

Problemes de régularité en optimisation de formes

Tanguy Briançon

▶ **To cite this version:**

Tanguy Briançon. Problemes de régularité en optimisation de formes. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2002. Français. NNT : . tel-00002013

HAL Id: tel-00002013
https://theses.hal.science/tel-00002013

Submitted on 25 Nov 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'Ordre: 2694
de la thèse

THÈSE

présenté

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention: Mathématiques et Applications

PAR

Tanguy BRIANÇON

Équipe d'accueil: Institut de Recherche Mathématique de Rennes.

École Doctorale MATISSE.

Composante universitaire: 26ème section (Mathématiques et applications des mathématiques).

TITRE DE LA THÈSE:

Problèmes de régularité en optimisation de formes

SOUTENUE LE 2 juillet 2002 devant la commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY:

Pierre Cardaliaguet	Examinateur	Professeur, Université de Bretagne Occidentale
Michel Crouzeix	Examinateur	Professeur, Université Rennes I
Guy David	Rapporteur	Professeur, Université Paris XI
Antoine Henrot	Examinateur	Professeur, École des Mines de Nancy
Nicolas Lerner	Examinateur	Professeur, Université Rennes I
Michel Pierre	Directeur de thèse	Professeur, Antenne de Bretagne de l' ENS Cachan

Rapporteur extérieur: Giuseppe Buttazzo, Professeur, Université de Pise.

Table des matières

I Introduction, exemples de résultats de régularité. 5

1 Introduction. 7

2 Quelques exemples de régularité. 15
2.1 Des exemples géométriques. 15
2.1.1 L' inégalité isopérimétrique. 15
2.1.2 Les surfaces minima et quasi-minima pour le périmètre. 16
2.1.3 Les bulles de savon. 17
2.2 Des exemples fonctionnels. 17
2.2.1 Problème variationnel à deux phases. 18
2.2.2 La fonctionnelle de Mumford-Shah. 20
2.2.3 Le problème du formage des métaux liquides. 20

3 Ensembles à périmètre fini. 23
3.1 Définitions et notations. 23
3.2 Approximations, semi-continuité et compacité. 24
3.3 Inégalités isopérimétriques. 24
3.4 Bord réduit et normale approchée. 25

II Régularité de la forme optimale pour l'énergie de Dirichlet. 27

4 Existence et exemples. 29
4.1 Existence. 30
4.2 Quelques contre-exemples. 32

5 Régularité lipschitzienne. 37
5.1 Equation d'Euler de u. 37
5.2 Régularité de $\Delta u + f\chi_{\{u\neq 0\}}$ 39
5.3 Problème pénalisé par au-dessus. 42

5.4 Régularité lipschitzienne de u. 48
5.5 Périmètre fini de Ω. 54
5.5.1 Solution lipschitzienne ou localement lipschitzienne. . . 54
5.5.2 Le problème approché. 57

6 Etude locale, explosion. 59
6.1 Définition et convergences. 59
6.2 Propriétés de la limite. 60

7 Régularité de $\partial\Omega_u$. 67
7.1 Pénalisation par en dessous. 67
7.2 Minoration de $|\nabla u|$. 73
7.3 Régularité de la frontière réduite. 78

8 Le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$. 85
8.1 Existence et propriétés. 85
8.2 Différences entre $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_\lambda)$. 90

III Le problème complet. 95

9 Le problème relaxé avec périmètre. 97
9.1 Deux formulations du problème. 97
9.2 Une condition pour avoir un quasiminimiseur. 103

10 Quasi-minimiseurs en dimension 2. 107
10.1 Etude du cardinal de $\partial B(x,s) \cap \partial E$. 110
10.2 Régularité du ∂E: 112
10.3 Régularité supérieure. 116
10.4 Etude du cas $\sigma = \infty$. 117

Première partie

Introduction, exemples de résultats de régularité.

Chapitre 1

Introduction.

On s'intéresse aux problèmes de régularité en optimisation de formes: c'est-à-dire qu'on se donne $\mathcal{F}$ un ensemble de parties de $\mathbb{R}^d$ (souvent des ouverts mais pas uniquement) vérifiant certaines conditions et une fonction numérique E définie sur $\mathcal{F}$. On s'intéresse alors à la régularité de $F \in \mathcal{F}$ qui minimise E sur $\mathcal{F}$ ou, plus généralement, qui minimise E "localement" sur $\mathcal{F}$ dans un sens à préciser. Par régularité de F, on entend le plus souvent la régularité du bord. On peut cependant devoir, dans un premier temps, s'attacher à la régularité de F en tant que domaine de $\mathbb{R}^d$, par exemple montrer qu'il est ouvert, et pas seulement mesurable. Dans les problèmes qui nous occupent, on verra par exemple que les ensembles optimaux peuvent être quasi-ouverts (au sens de la capacité usuelle) et non ouverts.

Ainsi, l'existence de "formes" optimales est souvent établie par des procédés d'analyse fonctionnelle qui produisent des formes avec peu de régularité (seulement mesurables, ou quasi-ouvertes). Dans beaucoup de problèmes, on s'attend pourtant à ce que les formes optimales soient régulières, voir à bord analytique parfois. On arrive souvent à le montrer quand on sait déjà qu'elles ont un bord "correct" (de classe C^1 par exemple). Par contre, il est en général très difficile de partir de l'information minime fournie par le théorème d'existence, et d'établir un tout petit peu de régularité. C'est dans ce cadre que se situe ce travail.

On s'intéresse à des fonctionnelles qui peuvent compter deux types de termes:

1) Des termes associés à une équation d'état: par exemple pour chaque Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, on résout une équation aux dérivées partielles elliptique (l'équation d'état) sur Ω et on note u_Ω la solution. On lui associe ensuite une énergie du type:

$$E(\Omega) = \int_\Omega F(x, u_\Omega, \nabla u_\Omega),$$

où F est une fonction régulière de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Un cas intéressant, que nous considérerons plus particulièrement, est celui où u_Ω est lui même solution d'un problème de minimisation. C'est le cas, par exemple, pour des fonctionnelles du type:

$$J(u,\Omega) = \int_\Omega F(x,u,\nabla u)dx,$$

que l' on minimise, pour Ω ouvert fixé, parmi les $u \in H_0^1(\Omega)$. Ainsi:

$$E(\Omega) = J(u_\Omega,\Omega) = \min\left\{\int_\Omega F(x,u,\nabla u)dx; u \in H_0^1(\Omega)\right\},$$

et on s' intéresse, par exemple, au problème d'optimisation de forme avec contrainte, (ici $|\Omega|$ désigne la mesure de Ω):

$$E(\Omega^*) = \min\{E(\Omega); |\Omega| = a\}.$$

2) La fonctionnelle peut aussi contenir des termes géométriques, faisant intervenir la mesure de l' ensemble ou celle du bord, par exemple:

$$E(\Omega) = E_1(\Omega) + E_2(\Omega),$$

où $E_1(\Omega)$ est comme ci-dessus et

$$E_2(\Omega) = \text{périmètre}(\Omega) + g(|\Omega|),$$

avec g une fonction positive.

On donne plus loin quelques résultats classiques de régularité en optimisation de forme: d' abord des exemples purement géométriques (inégalité isopérimétrique, quasi-minimiseur pour le périmètre), puis des exemples faisant intervenir une équation d'état.

La classe des problèmes qui nous intéresse plus particulièrement est la suivante. On se donne $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f \in L^2(D)$ et $\mu \geq 0$ et on pose alors pour $u \in H_0^1(D)$

$$J(u) = \int_D \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx - \int_D fu.$$

On s'intéresse aux minima des:

$$G_\mu(u,\Omega) = J(u) + \mu P(\Omega, D),$$

pour $u \in H_0^1(\Omega)$ et Ω ouvert de mesure fixée a avec $0 < a < |D|$, et où $P(\Omega, D)$ désigne le périmètre de Ω relatif à l'ouvert D (c'est à dire $\int_{\partial\Omega \cap D} d\sigma$, si $\partial\Omega$ est régulier, voir le chapitre 3 dans le cas général). Ici et dans tout ce travail $|\nabla u|$, désigne la norme euclidienne du gradient.

Notons que si u_Ω vérifie:

$$J(u_\Omega) = \min\{J(u), u \in H_0^1(\Omega\},$$

alors il est solution du problème classique de Dirichlet:

$$u_\Omega \in H_0^1(\Omega), -\Delta u_\Omega = f \text{ dans } \Omega.$$

Ainsi, nous nous intéressons donc à la régularité de u_{Ω^*} et de $\partial\Omega^*$ où Ω^* est solution du problème de minimisation avec contraintes suivant:

$$G_\mu(u_{\Omega^*}, \Omega^*) = \min\{G_\mu(u_\Omega, \Omega); |\Omega| = a, \Omega \subset D\}. \tag{1.1}$$

Rappelons la situation dans le cas purement géométrique, soit

$$P(\Omega^*, D) = \min\{P(\Omega, D); |\Omega| = a, \Omega \subset D\} \tag{1.2}$$

Si $D = \mathbb{R}^d$, ce problème n'est autre que le problème isopérimétrique classique consistant à minimiser le périmètre d'un ensemble mesurable de mesure donnée. On sait que le boule est l'unique solution: la forme optimale est donc régulière dans ce cas. Même si ce résultat est classique, on sait que sa démonstration requiert un peu de travail.

La question devient nettement plus délicate lorsque $D \neq \mathbb{R}^d$. Si on travaille avec le périmètre relatif $P(\Omega, D)$, on voit facilement que la solution optimale Ω^* a tendance à "coller aux parois" de D pour minimiser son périmètre relatif. La boule n'est, bien sûr, plus solution. La question est celle de la régularité de la frontière à l'intérieur de D. Par exemple, on peut se demander si ce sont des cercles ou des droites en dimension 2 (il est facile de voir que c'est le cas pour les parties régulières de $\partial\Omega^* \cap D$).

En fait, la théorie des surfaces minimums dit que $\partial\Omega^*$ est régulier (variété analytique) autour des points de la *frontière réduite*, et que le complémentaire de la *frontière réduite* dans $\partial\Omega^*$ est de mesure de Hausdorff inférieure à $d-8$. C'est à dire que $\partial\Omega^*$ est analytique pour $d \leq 7$, mais il peut apparaître des singularités à partir de $d = 8$ (voir par exemple: [3], [24], [22], [23]). Pour $d = 2$, ce sont donc bien des parties de cercles ou de droites. Ce résultat de régularité découle essentiellement des nombreux travaux sur les surfaces minimales et, plus particulièrement, sur celui - fondamental - exprimant que

si Ω^* est un quasi-minimiseur pour le périmètre, alors la frontière réduite est régulière et la dimension de son complémentaire dans le bord de $\partial\Omega^*$ est de dimension de Hausdorff inférieure à $d-8$. Nous renvoyons au chapitre suivant pour un rappel de la définition d'un quasi-minimiseur: disons simplement qu'il minimise le périmètre localement dans toute boule de rayon r avec une erreur éventuelle en $r^{d-1+\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$. Il est facile de voir, par exemple, qu'une solution au problème pénalisé ($\lambda > 0$):

$$P(\Omega^*, D) + \lambda||\Omega^*| - a| = \min\left\{P(\Omega, D) + \lambda\,||\Omega| - a|\,; \Omega \subset D\right\},$$

est un quasi-minimiseur avec $\alpha = 1$. La question est beaucoup plus délicate avec la contrainte pure $|\Omega| = a$ comme dans (1.2). De même, si on revient au problème complet 1.1 et qu'on le remplace par le problème à contrainte pénalisé:

$$J(u_\Omega, \Omega) + \mu P(\Omega, D) + \lambda||\Omega| - a|, \tag{1.3}$$

on vérifie facilement que la forme optimale Ω^* est un quasi-minimiseur pour le seul périmètre dès que u_{Ω^*} vérifie l' estimation:

$$\int_{B(x,r)} |\nabla u_{\Omega^*}|^2 \leq C^{d-1+\alpha},$$

avec $C > 0$ et $\alpha > 0$ indépendants de $x \in \partial\Omega_*$ et de r (petit). La forme optimale a alors la même régularité que dans le cas géométrique (celle qui est rappelée ci-dessus).

Ceci montre que, dans un problème d'optimisation de forme associé à une équation d'état, la régularité de la frontière de la forme optimale est très liée à celle du gradient de la solution de l'équation d'état.

En fait, à ce stade, nous ne sommes pas en mesure de traiter le problème complet (1.1), ni même le problème pénalisé (1.3). Nous avons seulement rassemblé dans la troisième partie quelques questions générales et rappelé quelques démonstrations classiques liées aux quasi-minimiseurs, ainsi qu'une démonstration "élémentaire" en dimension 2.

Notre travail concerne surtout le problème sans terme géométrique dans la fonctionnelle, sous contrainte de volume, soit:

$$J(u_{\Omega^*}) = \min\left\{J(u_\Omega); |\Omega| = a, \Omega \subset D\right\}, \tag{1.4}$$

où

$$J(u) = \int_D \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx - \int_D fu,$$

et où:

$$J(u_\Omega) = \min\left\{J(u); u \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

Ce problème apparaît dans de nombreuses applications (voir par exemple [16]). Il a l'avantage d'un énoncé plus "simple" que le problème complet. Par contre, il est moins régularisant sans le terme $P(\Omega, D)$. L'effet régularisant n'est assuré que par la contrainte $|\Omega| = a$. L'existence de Ω^* est assuré, au moins parmi les ensembles quasi-ouverts de D (voir [16], [18]). Une méthode consiste à considérer le problème fonctionnel annexe:

$$J(u^*) = \min \left\{ J(v); v \in H_0^1(D); |\Omega_v| \leq a \right\}, \tag{1.5}$$

où $\Omega_v = \{x \in D; v(x) \neq 0\}$. Par une inégalité de Poincaré, on montre qu'il admet une solution (voir [16], [18]). Ainsi, si $|\Omega_{u^*}| = a, \Omega_{u^*}$ est alors solution de (1.4) et par construction c'est un quasi-ouvert. Si $|\Omega_{u^*}| < a$ on l'agrandit pour obtenir une solution ouverte de (1.4).

En général, une solution de (1.4) n'est donc même pas ouverte et, en général, on ne peut pas obtenir de régularité de Ω^* si $f \in L^p(D)$ avec p petit seulement (voir contre exemples dans le chapitre 4). C'est pourquoi, on supposera f un peu plus régulière, par exemple $f \in L^2(D) \cap L^\infty(D)$.

Le premier travail est donc d'établir la régularité de u^*: noter que u^* est formellement solution de:

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} (1) & -\Delta u^* & = & f \text{ dans } \Omega_{u_*}, \\ (2) & u^* & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega_{u_*}, \\ (3) & |\nabla u^*| & = & -\Lambda \text{ sur } \partial\Omega_{u_*}, \end{array} \right. \tag{1.6}$$

où la dernière condition représente l'équation d'Euler Lagrange du problème de minimisation, la constante étant le multiplicateur de Lagrange. Si $\partial\Omega^*$ est régulier et si u^* vérifie (1.6) avec par exemple, f borné à support compact dans D, alors u^* est globalement lipschitzienne dans D.

Établir cette propriété de Lipschitz de u^* est en fait la première étape. Elle a été prouvée dans ([16]) en dimension 2 avec des techniques spécifiques à cette dimension. Elle est aussi prouvée en dimension quelconque ([18]) mais avec une hypothèse de positivité sur u et pour les solutions obtenues comme limite de solutions pénalisées. La question reste ouverte en général: il est seulement montré que u^* est C^α pour tout $\alpha \in (0, 1)$ dans [17].

Un premier résultat que nous obtenons dans ce travail est que, sous l'hypothèse de positivité, toute solution u^* est lipschitzienne. Plus précisément, le résultat est local: le gradient est localement borné sur tout ouvert où u^* ne change pas de signe (donc seuls les point où u^* change de signe peuvent être à gradient non borné). La méthode est très différente de celle de [16] ou de [18] et s'inspire de celle de [9] où le problème suivant est considéré:

$$\int_D |\nabla u^*|^2 + \lambda |\Omega_{u^*}| = \min \left\{ \int_D |\nabla u|^2 + \lambda |\Omega_u|; u \in H_0^1(D), u = u_0 \text{ sur } \partial D \right\},$$

où u_0 positif donné sur ∂D et $\lambda > 0$ (et donc $u^* \geq 0$). Ce problème est différent par le fait que u_0 est donné au lieu de f, mais surtout parce que la contrainte est pénalisée (au lieu d'imposer $|\Omega_u| = a$, on ajoute le terme de pénalisation $\lambda|\Omega_u|$ dans la fonctionnelle).

Mais, suite à un résultat de M.Hayouni [17], pour notre problème avec contrainte, il existe λ^* tel que:

$$J(u^*) + \lambda^*|\Omega_{u^*}| \leq J(u) + \lambda^*|\Omega_u|,$$

pour tout $u \in H_0^1(D)$ tel que $|\Omega_v| \geq |\Omega_u| = a$ (voir le théorème 5.7). On peut alors effectuer des variations locales qui augmentent Ω_{u^*}, comme dans [9], pour montrer que u^* est lipschitzienne. L'idée consiste à montrer que les quantités $\frac{1}{r}\fint_{\partial B(x,r)} u^*$ restent majorées: l'estimation du gradient en résulte comme dans [9] (voir la proposition 5.15 et le théorème 5.16). A ce stade, on sait donc au moins que $\Omega^* = \Omega_{u^*}$ est un ouvert.

La suite du programme est d'étudier la régularité de $\partial\Omega^*$ et d'exprimer (1.6), au moins dans un sens faible. Comme il avait été remarqué dans [16], il est toujours possible d'écrire une équation d'Euler-Lagrange du problème dans $\mathbb{R}^d$ tout entier qui exprime (voir le théorème 5.2) que, pour tout $i = 1..d$, on a, au sens des distributions dans D:

$$-\sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}(u^*_{x_i} u^*_{x_j}) + \frac{1}{2}\partial_{x_i}|\nabla u^*|^2 = f u^*_{x_i} - \lambda \partial_{x_i}(\chi_{\Omega^*}), \tag{1.7}$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange. Cette équation contient de façon implicite les conditions (1.6), mais il est bien difficile de les expliciter, en général, même de façon faible.

Un objectif "raisonnable" dans le cas $u^* \geq 0$ et $f \geq 0$ est d'expliciter l'équation d'Euler-Lagrange sous la forme (encore faible, mais plus précise que (1.7)):

$$\Delta u^* + f\chi_{\Omega^*} = \sqrt{2\lambda}\mathcal{H}^{d-1}\lfloor\partial\Omega^*, \tag{1.8}$$

où $\mathcal{H}^{d-1}\lfloor\partial\Omega^*$ est la restriction de la mesure de Hausdorff de dimension $d-1$ à $\partial\Omega^*$. Dans tous les cas, $\Delta u^* + f\chi_{\Omega^*}$ est la différence de deux mesures: une correspondant à la partie positive de u^* et l'autre à la partie négative. Ces mesures sont portées par le bord de Ω^* (voir le théorème (5.4)). Si on suppose que u^* est lipschitzienne on peut en déduire également que chacune de ces deux mesures est absolument continue par rapport à la mesure $\mathcal{H}^{d-1}$, ce qui est, en quelque sorte, la moitié de (1.8).

La difficulté majeure dans ce problème est de montrer qu'inversement $\Delta u^* + f\chi_{\Omega^*}$ "majore" $\mathcal{H}^{d-1}\lfloor\partial\Omega_{u^*}$ ou, ce qui s'avère à peu près équivalent,

d'établir une minoration de $|\nabla u|$ au voisinage des points de la frontière de Ω^* ou encore d'établir une minoration des quantités $\frac{1}{r}\fint_{B(x_0,r)} u^*$ pour $x_0 \in \partial\Omega^*$.

Notons, par exemple, qu'il n'est pas possible d'espérer minorer $|\nabla u^*|$ à la frontière, ni même d'espérer la régularité de $\partial\Omega^*$ si $\lambda = 0$ dans l'équation d'Euler (1.7). En effet, on peut toujours choisir $u^* \in C_0^\infty(D)$ tel que $-\Delta u^* = f \in C_0^\infty(D)$ avec $\partial\Omega^*$ aussi irrégulier que possibe. Mais Ω^* est alors solution du problème de minimisation de forme associé à $a = |\Omega^*|$. Dans ce cas (1.7) est satisfaite avec $\lambda = 0$ (dans le cas régulier, le membre de gauche de (1.7) est exactement $-u^*_{x_i}\Delta u^*$). Ainsi il sera supposé dans toute la suite que le multiplicateur de Lagrange apparaissant dans (1.6) vérifie:

$$\lambda > 0. \tag{1.9}$$

Sous cette hypothèse on peut d'abord montrer que, si u^* est lipschitzienne, alors Ω^* est à périmètre fini dans D.

Toujours avec cette hypothèse, lorsque u^* est lipschitzienne et positive, il est possible d'aborder les techniques d'explosion pour regarder "à la loupe" le comportement de la solution au voisinage des points du bords, c'est à dire le comportement quand r tend vers 0 de $u_r(x) = \frac{1}{r}u(x_0 + rx)$ où $u(x_0) = 0$. C'est ce que nous faisons au chapitre 6, où nous montrons les convergences nécessaires et où nous dégageons les propriétés de la limite u_0. En particulier, nous identifions complètement la limite u_0 si x_0 est un point de la frontière réduite (voir le théorème 6.5). On montre ainsi qu'on a exactement (ν est la normale de Ω^* en x_0) $u_0(x) = -\sqrt{2\lambda}(\nu.x)$ dans le demi espace $\{x.\nu \leq 0\}$ et $u_0(x) = 0$ sur l'autre demi-espace, où λ apparaît dans (1.7). Ainsi $\sqrt{2\lambda}$ est la valeur de la constante Λ apparaissant dans (1.6).

Grâce à cette identification on peut montrer le résultat majeur de la suite cette étude: sous l' hypothèse (1.9), $u^* \geq 0$ et $f \geq 0$, il existe $\mu > 0$ tel que:

$$J(u^*) + \mu|\Omega^*| \leq J(v) + \mu|\Omega_v|,$$

pour tout $v \in H_0^1(D)$ avec $|\Omega_v| \leq a$. C'est cette propriété qui permet de faire des perturbations de Ω^* qui diminuent $|\Omega^*|$ et d'obtenir, comme dans [9], une minoration des quantités $\frac{1}{r}\fint_{B(x_0,r)} u^*$ pour $x_0 \in \partial\Omega^*$. On en déduit la minoration cherchée de $|\nabla u|$ à la frontière et le fait fondamental pour notre problème que $\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega^* \setminus \partial^*\Omega^*) = 0$. Enfin, grâce à l'indentification des explosions au voisinage de la frontière réduite, on en d'éduit que la dérivée de $\Delta u^* + f\chi_{\Omega^*}$ par rapport à $\mathcal{H}^{d-1}\lfloor\partial\Omega^*$ (au sens des mesures de Radon) vaut $\sqrt{2\lambda}$: c'est exactement l'identité (1.8).

Ainsi, en appliquant strictement les résultats de [9] sur la régularité des solutions appelées "faibles" dans cet article, on en d'éduit alors le théorème

de régularité suivant:

Théorème 1.1 *Supposons $u^* \geq 0$ et $\lambda > 0$. Si f est à support compact dans l'ouvert Ω^*, $\partial^*\Omega^*$ est analytique et $\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega^* \setminus \partial^*\Omega^*) = 0$.*

En fait, ce résultat de régularité est local et peut être enoncé sur les ouverts où $u^* \geq 0$ et où le support de f ne touche pas le bord de Ω^* (voir théorème 7.19).

Problèmes ouverts: Il est raisonnable de penser que l'hypothèse "f ne touche pas le bord de Ω^*" ne soit pas nécessaire. Elle a ici l'avantage de pouvoir appliquer directement les résultats de régularité prouvés dans [9] pour les solutions dites faibles. Il serait nécessaire de reproduire intégralement leurs arguments dans le cas $f \neq 0$ autour de $\partial\Omega^*$. Ceci semble tout à fait raisonnable.

Il est aussi très raisonnable de penser qu'en dimension 2, si $u^* \geq 0$ et $f \geq 0$ alors $\partial\Omega^* \setminus \partial^*\Omega = \emptyset$, c'est à dire que la frontière même de $\partial\Omega^*$ est analytique. Là aussi, il reste du travail à faire pour étendre les techniques de [9] à notre situation, mais le résultat est très vraisemblable. Notons que ceci est montré pour a suffisamment grand dans [19]: il est établi qu'alors Ω^* est convexe. La régularité analytique s'en déduit.

Une question qui est certainement plus difficile est le cas où u^* n'est plus positive. L'exemple donné au chapitre 4.2 montre qu'on ne peut pas espérer la régularité de la frontière même en dimension 2. Notons que dans l'extension "sans signe" du problème à frontière libre de [9] faite dans [10], au moins en dimension deux, la frontière libre $\partial\{u > 0\}$ est analytique (mais pas pour $\partial\{u \neq 0\}$).

Reste maintenant le problème complet (1.1) avec le terme géométrique $\mu P(\Omega, D), \mu > 0$. On peut penser que ce terme est encore plus régularisant et s'attendre donc à une frontière plus régulière. Le travail reste à faire. Nous avons seulement rassemblé dans cette dernière partie quelques contributions et quelques remarques dans cette direction. Nous avons aussi détaillé quelques approches en dimension 2 pour la minimisation géométrique dans l'idée de les étendre au problème complet. Même s'il s'agit là d'une approche encore très partielle, nous l'avons conservée ici afin de préparer des travaux ultérieurs sur ce problème "geométrico-fonctionnel".

Par ailleurs, on commence par rappeler au chapitre suivant quelques exemples de régularité en optimisation de forme.

Chapitre 2

Quelques exemples de régularité.

Dans ce chapitre, nous donnons à titre indicatif quelques exemples de problèmes d'optimisation de forme et les résultats de régularité connus.

2.1 Des exemples géométriques.

2.1.1 L' inégalité isopérimétrique.

On note $|E|$ la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble mesurable E de $\mathbb{R}^d$ et $P(E,\mathbb{R}^d)$ son périmètre (voir chapitre 3 pour une définition dans le cas où E n' est pas régulier). Étant donné $a > 0$ considérons d'abord l'ínégalité isopérimérique classique: trouver F tel que:

$$P(F,\mathbb{R}^d) = \inf\{P(E,\mathbb{R}^d), |E| = a\}.$$

Ou encore, ce qui revient au même, trouver la meilleure constante $C(d)$ tel que:

$$P(E,\mathbb{R}^d) \geq C(d)|E|^{\frac{d-1}{d}},$$

et caractériser les cas d' égalité. Ce problème est bien connu: on sait que la meilleure constante est $C(d) = d\omega_d^{\frac{1}{d}}$ où ω_d désigne la mesure de la boule unité en dimension d. L'égalité est atteinte seulement si E est égale presque-partout à une boule.

On peut également regarder le problème de l'inégalité isopérimétrique avec contrainte d'inclusion, c'est à dire l'étude d'un E^* vérifiant:

$$P(E^*,D) = \min\{P(E,D); E \subset D, |D| = a\},$$

où D est un ouvert inclus dans $\mathbb{R}^d$. Afin d'étudier ce problème, il faut d'abord étudier les quasi-minimiseurs pour le périmètre (voir définition ci-dessous).

2.1.2 Les surfaces minima et quasi-minima pour le périmètre.

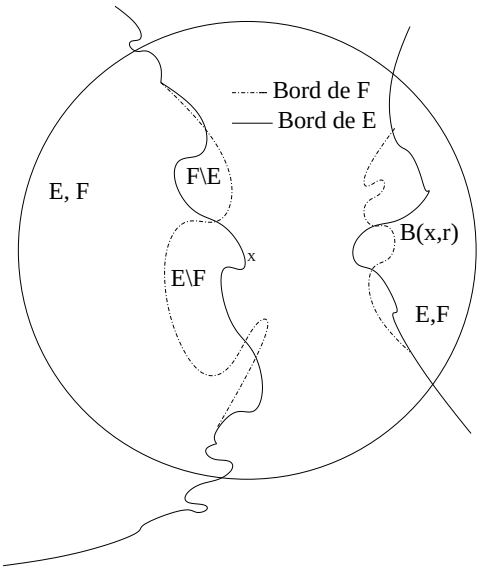
On dit que E est une surface minimale dans D ouvert si pour tout F tel que le support de $\chi_E - \chi_F$ soit compact dans D (χ_E désigne la fonction caractéristique de E) alors:

$$P(E, D) \leq P(F, D).$$

On dit que E est une surface quasi-minimale (ou quasi-minimiseur pour le périmètre) dans D s'il existe $0 < \alpha \leq 1$ et $C > 0$ telle que pour toute boule $B(x, r) \subset D$ avec $x \in \partial E$ et tout ensemble F tel que $F = E$ sur un voisinage de $\partial B(x, r)$ alors:

$$P(E, B(x, r)) \leq P(F, B(x, r)) + Cr^{d-1+\alpha}.$$

Exemple de perturbation admissible pour les surfaces (quasi)−minimales.



Le bord de E est, en dehors d' un ensemble relativement fermé de dimension au plus $d - 8$, une hypersurface de classe $C^{1,\alpha/2}$ ([24],[22]).

Ce résultat permet alors d'étudier la régularité de la minimisation du périmètre avec une contrainte d'inclusion: soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $0 < a < |D|$ soit alors E^* tel que:

$$P(E^*, D) = \min\{P(E, D); E \subset D, |E| = a\}.$$

On montre alors (voir [23]) que E^* est en fait un quasi-minimiseur pour le périmètre et donc vérifie le résultat de régularité ci-dessus.

On donne dans le chapitre 10 un exemple de démonstration assez élémentaire de la régularité des quasi-minimeurs pour le périmètre en dimension 2 et on utilise ce résultat pour étudier le cas particulier suivant: Soit D un ouvert, $\sigma, a > 0$ avec $a < |D|$; on regarde la fonctionnelle:

$$J(\Omega) = \sigma(|\Omega| - a)^2 + \lambda P(\Omega, D).$$

On voit grâce à ce qui précède que, en dimension 2, si Ω_σ est un minimum de J, $\partial\Omega_\sigma$ est régulier. On peut alors montrer que $\partial\Omega_\sigma$ a son bord constitué d' arcs de cercle de rayon $\frac{1}{2\sigma(|\Omega_\sigma|-a)}$ ou de droites (cercle de rayon infini). Enfin on peut faire tendre σ vers ∞ et montrer qu'il existe une solution dont le bord est constitué d' arcs de cercle ou de segments au problème suivant:

$$P(E, D) = \inf\{P(F, D), |F| = a\},$$

c' est à dire le problème de l' inégalité isopérimétrique avec la contrainte $F \subset D$.

2.1.3 Les bulles de savon.

Le problème des bulles de savon peut être vu en quelque sorte comme le problème de l' inégalité isopérimétrique mais avec plusieurs composantes. On se donne $a_1, ..., a_m > 0$; le problème est alors de trouver un ensemble $S_0 \subset \mathbb{R}^d$ minimisant $\mathcal{H}^{d-1}(\partial S)$ parmi les S vérifiant $\mathbb{R}^d \setminus S$ est une union disjointe de composantes disjointes (pas forcément connexe) $R_0, ..., R_m$ vérifiant: seul R_0 est non borné et $|R_i| = a_i$. L' existence et la régularité de S_0 ont été démontrées pour $n \geq 3$ dans [4]. Le cas $n = 2$ est traité dans [6] qui montre en plus que la frontière de S est composée d' un nombre fini d' arcs de cercles ou de segments qui se coupent en faisant des angles de 120 degrés.

2.2 Des exemples fonctionnels.

On s' intéresse maintenant à des problèmes faisant intervenir une équation d' état: sur chaque ouvert $\Omega \subset D$, on résout une équation aux dérivées partielles elliptique et on note u_Ω la solution. On étudie alors des fonctionnelles de la forme:

$$E(\Omega) = \int_D F(x, u_\Omega, \nabla u_\Omega) + E_2(\Omega).$$

où E_2 contient des termes purement géométriques (par exemple $P(\Omega, D)$). Un cas particulier intéressant est celui où u_Ω est lui même solution du problème de minimisation:

$$\int_D F(x, u_\Omega, \nabla u_\Omega) = \min \left\{ \int_D F(x, v, \nabla v), v \in V(\Omega) \right\},$$

où $V(\Omega)$ est un espace de fonction dépendant de Ω (par exemple $H^1(\Omega)$ où $H_0^1(\Omega)$). On va évoquer trois exemples: celui d' un problème de fluide à deux phases, celui de la fonctionnelle de Mumford-Shah et enfin celui du formage des métaux liquides.

2.2.1 Problème variationnel à deux phases.

On se donne D un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$, S une partie ouverte de ∂D et u^0 une fonction définie sur D. On note alors:

$$K = \{u \in L^1_{loc}(D), \nabla u \in L^2(D), u(x) = u^0(x), x \in S\}.$$

On regarde alors la fonctionnelle suivante définie sur K:

$$J(u) = \int_D \left(|\nabla u|^2 + q(x)^2 \lambda^2(u) \right) dx,$$

avec $q(x) \neq 0, x \in D$,

$$\lambda^2(u) = \begin{cases} \lambda_1^2 & \text{si } u < 0, \\ \lambda_2^2 & \text{si } u > 0, \end{cases}$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ et $\Lambda = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \neq 0$. On demande en plus que

$$0 \leq \lambda(0) \leq \min\{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

Cette fonctionnelle a été étudiée dans [10]. On peut commencer par citer [9] où les auteurs étudient un problème simplifié à une seule phase:

$$J(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + Q(x)^2 \chi_{\{u>0\}} \right) dx,$$

avec u_0 positive et Q fonction mesurable. Le minimum est alors positif.

Problème à une phase: On suppose que Q vérifie:

$$0 < C_1 < Q(x) < C_2, x \in D.$$

On s' intéresse, pour u minimum de J, à la régularité des ensembles $\partial\{u > 0\}$. La première question est d'abord celle de la régularité de u, notamment à

travers la frontière, car dans $\{u > 0\}$, u est harmonique. On a les résultats suivants sur u: u est localement lipschitzienne dans D. La régularité de $\partial\{u > 0\}$ passe d'abord par l'étude du Laplacien de u à travers $\partial\{u > 0\}$. On montre que le laplacien de u est une mesure de Radon portée par $\partial\{u > 0\}$ et absolument continue par rapport à $\mathcal{H}^{d-1}\lfloor\partial\{u > 0\}$. C' est à dire:

$$\int_D \nabla u \nabla \varphi = -\int_{D\cap\partial\{u>0\}} \varphi q_u d\mathcal{H}^{d-1}, \varphi \in C_0^1(D),$$

avec q_u fonction borélienne.

La régularité de $\partial\{u > 0\}$ passe par la notion suivante de solution faible introduite dans [9] que nous réutiliserons dans notre travail..

Définition des solution faibles. Soit Q_1 fonction borélienne définie sur D_1. Une fonction u_1 est dite solution faible dans D_1 pour Q_1 si elle vérifie les conditions suivantes:

1)u_1 est continue positive dans D_1 et harmonique sur $\{u_1 > 0\} \cap D$

2)Il existe $C_1, C_2 > 0$ tel que pour toute boule $B(x,r) \subset D_1$ avec $x \in \partial\{u_1 > 0\}$ on ait:

$$C_1 \leq \frac{1}{r} \fint_{\partial B(x,r)} u_1 d\mathcal{H}^{d-1} \leq C_2.$$

3)$\Delta u_1 = Q_1 \mathcal{H}^{d-1}\lfloor\partial\Omega_u$ dans D_1, ce qui s'écrit:

$$\int_{D_1} \nabla u_1 \nabla \varphi = -\int_{D_1\cap\partial\{u>0\}} Q\varphi d\mathcal{H}^{d-1}, \varphi \in C_0^1(D_1).$$

Si u_1 est une solution faible, on a le résultat suivant (voir [9]) de régularité: $\{u > 0\}$ est à périmètre fini et $\partial\{u > 0\} = \partial^*\{u > 0\}, \mathcal{H}^{d-1}$ presque partout. De plus si Q_1 est de classe $C^{k,\alpha}, \alpha > 0, k \geq 0$ le bord réduit de $\{u_1 > 0\}$ est une variété de classe $C^{k-1,\alpha}$ et est égale $\mathcal{H}^{d-1}$ presque-partout au bord de $\{u_1 > 0\}$.

Si u est un minimum de J avec Q continue on montre que c'est une solution faible, avec $Q_1 = Q$ De plus, si Q est plus régulier, en dimension 2, on montre que le bord de $\{u > 0\}$ est égal au bord réduit et est donc régulier.

Problème à deux phases: Il est montré d'abord dans [10] que u, un minimum de J, est localement lipschitzienne dans D. De plus on montre que u^+ (partie positive de u) est localement une solution faible (de même pour u^-). Enfin, en dimension deux, on montre que $\partial\{u > 0\}$ est régulier. Nous renvoyons également au préprint tout récent [11] sur ces questions.

2.2.2 La fonctionnelle de Mumford-Shah.

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $g \in L^\infty(D)$. Pour K compact inclus dans $\overline{D}$ et $u \in C^1(D \setminus K)$ on définit la fonctionnelle de Mumford-Shah par

$$J(u,K) = \int_{D\setminus K} (|\nabla u|^2 + (u-g)^2)dx + \mathcal{H}^{d-1}(K \cap D).$$

Cette fonctionnelle est utilisée en segmentation d' image, g désigne l' intensité de l' image (en noir et blanc). On voit que, à K fixé, le minimum de $J(u,K)$ est atteint pour u vérifiant (au sens faible):

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= g \text{ dans } D \setminus K \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } K. \end{aligned}$$

L' existence de minima a été démontrée dans [12] et dans [2]. La régularité de K qui découle de l' existence est alors simplement que K est l' ensemble singulier d' une fonction à variation bornée, il est donc $(\mathcal{H}^{d-1}, d-1)$ rectifiable dans le sens de [8].

On peut cependant démontrer des résultats de régularité plus précis: en dehors d' un ensemble de mesure $\mathcal{H}^{d-1}$ négligeable, K est une hypersurface de classe $C^{1,\alpha}$ de dimension $d-1$. Ceci a été démontré en dimension 2 dans [7], puis en dimension ≥ 2 dans [13]. Dans [7], on montre également que l'ensemble singulier est en fait de dimension de Hausdorff strictement inférieure à 2. Ce résultat a été généralisé en dimension n dans [20] et dans [5].

Enfin, on peut citer, pour la dimension deux, les résultats de [21] qui montrent que les composantes connexes isolées de K sont composées d'un nombre fini d' arcs $C^{1,1}$ dont les extrémités sont, soit un point qui n'est pas inclus dans un autre arc, soit un point qui est l' extrémité de trois arcs faisant des angles de $\frac{2\pi}{3}$. De plus, il est aussi montré que tout arc $C^{1,\alpha}$ inclus dans K avec $\alpha > 0$ est, en fait, un arc $C^{1,1}$.

2.2.3 Le problème du formage des métaux liquides.

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et $f \in L^2(D)$. On définit pour $u \in H_0^1(D)$:

$$J(u) = \int_D \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx - \int_D fu.$$

Pour Ω ouvert inclus dans D, on définit u_Ω par:

$$J(u_\Omega) = \min\{J(u), u \in H_0^1(\Omega)\}.$$

u_Ω est la solution, dans $H_0^1(D)$, du problème suivant:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

On regarde alors la fonctionnelle:

$$E(\Omega) = J(u_\Omega) + \mu P(\Omega, D),$$

où $\mu \geq 0$. Soit $0 < a < |D|$, on étudie le problème suivant: trouver Ω^* avec $|\Omega^*| = a$ tel que

$$E(\Omega^*) = \min\{E(\Omega), \Omega \subset \text{ ouvert}, |\Omega| = a\}.$$

Dans ce travail on va, en fait, surtout s'intéresser au cas où $\mu = 0$. Dans ce cas, cela revient presque (voir chapitre 4 pour les détails) a étudier le problème suivant: trouver $u^* \in H_0^1(D)$ avec $|\{u \neq 0\}| = a$ tel que:

$$J(u^*) = \min\{J(v); v \in H_0^1(D), |\{v \neq 0\}| = a\}.$$

Posé comme cela, ce problème n'a pas forcément de solution (il suffit de prendre u régulier avec $|\{u \neq 0\}| < a$ et $f = -\Delta u$). Par contre le problème suivant admet une solution:

$$J(u^*) = \min\{J(v); v \in H_0^1(D), |\{v \neq 0\}| \leq a\}.$$

On a remplacé la contrainte $|\{v \neq 0\}| = a$ par $|\{v \neq 0\}| \leq a$. La régularité qui nous intéresse est alors celle de u^* et de $\Omega_{u^*} = \{u^* \neq 0\}$.

On verra plus loin (voir 4.6) qu'il y a deux cas bien distincts: celui où $|\Omega_{u^*}| < a$ où la contrainte de volume n'agint donc pas et celui où $|\Omega_{u^*}| = a$. On s'intéressera seulement au deuxième cas. On a alors que u_Ω est lipschitzienne dans D sous certaines conditions. Par exemple on a:

Théorème 2.1 *(théorème 3 de [16]) Soit $D = \mathbb{R}^2$ et f à support compact dans $L^2(D)$ et Ω un minimum de J. Alors u_Ω est lipschitzienne.*

Pour le cas $d \geq 2$ et D ouvert inclus dans $\mathbb{R}^d$ et si $f \geq 0$ on trouve dans [18] l'existence d'une solution lipschitzienne positive. On démontre plus loin (voir le théorème 5.16 et ses corollaires) que toutes les solutions positives sont localement lipschitziennes.

Le but principale de cette thèse est de démontrer que, sous certaines conditions notamment f positive bornée et $|\Omega_{u^*}| = a$, u^* vérifie les trois propriétés suivantes pour tout D_1 compact inclus dans D.

1)u est lipschitzienne positive dans D_1, et vérifie $-\Delta u = f$ dans $\{u > 0\}$.

2)Il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour toute boule $B(x,r) \subset D_1$ avec $x \in \partial\{u > 0\}$, on ait:

$$C_1 \leq \frac{1}{r} \fint_{\partial B(x,r)} u d\mathcal{H}^{d-1} \leq C_2.$$

3)Il existe une constante $\Lambda > 0$ tel que

$$\Delta u = -f\chi_{\Omega_u} + \Lambda \mathcal{H}^{d-1} \lfloor \partial\Omega_u,$$

ce qui s'écrit:

$$\int_{D_1} \nabla u^* \nabla \varphi = -\Lambda \int_{D_1 \cap \partial\{u^*>0\}} \varphi d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\Omega_{u^*}} f\varphi, \varphi \in C_0^1(D_1).$$

C'est "presque" la définition d'une solution faible (voir page 19).

Dans le cas où $\mu > 0$, on étudiera E en remplaçant la contrainte $|\{u > 0\}| = a$ par un terme supplémentaire du type $\sigma(|\{u > 0\}| - a)^2$ dans la fonctionnelle, c'est à dire qu'on étudie un minimum de:

$$E'(\Omega) = J(u_\Omega) + \sigma(|\{u > 0\}| - a)^2 + \mu P(\Omega, D).$$

Alors, sous certaines conditions de régularité sur $|\nabla u|$, Ω^* est un quasi-minimiseur pour le périmètre (voir définition page 16 et le chapitre 9).

Remarque: Dans cette famille d'exemples, on peut aussi citer les problèmes de minimisation de valeurs propres. Par exemple si on note:

$$\lambda(D) = \inf_{f \in C_0^\infty(D)} \frac{\int_D |\nabla f|^2}{\int_D f^2}$$

On sait que $\lambda(D)$ est la plus petite valeur propre du problème:

$$\Delta u + \lambda u = 0, u \in H_0^1(D).$$

Et de plus on sait que parmi tous les ouverts de volume fixé la boule donne la plus petite première valeur propre.

Chapitre 3

Ensembles à périmètre fini.

3.1 Définitions et notations.

On note χ_E la fonction caractéristique de E et $|E|$ la mesure de Lebesgue de E. On note ω_d la mesure de Lebesgue de la boule unité de dimension d. Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $E \subset D$; on dit que E est à périmètre fini dans D si:

$$\sup\{\int_E \text{div } \varphi, \varphi \in C_0^\infty(D, \mathbb{R}^d), \|\varphi\|_\infty \leq 1\} < \infty,$$

où $\|\varphi\|_\infty = sup_{x \in D}|\varphi(x)|$ et $|\ |$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. On note alors $P(E, D)$ cette borne supérieure. E est à périmètre fini si et seulement si $D\chi_E$, calculé est au sens des distributions dans D ouvert, est une mesure de Radon vectorielle. Rappelons que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(D, \mathbb{R}^d)$ on a:

$$\int_E div\varphi = - < D\chi_E, \varphi > .$$

Par des résultats "classiques" de théorie de la mesure, il existe une mesure positive et finie définie dans D, notée $|D\chi_E|$, et une fonction ν_E définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $|D\chi_E|$ mesurable et de module 1 $|D\chi_E|$-presque partout, telles que

$$D\chi_E = -\nu_E|D\chi_E|,$$

c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(D, \mathbb{R}^d)$:

$$\int_E div\varphi = - < D\chi_E, \varphi >= \int_E (\varphi(x).\nu_E(x)|D\chi_E|(x)).$$

On trouve la théorie des ensembles à périmètre fini dans [3],[15] et [8].

3.2 Approximations, semi-continuité et compacité.

On va rappeler une proposition classique sur la semi-continuité inférieure du périmètre:(voir section 5.2.1 dans [15])

Proposition 3.1 *Soit E_k une suite d' ensembles à périmètre fini dans D telle que $\chi_{E_k} \to \chi_E$ dans $L^1_{loc}(D)$; alors:*

$$P(E, D) \leq \liminf_{k\to\infty} P(E_k, D).$$

On rappelle aussi un résultat d' approximation des ensembles à périmètre fini (voir théorème 3.42 de [14]):

Proposition 3.2 *Soit E borné à périmètre fini dans $\mathbb{R}^d$; alors il existe une suite de d'ensembles E_j à périmètre fini et à bord régulier (C^1) tels que;*

$$\lim_{j\to\infty} \chi_{E_j} = \chi_E \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^d),$$

$$\lim_{j\to\infty} P(E_j, \mathbb{R}^d) = P(E, \mathbb{R}^d),$$

$D\chi_{E_j} \rightharpoonup D\chi_E$ faiblement au sens des mesures de Radon.

Voici enfin un résultat essentiel de compacité: (voir section 5.2.3 dans [15])

Proposition 3.3 *Soit D un ouvert borné et E_k une suite d' ensembles tels que:*

$$P(E_k, D) \leq C, k \geq 0;$$

alors il existe E à périmètre fini et une sous suite E_{k_j} tels que

$$\lim_{j\to\infty} \chi_{E_{k_j}} = \chi_E \text{ dans } L^1(D).$$

3.3 Inégalités isopérimétriques.

Nous allons rappeler deux inégalités isopérimétriques, l' une globale et l' autre locale. (voir section 5.6 dans [15])

Théorème 3.4 (Inégalités isopérimétriques.) *Soit E borné à périmètre fini; alors:*

$$|E|^{\frac{d-1}{d}} \leq C(d) P(E, \mathbb{R}^d),$$

avec $C(d)$ qui ne dépend que de d. Le meilleur $C(d)$ possible est donné dans [8] (4.5.9 (31)): $C(d) = \omega_d^{-1/d}/d$.

De plus pour toute boule $B(x,r) \subset \mathbb{R}^d$:

$$\min\{|B(x,r) \cap E|, |B(x,r) \setminus E|\}^{\frac{d-1}{d}} \leq C'(d) P(E, B(x,r)).$$

3.4 Bord réduit et normale approchée.

Soit E à périmètre fini dans D. Notons:

$$\nu_E(x,r) = -\frac{\int_{B(x,r)} D\chi_E}{\int_{B(x,r)} |D\chi_E|},$$

si $\int_{B(x,r)} |D\chi_E| > 0$ et $\partial^* E$ l' ensemble des x tels que $\nu_E(x,r)$ a une limite de module 1 quand r tend vers 0. D'après la théorie de la mesure, cette limite existe $|D\chi_E|$ presque-partout et donne un représentant de ν_E tel que $D\chi_E = -\nu_E |D\chi_E|$. On définit, pour $x \in \partial^* E, \nu_E(x)$ comme la **la normale extérieure** de E en x. D'après la théorie de la mesure (théorème de dérivation de Radon-Nikodym):

$$\int_{D \setminus \partial^* E} |D\chi_E| = 0.$$

Par définition, on a bien sur:

$$\partial^* E \subset \partial E,$$

$\partial^* E$ est appelé, par définition, **le bord réduit de** E ou la **frontière réduite**.

Contrairement à ce qui précède sur le bord réduit, directement issu de résultats classiques de thórie de la mesure, les deux théorèmes suivants utilisent la structure particulière de $D\chi_E$ (voir section 5.7.2 et 5.7.3 dans [15]).

Théorème 3.5 *Soit $x_0 \in \partial^* E$ avec E à périmètre fini dans D ouvert et notons (voir figure ci-dessous):*

$$H^-(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^d, \nu_E(x_0).(y - x_0) \leq 0\},$$

$$E_r(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^d, x_0 + r(y - x_0) \in E\}.$$

On a alors:

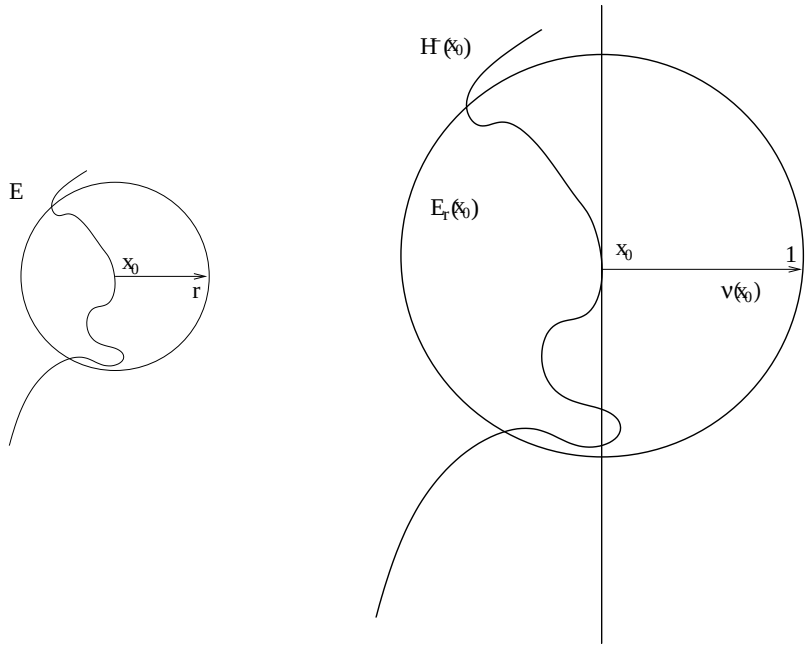
$$\lim_{r \to 0} \chi_{E_r(x_0)} = \chi_{H^-(x_0)} \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}^d).$$

On en déduit les limites suivantes qui justifient le fait que $\nu(x_0)$ soit la normale extérieure de E en x_0.

$$\lim_{r \to 0} \frac{|B(x_0,r) \cap E \cap H^-(x_0)|}{r^d} = \frac{\omega_d}{2},$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{|(B(x_0,r) \setminus E) \cap H^-(x_0)|}{r^d} = 0,$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{P(E, B(x_0, r))}{\omega_{d-1} r^{d-1}} = 1.$$



On va maintenant voir la structure de $\partial^* E$ et son rapport avec $|D\chi_E|$ et la mesure de Hausdorff de dimension $d-1$: $\mathcal{H}^{d-1}$ définie comme dans [8] ou [15].

Théorème 3.6 *Soit E à périmètre fini alors:*

$$|D\chi_E|(A) = \mathcal{H}^{d-1}(A \cap \partial^* E), \text{ pour } A \text{ borélien,}$$

c'est-à-dire:

$$|D\chi_E| = \mathcal{H}^{d-1} \lfloor \partial^* E.$$

De plus ∂E^* est dénombrablement $(\mathcal{H}^{d-1}, d-1)$ rectifiable (cf [8] 3.2.14 et 3.2.29) c'est à dire:

$$\partial^* E = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_k \cup N,$$

avec K_k compact inclus dans une hypersurface de classe C^1 et

$$\int_N |D\chi_E| = \mathcal{H}^{d-1}(N) = 0.$$

On en déduit le théorème de Gauss-Green généralisé:

Théorème 3.7 (Gauss-Green) *Soit E localement à périmètre fini, alors pour tout $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$,*

$$\int_E \text{div } \varphi(x) dx = -\int_{\partial^* E} \varphi . \nu_E(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) = - < D\chi_E, \varphi > .$$

Deuxième partie

Régularité de la forme optimale pour l'énergie de Dirichlet.

Chapitre 4

Existence et exemples.

Rappels (rapides) sur les quasi-ouverts.

On renvoit à [18] pour plus de précisions et pour des références.

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. Pour $K \subset D$ compact, on définit $cap(K, D)$, capacité H_0^1 de K dans D par:

$$cap(K, D) = \inf \left\{ \int_D |\varphi|^2 + |\nabla \varphi|^2, \varphi \in C_0^\infty(D); \varphi \geq 1 \text{ sur } K \right\},$$

puis pour $U \subset D$ ouvert par:

$$cap(U, D) = \sup\{cap(K, D); K \text{ compact inclu dans } U\},$$

et enfin pour E quelconque:

$$cap(E, D) = \inf\{cap(U, D), E \subset U \subset D, U \text{ouvert}\}.$$

On dit que $\Omega \subset D$ est un *quasi-ouvert*, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe U_ε ouvert tel que $cap(\Omega \setminus U_\varepsilon, D) < \varepsilon$. Une fonction définie sur D est dite *quasi-continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe U_ε ouvert tel que $cap(U_\varepsilon, D) < \varepsilon$ et tel que la restriction de u à $D \setminus U\varepsilon$ soit continue. Toute fonction de $H_0^1(D)$ admet un représentant quasi-continu unique (quasi-partout i.e égal sauf sur un ensemble de capacité nulle). Si $\Omega_u = \{u \neq 0\}$ (pour le représentant quasi-continu), alors Ω_u est un quasi-ouvert.

Pour Ω quasi-ouvert, on définit:

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H_0^1(D), cap(\Omega_u \setminus \Omega, D) = 0\}.$$

On sait que cette définition est compatible avec la définition usuelle si Ω est ouvert (i.e $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$). C'est un espace de Hilbert pour la norme de $H_0^1(D)$.

4.1 Existence.

Soit D un ouvert inclus dans $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^2(D)$. Pour $u \in H_0^1(D)$ on note:

$$J(u) = \int_D \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx - \int_D fu$$

et pour $0 < a < |D|$ on pose:

$$\mathbb{V}_a = \left\{u \in H_0^1(D), |\Omega_u| = a\right\}$$

et

$$\mathbb{V}_a^0 = \left\{u \in H_0^1(D), |\Omega_u| \leq a\right\}.$$

Proposition 4.1 *L'ensemble $\mathbb{V}_a^0$ est fermé dans $H_0^1(D)$ pour la topologie de la convergence faible.*

Proposition 4.2 *$\mathbb{V}_a$ est dense dans $\mathbb{V}_a^0$ pour la topologie de la norme de $H_0^1(D)$.*

Proposition 4.3 *Il existe C qui ne dépend que de d tel que pour tout $u \in \mathbb{V}_a^0(D)$:*

$$\|u\|_{L^2(D)} \leq C|a|^{\frac{1}{d}}\|\nabla u\|_{L^2(D)}.$$

C'est à dire que dans $\mathbb{V}_a^0(A)$, la norme L^2 du gradient est équivalente à la norme $H_0^1(D)$

Pour la démonstration de ces trois propositions voir [18].

On s'intéresse aux deux problèmes fonctionnels suivants:

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u \in \mathbb{V}_a \text{ tel que :} \\ J(u) \leq J(v), \forall v \in \mathbb{V}_a. \end{array} \right.$$

et

$$(\mathcal{P}_0) \left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u \in \mathbb{V}_a^0 \text{ tel que :} \\ J(u) \leq J(v), \forall v \in \mathbb{V}_a^0. \end{array} \right.$$

Le problème $(\mathcal{P})$ est lié au problème d'optimisation de forme $(\mathcal{P}_f)$ suivant: Trouver Ω^* ouvert tel que:

$$(\mathcal{P}_f)\ J(u_{\Omega^*}) = \inf\left\{J(u_\Omega), \Omega \subset D \text{ ouvert }, |\Omega| = a\right\},$$

où u_Ω est défini par:

$$J(u_\Omega) = \min\{J(v), v \in H_0^1(\Omega)\}.$$

u_Ω est alors la solution de:

$$-\Delta u_\Omega = f, u \in H_0^1(\Omega).$$

Il est nécessaire de formuler aussi ce problème dans les quasi-ouverts: trouver Ω^* quasi-ouvert tel que:

$$(\mathcal{P}'_f)\ J(u_{\Omega^*}) = \inf\{J(u_\Omega), \Omega \subset D \text{ quasi} - \text{ouvert }, |\Omega| = a\},$$

où u_Ω est défini par:

$$J(u_\Omega) = \min\{J(v), v \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Grâce à $|\Omega| = a$ et à la proposition 4.3 un tel u_Ω existe bien (démonstration semblable à celle du théorème 4.4).

On voit que si u^* est solution de $(\mathcal{P})$ alors, soit u^* est continue et alors Ω_{u^*} est ouvert et est solution de $(\mathcal{P}_f)$, soit elle est seulement quasi-continue et alors Ω_{u^*} est quasi-ouvert et solution de $(\mathcal{P}'_f)$

On va maintenant rappeler la démonstration de l'existence d'une solution pour $(\mathcal{P}_0)$.

Théorème 4.4 *Le problème $(\mathcal{P}_0)$ admet une solution.*

Démonstration: Soit $u \in \mathbb{V}_a^0$; alors grâce à la proposition précédente:

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2 - Ca^{\frac{1}{d}}\|f\|_{L^2(D)}\|\nabla u\|_{L^2(D)},$$

on en déduit donc que J est minoré (polynôme de degré 2 en $\|\nabla u\|_{L^2(D)}$ avec un coefficient dominant strictement positif). Soit maintenant (u_n) une suite minimisante; grâce à l' inégalité précédente la suite $(\|\nabla u_n\|_{L^2(D)})$ est bornée et donc la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(D)$. On peut donc supposer (quitte à extraire une sous-suite) que (u_n) converge faiblement dans $H_0^1(D)$ vers u. On a alors $u \in \mathbb{V}_a^0$ et, grâce à la semi-continuité inférieure de $\|\nabla u\|^2_{L^2(D)}$:

$$J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n) = \inf\{J(v), v \in \mathbb{V}_a\}.$$

Remarque 4.5 *Soit (u_n) une suite dans H_0^1; on remarque que si $J(u_n)$ et $|\Omega_{u_n}|$ sont bornés, alors la suite u_n est bornée pour la norme de $H_0^1(D)$.*

Proposition 4.6 *Soit u une solution du problème $(\mathcal{P}_0)$; on a alors deux cas:*

1)(Cas saturé):$|\Omega_u| = a$ alors u est aussi solution de $(\mathcal{P})$; de plus Ω_u est un quasi-ouvert (ouvert si u est continue dans D) solution du problème $(\mathcal{P}'_f)$ (du problème $(\mathcal{P}_f)$ si u est continue).

2)(Cas insaturé):$|\Omega_u| < a$ et alors u vérifie $-\Delta u = f$ dans D. De plus on peut alors trouver un ouvert solution de $(\mathcal{P}_f)$ contenant Ω_u.

Pour le dernier point, il suffit de remarquer que pour toute boule $B(x,r) \subset D$ telle que $0 < |B(x,r)| \leq a - |\Omega_u|$ et tout $\varphi \in C_0^\infty(B(x,r))$ on a par minimalité de u:

$$J(u) \leq J(u + t\varphi),$$

et en écrivant que, en $t = 0$, la dérivée de $J(u + t\varphi)$ est nulle on trouve:

$$-\Delta u = f \text{ dans } B(x,r).$$

Pour la construction de l'ouvert: il existe (théorie de la mesure) U_1 ouvert contenant Ω_u tel que $|\Omega_u| \leq |U_1| < a$. Il suffit de prendre alors $U = U_1 \cup B(x_0,r) \cap D$ pour $x_0 \in D$ et r bien choisi.

On remarque que dans le cas insaturé tout ouvert de mesure a et contenant Ω_u est solution du problème $(\mathcal{P}_f)$: on ne peut donc espérer aucune régularité sur un ouvert minimal. Dans la suite on supposera donc qu'on est toujours dans le cas saturé.

Ainsi, on supposera dans toute la suite l'hypothèse suivante vérifiée :

$$\left.\begin{array}{c}\text{Il n'existe pas de } v \in H_0^1(D) \text{ avec } |\Omega_u| < a \text{ tel que} \\ -\Delta v = f \text{ dans } D.\end{array}\right\} \tag{4.1}$$

Cette condition est vérifiée en particulier si f est de signe constant (car toute solution de $-\Delta u = f$ dans D vérifie $\Omega_u = D$).

Remarque 4.7 *Sous cette hypothèse $(\mathcal{P})$ a une solution, car $(\mathcal{P}_0)$ en a toujours une et (4.1) indique qu'elle vérifie $|\Omega_u| = a$. Ainsi; $(\mathcal{P})$ est alors équivalent au problème plus précis suivant, pour lequel nous gardons la même notation $(\mathcal{P})$:*

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{c} \textit{Il existe } u \in H_0^1(D) \textit{ avec } |\Omega_u| = a \textit{ tel que} \\ J(u) \leq J(v); \textit{ pour tout } v \in H_0^1(D) \textit{ tel que } |\Omega_v| \leq a. \end{array} \right.$$

4.2 Quelques contre-exemples.

On va maintenant donner quelques exemples montrant les problèmes qui peuvent apparaître soit si f n'est pas assez régulière, soit si f est régulière mais change de signe.

Premier exemple: On va rappeler un exemple où il n'existe pas d'ouvert Ω^* tel que:

$$J(u_{\Omega^*}) \leq J(u_\Omega); |\Omega| = a, \Omega \subset D.$$

Pour les détails, on renvoie à la proposition 1.20 de [18]. En fait, il suffit de trouver u tel que: $0 < |\Omega_u| < |D|$ avec Ω_u qui n'est pas égal presque-partout à un ouvert et de prendre alors $f = -\Delta u$ et $a = |\Omega_u|$. En effet Ω_u est alors solution et on montre (cf [18]) que toute autre solution Ω^* coïncide presque-partout avec Ω_u. On prend $d = 3$ et $D = B(0,1)$. Soit x_n une suite dense dans D et $\alpha_n > 0$ tel que $B(x_n, \alpha_n) \subset B(0,1)$ et tel que:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_n < \frac{1}{16\pi}.$$

On pose alors:

$$v(x) = \min\left\{1, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{|x - x_n|}\right\}.$$

On a alors $-\Delta v \geq 0$ car v est un minimum de deux fonctions sur-harmoniques et donc $v \in H^1(B(0,1))$. On montre facilement que

$$\int_{B(0,1)} v \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n \int_{B(x_i,2)} \frac{1}{|x - x_i|} < 1/2.$$

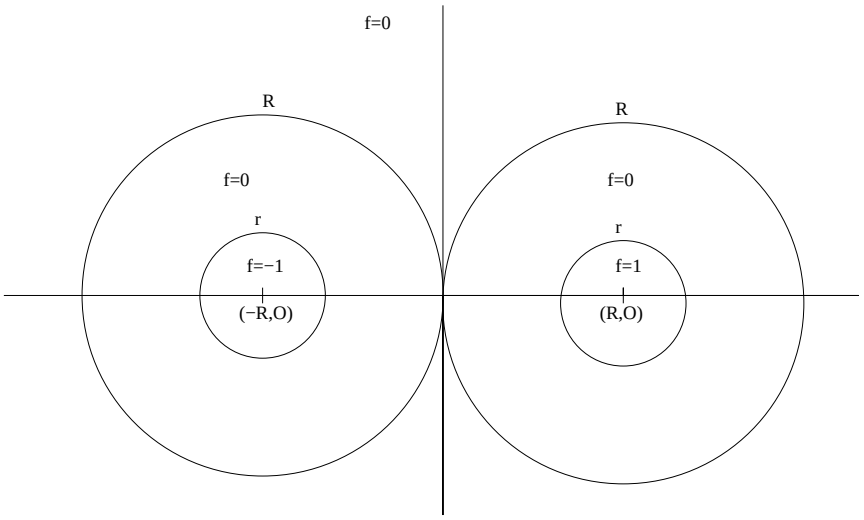
On en déduit donc $|\{v < 1\}| > 0$. Soit maintenant $\Psi \in H_0^1(B(0,1))$ avec $\Psi(x) > 0$ pour $x \in B(0,1)$ et $\Psi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1/2$. Soit $\eta > 0$ tel que $|\{v < 1 - \eta\}| > 0$ on pose alors:

$$u(x) = (1 - \eta - v(x))^+ \Psi.$$

On a alors $\Omega_u = \{v < 1 - \eta\}$ qui est de mesure strictement inférieure à celle de $B(0,1)$ et qui n'est pas égal presque partout à un ouvert. En effet sinon on aurait par densité des x_n : $B(x_n, r_n)$, avec $r_n < \alpha_n$, inclus dans un tel ouvert et donc inclus dans Ω_u presque partout. Sur $B(x_n, \alpha_n)$ on a $v = 1$ et sur Ω_u on a $v < 1 - \eta$ et donc Ω_u n'est pas égal presque partout à un ouvert.

Deuxième exemple: On donne ici un exemple où $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ mais où la frontière n'est pas régulière. Soit $0 < r < R$ et $a = 2\omega_d(R)^N$ et

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } B((R,0),r) \\ -1 & \text{sur } B((-R,0),r) \\ 0 & \text{ailleur.} \end{cases}$$



On suppose

$$r < (2 - 2^{1/d})R. \tag{4.2}$$

Proposition 4.8 *La réunion Ω^* des deux boules de centre $(-R, 0), (R, 0)$ et de rayon R est solution du problème:*

$$J(u_{\Omega^*}) \leq J(v); v \in H^1(\mathbb{R}^d) \text{ avec } |\Omega_v| \leq a.$$

On utilise le lemme suivant:

Lemme 4.9 *Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ avec $|\Omega_u| = a$ tel que:*

$$J(u) \leq J(v); v \in H^1(\mathbb{R}^d) \text{ avec } |\Omega_v| = a. \tag{4.3}$$

On pose

$$w(x) = (u^+)^*(x - (R, 0)) - (u^-)^*(x + (R, 0)) = u_1 - u_2, \tag{4.4}$$

où z^* désigne le symétrisé radial de z. On note $B((R, 0), R_1)$ et $B((-R, 0), R_2)$ les supports de u_1 et u_2 et on suppose que

$$R_1 + R_2 \leq 2R \tag{4.5}$$

$$R_1 \leq 2R - r, R_2 \leq 2R - r. \tag{4.6}$$

Alors:

$$J(w) \leq J(u). \tag{4.7}$$

Pour la démonstration de ce lemme voir plus loin (page 36).

Démonstration de la proposition 4.8. Soit u une solution de (4.3). On introduit alors les fonction u_1, u_2 et w. On a

$$a = |\Omega_u| = |\Omega_u^+| + |\Omega_u^-| = |\Omega_{u_1}| + |\Omega_{u_2}| = \omega_d(R_1^d + R_2^d).$$

On en déduit par convexité:

$$\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^d \leq \frac{1}{2}(R_1^d + R_2^d) = \frac{a}{2\omega_d} = R^d,$$

soit $R_1 + R_2 \leq 2R$ c'est (4.5). D'autre part, d'après l'inégalité ci-dessus et d'après l'hypothèse (4.2): $R_1 \leq 2^{1/d}R \leq 2R - r$ (et de même pour R_2). Ainsi le lemme 4.9 s'applique et w est aussi solution. Mais l'équation d'Euler (cf 5.2 est alors satisfaite avec un même λ pour les deux boules ce qui implique que $R_1 = R_2 = R$. D'où le résultat de la proposition.

Lemme 4.10 *Soit $w \geq 0$ et w^* son symétrisé. On a alors pour tout $r > 0$:*

$$\int_{B(0,r)} w \leq \int_{B(0,r)} w^*.$$

Démonstration On a:

$$\int_{B(0,r)} w dx = \int_{B(0,r)} dx \int_0^{w(x)} dt$$

$$\int_0^\infty dt |\{w > t\} \cap B(0,r)| dt.$$

On sait que pour tout t, $|\{w > t\}| = |\{w^* > t\}|$. Il existe t_0 tel que:

$$\lim_{t \to t_0^+} \{w^* > t\} \subset B(0,r) \subset \lim_{t \to t_0^-} \{w^* > t,$$

car les ensembles $\{u > t\}$ sont des boules. On a alors:

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r)} w^* dx &= \int_0^\infty dt |\{w^* > t\} \cap B(0,r)| dt \\
&= \int_0^{t_0} dt |\{w^* > t\} \cap B(0,r)| dt + \int_{t_0}^\infty |\{w^* > t\} \cap B(0,r)| dt \\
&= \int_0^{t_0} t_0 |B(0,r)| + \int_{t_0}^\infty |\{w^* > t\}| dt \\
&\geq \int_0^{t_0} |\{w > t\} \cap B(0,r)| dt + \int_{t_0}^\infty |\{w > t\}| dt \\
&\geq \int_{B(0,r)} w.
\end{aligned}$$

Démonstration du lemme 4.9 La condition (4.5) assure que les supports de u_1 et u_2 sont disjoints (sauf peut-être en 0). Ainsi:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_1|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_2|^2.$$

La condition (4.6) assure que $B((R,0),R_1)$ ne rencontre pas $B((-R,0),r)$ (sauf peut-être en un point) et de même pour $B((-R,0),R_2)$ et $B((R,0),r)$. Ainsi:

$$\int_{\mathbb{R}^d} fw = \int_{B((R,0),r)} u_1 + \int_{B((-R,0),r)} u_2,$$

et pour montrer (4.7), il suffit donc de montrer:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_1|^2 - \int_{B((R,0),r)} u_1 \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 - \int_{B((R,0),r)} u \tag{4.8}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_2|^2 - \int_{B((-R,0),r)} u_1 \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \int_{B((-R,0),r)} u. \tag{4.9}$$

On obtient en effet (4.7) en sommant ces deux inégalité. L'inégalité sur les gradients vient du résultat classique sur la symétrisation radiale. Sinon on utilise:

$$\int_{B((R,0),r)} u \leq \int_{B((R,0),r)} u^+ \leq \int_{B((R,0),r)} (u^+)^* = \int_{B((R,0),r)} u_1,$$

$$\int_{B((-R,0),r)} u \leq \int_{B((-R,0),r)} u^- \leq \int_{B((-R,0),r)} (u^-)^* = \int_{B((-R,0),r)} u_2.$$

Chapitre 5

Régularité lipschitzienne.

A partir de maintenant on supposera que $f \in L^2(D) \cap L^\infty(D)$.

Avant de passer à l'estimation lipschitzienne de la solution de $(\mathcal{P})$, énonçons quelques propriétés générales obtenues par diverses dérivations du problème de minimisation. Les perturbations de u sont locales, il suffit donc de prendre u solution locale du problème du minimisation au sens suivant.

Définition: Soit $D_1 \subset D$. On dit que u est une solution de $(\mathcal{P}_{D_1})$ dans D si,

$$(\mathcal{P}_{D_1}) \left\{ \begin{array}{c} 0 < |\Omega_u \cap D_1| < |D_1| \text{ et} \\ \forall v \in H_0^1(D) \text{ avec } u - v \in H_0^1(D_1) \text{ et } |\Omega_v| \leq |\Omega_u|, \\ \text{on a } J(u) \leq J(v). \end{array} \right.$$

Remarque 5.1 *Si u est solution de $(\mathcal{P})$ il est aussi solution de $(\mathcal{P}_{D_1})$ dès que $0 < |\Omega_u \cap D_1| < D_1$. Cette dernière hypothèse permet d'éviter la situation triviale où $|\Omega_u| = D$, car on s'intéressera au bord de Ω_u dans D_1.*

5.1 Equation d'Euler de u.

Voici d'abord une version de l'équation d'Euler-Lagrange introduite dans [16].

Théorème 5.2 (Équation d'Euler de u.) *Soit u une solution de $(\mathcal{P}_{D_1})$. Alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que pour tout $\Phi \in C_0^\infty(D_1, \mathbb{R}^d)$ on ait:*

$$\int_{D_1} (D\Phi \nabla u.\nabla u) - \frac{1}{2} \int_{D_1} |\nabla u|^2 div\Phi = \int_{D_1} f \nabla u.\Phi + \lambda \int_{\Omega_u} div\Phi.$$

Ainsi, on a, pour tout $i = 1, ..., d$, au sens des distributions:

$$-\sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}(u_{x_i}u_{x_j}) + \frac{1}{2}\partial_{x_i}|\nabla u|^2 = f u_{x_i} - \lambda \partial_{x_i}(\chi_{\Omega_u}).$$

Démonstration Pour les détails de la démonstration voir [18] et [16]. Nous en rappelons les points essentiels.

Soit $\Phi \in C_0^\infty(D_1, \mathbb{R}^d)$ tel que $\int_{\Omega_u} div\Phi > 0$. On pose $u_t(x) = u(x+t\Phi(x))$. Pour t petit $x \to x + t\Phi(x)$ est un difféomorphisme de D_1 et on a alors:

$$|\Omega_{u_t}| = |\Omega_u| - t\int_{\Omega_u} div\Phi + o(t) \leq |\Omega_u|,$$

pour $t > 0$ assez petit. Par minimalité de u:

$$J(u) \leq J(u_t) = J(u) + t\int_{D_1}(D\Phi\nabla u.\nabla u) - t\frac{1}{2}\int_{D_1} div\Phi|\nabla u|^2 - t\int_{D_1} f\nabla u.\Phi + o(t),$$

et on déduit:

$$\int_{D_1}(D\Phi\nabla u.\nabla u) - \frac{1}{2}\int_{D_1} div\Phi|\nabla u|^2 - \int_{D_1} f\nabla u.\Phi \geq 0. \qquad (5.1)$$

Soit $\Phi_1 \in C_0^\infty(D_1, \mathbb{R}^d)$ tel que

$$\int_{\Omega_u} div\Phi_1 > 0.$$

Il en existe car sinon on a $P(\Omega_u, D_1) = 0$ et donc $\Omega_u = \emptyset$ ou $\Omega_u = D_1$ or on a par hypothèse: $0 < a = |\Omega_u| < |D_1|$.

Soit maintenant $\Phi \in C_0^\infty(D_1, \mathbb{R}^d)$ tel que $\int_{\Omega_u} div\Phi = 0$. On pose pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\Phi_2 = \Phi + \varepsilon\Phi_1,$$

et alors: $\int_{\Omega_u} div\Phi_2 = \varepsilon\int_{\Omega_u} div\Phi_1 > 0$, en appliquant l'inégalité 5.1 à Φ_2 puis en faisant tendre ε vers 0 on trouve que Φ vérifie aussi 5.1. On peut faire la même chose avec $-\Phi$ et on trouve alors que 5.1 est vérifié avec une égalité au lieu d'une inégalité. Soit $\Phi \in C_0^\infty(D_1, \mathbb{R}^d)$ quelconque on définit:

$$\Phi_2 = \Phi - \frac{\int_{\Omega_u} div\Phi}{\int_{\Omega_u} div\Phi_1}\Phi_1,$$

comme $\int_{\Omega_u} div\Phi_2 = 0$ on peut appliquer 5.1 à Φ_2 et on trouve bien l'équation d'Euler avec:

$$\lambda = \frac{1}{\int_{\Omega_u} div\Phi_1}\left(\int_{D_1}(D\Phi_1\nabla u.\nabla u) - \frac{1}{2}\int_{D_1} div\Phi_1|\nabla u|^2 - \int_{D_1} f\nabla u.\Phi_1\right).$$

En utilisant 5.1 avec $\Phi = \Phi_1$ on trouve que $\lambda \geq 0$.

Remarque 5.3 *Le calcul ci-dessus montre que si $u_t(x) = u(x + t\Phi(x))$ avec $\Phi \in C_0^\infty(D_1)$ on a:*

$$J(u_t) = J(u) + t\lambda \int_{\Omega_u} div\Phi + o(t).$$

5.2 Régularité de $\Delta u + f\chi_{\{u\neq 0\}}$

Le but de cette partie va être de démontrer le théorème suivant:

Théorème 5.4 *Soit u une solution de $(\mathcal{P}_{D_1})$ dans D; alors il existe deux mesures positives μ_1 et μ_2 tel que:*

$$\Delta u + f\chi_{\{u\neq 0\}} = \mu_1 - \mu_2 \text{ dans } D_1,$$

le support de μ_1 (respectivement μ_2) est inclus dans $\{u \geq 0\}$ (respectivement $\{u \leq 0\}$. De plus il existe $k > 0$ tel que pour tout $K \subset D_1$ compact:

$$\mu_i(K) \leq kcap(K)^{1/2}.$$

Où cap désigne la capacité H^1. On a également,

$$\int_{\{u\neq 0\}} d\mu_i = 0,$$

et il existe $C(f, |\Omega_u|)$ tel que:

$$\|u\|_{\infty, D_1} \leq C.$$

Lemme 5.5 *Soit $p \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $p(0) = 0$ on a alors:*

$$p'(u)|\nabla u|^2 - \text{div}(p(u)\nabla u) - fp(u) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(D_1).$$

Démonstration: Soit $\Psi \in C_0^\infty(D_1)$ et $p \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $p(0) = 0$. Soit:

$$v_t(x) = u(x) + t\Psi(x)p(u(x)),$$

on a alors $v_t \in H_0^1(D)$: $|p(u(x))| \leq \|p'\|_\infty \||u(x)|$ donc v_t est bien dans $L^2(D)$ et de plus:

$$|\nabla p(u(x))| = |p'(u(x))\nabla u(x)| \leq \|p'\|_\infty \||\nabla u(x)|,$$

et donc $\nabla v_t \in L^2(D)$. De plus $u - v_t = -t\Psi(x)p(u(x)) \in H_0^1(D_1)$ et enfin comme $u(x) = 0$ implique $v_t(x) = 0$ on a $|\Omega_v| \leq |\Omega_u|$. Par minimalité de u on en déduit:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}\int_D \left(|\nabla u + tp(u)\nabla\Psi + t\Psi p'(u)\nabla u|^2 - |\nabla u|^2\right) - \int_D f(u + t\Psi p(u) - u) \\ &= \int_D \left(t(p(u)\nabla\Psi + \Psi p'(u)\nabla u)\nabla u + t^2(p(u)\nabla\Psi + \Psi p'(u)\nabla u)^2 - tf\Psi p(u)\right). \end{aligned}$$

En divisant par $t > 0$ et par $t < 0$ et en faisant tendre t vers 0 on en déduit alors:

$$0 = \int_D \nabla\Psi.p(u)\nabla u + \Psi p'(u)|\nabla u|^2 - f\Psi p(u),$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

Démonstration du théorème 5.4: Soit p_n défini par:

$$p_n(r) = \begin{cases} 0 \text{ si } r & \leq & 0 \\ nx \text{ si } r & \in & [0, 1/n] \\ 1 \text{ si } r & \geq & 1 \end{cases}$$

et $q_n(r) = \int_0^r p_n(s)ds$. On peut alors appliquer le lemme 5.5 et comme $p_n(u)\nabla u = \nabla q_n(u)$ on en déduit:

$$n|\nabla u|^2\chi_{\{0<u<1/n\}} - \Delta(q_n(u)) - fp_n(u) = 0.$$

Lorsque n tend vers l'infini p_n tend dans $L^1_{loc}(D)$ vers $\chi_{\{u>0\}}$. Comme $q_n(s) = s - \frac{1}{2n}$ dès que $s > 1/n$ on aégalement que $q_n(u)$ tend vers u^+ dans $L^2(D)$. On en déduit donc que dans $\mathcal{D}'(D_1)$:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta q_n(u) + fp_n(u) = \Delta(u^+) + f\chi_{\{u>0\}}.$$

Soit $\mu_1^n = n|\nabla u|^2\chi_{\{0<u<1/n\}}$. Montrons que μ_1^n est une mesure positive et uniformément borné dans $L^1_{loc}(D)$. En effet si $\Psi \in C_0^\infty(D_1)$ alors:

$$\int \Psi\mu_1^n = \int (q_n(u)\Delta\Psi + fp_n(u)\Psi) \leq C(\Psi),$$

car $p_n(u) \leq 1$ et $q_n(u)$ localement borné. On en déduit que la limite de μ_1^n dans $\mathcal{D}'(D_1)$ est une mesure μ_1 qui vérifie:

$$\Delta(u^+) + f\chi_{\{u>0\}} = \mu_1 = \lim_{n\to\infty} n|\nabla u|^2\chi_{\{0<u<1/n\}}, \tag{5.2}$$

la limite étant pour la convergance faible des mesures de Radon. Et comme $u^+ \in H^1(D_1)$ et $f\chi_{\{u>0\}} \in L^2(D_1)$ alors $\mu_1 \in H^{-1}(D_1)$. Soit $\sigma \in H_0^1(D_1)$ tel que

$$-\Delta\sigma + \sigma = \mu_1,$$

et $\Psi \in C_0^\infty(D_1)$ avec $\Psi \geq 1$ sur K compact inclus dans D_1. On a alors:

$$\mu_1(K) \leq \int_K \Psi d\mu_1 = \int_{D_1} \Psi\sigma + \int_{D_1} \nabla\Psi.\nabla\sigma \leq 2\|\sigma\|_{H^1(D_1)}\|\Psi\|_{H^1(D_1)},$$

et donc on a bien le résultat annoncé.

On procède de la même manière sur $\{u < 0\}$ en prenant $p_{n,2}(r) = p_n(-r)$ on trouve une mesure μ_2 vérifiant:

$$\Delta(u^-) - f\chi_{\{u<0\}} = \mu_2,$$

et donc comme $\Delta(u) = \Delta(u^+) - \Delta(u^-)$ on en déduit:

$$\Delta(u) + f\chi_{\{u\neq 0\}} = \mu_1 - \mu_2.$$

Montrons enfin l'estimation L^∞. On remarque que:

$$-\Delta(u^+) = f\chi_{\{u>0\}} - \mu_1 \leq f\chi_{\{u>0\}}.$$

Comme $|\Omega_u \cap D_1| < |D_1|$ on peut trouver un ouvert $\omega \subset D_1$ contenant $\Omega_u \cap D_1$ et tel que $|\omega| < 2|\Omega_u \cap D_1|$. On utilise les estimations L^∞ elliptiques classiques (voir par exemple [1] théorème 8.16) pour dire que:

$$\|u^+\|_{L^\infty} \leq C\|f\chi_{u>0}\|_{L^q(\omega)} \leq C\|f\|_\infty a^{1/q},$$

avec $C = C(d, |\omega|, q)$ et $q > d/2$. On procède de même pour u^-.

Nous allons montrer dans le chapitre suivant que u est lipschitzienne sous certaines hypothèse. On peut déja remarquer que, si u est lipschitzienne, les mesures μ_1 et μ_2 sont absolument continues par rapport à la mesure $\mathcal{H}^{d-1}$. Plus précisément:

Proposition 5.6 *Soit u une solution de $(\mathcal{P}_{D_1})$ tel que u soit lipschitzienne sur D_1. Alors il existe $C > 0, r_0 > 0$ tel que pour toute boule $B(x,r) \subset D_1, r \leq r_0$ on ait:*

$$\mu_1(B(x,r)) \leq Cr^{d-1},$$

$$\mu_2(B(x,r)) \leq Cr^{d-1}.$$

Démonstration: On reprend les notations utilisées dans la démonstration du théorème ci-dessus. Soit $B(x,r) \subset D_1$ alors:

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} (\Delta q_n(u) + f p_n(u)) &= \int_{\partial B(x,r)} p_n(u) \nabla u.n + \int_{B(x,r)} f p_n(u) \\ &\leq \|\nabla u\|_{\infty,D_1} d\omega_d r^{d-1} + \|f\|_\infty \omega_d r^d \\ &\leq C r^{d-1},\end{aligned}$$

dès que r est assez petit. Comme $\Delta q_n(u) + f p_n(u)$ converge faiblement au sens des mesures de Radon vers $\Delta u + f\chi_{\{u>0\}}$ on en déduit donc:

$$\mu_1(B(x,r)) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{B(x,r)} (\Delta q_n(u) + f p_n(u)) \leq C r^{d-1}.$$

On procède de la même manière pour μ_2.

5.3 Problème pénalisé par au-dessus.

On revient maintenant aux solutions de $(\mathcal{P})$ et plus seulement de $(\mathcal{P}_{D_1})$. On voir que si u est une solution de $(\mathcal{P})$, alors il est aussi solution d'un problème plus général. Cela nous permettra d'élargir l'ensemble des fonctions tests. Précisément, on a (voir [17]):

Théorème 5.7 *Soit u une solution de $(\mathcal{P})$; alors il existe $\lambda^* > 0$ tel que:*

$$J(u) \leq J(v) + \lambda^* \left(|\Omega_v| - |\Omega_u|\right)^+, \tag{5.3}$$

pour tout $v \in H_0^1(D)$.

Dans [17], on trouve une démonstration dans le cas où $|D|$ est borné. On va montrer que cette démonstration s'étend au cas général.

Soit $\lambda^* > 0$ et J_{λ^*} défini par:

$$J_{\lambda^*}(v) = J(v) + \lambda^*(|\Omega_v| - a)^+,$$

défini pour $v \in H_0^1(D)$.

Le principe de la démonstration du théorème 5.7 est de vérifier que J_{λ^*} admet un minimum v^*, puis que $|\Omega_{v^*}|^* = a$ si λ^* est assez grand. Si u est solution de $(\mathcal{P})$ on a alors:

$$J(u) \leq J(v^*) = J_{\lambda^*}(v^*) \leq J_{\lambda^*}(w),$$

pour tout $w \in H_0^1(D)$ et donc (5.3).

Proposition 5.8 *Il existe $v^* \in H_0^1(D)$ tel que:*

$$J_{\lambda^*}(v^*) \leq J_{\lambda^*}(w);\ w \in H_0^1(D),$$

si $d \geq 3$. Si $d = 2$ il faut rajouter la condition $\lambda^* \geq \lambda_0$ où λ_0 ne dépend que de f.

Démonstration: On va d'abord montrer que J_{λ^*} est minoré (pour λ^* assez grand si $d = 2$). Soit $v \in H_0^1(D)$ avec $|\Omega_v| < +\infty$ tel que $J(v) \leq 0 = J_\lambda(0)$. On peut également supposer que $|\Omega_v| \geq a$ car sinon $J_{\lambda^*}(v) = J(v)$ et on peut minorer J comme dans l'existence d'une solution de $(\mathcal{P}_0)$.

On a alors d'après la proposition 4.3:

$$\|v\|_{L^2(D)} \leq C|\Omega_v|^{\frac{1}{d}}\|\nabla v\|_{L^2(D)}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 0 \geq J_{\lambda^*}(v) &\geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(D)} - \|f\|_{L^2(D)}\|v\|_{L^2(D)} + \lambda^*(|\Omega_v| - a) \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(D)} - C\|\nabla v\|_{L^2(D)}\|f\|_{L^2(D)}|\Omega v|^{\frac{1}{d}} + \lambda^*(|\Omega_v| - a), \end{aligned}$$

et donc:

$$-C\|\nabla v\|_{L^2(D)}\|f\|_{L^2(D)}|\Omega v|^{\frac{1}{d}} + \lambda^*(|\Omega_v| - a) \leq 0,$$

c'est-à-dire:

$$|\Omega_v|^{\frac{d-1}{d}} \leq \frac{a}{|\Omega_v|^{\frac{1}{d}}} + \frac{C\|f\|_{L^2(D)}\|\nabla v\|_{L^2(D)}}{\lambda^*},$$

et finalement en utilisant $|\Omega_v| \geq a$:

$$|\Omega_v| \leq \left(a^{\frac{d-1}{d}} + \frac{C\|f\|_{L^2(D)}\|\nabla v\|_{L^2(D)}}{\lambda^*}\right)^{\frac{d}{d-1}}.$$

On a alors:

$$J_{\lambda^*}(v) \geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(D)} - \|f\|_{L^2(D)}\|\nabla v\|_{L^2(D)}\left(a^{\frac{d-1}{d}} + \frac{C\|f\|_{L^2(D)}\|\nabla v\|_{L^2(D)}}{\lambda^*}\right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Il y a alors deux cas: soit $d > 2$ et alors cette expression tend vers $+\infty$ quand $\|\nabla v\|_{L^2(D)}$ tend vers $+\infty$, donc J est minoré. Soit $d = 2$ on a alors:

$$J_{\lambda^*}(v) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{C\|f\|^2_{L^2(D)}}{\lambda^*}\right)\|\nabla v\|^2_{L^2(D)} - \|f\|_{L^2(D)}\|\nabla v\|_{L^2(D)}a^{\frac{1}{2}},$$

et on en déduit que pour λ^* assez grand, le coefficient devant $\|\nabla v\|_{L^2(D)}$ est positif et donc $J_{\lambda*}$ est minoré.

On peut donc prendre une suite minimisant v_n, le calcul ci-dessus montre que $\|\nabla v_n\|_{L^2(D)}$ est majoré puis que $|\Omega_{v_n}|$ aussi et enfin $\|v_n\|_{L^2(D)}$. On peut alors montrer comme dans l'existence d'une solution pour $(\mathcal{P}_0)$ que v_n converge à une sous-suite extraite près vers un minimum de $J_{\lambda*}$.

Remarque 5.9 *Soit v^* un minimum de $J_{\lambda*}$; alors $|\Omega_v| \geq a$.*

En effet si on a $|\Omega_v| < a$ alors:

$$J(v) = J_{\lambda*}(v^*) \leq J_{\lambda*}(v^* + t\phi) = J(v^* + t\phi),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\phi \in C_0^\infty(D)$ tel que $|\Omega_\phi| \leq a - |\Omega_v|$ et on en déduit alors $-\Delta v = f$ dans D avec $|\Omega_v| < a$ ce qui contredit l'hypothèse 4.1.

Démonstration du théorème 5.7. (elle s'inspire directement de [17]). Il suffit donc de montrer que, pour λ^* assez grand, on a bien $|\Omega_{v^*}| = a$ si v^* est un minimum de $J_{\lambda*}$. Supposons donc que $|\Omega_{v^*}| > a$. Et posons pour $t > 0$:

$$v_t^* = (v^* - t)^+ - (v^* + t)^-,$$

il existe t_0 tel que pour $t \leq t_0$ on ait $|\Omega_{v_t^*}| = |\Omega_{v^*}| - |\{0 < |v^*| < t\}| > a$. Par minimalité de v^* on a: $J_{\lambda*}(v^*) \leq J_{\lambda*}(v_t^*)$ et donc

$$\frac{1}{2}\int_{\{0<|v^*|<t\}} |\nabla v^*|^2 \leq t\int_{\Omega_{v^*}} |f| - \lambda^*|\{0 < |v^*| < t\}|.$$

En effet on a: $|f(v^* - v_t^*)| = t|f|$ si $|v^*| > t$ et si $0 < |v^*| < t$ on a $|f(v^* - v_t^*)| = |fv^*| \leq t|f|$. On en déduit:

$$\frac{1}{2}\int_{\{0<|v^*|<t\}} |\nabla v^*|^2 \leq t\int_{\Omega_{v^*}} |f|$$

et

$$\lambda^* \leq \frac{t}{|\{0 < |v^*| < t\}|}\int_{\Omega_{v^*}} |f|.$$

Comme $|\nabla v^*|$ est intégrable car son carré est intégrable et $|\Omega_{v^*}| < +\infty$, on peut appliquer à v^* la formule de la co-aire (5.5 dans [15]):

$$\int_0^{t_0} P(F_t, \mathbb{R}^d)dt = \int_{\{0<|v^*|<t_0\}} |\nabla v^*|,$$

avec $F_t = \{t < |v^*|\}$. Pour presque tout t on a $P(F_t, \mathbb{R}^d) < +\infty$ et par l'inégalité isopérimétrique, on en déduit:

$$|F_t|^{\frac{d-1}{d}} \leq CP(F_t, \mathbb{R}^d).$$

Comme, par hypothèse sur t_0, $|F_t| > a$ pour $t \leq t_0$, on a finalement:

$$\begin{aligned} a^{\frac{d-1}{d}} t_0 &\leq C \int_{\{0<|v^*|<t_0\}} |\nabla v^*| \\ &\leq C \left(\int_{\{0<|v^*|<t_0\}} |\nabla v^*|^2 \right)^{1/2} |\{0 < |v^*| < t_0\}|^{1/2} \\ &\leq C \left(2t_0 \int_{\Omega_{v^*}} |f| \right)^{1/2} |\{0 < |v^*| < t_0\}|^{1/2}. \end{aligned}$$

Finalement on en déduit:

$$\frac{t_0}{|\{0 < |v^*| < t_0\}|} \leq \left(\frac{C \left(2 \int_{\Omega_{v^*}} |f| \right)^{1/2}}{a^{\frac{d-1}{d}}} \right)^2,$$

et donc:

$$\lambda^* \leq C' \left(\int_{\Omega_{v^*}} |f| \right)^2,$$

avec C' qui ne dépend que de d et de a.

Il reste maintenant à majorer $\int_{\Omega_{v^*}} |f|$ indépendamment de λ^* et de v^*; puisque $f \in L^2(D)$, il suffit bien sur de majorer $|\Omega_v^*|$. On a vu plus haut, comme $J(v^*) \leq 0$ et $|\Omega_{v^*}| \geq a$, que:

$$|\Omega_{v^*}| \leq \left(a^{\frac{d-1}{d}} + \frac{C\|f\|_{L^2(D)} \|\nabla v^*\|_{L^2(D)}}{\lambda^*} \right)^{\frac{d}{d-1}}.$$

Si $d \geq 3$ et si on suppose que $\lambda^* \geq 1$ on en déduit:

$$|\Omega_{v^*}| \leq \left(a^{\frac{d-1}{d}} + \|f\|_{L^2(D)} \|\nabla v^*\|_{L^2(D)} \right)^{\frac{d}{d-1}},$$

et donc:

$$0 \geq J(v^*) \geq \frac{1}{2} \|\nabla v^*\|^2_{L^2(D)} - \|\nabla v^*\|_{L^2(D)} \|f\|_{L^2(D)} \left(a^{\frac{d-1}{d}} + C\|f\|_{L^2(D)} \|\nabla v^*\|_{L^2(D)} \right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Dans le cas $d = 2$ on minore λ^* par λ_0 et le calcul est identique. On en déduit donc que $\|\nabla v^*\|_{L^2(D)}$ est majoré indépendamment de λ^* et donc $|\Omega_{v^*}|$ aussi. Finalement:

$$\int_{\Omega_{v^*}} |f| \leq \|f\|^{1/2}_{L^2(D)} |\Omega_{v^*}|^{1/2} \leq C,$$

où C ne dépend ni de λ^* ni du minimum v^* mais seulement de a, d, α et f. On a donc bien, si $|\Omega_{v^*}| > a$, $\lambda^* \leq \lambda_0^*$ aec λ_0^* qui dépend de a, d, α et f.

Dans la toute la suite, on se donne donc λ^* tel que u solution de $(\mathcal{P})$ soit minimum de J_{λ^*}.

On peut ainsi comparer $J(u)$ et $J(v)$ même si le support de v est plus grand que celui de u: si $|\Omega_v| > |\Omega_u|$ et si u est minimum de $(\mathcal{P})$ on a alors:

$$J(u) + \lambda^* |\Omega_u| \leq J(v^*) + \lambda^* |\Omega_{v^*}|. \tag{5.4}$$

Remarque 5.10 *Soit u une solution de $(\mathcal{P})$, λ comme dans l'équation d'Euler et λ^* comme ci-dessus alors:*

$$\lambda \leq \lambda^*.$$

Démonstration: Soit $\Phi \in C_0^\infty(D, \mathbb{R}^d)$ tel que $\int_{\Omega_u} div\Phi < 0$ et $u_t(x) = u(x + t\Phi(x))$ comme dans la démonstration de l'équation d'Euler.

$$|\Omega_{u_t}| = |\Omega_u| - t \int_{\Omega_u} div\Phi + o(t) > |\Omega_u|,$$

dès que t est assez petit. Grâce à la proposition ci-dessus on en déduit:

$$J(u) \leq J(u_t) - \lambda^* t \int_{\Omega_u} div\Phi + o(t) = J(u) + t\lambda \int_{\Omega_u} div\Phi - \lambda^* t \int_{\Omega_u} div\Phi + o(t),$$

et on en déduit bien $\lambda \leq \lambda^*$.

En s'inspirant de la définition des solutions de $(\mathcal{P}_{D_1})$ (cf page 37) on donne une version locale de (5.4).

Définition: 5.11 *Soit D un ouvert et $f \in L^2(D) \cap L^\infty(D)$. Soit $D_1 \subset D$ un ouvert et $\lambda^* \geq \lambda$. On dit que $u \in H_0^1(D)$ est une solution de $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda,\lambda^*})$ si:*

***1)** Pour tout $v \in H_0^1(D)$ tel que $u - v \in H_0^1(D_1)$ on a:*

$$J(u) \leq J(v) + \lambda^* (|\Omega_v| - |\Omega_u|)^+,$$

c'est à dire:

$$\frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 - \int_D fu \leq \frac{1}{2} \int_D |\nabla v|^2 - \int_D fv + \lambda^* (|\Omega_v| - |\Omega_u|)^+.$$

***2)** u vérifie l'équation d'Euler dans D_1: pour tout $\Phi \in C_0^\infty(D_1, \mathbb{R}^d)$ on a:*

$$\int_{D_1} (D\Phi \nabla u . \nabla u) - \frac{1}{2} \int_{D_1} div\Phi |\nabla u|^2 = \int_{D_1} f \nabla u . \Phi + \lambda \int_{\Omega_u} div\Phi.$$

Dans cette définition, la première condition implique qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que la deuxième condition soit vérifiée. Cependant on veut pouvoir faire la différence entre les solutions de $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda_1,\lambda^*})$ et de $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda_2,\lambda^*})$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Remarque 5.12 *Une solution u du problème $(\mathcal{P}_{D_1})$ qui en plus vérifie (5.4) pour tout $v \in H_0^1(D)$ tel que $|\Omega_v| \geq |\Omega_u|$ et $u - v \in H_0^1(D)$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda,\lambda^*})$.*

Proposition 5.13 *Soit u une solution de $(\mathcal{P})$; alors il existe $\lambda^* \geq \lambda$ tel que u est solution de $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda,\lambda^*})$ pour tout $D_1 \subset D$.*

5.4 Régularité lipschitzienne de u.

Remarque 5.14 *Choix d'un représentant précis de u. Soit u une solution de* $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda,\lambda^*})$ *avec* D_1 *relativement compact dans D et inclus dans* $\{u \geq 0\} \cap D$*; alors il existe un représentant de u dans* $H^1(D_1)$ *tel que:*

$$u(x) = \lim_{\rho \to 0} \fint_{B(x,\rho)} u(y)dy, x \in D,$$

et u est semi-continue inférieurement.

Démonstration: Dans D_1, on a $\Delta(u) + f\chi_{\{u>0\}} = \Delta(u^+) + f\chi_{\{u>0\}}$ qui est une mesure positive. Soit $W \in H_0^1(D_1)$ tel que $\Delta W = f\chi_{u>0}$ dans D_1. W est alors continue sur D_1 et $u + W$ est sous-harmonique dans D donc semi-continue inférieurement et donc u aussi. On peut donc prendre pour u le représentant vérifiant:

$$(u + W)(x) = \lim_{\rho \to 0} \fint_{B(x,\rho)} (u + W)(y)dy, y \in D_1,$$

alors u vérifie aussi:

$$u(x) = \lim_{\rho \to 0} \fint_{B(x,\rho)} u(y)dy, x \in D_1.$$

Dans Ω_u la régularité de u vient essentiellement du fait que $-\Delta u = f$ et les problèmes se situent donc sur la frontière de Ω_u. L'estimation du gradient de u passe par une majoration de $\frac{1}{r}\fint_{\partial B(x_1,r)} u$ avec $x_1 \in \partial\Omega_u$. La proposition suivante s'inspire directement du lemme 3.2 de [10]. On ne peut adapter ce lemme que grâce au théorème 5.7 (voir [17]).

Proposition 5.15 *Soit u une solution de* $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda,\lambda^*})$ *avec* D_1 *inclus dans* $\{u \geq 0\} \cap D$*. Il existe* C_{max} *tel que si* $B(x_1, r) \subset D_1$ *et si:*

$$\frac{1}{r} \fint_{\partial B(x_1,r)} u \geq C_{max}$$

alors:

$$u > 0 \text{ dans } B(x_1, r).$$

Démonstration: On suppose, sans perte de généralité, que $x_1 = 0$ et on définit v par:

$$\begin{aligned} v &= u \text{ sur } \partial B(0,r) \\ -\Delta v &= f \text{ dans } B(0,r) \end{aligned}$$

et prolongé par u à l'extérieur de $B(0,r)$. Alors $v \in H_0^1(D)$ et $u-v \in H_0^1(D_1)$. On peut donc écrire:

$$J(u) \leq J(v) + \lambda^*(|\Omega_v| - |\Omega_u|)^+ \leq J(v) + \lambda^*(|B(x,r)| - |B(x,r) \cap \Omega_u|),$$

car $u = v$ en dehors de $B(0,r)$. On en déduit

$$\int_{B(0,r)} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu\right) \leq \int_{B(0,r)} \left(\frac{1}{2}|\nabla v|^2 - fv\right) + \lambda^*|B(0,r) \cap \{u=0\}|,$$

$$\frac{1}{2}\int_{B(0,r)} \nabla(u-v)\nabla(u-v+2v) \leq \int_{B(0,r)} f(u-v) + \lambda^*|B(0,r) \cap \{u=0\}|,$$

et comme, par choix de v :

$$\int_{B(0,r)} \nabla(u-v)\nabla v = \int_{B(0,r)} f(u-v),$$

on en déduit:

$$\frac{1}{2}\int_{B(0,r)} \nabla|u-v|^2 \leq \lambda^*|B(0,r) \cap \{u=0\}| \tag{5.5}$$

On va maintenant majorer le second terme en faisant intervenir les moyennes de u et le premier terme.

Soit $z \in B(0,\frac{1}{2}), \xi \in \partial B(0,1)$, on considère une transformation de $B(0,r)$ sur elle même qui envoit 0 sur rz, soit

$$\Psi_z(x) = ((r-|x|)z + x), x \in B(0,r).$$

On pose $u_z(x) = u(\Psi_z(x))$ et $v_z = v(\Psi_z(x))$. On définit r_ξ par:

$$r_\xi = \inf\{\rho \in]\frac{r}{8}, r[, u(\rho\xi) = 0\},$$

quand cet ensemble est non vide sinon on prend $r_\xi = r$. Si cet ensemble est non vide, on a alors $u_z(r_\xi\xi) = 0$, car u est semi-continue inférieurement et alors pour presque tout $\xi \in \partial B(0,1)$:

$$\begin{aligned} v_z(r_\xi) &= \int_{r_\xi}^r \frac{\partial}{\partial\rho}(u_z - v_z)(\rho\xi)d\rho \\ &\leq \sqrt{r-r_\xi}\left(\int_{r_\xi}^r |\nabla(u_z - v_z)(\rho\xi)|^2 d\rho\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

D' autre part, soit w défini par:

$$\begin{aligned} w &= 0 \text{ sur } \partial B(0,r) \\ -\Delta w &= f \text{ dans } B(0,r). \end{aligned}$$

Alors, w vérifie: $\|\nabla w\|_\infty \leq C(d)r\|f\|_\infty$. En effet si on pose

$$w_r(x) = \frac{w(rx)}{r}, x \in B_1$$

on a alors que $\nabla w_r(x) = \nabla w(rx)$ et $-\Delta w_r(x) = rf(rx)$ et on applique la théorie des équations elliptiques à w_r.

D' après la formule de Poisson pour la fonction harmonique $v - w$ valant u sur le bord de $B(0,r)$:

$$\begin{aligned} (v_z - w_z)(r_\xi) &= \frac{r^2 - |\Psi_z(r_\xi\xi)|^2}{d\omega_d r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{u(y)d\sigma(y)}{|\Psi_z(r_\xi\xi) - y|^d} \\ &\geq c(d)(r - r_\xi)\frac{1}{r} \fint_{\partial B(0,r)} u(y)d\sigma(y), \end{aligned}$$

en effet:

$$r - |\Psi_z(r_\xi\xi)| = r - |(r - r_\xi)z + r_\xi\xi| \geq r - \frac{r + r_\xi}{2},$$

et $|\Psi_z(r_\xi\xi) - y| \leq Cr^d$. On en déduit finalement:

$$(v_z - w_z)(r_\xi\xi) \geq C(d)(r - r_\xi)\left(\frac{1}{r} \fint_{\partial B(0,r)} u\right).$$

On a aussi:

$$\begin{aligned} w_z(r_\xi\xi) &= -\int_{r_\xi}^r \nabla w_z(\rho\xi).\xi d\rho \\ &\geq -C_1(d,f)(r - r_\xi)r \end{aligned}$$

en effet $(Dw_z)_x = Dw_{\Psi_z(x)}(D\Psi_z)_x$ et

$$\|D\Psi_z(x)\|_\infty = \|Id - \frac{z^t x}{|x|}\|_\infty \leq \frac{3}{2}.$$

On en déduit alors que:

$$v_z(r_\xi\xi) \geq C(d)(r - r_\xi)\left(\frac{1}{r} \fint_{\partial B(0,r)} u - C(d,f)r\right). \tag{5.7}$$

Supposons que

$$\frac{1}{r}\fint_{\partial B(0,r)} u \geq C(d,f)r. \tag{5.8}$$

En combinant 5.6 et 5.7 on trouve alors:

$$(r-r_\xi)\left(\frac{1}{r}\fint_{\partial B(0,r)} u - C(d,f)r\right)^2 \leq C\int_{r_\xi}^r |\nabla(u_z-v_z)(\rho\xi)|^2 d\rho.$$

Cette inégalité reste vraie si $r_\xi = r$. On peut maintenant intégrer par rapport à $\xi \in \partial B(0,1)$. Le membre de droite est majoré par:

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(0,1)} d\xi \int_{r_\xi}^r |\nabla(u_z-v_z)(\rho\xi)|^2 d\rho &\leq \int_{\partial B(0,1)} d\xi \int_{r/8}^r |\nabla(u_z-v_z)(\rho\xi)|^2 d\rho \\ &\leq \int_{\partial B(0,1)} d\xi \int_{r/8}^r \frac{(8\rho)^{d-1}}{r^{d-1}} |\nabla(u_z-v_z)(\rho\xi)|^2 d\rho \\ &\leq C\frac{1}{r^{d-1}}\int_{B(0,r)} |\nabla(u-v)|^2.\end{aligned}$$

En effet $u_z(x) = u(\Psi_z(x))$ et on remarque en faisant le changement de variable $y = \Psi_z(x)$ que le jacobien de Ψ_z reste minoré indépendament de r et de z. Pour le premier membre on remarque que $r - r_\xi$ est supérieur à la mesure de $\{u_z = 0\}$ sur le segment $[\frac{r}{8}\xi, r\xi]$ et donc:

$$\int_{B(0,r)\setminus B(0,r/8)} \chi_{\{u_z=0\}} = \int_{\partial B(0,1)} d\xi \int_{r/8}^r \chi_{\{u_z=0\}}(\rho\xi)\rho^{d-1} d\rho \leq r^{d-1}\int_{\partial B(0,1)} (r-r_\xi) d\xi.$$

On remarque que, si $x \in B(0,r/8)$, alors $\Psi_z(x) \in B(rz, r/4)$ et toujours grâce à la minoration du jacobien de Ψ_z on en déduit finalement:

$$\int_{B(0,r)\setminus B(rz,r/4)} \chi_{\{u=0\}}\left(\frac{1}{r}\fint_{B(0,r)} u - C(d,f)r\right)^2 \leq C\int_{B(0,r)} |\nabla(u-v)|^2.$$

En intégrant maintenant par rapport à $z \in B(0,1/2)$ on trouve que:

$$\begin{aligned}|\{u=0\}\cap B(0,r)|\left(\frac{1}{r}\fint_{B(0,r)} u - C(d,f)r\right)^2 &\leq C\int_{B(0,r)} |\nabla(u-v)|^2 \\ &\leq C_1\lambda^* |B(0,r)\cap\{u=0\}|\end{aligned}$$

en réutilisant 5.5 et avec C_1 qui ne dépend que de la dimension. Donc

$$\frac{1}{r}\fint_{B(0,r)} u - C(d,f)r > \sqrt{C_1\lambda^*} \tag{5.9}$$

implique $|\{u = 0\} \cap B(x,r)| = 0$. Posons $r_1 = \sqrt{\frac{\|u\|_\infty}{C(d,f)}}$, d'après le théorème 5.4, r_1 est majoré par une constante qui ne dépend que de $|\Omega_u|$, de f et de d. Posons maintenant $C_{max} = 1 + C(d,f)r_1 + \sqrt{C_1\lambda}$ et supposons que $\frac{1}{r}\fint_{\partial B(0,r)} u \geq C_{max}$. On a alors:

$$\frac{1}{r}\|u\|_\infty \geq \frac{1}{r}\fint_{\partial B(0,r)} u \geq C(d,f)r_1,$$

et donc $r \leq r_1$ grâce au choix de r_1 et la condition (5.8) est alors également vérifié. Comme $r_1 \geq r$, par choix de C_{max} (5.9) est bien vérifié et on a donc $|\{u = 0\} \cap B(0,r)| = 0$. D'après l'ínégalité (5.5) on en déduit $u = v$ presque partout, puis comme u est sci et v continue, on a bien que $u = v > 0$ partout dans $B(x,r)$.

Théorème 5.16 *Soit u une solution $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda,\lambda*})$ avec D_1 inclus dans $\{u \geq 0\} \cap D$; alors u est localement lipschitzienne sur D_1.*

Démonstration: Soit D' relativement compact dans D_1 ($D' \subset D_1 \subset \{u \geq 0\}$). On prend comme représentant de u dans D_1 celui défini précédament.

On se souvient que presque partout dans $\{u = 0\}, \nabla u = 0$. Soit donc $x_1 \in \{u > 0\} \cap D'$. Soit $C_{\max}$ défini par la proposition ci-dessus. Soit $r > 0$ et supposons que

$$\fint_{\partial B(x_1,\rho)} u \leq C_{max}\rho, \rho \leq r,$$

on en déduit alors:

$$\int_{B(x_1,r)} u = \int_0^r d\rho \int_{\partial B(x_1,\rho)} u \leq C_{\max}\int_0^r \rho^d d\rho = C_{max}\frac{r^{d+1}}{d+1}.$$

En divisant par $\omega_d r^d$ et en faisant tendre r vers 0 le membre de gauche converge vers $u(x_1) > 0$ et celui de droite vers 0. On peut donc trouver $\rho > 0$ tel que

$$\frac{1}{\rho}\fint_{\partial B(x_1,\rho)} u \geq C_{max},$$

et on a alors $B(x_1,\rho) \subset \{u > 0\}$, c' est à dire que $\{u > 0\} \cap D'$ est ouvert.

On définit alors r_1 tel que $B(x_1,r_1)$ soit la plus grande boule incluse dans $D_1 \cap \{u > 0\}$. Si $\partial B(x_1,r_1)$ touche le bord de D_1, $r_1 \geq \mathrm{dist}(D', \partial D_1) > 0$ et donc

$$\frac{1}{r_1}\fint_{\partial B(x_1,r_1)} u \leq \frac{\|u\|_\infty}{\mathrm{dist}(D', \partial D_1)}.$$

Par contre si le bord de $B(x_1, r_1)$ touche le bord de $\{u > 0\}$ on a alors, d'après la proposition 5.15, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{r_1 + \varepsilon} \fint_{\partial B(x_1, r_1+\varepsilon)} u \leq C_{max},$$

(sinon $u > 0$ dans $B(x_1, r_1 + \varepsilon)$) on en déduit donc en faisant tendre ε vers 0 que

$$\frac{1}{r_1} \fint_{\partial B(x_1, r_1)} u \leq C_{max}.$$

Dans les deux cas on a:

$$\frac{1}{r_1} \fint_{\partial B(x_1, r_1)} u \leq C = \max(C_{max}, \frac{\|u\|_\infty}{\mathrm{dist}(D', \partial D_1)}).$$

Soit maintenant $w \in H_0^1(B(x_1, r_1))$ tel que $-\Delta w = f$ dans $B(x_1, r_1)$. On a alors que $u - w$ est harmonique dans $B(x_1, r_1)$ et vaut u au bord et donc:

$$|\nabla(u - w)(x_1)| \leq C \frac{1}{r} \fint_{\partial B(x_1, r_1)} u \leq C.$$

D' autre part,

$$|\nabla w(x_1)| \leq C r_1 \|f\|_\infty \leq C,$$

car D' est borné. On a donc:

$$\|\nabla u\|_\infty \leq C \text{ sur } D',$$

avec C qui dépend de D', D_1, C_{max}, f.

Remarque 5.17 *On a le même résultat si $D_1 \subset \{u \leq 0\}$, il suffit d' appliquer le résultat précédent avec $-u$ minimum pour $-f$.*

Corollaire 5.18 *Soit u une solution positive du problème de minimisation $(\mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors u est globalement lipschitzienne sur R^n.*

Démonstration: On procède comme dans le théorème 5.16 en prenant $D' = D_1 = \mathbb{R}^d$. On remarque que si $u(x_1) > 0$ alors $B(x_1, R)$ touche le bord de Ω_u dès que $\pi R^d > a$. Si on définit r_1 comme dans la démonstration de 5.16 on a alors $r_1 \leq (\frac{a}{\pi})^{1/d}$ (on est toujours dans le deuxième cas). On peut donc majorer $|\nabla w(x_1)|$ indépendament de r_1 et donc de x_1.

Corollaire 5.19 *Soit u une solution du problème de minimisation $(\mathcal{P})$ dans D avec $u \geq 0$, alors u est localement lipschitzienne dans D.*

Remarque 5.20 *Si u change de signe, on peut conclure que u est localement lipschitzienne sur $\{u \geq 0\}$ et sur $\{u \leq 0\}$ mais on ne peut rien dire au voisinage des points où u change de signe.*

5.5 Périmètre fini de Ω.

On va démontrer ici que Ω_u est à périmètre fini sous certaines conditions. On donne également après une condition pour trouver **une** solution u de $(\mathcal{P})$ avec Ω_u à périmètre finie.

5.5.1 Solution lipschitzienne ou localement lipschitzienne.

La proposition suivante exprime la condition au bord $\frac{1}{2}|\nabla u|^2 = \lambda$ en un sens faible.

Proposition 5.21 *Soit u solution de $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda,\lambda^*})$ localement lipschitzienne dans D_1. Alors pour tout $\varphi \in C_0^\infty(D_1, \mathbb{R}^d)$ on a:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{0<|u|<\varepsilon\}} \varphi.\nabla|u| \left(\lambda - \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) = 0.$$

Démonstration: Soit $\varphi \in C_0^\infty(D_1, \mathbb{R}^d)$ et

$$\Psi_\varepsilon(x) = \max(0, 1 - \frac{|x|}{\varepsilon}).$$

On veut appliquer l'équation d' Euler (cf théorème 5.2) à

$$\Phi = \varphi\Psi_\varepsilon(u) \in W^{1,\infty}(D_1),$$

et Φ est à support compact. Pour cela, comme $\Phi \in W_0^{1,\infty}(D_1)$ et à support compact dans D_1, on peut, par régularisation, l'approcher par $\Phi_n \in C_0^\infty(D_1)$ dans $W^{1,1}(D_1)$ avec $\nabla\Phi_n$ uniformément borné. L'équation d'Euler s'étend ainsi à de tels Φ. On étudie chacun des termes:

$$\begin{aligned}\int_{\{u\neq 0\}} \text{div } \Phi &= \int_{\{u\neq 0\}} \Psi_\varepsilon(u)\text{div } \varphi + \int_{0<|u|<\varepsilon} \varphi.\nabla u \Psi'_\varepsilon(u) \\ &= \int_{\{u\neq 0\}} \Psi_\varepsilon(u)\text{div } \varphi - \int_{\{u\neq 0\}} \frac{1}{\varepsilon}\varphi.\nabla|u|.\end{aligned}$$

On remarque alors que $\Psi_\varepsilon(u)\chi_{\{u\neq 0\}}$ converge vers 0 presque partout quand ε tend vers 0. Par convergence dominée le premier terme tend donc vers 0. Pour les mêmes raisons on a:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{D_1} f\nabla u.\Phi = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\{u\neq 0\}} f\Psi_\varepsilon(u)\nabla u.\phi = 0.$$

$$\begin{aligned}\int_{\{u\neq 0\}} \text{div } \Phi|\nabla u|^2 &= \int_{\{u\neq 0\}} \Psi_{\varepsilon(u)}\text{div } \varphi|\nabla u|^2 + \varphi.\nabla u\Psi'_\varepsilon(u)|\nabla u|^2 \\ &= \int_{\{u\neq 0\}} \Psi_{\varepsilon(u)}\text{div } \varphi|\nabla u|^2 - \frac{1}{\varepsilon}\int_{0<|u<\varepsilon} \varphi.\nabla|u||\nabla u|^2.\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 par convergence dominée ($\nabla u \in L^2$). Enfin:

$$\int_{D_1} D\Phi\nabla u.\nabla u = \int_{\{u\neq 0\}} \Psi_\varepsilon(u)D\phi\nabla u.\nabla u - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\{0<|u|<\varepsilon\}} |\nabla u|^2\varphi.\nabla|u|,$$

et le premier terme tend vers 0. On a donc bien le résultat annoncé.

Théorème 5.22 *Soit u solution de $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda,\lambda^*})$ avec $\lambda > 0$ et u localement lipschitzienne dans D_1. Alors $\Omega_u = \{|u| \neq 0\}$ est à périmètre localement fini dans D_1. De plus, pour tout D_2 relativement compact dans D_1, il existe $C = C(\|\nabla u\|_{\infty,D_2})$ tel que pour toute boule $B(x,r) \subset D_2$:*

$$P(\Omega, B(x,r)) \leq C\left(\mu_1(B(x,r)) + \mu_2(B(x,r))\right),$$

où μ_1 et μ_2 sont les deux mesures vérifiant:

$$\Delta u + f\chi_{\{u\neq 0\}} = \mu_1 - \mu_2.$$

Démonstration: Soit $B(x,r) \subset D_1$ et $\varphi \in C_0^\infty(B(x,r))$. Pour presque tout $s > 0$ le bord de $\{|u| > s\}$ est régulier (C^1), en effet sur $\{u > 0\}$ comme $-\Delta u = f$, u est C^1 et on peut appliquer le lemme de Sard. On en déduit que $|\nabla u| > 0$ sur $\{|u| = s\}$ pour presque tout s. On peut alors écrire, en utilisant la formule de la co-aire (voir 3.4.3 dans [15]), puis la formule de Gauss:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{0<|u|<\varepsilon\}} \varphi.\nabla(|u|) &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon ds \int_{\{|u|=s\}} \varphi.\frac{\nabla|u|}{|\nabla u|} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon ds \int_{\{|u|=s\}} \varphi.\nu_s \\ &= -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon ds \int_{\{|u|>s\}} div\varphi,\end{aligned}$$

où ν_s est la normale extérieure. Cette dernière intégrale converge vers $\int_{\{|u|>0\}} div\varphi$. Il existe $s_0 < r$ tel que $\varphi \in C_0^\infty(B(x,s_0))$. Si on suppose que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, alors:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{0<|u|<\varepsilon\}} \varphi.\nabla(|u|)\frac{1}{2}|\nabla u|^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|\nabla u\|_\infty \int_{\{|u|<\varepsilon\}\cap B(x,s)} |\nabla u|^2,$$

pour tout $s_0 < s < r$. Or on a vu dans la démonstration du théorème 5.4 (voir 5.2) que

$$\lim_{n\to\infty} n|\nabla u|^2 \chi_{\{0<u<1/n\}} = \mu_1$$

faiblement au sens des mesures de Radon, et de même sur $\{-1/n < u < 0\}$ avec μ_2. Pour presque tout $s < r$,

$$\mu_1(\partial B(x,s)) = \mu_2(\partial B(x,s)) = 0.$$

Soit un tel $s > s_0$, on a:

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\{|u|<1/n\}\cap B(x,s)} |\nabla(u)|^2 = \mu_1(B(x,s)) + \mu_2(B(x,s)).$$

En appliquant la proposition 5.21 en prenant $\varepsilon = 1/n$ et en faisant tendre n vers $+\infty$ on trouve finalement:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega_u \cap B(x,r)} div\varphi &\leq \frac{\|\nabla u\|_{\infty,D_2}}{2}(\mu_1(B(x,s)) + \mu_2(B(x,s))) \\ &\leq \frac{\|\nabla u\|_{\infty,D_2}}{2}(\mu_1(B(x,r)) + \mu_2(B(x,r))), \end{aligned}$$

c' est à dire:

$$P(\Omega_u, B(x,r)) \leq \frac{\|\nabla u\|_{\infty,D_2}}{2\lambda}(\mu_1(B(x,r)) + \mu_2(B(x,r))).$$

Donc si D_2 est relativement compact dans D_1 on a a bien pour toute boule $B(x,r) \subset D_2$

$$P(\Omega_u, B(x,r)) \leq C(\mu_1(B(x,r)) + \mu_2(B(x,r))),$$

avec $C = \frac{\|\nabla u\|_{\infty,D_2}}{2\lambda}$.

Proposition 5.23 *Soit u solution de $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda,\lambda*})$ avec $\lambda > 0$ et u localement lipschitzienne dans D_1; alors pour tout D' relativement compact dans D_1 il existe $C, r_0 > 0$ tel que pour toute boule $B(x,r) \subset D'$ avec $r \leq r_0$ on ait:*

$$P(\Omega_u, B(x,r)) \leq Cr^{d-1}.$$

Il suffit de combiner le théorème ci-dessus et la proposition 5.6.

5.5.2 Le problème approché.

On donne, à titre de remarque, une démonstration qui donne une construction d'une solution u de $(\mathcal{P})$ avec Ω_u à périmètre fini et qui n'utilise pas la propriété de Lipschitz. On suppose, dans cette partie, que $f \in L^1(D) \cap L^\infty(D)$.

Soit p_1 défini par:

$$p_\varepsilon(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2 & \text{si } |r| \leq \varepsilon \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On définit:

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \left\{ v \in H_0^1(D), \|p_\varepsilon(v)\|_{L^1(D)} \leq a \right\}.$$

On considère alors le problème (P_ε) suivant: trouver $u_\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon$ tel que:

$$J(u_\varepsilon) \leq J(v), v \in \mathcal{V}_\varepsilon \tag{5.10}$$

On a les résultats suivants:

Théorème 5.24 *Le problème (P_ε) admet une solution U_ε et il existe λ_ε tel que:*

$$-\Delta u_\varepsilon = f - \lambda_\varepsilon p'_\varepsilon(u_\varepsilon) \text{dans } D.$$

De plus, à une sous-suite extraite près, u_ε converge vers u et Ω_u est solution de $(\mathcal{P})$.

Pour la démonstration de ce théorème on renvoit à [18].

Théorème 5.25 *Soit u comme dans le théorème 5.24 et si il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_\varepsilon \geq \lambda_0$; alors Ω_u est à périmètre finie.*

Démonstration: Soit q_ε définit par $q'_\varepsilon = p_\varepsilon$ et $q_\varepsilon(0) = 0$.
D' après le théorème 5.24 on sait que:

$$-\Delta u_\varepsilon = f - \lambda_\varepsilon p'_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

En multipliant cette relation par $(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i})^2 sgn(u_\varepsilon)$ on trouve:

$$\begin{aligned}
(\Delta u_\varepsilon + f)(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i})^2 sgn(u_\varepsilon) &= \lambda_\varepsilon p'_\varepsilon(u_\varepsilon)(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i})^2 sgn(u_\varepsilon) \\
&= \lambda_\varepsilon \frac{\partial p_\varepsilon(u_\varepsilon)}{\partial x_i} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} sgn(u_\varepsilon) \\
&= \lambda_\varepsilon \frac{\partial}{x_i} \left(p_\varepsilon(u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right) sgn(u_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon p_\varepsilon(u_\varepsilon) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i^2} sgn(u_\varepsilon) \\
&= \frac{\partial^2 q_\varepsilon(u_\varepsilon)}{\partial x_i^2} sgn(u_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon p_\varepsilon(u_\varepsilon) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i^2} sgn(u_\varepsilon)
\end{aligned}$$

c' est à dire en sommant de $i = 1$ à d et en remarquant que u_ε et $q_\varepsilon(u_\varepsilon)$ sont de même signe:

$$(\Delta u_\varepsilon + f)|\nabla u_\varepsilon|^2 sgn(u_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon \Delta q_\varepsilon(u_\varepsilon) sgn(q_\varepsilon(u_\varepsilon)) - \lambda_\varepsilon p_\varepsilon(u_\varepsilon)\Delta u_\varepsilon sgn(u_\varepsilon). \tag{5.11}$$

Comme $p'_\varepsilon(u_\varepsilon)sgn(u_\varepsilon) \geq 0$ et $\lambda_\varepsilon \geq 0$ on a que $(\Delta u_\varepsilon + f)|\nabla u_\varepsilon|^2 sgn(u_\varepsilon)$ et $(\Delta u_\varepsilon + f)sgn(u_\varepsilon)$ sont positives. De plus:

$$\int_D \lambda_\varepsilon p'_\varepsilon(u_\varepsilon)sgn(u_\varepsilon) = \int_D (f + \Delta u_\varepsilon)sgn(u_\varepsilon) \leq \int_D |f|,$$

(car $u_\varepsilon \in H_0^1(D)$) et donc on en déduit que $\|\lambda_\varepsilon p'_\varepsilon(u_\varepsilon)sgn(u_\varepsilon)\|_{L^1(D)} \leq C$ puis $\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^1(D)}\| \leq C$.

En reprenant 5.11 on trouve comme ci-dessus (en utilisant la borne L^1 de Δu_ε) que $\|(\Delta u_\varepsilon + f)|\nabla u_\varepsilon|^2 sgn(u_\varepsilon)\|_{L^1(D)} \leq C$.

On en déduit donc finalement que

$$\lambda_\varepsilon \frac{\partial p_\varepsilon(u_\varepsilon)}{\partial x_i} = (\Delta u_\varepsilon + f)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}$$

est dans $L^1(D)$ uniformément en ε. Si $\lim \lambda_\varepsilon > 0$, comme $p_\varepsilon(u_\varepsilon)$ converge au sens des distributions vers χ_{Ω_u}, on en déduit que Ω_u est à périmètre fini.

Chapitre 6

Etude locale, explosion.

6.1 Définition et convergences.

Notations: Soit u une solution de $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda,\lambda^*})$ avec u lipschitzienne dans D_1. Soit $x_m \in \partial\Omega_u \cap D_1$ tendant vers $x_0 \in \partial\Omega_u \cap D_1$ et r_m une suite qui tend vers 0 telle que $B(x_m, r_m) \subset D_1$. On pose:

$$u_m(x) = \frac{u(x_m + r_m x)}{r_m}.$$

et

$$\Omega_m = \{x \in \mathbb{R}^d, x_m + r_m x \in \Omega_u\}.$$

On parlera alors d'explosion de u par rapport à $B(x_m, r_m)$.

Proposition 6.1 *Soit u et u_m comme ci-dessus. Il existe u_0 lipschitzienne et H^- inclus dans $\mathbb{R}^d$ à périmètre localement fini tel que, à une sous-suite extraite près, u_m converge vers u_0 uniformément sur tout compact, ∇u_m vers ∇u_0 faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et χ_{Ω_m} vers χ_{H^-} dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et presque partout. De plus pour presque tout $x \notin H^-$ on a $u_0(x) = 0$.*

Démonstration: Soit $R > 0$, pour m assez grand on a $B(x_m, r_m R) \subset D_1$ et $u(x_m) = 0$ donc on en déduit que pour $x \in B(0, R)$:

$$|u_m(x)| \leq \|\nabla u\|_{\infty,D_1}|x|,$$

$$|\nabla u_m(x)| \leq \|\nabla u\|_{\infty,D_1}.$$

On en déduit donc que, à une sous-suite extraite près, u_m converge uniformément sur tout $B(0, R)$ (et donc sur tout compact) vers une fonction u_0

lipschitzienne définie sur $\mathbb{R}^d$ et que ∇u_m converge faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit $R > 0$ on a alors pour m assez grand $B(x_m, r_m R) \subset D_1$ et donc:

$$P(\Omega_m, B(0,R)) = \frac{1}{r_m^{d-1}} P(\Omega_u, B(x_m, r_m R)) \leq C R^{d-1},$$

et on en déduit la compacité des fonctions caracatéristiques χ_{Ω_m} dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Donc il existe H^- à périmètre localement fini tel que, à une sous-suite extraite près, χ_{Ω_m} converge vers χ_{H^-} dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et presque-partout. Pour presque tout $x \notin H^-$ on a:

$$0 = \chi_{H^-}(x) = \lim_{m\to\infty} \chi_{\Omega_m}(x),$$

et donc pour m assez grand $x_m + r_m x \notin \Omega_u$ et donc $u_m(x) = 0$.

Proposition 6.2 *Soit u_m comme ci-dessus alors ∇u_m converge (à une sous-suite extraite près) dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ vers ∇u_0.*

Démonstration: Soit $R > 0, B(x_m, r_m R) \subset D_1$ dès que m est assez grand. On a, au sens des distributions:

$$\Delta u_m(x) = r_m \Delta u(x_m + r_m x).$$

D' après le théorème 5.4 Δu est une mesure réelle ($\Delta u = -f\chi_{\Omega_u} + \mu_1 - \mu_2$ avec μ_1 et μ_2 mesures positives). On a alors:

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} |\Delta u_m| &= r_m^{1-d} \int_{B(0,r_m R)} |\Delta u| \\
&\leq \omega_d r_m R \|f\|_\infty + r_m^{1-d}\mu_1(B(0,r_m R)) + r_m^{1-d}\mu_2(B(0,r_m R)) \\
&\leq C R + C R^{d-1},
\end{aligned}$$

grâce à la proposition 5.6. On en déduit que les mesure $|\Delta u_m|$ sont uniformément majorées et donc, à une sous suite extraite près la convergence de ∇u_m vers ∇u_0 dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et donc convergence de ∇u_m dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

6.2 Propriétés de la limite.

Théorème 6.3 (Équation d' Euler de u_0.) *Soit u_0 et H^- comme dans la proposition 6.1. Alors pour tout $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (D\Phi \nabla u_0, \nabla u_0) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}\Phi |\nabla u_0|^2 = \lambda \int_{H^-} \mathrm{div}\Phi.$$

Démonstration: Soit $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, R^d)$ tel que $spt(\Phi) \subset B(0,R)$ et posons:

$$\Phi_m(x) = \Phi\left(\frac{x - x_m}{r_m}\right), x \in \mathbb{R}^d.$$

On voit alors que:

$$D\Phi_m(x) = \frac{1}{r_m} D\Phi\left(\frac{x - x_m}{r_m}\right)$$

et que:

$$\begin{aligned} spt(\Phi_m) &= \{x, \frac{x - x_m}{r_m} \in spt(\Phi)\} \\ &= \{x_m + r_m y, y \in spt(\Phi)\} \\ &\subset B(x_m, r_m R) \subset B(x_0, |x_m - x_0| + r_m R), \end{aligned}$$

et donc pour m assez grand on a $\Phi_m \in C_0^\infty(D_1, \mathbb{R}^d)$. On peut alors appliquer l' équation d' Euler de u avec Φ_m comme fonction test:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (D\Phi_m(x)\nabla u(x), \nabla u(x) dx) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}\Phi_m(x)|\nabla u(x)|^2 dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(\nabla u(x).\Phi_m(x))dx + \lambda \int_{\Omega_u} \mathrm{div}\Phi_m(x)dx,$$

et donc en posant $x = x_m + r_m y$ et en divisant par r_m^{d-1}:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (D\Phi(y)\nabla u_m, \nabla u_m) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}\Phi|\nabla u_m|^2 dy$$

$$= r_m \int_{\mathbb{R}^d} f(x_m + r_m y)\,(\nabla u_m(y), \Phi(y))\,dy + \lambda \int_{\{y,\ x_m + r_m y \in \Omega_u\}} \mathrm{div}\Phi(y)dy.$$

Le dernier terme converge vers:

$$\lambda \int_{H^-} \mathrm{div}\Phi,$$

le troisième terme converge lui vers 0 car f et Φ sont bornées et $\|\nabla u_m\|_\infty$ est majoré uniformément en m. Enfin pour les deux premiers termes on utilise la convergence de ∇u_m presque-partout (à une suite extraite près car on a la convergence dans L^1_{loc}) et le théorème de convergence dominée (grâce à la borne uniforme sur $\|\nabla u_m\|_\infty$) et on en déduit donc le résultat par passage à la limite.

Proposition 6.4 *Soit u_0 et H^- comme dans la proposition 6.1 et soit $B(x_1, R) \subset H^-$ presque-partout, alors u_0 est harmonique dans $B(x_1, R)$.*

Démonstration: Soit v_m défini par:

$$\begin{aligned} v_m &= u_m \text{ sur } \partial B(x_1, R) \\ \Delta v_m &= 0 \text{ dans } B(x_1, R) \end{aligned}$$

On a alors:

$$\int_{B(x_1,R)} |\nabla v_m|^2 \leq \int_{B(x_1,R)} |\nabla u_m|^2 \leq C$$

et

$$\|v_m\|_\infty \leq \|u_m\|_\infty \leq C$$

donc la suite (v_m) est bornée dans $H^1(B(x_1, R))$ et à une sous-suite extraite près converge faiblement vers une fonction v_0 dans $B(x_1, R)$. Grâce à la convergence faible des gradients, v_0 est harmonique et de plus $v_0 = u_0$ sur $\partial B(x_1, R)$ car l' injection de $H^1(B(x_1, R))$ dans $L^2(\partial B(x_1, R))$ est compacte et u_m converge uniformément vers u_0. Enfin on a convergence forte des gradients: en effet $v_m - v_0$ est la fonction harmonique valant $u_m - u_0$ sur $\partial B(x_1, R)$ et on en déduit alors:

$$\int_{B(x_1,R)} |\nabla v_m - \nabla v_0|^2 \leq \int_{B(x_1,R)} |\nabla u_m - \nabla u_0|^2,$$

qui tend vers 0 grâce à la convergence forte des gradients de u_m vers u_0 (convergence presque-partout et borne uniforme sur $\|u_m\|_\infty$) .

Soit, pour $x \in \overline{B(x_m + r_m x_1, r_m R)}$:

$$w_m(x) = r_m v_m(\frac{x - x_m}{r_m}).$$

Pour $x \in \partial B(x_m + r_m x_1, r_m R)$ on a alors:

$$w_m(x) = r_m u_m \left(\frac{x - x_m}{r_m} \right) = u(x),$$

on peut alors prolonger w_m par u_m à l' extérieur de $B(x_m + r_m x_1, r_m r)$. En écrivant la minimalité de u on a alors:

$$\int_{B(x_m + r_m x_1, r_m R)} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \right) \leq$$

$$\int_{B(x_m + r_m x_1, r_m R)} \left(\frac{1}{2} |\nabla w_m|^2 - f w_m \right) + \lambda^* |B(x_m + r_m x_1, r_m R) \cap \{u = 0\}|$$

$$\int_{B(x_1,R)} \left(\frac{1}{2} r_m^d |\nabla u_m|^2 - r_m^{d+1} f u_m \right) \leq$$

$$\int_{B(x_1,R)} \left(\frac{1}{2} r_m^d |\nabla v_m|^2 - r_m^{d+1} f v_m \right) + \lambda^* r_m^d |B(x_1,R) \setminus \Omega_m|,$$

en divisant par r_m^d puis en faisant tendre m vers l' infini, comme $B(x_1,R) \subset H^-$ qui est la limite dans L^1_{loc} des Ω_m on en déduit:

$$\int_{B(x_1,R)} |\nabla u_0|^2 \leq \int_{B(x_1,R)} |\nabla v_0|^2$$

et donc u_0 est harmonique dans $B(x_1,R)$.

Théorème 6.5 *Soit u une solution de $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda,\lambda^*})$ positive ou nulle et localement lipschitzienne dans D_1. Soit $x_0 \in \partial^*\Omega_u \cap D_1$ et ν la normale extérieure de Ω_u en x_0. On considère une explosion de u par rapport à (x_0, r_m) et u_0 une limite des u_m pour une suite-extraite. On a alors:*

$$u_0(x) = \begin{cases} -\sqrt{2\lambda}(x,\nu), & x \in H^- = \{x \in \mathbb{R}^d, (x,\nu) < 0\} \\ 0, & x \notin H^- \end{cases}$$

Démonstration: Quitte à remplacer D_1 par une boule centré en x_0 relativement compact dans D_1, on peut supposer que u est lipschitzienne sur D_1 (et pas seulement localement lipschitzienne sur D_1). Comme $x_0 \in \partial^*\Omega_u$, grâce aux propriétés du bord réduit, $\Omega_m = \{x, x_0 + r_m x \in \Omega_u\}$ converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ vers $H^- = \{x; (x.\nu) < 0\}$, et donc presque-partout (à une suite extraite près) on en déduit que pour presque tout $x \notin H^-$, $u_m(x) = 0$ pour m assez grand et donc $u_0(x) = 0$. On note $L = \{x \in \mathbb{R}^d, (x.\nu) = 0\}$. On a que u_0 est harmonique, positive sur H^- et nulle sur $\{(x.\nu) \geq 0\}$. En appliquant le lemme ci-dessous à $v(x) = u_0(R(x))$ où R est une isométrie vectorielle qui envoie $(-1,0,...,0)$ sur ν on en déduit qu'il existe $a_1 \geq 0$ tel que:

$$u_0(x) = v(R^{-1}(x)) = -a_1(R^{-1}(x).(-1,0,...,0)) = -a_1(x.\nu),$$

pour $(x.\nu) = (R^{-1}(x).(-1,0,...,0)) \leq 0$. On écrit alors l'équation d'Euler de u_0. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, R)$ et $\Phi = \varphi\nu$:

$$\int_{H^-} (D\Phi \nabla u_0 . \nabla u_0) = \int_L a_1^2 \varphi,$$

$$\int_{H^-} \mathrm{div}\Phi |\nabla u_0|^2 = \int_L a_1^2 \varphi,$$

et

$$\lambda \int_{H^-} div\Phi = \lambda \int_L \varphi,$$

on a donc $a_1^2 = 2\lambda$ et comme u_0 est positif on en déduit le résultat annoncé.

Lemme 6.6 *On écrit $x = (x_1, y)$ avec $x_1 \in R, y \in \mathbb{R}^{d-1}$. Soit v définie sur $\mathbb{R}^d$ et vérifiant:*
1)v est lipschitzienne dans $\mathbb{R}^d$,
2)v est harmonique et positive dans $\{x_1 > 0\}$,
3)$v(0, y) = 0, y \in \mathbb{R}^{d-1}$.
Alors il existe $a_1 \geq 0$ tel que $v(x_1, y) = a_1 x_1$ si $x_1 \geq 0$.

Démonstration: On pose

$$w(x_1, y) = \begin{cases} v(x_1, y), & x_1 > 0 \\ -v(-x_1, y), & x_1 \leq 0. \end{cases}$$

Sur $x_1 < 0$ on a:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, y) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(-x_1, y); \ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(x_1, y) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(-x_1, y);$$

et pour $i = 2, ..., d$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}(x_1, y) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(-x_1, y).$$

On en déduit que w est harmonique dans $x_1 < 0$. Montrons maintenant que w est harmonique sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, comme u_0 est harmonique sur $\{|x_1| > 0\}$ donc C^∞, on a alors:

$$\begin{aligned} < \Delta w, \varphi > &= \int_{\mathbb{R}^d} w \Delta \varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{(x_1, y); |x_1| > \varepsilon\}} w \Delta \varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi_{x_1}(-\varepsilon, y) w(-\varepsilon, y) - \varphi_{x_1}(\varepsilon, y) w(\varepsilon, y) dy \\ &- \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi(-\varepsilon, y) w_{x_1}(-\varepsilon, y) - \varphi(\varepsilon, y) w_{x_1}(\varepsilon, y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} w(\varepsilon, y)(-\varphi_{x_1}(-\varepsilon, y) - \varphi_{x_1}(\varepsilon, y)) dy \\ &- \int_{\mathbb{R}^{d-1}} w_{x_1}(\varepsilon, y)(\varphi(-\varepsilon, y) - \varphi(\varepsilon, y)) dy. \end{aligned}$$

Comme $v(0, y) = 0$ et v est lipschitzienne on en déduit: $0 \leq w(\varepsilon, y) \leq \|\nabla v\|_\infty \varepsilon$ et la première intégrale tend vers 0. En utilisant que v est lipschitzienne et la continuité de φ, on en déduit que la deuxième intégrale converge aussi vers 0. On en déduit donc que w est harmonique sur $\mathbb{R}^d$. Les dérivés

partielles de w sont alors, dans $\mathbb{R}^d$, harmoniques et bornées donc constantes. On en déduit donc qu'il existe $a \in \mathbb{R}^d$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que:

$$w(x) = (a.x) + b.$$

Finalement comme $w(0,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ on en déduit $b = 0, a_i = 0, i = 2, ..., d$ puis comme v est positif sur $\{x_1 \geq 0\}$ on a $a_1 \geq 0$. Sur $x_1 > 0$ on peut écrire v sous la forme:

$$v(x) = -a_1(x.(-1, 0, ..., 0)).$$

Remarque 6.7 *Si u et x_0 sont comme ci-dessus. Comme la limite u_0 est unique, on a en faite convergence de $u_r(x) = \frac{u(x_0+rx)}{r}$ vers u_0 quand r tend vers 0.*

Remarque 6.8 *Dans le théorème 6.5 on a utilisé simplement que la limite des Ω_m était un demi-espace (Ce qui est vrai évidamment si $x_m = x_0 \in \partial^*\Omega_u$).*

Remarque 6.9 *Si $d = 2$ et $\lambda > 0$ on peut montrer que H^- ne peut pas être un cône sauf si l'angle est $0, \pi$ ou 2π. Ainsi Ω_u ne peut pas avoir de "coin".*

Idée de la démonstration: On envoie, par une application du type $z \to z^\alpha$, un cône d'ouverture différente de $0, \pi$ et 2π sur un demi-espace puis on utilise le lemme ci-dessus. On en déduit une contradiction en utilisant que u_0 est lipschitzienne et non nulle (à cause de l'équation d'Euler si $\lambda > 0$).

Chapitre 7

Régularité de $\partial\Omega_u$.

Dans tout le chapitre u désigne une solution de $(\mathcal{P})$.

7.1 Pénalisation par en dessous.

Le but de cette partie va être de démontrer le théorème suivant:

Théorème 7.1 *On suppose que $\lambda > 0$, où λ est celui qui apparaît dans l'équation d'Euler (voir le théorème 5.2). Soit D_1 ouvert à bord régulier, relativement compact inclus dans D, et vérifiant: il existe $\varepsilon > 0$ tel que:*

$$\left\{x \in D \text{ tel que } d(x, \overline{D_1}) < \varepsilon\right\} \subset \{u \geq 0\} \cap \{f \geq 0\},$$

$$0 < |D_1 \cap \Omega_u| < |D_1|,$$

$$0 < |(D \setminus D_1) \cap \Omega_u| < |D \setminus D_1|,$$

u non identiquement nul sur ∂D_1. Alors il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $v \in H_0^1(D)$ avec $|\Omega_v| \leq |\Omega_u|$ et $v = u$ sur $D \setminus D_1$ on ait:

$$J(u) + \mu|\Omega_u| \leq J(v) + \mu|\Omega_v|.$$

Remarque 7.2 *Ce résultat permettra d'utiliser des petites perturbations v de u telles que $|\Omega_v| \leq |\Omega_u|$ afin d'établir une minoration de $\frac{1}{r}\fint_{B(x,r)} u$ au voisinage du bord de Ω_u. Il sera donc utilisé avec $D_1 = B(x_0, r), x_0 \in \partial\Omega_u$ et r petit.*

L'idée de la démonstration est d'étudier les minima de la fonctionnelle:

$$J_\mu(v) = J(v) + \mu|\Omega_v|; v \in H_0^1(D), u - v \in H_0^1(D_1), |\Omega_v| \leq a.$$

Si un minimum est de mesure a, alors on vérifie facilement que u est aussi minimum de ce même problème. Le point essentiel dans cette démonstration est donc de montrer que si μ est suffisamment petit, alors tous les minima sont de mesures a.

Remarque 7.3 *La première condition indique qu'on peut trouver un ouvert D_2 tel que D_1 soit relativement compact dans D_2 et $D_2 \subset \{u \geq 0\} \cap \{f \geq 0\}$. On en déduit alors que u est lipschitzienne dans D_1 d'àprès le théorème 5.16.*

Soit D_1 comme dans le théorème 7.1. On définit alors:

$$\mathcal{F} = \left\{ v \in H_0^1(D); |\Omega_v| \leq a,\ v(x) = u(x), x \in D \setminus D_1 \right\}$$

et pour $\mu > 0$ et $v \in \mathcal{F}$:

$$J_\mu(v) = J(v) + \mu |\Omega_v|.$$

Proposition 7.4 *Soit $\mu > 0$ il existe $v_\mu \in \mathcal{F}$ tel que:*

$$J_\mu(v_\mu) = \min \left\{ J_\mu(v), v \in \mathcal{F} \right\}.$$

De plus on a:

$$0 < |\Omega_{v_\mu} \cap D_1| < |D_1|,$$

et $v_\mu \geq 0$ dans D.

Démonstration: Pour l'existence d'une solution, on procède comme pour $(\mathcal{P}_0)$. Comme $u = v$ non nulles sur ∂D_1 on en déduit: $|\Omega_{v_\mu} \cap D_1| > 0$. De plus comme

$$\Omega_{v_\mu} = (\Omega_u \cap (D \setminus D_1)) \cup (\Omega_{v_\mu} \cap D_1),$$

et $|\Omega_{v_\mu}| \leq |\Omega_u|$, on en déduit par hypothèse sur D_1:

$$|\Omega_{v_\mu} \cap D_1| \leq |\Omega_u \cap D_1| < |D_1|.$$

Enfin pour tout $w \in \mathcal{F}$ on pose:

$$w_1 = \begin{cases} w^+ & \text{sur } D_1 \\ u & \text{sur } D \setminus D_1. \end{cases}$$

Puisque $u \geq 0$ sur ∂D_1, on a bien $w_1 \in \mathcal{F}$ avec $|\Omega_{w_1}| \leq |\Omega_w|$. De plus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{D_1} |\nabla w_1| - \int_{D_1} f w_1 &= \frac{1}{2}\int_{D_1} |\nabla w^+|^2 - \int_{D_1} f w^+ \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{D_1} |\nabla w|^2 - \int_{D_1} f w, \end{aligned}$$

puisque f est positive dans D_1. De plus cette inégalité est strict sauf si $\int_{D_1} |\nabla w^-|^2 = 0$ c'est-à-dire si w est positif. On en déduit donc finalement que:

$$J_\mu(w_1) \leq J_\mu(w),$$

avec égalité si et seulement si w est positif dans D_1. On en déduit donc que v_μ est bien positif dans D_1.

Proposition 7.5 *S'il existe v_μ un minimum de J_μ dans $\mathcal{F}$ tel que $|\Omega_{v_\mu}| = a$ alors u est aussi un minimum de J_μ.*

Démonstration: Pour tout $v \in \mathcal{F}$ on a:

$$\begin{aligned} J(u) + \mu|\Omega_u| &\leq J(v_\mu) + \mu|\Omega_u| \\ &= J(v_\mu) + \mu|\Omega_{v_\mu}| \\ &\leq J(v) + \mu|\Omega_v|. \end{aligned}$$

Proposition 7.6 *Soit v_μ un minimum de J_μ dans $\mathcal{F}$. Si $\mu \leq \lambda^*$ (cf théorème 5.7), on a alors pour tout $v \in H_0^1(D)$ tel que $v = u$ sur $D \setminus D_1$*

$$J(v_\mu) \leq J(v) + \lambda^*(|\Omega_v| - |\Omega_{v_\mu}|)^+.$$

Démonstration: Soit v comme ci-dessus et $\mu \leq \lambda^*$. Si $|\Omega_v| \leq a$, on a par minimalité de v_μ:

$$J(v_\mu) \leq J(v) + \mu|\Omega_v| - \mu|\Omega_{v_\mu}| \leq J(v) + \lambda^*(|\Omega_v| - |\Omega_{v_\mu}|)^+.$$

Maintenant si $|\Omega_v| > a$, on a, grâce à la minimalité de u et de v_μ et au théorème 5.7:

$$\begin{aligned} J(v_\mu) &\leq J(u) + \mu(|\Omega_u| - |\Omega_{v_\mu}|) \\ &\leq J(v) + \lambda^*(|\Omega_v| - |\Omega_u|) + \mu(|\Omega_u| - |\Omega_{v_\mu}) \\ &\leq J(v) + \lambda^*(|\Omega_v| - |\Omega_u|) + \lambda^*(|\Omega_u| - |\Omega_{v_\mu}|) \\ &= J(v) + \lambda^*(|\Omega_v| - |\Omega_{v_\mu}|)^+. \end{aligned}$$

Dans la suite on supposera donc que $\mu \leq \lambda^*$ ce qui est possible puisque $\lambda^* > 0$ et qu'on s'intéresse à μ petit.

Proposition 7.7 (Équation d'Euler de v_μ) *Soit v_μ un minimum de J_μ, il existe $\lambda_\mu \geq \mu > 0$ tel que pour tout $\Phi \in C_0^\infty(D_1)$ on ait:*

$$\int_D (D\Phi\nabla v_\mu.\nabla v_\mu) - \frac{1}{2}\int_D div\Phi|\nabla v_\mu|^2 - \int_D f(\nabla v_\mu.\Phi) = \lambda_\mu \int_{\Omega_{v_\mu}} div\Phi.$$

Démonstration: Pour l'existence de λ_μ on procède comme dans la démonstration de l'équation d'Euler pour une solution de $(\mathcal{P})$: Soit $\Phi \in C_0^\infty(D_1)$ avec $\int_{\Omega_{v_\mu}} div\Phi > 0$ (il en existe car $\Omega_v \cap D_1$ est différent du vide et de D_1). On pose $v_\mu^t(x) = v(x + t\Phi(x))$ on a alors $v_\mu^t \in \mathcal{F}$ avec $|\Omega_{v_\mu^t}| \leq |\Omega_{v_\mu}|$ et tout le reste de la démonstration est identique.

Montrons maintenant que $\lambda_\mu \geq \mu$. Soit Φ tel que $\int_{\Omega_{v_\mu}} div\Phi > 0$ et v_μ^t comme ci-dessus. On rappel qu'on a alors pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} J(v_\mu^t) &= J(v_\mu) + t\int_D (D\Phi\nabla v_\mu.\nabla v_\mu) - \frac{t}{2}\int_D div\Phi|\nabla v_\mu|^2 - t\int_D f(\nabla v_\mu.\Phi) + o(t) \\ &= J(v_\mu) + t\lambda_\mu \int_{\Omega_{v_\mu}} div\Phi + o(t), \end{aligned}$$

la première égalité vient de la démonstration de l'équation d'Euler et la deuxième de l'équation d'Euler elle même. On a également:

$$|\Omega_{v_\mu^t}| = |\Omega_{v_\mu}| - t\int_{\Omega_{v_\mu}} div\Phi + o(t).$$

On en déduit alors $|\Omega_{v_\mu^t}| \leq |\Omega_{v_\mu}| \leq a$ et par minimalité de v_μ:

$$0 \leq t\lambda_\mu \int_{\Omega_{v_\mu}} div\Phi - \mu t \int_{\Omega_{v_\mu}} div\Phi + o(t),$$

et donc:

$$\mu \int_{\Omega_{v_\mu}} div\Phi \leq \lambda_\mu \int_{\Omega_{v_\mu}} div\Phi,$$

et on a bien le résultat voulu car $\int_{\Omega_{v_\mu}} div\Phi > 0$.

On déduit des deux résultats précédents que v_μ est une solution de $(\mathcal{P}_{D_1,\lambda_\mu,\lambda^*})$ positive dans D_1. Donc v_μ est localement lipschitzienne dans D_1 et Ω_{v_μ} est à périmètre localement fini dans D_1.

Proposition 7.8 *Soit μ_n une suite tendant vers 0 et v_n un minimum de J_{μ_n}. Alors v_n converge (à une sous-suite extraite près) vers une solution v de $(\mathcal{P})$ et v vérifie l'équation d'Euler avec le même λ que u. De plus $\lambda_n = \lambda_{\mu_n}$ converge vers λ.*

Soit μ_n une suite tendant vers 0 et $v_n = v_{\mu_n}$ minimum de J_{μ_n}. On note $\lambda_n = \lambda_{\mu_n}$ et, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que λ_n converge vers λ_0. On a alors pour tout n:

$$J(v_n) + \mu_n|\Omega_{v_n}| \leq J(v_1) + \mu_n|\Omega_{v_1}|,$$

on en déduit que $J(v_n)$ est borné et comme $|\Omega_{v_n}| \leq a$ la suite (v_n) est borné dans $H_0^1(D)$. On peut donc supposer que (à une sous-suite extraite près) v_n converge vers v dans la topologie faible de $H_0^1(D)$ et donc:

$$J(v) \leq \liminf_{n\to\infty} J(v_n).$$

On a alors $v \in \mathcal{F}$ en effet: $v_n - u \in H_0^1(D_1)$ et donc $v - u \in H_0^1(D_1)$ et on a aussi: $|\Omega_v| \leq \liminf_{n\to\infty} |\Omega_{v_n}| \leq a$. Par minimalité de v_n on a:

$$J(v_n) + \mu_n|\Omega_{v_n}| \leq J(u) + \mu_n|\Omega_u|,$$

et en passant à la limite:

$$J(v) \leq J(u),$$

et, comme $|\Omega_v| \leq a$, v est alors une solution de $(\mathcal{P})$ dans D. On a donc en réalité (voir 4.1) $|\Omega_v| = a = \lim|\Omega_{v_n}|$. On note alors λ_v le λ qui apparaît dans l'équation d'Euler de v dans D. Par hypothèse sur D_1 il existe $\Phi \in C_0^\infty(D \setminus \overline{D_1})$ tel que

$$\int_{\Omega_u} div\Phi > 0.$$

En écrivant l'équation d'Euler de u et de v avec Φ et comme $u = v$ sur le support de Φ on en déduit que $\lambda_v = \lambda$.

Toujours par minimalité de v_n comme $v \in \mathcal{F}$ on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_D |\nabla v_n| &\leq \frac{1}{2}\int_D |\nabla v|^2 + \int_D f(v_n - v) + \mu_n(|\Omega_v| - |\Omega v_n|) \\ &= \frac{1}{2}\int_D |\nabla v|^2 + o(1), \end{aligned}$$

et on en déduit:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_D |\nabla v_n|^2 \leq \int_D |\nabla v|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_D |\nabla v_n|^2.$$

On a donc convergence faible de v_n dans $H_0^1(D)$ et convergence de la norme: on a donc en faite convergence forte de v_n vers v dans $H_0^1(D)$. D'après l'équation d'Euler pour v_n dans D_1 on a pour tout $\Phi \in C_0^\infty(D_1, \mathbb{R}^d)$:

$$\int_{D_1} (D\Phi\nabla v_n.\nabla v_n) - \frac{1}{2}\int_{D_1} div\Phi|\nabla v_n|^2 - \int_{D_1} f\nabla v_n.\Phi = \lambda_n \int_{\Omega_{v_n}} div\Phi, \quad (7.1)$$

comme λ_n tend vers λ_0 et $\chi_{\Omega_{v_n}}$ converge dans $L^1(D_1)$ vers χ_{Ω_v} (car v_n tend vers v presque partout et $|\Omega_{v_n}|$ tend vers $|\Omega_v|$), on en déduit en utilisant la convergence forte de v_n dans $H_0^1(D)$:

$$\int_{D_1} (D\Phi\nabla v.\nabla v) - \frac{1}{2}\int_{D_1} div\Phi|\nabla v|^2 - \int_{D_1} f\nabla v.\Phi = \lambda_0 \int_{\Omega_v} div\Phi.$$

Mais on a aussi en utilisant l'équation d'Euler de v dans D:

$$\int_D (D\Phi\nabla v.\nabla v) + \frac{1}{2}\int_D div\Phi|\nabla v|^2 - \int_D f\nabla v.\Phi = \lambda_v \int_{\Omega_v} div\Phi,$$

pour tout $\Phi \in C_0^\infty(D,\mathbb{R}^d)$. Il existe $\Phi \in C^\infty(D_1,\mathbb{R}^d)$ tel que $\int_{\Omega_v} div\Phi > 0$. En effet comme $v = u$ est non nulle sur le bord de D_1 on a bien $|\Omega_v \cap D_1| > 0$. De plus, comme $v = u$ dans $D \setminus D_1$, on a aussi $|\Omega_v \cap D_1| \leq |\Omega_u \cap D_1| < |D_1|$. En comparant les deux équations avec un tel Φ on trouve $\lambda_v = \lambda_0 = \lambda$.

Démonstration du théorème 7.1: Il suffit de montrer que pour $\mu > 0$ assez petit tous les v_μ mimima de J_μ vérifie $|\Omega_{v_\mu}| = a$. Ou, ce qui revient au même, qu'il n'existe pas de suite μ_n tendant vers 0 et v_n minimum de J_{μ_n} avec $|\Omega_{v_n}| < a$.

Première étape: Soit v_μ un minimum de J_μ tel que $|\Omega_{v_\mu}| < a$. Soit $x_0 \in \partial^*\Omega_{v_\mu} \cap D_1$, on note ν la normale extérieure de Ω_{v_μ} en x_0. Montrons d'abord que pour tout $\Psi \in H_0^1(B(0,1))$:

$$0 \leq \int_{B(0,1)} |\nabla\Psi|^2 - 2\sqrt{2\lambda_\mu}\int_{\{(x.\nu)=0\}\cap B(0,1)} \Psi d\mathcal{H}^{d-1} + 2\omega_d\mu.$$

On peut supposer que $x_0 = 0$. Soit $\Psi \in C_0^\infty(B(0,1))$ on définit pour $t > 0$

$$v(x) = v_\mu(x) + t\Psi(\frac{x}{t}), x \in D,$$

on a alors:

$$|\Omega_v| \leq |\Omega_{v_\mu}| + t^d\omega_d \leq a,$$

dès que t est assez petit. De plus $B(0,t) \subset D_1$ pour tout t assez petit et donc $v \in \mathcal{F}$. Comme

$$\nabla v(x) = \nabla v_\mu(x) + \nabla\Psi(\frac{x}{t}), x \in D,$$

on en déduit par minimalité de v_μ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}\int_D |\nabla\Psi(\frac{x}{t})|^2 dx + \int_D \left(\nabla v_\mu(x).\nabla\Psi(\frac{x}{t})\right) dx - t\int_D f(x)\Psi(\frac{x}{t})dx + \mu t^d\omega_d \\ &= \frac{1}{2}t^d\int_{B(0,1)} |\nabla\Psi(y)|^2 dy - t^d\int_{B(0,1)} (\nabla v_\mu(ty).\nabla\Psi(y))\, dy \\ &- t^{d+1}\int_D f(ty)\Psi(y)dy + \mu t^d\omega_d. \end{aligned}$$

En divisant par $t^d/2$, puis en faisant tendre t vers 0, on en déduit, en utilisant que f est bornée et les résultats d'explosion au voisinage du bord réduit:

$$0 \leq \int_{B(0,1)} |\nabla \Psi|^2 + 2 \int_{B(0,1)} (\nabla v_{\mu,0}.\nabla \Psi) + 2\omega_d \mu,$$

avec $v_{\mu,0}(x) = \sqrt{2\lambda_\mu} \max\{0, -(x.\nu)\}$. En intégrant le terme du milieu par parties, on en déduit bien que pour tout $\Psi \in C_0^\infty(B(0,1))$:

$$0 \leq \int_{B(0,1)} |\nabla \Psi|^2 - 2\sqrt{2\lambda_\mu} \int_{\{(x.\nu)=0\} \cap B(0,1)} \Psi d\mathcal{H}^{d-1} + 2\omega_d \mu. \tag{7.2}$$

Par densité, ce résultat s'étend aux $\Psi \in H_0^1(B(0,1))$.

Deuxième étape: Soit μ_n une suite tendant vers 0 et v_n un minimum de J_{μ_n}. Supposons que pour tout v_n on ait $|\Omega_{v_n}| < a$. Si on minimise parmi tout les $\Psi \in H_0^1(B(0,1))$ l'équation (7.2), on trouve que le minimum est atteint pour $\Psi_n \in H_0^1(D)$ solution de

$$-\Delta \Psi_n = \sqrt{2\lambda_{\mu_n}} \mathcal{H}^{d-1} \lfloor \{(x.\nu_n) = 0\} \text{ dans } B(0,1); \Psi_n \in H_0^1(D), \tag{7.3}$$

où ν_n est la normale en un point x_0^n du bord réduit de Ω_{v_n}. On en déduit alors:

$$\int_{B(0,1)} |\nabla \Psi_n|^2 \leq \mu_n 2\omega_d. \tag{7.4}$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que ν_n converge vers un vecteur unitaire noté ν_0 quand n tend vers l'infini. On a alors (en utilisant la proposition précédente, on voit que λ_{μ_n} tend vers λ):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\lambda_{\mu_n}} \mathcal{H}^{d-1} \lfloor \{(x.\mu_n) = 0\} = \sqrt{2\lambda} \mathcal{H}^{d-1} \lfloor \{(x.\mu_n) = 0\},$$

faiblement au sens des mesures de Radon. On en déduit que $-\Delta \Psi_n$ converge au sens des distributions vers $\sqrt{2\lambda} \mathcal{H}^{d-1} \lfloor \{(x.\mu_0) = 0\}$. Mais, en passant à la limite dans (7.4), on en déduit que Ψ_n tend vers 0 dans $H_0^1(B(0,1))$. On a donc bien une contradiction.

7.2 Minoration de $|\nabla u|$.

Théorème 7.9 *Soit u solution du problème de minimisation $(\mathcal{P})$ dans D et D_1 vérifiant les hypothèses du thérorème 7.1. Pour tout $0 < \tau < 1$, il existe $C > 0, r_0 > 0$ tel que, pour toute boule $B(x_1, r) \subset D_1$ avec $r \leq r_0$ alors:*

$$\frac{1}{r} \fint_{\partial B(x_1,r)} u \leq C,$$

implique $u = 0$ sur $B(x_1, \tau r)$.

Remarque 7.10 *Soit u et D_1 comme ci-dessus et B_r une boule incluse dans D_1. Soit $w = 0$ sur ∂B_r et $-\Delta w = f\chi_{\Omega_u}$ dans B_r, alors $u + w$ est sous-harmonique dans B_r.*

En effet, comme $u \geq 0$ sur D_1 on a dans B_r:

$$\Delta(u + w) = \Delta u + f\chi_{\Omega_u} = \Delta u^+ + f\chi_{\{u>0\}},$$

qui est bien une mesure positive d'après le le théorème 5.4.

Démonstration du théorème 7.9. On adapte ici la demonstration de [10]. On la fait dans le cas $\tau = 1/2$; dans le cas général elle est identique. Soit $x_1 \in D_1$, on note $B_r = B(x_1, r) \subset D_1$. Pour presque tout $\varepsilon > 0$, le bord de $\{u > \varepsilon\}$ est régulier. Soit

$$D_\varepsilon^+ = (B_r \setminus \overline{B_{r/2}}) \cap \{u > \varepsilon\},$$

et v_ε définie par:

$$\begin{aligned} v_\varepsilon &= u \text{ sur } \partial B_r \\ v_\varepsilon &= u \text{ dans } B_r \cap \{u < \varepsilon\} \\ v_\varepsilon &= \varepsilon \text{ dans } B_{r/2} \cap \{u > \varepsilon\} \\ -\Delta v_\varepsilon &= f \text{ dans } D_\varepsilon^+. \end{aligned}$$

On remarque que v_ε est sur-harmonique sur D_ε^+ et est supérieure à ε sur le bord donc v_ε est supérieure à ε dans D_ε^+. La fonction $u - v_\varepsilon$ est harmonique dans D_ε^+ (dans $D_\varepsilon^+ \subset \{u > 0\}$ on a bien $-\Delta u = f$) et positive sur le bord. En effet elle vaut 0 sur ∂B_r, 0 sur $(B_r \setminus B_{r/2}) \cap \partial\{u > \varepsilon\}$ et $u - \varepsilon \geq 0$ sur $\partial B_{r/2} \cap \{u > \varepsilon\}$. Donc on en déduit que $0 \leq v_\varepsilon \leq u$ dans D_ε^+. C' est vrai aussi par définition de v_ε dans $B_r \setminus D_\varepsilon^+$.

Montrons maintenant que la suite v_ε est borné dans $H^1(B_r)$. Il suffit de majorer $\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(D_\varepsilon^+)}$ indépendamment de ε car, en dehors de $D_\varepsilon^+, v_\varepsilon$ vaut au bien ε ou bien u. De plus v_ε vaut u sur ∂B_r. Soit $\varphi \in C_0^\infty(B_r)$ tel que $0 \leq \varphi(x) \leq 1, x \in B_r$ et $\varphi(x) = 1$ sur $\partial B_{r/2}$. On pose dans B_r,

$$\Psi = (1 - \varphi)u + \varepsilon\varphi = u + \varphi(\varepsilon - u)$$

qui vérifie $0 \leq \Psi(x) \leq u(x)$ pour tout $x \in D_\varepsilon^+$ et $v_\varepsilon = \Psi$ sur ∂D_ε^+ (en effet $\Psi = u$ sur $\partial B_r, \Psi = \varepsilon$ sur $\partial B_{r/2}$ et enfin $\Psi = u$ sur $(B_r \setminus B_{r/2}) \cap \partial\{u > \varepsilon\}$). D'autre part,

$$\nabla\Psi = \nabla u(1 - \varphi) - u\nabla\varphi + \varepsilon\varphi,$$

et u est lipschitzienne dans B_r donc $\nabla\Psi$ reste borné dans $L^\infty(D_\varepsilon^+)$. Finalement $v_\varepsilon - u$ est harmonique dans D_ε^+ et vaut $\Psi - u$ sur ∂D_ε^+, on en déduit donc

$$\|\nabla(v_\varepsilon - u)\|_{L^2(D_\varepsilon^+)} \leq \|\nabla(\Psi - u)\|_{L^2(D_\varepsilon^+)} \leq C,$$

et on a bien une borne uniforme pour v_ε dans $H^1(B_r)$.

A une sous suite extraite près, v_ε converge faiblement dans $H^1(B_r)$ vers une fonction v vérifiant $(D^+ = (B_r \setminus \overline{B_{r/2}}) \cap \{u > 0\})$:

$$\begin{aligned} v &= u \text{ sur } \partial B_r \\ v &= 0 \text{ dans } B_r \cap \{u = 0\} \\ v &= 0 \text{ dans } B_{r/2} \cap \{u > 0\} \\ -\Delta v &= f \text{ dans } D^+ = (B_r \setminus \overline{B_{r/2}}) \cap \{u > 0\} \end{aligned}$$

Si on prolonge v par u à l' extérieur de B_r on en déduit pour μ petit

$$\frac{1}{2}\int_{B_r} |\nabla u|^2 - \int_{B_r} fu + \mu|\{u \neq 0\} \cap B_r| \leq \frac{1}{2}\int_{B_r} |\nabla v|^2 - \int_{B_r} fv + \mu|\{v \neq 0\} \cap B_r|,$$

de plus on a $\{v \neq 0\} \cap B_r = D^+ = (B_r \setminus B_{r/2}) \cap \{u > 0\}$ et donc:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{B_{r/2}} |\nabla u|^2 + \mu|\{u \neq 0\} \cap B_{r/2}| &\leq \frac{1}{2}\int_{B_r \setminus B_{r/2}} (|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2) - \int_{B_r} f(v-u) \\ &= \frac{1}{2}\int_{B_r \setminus B_{r/2}} \nabla(v-u).\nabla(u - v + 2v) - \int_{B_r} f(v-u) \\ &\leq \int_{B_r \setminus B_{r/2}} \nabla(v-u).\nabla v - \int_{B_r} f(v-u) \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{B_r \setminus B_{r/2}} \nabla v_\varepsilon.\nabla(v_\varepsilon - u) - \int_{B_r} f(v_\varepsilon - u). \end{aligned}$$

En effet, grâce à la convergence faible on a:

$$\int_{B_r \setminus B_{r/2}} |\nabla v|^2 = \int_{B_r} |\nabla v|^2 \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{B_r} |\nabla v_\varepsilon|^2 = \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{B_r \setminus B_{r/2}} |\nabla v_\varepsilon|^2.$$

Notons:

$$G = \frac{1}{2}\int_{B_{r/2}} |\nabla u|^2 + \mu|\{u \neq 0\} \cap B_{r/2}|.$$

Comme $u = v_\varepsilon$ dans $B_r \setminus B_{r/2} \setminus D_\varepsilon^+$ on en déduit finalement

$$\begin{aligned} G &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{D_\varepsilon^+} \nabla v_\varepsilon.\nabla(v_\varepsilon - u) - \int_{B_r} f(v_\varepsilon - u) \\ &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_{r/2}\cap\{u>\varepsilon\}} -(u-\varepsilon)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n_i} + \int_{B_{r/2}} fu, \end{aligned} \tag{7.5}$$

où n_i est la normale intérieure à $\partial B_{r/2}$, c'est à dire la normale extérieure à D_ε^+. L' intégration par partie est justifiée par le fait que ∂D_ε^+ est régulier pour presque tout $\varepsilon > 0$ et de plus le seul endroit de ∂D_ε^+ où $u \neq v_\varepsilon$ est bien $\partial B_{r/2} \cap \{u > \varepsilon\}$.

Soit maintenant w_ε définie par:

$$\begin{aligned} w_\varepsilon &= u \text{ sur } \partial B_r \cap \{u > \varepsilon\} \\ w_\varepsilon &= \varepsilon \text{ sur } \partial B_r \cap \{u \leq \varepsilon\} \cup B_{r/2} \\ -\Delta w_\varepsilon &= f \text{ dans } B_r \setminus B_{r/2}, \end{aligned}$$

on a alors que $w_\varepsilon \geq v_\varepsilon$ sur $B_r \setminus B_{r/2}$. En effet w_ε est surharmonique sur $B_r \setminus B_{r/2}$ et est supérieure à ε sur le bord, elle est donc supérieure à ε partout. En particulier sur D_ε^+ $w_\varepsilon - v_\varepsilon$ est positive sur le bord et harmonique à l' intérieur donc positive à l' intérieur. Enfin sur $B_r \cap \{u \leq \varepsilon\}$ on a $v_\varepsilon = u \leq \varepsilon \leq w_\varepsilon$. Comme $w_\varepsilon = v_\varepsilon = \varepsilon$ sur $\partial B_{r/2} \cap \{u > \varepsilon\}$, et $w_\varepsilon \geq v_\varepsilon \geq \varepsilon$ dans D_ε^+, on en déduit en particulier

$$0 \leq -\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n_i} \leq -\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n_i} \text{ sur } \partial B_{r/2} \cap \{u > \varepsilon\}.$$

Soit w_ε^0 définit par:

$$\begin{aligned} w_\varepsilon^0 &= u \text{ sur } \partial B_r \cap \{u > \varepsilon\} \\ w_\varepsilon^0 &= \varepsilon \text{ sur } \partial B_r \cap \{u \leq \varepsilon\} \cup B_{r/2} \\ -\Delta w_\varepsilon^0 &= 0 \text{ dans } B_r \setminus B_{r/2}, \end{aligned}$$

on a alors:

$$|\nabla w_\varepsilon^0(x)| \leq \frac{C}{r} \fint_{\partial B_r} (u-\varepsilon)^+ \leq C\gamma, x \in \partial B_{r/2},$$

avec C qui ne dépend que de la dimension et où on a posé $\gamma = \frac{1}{r}\fint_{\partial B_r} u$ (ceci peut s'obtenir en remarquant d'abord que $|\nabla w_\varepsilon^0(x)| \leq \frac{C}{r}\|w_\varepsilon^0\|_{L^\infty(B_{3r/4})}$ puis en utilisant le principe du maximum et la formule de Poisson).

Soit maintenant $w_\varepsilon^1 = w_\varepsilon - w_\varepsilon^0$ qui est nulle au bord de $B_r \setminus B_{r/2}$ et vérifie $-\Delta w_\varepsilon^1 = f$ à l' intérieur, et donc

$$\|\nabla w_\varepsilon^1\|_\infty \leq Cr\|f\|_\infty.$$

avec C qui ne dépend encore une fois que de la dimension. Finalement on en déduit:

$$0 \leq -\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n_i} \leq -\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n_i} \leq C\gamma + Cr\|f\|_\infty \text{ sur } \partial B_{r/2} \cap \{u > \varepsilon\}.$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_{r/2} \cap \{u>\varepsilon\}} -(u-\varepsilon)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n_i} &\leq \int_{\partial B_{r/2}} u\,(C\gamma + Cr\|f\|_\infty) \\ &= \int_{\partial B_{r/2}} u(C\gamma + Cr), \end{aligned} \tag{7.6}$$

avec C qui dépend de la dimension et de $\|f\|_\infty$.

On va maintenant montrer que pour $r \leq 1$:

$$\int_{\partial B_{r/2}} u \leq CG(\gamma + 1), \tag{7.7}$$

où C dépend de la dimension, de μ et de $\|f\|_\infty$. On a en effet, en utilisant que $\nabla u = 0$ presque-partout sur $\{u = 0\}$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_{r/2}} u &\leq C\left(\int_{B_{r/2}} |\nabla u| + \frac{1}{r}\int_{B_{r/2}} u\right) \\ &\leq C(\mu)\left(\int_{B_{r/2}} |\nabla u|^2 + \mu|\{u \neq 0\} \cap B_{r/2}|\right) + \frac{C}{r}\|u\|_{\infty, B_{r/2}}|\{u \neq 0\} \cap B_{r/2}| \\ &\leq \frac{C}{G} + \frac{C}{r}\|u\|_{\infty, B_{r/2}} G. \end{aligned}$$

Si on pose $w = 0$ sur ∂B_r et $\Delta w = f\chi_{\Omega_u}$ dans B_r alors $u + w$ est sous-harmonique (cf remarque 7.10) et donc, d'après la formule de poisson:

$$\|u + w\|_{\infty, B_{r/2}} \leq C \fint_{\partial B_r} u = C\gamma r,$$

et on a aussi:

$$\|w\|_{\infty, B_{r/2}} \leq Cr^2\|f\|_\infty,$$

et donc:

$$\|u\|_{\infty, B_{r/2}} \leq C\gamma r + C\|f\|_\infty r^2$$

Finalement on en déduit:

$$\int_{\partial B_{r/2}} u \leq CG + CG(\gamma + r\|f\|_\infty) \leq CG(1 + \gamma),$$

si on suppose $r \leq 1$, avec C qui ne dépend que de μ, de la dimension et de $\|f\|_\infty$. On a également de la même manière:

$$\begin{aligned}\int_{B_{r/2}} uf &\leq \|f\|_\infty |\{u \neq 0\} \cap B_{r/2}| \|u\|_{\infty, B_{r/2}} \\ &\leq \|f\|_\infty G(C\gamma r + C\|f\|_\infty r^2) \\ &\leq CGr(\gamma + 1), \end{aligned} \tag{7.8}$$

si $r \leq 1$, avec C qui dépend de μ, de la dimension et de $\|f\|_\infty$. On en déduit de (7.5) et de (7.6), puis de (7.7) et de (7.8), en supposant que $\gamma \leq 1$:

$$\begin{aligned} G &\leq \int_{\partial B_{r/2}} u(C\gamma + Cr) + \int_{B_{r/2}} fu \\ &\leq CG(1+\gamma)(C\gamma + Cr) + CGr(\gamma + 1) \\ &= CG\gamma + CrG, \end{aligned}$$

avec C qui dépend de la dimension, de μ et de $\|f\|_\infty$ et donc finalement si $r \leq r_0 = \frac{1}{2C}$, $r < 1$ et $\gamma < 1$

$$\frac{1}{2} G \leq CG\gamma.$$

On en déduit donc que si $\gamma < 1/(2C)$ on a $G = 0$ et donc $u = 0$ sur $B_{r/2}$.

Remarque 7.11 *Ce théorème implique en particulier qu'il existe $C > 0, r_0 > 0$ tel que, pour tout $r \leq 0$ et tout $x \in \partial\Omega_u$, on ait:*

$$\frac{1}{r} \fint_{B(x,r)} \leq C.$$

7.3 Régularité de la frontière réduite.

Dans la suite on fixe u solution de $(\mathcal{P})$ et D_1 vérifiant les conditions du théorème. 7.1.

Proposition 7.12 *Il existe $C_1 > 0, C_2 > 0, r_0 > 0$ tel que pour toute boule $B(x_1, r) \subset D_1$ avec $x_1 \in \partial\Omega_u$ et $r \leq r_0$ on ait:*

$$C_1 r^{d-1} \leq P(\Omega_u, B(x_1, r)) \leq C_2 r^{d-1}.$$

Démonstration: La deuxième inégalité vient de la propostion 5.23 appliquée dans un ouvert $D_1' \subset \{u \geq 0\} \cap \{f \geq 0\}$ tel que D_1 soit relativement

compact dans $D'1$. Soit $x_1 \in \partial\Omega_u$ et $r \leq r_0$ où r_0 est donné par le théorème 7.9. On note $B_s = B(x_1, r)$ pour $s \leq r$. Par le théorème 7.9 il existe $y \in \partial B_{r/2}$ tel que $u(y) \geq Cr$ avec C indépendant de x_1 et de r. Soit $\tau > 0$ et w définie par $w = 0$ sur $\partial B(y, \tau r)$ et $\Delta w = f\chi_{\Omega_u}$ dans $\partial B(y, \tau r)$. On a alors ($\|\nabla w\|_\infty \leq C\tau r \|f\|_\infty$):

$$\|w\|_{\infty, B(y,\tau r)} \leq C(\tau r)^2.$$

$u + w$ est sous-harmonique (voir remarque 7.10) donc:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau r} \fint_{\partial B(y,\tau r)} u &= \frac{1}{\tau r} \fint_{\partial B(y,\tau r)} (u + w) \\ &\geq \frac{1}{\tau r}(u + w)(y) \geq \frac{C}{\tau} - C\tau r. \end{aligned}$$

On peut donc conclure grâce à la proposition 5.15 que si τ est assez petit (en fonction de C) alors on a $u > 0$ dans $B(y, \tau r)$ et donc

$$|B_r \cap \Omega_u| \geq |B(y, \tau r) \cap \Omega_u| \geq \tau^d r^d.$$

Soit $v = u$ sur ∂B_r et $-\Delta v = f$ dans B_r. On a alors (voir (5.5) dans la démonstration de la proposition 5.15):

$$|B_r \setminus \Omega_u| \geq C \int_{B_r} |\nabla(u - v)|^2 \geq \frac{C}{r^2} \int_{B_r} |u - v|^2.$$

v est sur-harmonique donc supérieure dans B_r à la fonction harmonique valant $v = u$ sur le bord. Donc si $x \in B_{\tau r}$ on a, en appliquant la formule de Poisson,

$$v(x) \geq C(1 - \tau) \fint_{\partial B_r} u.$$

D' autre part $u(x) \leq C\tau r$, donc grâce au théorème 7.9:

$$(v - u)(x) \geq C(1 - \tau) \fint_{B_r} u - C\tau r \geq Cr - 2C\tau r \geq Cr,$$

si τ est assez petit. On en déduit finalement:

$$|B_r \setminus \Omega_u| \geq \frac{C}{r^2} \int_{B_{\tau r}} |u - v|^2 \geq C(\tau r)^d.$$

On a finalement montré qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ tel que pour r assez petit et tout $x_1 \in \partial\Omega_u$:

$$C_1 \leq \frac{|B_r \cap \Omega_u|}{r^{d-1}} \leq (\omega_n - C_2),$$

et donc par l' inégalité isopérimétrique relative:

$$P(\Omega_u, B(x_1, r)) \geq Cr^{d-1}.$$

Corollaire 7.13 *Soit u comme ci-dessus alors:*

$$\mathcal{H}^{d-1}\left((\partial\Omega_u \setminus \partial^*\Omega_u) \cap D_1\right) = 0.$$

On utilise la proposition ci-dessus et le lemme 10.4.

Proposition 7.14 *Il existe $C_1, C_2 > 0$ et r_0 tel que pour toute boule $B(x,r) \subset D_1$ avec $x \in \partial\Omega_u$ et $r \leq r_0$ alors:*

$$C_1 r^{d-1} \leq (\Delta u + f\chi_{\Omega_u})(B(x,r)) \leq C_2 r^{d-1}.$$

Démonstration: Notons m la mesure positive $(\Delta u + f\chi_{\Omega_u})$. Soit $x \in \partial\Omega_u$ et $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset D_1$. On a alors:

$$\int_{B(x,r)} dm = \int_{\partial B(x,r)} \nabla u.\nu d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{B(x,r)} f\chi_{\Omega_u} \leq Cr^{d-1} + Cr^d.$$

On en déduit donc bien la deuxième inégalité pour r assez petit.

Soit $y \in B(x,r)$ et soit G_y la fonction de Green pour le laplacien sur $B(x,r)$ avec y comme pôle, c' est à dire:

$$-\Delta G_y = \delta_y, G_y(z) = 0, z \in \partial B(x,r).$$

Supposons que $u(y) > 0$ alors:

$$\begin{aligned} u(y) + \int_{\partial B(x,r)} u\nabla G_y.\nu &= \int_{B(x,r)} \nabla G_y.\nabla u \qquad (7.9) \\ &= \int_{B(x,r)} (-\Delta u) G_y \\ &= -\int_{B(x,r)} G_y dm + \int_{B(x,r)} f G_y \qquad (7.10) \end{aligned}$$

Soit $0 < k < 1$ (petit). D' après le théorème 7.9 il existe $y \in \partial B(x, kr)$ tel que:

$$u(y) \geq ckr > 0.$$

D'autre part comme u est lipschitzienne alors:

$$u(y) \leq C|y - x| = Ckr.$$

Si $z \in B(y, c(k)r)$ on a:

$$u(z) \geq u(y) - |u(z) - u(y)| \geq ckr - Cc(k)r > 0,$$

dès que $c(k)$ est assez petit. Soit v la fonction harmonique dans B_r et valant u sur ∂B_r. Alors par intégration par parties

$$v(y) = \int_{B_r} -\Delta G_y v = -\int_{\partial B(x,r)} u \nabla G_y . \nu.$$

En utilisant que $y \in \partial B(x, kr)$ on en déduit par la formulde de Poisson $v(y) \geq C(1-k) \fint_{\partial B_r} u$. On a donc finalement,

$$-\int_{\partial B(x,r)} u \nabla G_y . \nu \geq C(1-k) \fint_{\partial B_r} u.$$

On en déduit en utilisant (7.10), le théorème 7.9 et en remarquant que $fG_y \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} G_y dm &= -u(y) - \int_{\partial B(x,r)} u \nabla G_y . \nu + \int_{\partial B(x,r)} f G_y \\ &\geq -Ckr + C'(1-k) \fint_{\partial B(x,r)} u \\ &\geq C^1 r - C^2 kr > Cr, \end{aligned}$$

dès que k est assez petit. Comme $u > 0$ sur $B(y, c(k)r)$ on a $m = 0$ sur $B(y, c(k)r)$ et donc:

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} G_y dm &= \int_{B(x,r) \setminus B(y,c(k)r)} G_y dm \\ &\leq \left(\sup_{B(x,r) \setminus B(y,c(k)r)} G_y \right) m(B(x,r)) \\ &\leq C(k) r^{2-d} m(B(x,r)). \end{aligned}$$

En combinant ces deux inégalités on trouve bien le résultat annoncé.

Théorème 7.15 *Soit u comme ci-dessus. Il existe une fonction g_u tel que pour tout borélien B inclus dans D_1:*

$$(\Delta u + f \chi_{\Omega_u})(B) = \int_{B \cap \partial \Omega_u} g_u d\mathcal{H}^{d-1}.$$

C'est à dire que pour toute fonction $\varphi \in C^{\infty_0}(D_1)$ on a:

$$-\int_{D_1} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\partial\Omega_u} g_u \varphi d\mathcal{H}^{d-1} - \int_{D_1} \varphi f \chi_{\Omega_u} dx.$$

De plus il existe C_1, C_2 tel que pour $\mathcal{H}^{d-1}$ presque tout $x \in \partial\Omega_u \cap D_1$ on ait:

$$C_1 \leq g_u(x) \leq C_2.$$

Démonstration: D' après les deux propositions précédentes il existe C_1 et C_2 tel que pour toute boule $B(x,r)$ avec $r \leq r_0$ et $x \in \partial\Omega_u$:

$$C_1 \mathcal{H}^{d-1}(B(x,r) \cap \partial\Omega) \leq (\Delta_u + f\chi_{\Omega_u})(B(x,r)) \leq C_2 \mathcal{H}^{d-1}(B(x,r) \cap \partial\Omega).$$

On en déduit donc le résultat par des résultats classiques de théorie de la mesure.

Proposition 7.16 *Soit $x_n \in \partial\Omega_u \cap D_1$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in \partial\Omega_u \cap D_1$ et soit r_n une suite tendant vers 0. Comme précédemment (voir le chapitre 6) on note:*

$$u_n = \frac{u(x_n + r_n x)}{r_n}$$

et u_0 la limite des u_n (qui existe toujours à une sous-suite extraite près) alors:

$$lim_{n\to\infty} \partial\{u_n > 0\} = \partial\{u_0 > 0\},$$

localement au sens de Hausdorff.

Démonstration: Soit $B = B(x_1, r)$ tel que $B \cap \partial\{u_0 > 0\} = \emptyset$. On a alors deux cas:

1) $B \subset \{u_0 > 0\}$ on a alors pour n assez grand $B(x_1, r/2) \subset \{u_n > 0\}$. En effet il existe $\alpha > 0$ tel que $u_0(x) > \alpha$ pour tout $x \in B(x_1, r/2)$ et u_n converge uniformément vers u_0 sur $B(x_1, r)$.

2) Si $u_0(x) = 0$ pour tout $x \in B(x_1, r)$, alors, par convergence uniforme des u_n, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout n assez grand on a: $u_n(x) \leq \varepsilon r^d, x \in B(x_1, r)$ on a donc pour tout $y \in B(x_1, r/2)$:

$$\frac{1}{r_n(r/2)} \fint_{\partial B(x_n + r_n y, r_n r/2)} u(y)dy = (r/2)^{-d} \fint_{\partial B(x_1, r/2)} u_n \leq \varepsilon,$$

et donc grâce au théorème 7.9 $x_n + r_n y \notin \partial\Omega_u$ c' est à dire que $y \notin \partial\{u_n > 0\}$.

Dans les deux cas pour n assez grand $B(x_1, r/2) \cap \partial\{u_n > 0\} = \emptyset$ dès que n est assez grand.

Soit maintenant $B(x_1,r)$ tel que $B(x_1,r)\cap\partial\{u_n>0\}=\emptyset$ pour une infinité de n. On a la encore deux cas:

1) Si $u_n(x)>0, x\in B(x_1,r)$ pour une infinité de n, alors $B(x_1,r)\subset H^-$ presque-partout (en effet $B(x_1,r)\subset\Omega_n$ pour une infinité de n et χ_{H^-} est la limite presque-partout de χ_{Ω_n}). On en déduit alors que u_0 est harmonique sur $B(x_1,r)$ (voir la proposition 6.4) et donc u_0 est identiquement nulle ou bien strictement positive sur $B(x_1,r/2)$.

2) Si $u_n=0$ sur $B(x_1,r)$ pour une infinité de n on a alors $u_0=0$.

Dans les deux cas: $B(x_1,r/2)\cap\partial\{u_0>0\}=\emptyset$.

Théorème 7.17 *Dans D_1 on a:*

$$\Delta u+f\chi_{\Omega_u}=\sqrt{2\lambda}\mathcal{H}^{d-1}\lfloor\partial\Omega_u,$$

où λ est celui qui apparaît dans l'équation d'Euler.

Démonstration: Soit g_u comme dans le théorème 7.15 pour presque-tout $x_0\in\partial\Omega_u\cap D_1$ on a $x_0\in\partial^*\Omega_u\cap D_1$ et:

$$\lim_{r\to 0}\fint_{B(x_0,r)\cap\partial\Omega_u}|g_u(y)-g_u(x_0)|d\mathcal{H}^{d-1}(y)=0.$$

Soit un tel x_0. Il reste donc à montrer que $g_u(x_0)=\sqrt{2\lambda}$. On note u_n une explosion de u en x_0 (avec $x_n=x_0$) et u_0 la limite. On suppose de plus que la normale à Ω_u en x_0 est $-e_d$ et donc $u_0(x)=\sqrt{2\lambda}\max\{x_d,0\}$. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors:

$$\begin{aligned}-\int\nabla u_n.\nabla\varphi &= \int_{\partial\{u_n>0\}}\varphi(x)g_u(x_0+r_nx)d\mathcal{H}^{d-1}(x)-\int_{\{u_n>0\}}\varphi(x)f(x_0+r_nx)r_ndx\\ &= g_u(x_0)\int_{\partial\{u_n>0\}}\varphi(x)d\mathcal{H}^{d-1}(x)+\int_{\partial\{u_n>0\}}(g_u(x)-g_u(x_0))\varphi(x)d\mathcal{H}^{d-1}(x)+o(1)\\ &= g_u(x_0)\int_{\mathbb{R}^d}\varphi|D\chi_{\Omega_n}|+o(1),\end{aligned}$$

grâce au théorème 7.15 et à l'hypothèse sur x_0. En faisant tendre n vers $+\infty$, comme $x_0\in\partial^*\{u>0\}$ on en déduit:

$$-\int\nabla\varphi.\nabla u_0=g_u(x_0)\int_{\{x_d=0\}}\varphi d\mathcal{H}^{d-1}.$$

D'autre part comme $x_0\in\partial^*\Omega_u$ on sait que $\nabla u_0=e_d\chi_{\{x_d>0\}}$ et donc

$$\int\nabla u_0\nabla\varphi=\int_{\{x_d>0\}}\sqrt{2\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x_d}=-\sqrt{2\lambda}\int_{\{x_d=0\}}\varphi(x_1,...,x_{d-1},0)dx_1...dx_{d-1}.$$

On en déduit donc bien: $g_u(x_0) = \sqrt{2\lambda}$.

Proposition 7.18 *Soit D_2 relativement compact dans D_1 tel que $f(x) = 0$ pour $x \in D_2$. On a les propriétés suivantes sur u:*

1) u est continue positive dans D_2 et harmonique sur $\Omega_u \cap D_2$

2) Il existe $r_0, C_1, C_2 > 0$ tels que pour toute boule $B(x,r) \subset D_2$ avec $r \leq r_0$ et $x \in \partial\Omega_u$ on ait:

$$C_1 \leq \frac{1}{r} \fint_{\partial B(x,r)} u d\mathcal{H}^{d-1} \leq C_2.$$

3)$\Delta u = \sqrt{2\lambda}\mathcal{H}^{d-1} \lfloor \partial\Omega_u$ dans D_2.

Ceçi découle directement de ce qui précède en remarquant que dans D_2 on a $\Delta_u + f\chi\Omega_u = \Delta u$.

On remarque ainsi que u vérifie (presque) la définition 5.1 de [9] avec $\Omega = D_2$ et $Q(x) = \sqrt{2\lambda}, x \in D_2$. La seule différence est dans le point 2: on a içi une condition supplémentaire $r \leq r_0$. En appliquant le théorème 8.4 de [9] avec $\Omega = B_R \subset D_2$ avec $R \leq r_0$ (ainsi on fait disparaître la condition $r \leq r_0$) on en déduit:

Théorème 7.19 *Soit D_2 comme ci-dessus alors $\partial^*\Omega_u$ est analytique dans D_2 et $\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega_u \setminus \partial^*\Omega_u) = 0$.*

Chapitre 8

Le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$.

8.1 Existence et propriétés.

Dans ce chapitre on suppose que $f \geq 0, f \in L^\infty(D)$ avec f non identiquement nulle et que $|D| < +\infty$. Pour $\lambda > 0$ on définit:

$$m_\lambda = \inf \left\{ J(v) + \lambda |\Omega_v|, v \in H_0^1(D) \right\}.$$

L'étude de ce problème est évidemment motivée par le fait qu'on ait pour u solution de $(\mathcal{P})$ où D_1 vérifie les hypothèses du théorème 7.1,

$$J(u) + \mu |\Omega_u| \leq J(v) + \mu |\Omega_v|,$$

pour tout $v \in H_0^1(D)$ tel que $u - v \in H_0^1(D_1)$ avec $|\Omega_v| \leq |\Omega_u|$ et

$$J(u) + \lambda^* |\Omega_u| \leq J(v) + \lambda^* |\Omega_v|,$$

pour tout $v \in H_0^1(D)$ tel que $u - v \in H_0^1(D_1)$ avec $|\Omega_v| \geq |\Omega_u|$. Avec de plus $\mu \leq \lambda^*$.

Proposition 8.1 *Pour tout $\lambda > 0$, il existe u_λ tel que:*

$$m_\lambda = J(u_\lambda) + \lambda |\Omega_{u_\lambda}| \leq J(v) + \lambda |\Omega_v|, v \in H_0^1(D).$$

De plus si $\lambda < \tilde{\lambda}$ pour toutes solutions u_λ et $u_{\tilde{\lambda}}$ on a:

$$|\Omega_{u_\lambda}| \geq |\Omega_{u_{\tilde{\lambda}}}|,$$

$$J(u_\lambda) \leq J(u_{\tilde{\lambda}}).$$

Démonstration: Soit $\lambda > 0$ et $u \in H_0^1(D)$,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2 - \int_D fu$$

on a alors:

$$J(u) + \lambda|\Omega_u| \geq \frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2 - C|D|^{\frac{1}{d}}\|f\|_{L^2(D)}\|\nabla u\|_{L^2(D)} + \lambda|\Omega_u|,$$

et donc:

$$m_\lambda = \inf\left\{J(v) + \lambda|\Omega_v|, v \in H_0^1(\Omega)\right\} > -\infty.$$

Soit donc (u_n) une suite minimisante. Comme dans l' existence de minimum pour le problème $(\mathcal{P}_0)$ cette suite est bornée dans $H_0^1(D)$ et donc, à une sous suite extraite près, converge vers u_λ et presque partout. On a alors

$$J(u_\lambda) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n),$$
$$|\Omega_{u_\lambda}| \leq \liminf_{n\to\infty} |\Omega_{u_n}|,$$

et donc on a bien:

$$J(u_\lambda) \leq \lim_{n\to\infty} J(u_n) = m_\lambda.$$

Soit $0 < \lambda < \tilde{\lambda}$ et u_λ et $u_{\tilde{\lambda}}$ deux solutions pour λ et $\tilde{\lambda}$ respectivement. On a alors par définition:

$$\begin{aligned} J(u_\lambda) + \lambda|\Omega_{u_\lambda}| &\leq J(u_{\tilde{\lambda}}) + \lambda|\Omega_{u_{\tilde{\lambda}}}| \\ &\leq J(u_\lambda) + \tilde{\lambda}|\Omega_{u_\lambda}| + (\lambda - \tilde{\lambda})|\Omega_{u_{\tilde{\lambda}}}|. \end{aligned}$$

On en déduit donc:

$$(\lambda - \tilde{\lambda})|\Omega_{u_\lambda}| \leq (\lambda - \tilde{\lambda})|\Omega_{u_{\tilde{\lambda}}}|,$$

et donc

$$|\Omega_{u_{\tilde{\lambda}}}| \leq |\Omega_{u_\lambda}|.$$

Maintenant on peut en déduire que

$$\begin{aligned} J(u_\lambda) + \lambda|\Omega_{u_\lambda}| &\leq J(u_{\tilde{\lambda}}) + \lambda|\Omega_{u_{\tilde{\lambda}}}| \\ &\leq J(u_{\tilde{\lambda}}) + \lambda|\Omega_{u_\lambda}|, \end{aligned}$$

et donc:

$$J(u_\lambda) \leq J(u_{\tilde{\lambda}}).$$

Dans la suite u_λ désignera toujours une solution du problème $(\mathcal{P}_\lambda)$.

Remarque 8.2 *Soit u_λ une solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$. Alors u_λ est solution de $(\mathcal{P}_{D,\lambda,\lambda})$ avec $a = |\Omega_{u_\lambda}|$ et donc on peut appliquer les résultats de la partie précédent: par exemple comme $f \geq 0$ on sait que u_λ est localement lipschitzienne dans D.*

Remarque 8.3 *A priori la valeur de $|\Omega_{u_\lambda}|$ dépend de la solution et pas seulement de λ.*

Proposition 8.4 *On note u_λ une solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$. On étudie le comportement de $|\Omega_{u_\lambda}|$ quand λ tend vers 0 et vers $+\infty$. Précisément on a:*

$$\lim_{\lambda \to 0} |\Omega_{u_\lambda}| = |D|,$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} |\Omega_{u_\lambda}| = 0.$$

Première limite: Soit λ_n une suite décroissante vers 0 et $u_n = u_{\lambda_n}$. Supposons que:

$$\liminf_{n \to \infty} |\Omega_{u_n}| < D.$$

Comme $\lambda_n < \lambda_1$ on en déduit:

$$J(u_n) \leq J(u_{\lambda_1}),$$

et donc la suite u_n est bornée dans $H_0^1(D)$. On peut donc supposer qu'elle converge faiblement et presque partout vers u_0. Et donc:

$$J(u_0) \leq \liminf_{n \to \infty} J(u_n),$$

$$|\Omega_{u_0}| \leq \liminf_{n \to \infty} |\Omega_{u_n}| < D,$$

En écrivant alors la minimalité de u_n puis en faisant tendre n vers $+\infty$ on en déduit:

$$J(u_0) \leq J(v), v \in H_0^1,$$

et donc u_0 vérifie $-\Delta u_0 = f$ dans D avec $|\Omega_{u_0}| < D$ ce qui contredit l'hypothèse $f \geq 0$ et non identiquement nulle.

Deuxième limite: Soit λ_n croissante vers $+\infty$ et u_n comme ci-dessus. Supposons que:

$$\limsup_{n \to \infty} |\Omega_{u_n}| > 0,$$

On a alors d'une part:

$$J(u_n) + \lambda_n |\Omega_{u_n}| \leq J(0) = 0.$$

D'autre part:

$$J(u_n) \geq J(u_D) > -\infty,$$

où u_D vérifie:

$$-\Delta u_D = f, u_D \in H_0^1(D),$$

et on en déduit:

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) + \lambda_n |\Omega_{u_n}| \geq \lim_{n\to\infty} J(u_D) + \lambda_n |\Omega_{u_n}| = +\infty.$$

Proposition 8.5 *Soit $\lambda > 0$ il existe un couple unique de solutions de $(\mathcal{P}_\lambda)$: $(\underline{u_\lambda}, \overline{u_\lambda})$ tel que pour toute solution u_λ alors:*

$$|\Omega_{\underline{u_\lambda}}| \leq |\Omega_{u_\lambda}| \leq |\Omega_{\overline{u_\lambda}}|,$$

$$J(\overline{u_\lambda}) \leq J(u_\lambda) \leq J(\underline{u_\lambda}).$$

Démonstration: Soit λ_n une suite croissante strictement vers λ et $u_n = u_{\lambda_n}$. Alors:

$$J(u_n) \leq 0, |\Omega_{u_n}| \leq |D|,$$

et donc à une sous-suite extraite près on peut supposer que u_n converge faiblement dans $H_0^1(D)$ et presque partout vers u_0. Alors:

$$J(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n), |\Omega_{u_0}| \leq \liminf_{n\to\infty} |\Omega_{u_n}|, \tag{8.1}$$

En écrivant la minimalité de u_n:

$$J(u_n) + \lambda_n |\Omega_{u_n}| \leq J(v) + \lambda |\Omega_v|, v \in H_0^1(D),$$

et en faisant tendre n vers l'infini on obtient:

$$J(u_0) + \lambda |\Omega_{u_0}| \leq J(v) + \lambda |\Omega_v|, v \in H_0^1(D),$$

c'est à dire que u_0 est solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$. Si on suppose qu'une des deux inégalités de (8.1) est stricte on aurait aussi une inégalité stricte ci-dessus, ce qui est impossible. On peut donc remplacer limites inférieures et inégalité par limites et égalités dans (8.1). Soit u_λ une solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$, comme $\lambda_n < \lambda$ pour tout n alors:

$$|\Omega_{u_n}| \geq |\Omega_{u_\lambda}|, J(u_n) \leq J(u_\lambda),$$

et en faisant tendre n vers l' infini on en déduit:

$$|\Omega_{u_0}| \geq |\Omega_{u_\lambda}|, J(u_0) \leq J(u_\lambda),$$

c'est à dire que u_0 est bien comme le $\overline{u_\lambda}$ de la conclusion de la proposition. On procède de la même manière pour $\underline{u_\lambda}$ en prenant une suite décroissante vers λ.

Démonstration de l'unicité: Soit deux solutions $\underline{u_\lambda^1}$ et $\underline{u_\lambda^2}$ et posons:

$$u^+(x) = \max\{\underline{u_\lambda^1}(x), \underline{u_\lambda^2}(x)\}, x \in D,$$

$$u^-(x) = \min\{\underline{u_\lambda^1}(x), \underline{u_\lambda^2}(x)\}, x \in D.$$

On a alors:

$$\underline{u_\lambda^1}(x) + \underline{u_\lambda^2}(x) = u^+(x) + u^-(x), x \in D,$$

et:

$$|\nabla \underline{u_\lambda^1}(x)|^2 + |\nabla \underline{u_\lambda^2}(x)|^2 = |\nabla u^+(x)|^2 + |\nabla u^-(x)|^2, x \in D \text{ presque partout},$$

cette dernière inégalité est vraie sur les ouverts $\{\underline{u_\lambda^1} < \underline{u_\lambda^2}\}$ et sur $\{\underline{u_\lambda^1} > \underline{u_\lambda^2}\}$. Sur $\{\underline{u_\lambda^1} = \underline{u_\lambda^2}\}$ on a aussi

$$u^+ = u^- = \underline{u_\lambda^1} = \underline{u_\lambda^2}$$

et donc:

$$\nabla u^+ = \nabla u^- = \nabla \underline{u_\lambda^1} = \nabla \underline{u_\lambda^2} \text{ presque partout.}$$

On a également:

$$\chi_{\Omega_{\underline{u_\lambda^1}}}(x) + \chi_{\Omega_{\underline{u_\lambda^2}}}(x) = \chi_{\Omega_{u^+}}(x) + \chi_{\Omega_{u^-}}(x), x \in D.$$

On en déduit donc:

$$J(u^+) + \lambda|\Omega_{u^+}| + J(u^-) + \lambda|\Omega_{u^-}| = J(u_\lambda^1) + \lambda|\Omega_{\underline{u_\lambda^1}}| + J(\underline{u_\lambda^2}) + \lambda|\Omega_{\underline{u_\lambda^2}}| = 2m_\lambda,$$

c' est à dire que u^+ et u^- sont solutions de $(\mathcal{P}_\lambda)$. Comme $\underline{u_\lambda^1}$ et $\underline{u_\lambda^2}$ sont positives on a

$$\Omega_{u^-} \subset \Omega_{\underline{u_\lambda^1}},$$

mais par hypothèse:

$$|\Omega_{u^-}| \geq |\Omega_{\underline{u_\lambda^1}}|,$$

on en déduit:

$$\Omega_{u^-} = \Omega_{\underline{u_\lambda^1}},$$

et comme sur cette ensemble u^- et $\underline{u_\lambda^1}$ vérifient $-\Delta u = f$ on a bien $u^- = \underline{u_\lambda^1} = \underline{u_\lambda^2}$. Pour l'unicité de $\overline{u_\lambda}$ on procède de la même manière, et on trouve alors que:

$$\Omega_{\overline{u_\lambda^1}} \subset \Omega_{u^+},$$

avec

$$|\Omega_{u^+}| \leq |\Omega_{\overline{u_\lambda^1}}|,$$

et donc $\Omega_{\overline{u_\lambda^1}} = \Omega_{u^+}$ et on en déduit l' unicité.

On voit donc que pour λ donné il existe deux possibilités:

Cas 1: Pour toute solution u_λ la mesure de Ω_{u_λ} est la même et alors on a en faite unicité de la solution pour $(\mathcal{P}_\lambda)$. En effet en reprenant le calcul ci-dessus avec $\underline{u_\lambda}$ et $\overline{u_\lambda}$ on montre que $\min\{\underline{u_\lambda}, \overline{u_\lambda}\}$ est encore solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$ et on en déduit l' unicité. Si u est une solution de $(\mathcal{P})$ avec $a = |\Omega_{u_\lambda}|$ alors u est aussi solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$ $(J(u) \leq J(u_\lambda)$ et $|\Omega_{u_\lambda}| = |\Omega_u|$) et donc $u = u_\lambda$ et on a également unicité pour $(\mathcal{P})$.

Cas 2: Si $|\Omega_{\underline{u_\lambda}}| < |\Omega_{\overline{u_\lambda}}|$ on a encore unicité pour le problème $(\mathcal{P})$ avec $a = |\Omega_{\underline{u_\lambda}}|$ ou $a = |\Omega_{\overline{u_\lambda}}|$ par contre on ne peut rien dire à priori si a est compris strictement entre les deux. En procédant comme ci-dessus et en regardant la solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$ définie par $u^- = \min\{\underline{u_\lambda}, \overline{u_\lambda}\}$ on trouve par définition de $\underline{u_\lambda}$:

$$|\Omega_{u^-}| \geq |\Omega_{\underline{u_\lambda}}|$$

mais

$$\Omega_{u^-} \subset \Omega_{\underline{u_\lambda}},$$

on a alors égalité ci-dessus et donc $u^- = \underline{u_\lambda}$ c' est à dire que $\underline{u_\lambda} \leq \overline{u_\lambda}$.

8.2 Différences entre $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_\lambda)$.

On va étudier un exemple montrant la différence entre les problèmes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_\lambda)$. On prend $D = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ et $f = 1$ sur D. Soit $0 < a < 1$. On note u_a la solution de

$$-\Delta u_a = 1, u_a \in H_0^1(B(0,a)).$$

qui vaut:

$$u_a(r,\theta) = \frac{a^2 - r^2}{4}, 0 \leq r \leq a,$$

et son énergie:

$$J(u_a) = -\frac{1}{2}\int_{B(0,a)} f u_a = -\frac{1}{2}\int_{B(0,a)} u_a = -\pi \int_0^a \frac{a^2 - r^2}{4} r dr = -\frac{\pi a^4}{16}.$$

Par symétrisation on voit que u_a est un minimum pour $(\mathcal{P})$. Soit:

$$f(a) = J(u_a) + \lambda|\Omega_a| = -\frac{\pi a^4}{16} + \lambda\pi a^2, 0 \leq a.$$

On voit alors que f est croissante de 0 à $a_1 = 2\sqrt{2\lambda}$ avec $f(a_1) = 4\lambda^2\pi$. Puis décroissante pour $a > a_1$ avec, si on pose $a_2 = 4\sqrt{\lambda}, f(a_2) = 0$.

On voit donc qu' il y a trois cas:

1)$\lambda < \frac{1}{16}$ (c' est à dire $a_2 < 1$) alors

$$f(a) > f(1) = -\pi/16 + \lambda\pi, 0 \leq a < 1.$$

On voit alors que l' unique solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$ est u_1. En effet si $v \in H_0^1(D)$ on a vu que $J(v) \geq J(u_a)$ si a est tel que $\pi a^2 = |\Omega_v|$ donc:

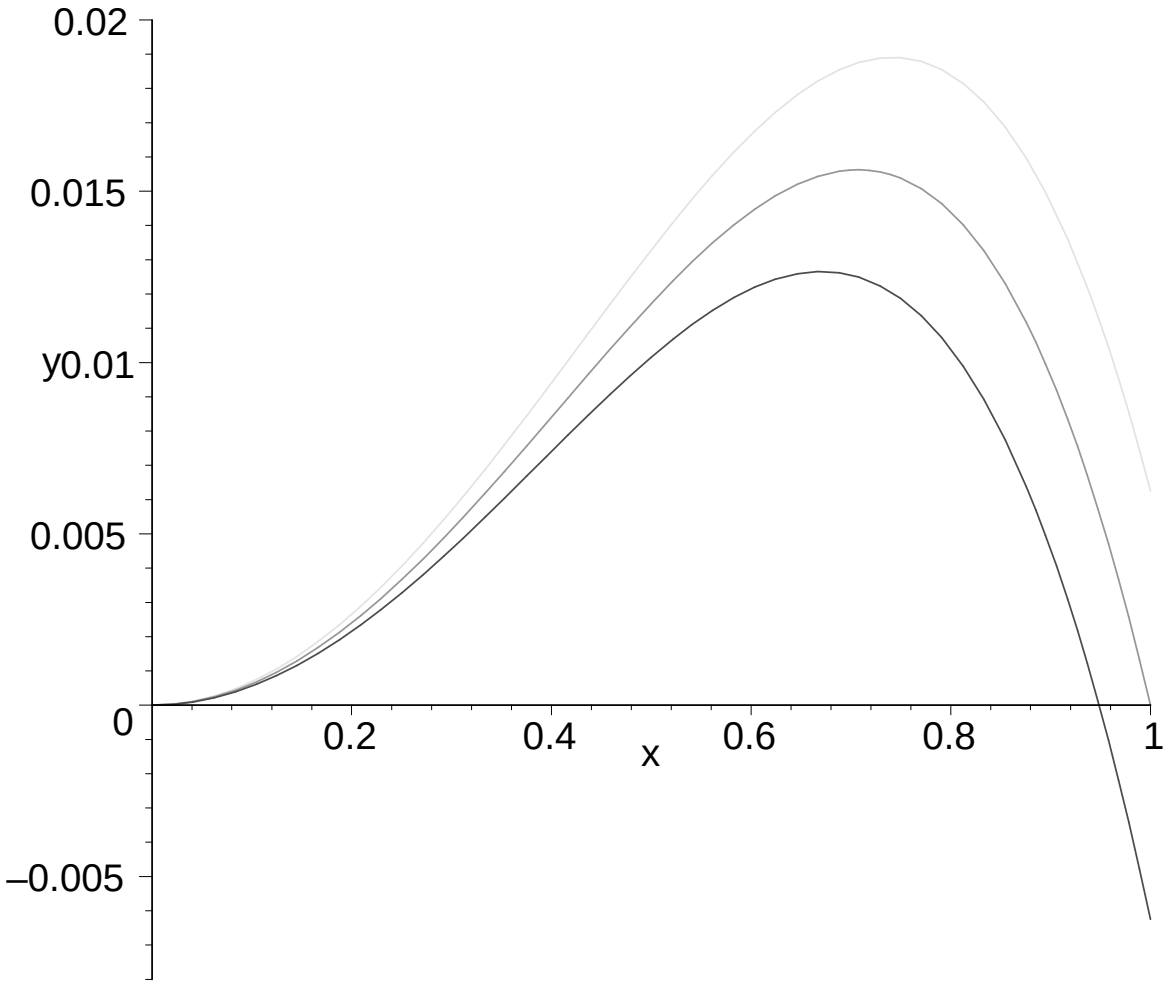
$$J(v) + \lambda|\Omega_v| \geq J(u_a) + \lambda\pi a^2 \geq J(u_1) + \lambda\pi,$$

avec égalité si et seulement si $v = u_1$.

2)$\lambda = \frac{1}{16}$: On voit alors que pour $0 < a < 1$ on a $f(a) > 0$ et $f(0) = f(1) = 0$ on en déduit donc que $(\mathcal{P}_\lambda)$ a deux solutions: u_0 et u_1. On est donc dans le cas où il existe plusieurs solutions de $(\mathcal{P}_\lambda)$ de mesures différentes.

3)$\lambda > \frac{1}{16}$. La seule solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$ est alors $u = 0$.

On voit donc que si on prend $0 < a < 1$ la solution du problème $(\mathcal{P})$, c'est à dire u_a, n'est jamais solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$ et ce quelque soit λ. Sur la page suivante on trouve la représentation de $a \to f(a)/\pi$ pour trois valeurs de λ corespondant aux trois cas ci-dessus: $\lambda = 0.9/16, \lambda = 1.1/16$ et $\lambda = 1/16$.


0.02
0.015
y0.01
0.005
0
–0.005
0.2
0.4
x
0.6
0.8
1
Legende
f(a)/pi pour lambda= 0.9/16
f(a)/pi pour lambda= 1/16
f(a)/pi pour lambda= 1.1/16

On va maintenant étudier sur cette exemple le comportement de λ^* et $\mu > 0$ tels que:

$$J(u_a) \leq J(v) + \lambda^*(|\Omega_v| - |\Omega_{u_a}); v \in H_0^1(D), |\Omega_v| > |\Omega_{u_a}|,$$

$$J(u_a) + \mu(|\Omega_{u_a}| - |\Omega_v|) \leq J(v); v \in H_0^1(D), |\Omega_v| < |\Omega_{u_a}|.$$

Il suffit de regarder pour des v de la forme u_{a+h} et u_{a-h} avec $h > 0$. Soit λ celui qui apparait dons l'équation d'Euler, on a,

$$\frac{\partial u_a}{\partial n}(a, \theta) = -\frac{a}{2} = -\sqrt{2\lambda},$$

donc $\lambda = \frac{a^2}{8}$. Si λ^* est comme ci-dessus, alors pour tout $h > 0$ tel que $a+h < 1$ on a:

$$\begin{aligned} -\pi\frac{a^4}{16} = J(u_a) &\leq J(u_{a+h}) + \lambda^*(\pi(a+h)^2 - \pi a^2) \\ &= -\frac{(a+h)^4}{16} + 2\lambda^* ah + \lambda^* h^2 \\ &= -\pi\frac{a^4}{16} + \pi h(-\frac{a^3}{4} + 2a\lambda^*) - \pi h^2(\frac{3a^2}{8} - \lambda^*) - \pi h^3\frac{a}{4} - \pi\frac{h^4}{16}. \end{aligned}$$

En divisant par $h > 0$ et en faisant tendre h vers 0 on voit que $\lambda^* \geq \frac{a^2}{8} = \lambda$. En rálité on doit avoir $\lambda^* > \lambda$: il suffit de prendre $\lambda^* = \lambda$ et de regarder le terme en h^2 ci-dessus: il est alors négatif. Par contre on voit que pour tout $\lambda^* > \lambda$ il existe $h_0 > 0$ tel que

$$J(u_a) \leq J(u_{a+h}) + \lambda^*(|\Omega_{u_{a+h}}| - |\Omega_{u_a}|); 0 \leq h \leq h_0.$$

Soit maintenant $\mu > 0$ tel que pour $h > 0$ on ait:

$$\begin{aligned} J(u_a) + \mu\pi a^2 &\leq J(u_{a-h}) + \mu\pi(a-h)^2 \\ &= -\pi\frac{a^4}{16} + \mu\pi a^2 + \pi h(\frac{a^3}{4} - 2\mu a) + \pi h^2(\mu\pi - \frac{3a^2}{8}) + \pi h^3\frac{a}{4} + \pi\frac{h^4}{16}. \end{aligned}$$

On en déduit alors comme ci-dessus: d'une part on doit avoir $\mu < \lambda = \frac{a^2}{8}$ et d'autre par pour tout $\mu < \lambda$ il existe $h_0 > 0$ tel que:

$$J(u_a) + \mu\pi a^2 \leq J(u_{a-h}) + \mu\pi(a-h)^2; h \leq h_0.$$

Troisième partie

Le problème complet.

Chapitre 9

Le problème relaxé avec périmètre.

9.1 Deux formulations du problème.

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, $f \in L^\infty(D) \cap L^2(D)$. Dans cette partie on va étudier la fonctionnelle suivante:

$$J(u,\Omega) = E(u) + (|\Omega| - a)^2 + P(\Omega, D),$$

pour Ω ouvert inclus dans D et $u \in H_0^1(\Omega)$ avec

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega fu.$$

A Ω fixé le minimum de E est atteint pour $u = u_\Omega$ solution de

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

On va aussi étudier la fonctionnelle suivante:

$$J_2(u,\Omega) = E(u) + (|\Omega| - a)^2 + \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega \cap D).$$

Proposition 9.1 *Soit D et f comme ci-dessus alors:*

$$\inf\{J(u_\Omega,\Omega), \Omega \subset D\} = \inf\{J_2(u_\Omega,\Omega), \Omega \subset D\} > -\infty.$$

Démonstration: Pour tout Ω ouvert inclus dans D et $u \in H_0^1(\Omega)$ on a déjà:

$$J_2(u,\Omega) \geq J(u,\Omega) \geq J(u_D, D) > -\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $u, \Omega, u \in H_0^1(\Omega)$ tels que:

$$J(u,\Omega) \leq \inf\{J(u_\Omega,\Omega), \Omega \subset D\} + \varepsilon.$$

Par définition de $H_0^1(\Omega)$ il existe $\Psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que:

$$E_\Omega(\Psi) \leq E_\Omega(u) + \varepsilon,$$

notons K le support de Ψ.

On va d'abord montrer qu'il existe une suite de fonctions f_j de $C^\infty \cap BV(\Omega)$ tel que:

$$1) \quad \lim_{j\to\infty} \|f_j - \chi_\Omega\|_{L^1(D)} = 0, \tag{9.1}$$

$$2) \quad \lim_{j\to\infty} \int_D |Df_j| = \int_D |D\chi_\Omega|, \tag{9.2}$$

$$3) \quad 0 \leq f_j(x), x \in D, f_j(x) = 1, x \in K. \tag{9.3}$$

La construction des f_j est la même que dans l'approximation des fonctions BV (voir [3]), il faut vérifier qu'on peut faire en sorte que $f_j(x) = 1, x \in K$. Soit $\alpha > 0$ petit. Notons:

$$D_k = \{x \in D, dist(x, \partial D) > \frac{1}{m+k}\}.$$

où m est choisit tel que:

$$K \subset D_0 \text{ et } \int_{D\setminus D_0} |D\chi_\Omega| < \alpha.$$

Pour $i \geq 2$ posons:

$$A_i = D_{i+1} \setminus D_{i-1}, A_1 = D_2.$$

Soit (φ_i) une partition de l'unité associé au recouvrement de D par les A_i:

$$\varphi_i \in C_0^\infty(A_i), 0 \leq \varphi_i \leq 1, \sum_1^\infty \varphi_i = 1,$$

et $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^D)$ tel que:

$$0 \leq \eta \leq 1, supp(\eta) = \overline{B(0,1)}, \int_{\mathbb{R}^d} \eta = 1.$$

On définit alors $\eta_s = s^{-d}\eta(\frac{x}{s})$. Soit ε_i tel que:

$$supp(\eta_{\varepsilon_i} * (\chi_\Omega \varphi_i)) \subset D_{i+2} \setminus \overline{D_{i+2}}, i \geq 0, (D_{-1} = \emptyset),$$

$$\int_D |\eta_{\varepsilon_i} * (\chi_\Omega \varphi_i) - \chi_\Omega \varphi_i| < \alpha 2^{-i},$$
$$\int_D |\eta_{\varepsilon_i} * (\chi_\Omega D\varphi_i) - \chi_\Omega D\varphi_i| < \alpha 2^{-i}.$$

Notons alors:

$$f_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_i} * (\chi_\Omega \varphi_i) \in C^\infty.$$

Soit $x \in K \subset D_0 \subset A_1$ et donc $x \notin A_i, i \geq 2$ alors:

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \eta\varepsilon_1 * (\chi_\Omega \varphi_1)(x) \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(y)\chi_\Omega(x+\varepsilon_i y)\varphi(x+\varepsilon_i y)dy = 1, \end{aligned} \tag{9.4}$$

dès que ε_1 est assez petit (indépendamment de x) car K est compact inclus dans Ω ouvert donc dès que ε_1 est assez petit on a $x + \varepsilon_1 y \in \Omega$. Comme $\Omega \subset D_0$ on a alors $x + \varepsilon_1 y \in A_i, x + \varepsilon_1 y \notin A_i, i \geq 2$ et donc $\varphi(x + \varepsilon_1 y) = 1$. La fonction f_α vérifie bien la propriété 3). De plus:

$$\int_D |f_\alpha - \chi_\Omega| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_D |\eta_{\varepsilon_i} * (\chi_\Omega \varphi_i) - \chi_\Omega \varphi_i| \leq \alpha.$$

Soit $g \in C_0^1(D, \mathbb{R}^2), |g(x)| \leq 1, x \in D$ alors:

$$\begin{aligned} \int_D f_\alpha div g &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_D \eta_{\varepsilon_i} * (\chi_\Omega \varphi_i) div g \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_D \chi_\Omega \varphi_i div(\eta_{\varepsilon_i} * g) \\ &= \int_D \chi_\Omega div(\varphi_1 \eta_{\varepsilon_1} * g) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_D \chi_\Omega div(\varphi_i \eta_{\varepsilon_i} * g) \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} \int_D \left(g.\eta_{\varepsilon_i} * (\chi_\Omega D\varphi_i) - \chi_\Omega D\varphi_i\right), \end{aligned}$$

en effet:

$$div(\varphi_i \eta_{\varepsilon_i} * g) = \varphi_i div(\varphi_i \eta_{\varepsilon_i} * g) + (\eta_{\varepsilon_i} * g, D\varphi_i),$$

et $\sum_{i=1}^{\infty} D\varphi_i = 0$. On a alors:

$$\int_D \chi_\Omega div(\varphi_1 \eta_{\varepsilon_1} * g) \leq \int_D |D\chi_\Omega|,$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} \int_D \chi_\Omega div(\varphi_i \eta_{\varepsilon_i} * g) \leq 3 \int_{D \setminus D_0} |D\chi_\Omega| \leq 3\alpha,$$

car chaque x appartient à au plus 3 A_i, enfin

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_D (g.\eta_{\varepsilon_i} * (\chi_\Omega D\varphi_i) - \chi_\Omega D\varphi_i) \leq \alpha,$$

car $|g| \leq 1$ et par définition des ε_i. On en déduit donc

$$\int_D f_\alpha div g \leq \int_D |D\chi_\Omega| + 4\alpha.$$

On peut donc bien construire une suite de fonction f_j vérifiant (9.1),(9.2) et (9.3).

Pour $0 < t < 1$ notons $E_{j,t} = \{x \in D, f_j(x) > t\}$, alors:

$$f_j(x) - \chi_\Omega > t, x \in E_{j,t} \setminus \Omega,$$
$$\chi_\Omega - f_j \geq 1 - t, x \in \Omega \setminus E_{j,t},$$

et on en déduit donc:

$$\begin{aligned} \int_D |f_j - \chi_\Omega| &\geq \int_{E_{j,t} \setminus \Omega} |f_j - \chi_\Omega| + \int_{\Omega \setminus E_{j,t}} |f_j - \chi_\Omega| \\ &\geq t|E_{j,t} \setminus \Omega| + (1-t)|\Omega \setminus E_{j,t}| \\ &\geq \min\{t, 1-t\} \int_D |\chi_{E_{j,t}} - \chi_\Omega| \end{aligned}$$

c'est à dire que pour tout t:

$$\lim_{j \to \infty} \chi_{E_{j,t}} = \chi_\Omega \text{ dans } L^1(D),$$

et donc:

$$\int_D |D\chi_\Omega| \leq \liminf_{i \to \infty} \int_D |D\chi_{E_{j,t}}|.$$

D'autre part (formule de la co-aire, cf 5.5 dans [15]):

$$\int_D |Df_j| \geq \int_0^1 dt \int_D |D\chi_{E_{j,t}}|,$$

et on en déduit donc, en utilisant 9.2 et le lemme de Fatou:

$$\begin{aligned} \int_D |D\chi_\Omega| &= \lim_{j \to \infty} \int_D |Df_j| \geq \liminf_{j \to \infty} \int_0^1 dt \int_D |D\chi_{E_{j,t}}| \\ &\geq \int_0^1 dt \liminf_{j \to \infty} \int_D |D\chi_{E_{j,t}}| \\ &\geq \int_D |D\chi_\Omega|. \end{aligned}$$

On voit donc que pour presque tout t:

$$\liminf_{j\to\infty} \int_D |D\chi_{E_{j,t}}| = \int_D |D\chi_\Omega|.$$

Par le lemme de Sard on sait de plus que, pour presque-tout t, $\partial E_{j,t}$ est régulier. On peut donc choisir t_0 tel que: $\partial E_{j,t_0}$ soit régulier pour tout j et:

$$\liminf_{j\to\infty} \int_D |D\chi_{E_{j,t_0}}| = \int_D |D\chi_\Omega|.$$

Rappelons que par ailleur,

$$\lim_{j\to\infty} \|\chi_{E_{j,t_0}} - \chi_\Omega\|_{L^1(D)} = 0.$$

Par construction on a $f_j(x) = 1, x \in K$ donc $K \subset E_{j,t_0}$ et donc $\Psi \in H_0^1(E_{j,t_0})$. Comme E_{j,t_0} est régulier on en déduit:

$$J_2(\Psi, E_{j,t_0}) = J(\Psi, E_{j,t_0}) \leq J(u,\Omega) + 2\varepsilon,$$

en effet:

$$E_\Omega(\Psi) \leq E_\Omega(u) + \varepsilon,$$

et par construction pour certains j assez grand:

$$(|E_{j,t_0}| - a)^2 + P(E_{j,t_0}, D) \leq (|\Omega| - a)^2 + P(\Omega, D) + \varepsilon.$$

Remarque 9.2 *Si u, Ω est un minimum pour J_2, comme $J(u,\Omega) \leq J_2(u,\Omega)$, c'est aussi un minimum de J et de plus on a $\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega \cap D) = P(\Omega, D)$ et donc $\partial\Omega = \partial^*\Omega$ $\mathcal{H}^{d-1}$ presque partout.*

Proposition 9.3 *On suppose que $d = 2$. Soit u, Ω un minimum de J_2. Alors il existe $\beta > 0$ tel que pour toute boule $B(x_1, r) \subset D$ avec $x_1 \in \partial\Omega, r \leq 1$ on ait:*

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1, r)) \geq \beta r.$$

Démonstration: On prend $0 < \beta < 1/2$ et on suppose qu'il existe $r < 1/2$ tel que:

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1, 2r)) \leq 2\beta r.$$

Montrons d'abord qu'il existe s tel que $r < s \leq 2r$ tel que:

$$\partial\Omega \cap \partial B(x_1, s) = \emptyset.$$

En effet on a (on note $\#A$ le cardinal de A):

$$\int_r^{2r} \#\{\partial\Omega \cap \partial B(x_1,s)\}ds \leq \mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1,2r)) \leq 2\beta r < r,$$

et donc:

$$|\{s, \partial\Omega \cap \partial B(x_1,s) \neq \emptyset, r \leq s \leq 2r\}| < r,$$

et il existe donc bien $r < s \leq 2r$ tel que:

$$\partial\Omega \cap \partial B(x_1,s) = \emptyset.$$

On a alors deux cas:
1) $\partial B(x_1,s) \subset \Omega$. Soit alors $\Omega_2 = \Omega \cup B(x_1,s)$ et $v = u \in H_0^1(\Omega_2)$ on a:

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap D) = \mathcal{H}^1(\partial\Omega_2 \cap D) + \mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1,s)).$$

Par l'inégalité isopérimétrique on a:

$$|(\mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}) \cap B(x_1,s)| \leq C\mathcal{H}^1\left(\partial^*((\mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}) \cap B(x_1,s))\right)^2 = C\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1,s))^2.$$

On verra plus loin comment conclure.

2) $\partial B(x_1,s) \subset \overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega}$. On pose dans ce cas $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{B(x_1,s)}$ et $v = u\chi_{\Omega_2}$. Comme Ω reste à distance strictement positive de $\partial B(x_1,s)$ on a bien $v \in H_0^1(\Omega_2)$: si $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ est une suite qui approche u alors $\varphi_n\chi_{\Omega_2} \in C_0^\infty(\Omega_2)$ (le support des φ_n restant à distance strictement positive de $\partial B(x_1,s)$) et $\varphi_n\chi_{\Omega_2}$ approchent v. On a également comme dans le premier cas:

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap D) = \mathcal{H}^1(\partial\Omega_2 \cap D) + \mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1,s)),$$

et par l'inégalité isopérimétrique:

$$|\Omega \cap B(x_1,s)| \leq C\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1,s))^2.$$

En écrivant la minimalité de u on en déduit dans les deux cas:

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1,s)) \leq 2|D|\,||\Omega| - |\Omega_2|| + \int_{B(x_1,s)} fu.$$

Le dernier terme est présent seulement dans le deuxième cas, on peut alors le majorer de la façon suivante (comme f est borné et u est nulle sur $\partial B(x,s)$ on montre facilement que u est borné sur $B(x,s)$ indépendamment de $s \leq 1$),

$$\int_{B(x_1,s)} fu = \int_{B(x_1,s)\cap\Omega} fu \leq |B(x_1,s) \cap \Omega| \|f\|_\infty \|u\|_{\infty,B(x,s)}.$$

Dans tous les cas on en déduit

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1,s)) \leq C\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1,s))^2.$$

avec C qui ne dépend que de D et de $\|f\|_\infty$. Comme $|\Omega \cap B(x,s)| > 0$ et $\partial\Omega \cap \partial B(x_1,s) = \emptyset$ on a $\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1,s)) > 0$ et donc:

$$1 \leq C\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1,s)) \leq C\mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap B(x_1,2r)) \leq 2C\beta r \leq C\beta,$$

c'est à dire: $\beta \geq \frac{1}{C}$.

9.2 Une condition pour avoir un quasiminimiseur.

Proposition 9.4 *Soit D_1 relativement compact. Soit (u,Ω) un minimum de J tel qu'il existe C et $\alpha > 0$ tels que:*

$$\int_{B(x_1,r)} |\nabla u|^2 \leq Cr^{d-1+\alpha}, \tag{9.5}$$

pour tout $B(x_1,r) \subset D_1$. Alors Ω est un quasi-minimiseur pour le périmètre dans D_1 : il existe C tel que pour toute boule $B(x_1,2r) \subset D_1, x_1 \in \partial\Omega$ avec r assez petit (indépendamment de x_1) et pour tout F tel que

$$supp(\chi_F - \chi_\Omega) \subset B(x_1,r)$$

on ait:

$$P(\Omega, B(x_1,r)) \leq P(F, B(x_1,r)) + Cr^{d-1+\alpha}.$$

Proposition 9.5 *Si u vérifie (9.5) alors si $B(x_0,R) \subset D_1$ alors $u \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(B(x_0,R/2))$ avec une norme qui ne dépend que de la constante qui apparait dans (9.5).*

Démonstration de 9.5: Soit $B(x_0,R) \subset D_1$ et $x,y \in B(x_0,R/2)$. Notons $r = |x-y|$ et $\omega = \frac{x+y}{2}$. Supposons que $u \in C^1(D_1)$ alors:

$$\begin{aligned}
\left|u(x) - \fint_{B(\omega,r/2)} u\right| &\leq \fint_{B(\omega,r/2)} |u(x) - u(z)|dz \\
&\leq \fint_{B(\omega,r/2)} dz \int_0^1 |\nabla u(tz + (1-t)x)||x-z|dz \\
&\leq \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_0^1 dt \int_{B(\omega,r/2)} |\nabla u(tz + (1-t)x|dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_0^1 t^{-d} \int_{B(t\omega+(1-t)x,tr/2)} |\nabla u(z)| dz \\
&\leq \frac{C}{\omega_d r^{d-1}} \int_0^1 t^{-d} (tr)^{\frac{d-1+\alpha}{2}} (tr)^{\frac{d}{2}} dt \\
&\leq Cr^{\frac{1+\alpha}{2}} \int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}} dt.
\end{aligned}$$

On a utilisé que $B(t\omega+(1-t)x, tr/2) \subset B(x_0, R) \subset D_1$. En faisant le même calcul avec y à la place de x on trouve bien:

$$|u(x) - u(y)| \leq Cr^{\frac{1+\alpha}{2}} = C|x-y|^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Enfin on peut passer au cas général par approximation.

Démonstration de la proposition 9.4: Soit F et $B(x_1, r)$ comme ci-dessus. On suppose de plus F ouvert. Soit $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec:

$$0 \leq \Psi(x) \leq 1, x \in \mathbb{R},$$

$$\Psi(t) = 0, t \leq 1, \Psi(t) = 1, t \geq 2.$$

On pose alors:

$$v(x) = \Psi\left(\frac{|x-x_1|^2}{r^2}\right) u(x),$$

$v \in H_0^1(F)$ et vérifie:

$$u = v \text{ dans } D \setminus B(x_1, 2r)$$
$$|v| \leq |u| \text{ dans } B(x_1, 2r),$$
$$v = 0 \text{ dans } B(x_1, r).$$

Alors:

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_1,2r)} |\nabla v|^2 &= \int_{B(x_1,2r)} |\nabla u(x)|^2 \Psi\left(\frac{|x-x_1|^2}{r^2}\right)^2 dx \\
&+ \int_{B(x_1,2r)} |u(x)|^2 \left| 2\frac{(x-x_1)}{r^2} \Psi'\left(\frac{|x-x_1|^2}{r^2}\right)\right|^2 dx \\
&+ 2\int_{B(x_1,2r)} \left(\nabla u(x).u(x) \frac{(x-x_1)}{r^2} \Psi'\left(\frac{|x-x_1|^2}{r^2}\right)\right) \\
&\leq \int_{B(x_1,2r)} |\nabla u(x)|^2 + Cr^{\alpha+1} r^{-2} r^d + Cr^{\frac{1+\alpha}{2}} r^{-1} \int_{B(x_1,2r)} |\nabla u| \\
&\leq Cr^{d-1+\alpha} + Cr^{d-1+\alpha} + Cr^{\frac{\alpha-1}{2}} r^{d/2} r^{\frac{d-1+\alpha}{2}} \\
&\leq Cr^{d-1+\alpha}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc par minimalité de u

$$E(u) + (|\Omega| - a)^2 + P(\Omega, D) \leq E(v) + (|F| - a)^2 + P(\Omega, F),$$

et comme $u = v$ en dehors de $B(x_1, 2r)$ et $F = \Omega$ en dehors de $B(x_1, r)$.

$$\frac{1}{2}\int_{B(x_1,2_r)} |\nabla u|^2 - \int_{B(x_1,2r)} fu + (|\Omega| - a)^2 + P(\Omega, B(x_1, r))$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{B(x_1,2_r)} |\nabla v|^2 - \int_{B(x_1,2r)} fu + (|F| - a)^2 + P(F, B(x_1, r)).$$

Finalement:

$$\begin{aligned} P(\Omega, B(x_1, r)) &\leq Cr^{n-1+\alpha} + 2\|f\|_\infty \|u\|_{\infty, B(x_1,2r)}\omega_n \\ &+ (|F| - |\Omega|)(|F| + |\Omega|) + P(F, B(x_1, r)) \\ &\leq P(F, B(x_1, r)) + Cr^{n-1+\alpha} + Cr^n \leq P(F, B(x_1, r)) + Cr^{n-1+\alpha}, \end{aligned}$$

dès que r est assez petit.

Dans le cas où F est seulement mesurable, voit v la troncature comme ci-dessus. Soit $\varepsilon > 0$, et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \overline{B(x_1, r)})$ tel que

$$E(\varphi) \leq E(v) + \varepsilon \leq J(u) + Cr^{n-1+\alpha} + \varepsilon.$$

On approche, comme dans la proposition 9.1, F dans D par des ouverts E_j régulier contenant K le support de φ. La construction marche pour F non ouvert, le point important (voir 9.4) est que $x + \varepsilon_1 y$ pour x dans K et y dans $B(0, 1)$ reste dans F pour ε_1 assez petit. On choisit ici ε_1 tel que pour tout $x \in K$ et tout $y \in B(0, 1)$ $x + \varepsilon_1 y \in \Omega \setminus \overline{B(x_1, r)}) \subset F$.

On écrit alors que $J(u, \Omega) \leq J(\varphi, E_j)$ puis en faisant tendre j vers l'infini on trouve

$$P(\Omega, B(x_1, r)) \leq P(F, B(x_1, r)) + Cr^{d-1+\alpha} + \varepsilon,$$

et on fait tendre ε vers 0.

Grâce à la régularité des quasi-minimiseurs (voir par exemple [24] et [22]) pour le périmètre on peut maintenant en déduire:

Proposition 9.6 *Soit D_1, u, Ω comme dans la proposition précédente. Alors $\partial\Omega$ est en dehors d'un ensemble singulier de dimension de Hausdorff inférieure à $d - 8$ (vide si $d \leq 7$) une hypersurface de classe C^1.*

Chapitre 10

Quasi-minimiseurs en dimension 2.

On va donner ici un exemple de démonstration de la régularité des quasi-minimiseurs pour le périmètre et l' appliquer à la minimisation de

$$J(E) = \sigma(|E| - a)^2 + P(E, D).$$

Remarque: La fonctionnelle ci-dessus est la partie géométrique de la fonctionnelle J définie dans le problème du formage des métaux liquides (voir 2.2.3).

Soit D un ouvert inclus dans $\mathbb{R}^2$. On dit que E est un quasi-minimiseur pour le périmètre dans D s'il existe C et $\alpha > 0$ tel que pour toute boule $B = B(x, r) \subset D$ avec $x \in \partial E$ et tout F mesurable, tel que $supp(\chi_E - \chi_F)$ compact inclus dans $B(x, r)$ alors:

$$P(E, B) \leq P(F, B) + Cr^{1+\alpha}.$$

Remarque 10.1 *Si E est à périmètre fini, on peut trouver un représentant de χ_E tel que $\partial^* E$ est dense dans ∂E. Pour cela (voir [3]) il suffit d'ajouter les points x pour lequel il existe $r = r(x) > 0$ tel que $|B(x,r) \setminus E| = 0$ et d'enlever ceux pour lequel il existe $r = r(x)r > 0$ tel que $|B(x,r) \cap E| = 0$. Dans la suite on choisira toujours ce représentant.*

On va démontrer le théorème suivant: (pour une démonstration dans le cas général voir par exemple [3], [24], [22], [23]).

Théorème 10.2 *Soit E un quasi-minimiseur pour le périmètre dans $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $x \in \partial E$ et $B(x, r) \subset D$ alors $B(x, r/3) \cap \partial E$ est une variété C^1. C'est à dire que $\partial E \cap D$ est une variété C^1.*

Lemme 10.3 *Soit E Soit E un quasi-minimiseur pour le périmètre dans $D \subset \mathbb{R}^2$, alors il existe C tel que pour tout $x \in \partial E$ et tout r tel que $B(x,r) \subset D$ on ait:*

$$2r - Cr^{1+\alpha} \leq \int_{B(x,r)} |D\chi_E| \leq \pi r + Cr^{1+\alpha}.$$

Démonstration: On définit:

$$\nu(f,\Omega) = \inf\{\int_\Omega |Dg|, g \in BV(\Omega), spt(f-g) \in \Omega\},$$

$$\Psi(F,\Omega) = \int_\Omega |Df| - \nu(f,\Omega),$$
$$\Psi(E, B(x,t)) = \Psi(\chi_E, B(x,t)).$$

Soit $x \in \partial^* E$ et $B_r = B(x,r) \subset$. Soit F tel que $\chi_F = \chi_E$ dans le complémentaire de B_r. On a

$$\int_{B_r} |D\chi_E| \leq \int_{B_r} |D\chi_F| + Cr^{1+\alpha}.$$

On a donc $\Psi(E, B_r) \leq Cr^{1+\alpha}$. D' après le lemme (5.6) de [G], on sait que pour $t \leq r$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\int_{B_t} |D\chi_E| &\leq \frac{1}{r}\int_{B_r} |D\chi_E| + \int_t^r \Psi(E, B_s) s^{-2} ds \\ &\leq \frac{1}{r}\int_{B_r} |D\chi_E| + C(r-t)^\alpha, \end{aligned}$$

En multipliant par r puis en faisant tendre t vers 0 on trouve ($x \in \partial^* E$):

$$\int_{B_r} |D\chi_E| \geq 2r - Cr^{1+\alpha}.$$

On passe de $x \in \partial^* E$ à $x \in \partial E$ par densité. On a démontré la première partie de l' inégalité. Pour la deuxième soit $x \in \partial^* E, B_r = B(x,r) \subset D$ alors pour presque tout $s < r$ on a (cf la remarque 2.14 dans [G])

$$P(E \setminus \overline{B_s}, B_r) = P(E, Br \setminus \overline{B_s}) + \mathcal{H}^1(\partial B_s \cap E),$$

$$P(E \cup \overline{B_s}, B_r) = P(E, B_r r \setminus \overline{B_s}) + \mathcal{H}^1(\partial B_s \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)).$$

Par quasi-minimalité de E on a

$$P(E, B_r) \leq P(E \setminus \overline{B_s}, B_r) + Cs^{1+\alpha},$$

$$P(E, B_r) \leq P(E \cup \overline{B_s}, B_r) + Cs^{1+\alpha}.$$

On trouve donc que pour presque tout $s \leq r$

$$\begin{aligned} P(E, B_r) &\leq P(E, B_r \setminus \overline{B_s}) + \frac{1}{2}(\mathcal{H}^1(\partial B_s \cap E) + \mathcal{H}^1(\partial B_s \cap (\mathbb{R}^2 \setminus E))) + Cs^{1+\alpha} \\ &\leq P(E, B_r \setminus \overline{B_s}) + \pi s + Cs^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à faire tendre s vers r puis à passer du bord réduit au bord topologique par densité.

Le lemme suivant est valable en toute dimension, et pas seulement pour les quasi-minimiseurs.

Lemme 10.4 *Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $E \subset D$ à périmètre localement fini dans D tel qu'il existe r_0 et C tel que pour tout $B(x,r) \subset D$ avec $r \leq r_0$ et $x \in \partial E$ on ait:*

$$P(E, B(x,r)) \geq Cr^{d-1}.$$

Alors

$$\mathcal{H}^1((\partial E \setminus \partial^* E) \cap D) = 0.$$

Démonstration: Il suffit de montrer que $\mathcal{H}^1(K) = 0$ pour tout K compact inclus dans $(\partial E \setminus \partial^* E) \cap D$. Soit donc K un tel compact et $\varepsilon > 0$, comme $\int_K |D\chi_E| = 0$, il existe A_ε ouvert inclus dans D et contenant K tel que:

$$\int_{A_\varepsilon} |D\chi_E| < \varepsilon.$$

Soit $\eta > 0$, pour tout $x \in K$ il existe $\rho < \min\{\eta, r_0\}$ tel que $B(x, 5\rho) \subset A_\varepsilon$. L' ensemble de ces boules forment un recouvrement de Vitali. Il existe donc un ensemble dénombrable de boules disjointes $B(x_i, \rho_i)$ vérifiant:

$$K \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, 5\rho_i).$$

On en déduit, grâce à l'hypothèse sur E,

$$\sum_{i \in I} (5\rho_i)^{d-1} \leq 5^{d-1} C^{-1} \sum_{i \in I} \int_{B(x_i, \rho_i)} |D\chi_E| \leq 5^{d-1} C^{-1} \int_{A_\varepsilon} |D\chi_E| \leq 5^{d-1} C^{-1} \varepsilon.$$

C' est à dire $\mathcal{H}^1_{5\eta}(K) \leq 5^{d-1} C^{-1} \varepsilon$ quelque soit $\eta > 0, \varepsilon > 0$. On a donc bien

$$\mathcal{H}^1(K) = \lim_{\eta \to 0} \mathcal{H}^1_{5\eta}(K) = 0.$$

A partir de maintenant on suppose que E désigne un quasi-minimiseur pour le périmètre dans $D \subset \mathbb{R}^2$.

10.1 Etude du cardinal de $\partial B(x,s) \cap \partial E$.

On désigne par $\sharp(A)$ le cardinal de A.

Proposition 10.5 *Il existe $\eta > 0$ et r_1 tel que pour tout $x \in \partial D$ et $r \leq r_1$ avec $B(x,r) \subset D$ il existe $s \in]\eta r, r[$ vérifiant $\sharp(\partial B(x,s) \cap \partial E) = 2$.*

Lemme 10.6 *Soit $x \in \partial E, B(x,r) \subset D$ pour r suffisamment petit on a:*

$$\sharp(\partial B(x,r) \cap \partial E) \geq 2.$$

Démonstration: Supposons que $\partial B(x,s) \cap \partial E = \{y\}$ alors $\partial B(x,s) \setminus \{y\}$, qui ne rencontre pas le bord de E et qui est connexe, est inclus soit dans l' intérieur de E soit dans le complémentaire de $\overline{E}$. Dans le premier cas posons $F = E \cup B(x,r)$ et dans le deuxième $F = E \setminus B(x,r)$. Dans les deux cas on voit que

$$\partial^* F \subset \{y\} \cup (\partial^* E \setminus \overline{B(x,r)}).$$

En effet si z est un point du bord de $B(x,s)$ différent de y il est par exemple dans l' intérieur de E donc aussi dans celui de F. Par minimalité de E et grâce au lemme 10.3, on voit alors que, pour tout $\rho > r$,

$$2\rho - C\rho^{1+\alpha} \leq \mathcal{H}^1(\partial^* E \cap B(x,\rho)) \leq C_2 \rho^{1+\alpha}.$$

Et donc (en faisant tendre ρ vers r) que $r^\alpha \geq 2/(C + C_2)$.

Supposons maintenant que $\partial \cap E \partial B(x,r) = \emptyset$ on peut faire exactement le même raisonnement: $\partial B(x,r)$ est inclus dans l' intérieur de E ou dans le complémentaire de $\overline{E}$.

Lemme 10.7 *Soit $B(x,r) \subset E, x \in \partial E$ pour tout $0 < \beta < 1$ il existe $r_2 = r_2(\beta)$ tel que les conditions*

$$\mathcal{H}^1(B(x,r) \cap \partial E) \geq (2+\beta)r, \sharp(\partial B(x,r) \cap \partial E = 3,$$

impliquent $r \geq r_2$.

Démonstration: Soit x, r, β vérifiant les conditions ci dessus et notons y_0, y_1, y_2 les trois points de $\partial B(x,r) \cap \partial E$. Les arcs joignant y_i à y_{i+1} (noté (y_i, y_{i+1})) sont soit dans $\mathring{E}$ soit dans le complémentaire de $\overline{E}$. S' ils sont tous les trois dans $\mathring{E}$ ou tous les trois dans $D \setminus \overline{E}$ alors on peut faire comme dans le lemme 2.1.1 et minorer r. Supposons donc que $(y_0, y_1) \subset \mathring{E}$ et que $(y_1, y_2), (y_2, y_0) \subset (D \setminus \overline{E})$. Notons ω_1 l' ouvert inclus dans $B(x,r)$ dont la frontière est donnée par (y_0, y_1) et par le segment $[y_0, y_1]$ et posons:

$$F = (E \setminus \overline{B}(x,r)) \cup \omega_1.$$

On a alors:

$$\partial^* F \subset (\partial^* E \setminus \overline{B(x,r)} \cup [y_0,y_1]\cup\{y_2\},$$

et donc par minimalité de E et en utilisant l' hypothèse:

$$(2+\beta)r \leq \mathcal{H}^1(\partial^* E\cap B(x,r)) \leq |y_0-y_1| + Cr^{1+\alpha} \leq 2r + Cr^{1+\alpha}.$$

On déduit donc que $r^\alpha \geq \beta/C = r_2^\alpha(\beta)$.

L' autre cas: $(y_0,y_1),(y_1,y_0)\subset \overset{\circ}{E}$ et $(y_2,y_1)\subset D\setminus\overline{E}$ se traite de la nême manière en prenant comme bord de ω le segment $[y_0,y_2]$ et l' arc (y_0,y_2).

Démonstration de la proposition 10.5: Soit $B(x,r)\subset D, x\in\partial E$ et $\eta>0$. Supposons que pour presque tout $\eta r < s < r$ on ait $\sharp(\partial(B(x,s)\cap\partial E)\geq 3$. (On sait que ce cardinal est supérieur ou égal à 2 par le lemme 10.6). Alors d' après 2.10.11 dans [8]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^1(B(x,s)\cap\partial^* E) &\geq \int_{\eta r}^s \sharp(\partial B(x,t)\cap\partial E)dt + \mathcal{H}^1(B(x,\eta r)\cap\partial E)\\
&\geq 3(s-\eta r) + 2\eta r - C(\eta r)^{1+\alpha}\\
&\geq 3s - \eta r - Cr^{1+\alpha}\\
&\geq 3s - 2\eta r,
\end{aligned}$$

dès que r est assez petit. Supposons de plus que $2\eta/(1-\eta)<1$ c'est à dire $\eta<1/3$ on a alors pour $r>s>\frac{2\eta}{1-\eta}r>\eta r$:

$$\mathcal{H}^1(B(x,s)\cap\partial^* E)\geq 3s-(1-\eta)s = (2+\eta)s.$$

Si on suppose que $r\leq r_2(\eta)$ d' après le lemme 10.7 on en déduit que pour $r>s>2r\eta/(1-\eta), \sharp(\partial B\cap\partial E)\geq 4$. On a alors:

$$\begin{aligned}
\pi + Cr^{1+\alpha} &\geq \mathcal{H}^1(B(x,r)\cap\partial E)\\
&\geq \int_{2\eta r/(1-\eta)}^r \sharp(\partial B(x,s)\cap\partial E)ds + \mathcal{H}^1(B(x,\frac{2\eta r}{(1-\eta)})\cap\partial E)\\
&\geq 4(r-\frac{2\eta r}{1-\eta}) + \frac{4\eta r}{1-\eta} - C(\frac{2\eta r}{1-\eta})^{1+\alpha}\\
&\geq 4r - \frac{4\eta r}{1-\eta} - \frac{\eta r}{1-\eta}Cr1+\alpha\\
&\geq 4r - \frac{5\eta r}{1-\eta},
\end{aligned}$$

pour r assez petit. Toujours si r est assez petit on a $\pi + Cr < 3,2$ et donc

$$\frac{\eta}{1-\eta}\geq\frac{4-3.2}{5}=\frac{4}{25}.$$

C' est a dire $\eta \geq \frac{\frac{4}{25}}{1+\frac{4}{25}} = \frac{4}{29}$. Donc pour $\eta < 4/29$ et r suffisament petit il existe des $s \in]\eta r, r[$ tel que $\sharp(\partial B(x,s) \cap \partial E) = 2$, on a même montré que l'ensemble de ces s était de mesure strictement positive.

10.2 Régularité du ∂E:

Lemme 10.8 *Soit $x \in \partial E, B(x,r) \subset D$ avec $r \leq r_1$ comme dans le théorème 10.5 Il existe C tel que pour tout $t < \eta r$,*

$$\int_{B(x,t)} |D\chi E| - |\int_{B(x,t)} D\chi E| \leq Ct^{1+\alpha}.$$

Démonstration: On suppose d' abord que $\sharp(\partial B(x,t) \cap \partial E) = 2$. Soit y_0, y_1 ces deux points. En raisonnant comme dans le lemme 10.6 on peut supposer que $\partial B(x,t) \setminus \{y_0, y_1\}$ a une composante connexe dans $\mathring{E}$ par exemple (y_0, y_1) et l' autre dans le complémentaire de $\overline{E}$. Soit ω l' ouvert dont la frontière est définie par $(y_0, y_1) \cup [y_0, y_1]$ et posons:

$$F = E \setminus B(x,t) \cup \omega.$$

Notons pour $t1 > t$, $\chi^-_{E,t1}$ la trace de χ_E sur $\partial B(x,t1)$ vue comme une fonction de $B(x,t1)$. D' après le théorème de trace on a:

$$\int_{B(x,t_1)} D\chi_E = \int_{\partial B(x,t_1)} \chi^-_{E,t1} = \int_{\partial B(x,t1)} \chi^-_{F,t_1},$$

en effet $\chi_E = \chi_F$ dans un voisinage de $\partial B(x,t_1)$. On en déduit donc:

$$\int_{B(x,t_1)} D\chi_E = \int_{B(x,t_1)} D\chi_F,$$

puis en faisant tendre t_1 vers t:

$$\int_{\overline{B(x,t)}} D\chi_E = \int_{\overline{(B(x,t)}} D\chi_E.$$

et enfin, comme $\int_{\partial B(x,t)} |D\chi_E| = \int_{\partial B(x,t)} |D\chi_F| = 0$:

$$\int_{B(x,t)} D\chi_E = \int_{B(x,t)} D\chi_F.$$

D' autre part on voit que

$$|\int_{B(x,t)} D\chi_F| = \mathcal{H}^1([y_0 - y_1]) = \int_{B(x,t)} |D\chi_F|,$$

et donc par minimalité de E:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{B(x,t)} |D\chi_E| - |\int_{B(x,t)} D\chi_E| \\ &= \int_{B(x,t)} |D\chi_E| - \int_{B(x,t)} |D\chi_F| \leq Ct^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Cas général: soit $t \leq \eta r$ en appliquand le théorème 10.5 à $\frac{t}{\eta}$ on voit qu' il existe $s \in [\eta, \frac{t}{\eta}\frac{t}{\eta}]$ tel que $\sharp(\partial(B(x,s) \cap E) = 2$. La fonction:

$$s \longmapsto \int_{B(x,s)} |D\chi_E| - |\int_{B(x,s)} D\chi_E|$$

est une fonction croissante, en effet si $s' < s$:

$$\begin{aligned} |\int_{B(x,s)} D\chi_E| - |\int_{B(x,s')} D\chi_E| &\leq |\int_{B(x,s)\setminus B(x,s')} D\chi_E| \\ &\leq \int_{B(x,s)\setminus B(x,s')} |D\chi E| \\ &= \int_{B(x,s)} |D\chi_E| - \int_{B(x,s')} |D\chi_E|. \end{aligned}$$

On en déduit donc, en utilisant le cas particulier démontré ci-dessus:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{B(x,t)} |D\chi_E| - |\int_{B(x,t)} D\chi_E| \\ &\leq \int_{B(x,s)} |D\chi_E| - |\int_{B(x,s)} D\chi_E| \\ &\leq Cs^{1+\alpha} \leq C\frac{t^{1+\alpha}}{\eta^{1+\alpha}} = C_2 t^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Lemme 10.9 *Soit $x \in \partial E, r$ comme ci dessus et $s < t < \eta r$, on a alors:*

$$|n_s(x) - n_t(x)| \leq Ct^\alpha,$$

où on a posé:

$$n_s(x) = \frac{\int_{B(x,s)} D\chi_E}{\int_{B(x,s} |D\chi_E|}.$$

Démonstration: Supposons d' abord que $t/2 \leq s \leq t$. Comme $|n_t(x)| \leq 1$ on en d'éduit:

$$|n_s(x) - n_t(x)| \leq \sqrt{2}\sqrt{1 - n_s(x).n_t(x)}$$

$$\begin{aligned}
(1 - n_s(x), n_t(x)) \int_{B(x,s)} |D\chi_E| &= \int_{B(x,s)} (|D\chi_E| - n_t(x).D\chi_E) \\
&\leq \int_{B(x,t)} (|D\chi_E| - n_t(x).D\chi_E) \\
&= \int_{B(x,s)} |D\chi_E|(1 - \frac{|\int_{B(x,t)} D\chi_E|^2}{(\int_{B(x,t)} |D\chi_E|)^2} \\
&\leq 2\int_{B(x,t)} |D\chi_E|(1 - \frac{|\int_{B(x,t)} D\chi_E|}{(\int_{B(x,t)} |D\chi_E|} \\
&= 2\left(\int_{B(x,t)} |D\chi_E| - |\int_{B(x,t)} D\chi_E|\right) \leq Ct^{1+\alpha}.
\end{aligned}$$

grâce au lemme 10.8. On en déduit donc en utilisant que $\frac{t}{s} \leq 2$:

$$|n_s(x) - n_t(x)| \leq \frac{\sqrt{2Ct^{1+\alpha}}}{\sqrt{s}} \leq C\sqrt{\frac{t^{1+\alpha}}{s}} \leq Ct^{\alpha/2}.$$

Soit maintenant $s < t$ quelconque et soit j tel que:

$$\frac{t}{2^{j+1}} < s \leq \frac{t}{2^j}.$$

On a alors en utilisant le cas particulier ci dessus:

$$\begin{aligned}
|n_s(x) - n_t(x)| &= |n_s(x) - n_{t/2^{j+1}}(x) + \sum_{k=1}^{j}(n_{t/2^{k+1}}(x) - n_{t/2^k}(x)) + n_{t/2}(x) - n_t(x)| \\
&\leq C\left(s^{\alpha/2} + \sum_{k=1}^{j}\left(\frac{t}{2^k}\right)^{\alpha/2} + t^{\alpha/2}\right) \\
&\leq Ct^{\alpha/2}\left(2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{k\alpha/2}}\right) \leq C\sqrt{t}.
\end{aligned}$$

Corollaire 10.10 *: Pour $x \in \partial E$ on voit donc que $n_t(x)$ a une limite quand t tend vers 0. De plus grâce au lemme 10.8:*

$$0 \leq 1 - |n_t(x)| \leq Ct^{\alpha},$$

cette limite est de module 1 et c' est donc que $x \in \partial^* E$ (cf 3.3 dans [3]). On note $n(x)$ cette limite: c' est la normale de ∂E en x.

Démonstration du théorème 10.2: Soit $B(x,r)$ comme ci dessus et $y \in \partial E \cap B(x,r/3)$. On peut appliquer le lemme 10.9 à y et à $r = r/3$ on a alors

$$|n_s(y) - n_t(y)| \leq Ct^{\alpha/2}$$

Puis en faisant tendre s vers 0:

$$|n(y) - n_t(y)| \leq Ct^{\alpha/2}.$$

$$|n(y) \int_{B(y,t)} |D\chi_E| - \int_{B(y,t)} D\chi_E| \leq Ct^{\alpha/2} \int_{B(y,t)} |D\chi_E|$$

Donc en intégrant par rapport à t on voit que

$$|n(y) - \tilde{n}(t,y)| \leq Ct^{\alpha/2},$$

où on a définit $\tilde{n}$ par:

$$\tilde{n}(t,y) = \frac{\int_0^t ds \int_{B(y,s)} D\chi_E}{\int_0^t ds \int_{B(y,s)} |D\chi_E|}$$

qui est définie pour $y \in B(x,r/3), t \in]0, \eta r/3[$. La fonction $y \to \tilde{n}(t,y)$ est continue pour tout t. En effet soit $s > 0$ et $y, y' \in B(x,r/3)$. On a alors:

$$\mathcal{H}^1(B(y,s) \cap \partial^* E) - \mathcal{H}^1(B(y',s) \cap \partial^* E) =$$

$$\mathcal{H}^1((B(y,s) \setminus B(y',s)) \cap \partial^* E) - \mathcal{H}^1((B(y',s) \setminus B(y,s)) \cap \partial^* E)$$

Si on regarde le premier terme:

$$B(y,s) \setminus B(y',s) \subset B(y,s) \setminus \overline{B(y, s - |y' - y|)},$$

donc le premier terme tend vers 0 quand y' tend vers y. Pour le deuxième:

$$B(y',s) \setminus B(y,s) \subset B(y, s + |y' - y|) \setminus B(y,s),$$

donc le deuxième terme tend vers $\mathcal{H}^1(\partial B(y,s) \cap \partial^* E) = 0$ pour presque tout s (car $\partial^* E$ est de mesure de Lebesgue nulle). Par le théorème de convergence dominée on en déduit que le dénominateur de $\tilde{n}(.,t)$ est continue. Le même raisonement marche pour le numérateur et on voit donc bien que $\tilde{n}(.,t)$ est continue. $n(.,t)$ converge uniformément sur $B(x,r/3)$ vers n quand t tend vers 0. On en déduit donc que n est continue (et existe pour tout $y \in B(x,r/3) \cap \partial E$) et donc par le théorème 4.11 de [3] que ∂E est C^1.

10.3 Régularité supérieure.

On applique le résultat ci-dessus au cas particulier suivant: soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2, a > 0, \sigma > 0$ et on définit J par:

$$J(\Omega) = \sigma(|\Omega| - a)^2 + P(\Omega, D),$$

pour $\Omega \subset D$.

Théorème 10.11 *Soit E un minimum de J; alors le bord de E est une courbe C^∞ dont la courbure est égale à $2\sigma(|E| - a)$: il est donc composé de segments ou bien d' arcs de cercle.*

Démonstration: Localement, le bord de E est le graphe d' une fonction C^1. On peut donc supposer (à un chhangement de variable près) que si $C = [0,1]^2$ alors il existe $f \in C^1([0,1])$ tel que

$$\partial E \cap C = \{(x, f(x)), x \in [0,1]\},$$

$$E \cap C = \{(x,y), y < f(x), x \in [0,1]\}.$$

De plus on peut supposer qu' il existe $1 > \alpha > 0$ tel que $\alpha \leq f(x) \leq 1 - \alpha$. Soit $g \in C_0^\infty(]0,1[)$. Pour tout t suffisament petit on a

$$0 < f(x) + tg(x) < 1, x \in [0,1].$$

On définit alors E_t par:

$$E_t = E \setminus C \cup \{(x,y) \in C, f(x) + tg(x) > y\}.$$

On a alors:

$$|E_t| = |E \setminus C| + \int_0^1 (f(x) + t(g(x))dx$$

$$P(E_t, D) = |E \setminus C| + \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x) + tg'(x))^2}dx.$$

La fonction qui à t associe $J(E_t)$ est dérivable et admet un minimum en $t = 0$. On a donc en 0 $\frac{d}{dt}J(E_t) = 0$. On en déduit:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\sigma(\int_0^1 (f + tg) + |E \setminus C| - a)^2 + P(E \setminus C, D) + \int_0^1 \sqrt{1 + (f' + tg')^2}$$

$$= 2\sigma(|E| - a)\int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 \frac{g'(x)f'(x)}{1 + f'(x)^2} = 0.$$

C' est à dire que au sens des distributions:

$$\begin{aligned} 2\sigma(|E| - a) - \frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} &= \\ 2\sigma(|E| - a) - \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} &= 0. \end{aligned}$$

On reconnait bien dans le deuxième terme l' expression de la courbure (au signe près) pour une courbe définie par un graphe.

10.4 Etude du cas $\sigma = \infty$.

Pour $\sigma > 0$ on note $J_\sigma(E) = J(E)$ pour $E \subset \overline{D}$. On suppose que $a < |D|$. Soit $F \subset D$ ouvert tel que $|F| = a$. Il suffit de prendre $F = D \cap B(x_0, R)$ pour $x_0 \in D$ et R bien choisi. Soit σ_n une suite tendant vers l' infini et soit E_n un minimum de $J_{\sigma n}$ on a alors:

$$\sigma_n(|E_n| - a)^2 + P(E_n, D) \leq P(F, D).$$

On en déduit donc que (à une sous-suite extraite près) χ_{E_n} converge dans $L^1(D)$ et presque partout vers un χ_{E^∞}. On voit de plus que $|E^\infty| = a$. Soit $F \subset D, |F| = a$ on a alors:

$$P(E, D) \leq \liminf_{n\to\infty} P_{\sigma_n}(E_n, D) \leq \liminf_{n\to\infty} J_{\sigma_n}(E_n, D) \leq P(F, D).$$

Ainsi E^∞ est solution du problème de minimisation suivant:

$$P(E, D) = \inf\{P(F, D), F \subset D, |F| = a\} = \alpha.$$

Avec α qui ne dépend évidement que de D et de a. Dans la toute la suite on suppose que α est différent de 0. Sinon cela signifie que E^∞ est la réunion d'une ou plusieurs composantes connexes de D.

Lemme 10.12 *Soit E_n et E^∞ comme ci-dessus alors il existe $C > 0$ qui dépend de α et de $|D|$ tel que:*

$$|2\sigma_n(|E_n| - a)| \leq C.$$

Démonstration: Soit $\theta \in C_0^\infty(D)$ pour tout t suffisamment petit $\phi_t = Id + t\theta$ est un difféomorphisme. Pour $E \subset \overline{D}$ posons $E^t = \phi_t(E)$ c' est à dire que

$$\chi_{E^t}(x) = \chi_E(\phi_t^{-1}(x)), x \in D.$$

On a alors:

$$\begin{aligned} |E^t| &= \int_D \chi_{E^t}(x)dx \\ &= \int_D \chi_E(\phi_t^{-1}(x))dx \\ &= \int_D \chi_E(y)|J\phi_t(y)|dy \\ &= |E| + t\int_E \mathrm{div}\theta + \mathrm{o(t)}. \end{aligned}$$

On a aussi que E^t est à périmètre fini et vérifie pour C indépendant de n:

$$P(E^t, D) \leq P(E, D)(1 + C|t|).$$

En effet il existe $f^\varepsilon \in C^\infty(D) \cap BV(D)$ tel que

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} f^\varepsilon = f \text{ dans } L^1(D)$$

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \int_D |\nabla f^\varepsilon(x)|dx = P(E, D).$$

On a alors par un simple changement de variable que $f^\varepsilon \circ \phi_t^{-1}$ tend vers χ_{E^t} dans $L^1(D)$. On a de plus:

$$\begin{aligned} \int_D |D(f^\varepsilon \circ \phi_t^{-1})(x)|dx &= \int_D |Df^\varepsilon_{\phi_t^{-1}(x)} \circ\ D\phi_t^{-1}(x)|dx \\ &= \int_D |Df_y^\varepsilon \circ D(\phi_t^{-1})(\phi_t(y)||J\phi_t(y)|dy \\ &= \int_D |{}^t(D\phi_t)^{-1}(y)\nabla f^\varepsilon(y)||J\phi_t(y)|dy. \end{aligned}$$

On sait que $D\phi_t = Id + tD\theta$, donc on en déduit que:

$$(D\phi_t)^{-1} = Id - tD\theta + o(t).$$

et donc que:

$$\begin{aligned} \int_D |D(f^\varepsilon \circ \phi_t^{-1})| &= \int_D |(Id - {}^t(D\theta) + o(t))\nabla f^\varepsilon|(1 + t\mathrm{div}\theta + \mathrm{o(t)}) \\ &\leq \int_D |\nabla f^\varepsilon(x)|dx(1 + C|t| + o(t)). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu' à faire tendre ε vers 0 et à utiliser la semi-continuité du périmètre pour trouver:

$$P(E^t) \leq P(E, D)(1 + C|t| + o(t)).$$

On applique maintenant ce qui précède à $E = E_n$ et on utilise la minimalité de E_n :

$$\begin{aligned} J_{\sigma n}(E_n) &\leq J_{\sigma_n}(E_n^t) \\ &\leq \sigma_n(|E_n| - a)^2 + 2t(\int_{E_n} \mathrm{div}\theta)\sigma_{\mathrm{n}}(|\mathrm{E_n}| - \mathrm{a}) + \mathrm{P}(\mathrm{E_n}, \mathrm{D})(1 + \mathrm{C}|\mathrm{t}|) + \mathrm{o}(\mathrm{t}), \end{aligned}$$

et donc:

$$-2t\sigma_n(|E_n| - a) \int_{E_n} \mathrm{div}\theta \leq \mathrm{C}|\mathrm{t}|\mathrm{P}(\mathrm{E_n}, \mathrm{D}) + \mathrm{o}(\mathrm{t}).$$

En distinguant $t > 0$ et $t < 0$ et en divisant par t puis en faisant tendre t vers 0 on trouve:

$$|\int_{E_n} \mathrm{div}\theta||2\sigma_{\mathrm{n}}(|\mathrm{E_n}| - \mathrm{a})| \leq \mathrm{CP}(\mathrm{E_n}, \mathrm{D}).$$

Par définition du périmètre on peut choisir θ tel que

$$\int_{E^\infty} \mathrm{div}\theta \geq \frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{E}^\infty, \mathrm{D}) > 0 = \frac{1}{2}\alpha.$$

En utilisant la convergence de χ_{E_n} vers χ_E^∞ on en déduit que pour n assez grand:

$$\int_{E_n} \mathrm{div}\theta \geq \frac{1}{2} \int_{\mathrm{E}^\infty} \mathrm{div}\theta \geq \frac{1}{4}\alpha.$$

En remarquant que $P(E_n, D)$ est borné par α car $J_{\sigma_n}(E_n) \leq J_{\sigma n}(E^\infty)$, on en déduit le résultat voulu.

Remarque 10.13 *On peut en fait démontrer qu' il existe $C(a, D)$ tel que pour tout σ et E minimum de J_σ on ait:*

$$|\sigma(|E| - a)| \leq C.$$

En effet si $\sigma_n(|E_n| - a)$ tend vers l' infini on a alors que σ_n tend aussi vers l' infini et on a démontré que pour une suite extraite $|\sigma_n(|E_n| - a)|$ était borné.

Théorème 10.14 *Soit E_n et E^∞ comme ci-dessus, on a alors que $\partial E^\infty \cap D$ est composé d' arcs de cercle.*

Démonstration: On peut supposer que E_n est ouvert. On pose:

$$f_n(x) = d(x, \overline{E_n}) - d(x, \overline{D} \setminus E_n), x \in \overline{D}.$$

On a alors que $E_n = \{f_n > 0\}, \partial E_n = \{f_n = 0\}$ et $\overline{D} \setminus E_n = \{f_n > 0\}$. Les fonctions f_n sont 2-lipschitzienne et bornées dans $\overline{D}$ compacte. On en déduit qu' il existe f tel que f_n converge uniformément vers f dans $\overline{D}$. Pour presque tout $x \in E^\infty$ on a $\chi_{E_n}(x) = 1$ pour n assez grand, et donc $f_n(x) \leq 0$ et finalement $f(x) \leq 0$. C' est à dire que:

$$E^\infty \subset \{f \leq 0\},$$

Soit x tel que $f(x) < 0$ on en déduit que pour n assez grand $f_n(x) < 0$ et donc $x \in E_n$. On en déduit donc que $x \in E^\infty$. On a donc montré que

$$D \cap \{f < 0\} \subset D \cap E^\infty \subset D \cap \{f \leq 0\}.$$

On va maintenant montrer que

$$|\{f = 0\} \cap D| = 0.$$

Soit donc $x \in D$ et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset D$. On a que:

$$B(x,r) \cap \{f = 0\} = \bigcap_{m>0} \bigcup_{n_0 \geq 0} \bigcap_{n \geq n_0} \{\frac{-1}{m} \leq f_n \leq \frac{1}{m}\} \cap B(x,r).$$

Or pout tout $n > 0$ et tout $m > 0$ on voit grace à la régularité du bord de E_n:

$$|\{\frac{-1}{m} \leq f_n \leq \frac{1}{m}\} \cap B(x,r)| \leq \frac{C}{m},$$

avec C qui ne dépend pas de n (car le périmètre de E_n dans D est majoré et la courbure reste majoré par la remarque ci-dessus). On en déduit donc:

$$|\bigcap_{n \geq n_0} \{\frac{-1}{m} \leq f_n \leq \frac{1}{m}\} \cap B(x,r)| \leq \frac{C}{m},$$

et comme l'union sur n_0 est croissante et C ne dépend pas de n_0, on a donc bien:

$$|\{f = 0\} \cap B(x,r)| = 0.$$

On en déduit donc que presque partout:

$$E^\infty \cap D = \{f < 0\} \cap D,$$

et donc en particulier:

$$\partial E^\infty \cap D \subset D \cap \{f = 0\}.$$

Soit $x \in \partial E^\infty \cap D$ et $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset D$. On a alors $f(x) = 0$ et donc grace à la régularité du bord de E_n on voit qu' il existe une suite $x_n \in \partial E_n \cap B(x,r)$ tel que x_n tend vers x. En effet sinon cela signifie que $B(x,\varepsilon)$ ne rencontre pas le ∂E_n (pour une suite extraite) et donc que $|f_n(x)| \geq \varepsilon$. Toujours grace à la régularité du ∂E_n on sait que $B(x,r) \cap \partial E_n$ est composé d' arcs de cercles de rayon R_n avec R_n minoré (lemme 10.12). On peut supposer que à une suite extraite près R_n converge vers R_∞. Si on note c_n le centre du cercle passant par y_n toujours à une suite extraite près on peut supposer que c_n converge vers c. On a alors que le cercle de centre c et de rayon R^∞ passe par x.

Si on suppose que pour une suite extraite il existe un autre cercle centré en c'_n qui contient un point x'_n tendant vers x. Ce cercle ne coupe pas le premier et il converge vers un autre cercle de rayon R_∞. Ces deux cercle ne se rencontrent dans $B(x,r)$ qu'en x en effet sinon on aurait que les cercles $C(c_n, R_n)$ et $C(c'_n, R_n)$ se coupent dans $B(x,r)$ pour n assez grand. Pour la même raison on voit que les deux cercles limites sont tangents. On en déduit donc qu' il ne peux pas y avoir de troisième cercle: on ne peux pas avoir 3 cercles distincts de même rayon tangents deux à deux au même point. On peut donc supposer (en réduisant r) que $\partial E_n \cap B(x,r)$ est composée de deux cercles, pour tout n assez grand.

Soit y un point sur un des deux cercles $C(c, R^\infty)$ différent de x. Pour $\varepsilon > 0$ suffisament petit $B(y,\varepsilon)$ ne rencontre pas l' autre cercle. Pour tout n assez grand $B(y,\varepsilon) \cap \partial E_n$ est donc composé d' un seul cercle qui tend vers $C(c, R^\infty)$ et E_n est d' un seul coté de ce cercle. On en déduit donc que la mesure de $B(y,\varepsilon) \cap (D \setminus E_n)$ est minoré indépendament de n, et de même pour $B(y,\varepsilon) \cap E_n$. En passant à la limite on voit bien que $y \in \partial E^\infty$, et on a aussi que E^∞ est d' un seul coté du cercle.

On a donc montré que finalement $\partial E^\infty \cap B(x,r)$ contenait un ou deux cercles passant par x. Réciproquement si $y \in \partial E^\infty$ alors y est limite de points y_n du ∂E_n et donc y_n appartient à l' un des deux cercles centrés en c_n ou c'_n pour n assez grand.

On vient de voir que localement le bord de E^∞ est formé d' un cercle ou de deux cercles tangents. Supposons donc que $(x = 0)$

$$B(0,r)\partial E^\infty = (C(c, R^\infty) \cup C(c', R^\infty)) \cap B(x,r).$$

avec les deux cercles tangents en 0, on suppose de plus que la tangente est l' axe $y = 0$. On note f la fonction dont le graphe est $C(c, R^\infty) \cap B(0,r)$.

Si on remplace pour $t > 0$ suffisament petit le bord de $E^\infty \cap \{(x,y), x \in [-r/2, r/2]\}$ par

$$\{(x, f(x)), t < |x| < r/2\} \cup \{(-t, y), |y| \leq f(t)\} \cup$$

$$\{(t, y), |y| \leq f(t)\} \cup \{(x, -f(x)), t < |x| < r/2\}.$$

On note E' ce nouvel ensemble (il y deux cas suivant que E^∞ est à l' intérieur des cercles ou à l' exterieur). On a alors:

$$P(E', D) = P(E, D) - Ct + o(t),$$

$$||E'| - |E|| \leq Ct^3.$$

Donc en rajoutant ou en enlevant à E' un disque de rayon de l' ordre de $t^{3/2}$ on peut trouver F vérifiant:

$$|F| = a,$$

$$P(F, D) \leq P(E, D) - Ct + o(t) + Ct^{\frac{3}{2}}.$$

Ce qui contredit la minimalité de E pour t suffisament petit.

Bibliographie

[1] D.Gilbarg, N.S Trudinger. *Elliptic Partial Diffenrential Equations of second order*. Springer-Verlag, 1983.

[2] E. De Giorgi - M. Carriero - A. Leaci. Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. *Arch. Rational Mech Anal*, 108:195–218, 1989.

[3] E. Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation.* Birkhäuser, 1986.

[4] F.J Almgren. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints. *Memoirs AMS*, 4:165, 1976.

[5] F. Maddalena, S. Solimini. Regularity properties of free discontinuity sets. preprint.

[6] F. Morgan. Soap bubbles in $\mathbb{R}^2$ and in surfaces. *Pacific journal of mathematics*, 165 (2):347–361, 1994.

[7] G. David. c^1- arcs for minimizers of the mumford-shah functional. *SIAM J. Appl. Math*, 56:783–888, 1996.

[8] H. Federer. *Geometric measure theory.* Springer-Verlag, 1969.

[9] H.W Alt, L.A. Caffarelli . Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. *J. Reine Angew. Math.*, 325:105–144, 1981.

[10] H. Wilhelm, L.A. Caffarelli, A. Friedman . Variational problems with two phases and their free boundaries. *Transaction of the American Mathematical Society*, 282 (2):431–461, 1984.

[11] L.A Caffarelli, D.Jerison, C.E Kenig. Some new monotonicity theorems with applications to free boundary problems. preprint.

[12] L.Ambrosio. Existence theory for a new class of variational problems. *Arch. Rational Mech Anal*, 111:291–322, 1990.

[13] L.Ambrosio - N.Fusco - D. Pallara. Partial regularity of free discontinuity sets ii. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, Cl Sci (4) 24:39–62, 1997.

[14] L.Ambrosio - N.Fusco - D. Pallara. *Function of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems.* Oxford science publications, 2000.

[15] L C.Evans, R F.Gariepy. *Mesure theory and fine properties of functions.* CRC Press, 1992.

[16] M. Crouzeix. Variational approach of a magnetic shaping problem. *Eur. Jour. of Mechanics*, 10 (5):527–536, 1991.

[17] M. Hayouni. On a volume constrained shape optimization problem with nonlinear state equation. preprint.

[18] M. Hayouni. *Existence et régularité pour des problèmes d' optimisation de formes.* PhD thesis, Université Henri Poincaré Nancy 1, 1997.

[19] Pelgrin. *Étude d'un probl'eme à frontière libre bidimensionnel.* PhD thesis, Université Rennes 1, 1994.

[20] S. Rigot. Big pieces of $c^{1,\alpha}$- graphs for minimizers of the mumford-shah functional. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, Cl. Sci (4) 29:329–349, 2000.

[21] A. Bonnet. On the regularity of edges in images segmentation. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, 13 (4):485–528, 1996.

[22] E. Bombieri. Regularity for almost minimal currents. *Arch. Rational Mech Anal*, 78:99–130, 1982.

[23] E. Gonzalez, U. Massari, I. Tamanini. On the regularity of boundaries of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint. *Indiana University Mathematics Journal*, 32 no 1:25–37, 1983.

[24] I. Tamanini. Boundaries of caccioppoli set with hölder continous normal vector. *J. Reine Angew. Math.*, 334:27–39, 1982.