si  $\alpha \in \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^*$ , alors  $\Delta\alpha = dd^*\alpha + d^*d\alpha = 0$ .  $\square$

**Proposition 2** *L'espace des formes est somme directe orthogonale (pour le produit scalaire métrique) de l'espace des formes harmoniques et de l'image du laplacien :*

$$C^q = \text{Im } \Delta \oplus^\perp \text{Ker } \Delta \quad (\text{B.13})$$

**Preuve :** Soit  $\alpha \in C^\bullet$  et  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle \Delta\alpha | h \rangle_\rho = \langle \alpha | \Delta h \rangle_\rho = 0$$

Donc l'image et le noyau du laplacien sont orthogonaux et le théorème du rang nous donne que leur somme directe est égale à tout l'espace.  $\square$

**Théorème 3** *L'espace des formes est la somme directe orthogonale de l'image de  $d$ , de l'image de  $d^*$  et de l'espace des formes harmoniques :*

$$C^\bullet = \text{Im } d \oplus^\perp \text{Im } d^* \oplus^\perp (\text{Ker } d \cap \text{Ker } d^*) \quad (\text{B.14})$$

*C'est-à-dire que pour toute forme  $\alpha \in C^q$ , il existe une unique décomposition  $\alpha = d^*\omega + h + df$  avec  $\omega \in dC^q$ ,  $h \in \mathcal{H}^q$  et  $f \in d^*C^q$ .*

**Preuve :** L'image du laplacien  $\Delta = d^*d + dd^*$  est par définition inclus dans la somme de l'image de  $d$  et de celle de  $d^*$ . La somme est directe car elle est orthogonale: comme  $d^*$  est l'adjoint de  $d$ , pour  $\alpha \in C^{q+1}$  et  $\beta \in C^{q-1}$ ,

$$\langle d^*\alpha | d\beta \rangle_\rho = \langle \alpha | d^2\beta \rangle_\rho = 0$$

De plus, comme  $\text{Ker } \Delta = \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^*$ , le théorème du rang nous donne le résultat.  $\square$

**Définition 3** *On appellera  $H$  le projecteur orthogonal sur les formes harmoniques et  $G$  la composée de la projection orthogonale sur l'image du laplacien avec  $\Delta^{-1} : \text{Im } \Delta \rightarrow \text{Im } \Delta$ .*

La définition de  $G$  se justifie car l'image et le noyau du laplacien sont en somme directe.

**Théorème 4** *Les opérateurs  $H$  et  $G$  vérifient :*

$$\begin{aligned} dH = Hd = 0 & & d^*H = Hd^* = 0 & & H^2 = H \\ GH = HG = 0 & & \text{Id} = H + \Delta G = H + G\Delta \end{aligned}$$

**Preuve :** L'image de  $H$  est l'intersection du noyau de  $d$  et du noyau de  $d^*$ , donc

$$dH = 0 \quad \text{et} \quad d^*H = 0$$

L'image de  $G$  est  $\text{Im } \Delta = \text{Im } d \oplus \text{Im } d^*$  et est orthogonale aux formes harmoniques donc

$$Hd = 0, \quad Hd^* = 0, \quad HG = 0$$

$H^2 = H$  car c'est un projecteur.  $\text{Id} = H + \Delta G$  par définition car les formes harmoniques et l'image du laplacien sont en somme directe orthogonale.

En composant par  $H$  à droite, on obtient  $H = H^2 + \Delta GH = H + \Delta GH$  donc  $\Delta GH = 0$ , c'est-à-dire  $GH \in \mathcal{H}$ , si bien que ce dernier est invariant par la projection  $H$ ,  $HGH = GH$  mais  $HG = 0$  donc  $GH = 0$ .

En composant  $\text{Id} = H + \Delta G$  par  $\Delta$  à droite, on obtient  $\Delta = H\Delta + \Delta G\Delta = \Delta G\Delta$  donc  $G\Delta = G\Delta G\Delta$  est, de même que  $\Delta G$ , un projecteur sur  $\text{Im } \Delta$ . Il est de plus surjectif car en composant  $G\Delta$  par  $\Delta$  à gauche et  $G$  à droite, on obtient  $\Delta G\Delta G = \Delta G$  qui est surjectif. Comme  $G\Delta H = 0$ ,  $G\Delta$  est le projecteur orthogonal sur  $\text{Im } \Delta$ , donc  $G\Delta = \Delta G$ .  $\square$

**Théorème 5**  *$H$  met en bijection les formes harmoniques et les classes de cohomologie.*

Soit, pour  $\alpha \in C^k$ , la décomposition de Hodge  $\alpha = d^*\omega + h + df$ , avec  $\omega \in C^{k+1}$ ,  $h \in \mathcal{H}^k$  et  $f \in C^{k-1}$ . On a  $d\alpha = dd^*\omega + dh + d^2f$ . Or,  $\text{Ker } d \subset \mathcal{H} = \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^*$  et  $d^2 = 0$ , donc  $d\alpha = dd^*\omega$ . Si bien que la forme  $\alpha$  est fermée pour  $d$  si et seulement si  $dd^*\omega = 0$ . Mais d'après la propriété (B.14),  $\text{Ker } d = \mathcal{H} \oplus \text{Im } d$  et  $\text{Im } d^*$  sont en somme directe donc  $\text{Ker } dd^* = \text{Ker } d^*$  si bien que  $d\alpha = 0$  équivaut à  $d^*\omega = 0$ , soit  $\alpha = h + df$ . Une forme fermée est donc égale à une forme harmonique, à une forme exacte près, c'est-à-dire que la classe de cohomologie de  $\alpha$  est égale à celle de  $H(\alpha)$  et ce dernier est le seul représentant de la classe qui soit harmonique.

$$H^k(\Lambda, \partial) \xrightarrow{H} \mathcal{H}^k \tag{B.15}$$

$\square$

## B.2 Complexe dual

Nous allons définir le complexe dual d'un complexe fini et le munir d'une application bord *ad hoc*. Nous définirons sur le double, somme directe du complexe et de son dual, une application étoile dépendant d'une métrique.

Soit  $\Gamma^*$  l'ensemble obtenu à partir de l'ensemble  $\Gamma$  comme dans la section précédente, en renommant simplement les termes :

$$\begin{aligned} \Gamma_{n-k} &\xrightarrow{\sim} \Gamma_k^* \\ a &\mapsto a^* \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

On définit sa réciproque au signe près (que nous définissons à valeur dans  $\Gamma_\bullet$  par abus de langage), que nous noterons de la même façon :

$$\begin{aligned} \Gamma_k^* &\xrightarrow{\sim} \Gamma_{n-k} \\ b = a^* &\mapsto b^* := (a^*)^* = (-1)^{k(n-k)} a \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

On prolonge ces applications par linéarité aux chaînes :  $C_{n-k}(\Gamma) \xrightarrow{\sim} C_k(\Gamma^*)$ . On notera de la même façon sa transposée :

$$\begin{aligned} C^{n-k}(\Gamma) &\xrightarrow{\sim} C^k(\Gamma^*) \\ \alpha &\mapsto \alpha^* \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

C'est-à-dire que  $\langle a |^* = (-1)^{k(n-k)} \langle a^* | \in C^{n-k}(\Gamma^*)$  pour tout élément  $a \in \Gamma_k$ . Cette application est donc une isométrie pour les formes bilinéaires canoniques des deux espaces.

On munit les chaînes  $C_\bullet(\Gamma^*)$  de l'application bord égale, au signe près, au cobord  $d : C^\bullet \rightarrow C^\bullet$  conjugué par la dualité :

$$\begin{aligned} \partial : C_k(\Gamma^*) &\rightarrow C_{k-1}(\Gamma^*) \\ a &\mapsto \partial a := (-1)^{nk+n+1} |d\chi_{a^*}\rangle^* \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Les cochaînes de  $\Gamma^*$  sont munies du cobord, transposée de  $\partial$  pour la forme bilinéaire canonique.

**Proposition 3** *La construction qui au complexe  $(C_\bullet(\Gamma), \partial)$  associe le complexe  $(C_\bullet(\Gamma^*), \partial)$  est une involution.*

**Preuve :** Notons provisoirement  $\partial^*$  le bord du complexe  $\Gamma^*$  et avec une étoile différente,  $\star$  la bijection  $\Gamma_k^* \xrightarrow{\sim} \Gamma_{n-k}^{**}$  qui définit  $\Gamma^{**}$ , c'est la réciproque de

l'application  $\begin{cases} \Gamma_{n-k} & \xrightarrow{\sim} \Gamma_k^* \\ a & \mapsto a^* \end{cases}$  car les signes interviennent deux fois.

$$a^* = (-1)^{k(n-k)} a^* \quad (\text{B.20})$$

Il faut prouver que les complexes  $(C_\bullet(\Gamma), \partial)$  et  $(C_\bullet(\Gamma), \partial^{**})$  sont isomorphes. Soit  $a \in \Gamma_k, b \in \Gamma_{k-1}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \partial a | b \rangle &= \int_{\partial a} \chi_b \\ &= \langle \chi_a | d\chi_b \rangle = \chi_{a^*} | d\chi_b \rangle^* \\ &= (-1)^{(k-1)(n-k+1)} \chi_{a^*} | d\chi_{b^{**}} \rangle^* \\ &= (-1)^{(k-1)(n-k+1)+n(n-k+1)+n+1} \langle a^* | \partial^* b^* \rangle \\ &= (-1)^k \langle a^* | \partial^* b^* \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Remarquons qu'en reprenant le raisonnement dans l'autre sens, on obtient, pour  $c = a^* \in \Gamma_{n-k}^*$  et  $e = b^* \in \Gamma_{n-k+1}^*$ ,

$$\begin{aligned} \langle \partial^* e | c \rangle &= \langle \partial^* b^* | a^* \rangle = (-1)^k \langle \partial a | b \rangle \\ &= (-1)^{k+k(n-k)+(k-1)(n-k+1)} \langle \partial a^{**} | b^{**} \rangle \\ &= (-1)^{n-k+1} \langle e^* | \partial c^* \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Donc l'égalité B.21 est vraie pour  $a \in C_k(\Gamma \oplus \Gamma^*)$  et  $b \in C_{k-1}(\Gamma \oplus \Gamma^*)$  quelconques, sans préciser  $\partial$  ou  $\partial^*$ .

Avec le même raisonnement, on obtient,

$$\langle a^* | \partial^* b^* \rangle = (-1)^{n-k+1} \langle \partial^{**} a^{**} | b^{**} \rangle \quad (\text{B.23})$$

Mais  $** = \text{Id}$  donc

$$\partial = (-1)^{n+1} \partial^{**}$$

Par conséquent les complexes  $(C_\bullet(\Gamma), \partial)$  et  $(C_\bullet(\Gamma), \partial^{**})$  sont isomorphes.  $\square$

On remarque que la construction n'est pas totalement involutive en dimension paire, les deux complexes sont isomorphes mais pas identiques. En termes géométriques dans un complexe cellulaire  $\Gamma$ , choisir une base des chaînes  $C_\bullet(\Gamma)$  revient à choisir une orientation arbitraire de toutes les cellules, mais les sommets de  $\Gamma$  sont déjà à part, on différencie un point de son opposé. Le complexe dual  $\Gamma^*$  est alors muni d'une base préférentielle de cellules **coorientées**, en particulier ses éléments de degré zéro ne sont pas

*a priori* munis d'une base canonique comme les sommets de  $\Gamma$ . Quand on part du complexe dual et qu'on construit  $\Gamma^{**}$ , on utilise cette base comme étant une orientation. En considérant le complexe de départ comme le dual de son dual, on récupère sur celui-ci une base de cellules coorientées vis-a-vis de l'orientation de  $\Gamma^*$  qui est en fait une coorientation. C'est ce qui explique qu'on n'a qu'un isomorphisme entre  $\Gamma$  et  $\Gamma^{**}$ .

### B.3 Le double et l'étoile

Le *double*  $(C_\bullet(\Lambda), \partial)$  est la somme directe des deux complexes précédents,

$$C_\bullet(\Lambda) := C_\bullet(\Gamma) \oplus C_\bullet(\Gamma^*) \quad (\text{B.24})$$

avec l'application bord  $\partial_\Lambda := \partial_\Gamma \oplus \partial_{\Gamma^*}$ . Les cochaînes de  $\Lambda$  sont, de même, la somme directe des cochaînes de  $\Gamma$  et de  $\Gamma^*$ , son cobord la somme directe des cobords. On a les endomorphismes de carré  $(-1)^{k(n-k)}$  :

$$\begin{aligned} C_k(\Lambda) &\xrightarrow{\sim} C_{n-k}(\Lambda) \\ a &\mapsto a^* \end{aligned}$$

et sa transposée

$$\begin{aligned} C^k(\Lambda) &\xrightarrow{\sim} C^{n-k}(\Lambda) \\ \alpha &\mapsto \alpha^* \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Étant donnée une métrique  $\rho$  sur  $\Gamma$ , on l'étend à  $\Gamma^*$  en définissant

$$\rho_{a^*} := \frac{1}{\rho_a}$$

On définit alors sur les cochaînes à valeurs réelles (que nous noterons toujours  $C^\bullet$ ) l'*étoile* :

$$\begin{aligned} C^k(\Lambda) &\xrightarrow{\sim} C^{n-k}(\Lambda) \\ \langle a | &\mapsto * \langle a | := \rho_a \langle a^* | = (-1)^{k(n-k)} \rho_a \langle a |^* \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

\* vérifie  $*|_{C^k}^2 = (-\text{Id})^{k(n-k)}$  car, pour  $a \in \Lambda_k$ ,

$$* * \langle a | = \rho_a * \langle a^* | = \rho_a \rho_{a^*} \langle a^{**} | = (-1)^{k(n-k)} \langle a |$$

**Proposition 4** Sur les  $k$ -formes  $C^k$  de  $\Lambda$ ,  $d^* = (-1)^{nk+n+1} * d *$

**Preuve :** Soit  $a \in \Lambda_k$ ,  $b \in \Lambda_\bullet$ ; ils forment deux éléments de base de  $C^\bullet$ ,  $\chi_a = \langle a |$  et  $\chi_b = \langle b |$ . Comme  $\ast \langle a | = \rho_a \langle a^\ast |$ ,

$$\begin{aligned} \langle \ast \chi_a | \chi_b \rangle_\rho &= \rho_a \rho_b \langle a^\ast | b \rangle \\ &= (-1)^{k(n-k)} \rho_a \rho_b \langle a | b^\ast \rangle \\ &= (-1)^{k(n-k)} \langle \chi_a | \ast \chi_b \rangle_\rho \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Donc pour toute  $k$ -forme  $\alpha$  et toute forme  $\beta$ ,

$$\langle \ast \alpha | \beta \rangle = (-1)^{k(n-k)} \langle \alpha | \ast \beta \rangle$$

En particulier, en prenant  $\alpha = \ast \gamma$ , on voit que  $\ast$  est une isométrie pour  $\langle | \rangle_\rho$ . Par conséquent, si  $c \in \Lambda_{k-1}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \ast d \ast \chi_a | \chi_c \rangle_\rho &= (-1)^{(k-1)(n-k+1)} \langle d \ast \chi_a | \ast \chi_c \rangle_\rho \\ &= (-1)^{nk+n+k+1} \rho(a) \rho(c) \langle d \chi_{a^\ast} | \chi_{c^\ast} \rangle_\rho \\ &= (-1)^{nk+n+k+1} \rho(a) \rho(c) \rho(c^\ast) \langle d \chi_{a^\ast} | \chi_{c^\ast} \rangle \\ &= (-1)^{nk+n+k+1} \rho(a) \int_{c^\ast} d \chi_{a^\ast} = (-1)^{nk+n+k+1} \rho(a) \int_{\partial c^\ast} \chi_{a^\ast} \\ &= (-1)^{nk+n+k+1} \rho_a \langle a^\ast | \partial c^\ast \rangle \\ &= (-1)^{k+nk+n+k+1} \rho_a \langle \partial a | c \rangle \quad \text{d'après (B.21)} \\ &= (-1)^{nk+n+1} \langle \chi_a | d \chi_c \rangle_\rho \\ &= (-1)^{nk+n+1} \langle d^\ast \chi_a | \chi_c \rangle_\rho \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

□

**Proposition 5** *L'étoile commute avec  $\Delta$ ,  $H$  et  $G$ .*

**Preuve :** Le laplacien et l'étoile commutent, en effet, dans chaque dimension  $C^q$ ,

$$\begin{aligned} \ast \Delta &= \ast (d^\ast d + dd^\ast) = (-1)^{(q+1)n+n+1} \ast (\ast d \ast d) + (-1)^{qn+n+1} \ast (d \ast d^\ast) \\ &= (-1)^{(q+1)n+n+1+q(n-q)} d \ast d + (-1)^{qn+n+1} \ast (d \ast d^\ast) \\ &= (-1)^{(q+1)n+n+1} (d \ast d^\ast) \ast + (-1)^{qn+n+1} (\ast d \ast d) \ast \\ &= (-1)^{(q+1)n+n+1+(n-q)n+n+1} (dd^\ast) \ast + (-1)^{qn+n+1+(n-q+1)n+n+1} (d^\ast d) \ast \\ &= \Delta \ast \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Par conséquent, l'image et le noyau du laplacien sont stables par  $*$ , donc  $*G = G*$  et  $*H = H*$ .  $\square$

**Remarque :** Si  $n$  est paire, la dimension moitié est autoduale,  $*$  est un endomorphisme de  $C^{\frac{n}{2}}$ . Si  $n$  est congru à deux ou six modulo huit, alors  $n^2$  est congru à quatre modulo huit et  $\frac{n}{2} \times (n - \frac{n}{2}) = \frac{n^2}{4} = 1 + 2k$  pour un entier  $k$ . Par conséquent la dimension moitié possède un anti-involution  $* : C^{\frac{n}{2}} \rightarrow C^{\frac{n}{2}}$  de carré  $-1$ .

Le laplacien sur  $\Lambda$  est la somme directe des laplaciens sur  $\Gamma$  et sur  $\Gamma^*$  :

$$\Delta_{\Lambda} = \Delta_{\Gamma} \oplus \Delta_{\Gamma^*} \quad (\text{B.30})$$

de même pour la décomposition de Hodge,

$$H_{\Lambda} = H_{\Gamma} \oplus H_{\Gamma^*} \quad G_{\Lambda} = G_{\Gamma} \oplus G_{\Gamma^*} \quad (\text{B.31})$$

En particulier, la cohomologie  $C^{\bullet}(\Lambda, \partial)$  est la somme directe des deux premières,

$$H^*(C_{\Lambda}) = H^*(C_{\Gamma}) \oplus H^*(C_{\Gamma^*}) \quad (\text{B.32})$$

$\square$

## B.4 Complexes cellulaires

Dans la littérature, on a le plus souvent affaire à des complexes simpliciaux. Mais le complexe dual n'est pas simplicial. La généralisation des complexes simpliciaux est la notion de complexes cellulaires. La référence est l'article de Whitehead : [Whi].

**Définition 4** Notons  $B^m$  la boule unité de  $\mathbb{R}^m$ . Une décomposition cellulaire  $\kappa$  d'un espace topologique séparé  $X$  est la donnée d'une famille  $e_i^m$  de sous-espaces de  $X$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \Gamma_m$ , chacun muni d'applications  $f_i^m : \overset{\circ}{B}^m \rightarrow e_i^m$ , vérifiant les axiomes suivants :

1.  $f_i^m$  est un homéomorphisme surjectif,
2.  $f_i^m$  s'étend à l'adhérence en une surjection continue :  $\bar{f}_i^m : B^m \rightarrow \bar{e}_i^m$ .
3.  $\bar{f}_i^m(\partial B^m)$  est inclus dans la réunion des  $\{e_l^l / l < m, i \in \Gamma_l\}$ .

On appelle les  $e_i^m$  des cellules, le nombre  $m$  est la dimension de  $e_i^m$ , l'adhérence de la réunion des  $m$ -cellules est le  $m$ -squelette  $\kappa_m$ ,  $f_i^m$  est l'application caractéristique de  $e_i^m$ .

Lorsque chaque point appartient à un sous-complexe fini, on parle de CW-complexe.

Nous nous intéressons uniquement à des CW-complexes *localement finis*, i.e. tels que tout compact de  $X$  rencontre un nombre fini de cellules.

$\Gamma$  est l'ensemble des indices de cellules, les adjacences des cellules forment une donnée combinatoire à partir des éléments de  $\Gamma$ . On confondra souvent la cellule  $e_i^m \subset X$  (un espace topologique) et son indice  $i \in \Gamma_m$  (une étiquette combinatoire abstraite). A chaque complexe cellulaire est associé un complexe algébrique  $(C(\Gamma), \partial)$  qui retient un certain nombre d'informations des données de recollement. Par exemple, la décomposition cellulaire classique du tore de genre un par une face, deux arêtes et un sommet mène à un complexe algébrique où l'application bord est nulle (voir D.2 p.53) L'homologie à valeurs réelles de ce complexe calcule l'homologie singulière de l'espace topologique  $X$  sous-jacent [Spa]. Nous avons défini un complexe dual  $(C(\Gamma^*), \partial)$ . Par définition de l'application bord de  $\Gamma^*$ , l'homologie de  $\Gamma^*$  calcule la *cohomologie* de  $X$ .

Lorsque  $X$  est une variété orientée, la cohomologie est isomorphe à l'homologie via la dualité de Poincaré. Il resterait à trouver les données et les axiomes qu'il faut ajouter à  $(C(\Lambda), \partial, \ell)$  pour garantir un isomorphisme canonique entre la cohomologie de  $C(\Gamma)$  et celle de  $C(\Gamma^*)$ .

Pour les complexes simpliciaux (cf. [Spa]), ces données et axiomes peuvent être celles d'approximation de la diagonale  $C \rightarrow C \otimes C$ , de complexe géométrique, de classes fondamentales cf. [Bro].

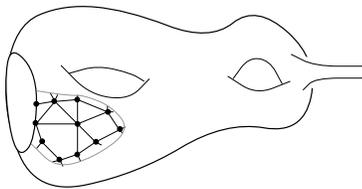
Nous allons voir qu'en dimension deux, les choses sont assez simples. Le complexe double se réalise géométriquement et donne lieu à une théorie des fonctions holomorphes discrètes.

## Chapitre C

# Holomorphie discrète

### C.1 En dimension deux

Rappelons brièvement les notations usuelles : On se donne une surface topologique orientée à bord  $\Sigma$ , non nécessairement compacte, mais munie d'une décomposition cellulaire  $\kappa$  localement finie indexée par  $\Gamma$ .



L'espace des chaînes  $C_\bullet(\Gamma)$  est le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par les cellules : Une 0-chaîne est un ensemble de points avec un coefficient entier attaché à chaque point. Une 1-chaîne est un ensemble d'arêtes orientées (une arête est un chemin simple que nous représenterons par un segment) avec un coefficient sur chacune. On confond l'arête  $a$  équipée du coefficient  $\lambda$  et son arête opposée  $-a$  avec le coefficient  $-\lambda$ .

L'application bord  $\partial : C_k(\Gamma) \rightarrow C_{k-1}(\Gamma)$  est le bord algébrique usuel. On note  $C(\Gamma)$  le complexe des chaînes associé,

$$C_2(\Gamma) \xrightarrow{\partial} C_1(\Gamma) \xrightarrow{\partial} C_0(\Gamma) \xrightarrow{\partial} 0 \quad (\text{C.1})$$

Les 0-formes, ou les 0-cochaînes,  $C^0(\Gamma)$  sont les fonctions  $\mathbb{Z}$ -linéaires sur les sommets de  $\Gamma$ . Les 1-formes  $C^1(\Gamma)$  sont les fonctions sur les arêtes orientées  $\alpha : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{C}$ . Les 2-formes sont les fonctions sur les faces orientées.

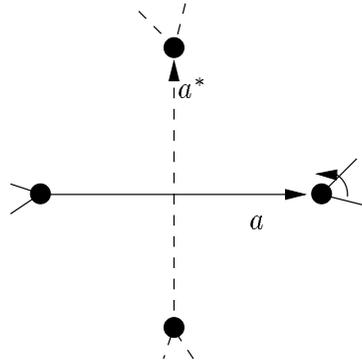
Nous noterons l'accouplement entre une 1-forme et une 1-chaîne par un signe intégral et entre une 2-forme et une 2-chaîne par un double signe intégral.

Supposons pour l'instant que  $\Sigma$  est **sans bord**. C'est un résultat classique (cf. le livre de Lefschetz [Lef]), que  $\Sigma$  admet une décomposition cellulaire duale  $\kappa^*$ , l'ensemble des cellules étant  $\Gamma^*$ . Celle-ci est définie à homotopie près c'est-à-dire que seule sa combinatoire  $\Gamma^*$  est bien définie. On pose alors le **double**  $\Lambda$  comme l'union disjointe des deux :

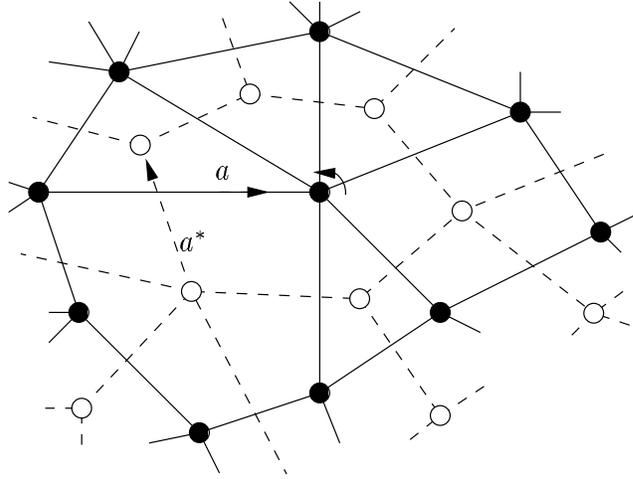
$$\begin{aligned} C_2(\Lambda) &:= C_2(\Gamma) \oplus C_2(\Gamma^*) \\ C_1(\Lambda) &:= C_1(\Gamma) \oplus C_1(\Gamma^*) \\ C_0(\Lambda) &:= C_0(\Gamma) \oplus C_0(\Gamma^*) \end{aligned} \tag{C.2}$$

Quand la surface est orientée, ce que nous supposerons désormais, la relation de dualité s'étend aux cellules orientées et se décrit en termes géométriques :

1. A tout sommet  $v$  de  $\Lambda$ , disons  $v \in \Gamma_0$ , on associe la face  $v^* \in \Gamma_2^*$  qui tourne autour dans le sens positif.
2. A toute arête  $a \in \Gamma_1$ , on associe l'arête duale  $a^* \in \Gamma_1^*$  qui la coupe transversalement telle que le repère  $(a, a^*)$  soit direct (ce qui signifie que les vecteurs tangents au point d'intersection forment un repère direct).



3. A toute face  $F \in \Gamma_2$ , on associe le point  $F^* \in \Gamma_0^*$  placé dedans, affecté du signe  $+$  si l'orientation de  $F$  est celle de  $\Sigma$  et du signe  $-$  si elle est contraire.



Comme la décomposition cellulaire  $\kappa^{**}$  duale de  $\kappa^*$  est de nouveau  $\kappa^{**} = \kappa$ , la dualité s'étend aux chaînes du double  $\Lambda$ ,

$$\begin{aligned}
 C_2(\Lambda) &\rightarrow C_0(\Lambda) \\
 F &\mapsto F^* \\
 C_1(\Lambda) &\rightarrow C_1(\Lambda) \\
 a &\mapsto a^* \\
 C_0(\Lambda) &\rightarrow C_2(\Lambda) \\
 v &\mapsto v^*
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

Remarquons que pour une face  $F \in C_2(\Lambda)$  ou un sommet  $v \in C_0(\Lambda)$ , la dualité est une involution,  $(F^*)^* = F$  et  $(v^*)^* = v$ , par contre, pour une arête  $a \in C_1(\Lambda)$ , la dualité itérée renverse l'orientation,  $(a^*)^* = -a$ .

La dérivée extérieure se définit comme suit :

Pour une fonction  $f \in C^0(\Lambda)$ , sur une arête définie par ses extrémités  $(v, v') \in \Lambda_1$ ,

$$\int_{(v, v')} df = f(\partial(v, v')) = f(v') - f(v) \tag{C.4}$$

Pour une 1-forme  $\alpha \in C^1(\Lambda)$  sur une face  $F \in \Lambda_2$ ,

$$\iint_F d\alpha = \oint_{\partial F} \alpha = \sum_{v \sim F^*} \alpha((F^*, v)^*) \tag{C.5}$$

Enfin, pour une 2-forme  $\omega \in C^2(\Lambda)$ ,  $d\omega = 0$  (C.6)

La somme dans (C.5) est étendue à tous les sommets de  $\Lambda$  qui sont voisins du sommet  $F^* \in \Lambda_0$  dual de la face  $F \in \Lambda_2$ .

A présent, introduisons une métrique  $\ell$  sur  $\Lambda$ . C'est simplement une fonction numérique  $\ell$  à valeurs strictement positives sur les arêtes *inorientées* (en particulier, on ne la prolonge pas par linéarité). Pour chaque arête  $a \in \Lambda_1$ , on définit son **poinds**  $\rho(a)$  par :

$$\rho(a) = \frac{\ell(a^*)}{\ell(a)}.$$

La donnée des poinds  $\rho$  sera appelée une **structure conforme** discrète.

Par convention, le poinds d'une face ou d'un sommet de  $\Lambda$  est fixé à 1. Le double  $\Lambda$  équipé d'une métrique sera appelé un **double métrique** de  $\kappa$ .

**Lemme 2** *Soit  $v \in \Gamma_0$  un sommet de valence  $V(v)$ , et  $(v_k)_{1 \leq k \leq V(v)}$  ses voisins. L'opérateur  $d^*$ , adjoint de  $d$  pour le produit scalaire métrique, a pour équation, sur une 1-forme  $\alpha$ , évalué en un sommet  $v$  :*

$$(d^*\alpha)(v) = \sum_{k=1}^{V(v)} \rho(v_k, v) \int_{(v_k, v)} \alpha \quad (\text{C.7})$$

Pour une fonction  $f \in C^0$ , la valeur de  $\Delta f$  en  $v$  est :

$$(\Delta f)(v) = \sum_{k=1}^{V(v)} \rho(v, v_k) (f(v) - f(v_k)) \quad (\text{C.8})$$

Prenons  $\chi_v$  la fonction indicatrice de  $v$  qui vaut 1 en  $v$  et est nulle partout ailleurs. On a alors :

$$\int_{(v_k, v)} d\chi_v = \chi_v(v) - \chi_v(v_k) = 1 \text{ pour tout } k \leq V(v), \text{ et}$$

$d\chi_v$  est nulle sur toute arête ne contenant pas  $v$ . Donc,

$$\langle d\chi_v | \alpha \rangle_\rho = \langle \chi_v | d^*\alpha \rangle_\rho = (d^*\alpha)(v) \quad (\text{C.9})$$

$$= \sum_{k=1}^{V(v)} \rho(v_k, v) \int_{(v_k, v)} \alpha \quad (\text{C.10})$$

Par conséquent,

$$(\Delta f)(v) = d^*df(v) \quad (\text{C.11})$$

$$= \sum_{k=1}^{V(v)} \rho(v_k, v) \int_{(v_k, v)} df \quad (\text{C.12})$$

$$= \sum_{k=1}^{V(v)} \rho(v, v_k) (f(v) - f(v_k)) \quad (\text{C.13})$$

□

On construit l'application  $*$  sur les cochaînes  $C^*(\Lambda)$  du double  $\Lambda$ . Elle est de carré  $-\text{Id}$  sur les 1-chaînes :  $*|_{C^1(\Lambda)}^2 = -\text{Id}$ .

Sa formule est :

Pour une fonction  $f \in C^0$ ,

$$\iint_F *f = f(F^*) \quad \forall F \in \Lambda_2 \quad (\text{C.14})$$

Pour une 1-forme  $\alpha \in C^1$ ,

$$\int_a *\alpha = -\rho(a^*) \int_{a^*} \alpha \quad \forall a \in \Lambda_1 \quad (\text{C.15})$$

Pour une 2-forme  $\omega \in C^2$ ,

$$*\omega(v) = \iint_{v^*} \omega \quad \forall v \in \Lambda_0 \quad (\text{C.16})$$

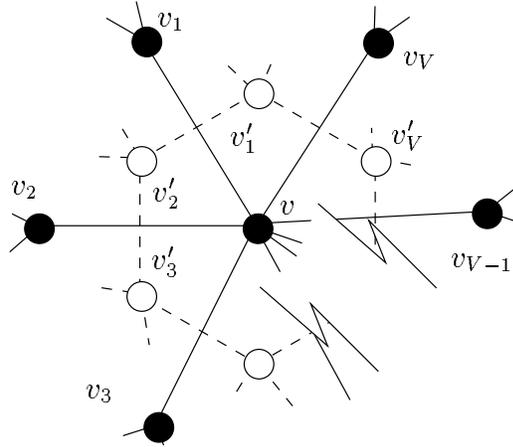
On vérifie bien que  $d^* = (-1)^{nk+n+1} * d*$  : en un point  $v$  de voisins  $v_1, \dots, v_V$ , pour une 1-forme  $\alpha \in C^1$ ,

$$(*d*\alpha)(v) = \iint_{v^*} d*\alpha = \oint_{\partial v^*} *\alpha \quad (\text{C.17})$$

$$= \sum_{k=1}^V \int_{(v, v_k)^*} *\alpha \quad (\text{C.18})$$

$$= - \sum_{k=1}^V \rho((v, v_k)^{**}) \int_{(v, v_k)^{**}} \alpha \quad (\text{C.19})$$

$$= - \sum_{k=1}^V \rho(v, v_k) \int_{(v_k, v)} \alpha = -d^*\alpha(v) \quad (\text{C.20})$$



## C.2 Formes holomorphes

Jusqu'à présent, nos coefficients étaient réels. Complexifions l'espace des formes. Prolongeons  $*$  par linéarité.

**Définition 5** L'opérateur  $*$ , sur les 1-formes est de carré  $*^2 = -\text{Id}$ , on peut donc le décomposer en ses deux sous-espaces propres

$$C^{(1,0)} = \{\alpha \in C^1 / * \alpha = -i\alpha\} \quad (\text{C.21})$$

$$\text{et } C^{(0,1)} = \{\alpha \in C^1 / * \alpha = +i\alpha\} \quad (\text{C.22})$$

On dira qu'une 1-forme  $\alpha$  est

$$\text{holomorphe si } \alpha \in C^{(1,0)} \text{ et } d\alpha = 0, \quad (\text{C.23})$$

$$\text{anti-holomorphe si } \alpha \in C^{(0,1)} \text{ et } d\alpha = 0. \quad (\text{C.24})$$

On notera  $\Omega^{(1,0)}(\Lambda)$  l'espace des formes holomorphes et  $\Omega^{(0,1)}(\Lambda)$  l'espace des formes anti-holomorphes. L'équation

$$*\alpha = -i\alpha \quad (\text{C.25})$$

sera appelée l'équation de **Cauchy-Riemann**.

La somme directe en espaces propres de  $*$  permet de décomposer  $d : C^0 \rightarrow C^1$  en deux applications

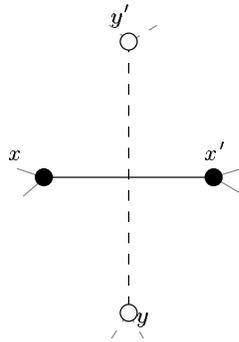
$$d' = \frac{1}{2}(d + i * d) \quad \text{et} \quad d'' = \frac{1}{2}(d - i * d). \quad (\text{C.26})$$

Ce sont les composées de  $d$  par les projecteurs

$$\pi_{(1,0)} = \frac{1}{2}(\text{Id} + i*) \quad \text{et} \quad \pi_{(0,1)} = \frac{1}{2}(\text{Id} - i*) \quad (\text{C.27})$$

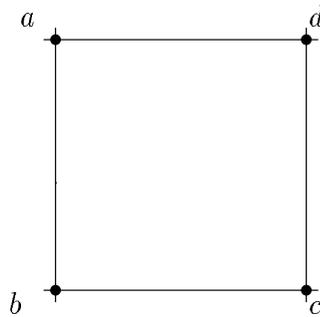
sur  $C^{(1,0)}$  et  $C^{(0,1)}$  respectivement. Une fonction sera dite **holomorphe** si  $df$  l'est, c'est-à-dire  $df = d'f \in \Omega^{(1,0)}(\Lambda)$  ou encore  $d''f = 0$ . Elle est **antiholomorphe** si  $df = d''f \in \Omega^{(0,1)}(\Lambda)$ , c'est-à-dire  $d'f = 0$ . On notera  $\Omega^0(\Lambda)$  l'ensemble des fonctions holomorphes.

Une fonction  $f$  est holomorphe si elle vérifie, pour  $(x, x') \in \Gamma_1$  de duale  $(y, y') \in \Gamma_1^*$  disposés comme suit,



$$\frac{f(y') - f(y)}{\ell(y, y')} = i \frac{f(x') - f(x)}{\ell(x, x')}$$

Pour étudier la représentation conforme, Madame Lelong-Ferrand, dans [LF], avait introduit la discrétisation des fonctions holomorphes sur le réseau carré du plan complexe. Pour elle, une fonction holomorphe est une fonction sur le réseau satisfaisant, lorsque  $a, b, c, d$  sont disposés comme suit :



$$f(d) - f(b) = i(f(c) - f(a))$$

Il est clair dans son exposé que deux graphes interviennent, le pair et l'im-pair, plongés dans le réseau. Pour passer à des décompositions plus générales que le réseau, même pour une carte régulière comme le nid d'abeille, il est nécessaire d'introduire le graphe et son dual. Pour l'application aux systèmes statistiques, il est indispensable de se donner en plus une distribution de longueurs non constantes.

Des développements mathématiques ont suivi, rassemblés sous le nom de *fonctions analytiques discrètes*, et *fonctions monodrifffiques*. Je trouve le nom *analytique* tout à fait regrettable car ils n'ont pas en général une bonne structure d'algèbre sur l'espace des fonctions holomorphes discrètes. Curieusement, ces développements ne se sont pas intéressés à chercher dans l'esprit que nous avons adopté ici et leur notion d'holomorphie est le cas particulier de notre notion dans le cas du genre zéro (le plan), décomposé par le réseau carré standard, pas de longueurs, pas de combinatoire exotique.

Le domaine connaît une nouvelle jeunesse grâce aux *empilements de cercles* [CdVM] qui proposent une autre notion d'holomorphie. En général les empilements de cercles considérés sont, comme dans le cas des fonctions analytiques discrètes, les empilements de cercles standards, de cercles deux à deux tangents, les centres étant sur les nœuds du réseau, carré ou triangulaire. Dans ce contexte, une fonction, du réseau dans  $\mathbb{C}$  (le plan complexe plat) est holomorphe discrète si et seulement si elle envoie le réseau sur un graphe du plan, de même combinatoire, de telle manière qu'il existe un empilement de cercles de centres les images des nœuds du réseau. Le rapport des rayons du cercle image centré en  $f(v)$ , et du cercle initial centré en un nœud  $v$ , est compris comme  $|f'(v)|$ . L'idée à la base des empilements de cercles est de voir une fonction holomorphe comme conservant localement les cercles. La théorie de l'holomorphie discrète à laquelle celà conduit n'a pas été explorée dans les mêmes directions que ce que nous faisons mais il est immédiat de considérer des empilements plus complexes, de combinatoire quelconque et de rayons quelconques, les difficultés sont qu'il n'est pas aisé de trouver des empilements de cercles d'une combinatoire donnée (il existe cependant des théorèmes d'existence) et les calculs sont plus compliqués car l'équation de Cauchy-Riemann ou le problème de Dirichlet ne sont pas linéaires [CdVM].

Une autre voie a également été envisagée en considérant les *motifs de cercles* [Sch], c'est à dire non pas des familles de cercles tangents mais des familles de cercles s'intersectant, les deux graphes duaux sont les centres d'un côté et les intersections de l'autre. On retrouve exactement la formulation des fonctions monodrifffiques et les motifs de cercles considérés restent les réseaux carré et triangulaires, tous les cercles ayant même rayon. Nous ver-

rons qu'une carte critique est équivalente à la donnée d'un motif de cercles mais dont la combinatoire est *a priori* plus compliquée qu'un réseau.

L'interprétation électrique est également une autre voie d'approche du problème, nous renvoyons à l'annexe.

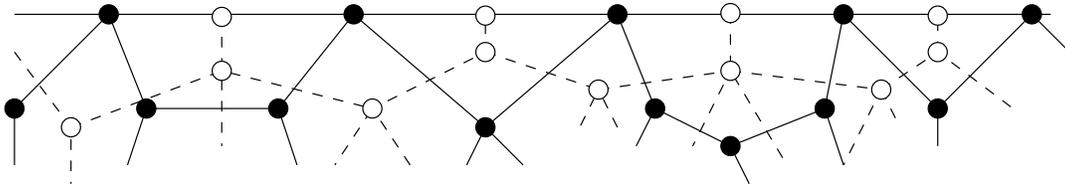
### C.3 Surfaces à bord

Pour les décompositions cellulaires de surface à bord, il n'y a pas de notion de dualité. Nous allons associer à une décomposition cellulaire  $\kappa$  d'une surface topologique à bord, un complexe cellulaire  $\kappa^*$ , qui ne sera même pas une surface combinatoire car elle aura des arêtes "pendantes", c'est à dire adjacentes à aucune face.

**Définition 6** Soit  $\kappa$  une décomposition cellulaire d'une surface à bord  $\Sigma$ .

On définit alors le complexe cellulaire  $\kappa^*$  de la manière suivante :

1. A toute face  $F \in \Gamma_2$  orientée positivement, on associe le point  $F^* \in \Gamma_0^*$  qu'on place dedans.
2. A toute arête  $a \in \Gamma_1$ , on associe l'arête duale  $a^* \in \Gamma_1^*$  qui la coupe transversalement telle que le repère  $(a, a^*)$  soit direct. Aux arêtes du bord,  $a \in \partial\Gamma_1$  est donc associée une arête  $a^*$  qui est transverse au bord de  $\Sigma$ .
3. A tout sommet  $v$  de  $\Gamma_0 \setminus \partial\Gamma$  qui n'est pas sur le bord, on associe la face  $v^* \in \Gamma_2^*$  qui tourne autour dans le sens positif.
4. A toute arête du bord  $a \in \partial\Gamma$ , on associe un sommet  $v_a \in \Gamma_0^*$ , qu'on place au milieu de  $a$ , à l'extrémité de l'arête  $a^* \in \Gamma_1^*$ .



Les sommets de  $\Gamma_0^*$  correspondant aux arêtes du bord définissent le bord  $(\partial\Gamma^*)_0$ , les autres sont les points intérieurs,  $\overset{\circ}{\Lambda} = \overset{\circ}{\Gamma} \sqcup \overset{\circ}{\Gamma}^*$ .

**Remarque :** Pour plus de commodités, on représentera les points du bord de  $\Gamma^*$  non pas au milieu de l'arête de  $\Gamma$  qui leur correspond mais à l'extérieur de  $\Sigma$ .

Les faces  $\Gamma_2^*$  sont contenues **en entier** dans  $\Sigma$ , et les arêtes  $\Gamma_1^*$  contiennent **au moins** un sommet dans l'intérieur de  $\Sigma$ . Les points du bord de  $\Gamma^*$  ne sont adjacents qu'à une seule arête.

Le complexe cellulaire  $\kappa^*$  n'est pas une surface combinatoire car ses arêtes sur le bord ne bordent aucune face. Par contre, son homologie est celle de la surface (c'est une rétractation de  $\Sigma$ ). Si pour toutes les faces de  $\Gamma$ , l'intersection avec le bord de  $\Sigma$  a au plus une composante connexe, que  $\Sigma$  est connexe et que  $\Gamma_2$  contient au moins trois cellules, l'élagué de  $\kappa^*$  (complexe cellulaire obtenu en débarassant  $\kappa^*$  des arbres pendants) est même homéomorphe à  $\Sigma$ .  $\square$

De même que pour une surface sans bord, on définit le double associé,  $\Lambda = \Gamma \sqcup \Gamma^*$  et son bord  $\partial\Lambda = \partial\Gamma \sqcup \partial\Gamma^*$ . La dualité ne s'étend pas au bord et on peut caractériser les sommets  $s$  du bord  $\partial\Lambda$  comme étant ceux n'ayant pas de face duale  $s^*$  correspondante dans  $\Lambda$ . Le double  $\Lambda$  muni d'une métrique  $\ell$  sera appelé un **double métrique à bord**. Une 1-forme  $\alpha$  sur  $\Lambda$ , est **holomorphe** pour la métrique  $\ell$  si et seulement si elle est fermée et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann sur tous les couples d'arêtes duales :

$$\int_a \frac{\alpha}{\ell(a)} = -i \int_{a^*} \frac{\alpha}{\ell(a^*)} \quad (\text{C.28})$$

Une fonction  $f \in C^0(\Lambda)$  est **holomorphe** sur  $\Lambda$  si et seulement si  $df$  est holomorphe et on note  $f \in \Omega^0(\Lambda)$ .

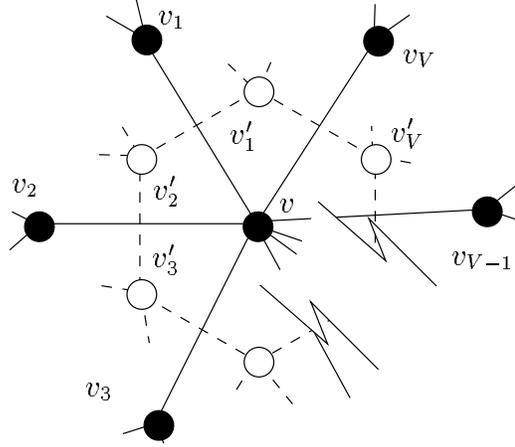
## C.4 Propriétés générales

On retrouve les résultats classiques de l'holomorphic :

**Proposition 6** *Une fonction holomorphe sur un double métrique à bord  $\Lambda$  est harmonique complexe en tous les points intérieurs.*

**Preuve :** Soient  $v$  un sommet intérieur de  $\Gamma$  et  $(v_1, \dots, v_n)$  ses voisins, pris dans l'ordre quand on tourne autour de  $v$  dans le sens positif. Soient  $(v'_1, \dots, v'_n)$  les sommets de  $\Gamma^*$  définissant la face  $v^*$ , c'est-à-dire en prenant  $v_{n+1} = v_1$ ,

$$(v'_k, v'_{k+1}) = (v, v_k)^* \quad (\text{C.29})$$



Une fonction  $f \in \Omega^0(\Lambda)$  est holomorphe si et seulement si  $d''f = 0$ , c'est-à-dire sur l'arête  $(v, v_k)$ ,

$$\frac{f(v'_{k+1}) - f(v'_k)}{\ell(v'_{k+1}, v'_k)} = i \frac{f(v_k) - f(v)}{\ell(v_k, v)} \quad (\text{C.30})$$

qu'on écrit en utilisant  $\rho(v_k, v) = \frac{\ell(v'_{k+1}, v'_k)}{\ell(v_k, v)}$ :

$$f(v'_{k+1}) - f(v'_k) = i\rho(v_k, v)(f(v_k) - f(v)) \quad (\text{C.31})$$

En sommant pour  $k$  variant de 1 à  $n$ , on obtient, à gauche une somme télescopante et à droite:

$$0 = \sum_{k=1}^n \rho(v_k, v)(f(v_k) - f(v)) \quad (\text{C.32})$$

c'est-à-dire que  $f$  est harmonique complexe en  $v$ .  $\square$

Le principe du maximum implique donc que dans le cas d'une surface compacte sans bord, les seules fonctions holomorphes sur  $\Lambda_0$  tout entier sont les constantes. Nous verrons que sur une surface compacte sans bord de genre  $g$ , l'espace vectoriel des 1-formes holomorphes sur tout  $\Lambda_1$  est de dimension  $2g$ , contrairement au continu où il est de dimension  $g$ .

**Théorème 6** *Les formes harmoniques,  $\mathcal{H}_1(\Lambda) = \text{Ker } \Delta = \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^*$  sont sommes directes des formes holomorphes et des formes anti-holomorphes :*

$$\mathcal{H}_1(\Lambda) = \Omega^{(1,0)}(\Lambda) \oplus \Omega^{(0,1)}(\Lambda)$$

**Preuve :** Par définition, une forme holomorphe ou anti-holomorphe est fermée. Il faut donc montrer que l'équation de Cauchy-Riemann correspond à la cofermeture :

Si  $\alpha \in C^1(\Lambda)$  est holomorphe, le même argument que dans la démonstration précédente montre que  $d^*\alpha = 0$  :

Soit  $v \in \Lambda_0$  un sommet de voisins  $v_1, \dots, v_V \in \Lambda_0$  en tournant dans le sens positif, et les arêtes duales  $(v'_{k-1}, v'_k) = (v, v_k)^*$ , les indices comptés modulo  $V$ . D'après C.7,

$$(d^*\alpha)(v) = \sum_{k=1}^{V(v)} \rho(v_k, v) \int_{(v_k, v)} \alpha$$

Par conséquent,  $\alpha$  vérifiant l'équation de Cauchy-Riemann sur ces arêtes, on a :

$$(d^*\alpha)(v) = -i \sum_{k=1}^{V(v)} \int_{(v'_{k-1}, v'_k)} \alpha \quad (\text{C.33})$$

$$= -i \oint_{\partial v^*} \alpha = -i \iint d\alpha = 0 \quad (\text{C.34})$$

car  $\alpha$  est fermée. De même si  $\alpha$  est anti-holomorphe. Donc

$$\Omega^{(1,0)}(\Lambda) \oplus \Omega^{(0,1)}(\Lambda) \subset \mathcal{H}_1(\Lambda)$$

Réciproquement, toute 1-forme se décompose de manière unique suivant les espaces propres de  $*$ ,

$$\alpha = \pi_{(1,0)}\alpha + \pi_{(0,1)}\alpha,$$

en particulier si  $\alpha$  est harmonique. Il reste à montrer que chacune de ces 1-formes est fermée. Le théorème de Hodge affirme que

$$C^1 = \text{Im } d \oplus \text{Im } d^* \oplus \mathcal{H}_1$$

Par conséquent,  $\text{Ker } d = \text{Im } d \oplus \mathcal{H}_1$ . Supposons  $\pi_{(1,0)}\alpha = \beta + \gamma + \mu$  avec  $\beta \in \text{Im } d^*$ ,  $\gamma \in \text{Im } d$  et  $\mu \in \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^*$ . Il existe  $\omega \in C^2(\Lambda)$  et  $f \in C^0(\Lambda)$  tels que  $\beta = *d*\omega + df + \mu$ . Or,

$$*\pi_{(1,0)}\alpha = i\pi_{(1,0)}\alpha = -d*\omega + *df + *\mu$$

par définition, et comme  $d^* = \pm *d*$ , l'application  $*$  échange  $\text{Im } d$  et  $\text{Im } d^*$  et laisse stable  $\mathcal{H}_1$ . Donc  $f = i*\omega$  et  $\pi_{(1,0)}\alpha = (*+i)d*\omega + \mu$ . De même,

$\pi_{(0,1)}\alpha = (* - i)d * \omega' + \mu'$  avec  $\omega' \in C^2(\Lambda)$  et  $\mu' \in \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^*$ . Comme  $\alpha \in \mathcal{H}_1$ , on en déduit que

$$(* + i)d * \omega + (* - i)d * \omega' = 0$$

Comme l'image de  $d$  et de  $d^*$  sont en somme directe, on en déduit deux équations,

$$\begin{cases} *d * \omega + *d * \omega' &= 0_{\text{Im } (d^*)} \\ id * \omega - id * \omega' &= 0_{\text{Im } (d)} \end{cases}$$

Donc  $d * \omega = d * \omega' = 0$  si bien que  $\pi_{(1,0)}\alpha, \pi_{(1,0)}\alpha \in \mathcal{H}_1 \subset \text{Ker } d$ .  $\square$

**Définition 7** *On appellera une fonction restreinte à  $\Gamma$  ou à  $\Gamma^*$  seulement une **hémi-fonction**.*

Comme  $\Delta_\Lambda = \Delta_\Gamma \oplus \Delta_{\Gamma^*}$ , la notion d'harmonicité s'applique à des hémi-fonctions, les parties sur  $\Gamma$  et  $\Gamma^*$  étant découplées. La formule de définition d'une fonction holomorphe relie la valeur de sa partie réelle sur  $\Gamma$  à la valeur de sa partie imaginaire sur  $\Gamma^*$ .

**Proposition 7** *À toute hémi-fonction complexe  $f$ , harmonique sur une décomposition cellulaire simplement connexe  $\Gamma$  et à tout sommet  $v' \in \Gamma^*$  muni d'un coefficient  $\lambda$ , on associe une unique hémi-fonction  $f'$  sur  $\Gamma^*$ , telle que  $f'(v') = \lambda$  et que  $(f, f')$  constitue une fonction holomorphe.*

C'est la primitive de  $-i * df$  sur  $\Gamma^*$  valant  $\lambda$  en  $v'$ .  $\square$   
Il en est de même pour une fonction anti-holomorphe. Ce qui amène à la proposition suivante :

**Proposition 8** *Une fonction  $f$  harmonique complexe sur un double métrique  $\Lambda$  simplement connexe se décompose de manière unique à deux constantes additives près en la somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction anti-holomorphe.*

**Preuve :** Considérons la demi-fonction  $f|_\Gamma$ , associons lui l'hémi-fonction  $f'$  harmonique sur  $\Gamma^*$ , valant  $\mu'$  en un point  $v' \in \Gamma^*$  donné telle que  $(f|_\Gamma, f')$

est holomorphe. De même,  $f''$  sur  $\Gamma$  telle que  $f''(v) = \mu$  et  $(f'', f|_{\Gamma^*})$  est holomorphe. Considérons  $f_1$  et  $f_2$  définies sur  $\Gamma$  et  $\Gamma^*$  par :

	Sur $\Gamma$	Sur $\Gamma^*$	(C.35)
$f_1$	$\frac{f+f''}{2}$	$\frac{f+f'}{2}$	
$f_2$	$\frac{f-f''}{2}$	$\frac{f-f'}{2}$	

$f_1$  est holomorphe comme somme de deux fonctions holomorphes  $\frac{1}{2}(f, f')$  et  $\frac{1}{2}(f'', f)$ , tandis que  $f_2$  est anti-holomorphe comme somme de deux fonctions anti-holomorphes  $\frac{1}{2}(f, -f')$  et  $\frac{1}{2}(-f'', f)$ . Et bien entendu,  $f = f_1 + f_2$ .  $\square$

**Proposition 9** Pour  $C \in C_2(\Lambda)$  une 2-chaîne quelconque et  $f \in C^0$  une fonction,

$$\iint_C * \Delta f = 2i \oint_{\partial C} d'f = -2i \oint_{\partial C} d''f$$

**Preuve :** Si  $L$  est un lacet homotope à zéro,

$$\int_L d'f = \frac{1}{2} \int_L (d - i * d) f = -\frac{i}{2} \int_L (*d) f \quad (C.36)$$

car  $\int_L df = \int_{\partial L} f = 0$ .

Sur le bord d'une face  $F = (v'_1, \dots, v'_n) = v^*$  de  $\Gamma_2^*$ , avec  $(v_1, \dots, v_n)$  les voisins de  $v$ , point de  $\Lambda$ ,

$$\int_{\partial F} (*d) f = \sum_{k=1}^n \int_{(v'_k, v'_{k+1})} (*d) f \quad (C.37)$$

$$= \sum_{k=1}^n \rho((v'_k, v'_{k+1})^*) \int_{(v'_k, v'_{k+1})^*} df \quad (C.38)$$

$$= \sum_{k=1}^n \rho(v, v_k) \int_{\partial(v, v_k)} f \quad (C.39)$$

$$= \Delta f(v) \quad (C.40)$$

ce qu'on pouvait voir aussi à l'aide de la formule  $d^* = \pm * d^*$ . On a la même conclusion si  $v \in \Gamma^*$ .  $\square$

**Corollaire :** Pour toute fonction  $f \in C^0(\Lambda)$ ,

$$\Delta f = 0 \iff dd'f = 0 \iff dd''f = 0$$

**Proposition 10** Une fonction  $f$  est holomorphe (resp. antiholomorphe) sur un double métrique  $\Lambda$  d'une surface compacte à bord, si et seulement si elle est harmonique complexe et que pour toutes les arêtes  $a$  du bord  $\partial\Lambda$ ,  $\int_a d''f = 0$ , (resp.  $\int_a d'f = 0$ ).

**Preuve :** Supposons que  $f$  soit harmonique complexe. Quand on s'est donné les valeurs de  $f$  sur  $\Gamma$ , la condition  $\int_a d''f = 0$  pour toutes les arêtes  $a$  du bord de  $\Gamma^*$  est une condition de Neumann pour  $f|_{\Gamma^*}$  en les points du bord :

$$\frac{\int_a df|_{\Gamma^*}}{\ell(a)} = -i \frac{\int_{a^*} df}{\ell(a^*)} \quad (\text{C.41})$$

Par conséquent, d'après le théorème de Neumann, il existe une unique hémifonction complexe harmonique sur  $\Gamma^*$  avec ces conditions au bord sauf en un point  $v'$  de  $\partial\Gamma^*$  où elle vaut  $f(v')$ , c'est précisément  $f|_{\Gamma^*}$ . Il se trouve donc qu'elle vérifie également la condition de Neumann en  $v'$ .

Or, le théorème précédent nous donne à une constante additive près une hémifonction  $f^*$ , harmonique sur  $\Gamma^*$ , qui constitue la deuxième moitié holomorphe de  $f|_{\Gamma}$ , c'est-à-dire que  $(f|_{\Gamma}, f^*)$  est une fonction holomorphe, ce qui fait que

$$\frac{\int_a df^*}{\ell(a)} = -i \frac{\int_{a^*} df}{\ell(a^*)} \quad (\text{C.42})$$

pour toutes les arêtes  $a$  de  $\Gamma^*$  et en particulier celles du bord. On peut de surcroît fixer  $f^*$  à valoir  $f^*(v') = f(v')$  en  $v'$ . Donc  $f = f^*$  et  $(f|_{\Gamma}, f|_{\Gamma^*})$  est une fonction holomorphe.

La réciproque est évidente car si  $f$  est holomorphe, elle est harmonique complexe et  $d''f = 0$  partout, en particulier sur le bord.  $\square$

**Définition 8** Une 1-forme  $\alpha$  peut vérifier l'équation de Cauchy-Riemann sur toutes les paires d'arêtes et avoir cependant

$$\int_{\partial F} \alpha \neq 0 \quad (\text{C.43})$$

pour une face  $F \in \Lambda_2$ , c'est-à-dire ne pas être fermée en  $F$ . On dira alors que  $\alpha$  n'est pas holomorphe en  $z = F^*$ , que  $z$  est un **demi-pôle simple** de  $\alpha$ , on retirera la face  $F = z^*$  de la région d'étude de  $\alpha$ , c'est-à-dire que l'homotopie se fera relativement à cette face. On nommera alors

$$\text{Res}_z(\alpha) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial F} \alpha \quad (\text{C.44})$$

le **résidu de  $\alpha$  en  $z$** .

**Théorème 7 des résidus** L'invariance par homotopie implique que, pour toute 1-forme  $\alpha$  et tout lacet  $\gamma$  homotope à zéro, bordant une 2-chaîne  $B$ ,

$$\int_{\gamma} \alpha = 2i\pi \sum_{z^* \subset B} \text{Res}_z(\alpha) \quad (\text{C.45})$$

où la somme est étendue à tous les résidus de  $\alpha$  en des points  $z \in \Gamma^*$  à l'intérieur  $\overset{\circ}{B}$  de  $\gamma$ .

La définition des résidus est le défaut de fermeture. Cela prouve du même coup que, sur  $\Sigma$  compacte, la somme des résidus d'une 1-forme discrète est nulle, qui plus est, indépendamment sur  $\Gamma$  et sur  $\Gamma^*$ .

## Chapitre D

# Intégrales abéliennes

Le plan de démonstration est tiré du livre de Siegel [Sie].

### D.1 Existence

**Théorème 8** *Soit  $\Lambda$  un double métrique, de bord non vide,  $z$  un point intérieur à  $\Gamma$  et  $\lambda$  un chemin simple de  $z$  au bord  $\partial\Gamma$ . Il existe une paire de 1-formes  $\alpha_z, \beta_z$  holomorphes sur  $\Lambda$  ayant seulement un demi-pôle en  $z$ , de résidu  $+1$  et des périodes sur  $\Lambda \setminus \lambda^*$  imaginaires pures pour  $\alpha_z$  et réelles pour  $\beta_z$ .*

**Preuve :** Marquons les points du bord  $\partial\Gamma$  et le point  $z$ . Prenons une condition de Dirichlet réelle quelconque sur le bord  $\nu : \partial\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  et une valeur réelle  $\mu$  en  $z$ . Soit  $a_1$  l'unique fonction harmonique sur  $\overset{\circ}{\Gamma}$ , solution de ce problème.

Considérons la 1-forme  $\alpha_z = (\alpha_1, \alpha_2)$  où  $\alpha_1$  est définie sur  $\Gamma$  et  $\alpha_2$  sur  $\Gamma^*$  par,

$$\alpha_1 = da_1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = -i * \alpha_1 \tag{D.1}$$

$\alpha_0$  est une 1-forme de type  $(1, 0)$  sur  $\Lambda$ . Montrons qu'elle est fermée sur  $\Lambda \setminus \{z^*\}$  ( $z^*$  est la face de  $\Gamma_2^*$  duale du point  $z$ )::

Sur  $\Gamma$ ,  $\alpha_1$  est exacte donc fermée,  $d\alpha_1 = d^2a_1 = 0$ . Considérons un sommet intérieur  $v \in \overset{\circ}{\Gamma}_0$ , de valence  $V$ , de voisins  $(v_1, \dots, v_V)$ .

$$\begin{aligned} \int_{v^*} d\alpha_2 &= -i \int_{\partial v^*} *\alpha_1 \\ &= -i \sum_{k=1}^V \rho_{(v, v_k)} \int_{(v, v_k)} \alpha_1 \quad \text{d'après (C.15)} \\ &= 0 \quad \text{si } v \neq z \text{ car } a_1 \text{ est harmonique.} \end{aligned}$$

Donc  $\alpha_0$  est holomorphe sur  $\Lambda \setminus \{z\}$ .

Par conséquent, son intégrale sur un lacet de  $\Lambda \setminus \{z, z^*\}$  ne dépend que de la classe d'homotopie de celui-ci.

Par le principe du maximum, si  $\mu > \nu$ ,  $a_1$  atteint son maximum au point  $z$ , donc  $a_1(z) > a_1(z')$  pour tous les voisins  $z'$  de  $z$  si bien que  $\frac{1}{i} \int_{(z', z)^*} \alpha_z > 0$  et  $\int_{\partial z^*} \alpha_z \neq 0$ ; c'est une relation linéaire en  $\nu$  et  $\mu$ , on peut donc, en ajustant  $\mu$  obtenir

$$\int_{\partial z^*} \alpha_z = 2i\pi \quad (\text{D.2})$$

$\alpha_z$  remplit bien les conditions requises, elle n'a que des périodes imaginaires pures car elle est exacte sur  $\Gamma$  tout entier ce qui fait qu'elle n'y a pas de période, et est imaginaire pure sur  $\Gamma^*$ . De plus, son seul demi-pôle est  $z$  de résidu  $+1$  par construction. Le chemin  $\lambda$  n'est pas intervenu.

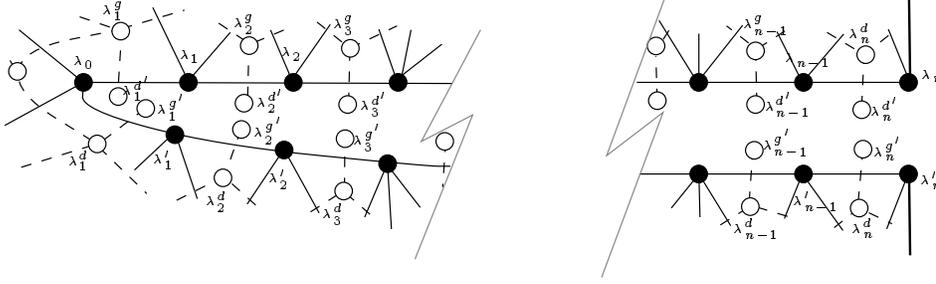
La construction de  $\beta_z$  repose sur le problème de Neumann : Le chemin  $\lambda$  joignant  $z$  au bord de  $\Gamma$  est une suite continue d'arêtes :

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (\text{D.3})$$

où  $\lambda_0 = z$  et  $\lambda_n \in \partial\Gamma$ . Quitte à raccourcir  $\lambda$ , on peut supposer que  $\lambda_n$  est le seul point de  $\lambda$  sur le bord. Chaque arête  $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$  a une arête duale  $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)^* = (\lambda_k^d, \lambda_k^g)$  dans  $\Gamma^*$ . Leur réunion  $\lambda^*$  n'est pas un chemin.

Soit  $\Gamma_\lambda^*$  le graphe obtenu à partir de  $\Gamma^*$  en doublant les sommets  $\lambda_k^d, \lambda_k^g$  par  $\lambda_k^{d'}, \lambda_k^{g'}$  et en donnant comme voisin à  $\lambda_k^d$  non plus  $\lambda_k^g$  mais  $\lambda_k^{g'}$  et de même pour  $\lambda_k^g$  et  $\lambda_k^{d'}$  (*cf.* le dessin). Les points  $\lambda_k^{d'}$  et  $\lambda_k^{g'}$  font partie du bord de  $\Gamma_\lambda^*$ . On équipe les nouvelles arêtes de la même longueur  $\ell$  que celle dont elles sont issues. (Si  $\Gamma_\lambda$  désigne le graphe obtenu à partir de  $\Gamma$  en le coupant suivant  $\lambda$  et en doublant les sommets et les arêtes mis en jeu sur la coupure,  $\Gamma_\lambda^*$  est isomorphe au complexe cellulaire dual de la décomposition cellulaire

$\Gamma_\lambda$ .)



Considérons donc  $b_2$  la solution au problème de Neumann sur  $\Gamma_\lambda^*$  suivant : Prenons comme points marqués les points du bord de  $\Gamma_\lambda^*$ , c'est-à-dire les points du bord de  $\Gamma^*$  et les nouveaux points  $\lambda_k^{g'}$  et  $\lambda_k^{d'}$ . Mettons comme conditions que la différence de valeurs entre  $\lambda_k^{d'}$  et  $\lambda_k^d$  est de  $-2i\pi$ , de  $+2i\pi$  entre  $\lambda_k^{g'}$  et  $\lambda_k^g$  et est imaginaire pure quelconque sur l'ensemble des arêtes du bord, sauf en un point où au lieu d'une condition de Neumann, on impose une condition de Dirichlet imaginaire pure. Le système a alors une solution unique.

De même que précédemment, la solution  $b_2$  définit une 1-forme  $\beta_z = (\beta_1, \beta_2)$  sur  $\Lambda$  par

$$\beta_2 = db_2 \quad \text{et} \quad \beta_1 = -i * \beta_2 \quad (\text{D.4})$$

Cette 1-forme est bien définie sur les arêtes de  $\lambda$  et de  $\lambda^*$  car la condition imposée implique

$$\int_{(\lambda_k^d, \lambda_k^g)} \beta_z := b_2(\lambda_k^d) - b_2(\lambda_k^{g'}) = b_2(\lambda_k^{d'}) - b_2(\lambda_k^g) \quad (\text{D.5})$$

$\beta_z$  est fermée également sur les faces  $\lambda_k^*$  :

$$\begin{aligned} \iint_{\lambda_k^*} d\beta_z &= \int_{\partial\lambda_k^*} \beta_z \\ &= b_2(\lambda_k^d) - b_2(\lambda_{k+1}^d) + b_2(\lambda_{k+1}^g) - b_2(\lambda_k^g) + \int_{(\lambda_k^d, \lambda_k^g)} \beta_z + \int_{(\lambda_{k+1}^g, \lambda_{k+1}^d)} \beta_z \\ &= 2i\pi - 2i\pi = 0 \end{aligned}$$

De même que précédemment,  $\beta_z$  est de type  $(1, 0)$  par construction, elle est exacte donc fermée sur  $\Gamma^* \setminus \{z^*\}$  et comme  $b_2$  est harmonique partout,  $\beta_z$  est fermée sur  $\Gamma$ .

Par contre, si la face  $z^*$  est formée des points  $z'_1, \dots, z'_n$ , avec  $z'_1 = \lambda_1^d$  et  $z'_{n+1} = \lambda_1^{d'}$ ,

$$\iint_{\partial z^*} \beta_z = b_2(z'_2) - b_2(z'_1) + b_2(z'_3) - \dots - b_2(z'_{n-1}) + b_2(z'_{n+1}) - b_2(z'_n) \quad (\text{D.6})$$

Mais  $b_2(\lambda_1^{d'}) = b_2(\lambda_1^d) + 2i\pi$  par construction donc

$$\iint_{\partial z^*} \beta_z = 2i\pi \quad (\text{D.7})$$

et  $\beta_z$  possède un unique demi-pôle intérieur en  $z$  de résidu  $+1$ . De plus, sur  $\Gamma^* \setminus \lambda^*$ , la 1-forme  $\beta_z$  est exacte donc n'a pas de période, et elle est réelle sur  $\Gamma$ , donc ses périodes sur  $\Lambda \setminus \lambda^*$  sont réelles.  $\square$

**Proposition 11** *Avec les notations du théorème 8, soit  $\omega$  une 1-forme sur  $\partial\Lambda$ , réelle sur  $\Gamma$  et imaginaire pure sur  $\Gamma^*$ , vérifiant l'équation de Cauchy-Riemann; il y a unicité de  $\beta_z$  s'identifiant à  $\omega$  sur le bord.*

On prend dans la démonstration, comme conditions de Neumann au bord, les différences imposées par  $\omega$ . Il n'y a alors plus aucun choix.  $\square$

Maintenant, un énoncé sur les surfaces sans bord :

**Théorème 9** *Soit  $z_1$  et  $z_2$  deux points distincts de  $\Gamma$ , décomposition cellulaire d'une surface topologique compacte sans bord  $\Sigma$ ,  $\lambda$  un chemin simple reliant  $z_1$  à  $z_2$ . Il existe un unique couple de 1-formes  $\alpha_{(z_1, z_2)}$  et  $\beta_{(z_1, z_2)}$ , holomorphes sur  $\Lambda \setminus \{z_1, z_2\}$ , ayant seulement deux demi-pôles  $z_1$  de résidu  $+1$  et  $z_2$  de résidu  $-1$  telles que les périodes sur  $\Lambda \setminus \lambda^*$  soient imaginaires pures pour  $\alpha_{(z_1, z_2)}$  et réelles pour  $\beta_{(z_1, z_2)}$ .*

**Preuve :** Considérons  $a_1$ , la fonction solution du problème de Dirichlet sur  $\Gamma$ , avec comme points marqués  $z_1$  et  $z_2$  ( $\Gamma$  n'a pas de bord) et comme condition  $+1$  en  $z_1$  et  $-1$  en  $z_2$ . Définissons

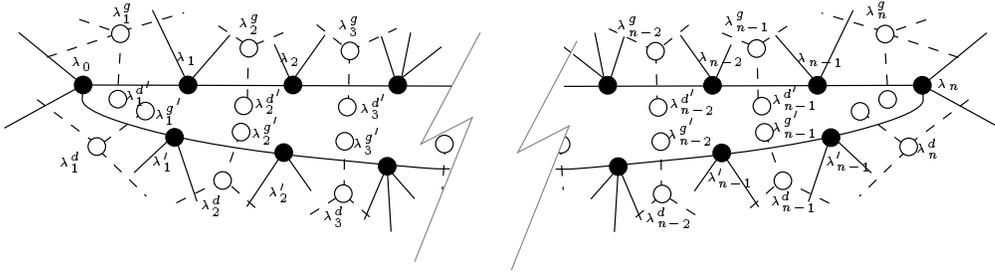
$$\alpha_0 = (da_1, -i * da_1) \quad (\text{D.8})$$

De même que précédemment, c'est une 1-forme holomorphe sur  $\Lambda \setminus \{z_1, z_2\}$  où elle a des demi-pôles simples. Par principe du maximum,  $\int_{\partial z_1^*} \alpha_0$  est un imaginaire pur  $ia$  où  $a > 0$ , donc

$$\alpha_{(z_1, z_2)} = \frac{2i\pi}{a} \alpha_0 \quad (\text{D.9})$$

vérifie  $\text{Res}_{z_1}(\alpha_{(z_1, z_2)}) = +1$  par construction, si bien que  $\text{Res}_{z_2}(\alpha_{(z_1, z_2)}) = -1$  puisque la somme des résidus est nulle et que c'est le seul autre demi-pôle. Comme  $\alpha_{(z_1, z_2)}$  est imaginaire pure sur  $\Gamma^*$  et exacte sur  $\Gamma$  (c'est-à-dire sans période), les périodes de  $\alpha_{(z_1, z_2)}$  sont imaginaires pures et  $\alpha_{(z_1, z_2)}$  remplit les conditions requises.

Pour  $\beta_{(z_1, z_2)}$ , de même que dans la démonstration précédente, construisons  $\Gamma_\lambda^*$  mais cette fois-ci avec  $\lambda$  allant de  $z_1$  à  $z_2$ , c'est-à-dire  $\lambda_0 = z_1$  et  $\lambda_n = z_2$  : Soit  $\Gamma_\lambda^*$  le graphe obtenu à partir de  $\Gamma^*$  en doublant les sommets  $\lambda_k^d, \lambda_k^g$  pour  $1 \leq k \leq n$  par  $\lambda_k^{d'}$ ,  $\lambda_k^{g'}$  et en donnant  $\lambda_k^{g'}$  comme voisin à  $\lambda_k^d$  et de même pour  $\lambda_k^{d'}$  et  $\lambda_k^g$ .



Soit  $b_2$  la solution au problème de Neumann sur  $\Gamma_\lambda^*$  avec comme points marqués les  $\lambda_k^{d'}$ ,  $\lambda_k^{g'}$  et pour conditions que la différence de valeur entre  $\lambda_k^{d'}$  et  $\lambda_k^d$  soit de  $-2i\pi$  pour  $0 < k < n$ , de  $+2i\pi$  entre  $\lambda_k^{g'}$  et  $\lambda_k^g$  pour  $1 < k < n$ . On demande de plus une condition de Dirichlet quelconque en  $\lambda_1^{g'}$ .

Définissons  $\beta_{(z_1, z_2)} = (-i * db_2, db_2)$ , c'est une fonction holomorphe sur  $\Lambda \setminus \{z_1, z_2\}$  où elle a des demi-pôles :

$$\iint_{\partial z_1^*} \beta_{(z_1, z_2)} = 2i\pi \quad (\text{D.10})$$

donc  $\text{Res}_{z_1}(\beta_{(z_1, z_2)}) = +1$  et par conséquent,  $\text{Res}_{z_2}(\beta_{(z_1, z_2)}) = -1$ . De plus, comme  $\beta_{(z_1, z_2)}$  est exacte sur  $\Gamma^* \setminus \lambda^*$ , et que  $\beta_{(z_1, z_2)}$  est réelle sur  $\Gamma$ , ses périodes sur  $\Lambda \setminus \lambda^*$  sont réelles.

L'unicité se prouve par différence : Supposons qu'on ait deux formes solutions  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ), leur différence est une 1-forme holomorphe sans demi-pôle dont la partie réelle (resp. imaginaire) est sans période. Elle a donc une primitive harmonique partout, qui ne peut être que constante. Donc la partie réelle (resp. imaginaire) de la différence est nulle, comme c'est une 1-forme holomorphe, sa partie imaginaire, (resp. réelle) est nulle aussi.  $\square$

**Remarque :** Dans les théorèmes 8 et 9, les formes  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent des points extrêmes  $z$ ,  $z_1$  et  $z_2$  mais ne dépendent de  $\lambda$  que par la classe d'homologie entière dans  $\lambda$  relativement aux points extrêmes.  $\square$

**Remarque :** Il existe une interprétation intéressante de la fonction  $a_1$  sur  $\Gamma$  : Définissons une marche aléatoire sur  $\Lambda$ , la probabilité de transition d'un point  $v$  à un de ses voisins  $v'$  est égale à

$$p(v, v') := \frac{\rho(v, v')}{\sum_{u \sim v} \rho(u, v)}$$

c'est à dire la constante conforme normalisée. Alors,  $\frac{a_1(v)+1}{2}$  est la probabilité qu'une marche aléatoire partant de  $v$  arrive en  $z_1$  avant d'être passée en  $z_2$ .  $\square$

**Théorème 10** *Soient  $A$  et  $B$  une paire de lacets conjugués de  $\Lambda_1$ ,  $A$  sur  $\Gamma$  et  $B$  sur  $\Gamma^*$  (ou vice versa), c'est-à-dire  $A \cdot B = 1$  ; il existe une unique 1-forme holomorphe  $\Phi_{A,B}$  telle que  $\text{Re}(\int_B \Phi_{A,B}) = 1$  et  $\int_\gamma \Phi_{A,B} \in i\mathbb{R}$  pour tout  $\gamma$  lacet de  $\Lambda \setminus A^*$ .*

**Preuve :** Comme dans le cas continu, on décompose  $A$  en deux arcs  $A = \lambda \circ \lambda'$  où  $\lambda$  va de  $z_1$  à  $z_2$  et  $\lambda'$  de  $z_2$  à  $z_1$ , points de  $\Gamma$ . Le premier arc permet de construire une 1-forme  $\beta_{z_1, z_2}$  et le deuxième,  $\beta_{z_2, z_1}$ .

$$\Phi_{A,B} = \frac{1}{2i\pi} (\beta_{z_1, z_2} + \beta_{z_2, z_1}) \quad (\text{D.11})$$

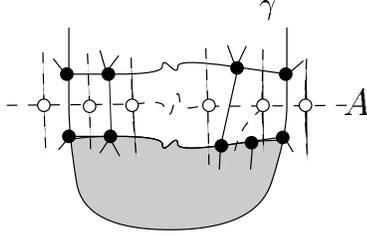
remplit les conditions requises. En effet, il est clair que les périodes de  $\Phi_{A,B}$  sur tout lacet de  $\Lambda \setminus A^*$  sont imaginaires pures. Supposons que  $B$  coupe  $\lambda$  en un point et ne rencontre pas  $\lambda'$ . L'intégrale sur  $B$  de  $\beta_{z_2, z_1}$  est purement réelle ; pour calculer celle de  $\beta_{z_1, z_2}$ , on décompose  $B$  en  $B' + B''$  où  $B' \cap \lambda = \emptyset$  ( $B' \cdot \lambda' = 1$ ), et  $B''$  borde un disque contenant  $z_1$ . L'intégrale sur la première courbe est imaginaire pure et est égale à 1 sur la seconde.

Le même argument que précédemment prouve l'unicité.  $\square$

**Proposition 12** *Avec les notations du théorème, si  $\gamma$  est un lacet sur  $\Lambda$ , ou si  $\gamma$  est un lacet sur  $\Gamma^*$  tel que  $\gamma \cdot A = 0$  en homologie,*

$$\oint_\gamma \Phi_{A,B} \in i\mathbb{R}.$$

**Preuve :** La première assertion est évidente, pour la seconde, on écrit  $\gamma$  comme somme de lacets  $\gamma'_i$  ne contenant aucune arête de  $A^*$ , et de bords de faces  $\gamma''_j$  centrées sur  $A$ . L'intégrale de  $\Phi_{A,B}$  le long des  $\gamma''_j$  est nulle et imaginaire pure le long des  $\gamma'_i$ .



□

## D.2 Dimensions

Dans le cas continu, pour une surface de Riemann de genre  $g$  compacte, l'espace des 1-formes holomorphes est de dimension  $g$ ; on a un analogue de ce fait sur les surfaces discrètes mais avec un doublement des degrés de liberté: L'espace des formes holomorphes discrètes sur le double discret d'une surface compacte sans bord est de dimension  $2g$ . Nous allons présenter trois démonstrations de ce fait; la première utilise les 1-formes  $\Phi(A, B)$  construites précédemment, la deuxième est fondée sur le théorème de Neumann et la troisième découle du théorème de Hodge.

**Lemme 3** Soit  $\omega_0, \dots, \omega_{2g}$  des 1-formes holomorphes, il existe  $2g+1$  nombres complexes non tous nuls  $\lambda_0, \dots, \lambda_{2g}$  tels que

$$\lambda_0 \omega_0 + \dots + \lambda_{2g} \omega_{2g} = 0 \tag{D.12}$$

**Preuve :** Soit  $A_k, B_k, 1 \leq k \leq g$  une dissection canonique de  $\Gamma$  par  $g$  paires de lacets conjugués. Renommons temporairement  $\gamma_k = A_k$  et  $\gamma_{k+g} = B_k$ .

Le système de  $2g$  équations à  $2g + 1$  inconnues complexes  $\lambda_k$ :

$$1 \leq l \leq 2g, \quad \sum_{k=0}^{2g} \lambda_k \oint_{\gamma_l} \omega_k = 0 \tag{D.13}$$

admet une solution non nulle  $(\lambda_k)$ . La 1-forme holomorphe

$$\omega = \sum_{k=0}^{2g} \lambda_k \omega_k \quad (\text{D.14})$$

est donc sans période sur  $\Gamma$ , si bien qu'elle peut être intégrée en une fonction harmonique complexe sur  $\Gamma$ . Mais par principe du maximum celle-ci est constante. Donc sa dérivée  $\omega$  est nulle sur  $\Gamma$ . Comme  $\omega$  est une 1-forme holomorphe, elle est nulle sur  $\Gamma^*$  également.  $\square$

**Théorème 11** *Si  $\Sigma$  est de genre  $g$ , il y a  $2g$  différentielles holomorphes indépendantes.*

**Première preuve :** (Adaptée de Siegel [Sie]) Soit,  $(A_k, B_k)$  une dissection canonique de  $\Gamma$ ,  $(A'_k, B'_k)$  la dissection duale de  $\Gamma^*$ . Remarquons que  $A'_k \cdot B'_l = -\delta_{k,l}$ . Nommons temporairement, pour  $1 \leq k \leq g$ ,  $\gamma_k = A_k$ ,  $\gamma_{k+g} = B_k$ ,  $\gamma_{k+2g} = A'_k$ ,  $\gamma_{k+3g} = B'_k$ .

Définissons

$$l(k) = \begin{cases} k + 2g & \text{si } k \leq 2g \\ k - 2g & \text{si } k > 2g \end{cases}$$

Le théorème (10) nous donne l'existence des  $4g$  formes holomorphes suivantes :

$$1 \leq k \leq g, \omega_k = \Phi(-\gamma_{l(k)}, \gamma_k) \quad (\text{D.15})$$

$$g + 1 \leq k \leq 2g, \omega_k = \Phi(\gamma_{l(k)}, \gamma_k) \quad (\text{D.16})$$

$$2g + 1 \leq k \leq 3g, \omega_k = \Phi(\gamma_{l(k)}, \gamma_k) \quad (\text{D.17})$$

$$3g + 1 \leq k \leq 4g, \omega_k = \Phi(-\gamma_{l(k)}, \gamma_k) \quad (\text{D.18})$$

Si  $k \neq l$ , soit  $\gamma_{l(k)}$  et  $\gamma_l$  ne sont pas sur le même graphe, soit elles sont d'intersection nulle,  $\gamma_{l(k)} \cdot \gamma_l = 0$  donc les formes  $\omega_k$  vérifient

$$1 \leq k \leq 4g, \quad \operatorname{Re} \left( \oint_{\gamma_k} \omega_k \right) = 1 \quad (\text{D.19})$$

et pour tout cycle  $C$  de  $\Lambda \setminus \gamma_{l(k)}^*$ ,

$$\oint_C \omega_k \in i\mathbb{R}$$

En particulier, pour  $l \neq k$ ,  $\oint_{\gamma_l} \omega_k \in i\mathbb{R}$ . Donc la matrice  $4g \times 4g$  de coefficients

$$\left( \operatorname{Re} \left( \oint_{\gamma_l} \omega_k \right) \right)_{1 \leq k, l \leq 4g} \quad (\text{D.20})$$

est la matrice identité.

Soit  $4g$  réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_{4g}$ , la 1-forme

$$\omega = \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_{4g} \omega_{4g} \quad (\text{D.21})$$

vérifie  $\lambda_k = \operatorname{Re} \left( \oint_{\gamma_k} \omega \right)$ , donc  $\omega$  n'est nulle que pour  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{4g} = 0$ , ce qui prouve l'indépendance sur  $\mathbb{R}$  des  $4g$  formes  $\omega_1, \dots, \omega_{4g}$ . Soit  $q$  le rang sur le corps des complexes des  $(\omega_k)_{1 \leq k \leq 4g}$ , et supposons en réindexant,  $\omega_1, \dots, \omega_q$  indépendantes sur  $\mathbb{C}$ . Le lemme (3) nous donne  $q < 2g + 1$ . Il est clair que  $\omega_k$  et  $i\omega_k$  sont des formes indépendantes sur les réels. Considérons le système à  $2q$  inconnues  $(\lambda_k, \mu_k)$  réelles,

$$1 \leq k \leq 4g, \quad \operatorname{Re} \left( \oint \lambda_1 \omega_1 + i\mu_1 \omega_1 + \dots + \lambda_q \omega_q + i\mu_q \omega_q \right) = 0$$

Si  $2q < 4g$ , ce système a une solution  $(\lambda_k, \mu_k)$  non nulle et la 1-forme correspondante

$$\lambda_1 \omega_1 + i\mu_1 \omega_1 + \dots + \lambda_q \omega_q + i\mu_q \omega_q$$

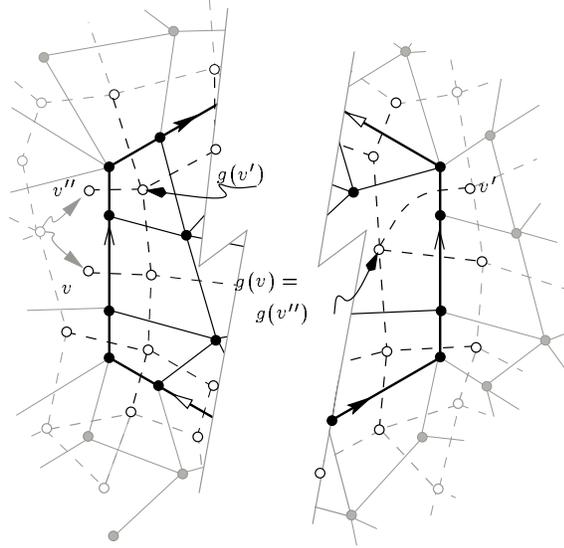
est holomorphe et a des périodes imaginaires pures, donc sa partie réelle est exacte, donc nulle, ce qui est absurde. Donc  $q = 2g$ .  $\square$

**Deuxième preuve :** Elle s'appuie uniquement sur le problème de Neumann comme dans la démonstration du théorème 9. Nous ne donnons que les grandes lignes :

Soit  $(\gamma_k)_{1 \leq k \leq 2g}$  une dissection canonique de  $\Gamma$ . Elle permet de voir  $\Gamma$  comme une décomposition cellulaire  $\tilde{\Gamma}$  d'un polygône fondamental. Son dual  $\tilde{\Gamma}^*$  a des points à l'intérieur du polygône fondamental et les sommets de son bord à l'extérieur. Orientons toutes les arêtes du bord du polygône fondamental dans le même sens.

Chaque point  $v \in \partial\tilde{\Gamma}^*$  correspond à une arête  $a$  sur le bord du polygône fondamental. Dans  $\Gamma$ ,  $a$  est identifiée à une autre arête du bord du polygône fondamental,  $-g(a)$ , orientée dans le sens contraire. Au point  $v \in \partial\tilde{\Gamma}^*$ , on

associe  $g(v) \in \tilde{\Gamma}^*$ , le sommet interne de l'arête  $g(a)^*$ .



Une arête  $a$  du bord du polygône fondamental participe à des lacets de base, soit  $\lambda_k(v) \in \mathbb{Z}$  le nombre algébrique de fois où le lacet  $\gamma_k$  passe par  $a$ .

Choisissons maintenant  $2g$  nombres complexes  $p_1, \dots, p_{2g}$ . Pour chaque couple de points  $(v, g(v))$ , imposons la condition de Neumann

$$f(g(v)) - f(v) = \sum_{k=1}^{2g} \lambda_k(v) p_k \quad (\text{D.22})$$

sauf en un point extérieur où on impose une condition de Dirichlet quelconque. Il existe une unique solution harmonique sur les points intérieurs de  $\tilde{\Gamma}^*$ . Comme on l'a montré pour  $\beta_{z_1, z_2}$ , sa dérivée extérieure  $\omega$  est une 1-forme bien définie sur  $\Gamma^*$ . Sa période suivant  $\gamma'_k$ , le lacet de  $\Gamma^*$  dual de  $\gamma_k$ , est égale à  $p_k$ . En effet, il existe au moins un couple d'arêtes du bord du polygône fondamental ne participant qu'à  $\gamma'_k$  et la condition de Neumann en ce couple implique que la période de la solution suivant  $\gamma'_k$  est  $p_k$ . On complète  $\omega$  par la 1-forme  $\omega' = -i * \omega$  sur  $\Gamma$  qui rend le couple  $(\omega, \omega')$  holomorphe. La dimension des 1-formes holomorphes sur  $\Lambda$  est donc  $2g$ .  $\square$

**Troisième preuve :** (adaptée de de Rham [dRh]) Celle-ci utilise la décomposition de Hodge: Soit  $\omega_1, \dots, \omega_{2g} \in \Omega_1(\Gamma)$  des 1-formes fermées dont les

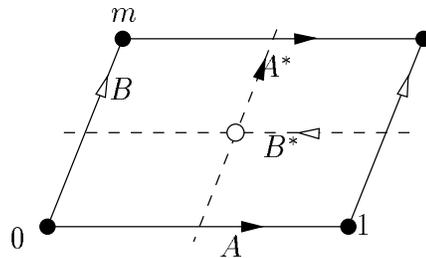
classes forment une base de la cohomologie de  $\Gamma$ . Le théorème de Hodge nous dit que les éléments  $H\omega_1, \dots, H\omega_{2g} \in \mathcal{H}^1(\Gamma)$  sont aussi indépendants car leurs classes en cohomologie sont égales,  $[H\omega_k] = [\omega_k]$ .

Pour tout  $1 \leq k \leq 2g$ , on considère  $\varphi_k = (H\omega_k, i^* H\omega_k)$ , c'est une 1-forme de type  $(1, 0)$ , étant harmonique complexe elle est fermée. Elle est donc holomorphe. Toute forme holomorphe est en particulier harmonique sur  $\Gamma$  donc est combinaison linéaire des  $(H\omega_k)_{1 \leq k \leq 2g}$ , donc les  $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq 2g}$  forment une base des 1-formes holomorphes sur  $\Lambda$ .  $\square$

Il reste à comprendre plus en profondeur ce doublement étant donné qu'il disparaît à la limite continue. La chose la plus simple à faire serait de définir l'espace des formes holomorphes telles que les périodes sur des lacets du graphe et du dual, homotopes sur  $\Sigma$ , soient les mêmes, comme dans le continu. Mais cet espace n'est pas de la bonne dimension, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple :** Soit  $\Sigma = \mathbb{T}^2$  le tore de genre un standard et  $A, B \in \pi_1(\Sigma)$  des lacets simples composant une base symplectique standard. Prenons comme décomposition cellulaire  $\kappa$  la décomposition standard du tore par une face  $\Omega$ , un sommet  $P$  (le point base du groupe fondamental) et les deux lacets  $A$  et  $B$ . Cette décomposition cellulaire, bien que standard est vraiment dégénérée car l'application bord  $\partial$  est nulle, chaque cellule intervenant deux fois avec des signes opposés dans tous les calculs de bord.

La décomposition cellulaire duale  $\kappa^*$  lui est isomorphe, composée d'une face  $\Omega' = p^*$ , d'un sommet  $p' = \Omega^*$  au centre de la face  $\Omega$  et de deux arêtes duales  $A' = B^*$  homotope à  $-A$  et  $B' = A^*$ , homotope à  $B$ . Voyons  $\kappa^*$  comme la translatée de  $\kappa$  de  $\frac{A+B}{2}$ .



Munissons le double  $\Lambda$  ainsi composé d'une métrique  $\ell$ . Toutes les 1-formes sont harmoniques car l'application bord est nulle si bien que le laplacien l'est également. Soit  $\alpha$  une 1-forme donnée par ses valeurs le long des quatre arêtes de notre double de telle manière que des lacets homotopes sur  $\Sigma$  aient

les mêmes périodes normalisées :

$$\int_A \alpha = \int_{A'} \alpha = 1 \quad \int_B \alpha = \int_{B'} \alpha = m$$

Considérons l'équation de Cauchy-Riemann sur les couples  $(A, B')$  et  $(B, A')$  :

$$\frac{m}{\ell(B')} = i \frac{1}{\ell(A)}$$

$$\frac{-1}{\ell(A')} = i \frac{m}{\ell(B)}$$

Donc ces équations ne sont vérifiées que si

$$m \in i\mathbb{R} \quad \text{et}$$

$$\frac{\ell(B')}{\ell(A)} = \frac{\ell(B)}{\ell(A')} = \frac{m}{i}$$

□

De manière générale, la condition que les périodes sur des lacets homotopes sur  $\Sigma$  soient égales permet d'associer à toute décomposition cellulaire d'une surface topologique (compacte mais pouvant avoir un bord), un sous-ensemble de structures conformes discrètes sur le double (qu'a-t'il à voir avec l'ensemble des structures conformes discrètes rendant la carte critique?).

## Chapitre E

# Les graphes

Soit  $\Sigma$  une surface (ouverte ou compacte, avec ou sans bord). Nous avons défini (à isomorphisme près) le complexe cellulaire  $\Gamma^*$  associé à une décomposition cellulaire  $\Gamma$ . Dans ce chapitre, nous définissons plusieurs autres complexes cellulaires,  $K$ ,  $\Upsilon$  et  $\diamond$  associés à  $\Gamma$  dont nous aurons besoin par la suite. De même que  $\Gamma^*$ , ils ne sont définis qu'à isomorphisme près, leur combinatoire étant bien définie.

### E.1 Le graphe médial

**Définition 9** *Le complexe médial  $K$  de  $\Lambda$  est le complexe cellulaire défini par*

$K_0$ , ses sommets, sont les intersections des paires  $\{a, a^*\}$  d'arêtes duales de  $\Lambda$ .

$K_1$ , ses arêtes joignent deux sommets  $\{a, a^*\}$  et  $\{a', a'^*\}$  à l'intérieur d'une face  $F$  de  $\Gamma$  si  $a$  et  $a'$  (ou  $a$  et  $a'^*$ ) sont des arêtes consécutives sur le bord de  $F$ .

$K_2$ , ses faces contiennent un sommet de  $\Lambda_0 = \Gamma_0 \sqcup \Gamma_0^*$ .

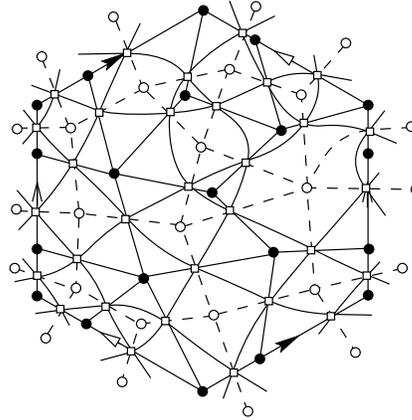
Soit  $F_K$  une face de  $K_2$  ayant en son centre  $v \in \Lambda_0$ . Si le bord de la face  $v^* \in \Lambda_2$  est (en prenant la notation multiplicative),

$$\partial v^* = \prod_1^{V(v)} a_k \tag{E.1}$$

Le bord de  $F_K$  sera

$$\partial F_K = \prod_1^{V(v)} (\{a_k, a_k^*\}, \{a_{k+1}, a_{k+1}^*\}) \quad (\text{E.2})$$

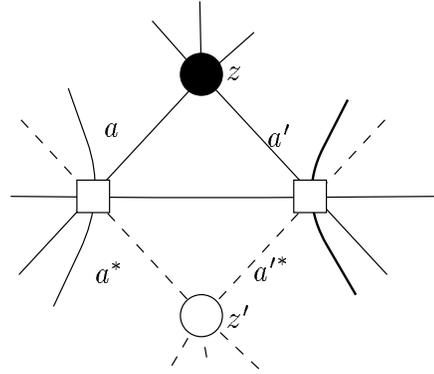
Comme un  $\bullet$  et un  $\circ$  représentent des sommets respectivement de  $\Gamma$  et de  $\Gamma^*$ , on notera par un carré  $\square$  les sommets de  $K$ .



**Remarque :**  $K$  est **tétraivalent**. Si la surface topologique  $\Sigma$  dont  $\Gamma$  est une décomposition cellulaire est *sans bord*,  $K$  en est également une décomposition cellulaire. Le 1-squelette  $K_1$  est une projection régulière d'un *entrelacs* dans un voisinage tubulaire de  $\Sigma$ . Si  $\Sigma$  est une surface à bord,  $K_1$  est la projection régulière d'un *enchevêtrement* dans une variété de dimension trois à bord, voisinage tubulaire de la surface à bord  $\Sigma$ . L'information des dessus-dessous n'est pas codée dans  $K_1$ .  $\square$

Une arête du médial entre les deux sommets de  $K_0$ ,  $\{a, a^*\}$  et  $\{a', a'^*\}$  sera souvent (parfois abusivement) désignée par le couple de sommets  $(z, z')$  où

$$z = \partial a \cap \partial a' \text{ et } z' = \partial a^* \cap \partial a'^* \quad (\text{E.3})$$

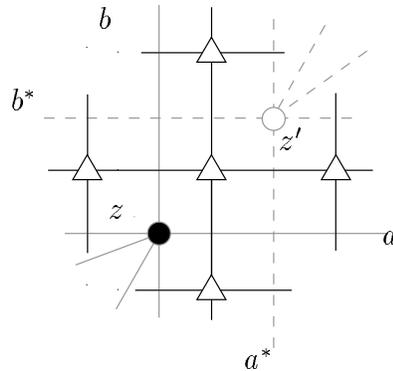


## E.2 Le graphe triple

C'est le graphe médial du graphe médial.

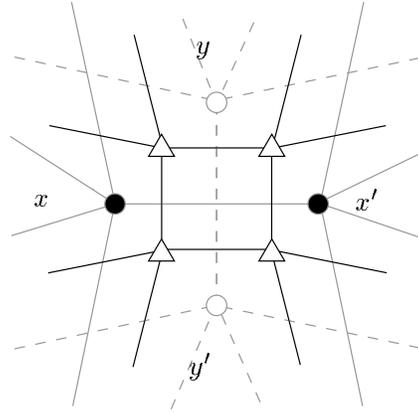
**Définition 10** *Le graphe triple  $\Upsilon$  est le complexe cellulaire défini par*

$\Upsilon_0$ , un sommet par arête du graphe médial  $K$ , nous noterons donc  $\{z, z'\} \in \Upsilon_0$  pour deux points voisins,  $z \in \Gamma$  et  $z' \in \Gamma^*$ . On peut également le voir comme un quadruplet d'arêtes  $\{a, b, a^*, b^*\}$ , où  $z = a \cap b$  et  $z' = a^* \cap b^*$ ,



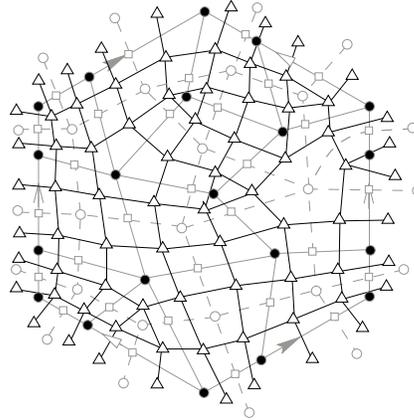
$\Upsilon_1$ , un sommet  $\{x, y\}$  est relié à  $\{\xi, \zeta\}$  si et seulement si (en notant  $x \sim x'$  si  $(x, x') \in \Lambda_1$ ),

$$\begin{cases} x = \xi \\ y \sim \zeta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = \zeta \\ x \sim \xi \end{cases} \quad (\text{E.4})$$



$\Upsilon_2$ , ses faces, de trois types, selon qu'elles sont centrées en un point de  $\Gamma_0$ , de  $\Gamma_0^*$  ou de  $K_0$ . Une face centrée en  $\{a, a^*\} \in K_0$  a comme points de  $\Upsilon_0$  sur son bord les quatre paires de points l'un sur  $\Gamma$ , l'autre sur  $\Gamma^*$  qu'on peut faire avec les extrémités de  $a$  et  $a^*$ . Une face centrée en un point  $v \in \Gamma_0$  tel que la face  $v^*$  contient les points  $v_1^*, \dots, v_V^* \in \Gamma^*$ , a comme points de  $\Upsilon_0$  sur son bord les  $V$  éléments  $\{v, v_k^*\}$ , de même pour une face centrée en un point de  $\Gamma^*$ .

On notera les sommets de  $\Upsilon$  par des triangles.

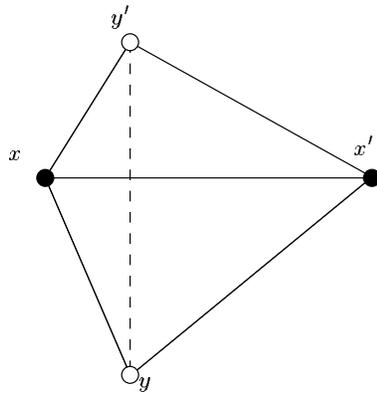


### E.3 Le graphe diamant

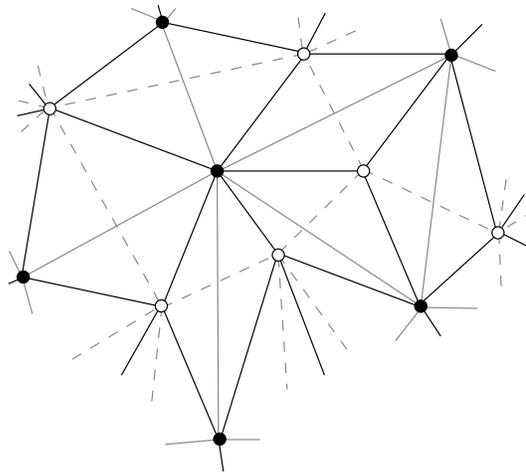
**Définition 11** Soit  $\Gamma$  une décomposition cellulaire d'une surface  $\Sigma$ , on définit le complexe diamant  $\diamond$  par

$\diamond_0$ , ses sommets, sont les sommets de  $\Gamma$  et de  $\Gamma^*$ ,  $\diamond_0 = \Gamma_0 \sqcup \Gamma_0^*$ ,

$\diamond_1$ , ses arêtes joignent des sommets  $x \in \Gamma_0, y \in \Gamma_0^*$ , proches de  $\Gamma$  et de  $\Gamma^*$   
 ( $\diamond_1$  est en bijection avec  $\Upsilon_0$ ),



$\diamond_2$ , ses faces sont des quadrilatères dont les diagonales sont des arêtes  
 duales de  $\Gamma$  et de  $\Gamma^*$  ( $\diamond_2$  est en bijection avec  $K_0$ ).



Il est immédiat, quand on connaît  $\diamond$ , de retrouver la surface combinatoire  $\Gamma, \Gamma^*$  sous-jacente. On représentera donc indifféremment l'un ou l'autre.



## Chapitre F

# Cartes critiques

### F.1 Définition

La notion d'holomorphie discrète est basée sur l'idée que la dualité entre les arêtes de deux décompositions cellulaires duales d'une surface, est l'analogue d'une structure complexe discrète. Moralement, des arêtes duales sont orthogonales. Dans cette optique, l'équation de Cauchy-Riemann pour une fonction, qui lie sa dérivée dans une direction à sa dérivée dans une direction orthogonale prend sens si on munit les arêtes d'une longueur. C'est ce qui nous a amené à l'équation :

$$\frac{f(y') - f(y)}{\ell(y, y')} = i \frac{f(x') - f(x)}{\ell(x, x')}$$

Mais jusqu'à maintenant, nous n'avons donné aucun sens géométrique aux longueurs et à l'orthogonalité.

**Définition 12** *Un double complexe cellulaire muni d'une métrique,  $(\Lambda, \ell)$  sur  $\Sigma$  une surface (à bord ou non, compacte ou non), est **semi-critique** s'il existe une application (définie à isométrie de  $\mathbb{C}$  près)  $Z : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  du revêtement universel de la surface dans le plan complexe orienté, identifié au plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ , telle que :*

1. *Pour toute arête  $a \in \tilde{\Lambda}_1$ , l'image  $Z(a)$  est un segment linéaire de longueur  $\ell(a)$ ,*
2. *des arêtes duales sont envoyées sur des segments orthogonaux et le repère  $(Z(a), Z(a^*))$  est direct,*
3. *l'application  $Z$  est localement un plongement hors des sommets,*

4. il existe une représentation  $\rho$  du groupe fondamental (pointé)  $\pi_1(\Sigma)$  (qui agit par définition sur  $\tilde{\Sigma}$ ), dans le groupe des déplacements de  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$\forall \gamma \in \pi_1(\Sigma), Z \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ Z$$

Si, de plus, la distance entre deux extrémités d'une arête quelconque de  $\diamond$  est une constante,

$$\forall (x, y) \in \diamond_1, d(x, y) = \delta$$

alors le double est **critique**. Dans le cas semi-critique, on définit  $\delta$  comme le maximum de la longueur de l'image des côtés de tous les quadrilatères de  $\diamond$ .

L'application  $Z$  est donc un revêtement ramifié du revêtement universel sur le plan complexe euclidien et le groupe fondamental agit de manière covariante par des isométries.

Comme la métrique est par définition plate hors des singularités, la propriété 3. implique que les points de ramification sont parmi les sommets de  $\Lambda_0$ .

Le plan est muni d'une métrique euclidienne et on peut la remonter sur chacune des faces de  $\tilde{\diamond}$ , puis sur  $\tilde{\Sigma}$ . Comme le groupe fondamental agit par isométrie, cela munit donc  $\Sigma$  d'une métrique et d'une **structure conforme**. Cette métrique est **plate à singularités coniques** :

**Définition 13** *Le cône standard d'angle  $\theta$  est la surface métrique*

$$V_{\theta} := \{(r, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}/\theta\mathbb{Z}\} / (0, t) \sim (0, t')$$

muni de la métrique  $ds^2 := dr^2 + r^2 dt^2$ .

Sur une surface  $\Sigma$ , une **métrique plate à singularités coniques**  $x_1, x_2, \dots \in \Sigma$  (des points isolés), d'angles  $\theta_1, \theta_2, \dots \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  est une métrique euclidienne hors des points coniques (c'est-à-dire qu'en tout point générique, il existe un voisinage isométrique à un ouvert du plan euclidien), admettant en  $x_k$  un voisinage isométrique à un voisinage du sommet du cône standard d'angle  $\theta_k$ .

La semi-criticalité implique donc l'existence d'une métrique plate à singularités coniques sur  $\Sigma$ .

Les singularités coniques sur  $\tilde{\Sigma}$  sont les points de ramification du revêtement  $Z$  et sont donc parmi les sommets de  $\tilde{\Lambda}_0$ , les singularités coniques sur  $\Sigma$  sont donc, de même, parmi les sommets de  $\Lambda_0$ .

De plus, les angles sont multiples positifs de  $2\pi$  : Soit  $v \in \tilde{\Lambda}_0$  un sommet, l'image par  $Z$  du bord de la face  $v^*$  est un polygone qui, d'après la propriété 3. et la propriété 2., tourne autour du point  $Z(v)$ , toujours dans le sens positif. Comme elle forme un cycle, on en déduit que la somme des angles des quadrilatères en  $v$  est multiple positif de  $2\pi$ . En particulier, on déduit de cela que les isométries par lesquelles le groupe fondamental agit sont des **translations**.

## F.2 En termes de métrique plate

La semi-criticalité munit donc la surface d'une structure conforme. Réciproquement, étant donnée une structure de surface de Riemann sur une surface  $\Sigma$  (une structure conforme), on peut donner une caractérisation alternative de la semi-criticalité en ces termes :

Il faut d'abord choisir une réalisation géométrique des deux décompositions cellulaires qui donne un sens géométrique à la longueur d'une arête. En particulier la décomposition duale est définie à isomorphisme près. Une première idée, basée sur un théorème de Colin de Verdière est de choisir les décompositions cellulaires géodésiques pour une certaine métrique dans la classe conforme.

**Théorème 12 (Colin de Verdière) [CdV91]** *Soit  $\Sigma$  une surface compacte sans bord munie d'une métrique riemannienne,  $\kappa$  une décomposition cellulaire, il existe une décomposition cellulaire géodésique  $\kappa'$  isomorphe à  $\kappa$ , unique à isométrie près.*

On comprend alors la métrique  $\ell(a)$  d'une arête du double comme la longueur du morceau de géodésique correspondant et l'angle entre deux arêtes comme l'angle entre leurs géodésiques concurrentes, donnant ainsi un sens précis à l'orthogonalité des arêtes duales.

Le problème est que l'orthogonalité est une notion locale sur une surface de Riemann, et la rectification des deux décompositions cellulaires peut faire que les géodésiques correspondant à des arêtes duales ne se coupent plus. Il faut alors transporter parallèlement les géodésiques de manière à ce qu'elles se coupent pour pouvoir déterminer l'angle qu'elles forment. Mais il n'y a en général pas de façon canonique de faire cela, l'angle va dépendre du chemin suivi pour transporter les géodésiques, c'est le problème de la **courbure**.

On est donc amené à considérer des **métriques plates**. Mais une métrique ne peut pas être plate partout car la courbure totale est un invariant topologique,  $2\pi\chi(\Sigma)$  où  $\chi(\Sigma) = 2 - 2g$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré de

la surface,  $g$  son genre. La courbure est donc concentrée en des singularités coniques. Quelles libertés a-t-on dans le choix des singularités et de leurs angles ?

**Théorème 13 (Trojanov)** [Tro] Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann compacte sans bord,  $x_1, \dots, x_n \in \Sigma$  et  $\theta_1, \dots, \theta_n > 0$  tels que

$$\sum_k (2\pi - \theta_k) = 2\pi\chi(\Sigma),$$

il existe une unique métrique plate dont les singularités coniques sont les  $x_k$  d'angle  $\theta_k$ , d'aire totale unité.

Là encore la notion d'angle est locale car le transport parallèle autour d'un point conique change l'angle. Mais on peut s'affranchir de ce problème en choisissant les angles aux sommets coniques multiples de  $2\pi$ . La notion d'angle est alors globale sur la surface privée des points coniques. On demande alors à la décomposition cellulaire de contenir parmi ses sommets les points coniques.

**Proposition 13** Un double complexe cellulaire muni d'une métrique,  $(\Lambda, \ell)$  sur  $\Sigma$  une surface de Riemann est **semi-critique** si et seulement s'il existe une métrique riemannienne plate à singularités coniques sur  $\Sigma$ , d'angles multiples de  $2\pi$ , telle que le graphe diamant  $\diamond$  associé à  $\Lambda$  soit une décomposition cellulaire géodésique localement finie de  $\Sigma$  (les arêtes sont des segments), les singularités coniques se trouvant en des sommets, et vérifiant :

1. Toute arête  $a \in \tilde{\Lambda}_1$  est un segment linéaire de longueur  $\ell(a)$ .
2. Des arêtes duales  $a, a^*$  sont des segments orthogonaux et le repère  $(\vec{a}, \vec{a}^*)$  est orienté direct.

Si, de plus, le graphe diamant  $\diamond$  est composé de **losanges** de même côté  $\delta$  (pour la métrique plate), la carte est **critique**.

**Preuve :** On a vu que la semi-criticalité impliquait l'existence d'une telle métrique plate sur  $\Sigma$ , donnant un sens géométrique aux notions de longueur et d'orthogonalité. Il s'agit ici de démontrer la réciproque. Prenons donc une structure plate à singularités coniques multiples de  $2\pi$  comme ci-dessus.

La structure euclidienne hors des points de ramification nous donne l'existence d'une application (définie à isométrie de  $\mathbb{C}$  près) d'un polygône

fondamental  $P \subset \Sigma$  dans le plan complexe euclidien qui est une isométrie hors des singularités :

$$Z : P \rightarrow \mathbb{C}$$

L'image de deux bords de  $P$  à identifier sont isométriques et comme les angles coniques sont multiples de  $2\pi$ , ils sont liés par une translation. On a donc une représentation  $\rho$  du groupe fondamental de la surface dans les isométries du plan et on étend le revêtement ramifié au revêtement universel tout entier  $Z : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$  de telle manière à respecter la propriété 4.

Comme  $Z$  est une isométrie hors des singularités, elle l'est sur l'intérieur des faces de  $\diamond$  et donc :

1. Pour toute arête  $a \in \tilde{\Lambda}_1$ , l'image  $Z(a)$  est un segment linéaire de longueur  $\ell(a)$ ,
2. des arêtes duales sont envoyées sur des segments orthogonaux et le repère  $(Z(a), Z(a^*))$  est direct,

Il reste à montrer que, sur tout quadrilatère de  $\tilde{\diamond}_2$ , l'application  $Z$  est un plongement.

La propriété 3. est satisfaite car  $Z$  est une isométrie hors des sommets donc localement un plongement.  $\square$

Nous prendrons désormais le point de vue des métriques euclidiennes à singularités coniques.

**Proposition 14** *Toute carte locale sur  $\Omega \subset \Sigma$  ouvert,  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , isométrique conservant l'orientation, se restreint en une fonction holomorphe discrète.*

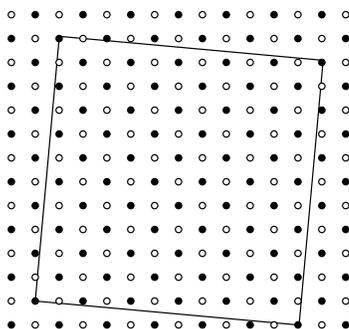
**Preuve :** Prenons un couple d'arêtes duales  $(x, x')$  et  $(y, y')$ . Les images de ces deux arêtes sont les diagonales d'un quadrilatère isométrique, ses diagonales  $|Z(x') - Z(x)| = \ell(x, x')$  et  $|Z(y') - Z(y)| = \ell(y, y')$  ainsi que ses côtés  $|Z(x) - Z(y)|$ , etc, sont de mêmes longueurs, donc  $Z(x') - Z(x)$  reste orthogonal à  $Z(y') - Z(y)$  en tant que vecteurs du plan. Par conséquent

$$\frac{Z(x') - Z(x)}{\ell(x, x')} = \pm i \frac{Z(y') - Z(y)}{\ell(y, y')}$$

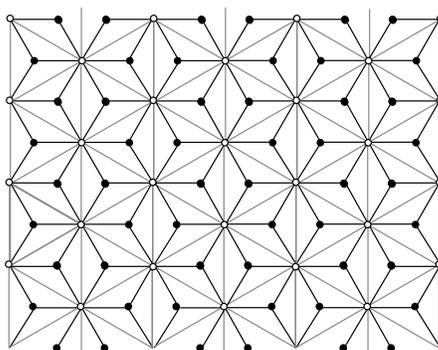
Et le fait que l'application préserve l'orientation donne le bon signe.  $\square$

**Exemples sur le tore et le plan :** Les exemples les plus simples de cartes critiques sont données par les décomposition cellulaires du plan par le réseau

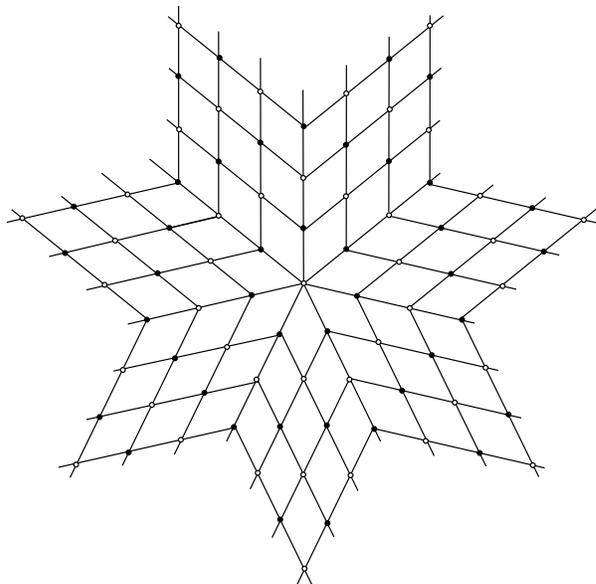
carré de maille unité et toutes les cartes finies du tore de genre un du type  $\{4, 4\}_{(a,b)}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire le quotient du plan par l'action du groupe  $(a, b)2\mathbb{Z} + (-b, a)2\mathbb{Z}$ , voir [Cox2].



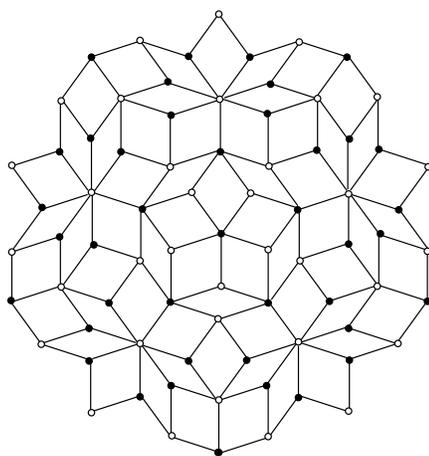
Mais les réseaux duaux triangulaire et hexagonal ont aussi un graphe diamant fait avec des losanges :



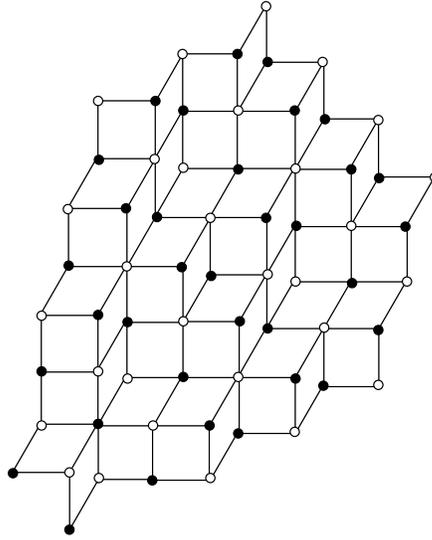
Il existe également des cas plus exotiques comme :



Ou encore des pavages quasi-périodiques :

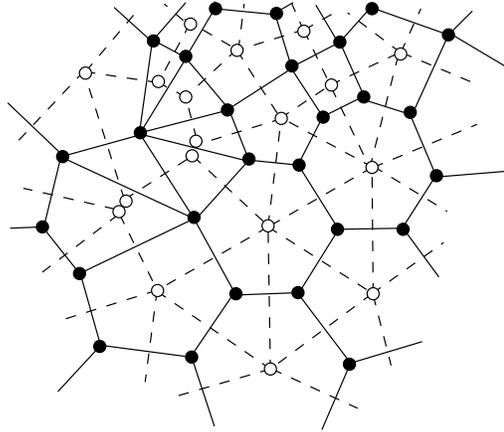


On a aussi des “figures de relief” :

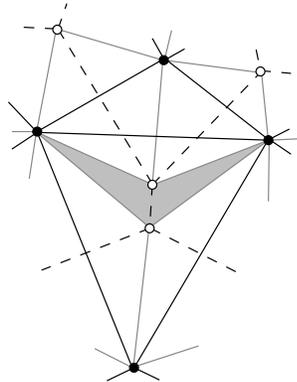


À presque toutes les pages de [GBS87], on rencontre des cartes critiques. Pour les cartes semi-critiques, l'archétype est donné par les complexes duaux de Voronoi  $V$  et Delaunay  $D$  [PS] :

- On se donne une distribution quelconque de points du plan  $D_0$ .
- On associe à un point  $x \in D_0$  une face  $F \in V_2$ , constituée par l'ensemble des points du plan plus près de  $x$  que de n'importe quel autre point de  $D_0$ .
- Une arête  $a$  de  $V_1$  est donc un segment de médiatrice entre deux points  $x, x'$  de  $D_0$ . On lui associe une unique arête  $(x, x') \in D_1$ .
- Les sommets  $V_0$ , extrémités des arêtes de  $V_1$ , sont des centres de cercles circonscrits à au moins trois points de  $D_0$ .
- Chaque arête de  $V_1$  étant la médiatrice entre deux points  $x, y$  de  $D_0$ , on peut lui associer l'arête  $(x, y)$  et faire ainsi correspondre une arête de  $D_1$  à toute arête de  $V_1$  et les cellules de  $V$  étant convexes, cette correspondance est bijective (une médiatrice ne donne lieu qu'à un seul segment).
- Ces arêtes  $D_1$  définissent des faces  $D_2$ .



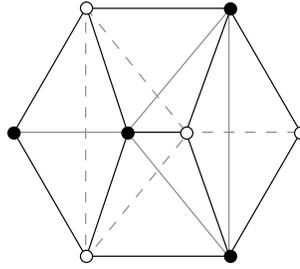
Les quadrilatères des cartes du type Voronoi ne sont pas forcément convexes, il apparait des *cerfs volants* dans la terminologie de Penrose, des quadrilatères non convexes formés des côtés de deux triangles isocèles :



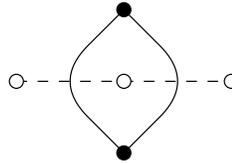
□

**Remarque :** Tout double  $\Lambda$  n'a pas de métrique qui le rende critique, comme un losange est un convexe, il faut, en particulier, que le complexe diamant  $\diamond$  soit convexifiable. Par exemple, un double métrique n'est pas critique dès qu'il contient le motif suivant (présent dans la décomposition cellulaire de

la sphère par un tétraèdre):



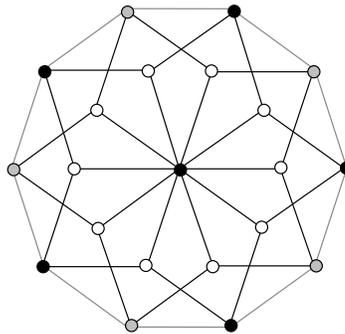
ou bien encore,



□

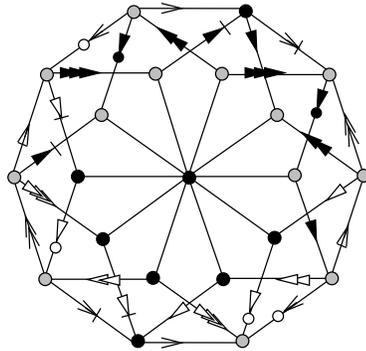
**Exemple en genre supérieur :** Ce sont les singularités coniques qui nous permettent de considérer des cartes de genre plus élevé que un, en effet, seul le tore, de genre un, peut-être plongé isométriquement dans le plan; en genre plus grand, pour continuer à avoir un plongement, il faut changer la métrique, introduire de la courbure, ce qui permet de plonger isométriquement par exemple dans le *demi-plan de Poincaré*. La stratégie que nous avons adoptée consiste à introduire des points de ramification, des singularités coniques et de perdre la qualité de plongement.

Voici un exemple tiré du livre de Coxeter [Cox1]. Le point central d'ordre dix est ramifié trois fois :



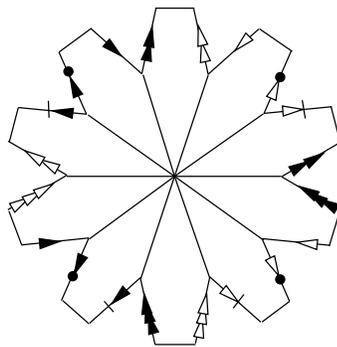
Quand des conditions de recollements sont données, cela représente un pavage d'une certaine surface euclidienne à singularités coniques, par **dix pentagones réguliers**. Le genre dépend de la façon de recoller les bords et varie de zéro (pour 17 sommets différents, en fermant tous les angles possibles) à sept (pour trois sommets différents). Dans tous les cas, la symétrie du problème fait que le pavage dual est naturellement formé d'arêtes orthogonales aux arêtes du pavage initial et toutes de même longueur, c'est à dire que le graphe diamant  $\diamond$  associé est composé de losanges. Mais dans les genres différents de six et sept, les singularités coniques ont des angles qui ne peuvent pas être multiples de  $2\pi$ .

Si bien que ces cartes ne sont critiques qu'en genre six (il n'y en a essentiellement qu'une, la plus symétrique de toutes) et sept (il y en a essentiellement deux), c'est à dire avec cinq singularités coniques d'angle chacune  $6\pi$ , respectivement trois singularités d'angles  $6\pi$  et  $18\pi$  ou  $12\pi$  et  $12\pi$ . Voici les données de recollement pour la carte (une carte) en genre six :



Remarquons que les paires de segments à recoller sont liées par une translation.

On peut l'étaler sur le plan de manière non isométrique (les dix segments opposés sont à identifier deux à deux) :





Passons à des caractérisations alternatives de la criticalité, elles s'écrivent entièrement sur  $\Gamma$  et ne font pas intervenir directement son dual, c'est-à-dire que la donnée de  $\Gamma$  permet de construire explicitement le dual de telle manière à ce que leur couple soit semi-critique :

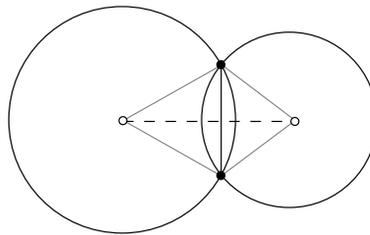
**Proposition 15** *Soit  $(\Gamma, \rho)$  une décomposition cellulaire géodésique d'une surface  $\Sigma$  munie d'une métrique plate à singularités coniques.*

*Une condition suffisante pour qu'elle soit semi-critique est qu'il existe une distribution de cercles telle que*

- les singularités sont soit aux centres, soit à l'intersection de plusieurs cercles,
- les sommets de  $\Gamma$  sont les points d'intersection des cercles,
- et toutes les faces de  $\Gamma$  sont inscrites dans un cercle.

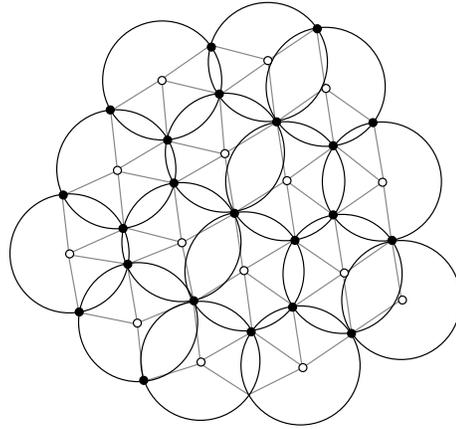
*Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une carte soit critique est l'existence d'une telle distribution de cercles, de même rayon  $\delta$  sur la surface  $\Sigma$  telle que le centre de chaque cercle soit à l'intérieur de la face qu'il définit.*

Si la condition est remplie, on pose les sommets de  $\Gamma_0^*$  aux centres des cercles. Alors, le graphe  $\diamond$  est constitué de rayons de cercles et les arêtes duales sont orthogonales.



Si de plus, les rayons des cercles sont égaux, ces quadrilatères sont des losanges et la carte est critique.

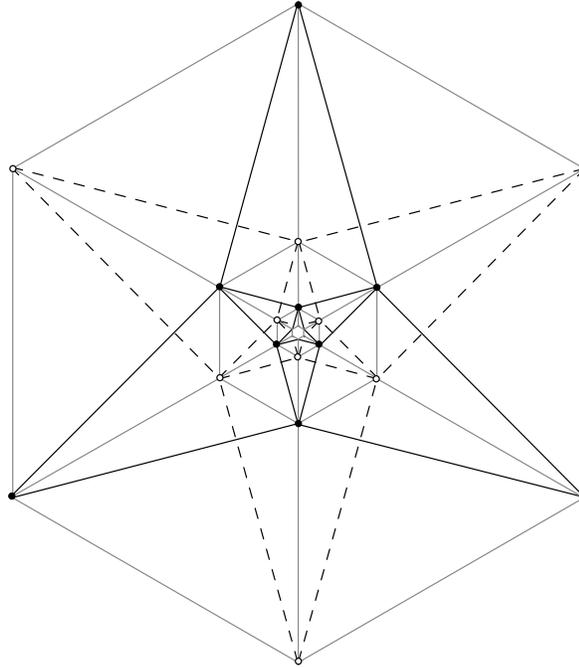
Réciproquement, étant donnés des losanges, les cercles sont définis.



□

**Remarque :** C'est ce qui fait le lien avec les motifs de cercles [Sch], c'est à dire une famille de cercles couvrant le plan, les centres des cercles et les points d'intersection définissant le graphe et son dual. Toute carte critique est un motif de cercles de mêmes rayons. La condition de la proposition est satisfaite pour un couple Delaunay/Voronoi, c'est même une caractérisation de ce cas. Mais il existe des cartes semi-critiques qui ne sont pas des motifs

de cercles, par exemple ce “tube” :



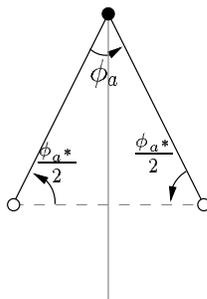
□

**Proposition 16** *Une décomposition cellulaire géodésique  $\Gamma$  est critique si et seulement si il existe une distribution d'angles  $0 < \phi_a < \pi$  sur les arêtes (inorientées) vérifiant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{a \in \partial F} \phi_a \equiv 0 \text{ modulo } 2\pi \quad \text{pour toute face } F \\ \sum_{a \ni s} (\pi - \phi_a) \equiv 0 \text{ modulo } 2\pi \quad \text{pour tout sommet } s \end{array} \right. \quad (\text{F.1})$$

Si  $\Gamma$  est critique, tout couple d'arêtes duales  $(a, a^*)$  forme les diagonales d'un losange. Comme les quatre côtés sont égaux, les angles opposés, à chaque extrémité d'une diagonale  $a$ , sont égaux, appelons les  $\phi_{a^*}$  et de même  $\phi_a$  l'angle du losange aux extrémités de  $a^*$ . Dans un demi-losange, triangle

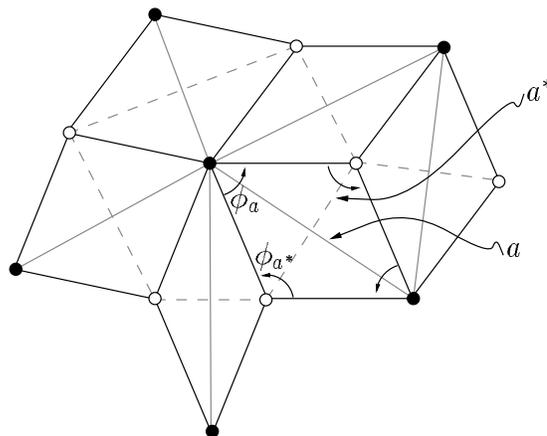
isocèle, on a  $\phi_a + 2 \times \frac{\phi_{a^*}}{2} = \pi$ .



Donc  $\phi_{a^*} = \pi - \phi_a$ . En sommant les angles des losanges autour d'un sommet  $s$ ,

$$\sum_{a \ni s} \phi_{a^*} = \sum_{a \ni s} (\pi - \phi_a) \equiv 0 \text{ modulo } 2\pi$$

De même, en sommant les angles autour d'une face.



Réciproquement, une telle distribution d'angles permet de construire les losanges, les longueurs sont données par la trigonométrie plane dès qu'une échelle est donnée. □

**Théorème 14** Soit  $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$  une application holomorphe discrète sur un double semi-critique  $(\Lambda, \ell)$  d'un domaine  $\Omega$  du plan complexe euclidien. Complétons  $f$  en une fonction continue  $\bar{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  en interpolant linéairement sur les arêtes de la décomposition cellulaire  $\Gamma$  associée à  $\Lambda$  et harmoniquement à l'intérieur des faces. Supposons que  $\bar{f}$  est injective.

Alors  $f(\Lambda)$  est une carte semi-critique de  $\bar{f}(\Omega)$ .

**Preuve :** C'est-à-dire que les sommets  $f(\Gamma_0)$ , les arêtes  $f(\Gamma_1)$  et les faces  $f(\Gamma_2)$  forment une décomposition cellulaire de  $\Omega' = \bar{f}(\Omega)$  qui est un domaine du plan complexe euclidien, que l'image du complexe dual  $\Gamma^*$  forme un complexe cellulaire dual et que cette donnée, abrégée par  $\Lambda' = f(\Lambda)$ , est une carte semi-critique de  $\Omega'$  pour la longueur euclidienne des segments.

Le fait que  $f(\Gamma)$  forme une décomposition cellulaire de  $\Omega'$  est immédiat dès lors que  $\bar{f}$  est injective : chaque point de l'image  $\Omega'$  est l'image d'un unique point de  $\Omega$ , appartenant à une certaine cellule de  $\Gamma$  et donc appartient à une unique cellule de  $f(\Gamma)$ .

Ensuite, l'holomorphie de  $f$  équivaut à la condition de semi-criticalité : Pour deux arêtes duales  $f(y, y') = f(x, x')^*$ ,

$$\frac{f(y') - f(y)}{\ell(y, y')} = i \frac{f(x') - f(x)}{\ell(x, x')}$$

donc deux arêtes duales de  $\Lambda'$  sont des segments orthogonaux dans le plan complexe. La carte  $\Lambda'$  est donc semi-critique pour la métrique euclidienne qui à l'arête  $(z, z') = (f(x), f(x'))$ , associe la longueur  $\ell'(z, z') = |z - z'| = |f(x) - f(x')|$ .  $\square$

**Remarque :** Avec les mêmes notations que précédemment, la structure combinatoire de  $\Lambda'$  est par définition la même que celle de  $\Lambda$ , mais qui plus est, la structure conforme discrète  $\rho(a) = \frac{\ell'(a^*)}{\ell'(a)}$  de  $\Lambda'$  est la même que celle de  $\Lambda$  :

$$\rho(f(a)) = \rho(a).$$

Comme dans le continu, les fonctions holomorphes conservent la structure conforme.  $\square$

### F.3 Intégration des fonctions

L'intérêt de la notion de carte est de définir localement un “ $dZ$ ” qui permet d'intégrer non seulement des 1-formes mais aussi des fonctions le long d'un contour.

**Définition 14** Soit  $\Lambda$  un double métrique d'une surface  $\Sigma$ . Une 1-forme fermée sur  $\diamond$ , c'est-à-dire  $\alpha : \diamond_1 \rightarrow \mathbb{C}$ , une application des arêtes orientées de  $\diamond$  dans  $\mathbb{C}$  définit une 1-forme fermée sur  $\Lambda$ , sur une arête  $(x, x') \in \Lambda_1$

de duale  $(y, y')$ , par

$$\int_{(x, x')} \alpha := \int_{(x, y)} \alpha + \int_{(y, x')} \alpha = \int_{(x, y')} \alpha + \int_{(y', x')} \alpha$$

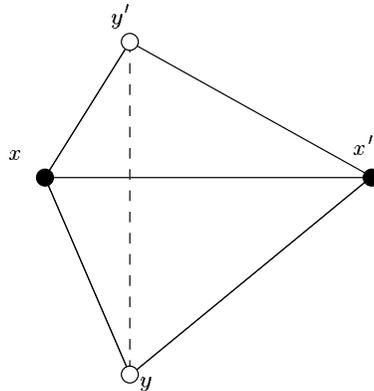
On définit ainsi  $\Omega^{(1,0)}(\diamond)$  l'ensemble des formes fermées de  $\diamond$  qui sont holomorphes sur  $\Lambda$ .

Pour toute fonction  $f$  sur  $\Lambda$ , et toute 1-forme  $\alpha \in C^1(\diamond)$ , on définit la 1-forme  $f\alpha \in C^1(\diamond)$  sur une arête  $(x, y) \in \diamond_1$  par :

$$\int_{(x, y)} f\alpha := \frac{f(x) + f(y)}{2} \int_{(x, y)} \alpha$$

**Proposition 17** Soit  $\alpha \in C^1(\diamond)$  une 1-forme fermée sur  $\diamond$ . La 1-forme  $f\alpha$  est fermée pour toute fonction holomorphe  $f \in \Omega^0(\Lambda)$ , si et seulement si  $\alpha$  est holomorphe.

**Preuve :** Calculons l'intégrale de  $f\alpha$  le long d'une face de  $\diamond$  : Soit  $(x, y, x', y')$  une telle face,  $(y', y)$  étant duale de  $(x, x')$ .



Localement,  $\alpha$  étant fermée, elle est exacte sur la face. Soit  $g$  une primitive de  $\alpha$  sur  $\{x, y, x', y'\}$ .

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial(x,y,x',y')} f\alpha &= \frac{f(x) + f(y)}{2} (g(y) - g(x)) + \frac{f(y) + f(x')}{2} (g(x') - g(y)) \\
&\quad + \frac{f(x') + f(y')}{2} (g(y') - g(x')) + \frac{f(y') + f(x)}{2} (g(x) - g(y')) \\
&= g(x) \frac{f(y') - f(y)}{2} + g(y) \frac{f(x) - f(x')}{2} \\
&\quad + g(x') \frac{f(y) - f(y')}{2} + g(y') \frac{f(x') - f(x)}{2} \tag{F.2} \\
&= (g(x) - g(x')) \frac{f(y') - f(y)}{2} + (g(y') - g(y)) \frac{f(x') - f(x)}{2} \\
&= \frac{f(x') - f(x)}{2} \left( (g(y') - g(y)) - i \frac{\ell(y, y')}{\ell(x, x')} (g(x') - g(x)) \right) \\
&= \ell(y', y) \frac{f(x') - f(x)}{2} \left( \frac{g(y') - g(y)}{\ell(y', y)} - i \frac{g(x') - g(x)}{\ell(x', x)} \right)
\end{aligned}$$

Et quand  $f(x') \neq f(x)$ , cette dernière est nulle si et seulement si  $g$  est holomorphe, c'est-à-dire si  $\alpha$  vérifie l'équation de Cauchy-Riemann sur le couple  $(x, x')$  et  $(y, y')$ . En raisonnant pour tous les couples d'arêtes, on a le résultat.  $\square$

**Corollaire :** Soit  $Z : \Omega \hookrightarrow \mathbb{C}$  où  $\Omega \subset \Sigma$ , une carte locale. Supposons qu'elle soit isométrique sur  $\Lambda$ , c'est-à-dire que restreintes aux sommets elle vérifie sur les arêtes,  $(x, x') \in \Lambda_1$ ,

$$|Z(x) - Z(x')| = \ell(x, x').$$

Nous avons vu qu'une telle application munit  $\Sigma$  d'une structure euclidienne locale.

La 1-forme  $f dZ$  est fermée pour toute fonction holomorphe  $f \in \Omega^0(\Lambda)$ , si et seulement si  $(\Lambda, \ell)$  est localement semi-critique à l'aide la carte  $Z$ . En effet, la semi-criticalité de  $\Lambda$  équivaut à l'holomorphie de  $Z$ .

Comme toute carte locale isométrique donne une fonction  $Z$  holomorphe et donc une 1-forme  $dZ \in \Omega^{(1,0)}(\diamond)$  holomorphe, on définit une 1-forme formelle sur  $\diamond$ , non pas à valeurs complexes mais à valeur 0-chaîne :

**Définition 15** On définit la 1-forme fermée appelée symboliquement  $fdZ$ , à valeur dans  $C_0(\Lambda)$ , sur le graphe diamant  $\diamond$  par,

$$\int_{(x,y)} fdZ := \frac{f(x) + f(y)}{2} (y - x)$$

pour tout couple de points  $x \in \Gamma$ ,  $y \in \Gamma^*$  voisins sur  $\diamond$ .

Cela signifie que pour toute carte locale isométrique  $Z : \Omega \hookrightarrow \mathbb{C}$  où  $\Omega \subset \Sigma$ , l'intégrale  $\int_{(x,y)} fdZ$  est alors un nombre complexe,  $\int_{(x,y)} fdZ := \frac{f(x)+f(y)}{2} (Z(y) - Z(x))$ , mais tant que ce choix n'est pas fait, cela reste une chaîne de dimension zéro.

Cependant, une structure euclidienne locale permet d'identifier des différences de points à des vecteurs si bien que la fermeture de  $fdZ$  prend un sens indépendant de la carte locale  $Z$  et, pour un couple d'arêtes duales  $(x, x')$  et  $(y, y')$  d'un double semi-critique, l'équation

$$\frac{y' - y}{\ell(y', y)} = i \frac{x' - x}{\ell(x', x)}$$

est une égalité entre vecteurs de  $\Sigma$  muni d'une structure euclidienne locale.

Si bien qu'on définit l'équation de Cauchy-Riemann et on peut parler de l'holomorphicité de  $fdZ$ .

**Proposition 18** Une carte  $(\Lambda, \ell)$  semi-critique est critique si et seulement si  $fdZ$  est une 1-forme holomorphe sur  $\Lambda$  pour toute fonction  $f$  holomorphe sur  $\Lambda$ .

**Preuve :** Écrivons l'équation de Cauchy-Riemann sur un couple d'arêtes duales  $(x, x')$  et  $(y, y')$  de  $\Lambda$  :

$$\begin{aligned}
2\left(\int_{(y,y')} f dZ - i\frac{\ell(y,y')}{\ell(x,x')} \int_{(x,x')} f dZ\right) &= \tag{F.3} \\
&= \frac{f(x) + f(y)}{2} (x - y) + \frac{f(y') + f(x)}{2} (y' - x) \\
&\quad + \frac{f(x') + f(y)}{2} (x' - y) + \frac{f(y') + f(x')}{2} (y' - x') \\
&\quad - i\frac{\ell(y,y')}{\ell(x,x')} \left( \frac{f(y) + f(x)}{2} (y - x) + \frac{f(x') + f(y)}{2} (x' - y) \right) \\
&\quad - i\frac{\ell(y,y')}{\ell(x,x')} \left( \frac{f(y') + f(x)}{2} (y' - x) + \frac{f(x') + f(y')}{2} (x' - y') \right) \\
&= \frac{f(x)}{2} \left( y' - y - i\frac{\ell(y,y')}{\ell(x,x')} (y - 2x + y') \right) \\
&\quad - \frac{f(x')}{2} \left( y - y' - i\frac{\ell(y,y')}{\ell(x,x')} (y - 2x' + y') \right) \\
&\quad + \frac{f(y)}{2} \left( x - 2y + x' - i\frac{\ell(y,y')}{\ell(x,x')} (x' - x) \right) \\
&\quad - \frac{f(y')}{2} \left( x - 2y' + x' - i\frac{\ell(y,y')}{\ell(x,x')} (x - x') \right)
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que la carte est semi-critique, on obtient

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(x)}{2} \left( i\frac{\ell(y,y')}{\ell(x,x')} (x' - x) - i\frac{\ell(y,y')}{\ell(x,x')} (y - 2x + y') \right) \\
&\quad - \frac{f(x')}{2} \left( i\frac{\ell(y,y')}{\ell(x,x')} (x - x') - i\frac{\ell(y,y')}{\ell(x,x')} (y - 2x' + y') \right) \\
&\quad + \frac{f(y)}{2} (x - 2y + x' - (y' - y)) \\
&\quad - \frac{f(y')}{2} (x - 2y' + x' - (y - y'))
\end{aligned}$$

puis, comme  $f$  est holomorphe,

$$\begin{aligned}
&= \frac{y' + y - x - x'}{2} \left( +i\frac{\ell(y,y')}{\ell(x,x')} (f(x') - f(x)) + (f(y') - f(y)) \right) \\
&= (y' + y - x - x') (f(y') - f(y))
\end{aligned}$$

Par conséquent, si  $f$  n'est pas constante le long d'une arête,  $f dZ$  y vérifie l'équation de Cauchy-Riemann si et seulement si les diagonales du quadrilatère  $(x, y, x', y')$  se coupent en leur milieu, c'est-à-dire si le quadrilatère est un losange. Donc  $\Lambda$  est critique si et seulement si pour tout  $f$  holomorphe,  $f dZ$  est holomorphe.  $\square$

**Remarque :** En partant d'une carte critique, on peut montrer directement que  $f dZ$  vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned} \int_{(x,x')} f dZ &= \int_{(x,y)} f dZ + \int_{(y,x')} f dZ = \int_{(x,y')} f dZ + \int_{(y',x')} f dZ \\ &= f(x) \frac{y - 2x + y'}{4} - f(x') \frac{y - 2x' + y'}{4} \\ &\quad + \frac{f(y) + f(y')}{4} (x' - x) \end{aligned} \tag{F.4}$$

Comme  $(x, y, x', y')$  est un losange, le milieu de  $(y, y')$  est le milieu de  $(x, x')$  et

$$\int_{(x,x')} f dZ = \frac{f(x) + f(y) + f(x') + f(y')}{4} (x' - x) \tag{F.5}$$

Qui vérifie l'équation de Cauchy-Riemann car  $Z$  est holomorphe.  $\square$

## F.4 Produit sur une carte critique simplement connexe

Soit  $(\Lambda, \ell)$  une carte critique d'un fermé borné  $\Omega$  simplement connexe du plan complexe euclidien. C'est-à-dire que les éléments de  $\Lambda$  sont envoyés sur des nombres complexes et les arêtes sur des segments, via une carte  $Z : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Définition 16** Soit  $x_0 \in \Lambda_0$  un sommet. La fonction  $Z - x_0$  est holomorphe discrète, c'est la primitive de la 1-forme  $dZ \in C^1(\diamond)$  s'annulant en  $x_0$ . On définit inductivement les fonctions

$$(Z - x_0)^k := \int_{x_0} k(Z - x_0)^{k-1} dZ$$

la primitive de la 1-forme  $k(Z - x_0)^{k-1} dZ \in C^1(\diamond)$  s'annulant en  $x_0$ .

On notera son image en un point  $y \in \Lambda_0$ ,

$$(Z - x_0)^k(y) = (y - x_0)^k$$

La famille des  $\{(Z - x_0)^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  n'est pas libre. Soit  $(Z - x_0)^N = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (Z - x_0)^k$  la première fonction combinaison linéaire des précédentes. Elle définit un polynôme minimal

$$P_\Lambda := (Z - x_0)^N - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (Z - x_0)^k$$

et  $\text{Vect} \{(Z - x_0)^k\} = \mathbb{C}[Z]/P_\Lambda(Z)$

**Corollaire :** Cela munit l'espace engendré, sous-espace vectoriel des fonctions holomorphes sur  $\Lambda$ , de la structure d'anneau de  $\mathbb{C}[Z]/P_\Lambda(Z)$ , c'est le quotient de la multiplication habituelle des polynômes, qu'on peut écrire :

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k (Z - x_0)^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k (Z - x_0)^k \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} (Z - x_0)^n$$

**Proposition 19** *Le polynôme minimal est caractéristique de la carte.*

C'est à dire qu'il ne dépend pas du point  $x_0$  : soit  $y_0 \in \Lambda_0$  un autre point,  $Z - y_0 = Z - x_0 + (x_0 - y_0)$  si bien que

$$\begin{aligned} (Z - y_0)^2 &= \int_{y_0} 2(Z - y_0) dZ = \int_{y_0} 2(Z - x_0 + (x_0 - y_0)) dZ \\ &= (Z - x_0)^2 - (y_0 - x_0)^2 + 2(x_0 - y_0)(Z - y_0) \end{aligned}$$

Et de même, par récurrence,

$$(Z - x_0)^k = \sum_{l=0}^k C_k^l (y_0 - x_0)^l (Z - y_0)^l.$$

C'est à dire qu'on obtient les formules usuelles de développement dans  $\mathbb{C}[Z]$ . Par conséquent le polynôme  $P_\Lambda$  ne dépend pas du point de développement, la matrice de passage des deux bases échelonnées  $\{(Z - x_0)^k\}_{0 \leq k < N}$  et  $\{(Z -$

$y_0)^k\}_{0 \leq k < N}$  des polynômes en  $Z$  est triangulaire, la  $N$ -ième puissance  $(Z - y_0)^N$  est la première à être liée aux précédentes,

$$(Z - y_0)^N = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k (Z - y_0)^k$$

et le polynôme qui en découle est  $P_\Lambda$  :

$$P_\Lambda = (X - x_0)^N - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (X - x_0)^k = (X - y_0)^N - \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k (X - y_0)^k$$

□

**Conjecture :** Cette famille  $\{1, Z, \dots, Z^{N-1}\}$  forme une base des fonctions holomorphes si on lui adjoint la fonction  $c = \chi_\Gamma$  valant 1 sur  $\Gamma$  et 0 sur  $\Gamma^*$ .

□

L'ensemble des fonctions holomorphes sur  $\Lambda$  serait alors isomorphe à l'espace vectoriel

$$\mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}c/P_\Lambda \cong \Omega^0(\Lambda)$$

où  $P_\Lambda \in \mathbb{C}_N[X]$  est le polynôme de degré  $N$  caractéristique de  $\Lambda$ . Il faut donc démontrer que  $N$  est le nombre de sommets de  $\Gamma$  sur le bord car c'est la dimension de l'espace des fonctions holomorphes moins un, d'après le théorème de Dirichlet et la proposition 7.

## F.5 Limite continue

Nous allons établir, dans le cas non-ramifié, que les cartes semi-critiques autorisent le passage à la limite vers les fonctions holomorphes usuelles.

Tout d'abord, un lemme technique intéressant en soi :

**Lemme 4** Soit  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$ . Supposons qu'il existe une fonction  $f$  sur  $\Omega$  telle que pour toute suite convergente  $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de points de  $\Omega$ , la suite  $(f_k(\zeta_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(\lim(\zeta_k))$ , alors, la fonction  $f$  est continue et la suite  $(f_k)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout compact.

**Preuve :** En prenant une suite de points constante, on voit immédiatement que la suite  $(f_k)$  converge point par point vers  $f$ . Soit  $(\zeta_k)$  une suite dans

$\Omega$  convergeant vers  $x$ . Par hypothèse,  $(f_k(\zeta_k))$  converge vers  $f(x)$  mais en prenant la suite constante  $(\zeta_k)_{l \in \mathbb{N}}$ , on a également que  $(f_l(\zeta_k))_{l \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(\zeta_k)$ . Donc :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon/k \geq N_\epsilon &\Rightarrow |\zeta_k - x| < \epsilon & (F.6) \\ \forall l, \forall \epsilon > 0, \exists N_l^\epsilon/k \geq N_l^\epsilon &\Rightarrow |f_k(\zeta_l) - f(\zeta_l)| < \epsilon \\ \forall \epsilon > 0, \exists M_\epsilon/k \geq M_\epsilon &\Rightarrow |f_k(\zeta_k) - f(x)| < \epsilon \end{aligned}$$

On peut supposer que la suite  $(N_k^\epsilon)$  est une injection croissante (ou on définit  $M_k^\epsilon = k + \max_{l \leq k} N_l^\epsilon$ ). Soit  $(\xi_k)$  la suite

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 = \dots = \xi_{N_2^\epsilon} = \zeta_1 \\ \xi_{N_2^\epsilon+1} &= \xi_{N_2^\epsilon+2} = \dots = \xi_{N_3^\epsilon} = \zeta_2 \\ &\vdots \\ \xi_{N_l^\epsilon+1} &= \xi_{N_l^\epsilon+2} = \dots = \xi_{N_{l+1}^\epsilon} = \zeta_l \\ &\vdots \end{aligned} \tag{F.7}$$

Cette suite converge vers  $x$ , en effet, pour tout  $\epsilon > 0$ , dès que  $k > N_{N_\epsilon}^\epsilon$  l'élément de la suite  $\xi_k$  est égal à un  $\zeta_l$  pour  $l \geq N_\epsilon$  si bien que  $|\xi_k - x| < \epsilon$ . Si  $\zeta_l = \xi_k$ , alors, par définition de  $\xi$ , on a  $N_l^\epsilon < k \leq N_{l+1}^\epsilon$ . On en déduit donc que

$$\forall m \geq k > N_l^\epsilon, |f_m(\zeta_l) - f(\zeta_l)| < \epsilon,$$

ce qu'on peut écrire sans l'indice  $l$  :

$$\forall k, \forall \epsilon > 0, \forall m, m \geq k \Rightarrow |f_m(\xi_k) - f(\xi_k)| < \epsilon \tag{F.8}$$

En reprenant les hypothèses pour cette suite  $(\xi_k)$ ,

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists L_\epsilon/k \geq L_\epsilon &\Rightarrow |f_k(\xi_k) - f(x)| < \epsilon \\ \text{donc, } \forall \epsilon > 0, \forall k > L_\epsilon, &|f(\xi_k) - f(x)| < 2\epsilon \end{aligned}$$

En particulier, pour  $k > L_\epsilon$ ,  $(N_l^\epsilon)$  étant croissante,  $|f(\xi_{N_{k+1}^\epsilon}) - f(x)| < 2\epsilon$  c'est-à-dire

$$|f(\zeta_k) - f(x)| < 2\epsilon$$

Donc  $f$  est **continu**.

Supposons que la convergence ne soit pas uniforme sur un compact  $K$ . En niant l'énoncé

$$\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon/\forall k > P_\epsilon, \forall x \in K, |f_k(x) - f(x)| < \epsilon,$$

on obtient l'existence d'une suite  $(x_k) \in K^{\mathbb{N}}$  telle que  $|f_k(x_k) - f(x_k)|$  ne tende pas vers zéro. De la suite  $(x_k)$  on extrait une suite convergente  $(x_{\sigma(k)})$ , soit  $x$  sa limite. Comme  $f$  est continue en  $x$ ,

$$\forall \epsilon > 0, \exists Q_\epsilon / \forall k > Q_\epsilon, |f(x_{\sigma(k)}) - f(x)| < \epsilon$$

Par hypothèse,  $(f_{\sigma(k)}(x_{\sigma(k)}))$  converge vers  $f(x)$ , c'est à dire,

$$\forall \epsilon > 0, \exists R_\epsilon / \forall k > R_\epsilon, |f_{\sigma(k)}(x_{\sigma(k)}) - f(x)| < \epsilon$$

Donc,

$$\forall \epsilon > 0, \forall k > \max(Q_\epsilon, R_\epsilon), |f_{\sigma(k)}(x_{\sigma(k)}) - f(x_{\sigma(k)})| < 2\epsilon,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Il n'existe donc pas de telle suite, la convergence est **uniforme**.  $\square$

**Lemme 5** Soit  $\eta \in ]0, \frac{\pi}{4}[$  et  $(\Gamma)$  une carte semi-critique localement finie d'une région du plan telle que les angles aux sommets des quadrilatères du graphe diamant  $\diamond$  associé soient tous compris dans  $[\eta, 2\pi - \eta]$ .

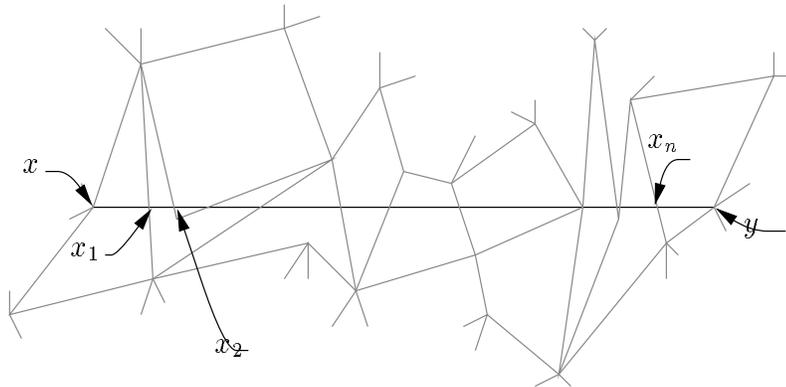
Alors, pour tous sommets  $x, y \in \diamond_0$ , il existe un chemin  $\gamma \in C_1(\diamond)$  allant de  $x$  à  $y$  de longueur majorée,

$$\ell(\gamma) \leq 4 \frac{d(x, y)}{\sin \eta}$$

**Preuve :** Considérons le segment  $[x, y]$ . Il rencontre un certain nombre de faces de  $\diamond$ ,

$$[x, y] = [x, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n, y]$$

tels que pour tout  $k$ ,  $]x_k, x_{k+1}[ = F_k \cap [x, y]$  avec  $F_k \in \diamond_2$  (plus précisément,  $]x_k, x_{k+1}[$  est une composante connexe de cette intersection).



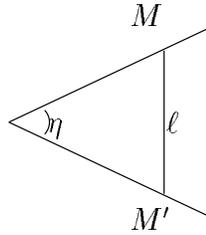
Soit  $(ABCD)$  un quadrilatère du plan dont les diagonales sont orthogonales et les angles aux sommets sont compris dans  $[\eta, 2\pi - \eta]$ . Soit  $(M, M')$  un couple de points sur le bord du quadrilatère. Ce bord est connexe, donc il existe un chemin  $\gamma$  reliant  $M$  à  $M'$  composé de segments du bord, de longueur minimale  $\ell$ . Nous allons montrer que

$$\frac{MM'}{\ell} > \frac{\sin \eta}{4}$$

Tout d'abord, si  $M$  et  $M'$  sont sur le même côté du quadrilatère,  $\gamma = [MM']$  et  $\ell = MM'$ . Comme  $\sin \eta < 1$ , on a le résultat.

Si  $M$  et  $M'$  sont sur des côtés adjacents, alors le plus court chemin sur le quadrilatère est de longueur inférieure à la distance du chemin passant le coin. À  $MM'$  fixé, cette distance est maximale quand le coin est un triangle isocèle et elle vaut dans ce cas  $\frac{2MM'}{\sin \frac{\theta}{2}}$  si  $\theta$  est l'angle au sommet. Comme par hypothèse,  $\theta$  est inférieur à  $\eta$ , on en déduit que

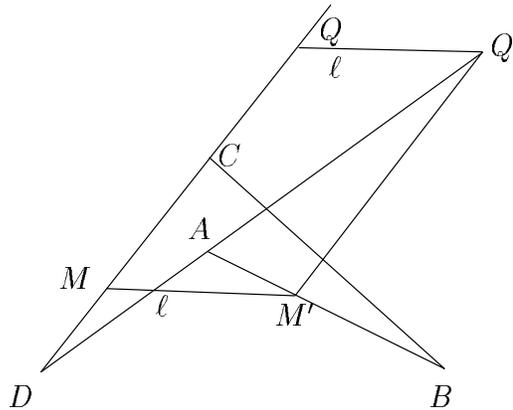
$$\frac{MM'}{\ell} \geq \sin \frac{\eta}{2} > \frac{\sin \eta}{2}$$



Supposons maintenant  $M$  et  $M'$  sur des arêtes opposées, par exemple  $M \in [AB]$  et  $M' \in [CD]$ .

Supposons que  $ABCD$  ne soit pas convexe, par exemple  $\hat{A} > \pi$ . Le fait que les diagonales de  $ABCD$  sont orthogonales implique que  $\hat{D} < 2\pi - \hat{A}$ . Translatons  $\overline{MM'}$  parallèlement à  $(CD)$  en  $\overline{QQ'}$  tel que  $Q \in (AD)$ . Par inégalité triangulaire,  $MA < MQ + QA = M'Q' + QA$  si bien que la longueur  $\ell' = QD + DQ' = QA + AD + DM' + M'Q'$  est supérieure à  $\ell = MA + AD + DM'$ , longueur du chemin de  $M$  à  $M'$  passant par  $D$ . Comme  $QQ' = MM'$ , on a donc  $\frac{MM'}{\ell} > \frac{QQ'}{\ell'}$  et on se ramène ainsi au cas

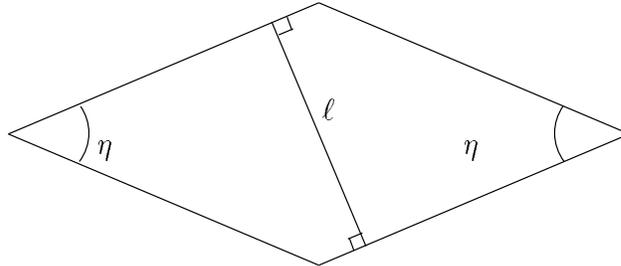
précédent de  $Q$  et  $Q'$  sur deux côtés adjacents.



Supposons maintenant  $ABCD$  convexe. À déplacements près, le quadrilatère  $ABCD$  est déterminé par trois angles, disons  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ .

Quand ces trois angles sont fixés, on étudie le rapport  $\frac{MM'}{\ell}$  quand on fait varier  $M$  et  $M'$ . Il atteint un certain minimum  $m(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$  quand  $(MM')$  est orthogonale à la médiane de  $(AB), (CD)$  et partage  $ABCD$  en deux moitiés de longueurs égales.

En tenant compte des contraintes que les angles aux sommets sont supérieurs à  $\eta$  et que le quadrilatère est convexe, l'étude de la fonction  $m$  conduit à la condition minimale suivante :



Avec par exemple,  $\hat{A} = \hat{C} = \pi - \eta$  et  $\hat{B} = \hat{D} = \eta$ . Dans ce cas, le couple  $(M, M')$  atteignant le minimum est atteint pour  $(MM') \perp (AB)$  et  $MA = M'C$  si bien que

$$\frac{MM'}{\ell} = \frac{\cos \frac{\eta}{2}}{\frac{2}{\sin \frac{\eta}{2}}} = \frac{\sin \eta}{4}$$

Prenons  $[x_{k-1}, x_k]$  une partie du segment  $[x, y]$  intersection avec une face de  $\diamond$ . Il existe un chemin  $\gamma_k$  homotope à ce segment sur le 1-squelette  $\diamond_1$  et

de longueur inférieure à  $\frac{4d(x_{k-1}, x_k)}{\sin \eta}$ . De plus, en composant le chemin  $\gamma_k$  avec le chemin suivant  $\gamma_{k+1}$ , le morceau d'arête de  $\gamma_k$  aboutissant en  $x_k$  s'ajoute ou se retranche à celui de  $\gamma_{k+1}$  partant de  $x_k$  si bien que dans  $\gamma_k + \gamma_{k+1}$ , l'arête portant  $x_k$  ou bien apparaît en entière ou bien n'apparaît pas. Donc le chemin total est une chaîne de  $\diamond$  allant de  $x$  à  $y$  :

$$\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_{n+1} \in C_1(\diamond)$$

De plus,

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \cdots + \ell(\gamma_{n+1}) < \frac{4d(x, x_1)}{\sin \eta} + \frac{4d(x_1, x_2)}{\sin \eta} + \cdots + \frac{4d(x_n, y)}{\sin \eta} = \frac{4d(x, y)}{\sin \eta}$$

□

**Théorème 15** Soit  $({}^k\Lambda)_{k \in \mathbb{Z}}$  une suite de cartes semi-critiques d'un même ouvert borné  $\Omega$  du plan complexe. Supposons que les côtés des quadrilatères de  ${}^k\diamond$  sont tous de longueur inférieure à  $\delta_k > 0$  tendant vers zéro et que leurs angles sont tous compris dans un intervalle  $[\eta, 2\pi - \eta]$  avec  $\eta \in ]0, \frac{\pi}{4}[$ .

Soit  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions, telles que  $f_k$  est holomorphe discrète sur  ${}^k\Lambda$ . Supposons qu'il existe une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  telle que pour toute suite convergente  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $x_k \in {}^k\Lambda_0$ , la suite  $(f_k(x_k))$  converge vers  $f(\lim(x_k))$ .

Alors  $f$  est holomorphe.

**Preuve :** Tout point  $x \in \Omega$  est (à partir d'un certain rang, détail que nous ne répèterons pas) dans une face de  ${}^k\diamond$  et est donc à une distance de moins de  $\frac{\delta_k}{\sqrt{2}}$  d'un point de  ${}^k\Lambda_0$ . Comme la suite  $(\delta_k)$  tend vers zéro, il existe pour tout  $x \in \Omega$ , une suite de points  $(x_k)$  avec  $x_k \in {}^k\Lambda$  telle que  $(x_k)$  converge vers  $x$ .

La fonction  $f_k$  est une application d'un ensemble fini de points  ${}^k\Lambda_0 \subset \Omega$  dans  $\mathbb{C}$ . On la prolonge en une fonction continue  $\bar{f}_k$  sur tout  $\Omega$ , en interpolant linéairement sur les segments des arêtes de  $\diamond$  puis en prolongeant en une fonction harmonique à l'intérieur des faces (mais tout prolongement respectant le principe du maximum ferait l'affaire).

Les hypothèses du théorème impliquent que cette suite de fonctions  $(\bar{f}_k)$  vérifient les hypothèses du lemme : Soit  $x \in \Omega$  et  $(\zeta_k)$  une suite de points de  $\Omega$  convergeant vers  $x$ . Chaque  $\zeta_k$  appartient à une face  $F_k$  d'un  ${}^k\diamond$ . Sur une face  $F_k$ , prenons  $x_k$  et  $y_k$  les sommets où  $\text{Re}(f_k)$  atteint respectivement son

minimum et son maximum. Par principe du maximum pour une fonction harmonique,

$$\operatorname{Re} (f_k(x_k)) \leq \operatorname{Re} (\bar{f}_k(\zeta_k)) \leq \operatorname{Re} (f_k(y_k))$$

On a de plus  $|x_k - \zeta_k| \leq 2\delta_k$  et de même pour  $y_k$ . Donc  $(x_k)$  et  $(y_k)$  convergent également vers  $x$ . Par conséquent  $f_k(x_k)$  et  $f_k(y_k)$  convergent vers  $f(x)$ . Par encadrement,  $\operatorname{Re} (\bar{f}_k(\zeta_k))$  converge vers  $\operatorname{Re} (f(x))$ . Le même raisonnement s'applique pour la partie imaginaire.

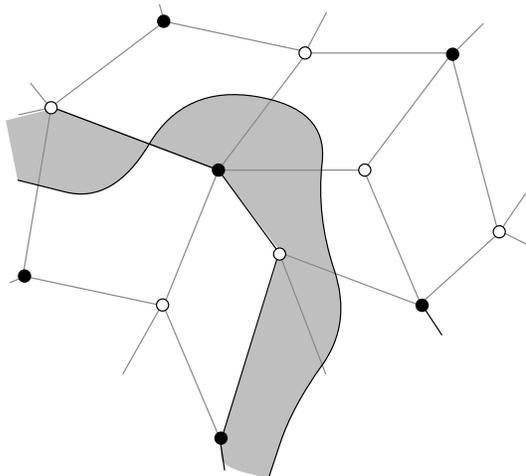
Donc, d'après le lemme, la fonction  $f$  est **continue**, limite uniforme des  $\bar{f}_k$  sur tout compact de  $\Omega$ .

Soit  $\gamma$  un lacet de  $\Omega$  homologue à zéro, de longueur finie. Quand  $\gamma$  varie, il rencontre un certain nombre de faces de  $k\Delta$ . Comme le diamètre d'une face est au plus  $2\delta_k$ , l'ensemble de ces faces est contenu dans le voisinage tubulaire  $T$  de  $\gamma$  de rayon  $2\delta_k$ . Le sous-complexe  $V$  des éléments de  $C(\Delta)$  contenus dans  $T$  est un complexe cellulaire voisinage de  $\gamma$ .

L'aire de  $T$  est inférieure à  $\ell \times 4\delta_k$ .

Une adaptation du lemme précédent nous donne l'existence d'un lacet  $\gamma_k \in C_1(\Delta)$ , homotope à  $\gamma$  et tel que :

$$\ell(\gamma_k) \leq \frac{4\ell}{\sin \eta}$$



De plus, étant composé d'arêtes sur le bord de faces intersectant  $\gamma$ , le lacet  $\gamma_k$  est inclus dans le voisinage tubulaire  $T$ .

Supposons  $f$  de classe  $C^1$ .  $\Gamma$  et  $\Gamma_k$  étant homotopes, ils délimitent le bord d'une 2-chaîne  $C$  de  $\Omega$ , contenue dans le voisinage tubulaire, l'aire entre les deux courbes est donc inférieure à  $4\delta_k \ell$ .

En appliquant la formule de Stokes, on voit que l'intégrale  $\int_{\gamma} f(z) dz$  diffère de l'intégrale de  $f$  le long de  $\gamma_k$  d'au plus l'intégrale sur  $C$  de la forme surfacique de densité la dérivée antiholomorphe de  $f$  :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_k} f(z) dz \right| \leq \iint_C |\bar{\partial} f(z)| dz \wedge d\bar{z}$$

Sur le compact  $\bar{T}$ , la dérivée antiholomorphe  $\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  est majorée,

$$|\bar{\partial} f| \leq M$$

Par conséquent,

$$\left| \oint_{\gamma} f(z) dz - \oint_{\gamma_k} f(z) dz \right| \leq M \times 4\delta_k \ell$$

Comme  $\delta_k$  tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \oint_{\gamma_k} f(z) dz = \oint_{\gamma} f(z) dz$$

Pour  $f$  continue quelconque, en prenant une suite de fonctions de classe  $C^1$  convergeant uniformément vers  $f$  sur  $\bar{T}$ , comme la longueur des  $\gamma_k$  est bornée indépendamment de  $k$ , on prouve le même résultat.

Puis, comme la suite de fonctions  $(\bar{f}_k)$  converge vers  $f$  uniformément sur  $\bar{T}$ , on a également que

$$\left| \oint_{\gamma_k} (\bar{f}_k(z) - f(z)) dz \right| \text{ tend vers zéro}$$

Or, pour tout  $k$ , l'interpolation sur les segments étant linéaire, sur le segment  $(x, y) \in {}^k \diamond_1$ ,

$$\int_{(x,y)} \bar{f}_k(z) dz = \int_{(x,y)} \frac{(y-z)f_k(x) + (z-x)f_k(y)}{y-x} dz = (y-x) \frac{f_k(x) + f_k(y)}{2}$$

c'est-à-dire la formule de l'intégration de la 1-forme  $f_k dZ \in \Omega^1(\Lambda)$  sur l'arête  $(x, y)$ . Par conséquent,

$$\oint_{\gamma_k} \bar{f}_k(z) dz = \oint_{\gamma_k} f_k dZ$$

la deuxième intégrale étant l'accouplement entre une chaîne  $\gamma_k \in \Lambda_1$  et une cochaîne  $f_k dZ \in \Omega^1(\Lambda)$ . Mais comme par hypothèse,  $f_k$  est holomorphe au

sens discret, d'après la proposition F.3,  $f_k dZ$  est fermée et cette intégrale de contour sur un lacet homologue à zéro est nulle.

On en déduit que  $\int_{\gamma_k} f(z) dz$  tend vers zéro, donc :

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Comme cela est vrai pour tout contour  $\gamma$  homologue à zéro, d'après le théorème de Morera, la fonction  $f$  est holomorphe.  $\square$

**Théorème 16** *Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann. Choisissons une métrique plate à singularités coniques. Soit  $({}^k\Gamma)_{k \in \mathbb{Z}}$  une suite de cartes semi-critiques adaptées à cette métrique. Supposons que pour tout graphe diamant  ${}^k\Diamond$  associé, les côtés des quadrilatères soient inférieurs à  $\delta_k$  tendant vers zéro et que les angles aux sommets soient dans l'intervalle  $[\eta, 2\pi - \eta]$ , avec  $\eta > 0$ .*

*Soit  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions, telles que  $f_k$  est holomorphe sur  ${}^k\Lambda$ . Supposons qu'il existe une fonction  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ , bornée sur tout compact, telle que pour toute suite convergente  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $x_k \in {}^k\Lambda_0$ , la suite  $(f_k(x_k))$  converge vers  $f(\lim(x_k))$ .*

*Alors  $f$  est holomorphe.*

**Preuve :** On décompose  $\Sigma$  en domaines non ramifiés et on applique le théorème 15 précédent.  $f$  est donc holomorphe en dehors des points coniques, mais comme elle est bornée, elle est aussi holomorphe en ces points par le théorème des singularités inessentiels.  $\square$



## Chapitre G

# Système statistique

On pourra lire les livres de Baxter [Bax], de Itzykson et Drouffe [ID] et l'article de Langlands [Lan].

### G.1 Définition

Un système statistique de type  $(k, l)$  est la donnée de :

$\Gamma$  un complexe cellulaire localement fini,  $\Gamma = \Gamma_0 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_n$

$S$  un ensemble  $S$ , appelé ensemble des **spins**, à partir duquel on construit l'ensemble des **configurations**, qui sont des applications

$$\sigma : \Gamma_k \rightarrow S \tag{G.1}$$

des cellules de dimension  $k$  dans  $S$ ,

$H$  et, pour toute  $l$ -cellule  $\lambda$ , d'une fonction réelle sur les configurations  $H_\lambda(\sigma)$  appelée l'**énergie locale d'interaction** qui ne dépend de la configuration  $\sigma$  que par ses valeurs sur les  $k$ -cellules incidentes à la  $l$ -cellule  $\lambda$ .

On considère alors, pour toute partie finie  $R \subset \Gamma$  (qui n'est pas forcément un sous-complexe), l'énergie

$$H_R(\sigma) = \sum_{\lambda \in \Lambda_l \cap R} H_\lambda(\sigma)$$

et on étudie la distribution de Boltzmann associée sur les configurations dans  $R$ : On choisit un paramètre  $\beta$  réel, et à une configuration  $\sigma$ , on associe

sa probabilité conditionnée par ses valeurs sur  $\Gamma \setminus R$ ,

$$p(\sigma|\sigma(\Gamma \setminus R)) = \frac{1}{Z_R} e^{-\beta H_R(\sigma)} \quad (\text{G.2})$$

où  $Z_R$  est le facteur de normalisation pour que  $p$  soit de poids total 1, la **fonction de partition**.

Cela équivaut à une mesure de probabilité sur  $\{\sigma : R_k \rightarrow S\}$ , les configurations restreintes à  $R$ , dès qu'est choisie une condition au bord  $\sigma_0 : (\partial R)_k \rightarrow S$  où  $(\partial R)_k$  est l'ensemble des  $k$ -cellules de  $\Gamma$ , qui ne sont pas dans  $R$  mais qui sont *adjacentes* à une  $l$ -cellule de  $R$ . Dans le calcul de l'énergie sur une  $l$ -cellule de  $R$ , on complète la configuration  $\sigma$  par  $\sigma_0$  en les sommets de  $\partial R$ .

**Exemple** : L'exemple le plus simple et qui contient néanmoins toutes les difficultés est le **modèle d'Ising** sur une portion de réseau carré. Le complexe  $\Gamma$  est le réseau carré du plan, les régions  $R$  finies qu'on considère sont les rectangles comprenant les sommets d'affixe  $a + ib$  où  $a \in \langle 1, n-1 \rangle$  et  $b \in \langle 1, m-1 \rangle$ , ainsi que les arêtes incidentes. Les points du bord  $\partial R$  sont alors les  $\{a/a \in \langle 1, n-1 \rangle\}$ ,  $\{a+im/a \in \langle 1, n-1 \rangle\}$ ,  $\{ib/b \in \langle 1, m-1 \rangle\}$  et  $\{n+ib/b \in \langle 1, m-1 \rangle\}$ .

L'ensemble des spins est à deux éléments  $S = \{+1, -1\}$  et on place ceux-ci sur les sommets ( $k = 0$ ).

Les interactions se passent le long des arêtes ( $l = 1$ ) et on associe à une arête  $a$  d'extrémités  $x$  et  $x'$  dans la configuration  $\sigma$ , l'énergie

$$H_a(\sigma) = -J_a \sigma_x \times \sigma_{x'} \quad (\text{G.3})$$

où  $\sigma_x$  et  $\sigma_{x'}$  sont les valeurs de  $\sigma$  en  $x$  et  $x'$  respectivement et  $J_a$  est une constante sur l'arête  $a$  (on prend généralement deux constantes,  $J$  et  $J'$  pour les arêtes horizontales et verticales respectivement, trois sur un réseau triangulaire).

La probabilité d'une configuration  $\sigma$  sur  $R$ , étant donnée une condition au bord  $\sigma_0 : \partial R \rightarrow \{\pm 1\}$  est donc,

$$p_R(\sigma|\sigma_0) = \frac{1}{Z_R} e^{\beta \sum_{(x,x') \in R_1} J \sigma_x \sigma_{x'}} \quad (\text{G.4})$$

avec la constante de normalisation

$$Z_R = \sum_{\sigma: R_0 \rightarrow \pm 1} e^{\beta \sum_{(x,x') \in R_1} J \sigma_x \sigma_{x'}} \quad (\text{G.5})$$

□

A l'aide de l'énergie  $H_\lambda(\sigma)$  d'une  $l$ -cellule  $\lambda$  dans une configuration  $\sigma$ , on construit le **poids de Boltzmann** d'une  $l$ -cellule dans une configuration donnée,  $w_\lambda(\sigma) = e^{-\beta H_\lambda(\sigma)}$ .

Comme dans le cas du modèle d'Ising, on le fait dépendre localement d'un paramètre,  $J_\lambda$  qu'on appelle la "**constante d'interaction**", qui détermine l'énergie  $H_\lambda$ .

Le produit sur toutes les  $l$ -cellules de  $R$  des poids de Boltzmann donne le poids de Boltzmann total d'une configuration,  $W_R(\sigma) = \prod_{\lambda \in R_l} w_\lambda(\sigma)$ .

La somme sur toutes les configurations de ces poids de Boltzmann

$$Z_R = \sum_{\sigma: R_k \rightarrow S} \prod_{\lambda \in R_l} w_\lambda(\sigma) \quad (\text{G.6})$$

est appelée **fonction de partition**. C'est la constante de normalisation par laquelle il faut diviser les poids de Boltzmann pour avoir une probabilité :

$$p(\sigma | \Gamma \setminus R) = \frac{1}{Z_R} W_R(\sigma) \quad (\text{G.7})$$

La grandeur  $\beta H(\sigma)$  est appelée **l'action**. Le paramètre  $\beta$  qui relie l'énergie à l'action se décompose traditionnellement en deux paramètres  $\beta = \frac{1}{kT}$  où  $T$  est appelée la **température** et

$k$  la **constante de Boltzmann**, une constante universelle. A  $\beta$  fixé, un état est d'autant plus probable que son action est faible.

Les systèmes statistiques qu'on étudie effectivement dans la pratique se rangent dans quelques types particuliers :

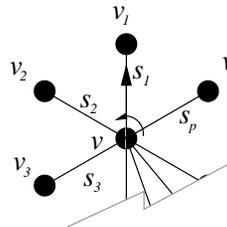
$k = 0, l = 1$  Les modèles à **spin**, une configuration est une application des sommets vers un ensemble  $S$ , on dit qu'on place les spins aux sommets, les interactions sont portées par les arêtes. On a donc, pour toute arête  $\lambda = (v, v')$ , une application

$$\begin{aligned} H : S \times S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, s') &\mapsto H_\lambda(s, s') \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

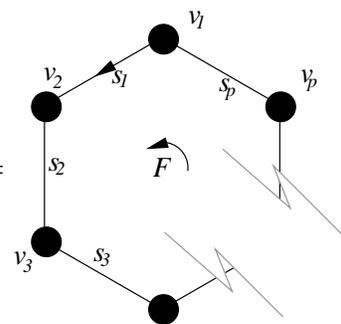
et  $H(\sigma) = \sum_{(v, v') \in R_1} H(\sigma_v, \sigma_{v'})$ . Le poids de Boltzmann  $w_\lambda(s, s') = e^{-\beta H(s, s')}$  de l'arête  $\lambda$  dans la configuration (locale)  $(s, s')$  est noté graphiquement :

$$w_\lambda(s, s') = \bullet \xrightarrow{\lambda} \bullet \quad (\text{G.9})$$

$k = 1, l = 0$  Les modèles à **vertex**, les spins sont placés sur les arêtes tandis que les interactions se situent aux sommets. On se restreint le plus souvent à des graphes réguliers, de valence constante  $p$  et à des configurations symétriques, qui soit ne dépendent pas de l'orientation des arêtes, soit vérifient  $\sigma(\bar{\lambda}) = \tau\sigma(\lambda)$  où  $\tau$  est une involution de  $S$ . De même que dans le cas d'un modèle à spin, le poids de Boltzmann de l'interaction en un sommet  $v$  de voisins  $(v_1, \dots, v_p)$ , se note graphiquement :

$$w_v(s_1, \dots, s_p) = \begin{array}{c} v_1 \\ \uparrow s_1 \\ v_2 \quad \swarrow s_2 \quad \nearrow s_p \quad v_p \\ \uparrow \\ v \\ \swarrow s_3 \quad \searrow \\ v_3 \end{array} \quad (\text{G.10})$$


$l = 2$  Les modèles à **Interaction autour des Faces**, les spins sont aux sommets ou sur les arêtes et chaque face  $F$  comportant  $p$  sommets (et arêtes) est équipée d'un poids de Boltzmann qu'on représente graphiquement par (en supposant que  $k = 1$ ) :

$$w_F(s_1, \dots, s_p) = \begin{array}{c} v_1 \\ \nearrow s_1 \quad \searrow s_p \quad v_p \\ \uparrow s_2 \\ v_2 \\ \downarrow s_3 \\ v_3 \end{array} \quad (\text{G.11})$$


On enrichie souvent un système de plusieurs types d'interactions, par exemple une énergie interne ( $k = l$ ) peut venir compléter une énergie d'interaction pure. On ajoute simplement les termes à l'énergie.

## G.2 Limite thermodynamique/limite continue critique

La collection des lois de Boltzmann étant donnée sur les parties finies  $R$ , on s'intéresse à l'espérance de certaines variables aléatoires

$$A : \begin{array}{l} (\Gamma_k \rightarrow S) \rightarrow E \\ \sigma \mapsto A(\sigma) \end{array}$$

appelées **observables** quand on moyenne sur les configurations sur  $R$  assujetties à une condition  $c$  sur le bord  $\partial R$ . Cela remplace une moyenne sur les configurations  $\sigma : \Gamma_k \rightarrow S$  sur tout  $\Gamma_k$  conditionnées sur  $\Gamma \setminus R$  puisque les interactions sont locales.

$$\langle A \rangle_R^c = \frac{1}{Z} \sum_{\sigma: R_k \rightarrow S/c} A(\sigma) W_R(\sigma) \quad (\text{G.12})$$

On parle aussi d'**opérateur** pour  $A$  en pensant à son action sur quelques familles d'observables,  $B \mapsto AB$ . Les conditions peuvent être de spin fixé, ou bien des conditions périodiques, On s'intéresse en particulier à des régions  $R_n$  de plus en plus grandes d'un complexe infini. Le but est alors d'identifier les grandeurs qui ont une limite quand  $n$  tend vers l'infini. On parle de **limite thermodynamique**. Dans quel sens cette limite? Au sens de certaines lois de probabilité sur l'ensemble  $\Omega$  de toutes les configurations  $\Gamma_k \xrightarrow{\sigma} S$ . Une **phase**, ou un **état de Gibbs** du système est une probabilité sur  $\Omega$  dont le conditionnement sur le complémentaire des parties finies redonne les lois de Boltzmann.

En général, les diverses phases à  $T$  donné correspondent à des limites de conditions au bord différentes. Pour une phase donnée, des quantités thermodynamiques sont définies, par exemple

- l'**énergie libre** par site  $f = \lim -\frac{\beta}{N} \ln Z$ ,
- l'**énergie interne** par site  $u = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{f}{T} \right)$ ,
- la **chaleur spécifique** par site  $C = \frac{\partial}{\partial T} u$ , etc.

Quand les paramètres de Boltzmann varient, par exemple la température  $T$ , le signe d'une **transition de phase** est la discontinuité de  $f$  ou de l'une de ses données secondaires. Si  $f$  ou les dérivées premières sont discontinues, on parle de point critique de **première espèce**, c'est le cas par exemple d'une transition solide-liquide, l'énergie interne  $u$  étant discontinue

à la température critique. Si c'est une dérivée d'ordre supérieur, on parle de transition de **deuxième espèce**, par exemple dans le cas d'une transition liquide-gaz au point de Curie où la magnétisation  $M = -\left(\frac{\partial f}{\partial H}\right)_T$  s'anule brusquement. En ces points de deuxième espèce, on observe une sorte d'**invariance d'échelle**. On démontre par exemple sur le carré avec deux constantes d'interaction, que pour deux sommets sur la même ligne, la corrélation de leur spin se comporte, à la limite thermodynamique, de la manière suivante :

$$\langle \sigma(x)\sigma(x') \rangle \sim |x - x'|^n e^{-\frac{|x-x'|}{\xi}}$$

et  $\xi$  est la **constante de corrélation**. Elle dépend de la température et la température critique est caractérisée par une longueur de corrélation infinie

$$\xi(T_c) = \infty$$

c'est-à-dire qu'il ne reste plus qu'un terme en puissance, qui vaut dans le cas d'Ising  $-\frac{1}{2}$ ,

$$\langle \sigma(x)\sigma(x') \rangle_{T_c} \sim \frac{1}{\sqrt{|x - x'|}}$$

Alors un procédé de **renormalisation** permet de construire une théorie **continue critique**, une théorie de champs continue, dont on attend des renseignements sur le voisinage de la transition. En identifiant ces exposants (par exemple  $-\frac{1}{2}$  pour la corrélation du spin) aux dimensions conformes d'une **théorie conforme rationnelle**, on fait correspondre aux champs discrets critiques des analogues continus. C'est simplement dans ce sens là qu'on dit que "le modèle d'Ising converge à la limite continue critique vers une théorie conforme rationnelle".

Cette limite continue critique n'est pas une pure limite thermodynamique, elle fait apparaître des paramètres libres supplémentaires, par exemple une topologie, une structure conforme, qui sont hors de portée des limites statistiques.

Cette sorte de limite peut être prise sur des complexes cellulaires variables, par exemple des raffinements, des subdivisions.

Le présent travail répond à la tentation de trouver sur les systèmes finis, une trace des propriétés de la limite critique. Dans le cas du modèle d'Ising, le point critique correspond au point fixe de la dualité haute et basse température découverte par Kramers et Wannier [KW], que nous allons décrire dans la section suivante. Son expression sur les complexes finis est une forme de la dualité de Poincaré. En fait, l'insertion des divers champs du système, le spin  $\sigma$ , le désordre  $\mu$ , le fermion  $\psi$  et d'autres encore, oblige

à considérer ensemble toutes les dualités d'intersection sur les surfaces de Riemann, épointées, avec des points marqués et des lignes coloriées, à la façon dont elles apparaissent dans le livre de Chevalley sur les fonctions algébriques, cf. la critique d'André Weil [Wei].

Ainsi, une corrélation sur une surface  $\Sigma$ , comme

$$\langle \sigma_{x_1} \mu_{y_1} \psi_{z_1} \sigma_{x_2} \sigma_{x_3} \mu_{y_2} \psi_{z_2} \rangle$$

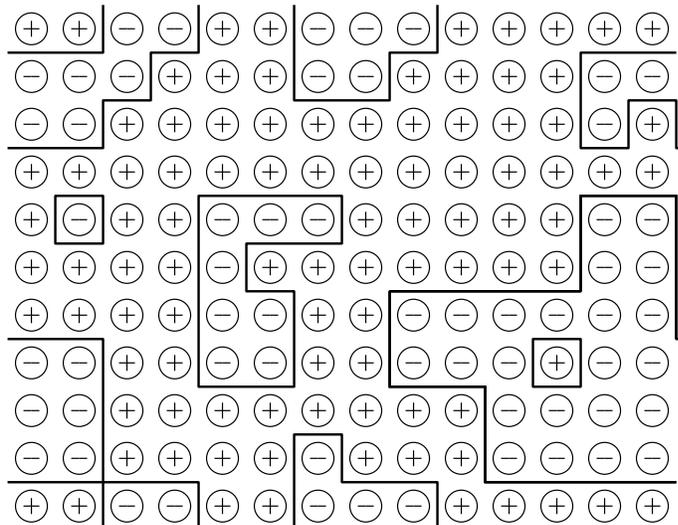
peut-être vue comme une *classe de cohomologie* relativement à  $y_1, y_2$  sur un revêtement double ramifié en  $z_1, z_2$  de  $\Sigma$  privée des points  $x_1, x_2, x_3$ .

Sur les **cartes critiques**, les propriétés conformes vont se révéler avant le passage à la limite continue.

### G.3 Développement basse température

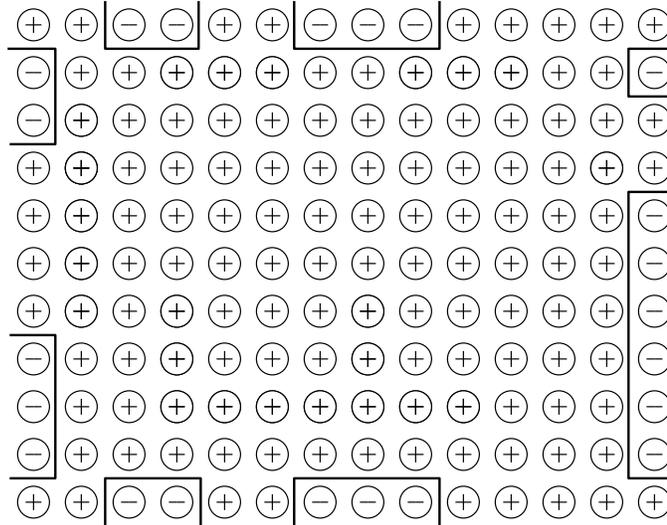
Toutes nos chaînes seront désormais prises à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Si bien qu'une chaîne est identifiée à un sous-ensemble d'arêtes :  $C_1(\Gamma) = \mathcal{P}(\Gamma_1)$ .

Considérons le modèle d'Ising sur une décomposition cellulaire finie d'une surface sans bord. Une configuration de spin sur  $\Gamma$ , peut se voir comme un cycle  $\gamma_*$  sur le graphe dual  $\Gamma^*$ , à savoir le bord de l'aire délimitée par les faces centrées en les spins +. Réciproquement, à tout cycle de  $\Gamma^*$ , nul en homologie, on associe une configuration de spin dès qu'on connaît la valeur du spin en un point. Voici un exemple dans le cas du tore de genre un décomposé par une portion du réseau carré, les côtés supérieurs et inférieurs, respectivement droits et gauches sont à identifier.



Si on considère le modèle sur une surface avec un bord non vide, on doit imposer en plus des conditions au bord.

**Définition 17** Une **condition de spin au bord** est une application  $(\partial\Gamma)_0 \rightarrow S$  qui assigne un spin fixé à chaque point du bord. On code cette condition par la 1-chaîne  $\gamma_*^0 \in C_1(\Gamma^*)$  somme de toutes les arêtes duales des arêtes aboutissant à des points du bord  $\partial\Gamma$  de spin  $-$ .



On note  $\mathcal{B}^*$  l'ensemble des chaînes  $\gamma_* \in C_1(\Gamma^*)$  telles que  $\gamma_* - \gamma_*^0$  est homologue à zéro.

$\gamma_*^0$  représente l'état avec le plus de spin  $+$  étant donné les spins fixés au bord. Une fois  $\gamma_*^0$  connu, il y a bijection entre les configurations sur  $\Gamma_0$  respectant les conditions au bord et les chaînes  $\gamma_* \in \mathcal{B}^*$ .

Le poids de Boltzmann d'une configuration exprimé en fonction de la chaîne sur  $\Gamma^*$  qui lui est associée, est un développement **basse température** [KW]: on comprend cette chaîne comme une perturbation de l'état de plus basse énergie, l'état fondamental où tous les spins sont de même signe. En effet, quand la température est basse, les différences d'énergie sont très pénalisantes, la probabilité étant en  $e^{-\frac{H}{kT}}$ , si bien que les états ayant un grand nombre de spin des deux espèces ont une probabilité très faible, les configurations sont *gelées*, spin en haut ou spin en bas.

Cet état fondamental ne respecte pas *a priori* les conditions au bord, c'est un état virtuel. En particulier ce n'est pas nécessairement l'état associé

à  $\gamma_*^0$ .

**Définition 18** Soit  $C = \exp(\sum_{(x,x') \in \Gamma_1} \beta J_{x,x'})$ . Cette constante représente le poids de Boltzmann associé à l'état fondamental.

Pour une chaîne  $\gamma_* \in \mathcal{B}^*$ , on définit

$$L(\gamma_*) = 2\beta \sum_{(x,x')^* \in \gamma_*} J_{x,x'} \quad (\text{G.13})$$

la longueur thermodynamique de la chaîne  $\gamma_*$ .

**Proposition 20** Soit  $\sigma$  une configuration de spin et  $\gamma_*$  la chaîne sur  $\Gamma^*$  associée,

$$e^{-\beta H(\sigma)} = C e^{-L(\gamma_*)} \quad (\text{G.14})$$

Parmi toutes les arêtes  $(x, x') \in \Gamma_1$ , seules les arêtes  $a$  qui coupent transversalement la chaîne  $\gamma_*$  (nous noterons  $a^* \in \gamma_*$ ) séparent des spins de signe opposé, les autres sont à l'intérieur d'un îlot de même signe et contribuent moins à l'énergie  $H$ , nous dirons que ce sont des arêtes **excitées**. En séparant de la somme les arêtes excitées, on obtient :

$$\begin{aligned} H(\sigma) &= \sum_{(x,x') \in \Gamma_1} -J_{x,x'} \sigma_x \sigma_{x'} \\ &= - \sum_{(x,x')^* \notin \gamma_*} J_{x,x'} + \sum_{(x,x')^* \in \gamma_*} J_{x,x'} \\ &= - \sum_{(x,x') \in \Gamma_1} J_{x,x'} + 2 \sum_{(x,x')^* \in \gamma_*} J_{x,x'} \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

□

Ainsi, l'espérance d'un opérateur  $A$  peut s'écrire :

$$\langle A \rangle = \frac{C}{Z} \sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} A(\sigma(\gamma_*)) e^{-L(\gamma_*)} \quad (\text{G.16})$$

où la fonction de partition est  $Z = C \sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} e^{-L(\gamma_*)}$ . On voit que le poids de Boltzmann  $C$  de l'état fondamental se simplifie. C'est l'intérêt essentiel du développement basse température.

## G.4 Développement haute température

On renvoie au livre de Baxter [Bax] et à l'article de Wannier [Wan] pour un exposé plus complet. Pour ce qui semble une toute autre raison, on peut écrire l'espérance d'un opérateur comme une somme sur des chaînes sur  $\Gamma$ , c'est le développement **haute température**. L'idée aurait pû être de linéariser la loi de Boltzmann  $e^{-\frac{H}{kT}} = 1 - \frac{H}{kT}$  en considérant la température comme élevée. La technique est ici un peu différente mais les idées sont les mêmes, ce qui explique le vocable *développement haute température*.

**Définition 19** Pour  $K \in \mathbb{R}^+$ , on définit  $K^*$  par  $\tanh K = e^{-2K^*}$ .

On constate que cela fait une involution de  $\mathbb{R}^+$  car la relation de définition est équivalente à  $\operatorname{sh} 2K \operatorname{sh} 2K^* = 1$ . De plus,

$$e^{\pm K} = \operatorname{ch} K (1 \pm \tanh K) = \operatorname{ch} K (1 \pm e^{-2K^*}) \quad (\text{G.17})$$

Nous allons l'appliquer à  $K_a := \beta J_a$ , pour toutes les arêtes  $a \in \Gamma_1$ . Remarquons que si on définit l'action sur l'arête  $a^*$  duale de  $a \in \Gamma_1$ , par  $K_{a^*} := K_a^*$ , on a  $K_a = K_{a^*}^*$ .

L'espérance d'une observable  $A$  peut s'écrire, en posant  $C'' = \prod_{(x,x') \in \Gamma_1} \operatorname{ch} K_{x,x'}$  :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\sigma: \Gamma_0 \rightarrow \{\pm 1\}} A(\sigma) \prod_{(x,x') \in \Gamma_1} e^{\sigma_x \sigma_{x'} K_{x,x'}} \quad (\text{G.18})$$

$$= \frac{C''}{Z} \sum_{\sigma: \Gamma_0 \rightarrow \{\pm 1\}} A(\sigma) \prod_{(x,x') \in \Gamma_1} (1 + \sigma_x \sigma_{x'} e^{-2K_{x,x'}^*}) \quad (\text{G.19})$$

La somme  $\sum$  étant étendue à toutes les configurations respectant les conditions au bord.

**Proposition 21** Dans une configuration  $\sigma$  donnée,

$$\prod_{(x,x') \in \Gamma_1} (1 + \sigma_x \sigma_{x'} e^{-2K_{x,x'}^*}) = \sum_{\gamma \subset \Gamma_1} \prod_{(x,x') \in \gamma} e^{-2K_{x,x'}^*} \prod_{x \in \partial \gamma} \sigma_x \quad (\text{G.20})$$

Dans un terme donné du développement du produit des  $(1 + \sigma_x \sigma_{x'} e^{-2K_{x,x'}^*})$ , chaque arête  $(x, x')$  va venir avec 1 ou son facteur  $\sigma_x \sigma_{x'} e^{-2K_{x,x'}^*}$ . On peut faire correspondre, à chacun de ces termes, un ensemble  $\gamma$  d'arêtes de  $\Gamma_1$  par la règle suivante : L'arête  $(x, x')$  est dans  $\gamma$  si et seulement si apparaît le

facteur  $\sigma_x \sigma_{x'} e^{-2K_{x,x'}}$ . Il reste à sommer sur tous les ensembles d'arêtes possibles (sans restriction) pour obtenir le produit. Si  $x$  est un point intérieur de  $\gamma$ , il apparaît un nombre pair de fois dans le produit si bien que  $\sigma_x$  disparaît, il ne reste plus que les spins sur le bord.  $\square$

**Définition 20** *Pour tout sous-ensemble  $\gamma \subset \Gamma_1$ , on définit*

$$L^*(\gamma) = \sum_{a \in \gamma} 2K_a^* \quad (\text{G.21})$$

*la longueur thermodynamique duale de  $\gamma$ .*

L'espérance d'une observable  $A$  se réécrit alors :

$$\langle A \rangle = \frac{C''}{Z} \sum_{\sigma: \Gamma_0 \rightarrow \{\pm 1\}} \sum_{\gamma \subset \Gamma_1} e^{-L^*(\gamma)} A(\sigma) \prod_{x \in \partial \gamma} \sigma_x \quad (\text{G.22})$$

En interchangeant les sommations, on arrive à

$$\langle A \rangle = \frac{C''}{Z} \sum_{\gamma \subset \Gamma_1} e^{-L^*(\gamma)} \sum_{\sigma: \Gamma_0 \rightarrow \{\pm 1\}} A(\sigma) \prod_{x \in \partial \gamma} \sigma_x \quad (\text{G.23})$$

Là, tout dépend du comportement de  $A$  vis-a-vis du changement de signes des spins.

Supposons que  $A$  ne dépende que des spins aux points  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ . Si le bord de  $\gamma$  contient un site  $x \notin \{x_k\}$ , le spin  $\sigma_x$  va apparaître une seule fois dans le produit et  $A$  n'en dépend pas ; si ce spin n'est pas fixé par une condition au bord, en faisant la sommation sur toutes les configurations et en factorisant celles où  $\sigma_x = +1$  et celles où  $\sigma_x = -1$ , on voit qu'elles s'annulent deux à deux. Donc ne restent plus que les contributions des chaînes fermées relativement au bord et aux  $\{x_k\}$ . De plus, si  $A$  est impaire en  $\sigma_{x_k}$ , ce site doit être sur le bord de  $\gamma$  pour que ce dernier contribue à l'espérance et si  $A$  est pair,  $x_k$  ne doit pas être sur le bord de  $\gamma$ .

**Définition 21** *Soient  $n$  points  $x_1, \dots, x_n \in \Gamma_0$ , définissons*

$$\mathcal{B}_{\{x_1, \dots, x_n\}} = \{\gamma \subset \Gamma_1 / \{x_k\} \subset \partial \gamma \subset \partial \Gamma \cup \{x_k\}\} \quad (\text{G.24})$$

*l'ensemble des chaînes fermées relativement au bord et aux  $\{x_k\}$  et contenant ces derniers. S'il n'y a pas de confusion possible, nous tairons les indices  $\{x_1, \dots, x_n\}$  et noterons simplement  $\mathcal{B}$ .*

**Proposition 22** *La corrélation des spins en les points  $\{x_k\}_{1 \leq k \leq n}$  a pour espérance :*

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \rangle = \frac{C'}{Z} \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} e^{-L^*(\gamma)} \prod_{\substack{x \in \partial\gamma \\ x \notin \{x_k\}}} \sigma_x \quad (\text{G.25})$$

où la constante est

$$C' = 2^N \prod_{(x,x') \in \Gamma_1} \text{ch } K_{x,x'} \quad (\text{G.26})$$

L'opérateur  $\sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n}$  ne dépend que des spins en  $x_1, \dots, x_n$ , donc

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \rangle = \frac{C''}{Z} \sum_{\gamma \in \Gamma_1} e^{-L^*(\gamma)} \sum_{\sigma: \Gamma_0 \rightarrow \{\pm 1\}} \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \prod_{x \in \partial\gamma} \sigma_x \quad (\text{G.27})$$

où la somme peut être restreinte aux chaînes qui sont fermées relativement au bord et aux points  $x_1, \dots, x_n$ , les autres chaînes ayant une contribution nulle.

Supposons que  $x_1 \notin \partial\gamma$ , alors, pour les mêmes raisons que précédemment,  $\sigma_{x_1}$  apparaissant une seule fois, en sommant sur les valeurs  $+1$  et  $-1$  de ce dernier, on voit que la contribution de  $\gamma$  est nulle, il faut donc que tous les  $x_k$  soient sur le bord de  $\gamma$  pour que sa contribution soit retenue. Mais alors

$$\sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \prod_{x \in \partial\gamma} \sigma_x \quad (\text{G.28})$$

ne dépend plus du tout de la configuration puisque chaque spin apparaît exactement deux fois sauf les termes du bord dont le spin est fixé, si bien que la somme sur les configurations se ramène, à  $\gamma$  fixé à

$$\sum_{\sigma: \Gamma_0 \rightarrow \{\pm 1\}} \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \prod_{x \in \partial\gamma} \sigma_x = 2^N \prod_{\substack{x \in \partial\gamma \\ x \notin \{x_1, \dots, x_n\}}} \sigma_x \quad (\text{G.29})$$

où  $N$  est le nombre de points de  $\Gamma_0$ , c'est-à-dire que les chaînes de  $\mathcal{B}$  sont les seules qui ont une contribution non nulle.  $\square$

On peut incorporer les effets de bord dans la longueur thermodynamique (cf. Kadanoff et Ceva [KC]) :

**Définition 22** *Soit  $\gamma_* \in \mathcal{B}^*$ , représentant un état de spin compatible avec les conditions au bord, pour toute arête  $a \in \Gamma_1$ , on définit*

$$L_0^*(\gamma_*, a) = \begin{cases} 2K_a^* + i\pi & \text{si } a \text{ coupe } \gamma_* \\ 2K_a^* & \text{sinon.} \end{cases}$$

et pour un ensemble d'arêtes  $\gamma \subset \Gamma_1$ ,

$$L_0^*(\gamma_*, \gamma) = \sum_{a \in \gamma} L_0^*(\gamma_*, a) \quad (\text{G.30})$$

La partie imaginaire de  $L_0^*(\gamma_*, \gamma)$  comptabilise le nombre d'intersection de  $\gamma$  avec  $\gamma_*^0$ , c'est à dire, modulo deux, le nombre de fois où  $\gamma$  termine sur un point du bord de spin  $-$ . On a donc la formule :

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \rangle = \frac{C'}{Z} \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} e^{-L_0^*(\gamma_*, \gamma)} \quad (\text{G.31})$$

Pour  $\gamma_* \in \mathcal{B}^*$ , la longueur  $L_0^*(\gamma_*, \gamma)$  d'une chaîne  $\gamma \in \mathcal{B}$  fixée, fermée relativement au bord et aux  $\{x_k\}$  ne dépend de  $\gamma_*$  que dans sa partie imaginaire, qui est ( $i\pi$  fois) un nombre d'intersection géométrique. Modulo  $2i\pi$ , il ne dépend donc que de la classe d'homologie de  $\gamma^*$  dans  $H_1(\Gamma^* \setminus \{x_k^*\}, \partial\gamma_*^0)$ .

Mais par définition de  $\mathcal{B}^*$ , la classe d'homologie de  $\gamma^*$  dans  $H_1(\Gamma^*, \partial\gamma_*^0)$  est égale à celle de  $\gamma_*^0$ . Donc

$$\gamma^* - \gamma_*^0 \in H_1(\Gamma^* \setminus \{x_k^*\}) \xrightarrow{\sim} H_1(\Gamma^*) \oplus (\mathbb{Z}/2)^n \quad (\text{G.32})$$

(l'isomorphisme n'est pas canonique) est contenu dans la partie  $(\mathbb{Z}/2)^n$ , c'est-à-dire qu'on a une application :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^* &\rightarrow (\mathbb{Z}/2)^n \\ \gamma_* &\mapsto (\delta_1, \dots, \delta_n) \end{aligned} \quad (\text{G.33})$$

telle que la classe de  $\gamma_*$  dans  $H_1(\Gamma^* \setminus \{x_k^*\}, \partial\gamma_*^0)$  soit égale à celle de  $\gamma_*^0 + \sum_{k=1}^n \delta_k(\gamma_*) \partial x_k^*$ . Cela induit donc

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^* &\rightarrow \{\pm 1\} \\ \gamma_* &\mapsto \epsilon(\gamma_*) = (-1)^{\sum_{k=1}^n \delta_k(\gamma_*)} \end{aligned} \quad (\text{G.34})$$

qui indique la parité du nombre de  $x_k$  entourés par  $\gamma - \gamma_*^0$ .

**Définition 23** Pour  $\gamma \in \mathcal{B}$  et  $\gamma_* \in \mathcal{B}^*$ , définissons  $L^*(\gamma_*, \gamma) := \epsilon(\gamma_*) L_0^*(\gamma_*, \gamma)$

Par construction,  $L^*(\gamma_*, \gamma)$  ne dépend plus du tout de  $\gamma_*$ , nous avons donc la formule, pour tout  $\gamma_* \in \mathcal{B}^*$  :

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \rangle = \frac{C'}{Z} \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} e^{-L^*(\gamma_*, \gamma)} \quad (\text{G.35})$$

## G.5 Symétrie de dualité des spins

Soit  $x$  et  $x'$  deux points de  $\Gamma$ , et  $\gamma \subset \Gamma_1$  un chemin les reliant,  $\partial\gamma = \{x, x'\}$ . Dans une configuration  $\sigma$  associée à un chemin  $\gamma_* \in \mathcal{B}^*$ , le produit  $\sigma_x \sigma_{x'}$  est égal à  $(-1)^l$  où  $l$  est le nombre d'intersections de  $\gamma_*$  avec  $\gamma$  car c'est le nombre de fois où le spin change de signe le long de  $\gamma$ . Comme  $\gamma_*$  détermine complètement  $\sigma_x$  et  $\sigma_{x'}$ ,  $(-1)^l$  ne dépend pas du choix de  $\gamma$ . L'intersection est un invariant d'homologie modulo deux donc on peut ajouter à  $\gamma$  des cycles homologues à zéro, cela ne change pas le résultat, si bien que  $\sigma_x \sigma_{x'}$  est égal à  $(-1)^l$  où  $l$  est le nombre d'intersections de  $\gamma_*$  avec n'importe quel représentant de  $\mathcal{B}_{\{x, x'\}}$  homologue à  $\gamma$ .

**Définition 24** Soit  $n$  points  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

Pour toute chaîne  $\gamma \in \mathcal{B}_{\{x_1, \dots, x_n\}}$  et toute arête  $b \in \Gamma_1^*$ , on définit

$$L_0(\gamma, b) := \begin{cases} 2K_{b^*} + i\pi & \text{si } b \text{ coupe } \gamma \\ 2K_{b^*} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout  $\gamma \in \mathcal{B}$ , soit

$$\epsilon(\gamma) = \prod_{x \in \partial\gamma \setminus \{x_k\}} \sigma_x \quad (\text{G.36})$$

C'est un signe qui ne dépend que de la condition au bord. Cela définit la longueur thermodynamique de  $\gamma_* \in \mathcal{B}^*$  modifiée par  $\gamma$ ,

$$L(\gamma, \gamma_*) = \epsilon(\gamma) L_0(\gamma, \gamma_*) \quad (\text{G.37})$$

Si  $n$  est impair, fixons  $x_0 \in \partial\Gamma$  un point du bord avec une condition de spin  $+$ . On choisit alors  $\gamma^0$  une chaîne quelconque de bord  $\partial\gamma^0 = \{x_1, \dots, x_n\}$  ou  $\partial\gamma^0 = \{x_0, \dots, x_n\}$  suivant la parité. On a en particulier  $\gamma^0 \in \mathcal{B}_{\{x_1, \dots, x_n\}}$ .

**Proposition 23** Pour tout  $\gamma \in \mathcal{B}$ ,

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \rangle = \frac{C}{Z} \sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} e^{-L(\gamma, \gamma_*)} \quad (\text{G.38})$$

$\gamma - \gamma^0$  est une chaîne fermée relativement au bord, et son signe  $\epsilon(\gamma - \gamma^0) = \epsilon(\gamma)$  car  $\gamma^0$  n'intervient qu'avec un bord de signe  $+$ . Donc

$$L(\gamma, \gamma_*) = \epsilon(\gamma) L_0(\gamma, \gamma_*) = L_0(\gamma^0, \gamma_*) \quad (\text{G.39})$$

et

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \rangle = \frac{C}{Z} \sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} e^{-L(\gamma_*)} \left( \prod_k \sigma(\gamma_*)_{x_k} \right) \quad (\text{G.40})$$

et  $e^{-L(\gamma_*)} (\prod_k \sigma(\gamma_*)_{x_k}) = e^{-L(\gamma_*) + i\pi \gamma_* \cdot \gamma^0}$ .  $\square$

Dans le calcul d'une corrélation de spins, on peut tout aussi bien sommer sur toutes ces chaînes, en divisant la constante qui est devant par leur nombre.

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \rangle = \frac{C}{Z} \sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} e^{-L(\gamma_0, \gamma_*)} = \frac{C}{Z} \sum_{\substack{\gamma_* \in \mathcal{B}^* \\ \gamma \in \mathcal{B}}} e^{-L(\gamma, \gamma_*)} \quad (\text{G.41})$$

On a ainsi une écriture complètement symétrique des développements haute et basse température :

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \rangle = \frac{C}{Z} \sum_{\substack{\gamma_* \in \mathcal{B}^* \\ \gamma \in \mathcal{B}_{\{x_k\}}} e^{-L(\gamma, \gamma_*)} = \frac{C'}{Z} \sum_{\substack{\gamma_* \in \mathcal{B}^* \\ \gamma \in \mathcal{B}_{\{x_k\}}} e^{-L^*(\gamma_*, \gamma)} \quad (\text{G.42})$$

La somme porte sur les mêmes éléments mais les constantes  $C$  et  $C'$ , ainsi que les longueurs thermodynamiques sont différentes, avec pourtant une grande similarité formelle puisque :

$$L(\gamma, a^*) = \epsilon(\gamma) \begin{cases} 2K_{*a^*} \\ 2K_{*a^*} + i\pi \end{cases} \quad \text{si } a^* \text{ coupe } \gamma \quad (\text{G.43})$$

$$L^*(\gamma_*, a) = \epsilon(\gamma_*) \begin{cases} 2K_a^* \\ 2K_a^* + i\pi \end{cases} \quad \text{si } a \text{ coupe } \gamma_* \quad (\text{G.44})$$

Nous n'avons pour l'instant considéré que des conditions au bord de spin fixé, cette condition étant codée dans l'ensemble  $\mathcal{B}^*$ . Mais on peut aussi bien prendre des conditions périodiques ou anti-périodiques de spin, c'est-à-dire sommer sur les conditions de spin qui sont invariantes ou inversées par l'action d'une involution de  $\partial R_0$ . On retrouve la même formulation avec un ensemble  $\mathcal{B}^*$  réunion des  $\mathcal{B}_k^*$  associés à toutes les conditions de spin vérifiant la périodicité (ou l'antipériodicité). La longueur thermodynamique est cependant simplifiée, les signes  $\epsilon(\gamma)$  qu'on avait introduit disparaissent, car chaque spin du bord intervient deux fois, et sont remplacés par un signe global +1 dans le cas périodique et -1 dans le cas antipériodique. Mais nous verrons que l'insertion d'opérateurs de désordre permet de mélanger des conditions périodiques, antipériodiques et spin sur différentes parties du bord  $\partial\Gamma$ .

## G.6 L'opérateur désordre

Kadanoff et Ceva, dans [KC], après une idée de Jordan et Wigner, introduisent les variables de désordre. Ce n'est pas une variable aléatoire mais plutôt un élément du *dual* des variables aléatoires, c'est-à-dire que c'est une **mesure** :

**Définition 25** Soit deux points  $y_1$  et  $y_2$  de  $\Gamma^*$  et un chemin  $\gamma_*^{y_1, y_2} \subset \Gamma_1^*$  tel que  $\partial\gamma_*^{y_1, y_2} = \{y_1, y_2\}$ . Le **désordre**  $\mu_{y_1, y_2}$  est défini par une modification de l'énergie suivant  $\gamma_*^{y_1, y_2}$ . On remplace pour toutes les arêtes  $a$  coupant  $\gamma_*^{y_1, y_2}$  la constante d'interaction  $J_a$  par son opposée  $J'_a = -J_a$ , ce qui revient à définir, pour une observable  $A$  l'observable  $A\mu_{y_1, y_2}$  par son espérance :

$$\langle A\mu_{y_1, y_2} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\sigma: \Gamma_0 \rightarrow \{\pm 1\}} A(\sigma) W(\sigma) e^{-2\beta \sum_{(x, x') \in \gamma_*^{y_1, y_2}} J_{x, x'} \sigma_x \sigma_{x'}} \quad (\text{G.45})$$

On dit qu'on **frustre** le système le long de  $\gamma_*^{y_1, y_2}$ .

L'opérateur désordre dépend du chemin  $\gamma_*^{y_1, y_2}$  mais il est d'usage de ne pas l'indiquer dans la notation et de le noter  $\mu_{y_1, y_2}$ . Il serait moins équivoque de le noter  $\gamma_*^{y_1, y_2}$ . Pour le produit de plusieurs opérateurs désordre  $\mu_{y_1} \dots \mu_{y_m}$ , il faut choisir une chaîne  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m}$  dont le bord est formé des  $y_k$ . S'il y a un nombre impair de points, il faut choisir un point fixe  $y_0 \in \Gamma^*$ .

Les expressions précédentes à l'aide de sommes sur des chaînes peuvent se réécrire avec l'insertion d'opérateurs désordre :

Pour le développement basse température, on fait la somme sur  $\gamma_*$  qui est l'ensemble des arêtes excitées. L'introduction des opérateurs désordre change d'état les arêtes intersectant la chaîne  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m}$ , celles qui étaient excitées deviennent désexcitées, et vice-versa. On a donc les formules suivantes pour le nouvel hamiltonien  $H'$  avec les constantes d'interaction  $J'$  :

$$H'(\sigma) = \sum_{(x, x') \in \Gamma_1} -J'_{x, x'} \sigma_x \sigma_{x'}$$

qui s'écrit, en utilisant un chemin  $\gamma^* \in \mathcal{B}^*$  codant la configuration  $\sigma$ ,

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{(x,x') \notin (\gamma_* \cup \gamma_*^{y_1 \dots y_m})^*} J_{x,x'} + \sum_{(x,x') \in (\gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})^*} J_{x,x'} \\
&\quad - \sum_{(x,x') \in (\gamma_* \cap \gamma_*^{y_1 \dots y_m})^*} J_{x,x'} \tag{G.46} \\
&= - \sum_{(x,x') \in \Gamma_1} J_{x,x'} + 2 \sum_{(x,x') \in (\gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})^*} J_{x,x'}
\end{aligned}$$

La somme des chemins se faisant modulo deux, c'est-à-dire que c'est la différence symétrique.

Cela permet d'écrire l'espérance jointe d'un opérateur  $A$  et de désordres  $\mu$  en  $m$  points :

$$\langle A \mu_{y_1} \dots \mu_{y_m} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\sigma: \Gamma_0 \rightarrow \{\pm 1\}} A(\sigma) e^{-\beta H'(\sigma)} = \frac{C}{Z} \sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} A(\sigma(\gamma_*)) e^{-L(\gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})} \tag{G.47}$$

En particulier pour les corrélations spin/désordre, pour  $\gamma \in \mathcal{B}_{x_1, \dots, x_n}$  n'intersectant pas  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m}$ , on a de la même manière que précédemment :

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \mu_{y_1} \dots \mu_{y_m} \rangle = \frac{C}{Z} \sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} e^{-L(\gamma, \gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})} \tag{G.48}$$

**Proposition 24** *L'opérateur  $\sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \mu_{y_1} \dots \mu_{y_m}$  ne dépend que de la classe d'homologie de  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m}$  dans  $H_1(\Gamma^* \setminus \{x_k^*\}_{1 \leq k \leq n}, \{y_k\}_{1 \leq k \leq m})$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2$ .*

A  $\gamma$  et  $\gamma_*$  fixés,  $L(\gamma, \gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})$  dépend effectivement du choix de  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m}$ , mais comme on fait la somme sur toutes les chaînes  $\gamma_* \in \mathcal{B}^*$ , le résultat ne dépend en fait que de sa classe d'homologie : en effet, pour deux éléments  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m}$  et  $\gamma_*'^{y_1 \dots y_m}$  dans la même classe,  $\gamma_*^1 = \gamma_*^{y_1 \dots y_m} + \gamma_*'^{y_1 \dots y_m}$  est une chaîne homologue à zéro. Donc si  $\gamma_*$  est un élément de  $\mathcal{B}^*$ , la chaîne  $\gamma_*'^1 = \gamma_* + \gamma_*^1$  est aussi dans  $\mathcal{B}^*$ . L'application

$$\gamma_* \mapsto \gamma_*'^1 = \gamma_* + \gamma_*^1 \tag{G.49}$$

est une bijection de  $\mathcal{B}^*$ .

Cette bijection permet d'écrire  $\gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m} = \gamma_*' + \gamma_*'^{y_1 \dots y_m}$ . Donc

$$\sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} e^{-L(\gamma, \gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})} = \sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} e^{-L(\gamma, \gamma_*' + \gamma_*'^{y_1 \dots y_m})} \quad (\text{G.50})$$

puisqu'il ne s'agit que d'une permutation des éléments de la somme.  $\square$

On voit, de même, que pour  $\gamma' - \gamma$  homologue à zéro dans  $H_1(\Gamma \setminus \{y_k^*\})$ ,

$$\sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} e^{-L(\gamma, \gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})} = \sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} e^{-L(\gamma', \gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})} \quad (\text{G.51})$$

L'identité (G.48) reste donc vraie pour  $\gamma \in \mathcal{B}$  vérifiant  $\gamma \cdot \gamma_*^{y_1 \dots y_m} = 0$ .

Dans cette formule,  $\gamma$  n'intervient que par sa classe dans

$$H_1(\Gamma \setminus \{y_k\}, \{x_k\} \cup \partial\Gamma) \xrightarrow{\sim} H_1(\Gamma, \{x_k\} \cup \partial\Gamma) \oplus (\mathbb{Z}/2)^m \quad (\text{G.52})$$

(l'isomorphisme n'est pas canonique). A bord fixé, on passe d'une classe à une autre dans  $H_1(\Gamma \setminus \{y_k\}, \{x_k\} \cup \partial\Gamma)$  en composant par un lacet non trivial de  $H_1(\Gamma)$  ou en ajoutant un tour le long d'un  $y_k$ .

La composition avec un lacet non trivial de  $H_1(\Gamma)$  intervient par un signe  $(-1)^{\gamma \cdot \gamma_*^{y_1 \dots y_m}}$ .

Après un tour autour d'un  $y_k$ , la chaîne  $\gamma$  fait alors un croisement de plus ou de moins avec  $\gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m}$ . On définit, de même que précédemment,  $\varepsilon(\gamma) = (-1)^l$  où  $l$  est le nombre de  $y_k$  entourés par  $\gamma - \gamma^0$ . Le signe  $\varepsilon(\gamma)\varepsilon(\gamma)$  compte donc le nombre de points marqués,  $x_k$  et  $y_k$  entourés par  $\gamma - \gamma^0$ .

**Définition 26** On définit la longueur thermodynamique de  $\gamma_* \in \mathcal{B}^*$  modifiée par  $\gamma$  et frustrée par  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m}$ ,

$$L'(\gamma, \gamma_*) = (-1)^{\gamma \cdot \gamma_*^{y_1 \dots y_m}} \varepsilon(\gamma)\varepsilon(\gamma) L_0(\gamma, \gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m}) \quad (\text{G.53})$$

Après ces efforts pour rendre indépendant de  $\gamma$  la longueur thermodynamique, on peut sommer sur  $\mathcal{B}$  en divisant la constante par le nombre de telles chaînes et on obtient :

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \mu_{y_1} \dots \mu_{y_m} \rangle = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{Z}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{B}_{\{x_k\}} \\ \gamma_* \in \mathcal{B}^*}} e^{-L'(\gamma, \gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})} \quad (\text{G.54})$$

Il est intéressant de comprendre la dépendance de  $\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \mu_{y_1} \dots \mu_{y_m} \rangle$  en la classe d'homologie de la chaîne  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m}$  dans  $H_1(\Gamma^* \setminus \{x_k^*\}, \{y_k\})$ .

Comme pour toutes ces chaînes, le bord est  $\{y_k\}$ , leur différence est une classe de  $H_1(\Gamma^* \setminus \{x_k^*\}) \simeq H_1(\Gamma^*) \oplus (\mathbb{Z}/2)^n$  (l'isomorphisme n'est pas canonique).

Quand  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m}$  ne diffère de  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m}$  que par un tour de plus d'une face  $x_k^*$ , on ajoute à la partie imaginaire de  $L(\gamma, \gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})$  la valeur  $\pm i\pi$  car on croise une fois de plus ou de moins la portion de  $\gamma$  qui part de  $x_k$ , quant à sa partie réelle, elle est la même que celle de  $L(\gamma, \gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})$  où  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m} = \partial x_k^* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m}$ , et donc

$$\sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} e^{-L(\gamma, \gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})} = - \sum_{\gamma_* \in \mathcal{B}^*} e^{-L(\gamma, \gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})} \quad (\text{G.55})$$

C'est-à-dire que l'espérance  $\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \mu_{y_1} \dots \mu_{y_m} \rangle$  ne fait que changer de signe. Contrairement à ce qu'on fait pour le spin, on ne cherche pas à contre-carrer cette dépendance en multipliant la longueur thermodynamique par un signe suivant la classe de  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m}$  dans  $H_1(\Gamma^* \setminus \{x_k^*\}) / H_1(\Gamma^*)$ .

La même méthode donne des résultats pour le développement haute température. Remarquons d'abord que si on fait le changement  $K \rightarrow -K$  sur une arête frustrée, on sort de l'ensemble de départ de la bijection  $K \mapsto K^*$  de  $\mathbb{R}^+$ , il faut donc définir ce qu'on entend par  $(-K)^*$ .

Dans  $\mathbb{C}$ , la relation  $\text{sh } a = \text{sh } b$  équivaut à l'existence d'un entier  $k$  tel que

$$a = b + 2ik\pi \quad (\text{G.56})$$

$$\text{ou } a = -b + (2k + 1)i\pi \quad (\text{G.57})$$

Posons  $s = \text{sh } 2K$ . La solution réelle de  $\text{sh } 2K^* = s^{-1}$  est

$$2K^* = \ln(s^{-1} - \sqrt{s^{-2} + 1}) \quad (\text{G.58})$$

mais on peut aussi considérer la première détermination complexe,

$$2\tilde{K} = i\pi + \ln(\sqrt{s^{-2} + 1} - s^{-1}) \quad (\text{G.59})$$

Dans ce cas,  $\tilde{K} = K + i\pi$ , soit  $e^{\tilde{K}} = -e^K$  et c'est seulement après avoir composé quatre fois qu'on retombe sur l'interaction de départ modulo  $2i\pi$ .

Cette détermination étant choisie, on peut alors développer le produit de la même façon, avec les actions  $K'$  frustrées par une chaîne  $\gamma_*^{y_1 \dots y_m}$ , pour

une configuration  $\sigma$  donnée,

$$\begin{aligned}
\prod_{(x,x') \in \Gamma_1} (1 + \sigma_x \sigma_{x'} e^{-2K'_{x,x'}}) &= \tag{G.60} \\
&= \prod_{(x,x') \notin \gamma_*^{y_1 \dots y_m}} (1 + \sigma_x \sigma_{x'} e^{-2K^*_{x,x'}}) \prod_{(x,x') \in \gamma_*^{y_1 \dots y_m}} (1 + \sigma_x \sigma_{x'} e^{-2K^*_{x,x'} - i\pi}) \\
&= \sum_{\gamma \subset \Gamma_1} \exp \left( \sum_{(x,x') \in \gamma \setminus \gamma_*^{y_1 \dots y_m}} -2K^*_{x,x'} + \sum_{(x,x') \in \gamma \cap \gamma_*^{y_1 \dots y_m}} -2K^*_{x,x'} - i\pi \right) \prod_{x \in \partial \gamma} \sigma_x
\end{aligned}$$

Si bien qu'après le même raisonnement, on arrive à

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \mu_{y_1} \dots \mu_{y_m} \rangle &= \frac{C'}{2^N Z} \sum_{\gamma \subset \Gamma} e^{-L^*(\gamma_*^{y_1 \dots y_m}, \gamma)} \sum_{\sigma: \Gamma_0 \rightarrow \{\pm 1\}} \prod_{x \in \partial \gamma} \sigma_x \prod_{x_k} \sigma_{x_k} \\
&= \frac{C'}{Z} \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} e^{-L^*(\gamma_*^{y_1 \dots y_m}, \gamma)} \prod_{x \in \partial \gamma} \sigma_x \\
&= \frac{C'}{Z} \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} e^{-L^*(\gamma_*^0 + \gamma_*^{y_1 \dots y_m}, \gamma)} \tag{G.61}
\end{aligned}$$

Prenons pour  $\gamma_* \in \mathcal{B}^*$  le signe  $\varepsilon(\gamma_*) = (-1)^l$  où  $l$  est le nombre de points marqués  $x_k$  et  $y_k$  entourés par  $\gamma_* - \gamma_*^0$ , cela définit

$$L'^*(\gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m}, \gamma) = \varepsilon(\gamma^*) \varepsilon(\gamma_*) L_0^*(\gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m}, \gamma) \tag{G.62}$$

qui ne dépend plus du tout de  $\gamma_*$ .

On a donc, de même que pour les corrélations de spins, des formules très symétriques :

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \mu_{y_1} \dots \mu_{y_m} \rangle = \frac{C}{Z} \sum_{\substack{\gamma_* \in \mathcal{B}^*_{\{y_k\}} \\ \gamma \in \mathcal{B}_{\{x_k\}}}} e^{-L'(\gamma, \gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m})} \tag{G.63}$$

$$= \frac{C'}{Z} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{B}_{\{x_k\}} \\ \gamma^* \in \mathcal{B}^*_{\{y_k\}}}} e^{-L'^*(\gamma_* + \gamma_*^{y_1 \dots y_m}, \gamma)} \tag{G.64}$$

## Chapitre H

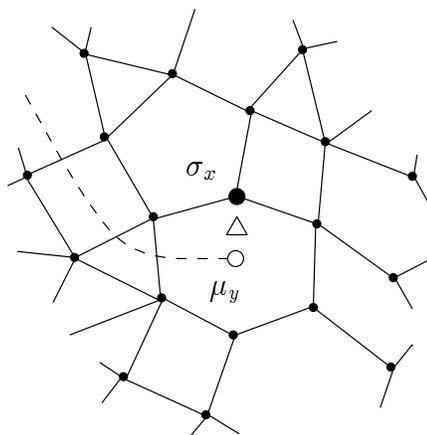
# Le champ $\psi$

### H.1 Définition, équation de propagation

Le champ fermionique  $\psi$ , introduit par Jordan et Wigner en 1928, puis développé par Kadanoff et Ceva [KC], est le produit du spin par le désordre, à des points voisins. Sa variable de position est donc un sommet du graphe triple  $(x, y) \in \Upsilon_0$  avec  $x \in \Gamma_0$  et  $y \in \Gamma_0^*$  un point voisin de  $x$  sur le dual.

$$\psi_{(x,y)} = \sigma_x \mu_y \quad (\text{H.1})$$

Pour qu'il soit bien défini, il faut fixer un chemin  $\gamma_*^{yy^0}$  qui relie  $y$  à un point fixé  $y^0 \in \Gamma^*$ . Sans autres points marqués, il n'intervient que par sa classe d'homologie dans  $H_1(\Gamma^* \setminus x^*, \{y, y^0\} \cup \partial\Gamma^*)$ .



Mais quand on l'insère dans le calcul d'une espérance avec d'autres variables aléatoires, dépendant d'autres points marqués, c'est sa classe d'homologie

dans le *complémentaire* de tous les points marqués qui intervient.

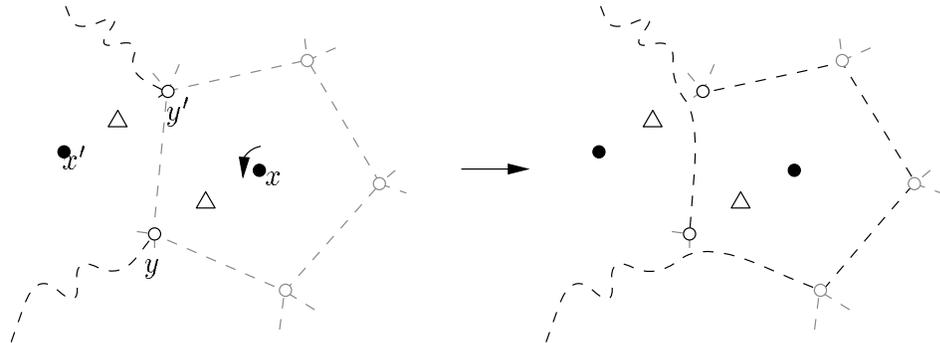
Ce champs est une observable dans le sens qu'on peut en calculer l'espérance ou la corrélation avec d'autres observables. On lui attribue les qualités de *fermions* et de *spineur de Dirac*. Dans la théorie conforme des fermions libres de Majorana, est présent un champ fermionique qui vérifie l'équation de Dirac. Pour diverses raisons, on l'identifie au champ  $\psi$  décrit plus haut. Nous verrons plus loin en quoi on peut parler de  $\psi$  comme d'un spineur de Dirac discret. C'est également un fermion discret car il est connu qu'il vérifie des relations d'**anticommuation** :

Soient  $(x, y), (x', y') \in \Upsilon_0$  deux sommets du graphe triple,  $\gamma_*^{yy^0}$  et  $\gamma_*^{y'y^0}$  deux chemins allant de  $y$  à  $y^0$  et de  $y'$  à  $y^0$  respectivement. On définit ainsi l'observable  $\psi_{(x,y)}\psi_{(x',y')}$ , grâce au chemin  $\gamma_*^{yy^0} + \gamma_*^{y'y^0}$ . Nous allons donner un sens à l'équation

$$\psi_{(x,y)}\psi_{(x',y')} = -\psi_{(x',y')}\psi_{(x,y)}.$$

Intéressons nous d'abord au cas où  $(x, y)$  et  $(x', y')$  forment une face de  $\diamond$ , c'est-à-dire que  $(x, x') \in \Lambda_1$  et  $(y, y') = (x, x')^*$ . Nous allons échanger  $\psi_{(x,y)}$  et  $\psi_{(x',y')}$  en faisant tourner  $y$  et  $y'$  autour de la face  $x^*$ , dans le même sens.

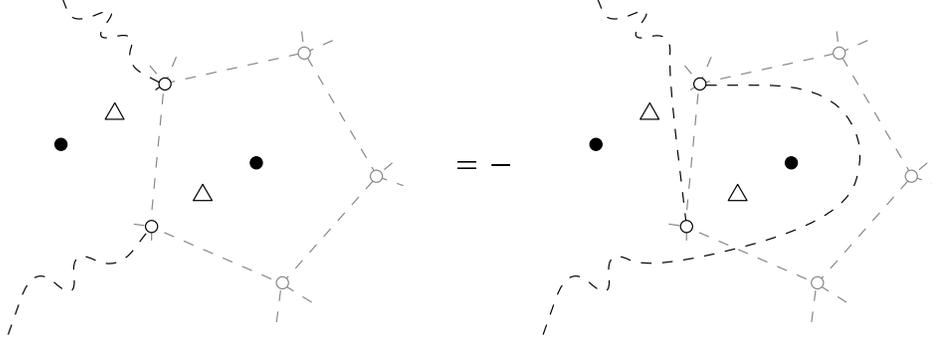
Le bord de la face  $x^*$  est connexe, on peut donc définir un chemin  $(y_0 = y, y_1, \dots, y_n = y')$  de  $y$  à  $y'$ , et l'arc complémentaire sur le bord de la face,  $(y'_0 = y', \dots, y'_m = y)$ . A chaque étape  $k \leq n$  et  $l \leq m$ , on peut composer  $\gamma_*^{yy^0}$  par ce chemin  $(y, \dots, y_k)$  et  $\gamma_*^{y'y^0}$  par  $(y', \dots, y'_l)$ . Pour  $k = n$  et  $l = m$ , on définit ainsi l'observable  $\psi_{(x',y')}\psi_{(x,y)}$ , mais avec le chemin suivant :



c'est-à-dire qui fait un tour de la face  $x^*$ , si bien que la valeur du spin en  $x$  paraît multipliée par  $-1$  dans le calcul d'une espérance par rapport au même calcul faisant intervenir le chemin  $\gamma_*^{yy^0} + \gamma_*^{y'y^0}$  d'origine. Dans ces

conditions, en n'oubliant pas les chemins différents attachés à  $y$  et  $y'$ , on a :

$$\psi_{(x,y)}\psi_{(x',y')} = -\psi_{(x',y')}\psi_{(x,y)}$$



De même, si  $(x, y)$  et  $(x', y')$  sont éloignés, comme le graphe triple  $\Upsilon$  est connexe, il existe un chemin simple  $\gamma \in C_1(\Upsilon)$  de  $(x, y)$  à  $(x', y')$ . C'est-à-dire une suite de couples  $(x_k, y_k) \in \Upsilon_0$  avec  $x_0 = x$ ,  $y_0 = y$ ,  $x_n = x'$  et  $y_n = y'$ ; on peut imposer que ces derniers soient les seuls voisins de  $(x', y')$ , c'est-à-dire pour tout  $k < n$ ,  $x_{k-1} \neq x'$  et  $y_k \neq y'$  (ou bien, pour tout  $k < n$ ,  $x_k \neq x'$  et  $y_{k-1} \neq y'$ ). En composant  $\gamma_*^{y y^0}$  par le chemin de  $\Gamma^*$  prescrit par  $\gamma$ , on obtient pour chaque  $k$  un chemin  $\gamma_*^{y_k y^0}$ . Si bien qu'on peut parler pour tout  $k < n$  de l'observable  $\psi_{(x_k, y_k)}\psi_{(x', y')}$ , définie grâce au chemin  $\gamma_*^{y_k y^0} + \gamma_*^{y' y^0}$ .

Pour  $k = n - 2$ , les quatre points  $x', y', x_{n-2}$  et  $y_{n-2}$  forment les côtés d'une face de  $\diamond$ . En les échangeant, on obtient :

$$\psi_{(x_{n-2}, y_{n-2})}\psi_{(x', y')} = -\psi_{(x', y')}\psi_{(x_{n-2}, y_{n-2})}$$

et c'est maintenant au deuxième champ de longer le chemin  $\gamma$  et à chaque pas on a

$$\psi_{(x_{n-k}, y_{n-k})}\psi_{(x', y')} = -\psi_{(x', y')}\psi_{(x_{n-k}, y_{n-k})},$$

le premier étant calculé avec le chemin  $\gamma_*^{y_k y^0} + \gamma_*^{y' y^0}$  et le deuxième avec  $\gamma_*^{y_k y^0} + \gamma_*^{y' y^0} + x'^*$  si bien que

$$\psi_{(x,y)}\psi_{(x',y')} = -\psi_{(x',y')}\psi_{(x,y)}.$$

Dotsenko et Dotsenko ont montré que  $\psi$  satisfaisait des équations linéaires [DD] :

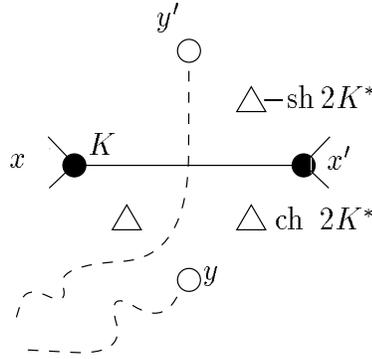
**Proposition 25 (Dotsenko et Dotsenko)** *Soit  $(x, y') \in \Upsilon_0$  un voisin de  $(x, y)$ , c'est-à-dire que  $y'$  est voisin de  $x$  et  $(y, y')$  est une arête de  $\Gamma^*$ , duale*



Cela signifie que toute espérance contenant le facteur  $\psi_{(x,y)}$  avec le chemin  $\gamma_*^{yy^0}$  sous entendu, pourra se calculer en fonction des espérances contenant les termes de droite à sa place, le chemin  $\gamma_*^{yy^0} + (y, y')$  étant sous entendu.

**Corollaire :**  $\psi$  vérifie une équation duale : Avec les mêmes notations, en définissant  $\psi_{(x',y)}$  à l'aide du même chemin que  $\psi_{(x,y)}$ , et  $K_{(y,y')} := K_{(x,x')}^*$ , on a :

$$\psi_{(x,y)} = \text{ch } 2K_{(y,y')} \psi_{(x',y)} - \text{sh } 2K_{(y,y')} \psi_{(x',y')} \quad (\text{H.6})$$



**Preuve :**  $K_{(y,y')}$  est défini par

$$\text{sh } 2K_{(y,y')} \text{sh } 2K_{(x,x')} = 1$$

Cela implique également, en prenant le carré et en développant  $\text{sh}^2 = \text{ch}^2 - 1$ ,

$$\text{ch } 2K_{(y,y')} \text{sh } 2K_{(x,x')} = \text{ch } 2K_{(x,x')}$$

Comme on a, par DD,

$$\psi_{(x',y)} = \text{ch } 2K_{(x,x')} \psi_{(x',y')} + \text{sh } 2K_{(x,x')} \psi_{(x,y')}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} & \text{ch } 2K_{(y,y')} \psi_{(x',y)} - \text{sh } 2K_{(y,y')} \psi_{(x',y')} = \\ &= \text{ch } 2K_{(y,y')} \text{ch } 2K_{(x,x')} \psi_{(x',y')} + \text{ch } 2K_{(y,y')} \text{sh } 2K_{(x,x')} \psi_{(x,y')} \\ & \quad - \text{sh } 2K_{(y,y')} \psi_{(x',y')} \\ &= \frac{1}{\text{sh } 2K_{(x,x')}} (\text{ch }^2 2K_{(x,x')} - 1) \psi_{(x',y')} + \text{ch } 2K_{(x,x')} \psi_{(x,y')} \quad (\text{H.7}) \\ &= \text{sh } 2K_{(x,x')} \psi_{(x',y')} + \text{ch } 2K_{(x,x')} \psi_{(x,y')} = \psi_{(x,y)} \end{aligned}$$

□

## H.2 La structure spin

Pour s'affranchir des chemins sous-entendus (qui introduisent des signes différents partout), construisons la structure combinatoire sur laquelle  $\psi$  est bien défini. Il faut d'abord définir un revêtement  $\hat{\Upsilon}$  de  $\Upsilon$  à  $2^{2g}$  feuillets et sur ce revêtement une structure spin  $\tilde{\Upsilon}$  :

**Définition 27** Soit  $(x^0, y^0) \in \Upsilon_0$  un couple de référence. La **surface**  $\hat{\Sigma}$  est le revêtement associé au morphisme

$$\pi_1(\Sigma, y^0) \rightarrow H_1(\Sigma) \otimes \mathbb{Z}/2$$

c'est à dire le quotient du revêtement universel par le noyau de ce morphisme. Un point de  $\hat{\Sigma}$  est un couple  $(z, [\gamma])$  d'un point  $z \in \Sigma$  et d'une classe d'homologie dans  $H_1(\Sigma, \{y^0, z\}) \otimes \mathbb{Z}/2$  d'un chemin  $\gamma$  allant de  $y^0$  à  $z$ .

Sur  $\hat{\Sigma}$ , on relève naturellement tous les complexes cellulaires  $\Gamma, \Gamma^*, \diamond$  et  $\Upsilon$ .

La **structure spin universelle**  $\tilde{\Upsilon}$  est une structure spin sur  $\hat{\Upsilon}$ , c'est le 1-complexe suivant :

$\tilde{\Upsilon}_0$ : Un sommet de  $\tilde{\Upsilon}_0$  est un couple  $((x, y), [\gamma_*^{yy^0}])$  ou  $(x, y)$  est un couple de voisins  $(x, y) \in \Upsilon_0$  et  $[\gamma_*^{yy^0}]$  la classe d'homologie modulo deux d'un chemin de  $\Gamma_1^*$  reliant  $y$  à  $y^0$  en évitant  $x^*$  et  $x^{0*}$ , c'est-à-dire un élément de  $H_1(\Gamma^* \setminus (x^* \cup x^{0*}), \{y, y^0\})$ . On identifie  $((x, y), \gamma_*^{yy^0})$  et  $((x, y), \gamma_*^{yy^0})$  si  $\gamma_*^{yy^0}$  et  $\gamma_*^{yy^0}$  sont homologues.

$\tilde{\Upsilon}_1$ : Les arêtes  $\tilde{\Upsilon}_1$  : deux sommets  $((x, y), \gamma_*^{yy^0})$  et  $((x', y'), \gamma_*^{y'y^0})$  sont voisins si

- $x = x', (y, y') \in \Gamma_1^*$  et  $\gamma_*^{yy^0} - \gamma_*^{y'y^0} + (y, y')$  est homologue à zéro dans  $H_1(\Gamma^* \setminus x^*)$ ,
- $y = y', (x, x') \in \Gamma_1$  et  $\gamma_*^{yy^0}$  et  $\gamma_*^{y'y^0}$  sont homologues dans  $H_1(\Gamma^* \setminus (x^* \cup x'^*))$ , il faut en particulier que  $\gamma_*^{yy^0}$  et  $\gamma_*^{y'y^0}$  n'empruntent aucune arête ni de la face  $x^*$  ni de  $x'^*$ .

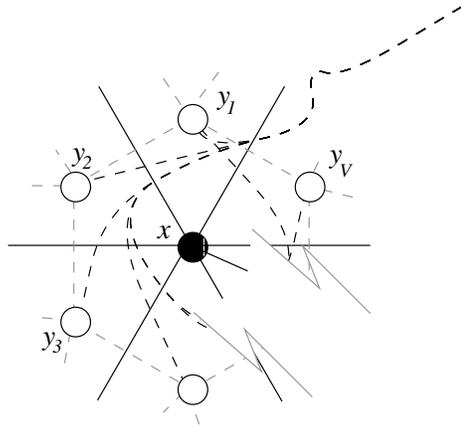
On dira qu'une fonction sur  $\tilde{\Upsilon}_0$  est un **spineur** si et seulement si elle est multipliée par  $-1$  après le tour d'une face de  $\Upsilon$ .

**Proposition 26** *Cette structure est une structure spin au dessus de  $\hat{\Upsilon}$ .*

**Preuve :** C'est-à-dire qu'il faut montrer que les cycles de  $\tilde{\Upsilon}_1$  au dessus des bords des faces de  $\hat{\Upsilon}_2$  sont des revêtements doubles connexes. Les faces de  $\Upsilon_2$  sont de trois types, au dessus des sommets de  $\Gamma$ , de  $\Gamma^*$  et du graphe médial  $K$ . Au dessus de chacune, il y a  $2^{2g}$  faces de  $\hat{\Upsilon}_2$ , chaque feuillet correspondant à des classes différentes dans  $H_1(\Gamma^*)$ . Si  $x$  est un point de  $\Gamma$  de voisins  $(y_1, \dots, y_V)$  sur  $\Gamma^*$ , le cycle de  $\tilde{\Upsilon}_1$  correspondant à la face centrée en  $x$  et passant par le point  $((x, y_1), \gamma_*^{y_1 y^0})$  comporte les sommets dans l'ordre suivant :

$$\begin{aligned}
 & ((x, y_2), \gamma_*^{y_1 y^0} + (y_1, y_2)) \\
 & ((x, y_3), \gamma_*^{y_1 y^0} + (y_1, y_2) + (y_2, y_3)) \\
 & \quad \vdots \\
 & ((x, y_1), \gamma_*^{y_1 y^0} + (y_1, y_2) + \dots + (y_{n-1}, y_n) + (y_n, y_1)) \\
 & ((x, y_2), \gamma_*^{y_1 y^0} + \partial x^* + (y_1, y_2)) \\
 & ((x, y_3), \gamma_*^{y_1 y^0} + \partial x^* + (y_1, y_2) + (y_2, y_3)) \\
 & \quad \vdots \\
 & ((x, y_n), \gamma_*^{y_1 y^0} + \partial x^* + (y_1, y_2) + \dots + (y_{n-1}, y_n))
 \end{aligned} \tag{H.8}$$

qui sont  $2V$  points différents.



On définit de même une face centrée de  $\hat{\Upsilon}_2$  en un point  $y \in \Gamma_0^*$  de voisins  $(x_1, \dots, x_V)$  sur  $\Gamma$  et passant par le point  $((x_1, y), \gamma_*^{y y^0})$  où le chemin  $\gamma_*^{y y^0}$

contient l'arête  $(x_1, x_n)^*$ , le cycle de  $\tilde{\Upsilon}_1$  correspondant est formé des sommets dans l'ordre suivant :

$$\begin{aligned}
& ((x_1, y), \gamma_*^{yy^0}) \\
& ((x_2, y), \gamma_*^{yy^0}) \\
& \quad \vdots \\
& ((x_n, y), \gamma_*^{yy^0}) \\
& ((x_1, y), \gamma_*^{yy^0} + \partial x_1^*) \\
& ((x_2, y), \gamma_*^{yy^0} + \partial x_2^*) \\
& \quad \vdots \\
& ((x_n, y), \gamma_*^{yy^0} + \partial x_n^*)
\end{aligned} \tag{H.9}$$

Et on définit une face de  $\hat{\Upsilon}_2$  centrée en un sommet  $\{(x, x'), (y, y')\}$  du graphe médial, avec  $(x, x')^* = (y, y')$ , passant par le point  $((x, y), \gamma_*^{yy^0})$ , son bord est relevé dans  $\tilde{\Upsilon}_1$  par le cycle comportant les sommets dans l'ordre suivant :

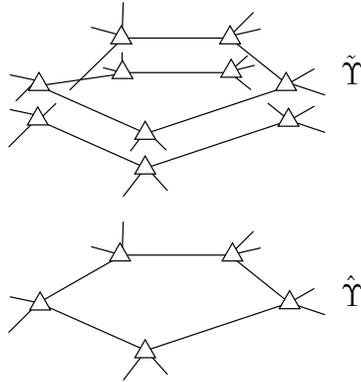
$$\begin{aligned}
& ((x, y), \gamma_*^{yy^0}) \\
& ((x', y), \gamma_*^{yy^0}) \\
& ((x', y'), \gamma_*^{yy^0} + (y, y'))
\end{aligned}$$

Remarquons que  $\gamma_*^{yy^0} + (y, y')$  est homologue à  $\gamma_*^{yy^0} + (y, y') + \partial x^*$  dans  $H_1(\Gamma^* \setminus \{x'^*\}, \{y', y^0\})$  si bien que le point suivant est :

$$\begin{aligned}
& ((x, y'), \gamma_*^{yy^0} + \partial x^* - (y, y')) \\
& ((x, y), \gamma_*^{yy^0} + \partial x^*)
\end{aligned}$$

De même,  $\gamma_*^{yy^0} + \partial x^*$  est homologue à  $\gamma_*^{yy^0} + (y, y') + \partial x^* + \partial x'^*$  dans  $H_1(\Gamma^* \setminus \{x^*\}, \{y, y^0\})$ .

$$\begin{aligned}
& ((x', y), \gamma_*^{yy^0} + \partial x^* + \partial x'^*) \\
& ((x', y'), \gamma_*^{yy^0} + \partial x'^* - (y, y')) \\
& ((x, y'), \gamma_*^{yy^0} + \partial x'^* - (y, y'))
\end{aligned}$$



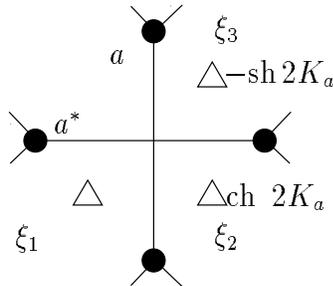
□

$\psi$  est bien défini sur  $\tilde{\Upsilon}$ , il change de signe quand on fait un tour autour de n'importe quelle face de  $\Upsilon$ , c'est un **spinéur** (à valeur variable aléatoire) : si  $\xi = ((x, y), \gamma_*)$  est un point de  $\tilde{\Upsilon}$ ,

$$\psi_\xi = -\psi_{\xi+\partial x^*}$$

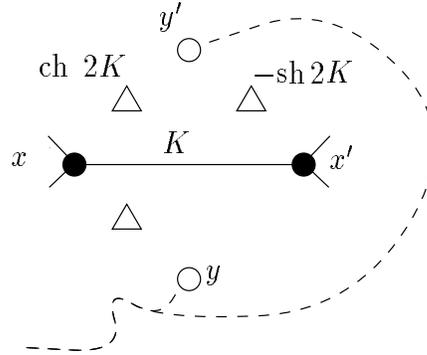
Les équations DD s'écrivent, autour du revêtement double d'une face de  $\Upsilon$  centrée en un sommet du graphe médial  $K$  : Soit  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  trois points de  $\tilde{\Upsilon}$  **successifs** sur le bord d'une de ces faces (orientée positivement ou négativement). Une arête, disons  $a$ , sépare  $\xi_1$  de  $\xi_2$  et sa duale  $a^*$  sépare  $\xi_2$  de  $\xi_3$ , elles définissent un sommet du graphe médial. Alors,

$$\psi_{\xi_1} = \text{ch } 2K_a \psi_{\xi_2} - \text{sh } 2K_a \psi_{\xi_3} \quad (\text{DD}')$$



Nous remarquons en effet que dans le cas de la proposition (25)  $(x, x')^* = (y, y')$ , un chemin  $\gamma_*^{yy^0}$  et  $\gamma_*^{y'y^0} = \gamma_*^{yy^0} + (y, y')$ , les points de  $\tilde{\Upsilon}$  considérés, à savoir  $((x, y), \gamma_*^{yy^0})$ ,  $((x, y'), \gamma_*^{y'y^0})$  et  $((x', y'), \gamma_*^{y'y^0})$  ne sont pas successifs sur le bord de la face qu'ils définissent. Ils appartiennent bien à la même

face mais c'est  $((x', y'), \gamma_*^{y'y^0} + \partial x'^*)$  qui est le voisin de  $((x, y'), \gamma_*^{y'y^0})$ . En effet, il faut déformer par homotopie  $\gamma_*^{y'y^0}$  afin de pouvoir considérer sa classe dans  $H_1(\Gamma^* \setminus (x^* \cup x'^*), \{y, y^0\})$  et un représentant de cette classe est le chemin  $\gamma_*^{y'y^0} + \partial x'^*$ , qui n'emprunte plus l'arête  $(y, y')$  mais contourne  $x'$  pour passer de  $y$  à  $y'$ . Mais le champs  $\psi$  au point  $((x', y'), \gamma_*^{y'y^0} + \partial x'^*)$  est l'opposé de celui qu'on a considéré, au point  $((x', y'), \gamma_*^{y'y^0})$ .



Par contre, dans l'équation duale, les points  $((x, y), \gamma_*^{yy^0})$ ,  $((x', y), \gamma_*^{yy^0})$  et  $((x', y'), \gamma_*^{y'y^0})$  sont successifs car  $\gamma_*^{y'y^0}$  est homologue à  $\gamma_*^{y'y^0} + \partial x'^*$  dans  $H_1(\Gamma^* \setminus x'^*, \{y, y^0\})$  mais il fait le tour de  $x$  et non pas de  $x'$  si bien qu'on a le bon signe  $-$ .

### H.3 L'équation de Dirac

Une face de  $\Upsilon$  comporte quatre points, la structure spin en comporte huit. Un spineur est invariant après huit points successifs et multiplié par  $-1$  après quatre points successifs. Nous définissons un *spineur symétrique* comme étant multiplié par  $i = \sqrt{-1}$  après deux points successifs :

**Définition 28** *Si un spineur  $\zeta$  est tel que pour tout triplet  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  de points successifs de  $\tilde{\Upsilon}$  autour d'un sommet de  $K_0$ ,*

$$\zeta(\xi_3) = +i\zeta(\xi_1) \quad (\text{Sym})$$

*on dira que  $\zeta$  vérifie la symétrie spin.*

**Théorème 17** *Soit  $\Gamma$ , une décomposition cellulaire d'une surface simplement connexe équipée de constantes d'interactions  $K_a$  pour toutes les arêtes*

$a \in \Gamma_1$ . Il existe un spineur vérifiant les équations  $DD'$  et  $Sym$  si et seulement si le double  $\Lambda$  est critique pour la métrique

$$\ell(a) = \frac{1}{\sqrt{\text{sh } 2K_a}} = \sqrt{\text{sh } 2K_a^*} \text{ sur } \Gamma \quad (\text{H.10})$$

$$\ell(a^*) = \sqrt{\text{sh } 2K_a} = \frac{1}{\sqrt{\text{sh } 2K_a^*}} \text{ sur } \Gamma^* \quad (\text{H.11})$$

*c'est-à-dire pour la structure conforme*

$$\rho_a = \text{sh } 2K_a.$$

**Preuve :** Soit  $\zeta : \tilde{\Upsilon}_0 \rightarrow \mathbb{C}$  un spineur vérifiant l'équation de symétrie  $Sym$  et l'équation de propagation  $DD'$ . En quatre points successifs  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$  de  $\tilde{\Upsilon}$  au dessus de la face  $(x, y, x', y')$  de  $\diamond$ , en notant  $c_{x,x'} = \text{ch } 2K_{(x,x')}$  et  $s_{x,x'} = \text{sh } 2K_{(x,x')}$ , l'équation  $DD'$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{x,x'} & s_{x,x'} \\ -s_{x,x'} & c_{x,x'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_4 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}$$

d'où on tire à l'aide de la symétrie,

$$\zeta_4 = \frac{is_{x,x'} - 1}{c_{x,x'}} \zeta_1 \quad (\text{H.12})$$

$$\text{puis } \zeta_2 = \left( -s_{x,x'} \frac{is_{x,x'} - 1}{c_{x,x'}} + ic_{x,x'} \right) \zeta_1 = \frac{s_{x,x'} + i}{c_{x,x'}} \zeta_1 \quad (\text{H.13})$$

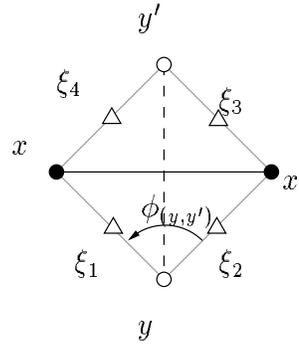
$$\text{Or, } \left| \frac{s_{x,x'} + i}{c_{x,x'}} \right|^2 = \frac{s_{x,x'}^2 - 1}{c_{x,x'}^2} = 1 \quad (\text{H.14})$$

donc pour toute arête  $a$ , l'équation

$$e^{\frac{i\phi_a}{2}} = \frac{\text{sh } 2K_a^* + i}{\text{ch } 2K_a^*} \quad (\text{H.15})$$

à une détermination  $\phi_a$  dans l'intervalle  $]0, \pi[$  car les parties réelle et imaginaire du complexe de module un sont positives. Dans le cas ci-dessus,  $\zeta_2 = e^{\frac{i\phi_{y,y'}}{2}} \zeta_1$ . De même que pour les arêtes, on note les angles duaux

$$\phi_{x,x'}^* := \phi_{y,y'}$$



Le fait que  $\zeta$  est un spineur entraine qu'en un point  $\xi$  relevé d'une arête  $(v, w)$ ,  $v \in \Gamma$  et  $w \in \Gamma^*$ ,

$$\zeta(\xi + \partial v^*) = -\zeta(\xi)$$

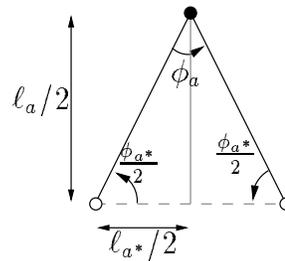
Ce qui se traduit, si les voisins de  $v$  sont  $v_1, \dots, v_V$  dans  $\Gamma$  par

$$\prod_{k=1}^V \frac{s_{v,v_k}^* + i}{c_{v,v_k}^*} = -1$$

soit

$$\sum_{k=1}^V \frac{\phi_{v,v_k}}{2} \equiv \pi \text{ modulo } 2\pi$$

Et de même autour de  $w$ . Donc la distribution d'angles  $\phi_a$  vérifie les équations F.1. La décomposition cellulaire est donc critique pour la métrique définie par la trigonométrie plane. On a la situation géométrique suivante :



Donc

$$\frac{\ell(a^*)}{\ell(a)} = \tan \frac{\phi_a}{2}$$

et d'après l'équation H.15,

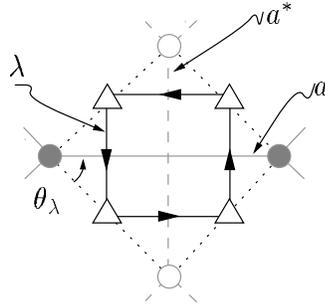
$$\tan \frac{\phi_a}{2} = \frac{1}{\operatorname{sh} 2K_a^*} = \frac{\sqrt{\operatorname{sh} 2K_a}}{\sqrt{\operatorname{sh} 2K_a^*}} = \frac{\ell(a^*)}{\ell(a)}$$

Donc  $\Lambda$  muni de la métrique  $\ell(a) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} 2K_a}}$  est critique.

Réciproquement, soit  $(\Lambda, \ell)$  une carte critique pour la métrique associée à une distribution de constantes d'interaction  $K_a$ .

Nous allons construire un spineur  $\zeta$  sur  $\tilde{\Upsilon}_0$  à partir d'un point de référence  $\xi_0 = ((x^0, y^0), \gamma^0)$  où  $\zeta$  vaudra 1.

Les arêtes de  $\tilde{\Upsilon}_1$  sont de deux types, elles coupent soit une arête de  $\Gamma_1$ , soit une arête de  $\Gamma_1^*$  et on peut les orienter de telle manière qu'elles tournent autour des sommets de  $K_0$  dans le sens positif.



La criticalité de  $\Lambda$  implique l'existence d'une distribution d'angles  $\phi_a$  sur chaque arête de  $\Lambda$  vérifiant les équations F.1. On peut donc associer à une arête  $\lambda \in \tilde{\Upsilon}_1$  coupant l'arête  $a \in \Lambda_1$  l'angle  $\theta_\lambda = \frac{\phi_a}{2}$ . Considérons  $\gamma$  un chemin de  $\tilde{\Upsilon}_1$  allant de  $\xi_0$  à un point  $\xi$ . On définit  $\zeta$  en  $\xi$  par

$$\zeta(\xi) = \exp i \sum_{\lambda \in \gamma} \theta_\lambda$$

Les équations F.1, impliquent que, quand on tourne autour d'une face de  $\Upsilon$ ,  $\theta$  augmente d'un facteur  $\pm i\pi$ ,  $-i\pi$  quand on tourne autour d'un sommet de  $\Gamma$  ou de  $\Gamma^*$  dans le sens positif et  $+i\pi$  quand on tourne autour d'un sommet du graphe médial  $K_0$  dans le sens positif. C'est-à-dire, si  $\xi$  est voisin d'un point  $v \in \Lambda$ ,  $\zeta(\xi + \partial v^*) = -\zeta(\xi)$  et  $\zeta(\xi + 2\partial v^*) = \zeta(\xi)$  et de même autour d'une face centrée en un sommet de  $K_0$ . La définition ne dépend donc pas du chemin  $\gamma$  choisi. Par conséquent, la fonction  $\zeta$  est un spineur, bien défini sur  $\tilde{\Upsilon}$ .

Comme la carte est critique, les quadrilatères de  $\diamond$  sont des losanges et la géométrie du triangle donne pour un couple d'arêtes duales,  $\phi_{a^*} + \phi_a = \pi$ .

Donc en faisant un demi-tour dans le sens positif autour d'un sommet de  $K_0$ ,  $\theta$  varie d'un facteur  $+\frac{i\pi}{2}$ , si bien que sur trois points successifs  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , autour d'un sommet de  $K_0$ ,

$$\zeta(\xi_3) = +i\zeta(\xi_1)$$

Donc  $\zeta$  vérifie la symétrie spin.

La géométrie du triangle donne, de même que précédemment, la relation entre les angles  $\theta$  et la métrique  $\ell$ ,

$$\tan \frac{\phi_a}{2} = \frac{1}{\text{sh } 2K_a^*}$$

Comme les angles  $\phi_a^*$  sont compris entre 0 et  $\pi$  et que les constantes d'interaction sont positives :

$$\begin{cases} \cos \frac{\phi_a}{2} = \frac{\text{sh } 2K_a^*}{\text{ch } 2K_a^*} \\ \sin \frac{\phi_a}{2} = \frac{1}{\text{ch } 2K_a^*} \end{cases}$$

D'où on tire par la formule de Moivre,

$$e^{\frac{i\phi_a}{2}} = \frac{\text{sh } 2K_a^* + i}{\text{ch } 2K_a^*}$$

Par conséquent, en trois points successifs  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  autour d'un point de  $K_0$ ,  $(\xi_1, \xi_2)$  coupant une arête  $a^*$ ,

$$\zeta(\xi_2) = e^{i\theta(\xi_1, \xi_2)} \zeta(\xi_1) = \frac{\text{sh } 2K_a + i}{\text{ch } 2K_a} \zeta(\xi_1)$$

Ce qui donne, en utilisant la symétrie  $\zeta(\xi_3) = +i\zeta(\xi_1)$  :

$$\zeta_3 = \text{ch } 2K_a \zeta_2 - \text{sh } 2K_a \zeta_1$$

Donc  $\zeta$  vérifie l'équation DD'.

$\zeta$  est donc un spineur de Dirac. □

**Définition 29** *Le couple d'équations DD' et Sym est l'équation de Dirac discrète sans masse.*

**Remarque :** C'est cette équation qui fait le lien entre les systèmes statistiques et la théorie des fonctions holomorphes discrètes. Remarquons qu'on

ne retient d'une métrique  $\ell$  que les *rappports* des longueurs duales, c'est-à-dire la **structure conforme** associée à la métrique. Daniel Bennequin a généralisé cette équation à une équation de Dirac **avec masse**.  $\square$

Quand on interprète les longueurs comme provenant de constantes d'interaction, la criticalité impose des contraintes sur ces constantes. Nous allons vérifier que dans le cas régulier, cette contrainte équivaut à la criticalité habituelle du système statistique associé :

**Théorème 18** *Dans le cas des réseaux carré, triangulaire et hexagonal, munis d'une métrique invariante par translation, la criticalité de la carte  $(\Lambda, \ell)$  équivaut à la criticalité classique du modèle d'Ising sur  $\Gamma$  avec les constantes d'interaction vérifiant  $\text{sh } 2K_a = \frac{\ell(a^*)}{\ell(a)}$ , soit*

$$K_a = \frac{1}{2} \text{Argsh} \left( \frac{\ell(a^*)}{\ell(a)} \right)$$

*C'est-à-dire dans le cas du réseau carré avec deux constantes d'interaction  $K_H$  et  $K_V$ , l'une sur les arêtes horizontales et l'autre sur les arêtes verticales,*

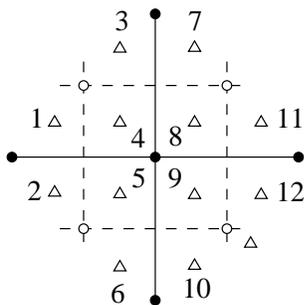
$$\text{sh } 2K_H \times \text{sh } 2K_V = 1$$

*Dans le cas du réseau triangulaire, avec trois constantes d'interaction  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  pour les trois types d'arêtes, la criticalité est donnée par l'équation de Yang-Baxter critique qui peut s'écrire :*

$$\text{sh } 2K_I \text{sh } 2K_{II} \text{sh } 2K_{III} = \text{sh } 2K_I + \text{sh } 2K_{II} + \text{sh } 2K_{III}$$

**Preuve :**

Sur le réseau carré: Prenons deux constantes  $K_H$  sur les arêtes horizontales et  $K_V$  sur les verticales. Soit  $x \in \Gamma_0$  et  $\xi_k$ , pour  $1 \leq k \leq 12$  les douze points de  $\tilde{\Upsilon}$  autour de  $x$  avec pour chaque point de  $\Gamma^*$  mis en cause un chemin venant de la gauche (tous étant égaux hors de la figure) dans la position suivante :



Supposons la carte critique, il existe donc  $\zeta$  un spineur de Dirac. Les valeurs de  $\zeta$  en ces douze points sont contraintes par les équations DD' et le caractère spinoriel de  $\zeta$ , en notant  $\zeta_k := \zeta(\xi_k)$  et  $s_a^* = \text{sh } 2K_a^*$ ,  $c_a^* = \text{ch } 2K_a^*$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_H^* & -s_H^* \\ -s_H^* & c_H^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_4 \\ \zeta_5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \zeta_5 \\ \zeta_9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_V^* & -s_V^* \\ s_V^* & -c_V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_6 \\ \zeta_{10} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \zeta_{12} \\ \zeta_{11} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_H^* & s_H^* \\ s_H^* & c_H^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_9 \\ \zeta_8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \zeta_8 \\ \zeta_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -c_V^* & s_V^* \\ -s_V^* & c_V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_7 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{H.16})$$

La condition de symétrie donne

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= i\zeta_5 = \zeta_7 \\ \zeta_2 &= i\zeta_4 = -\zeta_{10} \\ \zeta_3 &= i\zeta_8 = \zeta_{12} \\ \zeta_6 &= i\zeta_9 = -\zeta_{11} \end{aligned} \quad (\text{H.17})$$

Cela nous permet d'éliminer les valeurs aux quatre points centraux et on obtient le système  $8 \times 8$  suivant :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & c_H^* \times c_V^* & s_H^* \times c_V^* & -c_H^* \times s_V^* & s_H^* \times s_V^* \\ 0 & -1 & 0 & 0 & s_H^* \times c_V^* & c_H^* \times c_V^* & s_H^* \times s_V^* & -c_H^* \times s_V^* \\ 0 & 0 & -1 & 0 & c_H^* \times s_V^* & s_H^* \times s_V^* & -c_H^* \times c_V^* & s_H^* \times c_V^* \\ 0 & 0 & 0 & -1 & s_H^* \times s_V^* & c_H^* \times s_V^* & s_H^* \times c_V^* & -c_H^* \times c_V^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_{11} \\ \zeta_{12} \\ \zeta_3 \\ \zeta_6 \\ \zeta_7 \\ \zeta_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et le déterminant de cette matrice est

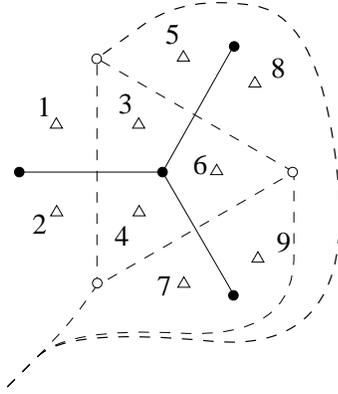
$$-4(\text{sh } 2K_H^* \times \text{sh } 2K_V^* - 1) \times \text{ch } 2K_H^* \times \text{sh } 2K_V^*$$

Dont la solution non triviale est

$$\text{sh } 2K_H^* \times \text{sh } 2K_V^* = 1$$

qui définit la criticalité classique sur le modèle d'Ising sur le réseau carré. Réciproquement, si cette condition est réalisée, il existe un spineur de Dirac solution du système.

De même, sur le réseau hexagonal, prenons trois constantes,  $K_I, K_{II}, K_{III}$  pour les arêtes horizontales, / et \ respectivement. Soit  $x \in \Gamma_0$  et  $\xi_k$ , pour  $1 \leq k \leq 9$  les neuf points de  $\tilde{\Upsilon}$  autour de  $x$  avec pour chaque point de  $\Gamma^*$  mis en cause le chemin dessiné sur la figure :



Supposons la carte critique, soit  $\zeta$  un spineur de Dirac. Les valeurs de  $\zeta$  en ces neuf points sont contraintes par les équations DD' et le caractère spinoriel de  $\zeta$  :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{ch } 2K_I^* & \text{sh } 2K_I^* \\ \text{sh } 2K_I^* & \text{ch } 2K_I^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \zeta_7 \\ \zeta_9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{ch } 2K_{III}^* & -\text{sh } 2K_{III}^* \\ -\text{sh } 2K_{III}^* & \text{ch } 2K_{III}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_4 \\ \zeta_6 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \zeta_8 \\ \zeta_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{ch } 2K_{II}^* & -\text{sh } 2K_{II}^* \\ -\text{sh } 2K_{II}^* & \text{ch } 2K_{II}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_6 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{H.18}$$

La condition de symétrie donne

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 &= i\zeta_4 = \zeta_9 \\
 \zeta_2 &= -i\zeta_3 = \zeta_8 \\
 \zeta_7 &= -i\zeta_6 = -\zeta_5
 \end{aligned} \tag{H.19}$$

Cela nous permet d'éliminer les valeurs aux trois points centraux et on obtient le système  $6 \times 6$  suivant :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & c_I^* \times c_{II}^* & s_I^* \times c_{III}^* & c_I^* \times s_{II}^* & s_I^* \times s_{III}^* \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_{II}^* \times c_I^* & -c_{II}^* \times s_I^* & -1 & -s_{II}^* \times s_{III}^* & 0 & -s_{II}^* \times c_{III}^* \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -s_{II}^* \times c_I^* & s_{II}^* \times s_I^* & 0 & c_{II}^* \times s_{III}^* & -1 & c_{II}^* \times c_{III}^* \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_5 \\ \zeta_7 \\ \zeta_8 \\ \zeta_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de ce système est :

$$2 \left( 1 - (s_I^* + s_{II}^* + s_{III}^*) (c_I^* c_{II}^* c_{III}^* - s_I^* s_{II}^* s_{III}^*) + s_I^{*2} + s_{II}^{*2} + s_{III}^{*2} + s_I^{*2} s_{II}^{*2} + s_{II}^{*2} s_{III}^{*2} + s_{III}^{*2} s_I^{*2} \right)$$

Qui vaut, en fonction de  $s_I = \exp 2K_I^*$ ,

$$\frac{1}{8} \frac{(s_I s_{II} s_{III} - s_I - s_{II} - s_{III})^2 (1 + s_I^2 s_{II}^2 + s_{II}^2 s_{III}^2 + s_{III}^2 s_I^2)}{s_I^2 s_{II}^2 s_{III}^2}$$

et l'annulation du facteur  $s_I s_{II} s_{III} - s_I - s_{II} - s_{III}$  correspond à l'équation de Yang-Baxter qui définit la criticalité. Réciproquement, si le déterminant est nul, la solution non triviale donne un spineur de Dirac.  $\square$

## H.4 Holomorphie de $\psi$

**Définition 30** Soient  $\zeta, \zeta'$  deux spineurs sur un double métrique simplement connexe. Sur une face  $((x, x'), (y, y'))$  de  $\Upsilon$ , relevée en quatre points consécutifs de  $\tilde{\Upsilon}$ ,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= ((x, y), \gamma_*^{yy^0}) \\ \xi_2 &= ((x', y), \gamma_*^{yy^0}) \\ \xi_3 &= ((x', y'), \gamma_*^{yy^0} + (y, y')) \\ \xi_4 &= ((x, y'), \gamma_*^{yy^0} + \partial x^* - (y, y')) \end{aligned} \tag{H.20}$$

On définit, en notant  $\zeta_k = \zeta(\xi_k)$ ,  $\zeta'_k = \zeta'(\xi_k)$ ,

$$\int_{(x, x')} \alpha := (\zeta_2 \zeta'_2 - \zeta_1 \zeta'_1) \tag{H.21}$$

$$\int_{(y, y')} \alpha := (\zeta_4 \zeta'_4 - \zeta_3 \zeta'_3) \tag{H.22}$$

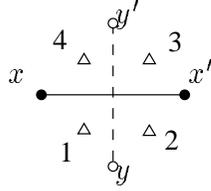
**Proposition 27** *La formule précédente définit une 1-forme fermée si  $\zeta$  et  $\zeta'$  vérifient l'équation  $DD'$*

**Preuve :** Remarquons que le produit de deux spineurs n'est plus un spineur, quand on tourne autour d'une face de  $\Upsilon$ , le produit est invariant car chaque terme est multiplié par  $-1$ . Comme  $\zeta$  vérifie  $DD'$ , en notant  $\zeta_k = \zeta(\xi_k)$ , et  $s_a = \text{sh } 2K_a$ ,  $c_a = \text{ch } 2K_a$ ,

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{x,x'} & s_{x,x'} \\ -s_{x,x'} & c_{x,x'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_4 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}$$

car  $\xi_1$  et  $\xi_4$  ne sont pas voisins;  $\zeta$  et  $\zeta'$  vérifient également l'équation réciproque :

$$\begin{pmatrix} \zeta'_4 \\ \zeta'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{x,x'} & s_{x,x'} \\ -s_{x,x'} & c_{x,x'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta'_1 \\ \zeta'_2 \end{pmatrix}$$



Donc l'intégrale sur  $(x, x')$  se réécrit :

$$\begin{aligned} \int_{(x,x')} \alpha &= \zeta_2 \zeta'_2 - \zeta_1 \zeta'_1 \\ &= (-s_{x,x'} \zeta_4 + c_{x,x'} \zeta_3) \zeta'_2 - (-c_{x,x'} \zeta_4 + s_{x,x'} \zeta_3) \zeta'_1 \\ &= (c_{x,x'} \zeta'_2 - s_{x,x'} \zeta'_1) \zeta_3 + (-s_{x,x'} \zeta'_2 + c_{x,x'} \zeta'_1) \zeta_4 \\ &= \zeta'_3 \zeta_3 - \zeta'_4 \zeta_4 \end{aligned} \quad (\text{H.23})$$

$\alpha$  est donc bien définie sur l'arête  $(x, x')$ ; de même pour l'arête  $(y, y')$ ,

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{y,y'} & -s_{y,y'} \\ -s_{y,y'} & c_{y,y'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} \quad (\text{H.24})$$

$$\begin{aligned} \int_{(y,y')} \alpha &= (-s_{y,y'} \zeta_2 + c_{y,y'} \zeta_3) \zeta'_4 - (c_{y,y'} \zeta_2 - s_{y,y'} \zeta_3) \zeta'_1 \\ &= (c_{y,y'} \zeta'_4 + s_{y,y'} \zeta'_1) \zeta_3 + (-s_{y,y'} \zeta'_4 - c_{y,y'} \zeta'_1) \zeta_2 \\ &= \zeta'_3 \zeta_3 - \zeta'_2 \zeta_2 \end{aligned} \quad (\text{H.25})$$

$\alpha$  est fermée car elle définie par des différences qui s'annulent sur chaque face.  $\square$

**Théorème 19** *Soient  $\zeta, \zeta'$  deux spineurs vérifiant l'équation  $DD'$ . Si  $\zeta$  est un spineur de Dirac, alors la forme  $\alpha$  associée à  $\zeta$  et  $\zeta'$  est holomorphe.*

**Preuve :** Sur une face  $(x, x', y, y')$  de  $\Upsilon$ , relevée en quatre points consécutifs  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  de  $\tilde{\Upsilon}$ , en notant  $\zeta_k = \zeta(\xi_k)$ ,  $\zeta'_k = \zeta'(\xi_k)$  et  $s_a = \text{sh } 2K_a$ ,  $c_a = \text{ch } 2K_a$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{(y, y')} \alpha &= \zeta_3 \zeta'_3 - \zeta_2 \zeta'_2 \\
 &= i\zeta_1 \zeta'_3 + i\zeta_4 \zeta'_2 \\
 &= i\zeta_1 (-s_{x, x'} \zeta'_1 + c_{x, x'} \zeta'_2) + i(-c_{x, x'} \zeta_1 + s_{x, x'} \zeta_2) \zeta'_2 \\
 &= i s_{x, x'} (\zeta_2 \zeta'_2 - \zeta_1 \zeta'_1) \\
 &= i \rho_{x, x'} \int_{(x, x')} \alpha
 \end{aligned} \tag{H.26}$$

Donc  $\alpha$  vérifie l'équation de Cauchy-Riemann. Comme elle est également fermée, elle est holomorphe.  $\square$

**Corollaire :** *Sur une carte critique simplement connexe, la 1-forme définie par la contraction du spineur de Dirac  $\zeta$  et du spineur  $\psi$  du système statistique associé est holomorphe. En effet,  $\psi$  vérifie l'équation  $DD'$ . De même, la 1-forme définie par la contraction de  $\bar{\zeta}$  et de  $\psi$  est anti-holomorphe.*

## Annexe A

# Analogie électrique

Nous nous plaçons sur un graphe  $\Gamma$  et nous comprenons chaque arête  $a$  équipée du poids  $\rho_a$  comme une résistance de conductance  $\rho_a$ . La loi d'**Ohm** relie le courant  $I$  qui traverse une résistance de conductance  $\rho = \frac{1}{R}$  à la différence de potentiel électrique  $U$  entre ses extrémités :

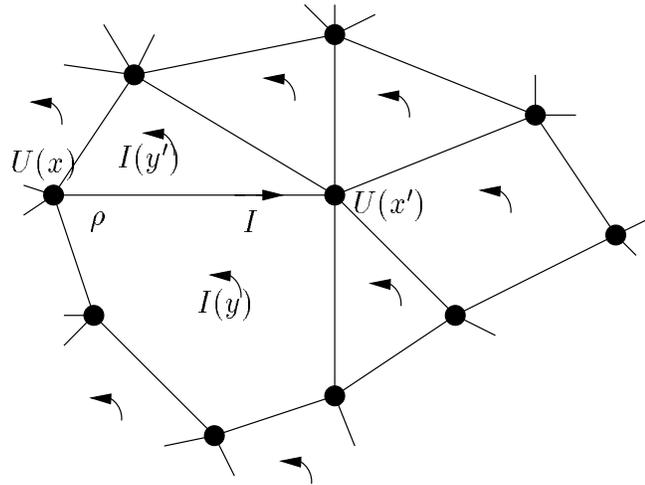
$$I = \rho U$$

La deuxième loi de l'électricité, qui veut que la quantité de porteurs de charge est conservée est la loi de **Kirchoff** : La somme des intensités partant d'un nœud est nulle.

Une configuration électrique est décrite par une distribution de potentiels en chaque nœud de telle manière que la loi d'Ohm et la loi de Kirchoff sont vérifiées. Nous avons vu que dans ce cas la fonction potentiel est harmonique.

Un outil très utile dans le cadre d'un réseau électrique planaire est la notion de courants de **Maxwell** : Quand le réseau électrique est planaire, on n'a pas seulement accès au 1-squelette mais à un 2-complexe, décomposition cellulaire du plan (ou d'une surface orientée de genre plus élevé). On associe à une distribution de potentiels en les nœuds du réseau une distribution d'*intensités* sur les *faces* telle que l'intensité traversant la résistance commune à deux faces orientées soit la différence des intensités dans chacune des faces. Étant donnée les potentiels, cette distribution de courants est unique à une

constante additive près.



La loi d'Ohm exprimée à l'aide des courants de Maxwell s'écrit donc, le long d'une résistance de conductance  $\rho$  et d'extrémités  $x$  et  $x'$ , bordée par les faces  $y$  et  $y'$  :

$$I(y') - I(y) = \rho (U(x') - U(x)) \quad (\text{A.1})$$

**Lefschetz** a remarqué [Lef] que si on considère la distribution de courants  $I$  comme une distribution  $U' = I$  de potentiels sur le réseau électrique *dual*, une résistance  $a^*$  duale d'une résistance  $a$  étant équipée de la conductance  $\rho(a^*) = \frac{1}{\rho(a)}$ , alors, c'est une configuration vérifiant les lois de l'électricité et la distribution de courants de Maxwell associée  $I' = -U$ . Les courants et les potentiels sont donc duaux l'un de l'autre au signe près.

$$I'(x') - I'(x) = \rho^* (U'(y') - U'(y))$$

Comprenons les intensités comme la partie imaginaire d'un potentiel, c'est à dire équipons le *double* d'une fonction complexe

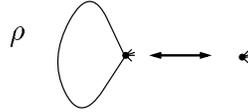
$$f = U + iI$$

le problème des signes est alors résolu ( $i^2 = -1$ ), et la loi d'Ohm A.1 devient exactement l'équation de Cauchy-Riemann discrète :

$$f(y') - f(y) = i\rho(x, x') (f(x') - f(x))$$

L'interprétation électrique suggère également d'autres voies de développement, il existe dans les réseaux électriques des **mouvements électriques** reliant des réseaux électriques ayant la même réponse [CdV96]:

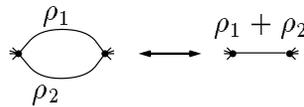
1. (a) Élimination d'une **boucle**: une résistance dont les extrémités sont les mêmes peut-être éliminée.



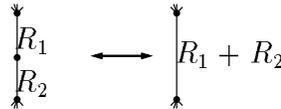
- (b) Élimination d'un **bras mort**: une résistance *pendante* peut-être éliminée.



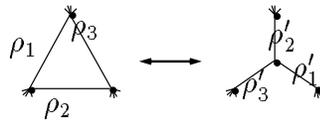
2. (a) Mise en **parallèle**: deux résistances en parallèle de conductances  $\rho_1$  et  $\rho_2$  peuvent être remplacées par une résistance équivalente de conductance  $\rho_1 + \rho_2$ .



- (b) Mise en **série**: deux résistances en série de conductances  $\rho_1$  et  $\rho_2$  peuvent être remplacées par une résistance équivalente de conductance  $\frac{1}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}}$  (ce sont les résistances  $R = \frac{1}{\rho}$  qui s'ajoutent).

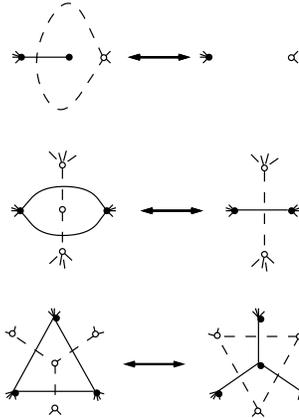


3. Le mouvement **triangle-étoile**: trois résistances formant un triangle peuvent être remplacées par trois résistances formant une étoile, les conductances  $\rho_1, \rho_2$  et  $\rho_3$  étant reliées aux conductances  $\rho'_1, \rho'_2$  et  $\rho'_3$  par les relations:



$$\rho_1 \rho'_1 = \rho_2 \rho'_2 = \rho_3 \rho'_3 = \rho_1 \rho_2 + \rho_2 \rho_3 + \rho_3 \rho_1 = \frac{\rho'_1 \rho'_2 \rho'_3}{\rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_3} \quad (\text{A.2})$$

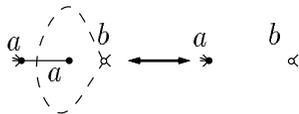
On voit que ces mouvements vont par pair et sont duaux l'un de l'autre excepté le mouvement triangle-étoile qui est auto-dual. Par exemple, faire un mouvement de mise en série sur un graphe équivaut à faire un mouvement de mise en parallèle sur le dual. Ces mouvements passent donc en des mouvements locaux du double métrique, c'est-à-dire qu'on relie par ces mouvements deux doubles qui sont égaux hors d'une zone où on fait ces changements :



Dans les deux premiers mouvements, on voit qu'étant donné le terme de droite, il n'y a pas unicité du terme de gauche, dans le premier,  $\rho$  est quelconque, et dans le deuxième,  $\rho$  et  $\rho'$  n'interviennent que par leur somme. Si bien que deux doubles différents reliés par une suite de mouvements électriques peuvent avoir une même combinatoire.

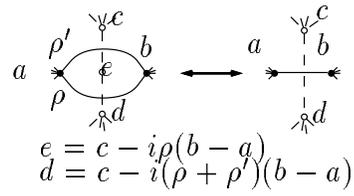
**Proposition 28** *Si deux doubles sont reliés par des mouvements électriques, il existe un isomorphisme entre les espaces vectoriels de fonctions holomorphes associés.*

**Preuve :** Il suffit de le montrer pour les mouvements élémentaires: Pour le premier mouvement, la contrainte d'holomorphic nécessite que les valeurs aux deux extrémités du bras mort soient les mêmes.

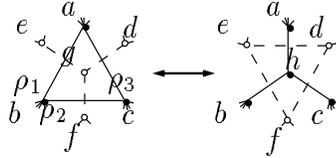


Pour le deuxième mouvement, la cohérence de l'isomorphisme est assurée par le fait qu'on remplace deux résistances en parallèle par un résistance de

conductance la somme des conductances :



Le troisième mouvement est plus délicat. Plaçons nous dans cette situation :



Les contraintes d'holomorphic imposent :

$$g - e = i\rho_1(b - a)$$

$$g - f = i\rho_2(c - b)$$

$$g - d = i\rho_3(a - c)$$

$$h - c = \frac{i}{\rho'_1}(f - d)$$

$$h - a = \frac{i}{\rho'_2}(d - e)$$

$$h - b = \frac{i}{\rho'_3}(e - f)$$

si bien que

$$e = d + i\rho_3(a - c) + i\rho_1(a - b)$$

$$f = d + i\rho_3(a - c) + i\rho_2(b - c)$$

$$g = d + i\rho_3(a - c)$$

$$h = c + \frac{i}{\rho'_1}(i\rho_3(a - c) + i\rho_2(b - c))$$

$$= a + \frac{i}{\rho'_2}(i\rho_3(c - a) + i\rho_1(b - a))$$

$$= b + \frac{i}{\rho'_3}(i\rho_1(a - b) + i\rho_2(c - b))$$

Le problème est donc surdéterminé. Après développement, on voit que le système est compatible si et seulement si les grandeurs  $\rho'$  sont définies par les équations A.2, le facteur de  $a$  donne  $\rho_1\rho'_1 = \rho_3\rho'_3$ , celui de  $b$ ,  $\rho_1\rho'_1 = \rho_2\rho'_2$  et celui de  $c$ ,  $\rho_2\rho'_2 = \rho_3\rho'_3$ .  $\square$

Ce théorème se généralise à l'espace des formes holomorphes puisque celles-ci sont localement exactes.

Sur le tore de genre un, décomposé par une portion du réseau triangulaire/hexagonal, équipé de longueurs invariantes par translation, on construit une suite de mouvements électriques qui exhibe un automorphisme non trivial de l'espace des formes holomorphes associé : Il suffit de réaliser un mouvement triangle/étoile pour un triangle sur deux de la décomposition, le réseau triangulaire se change alors en son dual hexagonal et *vice-versa*.

On a donc une notion d'holomorphie qui dépend essentiellement d'une classe de doubles métriques modulo l'action des mouvements électriques. Il existe des théorèmes de minimalité dans cette classe [CdV96] et on peut traiter la continuation holomorphe pour ces cas minimaux. Nous ne parlerons pas de ce sujet ici.

# Bibliographie

- [Bax] RODNEY J. BAXTER, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1989. Reprint of the 1982 original.
- [BPZ] A. A. BELAVIN, A. M. POLYAKOV ET A. B. ZAMOLODCHIKOV, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nuclear Phys. B* **241**,2 (1984), 333–380.
- [Sch] ITAI BENJAMINI ET ODED SCHRAMM, Harmonic functions on planar and almost planar graphs and manifolds, via circle packings, *Invent. Math.* **126**,3 (1996), 565–587.
- [Ber] CLAUDE BERGE, *Graphs*, *North-Holland Mathematical Library* volume 6, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Second revised edition of part 1 of the 1973 English version.
- [Bro] WILLIAM BROWDER, *Surgery on simply-connected manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1972. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 65.
- [CdV91] YVES COLIN DE VERDIÈRE, Comment rendre géodésique une triangulation d'une surface?, *Enseign. Math. (2)* **37**,3-4 (1991), 201–212.
- [CdV92] YVES COLIN DE VERDIÈRE, Le spectre du laplacien: survol partiel depuis le Berger-Gauduchon-Mazet et problèmes, in *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992)*, pages 233–252, *Sémin. Congr.* volume 1, Soc. Math. France, Paris, 1996.
- [CdV97] YVES COLIN DE VERDIÈRE, Spectre d'opérateurs différentiels sur les graphes, in *Random walks and discrete potential theory, Cortona, June 22-28 1997*, pages 1–26, 1997.

- [CdV96] YVES COLIN DE VERDIÈRE, ISIDORO GITLER ET DIRK VERTIGAN, Réseaux électriques planaires. II, *Comment. Math. Helv.* **71**,1 (1996), 144–167.
- [CdVM] YVES COLIN DE VERDIÈRE ET FRÉDÉRIC MATHÉUS, Empilements de cercles et approximations conformes, in *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992)*, pages 253–272, *Sémin. Congr.* volume 1, Soc. Math. France, Paris, 1996.
- [Cox1] H. S. M. COXETER, *Introduction to geometry*, *Wiley Classics Library*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989. Reprint of the 1969 edition.
- [Cox2] H. S. M. COXETER, Configurations and maps, *Rep. Math. Colloquium (2)* **8** (1949), 18–38.
- [dRh] GEORGES DE RHAM, *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*, Hermann, Paris, 1973. Troisième édition revue et augmentée, Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Nancago, III, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, No. 1222b.
- [DD] VLADIMIR S. DOTSENKO, VIKTOR S.; DOTSENKO, Critical behaviour of the phase transition in the 2d ising model with impurities., *Adv. in Phys.* **32**,2 (1983), 129–172.
- [GBS87] BRANKO GRÜNBAUM ET G. C. SHEPHARD, *Tilings and patterns*, W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
- [ID] CLAUDE ITZYKSON ET JEAN-MICHEL DROUFFE, *Statistical field theory. 2 Vol.*, *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [KC] LEO P. KADANOFF ET HORACIO CEVA, Determination of an operator algebra for the two-dimensional Ising model, *Phys. Rev. B (3)* **3** (1971), 3918–3939.
- [KW] H. A. KRAMERS ET G. H. WANNIER, Statistics of the two-dimensional ferromagnet. I, *Phys. Rev. (2)* **60** (1941), 252–262.
- [Lan] R.P. LANGLANDS, An essay on the dynamics and statistics of critical field theories, *Soc. Math. du Canada* **3** (1995).

- [Lef] S. LEFSCHETZ, *Applications of algebraic topology*, Springer-Verlag, New York, 1975. Graphs and networks, the Picard-Lefschetz theory and Feynman integrals, Applied Mathematical Sciences, Vol. 16.
- [LF] JACQUELINE LELONG-FERRAND, *Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée*, Gauthier-Villars, Paris, 1955.
- [PS] FRANCO P. PREPARATA ET MICHAEL IAN SHAMOS, *Computational geometry, Texts and Monographs in Computer Science*, Springer-Verlag, New York, 1985. An introduction.
- [Ser] JEAN-PIERRE SERRE, *Arbres, amalgames,  $SL_2$* , Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [Sie] C. L. SIEGEL, *Topics in complex function theory. Vol. II, Wiley Classics Library*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. Automorphic functions and abelian integrals, Translated from the German by A. Shenitzer and M. Tretkoff, With a preface by Wilhelm Magnus, Reprint of the 1971 edition, A Wiley-Interscience Publication.
- [Spa] EDWIN H. SPANIER, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [Tro] MARC TROYANOV, Les surfaces euclidiennes à singularités coniques, *Enseign. Math. (2)* **32**,1-2 (1986), 79–94.
- [Wan] G. H. WANNIER, The statistical problem in cooperative phenomena, *Rev. of Modern Physics* **17**,1 (1945).
- [Wei] ANDRÉ WEIL, *Scientific works. Collected papers.*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg. Trois volumes.
- [Whi] J. H. C. WHITEHEAD, Combinatorial homotopy., *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 213–245, 453–496.

# Index

- Élasticité, 13
- Électricité, 15, 133
- Énergie, 95
  - interne, 96, 97
  - libre, 97
- Équation de Dirac, 122, 126
- Ésérance, 97
- État de Gibbs, 97
- Étoile de Hodge, 23, 31
  
- Anticommutation, 114
  
- Boltzmann
  - Constante de, 95
  - Distribution de, 93
  - Poids de, 95
- Bord  $\partial$ , 17, 27
- $C^{(1,0)}, C^{(0,1)}$ , 33
- Cône standard, 62
- Cauchy-Riemann, 135
- Équation de Cauchy-Riemann, 32, 33
- Cellule, 26
- Chaînes, 17, 27
- Chaleur spécifique, 97
- Cobord  $d$ , 18, 29
- Cochânes, 17, 27
- Colin de Verdère, 9, 34, 63, 138
- Complexe
  - algébrique  $(C(\Gamma), \partial)$ , 26
  - cellulaire, 25
  - CW-complexe, 26
  - double  $\Lambda$ , 23, 28
  - dual  $\Gamma^*$ , 21, 28
- Condition au bord, 94
- Conditions au bord, 100
- Configurations, 93
- Coorientation, 22
- Criticalité, 127
  - Définition, 61
  - Exemples, 65–72
  
- $d^*$ , 18
- Décomposition cellulaire, 25
  - duale, 28
- Décomposition cellulaire géodésique, 63
- Désordre  $\mu$ , 108, 113
- Développement
  - basse température, 100
  - haute température, 102
- Delaunay, 68
- Dirichlet, 10, 34
- Dotsenko, 115
- Double  $\Lambda$ , 28
- Double Métrique, 30
- dZ, 78
  
- Empilements de cercles, 34
  
- fdZ, 78
- Fermion, 114
- Fonction de partition, 94
- Fonctions holomorphes  $\Omega^0(\Lambda)$ , 33

- Fonctions monodriffiques, analytiques  
discrètes, 34
- Formes, 27  
holomorphes, 32  
sur  $\diamond$ , 76
- Graphe  
Diamant  $\diamond$ , 58  
Médial  $K$ , 55  
Triple  $\Upsilon$ , 57, 113
- Graphe orienté, 9
- Projecteur harmonique  $H$ , 20
- Hémi-fonction, 39
- Harmonicité, 10, 18  
élasticité, 14  
électricité, 15  
des fonctions holomorphes, 36  
marche aléatoire, 15
- Hodge, 52  
Théorème de, 20  
Théorie classique, 17
- Holomorphie de  $\psi$ , 130
- Holomorphie discrète, 33
- Interaction, 93
- Invariance d'échelle, 98
- Jordan, 108
- Kirchoff, 15, 133
- Langlands, 93
- Laplacien, 18, 30
- Laplacien discret, 10
- Lefschetz, 134
- Lelong-Ferrand, 33
- Limite continue, 88
- Limite thermodynamique, 97
- Longueur de corrélation, 98
- Longueur thermodynamique, 101
- duale, 103  
modifiée, 106
- Losanges, 64
- Métrique, 18, 29
- Métrique plate à singularité conique,  
62
- Majorana, 114
- Marche aléatoire, 15, 48
- Matrice d'adjacence, 11
- Matrice de valence, 11
- Maxwell, 15, 134
- Modèle d'Ising, 94, 99
- Morera, 91
- Motif de cercles, 34, 72
- Mouvements électriques, 135
- Multiplication  
fonction par fonction, 82  
fonction par forme, 77
- Neumann, 10, 44
- Observable, 97, 114
- Ohm, 15, 134
- Pôle, 42
- Mise en parallèle, 135
- Phase, 97  
transition, 97
- Dualité de Poincaré, 26
- Polynôme minimal  $P_\Lambda$ , 82
- Principe du maximum, 10  
 $\psi$ , 113
- $\rho$ , 23
- Résidu, 42
- Relation de fermeture, 18
- Revêtement ramifié, 62  
de Rham, 52
- Mise en série, 135

- Schramm, 34, 73
- Semi-criticalité
  - Définition, 61
  - Exemples, 65–72
- Siegel, 50
- Singularité conique, 62
- Spin  $\sigma$ , 113
- Spineur, 118
  - de Dirac, 114, 126
- Squellette, 26
- Stockes, 29, 90
- Structure conforme, 30, 76, 127
- Structure spin universelle  $\hat{\Upsilon}$ , 118
- Symétrie spin, 122
- Système statistique, 93
  - à spin, 95
  - à vertex, 96
  - IRF, 96
  
- Température, 95
  - critique, 97
- Théorème des résidus, 42
- Triangle/étoile, 135
- Troyanov, 64
- Types  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ , 33
  
- Variable aléatoire, 97
- Voronoi, 68
  
- Wigner, 108
  
- $Z^k$ , 81