



HAL
open science

Structure d'algèbre de Lie de la cohomologie de Hochschild en degré un et groupe d'automorphismes extérieurs

Claudia Strametz

► **To cite this version:**

Claudia Strametz. Structure d'algèbre de Lie de la cohomologie de Hochschild en degré un et groupe d'automorphismes extérieurs. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2002. Français. NNT : . tel-00002005

HAL Id: tel-00002005

<https://theses.hal.science/tel-00002005>

Submitted on 22 Nov 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER
UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
- SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC -

THÈSE

présentée à l'Université Montpellier II des Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le diplôme de DOCTORAT

Spécialité : **Mathématiques**

École doctorale : **Informations, Structures et Systèmes**

Structure d'algèbre de Lie de la cohomologie de Hochschild en degré un et groupe d'automorphismes extérieurs

par

Claudia STRAMETZ

Soutenue le 17 Juin 2002 devant le jury composé de :

M. Claude CIBILS	Université Montpellier II	Directeur de Thèse
M. Daniel GUIN	Université Montpellier II	Président du jury
M. Pierre-Louis MONTAGARD	Université Montpellier II	Co-directeur de Thèse
M. Manuel SAORIN	Universidad de Murcia	Rapporteur
Mme. Andrea SOLOTAR	Universidad de Buenos Aires	Rapporteuse

RAPPORTEURS

M. Serge BOUC	Université Paris VII
M. Manuel SAORIN	Universidad de Murcia
Mme. Andrea SOLOTAR	Universidad de Buenos Aires

Die Wissenschaft verhält sich zur Weisheit wie die Tugendhaftigkeit zur Heiligung : sie ist kalt und trocken, sie hat keine Liebe und weiß nichts von einem tiefen Gefühle des Ungenügens und der Sehnsucht.

Friedrich Nietzsche,
Unzeitgemäße Betrachtungen : Drittes Stück.
Schopenhauer als Erzieher.

La science est à la sagesse ce que la vertu est à la sainteté : elle est froide et sèche, elle n'a pas d'amour et elle ignore tout d'un sentiment profond d'insatisfaction et de nostalgie.

Friedrich Nietzsche,
Considérations inactuelles : Troisième partie.
Schopenhauer éducateur.

En tout premier lieu, je remercie chaleureusement Claude Cibils d'avoir accepté de diriger ma thèse. Sa compétence aussi bien scientifique que didactique, sa disponibilité et ses encouragements m'ont été précieux. Sa vision des mathématiques m'a donné envie de faire de la recherche.

Je souhaiterais également exprimer ma gratitude envers Pierre-Louis Montagard pour sa disponibilité, sa gentillesse et son soutien. Je le remercie de sa participation à mon jury.

Daniel Guin me fait l'honneur et le plaisir d'être dans mon jury. J'ai beaucoup apprécié son soutien constant et presque paternel, ainsi que son sens de l'humour tout au long de ces années. Qu'il trouve ma reconnaissance sincère ici.

Manuel Saorín a rapporté ma thèse avec souci et j'en suis très honorée. J'ai également été très sensible à la chaleur de son accueil à Murcia. Je le remercie vivement pour l'intérêt qu'il m'a accordé tout au long de ma thèse.

Mes remerciements vont également à Andrea Solotar pour avoir accepté d'être rapporteur. Je suis ravie qu'elle participe à mon jury.

Je remercie Serge Bouc pour la minutie avec laquelle il a rapporté cette thèse.

Je tiens à exprimer mon amitié envers tous les thésards et thésardes qui ont partagé avec moi ce périple. En particulier, je remercie Philippe de m'avoir supportée dans le bureau et d'avoir su m'égayer plus d'une fois.

Merci aux secrétaires du département et au personnel de la bibliothèque pour leur amabilité et compétence, en particulier Bernadette Lacan et Pierette Arnaud.

Table des matières

Introduction	7
Introduction (English)	11
1 L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ vue sous deux angles différents	15
1.1 La cohomologie de Hochschild	15
1.1.1 Définition et quelques résolutions projectives	15
1.1.2 Structures algébriques sur la cohomologie de Hochschild	17
1.2 Le groupe algébrique des automorphismes extérieurs $\text{Out}(\Lambda)$	20
1.2.1 Définition et algèbre de Lie de $\text{Out}(\Lambda)$	20
1.2.2 La composante de l'identité de $\text{Out}(\Lambda)$	21
2 L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ d'une algèbre monomiale Λ	25
2.1 Définition d'une algèbre monomiale et quelques notations	25
2.2 La résolution projective minimale d'une algèbre monomiale Λ	26
2.2.1 Description	27
2.2.2 Le crochet de Lie	30
2.3 Le groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)$ d'une algèbre monomiale Λ	34
2.3.1 Quelques définitions et description de $\text{Out}(\Lambda)^\circ$	34
2.3.2 Le rapport entre les descriptions de $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ et $H^1(\Lambda, \Lambda)$	37
2.4 Une graduation sur l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$	39
2.4.1 La graduation	39
2.4.2 La sous-algèbre de Lie L_{-1} de $H^1(\Lambda, \Lambda)$	40
2.4.3 La sous-algèbre de Lie L_0 de $H^1(\Lambda, \Lambda)$	42
2.5 Critères combinatoires pour l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$	47
2.5.1 La résolubilité	47
2.5.2 La (semi-)simplicité	49
2.5.3 La réductivité, la commutativité et la nilpotence	52
2.6 L'algèbre de Lie graduée $H^*(\Lambda, \Lambda)$ d'une algèbre monomiale Λ	58

3	L'algèbre de Lie $H^1(\mathbf{kG}, \mathbf{kG})$ d'algèbres de groupes	61
3.1	Les groupes dont le p -sous-groupe de Sylow est cyclique et unique	61
3.2	Les groupes abéliens	65
4	L'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ de l'extension triviale d'une algèbre	71
4.1	Définition et crochet de Lie	71
4.2	L'extension triviale d'une algèbre dont le carré du radical est nul .	77
4.2.1	Définitions et notations	77
4.2.2	Base et crochet de Lie de $H^1(TA, TA)$	78
4.2.3	Étude de l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$	82
	Références	89
	Annexe	95

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude du premier groupe de la cohomologie de Hochschild $H^1(\Lambda, \Lambda)$, en tant qu'algèbre de Lie, pour des algèbres Λ de dimension finie sur un corps k . Cela nous permet aussi d'examiner la composante de l'identité du groupe algébrique des automorphismes extérieurs $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ en caractéristique zéro. Nous étudions des algèbres monomiales, des algèbres de groupe et des extensions triviales.

Pour une algèbre monomiale Λ , nous montrons que le quotient de Lie semi-simple de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ par son radical est un produit d'algèbres de Lie $\mathfrak{pgl}(n, k)$. Des critères combinatoires pour la résolubilité, la (semi-)simplicité, la commutativité et la nilpotence de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ et $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ sont donnés. Pour une extension triviale TA d'une algèbre A dont le radical est nul, nous démontrons que le quotient de Lie semi-simple de $H^1(TA, TA)$ par son radical est un produit d'algèbres de Lie $\mathfrak{pgl}(n, k)$ et $\mathfrak{so}(2m, k)$.

Hochschild a défini en 1946 dans [Hoc] la cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, X)$ d'une k -algèbre associative Λ sur un corps k à coefficients dans un Λ -bimodule X , comme espaces vectoriels d'extensions

$$H^n(\Lambda, X) := \text{Ext}_{\Lambda^e}^n(\Lambda, X),$$

où Λ^e est l'algèbre enveloppante, $\Lambda^e := \Lambda \otimes_k \Lambda^{\text{op}}$. Il existe une résolution projective standard de Λ en tant que Λ -bimodule qui donne le complexe de cochaînes usuel de Hochschild $C^*(\Lambda, X)$ calculant la cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, X)$. Le groupe de cohomologie de Hochschild en degré un a une interprétation très concrète de structures algébriques classiques en termes de dérivations. Le premier groupe de cohomologie de Hochschild $H^1(\Lambda, X)$ est le quotient des dérivations modulo les dérivations intérieures. Une dérivation $f : \Lambda \rightarrow X$ est une application linéaire vérifiant $f(\lambda\mu) = \lambda f(\mu) + f(\lambda)\mu$, pour tout λ et μ dans Λ . Elle est intérieure s'il existe un élément $x \in X$ tel que $f(\lambda) = \lambda x - x\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. La cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$ d'une algèbre Λ , à coefficients dans le Λ -bimodule Λ , éclaire sur la dimension homologique globale de Λ (voir [Ha]) et

elle est liée à la théorie des déformations de l'algèbre Λ via sa valeur en degré deux et des obstructions convenables (voir [Ge2]).

En 1963, la structure d'algèbre de Gerstenhaber a été introduite sur la cohomologie de Hochschild par Gerstenhaber (voir [Ge1]). En 1995, Gerstenhaber et Voronov [GV1] ont montré en vue d'une conjecture de Deligne [De] que le complexe de chaînes usuel de Hochschild $C^*(\Lambda, \Lambda)$ a une structure naturelle d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près. Dans [Sch] Schwede a donné une interprétation du crochet de Lie gradué sur la cohomologie de Hochschild en termes de suites exactes de bimodules.

En particulier le premier groupe de la cohomologie de Hochschild $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est une algèbre de Lie. Bien entendu il est connu depuis longtemps que le commutateur muni $H^1(\Lambda, \Lambda)$ d'une structure d'algèbre de Lie.

Dans le cas des algèbres de dimension finie en caractéristique zéro, cette algèbre de Lie peut être considérée comme l'algèbre de Lie du groupe algébrique des automorphismes extérieurs $\text{Out}(\Lambda) = \text{Aut}(\Lambda)/\text{Inn}(\Lambda)$ de l'algèbre Λ . Notons que, si Λ est une algèbre basique, alors le groupe $\text{Out}(\Lambda)$ est isomorphe au groupe de Picard $\text{Pic}_k(\Lambda)$ (voir [Po]). Le groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)$ a été étudié par Guil-Asensio et Saorín dans [GAS1]. Huisgen-Zimmermann et Saorín ont prouvé dans [HZS] que la composante de l'identité $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ du groupe des automorphismes extérieurs est invariante sous équivalence dérivée. Par ailleurs, Keller a montré dans [Ke] que la cohomologie de Hochschild est préservée sous équivalence dérivée comme une (super-)algèbre de Lie graduée. Par conséquent, l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est invariante sous équivalence dérivée.

Dans cette thèse, nous étudions la structure d'algèbre de Lie du premier groupe de la cohomologie de Hochschild $H^1(\Lambda, \Lambda)$ pour des algèbres Λ de dimension finie sur un corps k .

Dans le premier chapitre, cette algèbre de Lie est introduite de deux manières différentes, à savoir comme le premier groupe de la cohomologie de Hochschild et comme l'algèbre de Lie du groupe algébrique des automorphismes extérieurs $\text{Out}(\Lambda)$. Nous définissons la cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$ et nous donnons en particulier des résolutions projectives permettant de la calculer. Les structures algébriques sur la cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$ sont rappelées. Ensuite nous introduisons le groupe algébrique des automorphismes extérieurs de Λ et nous présentons les travaux de Pollack [Po] et de Guil-Asensio et Saorín [GAS1] sur ce sujet.

Le deuxième chapitre constitue la partie principale de cette thèse. Il est dédié à l'étude de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ d'une k -algèbre monomiale Λ de dimension

finie. Cette étude se fait en termes combinatoires du carquois de Λ , sans restriction sur la caractéristique du corps k et en ne travaillant qu'avec des méthodes algébriques.

Après avoir donné quelques définitions et avoir fixé les notations, nous utilisons, dans la deuxième section, la résolution projective minimale d'une algèbre monomiale Λ (en tant que Λ -bimodule), due à Bardzell [Ba], afin d'obtenir une description combinatoire de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ en termes de chemins parallèles (voir corollaire 2.2.1.9 et théorème 2.2.2.1).

Ensuite, nous examinons, dans la troisième section, le lien entre cette description de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ et les travaux de Guil-Asensio et Saorín [GAS2] sur le groupe algébrique des automorphismes extérieurs d'algèbres monomiales.

Ce qui est crucial pour l'étude de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est le fait que la longueur des chemins du carquois de Λ induit une graduation sur $H^1(\Lambda, \Lambda) = \bigoplus_{i \geq -1} L_i$. On y consacre la quatrième section. Après avoir étudié la sous-algèbre de Lie L_{-1} de $H^1(\Lambda, \Lambda)$, nous donnons une base de la sous-algèbre de Lie L_0 de $H^1(\Lambda, \Lambda)$. Nous calculons son radical, ainsi que le radical de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ (voir théorème 2.4.3.6). Nous montrons que le quotient de Lie semi-simple de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ par son radical est un produit d'algèbres de Lie $\mathfrak{pgl}(n, k)$ (voir corollaire 2.4.3.7). Remarquons que cet isomorphisme est explicite.

Dans la cinquième section, nous donnons des critères combinatoires pour quelques propriétés de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$, ainsi que de la composante de l'identité du groupe algébrique des automorphismes extérieurs en caractéristique zéro. Ceci est fait pour la résolubilité, la semi-simplicité (voir théorème 2.5.2.1 et corollaire 2.5.2.4), la (presque) simplicité, la réductivité, la commutativité et la nilpotence. Ce deuxième chapitre se termine par une section sur l'algèbre de Lie graduée $H^*(\Lambda, \Lambda)$ d'une algèbre monomiale Λ . Nous calculons le radical de $H^*(\Lambda, \Lambda)$ et le quotient de $H^*(\Lambda, \Lambda)$ par son radical dans le cas où le carquois de Λ n'a pas de cycle orienté.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ de quelques algèbres de groupes kG pour un corps de caractéristique $p > 0$.

Une Morita équivalence donnée par Gabriel [Ga] pour $\text{car } k = p > 0$ entre les algèbres de groupes kG , où le groupe fini G admet un seul p -sous-groupe de Sylow cyclique, et certaines algèbres monomiales nous permet d'appliquer des résultats du chapitre précédent. On montre ainsi que l'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est semi-simple si et seulement si $\text{car } k = p \neq 2$ et le groupe G est le produit direct d'un groupe K d'ordre q premier à p et du groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dans ce cas $H^1(kG, kG)$ est un produit d'algèbres de Lie de Witt (voir théorème 3.1.0.3). Le cas des groupes finis abéliens est étudié dans la deuxième section de ce cha-

pitre. Cibils et Solotar [CS0] ont montré que, dans ce cas, la cohomologie de Hochschild $H^*(kG, kG)$ est isomorphe, en tant qu'algèbre, à $H^*(G, k) \otimes_k kG$, où $H^*(G, k)$ désigne la cohomologie de groupes. Nous utilisons leur isomorphisme pour munir $H^1(G, k) \otimes_k kG$ d'une structure d'algèbre de Lie. Ainsi on montre que $H^1(kG, kG)$ est un produit d'algèbres de Lie $H^1(kS, kS)$, où S désigne le p -sous-groupe de Sylow du groupe fini abélien G (voir théorème 3.2.0.2). L'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est semi-simple si et seulement si le p -sous-groupe de Sylow S de G est élémentaire et $S \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si car $k = 2$. Dans ce dernier cas, $H^1(kG, kG)$ est un produit d'algèbres de Lie de Jacobson et Witt (voir corollaire 3.2.0.4).

Le quatrième chapitre est voué à l'étude de l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ de l'extension triviale TA d'une algèbre A .

Ce chapitre de la thèse doit beaucoup à Manuel Saorín qui m'a initiée à ce sujet pendant mon excellent séjour à Murcia et que je remercie ici.

Grâce à un isomorphisme explicite nous transférons la structure d'algèbre de Lie de $H^1(TA, TA)$ au k -espace vectoriel $Z(A) \oplus H^1(A, A) \oplus H_1(A, A)^* \oplus \text{Alt}_A(DA)$ (voir théorèmes 4.1.0.3 et 4.1.0.6). Ensuite, l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ est étudiée dans le cas où A est une k -algèbre de radical carré zéro et k un corps dont la caractéristique est différente de 2. Nous utilisons des résultats obtenus pour les algèbres monomiales dans le chapitre 2. D'abord, nous donnons une base de $Z(A) \oplus H^1(A, A) \oplus H_1(A, A)^* \oplus \text{Alt}_A(DA)$ (voir théorème 4.2.2.2) dans laquelle nous exprimons ensuite le crochet de Lie de $H^1(TA, TA)$. Ce dernier point nous permet de calculer le radical de l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ et de montrer que le quotient semi-simple de l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ par son radical est un produit d'algèbres de Lie $\mathfrak{pgl}(n, k)$ et $\mathfrak{so}(2m, k)$ (voir théorème 4.2.3.3). En particulier, l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ n'est jamais semi-simple. Ce travail se termine avec des critères combinatoires sur la résolubilité et sur la commutativité de l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ et de la composante de l'identité du groupe algébrique des automorphismes extérieurs $\text{Out}(TA)^\circ$.

Une partie des résultats de cette thèse est annoncée dans une note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences [St2] et figurent dans la prépublication [St3] (soumise) jointe en annexe à cette thèse.

Une introduction en anglais suit.

Introduction (English)

This thesis is devoted to the study of the first Hochschild cohomology group $H^1(\Lambda, \Lambda)$, as a Lie algebra, for algebras Λ of finite dimension over a field k . This allows us also to examine the identity component of the algebraic group of outer automorphisms $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ in characteristic zero. We study monomial algebras, group algebras and trivial extensions.

For a monomial algebra Λ , we show that the semisimple Lie quotient of $H^1(\Lambda, \Lambda)$ by its radical is a product of Lie algebras $\mathfrak{pgl}(n, k)$. Combinatoric criteria for the solvability, the (semi-)simplicity, the commutativity and the nilpotency of $H^1(\Lambda, \Lambda)$ and $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ are given. For a trivial extension TA of a radical square zero algebra A , we prove that the semisimple Lie quotient of $H^1(TA, TA)$ by its radical is a product of Lie algebras $\mathfrak{pgl}(n, k)$ and $\mathfrak{so}(2m, k)$.

Hochschild [Hoc] defined in 1946 the Hochschild cohomology $H^*(\Lambda, X)$ of an associative k -algebra Λ over a field k , with coefficients in a Λ -bimodule X , as vector spaces of extensions

$$H^n(\Lambda, X) := \text{Ext}_{\Lambda^e}^n(\Lambda, X),$$

where Λ^e is the enveloping algebra, $\Lambda^e := \Lambda \otimes_k \Lambda^{\text{op}}$. There exists a standard projective resolution of Λ as a Λ -bimodule which yields the usual cochain complex defined by Hochschild $C^*(\Lambda, X)$ computing the Hochschild cohomology $H^*(\Lambda, X)$. The Hochschild cohomology group of degree one has a very concrete interpretation of classical algebraic structures in terms of derivations. The first Hochschild cohomology group $H^1(\Lambda, X)$ is the quotient of the derivations by the inner derivations. A derivation $f : \Lambda \rightarrow X$ is a linear map satisfying $f(\lambda\mu) = \lambda f(\mu) + f(\lambda)\mu$ for all λ and μ in Λ . It is inner if there exists an element $x \in X$ such that $f(\lambda) = \lambda x - x\lambda$ for all $\lambda \in \Lambda$.

The Hochschild cohomology $H^*(\Lambda, \Lambda)$ of an algebra Λ with coefficients in the Λ -bimodule Λ gives an insight into the homological global dimension of Λ (see [Ha]) and it is closely related to the deformation theory of the algebra Λ via its value in degree two and suitable obstructions (see [Ge2]).

In 1963 the structure of a Gerstenhaber algebra was introduced on the Hochschild

cohomology by Gerstenhaber (see [Ge1]). In 1995 Gerstenhaber and Voronov [GV1] proved that the usual cochain complex of Hochschild $C^*(\Lambda, \Lambda)$ has a natural structure of a homotopy Gerstenhaber algebra; this is related to a conjecture by Deligne [De]. In [Sch] Schwede gave an interpretation of the graded Lie bracket on the Hochschild cohomology in terms of exact sequences of bimodules.

In particular the first Hochschild cohomology group $H^1(\Lambda, \Lambda)$ is a Lie algebra. Of course it has been known for a long time that the commutator equips $H^1(\Lambda, \Lambda)$ with a Lie algebra structure. In the case of finite dimensional algebras in characteristic zero this Lie algebra can be considered as the Lie algebra of the algebraic group of outer automorphisms $\text{Out}(\Lambda) = \text{Aut}(\Lambda)/\text{Inn}(\Lambda)$ of the algebra Λ . Note that if Λ is a basic algebra then the group $\text{Out}(\Lambda)$ is isomorphic to the Picard group $\text{Pic}_k(\Lambda)$ (see [Po]). The algebraic group $\text{Out}(\Lambda)$ has been studied by Guil-Asensio and Saorín in [GAS1]. Huisgen-Zimmermann and Saorín have proved in [HZS] that the identity component $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ of the group of outer automorphisms is invariant under derived equivalence. Moreover Keller showed in [Ke] that Hochschild cohomology is preserved under derived equivalence as a graded Lie algebra. Thus the Lie algebra $H^1(\Lambda, \Lambda)$ is invariant under derived equivalence.

In this thesis, we study the first Hochschild cohomology group $H^1(\Lambda, \Lambda)$, as a Lie algebra, for finite dimensional algebras Λ over a field k .

In the first chapter this Lie algebra is introduced in two different ways, namely as the first Hochschild cohomology group and as the Lie algebra of the algebraic group of outer automorphisms $\text{Out}(\Lambda)$. We define the Hochschild cohomology $H^*(\Lambda, \Lambda)$ and we give in particular projective resolutions allowing to compute it. The algebraic structures on the Hochschild cohomology $H^*(\Lambda, \Lambda)$ are recalled. We then introduce the algebraic group of outer automorphisms of Λ and we present results on this algebraic group given by Pollack [Po] and Guil-Asensio and Saorín [GAS1].

The second chapter forms the main part of this thesis. It is devoted to the Lie algebra $H^1(\Lambda, \Lambda)$ of a finite dimensional monomial k -algebra Λ . We study this Lie algebra in terms of the combinatorics of the quiver of Λ , without any restriction on the characteristic of the field k , using only algebraic methods.

First we give some definitions and we fix the notations. In the second section we use the minimal projective resolution of a monomial algebra Λ (as a Λ -bimodule), due to Bardzell [Ba], in order to get a handy combinatoric description of the Lie algebra $H^1(\Lambda, \Lambda)$ in terms of parallel paths (see corollary 2.2.1.9 and theorem 2.2.2.1).

The purpose of the third section is to link our description of the Lie algebra $H^1(\Lambda, \Lambda)$ to Guil-Asensio and Saorín's work [GAS2] on the algebraic group of outer automorphisms of monomial algebras.

The fact that the length of the paths of the quiver of Λ introduce a grading on $H^1(\Lambda, \Lambda) = \bigoplus_{i \geq -1} L_i$ is crucial for the examination of the Lie algebra $H^1(\Lambda, \Lambda)$. We dedicate the fourth section to it. First the Lie subalgebra L_{-1} of $H^1(\Lambda, \Lambda)$ is studied. Then, we give a basis of the Lie subalgebra L_0 of $H^1(\Lambda, \Lambda)$ and we compute its radical, as well as the radical of $H^1(\Lambda, \Lambda)$ (see theorem 2.4.3.6). It is shown that the semisimple Lie quotient of $H^1(\Lambda, \Lambda)$ by its radical is a product of Lie algebras $\mathfrak{pgl}(n, k)$ (see corollary 2.4.3.7). Note that the isomorphism is explicit.

In the fifth section we give combinatoric criteria for some properties of the Lie algebra $H^1(\Lambda, \Lambda)$, as well as of the identity component of the algebraic group of outer automorphisms in characteristic zero. This is done for the solvability, the semisimplicity, (see theorem 2.5.2.1 and corollary 2.5.2.4), the (almost) simplicity, the reductivity, the commutativity and the nilpotency.

This second chapter ends with a section on the graded Lie algebra $H^*(\Lambda, \Lambda)$ of a monomial algebra Λ . We compute the radical of $H^*(\Lambda, \Lambda)$ and the quotient of $H^*(\Lambda, \Lambda)$ by its radical in the case where the quiver of Λ does not have oriented cycles.

In the third chapter we study the Lie algebra $H^1(kG, kG)$ of some group algebras kG for a field of characteristic $p > 0$. A Morita equivalence given by Gabriel [Ga] for $\text{char } k = p > 0$ between the group algebras kG , where the finite group G admits a single cyclic Sylow p -subgroup, and certain monomial algebras allows us to apply results of the preceding chapter. We show that the Lie algebra $H^1(kG, kG)$ is semisimple if and only if $\text{char } k = p \neq 2$ and the group G is the direct product of a group K of order q prime to p and of the cyclic group $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. In this case $H^1(kG, kG)$ is a product of Witt Lie algebras (see theorem 3.1.0.3).

The case of finite abelian groups is treated in the second section of this chapter. Cibils and Solotar [CSo] showed that, in this case, the Hochschild cohomology $H^*(kG, kG)$ is isomorphic, as an algebra, to $H^*(G, k) \otimes_k kG$, where $H^*(G, k)$ denotes the group cohomology. We use their isomorphism to equip $H^1(G, k) \otimes_k kG$ with a Lie algebra structure. Thus we show that $H^1(kG, kG)$ is a product of Lie algebras $H^1(kS, kS)$, where S denotes the Sylow p -subgroup of the finite abelian group G (see theorem 3.2.0.2). The Lie algebra $H^1(kG, kG)$ is semisimple if and only if the Sylow p -subgroup S of G is elementary and, if $\text{char } k = 2$, $S \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. In this last case $H^1(kG, kG)$ is a product of Jacobson and Witt Lie algebras (see corollary 3.2.0.4).

In the fourth chapter we study the Lie algebra $H^1(TA, TA)$ of the trivial extension TA of an algebra A .

This chapter of the thesis owes much to Manuel Saorín who introduced me to this subject during my excellent stay in Murcia and whom I thank here.

Thanks to an explicit linear isomorphism we transfer the Lie algebra structure of $H^1(TA, TA)$ to the k -vector space $Z(A) \oplus H^1(A, A) \oplus H_1(A, A)^* \oplus \text{Alt}_A(DA)$ (see theorems 4.1.0.3 and 4.1.0.6). Next, the Lie algebra $H^1(TA, TA)$ is studied in the case where A is a radical square zero k -algebra and k is a field whose characteristic is different from 2. We use results obtained for monomial algebras in chapter 2. First, we give a basis of the sum of k -vector spaces $Z(A) \oplus H^1(A, A) \oplus H_1(A, A)^* \oplus \text{Alt}_A(DA)$ (see theorem 4.2.2.2) in which we then express the Lie bracket of $H^1(TA, TA)$. This allows us to compute the radical of the Lie algebra $H^1(TA, TA)$ and to show that the semisimple quotient of the Lie algebra $H^1(TA, TA)$ by its radical is a product of Lie algebras $\mathfrak{pgl}(n, k)$ and $\mathfrak{so}(2m, k)$ (see theorem 4.2.3.3). In particular the Lie algebra $H^1(TA, TA)$ is never semisimple. This thesis ends with combinatoric criteria on the solvability and the commutativity of the Lie algebra $H^1(TA, TA)$ and of the identity component of the algebraic group of outer automorphisms $\text{Out}(TA)^\circ$.

Some of the results of this thesis are announced in a note to the Comptes rendus de l'Académie des Sciences [St2] and are contained the preprint [St3] (submitted) which is enclosed in the appendix of this thesis.

Chapitre 1

L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ vue sous deux angles différents

Ce travail est dédié à l'étude de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ associée à une algèbre Λ de dimension finie. Dans ce chapitre, nous allons présenter cette algèbre de Lie de deux manières différentes, à savoir, d'une part, comme le premier groupe de la cohomologie de Hochschild et, d'autre part, comme l'algèbre de Lie du groupe algébrique des automorphismes extérieurs de Λ . Nous présentons aussi le cadre théorique plus large dans lequel ces structures s'inscrivent.

1.1 La cohomologie de Hochschild

1.1.1 Définition et quelques résolutions projectives

Soient Λ une k -algèbre associative de dimension finie sur un corps k et X un Λ -bimodule. Notons que, si $\Lambda^e := \Lambda \otimes_k \Lambda^{\text{op}}$ est l'algèbre enveloppante, alors un Λ -bimodule X peut être considéré comme un Λ^e -module à gauche par l'action $(\lambda \otimes_k \mu) \cdot x = \lambda x \mu$ pour $\lambda, \mu \in \Lambda$ et $x \in X$. La cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, X)$ de Λ à coefficients dans X est définie comme étant le k -espace vectoriel $\text{Ext}_{\Lambda^e}^*(\Lambda, X)$. Elle peut donc se calculer à partir d'une résolution projective de Λ en tant que Λ -bimodule. La résolution standard $\mathcal{P}_{\text{Hoch}}$ est

$$\cdots \rightarrow \Lambda \otimes_k^n \xrightarrow{\delta} \Lambda \otimes_k^{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \Lambda \otimes_k \Lambda \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \rightarrow 0,$$

où $\varepsilon(x_1 \otimes_k x_2) = x_1 x_2$ et

$$\delta(x_1 \otimes_k \cdots \otimes_k x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} x_1 \otimes_k \cdots \otimes_k x_i x_{i+1} \otimes_k \cdots \otimes_k x_n,$$

pour $x_1, \dots, x_n \in \Lambda$.

Lemme 1.1.1.1

Soient A une sous-algèbre de Λ et M un A -bimodule. Alors les k -espaces vectoriels $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda \otimes_A M \otimes_A \Lambda, X)$ et $\text{Hom}_{A^e}(M, X)$ sont isomorphes.

Démonstration:

Le Λ -bimodule X est un A -bimodule par restriction. On vérifie aisément que le morphisme linéaire $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda \otimes_A M \otimes_A \Lambda, X) \rightarrow \text{Hom}_{A^e}(M, X)$ qui envoie un morphisme de Λ -bimodules $f : \Lambda \otimes_A M \otimes_A \Lambda \rightarrow X$ sur le morphisme de A -bimodules $M \rightarrow X$ donné par $m \mapsto f(1_\Lambda \otimes_A m \otimes_A 1_\Lambda)$ et le morphisme linéaire $\text{Hom}_{A^e}(M, X) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda \otimes_A M \otimes_A \Lambda, X)$ qui associe à $g : M \rightarrow X$ l'élément $\Lambda \otimes_A M \otimes_A \Lambda \rightarrow X$, $\lambda \otimes_A m \otimes_A \mu \mapsto \lambda g(m) \mu$ sont inverses l'un de l'autre.

q.e.d. 1.1.1.1

En appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\Lambda^e}(-, X)$ à $\mathcal{P}_{\text{Hoch}}$ sans le terme Λ de droite et en identifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda \otimes_k \Lambda^{\otimes_k n} \otimes_k \Lambda, X)$ et $\text{Hom}_k(\Lambda^{\otimes_k n}, X)$, grâce au lemme précédent, on obtient le complexe de cochaînes $\mathcal{C}_{\text{Hoch}}(\Lambda, X)$ défini par Hochschild dans [Hoc] en 1946 :

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{d_0} \text{Hom}_k(\Lambda, X) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_k(\Lambda^{\otimes_k n}, X) \xrightarrow{d_n} \text{Hom}_k(\Lambda^{\otimes_k^{n+1}}, X) \rightarrow \cdots,$$

où $(d_0 x)(x_1) = x_1 x - x x_1$, pour tout $x \in X$ et $x_1 \in \Lambda$ et

$$\begin{aligned} (d_n f)(x_1 \otimes_k \cdots \otimes_k x_{n+1}) &= x_1 f(x_2 \otimes_k \cdots \otimes_k x_{n+1}) + \\ &\quad \sum_{i=1}^n (-1)^i f(x_1 \otimes_k \cdots \otimes_k x_i x_{i+1} \otimes_k \cdots \otimes_k x_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(x_1 \otimes_k \cdots \otimes_k x_n) x_{n+1}, \end{aligned}$$

pour tout $f \in \text{Hom}_k(\Lambda^{\otimes_k n}, X)$, $n \in \mathbb{N}$, et $x_1, \dots, x_{n+1} \in \Lambda$. On note par $C^n(\Lambda, X)$ le k -espace vectoriel $\text{Hom}_k(\Lambda^{\otimes_k n}, X)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et par $C^*(\Lambda, X) := \prod_{n \in \mathbb{N}} C^n(\Lambda, X)$ l'espace de cochaînes de Hochschild à coefficients dans X .

Si l'algèbre Λ contient une sous-algèbre séparable E , alors la résolution projective suivante \mathcal{P}_{rel} permet de réduire la taille du complexe utilisé pour calculer la cohomologie de Hochschild (voir [GS2]) :

$$\cdots \rightarrow \Lambda^{\otimes_E n} \xrightarrow{\delta} \Lambda^{\otimes_E^{n-1}} \rightarrow \cdots \rightarrow \Lambda \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \rightarrow 0,$$

où $\varepsilon(x_1 \otimes_E x_2) = x_1 x_2$ et

$$\delta(x_1 \otimes_E \cdots \otimes_E x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} x_1 \otimes_E \cdots \otimes_E x_i x_{i+1} \otimes_E \cdots \otimes_E x_n,$$

pour $x_1, \dots, x_n \in \Lambda$. En appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\Lambda^e}(-, X)$ à \mathcal{P}_{rel} et en identifiant $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda \otimes_E \Lambda^{\otimes_E^n} \otimes_E \Lambda, X)$ avec $\text{Hom}_{E^e}(\Lambda^{\otimes_E^n}, X)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, grâce au lemme 1.1.1.1, on obtient le complexe de cochaînes $\mathcal{C}_{\text{rel}}(\Lambda, X)$:

$$0 \rightarrow X^E \xrightarrow{d_0} \text{Hom}_{E^e}(\Lambda, X) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_{E^e}(\Lambda^{\otimes_E^n}, X) \xrightarrow{d_n} \text{Hom}_{E^e}(\Lambda^{\otimes_E^{n+1}}, X) \rightarrow \cdots,$$

avec $X^E := \{x \in X \mid ex = xe \forall e \in E\}$ où les morphismes d_n , $n \in \mathbb{N}$, sont obtenus comme les restrictions des morphismes correspondants dans $\mathcal{C}_{\text{Hoch}}(\Lambda, X)$. En effet, on peut projeter $\Lambda^{\otimes_k^n}$ sur $\Lambda^{\otimes_E^n}$ de sorte que l'on a une injection de $\text{Hom}_k(\Lambda^{\otimes_E^n}, \Lambda)$ dans $\text{Hom}_k(\Lambda^{\otimes_k^n}, \Lambda)$ et, par ailleurs, on a $\text{Hom}_{E^e}(\Lambda^{\otimes_E^n}, \Lambda) \hookrightarrow \text{Hom}_k(\Lambda^{\otimes_E^n}, \Lambda)$. Ainsi $\mathcal{C}_{\text{rel}}(\Lambda, X)$ forme un sous-complexe de $\mathcal{C}_{\text{Hoch}}(\Lambda, X)$.

Désignons par r le radical de Jacobson de Λ . Si Λ/r est séparable, alors le théorème de Wedderburn-Malcev (voir [Pi] 11.6) affirme qu'il existe une sous-algèbre E de Λ telle que $\Lambda = E \oplus r$ en tant que k -espace vectoriel. La k -algèbre Λ admet par exemple toujours une telle décomposition si le corps k est parfait. Dans ce cas, on a une résolution projective \mathcal{P}_{red} de Λ en tant que Λ -bimodule qui est encore plus petite que la précédente (voir [C3] et [GS2]) :

$$\cdots \rightarrow \Lambda \otimes_{Er} \Lambda^{\otimes_E^n} \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\delta} \Lambda \otimes_{Er} \Lambda^{\otimes_E^{n-1}} \otimes_E \Lambda \rightarrow \cdots \xrightarrow{\delta} \Lambda \otimes_{Er} \Lambda \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\delta} \Lambda \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \rightarrow 0,$$

où les morphismes ε et δ sont définis comme les restrictions des morphismes correspondants de \mathcal{P}_{rel} . Grâce au lemme 1.1.1.1, on obtient le complexe de cochaînes $\mathcal{C}_{\text{red}}(r, X)$ suivant qui calcule la cohomologie de Hochschild :

$$0 \rightarrow X^E \xrightarrow{d_0} \text{Hom}_{E^e}(r, X) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_{E^e}(r^{\otimes_E^n}, X) \xrightarrow{d_n} \text{Hom}_{E^e}(r^{\otimes_E^{n+1}}, X) \rightarrow \cdots,$$

où les morphismes d_n , $n \in \mathbb{N}$, sont obtenus comme les restrictions des morphismes correspondants de $\mathcal{C}_{\text{rel}}(\Lambda, X)$. Remarquons que $\mathcal{C}_{\text{red}}(r, X)$ peut être considéré comme un sous-complexe du complexe $\mathcal{C}_{\text{Hoch}}(\Lambda, X)$.

1.1.2 Structures algébriques sur la cohomologie de Hochschild

En 1963, Gerstenhaber a introduit dans [Ge1] la structure d'algèbre de Gerstenhaber sur la cohomologie de Hochschild de Λ (à coefficients dans Λ , *i.e.* $X = \Lambda$). Récemment de nouvelles structures algébriques, comme par exemple la structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près, ont été découvertes sur l'espace de cochaînes $C^*(\Lambda, \Lambda)$ par Getzler et Jones dans [GJ] et par Gerstenhaber et Voronov dans [GV1].

Soient $f \in C^n(\Lambda, \Lambda)$, et $g \in C^m(\Lambda, \Lambda)$, $n, m \in \mathbb{N}$, des cochaînes. Si $n \geq 1$ on définit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, un élément $f\bar{\circ}_i g \in C^{n+m-1}(\Lambda, \Lambda)$ tel qu'on a pour tout $x_1, \dots, x_{n+m-1} \in \Lambda$:

$$f\bar{\circ}_i g(x_1 \otimes_k \cdots \otimes_k x_{n+m-1}) := f(x_1 \otimes_k \cdots \otimes_k x_{i-1} \otimes_k g(x_i \otimes_k \cdots \otimes_k x_{i+m-1}) \otimes_k \cdots \otimes_k x_{n+m-1}).$$

Pour $m = 0$, une cochaîne $g^0 \in C^0(\Lambda, \Lambda)$ peut être regardée comme un élément dans l'algèbre Λ . Ensuite, on définit le produit de composition $\bar{\circ}$:

$$f\bar{\circ} g := \sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(m-1)} f\bar{\circ}_i g.$$

Posons $f\bar{\circ} g := 0$ pour $n = 0$. Avec ces définitions, on définit le crochet

$$[f, g] := f\bar{\circ} g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g\bar{\circ} f.$$

On a $[f, g] = -(-1)^{(n-1)(m-1)} [g, f]$ et, pour $h \in C^l(\Lambda, \Lambda)$,

$$(-1)^{(n-1)(l-1)} [[f, g], h] + (-1)^{(m-1)(n-1)} [[g, h], f] + (-1)^{(l-1)(m-1)} [[h, f], g] = 0.$$

Remarque 1.1.2.1

Ces relations impliquent que le crochet (de degré -1) défini ci-dessus munit l'espace de cochaînes de Hochschild d'une structure d'algèbre de Lie graduée. En particulier les 1-cochaînes $C^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Der}_k(\Lambda, \Lambda)$ forment une algèbre de Lie ordinaire pour le crochet

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

Le cup produit

$$f \cup g(x_1, \dots, x_{n+m}) = f(x_1, \dots, x_n)g(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}),$$

définit la structure d'une algèbre associative, différentielle graduée sur $C^*(\Lambda, \Lambda)$. La différentielle joue le rôle d'une dérivation :

$$d(f \cup g) = df \cup g + (-1)^n f \cup dg.$$

Définition 1.1.2.2

Une algèbre de Gerstenhaber est un espace vectoriel gradué muni d'un produit $x \cdot y$, définissant la structure d'algèbre graduée commutative, et d'un crochet $[x, y]$ de degré -1 , définissant la structure d'algèbre de Lie graduée, tel que le crochet avec un élément est une dérivation du produit :

$$[x, y \cdot z] = [x, y] \cdot z + (-1)^{(\deg x - 1) \deg y} y \cdot [x, z].$$

Remarquons que le complexe de cochaînes de Hochschild $C^*(\Lambda, \Lambda)$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie graduée et d'une structure d'algèbre associative, mais $C^*(\Lambda, \Lambda)$ n'est pas une algèbre de Gerstenhaber.

Proposition 1.1.2.3

Le cup produit (de degré 0) et le crochet (de degré -1)

$$[f, g] := f\bar{o}g - (-1)^{(n-1)(m-1)}g\bar{o}f,$$

définissent une structure d'algèbre de Gerstenhaber sur la cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$ d'une algèbre associative Λ .

Une preuve de cette proposition se trouve dans [GV1], corollaire 4.

Corollaire 1.1.2.4

Le premier groupe de la cohomologie de Hochschild $H^1(\Lambda, \Lambda)$ qui est le quotient des dérivations modulo les dérivations intérieures est une algèbre de Lie usuelle dont le crochet est induit par le crochet de Lie sur $\text{Hom}_k(\Lambda, \Lambda)$

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f,$$

où $f, g \in \text{Hom}_k(\Lambda, \Lambda)$. Les 1-cochaînes, i.e. les dérivations

$$\text{Der}_k(\Lambda, \Lambda) := C^1(\Lambda, \Lambda) = \{f \in \text{Hom}_k(\Lambda, \Lambda) \mid f(\lambda\mu) = \lambda f(\mu) + f(\lambda)\mu \forall \lambda, \mu \in \Lambda\},$$

forment une sous-algèbre de Lie de $\text{Hom}_k(\Lambda, \Lambda)$ et les 1-cocycles, i.e. les dérivations intérieures

$$\text{Ad}_k(\Lambda, \Lambda) := \text{Im } d_0 = \{f \in \text{Hom}_k(\Lambda, \Lambda) \mid \exists x \in \Lambda \text{ tel que } f(\lambda) = \lambda x - x \lambda \forall \lambda \in \Lambda\},$$

forment un idéal de Lie de $\text{Der}_k(\Lambda, \Lambda)$.

Bien entendu le fait que $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est une algèbre de Lie est connu depuis longtemps, cette structure est d'ailleurs une des sources des considérations précédentes. C'est cette structure d'algèbre de Lie que nous allons étudier dans la suite pour quelques classes d'algèbres.

Remarque 1.1.2.5

Si Λ contient une sous-algèbre séparable E , alors, grâce à la résolution projective \mathcal{P}_{rel} de Gerstenhaber et Schack, les espaces vectoriels $\text{Der}_k(\Lambda, \Lambda)/\text{Ad}_k(\Lambda, \Lambda)$ et $\text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)/\text{Ad}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$ sont isomorphes. Puisqu'on peut considérer de manière canonique $\mathcal{C}_{\text{rel}}(\Lambda, \Lambda)$ comme un sous-complexe du complexe $\mathcal{C}_{\text{Hoch}}(\Lambda, \Lambda)$, il en résulte que

$$\text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) = \{f \in \text{Hom}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) \mid f(\lambda\mu) = \lambda f(\mu) + f(\lambda)\mu \forall \lambda, \mu \in \Lambda\}$$

avec le crochet canonique est une sous-algèbre de Lie de $\text{Der}_k(\Lambda, \Lambda)$ et que

$$\text{Ad}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) = \{f \in \text{Hom}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) \mid \exists x \in \Lambda^E \text{ tel que } f(\lambda) = \lambda x - x \lambda \forall \lambda \in \Lambda\}$$

est une sous-algèbre de Lie de $\text{Ad}_k(\Lambda, \Lambda)$. Il est donc manifeste que le quotient d'algèbres de Lie $\text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)/\text{Ad}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\text{Der}_k(\Lambda, \Lambda)/\text{Ad}_k(\Lambda, \Lambda)$.

Examinons d'abord la relation de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ avec le groupe algébrique des automorphismes extérieurs.

1.2 Le groupe algébrique des automorphismes extérieurs $\text{Out}(\Lambda)$

Dans cette section on suppose le corps k de caractéristique zéro.

1.2.1 Définition et algèbre de Lie de $\text{Out}(\Lambda)$

On désigne par $\text{Aut}(\Lambda)$ le groupe des automorphismes d'une k -algèbre Λ . C'est un sous-groupe fermé du groupe algébrique $\mathbf{GL}(\Lambda)$ (voir [Hul], 10.7) et donc un groupe algébrique. Comme le morphisme d'algèbres

$$\vartheta : \Lambda \longrightarrow \text{End}_k(\Lambda), \quad a \longmapsto m_a : \Lambda \rightarrow \Lambda \\ x \mapsto ax$$

est injectif, l'algèbre Λ peut être identifiée avec son image dans $\text{End}_k(\Lambda)$. Les éléments inversibles $\Lambda^* \simeq \{a \in \vartheta(\Lambda) \mid \det a \neq 0\}$ forment un sous-groupe fermé et connexe de $\mathbf{GL}(\Lambda)$. Le groupe des automorphismes intérieurs $\text{Inn}(\Lambda)$ est l'image du morphisme de groupes algébriques

$$\varphi : \Lambda^* \longrightarrow \text{Aut}(\Lambda), \quad a \longmapsto \iota_a : \Lambda \rightarrow \Lambda \\ x \mapsto axa^{-1},$$

de sorte que les automorphismes intérieurs $\text{Inn}(\Lambda)$ forment un sous-groupe fermé et connexe de $\text{Aut}(\Lambda)$. Il est clair que $\text{Inn}(\Lambda)$ est distingué dans $\text{Aut}(\Lambda)$. Le groupe algébrique des automorphismes extérieurs $\text{Out}(\Lambda)$ est défini comme le quotient $\text{Aut}(\Lambda)/\text{Inn}(\Lambda)$. Notons que si Λ est une algèbre basique, par exemple un quotient d'une algèbre de chemins, alors le groupe $\text{Out}(\Lambda)$ est isomorphe au groupe de Picard $\text{Pic}_k(\Lambda)$, *i.e.* au groupe de (types d'isomorphismes d') auto-équivalences de Morita de la catégorie des Λ -modules à gauche (voir [Po], p.1860).

On notera par $\mathfrak{L}(G)$ l'algèbre de Lie du groupe algébrique G .

Théorème 1.2.1.1

Soient k un corps de caractéristique zéro et Λ une k -algèbre de dimension finie. Les dérivations $\text{Der}_k(\Lambda, \Lambda)$ forment l'algèbre de Lie du groupe algébrique des automorphismes $\text{Aut}(\Lambda)$ et les dérivations intérieures $\text{Ad}_k(\Lambda, \Lambda)$ forment l'algèbre de Lie du groupe algébrique des automorphismes intérieurs $\text{Inn}(\Lambda)$. L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ peut être considérée comme l'algèbre de Lie du groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)$.

Démonstration:

Dans [Hu1] 13.2, il est montré que $\text{Der}_k(\Lambda, \Lambda)$ est l'algèbre de Lie de $\text{Aut}(\Lambda)$. La dérivation du morphisme de groupes algébriques φ ci-dessus est :

$$\begin{aligned} d\varphi : \Lambda &\longrightarrow \text{Der}(\Lambda, \Lambda), & a &\longmapsto \text{ad}(a) : \Lambda \rightarrow \Lambda \\ & & & x \mapsto ax - xa. \end{aligned}$$

Puisqu'on a supposé $\text{car } k = 0$, l'algèbre de Lie de l'image d'un morphisme de groupes algébriques est l'image de la dérivation de ce morphisme. On a donc $\mathfrak{L}(\text{Inn}(\Lambda)) = \mathfrak{L}(\text{Im } \varphi) = \text{Im } d\varphi = \text{Ad}_k(\Lambda, \Lambda)$. La construction du quotient de groupes algébriques $\text{Aut}(\Lambda)/\text{Inn}(\Lambda)$ implique que l'algèbre de Lie de $\text{Out}(\Lambda) = \text{Aut}(\Lambda)/\text{Inn}(\Lambda)$ est $\mathfrak{L}(\text{Aut}(\Lambda))/\mathfrak{L}(\text{Inn}(\Lambda)) = \text{Der}(\Lambda, \Lambda)/\text{Ad}(\Lambda, \Lambda) = H^1(\Lambda, \Lambda)$ (voir [Hu1], 11.5 et 12).

q.e.d. 1.2.1.1

1.2.2 La composante de l'identité de $\text{Out}(\Lambda)$

La composante de l'identité du groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)$ est notée $\text{Out}(\Lambda)^\circ$. Comme la projection $\pi : \text{Aut}(\Lambda) \rightarrow \text{Out}(\Lambda)$ est un morphisme de groupes algébriques, le fait que le groupe algébrique connexe $\text{Inn}(\Lambda)$ contienne id_Λ entraîne que $\text{Out}(\Lambda)^\circ = G_\Lambda/\text{Inn}(\Lambda)$, où G_Λ désigne la composante de l'identité de $\text{Aut}(\Lambda)$. Un groupe algébrique et sa composante de l'identité ayant la même algèbre de Lie, le corollaire suivant est évident.

Corollaire 1.2.2.1

Soient k un corps de caractéristique zéro et Λ une k -algèbre de dimension finie. L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est l'algèbre de Lie du groupe algébrique connexe $\text{Out}(\Lambda)^\circ$.

Comme il y a une correspondance biunivoque préservant l'inclusion entre l'ensemble des sous-groupes fermés et connexes de $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ et leurs algèbres de Lie considérées comme des sous-algèbres de Lie de $H^1(\Lambda, \Lambda)$, nous sommes particulièrement intéressés par l'étude de $\text{Out}(\Lambda)^\circ$.

Le groupe algébrique des automorphismes d'une algèbre quelconque de dimension finie a été étudié par Pollack dans [Po]. Guil-Asensio et Saorín ont travaillé sur le groupe algébrique des automorphismes extérieurs d'une algèbre quelconque de dimension finie (voir [GAS1]). Ils traitent le cas des algèbres monomiales de dimension finie dans [GAS2]. Nous reprenons leurs notations en présentant leur travaux.

Puisqu'on a supposé le corps k de caractéristique zéro, il est parfait et la k -algèbre Λ admet donc une décomposition de Wedderburn-Malcev, *i.e.*

$$\Lambda = E \oplus r,$$

où r désigne le radical de Jacobson de Λ et E est une sous-algèbre semi-simple de Λ . Fixons une telle sous-algèbre E . Comme le groupe algébrique $\text{Aut}(\Lambda)$ opère sur la variété $\Lambda = E \oplus r$ et que la sous-algèbre E est fermée dans Λ ,

$$\hat{H}_\Lambda := \text{Tran}_{\text{Aut}(\Lambda)}(E, E) = \{\sigma \in \text{Aut}(\Lambda) \mid \sigma(E) \subseteq E\}$$

est un sous-groupe fermé de $\text{Aut}(\Lambda)$. L'ensemble

$$H_\Lambda := \{\sigma \in \text{Aut}(\Lambda) \mid \sigma(e) = e \quad \forall e \in E\}$$

est un sous-groupe fermé de \hat{H}_Λ , car il peut être considéré comme le noyau du morphisme de groupes algébriques $\hat{H}_\Lambda \rightarrow \text{Aut}(E)$, $\sigma \mapsto \sigma|_E$. Notons que l'ensemble $\{a \in \Lambda \mid \exists x \in r \text{ tel que } a = 1 + x\}$ est un sous-groupe fermé, unipotent et connexe de Λ^* de sorte que son image par le morphisme φ

$$\text{Inn}^*(\Lambda) := \{\iota_a \in \text{Inn}(\Lambda) \mid \exists x \in r \text{ tel que } a = 1 + x\}$$

est un sous-groupe fermé, unipotent et connexe de $\text{Inn}(\Lambda)$. Sachant que l'image par un automorphisme de Λ du radical r de Λ est r , il est clair que $\text{Inn}^*(\Lambda)$ est distingué dans $\text{Aut}(\Lambda)$. L'ensemble

$$\hat{E} := \varphi(E^*) = \{\iota_a \in \text{Inn}(\Lambda) \mid a \in E^*\}$$

est un sous-groupe fermé et connexe de $\text{Aut}(\Lambda)$. Notons

$$U_\Lambda := \{\sigma \in \text{Aut}(\Lambda) \mid \sigma(x) \equiv x \pmod{r^2} \quad \forall x \in r\}.$$

Puisque U_Λ peut être considéré comme le noyau du morphisme de groupes algébriques

$$\begin{aligned} \epsilon_\Lambda : \text{Aut}(\Lambda) &\longrightarrow \mathbf{GL}(r/r^2) \\ \sigma &\longmapsto \begin{array}{ccc} r/r^2 & \rightarrow & r/r^2 \\ x \pmod{r^2} & \mapsto & \sigma(x) \pmod{r^2}, \end{array} \end{aligned}$$

l'ensemble U_Λ forme un sous-groupe fermé de $\text{Aut}(\Lambda)$. Evidemment le groupe algébrique $\text{Inn}^*(\Lambda)$ est contenu dans U_Λ .

Remarque 1.2.2.2

Le groupe algébrique $H_\Lambda \cap U_\Lambda$ est unipotent, de sorte que $H_\Lambda \cap U_\Lambda$ et $H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)$ sont des groupes algébriques connexes.

La proposition suivante a été démontrée par Guil-Asensio et Saorín pour les algèbres basiques (voir [GAS2], proposition 1.1), mais elle reste valable dans un cadre plus général :

Proposition 1.2.2.3

Soient k un corps de caractéristique zéro et Λ une k -algèbre de dimension finie. Les groupes algébriques H_Λ° et $H_\Lambda \cap G_\Lambda$ sont identiques.

Démonstration:

Puisque E est une algèbre semi-simple, grâce au théorème de Skolem-Noether (voir par exemple [Lor], §29 6. Satz 20), le groupe des automorphismes $\text{Out}(E)$ est un groupe de permutations et, par suite, est fini. La suite exacte courte de groupes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_\Lambda & \hookrightarrow & \hat{H}_\Lambda & \rightarrow & \text{Out}(E) \simeq S_n \\ & & & & & & \sigma \mapsto \sigma|_E \pmod{\text{Inn } E} \end{array}$$

montre donc que le groupe H_Λ est d'indice fini dans \hat{H}_Λ . Par conséquent, on a $\hat{H}_\Lambda^\circ \subset H_\Lambda$ (voir [Hu1], 7.3) et donc

$$H_\Lambda^\circ = \hat{H}_\Lambda^\circ \subset H_\Lambda \cap G_\Lambda \subset \hat{H}_\Lambda \cap G_\Lambda \subset G_\Lambda.$$

Pour tout $\sigma \in \text{Aut}(\Lambda)$, $\Lambda = \sigma(E) \oplus r$ est aussi une décomposition de Λ . D'après le théorème de Wedderburn-Malcev (voir par exemple [Pi], 11.6), il existe un élément $\iota_a \in \text{Inn}^*(\Lambda)$ tel que $\sigma(E) = \iota_a(E)$. Par conséquent, on a $\iota_{a^{-1}} \circ \sigma \in \hat{H}_\Lambda$ et donc $\text{Aut}(\Lambda) = \text{Inn}^*(\Lambda)\hat{H}_\Lambda$. Puisque ϵ_Λ est un morphisme de groupes algébriques satisfaisant $\epsilon_\Lambda(\text{Inn}^*(\Lambda)) = 0$, on en déduit

$$\epsilon_\Lambda(H_\Lambda^\circ) = \epsilon_\Lambda(\hat{H}_\Lambda^\circ) = \epsilon_\Lambda(\hat{H}_\Lambda)^\circ = \epsilon_\Lambda(\text{Aut}(\Lambda))^\circ = \epsilon_\Lambda(\text{Aut}(\Lambda)^\circ) = \epsilon_\Lambda(G_\Lambda),$$

et donc

$$\epsilon_\Lambda(H_\Lambda^\circ) = \epsilon_\Lambda(\hat{H}_\Lambda \cap G_\Lambda).$$

Ceci montre que chaque élément de $\hat{H}_\Lambda \cap G_\Lambda$ est le produit d'un élément de H_Λ° et d'un élément de $\hat{H}_\Lambda \cap G_\Lambda \cap U_\Lambda$. Puisque $\hat{H}_\Lambda \cap U_\Lambda$ est connexe et qu'il contient l'identité, alors $\hat{H}_\Lambda \cap U_\Lambda \subset \hat{H}_\Lambda^\circ = H_\Lambda^\circ$ et donc $\hat{H}_\Lambda \cap G_\Lambda \cap U_\Lambda \subset H_\Lambda^\circ$. Il en résulte $\hat{H}_\Lambda \cap G_\Lambda \subset H_\Lambda^\circ$, ce qui implique $H_\Lambda \cap G_\Lambda = H_\Lambda^\circ$.

q.e.d. 1.2.2.3

Corollaire 1.2.2.4

Soient k un corps de caractéristique zéro et Λ une k -algèbre de dimension finie. La composante de l'identité des automorphismes extérieurs $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est isomorphe, en tant que groupe algébrique, au quotient $H_\Lambda^\circ/H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda)$.

Démonstration:

Pollack a montré (voir [Po], p.1849) les égalités $G_\Lambda = \text{Inn}^*(\Lambda)(\hat{H}_\Lambda \cap G_\Lambda)$ et $\hat{H}_\Lambda \cap G_\Lambda = \hat{E}(H_\Lambda \cap G_\Lambda)$. On a donc $G_\Lambda = \text{Inn}^*(\Lambda)\hat{E}(H_\Lambda \cap G_\Lambda)$. Le fait que $\text{Inn}^*(\Lambda)\hat{E}$ est contenu dans $\text{Inn}(\Lambda)$ montre que le morphisme de groupes algébriques

$$\begin{aligned} H_\Lambda \cap G_\Lambda &\longrightarrow G_\Lambda/\text{Inn}(\Lambda) = \text{Out}(\Lambda)^\circ \\ \sigma &\longmapsto \sigma \pmod{\text{Inn}(\Lambda)} \end{aligned}$$

est surjectif. Son noyau est $H_\Lambda \cap G_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda) = H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda)$, car on a $\text{Inn}(\Lambda) \subseteq G_\Lambda$. Il en découle que les groupes algébriques $H_\Lambda \cap G_\Lambda/H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda)$ et $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ sont isomorphes. Comme la proposition précédente assure qu'on a $H_\Lambda \cap G_\Lambda = H_\Lambda^\circ$, la démonstration est terminée.

q.e.d. 1.2.2.4

La proposition suivante montre que la description $H_\Lambda^\circ/H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda)$ du groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ obtenue dans le corollaire précédent correspond à la description $\text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)/\text{Ad}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$ de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ due à la résolution \mathcal{P}_{rel} de Gerstenhaber et Schack (voir remarque 1.1.2.5).

Proposition 1.2.2.5

Soient k un corps de caractéristique zéro et Λ une k -algèbre de dimension finie. L'algèbre de Lie du groupe algébrique H_Λ° est l'algèbre de Lie $\text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$ et $\text{Ad}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$ est l'algèbre de Lie du groupe algébrique $H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda)$.

Démonstration:

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de la k -algèbre E qui est de dimension finie. Pour tout naturel $i \in \{1, \dots, n\}$, nous définissons $G_i := \{\sigma \in \mathbf{GL}(\Lambda) \mid \sigma(e_i) = e_i\}$ et $\mathcal{G}_i := \{\sigma \in \mathfrak{gl}(\Lambda) \mid \sigma(e_i) = 0\}$. Ainsi nous obtenons $H_\Lambda = \text{Aut}(\Lambda) \cap \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} G_i$. Puisque la caractéristique de k est nulle, le paragraphe 13.2 de [Hu1] montre que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H_\Lambda) &= \mathcal{L}(\text{Aut}(\Lambda)) \cap \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} \mathcal{L}(G_i) \\ &= \text{Der}_k(\Lambda, \Lambda) \cap \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} \mathcal{G}_i \\ &= \{\sigma \in \text{Der}_k(\Lambda, \Lambda) \mid \sigma(e_i) = 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda)) &= \mathcal{L}(H_\Lambda) \cap \mathcal{L}(\text{Inn}(\Lambda)) \\ &= \text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) \cap \text{Ad}_k(\Lambda, \Lambda) = \text{Ad}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) \end{aligned}$$

q.e.d. 1.2.2.5

Chapitre 2

L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ d'une algèbre monomiale Λ

Dans ce chapitre, nous allons étudier la structure d'algèbre de Lie sur le premier groupe de la cohomologie de Hochschild $H^1(\Lambda, \Lambda)$ d'une k -algèbre monomiale Λ de dimension finie où k désigne un corps de caractéristique quelconque. Commençons par définir ces algèbres et par fixer quelques notations que nous garderons pour le reste du chapitre.

2.1 Définition d'une algèbre monomiale et quelques notations

Soit k un corps de caractéristique quelconque et soit Q un carquois fini, *i.e.* un graphe orienté fini. La longueur d'un chemin orienté de Q est le nombre des flèches dont le chemin est constitué. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous notons par Q_n l'ensemble des chemins orientés de longueur n de Q . Notons qu'ainsi, Q_0 est l'ensemble des sommets de Q et Q_1 est l'ensemble des flèches de Q . On désigne par $s(\gamma)$ le sommet initial d'un chemin orienté γ de Q et par $t(\gamma)$ son sommet terminal.

Définition 2.1.0.1

- (i) L'algèbre de chemins kQ est le k -espace vectoriel ayant pour base tous les chemins orientés de Q , où la multiplication de deux chemins $\beta \in Q_i$ et $\alpha \in Q_j$ est donnée par la concaténation $\beta\alpha \in Q_{i+j}$ si $t(\alpha) = s(\beta)$ et 0 sinon.
- (ii) Une k -algèbre Λ est dite monomiale si elle est isomorphe à un quotient d'une algèbre de chemins kQ/I , où l'idéal bilatère I de kQ est engendré par un ensemble de chemins de longueur supérieure ou égale à 2.

Exemples 2.1.0.2

- (i) Les algèbres héréditaires kQ et les algèbres tronquées $kQ/\langle Q_n \rangle$, $n \geq 2$, sont des algèbres monomiales.
- (ii) Soit Q le carquois suivant :

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{a_1} \\ \xrightarrow{a_2} \end{array} \xrightarrow{b}$$

Si la caractéristique du corps k est différente de 2, l'algèbre $kQ/\langle ba_1 - ba_2 \rangle$ est une algèbre monomiale, malgré sa présentation, car elle est isomorphe à l'algèbre $kQ/\langle ba_2 \rangle$. En effet, l'isomorphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \psi : kQ/\langle ba_1 - ba_2 \rangle &\longrightarrow kQ/\langle ba_2 \rangle \\ e \in Q_0 &\mapsto e \\ a_1 &\mapsto a_1 + a_2 \\ a_2 &\mapsto a_1 - a_2 \\ b &\mapsto b \end{aligned}$$

est bien défini grâce à la relation

$$\psi(ba_1) = \psi(b)\psi(a_1) = ba_1 + ba_2 = ba_1 = ba_1 - ba_2 = \psi(b)\psi(a_2) = \psi(ba_2).$$

Soient $\Lambda \simeq kQ/I$ une k -algèbre monomiale de dimension finie et Z un ensemble de chemins de longueur ≥ 2 qui engendrent l'idéal I . Nous allons supposer l'ensemble Z minimal, *i.e.* aucun sous-chemin propre d'un chemin de Z n'est dans Z . Les éléments de Z sont appelés relations minimales. Soit B l'ensemble des chemins de Q ne contenant aucun élément de Z comme sous-chemin. Il est clair que les classes modulo $I = \langle Z \rangle$ des éléments de B forment une base de Λ . Pour tout entier naturel n , nous notons par B_n le sous-ensemble $Q_n \cap B$ de B formé par les chemins de longueur n .

On désigne par $E \simeq kQ_0$ la sous-algèbre séparable de Λ engendrée par les classes modulo I des sommets de Q . Ainsi nous avons une décomposition de Wedderburn-Malcev $\Lambda = E \oplus r$ où r désigne le radical de Jacobson de l'algèbre monomiale Λ .

2.2 La résolution projective minimale d'une algèbre monomiale Λ

Afin de calculer le premier groupe de la cohomologie de Hochschild $H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Ext}_{\Lambda^e}^1(\Lambda, \Lambda)$ de l'algèbre monomiale Λ de dimension finie, nous allons utiliser la résolution projective minimale du Λ -bimodule Λ donnée par Bardzell dans [Ba].

2.2.1 Description

Pour décrire la résolution du Λ -bimodule Λ , Bardzell utilise la notion de m -chaînes introduite dans [GHZ] et utilisée aussi dans [AG]. Les m -chaînes sont essentiellement des chemins minimaux contenant $m - 1$ chevauchements de relations minimales. Définissons récursivement l'ensemble Γ_{m+1} de m -chaînes associé à l'algèbre monomiale $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ de dimension finie :

Définition 2.2.1.1

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &:= Q_0 \\ \Gamma_1 &:= Q_1 \\ \Gamma_2 &:= Z\end{aligned}$$

Pour $m \geq 2$ un chemin α de Q est appelé une m -préchaîne si $\alpha = \tau\delta\beta$ est un produit de chemins τ , δ et β de Q tel que

- $\beta \in \Gamma_{m-1}$ est une $(m - 2)$ -chaîne,
- $\delta\beta \in \Gamma_m$ est une $(m - 1)$ -chaîne,
- $\tau \in B - Q_0$ et
- $\tau\delta \in \langle Z \rangle$ contient une relation minimale.

Une m -préchaîne est dite une m -chaîne si aucun sous-chemin propre initial n'est une m -préchaîne. Dans ce cas $\delta\tau$ contient un sous-chemin terminal à droite qui est une relation minimale.

Remarque 2.2.1.2

Soit $\alpha \in \Gamma_{m+1}$, $m \geq 1$, une m -chaîne. Alors α peut être factorisée de façon unique d'une part en

$$\alpha = L\alpha_R, \quad \text{où } L \in B - Q_0 \quad \text{et} \quad \alpha_R \in \Gamma_m,$$

et d'autre part en

$$\alpha = \alpha_L R, \quad \text{où } R \in B - Q_0 \quad \text{et} \quad \alpha_L \in \Gamma_m.$$

Si l'entier m est pair, alors les seules $(m - 1)$ -chaînes contenues dans la m -chaîne α sont α_R et α_L (voir [Ba], lemmes 3.1 et 3.3).

La résolution projective minimale \mathcal{P}_{\min} de Λ en tant que Λ -bimodule est la suivante :

$$\begin{aligned}\cdots \rightarrow \Lambda \otimes_E k\Gamma_{m+1} \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\delta_m} \Lambda \otimes_E k\Gamma_m \otimes_E \Lambda \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \Lambda \otimes_E k\Gamma_1 \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\delta_0} \Lambda \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\pi} \Lambda \rightarrow 0,\end{aligned}$$

où les morphismes de Λ -bimodules sont définis par $\pi(\lambda \otimes_E \mu) = \lambda\mu$,

$$\begin{aligned} \delta_{2m}(\lambda \otimes_E \alpha \otimes_E \mu) &= \lambda L \otimes_E \alpha_R \otimes_E \mu - \lambda \otimes_E \alpha_L \otimes_E R\mu \quad \text{et} \\ \delta_{2m+1}(\lambda \otimes_E \alpha' \otimes_E \mu) &= \sum_{\substack{\beta \in \Gamma_m \\ \alpha' = \theta\beta\nu}} \lambda\theta \otimes_E \beta \otimes_E \nu\mu, \end{aligned}$$

pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\alpha \in \Gamma_{2m}$ et $\alpha' \in \Gamma_{2m+1}$.

Remarque 2.2.1.3

Notre description de \mathcal{P}_{\min} est équivalente à celle de Bardzell, car si X désigne un ensemble de chemins et si kX est le E -bimodule correspondant, alors l'application

$$\begin{aligned} \oplus_{\gamma \in X} \Lambda t(\gamma) \otimes_k s(\gamma) \Lambda &\rightarrow \Lambda \otimes_E kX \otimes_E \Lambda \\ \lambda t(\gamma) \otimes_k s(\gamma) \mu &\mapsto \lambda \otimes_E \gamma \otimes_E \mu, \end{aligned}$$

où $\gamma \in X$ et $\lambda, \mu \in \Lambda$, est clairement un isomorphisme de Λ -bimodules. Notons que les Λ -bimodules $\Lambda \otimes_E \Lambda$ et $\Lambda \otimes_E E \otimes_E \Lambda \simeq \Lambda \otimes_E k\Gamma_0 \otimes_E \Lambda$ sont isomorphes.

En appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\Lambda^e}(-, \Lambda)$ à \mathcal{P}_{\min} sans le terme Λ de droite et en utilisant le lemme 1.1.1.1, on obtient le complexe de cochaînes \mathcal{C}_{\min} :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{E^e}(k\Gamma_0, \Lambda) &\xrightarrow{\delta_0^*} \text{Hom}_{E^e}(k\Gamma_1, \Lambda) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \text{Hom}_{E^e}(k\Gamma_m, \Lambda) &\xrightarrow{\delta_m^*} \text{Hom}_{E^e}(k\Gamma_{m+1}, \Lambda) \rightarrow \cdots, \end{aligned}$$

dont les différentielles sont données par

$$\begin{aligned} (\delta_{2m}^* f)(\alpha) &= Lf(\alpha_R) - f(\alpha_L)R \quad \text{et} \\ (\delta_{2m+1}^* g)(\alpha') &= \sum_{\substack{\beta \in \Gamma_{2m+1} \\ \alpha' = \theta\beta\nu}} \theta g(\beta)\nu, \end{aligned}$$

pour tout $f \in \text{Hom}_{E^e}(k\Gamma_{2m}, \Lambda)$, $\alpha \in \Gamma_{2m+1}$, $g \in \text{Hom}_{E^e}(k\Gamma_{2m+1}, \Lambda)$ et $\alpha' \in \Gamma_{2(m+1)}$.

Comme il est utile d'interpréter $H^1(\Lambda, \Lambda)$ en termes de chemins parallèles, nous introduisons maintenant la notion suivante :

Définition 2.2.1.4

Deux chemins ε et γ du carquois Q sont dits parallèles si $s(\varepsilon) = s(\gamma)$ et $t(\varepsilon) = t(\gamma)$. Si X et Y sont des ensembles de chemins de Q , l'ensemble $X//Y$ de chemins parallèles est formé par les paires $(\varepsilon, \gamma) \in X \times Y$ telles que ε et γ sont des chemins parallèles.

Par exemple $Q_0//Q_n$ est l'ensemble des cycles orientés de Q de longueur n .

Lemme 2.2.1.5

Soient X et Y des ensembles de chemins de Q et soient kX et kY les E -bimodules correspondants. Alors les k -espaces vectoriels $k(X//Y)$ et $\text{Hom}_{E^e}(kX, kY)$ sont isomorphes.

Démonstration:

Définissons un morphisme linéaire $k(X//Y) \rightarrow \text{Hom}_{E^e}(kX, kY)$ en envoyant $(\varepsilon, \gamma) \in X//Y$ sur l'application élémentaire qui associe γ à ε et 0 à tout autre chemin de X différent de ε . Si $f : kX \rightarrow kY$ est un morphisme de E -bimodules, nous avons pour chaque chemin $\varepsilon \in X$, $f(\varepsilon) = f(t(\varepsilon)\varepsilon s(\varepsilon)) = t(\varepsilon)f(\varepsilon)s(\varepsilon)$ et donc $f(\varepsilon) = \sum_{(\varepsilon, \gamma) \in X//Y} \lambda_{\varepsilon, \gamma} \gamma$, où $\lambda_{\varepsilon, \gamma} \in k$. Ceci nous permet de définir un morphisme linéaire $\text{Hom}_{E^e}(kX, kY) \rightarrow k(X//Y)$ qui associe à $f : kX \rightarrow kY$ l'élément $\sum_{(\varepsilon, \gamma) \in X//Y} \lambda_{\varepsilon, \gamma}(\varepsilon, \gamma)$. Il est clair que les deux morphismes sont inverses l'un de l'autre.

q.e.d. 2.2.1.5

En utilisant les notations suivantes, nous allons réécrire les morphismes cobords du cocomplexe \mathcal{C}_{\min} :

Notations 2.2.1.6

- (i) Soient $\varepsilon \in \Gamma_{m+1}$ une m -chaîne et $(\alpha, \gamma) \in \Gamma_m//B$. Nous notons par $\varepsilon^{(\alpha, \gamma)}$ la somme de tous les chemins non nuls, i.e. chemins dans B , obtenus en remplaçant une occurrence de la $(m-1)$ -chaîne α dans la m -chaîne ε par le chemin γ . Si la m -chaîne ε ne contient pas la $(m-1)$ -chaîne α , ou encore si chaque remplacement de α dans ε par γ n'est pas un chemin dans B , nous posons $\varepsilon^{(\alpha, \gamma)} = 0$. Supposons que $\varepsilon^{(\alpha, \gamma)} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, où $\varepsilon_i \in B$, et soit $\eta \in \Gamma_{m+1}$ une m -chaîne parallèle à ε . Par abus de langage, nous notons par $(\eta, \varepsilon^{(\alpha, \gamma)})$ la somme $\sum_{i=1}^n (\eta, \varepsilon_i)$ dans $k(\Gamma_{m+1}//B)$ (avec la convention que $(\eta, \varepsilon^{(\alpha, \gamma)}) = 0$ si $\varepsilon^{(\alpha, \gamma)} = 0$).
- (ii) L'application $\chi_B : \prod_{n \in \mathbb{N}} Q_n \rightarrow \{0, 1\}$ désigne l'application indicatrice qui associe 1 à chaque chemin $\gamma \in B$ et 0 à $\gamma \notin B$.
- (iii) Si X est un ensemble de chemins dans Q et si e est un sommet de Q , alors l'ensemble Xe est formé par les chemins de X ayant e comme sommet initial. De la même manière eX désigne l'ensemble de tous les chemins de X ayant e comme sommet terminal.

Remarque 2.2.1.7

Si $(a, \gamma) \in Q_1//B$, alors tous les facteurs non nuls de $\varepsilon^{(a, \gamma)}$ sont distincts.

En effectuant les identifications suggérées par le lemme 2.2.1.5, nous obtenons :

Proposition 2.2.1.8

Le complexe de cochaînes \mathcal{C}_{\min} peut être interprété comme étant le complexe

$$0 \rightarrow k(\Gamma_0//B) \xrightarrow{\psi_0} k(\Gamma_1//B) \rightarrow \cdots \rightarrow k(\Gamma_m//B) \xrightarrow{\psi_m} k(\Gamma_{m+1}//B) \rightarrow \cdots$$

dont les applications sont données par :

$$\begin{aligned} \psi_{2m} : \quad k(\Gamma_{2m}//B) &\longrightarrow k(\Gamma_{2m+1}//B) \\ (\beta, \gamma) &\longmapsto \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_{2m+1} \\ \alpha = L\beta}} \chi_B(L\gamma)(\alpha, L\gamma) - \sum_{\substack{\alpha \in \Gamma_{2m+1} \\ \alpha = \beta R}} \chi_B(\gamma R)(\alpha, \gamma R) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_{2m+1} : \quad k(\Gamma_{2m+1}//B) &\longrightarrow k(\Gamma_{2(m+1)}//B) \\ (\beta, \gamma) &\longmapsto \sum_{\alpha \in \Gamma_{2(m+1)}} (\alpha, \alpha^{(\beta, \gamma)}) \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $H^n(\Lambda, \Lambda) \simeq \text{Ker } \psi_n / \text{Im } \psi_{n-1}$.

Ceci se vérifie aisément.

Corollaire 2.2.1.9

Le début du complexe de cochaînes \mathcal{C}_{\min} peut être caractérisé de la façon suivante :

$$0 \rightarrow k(Q_0//B) \xrightarrow{\psi_0} k(Q_1//B) \xrightarrow{\psi_1} k(Z//B),$$

où les applications sont données par :

$$\begin{aligned} \psi_0 : \quad k(Q_0//B) &\longrightarrow k(Q_1//B) \\ (e, \gamma) &\longmapsto \sum_{a \in Q_1 e} \chi_B(a\gamma)(a, a\gamma) - \sum_{a \in e Q_1} \chi_B(\gamma a)(a, \gamma a), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_1 : \quad k(Q_1//B) &\longrightarrow k(Z//B) \\ (a, \gamma) &\longmapsto \sum_{p \in Z} (p, p^{(a, \gamma)}). \end{aligned}$$

En particulier, nous avons $H^1(\Lambda, \Lambda) \simeq \text{Ker } \psi_1 / \text{Im } \psi_0$.

2.2.2 Le crochet de Lie

Il convient de souligner que la structure naturelle d'algèbre de Lie sur $H^1(\Lambda, \Lambda)$ provient de la résolution standard, il s'agit du commutateur des dérivations modulo les intérieures. Lorsque la résolution de l'algèbre Λ est différente, les 1-cocycles ne sont plus les dérivations et le crochet doit être identifié. Le théorème suivant transfère la structure d'algèbre de Lie de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ au k -espace vectoriel $\text{Ker } \psi_1 / \text{Im } \psi_0$:

Théorème 2.2.2.1 *Le crochet défini par*

$$[(a, \gamma), (b, \varepsilon)] = (b, \varepsilon^{(a, \gamma)}) - (a, \gamma^{(b, \varepsilon)}),$$

pour tout $(a, \gamma), (b, \varepsilon) \in Q_1//B$, induit une structure d'algèbre de Lie sur $\text{Ker } \psi_1 / \text{Im } \psi_0$ telle que $H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Der}_k(\Lambda, \Lambda) / \text{Ad}_k(\Lambda, \Lambda)$ et $\text{Ker } \psi_1 / \text{Im } \psi_0$ sont des algèbres de Lie isomorphes.

Démonstration:

Puisque $\mathcal{P}_{\text{Hoch}}$ et \mathcal{P}_{min} sont des résolutions projectives du Λ -bimodule Λ , il existe, en vertu du théorème de comparaison (voir par exemple [We], 2.2.6), des morphismes de chaînes $\omega : \mathcal{P}_{\text{Hoch}} \rightarrow \mathcal{P}_{\text{min}}$ et $\varsigma : \mathcal{P}_{\text{min}} \rightarrow \mathcal{P}_{\text{Hoch}}$ relevant l'application identique de Λ . Choisissons ces morphismes de Λ -bimodules tels que

$$\begin{aligned} \varsigma_0 : \quad & \Lambda \otimes_E \Lambda \rightarrow \Lambda \otimes_k \Lambda \\ & e \otimes_E e \mapsto e \otimes_k e, \\ \varsigma_1 : \quad & \Lambda \otimes_E kQ_1 \otimes_E \Lambda \rightarrow \Lambda \otimes_k \Lambda \otimes_k \Lambda \\ & t(a) \otimes_E a \otimes_E s(a) \mapsto t(a) \otimes_k a \otimes_k s(a), \\ \omega_0 : \quad & \Lambda \otimes_k \Lambda \rightarrow \Lambda \otimes_E \Lambda \\ & 1_\Lambda \otimes_k 1_\Lambda \mapsto \sum_{f \in Q_0} f \otimes_E f, \\ \omega_1 : \quad & \Lambda \otimes_k \Lambda \otimes_k \Lambda \rightarrow \Lambda \otimes_E kQ_1 \otimes_E \Lambda \\ & 1_\Lambda \otimes_k a_n \dots a_1 \otimes_k 1_\Lambda \mapsto \sum_{d=1}^n a_n \dots a_{d+1} \otimes_E a_d \otimes_E a_{d-1} \dots a_1, \end{aligned}$$

où $e \in Q_0$, $a, a_n, \dots, a_1 \in Q_1$ et $a_n \dots a_1 \in B$. Remarquons qu'on n'a donné que les images des éléments de base des Λ -bimodules libres. Puisqu'un morphisme de chaînes entre deux résolutions projectives est unique à une homotopie près, ω et ς sont uniques à une homotopie près. De plus, $\omega \circ \varsigma$ est homotope à $\text{id}_{\mathcal{P}_{\text{min}}}$ et $\varsigma \circ \omega$ est homotope à $\text{id}_{\mathcal{P}_{\text{Hoch}}}$. Par conséquent, les morphismes de cochaînes $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\omega, \Lambda)$ et $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\varsigma, \Lambda)$ sont tels que $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\varsigma, \Lambda) \circ \text{Hom}_{\Lambda^e}(\omega, \Lambda)$ est homotope à $\text{id}_{\mathcal{C}_{\text{min}}}$ et $\text{Hom}_{\Lambda^e}(\omega, \Lambda) \circ \text{Hom}_{\Lambda^e}(\varsigma, \Lambda)$ est homotope à $\text{id}_{\text{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{P}_{\text{Hoch}}, \Lambda)}$. Ils induisent donc des isomorphismes linéaires inverses en cohomologie. Tenant compte des identifications faites ci-dessus nous obtenons que

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_1 : \quad & k(Q_1//B) \longrightarrow \text{Hom}_k(\Lambda, \Lambda) \\ & (a, \gamma) \longmapsto \Lambda \rightarrow \Lambda \quad \text{et} \\ & \varepsilon \mapsto \varepsilon^{(a, \gamma)} \\ \overline{\varsigma}_1 : \quad & \text{Hom}_k(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow k(Q_1//B) \\ & f : \Lambda \rightarrow \Lambda \longmapsto \sum_{a \in Q_1} \sum_{(a, \gamma) \in Q_1//B} \lambda_{a, \gamma}(a, \gamma) \\ & \varepsilon \mapsto \sum_{\gamma \in B} \lambda_{\varepsilon, \gamma} \gamma \end{aligned}$$

induisent des isomorphismes linéaires inverses entre $H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Ker } d_1 / \text{Im } d_0$ et $H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Ker } \psi_1 / \text{Im } \psi_0$. Ceci nous permet de transférer la structure d'algèbre

de Lie de $\text{Ker } d_1 / \text{Im } d_0$ à $\text{Ker } \psi_1 / \text{Im } \psi_0$. Définissons sur $k(Q_1 // B)$ le crochet

$$[(a, \gamma), (b, \varepsilon)] := \overline{\sigma_1}([\overline{\omega_1}(a, \gamma), \overline{\omega_1}(b, \varepsilon)]) = (b, \varepsilon^{(a, \gamma)}) - (a, \gamma^{(b, \varepsilon)}),$$

pour tout $(a, \gamma), (b, \varepsilon) \in Q_1 // B$. On vérifie sans peine qu'il s'agit d'un crochet de Lie, ce qui n'est pas automatique, car $\overline{\sigma_1}$ et $\overline{\omega_1}$ ne sont pas des isomorphismes. Puisque $\overline{\omega} : \mathcal{C}_{\text{Hoch}} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{min}}$ et $\overline{\sigma} : \mathcal{C}_{\text{min}} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{Hoch}}$ sont des morphismes de complexes, le fait que $\text{Ker } d_1 = \text{Der}_k(\Lambda, \Lambda)$ est une sous-algèbre de Lie de $\text{Hom}_k(\Lambda, \Lambda)$, entraîne que $\text{Ker } \psi_1$ est une sous-algèbre de Lie de $k(Q_1 // B)$. De même, on déduit du fait que $\text{Im } \psi_0 = \text{Ad}_k(\Lambda, \Lambda)$ est un idéal de Lie de $\text{Ker } d_1$, que $\text{Im } \psi_0$ est un idéal de Lie de $\text{Ker } \psi_1$. Par construction l'algèbre de Lie quotient $\text{H}^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Ker } \psi_1 / \text{Im } \psi_0$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\text{H}^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Ker } d_1 / \text{Im } d_0$.

q.e.d. 2.2.2.1

Il est remarquable que la résolution projective minimale \mathcal{P}_{min} et la résolution \mathcal{P}_{rel} considérée par Gerstenhaber et Schack fournissent des espaces 1-cobords et 1-cocycles isomorphes comme le montrent la proposition et le corollaire suivants. Ce fait m'a été signalé par Saorín et ne se généralise pas en degré supérieur, voir la remarque 2.2.2.4.

Proposition 2.2.2.2

Les algèbres de Lie $\text{Ker } \psi_1$, munie du crochet décrit dans le théorème précédent, et $\text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$, munie du crochet canonique, sont isomorphes.

Démonstration:

Soit $\sigma : \Lambda \rightarrow \Lambda$ un élément de $\text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) = \text{Der}_k(\Lambda, \Lambda) \cap \text{Hom}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$. Puisque σ est un morphisme de E -bimodules, l'image d'une flèche a est une combinaison linéaire de chemins de B parallèles à a . Supposons que

$$\sigma(a) = \sum_{(a, \gamma) \in Q_1 // B} \lambda_{(a, \gamma)} \gamma,$$

pour $a \in Q_1$ avec $\lambda_{(a, \gamma)} \in k$. Le fait que σ soit une dérivation bien définie implique que nous avons, pour chaque chemin $p = p_l \dots p_2 p_1$ dans Z de longueur l :

$$0 = \sigma(p) = \sigma(p_l \dots p_1) = \sum_{i=1}^l p_l \dots p_{i+1} \sigma(p_i) p_{i-1} \dots p_1 = \sum_{(a, \gamma) \in Q_1 // B} \lambda_{(a, \gamma)} p^{(a, \gamma)}.$$

Donc, nous avons dans $k(Z // B)$ l'équation $0 = \sum_{p \in Z} \sum_{(a, \gamma) \in Q_1 // B} \lambda_{(a, \gamma)} (p, p^{(a, \gamma)})$, ce qui est équivalent à dire que $\sum_{(a, \gamma) \in Q_1 // B} \lambda_{(a, \gamma)} (a, \gamma)$ est un élément dans $\text{Ker } \psi_1$. Ceci nous permet de définir l'application linéaire

$$\xi : \text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) \rightarrow \text{Ker } \psi_1, \quad \sigma \mapsto \sum_{(a, \gamma) \in Q_1 // B} \lambda_{(a, \gamma)} (a, \gamma).$$

D'autre part, nous pouvons associer à chaque élément $x = \sum_{(a,\gamma) \in Q_1//B} \lambda_{(a,\gamma)}(a, \gamma)$ de $\text{Ker } \psi_1$ un morphisme de E -bimodules $\sigma_x : \Lambda \rightarrow \Lambda$ en posant $\sigma_x(e) := 0$ pour tout sommet $e \in Q_0$ et $\sigma_x(c) := \sum_{(c,\gamma) \in Q_1//B} \lambda_{(c,\gamma)} \gamma$ pour toute flèche $c \in Q_1$. Pour que σ_x devienne une dérivation, nous étendons σ_x à des chemins $\varepsilon = b_m \dots b_1$ de longueur $m \geq 2$ par la formule :

$$\sigma_x(\varepsilon) = \sigma_x(b_m \dots b_1) = \sum_{j=1}^m b_m \dots b_{j+1} \sigma_x(b_j) b_{j-1} \dots b_1 = \sum_{(a,\gamma) \in Q_1//B} \lambda_{(a,\gamma)} \varepsilon^{(a,\gamma)}.$$

Grâce à $0 = \psi_1(x) = \sum_{p \in Z} \sum_{(a,\gamma) \in Q_1//B} \lambda_{(a,\gamma)}(p, p^{(a,\gamma)})$, nous avons, pour tout $p \in Z$, la relation $0 = \sum_{(a,\gamma) \in Q_1//B} \lambda_{(a,\gamma)} p^{(a,\gamma)} = \sigma_x(p)$, qui montre que σ_x est bien définie. Ceci nous permet de définir l'application linéaire

$$\zeta : \text{Ker } \psi_1 \rightarrow \text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda), \quad x \mapsto \sigma_x.$$

Il est clair que ξ et ζ sont inverses l'un de l'autre, ce qui prouve que $\text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$ et $\text{Ker } \psi_1$ sont des k -espaces vectoriels isomorphes. Afin de vérifier que ζ est un morphisme d'algèbres de Lie, fixons des éléments $x = \sum_{(a,\gamma) \in Q_1//B} \lambda_{(a,\gamma)}(a, \gamma)$ et $y = \sum_{(b,\varepsilon) \in Q_1//B} \mu_{(b,\varepsilon)}(b, \varepsilon)$ dans $\text{Ker } \psi_1$. Pour toute flèche $c \in Q_1$, nous avons

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y](c) &= (\sigma_x \circ \sigma_y - \sigma_y \circ \sigma_x)(c) \\ &= \sum_{(c,\varepsilon) \in Q_1//B} \mu_{(c,\varepsilon)} \sigma_x(\varepsilon) - \sum_{(c,\gamma) \in Q_1//B} \lambda_{(c,\gamma)} \sigma_y(\gamma) \\ &= \sum_{(c,\varepsilon), (a,\gamma) \in Q_1//B} \mu_{(c,\varepsilon)} \lambda_{(a,\gamma)} \varepsilon^{(a,\gamma)} - \sum_{(c,\gamma), (b,\varepsilon) \in Q_1//B} \lambda_{(c,\gamma)} \mu_{(b,\varepsilon)} \gamma^{(b,\varepsilon)} \\ &= \sigma_z(c), \end{aligned}$$

où $z = \sum_{(a,\gamma), (b,\varepsilon) \in Q_1//B} \lambda_{(a,\gamma)} \mu_{(b,\varepsilon)} ((b, \varepsilon^{(a,\gamma)}) - (a, \gamma^{(b,\varepsilon)}))$. Le théorème 2.2.2.1 montre que z est égal à $[x, y] \in \text{Ker } \psi_1$. Par conséquent, ζ est un morphisme d'algèbres de Lie et $\text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$ et $\text{Ker } \psi_1$ sont des algèbres de Lie isomorphes.

q.e.d. 2.2.2.2

Corollaire 2.2.2.3

L'idéal de Lie $\text{Im } \psi_0$ de $\text{Ker } \psi_1$ et l'idéal de Lie $\text{Ad}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$ de $\text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$ sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie.

Démonstration:

Soit $y = \sum_{\gamma \in B} \lambda_\gamma \gamma \in \Lambda$ tel que $\text{ad}(y)$ soit un morphisme de E -bimodules. Alors nous avons, pour tout sommet $e \in Q_0$,

$$0 = eye - eye = e \text{ad}(y)(e) e = \text{ad}(y)(e) = ye - ey = \sum_{\gamma \in B} \lambda_\gamma (\delta_{s(\gamma), e} - \delta_{t(\gamma), e}) \gamma.$$

Cela montre que tout chemin $\gamma \in B$ satisfaisant $\lambda_\gamma \neq 0$ est un cycle et par suite $y = \sum_{(e,\gamma) \in Q_0//B} \lambda_\gamma \gamma$. Pour toute flèche $a \in Q_1$, nous avons

$$\text{ad}(y)(a) = ya - ay = \sum_{(e,\gamma) \in Q_0//B} \lambda_\gamma \gamma a - \sum_{(e,\gamma) \in Q_0//B} \lambda_\gamma a \gamma = \sum_{(e,\gamma) \in Q_0//B} \lambda_\gamma (\gamma a - a \gamma).$$

On en déduit que l'image de $\text{ad}(y) \in \text{Ad}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$ par ξ est

$$\xi(\text{ad}(y)) = \sum_{(e,\gamma) \in Q_0//B} \lambda_\gamma \left(\sum_{\substack{a \in eQ_1 \\ \gamma a \in B}} (a, \gamma a) - \sum_{\substack{a \in Q_1 e \\ a\gamma \in B}} (a, a\gamma) \right) = - \sum_{(e,\gamma) \in Q_0//B} \lambda_\gamma \psi_0(e, \gamma).$$

On obtient ainsi que l'image de l'algèbre de Lie $\text{Ad}_{E^e}(\Lambda, \Lambda)$ par l'isomorphisme d'algèbres de Lie ξ est $\text{Im } \psi_0$.

q.e.d. 2.2.2.3

Remarque 2.2.2.4

En général, la résolution projective minimale \mathcal{P}_{\min} et la résolution \mathcal{P}_{rel} considérée par Gerstenhaber et Schack n'ont pas les mêmes n -cobords et n -cocycles. Par exemple, dans le cas des algèbres héréditaires, i.e. $Z = \emptyset$, nous obtenons, pour $n = 2$, $\text{Ker } \psi_2 = 0$, parce que nous avons $k(Z//B) = 0$. Par ailleurs la multiplication $m \in \text{Hom}_{E^e}(\Lambda \otimes_E \Lambda, \Lambda)$ est un 2-cobord non nul qui est bien entendu un 2-cocycle du complexe $\mathcal{C}_{\text{rel}}(\Lambda, \Lambda)$ fourni par la résolution de Gerstenhaber et Schack.

2.3 Le groupe algébrique des automorphismes extérieurs d'une algèbre monomiale Λ

Dans cette section on suppose le corps k de caractéristique zéro.

2.3.1 Quelques définitions et description de $\text{Out}(\Lambda)^\circ$

Définissons pour l'algèbre monomiale $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ de dimension finie le sous-groupe fermé suivant de H_Λ :

$$V_\Lambda := \left\{ \sigma \in H_\Lambda \mid \sigma(a) = \sum_{(a,b) \in Q_1//Q_1} \lambda_{(a,b)} b \quad \forall a \in Q_1 \right\}.$$

Selon le lemme 22 de [GAS1], ce groupe algébrique est isomorphe à l'image $\epsilon_\Lambda(H_\Lambda)$ de H_Λ par le morphisme ϵ_Λ . Sa composante de l'identité V_Λ° est donc égale à $\epsilon_\Lambda(H_\Lambda^\circ) = \epsilon_\Lambda(G_\Lambda)$ (voir la démonstration de la proposition 1.2.2.3). Selon la proposition 1.1 de [GAS2], on a

$$H_\Lambda^\circ = (H_\Lambda \cap U_\Lambda) \rtimes V_\Lambda^\circ.$$

Lemme 2.3.1.1

Le groupe algébrique $H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda)$ est le produit direct des groupes algébriques $H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)$ et \hat{E} :

$$H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda) = (H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)) \times \hat{E}.$$

Démonstration:

- Soit $y \in \Lambda^*$ tel que $\iota_y \in H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda)$. En vertu de la décomposition $\Lambda = E \oplus r$, il existe des éléments $b \in E^*$ et $x \in r$ tels que $y = b + x$ et on a donc $\iota_y = \iota_{b+x} = \iota_{1+x} \circ \iota_b$ ce qui prouve que $H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda) = (H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda))\hat{E}$.
- Soient $b = \sum_{e \in Q_0} \lambda_e e \in E^*$ avec $\lambda_e \in k^*$ et $x \in r$ tels que $\iota_b = \iota_{1+x}$. Alors pour toute flèche $a \in Q_1$, on a $(\sum_{e \in Q_0} \lambda_e e)a(\sum_{e \in Q_0} \lambda_e^{-1} e) = (1+x)a(1+x)^{-1}$, ce qui est équivalent à $\lambda_{t(a)} a \lambda_{s(a)}^{-1} (1+x) = (1+x)a$. Autrement dit, on obtient $(\lambda_{t(a)} \lambda_{s(a)}^{-1} - 1)a + \lambda_{t(a)} \lambda_{s(a)}^{-1} ax - xa = 0$, pour tout $a \in Q_1$. Comme $a \in r - r^2$ et $ax, xa \in r^2$, on a $\lambda_{t(a)} \lambda_{s(a)}^{-1} - 1 = 0$ et par suite $\lambda_{t(a)} = \lambda_{s(a)}$, pour tout $a \in Q_1$. Notons par Q^1, \dots, Q^s les composantes connexes du carquois Q . On désigne par $\Lambda^1 := kQ^1, \dots, \Lambda^s := kQ^s$ les algèbres connexes correspondantes. Alors il existe des $\lambda^i \in k$ tels que $b = \sum_{e \in Q_0} \lambda_e e = \sum_{i=1}^s \lambda^i \sum_{e \in Q_0^i} e = \sum_{i=1}^s \lambda^i 1_{\Lambda^i}$. L'élément b est ainsi dans le centre de Λ . On a donc $\iota_b = \text{id}_\Lambda$, ce qui montre $(H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)) \cap \hat{E} = \{\text{id}_\Lambda\}$.
- Soient $b \in E^*$ et $x \in r$ et définissons $y := b^{-1}(1+x)^{-1}b(1+x)$. Par conséquent, on a $b - by + bx - xby = 0$. Les faits $0 \neq b \in E^*$ et $bx - xby \in r$ impliquent que $\iota_b \circ \iota_{1+x} = \iota_{1+x} \circ \iota_b$, le point qui restait à démontrer pour que $H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda) = (H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)) \times \hat{E}$.

q.e.d. 2.3.1.1

Grâce à ce lemme, le groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ peut être décrit de la manière suivante :

Proposition 2.3.1.2

Soient k un corps de caractéristique zéro et Λ une k -algèbre monomiale de dimension finie. Alors la composante de l'identité $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ du groupe algébrique des automorphismes extérieurs est le produit semi-direct

$$\text{Out}(\Lambda)^\circ = \frac{H_\Lambda \cap U_\Lambda}{H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)} \rtimes \frac{V_\Lambda^\circ}{\hat{E}}.$$

Remarquons que \hat{E} est isomorphe, en tant que groupe, au groupe des caractères acycliques $\text{Ch}(Q, k)$ qui apparaît chez Guil-Asensio et Saorín (voir [GAS2], définition 7).

Le principal travail de l'étude du groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ pour une algèbre monomiale Λ de dimension finie consiste en l'étude du groupe algébrique V_Λ° .

Avant de donner la description de V_Λ° due à Guil-Asensio et Saorín, rappelons quelques-unes de leurs définitions (voir [GAS2], 2.3, et [GAS1], 25) :

Définition 2.3.1.3

Soit (a, b) une paire de flèches parallèles du carquois Q . L'idéal $\langle Z \rangle$ de l'algèbre kQ est dit (a, b) -saturé, si, pour tout chemin p de Z , on a $p^{(b,a)} = 0$. Ceci est noté par $a \leq_{\langle Z \rangle} b$. On dit que l'idéal $\langle Z \rangle$ est complètement saturé s'il est (a, b) -saturé pour tout $(a, b) \in Q_1 // Q_1$.

Remarques 2.3.1.4

- (i) Pour toute classe de flèches parallèles $\bar{\alpha}$, la relation $\leq_{\langle Z \rangle}$ sur $\bar{\alpha}$ est une préordre, i.e. réflexive et transitive.
- (ii) Pour $p \in Z$ et $(a, b) \in Q_1 // Q_1$, on a $p^{(b,a)} = 0$ si et seulement si chaque terme de la somme est zéro (voir 2.2.1.7), i.e. chaque remplacement d'une occurrence de b dans p par a est un chemin dans $\langle Z \rangle$.
- (iii) L'idéal $\langle Z \rangle$ est complètement saturé si et seulement s'il est fermé sous l'opération de remplacement d'une flèche par une flèche parallèle.

Il est clair que la relation de parallélisme est une relation d'équivalence sur Q_1 . Notons par $Q_1 //$ son ensemble de classes d'équivalence. Une classe de flèches parallèles est dite non-triviale si elle contient au moins deux flèches. On vérifie aisément qu'on a sur chaque classe de flèches parallèles $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in Q_1 //$ la relation d'équivalence suivante :

$$\alpha_i \approx \alpha_j \quad := \quad \alpha_i \leq_{\langle Z \rangle} \alpha_j \text{ et } \alpha_j \leq_{\langle Z \rangle} \alpha_i.$$

On note par $\bar{\alpha} / \approx$ son ensemble de classes d'équivalence. Pour $R, S \in \bar{\alpha} / \approx$, on note $R \leq_{\langle Z \rangle} S$ s'il existe des flèches $a \in R$ et $b \in S$ telles que $a \leq_{\langle Z \rangle} b$, ce qui est équivalent à dire que $a \leq_{\langle Z \rangle} b$, pour toute flèche $a \in R$ et $b \in S$. Notons que la relation $\leq_{\langle Z \rangle}$ sur $\bar{\alpha} / \approx$ est la relation d'ordre associée à la relation de préordre $\leq_{\langle Z \rangle}$.

Un des résultats principaux de l'article [GAS2] de Guil-Asensio et Saorín est la description suivante du groupe algébrique $V_\Lambda^\circ \simeq \epsilon_\Lambda(H_\Lambda)^\circ = \epsilon(G_\Lambda)$ donnée dans le théorème 2.20 :

Théorème 2.3.1.5

Soient k un corps de caractéristique zéro et $\Lambda = kQ / \langle Z \rangle$ une k -algèbre monomiale de dimension finie. Pour toute classe de flèches parallèles $\bar{\alpha}$, notons les classes d'équivalence $S_1, \dots, S_r \in \bar{\alpha} / \approx$ de manière à ce que $i \leq j$ si $S_i \leq_{\langle Z \rangle} S_j$, pour $i, j \in \{1, \dots, r\}$. On a

$$V_\Lambda^\circ \simeq \prod_{\bar{\alpha} \in Q_1 //} G_{\bar{\alpha}},$$

avec, pour toute classe de flèches parallèles $\bar{\alpha}$,

$$G_{\bar{\alpha}} := \begin{pmatrix} \mathbf{GL}(n_1, k) & A_{12}(k) & \cdots & A_{1r}(k) \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A_{(r-1)r}(k) \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{GL}(n_r, k) \end{pmatrix},$$

où on a pour tout $i, j \in \{1, \dots, r\}$:

- $n_i = |S_i|$ et
- $A_{ij}(k) = M_{n_i \times n_j}(k)$ si $S_i \leq_{(Z)} S_j$ et 0 sinon.

2.3.2 Le rapport entre les descriptions de $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ et $H^1(\Lambda, \Lambda)$

Comme il existe une correspondance biunivoque préservant l'inclusion entre l'ensemble des sous-groupes fermés et connexes de $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ (resp. H_Λ°) et leurs algèbres de Lie considérées comme des sous-algèbres de Lie de $H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Ker } \psi_1 / \text{Im } \psi_0$ (resp. $\text{Ker } \psi_1$), nous sommes particulièrement intéressés par l'identification des sous-algèbres de Lie de $H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Ker } \psi_1 / \text{Im } \psi_0$ (resp. $\text{Ker } \psi_1$) correspondant aux groupes algébriques $\frac{H_\Lambda \cap U_\Lambda}{H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)}$ et $\frac{V_\Lambda^\circ}{\hat{E}}$ (resp. $H_\Lambda \cap U_\Lambda$, $H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)$, V_Λ° et \hat{E}). Nous avons le dictionnaire suivant :

Proposition 2.3.2.1

Soient k un corps de caractéristique zéro et Λ une k -algèbre monomiale de dimension finie.

- (i) L'algèbre de Lie du sous-groupe fermé connexe distingué $H_\Lambda \cap U_\Lambda$ de H_Λ° est l'idéal de Lie $k(Q_1 // B - (Q_0 \cup Q_1)) \cap \text{Ker } \psi_1$ de l'algèbre de Lie $\text{Ker } \psi_1$.
- (ii) L'algèbre de Lie du sous-groupe fermé connexe V_Λ° de H_Λ° est la sous-algèbre de Lie $k(Q_1 // Q_1) \cap \text{Ker } \psi_1$ de l'algèbre de Lie $\text{Ker } \psi_1$.
- (iii) L'algèbre de Lie du sous-groupe fermé connexe distingué $H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)$ de $H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda)$ est l'idéal de Lie de $\text{Im } \psi_0$ qui est engendré par les éléments $\sum_{a \in Q_{1e}}(a, a\gamma) - \sum_{a \in eQ_1}(a, \gamma a)$ où $(e, \gamma) \in Q_0 // (B - Q_0)$.
- (iv) L'algèbre de Lie du sous-groupe fermé connexe \hat{E} de $H_\Lambda \cap \text{Inn}(\Lambda)$ est la sous-algèbre de Lie de $\text{Im } \psi_0$ qui est engendrée par les éléments $\sum_{a \in Q_{1e}}(a, a) - \sum_{a \in eQ_1}(a, a)$ où $e \in Q_0$.

Démonstration:

La dérivation du morphisme de groupes algébriques

$$\begin{aligned} \varepsilon_\Lambda : \text{Aut}(\Lambda) &\longrightarrow \mathbf{GL}(r/r^2) \simeq \mathbf{GL}(kQ_1) \\ \sigma &\longmapsto \begin{array}{ccc} r/r^2 & \rightarrow & r/r^2, \\ x \bmod r^2 & \mapsto & \sigma(x) \bmod r^2, \end{array} \end{aligned}$$

est donnée par

$$\begin{aligned} d\varepsilon_\Lambda : \text{Der}_k(\Lambda, \Lambda) &\longrightarrow \mathfrak{gl}(r/r^2) \simeq \mathfrak{gl}(kQ_1) \\ \sigma &\longmapsto \begin{array}{ccc} r/r^2 & \rightarrow & r/r^2 \\ x \bmod r^2 & \mapsto & \sigma(x) \bmod r^2. \end{array} \end{aligned}$$

Rappelons qu'on a montré dans la proposition 2.2.2.2 que

$$\begin{aligned} \xi : \quad & \text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) && \longrightarrow \text{Ker } \psi_1 \\ & \sigma : \Lambda \rightarrow \Lambda && \longmapsto \sum_{(a,\gamma) \in Q_1//B} \lambda_{(a,\gamma)}(a, \gamma) \\ & a \in Q_1 \mapsto \sum_{(a,\gamma) \in Q_1//B} \lambda_{(a,\gamma)}(a, \gamma) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

(i) : Puisque U_Λ est le noyau de ε_Λ , on obtient

$$\mathcal{L}(H_\Lambda \cap U_\Lambda) = \mathcal{L}(H_\Lambda) \cap \text{Ker } d\varepsilon_\Lambda = \{\sigma \in \text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) \mid \sigma(a) \in r^2 \ \forall a \in Q_1\},$$

car la caractéristique du corps k est égale à zéro. L'égalité $\xi(\mathcal{L}(H_\Lambda \cap U_\Lambda)) = k(Q_1//B - (Q_0 \cup Q_1)) \cap \text{Ker } \psi_1$ achève la preuve.

(ii) : Comme la caractéristique de k est nulle et que $V_\Lambda \simeq \text{Im } \varepsilon_\Lambda \mid_{H_\Lambda}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V_\Lambda) &= \mathcal{L}(V_\Lambda^\circ) \\ &= \text{Im } d\varepsilon_\Lambda \mid_{\mathcal{L}(H_\Lambda)} \\ &= \{\sigma \in \text{Der}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) \mid \sigma(a) = \sum_{(a,b) \in Q_1//Q_1} \lambda_{(a,b)}(a, b) \ \forall a \in Q_1\}. \end{aligned}$$

Vu qu'on a l'égalité $\xi(\mathcal{L}(V_\Lambda^\circ)) = k(Q_1//Q_1) \cap \text{Ker } \psi_1$, la preuve est terminée.

(iii) : On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)) &= \{\text{ad}(1+x) \in \text{Ad}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) \mid x \in r\} \\ &= \{\text{ad}(x) \in \text{Ad}_{E^e}(\Lambda, \Lambda) \mid x \in r\}. \end{aligned}$$

Soit x un élément du radical r tel que $\text{ad}(x)$ est un morphisme de E -bimodules. La preuve du corollaire 2.2.2.3 montre que x est une combinaison linéaire de cycles orientés de longueur ≥ 1 et par conséquent $x = \sum_{(e,\gamma) \in Q_0//B-Q_0} \lambda_\gamma \gamma$ avec $\lambda_\gamma \in k$. Puisque $\xi(\text{ad}(x)) = \sum_{(e,\gamma) \in Q_0//B-Q_0} \lambda_\gamma (\sum_{\substack{a \in eQ_1 \\ \gamma a \in B}} \lambda_{(a,\gamma)}(a, \gamma a) - \sum_{\substack{a \in eQ_1 \\ a\gamma \in B}} \lambda_{(a,\gamma)}(a, a\gamma))$, la preuve est achevée.

(iv) : Il est évident que l'algèbre de Lie \hat{E} est engendrée par les dérivations intérieures $\text{ad}(e)$ où $e \in Q_0$. Le fait $\xi(\text{ad}(e)) = \sum_{a \in Q_1 e} \lambda_{(a,e)}(a, a) - \sum_{a \in e Q_1} \lambda_{(a,e)}(a, a)$ fournit le résultat.

q.e.d. 2.3.2.1

Un corollaire sera énoncé au paragraphe suivant, après avoir introduit certaines notations.

2.4 Une graduation sur l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$

Nous soulignons que dans cette section k désigne un corps quelconque de caractéristique arbitraire, contrairement à la section précédente.

Puisque la cohomologie de Hochschild est additive sur les produits d'algèbres et que sa structure d'algèbre de Lie graduée est compatible avec cette décomposition additive, on suppose dorénavant que le carquois Q est connexe. Pour l'étude de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ d'une algèbre monomiale $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ nous allons utiliser la description que nous avons obtenue dans le théorème 2.2.2.1. Pour tout élément $x \in \text{Ker } \psi_1$, nous noterons aussi sa classe dans $H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Ker } \psi_1 / \text{Im } \psi_0$ par x .

2.4.1 La graduation

Si $(a, \gamma) \in Q_1//B_n$ et $(b, \varepsilon) \in Q_1//B_m$, alors le théorème 2.2.2.1 montre que $[(a, \gamma), (b, \varepsilon)] = (b, \varepsilon^{(a, \gamma)}) - (a, \gamma^{(b, \varepsilon)})$ est un élément de $k(Q_1//B_{n+m-1})$. Ainsi la longueur des chemins de B induit une graduation sur l'algèbre de Lie

$$k(Q_1//B) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} k(Q_1//B_i),$$

en considérant que les éléments de $k(Q_1//B_i)$ ont pour degré $i - 1$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. Il est clair que la sous-algèbre de Lie $\text{Ker } \psi_1$ de $k(Q_1//B)$ préserve cette graduation et que $\text{Im } \psi_0$ est un idéal de Lie gradué. Par conséquent l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Ker } \psi_1 / \text{Im } \psi_0$ a aussi une graduation. Si on définit

$$L_{-1} := k(Q_1//Q_0) \cap \text{Ker } \psi_1,$$

$$L_0 := k(Q_1//Q_1) \cap \text{Ker } \psi_1 / \left\langle \sum_{a \in Q_1 e} (a, a) - \sum_{a \in e Q_1} (a, a) \mid e \in Q_0 \right\rangle,$$

$$L_i := k(Q_1//B_{i+1}) \cap \text{Ker } \psi_1 / \left\langle \sum_{\substack{a \in Q_1 e \\ \gamma a \in B}} (a, \gamma a) - \sum_{\substack{a \in e Q_1 \\ a \gamma \in B}} (a, a \gamma) \mid (e, \gamma) \in Q_0//Q_i \right\rangle,$$

pour tout $i \geq 1$, $i \in \mathbb{N}$, on obtient

$$H^1(\Lambda, \Lambda) = \bigoplus_{i \geq -1} L_i$$

et

$$[L_i, L_j] \subset L_{i+j},$$

pour tout $i, j \geq -1$ où $L_{-2} = 0$.

On déduit de la proposition 2.3.2.1 :

Corollaire 2.4.1.1

Soient k un corps de caractéristique zéro et Λ une k -algèbre monomiale de dimension finie. L'algèbre de Lie du sous-groupe fermé connexe distingué $\frac{H_\Lambda \cap U_\Lambda}{H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)}$ du groupe algébrique connexe $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est l'idéal de Lie $\bigoplus_{i \geq 1} L_i$ de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ et l'algèbre de Lie du sous-groupe fermé connexe $\frac{V_\Lambda^\circ}{\hat{E}}$ de $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est la sous-algèbre de Lie L_0 de $H^1(\Lambda, \Lambda)$.

Étudions la sous-algèbre de Lie L_{-1} de $H^1(\Lambda, \Lambda)$.

2.4.2 La sous-algèbre de Lie L_{-1} de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ **Lemme 2.4.2.1**

La sous-algèbre de Lie L_{-1} est égale à zéro si et seulement s'il existe, pour chaque boucle $(a, e) \in Q_1//Q_0$, un chemin p dans Z tel que $p^{(a,e)} \neq 0$.

Démonstration:

Ceci est clair, car nous avons $\psi_1(a, e) = \sum_{p \in Z} (p, p^{(a,e)})$ pour chaque boucle $(a, e) \in Q_1//Q_0$.

q.e.d. 2.4.2.1

Proposition 2.4.2.2

Chacune des conditions suivantes implique $L_{-1} = 0$:

- (i) Le carquois Q n'a pas de boucle.
- (ii) Pour chaque boucle $(a, e) \in Q_1//Q_0$ de Q , la caractéristique du corps k ne divise pas l'entier $m \geq 2$ pour lequel $a^m \in Z$ et $a^{m-1} \in B$.
- (iii) La caractéristique du corps k est égale à zéro.
- (iv) L'algèbre Λ est une algèbre de carquois tronquée $kQ/\langle Q_m \rangle$ pour un carquois Q différent de la boucle et pour $m \geq 2$.
- (v) Le carquois Q est le carquois de la boucle et $\Lambda = kQ/\langle Q_m \rangle$ est une algèbre de carquois tronquée telle que la caractéristique du corps k ne divise pas $m \geq 2$.

Démonstration:

(i) : Ceci est clair à cause du lemme précédent.

(ii) : Soit $(a, e) \in Q_1//Q_0$ une boucle de Q . Puisque Λ est de dimension finie, il existe un naturel $m \geq 2$ tel que $p := a^m \in Z$ et $a^{m-1} \in B$. Si la caractéristique de k ne divise pas m , alors $p^{(a,e)} = ma^{m-1}$ est différent de 0 et donc $ma^{m-1} \notin \langle Z \rangle$.

(iii) : Ceci est clair, car (iii) implique (ii).

(iv) : En utilisant (ii), on peut supposer que la caractéristique de k divise m . Soit $(a, e) \in Q_1//Q_0$ une boucle de Q . Par hypothèse, le carquois connexe Q n'est pas lui-même une boucle. C'est la raison pour laquelle il existe une flèche $b \in Q_1$ différente de a telle que ba^{m-1} ou $a^{m-1}b \in Z = Q_m$. Le fait que $\text{car } k$ divise m entraîne que la caractéristique du corps k ne divise pas $m - 1$ et donc $0 \neq (m - 1)ba^{m-2} \notin \langle Z \rangle = \langle Q_m \rangle$ ou $0 \neq (m - 1)a^{m-2}b \notin \langle Z \rangle = \langle Q_m \rangle$.

(v) : Ceci est clair, car (v) implique (ii).

q.e.d. 2.4.2.2

Avant d'étudier l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda) = \bigoplus_{i \geq -1} L_i$ pour le cas où L_{-1} est égale à zéro, nous considérons le cas exceptionnel suivant :

Proposition 2.4.2.3

Soit Q la boucle ayant un sommet e et une flèche a . Soit $Z = \{a^m\}$ tel que la caractéristique p du corps k divise l'entier $m \geq 2$ et soit $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ la k -algèbre monomiale associée à Z . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est simple.
- (ii) L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est semi-simple.
- (iii) L'entier $m \geq 2$ est égal à la caractéristique p du corps k et $p > 2$.
- (iv) L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de Witt $W(1, 1) := \text{Der}(k[X]/(X^p), k[X]/(X^p))$ et $p > 2$.

Remarque 2.4.2.4

Il est évident que l'algèbre considérée dans cette proposition est en fait isomorphe à $k[X]/(X^m)$, l'algèbre des polynômes en une variable tronquée.

Démonstration:

(i) \Rightarrow (ii) : Ceci est trivial.

(ii) \Rightarrow (iii) : L'hypothèse $\text{car } k = p$ implique que l'on a $[L_{-1}, L_{p-1}] = 0$, car on a $L_{i-1} = k(a, a^i)$, pour tout $0 \leq i \leq m - 1$, et $[(a, e), (a, a^p)] = p(a, a^{p-1}) - 0 = 0$. Par conséquent, $L_{p-1} \oplus \cdots \oplus L_{m-2}$ est un idéal de Lie résoluble de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda) = \bigoplus_{i=-1}^{m-2} L_i$. Puisque $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est semi-simple, on déduit $m = p$. On a $p > 2$, car il n'existe pas d'algèbre de Lie semi-simple de dimension 2.

(iii) \Rightarrow (iv) : Puisque Λ est isomorphe à l'algèbre commutative $k[X]/(X^m)$, l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie des dérivations $\text{Der}(k[X]/(X^m), k[X]/(X^m))$.

(iv) \Rightarrow (i) : Si $\text{car } k > 2$, alors l'algèbre de Lie de Witt $W(1, 1)$ est une des algèbres de Lie simples non classiques.

q.e.d. 2.4.2.3

La proposition 2.4.2.2 montre que le cas où L_{-1} est différent de zéro est assez exceptionnel. On supposera dorénavant $L_{-1} = 0$.

2.4.3 La sous-algèbre de Lie L_0 de $H^1(\Lambda, \Lambda)$

Il est clair que L_0 est une sous-algèbre de Lie de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ dont le crochet est donné par

$$[(a, c), (b, d)] = \delta_{a,d}(b, c) - \delta_{b,c}(a, d),$$

pour tout $(a, c), (b, d) \in L_0$. Comme on a supposé $L_{-1} = 0$, alors $\bigoplus_{i \geq 1} L_i$ est un idéal de Lie résoluble de $H^1(\Lambda, \Lambda)$, en raison du fait que l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est de dimension finie. Il s'en suit que l'on a

$$\text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Rad } L_0 \oplus \bigoplus_{i \geq 1} L_i$$

et

$$H^1(\Lambda, \Lambda) / \text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) = L_0 / \text{Rad } L_0,$$

où $\text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda)$ (resp. $\text{Rad } L_0$) désigne le radical de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ (resp. L_0). Par conséquent, l'étude de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ peut être souvent réduite à l'étude de l'algèbre de Lie L_0 . Pour un élément $\sum_{(a,b) \in Q_1 // Q_1} \lambda_{(a,b)}(a, b) \in \text{Ker } \psi_1$, nous notons aussi sa classe dans L_0 par $\sum_{(a,b) \in Q_1 // Q_1} \lambda_{(a,b)}(a, b)$.

Remarquons que la notion de saturation introduite dans 2.3.1.3 peut être reformulée en termes de la structure d'algèbre de Lie L_0 :

Remarque 2.4.3.1

Soit (a, b) une paire de flèches parallèles. L'idéal $\langle Z \rangle$ est (a, b) -saturé si et seulement si (b, a) est un élément de l'algèbre de Lie L_0 . Par suite, les flèches parallèles a et b sont équivalentes si et seulement si $(a, b) \in L_0$ et $(b, a) \in L_0$. L'idéal $\langle Z \rangle$ est complètement saturé si et seulement si toutes les flèches parallèles d'une classe de flèches parallèles sont équivalentes.

Les algèbres héréditaires, *i.e.* $Z = \emptyset$, et les algèbres tronquées, *i.e.* $Z = Q_m$, $m \geq 2$, sont des exemples d'algèbres monomiales dont l'idéal $\langle Z \rangle$ est complètement saturé. Locateli a étudié la cohomologie de Hochschild des algèbres tronquées dans [Loc] et Cibils a traité le cas des algèbres dont le carré du radical est nul (voir [C2]). Décrivons une base de l'algèbre de Lie L_0 :

Proposition 2.4.3.2

Une base \mathcal{B} de L_0 est donnée par la réunion des ensembles suivants :

- (i) toutes les paires $(a, b) \in L_0$ telles que les flèches parallèles a et b sont différentes,
- (ii) pour chaque classe de flèches parallèles $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in Q_1 //$, tous les éléments $(\alpha_i, \alpha_i) \in L_0$ avec $i < n$
- (iii) $|Q_1 //| - |Q_0| + 1$ éléments linéairement indépendants $(c, c) \in L_0$ différents de ceux de (ii).

Démonstration:

Un élément $\sum_{(a,b) \in Q_1//Q_1} \lambda_{(a,b)}(a, b) \in k(Q_1//Q_1)$, avec $\lambda_{(a,b)} \in k$, est contenu dans $\text{Ker } \psi_1$ si et seulement si

$$0 = \sum_{(a,b) \in Q_1//Q_1} \lambda_{(a,b)} \psi_1(a, b) = \sum_{\substack{(a,b) \in Q_1//Q_1 \\ a \neq b}} \lambda_{(a,b)} \sum_{p \in Z} (p, p^{(a,b)}).$$

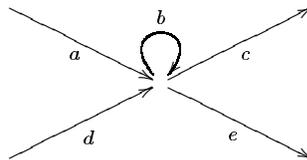
Premièrement, on rappelle que, pour une paire de flèches distinctes (a, b) , les termes non nuls de la somme définissant $(p, p^{(a,b)})$ sont tous distincts (voir 2.2.1.7) et qu'ils forment un sous-ensemble de $Z//B$. Deuxièmement, on vérifie le fait suivant : si $a \neq b$ et si $(p, p^{(a,b)}) = (q, q^{(c,d)})$, alors $p = q$ et, si $p^{(a,b)} \neq 0$, alors $(a, b) = (c, d)$. En effet, soit $p = p_n \dots p_2 p_1$ un chemin de Z de longueur l et considérons le facteur $p_n \dots p_{i+1} b p_{i-1} \dots p_1 \in B$ de $p^{(a,b)}$ obtenu en remplaçant la flèche $p_i = a$ par $b \neq a$. Si $(p, p^{(a,b)}) = (p, p^{(c,d)}) \neq 0$ alors il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $p_n \dots p_{j+1} c p_{j-1} \dots p_{i+1} b p_{i-1} \dots p_1 = p_n \dots p_{j+1} d p_{j-1} \dots p_{i+1} a p_{i-1} \dots p_1$. Puisque $a \neq b$, on a $i = j$ ainsi que $a = d$ et $c = b$. Cela montre que si $a \neq b$ alors les éléments non nuls $(p, p^{(a,b)})$ de $k(Z//B)$ sont linéairement indépendants. C'est la raison pour laquelle on peut choisir une base de $k(Q_1//Q_1) \cap \text{Ker } \psi_1$ dans $Q_1//Q_1$: on considère tous les éléments $(a, a) \in Q_1//Q_1$ et tous les éléments $(a, b) \in Q_1//Q_1$, $a \neq b$, tels que l'idéal $\langle Z \rangle$ soit (b, a) -saturé. On a, pour chaque sommet $e \in Q_0$ dans $L_0 = k(Q_1//Q_1) \cap \text{Ker } \psi_1 / k(Q_1//Q_1) \cap \text{Im } \psi_0$, la relation $\sum_{a \in Q_1 e} (a, a) - \sum_{a \in e Q_1} (a, a) = 0$. Puisque $|Q_0| - 1$ de ces $|Q_0|$ relations sont linéairement indépendantes, on a $\dim k(Q_1//Q_1) \cap \text{Im } \psi_0 = |Q_1| - |Q_0| + 1$. On obtient donc une base de L_0 si on impose les conditions (ii) et (iii).

q.e.d. 2.4.3.2

Dans la suite, \mathcal{B} désigne une base de L_0 comme décrite dans la proposition précédente.

Remarque et Exemple 2.4.3.3

Pour les k -espaces vectoriels L_i , où $i \geq 1$, on ne peut toujours choisir une base parmi les classes modulo I des éléments de $Q_1//B_{i+1}$. En effet, considérons l'exemple suivant : soient k un corps de caractéristique différente de 2 et Q le carquois



Prenons comme ensemble de relations minimales

$$Z = \{ca, ed, b^2\}.$$

Soit $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ la k -algèbre monomiale associée à Q et Z . Du fait que $B_i = \emptyset$ pour $i \geq 4$ et que $Q_1//B_3 = \emptyset$, découle

$$L_i = 0, \quad \text{pour } i \geq 2.$$

Puisque b^2 est un élément de Z et que la caractéristique du corps k ne divise pas 2, nous obtenons, en vertu de la proposition 2.4.2.2,

$$L_{-1} = 0.$$

Il suit de la proposition précédente que

$$L_0 = k(b, b).$$

Pour un élément $x = \lambda_a(a, ba) + \lambda_c(c, cb) + \lambda_d(d, bd) + \lambda_e(e, eb)$ de $k(Q_1//B_2)$, avec $\lambda_a, \lambda_c, \lambda_d, \lambda_e \in k$, on a $\psi_1(x) = \lambda_a(ca, cba) + \lambda_c(ca, cba) + \lambda_d(ed, ebd) + \lambda_e(ed, ebd)$. Ceci montre que x est contenu dans le noyau $\text{Ker } \psi_1$ si et seulement si on a $\lambda_a = -\lambda_c$ et $\lambda_e = -\lambda_d$. Il s'en suit que les éléments $(c, cb) - (a, ba)$ et $(e, eb) - (d, bd)$ constituent une base de $k(Q_1//B_2) \cap \text{Ker } \psi_1$. Le fait que $k(Q_1//B_2) \cap \text{Im } \psi_0 = k((c, cb) + (e, eb) - (a, ba) - (d, bd))$ entraîne

$$L_2 = k((a, ba) - (c, cb)),$$

et on ne peut donc choisir une base de L_2 parmi les éléments de $Q_1//B_2$. La relation

$$[(b, b), (a, ba) - (c, cb)] = (a, ba) - (c, cb)$$

montre que $H^1(\Lambda, \Lambda) = k(b, b) \oplus k((a, ba) - (c, cb))$ est l'algèbre de Lie non abélienne de dimension 2.

Définition et Remarque 2.4.3.4

Soit \overline{Q} le sous-carquois de Q obtenu en prenant un représentant pour chaque classe de flèches parallèles de Q . Si le carquois \overline{Q} a un cycle (non-orienté ou orienté), alors on a $|Q_1//| - |Q_0| + 1 > 0$ et, par conséquent, il existe au moins une classe de flèches parallèles $\overline{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $n \geq 1$, telle que \mathcal{B} contient tous les éléments $(\alpha_i, \alpha_i) \in L_0$, $1 \leq i \leq n$.

Pour chaque classe de flèches parallèles $\overline{\alpha} \in Q_1//$, on note par $L_0^{\overline{\alpha}}$ l'idéal de Lie de L_0 engendré par les éléments $(a, b) \in \mathcal{B}$ tels que $a, b \in \overline{\alpha}$. Evidemment l'algèbre de Lie L_0 est le produit de ces algèbres de Lie :

$$L_0 = \prod_{\overline{\alpha} \in Q_1//} L_0^{\overline{\alpha}}.$$

Pour l'étude du radical de cette algèbre de Lie, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4.3.5

Soit $J \neq 0$ un idéal de Lie de $L_0^{\bar{\alpha}}$ engendré par des éléments $(\alpha_i, \alpha_j) \in L_0^{\bar{\alpha}}$ tels que $(\alpha_j, \alpha_i) \notin L_0^{\bar{\alpha}}$. Alors $\dim_k [J, J] < \dim_k J$.

Démonstration:

Remarquons d'abord que $[J, J]$ est engendré par les éléments (α_i, α_j) de \mathcal{B} appartenant à J tels qu'il existe des éléments (α_i, α_l) et (α_l, α_j) dans J satisfaisant nécessairement $\alpha_i \neq \alpha_l \neq \alpha_j \neq \alpha_i$. Soit (α_i, α_j) un élément quelconque de \mathcal{B} appartenant à J . Si $(\alpha_i, \alpha_j) \notin [J, J]$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $(\alpha_i, \alpha_j) \in [J, J]$. Cela arrive si et seulement s'il existe une flèche $\alpha_l \in \bar{\alpha}$, $\alpha_i \neq \alpha_l \neq \alpha_j$, telle que $(\alpha_i, \alpha_l) \in J$ et $(\alpha_l, \alpha_j) \in J$. Si $(\alpha_i, \alpha_l) \notin [J, J]$, alors on a terminé. Sinon on recommence. Supposons alors qu'on ait $(\alpha_i, \alpha_l) \in [J, J]$. Il existe donc une flèche $\alpha_k \in \bar{\alpha} - \{\alpha_i, \alpha_l\}$ telle que $(\alpha_i, \alpha_k) \in J$ et $(\alpha_k, \alpha_l) \in J$. Si $(\alpha_l, \alpha_j) \in J$, alors $(\alpha_j, \alpha_l) \notin J$ et donc $\alpha_k \neq \alpha_j$. Si $(\alpha_i, \alpha_k) \notin [J, J]$, alors on a terminé. Sinon on recommence. Puisque $\bar{\alpha}$ est un ensemble fini, cette procédure s'arrête après un nombre fini de pas.

q.e.d. 2.4.3.5

Théorème 2.4.3.6

Le radical de l'algèbre de Lie L_0 est engendré, en tant que k -espace vectoriel, par la réunion des ensembles suivants :

- pour chaque classe d'équivalence $S \in \bar{\alpha}/ \approx$ d'une classe de flèches parallèles $\bar{\alpha}$, l'élément $\sum_{a \in S} (a, a)$,
- toutes les paires $(a, b) \in L_0$ telles que les flèches parallèles a et b sont différentes et $(b, a) \notin L_0$.

Si la caractéristique du corps k est égale à 2, on ajoute :

- pour toute classe d'équivalence $S = \{a, b\} \in \bar{\alpha}/ \approx$ d'une classe de flèches parallèles $\bar{\alpha}$, les éléments (a, b) , (b, a) et (a, a) de L_0 .

Démonstration:

Soit I le k -espace vectoriel engendré par les éléments décrits ci-dessus. Si on définit $I_{\bar{\alpha}} := I \cap L_0^{\bar{\alpha}}$, on obtient $I = \prod_{\bar{\alpha} \in Q_1 //} I_{\bar{\alpha}}$. Pour prouver que le k -espace vectoriel I et le radical de L_0 sont égaux, il suffit donc de montrer qu'on a, pour toute classe de flèches parallèles $\bar{\alpha}$ de Q , les assertions suivantes :

- (i) $I_{\bar{\alpha}}$ est un idéal de Lie de $L_0^{\bar{\alpha}}$,
- (ii) $I_{\bar{\alpha}}$ est résoluble
- (iii) $L_0^{\bar{\alpha}}/I_{\bar{\alpha}}$ est une algèbre de Lie semi-simple ou zéro.

Soit $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une classe de flèches parallèles de Q .

- (i) : Soit (α_k, α_l) un élément de $L_0^{\bar{\alpha}}$.

– Pour toute classe d'équivalence $S \in \bar{\alpha}/\approx$ de $\bar{\alpha}$, on a :

$$\left[\sum_{\alpha_i \in S} (\alpha_i, \alpha_i), (\alpha_k, \alpha_l) \right] = \begin{cases} (\alpha_k, \alpha_l) & \text{si } \alpha_k \in S \text{ et } \alpha_l \notin S, \\ -(\alpha_k, \alpha_l) & \text{si } \alpha_k \notin S \text{ et } \alpha_l \in S, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\alpha_k \in S$ et $\alpha_l \notin S$ ou si $\alpha_k \notin S$ et $\alpha_l \in S$, alors le fait que $(\alpha_k, \alpha_l) \in L_0^{\bar{\alpha}}$ implique $(\alpha_l, \alpha_k) \notin L_0^{\bar{\alpha}}$ et donc $(\alpha_k, \alpha_l) \in I_{\bar{\alpha}}$.

– Soit $(\alpha_i, \alpha_j) \in L_0^{\bar{\alpha}}$ tel que $(\alpha_j, \alpha_i) \notin L_0^{\bar{\alpha}}$. On a

$$[(\alpha_i, \alpha_j), (\alpha_k, \alpha_l)] = \delta_{i,l}(\alpha_k, \alpha_j) - \delta_{k,j}(\alpha_i, \alpha_l).$$

Si $j = k$, alors du fait que $(\alpha_j, \alpha_l) \in L_0^{\bar{\alpha}}$ et $(\alpha_j, \alpha_i) \notin L_0^{\bar{\alpha}}$ découle $(\alpha_l, \alpha_i) \notin L_0^{\bar{\alpha}}$, car $[(\alpha_l, \alpha_i), (\alpha_j, \alpha_l)] = (\alpha_j, \alpha_i)$. Par suite on a $(\alpha_i, \alpha_l) \in I_{\bar{\alpha}}$. Si $i = l$, il s'en suit de la même manière que $(\alpha_k, \alpha_j) \in I_{\bar{\alpha}}$.

– Soient car $k = 2$ et $S = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}\} \in \bar{\alpha}/\approx$. On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1}), (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})] &= -(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) \in I_{\bar{\alpha}}, \\ [(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1}), (\alpha_{i_2}, \alpha_{i_1})] &= (\alpha_{i_2}, \alpha_{i_1}) \in I_{\bar{\alpha}} \quad \text{et} \\ [(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}), (\alpha_{i_2}, \alpha_{i_1})] &= (\alpha_{i_2}, \alpha_{i_2}) - (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1}) = \sum_{\alpha_i \in S} (\alpha_i, \alpha_i) \in I_{\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

On vient ainsi de démontrer que $I_{\bar{\alpha}}$ est un idéal de Lie de $L_0^{\bar{\alpha}}$.

(ii) : L'idéal de Lie $I_{\bar{\alpha}}^{(1)} := [I_{\bar{\alpha}}, I_{\bar{\alpha}}]$ est engendré par les éléments $(\alpha_i, \alpha_j) \in L_0^{\bar{\alpha}}$ tels que $(\alpha_j, \alpha_i) \notin L_0^{\bar{\alpha}}$. Si car $k = 2$, il est aussi engendré par les éléments $\sum_{\alpha_i} (\alpha_i, \alpha_i)$, $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})$ et $(\alpha_{i_2}, \alpha_{i_1})$, pour toute $S = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}\} \in \bar{\alpha}/\approx$. Les générateurs de l'idéal de Lie $I_{\bar{\alpha}}^{(2)} := [I_{\bar{\alpha}}^{(1)}, I_{\bar{\alpha}}^{(1)}]$ se trouvent parmi les éléments $(\alpha_i, \alpha_j) \in L_0^{\bar{\alpha}}$ tels que $(\alpha_j, \alpha_i) \notin L_0^{\bar{\alpha}}$. Si car $k = 2$, ils se trouvent aussi parmi les éléments $\sum_{\alpha_i \in S} (\alpha_i, \alpha_i)$, pour toute $S \in \bar{\alpha}/\approx$ contenant exactement deux flèches parallèles. Par conséquent, $I_{\bar{\alpha}}^{(3)} := [I_{\bar{\alpha}}^{(2)}, I_{\bar{\alpha}}^{(2)}]$ ne contient que des éléments $(\alpha_i, \alpha_j) \in L_0^{\bar{\alpha}}$ tels que $(\alpha_i, \alpha_j) \notin L_0^{\bar{\alpha}}$. Du fait que $\dim_k I_{\bar{\alpha}} < \infty$, on déduit successivement, en utilisant le lemme précédent, qu'il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $I_{\bar{\alpha}}^{(l)} := [I_{\bar{\alpha}}^{(l-1)}, I_{\bar{\alpha}}^{(l-1)}] = 0$. Ceci est équivalent à dire que $I_{\bar{\alpha}}$ est un idéal résoluble de $L_0^{\bar{\alpha}}$.

(iii) : Les relations dans $L_0^{\bar{\alpha}}/I_{\bar{\alpha}}$ impliquent qu'on obtient une base de $L_0^{\bar{\alpha}}/I_{\bar{\alpha}}$ en prenant tous les éléments (α_i, α_j) , où $\alpha_i \neq \alpha_j$ avec $\alpha_i, \alpha_j \in S$, et $|S| - 1$ éléments (α_i, α_i) , où $\alpha_i \in S$ pour chaque $S \in \bar{\alpha}/\approx$, avec $|S| > 2$ dans le cas où car $k = 2$. Pour chaque $S \in \bar{\alpha}/\approx$, on note par ${}^S L_0^{\bar{\alpha}}/I_{\bar{\alpha}}$ l'idéal de Lie engendré par les éléments $(\alpha_i, \alpha_j) \in L_0^{\bar{\alpha}}$ tels que $\alpha_i, \alpha_j \in S$. On a donc

$$L_0^{\bar{\alpha}}/I_{\bar{\alpha}} = \prod_{S \in \bar{\alpha}/\approx} {}^S L_0^{\bar{\alpha}}/I_{\bar{\alpha}}.$$

Soit $S = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}\}$ une classe d'équivalence dans $\bar{\alpha}/\approx$, avec $m \geq 2$ si $\text{car } k \neq 2$ et $m \neq 2$ si $\text{car } k = 2$. Les éléments $(\alpha_{i_p}, \alpha_{i_q})$, $i_p \neq i_q$, et $(\alpha_{i_p}, \alpha_{i_p})$, $i_p \neq i_m$, forment une base de ${}^S L_0^{\bar{\alpha}}/I_{\bar{\alpha}}$ et on a la relation $\sum_{\alpha_{i_p} \in S} (\alpha_{i_p}, \alpha_{i_p}) = 0$. Comme le crochet sur ${}^S L_0^{\bar{\alpha}}/I_{\bar{\alpha}}$ est donné par $[(\alpha_{i_p}, \alpha_{i_q}), (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_l})] = \delta_{i_q, i_k} (\alpha_{i_p}, \alpha_{i_l}) - \delta_{i_p, i_l} (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_q})$, on déduit que

$$\begin{aligned} {}^S L_0^{\bar{\alpha}}/I_{\bar{\alpha}} &\rightarrow \mathfrak{pgl}(m, k) := \mathfrak{gl}(m, k)/k1 \\ (\alpha_{i_p}, \alpha_{i_q}) &\mapsto e_{pq} \pmod{k1}, \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie. On note par e_{pq} la matrice $m \times m$ ayant 1 dans la position (p, q) et 0 ailleurs. Puisque $\mathfrak{pgl}(m, k)$ est une algèbre de Lie semi-simple si $m \geq 2$ quand $\text{car } k \neq 2$ et si $m > 2$ quand $\text{car } k = 2$, on conclut que ${}^S L_0^{\bar{\alpha}}/I_{\bar{\alpha}}$ est une algèbre de Lie semi-simple. Il en résulte que $L_0^{\bar{\alpha}}/I_{\bar{\alpha}} = \prod_{S \in \bar{\alpha}/\approx} {}^S L_0^{\bar{\alpha}}/I_{\bar{\alpha}}$ est une algèbre de Lie semi-simple.

q.e.d. 2.4.3.6

La démonstration du théorème précédent implique le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.3.7

L'algèbre de Lie semi-simple $H^1(\Lambda, \Lambda)/\text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) = L_0/\text{Rad } L_0$ est le produit d'algèbres de Lie ayant un facteur $\mathfrak{pgl}(|S|, k) := \mathfrak{gl}(|S|, k)/k1$ pour chaque classe d'équivalence $S \in \bar{\alpha}/\approx$ d'une classe de flèches parallèles $\bar{\alpha}$ telle que $|S| \geq 2$ si $\text{car } k \neq 2$ et $|S| > 2$ si $\text{car } k = 2$.

2.5 Critères combinatoires pour quelques propriétés de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$

2.5.1 La résolubilité

Une algèbre de Lie est dite résoluble si elle est égale à son radical. Le critère de résolubilité suivant est donc une conséquence immédiate du théorème précédent. On rappelle que le cas $L_{-1} \neq 0$ est considéré comme étant exceptionnel, voir la proposition 2.4.2.2.

Corollaire 2.5.1.1

Soient Q un carquois connexe et $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ une k -algèbre monomiale de dimension finie telle que $L_{-1} = k(Q_0//Q_1) \cap \text{Ker } \psi_1 = 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est résoluble.*

- (ii) Chaque classe d'équivalence S d'une classe de flèches parallèles $\bar{\alpha} \in Q_1//$ de Q contient une et une seule flèche si la caractéristique du corps k est différente de 2. Dans le cas $\text{car } k = 2$, on a $|S| \leq 2$ pour toute $S \in \bar{\alpha}/ \approx$ avec $\bar{\alpha} \in Q_1//$.

En caractéristique zéro, l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique connexe est résoluble si et seulement si le groupe algébrique connexe est résoluble (en tant que groupe). Ainsi, lorsque k est de caractéristique zéro, on déduit, en utilisant la proposition 2.4.2.2, le résultat suivant qui a aussi été prouvé par Guil-Asensio et Saorín (voir [GAS2], corollaire 2.22) dans le cas où le corps k est algébriquement clos :

Corollaire 2.5.1.2

Soient k un corps de caractéristique zéro, Q un carquois connexe et $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ une k -algèbre monomiale de dimension finie. Alors, la composante de l'identité du groupe algébrique des automorphismes extérieurs $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est résoluble si et seulement si, pour tout couple (a, b) de flèches parallèles de Q avec $a \neq b$, les flèches a et b ne sont pas équivalentes.

Exemples 2.5.1.3

- (i) Si le carquois Q ne contient pas de classe de flèches parallèles non triviale, alors l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est résoluble et, en caractéristique zéro, le groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est résoluble. Pour une algèbre tronquée, *i.e.* $\Lambda = kQ/\langle Q_m \rangle$, $m \geq 2$, cette condition est nécessaire si la caractéristique du corps k est différente de 2.
- (ii) Soit Q le carquois

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{b_1} \\ \xrightarrow{b_2} \\ \xrightarrow{b_3} \end{array} & \\ \xrightarrow{a} & & \xrightarrow{c} \end{array}$$

et prenons comme ensemble de relations minimales

$$Z = \{b_1a, cb_2a, b_3a\}.$$

Soit $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ l'algèbre monomiale associée à Q et Z . On a

$$H^1(\Lambda, \Lambda) = L_0 = k(b_1, b_1) \oplus k(b_2, b_2) \oplus k(b_2, b_1) \oplus k(b_2, b_3).$$

Autrement dit, sur la classe de flèches parallèles $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, on a les relations $b_1 \leq_{\langle Z \rangle} b_2$ et $b_3 \leq_{\langle Z \rangle} b_2$, mais $b_2 \not\leq_{\langle Z \rangle} b_1$ et $b_2 \not\leq_{\langle Z \rangle} b_3$. Il en résulte que $\bar{b}/ \approx = \{\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_3\}\}$, ce qui montre que $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est résoluble et, qu'en caractéristique zéro, $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est résoluble.

2.5.2 La (semi-)simplicité

Rappelons qu'une algèbre de Lie est dite semi-simple si elle n'est pas triviale et si son radical est égal à zéro. Elle est dite simple si elle n'a pas d'autres idéaux qu'elle-même et 0. On rappelle également la définition 2.4.3.4 : le carquois \overline{Q} est le sous-carquois de Q obtenu en prenant un représentant pour chaque classe de flèches parallèles de Q .

Théorème 2.5.2.1

Soient Q un carquois connexe et $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ une k -algèbre monomiale de dimension finie telle que $L_{-1} = k(Q_0//Q_1) \cap \text{Ker } \psi_1 = 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est semi-simple.
- (ii) Le carquois \overline{Q} est un arbre, le carquois Q a au moins une classe de flèches parallèles non triviale et l'idéal $\langle Z \rangle$ est complètement saturé. Si la caractéristique du corps k est égale à 2, alors Q n'a pas de classe de flèches parallèles contenant exactement deux flèches.
- (iii) L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est isomorphe au produit non trivial d'algèbres de Lie

$$\prod_{\overline{\alpha} \in Q_1//} \text{pgl}(|\overline{\alpha}|, k),$$

où $|\overline{\alpha}| \neq 2$ si la caractéristique de k est égale à 2.

Démonstration:

Soit \mathcal{B} une base de L_0 comme décrite dans la proposition 2.4.3.2.

(i) \Rightarrow (ii) : Si le carquois \overline{Q} contenait un cycle (orienté ou non orienté), il existerait une classe $\overline{\alpha} \in Q_1//$ de flèches parallèles telle que $(\alpha, \alpha) \in \mathcal{B}$ pour toute $\alpha \in \overline{\alpha}$ (voir 2.4.3.4) et $k(\sum_{\alpha \in \overline{\alpha}} (\alpha, \alpha))$ serait donc un idéal abélien non trivial de L_0 , car $[\sum_{\alpha \in \overline{\alpha}} (\alpha, \alpha), (a, b)] = (a, b) - (a, b) = 0$ pour tout $a, b \in \overline{\alpha}$. Ceci contredit le fait que $0 = \text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Rad } L_0 \oplus \bigoplus_{i \geq 1} L_i$. Pour que $H^1(\Lambda, \Lambda) = L_0$ soit différent de zéro, il est nécessaire que Q contienne au moins une classe de flèches parallèles non triviale. Supposons que $\langle Z \rangle$ ne soit pas complètement saturé. Selon la remarque 2.4.3.1, il existe deux flèches parallèles qui ne sont pas équivalentes. Cela veut dire qu'il existe une classe de flèches parallèles $\overline{\alpha} \in Q_1//$ telle que $\overline{\alpha}/ \approx$ contient au moins deux éléments, disons R et S . Les propriétés de la base \mathcal{B} montrent que $\sum_{a \in R} (a, a) \neq 0$ ou $\sum_{a \in S} (a, a) \neq 0$, ce qui contredit le fait que $\text{Rad } L_0 \subset \text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) = 0$. La dernière affirmation est une conséquence immédiate du théorème 2.4.3.6.

(ii) \Rightarrow (iii) : Soient Q et Z vérifiant les conditions de (ii). Du fait que \overline{Q} est un arbre, on déduit $\bigoplus_{i \geq 1} L_i = 0$ et donc $H^1(\Lambda, \Lambda) = L_0$. Puisque l'idéal $\langle Z \rangle$ est

complètement saturé on a

$$L_0 = k(Q_1//Q_1)/\langle \sum_{a \in Q_{1e}} (a, a) - \sum_{a \in eQ_1} (a, a) \mid e \in Q_0 \rangle.$$

Ceci ajouté au fait que Q n'a pas de classe d'équivalence contenant deux flèches dans le cas où $\text{car } k = 2$, montre que son radical est engendré par les éléments du type $\sum_{\alpha \in \bar{\alpha}} (\alpha, \alpha)$, $\bar{\alpha} \in Q_1//$, (voir théorème 2.4.3.6). Comme ces éléments sont égaux à zéro, on obtient $\text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) = 0$. Le corollaire 2.4.3.7 fournit le résultat.

(iii) \Rightarrow (i) : Clair au vu de la remarque suivante.

q.e.d. 2.5.2.1

Remarque 2.5.2.2

L'algèbre de Lie $\mathfrak{pgl}(n, k) := \mathfrak{gl}(n, k)/k1$, $n \geq 2$, est isomorphe à l'algèbre de Lie simple classique $\mathfrak{sl}(n, k)$ des matrices $n \times n$ à trace nulle si la caractéristique du corps k ne divise pas n . Si $\text{car } k$ divise n et $n \neq 2$, alors $\mathfrak{pgl}(n, k)$ est une algèbre semi-simple sans être un produit direct d'algèbres de Lie simples.

Corollaire 2.5.2.3

Soient Q un carquois connexe et $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ une k -algèbre monomiale de dimension finie telle que $L_{-1} = k(Q_0//Q_1) \cap \text{Ker } \psi_1 = 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est simple.
- (ii) Le carquois \bar{Q} est un arbre, le carquois Q a exactement une classe de flèches parallèles $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ telle que $n \geq 2$ et la caractéristique du corps k ne divise pas n . L'idéal $\langle Z \rangle$ est complètement saturé.
- (iii) Il existe un entier $n \geq 2$ tel que la caractéristique du corps k ne divise pas n et $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, k)$.

Puisque le premier groupe de la cohomologie de Hochschild est l'algèbre de Lie du groupe algébrique des automorphismes extérieurs en caractéristique zéro (voir théorème 1.2.1.1), on obtient le corollaire suivant (voir [GAS2], corollaire 4.9, pour un résultat partiel sur les algèbres héréditaires) :

Corollaire 2.5.2.4

Soient k un corps de caractéristique zéro, Q un carquois connexe et $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ une k -algèbre monomiale de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est semi-simple.
- (ii) Le carquois \bar{Q} est un arbre, le carquois Q a au moins une classe de flèches parallèles non triviale et l'idéal $\langle Z \rangle$ est complètement saturé.

(iii) Le groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est isomorphe au produit non trivial de groupes algébriques $\prod_{\bar{\alpha} \in Q_1//} \mathbf{PGL}(|\bar{\alpha}|, k)$.

Démonstration:

En caractéristique zéro, un groupe algébrique connexe est semi-simple si et seulement si son algèbre de Lie est semi-simple (voir [Hu1], 13.5).

(i) \Leftrightarrow (ii) : Cette équivalence est une conséquence immédiate du théorème précédent et du théorème 1.2.1.1.

(ii) \Rightarrow (iii) : Soient Q et Z vérifiant les conditions données. Selon 2.3.1.2, on sait que $\text{Out}(\Lambda)^\circ = \frac{H_\Lambda \cap U_\Lambda}{H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)} \rtimes \frac{V_\Lambda^\circ}{\hat{E}}$. Puisque \bar{Q} est un arbre, il n'y a pas de chemin dans $B' := B - Q_0 \cup Q_1$ de longueur ≥ 2 parallèle à une flèche. Du fait que, pour chaque élément $\sigma \in H_\Lambda \cap U_\Lambda$, on a $\sigma(a) = a + \sum_{(a,\gamma) \in Q_1//B'} \lambda_{(a,\gamma)} \gamma$, pour tout $a \in Q_1$, on déduit que $H_\Lambda \cap U_\Lambda = \{\text{id}_\Lambda\}$. Comme l'idéal $\langle Z \rangle$ est complètement saturé par hypothèse, deux flèches parallèles quelconques sont équivalentes. Par conséquent, le théorème principal 2.20 de l'article [GAS2] (voir 2.3.1.5) implique $V_\Lambda^\circ \simeq \prod_{\bar{\alpha} \in Q_1//} \mathbf{GL}(|\bar{\alpha}|, k)$. Puisque le carquois \bar{Q} est supposé être un arbre, on a $\hat{E} = \text{Ch}(Q, k) = \prod_{\bar{\alpha} \in Q_1//} k^* I_{|\bar{\alpha}|}$, grâce à l'exemple 8 dans [GAS1]. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \text{Out}(\Lambda)^\circ &= \frac{H_\Lambda \cap U_\Lambda}{H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)} \rtimes \frac{V_\Lambda^\circ}{\hat{E}} = \frac{V_\Lambda^\circ}{\hat{E}} \\ &\simeq \frac{\prod_{\bar{\alpha} \in Q_1//} \mathbf{GL}(|\bar{\alpha}|, k)}{\prod_{\bar{\alpha} \in Q_1//} k^* I_{|\bar{\alpha}|}} = \prod_{\bar{\alpha} \in Q_1//} \frac{\mathbf{GL}(|\bar{\alpha}|, k)}{k^* I_{|\bar{\alpha}|}} \\ &= \prod_{\bar{\alpha} \in Q_1//} \mathbf{PGL}(|\bar{\alpha}|, k). \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (i) : La semi-simplicité de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(\text{Out}(\Lambda)^\circ) = \prod_{\bar{\alpha} \in Q_1//} \mathfrak{pgl}(|\bar{\alpha}|, k)$ implique la semi-simplicité du groupe algébrique connexe $\text{Out}(\Lambda)^\circ$.

q.e.d. 2.5.2.4

Un groupe algébrique est dit presque simple s'il est non commutatif et s'il n'a pas de sous-groupes propres fermés connexes et distingués. Il n'est pas forcément simple en tant que groupe, *i.e.* il peut avoir un sous-groupe distingué propre. Le fait est, qu'en caractéristique zéro, l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique connexe est simple si et seulement si le groupe algébrique connexe est presque simple (voir [Hu1], 14.2). Cela entraîne le résultat suivant :

Corollaire 2.5.2.5

Soient k un corps de caractéristique zéro, Q un carquois connexe et $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ une k -algèbre monomiale de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est presque simple.
- (ii) Le carquois \bar{Q} est un arbre, le carquois Q a exactement une classe de flèches parallèles $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ telle que $n \geq 2$. L'idéal $\langle Z \rangle$ est complètement saturé.
- (iii) Il existe un entier $n \geq 2$ tel que le groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est isomorphe au groupe algébrique $\mathbf{PGL}(n, k)$.

Exemple 2.5.2.6

Soit Q le carquois

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{a} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{b_1} \\ \xrightarrow{b_2} \\ \xrightarrow{b_3} \end{array} \quad \xrightarrow{c} \quad \begin{array}{c} \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_2} \end{array} \end{array}$$

et prenons comme ensemble de relations minimales

$$Z = \{b_1a, b_2a, b_3a\}.$$

Soit $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ l'algèbre monomiale associée à Q et Z . Le carquois \bar{Q}

$$\xrightarrow{\bar{a}} \quad \xrightarrow{\bar{b}} \quad \xrightarrow{\bar{c}} \quad \xleftarrow{\bar{d}}$$

est un arbre, Q a deux classes de flèches parallèles non triviales, à savoir $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ et $\bar{d} = \{d_1, d_2\}$, et l'idéal $\langle Z \rangle$ est complètement saturé. Le théorème 2.5.2.1 montre alors que l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est semi-simple si et seulement si la caractéristique du corps k est différente de 2. Dans ce cas on a

$$H^1(\Lambda, \Lambda) = \mathfrak{pgl}(3, k) \times \mathfrak{pgl}(2, k).$$

Si la caractéristique du corps k est égale à zéro, le groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est semi-simple et on a

$$\text{Out}(\Lambda)^\circ = \mathbf{PGL}(3, k) \times \mathbf{PGL}(2, k).$$

2.5.3 La réductivité, la commutativité et la nilpotence

Le centre $Z(A)$ d'une algèbre de Lie A est défini comme étant

$$Z(A) := \{a \in A \mid [a, b] = 0 \quad \forall b \in A\}.$$

Afin d'obtenir des critères pour la commutativité et la réductivité de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$, il est nécessaire d'étudier son centre. C'est pourquoi nous introduisons les définitions suivantes :

Définition 2.5.3.1

Pour chaque classe de flèches parallèles $\bar{\alpha}$ de Q , un ensemble $C \subset \bar{\alpha}$ est dit connexe, si, pour chaque couple de flèches (α_1, α_r) de C , il existe des flèches $\alpha_2, \dots, \alpha_{r-1} \in C$ telles qu'on a $\alpha_i \leq_{\langle Z \rangle} \alpha_{i+1}$ ou $\alpha_{i+1} \leq_{\langle Z \rangle} \alpha_i$, pour tout entier $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Un ensemble connexe $C \subset \bar{\alpha}$ est dit une composante connexe de $\bar{\alpha}$ s'il est maximal pour la connexité, i.e. si, pour toute flèche $\beta \in \bar{\alpha} - C$, il n'existe pas de flèche $\alpha \in C$ telle que $\alpha \leq_{\langle Z \rangle} \beta$ ou $\beta \geq_{\langle Z \rangle} \alpha$. Evidemment les composantes connexes d'une classe de flèches parallèles $\bar{\alpha}$ forment une partition de $\bar{\alpha}$.

Avec cette définition, nous pouvons énoncer le résultat suivant sur le centre de L_0 (resp. $H^1(\Lambda, \Lambda)$) :

Lemme 2.5.3.2

Soient Q un carquois connexe et $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ une k -algèbre monomiale de dimension finie.

- (i) Le centre $Z(L_0)$ de l'algèbre de Lie L_0 est engendré par les éléments $\sum_{a \in C} (a, a)$, où C désigne une composante connexe d'une classe de flèches parallèles de Q .
- (ii) Si le corps k est de caractéristique zéro ou si le carquois Q n'a pas de cycle orienté, alors le centre $Z(H^1(\Lambda, \Lambda))$ de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est contenu dans le centre $Z(L_0)$ de L_0 .

Démonstration:

(i) : Pour chaque élément $(a, b) \in Q_1//Q_1$, $a \neq b$, on a $[(a, b), (a, a)] = (a, b)$, de sorte que $Z(L_0)$ est contenu dans la sous-algèbre de Lie abélienne de L_0 engendrée par les éléments (a, a) , $a \in Q_1$. Pour chaque combinaison linéaire $\sum_{a \in Q_1} \lambda_a (a, a)$, $\lambda_a \in k$, on a $[\sum_{a \in Q_1} \lambda_a (a, a), (b, c)] = (-\lambda_b + \lambda_c)(b, c)$, pour tout $(b, c) \in L_0$. Par conséquent, $\sum_{a \in Q_1} \lambda_a (a, a)$ est contenu dans $Z(L_0)$ si et seulement si on a $\lambda_b = \lambda_c$ pour toutes les flèches b, c telles que $c \leq_{\langle Z \rangle} b$. Ceci montre que $Z(L_0)$ est engendré par les éléments $\sum_{a \in C} (a, a)$.

(ii) : Dans les deux cas, on a $L_{-1} = 0$ en vertu de la proposition 2.4.2.2. Si la caractéristique du corps k est égale à zéro, alors, pour chaque élément $0 \neq \sum_{(a, \gamma) \in Q_1//B_{i+1}} \lambda_{(a, \gamma)} (a, \gamma) \in L_i$, $\lambda_{(a, \gamma)} \in k$, $i \geq 1$, on a :

$$\left[\sum_{(a, \gamma) \in Q_1//B_{i+1}} \lambda_{(a, \gamma)} (a, \gamma), \sum_{b \in Q_1} (b, b) \right] = -i \sum_{(a, \gamma) \in Q_1//B_{i+1}} \lambda_{(a, \gamma)} (a, \gamma) \neq 0$$

Ceci montre l'inclusion $Z(H^1(\Lambda, \Lambda)) \subset Z(L_0)$. Supposons maintenant que le carquois Q n'ait pas de cycle orienté. Alors chaque chemin $\gamma \in B$ de longueur ≥ 2

parallèle à une flèche a ne peut contenir a et donc $[(a, \gamma), (a, a)] = (a, \gamma)$. Tenant compte du fait que $H^1(\Lambda, \Lambda) = L_0 \oplus \bigoplus_{i \geq 1} k(Q_1 // B_{i+1}) \cap \text{Ker } \psi_1$, on obtient $Z(H^1(\Lambda, \Lambda)) \subset Z(L_0)$.

q.e.d. 2.5.3.2

Une algèbre de Lie est dite réductive si son radical et son centre coïncident.

Proposition 2.5.3.3

Soient Q un carquois connexe et $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ une k -algèbre monomiale de dimension finie. Si le carquois Q n'a pas de cycle orienté ou si le corps k est de caractéristique zéro, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) *L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est réductive.*
- (ii) *L'idéal de Lie $\bigoplus_{i \geq 1} L_i$ est égal à 0 et la relation $\leq_{\langle Z \rangle}$ est symétrique sur chaque classe de flèches parallèles. Si la caractéristique de k est égale à 2, alors aucune classe d'équivalence $S \in \bar{\alpha}/\approx$ ne contient exactement deux flèches d'une classe de flèches parallèles $\bar{\alpha}$.*

Démonstration:

(i) \Rightarrow (ii) : Soit $\text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) = Z(H^1(\Lambda, \Lambda))$. Si Q n'a pas de cycle orienté ou si $\text{car } k = 0$, alors $L_{-1} = 0$ selon la proposition 2.4.2.2 et donc $\text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Rad } L_0 \oplus \bigoplus_{i \geq 1} L_i$. Le lemme précédent montre que le centre de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est inclus dans L_0 et donc $\text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) \subset L_0$. Ceci implique $\bigoplus_{i \geq 1} L_i = 0$ et par conséquent $H^1(\Lambda, \Lambda) = L_0$. En vertu du théorème 2.4.3.6 et du lemme précédent, l'hypothèse $\text{Rad } L_0 = \text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) = Z(H^1(\Lambda, \Lambda)) = Z(L_0)$ implique qu'il n'y a pas d'élément $(a, b) \in L_0$ tel que $(b, a) \notin L_0$, i.e. la relation $\leq_{\langle Z \rangle}$ est symétrique. En outre, il n'existe pas de classe d'équivalence $S \in \bar{\alpha}/\approx$, $\bar{\alpha} \in Q_1//$, contenant exactement deux éléments si $\text{car } k = 2$.

(ii) \Rightarrow (i) : Les hypothèses impliquent $L_{-1} = 0$. Du fait que $\bigoplus_{i \geq 1} L_i = 0$, on déduit $H^1(\Lambda, \Lambda) = L_0$. Le théorème 2.4.3.6 et le lemme précédent montrent que $\text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Rad } L_0 = Z(L_0) = Z(H^1(\Lambda, \Lambda))$.

q.e.d. 2.5.3.3

Le radical unipotent d'un groupe algébrique G est le sous-groupe distingué du radical $R(G)$ constitué de tous les éléments unipotents de $R(G)$. On le note par $R_u(G)$. Il peut être caractérisé comme étant le plus grand sous-groupe normal connexe et unipotent de G . Un groupe algébrique G est dit réductif si $G \neq e$ est connexe et si le radical unipotent de G est trivial.

En caractéristique zéro, un groupe algébrique connexe étant réductif si et seulement si son algèbre de Lie est réductive, on déduit immédiatement, en utilisant la proposition 1.2.1.1 et le corollaire 2.4.1.1, le corollaire suivant :

Corollaire 2.5.3.4

Soient k un corps de caractéristique zéro, Q un carquois connexe et $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ une algèbre monomiale de dimension finie. Alors la composante de l'identité du groupe algébrique des automorphismes extérieurs $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est réductive si et seulement si la relation $\leq_{\langle Z \rangle}$ est symétrique sur chaque classe de flèches parallèles de Q et si $\frac{H_\Lambda \cap U_\Lambda}{H_\Lambda \cap \text{Inn}^*(\Lambda)} = 0$.

Définissons une suite d'idéaux d'une algèbre de Lie L en posant $\mathcal{C}^0 L := L (= L^{(0)})$, $\mathcal{C}^1 L := [L, L] (= L^{(1)})$, $\mathcal{C}^2 L := [L, \mathcal{C}^1 L]$, \dots , $\mathcal{C}^n L := [L, \mathcal{C}^{n-1} L]$. Une algèbre de Lie L est dite nilpotente s'il existe un entier m tel que $\mathcal{C}^m L = 0$. L'entier m tel que $\mathcal{C}^m L = 0$ et $\mathcal{C}^{m-1} L \neq 0$ est appelé le nilindice de L . Une algèbre de Lie L est dite filiforme si elle est nilpotente de nilindice maximal m , c'est-à-dire $\dim \mathcal{C}^k L = m - k$, pour $1 \leq k \leq m$. Le fait que $L^{(n)} \subset \mathcal{C}^n L$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, implique que les algèbres nilpotentes sont résolubles.

Proposition 2.5.3.5

Soient Q un carquois connexe et $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ une k -algèbre monomiale de dimension finie. Si Q n'a pas de cycle orienté ou si $\text{car } k = 0$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est abélienne.
- (ii) L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est filiforme.
- (iii) L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est nilpotente.
- (iv) L'idéal de Lie $\bigoplus_{i \geq 1} L_i$ est nul et il n'existe pas de flèches parallèles $a \neq b$ satisfaisant $a \leq_{\langle Z \rangle} b$.
- (v) L'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est engendrée par les éléments (a, a) de L_0 .
- (vi) La dimension de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est égale à la caractéristique d'Euler $|Q_1| - |Q_0| + 1$.

Démonstration:

(i) \Rightarrow (ii) et (ii) \Rightarrow (iii) sont évidents.

(iii) \Rightarrow (iv) : S'il y avait deux flèches parallèles $a \neq b$ telles que $a \leq_{\langle Z \rangle} b$, on aurait $(b, a) \in L_0$ et $[(a, a), (b, a)] = (b, a)$, et donc $(b, a) \in \mathcal{C}^n H^1(\Lambda, \Lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredirait l'hypothèse. Si Q n'a pas de cycle orienté, alors il existe pour chaque élément $0 \neq \sum_{(a, \gamma) \in Q_1 // B_{i+1}} \lambda_{(a, \gamma)}(a, \gamma) \in L_i$, $i \geq 1$, une flèche $b \in Q_1$ telle que $[\sum_{(a, \gamma) \in Q_1 // B_{i+1}} \lambda_{(a, \gamma)}(a, \gamma), (b, b)] = \sum_{(b, \gamma) \in Q_1 // B_{i+1}} \lambda_{(b, \gamma)}(b, \gamma) \neq 0$ et $[\sum_{(b, \gamma) \in Q_1 // B_{i+1}} \lambda_{(b, \gamma)}(b, \gamma), (b, b)] = \sum_{(b, \gamma) \in Q_1 // B_{i+1}} \lambda_{(b, \gamma)}(b, \gamma) \neq 0$. On a donc $0 \neq \sum_{(b, \gamma) \in Q_1 // B_{i+1}} \lambda_{(b, \gamma)}(b, \gamma) \in \mathcal{C}^n H^1(\Lambda, \Lambda)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est supposée nilpotente, il s'en suit que $\bigoplus_{i \geq 1} L_i = 0$. Dans le cas

car $k = 0$, on a pour chaque élément $\sum_{(a,\gamma) \in Q_1 // B_{i+1}} \lambda_{(a,\gamma)}(a, \gamma) \in L_i$, $i \geq 1$,

$$\left[\sum_{(a,\gamma) \in Q_1 // B_{i+1}} \lambda_{(a,\gamma)}(a, \gamma), \sum_{b \in Q_1} (b, b) \right] = -i \sum_{(a,\gamma) \in Q_1 // B_{i+1}} \lambda_{(a,\gamma)}(a, \gamma) \neq 0$$

et donc $\sum_{(a,\gamma) \in Q_1 // B_{i+1}} \lambda_{(a,\gamma)}(a, \gamma) \in \mathcal{C}^i H^1(\Lambda, \Lambda)$, ce qui implique $\bigoplus_{i \geq 1} L_i = 0$.

(iv) \Rightarrow (v) : Par hypothèse, $H^1(\Lambda, \Lambda) = L_0$ et l'algèbre de Lie L_0 ne contient pas d'élément (a, b) avec $a \neq b$.

(v) \Rightarrow (vi) : On déduit de la condition donnée que $\dim \text{Ker } \psi_1 = |Q_1|$. Comme la dimension de $\text{Im } \psi_0 = \langle \sum_{a \in Q_1 e} (a, a) - \sum_{a \in e Q_1} (a, a) \mid e \in Q_0 \rangle$ est égale à $|Q_0| - 1$, nous obtenons $\dim H^1(\Lambda, \Lambda) = \dim \text{Ker } \psi_1 - \dim \text{Im } \psi_0 = |Q_1| - |Q_0| + 1$.

(vi) \Rightarrow (i) : De $\dim \text{Im } \psi_0 = |Q_0| - 1$ et $\dim H^1(\Lambda, \Lambda) = |Q_1| - |Q_0| + 1$, il résulte que $\dim \text{Ker } \psi_1 = |Q_1|$ et par conséquent $\text{Ker } \psi_1$ est engendré par les éléments $(a, a) \in Q_1 // Q_1$. Comme le crochet de l'algèbre de Lie $k(Q_1 // B)$ est tel que $[(a, a), (b, b)] = 0$, pour toute flèche $a, b \in Q_1$, l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est abélienne.

q.e.d. 2.5.3.5

Le corollaire suivant est clair en vertu de la proposition 1.2.1.1, car, en caractéristique zéro, un groupe algébrique connexe est abélien (resp. nilpotent) si et seulement si son algèbre de Lie est abélienne (resp. nilpotente) (voir [Hu1], 13.4 et 10.5). Ce corollaire généralise le critère de Guil-Asensio et Saorín sur la commutativité du groupe algébrique $V_\Lambda^\circ (= \varepsilon_\Lambda(G_\Lambda))$ (voir [GAS2], corollaire 2.23).

Corollaire 2.5.3.6

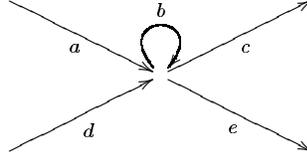
Soient k un corps de caractéristique zéro et $\Lambda = kQ / \langle Z \rangle$ une k -algèbre monomiale de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est abélien.
- (ii) Le groupe algébrique $\text{Out}(\Lambda)^\circ$ est nilpotent.
- (iii) Pour chaque chemin $\gamma \in B$ parallèle à une flèche $a \neq \gamma$, il existe un chemin p de Z tel que $p^{(a,\gamma)} \neq 0$.

L'exemple suivant montre que les critères de réductivité, de commutativité et de nilpotence obtenus dans les propositions 2.5.3.3 et 2.5.3.5 ne se généralisent pas lorsque le carquois Q a un cycle orienté et que $\text{car } k \neq 0$.

Exemple 2.5.3.7

Soit k un corps de caractéristique 3 et soit Q le carquois suivant ayant une boucle et donc un cycle orienté :



Prenons comme ensemble de relations minimales

$$Z = \{ca, cd, ed, eba, cb^3a, b^5\}.$$

Soit $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ l'algèbre monomiale associée à k , Q et Z . Calculons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, le k -espace vectoriel $L_{i-1} = k(Q_1//B_i) \cap \text{Ker } \psi_1/k(Q_1//B_i) \cap \text{Im } \psi_0$ afin de pouvoir étudier l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda = \text{Ker } \psi_1/\text{Im } \psi_0 = \bigoplus_{i \geq -1} L_i$. Le fait que $B_i = \emptyset$ pour $i \geq 7$ entraîne

$$L_i = 0, \quad \text{pour } i \geq 6.$$

Puisque b^2 est un élément de Z et que car $k = 3$ ne divise pas 2, nous obtenons, en vertu de la proposition 2.4.2.2,

$$L_{-1} = 0.$$

L'élément (b, b) constitue une base de L_0 grâce à la proposition 2.4.3.2, d'où

$$L_0 = k(b, b).$$

Il est clair que, pour $1 \leq i \leq 5$, on a

$$k(Q_1//B_{i+1}) \cap \text{Im } \psi_0 = k((c, cb^i) + (e, eb^i) - (a, b^i a) - (d, b^i d)).$$

Un élément quelconque $x = \lambda_a(a, ba) + \lambda_b(b, b^2) + \lambda_c(c, cb) + \lambda_d(d, bd) + \lambda_e(e, eb)$ de $k(Q_1//B_2)$ avec $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d, \lambda_e \in k$ est contenu dans le noyau de ψ_1 si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 = \psi_1(x) &= \lambda_a(ca, cba) + \lambda_a(cb^3a, cb^4a) + \lambda_a(eba, eb^2a) + \\ &+ 3\lambda_b(cb^3a, cb^4a) + \lambda_b(eba, eb^2a) + \\ &+ \lambda_c(ca, cba) + \lambda_c(cb^3a, cb^4a) + \\ &+ \lambda_d(cd, cbd) + \lambda_d(ed, ebd) + \\ &+ \lambda_e(eba, eb^2a) + \lambda_e(eg, ebg). \end{aligned}$$

En tenant compte du fait car $k = 3$, cela revient à résoudre le système d'équations :

$$\begin{aligned}\lambda_a + \lambda_c &= 0 \\ \lambda_a + \lambda_b + \lambda_e &= 0 \\ \lambda_c + \lambda_d &= 0 \\ \lambda_d + \lambda_e &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi on voit que l'élément $(a, ba) + (d, bd) - (c, cb) - (e, eb)$ engendre le k -espace vectoriel $k(Q_1//B_2) \cap \text{Ker } \psi_1$ et donc

$$L_1 = 0.$$

De la même manière, on déduit

$$\begin{aligned}L_2 &= 0, \\ L_3 &= k(b, b^4), \\ L_4 &= 0 \\ L_5 &= 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$H^1(\Lambda, \Lambda) = \text{Ker } \psi_1 / \text{Im } \psi_0 = k(b, b) \oplus k(b, b^4).$$

Puisque la caractéristique du corps k est égale à 3, on a la relation

$$[(b, b), (b, b^4)] = 3(b, b^4) = 0.$$

Alors $H^1(\Lambda, \Lambda)$ est l'algèbre de Lie abélienne de dimension 2. Il s'agit d'une algèbre de Lie abélienne et donc réductive sans que l'idéal $\bigoplus_{i \geq 1} L_i$ soit égal à zéro. Cela montre que les critères 2.5.3.3 et 2.5.3.5 ne se généralisent pas au cas où Q est un carquois avec cycle orienté lorsque k est un corps de caractéristique non nulle.

2.6 L'algèbre de Lie graduée $H^*(\Lambda, \Lambda)$ d'une algèbre monomiale Λ

Dans la proposition 1.1.2.3, on a vu que la cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$ d'une algèbre associative Λ est munie d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber. En particulier, $H^*(\Lambda, \Lambda)$ est une algèbre de Lie graduée. L'idéal de Lie résoluble maximal de $H^*(\Lambda, \Lambda)$ est appelé le radical de $H^*(\Lambda, \Lambda)$ et on le note par $\text{Rad } H^*(\Lambda, \Lambda)$. Afin de le calculer, nous avons besoin du lemme suivant (voir [C5] pour le résultat correspondant en homologie) :

Lemme 2.6.0.1

Soient k un corps, Q un carquois connexe sans cycles orientés et $\Lambda = kQ/I$ une algèbre de dimension finie. Alors la cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$ est de dimension finie en tant que k -espace vectoriel.

Démonstration:

Du fait que le carquois Q est sans cycles orientés, on déduit qu'il existe un entier $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que le E -bimodule $r^{\otimes m}$ soit nul, pour tout $m \geq m_0$. En effet, le E -bimodule $r^{\otimes m}$ est engendré par les partitions des chemins de Q de longueur $\geq m$ en m chemins de longueur ≥ 1 . Par conséquent, le complexe de cochaînes $\mathcal{C}_{\text{red}}(r, \Lambda)$ de la section 1.1.1 montre que la cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$ est de dimension finie.

q.e.d. 2.6.0.1

Dans certains cas, la condition que le carquois Q n'ait pas de cycles orientés, est même équivalente à ce que la cohomologie de Hochschild soit de dimension finie. Locateli a montré dans [Loc], pour les algèbres tronquées sur un corps de caractéristique zéro, que la cohomologie de Hochschild est de dimension finie si et seulement si le carquois Q n'a pas de cycle orienté. Cibils a montré la même équivalence dans [C2] pour les algèbres de radical carré zéro où la caractéristique du corps est quelconque.

Calculons le radical de l'algèbre de Lie graduée $H^*(\Lambda, \Lambda)$:

Proposition 2.6.0.2

Soient k un corps, Q un carquois connexe sans cycles orientés et $\Lambda = kQ/\langle Z \rangle$ une algèbre monomiale de dimension finie. Alors on a

$$\text{Rad } H^*(\Lambda, \Lambda) = H^0(\Lambda, \Lambda) \oplus \text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) \oplus \bigoplus_{i \geq 2} H^i(\Lambda, \Lambda).$$

Démonstration:

Pour analyser la structure d'algèbre de Lie graduée sur la cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$, nous allons utiliser le complexe de cochaînes $\mathcal{C}_{\text{red}}(r, \Lambda)$ qui a été introduit dans la section 1.1.1. On y a constaté que $\mathcal{C}_{\text{red}}(r, \Lambda)$ peut être considéré comme un sous-complexe du complexe de cochaînes $\mathcal{C}_{\text{Hoch}}(\Lambda, \Lambda)$. C'est la raison pour laquelle on a la structure d'algèbre de Lie graduée suivante sur l'espace de cochaînes $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{E^e}(r^{\otimes n}, \Lambda)$:

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(m-1)} f \bar{\sigma}_i g - \sum_{j=1}^m (-1)^{(n-1)(j-1)} g \bar{\sigma}_j f,$$

avec pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$f \bar{\sigma}_i g(x_1 \otimes_E \cdots \otimes_E x_{n+m-1}) = f(x_1 \otimes_E \cdots \otimes_E x_{i-1} \otimes_E \pi(g(x_i \otimes_E \cdots \otimes_E x_{i+m-1}))) \otimes_E x_{i+m} \otimes_E \cdots \otimes_E x_{n+m-1},$$

où $\pi : \Lambda \rightarrow r$ désigne la projection canonique de Λ sur son radical r et $f \in \text{Hom}_{E^e}(r^{\otimes_E^n}, \Lambda)$, $g \in \text{Hom}_{E^e}(r^{\otimes_E^m}, \Lambda)$ et $x_1 \otimes_E \cdots \otimes_E x_{n+m-1} \in r^{\otimes_E^{n+m-1}}$. Puisque π est un morphisme de E -bimodules, $f\bar{\circ}_i g$ et $g\bar{\circ}_j f$ sont des éléments de $\text{Hom}_{E^e}(r^{\otimes_E^{n+m-1}}, \Lambda)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, m\}$ et donc on a $[f, g] \in \text{Hom}_{E^e}(r^{\otimes_E^{n+m-1}}, \Lambda)$. Par hypothèse, le carquois connexe Q n'a pas de cycle orienté et, par conséquent, on a

$$H^0(\Lambda, \Lambda) = k1_\Lambda,$$

(voir [CSa], proposition 2). Du fait que $1_\Lambda \in \Lambda^E = \text{Hom}_{E^e}(r^{\otimes_E^0}, \Lambda)$ n'est pas un élément du radical r , on déduit que

$$[f, 1_\Lambda] = 0,$$

pour tout $f \in \text{Hom}_{E^e}(r^{\otimes_E^n}, \Lambda)$, $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que

$$[H^n(\Lambda, \Lambda), H^0(\Lambda, \Lambda)] = 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $H^0(\Lambda, \Lambda)$ est un idéal abélien de l'algèbre de Lie graduée $H^*(\Lambda, \Lambda)$. D'après le lemme précédent, $H^*(\Lambda, \Lambda)$ est de dimension finie. De plus, $\text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda)$ est l'idéal résoluble maximal de l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$, donc $H^0(\Lambda, \Lambda) \oplus \text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) \oplus \bigoplus_{n \geq 2} H^n(\Lambda, \Lambda)$ est un idéal résoluble de $H^*(\Lambda, \Lambda)$. Puisque le quotient $H^*(\Lambda, \Lambda) / (H^0(\Lambda, \Lambda) \oplus \text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) \oplus \bigoplus_{n \geq 2} H^n(\Lambda, \Lambda))$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda) / \text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda)$ qui est nulle ou semi-simple, on en déduit que $H^0(\Lambda, \Lambda) \oplus \text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda) \oplus \bigoplus_{i \geq 2} H^i(\Lambda, \Lambda)$ est égal au radical de l'algèbre de Lie graduée $H^*(\Lambda, \Lambda)$.

q.e.d. 2.6.0.2

La proposition précédente et le corollaire 2.4.3.7 impliquent :

Corollaire 2.6.0.3

Soient k un corps, Q un carquois connexe sans cycle orienté et $\Lambda = kQ / \langle Z \rangle$ une algèbre monomiale de dimension finie.

Le quotient d'algèbre de Lie graduée $H^(\Lambda, \Lambda) / \text{Rad } H^*(\Lambda, \Lambda)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda) / \text{Rad } H^1(\Lambda, \Lambda)$ qui est nulle ou semi-simple. On a*

$$H^*(\Lambda, \Lambda) / \text{Rad } H^*(\Lambda, \Lambda) = \prod_{\bar{\alpha} \in Q_1 //} \prod_{\substack{S \in \bar{\alpha} / \approx, |S| \geq 2 \text{ et} \\ |S| \neq 2 \text{ si } \text{car } k = 2}} \text{pgl}(|S|, k).$$

Chapitre 3

L'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ d'algèbres de groupes

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la structure d'algèbre de Lie du premier groupe de la cohomologie de Hochschild $H^1(kG, kG)$ en tant qu'algèbre de Lie, où k est un corps, G est un groupe fini et kG désigne l'algèbre de groupe correspondante. Si la caractéristique du corps k ne divise pas l'ordre du groupe G , alors le théorème de Maschke (voir par exemple [Pi], 3.6) affirme que l'algèbre de groupe kG est semi-simple. De plus, l'algèbre de groupe kG est séparable (voir par exemple [As], XI 2.2) et, par conséquent, le premier groupe de la cohomologie de Hochschild $H^1(kG, kG)$ est égal à zéro, ainsi d'ailleurs que tous les suivants. On supposera donc dans la suite que G est un groupe fini et que k est un corps dont la caractéristique $p > 0$ divise l'ordre du groupe G .

3.1 Les groupes dont le p -sous-groupe de Sylow est cyclique et unique

Dans cette section on suppose le corps k algébriquement clos.

Higman a démontré, en 1954 dans [Hi], que le nombre de classes d'isomorphisme de kG -modules indécomposables est fini si et seulement si les p -sous-groupes de Sylow de G sont cycliques. En 1969, Kupisch [Ku] et Janusz [Ja] ont donné une description précise des kG -modules indécomposables pour de tels groupes. Comme la description générale est assez ardue, Gabriel a explicité, en 1974 dans [Ga] (voir aussi [GR], p.75), le cas particulier où G contient seulement un p -sous-groupe de Sylow cyclique. Il fait ceci en associant un carquois Q au groupe G de telle façon qu'un quotient de l'algèbre de chemins de Q est Morita équivalent à

l'algèbre de groupe kG . Nous allons utiliser cette Morita équivalence de Gabriel pour étudier l'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ pour un tel groupe G .

Soit G un groupe fini d'ordre $n = p^a q$ avec q premier à p qui contient seulement un p -sous-groupe de Sylow S cyclique, nécessairement normal dans G . Alors S est un sous-groupe normal de Hall de G et le théorème de Schur-Zassenhaus (voir par exemple [Sco], 9.3.6) affirme qu'il existe un complément K de S dans G , *i.e.* un sous-groupe de G tel que $S \cap K = \{1\}$ et $SK = G$.

Ceci a lieu, par exemple, lorsque G est le groupe des 2×2 -matrices triangulaires supérieures $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ($a \neq 0 \neq d$). Dans ce cas, S est constitué des matrices $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les matrices diagonales $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ forment un complément de S .

Soit σ un générateur de S . Puisque S est normal dans G , l'opération de K sur S par conjugaison est donnée par une formule du type

$$x\sigma x^{-1} = \sigma^{\chi(x)},$$

avec $x \in K$ et $\chi(x) \in (\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z})^\times$. Le groupe G est le produit semi-direct de S par K . Pour tout kK -module N , nous notons ${}_\chi N$ le k -espace vectoriel sous-jacent à N équipé d'une nouvelle opération $*$ de K telle qu'on a

$$x * m := \chi(x)x \cdot m,$$

pour tout $x \in K$ et $m \in N$. Si le kK -module N appartient à la classe d'isomorphisme e , on désigne par χe la classe d'isomorphisme du kK -module ${}_\chi N$. On obtient ainsi une opération de \mathbb{Z} sur l'ensemble \mathcal{E} des classes d'isomorphisme de kK -modules simples :

$$\mathbb{Z} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (n, e) \mapsto \chi^n e.$$

Ce qui nous permet d'étudier l'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est l'association d'un carquois Q au groupe G de la manière suivante : l'ensemble Q_0 des sommets de Q est l'ensemble \mathcal{E} des classes d'isomorphisme de kK -modules simples et, pour tout sommet e , on prend une flèche $e \rightarrow \chi e$. Puisque les orbites de \mathbb{Z} dans \mathcal{E} sont cycliques, le carquois Q est une réunion disjointe de couronnes, *i.e.* de cycles orientés.

Remarque 3.1.0.1

Le nombre de sommets du carquois Q est égal au nombre de classes de conjugaison du groupe K . En effet, le corps k étant algébriquement clos et la caractéristique p du corps k ne divisant pas l'ordre q du groupe K , le nombre de classes d'isomorphisme de kK -modules simples est égal au nombre de classes de conjugaison du groupe K (voir par exemple [Lor], §33 SATZ 2).

Exemples 3.1.0.2

- (i) Regardons le cas où le groupe G est abélien. Autrement dit, G est le produit direct de S et de K et le sous-groupe K de G est abélien. Par conséquent, le carquois Q a q sommets et $\chi = 1$. Le carquois Q est donc constitué de q boucles :



- (ii) Soit G le groupe diédral $D_{p^a} = \mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors on a $K = \{1_k, \gamma\}$ et $\chi(\gamma) = -1$. Comme K est abélien, la remarque précédente montre qu'il existe, à isomorphisme près, deux kK -modules simples, à savoir $S^+ = k$ avec l'action $\gamma \cdot \lambda = \lambda$ et $S^- = k$ avec l'action $\gamma \cdot \lambda = -\lambda$, pour tout $\lambda \in k$. Du fait que $\gamma * \lambda = \chi(\gamma)\gamma\lambda = -\gamma\lambda = -\lambda$ découle l'égalité ${}_x S^+ = S^-$, ce qui montre que Q est la couronne de longueur 2 :



Gabriel a démontré dans [Ga] que la catégorie des kG -modules est équivalente à la catégorie des $kQ/\langle Q_{p^a} \rangle$ -modules, où $\langle Q_{p^a} \rangle$ désigne l'idéal bilatère engendré par l'ensemble Q_{p^a} des chemins de longueur p^a lorsque le corps k est algébriquement clos. En d'autres termes, les k -algèbres kG et $kQ/\langle Q_{p^a} \rangle$ sont Morita équivalentes. Remarquons qu'en général ces algèbres ne sont pas isomorphes. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un isomorphisme d'algèbres entre kG et $kQ/\langle Q_{p^a} \rangle$ est que le groupe K est abélien (voir par exemple [St1]). Puisque la cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$ est Morita invariante en tant qu'algèbre de Lie graduée (voir [GS1] p.143), on déduit que les algèbres de Lie $H^1(kG, kG)$ et $H^1(kQ/\langle Q_{p^a} \rangle, kQ/\langle Q_{p^a} \rangle)$ sont isomorphes. De plus, l'algèbre de Lie $H^1(kQ/\langle Q_{p^a} \rangle, kQ/\langle Q_{p^a} \rangle)$ est un produit d'algèbres de Lie $H^1(kC/\langle C_{p^a} \rangle, kC/\langle C_{p^a} \rangle)$, où C est une couronne de Q , car le carquois Q est une réunion disjointe de couronnes et la cohomologie de Hochschild est additive sur un produit d'algèbres. On a donc un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$H^1(kG, kG) \simeq \prod_{C \text{ couronne de } Q} H^1(kC/\langle C_{p^a} \rangle, kC/\langle C_{p^a} \rangle).$$

Théorème 3.1.0.3

Soient k un corps algébriquement clos et G un groupe fini tels que la caractéristique $p > 0$ de k divise l'ordre de G . Soit $n = p^a q$ l'ordre de G avec q premier à p . Supposons que le groupe G contient un seul p -sous-groupe de Sylow cyclique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est semi-simple.
- (ii) Le groupe G est le produit direct d'un groupe K d'ordre q et du groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'ordre p . La caractéristique p du corps k est différente de 2.
- (iii) L'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est un produit d'algèbres de Lie de Witt $W(1, 1) := \text{Der}(k[X]/(X^p), k[X]/(X^p))$ et la caractéristique p du corps k est différente de 2.

Démonstration:

Soit Q le carquois associé au groupe G comme décrit ci-dessus.

(i) \Rightarrow (ii) : Il est clair, en vertu de la remarque qui précède ce théorème, que l'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est semi-simple si et seulement si l'algèbre de Lie $H^1(kC/\langle C_{p^a} \rangle, kC/\langle C_{p^a} \rangle)$ est semi-simple, pour toute couronne C du carquois Q . La proposition 2.4.2.2 et le théorème 2.5.2.1 entraînent alors que le carquois Q ne peut contenir aucune couronne de longueur supérieure ou égale à 2, *i.e.* Q est une réunion disjointe de boucles. Par conséquent, on a $\chi(x) = 1$ pour tout $x \in G$, ce qui implique que G est le produit direct du p -sous-groupe de Sylow S et de son complément K . Le corollaire 2.4.2.3 montre que pour toute boucle C du carquois Q , l'algèbre de Lie $H(kC/\langle C_{p^a} \rangle, kC/\langle C_{p^a} \rangle)$ est semi-simple si et seulement si $p^a = p > 2$. Il en résulte que la caractéristique p du corps k est différente de 2 et que le p -sous-groupe de Sylow S de G est le groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'ordre p .

(ii) \Rightarrow (iii) : Soit $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times K$ et donc $\chi = 1$. Cela entraîne que le carquois Q est une réunion disjointes de boucles. Pour toute boucle C du carquois Q la proposition 2.4.2.3 implique que $H^1(kC/\langle C_p \rangle, kC/\langle C_p \rangle)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de Witt $W(1, 1) := \text{Der}(k[X]/(X^p), k[X]/(X^p))$.

(iii) \Rightarrow (i) : Cette implication est immédiate, car l'algèbre de Lie de Witt est une des algèbres de Lie simples non classiques dans le cas où la caractéristique $p > 0$ du corps k est différente de 2.

q.e.d. 3.1.0.3

Corollaire 3.1.0.4

Soient k un corps algébriquement clos et G un groupe fini tels que la caractéristique $p > 0$ de k divise l'ordre de G . Soit $n = p^a q$ l'ordre de G avec q premier à p . Supposons que le groupe G contient un seul p -sous-groupe de Sylow cyclique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est simple.
- (ii) Le groupe G est cyclique d'ordre p et la caractéristique p du corps k est différente de 2.

(iii) L'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de Witt $W(1, 1) := \text{Der}(k[X]/(X^p), k[X]/(X^p))$ et la caractéristique p du corps k est différente de 2.

Démonstration:

Soit Q le carquois associé au groupe G comme décrit ci-dessus.

(i) \Rightarrow (ii) : Soit $H^1(kG, kG)$ une algèbre de Lie simple et donc semi-simple. Le théorème précédent montre que G est le produit direct d'un groupe K d'ordre q et du groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'ordre p , q et p étant premiers entre eux. Par conséquent, on a $\chi = 1$ et donc le carquois Q est une réunion disjointe de boucles. Du fait que $H^1(kG, kG) = \prod H^1(kC/\langle C_p \rangle, kC/\langle C_p \rangle)$ est une algèbre de Lie simple, il s'en suit que le carquois Q n'est qu'une boucle. Comme la boucle Q ne possède qu'un sommet, on obtient, en vertu de la remarque 3.1.0.1, que le groupe K n'a qu'une classe de conjugaison et que K est donc le groupe trivial $\{1_K\}$.

(ii) \Rightarrow (iii) : Comme le carquois Q associé au groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est la boucle, alors la proposition 2.4.2.3 montre que $H^1(kG, kG)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de Witt.

(iii) \Rightarrow (i) : Ceci est clair.

q.e.d. 3.1.0.4

3.2 Les groupes abéliens

Le but de cette section est d'étudier l'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ dans le cas où le groupe fini G est abélien et le corps k n'est pas nécessairement algébriquement clos, contrairement à la section précédente. Pour faire cela, nous utiliserons la cohomologie usuelle des groupes. Rappelons que la cohomologie de groupes $H^*(G, k) := \text{Ext}_{kG}^*(k, k)$ du groupe G à coefficients triviaux est l'homologie du complexe de cochaînes

$$0 \rightarrow k \xrightarrow{b_0} \text{Hom}_k(kG, k) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_k(kG^n, k) \xrightarrow{b_n} \text{Hom}_k(kG^{n+1}, k),$$

où les différentielles sont données par $b_0 = 0$ et

$$(b_n f)(g_1, \dots, g_{n+1}) = f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n),$$

pour tout $f \in \text{Hom}_k(kG^n, k)$, $(g_1, \dots, g_{n+1}) \in G^{n+1}$ et $n \geq 1$.

Choisissons, pour toute classe de conjugaison du groupe fini G , un représentant et notons l'ensemble de ces représentants par $\langle G \rangle$. Pour tout $x \in G$, le sous-groupe

$C_G(x) := \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$ de G est le centralisateur de x dans G . Il est bien connu que les k -espaces vectoriels $H^1(kG, kG)$ et $\bigoplus_{x \in \langle G \rangle} H^1(C_G(x), k)$ sont isomorphes :

$$H^1(kG, kG) \simeq \bigoplus_{x \in \langle G \rangle} H^1(C_G(x), k)$$

(voir par exemple [Be], 2.11.2, ou [We], 9.7.5).

Considérons le cas commutatif. Soit G un groupe fini abélien. Alors chaque classe de conjugaison de G ne contient qu'un élément de sorte que $\langle G \rangle = G$, de plus, on a, pour tout élément $x \in G$, $C_G(x) = G$. Par conséquent, le k -espace vectoriel $\bigoplus_{x \in \langle G \rangle} H^1(C_G(x), k) = \bigoplus_{x \in G} H^1(G, k)$ est isomorphe au k -espace vectoriel $H^1(G, k) \otimes_k kG$. Cibils et Solotar [CSo] ont prouvé, en 1997, que l'isomorphisme donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned} \varphi_n : \quad & H^n(kG, kG) \longrightarrow H^n(G, k) \otimes_k kG \\ & f : kG^n \rightarrow kG \quad \longmapsto \sum_{x \in G} f^x \otimes_k x, \\ & (g_1, \dots, g_n) \mapsto \sum_{h \in G} \lambda_h^{(g_1, \dots, g_n)} h \end{aligned}$$

où $f^x : G^n \rightarrow k$ est défini par $f^x(g_1, \dots, g_n) = \lambda_{g_1 \dots g_n x}^{(g_1, \dots, g_n)}$, est un isomorphisme d'anneaux gradués entre $H^*(kG, kG)$ et $H^*(G, k) \otimes_k kG$. Remarquons qu'en 1996 Holm [Hol] a étudié également la structure d'algèbre induite par le cup produit sur la cohomologie de Hochschild $H^*(kG, kG)$. Nous explicitons φ^1 et son inverse afin de pouvoir transférer la structure d'algèbre de Lie de $H^1(kG, kG)$ au k -espace vectoriel $H^1(G, k) \otimes_k kG$. On a

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \quad & H^1(kG, kG) \longrightarrow H^1(G, k) \otimes_k kG \\ & f : kG \rightarrow kG \quad \longmapsto \sum_{x \in G} f^x \otimes_k x \\ & g \mapsto \sum_{h \in G} \lambda_h^g h \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1} : \quad & H^1(G, k) \otimes_k kG \longrightarrow H^1(kG, kG) \\ & \alpha \otimes_k x \longmapsto kG \rightarrow kG \\ & g \mapsto \alpha(g)gx. \end{aligned}$$

Proposition 3.2.0.1

Soient G un groupe fini abélien et k un corps. L'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est isomorphe à $H^1(G, k) \otimes_k kG$ muni du crochet de Lie

$$[\alpha \otimes_k x, \beta \otimes_k y] = (\alpha(y)\beta - \beta(x)\alpha) \otimes_k xy,$$

où $\alpha \otimes_k x$ et $\beta \otimes_k y$ sont des éléments dans $H^1(G, k) \otimes_k kG$ avec $x, y \in G$.

Démonstration:

Soient $\alpha, \beta \in H^1(G, k)$ et $x, y \in G$. Sachant que $H^1(G, k)$ est le k -espace vectoriel des morphismes de groupes de G dans le groupe $(k, +)$, on vérifie sans peine que $\varphi_1([\varphi_1^{-1}(\alpha \otimes_k x), \varphi_1^{-1}(\beta \otimes_k y)])$ est égal à $(\alpha(y)\beta - \beta(x)\alpha) \otimes_k xy$. Puisque φ_1 et φ_1^{-1} sont des isomorphismes inverses, ce crochet muni $H^1(G, k) \otimes_k kG$ d'une structure de Lie de sorte que $H^1(G, k) \otimes_k kG$ et $H^1(kG, kG)$ sont des algèbres de Lie isomorphes.

q.e.d. 3.2.0.1

Utilisons cette proposition pour étudier l'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ pour un groupe fini abélien G :

Théorème 3.2.0.2

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et G un groupe fini abélien d'ordre $n = p^a q$ avec q premier à p . Soit S le p -sous-groupe de Sylow de G . Alors l'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est un produit de q algèbres de Lie $H^1(kS, kS)$:

$$H^1(kG, kG) \simeq H^1(kS, kS)^q.$$

Démonstration:

Du théorème de structure des groupes finis abéliens, on déduit que G est le produit direct du p -sous-groupe de Sylow S et d'un sous-groupe abélien K d'ordre q . Puisque la caractéristique du corps k ne divise pas l'ordre q du groupe K , l'algèbre de groupe kK est semi-simple, grâce au théorème de Maschke. Le fait que le corps k est algébriquement clos implique, en vertu du théorème de structure de Wedderburn (voir par exemple [Pi], 3.5), que l'algèbre de groupe kK est un produit de corps :

$$kK \simeq k \times \cdots \times k = k^q$$

Il en résulte que l'algèbre de groupe kK possède q idempotents orthogonaux primitifs e_1, \dots, e_q formant une k -base de kK . On a donc

$$H^1(G, k) \otimes_k kG \simeq \bigoplus_{i=1}^q H^1(G, k) \otimes_k kS e_i$$

en tant que k -espaces vectoriels. Pour tout morphisme de groupes $\alpha \in H^1(G, k)$, on a $\alpha(x) = 0$ pour $x \in K$, car la caractéristique de k ne divise pas l'ordre q du groupe K . Par conséquent, les k -espaces vectoriels $H^1(G, k)$ et $H^1(S, k)$ sont isomorphes. Soient $e_i = \sum_{g \in K} \lambda_g g$ et $e_j = \sum_{h \in K} \mu_h h$ deux idempotents orthogonaux primitifs de kK et soient $\sigma, \sigma' \in S$ et $\alpha, \beta \in H^1(G, k)$. Calculons le crochet suivant à l'aide de la proposition précédente :

$$\begin{aligned} [\alpha \otimes_k \sigma e_i, \beta \otimes_k \sigma' e_j] &= \sum_{g, h \in K} \lambda_g \mu_h (\alpha(\sigma' h)\beta - \beta(\sigma g)\alpha) \otimes_k \sigma \sigma' gh \\ &= \sum_{g, h \in K} \lambda_g \mu_h (\alpha(\sigma')\beta - \beta(\sigma)\alpha) \otimes_k \sigma \sigma' gh \\ &= (\alpha(\sigma')\beta - \beta(\sigma)\alpha) \otimes_k \sigma \sigma' e_i e_j \\ &= \delta_{i,j} (\alpha(\sigma')\beta - \beta(\sigma)\alpha) \otimes_k \sigma \sigma' e_i. \end{aligned}$$

Ceci montre que les $H^1(G, k) \otimes_k kSe_i \simeq H^1(S, k) \otimes_k kS$ sont des idéaux de Lie orthogonaux de $H^1(G, k) \otimes_k kG$. On déduit de la proposition précédente que l'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est le produit de q algèbres de Lie $H^1(kS, kS)$.

q.e.d. 3.2.0.2

Remarque 3.2.0.3

Sachant que les kG -bimodules kG et $kS \otimes_k kK$ sont isomorphes, la formule de Künneth (voir par exemple [We] 3.6.3) implique qu'on a un isomorphisme linéaire entre $H^1(kG, kG)$ et $H^1(kS, kS)^q$:

$$\begin{aligned} H^1(kG, kG) &\simeq H^0(kS, kS) \otimes_k H^1(kK, kK) \oplus \\ &\quad \oplus H^1(kS, kS) \otimes_k H^0(kK, kK) \\ &= H^1(kS, kS) \otimes_k kK \\ &= H^1(kS, kS)^q. \end{aligned}$$

En comparant la résolution $\mathcal{P}_{\text{Hoch}}(kG)$ du kG -bimodule kG avec le produit tensoriel $\mathcal{P}_{\text{Hoch}}(kS) \otimes_k \mathcal{P}_{\text{Hoch}}(kK)$, on peut expliciter cet isomorphisme. Si on l'utilise pour transférer la structure d'algèbre de Lie de $H^1(kG, kG)$ au k -espace vectoriel $H^1(kS, kS)^q$, on retrouve le résultat du théorème précédent.

Le résultat suivant est à comparer avec le théorème 3.1.0.3. Dans ce qui suit nous supposons le groupe G abélien, mais le p -sous-groupe de Sylow n'est pas nécessairement cyclique.

Corollaire 3.2.0.4

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et G un groupe fini abélien d'ordre $n = p^a q$ avec q premier à p . Soit S le p -sous-groupe de Sylow de G . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est semi-simple.
- (ii) Le p -sous-groupe de Sylow S de G est élémentaire, i.e. S est un produit direct de groupes cycliques d'ordre p . Si la caractéristique de k est égale à 2, alors S n'est pas le groupe cyclique $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- (iii) L'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est le produit non trivial de q algèbres de Lie de Jacobson et Witt $W(a, 1) := \text{Der}(k[X_1, \dots, X_a]/(X_1^p, \dots, X_a^p))$:

$$H^1(kG, kG) \simeq W(a, 1)^q.$$

Si la caractéristique de k est égale à 2, alors S n'est pas le groupe cyclique $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Démonstration:

(i) \Leftrightarrow (ii) : Le théorème précédent implique que l'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est semi-simple si et seulement si l'algèbre de Lie $H^1(kS, kS)$ est semi-simple. Du fait que $S \simeq \mathbb{Z}/p^{a_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p^{a_s}$ avec $a_1 + \cdots + a_s = a$, il découle que les k -algèbres kS et $k[X_1, \dots, X_s]/(X_1^{p^{a_1}}, \dots, X_s^{p^{a_s}})$, et donc les algèbres de Lie $H^1(kS, kS)$ et $\text{Der}_k(k[X_1, \dots, X_s]/(X_1^{p^{a_1}}, \dots, X_s^{p^{a_s}}))$, sont isomorphes. Le radical de cette algèbre de Lie est engendré par les dérivations $X_j^l \frac{\partial}{\partial X_i} : k[X_1, \dots, X_s]/(X_1^{p^{a_1}}, \dots, X_s^{p^{a_s}}) \rightarrow k[X_1, \dots, X_s]/(X_1^{p^{a_1}}, \dots, X_s^{p^{a_s}})$ où $i, j \in \{1, \dots, s\}$ et $l \geq p$ dans le cas où $s \neq 1$ ou $\text{car } k \neq 2$. Si $\text{car } k = 2$, alors $\text{Rad Der}_k(k[X]/(X^{p^a})) = \text{Der}_k(k[X]/(X^{p^a}))$. On en déduit que l'algèbre de Lie $H^1(kS, kS)$ est semi-simple si et seulement si $a_1 = \dots = a_s = 1$ et $s \neq 1$ si $\text{car } k = 2$, ce qui est équivalent à dire que S est élémentaire et différent de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si $\text{car } k = 2$.

(ii) \Rightarrow (iii) : Ceci est dû au fait que l'algèbre de groupe $kS \simeq k(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^a$ est isomorphe à l'algèbre $k[X_1, \dots, X_a]/(X_1^p, \dots, X_a^p)$.

(iii) \Rightarrow (i) : Ceci est clair, car les algèbres de Witt et Jacobson $W(a, 1)$ sont des algèbres de Lie simples non classiques si $a \neq 1$ dans le cas où la caractéristique du corps k est égale à 2 (voir par exemple [Ma]).

q.e.d. 3.2.0.4

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de ce qui précède :

Corollaire 3.2.0.5

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et G un groupe fini abélien d'ordre $n = p^a q$ avec q premier à p . Soit S le p -sous-groupe de Sylow de G . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) *L'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est simple.*
- (ii) *Le groupe G est un produit direct de groupes cycliques d'ordre p . Si la caractéristique de k est égale à 2, alors G n'est pas le groupe cyclique $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*
- (iii) *L'algèbre de Lie $H^1(kG, kG)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de Jacobson et Witt $W(a, 1) := \text{Der}(k[X_1, \dots, X_a]/(X_1^p, \dots, X_a^p))$. Si la caractéristique de k est égale à 2, alors G n'est pas le groupe cyclique $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Chapitre 4

L'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ de l'extension triviale d'une algèbre

Dans ce chapitre, nous décrivons le crochet de l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ de l'extension triviale TA d'une algèbre A et nous étudions ensuite l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ dans le cas où A est une algèbre dont le carré du radical est nul.

4.1 Définition et crochet de Lie

Soient k un corps et A une k -algèbre de dimension finie. Notons par DA le A -bimodule $\text{Hom}_k(A, k)$ où les actions de A sur DA sont données par $af : A \rightarrow k$, $x \mapsto f(xa)$ et $fa : A \rightarrow k$, $x \mapsto f(ax)$, pour tout $a \in A$ et tout $f \in \text{Hom}_k(A, k)$. Le symbole $*$ sera réservé pour noter le dual d'un espace vectoriel tandis que la notation D est utilisée pour le dual d'un espace vectoriel muni d'une structure de bimodule.

Définition 4.1.0.1

L'extension triviale TA de l'algèbre A est l'algèbre scindée $TA = A \oplus DA$, i.e. le k -espace vectoriel $TA = A \oplus DA$ muni de la structure d'algèbre donnée par

$$(a + f)(b + g) = ab + ag + fb,$$

où $a, b \in A$ et $f, g \in DA$.

Le groupe des automorphismes extérieurs d'une extension triviale $\text{Out}(TA)$ a été examiné par Saorín dans [Sa]. Il décrit la relation entre les groupes algébriques des automorphismes extérieurs $\text{Out}(A)$ et $\text{Out}(TA)$.

Dans [CMRS], Cibils, Marcos, Redondo et Solotar ont étudié la cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$ pour des algèbres scindées $\Lambda = A \oplus M$, en particulier pour des extensions triviales TA . Ceci se fait à l'aide d'un double complexe dont la cohomologie totale est la cohomologie de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$. Notons par $\text{Alt}_A(DA)$ l'ensemble des formes bilinéaires anti-symétriques β sur DA telles que $\beta(fa, g) = \beta(f, ag)$. Dans le théorème 5.5 de [CMRS], il est montré que $H^1(TA, TA)$ et $Z(A) \oplus H^1(A, A) \oplus H_1(A, A)^* \oplus \text{Alt}_A(DA)$ sont des k -espaces vectoriels isomorphes :

$$H^1(TA, TA) \simeq Z(A) \oplus H^1(A, A) \oplus H_1(A, A)^* \oplus \text{Alt}_A(DA).$$

Pour montrer cela, les auteurs utilisent la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de TA -bimodules $0 \rightarrow DA \rightarrow TA \rightarrow TA/DA = A \rightarrow 0$. Par conséquent, ils ne donnent pas d'isomorphisme explicite entre ces deux espaces vectoriels qui nous permettrait de transférer la structure d'algèbre de Lie de $H^1(TA, TA)$ à $Z(A) \oplus H^1(A, A) \oplus H_1(A, A)^* \oplus \text{Alt}_A(DA)$.

Remarques 4.1.0.2

- (i) L'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ n'est jamais nulle, car le centre $Z(A)$ de A contient toujours l'élément neutre 1_A .
- (ii) Grâce à l'adjonction, on obtient

$$\text{Alt}_A(DA) = \{\varphi \in \text{Hom}_{A^e}(DA, A) \mid f\varphi(g) + \varphi(f)g = 0 \forall f, g \in DA\}.$$

Puisque l'algèbre A est de dimension finie, on a, d'une part

$$H^1(A, DA) = H_1(A, A)^*,$$

et, d'autre part, pour le centre $Z(A)$ de l'algèbre A , on a

$$Z(A) = \text{Hom}_{A^e}(A, A) = \text{Hom}_{A^e}(DA, DA).$$

- (iii) Tout morphisme $\varphi \in \text{Hom}_k(TA, TA)$ peut être écrit sous forme d'une matrice $\begin{pmatrix} \varphi_{A,A} & \varphi_{DA,A} \\ \varphi_{A,DA} & \varphi_{DA,DA} \end{pmatrix}$, avec $\varphi_{A,A} \in \text{Hom}_k(A, A)$, $\varphi_{A,DA} \in \text{Hom}_k(A, DA)$, $\varphi_{DA,A} \in \text{Hom}_k(DA, A)$ et $\varphi_{DA,DA} \in \text{Hom}_k(DA, DA)$.
- (iv) A toute application k -linéaire $\varphi : A \rightarrow A$, on peut associer l'application duale $D(\varphi) : DA \rightarrow DA$, $f \mapsto f \circ \varphi$.

Tenant compte de ces remarques, on énonce le théorème suivant :

Théorème 4.1.0.3

L'application k -linéaire

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \text{Der}_k(TA, TA) &\longrightarrow \mathbf{Z}(A) \oplus \text{Der}_k(A, A) \oplus \text{Der}_k(A, DA) \oplus \text{Alt}_A(DA) \\ \left(\begin{array}{cc} \varphi_{A,A} & \varphi_{DA,A} \\ \varphi_{A,DA} & \varphi_{DA,DA} \end{array} \right) &\longmapsto (\varphi_{DA,DA} + D(\varphi_{A,A})) + \varphi_{A,A} + \varphi_{A,DA} + \varphi_{DA,A} \end{aligned}$$

est un isomorphisme bien défini. L'image des dérivations intérieures $\text{Ad}_k(TA, TA)$ par l'isomorphisme Ψ est la somme de $\text{Ad}_k(A, A)$ et $\text{Ad}_k(A, DA)$, d'où

$$\text{Ad}_k(TA, TA) \simeq \text{Ad}_k(A, A) \oplus \text{Ad}_k(A, DA).$$

Démonstration:

Soit $\varphi = \left(\begin{array}{cc} \varphi_{A,A} & \varphi_{DA,A} \\ \varphi_{A,DA} & \varphi_{DA,DA} \end{array} \right)$ une application k -linéaire de TA dans TA . Pour que φ soit une dérivation, i.e. $\varphi \in \text{Ker } d_1$, il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} 0 = & (a + f)(\varphi_{A,A}(b) + \varphi_{A,DA}(b) + \varphi_{DA,A}(g) + \varphi_{DA,DA}(g)) - \\ & - \varphi_{A,A}(ab) - \varphi_{A,DA}(ab) - \varphi_{DA,A}(ag + fb) - \varphi_{DA,DA}(ag + fb) + \\ & + (\varphi_{A,A}(a) + \varphi_{A,DA}(a) + \varphi_{DA,A}(f) + \varphi_{DA,DA}(f))(b + g), \end{aligned}$$

pour tout $a, b \in A$ et tout $f, g \in DA$. Grâce à l'égalité $TA = A \oplus DA$, ceci équivaut à

$$\begin{aligned} 0 = & a\varphi_{A,A}(b) + a\varphi_{DA,A}(g) - \varphi_{A,A}(ab) - \varphi_{DA,A}(ag) - \varphi_{DA,A}(fb) + \\ & + \varphi_{A,A}(a)b + \varphi_{DA,A}(f)b, \end{aligned} \quad (1)$$

pour tout $a, b \in A$ et tout $f, g \in DA$, et

$$\begin{aligned} 0 = & f\varphi_{A,A}(b) + a\varphi_{A,DA}(b) + f\varphi_{DA,A}(g) + a\varphi_{DA,DA}(g) - \\ & - \varphi_{A,DA}(ab) - \varphi_{DA,DA}(ag) - \varphi_{DA,DA}(fb) + \\ & + \varphi_{A,A}(a)g + \varphi_{A,DA}(a)b + \varphi_{DA,A}(f)g + \varphi_{DA,DA}(f)b, \end{aligned} \quad (2)$$

pour tout $a, b \in A$ et tout $f, g \in DA$.

Supposons que la condition (1) est satisfaite. Si on prend $a = 1_A$, on obtient

$$0 = \varphi_{A,A}(1_A)b + \varphi_{DA,A}(f)b - \varphi_{DA,A}(fb),$$

pour tout $b \in A$ et tout $f \in DA$. Pour $b = 1_A$, ceci implique $\varphi_{A,A}(1_A) = 0$ et donc $\varphi_{DA,A} \in \text{Hom}_{A^e}(DA, A)$. En utilisant ce fait on déduit de (1) que $\varphi_{A,A}$ est une dérivation. Il est clair que $\varphi_{DA,A} \in \text{Hom}_{A^e}(DA, A)$ et $\varphi_{A,A} \in \text{Der}_k(A, A)$ constituent des conditions suffisantes pour que (1) soit vraie.

Supposons maintenant que les conditions (1) et (2) sont satisfaites. En prenant $f = 0 = g$, on déduit de (2) que $\varphi_{A,DA}$ est une dérivation et on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= f\varphi_{A,A}(b) + f\varphi_{DA,A}(g) + a\varphi_{DA,DA}(g) - \varphi_{DA,DA}(ag) - \\ &\quad - \varphi_{DA,DA}(fb) + \varphi_{A,A}(a)g + \varphi_{DA,A}(f)g + \varphi_{DA,DA}(f)b, \end{aligned} \quad (3)$$

pour tout $a, b \in A$ et tout $f, g \in DA$. Puisque $\varphi_{A,A}$ est une dérivation, il résulte, pour $a = 1_A = b$, que $f\varphi_{DA,A}(g) + \varphi_{DA,A}(f)g = 0$, pour tout $f, g \in DA$. Du fait $\varphi_{DA,A} \in \text{Hom}_{A^e}(DA, A)$ découle donc $\varphi_{DA,A} \in \text{Alt}_A(DA)$. Grâce à ce fait, d'après (3), pour $a = 1_A$, on a

$$0 = f\varphi_{A,A}(b) - \varphi_{DA,DA}(fb) + \varphi_{DA,DA}(f)b, \quad (4)$$

pour tout $b \in A$ et tout $f \in DA$. En prenant $b = 1_A$, on obtient

$$0 = \varphi_{A,A}(a)g - \varphi_{DA,DA}(ag) + a\varphi_{DA,DA}(g), \quad (5)$$

pour tout $a \in A$ et tout $g \in DA$. Or $\varphi_{A,A}$ est une dérivation, on vérifie sans peine que

$$f\varphi_{A,A}(b) = D(\varphi_{A,A})(f)b - D(\varphi_{A,A})(fb), \quad (6)$$

pour tout $b \in A$ et $f \in DA$, et par suite

$$\varphi_{A,A}(a)g = aD(\varphi_{A,A})(g) - D(\varphi_{A,A})(ag), \quad (7)$$

pour tout $a \in A$ et tout $g \in DA$. Les conditions (4) et (5) sont donc équivalentes à ce que $\varphi_{A,A} + D(\varphi_{A,A}) \in \text{Hom}_{A^e}(DA, DA) = \mathcal{Z}(A)$.

Si on a $\varphi_{A,A} + D(\varphi_{A,A}) \in \mathcal{Z}(A)$, $\varphi_{A,A} \in \text{Der}_k(A, A)$, $\varphi_{A,DA} \in \text{Der}_k(A, DA)$ et $\varphi_{DA,A} \in \text{Alt}_A(DA)$, alors, en vertu des égalités (6) et (7), les conditions (1) et (2) sont satisfaites, ou, autrement dit, φ est une dérivation. Cela est la raison pour laquelle l'inverse de Ψ , qui envoie un élément $z + \varphi_{A,A} + \varphi_{A,DA} + \varphi_{DA,A}$ de $\mathcal{Z}(A) \oplus \text{Der}_k(A, A) \oplus \text{Der}_k(A, DA) \oplus \text{Alt}_A(DA)$ sur $\begin{pmatrix} \varphi_{A,A} & \varphi_{DA,A} \\ \varphi_{A,DA} & (z - D(\varphi_{A,A})) \end{pmatrix}$ dans $\text{Der}_k(TA, TA)$, est bien défini.

Toute dérivation intérieure $\text{ad}_k(a + f) : TA \rightarrow TA$ avec $a \in A$ et $f \in DA$ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} \text{ad}_k(a) & 0 \\ \text{ad}_k(f) & -D(\text{ad}_k(a)) \end{pmatrix}$ avec des dérivations intérieures $\text{ad}_k(a) \in \text{Ad}_k(A, A)$ et $\text{ad}_k(f) \in \text{Ad}_k(A, DA)$. Il est manifeste que son image par Ψ est égale à $\text{ad}_k(a) + \text{ad}_k(f)$ avec $a \in A$ et $f \in DA$.

q.e.d. 4.1.0.3

On en déduit immédiatement ce qui suit :

Corollaire 4.1.0.4

L'isomorphisme Ψ du théorème précédent induit un isomorphisme linéaire en cohomologie :

$$\overline{\Psi} : H^1(TA, TA) \xrightarrow{\sim} Z(A) \oplus H^1(A, A) \oplus H^1(A, DA) \oplus \text{Alt}_A(DA).$$

Nous utilisons cet isomorphisme pour transférer la structure d'algèbre de Lie de $H^1(TA, TA)$ au k -espace vectoriel $Z(A) \oplus H^1(A, A) \oplus H^1(A, DA) \oplus \text{Alt}_A(DA)$. Rappelons d'abord quelques définitions :

Définitions 4.1.0.5

- (i) Une algèbre de Lie d'extension \mathfrak{G} est une algèbre de Lie avec une sous-algèbre de Lie \mathfrak{L} et un idéal de Lie bilatère \mathfrak{M} telle que $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$.
- (ii) Une algèbre de Lie symétrique \mathfrak{S} est une algèbre de Lie avec un automorphisme θ de \mathfrak{S} tel que $\theta^2 = \text{id}_{\mathfrak{S}}$.

Théorème 4.1.0.6

- (i) L'algèbre de Lie $H^1(A, A)$ munie du crochet de Lie habituel est une sous-algèbre de Lie de $H^1(TA, TA)$. Les facteurs $Z(A)$, $H^1(A, DA)$ et $\text{Alt}_A(DA)$ forment des sous-algèbres de Lie abéliennes de $H^1(TA, TA)$.
- (ii) L'algèbre de Lie $H^1(A, A)$ opère sur le centre $Z(A)$ de A selon le crochet de Gerstenhaber. On a

$$[z, \varphi_{A,A}] = -\varphi_{A,A}(z),$$

pour tout $z \in Z(A)$ et tout $\varphi_{A,A} \in H^1(A, A)$. L'algèbre de Lie d'extension

$$\mathcal{L} := H^1(A, A) \oplus Z(A),$$

est une sous-algèbre de Lie de $H^1(TA, TA)$.

- (iii) L'algèbre de Lie \mathcal{L} opère sur $H^1(A, DA)$. On a

$$\begin{aligned} [z, \varphi_{A,DA}] &= z\varphi_{A,DA}, \\ [\varphi_{A,A}, \varphi_{A,DA}] &= -D(\varphi_{A,A}) \circ \varphi_{A,DA} - \varphi_{A,DA} \circ \varphi_{A,A}, \end{aligned}$$

pour tout $z \in Z(A)$, $\varphi_{A,A} \in H^1(A, A)$ et $\varphi_{A,DA} \in H^1(A, DA)$.

- (iv) L'algèbre de Lie \mathcal{L} opère sur $\text{Alt}_A(DA)$. On a

$$\begin{aligned} [z, \varphi_{DA,A}] &= -z\varphi_{DA,A}, \\ [\varphi_{A,A}, \varphi_{DA,A}] &= \varphi_{A,A} \circ \varphi_{DA,A} + \varphi_{DA,A} \circ D(\varphi_{A,A}), \end{aligned}$$

pour tout $z \in Z(A)$, $\varphi_{A,A} \in H^1(A, A)$ et $\varphi_{DA,A} \in \text{Alt}_A(DA)$.

(v) Le k -espace vectoriel

$$\mathcal{P} := \mathbb{H}^1(A, DA) \oplus \text{Alt}_A(DA)$$

est invariant sous l'action de \mathcal{L} et satisfait $[\mathcal{P}, \mathcal{P}] \subset \mathcal{L}$. On a

$$[\varphi_{A,DA}, \varphi_{DA,A}] = \varphi_{A,DA} \circ \varphi_{DA,A} - \varphi_{DA,A} \circ \varphi_{A,DA} - D(\varphi_{DA,A} \circ \varphi_{A,DA}),$$

pour tout $\varphi_{A,DA} \in \mathbb{H}^1(A, DA)$ et tout $\varphi_{DA,A} \in \text{Alt}_A(DA)$.

(vi) L'algèbre de Lie $\mathbb{H}^1(TA, TA) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{P}$ est une algèbre de Lie symétrique.

Démonstration:

Le transfert de la structure d'algèbre de Lie $\mathbb{H}^1(TA, TA)$ au k -espace vectoriel $Z(A) \oplus \mathbb{H}^1(A, A) \oplus \mathbb{H}^1(A, DA) \oplus \text{Alt}_A(DA)$, à l'aide de l'isomorphisme $\bar{\Psi}$, fournit le crochet de Lie décrit dans ce théorème. La seule relation non évidente est la relation $[z, \varphi_{A,A}] = -\varphi_{A,A}(z)$. Soient alors $z \in Z(A)$ et $\varphi_{A,A} \in \mathbb{H}^1(A, A)$. Tenant compte du fait que l'élément z du centre $Z(A)$ de A s'identifie avec le morphisme de A -bimodules $z : DA \rightarrow DA, f \mapsto zf$, on a

$$[z, \varphi_{A,A}] = \Psi([\Psi^{-1}(z), \Psi^{-1}(\varphi_{A,A})]) = D(\varphi_{A,A}) \circ z - z \circ D(\varphi_{A,A}).$$

Puisque $\varphi_{A,A}$ est une dérivation, on obtient, pour tout $f \in DA$ et tout $a \in A$,

$$\begin{aligned} (D(\varphi_{A,A}) \circ z - z \circ D(\varphi_{A,A}))(f)(a) &= (zf \circ \varphi_{A,A} - z(f \circ \varphi_{A,A}))(a) \\ &= f(\varphi_{A,A}(a)z) - f(\varphi_{A,A}(az)) \\ &= -f(a\varphi_{A,A}(z)) \\ &= (-\varphi_{A,A}(z))(f)(a), \end{aligned}$$

ce qui montre que $[z, \varphi_{A,A}] = D(\varphi_{A,A}) \circ z - z \circ D(\varphi_{A,A}) = -\varphi_{A,A}(z)$.

Des relations $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$, $[\mathcal{L}, \mathcal{P}] \subset \mathcal{P}$ et $[\mathcal{P}, \mathcal{P}] \subset \mathcal{L}$ découle que

$$\begin{aligned} \theta : \quad \mathbb{H}^1(TA, TA) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{L} \oplus \mathcal{P} = \mathbb{H}^1(TA, TA) \\ l + p &\longmapsto l - p \end{aligned}$$

est un automorphisme de Lie de $\mathbb{H}^1(TA, TA)$ tel que $\theta^2 = \text{id}$. Il est clair que \mathcal{L} est l'ensemble des $x \in \mathbb{H}^1(TA, TA)$ tels que $\theta(x) = x$ et que \mathcal{P} est l'ensemble des $y \in \mathbb{H}^1(TA, TA)$ tels que $\theta(y) = -y$, si k n'est pas de caractéristique 2.

q.e.d. 4.1.0.6

4.2 L'extension triviale d'une algèbre dont le carré du radical est nul

A l'aide de la section précédente et en utilisant des résultats sur les algèbres monomiales obtenus dans le chapitre 2, nous effectuons l'étude de l'algèbre $H^1(TA, TA)$ pour des algèbres dont le carré du radical est nul. En particulier, nous élargissons un résultat de Saorín montrant, en caractéristique zéro, que l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ est le produit des algèbres de Lie k et $H^1(A, A)$, sous l'hypothèse que le carquois de A n'a pas de cycles orientés de longueur ≤ 2 . De plus, on montre que le quotient de l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ par son radical est un produit d'algèbres de Lie $\mathfrak{pgl}(n, k)$ et $\mathfrak{so}(2m, k)$.

Commençons par définir les algèbres dont le carré du radical est nul et par fixer des notations que nous garderons pour le reste de cette section.

4.2.1 Définitions et notations

Soit k un corps de caractéristique quelconque.

Définition 4.2.1.1

Une k -algèbre dont le carré du radical est nul est une k -algèbre de dimension finie telle que le carré du radical de Jacobson est nul.

La cohomologie de Hochschild étant Morita invariante en tant qu'algèbre de Gerstenhaber (voir [GS1], p.143), nous considérons l'algèbre basique correspondante. Si k est un corps algébriquement clos, alors l'algèbre basique correspondante est le quotient d'une algèbre de chemins par l'idéal engendré par tous les chemins de longueur ≥ 2 .

Soient Q un carquois fini connexe et $A = kQ/\langle Q_2 \rangle$ le quotient de l'algèbre de chemins par l'idéal engendré par tous les chemins de longueur ≥ 2 . Il s'agit donc d'une algèbre monomiale dont les relations minimales sont tous les chemins de longueur 2. On désigne par $E \simeq kQ_0$ la sous-algèbre séparable de A engendrée par les sommets de Q . L'ensemble $B = Q_0 \cup Q_1$ constitue une base de A et la base duale $B^* = Q_0^* \cup Q_1^*$ de DA est formée par les applications $\delta_\gamma : A \rightarrow k$, $\varepsilon \in B \mapsto \delta_{\gamma, \varepsilon}$, où $\gamma \in B$.

Remarque 4.2.1.2

La structure de A -bimodule sur DA est donnée par

$$\gamma\delta_\varepsilon = \begin{cases} \delta_\eta & \text{si } \varepsilon = \eta\gamma, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta_\varepsilon\gamma = \begin{cases} \delta_\eta & \text{si } \varepsilon = \gamma\eta, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\gamma \in B$ et $\delta_\varepsilon, \delta_\eta \in B^*$. En particulier, on a $\delta_\gamma = s(\gamma)\delta_\gamma t(\gamma)$, pour tout $\gamma \in B$.

Définition et Notation 4.2.1.3

- (i) Deux chemins ε et γ du carquois Q sont dits *anti-parallèles* si $s(\varepsilon) = t(\gamma)$ et $t(\varepsilon) = s(\gamma)$, i.e. $\varepsilon\gamma$ et $\gamma\varepsilon$ sont des cycles orientés. Si X et Y sont des ensembles de chemins de Q , l'ensemble $X \circ Y$ des chemins *anti-parallèles* est formé par les paires $(\varepsilon, \gamma) \in X \times Y$ telles que ε et γ sont des chemins *anti-parallèles*.
- (ii) Si X est un ensemble de chemins de Q et si C^* est un sous-ensemble de la base duale B^* de DA , alors on note par $X \circ C^*$ (resp. $C^* \circ X$) l'ensemble des éléments $(x, \delta_\gamma) \in X \times C^*$ (resp. $(\delta_\gamma, x) \in C^* \times X$) tels que les chemins x et γ sont *anti-parallèles*.

Par exemple, $Q_1 \circ Q_1$ est l'ensemble des cycles orientés de Q de longueur 2.

Définition 4.2.1.4

Le circuit d'un cycle orienté $\gamma = a_n a_{n-1} \dots a_1$ de longueur n est l'ensemble des cycles orientés obtenus à partir de γ , par permutation cyclique :

$$\{a_n a_{n-1} \dots a_1, a_1 a_n \dots a_2, \dots, a_{n-1} \dots a_1 a_n\}.$$

On désigne par $[\gamma]$ le circuit défini par γ . L'ensemble des circuits de longueur n de Q est noté par C_n .

4.2.2 Base et crochet de Lie de $H^1(TA, TA)$

A l'aide du lemme suivant, nous allons décrire une base du k -espace vectoriel $H^1(TA, TA) = Z(A) \oplus H^1(A, DA) \oplus H^1(A, A) \oplus \text{Alt}_A(DA)$.

Lemme 4.2.2.1

Soient X un ensemble de chemins de Q et kX le E -bimodule correspondant. Alors, les k -espaces vectoriels $k(X \circ B^*)$ (resp. $k(B^* \circ X)$) et $\text{Hom}_{E^e}(kX, DA)$ (resp. $\text{Hom}_{E^e}(DA, kX)$) sont isomorphes.

Démonstration:

On définit un morphisme $k(X \circ B^*) \rightarrow \text{Hom}_{E^e}(kX, DA)$ (resp. $k(B^* \circ X) \rightarrow \text{Hom}_{E^e}(DA, kX)$) en envoyant $(\varepsilon, \delta_\gamma) \in X \circ B^*$ (resp. $(\delta_\varepsilon, \gamma) \in B^* \circ X$) sur l'application élémentaire qui associe δ_γ à ε (resp. γ à δ_ε) et 0 à tout autre élément de X (resp. B^*). Tenant compte du fait qu'on a $\delta_\gamma = s(\gamma)\delta_\gamma t(\gamma)$, pour tout $\gamma \in B$, on démontre de façon analogue à la preuve du lemme 2.2.1.5 qu'il s'agit d'un isomorphisme.

q.e.d. 4.2.2.1

Le théorème suivant généralise des résultats obtenus indépendamment par Saorín dans des notes manuscrites.

Théorème 4.2.2.2

Soit k un corps dont la caractéristique est différente de 2. Soient Q un carquois fini connexe et $A = kQ/\langle Q_2 \rangle$ la k -algèbre dont le carré du radical est nul associée.

- (i) L'élément neutre $1_A = \sum_{e \in Q_0} e$ et les boucles $a \in Q_1$ de Q forment une base du centre $Z(A)$ de A .
- (ii) Une base de $H^1(A, A)$ est donnée par la réunion des ensembles suivants :
 - (a) tous les éléments $(a, b) \in Q_1//Q_1$ tels que $a \neq b$,
 - (b) pour chaque classe de flèches parallèles $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in Q_1//$, tous les éléments $(\alpha_i, \alpha_i) \in Q_1//Q_1$ tels que $i < n$,
 - (c) $|Q_1//| - |Q_0| + 1$ éléments linéairement indépendants $(c, c) \in Q_1//Q_1$ différents de ceux dans (b).
- (iii) La réunion des ensembles suivants constitue une base de $H^1(A, DA)$:
 - (a) pour chaque boucle $(e, a) \in Q_0//Q_1$, l'élément $(a, \delta_e) \in Q_1 \circ Q_0^*$,
 - (b) pour chaque circuit $[ab] \in C_2$, $a \neq b$, de Q de longueur 2, un élément $(a, \delta_b) - (b, \delta_a) \in Q_1 \circ Q_1^*$.
- (iv) L'ensemble qui contient pour chaque circuit $[ab] \in C_2$, $a \neq b$, de Q de longueur 2 un élément $(\delta_a, b) - (\delta_b, a)$ de $Q_1^* \circ Q_1$ est une base de $\text{Alt}_A(DA)$.

La réunion de ces bases de $Z(A)$, $H^1(A, A)$, $H^1(A, DA)$ et $\text{Alt}_A(DA)$ forme une base de $H^1(TA, TA)$.

Démonstration:

Vu que l'algèbre A est une algèbre monomiale de dimension finie, nous pouvons appliquer des résultats du chapitre 2.

(i) : Il est clair que l'élément 1_A et les boucles $a \in Q_1$ sont contenus dans le centre de A et que ces $1 + |Q_0//Q_1|$ éléments sont linéairement indépendants. Sachant que $H^0(A, A) = Z(A)$, on déduit du corollaire 2.2.1.9 que $\dim_k Z(A) = \dim_k H^0(A, A) = \dim_k \text{Ker } \psi_0 = |Q_0//Q_1| + 1$, ce qui termine la preuve.

(ii) : En utilisant les notations de la section 2.4.2, on obtient $H^1(A, A) = L_{-1} \oplus L_0$. Puisque la caractéristique du corps k est différente de 2 par hypothèse, la proposition 2.4.2.2 montre que $L_{-1} = 0$. Le fait que l'idéal $\langle Q_2 \rangle$ de l'algèbre A est complètement saturé entraîne, en raison de la remarque 2.4.3.1, que

$$H^1(A, A) = L_0 = k(Q_1//Q_1) / \left\langle \sum_{a \in Q_1} (a, a) - \sum_{a \in eQ_1} (a, a) \mid e \in Q_0 \right\rangle.$$

La proposition 2.4.3.2 achève la preuve.

(iii) : Calculons $H^1(A, DA)$ à l'aide de la résolution projective minimale \mathcal{P}_{\min} de A (en tant que A -bimodule) décrite dans la section 2.2.1. En appliquant le

foncteur $\text{Hom}_{A^e}(-, DA)$ à \mathcal{P}_{\min} , on obtient le complexe $\mathcal{C}_{\min}(A, DA)$ calculant la cohomologie de Hochschild $H^*(A, DA)$. En utilisant les lemmes 1.1.1.1 et 4.2.2.1, le début de ce complexe peut être interprété comme étant

$$0 \rightarrow k(Q_0 \circ B^*) \xrightarrow{\phi_0} k(Q_1 \circ B^*) \xrightarrow{\phi_1} k(Q_2 \circ B^*),$$

avec $\phi_0 = 0$ et

$$\begin{aligned} \phi_1 : \quad & k(Q_1 \circ B^*) \longrightarrow k(Q_2 \circ B^*) \\ & (a, \delta_e) \in Q_1 \circ Q_0^* \longmapsto 0 \\ & (a, \delta_b) \in Q_1 \circ Q_1^* \longmapsto \begin{cases} (ab, \delta_{t(a)}) + (ba, \delta_{s(a)}) & \text{si } a \neq b, \\ (a^2, \delta_{t(a)}) & \text{si } a = b. \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci montre que l'on a

$$H^1(A, DA) = \text{Ker } \phi_1 = \bigoplus_{(a,e) \in Q_1 // Q_0} k(a, \delta_e) \oplus \bigoplus_{\substack{[ab] \in C_2 \\ a \neq b}} k((a, \delta_b) - (b, \delta_a)).$$

(iv) : Si Q est le carquois trivial ayant un sommet e et aucune flèche, alors $\text{Hom}_{A^e}(DA, A)$ est engendré par l'élément (δ_e, e) . Du fait que $\delta_e e + e \delta_e = 2\delta_e$, découle $\text{Alt}_A(DA) = 0$, car $\text{car } k \neq 2$. Soit alors Q un carquois connexe non trivial. Ceci entraîne qu'il existe, pour tout sommet $e \in Q_0$, une flèche $a \in Q_1$ telle que $\delta_e = a\delta_a$ ou $\delta_e = \delta_a a$. Ce dernier point et le fait que $\text{Hom}_{A^e}(DA, A) \subset \text{Hom}_{E^e}(DA, A) \simeq k(B^* \circ B)$ montrent que l'on a

$$\text{Hom}_{A^e}(DA, A) = \bigoplus_{(a,b) \in Q_1 \circ Q_1} k(\delta_a, b) \oplus \bigoplus_{(e,c) \in Q_0 // Q_1} k((\delta_c, e) + (\delta_e, c)).$$

Soit $\varphi = \sum_{(a,b) \in Q_1 \circ Q_1} \lambda_{(a,b)}(\delta_a, b) + \sum_{(e,c) \in Q_0 // Q_1} \mu_c((\delta_c, e) + (\delta_e, c))$ un élément quelconque de $\text{Hom}_{A^e}(DA, A)$ et cherchons les conditions pour que φ soit dans $\text{Alt}_A(DA)$. Pour tout $\delta_f, \delta_g \in Q_0^*$ et $\delta_d \in Q_1^*$, on a $\delta_f \varphi(\delta_g) + \varphi(\delta_f)\delta_g = 0$ et

$$\delta_f \varphi(\delta_d) + \varphi(\delta_f)\delta_d = \begin{cases} 2\mu_d \delta_f & \text{si } (f, d) \in Q_0 // Q_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour que φ soit un élément dans $\text{Alt}_A(DA)$, il faut donc que φ soit de la forme $\sum_{(a,b) \in Q_1 \circ Q_1} \lambda_{(a,b)}(\delta_a, b)$, car $\text{car } k \neq 2$. Tenant compte de ceci, on obtient, pour tout $\delta_d, \delta_r \in Q_1^*$,

$$\delta_d \varphi(\delta_r) + \varphi(\delta_d)\delta_r = \begin{cases} (\lambda_{(d,r)} + \lambda_{(r,d)})\delta_{s(d)} & \text{si } (d, r) \in Q_1 \circ Q_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vu que la caractéristique du corps k est différente de 2, cela montre que

$$\text{Alt}_A(DA) = \bigoplus_{\substack{[ab] \in C_2 \\ a \neq b}} k((\delta_a, b) - (\delta_b, a)).$$

q.e.d. 4.2.2.2

Calculons la dimension du k -espace vectoriel $H^1(TA, TA)$ (voir aussi les corollaires 2 et 3 dans [Sa]) :

Corollaire 4.2.2.3

La dimension du k -espace vectoriel $H^1(TA, TA)$ est donnée par

$$\dim_k H^1(TA, TA) = 2 + |Q_0//Q_1| + |Q_1//Q_1| + |Q_1 \circ Q_1| - |Q_0|.$$

Démonstration:

En vertu du théorème précédent, on a :

$$\begin{aligned} \dim_k H^1(TA, TA) &= \dim_k Z(A) + \dim_k H^1(A, A) + \\ &\quad + \dim_k H^1(A, DA) + \dim_k \text{Alt}_A(DA) \\ &= (1 + |Q_0//Q_1|) + (|Q_1//Q_1| - |Q_0| + 1) + \\ &\quad + (|Q_0//Q_1| + \frac{1}{2}(|Q_1 \circ Q_1| - |Q_0//Q_1|)) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(|Q_1 \circ Q_1| - |Q_0//Q_1|) \\ &= 2 + |Q_0//Q_1| + |Q_1//Q_1| + |Q_1 \circ Q_1| - |Q_0|. \end{aligned}$$

q.e.d. 4.2.2.3

Tenant compte des identifications effectuées (voir aussi la proposition 2.2.2.2), on déduit du théorème 4.1.0.6 les expressions suivantes pour le crochet entre les éléments de base de $H^1(TA, TA)$:

Corollaire 4.2.2.4

Soient k un corps dont la caractéristique est différente de 2 et Q un carquois fini connexe. Soient $A = kQ/\langle Q_2 \rangle$ la k -algèbre dont le carré du radical est nul associée à Q et TA l'extension triviale de l'algèbre A .

Dans l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA) = Z(A) \oplus H^1(A, A) \oplus H^1(A, DA) \oplus \text{Alt}_A(DA)$, les seuls crochets éventuellement non nuls entre les éléments de base de $H^1(TA, TA)$ sont les suivants :

$$\begin{aligned} [a, (c, d)] &= -\delta_{a,c}d \\ [1_A, (c, \delta_f)] &= (c, \delta_f) \\ [1_A, (c, \delta_d) - (d, \delta_c)] &= (c, \delta_d) - (d, \delta_c) \\ [a, (c, \delta_d) - (d, \delta_c)] &= \delta_{a,d}(a, \delta_t(a)) - \delta_{a,c}(d, \delta_s(d)) \\ [1_A, (\delta_c, d) - (\delta_d, c)] &= -(\delta_c, d) + (\delta_d, c) \\ [(a, b), (c, d)] &= \delta_{a,d}(c, b) - \delta_{c,b}(a, d) \\ [(a, b), (c, \delta_f)] &= -\delta_{b,c}(a, \delta_f) \\ [(a, b), (c, \delta_d) - (d, \delta_c)] &= \delta_{b,c}((d, \delta_a) - (a, \delta_d)) + \delta_{b,d}((a, \delta_c) - (c, \delta_a)) \\ [(a, b), (\delta_c, d) - (\delta_d, c)] &= \delta_{a,c}((\delta_b, d) - (\delta_d, b)) + \delta_{a,d}((\delta_c, b) - (\delta_b, c)) \\ [(a, \delta_e), (\delta_c, d) - (\delta_d, c)] &= \delta_{a,d}c - \delta_{a,c}d \\ [(a, \delta_b) - (b, \delta_a), (\delta_c, d) - (\delta_d, c)] &= -\delta_{b,c}(a, d) + \delta_{b,d}(a, c) + \delta_{a,c}(b, d) - \delta_{a,d}(b, c) \end{aligned}$$

où $1_A, a, b \in Z(A)$; $(a, b), (c, d) \in H^1(A, A)$; $(a, \delta_b) - (b, \delta_a), (c, \delta_d) - (d, \delta_c), (a, \delta_e), (c, \delta_f) \in H^1(A, DA)$ et $(\delta_a, b) - (\delta_b, a), (\delta_c, d) - (\delta_d, c) \in \text{Alt}_A(DA)$.

Ceci se vérifie sans peine.

4.2.3 Étude de l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$

Nous généralisons un résultat dû à Saorín (voir corollaire 4 dans [Sa]) :

Proposition 4.2.3.1

Soient k un corps dont la caractéristique est différente de 2 et Q un carquois fini connexe. Soient $A = kQ/\langle Q_2 \rangle$ la k -algèbre dont le carré du radical est nul associée à Q et TA l'extension triviale de A .

L'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ est le produit des algèbres de Lie k et $H^1(A, A)$,

$$H^1(TA, TA) \simeq k \times H^1(A, A),$$

si et seulement si le carquois Q n'a pas de cycles orientés de longueur ≤ 2 .

Démonstration:

D'après le théorème 4.2.2.2, les k -espaces vectoriels $H^1(A, DA)$ et $\text{Alt}_A(DA)$ sont nuls si et seulement si on a $Q_0/Q_1 = \emptyset$ et $Q_1 \circ Q_1 = \emptyset$, i.e. Q n'a pas de cycles orientés de longueur ≤ 2 . Le centre $Z(A)$ de A contient toujours $k1_A$ et on a $Z(A) = k1_A$ si et seulement si $Q_0/Q_1 = \emptyset$. Le corollaire 4.2.2.4 montre que $[1_A, H^1(A, A)] = 0$, ce qui termine la preuve.

q.e.d. 4.2.3.1

Notation 4.2.3.2

On note par 2Q_1 l'ensemble de toutes les flèches de Q contenues dans un cycle orienté de Q de longueur ≤ 2 .

Rappelons que le carquois \overline{Q} est défini comme étant le carquois Q modulo l'équivalence de parallélisme. Les flèches du carquois \overline{Q} sont donc constituées par les classes de flèches parallèles de Q .

Théorème 4.2.3.3

Soient k un corps dont la caractéristique est différente de 2 et Q un carquois fini connexe. Soient $A = kQ/\langle Q_2 \rangle$ la k -algèbre dont le carré du radical est nul associée à Q et TA l'extension triviale de A .

L'algèbre de Lie semi-simple $H^1(TA, TA)/\text{Rad } H^1(TA, TA)$ est le produit d'algèbres de Lie ayant :

- un facteur $\text{pgl}(|\overline{\alpha}| + |\overline{\beta}|, k)$, pour chaque circuit $[\overline{\alpha}\overline{\beta}] \in \overline{C}_2$ de \overline{Q} de longueur 2 constitué de deux classes de flèches parallèles différentes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$,

- un facteur $\mathfrak{so}(2|\overline{\gamma}|, k)$, pour chaque classe de boucles parallèles non triviale $\overline{\gamma} \in Q_1//$ et
- un facteur $\mathfrak{pgl}(|\overline{\varepsilon}|, k)$, pour chaque classe de flèches parallèles $\overline{\varepsilon} \in Q_1//$ non triviale contenue dans aucun cycle orienté de \overline{Q} de longueur ≤ 2 .

Démonstration:

Avant de calculer le quotient $H^1(TA, TA)/\text{Rad } H^1(TA, TA)$, nous donnons un système de générateurs du radical $\text{Rad } H^1(TA, TA)$ en tant que k -espace vectoriel. Soit I le k -espace vectoriel engendré par la réunion des éléments suivants :

- l'élément

$$2 + \sum_{b \in {}^2Q_1} (b, b) \in Z(A) \oplus H^1(A, A),$$

- pour chaque boucle $(e, a) \in Q_0//Q_1$, les éléments

$$a \in Z(A) \quad \text{et} \quad (a, \delta_e) \in H^1(A, DA)$$

et, si, de plus, la classe de flèches parallèles de la boucle a est triviale, l'élément

$$(a, a) \in H^1(A, A),$$

- pour chaque circuit $[\overline{\alpha\beta}] \in \overline{C}_2$ de \overline{Q} de longueur 2 constitué de deux classes de flèches parallèles différentes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta} \in Q_1//$, l'élément

$$\sum_{\alpha \in \overline{\alpha}} (\alpha, \alpha) - \sum_{\beta \in \overline{\beta}} (\beta, \beta) \in H^1(A, A),$$

- pour chaque classe de flèches parallèles $\overline{\varepsilon} \in Q_1//$ contenue dans aucun cycle orienté de \overline{Q} de longueur ≤ 2 , l'élément

$$\sum_{\varepsilon \in \overline{\varepsilon}} (\varepsilon, \varepsilon) \in H^1(A, A).$$

Calculons, à l'aide du corollaire 4.2.2.4, les crochets de Lie entre ces éléments et les éléments de base de $H^1(TA, TA)$ décrits dans le théorème 4.2.2.2. Les seuls crochets pas nécessairement nuls sont les suivants :

$$\begin{aligned} [2 + \sum_{b \in {}^2Q_1} (b, b), (c, \delta_f)] &= (c, \delta_f) \\ [a, (c, d)] &= -\delta_{a,c}d \\ [a, (c, \delta_d) - (d, \delta_c)] &= \delta_{a,d}(a, \delta_t(a)) - \delta_{a,c}(d, \delta_s(d)) \\ [(a, \delta_e), 1_A] &= -(a, \delta_e) \\ [(a, \delta_e), (c, d)] &= \delta_{a,d}(c, \delta_e) \\ [(a, \delta_e), (\delta_c, d) - (\delta_d, c)] &= \delta_{a,d}c - \delta_{a,c}d \\ [(a, a), (c, \delta_f)] &= -\delta_{a,c}(a, \delta_f), \end{aligned}$$

où $(e, a) \in Q_0//Q_1$; $(a, a), (c, d) \in H^1(A, A)$; $(\delta_c, d) - (\delta_d, c) \in \text{Alt}_A(DA)$ et $(a, \delta_e), (c, \delta_f), (c, \delta_d) - (d, \delta_c) \in H^1(A, DA)$. Ces relations montrent que I est un idéal de Lie et que

$$I^{(1)} := [I, I] = \bigoplus_{(e,a) \in Q_0//Q_1} ka \oplus \bigoplus_{(f,c) \in Q_0//Q_1} k(c, \delta_f).$$

Du fait $I^{(2)} := [I^{(1)}, I^{(1)}] = 0$, on déduit que I est un idéal de Lie résoluble de $H^1(TA, TA)$.

Nous prouverons que $H^1(TA, TA)/I$ est une algèbre de Lie semi-simple ou zéro, montrant ainsi que I est le radical de l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$. Les relations dans le quotient $H^1(TA, TA)/I$, comme par exemple $1_A = -\frac{1}{2} \sum_{b \in {}^2Q_1} (b, b)$, impliquent que la réunion des ensembles suivants engendre $H^1(TA, TA)/I$ en tant que k -espace vectoriel :

- pour chaque circuit $[\bar{\alpha}\bar{\beta}] \in \overline{C_2}$ de \overline{Q} de longueur 2 constitué de deux classes de flèches parallèles différentes $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et $\bar{\beta} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \in Q_1//$, l'ensemble $A_{\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}}$ des éléments

$$\begin{aligned} (\alpha_i, \alpha_{i'}), (\beta_j, \beta_{j'}) &\in H^1(A, A), \\ (\alpha_i, \delta_{\beta_j}) - (\beta_j, \delta_{\alpha_i}) &\in H^1(A, DA), \\ (\delta_{\alpha_i}, \beta_j) - (\delta_{\beta_j}, \alpha_i) &\in \text{Alt}_A(DA), \end{aligned}$$

où $1 \leq i, i' \leq n$ et $1 \leq j, j' \leq m$.

- pour chaque classe de flèches parallèles $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\} \in Q_1//$ contenue dans aucun cycle orienté de \overline{Q} de longueur ≤ 2 , l'ensemble $A_{\bar{\varepsilon}}$ des éléments

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \in H^1(A, A),$$

où $1 \leq i, j \leq r$.

- pour chaque classe de boucles parallèles non triviale $\bar{\gamma} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$, l'ensemble $D_{\bar{\gamma}}$ des éléments

$$\begin{aligned} (\gamma_i, \gamma_j) &\in H^1(A, A), \\ (\gamma_i, \delta_{\gamma_j}) - (\gamma_j, \delta_{\gamma_i}) &\in H^1(A, DA), \\ (\delta_{\gamma_i}, \gamma_j) - (\delta_{\gamma_j}, \gamma_i) &\in \text{Alt}_A(DA), \end{aligned}$$

où $1 \leq i, j \leq l$.

Soient $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et $\bar{\beta} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ deux classes de flèches parallèles différentes et anti-parallèles. Soit $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\} \in Q_1//$ une classe de flèches parallèles non triviale contenue dans aucun cycle orienté de \overline{Q} de longueur ≤ 2 et soit $\bar{\gamma} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$ une classe de boucles parallèles non triviale. On a :

$$[A_{\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}}, A_{\bar{\varepsilon}}] = [A_{\bar{\varepsilon}}, D_{\bar{\gamma}}] = [D_{\bar{\gamma}}, A_{\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}}] = 0$$

et

$$[A_{\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}}, A_{\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}}] \subseteq A_{\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}}, \quad [A_{\bar{\varepsilon}}, A_{\bar{\varepsilon}}] \subseteq A_{\bar{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad [D_{\bar{\gamma}}, D_{\bar{\gamma}}] \subseteq D_{\bar{\gamma}}.$$

Par conséquent, $A_{\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}}$, $A_{\bar{\varepsilon}}$ et $D_{\bar{\gamma}}$ engendrent des idéaux de Lie orthogonaux dans l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)/I$ qu'on note par $\mathfrak{A}_{\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}}$, $\mathfrak{A}_{\bar{\varepsilon}}$ et $\mathfrak{D}_{\bar{\gamma}}$. Le quotient de Lie $H^1(TA, TA)/I$ est donc le produit d'algèbres de Lie suivant :

$$H^1(TA, TA)/I = \prod_{\substack{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \bar{Q}_1 \circ \bar{Q}_1 \\ \bar{\alpha} \neq \bar{\beta}}} \mathfrak{A}_{\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}} \times \prod_{\substack{\bar{\varepsilon} \in Q_1 // |\bar{\varepsilon}| > 1 \\ \bar{\varepsilon} \notin \bar{C}_2}} \mathfrak{A}_{\bar{\varepsilon}} \times \prod_{\substack{(\bar{\varepsilon}, \bar{\gamma}) \in Q_0 // \bar{Q}_1 \\ |\bar{\gamma}| > 1}} \mathfrak{D}_{\bar{\gamma}}.$$

Les applications suivantes sont des isomorphismes d'algèbres de Lie :

$$\begin{aligned} \vartheta_{A_{\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}}} : \quad & \mathfrak{A}_{\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}} \longrightarrow \mathfrak{pgl}(n+m, k) := \mathfrak{gl}(n+m, k)/k1 \\ & (\alpha_i, \alpha_{i'}) \longmapsto e_{i, i'} \pmod{1} \\ & -(\beta_j, \beta_{j'}) \longmapsto e_{n+j', n+j} \pmod{1} \\ & (\alpha_i, \delta_{\beta_j}) - (\beta_j, \delta_{\alpha_i}) \longmapsto e_{i, n+j} \pmod{1} \\ & -(\delta_{\alpha_i}, \beta_j) + (\delta_{\beta_j}, \alpha_i) \longmapsto e_{n+j, i} \pmod{1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{D_{\bar{\varepsilon}}} : \quad & \mathfrak{A}_{\bar{\varepsilon}} \longrightarrow \mathfrak{pgl}(r, k) := \mathfrak{gl}(r, k)/k1 \\ & (\varepsilon_i, \varepsilon_j) \longmapsto e_{i, j} \pmod{1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{B_{\bar{\gamma}}} : \quad & \mathfrak{D}_{\bar{\gamma}} \longrightarrow \mathfrak{so}(2l, k) \\ & (\gamma_i, \gamma_j) \longmapsto e_{i, j} - e_{2l-j+1, 2l-i+1} \\ & (\gamma_i, \delta_{\gamma_j}) - (\gamma_j, \delta_{\gamma_i}) \longmapsto e_{i, 2l-j+1} - e_{j, 2l-i+1} \\ & (\delta_{\gamma_i}, \gamma_j) - (\delta_{\gamma_j}, \gamma_i) \longmapsto e_{2l-i+1, j} - e_{2l-j+1, i}. \end{aligned}$$

Comme la caractéristique du corps k est différente de 2, les algèbres de Lie $\mathfrak{pgl}(n+m, k)$, $\mathfrak{pgl}(r, k)$ et $\mathfrak{so}(4, k) \simeq \mathfrak{sl}(2, k) \times \mathfrak{sl}(2, k)$ sont semi-simples, l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(6, k) \simeq \mathfrak{sl}(4, k)$ est simple et l'algèbre de Lie orthogonale $\mathfrak{so}(2l, k)$ est une des algèbres de Lie simples classiques pour $l > 3$. Ceci achève la démonstration.

q.e.d. 4.2.3.3

Remarque 4.2.3.4

La démonstration du théorème précédent implique que l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ n'est jamais semi-simple, car, dans tous les cas, le radical de $H^1(TA, TA)$ contient l'élément $2 + \sum_{b \in \bar{C}_1} (b, b) \in Z(A) \oplus H^1(A, A)$ qui n'est pas nul, puisque $\text{car } k \neq 2$.

Corollaire 4.2.3.5

Soient k un corps dont la caractéristique est différente de 2 et Q un carquois fini connexe. Soient $A = kQ/\langle Q_2 \rangle$ la k -algèbre dont le carré du radical est nul associée à Q et TA l'extension triviale de A . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le radical de l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ est minimal, i.e. il est de dimension un.
- (ii) Le carquois \overline{Q} est un arbre.
- (iii) L'algèbre de Lie $H^1(A, A)$ est semi-simple ou nulle.
- (iv) L'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)/\text{Rad } H^1(TA, TA)$ est isomorphe au produit d'algèbres de Lie

$$\prod_{\overline{\alpha} \in Q_1//} \mathfrak{pg}(|\overline{\alpha}|, k) \simeq H^1(A, A).$$

Démonstration:

(i) \Leftrightarrow (ii) : En vertu de la démonstration du théorème 4.2.3.3, le radical de $H^1(TA, TA)$ est minimal si et seulement si le carquois Q n'a pas de cycles orientés de longueur ≤ 2 et si, pour chaque classe de flèches parallèles $\overline{\varepsilon} \in Q_1//$, l'élément $\sum_{\varepsilon \in \overline{\varepsilon}} (\varepsilon, \varepsilon)$ de $H^1(A, A)$ est nul. La remarque 2.4.3.4 implique donc que $\text{Rad } H^1(TA, TA)$ est minimal si et seulement si le carquois \overline{Q} est un arbre.

(ii) \Leftrightarrow (iii) et (i) \Leftrightarrow (ii) : Vu que l'idéal $\langle Q_2 \rangle$ de l'algèbre kQ est complètement saturé, ces équivalences découlent du théorème 2.5.2.1.

q.e.d. 4.2.3.5

Déduisons du théorème 4.2.3.3 un critère combinatoire pour la résolubilité de l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ et donc de la composante de l'identité du groupe algébrique des automorphismes extérieurs $\text{Out}(TA)^\circ$:

Corollaire 4.2.3.6

Soient k un corps dont la caractéristique est différente de 2 et Q un carquois fini connexe. Soient $A = kQ/\langle Q_2 \rangle$ la k -algèbre dont le carré du radical est nul associée à Q et TA l'extension triviale de A .

L'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ est résoluble si et seulement si toute classe de flèches parallèles de Q est triviale et pour toute paire de flèches anti-parallèles $(a, b) \in Q_1 \circ Q_1$, on a $a = b$. En caractéristique zéro, ceci est équivalent à dire que la composante de l'identité des automorphismes extérieurs $\text{Out}(TA)^\circ$ est résoluble.

Démonstration:

Ceci est clair grâce à la proposition 1.2.1.1, car en caractéristique zéro l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique connexe est résoluble si et seulement si le groupe algébrique connexe est résoluble.

q.e.d. 4.2.3.6

Finalement, nous donnons un critère combinatoire pour la commutativité de l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$.

Proposition 4.2.3.7

Soient k un corps dont la caractéristique est différente de 2 et Q un carquois fini connexe. Soient $A = kQ/\langle Q_2 \rangle$ la k -algèbre dont le carré du radical est nul associée à Q et TA l'extension triviale de A . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ est abélienne.
- (ii) Le carquois Q n'a pas de cycle orienté de longueur ≤ 2 et toutes les classes de flèches parallèles de Q sont triviales.
- (iii) La dimension de l'espace vectoriel $H^1(TA, TA)$ est égale à $2 + |Q_1| - |Q_0|$.

Démonstration:

(i) \Rightarrow (ii) : Dans l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$, on a :

$$\begin{aligned} [1_A, (c, \delta_f)] &= (c, \delta_f) \\ [1_A, (c, \delta_d) - (d, \delta_c)] &= (c, \delta_d) - (d, \delta_c), \\ [(a, b), (a, a)] &= (a, b) - \delta_{a,b}(a, a), \end{aligned}$$

pour tout élément $(c, \delta_f), (c, \delta_d) - (d, \delta_c) \in H^1(A, DA)$ et $(a, b), (a, a) \in H^1(A, A)$. Puisque l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ est abélienne, les deux premières relations impliquent que le carquois Q n'a pas de cycle orienté de longueur ≤ 2 . La troisième relation montre que Q n'a pas de classe de flèches parallèles non triviale.

(ii) \Rightarrow (i) : De la proposition 4.2.3.1 découle que l'algèbre de Lie $H^1(TA, TA)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $k \times H^1(A, A)$. Comme le carquois Q n'a pas de classe de flèches parallèles non triviale, l'algèbre de Lie $H^1(A, A)$ est abélienne (voir lemme 2.5.3.2).

(ii) \Leftrightarrow (iii) : Le corollaire 4.2.2.3 montre que $\dim_k H^1(TA, TA) = 2 + |Q_1| - |Q_0|$ si et seulement si, $|Q_0//Q_1| = |Q_1 \circ Q_1| = 0$ et $|Q_1//Q_1| = |Q_1|$.

q.e.d. 4.2.3.7

Le corollaire suivant est clair en vertu de la proposition 1.2.1.1, car en caractéristique zéro un groupe algébrique connexe est abélien si et seulement si son algèbre de Lie est abélienne (voir [Hu1], 13.4 et 10.5).

Corollaire 4.2.3.8

Soient k un corps de caractéristique zéro et Q un carquois fini connexe. Soient $A = kQ/\langle Q_2 \rangle$, la k -algèbre dont le carré du radical est nul associée à Q et TA l'extension triviale de A .

La composante de l'identité du groupe algébrique des automorphismes extérieurs $\text{Out}(TA)^\circ$ est abélienne si et seulement si le carquois Q n'a pas de cycles orientés de longueur ≤ 2 et si toutes les classes de flèches parallèles de Q sont triviales.

Bibliographie

- [AG] D.J. Anick, E.L. Green
On the homology of quotients of paths algebras
Communications in Algebra 15, No.1-2, p.309-341, 1987
- [As] I. Assem
Algèbres et modules
Les Presses de l'Université d'Ottawa, Masson, Paris Milan Barcelone
1997
- [Ba] M.J. Bardzell
The alternating syzygy behavior of monomial algebras
Journal of Algebra 188, p.69-89, 1997
- [Be] D.J. Benson
Representations and cohomology. II. Cohomology of groups and modules
Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 30, Cambridge University
Press, Cambridge New York Melbourne 1991
- [C1] C. Cibils
On H^1 of finite dimensional algebras
Colloquium on Homology and Representation Theory, Boletín de la Aca-
demia Nacional de Ciencias (Córdoba) 65, p. 73-80, 2000
- [C2] C. Cibils
Hochschild cohomology algebra of radical square zero algebras
Algebras and modules II : Eighth International Conference on Represen-
tations of Algebras, 1996, Geiranger, Norway. I. Reiten, S.O. Smalø, O.
Solberg, editors. CMS Conference Proceedings, 24, p.93-101, 1998
- [C3] C. Cibils
Rigidity of truncated quiver algebras
Advances in Mathematics 79, p.18-42, 1990
- [C4] C. Cibils
On the Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras
Communications in Algebra 16, No. 3, p.645-649, 1988

- [C5] C. Cibils
Hochschild homology of an algebra whose quiver has no oriented cycles
Representation theory, I, 1984, Ottawa, Ontario.
Lecture Notes in Mathematics 1177, Springer, Berlin 1986
- [CMRS] C. Cibils, E. Marcos, M. J. Redondo, A. Solotar
Cohomology of split algebras and of trivial extensions
à paraître dans le Glasgow Mathematical Journal
- [CSa] C. Cibils, M. Saorín
The first cohomology group of an algebra with coefficients in a bimodule
Journal of Algebra 237, No. 1, p.121-141, 2001
- [CSo] C. Cibils, A. Solotar
Hochschild cohomology algebra of abelian groups
Archiv der Mathematik 68, p.17-21, 1997
- [De] P. Deligne
Lettre à Stasheff, Gerstenhaber, May, Schechtman et Drinfeld
17 Mai 1993.
- [Di] J. Dixmier
Algèbres enveloppantes
Gauthier-Villars, Paris Bruxelles Montréal 1974
- [Do] S. Dourlens
La suite spectrale de Cibils pour la cohomologie des algèbres triangulaires
Prépublication No.635 de l'Université Nice Sophia Antipolis, Laboratoire
Jean-Alexandre Dieudonné.
- [Ga] P. Gabriel
Problèmes actuels de théorie des représentations
L'Enseignement Mathématique (2) 20, p.323-332, 1974
- [GR] P. Gabriel, A.V. Roiter
Representations of finite-dimensional algebras
Encyclopaedia of Mathematical Sciences v. 73, Algebra VIII, Kostrikin,
A.I., Shafarevich, I.R. (Eds.), Springer, Berlin Heidelberg New York 1992
- [Ge1] M. Gerstenhaber
The cohomology structure of an associative ring
Annals of Mathematics 78, No.2, p.267-288, 1963
- [Ge2] M. Gerstenhaber
On the deformations of rings and algebras
Annals of Mathematics 79, No.2, p.59-103, 1964

- [GS1] M. Gerstenhaber, S.D. Schack
Algebraic cohomology and deformation theory
Deformation theory of algebras and structures and applications. M. Hazewinkel, M. Gerstenhaber, editors. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, p.11-264, 1988
- [GS2] M. Gerstenhaber, S.D. Schack
Relative Hochschild cohomology, rigid algebras, and the Bockstein
Journal of Pure and Applied Algebra 43, p.53-74, 1986
- [GV1] M. Gerstenhaber, A.A. Voronov
Higher-order operations on the Hochschild complex
Functional Analysis and its Applications 29, No.1, p.1-5, 1995
- [GV2] M. Gerstenhaber, A.A. Voronov
Homotopy G-algebras and moduli space operad
International Mathematics Research Notices, No. 3, p.141-153, 1995
- [GJ] E. Getzler, J.D.S. Jones
Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces
Preprint, Department of Mathematics, MIT, Mars 1994,
hep-th/9403055
- [Gi] G. Ginot
Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber
Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de l'Université de Strasbourg, No. 042, 2001
- [GHZ] E.L. Green, D. Happel, D. Zacharia
Projective resolutions over Artin algebras with zero relations
Illinois Journal of Mathematics 29, No.1, p.180-190, 1985
- [GAS1] F. Guil-Asensio, M. Saorín
The group of outer automorphisms and the Picard group of an algebra
Algebras and Representation Theory 2, p.313-330, 1999
- [GAS2] F. Guil-Asensio, M. Saorín
The automorphism group and the Picard group of a monomial algebra
Communications in Algebra 27, No.2, p.857-887, 1999
- [Ha] D. Happel
Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras
Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin, Lecture Notes in Mathematics 1404, p.108-126, Springer, Berlin 1989

- [Hi] D.G. Higman
Indecomposable representations at characteristic p
Duke Mathematical Journal 21, p.377-381, 1954
- [Hoc] G. Hochschild
On the cohomology groups of an associative algebra
Annals of Mathematics 46, p.58-67, 1946
- [Hol] T. Holm
The Hochschild cohomology ring of a modular group algebra : the commutative case
Communications in Algebra 24, No.6, p.1957-1969, 1996
- [HZS] B. Huisgen-Zimmermann, M. Saorín
Geometry of chain complexes and outer automorphisms under derived equivalence
Transactions of the American Mathematical Society 353, No. 12, p.4757-4777, 2001
- [Hu1] J.E. Humphreys
Linear algebraic groups
Graduate Texts in Mathematics 21, Springer, Berlin Heidelberg New York 1975
- [Hu2] J.E. Humphreys
Introduction to Lie algebras and representation theory
Second printing, revised, Graduate Texts in Mathematics 9, Springer, Berlin Heidelberg New York 1978
- [Ja] G.J. Janusz
Indecomposable modules for finite groups
Annals of Mathematics 89, p.209-241, 1969
- [Ke] B. Keller
Hochschild cohomology and derived Picard groups
Preprint, voir <http://www.math.jussieu.fr/~keller/publ>
- [Ku] H. Kupisch
Unzerlegbare Moduln endlicher Gruppen mit zyklischer p -Sylow-Gruppe
Mathematische Zeitschrift 108, p.77-104, 1969
- [Loc] A.C. Locateli
Hochschild cohomology of truncated quiver algebras
Communications in Algebra 27, No.2, p.645-664, 1999

- [Lor] F. Lorenz
Einführung in die Algebra - Teil II
BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim Wien Zürich 1990
- [Ma] O. Mathieu
Classification des algèbres de Lie simples
Séminaire Bourbaki, Vol. 1998/99, Astérisque No.266, Exp.No.858,
p.245-286, 2000
- [Pi] R.S. Pierce
Associative algebras
Graduate Texts in Mathematics v.88. Springer, Berlin Heidelberg New
York 1982
- [PS] J.A. de la Peña, M. Saorín
On the first Hochschild cohomology group of an algebra
Manuscripta Mathematica 104, No.4, p.431-442, 2001
- [Po] R.D. Pollack
Algebras and their automorphism groups
Communications in Algebra 17, No.8, p.1843-1866, 1989
- [Sa] M. Saorín
Automorphism groups of trivial extensions
to appear in the Journal of Pure and Applied Algebra
- [Sch] S. Schwede
*An exact sequence interpretation of the Lie bracket in Hochschild coho-
mology*
Journal für reine und angewandte Mathematik 498, p.153-172, 1998
- [Sco] W.R. Scott
Group theory
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1964
- [St1] C. Strametz
Représentations indécomposables modulaires et le carquois cyclique
Mémoire de DEA de Mathématiques à l'Université de Montpellier II,
1998/99
- [St2] C. Strametz
*The Lie algebra structure of the first Hochschild cohomology group for
monomial algebras*
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique 334,
p.733-738, 2002

- [St3] C. Strametz
The Lie algebra structure on the first Hochschild cohomology group of a monomial algebra
Prépublication du Département des Sciences Mathématiques de l'Université Montpellier II, No. 1, 2002
voir aussi <http://arXiv.org/abs/math.RT/0111060>.
- [Vo] A. Voronov
Homotopy Gerstenhaber algebras
Conférence Moshé Flato 1999, Vol.II (Dijon), Mathematical Physics Studies 22, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, p. 307-331, 2000
- [We] C.A. Weibel
An introduction to homological algebra
Cambridge University Press, Cambridge New York Melbourne 1994

