HAL open science

Dynamique optimale de systèmes articulés à cinématique fermée. Application à la synthèse d'allures de marche optimales

Stéphane Chessé

▶ To cite this version:

Stéphane Chessé. Dynamique optimale de systèmes articulés à cinématique fermée. Application à la synthèse d'allures de marche optimales. Modélisation et simulation. Université de Poitiers, 2002. Français. NNT : . tel-00001867

HAL Id: tel-00001867

https://theses.hal.science/tel-00001867v1

Submitted on 24 Oct 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année 2002

T H È S E

Pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)
(Diplôme National – Arrêté du 30 mars 1992)

ECOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGENIEUR
Secteur de Recherche :
GÉNIE MÉCANIQUE, PRODUCTIQUE, TRANSPORT

Présentée par :

Stéphane CHESSÉ

Dynamique optimale de systèmes articulés à cinématique fermée. Application à la synthèse d'allures de marche optimales.

Directeur de thèse : Guy BESSONNET
Co-responsable : Philippe SARDAIN

Soutenue le 13 septembre 2002 devant la Commission d'Examen

JURY

Rapporteurs :	G. ABBA	Professeur, Université de Metz
	M. FAYET	Professeur, I.N.S.A. de Lyon
Examinateurs :	G. BESSONNET	Professeur, L.M.S. Université de Poitiers
	P. LACOUTURE	Professeur, L.M.S. Université de Poitiers
	J.P. LALLEMAND	Professeur, L.M.S. Université de Poitiers
	P. SARDAIN	Maître de conférences, L.M.S. Université de Poitiers

INTRODUCTION GENERALE

On dit généralement des robots manipulateurs que ce sont des *générateurs de mouvements* avec tout ce que cela implique sur le plan de leur conception cinématique comme sur le plan de la gestion de leur dynamique. Le sens accordé à l'expression précédente se trouve renforcé lorsqu'on l'applique aux *robots marcheurs*. Dans ce cas, la gesticulation interne du système doit avoir pour effet d'engendrer un déplacement d'ensemble du système sous la forme d'un cheminement de la machine vers un objectif éloigné. Dans les deux cas, la question suivante se pose naturellement : quel type de mouvement interne prescrire au robot manipulateur comme au robot marcheur pour réaliser dans les meilleures conditions d'efficacité et de sécurité le déplacement à effectuer ? Les redondances cinématiques et la variété des contraintes qui peuvent être prises en compte conduisent à un large éventail de solutions possibles.

Depuis trois décennies, des recherches intensives ont été consacrées à la construction de solutions permettant de satisfaire au mieux des exigences d'efficacité et de fiabilité. Deux types de planification de mouvements ont été développés : l'un est centré sur la cinématique du mouvement, l'autre sur sa dynamique.

La première approche consiste ainsi à définir un mouvement sur des bases purement géométriques et cinématiques. Un calcul en dynamique inverse des efforts actionneurs peut alors compléter la connaissance du mouvement planifié en déterminant les efforts de commande qui permettent de l'exécuter. Cette technique est simple à mettre en œuvre dans son principe. Mais comme la dynamique du mouvement n'est déterminée qu'a posteriori, cette démarche peut conduire à des solutions peu satisfaisantes sur le plan de la qualité de fonctionnement du système mécanique : couples élevés, pics d'efforts transmis trop importants au niveau de certaines liaisons et transmissions, dépense énergétique non maîtrisée. Les inconvénients de cette technique peuvent s'amplifier considérablement lorsqu'elle est utilisée pour engendrer des pas de marche de robots bipèdes. En effet, la stabilité des bipèdes, qui est très précaire par nature, tient à un bon contrôle des efforts d'appui. Or ceux-ci sont intimement liés à la dynamique du mouvement. La planification cinématique de mouvements paraît difficilement concevable dans ce cas, sauf s'ils sont suffisamment lents.

La seconde approche est fondée sur l'introduction des équations du mouvement qui traduisent le comportement dynamique du système. Il s'agit d'en extraire une solution qui respecte les contraintes cinématiques et sthéniques imposées par les capacités du robot et par les caractéristiques de la tâche à effectuer. La démarche de base repose sur la formulation d'un problème d'optimisation qui consiste à minimiser un critère de performance à contenu dynamique. On obtient typiquement un problème de commande optimale. La résolution d'un tel problème conduit à déterminer simultanément, dans le même processus de calcul, la

cinématique du mouvement et les efforts actifs optimaux qui engendrent le mouvement. Dans le même temps, toutes les contraintes formulées sont satisfaites par la solution obtenue. Une telle méthode conduit ainsi à une maîtrise globale des données et contraintes sur la base desquelles doit être construit le mouvement optimal.

C'est cette dernière approche qui est mise en œuvre dans ce mémoire consacré à la synthèse numérique de mouvements optimaux de systèmes articulés. L'étude présentée s'inscrit dans le cadre de recherches développées au LMS dans le domaine de l'optimisation de mouvements de systèmes à cinématique ouverte comme dans [JUT 96], [DAN 98] pour les robots manipulateurs et dans [ROS 99] pour la marche en phase unipodale.

Le travail réalisé a consisté à élargir aux systèmes à cinématique fermée les approches précédemment développées pour le cas de systèmes à boucle ouverte. Les domaines d'application potentiels concernent les trois types de systèmes suivants :

- les robots coopérants
- les robots manipulateurs à structure parallèle
- les robots marcheurs bipèdes.

Au cours de leurs mouvements, les systèmes des deux premiers groupes fonctionnent en permanence en boucle cinématique fermée, avec la présence éventuelle d'une ou plusieurs liaisons unilatérales dans le premier cas. Dans les deux cas, les systèmes considérés sont en liaison bilatérale avec une base fixe. Cette particularité introduit des simplifications très importantes au niveau de la formulation des équations de la dynamique, d'une part, et au niveau des contraintes cinématiques et sthéniques à introduire dans le problème d'optimisation, d'autre part.

Le problème se présente très différemment en ce qui concerne l'optimisation de pas de marche. La marche est constituée par l'alternance d'une phase de simple appui (ou phase unipodale) et d'une phase de double appui (phase bipodale) durant laquelle le système locomoteur travaille en boucle cinématique fermée. La synthèse de ce mouvement constitue le problème le plus complexe et le plus délicat à traiter parmi ceux qui sont posés dans ce mémoire. Cette complexité tient au fait que la boucle cinématique est fermée sur deux appuis unilatéraux. Le respect des conditions de contact : unilatéralité et non glissement, est traduit par des contraintes qui sont très restrictives du domaine d'admissibilité des mouvements à engendrer.

Les mouvements sont engendrés sur la base de la minimisation d'un critère de performance constitué par l'intégrale des couples actionneurs quadratiques. Ce problème

d'optimisation est traité par l'application du principe du maximum de Pontryagin. La première étape de la méthode développée pour optimiser les mouvements de systèmes bouclés consiste à considérer les boucles cinématiques comme ouvertes au niveau de liaisons dont le choix peut avoir son importance dans le problème à traiter. Ainsi, dans le cas de la marche, la boucle cinématique que fait le système locomoteur avec le sol en double appui, est ouverte au niveau du contact pied-sol avant pour des raisons qui seront justifiées dans le chapitre II.

Un modèle dynamique hamiltonien est alors aisé à formuler dans une configuration à paramétrage complet du système articulé. Dans ce modèle, les efforts au niveau de la liaison libérée, qu'ils soient actifs ou passifs, sont considérés comme des efforts extérieurs de type efforts de commande permettant d'assurer et de contrôler la fermeture de la chaîne, comme les efforts actifs articulaires permettent d'impulser et de contrôler les mouvements articulaires. La condition géométrique de fermeture de boucle se présente comme une contrainte égalité à satisfaire par les paramètres de configuration. Dans le problème de commande optimale à résoudre, cette contrainte sur l'état du système est traitée par une technique de pénalisation extérieure qui consiste à minimiser sa norme quadratique pour une grande valeur du facteur de pénalité qui lui est associé.

La suite du mémoire est organisée en trois chapitres. Le premier est consacré à la formulation générale des équations du mouvement du système paramétré en boucle ouverte. Les exemples traités numériquement concernent des systèmes plans uniquement. L'objectif est de valider une technique d'optimisation de mouvements en échappant à la lourdeur des formulations à développer pour le cas des systèmes tridimensionnels.

Le deuxième chapitre développe la construction du problème d'optimisation. La formulation finale de celui-ci est centrée sur le problème de la marche dans le plan sagittal d'un bipède à sept corps. C'est le problème le plus contraint parmi ceux qui sont traités dans ce mémoire. L'optimisation de la dynamique de la marche est l'objectif central du travail présenté.

Le chapitre III présente des résultats numériques concernant des mouvements de mécanismes plans à liaisons bilatérales exclusivement, ou de bipèdes plans à liaisons pied-sol nécessairement unilatérales pour effectuer des pas de marche. L'application principale concerne la synthèse numérique de pas de marche, dans son plan sagittal, du bipède BIP, conçu et développé conjointement par le LMS et l'INRIA Rhônes-Alpes.

CHAPITRE I

MODELES DYNAMIQUES DE SYSTEMES A CINEMATIQUE FERMEE

I.1 INTRODUCTION 11
I.2 SYSTÈMES ARTICULÉS À CINÉMATIQUE FERMÉE 12
I.2.1 Systèmes fermés avec liaisons bilatérales 14
I.2.2 Systèmes fermés avec liaisons unilatérales 14
I.2.3 Paramétrage du mouvement 18
I.2.3.1 Système bouclé sur sa base par deux liaisons bilatérales non glissantes 18
I.2.3.2 Système bouclé sur appuis par contact unilatéral 19
I.3 MODÈLES DYNAMIQUES 20
I.3.1 Formulation dans une configuration minimale 21
I.3.2 Formulation dans une configuration de chaîne ouverte 21
I.3.2.1 Équations du mouvement avec multiplicateurs de Lagrange 22
I.3.2.2 Formulation hamiltonienne des équations du mouvement avec multiplicateurs 24
I.3.2.3 Élimination du multiplicateur 25
I.3.2.4 Introduction des forces de liaisons comme variables de commande complémentaires 27
I.3.2.5 Equation d'état du système 28
I.3.3 Exemple : modèle dynamique d'un système plan à boucle fermée 29
I.4 CONCLUSION 34

I.1 Introduction

La modélisation de systèmes articulés avec boucles cinématiques fermées a suscité un nombre considérable d'études tant au niveau géométrique et cinématique qu'au niveau dynamique. Considérant un agencement cinématique donné, c'est le comportement dynamique du système qui est l'objet de notre attention.

De tels systèmes se caractérisent principalement par leurs redondances cinématiques et la redondance des actionneurs. Cette dernière caractéristique les rend délicats à contrôler. En effet, un contrôle inapproprié des efforts actionneurs peut provoquer des efforts internes antagonistes. Il va en résulter des tensions inutiles dans la structure. Celles-ci peuvent à leur tour provoquer des réactions brusques dans le fonctionnement du système, comme des décrochages aux appuis ou des ruptures de contact lorsqu'il y a des contacts unilatéraux.

Un système articulé est sur-actionné lorsque le nombre d'actionneurs est supérieur au nombre de degrés de liberté du système bouclé. La redondance des actionneurs n'apparaît pas nécessairement dans tous les systèmes à cinématique fermée. Elle est même évitée dans le cas des robots manipulateurs à structure cinématique dite parallèle. Mais le risque d'avoir des efforts antagonistes subsiste à cause des couplages existant entre les mouvements articulaires.

En ce qui concerne les robots manipulateurs à chaîne cinématique de type série, le suractionnement apparaît lorsque l'effecteur est astreint à maintenir un appui avec une surface de contact donnée. Il y a dans ce cas bouclage cinématique entre le manipulateur et l'appui. Un bouclage analogue se produit lorsque l'on considère un système de robots coopérants.

De tels bouclages avec suractionnement se manifestent dans les systèmes à locomotion alternée : robots à pattes, locomotion animale et humaine. Comme pour les robots coopérants, l'étude des mouvements de tels systèmes doit tenir compte de contraintes supplémentaires qui traduisent l'unilatéralité des appuis et le non glissement.

La modélisation dynamique de systèmes contraints a été abondamment traitée dans la littérature spécialisée. Les équations de Lagrange avec multiplicateurs constituent le modèle quasi universellement utilisé en vue de la simulation numérique du comportement dynamique de tels systèmes. Les équations de Hamilton qui se déduisent directement des équations de Lagrange constituent la formulation de base des problèmes traités dans ce mémoire. Les multiplicateurs de Lagrange y seront traités comme des forces extérieures inconnues appliquées au système.

I.2 Systèmes articulés à cinématique fermée

Ce type de systèmes se rencontre de plus en plus en plus fréquemment dans l'industrie où des machines à architecture parallèle variées commencent à apparaître.

Contrairement à un robot série "traditionnel" à chaîne cinématique ouverte, un robot parallèle est constitué de chaînes articulées à cinématique fermée. Ainsi, au lieu de disposer les axes articulaires et les moteurs en série avec l'accumulation des jeux et des flexibilités, le robot à agencement parallèle permet à la fois de rigidifier la structure, d'améliorer la précision et de diminuer la puissance des moteurs. Le poids d'un robot parallèle qui est ainsi généralement plus faible que celui d'un robot série dans un domaine d'utilisation analogue, génère alors des accélérations élevées et donc des temps de réalisation de tâches plus faibles. Un autre avantage non négligeable de la parallélisation des systèmes d'actionnement réside dans les symétries inhérentes à ce type d'architecture qui induit une standardisation des actionneurs de chaque axe du robot.

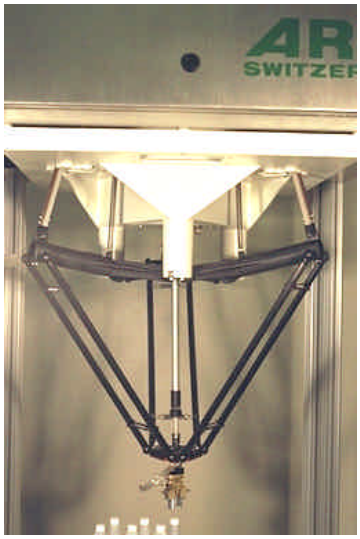


Figure I–1. Le robot Delta (société DEMAUREX).

Figure I–2. Simulateur de vol (société CAE).

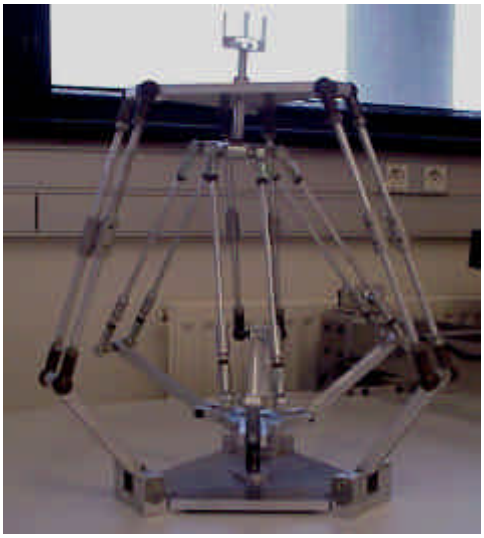


Figure I–3. Le Double-Delta du LMS.

Aujourd'hui encore, peu de robots à architecture parallèle ont une vie commerciale. On peut citer l'exemple, dans le domaine de la manipulation industrielle, du robot Delta de la société Demaurex (Figure I–1). Ce robot industriel est le plus rapide qui soit en atteignant des accélérations de l'ordre de 200m/s^2. On peut également mentionner la plate-forme de Gough-Stewart dont la structure est utilisée dans le domaine des simulateurs de vol (Figure I–2) et le Double-delta du LMS (Figure I–3) dans lequel un assemblage de deux structures de type "Delta" permet un découplage des mouvements de translation de la nacelle de ses mouvements de rotation.

La présentation qui suit est essentiellement limitée aux systèmes plans. Les simulations numériques réalisées dans le troisième chapitre concernent uniquement de tels systèmes. La complexité calculatoire qui leur est associée ne présente pas de difficultés techniques majeures pour la formulation des équations dynamiques que nous envisageons de traiter.

On peut distinguer deux types de systèmes fermés selon qu'ils présentent ou non des liaisons unilatérales. Le niveau de complexité des problèmes à traiter est plus élevé lorsque des liaisons unilatérales doivent être prises en compte.

I.2.1 Systèmes fermés avec liaisons bilatérales

Le mécanisme plan schématisé sur la Figure I–4 (référence [ADL 95]) est tout à fait représentatif de cette catégorie de systèmes. C'est un mécanisme six barres à six liaisons pivots dont quatre sont actionnées indépendamment les unes des autres.

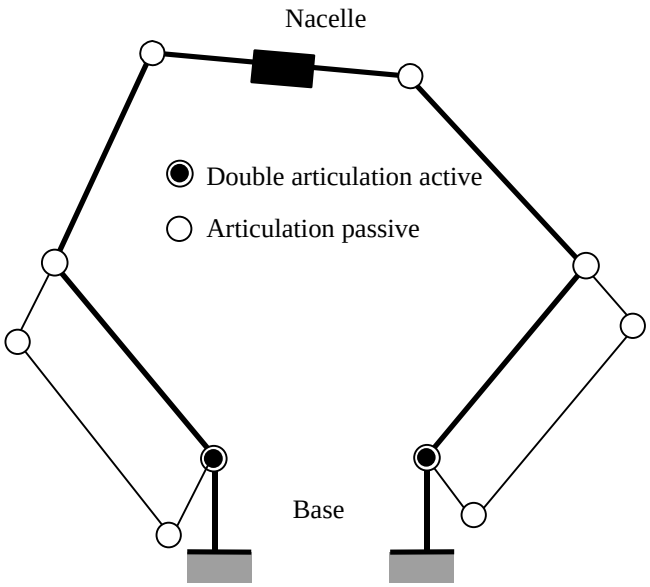


Figure I–4. Mécanisme plan à cinématique fermée avec liaisons bilatérales. Système suractionné à 3 ddl [ADL 95].

Cet agencement confère à la nacelle du système, les trois degrés de liberté des mouvements de solides dans un plan. Le mécanisme est ainsi sur-actionné. La planification et le contrôle de ses mouvements posent ainsi le problème d'une détermination adéquate des efforts actionneurs pour éviter des tensions internes. Les auteurs de cette réalisation conduisent une étude expérimentale qui révèle les difficultés du système à restituer des mouvements désirés lorsque apparaissent des efforts internes de compression ou de tension. Cette étude met ainsi en évidence la nécessité d'engendrer des mouvements sur la base d'une dynamique interne appropriée.

I.2.2 Systèmes fermés avec liaisons unilatérales

Une première catégorie de systèmes à cinématique bouclée de ce type est constituée par les robots coopérants.

La Figure I–5 montre un exemple de problème traité dans [ZEF 95]. Le transfert dans le plan d'une charge maintenue par simple contact est optimisé compte tenu des contraintes d'unilatéralité et de non-glissement aux points de contact.

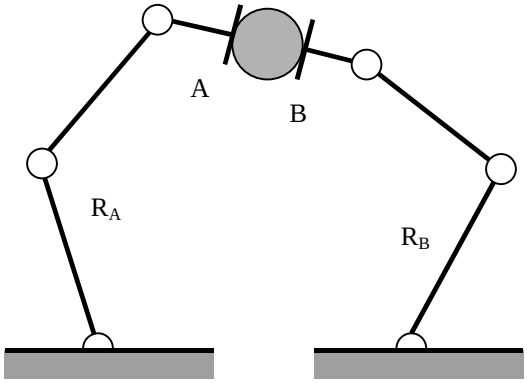


Figure I–5. Robots coopérants. Manipulation d'un objet avec double contact unilatéral en A et B [ZEF 95].

Hirano et al. [HIR 98] considèrent la planification de trajectoires de deux manipulateurs dont l'un tient un objet tandis que l'autre effectue un travail sur cet objet (Figure I–6). Seule la trajectoire de l'outil sur l'objet est spécifiée. Les deux manipulateurs ajustent alors leurs mouvements pour minimiser les efforts actionneurs tout en respectant la trajectoire de l'outil sur l'objet ainsi que des contraintes de contact.

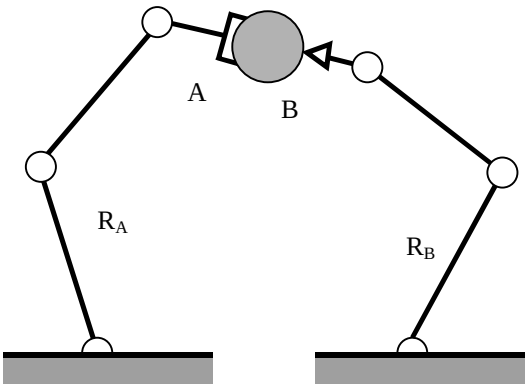


Figure I–6. Robots coopérants. Travail ponctuel avec contact unilatéral de R_B en B sur un objet présenté par le manipulateur R_A [HIR 98].

La Figure I–7 représente le schéma de principe de deux robots manipulateurs universels 6R, coopérant pour le déplacement d'une charge (référence [KWO 98]). La trajectoire de l'objet transporté est spécifiée. Le problème traité consiste à optimiser les forces de serrage de l'objet et les vitesses articulaires des manipulateurs durant le mouvement. Le système fonctionne ainsi de manière analogue à une pince de grande dimension. Les deux manipulateurs sont rigidement liés. Le système bouclé comporte douze articulations actionnées, mais ne dispose que des six degrés de liberté de la charge déplacée. Il est donc fortement sur-actionné.

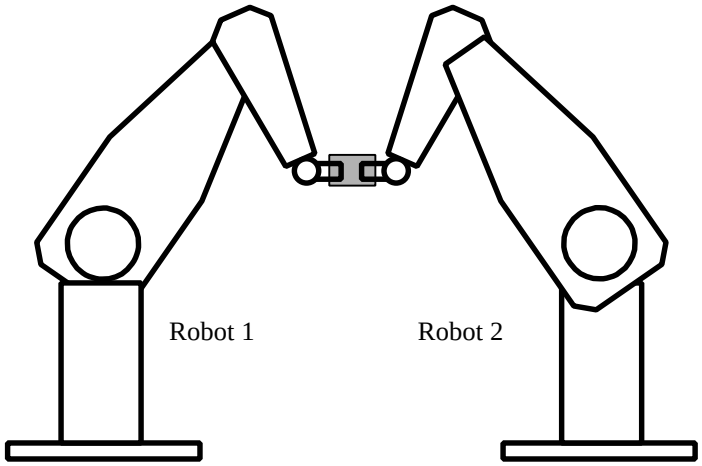


Figure I–7. Robots manipulateurs 6R, coopérants pour le transfert d'une charge [KWO 98].

Les systèmes mobiles à locomotion alternée constituent une seconde catégorie de systèmes fermés avec liaisons unilatérales. Ils sont plus complexes à traiter que les précédents par le fait que les liaisons de contact avec l'environnement sont toutes unilatérales et intermittentes. Ce n'est pas le cas des robots coopérants dont la base demeure fixe sans rupture de contact ni glissement possibles.

Dans la suite du mémoire (chapitre III), nous nous intéressons particulièrement à la bipédie considérée dans son mouvement sagittal. La Figure I–8 montre un bipède plan à pattes bisegmentaires. Le bouclage cinématique du système articulé se produit en phase de double appui. Le système locomoteur fonctionne alors, dans l'exemple considéré, comme un mécanisme cinq barres à six articulations actives. Il est par conséquent fortement sur-actionné tout en présentant la particularité d'un bouclage réalisé par contacts unilatéraux.

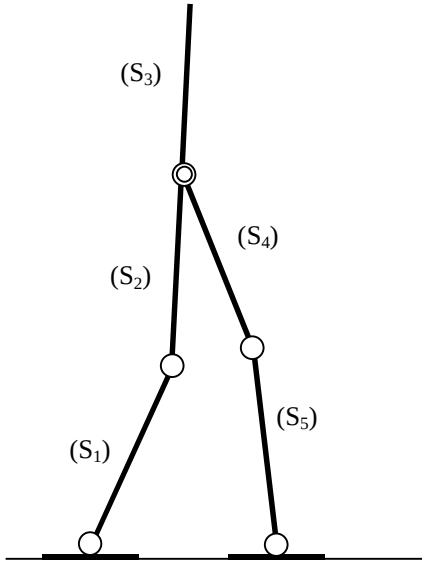


Figure I–8. Bipède plan avec pieds de type "patin" (pattes bisegmentaires) en phase de double appui :
- Trois degrés de liberté (dont 1 pour le tronc)
- Six articulations actives
- Deux contacts unilatéraux

Le mouvement de pédalage (Figure I–9) est une autre illustration du fonctionnement de systèmes à cinématique fermée, avec dans ce cas une double boucle : ABCDOA , A'B'C'D'OA'. Deux types d'analyse du mouvement peuvent être effectuées selon que la liaison pied-pédale est considérée comme unilatérale ou bilatérale. Ce mouvement intéresse beaucoup les biomécaniciens et a donné lieu à des études dynamiques très variées qu'elles soient de type expérimental ou numérique [COU 97, BAR 99, LEC 00].

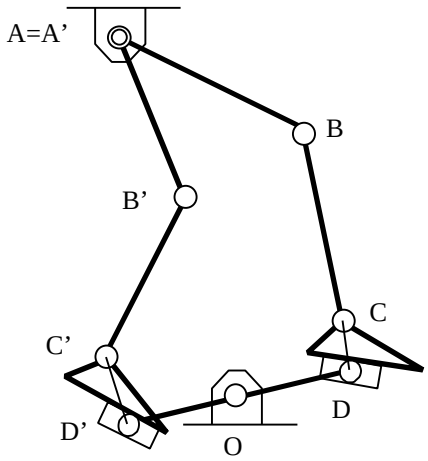


Figure I–9. Schématisation plane de l'exercice de pédalage. Système à trois degrés de liberté et six articulations actives : hanches, genoux et chevilles.

I.2.3 Paramétrage du mouvement

En vue de la formulation dans le chapitre II d'un problème général d'optimisation des mouvements de systèmes à chaîne cinématique bouclée, nous sommes à la recherche de modèles dynamiques aussi simples et aussi peu contraints que possible. Cette exigence limite immédiatement le choix des paramétrages possibles.

On peut d'abord chercher à introduire un nombre minimal de paramètres (égal au nombre de degrés de liberté du système bouclé) de manière à éliminer toute contrainte de fermeture. Dans ce cas, les relations de dépendance entre les positions, vitesses et accélérations articulaires peuvent complexifier considérablement la formulation des équations du mouvement. Il faut, de plus, différentier explicitement ces équations pour les besoins de la formulation et de la résolution du problème d'optimisation. Cette nouvelle opération peut prendre des proportions calculatoires inacceptables.

La solution la plus simple consiste à ouvrir chaque boucle de manière à obtenir un système à structure cinématique arborescente dans lequel toutes les articulations peuvent être paramétrées indépendamment les unes des autres. Dans la perspective de l'optimisation dynamique, le choix de la liaison à libérer présente une importance particulière. Nous distinguerons les deux cas suivants.

I.2.3.1 Système bouclé sur sa base par deux liaisons bilatérales non glissantes

Un tel système est schématisé sur la Figure I–10 dans une configuration q à n paramètres. Les robots manipulateurs coopérants et les robots parallèles sont soumis à ce type de liaisons.

On a dans ce cas avantage à libérer une liaison à un niveau aussi éloigné que possible de la base. De cette manière, on obtient deux sous-systèmes ouverts de complexités cinématiques réduites, équivalentes. La mise en équation du système global va s'en trouver très simplifiée, et encore plus les formulations dérivées nécessaires au problème d'optimisation.

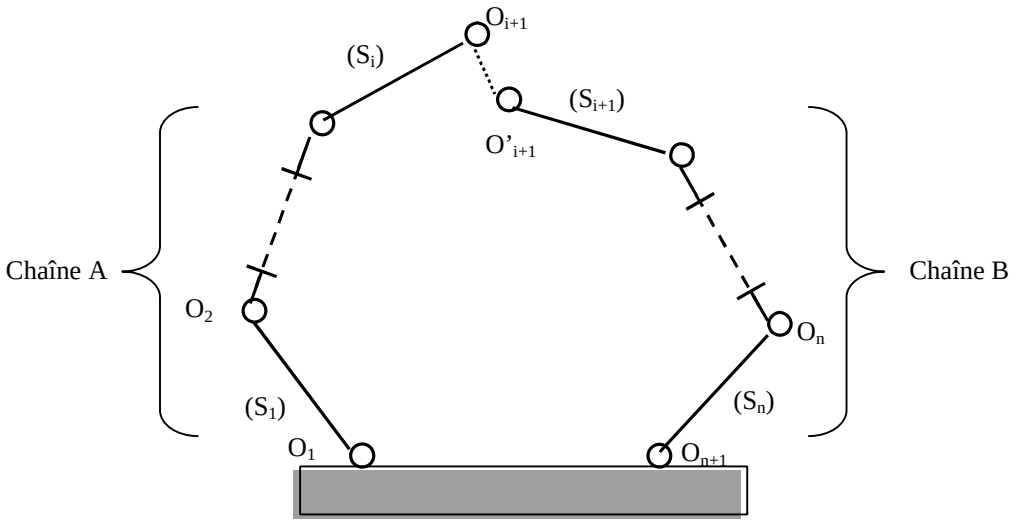


Figure I–10. Chaîne cinématique plane bouclée, ouverte en O_{i+1} au niveau d'une liaison éloignée de la base. Condition de fermeture : $O_{i+1}O'_{i+1}(q)=0$.

La matrice de masse M du système est dans ce cas très creuse et présente la structure suivante :

$$M(n\times n)=\begin{pmatrix} M_A(i\times i) & 0_{i\times(n-i)} \\ 0_{(n-i)\times i} & M_B(n-i)\times(n-i) \end{pmatrix} \quad \text{(matrice symétrique)}$$

où M_A (resp. M_B) désigne la matrice de masse de la chaîne A (resp. B) (voir Figure I–10).

I.2.3.2 Système bouclé sur appuis par contact unilatéral

Le schéma de principe d'un tel système est représenté sur la Figure I–11.

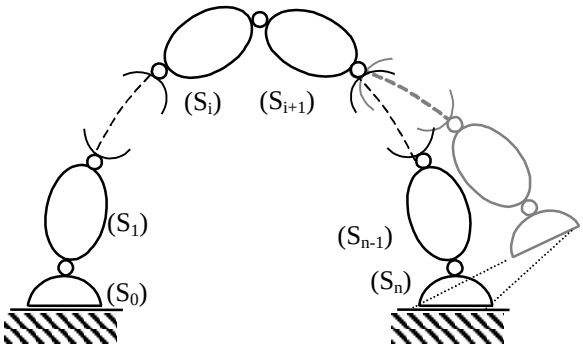


Figure I–11. Chaîne cinématique bouclée par contact unilatéral. Ouverture de la chaîne au niveau d'un appui.

La technique à mettre en œuvre consiste à effectuer l'ouverture de la chaîne articulaire au niveau du contact. Il peut être nécessaire dans ce cas de maîtriser l'évolution des forces de contact comme pour le cas de la marche. L'ouverture de la chaîne au niveau de l'appui permet d'introduire ces forces comme variables de commande supplémentaires dans le problème d'optimisation du mouvement, de manière à en contrôler directement l'évolution (voir chapitre II, §II.4). Cet avantage s'accompagne aussi du surcroît de complexité que représente la mise en équations d'une chaîne articulaire à nombre élevé de degrés de liberté. Pour un nombre égal de paramètres de configuration la matrice creuse du § I.2.3.1 devient ici dense.

Dans le cas d'un système locomoteur en double appui, on peut envisager de libérer les deux liaisons de contact avec le sol. Dans ce cas, il y a un double jeu de relations de fermeture de chaîne à prendre en compte. Cette approche nécessite aussi l'introduction de trois ou six paramètres supplémentaires selon que le système est à cinématique plane ou tridimensionnelle.

I.3 Modèles dynamiques

Dans cette partie nous présentons les formulations générales des équations de Lagrange et de Hamilton nécessaires pour la mise en œuvre des techniques d'optimisation que nous aborderons dans le chapitre II.

Deux techniques sont couramment utilisées pour traiter les systèmes à boucle(s) fermée(s). Une première approche consiste à formuler le problème dans une configuration minimale, et une seconde consiste à le formuler dans une configuration de chaîne ouverte, avec la prise en compte de contraintes de fermeture.

I.3.1 Formulation dans une configuration minimale

Cette approche permet de passer d'un problème à paramètres dépendants à un problème à paramètres indépendants. Elle est développée particulièrement dans [GAR 94]. L'avantage de travailler avec ce type de paramétrage est de réduire le nombre d'équations à intégrer. Cela permet également de supprimer les phénomènes d'instabilité qui se manifestent lors de l'intégration des équations de contraintes.

Ce processus de transformation des paramètres repose sur un point important qui est le choix des paramètres indépendants. En effet, pour un même mécanisme se trouvant dans deux configurations différentes, les paramètres indépendants choisis peuvent être appropriés dans un cas mais pas dans l'autre (cf. [GAR 94]).

Il existe plusieurs méthodes permettant de développer les formulations dynamiques d'un système bouclé dans une configuration à paramètres indépendants ([GAR 94], [FÜH 91]). Néanmoins, toutes ces techniques présentent certains inconvénients : non seulement elles génèrent des algorithmes complexes rendant extrêmement difficile la résolution du problème d'optimisation dynamique, mais aussi elles font apparaître des phénomènes de singularités qui bloquent les processus numériques d'intégration. Elles conduiraient, de plus, à des formulations ingérables pour réaliser les dérivations d'ordre supérieur nécessaires pour l'écriture des conditions d'optimalité énoncées par le principe du maximum de Pontryagin.

I.3.2 Formulation dans une configuration de chaîne ouverte

C'est la méthode classique utilisée pour formuler les équations de la dynamique d'un système à cinématique fermée, en traitant celui-ci dans une configuration de chaîne ouverte, accompagnée d'une condition de fermeture cinématique. Cette condition de fermeture est une contrainte géométrique, dite holonome, permettant de respecter la cinématique initiale du système. Elle introduit des paramètres inconnus supplémentaires dans les équations du mouvement, les multiplicateurs de Lagrange. Cette approche conduit à la formulation d'un système d'équations algébro-différentiel. Celui-ci n'est pas compatible en tant que tel avec la mise en œuvre du principe du maximum. Il faut, soit éliminer les multiplicateurs, soit leur attribuer un statut particulier qui permette de se ramener à un système différentiel.

I.3.2.1 Équations du mouvement avec multiplicateurs de Lagrange

Nous présentons un bref rappel de la formulation des équations de Lagrange avec multiplicateurs.

Nous considérons le mouvement d'un système de corps rigides décrit par n paramètres q_i regroupés dans le vecteur de configuration q tel que :

$$q = (q_1,...,q_n)^T$$

et soumis à m contraintes ($m<n$) holonomes supposées indépendantes du temps pour simplifier :

$$g_k(q) = 0, \quad k = 1,...,m \tag{I.1}$$

On pose :

$$g = (g_1,...,g_m)^T$$

$$G_r(q) = \frac{\partial g}{\partial q} \equiv grad(g) \tag{I.2}$$

Alors, il existe des fonctions du temps $t \to (l_1(t),..., l_m(t)) \in \Re^m$, appelées multiplicateurs de Lagrange, telles que les équations de Lagrange du mouvement considéré sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$, s'écrivent :

$$t \in [t_0, t_1] \ , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -V_{,q}^T + Q + G_r^T\, l \tag{I.3}$$

où $l = (l_1,..., l_m)^T$.

T représente l'énergie cinétique du système qui s'exprime comme la forme quadratique :

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} \tag{I.4}$$

avec $\dot{q} = (\dot{q}_1,...,\dot{q}_n)^T$. La matrice de masse M est symétrique, définie-positive. Elle est de ce fait inversible.

Dans le second membre de (I.3), V désigne le potentiel des forces conservatives, restreintes dans la suite aux forces de gravité. Son gradient y est défini sous la forme :

$$V_{,q} \equiv gradV(q) = (V_{,1},...,V_{,n}) \ , \quad V_{,i} \equiv \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad i \le n.$$

Le vecteur Q, $Q = (Q_1,...,Q_n)^T$, des forces généralisées non conservatives Q_i peut être décomposé sous la forme :

$$Q(q,\dot{q}) = Q^d(q,\dot{q}) + Q^a$$

où Q^d (resp. Q^a) est le vecteur des efforts articulaires dissipatifs Q_i^d (resp. actionneurs Q_i^a) généralisés.

Si les paramètres de configuration q_i sont définis comme les rotations relatives intersegmentaires, alors les Q_i^d et Q_i^a représentent respectivement les couples articulaires dissipatifs C_i^d et actionneurs C_i^a. On peut alors écrire :

$$Q^d = C^d, \quad Q^a = C^a \tag{I.5}$$

où $C^d = (C_1^d,...,C_n^d)^T$, $C^a = (C_1^a,...,C_n^a)^T$.

Dans la suite du mémoire, nous introduisons des paramétrages absolus pour la description des mouvements de systèmes articulés plan (voir § I.3.3). Les q_i apparaissent dans ce cas comme des combinaisons linéaires simples, indépendantes, des rotations articulaires. Les forces généralisées Q^d et Q^a s'expriment alors sous la forme :

$$Q^d = \mathbf{C}\,C^d, \quad Q^a = \mathbf{C}\,C^a \tag{I.6}$$

où **C** est une matrice régulière à coefficients constants. Pour le cas de (I.5), cette matrice est simplement réduite à la matrice unité.

En revenant à (I.3) et (I.4), $t \to q(t)$ apparaît comme solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q}) = -V_{,q}^T(q) + Q^d(q,\dot{q}) + Q^a + G_r^T(q)\,l & \text{(I.7a)} \\ g(q) = 0 & \text{(I.7b)} \end{cases}$$

où le premier membre de l'équation (I.3) a été transformé compte tenu de (I.4), avec :

$$B(q,\dot{q}) = (B_1,...,B_n)^T,$$

$$B_i = \sum_{j,k}^{n} \Gamma_{i,jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \quad , \quad i \le n,$$

et $$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}(M_{ij,k} + M_{ki,j} - M_{jk,i}) \quad \text{(coefficients de Christoffel).}$$

Le système (I.7a,b) est un système algébro-différentiel constitué des *n* équations différentielles de (I.7a) et des *m* équations algébriques de (I.7b), et dont les inconnues sont les *n* paramètres q_i et les *m* multiplicateurs l_k.

Dans ce qui suit nous allons chercher à adapter la formulation de ce système à l'application du principe du maximum de Pontryagin.

I.3.2.2 Formulation hamiltonienne des équations du mouvement avec multiplicateurs

Il est bien connu que la structure des équations de Hamilton est mieux adaptée que celle des équations de Lagrange pour l'application du principe du maximum de Pontryagin (voir par exemple [SKO 86], [BES 92], [ROS 01])

Rappelons que la formulation de Hamilton s'obtient en introduisant les paramètres conjugués tels que

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \tag{I.8}$$

et l'hamiltonien

$$H(q, p) = p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}) \tag{I.9}$$

où $p = (p_1, ..., p_n)^T$, et $L = T - V$ est le lagrangien du système

Compte tenu de (I.4), les expressions (I.8) et (I.9) peuvent s'écrire successivement :

$$p = M\dot{q}, \text{ ou } \dot{q} = M^{-1} p \tag{I.10}$$

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1} p + V \tag{I.11}$$

L'équation du second ordre (I.7a) est alors équivalente au système hamiltonien du premier ordre tiré de (I.10), (I.11) et (I.7a) :

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} + Q^d + Q^a + G_r^T l \end{cases}$$

soit encore, sous forme plus explicite :

$$\begin{cases} \dot{q} = M^{-1} p & \text{(I.12a)} \\ \dot{p} = -\dfrac{1}{2} p^T M_{,q}^{-1} p - V_{,q} + Q^d + Q^a + G_r^T l & \text{(I.12b)} \end{cases}$$

où $M_{,q}^{-1} \equiv \partial M^{-1}(q) / \partial q$

La présence du gradient de l'inverse de la matrice de masse M dans (I.12b) est un facteur de complication calculatoire. On l'élimine en utilisant la relation (cf. [BES 92], [ROS 01]) :

$$M_{,q}^{-1} = -M^{-1} M_{,q} M$$

En posant :

$$\mathrm{F}_1(q, p) = M^{-1}(q) p \,, \qquad \text{(I.13)}$$

on obtient alors dans (I.12b) : $-\dfrac{1}{2} p^T M_{,q}^{-1} p = \dfrac{1}{2} \mathrm{F}_1^{\mathrm{T}} M_{,q} \mathrm{F}_1$.

Avec ce résultat, le système algébro-différentiel hamiltonien équivalent à (I.7a,b) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{q} = M^{-1} p \equiv \mathrm{F}_1(q, p) & \text{(I.14a)} \\ \dot{p} = \dfrac{1}{2} \mathrm{F}_1^{\mathrm{T}} M_{,q} \mathrm{F}_1 - V_{,q} + Q^d + Q^a + G_r^T l & \text{(I.14b)} \\ g(q) = 0 & \text{(I.14c)} \end{cases}$$

La résolution d'un tel système pose le problème de la détermination du multiplicateur l. Ce problème n'est pas immédiat à traiter et peut poser des difficultés. Nous allons voir dans les paragraphes suivants comment s'affranchir de ce multiplicateur de Lagrange.

I.3.2.3 Élimination du multiplicateur

Le système (I.14a,b) peut être converti en un système purement différentiel par élimination du multiplicateur l. Pour cela il est nécessaire de développer les contraintes de position :

$$g(q) = 0$$

au niveau vitesses :

$$G_r(q)\dot{q} = 0$$

et au niveau accélérations :

$$\dot{q}^T H_e(q)\dot{q} + G_r(q)\ddot{q} = 0 \tag{I.15}$$

où $H_e(q) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial q^2} \equiv hess(g)$ est le hessien de g.

On détermine, par ailleurs, l'expression de $\ddot{q}$ par dérivation de (I.14a) :

$$\ddot{q} = \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial p}\dot{p}, \quad \text{où} \quad \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial p} = M^{-1} \quad \text{et} \quad \dot{q} = \mathrm{F}_1$$

$$\ddot{q} = \mathrm{F}_{1,q}\mathrm{F}_1 + M^{-1}\dot{p}$$

Dans cette formulation, on substitue à $\dot{p}$ son expression tirée de (I.12b) :

$$\ddot{q} = \mathrm{F}_{1,q}\mathrm{F}_1 + M^{-1}\left[\frac{1}{2}\mathrm{F}_1^{\mathrm{T}} M_{,q}\mathrm{F}_1 - V_{,q} + Q\right] + M^{-1}G_r^T\, l$$

On multiplie à gauche par G_r et on utilise (I.15), pour obtenir :

$$-\mathrm{F}_1^{\mathrm{T}} H_e \mathrm{F}_1 = G_r \mathrm{F}_{1,q}\mathrm{F}_1 + G_r M^{-1}\left[\frac{1}{2}\mathrm{F}_1^{\mathrm{T}} M_{,q}\mathrm{F}_1 - V_{,q} + Q\right] + G_r M^{-1} G_r^T\, l$$

où $Q = Q^a + Q^d$.

Alors, en supposant que la matrice $G_r M^{-1} G_r^T$ est régulière, on a :

$$l = -(G_r M^{-1} G_r^T)^{-1}\left\{\mathrm{F}_1^{\mathrm{T}} H_e \mathrm{F}_1 + G_r\left[\mathrm{F}_{1,q}\mathrm{F}_1 + M^{-1}\left(\frac{1}{2}\mathrm{F}_1^{\mathrm{T}} M_{,q}\mathrm{F}_1 + V_{,q} + Q^d\right)\right]\right\} - (G_r M^{-1} G_r^T)^{-1} G_r M^{-1} Q^a$$

En posant :

$$\begin{cases} \mathrm{F}_1(q,p) = M^{-1}(q)\,p \\ \mathrm{F}_2(q,p) = \dfrac{1}{2}\mathrm{F}_1^{\mathrm{T}} M_{,q}\mathrm{F}_1 + V_{,q} + Q^d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = \mathrm{F}_1(q,p) \\ \dot{p} = \mathrm{F}_2(q,p) + Q^a + G_r^T\, l \end{cases},$$

$$A = -(G_r M^{-1} G_r^T)^{-1}$$

on aboutit alors à la représentation de l sous la forme :

$$l = A\left[\mathrm{F}_1^{\mathrm{T}} H_e \mathrm{F}_1 + \left(\mathrm{F}_{1,\mathrm{q}}\mathrm{F}_1 + M^{-1}\mathrm{F}_2\right)\right] + A G_r M^{-1} Q^a$$

Les équations du mouvement sous forme hamiltonienne sans multiplicateur s'écrivent donc de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{q} = \mathrm{F}_1 & \text{(I.16a)} \\ \dot{p} = \mathrm{F}_2 + G_r^T A\left[\mathrm{F}_1^{\mathrm{T}} H_e \mathrm{F}_1 + G_r(\mathrm{F}_{1,\mathrm{q}}\mathrm{F}_1 + M^{-1}\mathrm{F}_2)\right] + (I + G_r^T A G_r M^{-1})Q^a & \text{(I.16b)} \\ g(q) = 0 & \text{(I.16c)} \end{cases}$$

Précisons que les équations différentielles ainsi obtenues ne sont toujours pas indépendantes, et la satisfaction de la relation de dépendance $g(q) = 0$ reste bien sûr nécessaire.

Notons que dans la référence [ZEF 94], les auteurs ont étudié le cas de deux robots manipulateurs 2R coopérant pour déplacer un objet. Les équations de la dynamique de la chaîne fermée constituée des deux manipulateurs et de l'objet sont résolues après élimination des multiplicateurs de Lagrange selon un processus calculatoire non précisé.

Le système (I.16a,b) peut être considéré comme l'équation d'état d'un système commandé, avec Q^a comme variable de commande. Comme le montre le §II.3.6 du chapitre II, cette formulation convient formellement à l'application du principe du maximum de Pontryagin. Mais elle présente l'inconvénient de la complexité qui devient très vite difficilement surmontable lorsque la dimension du système s'accroît. De plus, cette complexité est considérablement amplifiée par le développement des conditions nécessaires d'optimalité du problème d'optimisation. Ces conditions nécessitent en particulier le calcul de la jacobienne des seconds membres de (I.16a) et (I.16b). Et celle-ci doit être formulée de façon exacte pour surmonter des problèmes d'instabilité algorithmiques. On échappe à cette difficulté en procédant comme indiqué dans le paragraphe suivant.

I.3.2.4 Introduction des forces de liaisons comme variables de commande complémentaires

Les variables de commande proprement dites sont les couples actionneurs articulaires qui animent le système mécanique articulé et contrôlent ses mouvements. On procède dans la suite en considérant les multiplicateurs de Lagrange l_i comme des variables de commande supplémentaires à optimiser. Les l_i représentent, en effet, un système d'efforts qui assurent la cohésion de la liaison mécanique considérée comme libérée. Les traiter comme commandes revient à exercer un contrôle sur les conditions de fermeture de boucle.

Avec cette approche, le système (I.14a,b) est à reconsidérer sous la forme

$$\begin{cases} \dot{q} = \mathrm{F}_1(q, p) \\ \dot{p} = \mathrm{F}_2(q, p) + Q^a + G_r^T F \end{cases} \tag{I.17}$$

où le système d'efforts :

$$F \equiv (F_1, ..., F_m)^T \tag{I.18}$$

se substitue formellement au multiplicateur l .

Nous verrons dans les applications à la marche présentées dans le chapitre III que cette substitution est plus qu'un simple changement de notation.

D'ores et déjà on peut dire qu'en ce qui concerne les systèmes locomoteurs de robots marcheurs, cette approche présente le double avantage suivant :

- elle permet la formulation d'un modèle dynamique unique pour les deux phases unipodale et bipodale,

- elle offre la possibilité d'un contrôle direct sur les efforts de contact durant le mouvement.

I.3.2.5 Equation d'état du système

On introduit le vecteur des variables d'état (variables de phase hamiltonienne) *x* à *2n* composantes telles que :

$$x = (x_1, ..., x_{2n})^T \quad , \quad \begin{cases} x_i = q_i \\ x_{n+i} = p_i \end{cases} \quad , \quad i = 1, ..., n \tag{I.19}$$

et le vecteur *u* des variables de commande comprenant les efforts actionneurs articulaires C_i^a, $i \le n$, et les forces de liaison F_j, $j \le m$, de l'articulation libérée :

$$u = (u_1, ..., u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+m})^T \quad \text{où} \quad \begin{cases} u_i = C_i^a \quad , \quad i = 1, ..., n \\ u_{n+j} = F_j \quad , \quad j = 1, ..., m \end{cases} \tag{I.20}$$

Le système d'équations (I.14a,b) peut alors être reformulé en fonction de l'état *x* et de la commande *u* définis en (I.19) et (I.20) respectivement. Pour cela, on récrit (I.13) en posant :

$$G(x) = \mathrm{F}_1(q, p) \tag{I.21a}$$

soit encore, avec $G = (G_1,...,G_n)^T$:

$$G_i(x) = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}^{-1}(x) x_{n+j} \tag{I.21b}$$

où les M_{ij}^{-1} sont les termes de la matrice de masse inverse tels que : $M_{ij}^{-1} = (M^{-1})_{ij}$

Le système (I.14a,b) sous sa forme (I.17) devient ainsi, compte tenu de (I.19) et de (I.6) :

$$i \le n, t \in [t_0, t_1] \quad \begin{cases} \dot{x}_i(t) = G_i(x(t)) & \text{(I.22a)} \\ \dot{x}_{n+i}(t) = \frac{1}{2} G^T(x(t)) M_{,i} G(x(t)) - V_{,i}(x(t)) + Q_i^d(x(t)) + (B(x(t))u)_i & \text{(I.22b)} \end{cases}$$

où la matrice B est la concaténation des matrices $\mathbf{C}$ de (I.6) et G_r^T de (I.17) :

$$B(x) = [\mathbf{C}, G_r^T(x)] \tag{I.23}$$

De la même manière, u peut s'écrire, compte tenu de (I.20), (I.19) et (I.6) :

$$u^T = [C^{a^T}, F^T] \tag{I.24}$$

Maintenant, si l'on pose :

$$\mathbf{F}_i(x) = G_i(x)$$

$$\mathbf{F}_{n+i}(x) = \frac{1}{2} G^T(x) M_{,i}(x) G(x) - V_{,i}(x) + Q_i^d(x)$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n, \mathbf{F}_{n+1}, \ldots, \mathbf{F}_{2n})^{\mathrm{T}}$$

le système (I.22a,b) s'écrit sous la forme de l'équation vectorielle du premier ordre de dimension *2n* :

$$\forall t \in [t_0, t_1] \ , \quad \dot{x}(t) = \mathbf{F}(x(t)) + B(x(t))u(t) \tag{I.25}$$

C'est l'équation d'état décrivant l'évolution du système sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$.

I.3.3 Exemple : modèle dynamique d'un système plan à boucle fermée

Prenons l'exemple d'une chaîne cinématique fermée plane à *n* corps articulés par des liaisons pivots (Figure I–12). La boucle peut être virtuellement ouverte à n'importe qu'elle articulation. Nous choisissons d'ouvrir le système articulé au niveau d'une liaison avec la base fixe du système.

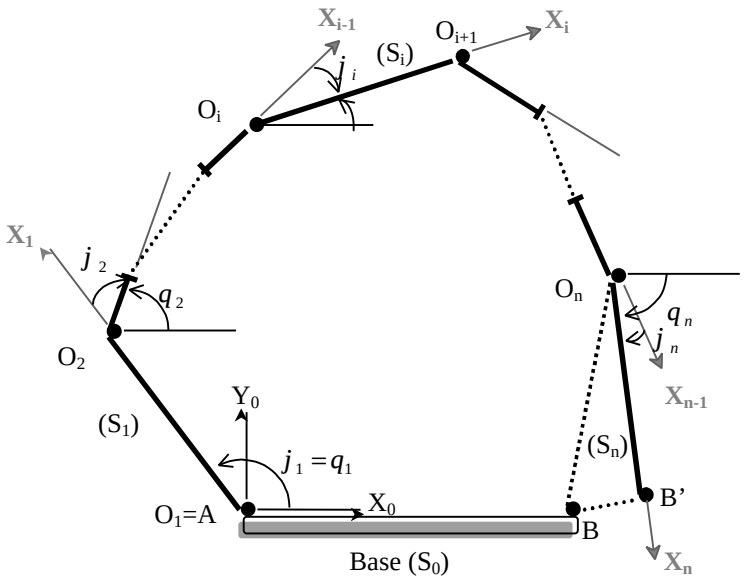


Figure I–12. Paramétrage en chaîne ouverte d'un système articulé plan fermé.

Dimensionnement du système

On définit successivement

$\|O_i O_{i+1}\| = r_i$, $i = 1,...,n$; r_i , longueur segmentaire du corps S_i entre les axes d'articulation avec les corps adjacents

$O_i G_i = a_i X_i + b_i Y_i$; G_i, centre d'inertie de S_i

$$X_i = O_i O_{i+1} / r_i \ , \ Y_i = Z_0 \wedge X_i \quad (Z_0 = X_0 \wedge Y_0)$$

$I_i \equiv I_{O_i Z_0}(S_i)$, moment d'inertie de S_i par rapport à l'axe $(O_i ; Z_0)$

m_i , masse de S_i.

Paramétrage du mouvement

Le paramétrage est simple à mettre en place. Il y a le choix possible entre un paramétrage relatif et un paramétrage absolu. On peut ainsi définir les deux familles de paramètres :

$$i = 1,...,n \quad \begin{cases} j_i = (X_{i-1}, X_i)_{Z_0} \ , & \text{angle de rotation relative de } S_i \text{ par rapport à } S_{i-1} \\ q_i = (X_0, X_i)_{Z_0} \ , & \text{angle de rotation absolue de } S_i . \end{cases}$$

avec les corrélations

$$\begin{cases} q_1 = j_1 \\ q_i = j_1 + ... + j_i \ , \quad i = 2,...,n \end{cases} \tag{I.26}$$

et les relations réciproques

$$\begin{cases} j_1 = q_1 \\ j_i = q_i - q_{i-1} \end{cases} \tag{I.27}$$

Le paramétrage relatif en j_i trouve son utilité dans l'expression de grandeurs et de contraintes articulaires comme les puissances, les couples dissipatifs, les bornes de débattement et de vitesses de chaque articulation. Par contre, en ce qui concerne la formulation des équations de la dynamique de systèmes articulés plans, c'est le paramétrage absolu qui s'impose. Celui-ci conduit, en effet, à des formulations très condensées et simplifiées. On peut en espérer, de ce fait, un meilleur conditionnement numérique des modèles dynamiques correspondants, ainsi que des formulations dérivées qui interviennent dans l'écriture du problème d'optimisation final.

Dans la suite, nous choisirons donc les q_i comme paramètres de configuration q_i, soit :

$$q_i = q_i, \quad i \leq n \tag{I.28}$$

Efforts appliqués

On suppose le système mobile dans un plan vertical (constante de gravité $g = 9{,}81\, ms^{-2}$) ou horizontal ($g = 0$).

Chaque articulation est supposée soumise à l'action d'un couple actionneur C_i^a et d'un couple dissipatif C_i^d exercés en O_i par S_{i-1} sur S_i, avec :

$$C_i^d = -a_i \dot{j}_i = -a_i (\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1}) \ , \quad i = 1,...,n \tag{I.29}$$

où a_i est un coefficient d'amortissement visqueux.

Les variables pointées représentent les dérivées de ces variables par rapport au temps.

Le système articulé étant ouvert en *B* sur la Figure I–12, on applique, à l'extrémité libre *B'*, des efforts tels que :

$$\begin{cases} F_{B'}(S_0 \to S_n) = T_B X_0 + N_B Y_0 \\ C_{n+1}(S_0 \to S_n) = C_{n+1}^a + C_{n+1}^d \end{cases} \tag{I.30}$$

où $C_{n+1}^d = -a_{n+1}\dot{q}_n$. Ce sont en fait les efforts exercés par la base S_0 sur S_n lorsque la liaison est réalisée.

Conditions de fermeture

Ce sont les relations obtenues par projection de la condition $BB' = 0$, soit :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} r_i \cos q_i - \ell = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} r_i \sin q_i = 0 \end{cases} \tag{I.31}$$

où $\ell = \|AB\|$ (Figure I–12).

Ces relations peuvent être considérées comme des contraintes holonomes (cf. (I.1)) conduisant aux équations de Lagrange (I.3) ou de Hamilton (I.14b) avec multiplicateurs. Elles seront traitées comme contraintes égalités dans le problème d'optimisation dynamique du mouvement (voir chapitre II, § II.4).

Matrice de masse

La matrice de masse M ou matrice d'inertie définit l'expression de l'énergie cinétique T du système formé des n corps (cf. (I.4)). Dans le cas du paramétrage absolu, c'est-à-dire en considérant $q_i = q_i$, elle a pour expression :

$$M(q_1,...,q_n) = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1i}(q_1,q_i) & \cdots & M_{1n}(q_1,q_n) \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & M_{ii} & \cdots & M_{in}(q_i,q_n) \\ & Sym. & & \ddots & \vdots \\ & & & & M_{nn} \end{pmatrix} \tag{I.32}$$

où, d'une part, les $(M_{ii}, i = 1,...,n)$ sont des constantes dépendant du dimensionnement du système, et, d'autre part :

$$M_{ij}(q_i, q_j) = E_{ij}Cij + F_{ij}Sij,\ i, j = 1,...,n,\ i \neq j$$

avec :

$$Cij = \cos(q_i - q_j)\,,\ Sij = \sin(q_i - q_j)$$

Les coefficients E_{ij}, F_{ij} sont des constantes dépendant également du dimensionnement du système.

Équation d'état

Dans notre exemple, et conformément à la démarche adoptée dans le §I.3.2.5, le vecteur des variables d'état est

$$x = (x_1,..., x_{2n})^T \equiv (q_1,..., q_n, p_1,..., p_n)^T$$

et le vecteur des variables de commande a pour expression

$$u = (u_1,..., u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3})^T \equiv (C_1^a,..., C_{n+1}^a, N_B, T_B)^T\,.$$

L'équation d'état (I.14) peut ainsi s'expliciter sous la forme (avec les notations de (I.13) et de (I.21a) :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}^{-1}(q)\, p_j \equiv \mathrm{F}_{1i}(q, p) \\ \dot{p}_i = \frac{1}{2}\mathrm{F}_1^{\mathrm{T}} M_{,i}\mathrm{F}_1 - V_{,i} + Q_i^d + u_i - u_{i+1} + r_i \cos(q_i)u_{n+2} - r_i \sin(q_i)u_{n+3} \end{cases} \tag{I.33}$$

où $Q_i^d = -a_i(\dot{q}_{i+1} - \dot{q}_i) \equiv -a_i(\mathrm{F}_{1i+1} - \mathrm{F}_{1i})$.

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, l'un des avantages de la conversion des forces de contact N_B et T_B en variables de commandes complémentaires est de pouvoir considérer les contraintes de contact :

- contrainte d'unilatéralité avec la base (S_0)

$$N_B > 0$$

- condition de non-glissement

$$|T_B| < f\ N_B$$

comme des limitations posées directement sur des efforts de commande, soit :

$$t \in [t_0, t_1] \ , \ \begin{cases} 0 < u_{n+2}^{\min} \leq u_{n+2}(t) \ , \ (u_{n+2} \equiv N_B) \\ |u_{n+3}(t)| < f \ u_{n+2}(t) \ , \ (u_{n+3} \equiv T_B) \end{cases} \tag{I.34}$$

où f représente le coefficient de frottement sec entre les corps en contact.

I.4 Conclusion

L'objectif de ce premier chapitre était d'aboutir à la formulation de modèles dynamiques de systèmes articulés en boucle fermée, sous la forme d'une équation d'état d'un problème de commande optimale pouvant être traité directement par l'application du principe du maximum de Pontryagin. Dans cette perspective, les formulations suivantes ont dû être écartées :

(*i*) les modèles de dimension minimale formulés dans une configuration à paramètres indépendants. De tels modèles ont été éliminés par leur trop grande complexité,

(*ii*) le modèle algébro-différentiel de Hamilton avec multiplicateurs qui n'a pas la structure requise pour l'application du principe du maximum,

(*iii*) le modèle précédent transformé par élimination du multiplicateur. La formulation obtenue devient trop complexe.

Une transformation formelle mineure du modèle (*ii*) a permis d'obtenir une formulation du type recherché. Elle consiste à considérer les multiplicateurs associés à la contrainte de fermeture de boucle, formulée au niveau de la liaison libérée, comme des variables de commande additionnelles. Une telle approche présente les avantages suivants :

- les équations de la dynamique sont aussi simples que possible à formuler

- l'introduction des efforts de liaison à la coupure, comme variables de commande, va permettre une maîtrise directe des bornes de valeurs de ces efforts. Cette possibilité sera particulièrement utile dans l'étude de la marche pour éviter les ruptures de contact.

La généralisation de l'approche développée à des systèmes multi-boucles est immédiate. La structure cinématique devient alors simplement arborescente, et chaque liaison libérée est à traiter comme indiqué dans les paragraphes précédents.

CHAPITRE II

OPTIMISATION DE MOUVEMENTS DE SYSTEMES ARTICULES EN BOUCLE OUVERTE ET BOUCLE FERMEE

II.1 INTRODUCTION 37
II.2 TECHNIQUES D'OPTIMISATION 38
II.2.1 Technique du plan de phase 38
II.2.2 Optimisation paramétrique 38
II.2.3 Principe du maximum de Pontryagin (PMP) 39
II.3 FORMULATION DU PROBLÈME D'OPTIMISATION POUR LES SYSTÈMES À BOUCLE OUVERTE 40
II.3.1 Équation d'état et conditions aux limites 40
II.3.2 Domaine de commandes admissibles 41
II.3.3 Critère de performance 42
II.3.4 Contraintes sur les variables d'état 43
II.3.4.1 Contraintes sur les coordonnées articulaires et leurs dérivées 44
II.3.4.2 Contraintes anti-collision 45
II.3.5 Critère de performance pénalisé 46
II.3.6 Application du principe du maximum de Pontryagin 48
II.4 SYSTÈMES À BOUCLE FERMÉE 51
II.4.1 Paramétrage et conditions de fermeture de chaîne 52
II.4.2 Description des forces de liaison 54
II.4.3 Domaine de commande admissible 55
II.4.4 Le cas de contacts unilatéraux non libérés 57
II.4.5 Critère pénalisé 58
II.4.6 Conditions d'optimalité 59
II.4.7 Techniques de résolution 60
II.5 CONCLUSION 60

II.1 Introduction

La formulation d'un problème d'optimisation de mouvements repose d'abord sur l'introduction d'un modèle dynamique du système considéré, et sur le choix d'un critère de performance à minimiser. Il s'y ajoute des conditions et contraintes qui peuvent être très diverses.

La formulation du modèle dynamique a été l'objet du chapitre précédent. Cette modélisation a été réalisée en vue de l'application du principe du maximum de Pontryagin. Dans ce chapitre, nous définissons d'abord les contraintes caractéristiques du mouvement à engendrer lorsque le système évolue en boucle ouverte.

Ces premières formulations s'appliqueront particulièrement au cas de la phase unipodale de la marche durant laquelle le bipède a une structure purement arborescente, le mouvement n'étant soumis a aucune contrainte de fermeture de boucle cinématique. Les seules variables de commande sont alors les couples actionneurs articulaires. Les contraintes à formuler se réduisent à des bornes de valeurs définies indépendamment les unes des autres sur chaque variable de commande. Il est nécessaire aussi de définir des contraintes sur les variables d'état du problème formulé (variables de phase hamiltoniennes). Il s'agit d'abord de bornes introduites sur les débattements articulaires pour en limiter les amplitudes et pour éviter des contre-flexions. Puis il faut, pour le cas de la marche, formuler une contrainte de contournement d'obstacle pour éviter les collisions avec le sol du pied de la jambe balancée.

Les contraintes précédentes doivent être complétées lorsque le système articulé comporte une boucle cinématique. Si la liaison libérée est un appui simple, comme dans le cas de la phase bipodale de la marche, on introduit les contraintes de contact traduisant l'unilatéralité du contact et le non glissement. Il s'y ajoute des contraintes égalité sur l'état qui représentent les conditions de fermeture géométrique de la boucle au niveau de la liaison libérée.

Le critère de performance introduit est l'intégrale des variables de commande quadratiques. Ce choix sera argumenté dans la suite du chapitre. Le critère final effectivement traité est un critère augmenté dans lequel sont injectées des fonctions de pénalisation par l'intermédiaire desquelles les contraintes sur les variables d'état sont prises en compte. Le problème d'optimisation initial, contraint sur les variables d'état, est ainsi converti en un problème non contraint. L'application du principe du maximum de Pontryagin à ce problème non contraint conduit à des conditions nécessaires d'optimalité simples à formuler. Ces conditions seront à leur tour aisées à traiter numériquement car l'introduction des fonctions de pénalisation assure la continuité des variables adjointes.

II.2 Techniques d'optimisation

De nombreuses techniques mathématiques ont été utilisées pour optimiser les mouvements de systèmes articulés soumis à un contrôle-commande. Trois d'entre elles ont été particulièrement développées au travers de nombreuses publications. Il y a d'abord la méthode dite du plan de phase, puis il y a les techniques de paramétrisation, et enfin la théorie de la commande optimale avec l'utilisation du principe du maximum de Pontryagin.

II.2.1 Technique du plan de phase

Cette méthode a été développée pendant les années 80 et le début des années 90. Elle a été utilisée au départ pour résoudre le problème de parcours en temps minimal d'une trajectoire donnée, suivie par l'extrémité d'un bras manipulateur ([BOB 83], [PFE 86], [SLO 89]). Cette technique consiste à considérer les paramètres de rotations articulaires comme des fonctions de l'abscisse curviligne de la trajectoire à suivre. De cette manière, les variables de phase du mouvement sont réduites à l'abscisse curviligne et à sa dérivée par rapport au temps. L'accélération est alors considérée comme la nouvelle et unique variable de commande du problème. La résolution du problème d'optimisation est effectuée par la construction d'une trajectoire optimale dans le plan de phase. Dans [SHI 97] cette technique a été étendue à l'évitement d'obstacles en la complétant par une méthode de paramétrisation de la trajectoire à suivre qui est ainsi optimisée.

A la différence de la technique du plan de phase, les deux méthodes suivantes, beaucoup plus générales que la précédente, permettent d'optimiser le mouvement complet.

II.2.2 Optimisation paramétrique

Cette technique a été développée récemment, par exemple dans [BEL 77], [CHAN 92], [CAB 97], [ROU 98a,b], [AOU 01], [CHEV 01a,b], [WAN 01] pour engendrer des pas de marche dans le plan sagittal. On la retrouve dans [YAM 88], [MAR 99] pour optimiser des mouvements de robots manipulateurs. Cette approche est basée sur la représentation des paramètres de configuration du mouvement par des combinaisons linéaires de fonctions de base, comme des splines cubiques, des polynômes de degrés divers, ou des fonctions trigonométriques. Des transformations formelles permettent de reformuler le critère de performance à minimiser, en une fonction coût qui ne dépend plus que d'un nombre fini d'inconnues à optimiser. Le problème d'optimisation qui en résulte peut être résolu par des techniques dites de *programmation quadratique séquentielle*. Ces techniques sont intéressantes par leur robustesse numérique. Les solutions calculées sont suboptimales, c'est-

à-dire qu'elles ne réalisent en général qu'une minimisation partielle du critère. L'écart avec le minimum réel varie avec le choix des fonctions de base et le découpage de l'intervalle de temps.

II.2.3 Principe du maximum de Pontryagin (PMP)

Le principe du maximum de Pontryagin ([PON 62], [BRY 75], [IOF 79], [LEW 95]) est, sur le plan théorique, parfaitement adapté à la résolution des problèmes d'optimisation de mouvements. Malgré cette adéquation, le principe du maximum est resté assez peu utilisé pour le traitement numérique des problèmes d'optimisation dynamique. Cela semble dû aux difficultés que peut poser la résolution numérique du problème aux limites en deux points auquel il conduit.

Parmi les toutes premières applications du PMP dans le domaine de l'optimisation de mouvements de systèmes articulés, on peut citer [KAH 71] et [CHO 71]. Dans la première référence les auteurs Kahn et Koth cherchent à optimiser les mouvements d'un bras de robot manipulateur à trois articulations actives. Pour cela, ils utilisent un modèle dynamique linéarisé. Dans la seconde référence, Chow et Jacobson s'intéressent à l'optimisation de la marche humaine. Ils concentrent leur étude sur l'optimisation du mouvement d'une seule jambe bisegmentaire. Les formulations du problème sont longuement développées pour une recherche de solutions explicites.

Ces premières tentatives d'implémentation du PMP concernent la recherche de solutions au problème de commande en temps minimal comme dans [WEI 85], [GEE 86]. Dans [CHEN 90] et [BES 92] ce problème est indirectement résolu en minimisant un critère de performance mixte portant sur la durée et la somme quadratique des couples actionneurs articulaires. Cette somme constitue un terme complémentaire régularisant qui fait disparaître les discontinuités des commandes optimales dites "bang-bang" qui apparaissent dans la recherche de mouvements à temps de transfert minimal. Plus récemment, Galicki dans [GAL 98], et Galicki et Ucinski dans [GAL 00] ont utilisé une forme variationnelle du principe du maximum de Pontryagin pour résoudre un problème de planification optimale de trajectoires soumises à des contraintes sur l'état. Cette approche a été appliquée à la construction de trajectoires qui évitent un obstacle dans le plan du mouvement.

II.3 Formulation du problème d'optimisation pour les systèmes à boucle ouverte

Ce paragraphe a pour objet de présenter une formulation de base du problème d'optimisation des mouvements de systèmes articulés en chaîne cinématique ouverte avec support fixe. Cette formulation peut donc aussi bien s'appliquer au cas des robots manipulateurs comme dans [JUT 96] et [DAN 98]), qu'à celui de la phase unipodale de la marche (cf [ROS 99]). C'est ce dernier mouvement qui nous intéresse ici pour la suite, dans le but d'engendrer un pas de marche complet comprenant phase unipodale et phase bipodale. Cette première formulation est aussi destinée à être complétée dans le paragraphe suivant pour le cas des sytèmes cinématiquement bouclés.

Le mouvement optimal recherché doit minimiser un critère de performance tout en respectant des limitations technologiques (bornes sur les couples actionneurs, unilatéralité des contacts, …) ou des contraintes diverses (débattements articulaires, passage d'obstacles, …).

II.3.1 Équation d'état et conditions aux limites

Nous considérons un système articulé en boucle ouverte, quelconque, dont les mouvements sont décrits par rapport à sa base fixe par n paramètres de configuration indépendants. Nous supposons, de plus, que le nombre m de commandes-actionneurs est inférieur ou égal à n ($m \leq n$). Le système peut en effet être sous-actionné ($m < n$) comme le sont les bipèdes à pattes sans pieds, de type "béquille" (cf. chapitre III, §III.3.1) durant la phase unipodale de la marche.

Le comportement dynamique du système articulé est décrit à tout instant $t \in [t_0, t_1]$ par une équation d'état de type (I.25), soit :

$$\forall t \in [t_0, t_1] \ , \quad \dot{x}(t) = F(x(t)) + B(x(t))u(t) \equiv f(x(t), u(t)) \tag{II.1}$$

où $x(t) \in \Re^{2n}, u(t) \in \Re^m$.

Cette équation différentielle doit être accompagnée de conditions initiales et finales qui peuvent être complètement spécifiées :

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases} \tag{II.2}$$

où x_0 et x_1 représentent des positions et vitesses généralisées, données respectivement aux instants t_0 et t_1.

Pour le cas de la marche, x_0 et x_1 vont représenter des états de transition qui indiquent comment s'effectue le passage d'une phase à l'autre (unipodale $\rightarrow$ bipodale $\rightarrow$ unipodale). On peut chercher à réduire ces conditions initiales et finales à des données caractéristiques minimales comme par exemple la cote et la vitesse du centre articulaire de la hanche lors du passage du simple au double appui et réciproquement. Les variables d'état sont alors incomplètement spécifiées et se trouvent soumises à des contraintes du type :

$$\begin{cases} y_1(x(t_0)) = 0 \\ y_2(x(t_1)) = 0 \end{cases} \tag{II.3}$$

où $y_1(x) \in \Re^{n_1}$ et $y_2(x) \in \Re^{n_2}$ $(n_1 < 2n,\ n_2 < 2n)$.

La prise en compte de conditions telles que (II.3) a pour but d'optimiser les configurations de transition d'une phase du mouvement à l'autre. Notons que des contraintes finales de ce type sont introduites dans [JUT 00] pour optimiser le mouvement d'approche de prise à la volée d'un objet mobile par un manipulateur plan.

II.3.2 Domaine de commandes admissibles

En l'absence de conditions de fermeture (cf. chapitre I, § I.3.3), il n'y a pas de variable de commande complémentaire à considérer. Seuls les couples actionneurs sont à prendre en compte. Ils doivent être bornés pour respecter les limitations de capacité en couple des moteurs. Cela se traduit par l'introduction des contraintes de bornes telles que:

$$\forall t \in [t_0, t_1]\ ,\quad |u_i(t)| \le u_i^{\max}\ ,\quad i = 1,\dots,m$$

où $u_i^{\max}$ représente une valeur maximale à ne pas dépasser.

Il en résulte un domaine de commandes admissibles défini par :

$$U = \left\{ u, u \in \Re^m \,/\, |u_i| \le u_i^{\max}\ ,\ i = 1,\dots,m \right\} \tag{II.4}$$

Ce domaine est un parallélépipède centré de $\Re^m$, ce qui est un cas de figure classique en optimisation dynamique.

On peut ajouter qu'il est possible de prendre en compte des contraintes asymétriques en $u_i^{\min}$ et $u_i^{\max}$. Certains modes d'actionnement articulaires, comme par exemple les systèmes

vis-écrou et biellettes du bipède BIP, peuvent justifier l'introduction de valeurs limites asymétriques. Toutefois, les couples maximaux durant la marche étant délivrés en extension motrice ou flexion freinatrice, une seule contrainte unilatérale en $u_i^{\max}$ est en fait nécessaire.

II.3.3 Critère de performance

On pourra se référer à [DAN 98] où des critères de performance variés ont été étudiés. Trois d'entre eux méritent une attention particulière. Il y a, dans un premier temps, le critère énergétique qui consiste à minimiser l'énergie motrice dépensée :

$$J_e = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{m} z_i \left| \dot{q}_i(t) u_i(t) \right| dt \quad \text{où les } z_i \text{ sont des facteurs de pondération.}$$

Ce critère, souvent présent dans la littérature, présente deux inconvénients majeurs. D'abord, les commandes optimales qui en résultent sont discontinues. Elles ne prennent que trois valeurs : les deux valeurs extrémales autorisées et la valeur zéro (commandes dites bang-zéro-bang : voir [LEW 95], [DAN 98]). Il en ressort donc un mouvement exécuté avec des secousses répétées sur chaque axe articulaire. Deuxième inconvénient, ces commandes étant discontinues, le problème qui en résulte est complexe sinon impossible à résoudre actuellement en raison de l'absence d'algorithmes adaptés à ce genre de singularité.

Un critère intéressant, présenté dans [PON 62], utilisé dans [ZEF 95] et spécialement développé dans [DAN 98], consiste à minimiser les dérivées par rapport au temps des u_i :

$$J_d = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{m} z_i \dot{u}_i^2(t) dt$$

Les deux inconvénients du critère précédent disparaissent. Les variations des u_i optimaux sont parfaitement "lisses". On engendre ainsi un mouvement sans à-coups, très régulier. De plus, les variations des u_i étant réduites, le conditionnement numérique du problème s'améliore. Sa résolution devient plus aisée.

C'est toutefois un troisième critère qui nous intéresse ici. Il s'agit de la minimisation des efforts actionneurs. C'est le critère de performance désormais le plus couramment utilisé. Un critère d'économie de l'effort délivré semble correspondre à une exigence naturelle. Cette exigence est d'autant plus forte que le système mécanique est soumis à la pesanteur essentiellement comme dans le cas de la marche.

Nous privilégions ainsi la minimisation des efforts actionneurs sous la forme d'un coût intégral du type (cf. [BES 01], [CHES 01], [ROS 01], [BES 02a,b]) :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \ell(x(t), u(t))dt \tag{II.5}$$

où le lagrangien ℓ est défini comme la forme quadratique :

$$\ell(x,u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i (g_i u_i)^2 \tag{II.6}$$

Les g_i sont des facteurs d'adimensionnement. Les x_i sont des coefficients de pondération permettant d'accorder plus ou moins d'importance à la minimisation des termes de commande les uns par rapport aux autres. Ainsi, un x_i>1 renforce l'effet minimisant sur le u_i correspondant, et l'affaiblit dans le cas contraire. On peut considérer les x_i comme des curseurs numériques qui permettent d'agir simplement sur la répartition, au niveau de chaque articulation, de l'effort actionneur global. Ce moyen d'action trouvera essentiellement son utilité pour l'optimisation de la phase unipodale de la marche.

II.3.4 Contraintes sur les variables d'état

Que ce soit en matière de planification de trajectoires de robots manipulateurs [DAN 98], ou dans le domaine de la locomotion à pattes [ROS 99], les mouvements que l'on cherche à engendrer doivent être compatibles, d'une part, avec certaines limitations techniques du robot, et d'autre part, avec la configuration de son environnement. Certains robots manipulateurs sont ainsi amenés à évoluer dans des environnements encombrés dont les obstacles doivent être évités, ce qui conduit à la prise en compte de contraintes appropriées. En ce qui concerne les robots marcheurs, le problème est d'éviter les contre-flexions et des mouvements d'amplitudes excessives au niveau de certaines articulations. On peut également rencontrer des obstacles qui peuvent être évités par enjambement.

Ces restrictions sur l'espace d'évolution et ces limitations techniques sont traduites par la formulation de contraintes inégalités définies sur les variables d'état. Ces contraintes peuvent être formellement représentées de la façon suivante :

$$\forall t \in [t_0, t_1], \quad h_k(x(t)) \leq 0 \ , \quad k \leq n_h \tag{II.7}$$

où la fonction vectorielle $t \rightarrow x(t)$ regroupe les variables d'état du système telles qu'elles sont définies en (I.19).

II.3.4.1 Contraintes sur les coordonnées articulaires et leurs dérivées

La plupart des systèmes mécaniques articulés ont des débattements articulaires limités. Ces butées articulaires se traduisent par les inégalités suivantes portant sur les paramètres relatifs j_i (voir §I.3.3) :

$$t \in [t_0, t_1] \ , \quad j_i^{\min} \le j_i(t) \le j_i^{\max} \ , \quad i \le n \tag{II.8}$$

où $j_i^{\min}$ et $j_i^{\max}$ sont des valeurs spécifiées, propres à chaque articulation du système mécanique considéré.

En fait, ces inégalités doivent être transcrites en fonction des paramètres de configuration q_i, compte tenu de (I.28) et (I.27). Les conditions (II.8) se traduisent ainsi par le double jeu de contraintes inégalités :

$$t \in [t_0, \mathrm{t}_1], \quad \begin{cases} h_i(q(t)) \equiv q_i(t) - q_{i-1}(t) - j_i^{\max} \le 0 \\ h_{n+i}(q(t)) \equiv j_i^{\min} - q_i(t) + q_{i-1}(t) \le 0 \end{cases} , \quad i \le n \tag{II.9}$$

Il faut ajouter que les vitesses de rotations articulaires doivent être elles-mêmes bornées. Les rapports de réduction élevés des transmissions mécaniques imposent, en effet, des seuils de vitesses à ne pas dépasser. De manière analogue à (II.8), on définit ainsi :

$$t \in [t_0, t_1], \quad \dot{j}_i^{\min} \le \dot{j}_i(t) \le \dot{j}_i^{\max} \ , \quad i \le n \tag{II.10}$$

Ces inégalités conduisent au jeu de contraintes suivant, semblable à (II.9) :

$$t \in [t_0, t_1], \quad \begin{cases} h_{2n+i}(\dot{q}(t)) \equiv \dot{q}_i(t) - \dot{q}_{i-1}(t) - \dot{j}_i^{\max} \le 0 \\ h_{3n+i}(\dot{q}(t)) \equiv \dot{j}_i^{\min} - \dot{q}_i(t) + \dot{q}_{i-1}(t) \le 0 \end{cases} , \quad i \le n \tag{II.11}$$

Dans (II.9) et (II.11), les fonctions de contraintes $h_k(q(t), \dot{q}(t))$ doivent être transcrites comme fonction des variables d'état définies en (I.19). Rappelons, d'une part, que $x_i = q_i$ (cf. (I.19)), et que, d'autre part, $\dot{x}_i = \dot{q}_i = G_i(x)$ (cf. (I.14a) et (I.21a,b)). On obtient ainsi l'écriture de (II.9) et (II.11) en fonction des variables d'état (I.19), sous la forme :

$$t \in [t_0, t_1] \ , \quad \begin{cases} h_i(x(t)) = x_i(t) - x_{i-1}(t) - j_i^{\max} \le 0 \\ h_{n+1}(x(t)) = j_i^{\min} - x_i(t) + x_{i-1}(t) \le 0 \\ h_{2n+i}(x(t)) = G_i(x(t)) - G_{i-1}(x(t)) - \dot{j}_i^{\max} \le 0 \\ h_{3n+i}(x(t)) = \dot{j}_i^{\min} - G_i(x(t)) + G_{i-1}(x(t)) \le 0 \end{cases} , \quad i \le n \tag{II.12}$$

Ces contraintes inégalités seront traitées dans le problème d'optimisation dynamique au moyen d'une technique de pénalité extérieure, comme dans [DAN 98] et [ROS 99, ROS 01].

II.3.4.2 Contraintes anti-collision

Les corps segmentaires du système articulé doivent être maintenus à l'écart des obstacles qui se présentent dans l'espace d'évolution du robot. Des contraintes d'évitement doivent être spécifiées afin de prévenir les collisions.

Deux approches de ce problème ont été particulièrement développées dans [DAN 98]. Elles consistent à définir deux types de fonctions d'évitement. Celles-ci conduisent dans un premier cas à traiter les contraintes anti-collision par une technique dite de pénalité intérieure qui vise à maximiser les distances entre les corps segmentaires du système articulé et les obstacles à éviter. Dans un second cas, on obtient des contraintes à traiter par une technique de pénalité extérieure. Cette approche consiste à minimiser les intersections entre la chaîne articulée et les obstacles.

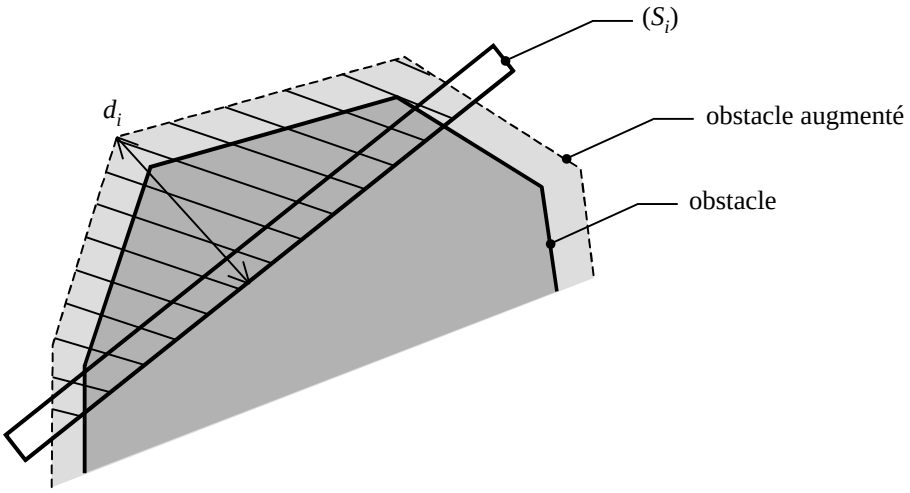


Figure II–1. Corps segmentaire (S_i) en intersection avec un obstacle.

C'est cette dernière démarche que nous utilisons dans la suite. Elle peut être mise en œuvre de diverses manières. Comme indiquée sur la Figure II–1, on peut chercher à minimiser la distance maximale d_i entre le corps (S_i) et le bord extérieur de l'obstacle augmenté. En fait, dans [DAN 96] c'est la zone de pénétration hachurée qui est minimisée. On peut aussi, comme l'indique la Figure II–2, minimiser les distances entre des points P_k de (S_i) judicieusement choisis et une courbe-enveloppe de l'obstacle. Ces distances sont définies selon une direction privilégiée que nous appellerons *direction d'extraction*. Une approche de ce type a été utilisée dans [ROS 99, ROS 01] pour l'enjambement d'obstacles au cours de la phase unipodale de la marche. Cette technique sera reprise de manière plus simple

dans le chapitre III pour éloigner le pied transféré du sol ou d'un obstacle à enjamber. Elle conduira dans un premier temps à formuler des inégalités du type $d_k(x) \leq 0$ (voir Figure II–2) en divers points M_k du segment collisionel. On rajoute ainsi aux contraintes sur l'état (II.12), des inégalités du même type qui complètent les précédentes en posant :

$$k \leq n_e \,, \quad h_{4n+k}(x) \equiv d_k(x) \leq 0 \tag{II.13}$$

où n_e est le nombre de contraintes d'évitement.

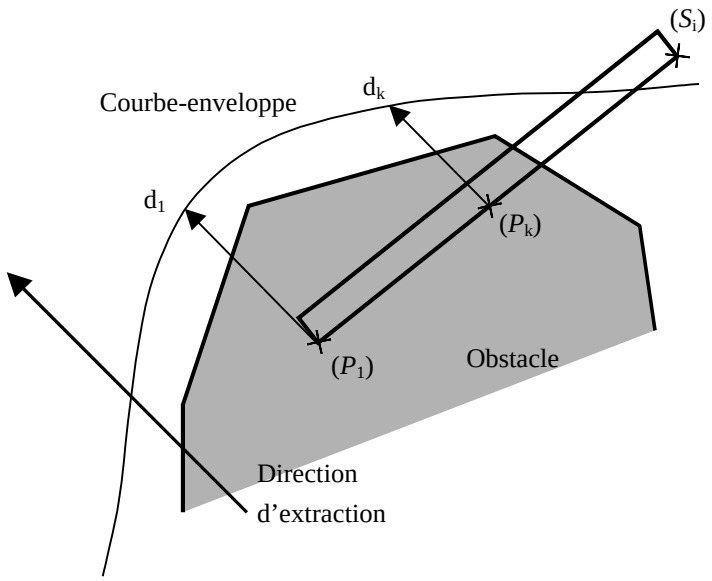


Figure II–2. Corps segmentaire (S_i) en intersection avec un obstacle.
Extraction de (S_i) selon une direction déterminée.

II.3.5 Critère de performance pénalisé

Les contraintes inégalités sur l'état de type (II.7) (c'est-à-dire (II.12) et (II.13)) peuvent être traitées directement par l'application du principe du maximum de Pontryagin (voir, par exemple, [PON 62], [IOF 79], [BRY 75]). L'écriture des conditions nécessaires d'optimalité correspondantes est complexe. Mais surtout, le traitement exact de ces conditions fait apparaître des sauts sur les variables adjointes aux extrémités des intervalles de saturation des contraintes. La présence de telles discontinuités à des instants inconnus, à déterminer, rend le problème numériquement insoluble sous cette forme.

Une approche plus simple a été largement développée dans [DAN 96]. Elle consiste à traiter les contraintes inégalités au moyen de techniques de pénalité analogues à celles qui sont utilisées dans le domaine de l'optimisation à variables discrètes. Nous avons choisi d'utiliser une technique de pénalité extérieure qui consiste à minimiser les dépassements de contraintes lorsque celles-ci sont transgressées.

La Figure II–3 montre le graphe d'une fonction de contrainte lorsque la contrainte inégalité $h(x) \leq 0$ n'est pas satisfaite. On définit alors la fonction positive h^+ suivante :

$$h^+(x) = \frac{1}{2}\left(h(x) + |h(x)|\right)$$

qui est nulle lorsque la fonction h est négative, et qui vaut h lorsque h est positive (voir Figure II–3).

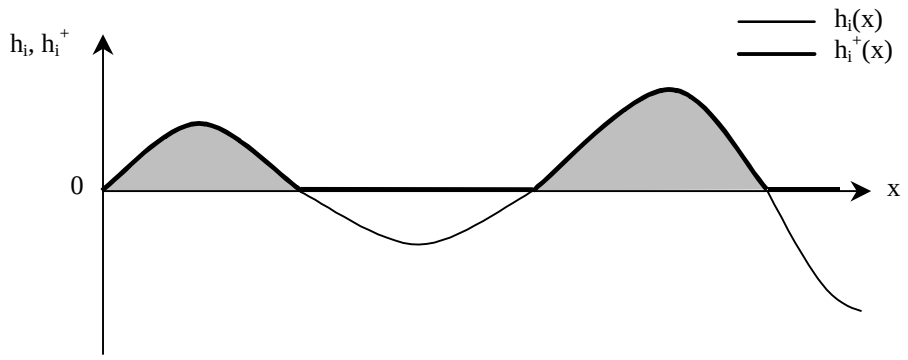


Figure II–3. La fonction x $\rightarrow h^+$ représente le dépassement de contrainte lorsque la contrainte inégalité h(x) ≤ 0 est transgressée.

On cherche ainsi à minimiser les valeurs quadratiques des h_i^+ en les injectant dans le lagrangien augmenté :

$$\ell_r(x(t), u(t)) = \ell(x(t), u(t)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} r_i [h_i^+(x)]^2 \qquad \text{(II.14)}$$

où r_i est un facteur de pénalité attaché à la fonction de pénalisation h_i^+ qui représente un "dépassement de contraintes" relatif à la fonction h_i (Figure II–3).

On obtient de la sorte le critère de performance pénalisé à minimiser :

$$J_r(u) = \int_{t_0}^{t_1} \ell_r(x(t), u(t))dt \tag{II.15}$$

La minimisation de J_r doit être effectuée pour une valeur de r élevée. Plus cette valeur est élevée et plus petite sera la valeur résiduelle de l'intégrale des h_i^{+2}. L'efficacité numérique de cette approche a été mise en évidence dans [BES 95]. Dans [DAN 98] les valeurs de r peuvent aller jusqu'à 10^6. Pour les problèmes traités au chapitre III, des valeurs de l'ordre de 10^2 ou 10^3 suffisent pour satisfaire les contraintes avec une bonne approximation.

II.3.6 Application du principe du maximum de Pontryagin

Par l'introduction du critère augmenté (II.15) le problème de commande optimale contraint initialement posé se trouve réduit à un problème d'optimisation non contraint (sur l'état x). Les inconnues sont l'état, ou trajectoire de phase, $t \to x(t)$, et la commande $t \to u(t)$. Elles doivent minimiser le critère J_r de (II.15), soit :

$$r \text{ grand}, \quad \underset{u \in U}{\text{Min}}\, J_r(u) \tag{II.16}$$

et satisfaire l'équation d'état (II.1), soit :

$$t \in [t_0, t_1] \ , \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{II.17}$$

accompagnée des conditions initiales et finales complètement spécifiées (cf. (II.2)) :

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases} \tag{II.18a}$$

ou incomplètement spécifiées (cf. (II.3)) :

$$\begin{cases} y_1(x(t_0)) = 0 \\ y_2(x(t_1)) = 0 \end{cases} \tag{II.18b}$$

L'application du principe du maximum de Pontryagin [PON 62] va permettre de transformer ce problème d'optimisation en un problème différentiel avec conditions aux limites aux deux bouts. Dans ce but, on introduit la fonction de Pontryagin (ou hamiltonien) H telle que :

$$w \in \Re^{2n} \ , \quad H(x, u, w) = w^T f(x, u) - \ell_r(x, u) \tag{II.19}$$

S'il existe une solution $t \to (x(t), u(t))$ au problème (II.16,17,18), le principe du maximum (voir, par exemple, [PON 62], [BRY 75], [IOF 79], [LEW 95]) montre qu'elle satisfait nécessairement aux conditions d'optimalité suivantes :

Il existe une fonction $t \to w(t) \in \Re^{2n}$ *et des multiplicateurs* $l_1 \in \Re^{n_1}$ *et* $l_2 \in \Re^{n_2}$ *tels que* $t \to (x(t), u(t), w(t), l_1, l_2)$ *satisfait à :*

(i) l'équation adjointe :

$$\forall t \in [t_0, t_1] \ , \quad \dot{w}(t) = -\left(\frac{\partial H(x(t), u(t), w(t))}{\partial x} \right)^T \tag{II.20}$$

(ii) la condition de maximalité de l'hamiltonien :

$$\forall t \in [t_0, t_1] \ , \quad H(x(t), u(t), w(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), v, w(t)) \tag{II.21}$$

(iii) et aux conditions de transversalité :

$$\begin{cases} w(t_0) = -l_1^T \dfrac{\partial y_1}{\partial x}(x(t_0)) \\ w(t_1) = -l_2^T \dfrac{\partial y_2}{\partial x}(x(t_1)) \end{cases} \tag{II.22}$$

Rappelons que U dans (II.21) est le domaine de commande admissible défini par les inégalités (II.4).

Notons que lorsque l'état initial et l'état final sont complètement spécifiés, la condition d'optimalité (II.22) disparaît et, avec elle, les multiplicateurs l_1 et l_2. De plus, lorsque la commande n'est pas contrainte, la condition (II.21) se réduit simplement à la condition de stationnarité de l'hamiltonien par rapport à u, soit (cf. [BRY 75], [LEW 95]) :

$$H_{,u} = 0 \tag{II.23}$$

Le grand intérêt du principe du maximum de Pontryagin réside dans la condition de maximalité (II.21) qui permet d'exprimer à tout instant la commande optimale *u* en fonction de l'état *x* et de l'état adjoint *w*. Lorsque (II.21) se réduit à (II.23), la formulation explicite des u_i est possible. En effet, compte tenu de (II.1) et (II.6), H s'explicite sous la forme :

$$\begin{aligned} H &= \textit{termes indépendants de } u \\ &+ \sum_{k=1}^{n} w_{n+k} \left(\sum_{i=1}^{n} B_{ki} u_i \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i g_i^2 u_i^2 \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que la commande optimale u_i doit satisfaire

$$H,_{u_i} = \sum_{k=1}^{n} w_{n+k} B_{ki} - x_i g_i^2 u_i = 0$$

D'où :

$$i = 1,...,n, \qquad u_i(t) = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_{n+k}(t)\, B_{ki}(x(t))}{x_i g_i^2} \tag{II.24}$$

Lorsque U dans (II.21) est borné et défini par (II.4), la commande optimale u_i prend la forme de la fonction saturée de l'expression précédente (cf. [LEW 95]), soit :

$$u_i(t) = sat\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} w_{n+k}(t)\, B_{ki}(x(t))}{x_i g_i^2} \right), \qquad i = 1,...,n \tag{II.25}$$

où sat est définie par :

$$\begin{cases} sat(q) = q \quad \text{si} \quad |q| \le q^{\max} \\ sat(q) = q^{\max} sign(q) \quad \text{si} \quad |q| > q^{\max} \end{cases}$$

où $q^{\max}$ est une valeur spécifiée à ne pas dépasser.

Dans (II.1) et (II.20), en substituant à u son expression (II.25), l'équation d'état (II.1) et l'équation adjointe (II.20) prennent la forme du système différentiel du premier ordre de dimension $4n$, aux inconnues x et w, tel que :

$$t \in [t_0, t_1], \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = G_1(x(t), w(t)) \\ \dot{w}(t) = G_2(x(t), w(t)) \end{cases} \tag{II.26}$$

où G_1 et G_2 représentent les seconds membres de (II.1) et (II.20) respectivement et exprimés en fonction de x et w par l'intermédiaire de (II.25).

Ce système est accompagné des $4n$ conditions aux limites complètes (cf. (II.18a))

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases} \tag{II.27}$$

ou bien des $n_1 + n_2$ ($< 4n$) conditions (II.3), soit

$$\begin{cases} y_1(x(t_0)) = 0 \\ y_2(x(t_1)) = 0 \end{cases} \tag{II.28a}$$

auquel s'ajoutent dans ce cas les $4n$ conditions aux limites complémentaires (II.22), soit

$$\begin{cases} w(t_0) = -l_1^T \dfrac{\partial y_1}{\partial x}(x(t_0)) \\ w(t_1) = -l_2^T \dfrac{\partial y_2}{\partial x}(x(t_1)) \end{cases} \tag{II.28b}$$

Ainsi, le problème d'optimisation dynamique posé se trouve ramené :

- à la résolution du problème différentiel aux deux bouts (II.26,27), aux $4n$ inconnues $t \to (x(t), w(t))$,

ou bien

- au problème algébro-différentiel (II.26,28a,b) aux $(4n + n_1 + n_2)$ inconnues $t \to (x(t), w(t), l_1, l_2)$ devant satisfaire le système (II.26) et les $(4n + n_1 + n_2)$ conditions aux limites (II.28a,b).

II.4 Systèmes à boucle fermée

Nous nous attachons dans cette partie à élargir l'étude réalisée dans le paragraphe précédent aux systèmes à boucle fermée. Nous allons ainsi montrer comment il est possible de formuler le problème d'optimisation de mouvements de systèmes cinématiquement fermés en élargissant la formulation du problème posé pour les systèmes à boucle ouverte. Le traitement des conditions de fermeture de boucle, cinématiques et sthéniques, ainsi que la construction du domaine de commande admissible seront plus particulièrement développés.

Rappelons qu'un des principaux objectifs visés du travail présenté est d'engendrer un pas de marche optimal complet de bipèdes plans. Ainsi, et afin de faciliter la présentation de notre démarche, nous prendrons l'exemple, qui est assez général, d'un bipède plan à sept corps segmentaires (Figure II–4) pouvant être réduit à cinq en l'absence de pieds.

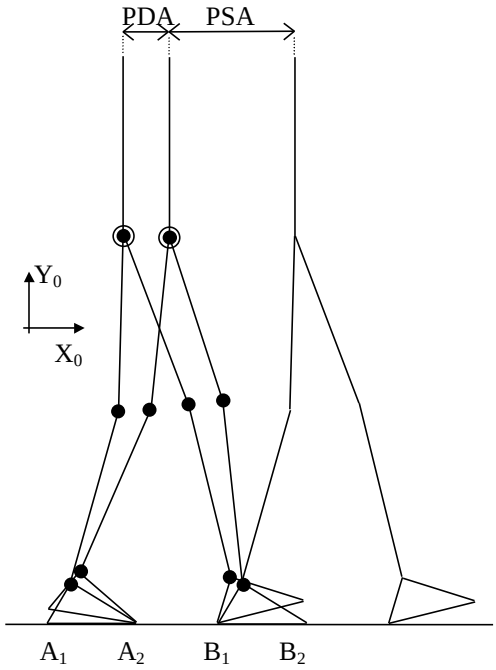


Figure II–4. Configurations initiales et finales des deux phases de double (PDA) et simple appui (PSA).

Rappelons qu'un pas de marche d'un bipède mécanique se décompose en deux phases principales : une phase de simple appui (PSA), ou phase unipodale, durant laquelle le pied arrière est transféré en position de reprise d'appui avant, et une phase de double appui (PDA), ou phase bipodale, qui est la phase propulsive de la marche au cours de laquelle le système locomoteur travaille en boucle cinématique fermée. C'est cette phase de double appui qui va retenir toute notre attention dans ce paragraphe. Une telle configuration de boucle fermée engendre non seulement une redondance cinématique mais aussi un suractionnement rendant la dynamique particulièrement délicate à traiter. En fait, c'est le respect de l'unilatéralité des appuis au sol qui représente dans le cas de la marche la difficulté la plus contraignante.

II.4.1 Paramétrage et conditions de fermeture de chaîne

Le choix d'un paramétrage avec le pied d'appui de la phase unipodale maintenu à plat sur le sol permet d'introduire une configuration minimale à six paramètres pour le bipède à sept corps (ou à cinq paramètres dans le cas du bipède sans pieds). Cette configuration est élargie à sept paramètres pour la description de la phase bipodale (Figure II–5) avec une ouverture de chaîne au niveau du contact pied-sol avant. En réalité, si l'on prend $q_1 = cste$

(angle de rotation absolue du pied arrière en PDA) durant la phase unipodale, les deux paramétrages sont alors identiques, ce qui permet de formuler le même modèle dynamique pour les deux phases du mouvement.

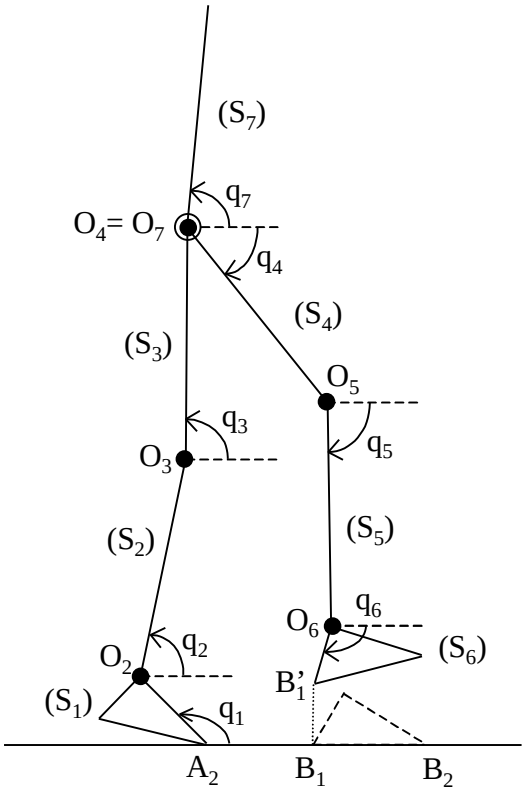


Figure II–5. Paramétrage de la phase de double appui en boucle ouverte

Les relations de fermeture de chaîne sur la durée $[t_0, t_1]$ de la phase bipodale sont définies par deux types de conditions. Il y a d'abord celle qui exprime la réalisation de l'appui-talon en B_1 (Figure II–5), soit :

$$B_1B_1^{'} \equiv f_1(q)X_0 + f_2(q)Y_0 = 0 \qquad \text{(II.29)}$$

Et il y a celle qui traduit l'"abattée" du pied, c'est-à-dire sa mise à plat en contact avec le sol (Figure II–6), soit :

$$d \equiv f_3(q(t)) = 0 \qquad \text{(II.30)}$$

Dans la suite (§ II.4.4, II.4.5), nous chercherons à satisfaire les trois contraintes égalités :

$$t \in]t_0, t_1] \ , \quad f_i(q(t)) = 0 \ , \quad i = 1,2,3 \tag{II.31}$$

en minimisant leurs valeurs quadratiques résiduelles :

$$Min\ g(q) \ , \quad g(q) = \sum_{i=1}^{3} z_i f_i^2(q) \tag{II.32}$$

où les z_i sont des facteurs d'adimensionnement et de pondération dont les valeurs permettent de modérer ou d'accentuer l'effet minimisant sur chacune des fonctions f_i.

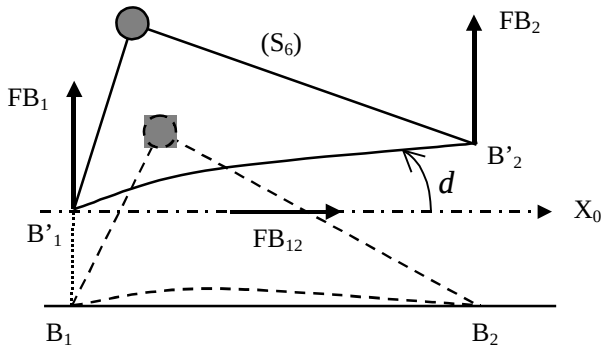


Figure II–6. Système de 3 forces *FB₁*, *FB₂*, *FB₁₂* appliquées au pied libéré, équivalent aux forces de contact.

Les conditions initiales et finales doivent être définies en tenant compte des données suivantes :

$$t = t_0 \ , \quad B_1B_1^{'} = 0 \ , \ d = d_0 > 0 \text{ (contact talon)}, \ d_0 \text{ valeur donnée} \tag{II.33a}$$

$$t = t_1 \ , \quad B_1B_1^{'} = 0 \ , \ d = 0 \text{ (contact pied à plat)} \tag{II.33b}$$

où d est l'angle que fait le pied avant avec le sol (angle d'abattée).

Il faut noter que la donnée initiale (II.33a) sur d n'est pas compatible avec la contrainte égalité (II.31) : $f_3(q) = 0$. En revanche, comme cette contrainte est traitée de façon moins restrictive dans (II.32), cette incompatibilité est levée.

II.4.2 Description des forces de liaison

Dans l'exemple considéré, les forces de liaison qui assurent la fermeture mécanique de la boucle sont en fait des forces de contact unilatéral. Comme nous l'avons vu dans le

paragraphe I.3.2.4, aux efforts de contact exercés par le sol sur le pied "libéré", nous substituons un système d'efforts équivalents représenté par deux forces verticales de composantes FB_1 et FB_2 appliquées en $B_1^{'}$ et $B_2^{'}$ respectivement, et d'une force FB_{12} portée par l'axe horizontal $B_1^{'}X_0$ (Figure II–6).

Il est à noter que pendant l'abattée, le contact en $B_2^{'}$ n'a pas lieu donc $FB_2 = 0$.

Ces trois forces inconnues sont considérées comme un système de forces extérieures qu'il faut appliquer au pied pour le maintenir en contact avec le sol lorsque les contraintes de fermeture (II.31) sont satisfaites.

Les conditions de contact impliquent les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} FB_1 > 0 \\ FB_2 > 0 \end{cases} \tag{II.34}$$

$$|FB_{12}| < f\,(FB_1 + FB_2) \tag{II.35}$$

Les conditions (II.34) traduisent l'unilatéralité du contact.

La condition (II.35) est une condition de non-glissement sur sol sec (loi de Coulomb; f est un coefficient de frottement ou d'adhérence).

II.4.3 Domaine de commande admissible

Les variables de commande proprement dites sont les couples actionneurs articulaires qui impulsent et contrôlent le mouvement. Les forces appliquées au pied avant sont introduites comme variables de commandes additionnelles qui contrôlent la position du pied. Le vecteur u des commandes u_i prend donc l'expression suivante :

$$u = (u_1,...,u_N)^T \equiv (C_1^a,...,C_n^a, FB_1, FB_2, FB_{12})^T \tag{II.36}$$

où $N = 10$ et $n = 7$ pour le cas du bipède plan à sept corps.

Les limitations technologiques des actionneurs sont traduites sur les couples articulaires par les contraintes :

$$\forall t \in [t_0, t_1]\ , \quad |u_i(t)| \le u_i^{\max} \quad , \quad i \le 7 \tag{II.37}$$

La condition d'unilatéralité du contact (II.34) devient :

$$\forall t \in [t_0, t_1] \ , \quad 0 < u_i(t) \ , \quad i = 8, 9 \tag{II.38}$$

Elle est complétée par la contrainte de non glissement (II.35), soit :

$$\forall t \in [t_0, t_1] \ , \quad |u_{10}(t)| < f(u_8(t) + u_9(t)) \tag{II.39}$$

où f est un coefficient de frottement (ou d'adhérence).

Le système d'inégalités (II.37), (II.38), (II.39) définit un ensemble de commandes admissibles qui est, à tout instant, un convexe de l'espace euclidien E^N.

La contrainte (II.39) qui lie plusieurs u_i entre eux est à distinguer des précédentes dans lesquelles les u_i sont bornés indépendamment les uns des autres.

Lorsqu'il est limité par les seules contraintes (II.37), (II.38), le domaine de commande admissible est un ensemble parallélépipédique à faces parallèles aux plans de coordonnées dans l'espace des commandes. Les inégalités (II.38) montrent que cet ensemble n'est pas nécessairement borné dans la direction des u_8 et u_9 positifs. Il l'est, en fait, implicitement. La Figure II–7 montre une section de cet hyperparallélépipède dans le plan de coordonnées (u_i, u_j) avec $i \leq 7$ et $j \leq 7$ par exemple.

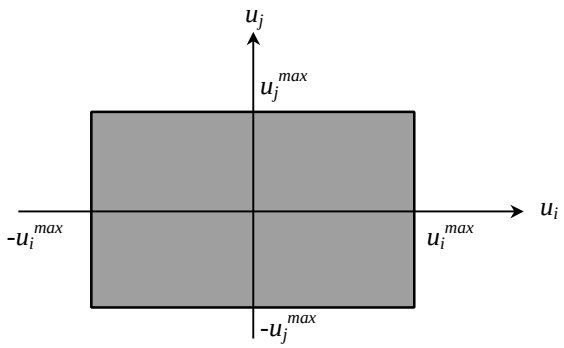


Figure II–7. Section dans un plan (u_i,u_j) du domaine de commande admissible défini par des contraintes de type (II.37), (II.38).

Il faut souligner que, dans ce cas, la condition de maximalité (II.21) de l'hamiltonien H, est très simple à traiter (cf. (II.25)).

Les contraintes de type (II.39) conduisent à une situation tout à fait différente. Elles éliminent des demi-espaces à plans obliques dans l'espace des commandes (Figure II–8). Ceci a pour effet de tronquer le parallélépipède précédent. L'ensemble U des commandes admissibles est alors un polytope convexe de E^N.

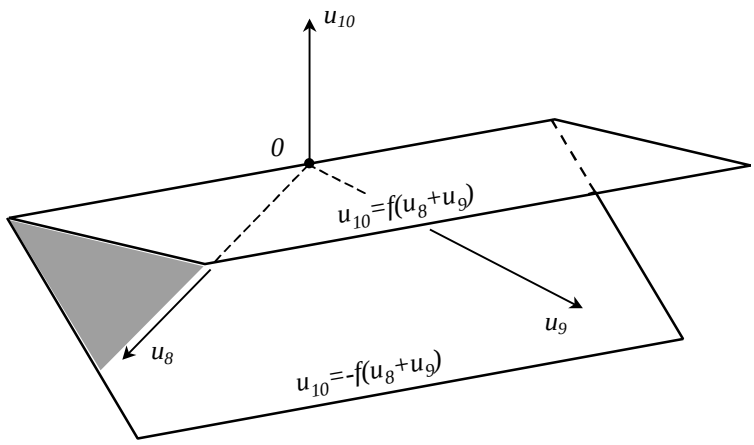


Figure II–8. Le domaine de commande admissible défini par les contraintes "obliques" (II.39) est un dièdre dont $(0;u_8,u_9)$ est le plan bissecteur.

Lorsque dans un mécanisme bouclé on réalise l'ouverture de la chaîne cinématique au niveau d'une liaison bilatérale, il n'y a pas de contraintes obliques entre les u_i. La formulation de la commande optimale qui satisfait la condition de maximalité (II.21) est alors immédiate.

II.4.4 Le cas de contacts unilatéraux non libérés

Des conditions d'unilatéralité du contact et de non glissement, semblables à (II.34) et (II.35) doivent être satisfaites sous le pied porteur en phase unipodale et sous le pied arrière en phase bipodale (Figure II–9).

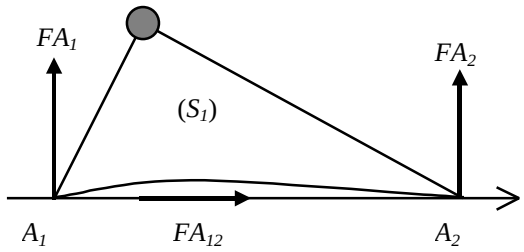


Figure II–9. Système de 3 forces FA_1, FA_2, FA_{12} appliquées au pied non libéré.

Compte tenu des notations de la Figure II–9, et par analogie avec les notations introduites pour décrire un système d'efforts de contact agissant sous le pied avant en phase bipodale

(Figure II–6), on peut prendre en considération, pour le pied arrière, les efforts réunis dans le vecteur à trois composantes :

$$FA = (FA_1, FA_2, FA_{12})^T$$

qui admet le type de dépendance (voir [BES 92])

$$FA = D(x)u + V(x) \tag{II.40}$$

linéaire-affine en u, où D est une matrice de dimension $3 \times N$, et V est un vecteur de dimension 3.

Ces trois forces doivent satisfaire le jeu de contraintes :

$$\begin{cases} -FA_1 < 0 \\ -FA_2 < 0 \\ eFA_{12} - f(FA_1 + FA_2) < 0 \ , \ \begin{cases} e = 1 \text{ si } FA_{12} > 0 \\ e = -1 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases} \tag{II.41}$$

Du fait d'une dépendance linéaire-affine en u de type (II.40), les inégalités (II.41) ont pour effet d'éliminer des demi-espaces de l'espace $\Re^N$ des commandes admissibles. Le domaine admissible U défini par les contraintes (II.37,38,39) est à nouveau tronqué par des hyperplans obliques pour le transformer en un polytope de volumes réduit par rapport au précédent.

II.4.5 Critère pénalisé

Comme pour les systèmes à boucle ouverte, nous privilégions la minimisation des couples actionneurs. Le coût intégral est donc de la forme suivante :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \ell(x(t), u(t))dt \tag{II.42}$$

où (cf. (II.6)) :

$$\ell(x,u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i (g_i u_i)^2 \tag{II.43}$$

Le traitement des contraintes inégalités sur l'état reste inchangé : il s'effectue au moyen du lagrangien augmenté (II.14). Mais il s'y ajoute ici la prise en compte des contraintes égalités (II.31), sous la forme (II.32). On construit ainsi le lagrangien à double fonction de pénalisation :

$$\ell_{r_1,r_2}(x(t),u(t)) = \ell(x(t),u(t)) + \frac{r_1}{2} g(x) + \frac{r_2}{2}(h^+)^T Dh^+ \qquad \text{(II.44)}$$

où r_1 et r_2 sont des facteurs de pénalité, et D est une matrice de pondération. Le critère à minimiser devient donc :

$$J_{r_1,r_2}(u) = \int_{t_0}^{t_1} \ell_{r_1,r_2}(x(t),u(t))dt \qquad \text{(II.45)}$$

II.4.6 Conditions d'optimalité

Les conditions d'optimalité (II.20,21,22) énoncées par le principe du maximum de Pontryagin restent formellement inchangées. Mais un problème nouveau est posé par la condition de maximalité (II.21).

Rappelons que lorsque le domaine de commande admissible U est, à chaque instant, un parallélépipède de E^N à faces parallèles aux plans de coordonnées, alors la condition (II.21) est très simple à traiter. Elle conduit à formuler les commandes optimales comme fonction de l'état x et de l'état adjoint w sous forme explicite simple. Le résultat (II.25) est un exemple de formulation de ce type (sans dépendance explicite par rapport à x dans le cas traité).

Lorsque les sous-ensembles U sont des polytopes de E^N (des convexes à facettes obliques), il n'est plus possible d'exprimer explicitement les commandes optimales en fonction de x et w. Il faut à tout instant t, pour $x(t)$ et $w(t)$ définis à cet instant, déterminer numériquement l'élément u de U qui maximise H en (II.21) (élément unique, car pour un critère quadratique en u, on maximise une fonction concave sur un convexe).

L'opération de calcul de la commande optimale par l'expression explicite (II.25) est de coût quasi nul. Elle devient coûteuse à réaliser pour le traitement de contraintes "obliques". De telles contraintes ont été traitées dans [BES 93] et [BES 02]. C'est une implémentation qui reste à faire en complément du travail réalisé dans le cadre de ce mémoire. Dans les résultats présentés dans le chapitre III, les contraintes (II.39) seront vérifiées a posteriori.

II.4.7 Techniques de résolution

Pour optimiser la phase unipodale de la marche, dans le plan sagittal, Rostami dans [ROS 98,01] utilise une méthode de tir décrite dans [BRY 75]. Il résout ainsi un problème d'optimisation de type (II.16,17,18a) dans sa formulation finale (II.26,27). Cette méthode manque de robustesse numérique pour traiter les contraintes sur l'état par la technique du lagrangien augmenté (II.44,45). Nous utilisons pour cela un code de calcul qui implémente un algorithme de différences finies. Il s'agit du programme D02RAF de la Nag Fortran Library [NAG 92]. Ce code de calcul a été largement utilisé dans [DAN 98] pour traiter des problèmes d'évitement d'obstacles. Il supporte des valeurs élevées des facteurs de pénalité (jusqu'à 10^6 dans [DAN 98]). Mais cette technique nécessite des solutions d'initialisation relativement précises. La méthode adoptée consiste à résoudre d'abord des problèmes peu contraints en utilisant la méthode de tir. Les solutions obtenues sont alors utilisées pour amorcer une première convergence en méthode de différences finies. Les facteurs de pénalité peuvent alors être graduellement augmentés jusqu'à une valeur finale suffisamment grande, de l'ordre de 10^2 à 10^3 dans les exemples traités dans le chapitre III, pour constater que les contraintes sont satisfaites avec une bonne approximation.

II.5 Conclusion

Le problème d'optimisation dynamique de mouvements de systèmes bouclés a été ramené à la formulation d'un problème de commande optimale non contraint, relativement simple à traiter. Cette formulation finale a été obtenue en considérant, d'une part, les efforts appliqués au niveau de la liaison libérée comme des variables de commande, et, d'autre part, en traitant les relations de fermeture de boucle comme des contraintes additionnelles sur les variables d'état. Cela se traduit, en premier lieu, par une augmentation de la dimension du domaine de commande admissible, mais conduit aussi à sa réduction par troncatures par des contraintes "obliques". En second lieu, une fonction de pénalisation doit être injectée dans le critère, ce qui s'accompagne d'un facteur de pénalité supplémentaire. Le traitement numérique de problèmes d'application de ce type est effectué dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III

SIMULATIONS NUMERIQUES

III.1 INTRODUCTION 63
III.2 SYSTÈME PLAN À BOUCLE FERMÉE AVEC LIAISONS BILATÉRALES 63
III.2.1 Description du système 63
III.2.2 Modèle dynamique 65
III.2.3 Critère et contraintes 67
III.2.4 Expression de la commande optimale 67
III.2.5 Résultats numériques 68
III.3 ESSAIS DE SYNTHÈSES OPTIMALES DE LA MARCHE SAGITTALE 72
III.3.1 Bipède sans pied 72
III.3.1.1 Données cinématiques du bipède plan à cinq corps 73
III.3.1.2 Modèle dynamique 76
III.3.1.3 Critère et contraintes 79
III.3.1.4 Conditions d'optimalité 79
III.3.1.5 Forces de contact appliquées à la patte arrière – conditions de contact 81
III.3.1.6 Résultats numériques 82
III.3.2 Bipède plan à cinématique anthropomorphe 87
III.3.2.1 Caractéristiques cinématiques du bipède plan à sept corps 89
III.3.2.2 Distribution des masses et inerties 95
III.3.2.3 Modèle dynamique 97
III.3.2.4 Critère et contraintes 100
III.3.2.5 Conditions d'optimalité 100
III.3.2.6 Unilatéralité des forces d'appui sur le pied porteur en phase de balancement 103
III.3.2.7 Unilatéralité des forces d'appui sur la pointe du pied arrière en phase de double appui 104
III.3.2.8 Résultats numériques 106
III.4 CONCLUSION 114

III.1 Introduction

Comme indiqué dans le chapitre I, les applications numériques traitées dans ce troisième chapitre concernent des systèmes plans. Deux types de systèmes sont à distinguer selon qu'ils comportent ou non des liaisons unilatérales.

Dans une première partie nous traitons l'exemple d'un système 5-barres suractionné dont toutes les liaisons sont bilatérales. Les exemples de ce type conduisent à des problèmes d'optimisation peu contraints qui sont relativement simples à résoudre.

Les systèmes bouclés, soumis à des liaisons unilatérales, sont beaucoup plus délicats à traiter numériquement que les précédents. Cela tient aux contraintes caractéristiques de l'unilatéralité des contacts qui restreignent sévèrement le domaine de commandes admissibles. Les applications traitées concernent la marche sagittale de robots bipèdes. Cette recherche de pas de marche optimaux est motivée par l'existence de deux bipèdes mécaniques réalisés dans le cadre de programmes concertés entre divers laboratoires français. Les premières simulations concernent le robot "RABBIT" (cf. §III.3.1) à cinq corps et quatre articulations actives. Les simulations les plus complexes sont celles du robot "BIP" (cf. §III.3.2) considéré dans un modèle sagittal à sept corps et six articulations actives. La marche engendrée dans ce cas s'apparente à la marche humaine.

III.2 Système plan à boucle fermée avec liaisons bilatérales

Dans ce paragraphe nous proposons l'étude d'un système plan à quatre corps segmentaires articulés sur une base fixe.

III.2.1 Description du système

Le système est schématisé sur la Figure III–1. Les quatre segments articulés sont indicés de S_1 à S_4, la base est notée S_0. Une charge S_5 représentée par une masse concentrée est située en O_3. Toutes les articulations sont supposées actives. Le système se meut dans le plan vertical.

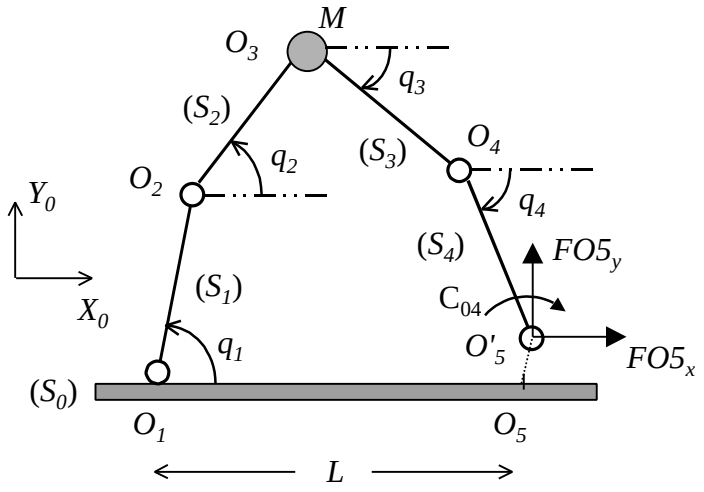


Figure III–1. Système 5-barres avec ouverture de chaîne en O_5.

Les notations générales sont celles du paragraphe I.3.3. Le dimensionnement du système est défini dans le Tableau III–1 :

	longueurs (m)	**masses (kg)**	**C. I. (m)**	**inertie (kg.m^2)**
S_1	0.4	2.	0.2	0.107
S_2	0.4	2.	0.2	0.107
S_3	0.4	2.	0.2	0.107
S_4	0.4	2.	0.2	0.107
S_5	-	5.	-	-

Tableau III–1. Dimensionnement du système plan 5-barres.

La chaîne articulaire est ouverte à l'articulation fixe située en O_5.

La configuration d'étude est définie par le paramétrage absolu :

$$q = (q_1, ..., q_4)^T$$

Cette configuration est soumise à la condition de fermeture :

$$g(q) \equiv \left\| O_5 O_5^{'} \right\| = 0$$

Les efforts qui réalisent la liaison mécanique lorsque la contrainte précédente est satisfaite sont représentés par la composante tangentielle $FO5_x$ et la composante normale $FO5_y$ de la force de contact appliquée en O_5 exercée par la base (S_0) sur le segment (S_4) (voir Figure III–1) :

$$FO5 = FO5_x X_0 + FO5_y Y_0$$

Il s'y ajoute le couple exercé par S_4 sur S_0 qui, comme en (I.30), se décompose sous la forme :

$$C(S_4 \to S_0) = C_5^d + C_5^a$$

où C_5^d est un couple d'amortissement et C_5^a est un couple actionneur.

III.2.2 Modèle dynamique

Dans l'expression qui définit l'énergie cinétique du système

$$T(S_1 \cup \cdots \cup S_5) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$$

la matrice de masse $M(q)$ admet la représentation simple (cf. §I.3.3) :

$$M = \begin{pmatrix} M11 & E12\,C12 & E13\,C13 & E14\,C14 \\ & M22 & E23\,C23 & E24\,C24 \\ & & M33 & E34\,C34 \\ & Sym. & & M44 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.1)}$$

où l'on a posé :

$$Cij = \cos(q_i - q_j)$$

et où les coefficients Mij et Eij sont des constantes dépendant des caractéristiques géométriques du mécanisme, soit :

$$M11 = I_1 + m_{2345} r_1^2 \ ; \ M22 = I_2 + m_{345} r_2^2 \ ; \ M33 = I_3 + m_4 r_3^2 \ ; \ M44 = I_4 \ ;$$

$$E12 = r_1(m_2 a_2 + m_{345} r_2) \ ; \ E13 = r_1(m_3 a_3 + m_4 r_3) \ ; \ E14 = r_1 m_4 a_4 \ ;$$

$$E23 = r_2(m_3 a_3 + m_4 r_3) \ ; \ E24 = r_2 m_4 a_4 \ ; \ E34 = r_3 m_4 a_4$$

Les efforts actifs auxquels est soumis le système proviennent, d'une part, de la pesanteur, d'autre part, des couples actionneurs articulaires, et, par ailleurs, des efforts de liaison en O_5 qui sont traités comme variables de commande.

Le potentiel des forces de pesanteur prend la forme :

$$V(q) = V_1 S1 + V_2 S2 + V_3 S3 + V_4 S4$$

où $Si = \sin(q_i)$; les V_i $(i = 1,...4)$ sont les expressions constantes :

$$V_1 = g(m_1 a_1 + m_{2345} r_1) \ ; \ V_2 = g(m_2 a_2 + m_{345} r_2) \ ; \ V_3 = g(m_3 a_3 + m_4 r_3) \ ; \ V_4 = g m_4 a_4$$

Les forces généralisées Q_i^g dues à la pesanteur s'écrivent alors :

$$Q_i^g = -V,_i \qquad (V,_i \equiv \partial V_i / \partial q_i), \quad i = 1,...,4 \qquad \text{(III.2)}$$

Au niveau de chaque articulation, nous avons un couple actionneur noté C_i^a, $i = 1,...,5$, représentant le couple exercé par S_{i-1} sur S_i, $i = 1,...,4$, et par S_4 sur S_0 pour $i = 5$.

Les forces généralisées dues aux forces de liaison en O_5 s'écrivent :

$$Q_i^f = -r_i Si\, FO5_x + r_i Ci\, FO5_y \ , \quad i = 1,...,4 \qquad \text{(III.3)}$$

où $Si = \sin(q_i)$, $Ci = \cos(q_i)$, r_i est la distance inter-articulaire ($r_i \equiv \|O_i O_{i+1}\|$), $i = 1,...,4$.

Le vecteur des variables de commande est de dimension 7, son expression est la suivante :

$$u = (u_1,...,u_7)^T \equiv (C_1^a, C_2^a, C_3^a, C_4^a, C_5^a, FO5_y, FO5_x)^T \qquad \text{(III.4)}$$

L'ensemble des formulations précédentes nous permet d'écrire les équations de Hamilton sous la forme générale donnée en (I.33) :

$$i = 1,...,4 \quad \begin{cases} \dot{q}_i = \sum_{j=1}^{4} M_{ij}^{-1}(q)\, p_j \equiv F_i(q,p) \\ \dot{p}_i = \frac{1}{2} F^T M_{,i} F - V_{,i} + Q_i^d + u_i - u_{i+1} + r_i Ci\, u_6 - r_i Si\, u_7 \end{cases} \tag{III.5}$$

où Q_i^d est défini comme en (I.33), soit $Q_i^d = -a_i (F_{i+1} - F_i)$.

III.2.3 Critère et contraintes

La distance $\left\| O_5 O_5^{'} \right\|$, traduisant l'ouverture de chaîne, exprimée en fonction des paramètres de configuration, a pour expression :

$$\left\| O_5 O_5^{'}(q) \right\|^2 = (-L + r_1 C1 + ... + r_4 C4)^2 + (r_1 S1 + ... + r_4 S4)^2 \tag{III.6}$$

Celle-ci est injectée dans le lagrangien (II.6) pour donner le lagrangien augmenté :

$$\ell_r(x(t),u(t)) = \frac{1}{2} m_c \sum_{i=1}^{5} x_i (g_i u_i)^2 + \frac{1}{2} m_f \sum_{i=6}^{7} x_i (g_i u_i)^2 + \frac{1}{2} r_d g_8 \left\| O_5 O_5^{'}(x) \right\|^2 \tag{III.7}$$

où

- m_c, m_f sont des coefficients de pondération dont le rôle est de privilégier la minimisation des couples articulaires par rapport aux forces de contact ou inversement,

- r_d est le facteur de pénalité correspondant à la fonction de pénalisation dépendant de la distance $\left\| O_5 O_5^{'} \right\|$.

Le critère à minimiser est donc:

$$J_r(u) = \int_{t_0}^{t_1} \ell_r(x(t),u(t))dt$$

III.2.4 Expression de la commande optimale

L'hamiltonien (II.19) a l'expression suivante :

$$H(x,u,w)=\sum_{i=1}^{8} w_i(t)\ f_i(x,u)-\frac{1}{2}m_c\sum_{i=1}^{5}x_i(g_iu_i)^2-\frac{1}{2}m_f\sum_{i=6}^{7}x_i(g_iu_i)^2-\frac{1}{2}r_dg_8\left\|O_5O_5^{'}(x)\right\|^2$$

Pour $i=1...7$, les conditions d'optimalité $H,_{u_i}=0$ nous fournissent les expressions des commandes optimales :

$$u_1=w_5/(m_cx_1g_1^2)$$
$$u_2=(w_6-w_5)/(m_cx_2g_2^2)$$
$$u_3=(w_7-w_6)/(m_cx_3g_3^2)$$
$$u_4=(w_8-w_7)/(m_cx_4g_4^2)$$
$$u_5=-w_8/(m_cx_5g_5^2)$$
$$u_6=-\left(\sum_{i=1}^{4}w_{4+i}r_iSi\right)/(m_fx_6g_6^2)$$
$$u_7=\left(\sum_{i=1}^{4}w_{4+i}r_iCi\right)/(m_fx_7g_7^2)$$

L'injection de ces expressions dans (III.5) permet d'aboutir à la formulation d'un système différentiel fermé de type (II.26).

III.2.5 Résultats numériques

Les résultats présentés ci-dessous ont été établis avec le dimensionnement du mécanisme donné dans le Tableau III–1, la durée de transfert est fixée à 0.42s.

Les états initiaux et finaux sont complètement spécifiés, et sont symétriques en position. Les vitesses initiales et finales sont nulles.

<u>Exemple 1</u> : transfert d'amplitude réduite

La Figure III–2 montre le mouvement optimal obtenu pour un faible débattement articulaire. La dépense énergétique, calculée sur la base de la formule $J_e=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{m}z_i\left|\dot{q}_i(t)u_i(t)\right|dt$, est de 12,0 J. La charge S_5 suit une trajectoire incurvée.

La distance résiduelle $O_5O_5^{'}$ obtenue pour un facteur de pénalité r_d =150 est de l'ordre de 0,05 mm.

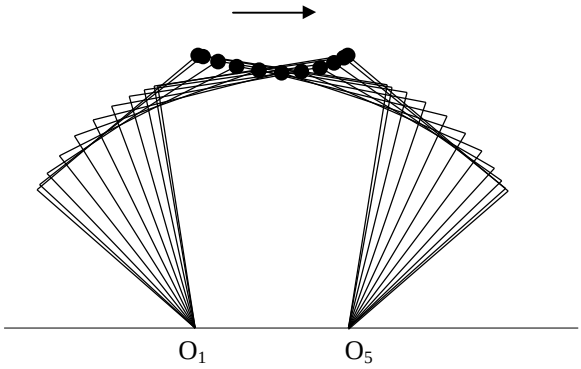


Figure III–2. Mouvement optimal d'amplitude réduite à liaisons bilatérales.

Les graphiques de la Figure III–3 montrent les variations des couples actionneurs et des vitesses articulaires. C'est le couple situé à la liaison O_1 qui produit au départ l'effort le plus important.

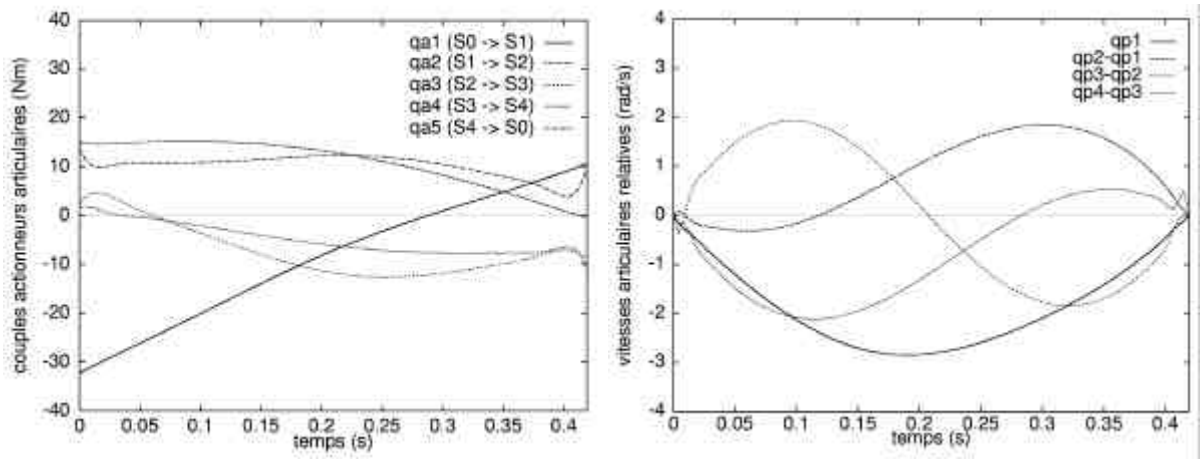


Figure III–3. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires relatives.

Les forces d'appui au sol en O_1 et O_5 sont représentées sur la Figure III–4. Elles sont quasiment constamment positives sauf en début de transfert où $FO5_y$ prend des valeurs légèrement négatives (force d'arrachement).

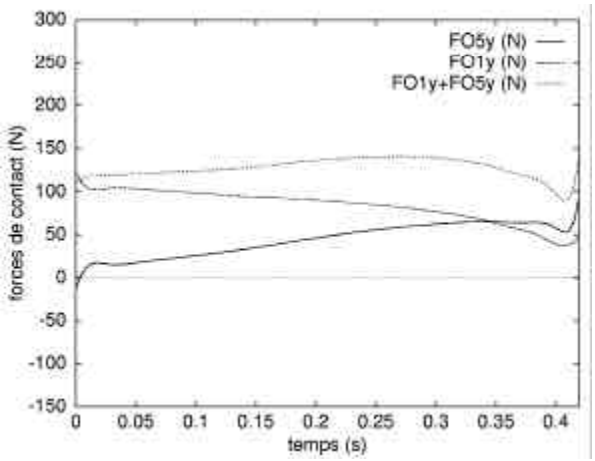


Figure III–4. Evolution des forces d'appui en O_1 et O_5.

<u>Exemple 2</u> : transfert de grande amplitude

La Figure III–5 montre le mouvement optimal obtenu pour un transfert de grande amplitude. La dépense énergétique s'en trouve augmentée : 40,7 J.

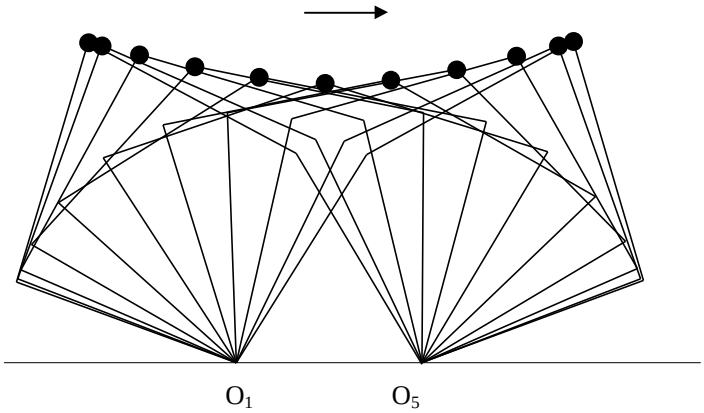


Figure III–5. Mouvement optimal de grande amplitude à liaisons bilatérales.

Les variations des couples actionneurs et des vitesses articulaires sont représentées sur la Figure III–6. Les couples suivent des évolutions sensiblement différentes que celles obtenues dans l'exemple 1, avec surtout des valeurs extrémales beaucoup plus élevées.

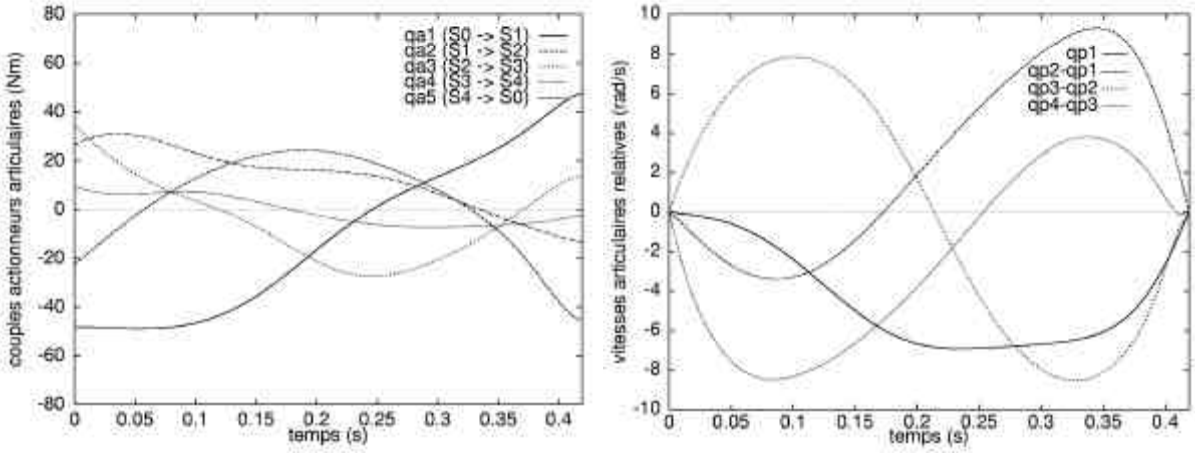


Figure III–6. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires relatives.

Les forces d'appui, représentées sur la Figure III–7, montrent bien le transfert du poids du mécanisme de O_1 vers O_5, avec un effet d'allègement à la décélération précédant l'arrêt.

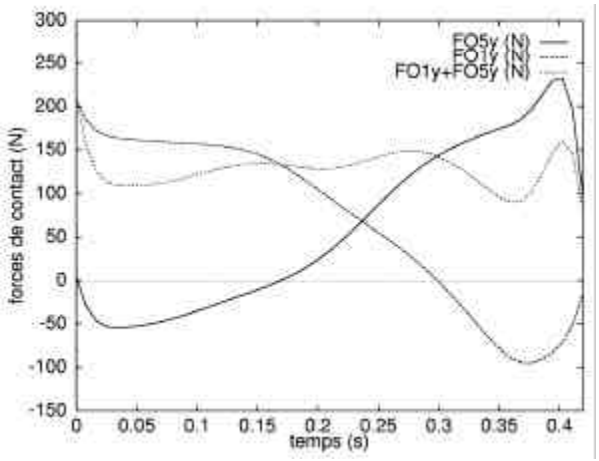


Figure III–7. Evolution des forces d'appui en O_1 et O_5.

III.3 Essais de synthèses optimales de la marche sagittale

Dans ce paragraphe nous réalisons la synthèse de pas de marche de deux robots bipèdes. La première simulation concerne un bipède plan sans pied à cinq corps (robot bipède RABBIT) et la seconde concerne la marche sagittale d'un bipède à cinématique anthropomorphe (robot bipède BIP).

III.3.1 Bipède sans pied

RABBIT (voir Figure III–8) est un robot bipède construit et développé dans le cadre du PRC (Programme de Recherches Coordonnées) "Commande de robots à pattes" du GdR Automatique, programme actuellement poursuivi dans le cadre du projet "Commande pour la marche et la course d'un robot bipède" du programme interdisciplinaire de recherche ROBEA (Robotique et Entités Artificielles) du CNRS. Le principal objectif de ce projet est de concevoir un robot à architecture mécanique simplifiée, capable de marcher, de courir et de réaliser la transition entre la marche et la course.

Figure III–8. Robot bipède RABBIT.

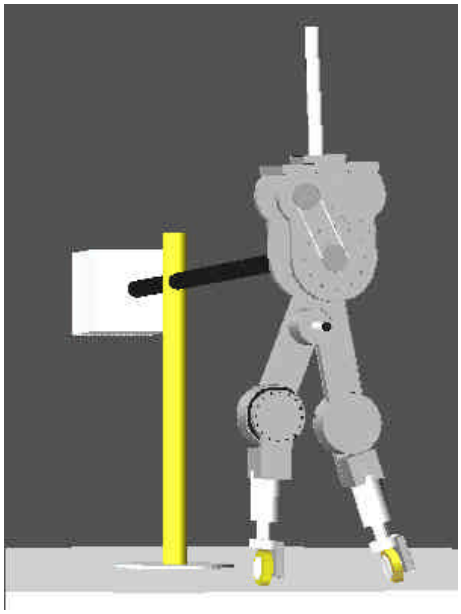


Figure III–9. Le bipède RABBIT et son dispositif de guidage.

Le prototype est constitué de deux parties principales : le bipède proprement dit, composé d'un tronc et de deux jambes bisegmentaires sans pied, et le système de guidage constitué d'une perche fixée au robot et reliée à une colonne centrale (Figure III–9). Le robot, en rotation libre autour de la perche, voit ainsi ses mouvements limités à une évolution plane.

Le contact pied/sol se fait au moyen d'une roulette frontale implantée sur chaque segment inférieur, qui assure ainsi l'équivalent d'un contact radial glissant à frottement négligeable. De cette façon, l'action de contact avec le sol est limitée à deux composantes seulement : la composante normale et la composante tangentielle dans le plan sagittal.

	longueurs (m)	**masses (kg)**	**C. I. (m)**	**inertie (kg.m^2)**
tibia	0.4	3.2	0.127	0.1
cuisse	0.4	6.8	0.163	0.25
tronc	0.625	20	0.2	2.22

Tableau III–2. Caractéristiques dimensionnelles et inertielles de RABBIT

Le nombre de moteurs se trouve réduit à quatre. Le système actionneur doit permettre des évolutions rapides : 5 km/h pour la marche et 12 km/h pour la course. La consommation d'énergie durant la marche est importante, c'est pourquoi les concepteurs ont particulièrement pris en compte cette contrainte avec le choix d'une répartition massique qui minimise les inerties segmentaires des pattes. RABBIT est un bipède léger et robuste (voir Tableau III–2).

III.3.1.1 Données cinématiques du bipède plan à cinq corps

La Figure III–10 décrit l'agencement cinématique du bipède. Nous nous intéressons ici plus particulièrement à la phase de double appui au cours de laquelle les deux pattes forment, avec le sol, une boucle cinématique fermée et suractionnée (2 degrés de liberté pour la boucle qui est animée par 3 actionneurs, auxquels s'ajoutent 1 actionneur et 1 ddl pour le tronc).

Le dimensionnement du bipède est déterminé par les données suivantes définies sur la base de la représentation schématique de la Figure III–10 :

$O_iO_{i+1} = r_i X_i$, $i = 1,...,3$; r_i, distance inter-articulaire

$O_4O_5^{'} = r_4 X_4$

$O_iG_i = a_i X_i$; G_i, centre d'inertie du segment S_i , $i = 1,...,4$

$O_3G_5 = a_5 X_5$

m_i , masse de S_i

$I_i = I_{O_i Z_0}(S_i)$, moment d'inertie de S_i par rapport à l'axe articulaire $(O_i ; Z_0)$

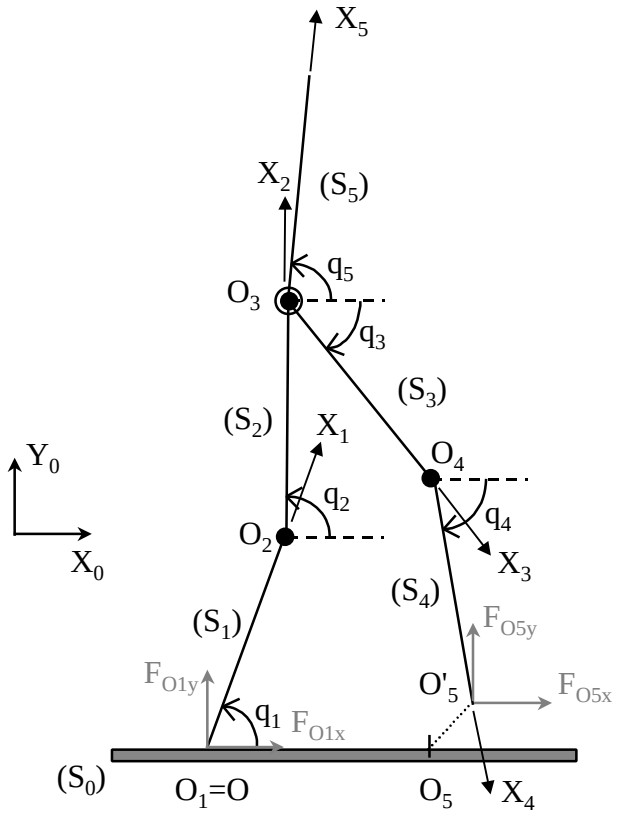


Figure III–10. Bipède plan en phase de double appui avec ouverture de la boucle cinématique en O_5, au niveau de l'appui de la patte avant.

Un tel système plan comporte quatre articulations : deux articulations genou et deux articulations à la hanche. Celles-ci sont coaxiales.

Comme précédemment nous introduisons un paramétrage articulaire absolu défini par les angles orientés (voir Figure III–10) :

$$q_i = (X_0, X_i)_{Z_0} \ , \quad i = 1,...,5$$

Données minimales définissant un pas de marche

Afin de définir complètement un pas de marche dans ses configurations initiales et finales, en positions et en vitesses, il est nécessaire d'introduire certaines données. Ces données minimales sont constituées, d'une part par la longueur de pas *LPAS* du mouvement, et,

d'autre part, par les coordonnées de position (x_3^i, y_3^i et x_3^f , y_3^f) et les composantes de vitesse (u_3^i, v_3^i et u_3^f , v_3^f) à l'instant initial et à l'instant final de la hanche (voir Figure III–11).

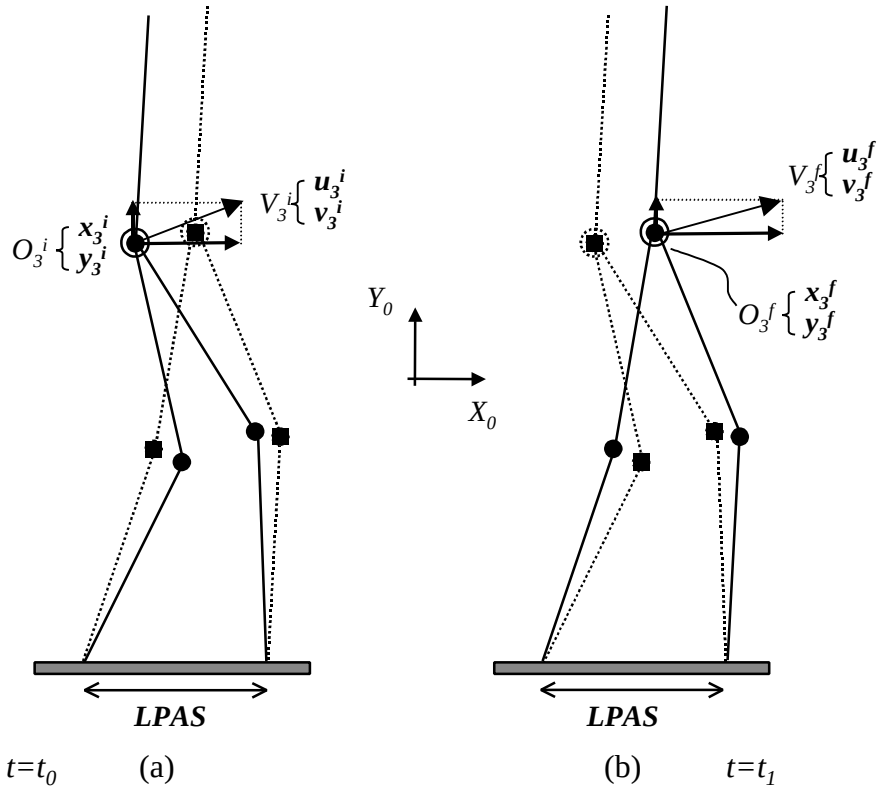


Figure III–11. Schématisation des données minimales définissant un pas de marche en phase de double appui, à l'état initial (a) et à l'état final (b) pour le bipède 5 corps.

A partir de ces neuf données minimales il est possible d'établir les expressions des paramètres articulaires initiaux et finaux (q_k^i, q_k^f , $k = 1,...,5$) ainsi que leurs vitesses ($\dot{q}_k^i$ et $\dot{q}_k^f$, $k = 1,...,5$) en phase de double appui, soit, pour les q_i :

$$q_2^i = a_1 + Arc\cos(\frac{c_1}{x_3^i}\cos a_1) \qquad q_2^f = a_3 + Arc\cos(\frac{c_3}{x_3^f}\cos a_3)$$

$$q_1^i = ATAN2(S1^i, C1^i) \qquad q_1^f = ATAN2(S1^f, C1^f)$$

$$q_4^i = a_2 - Arc\cos(\frac{c_2}{x_3^i}\cos a_2) \qquad q_4^f = a_4 - Arc\cos(\frac{c_4}{x_3^i}\cos a_4)$$

$$q_3^i = ATAN2(S3^i, C3^i) \qquad q_3^f = ATAN2(S3^f, C3^f)$$

$$q_5^i = C^{ste} \qquad q_5^f = C^{ste}$$

où

$$a_1 = Arctg\frac{y_3^i}{x_3^i},\ a_2 = Arctg\frac{-y_3^i}{LPAS - x_3^i},\ a_3 = Arctg\frac{y_3^f}{x_3^f},\ a_4 = Arctg\frac{-y_3^f}{LPAS - x_3^f}$$

$$c_1 = \frac{{x_3^i}^2 + y_3^i + r_2^2 + r_1^2}{2r_2},\ c_2 = \frac{(LPAS - x_3^i)^2 + y_3^i + r_4^2 + r_3^2}{2r_4},\ c_3 = \frac{{x_3^f}^2 + y_3^f + r_2^2 + r_1^2}{2r_2},$$

$$c_4 = \frac{(LPAS - x_3^f)^2 + y_3^f + r_4^2 + r_3^2}{2r_4}$$

On observe que les expressions qui définissent les a_i présentent des singularités lorsque le centre de rotation de la hanche O_3 est à la verticale des points d'appui O_1 et O_5. Ces singularités sont évitées en choisissant une projection verticale de O_3 comprise strictement entre O_1 et O_5.

Et les $\dot{q}_i$:

$$\dot{q}_1^i = -\frac{u_3^i C2^i + v_3^i S2^i}{r_1 \sin(q_1^i - q_2^i)} \qquad \dot{q}_1^f = -\frac{u_3^f C2^f + v_3^f S2^f}{r_1 \sin(q_1^f - q_2^f)}$$

$$\dot{q}_2^i = \frac{u_3^i C1^i + v_3^i S1^i}{r_2 \sin(q_1^i - q_2^i)} \qquad \dot{q}_2^f = \frac{u_3^f C1^f + v_3^f S1^f}{r_2 \sin(q_1^f - q_2^f)}$$

$$\dot{q}_3^i = \frac{u_3^i C4^i + v_3^i S4^i}{r_3 \sin(q_3^i - q_4^i)} \qquad \dot{q}_3^f = \frac{u_3^f C4^f + v_3^f S4^f}{r_3 \sin(q_3^f - q_4^f)}$$

$$\dot{q}_4^i = -\frac{u_3^i C3^i + v_3^i S3^i}{r_4 \sin(q_3^i - q_4^i)} \qquad \dot{q}_4^f = -\frac{u_3^f C3^f + v_3^f S3^f}{r_4 \sin(q_3^f - q_4^f)}$$

$$\dot{q}_5^i = \dot{q}_5^f = 0$$

On évite les singularités qui apparaissent aux dénominateurs lorsque les jambes sont tendues en introduisant des postures initiales et finales fléchies.

III.3.1.2 Modèle dynamique

Ce paragraphe a pour objet la formulation, sous forme hamiltonienne, du modèle dynamique décrivant le mouvement du bipède dans sa phase de double appui. Il s'agit, en fait, d'adapter au bipède, les formulations générales développées dans le chapitre I, §I.3.2.5.

La matrice de masse $M(q)$ du système prend la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M11 & E12\,C12 & E13\,C13 & E14\,C14 & E15\,C15 \\ & M22 & E23\,C23 & E24\,C24 & E25\,C25 \\ & & M33 & E34\,C34 & 0 \\ & Sym. & & M44 & 0 \\ & & & & M55 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.8)}$$

où l'on a posé $Cij = \cos(q_i - q_j)$ et où les coefficients Mij et Eij sont des constantes explicitées ci-dessous :

$M11 = I_1 + m_{2345} r_1^2$; $M22 = I_2 + m_{345} r_2^2$; $M33 = I_3 + m_4 r_3^2$; $M44 = I_4$; $M55 = I_5$;

$E12 = r_1(m_2 a_2 + m_{345} r_2)$; $E13 = r_1(m_3 a_3 + m_4 r_3)$; $E14 = r_1 m_4 a_4$; $E15 = r_1 m_5 a_5$;

$E23 = r_2(m_3 a_3 + m_4 r_3)$; $E24 = r_2 m_4 a_4$; $E25 = r_2 m_5 a_5$; $E34 = r_3 m_4 a_4$.

Lors de la phase double appui, la libération du contact en O_5 de la jambe avant avec le sol s'accompagne de la prise en considération des efforts tels que :

$$F_{O_5}(S_0 \to S_4) = F_{O5_x} X_0 + F_{O5_y} Y_0 \qquad \text{(III.9)}$$

qui représentent la force exercée par le sol S_0 sur la jambe S_4 lorsque la liaison est réalisée.

Les efforts actifs auxquels est soumis le bipède proviennent, d'une part, de la pesanteur, et, d'autre part, des quatre couples articulaires notés respectivement C_{12}^a, C_{25}^a, C_{53}^a, C_{34}^a et désignant les couples exercés respectivement par, (S_1) sur (S_2), (S_2) sur (S_5), (S_5) sur (S_3) et (S_3) sur (S_4).

Comme nous l'avons vu dans le chapitre II, §I.3.2.4, à ces couples actionneurs articulaires, nous ajoutons les forces de liaison au niveau du contact libéré en O_5, soit F_{O5_x} et F_{O5_y} pour compléter le vecteur des variables de commande dont l'expression devient :

$$u = (u_1, ..., u_6)^T \equiv (C_{12}^a, C_{25}^a, C_{53}^a, C_{34}^a, F_{O5_y}, F_{O5_x})^T$$

Les travaux virtuels des couples actifs ont pour expression :

$$W_a^*(S_i \to S_j) = C^a(S_i \to S_j) \cdot \Omega^*(S_j / S_i) = C_{ij}^a (dq_j - dq_i)$$

pour les couples d'indices (i,j)=(1,2), (2,5), (5,3), et (3,4).

On obtient immédiatement l'expression des forces généralisées Q_i^a dues aux couples actionneurs, soit :

$$Q_1^a = -C_{12}^a,\ Q_2^a = C_{12}^a - C_{25}^a,\ Q_3^a = C_{53}^a - C_{34}^a,\ Q_4^a = C_{34}^a,\ Q_5^a = C_{25}^a - C_{53}^a \qquad \text{(III.10)}$$

Les travaux virtuels des forces de contact en O_5, s'écrivent :

$$W^*(F_{O_5}) = -F_{O5_x}\sum_{i=1}^{4} r_i Sidq_i + F_{O5_y}\sum_{i=1}^{4} r_i Cidq_i$$

Il en résulte l'expression des forces généralisées Q_i^f dues aux force de contact :

$$Q_i^f = -r_i SiF_{O5_x} + r_i CiF_{O5_y}\ ,\ \ i = 1,...,4 \qquad \text{(III.11)}$$

En procédant comme en III.2.2, on obtient les forces généralisées Q_i^g dues à la pesanteur, soit :

$$Q_i^g = -V,_i\ ,\ \ i = 1,...,5 \qquad \text{(III.12)}$$

où $V,_i \equiv \dfrac{\partial V}{\partial q_i} = V_i Ci$ $\quad (Ci = \cos(q_i))$ avec des V_i qui ont pour expression :

$V_1 = g(m_1 a_1 + m_{2345} r_1)$; $V_2 = g(m_2 a_2 + m_{345} r_2)$; $V_3 = g(m_3 a_3 + m_4 r_3)$; $V_4 = g m_4 a_4$;

$V_5 = g m_5 a_5$.

Conformément à la formulation générale du §I.3.3, les équations du mouvement, en formulation hamiltonienne s'explicitent alors sous la forme :

$$i = 1,...,5 \quad \begin{cases} \dot{q}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{5} M_{ij}^{-1}(q)\, p_j \equiv F_i(q,p) \\ \dot{p}_i = \dfrac{1}{2} F^T M_{,i} F - V_{,i} + Q_i^d + Q_i^a + r_i Ci\, u_5 - r_i Si\, u_6 \end{cases} \qquad \text{(III.13)}$$

où Q_i^d est défini comme en (I.33), soit $Q_i^d = -a_i(F_{i+1} - F_i)$.

III.3.1.3 Critère et contraintes

La relation de fermeture de chaîne suivante O_5, soit : $\left\| O_5 O_5^{'} \right\| = 0$, conduit à l'injection de la fonction de pénalisation suivante :

$$\left\| O_5 O_5^{'}(q) \right\|^2 = (-LPAS + r_1 C1 + ... + r_4 C4)^2 + (r_1 S1 + ... + r_4 S4)^2 \qquad \text{(III.14)}$$

dans le lagrangien (II.6) pour former le lagrangien augmenté :

$$\ell_r(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} m_c \sum_{i=1}^{4} x_i (g_i u_i)^2 + \frac{1}{2} m_f \sum_{i=5}^{6} x_i (g_i u_i)^2 + \frac{1}{2} r_d g_7 \left\| O_5 O_5^{'}(x) \right\|^2 \qquad \text{(III.15)}$$

où

m_c, m_f sont des coefficients de pondération jouant le même rôle que dans (III.7),

r_d est un facteur de pénalité.

III.3.1.4 Conditions d'optimalité

a) Expression de la commande optimale

L'hamiltonien (II.19) devient :

$$H(x,u,w) = \sum_{i=1}^{10} w_i(t)\ f_i(x,u) - \frac{1}{2} m_c \sum_{i=1}^{4} x_i (g_i u_i)^2 - \frac{1}{2} m_f \sum_{i=5}^{6} x_i (g_i u_i)^2 - \frac{1}{2} r_d g_7 \left\| O_5 O_5^{'}(x) \right\|^2$$

où les f_i désignent les seconds membres du système hamiltonien (III.13), avec l'identité $f_i \equiv F_i$ pour *i=1* à *5*.

En masquant les termes constants par rapport à u, on peut écrire H sous la forme :

$$\begin{aligned} H &= [\textit{termes } c^{ts} \textit{ par rapport à } u] + w_6[-u_1 + r_1 S1 u_5 + r_1 C1 u_6] \\ &+ w_7[u_1 - u_4 - r_2 S2 u_5 + r_2 C2 u_6] + w_8[u_2 - u_3 - r_3 S3 u_5 + r_3 C3 u_6] \\ &+ w_9[u_3 - r_4 S4 u_5 + r_4 C4 u_6] + w_{10}[u_4 - u_2] - \frac{1}{2} m_c \sum_{i=1}^{4} x_i (g_i u_i)^2 - \frac{1}{2} m_f \sum_{i=5}^{6} x_i (g_i u_i)^2 \end{aligned}$$

Pour $i = 1...6$, les conditions $H,_{u_i} = 0$ donnent alors :

$$u_1 = (w_7 - w_6)/(m_c x_1 g_1^2)$$

$$u_2 = (w_8 - w_{10})/(m_c x_2 g_2^2)$$

$$u_3 = (w_9 - w_8)/(m_c x_3 g_3^2)$$

$$u_4 = (w_{10} - w_7)/(m_c x_4 g_4^2)$$

$$u_5 = -\left(\sum_{i=1}^{4} w_{5+i} r_i Si\right)/(m_f x_5 g_5^2)$$

$$u_6 = \left(\sum_{i=1}^{4} w_{5+i} r_i Ci\right)/(m_f x_6 g_6^2)$$

Si les u_i sont soumis à des bornes du type (II.37) et (II.38) alors les expressions ci-dessus sont à remplacer par leurs fonctions saturées respectives comme elles sont définies en (II.25).

b) Ecriture du système adjoint

L'équation adjointe (II.20) $\dot{w}(t) = -H,_x^T$ s'explicite de la manière suivante :

$$\dot{w}_i = -w^T F,_i + \ell_{r,i} \ , \quad i = 1,...,14 \tag{III.16}$$

où, compte tenu de (III.14) et (III.15), on peut écrire :

$$\ell_r = \frac{1}{2} m_c \sum_{i=1}^{4} x_i (g_i u_i)^2 + \frac{1}{2} m_f \sum_{i=5}^{6} x_i (g_i u_i)^2 + \frac{1}{2} r_d g_7 \left[\left(-LPAS + \sum_{i=1}^{4} r_i Ci\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{4} r_i Si\right)^2\right]$$

Les dérivées du lagrangien augmenté ℓ_r par rapport aux variables d'état x_k, $k = 1,...,10$, sont alors :

$$\ell_{r,1} = r_d \ g_7 \ r_1 [LPAS \ S1 + r_2 S21 + r_3 S31 + r_4 S41]$$

$$\ell_{r,2} = r_d \ g_7 \ r_2 [LPAS \ S2 + r_1 S12 + r_3 S32 + r_4 S42]$$

$$\ell_{r,3} = r_d \ g_7 \ r_3 [LPAS \ S3 + r_1 S13 + r_2 S23 + r_4 S43]$$

$$\ell_{r,4} = r_d \ g_7 \ r_4 [LPAS \ S4 + r_1 S14 + r_2 S24 + r_3 S34]$$

$$\ell_{r,k} = 0 \ , \ k = 5,...,10$$

où $Sij \equiv \sin(q_i - q_j)$

Le système adjoint (II.20) à 10 équations s'explicite alors sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = -\sum_{k=1}^{10} w_k f_{k,1} + r_d\, g_7\, r_1 \left[LPAS\ S1 + r_2 S21 + r_3 S31 + r_4 S41 \right] \\ \dot{w}_2 = -\sum_{k=1}^{10} w_k f_{k,2} + r_d\, g_7\, r_2 \left[LPAS\ S2 + r_1 S12 + r_3 S32 + r_4 S42 \right] \\ \dot{w}_3 = -\sum_{k=1}^{10} w_k f_{k,3} + r_d\, g_7\, r_3 \left[LPAS\ S3 + r_1 S13 + r_2 S23 + r_4 S43 \right] \\ \dot{w}_4 = -\sum_{k=1}^{10} w_k f_{k,4} + r_d\, g_7\, r_4 \left[LPAS\ S4 + r_1 S14 + r_2 S24 + r_3 S34 \right] \\ \dot{w}_j = -\sum_{k=1}^{10} w_k f_{k,j}\ , \quad j = 5,...,10 \end{cases}$$

III.3.1.5 Forces de contact appliquées à la patte arrière – conditions de contact

Pour que le contact unilatéral sur la patte arrière soit respecté, il faut que la projection verticale de la force de réaction du sol demeure positive pendant la durée du mouvement. Cette force de réaction se décompose ainsi sous la forme (cf. Figure III–10) :

$$R(S_0 \rightarrow S_1) = F_{01_x} X_0 + F_{01_y} Y_0 \qquad \text{(III.17)}$$

Pour déterminer la composante normale F_{01_y}, il est nécessaire de développer l'équation de la dynamique pour le bipède complet :

$$\sum_{i=1}^{5} m_i g\,(G_i) = \sum_{i=1}^{5} - m_i g Y_0 + R(S_0 \rightarrow S_1) + R(S_0 \rightarrow S_4)$$

où $R(S_0 \rightarrow S_4) = F_{05_x} X_0 + F_{05_y} Y_0$ (F_{05_x} et F_{05_y} traitées comme variables de commande)

En posant les facteurs constants suivants :

$$CG(1) = m_1 a_1 + m_{2345} r_1$$

$$CG(2) = m_2 a_2 + m_{345} r_2$$

$$CG(3) = m_3 a_3 + m_4 r_3$$

$$CG(4) = m_4 a_4$$

$$CG(5) = m_5 a_5$$

et les expressions variables suivantes :

$$\begin{aligned} XE(i) &= -\ddot{q}_i Si - \dot{q}_i^2 Ci \\ YE(i) &= \ddot{q}_i Ci - \dot{q}_i^2 Si \end{aligned} \quad , \quad i = 1,...,5 \quad ,$$

la projection sur X_0 et Y_0 de (A.1) nous permet d'exprimer les composantes tangentielle et normale de la force de contact en O_1 :

$$\begin{aligned} F_{01_x} &= \sum_{i=1}^{5} CG(i) \times XE(i) - F_{05_x} \\ F_{01_y} &= Mg + \sum_{i=1}^{5} CG(i) \times YE(i) - F_{05_y} \end{aligned} \qquad \text{(III.18)}$$

où $M = \sum_{i=1}^{5} m_i$

Les conditions de contact (I.34) se traduisent ici par la condition d'unilatéralité :

$$0 < F_{O1_y}$$

et la condition de non-glissement :

$$\left| F_{O1_x} \right| < f \; F_{O1_y}$$

Nous vérifions a posteriori que les solutions optimales obtenues satisfont ces conditions en utilisant les formulations (III.18).

III.3.1.6 Résultats numériques

Nous présentons dans ce paragraphe deux simulations réalisées pour le bipède plan à 5 corps. La première montre un mouvement optimal obtenu lorsque le bipède se trouve en phase de double appui. Elle est suivie d'une deuxième simulation présentant son évolution en phase de simple appui.

Ces résultats ont été obtenus avec les données géométriques et inertielle de RABBIT (cf. Tableau III–1).

Les configurations initiales et finales en positions et en vitesses de la phase de double appui ont calculées à partir des données suivantes (cf. §III.3.1.1) :

- la longueur de pas, LPAS, est égale à 45cm

- les positions initiales et finales (en cm) de la hanche, dans un repère centré en O_1 sont : (15,32 ; 70,0) et (25,56 ; 70,0)

- les composantes de la vitesse de la hanche à l'instant initial et final (en m/s) sont : (0,99 ; 0) et (1,0 ; 0) soit une vitesse moyenne de progression de 3,58 km/h.

Phase de double appui

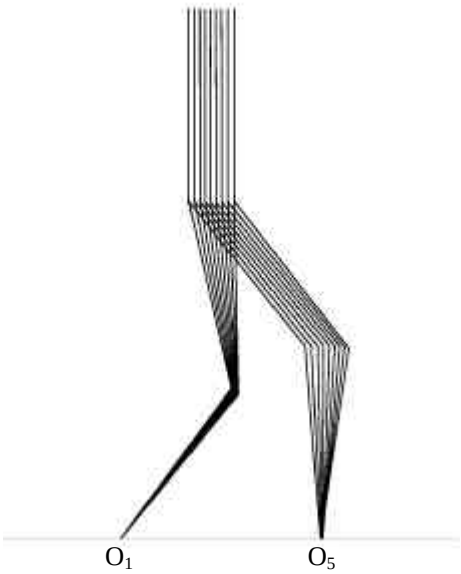


Figure III–12. Mouvement optimal du bipède 5 corps dans sa phase de double appui.

Le mouvement montré sur la Figure III–12 est effectué en une durée égale à 0,103s. La consommation énergétique est de 6,7 J. La gesticulation du tronc est imperceptible. La distance résiduelle $O_5O_5^{'}$ obtenue pour un facteur de pénalité r_d =150 est de l'ordre de 0,1 mm.

Les Figure III–13 et Figure III–14 montrent les évolutions des couples actionneurs, des vitesses articulaires et des forces de contact en O_1 et O_5. On peut remarquer que ces dernières restent positives durant toute la durée du mouvement, la condition d'unilatéralité aux contacts est donc bien assurée. De plus, les forces tangentielles restent très inférieures aux forces normales validant ainsi la condition de non-glissement.

Les notations suivantes ont été utilisées :

'ti_ar' pour tibia arrière ; 'cu_ar' pour cuisse arrière ; 'cu_av' pour cuisse ; 'ti_av' pour tibia avant.

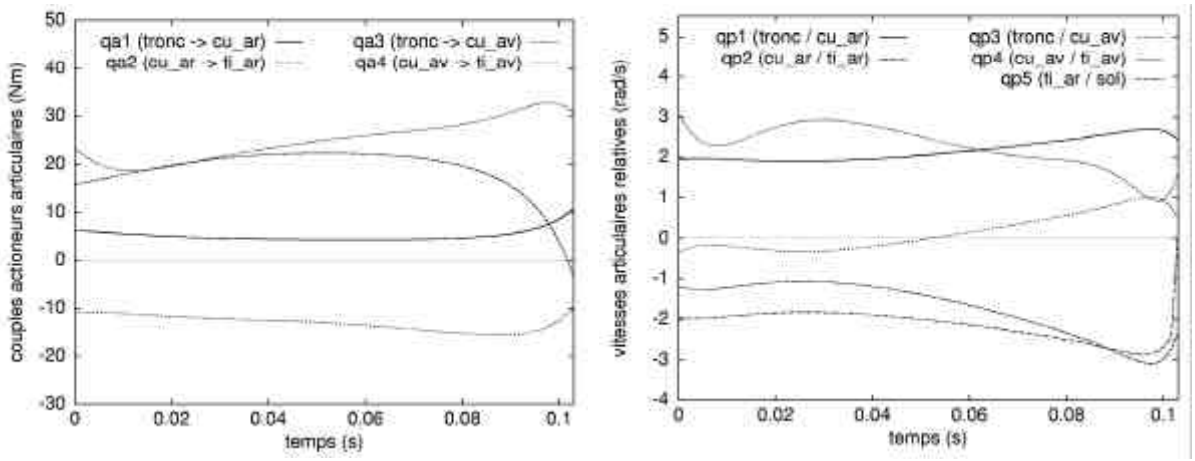


Figure III–13. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires en phase de double appui.

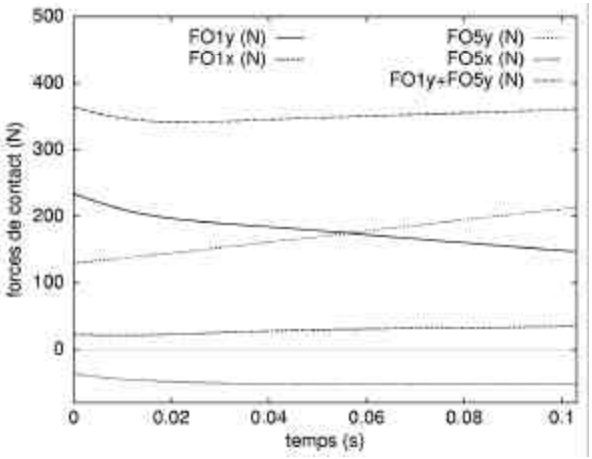


Figure III–14. Evolution des forces de contact en O_1 et O_5.

Phase de simple appui

Sur la Figure III–15 est représenté le mouvement optimal obtenu pour la phase de simple appui dont les configurations initiales et finales en positions et en vitesses correspondent à la phase de double appui précédente. On suppose donc, comme dans [ROS 98a,b] et [CHES 01], que la phase de simple appui s'achève par une reprise de contact de la jambe balancée sans impact. L'absence de choc à la reprise d'appui, préconisée par [BLA 92], régularise et simplifie d'une part la dynamique du système, et d'autre part doit garantir une meilleure stabilité de la loi de contrôle.

La durée de transfert est de 0,425s. On peut distinguer une gesticulation du tronc mais elle reste très légère. La dépense énergétique correspondant à ce mouvement est de 18,2 J.

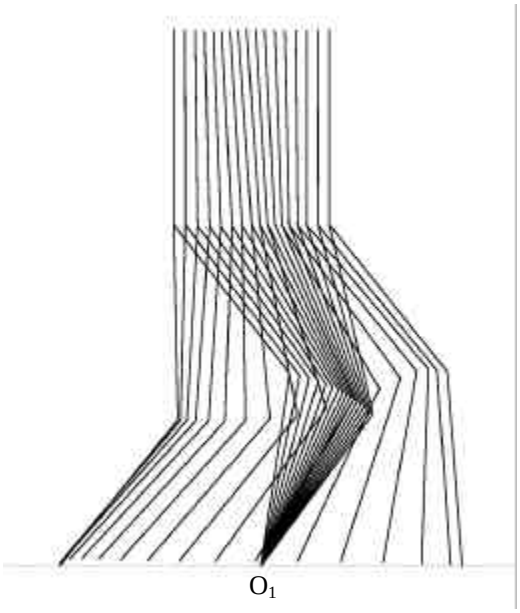


Figure III–15. Mouvement optimal du bipède 5 corps dans sa phase de simple appui.

Les couples actionneurs et les vitesses articulaires sont représentés sur les graphes de la Figure III–16.

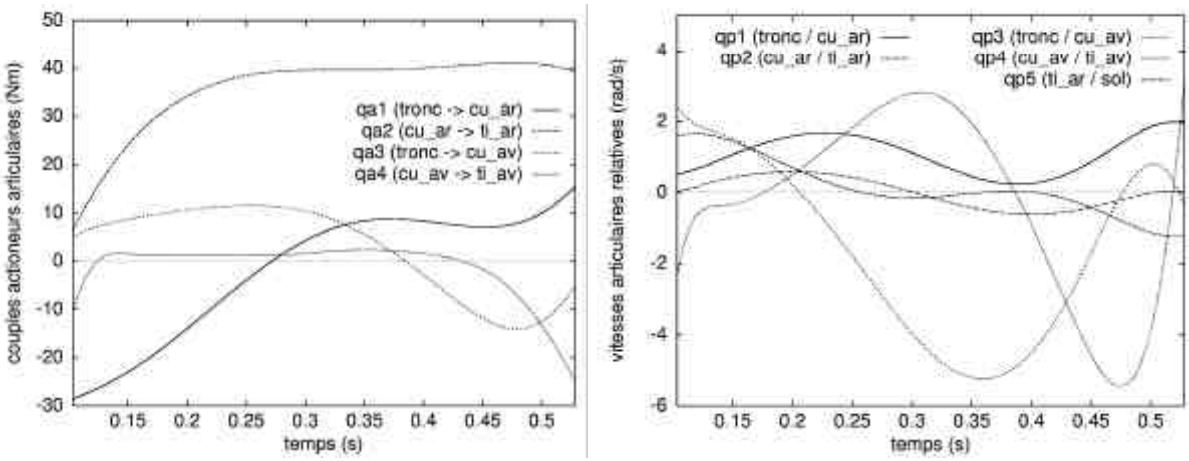


Figure III–16. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires en phase de simple appui.

La Figure III–17 nous montre que les conditions de contact sont bien respectées avec une composante tangentielle de la force de contact sur la jambe d'appui négligeable et une composante normale constante restituant le poids du bipède.

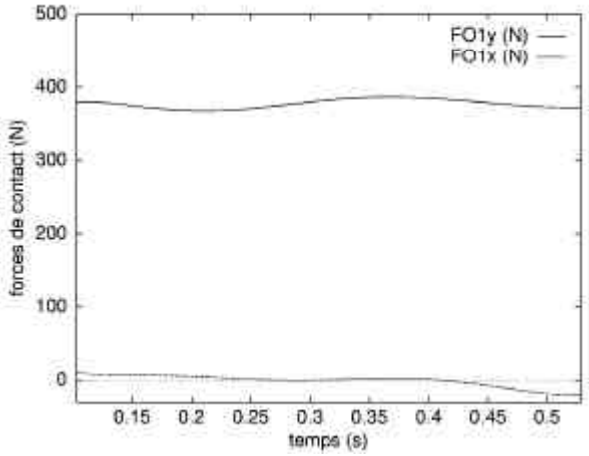


Figure III–17. Evolution des forces de contact.

La Figure III–18 rassemble sur le même graphe les deux phases du pas de marche optimisé. On peut noter que la progression du tronc se fait en quasi translation.

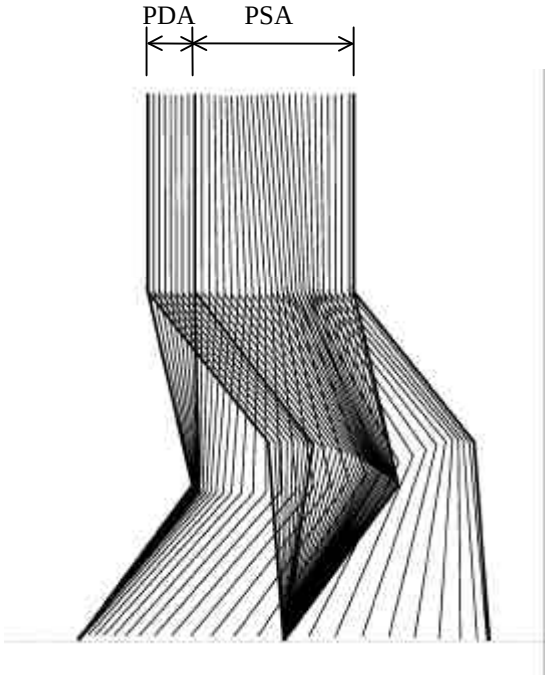


Figure III–18. Pas optimal complet avec double les phases de double appui (PDA) et simple appui (PSA).

III.3.2 Bipède plan à cinématique anthropomorphe

BIP (Figure III–19 et Figure III–20) est un robot marcheur à caractéristiques anthropomorphiques issu de la collaboration entre deux laboratoires français : BIP-INRIA de Grenoble et le LMS de Poitiers. Le principal objectif de la construction de ce robot est l'étude de la locomotion bipède, humaine et mécanique.

L'ensemble des mobilités de BIP doivent lui permettre de marcher sur un sol plan horizontal ou légèrement incliné, de monter ou descendre des escaliers, de tourner, et aussi d'adopter un certain nombre de postures anthropomorphes. C'est pourquoi les principaux paramètres cinématiques et dynamiques du robot ont été choisis pour se rapprocher au mieux de ceux du modèle humain. L'être humain possède environ 350 degrés de liberté [VUK 90]. Il a donc été indispensable de sélectionner les principales articulations nécessaires au robot afin qu'il puisse reproduire du mieux possible une allure de marche humaine.

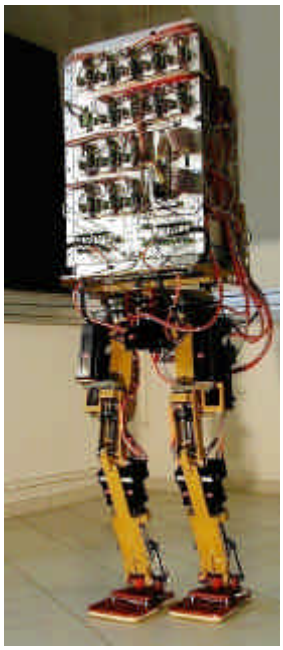


Figure III–19. Robot bipède BIP.

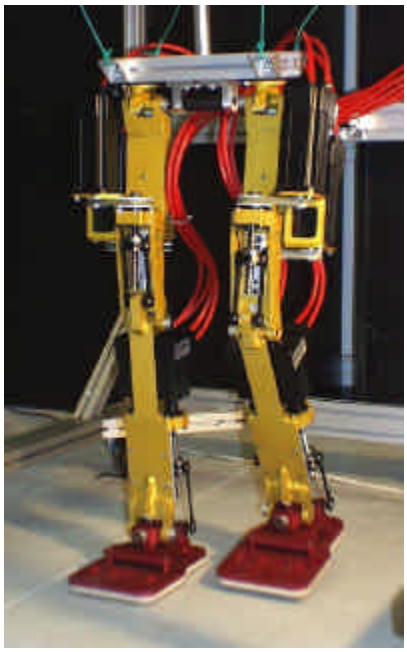


Figure III–20. Système locomoteur de BIP.

Ainsi, dans sa version finale, BIP comporte 15 articulations actives (voir Figure III–21). Ce choix a été fait dans [SAR 98,99] en sachant qu'un modèle anthropomorphe minimal dans le plan sagittal possède 7 corps (1 pour le pelvis-tronc, 2 pour les cuisses, 2 pour les genoux et 2 pour les pieds) et 6 articulations parallèles (2 articulations hanches, 2 articulations genoux et 2

articulations chevilles) pour le mouvement de flexion-extension (Figure III–22a). Pour pouvoir permettre un changement de direction au cours de l'évolution du robot, le pelvis et le tronc ont été divisés en deux parties à rotation indépendante autour de leur axe vertical, et une rotation verticale a été ajoutée à chaque hanche (Figure III–22a). Afin de contrôler l'équilibre latéral du mouvement dans le plan frontal et de permettre le transfert d'un pied à l'autre, 5 degrés de liberté supplémentaires, parallèles à la direction horizontale du mouvement de marche, ont été ajoutés au niveau des chevilles, hanches et de la liaison pelvis-tronc. La 15ème articulation motorisée se situe entre le pelvis et le tronc autorisant à ce dernier une flexion plus aisée (Figure III–22b).

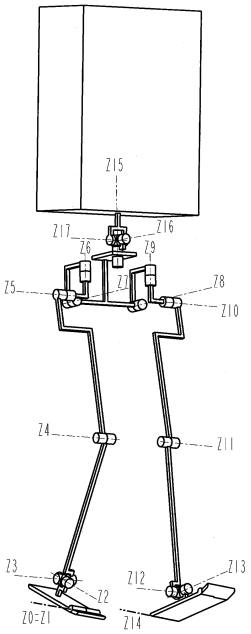


Figure III–21. Agencement cinématique de BIP ([SAR 98,99]).

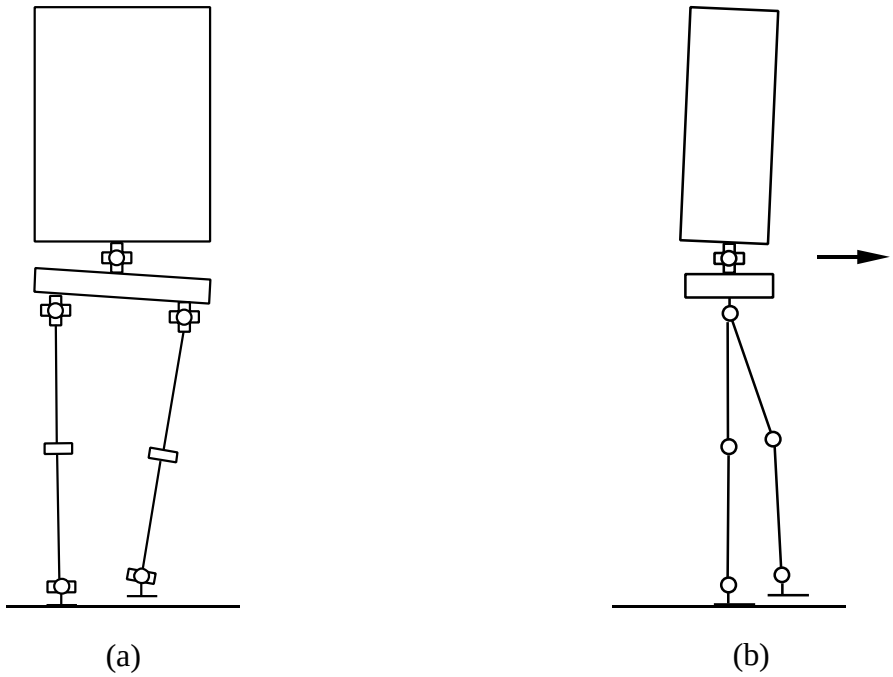


Figure III–22. Vues frontale et sagittale de BIP.

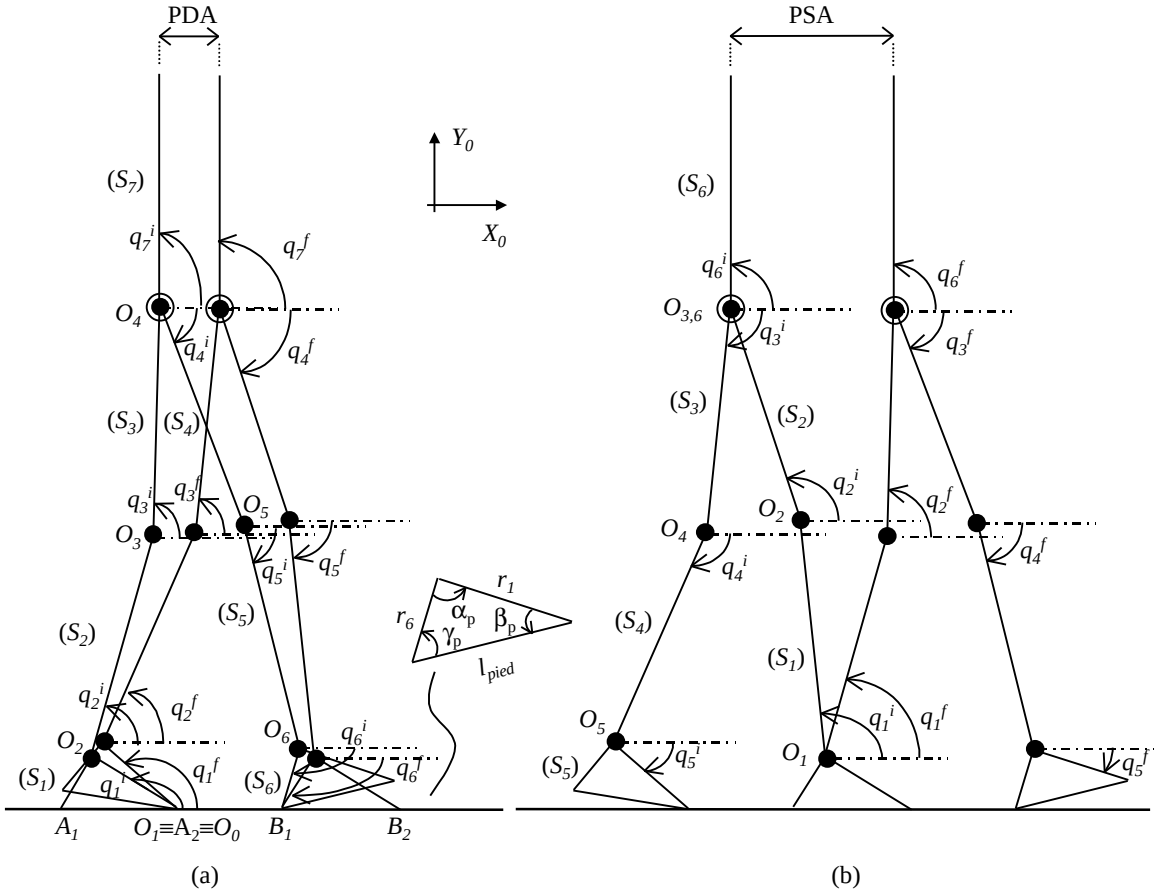
III.3.2.1 Caractéristiques cinématiques du bipède plan à sept corps

Le problème d'optimisation que nous allons traiter sera formulé sur la base d'une représentation de BIP dans le plan sagittal. C'est une modélisation de type anthropomorphe à 7 degrés de liberté en phase de double appui, et 6 degrés de liberté en phase de simple appui (le pied de la jambe d'appui restant à plat sur le sol en phase de balancement).

La Figure III–23 montre le schéma du bipède à l'instant initial et à l'instant final des deux phases de simple et double appui. Ce modèle est constitué de 7 corps segmentaires rigides matérialisant les 2 pieds, les 2 tibias, les 2 cuisses et le tronc.

Une telle représentation comporte 7 articulations en phase de double appui : l'articulation pointe de pied, les deux articulations cheville, les deux articulations genou, et les deux articulations à la hanche. Ces deux dernières sont coaxiales dans le modèle présenté.

Durant la phase de simple appui, nous supposons que le pied porteur reste à plat sur le sol. Cela revient à poser $q_1 = cste$ ($\dot{q}_1 = 0, \ddot{q}_1 = 0$). La configuration d'étude est dans ce cas réduite à 6 paramètres indépendants.



(a) (b)

Figure III–23. Paramétrage du bipède plan à 7 corps en phase de double appui (a) et de simple appui (b)

Le dimensionnement du bipède est déterminé par les données suivantes définies sur la base de la représentation schématique de la Figure III–23a :

- Longueurs segmentaires r_i de S_i (distance inter-articulaire) :

$$i \leq 5,\ r_i = \|O_i O_{i+1}\|,\ r_6 = \|O_6 B_1\|$$

- Vecteurs unitaires attachés aux corps segmentaires S_i :

$$i \leq 5,\ X_i = O_i O_{i+1} / r_i,\ X_6 = O_6 B_1 / r_6,\ X_7 = O_7 G_7 / \|O_7 G_7\|$$

$$i \leq 7,\ Y_i = Z_0 \wedge X_i,\ Z_0 = X_0 \wedge Y_0$$

- Coordonnées locales du centre d'inertie G_i de S_i :

$$i \leq 7,\ O_i G_i = a_i X_i + b_i Y_i$$

- m_i , masse de S_i

- $I_i = I_{O_i Z_0}(S_i)$, moment d'inertie de S_i par rapport à l'axe articulaire $(O_i ; Z_0)$

Le paramétrage introduit est un paramétrage absolu défini par les angles orientés :

$$q_i = (X_0, X_i)_{Z_0}$$

Pour la suite, on introduit les notations suivantes :

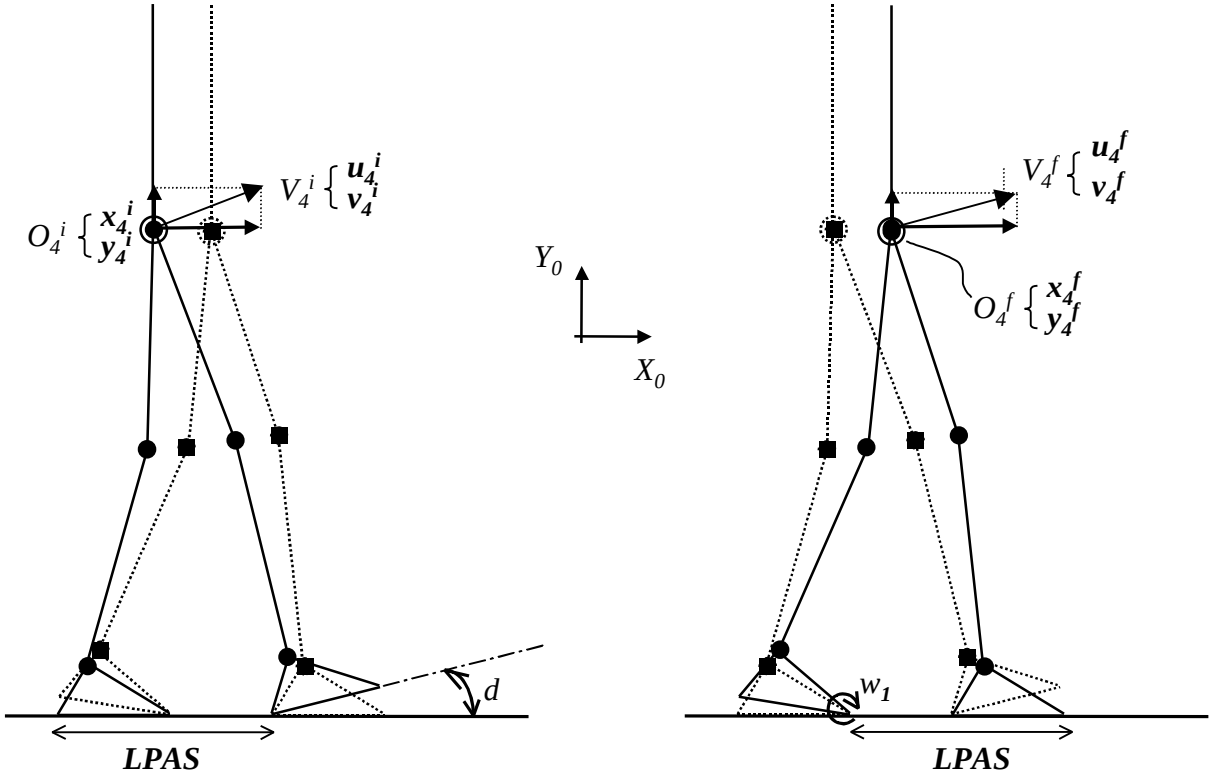
$q = (q_1,..., q_7)^T$, vecteur de la configuration d'étude du système

$\dot{q} = (\dot{q}_1,..., \dot{q}_7)^T$, vecteur des vitesses articulaires

$\ddot{q} = (\ddot{q}_1,..., \ddot{q}_7)^T$, vecteur des accélérations articulaires

Données définissant un pas de marche

Afin de définir complètement un pas de marche dans ses configurations initiales et finales, en positions et en vitesses, il est nécessaire, comme pour le cas du bipède à 5 corps, d'introduire certaines données. Celles-ci sont indiquées sur les schémas de la Figure III–24.



(a) Configuration initiale à $t=t_0$ (b) Configuration finale à $t=t_1$

Figure III–24. Schématisation des données minimales définissant un pas de marche en phase de double appui, à l'état initial (a) et à l'état final (b) pour le bipède 7 corps.

Ces données permettent de spécifier les postures du bipède à l'instant initial et à l'instant final pour la phase de double appui.

A l'instant initial, si l'on suppose que le pied arrière est à plat et le pied avant en appui talon, ces données sont (schéma (a) de la Figure III–24) :

- *LPAS*, la longueur de pas,
- x_4^i, y_4^i, les coordonnées du centre articulaire O_4^i de la hanche,
- u_4^i, v_4^i, les composantes de la vitesse initiale du point O_4^i,
- d , l'angle que fait le pied avant avec le sol.

De la même façon, à l'instant final, le pied avant est supposé à plat et le pied arrière en contact au sol par la pointe de pied (schéma (b) de la Figure III–24), les données minimales choisies sont :

- x_4^f , y_4^f (resp. u_4^f , v_4^f), les coordonnées (resp. les composantes de vitesse) finales du centre articulaire O_4^f de la hanche,
- w_1, la vitesse de rotation du pied arrière sur sa pointe avant $(w_1 \equiv \dot{q}_1^f)$.

Détermination des conditions cinématiques de transition

Sur la base des données précédentes, les configurations articulaires initiales $(q_k^i\ ,\ k = 1,...,7)$ et finales $(q_k^f\ ,\ k = 1,...,7)$ de la phase de double appui, ainsi que les vitesses $(\dot{q}_k^i$ et $\dot{q}_k^f\ ,\ k = 1,...,7)$ peuvent être complètement déterminées. La procédure permettant d'aboutir à leurs expressions est décrite dans l'annexe A. Ces configurations en positions et en vitesses sont les suivantes :

Positions articulaires initiales	Vitesses articulaires initiales
q_1^i donné	$\dot{q}_1^i = 0$
$q_2^i = ATAN2(S2^i, C2^i)$	$\dot{q}_2^i = -\dfrac{u_4^i C3^i + v_4^i S3^i}{r_2 \sin(q_2^i - q_3^i)}$

$$q_3^i = a_1^i + Arc\cos(\frac{c_1^i}{a_1^i}\cos a_1^i)$$

$$q_4^i = ATAN2(S4^i, C4^i)$$

$$q_5^i = a_2^i - Arc\cos(\frac{c_2^i}{a_2^i}\cos a_2^i)$$

$$q_6^i = b_p + d - p$$

q_7^i, valeur à choisir, égale ou voisine de $p/2$

$$\dot{q}_3^i = \frac{u_4^i C2^i + v_4^i S2^i}{r_3 \sin(q_2^i - q_3^i)}$$

$$\dot{q}_4^i = \frac{u_4^i (r_5 C5^i + r_6 C6^i) + v_4^i (r_5 S5^i + r_6 S6^i)}{r_4[r_5 \sin(q_4^i - q_5^i) + r_6 \sin(q_4^i - q_6^i)]}$$

$$\dot{q}_5^i = \dot{q}_6^i = -\frac{u_4^i C4^i + v_4^i S4^i}{r_5 \sin(q_4^i - q_5^i) + r_6 \sin(q_4^i - q_6^i)}$$

$$\dot{q}_7^i = 0$$

<u>Positions articulaires finales</u>

q_1^f donné

$$q_2^f = ATAN2(S2^f, C2^f)$$

$$q_3^f = a_1^f + Arc\cos(\frac{c_1^f}{a_1^f}\cos a_1^f)$$

$$q_4^f = ATAN2(S4^f, C4^f)$$

$$q_5^f = a_2^f - Arc\cos(\frac{c_2^f}{a_2^f}\cos a_2^f)$$

$$q_6^f = b_p - p$$

q_7^f, valeur à choisir, égale ou voisine de $p/2$

<u>Vitesses articulaires finales</u>

$$\dot{q}_1^f = w_1$$

$$\dot{q}_2^f = -\frac{u_4^f C3^f + r_1 w_1 \sin(q_1^f - q_3^f)}{r_2 \sin(q_2^f - q_3^f)}$$

$$\dot{q}_3^f = \frac{u_4^f C2^f + r_1 w_1 \sin(q_1^f - q_2^f)}{r_3 \sin(q_2^f - q_3^f)}$$

$$\dot{q}_4^f = \frac{u_4^f C5^f}{r_4 \sin(q_4^f - q_5^f)}$$

$$\dot{q}_5^f = -\frac{u_4^f C4^f}{r_5 \sin(q_4^f - q_5^f)}$$

$$\dot{q}_6^f = \dot{q}_7^f = 0$$

où Ck^i, Sk^i (resp. Ck^f, Sk^f) sont les notations utilisées pour définir $\cos q_k$, $\sin q_k$ à l'instant initial (resp. à l'instant final) et où l'on a posé (cf. annexe A) :

$$a_1^i \equiv x_4^i - r_1 C1^i \qquad a_1^f \equiv x_4^f - r_1 C1^f$$

$$b_1^i \equiv y_4^i - r_1 S1^i \qquad b_1^f \equiv y_4^f - r_1 S1^f$$

$$c_1^i \equiv (a_1^{i\,2} + b_1^{i\,2} + r_3^2 - r_2^2)/2r_3 \qquad c_1^f \equiv (a_1^{f\,2} + b_1^{f\,2} + r_3^2 - r_2^2)/2r_3$$

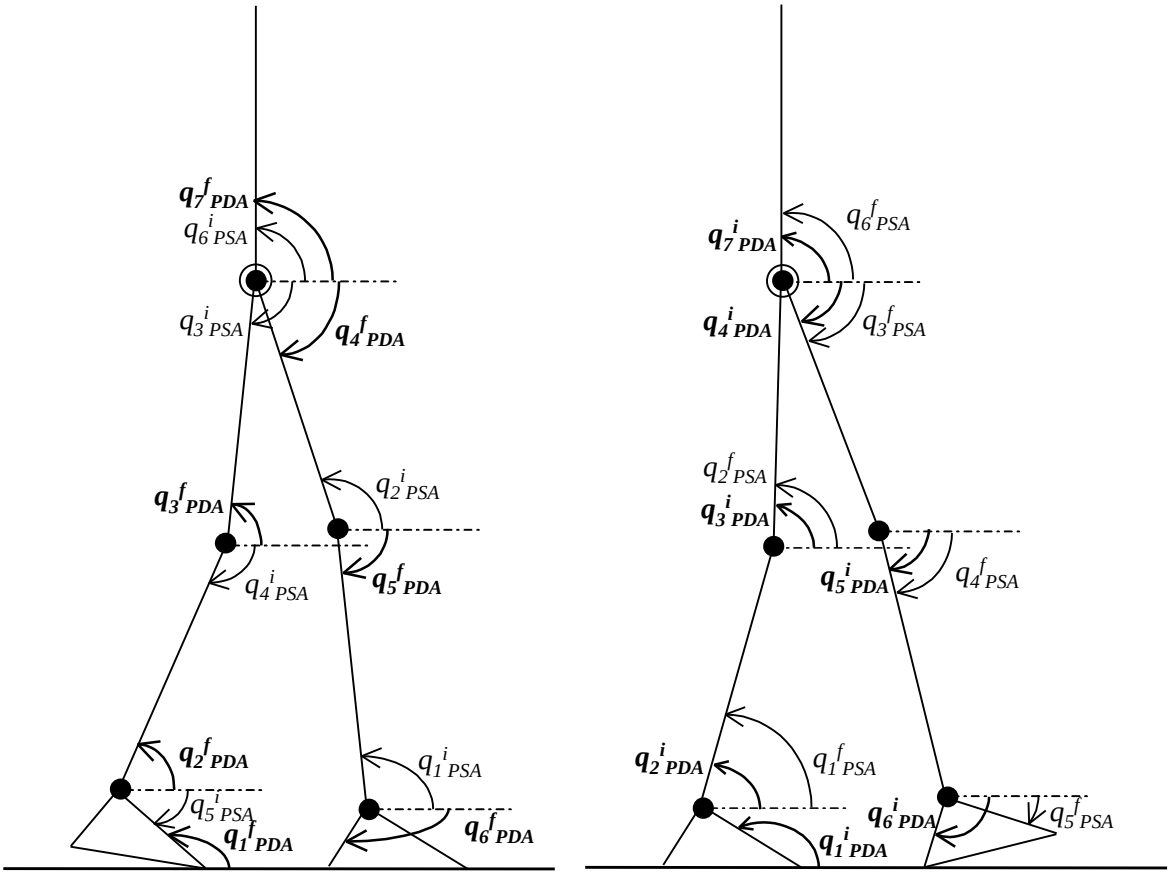
$$a_1^i = Arctg\,\frac{b_1^i}{a_1^i} \qquad a_1^f = Arctg\,\frac{b_1^f}{a_1^f}$$

$$a_2^i \equiv L_{PAS} - l_{pied} - r_6 C6^i - x_4^i \qquad a_2^f \equiv L_{PAS} - l_{pied} - r_6 C6^f - x_4^f$$

$$b_2^i \equiv -r_6 S6^i - y_4^i \qquad b_2^f \equiv -r_6 S6^f - y_4^f$$

$$c_2^i \equiv (a_2^{i\,2} + b_2^{i\,2} + r_5^2 - r_4^2)/2r_5 \qquad c_2^f \equiv (a_2^{f\,2} + b_2^{f\,2} + r_5^2 - r_4^2)/2r_5$$

$$a_2^i = Arctg\,\frac{b_2^i}{a_2^i} \qquad a_2^f = Arctg\,\frac{b_2^f}{a_2^f}$$



(a) Transition $PDA^f \rightarrow PSA^i$ (b) Transition $PSA^f \rightarrow PDA^i$

Figure III–25. Schéma du bipède en positions de transition

Le schéma de la Figure III–25a représente le bipède lors de la transition de la phase de double appui vers la phase de simple appui. Les relations de passage au niveau positions et vitesses articulaires sont les suivantes :

Positions articulaires	Vitesses articulaires
$q^i_{1\,PSA} = q^f_{5\;PDA} + p$	$\dot{q}^i_{1\,PSA} = \dot{q}^f_{5\;PDA}$
$q^i_{2\,PSA} = q^f_{4\;PDA} + p$	$\dot{q}^i_{2\,PSA} = \dot{q}^f_{4\;PDA}$
$q^i_{3\,PSA} = q^f_{3\;PDA} - p$	$\dot{q}^i_{3\,PSA} = \dot{q}^f_{3\;PDA}$
$q^i_{4\,PSA} = q^f_{2\;PDA} - p$	$\dot{q}^i_{4\,PSA} = \dot{q}^f_{2\;PDA}$
$q^i_{5\,PSA} = q^f_{1\;PDA} - p$	$\dot{q}^i_{5\,PSA} = \dot{q}^f_{1\;PDA}$
$q^i_{6\,PSA} = q^f_{7\;PDA}$	$\dot{q}^i_{6\,PSA} = \dot{q}^f_{7\;PDA}$

De la même façon, le passage de la phase finale de simple appui à la phase initiale de double appui (Figure III–25b) s'établit comme suit :

Positions articulaires	Vitesses articulaires
$q^f_{1\;PSA} = q^i_{2\,PDA}$	$\dot{q}^f_{1\;PSA} = \dot{q}^i_{2\,PDA}$
$q^f_{2\;PSA} = q^i_{3\,PDA}$	$\dot{q}^f_{2\;PSA} = \dot{q}^i_{3\,PDA}$
$q^f_{3\;PSA} = q^i_{4\,PDA}$	$\dot{q}^f_{3\;PSA} = \dot{q}^i_{4\,PDA}$
$q^f_{4\;PSA} = q^i_{5\,PDA}$	$\dot{q}^f_{4\;PSA} = \dot{q}^i_{5\,PDA}$
$q^f_{5\;PSA} = q^i_{6\,PDA} + a_{\;p}$	$\dot{q}^f_{5\;PSA} = \dot{q}^i_{6\,PDA}$
$q^f_{6\;PSA} = q^i_{7\,PDA}$	$\dot{q}^f_{6\;PSA} = \dot{q}^i_{7\,PDA}$

III.3.2.2 Distribution des masses et inerties

Les paramètres géométriques du bipède BIP ont été choisis de façon à se rapprocher du modèle humain. La distribution des masses suit ce même principe d'anthropomorphie. De plus, BIP doit être capable de supporter les vitesses articulaires et des couples d'un ordre de

grandeur voisin de ce que l'on observe chez un humain de taille analogue durant une marche "normale".

Chaque jambe pèse 19kg, le pelvis 18kg et le tronc 50kg. Le poids des moteurs, 26kg, et les unités de puissance associées, environ 20kg, représentent une part importante de la masse totale du bipède.

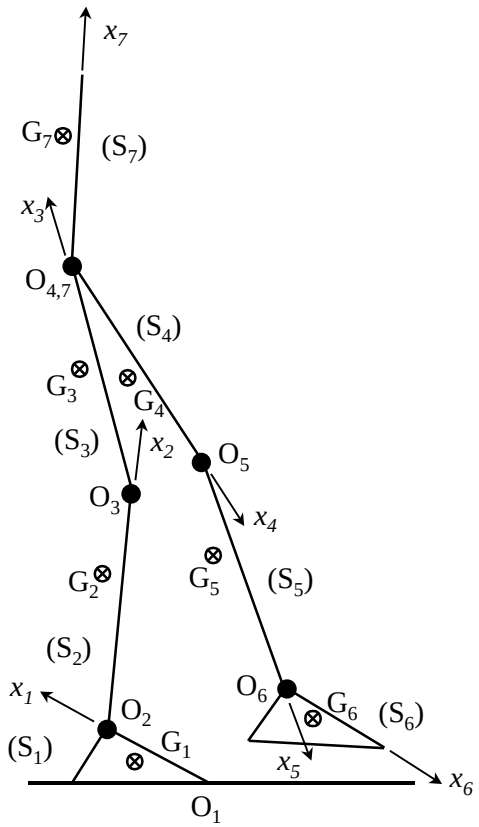


Figure III–26. Schéma associé au Tableau III–3.

Le Tableau III–3 indique la répartition géométrique, massique et inertielle de BIP dans sa représentation dans le plan sagittal (voir Figure III–26). Pour chaque segment (S_i) sont indiquées les données suivantes :

- la longueur : $r_i = O_i O_{i+1}$

- la masse m_i

- la position du centre de masse G_i : $a_i = O_i G_i . x_i$, $b_i = O_i G_i . y_i$

- le moment d'inertie : $I_i = I_{O_i Z_0}$

Ces données sont définies relativement au repère local $(O_i; X_i, Y_i, Z_0)$ attaché à chaque corps S_i, en suivant le paramétrage décrivant la phase de double appui, et compte tenu des inerties équivalentes des rotors des moteurs.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
r_i **(m)**	0.188	0.410	0.410	0.410	0.410	0.29	-
m_i **(kg)**	2.34	6.11	10.9	10.9	6.11	2.34	66.11
a_i **(m)**	0.143	0.258	0.250	0.160	0.152	0.045	0.391
b_i **(m)**	0.042	0.028	0.005	-0.005	-0.028	-0.042	0.029
I_i **(m^2.kg)**	0.1	0.69	1.31	1.02	0.72	0.07	18.99

Tableau III–3. Dimensionnement géométrique, massique et inertiel de BIP.

III.3.2.3 Modèle dynamique

Dans cette partie nous allons établir les équations du mouvement du bipède plan à 7 corps en phase de double appui. Il s'agit du développement des équations du système différentiel (II.26) adapté à notre modèle schématisé sur la Figure III–23a.

a) Matrice de masse

L'énergie cinétique du bipède (système S) est représentée par la forme quadratique suivante :

$$T(S) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$$

La matrice M qui définit cette forme quadratique est appelé matrice de masse (ou matrice d'inertie selon les auteurs).

Comme $T(S) = \sum_{i=1}^{7} T(S_i)$, la formulation détaillée de $T(S)$ est réalisée en Annexe B au moyen de celles des $T(S_i)$. Du fait que le système est plan, et par le choix ainsi rendu possible d'un paramétrage absolu, on aboutit à l'expression tout à fait simple suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M11 & E12\,C21 & E13\,C31 & E14\,C41 & E15\,C51 & E16\,C61 - F16\,S61 & E17\,C71 \\ & M22 & E23\,C32 & E24\,C42 & E25\,C52 & E26\,C62 - F26\,S62 & E27\,C72 \\ & & M33 & E34\,C43 & E35\,C53 & E36\,C63 - F36\,S63 & E37\,C73 \\ & & & M44 & E45\,C54 & E46\,C64 - F46\,S64 & 0 \\ & & & & M55 & E56\,C65 - F56\,S65 & 0 \\ & & Sym. & & & M66 & 0 \\ & & & & & & M77 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.19)}$$

où sont utilisées les notations abrégées :

$$Cij \equiv \cos(q_i - q_j), \quad Sij \equiv \sin(q_i - q_j)$$

Tous les termes diagonaux et tous les coefficients E_{ij} et F_{ij} sont des expressions constantes détaillées en Annexe B.

Les dérivés de M par rapport aux paramètres articulaires $q_1,\ldots,q_7$, soit $M,_1,\ldots,M,_7$, sont nécessaires pour la suite. Une même variable q_i ne figurant que dans les termes situés sur la ligne et la colonne de rang *i*, il devient évident que la matrice dérivée $M,_i$ n'admet que des termes nuls en dehors de cette ligne et de cette colonne. Ceci a pour effet de simplifier considérablement la formulation des équations de Hamilton. Les matrices $M,_i$ sont détaillées en Annexe B.

b) Efforts appliqués

Les efforts appliqués au bipède sont :

- les forces de pesanteur,
- les couples actionneurs articulaires,
- les couples d'amortissement articulaires,
- les forces de contact exercées par le sol sur le pied porteur,
- les forces de liaison appliquées au pied libéré en phase de double appui.

Les travaux virtuels de ces efforts permettant de formuler les forces généralisées Q_i participant à l'écriture des seconds membres des équations de Lagrange sont détaillés en annexe C.

c) Ecriture des forces généralisées

Le travail virtuel des efforts appliqués est la somme des expressions (C.1) à (C.4) de l'annexe C. Cette somme se structure sous la forme :

$$W^* = \sum_{i=1}^{7} Q_i dq_i$$

où les Q_i sont les forces généralisées qui composent classiquement les seconds membres des équations de Lagrange.

Nous introduisons dans la formulation des Q_i les notations définies dans le chapitre II en (II.36), pour poser :

$$u = (u_0, u_1, ..., u_9)^T \equiv (0, C_{12}^a, C_{23}^a, C_{37}^a, C_{74}^a, C_{45}^a, C_{56}^a, FB_1, FB_2, FB_{12})^T$$

et définir ainsi le vecteur des variables de commande du problème d'optimisation dynamique à résoudre.

Rappelons aussi que les $\dot{q}_i$ sont représentés par les fonctions $F_i(q, p) \equiv G_i(x)$ des seconds membres du premier sous-système des équations de Hamilton (chapitre I, (I.14a), (I.21a), (I.22a)).

On obtient ainsi les expressions des Q_i en termes de u_i et de F_i (ou G_i) :

$$Q_1 = -V_1 C1 + VB1\, S1 + CVC(F_2 - F_1) - u_1 + r_1 C1\,(u_7 + u_8) - r_1 S1\, u_9$$

$$Q_2 = -V_2 C2 - CVC(F_2 - F_1) + CVG(F_3 - F_2) + u_1 - u_2 + r_2 C2\,(u_7 + u_8) - r_2 S2\, u_9$$

$$Q_3 = -V_3 C3 - CVG(F_3 - F_2) + CVH(F_7 - F_3) + u_2 - u_3 + r_3 C3\,(u_7 + u_8) - r_3 S3\, u_9$$

$$Q_4 = -V_4 C4 - CVH(F_4 - F_7) + CVG(F_5 - F_4) + u_4 - u_5 + r_4 C4\,(u_7 + u_8) - r_4 S4\, u_9$$

$$Q_5 = -V_5 C5 - CVG(F_5 - F_4) + CVC(F_6 - F_5) + u_5 - u_6 + r_5 C5\,(u_7 + u_8) - r_5 S5\, u_9$$

$$Q_6 = -V_6 C6 + VB6\, S6 - CVC(F_6 - F_5) + u_6 + r_6 C6\, u_7 + r_7 \cos(q_6 + a_p)\, u_8 - r_6 S6\, u_9$$

$$Q_7 = -V_7 C7 - CVH(F_7 - F_3) + CVH(F_4 - F_7) + u_3 - u_4$$

écriture où les facteurs constants *CVC*, *CVG* et *CVH* désignent les coefficients d'amortissement visqueux à la cheville, au genou et à la hanche respectivement.

Rappelons que dans les équations de Hamilton (I.22b), les Q_i représentent les termes suivants :

$$Q_i \equiv -V,_i(x) + Q_i^d(x) + (B(x)u)_i$$

III.3.2.4 Critère et contraintes

Afin de satisfaire les relations de fermeture de chaîne (II.29) et (II.30) nous allons chercher à minimiser la distance $\left\| B_1 B_1^{'} \right\|$ ainsi que l'angle d'abattée d . Pour cela, nous devons exprimer ces deux grandeurs en fonction des paramètres de configuration, soit :

$$\left\| B_1 B_1^{'}(q) \right\|^2 = (l_{pied} - LPAS + r_1 C1 + ... + r_6 C6)^2 + (r_1 S1 + ... + r_6 S6)^2 \qquad \text{(III.20a)}$$

et, compte tenu de la géométrie du pied :

$$d(q) = q_6 + h \qquad \text{(III.20b)}$$

avec $h = p - Arc\cos \dfrac{r_6^2 + l_{pied}^2 - r_1^2}{2 l_{pied} r_6}$

Comme nous l'avons vu dans le §II.4.5, nous injectons ces contraintes dans le lagrangien (II.6) pour former le lagrangien augmenté :

$$\ell_{r_d, r_a}(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} m_c \sum_{i=1}^{6} x_i (g_i u_i)^2 + \frac{1}{2} m_f \sum_{i=7}^{9} x_i (g_i u_i)^2 + \frac{1}{2} r_d g_{10} \left\| B_1 B_1^{'} \right\|^2 + \frac{1}{2} r_a d^2 \qquad \text{(III.21)}$$

où

m_c , m_f sont des coefficients de pondération (cf. (III.7)),

r_d est un facteur de pénalité (cf. (III.7)),

r_a est le facteur de pénalité relatif à l'angle d'abattée d .

Le critère à minimiser s'exprime alors comme en (II.45) sous la forme :

$$J_{r_d, r_a}(u) = \int_{t_0}^{t_1} \ell_{r_d, r_a}(x(t), u(t)) dt \, .$$

III.3.2.5 Conditions d'optimalité

Les conditions d'optimalité ont été formulées dans le chapitre II (§II.3.6 et II.4.6). Il s'agit simplement d'apporter ici des précisions sur la formulation de la commande optimale, et sur celle du système adjoint.

a) Expression de la commande optimale

Supposons d'abord que les variables de commande u_i ne sont ni bornées, ni contraintes. Alors l'expression de la commande optimale est donnée par l'intermédiaire de la condition de stationnarité de l'hamiltonien (II.23) :

$$H_{,u} = 0$$

L'hamiltonien (II.19) a l'expression suivante :

$$H(x,u,w) = \sum_{i=1}^{14} w_i(t)\ f_i(x,u) - \frac{1}{2} m_c \sum_{i=1}^{6} x_i (g_i u_i)^2 - \frac{1}{2} m_f \sum_{i=7}^{9} x_i (g_i u_i)^2 - \frac{1}{2} r_d g_{10} \left\| B_1 B_1^{'} \right\|^2 - \frac{1}{2} r_a d^2$$

où l'expression des f_i est donnée par l'écriture explicite de l'équation d'état (II.1) du système.

Ou encore, en masquant les termes constants par rapport à u :

$$\begin{aligned} H = {} & [termes\ c^{ts}\ par\ rapport\ à\ u] + w_8[-u_1 + r_1 C1(u_7 + u_8) - r_1 S1 u_9] \\ & + w_9[u_1 - u_2 + r_2 C2(u_7 + u_8) - r_2 S2 u_9] + w_{10}[u_2 - u_3 + r_3 C3(u_7 + u_8) - r_3 S3 u_9] \\ & + w_{11}[u_4 - u_5 + r_4 C4(u_7 + u_8) - r_4 S4 u_9] + w_{12}[u_5 - u_6 + r_5 C5(u_7 + u_8) - r_5 S5 u_9] \\ & + w_{13}[u_6 + r_6 C6 u_7 + r_7 \cos(x_6 + a_p) u_8 - r_6 S6 u_9] + w_{14}[u_3 - u_4] \\ & - \frac{1}{2} m_c \sum_{i=1}^{6} x_i (g_i u_i)^2 - \frac{1}{2} m_f \sum_{i=7}^{9} x_i (g_i u_i)^2 \end{aligned}$$

Pour $i = 1...9$, les conditions $H_{,u_i} = 0$ donne alors :

$$u_1 = (w_9 - w_8)/(m_c x_1 g_1^2)$$

$$u_2 = (w_{10} - w_9)/(m_c x_2 g_2^2)$$

$$u_3 = (w_{14} - w_{10})/(m_c x_3 g_3^2)$$

$$u_4 = (w_{11} - w_{14})/(m_c x_4 g_4^2)$$

$$u_5 = (w_{12} - w_{11})/(m_c x_5 g_5^2)$$

$$u_6 = (w_{13} - w_{12})/(m_c x_6 g_6^2)$$

$$u_7 = \left(\sum_{i=1}^{6} w_{7+i} r_i Ci \right) / (m_f x_7 g_7^2)$$

$$u_8 = \left(\sum_{i=1}^{5} w_{7+i} r_i Ci + w_{13} \cos(x_6 + a_p) \right) / (m_f x_8 g_8^2)$$

$$u_9 = -\left(\sum_{i=1}^{6} w_{7+i} r_i Si \right) / (m_f x_9 g_9^2)$$

Si les u_i sont soumis à des bornes du type (II.37) et (II.38) alors les expressions ci-dessus sont à remplacer par leurs fonctions saturées respectives comme elles sont définies en (II.25).

b) Ecriture du système adjoint

L'équation adjointe (II.20) $\dot{w}(t) = -H,_x^T$ s'explicite de la manière suivante :

$$\dot{w}_i = -w^T F,_i + \ell_{r,i} \ , \ \ i = 1,...,14$$

où, compte tenu de (III.20a,b), et (III.21), on peut écrire :

$$\ell_r = \frac{1}{2} m_c \sum_{i=1}^{6} x_i (g_i u_i)^2 + \frac{1}{2} m_f \sum_{i=7}^{9} x_i (g_i u_i)^2 + \frac{1}{2} r_d g_{10} \left[\left(l_{pied} - LPAS + \sum_{i=1}^{6} r_i Ci \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{6} r_i Si \right)^2 \right]$$
$$+ \frac{1}{2} r_a (x_6 + h)^2$$

En posant

$$B1X = B_1 B_1^{'} \cdot X_0 = l_{pied} - LPAS + \sum_{i=1}^{6} r_i Ci$$

et

$$B1Y = B_1 B_1^{'} \cdot Y_0 = \sum_{i=1}^{6} r_i Si \ \ ,$$

les dérivées du lagrangien augmenté ℓ_r par rapport aux variables d'état x_i, $i = 1,...,14$, sont :

$$\ell_{r,i} = r_d \, g_{10} \, r_i [- Si \, B1X + Ci \, B1Y], \ i = 1,...,5$$

$$\ell_{r,6} = r_d \, g_{10} \, r_6 [- S6 \, B1X + C6 \, B1Y] + r_a (x_6 + h)$$

$$\ell_{r,k} = 0 \, , \ k = 8,...,14$$

Le système adjoint à 14 équations s'explicite alors sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = -\sum_{k=1}^{14} w_k F_{k,1} + r_d\, g_{10}\, r_1(-S1\, B1X + C1\, B1Y) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \dot{w}_5 = -\sum_{k=1}^{14} w_k F_{k,5} + r_d\, g_{10}\, r_5(-S5\, B1X + C5\, B1Y) \\ \dot{w}_6 = -\sum_{k=1}^{14} w_k F_{k,6} + r_d\, g_{10}\, r_6(-S6\, B1X + C6\, B1Y) + r_a(x_6 + h) \\ \dot{w}_j = -\sum_{k=1}^{14} w_k F_{k,j}\,, \quad j = 7,...,14 \end{cases}$$

III.3.2.6 Unilatéralité des forces d'appui sur le pied porteur en phase de balancement

Il s'agit d'exprimer, dans cette partie, les forces de contact, exercées par le sol sur le pied porteur en phase de simple appui, en fonction des paramètres de configuration du bipède schématisé sur la Figure III–23b. Ceci nous permet de vérifier le respect de l'unilatéralité du contact. Pour cela nous supposons que le contact entre le sol et le pied de la jambe d'appui est limité aux deux points B_1 et B_2 représentant les deux extrémités du pied d'appui (voir Figure III–27).

L'équation de la résultante dynamique pour le bipède complet à 6 segments mobiles permet d'aboutir aux composantes tangentielle et normale de la force $R(S_1 \to S_0)$ (notée R_{10}) (voir Figure III–27) appliquée sur le pied porteur (cf. annexe D) :

$$\begin{aligned} R_{10} \cdot X_0 \equiv R_{10_X} &= -\sum_{i=1}^{6} m_i g\,(G_i) \cdot X_0 \\ R_{10} \cdot Y_0 \equiv R_{10_Y} &= -\sum_{i=1}^{6} m_i g\,(G_i) \cdot Y_0 - \sum_{i=1}^{6} m_i g \end{aligned} \qquad \text{(III.22)}$$

En écrivant l'équilibre du pied porteur en B_1, on obtient les expressions désirées des composantes normales des réactions du sol sur le pied d'appui :

$$\begin{aligned} FB_2 \cdot Y_0 \equiv NB_2 &= \frac{1}{l}\left[C_{01} - (l-b)R_{10_Y} + aR_{10_X} + cm_0 g\right] \\ FB_1 \cdot Y_0 \equiv NB_1 &= m_0 g - R_{10_Y} - NB_2 \end{aligned}$$

où C_{01} désigne le couple exercé à la cheville par le pied sur le tibia (S_1), couple déterminé par le processus d'optimisation.

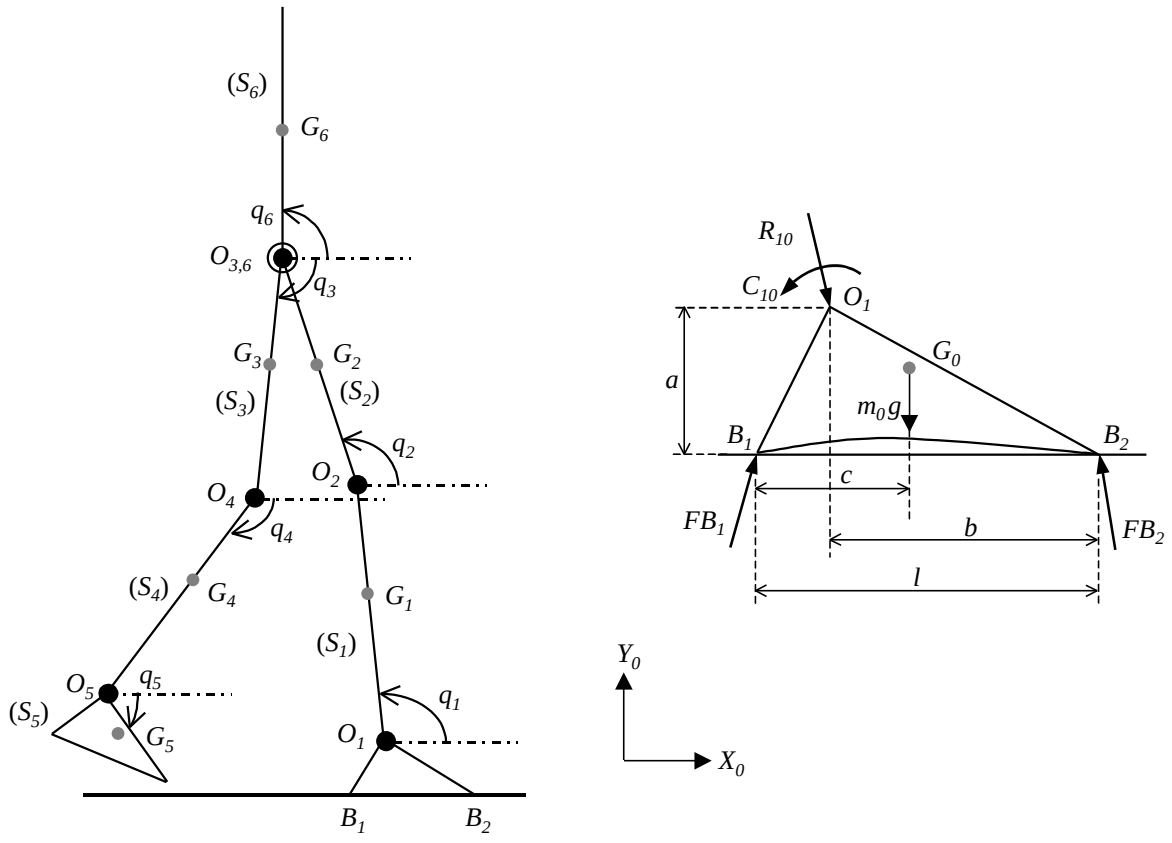


Figure III–27. Forces de contact appliquées au pied porteur en phase de simple appui

III.3.2.7 Unilatéralité des forces d'appui sur la pointe du pied arrière en phase de double appui

De la même façon que pour la phase de balancement, il est indispensable, lors de la phase de double appui, de s'assurer du respect de l'unilatéralité du contact sur le pied arrière.

Si l'on considère les notations de la Figure III–23a, et en supposant que dès le début de la phase de double appui le talon arrière écolle et donc que le contact pied-sol est un contact ponctuel au niveau de la pointe de pied, la condition d'unilatéralité sur le pied arrière est :

$$NA_2 > 0$$

L'équation de la dynamique appliquée au bipède complet à sept corps nous fournit directement l'expression des composantes normale et tangentielle de la force FA_2 appliquée sur le pied arrière (voir Figure III–28) :

$$FA_2 \cdot X_0 \equiv TA_2 = \sum_{i=1}^{7} m_i g\,(G_i) \cdot X_0 - R_{06} \cdot X_0$$
$$FA_2 \cdot Y_0 \equiv NA_2 = \sum_{i=1}^{7} m_i g\,(G_i) \cdot Y_0 + \sum_{i=1}^{7} m_i\, g - R_{06} \cdot Y_0$$

où R_{06} désigne la réaction du sol (S_0) sur le pied avant (S_6) :

$$R_{06} = FB_{12} X_0 + (FB_1 + FB_2) Y_0$$

Les deux composantes de la force de réaction sur le pied arrière peuvent donc s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} TA_2 &= \sum_{i=1}^{7} m_i g\,(G_i) \cdot X_0 - FB_{12} \\ NA_2 &= \sum_{i=1}^{7} m_i g\,(G_i) \cdot Y_0 + \sum_{i=1}^{7} m_i\, g - FB_1 - FB_2 \end{aligned} \qquad \text{(III.23)}$$

Rappelons que FB_1, FB_2 et FB_{12} sont des composantes du vecteur des variables de commande et sont donc fournies par le processus d'optimisation (voir §III.3.2.3.c).

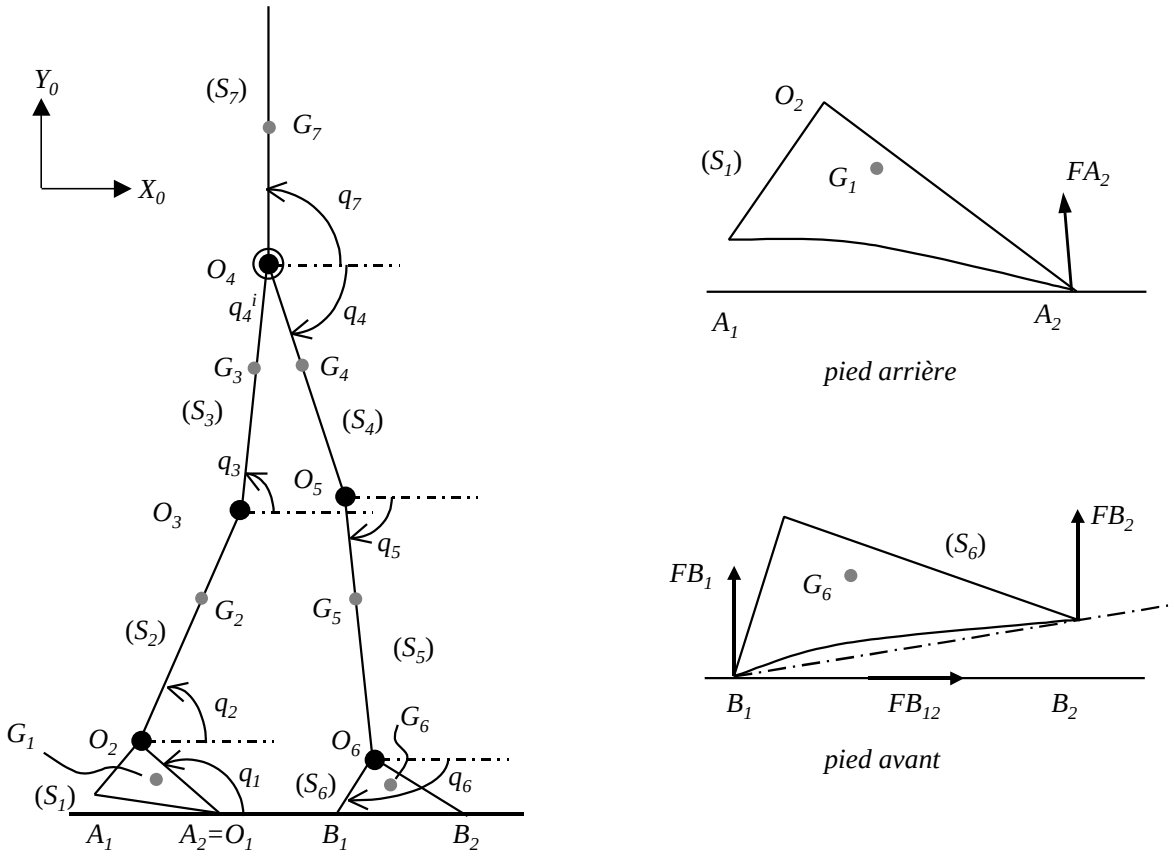


Figure III–28. Forces de contact avec le sol en phase de double appui

III.3.2.8 Résultats numériques

Nous présentons dans ce paragraphe un enchaînement de mouvements optimaux permettant de définir un cycle de marche complet avec pas de départ, pas cyclique et pas d'arrêt.

L'ensemble de ces résultats a été obtenu en utilisant le dimensionnement géométrique et inertiel de BIP (cf. Tableau III–3).

Les données minimales (Figure III–24) permettant de définir le pas de marche en phase de double appui sont les suivantes :

- la longueur de pas, LPAS=50cm
- les coordonnées initiales et finales de la hanche dans le repère centré en O_1 :

  $(x_4^i ; y_4^i)$=(7,0 ; 84,5) et $(x_4^f ; y_4^f)$=(20,0 ; 83) cm

- les composantes de la vitesse initiale et finale de la hanche :

  $(u_4^i ; v_4^i)$=(0,75 ; -0,2) et $(u_4^f ; v_4^f)$=(0,75 ; 0,05) m/s

- l'angle que fait le pied avant avec le sol à l'état initial : d =11°
- la vitesse de rotation du pied arrière à l'état final : $w_1 \equiv \dot{q}_1^f$ = -5 rad/s

La vitesse de progression du bipède est de 2,7 km/h.

Les configurations en positions et vitesses des phases de simple appui sont déduites des données caractérisant la phase de double appui que nous venons de spécifier.

a) <u>Phase de simple appui à vitesse initiale nulle</u>

Le premier mouvement optimal présenté (Figure III–29) correspond à un début de pas. Dans la posture initiale du robot, les deux jambes sont jointes, et les pieds sont à plat.

La durée de transfert est de 0,45s.

Le tronc gesticule très faiblement. Le dégagement du pied balancé se fait grâce à l'activation de la contrainte anti-collision du pied avec le sol.

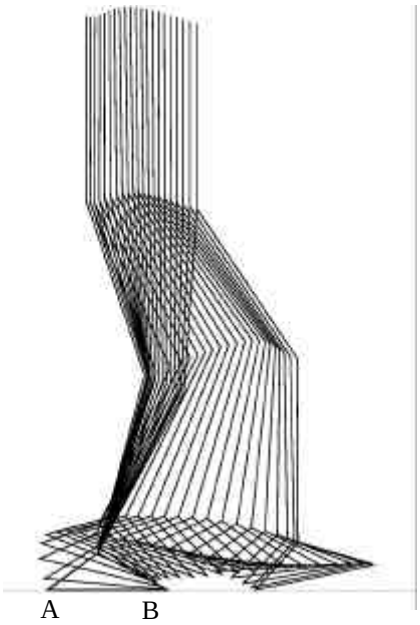


Figure III–29. Mouvement optimal d'une phase de simple appui avec démarrage à l'arrêt.

Le graphe des couples actionneurs articulaires de la Figure III–30 nous montre que ce sont les articulations cheville (couple qa6) et genou (couple qa5) de la jambe d'appui qui sont les plus sollicitées.

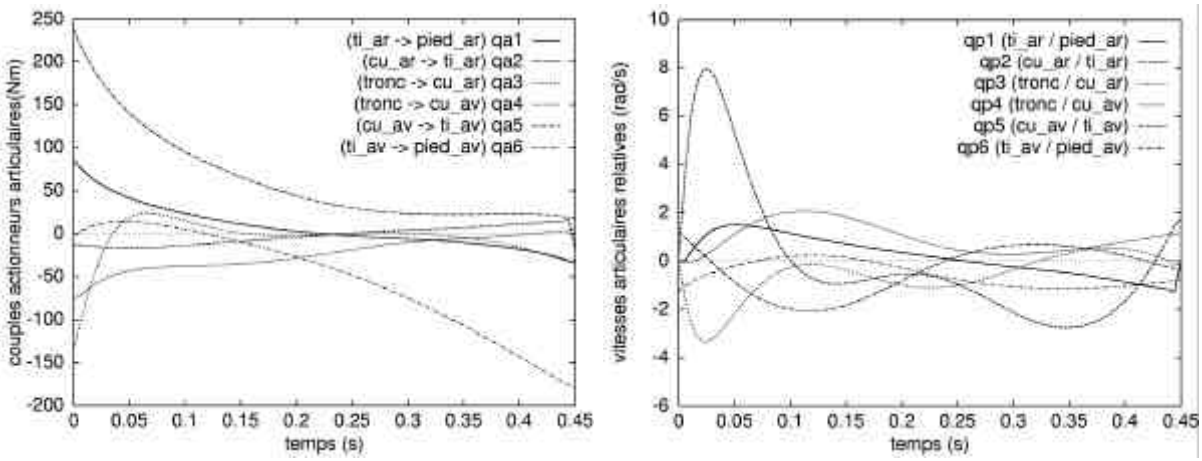


Figure III–30. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires relatives.

Les forces normales du contact sur le pied d'appui représentées sur la Figure III–31 sont positives durant tout le transfert. Le bipède fournit une forte impulsion au départ qui se manifeste par une surcharge en poids très importante. Ceci est lié à la forte accélération requise pour atteindre la vitesse de marche prescrite en un seul pas.

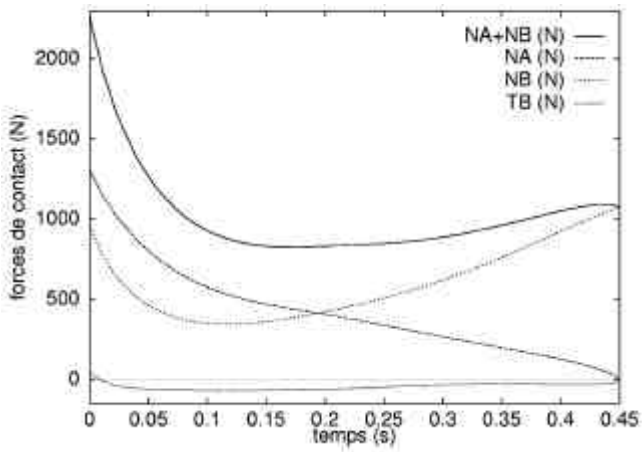


Figure III–31. Evolution des forces de contact.

L'énergie dépensée pour engendrer ce mouvement est égale à 81,9 J.

b) <u>Synthèse d'un pas cyclique</u>

La Figure III–32 montre un pas cyclique de marche stabilisé à une vitesse moyenne de 0,75 ms^{-1}. Les conditions cinématiques qui caractérisent la fin d'une phase initialisent la phase suivante, et ainsi de suite. Ces données sont celles qui se trouvent en début de paragraphe III.3.2.8.

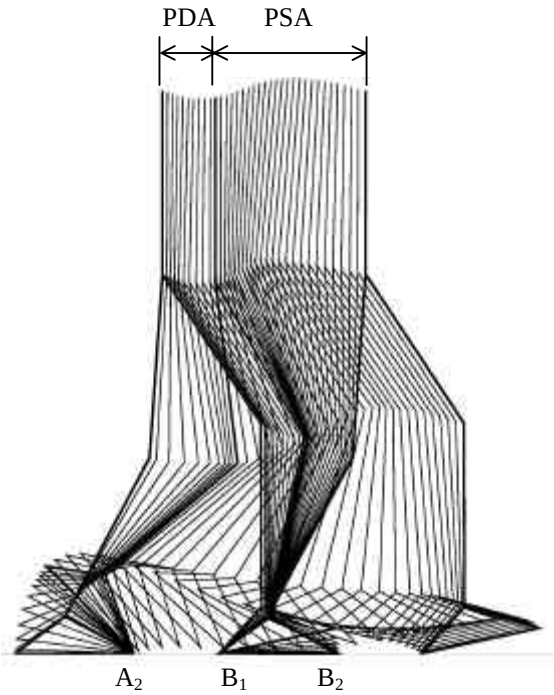


Figure III–32. Synthèse d'un pas optimal cyclique avec une phase de double appui (PDA) initialisant une phase de simple appui (PSA).

La durée du mouvement en phase de double appui est de 0,17s et 0,5s pour la phase de simple appui

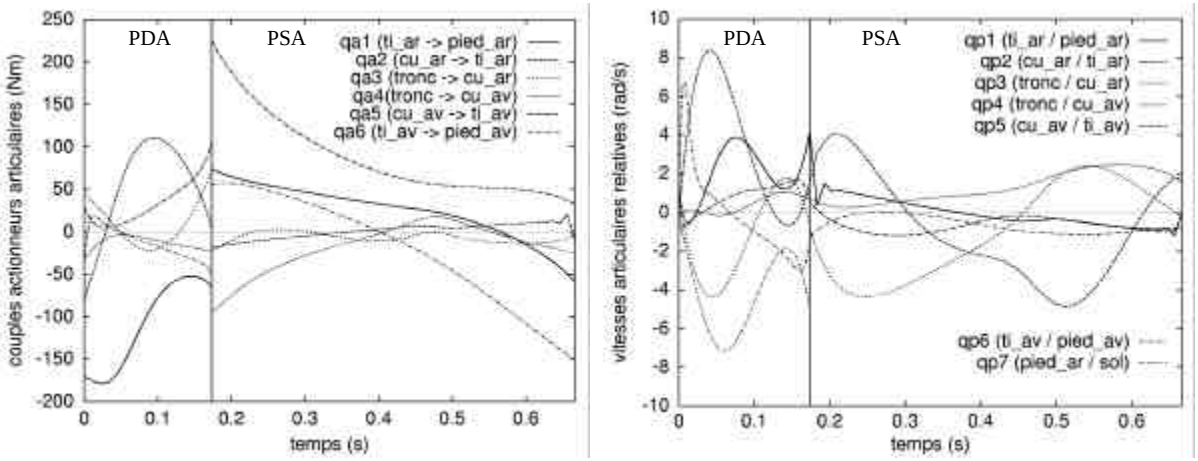


Figure III–33. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires relatives.

Les couples actionneurs tracés sur la Figure III–33 nous montrent que ce sont les articulations chevilles qui sont le plus sollicitées, durant les deux phases. On peut observer sur le deuxième graphique la continuité des vitesses articulaires à la transition entre les deux phases. Ces vitesses atteignent des pics de valeurs assez élevés en double appui, alors qu'elles sont modérées en phase de simple appui.

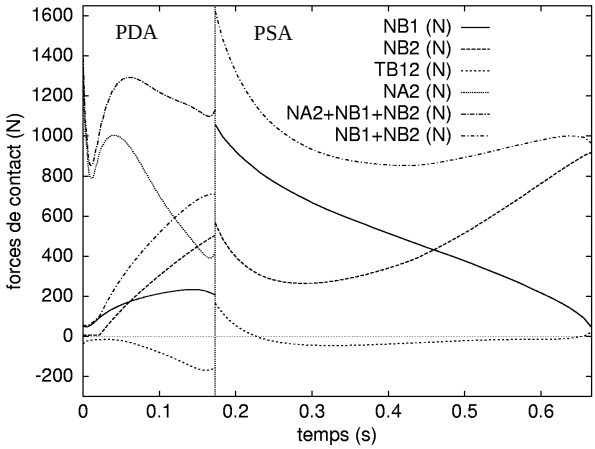


Figure III–34. Evolution des forces de contact.

La Figure III–34 indique l'évolution des forces de contact. En simple appui, les forces de réaction au niveau du talon B_1 et de la pointe de pied B_2 présentent des variations quasi

symétriques ce qui est le signe d'un transfert naturel de poids du talon vers la pointe pied. Afin que le mouvement optimal respecte toutes les contraintes imposées, notamment celle d'unilatéralité, il a été nécessaire de mettre en place une contrainte de borne sur la variable de commande correspondant à la composante normale du contact en B_2. Cette composante, notée NB2 est ainsi saturée à 6N.

On peut observer que les composantes tangentielles de contact ont des valeurs absolues qui restent très inférieures à la somme des composantes normales, ce qui permet d'envisager la marche sur un sol peu adhérent avec un coefficient d'adhérence naturelle sol-semelle inférieur à 0.3, voire à 0.1.

En phase de double appui, la distance résiduelle $B_1B_1^{'}$ obtenue pour un facteur de pénalité r_d =150 est égale à environ 0,3 mm.

Le coût énergétique du pas cyclique de la Figure III–32 s'établit à 205,8 J dont 96,3 J pour la phase de double appui.

c) <u>Phase de double appui pour l'amorçage d'un pas d'arrêt</u>

Le mouvement optimal représenté sur la Figure III–35 est celui d'une phase de double appui avec une vitesse finale de l'articulation hanche plus faible : u_4^f =0,65 m/s (au lieu de 0,75). Le bipède est ainsi ralenti dans son pas de marche ce qui va permettre d'amorcer la phase d'arrêt suivante beaucoup plus facilement. Le transfert se fait en un temps de 0,186s.

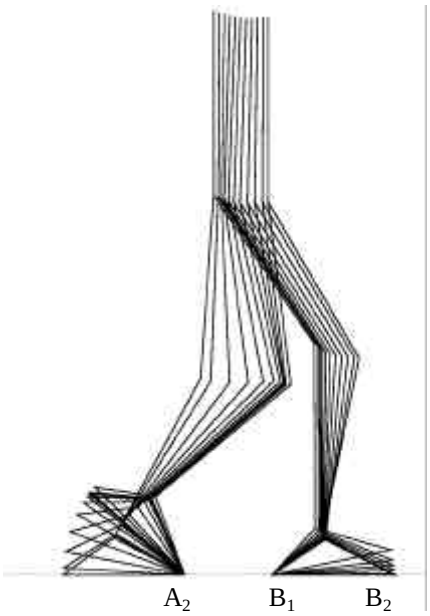


Figure III–35. Mouvement optimal d'une phase de double appui précédent un pas d'arrêt.

Les courbes de la Figure III–36 montrent une évolution modérée des couples articulaires, alors que les vitesses articulaires atteignent d'abord des valeurs importantes pour ensuite s'atténuer sensiblement.

L'évolution des forces de contact pieds-sol telle qu'elle apparaît sur la Figure III–37 est tout à fait semblable à celle que l'on observe durant la phase de double appui du mouvement précédent (Figure III–34).

La distance résiduelle $B_1B_1^{'}$ obtenue pour un facteur de pénalité r_d =150 est de l'ordre de 0,3 mm.

L'énergie dépensée au cours de ce mouvement est égale à 112,1 J.

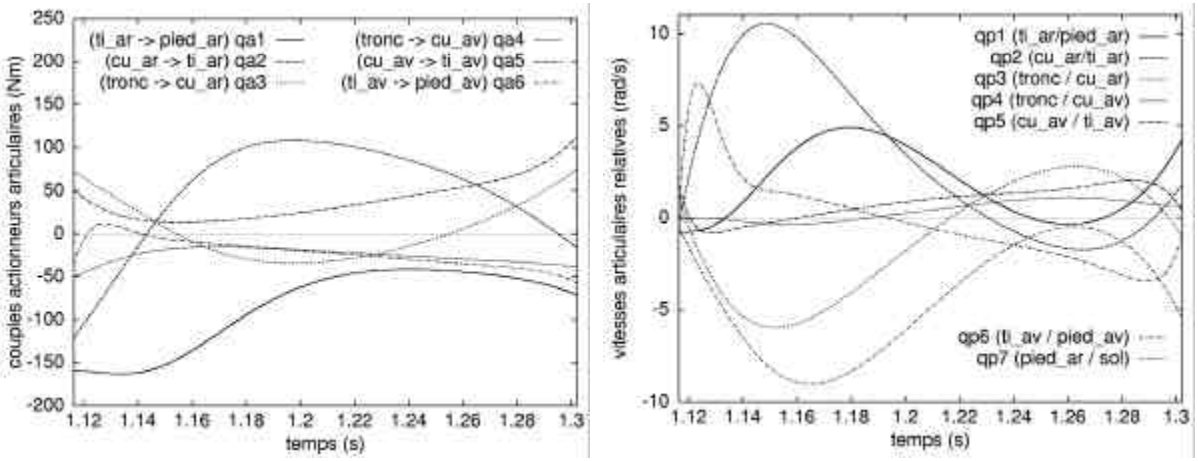


Figure III–36. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires relatives.

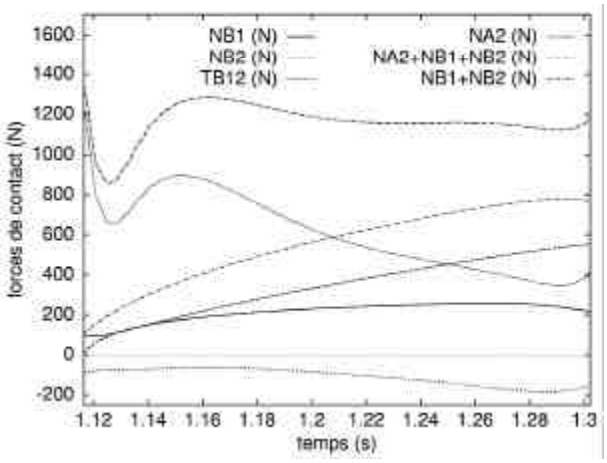


Figure III–37. Evolution des forces de contact.

d) Phase de simple appui avec arrivée à l'arrêt

Ce mouvement optimal (Figure III–38) est initialisé par les conditions finales du mouvement précédent (Figure III–35). Le bipède arrive en position finale à vitesse nulle avec ses deux jambes jointes et les pied à plat sur le sol. La vitesse initiale de la hanche correspond à la vitesse finale de la phase de double appui précédente, soit 0,65 m/s. Le transfert a lieu en 0,5s et l'énergie dépensée pour ce mouvement est de 105,1 J.

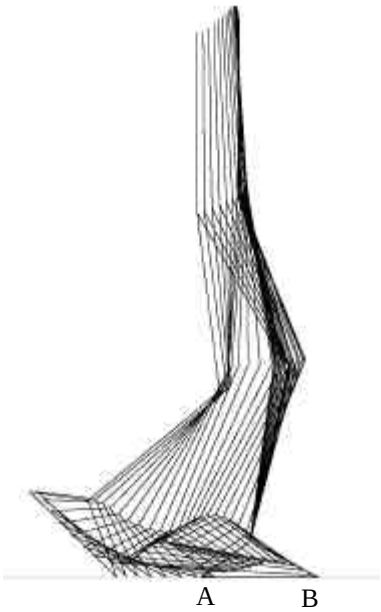


Figure III–38. Mouvement optimal d'une phase de simple appui avec arrêt en fin de phase.

Le coup de frein à donner au mouvement pour achever de stopper le bipède se traduit par des couples articulaires élevés au genou et à la cheville de la jambe avant (Figure III–40). Sur la même figure on peut observer que les vitesses articulaires fluctuent beaucoup.

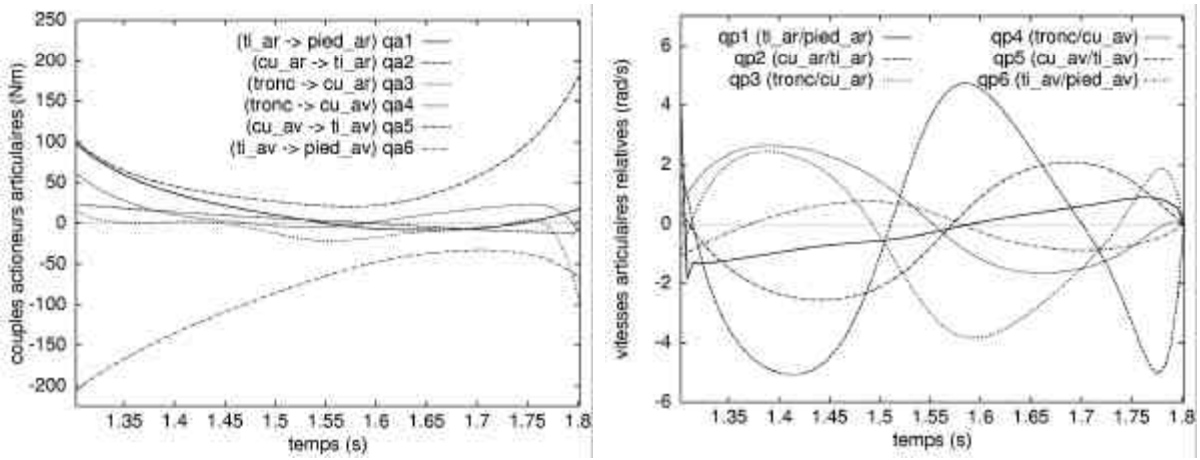


Figure III–39. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires relatives.

Aux pics de valeurs des couples déjà mentionnés, correspondent sur la Figure III–40 des appuis en surcharge très marqués.

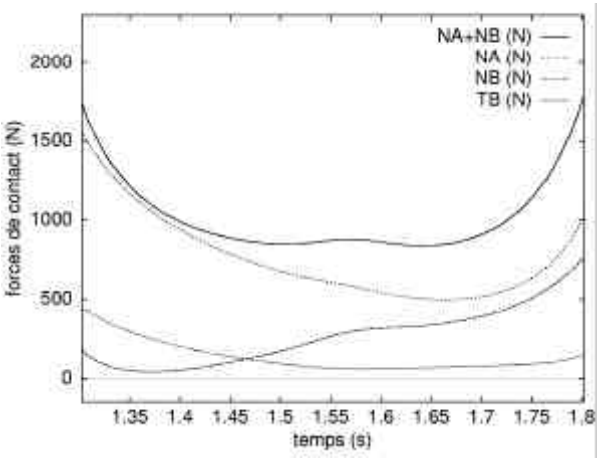


Figure III–40. Evolution des forces de contact.

e) <u>Enchaînement de l'ensemble des 5 phases précédentes</u>

La Figure III–41 présente l'assemblage des cinq phases de mouvement précédentes allant du démarrage à l'arrêt en passant par une phase d'accélération, un pas cyclique, puis une phase de décélération et de stabilisation.

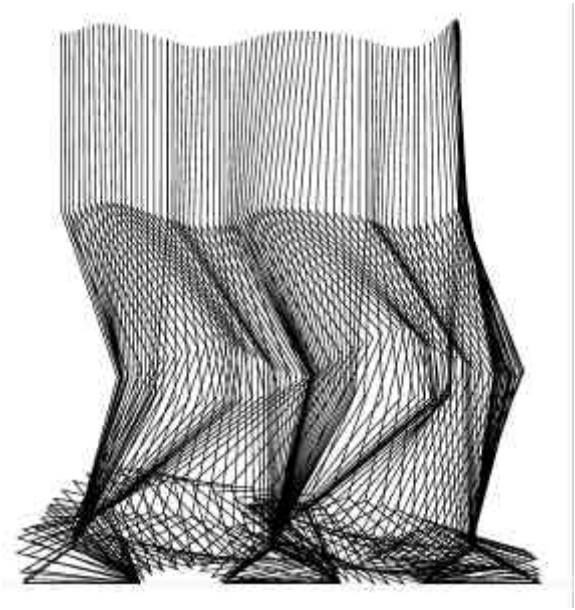


Figure III–41. Mouvement optimal d'un pas de marche avec pas de départ et pas d'arrêt.

Le bilan énergétique global s'établit à 504,9 J. Par ailleurs, la puissance requise pour effectuer une marche stabilisée sur le pas cyclique tel qu'il est défini sur la Figure III–32 est de 307 watts.

III.4 Conclusion

Le formalisme développé dans les chapitres I et II nous a permis de traiter dans un cadre général le problème de l'optimisation de mouvements de systèmes articulés en boucle fermée comme en boucle ouverte. Pour les systèmes à cinématique fermée, la complexité du traitement numérique dépend pour beaucoup de la présence ou non de liaisons unilatérales dans la boucle.

Lorsque toutes les liaisons sont bilatérales, les conditions de fermeture sont aisées à satisfaire numériquement. De plus, la stabilité des algorithmes est bonne et les convergences sont rapides. La présence de liaisons unilatérales, comme c'est le cas durant les phases de la marche, rend les problèmes plus complexes à formuler. Le domaine de recherche d'une commande optimale est aussi beaucoup plus restreint. Les données caractéristiques du mouvement à engendrer doivent alors être définies avec soin dans des plages de valeurs assez étroites. De plus, les solutions approchées nécessaires pour assurer l'amorçage des convergences doivent être construites avec des données réduites en ce qui concerne particulièrement les inerties du système. Celles-ci, après amorçage d'une convergence doivent être incrémentées itérativement jusqu'à leurs valeurs nominales. Néanmoins, les convergences se sont avérées assez robustes en ce qui concerne le bipède sans pied. Le suivi du processus d'incrémentation et convergence est plus complexe pour le cas du bipède à sept corps. L'incrémentation de la masse du tronc, en particulier, est difficile à réaliser pour les derniers incréments. Nous avons ainsi pu remarquer qu'une répartition de masse plus proche de celle d'un humain, au niveau du tronc particulièrement, conduisait à un comportement numérique beaucoup plus stable des algorithmes.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif principal de ce travail était de développer et de valider une méthode d'optimisation des mouvements de systèmes articulés en boucle fermée. La démarche de base a consisté à faire le choix d'une modélisation dynamique compatible avec le choix de l'utilisation du principe du maximum de Pontryagin comme technique d'optimisation.

Parmi plusieurs formulations possibles, la plus simple a été retenue. Elle consiste à ouvrir la chaîne cinématique et à introduire les efforts de liaison comme efforts de commande complémentaires dans le problème de commande optimale formulé. Les contraintes de fermeture de boucle sont alors satisfaites au moyen d'une technique de pénalisation.

Cette approche est d'utilisation simple pour le traitement de systèmes à cinématique bouclée avec liaisons bilatérales. Sa mise en œuvre est plus délicate lorsqu'il y a présence de liaisons unilatérales dans la boucle cinématique, comme cela est le cas durant la phase bipodale de la marche. Le niveau de développement actuel des codes de calcul nous permet de traiter la contrainte essentielle qu'est l'unilatéralité de l'appui. Par contre, la contrainte de glissement, qui se présente sous la forme d'une fonction linéaire affine de plusieurs variables de commande, nécessite un développement complémentaire des codes de calcul de manière à déterminer l'élément maximisant de l'hamiltonien en faisant appel à une procédure algorithmique spécifique.

Rappelons que ce travail est essentiellement orienté vers l'optimisation de la marche. Nous avons procédé à une optimisation séparée de chaque phase du mouvement tout en assurant la continuité des vitesses articulaires de transition. Au moyen d'hypothèses simples, chaque phase est définie par des données en positions et vitesses initiales et finales complètement spécifiées. Cette approche pourrait être renouvelée en cherchant à optimiser les configurations de transition. Ce problème est posé dans ce mémoire. Il reste à mettre au point les procédures algorithmiques et codes de calcul permettant de le résoudre numériquement. Un problème plus difficile reste à résoudre en ce qui concerne la marche. C'est celui de l'optimisation globale d'un pas de marche. Il s'agit de traiter un problème de commande optimale avec changement de configuration et d'équation d'état à un instant intermédiaire inconnu, à optimiser.

Le travail présenté est limité aux systèmes bidimensionnels pour des raisons de complexité des modèles dynamiques. Le passage aux systèmes tridimensionnels ne pose pas de problèmes de fond nouveaux. La difficulté principale devrait résider dans les instabilités numériques qui se manifestent avec l'augmentation du nombre de degrés de liberté. Le passage de la marche sagittale à la marche tridimensionnelle représente le passage de six et

sept degrés de liberté à 12 degrés de liberté et plus, ce qui est considérable. Mais les mouvements latéraux sont d'amplitudes très réduites dans ce cas ce qui permet de penser que les perturbations du conditionnement numérique des problèmes formulés devraient avoir des effets limités sur le comportement numérique des algorithmes de résolution utilisés.

ANNEXES

ANNEXE A. CONFIGURATIONS INITIALES ET FINALES EN POSITIONS ET EN VITESSES DU MODÈLE À 7 CORPS EN PHASE DE DOUBLE APPUI 121

ANNEXE B. MATRICE DE MASSE DU ROBOT BIPÈDE À 7 CORPS 127

ANNEXE C. TRAVAUX VIRTUELS DES EFFORTS APPLIQUÉS AU BIPEDE PLAN A 7 CORPS SEGMENTAIRES 131

ANNEXE D. FORCES D'APPUI SUR LE PIED PORTEUR EN PHASE DE BALANCEMENT 134

ANNEXE A.
CONFIGURATIONS INITIALES ET FINALES EN POSITIONS ET EN VITESSES DU MODELE A 7 CORPS EN PHASE DE DOUBLE APPUI

Une étape importante, en vue de l'optimisation des mouvements de notre modèle à sept corps de son état initial à son état final, est de définir préalablement ses configurations en positions et en vitesses à ces deux instants. La démarche permettant ainsi de déterminer les q_k et $\dot{q}_k$, initiaux et finaux fait l'objet de cette annexe.

Le schéma de principe utilisé est spécifié sur la Figure A–1 suivante :

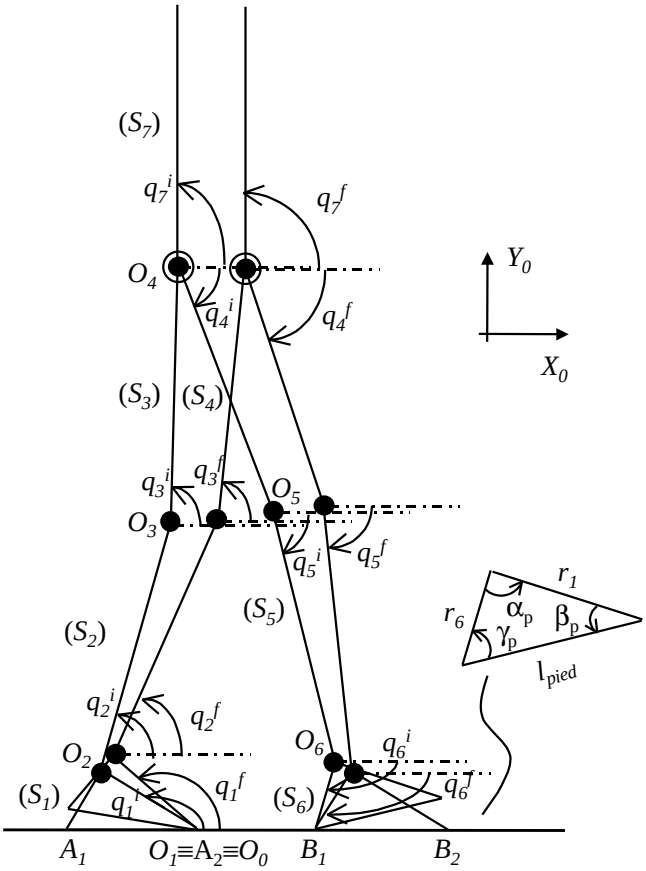


Figure A–1. Paramétrage du bipède plan à 7 corps en phase de double appui.

a) <u>Etat initial de la jambe arrière</u> $O_1O_2O_3O_4^i$

Les coordonnées du point hanche O_4^i s'écrivent :

$$O_1O_4^i = x_4^i X_0 + y_4^i Y_0 \equiv r_1 X_1 + r_2 X_2 + r_3 X_3 \tag{A.1}$$

En projection sur X_0 et Y_0 les coordonnées de O_4^i sont donc :

$$\begin{cases} x_4^i = r_1 C1^i + r_2 C2^i + r_3 C3^i \\ y_4^i = r_1 S1^i + r_2 S2^i + r_3 S3^i \end{cases} \tag{A.2}$$

Dans la position considérée, le pied est à plat, donc le paramètre q_1^i est donné et dépend de la géométrie du pied.

En posant $a_1^i \equiv x_4^i - r_1 C1^i$ et $b_1^i \equiv y_4^i - r_1 S1^i$, (A.3) est le système aux 2 inconnues q_2^i et q_3^i :

$$\begin{cases} r_2 C2^i + r_3 C3^i = a_1^i \\ r_2 S2^i + r_3 S3^i = b_1^i \end{cases}$$

Après avoir posé $c_1^i \equiv (a_1^{i\,2} + b_1^{i\,2} + r_3^2 - r_2^2)/2r_3$ et $a_1^i = Arctg\,\dfrac{b_1^i}{a_1^i}$, on aboutit aux expressions de q_2^i et q_3^i sous la forme :

$$q_3^i = a_1^i \pm Arc\cos(\frac{c_1^i}{a_1^i}\cos a_1^i) \tag{A.3a}$$

$$q_2^i = ATAN2(S2^i, C2^i) \tag{A.3b}$$

Pour éviter la contre-flexion au niveau du genou (Figure A–2), des deux solutions possibles pour q_3^i il est nécessaire de prendre la plus grande, c'est-à-dire :

$$q_3^i = a_1^i + Arc\cos(\frac{c_1^i}{a_1^i}\cos a_1^i)$$

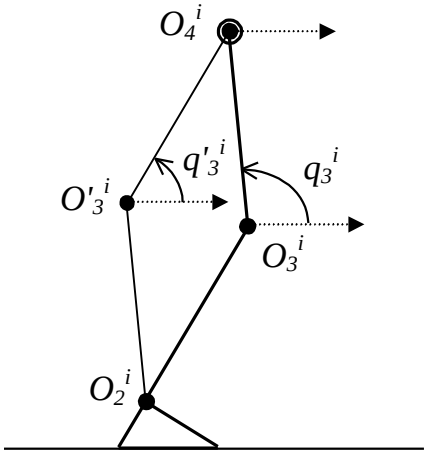


Figure A–2. Contre-flexion au niveau du genou.

Pour déterminer les vitesses, on dérive par rapport au temps les équations (A.3) :

$$\begin{cases} r_1\dot{q}_1^i S1^i + r_2\dot{q}_2^i S2^i + r_3\dot{q}_3^i S3^i = -u_4^i \\ r_1\dot{q}_1^i C1^i + r_2\dot{q}_2^i C2^i + r_3\dot{q}_3^i C3^i = v_4^i \end{cases} \tag{A.4}$$

A l'instant initial, le pied arrière étant à plat, on doit donc avoir $\dot{q}_1^i = 0$.

Le système (A.4) se résume donc à un système de 2 équations à 2 inconnues dont l'unique solution est :

$$\dot{q}_2^i = -\frac{u_4^i C3^i + v_4^i S3^i}{r_2 \sin(q_2^i - q_3^i)} \tag{A.5}$$

$$\dot{q}_3^i = \frac{u_4^i C2^i + v_4^i S2^i}{r_3 \sin(q_2^i - q_3^i)} \tag{A.6}$$

b) <u>Etat initial de la jambe avant</u> ($O_4^i O_5 O_6 B_1$)

En procédant comme précédemment, on a :

$$O_1O_4^i = x_4^i X_0 + y_4^i Y_0 \equiv (L_{PAS} - l_{pied})X_0 - r_6 X_6 - r_5 X_5 + r_4 X_4 \tag{A.7}$$

Par projection, on obtient :

$$\begin{cases} x_4^i = L_{PAS} - l_{pied} - r_6 C6^i - r_5 C5^i - r_4 C4^i \\ y_4^i = -r_6 S6^i - r_5 S5^i - r_4 S4^i \end{cases} \tag{A.8}$$

En remarquant que $q_6^i = b_p + d - p$ (b_p, angle donné par la géométrie du pied (cf. Figure III–23)) et en posant successivement :

$$a_2^i \equiv L_{PAS} - l_{pied} - r_6 C6^i - x_4^i,$$

$$b_2^i \equiv -r_6 S6^i - y_4^i,$$

$$c_2^i \equiv (a_2^{i\,2} + b_2^{i\,2} + r_5^2 - r_4^2)/2r_5,$$

$$a_2^i = Arctg\frac{b_2^i}{a_2^i}$$

on aboutit à :

$$q_5^i = a_2^i \pm Arc\cos(\frac{c_2^i}{a_2^i}\cos a_2^i) \tag{A.9}$$

$$q_4^i = ATAN2(S4^i, C4^i) \tag{A.10}$$

Comme précédemment, pour éviter la contre-flexion du genou, le q_5^i qui convient est le plus grand en valeur absolue, soit :

$$q_5^i = a_2^i - Arc\cos(\frac{c_2^i}{a_2^i}\cos a_2^i)$$

La dérivation du système (A.8) par rapport au temps nous permet de déterminer les vitesses articulaires de la jambe avant. Pour cela il est nécessaire de faire les remarques préalables suivantes :

- l'état initial de la phase de double appui résulte de l'état final de la phase de simple appui qui a précédé. En l'absence de choc à la reprise d'appui, ce qui est l'une des conditions fixées dans le cadre de notre travail, les deux états précédents coïncident. Il y a en particulier continuité des vitesses et donc dérivabilité des relations (A.8) au voisinage de l'instant t_i.

- nous supposons que le pied avant ne pivote pas au niveau de la cheville lors de la transition phase de simple appui – phase de double appui. Cela se traduit par la condition suivante :

$$\overrightarrow{\Omega^i}(S_6 / S_5) = \vec{0}$$

soit :

$$\dot{q}_6^i - \dot{q}_5^i = 0 \tag{A.11}$$

Nous aboutissons ainsi à la solution suivante :

$$\dot{q}_4^i = \frac{u_4^i(r_5 C5^i + r_6 C6^i) + v_4^i(r_5 S5^i + r_6 S6^i)}{r_4[r_5 \sin(q_4^i - q_5^i) + r_6 \sin(q_4^i - q_6^i)]} \tag{A.12}$$

$$\dot{q}_5^i = \dot{q}_6^i = -\frac{u_4^i C4^i + v_4^i S4^i}{r_5 \sin(q_4^i - q_5^i) + r_6 \sin(q_4^i - q_6^i)} \tag{A.13}$$

c) <u>Etat final de la jambe arrière</u> $O_1O_2O_3O_4^f$

Nous procédons de la même façon que pour l'état initial.

La projection sur X_0 et Y_0 des coordonnées de O_4^f nous amène à poser les expressions suivantes :

$$a_1^f \equiv x_4^f - r_1 C1^f \text{ , } b_1^f \equiv y_4^f - r_1 S1^f \text{ , } c_1^f \equiv (a_1^{f\,2} + b_1^{f\,2} + r_3^2 - r_2^2)/2r_3 \text{ et } a_1^f = Arctg\frac{b_1^f}{a_1^f}$$

On aboutit aux expressions de q_2^f et q_3^f sous la forme :

$$q_3^f = a_1^f + Arc\cos(\frac{c_1^f}{a_1^f}\cos a_1^f) \tag{A.14}$$

$$q_2^f = ATAN2(S2^f, C2^f) \tag{A.15}$$

La détermination complète des vitesses articulaires finales nécessite d'introduire une donnée supplémentaire sur les vitesses. Le choix le plus simple consiste à se donner la vitesse de pivotement finale du pied sur sa pointe avant, c'est-à-dire à poser : $\dot{q}_1^f = w_1$, où w_1 est une grandeur fixée. Le système d'équations (A.4) défini à l'instant initial peut alors être transcrit, à l'instant final, sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} r_2 \dot{q}_2^f S2^f + r_3 \dot{q}_3^f S3^f = -u_4^f - r_1 S1^f w_1 \\ r_2 \dot{q}_2^f C2^f + r_3 \dot{q}_3^f C3^f = v_4^f - r_1 C1^f w_1 \end{cases} \tag{A.16}$$

qui a pour solution :

$$\dot{q}_2^f = -\frac{u_4^f C3^f + r_1 w_1 \sin(q_1^f - q_3^f)}{r_2 \sin(q_2^f - q_3^f)} \tag{A.17}$$

$$\dot{q}_3^f = \frac{u_4^f C2^f + r_1 w_1 \sin(q_1^f - q_2^f)}{r_3 \sin(q_2^f - q_3^f)} \tag{A.18}$$

d) <u>Etat final de la jambe avant</u> $O_4^f O_5 O_6 B_1$

La procédure est, là aussi, quasiment identique à celle de l'état initial. La seule différence réside dans le fait que à l'état final, le pied avant est à plat ce qui implique $d = 0$ et donc $q_6^f = b_p - p$.

En posant $a_2^f \equiv L_{PAS} - l_{pied} - r_6 C6^f - x_4^f$, $b_2^f \equiv -r_6 S6^f - y_4^f$, $c_2^f \equiv (a_2^{f\,2} + b_2^{f\,2} + r_5^2 - r_4^2)/2r_5$ et $a_2^f = Arctg\dfrac{b_2^f}{a_2^f}$

on aboutit à :

$$q_5^f = a_2^f - Arc\cos(\frac{c_2^f}{a_2^f}\cos a_2^f) \tag{A.19}$$

$$q_4^f = ATAN2(S4^f, C4^f) \tag{A.20}$$

En ce qui concerne les vitesses, nous avons $\dot{q}_6^f = 0$. Le système (A.8), dérivé par rapport au temps devient :

$$\begin{cases} r_4 S4^f \dot{q}_4^f + r_5 S5^f \dot{q}_5^f = u_4^f \\ r_4 C4^f \dot{q}_4^f + r_5 C5^f \dot{q}_5^f = -v_4^f \end{cases} \tag{A.21}$$

On en déduit $\dot{q}_4^f$ et $\dot{q}_5^f$:

$$\dot{q}_4^f = \frac{u_4^f C5^f}{r_4 \sin(q_4^f - q_5^f)} \tag{A.22}$$

$$\dot{q}_5^f = -\frac{u_4^f C4^f}{r_5 \sin(q_4^f - q_5^f)} \tag{A.23}$$

ANNEXE B.
MATRICE DE MASSE DU ROBOT BIPEDE A 7 CORPS

L'énergie cinétique de chaque corps (S_i) est calculée en utilisant la formule :

$$T(S_i) = \frac{1}{2} m_i V^2(O_i) + m_i V(O_i) \cdot (\Omega_i \wedge O_i G_i) + \frac{1}{2} I_i \dot{q}_i^2$$

On obtient l'expression de l'énergie cinétique totale du système sous la forme :

$$\begin{aligned}
T(S_1 \cup ... \cup S_7) = & \frac{1}{2}(I_1 + m_{234567} r_1^2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}(I_2 + m_{34567} r_2^2)\dot{q}_2^2 \\
& + \frac{1}{2}(I_3 + m_{4567} r_3^2)\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}(I_4 + m_{56} r_4^2)\dot{q}_4^2 + \frac{1}{2}(I_5 + m_6 r_5^2)\dot{q}_5^2 \\
& + \frac{1}{2} I_6 \dot{q}_6^2 + \frac{1}{2} I_7 \dot{q}_7^2 + (m_2 a_2 + m_{34567} r_2) r_1 C21 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
& + (m_3 a_3 + m_{4567} r_3) r_1 C31 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + (m_4 a_4 + m_{56} r_4) r_1 C41 \dot{q}_1 \dot{q}_4 \\
& + (m_5 a_5 + m_6 r_5) r_1 C51 \dot{q}_1 \dot{q}_5 + (m_6 a_6 r_1 C61 - m_6 b_6 r_1 S61) \dot{q}_1 \dot{q}_6 \\
& + m_7 a_7 r_1 C71 \dot{q}_1 \dot{q}_7 + (m_3 a_3 + m_{4567} r_3) r_2 C32 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
& + (m_4 a_4 + m_{56} r_4) r_2 C42 \dot{q}_2 \dot{q}_4 + (m_5 a_5 + m_6 r_5) r_2 C52 \dot{q}_2 \dot{q}_5 \\
& + (m_6 a_6 r_2 C62 - m_6 b_6 r_2 S62) \dot{q}_2 \dot{q}_6 + m_7 a_7 r_2 C72 \dot{q}_2 \dot{q}_7 \\
& + (m_4 a_4 + m_{56} r_4) r_3 C43 \dot{q}_3 \dot{q}_4 + (m_5 a_5 + m_6 r_5) r_3 C53 \dot{q}_3 \dot{q}_5 \\
& + (m_6 a_6 r_3 C63 - m_6 b_6 r_3 S63) \dot{q}_3 \dot{q}_6 + (m_5 a_5 + m_6 r_5) r_4 C54 \dot{q}_4 \dot{q}_5 \\
& + (m_6 a_6 r_4 C64 - m_6 b_6 r_4 S64) \dot{q}_4 \dot{q}_6 + (m_6 a_6 r_5 C65 - m_6 b_6 r_5 S65) \dot{q}_5 \dot{q}_6
\end{aligned} \tag{B.1}$$

On définit les expressions constantes suivantes :

$$M11 = I_1 + m_{234567} r_1^2 \ ; \ M22 = I_2 + m_{34567} r_2^2 \ ; \ M33 = I_3 + m_{4567} r_3^2 \ ; \ M44 = I_4 + m_{56} r_4^2$$

$$M55 = I_5 + m_6 r_5^2 \ ; \ M66 = I_6 \ ; \ M77 = I_7 \tag{B.2}$$

et :

$$E12 = r_1(m_2 a_2 + m_{34567} r_2) \ ; \ E13 = r_1(m_3 a_3 + m_{4567} r_3) \ ; \ E14 = r_1(m_4 a_4 + m_{56} r_4)$$

$$E15 = r_1(m_5 a_5 + m_6 r_5) \ ; \ E16 = r_1 m_6 a_6 \ ; \ F16 = r_1 m_6 b_6 \ ; \ E17 = r_1 m_7 a_7 \ ;$$

$$E23 = r_2(m_3 a_3 + m_{4567} r_3) \ ; \ E24 = r_2(m_4 a_4 + m_{56} r_4) \ ; \ E25 = r_2(m_5 a_5 + m_6 r_5) \ ;$$

$$E26 = r_2 m_6 a_6 \ ; \ F26 = r_2 m_6 b_6 \ ; \ E27 = r_2 m_7 a_7 \ ; \ E34 = r_3 (m_4 a_4 + m_{56} r_4) \ ; \qquad \text{(B.3)}$$

$$E35 = r_3 (m_5 a_5 + m_6 r_5) \ ; \ E36 = r_3 m_6 a_6 \ ; \ F36 = r_3 m_6 b_6 \ ; \ E37 = r_3 m_7 a_7 \ ;$$

$$E45 = r_4 (m_5 a_5 + m_6 r_5) \ ; \ E46 = r_4 m_6 a_6 \ ; \ F36 = r_4 m_6 b_6 \ ; \ E56 = r_5 m_6 a_6 \ ;$$

$$F56 = r_5 m_6 b_6$$

L'énergie cinétique totale du système est une forme quadratique qui s'écrit sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

Compte tenu de (B.1), (B.2) et (B.3), $M(q)$ est une matrice 7×7 telle que :

$$M = \begin{pmatrix} M11 & E12\,C21 & E13\,C31 & E14\,C41 & E15\,C51 & E16\,C61 - F16\,S61 & E17\,C71 \\ & M22 & E23\,C32 & E24\,C42 & E25\,C52 & E26\,C62 - F26\,S62 & E27\,C72 \\ & & M33 & E34\,C43 & E35\,C53 & E36\,C63 - F36\,S63 & E37\,C73 \\ & & & M44 & E45\,C54 & E46\,C64 - F46\,S64 & 0 \\ & & & & M55 & E56\,C65 - F56\,S65 & 0 \\ & & Sym. & & & M66 & 0 \\ & & & & & & M77 \end{pmatrix}$$

Les matrices dérivées par rapport à chaque q_i s'en déduisent simplement, soit :

$$M_{,1} = \left(\begin{array}{c|cccccc} 0 & -E12\,S12 & -E13\,S13 & -E14\,S14 & -E15\,S15 & -E16\,S16 + F16\,C16 & -E17\,S17 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Sym. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$M,_2 = \left(\begin{array}{c|c|ccccc}
0 & E12S12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\times & 0 & -E23S23 & -E24S24 & -E25S25 & -E26S26+F26C26 & -E27S27 \\ \hline
0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

$$M,_3 = \left(\begin{array}{cc|c|ccccc}
0 & 0 & E13S13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E23S23 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\times & \times & 0 & -E34S34 & -E35S35 & -E36S36+F36C36 & -E37S37 \\ \hline
0 & 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

$$M,_4 = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc}
0 & 0 & 0 & E14S14 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & E24S24 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & E34S34 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\times & \times & \times & 0 & -E45S45 & -E46S46+F46C46 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

$$M,_5 = \left(\begin{array}{cccc|c|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & E15S15 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E25S25 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E35S35 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E45S45 & 0 & 0 \\ \hline
\times & \times & \times & \times & 0 & -E56S56+F56C56 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

$$M,_6 = \left(\begin{array}{ccccc|c|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E16\,S16 - F16\,C16 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E26\,S26 - F26\,C26 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E36\,S36 - F36\,C36 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E46\,S46 - F46\,C46 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E56\,S56 - F56\,C56 & 0 \\
\hline
\times & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0
\end{array}\right)$$

$$M,_7 = \left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E17\,S17 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E27\,S27 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E37\,S37 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

ANNEXE C.
TRAVAUX VIRTUELS DES EFFORTS APPLIQUES AU BIPEDE PLAN A 7 CORPS SEGMENTAIRES

Sont présentés dans cette annexe les calculs permettant d'établir les expressions des travaux virtuels des efforts appliqués au bipède plan à sept corps (cf. Figure III–23).

Energie potentielle et ses dérivées

L'énergie potentielle de gravité V du système s'exprime sous la forme suivante :

$$V = g\sum_{i=1}^{7} m_i Y_{G_i}$$

où Y_{G_i} représente la cote du centre de masse G_i.

On obtient sous forme détaillée :

$$V = g(m_1 a_1 + m_{234567} r_1)S1 + g m_1 b_1 C1 + g(m_2 a_2 + m_{34567} r_2)S2 + g(m_3 a_3 + m_{4567} r_3)S3 + g(m_4 a_4 + m_{56} r_4)S4 + g(m_5 a_5 + m_6 r_5)S5 + g m_6 a_6 S6 + g m_6 b_6 C6 + g m_7 a_7 S7$$

Cette formulation met en évidence les constantes suivantes :

$V_1 = g(m_1 a_1 + m_{234567} r_1)$; $V_2 = g(m_2 a_2 + m_{34567} r_2)$; $V_3 = g(m_3 a_3 + m_{4567} r_3)$;

$V_4 = g(m_4 a_4 + m_{56} r_4)$; $V_5 = g(m_5 a_5 + m_6 r_5)$; $V_6 = g m_6 a_6$; $V_7 = g m_7 a_7$

$VB1 = g m_1 b_1$; $VB6 = g m_6 b_6$

Il en résulte la formulation des $V,_i$ et des $V,_{ii}$ ($V,_i = \dfrac{\partial V_i}{\partial q_i}$, $V,_{ii} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial q^2}$) sous la forme condensée :

$V,_1 = V_1\, C1 - VB1\, S1$ $\qquad$ $V,_{11} = -V_1\, S1 - VB1\, C1$

$V,_2 = V_2\, C2$ $\qquad$ $V,_{22} = -V_2\, S2$

$V,_3 = V_3\, C3$ $\qquad$ $V,_{33} = -V_3\, S3$

$V,_4 = V_4\ C4$ $\qquad$ $V,_{44} = -V_4\ S4$

$V,_5 = V_5\ C5$ $\qquad$ $V,_{55} = -V_5\ S5$

$V,_6 = V_6\ C6 - VB6\ S6$ $\qquad$ $V,_{66} = -V_6\ S6 - VB6\ C6$

$V,_7 = V_7\ C7$ $\qquad$ $V,_{77} = -V_7\ S7$

Travail virtuel des forces de pesanteur

Le travail des forces de pesanteur s'écrit successivement :

$$W_g = \sum_{i=1}^{7}\left(-m_i g Y_0 \cdot V_{G_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(-g\sum_{i=1}^{7} m_i OG_i \cdot Y_0\right) = \frac{d}{dt}\left(-g\sum_{i=1}^{7} m_i Y_{G_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(-V\right) = -\sum_{i=1}^{7}\frac{\partial V}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

Nous en retenons, pour la suite, l'expression du travail virtuel associé :

$$W_g^* = -\sum_{i=1}^{7} V,_i dq_i \qquad \text{(C.1)}$$

Travail virtuel des couples actionneurs

Chaque articulation du système, exceptée la pointe de pied, est soumise à un couple actionneur noté C_{ij}^a désignant le couple exercé par S_i sur S_j. Les puissances virtuelles des couples actionneurs admettent les expressions suivantes :

$$W_a^*(S_i \to S_j) = C^a(S_i \to S_j)\cdot\Omega^*(S_j / S_i) = C_{ij}^a(dq_j - dq_i) \qquad \text{(C.2)}$$

pour les couples d'indices (*i*,*j*)=(1,2), (2,3), (3,7), (7,4), (4,5), (5,6).

Travail virtuel des couples d'amortissement articulaires

On obtient, comme précédemment :

$$W_d^*(S_i \to S_j) = C^d(S_i \to S_j)\cdot\Omega^*(S_j / S_i) = C_{ij}^d(dq_j - dq_i) \qquad \text{(C.3)}$$

pour les couples d'indices (*i*,*j*)=(1,2), (2,3), (3,7), (7,4), (4,5), (5,6).

Les C_{ij}^d sont les couples dissipatifs au niveau des articulations S_i / S_j. (cf. (I.29)) :

$$C_{12}^d = -CVC(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)\ ;\ C_{23}^d = -CVG(\dot{q}_3 - \dot{q}_2)\ ;\ C_{37}^d = -CVH(\dot{q}_7 - \dot{q}_3)\ ;$$

$$C_{74}^{d} = -CVH(\dot{q}_4 - \dot{q}_7) \ ; \ C_{45}^{d} = -CVG(\dot{q}_5 - \dot{q}_4) \ ; \ C_{56}^{d} = -CVC(\dot{q}_6 - \dot{q}_5)$$

avec CVC (reps. CVG,CVH), le coefficient d'amortissement visqueux de l'articulation cheville (resp. genou, hanche).

Travail virtuel des efforts de contact

Les forces de contact, que l'on va traiter comme forces de commande dans le problème d'optimisation, reproduisant les forces de liaison assurant la fermeture mécanique au niveau du pied "libéré" sont représentées sur la Figure C–1.

On peut les formuler de la façon suivante :

$$F_{B_1}(S_0 \rightarrow S_6) = FB_1\, Y_0 + FB_{12}\ X_0$$

$$F_{B_2}(S_0 \rightarrow S_6) = FB_2\, Y_0$$

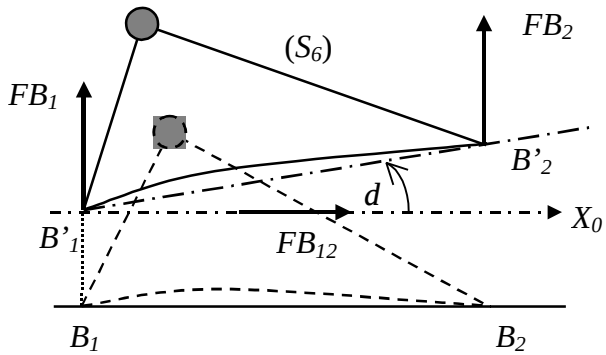


Figure C–1. Système de 3 forces FB_1, FB_2, FB_{12} appliquées au pied libéré, équivalent aux forces de contact.

De l'expression du travail de chacune de ces deux forces :

$$W\left(F_{B_k}(S_0 \rightarrow S_6)\right) = F_{B_k}(S_0 \rightarrow S_6) \cdot V(B_k \in S_6 / S_0) \ \ , \ k = 1,2$$

nous tirons l'expression de leur travail virtuel, soit :

$$\begin{aligned} W^*(F_{B_1}) &= -FB_{12}(r_1 S1 dq_1 + ... + r_6 S6 dq_6) + FB_1(r_1 C1 dq_1 + ... + r_6 C6 dq_6) \\ W^*(F_{B_2}) &= FB_2(r_1 C1 dq_1 + ... + r_5 C5 dq_5 + r_7 \cos(q_6 + a_p) dq_6) \end{aligned} \qquad \text{(C.4)}$$

ANNEXE D.
FORCES D'APPUI SUR LE PIED PORTEUR EN PHASE DE BALANCEMENT

Les composantes définies par les relations (III.22) peuvent être aisément calculées selon l'enchaînement algorithmique suivant :

Facteurs constants

$$CG(1) = m_1 a_1 + m_{23456}\, r_1$$

$$CG(2) = m_2 a_2 + m_{3456}\, r_2$$

$$CG(3) = m_3 a_3 + m_{45}\, r_3$$

$$CG(4) = m_4 a_4 + m_5\, r_4$$

$$CG(5) = m_5 a_5$$

$$CG(6) = m_6 a_6$$

$$CG(7) = m_5 b_5$$

où $\quad m_{ij} = m_i + \cdots + m_j \quad , \quad j > i$

Expressions variables

$$XE(1) = \ddot{q}_1 S1 + \dot{q}_1^2 C1 \quad , \quad YE(1) = \dot{q}_1^2 S1 - \ddot{q}_1 C1$$

$$XE(2) = \ddot{q}_2 S2 + \dot{q}_2^2 C2 \quad , \quad YE(2) = \dot{q}_2^2 S2 - \ddot{q}_2 C2$$

$$XE(3) = \ddot{q}_3 S3 + \dot{q}_3^2 C3 \quad , \quad YE(3) = \dot{q}_3^2 S3 - \ddot{q}_3 C3$$

$$XE(4) = \ddot{q}_4 S4 + \dot{q}_4^2 C4 \quad , \quad YE(4) = \dot{q}_4^2 S4 - \ddot{q}_4 C4$$

$$XE(5) = \ddot{q}_5 S5 + \dot{q}_5^2 C5 \quad , \quad YE(5) = \dot{q}_5^2 S5 - \ddot{q}_5 C5$$

$$XE(6) = \ddot{q}_6 S6 + \dot{q}_6^2 C6 \quad , \quad YE(6) = \dot{q}_6^2 S6 - \ddot{q}_6 C6$$

$$XE(7) = \ddot{q}_5 C5 - \dot{q}_5^2 S5 \quad , \quad YE(7) = \dot{q}_5^2 C5 + \ddot{q}_5 S5$$

où $Si = \sin(q_i)$

$Ci = \cos(q_i)$

L'équation de la dynamique appliquée au bipède complet à 6 segment mobiles (voir Figure III–27) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{6} m_i g\,(G_i) = \sum_{i=1}^{6} - m_i\, g\, Y_0 + R(S_0 \rightarrow S_1) \qquad \text{(D.1)}$$

où $R(S_0 \rightarrow S_1) = -R(S_1 \rightarrow S_0) \equiv -R_{10}$

La projection de (D.1) sur X_0 et Y_0 nous permet d'aboutir à :

$$R_{10_X} = \sum_{i=1}^{7} CG(i) \times XE(i)$$

$$R_{10_Y} = \sum_{i=1}^{7} CG(i) \times YE(i) - Mg \;, \qquad M = \sum_{i=1}^{6} m_i$$

'

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[ADL 95] M. A. Adli, H. Hanafusa, *Contribution of internal forces to the dynamics of closed chain mechanisms*, Robotica, Vol. 13, pp. 507-514, 1995.

[AOU 01] Y. Aoustin, A. Formal'sky, *Stability of a cyclic biped gait and hastening of the convergence to it*, CLAWAR, pp. 779-788, 2001.

[AZE 01] C. Azevedo, *On the interaction between the human and the robot in bipedal walking*, CLAWAR, 2001.

[BAR 99] B. Barbedette, *Pédalage du cycliste et préhension pollicidigitale. Etude biomécanique et identification de stratégies motrices*, Thèse, Université du Maine, 1999.

[BEL 77] V. V. Beletskii, P. S. Chudinov, *Parametric optimization in the problem of biped locomotion*, Izs. AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela 12(1), pp. 22-31, 1977.

[BES 92] G. Bessonnet, *Optimisation dynamique des mouvements point à point de robots manipulateurs*, Thèse d'état, Université de Poitiers, 1992.

[BES 93] G. Bessonnet, J. P. Lallemand, *Planning of optimal free paths of robotic manipulators with bounds on dynamic forces*, Procs. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Vol 3, pp. 270-275, may 1993.

[BES 95] G. Bessonnet, A.D. Jutard-Malinge, *Optimal free path planning of robot arms submitted to phase constraints*, IASTED Third Int. Conf. on Robotics and Manufacturing, pp. 89-93, 1995.

[BES 01] G. Bessonnet, S. Chessé, *Synthèse d'un pas de marche optimal dans le plan sagittal d'un robot bipède à système locomoteur anthropomorphe*, XVème Congrès Français de Mécanique, 6 pages, 2001.

[BES 02a] G. Bessonnet, P. Sardain, S. Chessé, *Optimal motion synthesis ; Dynamic modelling and numerical solving aspects*, Multibody System Dynamics, à paraître 2002.

[BES 02b] G. Bessonnet, S. Chessé, P. Sardain, *Generating optimal gait of a human-sized biped robot*, CLAWAR, Paris, sept. 2002.

[BLA 92] W. Blajer, W. Schielen, *Walking without impacts as a motion/force control problem*, ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, Vol 114, pp. 660-665, dec. 1992.

[BOB 83] J.E. Bobrow, S. Dubowsky, J.S. Gibson, *On the optimal control of robotic manipulators with actuator constraints*, Proceedings of the American Control Conference, San Francisco, pp. 782-787, june 1983.

[BRY 75] A. E. Bryson, Y. C. Ho, *Applied optimal control*, Hemisphere Publishing Corporation, 1975.

[CAB 97] G. Cabodevila, G. Abba, *Quasi optimal gait for a biped robot using genetic algorithm*, Procs. IEEE Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics, pp. 3960-3965, 1997.

[CHA 92] P H.. Channon, S. H. Hopkins, D. T. Pham, *Derivation of optimal walking motions for a bipedal walking robot*, Robotica, Vol.10, pp. 165-172, 1992.

[CHEN 90] Y. Chen, A.A. Desrochers, *A proof of the structure of the minimum-time control law robotic manipulators using a hamiltonian formulation*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, pp. 388-393, 1990.

[CHES 01] S. Chessé, G. Bessonnet, *Optimal dynamics of constrained multibody systems. Application to bipedal walking synthesis*, Procs. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2499-2505, 2001.

[CHEV 01a] C. Chevallereau, *Transient walking trajectories for a biped*, CLAWAR, pp. 789-796, 2001.

[CHEV 01b] C. Chevallereau, Y. Aoustin, *Optimal reference trajectories for walking and running of a biped robot*, Robotica, Vol 19, pp. 557-569, 2001.

[CHO 71] C. K. Chow, D. H. Jacobson, *Studies of human locomotion via optimal programming*, Mathematical Biosciences 10, pp. 239-306, 1971.

[COU 97] O. Coussi, *De l'observation cinématique à l'étude dynamique et énergétique de mouvements humains*, Thèse, Université de Poitiers, 1997.

[DAN 96] F. Danes, G. Bessonnet, *Optimal planning of collision-free movements of robot arms using exterior and exact penalty methods*, WAC'96, Montpellier, pp. 201-208, 1996.

[DAN 98] F. Danes, *Critères et contraintes pour la synthèse optimale des mouvements de robots manipulateurs. Applications à l'évitement d'obstacles*, Thèse, Université de Poitiers, 1998.

[FÜH 91] C. Führer, B. J. Leimkuhler, *Numerical solution of differential-algebraic equations for constrained mechanical motion*, Numerische Mathamatik 59, pp. 55-69, 1991.

[GAL 98] M. Galicki, *The planning of robotic optimal motions in the presence of obstacles*, Int. Journal of Robotic Research, Vol. 17, N°3, pp. 248-259, 1998.

[GAL 00] M. Galicki, D. Ucinsky, *Time-optimal motions of robotic manipulators*, Robotica, Vol. 18, N°3, pp. 659-667, 2000.

[GAR 94] J. Garcia de Jalon, E. Bayo, *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems, the real-time challenge*, Sringer-Verlag, 1994.

[GEE 86] H.P. Geering, L. Guzella, S.A.R. Hepner, C.H. OnderTime-optimal motions of robots in assembly tasks, IEEE Transactions on Automatic Control, pp. 512-518, 1986.

[HIR 98] G. Hirano, M. Yamamoto, A. Mohri, *Cooperative motion planning for grasp-work type manipulators*, Procs. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 940-945, may 1998.

[IOF 79] A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, *Theroy of extremal problems*, North-Holland Publishing Company, 460 p., 1979.

[JUT 96] A-D. Jutard-Malinge, *Optimisation dynamique de mouvements de robots manipulateurs aux évolution partiellement spécifiées et à état final contraint*, Thèse, Université de Poitiers, 1996.

[JUT 00] A-D. Jutard-Malinge, G. Bessonnet, *Optimal motion planning of robotic manipulators removing mobile objects grasped in motion*, Journal of Intelligent and Robotic Systems, pp. 233-255, 2000.

[KAH 71] M.E. Kahn, B. Roth, *The near-minimum-time control of open-loop articulated kinematic chains*, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control, pp. 164-172, 1971.

[KWO 98] W. Kwon, B. H. Lee, W. H. Kwon, M. H. Choi, S. H. Lee, *Redundancy optimization for cooperating manipulators using quadratic inequality constraints*, Procs. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 1528-1533, may 1998.

[LEC 00] A. Leclerc Riquet, *Contribution à l'évaluation de l'énergie mécanique dépensée par un athlète lors d'exercices intenses et de courte durée sur ergocycle ; proposition d'une expertise mécanique des cycloergomètres*, Thèse, Université de Poitiers, 1992.

[LEW 95] F. L. Lewis, V. L. Syrmos, *Optimal control*, John Wiley, 1995.

[LÖF 01] K. Löffler, M. Gienger, F. Pfeiffer, *Simulation and control of a biped jogging robot*, CLAWAR, pp. 867-874, 2001.

[MAR 99] B. J. Martin, J. E. Bobrow, *Minimum effort motions for open chains manipulators with task-dependent end-effector constraints*, International Journal of Robotics Research 18, N°2, pp. 213-324, 1999.

[NAG 92] Routine D02RAF, NAG Fortran Library, 1992.

[PFE 86] F. Pfeiffer, R. Johanni, *A concept for manipulator trajectory planning*, IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 1139-1405, 1986.

[PON 62] L. Pontryagin, V. Boltiansky, A. Gamkrelitze, E. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, Wiley Intersciences, 1962.

[ROS 98a] M. Rostami, G. Bessonnet, *Impactless sagittal gait of a biped robot during single-support phase*, Procs. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 1385-1391, may 1998.

[ROS 98b] M. Rostami, G. Bessonnet, P. Sardain, *Optimal gait synthesis of a planar biped*, Procs. 3th IFAC Int. Worshop on Motion Control, pp. 185-190, sept. 1998.

[ROS 99] M. Rostami, *Contribution à l'étude dynamique de la phase unipodale de la marche sagittale, et étude expérimentale du comportement dynamique d'un membre locomoteur anthropomorphe de robot bipède*, Thèse, Université de Poitiers, 1999.

[ROS 01] M. Rostami, G. Bessonnet, *Sagittal gait of a biped robot during the single support phase, Part 2 : optimal motion*, Robotica, Vol. 19, pp. 241-253, 2001.

[ROU 98a] L. Roussel, C. Canudas-de-Wit, A. Goswami, *Generation of energy optimal complete gait cycles for biped*, Procs. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2026-2042, may 1998.

[ROU 98b] L. Roussel, *Génération de trajectoires de marche optimale pour un robot bipède*, Thèse, I.N.P. de Grenoble, 1998.

[SAR 98] P. Sardain, M. Rostami, G. Bessonnet, *An anthropomorphic biped robot : dynamic concepts and technological design*, IEEE Trans. On Systems Man and Cybernetics, Vol. 28, N°6, pp. 823-838, nov. 1998.

[SAR 99] P. Sardain, M. Rostami, E. Thomas, G. Bessonnet, *Biped robots : correlations between technological design and dynamic behavior*, Control Engineering Practice, N°7, pp. 401-411, 1999.

[SHI 97] Z. Shiller, *Optimal robot motion planning and work-cell layout design*, Robotica, Vol. 15, pp. 31-40, 1997.

[SKO 86] J.M. Skowronski, *Control dynamics of robotic manipulators*, Academic Press, 1986.

[SLO 89] J.J.E. Slotine, H.S. Yang, *Improving the efficiency of time optimal path following algorithms*, IEEE Transactions. on Robotics and Automation, pp. 118-124, may 1989.

[VUK 90] M. Vukobratovic, B. Borovac, O. Surla, D. Stokic, *Biped locomotion, Scientific fundamentals of robotics 7*, Springer-Verlag, 345 p., 1990.

[WAN 01] C-Y. E. Wang, J. E. Bobrow, D. J. Reinkensmeyer, *Swinging from the hip : use of dynamic motion optimization in the design of robotic gait rehabilitation*, Procs. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 1433-1438, may 2001.

[WEI 85] A. Weinreb, A.E. Bryson, *Optimal control of systems with hard control bounds*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, pp. 1135-1138, 1985.

[YAM 88] M. Yamamoto, H. Osaki, A. Mohri, *Planning of manipulator joint trajectories by an iterative method*, Robotica, Vol. 6, pp. 101-105, 1988.

[ZEF 94] M. Zefran, V. Kumar, X. Yun, *Optimal trajectories and force distribution for cooperating arms*, Procs. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 874-879, 1994.

[ZEF 95] M. Zefran, V. Kumar, *Optimal control of systems with unilateral constraints*, Procs. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2695-2700, 1995.

[BIP] http://www.inrialpes.fr/bip/

[RABBIT] http://www-lag.ensieg.inpg.fr/PRC-Bipedes/Prototype/rabbit.html

[LMS] http://www-lms.univ-poitiers.fr

Références personnelles

- S. Chessé, G. Bessonnet, *Dynamique optimale de systèmes à boucle fermée. Application à la marche*, exposé dans le cadre du projet PRC-GDR "Commande de Robots à pattes", IRCCyN-Nantes, juillet 2000.

- S. Chessé, G. Bessonnet, *Optimal dynamics of constrained multibody systems. Application to bipedal walking synthesis*, Procs. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2499-2505, Séoul, 2001.

- G. Bessonnet, S. Chessé, *Synthèse d'un pas de marche optimal dans le plan sagittal d'un robot bipède à système locomoteur anthropomorphe*, XVème Congrès Français de Mécanique, Nancy, 2001.

- G. Bessonnet, S. Chessé, P. Sardain, *Generating optimal gait of a human-sized biped robot*, CLAWAR, Paris, sept. 2002.

- G. Bessonnet, P. Sardain, S. Chessé, *Optimal motion synthesis ; Dynamic modelling and numerical solving aspects*, Multibody System Dynamics, à paraître 2002.

TABLE DES ILLUSTRATIONS

figure I–1. Le robot Delta (société DEMAUREX). *12*
figure I–2. Simulateur de vol (société CAE). *12*
figure I–3. Le Double-Delta du LMS. *13*
figure I–4. Mécanisme plan à cinématique fermée avec liaisons bilatérales. Système suractionné à 3 ddl. *14*
figure I–5. Robots coopérants. Manipulation d'un objet avec double contact unilatéral en A et B [ZEF 95] *15*
figure I–6. Robots coopérants. Travail ponctuel avec contact unilatéral de R_B en B sur un objet présenté par le manipulateur R_A [HIR 98] *15*
figure I–7. Robots manipulateurs 6R, coopérants pour le transfert d'une charge [KWO 98] *16*
figure I–8. Bipède plan avec pieds de type "patin" (pattes bisegmentaires) en phase de double appui *17*
figure I–9. Schématisation plane de l'exercice de pédalage. Système à trois degrés de liberté et six articulations actives : hanches, genoux et chevilles *17*
figure I–10. Chaîne cinématique plane bouclée, ouverte en O_{i+1} au niveau d'une liaison éloignée de la base. Condition de fermeture : $O_{i+1}O'_{i+1}(q)=0$. *19*
figure I–11. Chaîne cinématique bouclée par contact unilatéral. Ouverture de la chaîne au niveau d'un appui. *20*
figure I–12. Paramétrage en chaîne ouverte d'un système articulé plan fermé *30*

figure II–1. Corps segmentaire (S_i) en intersection avec un obstacle. *45*
figure II–2. Corps segmentaire (S_i) en intersection avec un obstacle. Extraction de (S_i) selon une direction déterminée. *46*
figure II–3. La fonction x ® h^+ représente le dépassement de contrainte lorsque la contrainte inégalité h(x) £ 0 est transgressée. *47*
figure II–4. Configurations initiales et finales des deux phases de double (PDA) et simple appui (PSA). *52*
figure II–5. Paramétrage de la phase de double appui en boucle ouverte *53*
figure II–6. Système de 3 forces FB_1, FB_2, FB_{12} appliquées au pied libéré, équivalent aux forces de contact. *54*
figure II–7. Section dans un plan (u_i,u_j) du domaine de commande admissible défini par des contraintes de type (II.37), (II.38). *56*
figure II–8. Le domaine de commande admissible défini par les contraintes "obliques" (II.39) est un dièdre dont (0;u_8,u_9) est le plan bissecteur. *57*
figure II–9. Système de 3 forces FA_1, FA_2, FA_{12} appliquées au pied non libéré. *57*

figure III–1. Système 5-barres avec ouverture de chaîne en O_5. ..... *64*
figure III–2. Mouvement optimal d'amplitude réduite à liaisons bilatérales. *69*
figure III–3. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires relatives. *69*
figure III–4. Evolution des forces d'appui en O_1 et O_5. ..... *70*
figure III–5. Mouvement optimal de grande amplitude à liaisons bilatérales. *70*
figure III–6. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires relatives. *71*
figure III–7. Evolution des forces d'appui en O_1 et O_5. ..... *71*
figure III–8. Robot bipède RABBIT. *72*
figure III–9. Le bipède RABBIT et son dispositif de guidage. *72*
figure III–10. Bipède plan en phase de double appui avec ouverture de la boucle cinématique en O_5, au niveau de l'appui de la patte avant. *74*
figure III–11. Schématisation des données minimales définissant un pas de marche en phase de double appui, à l'état initial (a) et à l'état final (b) pour le bipède 5 corps. *75*

figure III–12. Mouvement optimal du bipède 5 corps dans sa phase de double appui. 83
figure III–13. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires en phase de double appui. 84
figure III–14. Evolution des forces de contact en O_1 et O_5. 84
figure III–15. Mouvement optimal du bipède 5 corps dans sa phase de simple appui. 85
figure III–16. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires en phase de simple appui. 85
figure III–17. Evolution des forces de contact. 86
figure III–18. Pas optimal complet avec double les phases de double appui (PDA) et simple appui (PSA). 86
figure III–19. Robot bipède BIP. 87
figure III–20. Système locomoteur de BIP. 87
figure III–21. Agencement cinématique de BIP. 88
figure III–22. Vues frontale et sagittale de BIP. 89
figure III–23. Paramétrage du bipède plan à 7 corps en phase de double appui (a) et de simple appui (b) 90
figure III–24. Schématisation des données minimales définissant un pas de marche en phase de double appui, à l'état initial (a) et à l'état final (b) pour le bipède 7 corps. 91
figure III–25. Schéma du bipède en positions de transition 94
figure III–26. Schéma associé au tableau III–3. 96
figure III–27. Forces de contact appliquées au pied porteur en phase de simple appui 104
figure III–28. Forces de contact avec le sol en phase de double appui 105
figure III–29. Mouvement optimal d'une phase de simple appui avec démarrage à l'arrêt. 107
figure III–30. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires relatives. 107
figure III–31. Evolution des forces de contact. 108
figure III–32. Synthèse d'un pas optimal cyclique avec une phase de double appui (PDA) initialisant une phase de simple appui (PSA). 108
figure III–33. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires relatives. 109
figure III–34. Evolution des forces de contact. 109
figure III–35. Mouvement optimal d'une phase de double appui précédent un pas d'arrêt. 110
figure III–36. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires relatives. 111
figure III–37. Evolution des forces de contact. 111
figure III–38. Mouvement optimal d'une phase de simple appui avec arrêt en fin de phase. 112
figure III–39. Evolution des couples actionneurs et des vitesses articulaires relatives. 112
figure III–40. Evolution des forces de contact. 113
figure III–41. Mouvement optimal d'un pas de marche avec pas de départ et pas d'arrêt. 113

figure A–1. Paramétrage du bipède plan à 7 corps en phase de double appui 121
figure A–2. Contre-flexion au niveau du genou. 123
figure C–1. Système de 3 forces FB_1, FB_2, FB_{12} appliquées au pied libéré, équivalent aux forces de contact. 133

tableau III–1. Dimensionnement du système plan 5-barres. 64
tableau III–2. Caractéristiques dimensionnelles et inertielles de RABBIT 73
tableau III–3. Dimensionnement géométrique, massique et inertiel de BIP. 97

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE **3**

CHAPITRE I MODÈLES DYNAMIQUES DE SYSTÈMES À CINÉMATIQUE FERMÉE **9**

I.1 INTRODUCTION 11
I.2 SYSTÈMES ARTICULÉS À CINÉMATIQUE FERMÉE 12
I.2.1 Systèmes fermés avec liaisons bilatérales *14*
I.2.2 Systèmes fermés avec liaisons unilatérales *14*
I.2.3 Paramétrage du mouvement *18*
I.2.3.1 Système bouclé sur sa base par deux liaisons bilatérales non glissantes 18
I.2.3.2 Système bouclé sur appuis par contact unilatéral 19
I.3 MODÈLES DYNAMIQUES 20
I.3.1 Formulation dans une configuration minimale *21*
I.3.2 Formulation dans une configuration de chaîne ouverte *21*
I.3.2.1 Équations du mouvement avec multiplicateurs de Lagrange 22
I.3.2.2 Formulation hamiltonienne des équations du mouvement avec multiplicateurs 24
I.3.2.3 Élimination du multiplicateur 25
I.3.2.4 Introduction des forces de liaisons comme variables de commande complémentaires 27
I.3.2.5 Equation d'état du système 28
I.3.3 Exemple : modèle dynamique d'un système plan à boucle fermée *29*
I.4 CONCLUSION 34

CHAPITRE II OPTIMISATION DE MOUVEMENTS DE SYSTÈMES ARTICULÉS EN BOUCLE OUVERTE ET BOUCLE FERMÉE **35**

II.1 INTRODUCTION 37
II.2 TECHNIQUES D'OPTIMISATION 38
II.2.1 Technique du plan de phase *38*
II.2.2 Optimisation paramétrique *38*
II.2.3 Principe du maximum de Pontryagin (PMP) *39*
II.3 FORMULATION DU PROBLÈME D'OPTIMISATION POUR LES SYSTÈMES À BOUCLE OUVERTE 40
II.3.1 Équation d'état et conditions aux limites *40*
II.3.2 Domaine de commandes admissibles *41*
II.3.3 Critère de performance *42*
II.3.4 Contraintes sur les variables d'état *43*
II.3.4.1 Contraintes sur les coordonnées articulaires et leurs dérivées 44
II.3.4.2 Contraintes anti-collision 45
II.3.5 Critère de performance pénalisé *46*
II.3.6 Application du principe du maximum de Pontryagin *48*
II.4 SYSTÈMES À BOUCLE FERMÉE 51
II.4.1 Paramétrage et conditions de fermeture de chaîne *52*
II.4.2 Description des forces de liaison *54*
II.4.3 Domaine de commande admissible *55*
II.4.4 Le cas de contacts unilatéraux non libérés *57*
II.4.5 Critère pénalisé *58*
II.4.6 Conditions d'optimalité *59*

II.4.7 Techniques de résolution *60*
II.5 CONCLUSION 60

CHAPITRE III SIMULATIONS NUMÉRIQUES 61

III.1 INTRODUCTION 63
III.2 SYSTÈME PLAN À BOUCLE FERMÉE AVEC LIAISONS BILATÉRALES 63
III.2.1 Description du système *63*
III.2.2 Modèle dynamique *65*
III.2.3 Critère et contraintes *67*
III.2.4 Expression de la commande optimale *67*
III.2.5 Résultats numériques *68*
III.3 ESSAIS DE SYNTHÈSES OPTIMALES DE LA MARCHE SAGITTALE 72
III.3.1 Bipède sans pied *72*
III.3.1.1 Données cinématiques du bipède plan à cinq corps 73
III.3.1.2 Modèle dynamique 76
III.3.1.3 Critère et contraintes 79
III.3.1.4 Conditions d'optimalité 79
III.3.1.5 Forces de contact appliquées à la patte arrière – conditions de contact 81
III.3.1.6 Résultats numériques 82
III.3.2 Bipède plan à cinématique anthropomorphe *87*
III.3.2.1 Caractéristiques cinématiques du bipède plan à sept corps 89
III.3.2.2 Distribution des masses et inerties 95
III.3.2.3 Modèle dynamique 97
III.3.2.4 Critère et contraintes 100
III.3.2.5 Conditions d'optimalité 100
III.3.2.6 Unilatéralité des forces d'appui sur le pied porteur en phase de balancement 103
III.3.2.7 Unilatéralité des forces d'appui sur la pointe du pied arrière en phase de double appui 104
III.3.2.8 Résultats numériques 106
III.4 CONCLUSION 114

ANNEXES 119

ANNEXE A. CONFIGURATIONS INITIALES ET FINALES EN POSITIONS ET EN VITESSES DU MODÈLE À 7 CORPS EN PHASE DE DOUBLE APPUI 121

ANNEXE B. MATRICE DE MASSE DU ROBOT BIPÈDE À 7 CORPS 127

ANNEXE C. TRAVAUX VIRTUELS DES EFFORTS APPLIQUÉS AU BIPEDE PLAN A 7 CORPS SEGMENTAIRES 131

ANNEXE D. FORCES D'APPUI SUR LE PIED PORTEUR EN PHASE DE BALANCEMENT 134

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 137

TABLE DES ILLUSTRATIONS 145

TABLE DES MATIÈRES 149