



HAL
open science

Couplage de méthodes numériques pour les lois de conservation. Application au cas de l'injection.

Martial Mancip

► **To cite this version:**

Martial Mancip. Couplage de méthodes numériques pour les lois de conservation. Application au cas de l'injection.. Mathématiques [math]. INSA de Toulouse, 2001. Français. NNT: . tel-00001960v2

HAL Id: tel-00001960

<https://theses.hal.science/tel-00001960v2>

Submitted on 3 Apr 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Remerciements

Je remercie sincèrement Jean-Paul Vila de m'avoir proposé ce sujet très intéressant et novateur. Il a su me transmettre une partie de son imposant savoir scientifique ; ce document est le résultat de cette fructueuse collaboration.

Je remercie aussi Fabrice Dodu pour m'avoir supporté dans son (notre !) bureau pendant 4 ans, et surtout pour toutes les intéressantes discussions sur les mathématiques que nous avons échangées.

Je tiens aussi à remercier mes proches pour leur soutien dans les moments difficiles.

Le département de Mathématiques de l'INSA possède une excellente ambiance qui a vraiment contribué à ce travail. Je remercie particulièrement notre gentille secrétaire Michelle Ricart, toujours à l'écoute, avec qui j'ai développé des relations d'amitiés.

Enfin je remercie les membres de mon jury pour avoir accepté de discuter de ma thèse et de venir me voir la raconter. Je tiens surtout à faire un petit clin d'oeil à Thierry Gallouët, pour le soutien moral qu'il m'a apporté à chaque fois que nous nous sommes rencontrés.

Merci enfin à Leibniz et Newton sans qui ce document n'existerait surement pas.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Lois de conservation, Problème de Cauchy	12
1.2	Couplage : ce qui a été fait	12
1.3	Plan de la thèse	15
2	Cadre général du couplage	19
2.1	Principe des schémas.	21
2.1.1	Principes des Volumes Finis.	21
2.1.2	Schémas Volumes Finis conservatifs	23
2.2	Couplage	25
2.2.1	Projection $L^2(\Omega)$	25
2.2.2	Algorithme complet et solutions approchées	26
2.2.3	État de l'art	29
3	Convergence de l'algorithme de couplage	39
3.1	Introduction	42
3.1.1	E-schémas Volumes Finis et convergence dans le cas scalaire	42
3.1.2	Estimation d'erreur : énoncé du théorème	46
3.2	Propriétés de l'algorithme	49
3.2.1	Propriétés de la fonction de couplage	50

3.2.2	Stabilité L^∞ et support de la solution faible	53
3.2.3	Estimations H^1 -faible	54
3.2.4	Convergence forte des solutions couplées	62
3.3	Inégalités d'entropie	67
3.3.1	Proposition	67
3.3.2	Partie entropie	69
3.3.3	Partie flux	71
3.3.4	Caractérisation des termes d'erreur	71
3.4	Convergence forte : DiPerna	76
3.4.1	Seconde inégalité d'entropie	76
3.4.2	Inégalité d'entropie sur la solution moyenne	78
3.4.3	Conclusion à la convergence forte	83
3.5	Estimation d'erreur, technique de Kruřkov	83
3.5.1	Mesures	85
3.5.2	Fonction test et propriétés	89
3.5.3	Entropie pour la solution exacte et pour le schéma	91
3.5.4	Estimation d'erreur	93
3.5.5	Estimation du terme source mesure	96
3.6	Conservation	110
3.6.1	Définitions	110
3.6.2	Calcul de l'égalité faible	111
3.6.3	Application à la conservation	112
4	Couplage de deux schémas Volumes Finis	117
4.1	Introduction	119
4.2	Cas 1D : Burgers	121
4.2.1	Équation de Burgers	121

4.2.2	Cas du créneau	123
4.2.3	Schéma numérique	124
4.2.4	Burgers non couplé	125
4.2.5	Burgers couplé	130
4.3	Cas 2D : 2 V.F, maillage déformé	144
4.3.1	Construction de la fonction de couplage	145
4.3.2	Matrice de projection	154
4.3.3	Rappels sur les systèmes hyperboliques et sur le mo- dèle hydrodynamique d'Euler	156
4.3.4	Tube à chocs de Sod	161
4.3.5	Étude du couplage sur un maillage déformé	172
4.4	L'injection avec deux schémas Volumes Finis.	190
4.5	Conclusion du couplage de schémas Volumes Finis	201
5	Couplage d'un Schéma Volumes Finis avec la méthode S.P.H..	203
5.1	Introduction : La méthode SPH	205
5.1.1	Approximation Particulaire des Fonctions	206
5.1.2	Approximation particulaire régularisée	209
5.1.3	Approximation Particulaire d'une Loi de Conservation	211
5.1.4	Algorithme modifié : construction du maillage SPH dé- formé	217
5.1.5	Application au système d'Euler compressible	218
5.2	Résultats Numériques	222
5.2.1	Présentation du SPH : éclatement d'un bulle	222
5.2.2	Calcul du GdR DFG-CNRS : l'injection résolue avec un schéma VF et un schéma SPH	228

6 Conclusion	267
ANNEXE A : Table des figures	271
ANNEXE B : Table des notations	278
Bibliographie	281

Chapitre 1

Introduction

Plan du chapitre

1.1	Lois de conservation, Problème de Cauchy . . .	12
1.2	Couplage : ce qui a été fait	12
1.3	Plan de la thèse	15

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une coopération franco-allemande (DFG-CNRS, voir [EKS⁺98]) entre l'équipe du Pr. D. Kröner (Institut des Mathématiques Appliquées, Université de Fribourg) et celle du Pr. J.P. Vila (Département de Génie Mathématiques et Modélisation, INSA Toulouse). Il s'agissait d'étudier, pour la partie allemande, le refroidissement d'un gaz visqueux - modélisé par les équations de Navier-Stokes. Ce gaz s'échappe de la chambre de refroidissement par un trou centré et forme alors un jet non visqueux - modélisé cette fois-ci par les équations d'Euler - pour venir frapper une cible sur le bord opposé de cette seconde chambre (qui contient un gaz au repos). Ce dispositif (représenté dans la Figure 1.1) permet de déposer de fines particules de semi-conducteurs (transportées dès l'entrée dans la première chambre) sur la cible. On veut donc avoir des informations précises sur la forme et l'intensité du jet lorsqu'il arrive sur la cible.

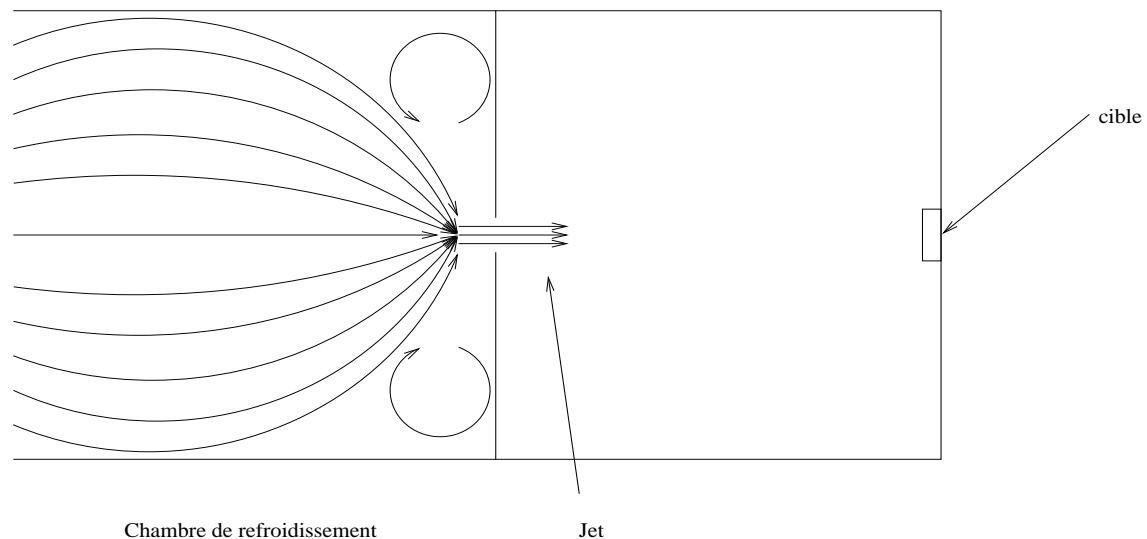


Figure 1.1 – Dispositif du test de l'injection

De plus, on ne sait pas où se situe la frontière définissant la formation du jet. On ne peut donc pas imposer une condition à la limite artificielle entre les

deux codes de calculs. On souhaite utiliser une méthode eulérienne (maillage fixe) dans la première chambre. Une méthode lagrangienne (maillage mobile), appelée méthode SPH (Smooth Particle Hydrodynamics), sera utilisée pour modéliser le jet, depuis sa formation dans la première chambre, jusqu'à ce qu'il atteigne la cible. On a choisi cette méthode car, outre le fait qu'elle soit lagrangienne et donc bien adaptée aux calculs de jet, elle peut aussi être interprétée comme une méthode de Volumes Finis généralisée et perturbée. Cela nous permet de la coupler facilement avec une méthode Volumes Finis standard.

Nous allons donc présenter une nouvelle méthode de couplage de schémas pour les lois de conservation. Les lois de conservation interviennent dans de nombreux problèmes industriels, notamment pour l'hydrodynamique (avec le modèle d'Euler) et l'électromagnétique (modèle de Maxwell). Le couplage de schémas permet non seulement de faire une décomposition de domaines, mais il permet en plus d'utiliser localement des schémas adaptés aux problèmes physiques.

Le principal intérêt de cette méthode de décomposition est qu'elle ne fait pas intervenir de conditions artificielles entre les différents sous-domaines. En effet, on fait se chevaucher les domaines sur une zone déterminée, afin de passer d'une méthode numérique à une autre. C'est ce qu'on appelle le couplage par recouvrement de maillage. L'innovation principale de l'algorithme de couplage que nous présentons dans cette thèse est que la fonction de "passage" que l'on utilise pour ce couplage est une fonction régulière ($\mathcal{C}^1(\Omega)$). On observe un bien meilleur comportement numérique (lors du passage des ondes de chocs sur la zone, par exemple) pour cette méthode de couplage. De plus, nous avons trouvé une démonstration de convergence (et une esti-

mation d'erreur) dans le cas scalaire non linéaire, ce qui n'avait jamais été réalisé pour aucun algorithme de couplage.

Nous allons utiliser des méthodes numériques appelées Volumes Finis, pour calculer les solutions approchées de ces modèles physiques. Nous en donnons les principes dans le chapitre 2. La méthode particulaire SPH (qui représente bien les écoulements de type jet) peut être interprétée comme la généralisation d'une méthode de Volumes Finis. Il est donc facile d'adapter l'algorithme de couplage pour la méthode SPH, purement lagrangienne, en reconstruisant le maillage initial (qui se déforme à chaque pas de temps).

Les méthodes de couplage par recouvrement de domaine existent depuis de nombreuses années ([Sta77], [Kre83], [BD83] et récemment [PS94]), mais posaient un problème de conservation et de stabilité aux limites des sous-domaines. En effet les lois de conservation génèrent des chocs (discontinuités des grandeurs physiques) qui ne se propageaient pas convenablement en traversant la zone de couplage. L'algorithme présenté ici supprime ces problèmes. Il s'appuie sur une fonction de couplage permettant de faire communiquer les deux méthodes numériques en passant régulièrement de l'une à l'autre. Une autre innovation est que le couplage ne se fait plus à l'aide d'interpolations non conservatives, mais il utilise la même projection que celle des schémas numériques, donc conservative.

On montrera la convergence de l'algorithme de couplage et surtout, on estimera l'erreur commise (la démonstration est similaire à celle des deux schémas volumes finis utilisés dans les différents sous-domaines). Enfin, on étudiera numériquement le couplage de deux méthodes de Volumes Finis, puis celui d'une méthode V.F. avec la méthode particulaire SPH (voir pour plus de détails le chapitre 5).

1.1 Lois de conservation, Problème de Cauchy

Les lois de conservation forment un problème instationnaire aux dérivées partielles qui est de type hyperbolique. On sait que cette propriété introduit des phénomènes de choc et de détente, même si la condition initiale est très régulière. Dans le cas scalaire, par exemple, la solution u d'un tel modèle vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(F(u)) = 0 & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (1.1)$$

où la jacobienne du flux F est diagonalisable et à valeurs propres réelles.

Afin de supprimer les problèmes de conditions aux limites du domaine de calcul dans les démonstrations théoriques, on supposera que la condition initiale est à support compact dans \mathbb{R}^d

$$K_0 = \operatorname{supp}(u_0) \subsetneq \mathbb{R}^d.$$

On sait alors que la solution à chaque instant est aussi à support compact en espace. En effet, la vitesse de propagation de celle-ci est finie. Cette simplification ne réduit que la taille des démonstrations. On peut en effet les étendre facilement dans le cas d'un domaine borné, en introduisant des conditions aux limites classiques (voir [BCV95]).

1.2 Couplage : ce qui a été fait

Les algorithmes de couplage de méthodes numériques pour l'hydrodynamique existent depuis une vingtaine d'années (voir Kreiss [Kre83], Starius [Sta77], Steger [BD83] et pour l'adaptation à Euler [BS85]). Il existe trois branches principales de développement :

- la décomposition de domaine (appelée "grid patching"), où les différents sous-domaines forment une partition sans superposition du domaine de

- calcul ; on doit alors trouver des conditions aux limites adéquates,
- les grilles adaptatives (“grid adapting”) qui soit basées sur la recherche des forts gradients (discontinuités) de la solution approchée, avec l’aide de techniques variationnelles ; on cherche alors à remailler plus finement dans ces zones, ou bien en encastrant localement un maillage fin,
 - enfin (celles que nous étudions ici) les superpositions de maillages (“grid embedding” ou “overlapping methods”).

Ces dernières méthodes sont basées sur une superposition de maillages pour lesquelles on distingue (dans la bibliographie, voir [Pär95]) différents types de mailles : les mailles internes (celles où l’on effectue seulement un schéma numérique) et les mailles d’interpolation. Ces dernières servant à transmettre les solutions approchées en créant des conditions aux limites de chacun des sous-domaines par interpolation des données.

Ces méthodes posent des problèmes de stabilité (voir Starius [Sta80] et Pärt-Enander et Sjögreen [PS94]) et de conservativité ([Ber87]).

L’interpolation, qui permet d’échanger les informations entre les deux schémas, n’était effectuée que sur une zone locale au bord du domaine de couplage. On pouvait donc l’interpréter comme une condition à la limite des bords de la zone de couplage. Un premier problème se pose : que ce passe-t-il lorsqu’une onde de choc (une discontinuité de la solution) traverse la frontière de la zone de couplage ? Cela pose des problèmes importants. Des perturbations numériques précèdent alors l’onde de choc ou elle peut être complètement stoppée dans cette zone d’interpolation.

Notre algorithme de couplage apporte donc deux améliorations majeures aux précédentes méthodes :

- Il n’y a plus d’interpolation, mais une projection de la solution appro-

chée. On utilise le même produit scalaire L^2 que dans la formulation volumes finis.

- Le couplage ne se fait plus localement sur le bord du domaine, mais continument dans toute la zone de couplage, à l'aide d'une fonction définie plus loin (en (2.8)). Cela redonne son caractère volumique à l'algorithme de couplage.

1.3 Plan de la thèse

Dans le chapitre 2, nous rappellerons les notions de base des schémas Volumes Finis. Puis nous définirons l'algorithme de couplage que nous étudierons théoriquement pour deux schémas Volumes Finis. On rappellera ensuite les différentes méthodes décrites dans la bibliographie. Enfin, nous introduirons le système d'équations d'Euler pour l'hydrodynamique. C'est le principal modèle que nous utiliserons pour les tests numériques.

Dans le chapitre 3, on s'intéressera au cas scalaire et à l'algorithme de couplage associé à deux méthodes de Volumes Finis (pour des E-schémas). On montrera notamment que cette algorithme converge fortement sous les conditions CFL habituelles aux Volumes Finis. On donnera plus précisément une estimation en $h^{1/4}$ de l'erreur commise par cet algorithme. On démontrera aussi que l'erreur totale de conservation de l'algorithme est de l'ordre de \sqrt{h} .

Ensuite, dans le chapitre 4, on appliquera l'algorithme à deux problèmes tests des volumes finis : le problème scalaire de Burgers en une dimension d'espace (le flux est alors quadratique) et le problème du tube à choc de Sod pour le système d'équations d'Euler. Pour ces deux problèmes simples, on connaît la solution exacte. On pourra donc comparer les valeurs calculées avec les valeurs exactes et conforter le résultat de convergence de la solution approchée vers la solution exacte, lorsque les pas d'espace et de temps tendent vers 0. Ensuite, on reprendra un cas de couplage sur un domaine quelconque, pour une onde de choc très lente ; introduit par Eva Pärt-Enander dans sa thèse [Pär95], pour le comparer à ces résultats. Enfin, on appliquera la méthode de couplage dans le cas de la formation du jet qui rentre sous pression par un trou dans une chambre contenant un gaz au repos (cas

DFG-CNRS). Il s'agit donc de calculer précisément une condition d'entrée de type injection, sans introduire de condition à la limite explicite, comme celles définies par Bardos, Le Roux et Nedelec dans [BLN79].

Enfin, dans le chapitre 5, nous présenterons la méthode particulaire SPH pour refaire le calcul de l'injection (DFG-CNRS). Cette fois-ci, le jet est modélisé avec la méthode particulaire. On place donc un maillage VF fixe dans la chambre de gauche. On veut que le schéma qui s'appliquera sur ce maillage soit couplé avec le schéma particulaire sur une zone en retrait du trou (voir la Figure 1.2). C'est plus complexe à réaliser qu'avec des Volumes Finis car le maillage est Lagrangien (et se déforme au cours du temps). Mais on peut interpréter les schémas particuliers comme des schémas Volumes Finis. Notre méthode numérique est donc en accord avec la convergence théorique. Ainsi, les particules modélisent correctement le mécanisme de formation du jet, le but final étant d'observer l'élargissement du jet ainsi créé.

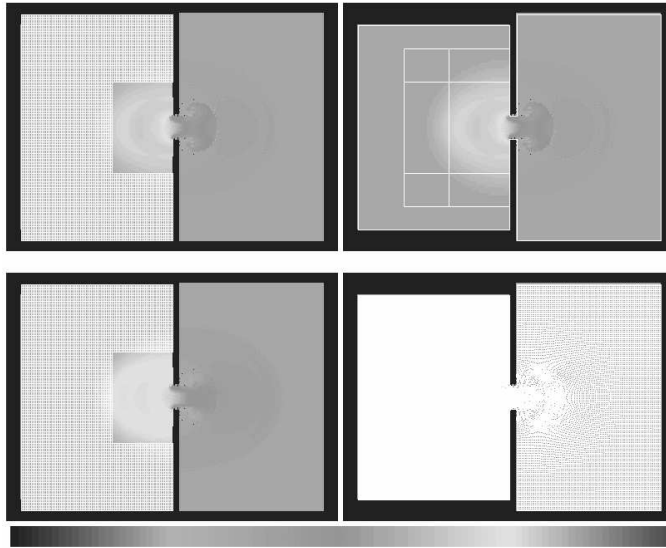


Figure 1.2 – Formation du jet : couplage appliqué au cas DFG-CNRS

Chapitre 2

Cadre général du couplage

Plan du chapitre

2.1	Principe des schémas.	21
2.1.1	Principes des Volumes Finis.	21
	Maillages en espace et en temps.	22
	Approximation moyenne de la solution.	22
2.1.2	Schémas Volumes Finis conservatifs	23
2.2	Couplage	25
2.2.1	Projection $L^2(\Omega)$	25
2.2.2	Algorithme complet et solutions approchées	26
2.2.3	État de l'art	29
	Les méthodes existantes	29
	Pourquoi faire du couplage?	30
	Le couplage par superposition	31

2.1 Principe des schémas.

Le problème de Cauchy (1.1) représente un système d'équations non linéaires (par exemple le système d'Euler). Mais on ne sait étudier la convergence des schémas numériques adéquats que dans le cas où la variable u est une variable scalaire. On va malgré tout présenter la méthode des Volumes Finis dans le cadre système, car on l'utilisera pour le système d'Euler.

2.1.1 Principes des Volumes Finis.

Les méthodes numériques associées aux lois de conservation sont basées sur les échanges de matière aux travers des arêtes séparant les points de discrétisation.

On définit donc deux sous-domaines (notés Ω_1 et Ω_2) du domaine complet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ qui se recouvrent sur une zone (que l'on appellera zone de couplage) notée Ω_{12} . Ils sont donc tels que :

$$\begin{aligned}\Omega_1 \cup \Omega_2 &= \Omega, \\ \Omega_1 \cap \Omega_2 &= \Omega_{12} \neq \emptyset.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Cette zone de couplage Ω_{12} doit surtout être de mesure non nulle (voir non négligeable par rapport au support de la condition initiale K_0).

Sur ces deux sous-domaines, on utilise des maillages quelconques de type Éléments Finis. On ne peut pas avoir l'un des noeuds d'une maille à l'intérieur de l'une des arêtes d'une autre maille. De plus, la triangulation n'est pas dégénérée (aucun triangle n'est aplati).

Maillages en espace et en temps.

Soient \mathcal{T}_{h_1} et \mathcal{T}_{h_2} ces deux triangulations. On définit alors les pas de discrétisation en espace de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(h_1)^d &= \max_{\mathcal{C} \in \mathcal{T}_{h_1}} (\text{mes}(\mathcal{C})) , \\ (h_2)^d &= \max_{\mathcal{D} \in \mathcal{T}_{h_2}} (\text{mes}(\mathcal{D})) .\end{aligned}$$

Enfin, on introduit la discrétisation en temps. Le pas de temps est noté : $k^n = t^{n+1} - t^n$. Et on résout le problème jusqu'au temps final T . Soit donc t^{n^T} , le dernier instant calculé par le schéma.

avec

$$k^+ = \sup_{n \leq n^T} k^n$$

On présente maintenant l'approximation de la solution, moyennée sur chacune des mailles :

Approximation moyenne de la solution.

La solution approchée représente une approximation de la solution, moyennée sur chacune des mailles :

$$\begin{cases} u_{1\mathcal{C}}^n \simeq \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} u(x, t^n) dx , \\ u_{1\mathcal{C}}^0 = \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} u_0(x) dx , \end{cases}$$

sur le maillage 1 et

$$\begin{cases} u_{2\mathcal{D}}^n \simeq \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} u(x, t^n) dx , \\ u_{2\mathcal{D}}^0 = \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} u_0(x) dx , \end{cases}$$

sur le maillage 2. C'est la forme de ces approximations qui nous a poussé à utiliser une projection du même type au lieu d'une interpolation ponctuelle pour effectuer le couplage.

La discrétisation de l'opérateur temporelle étant simplement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{u_{i\mathcal{C}}^{n+1} - u_{i\mathcal{C}}^n}{k^n},$$

ces notations nous donnent la solution approchée classique de ces schémas Volumes Finis :

$$u_{h_l}(x, t) = \sum_{\mathcal{C} \in \overline{\mathcal{T}}_{h_l}, n \geq 0} u_{i\mathcal{C}}^n \chi_{\mathcal{C}}(x) \chi_{[t^n, t^{n+1}[}(t). \quad (2.2)$$

où la fonction $\chi_{\mathcal{C}}(x)$ représente la fonction indicatrice (1 ou 0) de la maille \mathcal{C} et $\chi_{[t^n, t^{n+1}[}(t)$, celle de l'intervalle de temps. Il reste à décrire la discrétisation du problème de Cauchy (1.1), dans le cadre des schémas conservatifs à trois points.

2.1.2 Schémas Volumes Finis conservatifs

Entre chaque maille, on définit la normale $\vec{n}_{e,\mathcal{C}}$ sortante de la manière suivante (voir figure 2.1) :

$$\forall x_l \in \mathcal{C}(e, l), \forall x_r \in \mathcal{C}(e, r), \quad (2.3)$$

$$(\overrightarrow{x_l x_r}, \vec{n}_{e,\mathcal{C}}) \geq 0.$$

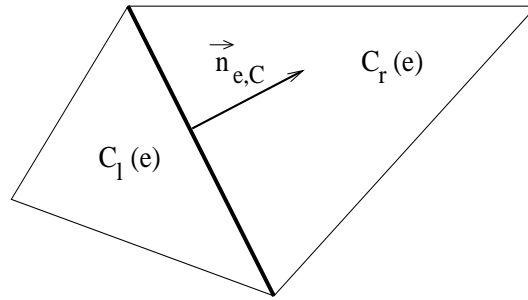


Figure 2.1 – Définition de la normale

Sur chacun des maillages, on utilise une approximation des échanges de matière entre les facettes des mailles, que l'on appelle flux numérique. On

recompose la moyenne des échanges d'une maille par rapport à ses voisines en effectuant une combinaison convexe sur toute sa frontière.

La solution approchée du schéma Volumes Finis numéro 'l' ($l = 1, 2$) est obtenue au temps t^{n+1} de la manière suivante; $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{T}_{h_l}$:

$$\begin{aligned} u_{l\mathcal{C}}^{n+1,e} &= u_{l\mathcal{C}}^n - \lambda_{l\mathcal{C}}^n \left(g_l \left(\vec{n}_{e,\mathcal{C}}, u_{l\mathcal{C}(e,l)}^n, u_{l\mathcal{C}(e,r)}^n \right) - F(u_{l\mathcal{C}}^n) \cdot \vec{n}_{e,\mathcal{C}} \right), \\ u_{l\mathcal{C}}^{n+1} &= \sum_{e \subseteq \partial \mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} u_{l\mathcal{C}}^{n+1,e}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{avec } \lambda_{l\mathcal{C}}^n = \frac{k^n \text{mes}(\partial \mathcal{C})}{\text{mes}(\mathcal{C})} \quad \forall \mathcal{C} \in \mathcal{T}_{h_l}.$$

Cette écriture du schéma permet de le voir comme une combinaison convexe de schémas en une dimension, dans la direction orthogonale à chaque arête de la maille. En fait, le terme de flux $F(u_{l\mathcal{C}}^n) \cdot \vec{n}_{e,\mathcal{C}}$ n'est pas implémenté dans les codes de calculs car il se simplifie dans la somme sur les arêtes :

$$\sum_{e \subseteq \partial \mathcal{C}} \text{mes}(e) \vec{n}_{e,\mathcal{C}} = 0.$$

En une dimension d'espace, cela nous donne, pour toute maille i notée $\mathcal{C}_i \in \mathcal{T}_{h_l}$:

$$\begin{aligned} u_{l\mathcal{C}_i}^{n+1} &= u_{l\mathcal{C}_i}^n - \frac{k^n}{\text{mes}(\mathcal{C}_i)} \left(g_l \left(\vec{n}_{i-1/2,\mathcal{C}_i}, u_{l\mathcal{C}_{i-1}}^n, u_{l\mathcal{C}_i}^n \right) + g_l \left(\vec{n}_{i+1/2,\mathcal{C}_i}, u_{l\mathcal{C}_i}^n, u_{l\mathcal{C}_{i+1}}^n \right) \right) \\ &= u_{l\mathcal{C}_i}^n - \frac{k^n}{\text{mes}(\mathcal{C}_i)} \left(g_l \left(u_{l\mathcal{C}_i}^n, u_{l\mathcal{C}_{i+1}}^n \right) - g_l \left(u_{l\mathcal{C}_{i-1}}^n, u_{l\mathcal{C}_i}^n \right) \right). \end{aligned}$$

La fonction g_l est appelée flux numérique du schéma et vérifie :

$$\begin{aligned} g_l(\vec{n}, u, u) &= F(u) \cdot \vec{n}, \\ g_l(\vec{n}, u, v) &= -g_l(-\vec{n}, v, u). \end{aligned}$$

De plus, on suppose que c'est une fonction Lipschitzienne continue. Nous venons d'introduire ici les schémas conservatifs à trois points.

2.2 Couplage

2.2.1 Projection $L^2(\Omega)$

Définition 2.2.1 On peut définir la projection $L^2(\Omega)$ sur l'espace $\mathcal{P}_0(\mathcal{T}_{h_i})$ des fonctions constantes par maille sur le maillage \mathcal{T}_{h_i} . Pour tout $x \in \Omega$, pour toute fonction $f \in L^2(\Omega)$:

$$\Pi_i(f)(x) = \sum_{\substack{c \in \mathcal{T}_{h_i}, \\ x \in c}} \frac{\chi_c(x)}{\text{mes}(c)} \int_c f(y) dy. \quad (2.5)$$

On remarque de suite que cette formule est tout à fait similaire à la construction de la solution approchée donnée par les Volumes Finis.

Notation : Si l'on récrit cette projection pour nos solutions approchées constantes par morceau $\forall v_1 \in P_0(\mathcal{T}_1)$ et $\forall v_2 \in P_0(\mathcal{T}_2)$

$$\begin{aligned} \Pi_{12}(v_1^n)_D &= \sum_{\substack{c \in \mathcal{T}_{h_1}, \\ \mathcal{D} \cap c \neq \emptyset}} \mu_{c,D}^{12} v_{1c}^n, \\ \Pi_{21}(v_2^n)_c &= \sum_{\substack{\mathcal{D} \in \mathcal{T}_{h_2}, \\ \mathcal{D} \cap c \neq \emptyset}} \mu_{\mathcal{D},c}^{21} v_{2\mathcal{D}}^n. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mu_{c,D}^{12} &= \frac{\text{mes}(\mathcal{D} \cap c)}{\text{mes}(\mathcal{D})}, \\ \mu_{\mathcal{D},c}^{21} &= \frac{\text{mes}(\mathcal{D} \cap c)}{\text{mes}(c)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

On forme ainsi une combinaison convexe, en effet :

$$\sum_{c \in \mathcal{T}_{h_1}} \text{mes}(\mathcal{D} \cap c) = \text{mes}(\mathcal{D}).$$

La projection ainsi définie vérifie donc une propriété très importante, concernant la conservation de la masse :

$$\int_{\Omega_{12}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{T}_{h_2}} \Pi_{12}(v_1^n) \chi_{\mathcal{D}}(x) dx = \int_{\Omega_{12}} \sum_{c \in \mathcal{T}_{h_1}} v_{1c}^n \chi_c(x).$$

On dit alors qu'elle est conservative.

2.2.2 Algorithme complet et solutions approchées

A partir de ce point, on a considéré que le domaine Ω est découpé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 qui possèdent une intersection non vide Ω_{12} .

On définit la fonction de couplage $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ à l'aide d'une fonction que l'on prolonge par continuité à tout Ω de la façon suivante :

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_1 \setminus \Omega_{12}, \\ 0 \leq \alpha(x) \leq 1 & \text{si } x \in \Omega_{12}, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_2 \setminus \Omega_{12}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Une représentation possible de cette fonction α est donnée dans la figure 2.2.

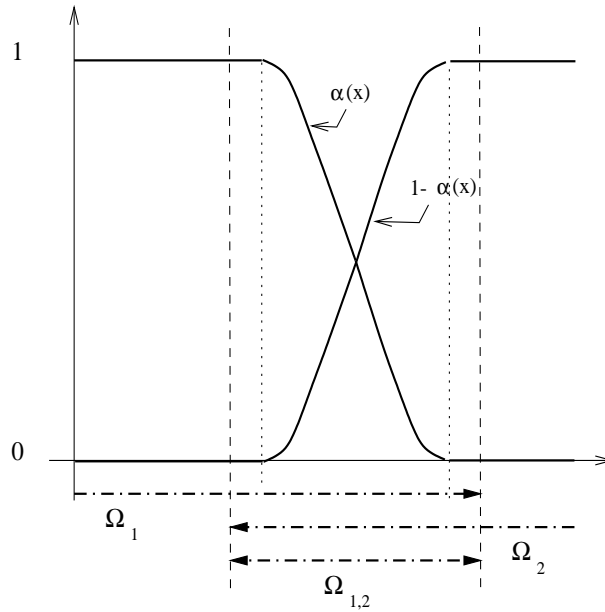


Figure 2.2 – Fonction de couplage

On définit les deux sous-domaines (vitaux pour la convergence) de Ω où la fonction de couplage vaut vraiment :

$$\begin{aligned} \Omega_{12}^{\alpha=0} &= \{x \in \Omega_{12}, \alpha(x) = 0\} \\ \Omega_{12}^{\alpha=1} &= \{x \in \Omega_{12}, \alpha(x) = 1\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

On approche alors cette fonction de couplage de la même manière que pour les Volumes Finis :

$$\alpha_{\mathcal{C}} = \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \alpha(x) dx = \Pi_1(\alpha)_{\mathcal{C}},$$

$$\alpha_{\mathcal{D}} = \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} \alpha(x) dx = \Pi_1(\alpha)_{\mathcal{D}}.$$

On a alors

$$\alpha_{\mathcal{C}}, \alpha_{\mathcal{D}} \in [0, 1] \quad (2.10)$$

Le principe global de l'algorithme est le suivant : on part des solutions approchées à un instant t^n donné. On utilise les deux schémas numériques séparément (opération que l'on note alors respectivement S_1 et S_2), puis on effectue la correction par le couplage (projection Π_{21} et Π_{12}), pour obtenir les solutions à l'instant suivant t^{n+1} . On a représenté schématiquement ces étapes dans la figure 2.3.

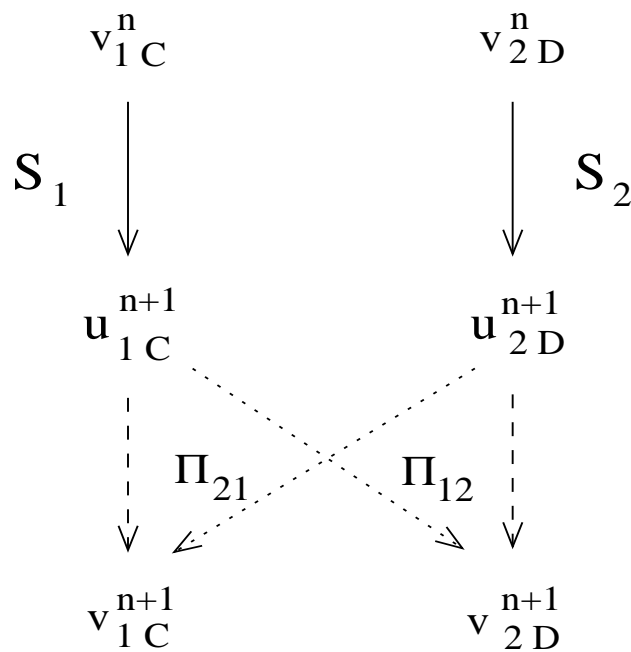


Figure 2.3 – Algorithme global : schémas puis projections

Dans cette figure, les étapes S_1 et S_2 correspondent aux deux schémas numériques et les étapes Π_{12} et Π_{21} représentent les projections et le couplage.

L'algorithme de couplage définit deux nouvelles suites $(v_{1\mathcal{C}})_n$ et $(v_{2\mathcal{D}})_n$ qui sont données par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1\mathcal{C}}^{n+1} = \alpha_{\mathcal{C}} u_{1\mathcal{C}}^{n+1} + (1 - \alpha_{\mathcal{C}}) \Pi_{21} (u_2^{n+1})_{\mathcal{C}} \\ \quad = \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{C})} v_{1\mathcal{E}}^{n+1}, \\ v_{2\mathcal{D}}^{n+1} = (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) u_{2\mathcal{D}}^{n+1} + \alpha_{\mathcal{D}} \Pi_{12} (u_1^{n+1})_{\mathcal{D}} \\ \quad = \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{D})} v_{2\mathcal{E}}^{n+1}. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

avec

$$\begin{aligned} v_{1\mathcal{E}}^{n+1} &= \alpha_{\mathcal{C}} u_{1\mathcal{C}}^{n+1} + (1 - \alpha_{\mathcal{C}}) u_{2\mathcal{D}}^{n+1}, \\ v_{2\mathcal{E}}^{n+1} &= \alpha_{\mathcal{D}} u_{1\mathcal{C}}^{n+1} + (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) u_{2\mathcal{D}}^{n+1}. \end{aligned}$$

On remarque ici que l'on a implicitement construit le maillages des intersections \mathcal{E} des mailles \mathcal{C} du maillages 1 et \mathcal{D} du maillage 2, dans la zone de couplage. Ce nouveau maillage est un outil essentiel pour la démonstration de convergence et la construction numérique de l'algorithme.

On peut donc définir deux solutions approchées au sens des Volumes Finis sur Ω_1 (respectivement Ω_2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{h_1}(x, t) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{T}_{h_1, n}} v_{1\mathcal{C}}^n \chi_{\mathcal{C}}(x) \chi_{[t^n, t^{n+1}[}(t), \\ v_{h_2}(x, t) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{T}_{h_2, n}} v_{2\mathcal{D}}^n \chi_{\mathcal{D}}(x) \chi_{[t^n, t^{n+1}[}(t). \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Et on utilisera aussi les solutions approchées "intermédiaires" suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{h_1}(x, t) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{T}_{h_1, n}} u_{1\mathcal{C}}^n \chi_{\mathcal{C}}(x) \chi_{[t^n, t^{n+1}[}(t), \\ u_{h_2}(x, t) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{T}_{h_2, n}} u_{2\mathcal{D}}^n \chi_{\mathcal{D}}(x) \chi_{[t^n, t^{n+1}[}(t). \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Enfin, on définit la solution approchée moyennée :

$$u_h^\alpha(x, t) = \alpha(x) v_{h_1}(x, t) + (1 - \alpha(x)) v_{h_2}(x, t) . \quad (2.14)$$

On va démontrer dans le Chapitre 3 que cette dernière solution approchée converge vers la solution faible entropique.

2.2.3 État de l’art

Les méthodes existantes

Comme nous l’avons expliqué en introduction, le couplage de schéma se fait actuellement à partir de trois idées directrices différentes :

- Les grilles par morceau (ou “grid patching” - voir [Rub82] et [Rai84]) : les deux sous-domaines disjoints avec un bord commun. On observe des irrégularités aux coins et aux bords. Cela implique la modification des schémas initiaux pour calculer correctement les flux ou le rajout d’une condition à la limite. De plus on doit avoir la certitude que la limite du couplage ne voit pas de choc la traverser au cours du calcul.
- L’adaptation du maillage (ou “grid adapting”) : avec les forts gradients de la solution. On n’a pas besoin ici de savoir à l’avance où se trouvent les forts gradients pour mettre un maillage fin dessus. Ils sont recherchés par l’algorithme. Le remaillage est calculé soit par des techniques variationnelles pour faire évoluer une zone fine, soit par des encastréments de maillages fins.
- La couplage par superposition de domaine. Les grilles sont fixées par superposition - enchâssées (voir [Att82]) : On fait alors de l’interpolation aux deux bords externes de la zone de couplage.

Pourquoi faire du couplage ?

Lorsque l'on parle de couplage de schéma numérique (et plus généralement de décomposition de domaine), on cherche à créer une méthode numérique la plus transparente possible par rapport à un calcul sur tout le domaine. Elle doit aussi être plus efficace (en raffinant localement le calcul, là où les problèmes numériques surviennent habituellement) et surtout indépendante des schémas utilisés. C'est-à-dire que l'on ne veut pas avoir à modifier le code du calculateur. On voudrait simplement avoir à rajouter une partie couplage, indépendante des schémas, qui permettrait de faire plusieurs couplages, en fonction de la complexité du problème physique étudié. Enfin, on demande à la méthode de permettre de coupler aisément plusieurs schémas résolvant plusieurs modèles physiques (comme c'est le cas dans cette thèse, avec le modèle de Navier-Stokes et celui d'Euler).

On voit immédiatement que les méthodes de décomposition de domaines influencent les schémas (on doit modifier explicitement les conditions aux limites des sous-domaines). L'utilisation des grilles adaptatives implique elles aussi la modification des schémas (par la recherche des forts gradients et le remaillage local) et ne permet pas directement de modéliser différents problèmes physiques.

C'est pour ces raisons que nous étudierons l'algorithme présenté dans la partie précédente de ce chapitre. Il appartient à la troisième catégorie de méthode de couplage (par superposition de maillage) et répond effectivement à toutes les caractéristiques que l'on vient de citer.

Le couplage par superposition

Pour l'implémentation dans un code de calcul, J.A. Benek , P.G. Buning et J.L. Steger (dans [BS85]) introduisent une hiérarchisation naturelle (selon leur raffinement) des maillages superposés. Ils soulignent l'importance du choix de l'interpolation (voir [BD83] pour le traitement par des séries de Taylor), surtout dans le cas où des ondes de chocs traversent les bords de la zone de couplage. Dans [Ber87], Berger généralise l'interpolation pour les lois de conservation. Ils montrent que l'interpolation bi-linéaire 2D est plus efficace que le développement de Taylor lorsque les dérivées d'ordres élevées de la solution sont peu importantes. Ils utilisent l'interpolation trilinéaire :

$$\phi = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\zeta + a_5\xi\eta + a_6\xi\zeta + a_7\eta\zeta + a_8\xi\eta\zeta$$

où $0 < (\xi, \eta, \zeta) < 1$ représente les coordonnées du point où il faut interpoler et les coefficients $(a_i)_{i=1,8}$ dépendent des valeurs de la fonction à interpoler. On voit bien ici que la solution recherchée est supposée régulière.

J.A. Benek , P.G. Buning et J.L. Steger concluent en expliquant que la superposition de maillage permet une bonne adaptation à l'introduction de frontières, au raffinement sélectif de maillage et à l'utilisation de plusieurs modèles physiques. Mais ils se sont aperçus que leur schéma (et pas le couplage en général!!) a besoin de plus d'effets visqueux sur les mailles d'interpolation.

Afin de développer l'explication des méthodes existantes, on a besoin de quelques notations en une dimension d'espace. La zone de couplage en 1D peut être :

$$\begin{aligned}\Omega_1 \cup \Omega_2 &=]-\infty, b] \cup [c, \infty[= \Omega, \\ \Omega_1 \cap \Omega_2 &= \Omega_{12} = [c, b] \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Le nombre de points d'interpolation dans cette zone est

$$|\Omega_{12}| h_1 = N$$

$$|\Omega_{12}| h_2 = P.$$

Et on peut poser les points de grille :

$$y_{j+\frac{1}{2}} = b - (N - j) h_1 \in \Omega_1 \cap \Omega_{12}, \quad j = 0..N,$$

$$x_{j-\frac{1}{2}} = c + j h_2 \in \Omega_2 \cap \Omega_{12}, \quad j = 0..P.$$

Alors les interfaces de couplages sont en

$$\begin{aligned} c &= x_{-\frac{1}{2}} = y_{q-\frac{1}{2}} + d_1 \\ &= y_{q+\frac{1}{2}} - (h_1 - d_1), \\ b &= y_{N+\frac{1}{2}} = x_{p+\frac{1}{2}} - d_2 \\ &= x_{p-\frac{1}{2}} + (h_2 - d_2), \end{aligned}$$

où q désigne la dernière maille du maillage 1 avant l'interface et p désigne la première maille du maillage 2 après l'interface.

Le décalage à gauche des grilles est alors

$$d_1 = \frac{x_{-\frac{1}{2}} - y_q}{h_1}$$

Parmi les différentes méthodes de couplage par superposition existantes, on distingue trois directions de recherche :

1. Interpolation par les valeurs limites (ou "normal")

$$v_{20}^{n+1} = (1 - d_1) u_{1q}^{n+1} + d_1 u_{1q+1}^{n+1}$$

2. Interpolation des flux (donné par Berger)

$$g_2(u_{2-1}^{n+1}, u_{20}^{n+1}) = (1 - d_1) g_1(u_{1q-1}^{n+1}, u_{1q}^{n+1}) + d_1 g_1(u_{1q}^{n+1}, u_{1q+1}^{n+1})$$

3. La troisième est appelée Reconstruction-Intégration par E. Pärt-Enander et B. Sjögreen dans [PS94]. On utilise alors une interpolation normale d'ordre 2, avec limitateur de pente :

$$v_{20}^n = \frac{1}{h_2} \int_{\mathcal{D}_0} v_1^n(x) dx,$$

$$\text{où } \mathcal{D}_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

avec

$$v_1^n(x) = \sum_j \left[v_{1j}^n + \frac{s_{1j}^n}{h_1} (x - x_j) \right] \chi_{\mathcal{C}_j \cap \mathcal{D}_0}(x).$$

s_{1j}^n est le limitateur :

$$s_{1j}^n = \begin{cases} \min(\Delta_- v_{1j}^n, \Delta_+ v_{1j}^n) & \text{si } \Delta_- v_{1j}^n \times \Delta_+ v_{1j}^n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quelle que soit la méthode d'interpolation utilisée, on prend la solution approchée :

$$v_h(x, t) = \sum_{\substack{\mathcal{C} \in \mathcal{T}_{h_1} \\ \mathcal{C} \cap \Omega_{12} = \emptyset, n}} v_{1\mathcal{C}}^n \chi_{\mathcal{C}}(x) \chi_{[t^n, t^{n+1}[}(t) + \sum_n v_{1\mathcal{C}_q}^n \chi_{\mathcal{C}_q = [y_{q-\frac{1}{2}}, x_0]}(x) \chi_{[t^n, t^{n+1}[}(t) + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{T}_{h_2, n}} v_{2\mathcal{D}}^n \chi_{\mathcal{D}}(x) \chi_{[t^n, t^{n+1}[}(t).$$

qui privilégie le maillage 2. La fonction de couplage qui n'est pas explicitement donnée est alors un saut :

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.15)$$

On s'intéresse à la conservation de ces algorithmes : avec cette solution approchée, la masse totale de l'algorithme est à chaque instant :

$$\begin{aligned} I^n &= \int_{\Omega} v_h(x, t^n) = \sum_{\substack{\mathcal{C} \in \mathcal{T}_{h_1} \\ \mathcal{C} \cap \Omega_{12} = \emptyset}} |\mathcal{C}| v_{1\mathcal{C}}^n + \left| \left[x_{-\frac{1}{2}} - y_{q-\frac{1}{2}} \right] \right| v_{1\mathcal{C}_q}^n + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{T}_{h_2, n}} |\mathcal{D}| v_{2\mathcal{D}}^n \\ &= \sum_{\substack{\mathcal{C} \in \mathcal{T}_{h_1} \\ \mathcal{C} \cap \Omega_{12} = \emptyset}} h_1 v_{1\mathcal{C}}^n + d_1 v_{1\mathcal{C}_q}^n + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{T}_{h_2, n}} h_2 v_{2\mathcal{D}}^n \end{aligned}$$

Alors l'erreur de conservation entre deux pas de temps est :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{k^n} (I^{n+1} - I^n) \\
= & \sum_{\substack{\mathcal{C} \in \mathcal{T}_{h_1} \\ \mathcal{C} \cap \Omega_{12} = \emptyset}} \left[(g_1(u_{1\mathcal{C}}^n, u_{1\mathcal{C}+1}^n) - g_1(u_{1\mathcal{C}-1}^n, u_{1\mathcal{C}}^n)) \right. \\
& \left. + \frac{d_1}{h_1} (g_1(u_{1\mathcal{C}_q}^n, u_{1\mathcal{C}_q+1}^n) - g_1(u_{1\mathcal{C}_q-1}^n, u_{1\mathcal{C}_q}^n)) \right] \\
& + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{T}_{h_2, n}} \left[(g_2(u_{2\mathcal{D}}^n, u_{2\mathcal{D}+1}^n) - g_2(u_{2\mathcal{D}-1}^n, u_{2\mathcal{D}}^n)) \right. \\
& \left. + (g_2(u_{2\mathcal{D}_0-1}^n, u_{2\mathcal{D}_0}^n) - \tilde{g}_2(u_{2\mathcal{D}_0-1}^n, u_{2\mathcal{D}_0}^n)) \right] \\
= & \left[\left(1 - \frac{d_1}{h_1}\right) g_1(u_{1\mathcal{C}_q-1}^n, u_{1\mathcal{C}_q}^n) + \frac{d_1}{h_1} g_1(u_{1\mathcal{C}_q}^n, u_{1\mathcal{C}_q+1}^n) \right] - \tilde{g}_2(u_{2\mathcal{D}_0-1}^n, u_{2\mathcal{D}_0}^n).
\end{aligned}$$

Donc $I^{n+1} = I^n$ si et seulement si

$$\tilde{g}_2(u_{2\mathcal{D}_0-1}^n, u_{2\mathcal{D}_0}^n) = \left(1 - \frac{d_1}{h_1}\right) g_1(u_{1\mathcal{C}_q-1}^n, u_{1\mathcal{C}_q}^n) + \frac{d_1}{h_1} g_1(u_{1\mathcal{C}_q}^n, u_{1\mathcal{C}_q+1}^n).$$

C'est donc l'interpolation des flux de Berger qui est la seule interpolation conservative, avec la définition précédente de la solution approchée.

La troisième méthode de couplage est équivalente à imposer les flux suivant aux limites du couplage :

$$u_{2\mathcal{D}_0}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}_0}^n = -k^n (\tilde{g}_2(u_{2\mathcal{D}_0}^n, u_{2\mathcal{D}_1}^n) - \tilde{g}_2(u_{2\mathcal{D}_0-1}^n, u_{2\mathcal{D}_0}^n))$$

et pour les autres mailles :

$$u_{2\mathcal{D}_1}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}_1}^n = -k^n (g_2(u_{2\mathcal{D}_1}^n, u_{2\mathcal{D}_2}^n) - g_2(u_{2\mathcal{D}_0}^n, u_{2\mathcal{D}_1}^n)), \text{ etc ...}$$

où le flux interpolé $\tilde{g}_2(u_{2\mathcal{D}_0-1}^n, u_{2\mathcal{D}_0}^n)$ est celui de Berger et où le second flux $\tilde{g}_2(u_{2\mathcal{D}_0}^n, u_{2\mathcal{D}_1}^n)$ interpolé correspond à la même interpolation des flux de Berger, mais sur l'arête $x_{\frac{1}{2}}$, avec les mailles du maillage 1 autour y_{q+s} (on pose $m = q + s$)

$$\tilde{g}_2(u_{2\mathcal{D}_0}^n, u_{2\mathcal{D}_1}^n) = \left(1 - \frac{d_4}{h_1}\right) g_1(u_{1\mathcal{C}_{m-1}}^n, u_{1\mathcal{C}_m}^n) + \frac{d_4}{h_1} g_1(u_{1\mathcal{C}_m}^n, u_{1\mathcal{C}_{m+1}}^n)$$

avec le décalage :

$$d_4 = d_1 + h_2 - s h_1$$

L'erreur de conservation est alors de l'ordre de

$$k^n (g_2 (u_{2\mathcal{D}_0}^n, u_{2\mathcal{D}_1}^n) - \tilde{g}_2 (u_{2\mathcal{D}_0}^n, u_{2\mathcal{D}_1}^n)).$$

Elle ne converge pas forcément.

Différents tests effectués par E. Pärt-Enander et B. Sjögreen sur l'équation Burgers avec une condition initiale sinusoïdale, montrent que la méthode conservative n'est pas stable, contrairement à la méthode d'interpolation normale. Et ceci même avec une méthode d'ordre 2 pour le schéma (ENO). De plus, l'analyse de stabilité GKS (Gustaffson-Kreis-Sundström) montre elle aussi que la méthode d'interpolation des flux n'est pas stable. Ils ont plus particulièrement étudié deux difficultés rencontrées dans les calculs d'aérodynamisme :

1. Le passage d'un choc lent au travers d'une interface de couplage par interpolation (même conservative).
2. L'interpolation conservative n'est pas stable. On doit lui rajouter de la viscosité (ou un filtre lissant) pour ne pas diverger.

On décrit trois types de passage d'un choc au travers une zone de couplage :

1. le passage d'une seule ligne de choc, confondue sur les deux maillages (le bon calcul),
2. le décalage des deux chocs - le choc créé sur le maillage d'arrivée est retardé - le retard des deux ondes est constant - les deux ondes respectent la vitesse théorique (solution acceptable)
3. et enfin la nouvelle onde créée ne décolle pas de l'interface et l'onde ne passe donc pas la zone de couplage (solution inadmissible).

Donc si deux chocs sont créés, alors on est soit dans le cas 2, soit dans le cas 3.

D'après les auteurs, la seule méthode correcte des trois méthodes énoncées à la page 32 pour les conditions initiales données ci-dessus est la méthode de Reconstruction-Intégration. Malheureusement, on doit rajouter des filtres lissant pour garantir la stabilité de la méthode, contrairement à la méthode que nous présentons, qui est inconditionnellement stable dans le cas scalaire.

Chapitre 3

Convergence de l'algorithme de couplage

Plan du chapitre

3.1	Introduction	42
3.1.1	E-schémas Volumes Finis et convergence dans le cas scalaire	42
	Définition des E-schémas	42
	Convergence des E-schémas	44
3.1.2	Estimation d'erreur : énoncé du théorème	46
3.2	Propriétés de l'algorithme	49
3.2.1	Propriétés de la fonction de couplage	50
3.2.2	Stabilité L^∞ et support de la solution faible	53
3.2.3	Estimations H^1 -faible	54
	Inégalité d'entropie discrète d'un E-schéma	54
	Proposition H^1 faible (ou H^1 discrète)	55
	Preuve de la proposition	56
3.2.4	Convergence forte des solutions couplées	62
3.3	Inégalités d'entropie	67
3.3.1	Proposition	67
3.3.2	Partie entropie	69
3.3.3	Partie flux	71
3.3.4	Caractérisation des termes d'erreur	71
	Majoration du terme source	73
	Majoration des termes d'erreur classiques des Volumes Finis	75
3.4	Convergence forte : DiPerna	76
3.4.1	Seconde inégalité d'entropie	76
3.4.2	Inégalité d'entropie sur la solution moyenne	78
	Inégalité double	78
	Majoration de l'erreur de couplage	78
	Contrôle de l'erreur sur les flux	81
	Inégalité sur la solution moyenne	81
3.4.3	Conclusion à la convergence forte	83
3.5	Estimation d'erreur, technique de Kružkov	83
3.5.1	Mesures	85
	Mesures classiques des schémas Volumes Finis	85
	Mesures dues au couplage	87
3.5.2	Fonction test et propriétés	89
3.5.3	Entropie pour la solution exacte et pour le schéma	91
3.5.4	Estimation d'erreur	93
	Retour à une seule variable d'espace	93
	Erreur sur la condition initiale	95
	Conclusion	95
3.5.5	Estimation du terme source mesure	96
	Termes volumes finis	98

Second terme source	106
Troisième terme source : mesure des approxima- tions des Volumes Finis et de la condi- tion initiale	107
Quatrième terme source : mesure des erreurs de couplage	107
3.6 Conservation	110
3.6.1 Définitions	110
3.6.2 Calcul de l'égalité faible	111
3.6.3 Application à la conservation	112

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter la démonstration de convergence de l'algorithme de couplage introduit au chapitre précédent, dans le cas scalaire, et pour les schémas Volumes Finis de type E-schémas. On donnera ensuite un majorant de la somme des erreurs de conservation à chaque pas de temps. On montrera ainsi que cette somme tend vers 0 avec les pas d'espace.

Tout d'abord, rappelons les notions de base concernant les schémas de la classe des E-schémas. On rappellera ensuite les résultats de la littérature sur la convergence de ces schémas. Enfin, on énoncera le théorème donnant l'estimation de l'erreur de l'algorithme de couplage et on donnera les étapes principales de sa démonstration.

3.1.1 E-schémas Volumes Finis et convergence dans le cas scalaire

Définition des E-schémas

A présent, voici quelques définitions nécessaires à la démonstration de convergence des Volumes Finis, dans le cadre d'une loi de conservation scalaire.

On a tout d'abord le coefficient d'incrémentation numérique $C(\vec{n}, u, v)$ du schéma défini par Harten ([HH83]) et sa viscosité numérique $Q(\vec{n}, u, v)$:

$$\begin{aligned} C(\vec{n}, u, v) &= \frac{F(u) \cdot \vec{n} - g(\vec{n}, u, v)}{v - u}, \\ Q(\vec{n}, u, v) &= \frac{F(v) \cdot \vec{n} - 2g(u, v) + F(u) \cdot \vec{n}}{v - u}. \end{aligned}$$

Alors on pose les notations suivantes sur le schéma numéro l ($l = 1, 2$) :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad C_{l,e,\mathcal{C}}^n &= C_l \left(\vec{n}_{e,\mathcal{C}}, v_{l\mathcal{C}_l(e)}^n, v_{l\mathcal{C}_r(e)}^n \right), \\ \text{(ii)} \quad Q_{l,e,\mathcal{C}}^n &= Q_l \left(\vec{n}_{e,\mathcal{C}}, v_{l\mathcal{C}_l(e)}^n, v_{l\mathcal{C}_r(e)}^n \right), \\ \text{(iii)} \quad \Delta_{e,\mathcal{C}}^{ln}(v) &= v_{l\mathcal{C}_r(e)}^n - v_{l\mathcal{C}_l(e)}^n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

On écrit la solution élémentaire 1D (par rapport à la normale $\vec{n}_{e,c}$) du schéma numérique l :

$$W_l(\vec{n}, \lambda, u, v) = u - \lambda (g_l(\vec{n}, u, v) - F(u) \cdot \vec{n}) ,$$

pour pouvoir l'encadrer avec les valeurs initiales u et v du problème de Riemann correspondant.

L'algorithme de couplage que nous avons présenté au chapitre précédent est utilisable avec n'importe quel schéma conservatif à trois points. Par contre, pour démontrer la convergence, nous nous appuyerons sur une famille de ces schémas appelés E-schémas. On sait (voir Benharbit, Chalabi, Vila [BCV95]) que si le schéma numérique Volumes Finis g_l appartient à de la classe des E-schémas définis par Osher (voir aussi Tadmor [Tad84]), alors il vérifie les propriétés suivantes :

- la viscosité numérique Q_l (défini en (3.1)) du schéma vérifie une condition de type CFL :

$$0 \leq Q_l(\vec{n}, u, v) \leq \frac{1}{\lambda} . \quad (3.2)$$

Et la solution élémentaire du $W_l(\vec{n}, \lambda, u, v)$ est encadrée par u et v :

$$W_l(\vec{n}, \lambda, u, v) = \theta(\vec{n}, u, v) u + (1 - \theta(\vec{n}, u, v)) v , \quad (3.3)$$

où $0 \leq \theta(\vec{n}, u, v) \leq 1$. C'est le principe du maximum (local) qui est énoncé ici.

- La viscosité numérique est encadrée par celle du schéma de Godunov et celle du schéma de Lax-Friedricks (qui est par définition constante) :

$$Q^G(\vec{n}, u, v) \leq Q(\vec{n}, u, v) \leq Q^{LF}(\vec{n}, u, v) .$$

- Enfin, le flux numérique du schéma s'exprime comme une combinaison convexe des flux de Godunov et de Lax-Friedricks :

$$g_l(\vec{n}, u, v) = \theta(\vec{n}, u, v) g^G(\vec{n}, u, v) + (1 - \theta(\vec{n}, u, v)) g^{LF}(\vec{n}, u, v) . \quad (3.4)$$

Convergence des E-schémas

N.S. Kružkov [Kru70] a en premier démontré l'unicité de la solution faible entropique du problème (1.1) - dans le cas scalaire et pour un domaine non borné. Cette solution vérifie l'inégalité suivante : $\forall \varphi \in C^1(\mathbb{D})$, avec $\mathbb{D} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$,

$$\int_{\mathbb{D}} \left[\eta(u(x, t)) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) + H_\eta(u(x, t)) \vec{\nabla}_x(\varphi(x, t)) \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \geq 0 , \quad (3.5)$$

pour toute fonction d'entropie η (fonction convexe régulière quelconque) et pour tout $k \in \mathbb{R}$, avec $\eta(u) = |u - k|$.

On peut toujours associer un flux d'entropie H_η à cette entropie η :

$$H'_\eta(u) = \eta'(u) F'(u) . \quad (3.6)$$

L'unique solution de l'inégalité d'entropie (3.5) est la solution que l'on caractérise grâce aux schémas volumes finis. C'est en plus elle qui possède le plus grand sens physique, dans la résolution du système d'Euler, car c'est la seule à vérifier le second principe de la thermodynamique.

Ensuite, Kuznetsov et Volosin (dans [KV76]) ont utilisé le même type de démonstration pour l'appliquer cette fois-ci à la convergence des schémas numériques de type Différences Finies dans le cas d'une seule dimension d'espace. Le premier résultat sur la convergence des méthodes de Différences Finies en dimension quelconque est celui de A.Y. Le Roux dans [Le 79] (pour

les schémas de Godunov et Lax-Friedricks). On peut aussi citer les travaux ultérieurs de Crandall et Majda, pour les schémas monotones dans [CM80] et ceux de Tadmor (dans [Tad84]) pour la convergence des E-schémas.

On va maintenant introduire la notion de solutions mesures entropiques, ou solution à valeurs mesures (définies par DiPerna dans [Dip85]). Une solution à valeur mesure ν du problème hyperbolique scalaire (1.1) est tout d'abord une mesure de Young. C'est une application de \mathcal{Q} vers les probabilités de \mathbb{R} ; $\nu : (x, t) \rightarrow \langle \nu_{xt}, \bullet \rangle$, dont toutes les représentations par des fonctions continues $a \in C(\mathbb{R})$, notées $\langle \nu_{xt}, a \rangle = \int_{\mathbb{R}} a(\lambda) d\nu_{xt}(\lambda)$, sont bornées (l'application $(x, t) \rightarrow \langle \nu_{xt}, a \rangle$ est dans $L^\infty(\mathcal{Q})$). On a posé ici une notation simplifiée pour les intégrations :

$$\begin{cases} \mathcal{Q} = \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{Q}_1 = \Omega_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{Q}_2 = \Omega_2 \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (3.7)$$

De plus, cette mesure de Young doit vérifier l'inégalité suivante pour être une solution mesure, $\forall \varphi \in C_c^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{+*})$, $\forall k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}} \left\{ \langle \nu_{xt}, |\lambda - k| \rangle \partial_t \varphi(x, t) + \langle \nu_{xt}, H_k(\lambda) \rangle \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) \right\} dx dt \\ + \int_{\Omega} |u_0(x) - k| \varphi(x, 0) dx \geq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Cette définition a permis à DiPerna d'énoncer son théorème sur l'unicité des solutions mesures entropiques (voir [Dip85]). Mais c'est à Szepessy (dans [Sze89a]) que l'on doit l'idée d'utiliser cette solution à valeurs mesures (voir aussi [Sze89b] et [Sze91]) pour montrer la convergence forte de schémas. Il l'a utilisée pour des schémas de type Eléments Finis. Pour la convergence des schémas Volumes Finis, Champier et Gallouët (dans [CG92]) étendent leur résultat à la convergence d'un schéma décentré, sur un maillage triangulaire. Champier, Gallouët et Herbin (dans [CG93]) énoncent la proposition suivante :

Proposition 3.1.1 *On suppose que l'on calcule une solution approchée u_h du problème (1.1), uniformément bornée et vérifiant l'inégalité suivante :*
pour toute fonction convexe η et $\forall \varphi \in C_c^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{+})$*

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{Q}} \eta(u_h)(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\ & - \int_{\mathcal{Q}} H_\eta(u_h(x, t)) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \\ & - \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \leq R_h(u_h, \varphi), \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec l'erreur $R_h(u_h, \varphi)$ tendant vers 0 avec le pas d'espace h .

Alors il existe une sous-suite $\{u_{h_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ (encore notée u_h , par la suite) telle que pour toute fonction g , continue dans \mathbb{R} , on a la convergence $g(u_h) \xrightarrow{*} \mu_g$ dans $L^\infty(\mathcal{Q})$ faible étoile.

Cette limite permet d'écrire : $\forall \varphi \in C_c^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{+*}), \forall k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Q}} \left\{ \mu_{|I_d-k|} \partial_t \varphi(x, t) + \mu_{H_k} \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) \right\} dx dt \\ & + \int_{\Omega} \mu_{|I_d-k|} \varphi(x, 0) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De plus, cette assertion suffit pour montrer la convergence L^p (pour $1 \leq p < \infty$) de la solution approchée u_h , lorsque h tend vers 0.

Enfin, les premiers résultats d'estimation d'erreur sont arrivés plus tard avec J.P. Vila ([Vil94]) et l'article de Cockburn, Coquel et LeFloch ([CCL94]). Ces résultats montrent que l'on estime la norme L^1 de l'erreur entre la solution entropique exacte et la solution approchée calculée par le schéma en $h^{1/4}$.

3.1.2 Estimation d'erreur : énoncé du théorème

On utilise la norme $L^1(\Omega \times [O, T])$ pour démontrer la convergence forte lorsque le pas d'espace $h = \max(h_1, h_2, h_{12})$ converge vers 0 et quand on a les relations suivantes en ce pas d'espace h et le pas de temps. On définit les

pas de temps minimal et maximal :

$$k^- = \inf_{n \leq n^T} k^n, \quad (3.11)$$

$$k^+ = \sup_{n \leq n^T} k^n. \quad (3.12)$$

On utilise aussi les notations concernant les pas d'espace :

$$\begin{cases} h_e^- = \min_{l,r} \left(\frac{\text{mes}(\mathcal{C}_l(e))}{\text{mes}(\partial\mathcal{C}_l)}, \frac{\text{mes}(\mathcal{C}_r(e))}{\text{mes}(\partial\mathcal{C}_r(e))} \right), \\ h_e^+ = \max_{l,r} \left(\frac{\text{mes}(\mathcal{C}_l(e))}{\text{mes}(\partial\mathcal{C}_l)}, \frac{\text{mes}(\mathcal{C}_r(e))}{\text{mes}(\partial\mathcal{C}_r(e))} \right), \\ \lambda_{1,e}^n = \frac{k^n}{h_e^+}. \end{cases} \quad (3.13)$$

On doit ensuite avoir une majoration sur le pas de temps

$$\sup_n \left(\sqrt{k^n} + \frac{\max(h_1, h_2)}{\sqrt{k^n}} \right) \leq C \sqrt{h_1 + h_2}.$$

Nous allons alors démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1.2 *Estimation de l'erreur de l'algorithme de couplage.*

Si les viscosités numériques des deux schémas utilisés vérifient les conditions C.F.L. suivantes :

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{|u|, |v| \leq \|u_0\|_\infty \\ e \in \mathcal{S}_{h_1}}} \frac{k^+}{h_e^-} |Q_{1,e,C}(\vec{n}, u, v)| &\leq 1 - \varepsilon_1, \\ \sup_{\substack{|u|, |v| \leq \|u_0\|_\infty \\ e \in \mathcal{S}_{h_2}}} \frac{k^+}{h_e^-} |Q_{2,e,D}(\vec{n}, u, v)| &\leq 1 - \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

on obtient l'estimation d'erreur sur la solution approchée moyennée définie en (2.14) :

$$\begin{aligned} &\|u - u_h^\alpha\|_{L^1(\Omega \times [0, T])} \\ &\leq C \left(\|u_0\|_{L^\infty}, \|u_0\|_{BV}, |\Omega|, T, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty}, \|\alpha\|_{C^1}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right) h^{1/4}. \end{aligned}$$

On remarque que la condition CFL donnée dans ce théorème est plus stricte que la condition CFL donnée en (3.2). Nous allons faire cette démonstration en cinq étapes, toutes très classiques dans les démonstrations

de convergences des schémas Volumes Finis. Le couplage ajoutera des erreurs supplémentaires que l'on exhibera.

1. On démontre (voir la proposition 3.2.2) tout d'abord que l'algorithme est stable : si la condition initiale de la loi de conservation étudiée est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et sous les conditions CFL (3.14), alors les deux solutions approchées u_{h_i} et v_{h_i} sont bornées.
2. Ensuite, nous prouverons que si la valeur initiale est bornée ($u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$) et avec les conditions CFL sur les deux schémas 1 et 2, alors on contrôle plusieurs normes discrètes H^1 faibles de l'algorithme total. On établit ainsi, dans la proposition 3.2.3, des contrôles H^1 discrets des termes de flux (ce qui est classique) et de couplage (la nouveauté) de l'algorithme. Nous utiliserons ces contrôles discrets sur le couplage pour montrer que les deux solutions approchées v_{h_1} et v_{h_2} convergent fortement l'une vers l'autre dans $L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \sqrt{\alpha(1-\alpha)} dx)$. Dans cette mesure, la fonction α est la fonction de couplage de l'algorithme.
3. Puis on introduit dans la proposition 3.3.1 deux inégalités faibles entropiques. Enfin, on effectue la combinaison convexe du couplage sur ces inégalités d'entropie et on arrive à l'inégalité d'entropie (3.9), sur la solution approchée moyennée u_h^α , avec le terme d'erreur $R_h(u_h^\alpha, \varphi)$ majoré par :

$$R_h(u_h^\alpha, \varphi) \leq C \left(\|\eta'(u_0)\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi\|_{C^1}, \|\alpha\|_{C^1}, \|u_0\|_\infty, \|u_0\|_{BV}, |\Omega_1|, |\Omega_2|, T, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right) h^{1/2}. \quad (3.15)$$

Les termes d'erreurs de couplage sont contrôlés grâce à la convergence forte des deux solutions approchées (définies dans (2.12)), dans la zone de couplage (voir la proposition 3.2.5), et grâce à l'hypothèse de ré-

gularité C^1 de la fonction de couplage. Dans la suite, on utilisera les notations suivantes sur l'approximation de type Volumes Finis de la fonction test :

$$\begin{cases} \varphi_{\mathcal{K}}^n = \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} \varphi(x, t^n) dx, \\ \varphi_e^n = \frac{1}{\text{mes}(e) k^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e \varphi(x, t) d\sigma(x) dt, \\ \Delta_{\mathcal{K},e}^n(\varphi) = \varphi_{\mathcal{K}}^n - \varphi_e^n. \end{cases} \quad (3.16)$$

On appliquera alors plusieurs fois la majoration suivante, pour estimer les erreurs : pour toute fonction $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^d)$, pour toute maille $\mathcal{C} \in \mathcal{T}_h$ et pour tout point $x_{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} ,

$$\begin{aligned} |\varphi_{\mathcal{C}} - \varphi(x_{\mathcal{C}})| &\leq \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_{\mathcal{C}} + sx) \right| |x - x_{\mathcal{C}}| ds dx \\ &\leq h \times \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_{\mathcal{C}} + sx) \right| ds dx \leq C(\|\varphi\|_{C^1}) h. \end{aligned}$$

On voit bien ici l'importance de la régularité des fonctions utilisées.

4. En utilisant alors la proposition 3.1.1, on arrive à la convergence forte de l'algorithme.
5. Enfin, en estimant précisément les termes d'erreurs induits par la proposition 3.3.1, on arrive à la démonstration du théorème 3.1.2.

On montrera dans la dernière partie de cette section la majoration suivante sur l'erreur de conservation :

$$E_{\mathcal{C}}^n = \left| \int_{\Omega} u_h^{\alpha}(x, t^n) dx - \int_{\Omega} u_0(x) dx \right| \leq C h^{1/2}$$

3.2 Propriétés de l'algorithme

Dans cette partie, nous démontrons la stabilité $L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ de l'algorithme de couplage. Ensuite, nous proposerons un contrôle H^1 -faible sur l'algorithme. On retrouve l'estimation de la démonstration de convergence des

volumes finis. On rajoute un contrôle du même type sur l'erreur de couplage. Enfin, l'algorithme de couplage nous garantit la convergence forte au sens L^1 des solutions approchées entre elles, avec la mesure $\sqrt{\alpha(1-\alpha)}(x) dx$. Nous le démontrerons.

3.2.1 Propriétés de la fonction de couplage

L'algorithme de couplage que nous présentons ici est essentiellement basé sur la notion de fonction de couplage. Cette fonction était déjà intrinsèquement présente dans les différentes méthodes présentes dans la bibliographie (voir, pour la méthode d'interpolation, la définition 2.15), mais elles n'étaient pas régulières à la frontière de la zone de couplage. L'originalité de notre algorithme est que la fonction de couplage doit être très régulière : $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^d)$. Cette régularité nous permet de démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *Pour toute fonction $\alpha \leq 1$ dans $C^1(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\alpha(1-\alpha) \leq 1$$

et si l'on pose pour toute maille du maillage des intersections $\mathcal{E} = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$

$$\overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}} = \sup_{x \in \mathcal{E}} \{\alpha(1-\alpha)(x)\} . \quad (3.17)$$

Alors on a simplement, dans la zone de couplage Ω_{12} , pour C positive et $\forall x \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \alpha(1-\alpha)(x) &\leq \sqrt{\alpha(1-\alpha)(x)} \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha(x)(1-\alpha(x)) &\leq \overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}} . \end{aligned}$$

Et on a aussi les majorations suivantes sur le gradient de la fonction, toujours

dans la zone de couplage $\Omega_{12} : \forall x \in \mathcal{E}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| \leq C \sqrt{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}, \\ \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| (1-\alpha_c) \leq C \sqrt{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}, \\ \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| \alpha(x_{\mathcal{E}}) \leq C \sqrt{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}, \\ \alpha_{\mathcal{D}} \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| \leq C \sqrt{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}. \end{array} \right.$$

Démonstration On note $\Omega_{12}^{\alpha=0}$ la zone de Ω_{12} telle que $\alpha(x) = 0$ et $\Omega_{12}^{\alpha=1}$ la zone de Ω_{12} telle que $\alpha(x) = 1$.

Tout d'abord, on a $\forall x \in \mathcal{E}$

$$\alpha \leq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| (1-\alpha_c) \leq \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right|, \\ \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| \alpha(x_{\mathcal{E}}) \leq \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right|, \\ \alpha_{\mathcal{D}} \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| \leq \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right|. \end{array} \right.$$

Donc il suffit de démontrer que $\forall x \in \mathcal{E}$

$$\left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| \leq C \sqrt{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}, \quad (3.18)$$

pour conclure la démonstration de ce lemme. On voit que l'on a un problème près des zones où le terme $\sqrt{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}$ décroît vers 0. Dans la zone où il vaut vraiment 0 (ie dans $\Omega \setminus \Omega_{12} \cup \Omega_{12}^{\alpha=0} \cup \Omega_{12}^{\alpha=1}$ - voir (2.9)), le gradient $\left| \vec{\nabla}_x \alpha(1-\alpha) \right|(x)$ est également nul. Enfin dans le reste de Ω_{12} (c'est-à-dire loin des bords $\{\partial\Omega_{12}^{\alpha=0} \cup \partial\Omega_{12}^{\alpha=1}\} \setminus \partial\Omega_{12}$), il n'y a pas de problème car on majore facilement

$$\left| \vec{\nabla}_x \alpha \right|(x) \leq C \sqrt{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}.$$

Montrons donc que cette majoration est vérifiée près de $\Omega_{12}^{\alpha=0}$ et de $\Omega_{12}^{\alpha=1}$.

Alors, en posant par exemple, pour tout x dans $\Omega_{12} \setminus \{\Omega_{12}^{\alpha=0} \cup \Omega_{12}^{\alpha=1}\}$ et au voisinage du bord $\partial\Omega_{12}^{\alpha=0}$:

$$h = |x - x_0|, \text{ avec } x_0 \in \partial\Omega_{12}^{\alpha=0},$$

on a les développements limités suivants :

– Développement limité de la fonction $\alpha(1 - \alpha)(x)$ au voisinage de x_0 :

La fonction de couplage α étant régulière et constante sur les zones $\Omega_{12}^{\alpha=0}$ et $\Omega_{12}^{\alpha=1}$, il existe au moins un ordre de dérivation n à partir de laquelle la différentielle $D^n(\alpha(1 - \alpha))(x_0)^n$ est non nulle :

$$\begin{aligned} \alpha(1 - \alpha)(x) &= \sum_{k=0, n} \frac{h^k}{k!} D^k(\alpha(1 - \alpha))(x_0)^k + \mathcal{O}(h^{n+1}) \\ &= h^n \left[\frac{1}{n!} D^n(\alpha(1 - \alpha))(x_0)^n + \mathcal{O}(h) \right], \end{aligned}$$

où la notation $(x_0)^k$ désigne le k -uplet (x_0, \dots, x_0) . En particulier, si la fonction α est seulement continument dérivable dans Ω , la fonction $\alpha(1 - \alpha)$ est nulle et sa différentielle première est nulle en x_0 .

– Développement limité de la fonction $\vec{\nabla}_x(\alpha(1 - \alpha))(x)$ au voisinage de x_0 . Avec les mêmes hypothèses sur la régularité de α :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_x(\alpha(1 - \alpha))(x) &= \sum_{k=1, n} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} D^k(\alpha(1 - \alpha))(x_0)^k + \mathcal{O}(h^n) \\ &= h^{n-1} \left[\frac{1}{(n-1)!} D^n(\alpha(1 - \alpha))(x_0)^n + \mathcal{O}(h) \right]. \end{aligned}$$

On sait donc contrôler le terme :

$$\begin{aligned} &\frac{|\vec{\nabla}_x(\alpha(1 - \alpha))(x)|}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)(x)}} \\ &= \frac{h^{n-1} \left| \frac{1}{(n-1)!} D^n(\alpha(1 - \alpha))(x_0)^n + \mathcal{O}(h) \right|}{h^{\frac{n}{2}} \sqrt{\left[\frac{1}{n!} D^n(\alpha(1 - \alpha))(x_0)^n + \mathcal{O}(h) \right]}} \\ &\leq C h^{\frac{n}{2}-1}, \end{aligned}$$

si l'ordre de régularité n est supérieur à 2.

La fonction α doit donc être continument dérivable.

Et, comme le gradient $\vec{\nabla}_x(\alpha(1 - \alpha))$ donne

$$\vec{\nabla}_x(\alpha(1 - \alpha))(x) = (1 - 2\alpha(x)) \vec{\nabla}_x \alpha(x),$$

on obtient ainsi

$$\frac{|\vec{\nabla}_x \alpha(x)|}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)(x)}} = \frac{1}{|1-2\alpha(x)|} \frac{|\vec{\nabla}_x(\alpha(1-\alpha))(x)|}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)(x)}} < \frac{C}{|1-2\alpha(x)|}$$

Comme dans les voisinages de $\Omega_{12}^{\alpha=0}$ et de $\Omega_{12}^{\alpha=1}$ qui nous intéressent, on est loin de $\alpha(x) = 1/2$, et l'on a :

$$\frac{C}{|1-2\alpha(x)|} < C.$$

Il reste ainsi :

$$\frac{|\vec{\nabla}_x \alpha(x)|}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)(x)}} \leq C.$$

On a ainsi démontré que $\forall x \in \mathcal{E}$

$$|\vec{\nabla}_x \alpha(x)| \leq \sqrt{\alpha(1-\alpha)(x)} \leq \overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}},$$

ce qui conclut la preuve de ce lemme. ■

3.2.2 Stabilité L^∞ et support de la solution faible

Proposition 3.2.2 *Si la condition initiale de la loi de conservation étudiée est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et si les deux schémas vérifient les conditions CFL (3.14), alors u_{h_l} et v_{h_l} sont bornés ($l = 1, 2$) :*

$$\begin{aligned} \|u_{h_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &< C \|u_0\|_{L^\infty}, \\ \|v_{h_l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &< D \|u_0\|_{L^\infty}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

De plus, si la condition initiale u_0 a son support

$$K_0 \subset \mathcal{B}(0, R) \quad (3.20)$$

compact sur \mathbb{R}^d . Enfin, on a :

$$\begin{cases} \text{supp}(u_{h_l}) \subset \text{supp}(u) & = \bigcup_t K_t \times \{t\}, \\ \text{supp}(v_{h_l}) \subset \text{supp}(u) & \text{et } \text{supp}(u_h^\alpha) \subset \text{supp}(u). \end{cases} \quad (3.21)$$

Comme le support K_t de $u(\cdot, t)$, pour un temps t donné, est compact et inclus dans la boule $\mathcal{B}(0, R + \omega t)$, en posant :

$$\omega = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (|F'(x)|) ,$$

on a aussi le support de u compact.

Démonstration On sait que sous les conditions CFL (3.14), les E-schémas forment une combinaison convexe de la solution approchée à chaque pas de temps (voir (3.3)). Ils conservent donc la stabilité $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Or l'algorithme de couplage que nous présentons est aussi une combinaison convexe (voir (2.11)). Le résultat est donc immédiat. ■

3.2.3 Estimations H^1 -faible

Inégalité d'entropie discrète d'un E-schéma

Les inégalités d'entropies sur les E-schémas 1 et 2 donnent u^{n+1} en fonction de v^n . Ainsi, comme le montrent Benharbit, Chalabi et Vila dans la proposition 3.3 de [BCV95] pour l'entropie spécifique $\eta = \cdot^2$ (fonction mise au carré), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{e \subseteq \partial \mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} (u_{1\mathcal{C}}^{n+1,e})^2 - (v_{1\mathcal{C}}^n)^2 \\ + \sum_{e \subseteq \partial \mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} \lambda_{1,\mathcal{C}}^n h_{\cdot}^{\frac{1}{2}} (\vec{n}_{e,\mathcal{C}}, v_{1\mathcal{C}_l(e)}^n, v_{1\mathcal{C}_r(e)}^n) \\ \leq -\frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{e \subseteq \partial \mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} \lambda_{1,\mathcal{C}}^{n,2} (C_{1,e,\mathcal{C}}^n)^2 |\Delta_{e,\mathcal{C}}^{1n}(v)|^2 , \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (3.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{e \subseteq \partial \mathcal{D}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{D})} (u_{2\mathcal{D}}^{n+1,e})^2 - (v_{2\mathcal{D}}^n)^2 \\ + \sum_{e \subseteq \partial \mathcal{D}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{D})} \lambda_{2,\mathcal{D}}^n h_{\cdot}^{\frac{1}{2}} (\vec{n}_{e,\mathcal{D}}, v_{2\mathcal{D}_l(e)}^n, v_{2\mathcal{D}_r(e)}^n) \\ \leq -\frac{\varepsilon_2}{2} \sum_{e \subseteq \partial \mathcal{D}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{D})} \lambda_{2,\mathcal{D}}^{n,2} (C_{2,e,\mathcal{D}}^n)^2 |\Delta_{e,\mathcal{D}}^{2n}(v)|^2 , \end{array} \right.$$

avec la définition de $\lambda_{1,\mathcal{C}}^n = \frac{k^n \text{mes}(\partial\mathcal{C})}{\text{mes}(\mathcal{C})}$.

On a posé ici le flux numérique d'entropie $h_{\cdot 2}^l$ associé à l'entropie carré et au flux numérique g_l . Si l'on reprend les notations de la définition (3.4), on a :

$$h_{\cdot 2}^l(\vec{n}, u, v) = \theta^l(\vec{n}, u, v) h_{\cdot 2}^G(\vec{n}, u, v) + (1 - \theta^l(\vec{n}, u, v)) h_{\cdot 2}^{LF}(\vec{n}, u, v) .$$

Proposition H^1 faible (ou H^1 discrète)

Les normes H^1 discrètes que l'on tire de l'algorithme de couplage, pour l'entropie choisie précédemment, sont les suivantes :

- Les deux premières correspondent à l'erreur entre les solutions approchées sur chaque maillage (définies dans (2.12)) et celles construites sur le maillage mixte (définies dans (2.11)) :

$$\begin{aligned} T_{1\mathcal{E}} &= \sum_{\substack{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D} \\ 0 < n \leq n^T}} \text{mes}(\mathcal{E}) \alpha_{\mathcal{C}} (v_{1\mathcal{E}}^{n+1} - v_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2 , \\ T_{2\mathcal{E}} &= \sum_{\substack{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D} \\ 0 < n \leq n^T}} \text{mes}(\mathcal{E}) (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) (v_{2\mathcal{E}}^{n+1} - v_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 . \end{aligned} \quad (3.23)$$

- Les normes suivantes sont les normes classiques appelées BV-faibles, que l'on retrouve dans les démonstrations Volumes Finis pour traiter l'erreur sur le flux :

$$\begin{aligned} T_1^{\varepsilon_1} &= \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{\substack{\mathcal{C} \\ 0 < n \leq n^T}} \text{mes}(\mathcal{C}) \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} \lambda_{1,\mathcal{C}}^{n,2} (C_{1,e,\mathcal{C}}^n)^2 |\Delta_{e,\mathcal{C}}^{1n}(v)|^2 , \\ T_2^{\varepsilon_2} &= \frac{\varepsilon_2}{2} \sum_{\substack{\mathcal{D} \\ 0 < n \leq n^T}} \text{mes}(\mathcal{D}) \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{D})} \lambda_{2,\mathcal{D}}^{n,2} (C_{2,e,\mathcal{D}}^n)^2 |\Delta_{e,\mathcal{D}}^{2n}(v)|^2 . \end{aligned} \quad (3.24)$$

- Enfin la dernière norme intervient directement sur l'erreur de couplage :

$$T_{\text{couplée}}^{Proj} = \sum_{\substack{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D} \\ 0 < n \leq n^T}} \text{mes}(\mathcal{E}) \overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}} \cdot (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 , \quad (3.25)$$

avec la définition (3.17) de $\overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}$. C'est le contrôle de cette nouvelle norme qui entraîne la convergence du couplage.

Avec ces notations, on montre la proposition suivante :

Proposition 3.2.3 *Si la valeur initiale est bornée ($u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$) et avec les conditions CFL sur les deux schémas 1 et 2, alors ces normes sont majorées par une constante :*

$$\begin{aligned} & T_{1\mathcal{E}} + T_{2\mathcal{E}} + T_1^{\varepsilon_1} + T_2^{\varepsilon_2} + T_{\text{couplée}}^{\text{Proj}} \\ & \leq C^{H^1} \left(|\Omega|, \|u_0\|_\infty, T, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_\infty \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Preuve de la proposition

On utilise tout d'abord une égalité liée aux combinaisons convexes, donnée dans le lemme suivant :

Lemme 3.2.4 *Soit une combinaison convexe*

$$u = \sum_i \alpha_i u_i,$$

avec

$$\sum_i \alpha_i = 1.$$

On a alors la relation

$$u^2 = \sum_i \alpha_i (u_i)^2 - \sum_i \alpha_i (u - u_i)^2. \quad (3.27)$$

Pour la formule 2.11 de v_{h_1} , l'inégalité (3.27) entraîne :

$$\begin{aligned} (v_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2 &= \left(\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{C})} v_{1\mathcal{E}}^{n+1} \right)^2 \\ &= \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{C})} (v_{1\mathcal{E}}^{n+1})^2 \\ &\quad - \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{C})} (v_{1\mathcal{E}}^{n+1} - v_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2, \end{aligned} \quad (3.28)$$

de même pour $v_{1\mathcal{E}}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} (v_{1\mathcal{E}}^{n+1})^2 &= \alpha_C (u_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2 + (1 - \alpha_C) (u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 \\ &\quad - \left[\alpha_C (v_{1\mathcal{E}}^{n+1} - u_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2 + (1 - \alpha_C) (v_{1\mathcal{E}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 \right] \\ &= \alpha_C (u_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2 + (1 - \alpha_C) (u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 \\ &\quad - \alpha_C (1 - \alpha_C) (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2. \end{aligned}$$

De plus, comme le schéma 1 est construit à partir de la combinaison convexe suivante sur les arêtes

$$u_{1\mathcal{C}}^{n+1} = \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} u_{1\mathcal{C}}^{n+1,e},$$

on a encore d'après (3.27) :

$$\begin{aligned} (u_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2 &= \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} (u_{1\mathcal{C}}^{n+1,e})^2 \\ &\quad - \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{1\mathcal{C}}^{n+1,e})^2. \end{aligned}$$

Lorsque l'on intègre toutes ces relations, à partir de 3.28, il vient :

$$\begin{aligned} &(v_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2 + \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{C})} (v_{1\mathcal{E}}^{n+1} - v_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2 \\ &+ \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{C})} \alpha_C (1 - \alpha_C) (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 \\ &+ \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{C})} \alpha_C \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{1\mathcal{C}}^{n+1,e})^2 \\ &+ \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{C})} (1 - \alpha_C) \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{D})} (u_{2\mathcal{D}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1,e})^2 \\ &= \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{C})} \alpha_C \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} (u_{1\mathcal{C}}^{n+1,e})^2 \\ &+ \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{C})} (1 - \alpha_C) \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{D})} (u_{2\mathcal{D}}^{n+1,e})^2. \end{aligned}$$

Une égalité similaire s'écrit pour $v_{2\mathcal{D}}^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
& (v_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 + \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{D})} (v_{2\mathcal{E}}^{n+1} - v_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 \\
& + \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{D})} \alpha_{\mathcal{D}} (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) (u_{2\mathcal{D}}^{n+1} - u_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2 \\
& + \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{D})} (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) \sum_{e\subseteq\partial\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{D})} (u_{2\mathcal{D}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1,e})^2 \\
& + \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{D})} \alpha_{\mathcal{D}} \sum_{e\subseteq\partial\mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{1\mathcal{C}}^{n+1,e})^2 \\
= & \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{D})} (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) \sum_{e\subseteq\partial\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{D})} (u_{2\mathcal{D}}^{n+1,e})^2 \\
& + \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D}} \frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{\text{mes}(\mathcal{D})} \alpha_{\mathcal{D}} \sum_{e\subseteq\partial\mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} (u_{1\mathcal{C}}^{n+1,e})^2 .
\end{aligned}$$

On multiplie la première de ces égalités par $\alpha_{\mathcal{C}}$ et la seconde par $(1 - \alpha_{\mathcal{D}})$. Si l'on ajoute ces deux égalités et que l'on somme sur le maillage mixte $(\sum_{\mathcal{E}} \text{mes}(\mathcal{E}))$, puis en utilisant l'inégalité d'entropie discrète des deux schémas (3.22), on obtient finalement après sommation en temps (i.e. sur n , pour $t^n \leq T$) :

$$\begin{aligned}
& \sum_{0 < n \leq n^T} \sum_{\mathcal{C}} \text{mes}(\mathcal{C}) \alpha_{\mathcal{C}} (v_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2 + \sum_{0 < n \leq n^T} \sum_{\mathcal{D}} \text{mes}(\mathcal{D}) (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) (v_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 \\
& + T_{1\mathcal{E}} + T_{2\mathcal{E}} + T_1^{\alpha, \varepsilon_1} + T_2^{(1-\alpha), \varepsilon_2} + T_{12} + T_1^e + T_2^e \\
\leq & \sum_{0 < n \leq n^T} \sum_{\mathcal{C}} \text{mes}(\mathcal{C}) \alpha_{\mathcal{C}} (v_{1\mathcal{C}}^n)^2 + \sum_{0 < n \leq n^T} \sum_{\mathcal{D}} \text{mes}(\mathcal{D}) (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) (v_{2\mathcal{D}}^n)^2 \\
& + \mathbf{R}_{\text{couplage}}^{H^1} + \mathbf{R}_{\text{flux}}^{H^1} .
\end{aligned}$$

avec les normes faibles supplémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}
T_1^{\alpha, \varepsilon_1} &= \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left((\alpha_{\mathcal{C}})^2 + \alpha_{\mathcal{D}}(1 - \alpha_{\mathcal{D}}) \right) \\
&\quad \sum_{\substack{e \subseteq \partial \mathcal{C} \\ \text{mes}_e}} \frac{\text{mes}_e}{\text{mes}_{\partial \mathcal{C}}} \lambda_{1, \mathcal{C}}^{n, 2} (C_{1, e, \mathcal{C}}^n)^2 |\Delta_{e, \mathcal{C}}^{1n}(v)|^2, \\
T_2^{(1-\alpha), \varepsilon_2} &= \frac{\varepsilon_2}{2} \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left(\alpha_{\mathcal{C}}(1 - \alpha_{\mathcal{C}}) + (1 - \alpha_{\mathcal{D}})^2 \right) \\
&\quad \sum_{\substack{e \subseteq \partial \mathcal{D} \\ \text{mes}_e}} \frac{\text{mes}_e}{\text{mes}_{\partial \mathcal{D}}} \lambda_{2, \mathcal{D}}^{n, 2} (C_{2, e, \mathcal{D}}^n)^2 |\Delta_{e, \mathcal{D}}^{2n}(v)|^2, \\
T_{12} &= \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left[(\alpha_{\mathcal{C}})^2 (1 - \alpha_{\mathcal{C}}) + \alpha_{\mathcal{D}}(1 - \alpha_{\mathcal{D}})^2 \right] (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2, \\
T_1^e &= \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left[(\alpha_{\mathcal{C}})^2 + \alpha_{\mathcal{D}}(1 - \alpha_{\mathcal{D}}) \right] \\
&\quad \sum_{\substack{e \subseteq \partial \mathcal{C} \\ \text{mes}(e)}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{1\mathcal{C}}^{n+1, e})^2, \\
T_2^e &= \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left[\alpha_{\mathcal{C}}(1 - \alpha_{\mathcal{C}}) + (1 - \alpha_{\mathcal{D}})^2 \right] \\
&\quad \sum_{\substack{e \subseteq \partial \mathcal{D} \\ \text{mes}(e)}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{D})} (u_{2\mathcal{D}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1, e})^2,
\end{aligned}$$

et avec les termes d'erreur :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\text{couplage}}^{H^1} &= \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left[\alpha_{\mathcal{C}}(1 - \alpha_{\mathcal{C}}) - \alpha_{\mathcal{D}}(1 - \alpha_{\mathcal{D}}) \right] \\
&\quad \left((v_{2\mathcal{D}}^n)^2 - (v_{1\mathcal{C}}^n)^2 \right) \leq C_{\text{couplage}}, \\
\mathbf{R}_{\text{flux}}^{H^1} &= - \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left[(\alpha_{\mathcal{C}})^2 + (1 - \alpha_{\mathcal{D}})\alpha_{\mathcal{D}} \right] \\
&\quad \sum_{\substack{e \subseteq \partial \mathcal{C} \\ \text{mes}(e)}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} \lambda_{1, \mathcal{C}}^n h_{1, 2} \left(\vec{n}_{e, \mathcal{C}}, v_{1\mathcal{C}_l(e)}^n, v_{1\mathcal{C}_r(e)}^n \right) \\
&\quad - \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left[\alpha_{\mathcal{C}}(1 - \alpha_{\mathcal{C}}) + (1 - \alpha_{\mathcal{D}})^2 \right] \\
&\quad \sum_{\substack{e \subseteq \partial \mathcal{D} \\ \text{mes}(e)}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{D})} \lambda_{1, \mathcal{D}}^n h_{1, 2} \left(\vec{n}_{e, \mathcal{D}}, v_{2\mathcal{D}_l(e)}^n, v_{2\mathcal{D}_r(e)}^n \right) \leq C_{\text{flux}}.
\end{aligned}$$

Montrons les deux dernières majorations :

- On donne tout d'abord l'estimation du reste $\mathbf{R}_{\text{couplage}}^{H^1}$, qui est dû au couplage. On obtient ce résultat car les deux projections sont des combinaisons convexes et la fonction α est régulière :

$$|\alpha_{\mathcal{C}}(1 - \alpha_{\mathcal{C}}) - \alpha_{\mathcal{D}}(1 - \alpha_{\mathcal{D}})| \leq C \left(\|\vec{\nabla} \alpha\|_{L^\infty} \right) (h_1 + h_2).$$

On utilise aussi l'estimation $L^\infty(\Omega)$ (la proposition 3.2.2). La constante $C_{couplage}$ est donc dépendante des paramètres :

$$C_{couplage} = C \left(\left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty}, |\Omega_{12}|, T \right)$$

- L'estimation du reste $\mathbf{R}_{flux}^{H^1}$, qui vient des flux numériques d'entropie, est obtenue avec la propriété lipschitzienne de h_l ($l = 1, 2$) et le principe du maximum (3.19). On découpe ce terme en quatre parties, deux à deux symétriques. On traite ici les deux premières parties. On utilise la conservativité des schémas, qui se traduit, au niveau des flux numériques d'entropie, par ($\forall l = 1, 2$) :

$$h_\eta^l \left(\vec{n}_{e,\mathcal{C}}, v_{l\mathcal{C}_r(e)}^n, v_{l\mathcal{C}_l(e)}^n \right) = -h_\eta^l \left(-\vec{n}_{e,\mathcal{C}}, v_{l\mathcal{C}_l(e)}^n, v_{l\mathcal{C}_r(e)}^n \right) \quad (3.29)$$

pour toute entropie η convexe. Comme de plus on a :

$$\frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} \lambda_{1,\mathcal{C}}^n = k^n \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\mathcal{C})}$$

Donc pour la première partie, en $(\alpha_{\mathcal{C}})^2$, on écrit :

$$\begin{aligned} & - \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) (\alpha_{\mathcal{C}})^2 \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{C}} k^n \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\mathcal{C})} h_{1,2}^1 \left(\vec{n}_{e,\mathcal{C}}, v_{1\mathcal{C}_l(e)}^n, v_{1\mathcal{C}_r(e)}^n \right) \\ & = - \sum_{\mathcal{C}, n} \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{C}} k^n \text{mes}(e) (\alpha_{\mathcal{C}})^2 h_{1,2}^1 \left(\vec{n}_{e,\mathcal{C}}, v_{1\mathcal{C}_l(e)}^n, v_{1\mathcal{C}_r(e)}^n \right) \\ & = - \sum_n \sum_{e \in \mathcal{S}_{h_1}} k^n \text{mes}(e) \left((\alpha_{\mathcal{C}_l(e)})^2 - (\alpha_{\mathcal{C}_r(e)})^2 \right) h_{1,2}^1 \left(\vec{n}_{e,\mathcal{C}}, v_{1\mathcal{C}_l(e)}^n, v_{1\mathcal{C}_r(e)}^n \right) \\ & \leq C \left(\left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty}, |\Omega|, \|u_0\|_\infty, T \right). \end{aligned}$$

Dans cette dernière intégration par partie, on n'a pas de problème aux bords. Ceci vient des propriétés de la fonction de couplage (voir (2.8)). Et pour la seconde partie du terme d'erreur en $(1 - \alpha_{\mathcal{D}})\alpha_{\mathcal{D}}$, on décompose en

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) \alpha_{\mathcal{D}} \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{C}} k^n \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\mathcal{C})} h_{\cdot 2}^1 \left(\vec{n}_{e,\mathcal{C}}, v_{1\mathcal{C}_l(e)}^n, v_{1\mathcal{C}_r(e)}^n \right) \\
& = - \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{C}} k^n \left((1 - \alpha_{\mathcal{D}}) \alpha_{\mathcal{D}} - (1 - \alpha_{\mathcal{C}}) \alpha_{\mathcal{C}} \right) \\
& \quad \text{mes}(\mathcal{E}) \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\mathcal{C})} h_{\cdot 2}^1 \left(\vec{n}_{e,\mathcal{C}}, v_{1\mathcal{C}_l(e)}^n, v_{1\mathcal{C}_r(e)}^n \right) \\
& - \sum_n \sum_{e \in \mathcal{S}_{h_1}} k^n \left((1 - \alpha_{\mathcal{C}_l(e)}) \alpha_{\mathcal{C}_l(e)} - (1 - \alpha_{\mathcal{C}_r(e)}) \alpha_{\mathcal{C}_r(e)} \right) \\
& \quad \text{mes}(e) h_{\cdot 2}^1 \left(\vec{n}_{e,\mathcal{C}}, v_{1\mathcal{C}_l(e)}^n, v_{1\mathcal{C}_r(e)}^n \right) \\
& \leq C \left(\left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty}, |\Omega|, \|u_0\|_\infty, T \right).
\end{aligned}$$

Les deux dernières parties sont traitées de la même manière sur le maillage 2.

Enfin, après simplification en temps, il reste :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathcal{C}} \text{mes}(\mathcal{C}) \alpha_{\mathcal{C}} (v_{1\mathcal{C}}^N)^2 + \sum_{\mathcal{D}} \text{mes}(\mathcal{D}) (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) (v_{2\mathcal{D}}^N)^2 \\
& \quad + T_{1\mathcal{E}} + T_{2\mathcal{E}} + T_1^{\alpha,\varepsilon_1} + T_2^{(1-\alpha),\varepsilon_2} + T_{12} + T_1^e + T_2^e \\
& \leq \sum_{\mathcal{C}} \text{mes}(\mathcal{C}) \alpha_{\mathcal{C}} (u_{1\mathcal{C}}^0)^2 + \sum_{\mathcal{D}} \text{mes}(\mathcal{D}) (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) (u_{2\mathcal{D}}^0)^2 \\
& \quad + C \left(\left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty}, |\Omega|, \|u_0\|_\infty, T \right).
\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la majoration sur les termes de (3.23), $T_{1\mathcal{E}}$ et $T_{2\mathcal{E}}$.

Pour obtenir la majoration complète de (3.26), on remarque que

1. le terme T_{12} se récrit, grâce à la définition de $\overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}$, en (3.17) :

$$\begin{aligned}
T_{12} & = \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left[\alpha_{\mathcal{C}} (1 - \alpha_{\mathcal{C}}) \right. \\
& \quad \left. + \left(\alpha_{\mathcal{D}} (1 - \alpha_{\mathcal{D}})^2 - \alpha_{\mathcal{C}} (1 - \alpha_{\mathcal{C}})^2 \right) \right] (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 \\
& = \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) \overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}} \cdot (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 \\
& \quad + \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left[\alpha_{\mathcal{C}} (1 - \alpha_{\mathcal{C}}) - \overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}} \right] (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 \\
& \quad + \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left(\alpha_{\mathcal{D}} (1 - \alpha_{\mathcal{D}})^2 - \alpha_{\mathcal{C}} (1 - \alpha_{\mathcal{C}})^2 \right) (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2.
\end{aligned}$$

On montre facilement les inégalités suivantes :

$$\left| \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left[\alpha_{\mathcal{C}}(1-\alpha_{\mathcal{C}}) - \overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}} \right] (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 \right| \leq C,$$

$$\left| \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left(\alpha_{\mathcal{D}}(1-\alpha_{\mathcal{D}})^2 - \alpha_{\mathcal{C}}(1-\alpha_{\mathcal{C}})^2 \right) (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 \right| \leq C.$$

On contrôle donc bien la norme de l'erreur sur le maillage mixte (3.25) :

$$T_{\text{couplée}}^{Proj} = \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) \overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}} (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 \leq C$$

2. Enfin, les termes H^1 faibles classiques donnés dans (3.24) sont obtenus et majorés :

$$T_1^{\varepsilon_1} = T_1^{\alpha,\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) (1-\alpha_{\mathcal{C}}) A_{\mathcal{C}}^n$$

$$+ \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) (\alpha_{\mathcal{C}}(1-\alpha_{\mathcal{C}}) - \alpha_{\mathcal{D}}(1-\alpha_{\mathcal{D}})) A_{\mathcal{C}}^n,$$

avec

$$A_{\mathcal{C}}^n = \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{C}} \frac{\text{mes}_e}{\text{mes}_{\partial\mathcal{C}}} \lambda_{1,\mathcal{C}}^{n,2} (C_{1,e,\mathcal{C}}^n)^2 |\Delta_{e,\mathcal{C}}^{1,n}(v)|^2$$

Et comme on peut encore montrer que

$$\frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) (\alpha_{\mathcal{C}}(1-\alpha_{\mathcal{C}}) - \alpha_{\mathcal{D}}(1-\alpha_{\mathcal{D}})) A_{\mathcal{C}}^n \leq C,$$

il reste alors :

$$\frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) (1-\alpha_{\mathcal{C}}) \sum_{e \subseteq \partial\mathcal{C}} \frac{\text{mes}_e}{\text{mes}_{\partial\mathcal{C}}} \lambda_{1,\mathcal{C}}^{n,2} (C_{1,e,\mathcal{C}}^n)^2 |\Delta_{e,\mathcal{C}}^{1,n}(v)|^2$$

$$+ T_1^{\alpha,\varepsilon_1} \leq C.$$

Cette dernière inégalité conclue alors la preuve de la proposition 3.2.3.

3.2.4 Convergence forte des solutions couplées

Proposition 3.2.5 *Les deux solutions approchées v_{h_1} et v_{h_2} (au sens de (2.12)) convergent fortement l'une vers l'autre dans $L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \sqrt{\alpha(1-\alpha)} dx)$:*

$$\int_{\mathcal{Q}} |v_{h_1} - v_{h_2}|(x, t) \sqrt{\alpha(1-\alpha)}(x) dx dt$$

$$\leq C \left(|\Omega_{12}|, T, \|u_0\|_{L^\infty}, \|\vec{\nabla}\alpha\|_{L^\infty} \right) \times \left(h_1 + h_2 + h_{12} + \sqrt{k^+} \right).$$

De même, les deux solutions approchées intermédiaires u_{h_1} et u_{h_2} (au sens de (2.13)) convergent fortement l'une vers l'autre dans $L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \sqrt{\alpha(1-\alpha)})$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Q}} |u_{h_1} - u_{h_2}|(x, t) \sqrt{\alpha(1-\alpha)}(x) dx dt \\ & \leq C \left(|\Omega_{12}|, T, \|u_0\|_{L^\infty}, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty} \right) \times \left(h_1 + h_2 + h_{12} + \sqrt{k^+} \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Démonstration Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Q}} |v_{h_1} - v_{h_2}|(x, t) \sqrt{\alpha(1-\alpha)}(x) dx dt \\ & = \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n |v_{1\mathcal{C}}^n - v_{2\mathcal{D}}^n| \\ & \quad \left(\frac{1}{k^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} dt \right) \left(\frac{1}{\text{mes}(\mathcal{E})} \int_{\mathcal{E}} \sqrt{\alpha(1-\alpha)}(x) dx \right) \\ & = \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n |v_{1\mathcal{C}}^n - v_{2\mathcal{D}}^n| \sqrt{\alpha_{\mathcal{E}}(1-\alpha_{\mathcal{E}})} + Err^1(v), \end{aligned}$$

avec la première erreur

$$\begin{aligned} Err^1(v) & = \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n |v_{1\mathcal{C}}^n - v_{2\mathcal{D}}^n| \\ & \quad \left(\frac{1}{\text{mes}(\mathcal{E})} \int_{\mathcal{E}} \sqrt{\alpha(1-\alpha)}(x) dx - \sqrt{\alpha_{\mathcal{E}}(1-\alpha_{\mathcal{E}})} \right) \end{aligned}$$

Cette première erreur est contrôlée grâce à la régularité de la fonction de couplage, ainsi que la régularité de la racine carré :

$$|Err^1(v)| \leq C \left(|\Omega_{12}|, T, \|u_0\|_{L^\infty}, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty} \right) h_{12}.$$

Pour les solutions approchées intermédiaires, on procède pareillement :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Q}} |u_{h_1} - u_{h_2}|(x, t) \sqrt{\alpha(1-\alpha)}(x) dx dt \\ & = \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C} \cap \mathcal{D}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n |u_{1\mathcal{C}}^n - u_{2\mathcal{D}}^n| \sqrt{\alpha_{\mathcal{E}}(1-\alpha_{\mathcal{E}})} + Err^1(u), \end{aligned}$$

avec l'erreur

$$|Err^1(u)| \leq C \left(|\Omega_{12}|, T, \|u_0\|_{L^\infty}, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty} \right) h_{12}.$$

On alors peut décomposer

$$\begin{aligned} |v_{1\mathcal{C}}^n - v_{2\mathcal{D}}^n| &\leq |v_{1\mathcal{C}}^n - v_{1\mathcal{E}}^n| + |v_{1\mathcal{E}}^n - v_{2\mathcal{E}}^n| + |v_{2\mathcal{E}}^n - v_{2\mathcal{D}}^n| \\ &= |v_{1\mathcal{C}}^n - v_{1\mathcal{E}}^n| + |(\alpha_{\mathcal{C}} - \alpha_{\mathcal{D}}) (u_{1\mathcal{C}}^n - u_{2\mathcal{D}}^n)| + |v_{2\mathcal{E}}^n - v_{2\mathcal{D}}^n|. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dans la suite, on va chercher à faire apparaître les normes H^1 discrètes trouvées dans la proposition précédente, (dans 3.23) :

$$\begin{aligned} T_{1\mathcal{E}} &= \sum_{\substack{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D} \\ 0 < n \leq n^T}} \text{mes}(\mathcal{E}) \alpha_{\mathcal{C}} (v_{1\mathcal{E}}^{n+1} - v_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2, \\ T_{2\mathcal{E}} &= \sum_{\substack{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D} \\ 0 < n \leq n^T}} \text{mes}(\mathcal{E}) (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) (v_{2\mathcal{E}}^{n+1} - v_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on a tout d'abord

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n |v_{1\mathcal{C}}^n - v_{1\mathcal{E}}^n| \sqrt{\alpha_{\mathcal{E}}(1 - \alpha_{\mathcal{E}})} \\ &\leq \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n |v_{1\mathcal{C}}^n - v_{1\mathcal{E}}^n| \sqrt{\alpha_{\mathcal{E}}} \end{aligned}$$

car, par définition :

$$\sqrt{1 - \alpha_{\mathcal{E}}} \leq 1,$$

puis

$$\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n |v_{1\mathcal{C}}^n - v_{1\mathcal{E}}^n| \sqrt{\alpha_{\mathcal{E}}} = \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n \sqrt{\alpha_{\mathcal{C}}} |v_{1\mathcal{C}}^n - v_{1\mathcal{E}}^n| + Err^{21}(\sqrt{\alpha}),$$

avec

$$Err^{21}(\sqrt{\alpha}) = \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n |v_{1\mathcal{C}}^n - v_{1\mathcal{E}}^n| (\sqrt{\alpha_{\mathcal{E}}} - \sqrt{\alpha_{\mathcal{C}}})$$

(on remarque tout de suite que l'on a la même erreur

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n |v_{2\mathcal{E}}^n - v_{2\mathcal{D}}^n| \sqrt{1 - \alpha_{\mathcal{E}}} \\ &= \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n \sqrt{1 - \alpha_{\mathcal{D}}} |v_{2\mathcal{E}}^n - v_{2\mathcal{D}}^n| \\ &+ Err^{22}(\sqrt{1 - \alpha}) \end{aligned}$$

sur le dernier terme). On a bien un contrôle sur ces erreurs :

$$\begin{aligned} |Err^{21}(\sqrt{\alpha})| &\leq C \left(|\Omega_{12}|, T, \|u_0\|_{L^\infty}, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty} \right) h_1, \\ |Err^{22}(\sqrt{1-\alpha})| &\leq C \left(|\Omega_{12}|, T, \|u_0\|_{L^\infty}, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty} \right) h_2. \end{aligned}$$

Alors, on peut majorer avec Cauchy-Schwarz. Si l'on utilise le contrôle du terme $T_{1\mathcal{E}}$ défini dans (3.23), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n \sqrt{\alpha_{\mathcal{C}}} |v_{1\mathcal{C}}^n - v_{1\mathcal{E}}^n| &\leq \left(\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n \alpha_{\mathcal{C}} (v_{1\mathcal{C}}^n - v_{1\mathcal{E}}^n)^2 \frac{1}{k^n} \right)^{1/2} \\ &\quad \left(\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n k^n \right)^{1/2}. \\ &= (T_{1\mathcal{E}})^{1/2} \times C(|\Omega_{12}|, T) (k^+)^{1/2} \end{aligned}$$

Le troisième terme obtenu à l'aide de la décomposition (3.31) est son symétrique. On a donc la même majoration, en utilisant cette fois-ci le contrôle sur $T_{2\mathcal{E}}$.

Il reste à voir le second terme de la décomposition (3.31). Ce dernier terme vaut

$$\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n \sqrt{\alpha_{\mathcal{E}}(1-\alpha_{\mathcal{E}})} |(\alpha_{\mathcal{C}} - \alpha_{\mathcal{D}}) (u_{1\mathcal{C}}^n - u_{2\mathcal{D}}^n)|,$$

et il est bien majoré par $C \left(|\Omega_{12}|, T, \|u_0\|_{L^\infty}, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty} \right) h_{12}$, grâce au terme $|\alpha_{\mathcal{C}} - \alpha_{\mathcal{D}}|$.

Ce qui conclut la preuve de la convergence forte des solutions approchées. Afin de conclure la preuve de la proposition, il reste à montrer la convergence du terme

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{Q}} |u_{h_1} - u_{h_2}|(x, t) \sqrt{\alpha(1-\alpha)}(x) dx dt - Err^1(u) \\ &= \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n |u_{1\mathcal{C}}^n - u_{2\mathcal{D}}^n| \sqrt{\alpha_{\mathcal{E}}(1-\alpha_{\mathcal{E}})}. \end{aligned}$$

On cherche ici à utiliser la norme faible suivante

$$T_{\text{couplée}}^{\text{Proj}} = \sum_{\substack{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D} \\ 0 < n \leq n^T}} \text{mes}(\mathcal{E}) \overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}} \cdot (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 < C,$$

On applique encore l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n |u_{1\mathcal{C}}^n - u_{2\mathcal{D}}^n| \sqrt{\alpha_{\mathcal{E}}(1-\alpha_{\mathcal{E}})} \\ & \leq \left(\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n \frac{1}{k^n} \alpha_{\mathcal{E}}(1-\alpha_{\mathcal{E}}) |u_{1\mathcal{C}}^n - u_{2\mathcal{D}}^n|^2 \right)^{1/2} \\ & \quad \left(\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) k^n k^n \right)^{1/2} \\ & \leq C \sqrt{k^+}, \end{aligned}$$

en effet, par définition de $\overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}$, on a

$$\alpha_{\mathcal{E}}(1-\alpha_{\mathcal{E}}) \leq \overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}.$$

On termine ainsi la preuve de cette proposition. ■

Corollaire 3.2.6 *Une majoration similaire à (3.30) est valable, pour toute fonction régulière ϕ vérifiant : il existe une constante positive $D \geq 0$ telle que $\forall t \geq 0$ et $\forall x \in \mathcal{E}$*

$$(\phi(x, t))^2 \leq D \overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}}. \quad (3.32)$$

C'est-à-dire que l'on obtient la convergence au sens faible de ces solutions approchées :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}} |v_{h_1} - v_{h_2}|(x, t) \phi(x, t) dx dt & \leq C \left(D, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\phi\|_{L^\infty}, \|\alpha\|_{C^1}, |\Omega_1|, T \right) \\ & \quad \times \left(\sqrt{k^+} + h_{12} \right). \end{aligned}$$

La preuve de ce corollaire est une conséquence immédiate de la proposition précédente et de l'hypothèse (3.32).

3.3 Inégalités d'entropie

A partir de cette étape de la démonstration, nous allons utiliser le fait que la solution faible entropique vérifie l'inégalité d'entropie (3.5). On cherche donc à construire ici une inégalité similaire pour les solutions approchées $v_{h_1}(x, t)$ et $v_{h_2}(x, t)$ de (2.12). On pourra alors écrire une unique inégalité d'entropie pour la solution approchée moyennée de (2.14).

Rappelons tout d'abord que le schéma numérique choisi (un E-schéma) est construit sous la forme de (2.4). En multipliant la contribution 1D, $u_{lC}^{n+1,e}$ (pour $l = 1, 2$), par la dérivée η' d'une entropie convexe, on établit l'inégalité d'entropie discrète locale suivante; pour tout $l = 1, 2$, $\forall C \in \mathcal{T}_{h_l}$:

$$\eta \left(u_{lC}^{n+1,e} \right) - \eta \left(v_{lC}^n \right) + \lambda_{lC}^n \Delta_{C,e}^{n,l} (H_\eta) \leq 0, \quad (3.33)$$

où le terme $\Delta_{C,e}^{n,l} (H_\eta)$ est donné par : $\forall l = 1, 2$,

$$\Delta_{C,e}^{n,l} (H_\eta) = h_\eta^l \left(v_{lC_l(e)}^n, v_{lC_r(e)}^n \right) - H_\eta \left(v_{lC}^n \right) \cdot \vec{n}_{e,C}.$$

3.3.1 Proposition

On va démontrer que l'algorithme de couplage nous permet d'écrire deux inégalités d'entropie. Pour plus de lisibilité, la proposition suivante ne donne le résultat que sur le schéma 1. On a une proposition symétrique pour le schéma 2 (voir (3.39)).

Proposition 3.3.1 *Estimation de l'inégalité faible entropique :*

Si le schéma numérique vérifie l'inégalité d'entropie discrète locale (3.33), on obtient l'inégalité globale suivante

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{Q}_1} \left[\begin{array}{l} \eta \left(v_{h_1} \right) \left(x, t \right) \partial_t \left(\alpha \left(x \right) \varphi \left(x, t \right) \right), \\ + H_\eta \left(v_{h_1} \left(x, t \right) \right) \vec{\nabla}_x \left(\alpha \varphi \right) \left(x, t \right) \end{array} \right] dx dt \\ & - \int_{\Omega_1} \eta \left(u_0 \left(x \right) \right) \alpha \left(x \right) \varphi \left(x, 0 \right) dx \\ & \leq L_1^\alpha \left(v_{h_1} \right) + E_{h_1}^\alpha + E_{h_1}^{\alpha,0} + E_{h_1}^0 + S_{h_1}^{\alpha,coup}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

où le terme

$$S_{h_1}^{\alpha, coup} = \sum_{\mathcal{E}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left(\eta(u_{2\mathcal{D}}^{n+1}) - \eta(u_{1\mathcal{C}}^{n+1}) \right) \alpha_{\mathcal{C}} (1 - \alpha_{\mathcal{C}}) \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1}$$

est un terme source dû au couplage des deux schémas et où les erreurs sont :

1. le terme mesure, qui correspond à l'erreur sur le flux d'entropie $\Delta_{\mathcal{C}, e}^{n, l}(H_\eta)$:

$$L_1^\alpha(v_{h_1}) = \sum_{\mathcal{C}, n} \text{mes}(\mathcal{C}) \sum_{e \in \partial\mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} \left(\eta(u_{1\mathcal{C}}^{n+1, e}) - \eta(v_{1\mathcal{C}}^n) \right) (\alpha_{\mathcal{C}} \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - (\alpha\varphi)_e^n),$$

2. les termes d'erreur dus à l'approximation Volumes Finis, donc très classiques

$$\begin{aligned} E_{h_1}^\alpha &= \sum_{\mathcal{C}, n} \text{mes}(\mathcal{C}) \eta(v_{1\mathcal{C}}^n) \left[\alpha_{\mathcal{C}} (\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \varphi_{\mathcal{C}}^n) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{C}} \alpha(x) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \right], \\ E_{h_1}^{\alpha, 0} &= \sum_{\mathcal{C}} \text{mes}(\mathcal{C}) \eta(v_{1\mathcal{C}}^0) \int_{\mathcal{C}} (\alpha_{\mathcal{C}} - \alpha(x)) \varphi(x, 0) dx, \\ E_{h_1}^0 &= \int_{\Omega_1} \alpha(x) [\eta(v_{h_1})(x, 0) - \eta(u_0)(x)] \varphi(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (3.35)$$

et tendent vers 0 :

$$\begin{aligned} &|L_1^\alpha(v_{h_1})| + |E_{h_1}^\alpha| + |E_{h_1}^{\alpha, 0}| + |E_{h_1}^0| \\ &\leq C \left(\|\eta'(u_0)\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi\|_{C^1}, \|\alpha\|_{C^1}, |\Omega_1|, T, \|u_0\|_\infty, \|u_0\|_{BV}, \right. \\ &\quad \left. \|\vec{\nabla}\alpha\|_\infty, \|\alpha(1-\alpha)\|_{C^2}, \|\vec{\nabla}_x \alpha(1-\alpha)\|_{L^\infty(\Omega)}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \right) \\ &\quad \times \left[\sup_n \left(\sqrt{k^n} + \frac{h_1}{\sqrt{k^n}} \right) + h_1 \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Au cours de la rédaction de la démonstration de cette proposition, nous allons suivre les étapes suivantes : tout d'abord, on va expliciter la partie intégration en temps de cette inégalité sous forme discrète, puis la partie flux. Ensuite, on appliquera les résultats donnés par Vila dans [Vil94] pour caractériser le terme source mesure. Enfin, on explicitera les erreurs spécifiques aux Volumes Finis ainsi que celles dues au couplage.

3.3.2 Partie entropie

La partie comportant la dérivée en temps dans l'inégalité (3.34) est

$$\begin{aligned}
A &= - \int_{\mathcal{Q}_1} \eta(v_{h_1})(x, t) \frac{\partial}{\partial t} (\alpha(x) \varphi(x, t)) \, dx \, dt \\
&= - \sum_{\substack{\mathcal{C}, \\ 0 \leq n \leq n^T}} \alpha_{\mathcal{C}} \text{mes}(\mathcal{C}) \eta(v_{1\mathcal{C}}^n) (\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \varphi_{\mathcal{C}}^n) \\
&\quad - \sum_{\substack{\mathcal{C} \\ 0 \leq n \leq n^T}} \text{mes}(\mathcal{C}) \eta(v_{1\mathcal{C}}^n) \\
&\quad \left(\frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{C}} \alpha(x) \partial_t \varphi(x, t) \, dx \, dt - \alpha_{\mathcal{C}} (\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \varphi_{\mathcal{C}}^n) \right).
\end{aligned}$$

où l'approximation Volumes Finis de la fonction test $\varphi_{\mathcal{C}}^n$, est donnée en introduction de ce chapitre (3.16).

Donc, si l'on introduit la forme continue de la condition initiale :

$$\begin{aligned}
&A - \int_{\Omega_1} \eta(u_0(x)) \alpha(x) \varphi(x, 0) \, dx \\
&= \sum_{\mathcal{C}, n} \text{mes}(\mathcal{C}) \alpha_{\mathcal{C}} (\eta(v_{1\mathcal{C}}^{n+1}) - \eta(v_{1\mathcal{C}}^n)) \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} + E_{h_1}^{\alpha} \\
&\quad + \sum_{\mathcal{C}} \text{mes}(\mathcal{C}) \eta(u_{1\mathcal{C}}^{\alpha_0}) \int_{\mathcal{C}} (\alpha_{\mathcal{C}} - \alpha(x)) \varphi(x, 0) \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega_1} \alpha(x) [\eta(v_{h_1})(x, 0) - \eta(u_0)(x)] \varphi(x, 0) \, dx.
\end{aligned}$$

Puis, on exprime le couplage avec la solution approchée u_{h_1} :

$$\begin{aligned}
&A - \int_{\Omega_1} \eta(u_0(x)) \alpha(x) \varphi(x, 0) \, dx \\
&\leq \sum_{\mathcal{C}, n} \text{mes}(\mathcal{C}) \alpha_{\mathcal{C}} (\eta(u_{1\mathcal{C}}^{n+1}) - \eta(v_{1\mathcal{C}}^n)) \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} \\
&\quad + E_{h_1}^{\alpha} + E_{h_1}^{\alpha, 0} + E_{h_1}^0 + S_{h_1}^{\alpha, \text{coup}},
\end{aligned}$$

où l'on retrouve les erreurs énoncées dans la proposition.

On peut encore développer le schéma sur les arêtes du maillage \mathcal{T}_{h_1} :

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{C},n} \text{mes}(\mathcal{C}) \alpha_{\mathcal{C}} \left(\eta \left(u_{1\mathcal{C}}^{n+1} \right) - \eta \left(v_{1\mathcal{C}}^n \right) \right) \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} \\ \leq & \sum_{\mathcal{C},n} \text{mes}(\mathcal{C}) \alpha_{\mathcal{C}} \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} \sum_{e \subseteq \partial \mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} \left(\eta \left(u_{1\mathcal{C}}^{n+1,e} \right) - \eta \left(v_{1\mathcal{C}}^n \right) \right). \end{aligned}$$

Et en introduisant les termes de flux suivant à l'aide de (3.33), on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{C},n} \text{mes}(\mathcal{C}) \sum_{e \subseteq \partial \mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} \left(\eta \left(u_{1\mathcal{C}}^{n+1,e} \right) - \eta \left(v_{1\mathcal{C}}^n \right) \right) (\alpha \varphi)_e^n \\ \leq & - \sum_{\mathcal{C},e \subseteq \partial \mathcal{C},n} \text{mes}(e) k^n \Delta_{\mathcal{C},e}^{n,1} (H_\eta) (\alpha \varphi)_e^n = -F_1^{\alpha,e}(\varphi), \end{aligned}$$

où la fonction test évaluée sur le bord est

$$(\alpha \varphi)_e^n = \frac{1}{\text{mes}(e) k^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e (\alpha \varphi)(x, t) d\sigma(x) dt. \quad (3.37)$$

On obtient en conclusion

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{Q}_1} \eta(v_{h_1})(x, t) \frac{\partial}{\partial t} (\alpha(x) \varphi(x, t)) dx dt \\ & - \int_{\Omega_1} \eta(u_0(x)) \alpha(x) \varphi(x, 0) dx \leq L_1^\alpha(v_{h_1}) - F_1^{\alpha,e}(\varphi) \\ & \quad + E_{h_1}^\alpha + E_{h_1}^{\alpha,0} + E_{h_1}^0 + S_{h_1}^{\alpha,coup}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la mesure $L_1^\alpha(v_{h_1})$ valant :

$$\begin{aligned} L_1^\alpha(v_{h_1}) &= \sum_{\mathcal{C},n} \text{mes}(\mathcal{C}) \sum_{e \subseteq \partial \mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} \\ & \quad \left(\eta \left(u_{1\mathcal{C}}^{n+1,e} \right) - \eta \left(v_{1\mathcal{C}}^n \right) \right) (\alpha_{\mathcal{C}} \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - (\alpha \varphi)_e^n). \end{aligned}$$

Afin de donner l'inégalité d'entropie globale, il convient d'expliciter le terme de flux de (3.34).

3.3.3 Partie flux

Ce terme décrit les échange de matière entre les mailles, à travers les arêtes :

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathcal{Q}_1} H_\eta(v_{h_1}(x, t)) \vec{\nabla}_x(\alpha\varphi)(x, t) dx dt \\
& = - \sum_{\mathcal{C}, n} k^n H_\eta(v_{1\mathcal{C}}^n) \sum_{e \subset \partial\mathcal{C}} \text{mes}(e) (\alpha\varphi)_e^n \vec{n}_{e, \mathcal{C}} \\
& = \sum_{\mathcal{C}, n} k^n \sum_{e \subset \partial\mathcal{C}} \text{mes}(e) \Delta_{\mathcal{C}, e}^{n, 1}(H_\eta) (\alpha\varphi)_e^n \\
& = F_1^{\alpha, e}(\varphi).
\end{aligned}$$

La conservativité des schémas nous donne la relation (3.29) et entraîne :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathcal{C}, n} k^n \sum_{e \subset \partial\mathcal{C}} \text{mes}(e) h_\eta^1(\vec{n}_{e, \mathcal{C}}, v_{1\mathcal{C}_l(e)}^n, v_{1\mathcal{C}_r(e)}^n) (\alpha\varphi)_e^n & = 0, \\
\sum_{\mathcal{D}, n} k^n \sum_{e \subset \partial\mathcal{D}} \text{mes}(e) h_\eta^2(\vec{n}_{e, \mathcal{D}}, v_{2\mathcal{D}_l(e)}^n, v_{2\mathcal{D}_r(e)}^n) ((1-\alpha)\varphi)_e^n & = 0.
\end{aligned}$$

Les termes de bord se simplifient. Notamment, ils disparaissent aux limites du couplage car la valeur de α sur $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{12}$ est 0 et 1 sur $\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_{12}$:

$$\begin{aligned}
\forall e \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{12} \quad \alpha_{\mathcal{C}(e)} & = 0, \\
\forall e \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_{12} \quad (1 - \alpha_{\mathcal{D}(e)}) & = 0.
\end{aligned}$$

Il reste donc bien l'inégalité recherchée :

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathcal{Q}_1} \left[\begin{aligned} & \eta(v_{h_1})(x, t) \partial_t(\alpha(x)\varphi(x, t)) \\ & + H_\eta(v_{h_1})(x, t) \vec{\nabla}_x(\alpha\varphi)(x, t) \end{aligned} \right] dx dt \\
& - \int_{\Omega_1} \eta(v_{h_1}(x, 0)) \alpha(x) \varphi(x, 0) dx \\
& \leq L_1^\alpha(v_{h_1}) + E_{h_1}^\alpha + E_{h_1}^{\alpha, 0} + E_{h_1}^0 + S_{h_1}^{\alpha, \text{coup}}.
\end{aligned}$$

On a donc construit l'inégalité faible entropique pour le schéma 1. Pour terminer la démonstration de la proposition 3.3.1, il reste à montrer que les termes d'erreurs tendent vers 0.

3.3.4 Caractérisation des termes d'erreur

On va tout d'abord s'intéresser à l'estimation de $|\alpha_{\mathcal{C}} \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - (\alpha\varphi)_e^n|$, terme qui est présent dans $L_1^\alpha(v_{h_1})$. Pour cela, on définit la nouvelle approximation

de φ sur la maille \mathcal{C} (approximation ponctuelle, celle-ci), soit :

$$\tilde{\varphi}_{\mathcal{C}}^{n+1} = \varphi(x_{\mathcal{C}}, t^{n+1}),$$

ainsi que les approximations sur le bord, qui sont aussi ponctuelles :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_e^{n+1/2} &= \varphi(x_e, t^{n+1/2}), \\ \tilde{\alpha}\tilde{\varphi}_e^{n+1/2} &= \alpha(x_e) \tilde{\varphi}_e^{n+1/2},\end{aligned}$$

où $x_{\mathcal{C}}$ est l'isobarycentre de \mathcal{C} , et x_e celui de e .

On peut alors développer :

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - (\alpha\varphi)_e^n &= \alpha_{\mathcal{C}}(\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \tilde{\varphi}_{\mathcal{C}}^{n+1}) + (\alpha_{\mathcal{C}}\tilde{\varphi}_{\mathcal{C}}^{n+1} - \tilde{\alpha}\tilde{\varphi}_e^{n+1/2}) \\ &\quad + (\tilde{\alpha}\tilde{\varphi}_e^{n+1/2} - (\alpha\varphi)_e^n).\end{aligned}$$

Ces nouveaux termes s'expriment sous forme continue par :

1. Pour le premier terme, on rappelle la majoration donnée en introduction :

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \tilde{\varphi}_{\mathcal{C}}^{n+1} &= \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} (\varphi(x, t^{n+1}) - \varphi(x_{\mathcal{C}}, t^{n+1})) dx \\ &= \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 \frac{d\psi_{\mathcal{C},x}^{n+1}}{ds}(s) ds dx \\ &= \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_{\mathcal{C}} + sx, t^{n+1})(x - x_{\mathcal{C}}) ds dx,\end{aligned}$$

avec

$$\psi_{\mathcal{C},x}^{n+1}(s) = \varphi((1-s)x_{\mathcal{C}} + sx, t^{n+1}).$$

2. De plus, le second terme est décomposé :

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathcal{C}}\tilde{\varphi}_{\mathcal{C}}^{n+1} - \tilde{\alpha}\tilde{\varphi}_e^{n+1/2} &= \alpha_{\mathcal{C}}(\tilde{\varphi}_{\mathcal{C}}^{n+1} - \tilde{\varphi}_e^{n+1/2}) + (\alpha_{\mathcal{C}}\tilde{\varphi}_e^{n+1/2} - \tilde{\alpha}\tilde{\varphi}_e^{n+1/2}) \\ &= \alpha_{\mathcal{C}} \int_0^1 \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_{\mathcal{C}} + sx_e, t^{n+1})(x_e - x_{\mathcal{C}}) ds \\ &\quad + \alpha_{\mathcal{C}} \int_{t^n}^{t^{n+1/2}} \partial_t \varphi(x_e, \tau) d\tau \\ &\quad + \tilde{\varphi}_e^{n+1/2} \int_0^1 \vec{\nabla}_x \alpha((1-s)x_{\mathcal{C}} + sx_e)(x_e - x_{\mathcal{C}}) ds.\end{aligned}$$

3. Et enfin le troisième terme

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha} \varphi_e^{n+1/2} - (\alpha \varphi)_e^n &= \frac{1}{\text{mes}(e) k^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e \int_0^1 \vec{\nabla}_x (\alpha \varphi) ((1-s)x_e + s x, t) \\ &\quad (x - x_e) ds d\sigma_e(x) dt \\ &\quad + \frac{1}{k^n} \alpha(x_e) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{t^n}^t \partial_t \varphi(x_e, \tau) d\tau dt. \end{aligned}$$

Alors, si l'on regroupe ces majorations, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left| \alpha_C \varphi_C^{n+1} - (\alpha \varphi)_e^n \right| \\ & \leq C h_1 \left[\begin{aligned} & \frac{\alpha_C}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_C + s x, t^{n+1}) \right| ds dx \\ & + \alpha_C \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_C + s x_e, t^{n+1}) \right| ds \\ & + \left| \widetilde{\varphi}_e^{n+1/2} \right| \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \alpha((1-s)x_C + s x_e) \right| ds + \frac{1}{\text{mes}(e) k^n} \\ & \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x (\alpha \varphi) ((1-s)x_e + s x, t) \right| ds d\sigma_e(x) dt \end{aligned} \right] \\ & + \left[\alpha_C \int_{t^n}^{t^{n+1/2}} |\partial_t \varphi(x_e, \tau)| d\tau + \frac{1}{k^n} \alpha(x_e) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{t^n}^t |\partial_t \varphi(x_e, \tau)| d\tau dt \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Donc si φ est régulière (dans $C^1(\Omega \times \mathbb{R}^+)$), et si elle est indépendante de h_1 et k^n on peut simplement majorer :

$$\left| \alpha_C \varphi_C^{n+1} - (\alpha \varphi)_e^n \right| \leq C (\|\varphi\|_{C^1}, \|\alpha\|_{C^1}) (k^n + h_1)$$

Remarque 3.3.1 Ceci ne constitue pas une estimation d'erreur car on n'a pas choisi de fonction test particulière φ . Mais cette majoration est suffisante pour conclure à la convergence forte, grâce à la proposition 3.1.1, résultat de Champier, Gallouët et Herbin (dans [CG93]) - voir la section suivante pour cette démonstration.

Majoration du terme source

On peut aussi facilement majorer le terme source du schéma 1 :

$$\begin{aligned} |L_1^\alpha(v_{h_1})| &\leq \|\eta'(v_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial \mathcal{C}} k^n \text{mes}(\mathcal{C}) \frac{1}{\sqrt{k^n}} \left| \alpha_C \varphi_C^{n+1} - (\alpha \varphi)_e^n \right| \\ &\quad \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} \frac{1}{\sqrt{k^n}} \left| u_{1\mathcal{C}}^{n+1, e} - v_{1\mathcal{C}}^n \right|. \end{aligned}$$

Puis, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, on obtient :

$$\begin{aligned}
|L_1^\alpha(v_{h_1})| &\leq C \left(\|\eta'(v_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial\mathcal{C}} k^n \text{mes}(\mathcal{C}) \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} \\
&\quad \left[|\alpha_{\mathcal{C}} \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - (\alpha\varphi)_e^n| \frac{1}{\sqrt{k^n}} \right] \left[|u_{1\mathcal{C}}^{n+1, e} - v_{1\mathcal{C}}^n| \frac{1}{\sqrt{k^n}} \right] \\
&\leq C \left(\|\eta'(v_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\
&\quad \left(\sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial\mathcal{C}} k^n \text{mes}(\mathcal{C}) \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} \left(|\alpha_{\mathcal{C}} \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - (\alpha\varphi)_e^n| \frac{1}{\sqrt{k^n}} \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \left(\sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial\mathcal{C}} k^n \text{mes}(\mathcal{C}) \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} |u_{1\mathcal{C}}^{n+1, e} - v_{1\mathcal{C}}^n|^2 \frac{1}{k^n} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Et grâce à la définition du schéma (2.4) et (3.1) de la viscosité de $C_{1,e,\mathcal{C}}^n$ on a

$$|u_{1\mathcal{C}}^{n+1, e} - v_{1\mathcal{C}}^n|^2 \leq \lambda_{1,\mathcal{C}}^n \lambda_{1,\mathcal{C}}^2 (C_{1,e,\mathcal{C}}^n)^2 |\Delta_{e,\mathcal{C}}^{1n}(v)|^2.$$

Donc, comme on vient de montrer que $\forall \mathcal{C}, e \in \partial\mathcal{C}$, on a

$$|\alpha_{\mathcal{C}} \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - (\alpha\varphi)_e^n| \leq C (\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1}, \|\alpha\|_{\mathcal{C}^1}) (k^n + h_1),$$

on peut récrire cette majoration :

$$\begin{aligned}
|L_1^\alpha(v_{h_1})| &\leq C \left(\|\eta'(v_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1}, \|\alpha\|_{\mathcal{C}^1} \right) \\
&\quad \left(\sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial\mathcal{C}} k^n \text{mes}(\mathcal{C}) \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} \left((k^n + h_1) \frac{1}{\sqrt{k^n}} \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \left(\sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial\mathcal{C}} \text{mes}(\mathcal{C}) \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} \lambda_{1,\mathcal{C}}^n \lambda_{1,\mathcal{C}}^2 (C_{1,e,\mathcal{C}}^n)^2 |\Delta_{e,\mathcal{C}}^{1n}(v)|^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

On peut alors remarquer que la dernière expression vaut la constante $\left(\frac{2}{\varepsilon_1} T_1^{\varepsilon_1}\right)$ définie en (3.24). On doit donc calculer la valeur de

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial\mathcal{C}} k^n \text{mes}(\mathcal{C}) \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} \frac{(k^n + h_1)^2}{k^n} \\
&= \sum_{0 < n \leq n^T} k^n \frac{(k^n + h_1)^2}{k^n} \sum_{\mathcal{C}} \text{mes}(\mathcal{C}) \sum_{e \in \partial\mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})}.
\end{aligned}$$

Ensuite, comme la dernière somme de cette expression, répartie sur les arêtes, vaut 1 :

$$\sum_{e \in \partial \mathcal{C}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} = 1, \text{ il reste :}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial \mathcal{C}} k^n \text{mes}(\mathcal{C}) \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} k^n \frac{(k^n + h_1)^2}{k^n} \\ &= |\Omega_1| \sum_{0 < n \leq n^T} k^n \frac{(k^n + h_1)^2}{k^n} \\ &\leq C(T, |\Omega_1|) \sup_n \left(\frac{(k^n + h_1)^2}{k^n} \right). \end{aligned}$$

On peut alors conclure la majoration suivante sur le terme source :

$$L_1^\alpha(v_{h_1}) \leq C \left(\|\eta'(v_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi\|_{C^1}, \|\alpha\|_{C^1}, |\Omega_1|, T, \varepsilon_1 \right) \times \sup_n \left(\frac{k^n + h_1}{\sqrt{k^n}} \right).$$

Majoration des termes d'erreur classiques des Volumes Finis

On va montrer que les termes d'erreur du premier schéma, que l'on retrouve dans les démonstrations classiques des Volumes Finis, convergent tous vers 0.

1. Terme d'approximation de la dérivée temporelle

$$\begin{aligned} E_{h_1}^\alpha &= \sum_{\mathcal{C}, n} \text{mes}(\mathcal{C}) \eta(v_{1\mathcal{C}}^n) \\ &\quad \left(\alpha_{\mathcal{C}}(\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \varphi_{\mathcal{C}}^n) - \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{C}} \alpha(x) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \right) \\ &= \sum_{\mathcal{C}, n} \text{mes}(\mathcal{C}) \eta(v_{1\mathcal{C}}^n) \\ &\quad \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} (\alpha_{\mathcal{C}}(\varphi(x, t^{n+1}) - \varphi(x, t^n)) - \alpha(x) \partial_t \varphi(x, t)) dx. \end{aligned}$$

Si la fonction test est régulière, cette erreur est majorée en h_1

$$|E_{h_1}^\alpha| \leq C \left(|\Omega|, T, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty}, \|u_0\|_\infty, \|\varphi\|_{C^1} \right) h_1$$

2. Termes initiaux

$$\begin{aligned} E_{h_1}^{\alpha,0} &= \sum_{\mathcal{C}} \text{mes}(\mathcal{C}) \eta(u_{1\mathcal{C}}^{\alpha,0}) \int_{\mathcal{C}} (\alpha_{\mathcal{C}} - \alpha(x)) \varphi(x,0) dx, \\ E_{h_1}^0 &= \int_{\Omega_1} \alpha(x) [\eta(v_{h_1})(x,0) - \eta(u_0)(x)] \varphi(x,0) dx. \end{aligned}$$

De même, ces termes sont en h_1

$$|E_{h_1}^{\alpha,0}| + |E_{h_1}^0| \leq C \left(|\Omega|, T, \|\vec{\nabla}\alpha\|_{L^\infty}, \|u_0\|_\infty, \|u_0\|_{BV}, \|\varphi\|_{C^1} \right) h_1$$

On obtient donc bien les résultats annoncés sur (3.36). La démonstration de la proposition (3.3.1) est ainsi terminée. On va à présent conclure à la convergence forte de l'algorithme de couplage.

3.4 Convergence forte : DiPerna

On a une proposition similaire à 3.3.1 pour le schéma 2, en remplaçant le pas d'espace h_1 par h_2 et la fonction de couplage α par $(1 - \alpha)$.

On cherche, dans cette partie, à démontrer les hypothèses de la proposition 3.1.1, donnée en introduction.

3.4.1 Seconde inégalité d'entropie

On a donc la seconde inégalité faible entropique sur le schéma 2 :

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{Q}_2} \left[\eta(v_{h_2})(x,t) \partial_t ((1-\alpha)(x) \varphi(x,t)) \right. \\ & \quad \left. + H_\eta(v_{h_2})(x,t) \vec{\nabla}_x ((1-\alpha) \varphi)(x,t) \right] dx dt \\ & \quad - \int_{\Omega_2} \eta(u_0(x)) (1-\alpha)(x) \varphi(x,0) dx \\ & \leq L_1^{1-\alpha}(v_{h_2}) + E_{h_2}^\alpha + E_{h_2}^{\alpha,0} + E_{h_2}^0 + S_{h_2}^{\alpha,coup}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

où le terme de couplage est cette fois-ci :

$$S_{h_2}^{\alpha,coup} = - \sum_{\mathcal{E},n} \text{mes}(\mathcal{E}) (\eta(u_{2\mathcal{D}}^{n+1}) - \eta(u_{1\mathcal{C}}^{n+1})) \alpha_{\mathcal{D}} (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) \varphi_{\mathcal{D}}^{n+1},$$

avec les termes d'erreur

$$\begin{aligned}
E_{h_2}^\alpha &= \sum_{\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{D}) \eta(v_{2\mathcal{D}}^n) \left[(1 - \alpha_{\mathcal{D}}) (\varphi_{\mathcal{D}}^{n+1} - \varphi_{\mathcal{D}}^{n+1}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{D})} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{D}} (1 - \alpha(x)) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \right], \\
E_{h_2}^{\alpha,0} &= - \sum_{\mathcal{D}} \text{mes}(\mathcal{D}) \eta(u_{2\mathcal{D}}^{\alpha,0}) \int_{\mathcal{D}} (\alpha_{\mathcal{D}} - \alpha(x)) \varphi(x, 0) dx, \\
E_{h_2}^0 &= \int_{\Omega_2} (1 - \alpha(x)) [\eta(v_{h_2})(x, 0) - \eta(u_0)(x)] \varphi(x, 0) dx,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

et avec le terme source mesure $L_1^{1-\alpha}(v_{h_2})$:

$$\begin{aligned}
L_1^{1-\alpha}(v_{h_2}) &= \sum_{\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{D}) \sum_{e \subseteq \partial \mathcal{D}} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{D})} \\
&\quad \left(\eta(u_{2\mathcal{D}}^{n+1,e}) - \eta(v_{2\mathcal{D}}^n) \right) \left((1 - \alpha_{\mathcal{D}}) \varphi_{\mathcal{D}}^{n+1} - ((1 - \alpha) \varphi_e^n) \right).
\end{aligned}$$

On montre alors que ces termes d'erreur convergent vers 0 :

$$\begin{aligned}
&|L_1^{1-\alpha}(v_{h_2})| + |E_{h_2}^\alpha| + |E_{h_2}^{\alpha,0}| + |E_{h_2}^0| \\
&\leq C \left(\|\eta'(u_0)\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi\|_{C^1}, \|\alpha\|_{C^1}, |\Omega_2|, T, \|u_0\|_\infty, \|u_0\|_{BV}, \right. \\
&\quad \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_\infty, \|\alpha(1 - \alpha)\|_{C^2}, \left\| \vec{\nabla}_x \alpha(1 - \alpha) \right\|_{L^\infty(\Omega)}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \Big) \\
&\quad \left[\sup_n \left(\sqrt{k^n} + \frac{h_2}{\sqrt{k^n}} \right) + h_2 \right].
\end{aligned}$$

3.4.2 Inégalité d'entropie sur la solution moyenne

Inégalité double

En sommant les deux inégalités (3.34) et (3.39), on obtient :

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathcal{Q}_1} \alpha(x) \eta(v_{h_1})(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\
& - \int_{\mathcal{Q}_2} (1 - \alpha)(x) \eta(v_{h_2})(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\
& - \int_{\mathcal{Q}_1} \alpha(x) H_\eta(v_{h_1}(x, t)) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \\
& - \int_{\mathcal{Q}_2} (1 - \alpha)(x) H_\eta(v_{h_2}(x, t)) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \\
& - \int_{\Omega_1} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \\
\leq & L_1^\alpha(v_{h_1}) + L_1^{1-\alpha}(v_{h_2}) + \sum_{l=1,2} \left(E_{h_l}^\alpha + E_{h_l}^{\alpha,0} + E_{h_l}^0 \right) \\
& + \sum_{l=1,2} S_{h_l}^{\alpha, coup} + E_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha}, \tag{3.41}
\end{aligned}$$

en notant le nouveau terme d'erreur sur le flux d'entropie :

$$E_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha} = \int_{\Omega_{12} \times \mathbb{R}^+} (H_\eta(v_{h_1}(x, t)) - H_\eta(v_{h_2}(x, t))) \left(\vec{\nabla}_x \alpha(x) \right) \varphi(x, t) dx dt.$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient la somme des deux termes sources

du couplage $\sum_{l=1,2} S_{h_l}^{\alpha, coup}$ suivante :

$$\begin{aligned}
E_h^{coup} &= \sum_{l=1,2} S_{h_l}^{\alpha, coup} \\
&= \sum_{\mathcal{E}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) \left(\eta(u_{2\mathcal{D}}^{n+1}) - \eta(u_{1\mathcal{C}}^{n+1}) \right) \left(\alpha_{\mathcal{C}} (1 - \alpha_{\mathcal{C}}) \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \alpha_{\mathcal{D}} (1 - \alpha_{\mathcal{D}}) \varphi_{\mathcal{D}}^{n+1} \right).
\end{aligned}$$

On va montrer que ce terme converge en $(h_1 + h_2)$:

$$|E_h^{coup}| \leq C (\|\varphi\|_{C^1}) \left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} \right)$$

Majoration de l'erreur de couplage

Ce terme, dû au couplage des deux schémas converge aussi vers 0. En effet, dans la proposition 3.2.3, l'estimation (3.26) nous donne un contrôle

sur la norme faible exprimée en (3.25)

$$T_{\text{couplée}}^{Proj} = \sum_{\substack{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D} \\ 0 < n \leq n^T}} \text{mes}(\mathcal{E}) \overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}} \cdot (u_{1\mathcal{C}}^{n+1} - u_{2\mathcal{D}}^{n+1})^2 < C.$$

On majore donc ce terme par

$$|E_h^{coup}| \leq \|\eta'(u_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{\mathcal{E},n} \text{mes}(\mathcal{E}) |u_{2\mathcal{D}}^{n+1} - u_{1\mathcal{C}}^{n+1}| \\ |\alpha_{\mathcal{C}}(1-\alpha_{\mathcal{C}})\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \alpha_{\mathcal{D}}(1-\alpha_{\mathcal{D}})\varphi_{\mathcal{D}}^{n+1}|,$$

et si l'on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur cette erreur, on obtient :

$$|E_h^{coup}| \leq \|\eta'(u_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) \overline{\alpha(1-\alpha)}_{\mathcal{E}} (u_{2\mathcal{D}}^{n+1} - u_{1\mathcal{C}}^{n+1})^2 \right)^{1/2} \\ \left[\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) \frac{|\alpha_{\mathcal{C}}(1-\alpha_{\mathcal{C}})\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \alpha_{\mathcal{D}}(1-\alpha_{\mathcal{D}})\varphi_{\mathcal{D}}^{n+1}|^2}{\alpha(1-\alpha)_{\mathcal{E}}} \right]^{1/2}.$$

Il reste à majorer le dernier terme :

$$\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) \frac{|\alpha_{\mathcal{C}}(1-\alpha_{\mathcal{C}})\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \alpha_{\mathcal{D}}(1-\alpha_{\mathcal{D}})\varphi_{\mathcal{D}}^{n+1}|^2}{\alpha(1-\alpha)_{\mathcal{E}}}.$$

Pour cela, on décompose le terme $\alpha_{\mathcal{C}}(1-\alpha_{\mathcal{C}})\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \alpha_{\mathcal{D}}(1-\alpha_{\mathcal{D}})\varphi_{\mathcal{D}}^{n+1}$ en deux étapes, dont la première est :

$$\alpha_{\mathcal{C}}(1-\alpha_{\mathcal{C}})\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \alpha_{\mathcal{D}}(1-\alpha_{\mathcal{D}})\varphi_{\mathcal{D}}^{n+1} \\ = \left[\alpha_{\mathcal{C}}(1-\alpha_{\mathcal{C}})\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \widetilde{\alpha}_{\mathcal{E}}(1-\widetilde{\alpha}_{\mathcal{E}})\widetilde{\varphi}_{\mathcal{E}}^{n+1} \right] \\ + \left[\widetilde{\alpha}_{\mathcal{E}}(1-\widetilde{\alpha}_{\mathcal{E}})\widetilde{\varphi}_{\mathcal{E}}^{n+1} - \alpha_{\mathcal{D}}(1-\alpha_{\mathcal{D}})\varphi_{\mathcal{D}}^{n+1} \right],$$

où, on le rappelle, la notation $\widetilde{\bullet}_{\mathcal{E}}$ désigne la valeur de la fonction \bullet , prise au barycentre de la maille \mathcal{E} :

$$\widetilde{\phi}_{\mathcal{E}} = \phi(x_{\mathcal{E}}).$$

Ensuite, on décompose ces deux parties en trois nouvelles grandeurs :

$$\begin{aligned}
& \alpha_C (1 - \alpha_C) \varphi_C^{n+1} - \widetilde{\alpha}_\mathcal{E} (1 - \widetilde{\alpha}_\mathcal{E}) \widetilde{\varphi}_\mathcal{E}^{n+1} \\
= & (\alpha_C - \widetilde{\alpha}_\mathcal{E}) (1 - \alpha_C) \varphi_C^{n+1} \\
& - \widetilde{\alpha}_\mathcal{E} (\alpha_C - \widetilde{\alpha}_\mathcal{E}) \varphi_C^{n+1} \\
& + \widetilde{\alpha}_\mathcal{E} (1 - \widetilde{\alpha}_\mathcal{E}) \left(\varphi_C^{n+1} - \widetilde{\varphi}_\mathcal{E}^{n+1} \right),
\end{aligned}$$

et on a aussi trois autres grandeurs symétriques sur le second maillage.

On obtient alors les estimations sur ces trois termes :

1. D'après la propriété de l'approximation Volumes Finis des fonctions test, donnée dans l'introduction, on obtient :

$$\begin{aligned}
& (\alpha_C - \widetilde{\alpha}_\mathcal{E}) (1 - \alpha_C) \varphi_C^{n+1} \\
= & \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 (x - x_\mathcal{E}) \left[\vec{\nabla}_x \alpha ((1 - s) x_\mathcal{E} + s x) (1 - \alpha_C) \right] ds dx \varphi_C^{n+1}.
\end{aligned}$$

Si $x_\mathcal{E}$ est le barycentre de la maille \mathcal{E} , alors $\forall x \in \mathcal{E}, \forall s \in [0, 1]$,

$[(1 - s) x_\mathcal{E} + s x] \in \mathcal{E}$ et on peut utiliser le lemme 3.2.1 pour affirmer

$$\vec{\nabla}_x \alpha ((1 - s) x_\mathcal{E} + s x) (1 - \alpha_C) \leq C \sqrt{\alpha (1 - \alpha)_\mathcal{E}}.$$

2. De même pour le second terme :

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\alpha}_\mathcal{E} (\alpha_C - \widetilde{\alpha}_\mathcal{E}) \varphi_C^{n+1} \\
= & \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 (x - x_\mathcal{E}) \left[\vec{\nabla}_x \alpha ((1 - s) x_\mathcal{E} + s x) \alpha (x_\mathcal{E}) \right] ds dx \varphi_C^{n+1}.
\end{aligned}$$

Le même lemme nous donne ici

$$\vec{\nabla}_x \alpha ((1 - s) x_\mathcal{E} + s x) \alpha (x_\mathcal{E}) \leq C \sqrt{\alpha (1 - \alpha)_\mathcal{E}}$$

3. Enfin, le troisième et dernier terme est :

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\alpha}_\mathcal{E} (1 - \widetilde{\alpha}_\mathcal{E}) \left(\varphi_C^{n+1} - \widetilde{\varphi}_\mathcal{E}^{n+1} \right) \\
= & \widetilde{\alpha}_\mathcal{E} (1 - \widetilde{\alpha}_\mathcal{E}) \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 (x - x_\mathcal{E}) \vec{\nabla}_x \varphi ((1 - s) x_\mathcal{E} + s x, t^{n+1}) ds dx.
\end{aligned}$$

Et cette fois, on a tout de suite la bonne majoration :

$$\widetilde{\alpha}_\varepsilon (1 - \widetilde{\alpha}_\varepsilon) \leq \overline{\alpha(1 - \alpha)}_\varepsilon \leq C \sqrt{\alpha(1 - \alpha)}_\varepsilon$$

et on a le résultat (3.18).

On peut alors conclure sur l'erreur de couplage :

$$\begin{aligned} |E_h^{coup}| &\leq C \left(\|\eta'(u_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\alpha\|_{C^1}, \|\varphi\|_{C^1}, |\Omega_1| \right) \\ &\quad \times \left(T_{\text{couplée}}^{Proj} \right)^{1/2} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}). \end{aligned}$$

Contrôle de l'erreur sur les flux

L'erreur sur les flux est majorée par

$$\left| E_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha} \right| \leq C (H'_\eta(\|u_0\|_{L^\infty})) \int_{\mathcal{Q}} |v_{h_1} - v_{h_2}|(x, t) \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| \varphi(x, t) dx dt. \quad (3.42)$$

Et, d'après le lemme 3.2.1, on a l'inégalité (3.18) :

$$\forall x \in \mathcal{E}, \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| \leq C \sqrt{\alpha(1 - \alpha)}_\varepsilon,$$

et la fonction test φ étant bornée, la fonction $\left| \vec{\nabla}_x \alpha \right| \varphi$ vérifie donc bien l'hypothèse (3.32). Et le terme $E_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha}$ est bien majoré par $(h_1 + h_2 + h_{12} + \sqrt{k^+})$, d'après les résultats donnés dans le corollaire 3.2.6.

Alors, on peut construire une inégalité similaire pour la solution approchée moyennée $u_h^\alpha(x, t)$ définie en (2.14).

Inégalité sur la solution moyennée

On obtient enfin l'inégalité d'entropie (3.9) pour la solution moyennée

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{Q}} \eta(u_h^\alpha)(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\ & - \int_{\mathcal{Q}} H_\eta(u_h^\alpha)(x, t) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \\ & - \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \\ & \leq L_1^\alpha(v_{h_1}) + L_1^{1-\alpha}(v_{h_2}) + \sum_{l=1,2} \left(E_{h_l}^\alpha + E_{h_l}^{\alpha,0} + E_{h_l}^0 \right) \\ & \quad + E_h^{coup} + E_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha} + E_{\text{moy}}^\eta + E_{\text{moy}}^{H_\eta} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Avec de nouveaux termes d'erreur

$$E_{\text{moy}}^\eta = - \int_{\mathcal{Q}_1} \alpha(x) (\eta(u_h^\alpha) - \eta(v_{h_1}))(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\ - \int_{\mathcal{Q}_2} (1 - \alpha)(x) (\eta(u_h^\alpha) - \eta(v_{h_2}))(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt,$$

et

$$E_{\text{moy}}^{H_\eta} = - \int_{\mathcal{Q}_1} \alpha(x) (H_\eta(u_h^\alpha(x, t)) - H_\eta(v_{h_1}(x, t))) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \\ - \int_{\mathcal{Q}_2} (1 - \alpha)(x) (H_\eta(u_h^\alpha(x, t)) - H_\eta(v_{h_2}(x, t))) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt.$$

On va à présent majorer ces deux dernières erreurs pour écrire une majoration finale sur les erreurs ci-dessus de la forme

$$\left| L_1^\alpha(v_{h_1}) + L_1^{1-\alpha}(v_{h_2}) + \sum_{l=1,2} \left(E_{h_l}^\alpha + E_{h_l}^{\alpha,0} + E_{h_l}^0 \right) \right. \\ \left. + E_h^{\text{coup}} + E_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha} + E_{\text{moy}}^\eta + E_{\text{moy}}^{H_\eta} \right| \\ \leq C \left(\|\eta'(u_0)\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi\|_{C^1}, \|\alpha\|_{C^1}, \|u_0\|_\infty, \|u_0\|_{BV}, \right. \\ \left. |\Omega_1|, |\Omega_2|, T, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right) \\ \left[\sup_n \left(\sqrt{k^n} + \frac{h_1}{\sqrt{k^n}} \right) + \sup_n \left(\sqrt{k^n} + \frac{h_2}{\sqrt{k^n}} \right) \right. \\ \left. + \sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{k^+} + h_{12} \right].$$

Convergence des dernières erreurs Les deux nouvelles erreurs ci-dessus (E_{moy}^η , et $E_{\text{moy}}^{H_\eta}$) tendent vers 0 en $(h_1 + h_2 + h_{12} + \sqrt{k^+})$, comme pour le terme $E_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha}$.

En effet, grâce au fait que l'entropie η et le flux d'entropie H_η sont deux fonctions lipschitziennes et en reprenant la formule (2.14), on a les majorations suivantes :

$$|E_{\text{moy}}^\eta| \leq C (\eta'(\|u_0\|_{L^\infty})) \int_{\mathcal{Q}} \alpha(x) (1 - \alpha)(x) |v_{h_1} - v_{h_2}|(x, t) |\partial_t \varphi|(x, t) dx dt, \quad (3.44)$$

$$|E_{\text{moy}}^{H_\eta}| \leq C (H'_\eta(\|u_0\|_{L^\infty})) \int_{\mathcal{Q}} \alpha(x) (1 - \alpha)(x) |v_{h_1} - v_{h_2}|(x, t) \left| \vec{\nabla}_x \varphi \right|(x, t) dx dt, \quad (3.45)$$

Pour traiter ces deux erreurs E_{moy}^η , et $E_{\text{moy}}^{H_\eta}$, on utilise les fonctions ϕ suivantes pour appliquer les résultats donnés dans le corrolaire 3.2.6 :

$$\begin{aligned} E_{\text{moy}}^\eta &\rightarrow \phi(x, t) = \alpha(x) (1 - \alpha(x)) |\partial_t \varphi|(x, t) \\ E_{\text{moy}}^{H_\eta} &\rightarrow \phi(x, t) = \alpha(x) (1 - \alpha(x)) \left| \vec{\nabla}_x \varphi \right|(x, t) \end{aligned}$$

Ces deux fonctions test ϕ vérifient donc bien l'hypothèse (3.32). Et les erreurs sont bien majorées par $(h_1 + h_2 + h_{12} + \sqrt{k^+})$.

3.4.3 Conclusion à la convergence forte

On a donc l'inégalité d'entropie sur la solution moyenne, avec tout ses restes tendant vers 0 :

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{Q}} \eta(u_h^\alpha(x, t)) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\ & - \int_{\mathcal{Q}} H_\eta(u_h^\alpha(x, t)) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \\ & - \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \\ & \leq C \left[\frac{h_1 + h_2}{\sqrt{k^-}} + \sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{k^+} + h_{12} \right] \end{aligned} \tag{3.46}$$

Et on peut conclure à la convergence forte de la solution approchée u_h^α d'après la proposition 3.1.1 (de Champier, Gallouët et Herbin), donnée en introduction, sur la convergence des solutions faibles entropiques.

3.5 Estimation d'erreur, technique de Kruřkov

L'estimation d'erreur est basée sur la démonstration de l'unicité des solutions faibles entropiques (voir (3.5)) de N.S. Kruřkov [Kru70]. L'extension qui en a été faite par Kuznetsov et Volosin (dans [KV76]) ne concernait que les schémas Différences Finies en une dimension d'espace. Enfin, c'est A.Y. Le Roux, dans [Le 79], qui a utilisé leur démonstration pour montrer la convergence du schéma de Godunov. Les premiers résultats d'estimation

d'erreur ont été proposés par J.P. Vila dans [Vil94]. On a aussi, à la même période les papiers de Cockburn, Coquel et LeFloch ([CCL94] et [CCL95]), ainsi que celui de Perthame et Al. ([BP96]).

La forme suivante de l'inégalité faible entropique sur la solution approchée moyennée,

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathcal{Q}} \eta(u_h^\alpha)(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\
& - \int_{\mathcal{Q}} H_\eta(u_h^\alpha(x, t)) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \\
& - \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \\
& \leq L_1^\alpha(v_{h_1}) + L_1^{1-\alpha}(v_{h_2}) + \sum_{l=1,2} (E_{h_l}^\alpha + E_{h_l}^0) \\
& + \sum_{l=1,2} E_{h_l}^{\alpha,0} + E_h^{coup} + E_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha} + E_{moy}^\eta + E_{moy}^{H_\eta}
\end{aligned}$$

donnée en (3.43), nous permet de différencier les différentes erreurs qu'il faut estimer. En comparant ces erreurs avec celles que l'on trouve dans l'expression classique de cette inégalité pour un seul schéma Volumes Finis :

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathcal{Q}} \eta(u_h)(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\
& - \int_{\mathcal{Q}} H_\eta(u_h(x, t)) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \\
& - \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \\
& \leq L_1(u_h) + E_h + E_h^0,
\end{aligned}$$

on voit que ces erreurs viennent soit des deux schémas Volumes Finis utilisés, soit du couplage lui-même de ces schémas. Pour faire cela, on rappellera la forme des mesures de Radon, appliquées à la fonction test φ , qui majoreront les erreurs classiques des schémas Volumes Finis, $L_1^\alpha(v_{h_1})$, $L_1^{1-\alpha}(v_{h_2})$ et $\sum_{l=1,2} (E_{h_l}^\alpha + E_{h_l}^0)$. Ensuite, on donnera les nouvelles mesures de Radon, majorant les erreurs du couplage, $\sum_{l=1,2} E_{h_l}^{\alpha,0}$, E_h^{coup} , $E_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha}$, E_{moy}^η et $E_{moy}^{H_\eta}$. On a en fait ici qu'estimer ces nouvelles mesures, pour une fonction test φ donnée. Cette fonction test nous permettra d'écrire une inégalité sur l'erreur de

convergence :

$$\int_{\mathbb{D}} |u(x, t) - u_h^\alpha(x, t)| \, dx \, dt \leq C \left(\|\partial_t \psi\|_{L^\infty([0, T])}, \|u\|_{BV}, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty} \right) h^{1/4},$$

en utilisant la technique de dédoublement de variables due à N.S. Kruřkov.

Ce qui conclura notre démonstration du théorème 3.1.2.

3.5.1 Mesures

Mesures classiques des schémas Volumes Finis

On décrit dans ce paragraphe les mesures de Radon majorant les termes d'erreurs $L_1^\alpha(v_{h_1})$, $L_1^{1-\alpha}(v_{h_2})$ et $\sum_{l=1,2} (E_{h_l}^\alpha + E_{h_l}^0)$.

– On a tout d'abord les mesures classiques dues aux E-schémas Volumes Finis :

$\forall l = 1, 2$,

$$L_l^\alpha(v_{h_l}) \leq \nu_{h_l}(\varphi),$$

qui se décomposent encore par : $\forall l = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \nu_{h_l}(\varphi) &= \mu_{h_l, x}^\alpha \left(\left| \vec{\nabla}_x \varphi \right| \right) + \mu_{h_l, t}^\alpha (|\partial_t \varphi|), \\ &+ \mu_{h_l}^1 \left(\left| \vec{\nabla}_x \alpha \varphi \right| \right) + \mu_{h_l}^{2, |\vec{\nabla}_x \alpha|} (|\varphi|), \end{aligned}$$

La décomposition de la différence $|\alpha_C \varphi_C^{n+1} - (\alpha \varphi)_e^n|$ dans (3.38) permet de définir les mesures suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_{h_1, \cdot}^\alpha(\psi) &= \left\| \eta'(v_{h_1}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial \mathcal{C}} k^n \text{mes}(e) \text{mes}_{h_1, \cdot}^{n, \mathcal{C}, \alpha}(\psi) C_{1, e, \mathcal{C}}^n |\Delta_{e, \mathcal{C}}^{1n}(v)|, \\ \mu_{h_1}^1(\psi) &= \left\| \eta'(v_{h_1}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial \mathcal{C}} k^n \text{mes}(e) \text{mes}_{h_1, x, 1}^{n, \mathcal{C}}(\psi) C_{1, e, \mathcal{C}}^n |\Delta_{e, \mathcal{C}}^{1n}(v)|, \\ \mu_{h_2, \cdot}^{1-\alpha}(\psi) &= \left\| \eta'(v_{h_2}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{\mathcal{D}, n, e \in \partial \mathcal{D}} k^n \text{mes}(e) \text{mes}_{h_2, \cdot}^{n, \mathcal{D}, (1-\alpha)}(\psi) C_{2, e, \mathcal{D}}^n |\Delta_{e, \mathcal{D}}^{2n}(v)|, \\ \mu_{h_1}^{2, \psi}(\varphi) &= \left\| \eta'(v_{h_2}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial \mathcal{C}} k^n \text{mes}(e) \text{mes}_{h_1, x, 2}^{n, \mathcal{K}, \psi}(\varphi) C_{1, e, \mathcal{C}}^n |\Delta_{e, \mathcal{C}}^{1n}(v)|, \end{aligned}$$

où la mesure de ψ est définie en espace ou en temps par :

$$\begin{aligned} \text{mes}_{h, x}^{n, \mathcal{K}, \alpha}(\psi) &= C h \frac{\alpha_{\mathcal{K}}}{\text{mes}(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} \int_0^1 \psi((1-s)x_{\mathcal{K}} + s x, t^{n+1}) \, ds \, dx \\ &+ C h \alpha_{\mathcal{K}} \int_0^1 \psi((1-s)x_{\mathcal{K}} + s x_e, t^{n+1}) \, ds, \end{aligned}$$

$$\text{mes}_{h,x,1}^{n,\mathcal{K}}(\psi) = C h \frac{1}{\text{mes}(e) k^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e \int_0^1 \psi((1-s)x_e + s x, t) ds d\sigma_e(x) dt,$$

$$\text{mes}_{h,x,2}^{n,\mathcal{K},\psi}(\varphi) = C h \left| \varphi(x_e, t^{n+1/2}) \right| \int_0^1 \psi((1-s)x_{\mathcal{K}} + s x_e) ds.$$

$$\begin{aligned} \text{mes}_{h,t}^{n,\mathcal{K},\alpha}(\psi) &= \frac{1}{k^n} \alpha(x_e) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{t^n}^t \psi(x_e, \tau) d\tau dt \\ &\quad + \alpha_{\mathcal{K}} \int_{t^n}^{t^{n+1/2}} \psi(x_e, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Alors, on peut estimer les mesures de Radon :

$$L_1^\alpha(v_{h_1}) \leq \nu_{h_1}(\varphi) \text{ et } L_1^{1-\alpha}(v_{h_2}) \leq \nu_{h_2}(\varphi).$$

– Ensuite, les erreurs venant de l'approximation volumes finis sont : $\forall l =$

1, 2,

$$\begin{aligned} E_{h_1}^\alpha &= \sum_{\mathcal{C},n} \text{mes}(\mathcal{C}) \eta(v_{1\mathcal{C}}^n) \\ &\quad \left(\alpha_{\mathcal{C}} (\varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \varphi_{\mathcal{C}}^n) - \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{C}} \alpha(x) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \right), \end{aligned}$$

et les mesures les majorant sont notées :

$$|E_{h_1}^\alpha| \leq \mu_{h_1}^\alpha(|\partial_t \varphi|)$$

avec

$$\mu_{h_1}^\alpha(\phi) = C (\|\eta(v_{h_1})\|_{L^\infty}) h_1 \sum_n k^n \int_{\Omega} \left\| \vec{\nabla} \alpha(x) \right\| |\phi|(x, t^n) dx$$

– Enfin, celles intervenant sur la condition initiale $\forall l = 1, 2$,

$$E_{h_l}^0 = \int_{\Omega_1} \alpha(x) [\eta(v_{h_l})(x, 0) - \eta(u_0)(x)] \varphi(x, 0) dx \leq \mu_{h_l}^0(\varphi).$$

avec

$$\mu_{h_1}^0(\varphi) = C (\|\eta(u_0)\|_{BV}) h_1 \int_{\Omega_1} \alpha(x) \varphi(x, 0) dx,$$

$$\mu_{h_2}^0(\varphi) = C (\|\eta(u_0)\|_{BV}) h_2 \int_{\Omega_2} \alpha(x) \varphi(x, 0) dx.$$

En conclusion , on a la majoration finale, par les mesures de Radon que l'on vient de définir :

$$\begin{aligned} & \left| L_1^\alpha(v_{h_1}) + L_1^{1-\alpha}(v_{h_2}) + \sum_{l=1,2} (E_{h_l}^\alpha + E_{h_l}^0) \right| \\ & \leq \nu_{h_1}(\varphi) + \nu_{h_2}(\varphi) + \sum_{l=1,2} (\mu_{h_l}^\alpha(|\partial_t \varphi|) + \mu_{h_l}^0(\varphi)). \end{aligned}$$

Mesures dues au couplage

- Une autre erreur sur la condition initiale, mais dépendante celle-ci de la fonction de couplage : $\forall l = 1, 2$,

$$E_{h_l}^{\alpha,0} = \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{T}_{h_l}} \text{mes}(\mathcal{C}) \eta(v_{l\mathcal{C}}^0) \int_{\mathcal{C}} (\alpha_{\mathcal{C}} - \alpha(x)) \varphi(x, 0) dx \leq \mu_{h_l}^{\alpha,0}(\varphi),$$

avec les mesures suivantes, pour l valant 1 et 2 :

$$\begin{aligned} \mu_{h_1}^{\alpha,0}(\varphi) &= C(\|\eta(v_{h_1}(\cdot, 0))\|_{L^\infty}) h_1 \sum_{\mathcal{C}} \text{mes}(\mathcal{C}) \int_{\mathcal{C}} |\nabla_x \alpha|(x) \varphi(x, 0) dx, \\ \mu_{h_2}^{\alpha,0}(\varphi) &= C(\|\eta(v_{h_2}(\cdot, 0))\|_{L^\infty}) h_2 \sum_{\mathcal{D}} \text{mes}(\mathcal{D}) \int_{\mathcal{D}} |\nabla_x \alpha|(x) \varphi(x, 0) dx, \end{aligned}$$

- On a tout d'abord l'erreur de couplage :

$$E_h^{coup} = \sum_{\mathcal{E}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) (\eta(u_{2\mathcal{D}}^{n+1}) - \eta(u_{1\mathcal{C}}^{n+1})) (\alpha_{\mathcal{C}}(1 - \alpha_{\mathcal{C}}) \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} - \alpha_{\mathcal{D}}(1 - \alpha_{\mathcal{D}}) \varphi_{\mathcal{D}}^{n+1}),$$

et la mesure correspondante

$$E_h^{coup} \leq \mu_h^{coup}(\varphi)$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_h^{coup}(\varphi) &= C \left(\|\eta'(u_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \sum_{\mathcal{E}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) |u_{2\mathcal{D}}^{n+1} - u_{1\mathcal{C}}^{n+1}| \\ &h_1 \left[\frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \alpha((1-s)x_{\mathcal{E}} + sx) (1 - \alpha_{\mathcal{C}} + \alpha(x_{\mathcal{E}})) \right| ds dx \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + \widetilde{\alpha}_{\mathcal{E}} (1 - \widetilde{\alpha}_{\mathcal{E}}) \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_{\mathcal{E}} + sx, t^{n+1}) \right| ds dx \right] \\ &+ h_2 \left[\frac{1}{\text{mes}(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \alpha((1-s)x_{\mathcal{E}} + sx) (\alpha_{\mathcal{D}} + \alpha(x_{\mathcal{E}})) \right| ds dx \varphi_{\mathcal{D}}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + \widetilde{\alpha}_{\mathcal{E}} (1 - \widetilde{\alpha}_{\mathcal{E}}) \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_{\mathcal{E}} + sx, t^{n+1}) \right| ds dx \right]. \end{aligned}$$

– L'erreur de couplage sur les flux est

$$E_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha} = \int_{\otimes_{12} \times \mathbb{R}^+} (H_\eta(v_{h_1}(x, t)) - H_\eta(v_{h_2}(x, t))) \left(\vec{\nabla}_x \alpha(x) \right) \varphi(x, t) dx dt,$$

est elle aussi majorée par une mesure de Radon

$$\left| E_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha} \right| \leq \mu_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha}(\varphi),$$

avec

$$\mu_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha}(\varphi) = C (H'_\eta(\|u_0\|_{L^\infty})) \int_{\mathcal{Q}} |v_{h_1} - v_{h_2}|(x, t) \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| \varphi(x, t) dx dt.$$

– Enfin les erreurs apportées par l'introduction de la solution approchée moyennée sont

$$\begin{aligned} E_{\text{moy}}^\eta &= - \int_{\mathcal{Q}_1} \alpha(x) (\eta(u_h^\alpha) - \eta(v_{h_1})) (x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\ &\quad - \int_{\mathcal{Q}_2} (1 - \alpha)(x) (\eta(u_h^\alpha) - \eta(v_{h_2})) (x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_{\text{moy}}^{H_\eta} &= - \int_{\mathcal{Q}_1} \alpha(x) (H_\eta(u_h^\alpha(x, t)) - H_\eta(v_{h_1}(x, t))) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \\ &\quad - \int_{\mathcal{Q}_2} (1 - \alpha)(x) (H_\eta(u_h^\alpha(x, t)) - H_\eta(v_{h_2}(x, t))) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Elles sont majorées par les mesures

$$\begin{aligned} |E_{\text{moy}}^\eta| &\leq C (\eta' (\|u_0\|_{L^\infty})) \mu_{\text{moy}} (|\partial_t \varphi|) , \\ |E_{\text{moy}}^{H_\eta}| &\leq C (H'_\eta (\|u_0\|_{L^\infty})) \mu_{\text{moy}} \left(\left| \vec{\nabla}_x \varphi \right| \right) , \end{aligned}$$

avec

$$\mu_{\text{moy}}^\eta (\phi) = \int_{\mathcal{Q}} \alpha (x) (1 - \alpha) (x) |v_{h_1} - v_{h_2}| (x, t) \phi (x, t) dx dt .$$

Enfin, en conclusion, on la majoration suivante sur les erreurs apportées par l'algorithme de couplage :

$$\begin{aligned} &\left| E_h^{\text{coup}} + E_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha} + \sum_{l=1,2} E_{h_l}^{\alpha,0} + E_{\text{moy}}^\eta + E_{\text{moy}}^{H_\eta} \right| \\ &\leq \mu_h^{\text{coup}} (\varphi) + \mu_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha} (\varphi) + \sum_{l=1,2} \mu_{h_l}^{\alpha,0} (\varphi) \\ &\quad + C (\eta' (\|u_0\|_{L^\infty})) \mu_{\text{moy}} (|\partial_t \varphi|) + C (H'_\eta (\|u_0\|_{L^\infty})) \mu_{\text{moy}} \left(\left| \vec{\nabla}_x \varphi \right| \right) . \end{aligned}$$

Afin de poursuivre l'estimation de ces erreurs, on doit spécifier la fonction test qui nous permettra de démontrer la convergence. C'est ce que nous allons faire à présent.

3.5.2 Fonction test et propriétés

On utilise ici la technique de dédoublement de variables de la fonction test, introduite par Kruřkov dans [Kru70] :

$$\varphi \equiv \varphi (x, t, y, s) .$$

Nous définissons le noyau ρ_N (régularisation du Dirac) :

$$\forall N \in 1..d, \rho_N \in C_c^\infty (\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \begin{cases} \text{supp} (\rho_N) \subset \mathcal{B} (0^N, 1) , \\ \rho_N (x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N , \\ \int_{\mathcal{B}(0^N,1)} \rho_N (x) dx = 1. \end{cases} \quad (3.47)$$

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, on définit $\rho_{d,\varepsilon}$ et $\bar{\rho}_{1,\varepsilon}$ deux noyaux régularisant de la masse de Dirac en 0 :

$$\begin{cases} \rho_{d,\varepsilon} : x \rightarrow \frac{1}{\varepsilon^d} \rho_d \left(\frac{|x|}{\varepsilon} \right), \\ \rho_{1,\varepsilon} : t \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \rho_1 \left(\frac{t}{\varepsilon} \right), \\ \text{supp} (\rho_{d,\varepsilon}) \subset \mathcal{B} (0^d, \varepsilon), \\ \text{supp} (\rho_{1,\varepsilon}) \subset \mathcal{B} (0^1, \varepsilon). \end{cases} \quad (3.48)$$

Grâce aux formules (3.47) et (3.48), nous avons la propriété suivante : $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \rho_{d,\varepsilon} (x - y) \rho_{1,\varepsilon} (t - s) dy ds = 1. \quad (3.49)$$

On peut alors découpler la fonction test φ en x et $x - y$, et t et $t - s$:

$$\varphi (x, t, y, s) = \psi (t) \rho_{d,\varepsilon} (x - y) \rho_{1,\varepsilon} (t - s + \varepsilon). \quad (3.50)$$

On pose la première partie de la dérivée en temps de φ :

$$\tilde{\varphi}^1 (\beta) = \partial_t \psi (t) \rho_{d,\varepsilon} (x - y) \rho_{1,\varepsilon} (t - s + \varepsilon), \quad (3.51)$$

ainsi que la seconde partie

$$\tilde{\varphi}^2 (\beta) = \psi (t) \rho_{d,\varepsilon} (x - y) \partial_t \rho_{1,\varepsilon} (t - s + \varepsilon). \quad (3.52)$$

Et enfin le gradient de la fonction test est :

$$\vec{\nabla}_x \varphi = \psi (t) \rho_{1,\varepsilon} (t - s + \varepsilon) \vec{\nabla}_x \rho_{d,\varepsilon} (x - y). \quad (3.53)$$

On a alors d'après la formule (3.50) de φ et ces notations :

$$\begin{cases} (\partial_t \varphi + \partial_s \varphi) (\beta) = \tilde{\varphi}^1 (\beta), \\ (\vec{\nabla}_x \varphi + \vec{\nabla}_y \varphi) (\beta) = 0, \\ \varphi (x, t, y, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.54)$$

On utilise aussi la régularisation du Heaviside en 0 :

$$\begin{aligned} H_\varepsilon (t) &= \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \int_0^t \rho_{1,\varepsilon} (s - \varepsilon) ds & 0 < t < 2\varepsilon, \\ 1 & 2\varepsilon < t, \end{cases} \\ \partial_t H_\varepsilon (t) &= \rho_{1,\varepsilon} (t - \varepsilon) \geq 0, \quad \forall t \in [0, 2\varepsilon]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

3.5.3 Entropie pour la solution exacte et pour le schéma

On rappelle l'inégalité suivante pour la solution faible entropique :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} \eta(u(y, s)) \frac{\partial}{\partial s} \varphi(x, t, y, s) + H_\eta(u(y, s)) \vec{\nabla}_y \varphi(x, t, y, s) \, dy \, ds \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^d} \eta(u(y, 0)) \varphi(x, t, y, 0) \, dy. \end{aligned}$$

On rappelle la notation ; \mathbb{D} est l'espace $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$.

On choisira alors l'entropie suivante :

$$\begin{aligned} \eta_c(\cdot) &= |\cdot - c|, \\ \eta_c'(\cdot) &= \text{signe}(\cdot - c), \\ H_c(\cdot)(x, t) &= \text{signe}(\cdot - c) \cdot (F(\cdot, x, t) - F(c, x, t)), \end{aligned}$$

avec $c = u_h^\alpha(x, t)$.

Donc si l'on intègre le résultat en x et en t , en notant $\beta = (x, t, y, s)$ et $d\beta = dx \, dt \, dy \, ds$:

$$\int_{\mathbb{D}^2} \left[+\text{signe}(u(y, s) - u_h^\alpha(x, t)) \cdot (F(u(y, s)) - F(u_h^\alpha(x, t))) \vec{\nabla}_y \varphi(\beta) \right] d\beta \geq 0, \quad (3.56)$$

puisque $\varphi(x, t, y, 0) = 0$.

La solution approchée vérifie quant à elle, d'après l'inégalité (3.43) :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} \eta(u_h^\alpha)(x, t) \partial_t \varphi(x, t) \, dx \, dt \\ & + \int_{\mathbb{D}} H_\eta(u_h^\alpha)(x, t) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) \, dx \, dt \\ & + \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) \, dx \\ & \geq - \int_{\mathbb{D}} \nu_h^\alpha(\varphi)(y, s) \, dy \, ds. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \nu_h^\alpha(\varphi)(y, s) \, dy \, ds &= \int_{\mathbb{D}^2} \varphi(\beta) \, d\nu_{h_1}(x, t) \, dy \, ds \\
&+ \int_{\mathbb{D}^2} \varphi(\beta) \, d\nu_{h_2}(x, t) \, dy \, ds \\
&+ \int_{\mathbb{D}^2} |\partial_t \varphi|(\beta) \, d \sum_{l=1,2} \mu_{h_l}^\alpha(x, t) \, dy \, ds \\
&+ \int_{\mathbb{D}^2} \varphi(\beta) \, d \sum_{l=1,2} \mu_{h_l}^{\alpha,0}(x, t) \, dy \, ds \\
&+ \int_{\mathbb{D}^2} \varphi(\beta) \, d \sum_{l=1,2} \mu_{h_l}^0(x, t) \, dy \, ds \\
&+ \int_{\mathbb{D}^2} \varphi(\beta) \, d \mu_h^{coup}(x, t) \, dy \, ds \\
&+ \int_{\mathbb{D}^2} \varphi(\beta) \, d \mu_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha}(x, t) \, dy \, ds \\
&+ C(\eta'(\|u_0\|_{L^\infty})) \int_{\mathbb{D}^2} |\partial_t \varphi|(\beta) \, d \mu_{\text{moy}}(x, t) \, dy \, ds \\
&+ C(H'_\eta(\|u_0\|_{L^\infty})) \int_{\mathbb{D}^2} |\vec{\nabla}_x \varphi|(\beta) \, d \mu_{\text{moy}}(x, t) \, dy \, ds.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

On remarque que l'on a remplacé \mathcal{Q} par \mathbb{D} dans cette inégalité; on a ici considéré le support compact de la fonction test et celui de la solution approchée moyennée. Et après une nouvelle intégration en y et en s , avec la même entropie η_c telle que $c = u(y, s)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}^2} |u(y, s) - u_h^\alpha(x, t)| \, \partial_t \varphi(\beta) \, d\beta \\
&+ \int_{\mathbb{D}^2} \text{signe}(u(y, s) - u_h^\alpha(x, t)) \cdot (F(u(y, s)) - F(u_h^\alpha(x, t))) \, \vec{\nabla}_x \varphi(\beta) \, d\beta \\
&+ \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{R}^d} |u(y, s) - u_0(x)| \, \varphi(x, 0, y, s) \, dx \, dy \, ds \\
&\geq - \int_{\mathbb{D}} \varphi(\beta) \, d\nu_h^\alpha(x, t) \, dy \, ds.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

3.5.4 Estimation d'erreur

Si nous sommons les deux inégalités (3.56) et (3.58) :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{D}^2} |u(y, s) - u_h^\alpha(x, t)| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) d\beta \\
+ \int_{\mathbb{D}^2} \text{signe} (u(y, s) - u_h^\alpha(x, t)) \cdot (F(u(y, s)) - F(u_h^\alpha(x, t))) \left(\vec{\nabla}_x \varphi + \vec{\nabla}_y \varphi \right) (\beta) d\beta \\
& + \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{R}^d} |u(y, s) - u_0(x)| \varphi(x, 0, y, s) dy ds dx \\
& \geq - \int_{\mathbb{D}} \varphi(\beta) d\nu_h^\alpha(x, t) dy ds .
\end{aligned}$$

Maintenant, nous prenons en compte les propriétés de la fonction test données en (3.50). Le système (3.54) nous permet de simplifier cette inégalité.

Il reste alors

$$A^1 + A^2 \geq - \int_{\mathbb{D}} \varphi(\beta) d\nu_h^\alpha(x, t) dy ds, \quad (3.59)$$

avec les deux termes :

$$A^1 = \int_{\mathbb{D}^2} |u(y, s) - u_h^\alpha(x, t)| \tilde{\varphi}^1(\beta) d\beta,$$

et

$$A^2 = \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{R}^d} |u(y, s) - u_0(x)| \varphi(x, 0, y, s) dy ds dx .$$

On va à présent écrire les majorations de ces deux termes. Le premier terme A^1 va nous permettre de faire apparaître la norme L^1 recherchée. Le terme A^2 et la mesure $\nu_h^\alpha(\varphi)$ sont les erreurs que nous allons estimer pour montrer qu'ils tendent vers 0 .

Retour à une seule variable d'espace

Le premier terme de cette inéquation est :

$$\begin{aligned}
A^1 &= \int_{\mathbb{D}^2} |u(y, s) - u_h^\alpha(x, t)| \partial_t \psi(t) \rho_{d, \varepsilon}(x - y) \rho_{1, \varepsilon}(t - s + \varepsilon) d\beta \\
&= \int_{\mathbb{D}} |u(x, t) - u_h^\alpha(x, t)| \partial_t \psi(t) dx dt + E^\varepsilon,
\end{aligned}$$

avec l'erreur suivante :

$$E^\varepsilon = \int_{\mathbb{D}^2} (|u(y, s) - u_h^\alpha(x, t)| - |u(x, t) - u_h^\alpha(x, t)|) \\ \partial_t \psi(t) \rho_{d, \varepsilon}(x - y) \rho_{1, \varepsilon}(t - s + \varepsilon) d\beta.$$

Elle est majorée par une mesure qui converge vers 0 avec ε et on écrit :

$$E^\varepsilon \leq \mu^\varepsilon(|\partial_t \psi|) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

L'inégalité triangulaire permet d'écrire cette mesure :

$$\begin{aligned} \mu^\varepsilon(\Phi) &= \frac{1}{\varepsilon^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{K_t} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{K_s} |u(y, s) - u(x, t)| \Phi(t) \\ &\quad \rho_d\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \rho_1\left(\frac{t-s}{\varepsilon} + 1\right) dy ds dx dt \\ &\leq \int_{\text{supp}(\Phi)} \Phi(t) \int_{K_t} \left[\int_{\mathcal{B}(0,1)} \int_{(0,1)} |u(x + \varepsilon \bar{x}, t + \varepsilon \bar{t} + \varepsilon) - u(x, t)| d\bar{x} d\bar{t} \right] dx dt \\ &\leq \varepsilon C(\|\Phi\|_{L^\infty}, \|u\|_{BV}) \mu(\Phi). \end{aligned}$$

On utilise pour cela le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} &\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \\ \left\{ \begin{array}{l} -\bar{x} = \frac{x-y}{\varepsilon}, \\ \bar{t} = \frac{t-s}{\varepsilon} + 1 \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dy = \varepsilon^d d\bar{x}; \quad y = x + \varepsilon \bar{x}, \\ ds = \varepsilon d\bar{t}; \quad s = t + \varepsilon(\bar{t} - 1). \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.60)$$

et on note la mesure μ sur \mathbb{R}^+ , indépendante de ε , suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \mu(\Phi) = \text{mes}(\text{supp}(\Phi)) \sup_{t \in \text{supp}(\Phi)} \{\text{mes}(K_t)\} \end{array} \right. \quad (3.61)$$

où le compact $K_t = \text{supp}(u(\cdot, t))$ est défini dans (3.2.2) ; alors on obtient la majoration de la mesure μ_1^ε pour la fonction $\partial_t \psi$:

$$\begin{aligned} \mu^\varepsilon(|\partial_t \psi|) &\leq \|\partial_t \psi\|_{L^\infty([0, T])} \int_{[0, T]} \int_{K_t} \int_{|t-s+\frac{1}{\varepsilon}| \leq \varepsilon} \int_{K_s \cap \mathcal{B}(x, \varepsilon)} |u(y, s) - u(x, t)| dy ds dx dt \\ &= \varepsilon C\left(\|\partial_t \psi\|_{L^\infty([0, T])}, \|u\|_{BV}\right) \mu(I_{[0, T]}). \end{aligned}$$

Erreur sur la condition initiale

Pour le terme de condition initiale, la formule (3.50) de la fonction test et la condition $\psi(0) = 1$, nous permettent de faire la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
A^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon^{d+1}} \int_{K_0} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{K_s} |u(y, s) - u_0(x)| \rho_d \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) \rho_1 \left(\frac{\varepsilon-s}{\varepsilon} \right) dy ds dx \\
&\leq \int_{K_0} \left[\int_{B(0,1)} \int_{(0,1)} |u(x + \varepsilon \bar{x}, \varepsilon + \varepsilon \bar{t}) - u_0(x)| d\bar{x} d\bar{t} \right] dx \\
&\leq \varepsilon C (\|u\|_{BV}) \text{mes}(K_0) ,
\end{aligned}$$

avec le changement de même changement de variables introduit dans (3.60) et appliqué cette fois-ci au point $(x, t) = (x, 0)$ et en rappelant que le support (compact) de la condition initiale a été noté :

$$\text{supp}(u_0) = K_0 .$$

Conclusion

Après ces majorations, on arrive à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} |u(x, t) - u_h^\alpha(x, t)| \partial_t \psi(t) dx dt \\
&\geq - \int_{\mathbb{D}} \varphi(\beta) d\nu_h^\alpha(x, t) dy ds \\
&- \varepsilon C \left(\|\partial_t \psi\|_{L^\infty([0, T])}, \|u\|_{BV} \right) \mu(I_{[0, T]}) \\
&- \varepsilon C (\|u\|_{BV}) \text{mes}(K_0) .
\end{aligned}$$

Enfin, nous allons montrer dans le paragraphe suivant que si la fonction ψ est une régularisation de la fonction $(1 - \frac{t}{T}) \chi_{[0, T]}$

$$\psi(t) = \frac{T-t}{T} H_\varepsilon(T-t) , \quad (3.62)$$

alors sa dérivée en temps est

$$\partial_t \psi(t) = \frac{-1}{T} H_\varepsilon(T-t) - \frac{T-t}{T} \rho_{1, \varepsilon}(T-t) . \quad (3.63)$$

et le terme source mesure $\nu_h^\alpha(\varphi)$, apporté par les approximations de l'algorithme, est alors estimé (dans le paragraphe suivant) en $\frac{h^{1/2}}{\varepsilon}$. Ce qui nous permet de donner la majoration finale suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{D}} |u(x, t) - u_h^\alpha(x, t)| \partial_t \psi(t) \, dx \, dt \\ & \geq C \left(\|\partial_t \psi\|_{L^\infty([0, T])}, \|u\|_{BV}, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty} \right) \left(\varepsilon + \frac{\sqrt{h}}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

On rappelle que l'on a posé $h = \max(h_1, h_2, h_{12})$. Pour obtenir une valeur optimum de ε , on doit choisir le terme $\varepsilon + \frac{\sqrt{h}}{\varepsilon}$ maximum, soit $\varepsilon = h^{1/4}$. On a bien la nouvelle estimation (3.64) simplifiée

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{D}} |u(x, t) - u_h^\alpha(x, t)| \partial_t \psi(t) \, dx \, dt \\ & \geq C \left(\|\partial_t \psi\|_{L^\infty([0, T])}, \|u\|_{BV}, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty} \right) h^{1/4}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Dans la suite de la démonstration, on utilise le fait que le support de ψ est $[0, T]$ et que l'on a

$$-1 \leq \partial_t \psi(t) \leq 0.$$

Il reste, à partir de (3.65), après simplification sur $\partial_t \psi(t)$:

$$\int_{\Omega \times [0, T]} |u(x, t) - u_h^\alpha(x, t)| \, dx \, dt \leq C T h^{1/4},$$

ce qui constitue l'estimation d'erreur recherchée et conclut la preuve du théorème de convergence 3.1.2.

On va maintenant estimer les termes mesures de Radon qui constituent la mesure ν_h^α pour la fonction test φ choisie précédemment.

3.5.5 Estimation du terme source mesure

Pour plus de clarté, on décompose la mesure ν_h^α en

$$\int_{\mathbf{D}^2} \varphi(\beta) \, d\nu_h^\alpha(x, t) \, dy \, ds = \int_{\mathbf{D}} \sum_{i=1,4} v_i^\alpha(\varphi)(y, s) \, dy \, ds,$$

avec les mesures classiques (que l'on retrouve dans les papiers sur l'estimation d'erreur) dues aux Volumes Finis, suivantes

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \nu_1^\alpha(\varphi)(y, s) dy ds &= \int_{\mathbb{D}^2} |\partial_t \varphi| d\mu_{h_1, t}^\alpha(x, t) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} \left| \vec{\nabla}_x \varphi \right| d\mu_{h_1, x}^\alpha(x, t) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} |\partial_t \varphi| d\mu_{h_2, t}^{1-\alpha}(x, t) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} \left| \vec{\nabla}_x \varphi \right| d\mu_{h_2, x}^{1-\alpha}(x, t) dy ds. \end{aligned}$$

Les erreurs d'approximation numérique dues au couplage sont :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \nu_2^\alpha(\varphi)(y, s) dy ds &= \int_{\mathbb{D}^2} \left| \vec{\nabla}_x \alpha \varphi \right| d\mu_{h_1}^1(x, t) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} |\varphi| d\mu_{h_1}^{2, |\vec{\nabla}_x \alpha|}(x, t) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} \left| \vec{\nabla}_x (1 - \alpha) \varphi \right| d\mu_{h_2}^1(x, t) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} |\varphi| d\mu_{h_2}^{2, |\vec{\nabla}_x (1-\alpha)|}(x, t) dy ds. \end{aligned}$$

Les mesures des approximations numériques Volumes Finis et sur la condition initiale sont notées

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \nu_3^\alpha(\varphi)(y, s) dy ds &= \int_{\mathbb{D}^2} |\partial_t \varphi| d\mu_{h_1}^\alpha(x, t) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} |\varphi| d\mu_{h_1}^{\alpha, 0}(x, t) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} |\varphi| d\mu_{h_1}^0(x, t) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} |\partial_t \varphi| d\mu_{h_2}^\alpha(x, t) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} |\varphi| d\mu_{h_2}^{\alpha, 0}(x, t) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} |\varphi| d\mu_{h_2}^0(x, t) dy ds. \end{aligned}$$

Et enfin les erreurs de couplage de l'algorithme sont

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \nu_4^\alpha(\varphi)(y, s) dy ds &= \int_{\mathbb{D}^2} |\varphi| d\mu_h^{coup}(x, t) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} |\varphi| d\mu_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha}(x, t) dy ds \\ &+ C(\eta'(\|u_0\|_{L^\infty})) \int_{\mathbb{D}^2} |\partial_t \varphi| d\mu_{\text{moy}}(x, t) dy ds \\ &+ C(H'_\eta(\|u_0\|_{L^\infty})) \int_{\mathbb{D}^2} \left| \vec{\nabla}_x \varphi \right| d\mu_{\text{moy}}(x, t) dy ds. \end{aligned}$$

On rappelle que l'on a choisi la fonction test de telle sorte que l'on ait pour tout $(\tau, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$:

$$\int_{\mathbb{R}^+} \rho_{1,\varepsilon}(\tau - s + \varepsilon) \left(\int_{K_s} \rho_{d,\varepsilon}(x - y) dy \right) ds \leq 1$$

et les propriétés suivantes sur les dérivées des noyaux $\rho_{1,\varepsilon}$ et $\rho_{d,\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} |\partial_t \rho_{1,\varepsilon}(\tau - s + \varepsilon)| \int_{K_s} \rho_{d,\varepsilon}(x - y) dy ds &\leq \frac{C}{\varepsilon}, \\ \int_{\mathbb{R}^+} \rho_{1,\varepsilon}(\tau - s + \varepsilon) \int_{K_s} \left| \vec{\nabla}_x \rho_{d,\varepsilon}(x - y) \right| dy ds &\leq \frac{C}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

On montre alors de manière très classique, et en utilisant ces définitions, que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \nu_1^\alpha(\varphi)(y, s) dy ds &\leq C \left(\frac{\sqrt{h_1 + h_2}}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{k^+}{\varepsilon}} \right), \\ \int_{\mathbb{D}} \nu_2^\alpha(\varphi)(y, s) dy ds &\leq C \frac{\sqrt{h_1 + h_2}}{\varepsilon}, \\ \int_{\mathbb{D}} \nu_3^\alpha(\varphi)(y, s) dy ds &\leq C(h_1 + h_2), \end{aligned}$$

et il nous reste l'estimation suivante sur la nouvelle mesure ν_4^α à vérifier

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} \nu_4^\alpha(\varphi)(y, s) dy ds \\ &\leq C \left(|\Omega_{12}|, T, \|u_0\|_{L^\infty}, \|\vec{\nabla} \alpha\|_{L^\infty} \right) \times \frac{h_1 + h_2 + h_{12} + \sqrt{k^+}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Termes volumes finis

Les premiers termes mesures du terme source ν_h^α sont classiquement :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \nu_1^\alpha(\varphi)(y, s) dy ds &= \int_{\mathbb{D}^2} |\tilde{\varphi}^1(\beta) + \tilde{\varphi}^2(\beta)| \left(d\mu_{h_1,t}^\alpha(x, t) + d\mu_{h_2,t}^{1-\alpha}(x, t) \right) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} \left| \vec{\nabla}_x \varphi \right| \left(d\mu_{h_1,x}^\alpha(x, t) + d\mu_{h_2,x}^{1-\alpha}(x, t) \right) dy ds, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_{h_1,\cdot}^\alpha(\Phi) &= \sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial \mathcal{C}} k^n \text{mes}(e) \text{mes}_{h_1,\cdot}^{n,\mathcal{C},\alpha}(\Phi) C_{1,e,\mathcal{C}}^n |\Delta_{e,\mathcal{C}}^{1,n}(v)|, \\ \mu_{h_2,\cdot}^{1-\alpha}(\Phi) &= \sum_{\mathcal{D}, n, e \in \partial \mathcal{D}} k^n \text{mes}(e) \text{mes}_{h_2,\cdot}^{n,\mathcal{D},(1-\alpha)}(\Phi) C_{2,e,\mathcal{D}}^n |\Delta_{e,\mathcal{D}}^{2,n}(v)|, \end{aligned}$$

où les mesures de Φ en temps et en espace sont définies par :

$$\begin{aligned} \text{mes}_{h,t}^{n,\mathcal{K},\alpha}(\Phi) &= \frac{1}{k^n} \alpha(x_e) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{t^n}^t \Phi(x_e, \tau) d\tau dt \\ &\quad + \alpha_{\mathcal{K}} \int_{t^n}^{t^{n+1/2}} \Phi(x_e, \tau) d\tau \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{mes}_{h,x}^{n,\mathcal{K},\alpha}(\Phi) &= C h \frac{\alpha_{\mathcal{K}}}{\text{mes}(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} \int_0^1 \Phi((1-s)x_{\mathcal{K}} + s x, t^{n+1}) ds dx \\ &\quad + C h \alpha_{\mathcal{K}} \int_0^1 \Phi((1-s)x_{\mathcal{K}} + s x_e, t^{n+1}) ds. \end{aligned}$$

On rappelle que la définition de φ donne les dérivations (3.51), (3.52) et (3.53).

1. Donc, pour les mesures en temps :

$$\begin{aligned} \text{mes}_{h,t}^{n,\mathcal{K},\alpha}(|\tilde{\varphi}^1|)(y, s) &= \frac{1}{k^n} \alpha(x_e) \rho_{d,\varepsilon}(x_e - y) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{t^n}^t |\partial_t \psi(\tau) \rho_{1,\varepsilon}(\tau - s + \varepsilon)| d\tau dt \\ &\quad + \alpha_{\mathcal{K}} \rho_{d,\varepsilon}(x_e - y) \int_{t^n}^{t^{n+1/2}} |\partial_t \psi(\tau) \rho_{1,\varepsilon}(\tau - s + \varepsilon)| d\tau, \\ \text{mes}_{h,t}^{n,\mathcal{K},\alpha}(|\tilde{\varphi}^2|)(y, s) &= \frac{1}{k^n} \alpha(x_e) \rho_{d,\varepsilon}(x_e - y) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{t^n}^t |\psi(\tau) \partial_t \rho_{1,\varepsilon}(\tau - s + \varepsilon)| d\tau dt \\ &\quad + \alpha_{\mathcal{K}} \rho_{d,\varepsilon}(x_e - y) \int_{t^n}^{t^{n+1/2}} |\psi(\tau) \partial_t \rho_{1,\varepsilon}(\tau - s + \varepsilon)| d\tau. \end{aligned}$$

Comme la fonction test $\psi(\tau)$ régularise $\frac{T-\tau}{T} \mathbf{1}_{[0,T]}$ (d'après (3.62) et (3.63)), on peut faire les estimations d'erreurs suivantes.

a. Pour $|\tilde{\varphi}^1|$: en permutant les intégrales, à l'aide de la régularité

des noyaux ρ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{D}} \mu_{h_{1,t}}^\alpha (|\tilde{\varphi}^1|) (y, s) dy ds \\
= & \frac{1}{T} \sum_{\mathcal{C}, e \in \partial \mathcal{C}} \text{mes}(e) \alpha(x_e) \sum_n k^n C_{1,e,\mathcal{C}}^n |\Delta_{e,\mathcal{C}}^{1n}(v)| \frac{1}{k^n} \\
& \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{[t^n, t] \cap [0, T]} (H_\varepsilon(T - \tau) + (T - \tau) \rho_{1,\varepsilon}(T - \tau)) \times \\
& \left(\int_{\mathbb{R}^+} \int_{K_s} \rho_{1,\varepsilon}(\tau - s + \varepsilon) \rho_{d,\varepsilon}(x_e - y) ds dy \right) d\tau dt \\
& + \frac{1}{T} \sum_{\mathcal{C}, e \in \partial \mathcal{C}} \text{mes}(e) \alpha_{\mathcal{C}} \sum_n k^n C_{1,e,\mathcal{C}}^n |\Delta_{e,\mathcal{C}}^{1n}(v)| \\
& \int_{[t^n, t^{n+1/2}] \cap [0, T]} (H_\varepsilon(T - \tau) + (T - \tau) \rho_{1,\varepsilon}(T - \tau)) \times \\
& \left(\int_{\mathbb{R}^+} \int_{K_s} \rho_{1,\varepsilon}(\tau - s + \varepsilon) \rho_{d,\varepsilon}(x_e - y) ds dy \right) d\tau.
\end{aligned}$$

On reprend le changement de variables (3.60), appliqué au couple (x_e, τ) , cette fois-ci. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{[t^n, t] \cap [0, T]} (H_\varepsilon(T - \tau) + (T - \tau) \rho_{1,\varepsilon}(T - \tau)) \\
& \left(\int_{\mathbb{R}^+} \rho_{1,\varepsilon}(\tau - s + \varepsilon) \left(\int_{K_s} \rho_{d,\varepsilon}(x_e - y) dy \right) ds \right) d\tau dt \\
= & \frac{1}{k^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{[t^n, t] \cap [0, T]} (H_\varepsilon(T - \tau) + (T - \tau) \rho_{1,\varepsilon}(T - \tau)) d\tau dt \\
\leq & \frac{1}{k^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \text{mes}([t^n, t] \cap [0, T]) dt,
\end{aligned}$$

car on a l'encadrement suivant

$$0 \leq H_\varepsilon(T - \tau) + (T - \tau) \rho_{1,\varepsilon}(T - \tau) \leq 1.$$

On peut aussi exprimer les intęgrales

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^n} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \text{mes}([t^n, t] \cap [0, T]) dt \right) &= \frac{1}{k^n} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \max(\min(t, T) - t^n, 0) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} k^n & \text{si } t^{n+1} \leq T, \\ \frac{(k^T)^2}{k^n} & \text{si } t^{n+1} > T \text{ et } t^n \leq T, \\ 0 & \text{si } t^{n+1} > T \text{ et } t^n > T. \end{cases} \\ &\leq k^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_{[t^n, t^{n+1/2}] \cap [0, T]} (H_\varepsilon(T - \tau) + (T - \tau) \rho_{1, \varepsilon}(T - \tau)) \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^+} \int_{K_s} \rho_{1, \varepsilon}(\tau - s + \varepsilon) \rho_{d, \varepsilon}(x_e - y) ds dy \right) d\tau \\ &\leq \text{mes}([t^n, t^{n+1/2}] \cap [0, T]) = \max(\min(t^{n+1/2}, T) - t^n, 0) \\ &= \begin{cases} \frac{k^n}{2} & \text{si } t^{n+1/2} \leq T, \\ k^T & \text{si } t^{n+1/2} > T \text{ et } t^n \leq T, \\ 0 & \text{si } t^{n+1/2} > T \text{ et } t^n > T \end{cases} \\ &\leq k^n, \end{aligned}$$

en notant le pas de temps final et le dernier indice en temps :

$$\begin{aligned} k^T &= T - t^{n^T}, \\ n^T &= \left\{ n, t^{n+\frac{1}{2}} > T \text{ et } t^n \leq T \right\}. \end{aligned}$$

On obtient enfin :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} \mu_{h_1, t}^\alpha(|\tilde{\varphi}^{-1}|)(y, s) dy ds \\ &\leq \frac{1}{T} \sum_{\substack{c, e \in \partial \mathcal{C}, \\ \alpha(x_e) \neq 0}} \sum_{n, t^{n+1} \leq T} \text{mes}(e) (k^n)^2 C_{1, e, \mathcal{C}}^n |\Delta_{e, \mathcal{C}}^{1n}(v)| \\ &\quad + \frac{1}{T} \sum_{\substack{c, e \in \partial \mathcal{C}, \\ \alpha_c \neq 0}} \sum_{n, t^{n+1/2} \leq T} \text{mes}(e) (k^n)^2 C_{1, e, \mathcal{C}}^n |\Delta_{e, \mathcal{C}}^{1n}(v)|. \end{aligned}$$

On a posé dans le chapitre 2 et dans les notations (3.13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{1,c}^n = \frac{k^n \text{mes}(\partial\mathcal{C})}{\text{mes}(\mathcal{C})}, \\ h_{1,e}^- = \min_{l,r} \left(\frac{\text{mes}(\mathcal{C}_l(e))}{\text{mes}(\partial\mathcal{C}_l)}, \frac{\text{mes}(\mathcal{C}_r(e))}{\text{mes}(\partial\mathcal{C}_r(e))} \right), \\ h_{1,e}^+ = \max_{l,r} \left(\frac{\text{mes}(\mathcal{C}_l(e))}{\text{mes}(\partial\mathcal{C}_l)}, \frac{\text{mes}(\mathcal{C}_r(e))}{\text{mes}(\partial\mathcal{C}_r(e))} \right), \\ \lambda_{1,e}^n = \frac{k^n}{h_e^+}. \end{array} \right.$$

Ce qui permet de récrire l'inégalité précédente

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{D}} \mu_{h_1,t}^\alpha (|\tilde{\varphi}^1|) (y, s) \, dy \, ds \\ & \leq \frac{1}{T} \sum_{\substack{\mathcal{C}, e \in \partial\mathcal{C}, \\ \alpha(x_e) \neq 0}} \text{mes}(\mathcal{C}) \sum_{n, t^{n+1} \leq T} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} \lambda_{1,c}^n C_{1,e,c}^n |\Delta_{e,\mathcal{C}}^{1n}(v)| k^n \\ & + \frac{1}{T} \sum_{\substack{\mathcal{C}, e \in \partial\mathcal{C}, \\ \alpha_c \neq 0}} \text{mes}(\mathcal{C}) \sum_{n, t^{n+1/2} \leq T} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} \lambda_{1,c}^n C_{1,e,c}^n |\Delta_{e,\mathcal{C}}^{1n}(v)| k^n. \end{aligned}$$

Or, on sait que l'on contrôle une norme H^1 faible sur v_{h_1} et v_{h_2} que l'on a notées $T_1^{\varepsilon_1}$ et $T_2^{\varepsilon_2}$ (définies dans (3.24)) dans la majoration (3.26). On utilise toujours l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète sur les deux sommes du second membre de cette inégalité :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{D}} \mu_{h_1,t}^\alpha (|\tilde{\varphi}^1|) (y, s) \, dy \, ds \\ & \leq \frac{1}{T} \left(\sum_{\substack{\mathcal{C}, e \in \partial\mathcal{C}, \\ \alpha(x_e) \neq 0}} \text{mes}(\mathcal{C}) \sum_{n, t^{n+1} \leq T} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} \lambda_{1,c}^n (C_{1,e,c}^n)^2 \right. \\ & \left. |\Delta_{e,\mathcal{C}}^{1n}(v)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{\mathcal{C}, e \in \partial\mathcal{C}, \\ \alpha(x_e) \neq 0}} \text{mes}(\mathcal{C}) \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial\mathcal{C})} \sum_{n, t^{n+1} \leq T} k^{n^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{T} \left(\sum_{\substack{\mathcal{C}, e \in \partial \mathcal{C} \\ \alpha_{\mathcal{C}} \neq 0}} \sum_{n, t^{n+1/2} \leq T} \text{mes}(\mathcal{C}) \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} \lambda_{1, \tilde{\mathcal{C}}}^n (C_{1, e, \mathcal{C}}^n)^2 |\Delta_{e, \tilde{\mathcal{C}}}^{1n}(v)|^2 \right)^{1/2} \\
& \times \left(\text{mes}(\Omega_1) \sum_{n, t^{n+1/2} \leq T} (k^n)^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Or on peut majorer la somme

$$\sum_{n, t^{n+1/2} \leq T} (k^n)^2 \leq T k^+,$$

où k^+ est le pas de temps maximal dans (3.12).

Enfin, on obtient la majoration finale :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \mu_{h_1, t}^\alpha (|\tilde{\varphi}^1|)(y, s) \, dy \, ds & \leq \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\tilde{C}}{\varepsilon_1}} \left(\text{mes}(\Omega_1) \sum_{n, t^{n+1/2} \leq T} (k^n)^2 \right)^{1/2} \\
& \leq \sqrt{\frac{\tilde{C}}{\varepsilon_1}} \sqrt{k^+} (\text{mes}(\Omega_1))^{1/2}.
\end{aligned}$$

b. De même, pour $\tilde{\varphi}^2$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{D}} \mu_{h_1, t}^\alpha (|\tilde{\varphi}^2|)(y, s) \, dy \, ds \\
& = \frac{1}{T} \sum_{\mathcal{C}, e \in \partial \mathcal{C}} \text{mes}(e) \alpha(x_e) \sum_n k^n C_{1, e, \mathcal{C}}^n |\Delta_{e, \tilde{\mathcal{C}}}^{1n}(v)| \frac{1}{k^n} \\
& \quad \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{[t^n, t] \cap [0, T]} (T - \tau) H_\varepsilon(T - \tau) \\
& \quad \left(\int_{\mathbb{R}^+} |\partial_t \rho_{1, \varepsilon}(\tau - s + \varepsilon)| \int_{K_s} \rho_{d, \varepsilon}(x_e - y) \, ds \, dy \right) d\tau \, dt \\
& \quad + \frac{1}{T} \sum_{\mathcal{C}, e \in \partial \mathcal{C}} \text{mes}(e) \alpha_{\mathcal{C}} \sum_n k^n C_{1, e, \mathcal{C}}^n |\Delta_{e, \tilde{\mathcal{C}}}^{1n}(v)| \\
& \quad \int_{[t^n, t^{n+1/2}] \cap [0, T]} (T - \tau) H_\varepsilon(T - \tau) \\
& \quad \left(\int_{\mathbb{R}^+} |\partial_t \rho_{1, \varepsilon}(\tau - s + \varepsilon)| \int_{K_s} \rho_{d, \varepsilon}(x_e - y) \, ds \, dy \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Or on décompose de la même manière que précédemment :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{[t^n, t] \cap [0, T]} (T - \tau) H_\varepsilon(T - t) \\
& \int_{\mathbb{R}^+} |\partial_t \rho_{1, \varepsilon}(\tau - s + \varepsilon)| \int_{K_s} \rho_{d, \varepsilon}(x_e - y) dy ds d\tau dt \\
\leq & \frac{1}{k^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[-\frac{(T - \tau)^2}{2} \right]_{t^n}^{\min(t, T)} dt \frac{1}{\varepsilon} \\
= & \frac{1}{2\varepsilon} \begin{cases} \frac{1}{3} k^n (3(T - t^{n+1}) + 2k^n) & \text{si } t^{n+1} \leq T, \\ \frac{2}{3} (k^T)^2 & \text{si } t^{n+1} > T \text{ et } t^n \leq T, \\ 0 & \text{si } t^n > T. \end{cases} \\
\leq & C \frac{k^n}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

car $H_\varepsilon(T - t) \leq 1$ et

$$\int_a^b \frac{(T - a)^2 - (T - t)^2}{2} dt = \frac{1}{6} (a - b)^2 (3(T - b) + 2(b - a)).$$

A l'aide de la relation (3.66), on arrive à :

$$\begin{aligned}
& \int_{[t^n, t^{n+1/2}] \cap [0, T]} (T - \tau) H_\varepsilon(T - \tau) \\
& \left(\int_{\mathbb{R}^+} |\partial_t \rho_{1, \varepsilon}(\tau - s + \varepsilon)| \int_{K_s} \rho_{d, \varepsilon}(x_e - y) ds dy \right) d\tau \\
\leq & C \frac{k^n}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Enfin avec le même Cauchy-Schwarz que pour $\tilde{\varphi}^1$, on peut écrire

la majoration de $\mu_{h_1, t}^\alpha(|\tilde{\varphi}^2|)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \mu_{h_1, t}^\alpha(|\tilde{\varphi}^2|)(y, s) dy ds & \leq \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\tilde{C}}{\varepsilon_1}} \left(\text{mes}(\Omega_1) \sum_{n, t^{n+1/2} \leq T} k^n \frac{k^n}{\varepsilon} \right)^{1/2} \\
& \leq \sqrt{\frac{\tilde{C}}{\varepsilon_1}} (\text{mes}(\Omega_1))^{1/2} \sqrt{\frac{k^+}{\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

2. Pour les mesures en espace, on décompose tout d'abord la mesure

$$\text{mes}_{h,x}^{n,\mathcal{K},\alpha} \left(\left| \vec{\nabla}_x \varphi \right| \right) :$$

$$\begin{aligned} & \text{mes}_{h,x}^{n,\mathcal{K},\alpha} \left(\left| \vec{\nabla}_x \varphi \right| \right) (y, s) \\ &= C h \alpha_{\mathcal{K}} \psi (t^{n+1}) \rho_{1,\varepsilon} (t^{n+1} - s + \varepsilon) \\ & \quad \left(\frac{1}{\text{mes}(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \rho_{d,\varepsilon} ((1-\sigma) x_{\mathcal{K}} + \sigma (x-y)) \right| d\sigma dx \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \rho_{d,\varepsilon} ((1-\sigma) x_{\mathcal{K}} + \sigma (x_e - y)) \right| d\sigma \right). \end{aligned}$$

Donc, si l'on effectue son intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} \text{mes}_{h,x}^{n,\mathcal{K},\alpha} \left(\left| \vec{\nabla}_x \varphi \right| \right) (y, s) dy ds \\ &= C h \alpha_{\mathcal{K}} \psi (t^{n+1}) \int_{\mathbb{R}^+} \rho_{1,\varepsilon} (t^{n+1} - s + \varepsilon) \int_{K_s} \\ & \quad \left(\frac{1}{\text{mes}(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} \int_0^1 \int_{\mathbb{D}} \left| \vec{\nabla}_x \rho_{d,\varepsilon} ((1-\sigma) x_{\mathcal{K}} + \sigma (x-y)) \right| d\sigma dx \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \rho_{d,\varepsilon} ((1-\sigma) x_{\mathcal{K}} + \sigma (x_e - y)) \right| d\sigma \right) ds dy \\ &\leq \frac{\tilde{C}}{\varepsilon} h \alpha_{\mathcal{K}} \psi (t^{n+1}) \mu ([0, T]). \end{aligned}$$

On utilise à nouveau le théorème de Cauchy-Schwarz ; il s'en suit

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} \mu_{h_1,x}^{\alpha} \left(\left| \vec{\nabla}_x \varphi \right| \right) (y, s) dy ds \\ &\leq \frac{\tilde{C}}{\varepsilon} h_1 \mu ([0, T]) \left(\sum_{\substack{\mathcal{C}, e \in \partial \mathcal{C}, \\ \alpha(x_e) \neq 0}} \text{mes}(\mathcal{C}) \sum_{n, t^{n+1} \leq T} \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} \lambda_{1,\mathcal{C}}^{n,2} (C_{1,e,\mathcal{C}}^n)^2 \right. \\ & \quad \left. \left| \Delta_{e,\mathcal{C}}^{1n}(v) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{\mathcal{C}, e \in \partial \mathcal{C}, \\ \alpha(x_e) \neq 0}} \text{mes}(\mathcal{C}) \frac{\text{mes}(e)}{\text{mes}(\partial \mathcal{C})} \sum_{n, t^{n+1} \leq T} k^n \alpha_{\mathcal{C}} \psi (t^{n+1}) \right)^{1/2} \\ &\leq \tilde{C} \mu ([0, T]) \sqrt{\frac{T \text{mes}(\Omega_1)}{\varepsilon_1} \frac{\sqrt{h_1}}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'estimation suivante sur la mesure ν_1^α :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \nu_1^\alpha(\varphi)(y, s) \, dy \, ds &\leq \sqrt{\frac{\tilde{C}}{\varepsilon_1}} \sqrt{k^+} (\text{mes}(\Omega_1))^{1/2} + \sqrt{\frac{\tilde{C}}{\varepsilon_1}} \sqrt{\frac{k^+}{\varepsilon}} (\text{mes}(\Omega_1))^{1/2} \\ &\quad + \tilde{C} \mu([0, T]) \left(\sqrt{\frac{T \text{mes}(\Omega_1)}{\varepsilon_1}} \frac{\sqrt{h_1}}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{T \text{mes}(\Omega_2)}{\varepsilon_2}} \frac{\sqrt{h_2}}{\varepsilon} \right) \\ &\leq C \times \left(\frac{\sqrt{h_1 + h_2}}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{k^+}{\varepsilon}} \right). \end{aligned}$$

Second terme source

On détaille la mesure ν_2^α de la fonction φ

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \nu_2^\alpha(\varphi)(y, s) \, dy \, ds &= \int_{\mathbb{D}^2} \left| \vec{\nabla}_x \alpha \rho_{d,\varepsilon}(x-y) + \alpha(x) \vec{\nabla}_x \rho_{d,\varepsilon}(x-y) \right| \\ &\quad \psi(t) \rho_{1,\varepsilon}(t-s+\varepsilon) d\mu_{h_1}^1(x, t) \, dy \, ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} \left| -\vec{\nabla}_x \alpha \rho_{d,\varepsilon}(x-y) + (1-\alpha(x)) \vec{\nabla}_x \rho_{d,\varepsilon}(x-y) \right| \\ &\quad \psi(t) \rho_{1,\varepsilon}(t-s+\varepsilon) d\mu_{h_2}^1(x, t) \, dy \, ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} |\psi(t) \rho_{1,\varepsilon}(t-s+\varepsilon) \rho_{d,\varepsilon}(x-y)| d\mu_{h_1}^{2,|\vec{\nabla}_x \alpha|}(x, t) \, dy \, ds \\ &+ \int_{\mathbb{D}^2} |\psi(t) \rho_{1,\varepsilon}(t-s+\varepsilon) \rho_{d,\varepsilon}(x-y)| d\mu_{h_2}^{2,|\vec{\nabla}_x(1-\alpha)|}(x, t) \, dy \, ds, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_{h_1}^1(\psi) &= \sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial \mathcal{C}} k^n \text{mes}(e) \text{mes}_{h_1, x, 1}^{n, \mathcal{C}}(\psi) C_{1, e, \mathcal{C}}^n |\Delta_{e, \mathcal{C}}^{1n}(v)|, \\ \mu_{h_1}^{2, \psi}(\varphi) &= \sum_{\mathcal{C}, n, e \in \partial \mathcal{C}} k^n \text{mes}(e) \text{mes}_{h_1, x, 2}^{n, \mathcal{C}, \psi}(\varphi) C_{1, e, \mathcal{C}}^n |\Delta_{e, \mathcal{C}}^{1n}(v)|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{mes}_{h, x, 1}^{n, \mathcal{K}}(\psi) &= C h \frac{1}{\text{mes}(e) k^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e \int_0^1 \psi((1-s)x_e + s x, t) \, ds \, d\sigma_e(x) \, dt, \\ \text{mes}_{h, x, 2}^{n, \mathcal{K}, \psi}(\varphi) &= C h \left| \varphi(x_e, t^{n+1/2}) \right| \int_0^1 \psi((1-s)x_{\mathcal{K}} + s x_e) \, ds. \end{aligned}$$

On utilise les mêmes techniques que pour le terme de flux (majoration (3.66)) du premier terme source et l'on obtient

$$\nu_2^\alpha(\varphi) \leq C \times \frac{\sqrt{h_1 + h_2}}{\varepsilon}$$

Troisième terme source : mesure des approximations des Volumes Finis et de la condition initiale

On a pas besoin de détailler les calculs pour ce terme source dû à l'approximation volumes finis et à celle de la condition initiale qui convergent naturellement en h :

$$\nu_3^\alpha(\varphi) \leq C \times (h_1 + h_2)$$

Quatrième terme source : mesure des erreurs de couplage

On fait ici l'estimation des mesures de couplage :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \nu_4^\alpha(\varphi)(y, s) dy ds &= \int_{\mathbb{D}^2} |\varphi| d\mu_h^{coup}(x, t) dy ds + \int_{\mathbb{D}^2} |\varphi| d\mu_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha}(x, t) dy ds \\ &+ C(\eta'(\|u_0\|_{L^\infty})) \int_{\mathbb{D}^2} |\partial_t \varphi| d\mu_{\text{moy}}(x, t) dy ds \\ &+ C(H'_\eta(\|u_0\|_{L^\infty})) \int_{\mathbb{D}^2} |\vec{\nabla}_x \varphi| d\mu_{\text{moy}}(x, t) dy ds. \end{aligned}$$

– La mesure sur l'erreur de couplage :

$$\begin{aligned} \mu_h^{coup}(\varphi) &= C \left(\|\eta'(u_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \sum_{\mathcal{E}, n} \text{mes}(\mathcal{E}) |u_{2\mathcal{D}}^{n+1} - u_{1\mathcal{C}}^{n+1}| \\ &\left[\frac{h_1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \alpha((1-s)x_{\mathcal{E}} + sx) (1 - \alpha_{\mathcal{C}} + \alpha(x_{\mathcal{E}})) \right| ds dx \varphi_{\mathcal{C}}^{n+1} \right. \\ &+ \widetilde{\alpha}_{\mathcal{E}} (1 - \widetilde{\alpha}_{\mathcal{E}}) \frac{h_1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_{\mathcal{E}} + sx, t^{n+1}) \right| ds dx \\ &+ \frac{h_2}{\text{mes}(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \alpha((1-s)x_{\mathcal{E}} + sx) (\alpha_{\mathcal{D}} + \alpha(x_{\mathcal{E}})) \right| ds dx \varphi_{\mathcal{D}}^{n+1} \\ &\left. + \widetilde{\alpha}_{\mathcal{E}} (1 - \widetilde{\alpha}_{\mathcal{E}}) \frac{h_2}{\text{mes}(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_{\mathcal{E}} + sx, t^{n+1}) \right| ds dx \right]. \end{aligned}$$

On reprend les grandes lignes de la convergence de l'erreur E_h^{coup} , à la page 78. On utilise la norme faible exprimée en (3.25) et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur cette erreur. On majore donc

ce terme par :

$$\begin{aligned}
\mu_h^{coup}(\varphi) &\leq \|\eta'(u_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)} \times C^{H^1}(|\Omega|, \|u_0\|_\infty, T, \|\vec{\nabla}\alpha\|_\infty) \\
&\quad \left[\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) \frac{1}{\alpha(1-\alpha)_\mathcal{E}} \right. \\
&\quad \left[\frac{h_1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \alpha((1-s)x_\mathcal{E} + sx)(1-\alpha_\mathcal{C} + \alpha(x_\mathcal{E})) \right| ds dx \varphi_\mathcal{C}^{n+1} \right. \\
&\quad + \widetilde{\alpha}_\mathcal{E}(1-\widetilde{\alpha}_\mathcal{E}) \frac{h_1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_\mathcal{E} + sx, t^{n+1}) \right| ds dx \\
&\quad + \frac{h_2}{\text{mes}(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \alpha((1-s)x_\mathcal{E} + sx)(\alpha_\mathcal{D} + \alpha(x_\mathcal{E})) \right| ds dx \varphi_\mathcal{D}^{n+1} \\
&\quad \left. \left. + \widetilde{\alpha}_\mathcal{E}(1-\widetilde{\alpha}_\mathcal{E}) \frac{h_2}{\text{mes}(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_\mathcal{E} + sx, t^{n+1}) \right| ds dx \right]^2 \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Or, dans la même démonstration de convergence, on a vu que l'on pouvait utiliser le lemme 3.2.1 pour affirmer

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_x \alpha((1-s)x_\mathcal{E} + sx)(1-\alpha_\mathcal{C}) &\leq C \sqrt{\alpha(1-\alpha)_\mathcal{E}}, \\
\vec{\nabla}_x \alpha((1-s)x_\mathcal{E} + sx) \alpha(x_\mathcal{E}) &\leq C \sqrt{\alpha(1-\alpha)_\mathcal{E}}, \\
\widetilde{\alpha}_\mathcal{E}(1-\widetilde{\alpha}_\mathcal{E}) &\leq \frac{1}{\alpha(1-\alpha)_\mathcal{E}} \leq C \sqrt{\alpha(1-\alpha)_\mathcal{E}}.
\end{aligned}$$

Ce qui permet de simplifier l'estimation

$$\begin{aligned}
\mu_h^{coup}(\varphi) &\leq C(|\Omega|, \|u_0\|_\infty, T, \|\vec{\nabla}\alpha\|_\infty, \|\eta'(u_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)}) \left[\sum_{\mathcal{E}=\mathcal{C}\cap\mathcal{D},n} \text{mes}(\mathcal{E}) \right. \\
&\quad \left[h_1 \varphi_\mathcal{C}^{n+1} + \frac{h_1}{\text{mes}(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_\mathcal{E} + sx, t^{n+1}) \right| ds dx \right. \\
&\quad \left. \left. + h_2 \varphi_\mathcal{D}^{n+1} + \frac{h_2}{\text{mes}(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} \int_0^1 \left| \vec{\nabla}_x \varphi((1-s)x_\mathcal{E} + sx, t^{n+1}) \right| ds dx \right]^2 \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Et on obtient finalement :

$$\mu_h^{coup}(\varphi) \leq C(|\Omega|, \|u_0\|_\infty, T, \|\vec{\nabla}\alpha\|_\infty, \|\eta'(u_{h_1})\|_{L^\infty(\Omega)}) \frac{\sqrt{h_1 + h_2}}{\varepsilon}.$$

- Les mesures de l'erreur intervenant dans l'introduction de la solution approchée moyennée sont :

$$\mu_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha}(\varphi) = C(H'_\eta(\|u_0\|_{L^\infty})) \int_{\mathcal{Q}} |v_{h_1} - v_{h_2}|(x, t) \left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| \varphi(x, t) dx dt,$$

et

$$\mu_{\text{moy}}^\eta(\phi) = \int_{\mathcal{Q}} \alpha(x) (1 - \alpha)(x) |v_{h_1} - v_{h_2}|(x, t) \phi(x, t) dx dt,$$

qui est appliquée aux dérivées $|\partial_t \varphi|$ et $\left| \vec{\nabla}_x \varphi \right|$.

Pour ces deux dernières mesures, on sait que l'on a la convergence forte de v_{h_1} vers v_{h_2} dans $L^1\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \sqrt{\alpha(1-\alpha)}\right)$. On rappelle le résultat du lemme 3.2.1 :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Q}} |v_{h_1} - v_{h_2}|(x, t) \sqrt{\alpha(1-\alpha)}(x) dx dt \\ & \leq C\left(|\Omega_{12}|, T, \|u_0\|_{L^\infty}, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty}\right) \times \left(h_1 + h_2 + h_{12} + \sqrt{k^+}\right). \end{aligned}$$

et surtout la majoration (3.18)

$$\left| \vec{\nabla}_x \alpha(x) \right| \leq C \sqrt{\alpha(1-\alpha)}_\varepsilon,$$

et les bornes de la fonction test :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^\infty} & \leq C, \\ \|\partial_t \varphi\|_{L^\infty} & \leq \frac{C}{\varepsilon}, \\ \text{et } \left\| \vec{\nabla}_x \varphi \right\|_{L^\infty} & \leq \frac{C}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

On a alors finalement :

$$\begin{aligned} & \mu_{h_{12}}^{\vec{\nabla}_x \alpha}(\varphi) + \mu_{\text{moy}}^\eta(|\partial_t \varphi|) + \mu_{\text{moy}}^\eta\left(\left| \vec{\nabla}_x \varphi \right|\right) \\ & \leq C\left(|\Omega_{12}|, T, \|u_0\|_{L^\infty}, \left\| \vec{\nabla} \alpha \right\|_{L^\infty}\right) \times \frac{h_1 + h_2 + h_{12} + \sqrt{k^+}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Et on obtient donc la première estimation, dépendante de ε , (3.64), ce qui termine la démonstration de l'estimation d'erreur et nous permet de passer au paragraphe sur l'erreur de conservation commise par l'algorithme.

3.6 Conservation

3.6.1 Définitions

On cherche ici à donner l'erreur de conservativité Ec au temps n :

$$Ec^n = \left| \int_{\Omega} u_h^\alpha(x, t^n) dx - \int_{\Omega} u_0(x) dx \right|. \quad (3.67)$$

On va montrer qu'il existe une constante positive C telle que :

$$Ec^n \leq C h^{1/2}$$

Afin de calculer cette erreur de conservativité, on utilise l'inégalité d'entropie sur la solution moyenne u_h^α (3.46),

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{Q}} \eta(u_h^\alpha)(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\ & - \int_{\mathcal{Q}} H_\eta(u_h^\alpha(x, t)) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \\ & - \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \\ & \leq C \left[\frac{h_1 + h_2}{\sqrt{k^-}} + \sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{k^+} + h_{12} \right], \end{aligned}$$

en choisissant judicieusement l'entropie η , ainsi que la fonction test $\varphi(x, t)$.

On va établir, à partir de cette inégalité, l'égalité faible approchée correspondant à la résolution du problème (1.1) :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Q}} u_h^\alpha(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt - \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \\ & + \int_{\mathcal{Q}} F(u_h^\alpha(x, t)) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt = \mathcal{O}(\sqrt{h_{final}}), \end{aligned} \quad (3.68)$$

en posant alors

$$h_{final} = \left(\frac{h_1 + h_2}{\sqrt{k^-}} + \sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{k^+} + h_{12} \right)^2.$$

En prenant alors la fonction test égale à la multiplication d'une régularisation de l'indicatrice de l'intervalle $[0, t^n]$ par la régularisation de l'indicatrice de la

boule englobant le support de $u_h^\alpha(\bullet, t^n)$, soit $\text{supp}(u_h^\alpha(\bullet, t^n)) = K_{t^n}$ donné dans (3.21), on montre ainsi qu'il existe une constante C positive telle que

$$\forall n, \quad E_{\mathcal{C}^n} \leq C (h_{final})^{1/2} .$$

3.6.2 Calcul de l'égalité faible

On cherche ici à construire l'égalité faible (3.68) à partir de (3.46) :

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{Q}} \eta(u_h^\alpha)(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\ & - \int_{\mathcal{Q}} H_\eta(u_h^\alpha)(x, t) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \\ & - \int_{\Omega} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \leq C \sqrt{h_{final}} . \end{aligned}$$

On choisit donc deux entropies :

$$\begin{cases} \eta_C(\bullet) = |\bullet - C| , \\ \eta_{Id}(\bullet) = Id(\bullet) , \end{cases}$$

avec

$$|C| \gg \|u_h^\alpha\|_{L^\infty} .$$

La première entropie, appliquée à la solution moyennée, vérifie ainsi

$$\begin{aligned} \eta_C(u_h^\alpha) &= |u_h^\alpha - C| \\ &= C - u_h^\alpha , \end{aligned}$$

et les flux d'entropie correspondants valent

$$\begin{cases} H_{\eta_C}(u_h^\alpha) = -F(u_h^\alpha) , \\ H_{\eta_{Id}}(u_h^\alpha) = F(u_h^\alpha) . \end{cases}$$

Ainsi, on obtient les deux inégalités

$$\left\{ \begin{array}{l} - \left[\int_{\mathcal{Q}} C \partial_t \varphi(x, t) dx dt + \int_{\Omega} C \varphi(x, 0) dx \right] \\ + \left[\int_{\mathcal{Q}} u_h^\alpha(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \right. \\ \left. + \int_{\mathcal{Q}} F(u_h^\alpha(x, t)) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \right] \leq C \sqrt{h_{final}}, \\ \\ - \left[\int_{\mathcal{Q}} u_h^\alpha(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \right. \\ \left. + \int_{\mathcal{Q}} F(u_h^\alpha(x, t)) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \right] \leq C \sqrt{h_{final}}. \end{array} \right.$$

On a bien sûr : $\forall \varphi \in C^1(\Omega \times [0, T])$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times [0, T]} C \partial_t \varphi(x, t) dx dt + \int_{\Omega} C \varphi(x, 0) dx \\ &= C \left(\int_{\Omega} [\varphi(x, t)]_{t=0}^{t=T} dx dt + \int_{\Omega} \varphi(x, 0) dx \right) \\ &= C \int_{\Omega} \varphi(x, T) dx = 0 \end{aligned}$$

Ainsi on obtient l'encadrement suivant

$$\begin{aligned} -C \sqrt{h_{final}} &\leq \int_{\mathcal{Q}} u_h^\alpha(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \\ &+ \int_{\mathcal{Q}} F(u_h^\alpha(x, t)) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \leq C \sqrt{h_{final}}, \end{aligned}$$

et il existe une nouvelle constante C donnant l'égalité faible (3.68).

3.6.3 Application à la conservation

On rappelle que l'on a supposé dans (3.20) que la condition initiale u_0 du problème résolu ici est à support compact $K_0 \subset \mathbb{R}^d$. De même, dans (3.21), la solution moyenne approchée a elle aussi un support compact en espace, noté $\forall t \leq T$ $\text{supp}(u_h^\alpha(\bullet, t)) = K_t$, dans la proposition 3.2.2. De plus, on sait que $\forall t \leq T$, $K_t \subset \mathcal{B}(0, R + \omega t)$. Pour tout indice de pas de temps $n > 0$ et pour tout petit paramètre $\varepsilon > 0$, il existe alors une fonction

$$\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{B}(0, R + \omega(t^{n+1} + 2\varepsilon)) \times [0, t^n + 2\varepsilon]),$$

qui est une régularisation de la fonction $(x, t) \rightarrow \chi_{\mathcal{B}(0, R + \omega t^{n+1}) \times [0, t^n]}(x, t)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &\approx \chi_{\mathcal{B}(0, R + \omega t^{n+1}) \times [0, t^n]} \\ &= \chi_{[0, t^n]}(t) \times \chi_{\mathcal{B}(0, R + \omega t^{n+1})}(x) . \end{aligned}$$

On a ici séparation des variables. On a donc besoin de deux fonctions régularisées : l'une en temps et l'autre en espace

$$\varphi(x, t) = \psi_\varepsilon(t) \times \Psi_\varepsilon(x) . \quad (3.69)$$

Pour définir ces fonctions, on utilise la formule (3.55) de la fonction de Heaviside

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(t) &= 1 - H_\varepsilon(t - t^n) , \\ \Psi_\varepsilon(x) &= 1 - H_\varepsilon(|x| - (R + \omega t^{n+1})) . \end{aligned}$$

Ces définitions permettent à la fonction $\psi_\varepsilon(t)$ de respecter

$$\begin{cases} \forall t \leq t^n, & \psi_\varepsilon(t) = 1 \Rightarrow \forall t \leq t^n, \partial_t \varphi(x, t) = 0 \\ \forall t^n \leq t \leq t^n + 2\varepsilon, & \partial_t \varphi(x, t) = -\rho_{1, \varepsilon}(t - t^n) \Psi_\varepsilon(x) < 0 . \end{cases}$$

La fonction test est donc constante en espace dans la boule $\mathcal{B}(0, R + \omega t^{n+1})$

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq t \leq t^n + 2\varepsilon, \forall |x| \leq R + \omega(t^n + 2\varepsilon) , \\ \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) = 0 , \end{aligned}$$

et elle est nulle en dehors de la boule $\mathcal{B}(0, R + \omega(t^{n+1} + 2\varepsilon))$, mais comme $\forall 0 \leq t \leq t^n + 2\varepsilon$ et $\forall |x| > R + \omega(t^n + 2\varepsilon)$, la solution approchée est aussi nulle (car cette partie de l'espace est en dehors de son support), on n'utilise pas la régularisation du saut en espace. Alors le terme de flux disparaît :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{Q}} u_h^\alpha(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \\ &\quad + \int_{\mathcal{Q}} F(u_h^\alpha(x, t)) \vec{\nabla}_x \varphi(x, t) dx dt \\ &= \int_{\Omega \times [t^n, t^n + 2\varepsilon]} u_h^\alpha(x, t) \partial_t \psi_\varepsilon(t) \times \Psi_\varepsilon(x) dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) dx \\ &\quad = \mathcal{O}(\sqrt{h_{final}}) \end{aligned}$$

Enfin, il nous reste à montrer que

$$\int_{\Omega \times [t^n, t^n + 2\varepsilon]} u_h^\alpha(x, t) \partial_t \psi_\varepsilon(t) \times \Psi_\varepsilon(x) dx dt = - \int_{\Omega} u_h^\alpha(x, t^n) dx$$

on retrouvera alors l'expression de l'erreur de conservation.

On a d'après la définition de u_h^α et celle de Ψ_ε :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times [t^n, t^n + 2\varepsilon]} u_h^\alpha(x, t) \partial_t \psi_\varepsilon(t) \times \Psi_\varepsilon(x) dx dt \\ &= \int_{\Omega} u_h^\alpha(x, t^n) dx \int_{[t^n, t^n + 2\varepsilon]} \partial_t \psi_\varepsilon(t) dt \\ &= \int_{[t^n, t^n + 2\varepsilon]} -(\rho_{1,\varepsilon}(t - t^n)) dt \int_{\Omega} u_h^\alpha(x, t^n) dx \\ & \quad (\psi_\varepsilon(t^n + 2\varepsilon) - \psi_\varepsilon(t^n)) . \end{aligned}$$

Donc on a bien

$$\int_{[t^n, t^n + 2\varepsilon]} -(\rho_{1,\varepsilon}(t - t^n)) dt = -1 ,$$

par définition de $\rho_{1,\varepsilon}$. Et il nous reste, pour terminer ce chapitre :

$$\int_{\Omega} u_0(x) dx - \int_{\Omega} u_h^\alpha(x, t^n) dx = \mathcal{O}(\sqrt{h_{final}}) .$$

Chapitre 4

Couplage de deux schémas

Volumes Finis

Plan du chapitre

4.1	Introduction	119
4.2	Cas 1D : Burgers	121
4.2.1	Équation de Burgers	121
	chocs	122
	détentes	123
4.2.2	Cas du créneau	123
4.2.3	Schéma numérique	124
4.2.4	Burgers non couplé	125
	Cas $\Delta t = 0.1$	125
	Cas $\Delta t = 0.01$ et $\Delta t = 0.005$	128
	Convergence	130
4.2.5	Burgers couplé	130
	Couplage avec deux maillages de même pas d'espace.	133
	Couplage avec deux maillages de pas d'espace dif-	
	férents	138
	Convergence	140
4.3	Cas 2D : 2 V.F, maillage déformé	144
4.3.1	Construction de la fonction de couplage	145
4.3.2	Matrice de projection	154
4.3.3	Rappels sur les systèmes hyperboliques et sur le	
	modèle hydrodynamique d'Euler	156
	Quelques précisions sur le problème de Riemann	156
	Système d'équations d'Euler	157
	Cas test de l'onde de choc lente	160
4.3.4	Tube à chocs de Sod	161
	Étude du couplage centré	164
4.3.5	Étude du couplage sur un maillage déformé	172
4.4	L'injection avec deux schémas Volumes Finis.	190
4.5	Conclusion du couplage de schémas Volumes Finis	201

4.1 Introduction

Nous l'avons vu au chapitre 2, le couplage de deux schémas numériques pose des problèmes de stabilité. Cela a été étudié dans de nombreux travaux ([Pär95], [Sta80]). La méthode que nous présentons est par construction stable, car elle vérifie une condition min-max (3.19). La démonstration de convergence que nous venons de présenter montre que notre algorithme, grâce à la fonction de couplage, supprime les problèmes de conditions à la limite aux bords du domaine de couplage. On n'a plus de ralentissement des ondes de chocs entrant ou sortant de cette zone.

Cette démonstration permet donc d'affirmer que l'algorithme de couplage est stable (préservation de la norme L^∞) et qu'en plus il converge aussi bien que le moins bon des schémas dans la zone de superposition. Nous allons observer ces résultats numériquement dans le cas simple où les deux schémas sont semblables (schémas Volumes Finis du premier ordre).

On va, dans ce chapitre, donner des résultats numériques sur le couplage. Dans un premier temps, on détaille le cas 1D, avec l'équation bien connue de Burgers (4.1), pour laquelle le flux vaut $v u^2$. Nous allons tout d'abord comparer la solution approchée calculée à l'aide du couplage entre deux maillages avec celle obtenue sans couplage de schémas. Ensuite, la connaissance de la solution exacte de ce problème nous permettra d'exhiber l'erreur de convergence. Dans ce cas, l'erreur est plus faible (en \sqrt{h}) que l'erreur estimée dans le théorème 3.1.2 (en $h^{1/4}$).

Dans un deuxième temps, on donnera les outils de base qui permettent d'effectuer le couplage en 2 dimensions (et plus). On explicitera notamment la forme de la fonction de couplage et le calcul des intersections des mailles, qui permettent de faire la projection. Avec ces préceptes, on appliquera l'al-

gorithme de couplage au cas test du tube à choc. On s'intéressera en premier au tube à choc de Sod (on connaît les valeurs des paliers). Puis on reprendra le cas d'onde de choc très lente, donnée dans la thèse [Pär95], mais avec des conditions initiales différentes. En effet, on montrera que les conditions initiales choisies dans cette thèse ne peuvent être calculées avec un schéma d'ordre 1 (ou alors avec un maillage extrêmement fin). On donnera la déformation opérée sur notre maillage, ainsi que les conditions du tube à choc testé.

4.2 Cas 1D : Burgers

L'équation de Burgers est très utile pour les études de loi de conservation 1D : on connaît la solution exacte pour une condition initiale de type créneau. Nous rappelons donc ces résultats dans un premier temps, puis nous comparerons les valeurs calculées sans couplage avec celles obtenues avec le couplage, pour plusieurs conditions CFL sur les schémas 1 et 2.

Le premier couplage est à pas constant : on prend le même pas d'espace pour les deux maillages. Le second couplage est à pas variables : la viscosité numérique des deux schémas n'est alors pas la même.

4.2.1 Équation de Burgers

Équation de Burgers sous la forme conservative

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (v u^2(x, t)) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (4.1)$$

où v est la vitesse de propagation (que l'on prendra constante dans notre étude pour simplifier).

On peut réécrire cette équation sous la forme non conservative :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + 2v u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

La masse totale est constante et donnée par :

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) dx = W(0).$$

Les lois de conservation impliquent que la solution est invariante le long de courbes appelées caractéristiques. On les paramétrise en fonction de leur point de départ. La caractéristique issue du point ξ_0 au temps initial est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X_{\xi_0}(t) = 2v u_0(\xi_0), \\ X(0) = \xi_0. \end{cases}$$

Alors la solution de ce problème est simplement :

$$\begin{aligned} X(t) &= \xi_0 + \omega t, \\ \omega &= 2v u_0(\xi_0). \end{aligned}$$

La solution de l'équation de Burgers est invariante le long de cette droite et vérifie :

$$\frac{du}{dx}(X_{\xi_0}(t), t) = 0.$$

On a alors une difficulté lorsque deux caractéristiques se rejoignent en un point ou lorsqu'elles s'en éloignent.

chocs

Si l'on considère l'équation de Burgers avec comme condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g^c & \text{si } x < \xi_c, \\ u_d^c & \text{si } x > \xi_c. \end{cases}$$

avec

$$u_g^c > u_d^c$$

alors la caractéristique issue de ce choc vérifie

$$X_{\xi_c}(t) = \xi_c + (2v u_g^c + 2v u_d^c) / 2 t$$

La position du choc varie avec la vitesse

$$x^{choc}(t) = \xi_c + \frac{2v(u_g^c + u_d^c)}{2} t$$

et la solution est constante par morceaux :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g^c & \text{si } x < x^{choc}(t), \\ u_d^c & \text{si } x > x^{choc}(t). \end{cases}$$

détentes

Si l'on considère l'équation de Burgers avec comme condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g^d & \text{si } x < \xi_d, \\ u_d^d & \text{si } x > \xi_d, \end{cases}$$

avec

$$u_g^d < u_d^d.$$

La position de la détente est donnée par

$$\begin{aligned} x_g^{\text{dét}}(t) &= \xi_d + 2v u_g^d t, \\ x_d^{\text{dét}}(t) &= \xi_d + 2v u_d^d t. \end{aligned}$$

Alors la solution de l'équation de Burgers est

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g^d & \text{si } x < x_g^{\text{dét}}(t), \\ \frac{x - \xi_d}{2vt} & \text{si } x_g^{\text{dét}}(t) < x < x_d^{\text{dét}}(t), \\ u_d^d & \text{si } x_d^{\text{dét}}(t) < x. \end{cases}$$

4.2.2 Cas du créneau

Dans ce cas, on prend la condition initiale suivante : soient deux points $\xi_d < \xi_c$

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g^d & \text{si } x < \xi_d, \\ u_d^d = u_g^c & \text{si } \xi_d < x < \xi_c, \\ u_d^c & \text{si } x > \xi_c, \end{cases}$$

avec

$$u_g^d < u_d^d \text{ et } u_g^c > u_d^c.$$

On voit alors que l'onde de détente qui en résulte avance plus vite que l'onde de choc :

$$u_g^c + u_d^c < 2u_d^d$$

Et elles se rejoignent à un instant t^* tel que

$$\begin{aligned} x_d^{\text{dét}}(t^*) &= x^{\text{choc}}(t^*) \\ \Leftrightarrow t^* &= \frac{\xi_c - \xi_d}{v (u_g^c - u_d^c)}, \end{aligned}$$

car on rappelle que l'on a, dans ce cas du créneau :

$$u_d^d = u_g^c.$$

Donc tant que $t \leq t^*$, on a la solution suivante de Burgers pour le créneau :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g^d & \text{si } x < x_g^{\text{dét}}(t), \\ \frac{x - \xi_d}{2vt} & \text{si } x_g^{\text{dét}}(t) < x < x_d^{\text{dét}}(t), \\ u_d^d = u_g^c & \text{si } x_d^{\text{dét}}(t) < x < x^{\text{choc}}(t), \\ u_d^c & \text{si } x > x^{\text{choc}}(t). \end{cases}$$

Par la suite (et dans nos tests numériques), on prendra le cas simple

$$u_g^d = u_d^c = 0$$

On peut déterminer la solution exacte après le temps t^* grâce à la conservation. Cela donne le point

$$x^*(t) = \sqrt{2t (\xi_c - \xi_d) 2v u_g^c} + \xi_d.$$

Et la solution de Burgers pour $t \geq t^*$ est alors :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_g^{\text{dét}}(t), \\ \frac{x - \xi_d}{2vt} & \text{si } x_g^{\text{dét}}(t) < x < x^*(t), \\ 0 & \text{si } x > x^*(t). \end{cases}$$

4.2.3 Schéma numérique

On utilise pour faire nos tests le schéma décentré amont (la vitesse de propagation v et la condition initiale choisie étant positive). Le flux numérique est simplement (c'est un schéma du premier ordre) :

$$g(u_i, u_{i+1}) = 2v (u_{i+1})^2.$$

La condition initiale choisie pour ces cas test est :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 \chi_{[-\infty, \xi_d]}(x), \\ 2 \chi_{[\xi_d, \xi_c]}(x), \\ 0 \chi_{[\xi_c, \infty]}(x). \end{cases}$$

Tout d'abord, on fait un calcul sans couplage pour un pas de temps constant. La vitesse convective v égale 0,55. On prend successivement deux valeurs pour la conditions CFL : 1 et environ 0,5. On rappelle que la condition CFL est donnée dans ce cas par

$$CFL = 2v \max(u_0) \frac{\Delta t}{h}.$$

Les dimensions du problème seront toujours les mêmes : la mesure du domaine total Ω est 10, et le calcul est prolongé jusqu'au temps $T = 5,1$.

4.2.4 Burgers non couplé

Pour ces calculs, on a placé le créneau entre $\xi_d = 1$ et $\xi_c = 3$.

Cas $\Delta t = 0.1$

Alors on choisit $h_1 = 0,22$, ce qui donne une $CFL_1 = 1$ et aussi $h_2 = 0,5$, qui donne $CFL_2 = 0,44$. Les conditions initiales sont représentées dans la figure 4.1.

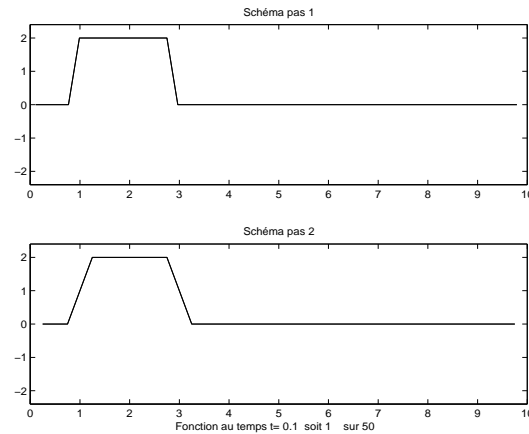


Figure 4.1 – Conditions initiales pour $\Delta t = 0,1$

Le résultat du calcul est donné pour plusieurs pas de temps dans la figure 4.2.

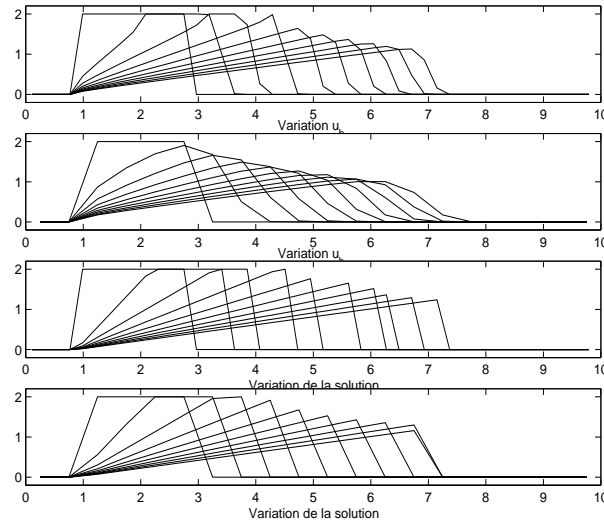
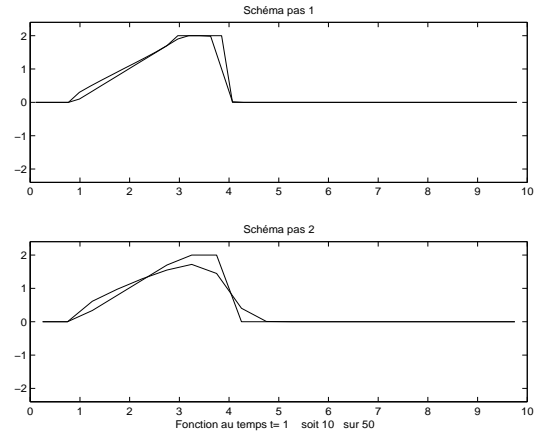
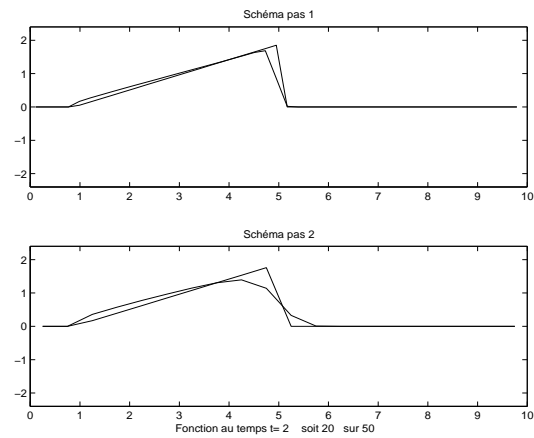


Figure 4.2 – Résultat du calcul $\Delta t = 0,1$

Dans la figure 4.2, les deux premiers graphiques sont les résultats du calcul de Burgers sur le maillage 1 (respectivement sur le maillage 2) et les deux derniers représentent la solution exacte projetée sur les deux maillages (projection constante par morceau). On voit bien l'effet lissant de la viscosité numérique plus importante pour le schéma 2 que pour le schéma 1. Et malgré le pas de temps très élevé, le calcul 1 donne une solution assez proche de la solution exacte, calculée sur le troisième graphique.

On retrouve ces résultats aux deux instants $t = 1$ et $t = 2$ dans les figures 4.3 et 4.4 :

Figure 4.3 – Résultat au temps $t = 1$ Figure 4.4 – Résultat au temps $t = 2$

On peut comparer (figure 4.5) le résultat obtenu avec un schéma d'ordre 2 (schéma 1) par rapport à celui d'un schéma d'ordre 1 (schéma 2), pour les mêmes maillages ($h_1 = h_2 = .22$) et les mêmes conditions CFL :

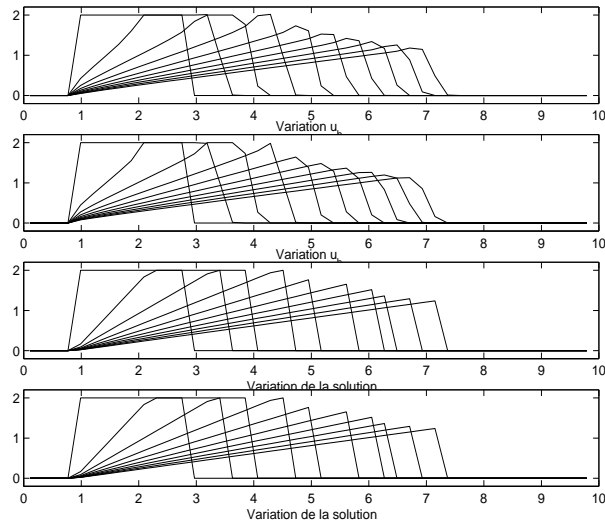


Figure 4.5 – Résultat du calcul à l'ordre 2, $\Delta t = .1$

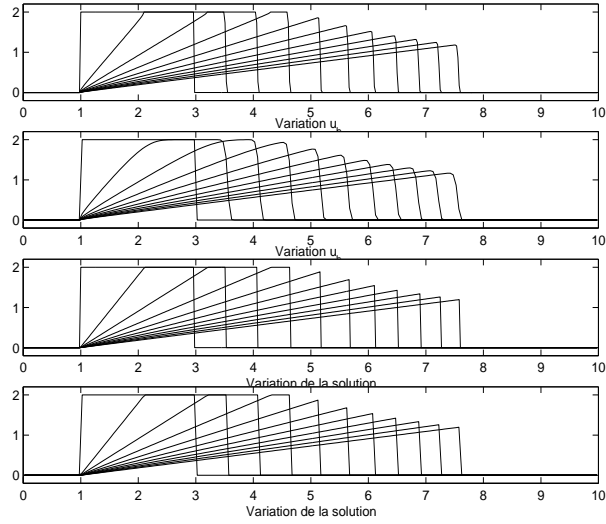
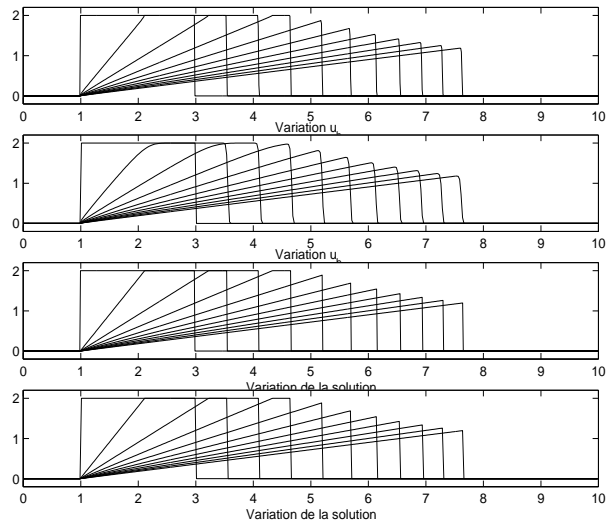
Cas $\Delta t = 0.01$ et $\Delta t = 0.005$

On a alors respectivement les CFL suivantes :

$$\Delta t = 0.01 \text{ donne } \begin{cases} h_1 = .022 & CFL_1 = 1, \\ h_2 = .05 & CFL_2 = 0.44, \end{cases} .$$

$$\Delta t = 0.005 \text{ donne } \begin{cases} h_1 = .011 & CFL_1 = 1, \\ h_2 = .025 & CFL_2 = 0.44. \end{cases}$$

Dans les figures 4.6 et 4.7, on a affiché les évolutions des schémas pour ces nouveaux pas de temps.

Figure 4.6 – Résultat du calcul $\Delta t = .01$ Figure 4.7 – Résultat du calcul $\Delta t = .005$

On voit clairement la convergence de la solution calculée vers la solution exacte.

Convergence

Afin de la comparer avec la courbe de convergence obtenue avec le couplage (voir figure 4.22), voici la courbe de convergence de Burgers non couplé, pour des CFL respectivement à 1 et à 0,6 (voir figure 4.8).

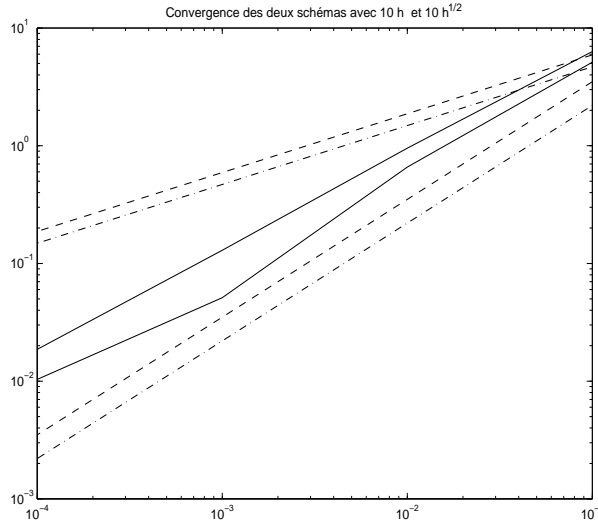


Figure 4.8 – Convergence du schéma décentré amont pour Burgers

On a représenté dans cette dernière figure (logarithmique) les deux courbes de convergence (erreur en norme L^1), et les courbes h_1 (traits), h_2 (traits-points) et les courbes $\sqrt{h_1}$ (traits), $\sqrt{h_2}$ (traits-points). On voit donc bien que le schéma simple converge entre \sqrt{h} et h dans ce cas-là.

4.2.5 Burgers couplé

Pour ces calculs, on va coupler deux schémas sur la zone de couplage Ω_{12} , qui démarre en $Z_{c_d} = 4,26$ et finit en $Z_{c_f} = 7,51$. La zone où la fonction de couplage est entre 0 et 1 est $\Omega_{12}^c = [Z_d^{0 < \alpha < 1}, Z_f^{0 < \alpha < 1}]$, avec $Z_d^{0 < \alpha < 1} = 4,8$

et $Z_f^{0<\alpha<1} = 6,85$. On a donc imposé la fonction de couplage suivante :

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < Z_d^{0<\alpha<1}, \\ \frac{1}{2} \left(\sin \left(\pi * \left(\frac{(x - Z_d^{0<\alpha<1})}{|\Omega_{12}^c|} - \frac{3}{2} \right) \right) + 1 \right) & \text{si } x \in \Omega_{12}^c, \\ 0 & \text{si } x > Z_f^{0<\alpha<1}, \end{cases}$$

avec $|\Omega_{12}^c| = Z_f^{0<\alpha<1} - Z_d^{0<\alpha<1}$. Et les valeurs $Z_d^{0<\alpha<1}$ et $Z_f^{0<\alpha<1}$ représentent respectivement les limites des sous-domaines où $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ dans la zone de couplage Ω_{12} . La taille de ces sous-domaines vaut donc 0,54 et 0,66 et la taille totale de la zone de couplage est 3,25.

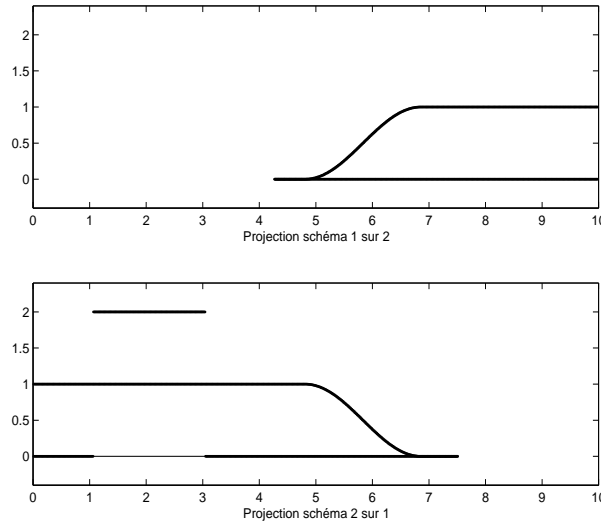


Figure 4.9 – Conditions Initiales et Fonction de Couplage

On retrouve ces valeurs dans la figure 4.9 où l'on a représenté à la fois le créneau initial et la fonction de couplage, projetée sur les deux maillages.

Enfin, il faut aussi construire les projections L^2 à partir de l'intersection des mailles. En une dimension d'espace, le problème est très simple : on considère deux maillages $(C_{1i} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}])_i$ (de pas constant h_1) et $(C_{2j} = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}])_j$ (de pas constant h_2). Le maillage des intersections

est alors (dans la zone de couplage) :

$$C_{ij} = C_{1i} \cap C_{2j} = [\max(x_{i-1/2}, x_{j-1/2}), \min(x_{i+1/2}, x_{j+1/2})[.$$

Calcul des intersections des mailles : on pose la matrice des mesures des intersections des deux maillages :

$$M_{ij} = \max(\min(x_{i+1/2}, x_{j+1/2}) - \max(x_{i-1/2}, x_{j-1/2}), 0).$$

Alors les constantes μ_{ij}^1 ou 2 données dans la formule (2.7) sont simplement données par ces mesures divisées par les mesures (constantes ici) des mailles des deux maillages.

$$\begin{aligned} \mu_{ij}^1 &= \frac{M_{ij}}{h_1}, \\ \mu_{ij}^2 &= \frac{M_{ij}}{h_2}. \end{aligned}$$

On a ainsi construit la matrice des projections. Elle est évidemment constante au cours du temps (elle sera créée après l'initialisation des maillages), ce qui veut dire que le calcul de la projection est très rapide au cours du calcul. En effet, il suffit de faire une multiplication matrice-vecteur à chaque pas de temps pour obtenir le vecteur projeté.

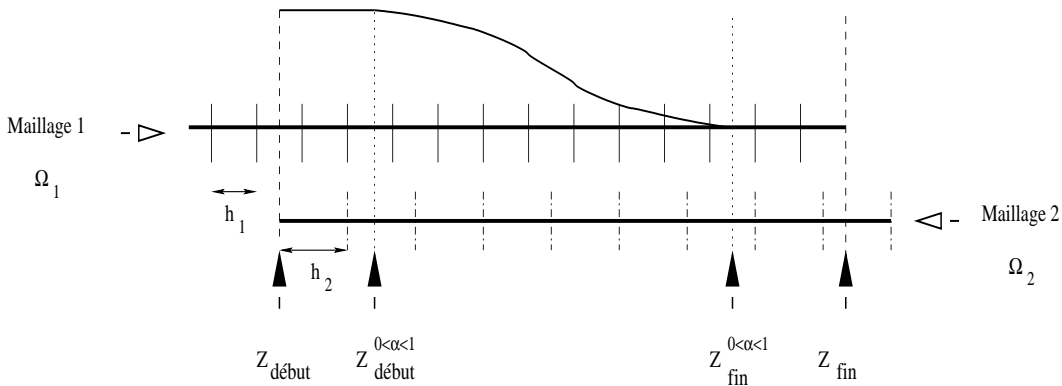


Figure 4.10 – maillages 1D et fonction de couplage

On peut remarquer que ce calcul est identique en plusieurs dimensions d'espace, si les maillages sont réguliers. De plus ces formules sont toujours

valables si les pas ne sont pas constants, pour des maillages composés de mailles rectangulaires.

Couplage avec deux maillages de même pas d'espace.

Cas $\Delta t = 0,1$ et $h = 0,22$: au temps 1 (10 pas de temps), on rentre dans la zone de couplage, on a alors calculé uniquement avec le schéma 1 (voir la figure 4.11).

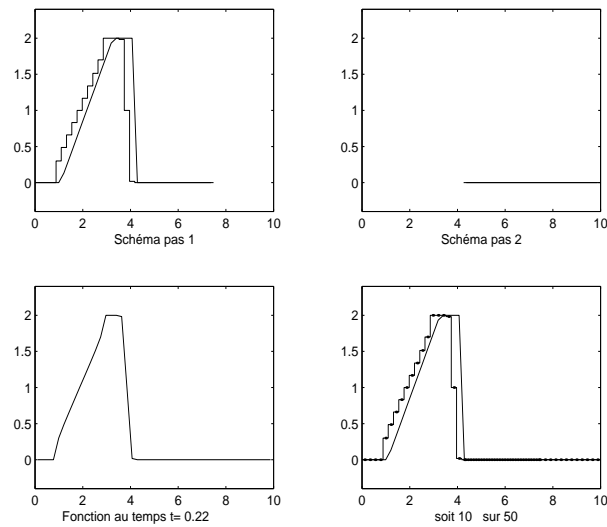


Figure 4.11 – Solution calculée au temps $t_1 = 0,22$

Les deux graphiques du haut représentent les solutions approchées u_{h_1} et u_{h_2} , comparées avec la solution exacte. Le graphique qui est en bas à gauche donne la solution approchée u_h^α . Et enfin, dans celui de droite, on a superposé les deux solutions approchées, les deux solutions exactes projetées sur les maillages et la solution moyenne avec des points.

Au temps 2 (20 pas de temps), on est rentré dans la zone de couplage et on peut observer la projection de chaque solution approchée sur le maillage opposé avec la figure 4.12.

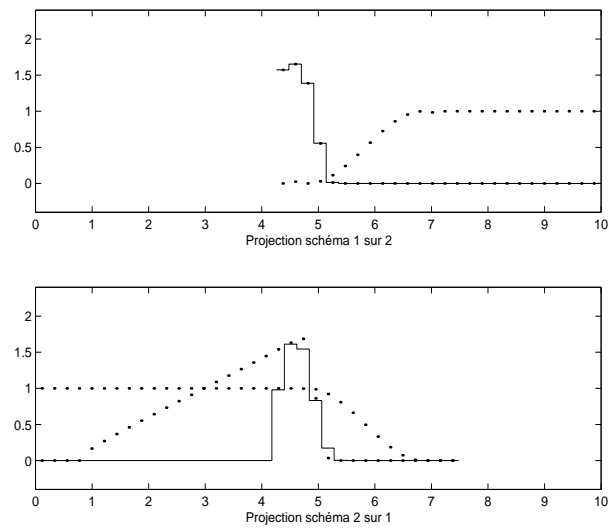
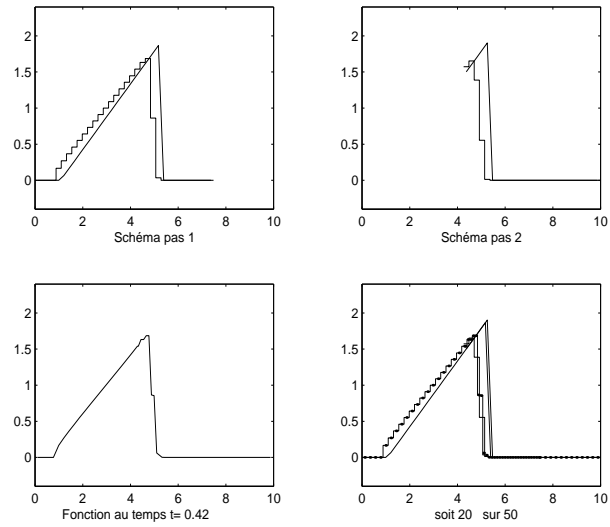
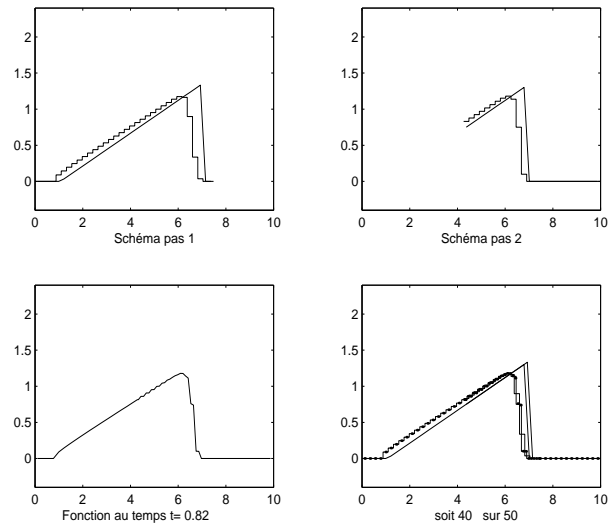


Figure 4.12 – Projection au temps $t_2 = 0,42$

On voit aussi dans la figure 4.13 suivante, que l'onde de choc suit correctement la solution exacte :

Figure 4.13 – Solution calculée au temps $t_2 = 0,42$

Enfin la dernière figure 4.14 donne le résultat du calcul au temps $t = 0,82$ et montre que lorsque l'onde de choc quitte la zone de couplage, on n'a toujours pas de décalage entre la solution exacte et la solution approchée et c'est bien ce qu'on attendait de l'algorithme de couplage.

Figure 4.14 – Solution calculée au temps $t_3 = 0,82$

Enfin le résultat du calcul complet est donné dans la figure 4.15. On a représenté les deux solutions approchées constantes par maille (et non pas en reliant les centres des mailles entre eux) et la solution moyenne. On voit bien que ce résultat est très proche de celui sans couplage, pour le même pas d'espace (à comparer à la figure 4.2).

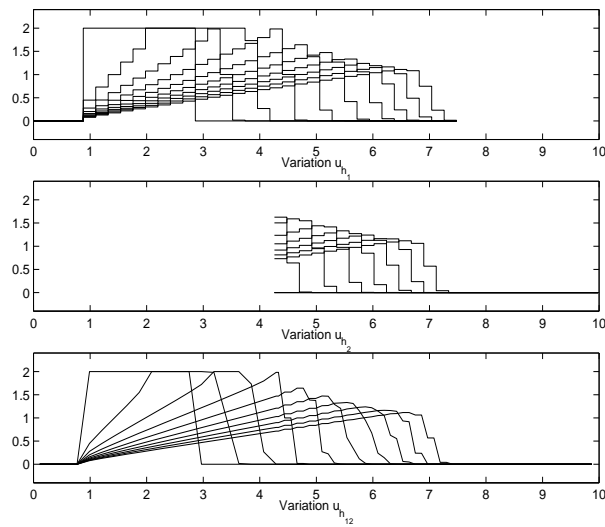
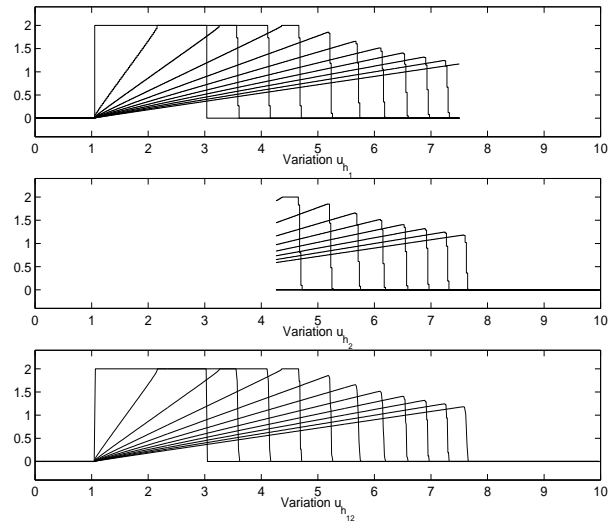
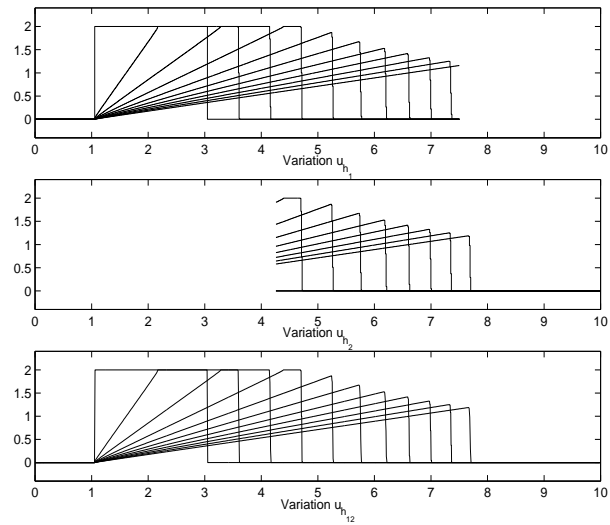


Figure 4.15 – Solution calculée $\Delta t = 0,1$

On peut voir la convergence de la méthode avec les maillages espaces-temps plus fins. Pour $\Delta t = 0,01$, on a la figure 4.16

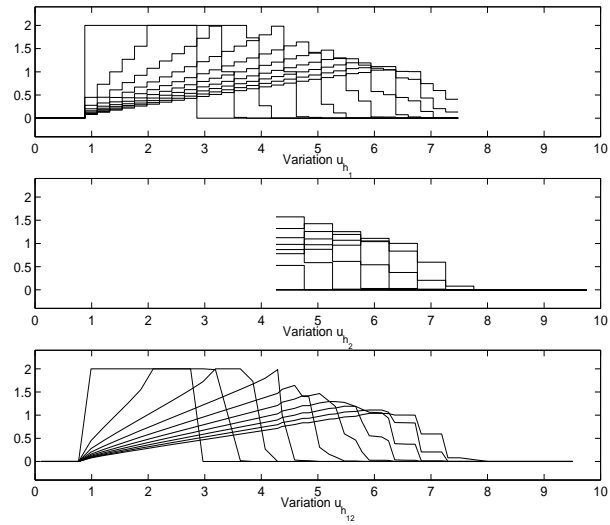
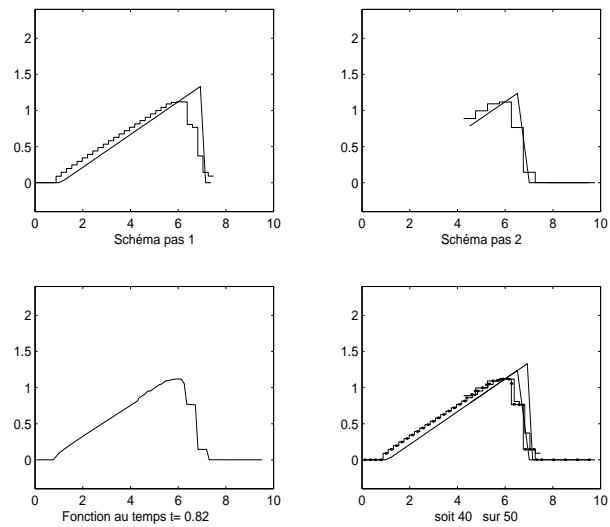
Figure 4.16 – Solution calculée $\Delta t = 0,01$

et pour $\Delta t = 0,005$, on a la figure 4.17.

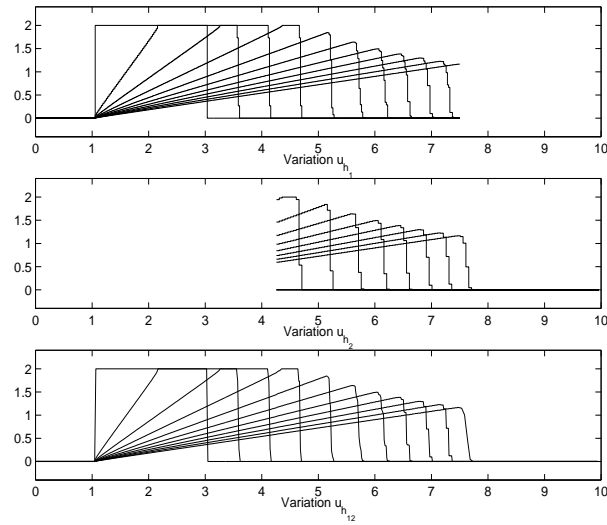
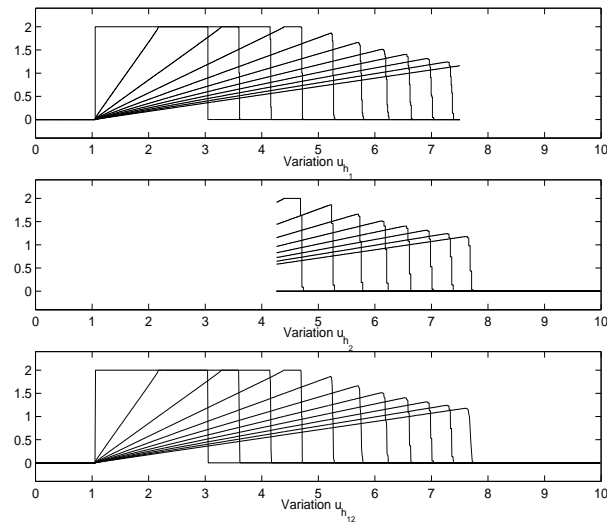
Figure 4.17 – Solution calculée $\Delta t = 0,005$

Couplage avec deux maillages de pas d'espace différents

Cas $\Delta t = 0,1$ et $h_1 = 0,22$ et $h_2 = 0,5$: si l'on regarde le résultat global (de la figure 4.18), que l'on peut comparer à la figure 4.15, on voit bien les effets visqueux du schéma 2 sur le calcul. Mais l'onde de choc calculée suit toujours convenablement la solution exacte à la sortie de la zone de couplage (voir 4.19).

Figure 4.18 – Solution calculée $\Delta t = 0,1$ pour $h_1 > h_2$ Figure 4.19 – Solution calculée au temps $t_3 = 0,82$

Pour le même calcul, avec $\Delta t = 0,01$ (figure 4.20) et $\Delta t = 0,005$ (figure 4.21), on voit aussi la convergence du schéma

Figure 4.20 – Solution calculée $\Delta t = 0,01$ pour $h_1 > h_2$ Figure 4.21 – Solution calculée $\Delta t = 0,005$ pour $h_1 > h_2$

Convergence

On a représenté, dans la figure 4.22, les courbes de convergence des deux schémas couplés avec le même pas d'espace (donc les mêmes condi-

tions CFL).

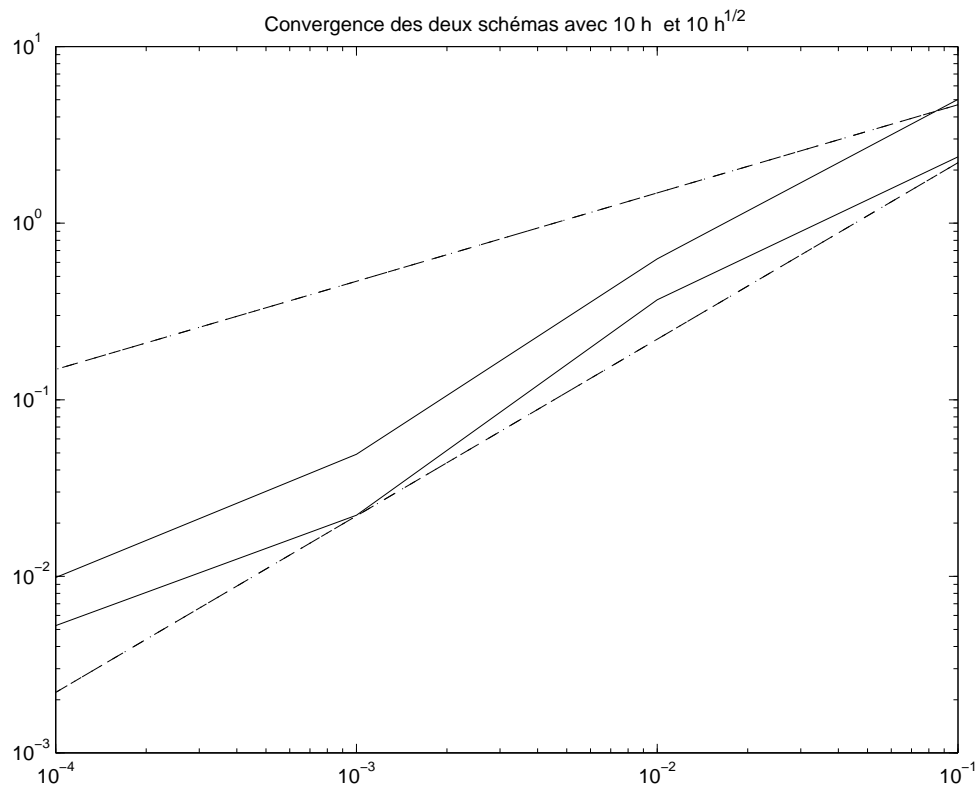


Figure 4.22 – Convergence du couplage pour Burgers avec $CFL_1 = 1$ et $CFL_2 = 0,6$

On utilise les mêmes légendes que celles de la courbe de convergence de Burgers pour les conditions CFL 1 et 0,6 de la figure 4.8.

La convergence est aussi rapide pour l'algorithme de couplage que pour le schéma de Burgers simple avec le même pas d'espace 0,1!! Le schéma 1 avec couplage converge d'ailleurs plus vite que le schéma 1 sans couplage.

La courbe de convergence pour le couplage deux schémas de CFL différentes (respectivement à 1 et 0,6) est donnée dans la figure 4.23.

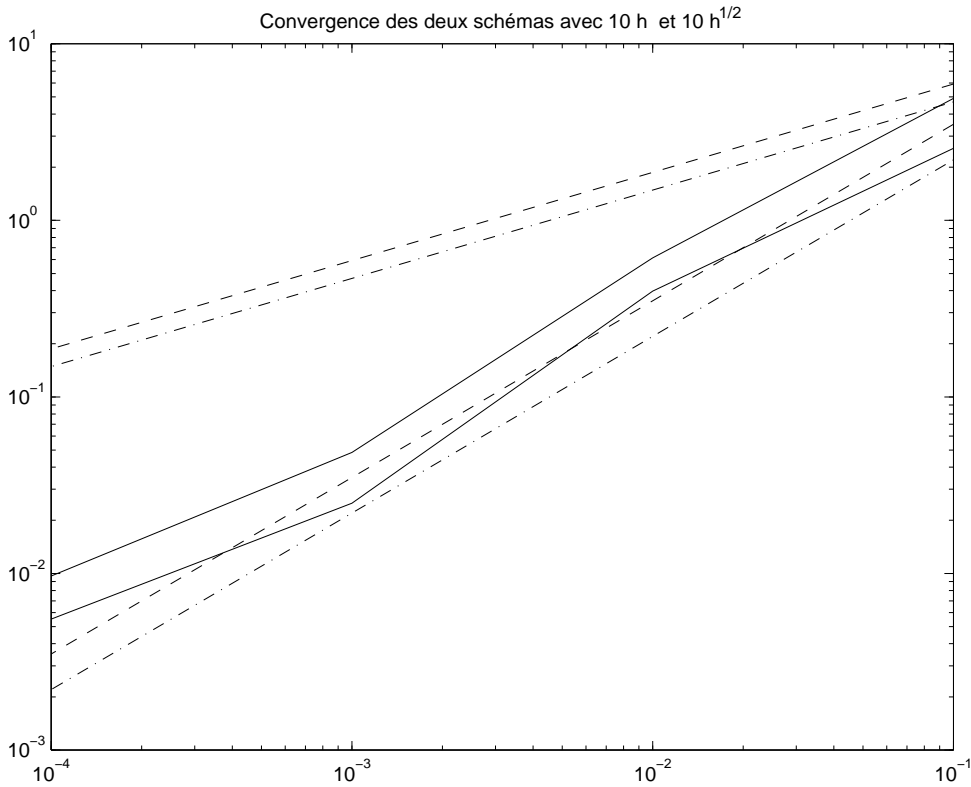


Figure 4.23 – Convergence du couplage pour Burgers avec $CFL_1 = 1$ et $CFL_2 = 0,6$

On voit ici que le schéma 1 converge plus vite que le schéma sans couplage pour la CFL 1 et le schéma 2 (CFL 0,6) converge plus vite que celui sans couplage avec CFL 0,6. Mais les deux courbes restent tout de même entre les courbes $10h$ et $10\sqrt{h}$, ce qui donne un meilleur résultat que celui donné dans l'analyse théorique.

On peut enfin présenter la courbe de convergence pour le schéma 1 sur maillage grossier (CFL 0,6) et pour le schéma 2 sur un maillage fin (CFL 1) dans la figure 4.24.

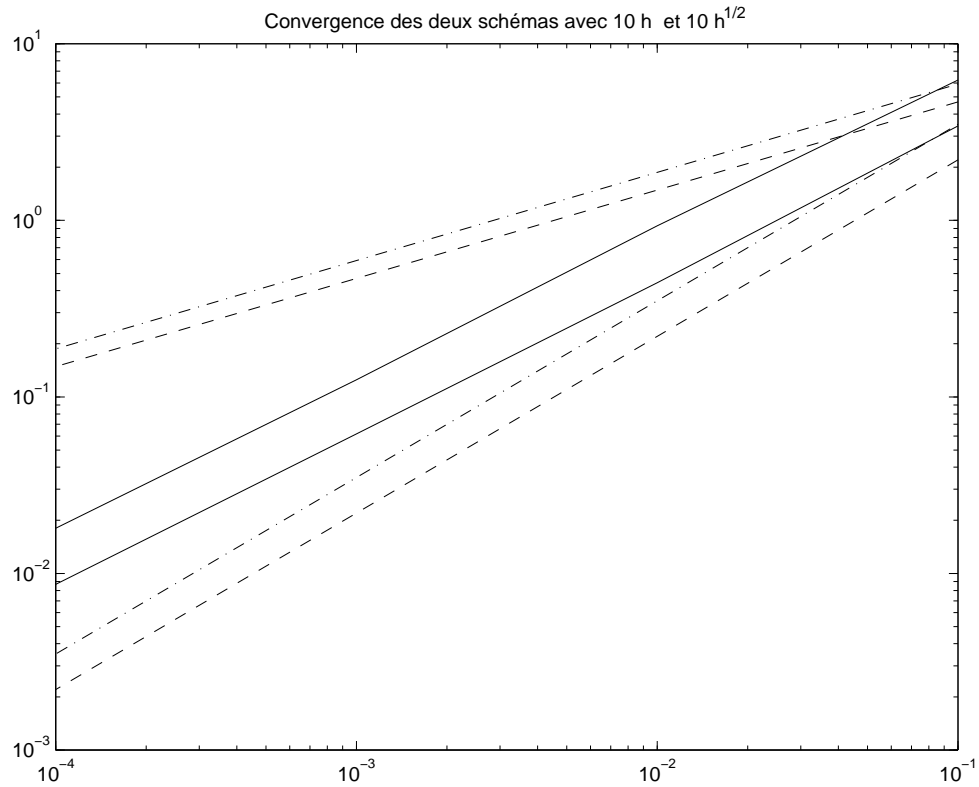


Figure 4.24 – Convergence du couplage pour Burgers avec $CFL_1 = 0,6$ et $CFL_2 = 1$

On peut conclure de ces différentes courbes de convergence que c'est la taille du maillage d'où partent les ondes de choc qui influence le plus le résultat de la convergence. De plus, si le maillage 1 est assez fin et si le maillage 2 est plutôt grossier, l'algorithme de couplage corrige bien les erreurs entraînées par un maillage peu raffiné. Il améliore même la précision du calcul sur le maillage grossier, ceci malgré la viscosité numérique rajoutée par la combinaison convexe du couplage et celle apportée par les projections des grandeurs sur les maillages opposés.

4.3 Cas 2D : 2 V.F, maillage déformé

Nous avons effectué une série de tests en deux dimensions d'espace pour le système d'équations d'Euler. On utilisera la méthode numérique classique de Roe (voir [Roe81]) pour calculer l'écoulement solution du système d'Euler.

Le calcul en deux dimensions d'espace (et plus) nécessite de construire la fonction de couplage ad-hoc. Elle doit être placée judicieusement en fonction de la physique du problème. Nous reverrons cette question de manière plus détaillée dans la troisième partie 4.4 de cette étude en deux dimensions d'espace.

Dans la première partie, nous étudierons la construction de l'algorithme de couplage pour deux schémas volumes finis et nous le testerons pour le cas bien connu du tube à choc de Sod. Il s'agit de résoudre le problème de Riemann généralisé du tube à choc pour le système hyperbolique d'Euler, avec des conditions initiales qui font apparaître trois ondes : une onde de choc, une onde de détente et une discontinuité de contact. On connaît théoriquement les valeurs des paliers (zones constantes) entre chacune des ondes, ainsi que de leur position à chaque instant. C'est donc un test très utilisé pour appréhender de nouvelles méthodes de calcul pour le système d'Euler.

Intéressons-nous tout d'abord à la fonction de couplage : sa construction est basée sur la même formule que dans le cas 1D, mais il faut projeter cette fonction sur des plans délimitant la zone où nous ferons le couplage des deux schémas. Ensuite, nous interpréterons la projection L^2 comme une multiplication matrice-vecteur. La matrice est alors composée des mesures des intersections normalisées. Le vecteur est le vecteur d'état calculé (constant par maille, à l'ordre 1) à projeter d'un maillage sur l'autre.

4.3.1 Construction de la fonction de couplage

On rappelle les coordonnées barycentriques :

Soit un triangle (ABC) , on définit trois coordonnées barycentriques à l'aide des plans valant soit 0, soit 1 sur les points A, B et C.

$$\begin{aligned} \lambda_A(x_A) &= 1, \lambda_A(x_B) = 0, \lambda_A(x_C) = 0, \\ \forall x \in (ABC), \lambda_A(x) + \lambda_B(x) + \lambda_C(x) &= 1. \end{aligned}$$

Ces propriétés sont vérifiées avec

$$\begin{aligned} D_C &= (x_B - x_A) * (y_C - y_A) + (y_A - y_B) * (x_C - x_A), \\ \lambda_C(x) &= \frac{1}{D_C} [(y_A - y_B) x_1 + (x_B - x_A) x_2 - ((y_A - y_B) x_A + (x_B - x_A) * y_A)]. \end{aligned}$$

De plus, si (\mathcal{D}) est la droite perpendiculaire à \overrightarrow{AB} passant par le point C, pour tout point x de (\mathcal{D}) , on a $\lambda_C(x) = 1$. On obtient ainsi un plan barycentrique sur lequel nous nous appuyerons pour définir la fonction de couplage (voir la figure 4.25).

On prolonge la coordonnée barycentrique par 0 et 1, pour tout x qui n'est pas dans la bande définie par (ABC) :

$$\lambda_1(x) = \max(\min(\lambda_C(x), 1), 0)$$

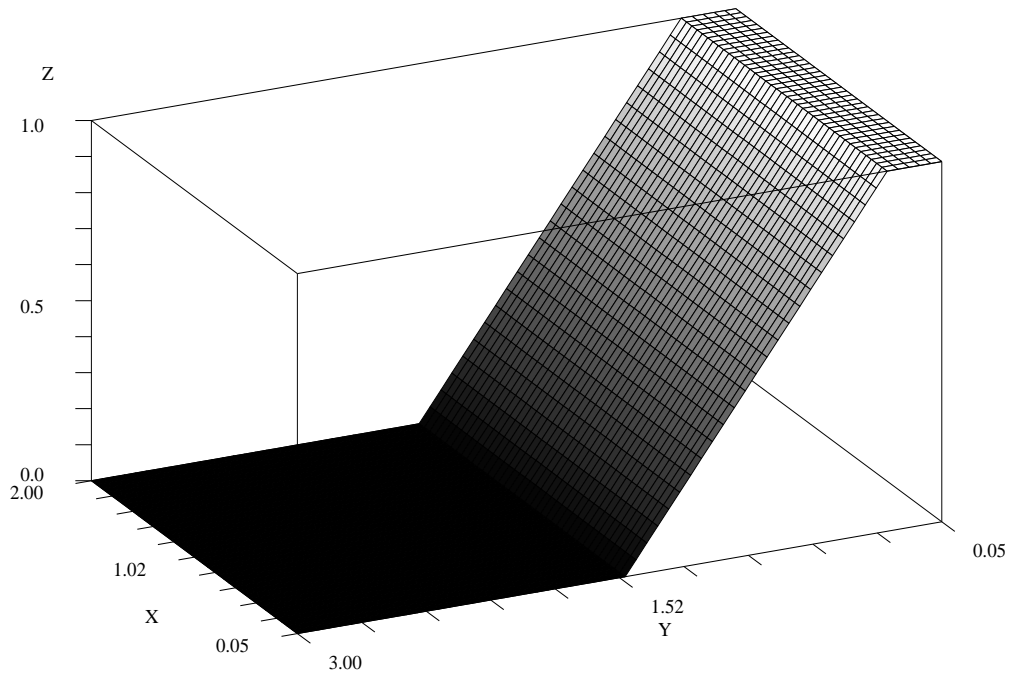


Figure 4.25 – Un plan barycentrique défini par une seule bande.

On peut ensuite définir un coin (figure 4.26), avec deux bandes possédant deux bords communs, il suffit de prendre la valeur minimale entre les deux plans barycentriques.

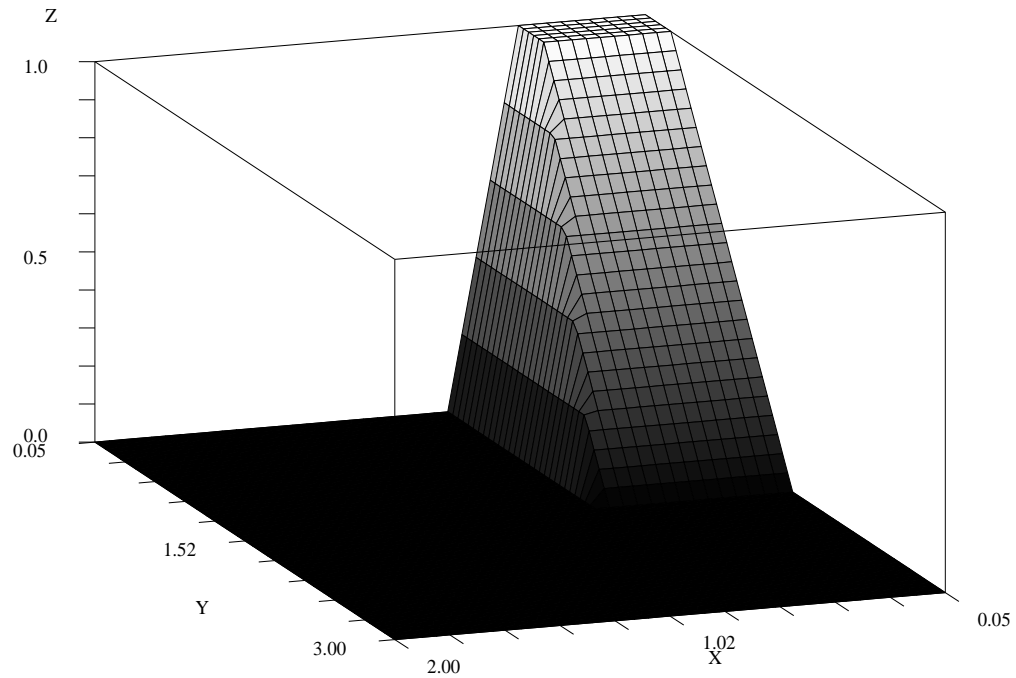
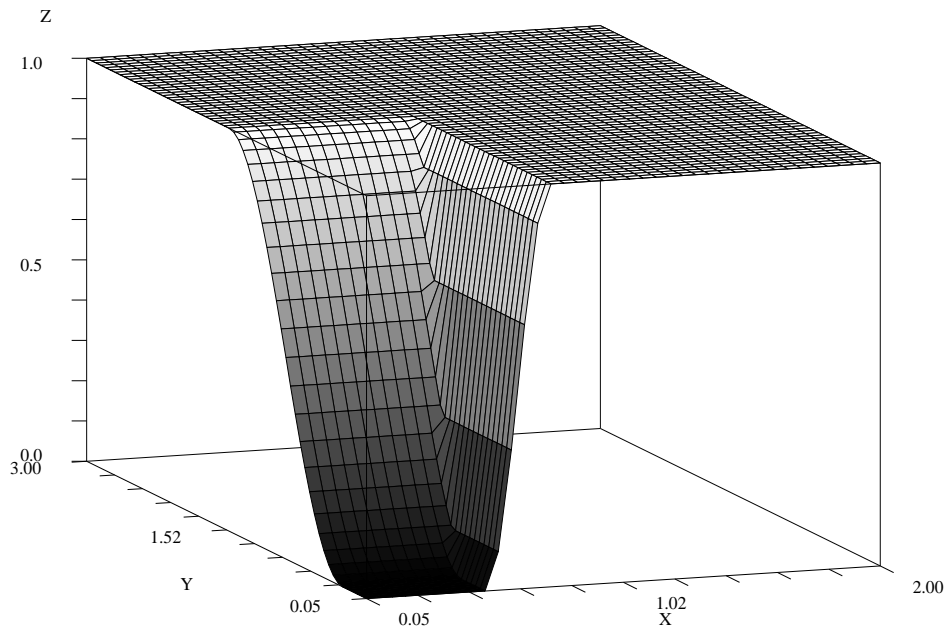
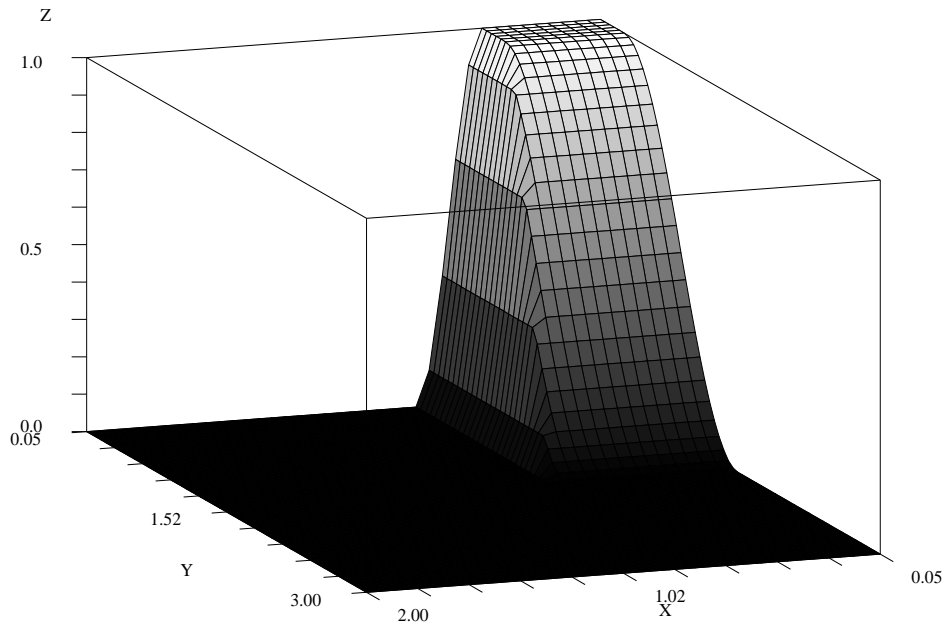


Figure 4.26 – Deux plans barycentriques et deux bandes.

On a alors juste à appliquer la fonction sinusoïdale (par exemple) que l'on a utilisé pour Burgers en 1D sur cette intersection de plans barycentriques (figure 4.27). On a aussi facilement la fonction $1 - \alpha$.

Figure 4.27 – Fonctions α et $1-\alpha$ associées.

En étendant cette procédure à toute une série de bande, on construit la fonction de couplage α le long de la frontière de séparation entre Ω_1 et Ω_2 . Si l'on prend le domaine simple Ω rectangulaire et la zone Ω_2 centrée, on obtient les fonctions de couplage α et $1 - \alpha$ données dans les figures 4.28 et 4.29.

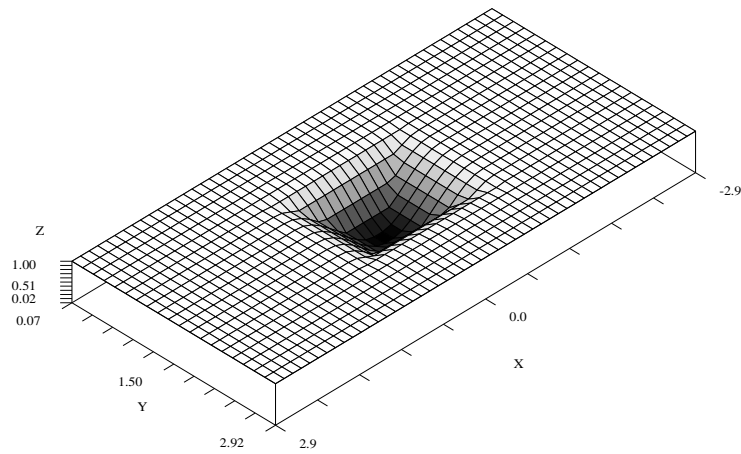
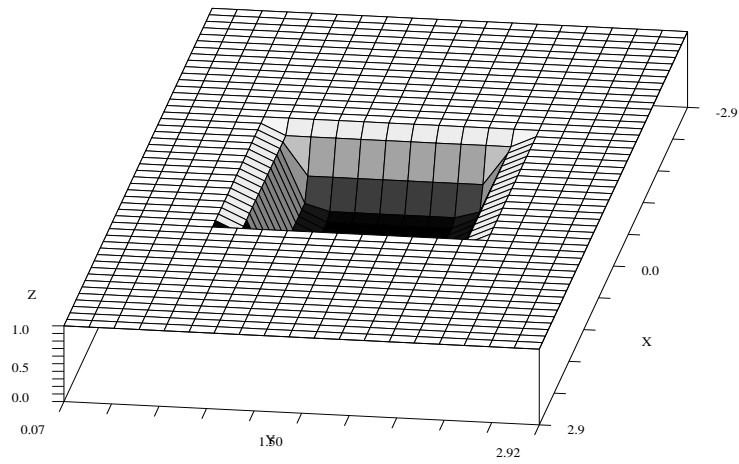


Figure 4.28 – Fonctions α pour le couplage centré de taille 0,2 et 0,5.

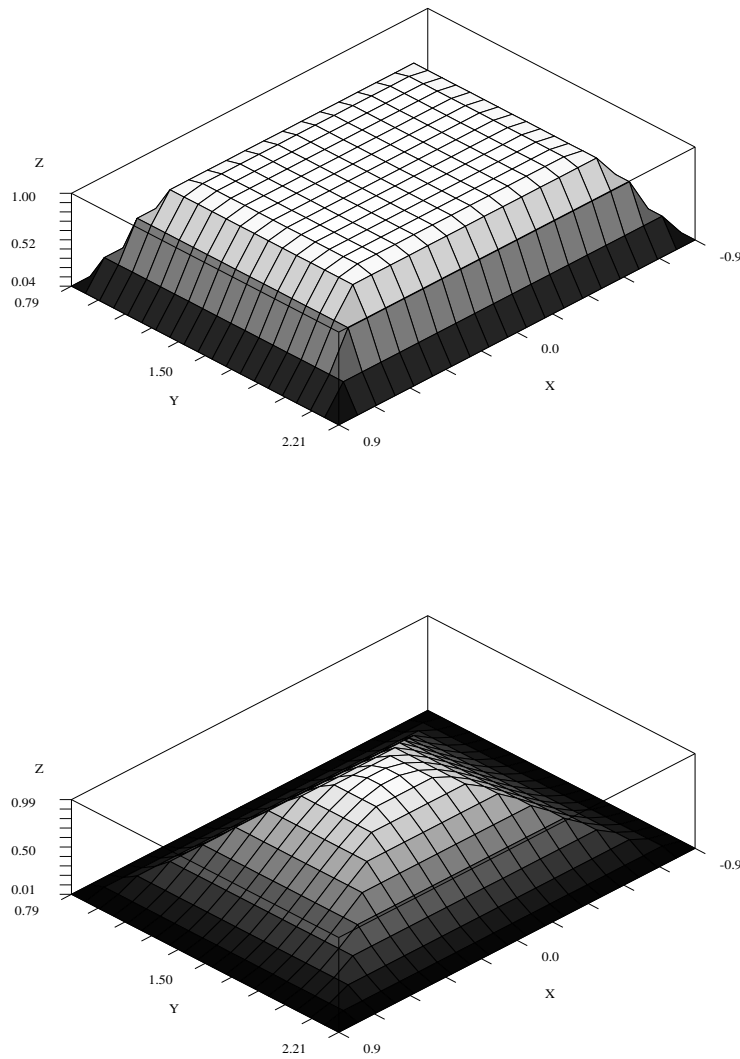


Figure 4.29 – Fonctions $1-\alpha$ pour le couplage centré de taille 0,2 et 0,5.

On remarque que plus la zone de couplage est étendue pour ce cas où Ω_2 est entièrement inclus dans Ω_1 , moins le calcul du schéma 2 sera pris en compte pour ce test.

De plus, on a vu dans la partie théorique que la fonction de couplage vaut

soit 0, soit 1, dans des zones extérieures et intérieures de son support. Il suffit pour cela de diminuer la taille des bandes définissant la zone de couplage et de reprendre le même algorithme de création de la fonction de couplage pour ces nouvelles bandes (voir 4.30 et 4.31).

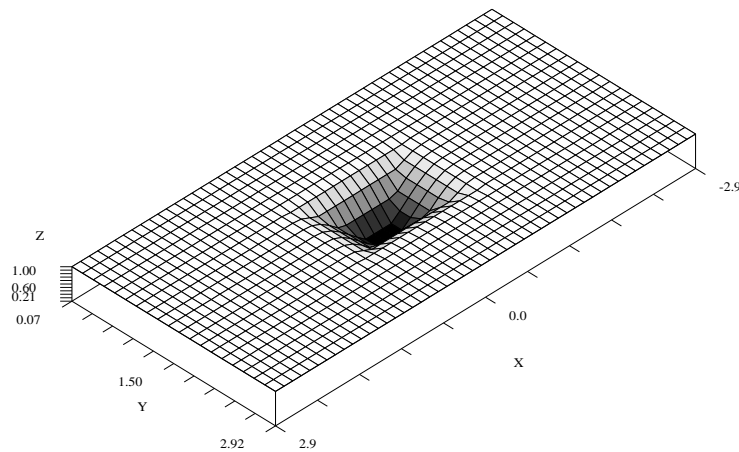
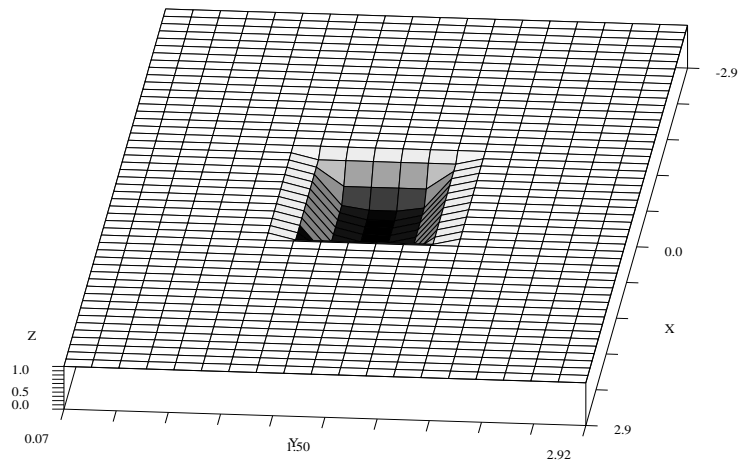


Figure 4.30 – Fonctions α pour le couplage centré de taille 0,2 et 0,5.

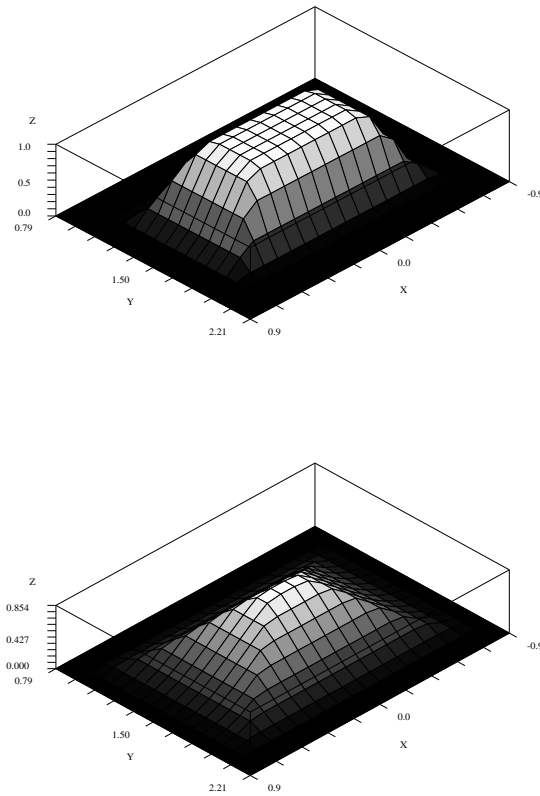


Figure 4.31 – Fonctions $1-\alpha$ pour le couplage centré de taille 0,2 et 0,5.

Pour ces fonctions de couplage et pour le test du tube à choc, la frontière entre les conditions initiales constantes est au centre du domaine. Les ondes partant de cette limite, elles sortiront donc de la zone de couplage.

On fera aussi des tests où les ondes ne sortent plus, mais rentrent dans la zone de couplage, pour observer si elles sont déformées ou si leur vitesse est modifiée dans la zone de couplage. On présente donc les fonctions de couplage correspondant à une position décalée (et non plus centrée) du domaine Ω_2 dans les figures 4.32.

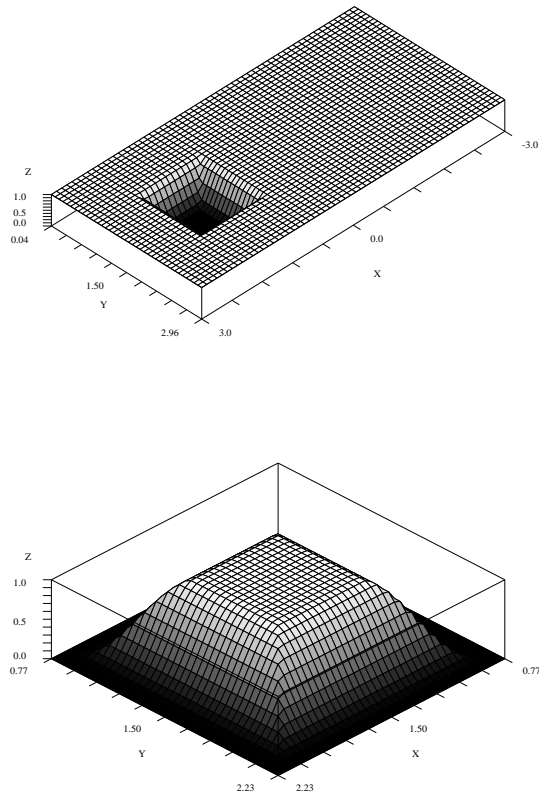


Figure 4.32 – Fonctions α et $1-\alpha$ pour le couplage décalé.

4.3.2 Matrice de projection

On a vu dans le cas 1D, que la construction de la matrice de projection est à calculer à l'initialisation des maillages. Elle est caractérisée par le rapport des mesures des intersections des mailles sur leur propre mesure. Pour un maillage régulier (même avec des pas variables), c'est très simple : on reprend les formules 1D et on l'applique dans chaque direction. Par contre, si l'on considère une triangulation quelconque, c'est beaucoup moins évident. En effet, calculer l'intersection de deux triangles de façon analytique est encore un problème ouvert : il n'existe pas d'algorithme efficace qui permette de le

faire pour un grand nombre de mailles.

Nous proposons de faire une approximation de ces mesures en utilisant une formule de quadrature (maillage uniforme) sur la première maille et en comptant les points de ce maillage qui appartiennent à la seconde. Maillage uniforme : soit un nombre entier N et un triangle (A, B, C) , on construit d'abord le triangle $(A_i, B_i, C_i)_{i=1, N}$, puis on répartit des points $(x_j^{A_i, B_i})_{i=1, N, j=1, N}$ sur les bords de ces triangles :

$$\begin{cases} X_G = \frac{(X_A + X_B + X_C)}{3}, \\ X_{A_i} = X_A - \frac{i}{N} (X_A - X_G) \quad \forall i = 1, N, \\ x_j^{A_i, B_i} = X_{A_i} + \frac{j}{N} (X_{B_i} - X_{A_i}) \quad \forall j = 1, N. \end{cases} \quad (4.2)$$

Le nombre de points répartis est alors $3N^2$. On sélectionne donc les mailles qui sont dans la zone de couplage (opération effectuée lors de la construction de la fonction de couplage). Ensuite, pour chaque maille du maillage 1, on applique une distribution régulière de points. Puis on teste chaque maille du maillage 2 (suffisamment proche) pour compter les points appartenant à cette maille. Pour cela, on utilise encore les coordonnées barycentriques :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{C} &= (ABC), \\ \Leftrightarrow (\lambda_A(x), \lambda_B(x), \lambda_C(x)) &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de diviser par le nombre de points pour avoir une approximation de la mesure des intersections des deux mailles. Enfin, on divise ces mesures par la mesure de chacune des mailles respectivement du maillage 1 et du maillage 2 pour obtenir les matrices de couplage.

4.3.3 Rappels sur les systèmes hyperboliques et sur le modèle hydrodynamique d'Euler

Quelques précisions sur le problème de Riemann

On rappelle ici les travaux de Lax sur la résolution des problèmes hyperboliques :

Définition 4.3.1 *Un choc de vitesse s est admissible au sens de Lax ssi $\exists 1 \leq k \leq m$ t.q.*

$$\begin{aligned} \lambda_{k-1}^g &\leq s \leq \lambda_k^g \\ \lambda_k^d &\leq s \leq \lambda_{k+1}^d \end{aligned}$$

On parle alors d'un "k-choc" admissible.

Remarque 4.3.1 *Cette définition nous permet de rajouter*

1. *qu'en 1D, cela revient à dire*

$$f'(u_d) \leq s \leq f'(u_g)$$

2. *Tous les chocs sont entropiques (sens visqueux, thermodynamique) ssi tous les chocs sont admissibles.*

Définition 4.3.2 *Une courbe de choc $(u_d(\xi), s(\xi))$ est la courbe continue et paramétrée par $\xi \in \mathbb{R}$, telle que*

$$\begin{cases} u_d(0) = u_g \\ u_d(\xi) = \text{état droit lié à } u_g \text{ par un choc de vitesse } s(\xi) \end{cases} \\ \Leftrightarrow s(\xi) [u_g - u_d(\xi)] = [f'(u_g) \cdot n - f'(u_d(\xi)) \cdot n], \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Théorème 4.3.3 *Les tangentes $\frac{du_d}{d\xi}(0)$ des courbes de choc en $\xi = 0$ sont nécessairement les m vecteurs propres de $A(u_g)$, la jacobienne de $f(u_g)$*

$$u_d(\xi) \underset{\xi \rightarrow 0}{\simeq} u_g + \frac{du_d}{d\xi}(0) \cdot \xi,$$

$$u_d^p(\xi) = u_g + R_p(u_g) \cdot \xi.$$

Alors on la vitesse du choc p en fonction des valeurs et vecteurs propres associés :

$$s(\xi) = \lambda_p(u_g) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \lambda_p(u_g) \cdot R_p(u_g) \cdot \xi + \mathcal{O}(\xi^2).$$

1. Les chocs VNL (Vraiment Non Linéaires)

$$\frac{\partial \lambda_p}{\partial u}(u_g) \cdot R_p(u_g) \neq 0$$

Alors, si ξ et $\frac{\partial \lambda_p}{\partial u}(u_g) \cdot R_p(u_g)$ sont de même signe, alors cette partie de la courbe n'est pas admissible

$$\lambda_p(u_g) \geq s(\xi) \geq \lambda_p(u_d(\xi))$$

et si ξ et $\frac{\partial \lambda_p}{\partial u}(u_g) \cdot R_p(u_g)$ sont de signes contraire, cette partie est admissible

$$\lambda_p(u_g) \leq s(\xi) \leq \lambda_p(u_d(\xi)).$$

2. Les chocs LD (Linéairement Dégénérés), qui sont les discontinuités de contact

$$\forall u, \frac{\partial \lambda_p}{\partial u}(u_g) \cdot R_p(u) = 0$$

sont toutes admissibles

$$\begin{cases} s(\xi) = \lambda_p(u_g) = \lambda_p(u_d(\xi)) \\ \frac{du_d}{d\xi}(\xi) = \alpha R_p(\xi) \end{cases}$$

$$\frac{d\lambda_p}{d\xi}(u_d(\xi)) = \frac{\partial}{\partial u} \lambda_p(u_g) \frac{du}{d\xi} = \frac{\partial \lambda_p}{\partial u}(u_g) \cdot R_p(u) = 0.$$

Système d'équations d'Euler

Ces équations de l'hydrodynamique concernent les fluides non visqueux compressibles. C'est un système strictement hyperbolique, ce qui entraîne

l'apparition d'ondes de chocs et de détentes et des discontinuités de contact, même si les conditions initiales sont régulières. Il est basé sur les lois de conservation suivantes.

1. Conservation de la masse

ρ : densité,

u : vitesse moyenne,

$$\left[\int_{\omega} \rho d\omega \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\omega} -\rho u \cdot n d\gamma dt,$$

où $\rho u \cdot n$ est le flux de masse qui rentre par unité de temps et de surface.

ω représente ici un petit élément fluide.

2. Conservation de la quantité de mouvement

f : force de masse,

σ : force de surface,

$$\begin{aligned} \left[\int_{\omega} \rho u d\omega \right]_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\omega} -\rho u (u \cdot n) d\gamma dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} f d\omega dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\omega} \sigma n d\gamma dt. \end{aligned}$$

3. Conservation de l'énergie

E : énergie volumique,

q : flux de chaleur,

r : quantité de chaleur fournie,

$$\begin{aligned} \left[\int_{\omega} E d\omega \right]_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\omega} -E u \cdot n d\gamma dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} (f u + r) d\omega dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\omega} (u \sigma n - q n) d\gamma dt. \end{aligned}$$

4. Second principe de la thermodynamique

$$\begin{aligned}
s & : \text{ entropie (mesure du désordre interne)} \\
\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \Phi \, d\omega \, dt & = \left[\int_{\omega} \rho s \, d\omega \right]_{t_1}^{t_2} \\
& + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\omega} s \, u \cdot n \, d\gamma \, dt}_{\text{entropie reçue}} \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \frac{1}{T} r \, d\omega \, dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\omega} \frac{1}{T} q \cdot n \, d\gamma \, dt \\
& \geq 0.
\end{aligned}$$

Pour obtenir une écriture différentielle de ces équations intégrales, on utilise la formule de Green :

$$\int_{\partial\omega} A \cdot n \, d\gamma = \int_{\omega} \operatorname{div}(A) \, d\omega.$$

Ensuite, on passe à la limite $\omega \times]t_1, t_2[\rightarrow 0$.

On fait alors des hypothèses de comportement sur le fluide, qui entraînent des lois de comportement :

$$\begin{cases} p = (\gamma - 1) \left(E - \rho \frac{u^2}{2} \right), \\ E = \rho \frac{u^2}{2} + \rho C_v T. \end{cases}$$

où l'on définit le paramètre adimensionné γ et la vitesse du son :

$$\begin{aligned}
\gamma & = \frac{C_p}{C_v}, \\
c & = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.
\end{aligned}$$

Le système d'Euler devient dans \mathbb{R}^3 : trouver U dans \mathbb{R}^5 tel que

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \operatorname{div}(F(U)) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \\ F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u \otimes u + p(U) Id \\ (E + p) u \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Il s'agit bien d'une loi de conservation non linéaire où F désigne le flux.

La théorie des systèmes hyperboliques donne la relation de Rankine-Hugoniot entre deux états séparés par une onde de choc :

$$\sigma [U] = [F(U)], \quad (4.3)$$

où le σ désigne la vitesse de l'onde de choc (l'inverse de la pente de la courbe de choc dans le plan (x,t)) et l'opération "entre crochets" ($[\bullet]$) désigne ici le calcul du saut. Si U_g est l'état (constant dans un tube à choc) à gauche et U_d , l'état à droite, alors :

$$[U] = (U_g - U_d).$$

Ces éléments de base nous permettrons d'interpréter les résultats numériques de Eva Pärt-Enander et B. Sjögreen.

Cas test de l'onde de choc lente

Pour tester les méthodes de couplage, ces deux auteurs étudient un cas de tube à choc sur un maillage déformé (cas maillage courbe), avec comme solution une onde de choc très lente. On applique les conditions initiales

suivantes pour Euler :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_G = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0 \\ \frac{4.2}{1.4} \\ 8.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0 \\ 3 \\ 8.8 \end{pmatrix}, \\ U_D = \begin{pmatrix} 5.38064 \\ 0 \\ \frac{4.25971}{5.38064} \\ 27.2576 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.38064 \\ 0 \\ 0.79167 \\ 27.2576 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.4)$$

L'étude du problème de Riemann sur ces conditions montre que le choc lent (de vitesse $1,5 \cdot 10^{-2}$) est une 1-onde (correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = u - c$). Il y a en plus une 3-onde de choc rapide (de vitesse 2,4264), mais de très faible amplitude (de l'ordre de 10^{-6}). Entre ces deux ondes bien différentes, il y a aussi une discontinuité de contact, moins rapide (de vitesse $7,91675 \cdot 10^{-1}$), mais avec une peu plus d'amplitude (10^{-5}). Ces deux ondes perturbent le calcul avant que le choc fort ne rentre dans la zone de couplage, surtout dans le cas du maillage déformé décrit au paragraphe 4.3.5. Dans cette section, on présentera des résultats avec d'autres conditions initiales. Celles-ci entraînent l'apparition d'un 3-choc lent (donc en premier dans le couplage) et de forte amplitude.

4.3.4 Tube à chocs de Sod

On construit le tube à choc de Sod à l'aide de la condition initiale suivante (voir figure 4.33) :

$$U_G = \begin{pmatrix} \rho_G = 4 \\ u_G = 0 \\ E_G = 4 \end{pmatrix},$$

$$U_D = \begin{pmatrix} \rho_D = 1 \\ u_D = 0 \\ E_D = 1 \end{pmatrix}.$$

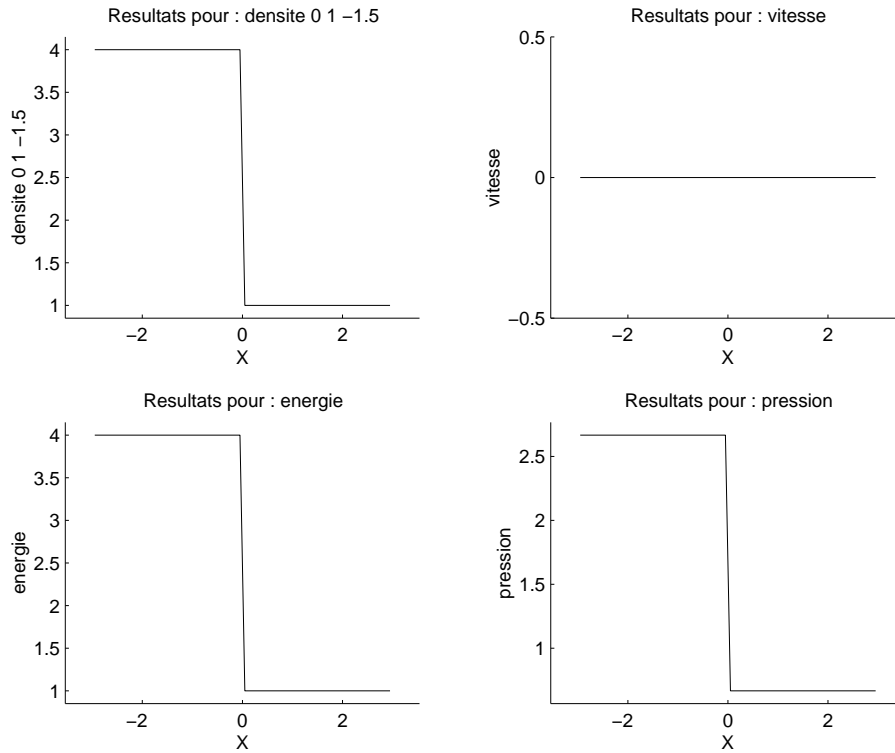


Figure 4.33 – Conditions Initiales du tube à chocs de Sod.

La figure 4.33, de même que pour les figures 1D de ce cas test, représente la coupe des valeurs de la densité, de la vitesse, de la pression et de l'énergie, le long de la droite médiane du cas test 2D.

On présente tout d'abord le calcul sans le couplage dans la figure 4.34. Les résultats donnés par les quatre premières courbes donnent l'évolution des grandeurs citées précédemment, en fonction du temps.

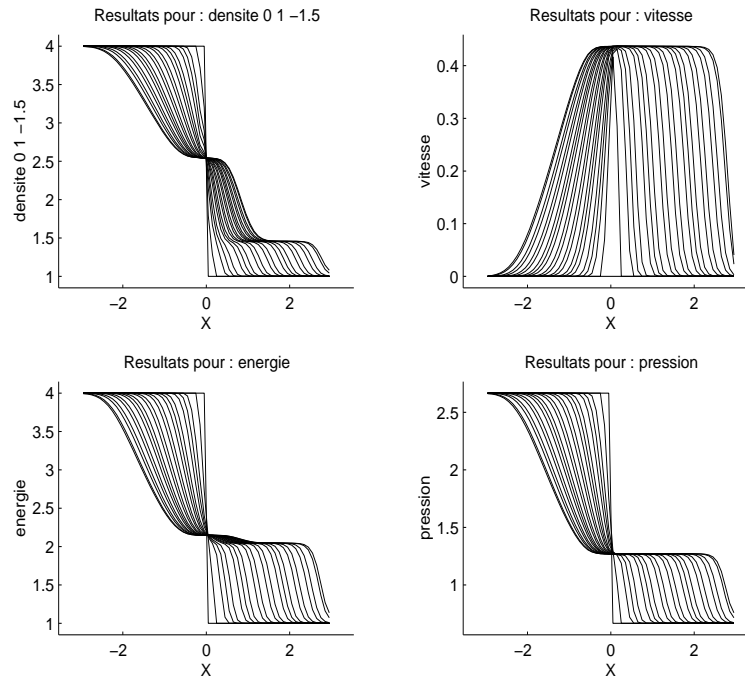


Figure 4.34 – Résultat du tube à chocs de Sod sans couplage : ligne centrale.

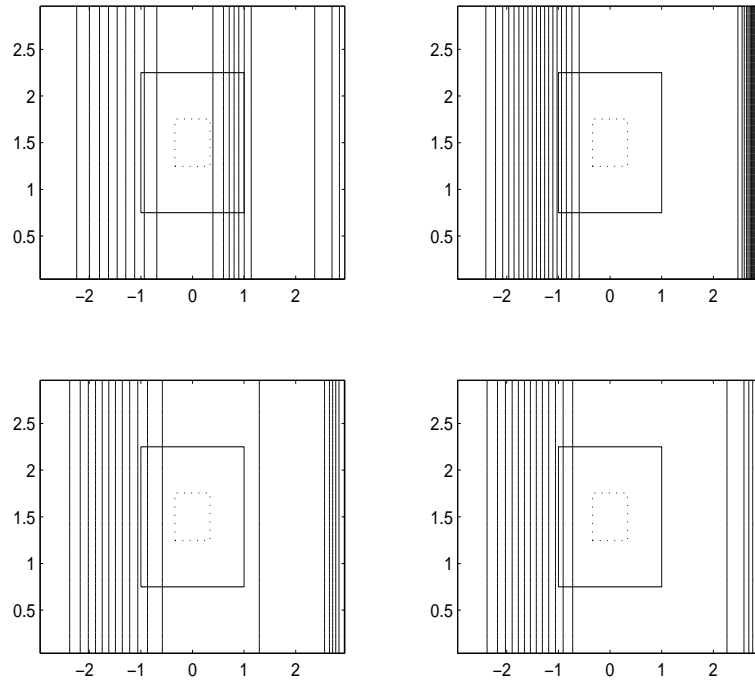
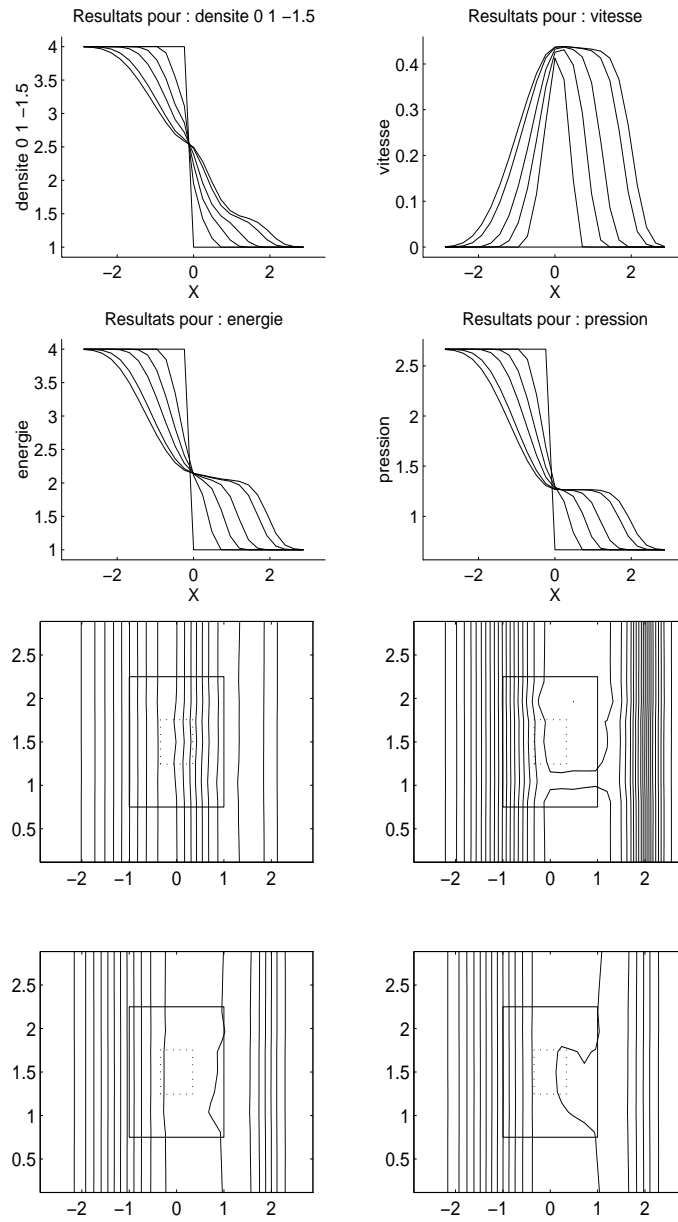


Figure 4.35 – Résultat du tube à chocs de Sod sans couplage : isocourbes.

Étude du couplage centré

Pour des maillages grossiers, on a les résultats suivants : pour le maillage 1 de taille 25×13 et le maillage 2 de taille 9×7 , on a la figure 4.36, puis la figure 4.37 pour le maillage 1 25×13 et le maillage 2 17×12 . Les paliers (zones où on a peu d'isovaleurs) sont bien à la bonne hauteur dans les deux cas, mais on voit bien l'influence du pas du maillage 2 sur le résultat final.

Figure 4.36 – Résultat du tube à chocs de Sod M1 : 25×13 ; M2 : 9×7

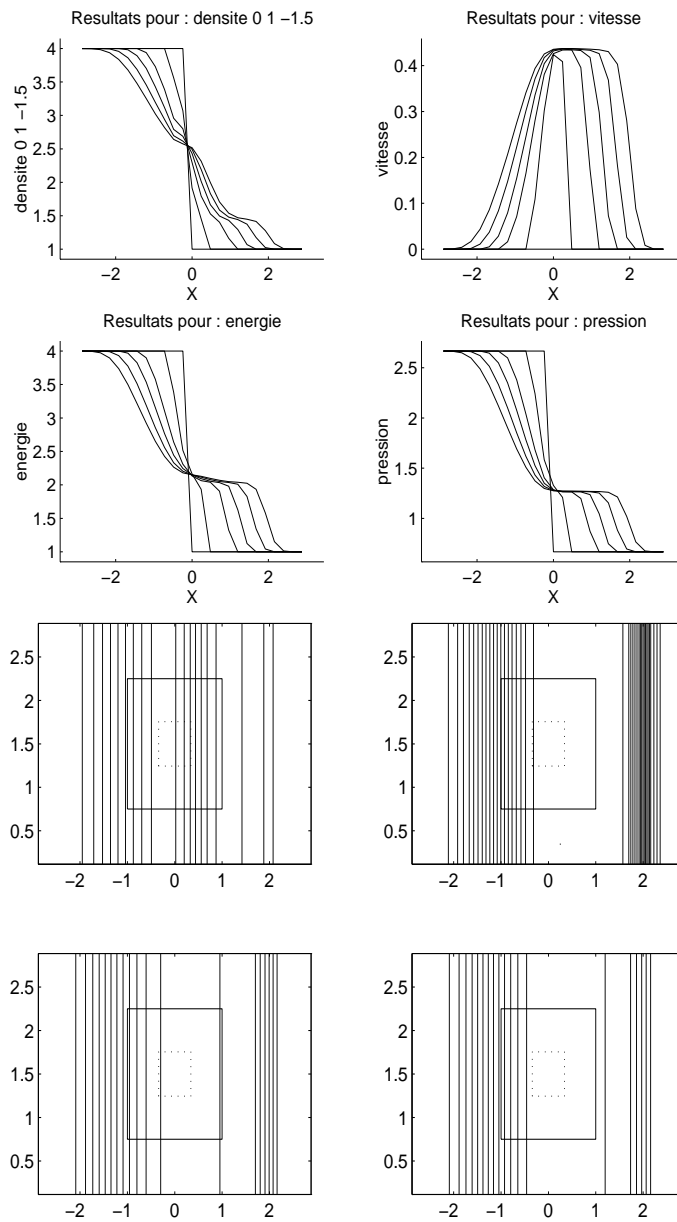


Figure 4.37 – Résultat du tube à chocs de Sod $M1 : 25 \times 13$; $M2 : 17 \times 12$

Si l'on raffine le maillage 1, on obtient la figure 4.38.

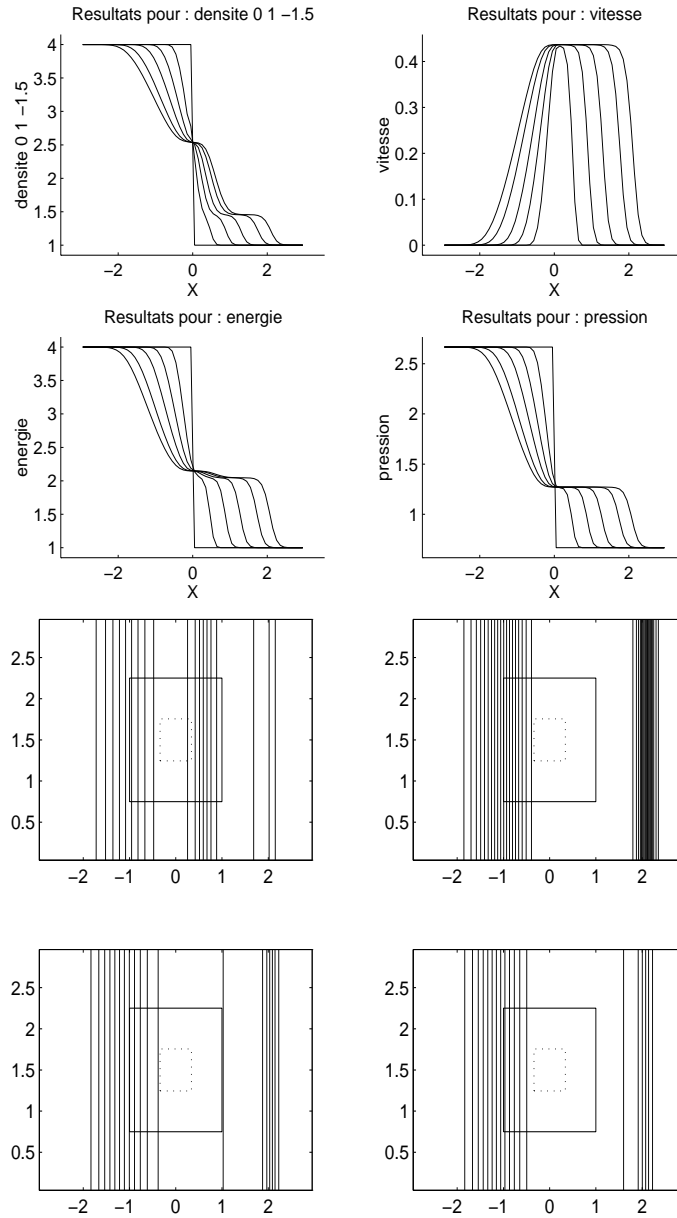


Figure 4.38 – Résultat du tube à chocs de Sod $M1 : 60 \times 40$; $M2 : 9 \times 7$

Là, on voit que malgré la faible taille du maillage 2, le résultat est tout à fait correct. En fait, même si l'on laisse le maillage 2 très grossier (9×7), on a convergence du schéma si le maillage 1 devient très fin (400×200) dans la figure 4.39.

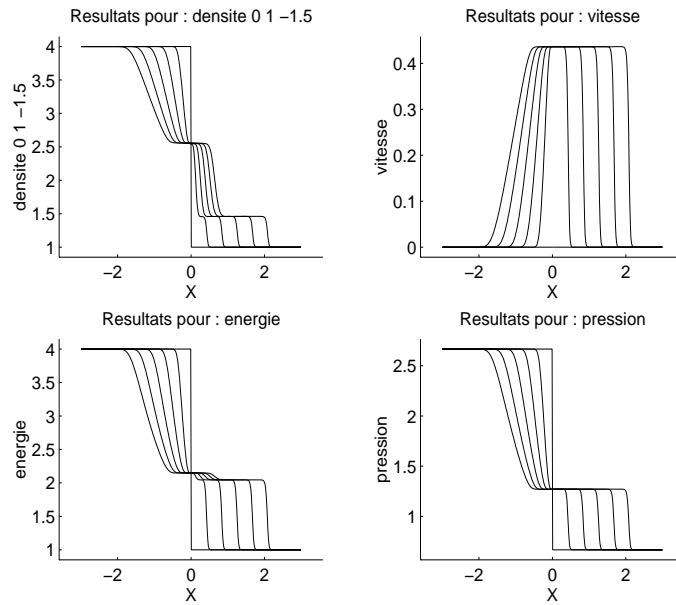


Figure 4.39 – Résultat du tube à chocs de Sod $M1 : 400 \times 200$; $M2 : 9 \times 7$

Enfin voici deux tests où l'on a placé la zone de couplage respectivement à gauche (détente entrante) et à droite (onde de choc entrante) de la ligne centrale du tube à choc de Sod.

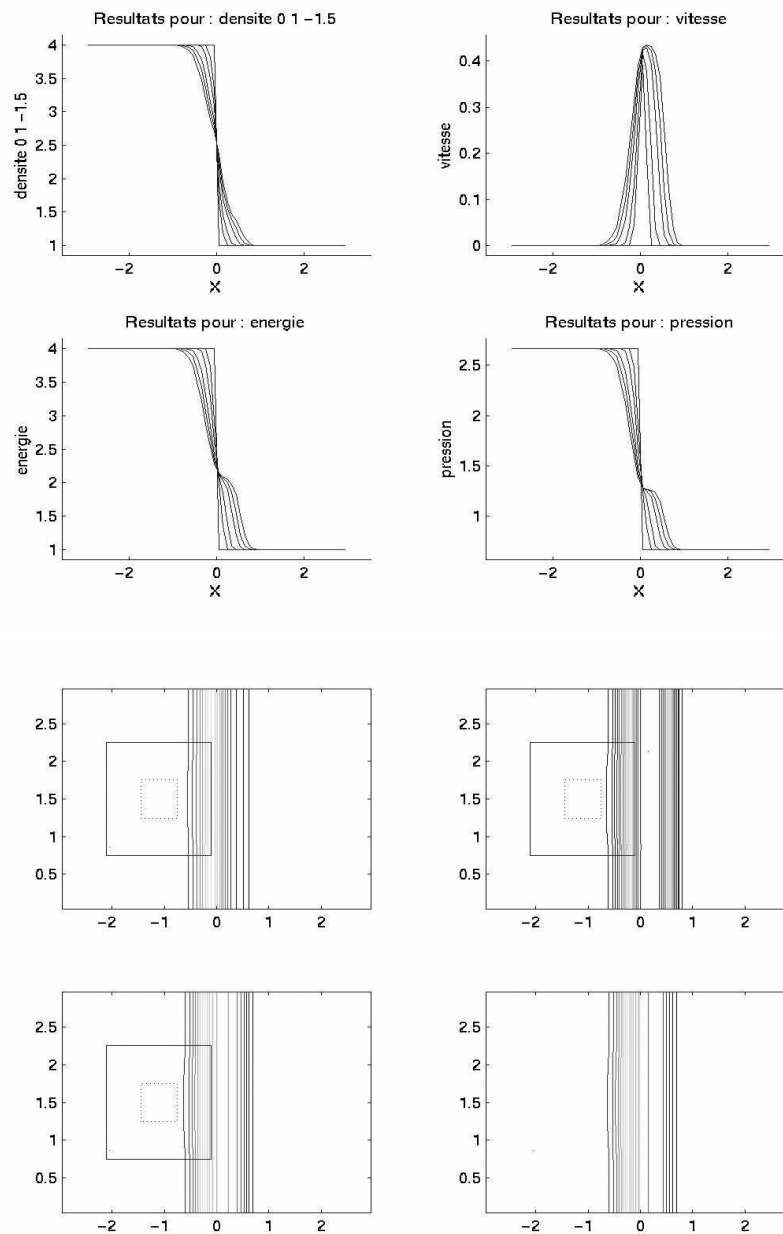


Figure 4.40 – Profil et résultat du tube à chocs de Sod M1 : 60×40 ; M2 : 15×15

La figure 4.40 montre que la détente est correctement dans la zone de couplage.

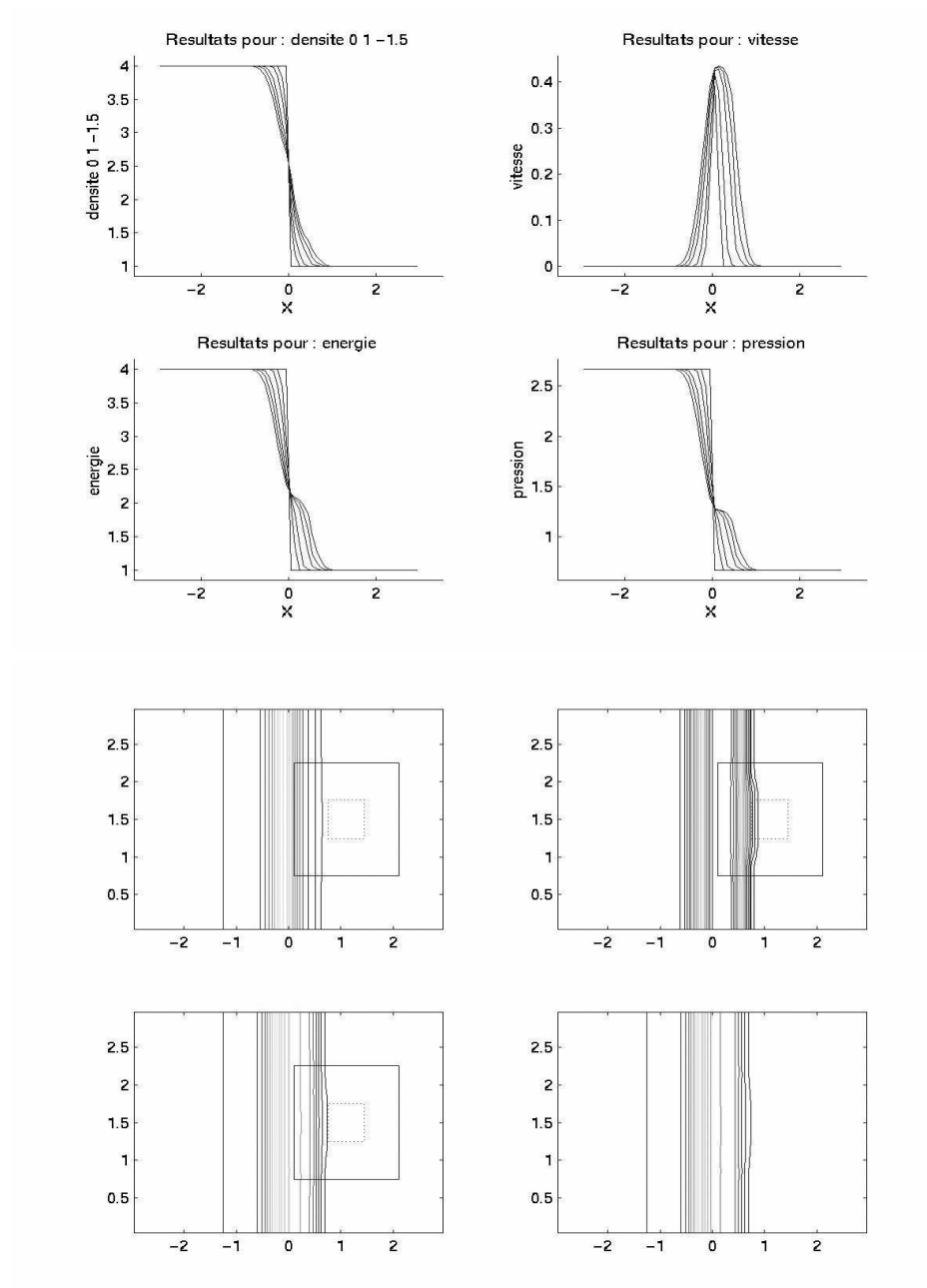


Figure 4.41 – Profil et résultat du tube à chocs de Sod $M_1 : 60 \times 40$; $M_2 : 15 \times 15$

La figure 4.41 montre que l'onde de choc entre elle aussi correctement dans la zone de couplage.

On peut conclure cette étude en insistant sur le fait que l'algorithme de couplage est très robuste. Ce sont les conditions aux limites du couplage de type volumique qui apportent cette robustesse. Mais il ne faut surtout pas oublier les zones $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ dans la zone de couplage car sinon on a des instabilités comme celles représentés dans la figure 4.42.

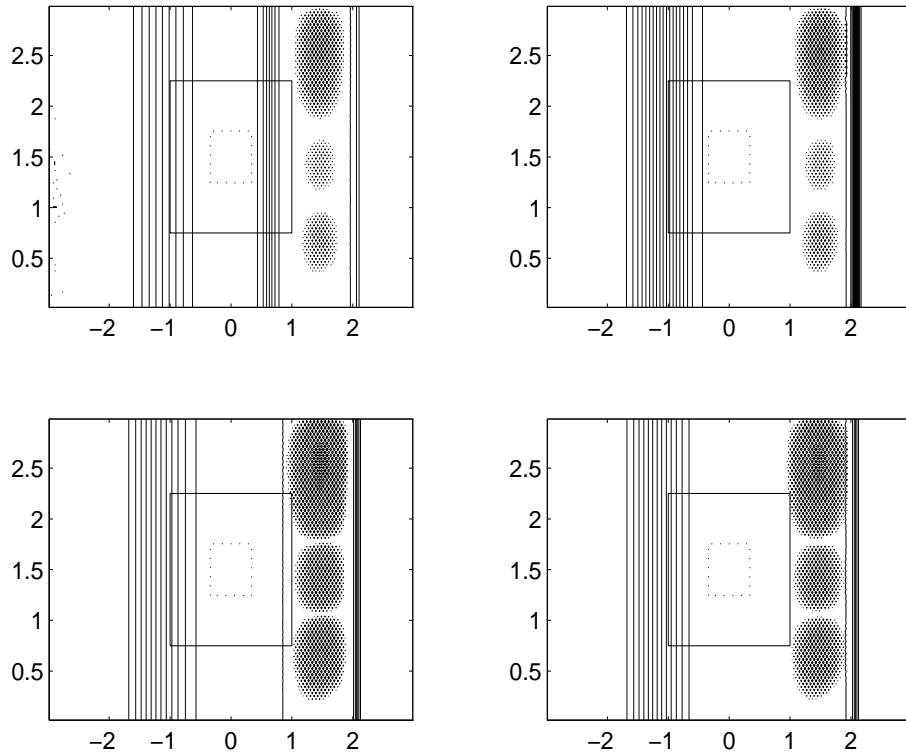


Figure 4.42 – Résultat du tube à chocs de Sod $M1 : 200 \times 100$; $M2 : 9 \times 7$

4.3.5 Étude du couplage sur un maillage déformé

Nous reprenons ici le cas test présenté par Eva Pärt-Enander dans sa thèse ([Pär95]) “Overlapping Grids and Applications in Gas Dynamics” dans le Chapitre 4 (p106-124), ainsi que dans l’article qu’elle a écrit avec B. Sjögren (dans [PS94]). Il s’agit de tester le couplage pour le système d’Euler pour le maillage 1 déformé et le maillage 2 régulier. Ici, l’onde de choc rentre dans le domaine de couplage.

Pour obtenir ce maillage déformé, nous sommes partis d’un maillage régulier carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$, auquel nous avons appliqué la transformation suivante :

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 y + a_6 y^2 + a_7 y^3, \\ b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3 + b_5 y + b_6 y^2 + b_7 y^3. \end{pmatrix}$$

On a alors choisi les coefficients suivants :

$$\begin{pmatrix} a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7, \\ b_1; b_2; b_3; b_4; b_5; b_6; b_7. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0; 0, 75; 0; 0, 25; 0, 25; 0; -0, 25, \\ 0; -0, 25; 0; 0, 25; 0, 75; 0; 0, 25. \end{pmatrix}$$

Ce que l’on veut observer est le déphasage entre la partie de l’onde de choc se propageant hors de la zone de couplage et celle qui la traverse. Dans le test d’Eva Pärt-Enander, ce déphasage est vraiment très important. En effet, on voit dans ses interprétations et avec sa méthode, que l’onde de choc entrant dans le domaine de couplage est très déformée par celui-ci. Ce n’est pas forcément la zone de couplage qui interfère dans ce cas précis : On a vu à la fin du paragraphe 4.3.3, que les conditions initiales utilisées pour leur cas test ne sont pas applicables pour les pas d’espace choisis (en particulier pour le maillage déformé).

Les fonctions de couplage (calculées après déformation) sont données dans la figure 4.43 et pour les conditions initiales, on reprend les conditions initiales du tube à choc de Sod. Elles sont données dans la figure 4.44.

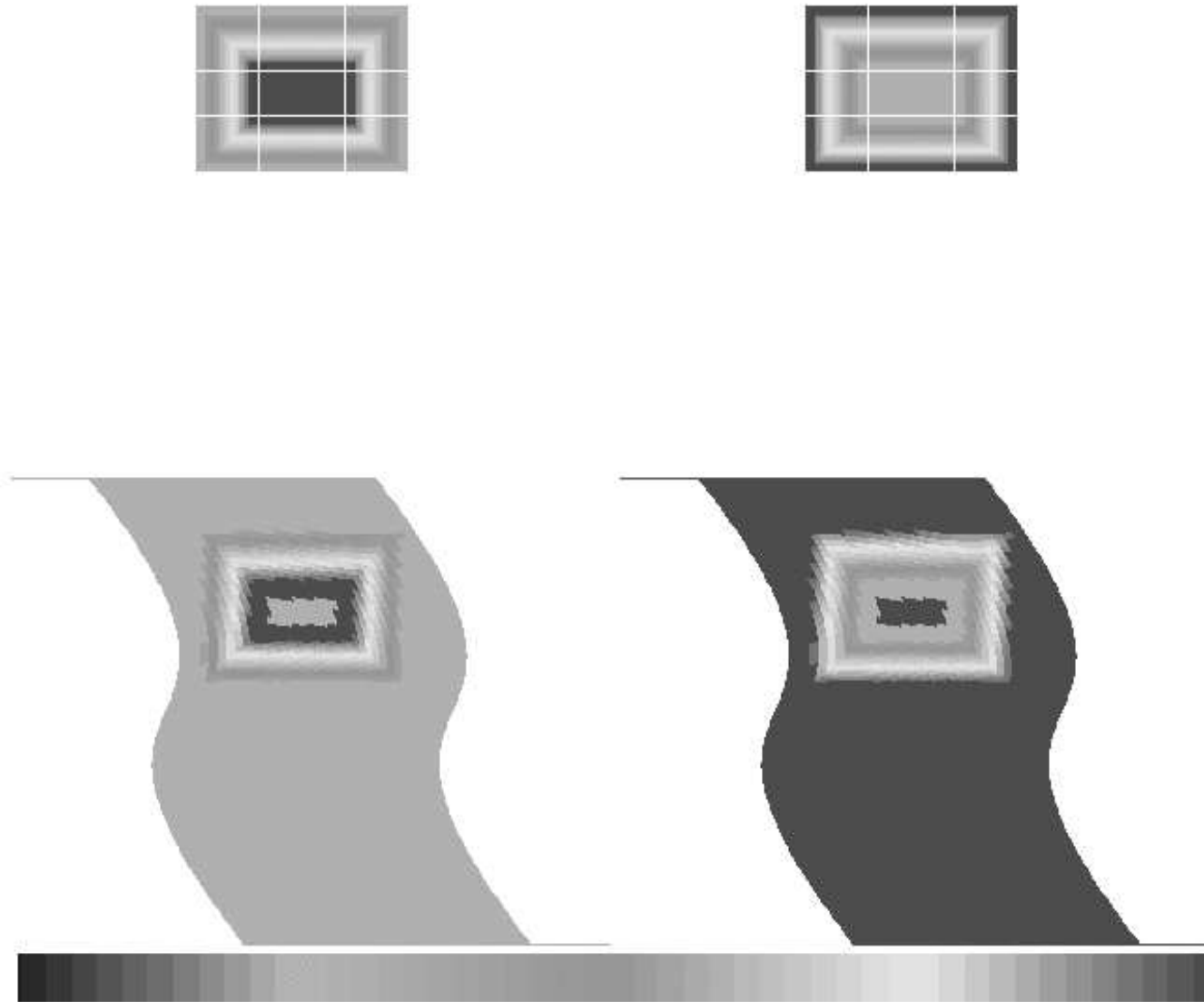


Figure 4.43 – Fonctions de couplage du test déformé

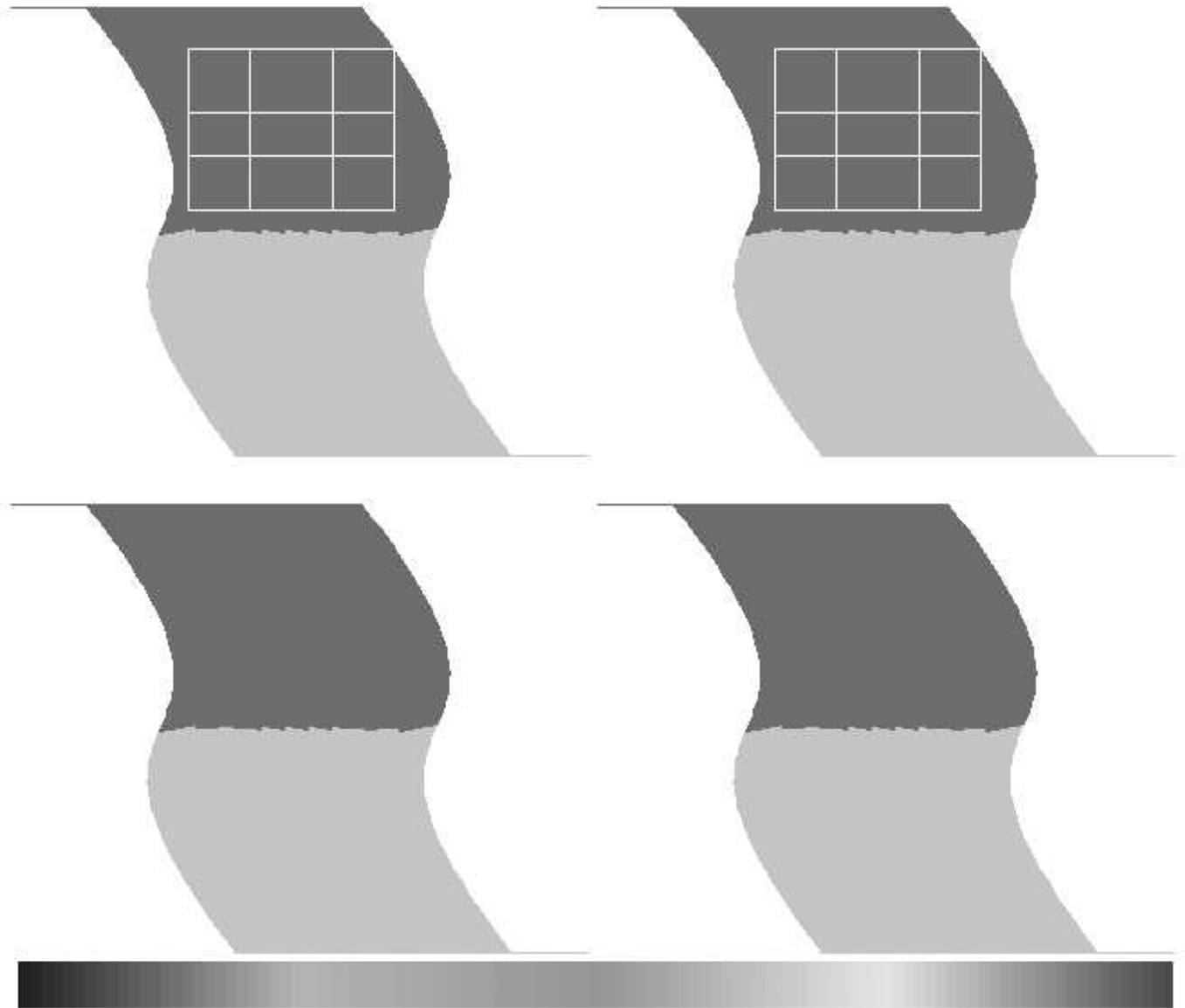


Figure 4.44 – Conditions initiales du test déformé

On a fait un premier test sur un maillage peu raffiné, les résultats sont alors présentés dans les figures 4.45 à 4.51,

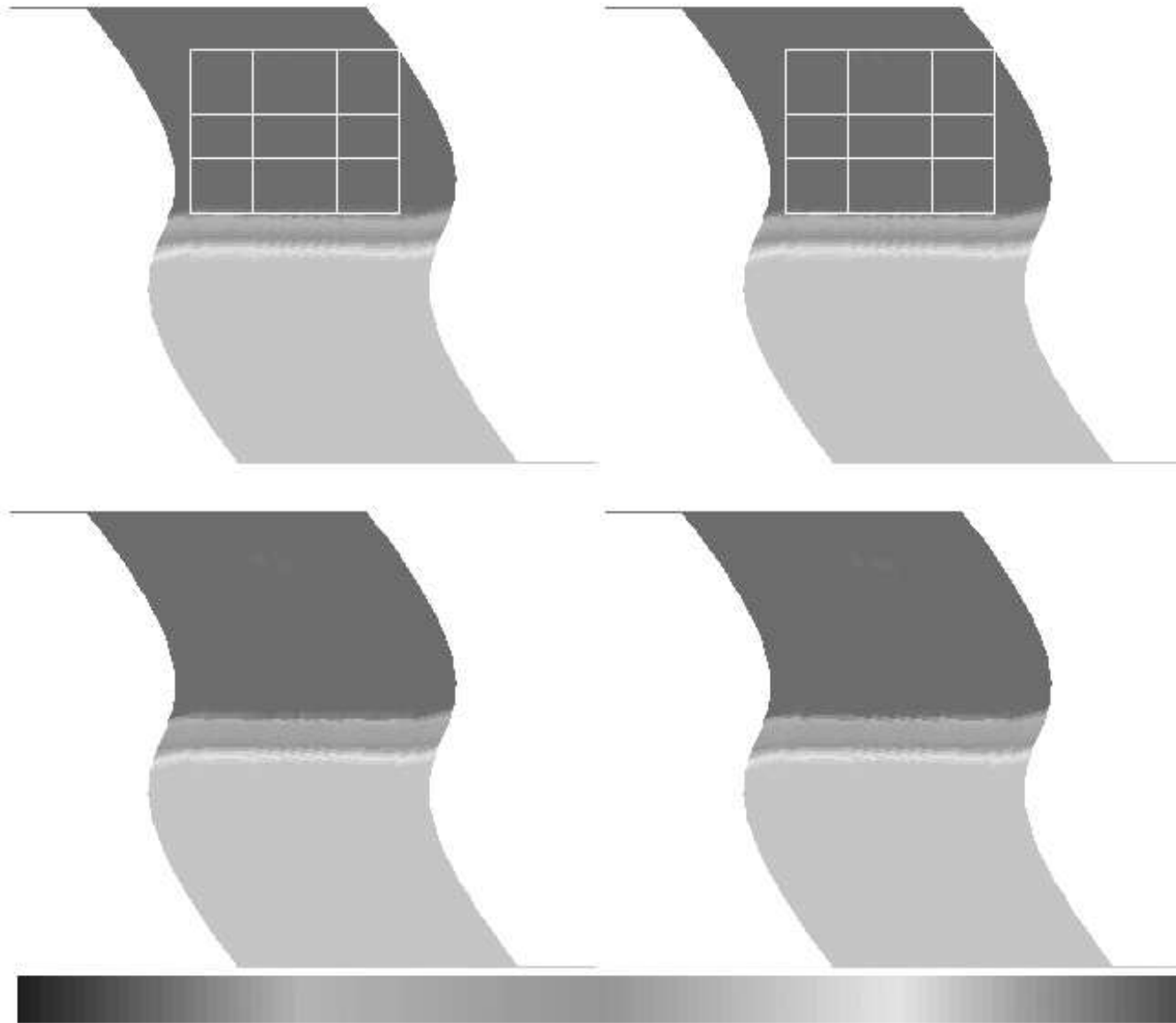


Figure 4.45 – Couplage déformé instant 1

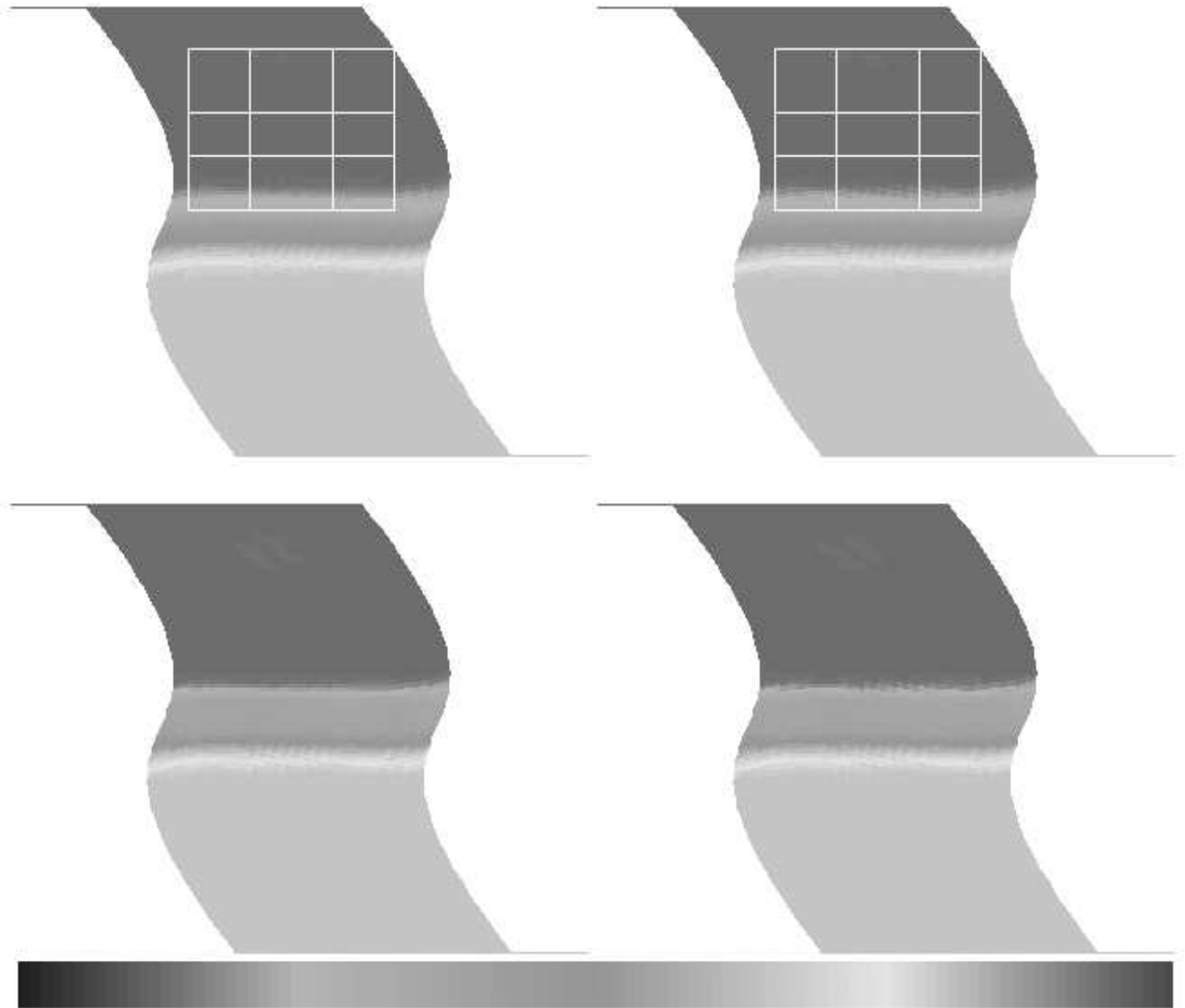


Figure 4.46 – Couplage déformé instant 2

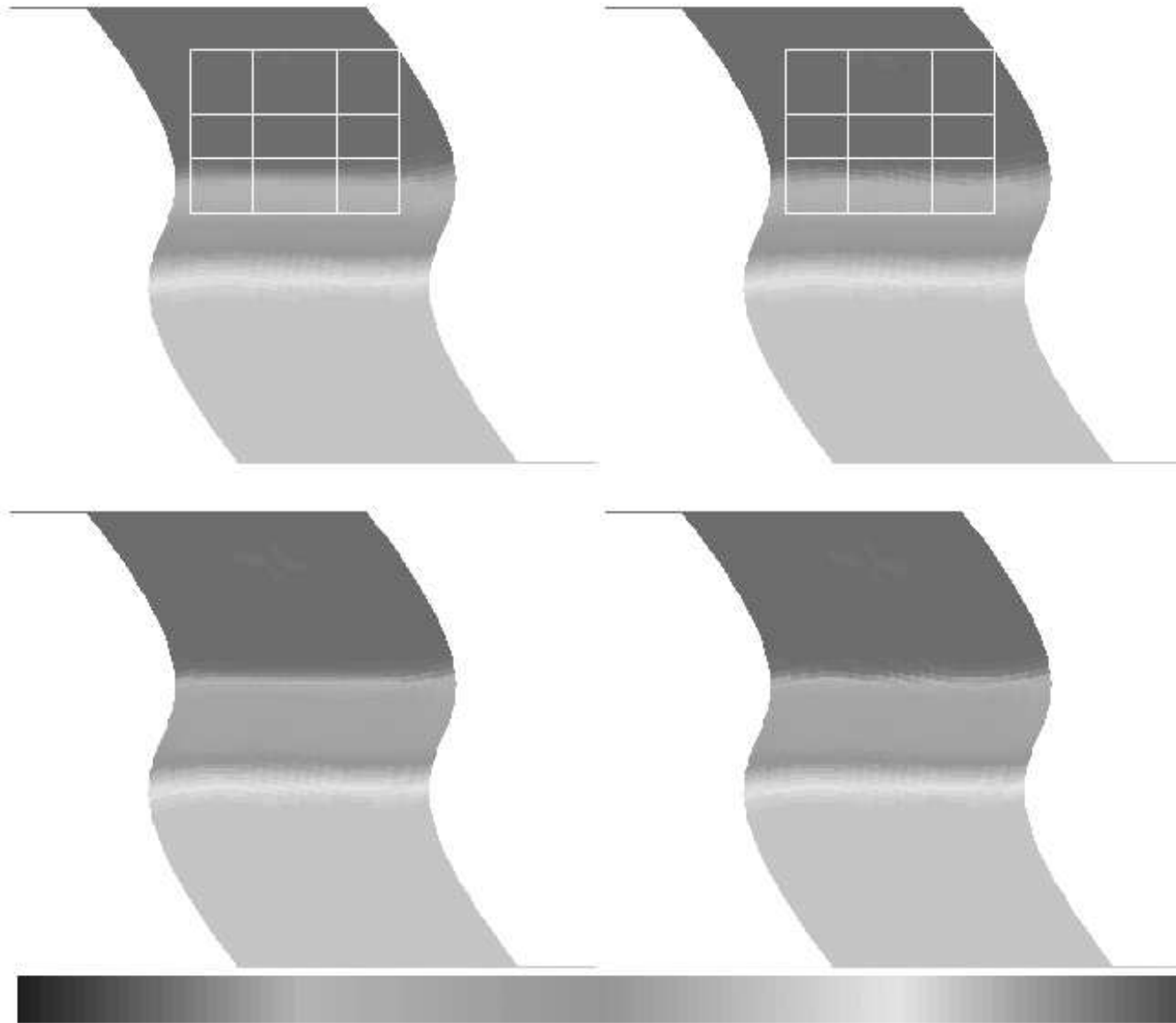


Figure 4.47 – Couplage déformé instant 3

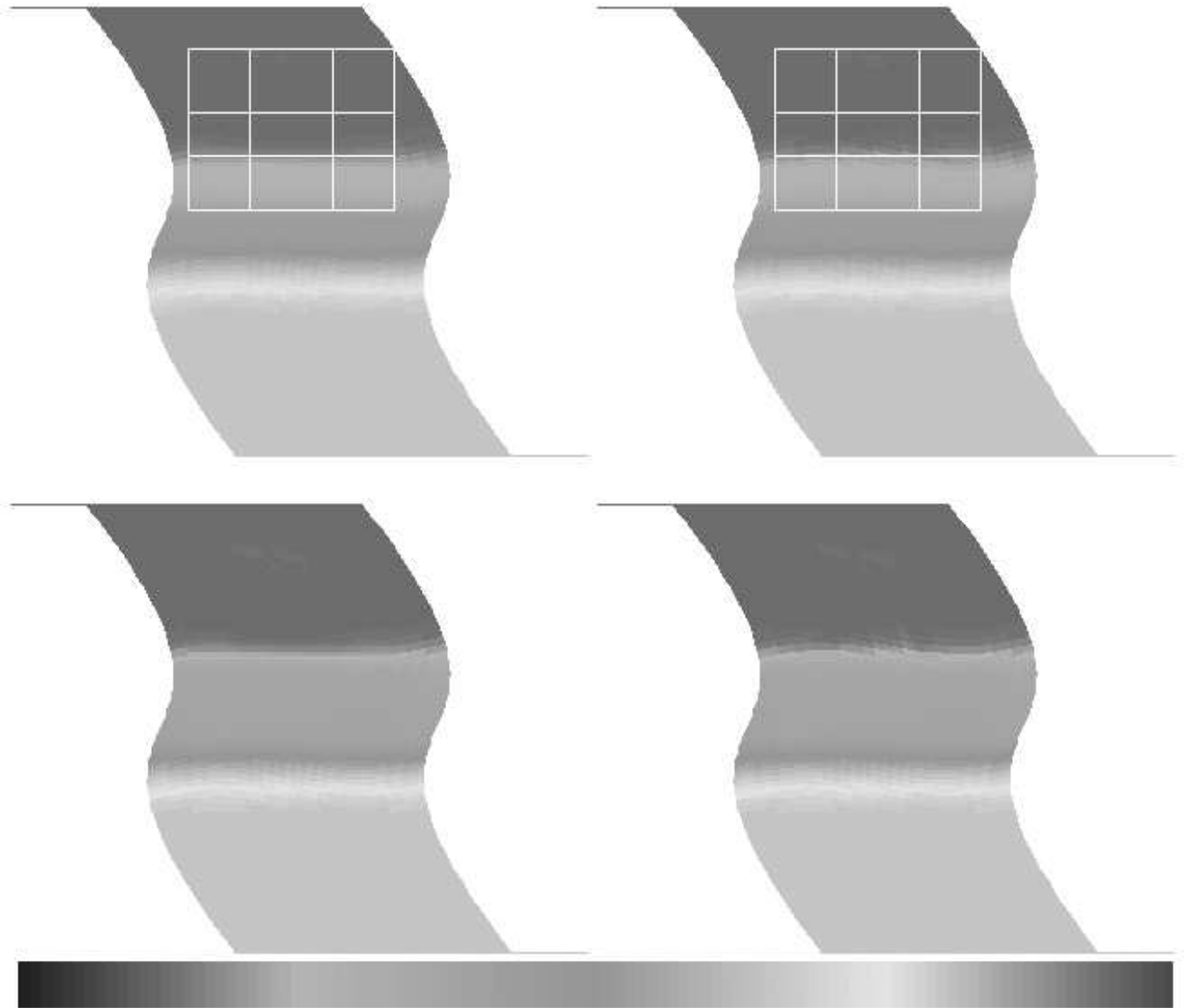


Figure 4.48 – Couplage déformé instant 4

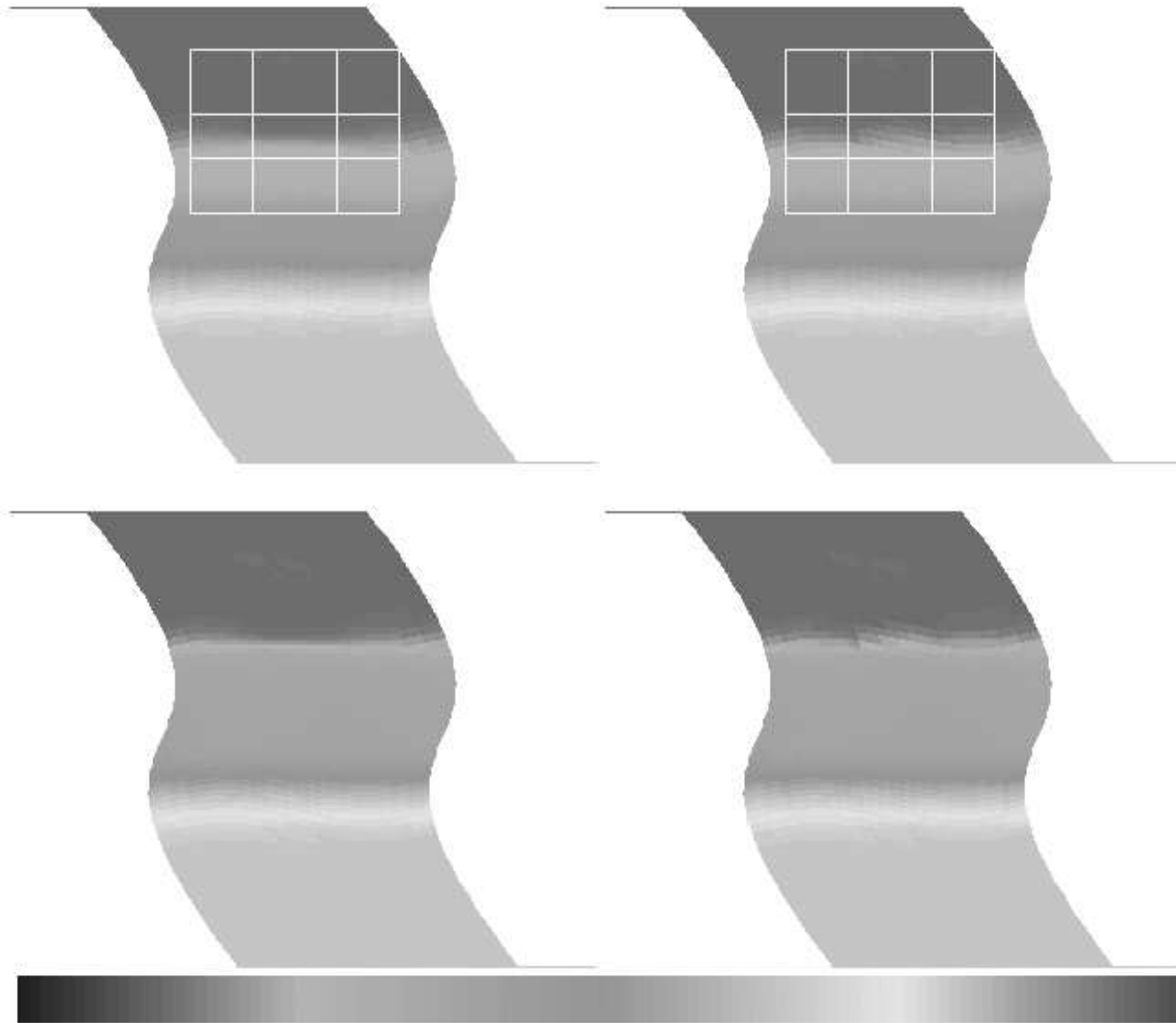


Figure 4.49 – Couplage déformé instant 5

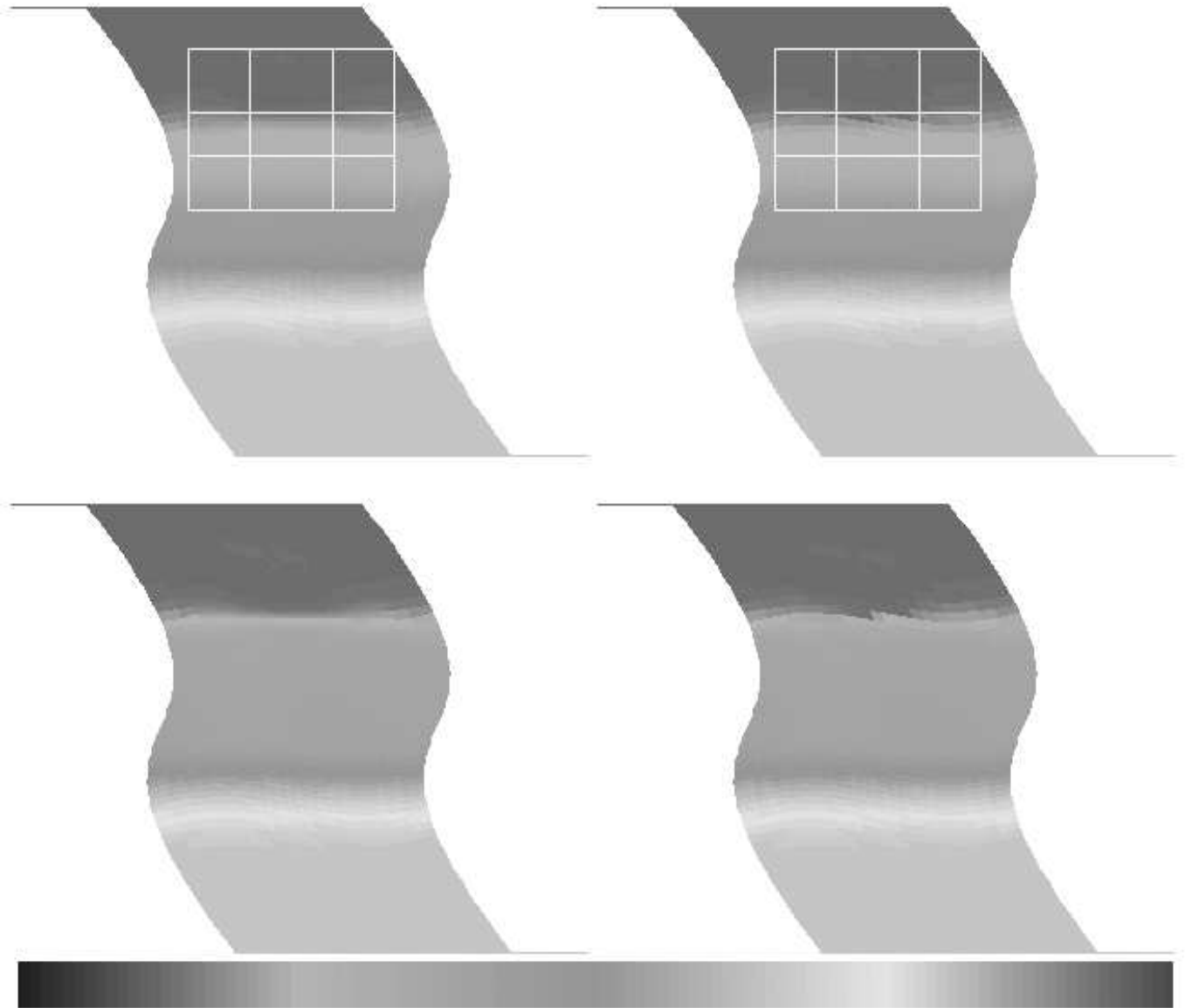


Figure 4.50 – Couplage déformé instant 6

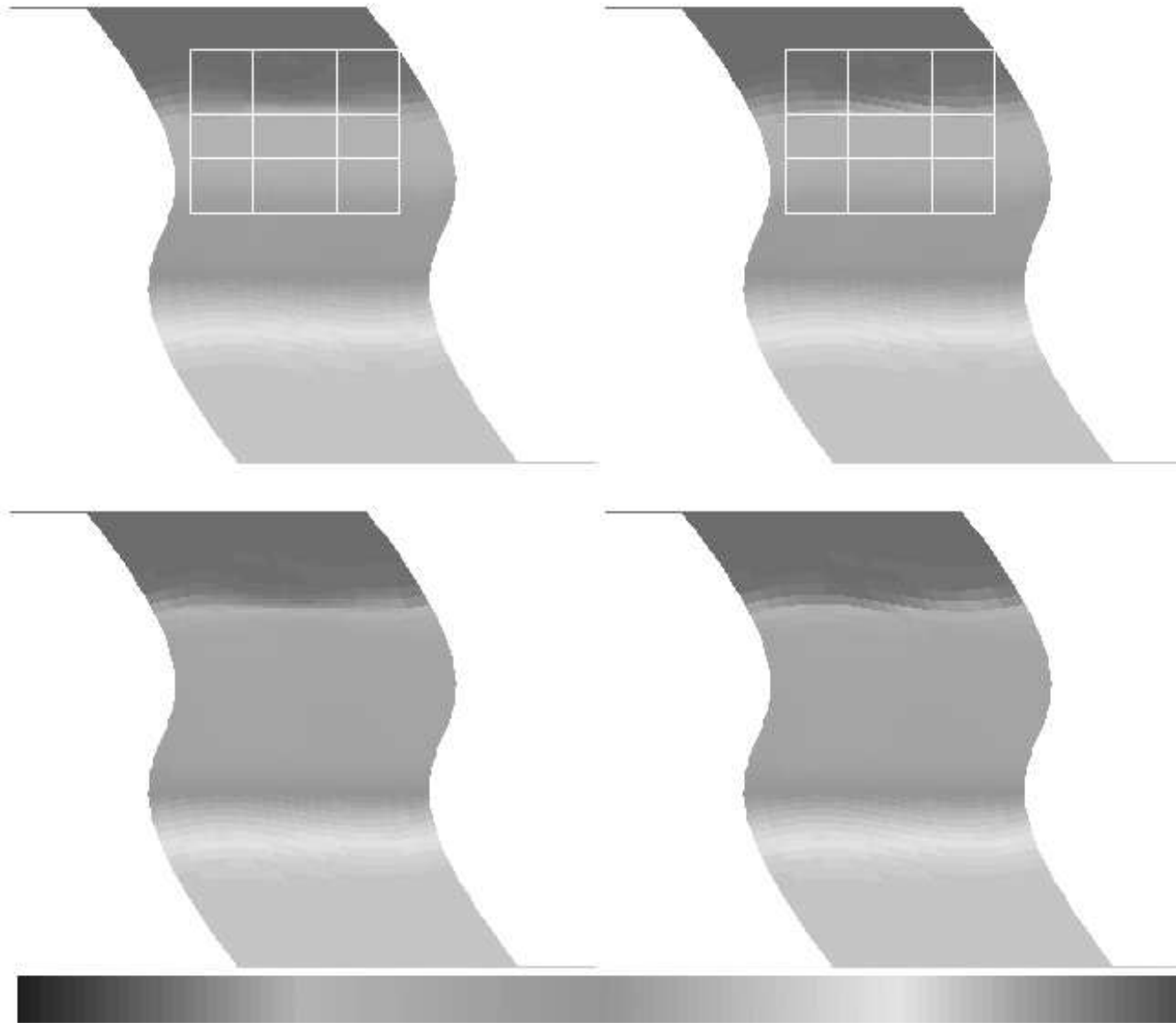


Figure 4.51 – Couplage déformé instant 7

On voit que l'on a un faible décalage (de l'ordre de la taille du maillage 2) entre l'onde dans la zone de couplage et celle qui est en dehors. Si l'on raffine le maillage (voir figures 4.52 à 4.58), ce décalage disparaît.

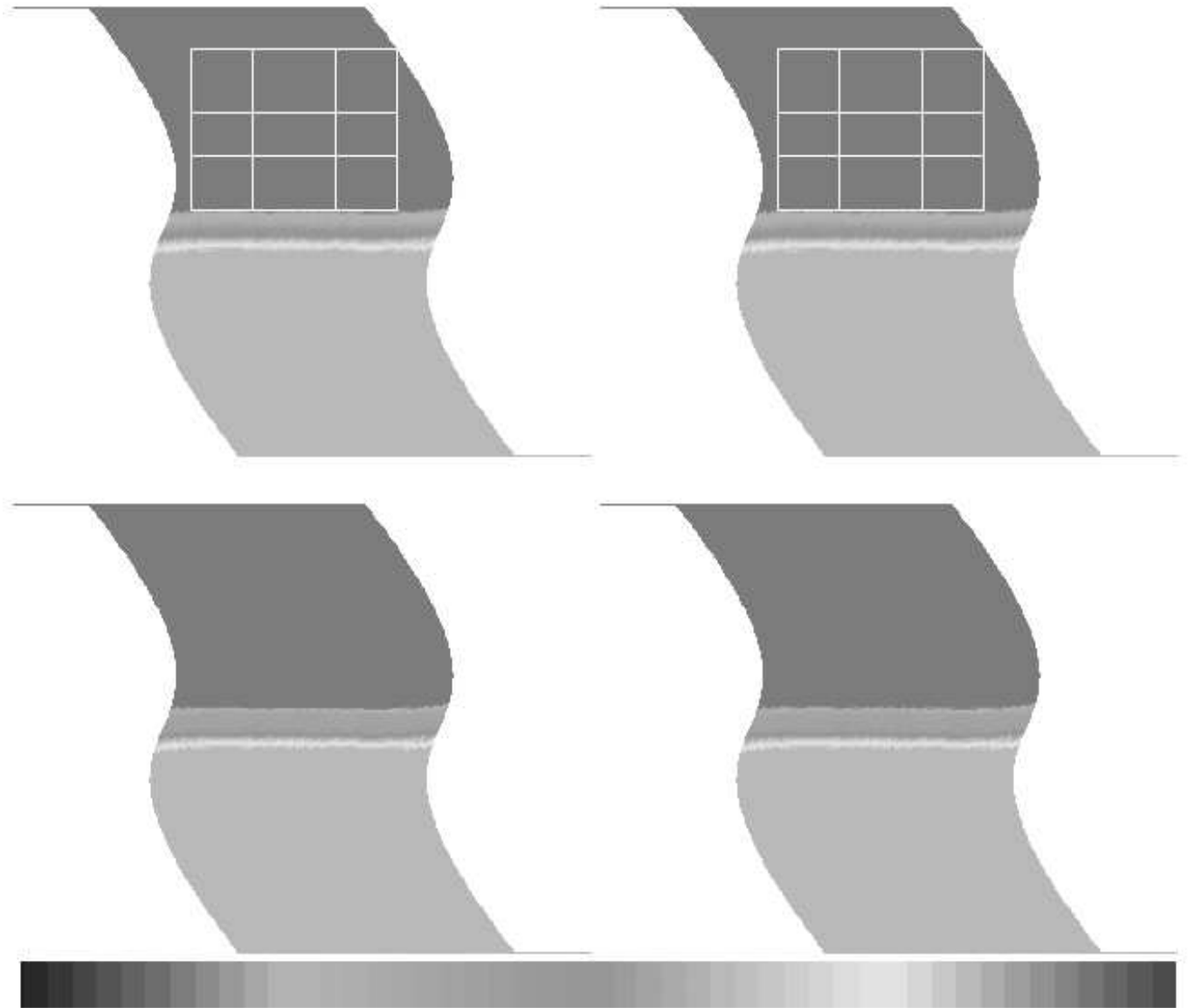


Figure 4.52 – Couplage déformé instant 1

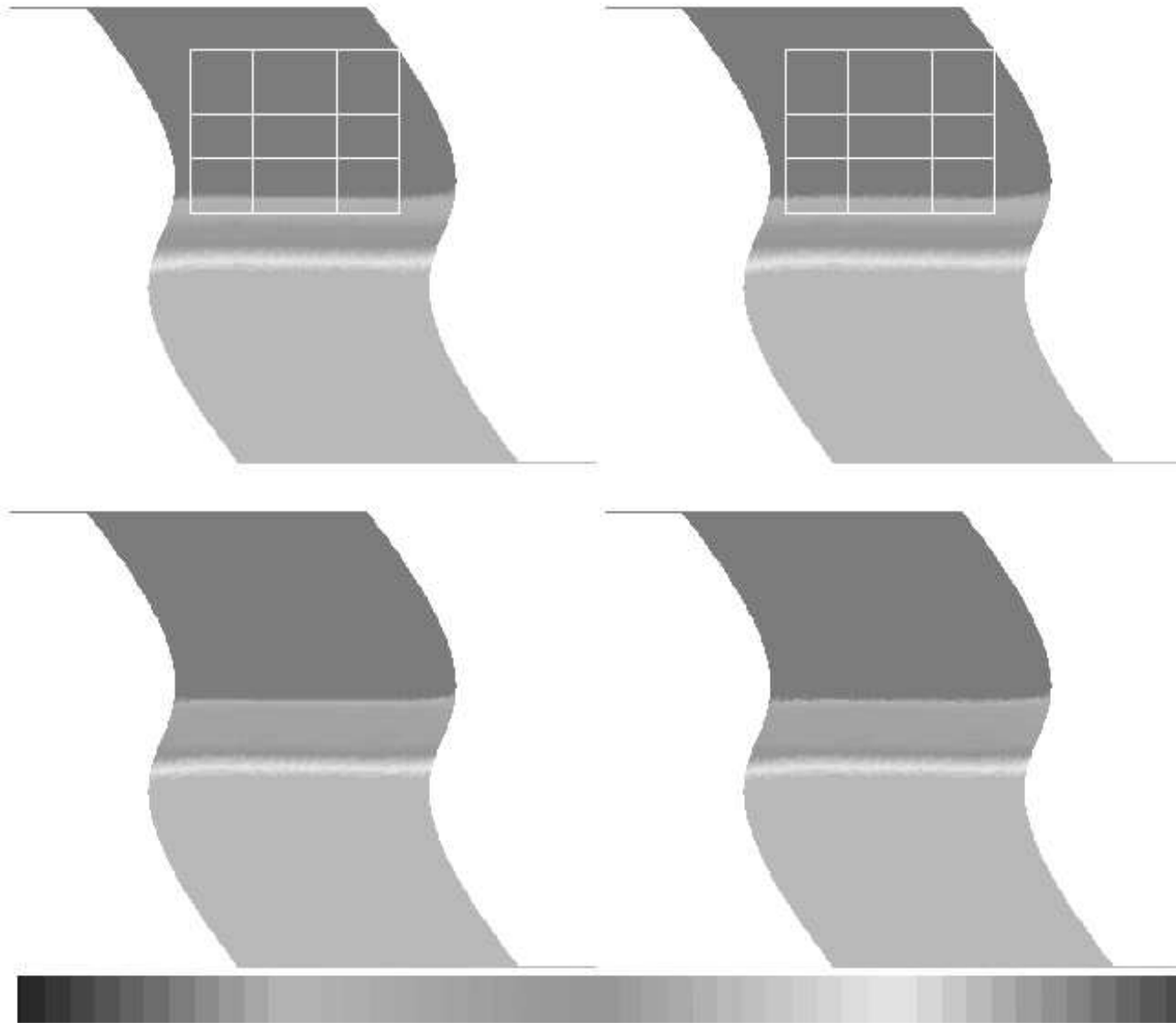


Figure 4.53 – Couplage déformé instant 2

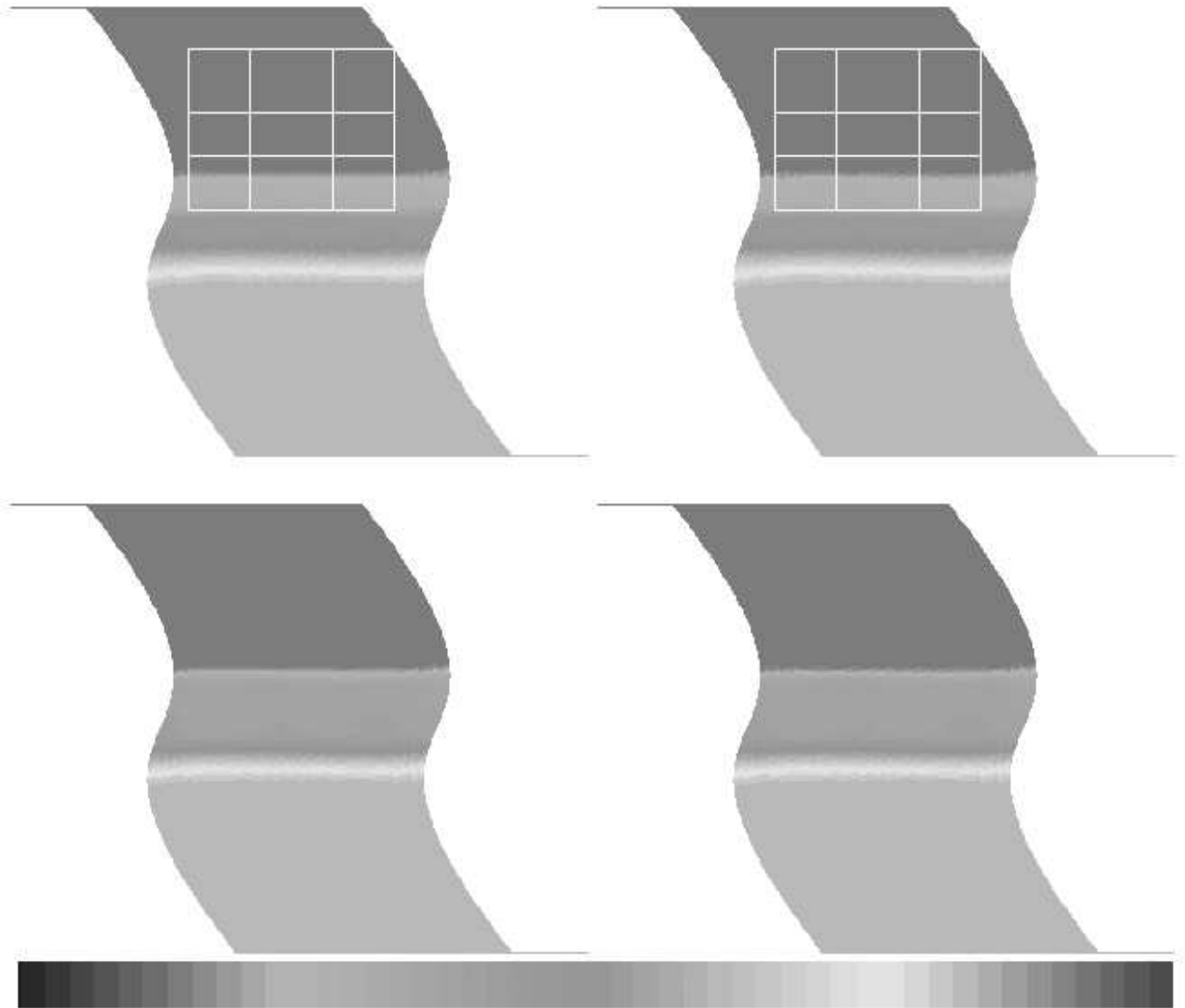


Figure 4.54 – Couplage déformé instant 3

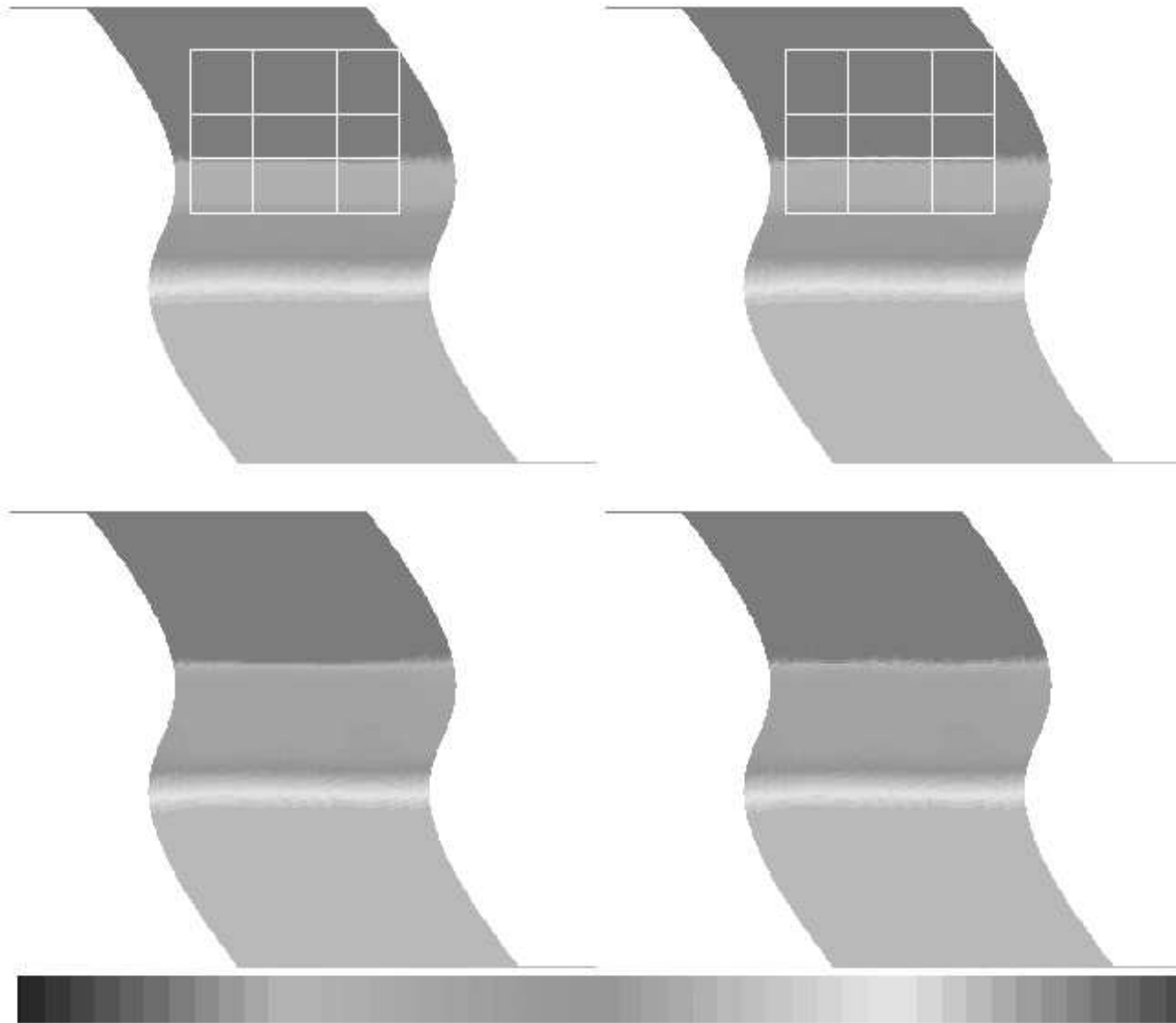


Figure 4.55 – Couplage déformé instant 4

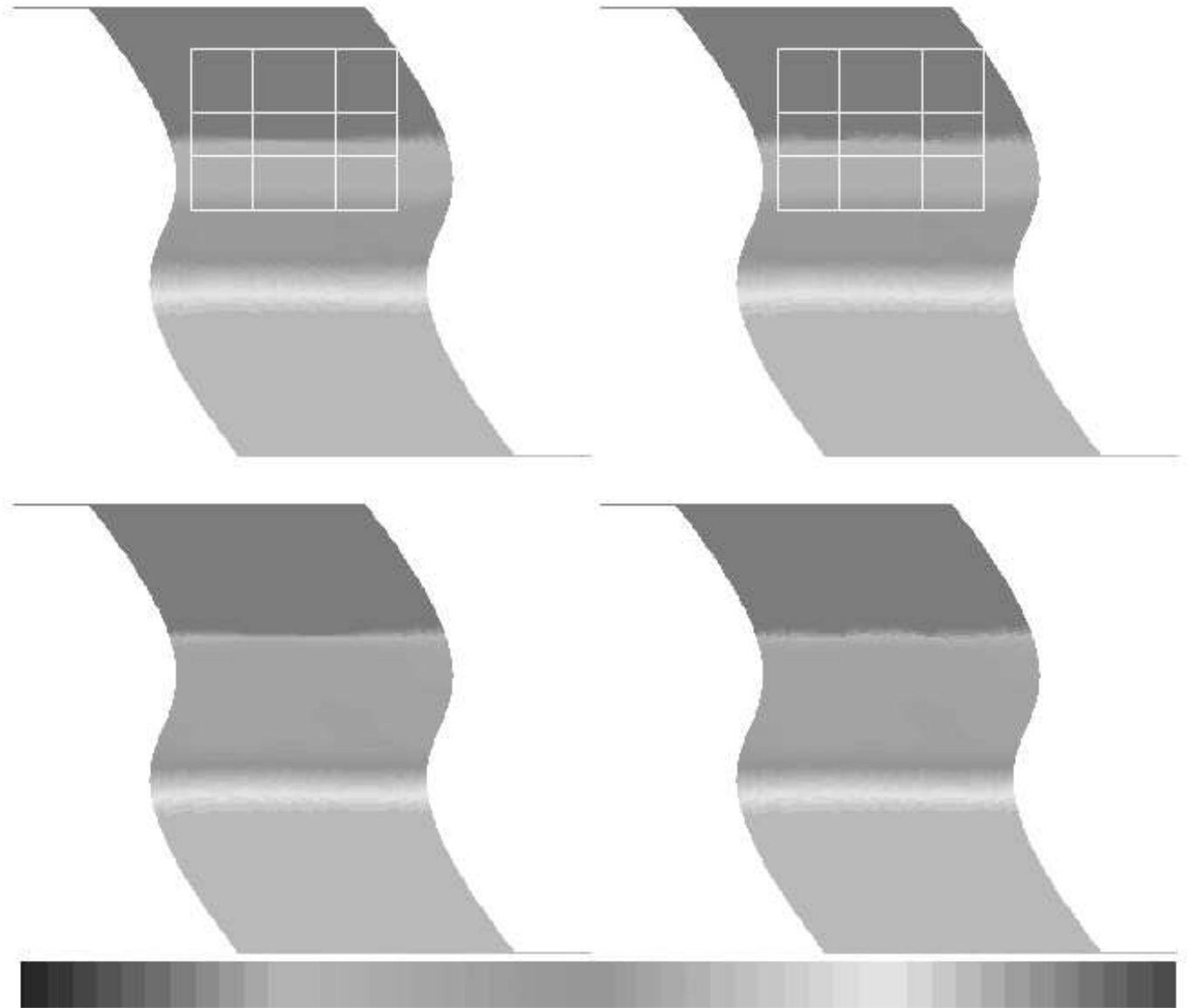


Figure 4.56 – Couplage déformé instant 5

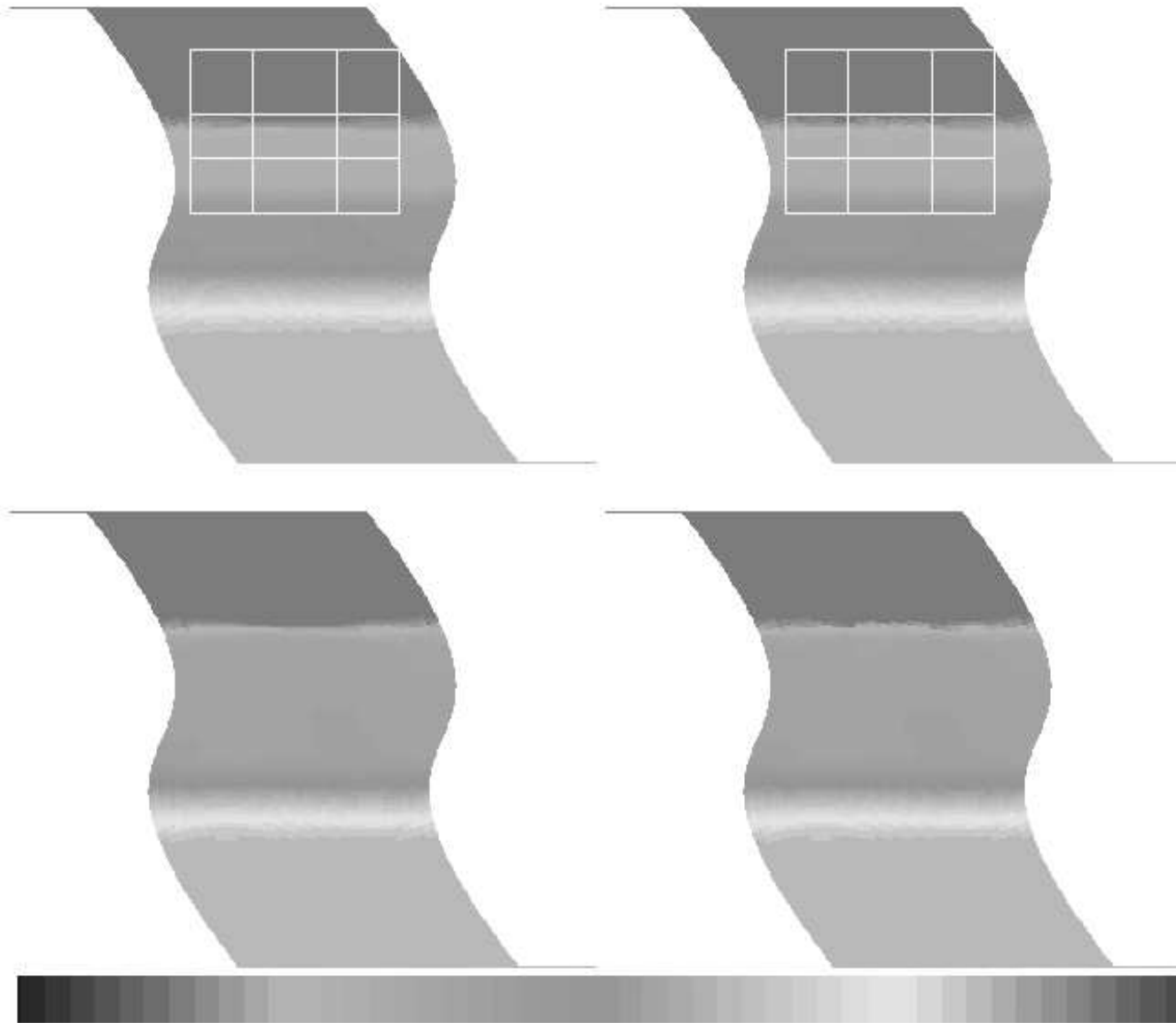


Figure 4.57 – Couplage déformé instant 6

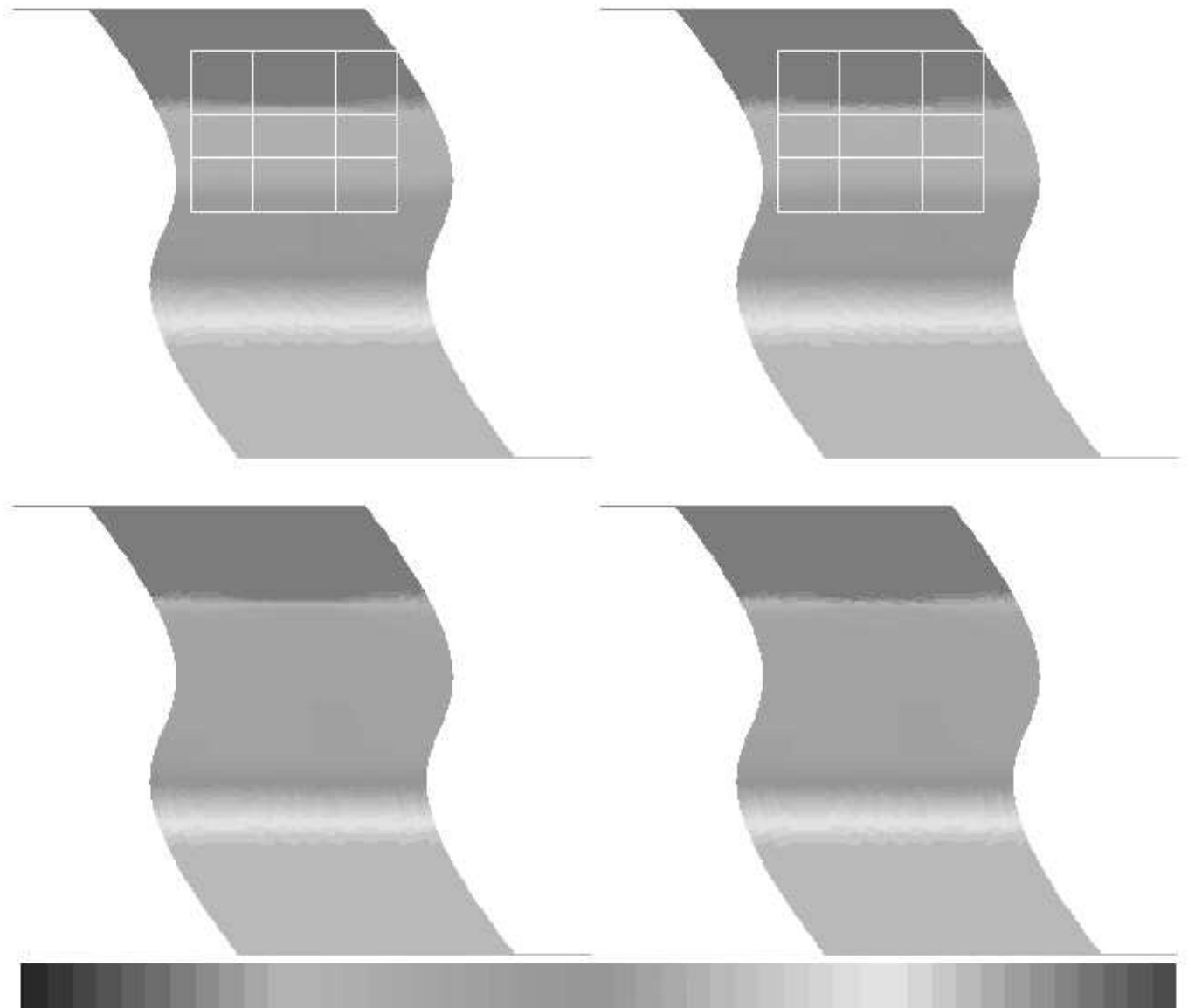


Figure 4.58 – Couplage déformé instant 7

Après avoir validé ces calculs, nous nous sommes intéressés à un problème industriel : on cherche à modéliser l'injection d'un fluide dans un autre au travers d'un simple trou. Ce travail est effectué en collaboration avec l'équipe du Professeur Dietmar Kröner de l'Institut pour les Mathématiques Appliquées de l'Université de Fribourg (Allemagne), pour le compte de la DFG.

4.4 L'injection avec deux schémas Volumes Finis.

Dans un premier temps, on construit le couplage de deux méthodes Volumes Finis pour le problème de l'injection. Le dispositif étudié est représenté dans la figure 1.1 de la page 9. Il s'agit de modéliser un fluide visqueux qui transporte des particules métalliques. Il est tout d'abord soumis à un refroidissement, dans une première chambre, puis est transformé en jet par le trou entre les deux chambres, la seconde chambre contenant un gaz peu dense par rapport au premier. On s'intéresse à la forme du jet, lorsqu'il dépose ses particules métalliques sur la cible.

Dans ce test, on simplifie les hypothèses, en supposant que le fluide est régité par les équations d'Euler dans tout le dispositif. On a utilisé les hypothèses du tube à choc de Sod pour construire le calcul.

Dans le chapitre suivant, on verra comment adapter l'algorithme de couplage pour l'utiliser avec la méthode de type particulière appelée méthode S.P.H..

Il faut tout d'abord placer correctement la zone de couplage. On s'intéresse à la formation du jet ; il est clair que lorsqu'il a traversé le trou, les lignes de courant sont déjà créées. Il se forme donc en aval du trou. Si le schéma 1 et le maillage 1 servent à calculer la solution du problème dans la première chambre, le schéma 2 et le maillage 2 sont utilisés quant à eux, à calculer le jet, depuis sa formation, jusqu'à ce qu'il percute la cible. Comme on peut le voir (avec les conditions initiales du problème) dans la figure 4.59, on a placé la zone de couplage dans la chambre 1, de manière à ce que le couplage n'interfère pas avec la création du jet près du trou.

Les conditions appliquées aux limites du dispositif sont simplement des conditions de réflexion du fluide.

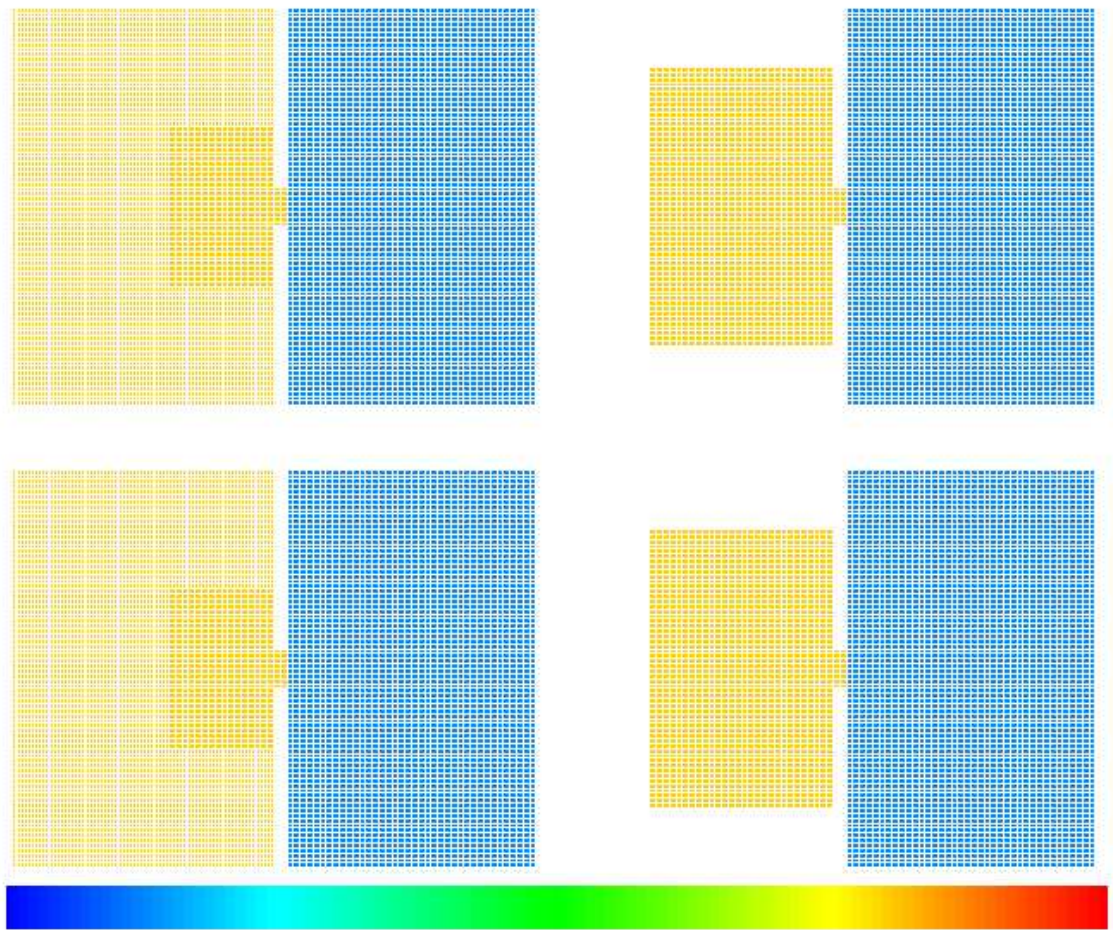


Figure 4.59 – Condition initiales et zone de couplage du cas injection.

Dans cette figure, on trouve les deux maillages superposés à gauche (le maillage 1 étant au dessus du maillage 2) avec les grandeurs physiques suivantes : en haut la densité et en bas l'énergie. A droite, on a juste affiché les résultats sur le maillage 2.

On voit dans les figures 4.60 à 4.63, le mécanisme de création du jet.

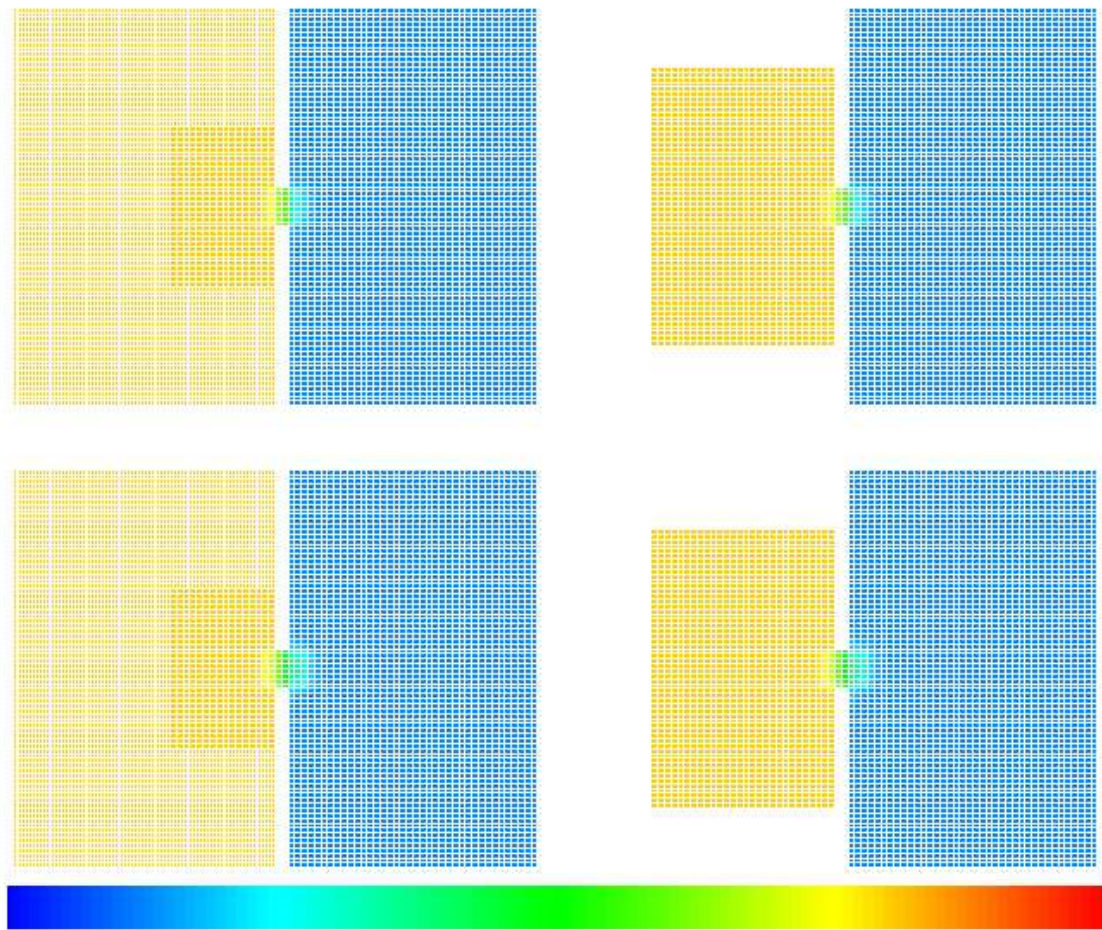


Figure 4.60 – Cas injection : instant 1

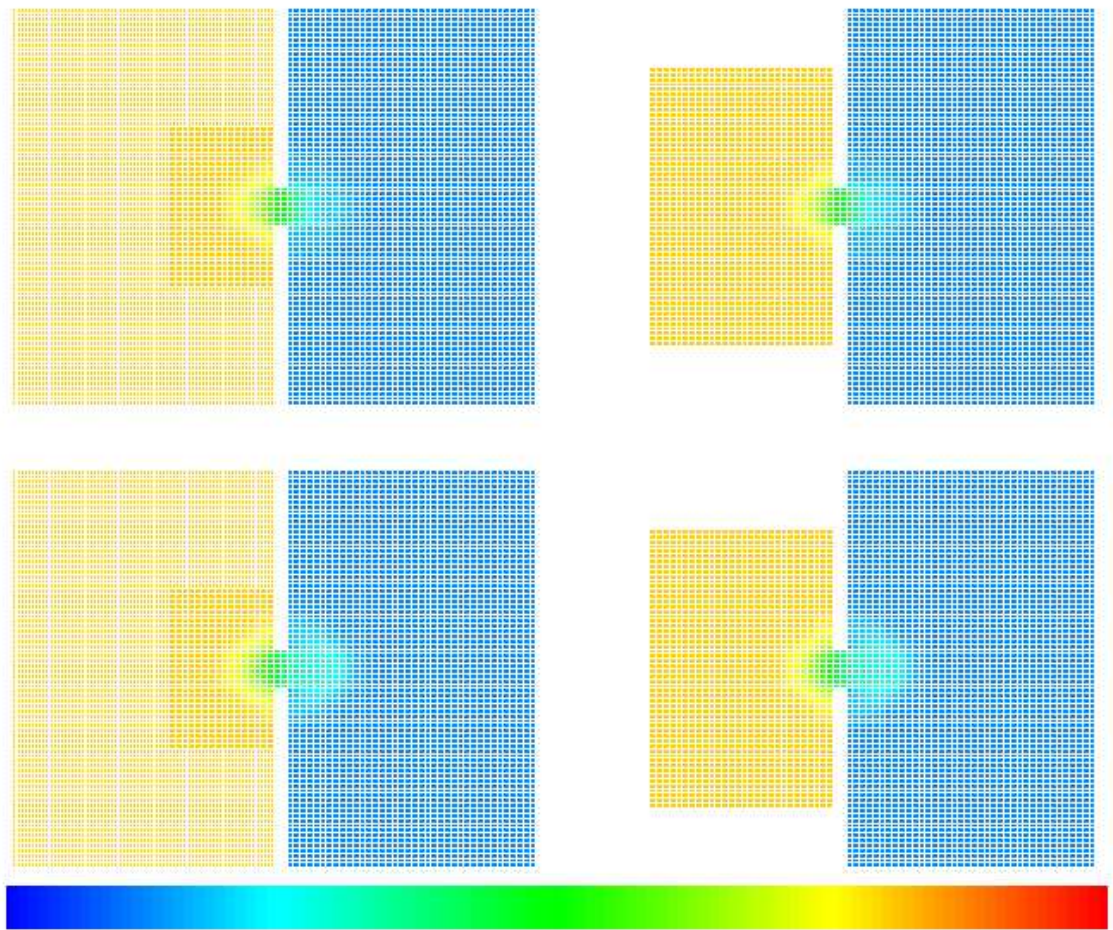


Figure 4.61 – Cas injection : instant 3

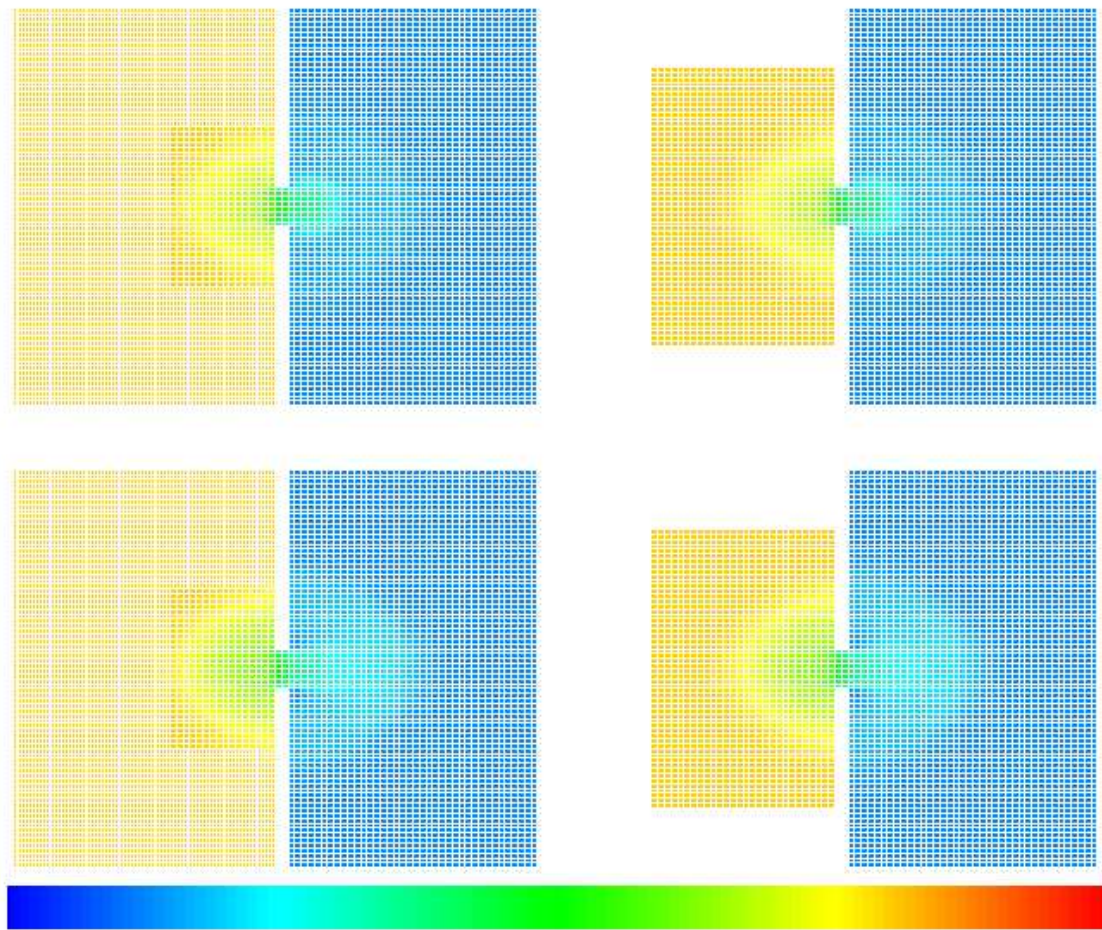


Figure 4.62 – Cas injection : instant 7

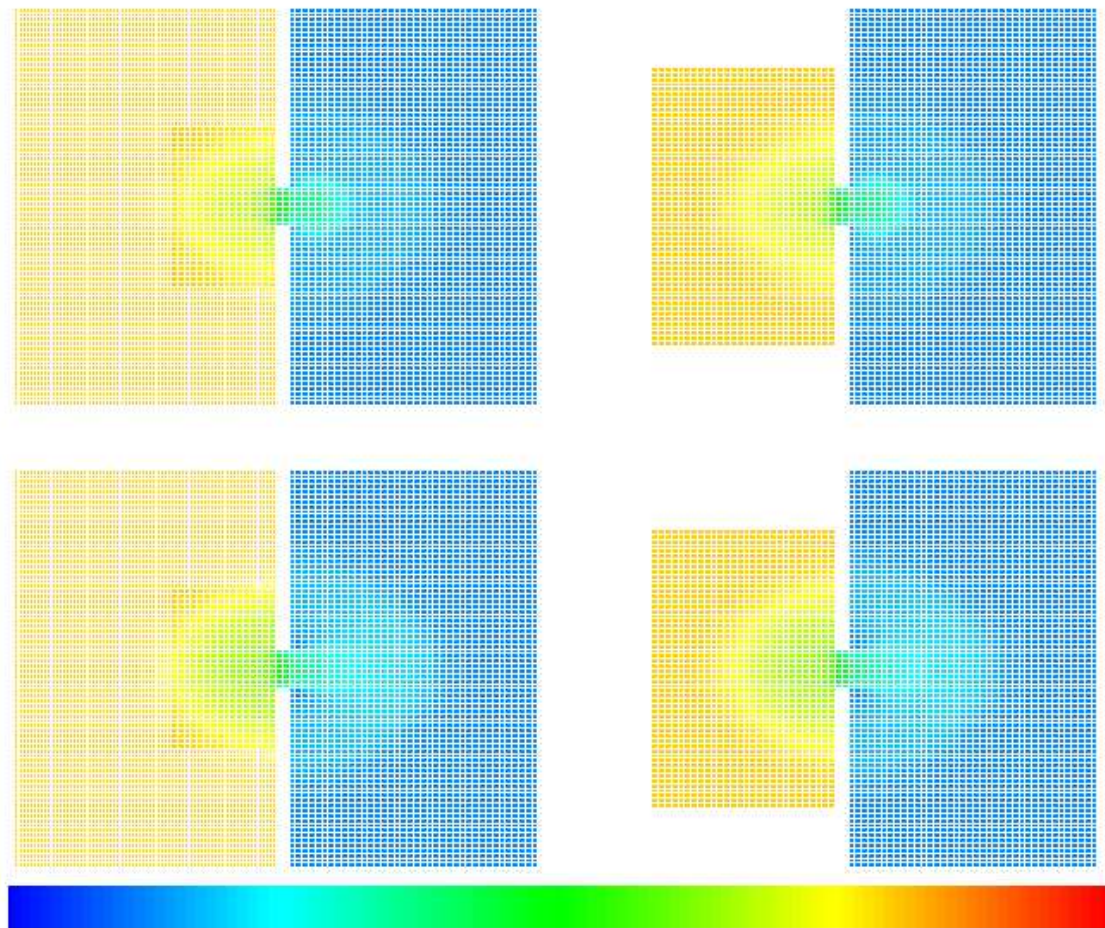


Figure 4.63 – Cas injection : instant 8

L'onde de choc et l'onde de détente se sont propagées dans le maillage 2. Cette dernière se situe dans la figure 4.63 au niveau de la zone de couplage. On la voit donc apparaître dans le maillage 1.

Dans la figure 4.64, le jet est déjà formé et l'onde de choc qui le précède tape contre la cible et commence à être réfléchi par le bord dans la figure 4.65.

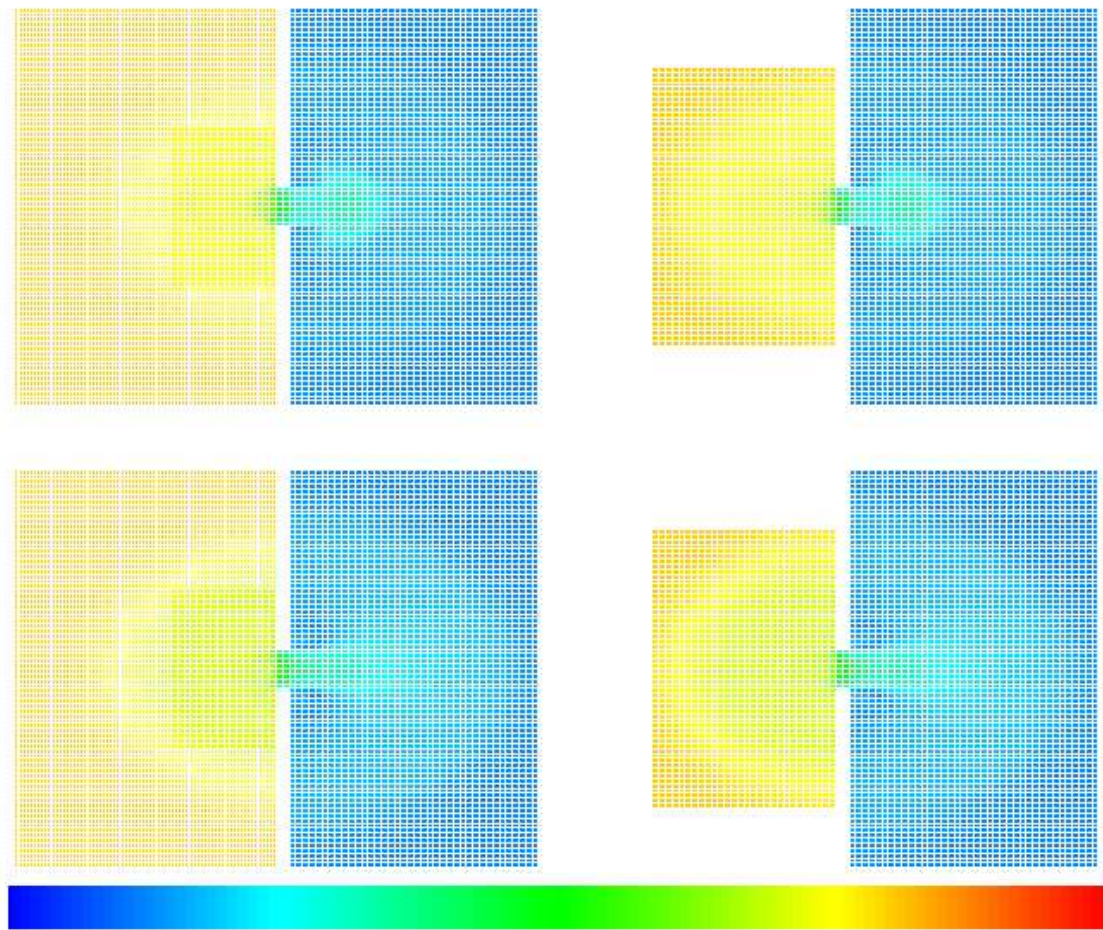


Figure 4.64 – Cas injection : instant 13

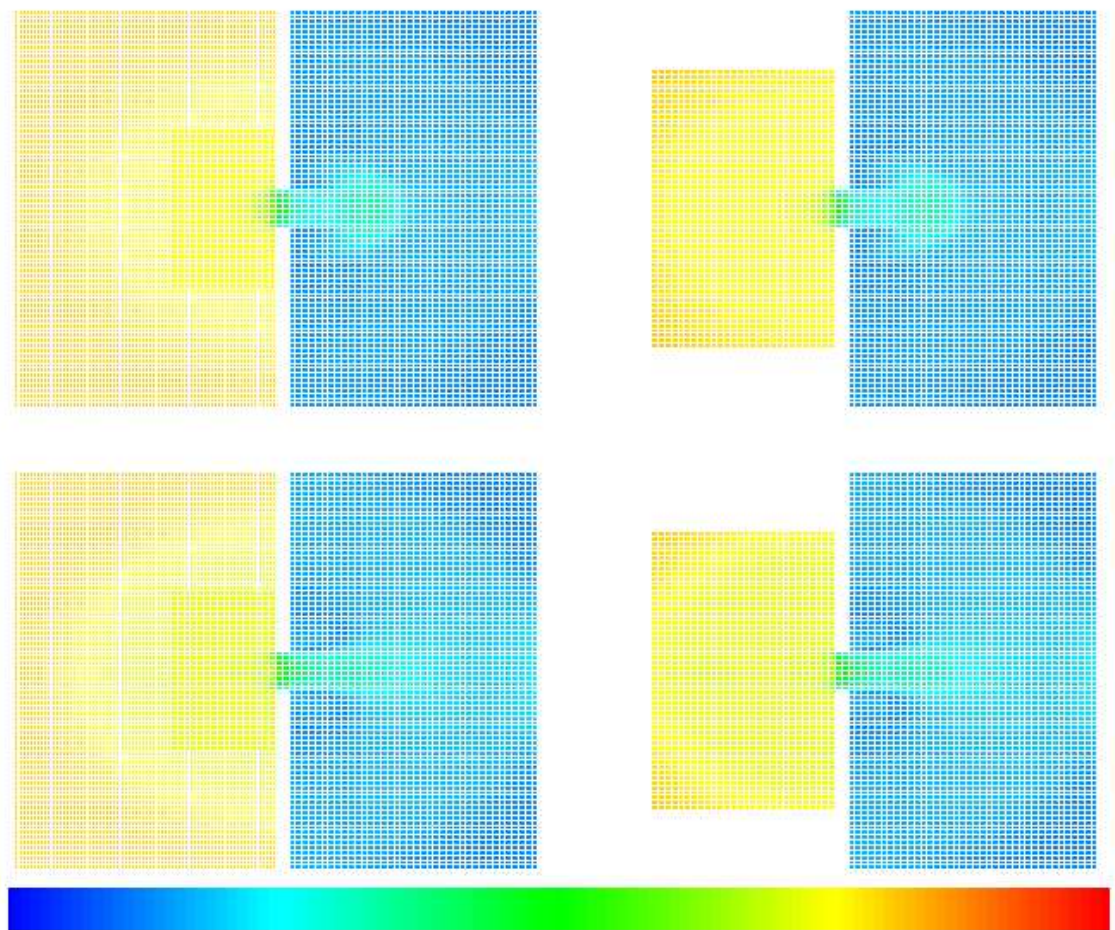


Figure 4.65 – Cas injection : instant 16

Dans les trois dernières figures, l'onde de choc réfléchie ralentit le jet. Celui-ci est très droit dans ce calcul et s'élargit simplement à son extrémité, ce qui ne semble pas être physiquement admissible. En effet, on s'attend plutôt à voir le gaz présent initialement dans la seconde chambre interférer avec le jet.

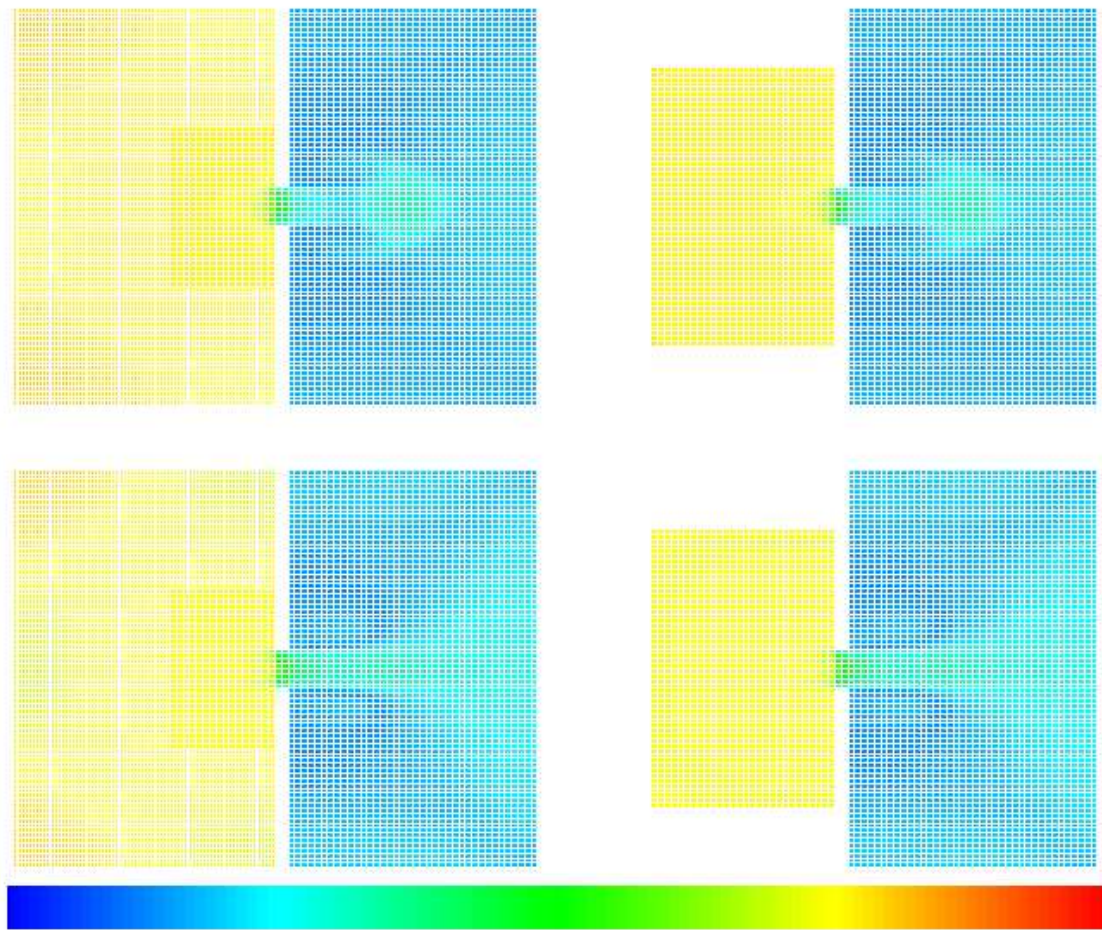


Figure 4.66 – Cas injection : instant 22

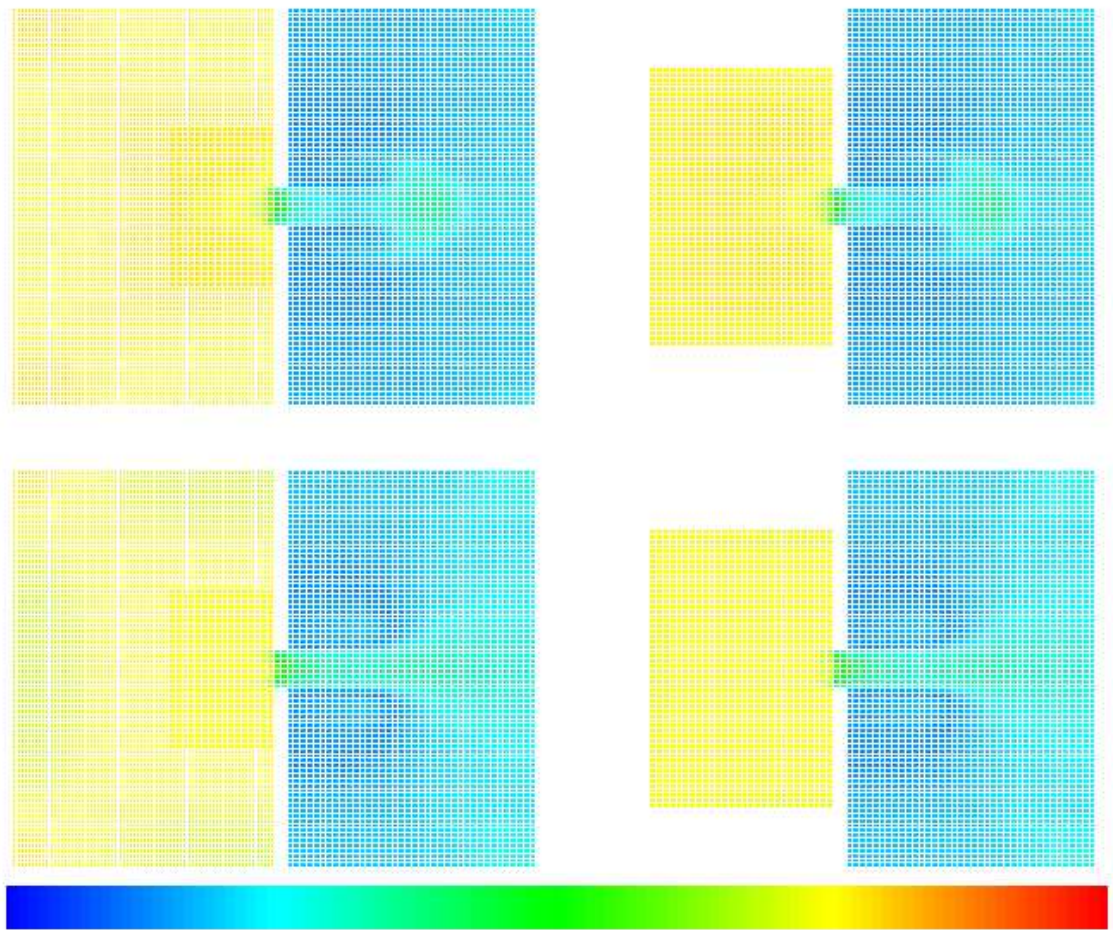


Figure 4.67 – Cas injection : instant 25

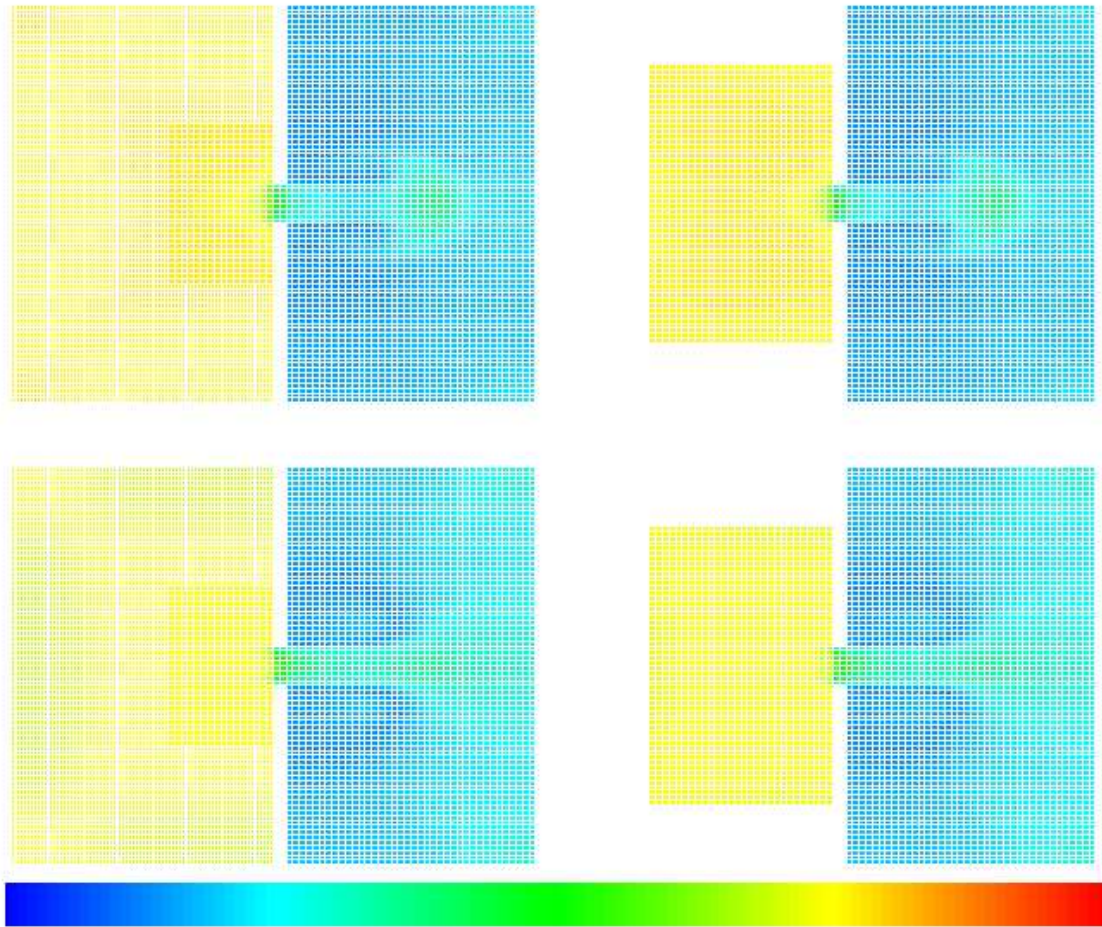


Figure 4.68 – Cas injection : instant 26

4.5 Conclusion du couplage de schémas Volumes Finis

En conclusion, le couplage de deux méthodes de type Volumes Finis d'ordre 1 fonctionne correctement avec l'algorithme présenté. On a montré qu'il était convergent aussi bien en 1D avec l'équation de Burgers, qu'en 2D avec le système d'Euler (tube à choc de Sod).

Le cas test de l'injection étudié dans cette dernière partie montre que la zone de couplage correctement positionnée n'interfère pas dans la création du jet. Mais la forme de celui-ci nous suggère que la méthode des Volumes Finis n'est pas la plus efficace pour son calcul. Aussi nous allons utiliser, dans le chapitre suivant, le couplage avec pour schéma 2, une méthode purement lagrangienne : la méthode particulière appelée SPH (Smooth Particle Hydrodynamics).

Chapitre 5

Couplage d'un Schéma Volumes Finis avec la méthode S.P.H..

Plan du chapitre

5.1	Introduction : La méthode SPH	205
5.1.1	Approximation Particulaire des Fonctions	206
5.1.2	Approximation particulaire régularisée	209
5.1.3	Approximation Particulaire d'une Loi de Conser- vation	211
	Conservativité pour ε variable	212
	Renormalisation	214
	Schémas Hybrides Volumes Finis - Particulaires . .	215
5.1.4	Algorithme modifié : construction du maillage SPH déformé	217
5.1.5	Application au système d'Euler compressible . . .	218
5.2	Résultats Numériques	222
5.2.1	Présentation du SPH : éclatement d'un bulle . . .	222
5.2.2	Calcul du GdR DFG-CNRS : l'injection résolue avec un schéma VF et un schéma SPH	228
	Sans bande nulle	241
	Maillage particulaire grossier	248
	Maillage particulaire fin	261

5.1 Introduction : La méthode SPH

Les méthodes particulières régularisées pour les EDP ont fait l'objet de développements importants depuis les dix dernières années tant sur le plan des applications que de leur analyse numérique.

Beaucoup d'applications concernent la mécanique des fluides et l'on doit en particulier citer les méthodes dites Vortex pour la dynamique des fluides incompressibles (visqueux ou non). C'est en 1964 que Harlow [Har64] a initié ce type de méthodes particulières en mécanique des fluides, plus exactement en multifluides compressibles. Il voulait résoudre les termes de convection sur un maillage mobile (particulaire) tout en les couplant avec la méthode des Différences Finies pour traiter les termes de pression. Depuis, cette approche est appelée méthode P.I.C. (Particle In Cell). Ces méthodes partagent avec les méthodes de Vortex la caractéristique de faire intervenir une méthode numérique spécifique pour traiter les termes différentiels qui ne sont pas des termes de transport.

On va ici utiliser un autre type de méthode particulière qui traite tous les termes de la loi de conservation, sans aucun maillage. Cette méthode particulière régularisée s'intitule SPH (Smooth Particle Hydrodynamics). Elle est à la base de tous les développements autour de ce thème. Nous commençons donc par un bref historique.

La méthode a été découverte en 1977 par Lucy ([Luc77]) un astrophysicien anglais, qui l'a utilisée pour la simulation en astrophysique de phénomènes non-axisymétriques. Son interprétation était cependant de nature probabiliste et les calculs utilisaient moins de 100 particules. C'est à J. Monaghan, mathématicien appliqué australien, que l'on doit les fondements effectifs de la méthode (à partir de 1982, [GM77], [GM83], [Mon92]). La mé-

thode SPH est restée jusque dans les années 85 l'apanage des astrophysiciens. On doit, à W. Benz (encore un astrophysicien) les premières applications à des calculs complexes faisant intervenir des modèles d'endommagement de matériaux ([Ben89],[BA93]).

Les premiers codes industriels utilisant la méthode SPH ne sont apparus que récemment. Une des principales raisons est le manque de conceptualisation dans la formulation des conditions aux limites. Ce qui empêchait d'offrir la souplesse des autres codes dans ce domaine (Volumes Finis ou Éléments Finis, par exemple).

Au niveau de l'analyse mathématique, et jusqu'à très récemment le seul travail est du à Raviart et Mas Gallic ([MR87]), il concerne la convergence de la méthode dans le cas continu en temps et pour les systèmes linéaires symétriques. A présent, on peut citer plusieurs travaux effectués à l'INSA de Toulouse, par J.P. Vila, B. Benmoussa ([BV]) et récemment par N. Lanson ([Lan00]).

Nous donnons brièvement dans ce qui suit les principes de bases nécessaires à la compréhension des méthodes particulières. Nous renvoyons en particulier à P.A. Raviart ([Rav85]) pour une description détaillée et des résultats mathématiques précis.

5.1.1 Approximation Particulaire des Fonctions

Les méthodes particulières comme les autres méthodes de discrétisation nécessitent un maillage du domaine de calcul. Ce dernier sera composé de volumes élémentaires de la matière dont on souhaite décrire et étudier le comportement. Ces méthodes sont purement lagrangiennes. Par conséquent, les mailles évoluent dans le temps le long des trajectoires associées à un champ de transport adéquat (en général, on prend le champ de transport

physique).

On donne donc l'opérateur qui définit ce transport. C'est un opérateur différentiel du premier ordre défini par :

$$\mathcal{L}_a(\bullet) = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial(a^i(x, t) \bullet)}{\partial x^i}. \quad (5.1)$$

où le vecteur $a = (a^1, \dots, a^d)$ est le champ de transport. Nous supposons par la suite qu'il vérifie les conditions suivantes.

Soit $T > 0$, nous posons alors $Q_T = \mathbb{R}^d \times]0, T[$

$$(i) \ a^i \in L^\infty(Q_T), \quad (ii) \ \frac{\partial a^i}{\partial x^i} \in L^\infty(Q_T). \quad (5.2)$$

Considérons alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, t), \\ x(0) = \xi. \end{cases} \quad (5.3)$$

On définit alors les courbes caractéristiques (courbes intégrales), associées à l'opérateur \mathcal{L}_a par l'unique solution $t \rightarrow x(\xi, t)$ du système (5.3). Ainsi, le jacobien de la transformation suivante

$$(\xi, t) \rightarrow (x, t) \quad (5.4)$$

est défini par :

$$J(\xi, t) = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}(\xi, t)\right).$$

Un calcul différentiel élémentaire sur les formes multi-linéaires montre que :

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\xi, t) = J(\xi, t) \operatorname{div}(a)(x(\xi, t), t). \quad (5.5)$$

On définit ensuite un maillage initial régulier \mathcal{T}_P , de pas h et composé des mailles : $\forall k \in P$

$$\mathcal{D}_k(0) = \left\{ x \in [X_k^i(0)]_{i=1,4} \right\},$$

où les $X_k^i(0)$ sont les noeuds de la maille $\mathcal{D}_k(0)$. Le barycentre de cette particule est noté ξ_k .

Le volume de ces boules $D_k(0)$ est donné par $mes(D_k(0)) = h^d$, où d est la dimension de l'espace. Cette mesure est notée traditionnellement par ω_k et aussi appelée poids initial de la particule, $k \in P$.

Au cours du calcul, on fait évoluer la position de la particule i vers le point $x_i(t)$ le long des caractéristiques données par le champ a (voir la figure 5.1).

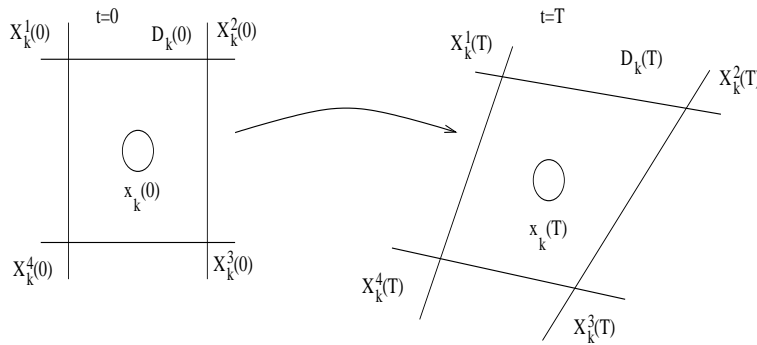


Figure 5.1 – Déformation du maillage initial

On introduit alors la déformation globale du maillage \mathcal{T}_P , par l'intermédiaire d'une équation de conservation sur les volumes $w_i(t)$ des mailles $\mathcal{D}_k(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_i(t) = a(x_i(t), t), \\ \frac{d}{dt}w_i(t) = \operatorname{div} (a(x_i(t), t)) w_i(t), \\ x_i(0) = \xi_i \quad w_i(0) = \omega_i. \end{cases}$$

(ξ_i, t) sont donc les coordonnées lagrangiennes de la particule. Dans la méthode SPH, on ne calcule pas explicitement les mailles déformées $\mathcal{D}_k(t)$, mais seulement les transformation des poids w_i associés.

On utilise aussi une formule de quadrature basée sur la grille ponctuelle

$(x_i(t))_{i \in P}$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x(\xi, t)) J(\xi, t) d\xi \approx \sum_{j \in P} w_j(t) f(x_j(t)) \quad (5.6)$$

Cette formule de quadrature (5.6) permet de définir pour tout instant t un opérateur d'approximation $\Pi^h(t)$ à valeur mesure. C'est un opérateur de l'ensemble des fonctions continues dans l'ensemble des mesures. Il est défini comme suit : $\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$,

$$\Pi^h(t)(f)(x) = \sum_{k \in P} w_k(t) f(x_k(t)) \delta(x - x_k(t)).$$

où δ est la masse de Dirac au point $x_k(t)$. Alors la valeur $\Pi^h(t)(f)$ désigne l'approximation particulière de la fonction continue f .

5.1.2 Approximation particulière régularisée

La formule de quadrature précédente, associée aux deux ingrédients suivants :

- noyau régularisant,
- régularisation par convolution

permet de définir en trois étapes l'approximation particulière régularisée d'une fonction. Tout d'abord, on pose le :

. Noyau régularisant $W(x, \varepsilon)$

$$W(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^d} \theta\left(\frac{\|x\|}{\varepsilon}\right).$$

Le paramètre ε étant la longueur de lissage (smoothing length en anglais). Ici, on écrit ce paramètre comme une variable pour le noyau, car on le fera dépendre de la position x un peu plus loin dans cet exposé.

Ce noyau est défini par la donnée d'une fonction θ régulière à support compact dans $[0, 2]$. Par exemple, avec un polynôme par morceaux :

$$\theta(y) = C \times \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{4}y^3 & \text{if } 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2 - y)^3 & \text{if } 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

avec

$$C = \frac{2}{3}, \frac{10}{7\pi}, \frac{1}{\pi}$$

pour $d=1,2$ ou 3 .

On a donc la propriété fondamentale :

$$W(x, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_0(x).$$

On donne ensuite la

• Régularisation de f

Elle se fait par convolution de f avec le noyau W_ε :

$$f_\varepsilon(x) = f * W(x, \varepsilon) = \int f(y) W(x - y, \varepsilon) dy \quad (5.7)$$

Ce qui nous permet d'énoncer la formule de quadrature :

• Quadrature

On utilise alors la formule de quadrature (5.6) sur l'intégrale (5.7), ce qui définit l'approximation particulière régularisée $\Pi_\varepsilon^h(f)$ de la fonction f :

$$\Pi_\varepsilon^h(f)(x) = \sum_{j \in P} w_j f(x_j) W(x - x_j(t), \varepsilon).$$

• Enfin, avec les notations suivantes :

$$\begin{cases} W_{ij} \equiv W(x_j - x_i, \varepsilon), \\ \partial_k W_{ij} \equiv \frac{\partial W}{\partial x_k}(x_i - x_j, \varepsilon), \\ f(x_j) = f_j. \end{cases}$$

Alors on peut définir les dérivées partielles approchées de
l'approximation particulaire régularisée :

$$\partial_k \Pi_\varepsilon^h(f)_i = \sum_{j \in P} w_j f_j \partial_k W_{ij}$$

5.1.3 Approximation Particulare d'une Loi de Conservation

On considère dans cette section le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_a(\Phi) + \sum_{k=1,d} \frac{\partial}{\partial x_k} F^k(\Phi, x, t) = \mathcal{S}(\Phi, x, t), & t \in \mathbb{R}^+, \Phi \in \mathbb{R}^p, \\ \Phi(x, 0) = \Phi_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \Phi_0 \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \quad (5.8)$$

l'opérateur \mathcal{L}_a est défini par (5.1).

Pour l'analyse mathématique de la convergence, le champ a est supposé connu et indépendant de Φ , mais rien n'empêche une telle dépendance dans tout ce qui suit. On recherche donc une approximation $\Phi_i(t)$ de (5.8), définie sur des particules se déplaçant selon les caractéristiques données par a :

$$\Phi_i := \Phi(x_i(t), t).$$

On a alors

$$\frac{1}{w_i} \frac{d}{dt} (w_i \Phi_i) = \mathcal{L}_a(\Phi)_i.$$

Pour calculer de manière approchée $\frac{\partial}{\partial x_k} F^k(\Phi, x, t)$, il est naturel de régulariser les fonctions F^k . Ce qui donne :

$$\mathcal{L}_a(\Phi)_i + \sum_{k=1,d} \left(\partial_k \Pi_\varepsilon^h(F^k)_i + F_i^k \partial_k \Pi_\varepsilon^h(1)_i = S_i \right),$$

soit

$$\frac{d}{dt} (w_i \Phi_i) + w_i \sum_{k=1,d} \sum_{j \in P} w_j \left(F_j^k + F_i^k \right) \partial_k W_{ij} = w_i S_i. \quad (5.9)$$

Le terme $\partial_k \Pi_\varepsilon^h(1)_i$ a été rajouté afin de préserver la conservation globale de la méthode. On remarque d'abord qu'il ne doit pas perturber la consistance de la méthode puisqu'il est a priori petit. Ensuite, on remarque que $\partial_k W_{ij} = -\partial_k W_{ji}$; un calcul simple montre alors que :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i \in P} w_i \Phi_i \right) = \sum_{i \in P} w_i S_i,$$

expression qui est un analogue discret de

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Phi dx \right) = \int_{\mathbb{R}^d} S dx.$$

Il reste à effectuer une discrétisation en temps explicite pour obtenir un schéma opérationnel. Le schéma (5.9) que nous venons de donner est un schéma de type centré, il y a donc nécessité de viscosité artificielle ou de décentrement pour stabiliser la méthode. Ceci est fait en pratique en introduisant un terme approprié Π_{ij}^k (symétrique en i et j afin de respecter la conservativité globale) :

$$\frac{d}{dt} (w_i \Phi_i) + w_i \sum_{k=1,d} \sum_{j \in P} w_j \left(F_j^k + F_i^k + \Pi_{ij}^k \right) \partial_k W_{ij} = w_i S_i \quad (5.10)$$

Conservativité pour ε variable

Un élément important s'est rapidement imposé dans toute les applications, c'est la nécessité de faire varier le ε , en fonction de la particule et du temps. Cela s'avère indispensable si l'on veut, ne serait-ce qu'en une dimension d'espace, calculer la solution d'un tube à choc type Sod. Un tel calcul mené avec ε constant conduit très rapidement à des instabilité dans la zone de détente. Cela s'explique très simplement : la méthode étant par nature lagrangienne, les particules s'écartent dans la zone de détente, et en particulier à ε constant le nombre de voisins décroît, provoquant une augmentation

irréversible des erreurs numériques dans les calculs des dérivées. Le remède est simple ([GM77], voir aussi [BA93]); il suffit de faire évoluer ε localement afin de garder le nombre de voisins le plus proche possible des valeurs optimales. En pratique on modifie le principe d'approximation comme ceci :

$$\langle f(x) \rangle_g = \int f(y) W(x - y, \varepsilon(x)) dy,$$

et la formule de quadrature utilisée est

$$\Pi_g^h(f)_i = \sum_{j \in P} w_j f_j W(x_i - x_j, \varepsilon_i).$$

Il s'agit de la formulation "gather" dans la littérature SPH (voir [HK89]).

La seule difficulté est de lui associer un opérateur de dérivation approché $\partial_k^{\varepsilon_i}$ linéaire et possédant les propriétés de consistance suffisantes. Cela se réalise en introduisant les nouvelles notations :

$$W_{ij}^i \equiv W(x_j - x_i, \varepsilon_i) \text{ et } \partial_k W_{ij}^i \equiv \frac{\partial W}{\partial x_k}(x_j - x_i, \varepsilon_i),$$

alors, on donne la formule de dérivations partielles approchées :

$$\partial_k^{\varepsilon_i} \Pi_g^h(f)_i = \sum_{j \in P} w_j f_j \partial_k W_{ij}^i.$$

On n'a plus $\partial_k W_{ij}^i = -\partial_k W_{ji}^j$ et donc la conservativité globale n'est plus respectée. C'est une erreur du second ordre qui ne semble pas avoir d'effets néfastes sur les résultats, sauf si l'on s'intéresse précisément à la conservation de quantité macroscopique comme le moment d'un objet. De plus, cette dernière approximation n'est pas, contrairement au cas standard, la dérivée exacte de l'approximation particulière conservative $\Pi_g^h(f)$. On peut dans ces conditions démontrer des résultats d'approximation; nous renvoyons à la thèse de J.L. Lacôme ([Lac97]) pour une étude détaillée (voir aussi [Vilar]).

Ainsi, on utilise l'approximation suivante de $\partial_k F^k$:

$$\mathcal{L}_a(\Phi)_i + \sum_{k=1,d} \left(\partial_k^{\varepsilon_i} \Pi_g^h(F^k)_i + F_i^k \partial_k^{\varepsilon_i} \Pi_g^h(1)_i \right) = S_i ,$$

soit

$$\frac{d}{dt} (w_i \Phi_i) + w_i \sum_{k=1,d} \sum_{j \in P} w_j \left(F_i^k \partial_k^{\varepsilon_i} W_{ij}^i - F_i^k \partial_k^{\varepsilon_j} W_{ji}^j \right) = w_i S_i .$$

On est alors conservatif par construction. Mais ces méthodes étant peu robustes, on a introduit le nouveau concept de renormalisation.

Renormalisation

Le concept de renormalisation de l'approximation particulière est apparu récemment dans la littérature SPH. On va montrer que, employé à bon es-scient et avec le formalisme précédent, il permet d'envisager des méthodes infiniment plus robustes.

L'idée de renormalisation (exprimée dans ce cadre formel) est assez simple, il s'agit de modifier les formules précédentes à l'aide d'une matrice poids (ou de renormalisation) $B(x)$ de la façon suivante :

$$\mathcal{L}_a(\Phi)_i + \sum_{k=1,d} B^i \left(\partial_k^{\varepsilon_i} \Pi_g^h(F^k)_i + F_i^k \partial_k^{\varepsilon_i} \Pi_g^h(1)_i \right) = S_i ,$$

soit

$$\frac{d}{dt} (w_i \Phi_i) + w_i \sum_{k=1,d} \sum_{j \in P} w_j \left(F_i^k B^i \partial_k^{\varepsilon_i} W_{ij}^i - F_i^k B^j \partial_k^{\varepsilon_j} W_{ji}^j \right) = w_i S_i .$$

Enfin, des calculs de convergence de ces approximations normalisées montrent que la matrice de renormalisation doit vérifier $B(x) = E(x)^{-1}$, avec la matrice E suivante

$$(E_{k,l})(x) = \left(\sum_{j \in P} w_j \left((x_l)_j - x_l \right) \frac{\partial}{\partial x_k} W(x - x_j) \right)_{k,l} .$$

On a donc

$$\begin{aligned} B(x) &= E(x)^{-1}, \\ (E_{k,l})(x) &= \left(\partial_{x_k}^\varepsilon \Pi_g^h(x_l) - x_l \partial_{x_k}^\varepsilon \Pi_g^h(1) \right)_{k,l}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

On renvoie à [Vilar] pour une présentation détaillée de ces résultats. De plus, on trouve quelques résultats numériques évocateurs obtenus par N. Lanson sur plusieurs problèmes comme le tube à choc de Sod. On compare ici les méthodes standards (h variable conservatif) à la méthode renormalisée (voir [BLV], [Lan97] pour les détails des algorithmes effectivement utilisés).

Schémas Hybrides Volumes Finis - Particulaires

Nous revenons enfin à un cadre plus classique, en montrant comment on peut inclure des schémas de type Godunov issus de la méthodologie Volumes Finis dans le cadre des méthodes présentées ici. On se place dans le cas d'un noyau W à symétrie sphérique :

$$\begin{aligned} \nabla_x W(x_i - x_j) &= -D\theta_{ij} n_{ij} & n_{ij} &= \frac{x_j - x_i}{\|x_j - x_i\|}, \\ D\theta_{ij} &= D\theta(\|x_i - x_j\|) \leq 0. \end{aligned}$$

Prenant pour simplifier $S = 0$, on obtient le schéma suivant

$$\frac{d}{dt}(w_i \Phi_i) - w_i \sum_{j \in P} w_j (F_i + F_j) \cdot n_{ij} D\theta_{ij} = 0,$$

qui fait apparaître une loi de conservation selon la direction n_{ij} :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial x}(F(x_{ij}, t, \Phi) \cdot n_{ij}) = 0. \quad (5.12)$$

Il est alors tout à fait naturel d'introduire en lieu et place de $(F(\Phi_i) + F(\Phi_j)) \cdot n_{ij}$, le flux d'un schéma Volumes Finis $2g(n_{ij}, \Phi_i, \Phi_j)$ satisfaisant à

$$\begin{aligned} (i) \quad & g(n, u, u) = F(u) \cdot n, \\ (ii) \quad & g(n, u, v) = -g(-n, v, u), \end{aligned}$$

et donc associé à la loi de conservation (5.12). La viscosité numérique du schéma est classiquement définie par

$$Q(n, u, v) = \frac{F(u).n - 2g(n, u, v) + F(v).n}{v - u}.$$

Le nouveau système s'écrit donc

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(w_i \Phi_i) - w_i \sum_{j \in P} w_j 2g(n_{ij}, \Phi_i, \Phi_j) D\theta_{ij} = 0, \\ \Phi_i(0) = \Phi^0(\xi_i). \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(w_i \Phi_i) - w_i \sum_{j \in P} w_j (F(x_{ij}, t, \Phi_i) + F(x_{ij}, t, \Phi_j)) \cdot n_{ij}, \\ \quad + Q(n_{ij}, \Phi_i, \Phi_j) (\Phi_i - \Phi_j) D\theta_{ij} = 0, \\ \Phi_i(0) = \Phi^0(\xi_i). \end{cases}$$

Cette expression est tout a fait analogue à l'expression (5.10) , classique en SPH. On peut attendre de cette approche plus de robustesse comme c'est le cas en Volumes Finis. L'analyse mathématique de la convergence est possible dans le cas scalaire non linéaire à l'aide des techniques maintenant classiques utilisant les solutions mesures des lois de conservation (voir pour cela les résultats de Benmoussa et de Vila dans [BV97]).

Ce type d'approche permet également un couplage efficace entre méthodes Volumes Finis et Particulaires. Ainsi, si l'on dispose du champ de transport $v^0(x, t)$, on peut construire des méthodes particulières de type ALE (Arbitrary Lagrange Euler). On renvoie à ([Vil96], [Par96]) pour une description plus détaillée dans le cadre des équations d'Euler et des exemples d'applications.

5.1.4 Algorithme modifié : construction du maillage SPH déformé

On a vu dans la description que le couplage des méthodes numériques passe par la projection de la solution numérique calculée par un schéma sur le maillage du second schéma. Telle qu'elle est utilisée, la méthode SPH est construite sans grille. En fait la seule grille que l'on construit est le maillage régulier (de pas h) initial, que nous avons noté \mathcal{T}_P . On peut alors définir le maillage que nous allons appeler "approché et déformé" à l'aide du champ de vitesse a et de l'équation de caractéristiques (5.3). On notera alors $X_k^i(t)$, les coins de la maille $\mathcal{D}_k(t)$ (voir la figure 5.1) ; ils sont donc solution de :

$$\begin{cases} \frac{d X_k^i(t)}{dt} = a(X_k^i(t), t), \\ X_k^i(0) \text{ donné.} \end{cases}$$

Ce calcul approché de la déformation du maillage est compatible avec la méthode SPH, dans le sens où les mailles $\mathcal{D}_k(t)$ ont leur volume $\text{mes}(\mathcal{D}_k(t))$ très proche des poids $w_k(t)$. Ces derniers étant justement l'approximation de la transformation du volume initial.

Une fois ce maillage (approché et déformé) construit, nous utilisons les mêmes techniques de couplage, décrites dans le chapitre 4. Ainsi le calcul de la matrice de projection est identique : on place la répartition de points d'intégration sur les mailles VF contenues dans la zone de couplage pour calculer les volumes de leurs intersections avec les mailles particulières. Ensuite, on les divise par le volume des mailles particulières $w_k(t)$. Malheureusement, le maillage particulière étant mobile, cette matrice de projection est cette fois-ci à calculer à chaque pas de temps, après le calcul du nouveau maillage déformé. De plus, le champ de vitesse lagrangien choisi doit être suffisamment régulier dans la zone de couplage pour que ces mailles ne dégèrent

pas par des effets de cisaillement. Il faut donc placer la zone de couplage en amont des phénomènes trop turbulents.

5.1.5 Application au système d'Euler compressible

Nous appliquons maintenant ces concepts aux équations d'Euler compressible pour lesquelles la méthode a été initialement développée. Les variables conservatives et les flux de ce système s'écrivent :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v^1 \\ \rho v^2 \\ E \end{pmatrix}, \quad F^1(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ v^1 p \end{pmatrix}, \quad F^2(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ v^2 p \end{pmatrix},$$

avec la loi d'état de la pression $p = p(\rho, u)$ et l'expression de l'énergie totale $E = \rho(u + \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2)$.

Le système d'équations d'Euler a alors la forme suivante en deux dimensions d'espace :

$$L_v(\Phi) + \sum_{l=1,d} \left(\frac{\partial \Pi^h(F^l(\Phi))}{\partial x^l} \right) = 0.$$

L'approximation particulière SPH est alors définie selon :

$$L_v(\Phi)_i + \sum_{l=1,d} F^l(\Phi)_i \left(\frac{\partial \Pi^h(1)}{\partial x^l} \right) + \left(\frac{\partial \Pi^h(F^l(\Phi))}{\partial x^l} \right)_i = 0.$$

Ce qui conduit au système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{v}_i, \quad (ii) \quad \frac{d}{dt}(w_i \rho_i) = 0, \\ (iii) & \frac{d}{dt}(w_i \rho_i \vec{v}_i) + w_i \sum_{j \in P} w_j (p_i + p_j) \nabla W_{ij} = 0, \\ (iv) & \frac{d}{dt}(w_i E_i) + w_i \sum_{j \in P} w_j (p_i \vec{v}_i + p_j \vec{v}_j) \cdot \nabla W_{ij} = 0 \end{array} \right.$$

La seconde équation (ii) implique que la masse de chaque particule $w_i(t)\rho_i(t) = m_i$ est constante (i.e. méthode lagrangienne), ce qui permet de

simplifier les deux dernières équations ((iii) et (iv)) du système précédant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\vec{v}_i) = - \sum_{j \in P} m_j \left(\frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} \right) \vec{\nabla} W_{ij}, \\ \frac{d}{dt}(u_i) = - \sum_{j \in P} m_j \frac{p_j}{\rho_i \rho_j} (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \cdot \vec{\nabla} W_{ij}. \end{cases} \quad (5.13)$$

La viscosité artificielle est introduite suivant le principe de Von Neumann Richtmeyer : $p \longrightarrow p + \Pi_v$ avec

$$\Pi_v = \begin{cases} \beta \rho l^2 (\operatorname{div} \vec{v})^2 - \alpha \rho l c \operatorname{div} \vec{v} & \text{si } \operatorname{div} \vec{v} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où α et β sont des coefficients adimensionnels positifs de l'ordre de l'unité.

Donc, si l'on pose μ_{ij} , l'approximation de $l \operatorname{div} \vec{v}$:

$$\mu_{ij} = \frac{h(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2 + \epsilon h^2},$$

alors la viscosité numérique approchée est :

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{\mu_{ij}(\beta \mu_{ij} - \alpha \bar{c}_{ij})}{1/2(\rho_i + \rho_j)} & \text{si } (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_j) < 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où \bar{c}_{ij} est la vitesse moyenne du son, soit : $\bar{c}_{ij} = \frac{c(x_i) + c(x_j)}{2}$.

Les équations (5.13) sont celles que l'on a utilisé pour les tests numériques, mais ce ne sont pas celles que l'on trouve traditionnellement dans la littérature SPH. On trouve le plus souvent la formulation suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\vec{v}_i) = - \sum_{j \in P} m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla W_{ij}, \\ \frac{d}{dt}(u_i) = - \frac{p_i}{\rho_i^2} \sum_{j \in P} m_j (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \cdot \nabla W_{ij} \\ \quad - \frac{1}{2} \sum_{j \in P} m_j \Pi_{ij} (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \cdot \nabla W_{ij}. \end{cases}$$

Enfin, on introduit la renormalisation en calculant les matrices définies

dans (5.11). On les injecte dans le système (5.13), pour obtenir finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{v}_i, \\ w_i(t)\rho_i(t) = m_i, \\ \frac{d}{dt}(\vec{v}_i) = - \sum_{j \in P} m_j \left(\frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \frac{B(x_i) + B(x_j)}{2} \vec{\nabla} W_{ij}, \\ \frac{d}{dt}(u_i) = - \sum_{j \in P} m_j \left(\frac{p_j}{\rho_i \rho_j} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \cdot \frac{B(x_i) + B(x_j)}{2} \vec{\nabla} W_{ij}. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Ces équations sont écrites sous la forme d'une EDO continue en temps. On doit donc faire une discrétisation en temps (de pas Δt). On utilise une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 :

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}u(t) = f(u(t)) \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = u(t) + \frac{\Delta t}{2} f(u(t)), \\ u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t f\left(u\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\right), \end{array} \right. \end{array}$$

que l'on applique au système (5.14). Ce schéma en temps est donc calculé en deux étapes. Le schéma Volumes Finis ne comporte qu'une seule étape en temps. On calcule donc les valeurs de ce dernier au temps $t + \Delta t$, que l'on utilise pour modifier les grandeurs particulières à chacune des deux étapes de Runge Kutta. On est obligé de faire deux fois le couplage, car sinon les conditions à la limite de la zone de couplage, pour les particules au temps $t + \frac{\Delta t}{2}$ ne sont pas correctes et cela diminue la précision du couplage. On peut aussi améliorer le couplage intermédiaire en ne projetant pas les grandeurs Volumes Finis de l'instant suivant, mais plutôt la moyenne de celles-ci et des grandeurs au temps t .

Pour effectuer le couplage, on construit la matrice des intersections, à chaque pas de temps cette fois-ci, de la même manière que pour les couplage Volumes Finis-Volumes Finis. On répartit sur chaque maille particulière $D_k(t)$ de la zone de couplage, un ensemble de points d'intégration (voir

la formule (4.2)). On compte (à l'aide des coordonnées barycentriques - calculées une fois pour toute au début de l'algorithme) alors le nombre de ces points présents dans les mailles Volumes Finis de la zone de couplage. Après division par le nombre total de points d'intégration, on obtient la mesure approchée de l'intersection.

La projection reste identique pour le schéma Volumes Finis, car il est écrit sur les variables conservatives. Par contre, on doit projeter les grandeurs conservatives pour le schéma particulaire :

$$\begin{aligned} \text{grandeurs non conservatives : } & \begin{pmatrix} \rho_i \\ \vec{v}_i \\ u_i \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \text{grandeurs conservatives : } & \begin{pmatrix} \rho_i \\ \rho_i \vec{v}_i \\ E_i = \rho_i \cdot \left(u_i + \frac{\|\vec{v}_i\|^2}{2} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La procédure à suivre est alors la suivante :

- Projection des grandeurs conservatives particulières et Volumes Finis,
- Correction (formule (2.11)) des variables Volumes Finis (directement),
- Correction de la densité particulaire, avec la même formule,
- Correction de la vitesse particulaire, en divisant la projection de la quantité de mouvement Volumes Finis par la densité particulaire.
- Correction de l'énergie interne particulaire, en corrigeant l'énergie totale et en inversant la formule :

$$\begin{aligned} E_i &= \rho_i \cdot \left(u_i + \frac{\|\vec{v}_i\|^2}{2} \right) \\ \Rightarrow u_i &= \frac{E_i}{\rho_i} - \frac{\|\vec{v}_i\|^2}{2}. \end{aligned}$$

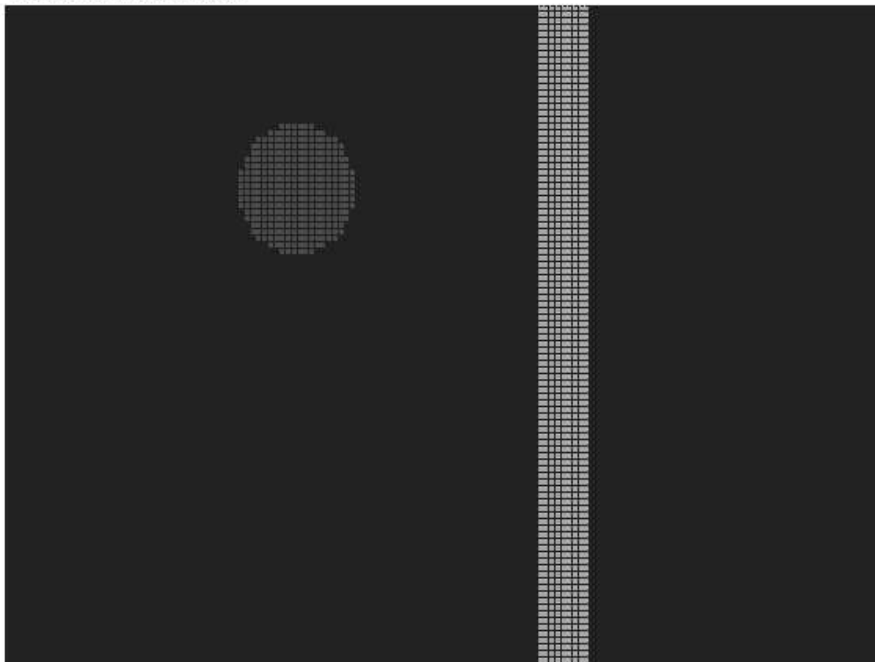
5.2 Résultats Numériques

5.2.1 Présentation du SPH : éclatement d'un bulle

Pour montrer les qualités réelles de la méthode Particulaires Renormalisée, nous présentons brièvement un calcul effectué par Nathalie Lanson dans sa thèse ([Lan00]).

Il s'agit d'une bulle de liquide en équilibre de pression qui rentre dans un mur immobile de liquide peu dense. Dans ces différents graphiques (dans la figure 5.2), on a juste représenté la densité.

Deplacements des particules



Deplacements des particules

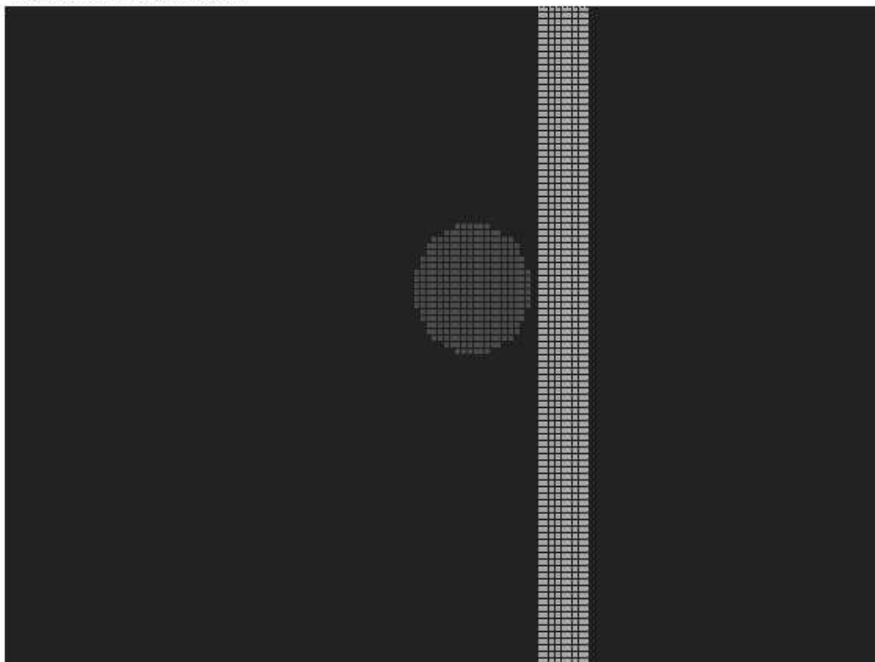
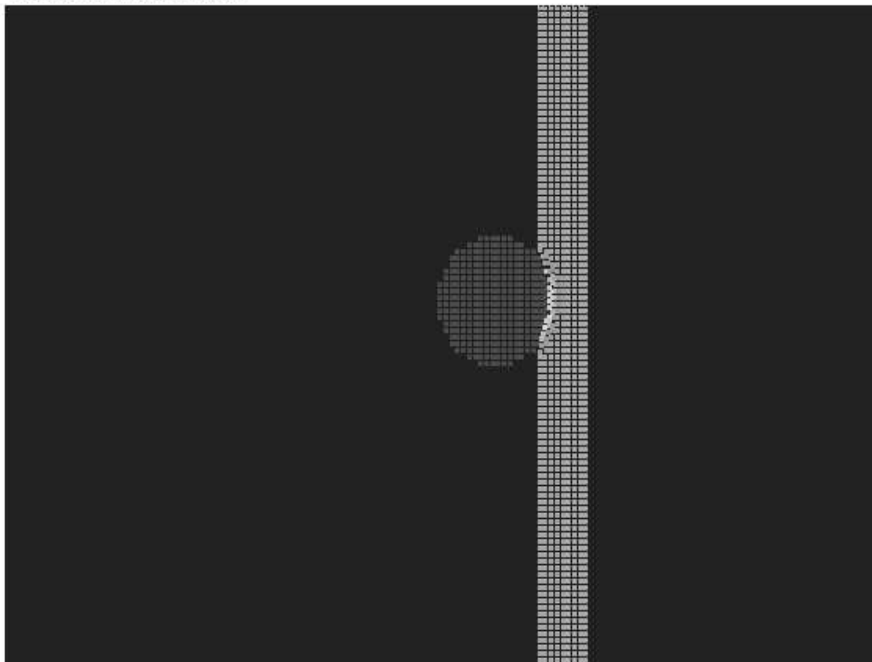


Figure 5.2 – Conditions initiales pour la bulle et juste avant la collision

Deplacements des particules



Deplacements des particules

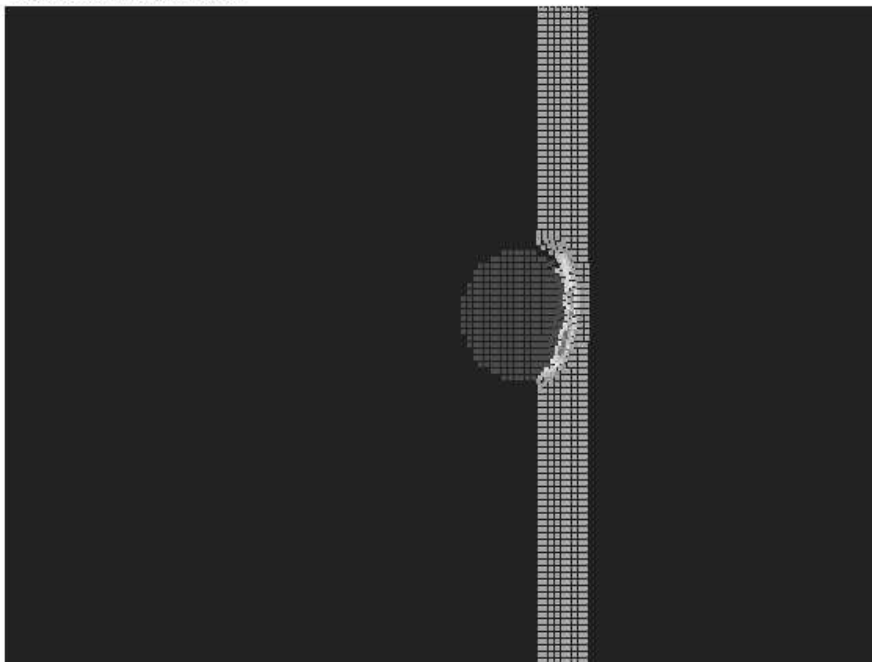
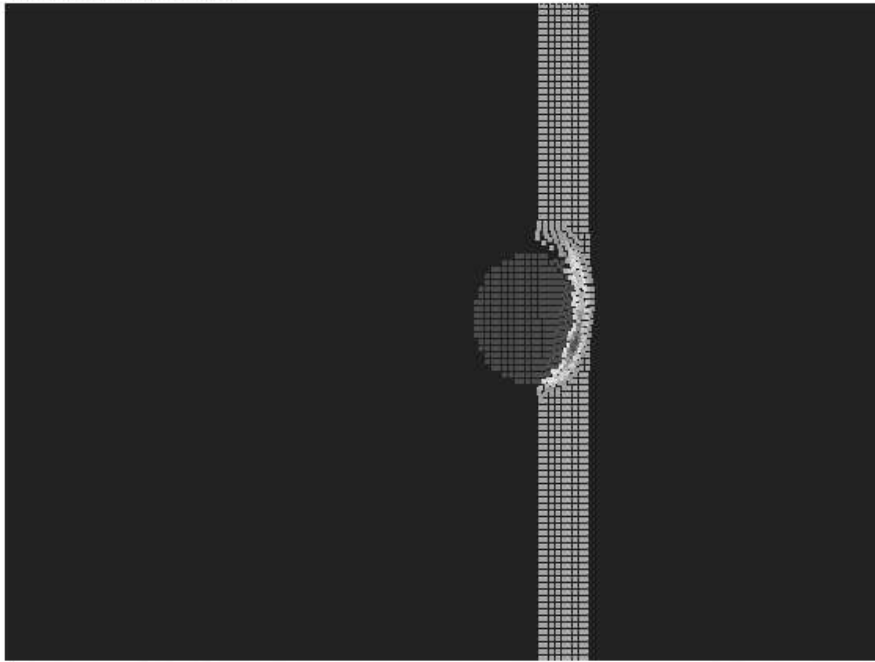


Figure 5.3 – Début du choc

Deplacements des particules



Deplacements des particules

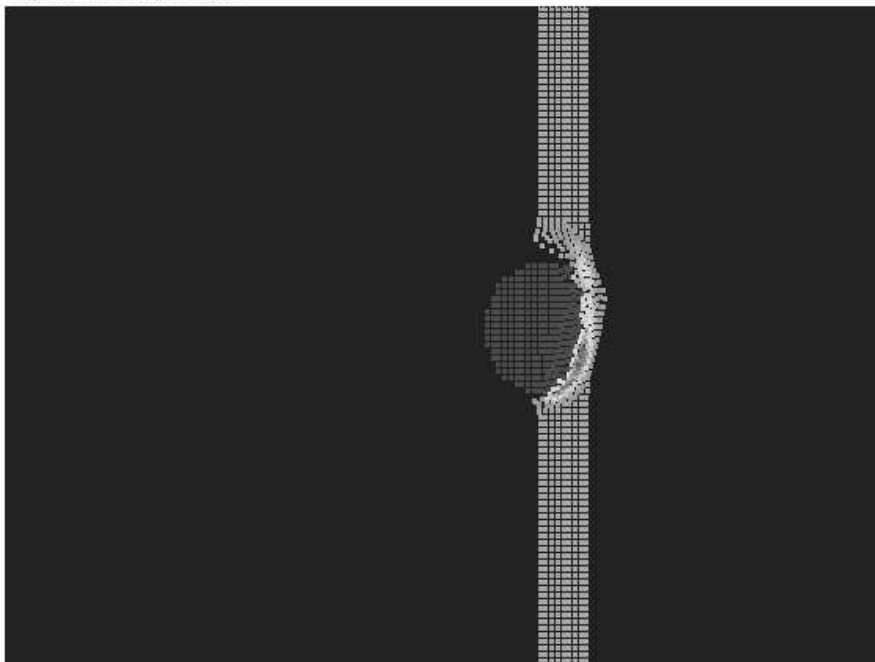
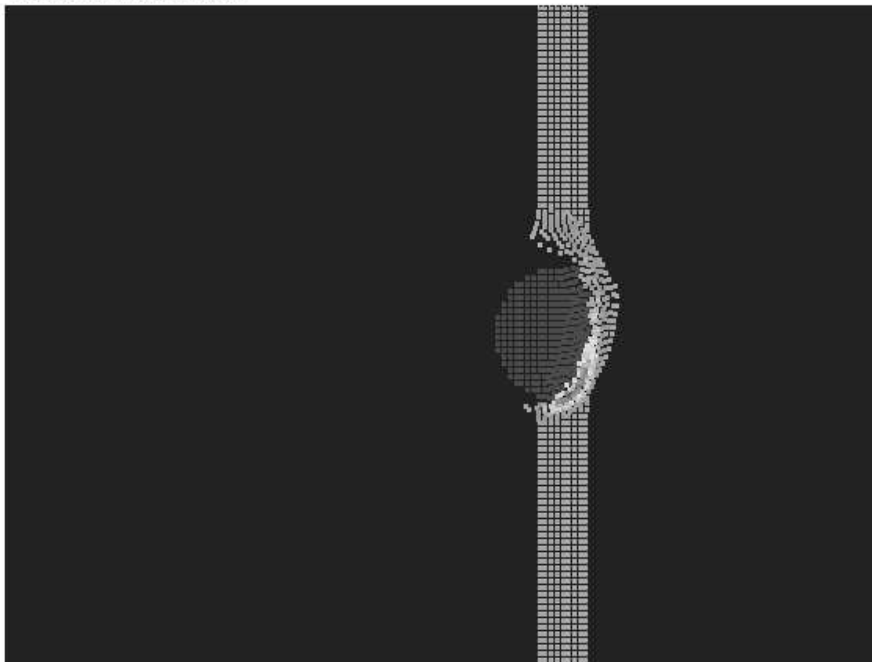


Figure 5.4 – Propagation du choc

Deplacements des particules



Deplacements des particules

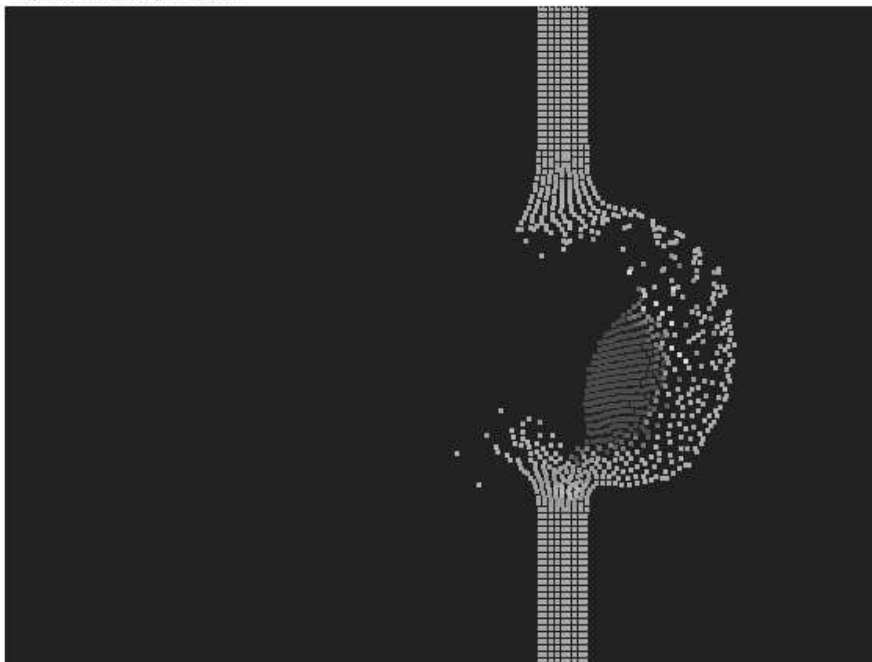
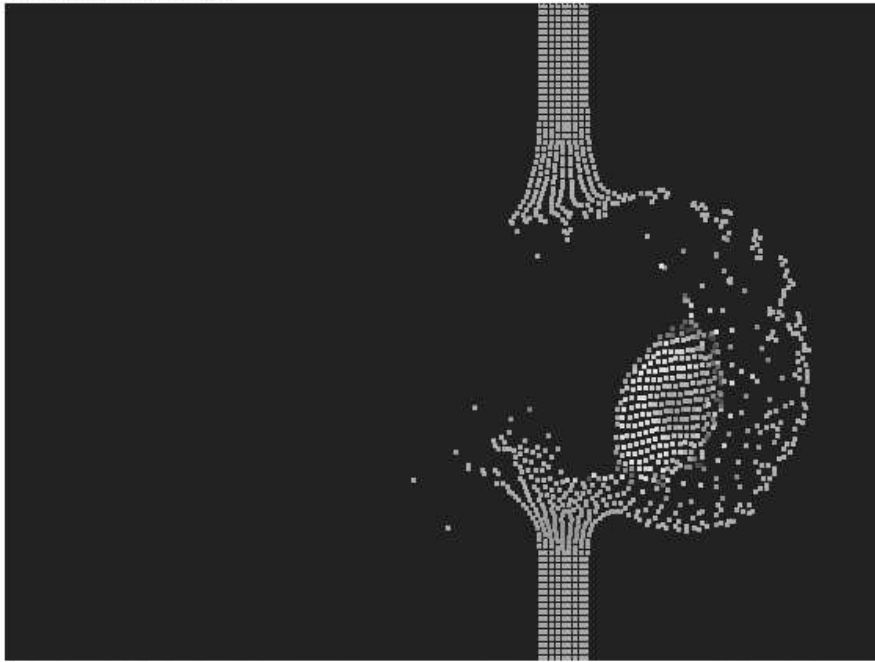


Figure 5.5 – Fin du choc

Deplacements des particules



Deplacements des particules

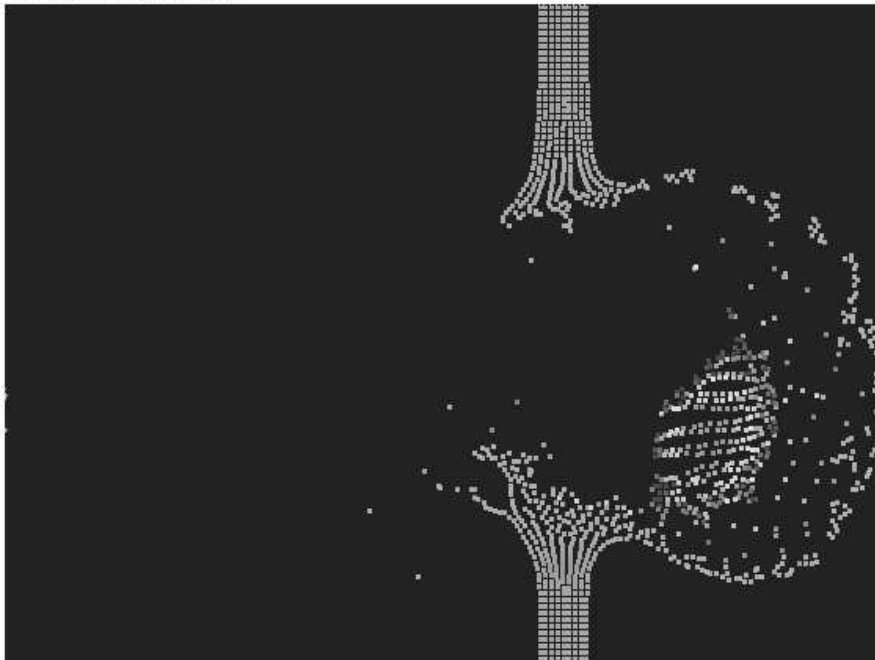


Figure 5.6 – Destruction de la bulle

On voit bien dans ces figures comment l'énergie de cohésion de la bulle est transmise au cours de la perforation au mur. Cette énergie devient l'onde de choc se propageant dans le mur de gaz et cela entraîne l'explosion de la bulle. Un problème intéressant dans ce calcul est la modélisation des forces de tensions superficielles de la bulle. On a simplement soustrait la pression atmosphérique à sa pression interne. Ceci assure alors l'équilibre des parois de la bulle.

5.2.2 Calcul du GdR DFG-CNRS : l'injection résolue avec un schéma VF et un schéma SPH

On reprend le dernier test effectué dans le chapitre précédant (celui du jet). On utilise cette fois-ci la méthode particulière pour modéliser le jet injecté dans la seconde chambre.

Le premier calcul est celui du jet, sans couplage, uniquement avec la méthode SPH. On a imposé des conditions de réflexion sur les bords du domaine.

On peut voir un premier calcul assez grossier, dans les figures 5.7 à 5.10. L'affichage du maillage déformé nous permet de distinguer assez bien les lignes de courant du jet. Un calcul beaucoup plus fin est présenté ensuite. On s'arrête dans ces calculs lorsque l'onde de détente frappe le bord (fictif dans le cas avec couplage) du fond de la zone de réserve des particules. On a en effet un problème de création de particules. Le but de cette zone est donc d'injecter naturellement des particules dans la zone de couplage. On pouvait aussi opter pour une création en augmentant la zone de projection et en calculant des nouvelles particules. Seulement cette solution est délicate. En effet, le champ de vitesse des particules doit être bien régulier dans toute la zone de projection, pour ne pas avoir de maille particulière trop déformée.

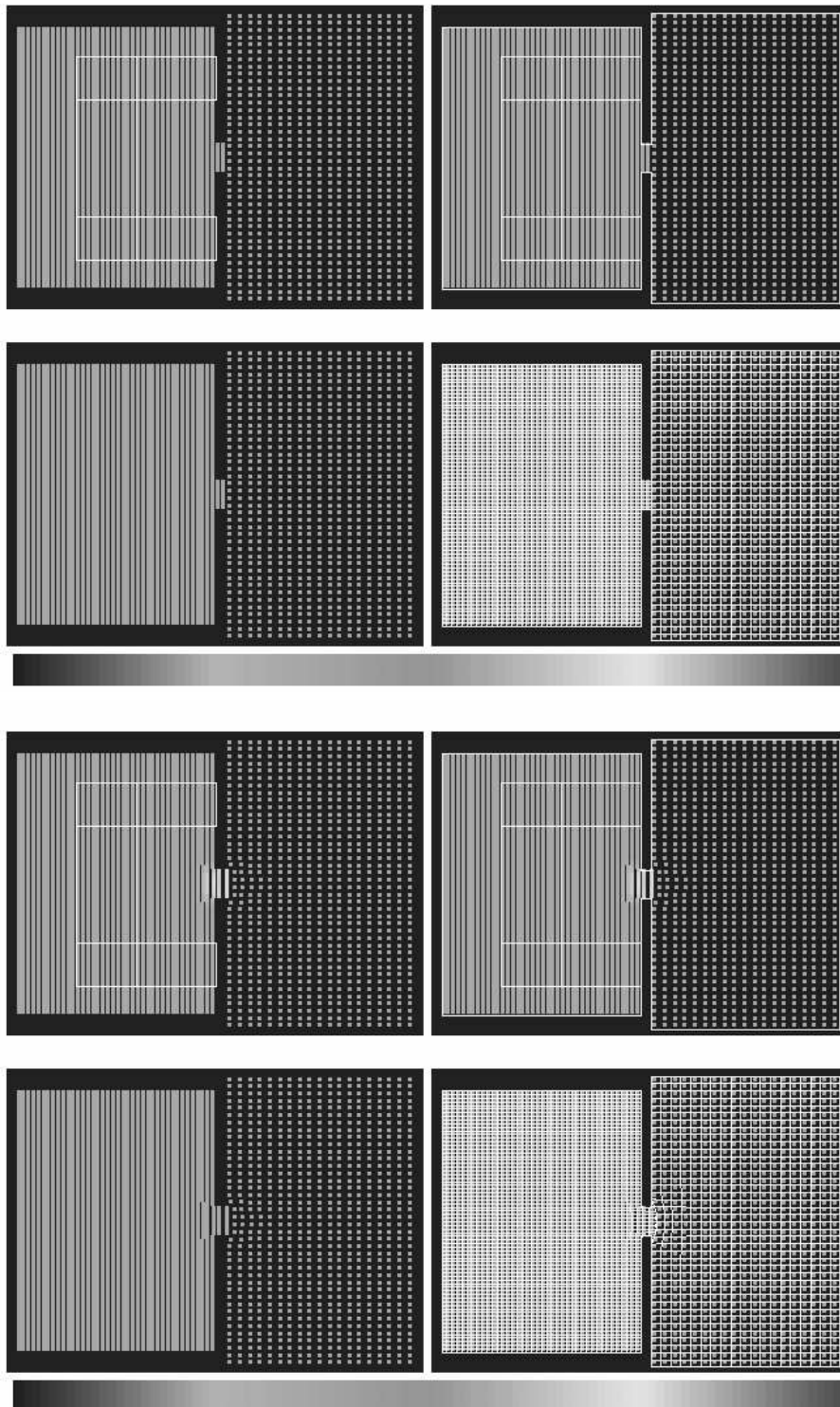


Figure 5.7 – Conditions initiales et formation du jet (instant 1)

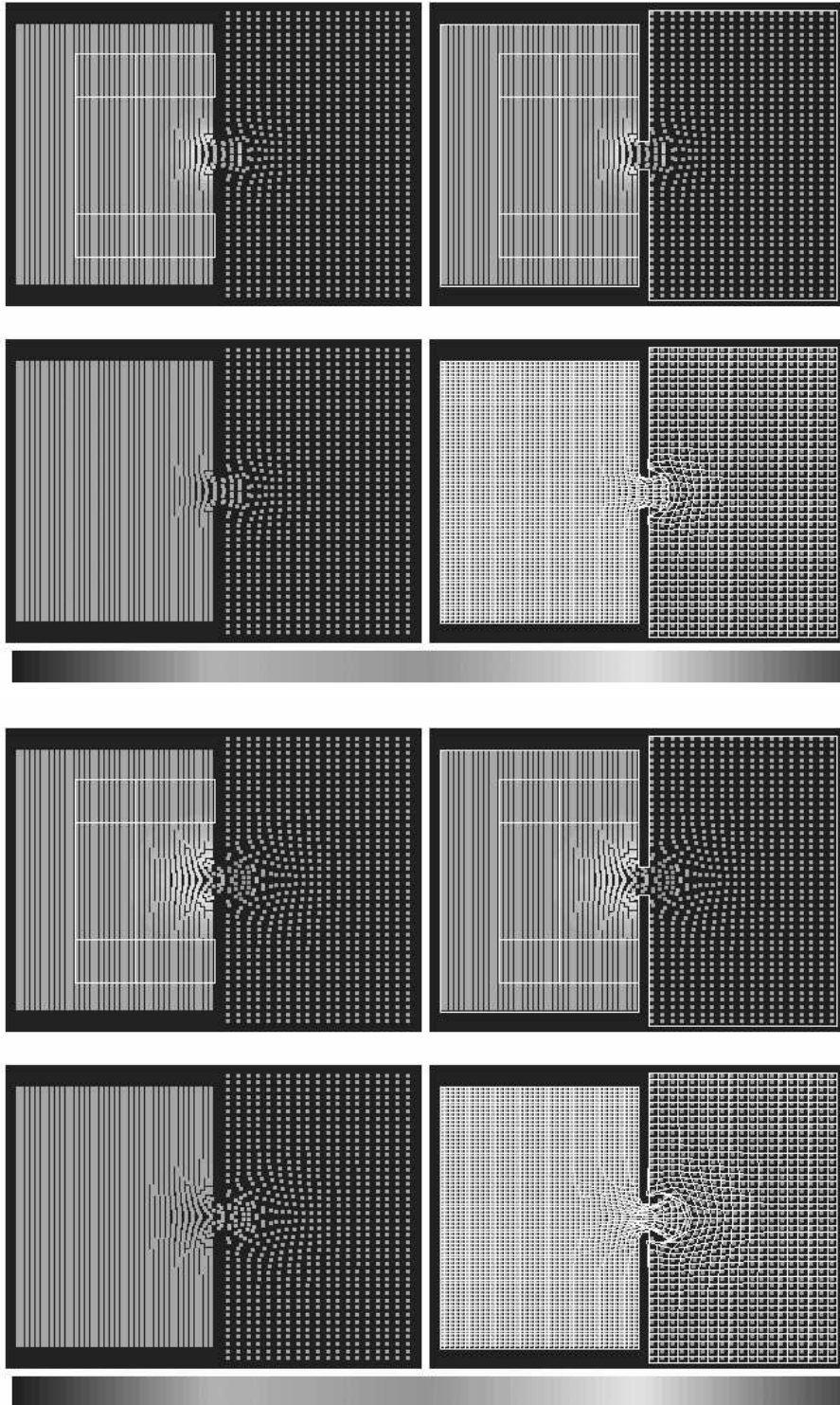


Figure 5.8 – instants 3 et 5

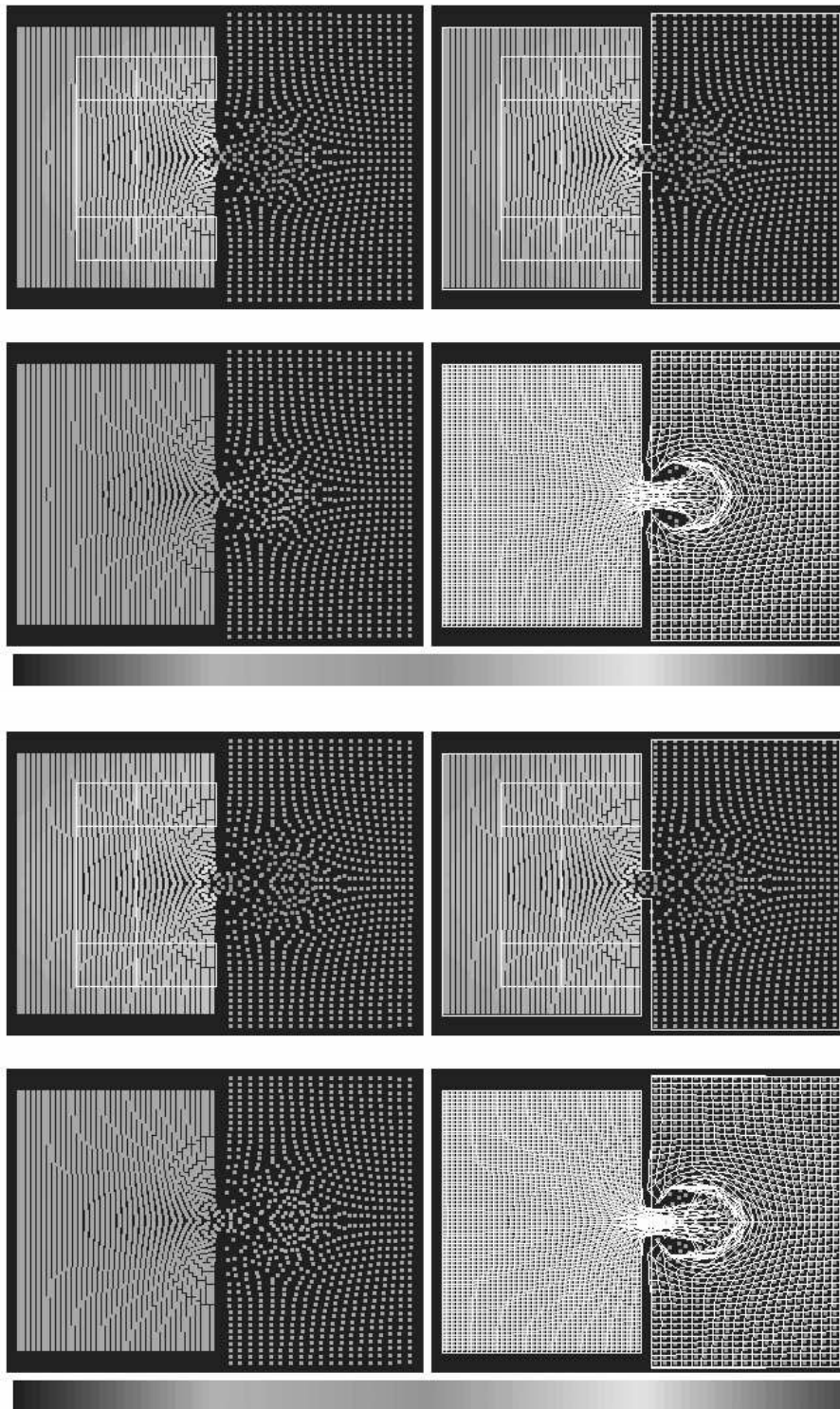


Figure 5.9 – instants 11 et 13

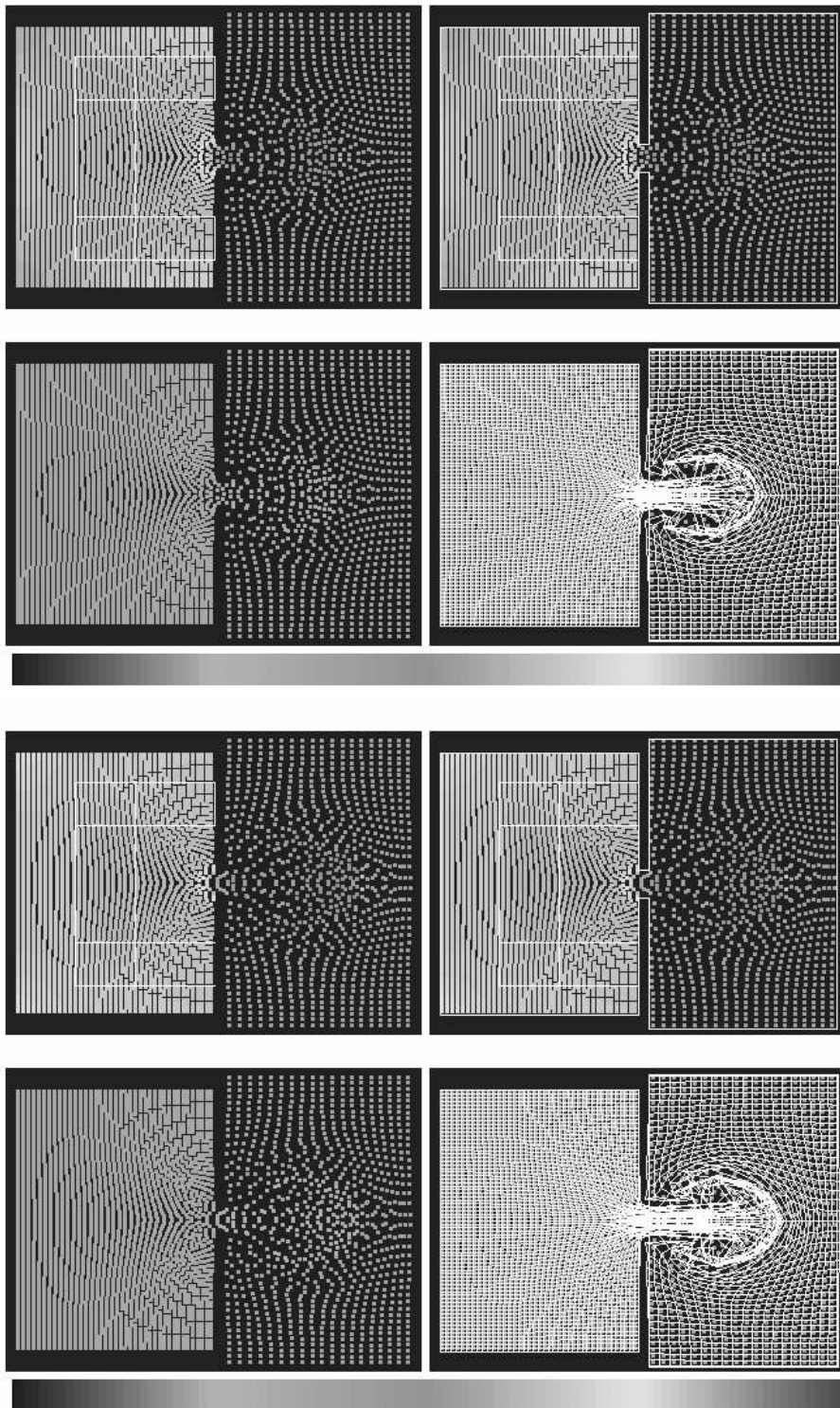


Figure 5.10 – instants 16 et 20

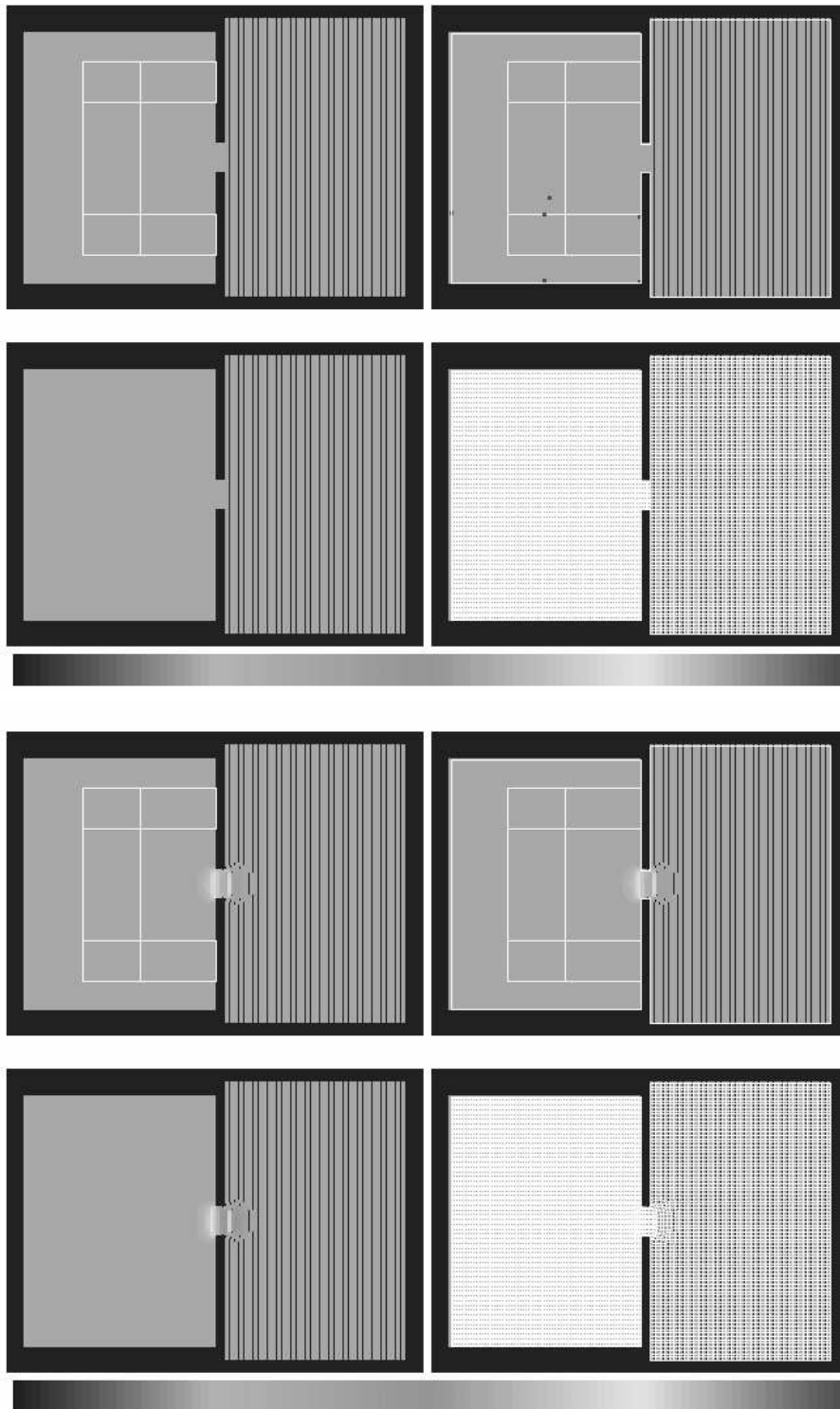


Figure 5.11 – Conditions initiales et formation du jet (instant 1)

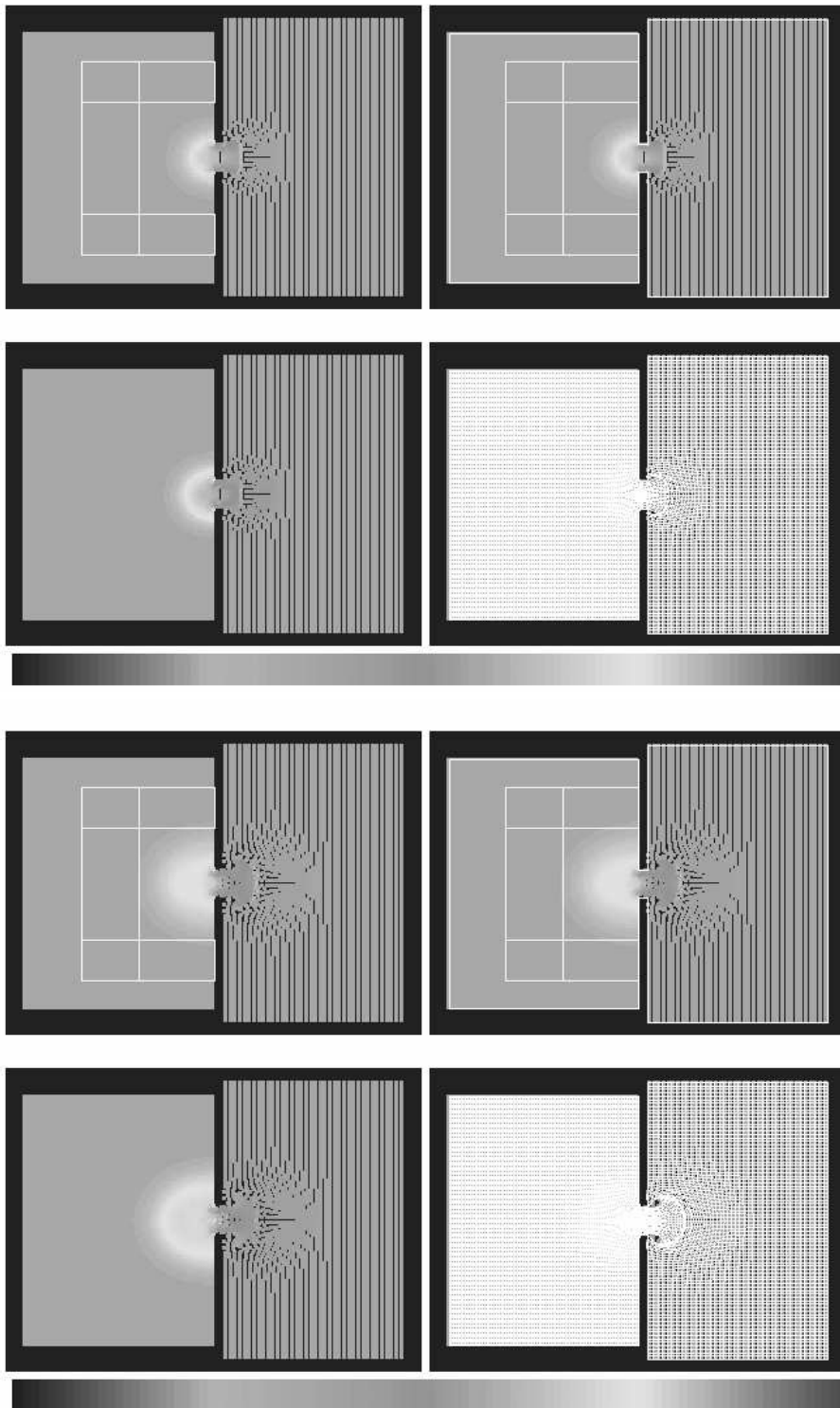


Figure 5.12 – instants 3 et 5

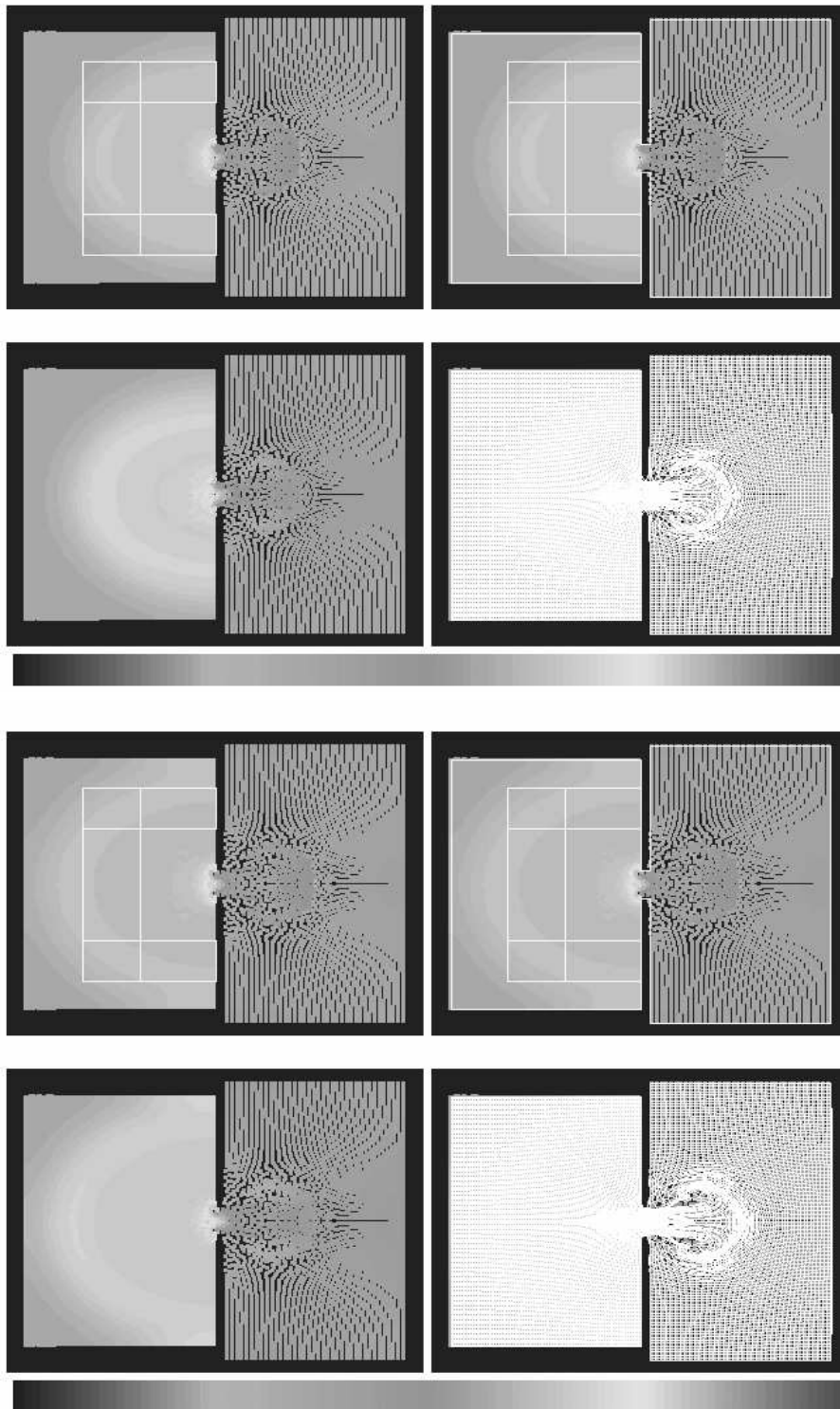


Figure 5.13 – instants 11 et 13

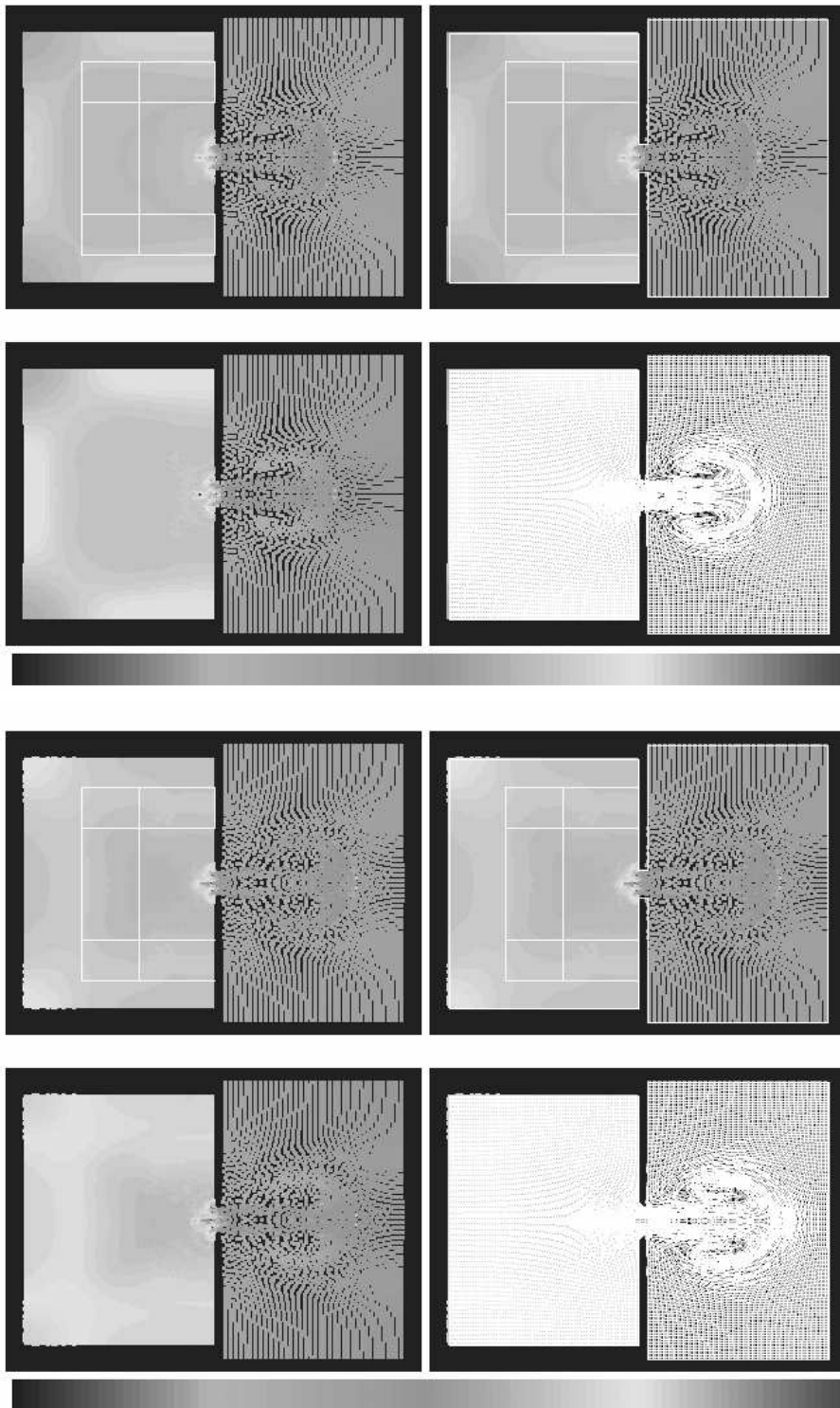


Figure 5.14 – instants 16 et 20

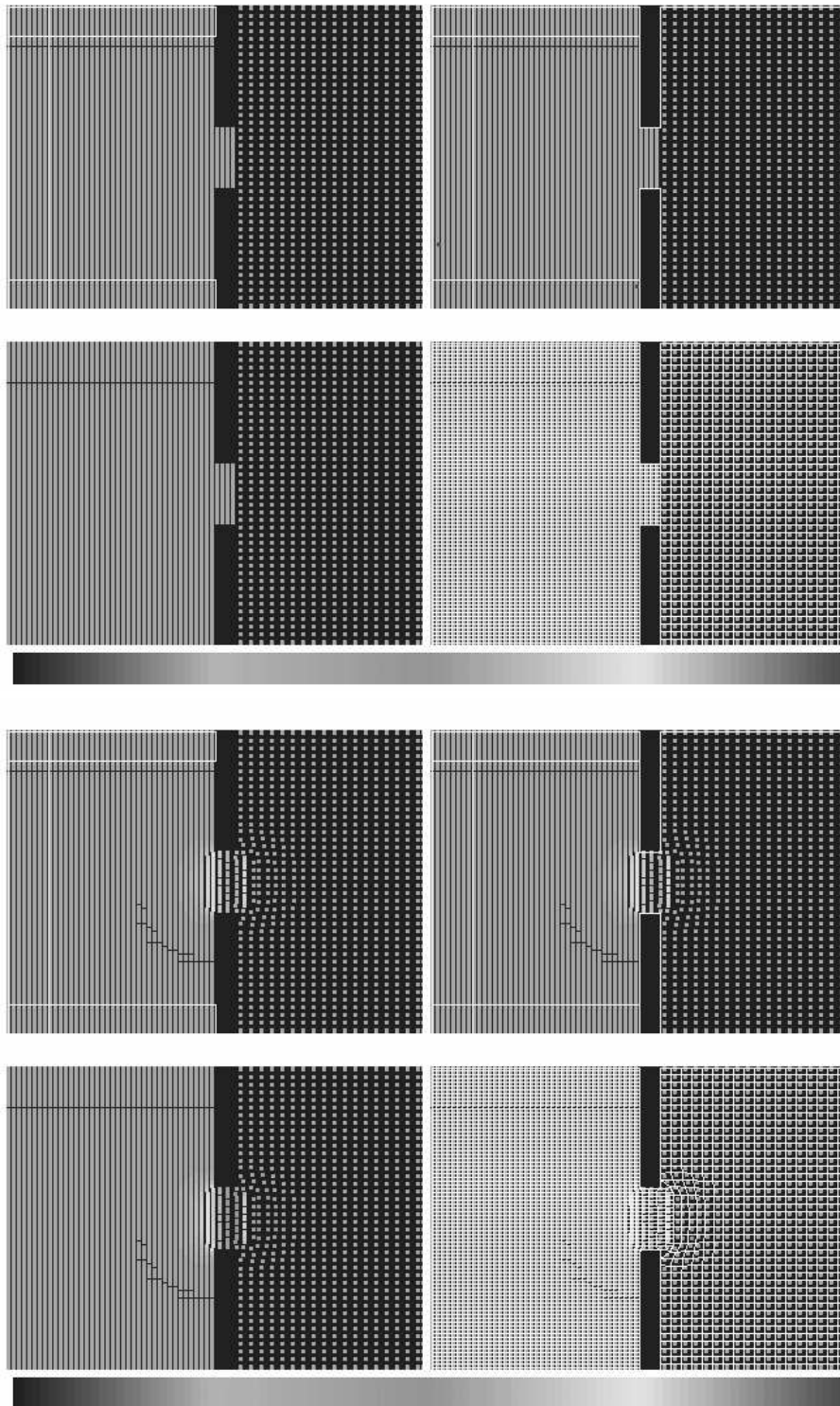


Figure 5.15 – Conditions initiales et formation du jet (instant 1)

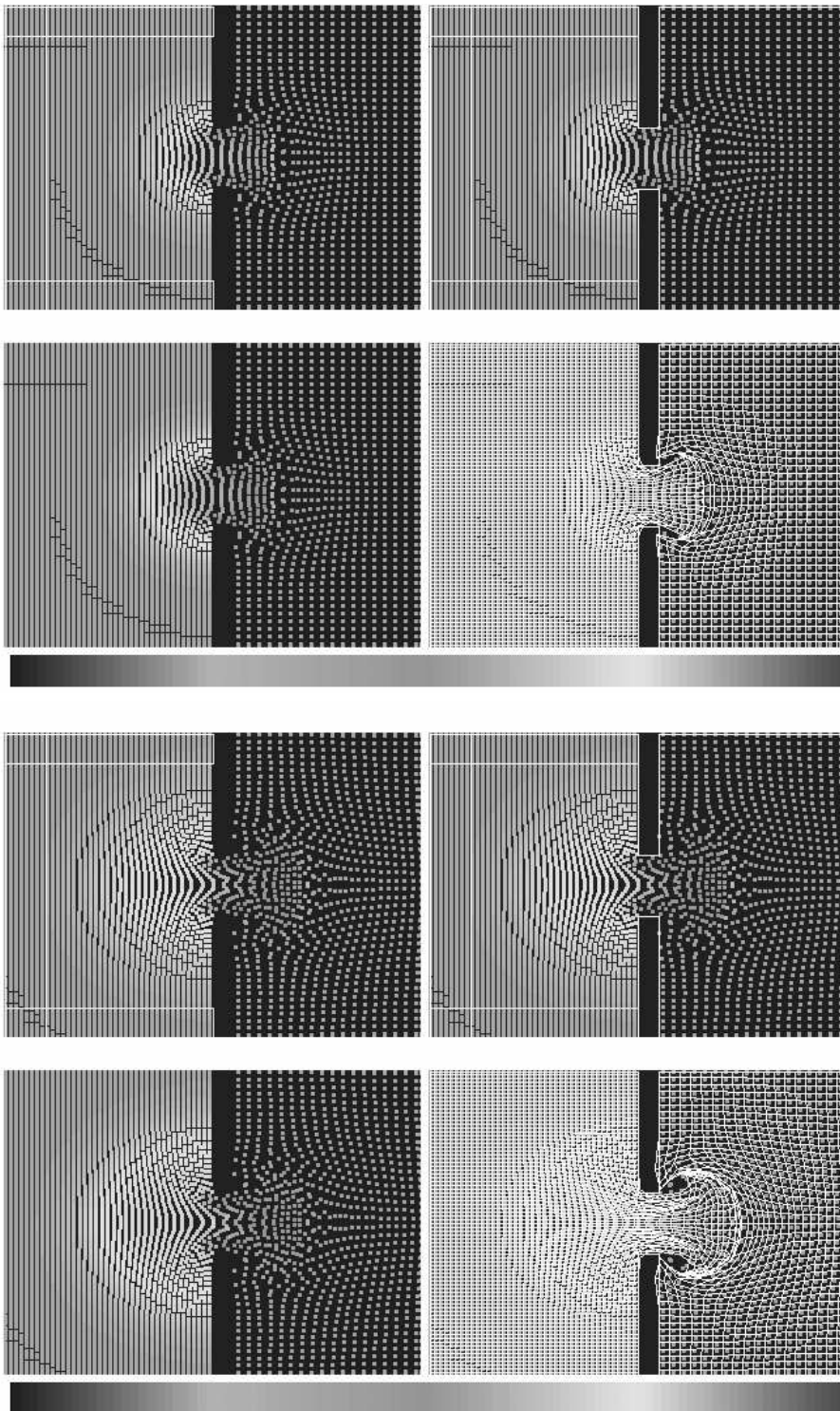


Figure 5.16 – instants 3 et 5

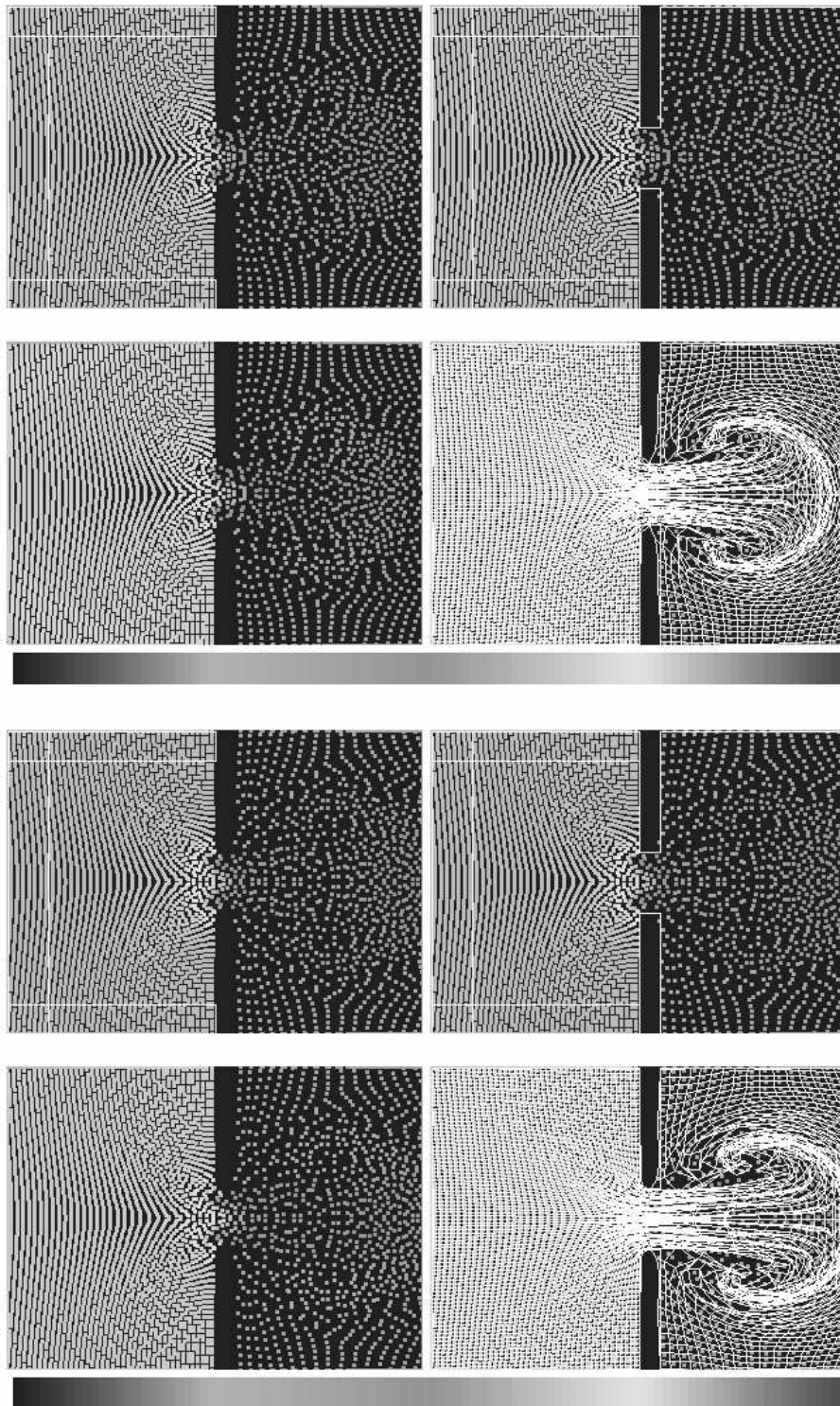


Figure 5.17 – instants 11 et 13

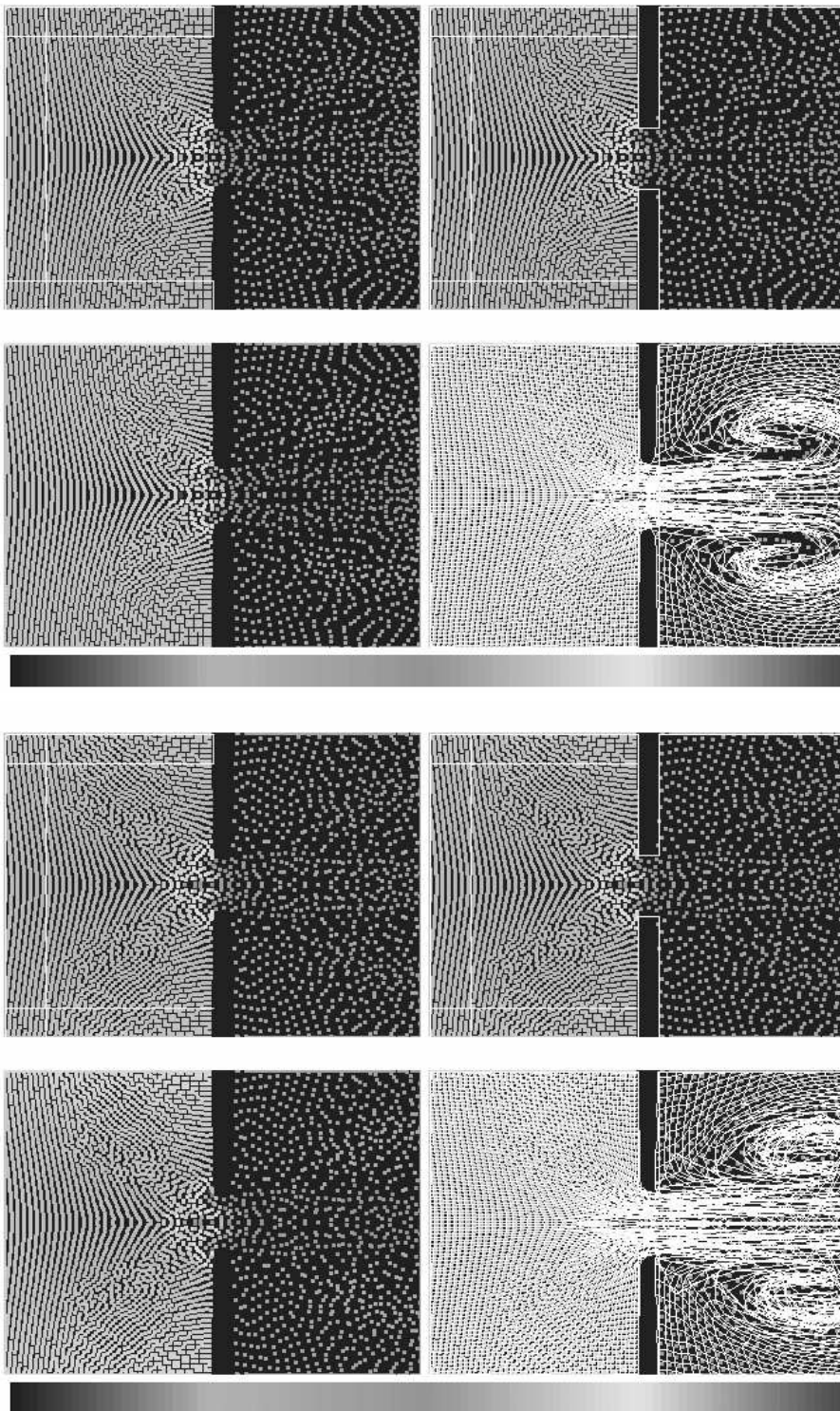


Figure 5.18 – instants 16 et 20

Ce dernier cas présenté dans les figures 5.11 à 5.14 et zoomé sur le trou dans 5.15 à 5.18, montre bien que le jet est formé juste avant le trou. C'est ce qui nous a poussé à placer la zone de couplage bien en aval de cette zone. On voit aussi, dans la zone du jet, dans la seconde chambre, que l'algorithme de déformation des mailles les déforme tellement (le champ de vitesse n'étant pas régulier dans cette zone) que celles-ci deviennent complètement dégénérées. Il n'aurait pas du tout été possible de faire un couplage avec ces mailles écrasées.

A présent, nous ajoutons le couplage à ce cas test (et donc le schéma Volumes Finis dans la première chambre).

Sans bande nulle

Nous présentons tout d'abord un résultat de divergence du calcul. On n'avait pas imposé à la fonction de couplage d'être respectivement nulle et égale à 1 dans deux zones proches de la frontière de la zone de couplage (voir la figure 2.2). Or on a vu que cette zone constante est obligatoire pour obtenir la convergence de la méthode. Ici, on a pas imposé cette zone et le calcul diverge. Les figures parlent d'elles-mêmes...

242 Couplage d'un Schéma Volumes Finis avec la méthode S.P.H..

Dans la figure 5.19 - et dans les suivantes, les deux images du haut représentent la densité respectivement des deux schémas sur la droite et uniquement de la méthode particulière sur la gauche. Dans les deux images du bas, on trouve l'énergie calculée. Sur la dernière image, on a rajouté en plus la déformation du maillage initial (ici, on a le maillage particulière initial).

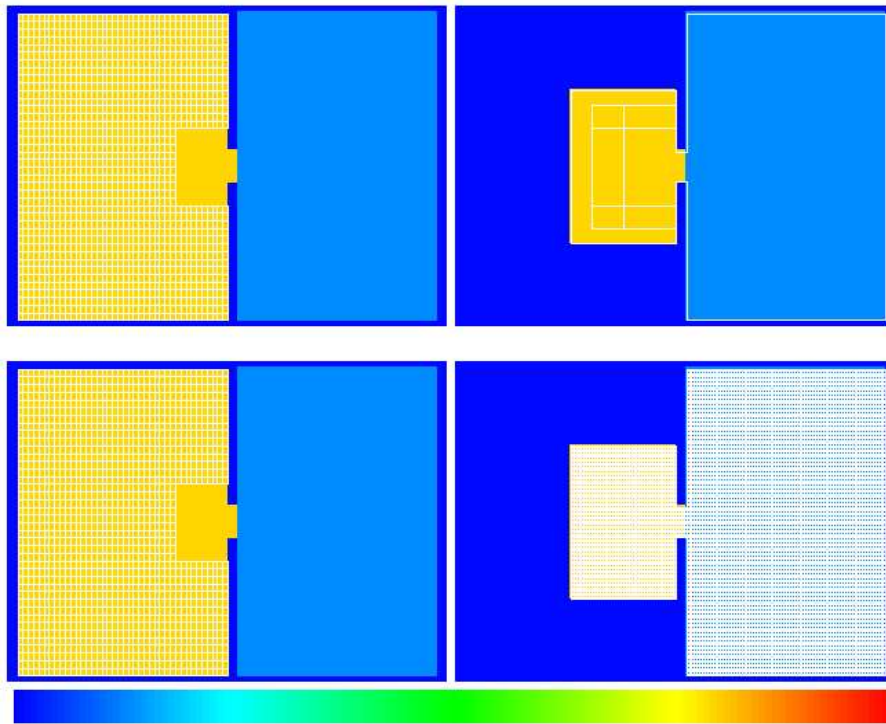


Figure 5.19 – Conditions initiales

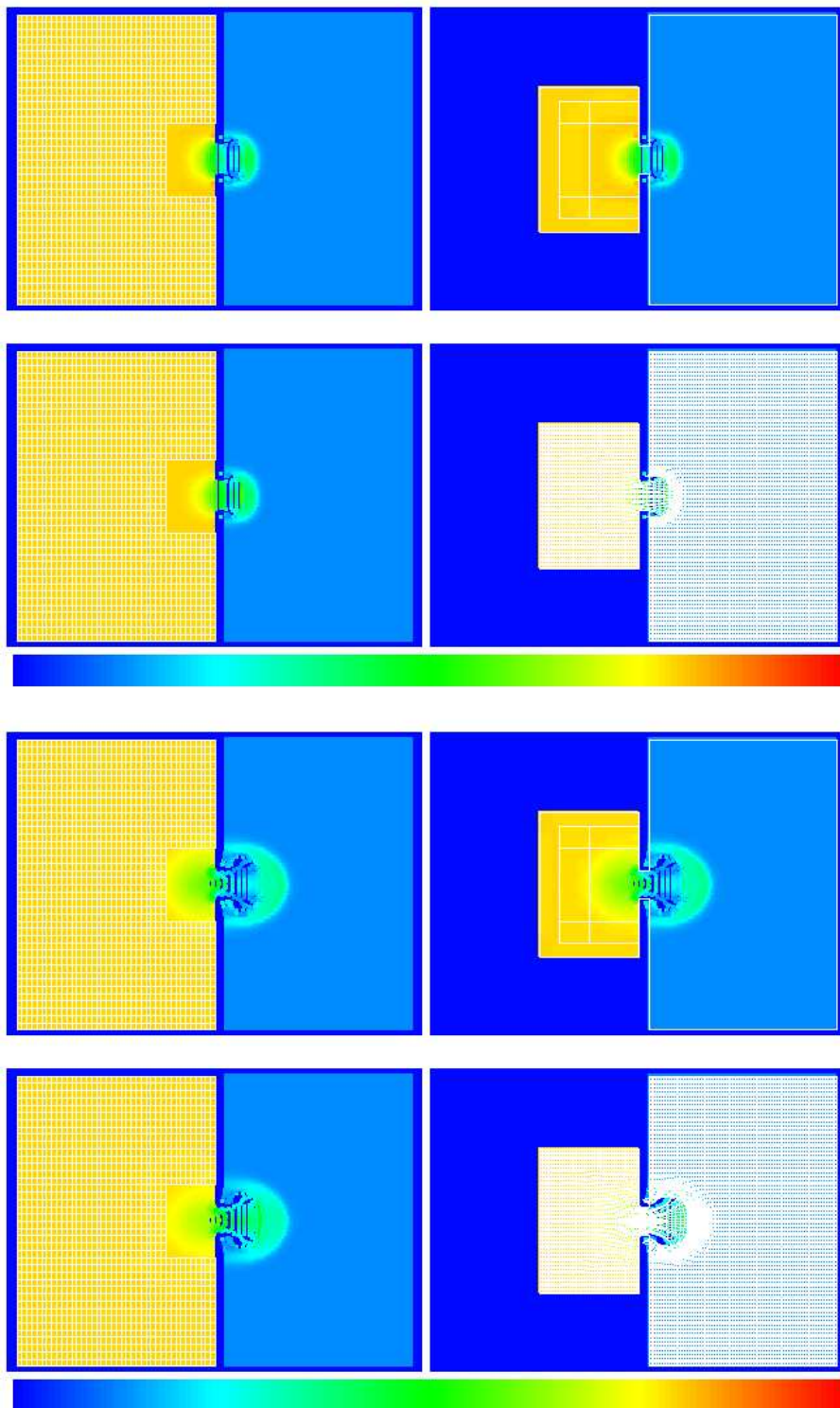


Figure 5.20 – Formation du jet, instants 1 et 2

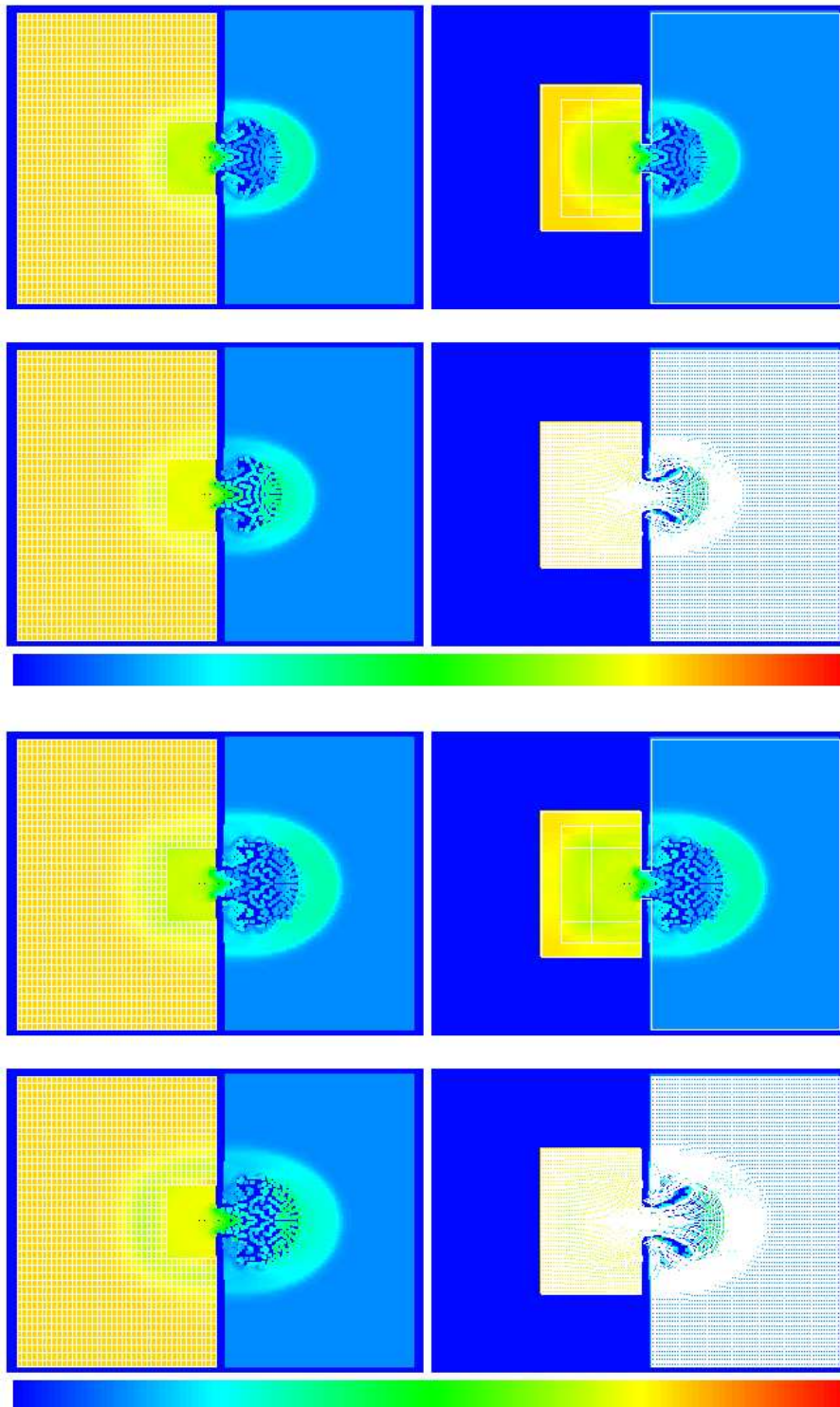


Figure 5.21 – Formation du jet, instants 3 et 4

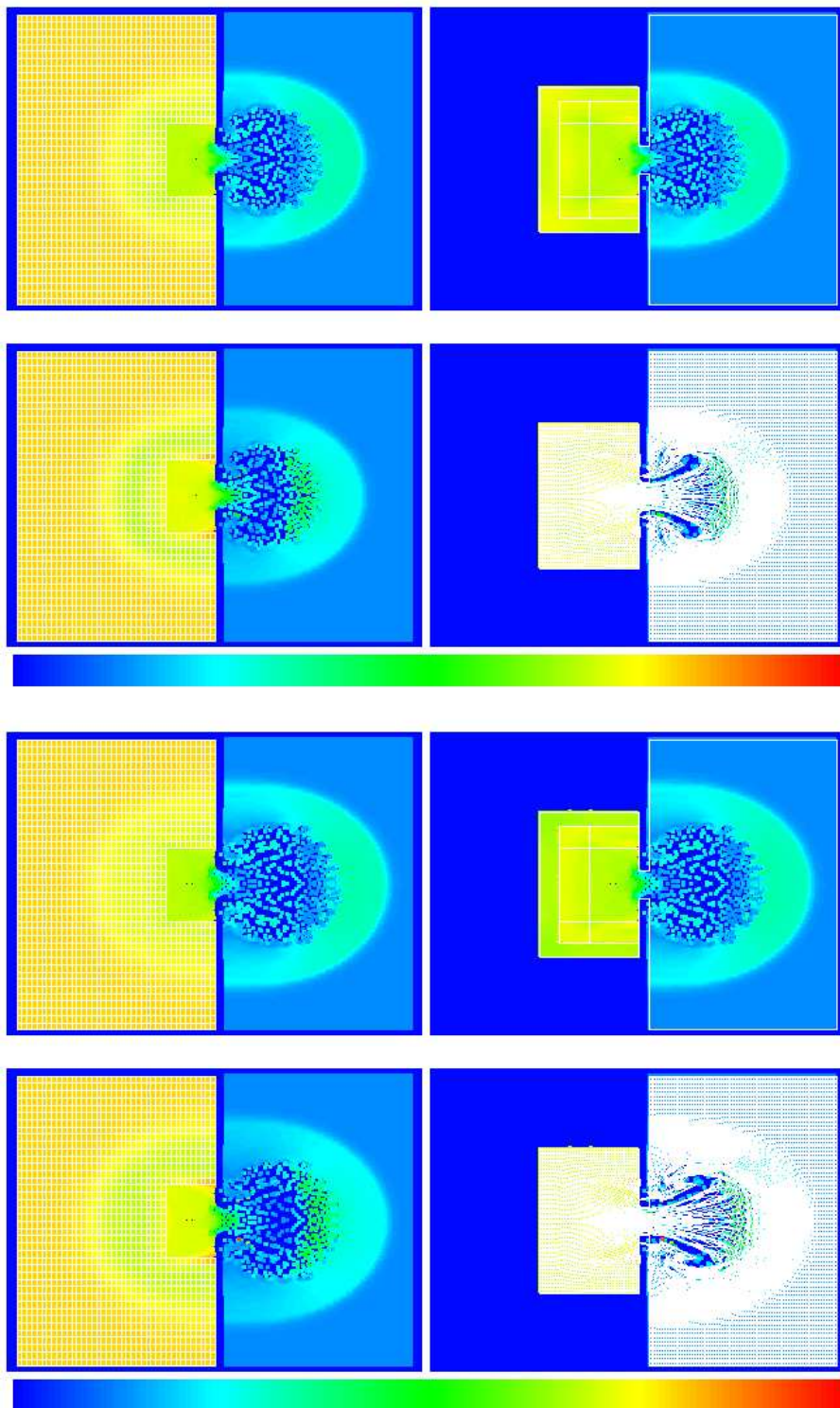


Figure 5.22 – Début de l'explosion du calcul, instants 5 et 6

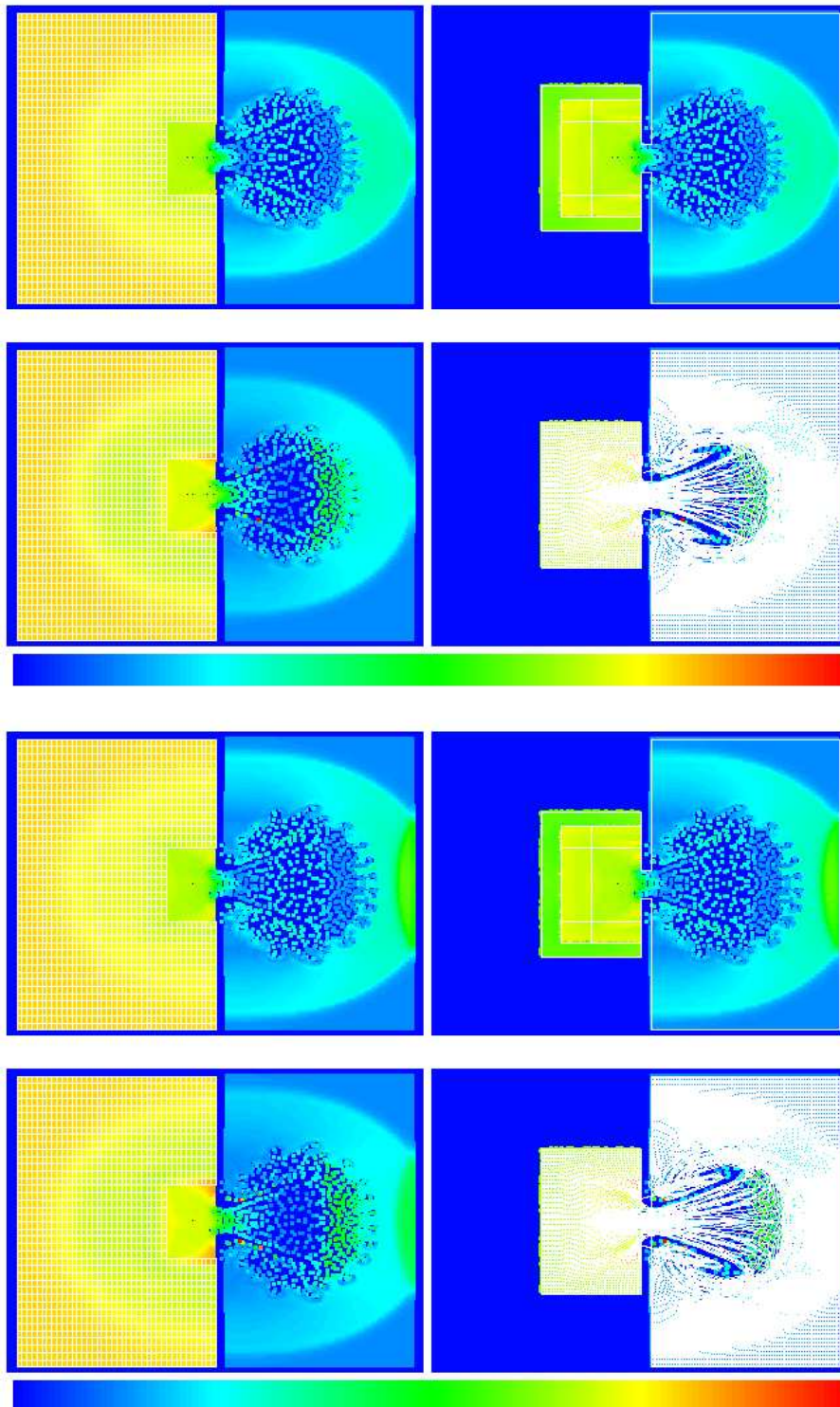


Figure 5.23 – Explosion du calcul, instants 7 et 8

On voit alors clairement (à partir de la figure 5.22, que le calcul de l'énergie diverge dans la zone de couplage proche du bord du trou. On remédie à ce problème en rajoutant la zone α constant (égal respectivement à 0 et 1) dans la zone de couplage.

Maillage particulaire grossier

On présente tout d'abord un calcul avec un maillage particulaire grossier. On distingue alors les particules et leur trajectoire.

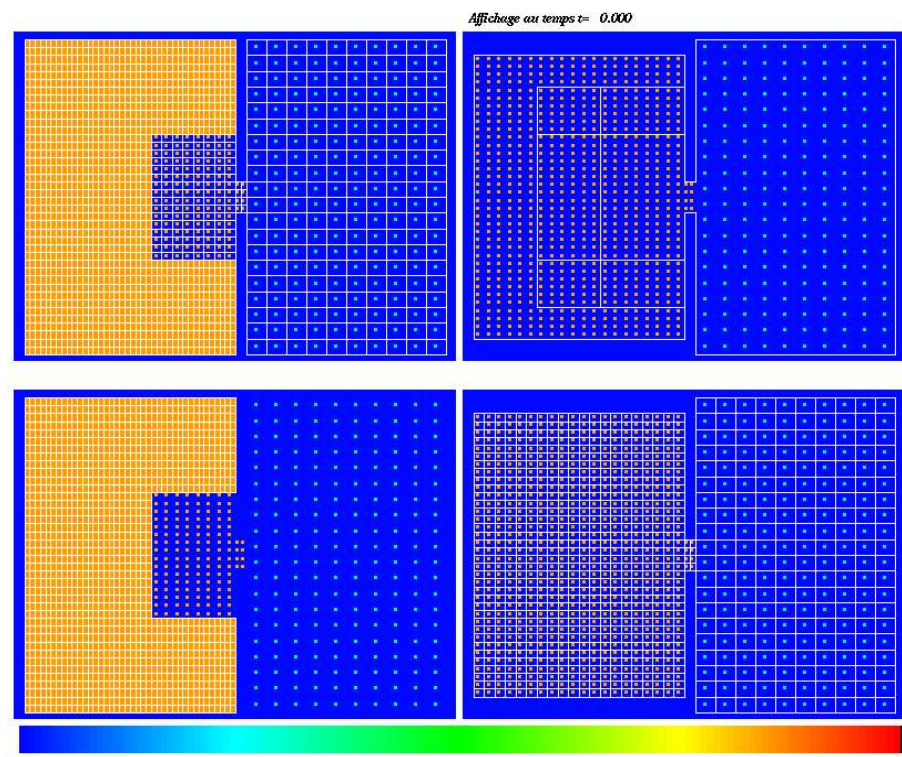


Figure 5.24 – Conditions initiales

Les grandeurs représentées dans la figure 5.24 - et dans les suivantes - sont les mêmes que dans le cas précédent.

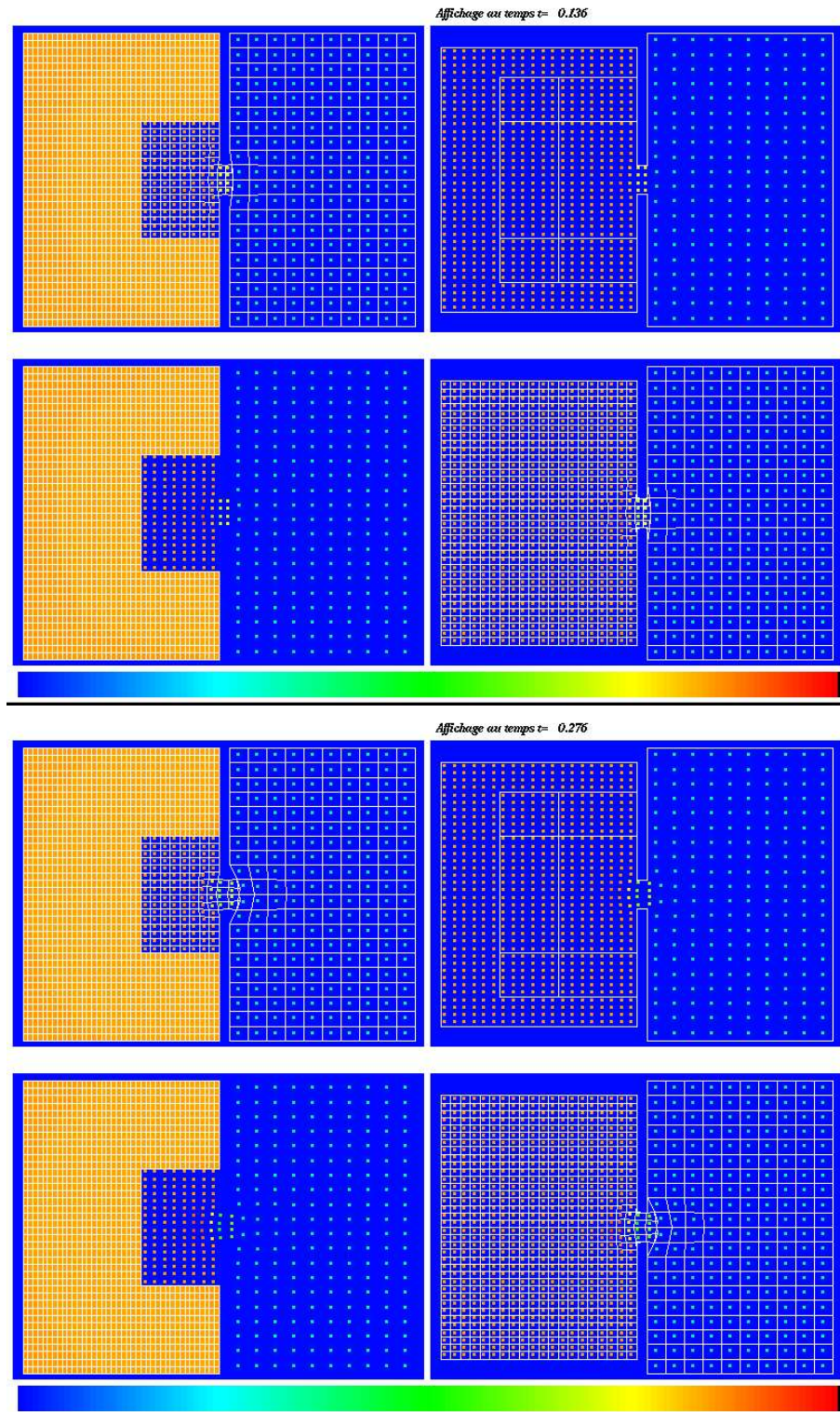


Figure 5.25 – Formation du jet : instants 1 et 2

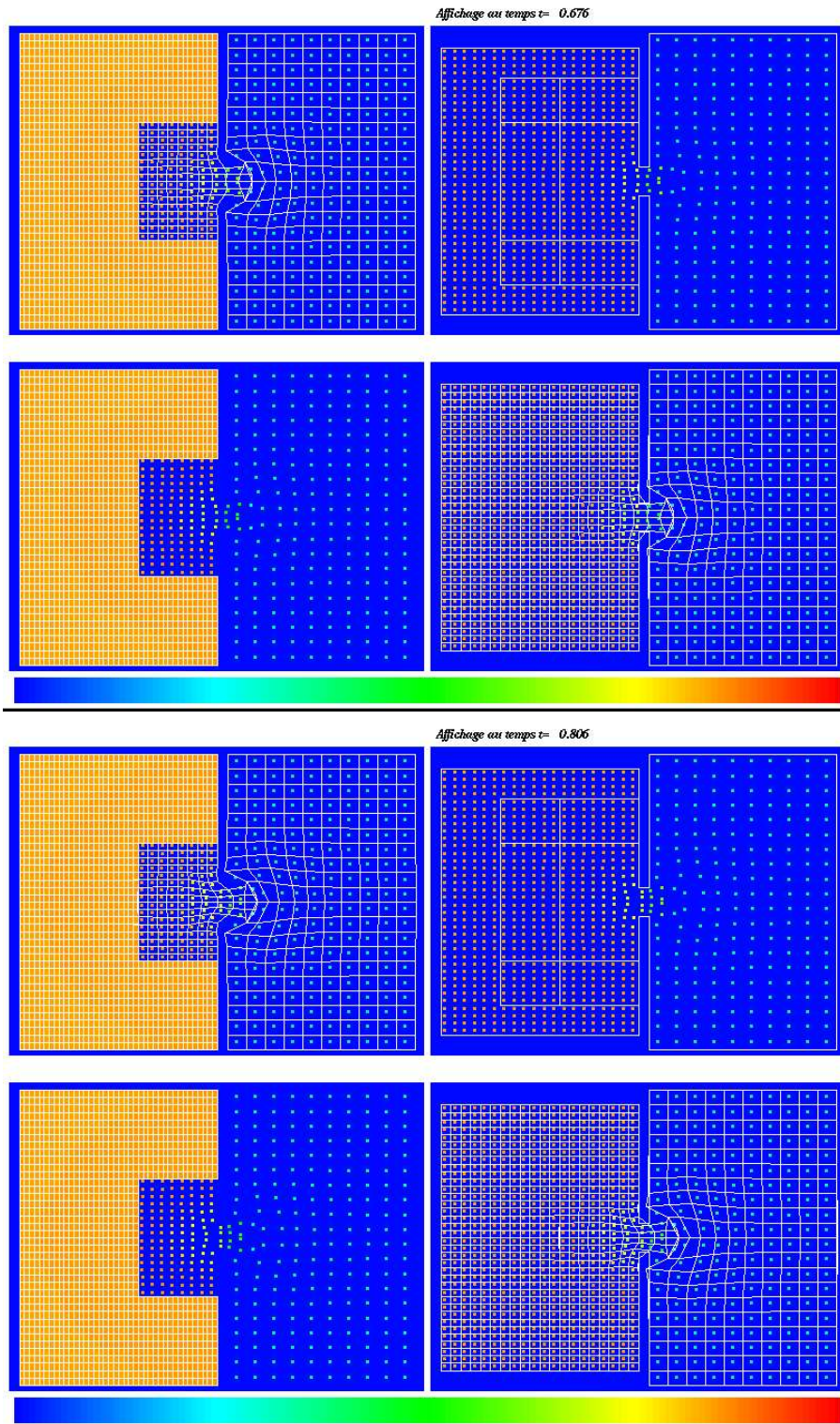


Figure 5.26 – Formation du jet : instants 5 et 6

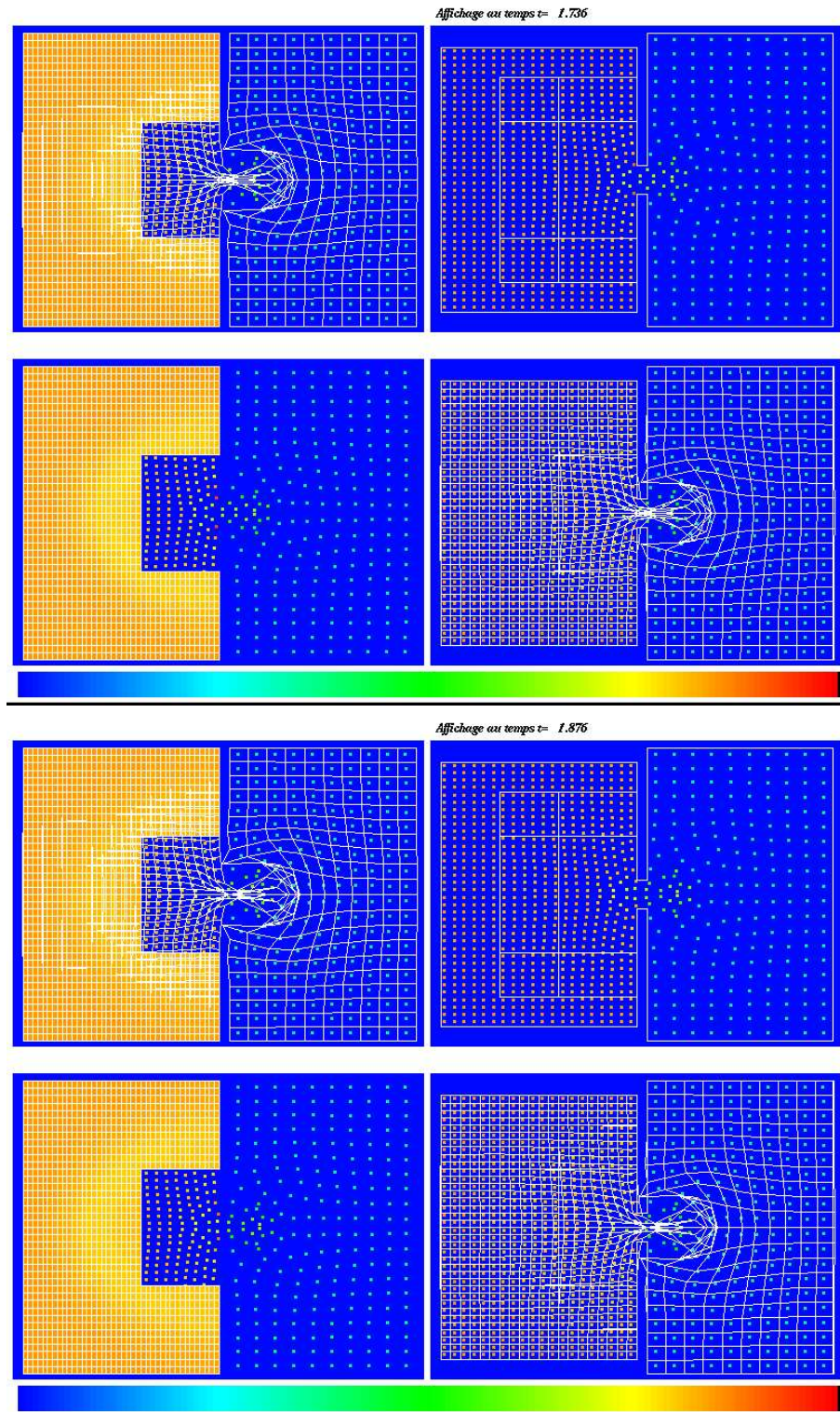


Figure 5.27 – Formation du jet : instants 13 et 14

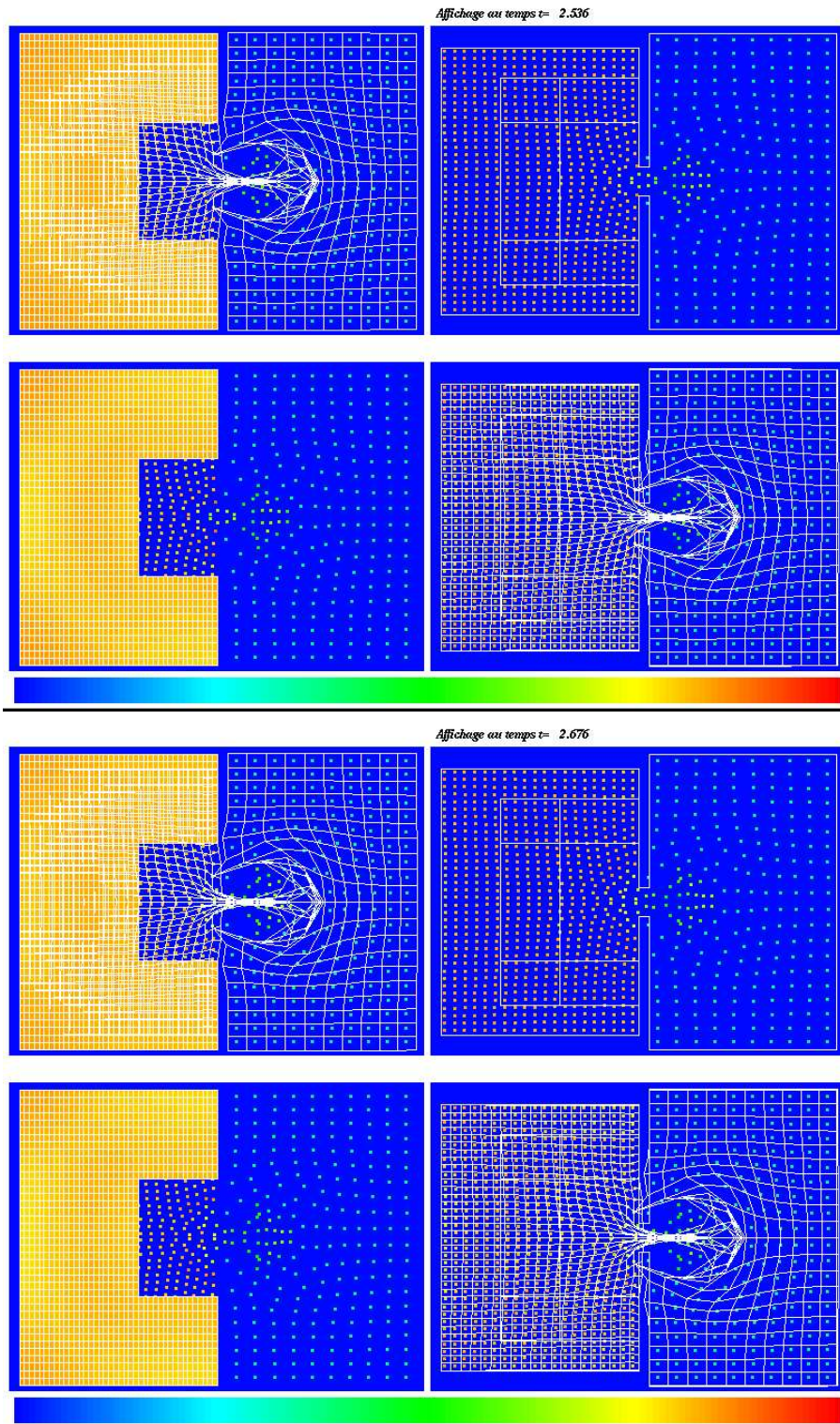


Figure 5.28 – Formation du jet : instants 19 et 20

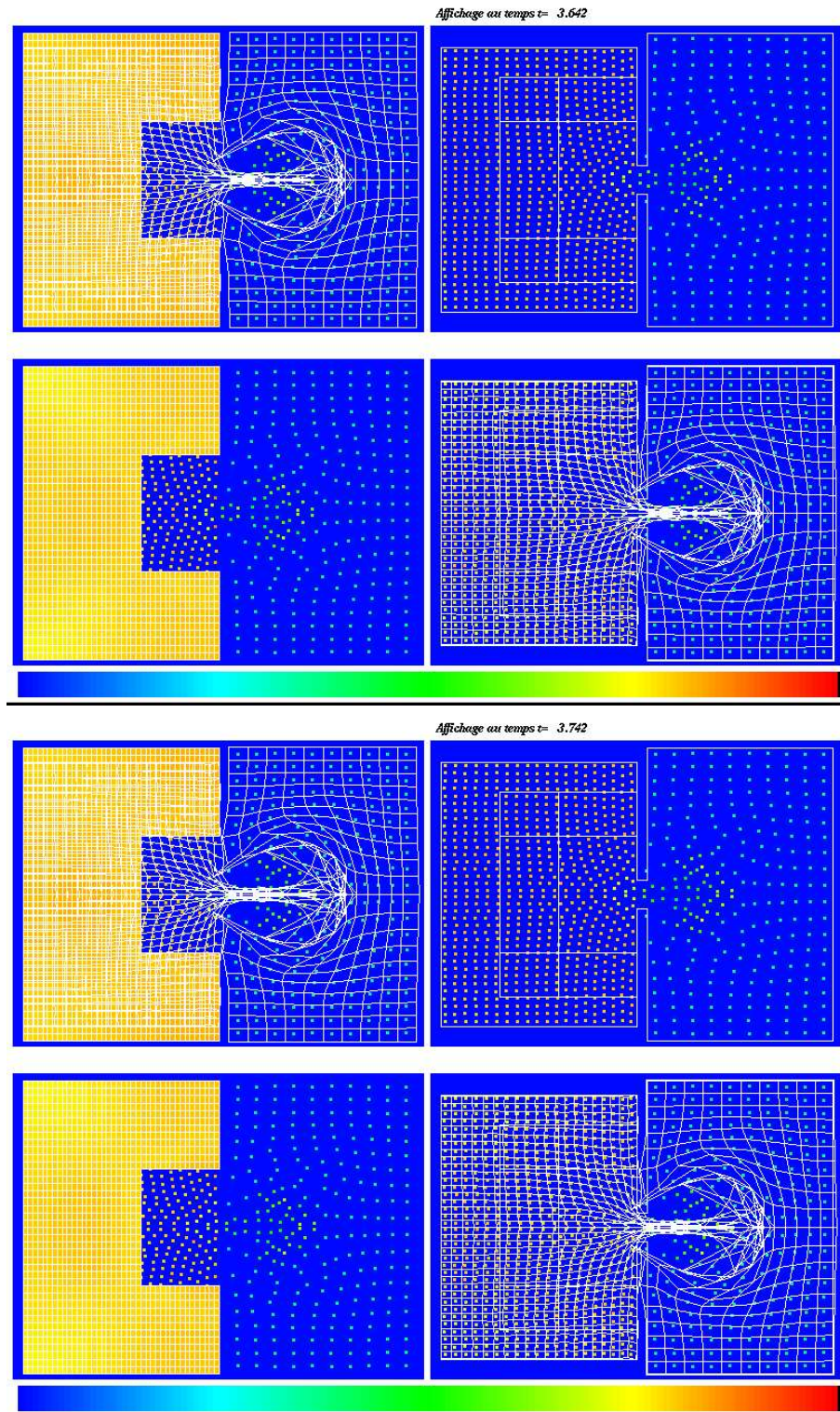


Figure 5.29 – Formation du jet : instants 29 et 30

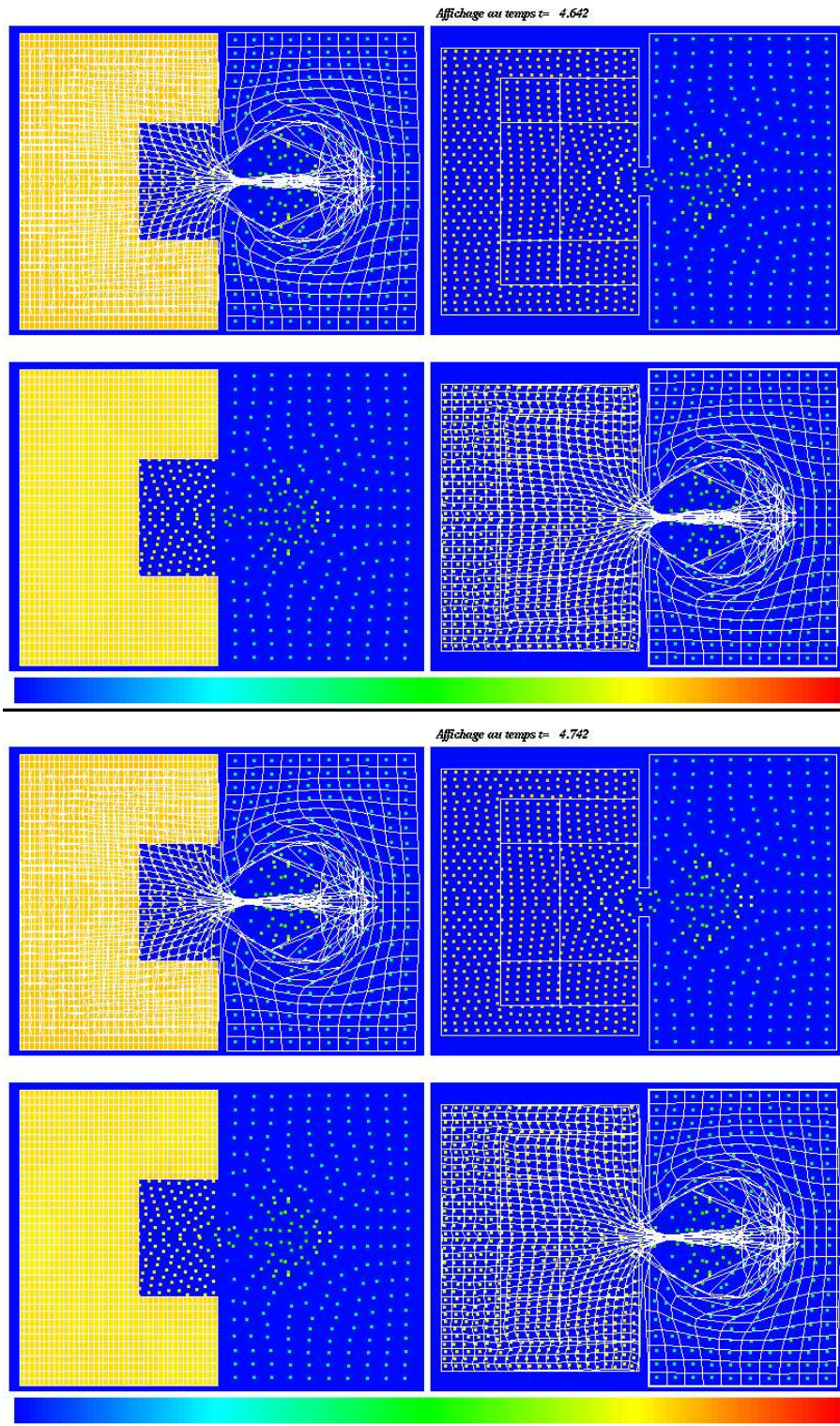


Figure 5.30 – Formation du jet : instants 39 et 40

On peut comparer ces différents résultats (figures 5.24 à 5.30), avec ceux obtenus pour le calcul Volumes Finis-Volumes Finis. On voit alors que le jet est ici beaucoup plus élargi que dans l'autre calcul. On voit aussi bien mieux les tourbillons latéraux qui donnent le mélange des deux fluides. Les lignes de courant sont bien représentées dans ce calcul, grâce au déplacement des particules, mais surtout au maillage reconstitué.

Enfin, si l'on raffine le maillage particulière, on obtient les figures 5.31 à 5.36.

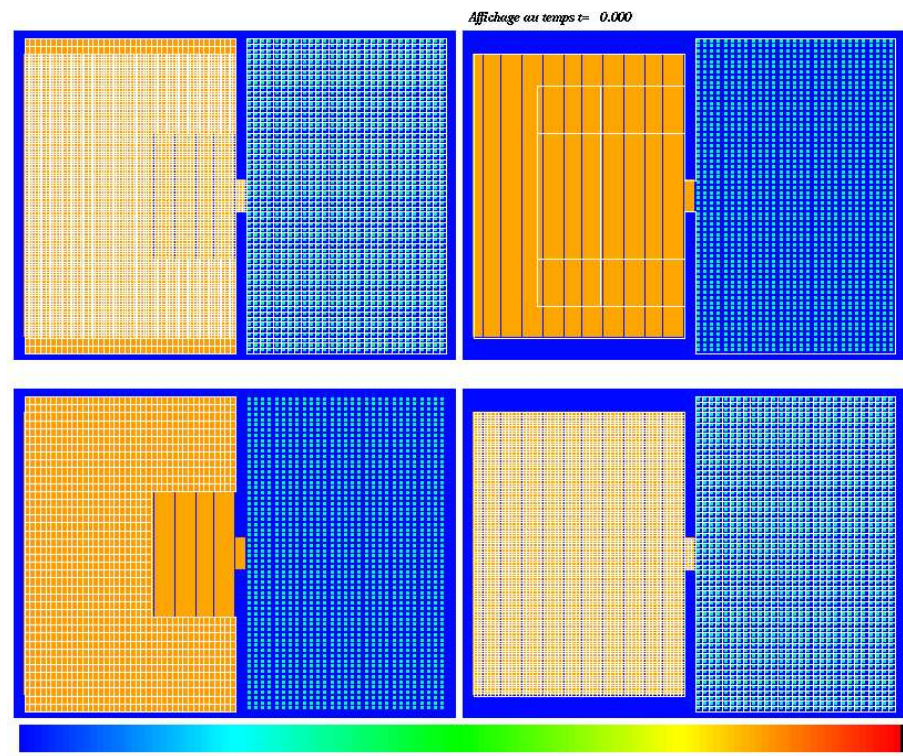
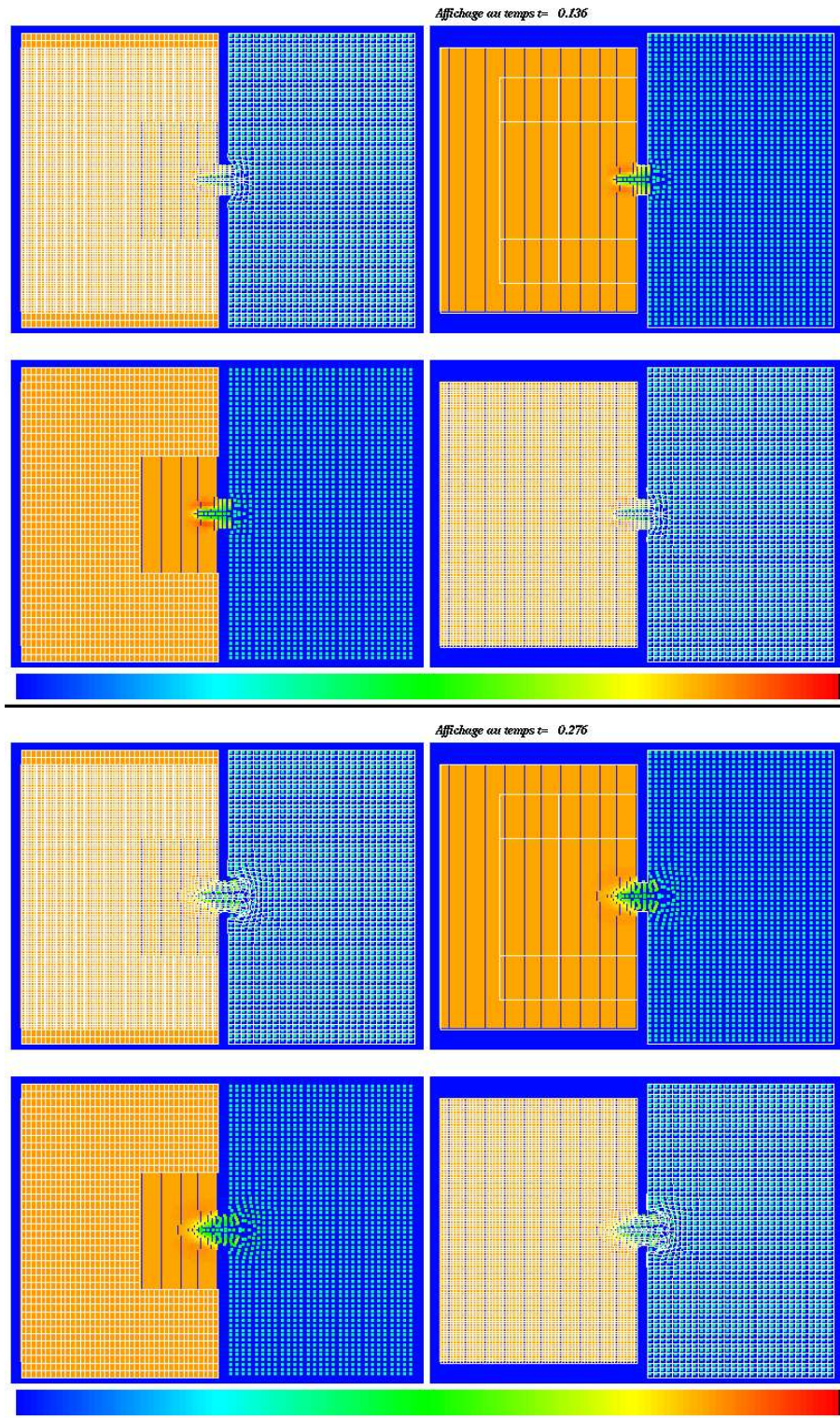


Figure 5.31 – Conditions initiales



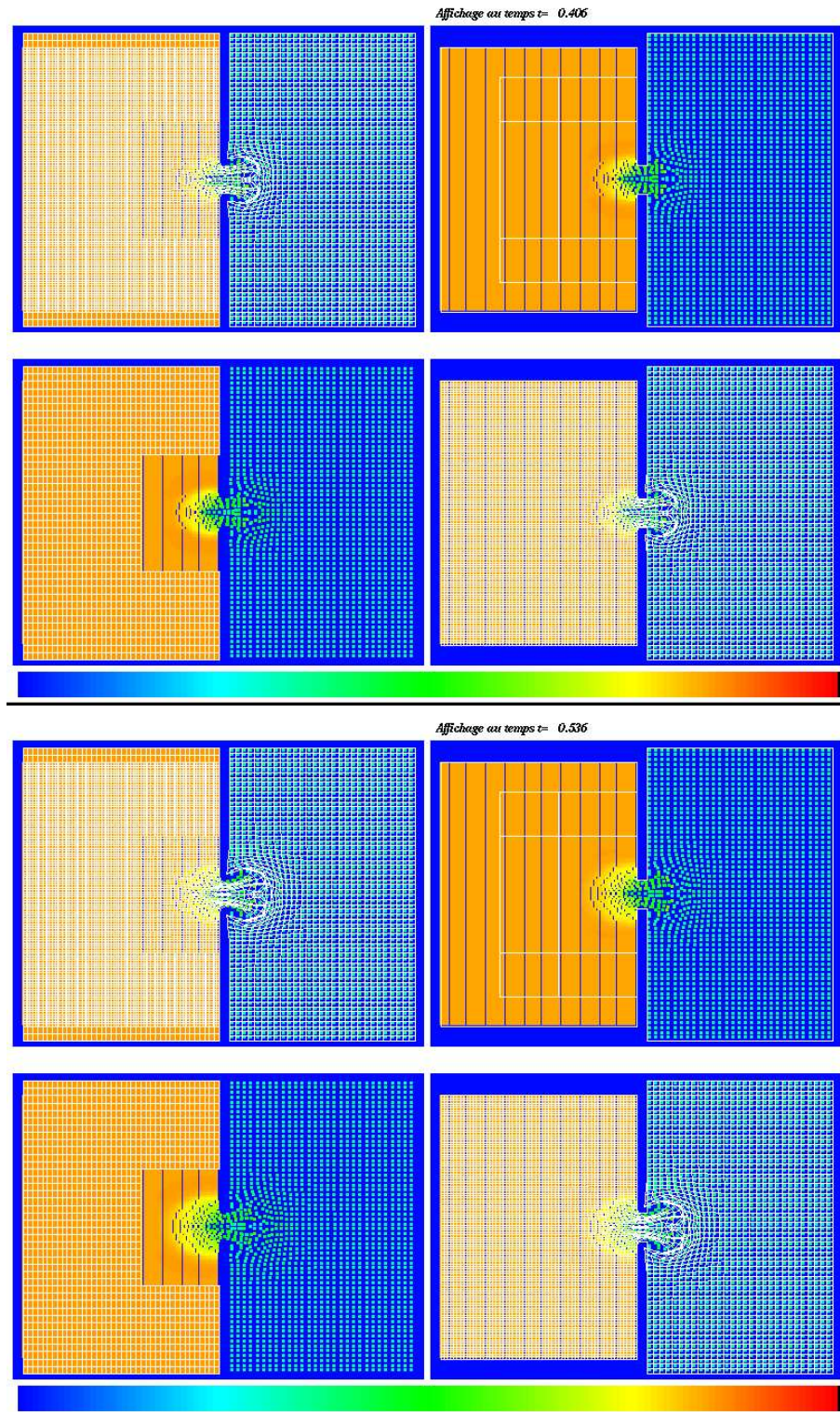


Figure 5.33 – Formation du jet : instants 1 et 2

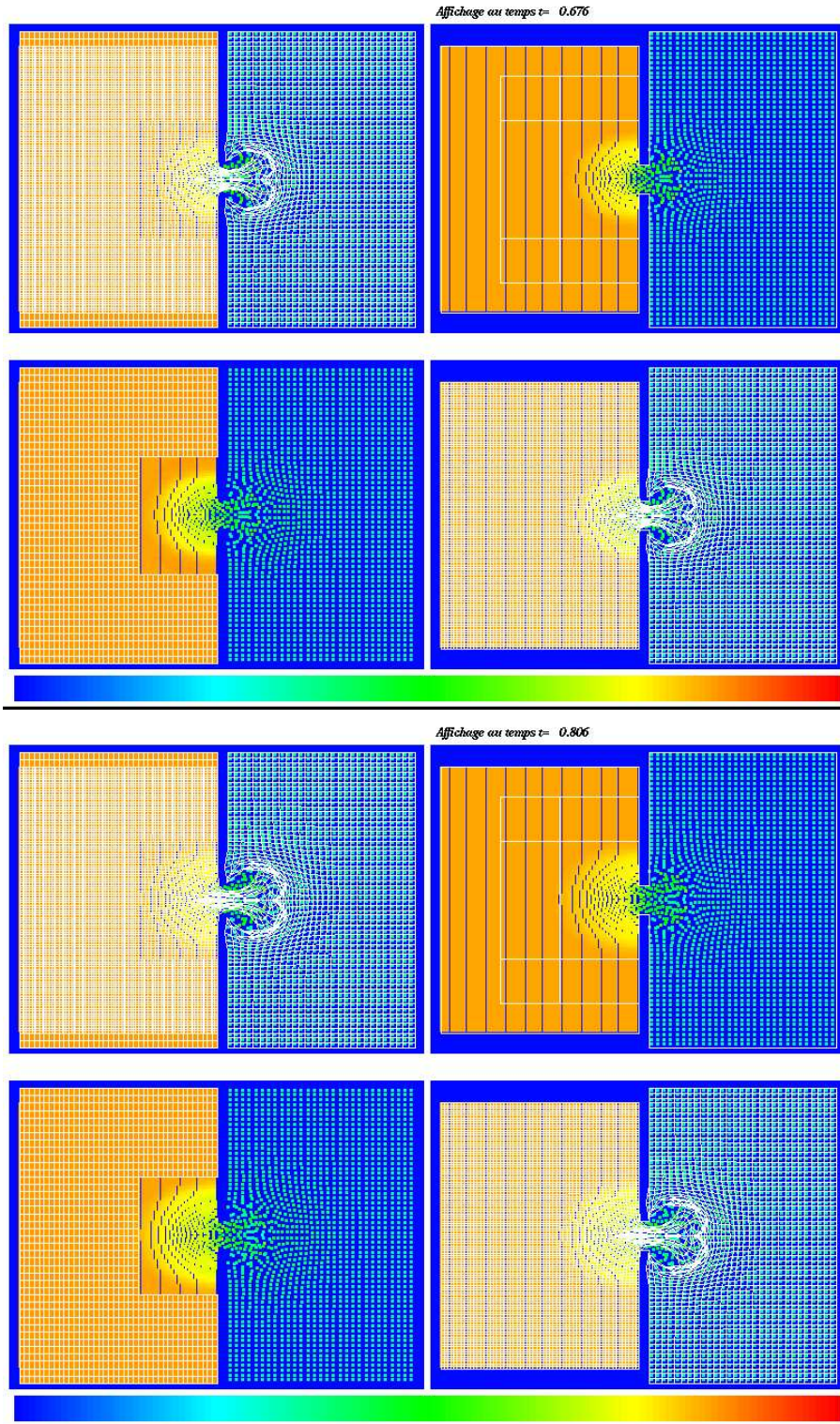


Figure 5.34 – Formation du jet : instants 5 et 6

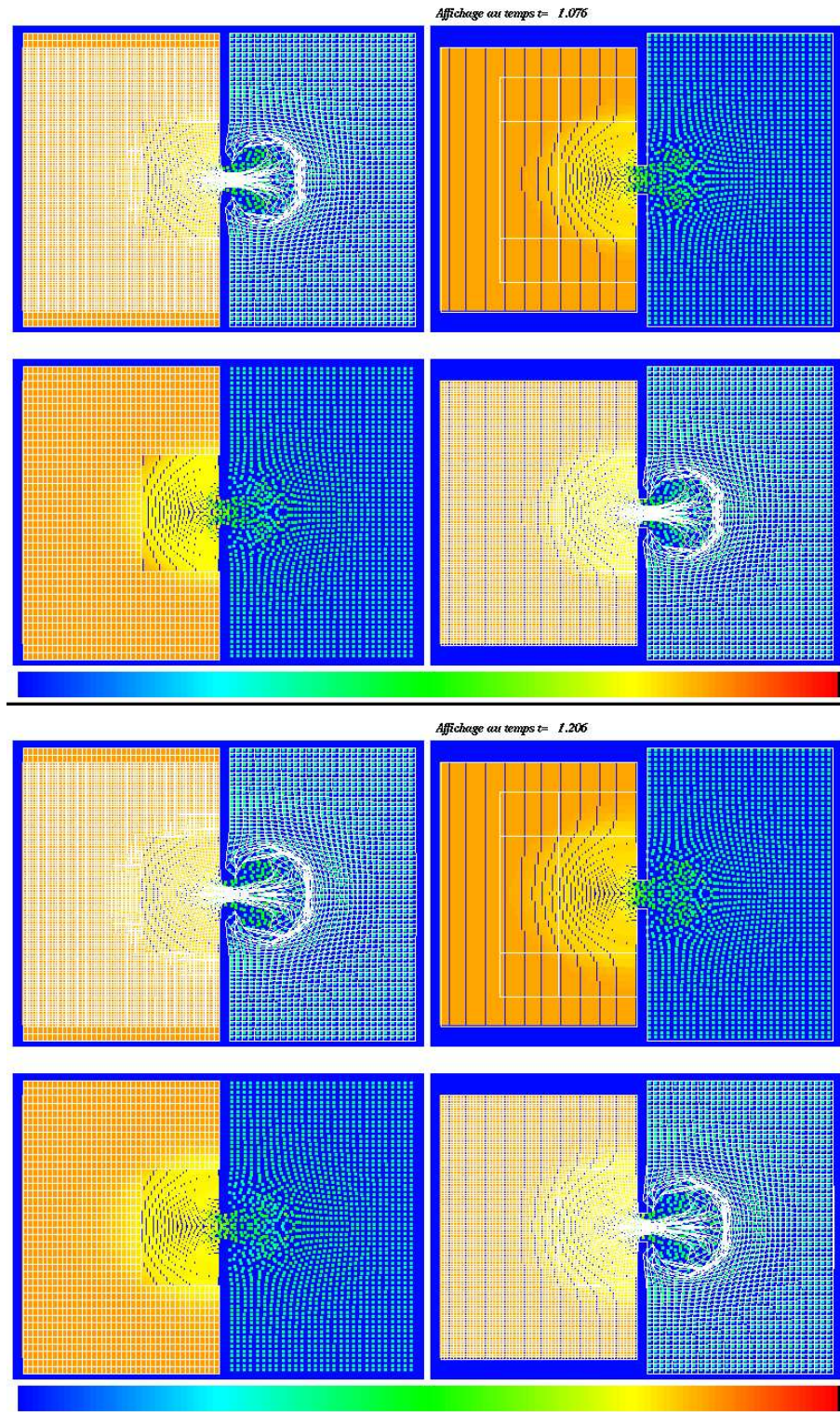


Figure 5.35 – Formation du jet : instants 8 et 9

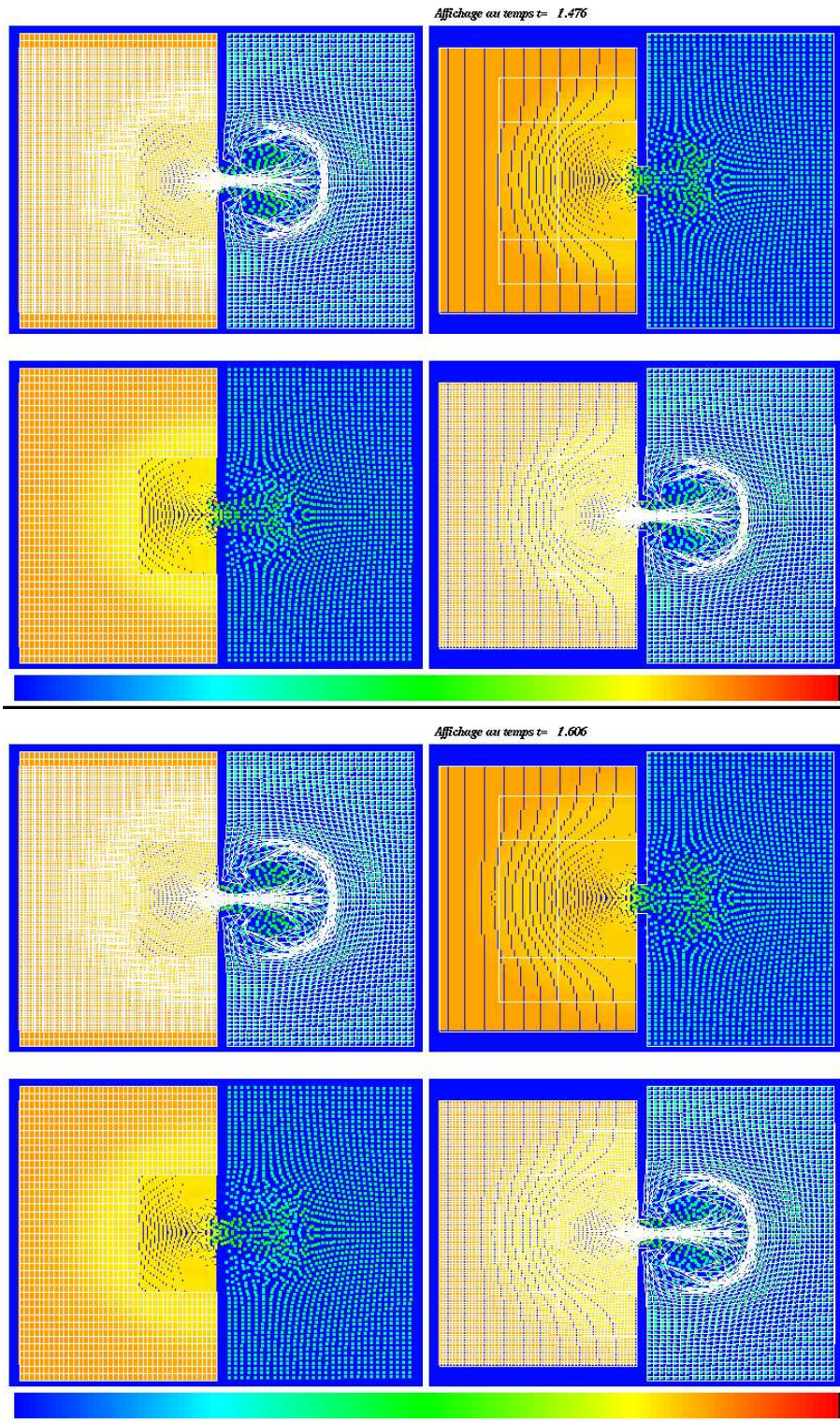


Figure 5.36 – Formation du jet : instants 11 et 12

Maillage particulière fin

On utilise les mêmes conditions initiales que précédemment, on a juste raffiné les deux maillages Volumes Finis et particuliers.

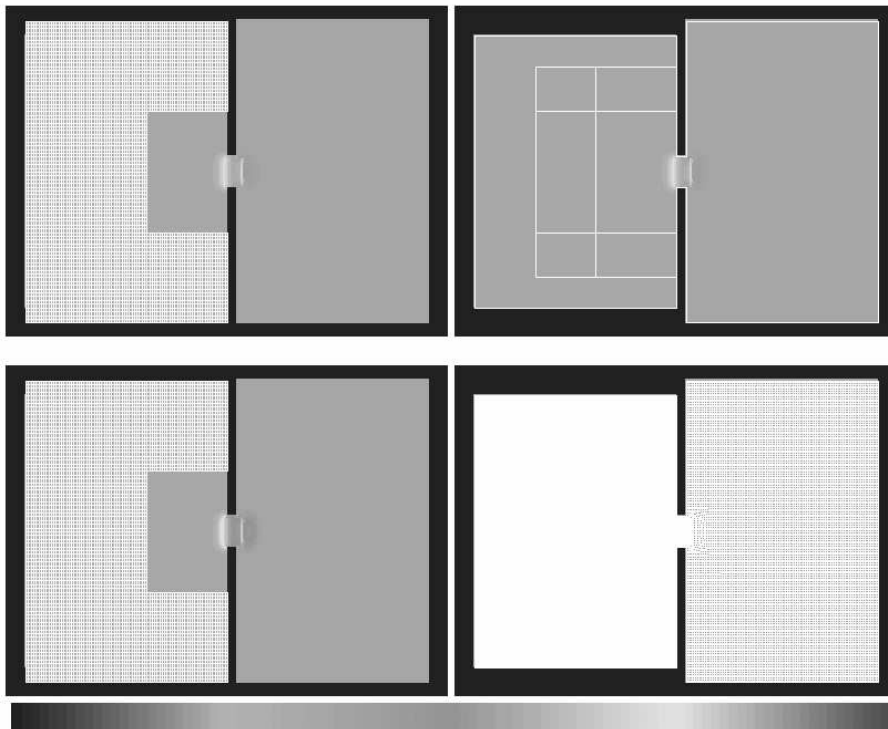


Figure 5.37 – Conditions initiales

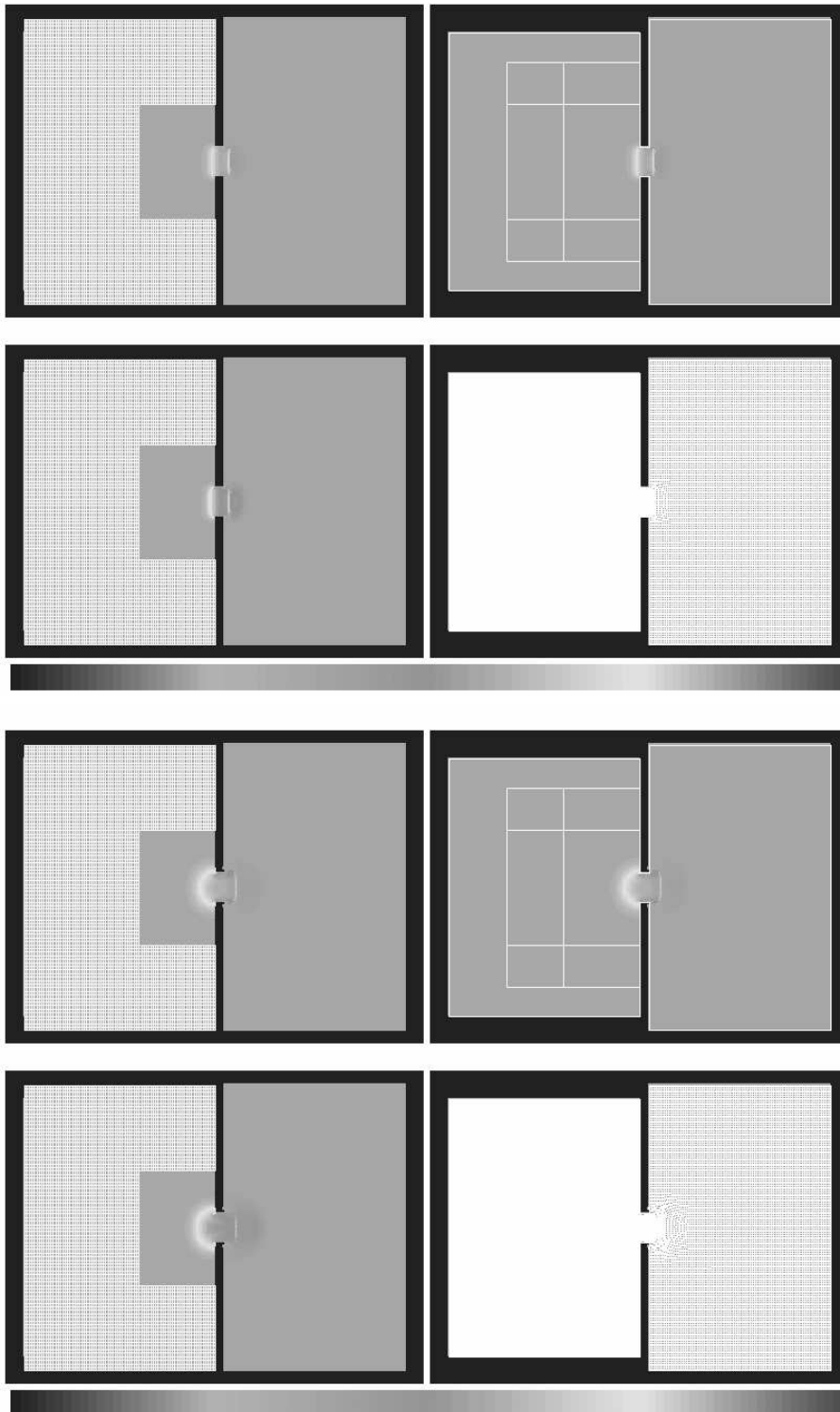


Figure 5.38 – Formation du jet : instants 1 et 2

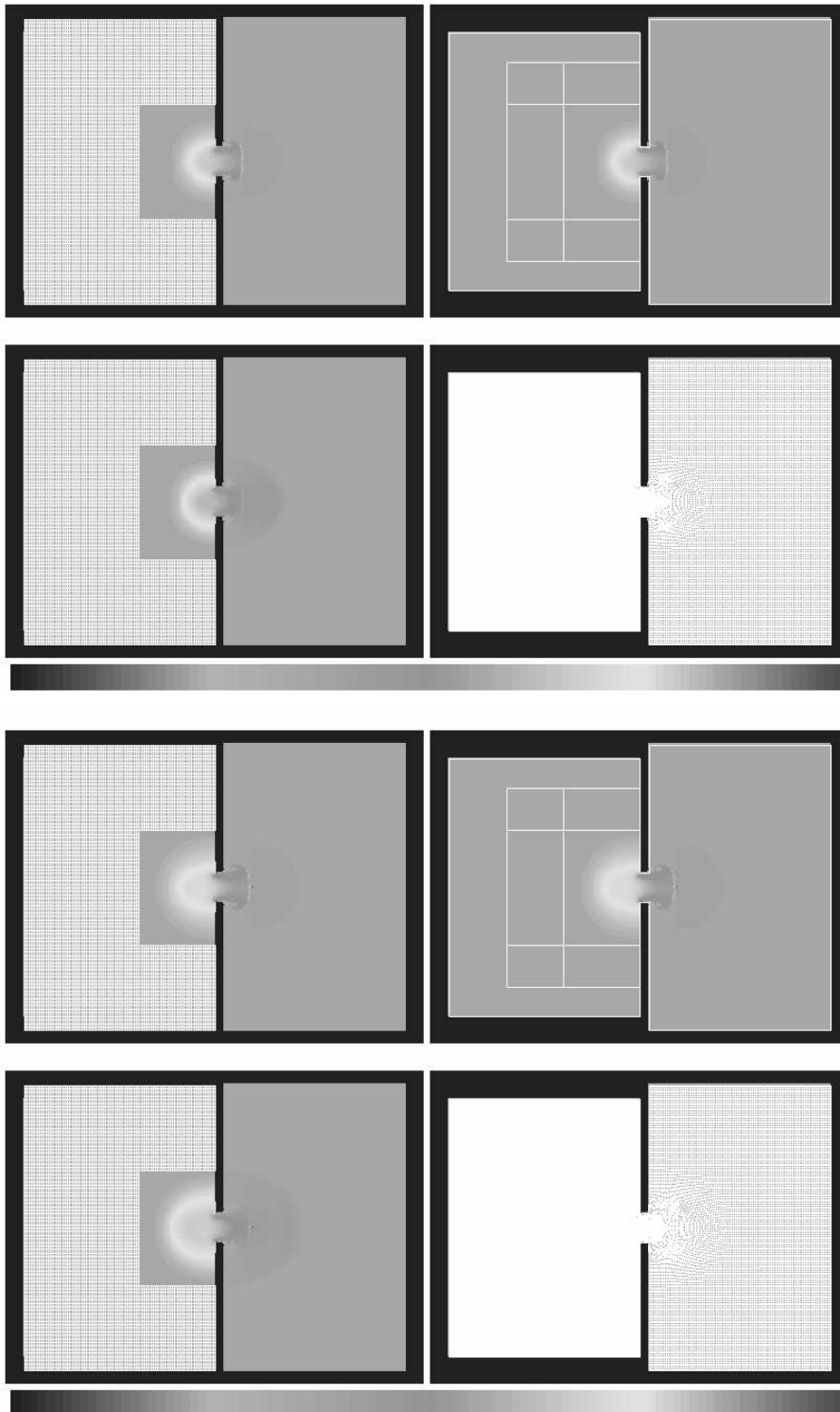


Figure 5.39 – Formation du jet : instants 3 et 4

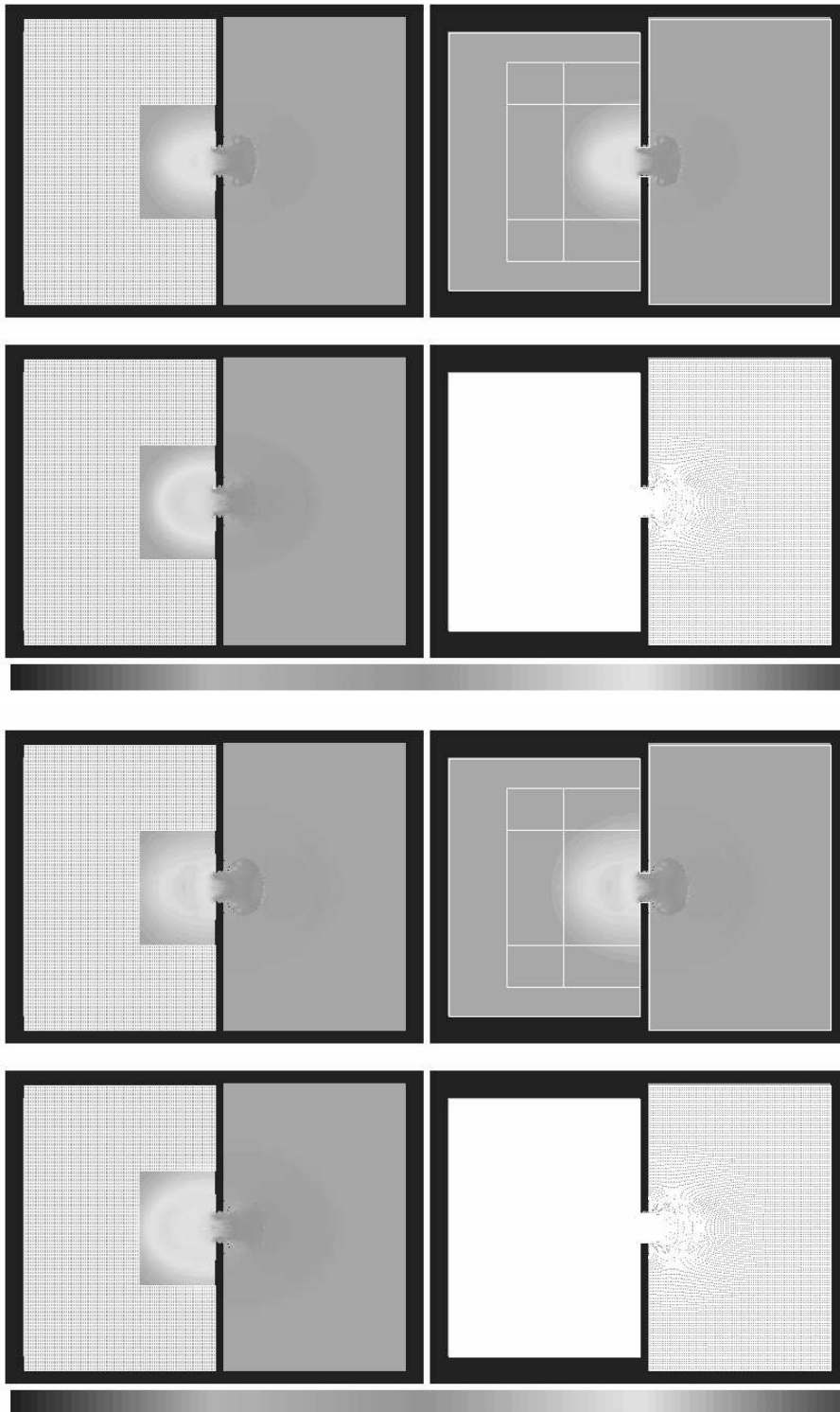


Figure 5.40 – Formation du jet : instants 5 et 6

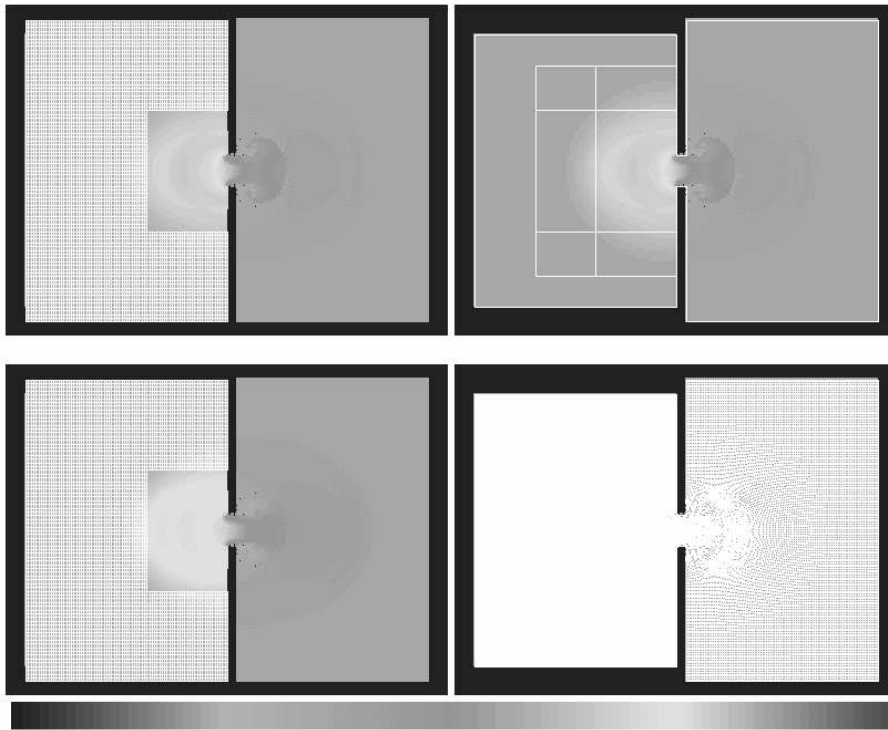


Figure 5.41 – Formation du jet : instants 7

Le jet est plus fin et plus net. On voit bien la propagation de l'onde de choc et de l'onde de détente. La zone de couplage propage correctement cette dernière à la zone Volumes Finis.

Enfin, on distingue parfaitement le retour de l'onde de choc. Cette onde réfléchiée par le bord opposé au jet le déforme et l'écarte. C'est d'ailleurs pour cette raison que le dispositif physique réel possède une soupape d'où s'échappe le jet une fois qu'il a frappé la cible.

Le calcul a été mené à bien et ces résultats très prometteurs nous semblent précurseurs de toute une palette de calculs en fluides complexes.

Chapitre 6

Conclusion

En conclusion de ce travail, nous tenons à rappeler son intérêt pour le calcul numérique et le calcul scientifique en particulier : on considère un problème physique complexe, où l'on distingue plusieurs zones de modélisation. Si l'on utilise la méthode de décomposition de domaine standard, avec un modèle spécifique de raccordement aux limites des sous-domaines, on impose une condition à la limite artificielle qui perturbe le calcul des modèles physiques étudiés. De plus, dans un calcul qui fait intervenir deux modèles physiques différents comme les systèmes visqueux et non-visqueux (respectivement Navier-Stokes et Euler), les zones physiques où ces modèles sont valables n'ont pas des frontières nettes. On peut aussi citer des passage de modèle cinétique à modèle fluide.

L'algorithme de couplage correspond en fait à la régularisation d'une telle frontière dans une décomposition de domaine. Dans le cas du passage d'un modèle visqueux à un modèle non visqueux, on peut voir le rapport entre la fonction de couplage et la viscosité physique qui tend vers 0. Cela confirme le fait que ce type de couplage doit être programmé en tenant compte des zones physiques, la zone de couplage étant la représentation mathématique de la grandeur physique qui est modifiée entre les deux modèles.

On a démontré la convergence de la méthode de couplage pour un modèle physique unique (ici hyperbolique), et pour un type de méthode numérique donné (ici les Volumes Finis). Mais on a vu qu'elle pouvait être utilisée avec deux méthodes numériques vraiment différentes, en donnant des résultats tout à fait cohérents. En perspective de ce travail, il faudrait démontrer la convergence du couplage Volumes Finis - Méthode Particulaire (ou d'autres méthodes, par exemple les méthodes spectrales), ainsi que la consistance du couplage Euler - Navier-Stokes.

On pourra aussi étudier théoriquement le couplage dans le cas système, en s'appuyant notamment sur les résultats de convergence donnés par Vila et Villedieu pour les systèmes de Friedrichs (linéaires, voir [VV97]).

Enfin, la démonstration de convergence proposée ici concerne les schémas Volumes Finis du premier ordre. Une extension intéressante de cette démonstration concerne les schémas du second ordre (et plus ...). Il faudra alors modifier l'algorithme de couplage (et surtout la projection L^2) pour obtenir un nouvel algorithme, du second ordre cette fois-ci.

Table des figures

1.1	Dispositif du test de l'injection	9
1.2	Formation du jet : couplage appliqué au cas DFG-CNRS	16
2.1	Définition de la normale	23
2.2	Fonction de couplage	26
2.3	Algorithme global : schémas puis projections	27
4.1	Conditions initiales pour $\Delta t = 0,1$	125
4.2	Résultat du calcul $\Delta t = 0,1$	126
4.3	Résultat au temps $t = 1$	127
4.4	Résultat au temps $t = 2$	127
4.5	Résultat du calcul à l'ordre 2, $\Delta t = .1$	128
4.6	Résultat du calcul $\Delta t = .01$	129
4.7	Résultat du calcul $\Delta t = .005$	129
4.8	Convergence du schéma décentré amont pour Burgers	130
4.9	Conditions Initiales et Fonction de Couplage	131
4.10	maillages 1D et fonction de couplage	132
4.11	Solution calculée au temps $t_1 = 0,22$	133
4.12	Projection au temps $t_2 = 0,42$	134
4.13	Solution calculée au temps $t_2 = 0,42$	135
4.14	Solution calculée au temps $t_3 = 0,82$	135

4.15	Solution calculée $\Delta t = 0,1$	136
4.16	Solution calculée $\Delta t = 0,01$	137
4.17	Solution calculée $\Delta t = 0,005$	137
4.18	Solution calculée $\Delta t = 0,1$ pour $h_1 > h_2$	139
4.19	Solution calculée au temps $t_3 = 0,82$	139
4.20	Solution calculée $\Delta t = 0,01$ pour $h_1 > h_2$	140
4.21	Solution calculée $\Delta t = 0,005$ pour $h_1 > h_2$	140
4.22	Convergence du couplage pour Burgers avec $CFL_1 = 1$ et $CFL_2 = 0,6$	141
4.23	Convergence du couplage pour Burgers avec $CFL_1 = 1$ et $CFL_2 = 0,6$	142
4.24	Convergence du couplage pour Burgers avec $CFL_1 = 0,6$ et $CFL_2 = 1$	143
4.25	Un plan barycentrique défini par une seule bande.	146
4.26	Deux plans barycentriques et deux bandes.	147
4.27	Fonctions α et $1-\alpha$ associées.	148
4.28	Fonctions α pour le couplage centré de taille 0,2 et 0,5.	150
4.29	Fonctions $1-\alpha$ pour le couplage centré de taille 0,2 et 0,5.	151
4.30	Fonctions α pour le couplage centré de taille 0,2 et 0,5.	152
4.31	Fonctions $1-\alpha$ pour le couplage centré de taille 0,2 et 0,5.	153
4.32	Fonctions α et $1-\alpha$ pour le couplage décalé.	154
4.33	Conditions Initiales du tube à chocs de Sod.	162
4.34	Résultat du tube à chocs de Sod sans couplage : ligne centrale.	163
4.35	Résultat du tube à chocs de Sod sans couplage : isocourbes.	164
4.36	Résultat du tube à chocs de Sod M1 : 25×13 ; M2 : 9×7	165
4.37	Résultat du tube à chocs de Sod M1 : 25×13 ; M2 : 17×12	166

4.38 Résultat du tube à chocs de Sod M1 : 60×40 ; M2 : 9×7 . . . 167

4.39 Résultat du tube à chocs de Sod M1 : 400×200 ; M2 : 9×7 . 168

4.40 Profil et résultat du tube à chocs de Sod M1 : 60×40 ; M2 :
 15×15 169

4.41 Profil et résultat du tube à chocs de Sod M1 : 60×40 ; M2 :
 15×15 170

4.42 Résultat du tube à chocs de Sod M1 : 200×100 ; M2 : 9×7 . 171

4.43 Fonctions de couplage du test déformé 173

4.44 Conditions initiales du test déformé 174

4.45 Couplage déformé instant 1 175

4.46 Couplage déformé instant 2 176

4.47 Couplage déformé instant 3 177

4.48 Couplage déformé instant 4 178

4.49 Couplage déformé instant 5 179

4.50 Couplage déformé instant 6 180

4.51 Couplage déformé instant 7 181

4.52 Couplage déformé instant 1 182

4.53 Couplage déformé instant 2 183

4.54 Couplage déformé instant 3 184

4.55 Couplage déformé instant 4 185

4.56 Couplage déformé instant 5 186

4.57 Couplage déformé instant 6 187

4.58 Couplage déformé instant 7 188

4.59 Condition initiales et zone de couplage du cas injection. . . . 191

4.60 Cas injection : instant 1 192

4.61 Cas injection : instant 3 193

4.62 Cas injection : instant 7	194
4.63 Cas injection : instant 8	195
4.64 Cas injection : instant 13	196
4.65 Cas injection : instant 16	197
4.66 Cas injection : instant 22	198
4.67 Cas injection : instant 25	199
4.68 Cas injection : instant 26	200
5.1 Déformation du maillage initial	208
5.2 Conditions initiales pour la bulle et juste avant la collision . .	223
5.3 Début du choc	224
5.4 Propagation du choc	225
5.5 Fin du choc	226
5.6 Destruction de la bulle	227
5.7 Conditions initiales et formation du jet (instant 1)	229
5.8 instants 3 et 5	230
5.9 instants 11 et 13	231
5.10 instants 16 et 20	232
5.11 Conditions initiales et formation du jet (instant 1)	233
5.12 instants 3 et 5	234
5.13 instants 11 et 13	235
5.14 instants 16 et 20	236
5.15 Conditions initiales et formation du jet (instant 1)	237
5.16 instants 3 et 5	238
5.17 instants 11 et 13	239
5.18 instants 16 et 20	240
5.19 Conditions initiales	243

5.20	Formation du jet, instants 1 et 2	244
5.21	Formation du jet, instants 3 et 4	245
5.22	Début de l'explosion du calcul, instants 5 et 6	246
5.23	Explosion du calcul, instants 7 et 8	247
5.24	Conditions initiales	248
5.25	Formation du jet : instants 1 et 2	249
5.26	Formation du jet : instants 5 et 6	250
5.27	Formation du jet : instants 13 et 14	251
5.28	Formation du jet : instants 19 et 20	252
5.29	Formation du jet : instants 29 et 30	253
5.30	Formation du jet : instants 39 et 40	254
5.31	Conditions initiales	255
5.32	Formation du jet : instants 1 et 2	256
5.33	Formation du jet : instants 1 et 2	257
5.34	Formation du jet : instants 5 et 6	258
5.35	Formation du jet : instants 8 et 9	259
5.36	Formation du jet : instants 11 et 12	260
5.37	Conditions initiales	261
5.38	Formation du jet : instants 1 et 2	262
5.39	Formation du jet : instants 3 et 4	263
5.40	Formation du jet : instants 5 et 6	264
5.41	Formation du jet : instants 7	265

ANNEXE B : Table des notations

Nom	Définition	Page de la première citation
$x \in \mathbb{R}^d$	variable d'espace	p 12
$t \in \mathbb{R}$	variable de temps	p 12
$u \in \mathbb{R}$	solution exacte du problème de Cauchy	p 12
$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	flux de la loi de conservation scalaire	p 12
Ω	domaine de calcul	p 21
$u_0 \in \mathbb{R}$	condition initiale (à support dans Ω)	p 12
$\Omega_1 \cup \Omega_2$	décomposition du domaine Ω	p 21
$\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$	zone de couplage	p 21
\mathcal{T}_{h_1} (resp. \mathcal{T}_{h_2})	triangulation sur Ω_1 (resp. Ω_2)	p 22
\mathcal{C} (resp. \mathcal{D})	une maille du maillage \mathcal{T}_{h_1} (resp. \mathcal{T}_{h_2})	p 22
h_1 (resp. h_2)	taille de la discrétisation sur \mathcal{T}_{h_1} (resp. \mathcal{T}_{h_2})	p 22
k^n (resp. Δt)	discrétisation non constante en temps (resp constante)	p 22
t^n et T	instant de la discrétisation en temps et temps final du calcul	p 22
$\vec{n}_{e,\mathcal{C}}$	vecteur normal à l'arête e de la maille \mathcal{C} vers la maille $\mathcal{C}(e)$	p 23
g_1 (resp. g_2)	flux numérique du schéma 1 (resp. 2)	p 24
$\lambda_{1\mathcal{C}}^n$ (resp. $\lambda_{2\mathcal{D}}^n$)	paramètre du schéma 1 (resp. 2)	p 24
η (resp. H_η)	entropie, fonction convexe (resp. flux d'entropie)	p 44
$\Pi_{12}(v_1^n)_{\mathcal{D}}$	Valeur de la projection de la solution approchée (v_1), constante par morceaux sur le maillage \mathcal{T}_{h_1} , sur le maillage 2, \mathcal{T}_{h_2} , prise à l'instant n .	p 25
$\mu_{\mathcal{C},\mathcal{D}}^{12}$	poids de la projection Π_{12}	p 25

$\alpha : \Omega \rightarrow [0, 1]$	fonction de couplage	p 26
$\alpha_{\mathcal{C}}$ (resp. $\alpha_{\mathcal{D}}$)	discrétisation de la fonction de couplage sur le maillage 1 (resp. 2)	p 27
$v_{1\mathcal{C}}^n$ (resp. $v_{2\mathcal{D}}^n$)	solution de l'algorithme sur la maille \mathcal{C} du maillage 1 (resp. 2), et sur $[t^n, t^{n+1}[$	p 27
$u_{1\mathcal{C}}^n$ (resp. $u_{2\mathcal{D}}^n$)	solution intermédiaire sur la maille \mathcal{C} du maillage 1 (resp. 2)	p 27
$\mathcal{E} = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$	intersection des mailles Ω_{12} dans la zone de couplage	p 28
$v_{h_1}(x, t)$ (resp. $v_{h_2}(x, t)$)	solution approchées sur le maillage 1 (resp. 2)	p 28
$u_h^\alpha(x, t)$	solution approchée moyennée	p 28
h_{12}	pas de discrétisation du maillage des intersections	théorème (3.1.2)
$C_{1,e,c}^n$ (resp. $Q_{1,e,c}^n$)	incrément (resp. viscosité) numérique du schéma 1	p 49
K_0 (resp. K_t)	support en espace de la solution, à l'instant 0 (resp. t)	p 53
\mathcal{Q}_1 (resp. \mathcal{Q}_2)	Domaine d'intégration de v_{h_1} (resp. v_{h_2})	(3.7)
k^-, k^+	pas de temps minimal et maximal	p 47
$\rho_{d,\varepsilon}$ et $\bar{\rho}_{1,\varepsilon}$	noyaux régularisant de la masse de Dirac en 0	(3.48)

Bibliographie

- [Att82] Vadyak T. Atta D.H. “A Grid Interfacing Zonal Algorithm for Three Dimensionnal Transonic Flows about Aircraft Configurations”. *AIAA*, (82-1017), 1982.
- [BA93] Benz W. and Asphaug A. “Impact Simulations with Fracture : I. Methods and Tests”. *Icarus*, 1993.
- [BCV95] Benharbit S., Chalabi A., and Vila J.P. “Numerical viscosity, and convergence of finite volume Methods for conservation laws with Boundary conditions”. *S.I.A.M Journal of Numerical Analysis*, 1995.
- [BD83] Steger J.L. Bernek J.A. and Dougherty F.C. “A flexible grid embedding technique with application to the Euler equations”. *AIAA*, (831944), 1983.
- [Ben89] Benz W. “Smooth Particle Hydrodynamics : a Review”. Technical report, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, 1989.
- [Ber87] Berger M.J. “On conservation at grid interfaces”. *SIAM J. of Numerical Analysis*, (24) :967–984, 1987.
- [BLN79] Bardos C., Leroux A.Y., and Nedelec J.C. “First order quasilinear equations with boundary conditions”. *Comm. Partial Differential Equations*, 1979.

- [BLV] Ben Moussa B., Lanson N., and Vila J.P. “Gridless methods for conservation laws, application to Euler equations”.
- [BP96] Bouchut F. and Perthame B. “Kružkov estimates for scalar conservation laws revisited”. In *preprint Univ Orleans*, number URA 1803, fév. 1996. to appear.
- [BS85] Buning P.G. Bernek J.A. and Steger J.L. “A 3-D Chimera Grid Embedding Technique”. *Proceedings of the 7th AIAA computational fluid dynamics conference, Cincinnati, AIAA*, (85-1523) :322–331, 1985.
- [BV] Ben Moussa B. and Vila J.P. “Convergence of SPH method for scalar nonlinear conservation laws”. *SIAM num. analy.*
- [BV97] Ben Moussa B. and Vila J.P. “Convergence of SPH method for scalar nonlinear conservation laws on bounded domains”. Technical report, MIP, June 1997.
- [CCL94] Cockburn B., Coquel F., and LeFloch P. “An error estimate for finite volume methods for multidimensional conservation laws”. *Math. Comp.*, 63(207) :77–103, 1994.
- [CCL95] Cockburn B., Coquel F., and LeFloch P. “Convergence of the finite volume method for multidimensional conservation laws”. *SIAM J Num. Anal.*, 32(3) :687–705, 1995.
- [CG92] Champier S. and Gallouët T. “Convergence d’un schéma décentré amont pour une équation hyperbolique linéaire sur un maillage triangulaire”. *M2AN*, 26(7) :835–853, 1992.
- [CG93] Champier S. and Gallouët T. “Convergence of an upstream finite volume scheme for a non linear hyperbolic equation on a triangular mesh”. *Numer. Math.*, 66 :139–157, 1993.

- [CM80] Crandall M. and Majda A. “Monotone Difference Approximations for Scalar Conservation Laws”. *Math. of Comp.*, 34(149) :1–21, 1980.
- [Dip85] Diperna R.J. “Measure-valued solution to conservation laws”. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 88 :223–270, 1985.
- [EKS⁺98] Egelja A., Kröner D., Schwörer R., Lanson N., Mancip M., and Vila J.P. “Combined finite volume and smoothed particle method”. *Note on Numerical Fluid Mechanics*, 1998.
- [GM77] Gingold R.A. and Monaghan J.J. “Smooth Particle Hydrodynamics : Theory and application to non spherical stars”. *MNRAS*, pages 181–375, 1977.
- [GM83] Gingold R.A. and Monaghan J.J. “Shock simulation by the particle method S.P.H”. *J.C.P.*, 52 :374–389, 1983.
- [Har64] Harlow F. “The particle-in-cell method for fluid dynamics : method in computational Physics”. *B. Alder, S. Fernbach & M. Rotenberg eds, Academic Press, N.Y.*, vol 3., 1964.
- [HH83] Harten A. and Hyman J.M. “Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws”. *J. Comp. Phys*, 1983.
- [HK89] Hernquist L. and Katz N. “TREESPH : a unification of SPH with the hierarchical tree method”. *The Astr. J. S.S.*, 70 :419–446, 1989.
- [Kre83] Kreiss H.-O. “Construction of a curvilinear grid”. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 4(2) :270–279, 1983.
- [Kru70] Kružkov S.N. “First order quasilinear equations in several independent variables”. *Math. USSR Sbornik*, 10 :217–243, 1970.

- [KV76] Kuznetsov N.N. and Volosin S.A. “On monotone difference approximations for a first order quasilinear equation”. *Soviet Math. Dokl.*, 17 :1203–1206, 1976.
- [Lac97] Lacôme J.L. “*Analyse de la méthode Particulaire ; Application à la détonique*”. PhD thesis, INSA Toulouse, Nov. 1997.
- [Lan97] Lanson N. “Rapport de DEA”. Technical report, MIP INSAT, June 1997.
- [Lan00] Lanson N. “*Etude des Méthodes Particulaires Renormalisées. Application aux problèmes de dynamique rapide*”. PhD thesis, INSA Toulouse, Dec. 2000.
- [Le 79] Le Roux A.Y. “*Approximation de quelques problèmes hyperboliques non linéaires*”. PhD thesis, Université de Rennes, 1979.
- [Luc77] Lucy L. “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis”. *Astrono. J.*, 82 :1013, 1977.
- [Mon92] Monaghan J.J. “Smooth Particle Hydrodynamics”. *nuu. Rev. Astron. Astrop.*, 30 :543–74, 1992.
- [MR87] Mas-Gallic S. and Raviart P.A. “A Particle Method for First-order Symmetric Systems”. *Numer. Math.*, 51 :323–352, 1987.
- [Par96] Paris L. “Rapport de Fin d’étude”. Technical report, INSA GMM, 1996.
- [Pär95] Pärt-Enander E. “*Overlapping Grids and Applications in Gaz Dynamics*”. PhD thesis, Dep. of Scientific Computing, Uppsala Univ., 1995.
- [PS94] Pärt-Enander E. and Sjögren B. “Conservative and non-conservative interpolation between overlapping grids for finite vo-

- lume solutions of hyperbolic problems". *Comp. Fluid*, 23(3) :551–574, 1994.
- [Rai84] Rai M.M. "A Conservative Treatment of Zonal Boundaries for Euler Equations Calculations". *AIAA*, 84-0164, 1984.
- [Rav85] Raviart P.A. "An analysis of particle methods". *Num. method in fluid dynamics*, 1127, 1985. Lecture Notes in Math.
- [Roe81] Roe P.L. "Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference scheme". *JCP*, 43 :357–372, 1981.
- [Rub82] Lee K.D. Rubbert P.E. "Patched Coordinate Systems". *Numer. Grid Generation*, Thompson ed., pages 235–252, 1982.
- [Sta77] Starius G. "Composite mesh difference methods for elliptic boundary value problems". *Numerical Mathematics*, 28 :243–258, 1977.
- [Sta80] Starius G. "On composite mesh difference methods for hyperbolic differential equations". *Numerical Mathematics*, 35 :241–255, 1980.
- [Sze89a] Szepessy A. "Convergence of a shock-capturing streamline diffusion finite element method for a scalar conservation law in two space dimension". *Math. Comp.*, 53 :527–545, 1989.
- [Sze89b] Szepessy A. "Measure valued solutions to scalar conservation laws with boundary conditions". *Arch. Rationnal Mech. Anal.*, 107 :181–193, 1989.
- [Sze91] Szepessy A. "Convergence of a streamline diffusion finite element method for a conservation law with boundary conditions". *RAIRO*, 25 :749–783, 1991.
- [Tad84] Tadmor E. "Numerical viscosity and the entropy condition". *Math. Comp.*, 43 :369–381, 1984.

- [Vil94] Vila J.P. “Convergence and Error Estimates in finite volume schemes for general multidimensional scalar conservation laws. 1 Explicite monotone schemes”. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, 28 :267–295, 1994.
- [Vil96] Vila J.P. “Weighted Particle-Finite Volume Hybrid schemes”. *Finite Volumes for Complex Applications*, 1996. F. Benkhaldoun, R. Vilsmeier, HERMES, Paris.
- [Vilar] Vila J.P. “Wheighted Particle Methods and Smooth Particle Hydrodynamic”. *M3AS*, to appear.
- [VV97] Vila J.P. and Villedieu P. “Friedricks systems with measure source term and convergence of Finite Volumes schemes”. *C.R.A.S.*, 1997.