



**HAL**  
open science

## Modèles simplifiés d'interaction fluide-structure

Miguel Angel Fernández

► **To cite this version:**

Miguel Angel Fernández. Modèles simplifiés d'interaction fluide-structure. Modélisation et simulation. Université Paris Dauphine - Paris IX, 2001. Français. NNT : . tel-00001954

**HAL Id: tel-00001954**

**<https://theses.hal.science/tel-00001954>**

Submitted on 9 Nov 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS IX DAUPHINE  
UFR MATHÉMATIQUES DE LA DÉCISION

No. attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

MODÈLES SIMPLIFIÉS D'INTERACTION  
FLUIDE-STRUCTURE

THÈSE

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR EN SCIENCES**

spécialité : Mathématiques Appliquées

par

**Miguel Ángel FERNÁNDEZ VARELA**

présentée et soutenue publiquement le 18 décembre 2001

**JURY**

*Président :* M. Guy CHAVENT

*Rapporteurs :* M. Alfredo BERMÚDEZ  
M. Frédéric BOURQUIN

*Examineurs :* M. Dominique CHAPELLE  
M. François DUBOIS

*Directeur :* M. Patrick LE TALLEC

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

J'adresse mes remerciements le plus profonds à mon directeur de thèse M. Patrick LE TALLEC. En plus de m'avoir permis d'entreprendre cette thèse, en me proposant cet intéressant sujet de recherche, il m'a donné la grande satisfaction et l'honneur de partager ses connaissances et son amitié. Je n'oublierai pas ses conseils attentionnés et ses interventions rapides et avisées qui m'ont guidé le long de ce travail.

Je remercie vivement M. Dominique CHAPELLE pour son accueil au sein du projet MACS à l'INRIA. J'ai tout particulièrement apprécié son soutien et ses conseils pendant ce travail.

Je suis très honoré que M. Alfredo BERMÚDEZ et M. Frédéric BOURQUIN aient accepté la lourde tâche d'être rapporteurs.

Je tiens à remercier M. François DUBOIS et Guy CHAVENT, qui ont accepté d'être présents dans mon jury.

Je remercie aussi M. Juan VIAÑO qui a guidé mes premiers pas scientifiques.

Lors de mon travail de thèse, j'ai eu la chance de collaborer avec M. Marwan MOUBACHIR. Je n'oublierai pas son amitié et nos intéressantes discussions au cours des diverses rencontres à l'INRIA et au LCPC. Je lui adresse mes sincères remerciements.

J'adresse des remerciements à M. Thierry FANION par sa collaboration dans l'article sur la transpiration.

Je remercie mes collègues thésards du bâtiment 16 à l'INRIA. Ancuța (ma collègue de bureau), Gabriel, Jim et Rodolfo par les nombreuses discussions à propos et en dehors de la thèse, et également pour avoir réussi à me supporter pendant ces années. Un merci aussi aux permanents du bâtiment 16, en spécial à Amine, Franck, Marina et Maryse, qui m'ont accueilli avec chaleur.

Un remerciement très spécial à la famille AREÁN: Blanca, Felipe, Pio et Sonia. Ils m'ont accueilli, aidé, soutenu et encouragé pendant ces années en France. Je ne les oublierai pas.

Je n'oublierai pas non plus tous mes amis, qui ont fait si agréable ce séjour en France. Alejandra, Angélica, Esther, Natalia, Matthieu (avec qui j'ai partagé le pupitre de cors à l'orchestre de la CitéU), Oriol, Sito et Susana. Je vous dit un énorme merci.

Je tiens à remercier finalement Elisa, qui a été à mes côtés cette dernière année, et mes parents Mercedes et Miguel. Ils m'ont remonté le moral dans les périodes difficiles et m'ont poussé vers l'avant en me témoignant toute leur confiance.



*Ôs meus pais,  
Mercedes e Miguel*



# Table des matières

Introduction générale	1
-----------------------	---

---

---

<b>I Problème de base et linéarisation</b>	<b>7</b>
--	----------

---

---

<b>1 Cadre mécanique: ALE et transpiration</b>	<b>9</b>
1.1 Problème mécanique: formalisme ALE . . . . .	9
1.1.1 Le fluide . . . . .	10
1.1.2 La structure . . . . .	14
1.1.3 Le problème couplé . . . . .	16
1.2 Approche en petits déplacements: transpiration . . . . .	19
1.3 Conclusion . . . . .	23
<b>2 De l’ALE à la transpiration</b>	<b>25</b>
2.1 Écriture variationnelle . . . . .	25
2.2 État d’équilibre stationnaire de référence . . . . .	28
2.3 Le problème stationnaire après transport . . . . .	28
2.4 Méthode de linéarisation . . . . .	31
2.4.1 Comparaison avec les autres formulations . . . . .	35
2.5 Sous-problèmes linéaires fluide et solide couplés . . . . .	36
2.6 Variantes . . . . .	37
2.7 Conclusion . . . . .	38



<b>3</b>	<b>Analyse de sensibilité</b>	<b>41</b>
3.1	Formulation ALE forte du système couplé . . . . .	41
3.2	Analyse de sensibilité . . . . .	42
3.3	Démonstration du résultat principal . . . . .	44
3.3.1	Formulation faible . . . . .	44
3.3.2	Problème de référence transporté . . . . .	46
3.3.3	Méthode de linéarisation . . . . .	50
3.3.4	Calcul des dérivées de l'état . . . . .	56
3.4	Conclusion . . . . .	57
	<b>Annexes</b>	<b>59</b>
	<b>A</b>	<b>59</b>

---



---

<b>II</b>	<b>Stabilité</b>	<b>61</b>
-----------	------------------	-----------

---



---

<b>4</b>	<b>Principe de linéarisation : problème spectral</b>	<b>63</b>
4.1	Stabilité linéaire hydrodynamique . . . . .	63
4.2	Stabilité linéaire fluide-structure . . . . .	67
4.2.1	Équations du problème . . . . .	67
4.2.2	État d'équilibre et problème perturbé . . . . .	68
4.2.3	Linéarisation . . . . .	71
4.2.4	Définition du problème aux valeurs propres . . . . .	73
4.3	Conclusion . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Analyse mathématique : caractérisation du spectre</b>	<b>75</b>
5.1	Cadre mathématique . . . . .	75
5.1.1	Étude de cas particuliers . . . . .	77
5.2	Caractérisation des valeurs propres . . . . .	78
5.2.1	Linéarisation et translation du problème . . . . .	78

---

5.2.2	Définition de l'opérateur $T$ . . . . .	80
5.2.3	Compacité de l'opérateur $T$ . . . . .	95
5.3	Conclusion . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Approximation par éléments finis</b>	<b>99</b>
6.1	Position du problème . . . . .	99
6.2	Formulation variationnelle . . . . .	101
6.3	Schéma de discrétisation . . . . .	102
6.4	Formulation matricielle . . . . .	106
6.5	Conclusion . . . . .	112
<b>7</b>	<b>Calcul de valeurs propres</b>	<b>113</b>
7.1	État de l'art . . . . .	113
7.2	Notre approche . . . . .	114
7.3	La méthode IRAM . . . . .	115
7.3.1	Factorisations d'Arnoldi . . . . .	116
7.3.2	Réinitialisation explicite . . . . .	118
7.3.3	Réinitialisation implicite . . . . .	119
7.4	Transformation de Cayley généralisée . . . . .	124
7.4.1	Translation-Inversion . . . . .	124
7.4.2	Cayley généralisée . . . . .	125
7.5	Algorithme de résolution : IRAM + Cayley généralisée . . . . .	130
7.5.1	Purification avec « shift-invert » . . . . .	131
7.5.2	Valeurs propres « spurious » . . . . .	132
7.5.3	Valeurs propres « perdues » . . . . .	132
7.5.4	Choix des « shifts » implicites . . . . .	133
7.5.5	Choix de $v_1$ à chaque itération de Cayley . . . . .	133
7.5.6	Calcul du produit matrice-vecteur . . . . .	134
7.6	Conclusion . . . . .	139
<b>8</b>	<b>Expériences numériques</b>	<b>141</b>
8.1	Structure placée dans un fluide visqueux immobile . . . . .	141
8.2	Tube encastré libre en écoulement interne . . . . .	152
8.3	Écoulement externe . . . . .	162
8.4	Conclusion . . . . .	172

<b>Conclusion générale</b>	<b>173</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>175</b>

# Introduction générale

L'interaction fluide-structure s'intéresse au comportement d'un système constitué par deux entités mécaniques considérées comme distinctes : une structure mobile (rigide ou déformable) et un fluide (en écoulement ou au repos) autour ou à l'intérieur de la structure. L'évolution de chacune des deux entités dépendant de celle de l'autre, un phénomène de couplage apparaît. Plus précisément, le mouvement de la structure est influencé par l'écoulement du fluide à travers les efforts transmis à l'interface, et réciproquement, le mouvement de la structure influence l'écoulement du fluide par les déplacements de l'interface qui entraîne le fluide dans son mouvement.

Dans la nature, nombre de situations relèvent de ce type de problème, voir [14, 21, 29, 75, 81]. Nous nous intéresserons aux cas où la structure subit, en présence de l'écoulement fluide, des vibrations qui en changent sa géométrie. Ce type de situations intervient, par exemple, dans les cas suivants :

- hautes cheminées, gratte-ciels, ponts suspendus, câbles de téléphérique vibrant sous l'effet du vent ;
- ailes d'avion, pales d'hélice, aubages de turbine ;
- tuyauteries de réfrigération, réservoirs subissant l'effet de ballonnement de la surface libre du liquide, etc.

De telles vibrations peuvent endommager la structure concernée. En effet, il se peut, qu'à partir d'un seuil de vitesse du fluide, des mécanismes de couplage « instables » apparaissent, où une partie de l'énergie cinétique du fluide se transforme en énergie vibratoire de la structure. On observe alors une instabilité dite « de flottement » particulièrement dangereuse pour la structure, pouvant mener ainsi à la ruine instantanée de cette dernière. Parmi les systèmes propices à de telles instabilités, les lignes de tuyauteries de réfrigération dans les réacteurs nucléaires ont été les premières étudiées, voir [14]. Païdoussis, dans [71, 72], traite du problème du flottement d'un tube encastré-libre en écoulement interne, voir aussi [81]. Dans le domaine de l'aéronautique, on peut citer l'accident du chasseur « F117 » lors d'une rencontre aérienne en 1997 aux États-Unis. L'origine de cet accident a été attribué au flottement d'un aileron, problème générique de cet avion qui semblait pourtant avoir été résolu par le renforcement des structures.

La présence d'un écoulement peut aussi conduire à des instabilités dites « de flambage », d'intérêt particulier en biomécanique pour les problèmes de contraction de vaisseaux sanguins ou d'asthme [61, 60, 95]. Dans ces phénomènes, l'instabilité est d'origine géométrique et est induite par la rotation de l'interface et de la charge qui s'y applique.

Rappelons enfin la célèbre catastrophe de la rupture du pont de Tacoma en 1940 aux États-Unis. L'instabilité semble ici trouver ses origines dans les forces de torsion

consécutives aux détachements tourbillonnaires périodiques [75].

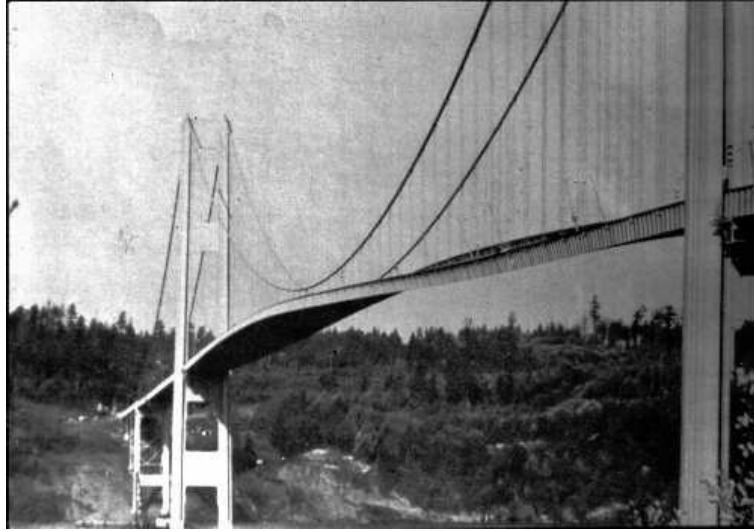


FIG. 1 – *Pont de Tacoma*

Avant l'avènement du Calcul Scientifique, les interactions fluide-structure étaient étudiées exclusivement de manière expérimentale, dans des configurations particulières. Ces méthodes demeurent extrêmement coûteuses à mettre en œuvre : la construction d'une maquette demande le respect des échelles réelles du phénomène, et, dans les cas destructifs, plusieurs maquettes doivent être construites pour explorer le domaine de sûreté de la structure [30, 81].

Les méthodes numériques (sans exclure les procédés expérimentaux) permettent une description très fine des phénomènes grâce à l'accès immédiat à de nombreuses informations difficiles d'obtenir par l'expérience, telles que le champ de vitesses et pression sur la totalité du domaine. Le calcul numérique permet de faire varier, à moindre coût, une gamme de paramètres déterminants pour la conception du système en question : géométrie de la structure, vitesse de l'écoulement, etc. Ainsi une prédiction paramétrique des instabilités avec cette dernière approche est envisageable.

Les techniques actuelles pour la détection des instabilités en interaction fluide-structure rentrent dans deux catégories bien différenciées.

On peut situer, dans une première catégorie, les méthodes d'analyse instationnaire des phénomènes aéroélastiques. Il s'agit de résoudre le problème instationnaire couplé fluide-structure en prenant comme donnée initiale un mode structural associé à l'instabilité, ou à défaut, une combinaison des modes plus représentatifs du mouvement de la structure. Puis une analyse de l'amortissement du déplacement de la structure permettra de conclure sur la stabilité ou l'instabilité du système. Ces méthodes, pouvant devenir inabordable en temps de calcul, permettent d'utiliser de codes de calcul fluide-structure évolués et précis. Ce type de méthodes ne sera pas abordé dans cette thèse, bien que les méthodes de transpiration que nous allons introduire puissent s'y appliquer.

Dans une deuxième catégorie on peut classer les méthodes de recherche de conditions d'instabilités. Il s'agit de déterminer pour une gamme précise de paramètres (vitesse de

---

l'écoulement, géométrie, etc.) les conditions dans lesquelles le système est prédisposé à être instable. En se plaçant dans un cadre linéaire, le problème se réduit à la détermination des fréquences propres de vibration du système couplé autour d'une configuration d'équilibre donnée. L'étude de l'amortissement (partie réelle de la fréquence complexe) permet alors de conclure sur la stabilité ou l'instabilité de l'état d'équilibre en considération. Plus précisément, si l'amortissement est positif les déformations de la structure seront amorties ; par contre si l'amortissement est négatif, les oscillations vont s'amplifier et le système devient instable. Le problème consiste alors en la détermination des fréquences de plus petite partie réelle.

Dépendant du cas étudié (tablier de pont [76], aile d'avion [29, 75], faisceau tubulaire [14], tuyau sous écoulement axial [81], etc.) la structure est modélisée comme un corps rigide ou comme un corps déformable. Ce choix est caractérisé par le type de mouvement jugé plus représentatif du phénomène en question. En ce sens, dans le cas déformable, le mouvement de la structure est généralement représenté par un petit nombre de déformées modales associés aux petites fréquences ou faibles amortissements (plus susceptibles d'être « excités »).

Après un calcul préliminaire des modes de vibration de la structure d'intérêt, une première approche consiste à simplifier le problème couplé, en supposant que la réponse du fluide aux mouvements de la structure, peut être « condensée » à partir d'un développement caractérisé par des matrices de masse, d'amortissement et de rigidité dits « ajoutées », voir [81]. L'obtention de ces matrices « ajoutées » demande des calculs aérodynamiques stationnaires et instationnaires non-linéaires associés aux déplacements modaux en question. La détermination des fréquences propres du système se réduit ainsi à la résolution d'un problème spectral matriciel quadratique, dont la taille est donnée par le nombre de modes structuraux fixés au départ.

Une deuxième approche plus générale, voir [29], consiste à condenser l'effet du fluide sans aucune hypothèse sur la réponse. Ceci conduit, par contre, à un problème aux valeurs propres non-linéaire, qui est souvent résolu par une méthode de double balayage : le premier sur les modes pris en considération et le deuxième sur la vitesse aérodynamique [29]. Cette méthode demande des résolutions aérodynamiques linéarisées associés à des mouvements sinusoïdaux de l'interface pour des nombreuses fréquences. Des méthodes d'interpolation linéaire ou de représentation par des fractions rationnelles de la réponse, permettent de réduire le nombre d'appels au solveur fluide linéarisé.

Même si cette dernière méthode n'impose aucune expression particulière sur la réponse du fluide, elle demande la résolution d'un problème aux valeurs propres non-linéaire, dont les solutions obtenues par la méthode de double balayage ne correspondent pas forcément aux fréquences de plus petite partie réelle. En d'autres mots la méthode peut ne pas fournir les « pires » amortissements du système.

Un des objectifs de cette thèse a été la définition d'une méthode numérique fiable permettant la détermination des conditions d'instabilité pour un système couplé en interaction fluide-structure. Notre approche consiste à étudier la stabilité des états d'équilibre du système à partir de l'analyse des solutions harmoniques d'un problème linéaire obtenu après une linéarisation spécifique, autour de l'état d'équilibre, du problème couplé complet fluide-structure.

L'utilisation d'un modèle linéaire pour les analyses de stabilité en interaction fluide-

structure ne constitue pas une première. Dans [57, 58] une approche similaire a été déjà considérée pour des études de flottement dans les ailes d'avion.

L'originalité de notre approche réside dans la définition d'une nouvelle méthode de linéarisation permettant d'obtenir un modèle linéaire d'interaction fluide-structure de complexité minimale, comportant des techniques de type transpiration. Ces techniques de transpiration, qui manquaient de justification théorique, vont être justifiées mathématiquement comme sous-produit de la nouvelle méthode de linéarisation. En outre, le problème spectral couplé associé à l'étude des solutions harmoniques du problème linéaire sera analysé mathématiquement, puis résolu avec une méthode spécifique de recherche des valeurs propres de partie réelle minimale.

Ce mémoire est divisé en deux parties. La première, composée de trois chapitres, est consacrée à la position du problème et à l'introduction de la méthode de linéarisation du problème couplé. La deuxième partie, comporte cinq chapitres, et correspond à l'analyse, théorique et numérique, de stabilité par l'étude des solutions harmoniques du problème couplé linéaire d'interaction fluide-structure.

Le premier chapitre est consacré à la description du problème mécanique envisagé dans cette thèse. Après un rappel des bases de la formulation ALE (Arbitrairement Lagrangien Eulérien) on présente l'idée heuristique générale de l'approche par transpiration, adaptée aux cas de petits déplacements de l'interface fluide-structure.

Dans le deuxième chapitre on introduit une nouvelle méthode de linéarisation pour des problèmes couplés en interaction fluide-structure. Cette méthode fournit un problème linéaire couplé d'interaction fluide-structure sous domaine fluide fixe avec des conditions non-standards de type transpiration. Ces développements permettront de justifier mathématiquement les conditions d'interface par transpiration introduites au chapitre 1.

La méthode de linéarisation développée dans le deuxième chapitre peut être interprétée comme une analyse de sensibilité par rapport à des perturbations dans les données initiales du système. En ce sens, le troisième chapitre est consacré à une étude préliminaire du contrôle et de la conception automatique de systèmes faisant intervenir un couplage fluide-structure. Plus précisément, nous établissons la structure des dérivées, par rapport aux variations de données frontières, d'un système couplé comportant un fluide, modélisé par les équations de Navier-Stokes, et une structure élastique en grands déplacements.

Dans le chapitre 4 on rappelle les notions de stabilité et les bases du « Principe de linéarisation » dans le domaine de l'hydrodynamique. Les techniques de linéarisation-transpiration développées au chapitre 2, nous permettront d'appliquer ces idées à l'analyse de stabilité linéaire d'un système couplé fluide-structure constitué d'un fluide visqueux, newtonien incompressible et d'une structure réduite. On définit ainsi un problème spectral fluide-structure couplé par l'intermédiaire d'une condition de type transpiration à l'interface.

Le chapitre 5 constitue une première étude mathématique rigoureuse du nouveau problème spectral obtenu dans le chapitre 4, issu de l'analyse de stabilité linéaire d'un système couplé fluide-structure. Le résultat principal de ce chapitre montre que le problème admet, au plus, une infinité dénombrable de valeurs propres complexes, chacune avec multiplicité finie, et qui ont l'infini comme seul point d'accumulation.

Le chapitre 6 est consacré à la définition d'un schéma de discrétisation pour le problème aux valeurs propres défini dans le chapitre 4. La résolution du problème discret revient

---

au calcul des valeurs propres d'un problème spectral matriciel généralisé.

Le chapitre 7 est consacré à la description et à l'adaptation de la méthode IRAM (Implicit Restarted Arnoldi Method), de la transformation généralisée de Cayley et de l'algorithme de couplage de ces deux outils, tel que proposé dans [54], pour la détermination des valeurs propres de plus petite partie réelle du problème spectral généralisé posé dans le chapitre 6.

Dans le dernier chapitre nous présentons les résultats numériques obtenus après application de l'algorithme décrit dans le chapitre 7. Les différents cas-test nous permettront de mettre évidence, d'une part, la performance du schéma de discrétisation introduit dans le chapitre 6 et, d'autre part, la robustesse de notre approche par linéarisation-transpiration dans la détection d'instabilités de systèmes en interaction fluide-structure.





## Première partie

### Problème de base et linéarisation



# Chapitre 1

## Cadre mécanique : ALE et transpiration

La modélisation des problèmes d'interaction fluide-structure en grands déplacements repose, de manière générale, sur le couplage de deux types de formulations : le solide classiquement traité en formulation lagrangienne, et le fluide décrit en formulation Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE). Cependant, dans un cadre de déplacements petits ou modérés de l'interface fluide-structure, et avec l'intention de surmonter les problèmes techniques provenant de l'utilisation des « grilles mobiles », les ingénieurs aéronauticiens ont développé une technique, dite de « transpiration », qui permet de se ramener à un problème fluide standard sur domaine fluide fixe en formalise eulérien.

Dans ce chapitre on décrit le type de problème mécanique envisagé dans cette thèse. On revoit les notions de base qui permettent d'introduire la formulation ALE et on présente l'idée heuristique générale de l'approche par transpiration, adaptée aux cas de petits déplacements de l'interface fluide-structure.

### 1.1 Problème mécanique : formalisme ALE

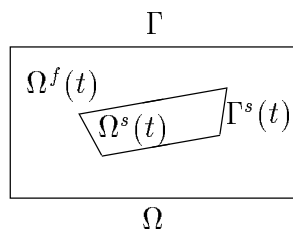


FIG. 1.1 – *Configuration actuelle*

Dans cette section, on introduit un problème modèle d'interaction fluide-structure. Nous considérons un solide occupant à l'instant  $t \geq 0$  un domaine  $\Omega^s(t) \subset \mathbb{R}^3$  de frontière  $\Gamma^s(t)$ . Ce solide baigne dans un fluide s'étendant dans tout l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Nous introduisons un volume de contrôle  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  contenant le solide pour tout instant  $t \geq 0$ . Ainsi, l'analyse de l'évolution du fluide se restreindra au volume  $\Omega^f(t) = \Omega - \overline{\Omega^s(t)}$ , voir la figure 1.1. La frontière de  $\Omega$  est notée  $\partial\Omega$  et on pose  $\Gamma = \partial\Omega$ . La frontière du domaine fluide est donnée

donc par

$$\partial\Omega^f(t) = \Gamma \cup \Gamma^s(t).$$

Le fluide considéré sera soit parfait compressible soit visqueux, newtonien. Dans cette dernière situation, on se restreindra au cas incompressible homogène, qui paraît le plus pertinent dans le cas des applications en génie biomédical ou civil. Son état est décrit par sa densité volumique, quantité de mouvement et énergie dans le cas parfait, ou par sa vitesse et pression dans le cas visqueux incompressible. On supposera que le solide est rigide ou élastique, en grands ou petits déplacements. Son état est décrit par sa vitesse dans le cas rigide, et par sa vitesse et son tenseur de contraintes dans le cas élastique. L'évolution de ces inconnues est régie par les lois de conservation de la mécanique des milieux continus [28, 68, 96]. On suppose, pour simplifier, que l'évolution du système a lieu sans échange de chaleur.

### 1.1.1 Le fluide

En formulation eulérienne, l'équilibre fluide est assuré par les équations de conservation de la masse (équation de continuité), de la quantité de mouvement et de l'énergie suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_E}{\partial t} \Big|_x + \operatorname{div}(\rho_E u_E) &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f(t), \\ \frac{\partial \rho_E u_E}{\partial t} \Big|_x + \operatorname{div}(\rho_E u_E \otimes u_E - \sigma_E) &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f(t), \\ \frac{\partial E_E}{\partial t} + \operatorname{div}(E_E u_E - \sigma_E u_E) &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

où le triplet  $(\rho_E, u_E, E_E)$  représente respectivement la densité volumique, vitesse et la énergie totale du fluide. De plus, le tenseur de contraintes de Cauchy,  $\sigma_E$ , est donné par une loi constitutive adéquate. Dans le cas d'un fluide parfait, le tenseur de contraintes est sphérique,  $\sigma_E = -p_E \mathbf{I}$ , avec  $p_E$  la pression statique du fluide, qui doit être reliée aux variables d'état par une loi d'état spécifique, par exemple, dans le cas d'un gaz caloriquement parfait on a

$$p = (\gamma - 1) \left( E_E - \frac{1}{2} \rho_E \|u_E\|^2 \right),$$

où  $\gamma > 1$  dénote le rapport de chaleurs spécifiques. Dans le cas visqueux newtonien incompressible, on a

$$\sigma_E = -p_E \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon(u_E),$$

avec  $\varepsilon(u_E) = \frac{1}{2} \left[ \nabla u_E + (\nabla u_E)^T \right]$ , et  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide. En l'absence de phénomènes thermiques significatifs, l'équation de l'énergie n'intervient pour déterminer l'écoulement que si le fluide est compressible. Dans le cas incompressible les équations

fluide sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_E}{\partial t} \Big|_x + \operatorname{div} \left( u_E \otimes u_E - \frac{\sigma_E}{\rho_E} \right) &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f(t), \\ \operatorname{div} u_E &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f(t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

**Remarque 1.1.1** *L'indice « E », employé dans les notations précédentes, indique que la variable d'état est décrite en formalisme eulérien.*

En général, le formalisme utilisé dans (1.1) et (1.2) n'est pas pratique pour la résolution d'un problème d'interaction fluide-structure car la configuration  $\Omega(t)^f$  est inconnue. En effet, si le domaine fluide  $\Omega^f(t)$  était une donnée du problème, rien ne s'opposerait, au moins au niveau continu, à la description eulérienne (1.1) et (1.2). Cependant, dans le cas de l'interaction fluide-structure les variations du domaine  $\Omega^f(t)$  sont directement liées à la déformation de la structure par l'intermédiaire de  $\Gamma^s(t)$ , car  $\Omega^f(t) = \Omega - \overline{\Omega^s(t)}$ . Du côté solide cette difficulté est classiquement surmontée en considérant un formalisme lagrangien [9, 49], évaluant les différentes variables en chaque point matériel que l'on suit au cours du temps. On utilise parfois cette modélisation entièrement lagrangienne du couplage fluide-structure lorsque le fluide subit de petits déplacements [81]. Sinon, c'est le formalisme dit ALE (Arbitrairement Lagrangien Eulérien) qui semble être le plus couramment utilisé pour les problèmes d'interaction fluide-structure en grands déplacements [27, 46, 51, 70, 87]. En se ramenant à un domaine qui suit le mouvement de l'interface, sans être attaché aux particules fluide, cette modélisation permet de combiner les avantages du lagrangien (traitement des mouvements de l'interface) et de l'eulérien (traitement de la convection).

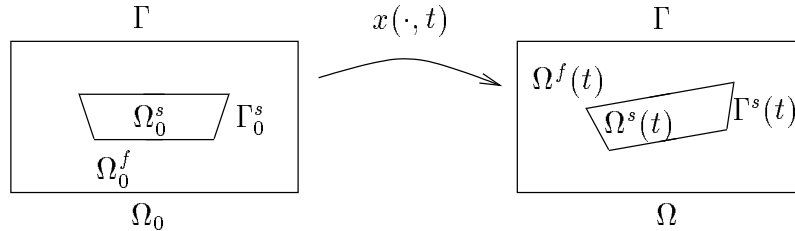


FIG. 1.2 – Description cinématique

Étant donnée une configuration matérielle solide de référence  $\Omega_0^s \subset \Omega$  de frontière  $\Gamma_0^s$ , nous choisissons la configuration de référence fluide  $\Omega_0^f = \Omega - \overline{\Omega_0^s}$ , voir la figure 1.2. Le paramétrage du domaine  $\Omega^f(t)$  et  $\Omega^s(t)$ , c'est-à-dire, du volume de contrôle  $\Omega = \Omega^f(t) \cup \overline{\Omega^s(t)}$ , est alors réalisé par la donnée d'une application régulière et injective :

$$\begin{aligned} x : \Omega \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \Omega \\ (x_0, t) &\longrightarrow x = x(x_0, t). \end{aligned}$$

Le choix de la configuration de référence fluide  $\Omega_0^f$  et de la carte  $x$  dans  $\Omega_0^f$  est arbitraire, d'où l'appellation de formulation Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE) pour le fluide (voir plus loin la remarque 1.1.5).

On note  $x^f = x|_{\Omega_0^f}$  et  $x^s = x|_{\Omega_0^s}$ , de telle façon que [51] :

- pour  $x_0 \in \Omega_0^s$ ,  $x^s(x_0, t)$  correspond à la position d'un point matériel  $x_0$  à l'instant  $t \geq 0$ . Il s'agit alors de la description lagrangienne classique en mécanique du solide ;
- l'application  $x^f$  est définie à partir du mouvement de l'interface matérielle  $\Gamma_0^s$  donné par  $x^s|_{\Gamma_0^s}$ , comme un prolongement « raisonnable » régulier,  $\text{Ext}(x^s|_{\Gamma_0^s})$ , au domaine  $\overline{\Omega}_0^f$  de ce mouvement.

En résumé, l'application  $x$  est donnée par

$$\begin{aligned} x(x_0, t) &= \text{Ext}(x^s|_{\Gamma_0^s})(x_0, t), \quad \forall x_0 \in \overline{\Omega}_0^f, \\ x(x_0, t) &= x^s(x_0, t), \quad \forall x_0 \in \overline{\Omega}_0^s. \end{aligned}$$

Ici,  $\text{Ext}$  désigne un opérateur d'extension de  $\Gamma_0^s$  sur  $\overline{\Omega}_0^f$ .

**Remarque 1.1.2** *On a considéré ici, sans perte de généralité, que le domaine fluide est déformé seulement à partir du mouvement de l'interface fluide-structure  $\Gamma_0^s$ , car  $\partial\Omega_0 = \Gamma$  reste fixe au cours du temps. Ceci implique que le domaine de calcul  $\Omega$  reste aussi fixe en temps. Cependant, on notera  $\Omega_0 = \Omega_0^f \cup \overline{\Omega}_0^s$  le domaine de référence, pour le distinguer de la configuration actuelle toujours notée  $\Omega = \Omega^f(t) \cup \overline{\Omega}^s(t)$ .*

**Remarque 1.1.3** *La définition de l'opérateur d'extension,  $\text{Ext}$ , est arbitraire à l'intérieur de  $\Omega_0^f$ . Il ne s'agit pas d'une inconnue du problème, mais d'une fonction implicite ou explicite connue.*

Cette approche permet alors de formuler le problème de départ comme un problème à trois champs : le fluide, la structure, et le mouvement du volume de contrôle fluide, c'est-à-dire, l'opérateur d'extension,  $\text{Ext}$ , souvent décrit de manière implicite par un système pseudo-structurel en considérant le domaine fluide en mouvement comme une structure fictive, voir [3, 57, 58].

L'introduction de la carte  $x$ , permet de mettre en évidence les dépendances des équations fluides vis-à-vis du mouvement du domaine  $\Omega^f(t)$ , en transportant les équations fluide (1.1) et (1.2) dans le domaine de référence  $\Omega_0^f$ .

Dans la suite  $\nabla_0$  dénotera le gradient spatial en configuration de référence  $\Omega_0$ , de même que  $\frac{\partial}{\partial t}|_{x_0}$  dénotera la dérivée temporelle à point fixé dans  $\Omega_0$ . Pour les champs de nature « matérielle », tels que  $x$ , cette dérivée temporelle sera notée avec un point superposé. Par exemple, on notera  $w = \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}|_{x_0}$  la vitesse du domaine  $\Omega(t)$ , appelée aussi « vitesse de grille » dans un cadre discret (elle représentera la vitesse des nœuds du maillage). On introduit le gradient de déformation  $F = \nabla_0 x$  et le jacobien de la transformation  $J = \det F$ .

**Remarque 1.1.4** *D'après la définition de la carte  $x$ ,  $w|_{\Omega_0^s}$  représente la vitesse du solide, alors que  $w|_{\Omega_0^f}$  représente la vitesse du volume de contrôle fluide, qui est différente, en général, de la vitesse du fluide dans  $\Omega^f(t)$ .*

Le transport des lois de conservation (1.1) et (1.2) s'appuie sur les relations suivantes. Pour un champ scalaire  $\rho_E$ , un champ vectoriel  $u_E$  et un champ tensoriel d'ordre deux  $\sigma_E$  on a :

$$\begin{aligned}
 \nabla \rho_E &= F^{-T} \nabla_0 \rho, \\
 \nabla u_E &= \nabla_0 u F^{-1}, \\
 J \operatorname{div} u_E &= \operatorname{div}_0 (J u F^{-T}), \\
 J \operatorname{div} \sigma_E &= \operatorname{div}_0 (J \sigma F^{-T}), \\
 J \frac{\partial \rho_E}{\partial t} \Big|_x &= \frac{\partial J \rho}{\partial t} \Big|_{x_0} - \operatorname{div}_0 (J \rho w F^{-T}), \\
 J \frac{\partial u_E}{\partial t} \Big|_x &= \frac{\partial J u}{\partial t} \Big|_{x_0} - \operatorname{div}_0 (J u \otimes w F^{-T}),
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

où  $\rho$ ,  $u$  et  $\sigma$  sont définis par

$$\begin{aligned}
 \rho(x_0, t) &= \rho_E(x^f(x_0, t), t), \\
 u(x_0, t) &= u_E(x^f(x_0, t), t), \\
 \sigma(x_0, t) &= \sigma_E(x^f(x_0, t), t),
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

pour chaque  $x_0 \in \Omega_0^f$ . Les deux premières relations de (1.3) s'obtiennent par composition de dérivées. Les deux suivantes découlent de l'identité de Piola,

$$\operatorname{div}_0 (J F^{-T}) = 0,$$

voir [9, page 39]. Finalement, les deux dernières s'obtiennent après dérivation temporelle du déterminant

$$\frac{\partial J}{\partial t} \Big|_{x_0} = J \operatorname{div} w,$$

consulter [43, pages 23 et 63], et dérivation temporelle de (1.4)<sub>1,2</sub>,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{x_0} &= \nabla \rho_E \cdot w + \frac{\partial \rho_E}{\partial t} \Big|_x, \\
 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x_0} &= \nabla u_E w + \frac{\partial u_E}{\partial t} \Big|_x,
 \end{aligned}$$

ce qui permet de relier les dérivées temporelles en configuration actuelle et configuration de référence, voir aussi [27, 68].

Les relations précédentes permettent de transporter n'importe quel terme des équations (1.1) et (1.2). Ainsi, après transport en configuration de référence  $\Omega_0^f$ , et en prenant compte des notations (1.4), les trois lois de conservation (1.1) prennent le formalisme ALE



suisant :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J\rho}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 [J\rho(u-w)F^{-T}] &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\
 \frac{\partial J\rho u}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 \{J[\rho u \otimes (u-w) - \sigma]F^{-T}\} &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\
 \frac{\partial JE}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 \{J[E(u-w) - \sigma u]F^{-T}\} &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

De même pour (1.2) on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Ju}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 \left\{ J \left[ u \otimes (u-w) - \frac{\sigma}{\rho} \right] F^{-T} \right\} &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\
 \operatorname{div}_0 (JuF^{-T}) &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

**Remarque 1.1.5** *Les équations précédentes permettent de mettre en évidence la double façade du formalisme ALE. Si  $w = 0$  dans  $\Omega_0^f$ , on retrouve les équations du fluide en formalisme d'Euler, tandis que si  $w = u$  dans  $\Omega_0^f$  le formalisme est lagrangien. En autres mots, loin de l'interface le formalisme considéré est eulérien, par contre, près de l'interface la description est lagrangienne [27].*

## 1.1.2 La structure

L'évolution du solide est donnée par le mouvement  $x^s$  et son champ de contraintes  $S = JF^{-1}\sigma F^{-T}$  (deuxième tenseur de Piola-Kirchoff [9, 49]) relié à  $x^s$  par une loi de comportement adéquate [9, 49]. Par conséquent, le couple  $(x^s, S)$  satisfait les équations de l'élastodynamique non-linéaire (1.5)<sub>2</sub> avec  $w = u$  [49] :

$$\rho_0^s \ddot{x}^s - \operatorname{div}_0(FS) = f, \quad \text{dans } \Omega_0^s. \tag{1.7}$$

Ici,  $\rho_0^s$  représente la densité volumique du solide et  $f$  le chargement volumique appliqué.

On considérera le plus souvent le cas (consulter [24, 29, 81]) où le déplacement de la structure est donné par une combinaison linéaire d'un nombre fini de modes de vibration  $\varphi_i : \Omega_0^s \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $1 \leq i \leq n^s$ , de telle manière que :

$$x^s(x_0, t) = x_0 + \sum_{i=1}^{n^s} s_i(t)\varphi_i(x_0), \quad \forall x_0 \in \Omega_0^s,$$

avec  $s(t) = \{s_i(t)\}_{1 \leq i \leq n^s} \in \mathbb{R}^{n^s}$ , soit donc,

$$x^s = I_{\Omega_0^s} + \Phi s, \quad \text{dans } \Omega_0^s,$$

où la matrice  $\Phi = [\varphi_1 | \varphi_2 | \dots | \varphi_{n^s}]$ , de taille  $3 \times n^s$  et dont les colonnes sont les déformées modales  $\varphi_i$ , représente la basse modale tronquée. Le comportement de la structure est alors caractérisé par des opérateurs de masse,  $\mathcal{M}$ , et rigidité,  $\mathcal{K}$ . Les équations de la dynamique de la structure se réduisent ainsi à :

$$\mathcal{M}\ddot{s} + \mathcal{K}s = f_g, \tag{1.8}$$

avec  $f_g \in \mathbb{R}^{n^s}$  le vecteur de forces généralisées donné par l'expression

$$[f_g]_i = \int_{\Gamma_0^s} f_{\Gamma_0^s} \cdot \varphi_i \, da_0, \quad 1 \leq i \leq n^s,$$

et où  $f_{\Gamma_0^s} \in \mathbb{R}^3$  désigne la densité surfacique de force appliquée sur le bord de la structure en configuration de référence.

**Remarque 1.1.6** *Dans un cadre linéaire, petits déplacements autour de la configuration de référence, le comportement de la structure est caractérisé par des matrices de masse,  $M$ , et rigidité,  $K$ , symétriques et définies positives. De sorte que les équations (1.8) deviennent*

$$M \ddot{s} + K s = f_g. \quad (1.9)$$

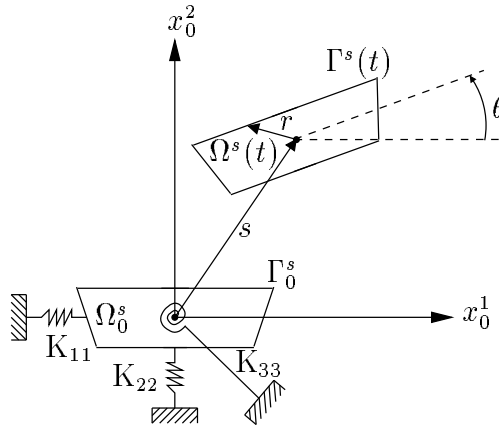


FIG. 1.3 – Corps rigide bidimensionnel

Le dernier modèle que nous allons considérer est celui où la structure se réduit à un corps rigide bidimensionnel [76, 70, 87]. Le mouvement est donc défini à partir de trois degrés de liberté : deux translations  $s \in \mathbb{R}^2$  et une rotation  $\theta$  autour du centre de gravité, plus précisément,

$$x^s(x_0, t) = s(t) + Q(\theta(t))x_0, \quad \forall x_0 \in \Omega_0^s, \quad (1.10)$$

avec  $Q(\theta)$  la matrice de rotation

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Remarque 1.1.7** *Sans perte de généralité, on a supposé ici que l'origine du système de coordonnées est placée au centre de gravité de la structure au repos.*

On supposera que le corps rigide est supporté élastiquement par un système de ressorts, voir la figure 1.3. Ainsi, les équations régissant l'évolution de  $s$  et  $\theta$  sont données par :

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \mathcal{K} \begin{pmatrix} s \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_s \\ f_\theta \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Ici,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{K}$  représentent les opérateurs de masse et rigidité du système,  $f_s \in \mathbb{R}^2$  la résultante des forces appliquées sur le corps rigide et  $f_\theta$  le moment associé, autour du centre de gravité du corps. Plus précisément (voir [76]), on a

$$f_s = \int_{\Gamma^s(t)} f_{\Gamma^s} da, \quad f_\theta = Q_0 : \int_{\Gamma^s(t)} f_{\Gamma^s} \otimes r da,$$

et où  $f_{\Gamma^s} \in \mathbb{R}^2$  désigne la densité linéique de force appliqué sur la frontière du corps,  $r$  le vecteur de position placé au centre de gravité, et  $Q_0$  dénote la matrice de rotation

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 1.1.8** *Parfois on rajoute aux équations (1.8) ou (1.11) un terme d'amortissement généralisé,  $\mathcal{C}\dot{s}$  ou  $\mathcal{C} \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ , pour tenir compte de la dissipation d'énergie observée expérimentalement. En général, cet amortissement est faible. Dans la suite nous le négligerons systématiquement [29, 81].*

Dans un cadre en petits déplacements (1.10) devient

$$x^s(x_0, t) = x_0 + s(t) + \theta(t)Q_0x_0, \quad \forall x_0 \in \Omega_0^s,$$

ainsi que  $f_s$  et  $f_\theta$  se réduisent à

$$f_s = \int_{\Gamma_0^s} f_{\Gamma_0^s} da_0, \quad f_\theta = Q_0 : \int_{\Gamma_0^s} f_{\Gamma_0^s} \otimes x_0 da_0 = \int_{\Gamma_0^s} f_{\Gamma_0^s} \cdot (Q_0x_0) da_0.$$

Il résulte donc que, dans un cadre linéaire, les équations de la dynamique du corps rigide (1.11) sont un cas particulier de (1.9) en prenant comme modes de vibration :

$$\varphi_1(x_0) = e_1, \quad \varphi_2(x_0) = e_2, \quad \varphi_3(x_0) = Q_0x_0, \quad \forall x_0 \in \Omega_0^s.$$

### 1.1.3 Le problème couplé

Le couplage entre les équations du solide et celles du fluide est opéré par des conditions aux limites standards sur l'interface fixe  $\Gamma_0^s$ , voir [68, 51, 29, 30, 27, 46, 70, 87]. À savoir :

- la continuité cinématique de la vitesse ou de sa trace normale selon le cas :

$$\begin{aligned} u &= \dot{x}^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s, \quad (\text{fluide visqueux}), \\ u \cdot n &= \dot{x}^s \cdot n, \quad \text{sur } \Gamma_0^s, \quad (\text{fluide parfait}). \end{aligned} \tag{1.12}$$

- continuité cinétique des efforts :

$$FSn_0 = J\sigma F^{-T}n_0, \quad \text{sur } \Gamma_0^s, \tag{1.13}$$

où  $n_0$  désigne le vecteur normal unitaire sur  $\Gamma_0^s$ , dirigée vers  $\Omega_0^s$  (ou, plus généralement, normal à  $\partial\Omega_0^f$  et dirigé vers l'extérieur de  $\Omega_0^f$ ), et  $n$  le vecteur normal correspondant en configuration déformée, relié à  $n_0$  par l'expression suivante [9] :

$$n = \frac{F^{-T} n_0}{\|F^{-T} n_0\|}.$$

**Remarque 1.1.9** *On rappelle ici que les fonctions définies sur le fluide sont définies en configuration ALE. Par exemple, la fonction  $u(x_0, t)$  dénote la vitesse du fluide au point spatial  $x^f(x_0, t)$ .*

De plus, les équations fluides sont munies de conditions aux limites sur la frontière extérieure  $\Gamma$ , voir [68, 51, 29, 30, 87]. Par exemple :

– cas visqueux :

1. condition de Dirichlet : vitesse imposée le long de  $\Gamma$

$$u = u_\Gamma, \quad \text{sur } \Gamma.$$

2. condition mixte : vitesse imposée et sortie libre sur deux parties disjointes de  $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_s$ , voir [93, 87] :

$$\begin{aligned} u &= u_{\Gamma_e}, \quad \text{sur } \Gamma_e, \\ \sigma n_0 &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (\text{sortie libre}). \end{aligned} \tag{1.14}$$

– cas parfait : la frontière  $\Gamma$  est placée suffisamment loin de  $\Omega_0^s$  pour que les effets de la présence de la structure puissent y être négligés. On considère ainsi que l'écoulement est uniforme sur cette frontière de manière qu'on puisse imposer

$$(\rho, u, E) = (\rho_\infty, u_\infty, E_\infty), \quad \text{sur } \Gamma.$$

Du fait de l'hyperbolicité du système, cette condition est imposée sur les caractéristiques entrantes (voir [29] et le chapitre suivant).

En résumé, le système couplé est régi par les équations fluide en formulation ALE (1.5) où (1.6), les équations du solide (1.7) où (1.8), couplées à l'interface fluide structure par l'intermédiaire des conditions cinématiques et cinétiques du type (1.12) et (1.13).

Dans le cas d'un fluide parfait compressible, couplé avec une structure élastique en grands déformations, on a le problème couplé suivant :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J\rho}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 [J\rho(u-w)F^{-T}] &= 0, & \text{dans } \Omega_0^f, \\
 \frac{\partial J\rho u}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 \{J[\rho u \otimes (u-w) - \sigma]F^{-T}\} &= 0, & \text{dans } \Omega_0^f, \\
 \frac{\partial JE}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 \{J[E(u-w) - \sigma u]F^{-T}\} &= 0, & \text{dans } \Omega_0^f, \\
 (\rho, u, E) &= (\rho_\infty, u_\infty, E_\infty), & \text{sur } \Gamma, \\
 u \cdot n &= \dot{x}^s \cdot n, & \text{sur } \Gamma_0^s, \\
 FS n_0 &= J\sigma F^{-T} n_0, & \text{sur } \Gamma_0^s, \\
 \rho_0^s \ddot{x}^s - \operatorname{div}_0(FS) &= f, & \text{dans } \Omega_0^s, \\
 (\rho, u, E, x^s, \dot{x}^s) \Big|_{t=0} &= (\rho_0, u_0, E_0, x^{s,0}, x^{s,1}), & \text{dans } (\Omega_0^f)^3 \times (\Omega_0^s)^2.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Ici,  $f$  représente la force volumique appliquée à la structure,  $(\rho_0, \rho_0 u_0, E_0)$  l'état initial du fluide et  $x^{s,0}, x^{s,1}$  le déplacement et la vitesse de la structure à l'instant initial. Si le fluide est visqueux, newtonien, homogène en écoulement incompressible, le problème précédent devient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Ju}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 \left\{ J \left[ u \otimes (u-w) - \frac{\sigma}{\rho} \right] F^{-T} \right\} &= 0, & \text{dans } \Omega_0^f, \\
 \operatorname{div} (JuF^{-T}) &= 0, & \text{dans } \Omega_0^f, \\
 u &= u_\Gamma, & \text{sur } \Gamma, \\
 u &= \dot{x}^s, & \text{sur } \Gamma_0^s, \\
 FS n_0 &= J\sigma F^{-T} n_0, & \text{sur } \Gamma_0^s, \\
 \rho_0^s \ddot{x}^s - \operatorname{div}_0(FS) &= f, & \text{dans } \Omega_0^s, \\
 (u, x^s, \dot{x}^s) \Big|_{t=0} &= (u_0, x^{s,0}, x^{s,1}), & \text{dans } \Omega_0^f \times (\Omega_0^s)^2.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Dans le cas visqueux et si on considère un comportement réduit de la structure on a un problème couplé du type :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J u}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 \left\{ J \left[ u \otimes (u - w) - \frac{\sigma}{\rho} \right] F^{-T} \right\} &= 0, & \text{dans } \Omega_0^f, \\ \operatorname{div}_0 (J u F^{-T}) &= 0, & \text{dans } \Omega_0^f, \\ u &= u_{\Gamma_e}, & \text{sur } \Gamma_e, \\ \sigma n_0 &= 0, & \text{sur } \Gamma_s, \\ u &= \Phi \dot{s}, & \text{sur } \Gamma_0^s, \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \ddot{s} + \mathcal{K} s &= - \int_{\Gamma_0^s} J \Phi^T \sigma F^{-T} n_0 \, da_0, \\ (u, s, \dot{s}) \Big|_{t=0} &= (u^0, s^0, s^1). \end{aligned}$$

**Remarque 1.1.10** Dans le cas d'un comportement réduit de la dynamique de la structure, le vecteur de chargement généralisé  $(1.17)_6$  est donné par la projection de l'effort fluide à l'interface sur la basse modale tronquée, c'est-à-dire,

$$[f_g]_i = - \int_{\Gamma_0^s} (J \sigma F^{-T} n_0) \cdot \varphi_i \, da_0, \quad 1 \leq i \leq n^s.$$

Dans la suite de ce chapitre on présentera un autre formalisme largement utilisé en couplage fluide-structure, et qui s'encadre dans une approche de faibles déplacements de l'interface  $\Gamma_0^s$ .

## 1.2 Approche en petits déplacements : transpiration

Comme on l'a déjà mentionné dans la section précédente, les formalismes de Lagrange et Euler ne sont pas adaptés, en général, aux problèmes d'écoulements fluide avec frontière mobile. En revanche, le formalisme ALE est tout à fait adapté à ce type de situations, car il permet le traitement d'une convection importante avec petites ou grandes déformations du domaine fluide. Cependant, la formulation ALE a deux inconvénients pratiques :

1. d'une part, elle implique le calcul, à chaque pas de temps, d'une « grille fluide » et d'une vitesse associée  $w$ . En outre, cette nouvelle grille doit suivre le mouvement de l'interface fluide-structure avec bonnes propriétés de régularité en temps et espace [30];
2. et d'autre part, l'adaptation d'un code résolvant les équations d'écoulement fluide, par exemple Navier-Stokes, au formalisme ALE demande des modifications assez importantes. En effet, les vecteurs de flux, qui apparaissent à l'intérieur des opérateurs de divergence, sont radicalement modifiés par la formulation ALE, ce qui ne permet pas l'utilisation immédiate des solveurs fluide « classiques » déjà existants.

Dans un cadre de petits déplacement de l'interface fluide-structure, ou si on s'intéresse à une analyse de stabilité linéaire, une modélisation ALE peut donc paraître trop

chère et compliquée [81]. Ainsi, avec l'intention de surmonter les difficultés pratiques de la formulation ALE, les ingénieurs aéronauticiens ont développé une technique, dite de « transpiration » [45, 79, 22, 81, 63, 62, 30, 29], qui n'exige pas l'utilisation de grilles mobiles ni l'adaptation profonde des solveurs fluides, et qui permet de prendre en compte les effets de la structure dans le fluide, par le moyen d'une simple correction des conditions aux limites sur une interface fixe. Plus précisément, cette approche, basée dans une idée originale de Lighthill [59, 65], considère l'interface fluide-structure comme une surface perméable, à travers de laquelle le fluide coule avec une vitesse, dite de « transpiration », déterminée à partir du déplacement expérimenté par l'interface fluide-structure.

Le but de cette démarche est donc d'utiliser dans le fluide des méthodes optimisées, bien connues, fiables et largement validées complétées par des conditions aux limites sur interface fixe permettant de simuler la vibration de l'interface fluide-structure [81].

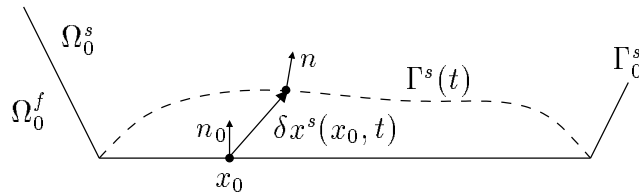


FIG. 1.4 – Le fluide traverse l'interface  $\Gamma_0^s$

Typiquement, la condition de transpiration est obtenue de façon heuristique à partir d'un développement limité de la vitesse fluide, que l'on suppose suffisamment régulière au voisinage de l'interface fluide-structure  $\Gamma_0^s$  :

$$u_E(I + \delta x^s) = u_E + \nabla u_E \delta x^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s, \quad (1.18)$$

voir la figure 1.4.

**Remarque 1.2.1** *Ce développement limité est heuristique. Il a un sens uniquement dans le cas particulier où le fluide traverse l'interface  $\Gamma_0^s$  (figure 1.4), c'est-à-dire, quand le champ de vitesse  $u_E$  est défini sur l'interface fixe  $\Gamma_0^s$ .*

En imposant la contrainte cinématique de continuité de vitesses (1.12)<sub>1</sub>

$$u_E(I + \delta x^s) = \dot{\delta x^s}, \quad \text{sur } \Gamma_0^s,$$

on déduit de (1.18) la loi de transpiration suivante pour un fluide visqueux :

$$u_E = \dot{\delta x^s} - \nabla u_E \delta x^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s. \quad (1.19)$$

La condition précédente peut être appliquée ainsi aux équations fluide sur domaine variable

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_E}{\partial t} \Big|_x + \operatorname{div} \left( u_E \otimes u_E - \frac{\sigma_E}{\rho_E} \right) &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f(t), \\
 \operatorname{div} u_E &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f(t), \\
 u_E &= u_{\Gamma_e}, \quad \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma_E n &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_s, \\
 u_E &= \delta \dot{x}^s - \nabla u_E \delta x^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s.
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Tel quel, ces équations sont un peu incohérentes puisqu'elles mélangent équations en domaine actuel et conditions aux limites sur domaine fixe. La seconde étape heuristique consiste ensuite à identifier  $\Omega^f(t)$  et  $\Omega_0^f$  dans (1.20), ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_E}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 \left( u_E \otimes u_E - \frac{\sigma_E}{\rho_E} \right) &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\
 \operatorname{div}_0 u_E &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\
 u_E &= u_{\Gamma_e}, \quad \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma_E n_0 &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_s, \\
 u_E &= \delta \dot{x}^s - \nabla_0 u_E \delta x^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s.
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Cette nouvelle formulation reste un peu contradictoire dans sa forme car elle fait intervenir sur domaine fixe une fonction physique  $u_E$  qui elle est définie sur domaine variable. Cette contradiction sera levée au chapitre suivant.

Le caractère implicite de  $u_E$  dans la condition (1.19) peut être traité avec une méthode de point fixe [62]. Dans [81], en connaissant le champ de vitesse  $u_0$  correspondant à l'écoulement permanent sans mouvement de l'interface, la relation (1.19) est transformée dans une loi de paroi explicite en remplaçant le gradient  $\nabla_0 u_E$  inconnu, par le gradient  $\nabla_0 u_0$ . On impose donc

$$u_E = \delta \dot{x}^s - \nabla_0 u_0 \delta x^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s. \tag{1.22}$$

Même si cette simplification pourrait paraître grossière, on remarque que la condition (1.22) permet de superposer deux aspects fondamentaux du couplage, la superposition d'un écoulement permanent et la vibration des parois [81].

Dans le cas où la condition à imposer est (1.12)<sub>2</sub>, soit

$$u_E (I + \delta x^s) \cdot n = \delta \dot{x}^s \cdot n, \quad \text{sur } \Gamma_0^s,$$

la relation (1.18) implique

$$u_E \cdot n = (\delta \dot{x}^s - \nabla_0 u_E \delta x^s) \cdot n, \quad \text{sur } \Gamma_0^s,$$



ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned} u_E \cdot n_0 &= u_E \cdot n_0 + (\dot{\delta x^s} - \nabla_0 u_E \delta x^s - u_E) \cdot n \\ &= \dot{\delta x^s} \cdot n - \nabla_0 u_E \delta x^s \cdot n - u_E \cdot (n - n_0). \end{aligned}$$

On tire donc la loi de transpiration (ou de « injection/succion » [62]) suivante :

$$u_E \cdot n_0 = \dot{\delta x^s} \cdot n - \nabla_0 u_E \delta x^s \cdot n - u_E \cdot (n - n_0), \quad \text{sur } \Gamma_0^s. \quad (1.23)$$

Le vecteur  $n_0$  est le vecteur normal unitaire à la paroi en configuration de référence, orienté du fluide vers le solide.

Le terme de premier ordre  $\nabla_0 u \delta x$  dans (1.22) et (1.23) est très souvent négligé dans les applications [22, 29, 62], car il est en général d'un ordre de grandeur inférieur aux autres termes, en particulier pour les écoulements autour d'obstacles profilés. Ceci conduit à écrire

$$\begin{aligned} u_E &= \dot{\delta x^s}, \quad \text{sur } \Gamma_0^s, \quad (\text{fluide visqueux}), \\ u_E \cdot n_0 &= \dot{\delta x^s} \cdot n - u_E \cdot (n - n_0), \quad \text{sur } \Gamma_0^s, \quad (\text{fluide parfait}). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Le calcul des efforts fluide sur l'interface avec une approche par transpiration demande un traitement spécial. En effet, en formalisme eulérien l'intégrale de surface à lieu sur  $\Gamma^s(t)$ , qui n'est pas accessible pour la transpiration. Pour contourner cette difficulté on développe aussi le champ de contraintes fluide au voisinage de l'interface [81], c'est-à-dire,

$$\sigma_E(I + \delta x^s) = \sigma_E + \nabla_0 \sigma_E \delta x^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s.$$

On peut donc remplacer (1.17)<sub>6</sub> par

$$\mathcal{M}\ddot{s} + \mathcal{K}s = - \int_{\Gamma_0^s} J \Phi^T (\sigma_E + \nabla_0 \sigma_E \delta x^s) F^{-T} n_0 da_0. \quad (1.25)$$

Comme pour le terme  $\nabla_0 u$ , dans les conditions de transpiration (1.22) et (1.23), le terme de premier ordre  $\nabla_0 \sigma$  est généralement négligé dans les applications [30, 62].

De nombreuses comparaisons avec la méthode ALE montrent que la transpiration se comporte de manière très satisfaisante. On peut citer, par exemple, les références [22, 30] pour les écoulements d'Euler autour d'un profil d'aile (mouvement imposé), [81] pour les vibrations d'un cylindre dans un fluide visqueux (mouvement imposé), ou encore [62] pour des écoulements turbulents autour d'un profil d'aile ou de rectangle (mouvement imposé ou couplé). Des différences apparaissent évidemment quand l'amplitude des oscillations est grande. Cependant, comme on a déjà remarqué, dans un cadre de analyse de stabilité linéaire on ne cherche que des instabilités apparaissant à faible amplitude. En outre, ces comparaisons montrent une réduction considérable en temps de calcul par rapport à la simulation ALE complète.

Les comparaisons effectuées dans [62], ou les conditions de transpiration (1.23) et (1.24) sont appliqués à des lois des parois en turbulence, constatent que la condition (1.23) est généralement plus précise que (1.24), principalement dans le domaine des basses fréquences, où le terme  $\nabla_0 u \delta x^s$  peut être prédominant par rapport à  $\dot{\delta x^s}$ .

## 1.3 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre les idées de base de deux approches couramment utilisées dans la modélisation de systèmes d'interaction fluide-structure. La formulation ALE qui trouve tout sa puissance pour des grands déplacements de l'interface. La méthode de transpiration adaptée au cas de petites amplitudes des déplacements et qui permet de prendre en compte l'effet du déplacement de l'interface en gardant un domaine fluide fixe en formalisme eulérien. Cependant, l'absence jusqu'à ces jours d'une justification mathématique solide de cette méthode, voir remarque 1.2.1, en faisait un champ largement ouvert à la controverse. Une première justification de la méthode de transpiration sera présentée au chapitre suivant.



# Chapitre 2

## De l’ALE à la transpiration

Les techniques de transpiration, décrites dans le chapitre précédent, sont largement utilisées dans le domaine industriel, mais manquent de justification théorique. Par ailleurs, l’analyse et la résolution numérique de ces équations nécessite de mettre au point des formulations variationnelles adéquates. On montrera dans ce chapitre comment un développement asymptotique adéquat permet de dériver et justifier mathématiquement ces techniques. On s’intéressera à la linéarisation du problème couplé d’interaction fluide-structure introduit dans le chapitre précédent, autour de l’état stationnaire associé.

Dans la première section on introduit le problème couplé dans un cadre variationnel adéquat. On définit, dans une deuxième section, l’état stationnaire autour duquel on linéarise le problème couplé de départ sous forme variationnelle. Dans la troisième section on introduit la notion de problème de référence fluide transporté. La méthode de linéarisation est détaillée dans la quatrième section. Dans la cinquième section on explicite, sous forme forte, les sous-problèmes linéaires obtenus. Finalement, dans la dernière section on se sert des résultats précédents pour justifier l’approche par transpiration.

Ce chapitre est tiré d’un article écrit en collaboration avec T. Fanion et P. Le Tallec, et paru dans la *Revue Européenne des Éléments Finis* [30].

### 2.1 Écriture variationnelle

Le principe mathématique de base consiste à écrire le problème fluide en formulation variationnelle dans la configuration de référence ALE, en travaillant avec l’inconnue fondamentale  $\delta W$ , définie par

$$\delta W(x_0, t) = W_E(x^f(x_0, t), t) - \underbrace{W_0(x_0) - \nabla_0 W_0(x_0) \delta x(x_0, t)}_{\approx -W_0(x_0 + \delta x(x_0, t))}. \quad (2.1)$$

Ici  $W_E$  représente l’état actuel du fluide, au point physique  $x^f(x_0, t)$ , et  $W_0$  l’état fluide stationnaire correspondant à l’écoulement fluide autour de la structure en état de référence (supposé en équilibre), c’est-à-dire, avec  $x(x_0, t) = x_0$ . La nouvelle inconnue  $\delta W$  décrit, au premier ordre par rapport au déplacement de l’interface, la différence entre l’état actuel et l’état de référence au même point physique  $x^f(x_0, t)$ . Plus précisément, on s’intéressera à la

linéarisation du problème couplé d'interaction fluide-structure introduit dans le chapitre précédent, autour de l'état stationnaire associé à  $x = I$ , en prenant comme nouvelles inconnues le déplacement  $\delta x$  du domaine et la fluctuation  $\delta W$  de l'état fluide définie dans (2.1).

Dans la suite de ce chapitre, le fluide pourra être considéré parfait compressible ou visqueux newtonien homogène en écoulement incompressible. D'autre part, pour assurer que la configuration de référence est à l'équilibre sous l'action de l'écoulement fluide de référence  $W_0$ , on supposera que la structure possède une contrainte résiduelle  $\sigma_0^s$  (premier tenseur de Piola-Kirchhoff) qui équilibre l'effort fluide stationnaire sur l'interface.

Dans chaque cas particulier, les inconnues  $x$  et  $W$  satisfont les lois de conservation (1.15) ou (1.16). En multipliant le sous-problème fluide par  $\hat{v}^f \in \mathcal{D}(\Omega_0)^5$ , et le sous-problème solide par  $\hat{v}^s \in \mathcal{D}(\Omega_0)^5$ , et après intégration par parties et prise en compte des conditions à l'interface (1.12), on obtient la formulation variationnelle abstraite suivante : Trouver  $W : \Omega_0^f \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^5$  et  $x : \Omega_0 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  tels que

$$\begin{aligned} m^s(\ddot{x}^s, \hat{v}_2^s) + a^s(x^s, \hat{v}_2^s) + \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial JW}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f dx_0 \\ - \int_{\Omega_0^f} J[\phi(W, \sigma) - W \otimes w] F^{-T} : \nabla_0 \hat{v}^f dx_0 - \int_{\Gamma_0^s} J \sigma F^{-T} n_0 \cdot (\hat{v}_2^f - \hat{v}_2^s) da_0 \\ = \int_{\Omega_0^s} f \cdot \hat{v}_2^s dx_0 + \int_{\Gamma_0^s} w \cdot F S n_0^f \hat{v}_3^f da_0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{D}(\Omega_0)^5 \times \mathcal{D}(\Omega_0)^5, \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec la condition à l'infini,

$$\begin{aligned} \phi^E(W) n_0 = \mathcal{F}(\bar{W}, W_\infty), \quad \text{sur } \Gamma, \quad (\text{cas parfait}), \\ u = u_\Gamma, \quad \text{sur } \Gamma, \quad (\text{cas visqueux}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ici, nous avons utilisé les notations

$$\begin{aligned} W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5, \\ m^s(\ddot{x}^s, \hat{v}_2^s) = \int_{\Omega_0^s} \rho_0^s \ddot{x}^s \cdot \hat{v}_2^s dx_0, \quad a^s(x^s, \hat{v}_2^s) = \int_{\Omega_0^s} F S : \nabla_0 \hat{v}_2^s dx_0, \end{aligned}$$

$$\phi(W, \sigma) = W \otimes u - I_2 \sigma - I_3 \otimes (\sigma u), \quad (2.4)$$

avec

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et  $\sigma$  donné par une loi constitutive adéquate. Le flux  $\phi^E(W)$  correspond à la loi non-visqueuse  $\sigma = -pI$ . Le flux  $\mathcal{F}(\bar{W}, W_\infty)$  à l'infini est défini par « vector splitting » [29],

$$\mathcal{F}(\bar{W}, W_\infty) = \underbrace{\sum_{\lambda_k > 0} \lambda_k R_k \otimes L_k W}_{A^+} + \underbrace{\sum_{\lambda_k < 0} \lambda_k R_k \otimes L_k W_\infty}_{A^-},$$

avec un flux sortant  $A^+W$ , régi par la valeur locale  $W$ , et un flux rentrant  $A^-W_\infty$ , régi par l'état à l'infini  $W_\infty$ . Les vecteurs  $R_k$  et  $L_k$  sont, respectivement, les vecteurs propres à droite et à gauche, et  $\lambda_k$  les valeurs propres, de la matrice jacobienne

$$\frac{\partial \phi^E}{\partial W}(\bar{W})n_0,$$

avec  $\bar{W} = W_\infty$  ou  $\bar{W} = W$  selon le type de mise en œuvre [29].

**Remarque 2.1.1** *Dans le cas visqueux, la condition de vitesse imposée (2.3)<sub>2</sub> pourrait être remplacée, selon les applications, par une condition mixte du type :*

$$\begin{aligned} u &= u_{\Gamma_e}, \quad \text{sur } \Gamma_e, \\ \sigma n_0 &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_s. \end{aligned} \tag{2.5}$$

**Remarque 2.1.2** *On pourrait traiter la condition à l'infini de manière faible en considérant des fonctions test qui ne s'annulent pas sur  $\Gamma$ . Cependant, du fait que cette frontière reste fixe, et pour simplifier l'exposé, on la prendra en compte au sens fort.*

Par intégration par parties dans le problème variationnel avec

$$\hat{v}^f = \begin{pmatrix} \hat{v}_1^f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et  $\hat{v}^s = 0$ , on retrouve la condition cinématique à l'interface

$$W_2 \cdot JF^{-T}n_0 = \rho \dot{x}^s \cdot JF^{-T}n_0, \quad \text{sur } \Gamma_0^s, \tag{2.6}$$

ce qui implique que la condition cinématique (1.15)<sub>4</sub> est contenue dans la formulation variationnelle, conséquence de l'hyperbolicité du problème. Par contre, dans le cas visqueux, la condition cinématique de continuité des vitesses,

$$u = \dot{x}^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s, \tag{2.7}$$

est prise en compte de façon forte.

On remarque que, dans  $\Omega_0^f$ ,  $x$  est arbitraire et peut être défini à partir de n'importe quelle extension raisonnable du mouvement de l'interface dans le domaine fluide.

## 2.2 État d'équilibre stationnaire de référence

On s'intéresse donc à la linéarisation du problème précédent autour de l'état d'équilibre correspondant à  $x = I_{\Omega_0}$ . La structure étant en équilibre dans cet état stationnaire, on a

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_0^f} \phi(W_0, \sigma_0) : \nabla_0 \hat{v}^f dx_0 + \int_{\Omega_0^s} \sigma_0^s : \nabla_0 \hat{v}_2^s dx_0 - \int_{\Gamma_0^s} \sigma_0 n_0 \cdot (\hat{v}_2^f - \hat{v}_2^s) da_0 \\ = \int_{\Omega_0^s} f \cdot \hat{v}_2^s dx_0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{D}(\Omega_0)^5 \times \mathcal{D}(\Omega_0)^5, \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec la condition cinématique à l'infini

$$\phi^E(W_0) n_0^f = \mathcal{F}(\bar{W}, W_\infty), \quad \text{sur } \Gamma,$$

dans le cas parfait, ou  $u_0 = u_\Gamma$  sur  $\Gamma$ , dans le cas visqueux.

En particulier, (2.8) implique

$$W_{0,2} \cdot n_0 = \rho_0 u_0 \cdot n_0 = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0^s. \quad (2.9)$$

Si le fluide est visqueux on a évidemment  $u_0 = 0$  sur  $\Gamma_0^s$ .

Dans notre processus de linéarisation, les inconnues sont les fluctuations  $(\delta W, \delta x)$  du fluide et de la structure autour de l'état de référence  $(W_0, I)$ , induites par une petite perturbation dans les données initiales. Comme indiqué dans (2.1), ces fluctuations sont définies par

$$\begin{aligned} x = I + \delta x, \quad \text{dans } \Omega_0, \\ W(I + \delta x) = W_0 + \nabla_0 W_0 \delta x + \delta W, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \end{aligned} \quad (2.10)$$

et décrivent la variation au même point physique  $x_0 + \delta x$ , c'est-à-dire, en deux points lagrangiens différents  $(I + \delta x)^{-1}(x_0) \neq x_0$ .

## 2.3 Le problème stationnaire après transport

Comme la variation est prise au point lagrangien  $(I + \delta x)^{-1}(x_0)$ , on transporte d'abord l'équation de l'état fluide stationnaire,

$$\int_{\Omega_0^f} \phi(W_0, \sigma_0) : \nabla_0 w dx_0 = 0, \quad \forall w \in \mathcal{D}(\Omega_0^f)^5, \quad (2.11)$$

en configuration auxiliaire. Ceci est le propos du lemme suivant :

**Lemme 2.3.1** *Pour chaque déplacement régulier  $\delta x \in \mathcal{C}^1(\Omega_0^f)^3$  et chaque solution*

$$(W_0, \sigma_0) \in \mathcal{C}^1(\Omega_0^f)^5 \times \mathcal{C}^1(\Omega_0^f)^{3 \times 3},$$

*du problème d'équilibre stationnaire (2.11), on a*

$$\int_{\Omega_0^f} \underbrace{\left\{ \phi(W_0, \sigma_0) [\text{I div}_0 \delta x - (\nabla_0 \delta x)^T] + \nabla_0 \phi(W_0, \sigma_0) \delta x \right\}}_G : \nabla_0 w dx_0 = 0, \quad \forall w \in \mathcal{D}(\Omega_0^f)^5.$$

**Démonstration:** Soit  $w \in \mathcal{D}(\Omega_0^f)^5$  une fonction test donnée avec support  $K = \text{supp}(w)$  compact dans  $\Omega_0^f$ . On peut alors construire par continuité un sous-ensemble compact  $K_0 \subset \Omega_0^f$ , et une borne  $\varepsilon_0$ , tels que l'application  $x^\varepsilon = I + \varepsilon \delta x$  est injective pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, et vérifie

$$Q^\varepsilon = (x^\varepsilon)^{-1}(K) \subset K_0, \quad x^\varepsilon(K_0) \subset \Omega_0^f, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \quad (2.12)$$

voir la figure 2.1. En effet, d'après [9, théorème 5.5-1] il existe un réel  $\varepsilon_1 > 0$  tel que,

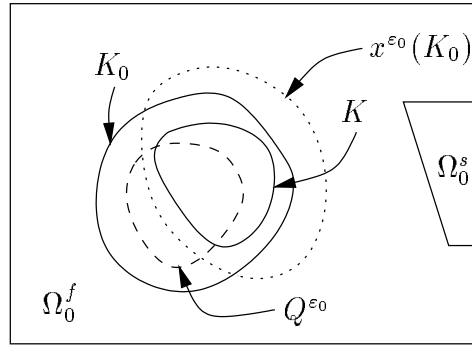


FIG. 2.1 – Construction des ensembles

pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ , la carte  $x^\varepsilon$  est injective. Soit donc  $K_0$  un sous-ensemble compact de  $\Omega_0^f$  tel que  $K \subset K_0$  et tel que la distance de  $\partial K_0$  à  $K$  soit strictement positive. D'après la continuité de l'application  $\varepsilon \mapsto x^\varepsilon$ , et comme pour  $\varepsilon = 0$  on a  $x^\varepsilon(K_0) = K_0 \subset \Omega_0^f$ , on déduit l'existence d'un réel  $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$  tel que

$$x^\varepsilon(K_0) \subset \Omega_0^f, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_2.$$

De même, comme pour  $\varepsilon = 0$  on a  $K \subset K_0 = x^\varepsilon(K_0)$ , on tire l'existence de  $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$  tel que

$$K \subset x^\varepsilon(K_0), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_3,$$

soit donc

$$Q^\varepsilon = (x^\varepsilon)^{-1}(K) \subset K_0, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_3.$$

Il ne reste qu'à prendre  $\varepsilon_0 = \varepsilon_3$  dans (2.12).



Par changement de variables, il résulte de (2.11) que

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_K \phi(W_0, \sigma_0) : \nabla_x w \, dx \\
 &= \int_{x^\varepsilon(Q^\varepsilon)} \phi(W_0, \sigma_0) : \nabla_x w \, dx^\varepsilon \\
 &= \int_{Q^\varepsilon} \phi(W_0(x^\varepsilon), \sigma_0(x^\varepsilon)) : \nabla_x w(x^\varepsilon) \det \nabla_0 x^\varepsilon \, dx_0 \\
 &= \int_{Q^\varepsilon} \phi(W_0(x^\varepsilon), \sigma_0(x^\varepsilon)) : \nabla_0 w(x^\varepsilon) (\nabla_0 x^\varepsilon)^{-1} \det \nabla_0 x^\varepsilon \, dx_0 \\
 &= \int_{Q^\varepsilon} \phi(W_0(x^\varepsilon), \sigma_0(x^\varepsilon)) (\nabla_0 x^\varepsilon)^{-T} : \nabla_0 w(x^\varepsilon) \det \nabla_0 x^\varepsilon \, dx_0 \\
 &= \int_{K_0} \phi(W_0(I + \varepsilon \delta x), \sigma_0(I + \varepsilon \delta x)) [\nabla_0(I + \varepsilon \delta x)]^{-T} \\
 &\quad : \nabla_0 w(I + \varepsilon \delta x) \det \nabla_0(I + \varepsilon \delta x) \, dx_0,
 \end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que  $w(x^\varepsilon(x_0))$  est identiquement nulle en dehors de  $(x^\varepsilon)^{-1}(K)$ , car le support de  $w$  est inclus dans  $K$ . D'après les propositions A.2 et A.1 de l'annexe A, l'expression précédente prend, au premier ordre en  $\varepsilon$ , la forme

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{K_0} \phi(W_0, \sigma_0) : \nabla_0 w \, dx_0 \\
 &\quad + \varepsilon \int_{K_0} \phi(W_0, \sigma_0) : \nabla_0 (\nabla_0 w \delta x) \, dx_0 + \varepsilon \int_{K_0} \left\{ \phi(W_0, \sigma_0) [\text{I div}_0 \delta x - (\nabla_0 \delta x)^T] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \phi}{\partial W}(W_0, \sigma_0) (\nabla_0 W_0 \delta x) + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(W_0, \sigma_0) (\nabla_0 \sigma_0 \delta x) \right\} : \nabla_0 w \, dx_0 + o(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, le premier et deuxième termes correspondent à (2.11) avec fonctions test  $w$  et  $\nabla_0 w \delta x$  respectivement, donc ils s'annulent. Le résultat du lemme est obtenu après division par  $\varepsilon$  et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro.  $\blacksquare$

Après intégration par parties, le lemme précédent peut être écrit sous forme forte

$$\text{div}_0 G = 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f.$$

On suppose maintenant que  $\delta x \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_0^f)^3$  et  $(W_0, \sigma_0) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_0^f)^5 \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_0^f)^{3 \times 3}$ . En multipliant l'expression précédente par  $\hat{v}^f \in \mathcal{D}(\Omega_0)^5$  et si on intègre par parties dans  $\Omega_0^f$ , on obtient finalement

$$\int_{\Omega_0^f} G : \nabla_0 \hat{v}^f \, dx_0 = \int_{\Gamma_0^s} G n_0 \cdot \hat{v}^f \, da_0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_0)^5.$$

Par conséquent, après transport, la solution du problème stationnaire satisfait le problème linéarisé convecté suivant :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0^f} \{ \phi(W_0, \sigma_0) [\mathbf{I} \operatorname{div}_0 \delta x - (\nabla_0 \delta x)^T] + \nabla_0 \phi(W_0, \sigma_0) \delta x \} : \nabla_0 \hat{v}^f \, dx_0 \\
 &= \int_{\Gamma_0^s} \{ \phi(W_0, \sigma_0) [\mathbf{I} \operatorname{div}_0 \delta x - (\nabla_0 \delta x)^T] + \nabla_0 \phi(W_0, \sigma_0) \delta x \} n_0 \cdot \hat{v}^f \, da_0 \quad (2.13) \\
 &= - \int_{\Gamma_0^s} [\phi(W_0, \sigma_0) \eta(\delta x) - (\nabla_0 \phi(W_0, \sigma_0) \delta x) n_0] \cdot \hat{v}^f \, da_0, \quad \forall \hat{v}^f \in \mathcal{D}(\Omega_0)^5,
 \end{aligned}$$

avec  $\eta(\delta x) = - [\mathbf{I} \operatorname{div}_0 \delta x - (\nabla_0 \delta x)^T] n_0$ . Ici  $-\eta(\delta x) \, da_0$  représente, au premier ordre, la variation  $- \eta \, da_0 = n \, da - n_0 \, da_0$  de l'élément surfacique  $n_0 \, da_0$ . En effet, d'une part on a

$$n \, da = J F^{-T} n_0 \, da_0,$$

et d'autre part, au premier ordre en  $\delta x$ , on a les relations suivantes :

$$F = \mathbf{I} - (\nabla_0 \delta x)^T, \quad J = 1 + \operatorname{div}_0 \delta x,$$

on obtient donc, au premier ordre près,

$$\begin{aligned}
 n \, da - n_0 \, da_0 &= (1 + \operatorname{div}_0 \delta x) [\mathbf{I} - (\nabla_0 \delta x)^T] n_0 \, da_0 - n_0 \, da_0 \\
 &= [\mathbf{I} \operatorname{div}_0 \delta x - (\nabla_0 \delta x)^T] n_0 \, da_0 \\
 &= -\eta(\delta x) \, da_0.
 \end{aligned}$$

**Remarque 2.3.2** *Le terme de rotation de la normale  $\eta(\delta x)$  ne dépend que de la trace de  $\delta x$  sur  $\Gamma_0^s$ . Il ne dépend pas de la déformation « interne » de l'extension  $\delta x$  caractérisé par le déplacement structurel, voir [81]. En dimension deux, on obtient simplement*

$$\eta(\delta x) = \begin{pmatrix} \partial_\tau \delta x_2 \\ -\partial_\tau \delta x_1 \end{pmatrix},$$

où  $\partial_\tau$  représente la dérivée tangentielle sur  $\Gamma_0^s$ .

**Remarque 2.3.3** *La relation (2.13) sera vitale dans le processus de linéarisation. Celle-ci permet de ramener à l'interface fixe les effets du mouvement du volume de contrôle fluide.*

## 2.4 Méthode de linéarisation

La linéarisation est effectuée par rapport aux fluctuations (2.10) en soustrayant le problème stationnaire (2.8) et le problème linéarisé convecté (2.13), du problème de départ (2.2) et en négligeant les termes d'ordre supérieur,

$$(2.2) - (2.8) - (2.13).$$

On considère d'abord les termes avec dérivées temporelles. À partir de la définition des fluctuations (2.10), on a

$$\int_{\Omega_0^f} \frac{\partial JW}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f dx_0 = \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J(W_0 + \nabla_0 W_0 \delta x + \delta W)}{\partial t} \cdot \hat{v}^f dx_0.$$

Au premier ordre en  $\delta x$ , le jacobien  $J$  se réduit à  $J = 1 + \operatorname{div}_0 \delta x$  (voir [9, 43]), et donc l'expression précédente devient au premier ordre en  $\delta x$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial JW}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f dx_0 &= \int_{\Omega_0^f} \delta \dot{W} \cdot \hat{v}^f dx_0 + \int_{\Omega_0^f} \left( \operatorname{div}_0 \dot{\delta x} W_0 + \nabla_0 W_0 \dot{\delta x} \right) \cdot \hat{v}^f dx_0 \\ &= \int_{\Omega_0^f} \delta \dot{W} \cdot \hat{v}^f dx_0 + \int_{\Omega_0^f} \operatorname{div}_0 \left( W_0 \otimes \dot{\delta x} \right) \cdot \hat{v}^f dx_0 \\ &= \int_{\Omega_0^f} \delta \dot{W} \cdot \hat{v}^f dx_0 - \int_{\Omega_0^f} W_0 \otimes \dot{\delta x} : \nabla_0 \hat{v}^f dx_0 \\ &\quad + \int_{\Gamma_0^s} W_0 \otimes \dot{\delta x} n_0 \cdot \hat{v}^f da_0. \end{aligned}$$

En reportant cette expression dans (2.2), et comme  $w = \delta x$ , on obtient au premier ordre

$$\begin{aligned} m^s(\delta \ddot{x}^s, \hat{v}_2^s) + a^s(I + \delta x^s, \hat{v}_2^s) + \int_{\Omega_0^f} \delta \dot{W} \cdot \hat{v}^f dx_0 + \int_{\Gamma_0^s} W_0 \otimes \dot{\delta x}^s n_0 \cdot \hat{v}^f da_0 \\ - \int_{\Omega_0^f} J \left[ \phi(W_0, \sigma_0) + \nabla_0 \phi(W_0, \sigma_0) \delta x + \frac{\partial \phi}{\partial W}(W_0, \sigma_0) \delta W + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(W_0, \sigma_0) \delta \sigma \right] F^{-T} : \nabla_0 \hat{v}^f dx_0 \\ - \int_{\Gamma_0^s} J \sigma F^{-T} n_0 \cdot (\hat{v}_2^f - \hat{v}_2^s) da_0 = \int_{\Omega_0^s} f \cdot \hat{v}_2^s dx_0 + \int_{\Gamma_0^s} \delta \dot{x}^s \cdot F S n_0^f \hat{v}_3^s da_0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_0)^5. \end{aligned}$$

En soustrayant le problème stationnaire (2.8), et après avoir développé les expressions en  $F$  et  $J$ , on tire au premier ordre

$$\begin{aligned} m^s(\delta \ddot{x}^s, \hat{v}_2^s) + \delta a^s(\delta x^s, \hat{v}_2^s) + \int_{\Omega_0^f} \delta \dot{W} \cdot \hat{v}^f dx_0 \\ - \int_{\Omega_0^f} \left( \frac{\partial \phi}{\partial W}(W_0, \sigma_0) \delta W + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(W_0, \sigma_0) \delta \sigma \right) : \nabla_0 \hat{v}^f dx_0 \\ - \int_{\Omega_0^f} \left\{ \phi(W_0, \sigma_0) [\operatorname{I} \operatorname{div}_0 \delta x - (\nabla_0 \delta x)^T] + \nabla_0 \phi(W_0, \sigma_0) \delta x \right\} : \nabla_0 \hat{v}^f dx_0 \\ + \int_{\Gamma_0^s} W_0 \otimes \dot{\delta x}^s n_0 \cdot \hat{v}^f da_0 - \int_{\Gamma_0^s} [(\nabla_0 \sigma_0 \delta x^s + \delta \sigma) n_0 - \sigma_0 \eta(\delta x^s)] \cdot (\hat{v}_2^f - \hat{v}_2^s) da_0 \\ = \int_{\Gamma_0^s} \delta \dot{x}^s \cdot \sigma_0^s n_0 \hat{v}_3^f da_0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{D}(\Omega_0)^5 \times \mathcal{D}(\Omega_0)^5, \end{aligned}$$

où

$$\delta a^s(\delta x^s, \hat{v}_2^s) = \int_{\Omega_0^s} \left( \frac{\partial FS}{\partial x}(I) \delta x^s \right) : \nabla_0 \hat{v}_2^s dx_0,$$

représente la linéarisation de la loi de comportement élastique de la structure.

En prenant en compte le problème linéarisé convecté (2.13), satisfait par l'état stationnaire  $W_0$ , et en utilisant la relation cinétique d'équilibre à l'interface  $\sigma_0^s n_0 = \sigma_0 n_0$ , on obtient que le champ de perturbations  $(\delta W, \delta x)$  satisfait le problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned}
 & m^s(\delta \dot{x}^s, \hat{v}_2^s) + \delta a^s(\delta x^s, \hat{v}_2^s) + \int_{\Omega_0^f} \delta \dot{W} \cdot \hat{v}^f dx_0 \\
 & - \int_{\Omega_0^f} \left( \frac{\partial \phi}{\partial W}(W_0, \sigma_0) \delta W + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(W_0, \sigma_0) \delta \sigma \right) : \nabla_0 \hat{v}^f dx_0 \\
 & + \int_{\Gamma_0^s} \left\{ \delta \dot{x}^s \cdot n_0 W_0 + (\phi(W_0, \sigma_0) + \mathbf{I}_2 \sigma_0) \eta(\delta x^s) \right. \\
 & \quad \left. - [\nabla_0(\mathbf{I}_2 \sigma_0 + \phi(W_0, \sigma_0)) \delta x^s] n_0 - \mathbf{I}_2 \delta \sigma n_0 - \delta \dot{x}^s \cdot (\sigma_0 n_0) \mathbf{I}_3 \right\} \cdot \hat{v}^f da_0 \\
 & + \int_{\Gamma_0^s} [(\nabla_0 \sigma_0 \delta x^s + \delta \sigma) n_0 - \sigma_0 \eta(\delta x^s)] \cdot \hat{v}_2^s da_0 = 0, \\
 & \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{D}(\Omega_0)^5 \times \mathcal{D}(\Omega_0)^5.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

En outre, pour  $\bar{W} = W$  la conditions cinétique (2.3), une fois écrite au premier ordre en termes de  $\delta W$  ( $\delta x = 0$  sur  $\Gamma$ ), devient

$$\frac{\partial \phi^E}{\partial W}(W_0) \delta W n_0 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{W}}(W_0, W_\infty) \delta W, \quad \text{sur } \Gamma. \tag{2.15}$$

Dans le cas où  $\bar{W} = W_\infty$  la condition se réduit à

$$\frac{\partial \phi^E}{\partial W}(W_0) \delta W n_0 = A^+ \delta W, \quad \text{sur } \Gamma,$$

en autres mots, il n'y a pas de flux rentrant ajouté à l'infini. Pour un fluide visqueux on aurait

$$\delta u = 0, \quad \text{sur } \Gamma. \tag{2.16}$$

**Remarque 2.4.1** *La condition mixte (2.5) dans le cas visqueux reste, après linéarisation,*

$$\begin{aligned}
 \delta u &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_e, \\
 \delta \sigma n_0 &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_s.
 \end{aligned}$$

Comme pour (2.2), une intégration par parties dans (2.14) avec

$$\hat{v}^f = \begin{pmatrix} \hat{v}_1^f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et  $\hat{v}^s = 0$ , donne la condition de transpiration suivante :

$$\delta W_2 \cdot n_0 = \rho_0 \delta \dot{x}^s \cdot n_0 - \nabla_0 W_{0,2} \delta x^s \cdot n_0 + W_{0,2} \cdot \eta(\delta x^s), \quad \text{sur } \Gamma_0^s. \tag{2.17}$$

La condition cinématique (2.17) et la forme spécifique de la fonction flux (2.4) permettent de simplifier considérablement les intégrales de surface dans (2.14). En effet, avec la condition cinématique au repos  $u_0 \cdot n_0 = 0$  sur  $\Gamma_0^s$ , et (2.17), on a d'abord

$$\begin{aligned} \rho_0 \delta u \cdot n_0 &= \delta(\rho u) \cdot n_0 - \delta \rho u_0 \cdot n_0 \\ &= \delta W_2 \cdot n_0 \\ &= \rho_0 \delta \dot{x}^s \cdot n_0 - \nabla_0(\rho_0 u_0) \delta x^s \cdot n_0 + \rho_0 u_0 \cdot \eta(\delta x^s) \\ &= \rho_0 \delta \dot{x}^s \cdot n_0 - \rho_0 \nabla_0 u_0 \delta x^s \cdot n_0 + \rho_0 u_0 \cdot \eta(\delta x^s). \end{aligned}$$

Ainsi, la condition cinématique de transpiration (2.17) se réduit à

$$\delta u \cdot n_0 = \delta \dot{x}^s \cdot n_0 - \nabla_0 u_0 \delta x^s \cdot n_0 + u_0 \cdot \eta(\delta x^s), \quad \text{sur } \Gamma_0^s. \quad (2.18)$$

Dans le cas d'un fluide visqueux, sans glissement, on avait  $u_0 = 0$ , il résulte donc que

$$\delta u = \delta \dot{x}^s - \nabla_0 u_0 \delta x^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s. \quad (2.19)$$

On déduit alors, de (2.4), (2.9) et (2.18), que sur  $\Gamma_0^s$

$$\begin{aligned} &(\phi(W_0, \sigma_0) + I_2 \sigma_0) \eta(\delta x^s) - [\nabla_0(I_2 \sigma_0 + \phi(W_0, \sigma_0)) \delta x^s] n_0 \\ &+ \delta \dot{x}^s \cdot n_0 W_0 - I_2 \delta \sigma n_0 - \delta \dot{x}^s \cdot (\sigma_0 n_0) I_3 \\ &= [W_0 \otimes u_0 - I_3 \otimes (\sigma_0 u_0)] \eta(\delta x^s) - \{ \nabla_0 [W_0 \otimes u_0 - I_3 \otimes (\sigma_0 u_0)] \delta x^s \} n_0 \\ &+ \delta \dot{x}^s \cdot n_0 W_0 - I_2 \delta \sigma n_0 - \delta \dot{x}^s \cdot (\sigma_0 n_0) I_3 \\ &= W_0 \left( u_0 \cdot \eta(\delta x^s) + \delta \dot{x}^s \cdot n_0 - \nabla_0 u_0 \delta x^s \cdot n_0 \right) - (\nabla_0 W_0 \delta x^s) (u_0 \cdot n_0) \\ &- I_3 \left\{ (\sigma_0 u_0) \cdot \eta(\delta x^s) - [\nabla_0(\sigma_0 u_0) \delta x^s] \cdot n_0 + \delta \dot{x}^s \cdot (\sigma_0 n_0) \right\} - I_2 \delta \sigma n_0 \\ &= W_0 (\delta u \cdot n_0) - I_2 \delta \sigma n_0 \\ &- I_3 \left\{ (\sigma_0 u_0) \cdot \eta(\delta x^s) - [\nabla_0(\sigma_0 u_0) \delta x^s] \cdot n_0 + \delta \dot{x}^s \cdot (\sigma_0 n_0) \right\} \\ &= W_0 \delta u \cdot n_0 - I_2 \delta \sigma n_0 - I_3 (\sigma_0 \delta u) \cdot n_0 \tag{2.20} \\ &= W_0 \delta u \cdot n_0 + \delta W u_0 \cdot n_0 - I_3 (\sigma_0 \delta u) \cdot n_0 - I_2 \delta \sigma n_0 \\ &= [\delta W \otimes u_0 + W_0 \otimes \delta u - I_3 \otimes (\sigma_0 \delta u)] n_0 - I_2 \delta \sigma n_0 \\ &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial W}(W_0, \sigma_0) \delta W + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(W_0, \sigma_0) \delta \sigma \right) n_0. \end{aligned}$$

L'égalité (2.20) découle du fait que, dans le cas parfait,  $\sigma_0 = -p_0 I$ . Pour le cas visqueux le terme en  $I_3$ , correspondant à l'énergie, n'apparaît pas, néanmoins l'égalité reste encore valable d'après (2.19). Il résulte donc, que le problème d'interaction fluide-structure

linéarisé (2.14) se réduit à la formulation variationnelle finale

$$\begin{aligned}
 & m^s(\delta\ddot{x}^s, \hat{v}_2^s) + \delta a^s(\delta x^s, \hat{v}_2^s) + \int_{\Omega_0^f} \delta \dot{W} \cdot \hat{v}^f dx_0 \\
 & - \int_{\Omega_0^f} \left( \frac{\partial \phi}{\partial W}(W_0, \sigma_0) \delta W + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(W_0, \sigma_0) \delta \sigma \right) : \nabla_0 \hat{v}^f dx_0 \\
 & + \int_{\Gamma_0^s} \left( \frac{\partial \phi}{\partial W}(W_0, \sigma_0) \delta W + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(W_0, \sigma_0) \delta \sigma \right) n_0 \cdot \hat{v}^f da_0 \\
 & + \int_{\Gamma_0^s} [(\nabla_0 \sigma_0 \delta x^s + \delta \sigma) n_0 - \sigma_0 \eta(\delta x^s)] \cdot \hat{v}_2^s da_0 \\
 & = 0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{D}(\Omega_0)^5 \times \mathcal{D}(\Omega_0)^5.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

complété avec les conditions aux limites cinématiques (2.15) et (2.18) dans le cas parfait, ou (2.16) et (2.19) si le fluide est visqueux.

Cette linéarisation fournit un problème couplé écrit en configuration fixe  $\Omega_0$ , utilisant fonctions flux  $\phi$  standards, et totalement indépendant de l'extension  $\delta x$  utilisée sur le domaine fluide  $\Omega_0^f$ . Le sous-problème associé à la extension de  $\delta x^s$  dans le domaine fluide est inutile et donc disparaît du problème. Ceci permet de prendre en compte les effets de la structure en gardant un domaine fluide fixe, par le moyen de conditions aux limites non-standard sur l'interface fixe  $\Gamma_0^s$ . D'une part, les conditions cinématiques sur la vitesse (2.6) et (2.7) sont remplacées par les conditions de transpiration (2.18) et (2.19), et d'autre part, la continuité cinétique des forces de traction sur l'interface est modifiée avec l'introduction de termes correcteurs qui apparaissent dans (2.13) comme une intégrale de surface sur l'interface fixe.

### 2.4.1 Comparaison avec les autres formulations

L'idée sous-jacente de notre méthode repose, d'une part, dans la définition des fluctuations (2.10), qui fournit les conditions de transpiration (2.18) (2.19), et d'autre part, dans l'obtention du problème transporté (2.13), qui permet de transformer les effets volumiques de  $\delta x$ , à l'intérieur du domaine fluide, en une intégrale de surface sur l'interface qui ne dépend que de la trace du déplacement structural.

Dans [57, 58] un problème similaire à (2.2) a été linéarisé avec une définition classique des fluctuations, différente de (2.10), soit

$$W_E(I + \delta x) = W_0 + \delta W, \quad \text{dans } \Omega_0^f.$$

On voit bien que cette définition ne prend pas en compte le mouvement du domaine fluide. La linéarisation est effectuée sur le problème couplé (1.15) après semi-discrétisation en espace dans le cas parfait. Le problème linéarisé obtenu s'écrit, voir [58], sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 A \delta \dot{W} + H \delta W + G \delta x + (E + C) \dot{\delta x} &= 0, \quad (\text{équation fluide}), \\
 M \delta \ddot{x}^s + D \delta \dot{x}^s + (K - K_f) \delta x^s &= P \delta W, \quad (\text{équation solide}), \\
 \tilde{K}_{ii}^* \delta x + \tilde{K}_{ib}^* \delta x^s &= 0, \quad (\text{équation grille}).
 \end{aligned}$$

Les matrices  $A$  et  $E$  résultent de la linéarisation de la dérivée temporelle ALE, ainsi que les matrices  $H$ ,  $G$  et  $E$  s'obtiennent de la linéarisation du flux ALE. Du côté structure, les matrices  $M$ ,  $K$  et  $D$  dénotent, respectivement, les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement. Les matrices  $K_f$  et  $P$  découlent de la linéarisation des efforts du fluide sur l'interface. Finalement, les matrices  $\tilde{K}_{ii}^*$  et  $\tilde{K}_{ib}^*$  proviennent de l'équation discrète régissant le mouvement de la grille.

La linéarisation réalisée n'aboutit pas à un problème linéaire couplé avec transpiration sous domaine fluide fixe, par conséquent le problème linéaire reste encore un problème à trois champs.

## 2.5 Sous-problèmes linéaires fluide et solide couplés

La formulation variationnelle (2.21) est maintenant équivalente à deux sous-problèmes couplés sur l'interface fixe  $\Gamma_0^s$ . Si on prend  $\hat{v}^s = 0$ , dans (2.21), on récupère les équations d'Euler linéarisées standards dans les cas parfait, ou les équations de Navier-Stokes linéarisées dans le cas visqueux,

$$\delta \dot{W} + \text{div}_0 \left( \frac{\partial \phi}{\partial W}(W_0, \sigma_0) \delta W, + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(W_0, \sigma_0) \delta \sigma \right) = 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \quad (2.22)$$

complétées avec la condition cinématique de transpiration,

$$\begin{aligned} \delta u \cdot n_0 &= \delta \dot{x}^s \cdot n_0 - \nabla_0 u_0 \delta x^s \cdot n_0 + u_0 \cdot \eta(\delta x^s), \quad \text{sur } \Gamma_0^s \quad (\text{cas parfait}), \\ \delta u &= \delta \dot{x}^s - \nabla_0 u_0 \delta x^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s \quad (\text{cas visqueux}), \end{aligned}$$

et la condition à l'infini

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^E}{\partial W}(W_0) \delta W n_0 &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial W}(W_0, W_\infty) \delta W, \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{cas parfait}), \\ \delta u &= 0, \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{cas visqueux}), \end{aligned}$$

selon les applications. Ici  $\delta \sigma$  est relié aux variables d'état par une linéarisation de la loi de comportement, soit donc

$$\begin{aligned} \delta \sigma &= -\delta p \mathbf{I}, \quad (\text{cas parfait}), \\ \delta \sigma &= -\delta p \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon(\delta u), \quad (\text{cas visqueux}). \end{aligned}$$

Le sous-problème de structure est obtenu simplement en prenant  $\hat{v}^f = 0$  dans (2.21). On obtient

$$\begin{aligned} m^s(\delta \ddot{x}^s, \hat{v}_2^s) + \delta a^s(\delta x^s, \hat{v}_2^s) &= \\ \int_{\Gamma_0^s} [\sigma_0 \eta(\delta x^s) - \nabla_0 \sigma_0 \delta x^s n_0 - \delta \sigma n_0] \cdot \hat{v}_2^s da_0, \quad \forall \hat{v}_2^s \in \mathcal{D}(\Omega_0)^3. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Après intégration par parties, ce sous-problème de structure peut être écrit sous forme forte comme

$$\begin{aligned} \rho_0^s \delta \ddot{x}^s - \operatorname{div}_0 \left( \frac{\partial FS}{\partial x}(I) \delta x^s \right) &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^s, \\ \left( \frac{\partial FS}{\partial x}(I) \delta x^s \right) n_0 &= \delta \sigma n_0 + \nabla_0 \sigma_0 \delta x^s n_0 - \sigma_0 \eta(\delta x^s), \quad \text{dans } \Gamma_0^s. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Le couplage avec le sous-problème fluide apparaît ici aussi sur l'interface, par le moyen de conditions aux limites non-standards. L'action du fluide sur le solide comprend trois termes : le premier lié à la variation de contraintes dans le fluide, le second lié au changement de position dans l'écoulement et le troisième lié à la variation de normale.

## 2.6 Variantes

Le sous-problème fluide linéaire (2.22) peut être remplacé par son équivalent non-linéaire en rajoutant à (2.22) les équations,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_0 \phi(W_0, \sigma_0) &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\ u_0 \cdot n_0 &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_0^s, \quad (\text{fluide parfait}), \\ u_0 &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_0^s, \quad (\text{fluide visqueux}), \end{aligned}$$

satisfaites par l'état de référence, et en considérant comme nouvelles inconnues

$$\tilde{W} = W_0 + \delta W, \quad \tilde{\sigma} = \sigma_0 + \delta \sigma, \quad \text{dans } \Omega_0^f$$

On obtient ainsi, au premier ordre près,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{W}} + \operatorname{div}_0 \phi(\tilde{W}, \tilde{\sigma}) &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\ \tilde{u} \cdot n_0 &= \dot{\delta x}^s \cdot n_0 - \nabla_0 \tilde{u} \delta x^s \cdot n_0 + \tilde{u} \cdot \eta(\delta x^s), \quad \text{sur } \Gamma_0^s \quad (\text{cas parfait}), \\ \tilde{u} &= \dot{\delta x}^s - \nabla_0 \tilde{u} \delta x^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s \quad (\text{cas visqueux}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

On retrouve bien le problème (1.21) mais maintenant avec une définition précise de l'inconnue, qui s'écrit au premier ordre

$$\begin{aligned} \tilde{W}(x_0, t) &= W_0(x_0) + \delta W(x_0, t) \\ &= W_E(x_0 + \delta x(x_0, t), t) - \nabla_0 W_0(x_0) \delta x(x_0, t) \\ &= W_E(x^f(x_0, t), t) - \nabla_0 W_E(x_0, t) \delta x(x_0, t) \\ &= W_E(x_0, t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

On retrouve bien le champ eulérien au point  $x_0$  si ce dernier est dans le domaine fluide  $\Omega^f(t)$ , voir la remarque 1.2.1. Sinon, l'inconnue  $\tilde{W}$  doit être comprise par l'équation (2.26),



comme le champ eulérien  $W_E$ , au point image  $x^f(x_0, t) = x_0 + \delta x(x_0, t)$ , corrigé du terme de transport  $-\nabla_0 W_0(x_0) \delta x(x_0, t)$ .

Dans le cas visqueux la condition  $(2.25)_3$  coïncide avec (1.19). De même, pour le cas visqueux, la condition  $(2.25)_2$  coïncide avec (1.23) au premier ordre près. En effet, il suffit de développer le vecteur normal en configuration actuelle, ce qui donne au premier ordre

$$n = n_0 + [(\nabla_0 \delta x^s n_0, n_0) \mathbf{I} - (\nabla_0 \delta x^s)^T] n_0.$$

Ainsi le terme  $\delta \dot{x}^s \cdot n_0$  devient  $\delta \dot{x}^s \cdot n$  au premier ordre. En outre, d'après (2.9),

$$u_0 \cdot n_0 = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0^s,$$

c'est pourquoi au premier ordre on a

$$\begin{aligned} \tilde{u} \cdot \eta(\delta x^s) &= u_0 \cdot \eta(\delta x^s) \\ &= - \{ u_0 \cdot n_0 \operatorname{div}_0 \delta x^s - u_0 \cdot [(\nabla \delta x^s)^T n_0] \} \\ &= - \{ u_0 \cdot n_0 (\nabla_0 \delta x^s n_0, n_0) - u_0 \cdot [(\nabla \delta x^s)^T n_0] \} \\ &= -u_0 \cdot [(\nabla_0 \delta x^s n_0, n_0) \mathbf{I} - (\nabla_0 \delta x^s)^T] n_0 \\ &= -\tilde{u} \cdot [(\nabla_0 \delta x^s n_0, n_0) \mathbf{I} - (\nabla_0 \delta x^s)^T] n_0 \\ &= -\tilde{u} \cdot (n - n_0), \end{aligned}$$

de telle manière que le terme  $\tilde{u} \cdot \eta(\delta x)$  dans  $(2.25)_3$  correspond à  $-u_E \cdot (n - n_0)$  dans (1.19). On obtient donc l'équivalence entre les deux conditions aux limites.

En ce qui concerne les efforts du fluide à l'interface il suffit de rajouter à (2.24) les sous-problème structurel de référence

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_0(\sigma_0^s) &= f, \quad \text{dans } \Omega_0^s, \\ \sigma_0^s n_0 &= \sigma_0 n_0, \quad \text{dans } \Gamma_0^s. \end{aligned}$$

on obtient donc au premier ordre près les sous-problème solide non-linéaire

$$\begin{aligned} \rho_0^s \delta \ddot{x}^s - \operatorname{div}_0(FS) &= f, \quad \text{dans } \Omega_0^s, \\ FS n_0 &= \sigma n_0 + \nabla_0 \sigma \delta x^s n_0 - \sigma \eta(\delta x^s), \quad \text{dans } \Gamma_0^s. \end{aligned}$$

On retrouve donc, à l'ordre un près, les efforts à l'interface introduits dans (1.25).

## 2.7 Conclusion

Nous avons proposé une première dérivation mathématique des conditions d'interface connues comme conditions de transpiration. Ces conditions, justifiées et améliorées dans ce chapitre, semblent être un très bon candidat pour la résolution efficiente de problèmes d'interaction fluide-structure avec un domaine fluide fixe.

L'intérêt de notre approche est qu'elle fournit un traitement global, en linéarisant tout le problème couplé et pas uniquement les conditions à l'interface. En outre, elle aboutit à un problème linéaire de grand intérêt vis à vis d'une analyse de stabilité. En effet, le calcul des solutions harmoniques du problème couplé linéaire (2.21) permettra d'obtenir prédictions numériques fiables sur la stabilité linéaire du problème couple en étude. Ceci fera l'objet de la deuxième partie de cette thèse.



# Chapitre 3

## Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité constitue depuis bien longtemps un outil de choix dans le processus de conception de systèmes industriels complexes. Il s'agit de caractériser la réponse d'un système mécanique vis à vis de perturbations des paramètres qui le définissent. Cette caractérisation est réalisée en perturbant le modèle mathématique sous-jacent, issu de la physique du phénomène.

Ce chapitre constitue une étude préliminaire du contrôle et de la conception automatique de systèmes faisant intervenir un couplage fluide-structure. Plus précisément, nous établissons la structure des dérivées, par rapport aux données frontières, d'un système couplé comportant un fluide, régi par les équations de Navier-Stokes, et une structure élastique en grands déplacements.

Dans la première section, nous rappelons le problème mécanique traité. Nous présentons, dans une deuxième section, le résultat principal de ce chapitre concernant le calcul des dérivées de l'état du système couplé vis à vis de conditions de Dirichlet à la frontière du domaine fluide. La troisième section est consacrée à la démonstration de ce résultat. Il fait intervenir une définition particulière des perturbations déjà introduite dans le chapitre précédent. En ce sens, les résultats de ce chapitre constituent une généralisation au cas instationnaire des résultats obtenus dans le chapitre précédent, même si la motivation de ce travail est différente.

Ce chapitre, écrit en collaboration avec M. Moubachir, a fait l'objet d'un *rapport de recherche INRIA* [33]. Sous forme moins complète, ce chapitre est paru dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série I, Mathématiques* [32].

### 3.1 Formulation ALE forte du système couplé

Considérons le problème d'interaction fluide-structure introduit au chapitre 1. Le fluide est supposé newtonien, homogène, en écoulement incompressible, son état est décrit par sa vitesse et pression  $(u, p)$ . Le solide est supposé élastique en grands déplacements, son état est donnée par le mouvement  $x^s$  et son champ de contraintes  $S$  (deuxième tenseur de Piola-Kirchoff) relié à  $x^s$  par une loi de comportement adéquate.

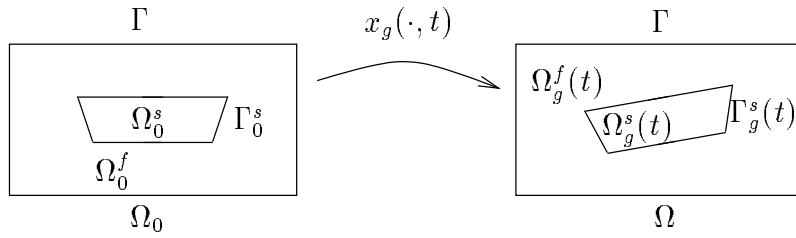


FIG. 3.1 – Géométrie du problème

Après introduction de la carte ALE  $x$ , voir la figure 3.1, l'évolution du système est donné par le problème (1.16), couplant les équations de Navier-Stokes incompressible en formulation ALE et celles de l'élastodynamique non-linéaire, que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J u}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 \{ J [u \otimes (u - w) - \sigma] F^{-T} \} &= 0, & \text{dans } \Omega_0^f, \\
 \operatorname{div} (J u F^{-T}) &= 0, & \text{dans } \Omega_0^f, \\
 u &= g, & \text{sur } \Gamma, \\
 u &= \dot{x}^s, & \text{sur } \Gamma_0^s, \\
 F S n_0 &= J \sigma F^{-T} n_0, & \text{sur } \Gamma_0^s, \\
 \rho_0^s \ddot{x}^s - \operatorname{div}_0 (F S) &= f, & \text{dans } \Omega_0^s, \\
 (u, x^s, \dot{x}^s) \Big|_{t=0} &= (u_0, x^{s,0}, x^{s,1}), & \text{dans } \Omega_0^f \times (\Omega_0^s)^2.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ici,  $g$  représente la vitesse imposée sur la frontière extérieure  $\Gamma$ ,  $f$  la force volumique appliquée à la structure,  $u_0$  la vitesse initiale du fluide et  $x^{s,0}$ ,  $x^{s,1}$  le déplacement et la vitesse de la structure à l'instant initial.

**Remarque 3.1.1** *Pour alléger la notation on a supposé ici, sans perte de généralité, que la densité du fluide est égale à 1.*

## 3.2 Analyse de sensibilité

Le problème que nous proposons de traiter est l'analyse de sensibilité du système couplé fluide-structure (3.1), vis-à-vis de perturbations de la donnée  $g : \Gamma \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Cette analyse est réalisée en recherchant la dérivée de l'état du système par rapport à cette donnée. Un moyen de l'obtenir est de rechercher quel système linéaire d'équations elle satisfait.

**Théorème 3.2.1 (Résultat principal)** *Étant donnée une solution  $(u_g, p_g, x_g^s)$  régulière du système couplé associé à une donnée frontière  $g$ , la dérivée par rapport à  $g$  dans une*

direction de perturbation  $\delta g : \Gamma \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$  est donnée par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{Du_g}{Dg} \delta g &= \delta u + \nabla u_g \delta x^f, & \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{Dp_g}{Dg} \delta g &= \delta p + \nabla p_g \delta x^f, & \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{Dx_g^s}{Dg} \delta g &= \delta x^s, & \text{dans } \Omega_0^s, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où

$$\delta x^f = \text{Ext}'(x_g^s|_{\Gamma_0^s}) \delta x_{|\Gamma_0^s}^s,$$

et  $(\delta u, \delta p, \delta x^s)$  satisfait le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u}{\partial t} \Big|_{x_g} + \text{div}(u_g \otimes \delta u + \delta u \otimes u_g - \delta \sigma) &= 0, & \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \text{div } \delta u &= 0, & \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \delta u &= \delta g & \text{sur } \Gamma, \\ \delta u &= \delta \dot{x}^s - \nabla u_g \delta x^s, & \text{sur } \Gamma_g^s(t) \\ \rho_0^s \delta \ddot{x}^s - \text{div}_0 [F_g \delta S + \nabla_0 \delta x^s S_g] &= 0, & \text{dans } \Omega_0^s, \\ (F_g \delta S + \nabla_0 \delta x^s S_g) n_0 &= J_g \|F_g^{-T} n_0\| (-\sigma_g \eta(\delta x^s) \\ &+ \nabla \sigma_g \delta x^s n_g + \delta \sigma n_g), & \text{sur } \Gamma_0^s \\ \left( \delta u, \delta x^s, \delta \dot{x}^s \right) \Big|_{t=0} &= 0, & \text{dans } \Omega_g^f(0) \times (\Omega_0^s)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec

$$\begin{aligned} \eta(\delta x^s) &= - \left[ \text{I div } \delta x^s - (\nabla \delta x^s)^T \right] n_g, & n_g &= \frac{F_g^{-T} n_0}{\|F_g^{-T} n_0\|}, \\ \delta \sigma &= -\delta p \text{I} + 2\nu \varepsilon(\delta u), & \delta S &= S'(x_g^s) \delta x^s. \end{aligned}$$

Le système linéaire vérifié par  $(\delta u, \delta p, \delta x^s)$  est posé dans un domaine dont les variations sont connues et données par l'état  $(u_g, p_g, x_g^s)$  associé à la donnée frontière  $g$ . Ainsi, l'obtention de la dérivée de l'état ne réclame que l'introduction de la carte  $x_g$  associé à l'état au point de dérivation.

Le système linéaire est constitué de deux sous-systèmes, l'un posé sur  $\Omega_g^f(t)$ , l'autre sur  $\Omega_0^s$ , couplés par l'intermédiaire de deux conditions non-standards à l'interface  $\Gamma_g^s(t)$ .

La propriété fondamentale du résultat principal de ce chapitre réside dans l'élimination de l'inconnue  $\delta x^f$  dans les équations fluides satisfaites par  $\delta u$ . Ainsi dans le cadre d'une approche numérique, cette propriété simplifiera les calculs de façon déterminante en permettant une procédure de découplage à l'interface fluide-structure.

### 3.3 Démonstration du résultat principal

Dans cette section nous présentons la démonstration détaillée du résultat 3.2.1. On introduit une formulation faible du problème couplé (1.16) et, après une définition spécifique des fluctuations, on linéarise le problème perturbé. Les idées introduites dans le chapitre 2 seront généralisées au cas instationnaire dans cette section.

#### 3.3.1 Formulation faible

Le but de ce paragraphe n'est pas d'introduire un cadre fonctionnel optimal, mais plutôt de définir des espaces où les calculs que nous allons mener ont un sens.

On considère des fonctions tests solides et fluides  $(\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{C}_0^2(\Omega_0)^3 \times \mathcal{C}_0^2(\Omega)^4$ . De façon générale  $\mathcal{C}_0^2(\Omega)$  désigne l'ensemble des fonctions deux fois continûment différentiables à support compact dans  $\Omega$ . En multipliant les équations en formulation ALE par ces fonctions tests et après prise en compte des conditions aux limites et changement de variable dans les termes de convection et raideur, on obtient la formulation faible suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}_1^f dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [\phi(u_g, \sigma_g) - \mathbb{I}_1 u_g \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f dx_g + \int_{\Gamma_g^s(t)} \omega_g \cdot n_g \hat{v}_2^f da_g \\ & + \int_{\Gamma_0^s} (J_g \sigma_g F_g^{-T} n_0) \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}_1^f) da_0 + \int_{\Omega_0^s} \rho_0^s \ddot{x}_g^s \cdot \hat{v}^s dx_0 + \int_{\Omega_0^s} F_g S_g : \nabla_0 \hat{v}^s dx_0 = \int_{\Omega_0^s} f \cdot \hat{v}^s da_0, \\ & \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{C}_0^2(\Omega_0)^3 \times \mathcal{C}_0^2(\Omega)^4, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où

$$\begin{aligned} \phi(u_g, \sigma_g) &= \mathbb{I}_1(u_g \otimes u_g - \sigma_g) + \mathbb{I}_2 \otimes u_g, \quad \mathbb{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{v}^f &= \begin{pmatrix} \hat{v}_1^f \\ \hat{v}_2^f \end{pmatrix} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad F_g = \nabla_0 x_g, \quad x_g^f = \text{Ext}(x_g^s|_{\Gamma_0^s}), \quad w_g = \dot{x}_g. \end{aligned}$$

Les conditions de Dirichlet sont traitées de façon forte :

$$\begin{aligned} u_g &= g, \quad \text{sur } \Gamma_0^f, \\ u_g &= \dot{x}_g^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Remarque 3.3.1** *Le choix de fonctions tests fluide et structure a priori discontinues à l'interface fluide-structure est motivé par la volonté de faire apparaître de façon naturelle les efforts à l'interface pour l'état de référence. Ainsi ces derniers apparaîtront naturellement dans la formulation du problème linéarisé.*

La difficulté dans le calcul des dérivées (3.2) réside dans la définition d'un problème linéaire satisfait par les fluctuations  $(\delta u, \delta p, \delta x)$ .

L'introduction d'une perturbation  $\delta g : \Gamma_0^f \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  de la vitesse au bord, génère un nouvel état du système  $(u_{g+\delta g}, p_{g+\delta g}, x_{g+\delta g})$ . Ce nouvel état satisfait un problème analogue à (3.4), c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_{g+\delta g} u_{g+\delta g}}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}_1^f dx_0 - \int_{\Omega_{g+\delta g}^f(t)} [\phi(u_{g+\delta g}, \sigma_{g+\delta g}) - \mathbf{I}_1 u_{g+\delta g} \otimes w_{g+\delta g}] : \nabla \hat{v}^f dx_{g+\delta g} \\ & + \int_{\Gamma_{g+\delta g}^s(t)} \omega_{g+\delta g} \cdot n_{g+\delta g} \hat{v}_2^f da_{g+\delta g} + \int_{\Gamma_0^s} (J_{g+\delta g} \sigma_{g+\delta g} F_{g+\delta g}^{-T} n_0) \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}_1^f) da_0 \\ & + \int_{\Omega_0^s} \ddot{x}_{g+\delta g}^s \cdot \hat{v}^s dx_0 + \int_{\Omega_0^s} F_{g+\delta g} S_{g+\delta g} : \nabla_0 \hat{v}^s dx_0 = \int_{\Omega_0^s} f \cdot \hat{v}^s da_0, \\ & \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{C}_0^2(\Omega_0)^3 \times \mathcal{C}_0^2(\Omega)^4. \end{aligned} \quad (3.6)$$

avec

$$\begin{aligned} u_{g+\delta g} &= g + \delta g, \quad \text{sur } \Gamma_0^f, \\ u_{g+\delta g} &= x_{g+\delta g}^s, \quad \text{sur } \Gamma_0^s. \end{aligned} \quad (3.7)$$

On s'intéresse à la linéarisation du problème perturbé autour de l'état de référence  $(u_g, p_g, x_g)$ . L'hypothèse fondamentale dans ce processus de linéarisation correspond à admettre que l'état du système est différentiable par rapport à la donnée au bord extérieur, ce qui revient à supposer que les fluctuations  $(\delta u, \delta p, \delta x)$  sont du même ordre que  $\delta g$  (dans une certaine norme).

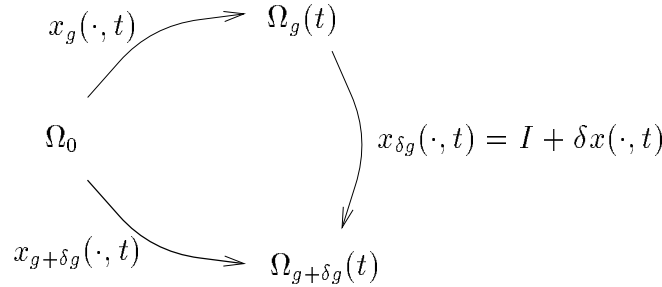


FIG. 3.2 – Graphe des applications

Il s'agit de déterminer les variations  $(\delta u, \delta p, \delta x)$ , que nous allons définir dans  $\Omega$  la configuration autour de laquelle le problème est perturbé. Ainsi les fluctuations sont définies de la manière suivante: pour  $t > 0$ , on considère  $x \in \Omega$  et  $x_0 \in \Omega_0$  tel que  $x = x_g(x_0, t)$ , voir la figure 3.2. On définit alors

$$\delta x(x, t) = x_{g+\delta g}(x_0, t) - x_g(x_0, t),$$

et pour l'état fluide (ici,  $x \in \Omega_g^f(t)$  et  $x_0 \in \Omega_0^f$ )

$$\delta u(x, t) = u_{g+\delta g}(x + \delta x(x, t), t) - u_g(x, t) - \nabla u_g(x, t) \delta x(x, t),$$

$$\delta p(x, t) = p_{g+\delta g}(x + \delta x(x, t), t) - p_g(x, t) - \nabla p_g(x, t) \delta x(x, t).$$



De manière plus compacte

$$\begin{aligned}
 x_{g+\delta g} &= x_g + \delta x, \quad \text{dans } \Omega_0, \\
 u_{g+\delta g}(I_{\Omega_g^f(t)} + \delta x) &= u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\
 p_{g+\delta g}(I_{\Omega_g^f(t)} + \delta x) &= p_g + \nabla p_g \delta x + \delta p, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Les fluctuations sont évaluées à partir des variations de l'état en un point physique donné, en prenant  $u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u$  comme approximation à l'ordre 1 de  $u_g(I_{\Omega_g^f(t)} + \delta x)$ . Il s'agit alors d'effectuer un transport à l'intérieur du problème de référence (3.4). Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

### 3.3.2 Problème de référence transporté

**Lemme 3.3.2** Soit  $\mathcal{V}_0$  un domaine borné fixe et  $x : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une carte injective, de classe  $\mathcal{C}^2(\mathcal{V}_0)^3$ , on note  $\mathcal{V} = x(\mathcal{V}_0)$ . Soit

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 3},$$

une application  $\mathcal{C}^1$ , et  $h \in L^2(\mathcal{V}_0)^4$ . Pour chaque déplacement  $\delta x \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V})^3$  et chaque élément  $(u, \sigma, w) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V})^{3 \times 9 \times 3}$  satisfaisant

$$\int_{\mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} \, dx_0 - \int_{\mathcal{V}} \Phi(u, \sigma, w) : \nabla \hat{q} \, dx = 0, \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{C}_0^2(\mathcal{V})^4, \tag{3.9}$$

on a que  $(u, \sigma, w)$  vérifie le problème convectif transporté suivant

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot (\nabla \hat{q} \delta x) \, dx_0 + \int_{\mathcal{V}} \{ \Phi(u, \sigma, w) [\text{I div } \delta x - (\nabla \delta x)^T] \\
 + D\Phi(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) \} : \nabla \hat{q} \, dx = 0, \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{C}_0^2(\mathcal{V})^4.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Avec la notation :

$$\begin{aligned}
 D\Phi(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) &= \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x) + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}(u, \sigma, w)(\nabla \sigma \delta x) \\
 &\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial w}(u, \sigma, w)(\nabla w \delta x).
 \end{aligned}$$

**Démonstration :** Nous reprenons le formalisme introduit dans le lemme 2.3.1. Soit  $\hat{q} \in \mathcal{C}_0^2(\mathcal{V})^4$  une fonction test fixée, notons  $K = \text{supp}(\hat{q}) \subset \mathcal{V}$ . Pour  $\varepsilon > 0$  on définit  $x^\varepsilon = I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x$ . On peut construire, par continuité de l'application  $x^\varepsilon$ , un ensemble compact  $K_0 \subset \mathcal{V}$  et un réel  $\varepsilon_0 > 0$ , tels que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $x^\varepsilon$  est injective et

$$Q^\varepsilon = (x^\varepsilon)^{-1}(K) \subset K_0, \quad x^\varepsilon(K_0) \subset \mathcal{V},$$

voir la figure 3.3.

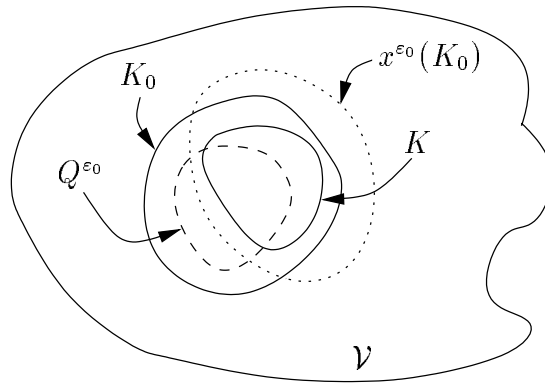


FIG. 3.3 – Description des ensembles

D'après (3.9) et par changement de variable on a que

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} \, dx_0 - \int_K \Phi(u, \sigma, w) : \nabla \hat{q} \, dx \\
 &= \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} \, dx_0 - \int_{x^\varepsilon(Q^\varepsilon)} \Phi(u, \sigma, w) : \nabla_\varepsilon \hat{q} \, dx^\varepsilon \\
 &= \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} \, dx_0 - \int_{Q^\varepsilon} \Phi(u(x^\varepsilon), \sigma(x^\varepsilon), w(x^\varepsilon)) : (\nabla_\varepsilon \hat{q})(x^\varepsilon) \det \nabla x^\varepsilon \, dx \\
 &= \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} \, dx_0 - \int_{K_0} \Phi(u(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x), \sigma(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x), w(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x)) [\nabla(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x)]^{-T} : \\
 &\quad \nabla \hat{q}(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x) \det \nabla(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x) \, dx.
 \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient du fait que  $\hat{q}(I_{\mathcal{V}} + \varepsilon \delta x)$  s'annule en dehors de  $Q^\varepsilon \subset K_0$ . Par développement de Taylor à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  on obtient l'identité suivante

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot \hat{q} \, dx_0 - \int_{K_0} \Phi(u, \sigma, w) : \nabla \hat{q} \, dx - \varepsilon \int_{K_0} \{ \Phi(u, \sigma, w) [I \operatorname{div} \delta x - (\nabla \delta x)^T] \\
 &\quad + D\Phi(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) \} : \nabla \hat{q} \, dx - \varepsilon \int_{K_0} \Phi(u, \sigma, w) \nabla(\nabla \hat{q} \delta x) \, dx \\
 &\quad + o(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Dans l'égalité précédente les deux premiers termes s'annulent d'après (3.9), et le dernier terme se réduit à

$$-\varepsilon \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot (\nabla \hat{q} \delta x) \, dx,$$

en utilisant  $\nabla \hat{q} \delta x$  comme fonction test dans (3.9). Il en résulte que pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\begin{aligned} 0 &= -\varepsilon \left( \int_{K_0} \{ \Phi(u, \sigma, w) [\mathbf{I} \operatorname{div} \delta x - (\nabla \delta x)^T] \right. \\ &\quad \left. + D\Phi(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) \} : \nabla \hat{q} \, dx + \int_{\mathcal{V}_0} h \cdot (\nabla \hat{q} \delta x) \, dx \right) \\ &\quad + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Alors si on divise par  $\varepsilon$  et on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0 on obtient (3.10). ■

**Remarque 3.3.3** *Le lemme précédent constitue une généralisation du lemme 2.3.1 du chapitre précédent. En effet, en prenant  $x = I$  et  $h = 0$ , (3.10) devient une expression analogue à (1.7).*

Nous aurons besoin, dans la suite, du corollaire suivant :

**Corollaire 3.3.4** *Sous les hypothèses du lemme 3.3.2, avec  $\delta x \in C^1(\overline{\mathcal{V}})^3$  et  $(u, \sigma, w) \in C^1(\overline{\mathcal{V}})^{3 \times 9 \times 3}$ , il résulte que*

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{V}_0} h \cdot (\nabla \hat{q} \delta x) \, dx_0 \\ &\quad + \int_{\mathcal{V}} \{ \Phi(u, \sigma, w) [\mathbf{I} \operatorname{div} \delta x - (\nabla \delta x)^T] + D\Phi(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) \} : \nabla \hat{q} \, dx \\ &= \int_{\partial \mathcal{V}_0} (h \otimes \delta x F^{-T} n_0) \cdot \hat{q} \, da_0 \\ &\quad + \int_{\partial \mathcal{V}} [D\Phi(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) n - \Phi(u, \sigma, w) \eta(\delta x)] \cdot \hat{q} \, da, \\ &\quad \forall \hat{q} \in C^2(\overline{\mathcal{V}})^4, \end{aligned} \tag{3.11}$$

avec  $\eta(\delta x) = -[\mathbf{I} \operatorname{div} \delta x - (\nabla \delta x)^T] n$ .

**Démonstration :** En transportant dans  $\mathcal{V}$  le premier terme de (3.10), on obtient

$$\int_{\mathcal{V}} \left\{ \frac{1}{J} h \otimes \delta x + \Phi(u, \sigma, w) [\mathbf{I} \operatorname{div} \delta x - (\nabla \delta x)^T] \right. \\ \left. + D\Phi(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) \right\} : \nabla \hat{q} \, dx = 0, \quad \forall \hat{q} \in C_0^2(\mathcal{V})^4.$$

Alors si on note

$$G = \frac{1}{J} h \otimes \delta x + \Phi(u, \sigma, w) [\mathbf{I} \operatorname{div} \delta x - (\nabla \delta x)^T] + D\Phi(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x),$$

on déduit que

$$\operatorname{div} G = 0, \quad \text{dans } \mathcal{V}.$$

En multipliant cette dernière expression par  $\hat{q} \in C^2(\overline{\mathcal{V}})^4$  et après intégration par parties, on a

$$\int_{\mathcal{V}} G : \nabla \hat{q} \, dx = \int_{\partial \mathcal{V}} G n \cdot \hat{q} \, da,$$

ce qui permet d'obtenir (3.11). ■

**Remarque 3.3.5** *Le terme  $-\eta(\delta x)$  da représente, au premier ordre, la variation de l'élément de surface  $n$  da, ne dépendant que de la trace de  $\delta x$  sur  $\partial \mathcal{V}$ .*

Nous appliquons alors les résultats précédents au cas particulier du problème de référence (3.4). On considère  $\hat{v}^s = 0$  et  $\hat{v}^f \in \mathcal{C}_0^2(\Omega_g^f(t))^3$  dans (3.4), nous obtenons alors le sous-problème fluide de référence suivant :

$$\int_{\Omega_g^f} \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}_1^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [\phi(u_g, \sigma_g) - I_1 u_g \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g = 0, \quad \forall \hat{v}^f \in \mathcal{C}_0^2(\Omega_g^f(t))^4. \quad (3.12)$$

Ainsi formulé, il est facile d'appliquer les résultats du corollaire 3.3.4 avec

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \Omega_0^f, \\ x &= x_g^f, \\ \mathcal{V} &= \Omega_g^f(t), \\ h &= I_1(J_g u_g), \end{aligned}$$

$$\Phi(u, \sigma, w) = \phi(u, \sigma) - I_1 u \otimes w.$$

Ainsi toute solution de (3.12), vérifie le problème convectif suivant :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_0^f} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \otimes \delta x F_g^{-T} \right) : \nabla_0 \hat{v}_1^f \, dx_0 \\ & - \int_{\Omega_g^f(t)} \{ \Phi(u, \sigma, w) [I \operatorname{div} \delta x - (\nabla \delta x)^T] + D\Phi(u, \sigma, w)(\nabla u \delta x, \nabla \sigma \delta x, \nabla w \delta x) \} : \nabla \hat{v} \, dx \\ & = - \int_{\Gamma_0^s} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \otimes \delta x F_g^{-T} n_0 \right) \cdot \hat{v}_1 \, da_0 + \int_{\Gamma_g^s(t)} [\phi(u_g, \sigma_g) - I_1 u_g \otimes w_g] \eta(\delta x) \cdot \hat{v}^f \, da_g \\ & - \int_{\Gamma_g^s(t)} D\phi(u_g, \sigma_g)(\nabla u_g \delta x, \nabla \sigma_g \delta x) n_g \cdot \hat{v}^f \, da_g \\ & + \int_{\Gamma_g^s(t)} (\nabla u_g \delta x \otimes w_g + u_g \otimes \nabla w_g \delta x) n_g \cdot \hat{v}_1^f \, da_g, \quad \forall \hat{v}^f \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)^4. \end{aligned} \quad (3.13)$$

**Remarque 3.3.6** *L'intérêt de cette expression réside dans le fait qu'elle fournit une manière de transformer des intégrales de volume, avec dépendance en  $\delta x$  à l'intérieur du domaine  $\Omega_g^f(t)$ , en une intégrale de surface dont la dépendance en  $\delta x$  se réduit à sa trace surfacique. En outre, elle généralise (2.13) dans le chapitre précédent.*

### 3.3.3 Méthode de linéarisation

Le processus de linéarisation, voir chapitre précédent, est effectué en quatre étapes :

1. écriture en configuration de référence  $\Omega_g^f(t)$ , des termes convectifs du problème perturbé ;
2. développement de Taylor au premier ordre dans le problème perturbé, en utilisant la définition (3.8) ;
3. élimination des termes d'ordre zéro, par soustraction du problème de référence (3.4) ;
4. simplification des termes d'ordre un, par soustraction du problème convectif transporté (3.13).

**Étape 1 :** On pose  $F_{\delta g} = \nabla x_{\delta g} = \mathbf{I} + \nabla \delta x$  et  $J_{\delta g} = \det F_{\delta g}$ . Ainsi, après transport des termes convectifs, le problème (3.6) devient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_{g+\delta g} u_{g+\delta g}}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}_1^f dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} J_{\delta g} [\phi(u_{g+\delta g}, \sigma_{g+\delta g}) - \mathbf{I}_1(u_{g+\delta g} \otimes w_{g+\delta g})] F_{\delta g}^{-T} : \nabla \hat{v}^f dx_g \\
 & + \int_{\Omega_0^s} \rho_0^s \ddot{x}_{g+\delta g}^s \cdot \hat{v}^s dx_0 + \int_{\Omega_0^s} F_{g+\delta g} S_{g+\delta g} : \nabla_0 \hat{v}^s dx_0 + \int_{\Gamma_0^s} (J_{g+\delta g} \sigma_{g+\delta g} F_{g+\delta g}^{-T} n_0) \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}_1^f) da_0 \\
 & + \int_{\Gamma_g^s(t)} J_{\delta g} \omega_{g+\delta g} \cdot (F_{\delta g}^{-T} n_g) \hat{v}_2^f da_g = \int_{\Omega_0^s} f \cdot \hat{v}^s da_0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{C}_0^2(\Omega_0)^3 \times \mathcal{C}_0^2(\Omega)^4.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

**Étape 2 :** À partir de la définition des fluctuations (3.8) on peut obtenir, à l'ordre 1, les identités classiques suivantes (voir Annexe A)

$$\begin{aligned}
 J_{g+\delta g} &= J_g(1 + \operatorname{div} \delta x), \quad \text{dans } \Omega_0, \\
 F_{g+\delta g}^{-T} &= [\mathbf{I} - (\nabla \delta x)^T] F_g^{-T}, \quad \text{dans } \Omega_0, \\
 \sigma_{g+\delta g} &= \sigma_g + \nabla \sigma_g \delta x + \delta \sigma, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\
 w_{g+\delta g} &= w_g + \delta w, \quad \text{dans } \Omega_0,
 \end{aligned}$$

avec  $\delta w$  et  $\delta \sigma$  définis par

$$\begin{aligned}
 \delta w &= \frac{\partial \delta x}{\partial t} \Big|_{x_0}, \quad \text{dans } \Omega_0. \\
 \delta \sigma &= -\delta p \mathbf{I} + 2\nu \varepsilon(\delta u), \quad \text{dans } \Omega_g^f(t).
 \end{aligned}$$

On commence par linéariser les termes avec dérivées temporelles. Ainsi, on a à l'ordre 1, que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J_{g+\delta g} u_{g+\delta g}}{\partial t} \Big|_{x_0} &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} [J_g(1 + \operatorname{div} \delta x)(u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u)] \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} \{J_g [(1 + \operatorname{div} \delta x)u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u]\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} [J_g u_g + J_g \operatorname{div}(u_g \otimes \delta x) + J_g \delta u] \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} [J_g u_g + \operatorname{div}_0 (J_g u_g \otimes \delta x F_g^{-T}) + J_g \delta u].
 \end{aligned}$$

D'autre part, comme  $(F_g^{-T}) = -(\nabla w_g)^T F_g^{-T}$ , en intégrant par parties il résulte que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} [\operatorname{div}_0 (J_g u_g \otimes \delta x F_g^{-T})] \cdot \hat{v}_1^f dx_0 &= \int_{\Omega_0^f} \operatorname{div}_0 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_0} (J_g u_g \otimes \delta x F_g^{-T}) \right] \cdot \hat{v}_1^f dx_0 \\
 &= \int_{\Omega_0^f} \operatorname{div}_0 \left[ \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \otimes \delta x F_g^{-T} + J_g u_g \otimes \delta w F_g^{-T} + J_g u_g \otimes \delta x (F_g^{-T}) \right] \cdot \hat{v}_1^f dx_0 \\
 &= - \int_{\Omega_0^f} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \otimes \delta x F_g^{-T} \right) : \nabla_0 \hat{v}_1^f dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [u_g \otimes \delta w - u_g \otimes (\nabla w_g \delta x)] : \nabla \hat{v}_1^f dx_g \\
 &\quad + \int_{\Gamma_0^s} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \otimes \delta x F_g^{-T} n_0 \right) \cdot \hat{v}_1^f da_0 + \int_{\Gamma_g^s(t)} [u_g \otimes \delta w - u_g \otimes (\nabla w_g \delta x)] n_g \cdot \hat{v}_1^f da_g.
 \end{aligned}$$

Par conséquent on a, à l'ordre 1,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_{g+\delta g} u_{g+\delta g}}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}_1^f dx_0 &= \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g(u_g + \delta u)}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}_1^f dx_0 \\
 &\quad - \int_{\Omega_0^f} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \otimes \delta x F_g^{-T} \right) : \nabla_0 \hat{v}_1^f dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [u_g \otimes \delta w - u_g \otimes (\nabla w_g \delta x)] : \nabla \hat{v}_1^f dx_g \\
 &\quad + \int_{\Gamma_0^s} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \otimes \delta x F_g^{-T} n_0 \right) \cdot \hat{v}_1^f da_0 + \int_{\Gamma_g^s(t)} [u_g \otimes \delta w - u_g \otimes (\nabla w_g \delta x)] n_g \cdot \hat{v}_1^f da_g.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pour les termes convectifs il nous reste, à l'ordre 1,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g^f(t)} J_{\delta g} u_{g+\delta g} \otimes w_{g+\delta g} F_{\delta g}^{-T} : \nabla \hat{v}_1^f dx_g &= \int_{\Omega_g^f(t)} (u_g \otimes w_g + \delta u \otimes w_g) : \nabla \hat{v}_1^f dx_g \\ &+ \int_{\Omega_g^f(t)} \{ (\nabla u_g \delta x) \otimes w_g + u_g \otimes \delta w + u_g \otimes w_g [\text{I div } \delta x - (\nabla \delta x)^T] \} : \nabla \hat{v}_1^f dx_g, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_g^f(t)} J_{\delta g} \phi(u_{g+\delta g}, \sigma_{g+\delta g}) F_{\delta g}^{-T} : \nabla \hat{v}^f dx_g \\ = - \int_{\Omega_g^f(t)} [\phi(u_g, \sigma_g) + D\phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma)] : \nabla \hat{v}^f dx_g \\ - \int_{\Omega_g^f(t)} \{ \phi(u_g, \sigma_g) [\text{I div } \delta x - (\nabla \delta x)^T] + D\phi(u_g, \sigma_g)(\nabla u_g \delta x, \nabla \sigma_g \delta x) \} : \nabla \hat{v}^f dx_g. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalement pour les termes de bord on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0^s} J_{g+\delta g} \sigma_{g+\delta g} F_{g+\delta g}^{-T} n_0 \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}_1^f) da_0 &= \int_{\Gamma_0^s} J_g (\sigma_g + \delta \sigma) F_g^{-T} n_0 \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}_1^f) da_0 \\ &+ \int_{\Gamma_0^s} J_g \{ \sigma_g [\text{I div } \delta x - (\nabla \delta x)^T] + \nabla \sigma_g \delta x \} F_g^{-T} n_0 \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}_1^f) da_0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_g^s(t)} J_{\delta g} \omega_{g+\delta g} \cdot (F_{\delta g}^{-T} n_g) \hat{v}_2^f da_g &= \int_{\Gamma_g^s(t)} \omega_g \cdot n_g \hat{v}_2^f da_g \\ &+ \int_{\Gamma_g^s(t)} (\delta \omega \cdot n_g - \omega_g \cdot \eta(\delta x)) \hat{v}_2^f da_g. \end{aligned} \quad (3.19)$$

**Étape 3 :** On remplace dans (3.14) les relations (3.15)-(3.19). Après soustraction du problème de référence (3.4) on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g \delta u}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}_1^f dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [D\phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma) - \mathbf{I}_1 \delta u \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f dx_g \\
 & - \int_{\Omega_0^f} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \otimes \delta x F_g^{-T} \right) : \nabla_0 \hat{v}_1^f dx_0 + \int_{\Omega_g^f(t)} u_g \otimes (\nabla \omega_g \delta x) : \nabla \hat{v}_1^f dx_g \\
 & - \int_{\Omega_g^f(t)} [D\phi(u_g, \sigma_g)(\nabla u_g \delta x, \nabla \sigma_g \delta x) - \mathbf{I}_1 (\nabla u_g \delta x) \otimes \omega_g] : \nabla \hat{v}^f dx_g \\
 & - \int_{\Omega_g^f(t)} \{ (\phi(u_g, \sigma_g) - \mathbf{I}_1 u_g \otimes \omega_g) [\mathbf{I} \operatorname{div} \delta x - (\nabla \delta x)^T] \} : \nabla \hat{v}^f dx_g \\
 & + \int_{\Gamma_0^s} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \otimes \delta x F_g^{-T} n_g \right) \cdot \hat{v}_1^f da_0 + \int_{\Gamma_g^s(t)} [u_g \otimes \delta w - u_g \otimes (\nabla w_g \delta x)] n_g \cdot \hat{v}_1^f da_g \\
 & + \int_{\Gamma_g^s(t)} (-\sigma_g \eta(\delta x) + \nabla \sigma_g \delta x n_g + \delta \sigma n_g) \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}_1^f) da_g \\
 & + \int_{\Gamma_g^s(t)} (\delta \omega \cdot n_g - \omega_g \cdot \eta(\delta x)) \hat{v}_2^f da_g + \int_{\Omega_0^s} \rho_0^s \delta \ddot{x}^s \cdot \hat{v}^s dx_0 \\
 & + \int_{\Omega_0^s} (\nabla_0 \delta x S_g + F_g \delta S) : \nabla_0 \hat{v}^s dx_0 \\
 & = 0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{C}_0^2(\Omega_0)^3 \times \mathcal{C}_0^2(\Omega)^3,
 \end{aligned}$$

où

$$\delta S = S'(x_g^s) \delta x^s = \frac{\partial S}{\partial x}(x_g^s) \delta x^s,$$

ce qui correspond à la linéarisation de la loi constitutive élastique autour de  $x_g^s$ .

En notant  $\Phi(u, \sigma, \omega) = \phi(u, \sigma) - \mathbf{I}_1 u \otimes \omega$ , l'expression précédente devient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g \delta u}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}_1^f dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [D\phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma) - \mathbf{I}_1 \delta u \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f dx_g \\
 & - \int_{\Omega_0^f} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \otimes \delta x F_g^{-T} \right) : \nabla_0 \hat{v}_1^f dx_0 \\
 & + \int_{\Gamma_g^s(t)} (-\sigma_g \eta(\delta x) + \nabla \sigma_g \delta x n_g + \delta \sigma n_g) \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}_1^f) da_g \\
 & - \int_{\Omega_g^f(t)} \{ \Phi(u_g, \sigma_g, w_g) [\mathbf{I} \operatorname{div} \delta x - \nabla \delta x^T] \\
 & + D\Phi(u_g, \sigma_g, w_g)(\nabla u_g \delta x, \nabla \sigma_g \delta x, \nabla w_g \delta x) \} : \nabla \hat{v}^f dx_g \\
 & + \int_{\Gamma_0^s} \left( \frac{\partial J_g u_g}{\partial t} \Big|_{x_0} \otimes \delta x F_g^{-T} n_g \right) \cdot \hat{v}_1^f da_0 + \int_{\Gamma_g^s(t)} [u_g \otimes \delta w - u_g \otimes (\nabla w_g \delta x)] n_g \cdot \hat{v}_1^f da_g \\
 & + \int_{\Gamma_g^s(t)} (\delta \omega \cdot n_g - \omega_g \cdot \eta(\delta x)) \hat{v}_2^f da_g + \int_{\Omega_0^s} \rho_0^s \delta \ddot{x}^s \cdot \hat{v}^s dx_0 \\
 & + \int_{\Omega_0^s} (\nabla_0 \delta x S_g + F_g \delta S) : \nabla_0 \hat{v}^s dx_0 = 0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{C}_0^2(\Omega_0)^3 \times \mathcal{C}_0^2(\Omega)^3.
 \end{aligned}$$



**Étape 4 :** Si on soustrait le problème convectif (3.13) de cette dernière expression on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g \delta u}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}_1^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [D\phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma) - \mathbf{I}_1 \delta u \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g \\
 & + \int_{\Gamma_g^s(t)} (-\sigma_g \eta(\delta x) + \nabla \sigma_g \delta x n_g + \delta \sigma n_g) \cdot (\hat{v}^s - \hat{v}_1^f) \, da_g \\
 & + \int_{\Gamma_g^s(t)} [u_g \otimes \delta w + (\nabla u_g \delta x) \otimes w_g] n_g \cdot \hat{v}_1^f \, da_g + \int_{\Gamma_g^s(t)} (\delta \omega \cdot n_g - \omega_g \cdot \eta(\delta x)) \hat{v}_2^f \, da_g \\
 & + \int_{\Gamma_g^s(t)} [(\phi(u_g, \sigma_g) - \mathbf{I}_1 u_g \otimes w_g) \eta(\delta x) - D\phi(u_g, \sigma_g)(\nabla u_g \delta x, \nabla \sigma_g \delta x) n_g] \cdot \hat{v}^f \, da_g \\
 & + \int_{\Omega_0^s} \rho_0^s \delta \ddot{x}^s \cdot \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Omega_0^s} (\nabla_0 \delta x S_g + F_g \delta S) : \nabla_0 \hat{v}^s \, dx_0 \\
 & = 0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{C}_0^2(\Omega_0)^3 \times \mathcal{C}_0^2(\Omega)^4.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

À partir de (3.8), (3.5) et (3.7), les conditions aux limites pour  $\delta u$  sont données par

$$\begin{aligned}
 \delta u &= \delta g, \quad \text{sur } \Gamma, \\
 \delta u &= \delta w - \nabla u_g \delta x, \quad \text{sur } \Gamma_g^s(t).
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

**Remarque 3.3.7** À la différence de (2.18), la condition de transpiration (3.21) est écrite sur une interface mobile, du fait que le problème de référence est instationnaire.

De plus, en utilisant le fait que sur  $\Gamma_g^s(t)$  nous avons l'identité cinématique  $w_g = u_g$ , et d'après (3.21), les intégrales de surface dans (3.20) se simplifient alors et nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g \delta u}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [D\phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma) - \delta u \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g \\
 & + \int_{\Gamma_g^s(t)} (-\sigma_g \eta(\delta x) + \nabla \sigma_g \delta x n_g + \delta \sigma n_g) \cdot \hat{v}^s \, da_g + \int_{\Gamma_g^s(t)} (u_g \otimes \delta u - \delta \sigma) n_g \cdot \hat{v}_1^f \, da_g \\
 & + \int_{\Gamma_g^s(t)} \delta u \cdot n_g \hat{v}_2^f \, da_g + \int_{\Omega_0^s} \rho_0^s \delta \ddot{x}^s \cdot \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Omega_0^s} (\nabla_0 \delta x S_g + F_g \delta S) : \nabla_0 \hat{v}^s \, dx_0 \\
 & = 0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{C}_0^2(\Omega_0)^3 \times \mathcal{C}_0^2(\Omega)^3.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

D'autre part, sur  $\Gamma_g^s(t)$  on a

$$u_g \otimes \delta u - \delta \sigma = \delta u \otimes u_g + u_g \otimes \delta u - \delta \sigma - \delta u \otimes \omega_g,$$

ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_g^s(t)} (u_g \otimes \delta u - \delta \sigma) n_g \cdot \hat{v}_1^f \, da_g + \int_{\Gamma_g^s(t)} \delta u \cdot n_g \hat{v}_2^f \, da_g \\
 &= \int_{\Gamma_g^s(t)} [I_1(u_g \otimes \delta u - \delta \sigma) + I_2 \otimes \delta u] n_g \cdot \hat{v}^f \\
 &= \int_{\Gamma_g^s(t)} [D\phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma) - I_1 \delta u \otimes w_g] n_g \cdot \hat{v}^f \, da_g.
 \end{aligned}$$

En reportant cette dernière expression dans (3.22), il résulte que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J_g \delta u}{\partial t} \Big|_{x_0} \cdot \hat{v}_1^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [D\phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma) - I_1 \delta u \otimes w_g] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g \\
 &+ \int_{\Gamma_g^s(t)} (-\sigma_g \eta(\delta x) + \nabla \sigma_g \delta x n_g + \delta \sigma n_g) \cdot \hat{v}^s \, da_g \\
 &+ \int_{\Gamma_g^s(t)} [D\phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma) - I_1 \delta u \otimes w_g] n_g \cdot \hat{v}^f \, da_g \\
 &+ \int_{\Omega_0^s} \delta \ddot{x}^s \cdot \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Omega_0^s} (\nabla_0 \delta x S_g + F_g \delta S) : \nabla_0 \hat{v}^s \, dx_0 \\
 &= 0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{C}_0^2(\Omega_0)^3 \times \mathcal{C}_0^2(\Omega)^4.
 \end{aligned}$$

Maintenant on transporte dans  $\Omega_g^f(t)$  la dérivée temporelle sur le fluide, de sorte que  $(\delta u, \delta p, \delta x)$  satisfait le problème linéaire variationnel suivant

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_g^f(t)} \frac{\partial \delta u}{\partial t} \Big|_{x_g} \cdot \hat{v}_1^f \, dx_0 - \int_{\Omega_g^f(t)} [D\phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma)] : \nabla \hat{v}^f \, dx_g \\
 &+ \int_{\Gamma_g^s(t)} (-\sigma_g \eta(\delta x) + \nabla \sigma_g \delta x n_g + \delta \sigma n_g) \cdot \hat{v}^s \, da_g \\
 &+ \int_{\Gamma_g^s(t)} [D\phi(u_g, \sigma_g)(\delta u, \delta \sigma)] n_g \hat{v}^f \, da_g \tag{3.23} \\
 &+ \int_{\Omega_0^s} \delta \ddot{x}^s \cdot \hat{v}^s \, dx_0 + \int_{\Omega_0^s} (\nabla_0 \delta x S_g + F_g \delta S) : \nabla_0 \hat{v}^s \, dx_0 \\
 &= 0, \quad \forall \hat{v} = (\hat{v}^s, \hat{v}^f) \in \mathcal{C}_0^2(\Omega_0)^3 \times \mathcal{C}_0^2(\Omega)^3.
 \end{aligned}$$

Ce qui termine la détermination du système linéaire caractérisant les variations du problème de référence (3.4) vis à vis de perturbations de la condition aux limites de Dirichlet au bord du domaine fluide, et donc la démonstration du théorème 3.2.1.

Afin de réaliser le lien avec la formulation forte du problème couplé de référence (3.4), il est intéressant d'opérer dans (3.23) les intégrations par parties nécessaires à l'obtention d'une formulation forte du système linéarisé. Cette formulation consiste en deux sous-problèmes satisfaits d'une part par  $(\delta u, \delta p)$  dans  $\Omega_g^s(t)$  et d'autre part par  $\delta x^s$  dans  $\Omega_0^s$ .

Ces deux systèmes sont couplés par l'intermédiaire de conditions aux limites non-standard à l'interface  $\Gamma_g^s(t)$  :

- en prenant  $\hat{v}^s = 0$  dans (3.23) et après intégration par parties on obtient le sous-problème fluide :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u}{\partial t} \Big|_{x_g} + \operatorname{div} (\delta u \otimes u_g + u_g \otimes \delta u - \delta \sigma) &= 0, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \operatorname{div} \delta u &= 0, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \delta u &= \delta \dot{x} - \nabla u_g \delta x, \quad \text{sur } \Gamma_g^s(t), \\ \delta u &= \delta g, \quad \text{sur } \Gamma, \end{aligned}$$

avec  $\delta \sigma = -\delta p \mathbf{I} + 2\nu \varepsilon(\delta u)$ .

- de même, le sous-problème solide est obtenu après intégration par parties dans (3.23) avec  $\hat{v}^f = 0$  :

$$\begin{aligned} \rho_0^s \delta \ddot{x}^s - \operatorname{div}_0 (F_g \delta S + \nabla_0 \delta x^s S_g) &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^s, \\ (F_g \delta S + \nabla_0 \delta x^s S_g) n_0 &= J_g \|F_g^{-T} n_0\| (-\sigma_g \eta(\delta x^s) + \nabla \sigma_g \delta x^s n_g + \delta \sigma n_g), \quad \text{sur } \Gamma_0^s. \end{aligned}$$

Avec  $(\delta u, \delta x^s, \delta \dot{x}^s)|_{t=0} = 0$  dans  $\Omega_g^f(0) \times (\Omega_0^s)^2$ .

### 3.3.4 Calcul des dérivées de l'état

Les fluctuations autour de l'état  $(u_g, p_g, x_g)$  étaient données selon (3.8) par

$$\begin{aligned} x_{g+\delta g} &= x_g + \delta x, \quad \text{dans } \Omega_0, \\ u_{g+\delta g}(I_{\Omega_g^f(t)} + \delta x) &= u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ p_{g+\delta g}(I_{\Omega_g^f(t)} + \delta x) &= p_g + \nabla p_g \delta x + \delta p, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t). \end{aligned}$$

Les termes d'ordre un correspondent alors à la dérivée de l'état au point  $(u_g, p_g, x_g)$  dans la direction de perturbation  $\delta g$ , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \frac{D u_g}{D g} \delta g &= \delta u + \nabla u_g \delta x^f, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{D p_g}{D g} \delta g &= \delta p + \nabla p_g \delta x^f, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{D x_g}{D g} \delta g &= \delta x, \quad \text{dans } \Omega_0. \end{aligned}$$

La solution du problème linéaire (3.23) fournit directement  $(\delta u, \delta p, \delta x^s)$ , et  $\delta x^f$  se déduit de  $\delta x^s$  par l'intermédiaire de l'expression suivante :

$$\delta x^f = \frac{D x_g^f}{D g} \delta g = \frac{D \operatorname{Ext}(x_g^s|_{\Gamma_0^s})}{D g} \delta g = \operatorname{Ext}'(x_g^s|_{\Gamma_0^s}) \left( \frac{D x_g^s|_{\Gamma_0^s}}{D g} \delta g \right) = \operatorname{Ext}'(x_g^s|_{\Gamma_0^s}) \delta x^s|_{\Gamma_0^s}.$$

Finalement l'expression finale de la dérivée de l'état est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{Du_g}{Dg}\delta g &= \delta u + \nabla u_g \text{Ext}'(x_{g|\Gamma_0^s}^s)\delta x_{|\Gamma_0^s}^s, & \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{Dp_g}{Dg}\delta g &= \delta p + \nabla p_g \text{Ext}'(x_{g|\Gamma_0^s}^s)\delta x_{|\Gamma_0^s}^s, & \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{Dx_g^s}{Dg}\delta g &= \delta x^s, & \text{dans } \Omega_0.\end{aligned}$$

avec  $(\delta u, \delta p, \delta x^s)$  solution du problème linéaire (3.23).

**Remarque 3.3.8** *Si l'opérateur d'extension Ext est linéaire, alors l'expression de la dérivée de l'état fluide est réduite à :*

$$\begin{aligned}\frac{Du_g}{Dg}\delta g &= \delta u + \nabla u_g \text{Ext}(\delta x_{|\Gamma_0^s}^s), & \text{dans } \Omega_g^f(t), \\ \frac{Dp_g}{Dg}\delta g &= \delta p + \nabla p_g \text{Ext}(\delta x_{|\Gamma_0^s}^s), & \text{dans } \Omega_g^f(t).\end{aligned}$$

## 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons établi une méthode de calcul théorique de la dérivée de l'état d'un système couplé fluide-structure, par rapport à une donnée frontière en vitesse. Elle s'obtient à partir de la solution de deux problèmes linéaires fluide et structure couplés à l'interface mobile par des conditions aux limites non-standards de transpiration.

Ce résultat constitue un premier pas vers l'étude plus complexe du contrôle optimal de systèmes en interaction fluide-structure, notamment lorsque le mouvement de l'interface doit être effectivement pris en compte. Ceci, pourrait constituer une prochaine étape de nos travaux et ne sera pas abordé dans cette thèse.

La méthodologie employée dans ce chapitre, pour la obtention du problème linéaire couplé (3.3), constitue une généralisation au cas instationnaire de celle employée dans le chapitre 2, c'est-à-dire, dans ce cas la linéarisation est effectuée autour d'un état équilibre fluide-structure instationnaire.



# Annexe A

Dans cette annexe on explicite les identités au premier ordre, employées dans la méthode de linéarisation du chapitre 3.

On rappelle d'abord deux résultats classiques du calcul différentiel matriciel. On renvoie le lecteur à [9] pour les démonstrations.

**Proposition A.1** *L'application  $\det : A \longrightarrow \det A$ , définie dans l'ensemble de matrices inversibles est différentiable. De plus on a*

$$\frac{D \det}{DA}(A)(U) = \det A \operatorname{tr}(UA^{-1}), \quad \forall U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

**Proposition A.2** *L'application  $A \longrightarrow A^{-1}$ , définie dans l'ensemble de matrices inversibles est différentiable. De plus on a*

$$\frac{DA^{-1}}{DA}(U) = -A^{-1}UA^{-1}, \quad \forall U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

On reprend maintenant les notations des parties précédentes et on considère les deux applications régulières et injectives

$$\begin{aligned} x_g &: \Omega_0 \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ x_{g+\delta g} &: \Omega_0 \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

voir la figure 3.2. En fait,  $x_{g+\delta g}$  est obtenue en perturbant  $x_g$ , et la perturbation est donnée par

$$\delta x = x_{g+\delta g} - x_g.$$

**Proposition A.3** *Au premier ordre en  $\delta x$ , on a les identités suivantes :*

$$J_{g+\delta g} = J_g(1 + \operatorname{div} \delta x), \quad \text{dans } \Omega_0, \tag{A.1}$$

$$F_{g+\delta g}^{-1} = F_g^{-1}(I - \nabla \delta x), \quad \text{dans } \Omega_0, \tag{A.2}$$

$$\sigma_{g+\delta g} = \sigma_g + \nabla \sigma_g \delta x + \delta \sigma, \quad \text{dans } \Omega_g^f(t). \tag{A.3}$$

**Démonstration :** Pour obtenir (A.1) on réalise un développement de Taylor en utilisant la proposition A.1. De sorte que

$$\begin{aligned}
J_{g+\delta g} &= \det F_{g+\delta g} \\
&= \det(F_g + \nabla_0 \delta x) \\
&= \det F_g + \det F_g \operatorname{tr}(\nabla_0 \delta x F_g^{-1}) \\
&= J_g(1 + \operatorname{tr}(\nabla \delta x)) \\
&= J_g(1 + \operatorname{div} \delta x).
\end{aligned}$$

On obtient (A.2) à partir de la proposition A.2. Ainsi

$$\begin{aligned}
F_{g+\delta g}^{-1} &= (F_g + \nabla_0 \delta x)^{-1} \\
&= F_g^{-1} - F_g^{-1} \nabla_0 \delta x F_g^{-1} \\
&= F_g^{-1} (\mathbf{I} - \nabla_0 \delta x F_g^{-1}) \\
&= F_g^{-1} (\mathbf{I} - \nabla \delta x).
\end{aligned}$$

Pour obtenir (A.3) il suffit de faire un développement de Taylor en  $\delta x$  à partir des définitions des perturbations (3.8). Plus précisément,

$$\begin{aligned}
\sigma_{g+\delta g} &= -p_{g+\delta g} \mathbf{I} + 2\nu \varepsilon(u_{g+\delta g}) \\
&= -p_{g+\delta g} \mathbf{I} + \nu [\nabla u_{g+\delta g} (F_{\delta g})^{-1} + (F_{\delta g})^{-T} (\nabla u_{g+\delta g})^T] \\
&= -(p_g + \nabla p_g \cdot \delta x + \delta p) \mathbf{I} + \nu \{ \nabla(u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u) (\mathbf{I} - \nabla \delta x) \\
&\quad + [\mathbf{I} - (\nabla \delta x)^T] [\nabla(u_g + \nabla u_g \delta x + \delta u)]^T \} \\
&= -\nabla p_g \cdot \delta x \mathbf{I} + \nu \{ \nabla(\nabla u_g \delta x) - \nabla u_g \nabla \delta x + [\nabla(\nabla u_g \delta x)]^T - (\nabla \delta x)^T (\nabla u_g)^T \} \\
&\quad + \sigma_g + \delta \sigma \\
&= \sigma_g - \nabla p_g \cdot \delta x \mathbf{I} + \nu \{ \nabla(\nabla u_g) \delta x + \nabla [(\nabla u_g)^T] \delta x \} + \delta \sigma \\
&= \sigma_g + \nabla \sigma_g \delta x + \delta \sigma,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

## Deuxième partie

### Stabilité





# Chapitre 4

## Principe de linéarisation : problème spectral

Le deuxième problème auquel on s'est intéressé dans cette thèse est l'étude de la stabilité aux petites perturbations de systèmes couplant un fluide et une structure. Plus précisément, le problème consiste en l'analyse de stabilité linéaire d'un système comportant une structure baignant dans un fluide visqueux incompressible. Nous utiliserons la démarche connue comme « Principe de linéarisation », ce qui nous permettra d'appliquer les résultats obtenus au chapitre 2.

Dans la première section on rappelle les notions de stabilité et les bases du « Principe de linéarisation » dans le domaine de l'hydrodynamique. Nous suivons particulièrement, dans cette section, l'exposé présentée dans [40]. Finalement, dans une deuxième section, nous appliquons ces idées au cas de l'interaction fluide-structure, par le moyen des techniques de linéarisation-transpiration développées au chapitre 2.

### 4.1 Stabilité linéaire hydrodynamique

Soit  $D \subset \mathbb{R}^3$  un domaine dans lequel a lieu un écoulement d'un fluide visqueux, newtonien et incompressible. La vitesse  $u(x, t)$  et la pression  $p(x, t)$  sont les solutions du problème mathématique de l'hydrodynamique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u u - \nu \Delta u + \nabla p &= 0, & \text{dans } D, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } D, \\ u &= u_{\partial D}, & \text{sur } \partial D, \\ u(x, 0) &= u^0(x), & \forall x \in D. \end{aligned} \tag{4.1}$$

**Remarque 4.1.1** *Les équations du problème précédent sont analogues à (1.2) mais sur domaine fixe. En effet, d'une part, pour simplifier les notations, l'indice « E » a été omis ici sur les variables eulériennes. D'autre part, on rappelle que sous la condition de divergence*

nulle, on a

$$\operatorname{div} \left( u \otimes u - \frac{\sigma}{\rho} \right) = \nabla u u - \frac{\mu}{\rho} \Delta u + \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right).$$

Alors, en posant  $\nu = \mu/\rho$  (viscosité cinématique) et si on garde la notation  $p$  pour  $p/\rho$ , on obtient (4.1) à partir de (1.2).

Les solutions du problème (4.1) peuvent changer par l'intermédiaire d'une variation des conditions initiales ou des conditions aux limites. Dans la suite on ne s'intéressera qu'au problème de l'étude de perturbations agissant sur les conditions initiales. La prise en compte de perturbations sur le second membre ou sur les conditions aux limites serait similaire.

Soit  $(u_0, p_0)$  une solution stationnaire de (4.1), c'est-à-dire, vérifiant

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u_0 - \nu \Delta u_0 + \nabla p_0 &= 0, & \text{dans } D, \\ \operatorname{div} u_0 &= 0, & \text{dans } D, \\ u_0 &= u_{\partial D}, & \text{sur } \partial D. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Une question intéressante, et qui a occupé une place importante dans la recherche expérimentale et des mathématiques appliquées, est la « stabilité linéaire » de l'écoulement  $(u_0, p_0)$ . C'est-à-dire, si l'écoulement est perturbé à un instant donné, les perturbations générées vont-elles augmenter ou décroître?. Supposons qu'à l'instant initial l'écoulement permanent  $(u_0, p_0)$  est exposé à une perturbation  $\delta u_0$ . Cette perturbation induit des fluctuations  $(\delta u, \delta p)$  autour de  $(u_0, p_0)$  pour tout instant  $t > 0$ , de telle manière que le fluide présente un écoulement perturbé  $(u, p)$  satisfaisant (4.1) avec les mêmes conditions aux limites et soumis à la condition initiale perturbée  $u^0 = u_0 + \delta u_0$ , avec

$$u = u_0 + \delta u, \quad p = p_0 + \delta p, \quad \text{dans } D. \tag{4.3}$$

En reportant les expressions précédentes dans (4.1) et après soustraction du problème de référence (4.2), on obtient que les fluctuations  $(\delta u, \delta p)$  sont solution du problème non-linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \nabla u_0 \delta u + \nabla \delta u u_0 + \nabla \delta u \delta u - \nu \Delta \delta u + \nabla \delta p &= 0, & \text{dans } D, \\ \operatorname{div} \delta u &= 0, & \text{dans } D, \\ \delta u &= 0, & \text{sur } \partial D, \\ \delta u(x, 0) &= \delta u_0(x), & \forall x \in D. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dans la plupart des travaux en hydrodynamique la pression est éliminée (par exemple, en posant le problème sur des espaces à divergence nulle) et l'étude de la solution  $(u, p)$  se réduit à l'étude de la vitesse  $u$ . Dans la suite on parlera de  $u$  comme la solution du problème hydrodynamique.

**Définition 4.1.2** *L'écoulement permanent  $u_0$  est dit stable (au sens de Liapunov) aux perturbations  $\delta u_0$  des conditions initiales si : pour tout réel  $\epsilon > 0$  il existe un réel  $\xi(\epsilon) > 0$  tel que si  $\|\delta u_0\| < \xi(\epsilon)$  alors  $\delta u$ , satisfaisant (4.4), vérifie*

$$\|\delta u(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

*Si en plus,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta(t)\| = 0$ , alors  $u_0$  est dit asymptotiquement stable. Un écoulement est dit instable s'il n'est pas stable.*

**Remarque 4.1.3** *La définition précédente dépend de la norme  $\|\cdot\|$  de l'espace de fonctions choisi, c'est-à-dire, de la régularité souhaitée des solutions de (4.2).*

La théorie de la stabilité qui prend en compte perturbations de n'importe quelle taille est dite stabilité non-linéaire. Elle se base dans l'étude du comportement des solutions du problème (4.4).

La théorie linéaire de la stabilité traite la stabilité associée à des petites perturbations à l'instant initial, en supposant que les fluctuations engendrées restent petites pour tout instant  $t > 0$ . Ainsi, les puissances d'ordre supérieur à un, des quantités qui caractérisent ces fluctuations, peuvent être négligées dans (4.4). Ce qui permet d'obtenir le problème linéaire suivant, caractérisant au premier ordre les petites perturbations du système fluide :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \nabla u_0 \delta u + \nabla \delta u u_0 - \nu \Delta \delta u + \nabla \delta p &= 0, \quad \text{dans } D, \\ \operatorname{div} \delta u &= 0, \quad \text{dans } D, \\ \delta u &= 0, \quad \text{sur } \partial D, \\ \delta u(x, 0) &= \delta u_0(x), \quad \forall x \in D. \end{aligned} \tag{4.5}$$

La définition de stabilité linéaire s'obtient à partir de la définition 4.1.2 où les fluctuations  $\delta u$  doivent vérifier le problème linéaire (4.5) au lieu de (4.4). On utilise, très souvent, une autre définition dans la théorie linéaire de la stabilité hydrodynamique, déduite de la définition précédente en supposant que chaque perturbation linéaire  $\delta u$  peut être obtenue par superposition de fluctuations du type  $v e^{-\lambda t}$ , appelées « modes normaux ». En reportant cette expression dans l'équation (4.5), on s'aperçoit que  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre et  $v$  une fonction propre du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} \nabla u_0 v + \nabla v u_0 - \nu \Delta v + \nabla q &= \lambda v, \quad \text{dans } D, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad \text{dans } D, \\ v &= 0, \quad \text{sur } \partial D. \end{aligned} \tag{4.6}$$

**Définition 4.1.4** *L'écoulement permanent  $u_0$  est dit linéairement asymptotiquement stable, si le problème propre (4.6) n'a pas de valeurs propres avec partie réelle négative. L'écoulement est dit linéairement instable, s'il existe au moins une valeur propre avec partie réelle négative.*

On peut démontrer (consulter [40]) que la forme générale des perturbations  $\delta u$ , définies dans (4.5), est donnée par

$$\delta u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(x, t) e^{-\lambda_j t},$$

où  $\lambda_j$  est une valeur propre de (4.6) et  $c_j(x, t)$  est un polynôme en  $t$  avec des coefficients définis à partir des fonction propres de (4.6). On en déduit que si tous les valeurs propres de (4.6) ont partie réelle positive alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta u(t)\| = 0$ , donc l'écoulement  $u_0$  est linéairement asymptotiquement stable. De même, s'il existe une valeur propre avec partie réelle négative on montre que  $u_0$  est linéairement instable. La difficulté réside, maintenant, en montrer que les résultats de la théorie linéaire restent valables pour la théorie non-linéaire. C'est-à-dire, il faut montrer qu'un écoulement étant linéairement asymptotiquement stable est stable (au sens de la définition 4.1.2), et qu'un écoulement linéairement instable est instable. Ceci est assuré par le théorème connu comme « Principe de linéarisation », analogue au théorème de Liapunov pour les équations différentielles [40]. Le théorème suivant, dû à Prodi [78] et Yudovich [47], correspond à la version forte du « Principe de linéarisation », c'est-à-dire, dans la classe de solution fortes de (4.2). Sattinger démontre, dans [88], un théorème analogue pour une classe de solutions faibles.

**Théorème 4.1.5** *Si la frontière du domaine  $D$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , et les valeurs propres de (4.6) ont tous partie réelle positive, alors la solution  $u_0$  de (4.2) est stable par rapport à des perturbations suffisamment petites des conditions initiales. Par contre, si le problème (4.6) a au moins une valeur propre avec partie réelle négative alors la solution  $u_0$  est instable.*

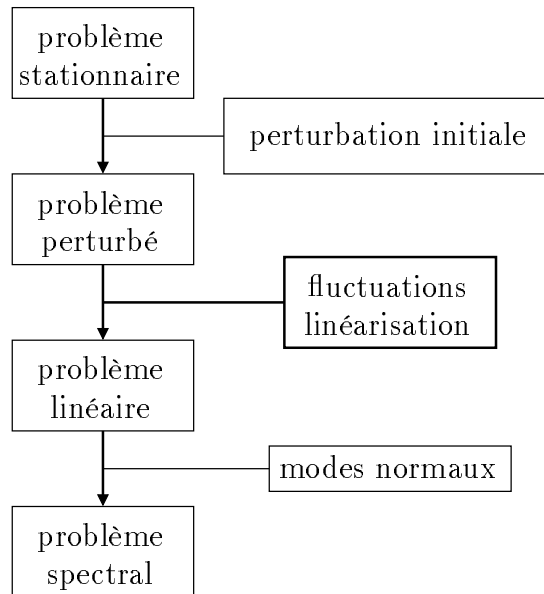


FIG. 4.1 – Étapes du « Principe de linéarisation »

En résumé, le « Principe de linéarisation » permet de réduire le problème de la stabilité d'un écoulement permanent (par rapport à des petites perturbations initiales) au

problème de déterminer les valeurs propres associées au problème linéaire (4.5), obtenu après linéarisation de (4.1) autour de  $u_0$ , voir la figure 4.1.

## 4.2 Stabilité linéaire fluide-structure

Dans cette section nous généralisons, au cas de l'interaction fluide-structure, la démarche du « Principe de linéarisation », décrite dans la section précédente. Cette généralisation supposera que la structure est décrite par un nombre fini de degrés de liberté, ce qui permet de s'affranchir d'un grand nombre de difficultés techniques liées à la continuité et à la stabilité uniforme des opérateurs de raideur et d'interface sur le solide. Cette hypothèse paraît réaliste quand on s'intéresse à des perturbations de grande échelle par rapport à la structure. Le cas général avec des structures décrites par la mécanique des milieux continus est largement ouvert.

Dans le cadre des structures à nombre fini de degrés de liberté, la complexité, et principale différence par rapport au cas précédent, réside dans le fait que le domaine fluide n'est plus fixe. Ceci demandera, d'une part, une définition spécifique des fluctuations de l'état fluide, plus générale que (4.3), et d'autre part, une nouvelle méthode de linéarisation, adaptée à la nouvelle définition des fluctuations, permettant d'obtenir un problème linéaire couplé de complexité minimale.

### 4.2.1 Équations du problème

Le fluide étant supposé visqueux, newtonien, homogène en écoulement incompressible, est décrit par sa vitesse et pression  $(u, p)$ . On suppose ici que le déplacement de la structure est donnée par une combinaison linéaire d'un nombre fini de modes de déplacement ou de vibration de la structure  $\varphi_i : \Omega_0^s \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $1 \leq i \leq n^s$  :

$$x^s(x_0, t) = x_0 + \sum_{i=1}^{n^s} s_i(t) \varphi_i(x_0), \quad \forall x_0 \in \Omega_0^s,$$

avec  $s(t) = \{s_i(t)\}_{1 \leq i \leq n^s} \in \mathbb{R}^{n^s}$ . De manière plus compacte, le mouvement du solide est donné par :

$$x^s = I_{\Omega_0^s} + \Phi s, \quad \text{dans } \Omega_0^s, \quad (4.7)$$

avec  $\Phi = [\varphi_1 | \varphi_2 | \dots | \varphi_{n^s}]$ , la matrice de taille  $3 \times n^s$  dont les colonnes sont les déformées modales  $\varphi_i$ . On suppose, en outre, que sur cette base le comportement de la structure est caractérisé par les opérateurs de masse,  $\mathcal{M}$ , et de rigidité,  $\mathcal{K}$ .

Comment on l'a déjà vu au chapitre 1, l'état du système est décrit par les équations de Navier-Stokes incompressible en formulation ALE couplés aux équations de la structure, par l'intermédiaire d'une condition cinématique de continuité de vitesse et d'une condition cinétique de continuité des efforts à l'interface. Plus précisément, on a le problème couplé

(1.17) suivant :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J u}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0 \left\{ J \left[ u \otimes (u - w) - \frac{1}{\rho} \sigma(u, p) \right] F^{-T} \right\} &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\
 \operatorname{div}_0 (J u F^{-T}) &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\
 u &= u_{\Gamma_e}, \quad \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma(u, p) n &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_s, \\
 u &= \Phi \dot{s}, \quad \text{sur } \Gamma_0^s,
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} \ddot{s} + \mathcal{K} s &= - \int_{\Gamma_0^s} J \Phi^T \sigma(u, p) F^{-T} n_0 \, da_0, \\
 (u, s, \dot{s})|_{t=0} &= (u^0, s^0, s^1),
 \end{aligned}$$

avec les notations

$$\begin{aligned}
 x^f &= \operatorname{Ext} \left( x_{\Gamma_0^s}^s \right), \quad \sigma(u, p) = -p \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon(u), \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T], \\
 F &= \nabla_0 x, \quad J = \det F, \quad w = \dot{x}.
 \end{aligned}$$

## 4.2.2 État d'équilibre et problème perturbé

Soit  $(u_0, p_0, x_0)$  un état d'équilibre stationnaire du système couplé fluide-structure, où

$$x_0^s = I_{\Omega_0^s} + \Phi s_0,$$

avec  $s_0 \in \mathbb{R}^{n^s}$ . D'après (4.8) on a

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}_0 \left\{ J_0 \left[ u_0 \otimes u_0 - \frac{1}{\rho} \sigma(u_0, p_0) \right] F_0^{-T} \right\} &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\
 \operatorname{div}_0 (J_0 u_0 F_0^{-T}) &= 0, \quad \text{dans } \Omega_0^f, \\
 u_0 &= u_{\Gamma_e}, \quad \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma(u_0, p_0) n &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_s, \\
 u_0 &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_0^s,
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\mathcal{K} s_0 = - \int_{\Gamma_0^s} J_0 \Phi^T \sigma(u_0, p_0) F_0^{-T} n_0 \, da_0,$$

où  $F_0 = \nabla_0 x_0$  et  $J_0 = \det F_0$ .

On note  $\Omega^s = x^s(\Omega_0^s)$  la configuration de la structure à l'équilibre, de telle manière qu'après déformation de l'interface, le volume de contrôle fluide (utilisé dans la formulation ALE) est donné par  $\Omega^f = \Omega - \overline{\Omega}^s$ . On note aussi  $\gamma = \partial\Omega^s$  l'interface fluide-structure

à l'équilibre. Ainsi, en transportant les équations (4.9) dans cette configuration, l'état de référence  $(u_0, p_0, x_0)$  dévient  $(u_0, p_0, I)$  et satisfait les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \left( u_0 \otimes u_0 - \frac{1}{\rho} \sigma(u_0, p_0) \right) &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\
 \operatorname{div} u_0 &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\
 u_0 &= u_{\Gamma_e}, \quad \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma(u_0, p_0)n &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_s, \\
 u_0 &= 0, \quad \text{sur } \gamma, \\
 \mathcal{K}_{s_0} &= - \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_0, p_0)n \, da.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

De même on peut décrire le problème (4.8) en prenant  $\Omega = \Omega^f \cup \overline{\Omega^s}$  comme configuration de référence, c'est-à-dire, la carte ALE étant définie maintenant dans  $\Omega$  au lieu de  $\Omega_0$ , voir la figure 4.2.

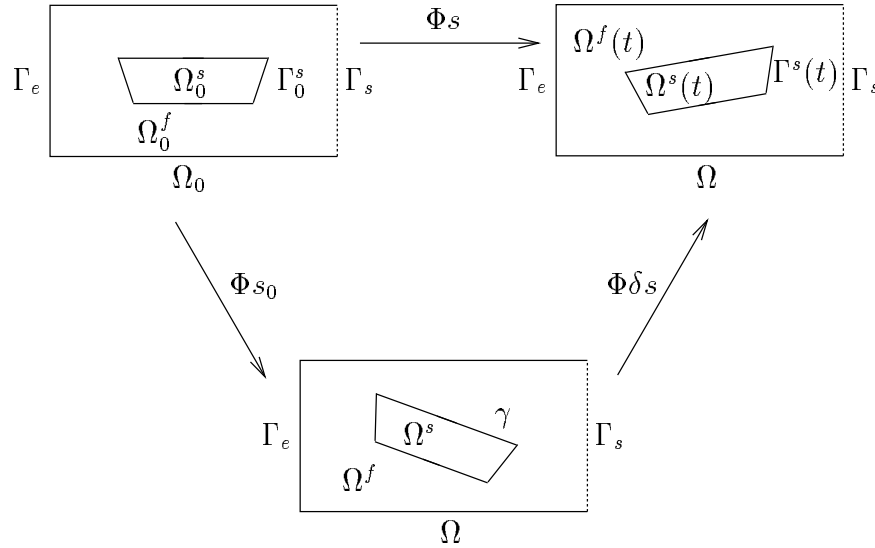


FIG. 4.2 – *Changement de configuration*

On note avec  $\delta s \in \mathbb{R}^{n^s}$  les degrés de liberté de la structure dans cette configuration, ainsi le déplacement de la structure s'exprime comme :

$$\Phi_s = \Phi_{s_0} + \Phi \delta s.$$

Ceci implique que  $\Phi \delta s$  correspond au déplacement structural en prenant  $\Omega^s$  comme configuration matérielle de référence, voir la figure 4.2. On définit donc le mouvement de la structure

$$x^s = I_{\Omega^s} + \Phi \delta s, \quad \text{dans } \Omega^s,$$



et le mouvement du volume de contrôle fluide

$$x^f = \text{Ext}(x_{|\gamma}^s).$$

**Remarque 4.2.1** *Pour simplifier l'écriture, après transport, on a gardé la même notation pour la carte ALE, le gradient de déformation, le jacobien de la transformation et l'opérateur d'extension. On a aussi gardé le même développement modal du déplacement de la structure, mais on pourrait très bien utiliser deux développements différents pour décrire, d'une part, le mouvement d'équilibre de la structure, et d'autre part, ses perturbations.*

On obtient ainsi le problème couplé (4.8) écrit dans  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho J u}{\partial t} + \text{div} \{ J [\rho u \otimes (u - w) - \sigma(u, p)] F^{-T} \} &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ \text{div} (J u F^{-T}) &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= u_{\Gamma_e}, & \text{sur } \Gamma_e, \\ \sigma(u, p) n &= 0, & \text{sur } \Gamma_s, \\ u &= \Phi \dot{\delta} s, & \text{sur } \gamma, \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \ddot{\delta} s + \mathcal{K}(s_0 + \delta s) &= - \int_{\gamma} J \Phi^T \sigma(u, p) F^{-T} n \, da, \\ \left( u, \delta s, \dot{\delta} s \right)_{|_{t=0}} &= (u^0, s^0, s^1). \end{aligned}$$

On se propose d'étudier la stabilité linéaire de l'état stationnaire d'équilibre  $(u_0, p_0, I)$  par rapport à des petites perturbations agissant sur les conditions initiales. Supposons donc, qu'à l'instant initial, l'état  $(u_0, p_0, I)$  est exposé à une petite perturbation  $(\delta u_0, \delta s_0, \delta s_1)$ . Cette perturbation génère un état couplé instationnaire  $(u, p, x)$  satisfaisant (4.11) avec condition initiale

$$(u^0, s^0, s^1) = (u_0 + \delta u_0, \delta s_0, \delta s_1).$$

Dans la suite, nous allons généraliser les étapes du « Principe de linéarisation » introduit dans la section précédente (figure 4.1), à notre problème de stabilité en interaction fluide-structure.

**Remarque 4.2.2** *Le théorème de Prodi et Yudovich 4.1.5 et celui de Sattinger [88] ne sont pas directement applicables à la stabilité de l'état stationnaire  $(u_0, p_0, I)$ . On peut constater facilement la différence qui apparaît sur les termes convectifs entre la structure des problèmes perturbés (4.1) et (4.11). Une justification mathématique rigoureuse pour la suite de notre approche demanderait une généralisation de ces théorèmes au cas de l'interaction fluide-structure, plus généralement au cas des domaines mobiles. Ceci, pouvant constituer une prochaine étape de nos travaux, ne sera pas abordé dans cette thèse.*

### 4.2.3 Linéarisation

Une fois définis le problème d'équilibre de référence (4.10) et le problème perturbé (4.11), l'étape suivante dans le « Principe de linéarisation » consiste en la définition des fluctuations  $(\delta u, \delta p, \delta x)$ , de l'état perturbé autour de l'état de référence, et la linéarisation du problème perturbé par rapport à ces fluctuations. À ce point, nous utilisons la démarche introduite au chapitre 2.

Les fluctuations sont définies, comme dans (2.10), de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x &= I_\Omega + \delta x, & \text{dans } \Omega, \\ u(I_{\Omega^f} + \delta x) &= u_0 + \nabla u_0 \delta x + \delta u, & \text{dans } \Omega^f, \\ p(I_{\Omega^f} + \delta x) &= p_0 + \nabla p_0 \delta x + \delta p, & \text{dans } \Omega^f, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où

$$\delta x^s = \Phi \delta s, \quad \delta x^f = \text{Ext}(x^s|_\gamma) - I_{\Omega^f}.$$

En contraste avec la définition classique (4.3), la nouvelle définition (4.12) prend en compte le transport de l'état de référence dû au mouvement du domaine fluide.

**Remarque 4.2.3** *Le terme  $\mathcal{K}s_0$  apparaissant dans l'équation (4.10)<sub>6</sub> correspond à la contrainte résiduelle introduite au chapitre 2 (section 2.1).*

La linéarisation est effectuée par rapport aux nouvelles inconnues  $(\delta u, \delta p, \delta x)$ , en utilisant la méthode du chapitre 2. Après écriture variationnelle des problèmes (4.10) et (4.11) on définit le problème convecté transporté fluide (2.13). Ainsi la linéarisation est effectuée en soustrayant le problème stationnaire et le problème convecté, du problème perturbé et en négligeant les termes d'ordre supérieur (voir la section 2.4 du chapitre 2).

**Remarque 4.2.4** *En contraste avec la méthode de linéarisation classique appliquée dans la section précédente, où il suffisait de soustraire le problème de référence du problème perturbé et négliger les termes d'ordre supérieur, dans le cas d'un domaine mobile la linéarisation demande l'introduction d'un nouveau problème, le problème convecté (2.13), qu'on doit retrancher sur le problème perturbé.*

D'après le chapitre 2 (section 2.5) le sous-problème linéarisé fluide s'écrit sous la forme (2.22), ainsi, en ignorant l'équation de l'énergie on obtient

$$\delta \dot{W} + \text{div} \left( \frac{\partial \phi}{\partial W}(W_0, \sigma_0) \delta W + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(W_0, \sigma_0) \delta \sigma \right) = 0, \quad \text{dans } \Omega^f,$$

avec les notations

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}, \quad \phi(W, \sigma) = W \otimes u - \mathbf{I}_2 \sigma, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et les conditions aux limites

$$\begin{aligned}\delta u &= \delta \dot{x}^s - \nabla u_0 \delta x^s, & \text{sur } \gamma, \\ \delta u &= 0, & \text{sur } \Gamma_e, \\ \delta \sigma n &= 0, & \text{sur } \Gamma_s.\end{aligned}$$

D'autre part, comme  $\rho$  est constante, on a

$$\delta W = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \delta u \end{pmatrix},$$

et le flux linéarisé est donné par

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial W}(W_0, \sigma_0) \delta W + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(W_0, \sigma_0) \delta \sigma &= W_0 \otimes \delta u + \delta W \otimes u_0 - \text{I}_2 \delta \sigma \\ &= \begin{pmatrix} \rho \delta u \\ \rho u_0 \otimes \delta u + \rho \delta u \otimes u_0 - \delta \sigma \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Pour le sous-problème solide (2.23), on pose

$$\hat{v}_{2|\Omega^s}^s = \Phi \hat{t}, \quad m^s(\delta \ddot{x}^s, \hat{v}_2^s) = (M \delta \ddot{s}) \cdot \hat{t}, \quad \delta a^s(\delta x^s, \hat{v}_2^s) = (K \delta s) \cdot \hat{t},$$

avec  $M$  et  $K$  les opérateurs de masse et raideur linéarisés autour de  $\Phi s_0$ , que l'on supposera symétriques et définis positifs. Ainsi, le sous-problème (2.23) devient

$$(M \delta \ddot{s} + K \delta s) \cdot \hat{t} = \int_{\gamma} \Phi^T (\sigma_0 \eta(\delta x^s) - \nabla \sigma_0 \delta x^s n - \delta \sigma n) da \cdot \hat{t}, \quad \forall \hat{t} \in \mathbb{R}^{n^s}.$$

Il résulte donc que, sous forme forte, le problème couplé linéaire vérifié par la fluctuation  $(\delta u, \delta p, \delta s)$  est donné par :

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \text{div}(\rho u_0 \otimes \delta u + \rho \delta u \otimes u_0 - \delta \sigma(\delta u, \delta p)) &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ \text{div } \delta u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ \delta u &= 0, & \text{sur } \Gamma_e, \\ \delta \sigma(\delta u, \delta p) n &= 0, & \text{sur } \Gamma_s, \\ \delta u &= \Phi \dot{\delta s} - \nabla u_0 \Phi \delta s, & \text{sur } \gamma,\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}M \delta \ddot{s} + K \delta s &= - \int_{\gamma} \Phi^T (\delta \sigma(\delta u, \delta p) n + \nabla \sigma(u_0, p_0) \Phi \delta s n - \sigma(u_0, p_0) \eta(\Phi \delta s)) da, \\ (\delta u, \delta s, \dot{\delta s})|_{t=0} &= (\delta u_0, \delta s_0, \delta s_1),\end{aligned}$$

avec

$$\delta \sigma(\delta u, \delta p) = -\delta p \text{I} + 2\mu \varepsilon(\delta u), \quad \eta(\Phi \delta s) = -\{\text{I div}(\Phi \delta s) - [\nabla(\Phi \delta s)]^T\} n.$$

On introduit la matrice réelle  $B^0$ , de taille  $n^s \times n^s$ , définie par

$$B_{ij}^0 = \int_{\gamma} (\nabla \sigma(u_0, p_0) \varphi_j n - \sigma(u_0, p_0) \eta(\varphi_j)) \cdot \varphi_i \, da. \quad (4.14)$$

En utilisant le fait de que  $\delta u$  et  $u_0$  sont à divergence nulle, on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u_0 \otimes \delta u) &= \nabla u_0 \delta u + u_0 \operatorname{div} \delta u = \nabla u_0 \delta u, \\ \operatorname{div}(\delta u \otimes u_0) &= \nabla \delta u u_0 + \delta u \operatorname{div} u_0 = \nabla \delta u u_0. \end{aligned}$$

Ainsi, après division par  $\rho$  dans (4.13)<sub>1</sub> et en notant encore  $\nu = \mu/\rho$  la viscosité cinématique, le problème couplé (4.13) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \nabla u_0 \delta u + \nabla \delta u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(\delta u) + \frac{1}{\rho} \nabla \delta p &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} \delta u &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\ \delta u &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_e, \\ \delta \sigma(\delta u, \delta p) n &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_s, \\ \delta u &= \Phi \delta s - \nabla u_0 \Phi \delta s, \quad \text{sur } \gamma, \\ M \ddot{\delta s} + (K + B^0) \delta s &= - \int_{\gamma} \Phi^T \delta \sigma(\delta u, \delta p) n \, da. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Comme on a vu au chapitre 2, la linéarisation effectuée fournit un problème couplé linéaire écrit en configuration fixe  $\Omega$ , totalement indépendant de l'opérateur d'extension à l'intérieur du domaine fluide  $\Omega^f$ . On reconnaît dans (4.15) les équations de Navier-Stokes linéarisées munies d'une condition de transpiration sur l'interface fixe  $\gamma$ . Du côté structure la linéarisation introduit le terme de « rigidité ajoutée »  $B^0 \delta s$ .

**Remarque 4.2.5** *Le problème linéaire (4.15) constitue une généralisation, au cas de l'interaction fluide-structure, du problème linéaire (4.5).*

#### 4.2.4 Définition du problème aux valeurs propres

Finalement, la dernière étape dans le « Principe de linéarisation », voir la figure 4.1, consiste à chercher les solutions de (4.15) sous la forme de modes normaux, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \delta u(x, t) &= u(x) e^{-\lambda t}, \\ \delta p(x, t) &= p(x) e^{-\lambda t}, \\ \delta s(t) &= s e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $u : \Omega^f \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $p : \Omega^f \rightarrow \mathbb{C}$  et  $s \in \mathbb{C}^{n^s}$ . En reportant les expressions précédentes dans (4.5) on obtient le problème aux valeurs propres quadratique suivant :

$$\begin{aligned}
 \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \lambda u, & \text{dans } \Omega^f, \\
 \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\
 u &= 0, & \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma(u, p)n &= 0, & \text{sur } \Gamma_s, \\
 u &= -\lambda \Phi s - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \\
 \lambda^2 M s + (K + B^0) s &= - \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p)n \, da,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

avec

$$\sigma(u, p) = -pI + 2\mu\varepsilon(u), \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T],$$

et  $B^0$  donnée par (4.14).

**Remarque 4.2.6** *Le problème aux valeurs propres couplé (4.16) constitue une généralisation, au cas de l'interaction fluide-structure, du problème aux valeurs propres (4.6).*

Pour l'étude de la stabilité de l'état d'équilibre  $(u_0, p_0, I)$  on se restreint donc à l'étude des solutions de (4.16). D'après la définition 4.1.4, on considérera que l'état couplé permanent  $(u_0, p_0, I)$  est linéairement stable, si le problème (4.16) n'a pas de valeurs propres avec partie réelle négative. Par contre, cet état sera considéré instable s'il existe au moins une valeur propre avec partie réelle négative.

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étendu les étapes du « Principe de linéarisation » en hydrodynamique au cas de l'interaction fluide-structure. Ceci nous a permis d'appliquer la méthode de linéarisation développée dans le chapitre 2. Cette méthode fournit un problème spectral fluide-structure où les deux milieux sont couplés par l'intermédiaire d'une condition de type transpiration à l'interface.

Dans les chapitres suivants on s'intéressera à l'analyse mathématique du problème spectral obtenu ainsi qu'au calcul numérique des valeurs propres, avec l'intention de développer un outil numérique d'analyse de la stabilité linéaire de systèmes en interaction fluide-structure.

# Chapitre 5

## Analyse mathématique : caractérisation du spectre

Ce chapitre constitue une première étude mathématique rigoureuse du nouveau problème spectral obtenu dans le chapitre précédent, et issu de l'analyse de stabilité linéaire d'un système couplé fluide-structure. Ce système est constitué d'un fluide visqueux, newtonien, incompressible et d'une structure réduite à  $n^s$  degrés de liberté. Le problème spectral couple les équations de Navier-Stokes linéarisées et celles de la structure par l'intermédiaire de conditions de type transpiration. Le résultat principal de ce chapitre montre que le problème admet, au plus, une infinité dénombrable de valeurs propres complexes, chacune avec multiplicité finie, et qui ont l'infini comme seul point d'accumulation.

Dans la première section nous introduisons le problème spectral dans un cadre mathématique adéquat et on établit le lien avec des problèmes spectraux déjà introduits dans [13] et [77, 14]. Nous montrons, dans une deuxième section, que la détermination des solutions propres du système couplé peut être réduite à la détermination des valeurs caractéristiques d'un certain opérateur compact agissant dans un espace de Hilbert. Ce résultat concorde avec celui obtenu dans [13] et celui conjecturé dans [77, 14], pour des cas particuliers de notre problème.

Ce chapitre a fait l'objet, sous forme moins complète, d'un article écrit en collaboration avec P. Le Tallec, à paraître dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématiques* [31].

### 5.1 Cadre mathématique

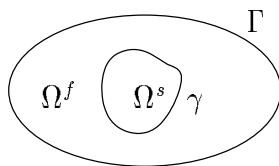


FIG. 5.1 – Le domaine de calcul,  $\Omega$ , défini par le système en sa configuration d'équilibre

Dans la suite on considère des fonctions définies dans des domaines bornés de  $\mathbb{R}^3$ , prenant des valeurs dans le champ complexe  $\mathbb{C}$ . Ainsi, tous les espaces  $L^p$  et Sobolev apparaissant dans ce chapitre sont pris comme des espaces vectoriels complexes de fonctions avec valeurs complexes, consulter [17]. Soit  $\Omega$  un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^3$ , avec frontière localement Lipschitz continue notée  $\Gamma$ , voir [69]. On suppose qu'il existe un sous-ensemble  $\Omega^s$  de  $\Omega$ , non vide, connexe, de frontière localement Lipschitz continue, notée  $\gamma$ , et tel que  $\overline{\Omega^s} \subset \Omega$ . Avec ces notations on pose  $\Omega^f = \Omega - \overline{\Omega^s}$ , voir la figure 5.1.

À ce point, on introduit d'une part, un champ de vitesses  $u_0 : \Omega^f \rightarrow \mathbb{R}^3$  et un champ de pression  $p_0 : \Omega^f \rightarrow \mathbb{R}$ , solution du problème de Navier-Stokes stationnaire suivant :

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_0) + \frac{1}{\rho} \nabla p_0 &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u_0 &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u_0 &= u_\Gamma, & \text{sur } \Gamma, \\ u_0 &= 0, & \text{sur } \gamma, \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec

$$\varepsilon(u_0) = \frac{1}{2} [\nabla u_0 + (\nabla u_0)^T],$$

$\rho > 0$  la densité volumique du fluide,  $\nu > 0$  la viscosité cinématique, et  $u_\Gamma$  la vitesse imposée sur  $\Gamma$ . On supposera que  $u_0$  et  $p_0$  sont des fonctions régulières, soit  $u_0 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega^f})^3$  et  $p_0 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega^f})$ . Et d'autre part, on introduit un nombre fini,  $n^s$ , de déformées modales,

$$\varphi_i : \Omega^s \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad i = 1, \dots, n^s,$$

que l'on supposera à volume constant, c'est-à-dire,

$$\int_\gamma \varphi_i \cdot n \, da = 0, \quad i = 1, \dots, n^s, \tag{5.2}$$

ici  $n$  dénote le vecteur normal unitaire sur  $\gamma$  (dirigé vers  $\Omega^s$ ). Dans la suite, la matrice de taille  $3 \times n^s$ ,

$$\Phi = [\varphi_1 | \varphi_2 | \dots | \varphi_{n^s}],$$

dénotera la base de déformées modales. Le comportement de la structure étant caractérisé par des matrices de masse,  $M$ , et de rigidité,  $K$ , d'ordre  $n^s$ , symétriques et définies positives.

**Remarque 5.1.1** *La régularité imposée à l'écoulement  $(u_0, p_0)$  n'est pas optimale. On a seulement choisi, pour simplifier, des espaces où les calculs que nous allons mener ont un sens.*

À partir de (4.16) on introduit le problème spectral quadratique suivant : Chercher  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $u : \Omega^f \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $p : \Omega^f \rightarrow \mathbb{C}$  et  $s \in \mathbb{C}^{n^s}$ , avec  $\int_{\Omega^f} p \, dx = 0$  et  $(u, p, s) \neq 0$ , tels que

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \lambda u, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u &= -\lambda \Phi s - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \\ \lambda^2 M s + (K + B^0) s &= - \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p) n \, da, \end{aligned} \quad (5.3)$$

où  $\sigma(u, p) = -pI + 2\mu\varepsilon(u)$ ,  $\mu = \rho\nu$  la viscosité dynamique du fluide, et  $B^0$  est une matrice réelle, d'ordre  $n^s$ , donnée par l'expression (4.14) :

$$B_{ij}^0 = \int_{\gamma} \left\{ \nabla \sigma(u_0, p_0) \varphi_j n + \sigma(u_0, p_0) \left[ I \operatorname{div} \varphi_j - (\nabla \varphi_j)^T \right] n \right\} \cdot \varphi_i \, da, \quad 1 \leq i, j \leq n^s.$$

**Remarque 5.1.2** *On impose la condition de moyenne nulle sur la pression, celle-ci est définie à une constante additive près [41].*

**Remarque 5.1.3** *Par rapport au problème (4.16), on a supposé ici que la frontière extérieure  $\Gamma$  est suffisamment éloignée de l'obstacle pour pouvoir imposer une condition de Dirichlet sur la totalité de  $\Gamma$ . Ceci facilite l'analyse en nous permettant d'appliquer la théorie classique sur les problèmes de Stokes [41, 19].*

### 5.1.1 Étude de cas particuliers

Considérons le cas particulier du problème (5.3) où le fluide est immobile à l'équilibre  $(u_0, p_0) = 0$ . Dans ce cas on a  $B^0 = 0$ . Posons aussi  $n^s = 3$  et  $\Phi = I$ , avec des matrices  $M$  et  $K$  diagonales  $M = mI$ ,  $K = kI$ , où  $m, k > 0$  sont des réels donnés. Le problème (5.3) devient ainsi

$$\begin{aligned} -2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \lambda u, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u &= -\lambda s, & \text{sur } \gamma, \\ \lambda^2 m s + k s &= - \int_{\gamma} \sigma(u, p) n \, da, \end{aligned} \quad (5.4)$$

et qui fait intervenir les équations de Stokes. Ce genre de problème a été proposé et complètement étudié par Conca, Durán et Planchard, dans [13], pour la détermination



des fréquences de vibration d'un faisceau tubulaire immergé dans un fluide visqueux immobile, voir aussi [14]. La condition (5.4)<sub>4</sub>, permet d'éliminer le déplacement,  $s$ , du problème, en se ramenant à un problème purement fluide avec des conditions aux limites non locales sur  $\gamma$ . Conca, Durán et Planchard montrent que le problème (5.4) a des valeurs propres, et que celles-ci peuvent être calculées à partir des valeurs caractéristiques d'un certain opérateur compact. Des bornes explicites sur les valeurs propres sont aussi obtenues, permettant de conclure que le nombre de valeurs propres avec partie imaginaire non nulle est fini. Des calculs numériques sur (5.4) ont été menés dans [12], corroborant la théorie développée dans [13]. On s'en servira dans le chapitre 8.

En présence d'écoulement permanent  $(u_0, p_0) \neq 0$ , avec  $n^s = 3$ ,  $\Phi = I$ ,  $M = mI$ ,  $K = kI$  et en négligeant  $B^0$  et le terme de gradient  $\nabla u_0$  dans la condition de transpiration, le problème quadratique aux valeurs propres (5.3) devient

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \lambda u, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u &= -\lambda s, & \text{sur } \gamma, \\ \lambda^2 m s + k s &= - \int_{\gamma} \sigma(u, p) n \, da. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ce problème, faisant intervenir les équations de Navier-Stokes linéarisées, à été proposé dans [77, 14] généralisant (5.4) au cas du faisceau tubulaire immergé dans un fluide visqueux sous écoulement transversal. À notre connaissance, aucune analyse rigoureuse sur ce problème à été menée jusqu'à ces jours.

## 5.2 Caractérisation des valeurs propres

On s'intéresse dans ce chapitre à l'analyse mathématique du problème (5.3). Le principe de base, voir [13, 14, 18], consiste à exhiber un opérateur compact qui caractérise les solutions de (5.3). La théorie classique des problèmes de Stokes [41, 19] ainsi que les techniques de condensation fluide [29] seront utilisées dans cette section.

### 5.2.1 Linéarisation et translation du problème

Pour linéariser (5.3) on introduit une nouvelle inconnue  $z = -\lambda s \in \mathbb{C}^{n^s}$ , de sorte que le problème aux valeurs propres (5.3) s'écrit maintenant : Chercher  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $u : \Omega^f \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,

$p : \Omega^f \longrightarrow \mathbb{C}$  et  $s, z \in \mathbb{C}^{n^s}$ , avec  $\int_{\Omega^f} p \, dx = 0$  et  $(u, p, s, z) \neq 0$ , tels que

$$\begin{aligned}
 \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \lambda u, & \text{dans } \Omega^f, \\
 \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\
 u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\
 u &= \Phi z - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \\
 -z &= \lambda s, \\
 (K + B^0) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p) n \, da &= \lambda M z.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

On veut caractériser les valeurs propres de (5.6) comme les valeurs propres d'un opérateur compact. On réécrit le problème (5.6) de la façon suivante : Chercher  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $u : \Omega^f \longrightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $p : \Omega^f \longrightarrow \mathbb{C}$  et  $s, z \in \mathbb{C}^{n^s}$ , avec  $\int_{\Omega^f} p \, dx = 0$  et  $(u, p, s, z) \neq 0$ , tels que

$$\begin{aligned}
 \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \lambda u, & \text{dans } \Omega^f, \\
 \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\
 u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\
 u &= \Phi z - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \\
 -z &= \lambda s, \\
 M^{-1} \left[ (K + B^0) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p) n \, da \right] &= \lambda z.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

On voit donc que (au moins formellement) le problème (5.7) peut être posé sous la forme classique,

$$A \begin{pmatrix} u \\ s \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ s \\ z \end{pmatrix}.$$

En fait, on s'intéressera au problème « inverse », c'est-à-dire, à l'étude des valeurs propres de  $A^{-1}$  :

$$A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ s \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} u \\ s \\ z \end{pmatrix},$$

car  $A^{-1}$  sera un opérateur compact. Les deux problèmes sont clairement équivalents, puisque si  $\lambda \neq 0$  est solution de (5.7) alors  $1/\lambda$  est valeur propre de  $A^{-1}$ , et réciproquement, si  $\omega \neq 0$  est valeur propre de  $A^{-1}$  alors  $\lambda = 1/\omega$  est valeur propre de (5.7), toujours avec la même fonction propre associée. On voit cependant que cette approche nécessite l'inversion

d'un certain opérateur  $A$ . *A priori* celui-ci n'est pas forcément inversible ( $\lambda$  peut être nul). Pour surmonter cette difficulté, voir [88], on introduit le « shift » ou translation suivante :

$$\lambda = \omega - r, \quad (5.8)$$

avec  $r > 0$  réel à fixer suffisamment grand, et  $\omega \in \mathbb{C}$  la nouvelle inconnue. De manière intuitive on peut dire que  $r$  est choisi assez grand pour que les sous-problèmes fluide et solide soient bien posés, l'opérateur  $A^{-1}$  étant ainsi bien défini. En reportant (5.8) dans (5.7), on a que  $(\lambda; u, p, s, z)$  est solution de (5.7) si et seulement si  $(\omega; u, p, s, z)$  est solution du problème suivant : Chercher  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $u : \Omega^f \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $p : \Omega^f \rightarrow \mathbb{C}$  et  $s, z \in \mathbb{C}^{n^s}$ , avec  $\int_{\Omega^f} p \, dx = 0$  et  $(u, p, s, z) \neq 0$ , tels que

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p + ru &= \omega u, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u &= \Phi z - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$-z + rs = \omega s$$

$$M^{-1} \left[ (K + B^0) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p) n \, da \right] + rz = \omega z.$$

Ce problème motive la définition d'un certain opérateur  $T$ , introduit dans le paragraphe suivant.

### 5.2.2 Définition de l'opérateur $T$

On introduit l'espace de Hilbert  $\mathbb{H} = L^2(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^{n^s} \times \mathbb{C}^{n^s}$ , et l'opérateur

$$T : (f, h, g) \in \mathbb{H} \longrightarrow T(f, g, h) = (u, z, s) \in H^1(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^{n^s} \times \mathbb{C}^{n^s},$$

où  $(u, z, s)$  est défini comme « solution » (pour  $r$  suffisamment grand) du problème, associé à (5.9), suivant :

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p + ru &= f, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u &= \Phi z - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$-z + rs = g,$$

$$M^{-1} \left[ (K + B^0) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p) n \, da \right] + rz = h.$$

**Remarque 5.2.1** *La motivation principale de la définition de l'opérateur  $T$  réside dans le fait que si  $(\lambda; u, p, z, s)$  est solution de (5.7), alors  $\omega = \lambda + r$  vérifie  $\omega T(u, z, s) = (u, z, s)$ , ainsi  $\omega \neq 0$  et  $(1/\omega; u, z, s)$  est un élément propre de  $T$ . Réciproquement, si  $\omega \neq 0$  est valeur propre de  $T$  alors  $1/\omega - r$  est une valeur propre dans (5.7). La démonstration de cette équivalence sera détaillée dans la suite.*

D'après (5.10)<sub>5</sub>,  $z = rs - g$ , on peut éliminer  $z$  dans (5.10) et ainsi le problème devient : Pour  $(f, h, g) \in \mathbb{H}$  chercher  $(u, p, s) \in H^1(\Omega^f)^3 \times L_0^2(\Omega^f) \times \mathbb{C}^{n_s}$  tel que

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p + r u &= f, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u &= -\Phi g - \nabla u_0 \Phi s + r \Phi s, & \text{sur } \gamma, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$(K + B^0) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p) n \, da + r^2 M s = M(h + r g),$$

où

$$L_0^2(\Omega^f) = \left\{ q \in L^2(\Omega^f) \mid \int_{\Omega^f} q \, dx = 0 \right\}.$$

**Remarque 5.2.2** *Pour montrer que l'opérateur  $T$  est bien défini, on doit montrer que le problème (5.11) admet une et une seule solution.*

La démonstration de l'existence et l'unicité de solution pour (5.11) nécessite l'introduction de quelques résultats préliminaires. On commence par décomposer  $(u, p)$  de la façon suivante :

$$(u, p) = (u_1, p_1) + (u_2, p_2) + (u_3, p_3), \quad (5.12)$$

avec  $(u_1, p_1)$  solution du problème (purement fluide)

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u_1 + \nabla u_1 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_1) + \frac{1}{\rho} \nabla p_1 + r u_1 &= f, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u_1 &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u_1 &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u_1 &= -\Phi g, & \text{sur } \gamma, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$(u_2, p_2)$  solution du problème

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u_2 + \nabla u_2 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_2) + \frac{1}{\rho} \nabla p_2 + r u_2 &= 0 & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u_2 &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u_2 &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u_2 &= -\nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \end{aligned} \quad (5.14)$$

et enfin,  $(u_3, p_3, s)$  solution de

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u_3 + \nabla u_3 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_3) + \frac{1}{\rho} \nabla p_3 + r u_3 &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u_3 &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\ u_3 &= 0, \quad \text{sur } \Gamma, \\ u_3 &= r \Phi s, \quad \text{sur } \gamma, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} (K + r^2 M + B^0) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_1, p_1) n \, da + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_2, p_2) n \, da \\ + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_3, p_3) n \, da = M(h + r g). \end{aligned}$$

Il est clair que si  $(u_1, p_1)$ ,  $(u_2, p_2)$ ,  $(u_3, p_3, s)$  sont solutions de (5.13), (5.14) et (5.15) respectivement, alors le triplet  $(u, p, s)$ , défini par (5.12), est solution de (5.11).

Dans la suite on aura besoin du résultat suivant :

**Lemme 5.2.3** *Soit  $v \in C^1(\overline{\Omega}^f)^3$  une fonction vectorielle régulière vérifiant*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\ v &= 0, \quad \text{sur } \gamma. \end{aligned}$$

et soit  $x \in H^{1/2}(\gamma)^3$  vérifiant

$$\int_{\gamma} x \cdot n \, da = 0, \quad (5.16)$$

il résulte alors que

$$\int_{\gamma} (\nabla v x) \cdot n \, da = 0. \quad (5.17)$$

**Démonstration :** On relève d'abord  $x$  par  $\tilde{x} \in H^1(\Omega^f)^3$  vérifiant

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{x} &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\ \tilde{x} &= x, \quad \text{sur } \gamma, \\ \int_{\Gamma} \tilde{x} \cdot n \, da &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

On explicitera plus tard le relèvement à choisir et comment l'obtenir. Comme  $\operatorname{div} v = 0$  et  $\operatorname{div} \tilde{x} = 0$  dans  $\Omega^f$ , on vérifie aisément que

$$\operatorname{div}(\nabla \tilde{x} v - \nabla v \tilde{x}) = (\tilde{x}_{i,j} v_j - v_{i,j} \tilde{x}_j)_{,i} = \nabla \tilde{x} : (\nabla v)^T - \nabla v : (\nabla \tilde{x})^T = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^f).$$

Il en résulte ainsi que  $(\nabla \tilde{x} v - \nabla v \tilde{x}) \in H(\operatorname{div}; \Omega^f)$ , et d'après la formule de Green

$$\int_{\Gamma \cup \gamma} (\nabla \tilde{x} v - \nabla v \tilde{x}) \cdot n \, da = \int_{\Omega^f} \operatorname{div}(\nabla \tilde{x} v - \nabla v \tilde{x}) = 0,$$

voir [41]. D'autre part, comme  $v = 0$  et  $\tilde{x} = x$  sur  $\gamma$ , on déduit de l'identité précédente que

$$\int_{\gamma} (\nabla v x) \cdot n \, da = \int_{\Gamma} (\nabla \tilde{x} v - \nabla v \tilde{x}) \cdot n \, da. \quad (5.19)$$

On a montré donc que, tout relèvement  $\tilde{x} \in H^1(\Omega^f)^3$  de  $x$  dans  $\Omega^f$  vérifiant (5.18) satisfait (5.19). Pour obtenir (5.17), il suffit de construire un relèvement  $\tilde{x}$ , vérifiant (5.18), pour lequel le second membre de (5.19) est nul. Pour cela, on procède de la manière suivante : comme  $\Gamma \cap \gamma = \emptyset$ , on peut construire un voisinage,  $\omega_\epsilon$ , de  $\Gamma$  dans  $\Omega^f$  tel que  $\overline{\omega_\epsilon} \cap \gamma \neq \emptyset$ , voir la figure 5.2.

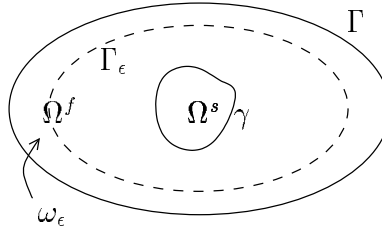


FIG. 5.2 – Voisinage de  $\Gamma$

On définit  $\tilde{x} = v$  dans  $\omega_\epsilon$ . Dans  $\Omega^f - \omega_\epsilon$  on prend  $\tilde{x}$  tel que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{x} &= 0, & \text{dans } \Omega^f - \omega_\epsilon, \\ \tilde{x} &= x, & \text{sur } \gamma, \\ \tilde{x} &= v, & \text{sur } \Gamma_\epsilon. \end{aligned}$$

Pour ceci il suffit de résoudre un simple problème de Stokes avec des conditions aux limites de Dirichlet, par exemple :

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{x} + \nabla \tilde{q} &= 0, & \text{dans } \Omega^f - \omega_\epsilon, \\ \operatorname{div} \tilde{x} &= 0, & \text{dans } \Omega^f - \omega_\epsilon, \\ \tilde{x} &= x, & \text{sur } \gamma, \\ \tilde{x} &= v, & \text{sur } \Gamma_\epsilon. \end{aligned}$$

En effet, comme  $\operatorname{div} v = 0$ , dans  $\Omega^f$ , et  $v = 0$ , sur  $\gamma$ , on tire que

$$\int_{\Gamma_\epsilon} v \cdot n_\epsilon \, da_\epsilon = 0,$$

où  $n_\epsilon$  dénote le vecteur normal unitaire extérieur sur  $\Gamma_\epsilon$ . Ainsi, d'après (5.16) on déduit (consulter [41, 19]) que le problème de Stokes précédent admet une unique solution  $(x, q)$  dans  $H^1(\Omega^f - \omega_\epsilon) \times L_0^2(\Omega^f - \omega_\epsilon)$ . Le relèvement  $\tilde{x} \in H^1(\Omega^f)^3$  ainsi construit vérifie (5.18). De plus, comme  $\tilde{x} = v$  et  $\nabla \tilde{x} = \nabla v$  dans  $\omega_\epsilon$ , on obtient que le second membre de (5.19) est nul, ce qui achève la démonstration. ■

Concernant la solvabilité des problèmes (5.13) et (5.14),

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u_1 + \nabla u_1 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_1) + \frac{1}{\rho} \nabla p_1 + r u_1 &= f, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u_1 &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u_1 &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u_1 &= -\Phi g, & \text{sur } \gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u_2 + \nabla u_2 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_2) + \frac{1}{\rho} \nabla p_2 + r u_2 &= 0 & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u_2 &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u_2 &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u_2 &= -\nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \end{aligned}$$

on a le résultat suivant :

**Théorème 5.2.4** Soient  $l \in L^2(\Omega^f)^3$  et  $\xi \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma)^3$  avec

$$\int_{\gamma} \xi \cdot n \, da = 0. \quad (5.20)$$

Alors pour  $r \geq 3\|\varepsilon(u_0)\|_{0,\infty,\Omega^f}$  le problème

$$\begin{aligned} \nabla u_0 w + \nabla w u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(w) + \frac{1}{\rho} \nabla q + r w &= l, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} w &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ w &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ w &= \xi, & \text{sur } \gamma, \end{aligned} \quad (5.21)$$

admet une unique solution  $(w, q)$  dans  $H^1(\Omega^f)^3 \times L_0^2(\Omega^f)$ , avec l'estimation classique suivante :

$$\|q\|_{0,\Omega^f} \leq C_1 (\|l\|_{0,\Omega^f} + |w|_{1,\Omega^f} + r\|w\|_{0,\Omega^f}), \quad (5.22)$$

où  $C_1 > 0$  est une constante qui ne dépend que de  $\rho, \nu, u_0$  et  $\Omega^f$ . De plus, si on fixe  $\tilde{r} > 3\|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}$ , pour  $r \geq \tilde{r}$  on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|w\|_{0,\Omega^f} &\leq C_2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) \left(\|\xi\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + \frac{1}{r}\|l\|_{0,\Omega^f}\right), \\ |w|_{1,\Omega^f} &\leq C_3 (1 + \sqrt{r}) \left(\|\xi\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + \frac{1}{r}\|l\|_{0,\Omega^f}\right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

où  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes positives qui ne dépendent que de  $\nu, u_0, \tilde{r}$  et  $\Omega^f$ .

**Démonstration:** On introduit l'espace de Hilbert

$$H = \left\{ v \in H^1(\Omega^f)^3 \mid \begin{array}{l} \operatorname{div} v = 0 \quad \text{dans } \Omega^f \\ v = 0 \quad \text{sur } \Gamma \cup \gamma \end{array} \right\},$$

muni de la seminorme de  $H^1(\Omega^f)^3$  (qui devient une norme d'après l'inégalité de Poincaré [9]), un opérateur linéaire continu de relèvement à divergence nulle [41],

$$R : H^{\frac{1}{2}}(\gamma)^3 \longrightarrow \left\{ v \in H^1(\Omega^f)^3 \mid \begin{array}{l} \operatorname{div} v = 0 \quad \text{dans } \Omega^f \\ v = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right\},$$

et la forme sesquilinéaire continue suivante :

$$a : (w, v) \in H \times H \longrightarrow a(w, v) = a_0(w, v) + r(w, \bar{v})_{0, \Omega^f} \in \mathbb{C},$$

avec

$$a_0(w, v) = (\nabla u_0 w + \nabla w u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} + 2\nu(\varepsilon(w), \varepsilon(\bar{v}))_{0, \Omega^f}.$$

Le problème (5.21) peut être ainsi formulé sous le cadre variationnel suivant : Chercher  $w \in H^1(\Omega^f)^3$  tel que

$$\begin{aligned} w - R(\xi) &\in H, \\ a_0(w, v) + r(w, \bar{v})_{0, \Omega^f} &= (l, \bar{v})_{0, \Omega^f}, \quad \forall v \in H. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Il résulte, ainsi, que  $\hat{w} = w - R(\xi) \in H$  résout le problème variationnel interne : Chercher  $\hat{w} \in H$  tel que

$$a_0(\hat{w}, v) + r(\hat{w}, v)_{0, \Omega^f} = (l, \bar{v})_{0, \Omega^f} - a_0(R(\xi), v) - r(R(\xi), \bar{v})_{0, \Omega^f}, \quad \forall v \in H. \quad (5.25)$$

À ce point, on introduit la forme antilinéaire continue

$$L : v \in H \longrightarrow L(v) = (l, \bar{v})_{0, \Omega^f} - a_0(R(\xi), v) - r(R(\xi), \bar{v})_{0, \Omega^f},$$

de telle manière que le problème (5.25) prend le formalisme classique suivant : Chercher  $\hat{w} \in H$  tel que

$$a(\hat{w}, v) = L(v), \quad \forall v \in H. \quad (5.26)$$

Par construction nous avons

$$\operatorname{Re} a(v, v) = 2\nu \|\varepsilon(v)\|_{0, \Omega^f}^2 + \operatorname{Re}(\nabla u_0 v, \bar{v}) + \operatorname{Re}(\nabla v u_0, \bar{v}) + r\|v\|_{0, \Omega^f}^2. \quad (5.27)$$

En utilisant le fait que  $u_0$  est à divergence nulle et que  $v$  s'annule sur  $\Gamma \cup \gamma$ , on obtient, d'une part,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}(\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} &= (\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} + \overline{(\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f}} \\ &= (\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} + (v, \nabla \bar{v} u_0)_{0, \Omega^f} \\ &= (\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} + \int_{\Omega^f} (v \otimes u_0) : \nabla \bar{v} \, dx \\ &= (\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} - \int_{\Omega^f} (\nabla v u_0 + v \operatorname{div} u_0) \cdot \bar{v} \, dx + \int_{\Gamma \cup \gamma} \|v\|^2 u_0 \cdot n \, da \\ &= (\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} - (\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.28)$$



et d'autre part,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\nabla u_0 v, \bar{v})_{0, \Omega^f} &= \frac{1}{2} \left[ (\nabla u_0 v, \bar{v})_{0, \Omega^f} + \overline{(\nabla u_0 v, \bar{v})_{0, \Omega^f}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ (\nabla u_0 v, \bar{v})_{0, \Omega^f} + (v, \nabla u_0 \bar{v})_{0, \Omega^f} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ (\nabla u_0 v, \bar{v})_{0, \Omega^f} + ((\nabla u_0)^T v, \bar{v})_{0, \Omega^f} \right] \\
 &= (\varepsilon(u_0)v, \bar{v})_{0, \Omega^f}.
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Il résulte donc, d'après (5.27), (5.28) et (5.29), que

$$\operatorname{Re} a(v, v) \geq 2\nu \|\varepsilon(v)\|_{0, \Omega^f}^2 - 3\|\varepsilon(u_0)\|_{0, \infty, \Omega^f} \|v\|_{0, \Omega^f}^2 + r\|v\|_{0, \Omega^f}^2.$$

Alors si on prend  $r \geq 3\|\varepsilon(u_0)\|_{0, \infty, \Omega^f}$ , d'après l'inégalité de Korn [9], on tire que la forme sesquilinéaire  $a$  est  $H$ -elliptique, c'est-à-dire,

$$\operatorname{Re} a(v, v) \geq 2\nu \|\varepsilon(v)\|_{0, \Omega^f}^2 \geq \alpha |v|_{1, \Omega^f}^2, \quad \forall v \in H,$$

où  $\alpha > 0$  est une constante qui ne dépend que de  $\nu$  et  $\Omega^f$ . Le théorème de Lax-Milgram [41] assure l'existence et unicité de  $\hat{w}$  comme solution de (5.26). On en tire aussi que  $w = \hat{w} + R(\xi)$  est solution de (5.24). L'unicité de  $w$  s'obtient à partir de (5.24) et du théorème de Lax-Milgram. Par ailleurs, comme  $v$  s'annule sur  $\Gamma \cup \gamma$ , en intégrant par parties dans (5.24)<sub>2</sub> on obtient que

$$(\nabla u_0 w + \nabla w u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(w) + r w - l, \bar{v})_{0, \Omega^f} = 0, \quad \forall v \in H.$$

Il existe donc (voir [19], propositions 1 et 2 du chapitre 9) une seule distribution  $q \in L_0^2(\Omega)$  telle que

$$\begin{aligned}
 \nabla u_0 w + \nabla w u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(w) + r w - l &= -\frac{1}{\rho} \nabla q, \quad \text{dans } D'(\Omega^f)^3, \\
 \|q\|_{0, \Omega^f} &\leq c \|\nabla u_0 w + \nabla w u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(w) + r w - l\|_{-1, \Omega^f},
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

où  $c > 0$  est une constante qui ne dépend que de  $\rho$  et  $\Omega^f$ . D'une part, la relation (5.30)<sub>1</sub> permet d'achever la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution de (5.21) et, d'autre part, de (5.30)<sub>2</sub> on obtient directement l'estimation (5.22). Par contre, l'obtention des inégalités (5.23)<sub>1,2</sub> demande une analyse plus fine.

En considérant la partie réelle de l'expression (5.25) avec  $v = \hat{w}$ , et d'après (5.28) et (5.29) on obtient que

$$(\varepsilon(u_0)\hat{w}, \hat{w})_{0, \Omega^f} + 2\nu \|\varepsilon(\hat{w})\|_{0, \Omega^f}^2 + r \|\hat{w}\|_{0, \Omega^f}^2 = \operatorname{Re} ((l, \hat{w})_{0, \Omega^f} - a_0(R(\xi), \hat{w}) - r(R(\xi), \hat{w})_{0, \Omega^f})$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned}
 & -3\|\varepsilon(u_0)\|_{0,\infty,\Omega^f}\|\hat{w}\|_{0,\Omega^f}^2 + 2\nu\|\varepsilon(\hat{w})\|_{0,\Omega^f}^2 + r\|\hat{w}\|_{0,\Omega^f}^2 \\
 & \leq |(l, \hat{w})_{0,\Omega^f} - a_0(R(\xi), \hat{w}) - r(R(\xi), \hat{w})_{0,\Omega^f}| \\
 & \leq (\|l\|_{0,\Omega^f} + r\|R(\xi)\|_{0,\Omega^f} + \|\nabla u_0 R(\xi)\|_{0,\Omega^f} + \|\nabla R(\xi)u_0\|_{0,\Omega^f})\|\hat{w}\|_{0,\Omega^f} \\
 & \quad + 2\nu\|\varepsilon(R(\xi))\|_{0,\Omega^f}\|\varepsilon(\hat{w})\|_{0,\Omega^f} \\
 & \leq (\|l\|_{0,\Omega^f} + r\|R(\xi)\|_{0,\Omega^f} + 3\|\nabla u_0\|_{0,\infty,\Omega^f}\|R(\xi)\|_{0,\Omega^f} \\
 & \quad + \sqrt{3}\|u_0\|_{0,\infty,\Omega^f}\|\nabla R(\xi)\|_{0,\Omega^f})\|\hat{w}\|_{0,\Omega^f} + 2\nu\|R(\xi)\|_{1,\Omega^f}\|\varepsilon(\hat{w})\|_{0,\Omega^f} \\
 & \leq \left[\|l\|_{0,\Omega^f} + r\|R(\xi)\|_{1,\Omega^f} + (3 + \sqrt{3})\|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}\|R(\xi)\|_{1,\Omega^f}\right]\|\hat{w}\|_{0,\Omega^f} \\
 & \quad + 2\nu\|R(\xi)\|_{1,\Omega^f}\|\varepsilon(\hat{w})\|_{0,\Omega^f}.
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Ainsi, de la continuité de  $R$ , de  $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)^3$  à valeurs dans  $H^1(\Omega^f)^3$ , en supposant que  $r \geq \|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}$ , et avec la dernière inégalité de (5.31) on tire que

$$\begin{aligned}
 & -\underbrace{3\|\varepsilon(u_0)\|_{0,\infty,\Omega^f}}_{r_0}\|\hat{w}\|_{0,\Omega^f}^2 + 2\nu\|\varepsilon(\hat{w})\|_{0,\Omega^f}^2 + r\|\hat{w}\|_{0,\Omega^f}^2 \\
 & \leq 2\nu c_1\|\xi\|_{\frac{1}{2},\Gamma}\|\varepsilon(\hat{w})\|_{0,\Omega^f} + c_2\left(\|l\|_{0,\Omega^f} + r\|\xi\|_{\frac{1}{2},\Gamma}\right)\|\hat{w}\|_{0,\Omega^f} \\
 & = 2\nu\underbrace{c_1\|\xi\|_{\frac{1}{2},\Gamma}}_{2a}\underbrace{\|\varepsilon(\hat{w})\|_{0,\Omega^f}}_x + r\underbrace{c_2\left(\frac{1}{r}\|l\|_{0,\Omega^f} + \|\xi\|_{\frac{1}{2},\Gamma}\right)}_{2b}\underbrace{\|\hat{w}\|_{0,\Omega^f}}_y,
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes positives ne dépendant que de  $u_0$  et  $\Omega^f$ .

En prenant en compte ces nouvelles notations on obtient, d'après (5.32), l'inégalité suivante

$$-r_0y^2 + 2\nu x^2 + ry^2 \leq (2\nu)(2a)x + r2by.$$

On peut compléter ici les carrés, ce qui permet d'obtenir

$$2\nu(x - a)^2 + r(y - b)^2 \leq 2\nu a^2 + rb^2 + r_0y^2. \tag{5.33}$$

Dans la suite on considère  $r > 3\|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}$ , donc en particulier  $r > r_0$ . D'une part, de l'inégalité (5.33), on obtient

$$r(y - b)^2 \leq 2\nu a^2 + rb^2 + r_0y^2,$$

c'est-à-dire, après division par  $r$

$$(y - b)^2 \leq \frac{2\nu}{r}a^2 + b^2 + \frac{r_0}{r}y^2.$$

En prenant la racine carrée et comme  $\alpha^2 + \beta^2 + \varsigma^2 \leq (\alpha + \beta + \varsigma)^2$  pour  $\alpha, \beta, \varsigma \geq 0$ , on déduit

$$|y - b| \leq \frac{\sqrt{2\nu}}{\sqrt{r}}a + b + \sqrt{\frac{r_0}{r}}y,$$

ce qui implique

$$y \leq \frac{\sqrt{2\nu}}{\sqrt{r}}a + 2b + \sqrt{\frac{r_0}{r}}y,$$

ou encore

$$y \left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{r}}\right) \leq \frac{\sqrt{2\nu}}{\sqrt{r}}a + 2b,$$

c'est-à-dire, finalement

$$y \leq \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{r_0}{r}}} \left( \frac{\sqrt{2\nu}}{\sqrt{r}}a + 2b \right). \quad (5.34)$$

En outre, comme la fonction

$$r \in (r_0, +\infty) \mapsto 1 - \sqrt{\frac{r_0}{r}},$$

est croissante, il résulte que pour chaque  $\tilde{r} > 3\|u_0\|_{1,\infty,\Omega_f} \geq r_0$  fixé

$$1 - \sqrt{\frac{r_0}{r}} \geq 1 - \sqrt{\frac{r_0}{\tilde{r}}}, \quad \forall r \geq \tilde{r}.$$

Avec cette borne et d'après (5.34) on obtient l'estimation

$$y \leq c_3 \left( \frac{1}{\sqrt{r}}a + b \right), \quad \forall r \geq \tilde{r}. \quad (5.35)$$

où  $c_3 > 0$  est une constante qui ne dépend que de  $r_0$ ,  $\tilde{r}$  et  $\nu$ .

D'autre part, d'après (5.33), on a

$$2\nu(x - a)^2 \leq 2\nu a^2 + r b^2 + r_0 y^2,$$

ou encore

$$(x - a)^2 \leq a^2 + \frac{r}{2\nu} b^2 + \frac{r_0}{2\nu} y^2.$$

Par passage à la racine carrée, il vient

$$|x - a| \leq a + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\nu}}b + \sqrt{\frac{r_0}{2\nu}}y,$$

d'où on déduit

$$x \leq 2a + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\nu}}b + \sqrt{\frac{r_0}{2\nu}}y.$$

Ainsi, avec (5.35) et l'inégalité précédente on a que pour  $r \geq \tilde{r}$

$$x \leq 2a + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\nu}}b + c_3 \sqrt{\frac{r_0}{2\nu}} \left( \frac{1}{\sqrt{r}}a + b \right),$$

d'où on déduit

$$x \leq \left(2 + c_3 \sqrt{\frac{r_0}{2\nu}} \frac{1}{\sqrt{r}}\right) a + \left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\nu}} + c_3 \sqrt{\frac{r_0}{2\nu}}\right) b.$$

Ce qui permet d'obtenir l'estimation

$$x \leq c_4 [a + (\sqrt{r} + 1)b], \quad \forall r \geq \tilde{r}, \quad (5.36)$$

avec  $c_4 > 0$  une constante qui ne dépend que de  $r_0$ ,  $\tilde{r}$  et  $\nu$ .

Par conséquent, d'après (5.35), (5.36) et les notations considérées, pour  $r \geq \tilde{r}$  on a

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(\hat{w})\|_{0,\Omega^f} &\leq c_4 \left[ \frac{c_1}{2} \|\xi\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + (\sqrt{r} + 1) \frac{c_2}{2} \left( \frac{1}{r} \|l\|_{0,\Omega^f} + \|\xi\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \right) \right] \\ &\leq c_5 (1 + \sqrt{r}) \left( \|\xi\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + \frac{1}{r} \|l\|_{0,\Omega^f} \right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \|\hat{w}\|_{0,\Omega^f} &\leq c_3 \left[ \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{c_1}{2} \|\xi\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + \frac{c_2}{2} \left( \frac{1}{r} \|l\|_{0,\Omega^f} + \|\xi\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \right) \right] \\ &\leq c_6 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \left( \|\xi\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + \frac{1}{r} \|l\|_{0,\Omega^f} \right), \end{aligned} \quad (5.38)$$

avec  $c_5$  et  $c_6$  des constantes positives qui ne dépendent que de  $\nu$ ,  $u_0$ ,  $\tilde{r}$  et  $\Omega^f$ . Les estimations (5.23)<sub>1,2</sub> s'obtiennent du fait que  $w = \hat{w} + R(\xi)$  et application de l'inégalité de Korn sur (5.37), ce qui achève la démonstration de ce théorème.  $\blacksquare$

Le corollaire suivant découle directement du théorème précédent :

**Corollaire 5.2.5** *Soient  $\tilde{r} > 3\|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}$  et  $s \in \mathbb{C}^{n^s}$ . Pour  $r \geq \tilde{r}$  les problèmes (5.13) et (5.14) on une unique solution dans  $H^1(\Omega^f)^3 \times L_0^2(\Omega^f)$ , et on a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{0,\Omega^f} &\leq C_4 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{r}} \right) (\|g\| + \|f\|_{0,\Omega^f}), \\ |u_1|_{1,\Omega^f} &\leq C_5 (1 + \sqrt{r}) (\|g\| + \|f\|_{0,\Omega^f}), \\ \|p_1\|_{0,\Omega^f} &\leq C_6 (1 + \sqrt{r} + r) (\|g\| + \|f\|_{0,\Omega^f}), \\ \|u_2\|_{0,\Omega^f} &\leq C_4 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \|s\|, \\ |u_2|_{1,\Omega^f} &\leq C_5 (1 + \sqrt{r}) \|s\|, \\ \|p_2\|_{0,\Omega^f} &\leq C_6 (1 + \sqrt{r} + r) \|s\|, \end{aligned} \quad (5.39)$$

où  $C_4$ ,  $C_5$  et  $C_6$  sont des constantes positives qui ne dépendent que de  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $u_0$ ,  $\tilde{r}$ ,  $\Phi$  et  $\Omega^f$ .

**Démonstration :** Comme  $u_1$  et  $u_2$  sont à divergence nulle, on doit vérifier d'abord (5.20) la condition de compatibilité de la trace sur  $\gamma$ , soit

$$\int_{\gamma} (\Phi g) \cdot n \, da = 0, \quad \int_{\gamma} (\nabla u_0 \Phi s) \cdot n \, da = 0.$$

La première identité est évidente car, d'après (5.2),

$$\int_{\gamma} \Phi^T n \, da = 0,$$

et, d'autre part,  $g$  est un vecteur constant. La deuxième est l'application directe du lemme 5.2.3, avec  $v = u_0$  et  $x = \Phi|_{\gamma} s$ . Le corollaire s'obtient donc après application directe du théorème 5.2.4 aux problèmes (5.13) et (5.14). ■

Le corollaire précédent permet de déterminer complètement  $(u_1, p_1)$  à partir des données  $f$  et  $g$ , on peut donc passer

$$\int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_1, p_1) n \, da,$$

au second membre de (5.15)<sub>5</sub>, et il ne nous reste qu'à déterminer  $(u_2, p_2)$  et  $(u_3, p_3, s)$ .

Dû à la linéarité de

$$\int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_2, p_2) n \, da,$$

par rapport à  $(u_2, p_2)$ , et de  $(u_2, p_2)$  par rapport à  $s$ , on peut écrire

$$\int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_2, p_2) n \, da,$$

comme une fonction linéaire de  $s$ , c'est-à-dire,

$$\int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_2, p_2) n \, da = F(r) s, \quad (5.40)$$

où  $F(r)$  est une matrice réelle d'ordre  $n^s$ , associée au problème (5.14) et donnée par l'expression suivante :

$$F_{ij}(r) = \int_{\gamma} (\sigma(w_j, q_j) n) \cdot \varphi_i \, da,$$

où  $(w_j, q_j)$  est l'unique solution, d'après le corollaire 5.2.5, du problème purement fluide

$$\begin{aligned} \nabla u_0 w_j + \nabla w_j u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(w_j) + \frac{1}{\rho} \nabla q_j + r w_j &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} w_j &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ w_j &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ w_j &= -\nabla u_0 \varphi_j, & \text{sur } \gamma. \end{aligned} \quad (5.41)$$

pour  $j = 1, \dots, n^s$ .

**Remarque 5.2.6** *Le fait qu'on puisse exprimer l'effort fluide sur l'interface sous la forme (5.40), en autres mots, qu'on puisse condenser le fluide à partir du calcul d'un nombre fini d'états fluides élémentaires, est directement lié à l'hypothèse que le déplacement de la structure est donné à partir d'un nombre fini de modes de vibration. L'expression (5.40) est cruciale dans la suite de notre approche, et ceci justifie d'un côté l'avoir admis un comportement réduit de la structure, car dans un cas plus général, où par exemple le déplacement de la structure vérifie les équations linéaires de l'élastodynamique, notre démarche n'est plus valable.*

Dans la suite on aura besoin d'une borne pour la norme de la matrice  $F(r)$ . Ceci est l'objet du lemme suivant :

**Lemme 5.2.7** *Soit  $\tilde{r} > 3\|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}$ . Pour  $r \geq \tilde{r}$  on a*

$$\|F(r)\| \leq C_7(1 + \sqrt{r} + r),$$

avec  $C_7 > 0$  une constante qui ne dépend que de  $\rho, \nu, u_0, \tilde{r}, \Phi$  et  $\Omega^f$ .

**Démonstration:** Soit  $s \in \mathbb{R}^{n^s}$ . D'après le corollaire 5.2.5,  $(u_2, p_2)$  est déterminé de façon unique. De (5.40) on tire, à des constantes multiplicatives près indépendantes de  $r$  et de  $(u_2, p_2)$ , l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|F(r)s\| &= \left\| \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_2, p_2) n \, da \right\| \\ &\leq \|\sigma(u_2, p_2)\|_{H(\text{div}; \Omega^f)} \\ &\leq \|\sigma(u_2, p_2)\|_{0, \Omega^f} + \|\text{div} \sigma(u_2, p_2)\|_{0, \Omega^f} \\ &\leq \|p_2\|_{0, \Omega^f} + |u_2|_{1, \Omega^f} + \|\nabla u_0 u_2 + \nabla u_2 u_0\|_{0, \Omega^f} + r \|u_2\|_{0, \Omega^f} \\ &\leq \|p_2\|_{0, \Omega^f} + |u_2|_{1, \Omega^f} + r \|u_2\|_{0, \Omega^f}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Le corollaire 5.2.5 fourni des estimations de  $|u_2|_{1, \Omega^f}$ ,  $\|u_2\|_{0, \Omega^f}$  et  $\|p_2\|_{0, \Omega^f}$  en fonction de  $r$  et  $s$ . Ainsi, d'après (5.42) et (5.39)<sub>4,5,6</sub>, on obtient

$$\begin{aligned} \|F(r)s\| &\leq \left[ C_6 (1 + \sqrt{r} + r) + C_5(1 + \sqrt{r}) + rC_4 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{r}} \right) \right] \|s\| \\ &\leq C_7 (1 + \sqrt{r} + r) \|s\|, \end{aligned}$$

avec  $C_7$  une constante indépendante de  $r, u_2$  et  $s$ . On achève donc la démonstration du lemme.  $\blacksquare$

Reprenons maintenant le problème de la détermination de  $(u_2, p_2), (u_3, p_3, s)$ . D'après (5.40) on peut éliminer  $(u_2, p_2)$  dans (5.15)<sub>5</sub> et, en multipliant par  $\rho$  l'équation (5.15)<sub>1</sub>, le problème se réduit à trouver  $(u_3, p_3, s) \in H^1(\Omega^f)^3 \times L_0^2(\Omega^f) \times \mathbb{C}^{n^s}$  vérifiant

$$\begin{aligned} \rho(\nabla u_0 u_3 + \nabla u_3 u_0) - 2\mu \text{div} \varepsilon(u_3) + \nabla p_3 + r\rho u_3 &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\ \text{div} u_3 &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\ u_3 &= 0, \quad \text{sur } \Gamma, \\ u_3 &= r\Phi s, \quad \text{sur } \gamma, \end{aligned}$$

$$(K + r^2 M + B^0 + F(r)) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_3, p_3) n \, da = M(h + rg) - \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_1, p_1) n \, da. \quad (5.43)$$

**Lemme 5.2.8** *Il existe  $r > 3\|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}$  tel que le problème couplé (5.43) a une unique solution dans  $H^1(\Omega^f)^3 \times L_0^2(\Omega^f) \times \mathbb{C}^{n^s}$ . De plus, pour  $r$  donné suffisamment grand, on a l'estimation*

$$\|s\| + |u_3|_{1, \Omega^f} + \|p_3\|_{0, \Omega^f} \leq C_8 (\|f\|_{0, \Omega^f} + \|g\| + \|h\|), \quad (5.44)$$

où  $C_8 > 0$  est une constante indépendante de  $(u_3, p_3, s)$  et  $(f, g, h)$ .

**Démonstration :** On introduit l'espace de Hilbert

$$\mathbb{V} = \left\{ V = (v, t) \in H^1(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^{n_s} \left| \begin{array}{l} \text{div } v = 0 \text{ dans } \Omega^f \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma \\ v = r\Phi t \text{ sur } \gamma \end{array} \right. \right\},$$

muni de la norme

$$\|(v, t)\|_{\mathbb{V}} = (|v|_{1, \Omega^f}^2 + \|t\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit  $V = (v, t) \in \mathbb{V}$  fixé, on multiplie l'équation (5.43)<sub>1</sub> par  $v$  et, après intégration par parties, on obtient

$$\rho(\nabla u_0 u_3 + \nabla u_3 u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} + 2\mu(\varepsilon(u_3), \varepsilon(\bar{v}))_{0, \Omega^f} + r\rho(u_3, \bar{v})_{0, \Omega^f} - r \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_3, p_3) n \, da \cdot \bar{t} = 0.$$

On multiplie maintenant l'équation (5.43)<sub>5</sub> par  $rt$  et après sommation de ces deux dernières expressions on arrive à la formulation variationnelle suivante du problème couplé (5.43) : Chercher  $(u_3, s) \in \mathbb{V}$  tel que

$$\begin{aligned} & \rho(\nabla u_0 u_3 + \nabla u_3 u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} + 2\mu(\varepsilon(u_3), \varepsilon(\bar{v}))_{0, \Omega^f} + r\rho(u_3, \bar{v})_{0, \Omega^f} + r(K + B^0) s \cdot \bar{t} + r^3 M s \cdot \bar{t} \\ & + r F(r) s \cdot \bar{t} = r M(rg + h) \cdot \bar{t} - r \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_1, p_1) n \, da \cdot \bar{t}, \quad \forall (v, t) \in \mathbb{V}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

On introduit la forme sesquilinéaire continue  $A : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$  et la forme antilinéaire  $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$  définies par

$$\begin{aligned} A((u, s), (v, t)) &= \rho(\nabla u_0 u + \nabla u u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} + 2\mu(\varepsilon(u), \varepsilon(\bar{v}))_{0, \Omega^f} + r\rho(u, \bar{v})_{0, \Omega^f} \\ & + r(K + B^0) s \cdot \bar{t} + r^3 M s \cdot \bar{t} + r F(r) s \cdot \bar{t}, \\ L((v, t)) &= r M(rg + h) \cdot \bar{t} - r \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_1, p_1) n \, da \cdot \bar{t}, \end{aligned}$$

pour  $U = (u, s), V = (v, t) \in \mathbb{V}$ . De cette manière, le problème (5.45) prend la forme classique suivante : Chercher  $U = (u_3, s) \in \mathbb{V}$  tel que

$$A(U, V) = L(V), \quad \forall V \in \mathbb{V}. \quad (5.46)$$

Soit  $V = (v, t) \in \mathbb{V}$ , en intégrant par parties dans  $\Omega^f$ , en utilisant le fait que  $u_0$  est à divergence nulle et comme  $\|v\|^2 u_0 \cdot n$  est nul sur la frontière  $\Gamma \cup \gamma$  (on rappelle que  $u_0$  est la solution du problème fluide (5.1) sur  $\Omega^f$ ), on obtient l'expression suivante analogue à (5.28) :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}(\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} &= (\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} + \overline{(\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f}} \\ &= (\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} + (v, \nabla \bar{v} u_0)_{0, \Omega^f} \\ &= (\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} + \int_{\Omega^f} (v \otimes u_0) : \nabla \bar{v} \, dx \\ &= (\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} - \int_{\Omega^f} (\nabla v u_0 + v \operatorname{div} u_0) \cdot \bar{v} \, dx + \int_{\Gamma \cup \gamma} \|v\|^2 u_0 \cdot n \, da \\ &= (\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} - (\nabla v u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Soient  $m = \min \sigma(M) > 0$  et  $k = \min \sigma(K) > 0$ , où  $\sigma(M)$  et  $\sigma(K)$  dénotent, respectivement, le spectre des matrices  $M$  et  $K$ . On fixe  $\tilde{r} > 3\|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}$  et on prend  $r \geq \tilde{r}$ . D'après (5.29) et (5.47), il résulte que pour chaque  $V = (v, t) \in \mathbb{V}$  on a

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} A(V, V) &= \rho \operatorname{Re}(\nabla u_0 v, \bar{v})_{0,\Omega^f} + 2\mu \|\varepsilon(v)\|_{0,\Omega^f}^2 + r\rho \|v\|_{0,\Omega^f}^2 + r(K + r^2 M) t \cdot \bar{t} \\
 &\quad + r \operatorname{Re}(B^0 t \cdot \bar{t}) + r \operatorname{Re}(F(r)t \cdot \bar{t}) \\
 &\geq \rho(\varepsilon(u_0)v, \bar{v})_{0,\Omega^f} + 2\mu \|\varepsilon(v)\|_{0,\Omega^f}^2 + r\rho \|v\|_{0,\Omega^f}^2 + r(k + r^2 m) \|t\|^2 \\
 &\quad + r \operatorname{Re}(B^0 t \cdot \bar{t}) + r \operatorname{Re}(F(r)t \cdot \bar{t}) \\
 &\geq 2\mu \|\varepsilon(v)\|_{0,\Omega^f}^2 - \rho 3 \|\varepsilon(u_0)\|_{0,\infty,\Omega^f} \|v\|_{0,\Omega^f}^2 + r\rho \|v\|_{0,\Omega^f}^2 \\
 &\quad + r(k + r^2 m - \|B^0\| - \|F(r)\|) \|t\|^2 \\
 &\geq 2\mu \|\varepsilon(v)\|_{0,\Omega^f}^2 + r \underbrace{[k + r^2 m - \|B^0\| - C_7(1 + \sqrt{r} + r)]}_{\alpha(r)} \|t\|^2.
 \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est conséquence du lemme 5.2.7. On choisit donc  $r \geq \tilde{r}$  suffisamment grand pour que  $\alpha(r) > 0$ , ce qui est possible car le terme dominant croît à l'infini comme  $r^2 m$  avec  $m > 0$ . Ainsi, on a

$$\operatorname{Re} A(V, V) \geq 2\mu \|\varepsilon(v)\|_{0,\Omega^f}^2 + r\alpha(r) \|t\|^2 \geq \min\{2\mu, r\alpha(r)\} (\|\varepsilon(v)\|_{0,\Omega^f}^2 + \|t\|^2),$$

ce qui, avec l'inégalité de Korn, implique la  $\mathbb{V}$ -ellipticité de  $A$ , c'est-à-dire,

$$\operatorname{Re} A(V, V) \geq \beta \|(v, t)\|_{\mathbb{V}}^2, \quad \forall V \in \mathbb{C},$$

où  $\beta > 0$  dépend de  $M, K, B^0, \rho, \mu, u_0, r$  et  $\Omega^f$ . Le théorème de Lax-Milgram, nous donne alors l'existence et l'unicité de  $(u_3, s) \in \mathbb{V}$  solution de (5.43). La pression  $p_3$  s'obtient donc à partir du théorème 5.2.4. On obtient également la borne

$$\|(v, t)\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{\|L\|_{\mathbb{V}'}}{\beta}.$$

Cette dernière inégalité avec l'estimation (5.22) sur  $p_3$  et les estimations (5.39)<sub>1,2,3</sub>, sur  $u_1$  et  $p_1$ , permettent d'obtenir l'estimation (5.44) cherchée, et d'achever donc la démonstration du lemme.  $\blacksquare$

On est maintenant prêt à démontrer l'existence et l'unicité de solutions du problème (5.11). Ceci est l'objet du théorème suivant :

**Théorème 5.2.9** *Il existe  $r > 3\|u_0\|_{1,\infty,\Omega^f}$  tel que le problème (5.11) admet une unique solution  $(u, p, s) \in H^1(\Omega^f)^3 \times L_0^2(\Omega^f) \times \mathbb{C}^{n^s}$ . De plus, pour  $r$  donné suffisamment grand, on a l'estimation*

$$\|s\| + \|u\|_{1,\Omega^f} + \|p\|_{0,\Omega^f} \leq C_3 (\|f\|_{0,\Omega^f} + \|g\| + \|h\|), \quad (5.48)$$

où  $C_3 > 0$  est une constante indépendante de  $(u, p, s)$  et  $(f, g, h)$ .



**Démonstration :** L'existence est conséquence directe de la décomposition (5.12) et des résultats précédents. Le corollaire 5.2.5 permet de déterminer d'abord  $(u_1, p_1)$ , puis on définit le problème (5.43) et les lemmes 5.2.7 et 5.2.8 permettent ensuite d'obtenir  $(u_3, p_3, s)$ . Finalement, une fois connu  $s$  on peut calculer  $(u_2, p_2)$  dans (5.14), d'après le corollaire 5.2.5, ou simplement à partir de l'expression

$$(u_2, p_2) = \sum_{j=1}^{n^s} s_j(w_j, q_j),$$

les  $(w_j, q_j)$  étant solutions de (5.41).

Par linéarité du problème (5.11), démontrer l'unicité de solution se réduit à prouver que le problème (5.11) avec données nulles n'admet que la solution triviale. Il faut montrer donc que si  $(u, p, s) \in H^1(\Omega^f)^3 \times L_0^2(\Omega^f) \times \mathbb{C}^{n^s}$  vérifie

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p + r u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u &= r \Phi s - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \\ (K + B^0) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p) n \, da + r^2 M s &= 0, \end{aligned} \quad (5.49)$$

alors  $(u, p, s) = 0$ .

Supposons ainsi que  $(u, p, s) \in H^1(\Omega^f)^3 \times L_0^2(\Omega^f) \times \mathbb{C}^{n^s}$  est solution de (5.49). On définit alors  $(\tilde{u}, \tilde{p})$  solution de

$$\begin{aligned} \nabla u_0 \tilde{u} + \nabla \tilde{u} u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(\tilde{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + r \tilde{u} &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} \tilde{u} &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ \tilde{u} &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ \tilde{u} &= -\nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma. \end{aligned}$$

Le corollaire 5.2.5 assure l'existence et l'unicité de  $(\tilde{u}, \tilde{p})$ . D'autre part, d'après (5.40), on a

$$F(r) s = \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(\tilde{u}, \tilde{p}) n \, da.$$

On note  $(\hat{u}, \hat{p}) = (u, p) - (\tilde{u}, \tilde{p})$ , il résulte donc de (5.49) que  $(\hat{u}, \hat{p}, s)$  est solution du problème

$$\begin{aligned} \nabla u_0 \hat{u} + \nabla \hat{u} u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(\hat{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} + r \hat{u} &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} \hat{u} &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ \hat{u} &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ \hat{u} &= r \Phi s, & \text{sur } \gamma, \\ (K + r^2 M + B^0 + F(r)) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(\hat{u}, \hat{p}) n \, da &= 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un problème couplé du type (5.43) mais avec données nulles, d'après le lemme 5.2.8 on a  $\hat{u} = 0$ ,  $\hat{p} = 0$  et  $s = 0$ , cette dernière identité implique en particulier  $\tilde{u} = 0$  et  $\tilde{p} = 0$ , ce qui donne finalement  $u = 0$  et  $p = 0$ .

Finalement, l'inégalité (5.48), donnant la continuité de l'opérateur  $T$ , découle des estimations sur  $(u_1, p_1)$  et  $(u_2, p_2)$ , fournies par le corollaire 5.2.5, et l'inégalité (5.44) du lemme précédent. ■

### 5.2.3 Compacité de l'opérateur $T$

D'après le théorème 5.2.9, l'opérateur  $T$  est donc bien défini, linéaire et continu de  $\mathbb{H}$  dans  $H^1(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^{n^s} \times \mathbb{C}^{n^s}$ . D'autre part, comme l'injection de  $H^1(\Omega^f)^3 \times \mathbb{C}^{n^s} \times \mathbb{C}^{n^s}$  dans  $\mathbb{H}$  est compacte, de la continuité de  $T$ , on déduit la compacité de  $T$  comme opérateur de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{H}$  [18]. Ceci nous permettra d'appliquer le résultat classique suivant, concernant le spectre des opérateurs compacts [1]:

**Théorème 5.2.10** *Soit  $\mathbb{H}$  un espace de Hilbert et soit  $T$  un opérateur compact sur  $\mathbb{H}$ . Les éléments du spectre de  $T$  qui sont différents de zéro, sont des valeurs propres de multiplicité finie. Ces valeurs propres sont au plus en infinité dénombrable et on zéro comme seul point d'accumulation. Zéro appartient toujours au spectre.*

Le théorème suivant permet de relier les valeurs propres de (5.6) avec les valeurs propres non nulles de l'opérateur  $T$ :

**Théorème 5.2.11** *Pour  $r$  suffisamment grand, si  $(\lambda; u, p, s, z)$  est un élément propre de (5.6) alors*

$$\left( \frac{1}{\lambda + r}; u, s, z \right),$$

*est un élément de propre  $T$ , de valeur propre non nulle, et réciproquement.*

**Démonstration:** On fixe  $r$  de manière à que le théorème 5.2.9 puisse s'appliquer. Si  $(\lambda; u, p, s, z)$  est solution de (5.6), on a que  $(u, p, s, z) \neq 0$ . Ceci implique que  $(u, s, z) \neq 0$ , car dans le cas contraire on aurait, d'après (5.6), que  $\nabla p = 0$  dans  $\Omega^f$  et donc  $p = 0$ , car la pression est définie à une constante près. On pose  $\omega = \lambda + r$ , d'après (5.6) on obtient

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p + ru &= \omega u, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u &= \Phi z - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \\ -z + rs &= \omega s, \\ \mathbf{M}^{-1} \left[ (\mathbf{K} + \mathbf{B}^0) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p) n \, da \right] + rz &= \omega z. \end{aligned}$$

Il résulte donc, de la définition de  $T$  (5.10), que

$$\omega T(u, s, z) = (u, s, z).$$

Mais,  $\omega$  ne peut pas être nul car on vient de voir que  $(u, s, z) \neq 0$ . On peut donc encore écrire

$$T(u, s, z) = \frac{1}{\omega}(u, s, z).$$

Ainsi si  $(\lambda; u, p, s, z)$  est un élément propre de (5.6), alors

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\lambda + r},$$

est une valeur propre de  $T$  et  $(u, z, s)$  un vecteur propre associé.

Réciproquement, si  $\omega \neq 0$  est une valeur propre de  $T$  et  $(u, s, z)$  un vecteur propre associé, c'est-à-dire,

$$T(u, s, z) = \omega(u, s, z),$$

on a, d'après la définition de  $T$  (5.10), que

$$\begin{aligned} \omega \nabla u_0 u + \omega \nabla u u_0 - \omega 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p + \omega r u &= u, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u &= \Phi z - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \\ \omega(-z + r s) &= s, \\ \mathbf{M}^{-1} \left[ (\mathbf{K} + \mathbf{B}^0) \omega s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(\omega u, p) n \, da \right] + \omega r z &= z. \end{aligned}$$

Après division par  $\omega \neq 0$ , et en notant  $q = p/\omega$  on obtient

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla q &= \left( \frac{1}{\omega} - r \right) u, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u &= \Phi z - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \\ -z &= \left( \frac{1}{\omega} - r \right) s \\ \mathbf{M}^{-1} \left[ (\mathbf{K} + \mathbf{B}^0) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, q) n \, da \right] &= \left( \frac{1}{\omega} - r \right) z. \end{aligned}$$

Il résulte donc que

$$\left( \frac{1}{\omega} - r; u, \frac{p}{\omega}, s, z \right),$$

est solution de (5.6).

En résumé, les valeurs propres de (5.6) sont de la forme

$$\lambda = \frac{1}{\omega} - r,$$

où  $\omega \neq 0$  est une valeur propre de  $T$ . ■

On peut donc démontrer le théorème suivant :

**Théorème 5.2.12** *Les valeurs propres du problème couplé (5.3) sont au plus en une infinité dénombrable, l'infini étant le seul point d'accumulation, et chacune d'elles avec multiplicité finie.*

**Démonstration:** Le résultat s'obtient directement à partir du théorème précédent, de la compacité de l'opérateur  $T$  et du théorème 5.2.10. ■

## 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons caractérisé les valeurs propres du nouveau problème spectral (5.3), couplant les équations de Navier-Stokes linéarisées et celles d'une structure réduite avec des conditions de type transpiration, et issu de l'analyse de stabilité de systèmes en interaction fluide-structure. Notre approche s'appuie sur la définition d'un certain opérateur compact agissant sur un espace de Hilbert. Ainsi nous montrons que les valeurs propres sont au plus en une infinité dénombrable, l'infini étant le seul point d'accumulation, et chacune d'elles avec multiplicité finie. Ce résultat concorde avec celui obtenu dans [13], pour (5.4), et celui conjecturé dans [77, 14], pour (5.5), les deux étant des cas particuliers de (5.3).



# Chapitre 6

## Approximation par éléments finis

Après l'analyse mathématique effectuée dans le chapitre précédent, on aborde dans ce chapitre la discrétisation du problème aux valeurs propres par une méthode d'éléments finis.

On rappelle, dans une première section, la description mathématique du problème. Dans la deuxième section on écrit le problème aux valeurs propres sur une forme variationnelle adéquate. Ceci permet, dans la troisième section, l'introduction d'un schéma de discrétisation par éléments finis. On montre, dans la quatrième section, que la résolution de ce problème discret est équivalente à la résolution d'un problème aux valeurs propres généralisé matriciel.

### 6.1 Position du problème

Comme dans le chapitre précédent, ici les fonctions seront définies dans des domaines bornés de  $\mathbb{R}^3$  qui prennent valeurs dans le corps complexe  $\mathbb{C}$ . Tous les espaces  $L^p$  et Sobolev apparaissant dans ce chapitre sont pris comme des espaces vectoriels complexes de fonctions avec valeurs complexes. On considère un sous-ensemble ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , avec frontière localement Lipschitz continue, notée  $\Gamma$ , et constituée de deux parties disjointes :

$$\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_s, \quad \Gamma_e \cap \Gamma_s = \emptyset.$$

On suppose qu'il existe un sous-ensemble ouvert  $\Omega^s$  de  $\Omega$ , non-vide, connexe, avec frontière localement Lipschitz continue, notée  $\gamma$ , et tel que  $\overline{\Omega^s} \subset \Omega$ . Avec ces notations on pose  $\Omega^f = \Omega - \overline{\Omega^s}$ , voir la figure 6.1.

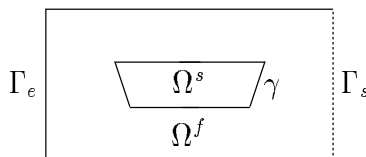


FIG. 6.1 – Le domaine de calcul  $\Omega$

On introduit, d'une part, un champ de vitesses  $u_0 : \Omega^f \rightarrow \mathbb{R}^3$  et un champ de pression

$p_0 : \Omega^f \longrightarrow \mathbb{R}$ , solution du problème de Navier-Stokes stationnaire suivant :

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_0) + \frac{1}{\rho} \nabla p_0 &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u_0 &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u_0 &= u_{\Gamma_e}, & \text{sur } \Gamma_e, \\ \sigma(u_0, p_0) n &= 0, & \text{sur } \Gamma_s, \\ u_0 &= 0, & \text{sur } \gamma, \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon(u_0) = \frac{1}{2} [\nabla u_0 + (\nabla u_0)^T], \quad \sigma(u_0, p_0) = -p_0 \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon(u_0),$$

$\rho > 0$  la densité volumique du fluide,  $\nu = \mu/\rho$  la viscosité cinématique du fluide,  $n$  le vecteur normal unitaire sur  $\Gamma$  dirigé vers l'extérieur de  $\Omega^f$ , et  $u_{\Gamma_e}$  la vitesse imposée sur  $\Gamma_e$ . On supposera que  $u_0$  et  $p_0$  sont des fonctions régulières. D'autre part, on introduit un nombre fini,  $n^s$ , de déformées modales,

$$\varphi_i : \Omega^s \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad i = 1, \dots, n^s.$$

La matrice  $\Phi = [\varphi_1 | \varphi_2 | \dots | \varphi_{n^s}]$ , de taille  $3 \times n^s$ , représente la base tronquée de déformées modales. Dans cette base, le comportement incrémental de la structure est caractérisé par des matrices de masse,  $M$ , et de rigidité,  $K$ , symétriques et définies positives.

On s'intéresse à la résolution numérique du problème quadratique aux valeurs propres (4.16), introduit dans le chapitre 4, c'est-à-dire: Chercher  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $u : \Omega^f \longrightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $p : \Omega^f \longrightarrow \mathbb{C}$  et  $s \in \mathbb{C}^{n^s}$ , avec  $(u, p, s) \neq 0$ , tels que

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \lambda u, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma_e, \\ \sigma(u, p) n &= 0, & \text{sur } \Gamma_s, \\ u &= -\lambda \Phi s - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \\ \lambda^2 M s + (K + B^0) s &= - \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p) n \, da, \end{aligned}$$

avec  $B^0$  la matrice réelle, d'ordre  $n^s$ , donnée par l'expression (4.14) :

$$B_{ij}^0 = \int_{\gamma} \{ \nabla \sigma(u_0, p_0) \varphi_j n + \sigma(u_0, p_0) [\mathbf{I} \operatorname{div} \varphi_j - (\nabla \varphi_j)^T] n \} \cdot \varphi_i \, da, \quad 1 \leq i, j \leq n^s.$$

En introduisant le changement de variable  $z = -\lambda s$ , le problème aux valeurs propres précédent prend la forme classique (5.6) suivante, introduite au chapitre précédent : Cher-

cher  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $u : \Omega^f \longrightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $p : \Omega^f \longrightarrow \mathbb{C}$  et  $s, z \in \mathbb{C}^{n^s}$ , avec  $(u, p, s, z) \neq 0$ , tels que

$$\begin{aligned}
 \rho(\nabla u_0 u + \nabla u u_0) - 2\mu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \nabla p &= \lambda \rho u, & \text{dans } \Omega^f, \\
 \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\
 u &= 0, & \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma(u, p)n &= 0, & \text{sur } \Gamma_s, \\
 u &= \Phi z - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \\
 -z &= \lambda s, \\
 (K + B^0) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p)n \, da &= \lambda M z.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Avant de définir un problème discret associé à (6.1), on écrit la « partie fluide » de (6.1) sous forme variationnelle. Ceci est le sujet de la section suivante.

## 6.2 Formulation variationnelle

On considère les espaces de fonctions complexes suivants :

$$\begin{aligned}
 H_{\Gamma_e}^1(\Omega^f) &= \{v \in H^1(\Omega^f) \mid v = 0, \text{ sur } \Gamma_e\}, \\
 H_{\Gamma_e \cup \gamma}^1(\Omega^f) &= \{v \in H^1(\Omega^f) \mid v = 0, \text{ sur } \Gamma_e \cup \gamma\},
 \end{aligned}$$

et un opérateur linéaire continu de relèvement

$$R : H^{\frac{1}{2}}(\gamma)^3 \longrightarrow H_{\Gamma_e}^1(\Omega^f)^3.$$

En multipliant (6.1)<sub>1</sub> scalairement par  $v \in H_{\Gamma_e \cup \gamma}^1(\Omega^f)^3$ , et après intégration par parties et prise en compte des conditions aux limites, on obtient que le problème aux valeurs propres (6.1) peut être écrit, sous forme variationnelle, de la façon suivante : Chercher  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $(u, p, s, z) \neq 0$  dans  $H^1(\Omega^f)^3 \times L^2(\Omega^f) \times \mathbb{C}^{n^s} \times \mathbb{C}^{n^s}$  tels que

$$\begin{aligned}
 u - R(\Phi z - \nabla u_0 \Phi s) &\in H_{\Gamma_e \cup \gamma}^1(\Omega^f)^3, \\
 a(u, v) + b(p, v) &= \lambda d(u, v), \quad \forall v \in H_{\Gamma_e \cup \gamma}^1(\Omega^f)^3, \\
 b(q, u) &= 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega^f), \\
 -z &= \lambda s,
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$(K + B^0) s + \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p)n \, da = \lambda M z,$$

avec les notations :

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= \rho(\nabla u_0 u + \nabla u u_0, \bar{v})_{0, \Omega^f} + 2\mu(\varepsilon(u), \varepsilon(\bar{v}))_{0, \Omega^f}, \\
 d(u, v) &= \rho(u, \bar{v})_{0, \Omega^f}, \\
 b(p, v) &= -(p, \operatorname{div} \bar{v})_{0, \Omega^f}.
 \end{aligned}$$



On remarque que l'intégrale qui apparaît dans (6.2)<sub>5</sub>, soit

$$\int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p) n \, da, \quad (6.3)$$

doit être prise au sens de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma \cup \gamma)^{n^s}$ , c'est-à-dire, la  $i$ -ème composante de (6.3) est définie par

$$\int_{\gamma} (\sigma(u, p) n) \cdot \varphi_i \, da = \langle \sigma(u, p) n, \chi_{\gamma}(\varphi_i) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma \cup \gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma \cup \gamma)},$$

pour  $i = 1, \dots, n^s$  et où

$$\chi_{\gamma}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Gamma \\ \varphi & \text{sur } \gamma \end{cases}.$$

Cette définition a un sens car, d'après (6.2)<sub>2</sub>,  $\operatorname{div} \sigma(u, p) \in L^2(\Omega^f)$  [41]. Il faut donc donner un sens très précis à (6.3) au moment de la discrétisation. L'idée consiste à traiter cette intégrale comme un résidu variationnel (consulter [51]). Ainsi, si on multiplie (6.1)<sub>1</sub> par  $R(\varphi_i)$  et on intègre par parties, après prise en comptes des conditions aux limites, on obtient

$$\int_{\gamma} (\sigma(u, p) n) \cdot \varphi_i \, da = a(u, R(\varphi_i)) + b(p, R(\varphi_i)) - \lambda d(u, R(\varphi_i)). \quad (6.4)$$

Cette dernière expression est plus adaptée pour une discrétisation par éléments finis car, après discrétisation, on n'a plus la condition  $\operatorname{div} \sigma(u, p) \in L^2(\Omega^f)^3$ . On obtient donc finalement la formulation variationnelle suivante: Chercher  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $(u, p, s, z) \neq 0$  dans  $H^1(\Omega^f)^3 \times L^2(\Omega^f) \times \mathbb{C}^{n^s} \times \mathbb{C}^{n^s}$  tels que

$$\begin{aligned} u - R(\Phi z - \nabla u_0 \Phi s) &\in H_{\Gamma_e \cup \gamma}^1(\Omega^f)^3, \\ a(u, v) + b(p, v) &= \lambda d(u, v), \quad \forall v \in H_{\Gamma_e \cup \gamma}^1(\Omega^f)^3, \\ b(q, u) &= 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega^f), \\ -z &= \lambda s, \\ (K + B^0) s + F^a(u) + F^b(p) &= \lambda (M z + F^d(u)), \end{aligned} \quad (6.5)$$

avec  $F^a(u), F^b(p), F^d(u) \in \mathbb{C}^{n^s}$  donnés, d'après (6.4), par les expressions suivantes:

$$[F^a(u)]_i = a(u, R(\varphi_i)), \quad [F^b(p)]_i = b(p, R(\varphi_i)), \quad [F^d(u)]_i = d(u, R(\varphi_i)),$$

pour  $i = 1, \dots, n^s$ .

### 6.3 Schéma de discrétisation

Dans la suite, on supposera que  $\Omega^f \subset \mathbb{R}^3$  est un domaine polygonal et on lui associera une famille régulière de triangulations  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ , telle que

$$\overline{\Omega^f} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K, \quad \forall h > 0,$$

où  $h$  est défini comme  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_k$ , avec  $h_k$  la diamètre du triangle  $K$ , consulter [8].

Pour approcher les espaces  $H^1(\Omega^f)$  et  $L^2(\Omega^f)$ , on introduit l'espace discret  $V_h$  associé à l'élément fini de Lagrange  $\mathbb{P}_1$ , c'est-à-dire,

$$V_h = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}^f) \mid v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

avec  $\mathbb{P}_1(K)$  l'espace de polynômes sur  $K$  de degré inférieur ou égal à 1. On définit donc les espaces discrets

$$X_h = V_h \cap H_{\Gamma_e}^1(\Omega^f), \quad Q_h = V_h, \quad V_{h,0} = V_h \cap H_{\Gamma_e \cup \gamma}^1(\Omega^f). \quad (6.6)$$

L'opérateur  $R$  est remplacé par un opérateur de relèvement discret

$$R_h : \text{Tr}(V_h)_{|\gamma}^3 \longrightarrow X_h^3.$$

Finalement, on introduit l'opérateur  $P_h$  classique d'interpolation  $\mathbb{P}_1$  par morceaux sur  $\gamma$  :

$$P_h : \mathcal{C}^0(\gamma)^3 \longrightarrow \text{Tr}(V_h)_{|\gamma}^3.$$

Une fois les espaces discrets définis, le problème approché est classiquement obtenu, à partir de (6.5), en remplaçant les espaces continus par des espaces discrets (voir [12]), c'est-à-dire, on définit le problème discret suivant : Chercher  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $(u, p, s, z) \neq 0$  dans  $V_h^3 \times Q_h \times \mathbb{C}^{n^s} \times \mathbb{C}^{n^s}$  tels que

$$\begin{aligned} u - R_h P_h(\Phi z - \nabla u_0 \Phi s) &\in V_{h,0}^3, \\ a(u, v) + b(p, v) &= \lambda d(u, v), \quad \forall v \in V_{h,0}^3, \\ b(q, u) &= 0, \quad \forall q \in Q_h, \\ -z &= \lambda s, \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$(K + B^0) s + F_h^a(u) + F_h^b(p) = \lambda (M z + F_h^d(u)),$$

avec  $F_h^a(u), F_h^b(p), F_h^d(u) \in \mathbb{C}^{n^s}$  donnés par les expressions suivantes :

$$[F_h^a(u)]_i = a(u, R_h P_h(\varphi_i)), \quad [F_h^b(p)]_i = b(p, R_h P_h(\varphi_i)), \quad [F_h^d(u)]_i = d(u, R_h P_h(\varphi_i)),$$

pour  $i = 1, \dots, n^s$ .

Comme on l'a déjà vu au chapitre 5, et comme ce sera confirmé par la suite, la résolution du problème précédent demande la résolution numérique des problèmes de Navier-Stokes linéarisés avec termes source du type

$$\begin{aligned} \rho(\nabla u_0 u + \nabla u u_0) - 2\mu \text{div } \varepsilon(u) + \nabla p + r\rho u &= \rho f, \quad \text{dans } \Omega^f, \\ \text{div } u &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_e, \\ \sigma(u, p)n &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_s, \\ u &= u_\gamma, \quad \text{sur } \gamma, \end{aligned} \quad (6.8)$$

avec  $r \in \mathbb{R}$  et pour des données réelles  $f$  et  $u_\gamma$ . Il semble naturel d'utiliser, comme dans (6.7), l'élément  $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$  car il s'agit d'un élément fini facile à mettre en œuvre. Néanmoins, le schéma discret (6.7) présente quelques inconvénients pratiques.

D'une part, le couple d'espaces  $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ , choisi pour discrétiser la vitesse et pression, ne vérifie pas la condition de compatibilité LBB (Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi ou condition « inf-sup ») [41]. Il est connu que le non respect de cette condition engendre des instabilités parasites sur la pression [41, 25]. Les méthodes « stabilisées » ont pour objectif de permettre l'utilisation de couples d'espaces qui ne satisfont pas la condition LBB, tout en introduisant suffisamment de diffusion numérique pour corriger les oscillations.

D'autre part, même si on choisit une méthode stabilisée en vitesse-pression (qui vérifie la condition LBB), l'expérience issue de la discrétisation des équations d'advection-diffusion et Navier-Stokes montre qu'une forte convection  $\nabla u u_0$  introduit aussi des oscillations parasites dans la vitesse, ce qui demande, à nouveau, des techniques spécifiques de traitement de la convection (voir [94] et les références citées). Des difficultés similaires peuvent apparaître lorsque le terme de réaction  $\nabla u_0 u + ru$  est dominant. Quelques techniques de stabilisation ont été développées à cet effet, mais pour des cas particuliers où la réaction se réduit à une constante [92, 34, 44, 2].

Les schémas stabilisés sont généralement obtenus en rajoutant au schéma classique (non-stabilisé) le produit du résidu de l'équation par une nouvelle fonction test définie à partir d'un paramètre local,  $\tau_K > 0$ , dit de « stabilisation ». Plus précisément, un schéma stabilisé pour (6.8) prendrait la forme : Chercher  $(u, p) \in V_h^3 \times Q_h$  tels que

$$\begin{aligned}
 & u - R_h P_h(u_\gamma) \in V_{h,0}^3, \\
 & a(u, v) + b(p, v) + b(q, u) + r\rho(u, v)_{0,\Omega} \\
 & \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \rho(\nabla u_0 u + \nabla u u_0) - 2\mu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \nabla p + r\rho u, \right. \\
 & \quad \left. \tau_K[\rho(\nabla u_0 v + \nabla v u_0) - 2\mu \operatorname{div} \varepsilon(v) - \nabla q + r\rho v] \right)_{0,K} \\
 & = d(f, v) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \rho f, \tau_K[\rho(\nabla u_0 v + \nabla v u_0) - 2\mu \operatorname{div} \varepsilon(v) - \nabla q + r\rho v] \right)_{0,K}, \\
 & \forall (v, q) \in V_{h,0}^3 \times Q_h.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Le paramètre  $\tau_K$  devrait être choisi en fonction de  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\nabla u_0$ ,  $u_0$  et  $r$  de manière à que la méthode converge. Malheureusement, on ne connaît pas à ces jours un choix de ce paramètre adapté à la stabilisation d'un terme général de réaction du type  $\nabla u_0 u + ru$ , voir [93].

Le schéma de discrétisation que nous proposons pour (6.8), est directement obtenu à partir de (6.9) en négligeant les termes associés à des fonctions test « d'ordre zéro » dans

la stabilisation, c'est-à-dire : Chercher  $(u, p) \in V_h^3 \times Q_h$  tels que

$$\begin{aligned}
 & u - R_h P_h(u_\gamma) \in V_{h,0}^3, \\
 & a(u, v) + b(p, v) + b(q, u) + r\rho(u, v)_{0,\Omega} \\
 & + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \rho(\nabla u_0 u + \nabla u u_0) - 2\mu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \nabla p + r\rho u, \right. \\
 & \left. \tau_K(\rho \nabla u u_0 - 2\mu \operatorname{div} \varepsilon(v) - \nabla q) \right)_{0,K} \\
 & = d(f, v) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \rho f, \tau_K(\rho \nabla u u_0 - 2\mu \operatorname{div} \varepsilon(v) - \nabla q) \right)_{0,K}, \quad \forall (v, q) \in V_{h,0}^3 \times Q_h,
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

avec les paramètres de stabilisation fournis dans [94] pour les équations de Ossen :

$$\tau_K = \frac{h_K}{2\rho \|u_0\|_2} \xi(\mathcal{R}_h e_K), \quad \mathcal{R}_h e_K = \frac{\|u_0\|_2 h_K}{12\nu}, \quad \xi(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Plusieurs raisons ont motivé l'utilisation du schéma précédent. D'une part, nous avons travaillé avec la même triangulation  $\mathcal{T}_h$  pour les calculs de  $u_0$  et  $u$  (ce n'est pas obligatoire mais pratique), ainsi le calcul précis de l'écoulement permanent  $(u_0, p_0)$ , et de la trace de  $\nabla u_0$  sur l'interface, impose une forte finesse du maillage au voisinage des parois, ce qui nous a permis de « contourner » la stabilisation des termes de réaction [34]. D'autre part, le schéma (6.10) est une extension directe de ceux introduits dans [92] et [94] pour les équations de Ossen, en ce sens, nous avons gardé le choix de  $\tau_K$  pour ce type d'équations [94]. Enfin, les résultats numériques que nous présenterons dans le chapitre 8 montreront la performance de ce schéma.

**Remarque 6.3.1** *On peut constater facilement que le schéma (6.10) est consistant avec les solutions du problème continu associé. On remarque aussi que, comme pour chaque  $u \in V_h^3$  on a  $u|_K \in \mathbb{P}_1^3(K)$ , les termes d'ordre deux,  $\operatorname{div} \varepsilon(u)$ , disparaissent dans la stabilisation.*

**Remarque 6.3.2** *Vu que l'écoulement de référence  $(u_0, p_0)$  est réel, le problème (6.8) est aussi un problème réel, de telle manière que dans (6.10) les espaces d'éléments finis doivent être pris comme des espaces vectoriels réels.*

D'après (6.10), nous introduisons alors, au lieu de (6.7), le schéma « stabilisé » suivant : Chercher  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $(u, p, s, z) \neq 0$  dans  $V_h^3 \times Q_h \times \mathbb{C}^{n^s} \times \mathbb{C}^{n^s}$  tels que

$$\begin{aligned}
 & u - R_h P_h(\Phi z - \nabla u_0 \Phi s) \in V_{h,0}^3, \\
 & a(u, v) + b(p, v) + \overline{b(q, u)} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \rho(\nabla u_0 u + \nabla u u_0) + \nabla p, \tau_K(\rho \nabla \bar{v} u_0 - \nabla \bar{q}) \right)_{0,K} \\
 & = \lambda \left[ d(u, v) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \rho u, \tau_K(\rho \nabla \bar{v} u_0 - \nabla \bar{q}) \right)_{0,K} \right], \quad \forall (v, q) \in V_{h,0}^3 \times Q_h, \\
 & - z = \lambda s, \\
 & (K + B^0) s + F_h^a(u) + F_h^b(p) = \lambda (M z + F_h^d(u)),
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

avec les nouvelles définitions :

$$\begin{aligned} [F_h^a(u)]_i &= a(u, R_h P_h(\varphi_i)) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \rho(\nabla u_0 u + \nabla u u_0), \tau_K \rho \nabla(R_h P_h(\varphi_i)) u_0 \right)_{0,K}, \\ [F_h^b(p)]_i &= b(p, R_h P_h(\varphi_i)) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \nabla p, \tau_K \rho \nabla(R_h P_h(\varphi_i)) u_0 \right)_{0,K}, \\ [F_h^d(u)]_i &= d(u, R_h P_h(\varphi_i)) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \rho u, \tau_K \rho \nabla(R_h P_h(\varphi_i)) u_0 \right)_{0,K}, \end{aligned}$$

pour  $i = 1, \dots, n^s$ .

En notant

$$\begin{aligned} a_s(u, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \rho(\nabla u_0 u + \nabla u u_0), \tau_K \rho \nabla \bar{v} u_0 \right)_{0,K}, \\ b_s(p, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \nabla p, \tau_K \rho \nabla \bar{v} u_0 \right)_{0,K}, \\ b_s^t(u, q) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \rho(\nabla u_0 u + \nabla u u_0), \tau_K \nabla \bar{q} \right)_{0,K}, \\ c_s(p, q) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \nabla p, \tau_K \nabla \bar{q} \right)_{0,K}, \\ d_s(u, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \rho u, \tau_K \rho \nabla \bar{v} u_0 \right)_{0,K}, \\ e_s(u, q) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \rho u, \tau_K \nabla \bar{q} \right)_{0,K}, \end{aligned}$$

le problème discret (6.11) s'écrit de façon plus compacte comme : Chercher  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $(u, p, s, z) \neq 0$  dans  $V_h^3 \times Q_h \times \mathbb{C}^{n^s} \times \mathbb{C}^{n^s}$  tels que

$$\begin{aligned} u - R_h(\Phi z - \nabla u_0 \Phi s) &\in V_{h,0}^3, \\ a(u, v) + b(p, v) + \overline{b(q, u)} + a_s(u, v) + b_s(p, v) + b_s^t(q, u) + c_s(p, q) \\ &= \lambda(d(u, v) + d_s(u, v) + e_s(q, u)), \quad \forall (v, q) \in V_{h,0}^3 \times Q_h, \\ -z &= \lambda s, \\ (K + B^0) s + F_h^a(u) + F_h^b(p) &= \lambda (M z + F_h^d(u)), \end{aligned} \tag{6.12}$$

## 6.4 Formulation matricielle

On va reformuler le problème (6.12) en termes de matrices. Ceci nous permettra de calculer explicitement les solutions  $(\lambda; u, p, s, z)$  de (6.12). Soit  $n^f = n^f(h)$  le nombre de sommets de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  sur le fluide. On introduit des bases  $\{\phi_i\}_{i=1}^{3n^f}$  et  $\{\psi_i\}_{i=1}^{n^f}$  de  $V_h^3$  et  $Q_h$  respectivement. Ainsi chaque élément  $(u, p) \in V_h^3 \times Q_h$  s'écrit sous la forme :

$$u = \sum_{j=1}^{3n^f} u_j \phi_j, \quad p = \sum_{j=1}^{n^f} p_j \psi_j, \tag{6.13}$$

avec  $u_j, p_j \in \mathbb{C}$ . On introduit aussi les sous-ensembles de  $I = \{1, \dots, 3n^f\}$ :

$$\begin{aligned} I^{\Omega^f} &= \{i \in I \mid \text{le d.l. } i \text{ n'est pas sur } \Gamma \cup \gamma\}, \\ I^{\Gamma_s} &= \{i \in I \mid \text{le d.l. } i \text{ est sur } \Gamma_s\}, \\ I^{\Gamma_e} &= \{i \in I \mid \text{le d.l. } i \text{ est sur } \Gamma_e\}, \\ I^\gamma &= \{i \in I \mid \text{le d.l. } i \text{ est sur } \gamma\}, \end{aligned}$$

ensuite on définit

$$\begin{aligned} n^{\Omega^f} &= \text{card}(I^{\Omega^f}), \\ n^{\Gamma_s} &= \text{card}(I^{\Gamma_s}), \\ n^{\Gamma_e} &= \text{card}(I^{\Gamma_e}), \\ n^\gamma &= \text{card}(I^\gamma). \end{aligned}$$

En reportant (6.13) dans (6.12)<sub>2</sub> on obtient

$$\begin{aligned} u_j a(\phi_j, v) + p_j b(\psi_j, v) + u_j \overline{b(q, \phi_j)} + u_j a_s(\phi_j, v) + p_j b_s(\psi_j, v) + u_j b_s^t(\phi_j, q) \\ + p_j c_s(\psi_j, q) = \lambda(u_j d(\phi_j, v) + u_j d_s(\phi_j, v) + u_j e_s(\phi_j, q)), \quad \forall (v, q) \in V_{h,0}^3 \times Q_h. \end{aligned} \quad (6.14)$$

On note avec  $u^{\Omega^f} \in \mathbb{C}^{n^{\Omega^f}}$ ,  $u^{\Gamma_s} \in \mathbb{C}^{n^{\Gamma_s}}$ ,  $u^{\Gamma_e} \in \mathbb{C}^{n^{\Gamma_e}}$  et  $u^\gamma \in \mathbb{C}^{n^\gamma}$  les degrés de liberté de  $u$  correspondants aux fonctions de base de  $I^{\Omega^f}$ ,  $I^{\Gamma_s}$ ,  $I^{\Gamma_e}$  et  $I^\gamma$  respectivement. Dans la suite on supposera que les éléments de la base  $\{\phi_i\}_{i=1}^{3n^f}$  ont été ordonnés de telle manière que les premiers degrés de liberté correspondent à  $u^{\Omega^f}$ , puis à  $u^{\Gamma_s}$ , puis à  $u^{\Gamma_e}$  et  $u^\gamma$ . Si on particularise (6.14) pour  $v = \phi_i$ , avec  $i \in I^{\Omega^f} \cup I^{\Gamma_s}$ , et  $q = \psi_i$ , avec  $i = 1, \dots, n^f$ , on obtient une expression matricielle, de taille  $(n^{\Omega^f} + n^{\Gamma_s} + n^f) \times (4n^f + 2n^s)$ , du type

$$\begin{bmatrix} A_1^{\Omega^f} & A_1^{\Gamma_s} & A_1^{\Gamma_e} & A_1^\gamma & B_1 & 0 & 0 \\ A_2^{\Omega^f} & A_2^{\Gamma_s} & A_2^{\Gamma_e} & A_2^\gamma & B_2 & 0 & 0 \\ B_s^{\Omega^f} & B_s^{\Gamma_s} & B_s^{\Gamma_e} & B_s^\gamma & C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{\Omega^f} \\ u^{\Gamma_s} \\ u^{\Gamma_e} \\ u^\gamma \\ p \\ z \\ s \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} D_1^{\Omega^f} & D_1^{\Gamma_s} & D_1^{\Gamma_e} & D_1^\gamma & 0 & 0 & 0 \\ D_2^{\Omega^f} & D_2^{\Gamma_s} & D_2^{\Gamma_e} & D_2^\gamma & 0 & 0 & 0 \\ E^{\Omega^f} & E^{\Gamma_s} & E^{\Gamma_e} & E^\gamma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{\Omega^f} \\ u^{\Gamma_s} \\ u^{\Gamma_e} \\ u^\gamma \\ p \\ z \\ s \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

avec les notations :

$$\begin{aligned}
 [A_1^{\Omega^f}]_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i) + a_s(\phi_j, \phi_i), \quad i, j \in I^{\Omega^f}, \\
 [A_1^{\Gamma^s}]_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i) + a_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Omega^f}, \quad j \in I^{\Gamma^s}, \\
 [A_1^{\Gamma^e}]_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i) + a_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Omega^f}, \quad j \in I^{\Gamma^e}, \\
 [A_1^\gamma]_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i) + a_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Omega^f}, \quad j \in I^\gamma, \\
 [B_1]_{ij} &= b(\psi_j, \phi_i) + b_s(\psi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Omega^f}, \quad j = 1, \dots, n^f, \\
 [A_2^{\Omega^f}]_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i) + a_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Gamma^s}, \quad j \in I^{\Omega^f}, \\
 [A_2^{\Gamma^s}]_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i) + a_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Gamma^s}, \quad j \in I^{\Gamma^s}, \\
 [A_2^{\Gamma^e}]_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i) + a_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Gamma^s}, \quad j \in I^{\Gamma^e}, \\
 [A_2^\gamma]_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i) + a_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Gamma^s}, \quad j \in I^\gamma, \\
 [B_2]_{ij} &= b(\psi_j, \phi_i) + b_s(\psi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Gamma^s}, \quad j = 1, \dots, n^f, \\
 [B_s^{\Omega^f}]_{ij} &= b(\psi_i, \phi_j) + b_s^t(\phi_j, \psi_i), \quad i = 1, \dots, n^f, \quad j \in I^{\Omega^f}, \\
 [B_s^{\Gamma^s}]_{ij} &= b(\psi_i, \phi_j) + b_s^t(\phi_j, \psi_i), \quad i = 1, \dots, n^f, \quad j \in I^{\Gamma^s}, \\
 [B_s^{\Gamma^e}]_{ij} &= b(\psi_i, \phi_j) + b_s^t(\phi_j, \psi_i), \quad i = 1, \dots, n^f, \quad j \in I^{\Gamma^e}, \\
 [B_s^\gamma]_{ij} &= b(\psi_i, \phi_j) + b_s^t(\phi_j, \psi_i), \quad i = 1, \dots, n^f, \quad j \in I^\gamma, \\
 [C]_{ij} &= c_s(\psi_j, \psi_i), \quad i, j = 1, \dots, n^f, \\
 [D_1^{\Omega^f}]_{ij} &= d(\phi_j, \phi_i) + d_s(\phi_j, \phi_i), \quad i, j \in I^{\Omega^f}, \\
 [D_1^{\Gamma^s}]_{ij} &= d(\phi_j, \phi_i) + d_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Omega^f}, \quad j \in I^{\Gamma^s}, \\
 [D_1^{\Gamma^e}]_{ij} &= d(\phi_j, \phi_i) + d_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Omega^f}, \quad j \in I^{\Gamma^e}, \\
 [D_1^\gamma]_{ij} &= d(\phi_j, \phi_i) + d_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Omega^f}, \quad j \in I^\gamma, \\
 [D_2^{\Omega^f}]_{ij} &= d(\phi_j, \phi_i) + d_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Gamma^s}, \quad j \in I^{\Omega^f}, \\
 [D_2^{\Gamma^s}]_{ij} &= d(\phi_j, \phi_i) + d_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Gamma^s}, \quad j \in I^{\Gamma^s}, \\
 [D_2^{\Gamma^e}]_{ij} &= d(\phi_j, \phi_i) + d_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Gamma^s}, \quad j \in I^{\Gamma^e}, \\
 [D_2^\gamma]_{ij} &= d(\phi_j, \phi_i) + d_s(\phi_j, \phi_i), \quad i \in I^{\Gamma^s}, \quad j \in I^\gamma, \\
 [E^{\Omega^f}]_{ij} &= e_s(\phi_j, \psi_i), \quad i = 1, \dots, n^f, \quad j \in I^{\Omega^f}, \\
 [E^{\Gamma^s}]_{ij} &= e_s(\phi_j, \psi_i), \quad i = 1, \dots, n^f, \quad j \in I^{\Gamma^s}, \\
 [E^{\Gamma^e}]_{ij} &= e_s(\phi_j, \psi_i), \quad i = 1, \dots, n^f, \quad j \in I^{\Gamma^e}, \\
 [E^\gamma]_{ij} &= e_s(\phi_j, \psi_i), \quad i = 1, \dots, n^f, \quad j \in I^\gamma.
 \end{aligned}$$

De même, si on reporte (6.13) dans (6.12)<sub>4</sub> on a

$$(K + B^0) s + u_j F_h^a(\phi_j) + p_j F_h^b(\psi_j) = \lambda (M z + u_j F_h^d(\phi_j)),$$

ce qui donne l'expression matricielle de taille  $n^s \times (4n^f + 2n^s)$  suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} F_a^{\Omega^f} & F_a^{\Gamma_s} & F_a^{\Gamma_e} & F_a^\gamma & F_b & 0 & K + B^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{\Omega^f} \\ u^{\Gamma_s} \\ u^{\Gamma_e} \\ u^\gamma \\ p \\ z \\ s \end{bmatrix} \\ & = \lambda \begin{bmatrix} F_d^{\Omega^f} & F_d^{\Gamma_s} & F_d^{\Gamma_e} & F_d^\gamma & 0 & M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{\Omega^f} \\ u^{\Gamma_s} \\ u^{\Gamma_e} \\ u^\gamma \\ p \\ z \\ s \end{bmatrix}, \quad (6.16) \end{aligned}$$

avec les notations :

$$\begin{aligned} [F_a^{\Omega^f}]_{ij} &= [F_h^a(\phi_j)]_i, & i = 1, \dots, n^s, & j \in I^{\Omega^f}, \\ [F_a^{\Gamma_s}]_{ij} &= [F_h^a(\phi_j)]_i, & i = 1, \dots, n^s, & j \in I^{\Gamma_s}, \\ [F_a^{\Gamma_e}]_{ij} &= [F_h^a(\phi_j)]_i, & i = 1, \dots, n^s, & j \in I^{\Gamma_e}, \\ [F_a^\gamma]_{ij} &= [F_h^a(\phi_j)]_i, & i = 1, \dots, n^s, & j \in I^\gamma, \\ [F_b]_{ij} &= [F_h^b(\psi_j)]_i, & i = 1, \dots, n^s, & j = 1, \dots, n^f, \\ [F_d^{\Omega^f}]_{ij} &= [F_h^d(\phi_j)]_i, & i = 1, \dots, n^s, & j \in I^{\Omega^f}, \\ [F_d^{\Gamma_s}]_{ij} &= [F_h^d(\phi_j)]_i, & i = 1, \dots, n^s, & j \in I^{\Gamma_s}, \\ [F_d^{\Gamma_e}]_{ij} &= [F_h^d(\phi_j)]_i, & i = 1, \dots, n^s, & j \in I^{\Gamma_e}, \\ [F_d^\gamma]_{ij} &= [F_h^d(\phi_j)]_i, & i = 1, \dots, n^s, & j \in I^\gamma. \end{aligned}$$

La condition (6.12)<sub>1</sub> est prise explicitement sur chaque sommet du bord,  $x_i$ , de la triangulation. Plus précisément on a l'expression matricielle de taille  $(n^{\Gamma_e} + n^\gamma) \times (4n^f + 2n^s)$  suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & -G^0 & G^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{\Omega^f} \\ u^{\Gamma_s} \\ u^{\Gamma_e} \\ u^\gamma \\ p \\ z \\ s \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{\Omega^f} \\ u^{\Gamma_s} \\ u^{\Gamma_e} \\ u^\gamma \\ p \\ z \\ s \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$



avec les notations :

$$\begin{aligned} [G^0]_{ij} &= [\varphi_j]_{\text{nc}(i)}(x_{\text{ns}(i)}), & i \in I^e \quad j = 1, \dots, n^s, \\ [G^1]_{ij} &= [\nabla u_0 \varphi_j]_{\text{nc}(i)}(x_{\text{ns}(i)}), & i \in I^\gamma \quad j = 1, \dots, n^s, \end{aligned}$$

où les indices  $\text{nc}(i) \in \{1, 2, 3\}$  et  $\text{ns}(i) \in \{1, \dots, n^f\}$ , pour  $i = 1, \dots, 3n^f$ , dénotent respectivement la composante de la vitesse et le numéro de sommet associé au degré de liberté  $i$  de la vitesse.

Enfin, si on prend en compte (6.12)<sub>3</sub> avec (6.15), (6.16) et (6.17) on obtient que le problème discret (6.12) est équivalent au problème aux valeurs propres généralisé, de taille  $n = 4n^f + 2n^s$ , suivant : Chercher  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$  tels que

$$A x = \lambda B x, \quad (6.18)$$

avec les notations

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_1^{\Omega^f} & A_1^{\Gamma^s} & A_1^{\Gamma^e} & A_1^\gamma & B_1 & 0 & 0 \\ A_2^{\Omega^f} & A_2^{\Gamma^s} & A_2^{\Gamma^e} & A_2^\gamma & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & -G^0 & G^1 \\ B_s^{\Omega^f} & B_s^{\Gamma^s} & B_s^{\Gamma^e} & B_s^\gamma & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ F_a^{\Omega^f} & F_a^{\Gamma^s} & F_a^{\Gamma^e} & F_a^\gamma & F_b & 0 & K + B^0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} D_1^{\Omega^f} & D_1^{\Gamma^s} & D_1^{\Gamma^e} & D_1^\gamma & 0 & 0 & 0 \\ D_2^{\Omega^f} & D_2^{\Gamma^s} & D_2^{\Gamma^e} & D_2^\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E^{\Omega^f} & E^{\Gamma^s} & E^{\Gamma^e} & E^\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ F_d^{\Omega^f} & F_d^{\Gamma^s} & F_d^{\Gamma^e} & F_d^\gamma & 0 & M & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u^{\Omega^f} \\ u^{\Gamma^s} \\ u^{\Gamma^e} \\ u^\gamma \\ p \\ z \\ s \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Les matrices  $A$  et  $B$  sont réelles, creuses, non-symétriques et, dans la plupart des applications, de grande taille. D'après le « Principe de linéarisation » présenté au chapitre 4, dans l'analyse de stabilité linéaire l'objectif est de trouver des valeurs propres avec partie réelle négative, c'est-à-dire, de détecter des instabilités. Typiquement, presque tous les valeurs propres de (6.18) ont partie réelle positive et seulement un petit nombre traverse l'axe imaginaire. Ainsi, pour détecter un changement de stabilité, il suffit juste de connaître quelques valeurs propres de plus petite partie réelle.

Il s'agit donc de calculer un petit nombre de solutions du problème généralisé (6.18), où les matrices sont creuses et de grande taille. On a intérêt à utiliser des méthodes adaptées au calcul d'approximations d'un petit nombre (par rapport à la taille de la matrice) de valeurs propres de matrices non-symétriques de grande taille, comme par exemple la méthode d'itération en sous-espace ou la méthode d'Arnoldi [4, 86]. Ces méthodes de

calcul de valeurs propres demandent uniquement des opérations du type produit matrice-vecteur, ce qui permet d'exploiter le caractère creux des matrices.

Une difficulté, assez gênante, présente dans le problème (6.18) est liée à la singularité de la matrice  $B$ . Ceci implique que le problème (6.18) a moins de  $n$  valeurs propres [37, 11]. Les valeurs propres qui « manquent », dites valeurs propres « infinies » [37, 91], sont les valeurs propres nulles du problème « inverse »

$$B x = \omega A x, \quad \omega = \frac{1}{\lambda}.$$

Ainsi, chaque valeur nulle de  $\omega$  donne une valeur propre infinie de (6.18). C'est-à-dire, les éléments du noyau de  $B$ . On trouve parmi celles-ci toutes les valeurs propres en pression pure. Même si les valeurs propres infinies ne sont pas des vraies valeurs propres du problème (6.18), en pratique celles-ci peuvent introduire des complications numériques [37, 11, 64, 54]. En travaillant en arithmétique finie la matrice  $B$  est souvent perturbé de sorte qu'elle risque de devenir non-singulière. Des valeurs propres avec un très grand module (et peut-être avec partie réelle négative) peuvent apparaître, mais qui ne sont pas transcendantes pour l'analyse de stabilité.

**Remarque 6.4.1** *La matrice  $B$  dans (6.19) possède un bloc de colonnes nulles et deux blocs de lignes nulles, ce qui correspond à trois types de valeurs propres infinies. Les pressions pures, correspondent au bloc des  $n^f$  colonnes nulles. Les deux autres groupes de valeurs propres infinies  $n^{\Gamma_e} + n^\gamma$  sont liées au traitement discret explicite des conditions aux limites sur  $\Gamma_e$  et  $\gamma$ . Celles-ci ne sont pas contenues implicitement dans l'espace discret  $V_h^3$ .*

Avant d'utiliser une méthode itérative d'approximation de valeurs propres, il y a quelques points à mettre en clair. D'une part, souvent la taille des matrices (6.19) rend inapplicable une méthode directe du type QZ, voir [4, 91]. On vient juste de constater qu'on a un fort intérêt en exploiter la structure creuse des matrices (6.19). D'autre part, les matrices  $A$  et  $B$  sont non-symétriques, ce qui empêche l'utilisation des méthodes de type projection adaptées aux problèmes généralisés, comme la méthode de Lanczos [86]. Dans [80], une extension de la méthode de Lanczos non-symétrique a été proposé pour le cas généralisé. Cependant, cette méthode requiert des opérations avec les matrices  $A^T$  et  $B^T$ , lesquelles en général ne sont pas disponibles. En outre, cette méthode hérite les problèmes classiques de « breakdown », largement connus dans la méthode de Lanczos non-symétrique [86], et qui ne sont pas encore surmontés dans le cas généralisé.

Enfin, les méthodes itératives pour les problèmes non-symétriques, telles que la méthode d'itération en sous-espace ou la méthode d'Arnoldi, ne peuvent pas être directement appliquées au problème généralisé (6.18). Avant d'utiliser ces méthodes on doit d'abord transformer le problème (6.18) dans un problème standard de la forme

$$T x = \theta x. \tag{6.20}$$

Se pose maintenant le problème du choix de  $T$ . Il est connu que ces méthodes itératives donnent rapidement des bonnes approximations de quelques valeurs propres de module

maximal (itération en sous-espace) ou écartés (Arnoldi), qui ne correspondent pas forcément avec celles de plus petite partie réelle, significatives d'un problème de stabilité. Ceci oblige à choisir  $T$  avec quelques propriétés *a priori*:

- le produit matrice-vecteur,  $Ty$ , doit pouvoir être effectué efficacement ;
- il y a une transformation connue entre les solutions de (6.18) et (6.20) ;
- les valeurs propres de (6.18) avec plus petite partie réelle doivent être transformés dans celles de (6.20) qui sont rapidement approchées par la méthode itérative appliquée à (6.20).

**Remarque 6.4.2** *Le choix de  $T$  est directement lié à la méthode itérative qu'on utilisera pour l'approximation des valeurs propres.*

**Remarque 6.4.3** *La complication associée à la singularité de la matrice  $B$  restreint maintenant le choix de la transformation  $T$ . On est obligé d'utiliser des transformations rationnelles, c'est-à-dire, il faut inverser le problème (6.18), ce qui compliquera en profondeur la recherche des valeurs propres de (6.18) avec plus petite partie réelle.*

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit une formulation variationnelle du problème aux valeurs propres (4.16) adaptée à une discrétisation par éléments finis. On a proposé un schéma discret basé sur une discrétisation continue de la vitesse et pression avec des polynômes de Lagrange de degré 1. Ceci se traduit dans la résolution d'un problème aux valeurs propres matriciel généralisé, avec des matrices creuses singulières et de grande taille. On s'intéresse dans le chapitre suivant à l'approximation de quelques valeurs propres de ce problème généralisé.

# Chapitre 7

## Calcul de valeurs propres

Ce chapitre constitue une introduction aux techniques d'approximation des valeurs propres de plus petite partie réelle de problèmes généralisés matriciels. Nous mettons l'accent sur l'approche de Lehoucq et Scott [54], que nous allons adapter et utiliser pour la résolution du problème généralisé aux valeurs propres obtenu dans le chapitre précédent.

Après un court récapitulatif des techniques actuelles en matière d'analyse de stabilité linéaire en mécanique des fluides, nous nous centrons dans la description de la méthode IRAM (Implicit Restarted Arnoldi Method) et de la transformation généralisée de Cayley. Nous présentons ensuite l'algorithme de couplage de ces deux outils, tel que proposé dans [54], pour la détermination des valeurs propres de plus petite partie réelle d'un problème généralisé matriciel avec valeurs propres infinies. Enfin, ce chapitre se termine avec quelques détails de mise en œuvre particuliers, associés à la structure du problème (6.18).

### 7.1 État de l'art

On s'intéresse à la définition d'un algorithme permettant de calculer quelques valeurs propres de plus petite partie réelle du problème généralisé non-symétrique (6.18).

Les calculs de stabilité en mécanique des fluides mènent à des problèmes généralisés aux valeurs propres du type (6.18), la matrice  $A$  étant non-symétrique et la matrice  $B$  singulière dans la plupart des cas, voir [37, 11, 25, 26, 54, 53]. Des nombreux travaux ont été menés pour le calcul des valeurs propres de plus petite partie réelle de ces problèmes, voir [37] et les références citées. L'idée est pratiquement toujours la même : il s'agit de coupler une méthode itérative de calcul de valeurs propres avec une transformation matricielle telle que Cayley ou Tchebyshev polynômiale. La diversité des techniques se situe plutôt dans les différents traitements des valeurs propres infinies dans le cas où la matrice  $B$  est singulière, ce qui c'est le cas pour le problème (6.18).

Dans [25, 26], Ding et Kawahara couplent une transformation classique de type Cayley [36] avec la méthode d'Arnoldi, pour les calculs de stabilité d'un fluide visqueux. Le fluide est traité comme faiblement compressible, ce qui rend la matrice  $B$  non-singulière. L'algorithme est ainsi appliqué à deux cas : l'écoulement dans une cavité entraînée et l'écoulement autour d'un cylindre circulaire. Il est intéressant de signaler que même si,

dans [25, 26], l'écoulement permanent est bidimensionnel, les perturbations considérées sont tridimensionnelles.

Garrat, dans [37], propose des modifications des transformations de Cayley généralisée [7] et Tchebyshev polynômiales [84], pour surmonter les difficultés issues des valeurs propres infinies. Cependant, ces modifications tirent tout sa force de la structure du problème spectral issu d'une discrétisation particulière des équations de Navier-Stokes, ce qui restreint les applications. Garrat utilise ses techniques dans différents cas d'application : convection-diffusion bidimensionnelle, écoulement entre deux cylindres concentriques (expérience de Taylor), réacteur tubulaire. Les expériences numériques de Garrat montrent la supériorité des transformations de Cayley par rapport à la transformation polynômiale de Tchebyshev, la convergence est plus rapide et moins laborieuse, voir aussi [10]. De même, Garrat favorise la méthode d'itération en sous-espace [37, 54].

Traditionnellement, la méthode d'itération en sous-espace était le choix le plus courant [37, 10, 54], car la méthode d'Arnoldi était considérée moins fiable pour les analyses de stabilité. Cependant, si le vecteur initial a quelques composantes dans le sous-espace cherché, la méthode d'Arnoldi fournit rapidement des approximations des valeurs propres d'intérêt [54, 53].

La variante IRAM (Implicit Restarted Arnoldi Method) de la méthode d'Arnoldi, due à Sorensen [90], s'exhibe comme une méthode très performante pour les calculs des valeurs propres de plus grand module. Le travail de Lehoucq et Scott [54] montre que cette méthode peut être utilisée de manière fiable pour les calculs de stabilité. Plus précisément, Lehoucq et Scott, dans [54], couplent les transformations introduites par Garrat [37] et la méthode IRAM, avec des techniques de traitement des valeurs propres infinies [64], en particulier l'application de « shifts » implicites spécifiques dans la méthode IRAM. On explicitera dans la suite ces techniques. La mise en œuvre de cet algorithme fait appel au code ARPACK [56], qui met en application la méthode IRAM. La performance de cet algorithme est mise en évidence à partir d'expériences numériques telles que l'écoulement autour d'un cylindre ou l'écoulement dans un tuyau. On doit remarquer l'augmentation dans la taille des problèmes, traités dans [54], par rapport aux expériences effectuées précédemment par Garrat dans [37]. Dans ce sens, récemment, Lehoucq et Salinger [53] ont proposé un nouveau algorithme couplant la méthode IRAM avec des transformations de Cayley généralisées, où la sélection des paramètres obéit à un compromis entre performance de la transformation et conditionnement des systèmes linéaires issus de la transformation. Ce qui leur permet d'utiliser des méthodes itératives tels que la méthode GMRES. Cette nouvelle démarche a été appliquée à des problèmes de très grande taille, par exemple celui d'un écoulement tridimensionnel autour d'un disque tournant. La taille du problème monte ici jusqu'à  $10^6$  inconnues, le calcul étant effectué sur une machine parallèle avec 1024 processeurs, en utilisant la version parallèle du code ARPACK.

## 7.2 Notre approche

Dans la suite nous nous proposons d'appliquer les idées de Garrat [37] et de Lehoucq et Scott [54] au cas particulier du problème généralisé aux valeurs propres (6.18) issu de l'analyse de stabilité linéaire d'un système couplé en interaction fluide-structure. Plus

précisément, pour le calcul des valeurs propres de (6.18) de plus petite partie réelle, nous utiliserons l'algorithme introduit par Lehoucq et Scott dans [54] qui couple la transformée de Cayley généralisée avec la méthode IRAM.

Ce choix a été motivée d'une part, par la performance prouvée de l'algorithme IRAM, mis en œuvre sur le code ARPACK (en libre accès sur [www.caam.rice.edu/software](http://www.caam.rice.edu/software)), et d'autre part, par les résultats de Lehoucq et Scott [54] qui mettent en évidence tout la force de son algorithme.

Dans les paragraphes suivants nous rappellerons les propriétés de la méthode IRAM ainsi que de la transformée de Cayley généralisée. Puis on détaillera les différentes étapes de l'algorithme de recherche de valeurs propres présenté dans [54], et que nous allons utiliser dans les expériences numériques du chapitre suivant.

## 7.3 La méthode IRAM

Malgré les bonnes propriétés de convergence et un stockage efficace, la méthode QR et ses variantes [35] ne sont pas adaptées pour les problèmes aux valeurs propres de grande taille. Les matrices issues de la discrétisation avec des méthode d'éléments finis sont normalement creuses ou structurées, de sorte qu'un produit matrice-vecteur peut être effectué avec un coût en temps et stockage de l'ordre de  $n$ . Une méthode basée dans des transformations de similarité, comme la méthode QR, détruit rapidement la structure creuse de la matrice. En conséquence, le stockage et le nombre d'opérations devient de l'ordre de  $n^2$ . On a ainsi intérêt d'utiliser des méthodes qui demandent uniquement des produits matrice-vecteur avec la matrice creuse originale.

La méthode de la puissance [86] est probablement l'algorithme plus ancien pour approcher les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice, à partir de produits matrice-vecteur. Cependant, cette méthode a deux inconvénients notoires : d'une part, la convergence peut être extrêmement lente, et d'autre part, il n'y a qu'une valeur et un vecteur propre qui peut être calculé à chaque fois. Des variantes, comme la méthode de la puissance inverse, on été développées pour améliorer la vitesse de convergence. Si on veut calculer plusieurs valeurs et vecteurs propres, des techniques de déflation peuvent être utilisées, voir [86]. Une autre alternative consiste en utiliser une variante par blocs de l'algorithme de la puissance, connue comme méthode d'itération en sous-espace [91, 86].

Une autre classe d'algorithmes, fondés sur la structure de la suite de vecteurs engendrée par la méthode de la puissance, comprend les méthodes de projection en sous-espaces de Krylov. Dans la suite  $A$  dénotera une matrice quelconque réelle ou complexe, de taille  $n$  et non-symétrique, et  $v_1 \in \mathbb{C}^n$  un vecteur unitaire donné. Pour tirer de l'information additionnelle d'une telle suite on considère le sous-espace de Krylov

$$\mathcal{K}_k(A, v_1) = \langle v_1, Av_1, \dots, A^{k-1}v_1 \rangle,$$

et on cherche la meilleure approximation des vecteurs propres dans cet espace. On construit cette approximation par l'intermédiaire d'une condition de Galerkin. Un vecteur  $x \in \mathcal{K}_k(A, v_1)$  est dit vecteur de Ritz associé à la valeur de Ritz  $\theta$ , si la condition de Galerkin suivante est satisfaite :

$$y^H(Ax - \theta x) = 0, \quad \forall y \in \mathcal{K}_k(A, v_1). \quad (7.1)$$

Si  $W$  est une matrice dont les colonnes forment une base orthonormale de  $\mathcal{K}_k(A, v_1)$ , la condition de Galerkin (7.1) devient

$$0 = W^H(AWy - \theta Wy) = By - \theta y,$$

où la matrice  $B = W^HAW$  est appelée matrice de Ritz. Il résulte donc que  $(\theta, x)$  est un couple de Ritz si, et seulement si,  $x = Wy$  et  $(\theta, y)$  est un élément propre de  $B$ .

La méthode d'Arnoldi (consulter [86]) construit une base orthonormale  $V_k$  de  $\mathcal{K}_k(A, v_1)$  dans laquelle la matrice  $B$  devient Hessemberg supérieure, avec sous-diagonale non-négative. On peut ensuite calculer les valeurs de Ritz avec la méthode QR, qui précisément préserve ce type de structure [4].

### 7.3.1 Factorisations d'Arnoldi

**Définition 7.3.1** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , on appelle factorisation d'Arnoldi de  $k < n$  étapes, une expression de la forme

$$AV_k = V_k H_k + r_k e_k^T, \quad (7.2)$$

où  $V_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$  possède  $k$  colonnes orthonormales, où  $r_k$  est orthogonal à  $V_k$

$$V_k^H r_k = 0, \quad (7.3)$$

et où  $H_k \in \mathbb{C}^{k \times k}$  est Hessemberg supérieure avec sous-diagonale non-négative. Si la matrice  $A$  est Hermitienne alors  $H_k$  est réelle, symétrique et tri-diagonale, et la relation (7.2) est appelée factorisation de Lanczos de  $k$  étapes de la matrice  $A$ . Les colonnes de  $V_k$  sont connues sous l'appellation de vecteurs d'Arnoldi ou de vecteurs de Lanczos, respectivement.

Une telle factorisation d'Arnoldi (7.2) permet d'obtenir des approximations des valeurs et vecteurs propres de la matrice  $A$ . En effet, d'après (7.2) et (7.3), les couples de Ritz qui vérifient la condition de Galerkin (7.1) peuvent être obtenus directement à partir des éléments propres de la petite matrice projetée  $H_k = V_k^H AV_k$ . Si  $\theta \in \mathbb{C}$  et  $y \in \mathbb{C}^k$  sont tels que  $H_k y = \theta y$ , alors le vecteur  $x = V_k y \in \mathbb{C}^n$  satisfait

$$\|Ax - \theta x\| = \|(AV_k - V_k H_k)y\| = \|r_k\| |e_k^T y|. \quad (7.4)$$

Le nombre  $\|r_k\| |e_k^T y|$  est appelé estimateur de Ritz pour le couple de Ritz  $(\theta, x)$  approximation d'un élément propre de  $A$ . Il est clair que si  $r_k = 0$  alors les couples de Ritz deviennent éléments propres de  $A$ .

On peut rajouter une étape à la factorisation (7.2) avec le coût d'un produit matrice-vecteur (creux) et de deux produits matrice-vecteur denses, correspondants à  $V_k^H$  et  $V_k$ . L'algorithme 7.1 détaille les  $k$  étapes nécessaires pour obtenir une factorisation du type (7.2).

**début**

$v_1 \in \mathbb{C}^n$  vecteur unitaire donné

$w = Av_1; a_1 = v_1^H w$

$r_1 \leftarrow w - a_1 v_1; V_1 \leftarrow (v_1); H_1 \leftarrow (a_1)$

**pour**  $j = 1, 2, \dots, k-1$  **faire**

$b_j = \|r_j\|; v_{j+1} = r_j/b_j$

$V_{j+1} = (V_j, v_{j+1}); \hat{H}_j \leftarrow \begin{pmatrix} H_j \\ b_j e_j^T \end{pmatrix}$

$w \leftarrow Av_{j+1}$  (produit matrice creuse vecteur)

$h \leftarrow V_{j+1}^H w; r_{j+1} \leftarrow w - V_{j+1} h$  (2 produits par matrices  $V_{j+1}^H$  et  $V_{j+1}$ )

$H_{j+1} \leftarrow (\hat{H}_j, h)$

**fin**

(a)

ALG. 7.1: *Algorithme d'Arnoldi*

En arithmétique exacte, les colonnes de  $V_k$  forment une base orthonormale du sous-espace de Krylov  $\mathcal{K}_k(A, v_1)$  et  $H_k$  est la projection orthogonale de la matrice  $A$  dans cet espace. Par contre, en arithmétique avec précision finie, l'algorithme précédent doit être modifié pour pouvoir assurer, à chaque étape, que les vecteurs de Ritz sont orthogonaux à la précision de la machine. La méthode DGKS, proposée par Daniel, Gragg, Kaufman et Stewart dans [16], est une excellente technique pour construire un vecteur  $r_{j+1}$  qui soit numériquement orthogonal à  $V_{j+1}$ . Il suffit de rajouter, juste après l'étape (a) de l'algorithme 7.1, la ligne suivante de réorthogonalisation (au coût de deux produits par les matrices  $V_{j+1}^H$  et  $V_{j+1}$ ):

$$s = V_{j+1}^H r_{j+1}; \quad r_{j+1} \leftarrow r_{j+1} - V_{j+1} s; \quad h \leftarrow h + s.$$

Malheureusement, on ne peut pas dire, de manière générale, quelles sont les premières valeurs propres qui convergeront avec la méthode d'Arnoldi. On peut juste démontrer que la méthode d'Arnoldi favorise la convergence des valeurs propres situées à la périphérie du spectre, plutôt que celle des valeurs propres placées à l'intérieur du spectre. Ce qui est confirmé par la pratique [4, 83, 86].

**Lemme 7.3.2** *Soient  $AV_j = V_j H_j + r_j e_j^T$ , pour  $1 \leq j \leq k$ , les factorisations résultantes des étapes de la méthode d'Arnoldi, et supposons que  $\dim(\mathcal{K}_k(A, v_1)) = k$ . Alors*

$$r_j = \frac{1}{\|\hat{p}_{k-1}(A)v_1\|} \hat{p}_j(A)v_1,$$

où  $\hat{p}_j(\lambda)$  est le polynôme caractéristique de  $H_j$  pour  $1 \leq j \leq k$ .

D'après le lemme précédent (consulter [90]), l'information obtenue pendant le processus d'Arnoldi est complètement déterminée par le vecteur initial  $v_1$ . Il peut arriver qu'on doit atteindre une grande valeur de  $k$  pour obtenir les valeurs propres souhaitées. Dans ce cas, en plus de l'augmentation dans le stockage et le nombre d'opérations pour le calcul du spectre de  $H_k$  (de l'ordre de  $k^3$  « flops »), la maintenance de l'orthogonalité des vecteurs d'Arnoldi devient très coûteuse. Si les vecteurs d'Arnoldi ne sont pas forcés à être



orthogonaux des difficultés numériques apparaissent. En effet, des composantes le long de ces directions rentrent à nouveau dans la base, en raison des erreurs d'arrondi, ce qui introduit assez rapidement une copie des valeurs propres précédentes dans le spectre de la matrice projetée.

Comme on vient d'expliquer, le mauvais côté de maintenir la orthogonalité des vecteurs d'Arnoldi était le coût de calcul. Cependant, ce coût peut être modéré si on arrive à fixer  $k$  avec une taille raisonnable, en actualisant le vecteur initial  $v_1 = V_k e_1$ , chaque  $k$  étapes de la factorisation d'Arnoldi. Cette approche, connue comme réinitialisation explicite, a été introduite dans [48] et développée dans [15] pour le cas symétrique. Saad dans [82, 84, 86], a développé ces idées pour le cas non-symétrique.

### 7.3.2 Réinitialisation explicite

Dans [84], Saad propose la réinitialisation de la factorisation d'Arnoldi avec un nouveau vecteur qui vient d'être préconditionné de manière à être plus proche d'un sous-espace invariant de  $A$  de dimension  $k$ . Ce préconditionnement prend la forme d'une matrice polynômiale  $\psi(A)$  appliquée au vecteur de départ  $v_1 = V_k e_1$ .

**Théorème 7.3.3** *Soit  $AV_k = V_k H_k + r_k e_k^T$  la  $k$ -ème étape de la factorisation d'Arnoldi, avec  $H_k$  irréductible. Alors  $r_k = 0$  si, et seulement si, il existe  $y \in \mathbb{C}^k$  et  $Q \in \mathbb{C}^{n \times k}$  tels que  $v_1 = Qy$ , avec  $AQ = QR$ ,  $Q^H Q = I_k$  et  $R$  triangulaire supérieure d'ordre  $k$ .*

Le théorème précédent (consulter [90]) constitue la motivation principale de l'approche par réinitialisation. En effet, on peut tenter de trouver un sous-espace invariant en remplaçant itérativement le vecteur initial,  $v_1$ , par une combinaison linéaire des approximations des vecteurs propres associés aux valeurs propres d'intérêt. Le théorème 7.3.3 assure que le résidu  $r_k$  ne peut pas être forcé à zéro si  $v_1$  se décompose sur un générateur d'un sous-espace cyclique de dimension plus grande que  $k$ . Le préconditionnement du vecteur  $v_1$  s'effectue donc en favorisant les composantes le long des directions sollicitées, et en atténuant les composantes le long des directions non souhaitées. Pour expliciter la transformation polynômiale qui permet d'atteindre cet objectif, il suffit de se rappeler qu'en base propre, si  $v_1$  s'écrit

$$v_1 = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j,$$

alors  $\psi(A)v_1$  prend la forme

$$\psi(A)v_1 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi(\lambda_j) x_j.$$

On cherche donc une transformation polynômiale telle que  $\psi(\lambda_j)$  soit de module uniformément petit pour toutes les valeurs propres qui ne nous intéressent pas.

Si on est capable de mettre en œuvre une telle stratégie, l'algorithme d'Arnoldi avec réinitialisation explicite s'écrit alors :

```

début
   $v_1 \in \mathbb{C}^n$  vecteur unitaire donné
  répéter
    calculer une factorisation d'Arnoldi de  $k$  étapes
      
$$AV_k = V_k H_k + r_k e_k^T, \quad \text{avec } V_k e_1 = v_1$$

    calculer le spectre  $\sigma(H_k)$  et les estimateur de Ritz correspondants
    si les valeurs propres sollicitées ont été bien approchées alors
       $\perp$  on arrête
  (a) construire un polynôme  $\psi$  de préconditionnement à partir de  $\sigma(H_k)$ 
       $v_1 \leftarrow \psi(A)v_1; v_1 \leftarrow v_1/\|v_1\|$ 
  jusqu'à convergence
fin

```

ALG. 7.2: Algorithme d'Arnoldi avec réinitialisation explicite

Maintenant, la construction du filtre polynômiale  $\psi$  à l'étape (a) de l'algorithme 7.2, peut être réalisée à partir d'une information *a priori* sur le spectre de  $A$ , ou directement à partir de l'information contenue dans  $\sigma(H_k)$ . Une approche typique consiste à partager le spectre de  $H_k$  en deux sous-ensembles disjoints  $\sigma_w$  et  $\sigma_u$ ,  $\sigma(H_k) = \sigma_w \cup \sigma_u$  avec  $\sigma_w \cap \sigma_u \neq \emptyset$ . Les éléments de  $\sigma_w$  correspondent aux valeurs de Ritz considérées approximations des valeurs propres voulues de  $A$ , et  $C_u$  est un sous-ensemble convexe et ouvert de  $\mathbb{C}$ , contenant  $\sigma_u$ , avec  $\sigma_w \cap C_u = \emptyset$ , correspondant à un région du plan complexe qui devrait couvrir la partie « refusée » du spectre de  $A$ , celle sur laquelle on ne cherche pas d'information, donc sur laquelle on veut que  $v_1$  n'ait pas de composante. Ainsi, le polynôme  $\psi$  est construit en prenant une valeur de petite grandeur dans  $C_u$  et la valeur 1 dans  $\sigma_w$ . Les polynômes de Tchebyshev son appropriés quand  $C_u$  est une ellipse, voir [6]. D'autres approches de préconditionnement de  $v_1$  ont été envisagées dans [82], mais qui reviennent à une autre définition spécifique du polynôme  $\psi$ .

### 7.3.3 Réinitialisation implicite

La réinitialisation implicite constitue une approche permettant de réinitialiser la factorisation d'Arnoldi sans recalculer explicitement toute la nouvelle factorisation, avec une formulation plus efficace et stable numériquement. Cette approche combine la factorisation d'Arnoldi avec le mécanisme de la méthode QR avec translation implicite [91]. La méthode IRAM (Implicit Restarted Arnoldi Method) a été développée par Sorensen [90].

Considérons une factorisation d'Arnoldi de  $m < n$  étapes de la forme

$$AV = VH + r e_m^T, \quad (7.5)$$

de telle manière que  $V \in \mathbb{C}^{n \times m}$  a  $m$  colonnes orthonormales,  $V^H r = 0$ , et  $H \in \mathbb{C}^{m \times m}$  est Hessemberg supérieure avec sous-diagonale non-négative. Une itération analogue à celle de l'algorithme QR avec translation à l'origine explicite (voir [91]) peut être appliquée à

la factorisation (7.5), ceci se fait en quatre étapes. Soit  $\beta \in \mathbb{C}$  une translation donnée. On peut alors factoriser

$$H - \beta I = QR,$$

avec  $R$  triangulaire supérieure et  $Q$  Hessemberg supérieure et orthogonale. Il résulte donc que la factorisation d'Arnoldi peut se transformer en

$$\begin{aligned} (A - \beta I)V - V(H - \beta I) &= re_m^T, \\ (A - \beta I)V - VQR &= re_m^T, \\ (A - \beta I)(VQ) - (VQ)(RQ) &= re_m^T Q, \\ A(VQ) - (VQ)(RQ + \beta I) &= re_m^T Q, \end{aligned} \tag{7.6}$$

de telle manière qu'en notant  $V_+ = VQ$  et  $H_+ = RQ + \beta I = Q^H H Q$ , on obtient

$$AV_+ = V_+ H_+ + re_m^T Q.$$

La matrice  $V_+$  a  $m$  colonnes orthonormales (produit de  $V$  par une matrice orthogonale). De même  $H_+$  est une matrice Hessemberg supérieure (c'est en fait une propriété classique de la factorisation QR, voir [91]). Il résulte donc que l'application de translations ne modifie pas la structure de la factorisation d'Arnoldi. De plus, la première colonne de  $V_+$  correspond à un vecteur dans la direction de  $(A - \beta I)v_1$ . En effet, si on applique le vecteur  $e_1$  à l'identité (7.6)<sub>2</sub>, on tire

$$(A - \beta I)v_1 = V_+ R e_1 = (e_1^T R e_1) V_+ e_1.$$

Il résulte donc que l'application d'une itération QR, avec une translation implicite  $\beta$ , à la factorisation d'Arnoldi (7.5), produit une matrice Hessemberg supérieure et orthogonale  $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$  telle que

$$A \underbrace{(VQ)}_{V_+} = \underbrace{(VQ)}_{V_+} \underbrace{(Q^H H Q)}_{H_+} + re_m^T Q.$$

Le discours précédent constitue la base de la méthode IRAM. Soit  $k$  un entier de taille modérée, représentant le nombre de valeurs propres souhaitées, et soit  $p$  un autre entier positif. L'idée de la méthode IRAM consiste à étendre, d'abord, la factorisation d'Arnoldi de  $k$  étapes

$$AV_k = V_k H_k + r_k e_k^T,$$

à une factorisation de  $k + p$  étapes

$$AV_{k+p} = V_{k+p} H_{k+p} + r_{k+p} e_{k+p}^T. \tag{7.7}$$

Puis on applique implicitement  $p$  translations, de sorte qu'on obtient une nouvelle factorisation

$$AV_{k+p}^+ = V_{k+p}^+ H_{k+p}^+ + r_{k+p} e_{k+p}^T Q,$$

avec  $V_{k+p}^+ = V_{k+p} Q$ ,  $H_{k+p}^+ = Q^H H_{k+p} Q$  et  $Q = Q_1 Q_2 \dots Q_p$ , où  $Q_j$  est la matrice Hessemberg supérieure et orthogonale correspondante à la factorisation de la matrice  $H_{h+p}$  après

translation par  $\beta_j$  pour  $j = 1, \dots, p$ . De manière plus compacte, l'expression précédente peut être écrite sous la forme

$$AV_{k+p}^+ = \underbrace{\begin{pmatrix} V_{k+p}^+ & r_{k+p} \end{pmatrix}}_{n \times (k+p+1)} \underbrace{\begin{pmatrix} H_{k+p}^+ \\ e_{k+p}^T Q \end{pmatrix}}_{(k+p+1) \times (k+p)}. \quad (7.8)$$

D'autre côté, on introduit les partitions

$$V_{k+p}^+ = \left( \underbrace{V_k^+}_k, \underbrace{V_p}_p \right), \quad H_{k+p}^+ = \begin{pmatrix} H_k^+ & M \\ a_k e_1 e_k^T & H_p \end{pmatrix}.$$

Comme les matrices  $Q_j$  sont Hessemberg supérieurs, il résulte que les  $k - 1$  premières composantes de  $e_{k+p}^T Q$  sont nulles, c'est-à-dire,

$$e_{k+p}^T Q = \left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, \underbrace{a_{k+p}, b^T}_p \right).$$

En reportant ces dernières expressions dans (7.8) on obtient

$$A(V_k^+, V_p) = (V_k^+, V_p, r_{k+p}) \begin{pmatrix} H_k^+ & M \\ a_k e_1 e_k^T & H_p \\ a_{k+p} e_k^T & b^T \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Ainsi, en prenant les  $k$  premières colonnes dans (7.9), on peut obtenir une nouvelle factorisation d'Arnoldi de  $k$  étapes :

$$AV_k^+ = V_k^+ H_k^+ + r_k e_k^T, \quad (7.10)$$

avec  $r_k^+ = a_k V_p e_1 + a_{k+p} r_{k+p}$ , ce qui donne  $(V_k^+)^H r_k^+ = 0$ . Il résulte donc que (7.10) est une vraie factorisation d'Arnoldi de  $k$  étapes de la matrice  $A$ . Comme on a déjà constaté avant, chaque application implicite d'une translation  $\beta_j$  replace le vecteur initial,  $v_1$ , par un vecteur dans la direction  $(A - \beta_j I)v_1$ , ainsi après application de  $p$  translations implicites on a

$$v_1 \leftarrow \psi(A)v_1,$$

où  $\psi$  est le polynôme de préconditionnement suivant :

$$\psi(\lambda) = \tau \prod_{j=1}^p (\lambda - \beta_j),$$

avec  $\tau$  un facteur de normalisation. Avec  $p$  étapes de l'algorithme d'Arnoldi on peut étendre la factorisation (7.10) à une factorisation de  $k + p$  étapes comme (7.7). Ceci demande seulement  $p$  produits matrice-vecteur avec la matrice  $A$  et les  $p$  nouveaux vecteurs d'Arnoldi. Par contre, dans la méthode Tchebyshev-Arnoldi de Saad [84] on effectuait toute la factorisation d'Arnoldi. La méthode IRAM présente, en plus, des avantages en stabilité numérique [90] :

- l'orthogonalité des vecteurs d'Arnoldi peut être assuré car  $k$  est de petite taille ;

- il n'y pas de valeurs propres « spurious » ;
- la taille du stockage est fixe.

Il y a plusieurs choix possibles pour les  $p$  « shifts » ou translations, voir [90]. En pratique, la technique de sélection connue comme « Exact Shift Strategy » semble être très performante [90]. Dans cette approche, on calcule  $\sigma(H_{k+p})$  et on divise cet ensemble en deux sous-ensembles disjoints  $\sigma_u$  et  $\sigma_w$ . Les  $k$  éléments de  $\sigma_w$  sont pris comme approximations des valeurs propres d'intérêt, et les  $p$  éléments de  $\sigma_u$  sont pris comme translations  $\beta_j$ . On est finalement prêt à présenter l'algorithme de la méthode IRAM.

**début**

$v_1 \in \mathbb{C}^n$  vecteur unitaire donné  
 construire une factorisation d'Arnoldi de  $k$  étapes

$$AV = VH + re_k^T$$

**répéter**

étendre la factorisation d'Arnoldi à  $k + p$  étapes

$$AV = VH + re_{k+p}^T$$

$q \leftarrow e_{k+p}$

calculer les éléments de  $\sigma(H)$  et les estimateurs de Ritz associés

ordonner les valeurs de Ritz selon le critère souhaité: soient  $\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$  les approximations des valeurs propres qui ne sont pas souhaitées

(a) **si les approximations des valeurs propres souhaitées ont convergé alors**

└ on arrête

**pour  $j = 1, 2, \dots, p$  faire**

(b) ┌ factoriser  $H - \beta_j I = QR$

└  $H \leftarrow Q^H H Q$ ;  $V \leftarrow V Q$

└  $q \leftarrow q^H Q$

$r \leftarrow V_{1:n, k+1} H_{k+1, k} + r q_k$

$V \leftarrow V_{1:n, 1:k}$ ;  $H \leftarrow H_{1:k, 1:k}$

**jusqu'à convergence**

**fin**

ALG. 7.3: Algorithme IRAM avec « Exact Shift Strategy »

Dans [90] Sorensen démontre deux résultats de convergence. Le premier assure la convergence de la méthode IRAM dans le cas symétrique et avec sélection exacte des translations. Le second assure la convergence de la méthode dans le cas général (non-symétrique) avec itération stationnaire, c'est-à-dire, avec des translations fixées le long de l'algorithme. En utilisant la théorie de convergence géométrique de la méthode d'itération en sous-espace non-stationnaire et sa connexion avec une méthode IRAM, Lehoucq dans [52], montre qu'une méthode IRAM peut atteindre une convergence super-linéaire.

Avant de finir cette courte description de la méthode IRAM, il est important d'expli-

ter quel type de test de convergence pourrait être appliqué dans l'étape (a) de l'algorithme 7.3. Ce test doit déterminer quand une factorisation d'Arnoldi donne des approximations acceptables des valeurs propres de la matrice  $A$ . Chatelin et Fraysée, dans [5], suggèrent que le test de convergence doit prendre en compte le « backward error »,

$$\frac{\|Ax - \lambda x\|}{\|A\|},$$

associé à l'approximation  $(\lambda, x)$  comme élément propre de  $A$  (ici  $\|A\|$  dénote la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne). Ceci est motivé par le fait de que le « backward error » est une mesure de la plus petite perturbation  $\delta A$  de la matrice  $A$  telle que  $(A + \delta A)x = \lambda x$  (voir [23]).

D'après la définition (7.4) de l'estimateur de Ritz associé au couple de Ritz  $(\lambda, x)$ , l'idée consiste à considérer que ce couple est une bonne approximation d'un élément propre de  $A$  si la « backward error »

$$\frac{\|r_{k+p}\| |e_{k+p}^T y|}{\|A\|},$$

est petite. Dans le cas hermitien ( $A^H = A$ ), l'estimateur de Ritz fournit une information rigoureuse sur la précision de  $\lambda$  comme approximation d'une valeur propre de  $A$  (voir [73]). Cependant, dans le cas non-hermitien cette information est conditionné par le caractère normale ( $A^H A = A A^H$ ) de la matrice  $A$ . En effet, si la matrice  $A$  est « trop non-normale » la base de vecteurs propres est mal conditionnée et complique son calcul (consulter [89]). Même si en arithmétique exacte on a l'équivalence entre la « backward error » directe et celle d'Arnoldi (fournie par l'estimateur de Ritz), c'est-à-dire,

$$\underbrace{\frac{\|Ax - \lambda x\|}{\|A\|}}_{\text{directe}} = \underbrace{\frac{\|r_{k+p}\| |e_{k+p}^T y|}{\|A\|}}_{\text{Arnoldi}},$$

l'expérience montre qu'en arithmétique avec précision finie la « backward error » d'Arnoldi peut devenir très petite tandis que la « backward error » directe reste constante (consulter [89]). Ce type de difficulté sera constatée dans une expérience numérique du chapitre suivant.

Évidemment, la « backward error » d'Arnoldi est préférée dans les calculs car elle est plus simple à calculer que la « backward error » directe. Ainsi, par exemple, dans le code ARPACK cet estimateur est utilisé dans le test convergence des couples de Ritz, voir [56]. Plus précisément, si  $y \in \mathbb{C}^{k+p}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  sont tels que  $H_{k+p}y = \lambda y$ , alors le couple de Ritz  $(\lambda, x = V_{k+p}y)$ , est considéré une bonne approximation comme élément propre de la matrice  $A$  si

$$\frac{\|r_{k+p}\| |e_{k+p}^T y|}{|\lambda|} \leq \text{tolérance}. \quad (7.11)$$

On remarque que  $|\lambda| \leq \|H_{k+p}\| \leq \|A\|$ .

## 7.4 Transformation de Cayley généralisée

Comme on l'a déjà signalé précédemment, avant d'utiliser un solveur spectral itératif on doit transformer le problème généralisé aux valeurs propres  $Ax = \lambda Bx$ , dans un problème standard de la forme  $Tx = \theta x$ .

On considérera ici la transformation « shift-invert » ou translation-inversion et la transformation de Cayley généralisée. Dans la suite on supposera que le problème généralisé (6.18) possède  $m$  valeurs propres  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ , que l'on suppose rangées dans l'ordre croissante de ses parties réelles, c'est-à-dire,

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) \leq \operatorname{Re}(\lambda_2) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\lambda_m).$$

### 7.4.1 Translation-Inversion

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ , avec  $\alpha \neq \lambda_i$  pour  $i = 1, \dots, m$ . Si on soustrait  $\alpha Bx$  des deux côtés de  $Ax = \lambda Bx$  on obtient

$$(A - \alpha B)x = (\lambda - \alpha)Bx.$$

En multipliant la relation précédente par  $(A - \alpha B)^{-1}$ , on obtient que

$$\underbrace{(A - \alpha B)^{-1} Bx}_{T_{SI}(\alpha)} = \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda - \alpha}\right)}_{\theta} x. \quad (7.12)$$

La matrice

$$T_{SI}(\alpha) = (A - \alpha B)^{-1} B,$$

est appelée transformation « shift-invert » ou matrice de translation-inversion. On dit que  $\alpha \in \mathbb{C}$  est le « shift », pôle ou translation de la transformation. Il est clair que les vecteurs propres de  $(A, B)$  sont les mêmes que celles de  $T_{SI}(\alpha)$ . Les valeurs propres,  $\lambda$  de  $(A, B)$ , et  $\theta$  de  $T_{SI}(\alpha)$ , sont reliées par les expressions suivantes :

$$\lambda = \alpha + \frac{1}{\theta}, \quad \theta = \frac{1}{\lambda - \alpha}. \quad (7.13)$$

Une transformation de translation-inversion peut être combinée avec un solveur spectral itératif pour le calcul des valeurs propres de  $(A, B)$  proches de  $\alpha$ . En effet, un algorithme comme la méthode d'itération en sous-espace, appliqué à  $T_{SI}(\alpha)$ , fournit rapidement des approximations des valeurs propres de plus grand module de  $T_{SI}(\alpha)$ , qui correspondent, d'après (7.13) avec celles de  $(A, B)$  plus proches de  $\alpha$ . Cependant, pour que la transformation de translation-inversion soit capable de calculer des valeurs propres avec partie imaginaire arbitraire (telles que celles de plus petite partie réelle), on doit utiliser des translations complexes.

L'utilisation des translations complexes présente quelques inconvénients pratiques. En effet, on pourrait travailler entièrement en arithmétique complexe, mais dans (6.19) les matrices  $A$  et  $B$  sont réelles, ainsi les valeurs propres complexes de  $(A, B)$  sont des paires conjugués. Il peut y avoir des cas où les valeurs propres soient tellement proches qu'il

soit difficile de distinguer les paires conjugués. Un mauvais choix donnerait des valeurs propres incorrectes [74]. En outre, travailler en arithmétique réelle demanderait un coût supplémentaire associé à des modifications de la structure creuse des matrices où de la double taille du problème. Ce genre d'inconvénients défavorise l'utilisation de translations complexes.

On a donc intérêt à utiliser des transformations rationnelles avec des paramètres réels, telles que la transformation de Cayley.

### 7.4.2 Cayley généralisée

Soient  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\alpha_1 < \alpha_2, \quad \alpha_1 \neq \lambda_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (7.14)$$

Après soustraction de  $\alpha_2 B x$  dans les deux côtés de  $A x = \lambda B x$ , on obtient

$$(A - \alpha_2 B) x = (\lambda - \alpha_2) B x.$$

On multiplie cette expression par  $(A - \alpha_1 B)^{-1}$  et, d'après (7.12), on tire que si  $x$  est vecteur propre de  $A x = \lambda B x$ , alors

$$\underbrace{(A - \alpha_1 B)^{-1}(A - \alpha_2 B)}_{T_C(\alpha_1, \alpha_2)} x = (\lambda - \alpha_2)(A - \alpha_1 B)^{-1} B x = \underbrace{\left(\frac{\lambda - \alpha_2}{\lambda - \alpha_1}\right)}_{\theta = c(\lambda)} x. \quad (7.15)$$

La matrice

$$T_C(\alpha_1, \alpha_2) = (A - \alpha_1 B)^{-1}(A - \alpha_2 B),$$

est dite transformation de Cayley généralisée [37, 38]. Les paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont appelés, respectivement, pôle et zéro de la transformation. Cette transformation est une généralisation de la transformation de Cayley standard où  $\alpha_1 = -\alpha_2$  [36, 6].

À partir de (7.15) on démontre facilement le lemme suivant, permettant de relier les éléments propres de  $(A, B)$  aux éléments propres de  $T_C(\alpha_1, \alpha_2)$ , voir aussi [37].

**Lemme 7.4.1** *Soient  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  vérifiant (7.14). Le couple  $(\lambda, x)$  est un élément propre de  $(A, B)$  si et seulement si  $(\theta, x)$  est un élément propre de  $T_C(\alpha_1, \alpha_2)$ , où*

$$\theta = c(\lambda) = \frac{\lambda - \alpha_2}{\lambda - \alpha_1}, \quad \lambda = c^{-1}(\theta) = \frac{\alpha_1 \theta - \alpha_2}{\theta - 1}. \quad (7.16)$$

*Ici,  $c$  est une bijection de  $\mathbb{C} - \{\alpha_1\}$  dans  $\mathbb{C} - \{1\}$ .*

L'utilité principale de la transformation de Cayley généralisée provient des propriétés de la bijection  $c$  et du rôle des paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dans cette application. En particulier, de quelle manière ces paramètres affectent la façon dans laquelle les valeurs propres de  $(A, B)$  sont transformées dans des valeurs propres de  $T_C(\alpha_1, \alpha_2)$ . Garrat, dans [37], fournit une étude profonde des propriétés de cette application (voir aussi [39]). La base principale de cette étude consiste en montrer que l'application  $c$  transforme les droites verticales du plan complexe,  $\lambda$ , dans des cercles du plan complexe,  $\theta$ , à l'exception de la



droite verticale passant par  $\alpha_1$  qui, après application de  $c$ , devient une droite passant par  $+1$ . Le centre et rayon de chaque cercle dépend directement des paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . De la sorte qu'en faisant un balayage des droites verticales du plan complexe  $\lambda$ , on trouve quatre régions différentes du plan complexe  $\lambda$  qui sont transformées en quatre régions différentes du plan complexe  $\theta$ . La figure 7.1, tirée de [37, 39], montre ces différentes régions du plan complexe.

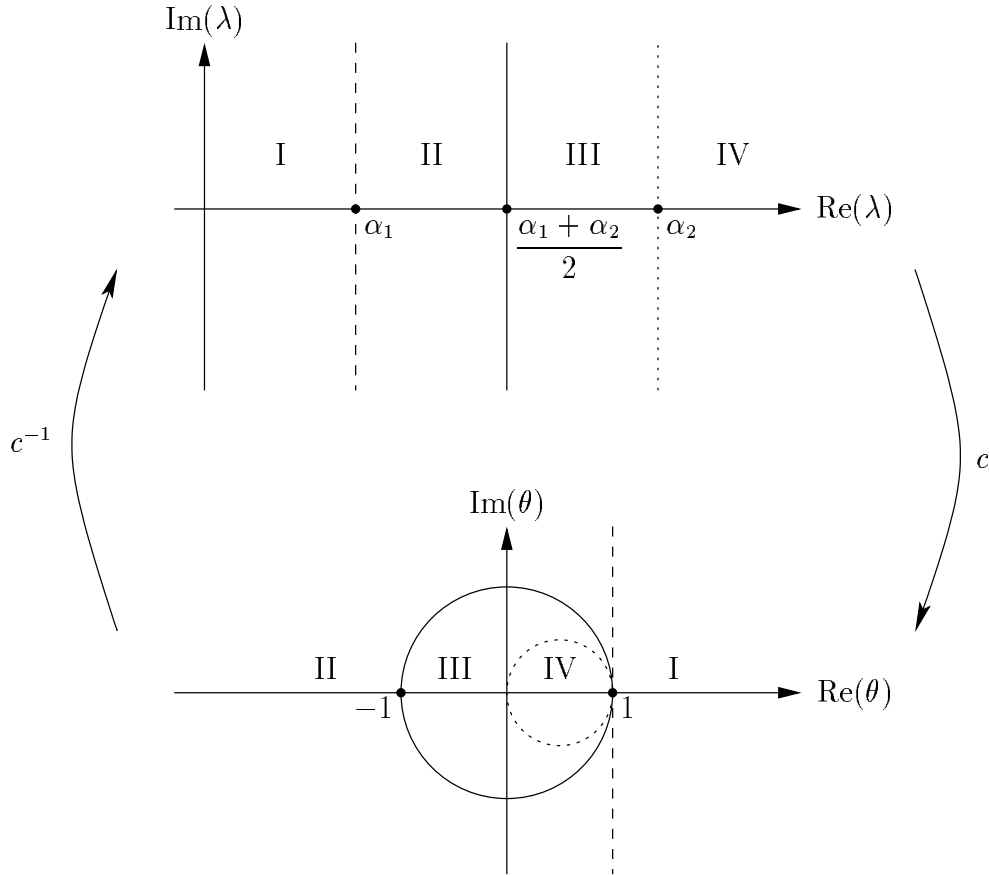


FIG. 7.1 – Régions du plan complexe.

Les propriétés principales de la transformée de Cayley généralisée se recueillissent dans le théorème suivant :

**Théorème 7.4.2 (Garrat, 1991)** Soient  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  avec  $\alpha_1 < \alpha_2$ , et soit  $\theta = c(\lambda)$  avec  $\lambda \in \mathbb{C} - \{\alpha_1\}$ . Alors

$$\operatorname{Re}(\lambda) < \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \iff |\theta| > 1,$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) \geq \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \iff |\theta| \leq 1.$$

Le résultat précédent montre que la partie du spectre de  $(A, B)$  se trouvant dans le demi-plan complexe à gauche de la droite verticale passant par  $(\alpha_1 + \alpha_2)/2$ , correspond

aux valeurs propres « périphériques » de  $T_C(\alpha_1, \alpha_2)$ . Plus précisément, on a le corollaire suivant (voir [37]):

**Corollaire 7.4.3** *Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  les valeurs propres de  $(A, B)$  que l'on suppose ordonnées dans l'ordre croissante de ses parties réelles, et supposons qu'il existe un indice  $1 \leq k < m$  tel que  $\operatorname{Re}(\lambda_k) < \operatorname{Re}(\lambda_{k+1})$ . Soient  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  vérifiant (7.14) avec*

$$\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = \operatorname{Re}(\lambda_{k+1}),$$

alors

$$\begin{aligned} \theta_i &= c(\lambda_i) \notin B(0, 1), & i = 1, \dots, k, \\ \theta_i &= c(\lambda_i) \in B(0, 1), & i = k + 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Le corollaire précédent permet de définir une stratégie de sélection des paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , de manière à obtenir une convergence rapide vers  $\theta_1 = c(\lambda_1)$ . En effet, l'idée consiste en sélectionner  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de telle façon que la première valeur propre non voulue,  $\theta_{k+1}$  (avec  $k \geq 1$ ), soit placée dans le cercle unitaire  $B(0, 1)$  et que la distance de la valeur propre  $\theta_1 = c(\lambda_1)$  au disque  $B(0, 1)$  soit maximisée. Plus précisément, dans les hypothèses du lemme (7.4.3), on maximise  $|\theta_1|$  par rapport à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  soumis aux contraintes

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \operatorname{Re}(\lambda_{k+1}), \quad \alpha_1 < \alpha_2. \quad (7.17)$$

Les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  solution de ce problème, peuvent être facilement obtenues en considérant séparément les cas  $\lambda_1$  réel et  $\lambda_1$  complexe. Dans le cas réel on a le lemme suivant (voir [37]):

**Lemme 7.4.4** *Supposons que  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ , soit  $1 \leq k < m$  tel que  $\operatorname{Re}(\lambda_k) < \operatorname{Re}(\lambda_{k+1})$  et  $\kappa > 1$  un réel fixé. Si on prend*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}(\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) - \lambda_1), \\ \alpha_2 &= \operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}(\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) - \lambda_1), \end{aligned}$$

alors

$$\kappa = |\theta_1| \geq |\theta_2| \geq \dots \geq |\theta_k| > 1 = |\theta_{k+1}| \geq |\theta_i|, \quad i = k + 2, \dots, m.$$

**Démonstration :** On a que

$$\begin{aligned}
 \theta_1 = c(\lambda_1) &= \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1 - \alpha_1} \\
 &= \frac{\lambda_1 - \operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}(\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) - \lambda_1)}{\lambda_1 - \operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}(\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) - \lambda_1)} \\
 &= \frac{(\lambda_1 - \operatorname{Re}(\lambda_{k+1})) \left(1 + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}\right)}{(\lambda_1 - \operatorname{Re}(\lambda_{k+1})) \left(1 - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}\right)} \\
 &= -\frac{2\kappa/(\kappa - 1)}{2/(\kappa - 1)} \\
 &= -\kappa.
 \end{aligned}$$

■

Il est clair, dans ce cas, qu'on peut éloigner  $|\theta_1|$  de  $B(0, 1)$  d'autant qu'on veut en augmentant  $\kappa$ . Par contre, le cas où  $\lambda_1$  est complexe est moins satisfaisant, on a juste le résultat suivant (voir [37, 38]) :

**Lemme 7.4.5** *Supposons que  $\lambda_1 = x_1 + iy_1$  avec  $x_1 < \operatorname{Re}(\lambda_{k+1})$ . Si*

$$\alpha_1 = \operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) - \sqrt{(\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) - x_1)^2 + y_1^2},$$

$$\alpha_2 = \operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) + \sqrt{(\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) - x_1)^2 + y_1^2},$$

alors le maximum de  $|\theta_1|$ , sous les contraintes (7.17), est atteint. De plus,

$$|\theta_1| = |\theta_2| = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1} - \xi} > 1, \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) - x_1}{|y_1|},$$

et  $|\theta_i| \leq 1$  pour  $i = k + 1, \dots, m$ .

**Démonstration :** On pose  $\alpha_1 = x_{k+1} - \tau$ ,  $\alpha_2 = x_{k+1} + \tau$  avec  $\tau > 0$  et  $x_{k+1} = \operatorname{Re}(\lambda_{k+1})$ . Le problème de maximiser  $|\theta_1|^2$  par rapport à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , soumis aux contraintes (7.17), est équivalent au problème de maximiser  $f(\tau) = |\theta_1|^2$  par rapport à  $\tau$  dans l'intervalle  $(0, +\infty)$ . On pose donc

$$\begin{aligned}
 |\theta_1|^2 = |c(\lambda_1)|^2 &= \frac{|\lambda_1 - \alpha_2|}{|\lambda_1 - \alpha_1|} \\
 &= \frac{|\lambda_1|^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_2 x_1}{|\lambda_1|^2 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1 x_1} \\
 &= \frac{(x_1 - \alpha_2)^2 + y_1^2}{(x_1 - \alpha_1)^2 + y_1^2} \\
 &= \underbrace{\frac{(x_1 - x_{k+1} - \tau)^2 + y_1^2}{(x_1 - x_{k+1} + \tau)^2 + y_1^2}}_{f(\tau)}.
 \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\tau^* \in (0, +\infty)$  est un maximum local de  $f$  on a

$$\frac{df}{d\tau}(\tau^*) = 0,$$

ce qui implique que

$$(x_{k+1} - x_1) [(x_{k+1} - x_1)^2 + y_1^2 - \tau^2] = 0.$$

Ainsi comme  $x_{k+1} > x_1$  et  $\tau$  doit être positif, on tire, de l'égalité précédente, que

$$\tau^* = \sqrt{(x_{k+1} - x_1)^2 + y_1^2}.$$

Nous allons vérifier finalement que  $\tau^*$  est un maximum global de  $f$  dans  $(0, +\infty)$ .

Posons  $y = x_{k+1} - x_1$  et  $a = y^2 + y_1^2$ . Avec es notations on a  $\tau^* = \sqrt{y^2 + y_1^2} = \sqrt{a}$ , de sorte que

$$\begin{aligned} f(\tau^*) &= \frac{(\tau^* + y)^2 + y_1^2}{(\tau^* - y)^2 + y_1^2} = \frac{\tau^{*2} + y^2 + y_1^2 + 2y\tau^*}{\tau^{*2} + y^2 + y_1^2 - 2y\tau^*} = \frac{2(y^2 + y_1^2) + 2y\tau^*}{2(y^2 + y_1^2) - 2y\tau^*} \\ &= \frac{a + y\sqrt{a}}{a - y\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} + y}{\sqrt{a} - y} = \frac{a - y^2}{(\sqrt{a} - y)^2} = \frac{y_1^2}{(\sqrt{y^2 + y_1^2} - y)^2} > 1. \end{aligned}$$

En outre, comme  $f(0) = 1$  et  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} f(\tau) = 1$  on en déduit que  $\tau^*$  est un maximum global de  $f$  dans  $(0, +\infty)$ .

Il résulte donc que le maximum de  $|\theta_1|$  est atteint pour  $\alpha_1 = x_{k+1} - \tau^*$  et  $\alpha_2 = x_{k+1} - \tau^*$ . De plus, avec ce choix des paramètres, on a

$$1 < |\theta_1| = \frac{|y_1|}{(\sqrt{y^2 + y_1^2} - y)} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y}{y_1}\right)^2 + 1} - \underbrace{\frac{y}{|y_1|}}_{\xi}} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1} - \xi}.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. ■

D'après le lemme précédent, on peut constater que le caractère périphérique de  $\theta_1$  dépend directement du taux

$$\xi = \frac{\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) - \operatorname{Re}(\lambda_1)}{\operatorname{Im}(\lambda_1)}.$$

Le calcul de  $\theta_1$  peut devenir délicat dans des situations où :

1.  $|\operatorname{Re}(\lambda_{k+1}) - \operatorname{Re}(\lambda_1)|$  est très petit ;
2.  $|\operatorname{Im}(\lambda_1)|$  est très grand.

Dans chacun de ces cas, la valeur propre cherchée  $\theta_1$  est très proche du cercle unitaire, ce qui compliquera son calcul. En effet, la principale différence par rapport au cas où  $\lambda_1$  est réelle vient du fait que le lemme (7.4.5) ne garanti pas que  $\theta_1$  sera une valeur propre périphérique de  $T_C$ . On explicitera dans la suite une stratégie pour surmonter cette difficulté.

## 7.5 Algorithme de résolution : IRAM + Cayley généralisée

Dans cette section nous détaillons l'algorithme que nous avons utilisé pour la recherche des valeurs propres de plus petite partie réelle du problème spectral généralisé (6.18). Cet algorithme, proposé par Lehoucq et Scott dans [54], combine les transformations « shift-invert » et la transformation de Cayley généralisée avec la méthode IRAM. La transformation « shift-invert » est utilisée pour initialiser les approximations du spectre et pour purifier les vecteurs propres.

Dans la suite  $k$  dénote le nombre de valeurs propres demandées ( $k \ll n$ ) et  $k + p$  ( $p > 0$ ) le nombre de vecteurs d'Arnoldi calculés (la dimension de l'espace de Krylov). De même on dénote indistinctement avec  $\theta$  et  $x$  les approximations des valeurs et vecteurs propres de  $T_{SI}$  et  $T_C$ , en outre,  $\lambda$  dénotera l'approximation des valeurs propres associée au problème original.

L'algorithme 7.4 présente les grandes lignes de la méthode de recherche des valeurs propres introduite dans [54]. Dans la suite on explicitera en détail chacune des étapes relevantes.

**début**

```

(c)   $v_1 \in \mathbb{R}^n$  vecteur unitaire aléatoire
      purifier:  $v_1 \leftarrow T_{SI}(0)v_1$ 
      calculer  $\theta_1, \dots, \theta_{k+p}$  à partir de  $k + p$  étapes de la factorisation d'Arnoldi sur  $T_{SI}$ 
       $\lambda_i \leftarrow \frac{1}{\theta_i}, i = 1, \dots, k + p$ 
      ordonner les  $\lambda_i$  en ordre croissante de ses parties réelles
       $v_1 \in \mathbb{R}^n$  vecteur unitaire aléatoire
(b)   $v_1 \leftarrow T_{SI}(0)v_1$ 
      répéter
      | calculer  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  à partir de  $\lambda_1, \lambda_{k+1}$  et des lemmes 7.4.4 et 7.4.5
      | calculer  $k + p$  étapes de la factorisation d'Arnoldi sur  $T_C$ 
      | réinitialiser  $v_1$  avec l'application de  $p$  translations implicites
      | calculer  $\theta_1, \dots, \theta_{k+p}$  à partir de l'extension de la factorisation à  $k + p$  étapes
      |  $\lambda_i \leftarrow c(\theta_i), i = 1, \dots, k + p$ 
      | ordonner les  $\lambda_i$  en ordre croissante de ses parties réelles
(a)  test de convergence sur les  $\theta_i$  de module maximal
      | si convergence de  $k$  valeurs alors
      |    $\perp$  on arrête la boucle
      jusqu'à convergence
      calculer les vecteur propres  $x_i$  correspondants aux approximations convergées
      obtenir les vecteurs propres de  $(A, B)$  en purifiant:  $x_i \leftarrow T_{SI}(0)x_i$ 
fin
```

ALG. 7.4: Algorithme IRAM avec transformation de Cayley généralisée

On utilise la transformation « shift-invert » avec un pôle égal à zéro pour calculer une

première approximation du spectre de  $(A, B)$ . Ceci permet de démarrer les itérations de Cayley. Un pôle égal à zéro est un choix approprié car les valeurs propres qu'on cherche sont près de l'axe imaginaire.

On remarque que le test d'arrêt de la étape (a) de l'algorithme 7.4 n'est pas appliqué juste après les étapes d'initialisation. L'algorithme doit effectuer une itération de Cayley avant le premier test de convergence, car les valeurs propres proches de l'origine ne sont pas forcément celles de plus petite partie réelle.

### 7.5.1 Purification avec « shift-invert »

Comme on l'a déjà mis en évidence précédemment, le fait de que la matrice  $B$  est singulière implique que  $0$  est une valeur propre de  $T_{SI}(0)$ , ce qui correspond à une valeur propre infinie du problème original  $(A, B)$ . Posons

$$\mathcal{N} = \text{noyau}(T_{SI}(0)), \quad \mathcal{R} = \text{image}(T_{SI}(0)).$$

D'après (6.19), on a vu que  $\dim(\mathcal{N}) \geq n^f + n^{\Gamma_e} + n^\gamma$  ce qui implique que  $0$  est une valeur propre de multiplicité géométrique (et donc algébrique) supérieur ou égal à  $n^f + n^{\Gamma_e} + n^\gamma$ . En arithmétique exacte, si la méthode d'Arnoldi est appliquée avec un vecteur initial  $v_1 \in \mathcal{R}$  (ce qui est garanti par les étapes (b) et (c) dans l'algorithme 7.4) alors on ne peut qu'obtenir de valeurs propres non nulles de  $T_{SI}(0)$ . Cependant, en arithmétique avec précision finie, les erreurs d'arrondi introduisent des composantes des vecteurs d'Arnoldi dans  $\mathcal{N}$  qui peuvent corrompre les approximations des valeurs propres.

Dans [64], Meerbergen et Spence s'intéressent au contrôle de ces directions « spurious » dans le cas d'un problème généralisé aux valeurs propres avec une structure bloc du type

$$\begin{bmatrix} K & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix},$$

similaire à celui traité dans [11], et issu de l'analyse de stabilité en mécanique des fluides incompressible, avec une discrétisation « stable » (au sens « inf-sup ») des équations de Navier-Stokes. La matrice  $M$  est la matrice symétrique et masse, par contre la matrice de rigidité  $K$  est non-symétrique conséquence de la linéarisation du terme convectif. Meerbergen et Spence proposent une approche qui combine une méthode IRAM B-orthogonale (en remplaçant le produit scalaire standard,  $x^H y$ , par le demi-produit interne  $x^H B y$ ) avec la purification du vecteur initial et des vecteurs propres par application de  $T_{SI}(0)$ , cette dernière purification permet d'éliminer les composantes de ces vecteurs dans  $\mathcal{N}$ .

L'utilisation d'une méthode B-orthogonale n'est pas possible dans (6.18) car ici la matrice  $B$  est non-symétrique. Les expériences numériques de [54] montrent que la méthode IRAM B-orthogonale améliore les résultats par rapport à la méthode classique. Néanmoins, la combinaison d'une méthode IRAM « classique » avec purification donne des résultats très satisfaisants comme a été observé dans [54] et nous allons constater dans les expériences numériques du chapitre suivant.

### 7.5.2 Valeurs propres « spurious »

D'après le lemme 7.4.1 la transformation de Cayley envoie les valeurs propres infinies de  $(A, B)$  sur le point  $+1$  du plan complexe  $\theta$ . Même si ces valeurs propres n'apportent aucune information pour le calcul de stabilité, dans la pratique elles peuvent compliquer le calcul des valeurs propres d'intérêt. En effet, d'après (7.16) et comme  $\alpha_1 < \alpha_2$ , si  $\theta = 1 + \delta$  avec  $\delta > 0$  petit alors

$$\lambda = c^{-1}(\theta) = \frac{1}{\delta}(\alpha_1(1 + \delta) - \alpha_2),$$

devient grand en module avec partie réelle négative. Ainsi, cette valeur pourra être prise en compte dans la nouvelle définition des paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Il est primordial d'actualiser les paramètres de Cayley sans prendre en compte ces valeurs propres « spurious ». Ainsi dans chaque itération de Cayley on doit exclure tout les  $\theta_i$  réels proches de  $+1$ . L'expérience montre (voir [54]) que si on ne prend pas en compte cette précaution la méthode IRAM ne donne pas les valeurs propres souhaitées.

### 7.5.3 Valeurs propres « perdues »

Une fois que les valeurs propres dominantes de  $T_C(\alpha_1, \alpha_2)$  ont convergé, on doit prendre quelques mesures avant de choisir l'une de ces approximations comme celle de la valeur propre de plus petite partie réelle. Ce type d'incertitude est liée au fait de que les valeurs propres de plus petite partie réelle de  $(A, B)$  ne correspondent pas forcément à celles de plus grand module de  $T_C(\alpha_1, \alpha_2)$ . En effet, supposons d'une part que la valeur propre de plus petite réelle,  $\lambda_1$ , de  $(A, B)$  est complexe avec une grande partie imaginaire. Admettons, d'autre part, que  $\lambda_3$  est réelle avec  $\lambda_3$  très proche de  $\text{Re}(\lambda_1)$ . D'après le choix des paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  on a

$$|\theta_3|^2 = \frac{(\lambda_3 - \alpha_2)^2}{(\lambda_3 - \alpha_1)^2} = \frac{(\tau + \text{Re}(\lambda_{k+1}) - \lambda_3)^2}{[\tau - (\text{Re}(\lambda_{k+1}) - \lambda_3)]^2},$$

$$|\theta_1|^2 = \frac{|\lambda_1 - \alpha_2|^2}{|\lambda_1 - \alpha_2|^2} = \frac{(\tau + \text{Re}(\lambda_{k+1}) - \text{Re}(\lambda_1))^2 + \text{Im}(\lambda_1)^2}{[\tau - (\text{Re}(\lambda_{k+1}) - \text{Re}(\lambda_1))]^2 + \text{Im}(\lambda_1)^2},$$

où  $\tau > 0$ . Il résulte donc que  $|\theta_1| < |\theta_3|$  avec  $\theta_1$  proche de  $+1$ . Ainsi, la méthode d'Arnoldi fournira rapidement une très bonne approximation de  $\theta_3$  qui, sans mesure préalable, pourra être sélectionnée comme la valeur propre de plus petite partie réelle.

On remarque aussi que cet inconvénient est une conséquence directe de la singularité de la matrice  $B$ , qui impose l'utilisation de transformations rationnelles. Cette difficulté, très connue [37, 54, 53], est particulière du cas non-symétrique, car dans le cas symétrique (consulter [42]), on peut déterminer la fiabilité de l'algorithme au coût d'une factorisation creuse.

Lehoucq et Scott proposent une manière assez efficace de détecter ce type de problème. Il s'agit d'introduire un test additionnel, après l'étape (a) de l'algorithme 7.4, sur les valeurs propres calculées. Une fois que les valeurs propres (de plus grand module) de  $T_C(\alpha_1, \alpha_2)$  sont des approximations acceptables, on ordonne les valeurs propres obtenues en ordre décroissante des modules. Puis on calcule les approximations des valeurs propres correspondantes à  $(A, B)$  et on les ordonne en ordre décroissante de ses parties réelles. S'il

apparaît des valeurs propres non fiables (dans le paquet des  $p$ ) dans les  $k$  valeurs propres de plus petite partie réelle de  $(A, B)$ , alors on augmente  $k$ . Les expériences numériques effectuées dans [54] montrent l'efficacité de cette stratégie.

#### 7.5.4 Choix des « shifts » implicites

À chaque itération de Cayley on peut améliorer le vecteur initial  $v_1$  avec l'application de  $p$  « shifts » ou translations implicites. Comme on a déjà mis en évidence précédemment, l'application des « shifts » permet d'atténuer certaines composantes (non voulues) du vecteur initial et d'amplifier celles sur le sous-espace propre d'intérêt. Une des techniques usuelles consiste à définir les « shifts » à partir de l'information fournie par les approximations des valeurs propres, c'est la stratégie dite « Exact Shift Strategie » traditionnelle dans IRAM.

On a remarqué que la difficulté principale dans la résolution de notre problème vient des valeurs propres infinies. On pourrait tenter de purifier  $v_1$  avec l'application de translations implicites de  $+1$ . Malheureusement, les expériences de Lehoucq et Scott [54] montrent que ce technique peut donner des mauvais résultats. Lehoucq et Spence, dans [55], ont mis en évidence que l'application de « shifts » associés à des très bonnes approximations des valeur propres peut introduire des instabilités dues aux erreurs d'arrondi. Lehoucq et Scott dans [54] ont constaté que l'application de  $p$  « shifts » de 0, c'est-à-dire, prendre  $\beta_j = 0$  pour  $j = 1, \dots, p$  dans l'étape (b) de l'algorithme 7.3, donne constamment des très bons résultats. L'application de ces « shifts » revient à effectuer  $p$  itérations en sous-espace de  $T_C(\alpha_1, \alpha_2)$  sur  $V_k$ . Avec ce choix, les effets des valeurs propres « spurious » sont fortement atténués.

#### 7.5.5 Choix de $v_1$ à chaque itération de Cayley

Dans la première itération de Cayley le vecteur  $v_1$ , nécessaire pour initialiser la factorisation d'Arnoldi de  $T_C(\alpha_1, \alpha_2)$ , est sélectionné de manière aléatoire. Comme on a déjà constaté précédemment, l'information contenue dans ce vecteur (sur l'espace invariant cherché) est cruciale pour la performance de l'algorithme d'Arnoldi. Dans les itérations suivantes on peut améliorer le choix de  $v_1$  en prenant compte de l'information fournie par l'itération précédente. Plus précisément, on peut prendre  $v_1$  dans le sous-espace invariant associé aux valeurs propres déjà convergées. Ainsi, comme dans [85], après chaque itération de Cayley on prend

$$v_1 \leftarrow \sum_{i=1}^l w_i, \quad v_1 \leftarrow \frac{v_1}{\|v_1\|},$$

où les  $w_i$ , pour  $i = 1, \dots, l$ , forment une base de Schur du sous-espace invariant associé aux valeurs propres convergées dans l'itération précédente. Cette étape est réalisée par la routine `dnepd` du code ARPACK.



### 7.5.6 Calcul du produit matrice-vecteur

Chaque étape de purification ou de la factorisation d'Arnoldi, dans l'algorithme 7.4, nécessite la donnée d'un produit matrice-vecteur du type  $y = T_{SI}(\alpha_1)x$  ou  $y = T_C(\alpha_1, \alpha_2)x$  selon la transformation en cours. À ce point, il est important d'expliciter la relation suivante

$$\begin{aligned} T_C(\alpha_1, \alpha_2) &= (A - \alpha_1 B)^{-1}(A - \alpha_2 B) \\ &= (A - \alpha_1 B)^{-1}[(A - \alpha_1 B) + (\alpha_1 - \alpha_2)B] \\ &= I + (\alpha_1 - \alpha_2)(A - \alpha_1 B)^{-1}B \\ &= I + (\alpha_1 - \alpha_2)T_{SI}(\alpha_1). \end{aligned}$$

Il résulte donc, qu'à chaque étape d'une factorisation d'Arnoldi ou d'une purification dans l'algorithme 7.4, on a besoin d'un produit matrice-vecteur  $y = T_{SI}(\alpha_1)x$ . Ceci revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$(A - \alpha_1 B)y = Bx. \quad (7.18)$$

Dans la suite nous allons interpréter et définir une méthode pour la résolution de ce système fondée sur la théorie du chapitre 5.

On pose

$$x = \begin{bmatrix} f^{\Omega^f} \\ f^{\Gamma_s} \\ f^{\Gamma_e} \\ f^\gamma \\ q \\ h \\ g \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad y = \begin{bmatrix} u^{\Omega^f} \\ u^{\Gamma_s} \\ u^{\Gamma_e} \\ u^\gamma \\ p \\ z \\ s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

D'après la définition (6.19) des matrices A et B, les cinq premiers blocs d'équations dans (7.18) donnent

$$\begin{bmatrix} A_1^{\Omega^f} - \alpha_1 D_1^{\Omega^f} & A_1^{\Gamma_s} - \alpha_1 D_1^{\Gamma_s} & A_1^{\Gamma_e} - \alpha_1 D_1^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} & A_1^\gamma - \alpha_1 D_1^\gamma & B_1 & 0 & 0 \\ A_2^{\Omega^f} - \alpha_1 D_2^{\Omega^f} & A_2^{\Gamma_s} - \alpha_1 D_2^{\Gamma_s} & A_2^{\Gamma_e} - \alpha_1 D_2^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} & A_2^\gamma - \alpha_1 D_2^\gamma & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & -G^0 & G^1 \\ B_s^{\Omega^f} - \alpha_1 E^{\Omega^f} & B_s^{\Gamma_s} - \alpha_1 E^{\Gamma_s} & B_s^{\Gamma_e} - \alpha_1 E^{\Gamma_e} & B_s^\gamma - \alpha_1 E^\gamma & C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{\Omega^f} \\ u^{\Gamma_s} \\ u^{\Gamma_e} \\ u^\gamma \\ p \\ z \\ s \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} D_1^{\Omega^f} f^{\Omega^f} + D_1^{\Gamma_s} f^{\Gamma_s} + D_1^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} + D_1^\gamma f^\gamma \\ D_2^{\Omega^f} f^{\Omega^f} + D_2^{\Gamma_s} f^{\Gamma_s} + D_2^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} + D_2^\gamma f^\gamma \\ 0 \\ 0 \\ E^{\Omega^f} f^{\Omega^f} + E^{\Gamma_s} f^{\Gamma_s} + E^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} + E^\gamma f^\gamma \end{bmatrix}.$$

On voit bien que ce système correspond à la discrétisation, avec le schéma stabilisé (6.10), du problème continu suivant :

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \alpha_1 u &= f, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma_e, \\ \sigma(u, p)n &= 0, & \text{sur } \Gamma_s, \\ u &= \Phi z - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \end{aligned}$$

Du sixième bloc d'équations de (7.18),

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & -\alpha_1 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{\Omega^f} \\ u^{\Gamma_s} \\ u^{\Gamma_e} \\ u^\gamma \\ p \\ z \\ s \end{bmatrix} = [g],$$

on déduit que  $z = -g - \alpha_1 s$ , il résulte donc que sur  $\gamma$  on a

$$u = -\Phi g - \alpha_1 \Phi s - \nabla u_0 \Phi s.$$

Finalement, le dernier bloc d'équations dans (7.18),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_a^{\Omega^f} - \alpha_1 \mathbf{F}_d^{\Omega^f} & \mathbf{F}_a^{\Gamma_s} - \alpha_1 \mathbf{F}_d^{\Gamma_s} & \mathbf{F}_a^{\Gamma_e} - \alpha_1 \mathbf{F}_d^{\Gamma_e} & \mathbf{F}_a^\gamma - \alpha_1 \mathbf{F}_d^\gamma & \mathbf{F}_b & -\alpha_1 \mathbf{M} & \mathbf{K} + \mathbf{B}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{\Omega^f} \\ u^{\Gamma_s} \\ u^{\Gamma_e} \\ u^\gamma \\ p \\ z \\ s \end{bmatrix} = \left[ \mathbf{F}_d^{\Omega^f} f^{\Omega^f} + \mathbf{F}_d^{\Gamma_s} f^{\Gamma_s} + \mathbf{F}_d^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} + \mathbf{F}_d^\gamma f^\gamma + \mathbf{M} h \right],$$

revient à résoudre

$$\int_\gamma \Phi^T \sigma(u, p)n \, da + (\mathbf{K} + \mathbf{B}^0)s - \alpha_1 \mathbf{M} z = \mathbf{M} h.$$

D'autre part, on avait  $z = -g - \alpha_1 s$ , et donc la dernière équation devient

$$\int_\gamma \Phi^T \sigma(u, p)n \, da + (\mathbf{K} + \mathbf{B}^0 + \alpha_1^2 \mathbf{M})s = \mathbf{M}(h - \alpha_1 g).$$

Par conséquence, la résolution du système (7.18) correspond à la discrétisation du problème continu suivant : Étant donnés  $(f, h, g) \in L^2(\Omega)^3 \times \mathbb{R}^{n^s} \times \mathbb{R}^{n^s}$  chercher  $(u, p, s) \in H^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^{n^s}$  tel que

$$\begin{aligned}
 \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \alpha_1 u &= f, & \text{dans } \Omega^f, \\
 \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\
 u &= 0, & \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma(u, p)n &= 0, & \text{sur } \Gamma_s, \\
 u &= -\Phi g - \alpha_1 \Phi s - \nabla u_0 \Phi s, & \text{sur } \gamma, \\
 \int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u, p)n \, da + (K + B^0 + \alpha_1^2 M)s &= M(h - \alpha_1 g).
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

On obtient  $z$  à partir de  $s$ , par  $z = -g - \alpha_1 s$ .

Le problème (7.19) est similaire au problème (5.11) utilisé dans le chapitre 5 pour la caractérisation des valeurs propres du problème continu. Ainsi, la démarche utilisée pour la résolution du problème (5.11) nous permettra de définir une stratégie de résolution modulaire du problème discret (7.18).

Sous forme matricielle, le problème (7.19) s'écrit après discrétisation

$$\begin{bmatrix}
 A_1^{\Omega^f} - \alpha_1 D_1^{\Omega^f} & A_1^{\Gamma_s} - \alpha_1 D_1^{\Gamma_s} & A_1^{\Gamma_e} - \alpha_1 D_1^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} & A_1^{\gamma} - \alpha_1 D_1^{\gamma} & B_1 & 0 \\
 A_2^{\Omega^f} - \alpha_1 D_2^{\Omega^f} & A_2^{\Gamma_s} - \alpha_1 D_2^{\Gamma_s} & A_2^{\Gamma_e} - \alpha_1 D_2^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} & A_2^{\gamma} - \alpha_1 D_2^{\gamma} & B_2 & 0 \\
 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & I & 0 & \alpha_1 G^0 + G^1 \\
 B_s^{\Omega^f} - \alpha_1 E^{\Omega^f} & B_s^{\Gamma_s} - \alpha_1 E^{\Gamma_s} & B_s^{\Gamma_e} - \alpha_1 E^{\Gamma_e} & B_s^{\gamma} - \alpha_1 E^{\gamma} & C & 0 \\
 F_a^{\Omega^f} - \alpha_1 F_d^{\Omega^f} & F_a^{\Gamma_s} - \alpha_1 F_d^{\Gamma_s} & F_a^{\Gamma_e} - \alpha_1 F_d^{\Gamma_e} & F_a^{\gamma} - \alpha_1 F_d^{\gamma} & F_b & K + B^0 + \alpha_1^2 M
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 u^{\Omega^f} \\
 u^{\Gamma_s} \\
 u^{\Gamma_e} \\
 u^{\gamma} \\
 p \\
 s
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 D_1^{\Omega^f} f^{\Omega^f} + D_1^{\Gamma_s} f^{\Gamma_s} + D_1^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} + D_1^{\gamma} f^{\gamma} \\
 D_2^{\Omega^f} f^{\Omega^f} + D_2^{\Gamma_s} f^{\Gamma_s} + D_2^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} + D_2^{\gamma} f^{\gamma} \\
 0 \\
 -G^0 g \\
 E^{\Omega^f} f^{\Omega^f} + E^{\Gamma_s} f^{\Gamma_s} + E^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} + E^{\gamma} f^{\gamma} \\
 F_d^{\Omega^f} f^{\Omega^f} + F_d^{\Gamma_s} f^{\Gamma_s} + F_d^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} + F_d^{\gamma} f^{\gamma} + M(h - \alpha_1 g)
 \end{bmatrix}.$$

On décompose la solution de ce problème de manière analogue à celle effectuée dans le chapitre 5, soit

$$(u, p) = (u_1, p_1) + (u_2, p_2),$$

avec  $(u_1, p_1)$  solution de

$$\begin{aligned}
 \nabla u_0 u_1 + \nabla u_1 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_1) + \frac{1}{\rho} \nabla p_1 - \alpha_1 u_1 &= f, & \text{dans } \Omega^f, \\
 \operatorname{div} u_1 &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\
 u_1 &= 0, & \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma(u_1, p_1)n &= 0, & \text{sur } \Gamma_s, \\
 u_1 &= -\Phi g, & \text{sur } \gamma,
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

ou sous forme matricielle après discrétisation

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A_1^{\Omega^f} - \alpha_1 D_1^{\Omega^f} & A_1^{\Gamma_s} - \alpha_1 D_1^{\Gamma_s} & A_1^{\Gamma_e} - \alpha_1 D_1^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} & A_1^\gamma - \alpha_1 D_1^\gamma & B_1 \\ A_2^{\Omega^f} - \alpha_1 D_2^{\Omega^f} & A_2^{\Gamma_s} - \alpha_1 D_2^{\Gamma_s} & A_2^{\Gamma_e} - \alpha_1 D_2^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} & A_2^\gamma - \alpha_1 D_2^\gamma & B_2 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ B_s^{\Omega^f} - \alpha_1 E^{\Omega^f} & B_s^{\Gamma_s} - \alpha_1 E^{\Gamma_s} & B_s^{\Gamma_e} - \alpha_1 E^{\Gamma_e} & B_s^\gamma - \alpha_1 E^\gamma & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{\Omega^f} \\ u_1^{\Gamma_s} \\ u_1^{\Gamma_e} \\ u_1^\gamma \\ p_1 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} D_1^{\Omega^f} f^{\Omega^f} + D_1^{\Gamma_s} f^{\Gamma_s} + D_1^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} + D_1^\gamma f^\gamma \\ D_2^{\Omega^f} f^{\Omega^f} + D_2^{\Gamma_s} f^{\Gamma_s} + D_2^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} + D_2^\gamma f^\gamma \\ 0 \\ -G^0 g \\ E^{\Omega^f} f^{\Omega^f} + E^{\Gamma_s} f^{\Gamma_s} + E^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} + E^\gamma f^\gamma \end{bmatrix}. \quad (7.21)
 \end{aligned}$$

De même  $(u_2, p_2, s)$  est solution de

$$\begin{aligned}
 \nabla u_0 u_2 + \nabla u_2 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_2) + \frac{1}{\rho} \nabla p_2 - \alpha_1 u_2 &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\
 \operatorname{div} u_2 &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\
 u_2 &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma(u_2, p_2) n &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_s, \\
 u_2 &= -(\alpha_1 \Phi + \nabla u_0 \Phi) s, \quad \text{sur } \gamma,
 \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\int_\gamma \Phi^T \sigma(u_2, p_2) n \, da + (K + B^0 + \alpha_1^2 M) s = - \int_\gamma \Phi^T \sigma(u_1, p_1) n \, da + M(h - \alpha_1 g).$$

En condensant la partie fluide de (7.22), on obtient

$$\int_\gamma \Phi^T \sigma(u_2, p_2) n \, da = F(\alpha_1) s.$$

En conséquence, (7.22)<sub>6</sub> devient

$$(K + B^0 + F(\alpha_1) + \alpha_1^2 M) s = - \int_\gamma \Phi^T \sigma(u_1, p_1) n \, da + M(h - \alpha_1 g). \quad (7.23)$$

La matrice d'influence  $F(\alpha_1)$  est obtenue, comme dans le chapitre 5, à partir de la résolution de  $n^s$  problèmes purement fluide élémentaires

$$\begin{aligned}
 \nabla u_0 w_j + \nabla w_j u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(w_j) + \frac{1}{\rho} \nabla q_j - \alpha_1 w_j &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\
 \operatorname{div} w_j &= 0, \quad \text{dans } \Omega^f, \\
 w_j &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma(w_j, q_j) n &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_s, \\
 w_j &= -(\alpha_1 I + \nabla u_0) \varphi_j, \quad \text{sur } \gamma,
 \end{aligned} \quad (7.24)$$

par le moyen de l'expression

$$F_{ij}(\alpha_1) = \int_{\gamma} (\sigma(w_j, q_j)n) \cdot \varphi_i da.$$

Au niveau discret, les problèmes élémentaires (7.24) possèdent une structure similaire à celle de (7.21), la matrice est la même,

$$\begin{bmatrix} A_1^{\Omega^f} - \alpha_1 D_1^{\Omega^f} & A_1^{\Gamma_s} - \alpha_1 D_1^{\Gamma_s} & A_1^{\Gamma_e} - \alpha_1 D_1^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} & A_1^{\gamma} - \alpha_1 D_1^{\gamma} & B_1 \\ A_2^{\Omega^f} - \alpha_1 D_2^{\Omega^f} & A_2^{\Gamma_s} - \alpha_1 D_2^{\Gamma_s} & A_2^{\Gamma_e} - \alpha_1 D_2^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} & A_2^{\gamma} - \alpha_1 D_2^{\gamma} & B_2 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ B_s^{\Omega^f} - \alpha_1 E^{\Omega^f} & B_s^{\Gamma_s} - \alpha_1 E^{\Gamma_s} & B_s^{\Gamma_e} - \alpha_1 E^{\Gamma_e} & B_s^{\gamma} - \alpha_1 E^{\gamma} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_j^{\Omega^f} \\ w_j^{\Gamma_s} \\ w_j^{\Gamma_e} \\ w_j^{\gamma} \\ q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(\alpha_1 G^0 + G^1)e_j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.25)$$

avec  $e_j$  le  $j$ -ème vecteur canonique de  $\mathbb{R}^{n^s}$ .

Pour  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  donnés, on commence par factoriser la matrice de (7.21) ou (7.25). La résolution des problèmes élémentaires discrets (7.25) nous permet de calculer les  $n^s$  colonnes de la matrice d'influence  $F(\alpha_1)$  à partir des résidus

$$\begin{bmatrix} F_a^{\Omega^f} - \alpha_1 F_d^{\Omega^f} & F_a^{\Gamma_s} - \alpha_1 F_d^{\Gamma_s} & F_a^{\Gamma_e} - \alpha_1 F_d^{\Gamma_e} & F_a^{\gamma} - \alpha_1 F_d^{\gamma} & F_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_j^{\Omega^f} \\ w_j^{\Gamma_s} \\ w_j^{\Gamma_e} \\ w_j^{\gamma} \\ q_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n^s.$$

On peut enfin factoriser la matrice du problème condensé (7.23)

$$K + B^0 + F(\alpha_1) + \alpha_1^2 M.$$

À ce niveau, le calcul de  $(u, p)$  est immédiat. On obtient d'abord  $(u_1, p_1)$  à partir de la résolution de (7.21), puis on calcule l'effort

$$\int_{\gamma} \Phi^T \sigma(u_1, p_1)n da,$$

à partir du résidu

$$\begin{bmatrix} F_a^{\Omega^f} - \alpha_1 F_d^{\Omega^f} & F_a^{\Gamma_s} - \alpha_1 F_d^{\Gamma_s} & F_a^{\Gamma_e} - \alpha_1 F_d^{\Gamma_e} & F_a^{\gamma} - \alpha_1 F_d^{\gamma} & F_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{\Omega^f} \\ u_1^{\Gamma_s} \\ u_1^{\Gamma_e} \\ u_1^{\gamma} \\ p_1 \end{bmatrix} - \left[ F_d^{\Omega^f} f^{\Omega^f} + F_d^{\Gamma_s} f^{\Gamma_s} + F_d^{\Gamma_e} f^{\Gamma_e} + F_d^{\gamma} f^{\gamma} \right].$$

Ceci permet de construire le second membre du problème condensé (7.23) et donc de calculer  $s$ . Finalement, à partir de  $s$  on obtient  $(u_2, p_2)$  comme

$$(u_2, p_2) = \sum_{j=1}^{n^s} s_j(w_j, q_j),$$

ce qui permet enfin d'obtenir  $(u, p)$  avec  $(u_1, p_1)$ .

On pourrait, évidemment, construire séparément les matrices A et B et factoriser directement  $A - \alpha_1 B$ . Cependant, ceci impliquerait, d'une part, une augmentation dans le coût de la factorisation, et d'autre part, une perte dans le caractère modulaire de la résolution. On rappelle que la modularité dans un algorithme permet de gagner en fiabilité et robustesse. Par exemple, si on dispose d'un solveur linéarisé fluide et d'un solveur linéarisé structure largement optimisés et validés.

Pour la résolution des systèmes linéaires issus des sous-problèmes fluide on a utilisé la librairie UMFPACK (en libre accès sur [www.netlib.org/linalg](http://www.netlib.org/linalg)), qui permet de résoudre des systèmes linéaires creux par un méthode directe, à partir d'un algorithme hybride unifrontal/multifrontal [20]. La résolution du problème condensé, de petite taille, a été réalisée par l'intermédiaire d'une factorisation LU classique, mise en œuvre dans la librairie LAPACK (en libre accès sur [www.netlib.org/lapack](http://www.netlib.org/lapack)).

## 7.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la base des techniques actuelles en matière de recherche de valeurs propres de plus petite partie réelle pour des problèmes généralisés non-symétriques avec des matrices singulières. Il s'agit du couplage d'une transformation rationnelle avec un solveur spectral itératif efficace. Nous avons rappelé le principe et les propriétés de la méthode IRAM (Implicit Restarted Arnoldi Method) ainsi que de la transformation rationnelle de Cayley généralisée. Ceci nous a permis de détailler l'algorithme de couplage de ces deux outils, tel que proposé par Lehoucq et Scott. Enfin, nous avons mis l'accent sur quelques détails de mise en œuvre particuliers, associés à la structure de notre problème issu de l'analyse de stabilité linéaire en interaction fluide-structure.

La figure 7.2 fourni un organigramme de l'algorithme 7.4, avec un description des routines issues du code ARPACK. Dans le chapitre suivant nous allons mettre en évidence la performance de cet algorithme, par le moyen d'une série d'expériences numériques en stabilité fluide-structure.

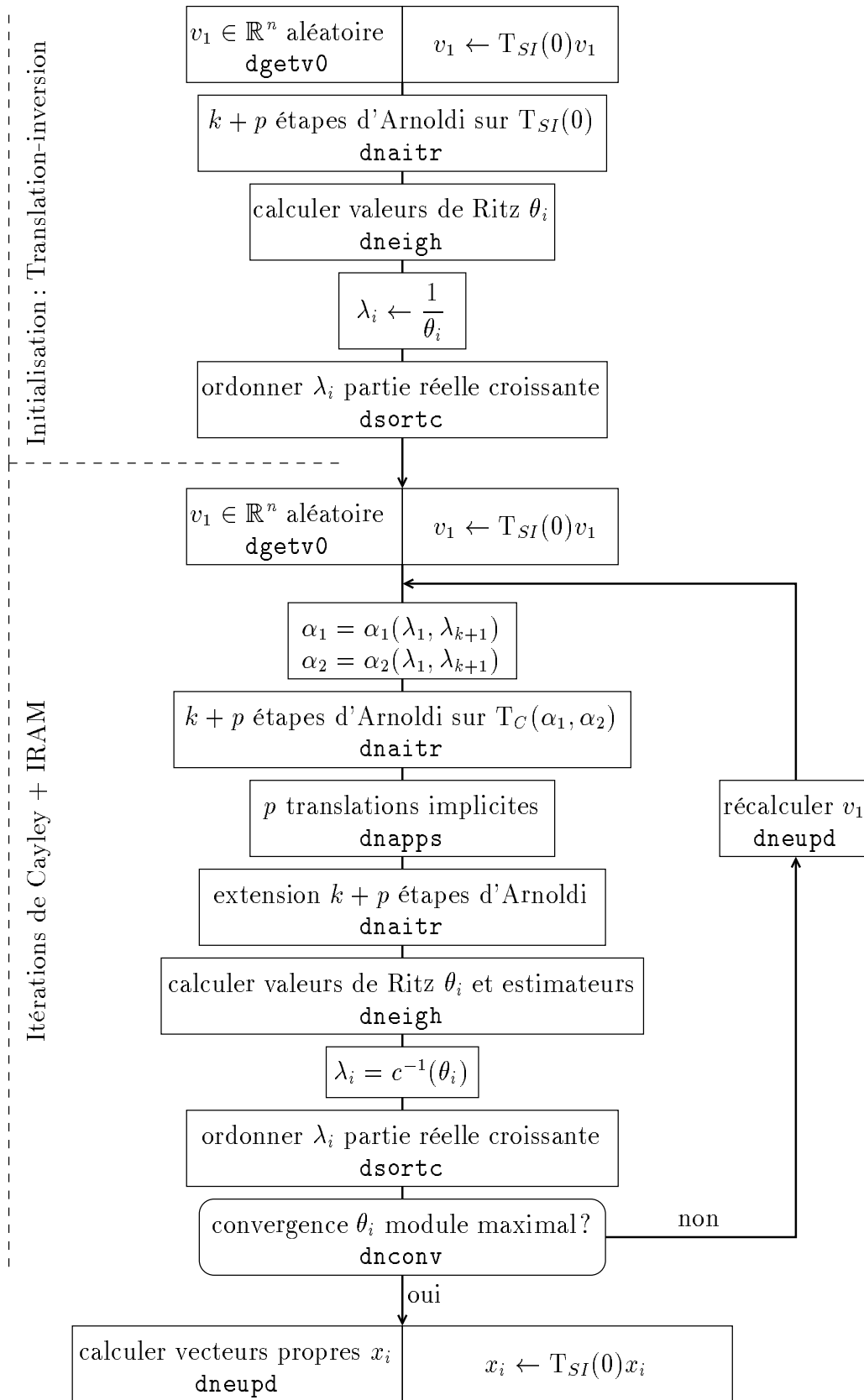


FIG. 7.2 – Organigramme de l'algorithme de recherche de valeurs propres

# Chapitre 8

## Expériences numériques

Dans ce dernier chapitre nous présentons les résultats numériques obtenus après application de l'algorithme 7.4 dans la résolution du problème aux valeurs propres (6.18). Les différentes expériences nous permettront de mettre évidence, d'une part, la performance du schéma de discrétisation (6.12) et, d'autre part, la robustesse de notre approche, par linéarisation-transpiration, dans la détection d'instabilités de systèmes en interaction fluide-structure.

Dans les deux premières sections, nous utilisons des résultats numériques antérieurs, sur des cas connus, pour la validation de notre méthode. Finalement, dans une troisième section, nous appliquons notre démarche à la détection d'instabilités de structures placées dans un écoulement transversal externe.

### 8.1 Structure placée dans un fluide visqueux immobile

On aborde dans cette section le problème physique de la détermination des oscillations propres d'un tube baignant dans un fluide visqueux immobile. Le fluide est contenu dans une cavité tridimensionnelle contenant le tube à l'intérieur. Ce tube est placé parallèlement aux parois de la cavité.

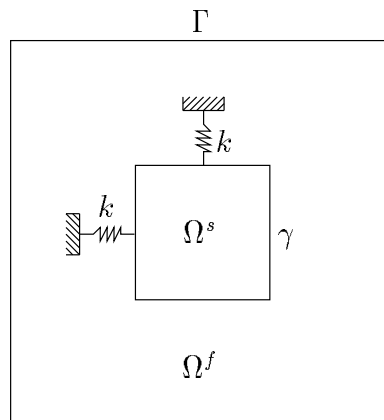


FIG. 8.1 – La section  $\Omega$



On assume que le tube est monté sur un système de ressorts (de raideur  $k > 0$ ) de telle manière qu'il peut se déplacer transversalement mais pas dans la direction perpendiculaire à sa section. On suppose que la cavité et le tube sont suffisamment longs de sorte qu'on négligera les effets tridimensionnels. Ainsi, le problème est étudié sur une des sections transverses de la cavité, qu'on dénote  $\Omega$ , voir la figure 8.1. De même,  $\Omega^f$  dénote la section du domaine occupé par le fluide et  $\Omega^s$  la section transversale du tube. La section de l'interface fluide-structure rigide est notée  $\gamma$ , et  $\Gamma = \partial\Omega$  représente la frontière extérieure du domaine en étude.

On suppose que le fluide et le tube sont en équilibre dans cette configuration. Le problème de la détermination des fréquences et mouvements propres du système rentre dans le cadre des chapitres 4 et 5 avec

$$(u_0, p_0) = 0, \quad M = m I, \quad K = k I.$$

En effet, il s'agit de résoudre le problème aux valeurs propres quadratique (5.4), soit donc : Chercher  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $u : \Omega^f \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $p : \Omega^f \rightarrow \mathbb{C}$  et  $s \in \mathbb{C}^{\Omega^s}$ , avec  $\int_{\Omega^f} p dx = 0$  et  $(u, p, s) \neq 0$ , tels que

$$\begin{aligned} -2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \lambda u, & \text{dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u &= 0, & \text{dans } \Omega^f, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u &= -\lambda s, & \text{sur } \gamma, \end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\lambda^2 m s + k s = - \int_{\gamma} \sigma(u, p) n da,$$

avec,  $\nu = \mu/\rho$  la viscosité cinématique du fluide,  $\rho$  la densité,  $m > 0$  la masse du tube et

$$\sigma(u, p) = -p I + 2\mu \varepsilon(u), \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T].$$

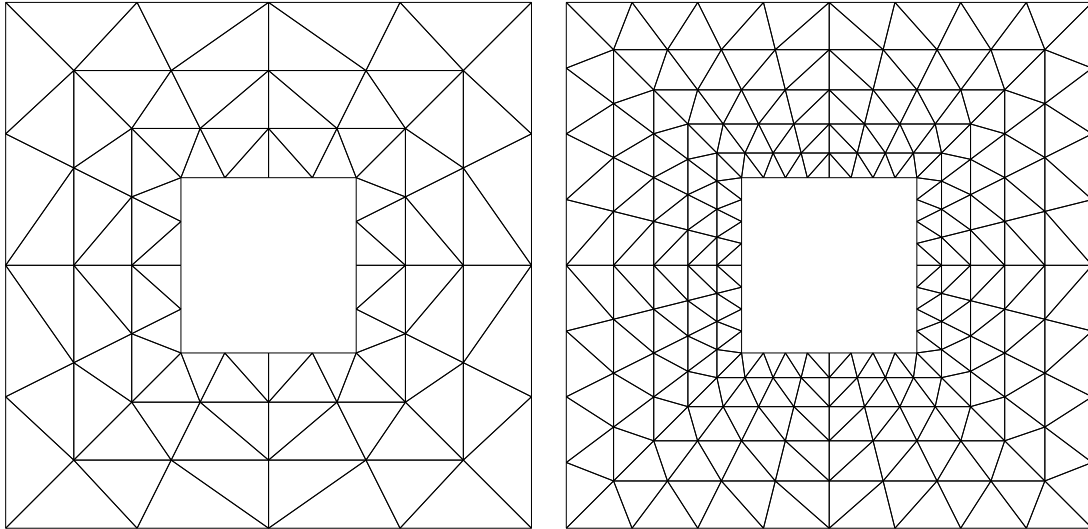
Le problème précédent, couplant les équation de Stokes avec celles d'un corps rigide en translation, a été introduit et étudié dans [13], pour la détermination des fréquences de vibration d'un faisceau tubulaire immergé dans un fluide visqueux immobile, voir aussi [14]. On démontre, dans [13], le résultat suivant concernant les propriétés des solutions de (8.1) :

**Théorème 8.1.1 (Conca, Durán et Planchard, 1992)** *Le spectre de (8.1) est constitué d'une quantité infinie de nombres complexes avec module qui tend vers l'infini. De plus les valeurs propres ont les propriétés suivantes*

1.  $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0, \quad \forall i \geq 1;$
2. *Il existe au plus 4 valeurs propres avec partie imaginaire non nulle ;*
3. *Si  $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$ , alors*

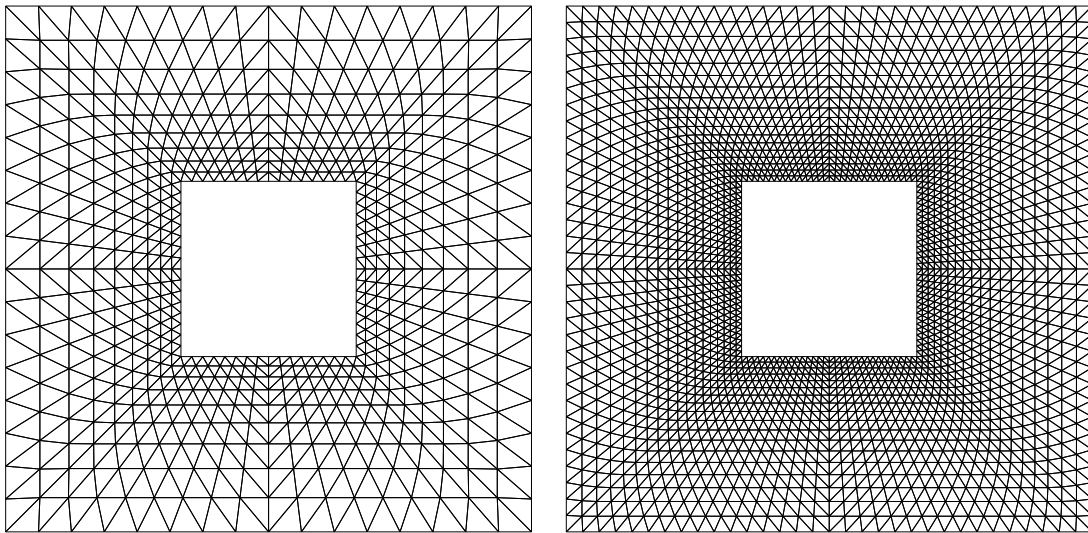
$$|\lambda| \leq \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Une étude numérique du problème (8.1) a été effectuée dans [12]. Le problème est approché par le moyen d'une discrétisation  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  des équations de Stokes. Les expériences numériques réalisées dans [12] confirment les résultats du théorème 8.1.1, c'est-à-dire, le spectre obtenu converge vers l'infini et admet des valeurs propres complexes se trouvant dans la région du plan complexe spécifiée par la théorie.



(a) 96 éléments

(b) 320 éléments



(c) 1152 éléments

(d) 4608 éléments

FIG. 8.2 – *Triangulations du domaine fluide  $\Omega^f$* 

Nous allons reprendre les expériences numériques effectuées dans [12]. Ce qui permettra de valider le schéma et la méthode de résolution introduits dans les chapitres 6 et 7,

respectivement. En utilisant la discrétisation (6.12) le problème (8.1) devient un problème généralisé aux valeurs propres du type (6.18), dont les valeurs propres de plus partie réelle vont être approchées avec l'algorithme 7.4.

Les expériences numériques ont été réalisées sur une géométrie identique à celle considérée dans [12]. Il s'agit d'une cavité carrée  $\Omega = (-3, 3) \times (-3, 3)$ , avec une perforation  $\Omega^s = (-1, 1) \times (-1, 1)$ . Cette géométrie correspond au cas d'un seul tube baignant dans le fluide.

Pour la discrétisation du problème (8.1) nous avons considéré quatre triangulations du domaine fluide  $\Omega^f = \Omega - \overline{\Omega^s}$ , voir la figure 8.2. Comme dans [12], la densité  $\rho$ , la viscosité  $\nu$  et la masse du tube  $m$  ont été fixés à 1. Pour chaque triangulation on a effectué l'approximation des valeurs propres de plus partie réelle pour différentes valeurs de  $k$ : 0.01, 0.1, 1, 10 et 100. Dans l'algorithme 7.4 le nombre de valeurs propres demandé a été fixé à 10 et la dimension du sous-espace de Krylov à 30. On a considéré une tolérance de  $10^{-6}$  dans le test de convergence sur les estimateurs de Ritz (consulter [54]).

Les calculs effectués sur le maillage plus fin ont pris, en moyenne, deux itérations de Cayley, avec un temps de calcul maximum de 4 minutes (sur une station de travail HP Visualize 8200). Les résidus relatifs obtenus  $\|A x - \lambda B x\|$ , avec  $\|x\| = 1$ , oscillent dans l'intervalle  $[10^{-7}, 10^{-15}]$ .

Les figures 8.3 à 8.7 fournissent une première comparaison des résultats que nous avons obtenu avec ceux fournis dans [12]. Plus précisément, dans ces figures on représente (en trait continu) les approximations obtenues pour  $\text{Re}(\lambda_1)$  ( $\lambda_1$  étant la valeur propre de plus petite partie réelle), avec les différentes triangulations. Ces résultats sont comparés, pour chaque valeur de  $k$ , avec la valeurs obtenue dans [12] (en trait pointillé).

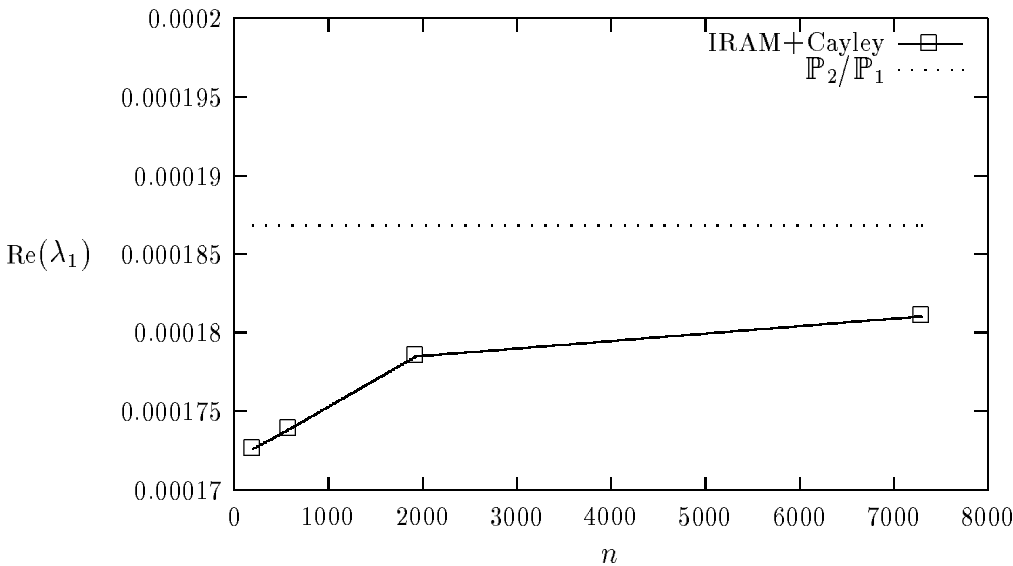


FIG. 8.3 – Approximation de  $\text{Re}(\lambda_1)$ ,  $k = 0.01$

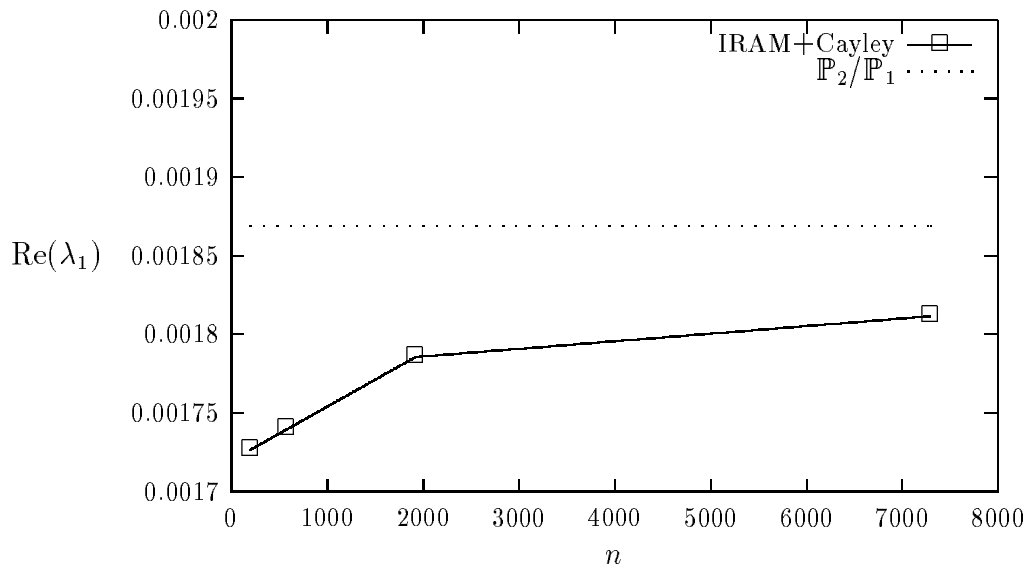


FIG. 8.4 - Approximation de  $\text{Re}(\lambda_1)$ ,  $k = 0.1$

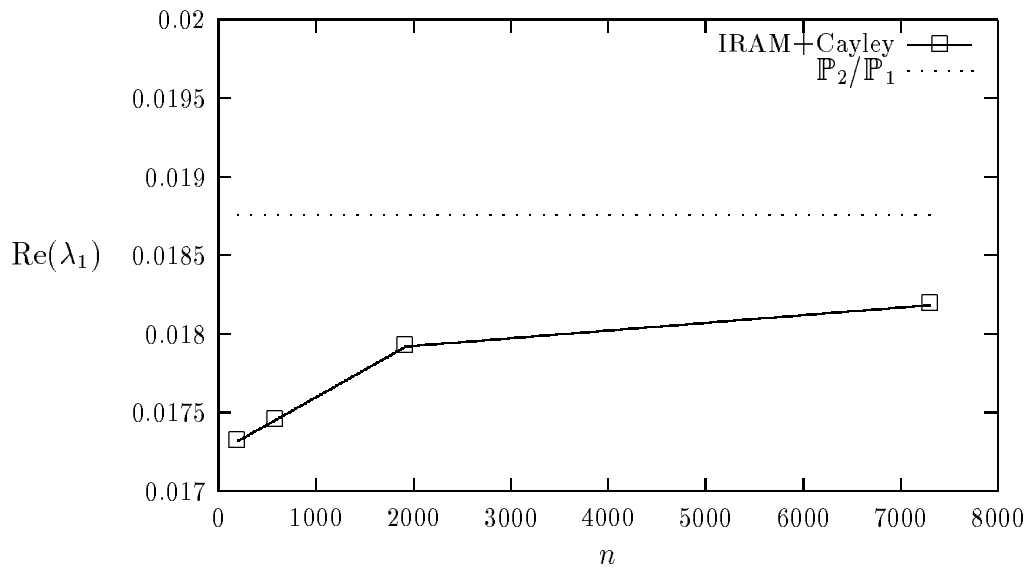
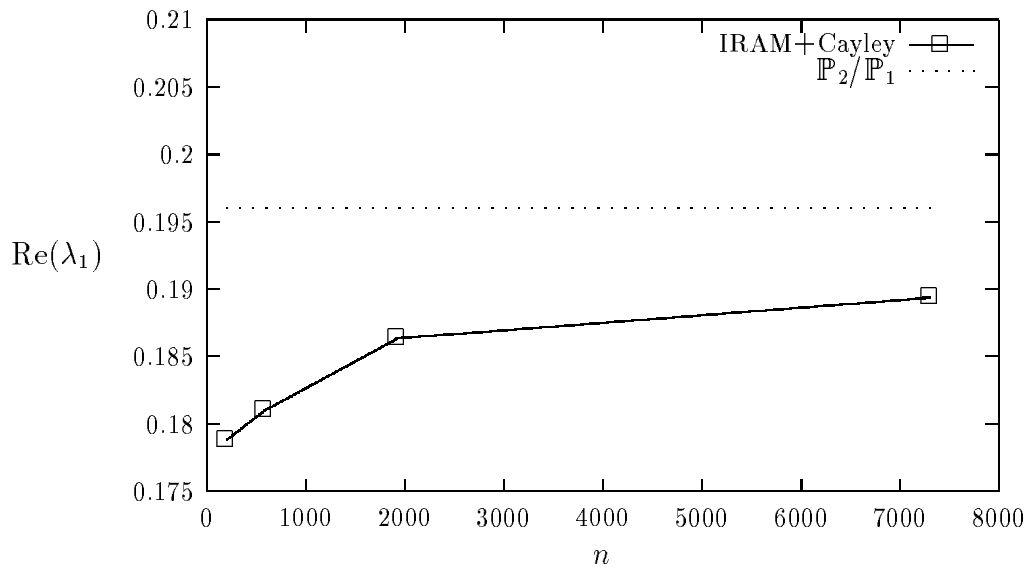
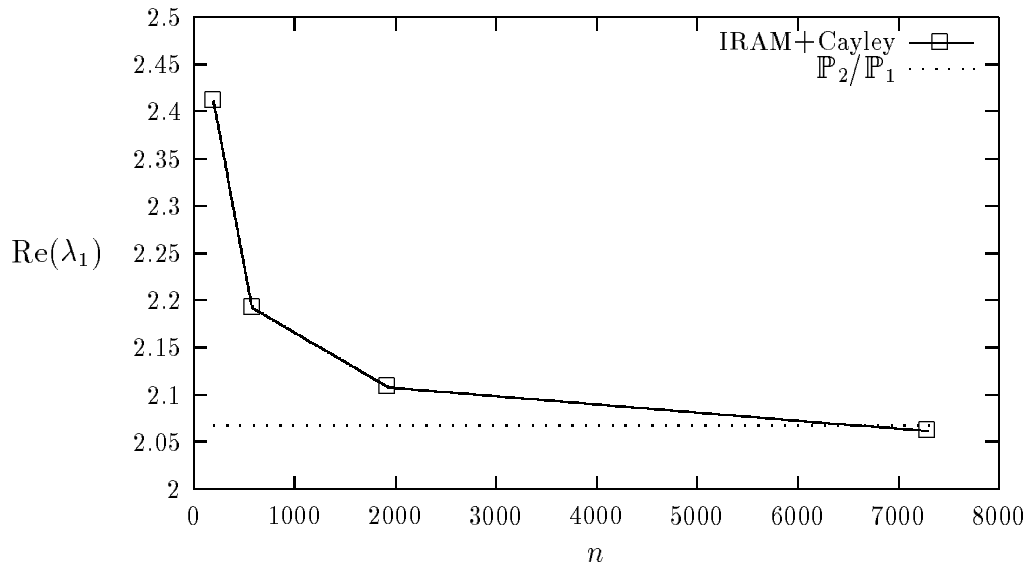


FIG. 8.5 - Approximation de  $\text{Re}(\lambda_1)$ ,  $k = 1$


 FIG. 8.6 – Approximation de  $\text{Re}(\lambda_1)$ ,  $k = 10$ 

 FIG. 8.7 – Approximation de  $\text{Re}(\lambda_1)$ ,  $k = 100$ 

On peut constater le bon accord entre les deux approches. On doit remarquer aussi que la valeur fournie dans [12] est obtenue avec un maillage relativement grossier, de l'ordre de 128 éléments.

La table 8.1 présente les valeurs propres obtenues avec la triangulation la plus fine (voir la figure 8.2(d)). La table 8.2 fourni les fréquences propre obtenues dans [12] pour la triangulation avec 128 éléments.

$k = 0.01$	$k = 0.1$	$k = 1$	$k = 10$	$k = 100$
$1.810 \times 10^{-4}$	$1.811 \times 10^{-3}$	$1.818 \times 10^{-2}$	$1.894 \times 10^{-1}$	$2.061 + 1.696i$
$1.810 \times 10^{-4}$	$1.811 \times 10^{-3}$	$1.818 \times 10^{-2}$	$1.894 \times 10^{-1}$	$2.061 - 1.696i$
2.651	2.651	2.651	2.651	$2.061 + 1.696i$
3.870	3.869	3.855	3.707	$2.061 - 1.696i$
3.870	3.869	3.855	3.707	2.651
8.152	8.152	8.152	8.152	8.152
8.238	8.238	8.238	8.238	8.238
8.382	8.382	8.381	8.379	8.361
8.382	8.382	8.381	8.379	8.361
9.218	9.218	9.218	9.218	9.218

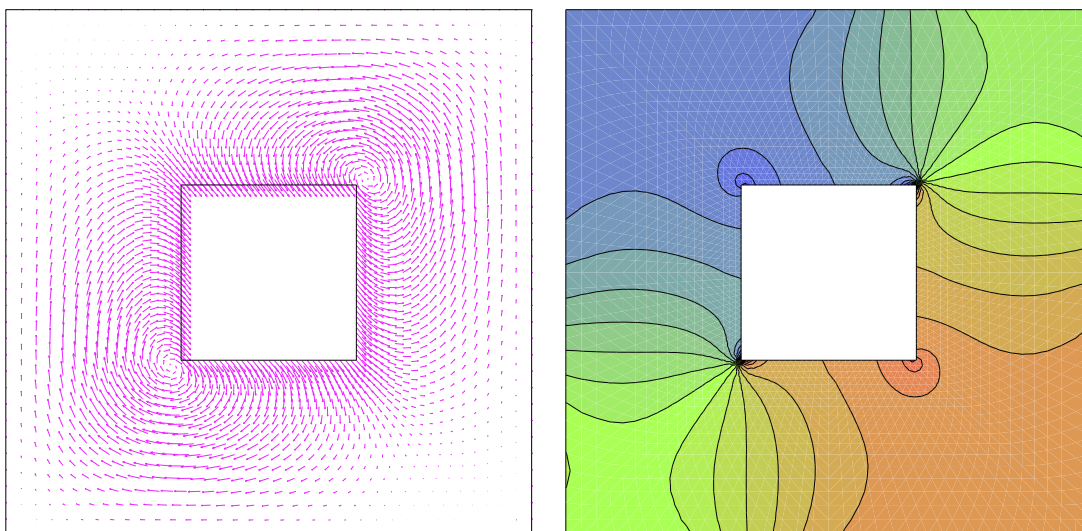
TAB. 8.1 – Valeurs propres avec la méthode IRAM+ Cayley

$k = 0.01$	$k = 0.1$	$k = 1$	$k = 10$	$k = 100$
$1.868 \times 10^{-4}$	$1.869 \times 10^{-3}$	$1.876 \times 10^{-2}$	$1.960 \times 10^{-1}$	$2.067 + 1.752i$
$1.868 \times 10^{-4}$	$1.869 \times 10^{-3}$	$1.876 \times 10^{-2}$	$1.960 \times 10^{-1}$	$2.067 - 1.752i$
2.625	2.625	2.625	2.625	$2.067 + 1.752i$
3.863	3.862	3.847	3.696	$2.067 - 1.752i$
3.863	3.862	3.847	3.696	2.625
7.909	7.909	7.909	7.909	7.909
7.934	7.934	7.934	7.934	7.934
8.167	8.167	8.167	8.164	8.138
8.167	8.167	8.167	8.164	8.138
9.223	9.223	9.223	9.223	9.223

TAB. 8.2 – Valeurs propres fournies dans [12]

On peut tout de suite mettre en évidence la bonne concordance de ces résultats. Dans les deux cas le nombre de valeurs propres complexes n'est pas supérieur à 4, ce qui était prévu par le théorème 8.1.1. Par ailleurs, les deux spectres exhibent un comportement similaire quand  $k$  varie. Plus précisément, pour des petites valeurs de  $k$  le spectre est réel, et quand  $k$  augmente des valeurs propres complexes apparaissent.

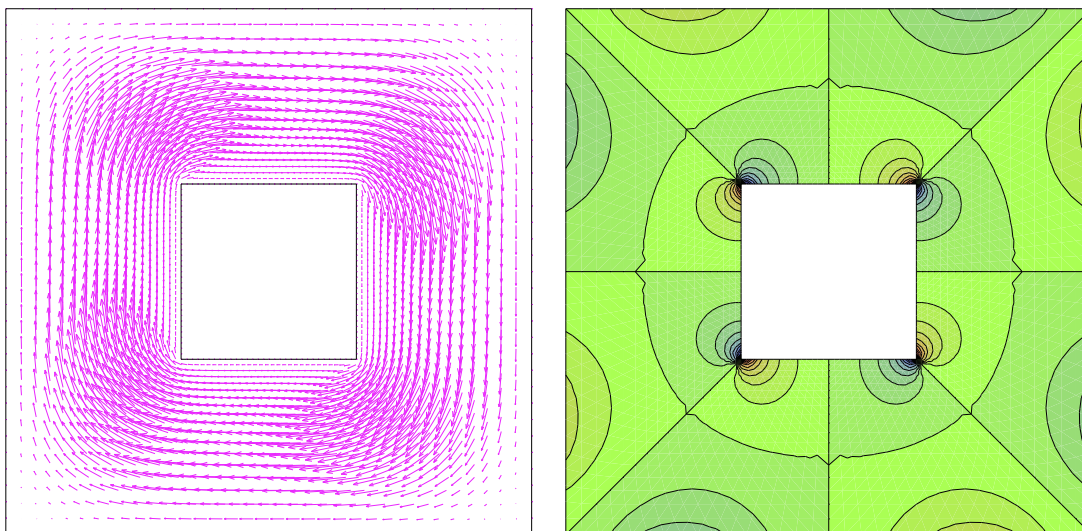
Dans les figures suivantes on a représenté le champ de vitesses et les iso-valeurs de pression (isobares) associées à quelques valeurs propres de la table 8.1. Ces figures concordent parfaitement avec celles fournies dans [12].



(a) Champ de vitesse

(b) Isobares

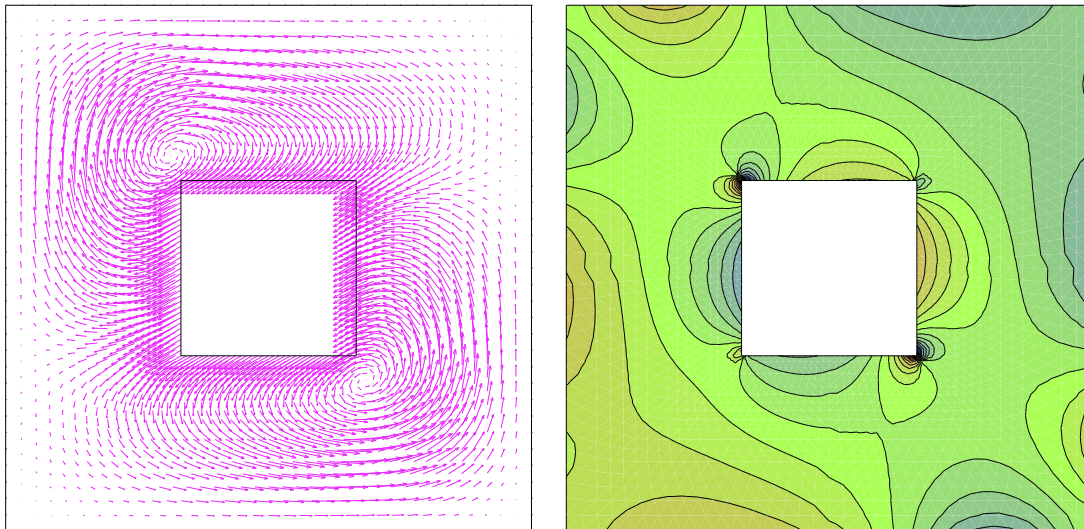
FIG. 8.8 – Valeur propre  $\lambda_1 = 1.818 \times 10^{-2}$



(a) Champ de vitesse

(b) Isobares

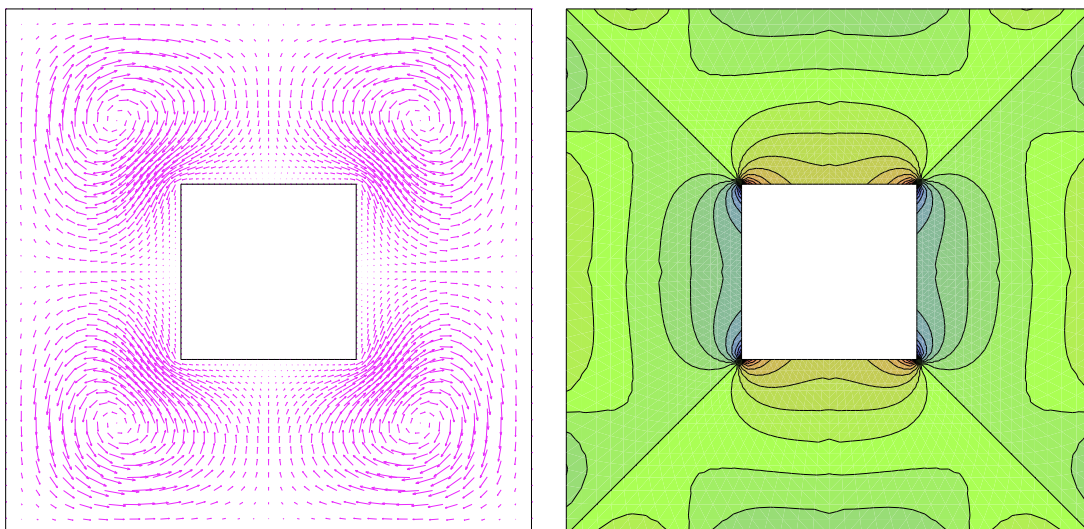
FIG. 8.9 – Valeur propre  $\lambda_3 = 2.651$



(a) Champ de vitesse

(b) Isobares

FIG. 8.10 – Valeur propre  $\lambda_4 = 3.855$

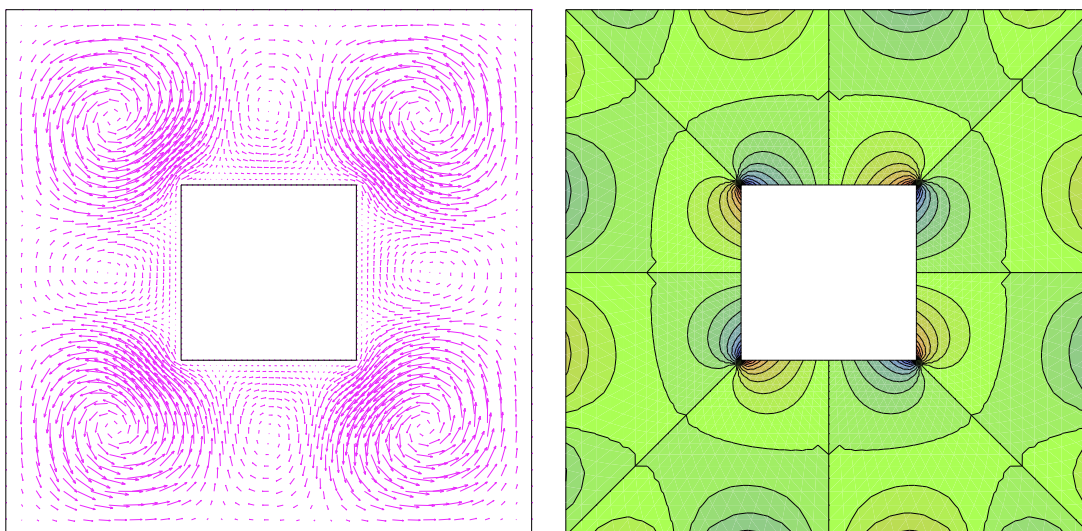


(a) Champ de vitesse

(b) Isobares

FIG. 8.11 – Valeur propre  $\lambda_6 = 8.152$

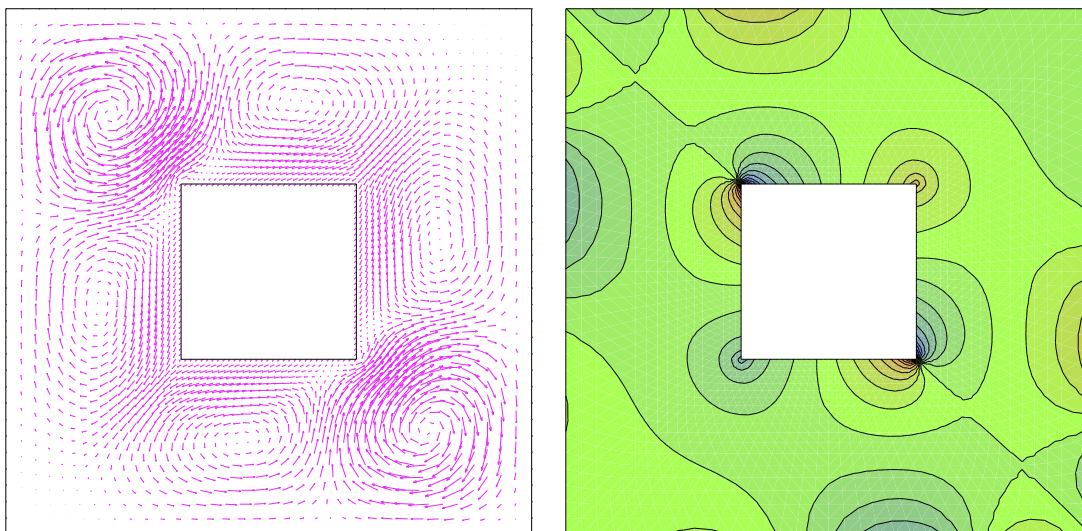




(a) Champ de vitesse

(b) Isobares

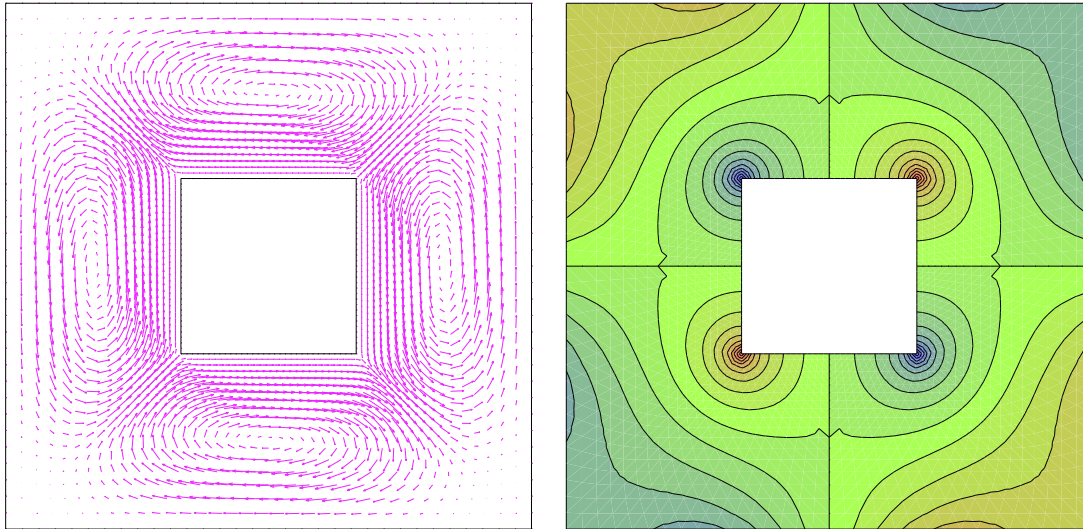
FIG. 8.12 – Valeur propre  $\lambda_7 = 8.238$



(a) Champ de vitesse

(b) Isobares

FIG. 8.13 – Valeur propre  $\lambda_8 = 8.381$



(a) Champ de vitesse

(b) Isobares

FIG. 8.14 – Valeur propre  $\lambda_{10} = 9.218$ 

Une propriété remarquable, déjà observée dans [12], réside dans le fait que les valeurs propres simples de grand module ne voient pas les variations en  $k$ . En autres mots, il s'agit de mouvements propres purement associés au fluide. Ce phénomène peut être facilement constaté dans les figures 8.9, 8.11, 8.12 et 8.14, où les mouvements propres du système couplé ne sont pas associés à un déplacement du tube, on rappelle que  $u = \lambda s$  sur l'interface.

Finalement, dans cette expérience numérique, on a voulu constater l'effet stabilisant du schéma (6.12) par rapport au schéma « classique » (6.7). Ce dernier s'obtient directement à partir de (6.12) en prenant  $\tau_K = 0$ .

La table 8.3 montre les approximations des valeurs propres et les résidus associés fournis par l'algorithme 7.4 dans le cas du maillage plus fin (figure 8.2(d)), avec  $k = 1$ .

$\lambda$	$\ A_X - \lambda B_X\ $	$\lambda$	$\ A_X - \lambda B_X\ $
$1.818 \times 10^{-2}$	$1.013 \times 10^{-15}$	$-3.729 \times 10^{-2}$	$5.675 \times 10^1$
$1.818 \times 10^{-2}$	$3.366 \times 10^{-15}$	$1.779 \times 10^{-2}$	$5.877 \times 10^{-3}$
2.651	$2.453 \times 10^{-13}$	$1.779 \times 10^{-2}$	$6.053 \times 10^{-1}$
3.855	$3.056 \times 10^{-13}$	1.366	$2.857 \times 10^1$
3.855	$2.410 \times 10^{-13}$	2.677	$3.205 \times 10^{-3}$
8.152	$2.815 \times 10^{-13}$	3.888	$5.728 \times 10^{-1}$
8.238	$5.680 \times 10^{-13}$	3.888	$1.241 \times 10^{-2}$
8.381	$9.323 \times 10^{-10}$	8.272	$2.281 \times 10^{-3}$
8.381	$6.012 \times 10^{-10}$	8.366	$2.180 \times 10^{-3}$
9.218	$1.241 \times 10^{-12}$	8.502	$5.059 \times 10^{-1}$

TAB. 8.3 – Comparaison de la méthode avec et sans termes de stabilisation ( $k = 1$ )

D'après la table précédente et le théorème 8.1.1 on tire que l'algorithme 7.4 appliqué au schéma non stabilisé (6.7) fourni des fausses approximations des valeurs propres. Certaines des approximations calculées ne sont pas des vraies solutions du problème discret (6.7). Comme on a déjà commenté dans le chapitre précédent, ce phénomène est lié au conditionnement des vecteurs propres du problème (6.7). Ceci se traduit dans le fait que les estimateurs de Ritz (« backward error » d'Arnoldi) ne donnent pas forcément une information explicite sur la précision du couple de Ritz associé (« backward error » directe).

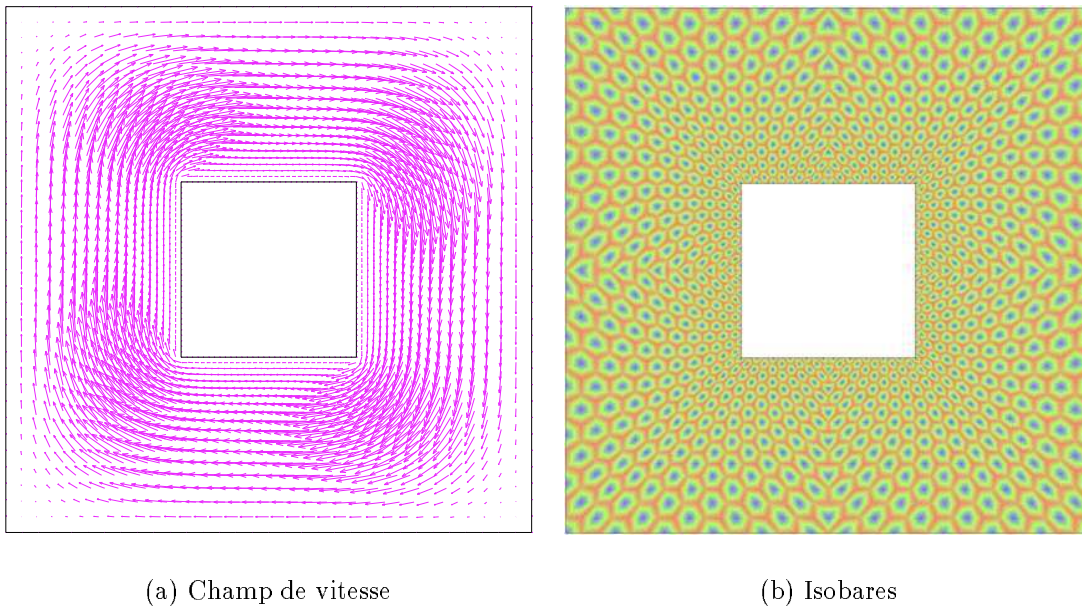


FIG. 8.15 – Valeur propre  $\lambda = 2.677$

Néanmoins, d'après la table 8.3, il est clair que le schéma (6.7) fournit de bonnes approximations des valeurs propres (celles avec résidu plus petit). On peut même constater (figures 8.15(a) et 8.9(a)) que les champs de vitesses associés à ces valeurs propres concordent assez bien avec ceux obtenus avec la méthode stabilisée. Par contre le champ de pression présente des oscillations parasites qui ne correspondent pas à la physique du problème, voir les figures 8.15(b) et 8.9(b). Ce type d'oscillations parasites dans les modes propres de pression a été déjà observé dans [25, 26] dans le cadre de l'analyse de stabilité d'un fluide visqueux.

## 8.2 Tube encastré libre en écoulement interne

On s'intéresse dans cette section à l'étude de la stabilité linéaire d'un tube encastré-libre en écoulement interne.

En étudiant les fluctuations induites par un écoulement fluide sur les modes de flexion d'un tube encastré-libre, on cherche à mettre en évidence une instabilité du système couplé connue sous le nom de « instabilité d'arrosage » [81]. Ce problème a été étudié

numériquement par Renou dans [81], avec une démarche différente à celle que nous avons présentée au chapitre 4.

Dans [81] les calculs se fondent sur l'hypothèse que, dans (4.11), l'effort fluide sur l'interface peut s'exprimer en termes de masse, d'amortissement et de raideur dits « ajoutés », c'est-à-dire,

$$\int_{\gamma} J \Phi^T \sigma(u, p) F^{-T} n \, da = -M_a \ddot{\delta s} - C_a \dot{\delta s} - K_a \delta s, \quad (8.2)$$

où  $M_a$ ,  $C_a$  et  $K_a$  sont les matrices (pleines d'ordre  $n^s$ ) de masse, d'amortissement, et de raideur ajoutées. Ainsi le problème couplé (4.11) peut être réduit à

$$(M + M_a) \ddot{\delta s} + C_a \dot{\delta s} + (K + K_a) \delta s = 0. \quad (8.3)$$

La justification de la décomposition (8.2) des forces fluides n'est pas évidente, et dans de nombreux cas, la solution des équations fluide ne permet pas une écriture aussi simple [81].

L'approche présentée dans [81] consiste donc à se restreindre à l'étude de la stabilité des solutions du système (8.3). Pour cela, on cherche des solutions sous la forme de « modes normaux »  $\delta s(t) = s e^{-\lambda t}$ , avec  $s \in \mathbb{C}^{n^s}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  étant une racine du polynôme :

$$\det(\lambda^2(M + M_a) - \lambda C_a + (K + K_a)) = 0.$$

Dans [81] le calcul des matrices  $M_a$ ,  $C_a$  et  $K_a$  se fait à partir de la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaire avec des conditions de transpiration sur l'interface, ce qui peut devenir coûteux en temps de calcul, voir [81]. Dans cette section nous abordons ce problème sous une approche différente, basée dans la démarche du « Principe de linéarisation » introduit dans le chapitre 4.

L'étude du système couplé réel constitue un problème tridimensionnel complexe. Il s'agit de coupler l'écoulement axisymétrique à l'intérieur du tube avec les mouvements bidimensionnels en flexion des parois. Pour simplifier, et en suivant l'approche de [81], nous avons couplé l'écoulement le long du canal (section du tube) avec les trois premiers modes d'une poutre encastrée-libre (parois du canal).

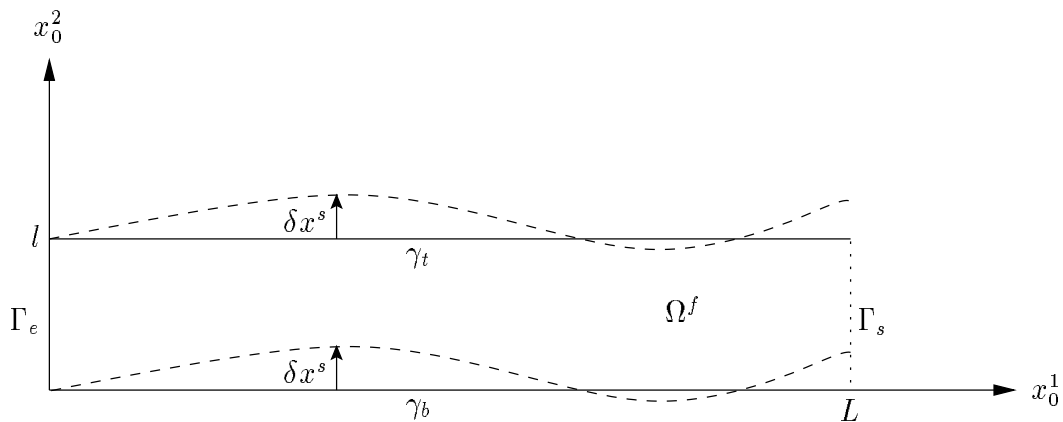


FIG. 8.16 – Tube encastré libre

On considère un canal  $\Omega^f$  de longueur  $L$  et largeur  $l$ , soumis à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible de densité  $\rho$  et viscosité cinématique  $\nu$ , voir la figure 8.16. On assume que les parois latérales du canal vibrent avec les modes d'une poutre encastree-libre en flexion plane [50]. On dénote avec  $m_s$  la masse linéique de la poutre,  $E$  représente le module de Young du matériau et  $I_p$  le moment d'inertie de la poutre.

Comme dans [81], on suppose que le déplacement  $\delta x^s(x_0^1, t)$  des parois latérales du canal est donné comme combinaison linéaire des trois premiers modes de poutre, c'est-à-dire,

$$\delta x^s(x_0^1, t) = \sum_{i=1}^3 \delta s_i(t) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_i(x_0^1) \end{pmatrix}}_{\varphi_i}.$$

Ici,  $\psi_i$  dénote le  $i$ -ème mode de la poutre donné par l'expression suivante (consulter [50, 81]):

$$\psi_i(x_0^1) = \kappa_i \left[ \cos\left(\frac{k_i x_0^1}{L}\right) - \cosh\left(\frac{k_i x_0^1}{L}\right) + \left( R_i \sin\left(\frac{k_i x_0^1}{L}\right) - \sinh\left(\frac{k_i x_0^1}{L}\right) \right) \right],$$

avec  $k_i$  les solution positives de l'équation  $\cos(k_i) \cosh(k_i) + 1 = 0$ ,

$$R_i = \frac{\sin(k_i) - \sinh(k_i)}{\cos(k_i) + \cosh(k_i)},$$

et  $\kappa_i$  une constante de normalisation telle que  $\|\psi_i\|_{0,\infty,(0,L)} = 1$ . En particulier, pour  $i = 1, 2, 3$  les paramètres caractéristiques de la poutre  $k_i$  et  $R_i$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.8751, & k_2 &= 4.6941, & k_3 &= 7.8547, \\ R_1 &= -0.7341, & R_2 &= -1.0185, & R_3 &= -0.9992. \end{aligned}$$

L'évolution des parois du canal est régie par les matrices de masse,  $M$ , et raideur,  $K$ , donnés par (consulter [50, 81]):

$$\begin{aligned} M &= m_s \begin{pmatrix} \|\psi_1\|_{0,(0,L)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|\psi_2\|_{0,(0,L)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|\psi_3\|_{0,(0,L)}^2 \end{pmatrix}, \\ K &= \frac{EI_p}{L^4} \begin{pmatrix} k_1^4 \|\psi_1\|_{0,(0,L)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^4 \|\psi_2\|_{0,(0,L)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^4 \|\psi_3\|_{0,(0,L)}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant un profil de vitesse parabolique sur  $\Gamma_e$

$$u_{\Gamma_e}(x_0^2) = 6U \frac{x_0^2}{l} \left( 1 - \frac{x_0^2}{l} \right), \quad x_0^2 \in [0, l],$$

où  $U$  dénote la vitesse moyenne. Le système couplé possède un état d'équilibre stationnaire  $(u_0, p_0, I)$  donné par les équations (4.10) :

$$\begin{aligned}
 \nabla u_0 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_0) + \frac{1}{\rho} \nabla p_0, & \quad \text{dans } \Omega^f, \\
 \operatorname{div} u_0 = 0, & \quad \text{dans } \Omega^f, \\
 u_0 = u_{\Gamma_e}, & \quad \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma(u_0, p_0)n = 0, & \quad \text{sur } \Gamma_s, \\
 u_0 = 0, & \quad \text{sur } \gamma_t \cup \gamma_b.
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Le fait que  $s_0 = 0$  dans (4.10) vient du fait que pour un profil symétrique (par rapport à la ligne moyenne du canal), l'effort fluide est opposé sur les parois et la résultante

$$\int_{\gamma_t \cup \gamma_b} \Phi^T \sigma(u_0, p_0)n \, da = 0.$$

L'étude de la stabilité de cet état d'équilibre par rapport à des petites perturbations dans les conditions initiales, rentre dans le cadre introduit dans le chapitre 4. On peut donc appliquer la démarche du « Principe de linéarisation », de sorte que l'étude de la stabilité linéaire de l'état d'équilibre  $(u_0, p_0, I)$  se réduit à la détection des valeurs propres avec partie réelle négative du problème spectral (4.16) suivant : Chercher  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $u : \Omega^f \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $p : \Omega^f \rightarrow \mathbb{C}$  et  $s \in \mathbb{C}^{n^s}$ , avec  $\int_{\Omega^f} p \, dx = 0$  et  $(u, p, s) \neq 0$ , tels que

$$\begin{aligned}
 \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \lambda u, & \quad \text{dans } \Omega^f, \\
 \operatorname{div} u = 0, & \quad \text{dans } \Omega^f, \\
 u = 0, & \quad \text{sur } \Gamma_e, \\
 \sigma(u, p)n = -\nabla \sigma(u_0, p_0)\Phi s n, & \quad \text{sur } \Gamma_s, \\
 u = -\lambda \Phi s - \nabla u_0 \Phi s, & \quad \text{sur } \gamma_t \cup \gamma_b,
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

$$\lambda^2 M s + (K + B^0) s = - \int_{\gamma_t \cup \gamma_b} \Phi^T \sigma(u, p)n \, da,$$

avec

$$\sigma(u, p) = -p \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon(u), \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T],$$

et  $B^0$  donnée par la formule (4.14).

**Remarque 8.2.1** Dans (8.5) la condition sur la frontière de sortie  $\Gamma_s$  est non homogène. Ceci vient du fait que, dans ce cas d'application, la frontière  $\Gamma_s$  est mobile. On doit ainsi prendre en compte le terme de transports des efforts  $\nabla \sigma(u_0, p_0)\Phi s n$ , provenant de la linéarisation de la condition de sortie libre.

En utilisant le schéma de discrétisation (6.12) le problème aux valeurs propres précédent devient un problème généralisé aux valeurs propres du type (6.18), dont les valeurs propres de plus partie réelle seront approchées avec l'algorithme 7.4.

Les grandeurs physiques du problème ont été fixés selon [81], ce qui permettra de comparer les résultats pour la validation de notre démarche. On a pris ainsi

$$\begin{aligned}
 L &= 1 \text{ m}, \\
 l &= 0.04 \text{ m}, \\
 m_s &= 160 \text{ Kg/m}^2, \\
 E &= 1.5 \times 10^9 \text{ Pa}, \\
 I_p &= 1.005310^9 \text{ m}^4, \\
 \rho &= 1000 \text{ Kg/m}^3, \\
 \nu &= 0.00005 \text{ m}^2/\text{s}.
 \end{aligned}$$

Pour la détection des instabilités, la vitesse moyenne  $U$  (en m/s) prend les valeurs 0, 0.614, 1.228, 1.842, 2.456, 3.07 et 3.684.

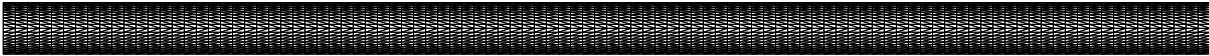


FIG. 8.17 – *Maillage du canal*

Les calculs numériques sur (8.5) ont été effectués avec un seul maillage de 4000 éléments du domaine fluide  $\Omega^f$ , voir la figure 8.17, similaire à celui utilisé dans [81]. Pour chaque valeur de  $U$  on a effectué le calcul de l'écoulement permanent  $(u_0, p_0)$  solution de (8.4) (voir la figure 8.18) ce qui permet de définir les matrices A et B issues de la discrétisation de (8.5). On remarque que ce calcul fluide a été réalisé avec une discrétisation  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  (vitesse/pression) qui permet un premier calcul explicite de la matrice  $B^0$  définie dans (4.14).

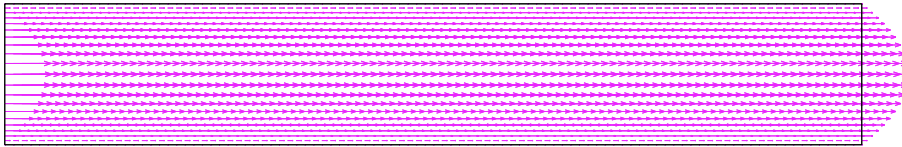


FIG. 8.18 – *Champ de vitesses de référence pour  $U = 3.684 \text{ m/s}$*

Dans l'algorithme (7.4) le nombre de valeurs propres demandé a été fixé à 6, la dimension du sous-espace de Krylov à 20 et la tolérance à  $10^{-6}$ . Les calculs réalisés ont effectué de deux à trois itérations de Cayley, avec un temps de calcul moyen de 3 minutes par cas.

Les tables 8.4 à 8.10 montrent les valeurs propres de plus petite partie réelle et les résidus correspondants pour les différentes valeurs de  $U$ .

$\lambda$	$\ A x - \lambda B x\ $
$1.371 \times 10^{-3} + 9.662 \times 10^{-1}i$	$3.560 \times 10^{-15}$
$1.371 \times 10^{-3} - 9.662 \times 10^{-1}i$	$3.560 \times 10^{-15}$
$7.945 \times 10^{-3} + 6.069i$	$5.063 \times 10^{-11}$
$7.945 \times 10^{-3} - 6.069i$	$5.063 \times 10^{-11}$
$1.966 \times 10^{-2} + 17.01i$	$6.284 \times 10^{-7}$
$1.966 \times 10^{-2} - 17.01i$	$6.284 \times 10^{-7}$

TAB. 8.4 – Valeurs propres et résidus pour  $U = 0$  m/s

$\lambda$	$\ A x - \lambda B x\ $
$1.907 \times 10^{-1} + 16.93i$	$1.241 \times 10^{-8}$
$1.907 \times 10^{-1} - 16.93i$	$1.241 \times 10^{-8}$
$2.060 \times 10^{-1} + 5.988i$	$1.164 \times 10^{-10}$
$2.060 \times 10^{-1} - 5.988i$	$1.164 \times 10^{-10}$
$2.392 \times 10^{-1} + 9.718 \times 10^{-1}i$	$2.435 \times 10^{-12}$
$2.392 \times 10^{-1} - 9.718 \times 10^{-1}i$	$2.435 \times 10^{-12}$

TAB. 8.5 – Valeurs propres et résidus pour  $U = 0.614$  m/s

$\lambda$	$\ A x - \lambda B x\ $
$3.713 \times 10^{-1} + 16.67i$	$1.377 \times 10^{-5}$
$3.713 \times 10^{-1} - 16.67i$	$1.377 \times 10^{-5}$
$3.854 \times 10^{-1} + 5.698i$	$4.279 \times 10^{-9}$
$3.854 \times 10^{-1} - 5.698i$	$4.279 \times 10^{-9}$
$5.067 \times 10^{-1} + 9.871 \times 10^{-1}i$	$3.942 \times 10^{-11}$
$5.067 \times 10^{-1} - 9.871 \times 10^{-1}i$	$3.942 \times 10^{-11}$

TAB. 8.6 – Valeurs propres et résidus pour  $U = 1.228$  m/s

$\lambda$	$\ A x - \lambda B x\ $
$4.829 \times 10^{-1} + 5.191i$	$5.889 \times 10^{-13}$
$4.829 \times 10^{-1} - 5.191i$	$5.889 \times 10^{-13}$
$5.304 \times 10^{-1} + 16.17i$	$2.097 \times 10^{-6}$
$5.304 \times 10^{-1} - 16.17i$	$2.097 \times 10^{-6}$
$8.627 \times 10^{-1} + 1.067i$	$1.631 \times 10^{-13}$
$8.627 \times 10^{-1} - 1.067i$	$1.631 \times 10^{-13}$

TAB. 8.7 – Valeurs propres et résidus pour  $U = 1.842$  m/s



$\lambda$	$\ A x - \lambda B x\ $
$3.220 \times 10^{-1} + 4.476i$	$6.652 \times 10^{-14}$
$3.220 \times 10^{-1} - 4.476i$	$6.652 \times 10^{-14}$
$6.577 \times 10^{-1} + 15.43i$	$4.131 \times 10^{-8}$
$6.577 \times 10^{-1} - 15.43i$	$4.131 \times 10^{-8}$
$1.495 + 1.288i$	$1.643 \times 10^{-14}$
$1.495 - 1.288i$	$1.643 \times 10^{-14}$

 TAB. 8.8 – Valeurs propres et résidus pour  $U = 2.456$  m/s

$\lambda$	$\ A x - \lambda B x\ $
$-3.477 \times 10^{-1} + 4.000i$	$2.709 \times 10^{-14}$
$-3.477 \times 10^{-1} - 4.000i$	$2.709 \times 10^{-14}$
$7.243 \times 10^{-1} + 14.39i$	$1.731 \times 10^{-10}$
$7.243 \times 10^{-1} - 14.39i$	$1.731 \times 10^{-10}$
$2.675 + 1.295i$	$2.205 \times 10^{-14}$
$2.675 - 1.295i$	$2.205 \times 10^{-14}$

 TAB. 8.9 – Valeurs propres et résidus pour  $U = 3.070$  m/s

$\lambda$	$\ A x - \lambda B x\ $
$-1.026 + 4.181i$	$6.751 \times 10^{-15}$
$-1.026 - 4.181i$	$6.751 \times 10^{-15}$
$6.633 \times 10^{-1} + 12.93i$	$1.270 \times 10^{-12}$
$6.633 \times 10^{-1} - 12.93i$	$1.270 \times 10^{-12}$
$3.930 + 6.927 \times 10^{-1}i$	$1.636 \times 10^{-14}$
$3.930 - 6.927 \times 10^{-1}i$	$1.636 \times 10^{-14}$

 TAB. 8.10 – Valeurs propres et résidus pour  $U = 3.684$  m/s

Les tables précédentes permettent de constater la sensibilité de la qualité des approximations par rapport à la taille de la partie imaginaire des valeurs propres. Ce phénomène a été déjà prévu dans le chapitre précédent. En effet, plus la partie imaginaire de la valeur propre est grande, plus cette valeur propre est proche, après transformation par Cayley, du cercle unitaire, ce qui rend plus difficile son approximation.

La figure 8.19 compare les résultats de stabilité obtenus par Renou et ceux que nous avons obtenu avec l'algorithme couplant la méthode IRAM avec des transformation de Cayley généralisées. On peut observer la bonne concordance des deux approches, en particulier dans le cas où la condition de sortie prend en compte les termes de transport (non homogène). On prévoit une instabilité dans l'intervalle de vitesses  $[2.456, 3.070]$ . En ce qui concerne la partie imaginaire, figure 8.20, la différence est remarquable pour les faibles vitesses (situations stables). Ceci est dû au fait de que dans [81] on fournit juste les fréquences correspondantes au « deuxième » mode (celui qui devient instable). Ce mode ne donne pas l'amortissement le plus faible dans le cas des petites vitesses.

Les figures 8.21 et 8.22 représentent, respectivement, la partie réelle et la partie imaginaire du déplacement associé au mode instable ( $U = 3.070$ ).

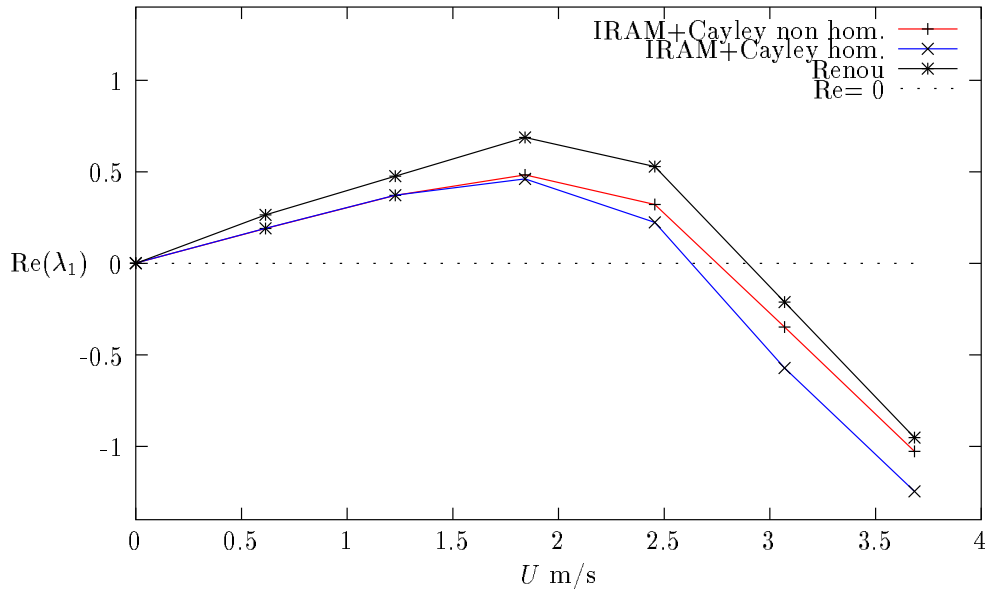


FIG. 8.19 – Comparaison des plus petites parties réelles (amortissement)

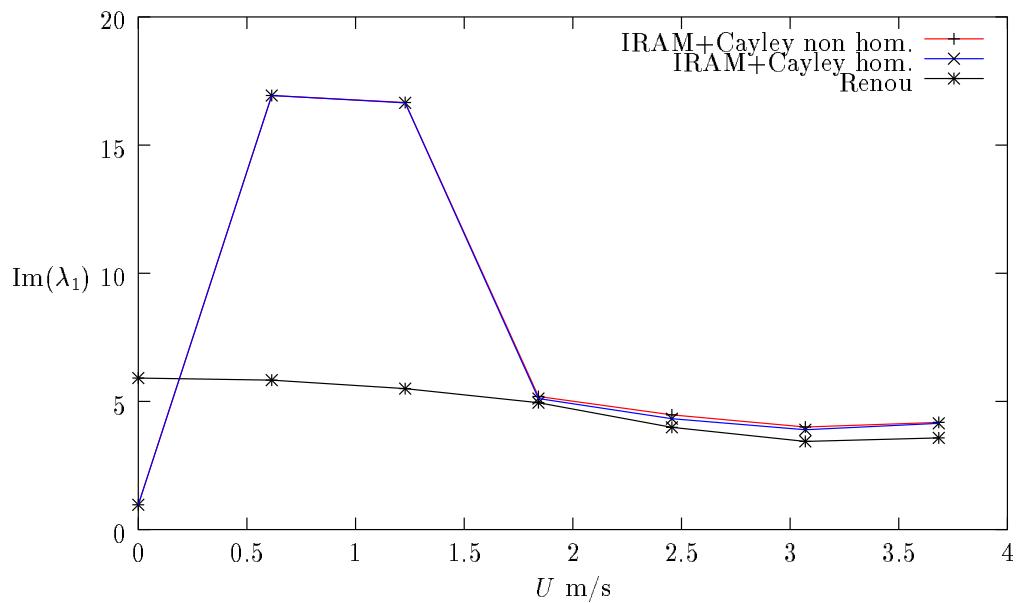


FIG. 8.20 – Comparaison des parties imaginaires (fréquence)

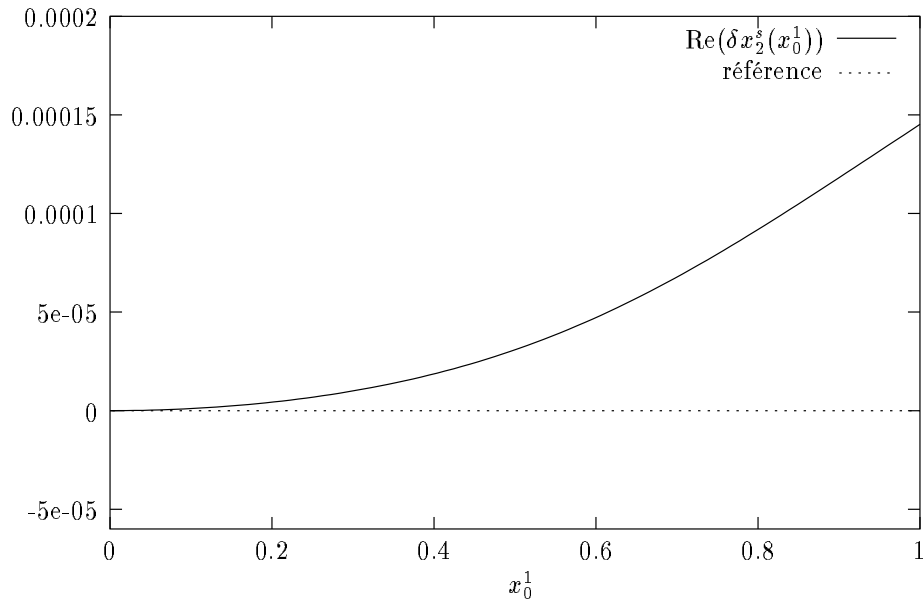


FIG. 8.21 – Partie réelle du déplacement associé au mode instable

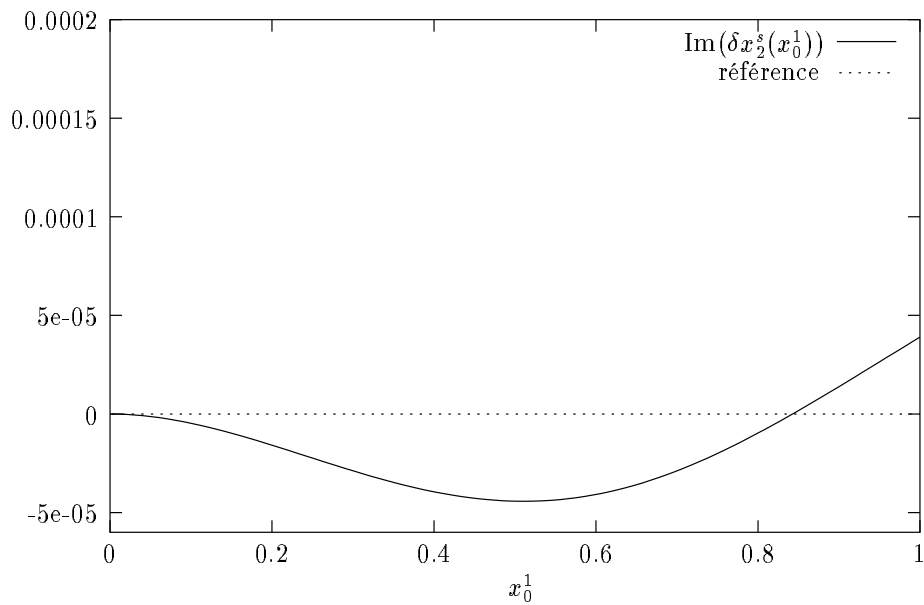


FIG. 8.22 – Partie imaginaire du déplacement associé au mode instable

Finalement on a voulu mettre en évidence, à nouveau, l'effet stabilisant du schéma de discrétisation (6.12), par rapport à une méthode « classique » qui stabiliserait la pression mais qui ne prend pas en compte la convection de l'écoulement permanent. Cette méthode « classique » s'obtient à partir de (6.12) en prenant  $u_0 = 0$  dans la définition de  $\tau_k$  et en négligeant le terme  $\nabla u_0 v$  dans la fonction test de la stabilisation.

La table 8.11 montre les 6 premières valeurs propres obtenues avec cette méthode. En comparant avec les résultats obtenus avec le schéma stabilisé (6.12) (table 8.5), on peut observer que les premières valeurs propres (celles qui gèrent la stabilité) sont assez

proches. Cependant, les figures 8.23 et 8.24 mettent en évidence l'apparition d'oscillations parasites dans la vitesse et pression du mode couplé.

$\lambda$	$\ A x - \lambda B x\ $
$1.164 \times 10^{-1} + 16.96i$	$1.488 \times 10^{-9}$
$1.164 \times 10^{-1} - 16.96i$	$1.488 \times 10^{-9}$
$1.988 \times 10^{-1} + 5.992i$	$6.390 \times 10^{-12}$
$1.988 \times 10^{-1} - 5.992i$	$6.390 \times 10^{-12}$
$2.281 \times 10^{-1} + 9.854 \times 10^{-1}i$	$3.125 \times 10^{-13}$
$2.281 \times 10^{-1} - 9.854 \times 10^{-1}i$	$3.125 \times 10^{-13}$

TAB. 8.11 – Valeurs propres et résidus pour  $U = 0.614$  m/s, méthode « classique »

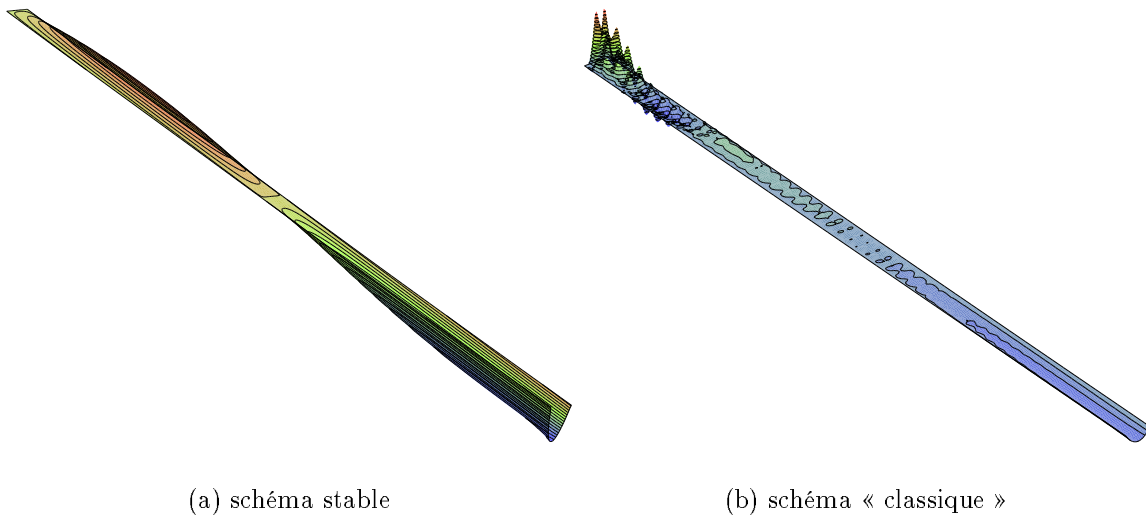


FIG. 8.23 – Élévation de la partie imaginaire de la vitesse (composante verticale)

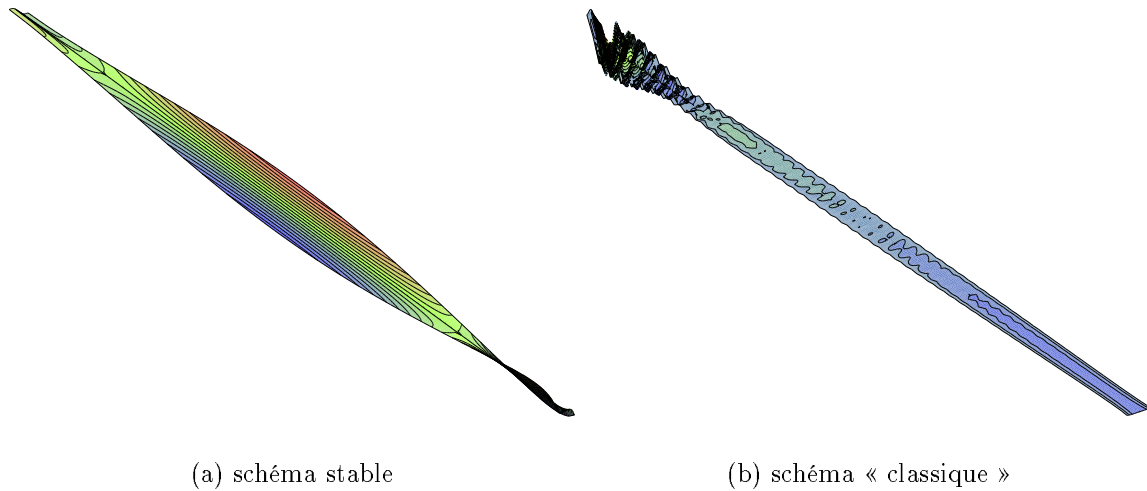


FIG. 8.24 – Élévation de la partie imaginaire de la pression

### 8.3 Écoulement externe

Dans cette section on se propose de mettre en évidence la performance de notre approche pour la détection d'instabilités en interaction fluide-structure, dans le cas où la structure est placée dans un écoulement fluide externe.

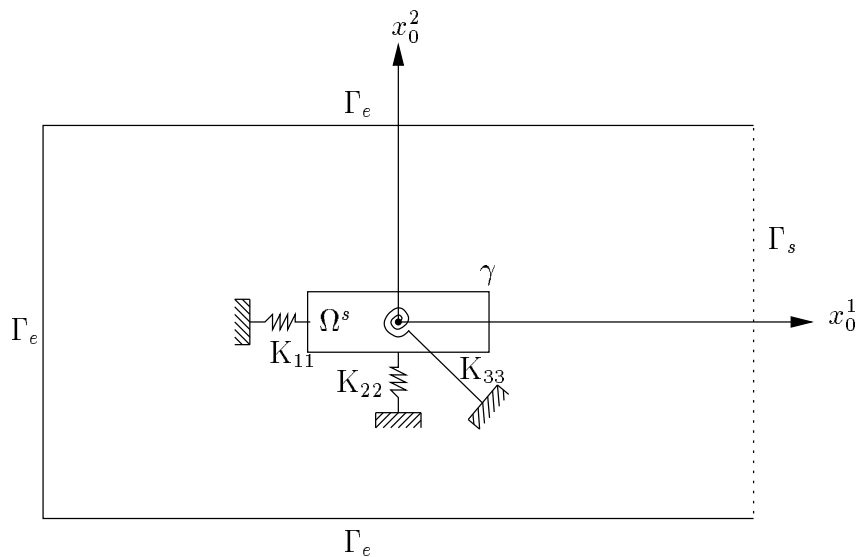


FIG. 8.25 – Configuration fluide-structure à l'équilibre

On suppose que la structure est un simple corps rigide bidimensionnel monté sur un système de ressorts. Sont mouvement est ainsi défini à partir de trois degrés de liberté : deux translations  $s \in \mathbb{R}^2$  et une rotation,  $\theta$ , autour de son centre de gravité, où l'on placera l'origine du système de coordonnées (consulter le chapitre 1), voir la figure 8.25.

La structure baigne dans un écoulement d'un fluide visqueux incompressible, de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ .

Étant donnée une vitesse d'entrée,  $u_{\Gamma_e} = (U, 0)$ , sur  $\Gamma_e$  on considère l'état d'équilibre  $(u_0, p_0, I)$  vérifiant le problème :

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u_0) + \frac{1}{\rho} \nabla p_0, & \text{ dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u_0 = 0, & \text{ dans } \Omega^f, \\ u_0 = u_{\Gamma_e}, & \text{ sur } \Gamma_e, \\ \sigma(u_0, p_0)n = 0, & \text{ sur } \Gamma_s, \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$K \begin{pmatrix} s_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \int_{\gamma} \sigma(u_0, p_0)n \, da \\ - \int_{\gamma} (\sigma(u_0, p_0)n) \cdot (Q_0 x_0) \, da \end{pmatrix}.$$

Dû au fait que l'écoulement est symétrique autour de la structure, le moment des efforts est nul sur l'interface  $\gamma$ . Il résulte donc que  $\theta_0 = 0$ . On s'intéresse à l'étude de la stabilité linéaire de l'état d'équilibre  $(u_0, p_0, I)$ . D'après la démarche du « Principe de linéarisation » introduite au chapitre 4, ce problème se réduit à l'étude du problème spectral suivant :

$$\begin{aligned} \nabla u_0 u + \nabla u u_0 - 2\nu \operatorname{div} \varepsilon(u) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \lambda u, & \text{ dans } \Omega^f, \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{ dans } \Omega^f, \\ u = 0, & \text{ sur } \Gamma_e, \\ \sigma(u, p)n = 0, & \text{ sur } \Gamma_s, \\ u = -\lambda(s + \theta Q_0 x_0) - \nabla u_0(s + \theta Q_0 x_0), & \text{ sur } \gamma, \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\lambda^2 M \begin{pmatrix} s \\ \theta \end{pmatrix} + (K + B^0) \begin{pmatrix} s \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \int_{\gamma} \sigma(u, p)n \, da \\ - \int_{\gamma} (\sigma(u, p)n) \cdot (Q_0 x_0) \, da \end{pmatrix},$$

où  $M$  et  $K$  sont diagonales et  $B^0$  est donnée par l'expression (4.14) avec

$$\Phi = [e_1 | e_2 | Q_0 x_0].$$

Les expériences numériques ont été réalisées sur une structure rectangulaire de longueur 2 et largeur 0.5, la figure 8.26 montre le maillage du domaine fluide employé dans les calculs. La viscosité cinématique du fluide a été fixée à  $\nu = 0.05$  et la densité à  $\rho = 1$ .

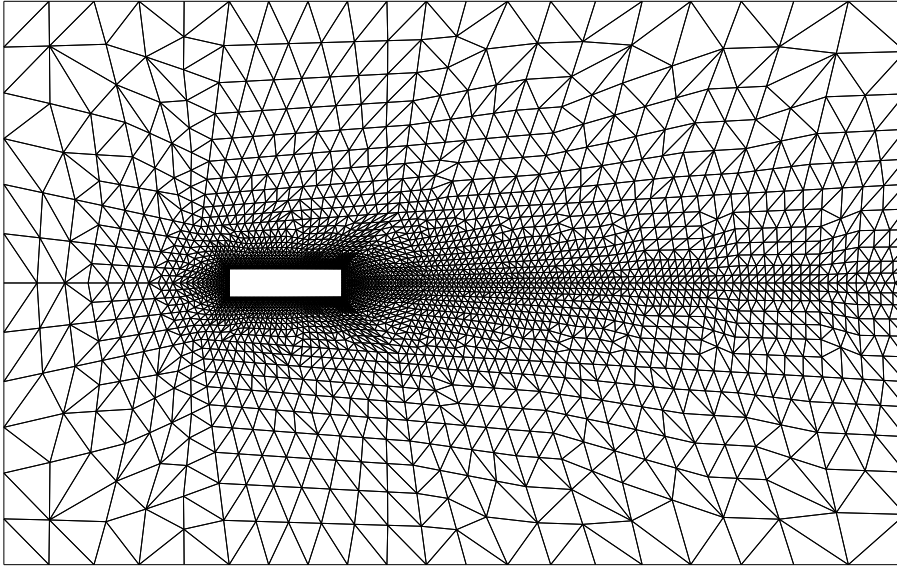


FIG. 8.26 – Maillage du domaine fluide avec structure à l'intérieur (8505 triangles)

Dans les analyse de stabilité la vitesse  $U$  prend les valeurs dans l'intervalle  $[0, 5]$ . La figure 8.27 présente les iso-valeurs de la composante horizontale correspondante à l'écoulement de référence avec  $U = 4$ .

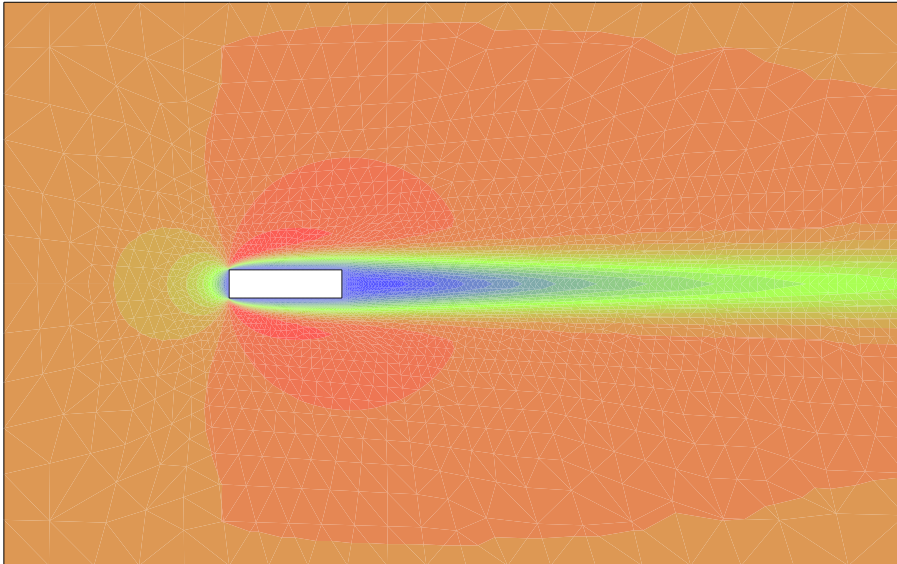


FIG. 8.27 – Composante horizontale de la vitesse  $U = 4$

Dans l'algorithme (7.4) le nombre de valeurs propres demandé a été fixé à 10, la dimension du sous-espace de Krylov à 30 et la tolérance à  $10^{-6}$ . Les calculs réalisés ont effectué de deux à six itérations de Cayley, avec un temps de calcul moyen de 10 minutes par cas.

La figure 8.28 montre l'analyse de stabilité effectuée sur le fluide avec la structure fixe. On peut observer l'apparition d'une instabilité dans le passage de  $U = 4$  à  $U = 5$ . On

représente, dans la figure 8.29, une élévation de la composante horizontale de la vitesse associé au mode instable obtenu avec  $U = 5$ . Il s'agit d'une instabilité dans le sillage aval de la structure.

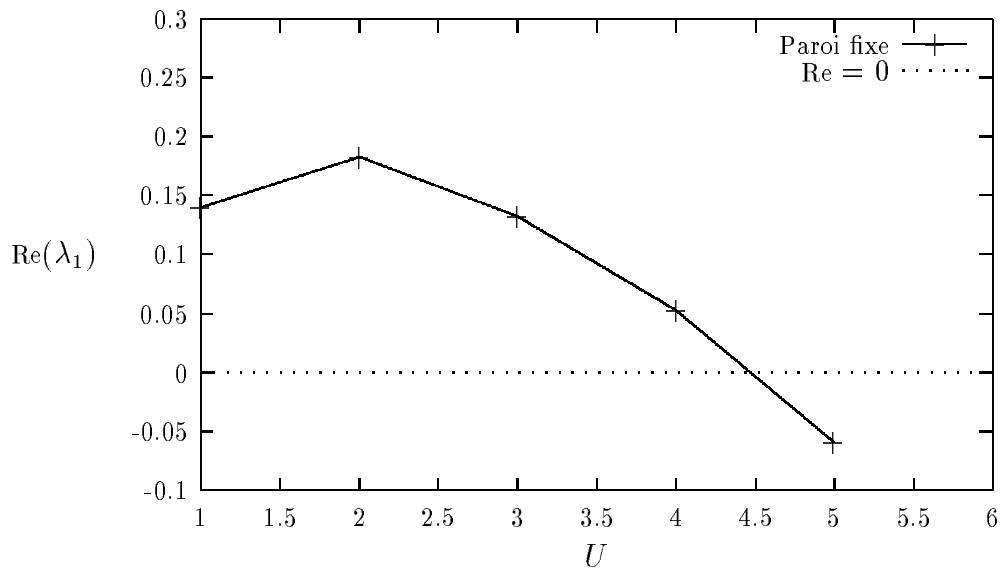


FIG. 8.28 –  $\text{Re}(\lambda_1)$  en fonction de  $U$  (structure fixe)

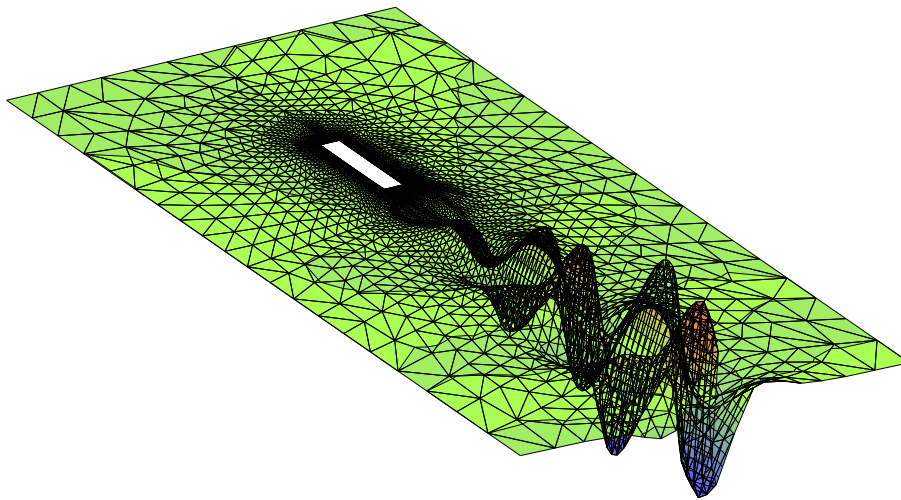


FIG. 8.29 – Élévation de la vitesse horizontale du mode fluide instable

Comme l'intérêt de cette section est de détecter des instabilités liées au système couplé, on se restreindra à des écoulements permanents associés à des vitesses d'entrée  $U \in [0, 4]$ .

Dans une première expérience, on a considéré le cas où la structure peut se déplacer en translation verticale ( $K_{22} = 100$  et  $M_{22} = 1$ ). La figure 8.30 montre l'analyse de stabilité effectuée pour le système couplé. On remarque que le système devient instable pour des vitesses  $U$  supérieures à 3. La figure 8.31 présente la partie imaginaire de la vitesse de



transpiration associée au mode instable, et la figure 8.32 une élévation de la composante verticale de la vitesse.

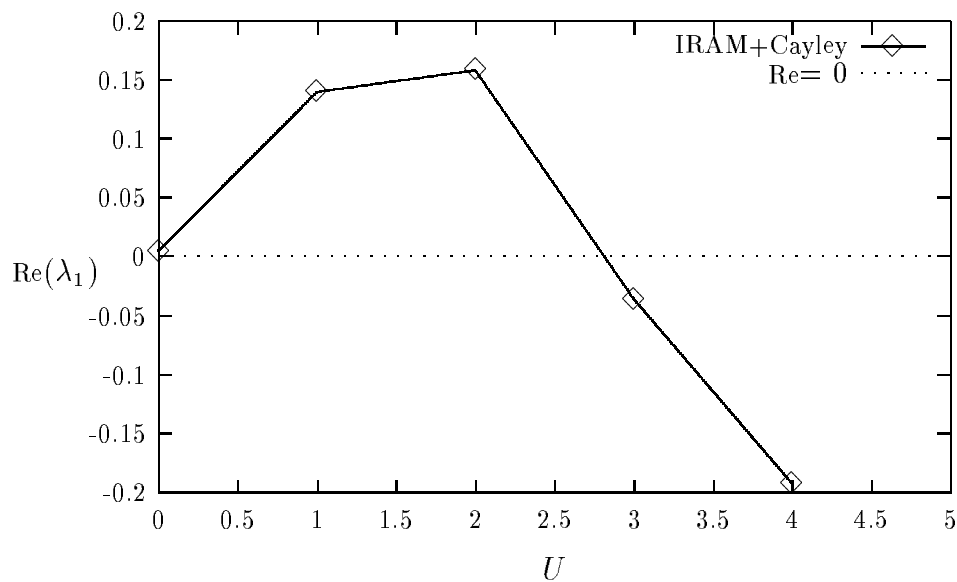


FIG. 8.30 –  $\text{Re}(\lambda_1)$  en fonction de  $U$  paroi mobile (translation verticale)

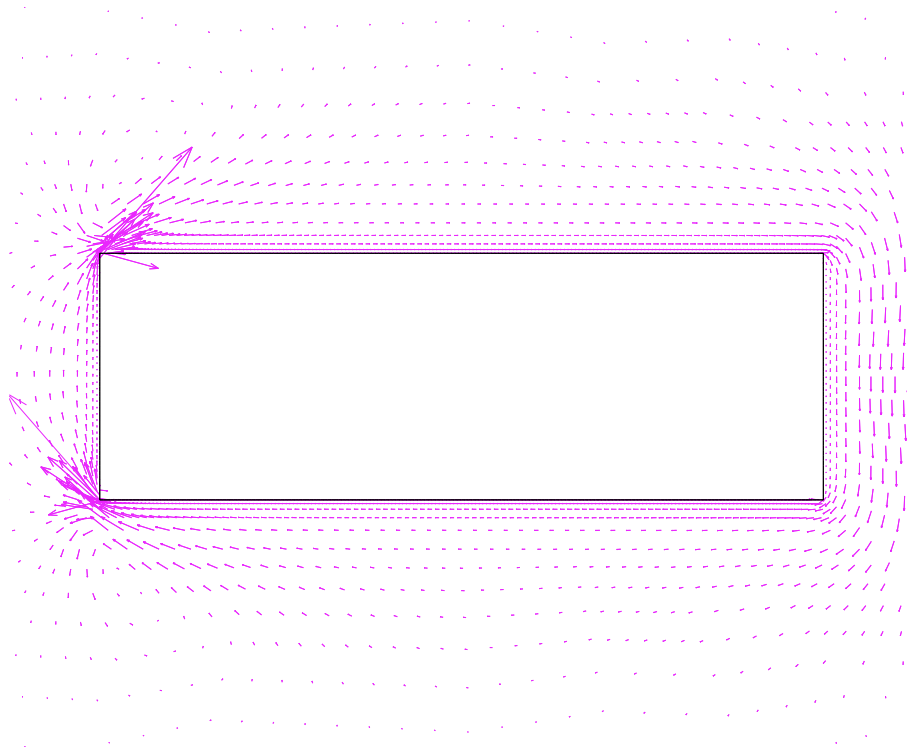


FIG. 8.31 – Partie imaginaire de la vitesse de transpiration du mode instable

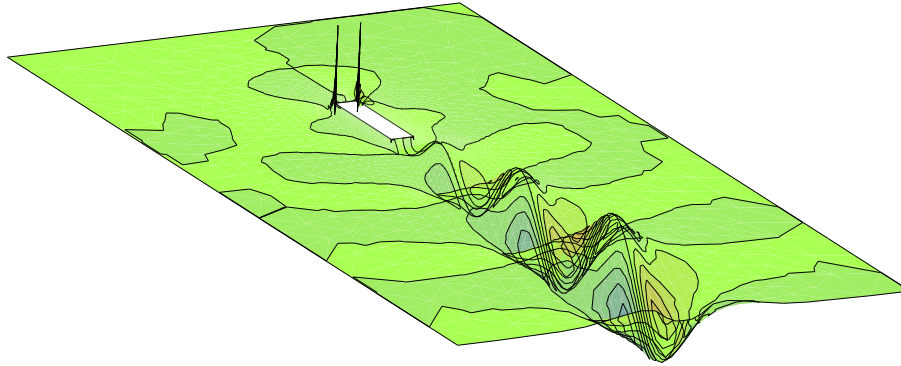


FIG. 8.32 – Élévation de la partie imaginaire de la composante verticale de la vitesse du mode instable

Dans la figure 8.33 on présente la sensibilité des analyses de stabilité par rapport au type de transpiration prise en compte dans (8.7). L'ordre 1 correspond au modèle de transpiration complet. L'ordre 1/2 représente le cas où on ne prend pas en compte le terme de gradient de vitesse sur (8.7)<sub>5</sub> mais où on garde le terme de raideur ajoutée  $B^0$  dans (8.7)<sub>6</sub>. Finalement l'ordre 0 correspond au cas où on néglige les deux termes  $\nabla u_0$  et  $B^0$ .

On peut constater que plus le modèle se simplifie plus le système devient stable, en autres mots, on réduit le couplage. On observe aussi que la prise en compte de la matrice  $B^0$  ne modifie pas considérablement les résultats.

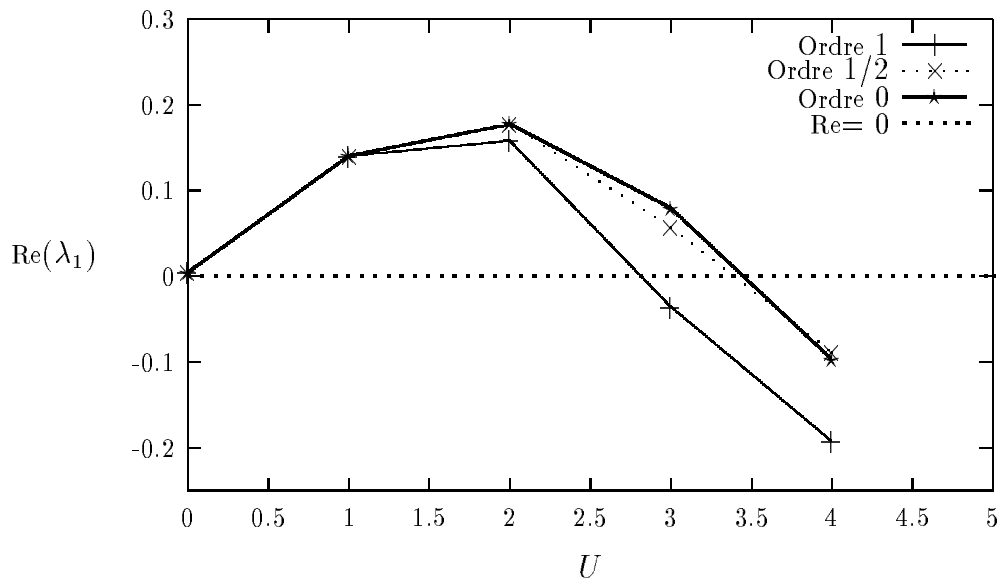


FIG. 8.33 –  $\text{Re}(\lambda_1)$  en fonction de  $U$  selon le type de transpiration

Les figures suivantes, 8.34 à 8.37, reprennent l'expérience précédent mais dans le cas où la structure peut se déplacer en rotation ( $K_{33} = 100$  et  $M_{33} = 1$ ). Une comparaison des analyses de stabilité correspondantes aux figures 8.30 et 8.34 permet de déduire que le système couplé devient plus instable en rotation. En outre, pour des grandes vitesses,

la figure 8.37 met en évidence une forte sensibilité de la stabilité, par rapport au type de modèle de transpiration.

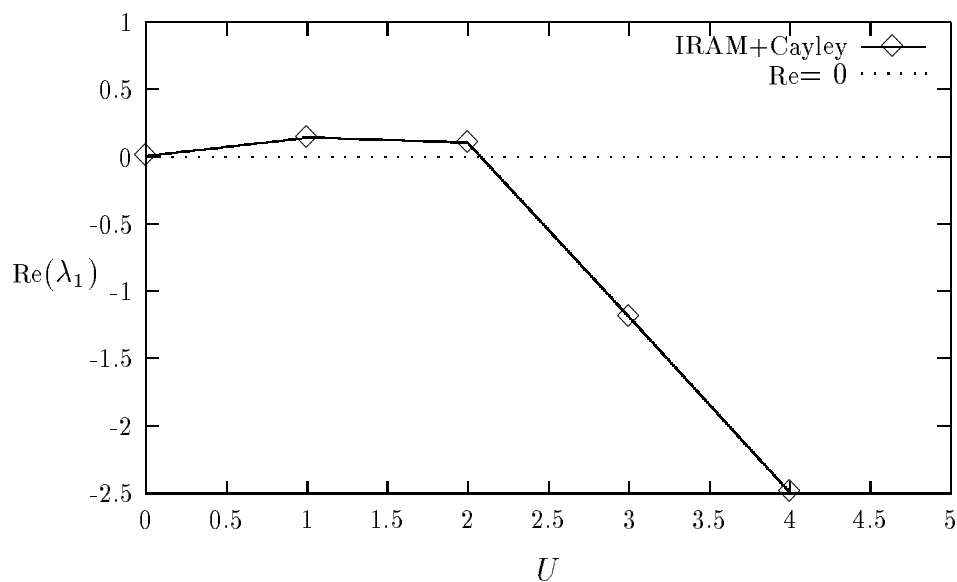


FIG. 8.34 –  $\text{Re}(\lambda_1)$  en fonction de  $U$  paroi mobile en rotation

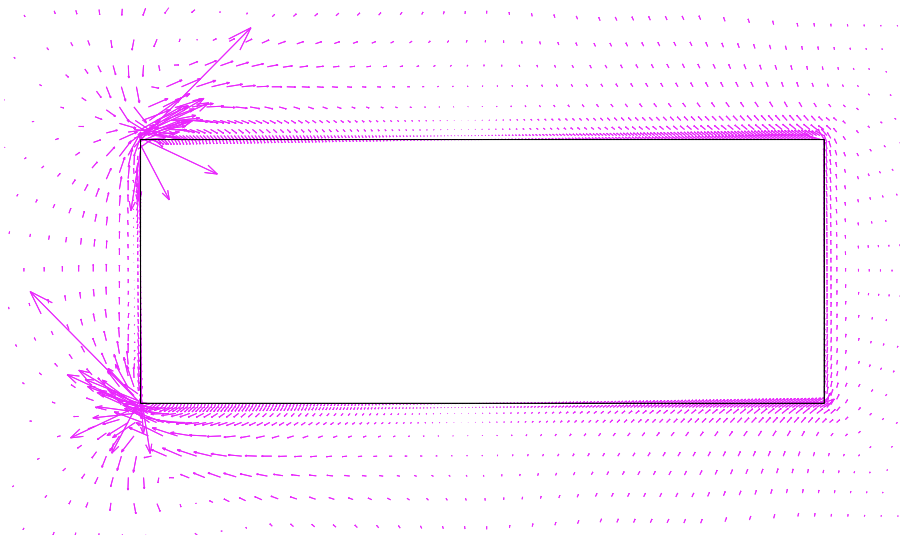


FIG. 8.35 – Vitesse de transpiration du mode instable

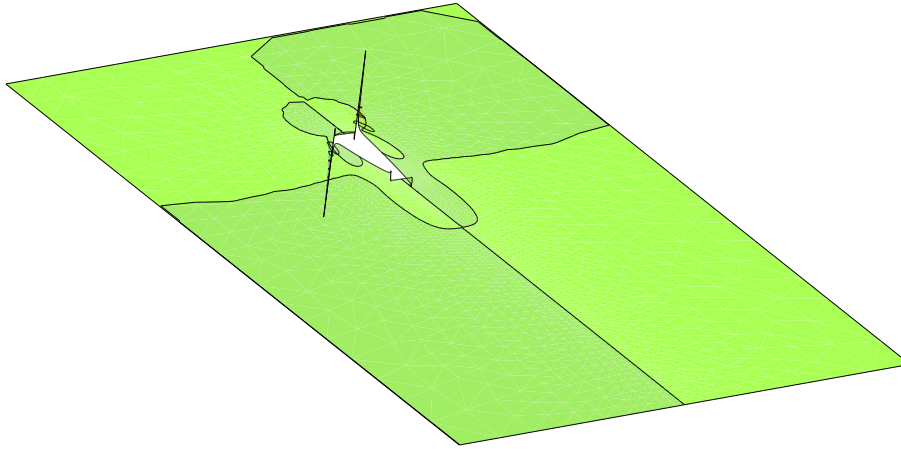
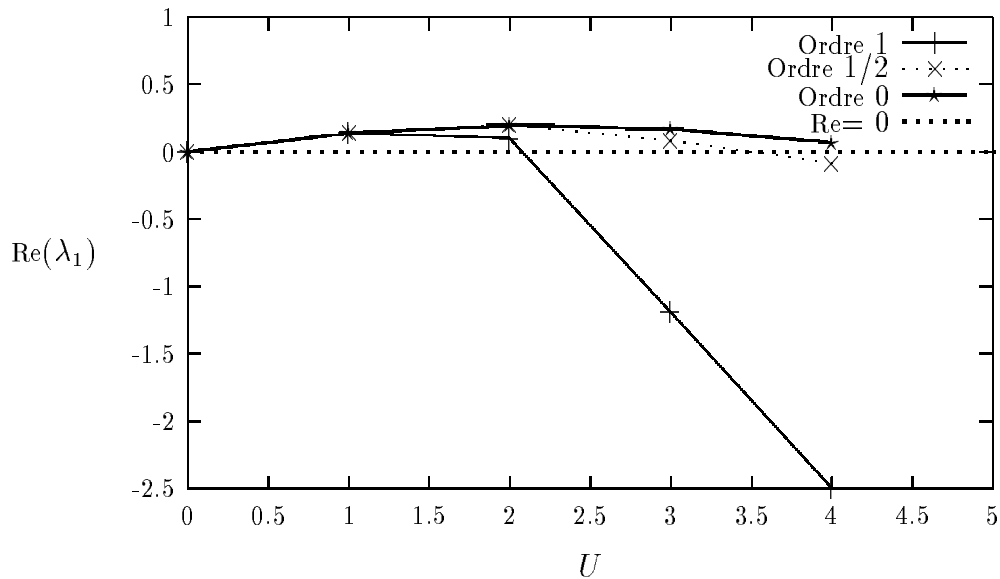


FIG. 8.36 – Élévation de la composante horizontale de la vitesse du mode instable

FIG. 8.37 –  $\text{Re}(\lambda_1)$  en fonction de  $U$  selon le type de transpiration

D'après les hypothèses de régularité imposées dans le chapitre 2 pour la dérivation des conditions de transpiration, on pourrait considérer que l'expérience précédente est dans les limites de validité de cette approche, la solution étant peu régulière près des coins amont de la structure. Dans l'expérience suivante on a voulu mettre en évidence cet effet en considérant une structure avec coins arrondis, plus profilée, voir la figure 8.38.

Les figures 8.39 et 8.40 montrent une comparaison des analyses de stabilité effectuées précédemment avec ceux obtenus avec une structure profilée. On peut tout de suite constater que l'effet du profilage de la structure est prépondérant dans le cas du mouvement en rotation, où le système reste stable dans la gamme de vitesses considérées.

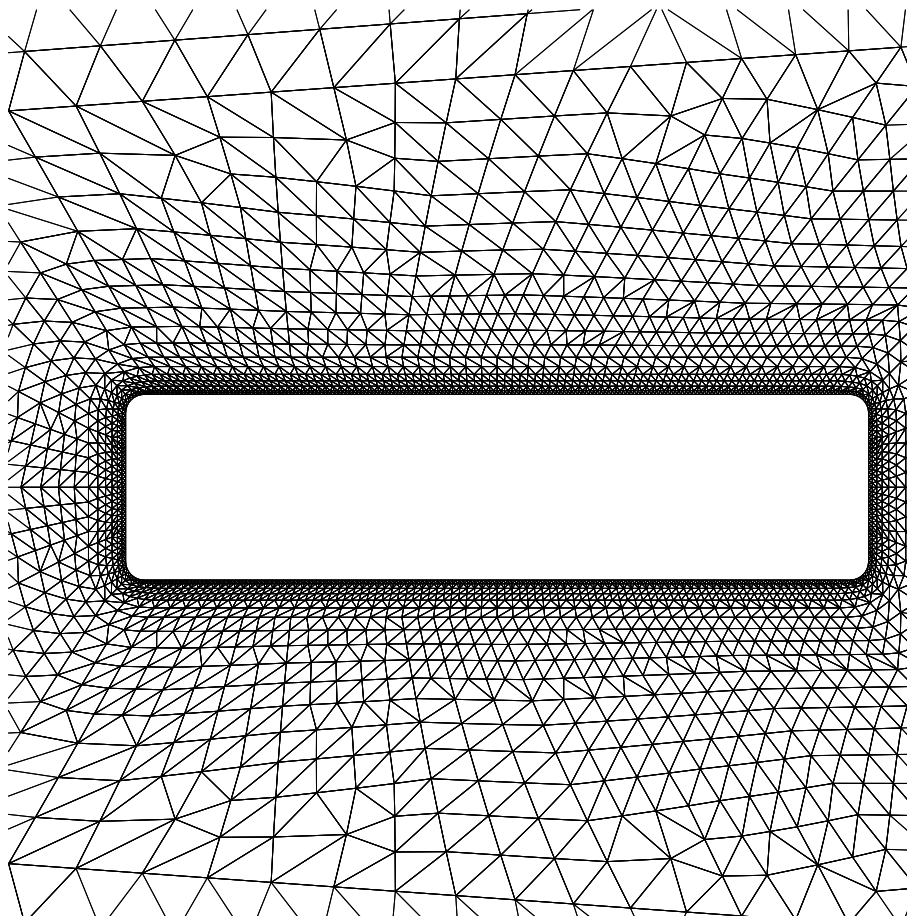


FIG. 8.38 – Maillage du domaine fluide avec coins arrondis

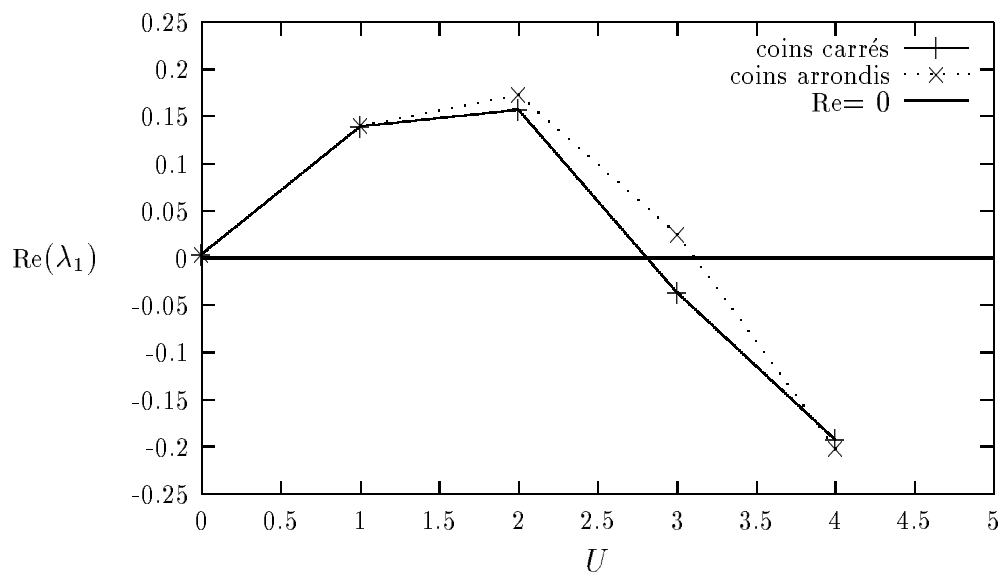
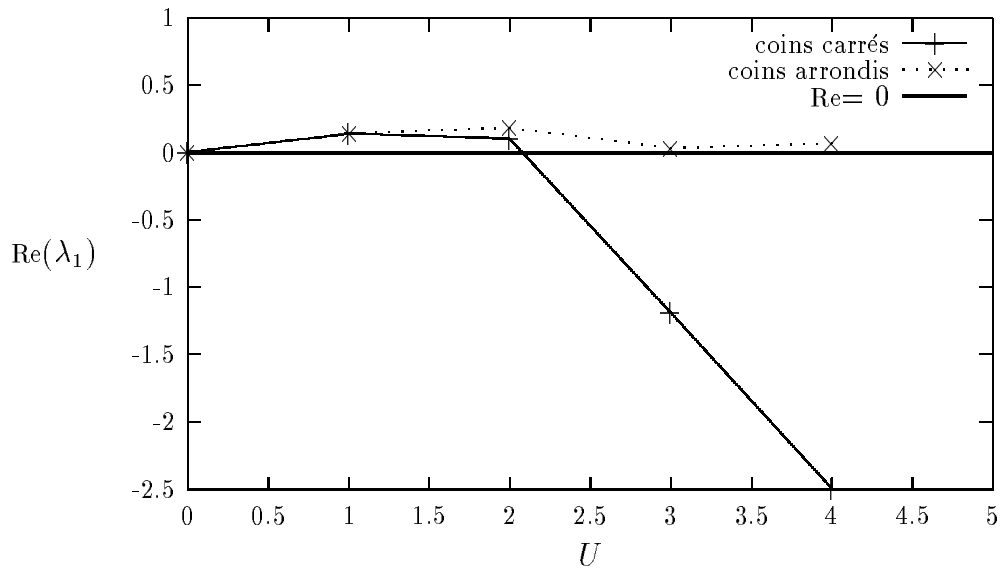
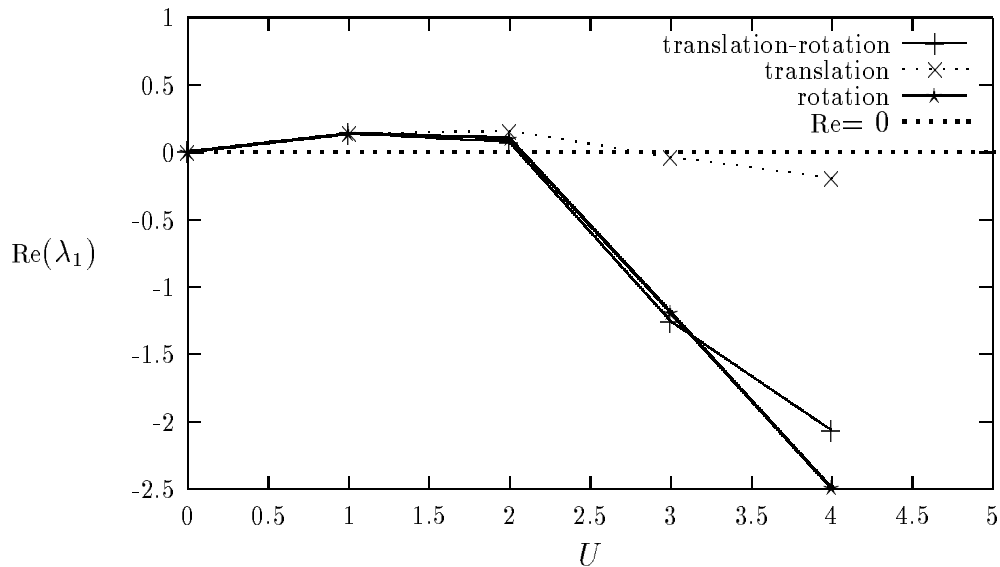


FIG. 8.39 – Comparaison avec structure profilée (translation verticale)

FIG. 8.40 – *Comparaison avec structure profilée (rotation)*

Finalement, dans la dernière expérience on a considéré le cas où la structure peut se déplacer en rotation et translation verticale. La figure 8.41 fourni une comparaison des analyses de stabilité selon le type de mouvement expérimenté par la structure. La figure 8.42 fourni la même comparaison dans le cas de la structure profilée. On constate dans les deux cas l'effet prédominant du mouvement en rotation.

FIG. 8.41 – *Comparaison des analyses de stabilité (coins carrés)*

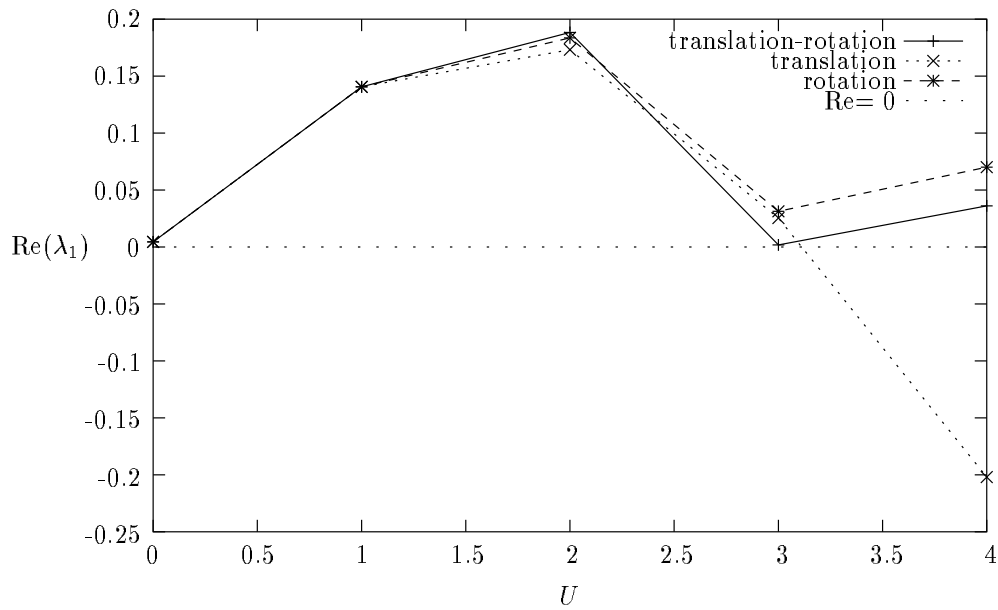


FIG. 8.42 – Comparaison des analyses de stabilité (coins arrondis)

## 8.4 Conclusion

En comparant avec des expériences réalisées précédemment, ce chapitre nous a permis de valider, d'une part, le schéma de discrétisation introduit dans le chapitre 6, et d'autre part, notre adaptation de l'algorithme de Lehoucq et Scott (chapitre 7) pour la résolution du problème généralisé aux valeurs propres obtenu au chapitre 6.

Nous avons constaté la performance du schéma de discrétisation dans le traitement de la convection, ainsi que la robustesse de notre approche par linéarisation-transpiration dans la détection d'instabilités de systèmes en interaction fluide-structure.

Enfin, les expériences numériques ont mis en évidence l'influence des différents termes non standards de l'approche par transpiration.

# Conclusion générale

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés au problème de la stabilité linéaire d'un système mécanique en interaction fluide-structure. Le point de départ de notre approche est fondée sur le « Principe de linéarisation » permettant de réduire l'analyse de stabilité linéaire à l'étude des solutions harmoniques d'un problème linéarisé couplé.

La complexité des problèmes d'interaction fluide-structure, liée à la dépendance du domaine fluide par rapport aux déplacements de l'interface, nécessite le développement d'une nouvelle technique de linéarisation adaptée à ce type de problèmes posés sur domaines « non-cylindriques ». Cette complexité a été mise en évidence avec un traitement ALE (Arbitrairement Lagrangien Eulérien) du fluide.

Nous avons décrit l'idée heuristique des techniques de transpiration, qui, par le moyen de conditions non-standards à l'interface, permettent de prendre en compte le mouvement de l'interface en conservant un domaine fluide fixe en description eulérienne. On a également constaté l'absence d'une justification théorique solide pour ces formulations simplifiées.

Nous avons mis au point une méthode de linéarisation adaptée aux problèmes d'interaction fluide-structure comportant un traitement ALE du fluide. Cette méthode nous a permis, d'une part, de faire le lien entre les deux approches (ALE et transpiration), fournissant ainsi une justification mathématique de la transpiration, et d'autre part, d'obtenir un problème linéaire d'interaction fluide-structure en domaine fluide fixe comportant des conditions d'interface de transpiration.

La méthode de linéarisation développée peut être interprétée comme une analyse de sensibilité du problème couplé par rapport aux données initiales. Nous avons ainsi étendu l'étude, à la linéarisation du problème couplé autour d'états d'équilibre non-stationnaires. Ceci nous a permis d'appliquer ces techniques dans le domaine du contrôle fluide-structure, en définissant une stratégie de calcul des dérivées du système par rapport à des données frontières.

Les techniques de linéarisation-transpiration ont été enfin appliquées à la démarche du « Principe de linéarisation » dans l'analyse de stabilité linéaire d'un système mécanique comportant une structure réduite et un fluide visqueux incompressible. Le problème de la stabilité est ramené ainsi à la détermination des valeurs propres, de plus petite partie réelle, associées à un problème spectral couplant les équations de Navier-Stokes linéarisées et celles de la structure, par l'intermédiaire de conditions de type transpiration.

L'analyse mathématique du problème spectral, issu de la stabilité linéaire, nous permet de démontrer que le calcul des valeurs propres revient à la détermination des valeurs caractéristiques d'un certain opérateur compact agissant dans un espace de Hilbert. Nous



introduisons également une formulation variationnelle pour ce problème ce qui nous permet de définir un schéma de discrétisation par éléments finis. Le problème discret revient finalement à un problème généralisé aux valeurs propres. Les difficultés associées à ce problème nous ont conduit à une résolution par un algorithme couplant la méthode IRAM (Implicit Restarted Arnoldi Method) et une transformation rationnelle de Cayley généralisée, dont les bonnes propriétés ont déjà été prouvées dans des analyses de stabilité linéaire en mécanique des fluides.

Enfin, des expériences numériques nous ont permis de mettre en évidence la performance du schéma de discrétisation, et de manière générale la robustesse de notre approche de linéarisation-transpiration dans la détection d'instabilités associées à certains systèmes d'interaction fluide-structure. On remarque que notre approche est indépendante du type de problème couplé considéré, du fait que seul un solveur linéarisé efficace est nécessaire par la méthode.

Après ce travail, de nombreuses perspectives sont ouvertes. Du point de vue théorique, on pourrait envisager l'analyse mathématique du problème couplé par conditions de transpiration et une justification mathématique rigoureuse de la généralisation du « Principe de linéarisation » en hydrodynamique au cas de l'interaction fluide-structure. On pourrait de même approfondir dans l'étude du problème spectral couplé, avec une étude sur l'existence et localisation des valeurs propres. Concernant le schéma de discrétisation du problème spectral, plusieurs voies sont restées ouvertes. Par exemple, l'analyse de convergence de la méthode, la mise au point d'un nouveau schéma stabilisé permettant de traiter les termes d'ordre zéro, etc.

D'un point de vue plus numérique, on peut chercher à tester cette méthode sur d'autres problèmes proches et plus complexes, par exemple, le cas tridimensionnel. En ce sens, l'utilisation d'une méthode itérative au sein du solveur fluide linéaire semble devenir impérative.

En ce qui concerne les applications en contrôle fluide-structure, plusieurs travaux sont actuellement en cours de recherche [66, 67].

# Bibliographie

- [1] N.I. Akhiezer and I.M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space*. Dover Publications, New York, 1993.
- [2] G. Barrenechea and F. Valentin. An unusual stabilized finite element method for a generalized Stokes problem. *Numer. Math.*, 2002. À paraître.
- [3] J.T. Batina. Unsteady Euler airfoil solution using unstructured dynamic meshes. *AIAA Journal*, 28:1381–1388, 1990.
- [4] F. Chatelin. *Valeurs propres de Matrices*. Masson, Paris, 1988.
- [5] F. Chatelin and V. Fraysée. Qualitative computing: elements of a theory for finite-precision computation. Technical report, CERFACS, 1993.
- [6] F. Chatelin and D. Ho. Arnoldi-Tchebychev procedure for large scale nonsymmetric matrices. *Math. Modeling and Num. Analysis*, 24:53–65, 1990.
- [7] K.N. Christodoulou and L.E. Scriven. Finding leading modes of a viscous free surface flow: an asymmetric generalised eigenproblem. *J. Sci. Comput.*, 3:355–406, 1988.
- [8] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [9] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. I*. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [10] K.A. Cliffe, T.J. Garratt, and A. Spence. Eigenvalues of the discretized Navier-Stokes equation with application to the detection of Hopf bifurcations. *Adv. Comput. Math.*, 1(3-4):337–356, 1993.
- [11] K.A. Cliffe, T.J. Garratt, and A. Spence. Eigenvalues of block matrices arising from problems in fluid mechanics. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 15(4):1310–1318, 1994.
- [12] C. Conca and M. Durán. A numerical study of a spectral problem in solid-fluid type structures. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 11(4):423–444, 1995.
- [13] C. Conca, M. Durán, and J. Planchard. A quadratic eigenvalue problem involving Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 100(3):295–313, 1992.
- [14] C. Conca, J. Planchard, B. Thomas, and M. Vanninatahn. *Problèmes mathématiques en couplage fluide-structure*. Eyrolles, Paris, 1994.
- [15] J. Cullum and W.E. Donath. A block Lanczos algorithm for computing  $q$  algebraically largest eigenvalues and a corresponding eigenspace for large, sparse symmetric matrices. In *Proceedings 1974 IEEE Conference on Decision and Control*, pages 505–509. IEEE Press, New York, 1974.
- [16] J. Daniel, W.B. Gragg, L. Kaufman, and G.W. Stewart. Reorthogonalization and stable algorithms for updating the Gram-Schmidt QR factorisation. *Math. Comp.*, 30:772–795, 1976.

- [17] R. Dautray and J.L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 2.* Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [18] R. Dautray and J.L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 3.* Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [19] R. Dautray and J.L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 6.* Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [20] T.A. Davis and I.S. Duff. A combined unifrontal/multifrontal method for unsymmetric sparse matrices. Technical Report 20, CISE, University of Florida, 1999.
- [21] E. De Langre. *Introduction aux interactions fluide-structure.* École Polytechnique, Palaiseau, 1999.
- [22] C. Debiez. *Approximation et linéarisation d'écoulements aérodynamiques instationnaires.* PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 1996.
- [23] A. Deif. A relative backward perturbation theorem for the eigenvalue problem. *Numer. Math.*, 56(6):625–626, 1989.
- [24] B. Desjardins, M.J. Esteban, C. Grandmont, and P. Le Tallec. Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 14(2), 2001.
- [25] Y. Ding and M. Kawahara. Linear stability of incompressible flow using a mixed finite element method. *J. Comput. Phys.*, 139(2):243–273, 1998.
- [26] Y. Ding and M. Kawahara. Three-dimensional linear stability analysis of incompressible viscous flows using the finite element method. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 31(2):451–479, 1999.
- [27] J. Donea. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 33:689–723, 1982.
- [28] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus.* Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1990.
- [29] T. Fanion. *Étude de la simulation numérique des phénomènes d'aéroélasticité dynamique. Application au problème du flottement des avions.* PhD thesis, Université de Paris IX, 2001.
- [30] T. Fanion, M.A. Fernández, and P. Le Tallec. Deriving adequate formulations for fluid-structure interactions problems: from ALE to transpiration. *Rév. Européenne Élé. Finis*, 9(6-7):681–708, 2000.
- [31] M.A. Fernández and P. Le Tallec. Un nouveau problème spectral en interaction fluide-structure avec transpiration. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 2002. À paraître.
- [32] M.A. Fernández and M. Moubachir. Étude de sensibilité d'un système mécanique en interaction fluide-structure. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 333:487–492, 2001.
- [33] M.A. Fernández and M. Moubachir. Sensitivity analysis for an incompressible aeroelastic system. Technical Report 4264, INRIA, 2001.
- [34] L. P. Franca and F. Valentin. On an improved unusual stabilized finite element method for the advective-reactive-diffusive equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(13-14):1785–1800, 2000.

- 
- [35] J.G.F. Francis. The QR transformation: A unitary analogue to the LR transformation, Parts I and II. *Comp. J.*, 4:265–272, 1961.
- [36] J.N. Franklin. *Matrix theory*. Prentice-Hall, New Jersey, 1968.
- [37] T.J. Garratt. *The numerical detection of Hopf bifurcations in large systems arising in fluids mechanics*. PhD thesis, University of Bath, 1991.
- [38] T. J. Garratt, G. Moore, and A. Spence. Two methods for the numerical detection of Hopf bifurcations. In *Bifurcation and chaos: analysis, algorithms, applications (Würzburg, 1990)*, pages 129–133. Birkhäuser, Basel, 1991.
- [39] T.J. Garratt, G. Moore, and A. Spence. A generalised Cayley transform for the numerical detection of Hopf bifurcations in large systems. In *Contributions in numerical mathematics*, pages 177–195. World Sci., River Edge, 1993.
- [40] A. Georgescu. *Hydrodynamic stability theory*. Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1985.
- [41] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [42] R.G. Grimes, J.G. Lewis, and H.D. Simon. A shifted block Lanczos algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 15(1):228–272, 1994.
- [43] M.E. Gurtin. *An introduction to continuum mechanics*. Academic Press, New York, 1981.
- [44] G. Hauke. A simple subgrid scale stabilized method for the advection-diffusion-reaction equation. Preprint, 2000.
- [45] W.P. Huffman, R.G. Melvin, D.P. Young, F.T. Johnson, J.E. Bussoletti, M.B. Bieterman, and C.L. Hilmes. Practical design and optimisation in computational fluids dynamics. In *AIAA 24th Fluid Dynamics Conference*, number 93-3111, Orlando, Florida, 1993.
- [46] T.J.R. Hughes, W.K. Liu, and T.K. Zimmermann. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 29(3):329–349, 1981.
- [47] V.I. Judovič. On the stability of stationary flows of a viscous incompressible fluid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 161:1037–1040, 1965.
- [48] W. Karush. An iterative method for finding characteristic vectors of a symmetric matrix. *Pacific J. Math.*, 1:233–248, 1951.
- [49] P. Le Tallec. Numerical methods for nonlinear three-dimensional elasticity. In *Handbook of numerical analysis, Vol. III*, pages 465–622. North-Holland, Amsterdam, 1994.
- [50] P. Le Tallec. *Introduction à la dynamique des structures*. Les Cours de l’École polytechnique. Ellipses, Paris, 2000.
- [51] P. Le Tallec and J. Mouro. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(24-25):3039–3067, 2001.
- [52] R.B. Lehoucq. On the convergence of an Implicitly Restarted Arnoldi Method. Technical Report 1756J, Sandia National Laboratories, 1999.
- [53] R.B. Lehoucq and A.G. Salinger. Large-scale eigenvalue calculations for stability analysis of steady flows on massively parallel computers. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 36(3):309–327, 2001.

- [54] R.B. Lehoucq and J.A. Scott. Implicitly restarted Arnoldi methods and eigenvalues of the discretized Navier-Stokes equations. Technical Report 2712J, Sandia National Laboratories, 1997.
- [55] R.B. Lehoucq and D.C. Sorensen. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 17(4):789–821, 1996.
- [56] R.B. Lehoucq, D.C. Sorensen, and C. Yang. *ARPACK users' guide. Solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1998.
- [57] C. Lesoinne and C. Farhat. Re-engineering of an aeroelastic code for solving eigenproblems in all flights regimes. In *ECCOMAS*, pages 1052–1061, Athenes, 1998. John Wiley & Sons.
- [58] M. Lesoinne, M. Sarkis, U. Hetmaniuk, and C. Farhat. A linearized method for the frequency analysis of three-dimensional fluid/structure interaction problems in all flow regimes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190:3121–3146, 2001.
- [59] M.J. Lighthill. On displacement thickness. *J. Fluid Mech.*, 4:383–392, 1958.
- [60] T.W. Lowe and T.J. Pedley. Computation of Stokes flow in a channel with a collapsible segment. *J. Fluid & Structures*, 9:885–905, 1995.
- [61] X.Y. Luo and T.J. Pedley. A numerical simulation of steady flow in a 2-D collapsible channel. *J. Fluid & Structures*, 9:149–174, 1995.
- [62] G. Medic. *Étude mathématique des modèles aux tensions de Reynolds et simulation numérique d'écoulements turbulents sur parois fixes et mobiles*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1999.
- [63] G. Medic, B. Mohammadi, and M. Stanciu. Prediction and aeroelastic simulation of turbulent flows in civil engineering applications. In *ECCOMAS*, pages 1062–1068, Athenes, 1998. John Wiley & Sons.
- [64] K. Meerbergen and A. Spence. Implicitly restarted Arnoldi with purification for the shift-invert transformation. *Math. Comp.*, 66(218):667–689, 1997.
- [65] L. Morino, M. Gennaretti, and S.F. Shen. Lighthill transpiration velocity revisited: an exact formulation. *Meccanica*, 30(2):127–137, 1995.
- [66] M. Moubachir. *Inverse problems and control theory for fluid-structure interaction systems*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2002. À paraître.
- [67] M. Moubachir and J.P. Zolésio. Identification of boundary conditions for a nonlinear unsteady fluid-structure interaction system. À paraître, 2002.
- [68] J. Mouro. *Interactions fluide-structure en grands déplacements*. PhD thesis, École Polytechnique, 1996.
- [69] J. Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, Paris, 1967.
- [70] T. Nomura and T. Hughes. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and rigid body. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 95:115–138, 1992.
- [71] M.P. Païdoussis. Dynamics of flexible slender cylinders in axial flow. Part 1. Theory. *J. Fluid Mech.*, 26:717–736, 1966.

- 
- [72] M.P. Païdoussis. Dynamics of flexible slender cylinders in axial flow. Part 2. Experiments. *J. Fluid Mech.*, 26:737–751, 1966.
- [73] B.N. Parlett. *The symmetric eigenvalue problem*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1980.
- [74] B.N. Parlett and Y. Saad. Complex shift and invert strategies for real matrices. *Linear Algebra Appl.*, 88/89:575–595, 1987.
- [75] S. Piperno. *Simulation numérique de phénomènes d’interaction fluide-structure*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.
- [76] S. Piperno. Numerical simulation of aeroelastic instabilities of elementary bridge decks. Technical Report 3549, INRIA, 1998.
- [77] J. Planchard and B. Thomas. On the dynamical stability of cylinders placed in cross-flow. *J. Fluid & Structures*, 7:321–339, 1993.
- [78] G. Prodi. Teoremi di tipo locale per il sistema di Navier-Stokes e stabilità delle soluzioni stazionarie. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 32:374–397, 1962.
- [79] P. Raj and B. Harris. Using surface transpiration with an Euler method for cost-effective aerodynamic analysis. In *AIAA 24th Applied Aerodynamics Conference*, number 93-3506, Monterey, Canada, 1993.
- [80] C. Rajakumar and C.R. Rogers. The Lanczos algorithm applied to unsymmetric generalized eigenvalue problem. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 32(5):1009–1026, 1991.
- [81] J.Y. Renou. *Une méthode eulérienne pour le calcul de forces fluide-élastiques*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1998.
- [82] Y. Saad. Variations on Arnoldi’s method for computing eigenelements of large unsymmetric matrices. *Linear Algebra Apps.*, 34:269–265, 1980.
- [83] Y. Saad. Projection methods for solving large sparse eigenvalue problems. In *Lectures Notes in Mathematics, Matrix Pencils Proceedings*, pages 121–144. Springer Verlag, Berlin, 1982.
- [84] Y. Saad. Chebyshev acceleration techniques for solving nonsymmetric eigenvalue problems. *Math. Comp.*, 42:567–588, 1984.
- [85] Y. Saad. Numerical solution of large nonsymmetric eigenvalue problems. *Comput. Phys. Comm.*, 53(1-3):71–90, 1989.
- [86] Y. Saad. *Numerical methods for large eigenvalue problems*. Halsted Press-John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [87] J. Sarrate, A. Huerta, and J. Donea. Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for fluid-rigid body interaction. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 190:3171–3188, 2001.
- [88] D.H. Sattinger. The mathematical problem of hydrodynamic stability. *J. Math. Mech.*, 19:979–817, 1969/1970.
- [89] J.A. Scott. An Arnoldi code for computing selected eigenvalues of sparse, real, unsymmetric matrices. *ACM Trans. Math. Software*, 21(4):432–475, 1995.
- [90] D.C. Sorensen. Implicit application of polynomial filters in a  $k$ -step Arnoldi method. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13(1):357–385, 1992.

- [91] G.V. Stewart. *Introduction to matrix computations*. Academic Press, New York, 1973.
- [92] L. Tobiska and R. Verfürth. Analysis of a streamline diffusion finite element method for the Stokes and Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1):107–127, 1996.
- [93] S. Turek. *Efficient solvers for incompressible flow problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [94] F. Valentin. *Nouvelles conditions aux limites équivalentes pour des interfaces rugueuses en mécanique des fluides: développement, analyse et mise en oeuvre numérique*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1998.
- [95] C. Walsh. Flutter in one-dimensional collapsible tubes. *J. Fluid & Structures*, 9:393–408, 1995.
- [96] R.K. Zeytounian. *Mécanique des fluides fondamentale*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

## Résumé

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à la stabilité linéaire d'un système mécanique en interaction fluide-structure. Nous avons mis au point une méthode de linéarisation permettant de justifier mathématiquement les conditions d'interface de transpiration, ainsi que de définir un problème linéaire d'interaction fluide-structure avec ce type de conditions. Cette technique a été ensuite appliquée à la démarche du « Principe de linéarisation ». L'analyse de stabilité linéaire se réduit alors à l'étude des valeurs propres d'un problème spectral couplé. Ces valeurs propres sont définies à partir des valeurs caractéristiques d'un opérateur compact spécifique. Nous proposons un schéma de discrétisation du problème spectral, conduisant à un problème généralisé aux valeurs propres. Le calcul numérique des valeurs propres de plus petite partie réelle est effectué par un algorithme combinant une méthode IRAM (Implicit Restarted Arnoldi Method) et la transformation de Cayley généralisée. Des expériences numériques mettent en évidence la robustesse de l'approche proposée, linéarisation-transpiration, pour la détection d'instabilités de systèmes en interaction fluide-structure.

**Mots-clés :** interaction fluide-structure, linéarisation, transpiration, stabilité linéaire, analyse spectrale, calcul de valeurs propres.

## Abstract

The aim of this work is the linear stability analysis of fluid-structure interaction systems. We have developed a linearization method that allow us to derive mathematically the so-called transpiration interface conditions, and to provide a linear fluid-structure interaction problem involving this kind of interface conditions. This tool has been applied to a "Linearisation Principle" approach. Then, the linear stability problem can be reduced to the analysis of a coupled spectral problem. We prove that its eigenvalues can be obtained as the characteristic values of a specific compact operator. We propose a finite element discretization for this spectral problem leading to a generalised eigenvalue problem. The numerical computation of the smallest real part eigenvalues is performed by combining a IRAM (Implicit Restarted Arnoldi Method) and a generalised Cayley transform. The numerical results point out the robustness of the proposed linearization-transpiration approach for the instabilities detection in fluid-structure interaction systems.

**Keywords:** fluid-structure interaction, linearization, transpiration, linear stability, spectral analysis, eigenvalues computation.



