



**HAL**  
open science

# Methodes multiresolutions non-lineaires. Applications au traitement d'image

Basarab Matei

► **To cite this version:**

Basarab Matei. Methodes multiresolutions non-lineaires. Applications au traitement d'image. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2002. Français. NNT : . tel-00002016

**HAL Id: tel-00002016**

**<https://theses.hal.science/tel-00002016>**

Submitted on 26 Nov 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

SPÉCIALITÉ

## MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PRÉSENTÉE PAR

Basarab MATEÏ

Pour obtenir le titre de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Sujet de la thèse :

## METHODES MULTIRESOLUTIONS NON-LINÉAIRES APPLICATIONS AU TRAITEMENT D'IMAGE

Soutenue le 20 novembre 2002 devant le jury composé de :

Monsieur	<b>Yves MEYER</b>	Président
Monsieur	<b>Albert COHEN</b>	Directeur
Monsieur	<b>Richard BARANIUK</b>	Rapporteur
Monsieur	<b>Stéphane MALLAT</b>	Rapporteur
Monsieur	<b>Francesc ARANDIGA</b>	Examineur
Monsieur	<b>Patrick COMBETTES</b>	Examineur
Monsieur	<b>Martin VETTERLI</b>	Examineur



## Remerciements

Je tiens ici en premier lieu à remercier Albert Cohen, tout d'abord pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant un sujet de thèse aussi riche et aussi passionnant, et ensuite pour la liberté qu'il m'a laissée dans le choix de mes directions de travail. Son bon sens, sa précision et sa clairvoyance ont été décisifs pour l'avancement de mes recherches. C'est avec une immense joie que je lui exprime ici ma reconnaissance la plus profonde.

Mes remerciements les plus chaleureux vont aussi vers mes rapporteurs Stéphane Mallat et Richard Baraniuk pour avoir accepté de rapporter sur cette thèse. Leurs travaux de recherche ont toujours été un guide précieux pour moi.

Les travaux d'Yves Meyer et de l'école qu'il a créée ont été une source continue d'inspiration pour moi. Aujourd'hui, il me fait l'honneur de participer au jury : je l'en remercie très sincèrement.

C'est également avec plaisir que j'exprime mes vifs remerciements aux autres membres du jury : Francesc Arandiga, Patrick Combettes et Martin Vetterli d'avoir bien voulu être juges lors de ma soutenance.

Rien n'aurait été possible sans le soutien actif de Doïna Cioranescu. Le programme européen TEMPUS qu'elle a coordonné m'a permis d'arriver en France. C'est avec son aide que j'ai obtenu la bourse CISI sans laquelle cette thèse ne serait ni commencée, ni terminée. Avec un optimisme incorrigible elle a su me faire remonter la pente chaque fois qu'un problème arrivait.

L'ambiance conviviale qui règne au Laboratoire doit beaucoup à son directeur Yvon Maday et elle était pour beaucoup dans l'aboutissement de cette thèse, je l'en remercie sincèrement.

L'accomplissement de cette thèse doit beaucoup à l'efficacité et la gentillesse de Danièle Boulic, Liliane Ruprecht, Martine Legras et Luce Loriller ainsi qu'à Christian David pour son travail toujours au-delà de ce que l'on espère.

Les deux dernières années de ma thèse, je les ai passées en tant qu'ATER à l'Université Paris X. Je tiens à remercier Annie Millet, Sylvie Méleard et tous mes collègues nanterrois pour leur accueil chaleureux.

Je remercie également Nira Dyn qui, au début de mon travail, m'a chaleureusement accueilli au sein du Département de Mathématiques Appliquées de l'Université de Tel-Aviv et pour les rencontres qu'elle a bien voulu m'accorder qui ont toujours été fructueuses.

C'est avec un grand plaisir que je tiens à remercier Mahmoud Kaber, Simon



Masnou et Marie Postel pour leurs remarques et leur constant soutien.

La confiance que Béatrice Pésquet a eu en moi m'a beaucoup touché et je lui en suis très reconnaissant.

J'ai eu aussi la chance à plusieurs reprises durant cette thèse d'avoir des discussions très enrichissantes avec Rosa Donat et Francesc Arandiga du Département de Mathématiques Appliquées de l'Université de Valencia. Ces discussions m'ont fourni quelques conseils et remarques très pertinents. C'est pourquoi je les en remercie sincèrement.

Rien n'est possible sans l'amitié et je tiens à remercier Valentina Busuioc pour son soutien constant et ses remarques judicieuses et tout cela depuis le premier TD d'algèbre, mes remerciements vont aussi vers Dragoş Iftimie, Cristinel Mardare et Petru Mironescu.

Un clin d'oeil va vers tous mes collègues thésards : Gabriel, Karim, Magda, Marius, Marcela, Sever et Aurélia, Cedric, Clothilde, Daad, Jérôme, Marjo, Martin, Olivier, Pascal B., Pascal H., Paul, Stéphane et Vincent.

Je tiens à remercier Adrian et son épouse Claudia pour leurs encouragements, leur disponibilité et leur pensée toujours saine.

Je ne peux pas m'empêcher, maintenant, au bout de ma scolarité, de repenser aux temps lointains et d'exprimer ma gratitude à Marian et à son épouse Oana, pour avoir été présents dans les nombreux moments agités de ma vie.

Je tiens à remercier Henri et Myriam Cazajus pour leurs encouragements et leur optimisme sincère. Ma gratitude va aussi vers Joël et Anne Prohin qui ont eu la gentillesse de lire une version initiale de ce travail.

Pendant la dernière année de thèse, rien n'aurait été pareil sans la présence constante, sincère et calme de David. Qu'il trouve ici mes sincères remerciements.

Mes pensées chaleureuses vont vers ma belle famille pour leur soutien, malgré la peine causée par notre départ.

Je n'aurais jamais été tel qu'aujourd'hui sans la vie que ma mère m'a donnée et sans l'éducation disciplinée dans laquelle ma grand-mère m'a élevé. Ma reconnaissance la plus profonde va tous les jours vers elles.

Je finis ces remerciements avec ceux qui, pendant ces quatre ans, ont du supporter de nombreux sacrifices et mes nombreux changements d'humeur tout en restant à côté de moi : ma femme et nos deux enfants.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Analyses multirésolutions non-linéaires</b>	<b>25</b>
1.1 Analyses multirésolutions et ondelettes . . . . .	26
1.1.1 Construction des AMR et des ondelettes . . . . .	26
1.1.2 La transformée en ondelette rapide . . . . .	29
1.1.3 Le cas multidimensionnel . . . . .	31
1.1.4 Caractérisation des espaces fonctionnels . . . . .	33
1.2 Les analyses multirésolutions non-linéaires . . . . .	35
1.2.1 Le cadre multirésolution de Harten . . . . .	35
1.2.2 Représentations linéaires . . . . .	37
1.2.3 Représentations non-linéaires de type ENO . . . . .	41
1.2.4 Représentations non-linéaires de type ENO-SR . . . . .	46
1.2.5 Exemple numérique . . . . .	50
<b>2 Représentations multiéchelles adaptées aux contours</b>	<b>55</b>
2.1 L'approche séparable . . . . .	58
2.2 La prédiction adaptée aux contours . . . . .	64
2.2.1 Prédiction ENO non-séparable . . . . .	66
2.2.2 Le mécanisme de détection . . . . .	68
2.2.3 La technique de prédiction ENO-EA . . . . .	73
2.2.4 Propriété d'exactitude de la prédiction ENO-EA . . . . .	77
2.2.5 Performances pratiques de la prédiction ENO-EA . . . . .	81
2.3 Concentration des coefficients et seuillage . . . . .	83
2.3.1 Performances pratiques du seuillage ENO-EA . . . . .	83
2.3.2 Concentration des coefficients : une conjecture . . . . .	85
2.3.3 Stabilité et contrôle d'erreur . . . . .	92

<b>3</b>	<b>Régularité et représentations multiéchelles non-linéaires</b>	<b>101</b>
3.1	Introduction . . . . .	101
3.2	Théorèmes directs . . . . .	104
3.2.1	Exactitude polynomiale et différences finies . . . . .	104
3.2.2	Théorèmes directs pour les espaces de Besov . . . . .	106
3.2.3	Le cas multidimensionnel et l'espace $BV$ . . . . .	108
3.2.4	Application à ENO, WENO, ENO-SR et ENO-EA . . . . .	111
3.3	Théorèmes inverses . . . . .	112
3.3.1	L'algorithme de subdivision . . . . .	112
3.3.2	Régularité de la fonction limite . . . . .	116
3.3.3	Théorèmes inverses pour les espaces de Besov . . . . .	126
3.3.4	Application à ENO, WENO et ENO-SR . . . . .	130
<b>4</b>	<b>Stabilité des représentations multiéchelles non-linéaires</b>	<b>141</b>
4.1	Introduction . . . . .	141
4.2	Stabilité et différences finies . . . . .	143
4.3	Stabilité dans les espaces $L^p$ . . . . .	148
4.4	Stabilité dans les espaces de Besov . . . . .	150
4.5	Application aux représentations WENO . . . . .	153
<b>5</b>	<b>Applications</b>	<b>157</b>
5.1	Compression . . . . .	158
5.1.1	Le codage par transformée . . . . .	158
5.1.2	Les codeurs EZW et EBCOT . . . . .	161
5.1.3	Résultats numériques . . . . .	165
5.1.4	Conclusion . . . . .	181
5.2	Débruitage . . . . .	184
5.2.1	Les algorithmes de seuillage . . . . .	184
5.2.2	Débruitage des signaux unidimensionnels . . . . .	185
5.2.3	Débruitage des images . . . . .	194
5.2.4	Conclusion . . . . .	209
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>211</b>

# INTRODUCTION



# Introduction

*Hoc opus, hic labor est.*<sup>1</sup>  
*Sutor, ne supra crepidam.*<sup>2</sup>

L'objet de cette thèse est le développement, l'étude théorique et numérique de nouvelles méthodes - intrinsèquement *non-linéaires* - pour la représentation multiéchelle des images en vue d'applications telles que la compression ou l'estimation. Afin de motiver une telle étude et d'expliquer ses résultats, il convient tout d'abord de nous situer dans le contexte général du traitement d'image et de son évolution récente.

Il faut remarquer tout d'abord l'irruption croissante de la recherche mathématique dans cette discipline, autrefois essentiellement associée aux travaux des ingénieurs électroniciens. La raison principale de cette évolution est la *révolution digitale*, l'outil informatique offrant toute sa souplesse et rapidité d'exécution pour effectuer des opérations mathématiques sophistiquées sur les fonctions représentant les images, ce qui était inenvisageable dans un contexte purement analogique. Les applications technologiques faisant intervenir l'image sous une forme numérisée sont aujourd'hui multiples et omniprésentes : multimédia, télévision haute définition, photographie numérique, imagerie médicale et satellitaire, etc.

Les opérations mathématiques effectuées sur les images ont bien entendu des objectifs précis. Citons ainsi deux problèmes importants qui motivent en partie ce travail de thèse.

---

<sup>1</sup>Ici les questions, devant nous le travail!

<sup>2</sup>Soldat, ne te crois pas plus fort que tu es!

1. *Comprimer* : On cherche à réduire au maximum la taille mémoire occupée par une image lors de son stockage ou en vue de sa transmission, tout en conservant au mieux sa qualité visuelle.
2. *Estimer* : A partir de l'observation d'une l'image perturbée par un bruit parasite, on cherche à restaurer au mieux l'image source. Il s'agit de l'exemple le plus simple d'un *problème inverse* : plus généralement, l'image perturbée peut avoir été auparavant transformée par l'action d'un opérateur (convolution, tomographie).

La dernière décennie du siècle passé est marquée par une évolution très nette des méthodes mathématiques utilisées pour résoudre ces problèmes que l'on peut résumer ainsi : les opérations *linéaires* qui traitent l'image de façon *uniforme* ont fait place à des opérations *non-linéaires* plus performantes et qui traitent l'image de façon *adaptive*. Le besoin d'adaptativité en traitement d'image est évident d'un point de vue intuitif : lorsque l'on regard l'image représentée sur la figure 1, on constate que l'intensité lumineuse varie de façon régulière (avec des fluctuations liées aux textures) dans les zones homogènes correspondant aux différents objets, et présente des courbes de discontinuité associées aux contours délimitant ces objets. Une bonne méthode devra intégrer ce caractère globalement inhomogène de l'image par un traitement adapté des contours et des zones homogènes. Afin d'aller au delà de cette simple intuition, il est aussi nécessaire de donner un sens mathématique précis à cette inhomogénéité spatiale. L'évolution des méthodes peut ainsi être mise en parallèle avec une évolution de la modélisation des images tant du point de vue déterministe qu'aléatoire : dans le premier cadre on a ainsi cherché des espaces fonctionnels exprimant au mieux l'idée d'une régularité par morceaux plutôt qu'uniforme, et dans le second on s'est dirigé vers des modèles non-gaussiens.

## 1. Représenter pour mieux traiter

Une telle évolution a été largement stimulée par l'introduction de nouvelles *représentation mathématiques* pour les images. L'importance de la notion de représentation en traitement d'image avait été dégagée en particulier par Marr dans ses travaux sur la vision artificielle. Dans [53], on peut lire :

*A representation is a formal system for making explicit certain entities or types of information, together with a specification of how the system does this... For example, the Arabic, Roman and binary numerical systems are all formal systems for representing numbers. The Arabic representation consists in a string of symbols drawn from the set 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 and the rule for*



FIG. 1 – Image digitale  $512 \times 512$  pixels

*constructing the description of a particular integer  $n$  is that one decomposes  $n$  into a sum of multiple of powers of 10... the alphabet allows the construction of a written representation of words... A representation, therefore is not a foreign idea at all, we all use representations all the time. However, the notion that one can capture some aspects of reality by making a description of it using a symbol and that to do so can be useful seems to me a fascinating and powerful idea... This issue is important, because how information is presented can greatly affect how easy it is to do different things with it. This is evident even from our number example : it is easy to add, to subtract and even to multiply if the Arabic or binary representation are used, but it is not at all easy to do these things - especially multiplication - with Roman numerals. This is a key reason why the Roman culture failed to develop mathematics in the way the Arabic culture had.*

Lorsque l'on applique ces remarques à des objets plus complexes que les nombres, à savoir les fonctions  $I(x, y)$  qui représentent l'intensité lumineuse des images au points  $(x, y)$  de l'écran, on est au coeur de la démarche de *l'analyse harmonique* : de nombreux problèmes théoriques ou appliqués portant sur les fonctions peuvent se résoudre plus facilement lorsqu'on les exprime à l'aide d'une représentation bien choisie. Les mathématiques disposent aujourd'hui d'une multitude de techniques visant à effectuer *l'analyse*, la *synthèse* et la *représentation* de fonctions quelconques à l'aide de fonctions de base élémentaires. Ces techniques d'analyse harmonique au sens large sont parfois implémentables par des algorithmes performants, ce qui leur confère un



intérêt supplémentaire pour les applications numériques. L'exemple le plus fondamental est certainement celui de la transformée de Fourier et des séries de Fourier, pour lequel on dispose de surcroît de l'algorithme FFT de complexité  $\mathcal{O}(N \log N)$ .

Une idée particulièrement fructueuse en traitement numérique de l'image est que l'information visuelle est *hiérarchisée* à travers les échelles. Ainsi, en partant d'une image digitale, on peut considérer ses approximations obtenues en moyennant successivement l'intensité lumineuse sur des carrés de  $2 \times 2$  pixels puis  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ , etc. De telles approximations sont *hiérarchisées* au sens où l'on peut déduire l'image approchée à une certaine résolution à partir de la résolution précédente, deux fois plus fine. Certaines informations, telles que les variations lentes d'intensité lumineuse dans les zones homogènes de l'image, sont bien décrites par la composante basse résolution, alors que les contours et les textures nécessitent une résolution plus fine. Dès lors, il devient intéressant de représenter l'image sous la forme d'une *décomposition multiéchelle*, constituée de son approximation à une résolution grossière et des détails aux échelles intermédiaires permettant de la reconstruire à la résolution du pixel initial. De telles décompositions ont d'abord été introduites par les ingénieurs à l'aide de bancs de filtres et d'algorithmes pyramidaux. Les *bases d'ondelettes*, introduites au milieu des années 1980 dans les travaux de Meyer, Daubechies et Mallat, ont apporté un cadre fonctionnel particulièrement fécond pour le développement de ces nouvelles méthodes de représentation et l'analyse de leurs applications au traitement numérique de l'image.

L'impact des ondelettes sur le traitement de l'image, dont le lecteur trouvera un exposé particulièrement détaillé dans [52], peut se comprendre de façon simple et intuitive. La figure 2 visualise ainsi la décomposition de l'image de la figure 1 dans la base de Haar, avec son approximation basse résolution et les détails représentés par leur valeur absolue. Cette visualisation illustre clairement en quel sens les représentations multiéchelles sont *appropriées* pour un traitement adaptatif de l'image : la plupart des coefficients d'ondelettes aux échelles fines sont proches de zéro, et l'énergie de la décomposition se concentre sur un petit nombre de coefficients associés aux contours et aux textures. Le traitement adaptatif utilisant les ondelettes se basera donc sur un simple examen de la taille des coefficients. En ce qui concerne l'estimation, ce sont les algorithmes de *seuillage* introduits par Donoho, Johnstone, Kerkyacharian et Picard [38]. Du point de vue de la compression, ce sont les algorithmes de type EZW (Embedded Zerotree Wavelet) de Shapiro [59] et SPHT (Set Partitioning Hierarchical Tree) de Said et Pearlman [57] ainsi que l'algorithme EBCOT de Taubman [60], dans lesquels on le nombre de bits affecté à un

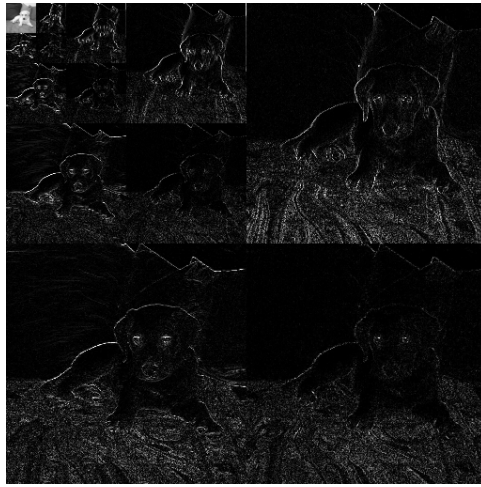


FIG. 2 – Décomposition en ondelettes

coefficient dépendra essentiellement de sa taille. Ces algorithmes constituent à l'heure actuelle l'état de l'art en ce qui concerne ces applications (on peut citer en particulier le nouveau standard de compression JPEG 2000 qui s'appuie sur l'algorithme EBCOT). Le cadre mathématique offert par les bases d'ondelettes permet d'aller plus loin dans l'analyse de leur performance.

Le point de départ d'une telle analyse est un critère mathématique qui permet de mesurer les propriétés de concentration observées sur les coefficients d'ondelettes des images naturelles. Ce critère repose sur la notion fondamentale *d'approximation non-linéaire* : on approche une fonction à partir de sa décomposition en ondelettes  $f = \sum d_\lambda \psi_\lambda$  en retenant uniquement les  $N$  plus grandes contributions  $\|d_\lambda \psi_\lambda\|_X$  où  $X$  est une norme dans laquelle on souhaite mesurer l'erreur d'approximation. Le choix le plus fréquent est  $X = L^2$ , ce qui correspond alors simplement à retenir les  $N$  plus grands coefficients  $d_\lambda$ . En notant  $f_N$  la fonction d'approximation ainsi obtenue, on mesurera alors la concentration par la vitesse de décroissance de l'erreur  $\|f - f_N\|_X$ , i.e. le plus grand réel  $s > 0$  tel que

$$\|f - f_N\|_X \lesssim N^{-s}.$$

Toujours dans le cas où  $X = L^2$ , il est facile de vérifier qu'une telle propriété peut s'exprimer de façon équivalente par l'appartenance de la suite des coefficients  $(d_\lambda)$  à l'espace faible  $w\ell^p$ , i.e.

$$\#\{\lambda \text{ t.q. } |d_\lambda| \geq \eta\} \lesssim \eta^{-p},$$

où  $p$  et  $s$  sont liés par la relation  $1/p = 1/2 + s$ . Ceci signifie aussi que la suite

$(d_n)_{n>0}$  obtenue par réarrangement décroissant des  $|d_\lambda|$  vérifie l'estimation

$$d_n \lesssim n^{-1/p}.$$

Les propriétés de l'approximation non-linéaire par ondelettes ont été élucidées par les travaux de DeVore [34] et de ses collaborateurs, qui ont permis d'identifier les propriétés de régularité minimales requises sur la fonction  $f$  pour obtenir une vitesse de convergence  $s > 0$  prescrite. D'autre part, plusieurs travaux ont montré que cette vitesse se traduit directement dans les performances des algorithmes de compression et d'estimation ([42],[18],[21] [36],[22]) évoqués ci-dessus.

Il restait donc à comprendre, au travers de la modélisation des images et de leur propriétés de régularité, quelle vitesse d'approximation pouvait être associée aux images naturelles. Le modèle le plus communément utilisé pour décrire la régularité des images est l'espace  $BV$  des *fonctions à variation bornée*, i.e. les fonctions dont le gradient est une mesure finie. Une telle propriété impose l'existence d'un gradient en dehors de courbes de discontinuités, ce qui correspond à l'intuition que l'image est régulière en dehors de contours de longueur totale finie qui délimitent les différents objets. Ce modèle est bien entendu critiquable, en particulier en ce qui concerne la prise en compte des textures. Il est néanmoins à l'origine de nombreuses idées fécondes en traitement d'image, telles que les algorithmes de débruitage par minimisation introduits par Osher et Rudin [56] qui utilisent la variation totale de l'image comme terme de pénalisation, et qui peuvent être mis en parallèle avec les algorithmes de seuillage [23].

En ce qui concerne la vitesse de convergence des approximations non-linéaires par ondelettes des images modélisées par les fonctions de l'espace  $BV$ , un théorème obtenu dans [23] et [19] apporte une réponse précise à ce problème : *les coefficients d'ondelettes d'une fonction de deux variables  $I(x, y)$  à variation bornée sont dans l'espace  $w\ell^1$* . Autrement dit, la vitesse  $s$  pour les fonctions de  $BV$  est supérieure ou égale à  $1/2$ . Ce résultat est *optimal* en deux sens différents. Il existe d'une part des fonctions de  $BV$  pour lesquelles la vitesse est exactement  $s = 1/2$ . On peut d'autre part montrer que *pour n'importe quelle base*, il existe une fonction de  $BV$  pour laquelle la vitesse d'approximation non-linéaire dans cette base sera inférieure ou égale à  $1/2$ . Tout ceci est résumé par Meyer lorsqu'il écrit :

*In a world where images would be the  $BV$  functions and the eye would measure the error in  $L^2$ , wavelets are the best tool.*

## 2. Vers des représentations anisotropes

Si le résultat que nous venons de citer justifie dans une certaine mesure les succès des méthodes non-linéaires basées sur les ondelettes pour la compression et l'estimation, il en cerne par ailleurs les limites. On peut observer ces limites dans le cas particulièrement simple où  $I(x, y)$  est la fonction indicatrice  $\chi_\Omega$  d'un ensemble de contour  $\partial\Omega$  régulier. Les coefficients d'ondelettes à la résolution  $2^{-j}$  sont alors tous nuls sauf lorsque le support de l'ondelette intercepte la frontière, i.e. pour  $\mathcal{O}(2^j)$  d'entre eux pour lesquels on aura au mieux l'estimation  $|d_\lambda| \lesssim 2^{-j}$ . Ceci nous montre que la propriété  $w\ell^1$  est déjà saturée sur ce type de fonction, et qu'on ne peut espérer mieux que la vitesse  $s = 1/2$ .

Un tel comportement doit être relié au caractère intrinsèquement *isotrope* du raffinement produit par l'approximation non-linéaire en ondelettes. La figure 3 illustre schématiquement cet aspect : si l'on veut résoudre le contour  $\partial\Omega$  avec une précision  $h$  on est amené à introduire  $\mathcal{O}(h^{-1})$  paramètres. Notons qu'en dimension supérieure  $d > 2$ , le même exemple nous conduirait à introduire  $\mathcal{O}(h^{1-d})$  paramètres, ce qui aboutirait à une vitesse d'approximation  $s = \frac{1}{2(d-1)}$  qui se détériore lorsque  $d$  augmente : c'est le phénomène du *curse of dimensionality* (la "plaie" des hautes dimensions) auquel le raffinement adaptatif isotrope ne parvient pas à remédier. Il nous indique que les contours sont un obstacle fondamental à l'efficacité des méthodes ondelettes en image. Lorsque le contour est régulier (par exemple de classe  $C^2$  par morceaux), il est facile d'observer qu'un raffinement *anisotrope*, par exemple basé sur des triangulations, permet d'améliorer la précision : on peut approcher le contour avec une précision  $h^2$  à l'aide de  $\mathcal{O}(h^{-1})$  points de discrétisation. Si  $I_N$  est l'approximation constante par morceaux sur  $N = \mathcal{O}(h^{-1})$  triangles construits à partir de cette discrétisation, ainsi que l'illustre la figure 4, on a par conséquent

$$\|I - I_N\|_{L^2} \lesssim N^{-1},$$

i.e. la vitesse de convergence  $s = 1$ . Dans cette amélioration, on a utilisé de façon capitale la *régularité géométrique* du contour  $\partial\Omega$ . Notons que cette régularité n'est absolument pas prise en compte dans le modèle *BV* qui indique simplement que les contours ont une longueur totale finie.

Ces remarques élémentaires motivent le développement et l'étude de méthodes de *représentations anisotropes* pour les images, visant à exploiter au mieux la régularité géométrique des contours. Ce programme de recherche

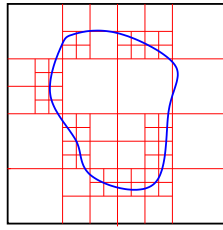


FIG. 3 – Raffinement isotrope

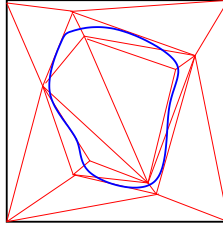


FIG. 4 – Raffinement anisotrope

s'est particulièrement intensifié depuis 5 ans, avec une remarquable diversité dans les approches envisagées. Nous pouvons en citer trois dans lesquelles des progrès notables ont été accomplis.

1. *Triangulations anisotropes* : la construction décrite ci-dessus pour le cas d'une fonction indicatrice est évidemment inexploitable dans le cas d'une image plus générale donnée par ses valeurs sur une grille de pixels et dont les contours ne sont pas clairement définis. La difficulté fondamentale est donc ici d'aboutir à une triangulation optimale par un algorithme simple. Les algorithmes de déraffinement itératifs (thinning) proposés dans [41] sont initialisés à partir d'une triangulation fine et uniforme, et procèdent par élimination sélective de sommets et re-triangulation. Ces algorithmes donnent de bonnes triangulations en pratique, bien qu'aucun résultat théorique n'existe concernant l'optimalité de la triangulation obtenue. D'autre part, on peut s'attendre à des problèmes techniques lors de leur application aux images, liés au fait que les triangles ne coïncident pas avec des ensemble de pixels.
2. *Ridgelets et curvelets* : il s'agit de nouveaux outils d'analyse harmonique introduits dans les travaux de Candes et Donoho, qui offrent une sélectivité angulaire supplémentaire par comparaison aux ondelettes. Les ridgelets [11] ont ainsi la forme de fonctions d'une variable  $\psi(x, y) = \psi(x)$  auxquelles on applique des translations, dilatations et rotations. Un

choix judicieux de  $\psi$  et de ces changements de variable permet d'obtenir une base orthonormée. Les curvelets [12] consistent à localiser l'application des ridgelets par des troncatures en espace et en fréquence. Cette construction permet d'obtenir la vitesse  $s = 1$  par un simple algorithme de seuillage similaire à l'approximation non-linéaire en ondelettes, lorsque la fonction  $f$  est de classe  $C^2$  en dehors de courbes de discontinuité de classe  $C^2$  par morceaux. Le succès de ces méthodes sur des images réelles reste cependant à confirmer.

3. *Bandelettes* : introduites dans les travaux de Mallat et Le Pennec [51], ces techniques consistent à adapter la base d'ondelette de façon à ce qu'elle soit en quelque sorte insensible à présence des contours en ce qui concerne la taille des coefficients. Cela sous-entend bien entendu que ces contours ont été détectés et eux-mêmes représentés avec une certaine précision comme des courbes régulières unidimensionnelles. Une telle approche est particulièrement attractive pour les applications où les contours ont une utilité propre (par exemple le codage du mouvement), et permet d'obtenir des résultats d'approximation d'ordre arbitrairement élevé en fonction de la régularité des contours et des zones homogènes. Elle semble apporter des améliorations sur les images réelles par rapport aux ondelettes.

### 3. Les représentations multiéchelles non-linéaires

Dans chacune des approches décrites ci-dessus, la recherche de l'anisotropie a conduit à abandonner la structure hiérarchique arborescente particulièrement simple des bases d'ondelettes et des algorithmes qui leur sont associés. Un aspect spécifique des méthodes que nous allons développer et étudier dans cette thèse est la conservation de cette structure. Nos algorithmes auront essentiellement la même forme que les décompositions en ondelettes classiques, mais la prise en compte de la régularité géométrique sera effectuée par une modification importante : le calcul des coefficients d'ondelettes intégrera lui-même des opérations non-linéaires, et ne pourra plus vraiment s'interpréter comme un changement de base.

Ce calcul non-linéaire utilisera en particulier des techniques introduites dans le contexte de la simulation numériques des ondes de choc par les chercheurs de UCLA en particulier Harten, Engquist et Osher. Dans ce contexte, une préoccupation majeure est le développement de méthodes numériques d'ordre élevé qui prennent en compte la présence des chocs et évitent la création d'oscillations de type phénomène de Gibbs. De tels schémas sont basés sur des opérateurs d'interpolation des données numériques (valeurs ponctuelles ou

moyennes locales) qui intègrent la présence potentielle de singularités par des mécanismes de détection : ce sont les méthodes ENO (essentially non oscillatory) [48], qui consistent à reconstruire localement des polynômes d'ordre élevé en prenant soin d'éviter les singularités par une sélection adaptative du stencil d'interpolation. On peut ainsi approcher la fonction à partir de ses données numériques en évitant les oscillations au voisinage des chocs. Il est possible de pousser plus loin la précision d'une telle reconstruction en cherchant à détecter l'emplacement précis de la singularité à partir des données numériques : ce sont les méthodes ENO-SR (subcell resolution) [47], qui peuvent être utilisées dans le suivi des chocs. Toutes ces techniques de reconstruction sont non-linéaires.

Une idée fondamentale proposée par Harten [46] est d'intégrer ces techniques dans les représentations multiéchelles des fonctions. Dans le cadre qu'il propose, les coefficients d'ondelettes sont identifiés à l'erreur de prédiction d'une échelle à la suivante lorsque l'on utilise une technique de reconstruction prescrite. Ces reconstructions peuvent être non-linéaires, auquel cas la transformation ne s'apparente plus à un changement de base. Un point de vue similaire sera ultérieurement développé dans [9] et [10] en utilisant le cadre du filtrage et du *lifting scheme*.

L'objectif est ici d'améliorer significativement la concentration des coefficients par rapport aux décompositions en ondelettes classiques, par la prise en compte des contours dans le processus non-linéaire de prédiction. Si ceux-ci sont bien prédits d'une échelle à l'autre, les coefficients d'ondelettes seront négligeables même au voisinage des contours. Ce programme alléchant soulève néanmoins plusieurs difficultés :

1. Les méthodes de capture de singularité ENO-SR proposées par Harten ont essentiellement été développées dans le cadre unidimensionnel, et appliquées en plusieurs dimensions par produit tensoriel, i.e. direction par direction. Si une telle approche permet d'éviter les oscillations, elle est insuffisante pour traiter avec précision les contours qui ne sont pas purement horizontaux ou verticaux. Il est donc crucial de développer des représentations multiéchelles utilisant des techniques de prédiction de contours *intrinsèquement multidimensionnelles*.
2. D'un point de vue théorique, il est important de comprendre ce que l'on a gagné par rapport aux ondelettes classiques. En particulier, pouvons nous espérer une *amélioration de la concentration des coefficients*, pour des fonctions régulières par morceaux avec des courbes de discontinuités régulières, et une conservation des mêmes propriétés de concentration pour les espaces fonctionnels classiques, en particulier les espaces de Besov et  $BV$  ?

3. Il est finalement important de s'interroger sur la *stabilité* de ces décompositions puisque nous serons amenés à y effectuer des opérations telles que le seuillage ou la quantification dans les applications pratiques en compression et en débruitage. Ce problème est loin d'être aussi simple que dans le cas des représentations linéaires pour lesquelles la stabilité est liée aux équivalences entre les normes des fonctions dans les espaces fonctionnels classiques et les normes discrètes de leurs coefficients d'ondelettes.

Nous abordons dans cette thèse chacune de ces difficultés, et nous y apportons des éléments de réponse, ainsi que des tests numériques visant à évaluer concrètement les performances des méthodes proposées.

## 4. Plan et résultats de la thèse

Dans le chapitre 1, nous présentons les outils mathématiques qui sont à la base de notre travail. Nous rappelons tout d'abord le cadre des analyses multirésolutions et bases d'ondelettes biorthogonales, ainsi que quelques résultats tels que la caractérisation des espaces fonctionnels et de l'erreur de l'approximation non-linéaire. Nous abordons ensuite le cadre discret introduit par Harten qui permet l'introduction des représentations multiéchelles non-linéaires, et nous présentons quelques exemples classiques importants (basés sur les techniques ENO et ENO-SR) dans le cas de données unidimensionnelles.

Dans le chapitre 2, après avoir rappelé l'utilisation du produit tensoriel et mis en évidence ses limites, nous proposons de nouvelles méthodes de prédiction intrinsèquement multidimensionnelles et plus efficaces dans la prise en compte des contours, que nous appellerons ENO-EA (edge-adapted). Voici d'ores et déjà une illustration de ces méthodes par un exemple simple : sur la figure 5 nous présentons une image géométrique (deux polynômes de degré 3 séparés par un contour de discontinuité circulaire) et ses moyennes locales à une résolution 16 fois plus grossière. La figure 6 compare l'approximation obtenue à partir de ces moyennes en utilisant une prédiction linéaire classique et la prédiction introduite dans ce chapitre. Dans le premier cas, on constate qu'il est nécessaire d'ajouter des coefficients d'ondelettes numériquement significatifs aux résolutions plus fines afin d'améliorer la précision près du contour. Dans le second cas, ces coefficients seront négligeables puisque la précision est déjà excellente. Notre approche est fondée sur deux ingrédients fondamentaux : un mécanisme de détection opérant sur les données déjà reconstruites et un mécanisme de prédiction de contour. Elle peut être vue comme une passerelle entre les techniques de détection de contours et les techniques ENO-SR intro-



duites en  $1D$ . Nous prouvons l'exactitude du procédé de reconstruction pour des contours rectilignes, ce qui nous amène à formuler quelques conjectures sur les propriétés de concentration des coefficients pour des fonctions de classe  $C^2$  en dehors de courbes de discontinuité de classe  $C^2$  par morceaux. Nous effectuons finalement une première étude empirique de la stabilité  $L^2$  du procédé de reconstruction lorsque l'on effectue une perturbation des coefficients, telle que le seuillage, l'étude théorique générale étant l'objet du chapitre 4. Une approche possible permettant le contrôle de l'erreur en présence de telles perturbations a été proposée par Harten en 1D, et nous la généralisons ici au cadre des décompositions non-tensorielles. Cette approche consiste à modifier l'algorithme de décomposition pour qu'il intègre au fur et à mesure du calcul les perturbations effectuées sur les coefficients. Nous sommes finalement amenés à l'abandonner car elle présente plusieurs inconvénients dans l'optique du codage, et n'améliore pas significativement le compromis entre l'erreur et le nombre de coefficients mis en mémoire.

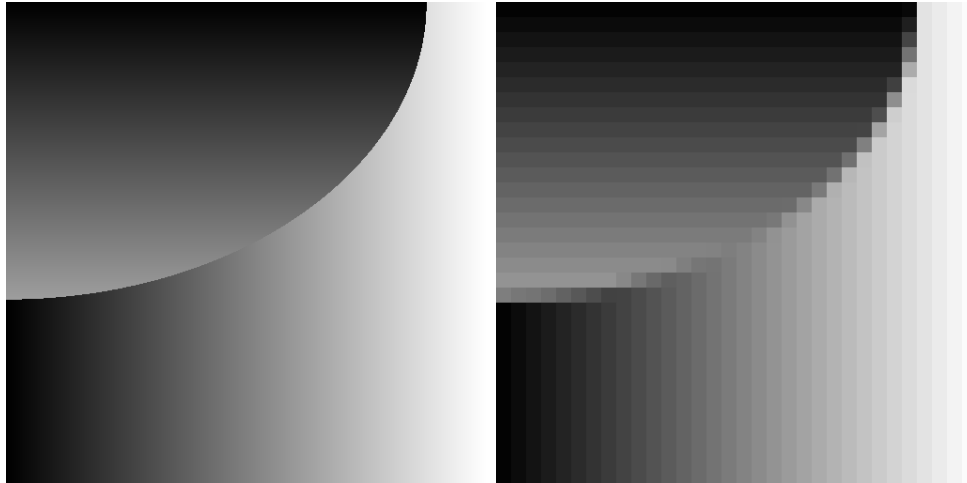


FIG. 5 – (a) image géométrique (b) basse résolution

Les problèmes théoriques généraux liés aux représentations multiéchelles non-linéaires sont l'objet des chapitres 3 et 4. Dans le chapitre 3, on s'intéresse à la caractérisation de la régularité des fonctions par les propriétés numériques des coefficients dans ces nouvelles représentations. L'aspect non-linéaire rend

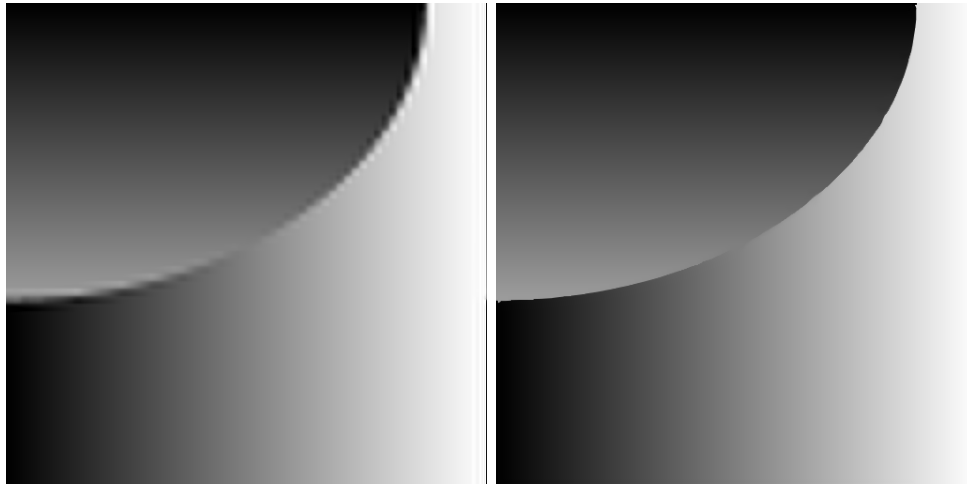


FIG. 6 – (a) prédiction linéaire (b) prédiction non-linéaire

ici l'analyse plus délicate que dans le cas des décompositions en ondelettes classiques. En l'absence de fonctions de base clairement définies, on est amené à étudier le processus de *subdivision dyadique* correspondant à l'itération depuis les basses échelles de l'opérateur de prédiction non-linéaire. Cette étude, basée sur une notion de *rayon spectral joint* nous permet d'établir des résultats de caractérisation des espaces fonctionnels similaires à ceux qui sont établis pour les bases d'ondelettes. Ces résultats s'appliquent en particulier aux représentations basées sur les techniques ENO et ENO-SR.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de la stabilité des représentations multiéchelles non-linéaires. Nous abordons directement le problème du contrôle de l'erreur dans diverses normes, lorsque l'on effectue la reconstruction après une perturbation des coefficients, ce qui nécessite l'hypothèse d'une *dépendance continue* de la prédiction non-linéaire en fonction des données. Les résultats obtenus ne sont que partiellement satisfaisants, puisque cette hypothèse ne s'applique pas aux opérateurs de prédiction non-linéaire du chapitre 2. Ils constituent néanmoins une première étape vers une compréhension plus profonde de ces nouvelles représentations.

Nous présentons finalement dans le chapitre 5 des applications des représentations multiéchelles non-linéaires au débruitage suivant l'algorithme de seuillage invariant par translation (cycle spinning) de Coifman et Donoho [27], et à la compression suivant les algorithmes EZW et EBCOT. Dans ces applications, les améliorations par rapport aux méthodes d'ondelettes classiques sont spectaculaires sur des images purement géométriques et notables dans

le cas d'images peu texturées. Comme on peut s'y attendre, nos méthodes n'apportent pas d'améliorations substantielles pour des images fortement texturées, puisqu'elle reposent essentiellement sur un *modèle sous-jacent* de fonctions régulières par morceaux.

# Notations

## Espaces

$C^m(\Omega)$ ,  $m$  entier : espaces des fonctions  $m$  fois continûment différentiables.

$C^s(\Omega)$  ( $s > 0$  non entier) : espaces de Hölder.

$L^p(\Omega)$  : espaces de Lebesgue.

$W^{s,p}(\Omega)$  : espaces de Sobolev ( $H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega)$ ).

$B_{p,q}^s(\Omega)$  : espaces de Besov.

$\mathbb{P}_n$  : espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

## Opérateurs

$P_{j-1}^j$  : opérateur de *restriction* ou *projection*.

$P_j^{j-1}$  : opérateur de *prolongement* ou *prédiction*.

$\Delta$  : opérateur de différence finies pour les suites  $(\Delta u)_n := u_{n+1} - u_n$ .

$\Delta_h$  : opérateur de différence finies pour les fonctions  $\Delta_h f := f(\cdot + h) - f(\cdot)$ .

$\Delta^n$  et  $\Delta_h^n$  : opérateurs de différence finies d'ordre  $n$ .

## Équivalences

Pour deux grandeurs positives  $A$  et  $B$  dépendant d'un ensemble de paramètres, relation  $A \lesssim B$  exprime qu'il existe une constante  $C$ , indépendante des paramètres, telle que  $A \leq CB$ . De même  $A \sim B$  signifie que  $A \lesssim B$  et  $B \lesssim A$ .

## Autres notations

$\#E$  : cardinal de l'ensemble fini  $E$ .

$\varphi_\lambda, \tilde{\varphi}_\lambda, v_\lambda, \lambda \in \Gamma_j$  : notations compactes pour les fonctions d'échelles et coefficients d'approximation à l'échelle  $|\lambda| = j$ .

$\psi_\lambda, \tilde{\psi}_\lambda, d_\lambda, \lambda \in \nabla_j$  : notations compactes pour les ondelettes et coefficients d'ondelettes à l'échelle  $|\lambda| = j$ .

# ANALYSES MULTIREOLUTIONS NON-LINEAIRES

# Chapitre 1

## Analyses multirésolutions non-linéaires

*Fervet opus!*<sup>1</sup>

### Introduction

Le but de ce chapitre est de rappeler d'une part quelques résultats sur la théorie des ondelettes biorthogonales, et de présenter d'autre part le cadre général introduit par Harten dans [46] qui permet le développement des représentations multiéchelles non-linéaires en donnant quelques exemples simples de ces représentations dans le cas unidimensionnel. Ce cadre peut être vu comme une généralisation des algorithmes de décomposition dans les bases d'ondelettes biorthogonales, le point de vue adopté par Harten étant d'emblée celui du traitement des données discrétisées.

Nous rappelons tout d'abord le cadre désormais classique des ondelettes biorthogonales introduit dans [20] : construction, algorithmes et propriétés de caractérisation des espaces fonctionnels. Nous renvoyons le lecteur à [30] et [16] pour une présentation plus détaillée de ces outils.

Nous présentons ensuite le cadre discret général proposé par Harten, qui s'appuie essentiellement sur des opérateurs de transfert (restriction et prédiction) entre les niveaux de résolution successifs. Les coefficients d'ondelettes sont ici interprétés comme les coordonnées de l'erreur de prédiction entre deux niveaux successifs. Afin de présenter des exemples plus précis, nous considérons deux cas importants dans lesquels les données discrètes sont respectivement

---

<sup>1</sup>Le travail bouillonne !

interprétées comme les valeurs ponctuelles et les moyennes locales d'une fonction. Dans ces cadres précisés, l'opérateur de restriction est simplement défini, et il est naturel de construire l'opérateur de prédiction par l'intermédiaire d'une *reconstruction approchée* de la fonction au niveau continu à partir des données numériques. Une telle reconstruction doit exploiter au mieux l'information a-priori disponible sur le type de signal que l'on souhaite décomposer et concentrer sur le plus petit nombre de coefficient possible. C'est ici une idée fondamentale que nous appliquerons plus particulièrement dans le chapitre suivant : les représentations multiéchelles à la Harten s'appuient de manière sous-jacente sur un *modèle* des signaux auxquels on souhaite les appliquer.

Ce point de vue nous permet de présenter plusieurs exemples, dans le cas monodimensionnel. On examine tout d'abord les reconstructions linéaires, basées sur des techniques d'interpolation polynômiale, et on retrouve dans ce cas les algorithmes associés aux décompositions en ondelettes biorthogonales. Ces techniques sont efficaces lorsque le modèle sous-jacent est une fonction régulière que l'on peut approcher avec précision par interpolation polynômiale. La prise en compte de singularités isolées dans le modèle conduit à les abandonner au profit de techniques d'interpolation non-linéaires de type ENO (essentially non oscillatory) et ENO-SR (subcell resolution) que nous présentons en détail. Nous illustrons l'intérêt des représentations non-linéaires par un exemple numérique élémentaire.

## 1.1 Analyses multirésolutions et ondelettes

### 1.1.1 Construction des AMR et des ondelettes

La construction des bases d'ondelettes biorthogonales de  $L^2(\mathbb{R})$  s'appuie sur la notion d'*analyse multirésolution*, i.e. une suite emboîtée d'espaces d'approximation

$$V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}), \quad (1.1)$$

l'entier  $j$  étant associé à la résolution  $2^{-j}$  au sens où  $V_j$  est engendré par une base de Riesz du type

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

La propriété de base de Riesz signifie que l'on a une équivalence entre la norme  $L^2$  d'une fonction de  $V_j$  et la norme  $\ell^2$  de ses coordonnées

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{j,k} \right\|_{L^2}^2 \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \quad (1.3)$$

et il est facile de vérifier que les constantes d'équivalence sont alors indépendantes de  $j$ . La fonction  $\varphi$  est appelée *fonction d'échelle*. Une propriété fondamentale vérifiée par cette fonction est *l'équation d'échelle*

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2x - n), \quad (1.4)$$

qui exprime à elle seule l'emboîtement des espaces d'approximation. On exige en outre la propriété de densité

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}). \quad (1.5)$$

Un exemple classique est celui où  $V_j$  est constitué des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles  $I_{j,k} := [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Dans ce cas la fonction d'échelle est donnée par

$$\varphi = \chi_{[0,1]}, \quad (1.6)$$

et la base  $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée. Un autre exemple classique est celui des fonctions affines par morceaux sur les intervalles  $I_{j,k}$  et continues sur  $\mathbb{R}$ . La fonction d'échelle est alors donnée par

$$\varphi = \max\{0, 1 - |x|\}. \quad (1.7)$$

Ces deux exemples sont généralisés par les fonctions splines de degré  $N$ , i.e. les fonctions polynomiales de degré  $N$  par morceaux sur les intervalles  $I_{j,k}$  et  $C^{N-1}$  sur  $\mathbb{R}$ , qui sont engendrées par la fonction

$$\varphi := (*)^{N+1} \chi_{[0,1]}. \quad (1.8)$$

Les fonctions constantes et affine par morceaux correspondent respectivement aux cas  $N = 0$  et  $N = 1$ . Notons que la suite  $h_n$  associée à la fonction d'échelle définie ci-dessus est à support fini : elle est donnée par

$$h_n := 2^{-N} \frac{(N+1)!}{n!(N+1-n)!} \text{ pour } n = 0, \dots, N+1, \quad 0 \text{ sinon.} \quad (1.9)$$

Ceci correspond au fait que la fonction  $\varphi$  est à support compact. Une telle propriété est cruciale pour le calcul numérique.

Un préalable à la construction des bases d'ondelettes est la mise au point d'un opérateur de projection sur les espaces  $V_j$  ayant de bonnes propriétés numériques. Dans le cas des splines de degré  $N \geq 1$ , le projecteur orthogonal



n'est pas satisfaisant car il n'est pas local. On est ainsi amené à introduire une fonction d'échelle *duale*  $\tilde{\varphi}$  qui vérifie elle aussi une équation du type

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_n \tilde{\varphi}(2x - n), \quad (1.10)$$

ainsi que les relations de dualité

$$\langle \varphi, \tilde{\varphi}(\cdot - k) \rangle = 1 \text{ si } k = 0, \quad 0 \text{ sinon.} \quad (1.11)$$

Ces relations donnent par changement de variable  $\langle \varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,l} \rangle = \delta(k - l)$ , ce qui permet de définir un projecteur sur  $V_j$  de la forme

$$P_j v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle v, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}. \quad (1.12)$$

Les ondelettes biorthogonales sont alors définies à partir des fonctions d'échelle par les relations

$$\psi(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi(2x - n) \text{ et } \tilde{\psi}(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_n \tilde{\varphi}(2x - n), \quad (1.13)$$

avec  $g_n := (-1)^n \tilde{h}_{1-n}$  et  $\tilde{g}_n := (-1)^n h_{1-n}$ . On peut alors montrer que ces fonctions vérifient elles aussi les relations de dualité  $\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,l} \rangle = \delta(k - l)$ , et que le projecteur  $Q_j$  qui leur est associé coïncide avec la différence entre  $P_{j+1}$  et  $P_j$ , i.e.

$$Q_j v = P_{j+1} v - P_j v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle v, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (1.14)$$

On montre aussi les relations d'orthogonalité  $\langle \psi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,l} \rangle = \langle \varphi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,l} \rangle = 0$  qui entraînent les relations de biorthogonalité

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{n,l} \rangle = \delta(j - n) \delta(k - l). \quad (1.15)$$

On peut ainsi exprimer la projection de  $v$  sur  $V_j$  comme une décomposition biorthogonale

$$\begin{aligned} P_j v &= P_0 v + \sum_{j=0}^{J-1} Q_j v \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle v, \tilde{\varphi}_{0,k} \rangle \varphi_{0,k} + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle v, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \end{aligned}$$

ce qui conduit, en faisant tendre  $J$  vers  $+\infty$ , à la décomposition biorthogonale d'une fonction quelconque  $v \in L^2(\mathbb{R})$  suivant

$$v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle v, \tilde{\varphi}_{0,k} \rangle \varphi_{0,k} + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle v, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (1.16)$$

Notons que dans le cas où les translatés de  $\varphi$  sont orthogonaux, on peut prendre  $\tilde{\varphi} = \varphi$  ce qui aboutit à  $\tilde{\psi} = \psi$ , i.e. une décomposition dans une base orthonormale. Dans le cas des fonctions constantes par morceaux, on obtient ainsi le système de Haar.

Le problème central dans cette construction est la mise au point de la paire  $(\varphi, \tilde{\varphi})$ . Une idée féconde consiste à définir directement ces fonctions comme des solutions des équations d'échelle (1.4) et (1.10), et de mettre au point les coefficients  $h_n$  et  $\tilde{h}_n$  de telle façon que ces solutions satisfassent les propriétés de dualité requises, ainsi que d'autres propriétés utiles dans les applications : support compact, régularité, ordre d'approximation élevé des espaces  $V_j$ . Dans cette approche, les fonctions d'échelles et les ondelettes peuvent parfois ne pas avoir d'expression mathématique explicite, ce qui n'est pas réellement gênant dans la plupart des applications numériques : les algorithmes de décomposition ne font en effet appel à ces fonctions qu'à travers des coefficients  $(h_n, g_n, \tilde{h}_n, \tilde{g}_n)$  qui sont en revanche donnés explicitement. Nous rappelons à présent la structure de ces algorithmes.

### 1.1.2 La transformée en ondelette rapide

Dans la pratique du calcul numérique, une fonction ne peut être stockée et manipulée que sous une forme discrétisée faisant intervenir un nombre fini de données, et il est donc irréaliste d'envisager le calcul de tous ses coefficients dans les bases biorthogonales décrites ci-dessus. Dans certaines applications, telles que le traitement numérique du signal, les données disponibles se présentent directement à l'utilisateur sous une telle forme discrétisée, i.e. une suite  $v^J = (v_k^J)_{k \in \mathbb{Z}}$ , où  $J$  représente le niveau de la discrétisation à l'échelle  $2^{-J}$ . Dans d'autres applications, où l'on cherche à décomposer une fonction ayant une expression mathématique explicite, il est alors naturel de définir  $v_{J,k}$  comme le produit scalaire d'une telle fonction avec  $\tilde{\varphi}_{J,k}$  que l'on doit alors calculer explicitement ou approximativement. Le point de départ de l'algorithme de décomposition en ondelettes biorthogonales sera dans les deux cas la suite  $v^J = (v_k^J)_{k \in \mathbb{Z}}$  ou de manière équivalente la fonction de  $V_J$  représentée dans la base des fonctions d'échelle suivant  $v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k^J \varphi_{J,k}$ .

On souhaite alors calculer la représentation multiéchelle de  $v$  dans la base d'ondelette restreinte à  $V_J$ , i.e.

$$v := \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k^0 \varphi_{0,k} + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_{j,k}, \quad (1.17)$$

où l'on a noté

$$v_k^j := \langle v, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \text{ et } d_k^j := \langle v, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle. \quad (1.18)$$

On utilise pour cela les relations suivantes qui se déduisent aisément de l'équation d'échelle duale et de la définition de  $\tilde{\psi}$ ,

$$v_k^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{n-2k} v_n^{j+1} \text{ et } d_k^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{n-2k} v_n^{j+1}. \quad (1.19)$$

Ces relations permettent de calculer de proche en proche les suites  $(v^j, d^j)$  pour  $j = J-1, J-2, \dots, 0$  à partir de  $v^J$ . On obtient ainsi la décomposition multiéchelle

$$\mathcal{M}v^J := (v^0, d^0, \dots, d^{J-1}). \quad (1.20)$$

Pour reconstruire  $c^J$ , on utilise la relation suivante qui se déduit de l'équation d'échelle primale et de la définition de  $\psi$ ,

$$v_k^{j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n^j h_{k-2n} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^j g_{k-2n}. \quad (1.21)$$

Il est intéressant d'interpréter ces algorithmes en termes de *filtrage*. Les formules (1.19) peuvent en effet s'interpréter comme des convolutions de la suite  $v^{j+1}$  avec les suites  $\tilde{h}_{-n}/\sqrt{2}$  et  $\tilde{g}_{-n}/\sqrt{2}$  suivies d'une *décimation* consistant à ne retenir que les échantillons d'indice pairs. De même les deux termes dans la formule (1.21) peuvent s'interpréter les convolutions respectives des suites  $v^j$  et  $d^j$  avec les suites  $h_n/\sqrt{2}$  et  $g_n/\sqrt{2}$ , après avoir au préalable effectué un *sur-échantillonnage* consistant à insérer des zéros aux emplacements des échantillons impairs qui ont été décimés lors de la décomposition. Un tel dispositif est bien connu en traitement du signal sous le nom de *filtrage en sous-bande*, les suites  $v^j$  et  $d^j$  correspondant représentant respectivement les bandes obtenues par filtrage passe-bas et passe-haut de  $v^{j+1}$ .

Les suites  $(h_n, \tilde{h}_n, g_n, \tilde{g}_n)$  jouent ainsi le rôle de filtres numériques, et il est en particulier utile que ces suites aient un support fini de taille raisonnable afin de pouvoir appliquer ces filtres en un faible nombre d'opérations. En pratique, les données discrétisées ont elles aussi un support fini - on part typiquement d'une suite  $v^J = (v_k^J)_{k=0, \dots, 2^J-1}$  - et il est donc légitime de se poser la question de l'adaptation des formules de filtrage au voisinage des extrémités du signal. La solution la plus simple consiste à étendre le signal discret par *périodisation* pour le calcul des coefficients au voisinage des bords. Une telle solution présente l'inconvénient de créer une discontinuité artificielle dans le signal périodisé même si le signal d'origine est régulier. On peut envisager des

extensions plus régulières (par exemple par symétrisation) ou la construction d'analyses multirésolutions et d'ondelettes spécifiquement adaptées à l'intervalle (voir [16]). Nous verrons que le cadre discret proposé par Harten permet d'aboutir à des solutions simples et naturelles pour traiter les problèmes de bords.

### 1.1.3 Le cas multidimensionnel

La généralisation la plus simple des ondelettes aux fonctions à plusieurs variables est basée sur le *produit tensoriel* : en partant des fonctions d'échelles et ondelettes biorthogonales  $(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi})$  à une variable, on construit la fonction d'échelle à  $d$  variables

$$\phi(x) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_d), \quad (1.22)$$

pour  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ . Les espaces  $V_j$  sont alors engendrés par les fonctions

$$\phi_{j,k}(x) := 2^{dj/2} \phi(2^j x - k) = \varphi_{j,k_1}(x_1) \cdots \varphi_{j,k_d}(x_d), \quad (1.23)$$

pour  $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ . En définissant de la même façon les fonctions duales  $\tilde{\phi}_{j,k}$ , on obtient le projecteur

$$P_j v := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle v, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle \phi_{j,k}. \quad (1.24)$$

Afin de caractériser les fluctuations  $Q_j v = (P_{j+1} - P_j)v$ , on introduit  $2^{d-1}$  fonctions

$$\psi^\varepsilon(x) = \psi^{\varepsilon_1}(x_1) \cdots \psi^{\varepsilon_d}(x_d), \quad (1.25)$$

pour  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in E := \{0, 1\}^d - (0, \dots, 0)$  avec la notation  $\psi^0 = \varphi$  et  $\psi^1 = \psi$ . En définissant de façon similaire les fonctions  $\tilde{\psi}^\varepsilon$ , on vérifie alors que

$$Q_j v = \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle v, \tilde{\psi}_{j,k}^\varepsilon \rangle \psi_{j,k}^\varepsilon. \quad (1.26)$$

Par les mêmes considérations que dans le cas monodimensionnel, on peut ainsi aboutir à la décomposition biorthogonale d'une fonction quelconque  $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$  suivant

$$v = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle v, \tilde{\phi}_{0,k} \rangle \phi_{0,k} + \sum_{j \geq 0} \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle v, \tilde{\psi}_{j,k}^\varepsilon \rangle \psi_{j,k}^\varepsilon. \quad (1.27)$$

L'intérêt d'une telle approche réside en particulier dans sa simplicité algorithmique. Comme dans le cas monodimensionnel, le point de départ de

l'algorithme est la fonction discrétisée à la résolution  $2^{-J}$ , i.e. un tableau multidimensionnel de données  $v^J = (v_k^j)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ , que l'on assimile à la fonction de  $V_J$  représentée dans la base naturelle suivant  $v = \sum_k v_k^J \phi_{J,k}$ . Le calcul de sa représentation multiéchelle

$$v = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} v_k^0 \phi_{0,k} + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} d_k^j \psi_{j,k}^\varepsilon. \quad (1.28)$$

s'effectue de façon hiérarchique en remarquant que l'on obtient les  $2^d$  tableaux  $v^{j-1}$  et  $d^{j-1,\varepsilon}$  à partir de  $v^j$  en appliquant successivement l'opération de décomposition monodimensionnelle (1.19) suivant les lignes puis suivant les colonnes. En itérant cette procédure  $J$  fois, comme dans l'algorithme monodimensionnel, on a ainsi accès à la représentation multiéchelle complète, et l'on peut de même reconstruire  $v^J$  en inversant ces opérations. La figure (2.4) illustre cet algorithme dans le cas d'une image bidimensionnelle.

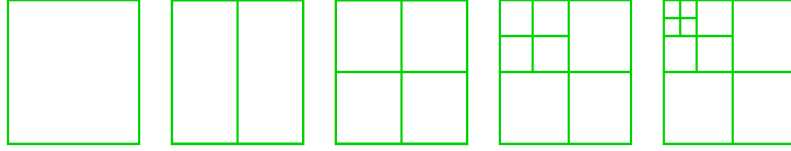


FIG. 1.1 – Approche séparable

**Notations :** Afin d'alléger les notations, nous utiliserons parfois la notation  $\lambda \sim (j, k, \varepsilon)$  pour concaténer les indices d'échelle, de position et le type de l'ondelette. On notera  $\Gamma_j$  et  $\nabla_j$  les ensemble d'indices correspondant respectivement aux fonctions d'échelles et aux ondelettes. Afin de garder une trace de l'échelle de l'indice  $\lambda$  on utilisera la notation  $|\lambda| = j$ . Avec ces notations on a ainsi

$$P_j v = \sum_{\lambda \in \Gamma_j} v_\lambda \varphi_\lambda = \sum_{|\lambda|=j} v_\lambda \varphi_\lambda, \quad (1.29)$$

et

$$Q_j v = \sum_{\lambda \in \nabla_j} d_\lambda \psi_\lambda = \sum_{|\lambda|=j} d_\lambda \psi_\lambda, \quad (1.30)$$

avec  $v_\lambda := \langle v, \tilde{\varphi}_\lambda \rangle$  et  $d_\lambda := \langle v, \tilde{\psi}_\lambda \rangle$ . La décomposition multiéchelle de  $v$  s'écrit ainsi

$$v = \sum_{|\lambda|=0} v_\lambda \varphi_\lambda + \sum_{j \geq 0} \sum_{|\lambda|=j} d_\lambda \psi_\lambda, \quad (1.31)$$

ou de manière plus compacte

$$v = \sum_{\lambda \in \nabla} d_\lambda \psi_\lambda, \quad (1.32)$$

avec la notation  $\nabla := \cup_{j \geq 0} \nabla_j$  et la convention d'inclure au niveau  $j = 0$  les fonctions d'échelles  $\varphi_\lambda$  dans l'ensemble  $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \nabla_0}$ .

En notant  $v^j := (v_\lambda)_{|\lambda|=j}$  et  $d^j := (d_\lambda)_{|\lambda|=j}$  les suites des coefficients d'approximation et de détails, l'algorithme de transformée en ondelette met en correspondance les données  $v^J$  à la résolution  $2^{-J}$  et la représentation multiéchelle

$$\mathcal{M}v^J := (v^0, d^0, \dots, d^{J-1}). \quad (1.33)$$

Dans le cas de données définies sur un domaine borné - tel qu'un intervalle en 1D ou une image en 2D - les ensembles d'indices sont finis et on a typiquement  $\#(\Lambda_j) \sim \#(\nabla_j) \sim 2^{jd}$ . On note que la complexité de l'algorithme est alors dominée par l'étape  $J \rightarrow J - 1$ , et est en  $\mathcal{O}(N)$  avec  $N = \#(\Gamma_J)$ .

#### 1.1.4 Caractérisation des espaces fonctionnels

Dans le cas d'ondelettes orthonormales, on a l'identité de Parseval

$$\|v\|_{L^2}^2 = \|P_0 v\|_{L^2}^2 + \sum_{j \geq 0} \|Q_j v\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda \in \nabla} |d_\lambda|^2. \quad (1.34)$$

Dans le cas d'ondelettes biorthogonales, cette identité est remplacée par la propriété de base de Riesz

$$\|v\|_{L^2}^2 \sim \sum_{\lambda \in \nabla} |d_\lambda|^2. \quad (1.35)$$

Une telle propriété est un cas particulier de la *caractérisation des espaces fonctionnels* par les coefficients d'ondelettes. Un résultat plus général concerne les espaces de Sobolev  $H^s$  pour lesquels on a

$$\|v\|_{H^s}^2 \sim \|P_0 v\|_{L^2}^2 + \sum_{j \geq 0} 2^{2sj} \|Q_j v\|_{L^2}^2 \sim \sum_{\lambda \in \nabla} 2^{2s|\lambda|} |d_\lambda|^2. \quad (1.36)$$

Le facteur de pondération  $2^{2s|\lambda|}$  peut se comprendre intuitivement par analogie avec l'expression de la norme  $H^s$  utilisant la transformée de Fourier

$$\|v\|_{H^s}^2 = \int (1 + |\omega|^{2s}) |\hat{v}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.37)$$

L'équivalence de normes (1.36) nécessite cependant des hypothèses minimales de régularité sur les fonctions d'échelle : elle est vérifiée pour  $s \in ]-\tilde{r}, r[$  où  $r := \sup\{s ; \varphi \in H^s\}$  et  $\tilde{r} := \sup\{s ; \tilde{\varphi} \in H^s\}$ . Il existe des résultats plus généraux dans le cas de la régularité mesurée dans les espaces  $L^p$ . Il faut ici introduire les espaces de Besov  $B_{p,q}^s$ . On commence par définir le module de régularité d'ordre  $n$  dans  $L^p$  d'une fonction  $v$  par

$$\omega_n(v, t)_{L^p} = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^n v\|_{L^p}, \quad (1.38)$$

où  $\Delta_h^n v = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \binom{n}{m} v(\cdot + hm)$  est l'opérateur de différence finie d'ordre  $n$ . Pour  $p, q > 0$  et  $s > 0$  l'espace  $B_{p,q}^s$  contient les fonctions  $f \in L^p$  telles que

$$\left( 2^{sj} \omega_n(f, 2^{-j})_{L^p} \right)_{j \geq 0} \in \ell^q. \quad (1.39)$$

Ici  $n$  est un entier strictement plus grand que  $s$ . La norme canonique de cet espace est donnée par

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} := \|f\|_{L^p} + \left\| \left( 2^{sj} \omega_n(f, 2^{-j})_{L^p} \right)_{j \geq 0} \right\|_{\ell^q}. \quad (1.40)$$

On peut montrer que  $B_{p,p}^s$  coïncide avec l'espace  $W^{s,p}$  pour  $s$  non entier (pour tout  $s$  dans le cas  $p = 2$ ), et avec l'espace de Hölder  $C^s$  pour  $p = \infty$  et  $s$  non entier. La caractérisation des espaces de Besov est alors donnée par

$$\begin{aligned} \|v\|_{B_{p,q}^s} &\sim \|P_0 v\|_{L^p} + \left\| \left( 2^{sj} \|Q_j v\|_{L^p} \right)_{j \geq 0} \right\|_{\ell^q} \\ &\sim \|v^0\|_{\ell^p} + \left\| \left( 2^{sj} 2^{d(1/2-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p} \right)_{j \geq 0} \right\|_{\ell^q}. \end{aligned}$$

La présence du facteur supplémentaire  $2^{d(1/2-1/p)j}$  correspond au fait que les ondelettes ne sont pas normalisées dans  $L^p$  mais dans  $L^2$ . Dans le cas  $p = q$ , on obtient l'expression plus simple

$$\|v\|_{B_{p,p}^s} \sim \left\| \left( 2^{(s+d(1/2-1/p))|\lambda|} d_\lambda \right)_{\lambda \in \nabla} \right\|_{\ell^p}. \quad (1.41)$$

Comme dans le cas des espaces de Sobolev, ces équivalences nécessitent des propriétés de régularité minimales sur les fonctions d'échelle.

Nous renvoyons au chapitre III de [16] pour le mécanisme général permettant de prouver ces équivalences, et qui fait essentiellement intervenir des estimations de type Jackson et Bernstein, ainsi que des techniques de théorie de l'interpolation. Les équivalences de normes du type (1.41) sont importantes

du point de vue de l'approximation non-linéaire et des applications qui en résultent car elles permettent d'identifier les fonctions  $v$  que l'on peut approcher à une vitesse prescrite par leur somme partielle  $v_N$  ne retenant que les  $N$  plus grands coefficients. On voit ainsi que si  $s$  et  $p$  sont liés par la relation  $1/p = 1/2 + s/d$ , les fonctions de  $B_{p,p}^s$  sont exactement celles dont les coefficients appartiennent à  $\ell^p$ , ce qui entraîne leur appartenance à  $w\ell^p$ . D'après les remarques de l'introduction, ceci s'exprime aussi par le fait que  $\|v - v_N\|_{L^2}$  décroît comme  $N^{-s/d}$ .

En ce qui concerne l'espace  $BV$ , on ne peut espérer de caractérisation exacte car celui-ci n'admet pas de base inconditionnelle. On a cependant le résultat suivant déjà mentionné dans l'introduction : dans le cas  $d = 2$ , les coefficients d'ondelettes d'une fonction  $v \in BV$  sont dans  $w\ell^1$  (c'est presque une caractérisation au sens où une fonction dont les coefficients sont sommables appartient à  $BV$ , voir [23] et [19]).

## 1.2 Les analyses multirésolutions non-linéaires

### 1.2.1 Le cadre multirésolution de Harten

L'approche proposée par Harten pour le développement des représentations multiéchelles consiste à adopter d'emblée le point de vue *discret* : on dispose d'une suite d'ensembles de discrétisation  $(\Gamma_j)_{j=0,\dots,J}$  associés aux échelles  $(2^{-j})_{j=0,\dots,J}$ , et de données  $v^J = (v_\lambda)_{\lambda \in \Gamma_J}$  discrétisées à l'échelle la plus fine.

Comme nous allons le voir dans des exemples plus spécifiques, les ensembles  $\Gamma_j$  sont typiquement associés à des maillages emboîtés d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , mais une telle structure n'est pas strictement nécessaire. On suppose en revanche l'existence d'opérateurs permettant des transitions entre les discrétisations successives.

1. L'opérateur de *restriction* ou *projection*  $P_{j-1}^j$  envoie les données  $v^j$  discrétisées sur  $\Gamma_j$  vers une discrétisation plus grossière  $v^{j-1}$  de ces données sur  $\Gamma_{j-1}$ . On a ainsi  $v^{j-1} = P_{j-1}^j v^j$ . Cet opérateur est toujours supposé *linéaire*.
2. L'opérateur de *prédiction* ou *prolongement*  $P_j^{j-1}$  envoie les données  $v^{j-1}$  discrétisées sur  $\Gamma_{j-1}$  vers une suite  $\hat{v}^j = P_j^{j-1} v^{j-1}$  qui représente une "approximation" des données  $v^j$ . Cet opérateur peut être linéaire ou *non-linéaire*.

On suppose en outre une propriété de *consistance* entre ces opérateurs : la



restriction de  $\hat{v}^j$  à  $\Gamma_{j-1}$  coïncide avec les données  $v^{j-1}$ , autrement dit

$$P_{j-1}^j P_j^{j-1} = I. \quad (1.42)$$

Une telle propriété implique en particulier que l'opérateur de restriction est surjectif et que l'opérateur de prédiction est injectif.

Si l'on considère à présent l'erreur de prédiction  $e^j = v^j - \hat{v}^j$ , on remarque que celle-ci n'est pas une donnée arbitraire sur  $\Gamma_j$  : d'après l'hypothèse de consistance, elle vérifie

$$P_{j-1}^j e^j = P_{j-1}^j v^j - P_{j-1}^j \hat{v}^j = v^{j-1} - v^{j-1} = 0, \quad (1.43)$$

et est donc contenue dans le noyau  $\text{Ker}(P_{j-1}^j)$  de l'opérateur de restriction. Si l'on introduit une base  $(\Psi_\lambda)_{\lambda \in \nabla_{j-1}}$  de ce noyau, l'erreur de prédiction peut alors être représentée sous une forme non-redondante par le vecteur  $d^{j-1} = (d_\lambda)_{\lambda \in \nabla_{j-1}}$  des coordonnées de  $e^j$  dans cette base. Remarquons ici que l'on a

$$\#(\nabla_{j-1}) = \#(\Gamma_j) - \#(\Gamma_{j-1}). \quad (1.44)$$

On voit ainsi que la donnée de  $v^j$  est équivalente à celle de  $(v^{j-1}, d^{j-1})$ , et que l'on peut facilement passer de l'une à l'autre à l'aide des opérateurs  $P_j^{j-1}$  et  $P_{j-1}^j$ . Par itération, à partir des données initiales  $v^J$  on obtient la représentation multiéchelle

$$\mathcal{M}v^J = (v^0, d^0, \dots, d^{J-1}). \quad (1.45)$$

qui doit être comprise comme une généralisation des algorithmes de transformée en ondelettes décrits dans la section précédente. Notons que dans le cas où les opérateurs de prédiction sont non-linéaires, la transformation  $\mathcal{M}$  l'est aussi et ne peut plus s'interpréter comme un changement de base.

Nous allons donner deux exemples importants de cadres plus spécifiques permettant de donner un sens plus précis aux opérateurs de restriction et prédiction.

**Le cadre des valeurs ponctuelles :** les ensembles  $\Gamma_j$  sont des points du domaine  $\Omega$  vérifiant la propriété d'emboîtement  $\Gamma_{j-1} \subset \Gamma_j$  et les coefficients  $(v_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_j}$  sont interprétés comme la discrétisation d'une fonction par ses valeurs au points de  $\Gamma_j$ , i.e.  $v_\gamma = v(\gamma)$ . Dans ce cas, l'opérateur de restriction  $P_{j-1}^j$  consiste simplement à ne retenir dans  $v^j$  que les valeurs sur la sous-grille  $\Gamma_{j-1}$ . L'opérateur de prolongement  $P_j^{j-1}$  correspond à une reconstruction approchée des valeurs  $\hat{v}(\lambda) \approx v(\lambda)$  pour  $\lambda \in \Gamma_j \setminus \Gamma_{j-1}$ , par *interpolation* des valeurs  $v_\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma_{j-1}$ . L'hypothèse de consistance signifie que l'on conserve les

valeurs disponibles sur la grille grossière, i.e.  $\hat{v}(\lambda) := v(\lambda)$  pour  $\lambda \in \Gamma_{j-1}$ . L'élimination de la redondance consistera simplement à définir  $d_\lambda$  comme l'erreur de prédiction aux points  $\lambda \in \nabla_{j-1} := \Gamma_j \setminus \Gamma_{j-1}$ .

**Le cadre des valeurs moyennes :** les ensembles  $\Gamma_j$  sont les éléments de partitions emboîtés, et les coefficients  $(v_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_j}$  sont interprétés comme la discrétisation d'une fonction par ses valeurs moyennes sur ces éléments, i.e.  $v_\gamma = \text{vol}(\gamma)^{-1} \int_\gamma v(t) dt$ . Dans ce cas l'opérateur de restriction  $P_{j-1}^j$  calcule  $v_\gamma$  en moyennant les coefficients  $v_\mu$  pour les éléments  $\mu \in \Gamma_j$  contenus dans  $\gamma$ . L'opérateur de prolongement  $P_j^{j-1}$  correspond à une "interpolation des valeurs moyennes" de  $\Gamma_{j-1}$  vers  $\Gamma_j$ . Par l'hypothèse de consistance, l'erreur de prédiction  $e^j$  est de moyenne nulle sur chaque élément de  $\Gamma_{j-1}$ . L'élimination de la redondance consistera à enlever un élément de  $\Gamma_j$  dans chaque élément de  $\Gamma_{j-1}$  pour obtenir un sous-ensemble  $\nabla_{j-1} \subset \Gamma_j$ . Ce sous-ensemble est alors suffisant pour caractériser  $e^j$  et on définit donc  $d^{j-1}$  comme la restriction de  $e^j$  à  $\nabla_{j-1}$ .

Dans les deux cas, le choix de l'opérateur de prolongement n'est pas unique et dépend de la procédure d'interpolation utilisée. Le choix de cette procédure est crucial pour les applications pratiques, puisque les détails seront d'autant plus petits que la prédiction sera précise. Nous présentons dans les sections suivantes des exemples spécifiques dans le cas de données monodimensionnelles. Ces exemples vont nous guider de façon naturelle depuis les représentations linéaires qui s'apparentent aux ondelettes biorthogonales vers les représentations non-linéaires.

## 1.2.2 Représentations linéaires

Dans toute la fin de ce chapitre nous considérerons la discrétisation de fonctions  $v$  définies sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Ces discrétisations seront dyadiques, i.e. basées sur les points  $2^{-j}k$ ,  $j \geq 0$ ,  $k = 0, \dots, 2^j$  et les intervalles

$$I_{j,k} := [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)], \quad (1.46)$$

délimités par ces points. Nous allons nous intéresser aux représentations basées sur les valeurs ponctuelles et valeurs moyennes, décrites précédemment. Dans chaque cas, nous présentons tout d'abord une classe importante d'opérateurs de prédiction linéaires que nous modifions par la suite pour obtenir des représentations non-linéaires.

**Représentations linéaires en valeurs ponctuelles :** dans cette configuration, nous interprétons le vecteur  $v^j = (v_k^j)_{k=0,\dots,2^j}$  comme les valeurs ponctuelles d'une fonction continue  $v$  sur la grille  $\Gamma^j := (2^{-j}k)_{k=0,\dots,2^j}$ , i.e.  $v_k^j := v(2^{-j}k)$ . Dans ce cas, l'opération de restriction consiste simplement à décimer les données en ne conservant que les échantillons pairs, i.e.

$$v_k^{j-1} = v_{2k}^j. \quad (1.47)$$

En ce qui concerne la prédiction, on cherche ici à interpoler les données  $v_k^{j-1} = v(2^{1-j}k)$  afin d'approcher  $v$  aux points intermédiaires  $2^{-j}(2k+1)$  par les valeurs prédites  $\hat{v}_{2k+1}^j$ . Les détails seront alors donnés par

$$d_k^{j-1} = e_{2k+1}^j = v_{2k+1}^j - \hat{v}_{2k+1}^j, \quad k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1. \quad (1.48)$$

Le choix le plus simple pour la prédiction est la demi-somme

$$\hat{v}_{2k+1}^j = \frac{1}{2}(v_k^{j-1} + v_{k+1}^{j-1}). \quad (1.49)$$

Ce choix correspond à approcher  $v$  par une fonction affine sur l'intervalle  $I_{j-1,k}$  et à utiliser cette approximation pour prédire la fonction au centre de cet intervalle. Afin d'être plus précis dans la prédiction lorsque la fonction  $v$  possède une certaine régularité, on peut chercher à remplacer cette fonction affine par un polynôme de degré plus élevé.

Pour  $M \geq 0$  fixé, on peut ainsi définir le polynôme  $p_k \in \mathbb{P}_{2M+1}$  vérifiant la propriété d'interpolation de Lagrange pour les  $2M$  voisins les plus proches de  $2^{-j}(2k+1)$  sur la grille  $\Gamma_{j-1}$ , i.e.

$$p_k(2^{-j}(k+n)) = v_{k+n}^{j-1}, \quad n = -M, \dots, M+1. \quad (1.50)$$

Ce polynôme est uniquement déterminé. On définit alors la prédiction par

$$\hat{v}_{2k+1}^j = p_k(2^{-j}(2k+1)). \quad (1.51)$$

Dans le cas  $M = 0$ , ce choix redonne l'exemple précédent. Dans le cas  $M = 1$ , illustré par la figure 1.2, on obtient la formule d'interpolation à quatre points

$$\hat{v}_{2k+1}^j = \frac{9}{16}(v_k^{j-1} + v_{k+1}^{j-1}) - \frac{1}{16}(v_{k-1}^{j-1} + v_{k+2}^{j-1}), \quad (1.52)$$

qui est exacte pour les polynômes cubiques.

Le schéma général d'interpolation Lagrangienne à  $2M$  points est en fait bien connu depuis les travaux de Dubuc et Deslaurier [33] qui ont étudié son comportement lorsqu'on l'itère en raffinant la résolution. Il est associé à un cas

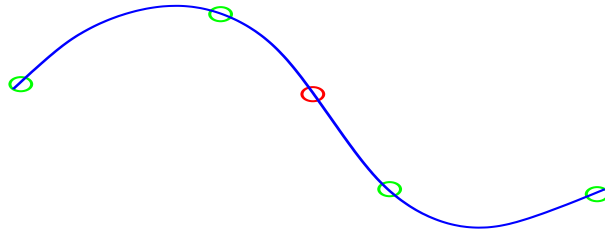


FIG. 1.2 – Prédiction par interpolation cubique à quatre points

particulier d'analyse multirésolution biorthogonale où la fonction  $\tilde{\varphi}$  s'identifie à la distribution de Dirac à l'origine (voir par exemple le chapitre II de [16]). L'algorithme de décomposition multiéchelle est donc ici exactement une transformée en ondelette, à un changement de normalisation près : les ondelettes et fonctions d'échelle duales  $\tilde{\varphi}_\lambda$  et  $\tilde{\psi}_\lambda$  sont ici normalisées dans  $L^1$  au sens des masses de Dirac (puisque les coefficients d'approximation  $v_k^j$  sont exactement donnés par les valeurs aux points  $2^{-j}k$ ), ce qui signifie que les fonctions d'échelle et ondelettes primales  $\varphi_\lambda$  et  $\psi_\lambda$  sont normalisées dans  $L^\infty$ .

Pour  $M \geq 1$ , on note que la définition du polynôme  $p_k$  pose un problème près des bords : pour  $0 \leq k < M$  et pour  $2^{j-1} - M < k \leq 2^{j-1} - 1$  on ne dispose pas de toutes les valeurs  $v_{k+n}^{j-1}$  nécessaires dans (1.50). Pour traiter ces problèmes de bords, similaires à ceux que nous avons évoqué pour la transformée en ondelette rapide, on peut choisir de périodiser les données. Une solution plus naturelle et bien meilleure du point de vue de la précision consiste à *décentrer* la prédiction au voisinage des bords en prenant systématiquement  $p_k = p_M$  pour  $k < M$  et  $p_k = p_{2^{j-1}-M}$  pour  $k > 2^{j-1} - M$ . Dans le cas  $M = 1$ , on aboutit ainsi à la règle de prédiction modifiée suivant

$$\hat{v}_1^j = \frac{5}{16}v_0^{j-1} + \frac{15}{16}v_1^{j-1} - \frac{5}{16}v_2^{j-1} + \frac{1}{16}v_3^{j-1}, \quad (1.53)$$

au voisinage de 0 et une règle symétrique au voisinage de 1.

**Représentations linéaires en valeurs moyennes :** dans ce contexte, nous interprétons le vecteur  $v^j = (v_k^j)_{k=0,\dots,2^j-1}$  comme les valeurs moyennes d'une fonction localement intégrable  $v$  sur la partition  $\Gamma^j := (I_{j,k})_{k=0,\dots,2^j-1}$ , i.e.

$$v_k^j := 2^j \int_{I_{j,k}} v(t) dt. \quad (1.54)$$

Dans ce cas, l'opération de restriction consiste simplement à moyenner les échantillons suivant

$$v_k^{j-1} = \frac{1}{2}(v_{2k}^j + v_{2k+1}^j). \quad (1.55)$$

L'opérateur de prédiction engendre des approximations  $\hat{v}_k^j$  à partir des moyennes exactes  $v_k^{j-1}$ . L'hypothèse de consistance (1.42) signifie que l'on a

$$v_k^{j-1} = \frac{1}{2}(\hat{v}_{2k}^j + \hat{v}_{2k+1}^j), \quad (1.56)$$

et par conséquent l'erreur de prédiction  $e_k^j := v_k^j - \hat{v}_k^j$  oscille au sens où

$$e_{2k}^j + e_{2k+1}^j = 0. \quad (1.57)$$

Les détails seront alors donnés par

$$d_k^{j-1} = e_{2k}^j = v_{2k}^j - \hat{v}_{2k}^j, \quad k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1. \quad (1.58)$$

Le choix le plus simple pour la prédiction consiste à définir simplement

$$\hat{v}_{2k}^j = \hat{v}_{2k+1}^j = v_k^{j-1}, \quad (1.59)$$

et la représentation multiéchelle obtenue n'est alors rien d'autre que la décomposition dans la base de Haar. Ce choix revient à approcher  $v$  par une fonction constante sur l'intervalle  $I_{j-1,k}$  et à utiliser cette approximation pour prédire les moyennes sur les demi-intervalles  $I_{j,2k}$  et  $I_{j,2k+1}$ . Afin d'être plus précis dans la prédiction lorsque la fonction  $v$  possède une certaine régularité, on peut comme dans le cas des valeurs ponctuelles utiliser un polynôme de degré plus élevé. Pour  $M \geq 0$  fixé, on définit ainsi le polynôme  $p_k \in \mathbb{P}_{2M}$  qui interpole les moyennes sur les  $2M + 1$  intervalles entourant  $I_{j,k}$ , au sens où

$$2^{j-1} \int_{I_{j-1,k+n}} p_k(t) dt = v_{k+n}^{j-1}, \quad n = -M, \dots, M. \quad (1.60)$$

Ce polynôme est uniquement déterminé. On définit alors la prédiction par

$$\hat{v}_{2k}^j = 2^j \int_{I_{j,2k}} p_k(t) dt \quad \text{et} \quad \hat{v}_{2k+1}^j = 2^j \int_{I_{j,2k+1}} p_k(t) dt. \quad (1.61)$$

Dans le cas  $M = 0$ , ce choix redonne l'exemple précédent. Dans le cas  $M = 1$ , illustré par la figure (1.3) on obtient les formules à trois moyennes

$$\hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1} + \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}) \quad \text{et} \quad \hat{v}_{2k+1}^j = v_k^{j-1} + \frac{1}{8}(v_{k+1}^{j-1} - v_{k-1}^{j-1}) \quad (1.62)$$

qui sont exactes pour les moyennes de polynômes quadratiques.

Comme dans le cas des valeurs ponctuelles, on retrouve ici la transformée en ondelette rapide associée à un cas particulier d'analyse multirésolution biorthogonale, pour lequel la fonction  $\tilde{\varphi}$  est donnée par  $\chi_{[0,1]}$  : ce sont les ondelettes

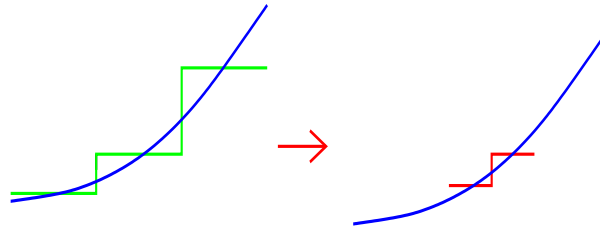


FIG. 1.3 – Prédiction par interpolation quadratique des moyennes

splines biorthogonales introduites dans [20]. Les fonctions d'échelle et ondelettes primales sont ici aussi normalisées dans  $L^\infty$ . De même, le traitement des effets de bords peut s'effectuer de façon naturelle en décentrant la prédiction lorsque cela est nécessaire.

**Remarque 1.1.** *Les exemples que nous venons de présenter pour les valeurs ponctuelles et les valeurs moyennes sont en fait intimement liés. En définissant les opérateurs de différence finie et de primitive discrète agissant sur les suites suivant*

$$\Delta v_k = v_{k+1} - v_k \text{ et } \Pi v_k = \sum_{l=0}^k v_l, \quad (1.63)$$

on peut vérifier que si  $P_j^{j-1}$  et  $\tilde{P}_j^{j-1}$  désignent respectivement la prédiction des valeurs ponctuelles et moyennes par les polynômes de degré  $2M+1$  et  $2M$ , on a les relations

$$\tilde{P}_j^{j-1} = \Delta P_j^{j-1} \Pi \text{ et } P_j^{j-1} = \Pi \tilde{P}_j^{j-1} \Delta. \quad (1.64)$$

On peut aussi vérifier que les polynômes  $p_k$  et  $\tilde{p}_k$  construits à partir de valeurs ponctuelles  $v^j$  et des valeurs moyennes  $\tilde{v}^j := (v_{k+1}^j - v_k^j)$  sont liés par  $\tilde{p}_k = p'_k$ , (voir [46]).

### 1.2.3 Représentations non-linéaires de type ENO

Dans les exemples précédents, l'introduction de polynômes de degré plus élevé que 0 ou 1 vise à augmenter la précision de la prédiction dans les régions où la fonction  $v$  est régulière, au prix d'une perte d'un caractère local de cette prédiction : le polynôme  $p_k$  dépend des valeurs de la fonction  $v$  sur l'intervalle d'influence ou stencil

$$S_{j-1,k} := [2^{1-j}(k-M), 2^{1-j}(k+M+1)]. \quad (1.65)$$

Si  $v$  est de classe  $C^m$  sur cet intervalle l'erreur d'interpolation polynômiale sera majorée sur  $I_{j-1,k}$  par

$$|p_k(x) - v(x)| \lesssim 2^{-mj} \sup_{t \in S_{j-1,k}} |f^{(m)}(t)|, \quad x \in I_{j-1,k}, \quad (1.66)$$

dès lors que  $2M + 1 \geq m - 1$  dans le cas des valeurs ponctuelles ou  $2M \geq m - 1$  dans le cas des valeurs moyennes. On obtient ainsi dans les deux cas l'estimation

$$|d_k^j| \lesssim 2^{-mj} \sup_{t \in S_{j-1,k}} |f^{(m)}(t)|, \quad (1.67)$$

qui correspond à la caractérisation des espaces de Hölder par les coefficients d'ondelettes (l'application directe de (1.41) donne l'estimation modifiée

$$|d_k^j| \lesssim 2^{-(m+1/2)j}$$

du fait de la normalisation  $L^2$  plutôt que  $L^\infty$  pour les ondelettes).

Dans le cas où la fonction  $v$  présente une singularité isolée, par exemple une discontinuité, une méthode de prédiction d'ordre élevé est pénalisante au sens suivant : si le point de discontinuité  $x_d$  est contenu dans l'intervalle  $I_{j-1,k}$ ,  $k = k(j, x_d)$ , la prédiction se détériore non seulement dans cet intervalle mais aussi dans les intervalles voisins  $I_{j-1,l}$ ,  $l = k - M, \dots, k + M$  puisque  $x_d$  est alors contenu dans les stencils  $S_{j-1,l}$ . Pour ces indices, on ne peut espérer que l'estimation

$$|d_l^j| \lesssim \|f\|_{L^\infty}. \quad (1.68)$$

Nous illustrons ce phénomène sur la figure (1.4) dans le cas  $M = 1$ . Outre cette perte de précision sur plus d'un intervalle, un autre effet indésirable des méthodes d'ordre élevé en présence de singularités est le *phénomène de Gibbs* : la reconstruction de la fonction  $v$  basée uniquement sur sa discrétisation à une échelle  $j_0$  présente des oscillations dont l'amplitude persiste au voisinage de la discontinuité lorsque  $j_0$  augmente.

De telles oscillations sont particulièrement néfastes dans certaines applications numériques, telles que la simulation d'équations aux dérivées partielles du type système de lois de conservation. C'est dans ce contexte que les méthodes d'interpolation ENO (essentially non oscillatory) ont été initialement proposées par Harten et ses collaborateurs [48].

L'idée est ici d'améliorer la précision au voisinage de la singularité et d'éviter le phénomène de Gibbs, par l'utilisation de stencils de prédiction *décentrés*. Si la singularité  $x_d$  est située dans l'intervalle  $I_{j-1,k}$ , un décentrage idéal utiliserait respectivement les polynômes  $p_{k-M-1}$  et  $p_{k+M+1}$  pour la prédiction dans les intervalles  $I_{j-1,l}$  pour  $l = k - M, \dots, k - 1$  et  $l = k +$

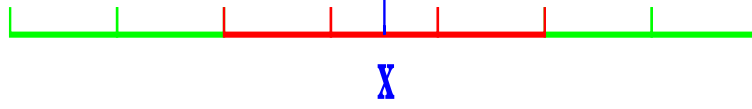


FIG. 1.4 – Intervalles où la prédiction linéaire est mauvaise

$1, \dots, k + M$ . L'utilisation de ces polynômes permettraient en effet de restaurer la précision en  $2^{-mj}$  dans ces intervalles si la fonction est de classe  $C^m$  de part et d'autre de  $x_d$ , puisque les stencils  $S_{j-1, k-M-1}$  et  $S_{j-1, k+M+1}$  ne contiennent pas ce point. En pratique, la position de  $x_d$  est inconnue et on ne dispose que des données  $v^{j-1}$ . Il faut donc partir ces données pour sélectionner au mieux le décentrage utilisé : c'est le processus de *sélection de stencil*.

Dans ce processus, nous associons au stencil  $S_{j-1, k}$  une fonction de coût  $\mathcal{C}(S_{j-1, k})$  calculée à partir des données  $v_l^{j-1}$  contenues dans ce stencil, i.e.  $(v_{k-M}^{j-1}, \dots, v_{k+M+1}^{j-1})$  dans le cas des valeurs ponctuelles et  $(v_{k-M}^{j-1}, \dots, v_{k+M}^{j-1})$  dans le cas des valeurs moyennes. Cette fonction de coût mesure typiquement le degré d'oscillation du polynôme  $p_k$  reconstruit à partir de ces données. Un choix possible initialement proposé par Harten est donné par

$$\mathcal{C}(S_{j-1, k}) := \int_{I_{j-1, k}} |p_k''(t)|^2 dt. \quad (1.69)$$

Nous reviendrons sur ce choix dans la remarque 1.3. L'idée est alors de choisir un stencil approprié à la reconstruction sur l'intervalle  $I_{j-1, k}$  en minimisant  $\mathcal{C}(S_{j-1, l})$  sur  $l = k - M, \dots, k + M$ . Nous noterons le stencil sélectionné par

$$\tilde{S}_{j-1, k} = S_{j-1, l_k}, \quad (1.70)$$

où  $l_k$  est l'indice de minimisation. Notons que  $\tilde{S}_{j-1, k}$  contient toujours  $I_{j-1, k}$ . Nous notons de même

$$\tilde{p}_k = p_{l_k}, \quad (1.71)$$

le polynôme correspondant, qui est donc le moins oscillant dans l'ensemble  $\{p_{k-M}, \dots, p_{k+M}\}$  au sens de la fonction de coût utilisée. On définira alors la règle de prédiction ENO en remplaçant  $p_k$  par  $\tilde{p}_k$ , i.e.

$$\hat{v}_{2k+1}^j = \tilde{p}_k(2^{-j}(2k+1)), \quad (1.72)$$

dans le cas des valeurs ponctuelles, et

$$\hat{v}_{2k}^j = 2^j \int_{I_{j, 2k}} \tilde{p}_k(t) dt \quad \text{et} \quad \hat{v}_{2k+1}^j = 2^j \int_{I_{j, 2k+1}} \tilde{p}_k(t) dt, \quad (1.73)$$



dans le cas des valeurs moyennes. L'effet du processus de sélection est que les stencils  $\tilde{S}_{j-1,l}$  sélectionnés tendent à éviter l'intervalle  $I_{j,k}$  contenant la singularité, à l'exception du stencil  $\tilde{S}_{j-1,k}$  qui contient nécessairement cet intervalle. La prédiction ne se détériore ainsi que sur  $I_{j,k}$ , ainsi que l'illustre la figure (1.5).

**Remarque 1.2.** *En cas de multiplicité du minimum de  $\mathcal{C}(S_{j-1,l})$ , on donnera systématiquement la priorité au stencil le plus centré : cela signifie que  $l_k$  sera l'indice de minimisation si et seulement si  $\mathcal{C}(S_{l_k}) < \mathcal{C}(S_l)$  pour  $|l-k| < |l_k-k|$  et  $\mathcal{C}(S_{l_k}) \leq \mathcal{C}(S_l)$  pour  $|l_k-k| \leq |l-k| \leq M$ . Ceci détermine uniquement  $l_k$  sauf dans le cas où  $\mathcal{C}(S_{l_k}) = \mathcal{C}(S_{2k-l_k})$ . Dans un tel cas, on choisira systématiquement l'un des deux stencils, par exemple celui de gauche.*

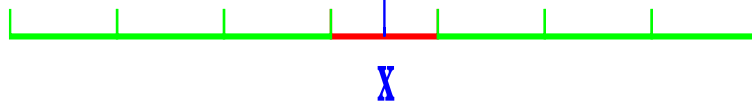


FIG. 1.5 – Intervalles où la prédiction ENO est mauvaise

L'exemple le plus simple est le cas  $M = 1$ . On est alors amené à comparer le stencil centré, décentré gauche et décentré droit. Pour les valeurs ponctuelles, on obtient la règle de prédiction modifiée

$$\hat{v}_{2k+1}^j = \frac{5}{16}v_k^{j-1} + \frac{15}{16}v_{k+1}^{j-1} - \frac{5}{16}v_{k+2}^{j-1} + \frac{1}{16}v_{k+3}^{j-1}, \quad (1.74)$$

avec la sélection du stencil décentré à droite, et la règle symétrique

$$\hat{v}_{2k+1}^j = \frac{5}{16}v_{k+1}^{j-1} + \frac{15}{16}v_k^{j-1} - \frac{5}{16}v_{k-1}^{j-1} + \frac{1}{16}v_{k-2}^{j-1}, \quad (1.75)$$

avec la sélection du stencil décentré à gauche. Pour les valeurs moyennes, on obtient les règles modifiées

$$\hat{v}_{2k}^j = \frac{11}{8}v_k^{j-1} - \frac{1}{2}v_{k+1}^{j-1} + \frac{1}{8}v_{k+2}^{j-1} \text{ et } \hat{v}_{2k+1}^j = \frac{5}{8}v_k^{j-1} + \frac{1}{2}v_{k+1}^{j-1} - \frac{1}{8}v_{k+2}^{j-1}, \quad (1.76)$$

avec la sélection du stencil décentré à droite, et les règles symétriques

$$\hat{v}_{2k}^j = \frac{5}{8}v_k^{j-1} + \frac{1}{2}v_{k-1}^{j-1} - \frac{1}{8}v_{k-2}^{j-1} \text{ et } \hat{v}_{2k+1}^j = \frac{11}{8}v_k^{j-1} - \frac{1}{2}v_{k-1}^{j-1} + \frac{1}{8}v_{k-2}^{j-1}, \quad (1.77)$$

avec la sélection du stencil décentré à gauche.

**Remarque 1.3.** *On peut exprimer directement la fonction de coût à partir des données  $v^{j-1}$ . Avec le choix (1.69), on obtient une combinaison linéaire des carrés des différences finies d'ordre 2*

$$\Delta^2 v_l^{j-1} = v_l^{j-1} - 2v_{l+1}^{j-1} + v_{l+1}^{j-1} \quad (1.78)$$

où  $l$  parcourt l'ensemble des indices tels que  $(l-1, l, l+1)$  est disponible dans le stencil  $S_{j-1, k}$ , i.e.  $l = k - M, \dots, k + M - 1$  pour les valeurs ponctuelles et  $l = k - M, \dots, k + M - 2$  pour les valeurs moyennes. L'utilisation des différences finies d'ordre 2 permet de détecter les singularités du 1er ordre (sauts de la fonction) ainsi que du deuxième ordre (sauts de la dérivée). Nous sommes avant tout intéressés par la première situation puisque c'est en quelque sorte la version monodimensionnelle de la notion de contour. Il est alors suffisant d'utiliser une fonction de coût basée sur les différences finies d'ordre 1. Dans les exemples numériques, nous utilisons la fonction de coût

$$\mathcal{C}(S_{j-1, k}) := \sum_l |\Delta v_l^{j-1}|, \quad (1.79)$$

où la somme porte aussi sur les données disponibles dans le stencil. Notons que dans le cas  $M = 1$  pour les valeurs moyennes, cette somme se réduit à deux différences finies.

La présence du processus de sélection de stencil rend clairement non-linéaires les opérateurs de prédiction de type ENO que nous venons de décrire, et il en est par conséquent de même pour l'opération de décomposition multiéchelle  $\mathcal{M}$  qui lui est associée. L'intérêt principal de telles décompositions en ce qui nous concerne est l'amélioration des propriétés de concentrations des détails numériquement significatifs. Il faut bien noter que la représentation multiéchelle  $\mathcal{M}v^J = (v^0, d^0, \dots, v^J)$  permet de reconstruire exactement  $v^J$  sans qu'il soit nécessaire de garder en mémoire les stencils sélectionnés pour la prédiction et le calcul des détails. Cette information est en effet intégralement contenue dans les valeurs de la représentation multiéchelle : à partir de  $v^0$  on retrouve les stencils utilisés pour calculer  $\hat{v}^1$  et la donnée de  $d^1$  permet alors de reconstruire  $v^1$ , qui permet de retrouver les stencils utilisés pour calculer  $\hat{v}^2$ , etc. Cette information est en revanche menacée lorsque l'on effectue des perturbations sur la représentation telles que le seuillage ou la quantification. De telles perturbations peuvent en effet modifier la sélection du stencil, et il faut alors s'interroger sur l'effet produit sur la reconstruction obtenue : c'est le problème de la *stabilité* qui sera l'objet du chapitre IV. Notons d'ores et déjà que le processus de sélection du stencil intégré dans les techniques ENO

est intrinsèquement instable puisqu'il y aura toujours des valeurs de données numériques autour desquelles une petite perturbation produit un basculement du stencil sélectionné. Une variante visant à restaurer la stabilité est la technique WENO (weighted essentially non oscillatory) dans laquelle le polynôme  $\tilde{p}_k$  utilisé dans la reconstruction est donné par une combinaison linéaire convexe

$$\tilde{p}_k := \sum_{n=-M}^M \alpha_{k,n} p_{k+n}, \quad (1.80)$$

où les poids  $\alpha_{k,n} \geq 0$  vérifient  $\sum_{n=-M}^M \alpha_{k,n} = 1$ , et dépendent de manière continue des données  $v^j$ . L'idée est ici de remplacer la sélection ENO par une transition plus douce entre les différents stencils. Dans [14], les poids proposés sont de la forme  $\alpha_{k,n} := \frac{\beta_{k,n}}{\sum_{n=-M}^M \beta_{k,n}}$  avec

$$\beta_{k,n} := \frac{\delta_n}{(\varepsilon + \gamma_{k,n})^2} \quad \text{et} \quad \gamma_{k,n} := \sum_{l=1}^M 2^{-j(2l-1)} \int_{I_k^{j-1}} |p_{k+n}^{(l)}(x)|^2 dx. \quad (1.81)$$

Les  $\delta_n$  sont des constantes positives fixées et le paramètre  $\varepsilon$  est introduit afin d'éviter l'annulation du dénominateur. Les facteurs  $\gamma_{k,n}$  mesurent l'oscillation des polynômes  $p_{k+n}$  de façon similaire à la fonction de coût dans la technique ENO : si le stencil  $S_{j-1,k+n}$  contient une singularité, le facteur  $\gamma_{k,n}$  sera grand et le poids  $\alpha_{k,n}$  se rapprochera de 0. On pénalise de cette manière l'utilisation de tels stencils dans la reconstruction. Dans le cas  $M = 1$  pour les valeurs ponctuelles, la prédiction WENO prend la forme

$$\hat{v}_{2k+1}^j := \frac{\alpha_{k,-1}}{16} v_{k-2}^{j-1} - \frac{5\alpha_{k,-1} + \alpha_{k,0}}{16} v_{k-1}^{j-1} + \left(1 + \frac{5\alpha_{k,-1} + 2\alpha_{k,0}}{8}\right) v_k^{j-1} + \left(1 + \frac{5\alpha_{k,1} + 2\alpha_{k,0}}{8}\right) v_{k+1}^{j-1} - \frac{5\alpha_{k,1} + \alpha_{k,0}}{16} v_{k+2}^{j-1} + \frac{\alpha_{k,1}}{16} v_{k+3}^{j-1}, \quad (1.82)$$

Les poids associés aux trois stencils sont définis dans [49] et [14].

#### 1.2.4 Représentations non-linéaires de type ENO-SR

Nous avons vu que l'approche ENO permet d'améliorer la prédiction sur les intervalles voisins de la singularité, et par conséquent de réduire la taille des détails correspondant. En revanche, il est clair que cette prédiction restera médiocre sur l'intervalle  $I_{j-1,k}$  qui contient le point de singularité  $x_d$  puisque la fonction  $v$  n'est pas régulière sur cet intervalle.

On peut chercher à aller plus loin pour améliorer la prédiction à l'intérieur même de l'intervalle  $I_{j-1,k}$  par une méthode de *résolution intra-maille* notée

ENO-SR (Subcell Resolution) introduite dans [47]. Pour cela on procède en deux étapes.

**Etape 1 : détection.** On cherche à identifier à partir des données  $v^{j-1}$  les intervalles  $I_{j-1,k}$  susceptibles de contenir une singularité. Le mécanisme proposé par Harten consiste à examiner les stencils  $\tilde{S}_{j-1,k}$  sélectionnés par la prédiction ENO et à partir de l'observation que ces stencils tendent à *éviter les singularités*. L'intervalle  $I_{j-1,k}$  sera donc considéré comme contenant potentiellement une singularité si et seulement si

$$\tilde{S}_{j-1,k-1} = S_{j-1,k-M-1} \text{ et } \tilde{S}_{j-1,k+1} = S_{j-1,k+M+1}, \quad (1.83)$$

i.e. les stencils sélectionnés pour les deux intervalles voisins évitent  $I_{j-1,k}$ , ainsi que l'illustre la figure (1.6). Il est intéressant de noter que cette détection de singularité ne fait intervenir aucun seuil numérique contrairement aux détections de contours par examen de la taille du gradient.

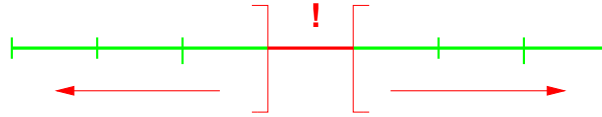


FIG. 1.6 – **Detection d'un intervalle pouvant contenir une singularité**

**Etape 2 : reconstruction.** Sur les intervalles  $I_{j-1,k}$  qui ne vérifient pas la condition (1.83), on applique simplement la reconstruction ENO décrite dans la section précédente, i.e. basée sur le polynôme  $\tilde{p}_k$ . Sur les intervalles  $I_{j-1,k}$  considérés comme singuliers, on va chercher à approcher l'emplacement  $x_d$  de la singularité à partir des données disponibles, et on remplacera  $\tilde{p}_k$  par une fonction qui vaut  $\tilde{p}_{k-1}$  et  $\tilde{p}_{k+1}$  de part et d'autre de l'emplacement estimé  $y_d$  de la singularité. On obtient ainsi une fonction de reconstruction  $q_k$  qui est polynômiale par morceaux et on définira alors la prédiction en remplaçant  $\tilde{p}_k$  par  $q_k$  dans les formules (1.72) ou (1.73).

La deuxième étape nécessite une *hypothèse a-priori* sur le type de singularité que l'on souhaite traiter. Un premier exemple est celui où la fonction  $v$  est supposée globalement continue et  $C^1$  de part et d'autre de  $x_d$ . La singularité se présente donc comme un saut dans la dérivée première au point  $x_d$ , et sa détection exige l'utilisation des différences finies d'ordre 2 dans la fonction de coût. On estimera dans ce cas  $x_d$  en cherchant le point d'intersection des polynômes  $\tilde{p}_{k-1}$  et  $\tilde{p}_{k+1}$  (aussi bien dans le cadre des valeurs ponctuelles que des

valeurs moyennes). Notons que ce point d'intersection peut ne pas exister dans  $I_{j-1,k}$  ou au contraire ne pas être unique. Un tel cas sera catalogué comme une *fausse alerte*, i.e. on abandonnera la reconstruction de  $q_k$  et on appliquera simplement la procédure ENO sur  $I_{j-1,k}$ .

Un deuxième exemple est celui où  $x_d$  est un point de discontinuité de la fonction  $v$  elle-même. Comme nous l'avons déjà expliqué, cette situation nous intéresse plus que la précédente puisque qu'il s'agit de la version monodimensionnelle des contours. Une première remarque importante est que le cadre des valeurs ponctuelles est inadapté pour traiter cette situation. Supposons en effet que la fonction  $v$  vaut 0 sur  $] - \infty, x_d[$  et 1 sur  $]x_d, +\infty[$  avec  $x_d \in ]0, 1[$  et que l'on dispose de ses valeurs ponctuelles aux points entiers, i.e.  $v_k^0 = 0$  pour  $k \leq 0$  et  $v_k^1 = 1$  pour  $k > 0$ . Il est clair que ces valeurs sont indépendantes de  $x_d$  et par conséquent leur examen ne peut en aucun cas nous éclairer sur la position du point de discontinuité. En revanche, la position de  $x_d$  influence les valeurs moyennes sur les intervalles  $I_{0,k}$  puisque celles-ci sont données par  $v_k^0 = 0$  si  $k < 0$ ,  $v_k^0 = 1$  si  $k > 0$  et  $v_0^0 = 1 - x_d$ . Dans ce cas particulièrement simple,  $x_d$  est donc exactement identifié par l'examen des valeurs moyennes. Une première procédure de reconstruction ENO-SR dans le cadre des valeurs moyennes est exactement fondée sur ce principe : sur l'intervalle  $I_{j-1,k}$  on cherchera à reconstruire une fonction  $q_k$  constante de part et d'autre d'un point de discontinuité, i.e.

$$q_k := a\chi_{]-\infty, y_d]} + b\chi_{]y_d, +\infty[}. \quad (1.84)$$

Afin d'identifier les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $y_d$ , on exige la consistance de  $q_k$  avec les données  $(v_{k-1}^{j-1}, v_k^{j-1}, v_{k+1}^{j-1})$ . On obtient de manière immédiate  $a = v_{k-1}^{j-1}$ ,  $b = v_{k+1}^{j-1}$  et  $y_d$  solution de l'équation affine

$$a(y_d - 2^{1-j}k) + b(2^{1-j}(k+1) - y_d) = 2^{1-j}v_k^j. \quad (1.85)$$

La solution de cette équation sera située à l'intérieur de  $I_{j-1,k}$  si et seulement si  $v_k^j$  est dans l'intervalle  $[\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$ . Dans le cas contraire, on abandonnera la reconstruction de  $q_k$  et on appliquera simplement la procédure ENO sur  $I_{j-1,k}$ .

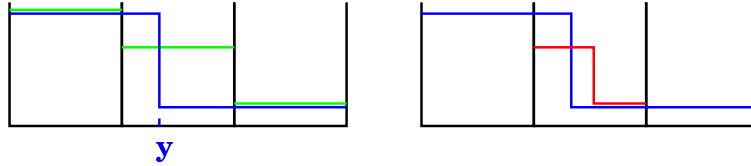


FIG. 1.7 – Reconstruction ENO-SR

Dans cette première méthode, illustrée par la figure (1.7) on approche la fonction  $v$  par une fonction constante par morceaux sur les intervalles susceptibles de contenir la singularité. On peut chercher à aller plus loin en approchant  $v$  par une fonction polynômiale par morceaux de degré  $2M$ , en utilisant les données  $(v_{k-M-1}^{j-1}, \dots, v_{k+M+1}^{j-1})$ . On obtient alors pour  $y_d$  une équation d'un degré supérieur. Cette approche revient en fait à appliquer la procédure ENO-SR utilisant les valeurs ponctuelles - que nous avons décrit précédemment - sur les données obtenues en appliquant l'opérateur de primitive discrète  $\Pi$  aux données à l'échelle  $j-1$ , suivie de l'application de l'opérateur de différence finie  $\Delta$  à l'échelle  $j$  : on applique ici la première formule dans (1.64) dans un cadre non-linéaire comme une définition de la prédiction sur les valeurs moyennes.

**Remarque 1.4.** *Une idée fondamentale qui se dégage des représentations multiéchelles que nous venons de décrire est que celles-ci intègrent un modèle sous-jacent de la fonction que l'on cherche à décrire avec précision par la prédiction, et d'un modèle simplifié paramétrique pour lequel la prédiction sera exacte. Dans le cas de la prédiction linéaire, le modèle sous-jacent est celui des fonctions uniformément régulières et la procédure est exacte pour le modèle polynômial. La procédure ENO-SR intègre dans le modèle sous-jacent les fonctions régulières par morceaux qui présentent des singularités isolées. Le modèle simplifié polynômial est alors défectueux et il est remplacé par un modèle simplifié polynômial par morceaux, au prix d'une procédure plus complexe et non-linéaire (un point de vue similaire est développé dans [63] par d'autres méthodes qui illustrent la possibilité de reconstruire de manière exacte une fonction polynomiale par morceaux à partir d'un échantillonnage uniforme). Cette idée, que nous résumons sur le tableau ci-dessous, sera poussée plus loin dans le chapitre suivant dans lequel nous chercherons à intégrer la géométrie des contours bidimensionnels dans nos modèles.*

Prédiction	Modèle sous-jacent	Modèle simplifié
Linéaire	régularité uniforme	polynôme
ENO-SR	régularité par morceaux	polynôme par morceaux

**Remarque 1.5.** *Nous avons insisté sur le fait que les représentations ENO et ENO-SR sont non-linéaires et ne s'apparentent plus à des changement de base : de façon générale  $\mathcal{M}(u_1 + u_2) \neq \mathcal{M}u_1 + \mathcal{M}u_2$  et  $\mathcal{M}^{-1}(d_1 + d_2) \neq \mathcal{M}^{-1}d_1 + \mathcal{M}^{-1}d_2$ . Remarquons cependant que l'on a les propriétés*

$$\mathcal{M}(\lambda u) = \lambda \mathcal{M}u \text{ et } \mathcal{M}^{-1}(\lambda d) = \lambda \mathcal{M}^{-1}d, \quad (1.86)$$

En effet, les procédés de sélection de stencil et de détection de singularité intervenant dans les opérateurs de prédiction utilisés dans  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^{-1}$  s'appuient uniquement sur des comparaisons entre les différences finies des stencils adjacents. Une multiplication globale de  $u$  ou  $d$  par un scalaire ne change pas le résultat de ces comparaisons. On a bien entendu en particulier  $\mathcal{M}0 = 0$  et  $\mathcal{M}^{-1}0 = 0$ . Il en sera de même pour les représentations adaptées aux contours que nous introduisons dans le chapitre suivant.

### 1.2.5 Exemple numérique

Pour terminer ce chapitre nous présentons un exemple numérique simple qui illustre l'efficacité des représentations non-linéaires de type ENO et ENO-SR dans le cas d'une fonction régulière par morceaux. Il s'agit de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \sin(x), & \text{si } x \leq \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{1}{2} - \sin(x), & \text{si } x > \frac{2\pi}{3}, \end{cases} \quad (1.87)$$

qui est représenté sur la figure (1.8) et que nous avons discrétisé au niveau de résolution  $J = 10$ .

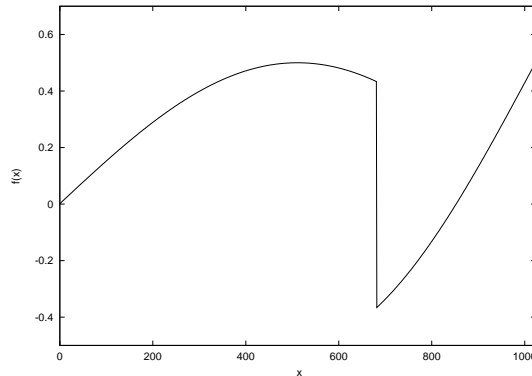


FIG. 1.8 – Fonction régulière par morceaux

Nous considérons ici les représentations multiéchelles  $\mathcal{M}v^{10}$  basées sur les prédictions linéaires, ENO et ENO-SR, dans le cas des valeurs moyennes avec  $M = 1$ , i.e. basées sur la reconstruction de polynômes quadratiques. Afin de comparer ces représentations du point de vue de la concentration des coefficients, nous représentons l'ensemble des indices  $(j, k)$  tels que  $|d_k^j|$  est supérieur au seuil  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Ces indices sont visualisés par les points  $(2^{-j}k, j)$  sur les figures (1.9) et (1.10), qui correspondent respectivement aux représentations

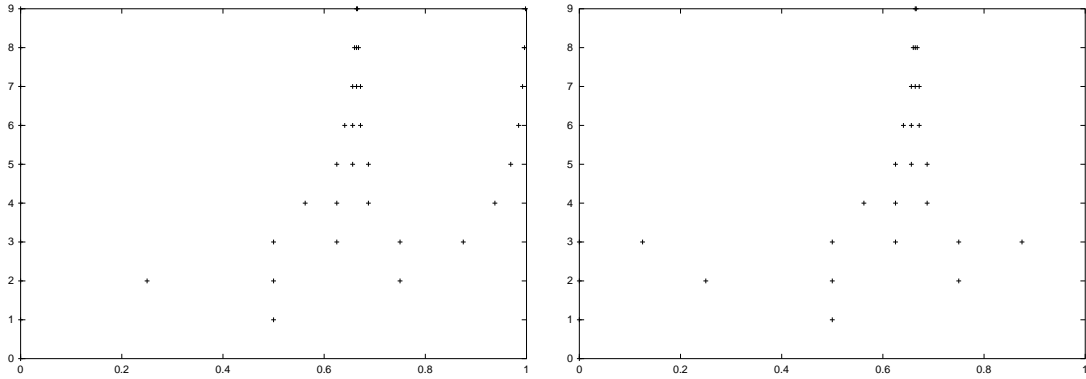


FIG. 1.9 – Détails  $|d_k^j| > \varepsilon$  prédiction linéaire périodisée et adaptée aux bords

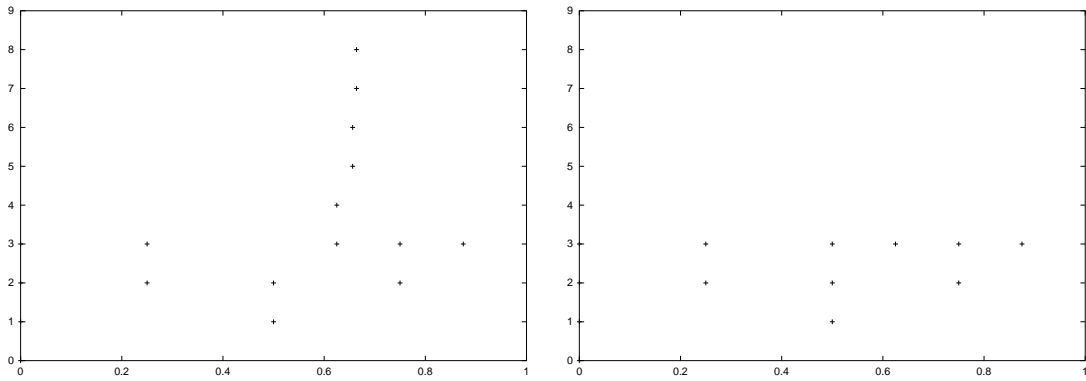


FIG. 1.10 – Détails  $|d_k^j| > \varepsilon$  prédiction non-linéaire ENO et ENO-SR



basées sur la prédiction linéaire périodisée, linéaire avec décentrage adapté aux bords, ENO et ENO-SR.

On constate dans le premier cas que les coefficients d'ondelettes numériquement significatifs aux échelles les plus fines  $j = 4, \dots, 10$ , se concentrent au voisinage de la singularité  $x_d = 2/3$  ainsi que des bords 0 et 1 qui sont aussi perçus comme une discontinuité. Ces effets de bords sont éliminés par la prédiction décentrée. L'utilisation des techniques ENO a pour effet de réduire le nombre de coefficients significatifs au voisinage de  $x_d$  puisqu'elles permettent une prédiction d'ordre élevé dans tous les intervalles qui ne contiennent pas la singularité. Les résultats les plus spectaculaires sont obtenus avec la méthode ENO-SR pour laquelle il n'y a plus de coefficients significatifs aux échelles fines  $j \geq 4$ , ce qui signifie que la prédiction au voisinage de la singularité est efficace aux échelles grossières.

Afin de mieux illustrer cette efficacité, nous présentons sur les figures (1.11) et (1.12) les reconstructions obtenues lorsqu'on met à zéro tous les détails aux échelles  $j \geq 4$ , i.e. en utilisant uniquement les moyennes  $v^3$ . La méthode ENO permet de réduire le phénomène de Gibbs observé pour la méthode linéaire mais n'améliore pas réellement la précision. Seule la méthode ENO-SR permet une reconstruction précise.

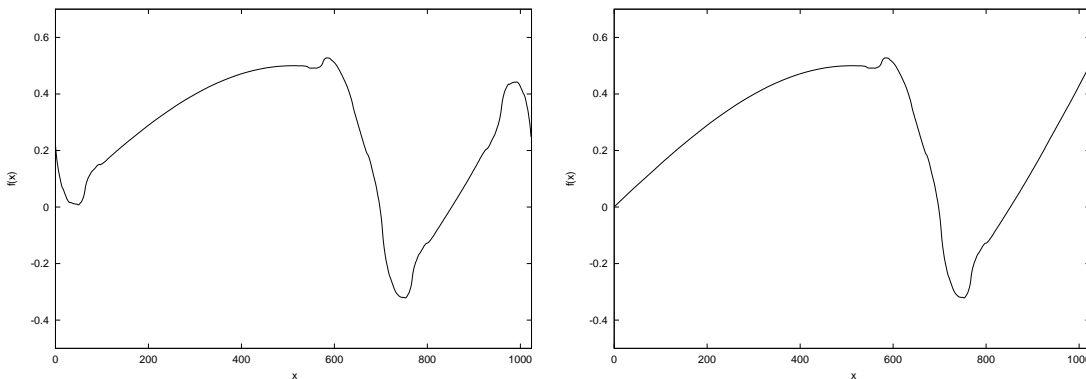


FIG. 1.11 – Reconstructions à partir des moyennes  $v^3$ , avec prédiction linéaire périodisée et adaptée aux bords

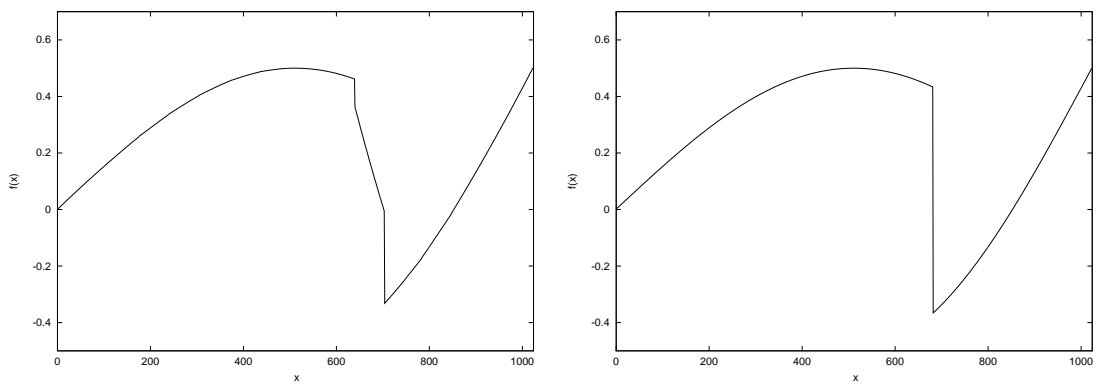


FIG. 1.12 – Reconstructions à partir des moyennes  $v^3$ , avec prédiction non-linéaire ENO et ENO-SR

# REPRESENTATIONS MULTIECHELLES ADAPTEES AUX CONTOURS

# Chapitre 2

## Représentations multiéchelles adaptées aux contours

### Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est la mise au point de représentations multiéchelles bidimensionnelles non-linéaires qui prennent en compte la géométrie des contours présents dans une image. L'exemple numérique présenté à la fin du chapitre précédent nous a montré que dans le cas monodimensionnel, les méthodes de prédiction ENO et ENO-SR permettaient de mieux reconstruire une fonction présentant une discontinuité isolée à partir de ses moyennes aux basses échelles, et d'aboutir ainsi à des représentations plus creuses que celles obtenues par les décompositions dans des bases d'ondelettes classiques. Nous chercherons donc ici à généraliser ces techniques de manière adéquate au cadre bidimensionnel.

La comparaison pratique des différentes méthodes proposées sera effectuée sur quatre images tests  $512 \times 512$ , en examinant tout d'abord la reconstruction de ces images obtenue à partir des basses échelles (sans ajouter les détails) qui permet de comprendre la qualité de l'opérateur de prédiction. On comparera finalement la reconstruction obtenue par un processus de seuillage en conservant une proportion prescrite des coefficients. Ces tests seront prolongés dans le chapitre 5 par des algorithmes de compression qui intègrent des opérations de quantification.

Les images synthétiques “ellipse” et “graphe” représentées sur la figure 2.1, sont obtenues en échantillonnant sur la grille des pixels les graphes de polynômes séparés par des contours donnés par des morceaux de courbes algébriques. La simplicité géométrique de ces images permettra de mettre clai-

rement en évidence le comportement des différentes méthodes vis à vis des contours réguliers. Les images réelles représentées sur la figure 2.2 présentent

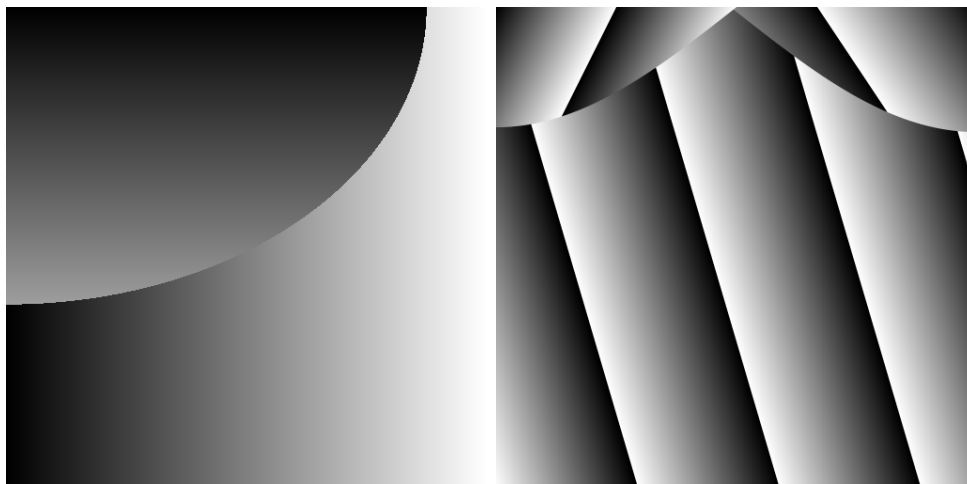


FIG. 2.1 – Images régulières par morceaux “ellipse” et “graphe”

une géométrie plus complexe. L’image “peppers” contient néanmoins essentiellement des régions régulières séparées par des contours réguliers par morceaux, par contraste avec l’image “phare” qui contient des régions oscillantes correspondant à des objets texturés.

Dans un premier temps nous présentons les résultats numériques obtenus en généralisant les techniques monodimensionnelles ENO et ENO-SR introduites dans le chapitre précédent, au moyen d’une approche *séparable*, qui consiste essentiellement à effectuer les opérations 1D alternativement suivant les lignes et les colonnes. Les tests numériques nous permettent de cerner les limitations inhérentes à cette approche qui ne permet pas de traiter correctement les contours, ‘à l’exception de ceux qui sont purement verticaux et horizontaux.

Nous proposons ensuite une nouvelle approche *intrinsèquement bidimensionnelle* et mieux adaptée au traitement des contours d’orientation arbitraire. Le principe est semblable à la méthode ENO-SR en valeurs moyennes monodimensionnelle : on utilise un processus de détection pour identifier les carrés susceptibles de contenir un contour que l’on cherche ensuite à approcher à partir des données numériques disponibles. La principale difficulté technique est qu’il ne s’agit plus de reconstruire un simple point de discontinuité mais une portion de courbe. Nous approcherons localement cette courbe par une droite  $\{px + qy = 1\}$  afin d’avoir à nouveau un nombre fini de paramètres à identifier. Une fois ces paramètres identifiés, la reconstruction dans un tel carré sera obtenue.

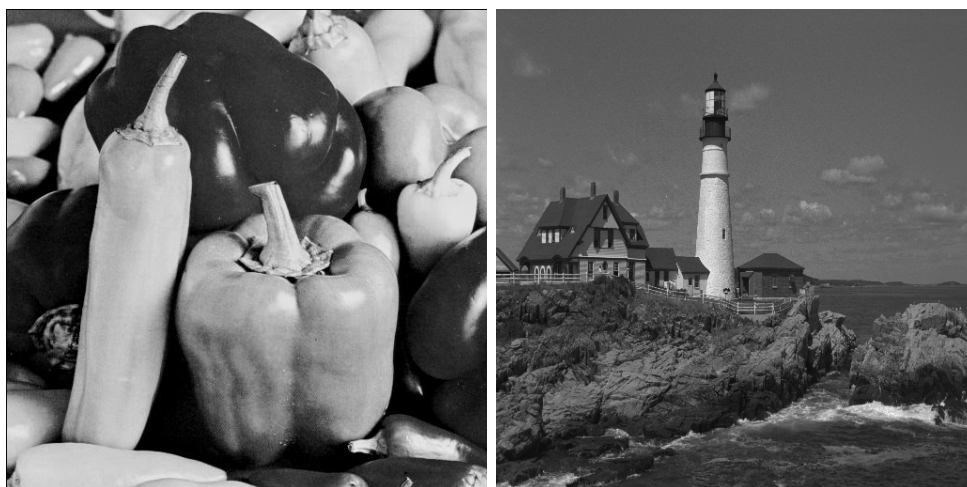


FIG. 2.2 – Images “peppers” et “phare”

nue par une fonction polynômiale de part et d’autre de cette droite. En suivant les termes de la remarque 1.4, le modèle sous-jacent associé a cette procédure de prédiction est typiquement celui d’une fonction régulière par morceaux de part et d’autre de courbes régulières. Le modèle simplifié pour lequel nous prouverons l’exactitude de la prédiction est celui d’une fonction constante par morceaux

$$v = a\chi_{\{px+qy \leq r\}} + b\chi_{\{px+qy > r\}} \quad (2.1)$$

de part et d’autre d’une droite d’orientation arbitraire. Les tests numériques mettront en évidence la supériorité des représentations ENO-EA (Edge Adapted) obtenues par cette nouvelle approche dans le cas des images synthétiques et des images réelles peu texturées, par rapport aux décompositions en ondelettes classiques, tant du point de vue de la reconstruction à partir des basses échelles que du seuillage.

Une question naturelle est la suivante : ces nouvelles représentations sont elles mathématiquement plus creuses que les représentations en ondelettes classiques pour les fonction régulière par morceaux de part et d’autre de courbes régulières ? On peut formuler cette question en terme des espaces de suite  $w\ell^\tau$  auxquels appartiennent les coefficients de telles fonctions  $f$ , ou du taux d’approximation  $\|f - f_N\|_{L^2} \lesssim N^{-s}$  obtenu lorsque l’on conserve les  $N$  plus grand coefficients. On notera que ces formulations ne sont plus équivalentes car notre représentation ne peut plus s’identifier à une décomposition dans une base de Riesz et la stabilité des opérations de seuillage n’a rien d’évident. Nous n’avons jusqu’à présent pas obtenu de résultat rigoureux allant dans cette di-

rection (nous verrons en revanche dans le chapitre 3 que les représentations multiéchelles non-linéaires sont aussi creuses que les décompositions en ondelettes classiques pour les fonctions des espaces fonctionnels standards). Nous présentons néanmoins des arguments heuristiques qui nous permettent de conjecturer la valeur  $\tau = 2/3$  et la vitesse  $s = 1$  (rappelons que l'on a  $\tau = 1$  et  $s = 1/2$  dans le cas des ondelettes classiques), et nous illustrerons cette conjecture par un exemple numérique.

Nous évoquons finalement le problème de la stabilité de la décomposition (influence d'une perturbation des coefficients sur la reconstruction) qui sera étudié en détail dans le chapitre 4, et son traitement possible par un algorithme de contrôle d'erreur qui intègre les perturbations au fur et à mesure du calcul des coefficients. Cet algorithme sera finalement abandonné dans les applications au codage d'image en raison de son inadéquation au codage progressif, et du bon comportement de l'algorithme de départ (décomposition-perturbation-reconstruction) observé en pratique.

## 2.1 L'approche séparable

Nous avons décrit le principe algorithmique de cette approche dans la figure 2.4. Dans le cas des représentations linéaires dans des bases d'ondelettes, elle correspond à l'emploi de d'une base de type produit tensoriel. Dans le cas des représentations non-linéaires, bien que celle-ci ne s'apparentent plus à des décompositions dans des bases, il est toujours possible d'appliquer l'algorithme séparable à partir des transformées monodimensionnelles. Il est intéressant de noter qu'une conséquence de l'aspect non-linéaire est que les traitements des lignes et des colonnes *ne commutent pas* : un traitement commençant par les lignes et un traitement commençant par les colonnes aboutiront par conséquent à des représentations multiéchelles différentes.

La principale vertu de l'approche séparable est sa simplicité algorithmique. Dans le cas des représentations linéaires dans des bases d'ondelettes, il existe quelques exemples d'ondelettes non-séparables utilisés en traitement d'image (notamment les algorithmes utilisant un principe de décimation en quinconce), mais cette généralisation ne semble pas apporter d'amélioration notable pour des applications telles que la compression et le débruitage. De ce fait, la quasi-totalité des algorithmes en ondelettes actuellement utilisés dans ces applications sont séparables.

Dans le cas des représentations non-linéaire, la situation est sensiblement différente. Les techniques ENO et ENO-SR visent à améliorer la prédiction à

partir des basses échelles au voisinage des contours, et nous avons pu constater l’efficacité de l’approche ENO-SR dans le cas mondimensionnel pour une discontinuité isolée. La généralisation de cette idée par une approche séparable aura essentiellement pour effet de prédire avec succès les contours verticaux ou horizontaux qui correspondent au produit tensoriel d’une discontinuité isolée dans une direction avec une fonction régulière dans l’autre. Une approche non-séparable sera donc essentielle pour obtenir une méthode non-linéaire adaptée à tous les contours.

Pour l’heure, nous allons présenter des tests numériques qui vont nous permettre d’effectuer une première comparaison entre plusieurs représentations multiéchelles linéaires et non-linéaires des images, toutes fondées sur l’approche séparable. On considère d’une part la décomposition linéaire en ondelettes biorthogonales, utilisant la paire de filtres (9, 7) (la plus communément utilisée en compression d’image, en particulier dans le standard JPEG 2000) avec symétrisation aux bords, et à laquelle nous référerons dans toute la suite par l’acronyme BW. On considère d’autre part les représentations non-linéaires obtenues par l’algorithme séparable en utilisant dans chaque direction les opérateurs de prédiction ENO et ENO-SR en valeur moyennes basés sur la reconstruction de polynômes quadratiques (i.e.  $M = 1$  suivant les notations du chapitre 1) dont nous avons pu constater l’efficacité en dimension 1 dans l’exemple numérique de § 1.2.5.

Le test numérique consiste ici simplement à reconstruire l’image au niveau le plus fin  $J = 9$  à partir de son approximation au niveau  $J = 5$ , i.e. des données à une résolution 16 fois plus grossière, sans rajouter de détails. Ce test permet ainsi d’évaluer l’efficacité de la prédiction.

Dans le cas des images géométriques “ellipse” et “graphe”, les figures (2.1), (2.4), (2.5) et (2.6) présentent ainsi les données à la résolution  $J = 5$  et les résultats des différentes reconstruction. Pour les ondelettes biorthogonales, les parties régulières sont bien reconstruites (grâce aux bonnes propriétés d’approximation des fonctions d’échelle associées à la paire (9, 7)), mais les contours sont flous puisqu’ils correspondent précisément à des détails haute résolution qui ont été ici mis à zéro. L’utilisation de la prédiction ENO n’améliore que légèrement cette situation en diminuant la largeur de la zone de flou autour des contours grâce au processus de sélection des stencils. Nous constatons en revanche que la prédiction ENO-SR restitue des bords nets, mais que les contours reconstruits approchent mal les vrais contours lorsque ceux-ci ne sont pas horizontaux ou verticaux. Ceci est particulièrement visible sur les contours obliques de l’image “graphe”, dont la reconstruction présente des aspérités. L’approche séparable pour les méthodes ENO et ENO-SR ne permettra donc



pas d'aboutir des représentations plus creuses que les décompositions en ondelettes classiques, puisque les coefficients de détails resteront numériquement significatifs dans les échelles fines au voisinage des contours d'orientation arbitraire, et la résolution de ces contours nécessitera la prise en compte de ces coefficients.

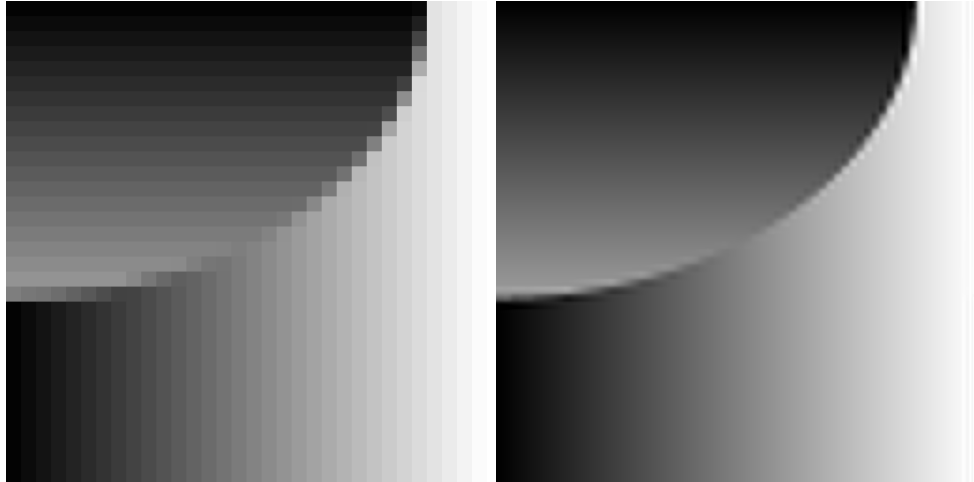


FIG. 2.3 – Données basse résolution et reconstruction en utilisant BW

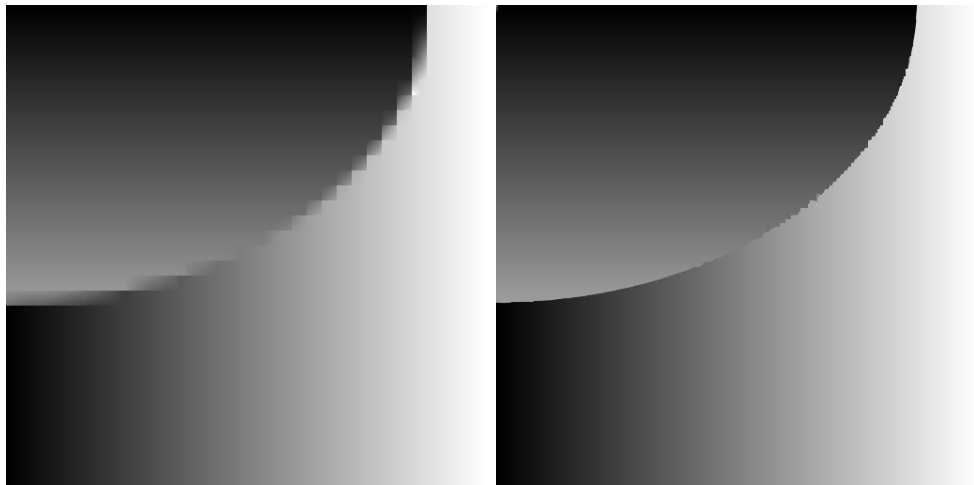


FIG. 2.4 – Reconstruction en utilisant la prédiction ENO et ENO-SR

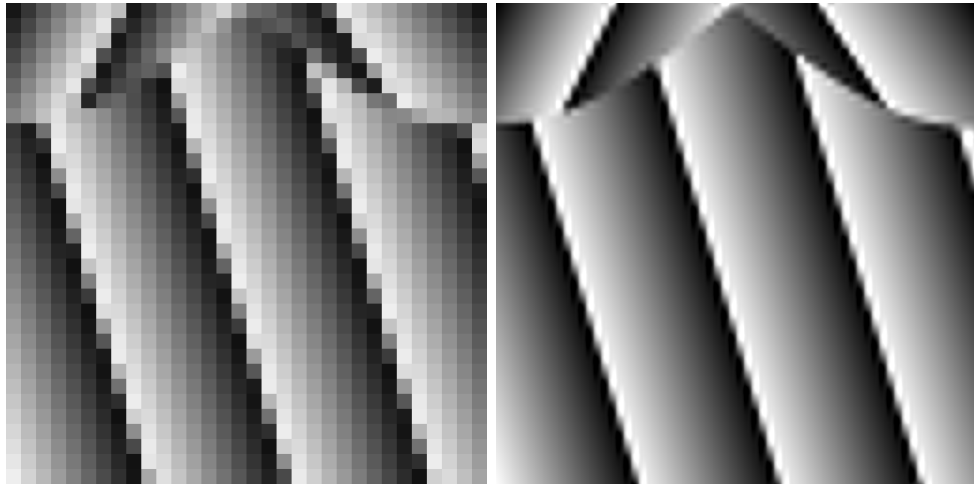


FIG. 2.5 – Données basse résolution et reconstruction en utilisant BW

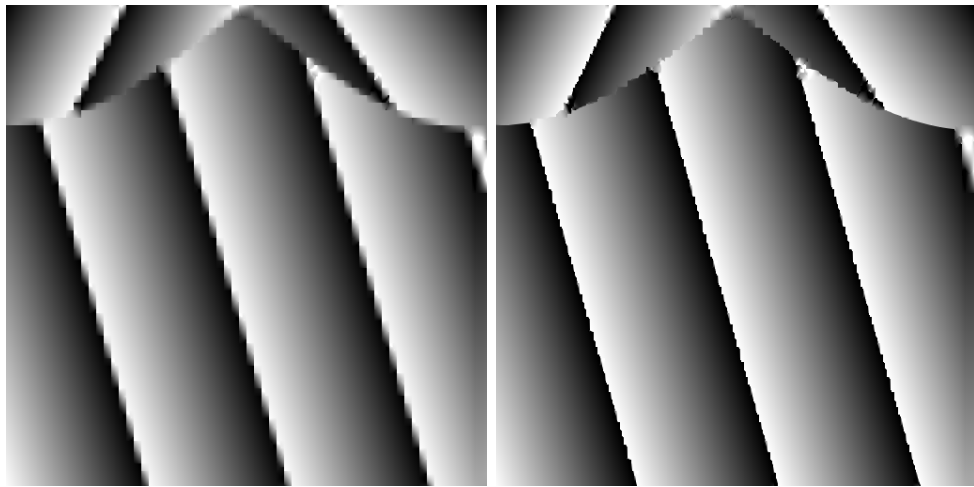


FIG. 2.6 – Reconstruction en utilisant la prédiction ENO et ENO-SR

Cette situation est confirmée dans le cas des images réelles “peppers” et “phares” comme l’illustre les figures (2.7), (2.8) (2.9) et (2.10) : seuls les contours verticaux et horizontaux sont restitués avec exactitude par la méthode ENO-SR. Par ailleurs, on constate sur ces deux images l’apparition d’artefacts visuels dans la reconstruction des zones homogènes par les approches ENO et ENO-SR. Ceci est lié au fait que ces zones ne sont pas totalement régulières contrairement aux images géométriques, du fait de la présence d’oscillations liés aux textures, au bruit, ou à des variations de l’angle d’attaque de

la réflexion lumineuse sur l'objet. Les algorithmes de sélection de stencil pour la procédure ENO et de détection de singularité pour la procédure ENO-SR peuvent alors percevoir ces oscillations comme des contours et déclencher le mécanisme de reconstruction adapté qui tend à reconstruire des bords nets mais totalement artificiels. Ces fausses alarmes sont un défaut inhérent aux méthodes non-linéaires que nous avons étudié jusqu'ici.

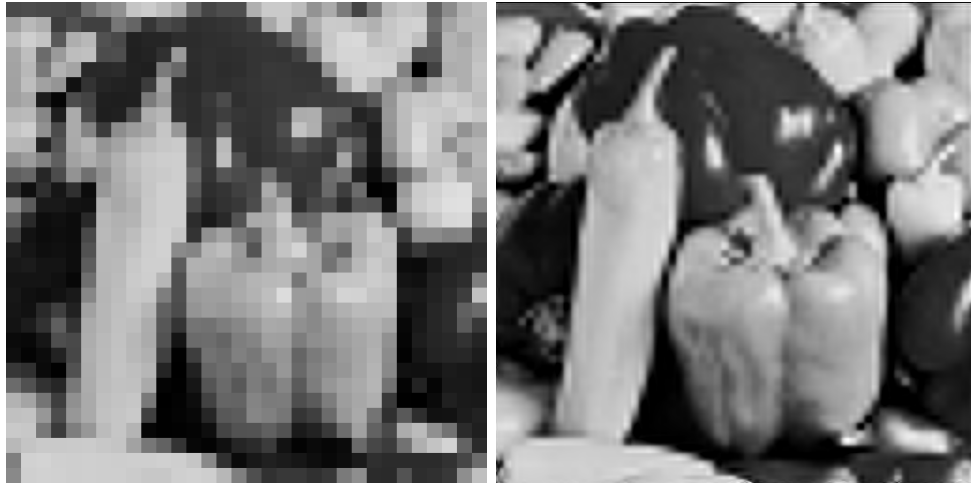


FIG. 2.7 – Données basse résolution et reconstruction en utilisant BW



FIG. 2.8 – Reconstruction en utilisant la prédiction ENO et ENO-SR



FIG. 2.9 – Données basse résolution et reconstruction en utilisant BW



FIG. 2.10 – Reconstruction en utilisant la prédiction ENO et ENO-SR

Ces premières observations nous permettent de préciser nos objectifs. Nous chercherons à mettre au point des opérateurs de prédiction non-linéaires ayant les deux propriétés suivantes :

1. Reconstruction précise des contours de direction arbitraires à partir des basses échelles. Ceci nous conduit inévitablement à abandonner l'approche séparable.
2. Bon comportement dans les zones homogènes ou texturées. Ceci signifie que nous chercherons à éviter les fausses alarmes afin d'utiliser dans ces zones une prédiction similaire à celle des décompositions en ondelettes classiques.

Ce programme sera résolu dans la section qui suit.

## 2.2 La prédiction adaptée aux contours

Notre objectif est à présent de construire un opérateur de prédiction non-linéaire et non-séparable adapté aux contours. Nous travaillerons dans le cadre des discrétisations par valeurs moyennes : à l'échelle  $j$  on considère la grille des carrés

$$C_{j,k} := [k_x 2^{-j}, (k_x + 1) 2^{-j}] \times [k_y 2^{-j}, (k_y + 1) 2^{-j}] = I_{j,k_x} \times I_{j,k_y}, \quad (2.2)$$

pour  $k = (k_x, k_y) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2$  et la discrétisation de l'image  $v(x, y)$  par les valeurs

$$v_k^j := 2^{2j} \int_{C_{j,k}} v(x, y) dx dy, \quad (2.3)$$

où l'échelle la plus fine  $J$  correspond au niveau de discrétisation du pixel ( $J = 9$  pour les images  $512 \times 512$  que nous considérons). Ce choix fixe l'opérateur de projection  $P_{j-1}^j$  comme l'opérateur de moyenne bidimensionnel : si  $v^{j-1} = P_{j-1}^j v^j$  on a

$$v_k^{j-1} = v_{(k_x, k_y)}^{j-1} := \frac{1}{4} (v_{2k_x, 2k_y}^j + v_{2k_x, 2k_y+1}^j + v_{2k_x+1, 2k_y}^j + v_{2k_x+1, 2k_y+1}^j). \quad (2.4)$$

Notre problème est à présent la recherche de l'opérateur de prédiction  $P_j^{j-1}$ . Comme dans le cas monodimensionnel, cet opérateur sera défini par l'intermédiaire d'une fonction polynômiale ou polynômiale par morceaux reconstruites à partir des données disponibles  $v^{j-1}$ , et on exigera la consistance avec la projection au sens où  $P_{j-1}^j P_j^{j-1} = I$ . Sous cette hypothèse, l'erreur

de prédiction  $e^j = v^j - \hat{v}^j$  vérifiera la propriété d'oscillation dans chaque carré  $C_{j-1,k}$ ,

$$e_{2k_x, 2k_y}^j + e_{2k_x, 2k_y+1}^j + e_{2k_x+1, 2k_y}^j + e_{2k_x+1, 2k_y+1}^j = 0, \quad (2.5)$$

et pourra donc être projeté sur trois composantes indépendantes et orthogonales :

$$\begin{aligned} d_{k,a}^{j-1} &= \frac{1}{4} [e_{2k_x, 2k_y}^j + e_{2k_x, 2k_y+1}^j - e_{2k_x+1, 2k_y}^j - e_{2k_x+1, 2k_y+1}^j], \\ d_{k,b}^{j-1} &= \frac{1}{4} [e_{2k_x, 2k_y}^j - e_{2k_x, 2k_y+1}^j + e_{2k_x+1, 2k_y}^j - e_{2k_x+1, 2k_y+1}^j], \\ d_{k,c}^{j-1} &= \frac{1}{4} [e_{2k_x, 2k_y}^j - e_{2k_x, 2k_y+1}^j - e_{2k_x+1, 2k_y}^j + e_{2k_x+1, 2k_y+1}^j]. \end{aligned}$$

Notons que ceci peut s'écrire

$$d^{j-1} = B e^j \quad (2.6)$$

où  $B$  est une matrice rectangulaire et que l'on a alors

$$e^j = 4B^T d^{j-1}. \quad (2.7)$$

Dans le cas trivial où la prédiction est donnée par  $\hat{v}_n^j = v_k^{j-1}$  si  $C_{j,n} \subset C_{j-1,k}$ , on retrouve ainsi la décomposition dans le système de Haar bidimensionnel utilisant l'algorithme séparable. Afin d'obtenir une prédiction précise dans les régions régulières, nous utiliserons à nouveau des polynômes quadratiques en chaque variable, i.e. du type

$$p = \sum_{0 \leq \alpha_x, \alpha_y \leq 2} c_\alpha x^{\alpha_x} y^{\alpha_y}. \quad (2.8)$$

Les coefficients  $c_\alpha$  de tels polynômes sont uniquement déterminés par leur 9 valeurs moyennes sur un stencil carré de taille  $3 \times 3$ . En définissant  $p_k$  comme le polynôme associé aux stencil

$$S_{j-1,k} := [(k_x - 1)2^{1-j}, (k_x + 2)2^{1-j}] \times [(k_y - 1)2^{1-j}, (k_y + 2)2^{1-j}], \quad (2.9)$$

centré autour de  $C_{j,k}$  (c'est à dire tel que  $22(j-1) \int_{C_{j-1,k+l}} p_k = v_{k+l}^{j-1}$  pour  $l \in \{-1, 0, 1\}^2$ ), on définit tout d'abord la prédiction linéaire  $\hat{v}^j = P_j^{j-1} v^{j-1}$  en écrivant

$$\hat{v}_n^j = 2^{2j} \int_{C_{j,n}} p_k(x, y) dx dy, \quad \text{si } C_{j,n} \subset C_{j-1,k}. \quad (2.10)$$

On obtient dans ce cas la décomposition dans une base d'ondelette biorthogonales tensorielles, qui se calcule à nouveau en appliquant l'algorithme séparable avec la prédiction quadratique centrée en 1D.

Nous allons à présent suivre le même démarche que dans le cas monodimensionnel : nous proposons tout d'abord une méthode de sélection de stencil, qui nous conduit à une technique de prédiction ENO non-séparable, puis une technique de détection de singularité et de reconstruction adaptée aux contours qui généralise de façon non-séparable l'approche ENO-SR.

### 2.2.1 Prédiction ENO non-séparable

Notre mécanisme de sélection de stencil va s'apparenter la technique introduite dans le cas monodimensionnel : pour chaque carré  $C_{j-1,k}$ , on va choisir un stencil  $\tilde{S}_{j-1,k}$  entre les 9 stencils  $S_{j-1,k+l}$  pour  $l \in \{-1, 0, 1\}^2$ , en minimisant une fonction de coût bidimensionnelle. Cette fonction de coût n'est rien d'autre que la somme des fonctions de coût monodimensionnelles sur les trois lignes et sur les trois colonnes, c'est à dire

$$\mathcal{C}^{2D}(S_{j-1,m}) = \sum_{l=-1,0,1} [|v_{m+(1,l)}^{j-1} - v_{m+(0,l)}^{j-1}| + |v_{m+(0,l)}^{j-1} - v_{m+(-1,l)}^{j-1}| + |v_{m+(l,1)}^{j-1} - v_{m+(l,0)}^{j-1}| + |v_{m+(l,0)}^{j-1} - v_{m+(l,-1)}^{j-1}|].$$

Comme dans le cas monodimensionnel on privilégiera le stencil centré autour de  $C_{j-1,k}$  en cas de multiplicité du minimum, puis les 4 stencils centré dans une direction et décentrés dans l'autre, puis les 4 stencils décentrés dans les deux directions. La figure 2.11 illustre ces trois type de stencils. En cas de multiplicité du minimum pour deux stencils du même type, on fera un choix arbitraire comme dans le cas monodimensionnel.

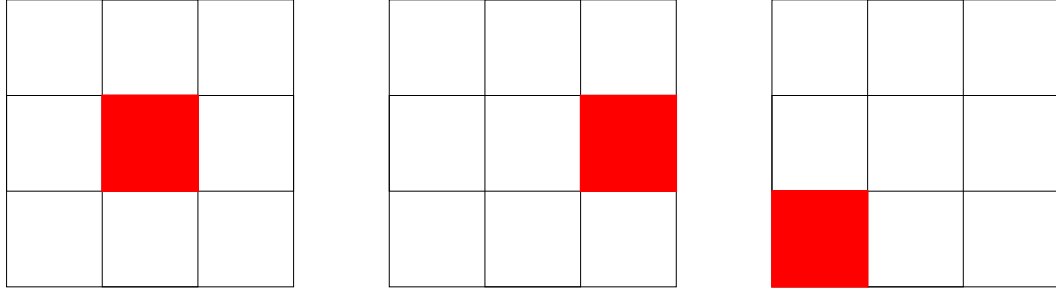


FIG. 2.11 – Les trois type de stencils par ordre de priorité

Nous pouvons à présent définir un polynôme quadratique en chaque variable  $\tilde{p}_{j-1,k}$  à partir des valeurs  $v_l^{j-1}$ ,  $l \in \tilde{S}_{j-1,k}$ , et la prédiction  $\hat{v}^j = P_j^{j-1} v^{j-1}$  dans le carré  $C_{j-1,k}$  est alors donnée par

$$\hat{v}_n^j = 2^{2j} \int_{C_{j,n}} \tilde{p}_k(x, y) dx dy, \text{ si } C_{j,n} \subset C_{j-1,k}. \quad (2.11)$$

Comme dans le cas monodimensionnel, une telle sélection a pour but d'améliorer la prédiction au voisinage d'un contour, puisque les stencils sélectionnés tendront naturellement à éviter ce contour. Nous illustrons ce comportement dans le cas d'un contour droit sur la figure 2.12 : les carrés sombres correspondent aux régions où le stencil de reconstruction intercepte le contours et où la prédiction est ainsi détériorée. La sélection de stencil par la méthode ENO que nous venons de décrire aura pour effet de limiter ces carrés à ceux qui interceptent le contour. Nous donnerons par la suite un résultat précis confirmant cette intuition dans le théorème 2.1.

**Remarque 2.1.** *Comme dans le cas monodimensionnel, nous décentrons de façon systématique le stencil pour les carrés adjacents aux bords de l'image afin d'éviter la périodisation, mais une sélection reste possible dans la direction tangentielle au bord, sauf pour les carrés situés aux quatre coins de l'image.*

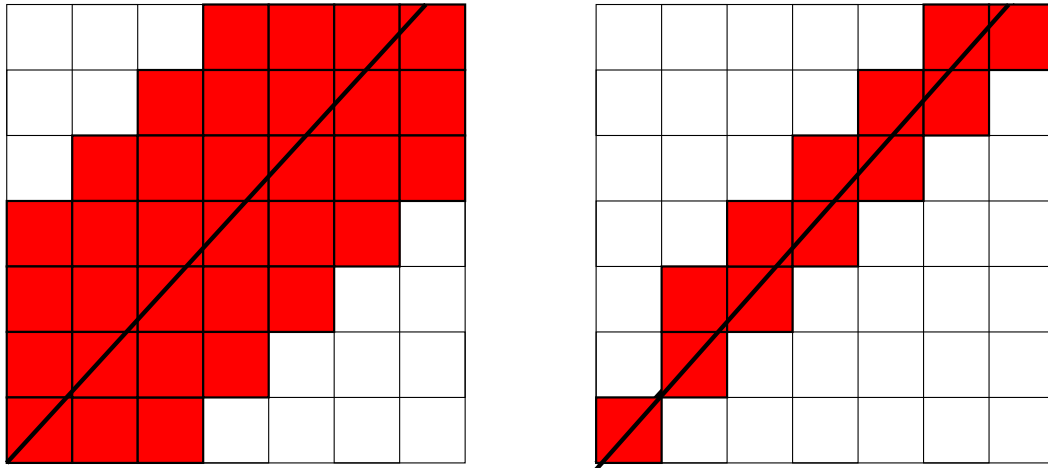


FIG. 2.12 – Influence d'un contour sur la prédiction (a) centrée et (b) ENO

Il est clair que la prédiction  $P_j^{j-1}$  n'est pas un opérateur séparable et diffère donc de la prédiction obtenue en alternant la méthode ENO dans chaque direction. Nous comparons sur les figures 2.13 et 2.14 les reconstructions obtenues à partir de l'échelle  $j = 5$  sans ajouter de détails par la méthode ENO que nous venons d'introduire et la méthode ENO séparable. On ne constate pas d'amélioration significatives dans la résolution du contours. D'autre part le



mauvais comportement dans les zones homogènes lié à la présence de texture dans l'image réelle est toujours présent.

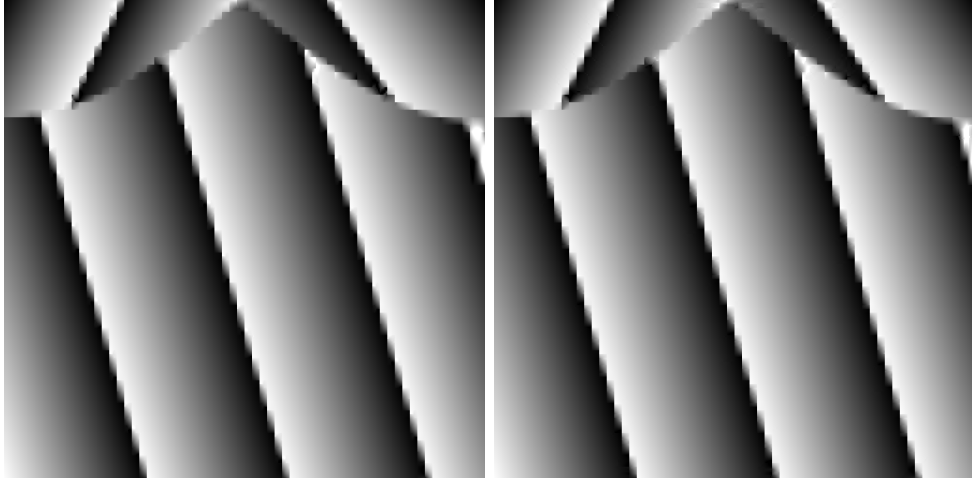


FIG. 2.13 – Reconstruction en utilisant la prédiction ENO séparable et non-séparable

Afin de résoudre ces problèmes, nous allons à présent développer une méthode de prédiction adaptée aux contours qui généralise de manière efficace la méthode ENO-SR au cas bidimensionnel.

## 2.2.2 Le mécanisme de détection

Nous allons proposer un premier mécanisme de détection fondé sur le mécanisme monodimensionnel. Le carré  $C_{j-1,k}$  sera considéré comme *verticalement singulier* (VS) si il est signalé par le mécanisme de détection monodimensionnel appliqué aux données  $(v_{(k_x,l)}^{j-1})_{l=0,\dots,2^{j-1}-1}$ , i.e. lorsque l'on gèle la variable horizontale  $k_x$ . Ceci signifie que les stencils monodimensionnels  $\tilde{S}_{j-1,l}$  sélectionnés à partir de ces données en utilisant la fonction de coût (1.79) vérifient

$$\tilde{S}_{j-1,k_y-1} = S_{j-1,k_y-2} \text{ et } \tilde{S}_{j-1,k_y+1} = S_{j-1,k_y+2}. \quad (2.12)$$

De même, ce carré sera considéré comme *horizontalement singulier* (HS) si il est signalé par le mécanisme de détection monodimensionnel appliquées aux données  $(v_{(l,k_y)}^{j-1})_{l=0,\dots,2^{j-1}-1}$ , comme nous l'illustrons sur la figure 2.15.

Intuitivement, les contours presque verticaux (resp. horizontaux) seront uniquement détectés par le mécanisme horizontal (resp. vertical) et les contours



FIG. 2.14 – Reconstruction en utilisant la prédiction ENO séparable et non-séparable

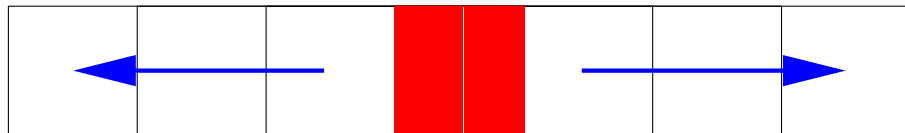


FIG. 2.15 – Carré singulier dans la direction horizontale

obliques seront détectés par les deux mécanismes. La figure représente l'emplacement des carrés singuliers détectés par ce mécanisme à l'échelle  $J - 1 = 8$  pour les images "graphe" et "peppers". Si dans le cas de l'image synthétique ces carrés correspondent bien aux contours, nous constatons en revanche qu'ils sont largement répandus dans les régions homogènes dans le cas de l'image réelle, en raison de la sensibilité du mécanisme de sélection et de détection à la texture de l'image. Ce phénomène, que nous avons déjà identifié dans le cas des méthodes ENO et ENO-SR séparables, est particulièrement gênant puisqu'il conduit à des artefacts par la reconstruction de contours artificiels dans les zones homogènes texturées. Nous allons donc chercher à faire la distinction entre les carrés singuliers associés aux contours et aux textures par un mécanisme de sélection supplémentaire.

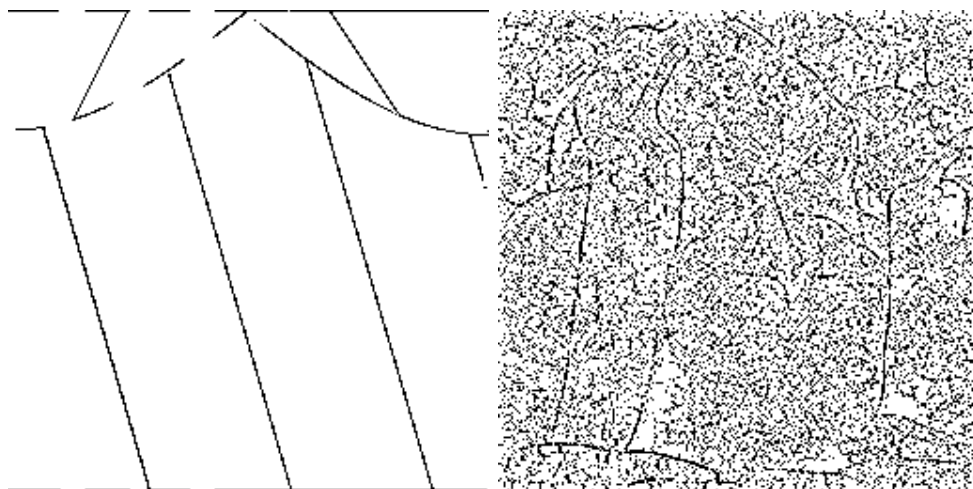


FIG. 2.16 – Carrés singuliers à l'échelle  $J - 1 = 8$  pour "graphe" et "peppers"

Ce mécanisme de sélection se fonde sur le modèle simplifié des fonctions que l'on cherche à reconstruire exactement, à savoir les fonctions constantes par morceaux

$$v = a\chi_{\{px+qy \leq r\}} + b\chi_{\{px+qy > r\}} \quad (2.13)$$

de part et d'autre d'une droite  $D = \{px + qy = r\}$  d'orientation arbitraire. L'idée est ici d'éliminer les carrés singuliers ayant des configurations pathologiques qui ne peuvent correspondre localement à ce modèle. Pour chaque carré singulier  $C_{j-1,k}$  on examine ainsi la configuration carrés singuliers contenu dans le stencil  $S_{j-1,k}$  centré autour de  $C_{j-1,k}$ . Dans l'hypothèse (qui sera justifié dans la théorème 2.1) où les carrés singuliers correspondent à ceux dont

l'intérieur est traversé par le contour  $D$ , nous obtenons 48 configurations admissibles entre les  $2^9$  configurations possibles. Ces configurations admissibles sont entièrement représentées par les 8 cas de la figure 2.17, en omettant les configurations équivalentes par symétrie et rotations telles que l'illustre la figure 2.18.

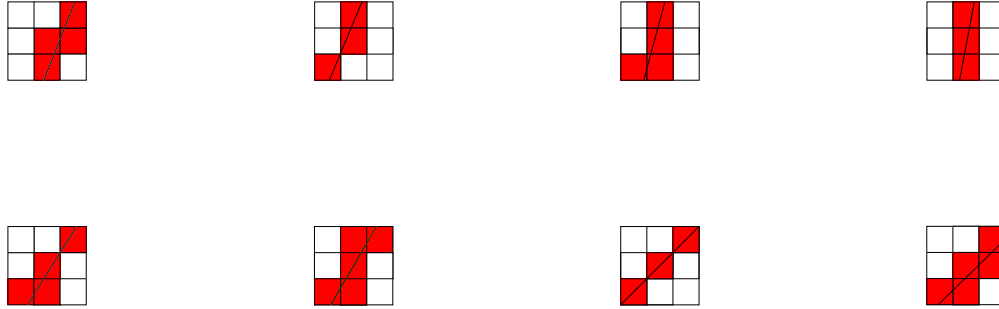


FIG. 2.17 – Configurations admissibles pour un contour rectiligne

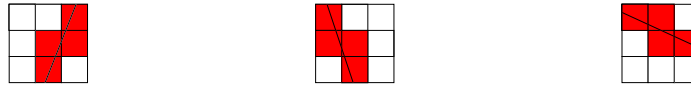


FIG. 2.18 – Configurations admissibles équivalentes par rotation et symétrie

Nous pouvons d'autre part dégager de chaque configuration admissible une tendance dominante entre la direction horizontale et verticale pour le contour  $D$ . On voit ainsi que sur les configurations représentées sur la figure 2.17, les six premières d'entre elles correspondent au cas de figure où  $D$  fait un angle strictement inférieur à  $\pi/4$  avec la direction verticale, ce qui correspond donc à une tendance verticale. La septième configuration - 3 carrés singuliers sur la diagonale - correspond à un angle exactement égal à  $\pi/4$  (et est de ce fait non-générique). La dernière configuration correspond à un angle strictement compris entre  $\pi/6$  et  $\pi/3$ . Ces deux dernières configurations possèdent ainsi les

deux tendances. Par rotation et symétries, on obtient ainsi 42 configurations qui permettent d’identifier la tendance dominante entre la direction horizontale et verticale, et 6 qui possèdent les deux tendances. Dans le cadre de notre modèle simplifié, les carrés singuliers dans une configuration admissible à tendance verticale (resp. horizontale) auront tendance à être de type HS (resp. VS).

Notre mécanisme de sélection consistera par conséquent à considérer que le carré singulier  $C_{j-1,k}$  est *admissible* si et seulement si les carrés singuliers contenus dans le stencil  $S_{j-1,k}$  forment une configuration admissible et sont tous du type HS (resp. VS) pour une configuration a tendance verticale (resp. horizontale). Dans le cas d’une configuration qui possède les deux tendances, on exigera que tous les carrés singuliers aient tous au moins un type (HS ou VS) commun. Dans le cas contraire, le carré singulier  $C_{j-1,k}$  sera catalogué comme une fausse alarme. Sur de tels carrés, la prédiction sera effectuée de la même manière que sur les carrés non singuliers, c’est à dire par la reconstruction d’un polynôme. Sur les carrés singuliers admissibles, la prédiction sera effectuée par la reconstruction d’une fonction polynômiale de part et d’autre d’un contour rectiligne  $\tilde{D}$  qui visera à approcher le contour  $D$  du modèle simplifié. La figure 2.19 illustre l’efficacité de ce procédé de sélection : sur l’image “peppers” l’essentiel des fausses alarmes liées à la texture ont été éliminées.

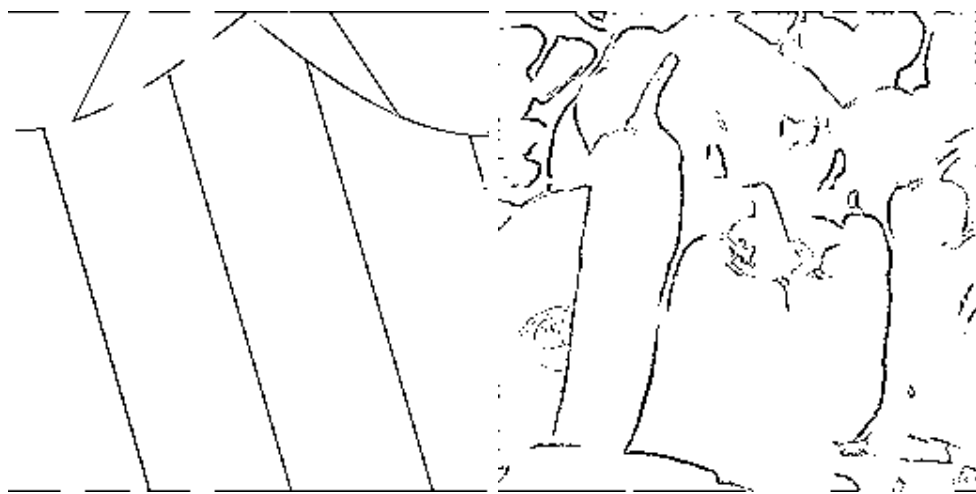


FIG. 2.19 – Carrés singuliers admissibles à l’échelle  $J - 1 = 8$  pour “graphe” et “peppers”

Notre procédé peut être conçu comme une forme de détection de contours basée sur des critères essentiellement topologiques, et de ce fait invariante à des

opérations telle que l'augmentation du contraste dans l'image, contrairement à des procédés basés sur le seuillage de la réponse à l'application de filtres de type gradient (Sobel ou Prewitt). Muni de ce procédé de détection, nous pouvons à présent définir une technique de prédiction adaptée aux contours.

### 2.2.3 La technique de prédiction ENO-EA

La prédiction adaptée aux contours ENO-EA (Edge-Adapted) va traiter de façon distincte les carrés singuliers admissibles et les autres carrés. Dans le cas où  $C_{j-1,k}$  n'est pas un carré singulier admissible, il paraît raisonnable de définir la prédiction dans  $C_{j-1,k}$  par la technique ENO non-séparable. Cependant nous avons déjà observé que la technique ENO pouvait engendrer des artefacts dans les zones homogènes. Afin d'éviter de tels artefacts, nous choisirons d'imposer le stencil centré  $S_{j-1,k}$  dès lors que  $C_{j-1,k}$  est suffisamment éloigné des contours détectés au sens où  $S_{j-1,k}$  ne contient aucun carré singulier admissible. Dans ce cas, on utilise simplement

$$\hat{v}_n^j = 2^{2j} \int_{C_{j,n}} p_k(x, y) dx dy, \quad \text{si } C_{j,n} \subset C_{j-1,k}, \quad (2.14)$$

où  $p_k$  est le polynôme reconstruit à partir des valeurs sur  $S_{j-1,k}$ . Dans le cas où  $S_{j-1,k}$  contient un carré singulier admissible, on appliquera la technique ENO non-séparable afin d'éviter l'influence du contour, i.e.

$$\hat{v}_n^j = 2^{2j} \int_{C_{j,n}} \tilde{p}_k(x, y) dx dy, \quad \text{si } C_{j,n} \subset C_{j-1,k}, \quad (2.15)$$

où  $\tilde{p}_k$  est reconstruit à partir des valeurs sur  $\tilde{S}_{j-1,k}$ .

Il nous reste à décrire le processus de reconstruction dans le cas où  $C_{j-1,k}$  est un carré singulier admissible. Une première étape consistera à estimer la droite  $D$  par une droite  $\tilde{D}$ . On reconstruira ensuite une fonction polynomiale par morceaux de part et d'autre de  $\tilde{D}$  en utilisant deux stencils voisins de  $C_{j,k}$  qui se situent de part et d'autre de  $\tilde{D}$ . Nous supposons ici sans perte de généralité que nous sommes dans le cas où les carrés singuliers du stencil  $\tilde{S}_{j,k}$  sont de type HS et dans une configuration de tendance verticale. Le cas de carrés VS dans une configuration de tendance horizontale sera traité de façon symétrique, et le cas où les deux situations sont rencontrées simultanément est traité en se ramenant à l'une des deux situations, par exemple la première.

Pour la construction de  $\tilde{D}$ , nous considérons les 3 rangées horizontales du stencil  $S_{j-1,k}$ , c'est à dire  $R_{l_y} = (C_{j-1,(l_x, l_y)})_{l_x=k_x-1, k_x, k_x+1}$  pour les valeurs

$l_y = k_y - 1, k_y, k_y + 1$ . Au vu des configurations possibles, chacune de ces rangées contient un carré HS isolé ou deux carrés HS adjacents. Nous allons à nouveau utiliser le modèle simplifié

$$v = a\chi_{\{px+qy \leq r\}} + b\chi_{\{px+qy > r\}} \quad (2.16)$$

en faisant l'hypothèse (qui sera justifié dans le théorème 2.1) que le segment de  $D$  contenu dans  $S_{j-1,k}$  ne traverse que les carrés singuliers. Si nous examinons la ligne entière  $(C_{j-1,(l_x,l_y)})_{l_x=0,\dots,2j-1-1}$ , nous constatons que dans certaines configurations, la droite  $D$  est susceptible d'intercepter des carrés extérieurs au stencil, adjacent aux carrés singuliers. En ajoutant ces carrés extérieurs, on obtient sur chaque rangée des *régions singulières* susceptible de contenir un segment de  $D$ . Nous représentons ces régions sur la figure 2.20 pour chaque configuration. Nous remarquons que les régions singulières sont constituées de

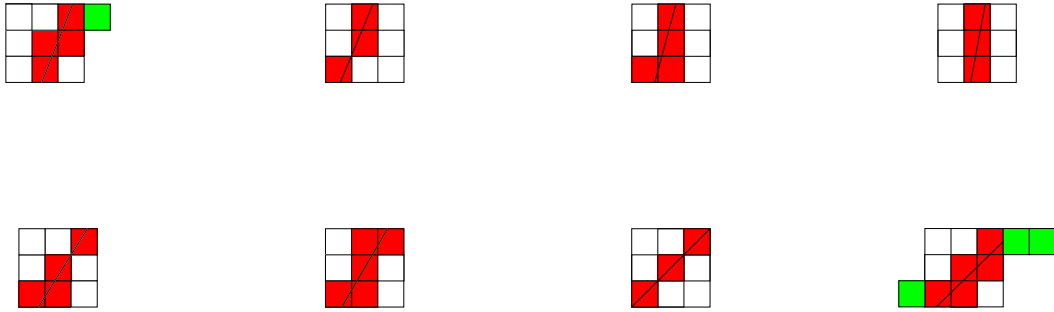


FIG. 2.20 – Régions singulières pour chaque configuration

un, deux ou trois carrés adjacents comme l'illustre la figure 2.21. Dans chaque cas, nous allons chercher à identifier le point  $M$  milieu du segment de la droite  $D\{px + qy = r\}$  qui intercepte la rangée.



FIG. 2.21 – Région singulière

Plaçons nous tout d'abord dans le cas où la région singulière se réduit à un seul carré isolé  $C_{j-1,(l_x,l_y)}$ . En supposant que la valeur  $a$  se situe sur la gauche,

on obtient de manière évidente

$$a = v_{(l_x-1, l_y)}^{j-1} \quad \text{et} \quad b = v_{(l_x+1, l_y)}^{j-1}. \quad (2.17)$$

En notant  $(x_M, y_M)$  les coordonnées de  $M$ , on a clairement  $y_M = 2^{1-j}(l_y + 1/2)$  et pour  $x_M$  l'équation

$$v_{(l_x, l_y)}^{j-1} = \frac{x_M - 2^{1-j}l_x}{2^{1-j}}a + \frac{2^{1-j}(l_x + 1) - x_M}{2^{1-j}}b, \quad (2.18)$$

soit

$$x_M = 2^{1-j} \frac{(l_x + 1)v_{(l_x-1, l_y)}^{j-1} - (l_x + 1)v_{(l_x+1, l_y)}^{j-1}}{v_{(l_x-1, l_y)}^{j-1} - v_{(l_x+1, l_y)}^{j-1}}. \quad (2.19)$$

Dans le cas où la région singulière est composée de deux carrés adjacents,  $C_{j-1, (l_x, l_y)}$  et  $C_{j-1, (l_x+1, l_y)}$ , on aura alors

$$a = v_{(l_x-1, l_y)}^{j-1} \quad \text{et} \quad b = v_{(l_x+2, l_y)}^{j-1}, \quad (2.20)$$

et pour  $x_M$  l'équation

$$v_{(l_x-1, l_y)}^{j-1} = \frac{x_M - 2^{1-j}l_x}{2^{1-j}}a + \frac{2^{1-j}(l_x + 2) - x_M}{2^{1-j}}b, \quad (2.21)$$

soit

$$x_M = 2^{1-j} \frac{(l_x + 2)v_{(l_x-1, l_y)}^{j-1} - (l_x + 2)v_{(l_x+2, l_y)}^{j-1}}{v_{(l_x-1, l_y)}^{j-1} - v_{(l_x+2, l_y)}^{j-1}}. \quad (2.22)$$

Finalement, dans le cas où la région singulière est composée de trois carrés adjacents,  $C_{j-1, (l_x, l_y)}$ ,  $C_{j-1, (l_x+1, l_y)}$  et  $C_{j-1, (l_x+2, l_y)}$  on obtiendra de la même façon

$$x_M = 2^{1-j} \frac{(l_x + 3)v_{(l_x-1, l_y)}^{j-1} - (l_x + 3)v_{(l_x+2, l_y)}^{j-1}}{v_{(l_x-1, l_y)}^{j-1} - v_{(l_x+3, l_y)}^{j-1}}. \quad (2.23)$$

De la même manière que pour la procédure ENO-SR dans le cas monodimensionnel, lorsque le point  $M$  obtenu ne se situe pas à l'intérieur de la région singulière, nous considérons qu'il s'agit d'une "fausse alarme" et le carré  $C_{j-1, k}$  est alors traité par la technique ENO non-séparable. En appliquant cette procédure sur les trois rangées, nous obtenons ainsi trois points :  $M$  sur la rangée centrale et  $M_+$  et  $M_-$  sur les rangées supérieures et inférieures. Ces trois points sont alignés sur la droite  $D$  dans le cas du modèle simplifié, mais ils n'ont aucune raison de l'être pour des données générales. On construira la droite  $\tilde{D}$  en imposant que celle-ci passe par le point  $M$  et en déterminant sa pente par un



critère des moindres carré sur la distance des points  $(M_+, M_-)$  à  $\tilde{D}$ , c'est à dire en trouvant la droite unique qui réalise

$$\tilde{D} \underset{\text{t.q. } M \in \tilde{D}}{\min} \{[\text{dist}(M_+, \tilde{D})]^2 + [\text{dist}(M_-, \tilde{D})]^2\}. \quad (2.24)$$

Nous illustrons cette procédure sur la figure 2.22.

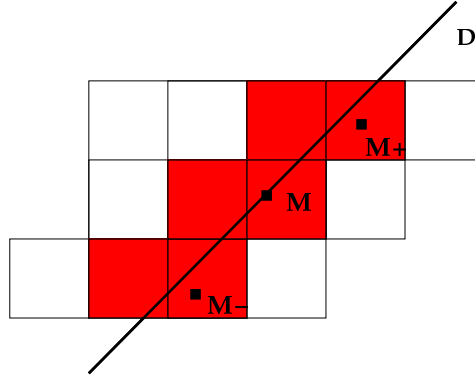


FIG. 2.22 – Reconstruction de la droite  $\tilde{D}$

La deuxième étape consiste à construire deux polynômes  $p_k^+$  et  $p_k^-$  de part et d'autre de la droite  $\tilde{D}$  en utilisant les données dans des régions non-singulières. En notant  $\tilde{D}^+$  et  $\tilde{D}^-$  les demi-plans séparés par  $\tilde{D}$ , on remarque qu'au vu des configurations présentées sur la figure 2.17 nous pouvons toujours choisir deux stencils  $S_{j-1,k}^+ \subset \tilde{D}^+$  et  $S_{j-1,k}^- \subset \tilde{D}^-$  de taille  $3 \times 3$  qui ont une intersection non-vide avec  $S_{j-1,k}$  et se situent de part et d'autre du groupe des carrés singuliers. Ce choix n'étant pas unique, on imposera de surcroît que l'intersection de ces stencils avec  $S_{j-1,k}$  soit la plus longue possible dans la direction de la tendance (ici verticale). Les stencils  $S_{j-1,k}^+$  et  $S_{j-1,k}^-$  sont alors uniquement déterminés pour chaque configuration comme le montre la figure 2.23.

Les valeurs de  $v^{j-1}$  sur ces deux stencils nous permettent de définir deux polynômes  $p_k^+$  et  $p_k^-$  quadratiques en chaque variable. La reconstruction ENO-EA dans le carré  $C_{j-1,k}$  est dans un premier temps donnée par

$$q_k := p_k^+ \chi_{\tilde{D}^+} + p_k^- \chi_{\tilde{D}^-}, \quad (2.25)$$

ce qui suggère de définir la prédiction  $\hat{v}^j = P_j^{j-1} v^{j-1}$  sur  $C_{j-1,k}$  par

$$\hat{v}_n^j = 2^{2j} \int_{C_{j,n}} q_k(x, y) dx dy, \quad \text{si } C_{j,n} \subset C_{j-1,k}. \quad (2.26)$$

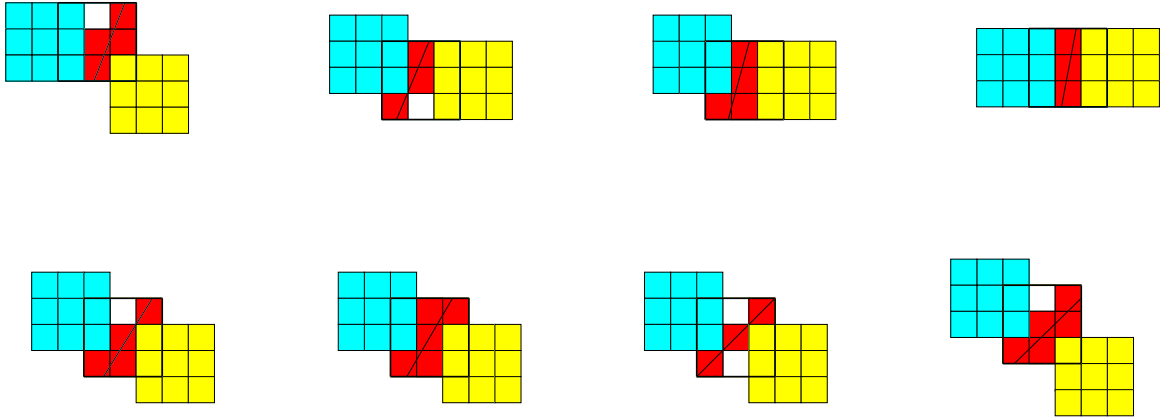


FIG. 2.23 – Stencils utilisés pour la reconstruction d’un carré singulier admissible

On remarque cependant que ce choix n’est plus nécessairement consistant avec la moyenne  $v_k^{j-1}$ . Afin de corriger ce défaut, on projette le vecteur des quatre moyennes obtenues sur l’espace affine des vecteurs dont la moyenne vaut  $v_k^{j-1}$ , ce qui revient tout simplement à définir la prédiction par

$$\hat{v}_n^j = 2^{2j} \int_{C_{j,n}} q_k(x, y) dx dy + C, \quad \text{si } C_{j,n} \subset C_{j-1,k}, \quad (2.27)$$

où la constante  $C = C(j-1, k)$  est donnée par

$$C = v_k^{j-1} - \frac{1}{4} \sum_{C_{j,n} \subset C_{j-1,k}} 2^{2j} \int_{C_{j,n}} q_k(x, y) dx dy. \quad (2.28)$$

La prédiction ENO-EA est ainsi complètement définie. Nous verrons dans un instant qu’elle traite les contours de façon largement plus satisfaisante que tous les algorithmes que nous avons présenté jusqu’ici, et permet ainsi d’obtenir des représentations multiéchelles qui présentent des avantages sur les décompositions en ondelettes pour des applications telles que la compression.

## 2.2.4 Propriété d’exactitude de la prédiction ENO-EA

Nous allons établir un résultat qui valide les propriétés d’exactitude sur des modèles simplifiés que nous avons cherché à réaliser lors de la mise au point de la prédiction ENO-EA :

**Théorème 2.1.** *La prédiction ENO-EA est exacte pour les polynômes quadratiques ainsi que pour les fonctions constantes par morceaux de part et d'autre d'un contour rectiligne : si  $v$  est un polynôme quadratique en chaque variable ou si  $v$  est du type  $v = a\chi_{\{px+qy \leq r\}} + b\chi_{\{px+qy > r\}}$ , on a alors  $\hat{v}^j = v^j$ . Dans le deuxième cas, les carrés singuliers admissibles sont exactement ceux dont l'intérieur est traversé par la droite  $D = \{px + qy = 1\}$ .*

**Démonstration :** L'exactitude pour les polynômes quadratiques en chaque variable est immédiate car les polynômes  $p_k$ ,  $\tilde{p}_k$ ,  $p_k^+$  et  $p_k^-$  obtenus par la procédure centrée, ENO et ENO-EA, coïncident tous avec  $v$  si celle-ci est elle-même un polynôme de ce type.

Dans le cas où  $v$  est constante par morceaux de part et d'autre de  $D = \{px+qy = 1\}$ , supposons sans perte de généralité que  $D$  fasse un angle inférieur à  $\pi/4$  avec la verticale. Considérons tout d'abord un carré  $C_{j-1,k}$  situé dans le demi-plan  $D^+$  à droite de  $D$ . Nous remarquons tout d'abord que pour un tel carré, il existe toujours un voisin dans la direction horizontale (resp. verticale), dont le stencil monodimensionnel centré dans la direction horizontale (resp. verticale) est situé dans  $D^+$  et a donc une fonction de coût nulle. Ceci nous indique qu'un tel carré ne peut être horizontalement ou verticalement singulier, et sera donc traité par une reconstruction polynômiale centrée ou ENO. Il est évidemment de même pour les carrés situés dans  $D^-$ .

A l'inverse, nous allons montrer que les carrés  $C_{j-1,k}$  dont l'intérieur est traversé par  $D$  sont toujours des carrés singuliers admissibles sur lesquels on va appliquer la reconstruction ENO-EA. On remarque tout d'abord que puisque  $D$  fait un angle inférieur à  $\pi/4$  avec la verticale, elle ne peut traverser plus de deux carrés sur une ligne horizontale  $(C_{j-1,(l,k_y)})_{l=0,\dots,2^{j-1}-1}$ . Si nous considérons une ligne horizontale de valeurs  $(v_{(l,k_y)}^{j-1})_{l=0,\dots,2^{j-1}-1}$ , celle-ci sera donc de la forme

$$\cdots a, a, a, a, c, b, b, b, \cdots$$

dans le cas où  $D$  traverse l'intérieur d'un seul carré sur cette rangée, ou de la forme

$$\cdots a, a, a, a, c, d, b, b, b, \cdots$$

dans le cas où  $D$  traverse les intérieurs de deux carrés. En supposant sans perte de généralité que  $a < b$ , on aura  $a < c < b$  dans le premier cas et  $a < c < d < b$  dans le second. L'examen de la fonction de coût (1.79) nous montre facilement que les carrés traversés (i.e. correspondant aux valeurs  $c$  et  $d$ ) seront détectés comme HS. On remarque finalement que ces carrés sont par définition configurés de manière admissible suivant une tendance verticale.

Examinons à présent la reconstruction dans les différents carrés. Dans le cas d'un carré  $C_{j-1,k}$  dont l'intérieur n'est pas traversé par  $D$ , il faut distinguer deux cas :

1. Si le stencil  $S_{j-1,k}$  ne contient pas de carré singulier, on utilise la procédure centrée. Dans ce cas, la fonction  $v$  est constante sur  $S_{j-1,k}$  et par conséquent la reconstruction est exacte.
2. Si le stencil  $S_{j-1,k}$  contient un carré singulier, on utilise la procédure ENO. Dans ce cas, la droite  $D$  traverse l'intérieur du stencil  $S_{j-1,k}$  et on aura par conséquent  $\mathcal{C}^{2D}(S_{j-1,k}) > 0$ . Le mécanisme de sélection de stencil bidimensionnel choisira donc un stencil décentré  $\tilde{S}_{j-1,k}$  sur lequel la fonction  $v$  est constante puisque l'on aura alors  $\mathcal{C}^{2D}(\tilde{S}_{j-1,k}) = 0$ .

Dans le cas d'un carré  $C_{j-1,k}$  dont l'intérieur est pas traversé par  $D$ , on utilise la procédure ENO-EA. Dans ce cas, les points  $M$ ,  $M_+$  et  $M_-$  sont par construction placés sur la droite  $D$  si bien que  $\tilde{D} = D$ . Les polynômes  $p_k^+$  et  $p_k^-$  sont construits sur des stencils contenus dans  $D^+$  et  $D^-$  et sont donc simplement les fonctions constantes respectivement égales à  $b$  et  $a$ . Par conséquent la reconstruction est exacte.  $\square$

La figure 2.24 illustre la distinction entre les trois types de reconstruction utilisés - centrée, ENO et ENO-EA - suivant les carrés considérés dans la preuve de la proposition 2.1. Nous illustrons numériquement la validité de cette proposition sur la figure 2.25 qui illustre la reconstruction depuis l'échelle  $j = 5$  d'une image géométrique constante par morceaux de part et d'autre de contours rectiligne par l'itération de la prédiction ENO-EA sans ajouter de détails. On constate qu'en dehors de la jonction des branches rectilignes, l'image est parfaitement reconstruite.

**Remarque 2.2.** *La procédure ENO-EA a été mise au point précisément dans l'objectif d'être localement exacte pour le modèle simplifié des fonctions constantes de part et d'autre d'un contour droit. Il faut bien comprendre qu'il existe une infinité de variantes de cette procédure qui possèdent la même propriété d'exactitude. Par exemple, le choix de la droite  $\tilde{D}$  aurait pu être fixé en la faisant passer par les points  $M_+$  et  $M_-$ , plutôt que par un critère des moindres carrés. Il aurait aussi été envisageable d'identifier de manière conjointe les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $D$  par une procédure d'optimisation utilisant les données disponibles. Cependant, le choix d'une telle procédure n'est pas innocent lorsque l'on souhaite en outre que la prédiction soit précise lorsque l'on sort du modèle simplifié et que l'on considère des fonctions plus générales obéissant au modèle sous-jacent des fonctions régulières par morceaux de part et d'autre d'un contour régulier.*

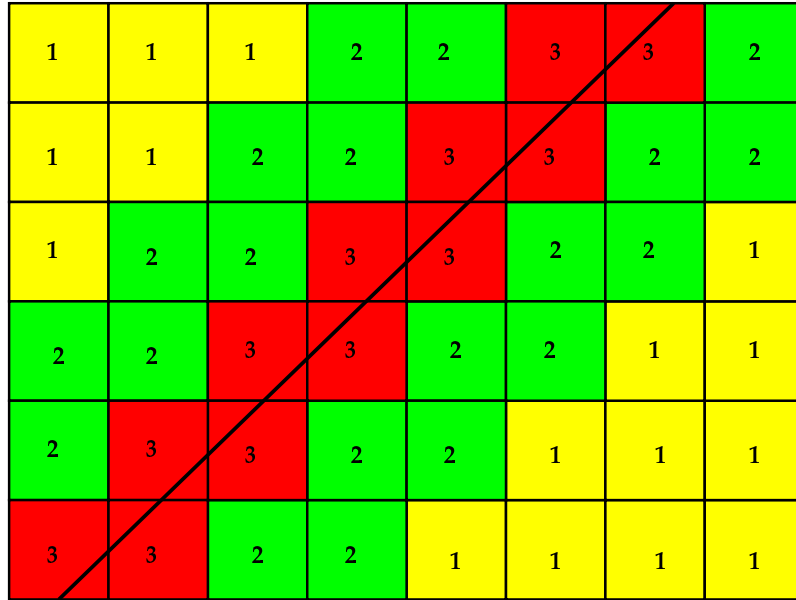


FIG. 2.24 – Procédures utilisées pour le modèle simplifié : centré (1), ENO (2), ENO-EA (3)

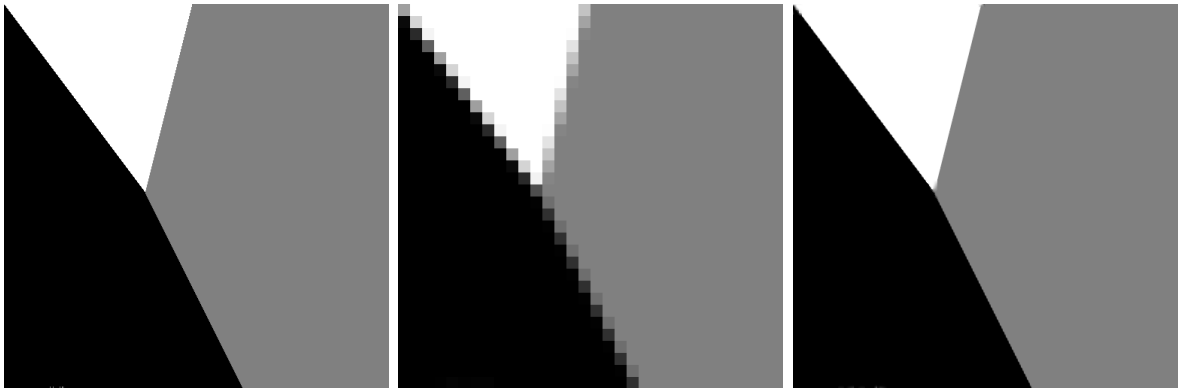


FIG. 2.25 – Image originale, données basse résolution et reconstruction

*De ce point de vue, la procédure que nous avons décrite est celle qui semble la meilleure, d'après l'ensemble des tests numériques que nous avons effectué.*

## 2.2.5 Performances pratiques de la prédiction ENO-EA

Examinons à présent le comportement de la prédiction ENO-EA sur les quatre images tests, à nouveau en effectuant la reconstruction à partir du niveau  $j = 5$  sans rajouter de détails. On fait ici directement la comparaison avec la prédiction BW correspondant aux ondelettes biorthogonales associées à la paire de filtres  $(9, 7)$ . Les figures 2.26 et 2.27 nous montre l'excellent comportement de la prédiction sur les contours géométriques. Comme on pouvait l'anticiper, la prédiction se détériore dans l'image "graphe" au voisinage des jointions en T qui ne sont pas pris en compte dans le modèle simplifié. C'est donc uniquement dans ces emplacements que nous auront besoin de rajouter des coefficients de détails aux échelles fines.

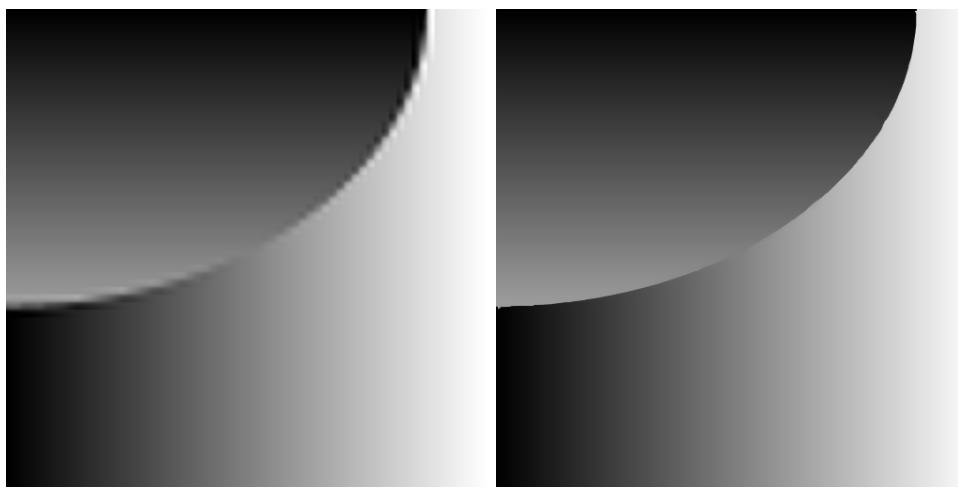


FIG. 2.26 – Images “ellipse” : reconstruction avec BW et ENO-EA

Dans le cas des images réelles présentées sur les figures 2.28 et 2.29, on constate que la prédiction ENO-EA permet de reconstruire des contours nets, lorsque ceux-ci sont suffisamment simples pour être détectés à partir des données aux basses échelles. Par comparaison avec les méthodes séparables, on a aussi diminué les artefacts de reconstruction des zones homogènes liés à la textures grâce à la sélection des configurations admissibles pour les carrés singuliers, et l'utilisation systématique de la procédure centrée lorsque l'on se trouve

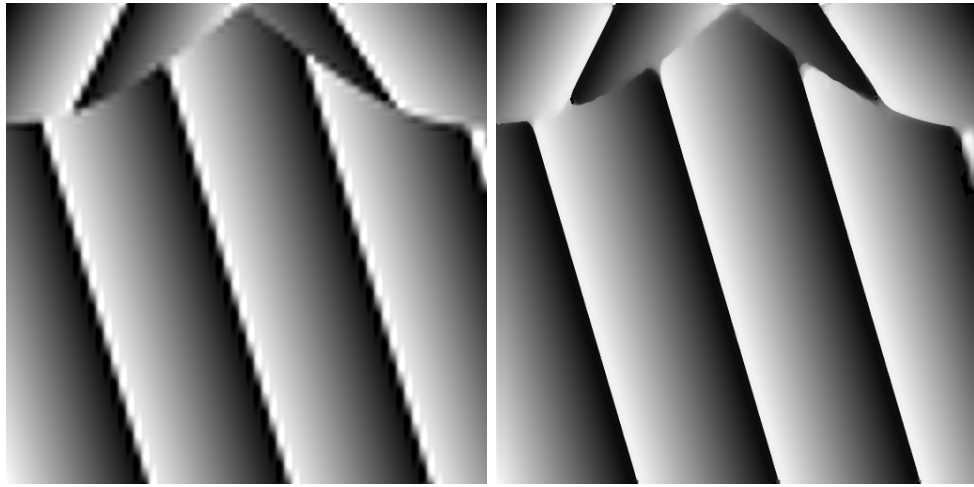


FIG. 2.27 – Images “graphe” : reconstruction avec BW et ENO-EA

loin de ces carrés. Les améliorations sont néanmoins plus sensible sur l’image “peppers” qui contient moins de texture que l’image “phare”.



FIG. 2.28 – Images “peppers” : reconstruction avec BW et ENO-EA

Après ces résultats encourageants, nous allons comparer les représentations non-linéaires basées sur la prédiction ENO-EA avec les décompositions en ondelettes classiques, du point de vue de la concentration des coefficients et des performances des algorithmes de seuillage.



FIG. 2.29 – Images “phare” : reconstruction avec BW et ENO-EA

## 2.3 Concentration des coefficients et seuillage

A partir de la prédiction ENO-EA, nous pouvons construire une représentation multiéchelle

$$v^J \mapsto \mathcal{M}v^J = (v^0, d^0, \dots, d^{J-1})$$

où les détails à chaque échelle donnés par les trois tableaux  $d^j = (d_a^j, d_b^j, d_c^j)$  définis au début de § 2.2. Ces représentations sont donc organisées de la même façon que les décompositions en ondelettes classiques.

**Remarque 2.3.** *La complexité des algorithmes de décomposition et reconstruction qui relient  $v^J$  et  $\mathcal{M}v^J$  pour les représentations ENO-EA est du même ordre que pour les bases d'ondelettes classiques, i.e. en  $\mathcal{O}(N)$  où  $N = 2^{2J}$  est la taille de l'image. Cependant il faut s'attendre à ce que la constante devant  $N$  soit largement plus grande dans le cas ENO-EA puisqu'elle intègre les tests de singularité, l'examen des configurations et les procédures de reconstructions adaptées aux contours. En pratique, nous observons un rapport entre la complexité des deux algorithmes compris entre 10 et 40 suivant l'image utilisée.*

### 2.3.1 Performances pratiques du seuillage ENO-EA

Nous allons tout d'abord comparer sur les quatre images tests les performances des algorithmes de seuillages dans les représentations BW et ENO-EA. Dans le cadre du seuillage, il est important de spécifier la normalisation utilisée sur les coefficients. Dans le cas des décompositions dans les bases d'ondelettes,



comme nous l'avons expliqué dans l'introduction de cette thèse, cela signifie essentiellement que l'on seuille en conservant les plus grandes contributions  $\|d_\lambda \psi_\lambda\|_X$  où  $X$  est la norme dans laquelle on va mesurer l'erreur. Dans le cas qui nous intéresse on prendra  $X = L^2$  ce qui signifie que l'on garde les plus grands coefficients  $|d_\lambda|$  lorsque les ondelettes sont normalisées dans  $L^2$ . Afin d'effectuer un seuillage analogue dans le cas des représentations ENO-EA, on remarque que l'erreur de prédiction  $e^j$  sur le carré  $C_{j-1,k}$ , vue comme une fonction constante par morceaux sur ce carré, a une norme  $L^2$  qui est donnée par

$$\|e^j\|_{L^2(C_{j-1,k})}^2 = 2^{-2j} \sum_{C_{j,n} \subset C_{j-1,k}} |e_n^j|^2 = 2^{-2(j-1)} \sum_{e=a,b,c} |d_{k,e}^{j-1}|^2. \quad (2.29)$$

Par conséquent on seuillera en conservant les plus grand détails renormalisés  $2^{-|j|}|d_\lambda|$  où  $j = |\lambda|$  est le niveau d'échelle de l'indice  $\lambda$ . Dans le cas de la prédiction centrée, cela correspond tout simplement au fait que les ondelettes biorthogonales associées sont ici normalisées dans  $L^\infty$  et qu'il faut effectuer cette renormalisation afin de seuiller les contributions  $L^2$ .

Nous pouvons ainsi d'ores et déjà comparer les performances pratiques des algorithmes de seuillage pour les représentations BW et ENO-EA. Pour chaque image, nous sélectionnons le seuil de façon à conserver la même proportion prescrite des coefficients pour les deux représentations. Nous avons choisi pour chaque image une proportion de coefficients en dessous de laquelle les dégradations de la reconstruction pour la représentation ENO-EA deviennent nettement perceptible par l'oeil humain. Nous indiquons aussi l'erreur entre l'image  $v^J$  et sa reconstruction  $\tilde{v}^J$  après seuillage, mesurée par le PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) qui est défini par

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{256^2}{MSE} \right), \quad (2.30)$$

où  $MSE$  est l'erreur quadratique moyenne

$$MSE = 2^{-2J} \|v^J - \tilde{v}^J\|_{\ell^2}^2. \quad (2.31)$$

La présence du facteur  $256^2$  correspond ici au fait que l'intensité lumineuse des images est normalisée entre 0 et 255, et il disparaît si on renormalise ces images entre 0 et 1 (notons que les opérations de décomposition-seuillage-reconstruction dans les représentations non-linéaires commutent avec une telle renormalisation).

Dans le cas des images géométriques, les figures 2.30 et 2.31 nous montre que pour une même proportion de coefficients, le seuillage dans la représentation

BW engendre des dégradations visibles (oscillations et perte de localisation) sur les contours qui sont évitées avec ENO-EA, et que ceci se reflète aussi sur le PSNR.

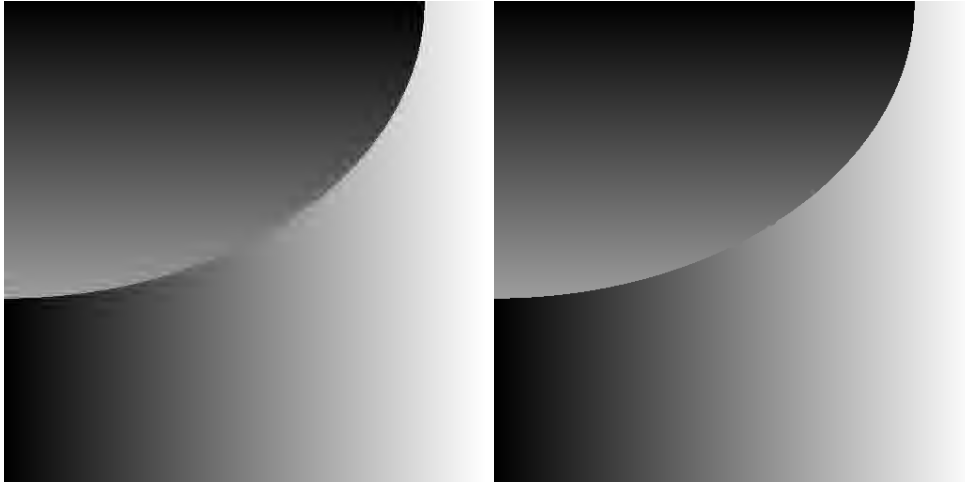


FIG. 2.30 – Seuillage conservant 3/1000 des coefficients avec BW (PSNR=43.50) et ENO-EA (PSNR=56.45)

Dans le cas d’une image réelle peu texturée telle que “peppers”, la figure 2.32 fait de nouveau apparaître une supériorité qualitative du seuillage dans la représentation ENO-EA en ce qui concerne le rendu des contours, mais ceci ne se traduit plus sur le PSNR qui est même légèrement meilleur pour BW. Ceci n’est pas contradictoire puisque le PSNR n’est pas toujours en parfaite adéquation avec la perception visuelle. Enfin, dans le cas d’une image réelle plus texturée telle que “phare”, la figure 2.32 montre que le seuillage dans la représentation ENO-EA n’apporte pas d’amélioration tant du point de vue visuel que du PSNR.

Ces tests seront prolongés dans le chapitre 5 par des algorithmes de codage qui confirmeront cette tendance : les représentations ENO-EA apportent des améliorations par rapports aux ondelettes classiques dans le cas des images géométriques et peu texturées.

### 2.3.2 Concentration des coefficients : une conjecture

L’efficacité des représentations multiéchelles pour des applications telles que la compression et le débruitage provient de leur capacité à concentrer l’information contenue dans les images sur un petit nombre de coefficients

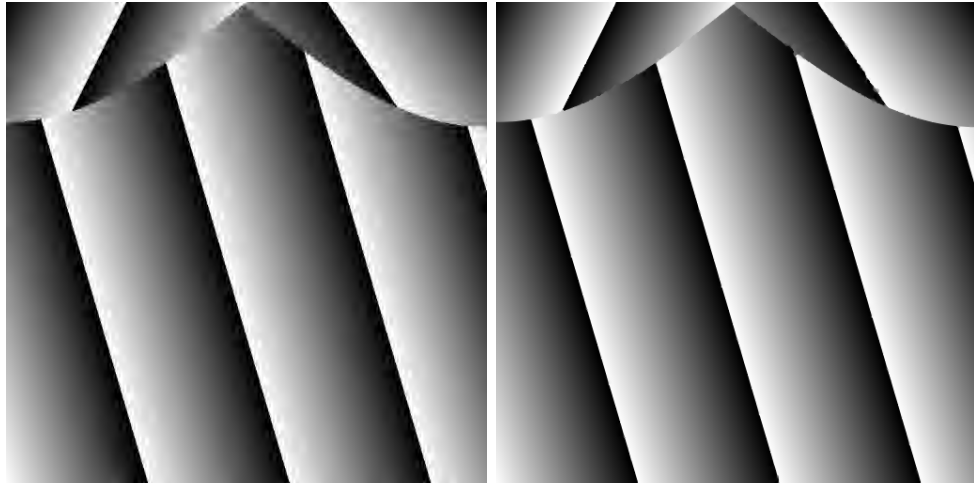


FIG. 2.31 – Seuillage conservant 1/100 des coefficients avec BW (PSNR=32.52) et ENO-EA (PSNR=38.19)



FIG. 2.32 – Seuillage conservant 3/100 des coefficients avec BW (PSNR=31.20) et ENO-EA (PSNR=30.80)



FIG. 2.33 – Seuillage conservant 5/100 des coefficients avec BW (PSNR=30.47) et ENO-EA (PSNR=28.03)

numériquement significatifs. D’un point de vue mathématique, il est naturel de mesurer la concentration d’une famille de coefficients  $(d_\lambda)$  en examinant le nombre de coefficients dont le module dépasse un seuil  $\eta$  et en évaluant la vitesse de croissance de ce nombre lorsque ce seuil tend vers 0 : on cherche ainsi à déterminer le plus petit  $p > 0$  tel que l’on ait une estimation du type

$$\#\{\lambda ; |d_\lambda| > \eta\} \leq C\eta^{-p}. \quad (2.32)$$

Une telle propriété signifie par définition que la famille  $(d_\lambda)$  appartient à l’espace faible  $w\ell^p$ . On peut clairement l’exprimer de façon équivalente en considérant le *réarrangement décroissant*  $(d_n)_{n>0}$  de la famille  $(|d_\lambda|)$  qui doit alors vérifier la propriété

$$d_n \leq Cn^{-1/p}. \quad (2.33)$$

La famille  $(d_\lambda)$  sera donc d’autant plus “concentrée” que  $p$  est proche de 0. Lorsque les  $d_\lambda$  sont les coordonnées d’une fonction  $v$  dans une base de Riesz, ces propriétés de concentrations sont directement liées aux performances des algorithmes de seuillage : si  $v_N$  est la reconstruction de  $v$  obtenue en conservant ses  $N$  plus grands coefficients, on peut écrire

$$\|v - v_N\|_{L^2} \sim \left[ \sum_{n>N} |d_n|^2 \right]^{1/2}, \quad (2.34)$$

et on vérifie aisément que si  $p < 2$  la propriété (2.33) est équivalente à

$$\left[ \sum_{n>N} |d_n|^2 \right]^{1/2} \leq CN^{-s}, \quad (2.35)$$

avec  $s = 1/p - 1/2$ . Ainsi, la vitesse d'approximation non-linéaire est d'autant plus grande que les coefficients sont concentrés. Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction de cette thèse, la présence des contours dans une image limite les propriétés de concentrations des décompositions en ondelettes classiques : on aura au mieux  $p = 1$  et  $s = 1/2$  même dans le cas d'une image géométrique, i.e. une fonction régulière par morceaux de part et d'autre de courbes de discontinuité régulières. Une question naturelle est alors de savoir si ces limitations peuvent être dépassées par les représentations ENO-EA.

Une première remarque est que dans le cas de représentations non-linéaires, la propriété (2.34) n'a plus rien d'évident. En particulier, le seuillage pourra se traduire par des modifications du processus de reconstruction, et on ne peut plus raisonner comme si chaque coefficient seuillé contribuait de manière additive à l'erreur quadratique. Par conséquent, on ne peut a-priori plus affirmer que la propriété  $(d_\lambda) \in w\ell^p$  est équivalente à  $\|v - v_N\|_{L^2} \leq CN^{-s}$ . Cette remarque soulève le problème de la *stabilité* des représentations non-linéaires. Nous évoquons ce problème dans la section suivante et nous l'étudions plus en détail dans le chapitre 4.

Pour l'heure, posons nous la question des propriétés de concentration au sens des espaces  $w\ell^p$  pour les représentations ENO-EA des images géométriques. On considère ici les coefficients  $d_\lambda$  obtenus après renormalisation dans  $L^2$  par le facteur  $2^{-|\lambda|}$ , suivant les remarques de la section précédente. D'après la formule (2.29), ces coefficients sont essentiellement équivalents aux normes  $L^2$  des erreurs de prédictions  $\|e_k^{j-1}\|_{L^2(C_{j-1,k})}$ . Considérons à présent une fonction  $v$  de classe  $W^{2,\infty}$  par morceaux de part et d'autre d'une union de courbes de discontinuités  $(\Gamma_i)_{i=1,\dots,M}$  qui sont aussi de classe  $C^2$ . On suppose plus précisément que

$$\sup_{\alpha_1+\alpha_2 \leq 2} \sup_{x \in [0,1]^2 - \cup_i \Gamma_i} |D^{\alpha} v(x)| \leq C. \quad (2.36)$$

Si l'on se place à l'échelle  $2^{-j}$ , nous pouvons faire la distinction entre 3 types de carrés  $C^{j,k}$  comme l'illustre la figure 2.34, sur lesquels on peut s'attendre à des comportements différents des coefficients dans la représentation ENO-EA :

1. Les carrés qui se situent dans les régions régulières, i.e. qui n'interceptent pas les contours  $\Gamma_i$ . Sur un carré de ce type, la prédiction ENO-EA aura tendance à utiliser un polynôme  $p$  calculé à partir d'un stencil situé dans la même région. L'ordre de grandeur de l'erreur de prédiction attendue est donc  $\mathcal{O}(2^{-2j})$  en utilisant la régularité  $W^{2,\infty}$  de  $v$  en dehors des contours et le fait que la prédiction est exacte pour les fonctions affines. En intégrant sur  $C_{j,k}$  cette estimation élevée au carré, on obtient par conséquent  $|d_\lambda| \leq \|e_k^j\|_{L^2(C_{j,k})} \sim \mathcal{O}(2^{-3j})$  pour les coefficients  $d_\lambda$  associés

à ce carré. Notons que si la fonction était encore plus régulière en dehors des contours, on pourrait obtenir jusqu'à  $\mathcal{O}(2^{-4j})$  puisque la prédiction est aussi exacte pour les polynômes quadratiques.

2. Les carrés qui interceptent un seul contour  $\Gamma_i$ . Sur un carré de ce type, la prédiction ENO-EA aura tendance à utiliser la reconstruction adaptée aux contours, i.e. une fonction polynomiale par morceaux  $q_k := p_k^+ \chi_{\tilde{D}^+} + p_k^- \chi_{\tilde{D}^-}$  de part et d'autre du contour  $\tilde{D}$  estimé à partir des données disponibles. Ce contour est exact dans le cas où  $\Gamma_i$  est rectiligne et  $v$  est constante de part et d'autre de  $\Gamma_i$  au voisinage de  $C_{j,k}$ . Si le contour est une courbe de classe  $C^2$ , on peut au mieux espérer que la droite  $\tilde{D}$  l'approche avec une distance de Hausdorff de l'ordre de  $C2^{-2j}$  où  $C$  est essentiellement la courbure de  $\Gamma_i$ . L'ordre de grandeur de l'erreur de prédiction attendue est donc  $\mathcal{O}(1)$  dans la région comprise entre  $\Gamma_i$  et  $\tilde{D}$  dont l'aire est d'ordre  $\mathcal{O}(2^{-3j})$ , et d'ordre  $\mathcal{O}(2^{-2j})$  sur le reste du carré. En intégrant cette estimation élevée au carré, on obtient par conséquent  $|d_\lambda| \leq \|e_k^j\|_{L^2(C_{j,k})} \sim \mathcal{O}(2^{-3j/2})$ .
3. Les carrés qui interceptent une jonction entre différents contours  $\Gamma_i$ . Sur un carré de ce type, la prédiction ENO-EA est a-priori impuissante à approcher la fonction avec précision, puisque cette situation n'est pas bien approchée par le modèle sous-jacent. L'ordre de grandeur de l'erreur de prédiction attendue est donc  $\mathcal{O}(1)$ , ce qui nous donne par conséquent  $|d_\lambda| \leq \|e_k^j\|_{L^2(C_{j,k})} \sim \mathcal{O}(2^{-j})$ .

Le nombre de carrés de type 1, 2 et 3 étant respectivement de l'ordre de  $\mathcal{O}(2^{2j})$ ,  $\mathcal{O}(2^j)$  et  $\mathcal{O}(1)$ , on s'attend donc à ce que le nombre de coefficients  $N_\eta$  tels que  $|d_\lambda| > \eta$  soit contrôlé par

$$\begin{aligned} N_\eta &= N_\eta^1 + N_\eta^2 + N_\eta^3 \\ &\leq C[\sum_{2^{-3j} > \eta} 2^{2j} + \sum_{2^{-3j/2} > \eta} 2^j + \sum_{2^{-j} > \eta} 1] \\ &\leq C\eta^{-2/3}. \end{aligned}$$

Ces remarques nous amènent à formuler la conjecture suivante :

*Pour une fonction  $v$  de classe  $W^{2,\infty}$  par morceaux de part et d'autre d'une union de courbes de discontinuités  $(\Gamma_i)_{i=1,\dots,M}$  qui sont aussi de classe  $C^2$ , les coefficients  $(d_\lambda)$  de la représentation ENO-EA appartiennent à l'espace  $w\ell^{2/3}$ .*

A ce jour, nous n'avons pas pu aboutir à une preuve satisfaisante de la validité de cette conjecture. La principale difficulté est de prouver l'estimation en  $\mathcal{O}(2^{3j/2})$  pour les carrés de type 2 car il faut pour cela démontrer d'une part

1	1	2	2	1	1	1	1
1	1	1	2	2	1	1	1
1	1	1	1	3	2	1	1
1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	2	2	1	1	2
1	1	2	2	1	1	1	1
1	2	2	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	1	1

FIG. 2.34 – Les trois types de carrés

que le mécanisme de détection identifie le passage du contour par ce carré et d'autre part que la droite  $\tilde{D}$  obtenue par le procédé de reconstruction fournit effectivement une bonne approximation locale du contour  $\Gamma_i$ .

Nous allons pour finir présenter un exemple numérique qui s'accorde avec cette conjecture. Pour cela, nous considérons l'image géométrique "graphe" et ses représentations multiéchelles BW et ENO-EA. Afin d'examiner les propriétés de concentration des coefficients  $(d_\lambda)$ , on considère la suite  $(d_n)_{n>0}$  obtenue par réarrangement décroissant des modules  $|d_\lambda|$ . Remarquons que la propriété  $(d_\lambda) \in w\ell^p$  peut s'exprimer par la décroissance de cette suite réarrangée suivant l'estimation

$$d_n \leq Cn^{-1/p}. \quad (2.37)$$

La figure 2.35 nous permet de comparer la décroissance de la suite  $(d_n)_{n \geq 0}$  pour les deux représentations. Dans ce cas,  $n$  va jusqu'à  $2^{18} = 262144$  qui est la taille de l'image, et on peut distinguer 3 régimes de décroissance :

1. Pour  $n \leq 2^8$ , les deux représentations se comportent essentiellement de la même manière. Un examen plus détaillé des coefficients retenus montre qu'il s'agit principalement des échelles les plus basses  $j \leq 4$ , ce qui permet d'expliquer la similarité des deux comportements : sur ces gammes d'échelles, les valeurs moyennes ne permettent pas de détecter les contours, car la fonction n'est pas suffisamment proche localement du

modèle simplifié. Par conséquent la prédiction ENO-EA n'apporte pas de précision supplémentaire par comparaison à la prédiction linéaire associée aux bases d'ondelettes.

2. Pour  $2^8 < n \leq 2^{13}$ , on constate une nette différence des vitesses de décroissance en faveur de la représentation ENO-EA. Dans ce régime, les détails considérés sont essentiellement concentrés aux voisinage des contours pour les échelles  $4 \leq j \leq 9$ , i.e. les carrés de type 2 et 3. Dans cette gamme d'échelle, la prédiction ENO-EA effectue un travail de reconstruction adaptée qui permet d'obtenir des détails d'ordre  $\mathcal{O}(2^{-3j/2})$  pour les carrés de type 2, alors que ceux-ci sont d'ordre  $\mathcal{O}(2^{-j})$  dans la représentation BW.
3. Pour  $2^{13} < n \leq 2^{18}$ , les suites décroissent plus rapidement et stagnent finalement au même niveau. Dans ce régime les contours ont été résolus et il s'agit essentiellement des coefficients dans les régions régulières pour les échelles  $4 \leq j \leq 9$ , i.e. les cubes de type 1. Pour ces coefficients, les deux représentations donnent une estimation en  $\mathcal{O}(2^{-4j})$  (car la fonction  $v$  est ici de classe  $C^\infty$  en dehors des contours et la prédiction est exacte pour les polynômes quadratiques).

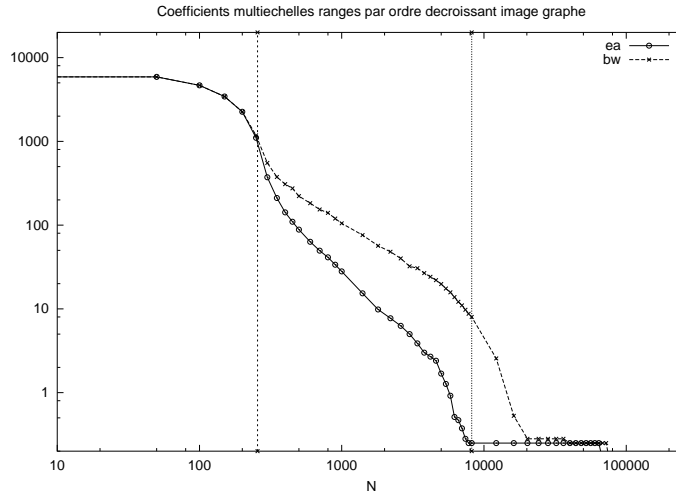


FIG. 2.35 – Les suites  $(d_n)_{n>0}$  pour BW et ENO-EA

Il faut bien noter que le dernier régime serait inexistant si l'on examinait la représentation complète de l' image géométrique sans la limitation au niveau maximal  $J = 9$  associé au pixel : on pourrait alors faire tendre  $n$  vers  $+\infty$  et la tendance dominante serait donnée par les coefficients associés aux



contours, c'est à dire le second régime qui se prolongerait alors indéfiniment. Afin de confronter notre conjecture à l'expérience numérique, il est donc logique de concentrer notre attention sur ce "régime principal" pour les images géométriques. La figure 2.36 illustre le fait que les pentes obtenues sont de l'ordre de  $-1$  pour BW et  $-3/2$  pour ENO-EA (une régression donne plus précisément les valeurs  $-1.1627$  et  $-1.4925$ ) ce qui correspond bien à la distinction annoncée entre  $w\ell^1$  et  $w\ell^{2/3}$ . Il est intéressant de noter que ce second régime correspond une région pertinente du point de vue de la compression bas-débit.

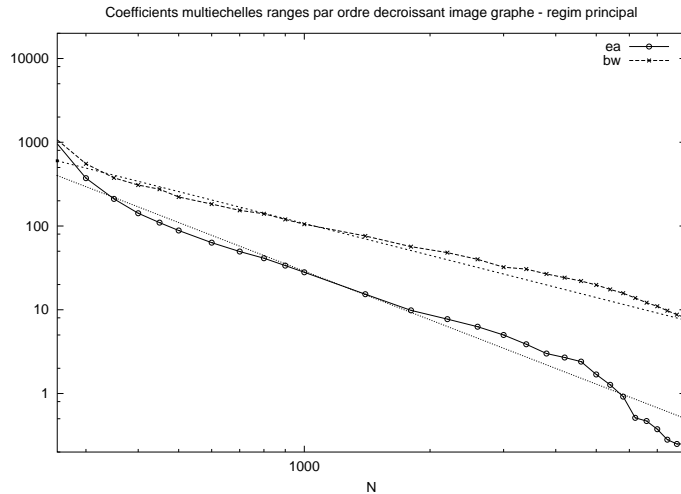


FIG. 2.36 – Les suites  $(d_n)_{n>0}$  dans le régime principal

En conclusion, la prédiction ENO-EA semble déboucher sur des représentations mathématiquement plus creuses que les représentations BW pour les images géométriques, puisque les coefficients les plus importants se concentrent essentiellement autour de points isolés qui correspondent aux jonctions entre les contours, plutôt que sur l'ensemble de ces contours. Nous illustrons cette propriété sur la figure 2.37 qui visualise les coefficients au dessus du seuil  $\eta = 0.019$  pour l'image "graphe".

### 2.3.3 Stabilité et contrôle d'erreur

Comme nous l'avons déjà remarqué, les propriétés de concentration des représentations multiéchelles non-linéaires ne peuvent plus être reliés de manière simple à la décroissance de l'erreur  $\varepsilon_N = \|v - v_N\|_{L^2}$  obtenue en conservant les  $N$  plus grands coefficients car on ne peut plus affirmer avec certitude que cette

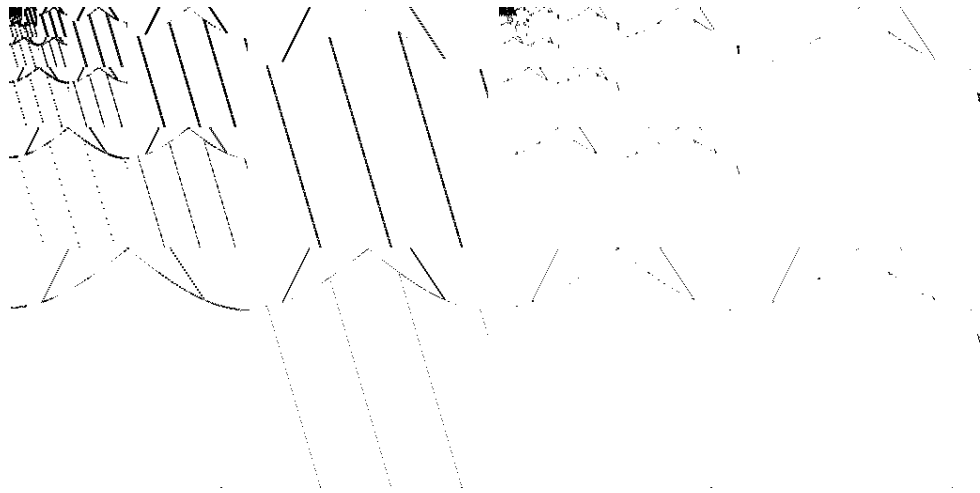


FIG. 2.37 – Coefficients  $|d_\lambda| > 0.019$  avec BW et ENO-EA

erreur est équivalente au résidu  $\rho_N = [\sum_{n>N} |d_n|^2]^{1/2}$ . Le problème soulevé ici est celui de la *stabilité* de la transformation  $\mathcal{M}^{-1}$ , qui dans le cas d'une représentation linéaire se résoud lorsque la base d'ondelette sous-jacente est une base de Riesz.

Nous pouvons tout d'abord appréhender empiriquement ces propriétés de stabilité en examinant le comportement du rapport  $\varepsilon_N/\rho_N$  en fonction de  $N$  pour différentes images. Les figures 2.38 et 2.39 nous montre que dans le cas des image “graphe” et “peppers”, ce rapport reste essentiellement constant avec la représentation ENO-EA, et que la constante est proche de celle qu'on obtient avec la représentation BW.

De façon plus systématique, il est nécessaire de se poser la question de l'effet causé par une perturbation  $d \rightarrow \tilde{d}$  des coefficients de  $d = \mathcal{M}v^J$  sur la reconstruction  $\tilde{v}^J = \mathcal{M}^{-1}\tilde{d}$  : peut-on contrôler  $\|v^J - \tilde{v}^J\|_a$  par  $\|d - \tilde{d}\|_b$  pour deux normes prescrites  $\|\cdot\|_a$  et  $\|\cdot\|_b$  ? Une difficulté spécifique aux représentations non-linéaires que nous avons décrit est que la perturbation peut avoir pour effet de modifier la procédure de prédiction elle-même puisque celle-ci dépend des données : on peut être ainsi amené à utiliser des stencils différents de ceux qui ont été initialement sélectionnés lors du calcul de la représentation non-perturbée, ou à considérer à tort un carré comme singulier ou non-singulier. En pratique, cette perturbation peut typiquement correspondre à un seuillage des coefficients avec un seuil  $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_{J-1})$  qui dépend du niveau d'échelle

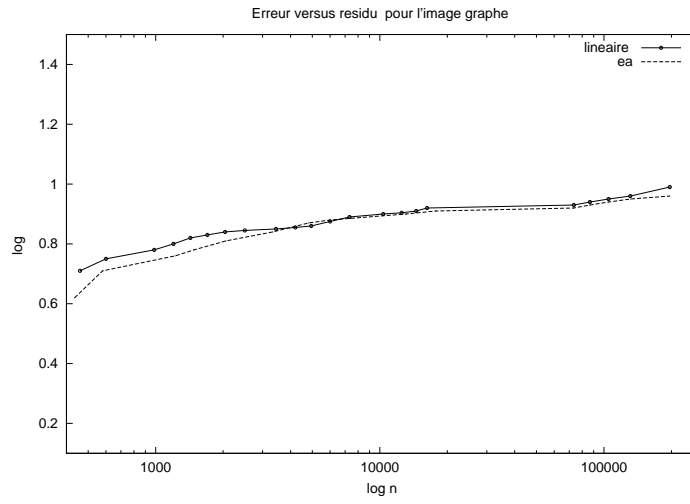


FIG. 2.38 – Rapport  $\varepsilon_N/\rho_N$  pour l'image “grape” avec BW et ENO-EA

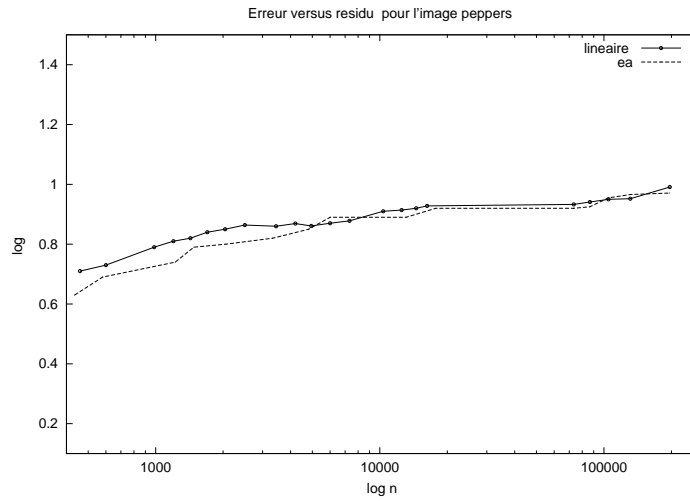


FIG. 2.39 – Rapport  $\varepsilon_N/\rho_N$  pour l'image “peppers” avec BW et ENO-EA

considéré, c'est à dire

$$\tilde{d}_\lambda = \begin{cases} d_\lambda & \text{si } |d_\lambda| > \eta_{|\lambda|} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Elle peut aussi correspondre à une *quantification* à la précision  $\eta$ , c'est à dire

$$\tilde{d}_\lambda = 2\eta_{|\lambda|} \left[ \frac{d_\lambda}{2\eta_{|\lambda|}} \right],$$

où  $[\cdot]$  représente la partie entière.

Nous apporterons des réponses générales aux questions de stabilité dans le chapitre 4, mais indiquons d'ores et déjà qu'une solution possible consiste à apporter une modification dans l'algorithme de calcul de la représentation multiéchelle. L'idée est ici d'intégrer directement les perturbations dans le calcul de la représentation afin de contrôler l'erreur de reconstruction : on calcule tout d'abord de manière itérative  $v^J \rightarrow v^{J-1} \rightarrow \dots \rightarrow v^0$ , et on effectue une première perturbation sur  $v^0$  qui nous donne  $\tilde{v}^0$ , puis pour  $j = 1, \dots, J$ ,

1. On définit l'erreur de prédiction modifiée  $e^j = v^j - P_j^{j-1}\tilde{v}^{j-1}$  et les détails  $d^{j-1} = B e^j$  ou  $B$  correspond à la projection sur les trois composantes indépendantes telle qu'on l'a définie dans (2.6).
2. On applique une perturbation à  $d^{j-1}$  qui nous donne  $\tilde{d}^{j-1}$  et on définit l'erreur perturbée  $\tilde{e}^j = 4B^T \tilde{d}^{j-1}$ . On pose alors  $\tilde{v}^j = P_j^{j-1}\tilde{v}^{j-1} + \tilde{e}^j$ .

Dans un tel algorithme, le processus de seuillage ou de quantification est entremêlé au calcul de la représentation perturbée  $\tilde{d} = (\tilde{v}^0, \tilde{d}^0, \dots, \tilde{d}^{J-1})$ , contrairement à l'approche standard qui consiste à calculer d'abord exactement  $d = \mathcal{M}v^J$  puis le processus de seuillage ou de quantification pour obtenir  $\tilde{d}$ . Notons que la donnée de  $\tilde{d}$  permet alors de reconstruire l'approximation  $\tilde{v}^J$  en itérant la relation

$$\tilde{v}^j = P_j^{j-1}\tilde{v}^{j-1} + 4B^T \tilde{d}^{j-1}. \quad (2.38)$$

Cet algorithme a été proposé dans le cadre unidimensionnel par Harten dans [46], mais il est aussi présent sous des formes légèrement différentes dans des travaux antérieurs sur le codage en sous-bande des images. Une variante dans le cadre de représentations non-linéaires basées sur le lifting scheme est aussi proposée dans [9] et [10].

L'intérêt principal de l'algorithme sous la version que nous proposons ci-dessus (qui s'inspire d'une version proposée dans [4] pour les représentations séparables) est qu'il permet de contrôler l'erreur de reconstruction  $\|v^J - \tilde{v}^J\|$  à partir des perturbations  $\|v^0 - \tilde{v}^0\|$  et  $\|d^j - \tilde{d}^j\|$ , avec de plus une estimation

exacte dans le cas de l'erreur  $\ell^2$ . Afin d'énoncer ces propriétés de contrôle d'erreur, on normalise ici à titre exceptionnel les normes  $\ell^p$  pour les vecteurs de détails et d'approximation avec une dépendance du niveau d'échelle  $j$  suivant

$$\|d^j\|_{\ell^p}^p := 2^{-2j} \sum_{|\lambda|=j} |d_\lambda|^p \quad \text{et} \quad \|v^j\|_{\ell^p}^p := 2^{-2j} \sum_{|\gamma|=j} |v_\gamma|^p. \quad (2.39)$$

Ces normes intègrent la notion de discrétisation à la résolution  $2^{-j}$  et correspondent ainsi à l'approximation des normes  $L^p$  par des sommes de Riemann. On prend la norme sup indépendante de  $j$  dans le cas  $p = \infty$ . Notons ici que nous sommes revenus à la définition initiale des coefficients  $d^{j-1} = B e^j$  qui correspond dans le cas de représentations linéaires à une normalisation des ondelettes dans  $L^\infty$ . On a alors le résultat suivant pour les normes  $\ell^p$  avec  $p = 1, 2$  et  $\infty$  qui sont les plus utilisées en pratique.

**Théorème 2.2.** *En appliquant l'algorithme de contrôle d'erreur sur l'image  $v^J$ , l'erreur  $v^J - \tilde{v}^J$  après reconstruction vérifie*

$$\begin{aligned} \|v^J - \tilde{v}^J\|_{\ell^\infty} &\leq \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^\infty} + 3 \sum_{j=0}^{J-1} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^\infty}, \\ \|v^J - \tilde{v}^J\|_{\ell^2}^2 &= \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^2}^2 + \sum_{j=0}^{J-1} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^2}^2, \\ \|v^J - \tilde{v}^J\|_{\ell^1} &\leq \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^1} + \sum_{j=0}^{J-1} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^1}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

**Démonstration :** On remarque que l'erreur de prédiction  $e^j = v^j - P_j^{j-1} \tilde{v}^{j-1}$  n'appartient pas de façon générale au noyau de  $P_{j-1}^j$  et peut se décomposer suivant deux parties orthogonales

$$e^j = 4B^T B e^j + (I - 4B^T B) e^j, \quad (2.41)$$

La première partie est la projection orthogonale de  $e^j$  sur le noyau de  $P_{j-1}^j$  et vaut

$$4B^T B e^j = 4B^T d^{j-1}. \quad (2.42)$$

La deuxième partie est la projection de  $e^j$  sur l'image de  $(P_{j-1}^j)^T$  et vaut

$$(I - 4B^T B) e^j = (P_{j-1}^j)^T P_{j-1}^j e^j = (P_{j-1}^j)^T (v^{j-1} - \tilde{v}^{j-1}). \quad (2.43)$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} v^j - \tilde{v}^j &= v^j - P_j^{j-1} \tilde{v}^{j-1} - 4B^T \tilde{d}^{j-1} = e^j - 4B^T \tilde{d}^{j-1} \\ &= (P_{j-1}^j)^T (v^{j-1} - \tilde{v}^{j-1}) + 4B^T (d^{j-1} - \tilde{d}^{j-1}). \end{aligned}$$

Sur chaque carré  $C_{j-1,n}$  cette décomposition est de la forme

$$v^j - \tilde{v}^j = (v_n^{j-1} - \tilde{v}_n^{j-1}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d_{n,a}^{j-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + d_{n,b}^{j-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d_{n,c}^{j-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Ceci nous donne immédiatement les estimations

$$\|v^j - \tilde{v}^j\|_{\ell^\infty} \leq \|v^{j-1} - \tilde{v}^{j-1}\|_{\ell^\infty} + 3\|d^{j-1} - \tilde{d}^{j-1}\|_{\ell^\infty}, \quad (2.45)$$

et

$$\|v^j - \tilde{v}^j\|_{\ell^1} \leq \|v^{j-1} - \tilde{v}^{j-1}\|_{\ell^1} + \|d^{j-1} - \tilde{d}^{j-1}\|_{\ell^1}. \quad (2.46)$$

Pour la norme  $\ell^2$ , l'orthogonalité entre elles des 4 tableaux  $2 \times 2$  ci-dessus permet d'obtenir

$$\|v^j - \tilde{v}^j\|_{\ell^2}^2 = \|v^{j-1} - \tilde{v}^{j-1}\|_{\ell^2}^2 + \|d^{j-1} - \tilde{d}^{j-1}\|_{\ell^2}^2. \quad (2.47)$$

En cumulant ces estimations, on obtient le résultat annoncé.  $\square$

**Remarque 2.4.** *Il est possible d'obtenir des estimations du même type pour toutes les normes  $\ell^p$  par des techniques directes ou en utilisant des arguments d'interpolation.*

Un corollaire immédiat concerne l'estimation d'erreur lorsque la perturbation maximale sur chaque détail dépend uniquement du niveau d'échelle, c'est à dire

$$|d_\lambda - \tilde{d}_\lambda| \leq \eta_{|\lambda|}, \quad (2.48)$$

pour un  $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_{J-1})$  donné. On a alors

$$\|v^0 - \tilde{v}^0\| \leq \eta_0 \text{ et } \|d^j - \tilde{d}^j\| \leq \eta_j \quad (2.49)$$

pour toutes les normes  $\ell^p$  normalisées suivant (2.39). Les estimations (2.40) entraînent par conséquent

$$\begin{aligned} \|v^J - \tilde{v}^J\|_{\ell^\infty} &\leq \eta_0 + 3 \sum_{j=0}^{J-1} \eta_j, \\ \|v^J - \tilde{v}^J\|_{\ell^2} &\leq [\eta_0^2 + \sum_{j=0}^{J-1} \eta_j^2]^{1/2}, \\ \|v^J - \tilde{v}^J\|_{\ell^1} &\leq \eta_0 + \sum_{j=0}^{J-1} \eta_j. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Au vu de ces estimations, une stratégie possible pour contrôler l'erreur par une tolérance  $\varepsilon$  prescrite est de choisir les  $\eta_j$  de façon à ce que la quantité qui majore la norme qui nous intéresse dans (2.50) soit inférieure à  $\varepsilon$ . A titre d'exemple, considérons la norme  $\ell^2$ , et le seuillage dépendant du niveau suivant

$$\eta_j = 2^j \eta_0 \quad (2.51)$$

qui correspond à la renormalisation des coefficients suivant  $d_\lambda \rightarrow 2^{-|\lambda|} d_\lambda$  qui est préconisée lorsqu'on cherche à approcher l'image dans  $L^2$  avec le plus petit

nombre possible de coefficients. On a dans ce cas d'après (2.50) l'estimation  $\|v^J - \tilde{v}^J\|_{\ell^2} \leq 2^J \eta_0$  ce qui suggère de prendre  $\eta_0 = 2^{-J} \varepsilon$ .

Une telle stratégie est trop pessimiste car il est possible que  $\|d^j - \tilde{d}^j\|$  soit largement surestimé par  $\eta_j$  : dans le cas des normes  $\ell^2$  ou  $\ell^1$  l'égalité  $\|d^j - \tilde{d}^j\| = \eta_j$  correspond à la situation où  $|d_\lambda - \tilde{d}_\lambda| = \eta_j$  pour *tous* les  $\lambda$  à l'échelle  $|\lambda| = j$ . Une stratégie plus raisonnable consiste donc à fixer  $\eta_0$  aussi large que possible de manière à ce que l'estimation  $\|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^2}^2 + \sum_{j=0}^{J-1} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^2}^2$  reste inférieure à  $\varepsilon$ .

A première vue, le théorème 2.2 semble apporter une réponse satisfaisante au problème de la stabilité puisque l'estimation  $\ell^2$  est exactement celle que l'on aurait en perturbant les coefficients  $d_\lambda$  dans une base d'ondelettes ortho-normale. Ce point de vue est cependant trompeur car les coefficients  $d_\lambda$  que l'on perturbe n'ont plus la même signification que dans la décomposition sans contrôle d'erreur  $d = \mathcal{M}v^J$  : dans l'algorithme du contrôle d'erreur, ces coefficients représentent l'erreur de prédiction modifiée  $e^j = v^j - P_j^{j-1} \tilde{v}^{j-1}$  qui est a-priori plus mauvaise que l'erreur de prédiction  $v^j - P_j^{j-1} v^{j-1}$  telle que nous l'avions définie au départ. Dans le cas des algorithmes de seuillage, ceci aura en général pour conséquence d'augmenter le nombre de coefficients au dessus du seuil, par rapport à la décomposition sans contrôle d'erreur  $d = \mathcal{M}v^J$ . Par comparaison avec l'algorithme standard de décomposition-seuillage-reconstruction, l'algorithme de contrôle d'erreur permet donc de maintenir  $\|v^J - \tilde{v}^J\|$  en dessous d'une tolérance prescrite mais le prix à payer est un nombre plus élevé de coefficients au dessus du seuil. Afin de comparer objectivement les deux algorithmes, nous allons tout simplement étudier la dépendance de l'erreur de reconstruction  $\varepsilon_N$  qu'ils produisent en fonction du nombre de coefficients  $N$  retenus. Les figures 2.40 et 2.41 nous révèlent que dans le cas des images "graphe" et "peppers" avec la représentation ENO-EA, les deux algorithmes ont essentiellement le même comportement. Ces résultats numériques sont par ailleurs confirmé du point de vue perceptuel.

En conclusion, on peut affirmer que l'algorithme de contrôle d'erreur n'apporte pas d'amélioration numériquement visible sur l'algorithme de seuillage direct dans la représentation ENO-EA qui possède de bonnes propriétés de stabilité empirique. Dans l'optique des applications à la compression d'image, nous sommes finalement amené à rejeter l'algorithme de contrôle d'erreur pour une raison plus fondamentale : la dépendance des détails ( $d_\lambda$ ) en fonction des perturbations effectuées aux échelles plus grossières rend a-priori impossible la mise au point de stratégies de *codage progressif* qui consistent à envoyer des trains de bits successifs permettant de préciser la valeur des coefficients et d'améliorer la reconstruction jusqu'à la précision désirée.

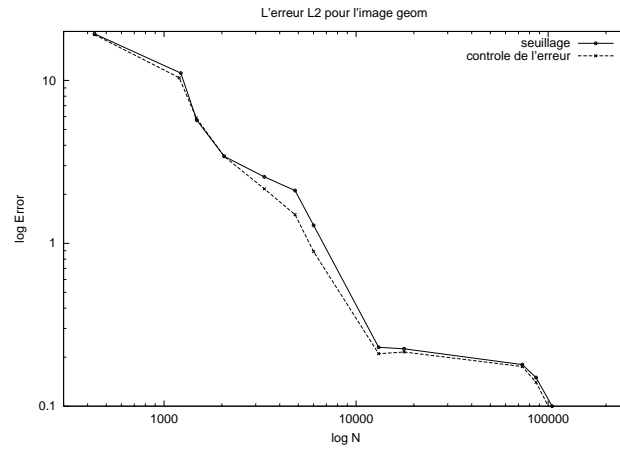


FIG. 2.40 – Erreur  $\varepsilon_N$  en fonction de  $N$  pour l'image “graphe” avec les algorithmes de seuillage direct et de contrôle d’erreur

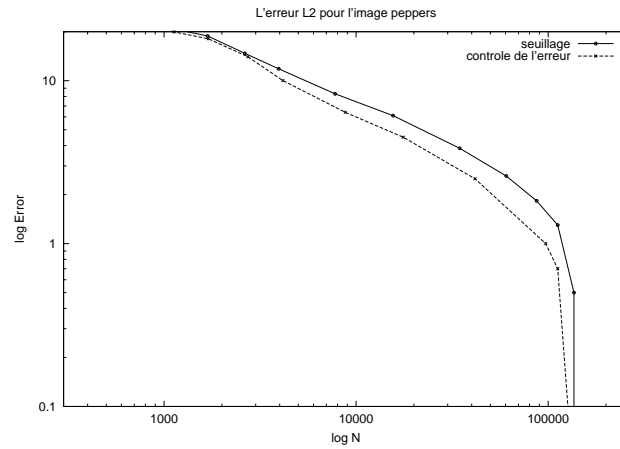


FIG. 2.41 – Erreur  $\varepsilon_N$  en fonction de  $N$  pour l'image “peppers” avec les algorithmes de seuillage direct et de contrôle d’erreur



# REGULARITE ET REPRESENTATIONS MULTIECHELLES NON-LINEAIRES

# Chapitre 3

## Régularité et représentations multiéchelles non-linéaires

### 3.1 Introduction

Les représentations multiéchelles non-linéaires que nous avons introduit dans les chapitres I et II ont pour but d'améliorer les propriétés de concentration des coefficients pour des fonctions régulières par morceaux, par rapport aux décompositions en ondelettes classiques. Il est d'autre part important de vérifier que ces nouvelles représentations possèdent au moins d'aussi bonnes propriétés de concentration que les décompositions en ondelettes pour des fonctions décrites par les espaces fonctionnels classiques (Hölder, Sobolev, Besov, BV). Notons par exemple que ceci semble ne pas être vrai dans le cas des ridgelets et curvelets, pour lesquelles la concentration est améliorée par rapport aux ondelettes pour des classes de fonctions régulières par morceaux, mais qui se comportent moins bien pour une fonction générale de l'espace BV.

Dans ce chapitre nous allons donc chercher à comprendre dans quelle mesure les représentations multiéchelles non-linéaires permettent la caractérisation des espaces fonctionnels au même titre que les bases d'ondelettes. Nous recherchons plus précisément des résultats du type

$$\|v\|_{B_{p,q}^s} \sim \|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-d/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}, \quad (3.1)$$

Le poids  $2^{(s-d/p)j}$  qui diffère du poids  $2^{(s+d/2-d/p)j}$  indiqué dans (1.41), correspond à la normalisation  $L^\infty$  des ondelettes sous-jacentes aux constructions basées sur les valeurs ponctuelles ou valeurs moyennes. De façon générale, nous

considérons ici des discrétisations définies par

$$v_k^j = \int v(x) 2^{dj} \tilde{\varphi}(2^j x - k) dx, \quad k \in \mathbb{Z}^d \quad (3.2)$$

où la fonction  $\tilde{\varphi}$  est une fonction d'échelle duale à support compact vérifiant une équation du type

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{|n_i| \leq P} \tilde{h}_n \tilde{\varphi}(2x - n), \quad (3.3)$$

avec  $n = (n_1, \dots, n_d)$ ,  $\sum_n h_n = 2^d$  et normalisée suivant  $\int \varphi = 1$ . Les cas des valeurs ponctuelles et moyennes correspondent respectivement à  $\tilde{\varphi} = \chi_{[0,1]^d}$  et  $\tilde{\varphi} = \delta_0$ , mais on peut aussi citer l'exemple des représentations non-linéaires utilisant des moyennes pondérées par la fonction chapeau  $\tilde{\varphi} = \max\{0, 1 - |x|\}$  qui a été étudié et utilisé dans [8]. L'équation d'échelle duale (3.3) permet d'obtenir l'opérateur de restriction qui s'écrit alors

$$v_k^{j-1} = 2^{-d} \sum_{|n_i| \leq P} \tilde{h}_n v_{2k+n}^j. \quad (3.4)$$

Nous supposons que les opérateurs de prédiction ont une forme générale donnée par la définition suivante

**Définition 3.1.** *Un opérateur de prédiction quasi-linéaire, local et borné est défini par*

$$\hat{v}_k^j = (P_j^{j-1} v^{j-1})_k := \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} a_{k,l} (v^{j-1})_l v_l^{j-1} \quad (3.5)$$

où les coefficients  $a_{k,l}$  vérifient pour toute suite  $w$

$$a_{k,l}(w) = 0 \quad \text{si } |k_i - 2l_i| > M, \quad (3.6)$$

pour un certain  $M$  fixé et

$$|a_{k,l}(w)| \leq C, \quad (3.7)$$

où  $C$  est une constante indépendante des données  $w$ .

On vérifie aisément que les prédictions de type ENO, WENO, ENO-SR et ENO-EA entre dans le cadre de cette définition. Notons ici que les coefficients  $a_{k,l}$  dépendent de la suite  $w$  mais pas de l'échelle  $j$  : on applique le même mécanisme de prédiction d'une échelle à la suivante. On remarque que les propriétés (3.6) et (3.7) entraînent l'existence d'une constante  $C$  indépendante de  $j$  telle que

$$\|P_j^{j-1} v^{j-1}\|_{\ell^p} \leq C \|v^{j-1}\|_{\ell^p} \quad (3.8)$$

pour toute suite  $v^{j-1}$  et pour tout  $p \in [1, \infty]$ , i.e. les opérateurs  $P_j^{j-1}$  sont uniformément bornés dans  $\ell^p$ .

Dans le cadre des décompositions en ondelettes, le mécanisme permettant d'aboutir aux équivalence de normes du type (3.1) est bien établi (voir chapitre III de [16]). Le théorème *direct*

$$\|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-d/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|f\|_{B_{p,q}^s}, \quad (3.9)$$

fait appel à un résultat d'approximation élémentaire du type inégalité de Jackson

$$\inf_{g \in V_j} \|v - g\|_{L^p} \lesssim 2^{-mj} |v|_{W^{m,p}}, \quad (3.10)$$

ou inégalité de Whitney

$$\inf_{g \in V_j} \|v - g\|_{L^p} \lesssim \omega_m(v, 2^{-j})_p, \quad (3.11)$$

pour un entier  $m > s$ , dont la validité exige que les polynômes de degré  $m - 1$  soient contenus dans les espaces  $V_j$ . Le théorème *inverse*

$$\|v\|_{B_{p,q}^s} \lesssim \|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-d/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}, \quad (3.12)$$

fait appel à une inégalité de type Bernstein

$$\|v\|_{W^{r,p}} \lesssim 2^{mr} \|v\|_{L^p} \text{ si } v \in V_j, \quad (3.13)$$

pour un  $r > s$ , dont la validité exige que les espace  $V_j$  aient une régularité suffisante pour donner un sens au membre de gauche, i.e.  $V_j \subset W^{r,p}$ .

La difficulté principale à laquelle nous sommes confrontés lorsque nous souhaitons généraliser ces résultats aux représentations multiéchelles non-linéaires est que *la définition des espaces  $V_j$  n'a plus de sens dans ce cadre* puisque la reconstruction de la fonction à partir de sa discrétisation n'est pas linéaire et ne peut pas s'exprimer comme une combinaison de fonction d'échelles  $\varphi_{j,k}$  bien définies. Nous allons néanmoins dégager les outils permettant d'aboutir à ces résultats dans ce cadre plus général. Le théorème direct (3.9) sera obtenu en utilisant les propriétés d'exactitude polynomiale de l'opérateur de prédiction qui gardent un sens dans le cadre non-linéaire. En ce qui concerne le théorème inverse (3.12), il nous faut en particulier comprendre la régularité des fonctions obtenues à partir de données discrétisées à une échelle  $j$  par l'application itérative des opérateurs  $P_{j+1}^j, P_{j+2}^{j+1}$ , etc. Un tel processus de raffinement itératif est bien connu en modélisation géométrique sous le nom d'algorithme de *sub-division*. L'étude de la convergence de ces algorithmes et de la régularité de

la fonction limite (si elle existe), ont fait l'objet de recherches actives mais tous les travaux existant se situent dans le cadre où l'algorithme est *linéaire*. Nous sommes ici amenés à analyser le comportement d'algorithmes de subdivision *non-linéaires* et nous introduisons les outils nécessaires pour généraliser les résultats établis dans le cas linéaire. Ces résultats permettent en outre d'établir le théorème inverse (3.12). Nous donnons systématiquement des applications de ces résultats dans le cas des représentations multiéchelles utilisant les prédictions ENO, WENO, ENO-SR et ENO-EA.

Par souci de simplicité, nous énoncerons nos résultats que dans le cas monodimensionnel. La généralisation au cas bidimensionnel est tout à fait similaire, et lorsque cela n'est pas le cas nous le signalerons. De même, nous ne prenons pas en compte ici les aspects liés aux bords du signal et nous considérons que la fonction  $v$  est définie sur tout  $\mathbb{R}$ .

## 3.2 Théorèmes directs

### 3.2.1 Exactitude polynomiale et différence finies

La définition suivante va jouer le rôle de la propriété  $\mathbb{P}_n \in V_j$ .

**Définition 3.2.** *L'opérateur de prédiction  $P_j^{j-1}$  est exact pour les polynômes de degré  $m$  si et seulement si pour tout  $v \in \mathbb{P}_m$ , on a*

$$\hat{v}^j = v^j, \quad (3.14)$$

ou de manière équivalente  $e^{j-1} = d^{j-1} = 0$ .

Une telle propriété peut aussi s'exprimer directement sur l'action de  $P_j^{j-1}$  sur les suites polynomiales, en remarquant que si  $v \in \mathbb{P}_m$ , on a

$$v_k^j = \int v(t) 2^{dj} \tilde{\varphi}(2^j t - k) dt = \tilde{v}(2^{-j} k), \quad (3.15)$$

avec  $\tilde{v} \in \mathbb{P}_m$  et  $v - \tilde{v} \in \mathbb{P}_{m-1}$ . Réciproquement toute suite polynomiale  $v_k^j = p(2^{-j} k)$  avec  $p \in \mathbb{P}_m$  est la suite des moyennes locales d'un polynôme  $\tilde{p} \in \mathbb{P}_m$  avec  $p - \tilde{p} \in \mathbb{P}_{m-1}$ . Il s'en suit que pour toute suite polynomiale  $v_k^j = p(2^{-j} k)$  avec  $p \in \mathbb{P}_m$ , on a  $\hat{v}^j = P_j^{j-1} P_{j-1}^j v^j = v^j$  et  $e^{j-1} = d^{j-1} = 0$ . Nous pouvons aussi remarquer que si  $v_k^{j-1} = p(k)$  avec  $p \in \mathbb{P}_m$ , on aura

$$\hat{v}_k^j = (P_j^{j-1} v^{j-1})_k = \int \tilde{p}(x) 2^{dj} \tilde{\varphi}(2^j x - k) dx = p(k/2) + q(k), \quad (3.16)$$

où  $q$  est un polynôme tel que  $\deg(q) < \deg(p)$ . Du point de vue discret, on voit donc que l'opérateur de prédiction ne laisse pas invariant les suites polynomiales mais les transforme en suites polynomiales du même degré en la variable  $k/2$  avec les mêmes termes de plus haut degré. Pour cette raison, on dira aussi que l'opérateur de prédiction *reproduit les polynômes jusqu'au degré  $m$* .

Nous allons montrer que si l'opérateur de prédiction est exact pour les polynômes de degré  $m - 1$ , on peut alors contrôler l'erreur de prédiction  $e^j$  par la suite  $\Delta^m v^j$  des différences finie d'ordre  $m$ .

**Proposition 3.1.** *Si l'opérateur de prédiction reproduit les polynômes jusqu'à l'ordre  $m - 1$ , alors on a*

$$\|e^j\|_{\ell^p} \lesssim \|\Delta^m v^j\|_{\ell^p}. \quad (3.17)$$

où la constante ne dépend que de  $P$ ,  $M$  et  $C$  dans (3.4), (3.6) et (3.7).

**Démonstration :** On a par définition,

$$e_k^j := v_k^j - \hat{v}_k^{j-1} = v_k^j - \sum_{|k-2l|\leq M} a_{k,l}(v^{j-1})v_l^{j-1}. \quad (3.18)$$

En combinant avec (3.4), on peut donc écrire l'erreur de prédiction sous la forme

$$e_k^j = \sum_{|k-n|\leq M+P} b_{k,n}(v^{j-1})v_n^j, \quad (3.19)$$

avec

$$b_{k,n}(w) = \delta(n - k) - \sum_{|k-2l|\leq M} \sum_{|n-2l|\leq P} a_{k,l}(w)\tilde{h}_{n-2l}. \quad (3.20)$$

Pour chaque  $k \in \mathbb{Z}$ , on définit le vecteur

$$b_k(w) = (b_{k,n}(w))_{n \in E_k}, \quad E_k := \{n ; |n - k| \leq M + P\}. \quad (3.21)$$

Par hypothèse, l'opérateur de prédiction est exact pour les polynômes de degré  $m - 1$ , donc  $e^j = 0$  si  $v_k^j = p(k)$  avec  $p \in \mathbb{P}_{m-1}$ . Ceci montre que  $b_k(w)$  est orthogonal aux vecteurs  $(l^q)_{l \in E_k}$  pour  $q = 0, \dots, m - 1$ , et peut s'écrire dans une base du complément orthogonal de l'espace engendré par ces vecteurs. Un choix possible pour une telle base est donnée par les vecteurs  $e_n$ ,  $n = k - M - P, \dots, k + M + P - m$  définis par  $e_n(l) = e_0(l - n)$  et

$$e_0(l) := \binom{m}{l} (-1)^{m-l}, \quad \text{si } l = 0, \dots, m,$$

$$e_0(l) := 0, \quad \text{si } l \notin \{0, \dots, m\},$$

En notant  $c_{k,n}(w)$  les coordonnées de  $b_k(w)$  dans cette base, on obtient ainsi

$$e_k^j = \sum_{|k-n| \leq M+P} b_{k,n}(v^{j-1})v_n^j = \sum_{n=k-M-P, \dots, k+M-P-m} c_{k,n}(v^{j-1})\Delta^m v_n^j. \quad (3.22)$$

On remarque enfin que d'après (3.7) les coefficients  $b_{k,n}(w)$  et  $c_{k,n}(w)$  sont bornés indépendamment de  $k$ ,  $n$  et  $w$ , ce qui permet d'obtenir (3.17) à partir de (3.22).  $\square$

### 3.2.2 Théorèmes directs pour les espaces de Besov

Afin d'aboutir au théorème direct (3.9), on souhaite tout d'abord remplacer  $\|e^j\|_{\ell^p}$  par  $\|d^{j-1}\|_{\ell^p}$  dans l'estimation du lemme 3.1. Dans le cadre des valeurs ponctuelles, on a de manière évidente

$$\|e^j\|_{\ell^p} = \|d^{j-1}\|_{\ell^p}, \quad (3.23)$$

puisque  $e_{2k+1}^j = d_k^{j-1}$  et  $e_{2k}^j = 0$ . De même, dans le cadre des valeurs moyennes, puisque  $d_k^{j-1} = e_{2k}^j = -e_{2k+1}^j$ , on a

$$\|e^j\|_{\ell^p} = 2^{1/p} \|d^{j-1}\|_{\ell^p}. \quad (3.24)$$

Dans un cadre plus général donné par (3.2), l'équivalence

$$\|e^j\|_{\ell^p} \sim \|d^{j-1}\|_{\ell^p}, \quad (3.25)$$

dépend de la définition des détails qui est liée au choix d'une base du noyau de l'opérateur de restriction (3.4). Avant de proposer une base qui permet de prouver cette équivalence, nous allons dès à présent établir un théorème direct pour les espaces de Besov.

**Théorème 3.1.** *Si l'opérateur de prédiction reproduit les polynômes jusqu'à l'ordre  $m-1$ , et si l'équivalence (3.25) est vérifiée, on a alors pour tout  $0 < s < m$ ,*

$$\|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|v\|_{B_{p,q}^s}, \quad (3.26)$$

en supposant que  $\tilde{\varphi} \in L^{p'}$  si  $p < \infty$  ou que  $\tilde{\varphi}$  une mesure de Radon à support compact si  $p = \infty$ .

**Démonstration :** En combinant (3.17) et (3.25), on peut écrire

$$\|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|\Delta^m v^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \quad (3.27)$$

En utilisant l'inégalité de Hölder entre  $L^p$  et  $L^{p'}$  et le fait que  $\tilde{\varphi}$  est à support compact, on obtient alors

$$\|v^0\|_{\ell^p} = \|(\langle v, \tilde{\varphi}(\cdot - k) \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^p} \lesssim \|(\|v\|_{L^p(\text{Supp}(\tilde{\varphi}(\cdot - k)))})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^p} \lesssim \|v\|_{L^p}, \quad (3.28)$$

et de même

$$\begin{aligned} \|\Delta^m v^j\|_{\ell^p} &= \|\Delta^m(\langle v, 2^j \tilde{\varphi}(2^j \cdot - k) \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^p} \\ &= \|(\langle \Delta_{2^{-j}}^m v, 2^j \tilde{\varphi}(2^j \cdot - k) \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^p} \\ &\lesssim 2^{j/p} \|(\|\Delta_{2^{-j}}^m v\|_{L^p(\text{Supp}(\tilde{\varphi}(2^j \cdot - k)))})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^p} \\ &\lesssim 2^{j/p} \|\Delta_{2^{-j}}^m v\|_{L^p} \leq \omega_m(v, 2^{-j})_{L^p}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons établi (3.26).  $\square$

Revenons à présent sur le choix d'une base du noyau de  $P_{j-1}^j$  permettant d'établir (3.25). Un candidat naturel pour une telle base est obtenu en prenant tous les translatés pairs  $(\tau_{2k}g)_{k \in \mathbb{Z}}$  de la suite à support compact  $g$  définie par

$$g_m := (-1)^m \tilde{h}^{1-m}. \quad (3.29)$$

Notons que les bases utilisées dans les cadres des valeurs ponctuelles et des valeurs moyennes correspondent à cette définition. On vérifie aisément que  $\tau_{2k}g$  est dans le noyau de  $P_{j-1}^j$ , mais ceci ne suffit pas en général pour conclure que le sous-espace  $E$  de  $\ell^p$  engendré par cette famille est le noyau tout entier et qu'il s'agit d'une base stable de cet espace au sens où l'on a l'équivalence (3.25) : on peut seulement affirmer, en utilisant le fait que la suite  $g$  est à support compact, que pour  $e = \sum_k d_k \tau_{2k}g \in E$  on a

$$\|e\|_{\ell^p} \lesssim \|d\|_{\ell^p}. \quad (3.30)$$

Afin d'aller plus loin, on peut faire appel à la théorie des bancs de filtres associés aux ondelettes biorthogonales [20], qui nous fournit un cadre naturel dans lequel cette famille constitue une base stable : on introduit le polynôme de Laurent

$$\tilde{H}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_n z^n, \quad (3.31)$$

et on suppose que  $\tilde{H}(z)$  et  $\tilde{H}(-z)$  n'ont pas de zéros commun mis à part éventuellement  $z = 0$ . Le théorème de Bezout assure alors l'existence d'une suite finie duale  $h_n$  dont le polynôme de Laurent associé  $H(z)$  vérifie

$$\tilde{H}(z) \overline{H(z)} + \tilde{H}(-z) \overline{H(-z)} = 2. \quad (3.32)$$



Sous de telles conditions, si l'on définit la suite duale  $\tilde{g}$  par

$$\tilde{g}_m := (-1)^m h^{1-m}, \quad (3.33)$$

les translatés  $(\tau_{2k}\tilde{g})_{k \in \mathbb{Z}}$  constituent un système dual au sens où

$$\langle \tau_{2k}g, \tau_{2l}\tilde{g} \rangle = \delta_{k,l}. \quad (3.34)$$

Nous pouvons à présent affirmer, en utilisant le fait que la suite  $\tilde{g}$  est à support fini, que pour  $e = \sum_k d_k \tau_{2k}g \in E$  on a

$$\|d\|_{\ell^p} = \|(\langle e, \tau_{2k}\tilde{g} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^p} \lesssim \|e\|_{\ell^p}. \quad (3.35)$$

Il ne reste plus qu'à montrer que  $E$  est bien le noyau de  $P_{j-1}^j$ . Pour cela, on remarque que (3.32) entraîne l'identité

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e, \tau_{2k}g \rangle \tau_{2k}\tilde{g} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e, \tau_{2k}h \rangle \tau_{2k}\tilde{h} = e, \quad (3.36)$$

pour toute suite  $e \in \ell^p$ . Si  $P_{j-1}^j e = 0$ , le deuxième terme est nul et  $e$  est donc bien un élément de  $E$ . En conclusion, nous avons établi le résultat suivant.

**Proposition 3.2.** *L'équivalence (3.25) est assurée avec le choix de base ci-dessus si la suite  $\tilde{h}_n$  est telle que  $\tilde{H}(z)$  et  $\tilde{H}(-z)$  n'ont pas de zéros commun.*

Notons que cette condition est vérifiée dans le cas où la fonction d'analyse est une fonction de type B-spline, i.e.  $\tilde{\varphi}(x) = (*)^N \chi_{[0,1]}$ , puisque l'on a dans ce cas  $\tilde{H}(z) = 2^{1-N}(1+z)^N$ .

### 3.2.3 Le cas multidimensionnel et l'espace BV

Les résultats que nous venons d'établir se généralisent aisément au cas multidimensionnel. En particulier, on obtient par le même type d'arguments une généralisation de la proposition 3.1, dans laquelle (3.17) est remplacée par

$$\|e^j\|_{\ell^p} \lesssim \sum_{|\alpha|=m} \|\Delta^\alpha v^j\|_{\ell^p}. \quad (3.37)$$

avec les notations usuelles  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$  et

$$\Delta^\alpha = \Delta_1^{\alpha_1} \dots \Delta_d^{\alpha_d}, \quad (\Delta_i v^j)_k := v_{k+e_i}^j - v_k^j, \quad (3.38)$$

où  $e_i$  est le vecteur unitaire dans la  $i$ -ème direction. Cette estimation est fondée sur une généralisation de (3.22) de la forme

$$e_k^j = \sum_{|k-n| \leq M+P} \sum_{|\alpha|=m} c_{\alpha,k,n} (v^{j-1}) \Delta^\alpha v_n^j. \quad (3.39)$$

On peut alors en déduire le théorème direct suivant.

**Théorème 3.2.** *Si l'opérateur de prédiction reproduit les polynômes  $x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$  pour  $|\alpha| \leq m-1$ , et si l'équivalence (3.25) est vérifiée, on a alors pour tout  $0 < s < m$ ,*

$$\|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-d/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|v\|_{B_{p,q}^s}, \quad (3.40)$$

en supposant que  $\tilde{\varphi} \in L^{p'}$  si  $p < \infty$  ou que  $\tilde{\varphi}$  est une mesure de Radon à support compact si  $p = \infty$ .

Le choix d'une base du noyau de  $P_{j-1}^j$  permettant d'assurer l'équivalence (3.25) est particulièrement simple dans le cas où la fonction  $\tilde{\varphi}$  est de la forme

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x_1) \cdots \tilde{\varphi}(x_d). \quad (3.41)$$

Dans ce cas, on fera appel à la théorie des bancs de filtres associées aux ondelettes biorthogonales séparables qui nous conduit à introduire la base tensorielle constituée par les suites

$$\tau_{2k} g^\varepsilon := \tau_{2k_1} g^{\varepsilon_1} \cdots \tau_{2k_d} g^{\varepsilon_d}, \quad (3.42)$$

pour  $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$  et  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{0, 1\}^d - (0, \dots, 0)$  avec la notation  $g^0 = h$  et  $g^1 = g$  où  $h$  et  $g$  sont les suites monodimensionnelles associées à la fonction  $\tilde{\varphi}$  dans la section précédente. La base duale est de même constituée par les suites

$$\tau_{2k} \tilde{g}^\varepsilon := \tau_{2k_1} \tilde{g}^{\varepsilon_1} \cdots \tau_{2k_d} \tilde{g}^{\varepsilon_d}, \quad (3.43)$$

avec  $\tilde{g}^0 = \tilde{h}$  et  $\tilde{g}^1 = \tilde{g}$ . On note en particulier que pour les représentations bidimensionnelles en valeurs moyennes que nous avons étudié dans le chapitre précédent, les relations (2.6) et (2.7) correspondent précisément à de tels choix pour les bases primales et duales avec

$$h_0 = h_1 = g_0 = -g_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \tilde{h}_0 = \tilde{h}_1 = \tilde{g}_0 = -\tilde{g}_1 = 1, \quad (3.44)$$

et  $h_n = g_n = \tilde{h}_n = \tilde{g}_n = 0$  sinon.

Dans le cadre bidimensionnel, il est intéressant de se pencher sur le cas de l'espace  $BV$  des fonctions à variation bornées, qui est souvent utilisé comme un modèle simplifié pour les images. Rappelons que pour les ondelettes classiques à support compact et normalisées dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , le résultat suivant a été démontré dans [23] et [19].

**Théorème 3.3.** *Si  $v \in BV$ , alors les coefficients d'ondelettes  $(d_\lambda)$  de  $v$  sont dans  $wl^1$ . Plus précisément, il existe une constante  $C$  telle que*

$$\#\{\lambda ; |d_\lambda| > \eta\} \leq C|f|_{BV}\eta^{-1}, \quad (3.45)$$

pour tout  $v \in BV$  et  $\eta > 0$ .

Dans le cas des représentations multiéchelles non-linéaires, nous renormalisons la suite des détails dans  $L^2$  suivant  $d = (2^{-j}d^j)_{j \in \mathbb{Z}}$  et nous cherchons à étendre (3.45) à la suite  $d = (d_\lambda)$ . Il faut ici invoquer une version légèrement plus forte du théorème 3.3 qui est démontrée dans [19] et qui affirme que l'on a une estimation similaire pour toute suite de coefficients

$$c_k^j = \langle v, h_{j,k} \rangle, \quad j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2 \quad (3.46)$$

où  $h_{j,k} := 2^j h(2^j \cdot -k)$  et  $h$  est une fonction quelconque de  $L^2$  à support compact et telle que  $\int h(x)dx = 0$ . On a alors

$$\#\{(j, k) ; |c_k^j| > \eta\} \leq C|f|_{BV}\eta^{-1}, \quad (3.47)$$

Cette estimation entraîne immédiatement (3.45) en prenant pour  $h$  les ondelettes qui génèrent la base duale  $(\tilde{\psi}_\lambda)$ . Dans le cas des représentations multiéchelles non-linéaires, remarquons tout d'abord que l'estimation (3.45) peut se ramener à une estimation similaire sur les erreurs de prédiction locale mesurées en norme  $L^2$ , i.e.

$$\#\{(j, k) ; 2^{-j}|e_k^j| > \eta\} \leq C|f|_{BV}\eta^{-1}, \quad (3.48)$$

dès lors que l'on dispose des bases (3.42) et (3.43) qui permettent de contrôler localement les détails par les erreurs de prédiction locales. De même, l'estimation (3.48) peut se ramener à une estimation similaire sur les différences finies

$$\#\{(j, k) ; 2^{-j}|\Delta_1 v_k^j| > \eta\} + \#\{(j, k) ; 2^{-j}|\Delta_2 v_k^j| > \eta\} \leq C|f|_{BV}\eta^{-1}, \quad (3.49)$$

où  $\Delta_1 v_k^j := v_{k+(1,0)}^j - v_k^j$  et  $\Delta_2 v_k^j := v_{k+(0,1)}^j - v_k^j$ , dès lors que l'opérateur de prédiction reproduit les constantes, puisque d'après (3.39) on a

$$e_k^j = \sum_{|n-k| \leq M+P} c_{1,k,n}(v^{j-1})\Delta_1 v_n^j + c_{2,k,n}(v^{j-1})\Delta_2 v_n^j. \quad (3.50)$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$2^{-j}\Delta_1 v_k^j = \langle v, f_{j,k} \rangle \text{ et } 2^{-j}\Delta_2 v_k^j = \langle v, g_{j,k} \rangle, \quad (3.51)$$

avec  $f := \tilde{\varphi}(\cdot + (1, 0)) - \tilde{\varphi}$  et  $g := \tilde{\varphi}(\cdot + (0, 1)) - \tilde{\varphi}$ , ce qui permet d'appliquer le résultat 3.47 avec  $h = f$  et  $h = g$  afin de conclure. En résumé, nous avons le résultat suivant pour l'espace  $BV(\mathbb{R}^2)$ .

**Théorème 3.4.** *Si l'opérateur de prédiction reproduit les constantes, et si les bases (3.42) et (3.43) sont bien définies, la suite  $d = (2^{-j}d^j)_{j \in \mathbb{Z}} = (d_\lambda)$  appartient à  $w\ell^1$  pour toute fonction de  $BV(\mathbb{R}^2)$  et vérifie l'estimation (3.45)*

**Remarque 3.1.** *A partir de l'injection  $BV \subset B_{1,\infty}^1$  et du théorème 3.2, on peut aussi établir plus simplement l'estimation*

$$\|v^0\|_{\ell^1} + \|(2^{-j}\|d^j\|_{\ell^1})_{j \geq 0}\|_{\ell^\infty} \lesssim \|v\|_{BV}, \quad (3.52)$$

qui signifie que  $d = (2^{-j}d^j)_{j \geq 0}$  appartient à  $\ell^\infty(\ell^1)$ .

### 3.2.4 Application à ENO, WENO, ENO-SR et ENO-EA

Les résultats que nous venons d'établir peuvent s'appliquer de façon directe aux représentations ENO, WENO, ENO-SR et ENO-EA que nous avons introduit dans les deux premiers chapitres. On remarque tout d'abord que les opérateurs de prédiction associés à ces représentations vérifient toutes les propriétés de la définition 3.1. La propriété de localité (3.6) découle directement du fait que la prédiction repose sur des opérations d'interpolation locale (la taille  $M$  du stencil de prédiction étant liée au degré des polynômes utilisés), et la propriété de borne (3.7) découle du fait que ces opérations d'interpolation sont bornées en fonction des données (au sens où les polynômes utilisés pour la prédiction dans un intervalle ou un carré sont bornés dans cette région, à une constante multiplicative près, par le supremum des données utilisées pour construire ces polynômes).

Pour chacune de ces représentations, l'opérateur de prédiction reproduit les polynômes de degré  $m$  où  $m$  est le degré des polynômes utilisés dans la reconstruction (nous avons fixé  $m = 2$  dans la construction ENO-EA introduite dans le chapitre précédent). Nous pouvons par conséquent appliquer le théorème 3.2 à ces représentations, mais il faut au préalable distinguer comme un cas particulier le cadre des discrétisations en valeurs ponctuelles : la fonction  $\tilde{\varphi}$  utilisée est alors une masse de Dirac, et le théorème 3.2 ne s'applique que pour  $p = \infty$ . On obtient ainsi pour les représentations ENO, WENO,

ENO-SR en dimension  $d$  obtenues par produit tensoriel des représentations en valeurs ponctuelles monodimensionnelles, l'estimation

$$\|v^0\|_{\ell^\infty} + \|(2^{sj} \|d^j\|_{\ell^\infty})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|v\|_{B_{\infty,q}^s}, \quad (3.53)$$

pour  $0 < s < m + 1$ , et en particulier

$$\sup_{\lambda} 2^{(s-d/p)|\lambda|} |d_\lambda| \lesssim \|v\|_{C^s}, \quad (3.54)$$

pour l'espace de Hölder  $C^s = B_{\infty,\infty}^s$ . Pour les discrétisations en valeurs moyennes, la fonction  $\tilde{\varphi} = \chi_{[0,1]^d}$  étant intégrable, on peut appliquer le théorème 3.2 pour tout  $p \geq 1$ . On obtient ainsi pour les représentations ENO, WENO, ENO-SR en dimension  $d$  obtenues par produit tensoriel des représentations en valeurs moyennes monodimensionnelles, ainsi que pour les représentations ENO non-séparable et ENO-EA, l'estimation

$$\|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-d/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|v\|_{B_{p,q}^s}, \quad (3.55)$$

pour  $0 < s < m + 1$  (avec  $d = 2$  et  $m = 2$  dans le cas ENO-EA). On a de même l'estimation (3.45) pour l'espace  $BV$ .

## 3.3 Théorèmes inverses

### 3.3.1 L'algorithme de subdivision

En vue d'une généralisation du théorème inverse (3.12) aux représentations non-linéaires, il est nécessaire de se pencher sur le processus de reconstruction d'une fonction  $v$  à partir de ses coefficients  $v_k^0$  et  $d_k^j$ . Dans le cas des ondelettes classiques, cette reconstruction s'exprime simplement en écrivant

$$v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k^0 \varphi_{0,k} + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_{j,k}, \quad (3.56)$$

et il est alors possible d'analyser la convergence de cette série et la régularité de la fonction limite  $v$  en fonction des propriétés de décroissance des coefficients. Une telle analyse fait naturellement intervenir la régularité des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  : l'inégalité (3.12) pour l'espace  $B_{p,q}^s$  n'a aucune chance d'être vérifiée si ces fonctions n'appartiennent pas au moins à cet espace. C'est aussi la régularité de  $\varphi$  qui intervient dans la preuve de l'inégalité de Bernstein (3.13)

Dans le cas des représentations non-linéaires, les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  et les espaces  $V_j$  n'ont plus de sens, mais il est néanmoins possible d'envisager le

processus de reconstruction de la fonctions  $v$  à partir de ses coefficients au travers de l'application itérative de la relation

$$v^j = P_j^{j-1}v^{j-1} + e^j = P_j^{j-1}v^{j-1} + Ed^{j-1}, \quad (3.57)$$

où  $E$  est l'opérateur qui associe  $e^j$  à  $d^{j-1}$ . Puisque  $v^j$  représente un échantillonnage de la fonction  $v$  à l'échelle  $2^{-j}$ , l'examen du comportement de  $v^j$  dans la limite  $j \rightarrow +\infty$  doit permettre d'appréhender les propriétés de régularité de  $v$ .

Afin de mieux comprendre une telle analyse, nous allons dans un premier temps nous pencher sur un problème légèrement plus simple, à savoir le comportement de l'itération de (3.57) lorsque les détails  $d^j$  sont tous nuls, i.e.

$$v^j = P_j^{j-1}v^{j-1}. \quad (3.58)$$

L'itération (3.58) consiste à partir de données  $v^0$  discrétisées à l'échelle la plus grossière, et à raffiner progressivement ces données par l'application de l'opérateur de prédiction sans ajout d'information supplémentaire. Un tel processus de raffinement itératif est bien connu en modélisation géométrique sous le nom d'algorithme ou schéma de *subdivision*. Les exemples les plus classiques de courbes et surfaces obtenues comme limites de tels algorithmes sont les splines et les courbes et surfaces de Bezier. Nous adopterons dans la suite de ce chapitre (ainsi que dans le chapitre suivant) la notation utilisée dans la littérature concernant ces algorithmes, en écrivant (3.58) sous la forme

$$v^j = Sv^{j-1} = \dots = S^j v^0. \quad (3.59)$$

L'opérateur de subdivision  $S$  représente à chaque échelle l'opérateur de prédiction  $P_{j-1}^j$ . Notons que cette notation simplifiée est justifiée car dans tous les exemples qui nous intéressent (BW, ENO, WENO, ENO-SR, ENO-EA) l'opération de prédiction est indépendante de l'échelle considérée.

La manière la plus naturelle d'envisager la convergence d'un schéma de subdivision vers une fonction limite est donnée par la définition suivante.

**Définition 3.3.** *Un schéma de subdivision est uniformément convergent si, pour chaque donnée initiale  $v^0 \in \ell^\infty$ , il existe une fonction continue  $v \in C(\mathbb{R})$  telle que*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}} |v_k^j - f(2^{-j}k)| = 0, \quad (3.60)$$

*et  $v$  est non triviale, au moins pour une donnée initiale  $v^0$ .*

Afin d'étudier la convergence des schémas de subdivision en un sens plus faible et vers des fonctions non-nécessairement continues, on associe aux données

$v^j$  une fonction  $v_j$  obtenue par interpolation affine des valeurs  $v_k^j$  associées aux points  $2^{-j}k$ , i.e.

$$v_j(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k^j \varphi(2^j x - k), \quad (3.61)$$

où  $\varphi(x) := \max\{1 - |x|, 0\}$  est la fonction chapeau. Il est évident, que la convergence uniforme du schéma de subdivision est équivalente à

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|v_j - v\|_{L^\infty} = 0. \quad (3.62)$$

Ceci nous conduit de façon naturelle à la définition suivante

**Définition 3.4.** *Un schéma de subdivision est  $L^p$ -convergent si, pour chaque donnée initiale  $v^0 \in \ell^p$ , il existe une fonction continue  $v \in L^p(\mathbb{R})$  telle que*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|v_j - v\|_{L^p} = 0, \quad (3.63)$$

et  $v$  est non triviale, au moins pour une donnée initiale  $v^0$ .

De façon générale, on utilisera parfois la notation

$$v = S^\infty v^0, \quad (3.64)$$

pour désigner la limite du schéma pour la donnée initiale  $v^0$ .

Nous renvoyons à [13] et [39] pour des études générales, ainsi qu'à [31], [32] et [45] pour des résultats plus spécialisés, sur la convergence des schémas de subdivision et de la régularité de la fonction limite lorsqu'elle existe. Le point commun à ces travaux est qu'ils se situent dans le cadre où l'opérateur  $S$  est *linéaire*.

Nous sommes ici amenés à analyser des schémas de subdivision où l'opérateur  $S$  est *non-linéaire*. Au vu de la forme particulière de l'opérateur de prédiction donnée par la définition 3.1, les opérateurs de subdivision qui nous intéressent ici ont la forme indiquée par la définition suivante.

**Définition 3.5.** *Une règle de subdivision quasi-linéaire est une fonction qui associe à chaque  $w \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$  un opérateur linéaire  $S(w)$  défini par*

$$(S(w)u)_k := \sum_l a_{k,l}(w) u_l, \quad (3.65)$$

où les coefficients  $a_{k,l}(w)$  sont nuls si  $|k - 2l| > M$  et uniformément bornés par une constante  $C$ , avec  $M$  et  $C$  indépendants des données  $w$ . On définit le

schéma de subdivision associé à  $S$  par l'action recursive de l'opérateur quasi-linéaire

$$Su := S(u)u \quad (3.66)$$

sur une donnée initiale  $v^0$ , suivant la relation

$$v^j := Sv^{j-1} = S(v^{j-1})v^{j-1} = \dots = S(v^{j-1}) \dots S(v^0)v^0 = S^j v^0. \quad (3.67)$$

On remarque que les opérateurs  $(S(w))_{w \in \ell^\infty}$  obtenus pour une règle  $S$  donnée sont bornés dans  $\ell^p$  pour tout  $p \geq 1$ , et que  $\|S(w)\|_{\ell^p}$  est indépendant de  $w$ .

Pour les schémas linéaires de subdivision, les coefficients  $a_{k,l}$  ne dépendent pas des données  $w$ , ce qui signifie que  $S$  est un opérateur fixé. Pour les schémas linéaires et *uniformes*, c'est à dire tels que  $S$  vérifie la relation d'invariance par translation

$$S\tau_k u = \tau_{2k} S u, \quad (3.68)$$

ces coefficients ont la forme  $a_{k,l} = a_{k-2l}$ . Dans ce cas, l'étude de la convergence et de la régularité de la fonction limite peut se ramener à considérer la fonction limite  $\varphi$  obtenue à partir des données initiale de Dirac  $v_k^0 = \delta_{0,k}$ , puisque pour des données  $v^0$  plus générales la fonction limite  $v$  sera alors donnée par

$$v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k^0 \varphi(\cdot - k). \quad (3.69)$$

La fonction  $\varphi$  vérifie alors l'équation d'échelle

$$\varphi = \sum_l a_n \varphi(2 \cdot -n), \quad (3.70)$$

et permet ainsi de définir des espaces emboîtés  $V_j$ . Réciproquement, il est bien connu que les fonctions d'échelles solutions de (3.70) peuvent être obtenues comme limites de schémas de subdivision avec données initiales de Dirac.

Dans le cas des schémas non-linéaires qui nous intéressent, il est bien entendu possible d'examiner de telles fonctions limites associées aux données de Dirac. A titre indicatif nous les présentons sur les figures 3.1 et 3.2 pour l'interpolation cubique des valeurs ponctuelles et la prédiction quadratique des valeurs moyennes avec les techniques BW (stencil centré), ENO et ENO-SR (on reconnaitra dans les cas linéaire BW la fonction d'échelle de Deslaurier-Dubuc et une fonction d'échelle duale de la fonction créneau). Nous constatons ainsi que l'itération des prédictions ENO et ENO-SR converge vers des fonctions bornées et parfois régulières pour ces données particulières. Cependant, ceci



ne nous permet pas d'appréhender clairement la convergence et les propriétés des fonctions limites pour des données plus générales puisque (3.69) n'est plus valide. Nous allons introduire les outils et les résultats nécessaires à une telle étude dans la section suivante.

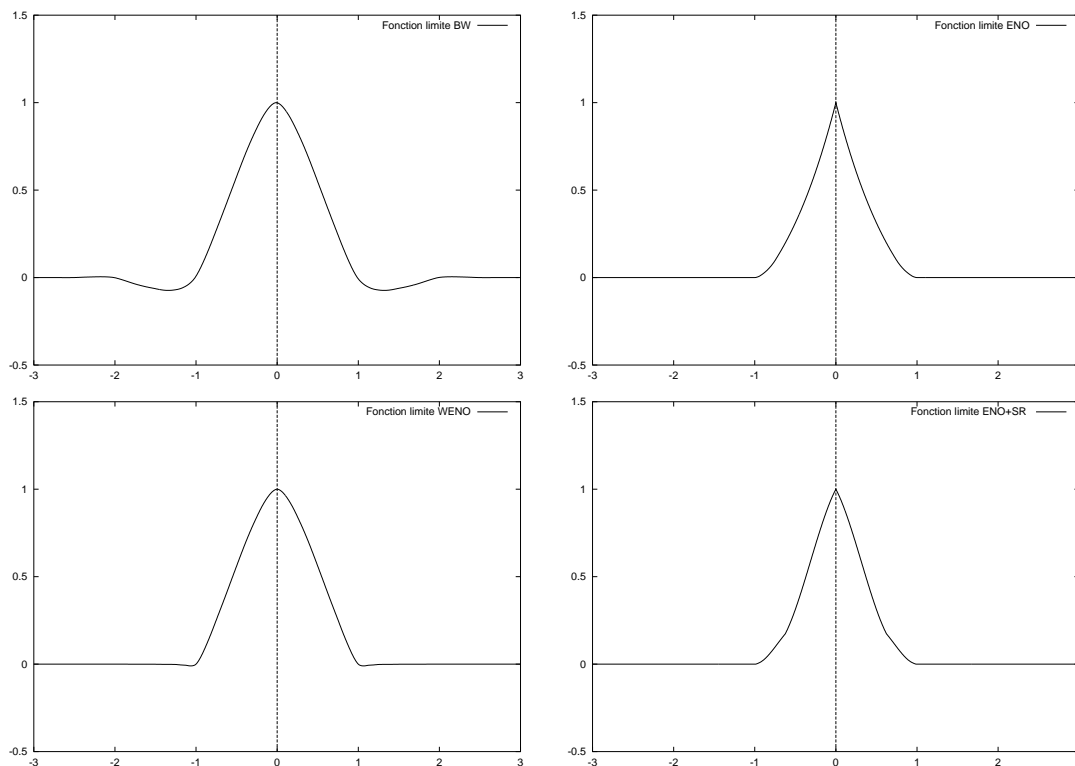


FIG. 3.1 – Fonctions limites avec données des Dirac en utilisant l'interpolation cubique des valeurs ponctuelles (a) BW (b) ENO (c) WENO (d) ENO-SR

### 3.3.2 Régularité de la fonction limite

L'étude de la convergence des schémas de subdivision non-linéaires et de la régularité des fonctions limites va se faire en examinant le comportement des différences finies  $\Delta^n v^j$  lorsque  $j$  tend vers  $+\infty$ . Intuitivement, ces différences doivent tendre rapidement vers 0 si le schéma converge une fonction limite régulière. Nous allons voir dans cette section que l'on a une réciproque à cette intuition, au sens où la vitesse de convergence vers 0 de  $\Delta^n v^j$  lorsque  $j$  tend vers  $+\infty$  permet de déduire la régularité de la fonction limite  $v$ . L'étude

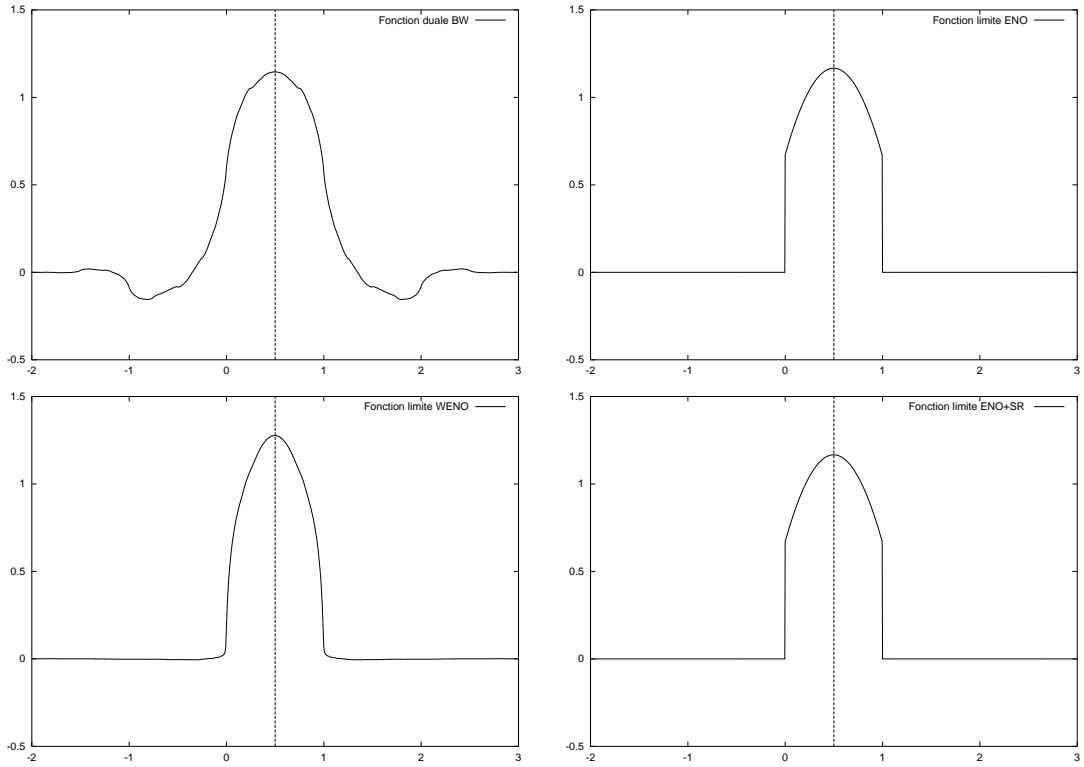


FIG. 3.2 – Fonctions limites avec données des Dirac en utilisant la prédiction quadratique des valeurs moyennes (a) BW (b) ENO (c) WENO (d) ENO-SR

de cette convergence est rendue possible par un résultat important que nous démontrons ci-dessous et qui affirme que l'on peut définir des schémas de subdivision agissant directement sur les différences finies d'ordre  $1, 2, \dots, m$  où  $m - 1$  est le degré de reproduction polynomiale de l'opérateur de subdivision.

Par analogie avec les notions de reproduction polynomiale pour les opérateurs de prédiction, nous dirons que la règle de subdivision quasi-linéaire  $S$  reproduit les polynômes de degré  $m$  si pour tout  $w \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$  et tout  $p \in \Pi_m$ , on peut écrire

$$(S(w)u)_k = p(k/2) + q(k), \quad (3.71)$$

où la suite  $u$  est définie par  $u_k = p(k)$  et  $\deg(q) < \deg(p)$ . Notons ici que l'on exige cette propriété *quelquesoit la donnée  $w$* , et non pas uniquement pour  $w = u$  comme le sous-entendait la définition 3.2. On vérifie aisément que cette condition plus restrictive est aussi vérifiée dans tous les cas qui nous intéressent (ENO, WENO, ENO-SR, ENO-EA) avec  $m$  égal au degré des polynômes utilisés dans la reconstruction.

**Proposition 3.3.** *Soit  $S$  une règle de subdivision quasi-linéaire, qui reproduit les polynômes jusqu'au degré  $m - 1$ . Il existe alors une règle de subdivision quasi-linéaire  $S_m$  telle que*

$$\Delta^m S(w)u := S_m(w)\Delta^m u, \quad (3.72)$$

pour tous  $u, w \in \ell^\infty$ .

**Démonstration :** En utilisant (3.65), on obtient

$$(\Delta^m S(w)u)_k = \sum_{q=0}^m (-1)^q \binom{m}{q} \sum_{l \text{ t.q. } |k+q-2l| \leq M} a_{k+q,l}(w)u_l. \quad (3.73)$$

On peut donc écrire  $(\Delta^m S(w)u)_k$  sous la forme d'une combinaison linéaire des  $u_l$ ,

$$(\Delta^m S(w)u)_k = \sum_l b_{k,l}(w)u_l, \quad (3.74)$$

où  $b_{k,l}(w) := \sum_{q=0}^m (-1)^q \binom{m}{q} a_{k+q,l}(w)$ . On note que les termes  $b_{k,l}(w)$  sont nuls si  $2l - k < -M$  ou si  $2l - k > M + n$ . On note aussi que ces termes sont uniformément bornés indépendamment de  $w$ . Pour chaque  $k$  fixé, nous avons donc un vecteur de dimension finie

$$b_k(w) = (b_{k,l}(w))_{l \in E_k}, \quad E_k := \{l ; -M \leq 2l - k \leq M + m\}. \quad (3.75)$$

D'autre part, puisque la règle de subdivision reproduit les polynômes jusqu'à degré  $m - 1$ , on a

$$\sum_{|k-2l|\leq M} a_{k,l}(w)l^q = p_q(k), \quad q = 0, \dots, n-1, \quad (3.76)$$

avec  $p_q \in \Pi_q$ . En appliquant l'opérateur des différences finies d'ordre  $m$  dans cette identité et on en déduit que

$$\sum_l b_{k,l}(w)l^q = 0, \quad q = 0, \dots, n-1. \quad (3.77)$$

On procède ensuite de la même manière que dans la preuve de la proposition (3.1), en remarquant que pour tout  $k$ , le vecteur  $b_k(w)$  est orthogonal aux vecteurs  $(l^q)_{l \in E_k}$ , pour  $q = 0, \dots, m-1$ , et peut s'écrire dans une base du complément orthogonal de l'espace engendré par ces vecteurs. Un choix possible pour une telle base est donnée par les vecteurs  $e_n$ , pour  $n$  tel que  $\{n, \dots, n+m\} \in E_k$  définis par  $e_n(l) = e_0(l-n)$  et

$$\begin{aligned} e_0(l) &:= \binom{m}{l} (-1)^{m-l}, \quad \text{si } l = 0, \dots, m, \\ e_0(l) &:= 0, \quad \text{si } l \notin \{0, \dots, m\}, \end{aligned}$$

En notant  $c_{k,n}(w)$  les coordonnées de  $b_k(w)$  dans cette base, on obtient ainsi

$$(\Delta^m S(w)u)_k = \sum_l c_{k,l}(w) \Delta^m u_l, \quad (3.78)$$

qui définit bien une règle de subdivision quasi-linéaire  $S_m$ . On note ici que les  $c_{k,l}$  sont par construction uniformément bornés et nuls si  $2l - k < -M$  ou si  $2(l+m) - k > M + m$  donc en particulier si  $|2k - l| > M$ . Ceci nous montre que les stencils utilisés dans l'application de  $S_m$  sont plus petits que ceux qui sont utilisés dans l'application de  $S$ .  $\square$

**Remarque 3.2.** *Une conséquence immédiate de la proposition ci-dessus est que pour tout  $n = 1, \dots, m-1$ , il existe aussi des règles de subdivision quasi-linéaires  $S_n$  telle que*

$$\Delta^n S(w)u := S_n(w) \Delta^n u, \quad (3.79)$$

pour tous  $u, w \in \ell^\infty$ . En effet si la règle de subdivision reproduit les polynômes jusqu'au degré  $m - 1$ , elle reproduit a-fortiori les polynômes jusqu'à un degré inférieur.

Les schémas de subdivision associés aux différences finies vont nous permettre d'analyser la vitesse de convergence vers 0 de ces différences dans une norme discrète prescrite quand  $j$  tend vers  $+\infty$ . Par exemple, on a clairement

$$\|S_m(w)\|_{\ell^\infty} = \sup_k \sum_l |c_{k,l}(w)| \quad (3.80)$$

où les  $c_{k,l}$  sont les coefficients associés à l'opérateur  $S_m$ . Par conséquent, en notant

$$\rho := \sup_{w \in \ell^\infty} \sup_k \sum_l |c_{k,l}(w)|, \quad (3.81)$$

il est clair que l'on aura

$$\|\Delta^m v^j\|_{\ell^\infty} \leq \rho^j \|\Delta^m v^0\|_{\ell^\infty}, \quad (3.82)$$

et une convergence vers 0 si  $\rho < 1$ . On peut de même calculer la norme

$$\|S_m(w)\|_{\ell^1} = \sup_l \sum_k |c_{k,l}(w)|, \quad (3.83)$$

et les normes  $\ell^p$  par interpolation de (3.83) et (3.81) ou par des techniques plus fines, et avoir ainsi accès au comportement de  $\|\Delta^m v^j\|_{\ell^p}$  quand  $j \rightarrow +\infty$ . En pratique, ce comportement est souvent sur-estimé par cette approche qui ne tient pas compte de compensations possibles lors des applications successives de  $S_m$ . Afin d'obtenir des estimations plus fines, il est naturel d'introduire pour les règles de subdivision quasi-linéaires une notion analogue à celle du rayon spectral pour un opérateur.

**Définition 3.6.** *Le rayon spectral conjoint dans  $\ell^p$  d'une règle de subdivision quasi-linéaire  $S$  est défini par*

$$\rho_p(S) := \limsup_{j \rightarrow \infty} \sup_{(w^0, \dots, w^{j-1}) \in (\ell^\infty(\mathbb{Z}))^j} \|S(w^{j-1}) \cdots S(w^0)\|_{\ell^p}^{1/j}. \quad (3.84)$$

Notons bien que dans cette définition, le sup est pris sur tous les  $(w^0, \dots, w^{j-1})$  dans  $(\ell^\infty(\mathbb{Z}))^j$  sans que l'on ait  $w^j = S w^{j-1}$ . Autrement dit,  $\rho_p(S)$  est l'infimum des  $\rho > 0$  tels que pour tout  $j > 0$  on ait l'estimation

$$\|S(w^{j-1}) \cdots S(w^0)u\|_{\ell^p} \leq C \rho^j \|u\|_{\ell^p} \quad (3.85)$$

où la constante  $C$  est indépendante de  $u \in \ell^p$ , et de  $(w^0, \dots, w^{j-1}) \in (\ell^\infty)^j$ . Notons que dans le cas des schémas linéaires de subdivision,  $\rho_p(S)$  représente

exactement le rayon spectral de  $S$  dans  $\ell^p$ . Il est facile de vérifier que l'on a aussi

$$\rho_p(S) = \inf_{j>0} \sup_{(w^0, \dots, w^{j-1}) \in (\ell^\infty(\mathbb{Z}))^j} \|S(w^{j-1}) \cdots S(w^0)\|_{\ell^p}^{1/j}, \quad (3.86)$$

et

$$\rho_p(S) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{(w^0, \dots, w^{j-1}) \in (\ell^\infty(\mathbb{Z}))^j} \|S(w^{j-1}) \cdots S(w^0)\|_{\ell^p}^{1/j}. \quad (3.87)$$

Nous allons montrer que l'examen des rayons spectraux conjoints  $\rho_p(S_1), \dots, \rho_p(S_m)$  associés aux différences finies permet de déduire des informations sur la convergence du schéma  $S$  et la régularité des fonctions limites. Auparavant, nous allons donner une relation entre ces rayon spectraux conjoints.

**Proposition 3.4.** *Pour tout  $n = 0, \dots, m-1$ , on a*

$$\rho_p(S_{n+1}) \geq \frac{1}{2} \rho_p(S_n). \quad (3.88)$$

avec la convention  $S_0 = S$ .

**Démonstration :** Nous allons démontrer cette relation dans le cas  $n = 0$ , le résultat général se déduisant aisément par récurrence. Pour  $\rho > \rho_p(S_1)$ , il existe une constante positive  $C > 0$  telle que pour tout  $j \geq 0$  et  $u \in \ell^p$  on ait

$$\|S_1(w^{j-1}) \cdots S_1(w^0) \Delta u\|_{\ell^p} \leq C \rho^j \|\Delta u\|_{\ell^p}. \quad (3.89)$$

indépendamment des  $w^l \in \ell^\infty$ . On pose alors

$$w^j := S(w^{j-1}) \cdots S(w^0) u, \quad (3.90)$$

et en combinant (3.78) et (3.89) on en déduit

$$\|\Delta w^j\|_{\ell^p} \leq C \rho^j \|\Delta u\|_{\ell^p}. \quad (3.91)$$

Afin d'évaluer la norme  $\ell^p$  de  $w^j$ , nous la décomposons par blocs de  $2^j$  indices suivant

$$\|w^j\|_{\ell^p} = \|(\|(u_l^j)_{l \in [2^j k, 2^j(k+1)[}\|_{\ell^p})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^p} \quad (3.92)$$

En utilisant la propriété  $a_{k,l}(w) = 0$  pour  $|k - 2l| > M$ , on montre aisément par récurrence sur  $j$  que les valeurs  $w_l^j$  pour  $l \in [2^j k, 2^j(k+1)[$  ne dépendent que des valeurs  $u_n$  pour  $n$  tel que  $|n - k| \leq M$ . Par conséquent, en introduisant pour chaque  $k$  fixé la suite restreinte  $\tilde{u}^k$  définie par  $\tilde{u}_n^k = u_n$  si  $|n - k| \leq M$  et  $\tilde{u}_n^k = 0$  sinon, et en notant

$$\tilde{u}^{k,j} := S(w^{j-1}) \cdots S(w^0) \tilde{u}^k, \quad (3.93)$$

on en déduit que  $u_l^j = \tilde{u}_l^{k,j}$  pour  $l \in [2^j k, 2^j(k+1)[$  et que  $\tilde{u}_l^{k,j} = 0$  pour  $|l - 2^j k| > 2^{j+1}M$ . Par conséquent, nous obtenons pour  $l \in [2^j k, 2^j(k+1)[$  l'estimation

$$|u_l^j| = |\tilde{u}_l^{k,j}| \leq \sum_{|l-2^j k| < 2^{j+1}M} |\Delta \tilde{u}_l^{j,k}|, \quad (3.94)$$

d'où l'on tire

$$\|(u_l^j)_{l \in [2^j k, 2^j(k+1)[}\|_{\ell^p} \lesssim 2^j \|\Delta \tilde{u}^{j,k}\|_{\ell^p}. \quad (3.95)$$

En utilisant (3.89), on en déduit

$$\|(u_l^j)_{l \in [2^j k, 2^j(k+1)[}\|_{\ell^p} \lesssim (2\rho)^j \|\Delta \tilde{u}^k\|_{\ell^p} \lesssim (2\rho)^j \|\tilde{u}^k\|_{\ell^p}. \quad (3.96)$$

Finalement, en utilisant le fait que les supports des  $\tilde{u}^k$  ne se recouvrent que pour les indices proches d'au plus  $2M$ , on obtient

$$\|u\|_{\ell^p} \sim \|(\|\tilde{u}^k\|_{\ell^p})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^p}, \quad (3.97)$$

et par conséquent

$$\|u^j\|_{\ell^p} \lesssim (2\rho)^j \|u\|_{\ell^p}. \quad (3.98)$$

Ceci nous montre que  $\rho_p(S) \leq 2\rho$ . En faisant tendre  $\rho$  vers  $\rho_p(S_1)$ , on obtient le résultat annoncé.  $\square$

**Remarque 3.3.** *La convergence  $L^p$  du schéma de subdivision implique*

$$\rho_p(S) \geq 2^{1/p}. \quad (3.99)$$

*En effet, si  $v^j = S^j v_0$  et si  $v_j$  est l'interpolation affine par morceaux de  $v^j$  définie par (3.61), on a*

$$\|v_j\|_{L^p} \sim 2^{-j/p} \|v^j\|_{\ell^p}. \quad (3.100)$$

*Par conséquent  $\rho_p(S) < 2^{1/p}$  entrainerait la convergence de  $v_j$  vers 0 quel que soit la donnée initiale  $v^0$ . En utilisant la proposition 3.4 ci-dessus, on en déduit*

$$\rho_p(S_n) \geq 2^{1/p-n}. \quad (3.101)$$

*pour  $n = 1, \dots, m$ .*

Nous sommes maintenant prêts à établir des résultats concernant la convergence des schémas de subdivision quasi-linéaires ainsi que la régularité de la fonction limite. Notre premier résultat ne fait appel qu'aux différences finies d'ordre 1 et le degré de régularité obtenu est toujours inférieur à 1.

**Théorème 3.5.** *Soit  $S$  une règle de subdivision quasi-linéaire qui reproduit les constantes. Si  $\rho_p(S_1) < 2^{1/p}$ , alors le schéma de subdivision associé est  $L^p$ -convergent. De plus, pour tout  $v^0 \in \ell^p$  la fonction limite  $v$  appartient à  $B_{p,q}^s$  pour tout  $s < -\frac{\log(\rho_p(S_1))}{\log 2} + \frac{1}{p}$ , et on a l'estimation*

$$\|v\|_{B_{p,q}^s} \lesssim \|v_0\|_{\ell^p}. \quad (3.102)$$

**Démonstration :** Soit  $\rho$  tel que  $\rho_\infty(S_1) < \rho < 2^{1/p}$ . Par définition du rayon spectral conjoint, il existe une constante  $C$  tel que

$$\|\Delta v^j\|_{\ell^p} \leq C\rho^j \|\Delta v^0\|_{\ell^p}, \quad (3.103)$$

pour toute donnée initiale  $v^0 \in \ell^p$  et tout  $j \geq 0$ . Si  $v_j$  est l'interpolation affine par morceaux de  $v^j$  définie par (3.61), on remarque que sur l'intervalle  $I_{j,k} := [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$  on a

$$|v_j(x) - v_{j+1}(x)| \leq \sup\{|v_{2k}^{j+1} - v_k^j|, |v_{2k+1}^{j+1} - v_{k+1}^j|, |v_{2k+1}^{j+1} - \frac{v_k^j + v_{k+1}^j}{2}|\}, \quad (3.104)$$

et par conséquent

$$\|v_{j+1} - v_j\|_{L^p} \lesssim 2^{-j/p} (\|(v_{2k}^{j+1} - v_k^j)_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^p} + \|(v_{2k+1}^{j+1} - \frac{v_k^j + v_{k+1}^j}{2})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^p}). \quad (3.105)$$

On peut écrire

$$v_{2k}^{j+1} - v_k^j = \sum_{l \in F_k} c_{k,l} v_l^j, \quad (3.106)$$

et

$$v_{2k+1}^{j+1} - \frac{v_k^j + v_{k+1}^j}{2} = \sum_{l \in F_k} d_{k,l} v_l^j, \quad (3.107)$$

où  $F_k := \{l ; |k - l| \leq M\}$ ,  $c_{k,l} := a_{2k,l}(v^j) - \delta(k - l)$  et  $d_{k,l} := a_{2k+1,l}(v^j) - \frac{\delta(k-l) + \delta(k+1-l)}{2}$ . Puisque la règle de subdivision reproduit les constantes, les vecteurs  $(c_{k,l})_{l \in F_k}$  et  $(d_{k,l})_{l \in F_k}$  sont orthogonaux au vecteur constant. En utilisant le même raisonnement que dans la preuve de la Proposition 3.3, on en déduit que les vecteurs  $v_{2k}^{j+1} - v_k^j$  et  $v_{2k+1}^{j+1} - \frac{v_k^j + v_{k+1}^j}{2}$  sont des combinaisons linéaires des différences finies  $\Delta v_l^j$  pour  $l = k - M, \dots, k + M - 1$  avec des coefficients bornés indépendamment de  $j$  et des données initiales  $v^0$ . On en déduit

$$\|v_{j+1} - v_j\|_{L^p} \lesssim 2^{-j/p} \|\Delta v^j\|_{\ell^p} \lesssim (2^{-1/p} \rho)^j \|\Delta v^0\|_{\ell^p}. \quad (3.108)$$



Puisque  $2^{-1/p}\rho < 1$ , ceci nous montre que la suite  $v_j$  converge dans  $L^p$  vers une limite  $v = S^\infty v^0$ . D'autre part, nous avons l'estimation

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p} &\leq \|v_0\|_{L^p} + \sum_{j \geq 0} \|v_{j+1} - v_j\|_{L^p} \\ &\lesssim \|v^0\|_{\ell^p} + \|\Delta v^0\|_{\ell^p} \sum_{j \geq 0} (2^{-1/p}\rho)^j \\ &\lesssim \|v^0\|_{\ell^p}. \end{aligned}$$

Pour  $|h| \leq 1$  et en prenant  $j$  tel que  $2^{-j-1} < |h| \leq 2^{-j}$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \|v - v(\cdot + h)\|_{L^p} &\leq 2\|v - v_j\|_{L^p} + \|v_j - v_j(\cdot + h)\|_{L^p} \\ &\lesssim \rho^j 2^{-j/p} \|\Delta v^0\|_{\ell^p} + 2^{-j} \|v'_j\|_{L^p} \\ &\lesssim \rho^j 2^{-j/p} \|\Delta v^0\|_{\ell^p} + 2^{-j/p} \|\Delta v^j\|_{\ell^p} \\ &\lesssim \rho^j 2^{-j/p} \|\Delta v^0\|_{\ell^p} \\ &\lesssim \rho^j 2^{-j/p} \|v^0\|_{\ell^p} \\ &\lesssim |h|^s \|v^0\|_{\ell^p}, \end{aligned}$$

avec  $s = -\frac{\log \rho}{\log 2} + \frac{1}{p}$ . Ceci nous montre que  $v \in B_{p,\infty}^s$  pour tout  $s < -\frac{\log(\rho_p(S_1))}{\log 2} + \frac{1}{p}$  avec l'estimation (3.102). Comme  $B_{p,\infty}^t \subset B_{p,q}^s$ , si  $t > s$ , on obtient aussi  $v \in B_{p,q}^s$  pour tout  $s < -\frac{\log(\rho_p(S_1))}{\log 2} + \frac{1}{p}$ , ainsi que l'estimation (3.102).  $\square$

Nous présentons finalement la généralisation du résultat que nous venons d'établir à un degré de régularité  $s \geq 1$ .

**Théorème 3.6.** *Soit  $S$  une règle de subdivision quasi-linéaire qui reproduit les polynômes jusqu'au degré  $m - 1$ . Si pour un entier  $n \in \{1, \dots, m\}$  on a  $\rho_p(S_n) < 2^{1/p-n+1}$ , alors le schéma de subdivision associé est  $L^p$ -convergent. De plus, pour tout  $v^0 \in \ell^p$  la fonction limite  $v$  appartient à  $B_{p,q}^s$  pour tout  $s < -\frac{\log(\rho_p(S_n))}{\log 2} + \frac{1}{p}$  avec l'estimation (3.102).*

**Démonstration :** en utilisant la Proposition 3.4, on déduit de l'hypothèse  $\rho_p(S_n) < 2^{1/p-n+1}$  que  $\rho_p(S_q) < 2^{1/p-q+1}$  pour  $q = n-1, \dots, 0$  et en particulier  $\rho_\infty(S_1) < 2^{1/p}$ . Par le Théorème 3.5 on obtient ainsi la convergence  $L^p$  du schéma. Afin de prouver la régularité de  $v$ , on procède par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , on retrouve le théorème 3.5. Pour  $n = 2$ , on considère  $v = S^\infty v^0$  et on suppose que  $\rho_p(S_2) < 2^{1/p} - 1$ . On introduit la suite des différences finies renormalisées

$$w^j := 2^j \Delta v^j = 2^j S_1(v^{j-1}) \cdots S_1(v^0) \Delta v^0, \quad (3.109)$$

ainsi que

$$\Delta w^j = 2^j \Delta^2 v^j = 2^j S_2(v^{j-1}) \cdots S_2(v^0) \Delta^2 v^0. \quad (3.110)$$

Si  $\rho$  est tel que  $2\rho_p(S_2) < \rho < 2^{1/p}$ , alors

$$\|\Delta w^j\|_{\ell^p} \lesssim \rho^j \|\Delta^2 v^0\|_{\ell^p}. \quad (3.111)$$

Si  $w_j$  est l'interpolation "constante par morceaux" de  $w^j$  définie par

$$\tilde{w}_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k^j h(2^j \cdot -k), \quad (3.112)$$

avec  $h := \chi_{[0,1]}$ , on obtient par la même méthode que dans la preuve du théorème 3.5 la convergence de  $w_j$  dans  $L^p$  vers une fonction  $w \in B_{p,q}^t$  pour tout  $t$  tel que

$$t < -\frac{\log(2\rho_p(S_2))}{\log 2} + \frac{1}{p} = -\frac{\log(\rho_p(S_2))}{\log 2} - 1 + \frac{1}{p}. \quad (3.113)$$

On peut d'autre part facilement vérifier que  $w_j = \frac{d}{dx} v_j$ , où  $v_j$  est l'interpolation affine par morceaux de  $v^j$  définie par (3.61). On a donc

$$\int w_j(x) f(x) dx = - \int v_j(x) f'(x) dx, \quad (3.114)$$

pour toute fonction test  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Par passage à la limite de  $w_j$  et  $v_j$  dans  $L^p$ , on en déduit

$$\int w(x) f(x) dx = - \int v(x) f'(x) dx, \quad (3.115)$$

pour toute fonction test  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , i.e.  $v$  est faiblement différentiable dans  $L^p$  avec  $v' = w$ . On en déduit que  $v \in B_{p,q}^{t+1}$  pour tout  $t$  vérifiant (3.113), c'est à dire  $v \in B_{p,q}^s$  pour tout  $s < \frac{\log(\rho_p(S_2))}{\log 2} + \frac{1}{p}$ . On peut facilement vérifier que l'on aurait obtenu la même fonction limite  $w$  si l'on avait défini  $w_j$  par interpolation affine de  $w^j$  suivant (3.61). Ceci nous permet d'itérer cet argument pour  $n > 2$  et d'obtenir ainsi le résultat général annoncé.  $\square$

**Remarque 3.4.** *Tous les résultats que nous avons présentés dans cette section se généralisent au cadre multidimensionnel, en introduisant de la même manière les règles de subdivision  $S_n$  telles que  $S_n(w)\Delta^n u = \Delta^n S(w)u$  associées aux différences finies d'ordre  $n$*

$$\Delta^n u := (\Delta^\alpha u)_{|\alpha|=n}. \quad (3.116)$$

*Les conditions dans le théorème 3.6 doivent être modifiées suivant  $\rho_p(S_n) < 2^{d/p-n+1}$  et  $s < -\frac{\log(\rho_p(S_n))}{\log 2} + \frac{d}{p}$  où  $d$  est la dimension. Les généralisations des résultats sont alors formulées et prouvées de manière identique.*

### 3.3.3 Théorèmes inverses pour les espaces de Besov

Nous allons à présent considérer l'itération du processus de reconstruction lorsque l'on ajoute des détails non-nuls, c'est à dire

$$v^j = S(v^{j-1})v^{j-1} + e^j = S(v^{j-1})v^{j-1} + Ed^{j-1}. \quad (3.117)$$

On suppose ici que l'on dispose d'une base stable pour l'espace  $\text{Ker}(P_{j-1}^j)$  permettant d'établir l'équivalence

$$\|e^j\|_{\ell^p} = \|Ed^j\|_{\ell^p} \sim \|d^j\|_{\ell^p}. \quad (3.118)$$

On considère à nouveau les fonctions  $v_j$  obtenues par interpolation affine des suites  $v^j$  suivant (3.61). Dans le cas où  $(v^0, d^0, d^1, \dots)$  est la représentation multiéchelle d'une fonction  $v \in L^p$  basée sur la discrétisation (3.2), on sait que l'on a

$$v_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k^j \varphi(2^j \cdot -k) = 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle v, \tilde{\varphi}(2^j \cdot -k) \rangle \varphi(2^j \cdot -k) = Q_j v \quad (3.119)$$

où  $\varphi = \max\{1-|x|, 0\}$  est la fonction chapeau et  $\tilde{\varphi}$  est la fonction de discrétisation (que l'on suppose ici dans  $L^{p'}$  afin que le produit scalaire ait un sens). L'opérateur  $Q_j$  défini par

$$Q_j f := 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}(2^j \cdot -k) \rangle \varphi(2^j \cdot -k), \quad (3.120)$$

est un quasi-interpolant qui reproduit les constantes (d'après  $\int \tilde{\varphi} = 1$  et  $\sum_k \varphi(\cdot - k) = 1$ ), et des arguments classiques de théorie de l'approximation montrent alors que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|v - Q_j v\|_{L^p} = 0. \quad (3.121)$$

Par conséquent la fonction  $v$  est bien la limite du processus de reconstruction (3.117). Afin d'obtenir le théorème inverse exprimé par (3.12), nous allons donc chercher à estimer la régularité de cette fonction limite en fonction des propriétés de taille des coefficients  $d^j$ .

Nous allons établir un résultat intermédiaire qui sera utilisé dans la preuve du résultat principal.

**Lemme 3.1.** *Si la règle de subdivision  $S$  reproduit les constantes, on a alors l'estimation*

$$\|v_{j+1} - v_j\|_{L^p} \lesssim 2^{-j/p} [\|\Delta v^j\|_{\ell^p} + \|d^j\|_{\ell^p}] \quad (3.122)$$

Si  $\rho > \rho_p(S_1)$ , on a d'autre part

$$\|\Delta v^j\|_{\ell^p} \lesssim \rho^j \|v^0\|_{\ell^p} + \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} \|d^l\|_{\ell^p}. \quad (3.123)$$

**Démonstration :** nous avons déjà établi l'estimation (3.122) dans la preuve du théorème 3.5 dans le cas  $d^j = 0$ . Lorsque les détails ne sont pas nuls, on peut écrire

$$v_{j+1} = \hat{v}_j + e_j, \quad (3.124)$$

où  $\hat{v}_{j+1}$  et  $e_{j+1}$  représentent les fonctions obtenues par interpolation affine de  $\hat{v}^{j+1} = S(v^j)v^j$  et de  $e^j$ . On a ainsi

$$\|v_{j+1} - v_j\|_{L^p} \leq \|\hat{v}_{j+1} - v_j\|_{L^p} + \|e_{j+1}\|_{L^p} \lesssim 2^{-j/p}[\|\Delta v^j\|_{\ell^p} + \|e^{j+1}\|_{\ell^p}], \quad (3.125)$$

ce qui entraîne (3.122) grâce à (3.118). Afin de prouver (3.123), on écrit

$$\begin{aligned} \Delta v^j &= \Delta(S(v^{j-1})v^{j-1} + e^j) \\ &= S_1(v^{j-1})\Delta v^{j-1} + \Delta e^j \\ &= S_1(v^{j-1})S_1(v^{j-2})\Delta v^{j-2} + S_1(v^{j-1})\Delta e^{j-1} + \Delta e^j \\ &= \dots = S_1(v^{j-1}) \dots S_1(v^0)\Delta v^0 + \sum_{l=1}^j S_1(v^{j-1}) \dots S_1(v^l)\Delta e^l. \end{aligned}$$

Puisque  $\rho < \rho_p(S_1)$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$\|S_1(w^j) \dots S_1(w^1)\|_{\ell^p} \leq C\rho^j \quad (3.126)$$

pour tout  $j$  et tout  $(w^1, \dots, w^j) \in (\ell^\infty)^j$ . On obtient ainsi l'estimation

$$\|\Delta v^j\|_{\ell^p} \lesssim \rho^j \|\Delta v^0\|_{\ell^p} + \sum_{l=1}^j \rho^{j-l} \|\Delta e^l\|_{\ell^p}, \quad (3.127)$$

qui entraîne immédiatement (3.123).  $\square$ .

Notons que la combinaison des estimations (3.122) et (3.123) entraîne en particulier

$$\|v_{j+1} - v_j\|_{L^p} \lesssim 2^{-j/p}[\rho^j \|v^0\|_{\ell^p} + \sum_{l=0}^j \rho^{j-l} \|d^l\|_{\ell^p}]. \quad (3.128)$$

Nous abordons finalement le résultat principal de cette section qui nous donne le théorème inverse dans le cas  $s < 1$ .

**Théorème 3.7.** *Soit  $S$  une règle de subdivision quasi-linéaire qui reproduit les constantes. Si  $\rho_p(S_1) < 2^{1/p-n+1}$ , et si  $(v^0, d^0, d^1, \dots)$  sont tels que*

$$\|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} < \infty, \quad (3.129)$$

pour un  $s > 0$  tel que  $s < -\frac{\log(\rho_p(S_1))}{\log 2} + \frac{1}{p}$ , alors la fonction  $v$  appartient à  $B_{p,q}^s$  et on a de plus

$$\|v\|_{B_{p,q}^s} \lesssim \|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \quad (3.130)$$

**Démonstration :** nous évaluons tout d'abord la norme  $L^p$  de  $v$  en utilisant (3.128). En choisissant  $\rho$  tel que  $\rho_p(S_1) < \rho < 2^{1/p}$  on obtient

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^p} &\leq \|v_0\|_{L^p} + \sum_{j \geq 0} \|v_{j+1} - v_j\|_{L^p} \\
&\lesssim \|v^0\|_{\ell^p} + \sum_{j \geq 0} 2^{-j/p} [\rho^j \|v^0\|_{\ell^p} + \sum_{l=0}^j \rho^{j-l} \|d^l\|_{\ell^p}] \\
&\lesssim \|v^0\|_{\ell^p} [\sum_{j \geq 0} (2^{-1/p} \rho)^j] + \sum_{l \geq 0} \|d^l\|_{\ell^p} \rho^{-l} [\sum_{j \geq l} (2^{-1/p} \rho)^j] \\
&\lesssim \|v^0\|_{\ell^p} + \sum_{l \geq 0} \|d^l\|_{\ell^p} 2^{-l/p} \\
&\lesssim \|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q},
\end{aligned}$$

la dernière ligne utilisant l'inégalité de Hölder

$$\sum_{l \geq 0} \|d^l\|_{\ell^p} 2^{-l/p} \leq \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \|(2^{-sj})_{j \geq 0}\|_{\ell^{q'}} \lesssim \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}.$$

Il nous reste à évaluer la semi-norme

$$|v|_{B_{p,q}^s} := \|(2^{js} \omega_1(v, 2^{-j})_{L^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \quad (3.131)$$

Pour chaque  $j \geq 0$ , on évalue  $\omega_1(v, 2^{-j})_{L^p}$  en écrivant

$$\omega_1(v, 2^{-j})_{L^p} \leq \omega_1(v - v_j, 2^{-j})_{L^p} + \omega_1(v_j, 2^{-j})_{L^p}. \quad (3.132)$$

En choisissant  $\rho$  tel que  $\rho_p(S_1) < \rho < 2^{1/p}$ , le premier terme est estimé suivant

$$\begin{aligned}
\omega_1(v - v_j, 2^{-j})_{L^p} &\lesssim \|v - v_j\|_{L^p} \leq \sum_{n \geq j} \|v_{n+1} - v_n\|_{L^p} \\
&\lesssim \sum_{n \geq j} 2^{-n/p} [\rho^n \|v^0\|_{\ell^p} + \sum_{l=0}^n \rho^{n-l} \|d^l\|_{\ell^p}] \\
&\lesssim 2^{-j/p} \rho^j \|v^0\|_{\ell^p} + 2^{-j/p} \sum_{l=0}^j \rho^{j-l} \|d^l\|_{\ell^p} + \sum_{l > j} 2^{-l/p} \|d^l\|_{\ell^p}.
\end{aligned}$$

Le deuxième terme est évalué suivant

$$\begin{aligned}
\omega_1(v_j, 2^{-j})_{L^p} &\lesssim 2^{-j} \|v'_j\|_{L^p} \\
&\lesssim 2^{-j/p} \|\Delta v^j\|_{\ell^p} \\
&\lesssim 2^{-j/p} \rho^j \|v^0\|_{\ell^p} + 2^{-j/p} \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} \|d^l\|_{\ell^p}.
\end{aligned}$$

L'estimation de la semi-norme  $|v|_{B_{p,q}^s}$  se ramène ainsi à celle de  $\|(2^{js} a_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q}$ ,  $\|(2^{js} b_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q}$  et  $\|(2^{js} c_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q}$ , avec  $a_j := 2^{-j/p} \rho^j \|v^0\|_{\ell^p}$ ,  $b_j := 2^{-j/p} \sum_{l=0}^j \rho^{j-l} \|d^l\|_{\ell^p}$  et  $c_j := \sum_{l > j} 2^{-l/p} \|d^l\|_{\ell^p}$ . Le point important ici est que l'on a

$$2^s 2^{-1/p} \rho_p(S_1) < 1, \quad (3.133)$$

et par conséquent, on peut choisir  $\rho > \rho_p(S_1)$  tel que

$$\alpha = 2^s 2^{-1/p} \rho < 1. \quad (3.134)$$

Ceci entraîne immédiatement

$$\|(2^{js}a_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q} = \|v^0\|_{\ell^p} \|(\alpha^j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|v^0\|_{\ell^p}. \quad (3.135)$$

Pour estimer  $\|(2^{js}b_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q}$ , on écrit

$$\begin{aligned} \|(2^{js}b_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q} &= \|(2^{js}2^{-j/p} \sum_{l=0}^j \rho^{j-l} \|d^l\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \\ &= \|(\alpha^j \sum_{l=0}^j \alpha^{-l} 2^{(s-1/p)l} \|d^l\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \end{aligned}$$

On utilise alors l'inégalité de Hardy suivante : si  $0 < \alpha < 1$  on a

$$\|(\alpha^j \sum_{l=0}^j \alpha^{-l} x_l)_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|(x_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \quad (3.136)$$

Appliquée à  $x_l = 2^{(s-1/p)l} \|d^l\|_{\ell^p}$ , cette inégalité nous donne par conséquent

$$\|(2^{js}b_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \quad (3.137)$$

Pour estimer  $\|(2^{js}c_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q}$ , on écrit

$$\begin{aligned} \|(2^{js}c_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q} &= \|(2^{sj} \sum_{l>j} 2^{-sl} 2^{(s-1/p)l} \|d^l\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \\ &= \|(2^{js} \sum_{l>j} 2^{-sl} 2^{(s-1/p)l} \|d^l\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \end{aligned}$$

On utilise alors l'inégalité de Hardy suivante : si  $\beta > 1$  on a

$$\|(\beta^j \sum_{l>j} \beta^{-l} x_l)_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|(x_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \quad (3.138)$$

Appliquée à  $x_l = 2^{(s-1/p)l} \|d^l\|_{\ell^p}$ , cette inégalité nous donne par conséquent

$$\|(2^{js}c_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \quad (3.139)$$

En combinant (3.135), (3.137) et (3.139), on obtient par conséquent

$$|v|_{B_{p,q}^s} \lesssim \|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}, \quad (3.140)$$

et le théorème est ainsi démontré.  $\square$

La généralisation de ce théorème à des degrés de régularité  $s > 1$  est simplement basée sur la technique de récurrence que nous avons déjà utilisé dans la preuve du théorème 3.6 pour l'analyse de la régularité de la fonction limite de l'algorithme de subdivision. Pour cette raison, nous ne donnons qu'une esquisse de sa preuve ci-dessous.

**Théorème 3.8.** *Soit  $S$  une règle de subdivision quasi-linéaire qui reproduit les polynômes jusqu'au degré  $m - 1$ . Si pour un entier  $n \in \{1, \dots, m\}$  on a  $\rho_p(S_n) < 2^{1/p-n+1}$ , les résultats du théorème 3.7 s'étendent alors à  $s > 0$  tel que  $s < -\frac{\log(\rho_p(S_n))}{\log 2} + \frac{1}{p}$ .*

**Démonstration :** d'après la proposition 3.4, on a  $\rho_p(S_1) < 2^{1/p}$ , ce qui nous permet de retrouver l'estimation de  $\|v\|_{L^p}$  par  $\|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}$ . On procède alors de la même manière que dans la preuve du théorème 3.6, en partant du cas  $n = 1$  qui est démontré dans le théorème 3.7 : pour  $n = 2$ , on introduit la suite des différences finies renormalisées

$$w^j := 2^j \Delta v^j = 2^j S_1(v^{j-1}) + 2^j e^j, \quad (3.141)$$

et son interpolation "constante par morceaux" de  $w^j$  définie par

$$\tilde{w}_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k^j h(2^j \cdot -k). \quad (3.142)$$

On montre alors que  $w_j$  converge dans  $L^p$  vers une fonction  $w$  qui appartient à  $B_{p,q}^t$  pour tout  $t$  tel que  $t < -\frac{\log(\rho_p(S_2))}{\log 2} - 1 + \frac{1}{p}$ , avec

$$|w|_{B_{p,q}^t} \lesssim \|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(t+1-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}, \quad (3.143)$$

On montre finalement que  $w$  est la dérivée faible de  $v$ , ce qui entraîne le résultat recherché pour  $n = 2$ . On peut facilement vérifier que l'on aurait obtenu la même fonction limite  $w$  si l'on avait défini  $w_j$  par interpolation affine de  $w^j$  suivant (3.61). Ceci nous permet d'itérer cet argument pour  $n > 2$  et d'obtenir ainsi le résultat général annoncé.  $\square$

**Remarque 3.5.** *Tous les résultats que nous avons présentés dans cette section se généralisent au cadre multidimensionnel, avec les règles de subdivision  $S_n$  pour les différences finies d'ordre  $n$  définies dans la remarque 3.4.*

### 3.3.4 Application à ENO, WENO et ENO-SR

Nous terminons ce chapitre en appliquant les résultats établis dans les théorèmes 3.5, 3.6, 3.7 et 3.8 aux représentations non-linéaires basées sur les opérateurs de prédiction ENO, WENO et ENO-SR dans le cadre des valeurs ponctuelles et des valeurs moyennes.

Observons au préalable que la régularité des fonctions limites obtenues par itération du schéma de subdivision utilisant à chaque échelle une procédure d'interpolation ENO est intrinsèquement limitée. Considérons par exemple le

cas des valeurs ponctuelles : si les données  $v_k^0$  sont telles que la sélection du stencil évite à chaque échelle un point de la grille grossière, alors la fonction limite n'aura aucune chance d'être différentiable en ce point. Cette situation se produit par exemple avec l'interpolation ENO à  $2M + 2$  points décrite dans la section § 1.2.3, si l'on prend  $v_k^0 = |k|$ , qui aboutit à la fonction limite  $v(t) = |t|$  car le stencil sélectionné évite systématiquement l'origine. De la même manière, dans le cadre des valeurs moyennes, la fonction limite de la subdivision associée à la prédiction ENO peut être discontinue. Par conséquent nous appliquerons essentiellement les théorèmes 3.5 et 3.7 qui correspondent à une régularité peu élevée et s'appuient sur l'analyse du rayon spectral conjoint de la règle de subdivision  $S_1$  qui agit sur les différences finies d'ordre 1 suivant

$$(S_1(w)\Delta v)_k := \sum_l b_{k,l}(w)\Delta v_l. \quad (3.144)$$

Notre premier exemple est la prédiction ENO des valeurs ponctuelles par sélection d'un stencil de quatre points, qui aboutit à l'une des trois formules (1.52), (1.74) ou (1.75). Dans ce cas particulier, ces formules nous permettent aisément de déduire les règles suivantes pour les différences finies du premier ordre :

$$\begin{aligned} \Delta \hat{v}_{2k}^{j+1} &= \frac{1}{16}\Delta v_{k-1}^j + \frac{1}{2}\Delta v_k^j - \frac{1}{16}\Delta v_{k+1}^j, \\ \Delta \hat{v}_{2k+1}^{j+1} &= \frac{-1}{16}\Delta v_{k-1}^j + \frac{1}{2}\Delta v_k^j + \frac{1}{16}\Delta v_{k+1}^j, \end{aligned} \quad (3.145)$$

avec la sélection du stencil centré,

$$\begin{aligned} \Delta \hat{v}_{2k}^{j+1} &= \frac{-1}{16}\Delta v_{k-2}^j + \frac{1}{4}\Delta v_{k-1}^j + \frac{5}{16}\Delta v_k^j, \\ \Delta \hat{v}_{2k+1}^{j+1} &= \frac{1}{16}\Delta v_{k-2}^j - \frac{1}{4}\Delta v_{k-1}^j + \frac{11}{16}\Delta v_k^j, \end{aligned} \quad (3.146)$$

avec la sélection du stencil décentré à gauche et

$$\begin{aligned} \Delta \hat{v}_{2k}^{j+1} &= \frac{11}{16}\Delta v_k^j - \frac{1}{4}\Delta v_{k+1}^j + \frac{1}{16}\Delta v_{k+2}^j, \\ \Delta \hat{v}_{2k+1}^{j+1} &= \frac{5}{16}\Delta v_k^j + \frac{1}{4}\Delta v_{k+1}^j - \frac{1}{16}\Delta v_{k+2}^j, \end{aligned} \quad (3.147)$$

avec la sélection du stencil décentré à droite. Ces règles nous indiquent l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les coefficients  $b_{k,l}(w)$ .

Une remarque immédiate est que dans chaque cas, la somme des valeurs absolues des coefficients est au plus égale à 1 ce qui nous fournit une première estimation pour la règle de subdivision  $S_1$  associée aux différences d'ordre 1

$$\sup_{w \in \ell^\infty} \|S_1(w)\|_{\ell^\infty} = \sup_{w \in \ell^\infty} \sup_k \sum_l |b_{k,l}(w)| = \frac{11}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1. \quad (3.148)$$



Cette estimation ne peut nous suffir pour appliquer les résultats des théorèmes 3.5 et 3.7 avec  $p = \infty$ , puisque ceux-ci exigent la condition  $\rho_\infty(S_1) < 1$ . Afin de prouver que celle-ci est vérifiée, il est nécessaire de considérer deux itérations de  $S_1$ .

**Lemme 3.2.** *Pour la règle de subdivision associée à la prédiction ENO à 4 points, on a*

$$\sup_{w^0, w^1 \in \ell^\infty} \|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty} < 1 \quad (3.149)$$

et par conséquent  $\rho_\infty(S_1) < 1$ .

**Démonstration :** Pour deux suites fixées  $w^0, w^1 \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ , on a

$$\left(S_1(w^1)S_1(w^0)\right)_{k,l} := \sum_{k' \in \mathbb{Z}} (S_1(w^1))_{k,k'} (S_1(w^0))_{k',l}, \quad (3.150)$$

et par conséquent, la norme  $\|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty}$  peut être estimée par

$$\begin{aligned} \sup_k \sum_l |(S_1(w^1)S_1(w^0))_{k,l}| &\leq \sup_k \sum_l \sum_{k'} |(S_1(w^1))_{k,k'}| |(S_1(w^0))_{k',l}| \\ &= \sup_k \sum_{k' \in \tilde{S}_{j,k}} \left( |b_{k,k'}(w^1)| \sum_l |b_{k',l}(w^0)| \right), \end{aligned}$$

où  $\tilde{S}_{j,k}$  est le stencil sélectionné pour  $k$  à partir de la donnée  $w^0$ .

Puisque  $\tilde{S}_{j,k}$  contient trois intervalles consécutifs, il contient une paire de la forme  $(2m, 2m+1)$ . En utilisant les relations (3.145), (3.146), (3.147), on déduit que l'une au moins des égalités  $\sum_l |b_{2m,l}(w^0)| = 5/8$  et  $\sum_l |b_{2m+1,l}(w^0)| = 5/8$  est vérifiée. Il existe donc  $k_0 \in \tilde{S}_{j,k}$  tel que

$$\sum_l |b_{k_0,l}(w^0)| = 5/8. \quad (3.151)$$

Comme  $k_0 \in \tilde{S}_{j,k}$ , nous avons  $|b_{k,k_0}(w^1)| \geq \frac{1}{16}$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{k'} \left( |b_{k,k'}(w^1)| \sum_l |b_{k',l}(w^0)| \right) &= \frac{5}{8} |b_{k,k_0}(w^1)| + \sum_{k' \neq k_0} |b_{k,k'}(w^1)| \sum_l |b_{k',l}(w^0)| \\ &\leq \frac{5}{8} |b_{k,k_0}(w^1)| + \sum_{k' \neq k_0} |b_{k,k'}(w^1)| \\ &\leq 1 + \left(\frac{5}{8} - 1\right) |b_{k,k_0}(w^1)| \\ &\leq 1 - \frac{3}{8} \frac{1}{16} = \frac{125}{128} < 1, \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé.  $\square$

Une estimation plus précise de la norme  $\|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty}$  peut être obtenue en faisant avec l'aide de l'ordinateur un calcul explicite prenant en compte

toutes les combinaisons possibles des stencils utilisés. On obtient alors l'estimation suivante

$$\rho_\infty(S_1) \leq \sup_{w^0, w^1 \in \ell^\infty} \|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty}^{1/2} = \frac{9}{16}\sqrt{2}. \quad (3.152)$$

Nous pouvons par conséquent appliquer les théorèmes 3.5 et 3.7 pour obtenir le résultat suivant.

**Théorème 3.9.** *Pour la prédiction ENO à quatre points, les fonctions limites du schéma de subdivision sont de classe  $C^s$  pour tout  $s < -\frac{\log(\frac{9}{16}\sqrt{2})}{\log 2} \approx 0.6601499$ . Pour ces valeurs de  $s > 0$  on a*

$$\|v\|_{C^s} \lesssim \|v^0\|_{\ell^\infty} + \|(2^{sj}\|d^j\|_{\ell^\infty})_{j \geq 0}\|_{\ell^\infty}. \quad (3.153)$$

pour  $v$  et  $d$  tels que  $d = \mathcal{M}v$ .

Notre deuxième exemple est l'interpolation de type WENO pour les valeurs ponctuelles, définie dans la section § 1.2.3 par la formule (1.82), qui correspond à une combinaison convexe des formules (1.52), (1.74) et (1.75), avec des poids qui dépendent régulièrement des données. On en déduit aisément les règles

$$\begin{aligned} \Delta \hat{v}_{2k}^{j+1} := & \frac{-\alpha_{k,-1}}{16} \Delta v_{k-2}^j + \frac{4\alpha_{k,-1} + \alpha_{k,0}}{16} \Delta v_{k-1}^j + \frac{11\alpha_{k,1} + 8\alpha_{k,0} + 5\alpha_{k,-1}}{16} \Delta v_k^j \\ & + \frac{-4\alpha_{k,1} - \alpha_{k,0}}{16} \Delta v_{k+1}^j + \frac{\alpha_{k,1}}{16} \Delta v_{k+2}^j, \end{aligned} \quad (3.154)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta \hat{v}_{2k+1}^{j+1} := & \frac{\alpha_{k,-1}}{16} \Delta v_{k-2}^j + \frac{-4\alpha_{k,-1} - \alpha_{k,0}}{16} \Delta v_{k-1}^j + \frac{11\alpha_{k,-1} + 8\alpha_{k,0} + 5\alpha_{k,1}}{16} \Delta v_k^j \\ & + \frac{4\alpha_{k,1} + \alpha_{k,0}}{16} \Delta v_{k+1}^j - \frac{\alpha_{k,1}}{16} \Delta v_{k+2}^j, \end{aligned} \quad (3.155)$$

dans lesquelles les  $\alpha_{k,l}$  sont les poids de la formule (1.82). En utilisant les relations (3.154) et (3.155) on obtient

$$\sum_l |b_{2k,l}(w)| \leq \alpha_{k,1} + \frac{5}{8}(\alpha_{k,0} + \alpha_{k,-1}) \leq 1, \quad (3.156)$$

et

$$\sum_l |b_{2k+1,l}(w)| \leq \alpha_{k,-1} + \frac{5}{8}(\alpha_{k,0} + \alpha_{k,1}) \leq 1, \quad (3.157)$$

soit  $\|S_1(w)\|_{\ell^\infty} \leq 1$ , puisque  $\sum_n \alpha_{k,n} = 1$  et  $\alpha_{k,n} \geq 0$ . Comme dans le cas de la prédiction ENO, il est nécessaire de considérer deux itérations de  $S_1$  afin de prouver que  $\rho_\infty(S_1) < 1$ .

**Lemme 3.3.** *Pour la règle de subdivision associée à la prédiction WENO, on a*

$$\sup_{w^0, w^1 \in \ell^\infty} \|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty} < 1 \quad (3.158)$$

et par conséquent  $\rho_\infty(S_1) < 1$ .

**Démonstration :** Pour deux suites fixées  $w^0, w^1 \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ , nous avons

$$\|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty} \leq \sup_k \sum_{k'} \left( |b_{k,k'}(w^1)| \sum_l |b_{k',l}(w^0)| \right). \quad (3.159)$$

Pour  $k$  fixé, nous pouvons déduire des relations (3.154) ou (3.155) qu'il existe toujours un  $m$  tel que

$$\min\{|b_{k,2m}(w^1)|, |b_{k,2m+1}(w^1)|\} \geq \frac{1}{32} \quad (3.160)$$

On remarque d'autre part l'inégalité

$$\sum_l |b_{2m,l}(w^0)| + \sum_l |b_{2m+1,l}(w^0)| = \frac{5}{4}\alpha_{k,0} + \frac{13}{8}(\alpha_{k,1} + \alpha_{k,-1}) \leq \frac{13}{8} < 2. \quad (3.161)$$

Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty} &\leq \sum_{k' \neq 2m, 2m+1} |b_{k,k'}(w^1)| + \sum_{k'=2m, 2m+1} |b_{k,k'}(w^1)| \sum_l |b_{k',l}(w^0)| \\ &= \sum_{k'} |b_{k,k'}(w^1)| - \sum_{k'=2m, 2m+1} |b_{k,k'}(w^1)| (1 - \sum_l |b_{k',l}(w^0)|) \\ &\leq 1 - \frac{1}{32} \sum_{k'=2m, 2m+1} (1 - \sum_l |b_{k',l}(w^0)|) \\ &\leq 1 - \frac{1}{32} (2 - \frac{13}{8}) \\ &= \frac{253}{256} < 1. \end{aligned}$$

d'où le résultat recherché.  $\square$

Par un calcul explicite effectué à l'aide de l'ordinateur, il est possible d'obtenir une évaluation plus précise de  $\|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty}$ , qui est la même que pour la prédiction ENO :

$$\rho_\infty(S_1) \leq \sup_{w^1, w^0 \in \ell^\infty} \|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty}^{1/2} = \frac{9}{16}\sqrt{2}. \quad (3.162)$$

Nous pouvons par conséquent appliquer les théorèmes 3.5 et 3.7 pour obtenir le résultat suivant.

**Théorème 3.10.** *Pour la prédiction WENO, les fonctions limites du schéma de subdivision sont de classe  $C^s$  pour tout  $s < -\frac{\log(\frac{9}{16}\sqrt{2})}{\log 2} \approx 0.6601499$ . Pour ces valeurs de  $s > 0$  on a*

$$\|v\|_{C^s} \lesssim \|v^0\|_{\ell^\infty} + \|(2^{sj}\|d^j\|_{\ell^\infty})_{j \geq 0}\|_{\ell^\infty}. \quad (3.163)$$

pour  $v$  et  $d$  tels que  $d = \mathcal{M}v$ .

Nous considérons à présent la technique d'interpolation ENO-SR dans le cadre des valeurs ponctuelles. Nous avons décrit cette technique dans la section § 1.2.4 du chapitre 1. Rappelons que celle-ci comporte une étape préalable de détection des intervalles susceptibles de contenir une singularité de la fonction. Sur les intervalles réguliers, nous appliquons simplement l'interpolation ENO à 4 points qui correspond aux règles (3.145), (3.147) et (3.146) pour le calcul des différences. En revanche, sur les intervalles  $I_{j-1,k}$  singuliers, on utilise les polynômes  $\tilde{p}_{k-1}$  et  $\tilde{p}_{k+1}$ , basés sur les valeurs des stencils décentrés à gauche et à droite, de part et d'autre de la singularité estimée par le point d'intersection  $y_d$  de ces deux polynômes. Afin de simplifier l'analyse, nous considérons dans ce cas une reconstruction plus simple dans laquelle les polynômes  $\tilde{p}_{k-1}$  et  $\tilde{p}_{k+1}$  sont de degré 1, et sont respectivement donné par l'interpolation affines des valeurs  $(v_{k-1}^{j-1}, v_k^{j-1})$  et  $(v_{k+1}^{j-1}, v_{k+2}^{j-1})$ . Dans ce cas, le point  $y_d$  est unique, et la reconstruction ENO-SR n'est utilisée que dans le cas où ce point se situe à l'intérieur de  $I_{j,k}$ . Nous présentons cette technique dans la figure 3.3.

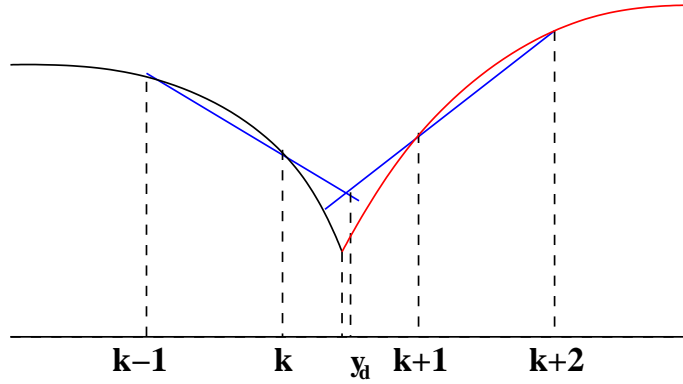


FIG. 3.3 – Reconstruction ENO-SR

La règle obtenue lorsque l'on utilise l'interpolation ENO-SR sur  $I_{j-1,k}$  est donc donnée par

$$\hat{v}_{2k+1}^j := \frac{3}{2}v_k^{j-1} - \frac{1}{2}v_{k-1}^{j-1}, \quad (3.164)$$

si  $2^{1-j}(k + 1/2) \leq y < 2^{1-j}(k + 1)$ , et

$$\hat{v}_{2k+1}^j := \frac{3}{2}v_{k+1}^{j-1} - \frac{1}{2}v_{k+2}^{j-1}, \quad (3.165)$$

si  $2^{1-j}k < y_d \leq 2^{1-j}(k + 1/2)$ . Les règles de subdivision pour différences finies sont alors données par

$$\Delta v_{2k}^j = \frac{1}{2}\Delta v_{k-1}^{j-1} \text{ et } \Delta v_{2k+1}^j = \Delta v_k^{j-1} - \frac{1}{2}\Delta v_{k-1}^{j-1}, \quad (3.166)$$

si  $2^{1-j}(k + 1/2) \leq y < 2^{1-j}(k + 1)$ , et

$$\Delta v_{2k}^j := \Delta v_k^{j-1} - \frac{1}{2}\Delta v_{k+1}^{j-1} \text{ et } \Delta v_{2k+1}^j = \frac{1}{2}\Delta v_{k+1}^{j-1} \quad (3.167)$$

si  $2^{1-j}k < y_d \leq 2^{1-j}(k + 1/2)$ .

Nous constatons que dans chaque cas, la somme des valeurs absolues des coefficients pour l'une des deux règles est supérieure à 1. Une analyse plus fine nous montre qu'on a néanmoins une propriété de contraction pour toutes les différences. Considérons par exemple  $\Delta v_{2k}^j$  dans le cas  $2^{1-j}k < y_d \leq 2^{1-j}(k + 1/2)$ . En posant  $a = 2^{j-1}(y_d - k2^{1-j})$  et  $b = 2^{j-1}((k + 1/2)2^{1-j} - y_d)$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |\Delta v_{2k}^j| &= |v_{2k+1}^j - v_{2k}^j| = |v_{2k+1}^j - \tilde{p}_{k+1}(y_d) + \tilde{p}_{k+1}(y_d) - v_{2k}^j| \\ &\leq |v_{2k+1}^j - \tilde{p}_{k+1}(y_d)| + |\tilde{p}_{k+1}(y_d) - v_{2k}^j| \\ &= a|\Delta v_{k-1}^{j-1}| + b|\Delta v_{k+1}^{j-1}|, \end{aligned} \quad (3.168)$$

et nous avons clairement  $|a| + |b| = a + b = 1/2$ . Puisque  $\Delta v_{2k+1}^j := \frac{1}{2}\Delta v_{k+1}^{j-1}$ , nous obtenons ainsi

$$\max\{|\Delta v_{2k}^j|, |\Delta v_{2k+1}^j|\} \leq \frac{1}{2} \max\{|\Delta v_{k-1}^{j-1}|, |\Delta v_{k+1}^{j-1}|\}. \quad (3.169)$$

Par symétrie, (3.169) est aussi vérifiée si  $2^{1-j}(k + 1/2) \leq y < 2^{1-j}(k + 1)$ . Ces remarques nous permettent d'estimer le rayon spectral conjoint de  $S_1$ , grâce au résultat suivant.

**Lemme 3.4.** *Pour la règle de subdivision associée à la prédiction ENO-SR, on a*

$$\sup_{w^1, w^0 \in \ell^\infty} \|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty} < 1 \quad (3.170)$$

et donc  $\rho_\infty(S_1) < 1$ .

**Démonstration :** comme pour ENO et WENO, nous partons de l'inégalité

$$\|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty} \leq \sup_k \sum_{k'} \left( |b_{k,k'}(w^1)| \sum_l |b_{k',l}(w^0)| \right). \quad (3.171)$$

Dans le cas où  $k$  correspond à une différence finie située dans un intervalle où on a utilisé la prédiction ENO-SR, les remarques ci-dessus nous ont montré que  $\sum_{k'} |b_{k,k'}(w^1)| \leq 1/2$ . On a alors

$$\sum_{k'} \left( |b_{k,k'}(w^1)| \sum_l |b_{k',l}(w^0)| \right) \leq \sum_{k'} |b_{k,k'}(w^1)| \leq 1/2 \quad (3.172)$$

Dans le cas où  $k$  correspond à une différence finie située dans un intervalle où on a utilisé la prédiction ENO, on procède essentiellement de la même façon que dans la preuve du lemme 3.2, en remarquant que  $\tilde{S}_{j,k}$  contient une paire de la forme  $(2m, 2m+1)$ . Dans le cas où on a utilisé la prédiction ENO sur l'intervalle correspondant à cette paire, nous avons vu que l'une au moins des égalités  $\sum_l |b_{2m,l}(w^0)| = 5/8$  et  $\sum_l |b_{2m+1,l}(w^0)| = 5/8$  est vérifiée. Le cas où l'on a utilisé la prédiction ENO-SR est encore plus favorable puisqu'on a alors  $\sum_l |b_{2m,l}(w^0)| \leq 1/2$  et  $\sum_l |b_{2m+1,l}(w^0)| \leq 1/2$ . Ceci nous permet de conclure de la même manière que dans la preuve du lemme 3.2 que nous avons

$$\sum_{k'} \left( |b_{k,k'}(w^1)| \sum_l |b_{k',l}(w^0)| \right) \leq \frac{125}{128} < 1, \quad (3.173)$$

ce qui prouve le résultat annoncé.  $\square$

Une estimation plus précise de la norme  $\|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty}$  peut être obtenue en effectuant à l'aide de l'ordinateur un calcul explicite qui prend en compte toutes les combinaisons possibles de prédiction utilisés. On obtient alors l'estimation suivante

$$\rho_\infty(S_1) \leq \sup_{w^0, w^1 \in \ell^\infty} \|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^\infty}^{1/2} = \frac{9}{16} \sqrt{2}. \quad (3.174)$$

Nous pouvons par conséquent appliquer les théorèmes 3.5 et 3.7 pour obtenir le résultat suivant.

**Théorème 3.11.** *Pour la prédiction ENO-SR, les fonctions limites du schéma de subdivision sont de classe  $C^s$  pour tout  $s < -\frac{\log(\frac{9}{16}\sqrt{2})}{\log 2} \approx 0.6601499$ . Pour ces valeurs de  $s > 0$  on a*

$$\|v\|_{C^s} \lesssim \|v^0\|_{\ell^\infty} + \|(2^{sj} \|d^j\|_{\ell^\infty})_{j \geq 0}\|_{\ell^\infty}. \quad (3.175)$$

pour  $v$  et  $d$  tels que  $d = \mathcal{M}v$ .

Nous considérons maintenant des opérateurs de prédiction dans le cadre des valeurs moyennes. Comme nous l'avons déjà remarqué, nous ne pouvons pas espérer dans ce cas de résultat de régularité hölderienne, et par conséquent nous examinerons ici le rayon spectral  $\rho_1(S_1)$  qui correspond à l'analyse de la régularité dans les espaces  $B_{1,q}^s$ . Dans le cas de la prédiction ENO basée sur la reconstruction d'une polynôme quadratique à partir de trois valeurs moyennes donnée par les règles (1.62), (1.76) et (1.77), on obtient les règles suivantes pour le calcul des différences :

$$\Delta v_{2k}^j = \frac{1}{4}\Delta v_k^{j-1} - \frac{1}{4}\Delta v_{k-1}^{j-1} \text{ et } \Delta v_{2k+1}^j = \frac{-1}{8}\Delta v_{k+1}^{j-1} + \frac{3}{4}\Delta v_k^{j-1} - \frac{1}{8}\Delta v_{k-1}^{j-1} \quad (3.176)$$

avec le stencil centré,

$$\Delta v_{2k}^j = \frac{-1}{4}\Delta v_{k+1}^{j-1} + \frac{3}{4}\Delta v_k^{j-1} \text{ et } \Delta v_{2k+1}^j = \frac{1}{8}\Delta v_{k+2}^{j-1} - \frac{1}{4}\Delta v_{k+1}^{j-1} + \frac{5}{8}\Delta v_k^{j-1} \quad (3.177)$$

avec le stencil décentré à droite, et

$$\Delta v_{2k}^j = \frac{3}{4}\Delta v_{k-1}^{j-1} + \frac{1}{4}\Delta v_{k-2}^{j-1} \text{ et } \Delta v_{2k+1}^j = \frac{5}{8}\Delta v_k^{j-1} - \frac{1}{4}\Delta v_{k-1}^{j-1} + \frac{1}{8}\Delta v_{k-2}^{j-1} \quad (3.178)$$

avec le stencil décentré à gauche. Afin de prouver que la condition  $\rho_\infty(S_1) < 2$  est vérifiée, il est nécessaire de considérer deux itérations de  $S_1$ . Nous partons donc de l'estimation

$$\|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^1} \leq \sup_l \sum_{k' \in \tilde{S}_{j,k}} \left( |b_{k,k'}(u)| \sum_l |b_{k',l}(w)| \right). \quad (3.179)$$

On peut estimer le membre de droite en effectuant à l'aide de l'ordinateur un calcul explicite qui prend en compte toutes les combinaisons différentes de stencils et qui aboutit à l'estimation

$$\sup_{w^0, w^1 \in \ell^\infty} \|S_1(w^1)S_1(w^0)\|_{\ell^1} \leq \frac{13}{8} < 4 \quad (3.180)$$

Par des calculs explicites similaires, on aboutit à la même estimation pour la prédiction WENO qui correspond à une combinaison convexe des trois règles (1.62), (1.76) et (1.77), ainsi que pour la prédiction ENO-SR dans laquelle on utilise la reconstruction constante par morceaux (1.84) pour les intervalles singuliers. Nous pouvons par conséquent appliquer les théorèmes 3.5 et 3.7 pour obtenir le résultat suivant.

**Théorème 3.12.** *Pour les prédictions ENO, WENO et ENO-SR en valeurs moyennes définies ci-dessus, les fonctions limites du schéma de subdivision sont de classe  $B_{1,q}^s$  pour tout  $s < -\frac{\log(\frac{13}{8})}{2\log 2} + 1 \approx 0.6989$ . Pour ces valeurs de  $s > 0$  on a*

$$\|v\|_{B_{1,q}^s} \lesssim \|v^0\|_{\ell^1} + \|(2^{(s-1)j}\|d^j\|_{\ell^1})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \quad (3.181)$$

pour  $v$  et  $d$  tels que  $d = \mathcal{M}v$ .



# STABILITE DES REPRESENTATIONS MULTIECHELLES NON-LINEAIRES

# Chapitre 4

## Stabilité des représentations multiéchelles non-linéaires

### 4.1 Introduction

Dans les applications telles que la compression et le débruitage, nous sommes amenés à perturber les coefficients de la représentation multiéchelle du signal par des opérations de seuillage ou de quantification. Il est important de savoir évaluer l'effet de telles perturbations lorsque l'on reconstruit le signal. Plus précisément, si  $d = \mathcal{M}v$  est la décomposition multiéchelle d'une fonction  $v$ , et si  $\tilde{d}$  est la version perturbée et  $\tilde{v} = \mathcal{M}^{-1}\tilde{d}$  la reconstruction associée, on cherche à comprendre si l'on peut écrire

$$\|v - \tilde{v}\|_a \lesssim \|d - \tilde{d}\|_b \quad (4.1)$$

pour  $\|\cdot\|_a$  et  $\|\cdot\|_b$  deux normes prescrites. C'est le problème de la *stabilité* de la reconstruction que nous avons déjà évoqué dans le chapitre II, dans le cas particulier du contrôle de la norme  $L^2$ .

Les résultats du chapitre précédent nous ont montré que dans le cadre plus général des espaces de Besov, on peut établir pour les représentations multiéchelles non-linéaires des résultats du type

$$\|v\|_{B_{p,q}^s} \lesssim \|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-d/p)j}\|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \quad (4.2)$$

Il est donc légitime de rechercher un résultat de stabilité du type

$$\|v - \tilde{v}\|_{B_{p,q}^s} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-d/p)j}\|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}, \quad (4.3)$$

mais celui-ci ne peut pas se déduire directement de (4.2) pour les représentations non-linéaires. En fait, il est facile de constater que les représentations non-linéaires basées sur la prédiction ENO sont *instables*, en raison du mécanisme de sélection du stencil qui basé sur une comparaison des fonctions de coût : il est possible de produire des données telles qu'une perturbation arbitrairement faible de ces données modifie cette sélection et entraîne ainsi une perturbation importante de la reconstruction.

Le but de ce chapitre est de fournir un cadre général permettant d'établir des résultats de stabilité pour les représentations non-linéaires. A partir d'une paire de données  $(v^0, \tilde{v}^0)$  et  $(d^j, \tilde{d}^j)_{j \geq 0}$ , nous considérons les processus de reconstruction

$$v^j = S(v^{j-1})v^{j-1} + e^j = S(v^{j-1})v^{j-1} + Ed^{j-1}, \quad (4.4)$$

et

$$\tilde{v}^j = S(\tilde{v}^{j-1})\tilde{v}^{j-1} + \tilde{e}^j = S(\tilde{v}^{j-1})\tilde{v}^{j-1} + E\tilde{d}^{j-1}, \quad (4.5)$$

et nous cherchons à contrôler l'erreur  $v - \tilde{v}$  entre les fonctions limites à partir des perturbations  $v^0 - \tilde{v}^0$  et  $d^j - \tilde{d}^j$ . Comme dans le chapitre précédent, nous limitons notre étude au cadre monodimensionnel. Notre analyse s'articulera à nouveau autour de la convergence du schéma de subdivision  $S$  qui s'exprime par une borne sur le rayon spectral conjoint  $\rho_p(S_1)$ . Nous serons en outre amené à formuler l'hypothèse que les coefficients  $a_{k,l}(w)$  associés à l'opérateur de prédiction quasi-linéaire dans la définition 3.1 ont une dépendance lipschitzienne par rapport aux données locales, au sens suivant

$$|a_{k,l}(w) - a_{k,l}(\tilde{w})| \leq C \sup_{|l-m| \leq Q} |w_m - \tilde{w}_m|, \quad (4.6)$$

avec  $Q$  un entier fixé. Une telle hypothèse exclut d'emblée la prédiction ENO, mais nous verrons qu'elle est vérifiée pour la prédiction WENO définie par (1.82). En utilisant le fait que  $a_{k,l}(w) = 0$  pour  $|k - 2l| > M$ , on voit que (4.9) entraîne la dépendance lipschitzienne de la règle de subdivision par rapport aux données suivant

$$\|S(w) - S(\tilde{w})\|_{\ell^\infty} \leq C \|w - \tilde{w}\|_{\ell^\infty}, \quad (4.7)$$

ainsi que

$$\|S(w) - S(\tilde{w})\|_{\ell^p} \leq C \|w - \tilde{w}\|_{\ell^\infty} \leq C \|w - \tilde{w}\|_{\ell^p}, \quad (4.8)$$

Ces propriétés vont jouer un rôle essentiel en vue d'établir des résultats de stabilité dans les espaces  $L^p$  et les espaces de Besov  $B_{p,q}^s$ .

Annonçons d’ores et déjà une limitation sévère que nous n’avons pas réussi à contourner dans ces résultats : nous sommes amenés à supposer  $\rho_p(S_1) < 1$  (au lieu de  $\rho_p(S_1) < 2^{1/p}$  qui est la condition naturelle au vu des résultats du chapitre précédent) et  $\|d^j\|_{\ell^p} \lesssim \rho^j$  pour un  $r \in [0, 1[$ , ce qui signifie que la fonction  $v$  appartient à  $W^{s,p}$  avec  $s > 1/p$ . C’est une limitation sévère dans le cas  $p < \infty$ . Elle signifie en particulier que l’on considère uniquement des perturbations sur des fonctions  $v$  continues, alors que l’intérêt des représentations non-linéaires en valeurs moyennes est précisément de mieux traiter les fonctions présentant des discontinuités. En particulier nos résultats ne s’appliquent pas aux représentations ENO-EA du chapitre 2 qui engendrent des approximations discontinues. Nous pourrions cependant les appliquer aux représentations WENO que nous avons introduit dans la section § 1.2.3.

## 4.2 Stabilité et différences finies

Dans cette section, nous établissons quelques résultats faisant intervenir les différences finies et qui nous serviront à établir les résultats de stabilité dans les deux sections suivantes. Une première remarque est la propriété (4.9) de dépendance lipschitzienne des  $a_{k,l}$  par rapport aux données locales est “transmise” aux coefficients  $c_{k,l}$  de la règle  $S_1$  associée aux différences finies lorsque celle-ci est bien définie (c’est à dire lorsque la règle  $S$  reproduit les constantes) : au vu de leur construction dans la preuve de la proposition 3.3, ces coefficients vérifient aussi

$$|c_{k,l}(w) - c_{k,l}(\tilde{w})| \leq C \sup_{|l-m| \leq Q} |w_m - \tilde{w}_m|, \quad (4.9)$$

et on a par conséquent

$$\|S_1(w) - S_1(\tilde{w})\|_{\ell^p} \leq C \|w - \tilde{w}\|_{\ell^\infty} \leq C \|w - \tilde{w}\|_{\ell^p}. \quad (4.10)$$

Il en est bien entendu de même pour les règles  $S_m$  lorsque celles-ci sont bien définies.

Rappelons par ailleurs l’existence d’un opérateur de restriction de la forme

$$v_k^{j-1} := \frac{1}{2} \sum_{|n| \leq P} \tilde{h}_n v_{2k+n}^j \quad (4.11)$$

avec  $\sum_{|n| \leq P} \tilde{h}_n = 2$ . Cet opérateur va nous permettre d’établir un lemme qui jouera un rôle dans l’analyse de la stabilité.

**Lemme 4.1.** *Il existe une constante  $D > 0$ , telle que*

$$\|v_j\|_{L^p} \leq \|v_{j-1}\|_{L^p} + D2^{-j/p}\|\Delta v^j\|_{\ell^p}, \quad (4.12)$$

où  $v_j$  et  $v_{j-1}$  désignent les interpolations affines par morceaux de données  $v^j$  et  $v^{j-1}$  telles que  $v^{j-1} = P_{j-1}^j v^j$ .

**Démonstration :** Il suffit de montrer que l'on a

$$\|v_j - v_{j-1}\|_{L^p} \lesssim 2^{-j/p}\|\Delta v^j\|_{\ell^p}. \quad (4.13)$$

Nous avons vu dans la preuve du théorème 3.5 que

$$\|v_j - v_{j-1}\|_{L^p} \lesssim 2^{-j/p}(\|(v_{2k}^j - v_k^{j-1})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^p} + \|(v_{2k+1}^j - \frac{v_k^{j-1} + v_{k+1}^{j-1}}{2})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^p}). \quad (4.14)$$

Puisque  $v_k^{j-1} = \frac{1}{2} \sum_{|n| \leq P} \tilde{h}_n v_{2k+n}^j$  avec  $\sum_n \tilde{h}_n = 2$ , on peut écrire

$$v_k^{j-1} - v_{2k}^j = \sum_{|n| \leq P} c_n v_{2k+n}^j, \quad (4.15)$$

et

$$\frac{v_k^{j-1} + v_{k+1}^{j-1}}{2} - v_{2k+1}^j = \sum_{|n| \leq P+2} d_n v_{2k+n}^j, \quad (4.16)$$

avec  $\sum c_n = \sum d_n = 0$ . Par le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 3.3, nous en déduisons

$$v_k^{j-1} - v_{2k}^j = \sum_{|n| \leq P} \tilde{c}_n \Delta v_{2k+n}^j, \quad (4.17)$$

et

$$\frac{v_k^{j-1} + v_{k+1}^{j-1}}{2} - v_{2k+1}^j = \sum_{|n| \leq P+2} \tilde{d}_n \Delta v_{2k+n}^j, \quad (4.18)$$

ce qui entraîne (4.13).  $\square$

**Remarque 4.1.** *Puisque l'opérateur de restriction est linéaire, on obtient de la même manière*

$$\|v_j - \tilde{v}_j\|_{L^p} \leq \|v_{j-1} - \tilde{v}_{j-1}\|_{L^p} + D2^{-j/p}\|\Delta v^j - \Delta \tilde{v}^j\|_{\ell^p}, \quad (4.19)$$

avec  $v^{j-1} = P_{j-1}^j v^j$  et  $\tilde{v}^{j-1} = P_{j-1}^j \tilde{v}^j$

**Remarque 4.2.** *L'existence d'un opérateur de restriction de la forme*

$$v_k^{j-1} := \frac{1}{2} \sum_{|n| \leq P} \tilde{h}_n v_{2k+n}^j, \quad (4.20)$$

avec  $\sum_{|n| \leq P} \tilde{h}_n = 2$ , se transmet sur les différences finies : en utilisant la relation (4.20) on obtient

$$\begin{aligned} (\Delta v^{j-1})_k &= \frac{1}{2} \sum_{|n| \leq P} \tilde{h}_n (v_{2k+2+n}^j - v_{2k+n}^j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|n| \leq P} \tilde{h}_n ((\Delta v^j)_{2k+1+n} + (\Delta v^j)_{2k+n}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|n| \leq P+1} (\tilde{h}_n + \tilde{h}_{n+1}) (\Delta v^j)_{2k+n}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(\Delta v^{j-1})_k = \sum_{|n| \leq P+1} \tilde{h}_n^1 (\Delta v^j)_{2k+n}, \quad (4.21)$$

avec  $\tilde{h}_n^1 := \frac{1}{2}(\tilde{h}_n + \tilde{h}_{n+1})$ , et par conséquent  $\sum_{|n| \leq P+1} \tilde{h}_n^1 = 2$ . On a plus généralement pour  $m > 1$ ,

$$(\Delta^m v^{j-1})_k := \sum_{|n| \leq P+m} \tilde{h}_n^m (\Delta^m v^j)_{2k+n}, \quad (4.22)$$

avec  $\tilde{h}_n^m := \tilde{h}_n^{m-1} + \tilde{h}_{n+1}^{m-1}$  et  $\sum_{|n| \leq P+m} \tilde{h}_n^m = 2^m$ . Cette remarque nous sera utile par la suite.

Le lemme suivant nous apporte une estimation sur la perturbation des différences finies  $\|\Delta v^j - \Delta \tilde{v}^j\|_{\ell^p}$  induite par les perturbations aux échelles plus grossières.

**Lemme 4.2.** *On suppose que  $S$  reproduit les constantes. Soit  $\rho > \rho_p(S_1)$  et  $r < \rho$ . Si l'une des données est telle que*

$$\|d^j\|_{\ell^p} \lesssim r^j \quad (4.23)$$

on a alors

$$\|\Delta v^j - \Delta \tilde{v}^j\|_{\ell^p} \lesssim \rho^j \sum_{l=0}^{j-1} \|v^l - \tilde{v}^l\|_{\ell^p} + \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p}, \quad (4.24)$$

**Démonstration :** puisque  $\rho > \rho_p(S_1)$ , il existe  $L > 0$  telle que

$$\|S_1(w^1) \cdots S_1(w^L)\|_{\ell^p} \leq \rho^L, \quad (4.25)$$

pour tout  $L$ -uplet de suites  $(w^1, \dots, w^L)$ .

On suppose maintenant que  $j \geq L$ . En itérant  $L$  fois les relations (4.4) et (4.5), on obtient l'estimation

$$\|\Delta v^j - \Delta \tilde{v}^j\|_{\ell^p} \leq X^j + \sum_{l=1}^L Y^{j,l}, \quad (4.26)$$

où

$$X^j := \|S_1(v^{j-1}) \dots S_1(v^{j-L}) \Delta v^{j-L} - S_1(\tilde{v}^{j-1}) \dots S_1(\tilde{v}^{j-L}) \Delta \tilde{v}^{j-L}\|_{\ell^p}, \quad (4.27)$$

et

$$Y^{j,l} := \|S_1(v^{j-1}) \dots S_1(v^{j-l+1}) \Delta d^{j-l} - S_1(\tilde{v}^{j-1}) \dots S_1(\tilde{v}^{j-l+1}) \Delta \tilde{d}^{j-l}\|_{\ell^p}. \quad (4.28)$$

Nous pouvons estimer le terme  $X^j$  suivant  $X^j \leq X_a^j + X_b^j$  avec

$$X_a^j = \|S_1(v^{j-1}) \dots S_1(v^{j-L}) (\Delta v^{j-L} - \Delta \tilde{v}^{j-L})\|_{\ell^p}, \quad (4.29)$$

et

$$X_b^j = \|S_1(v^{j-1}) \dots S_1(v^{j-L}) - S_1(\tilde{v}^{j-1}) \dots S_1(\tilde{v}^{j-L})\|_{\ell^p} \|\Delta v^{j-L}\|_{\ell^p}. \quad (4.30)$$

Pour  $X_a^j$ , nous avons d'après (4.25)

$$X_a^j \leq \rho^L \|\Delta v^{j-L} - \Delta \tilde{v}^{j-L}\|_{\ell^p}, \quad (4.31)$$

En utilisant la propriété de stabilité (4.10) et le fait que  $\|S(w)\|_{\ell^p}$  est uniformément borné, nous pouvons écrire

$$\|S_1(v^{j-1}) \dots S_1(v^{j-L}) - S_1(\tilde{v}^{j-1}) \dots S_1(\tilde{v}^{j-L})\|_{\ell^p} \lesssim \sum_{l=1}^L \|v^{j-l} - \tilde{v}^{j-l}\|_{\ell^p}. \quad (4.32)$$

Par conséquent nous obtenons l'estimation

$$X^j \leq \rho^L \|\Delta v^{j-L} - \Delta \tilde{v}^{j-L}\|_{\ell^p} + C \|\Delta v^{j-L}\|_{\ell^p} \left( \sum_{l=1}^L \|v^{j-l} - \tilde{v}^{j-l}\|_{\ell^p} \right). \quad (4.33)$$

Rappelons à présent l'estimation

$$\|\Delta v^j\|_{\ell^p} \lesssim \rho^j \|\Delta v^0\|_{\ell^p} + \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} \|\Delta d^l\|_{\ell^p}, \quad (4.34)$$

déjà démontrée dans la preuve du lemme 3.1. En utilisant l'hypothèse (4.23), on obtient

$$\|\Delta v^j\|_{\ell^p} \lesssim \rho^j \left(1 + \sum_{l=0}^{j-1} (\rho/r)^{-l}\right) \lesssim \rho^j. \quad (4.35)$$

En combinant ceci avec (4.33) nous obtenons l'estimation

$$X^j \leq \rho^L \|\Delta v^{j-L} - \Delta \tilde{v}^{j-L}\|_{\ell^p} + C \rho^{j-L} \left( \sum_{l=1}^L \|v^{j-l} - \tilde{v}^{j-l}\|_{\ell^p} \right). \quad (4.36)$$

Par la même méthode, nous obtenons pour chacun des termes  $Y^{j,l}$  l'estimation

$$Y^{j,l} \lesssim \|\Delta d^{j-l} - \Delta \tilde{d}^{j-l}\|_{\ell^p} + \|\Delta d^{j-l}\|_{\ell^p} \left( \sum_{k=1}^l \|v^{j-k} - \tilde{v}^{j-k}\|_{\ell^p} \right). \quad (4.37)$$

En appliquant l'hypothèse (4.23) on en déduit

$$Y^{j,l} \lesssim \|\Delta d^{j-l} - \Delta \tilde{d}^{j-l}\|_{\ell^p} + r^{j-l} \left( \sum_{k=1}^l \|v^{j-k} - \tilde{v}^{j-k}\|_{\ell^p} \right). \quad (4.38)$$

Pour simplifier la présentation nous introduisons les notations  $\alpha^j := \|v^j - \tilde{v}^j\|_{\ell^p}$ ,  $\beta^j := \|\Delta v^j - \Delta \tilde{v}^j\|_{\ell^p}$  et  $\gamma^j := \|\Delta d^j - \Delta \tilde{d}^j\|_{\ell^p}$ . En injectant les estimations (4.36) et (4.38) dans (4.26), nous obtenons

$$\begin{aligned} \beta^j &\leq \rho^L \beta^{j-L} + C \left( \rho^{j-L} \sum_{l=1}^L \alpha^{j-l} + \sum_{l=1}^L (\gamma^{j-l} + r^{j-l} \sum_{k=1}^l \alpha^{j-k}) \right) \\ &= \rho^L \beta^{j-L} + C \rho^{j-L} \sum_{l=1}^L \alpha^{j-l} \left(1 + \sum_{k=l+1}^L (r/\rho)^j r^{-k} \rho^L\right) + C \sum_{l=1}^L (\gamma^{j-l} \\ &\leq \rho^L \beta^{j-L} + C \rho^{j-L} \sum_{l=1}^L \alpha^{j-l} \left(1 + \sum_{k=l+1}^L r^{-k} \rho^L\right) + C \sum_{l=1}^L \gamma^{j-l} \\ &\leq \rho^L \beta^{j-L} + C (\rho^{j-L} \sum_{l=1}^L \alpha^{j-l} + \sum_{l=1}^L \gamma^{j-l}), \end{aligned}$$

quitte à modifier la constante  $C$  dans la dernière inégalité. En itérant cette inégalité, nous obtenons

$$\begin{aligned} \beta^j &\leq \rho^{2L} \beta^{j-2L} + C (\rho^{j-L} \sum_{l=1}^{2L} \alpha^{j-l} + \sum_{l=1}^L \gamma^{j-l} + \rho^L \sum_{l=1}^L \gamma^{j-L-l}) \\ &\leq \rho^{kL} \beta^{j-kL} + C (\rho^{j-L} \sum_{l=1}^{kL} \alpha^{j-l} + \sum_{m=0}^k (\rho^{mL} \sum_{l=1}^L \gamma^{j-mL-l})). \end{aligned}$$

En prenant  $k = [j/L]$ , nous pouvons par conséquent écrire

$$\beta^j \lesssim \rho^j \left( \max_{n < L} \beta^n \right) + \rho^j \sum_{l=0}^{j-1} \alpha^l + \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} \gamma_l. \quad (4.39)$$



Pour  $n = 0, \dots, L - 1$ , la propriété (4.8) de stabilité de l'opérateur de subdivision  $S$  nous permet d'obtenir directement

$$\beta^n = \|\Delta v^n - \Delta \tilde{v}^n\|_{\ell^p} \leq 2\|v^n - \tilde{v}^n\|_{\ell^p} \lesssim \sum_{l=0}^{n-1} \|v^l - \tilde{v}^l\|_{\ell^p} + \sum_{l=0}^{n-1} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p}. \quad (4.40)$$

En combinant avec l'estimation précédente, nous obtenons par conséquent

$$\beta^j \lesssim \rho^j \sum_{l=0}^{j-1} \alpha^l + \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} \gamma_l, \quad (4.41)$$

c'est à dire le résultat annoncé dans le cas  $j \geq L$ . Dans le cas  $j < L$ , ce même résultat est une conséquence de (4.40).  $\square$

### 4.3 Stabilité dans les espaces $L^p$

La propriété de stabilité que nous allons prouver pour le contrôle de l'erreur de reconstruction dans les espaces  $L^p$  est de la forme

$$\|v - \tilde{v}\|_{L^p} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \sum_{l \geq 0} 2^{-l/p} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p}, \quad (4.42)$$

Cette forme est sous-optimale dans le cas  $1 < p < \infty$ , au sens où il existe une meilleure estimation dans le cas des représentations linéaires correspondant aux décompositions dans des bases d'ondelettes : par exemple, dans le cas  $p = 2$ , la propriété de base de Riesz entraîne

$$\|v - \tilde{v}\|_{L^2}^2 \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^2}^2 + \sum_{l \geq 0} 2^{-2l/p} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^2}^2. \quad (4.43)$$

Nous n'avons pas réussi à prouver la validité de (4.43) pour les représentations non-linéaires. Ce défaut sera corrigé dans le cas des espaces de Besov  $B_{p,q}^s$  étudiés dans la section suivante, et pour lesquels l'estimation obtenue sera identique à celle des représentations linéaires.

Afin de prouver l'estimation (4.42), nous serons amenés à faire l'hypothèse  $\rho_p(S_1) < 1$  et  $\|d^j\|_{\ell^p} \lesssim r^j$  avec  $r < 1$  pour l'une des données. Dans le cas  $p = \infty$ , ceci signifie que la fonction  $v \in L^\infty$  est aussi dans  $C^\varepsilon$ , où  $\varepsilon > 0$  peut être arbitrairement petit. Dans le cas  $p < \infty$ , ceci entraîne une limitation plus sévère :  $v \in L^p$  est aussi dans  $W^{s,p}$  pour un  $s > 1/p$  (et  $s > d/p$  dans le cas multidimensionnel), ce qui exclut d'emblée les fonctions discontinues.

**Théorème 4.1.** *On suppose que  $S$  reproduit les constantes et que  $\rho_p(S_1) < 1$ . Si  $\|d^j\|_{\ell^p} \lesssim r^j$  avec  $r < 1$ , on a*

$$\|v - \tilde{v}\|_{L^p} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \sum_{l \geq 0} 2^{-l/p} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p}. \quad (4.44)$$

**Démonstration :** il nous suffit de prouver que l'on a

$$\|v_j - \tilde{v}_j\|_{L^p} \lesssim \|v_0 - \tilde{v}_0\|_{L^p} + \sum_{l=1}^j 2^{-l/p} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p}, \quad (4.45)$$

avec une constante indépendante de  $j$ . On introduit les notations suivantes :  $\alpha^j := \|v_j - \tilde{v}_j\|_{L^p}$ ,  $\beta^j := 2^{-j/p} \|\Delta v^j - \Delta \tilde{v}^j\|_{\ell^p}$  et  $\gamma^j := 2^{-j/p} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p}$ .

Soit  $\rho$  tel que  $\rho_p(S_1) < \rho < 1$  et  $r < \rho$ . En appliquant le lemme 4.2, on obtient

$$\begin{aligned} \beta^j &\lesssim \rho^j \sum_{l=0}^{j-1} 2^{-j/p} \|v^l - \tilde{v}^l\|_{\ell^p} + \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} 2^{-j/p} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p} \\ &\leq \rho^j \sum_{l=0}^{j-1} 2^{-l/p} \|v^l - \tilde{v}^l\|_{\ell^p} + \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} 2^{-l/p} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p} \\ &\lesssim \rho^j \sum_{l=0}^{j-1} \alpha^l + \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} \gamma^l. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la remarque 4.1, nous avons

$$\alpha^j \leq \alpha^{j-1} + D\beta^j, \quad (4.46)$$

Si l'on considère les suites croissantes  $\bar{\alpha}^j$  et  $\bar{\beta}^j$  définies par  $\bar{\alpha}^0 = \alpha^0$ ,  $\bar{\beta}^0 = \beta^0$  et

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^j &= \bar{\alpha}^{j-1} + D\bar{\beta}^j, \\ \bar{\beta}^j &= C\rho^j \sum_{l=0}^{j-1} \alpha^l + \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} \gamma^l, \end{cases} \quad (4.47)$$

nous avons clairement  $\alpha^j \leq \bar{\alpha}^j$  et

$$\bar{\beta}^j \leq Cj\rho^j \bar{\alpha}^{j-1} + C \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} \gamma^l. \quad (4.48)$$

En combinant cette inégalité avec la première égalité de (4.47), on obtient

$$\bar{\alpha}^j \leq (1 + CDj\rho^j) \bar{\alpha}^{j-1} + C \left( \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} \gamma^l \right), \quad (4.49)$$

et par itération

$$\bar{\alpha}^j \leq \prod_{l=1}^j (1 + CDl\rho^l) \alpha^0 + C \sum_{l=1}^j \left( \prod_{k=l+1}^j (1 + CDk\rho^k) \left( \sum_{k=0}^{l-1} \rho^k \gamma^{l-1-k} \right) \right). \quad (4.50)$$

Puisque  $\rho < 1$ , le produit  $\prod_{l=0}^{\infty} (1 + CDl\rho^l)$  est convergent et uniformément borné. On en déduit

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}^j &\lesssim \alpha^0 + \sum_{l=1}^j \sum_{k=0}^{l-1} \rho^k \gamma^{l-1-k} \\ &\lesssim \alpha^0 + \sum_{l=0}^{j-1} \gamma^l,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\|v_j - \tilde{v}_j\|_{L^p} \leq \bar{\alpha}^j \lesssim \alpha^0 + \sum_{l=1}^j \gamma^l = \|v_0 - \tilde{v}_0\|_{L^p} + \sum_{l=1}^j 2^{-\frac{l}{p}} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p}, \quad (4.51)$$

ce qui démontre le résultat annoncé.  $\square$

## 4.4 Stabilité dans les espaces de Besov

Nous abordons à présent les propriétés de stabilité pour le contrôle de l'erreur de reconstruction dans les espaces  $B_{p,q}^s$ . Comme dans le chapitre 3, nous considérons d'abord le cas  $0 < s < 1$ .

**Théorème 4.2.** *On suppose que  $S$  reproduit les constantes et que  $\rho_p(S_1) < 1$ . Si  $(v^0, d^0, d^1, \dots)$  et  $(\tilde{v}^0, \tilde{d}^0, \tilde{d}^1, \dots)$  sont tels que*

$$\|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} < \infty, \quad (4.52)$$

et

$$\|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} < \infty, \quad (4.53)$$

pour un  $s > 0$  tel que  $s < -\frac{\log(\rho_p(S_1))}{\log 2} + \frac{1}{p}$  et  $s > \frac{1}{p}$ , alors la fonction  $v - \tilde{v}$  appartient à  $B_{p,q}^s$  et on a de plus

$$\|v - \tilde{v}\|_{B_{p,q}^s} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \quad (4.54)$$

**Démonstration :** puisque  $\|d^j\|_{\ell^p} \lesssim 2^{(s-1/p)j}$  avec  $s > \frac{1}{p}$ , nous pouvons tout d'abord appliquer le théorème 4.1 qui nous donne

$$\begin{aligned}\|v - \tilde{v}\|_{L^p} &\lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \sum_{l \geq 0} 2^{-l/p} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p} \\ &\leq \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \|(2^{-sj})_{j \geq 0}\|_{\ell^{q'}} \\ &\lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q},\end{aligned}$$

Il nous reste à évaluer la semi-norme

$$|w|_{B_{p,q}^s} := \|(2^{js} \omega_1(w, 2^{-j})_{L^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}, \quad (4.55)$$

pour  $w := v - \tilde{v}$ . Pour chaque  $j \geq 0$ , on évalue  $\omega_1(w, 2^{-j})_{L^p}$  en écrivant

$$\omega_1(w, 2^{-j})_{L^p} \leq \omega_1(w - w_j, 2^{-j})_{L^p} + \omega_1(w_j, 2^{-j})_{L^p}, \quad (4.56)$$

où nous avons utilisé la notation  $w_j = v_j - \tilde{v}_j$ .

Le premier terme, nous utilisons successivement les lemmes 3.1 et 4.2, et le théorème 4.1, qui nous donnent pour  $\rho$  tel que  $\rho_p(S_1) < \rho < 1$ ,

$$\begin{aligned} \omega_1(w - w_j, 2^{-j})_{L^p} &\lesssim \sum_{n \geq j} \|w_{n+1} - w_n\|_{L^p} \\ &\lesssim \sum_{n \geq j} 2^{-n/p} [\|\Delta v^n - \Delta \tilde{v}^n\|_{\ell^p} + \|d^n - \tilde{d}^n\|_{\ell^p}] \\ &\lesssim \sum_{n \geq j} 2^{-n/p} [\rho^n \sum_{k=0}^{n-1} \|v^k - \tilde{v}^k\|_{\ell^p} + \sum_{k=0}^n \rho^{n-k} \|d^k - \tilde{d}^k\|_{\ell^p}] \\ &\lesssim \sum_{n \geq j} 2^{-n/p} [n \rho^n \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \sum_{k=0}^n (\rho^{n-k} + (n-k)\rho^n) \|d^k - \tilde{d}^k\|_{\ell^p}] \\ &\lesssim \sum_{n \geq j} 2^{-n/p} [n \rho^n \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \sum_{k=0}^n \rho^{n-k} \|d^k - \tilde{d}^k\|_{\ell^p}]. \end{aligned}$$

En réarrangeant les sommes, nous obtenons

$$\omega_1(w - w_j, 2^{-j})_{L^p} \lesssim 2^{-j/p} j \rho^j \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + 2^{-j/p} \sum_{l=0}^j \rho^{j-l} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p} + \sum_{l > j} 2^{-l/p} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p}.$$

Le deuxième terme de (4.56) est évalué suivant

$$\begin{aligned} \omega_1(v_j - \tilde{v}_j, 2^{-j})_{L^p} &\lesssim 2^{-j} \|v'_j - \tilde{v}'_j\|_{L^p} \\ &\lesssim 2^{-j/p} \|\Delta v^j - \Delta \tilde{v}^j\|_{\ell^p} \\ &\lesssim 2^{-j/p} \rho^j \sum_{l=0}^{j-1} \|v^l - \tilde{v}^l\|_{\ell^p} + 2^{-j/p} \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p} \\ &\lesssim 2^{-j/p} j \rho^j \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + 2^{-j/p} \sum_{l=0}^{j-1} (\rho^{j-l} + (j-l)\rho^j) \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p} \\ &\lesssim 2^{-j/p} j \rho^j \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + 2^{-j/p} \sum_{l=0}^{j-1} \rho^{j-l} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p}. \end{aligned}$$

On a ainsi ramené l'estimation de  $|w|_{B_{p,q}^s}$  à celle de  $\|(2^{js} a_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q}$ ,  $\|(2^{js} b_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q}$  et  $\|(2^{js} c_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q}$ , où les suites sont définies par  $a_j := j 2^{-j/p} \rho^j \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p}$ ,  $b_j := 2^{-j/p} \sum_{l=0}^j \rho^{j-l} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p}$  et  $c_j := \sum_{l > j} 2^{-l/p} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^p}$ . En utilisant les techniques d'inégalité de Hardy déjà utilisées dans la preuve du théorème 3.7 nous obtenons facilement les estimations suivantes :

$$\|(2^{js} a_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p}, \quad (4.57)$$

$$\|(2^{js} b_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}, \quad (4.58)$$

et

$$\|(2^{js} c_j)_{j \geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \quad (4.59)$$

En combinant (4.57), (4.58) et (4.59), on obtient par conséquent

$$|v - \tilde{v}|_{B_{p,q}^s} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}, \quad (4.60)$$

et le théorème est ainsi démontré.  $\square$

Le théorème suivant concerne la stabilité pour la norme  $B_{p,q}^s$  avec  $s > 1$ . Sa démonstration utilise la même récurrence que celle utilisée dans la preuve du théorème 3.8, et par conséquent nous présentons sa preuve sous une forme condensée.

**Théorème 4.3.** *On suppose que  $S$  reproduit les polynômes jusqu'au degré  $m - 1$  et que pour un entier  $n \in \{1, \dots, m\}$  on a  $\rho_p(S_n) < 2^{1/p-n+1} < 1$ . Si  $(v^0, d^0, d^1, \dots)$  et  $(\tilde{v}^0, \tilde{d}^0, \tilde{d}^1, \dots)$  sont tels que*

$$\|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} < \infty, \quad (4.61)$$

et

$$\|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q} < \infty, \quad (4.62)$$

pour un  $s$  tel que  $s < -\frac{\log(\rho_p(S_n))}{\log 2} + \frac{1}{p}$  et  $s > \frac{1}{p}$ , alors la fonction  $v - \tilde{v}$  appartient à  $B_{p,q}^s$  et on a de plus

$$\|v - \tilde{v}\|_{B_{p,q}^s} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \quad (4.63)$$

**Démonstration :** en utilisant  $\rho_p(S_1) < 1$ , on obtient l'estimation

$$\|v - \tilde{v}\|_{L^p} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}.$$

On procède alors de la même manière que dans la preuve du théorème 3.8 : pour  $n = 2$  en introduisant la suite des différences finies renormalisées

$$w^j - \tilde{w}^j := 2^j (\Delta v^j - \Delta \tilde{v}^j), \quad (4.64)$$

et son interpolation  $w_j - \tilde{w}_j$ . On montre alors (en utilisant en particulier la remarque 4.2) que  $w_j - \tilde{w}_j$  converge dans  $L^p$  vers une fonction  $w - \tilde{w} \in B_{p,q}^t$  pour tout  $t$  tel que  $t < -\frac{\log(\rho_p(S_2))}{\log 2} - 1 + \frac{1}{p}$ , avec

$$|w - \tilde{w}|_{B_{p,q}^t} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(t+1-1/p)j} \|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j \geq 0}\|_{\ell^q}, \quad (4.65)$$

On montre ensuite que  $w - \tilde{w}$  est la dérivée faible de  $v - \tilde{v}$ , ce qui entraîne le résultat recherché pour  $n = 2$ . En itérant cet argument on obtient le résultat général annoncé.  $\square$

## 4.5 Application aux représentations WENO

Nous allons appliquer les résultats de ce chapitre aux représentations non-linéaires basées sur la prédiction WENO. Rappelons que cette prédiction est donnée par la formule (1.82), qui correspond à une combinaison convexe des formules d'interpolation (1.52), (1.74) et (1.75), avec des poids définis dans (1.81) qui dépendent régulièrement des données.

Nous avons déjà étudié à la fin du chapitre précédent le rayon spectral conjoint  $\rho_\infty(S_1)$  de la règle  $S_1$  associé à la prédiction WENO. Afin d'appliquer les résultats de stabilité, il nous reste donc à vérifier la propriété (4.9) de dépendance lipschitzienne des coefficients de la règle  $S$  par rapport aux données.

**Proposition 4.1.** *La propriété (4.9) est vérifiée par la prédiction WENO avec les poids définis par (1.81).*

**Démonstration :** Soient  $w, \tilde{w} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ . A partir de (1.82), nous obtenons

$$a_{k,2l}(w) = a_{k,2l}(\tilde{w}) = \delta(k - l), \quad (4.66)$$

et

$$|a_{k,2l+1}(w) - a_{k,2l+1}(\tilde{w})| \lesssim \sum_{|n| \leq 1} |\alpha_{l,n}(w) - \alpha_{l,n}(\tilde{w})|, \quad (4.67)$$

avec les  $\alpha_{l,n}$  définis par (1.81). Nous sommes ainsi amenés à évaluer  $|\alpha_{l,n}(w) - \alpha_{l,n}(\tilde{w})|$  pour  $n = -1, 0, 1$ . D'après leur définition, les poids  $\alpha_{l,n}$  sont de la forme

$$\alpha_{l,n} = F_n(\beta_{l,-1}, \beta_{l,0}, \beta_{l,1}), \quad F_n(x_{-1}, x_0, x_1) := \frac{x_n}{x_{-1} + x_0 + x_1}. \quad (4.68)$$

Les coefficients  $\beta_{l,m}$  sont eux-même de la forme

$$\beta_{l,m} = G_m(\gamma_{l,m}), \quad G_m(x) := \frac{\delta_m}{(\varepsilon + x)^2}, \quad (4.69)$$

pour  $m = -1, 0, 1$ . Enfin, d'après (1.81) les coefficients  $\gamma_{l,m}$  sont des formes quadratiques des données locales du type

$$\gamma_{l,m}(w) = Q_m(w_{l-1+m} - w_{l+m}, w_{l+m} - w_{l+1+m}), \quad (4.70)$$

avec

$$Q_m(x_1, x_2) := a_m x_1^2 + b_m x_2^2 + 2c_m x_1 x_2 \quad (4.71)$$

où la matrice  $\begin{pmatrix} a_m & c_m \\ c_m & b_m \end{pmatrix}$  est définie positive. Afin de prouver (4.9), il nous faut donc vérifier que l'application

$$H_n = F_n \circ (G_m \circ Q_m)_{|m| \leq 1}, \quad (4.72)$$

obtenue par composition successive de ces applications est lipschitzienne en fonction des données (ca n'est évidemment pas le cas si l'on regarde chaque application individuellement). Pour cela, il nous suffit de majorer pour  $n, p = -1, 0, 1$  et  $j = 1, 2$  le produit  $\Pi$  des quantités

$$\frac{\partial G_p \circ Q_p}{\partial x_j} (w_{l-1+p} - w_{l+p}, w_{l+p} - w_{l+1+p}), \quad (4.73)$$

et

$$\frac{\partial H_n}{\partial x_p} (G_m \circ Q_m (w_{l-1+m} - w_{l+m}, w_{l+m} - w_{l+1+m}))_{|m| \leq 1} \quad (4.74)$$

indépendamment des données  $w$ . En multipliant les estimations,

$$\left| \frac{\partial G_p \circ Q_p}{\partial x_j} \right| = \frac{2}{\delta_p} \left| \frac{\partial Q_p}{\partial x_j} \right| |\varepsilon + Q_p|^{-3} = 2 \left| \frac{\partial Q_p}{\partial x_j} \right| |\varepsilon + Q_p|^{-1} G_p \circ Q_p \quad (4.75)$$

et

$$\left| \frac{\partial H_n}{\partial x_p} \right| = \frac{|(x_{-1} + x_0 + x_1)\delta(p-n) - x_p|}{(x_{-1} + x_0 + x_1)^2} \leq \frac{1}{|x_{-1} + x_0 + x_1|}, \quad (4.76)$$

nous obtenons la borne

$$\begin{aligned} \Pi &\leq 2 \left| \frac{\partial Q_p}{\partial x_j} \right| |\varepsilon + Q_p|^{-1} \frac{G_p \circ Q_p}{\sum_{|m| \leq 1} G_m \circ Q_m} \\ &\leq 2 \left| \frac{\partial Q_p}{\partial x_j} \right| |\varepsilon + Q_p|^{-1} \end{aligned}$$

Nous concluons en utilisant le fait que pour toute application linéaire  $L$  et pour toute forme quadratique définie positive  $Q$ , on a  $|L(x)| \lesssim \varepsilon + Q(x)$ .  $\square$

Nous pouvons à présent combiner la propriété (4.9) avec l'évaluation du rayon spectral conjoint  $\rho_\infty(S_1)$  que nous avons effectuée dans la dernière section du chapitre précédent, afin d'appliquer les théorème de stabilité 4.1 et 4.2. Nous obtenons ainsi le résultat suivant.

**Théorème 4.4.** *Les représentations ponctuelles basées sur la prédiction WENO, définie par (1.82) avec les poids (1.81), vérifient les propriétés de stabilité*

$$\|v - \tilde{v}\|_{L^\infty} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^\infty} + \sum_{l \geq 0} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^\infty}. \quad (4.77)$$

et

$$\|v - \tilde{v}\|_{C^s} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^\infty} + \sup_{l \geq 0} 2^{sl} \|d^l - \tilde{d}^l\|_{\ell^\infty}. \quad (4.78)$$

avec  $s < -\frac{\log(\rho_\infty(S_1))}{\log 2} \approx 0.6601499$ .



# APPLICATIONS

# Chapitre 5

## Applications

Le but de ce chapitre est de tester les représentations multiéchelles non-linéaires sur deux applications : la compression et le débruitage des images fixes. Nous souhaitons en particulier comparer les représentations basées sur la prédiction adaptée aux contours ENO-EA et les décompositions en ondelettes biorthogonales BW. Puisque ces représentations ont exactement la même organisation multiéchelle, une telle comparaison peut s'effectuer en appliquant les mêmes algorithmes de quantification (pour la compression) ou de seuillage (pour le débruitage) aux deux types de représentations.

Comme nous l'avons déjà expliqué dans l'introduction de cette thèse, les performances des méthodes ondelettes dans ces deux applications sont directement liées au degré de concentration des coefficients de l'image ou de manière équivalente, à la qualité des approximations obtenues lorsque l'on garde les  $n$  plus grands coefficients. Nous avons observé dans le chapitre 2 que pour ce dernier point de vue, l'utilisation des représentations ENO-EA apporte, par comparaison aux représentations BW, des améliorations significatives en norme  $L^2$  pour les images géométriques ainsi que des améliorations visuelles pour les images réelles peu texturées. Nous pouvons par conséquent anticiper des améliorations similaires à l'issue des algorithmes de compression et de débruitage, mais il convient d'être prudent puisque les processus de quantification et de seuillage se heurtent en théorie à l'instabilité de la représentation. Ce problème n'a pas été résolu par les résultats du chapitre 4, puisque ceux-ci ne s'appliquent pas aux représentations ENO-EA.

Nous présentons tout d'abord les résultats numériques obtenus pour la compression d'images fixes. Après avoir rappelé quelques principes généraux du codage par transformée, nous entrons dans le vif du sujet en appliquant aux représentations BW et ENO-EA deux algorithmes de codage qui consti-

tuent l'état de l'art actuel en matière de compression des représentations multiéchelle : l'algorithme EZW de Shapiro [59] et l'algorithme EBCOT de Taubman [60]. Les résultats obtenus confirment les résultats numériques du chapitre 2 : les représentations ENO-EA apportent des améliorations pour les images géométriques et les images réelles peu texturées. Les codeurs EZW et EBCOT ont été conçus pour exploiter au mieux les corrélations subsistant dans les représentations en ondelettes (corrélations inter-échelles pour EZW et intra-échelles pour EBCOT). Dans les représentations ENO-EA, les coefficients numériquement importants ne se concentrent plus a priori au voisinage des contours et on peut ainsi s'attendre à des lois de corrélation différentes qui suggèrent d'utiliser autres stratégies de codage que EZW et EBCOT. Nous proposons ici une stratégie de codage des représentations ENO-EA obtenue par une modification de l'algorithme EBCOT. Cette stratégie apporte des améliorations supplémentaires en norme  $L^2$  dans le cas des images géométriques.

Nous présentons finalement quelques résultats de débruitage utilisant l'algorithme de seuillage introduit par Donoho, Johnstone, Kerkyacharian et Picard [38]. Les améliorations les plus spectaculaires obtenues par l'utilisation des représentations non-linéaires sont observées dans le cadre monodimensionnel avec les représentations ENO-SR. On est ici amené à modifier les algorithmes de seuillages, conçus pour les représentations linéaires dans des bases, afin d'améliorer les performances du débruitage basé sur les représentations ENO-SR. Dans le cas des images, les améliorations apportées par les représentations ENO-EA sont observées sur les images géométriques, mais aussi sur les images réelles lorsque le niveau du bruit est élevé.

## 5.1 Compression

### 5.1.1 Le codage par transformée

De façon générale, on peut distinguer deux catégories de méthodes pour la compression du signal : la compression sans perte d'information et la compression avec perte d'information. Dans le premier cas on exige l'identité entre l'information originale et l'information décompressée, ce qui limite pour les images le taux de compression à un facteur compris entre 2 et 3. Nos méthodes se situent dans le cadre de la compression avec perte, pour laquelle ce facteur peut être dépassé avec une dégradation de l'information imperceptible pour l'oeil humain.

Les expériences numériques que nous avons présenté dans le chapitre 2 ont essentiellement consisté à comparer l'effet du seuillage des coefficients sur

la reconstruction de l'image pour différentes représentations. Les algorithmes de compression que nous allons utiliser dans ce chapitre peuvent être conçus comme un raffinement de cette idée qui incorpore le codage des coefficients préservés et de leur adresse sur un nombre fini de bits. Ces algorithmes s'inscrivent ainsi dans le cadre des *schémas de codage par transformée* dont nous résumons la forme générale sur la figure 5.1. Avant de présenter plus en détail les algorithmes que nous avons choisis pour effectuer nos tests numériques, faisons quelques remarques d'ordre général sur les trois étapes constituant ces schémas : *transformation, quantification et codage*.

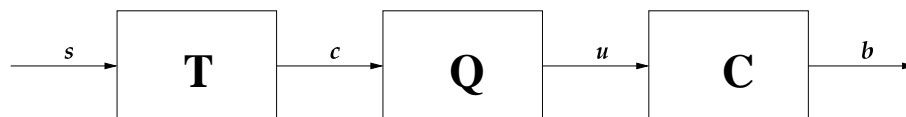


FIG. 5.1 – Schéma de codage par transformée

L'étape de *transformation*  $T$  consiste à modifier la représentation de l'information afin de faciliter la compression. Pour atteindre ce but, on choisit des transformées qui ont la propriété de concentrer l'information sur un petit nombre de coefficients. Cette étape est inversible, et  $T^{-1}$  sera donc appliqué comme dernière étape de la chaîne de décodage. Parmi les transformations les plus fréquemment utilisées, citons la transformée de Fourier discrète et ses dérivées - transformée en cosinus discrète, en cosinus locaux [28] ou par blocs [58] - et les décompositions en sous-bandes qui incluent les transformés en ondelettes ou en paquets d'ondelettes [29]. Remarquons que chacune de ces transformations est linéaire, par contraste avec les représentations étudiées dans cette thèse.

L'étape de *quantification*  $Q$  consiste à approcher les coefficients par des valeurs appartenant à un dictionnaire fini, de façon à pouvoir les coder. Cette étape est associée à une perte d'information et n'est donc pas inversible. Il existe deux types de quantification : la quantification scalaire et la quantification vectorielle. Dans le premier cas, la transformation  $Q$  agit séparément sur chaque coefficients de la représentation, alors qu'elle les traite par blocs dans le deuxième cas. La quantification vectorielle permet de réduire l'erreur de quantification au prix d'un algorithme plus complexe et plus difficile à optimiser. Il convient aussi de distinguer entre la quantification uniforme, dans laquelle les intervalles associée à une valeur quantifiée sont tous de même taille, et non-uniforme, dans laquelle cette taille peut varier.

L'étape de *codage*  $C$  va permettre de générer le flot binaire à partir duquel le décodeur sera capable de reconstruire l'image. En particulier, elle est inver-

sible et permet donc de reconstruire la représentation quantifiée. L'hypothèse sous-jacente à la plupart des méthodes de codage est l'hétérogénéité de la distribution de probabilité des différents coefficients à coder. Cette hétérogénéité permet de coder chaque symbole avec un nombre de bits adéquat et dépendant de sa probabilité d'apparition dans le signal (les symboles les plus fréquents sont codés avec le moins de bits). Elle est mesurée par l'entropie

$$H = - \sum_i p_i \log(p_i) \quad (5.1)$$

où  $p_i$  est la probabilité d'apparition du symbole  $s_i$ , qui indique le coût minimal du codage en nombre de bits moyen par coefficient quantifié. Les algorithmes de codage entropique, tels que le code de Huffman permettent d'approcher cette borne. Lorsqu'on se situe dans le cadre d'un modèle où les coefficients sont indépendants et uniformément distribués avec une loi de probabilité  $p$ , on peut optimiser de manière conjointe les stratégies de quantification et de codage en effectuant une quantification scalaire uniforme suivie d'un codage entropique. Le compromis entre le nombre moyen de bits  $N$  et l'erreur quadratique moyenne  $D$  par coefficient est donné par

$$N = -\frac{1}{2} \log(12D) + H(p) \quad (5.2)$$

où

$$H(p) = - \int p(t) \log(p(t)) dt, \quad (5.3)$$

est l'entropie différentielle de la loi  $p$ , ce qui suggère que la transformée  $T$  doit être choisie afin de minimiser l'entropie différentielle de la représentation. Cependant cette analyse ne prend pas en compte la persistance de dépendances contextuelles entre les coefficients qui peut être exploitée dans des codeurs plus sophistiqués. Dans le cas des décompositions en ondelettes classiques, ces dépendances sont typiquement liées l'influence des contours sur les coefficients : les coefficients numériquement significatifs ont tendances à s'organiser suivant des courbes à une échelle donnée, et suivant des arbres si on les examine à travers les différentes échelles. Par ailleurs, il est souhaitable que le codeur soit *progressif* : on souhaite obtenir à la sortie du codeur un flot binaire emboîté, pour lequel l'augmentation de l'exactitude croît avec le nombre de bits qui sont ajoutés au flot. Cette idée est semblable à la représentation d'un nombre : chaque décimale ajoutée augmente la précision du nombre. Ces aspects sont pris en compte dans les codeurs EZW et EBCOT que nous avons utilisés dans nos test numériques.

## 5.1.2 Les codeurs EZW et EBCOT

Les premiers codeurs utilisant les décompositions en ondelettes ont été proposés au début des années 1990. Une première approche visant à exploiter les dépendances entre les coefficients a consisté à utiliser la quantification vectorielle [6]. Il existe à l'heure actuelle un grand nombre de méthodes de codage spécifiquement adaptées à la structure et aux propriétés des représentations multiéchelles (voir [62]). Parmi les plus récentes et les plus efficaces, nous distinguons les codeurs EZW et EBCOT. L'algorithme de codage EZW (Embedded image coding using Zerotrees of Wavelet coefficients) a été introduit dans [59] et est basé sur la structure naturelle en arbre de la décomposition multiéchelle et sur la dépendance inter-échelles des coefficients. Une variante est le codeur SPHT (Set Partitioning Hierarchical Tree) introduit dans [57]. L'algorithme de codage EBCOT (Embedded Block Coding with Optimized Truncation), a été introduit récemment dans [60]. Il prend en compte la dépendance intra-échelles contextuelle des coefficients multiéchelles. Ce codeur vient d'être intégré dans le standard JPEG 2000. Nous rappelons brièvement ci-dessous les principes de ces algorithmes de codage et nous renvoyons le lecteur à [59] et [60] pour une présentation détaillée.

### Description de l'algorithme de codage EZW

Cet algorithme permet d'exploiter les corrélations inter-échelles qui subsistent dans les décompositions en ondelettes. Pour ce faire, on utilise l'information dont on dispose sur la taille des coefficients, pour distinguer les coefficients significatifs des non-significatifs. On en déduit une carte de significativité constituée, pour chaque pixel de l'image transformée, de l'indication binaire déterminant s'il est significatif ou non significatif. Cette carte va être codée en utilisant la structure hiérarchique en arbre de la décomposition multiéchelles.

L'algorithme EZW est un algorithme itératif à deux étapes. La première étape, appelée dominante, alterne avec la deuxième, appelée subordonnée. Une autre caractéristique de cet algorithme est qu'il est basé sur le raffinement successif de plans de bits.

Pour l'étape dominante, on choisit un seuil  $T$  au delà duquel un coefficient est déclaré significatif (ce seuil est la moitié du seuil utilisé pendant l'étape dominante précédente). Pendant cette étape, chaque coefficient de la décomposition multiéchelle est comparé à la valeur du seuil  $T$ . Si son amplitude est plus grande que  $T$ , alors ce coefficient est appelé significatif, autrement il sera considéré non-significatif et il sera quantifié à zéro. Si un coefficient est significatif pour la première fois (i.e. il a été non-significatif dans les étapes

dominantes précédentes), il sera quantifié à  $-3T/2$  ou  $3T/2$ , en fonction de son signe. Si un coefficient a été déjà trouvé comme significatif aux étapes dominantes précédentes, il sera mis dans une liste, appelée liste subordonnée, et sa quantification sera raffinée pendant l'étape subordonnée suivante. Durant l'étape dominante, on construit la liste des coefficients significatifs en associant à chaque coefficient de l'arbre de la décomposition en ondelettes un symbole, en accord avec sa significativité. Plus précisément, parmi les coefficients significatifs, on va distinguer les coefficients qui sont déjà significatifs et les coefficients qui deviennent significatifs pendant l'étape dominante en cours. Parmi les coefficients qui ne sont pas significatifs, on distingue ceux qui sont des zéros isolés (i.e. un noeud qui a un de ses descendants significatif), ceux qui sont des racines nulles (i.e. tous les descendants sont non-significatifs), et ceux qui sont une partie d'un arbre dont la racine est nulle. Afin de coder les changements dans la liste de coefficients significatifs, on parcourt l'arbre de la décomposition de façon qu'un noeud soit toujours visité avant ses descendants (ordre postfixé). Pour chaque coefficient, on code 0 si le noeud est une racine nulle, on code 1 si le noeud est un zéro isolé, on code 2 si le noeud est un nouveau coefficient significatif et positif, on code 3 si le noeud est un nouveau coefficient significatif et négatif, rien à coder autrement. Cette liste de symboles est codée ensuite en utilisant un codage arithmétique.

Pendant l'étape subordonnée, on raffine les représentations quantifiées des coefficients figurant dans la liste des coefficients significatifs. Plus précisément, si l'intervalle de quantification est de la forme  $[2nT, (2n + 2)T[$  (i.e. le coefficient est quantifié à la valeur  $(2n + 1)T$ ), on vérifie si le détail dans l'arbre de décomposition est plus grand ou plus petit que  $(2n + 1)T$ , et on code cette information (qui demande un seul bit). L'intervalle de quantification devient alors  $[2nT, (2n + 1)T[$  ou  $[(2n + 1)T, (2n + 2)T[$ . A nouveau, la suite de bits est codée par un codage arithmétique. Le seuil  $T$  est divisé par deux pour la prochaine étape dominante. Le seuil initial choisi pour la première étape dominante doit être plus petit que  $S$ , qui est l'amplitude maximale des coefficients de la décomposition, et plus grand que  $S/2$ . L'algorithme peut s'arrêter dès qu'un certain critère est satisfait : le nombre de bits codés ou l'erreur entre les décompositions originale et quantifiée.

### Description de l'algorithme de codage EBCOT

Cet algorithme possède deux caractéristiques principales : la première est le découpage de chaque sous-bande en blocs, et la seconde est d'utiliser pour chaque bloc un algorithme de codage adaptatif contextuel. Chaque sous-bande  $d^j$  est divisée en plusieurs blocs  $B_i^j$  qui ne se recouvrent pas, tels que  $d^j = \cup_i B_i^j$ .

Sur chacun des blocs on utilise des critères de minimisation du rapport débit-distorsion pour trouver le pas de quantification optimal. Si  $d_k^j$  représente le coefficient multiéchelle non-quantifié à la position  $k := (k_1, k_2)$  et à l'échelle  $j$ , alors sa quantification est définie de la façon suivante :

$$\nu_k^j := \left\lceil \frac{|d_k^j|}{\delta_j} \right\rceil, \quad (5.4)$$

où  $\delta_j$  est un paramètre dépendant de la sous-bande  $d^j$ . Dans la suite, chaque bloc de coefficients  $B_i^j$  est codé indépendamment des autres blocs, induisant comme résultat un flot binaire emboîté  $P_i^j$ .

Il nous reste à décrire le codage d'un bloc  $B_i^j$ . Le codage utilisé pour les coefficients de chaque bloc  $B_i^j$  est basé sur le raffinement successif des plans. On note  $p$  le nombre maximal de plans nécessaires pour le codage de tous les éléments du bloc  $B_i^j$  et  $\nu_k^j = (\nu_k^{j,p-1}, \dots, \nu_k^{j,0})$  la représentation binaire du coefficient  $\nu_k^j$ . Alors le flot binaire pour le bloc  $B_i^j$  est obtenu à partir du plan de raffinement le plus significatif vers le moins significatif, en trois étapes distinctes agissant sur le bloc  $B_i^j$ . Si  $\nu_k^{j,p-1} = 1$  on considère que le coefficient  $\nu_k^j$  est significatif dans le plan de raffinement  $p$ .

En fonction de la significativité d'un coefficient pour une étape donnée, on distingue plusieurs primitives de codage : le codage des coefficients qui ne sont pas encore significatifs, le codage des coefficients qui deviennent significatifs, le codage du signe de ces coefficients et enfin le codage du raffinement de précision pour les coefficients qui étaient déjà significatifs au cours des étapes précédentes. Dans le calcul de toutes ces primitives de codage, on exploite les configurations de voisinage des coefficients significatifs. Chaque primitive de codage fournit des suites de symboles différentes, correspondant à ces configurations. Si l'analyse de ces configurations est un point important de la méthode, elle présente l'inconvénient d'alourdir la complexité calculatoire de l'algorithme. En revanche, le traitement indépendant des blocs permet d'une part, une adaptativité dans certaines régions d'intérêt de l'image, et d'autre part peut faciliter l'implémentation parallèle de l'algorithme. Comme nous l'avons déjà remarqué, le codeur a trois étapes distinctes sur un bloc, chacune ayant comme résultat un flot binaire  $P_{i,k}^j$ , avec  $k := 1, 2, 3$ . Le flot  $P_{i,1}^j$  contient les symboles correspondant aux coefficients qui ne sont pas significatifs dans le plan de raffinement courant, mais ayant un voisin direct significatif. Le flot  $P_{i,2}^j$  contient les symboles correspondant aux coefficients qui sont significatifs dans le plan de raffinement courant. Le flot  $P_{i,3}^j$  contient les symboles correspondant aux coefficients qui ne sont pas encore significatifs dans les premières



deux étapes. Le flot binaire  $P_i^j$  correspondant au bloc  $B_i^j$  est donc donné par  $P_{i,1}^j \cup P_{i,2}^j \cup P_{i,3}^j$ .

Après le codage de tous les blocs, on forme le flot binaire final en juxtaposant dans un ordre prédéfini les flots correspondants de chaque bloc. Comme dans le cas de l'EZW, l'algorithme peut être arrêté dès qu'un certain critère est satisfait (le débit ou l'erreur). Bien que cet algorithme n'exploite pas les redondances entre les différentes sous-bandes mais uniquement les corrélations interne à chaque bloc, il fournit de très bonnes performances et a ainsi été sélectionné pour le standard de compression JPEG2000.

### Un codeur EBCOT adapté aux représentations ENO-EA

Les codeurs EZW et EBCOT tirent parti des dépendances statistiques des coefficients d'ondelettes numériquement significatifs associés aux contours. Dans le cas des représentations non-linéaire ENO-EA, nous avons constaté que les approximations de contours géométriques sont précises même si l'on n'utilise que l'information provenant des échelles grossières, et que les détails associés à ces contours sont plus petits que dans les décompositions en ondelettes.

Il est par conséquent légitime de reconsidérer les procédures de codage EZW et EBCOT pour de telles représentations qui n'auront pas les mêmes dépendances statistiques que les décompositions en ondelettes classiques. L'analyse de ces nouvelles dépendances afin d'optimiser le codeur est une tâche délicate qui est l'une de nos perspective à moyen terme. Pour l'heure, nous proposons une modification du codeur EBCOT, adaptée aux propriétés des représentations ENO-EA vis à vis des contours géométriques. Ce codeur que nous noterons EBCOT-EA utilise les mêmes principes généraux : la structure hiérarchique de la décomposition et l'analyse des configurations pour des coefficients voisins situés dans la même sous-bande de résolution. La modification se situe dans la notion de significativité des coefficients  $d_k^j \in B_i^j$ , qui se traduit dans sa quantification, à présent définie de la façon suivante :

$$\nu_k^j := \begin{cases} 0, & \text{si dans le calcul du } d_k^j, \text{ ou de son ascendance} \\ & \text{nous avons utilisé une reconstruction géométrique;} \\ \left\lfloor \frac{|d_k^j|}{\delta_j} \right\rfloor, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.5)$$

où  $\delta_j$  est un paramètre dépendant de la sous-bande  $d^j$  qui est optimisé de la même manière que dans le codage EBCOT. On intègre ainsi le fait que l'utilisation de la prédiction ENO-EA permet de reconstruire de manière très précise les contours géométriques sans ajouter de détails aux échelles plus fine. Nous constaterons que le codage EBCOT-EA est particulièrement efficace dans le cas des images géométriques.

### 5.1.3 Résultats numériques

Pour nos tests numériques, nous utiliserons à nouveau les images “ellipse”, “graphe”, “peppers” et “phare” qui sont présentés sur les figures 5.2-5.3. Ces images sont de taille  $512 \times 512$  et codées sur 8 bits par pixels, soit au total  $M = 2^{21}$  bits. Si  $N$  est le nombre de bits utilisé pour coder l’image, le taux de compression sera indiqué par le débit moyen en bits par pixels

$$d = 2^{-18} N = 8 \frac{N}{M}. \quad (5.6)$$

Dans toutes les légendes des résultats présentés dans ce chapitre, nous utilisons deux acronymes, BW et EA. L’acronyme BW, correspond à la décomposition en ondelettes biorthogonales séparable associée à la la paire de filtres (9, 7) avec symétrisation aux bords, qui est le plus souvent utilisée dans les algorithmes de compression par ondelettes. L’acronyme EA correspond à la représentation multiéchelle non-linéaire associée à la prédiction ENO-EA.

Le critère mathématique classiquement utilisé pour mesurer l’erreur entre l’image  $v^J$  et sa reconstruction  $\hat{v}^J$  est le PSNR (Peak Signal to Noise Ratio ou le rapport signal bruit), qui est donné par

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{256^2}{MSE} \right), \quad (5.7)$$

où  $MSE$  désigne l’erreur quadratique moyenne

$$MSE = 2^{-2J} \|v^J - \hat{v}^J\|_{\ell^2} \quad (5.8)$$

c’est à dire la norme  $L^2$  discrétisée de l’erreur. Ce critère autorise des comparaisons très générales, néanmoins on peut se poser des questions légitimes sur la validité d’un tel outil de mesure de qualité. En effet, le PSNR ne correspond pas nécessairement à la perception des erreurs par le système visuel humain. Il est basé exclusivement sur le carré des écarts entre les valeurs de pixels et ne tient donc pas compte des changements du signe de l’erreur observée. D’un point de vue de la théorie de l’information, le PSNR ne fournit pas une indication absolue sur la perte d’information. Ainsi, un écart constant entre les pixels de  $v^J$  et  $\hat{v}^J$  peut correspondre à un PSNR très bas alors que l’information perdue est très faible (elle est résumée dans un seul coefficient, l’écart lui même), tandis qu’une image  $\hat{v}^J$  constituée de l’ajout aux pixels de l’image  $v$  d’un bruit gaussien de faible variance aura un bon PSNR, alors que l’information perdue est très importante : pour pouvoir reconstituer l’image de départ, il faut connaître l’écart introduit pour chaque pixel. Le PSNR donne

TAB. 5.1 – Estimation de l’entropie

Méthode	ellipse	graphe	peppers	phare
BW	1.26	2.76	3.42	3.91
EA	0.50	1.30	3.40	5.11

néanmoins un bon ordre de grandeur de de la qualité dans beaucoup de cas pratiques. On présentera donc des résultats comparatifs entre les différentes méthodes sur la base des PSNR, tout en gardant à l’esprit l’importance du facteur visuel.

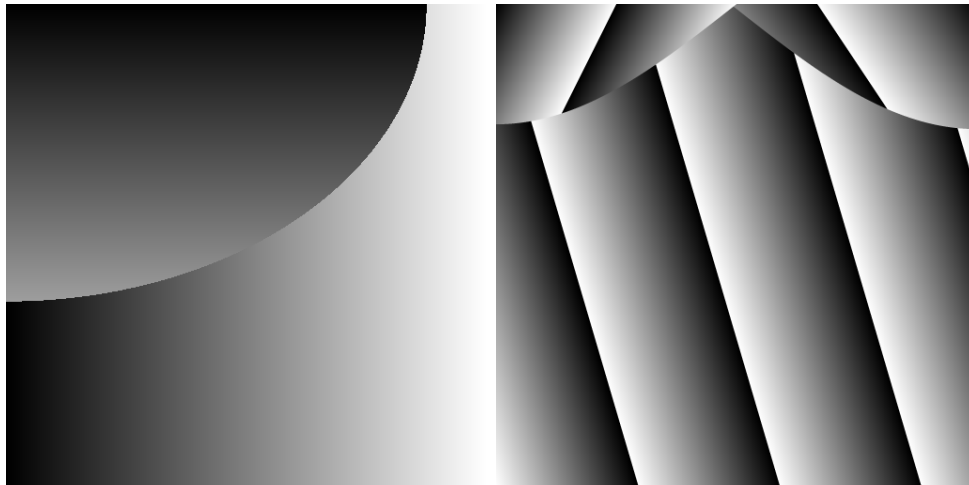


FIG. 5.2 – Images géométriques “ellipse” et “graphe”

Une première comparaison entre ces deux représentations est obtenue en calculant l’entropie empirique des distributions des coefficients de l’image transformée pour chacune des représentations multiéchelles BW et EA. Les valeurs obtenues sont présentées dans le tableau 5.1. Ces résultats sur l’estimation de l’entropie nous conduisent à une première observation : dans le cas des images géométriques, on obtient une réduction de l’entropie en utilisant la représentation EA, ce qui laisse présumer une réduction du nombre moyen de bits utilisés par un algorithme de codage entropique pour une distrosion donnée. Pour l’image peu texturée, l’entropie en utilisant les représentations non-linéaires reste du même ordre que pour les représentations BW. Par contre, pour les images texturées, l’entropie croît et par conséquent les performances de la compression en utilisant les méthodes EA sont a-priori réduites. La portée

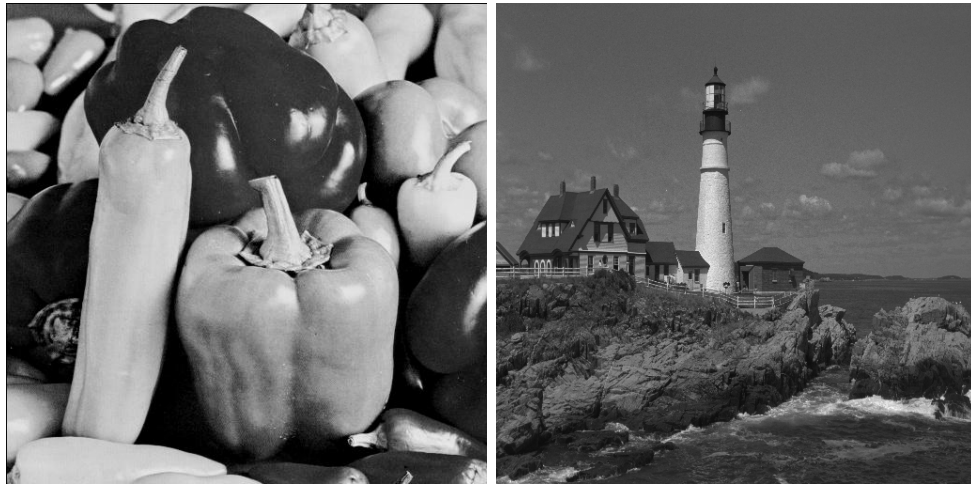


FIG. 5.3 – Images “peppers” et “phare”

de cette observation est cependant limitée, d’une part par l’absence de relation claire entre l’erreur quadratique moyenne sur chaque coefficients et l’erreur  $L^2$  globale dans le cas des représentations non-linéaire, et d’autre part par le fait que la mesure de l’entropie ne prend pas en compte les dépendances exploitées dans les codeurs EZW et EBCOT. Dans toute la suite, nous allons donc nous concentrer sur la comparaison des résultats numériques obtenus par ces codeurs pour les deux types de représentations ainsi que par le codeur EBCOT-EA dans le cas de la représentation EA.

Nos premiers résultats concernent les images géométriques “ellipse” et “graphes”. Les figures 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 et 5.9 présentent les résultats obtenus en fixant le débit moyen de 0.08 bpp. Trois observations se dégagent de ce ces résultats :

1. Pour les deux codeurs EZW et EBCOT la supériorité des représentations EA apparait en terme de PSNR, mais aussi visuellement puisque celles-ci évitent les effets oscillants autour des contours qui subsistent avec les représentations BW pour ce taux de compression.
2. On note de façon générale une légère supériorité du codeur EBCOT sur le codeur EZW, pour les deux représentations.
3. Le codage EBCOT-EA appliqué aux représentations EA donne des résultats encore meilleurs en terme de PSNR. Pour ces images ayant une structure géométrique très simple c’est la meilleure stratégie.

Les résultats numériques pour la compression des images réelles “peppers” et “phare”, sont présentés sur les figures 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14 et 5.15

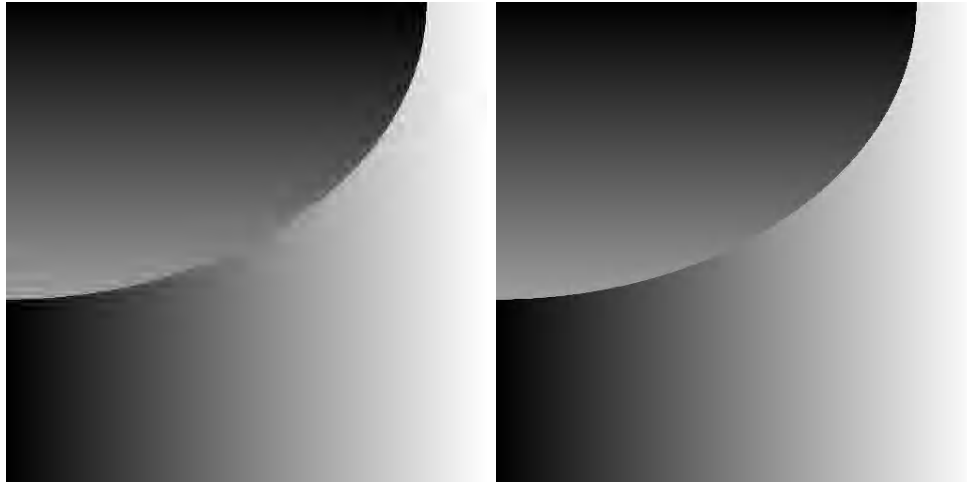


FIG. 5.4 – Résultats de compression en utilisant l’algorithme EZW avec les représentations BW (PSNR 38.73) et EA (PSNR 46.48)

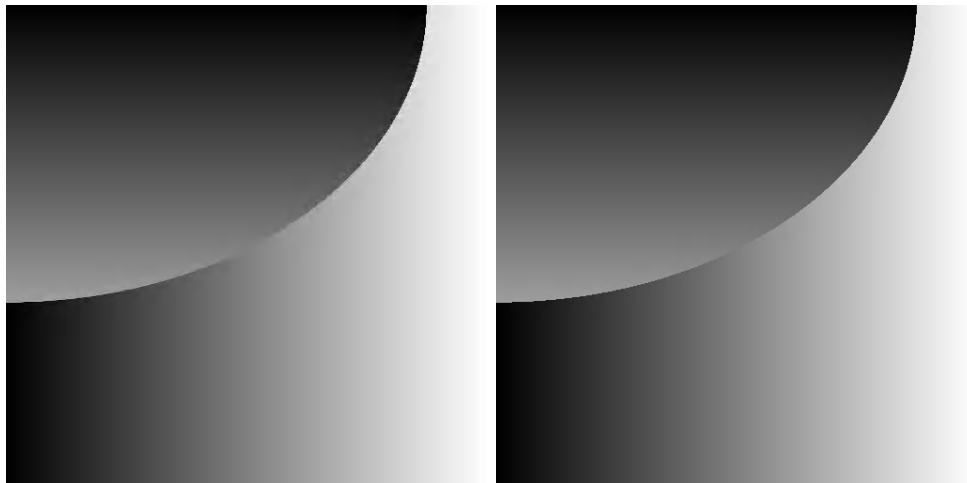


FIG. 5.5 – Résultats de compression en utilisant l’algorithme EBCOT avec les représentations BW (PSNR 56.41) et EA (PSNR 58.12)

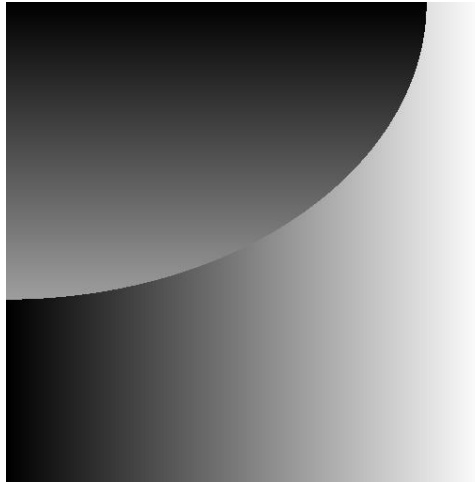


FIG. 5.6 – Résultats de compression en utilisant l’algorithme EBCOT-EA avec la représentation EA (PSNR 62.03)

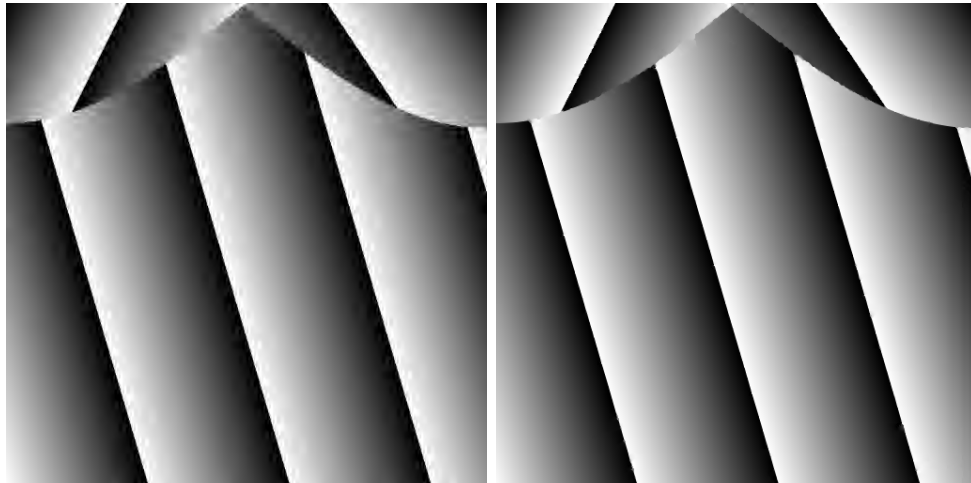


FIG. 5.7 – Résultats de compression en utilisant l’algorithme EZW avec les représentations BW (PSNR 32.55) et EA (PSNR 35.24)

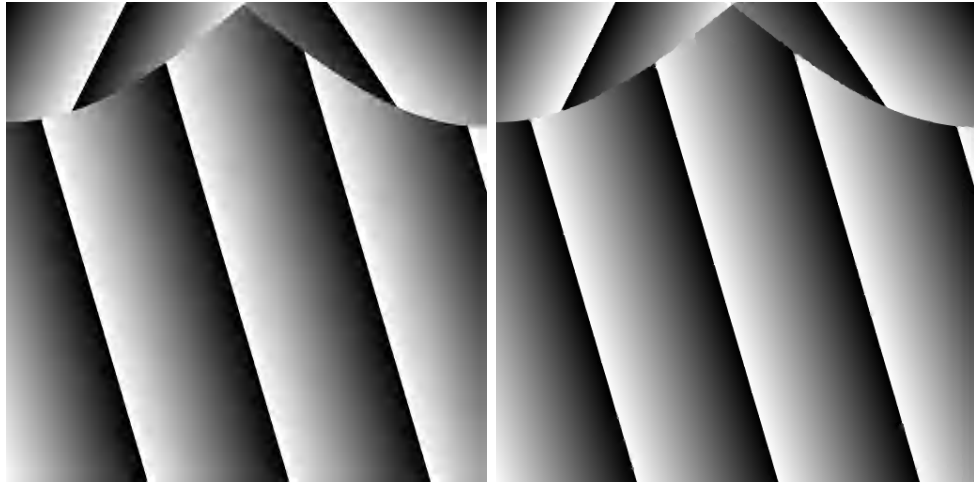


FIG. 5.8 – Résultats de compression en utilisant l’algorithme EBCOT avec les représentations BW (PSNR 34.93) et EA (PSNR 39.51)

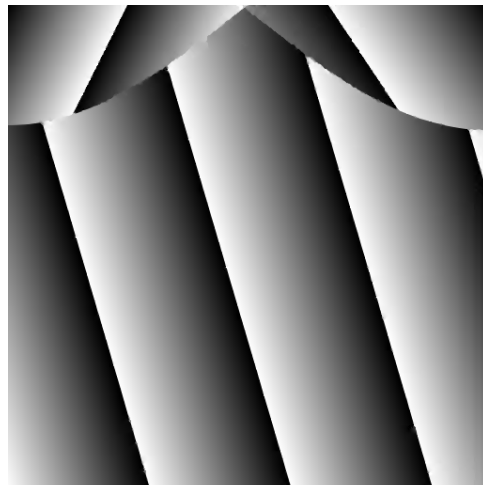


FIG. 5.9 – Résultats de compression en utilisant l’algorithme EBCOT-EA avec la représentation EA (PSNR 40.11)

pour un débit moyen fixé à 0.25 bpp. Dans le cas de l'image "peppers" le choix de la représentation EA ne conduit pas à une amélioration du PSNR. Elle contribue cependant à une légère amélioration visuelle en terme d'élimination des oscillations au voisinage des contours, en particulier dans le cas de l'algorithme EZW. Dans le cas de l'image "phare" qui comporte plus de texture, la représentation EA conduit à des résultats moins bons que la représentation BW aussi bien en termes de PSNR que visuels. Notons finalement que le codage EBCOT-EA est mal adapté aux images réelles.



FIG. 5.10 – Résultats de compression en utilisant l'algorithme EZW avec les représentations BW (PSNR 24.17) et EA (PSNR 23.97)

La présence de texture dans les images n'est pas l'unique obstacle aux bonnes performances des représentations ENO-EA. Le modèle sous-jacent utilisé localement dans la reconstruction géométrique - une fonction régulière par morceaux de part et d'autre de courbes régulières - est aussi une vision simplifiée des contours des images réelles qui sont rarement des discontinuités nettes, les processus d'acquisition optique et numérique pouvant induire des phénomènes de flou.

A ce titre, il est intéressant d'examiner de plus près la reconstruction des contours dans les résultats numériques que nous avons présentés. Dans le cas du détail de l'image "peppers" présenté sur la figure 5.16, la zone de flou s'étale environ sur 6 pixels. La figure 5.17 illustre le détail des images reconstruites après compression par le codeur EBCOT, et nous montre que la méthode EA a tendance à reconstruire un contour "trop net". Dans le cas du détail de l'image "phare" présenté sur la figure 5.18, le contour est plus net, et nous





FIG. 5.11 – Résultats de compression en utilisant l'algorithme EBCOT avec les représentations BW (PSNR 27.19) EA (PSNR 26.21)



FIG. 5.12 – Résultats de compression en utilisant l'algorithme EBCOT-EA avec la représentation EA (PSNR 24.41)



FIG. 5.13 – Résultats de compression en utilisant l'algorithme EZW avec les représentations BW (PSNR 26.09) et EA (PSNR 25.33)



FIG. 5.14 – Résultats de compression en utilisant l'algorithme EBCOT avec les représentations BW (PSNR 26.84) et EA (PSNR 24.18)



FIG. 5.15 – Résultat de compression en utilisant l’algorithme EBCOT-EA avec la représentation EA (PSNR 23.43)

constatons alors la supériorité de la représentation EA sur la figure 5.19. Il est intéressant de noter que la reconstruction d’un contour trop net n’est dans ce cas pas perçue par le système visuel comme un défaut mais plutôt comme une amélioration de la qualité de l’image même si elle est associée à une erreur en norme  $L^2$ .

La prédiction ENO-EA a donc un effet “déconvoluant”. Nous illustrons cet effet sur les figures 5.20 et 5.21 pour un exemple plus simple : nous présentons un contour de l’image “ellipse” rendu flou par convolution avec un noyau de moyennisation sur une fenêtre de taille  $7 \times 7$ , et la reconstruction de ce contour flou lorsque l’on utilise uniquement l’opération de subdivision en partant de l’échelle  $j = 6$  sans ajouter les détails. On constate que les contours reconstruits sont nets, ce qui est en quelque sorte un comportement opposé à celui de l’algorithme de subdivision associé à la prédiction BW qui aura tendance à reconstruire un contour flou à partir des données basses échelle d’un contour net.

Pour terminer, nous présentons les courbes d’évolution du PSNR en fonction du débit pour chaque image et chaque méthodes. Pour les images géométriques “ellipse” et “graphe”, les figures 5.22, 5.23, 5.24, 5.25, 5.26 et 5.27 montrent que la supériorité des représentations EA, en particulier avec le codeur EBCOT-EA, est observée pour tous les débits.

Dans le cas des images “peppers” et “phare”, les figures 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32 et 5.33 confirment que les représentations EA sont moins efficaces

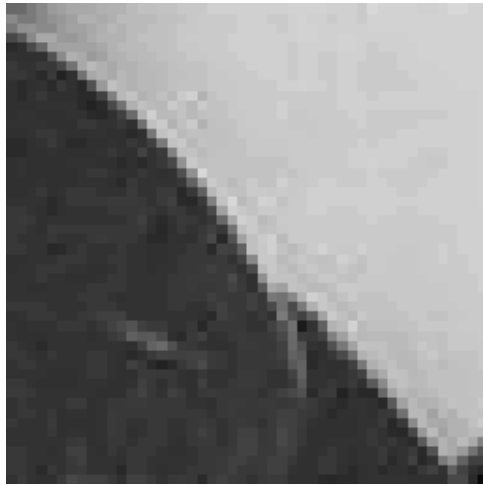


FIG. 5.16 – Contour de l'image “peppers”

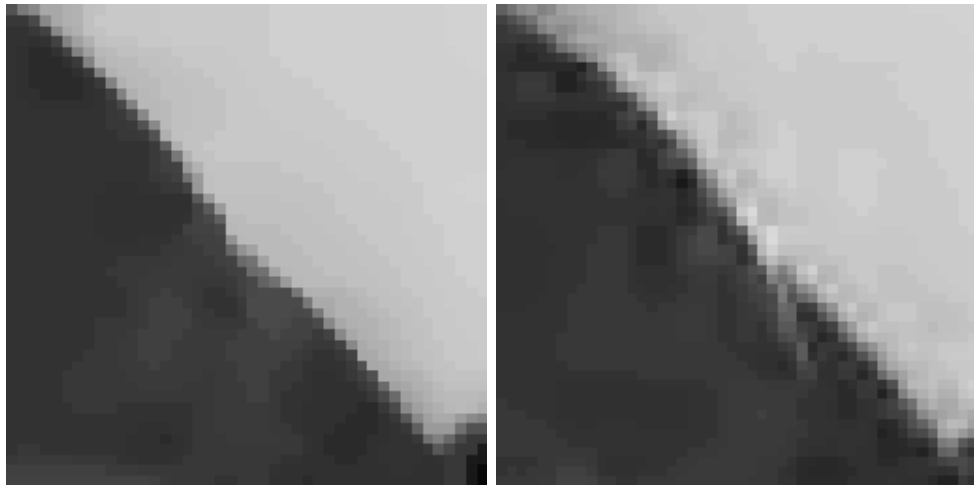


FIG. 5.17 – Compression du contour avec EA et BW

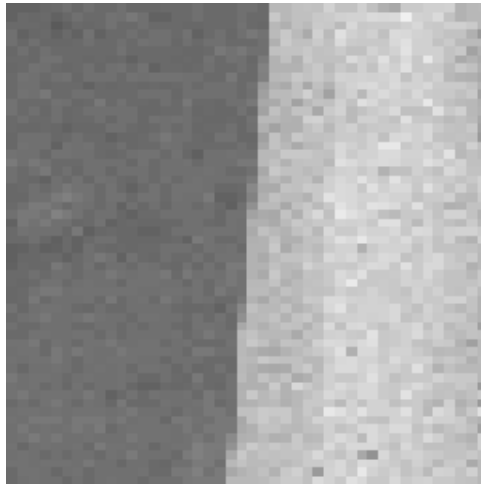


FIG. 5.18 – Contour de l'image “phare”

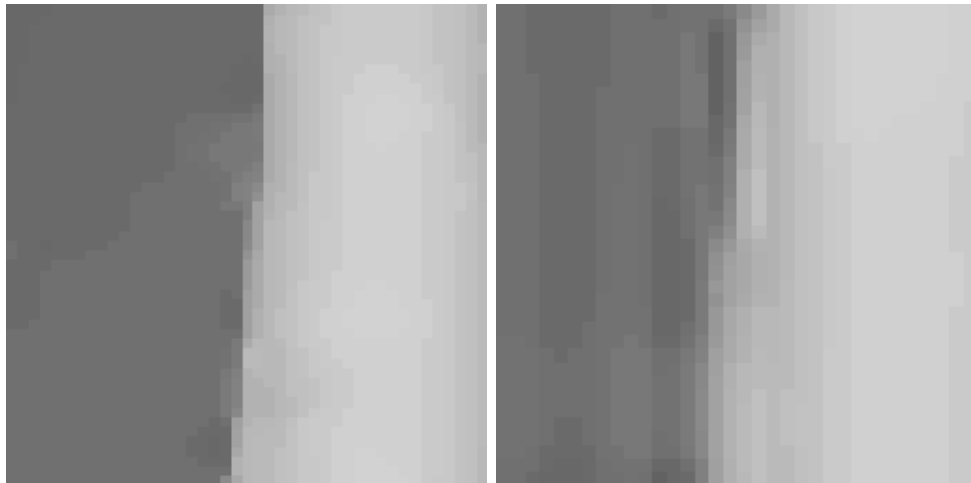


FIG. 5.19 – Compression du contour EA et BW

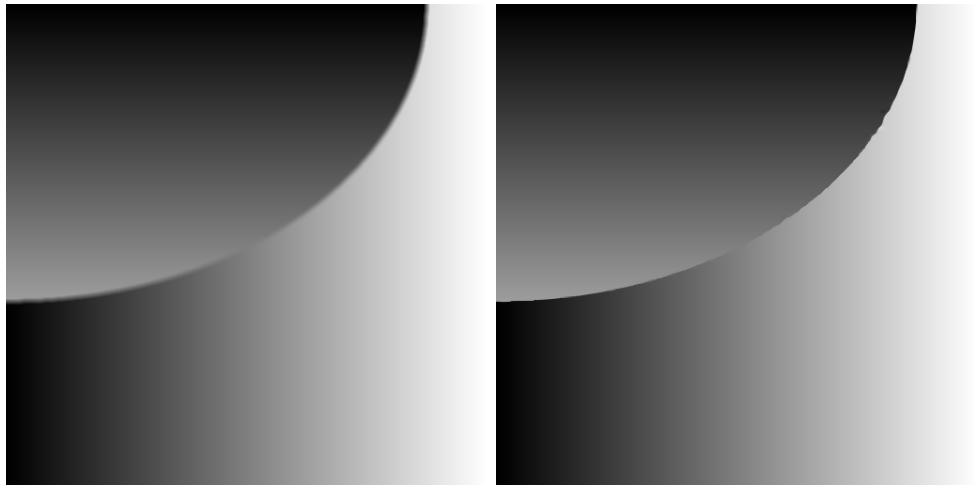


FIG. 5.20 – Contour flou et reconstruction à partir de l'échelle  $J = 6$

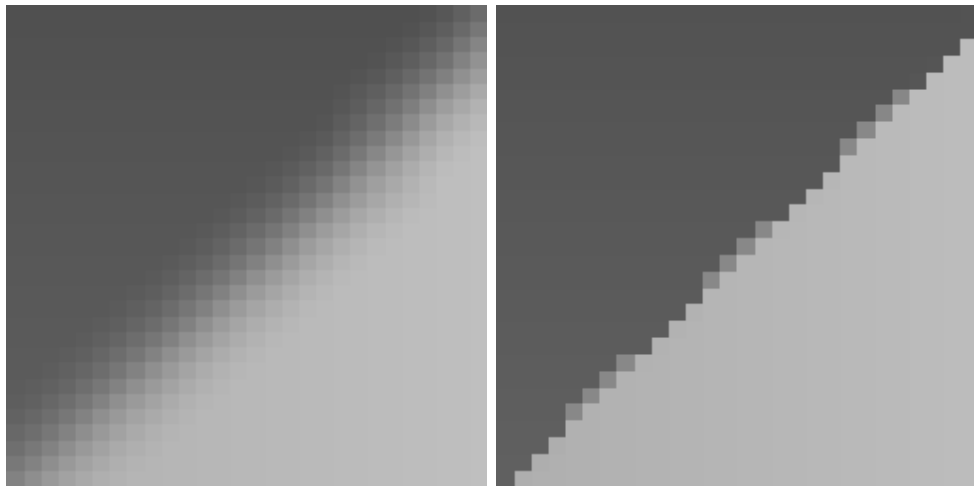


FIG. 5.21 – Agrandissement contour et reconstruction EA à partir de l'échelle  $J = 6$

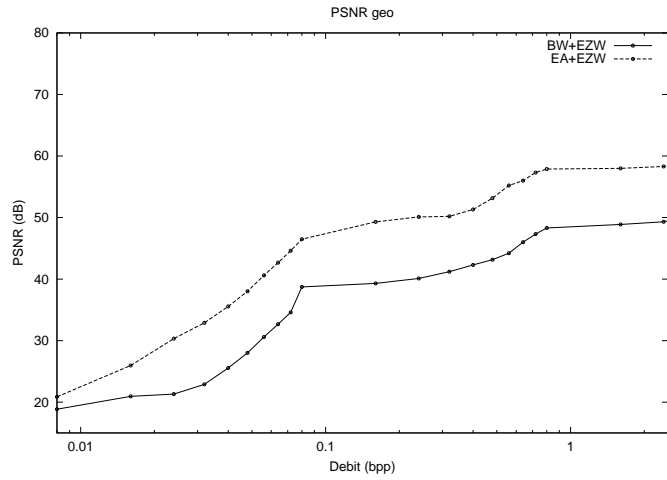


FIG. 5.22 – Image “ellipse” : courbe PSNR en utilisant l’algorithme EZW avec les représentations BW et EA

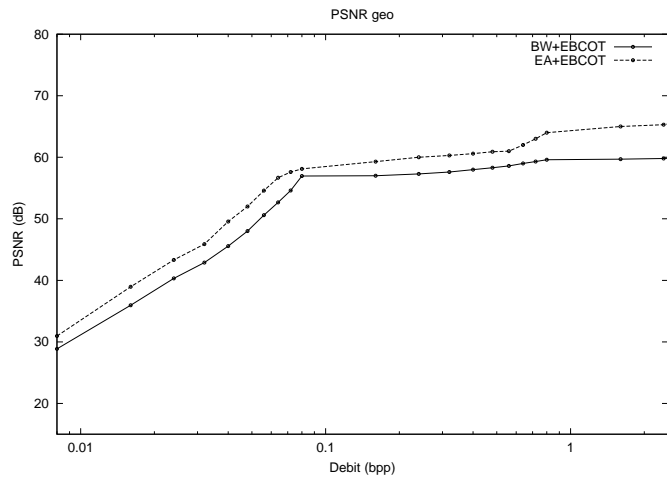


FIG. 5.23 – Image “ellipse” : courbe PSNR en utilisant l’algorithme EBCOT avec les représentations BW et EA

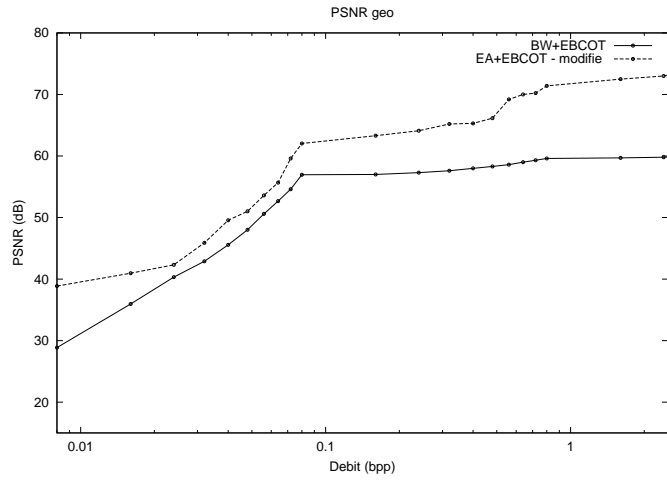


FIG. 5.24 – Image “ellipse” : courbe PSNR en utilisant l’algorithme EBCOT-EA avec la représentation EA

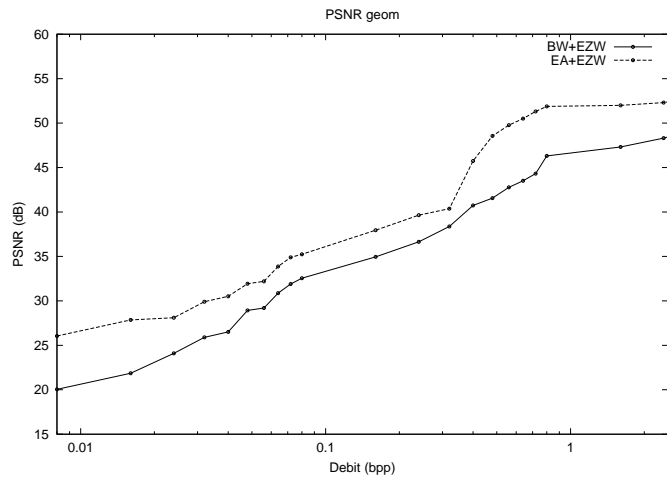


FIG. 5.25 – Image “grape” : courbe PSNR en utilisant EZW avec les représentations BW et EA



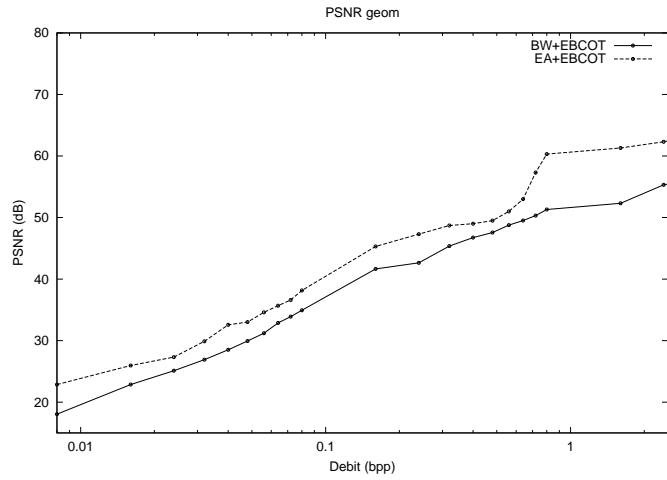


FIG. 5.26 – Image “graphe” : courbe PSNR en utilisant l’algorithme EBCOT avec les représentations BW et EA

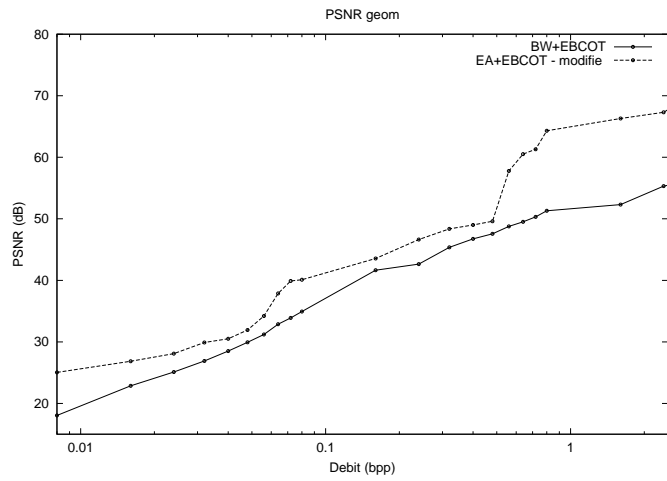


FIG. 5.27 – Image “graphe” : courbe PSNR en utilisant l’algorithme EBCOT-EA avec la représentation EA

du point de vue du PSNR, et que le codeur EBCOT-EA est mal adapté à cette situation.

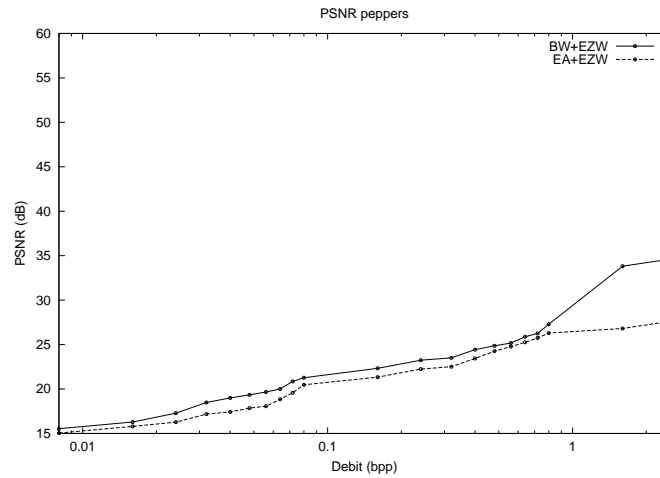


FIG. 5.28 – Image “peppers” : courbe PSNR en utilisant l’algorithme EZW avec les représentations BW et EA

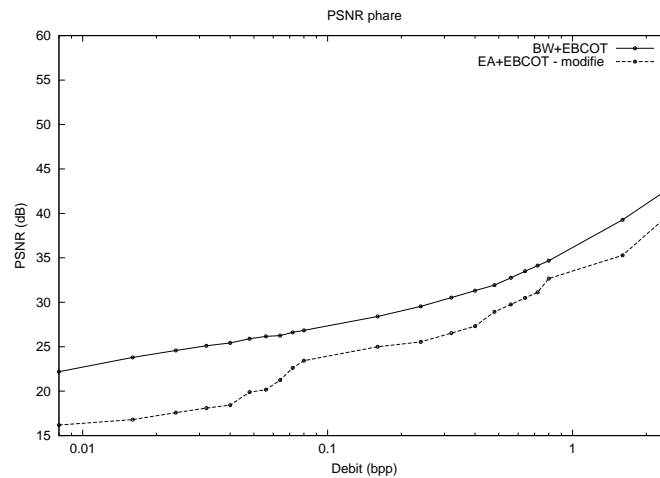


FIG. 5.33 – Image “phare” : courbe PSNR en utilisant l’algorithme EBCOT-EA avec la représentation EA

### 5.1.4 Conclusion

Les résultats de cette section sont cohérent avec les expériences de seuillage menées dans le chapitre 2 : les représentations non-linéaires adaptées aux

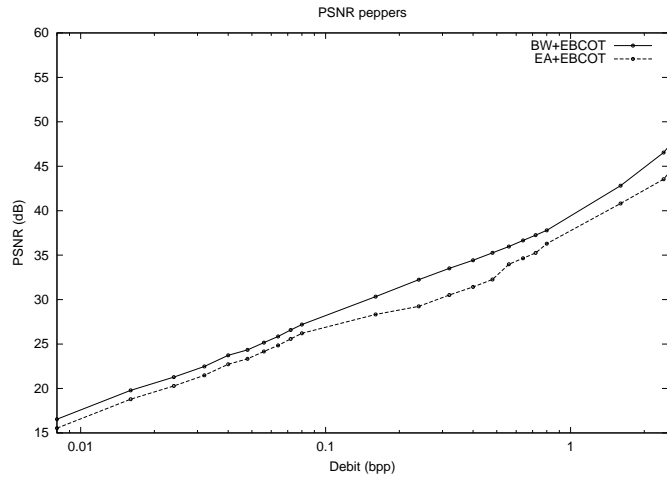


FIG. 5.29 – Image “peppers” : courbe PSNR en utilisant l’algorithme EBCOT avec les représentations BW et EA

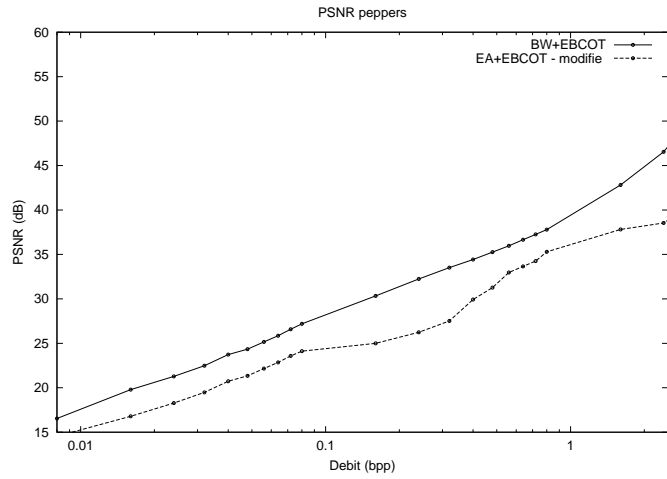


FIG. 5.30 – Image “peppers” : courbe PSNR en utilisant EBCOT-EA avec la représentation EA

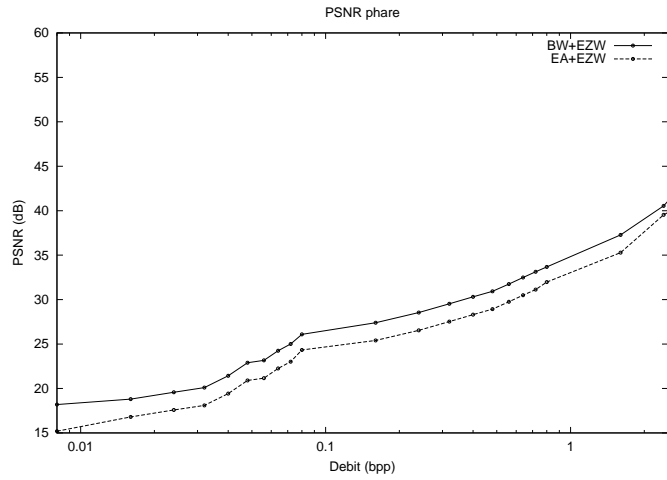


FIG. 5.31 – Image “phare” : courbe PSNR en utilisant EZW avec les représentations BW et EA

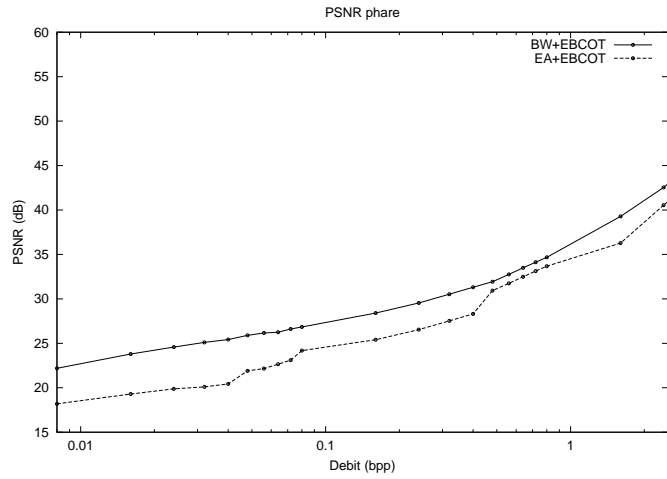


FIG. 5.32 – Image “phare” : courbe PSNR en utilisant l’algorithme EBCOT avec les représentations BW et EA

contours apportent des améliorations substantielles pour les images géométrique tant du point de vue visuel que de celui du PSNR, et quelques améliorations visuelles pour les images peu texturées. Une perspective naturelle qui se dégage de l'ensemble de ces expériences numériques est le développement de codeurs hybrides dans lesquels, après une étape de dissociation, la composante géométrique de l'image est codée par la représentation ENO-EA et la texture par un algorithme mieux adapté. Nous pouvons espérer que le gain important de la compression sur les parties géométriques va contre-balancer les pertes de la compression sur les parties texturées.

## 5.2 Débruitage

### 5.2.1 Les algorithmes de seuillage

Depuis les années 1990, les décompositions en ondelettes ont trouvé des applications très pertinentes dans le domaine de l'estimation statistique. Dans le cadre le plus simple d'un modèle 1D de bruit blanc, on observe

$$dy(t) = f(t)dt + \sigma dW(t). \quad (5.9)$$

La procédure de seuillage en ondelette introduite par Donoho, Johnstone, Kerkycharian et Picard [38] consiste à calculer les coefficients estimés

$$y_\lambda := \int \tilde{\psi}_\lambda dy(t), \quad (5.10)$$

et à définir l'estimateur de  $f$  suivant

$$\tilde{f} := \sum_{|\lambda| \leq J(\sigma)} \sum_{|y_\lambda| > t(\sigma)} y_\lambda \psi_\lambda. \quad (5.11)$$

Dans le cas de signaux discrets on fait disparaître la limitation  $|\lambda| \leq J(\sigma)$  et on a ainsi une procédure de seuillage. Une variante est le seuillage doux (*soft thresholding*) qui consiste à prendre

$$\tilde{y}_\lambda := \text{sgn}(y_\lambda)(|y_\lambda| - t(\sigma))_+. \quad (5.12)$$

La valeur préconisée pour le seuil  $t(\sigma)$  dépend du niveau du bruit suivant

$$t(\sigma) := \kappa\sigma[\log(\sigma)]^{1/2}. \quad (5.13)$$

Les procédures de seuillages présentent l'avantage de ne pas nécessiter d'hypothèse a-priori sur la régularité du signal à débruiter : on peut montrer qu'elles fournissent des vitesses de convergence optimale pour  $E(\|f - \tilde{f}\|_{L^p}^p)$  lorsque  $\sigma \rightarrow 0$  pour des classes de fonctions très variées modélisant le signal.

De façon intuitive, le seuillage s'apparente à une procédure de lissage adaptatif dans laquelle on élargit la fenêtre de lissage dans les régions homogènes pour enlever plus de bruit, et on diminue cette fenêtre au voisinage des discontinuités pour ne pas perdre leur localisation. En pratique, des effets d'oscillations peuvent subsister au voisinage des singularités du signal, et des améliorations substantielles peuvent être obtenues par la méthode du débruitage invariant par translation (ou *cycle spinning*) introduite par Coifman et Donoho [27]. L'idée de cet algorithme est très naturelle : on applique un seuillage classique sur des versions translatées du signal bruité, et on prend la moyenne sur tous les résultats obtenus. Plus précisément, si  $\tau_k$  est l'opérateur de translation périodique  $\tau_k x(n) = x((n+k) \bmod N)$ , où  $N$  est la dimension du signal discret, on se donne un ensemble de pas de translation  $K = \{0, \dots, M\}$  et on définit l'estimateur

$$\tilde{f} := [\#(K)]^{-1} \sum_{k \in K} \tau_{-k} S_\sigma \tau_k y \quad (5.14)$$

où  $S_\sigma$  représente l'opération de débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes que nous avons décrit précédemment. Cette stratégie se généralise de manière immédiate en 2D, et constitue à l'heure actuelle l'une des méthodes les plus performantes pour le débruitage des images.

Nous allons comparer les représentations linéaires et non-linéaires au travers des performances de l'algorithme de débruitage invariant par translation. Notre critère sera à nouveau la norme  $L^2$ , exprimée par le PSNR. En pratique, il est important de noter que le niveau de seuil préconisé par la théorie de [38] peut conduire à des résultats sous-optimaux pour des signaux et images données (ce seuil est souvent trop élevé), et que le seuil optimal (i.e. qui minimise l'erreur  $L^2$ ) peut varier suivant le type d'ondelette qu'on utilise. Afin de comparer les possibilités des deux types de représentations, nous avons délibérément pris le parti de choisir à chaque fois le seuil optimal (fourni par un "oracle") pour chaque représentation et chaque signal donné. On compare ainsi les méthodes au mieux de leurs possibilités.

## 5.2.2 Débruitage des signaux unidimensionnels

Nous considérons tout d'abord le cas des signaux monodimensionnels. Nous allons comparer le seuillage invariant dans une représentation BW et ENO-SR

en valeurs moyennes sur les quatre signaux tests présentés sur les figures 5.34 et 5.35. Sans être exhaustif, le choix de ces signaux n'est pas arbitraire, chaque signal représentant la forme idéalisée des signaux réels que nous pouvons rencontrer dans des problèmes concrets. Le premier signal “sinestep” et le deuxième signal “blocks” peuvent représenter l'évolution de la valeur d'un pixel au cours du temps dans une trame vidéo ou le long de la ligne d'une image, le troisième signal “bumps” et le quatrième signal “doppler” peuvent représenter l'information acquise par divers appareils de mesures physiques.

Notons que le cadre des valeurs ponctuelles serait inadapté ici car l'opération de sous-échantillonnage (qui correspond à tester les données bruitées contre des distribution de Dirac) n'effectue aucune moyenne et ne permet pas de réduire la variance du bruit. Dans tous nos tests la dimension des signaux considérés est  $N = 2048 = 2^{11}$ , l'échelle la plus grossière utilisée dans la transformée multiéchelle est  $j_0 = 5$  et le nombre des translations utilisées est  $M = 16$ .

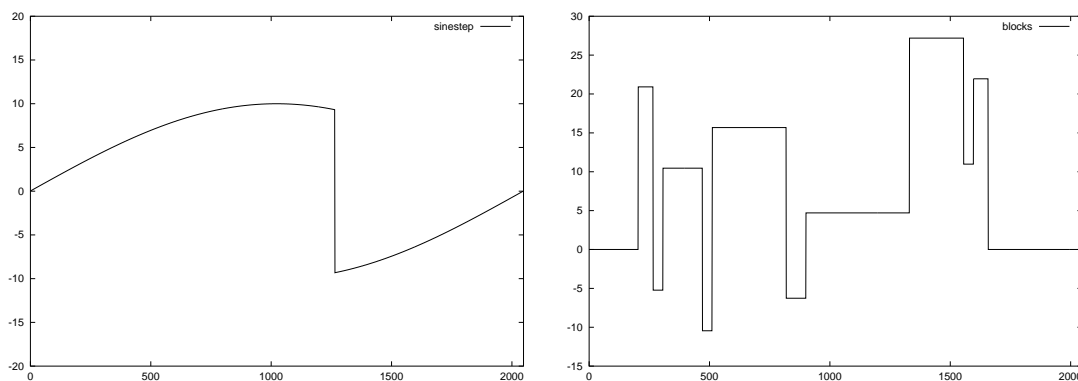


FIG. 5.34 – Signaux originaux “sinestep” et “blocks”

Nous considérons tout d'abord un bruit gaussien de variance  $\sigma^2 = 0.1$ , les signaux étant normalisés entre 0 et 1. Les versions bruitées sont représentées sur les figures 5.36 et 5.37 avec le PSNR correspondant. Les figures 5.38, 5.39, 5.40 et 5.41 illustrent les résultats du débruitage obtenus par la technique de seuillage invariant par translation dans les représentations BW et ENO-SR. Pour ce niveau de bruit faible, les différences sont imperceptibles, avec quelques différences dans le PSNR en faveur des représentations ENO-SR pour les signaux “sinestep” et “blocks” et BW pour les signaux “bumps” et “doppler”.

Nous considérons ensuite un bruit gaussien de variance  $\sigma^2 = 2$ . Les versions bruitées sont représentées sur les figures 5.42 et 5.43. Les figures 5.44, 5.45, 5.46 et 5.47 illustrent les résultats du débruitage obtenus par la technique de seuillage invariant par translation dans les représentations BW et

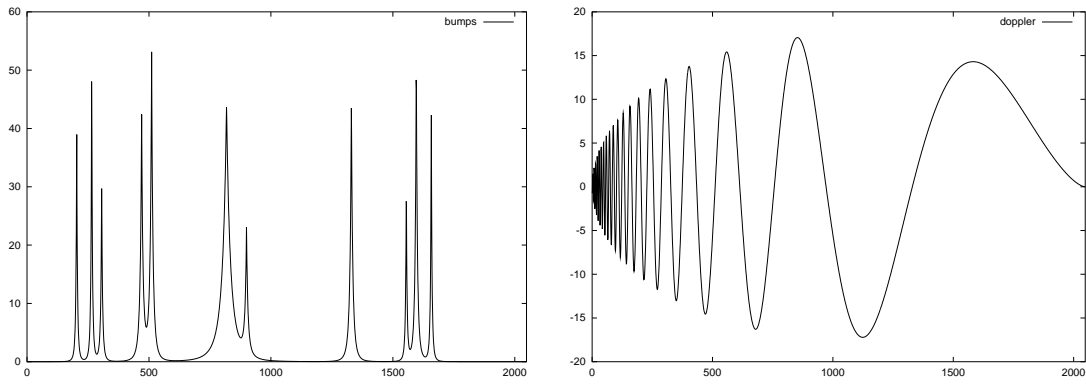


FIG. 5.35 – Signaux originaux “bumps” et “doppler”

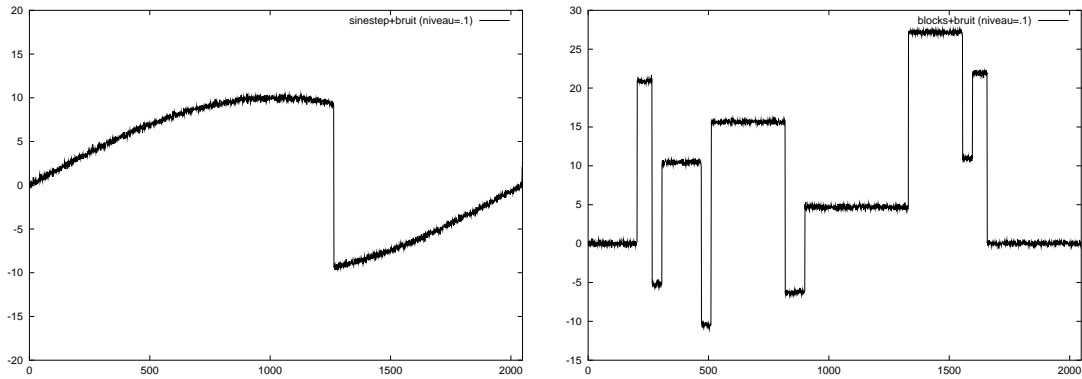


FIG. 5.36 – Signaux bruités “sinestep” (PSNR=30.71) et “blocks” (PSNR=36.15), niveau du bruit  $\sigma^2 = 0.1$

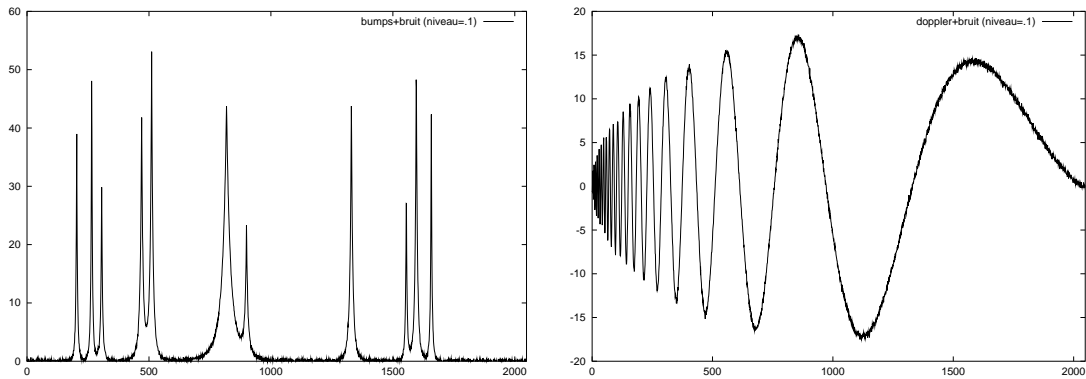


FIG. 5.37 – Signaux bruités “bumps” (PSNR=31.56) et “doppler” (PSNR=34.07), niveau du bruit  $\sigma^2 = 0.1$



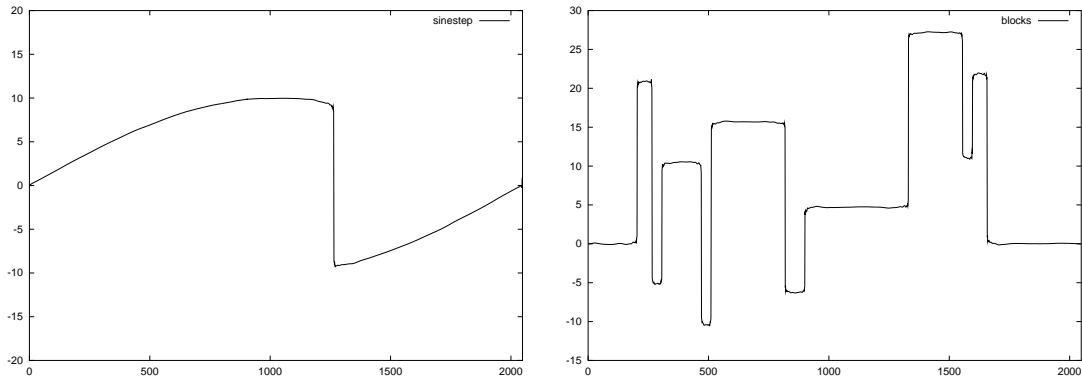


FIG. 5.38 – Signaux débruités en utilisant le seuillage invariant par translation dans une représentation BW “sinestep” (PSNR=41.78) et “blocks” (PSNR=38.21)

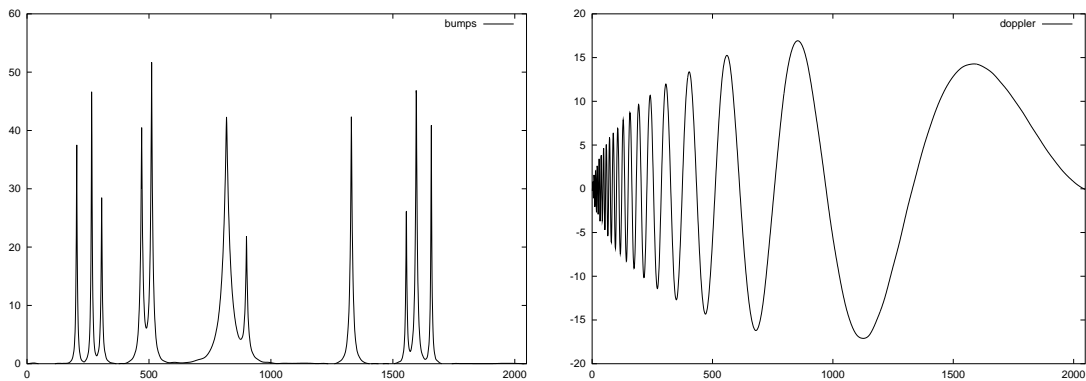


FIG. 5.39 – Signaux débruités en utilisant le seuillage invariant par translation dans une représentation BW “bumps” (PSNR=33.68) et “doppler” (PSNR=35.96)

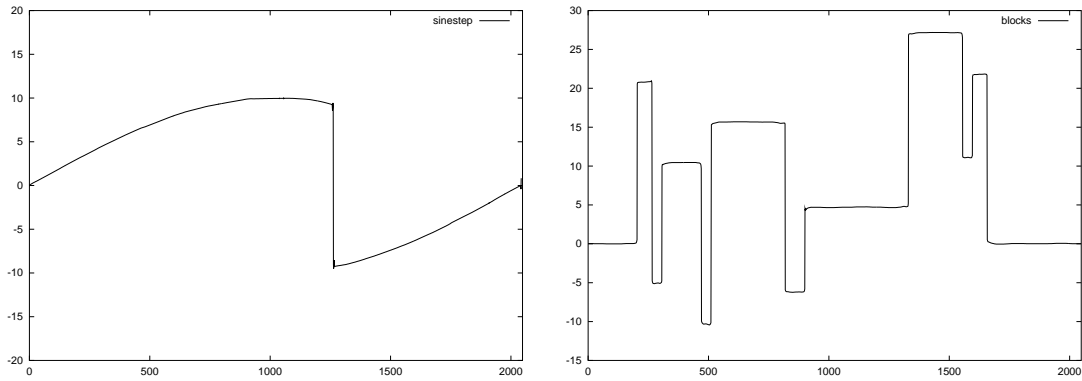


FIG. 5.40 – Signaux débruités en utilisant le seuillage invariant par translation dans une représentation SR “sinestep” (PSNR=44.38) et “blocks” (PSNR=43.00)

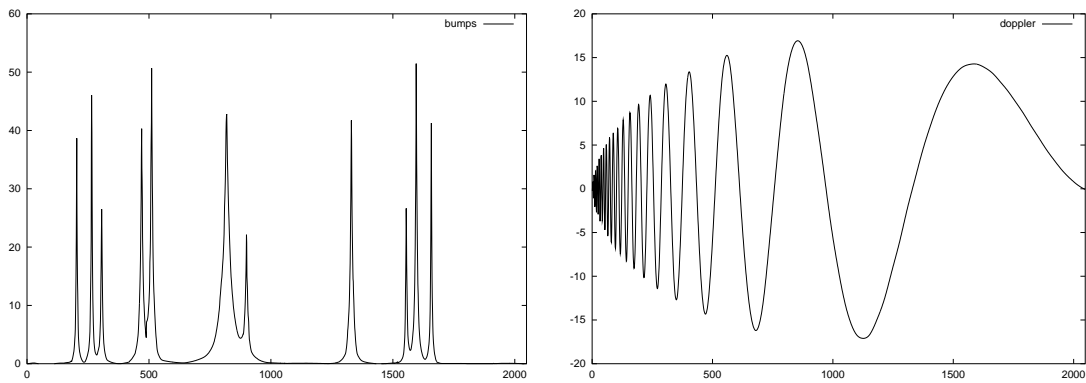


FIG. 5.41 – Signaux débruités en utilisant le seuillage invariant par translation dans une représentation SR “bumps” (PSNR=32.72) et “doppler” (PSNR=34.48)

ENO-SR. Pour ce niveau de bruit plus élevés, on constate une supériorité plus nette de la représentation ENO-SR pour signaux “sinestep” et “blocks”, et des performances du même ordre pour les signaux “bumps” et “doppler”. Cette situation n’est pas vraiment surprenante, puisque les signaux “sinestep” et “blocks” correspondent parfaitement au modèle sous-jacent de fonctions régulière par morceaux avec des discontinuités isolées de type saut, ce qui entraîne des propriétés de concentration des coefficients plus accentuées pour les représentations ENO-SR.

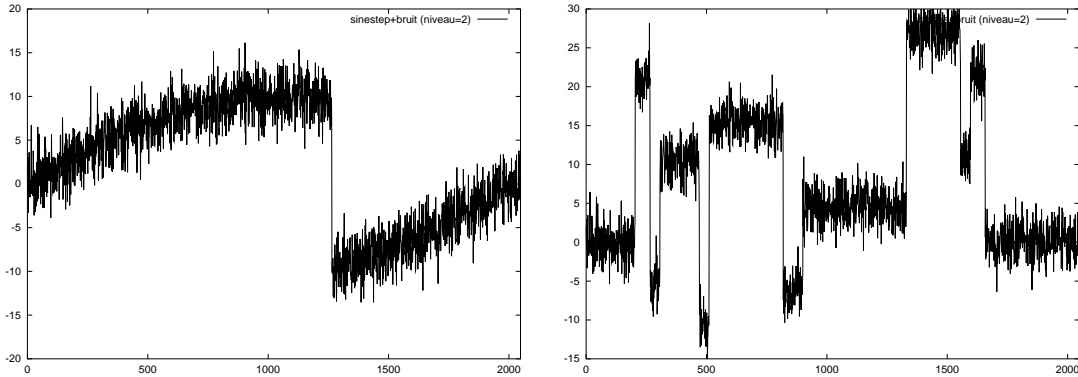


FIG. 5.42 – Signaux bruités “sinestep” (PSNR=4.92) et “blocks” (PSNR=10.12) niveau du bruit  $\sigma^2 = 2$

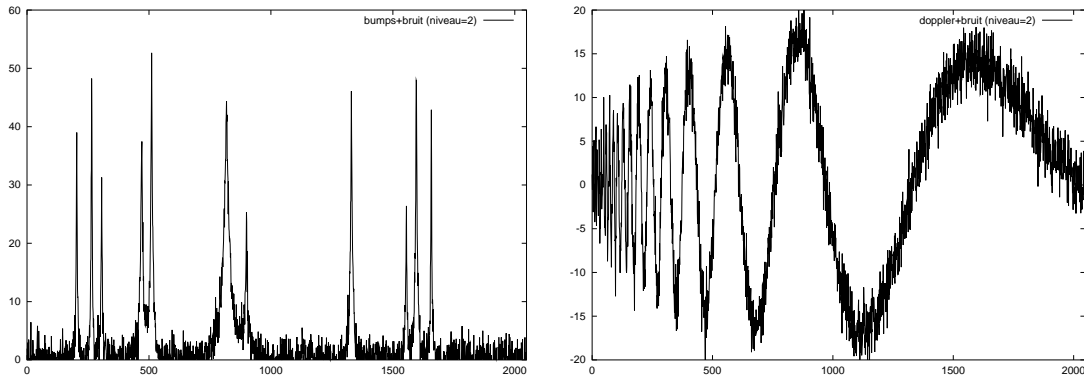


FIG. 5.43 – Signaux bruités “bumps” (PSNR=5.54) et “doppler” (PSNR=8.05) niveau du bruit  $\sigma^2 = 2$

Les figures 5.48 et 5.49 confirment cette tendance lorsque l’on suit l’évolution du PSNR en fonction de la variance du bruit : les améliorations sont visibles

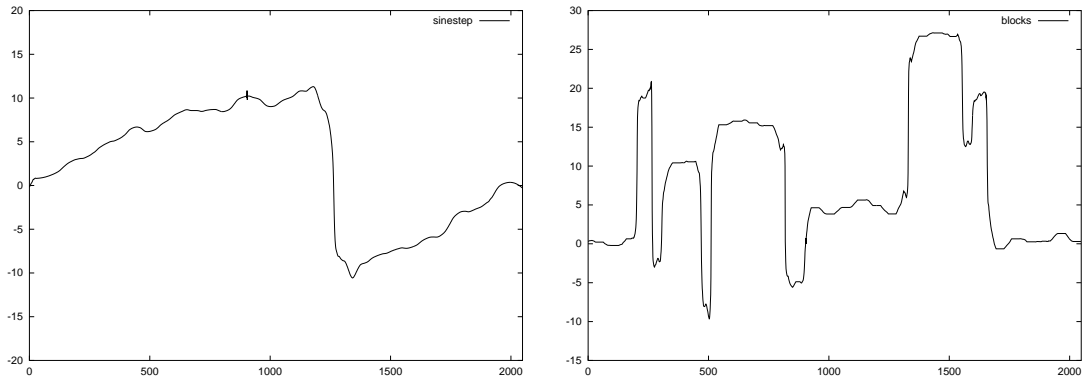


FIG. 5.44 – Signaux débruités en utilisant le seuillage invariant par translation dans une représentation BW “sinestep” (PSNR=18.55) et “blocks” (PSNR=15.64)

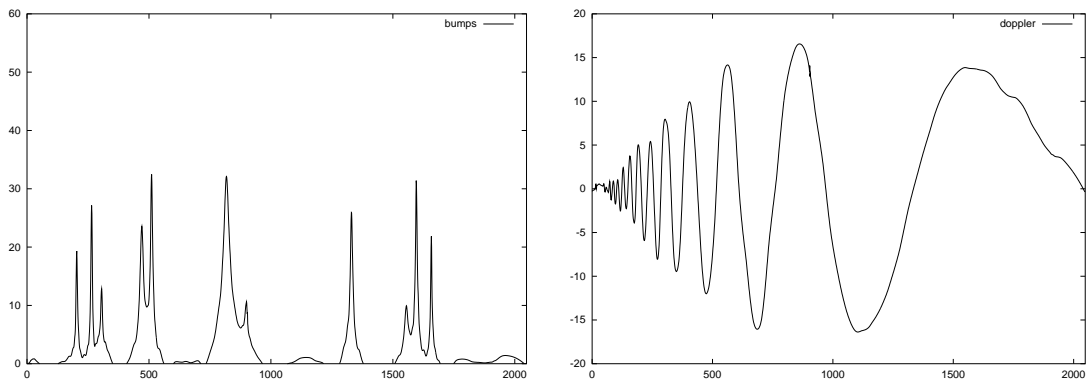


FIG. 5.45 – Signaux débruités en utilisant le seuillage invariant par translation dans une représentation BW “bumps” (PSNR=10.60) et “doppler” (PSNR=15.35)

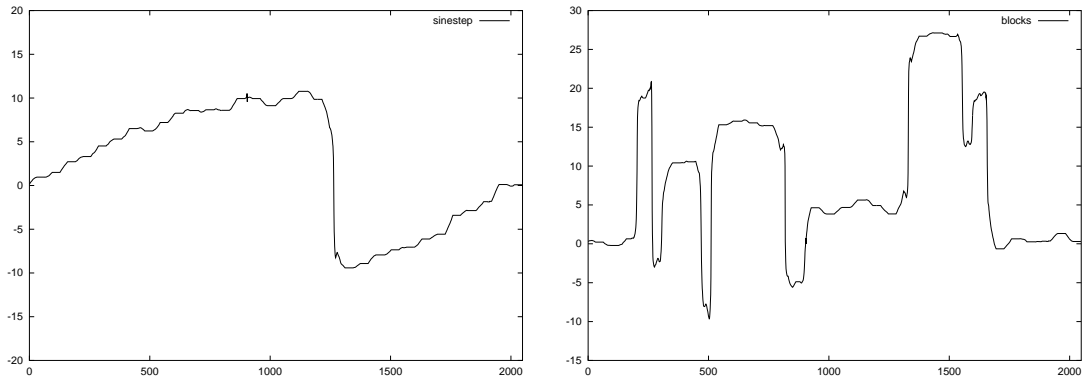


FIG. 5.46 – Signaux débruités en utilisant le seuillage invariant par translation dans une représentation SR “sinestep” (PSNR=20.45) et “blocks” (PSNR=15.95)

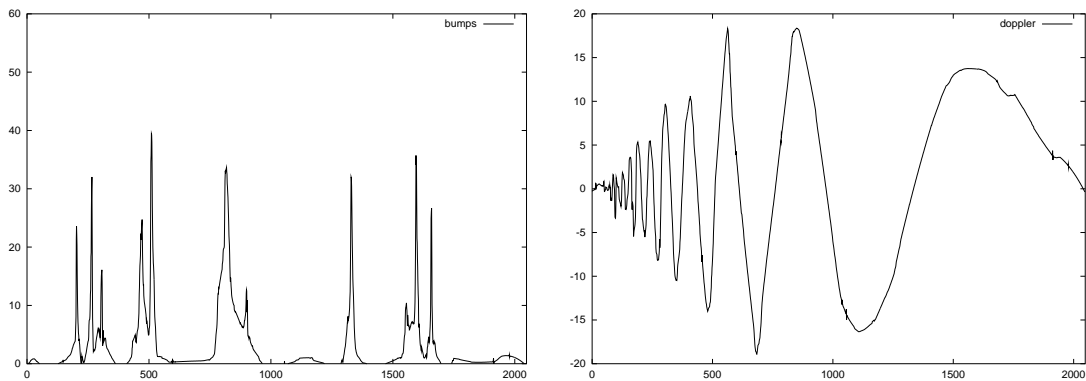


FIG. 5.47 – Signaux débruités en utilisant le seuillage invariant par translation dans une représentation SR “bumps” (PSNR=11.60) et “doppler” (PSNR=14.96)

pour les signaux “sinestep” et “blocks” qui sont en adéquation avec le modèle sous-jacent.

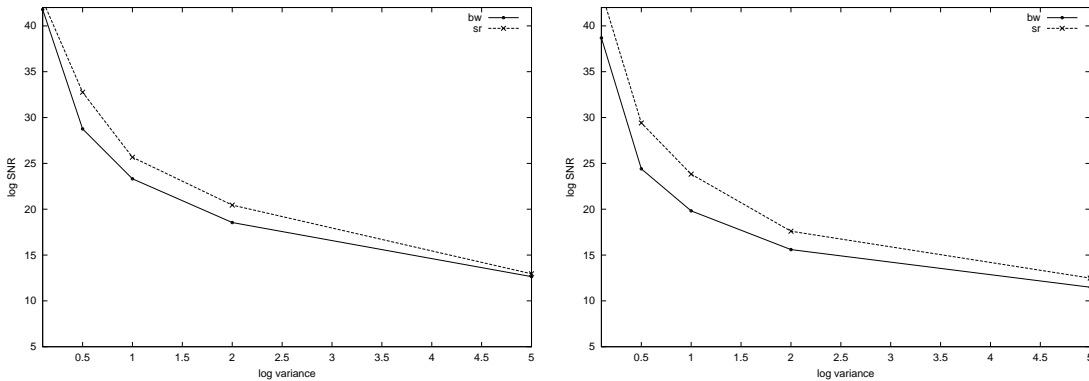


FIG. 5.48 – PSNR versus variance “sinestep” et “blocks”

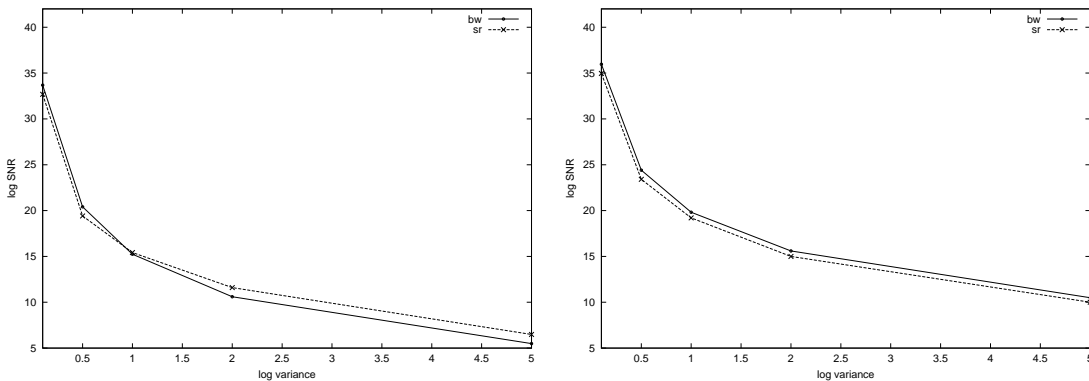


FIG. 5.49 – PSNR versus variance “bumps” et “doppler”

On peut chercher à aller plus loin afin d’utiliser au mieux les propriétés de la prédiction ENO-SR. Cette prédiction est conçue de manière à être précise aux basses échelles pour des fonctions régulière par morceaux, les détails aux échelles fines n’apportant plus d’information fondamentale pour la reconstruction. Cette propriété a été illustrée à la fin du chapitre 1 dans le cas d’un signal non bruité sur les figures 1.10 et 1.12. Elle suggère de façon naturelle une stratégie de seuillage modifiée où nous allons mettre à zéro toute la descendance multiéchelle d’un coefficient lorsque celui-ci a été obtenu par la prédiction ENO-SR (c’est à dire lorsque l’intervalle associé à ce coefficient a été classé comme singulier par le processus de détection). C’est en quelque

sorte l'analogue de l'algorithme EBCOT-EA que nous avons introduit dans le cadre de la compression.

La figure 5.51 illustre l'efficacité de cette approche pour un signal régulier par morceau tel que "sinestep" avec un bruit élevé de variance  $\sigma^2 = 2$ . La figure 5.51 illustre le fait que les détails conservés sont en nombre très faible ce qui permet de réduire très fortement l'effet du bruit, tout en assurant une excellente reconstruction du signal grâce à la procédure ENO-SR. La figure 5.52 confirme cette tendance lorsque l'on examine l'évolution du PSNR en fonction de la variance du bruit.

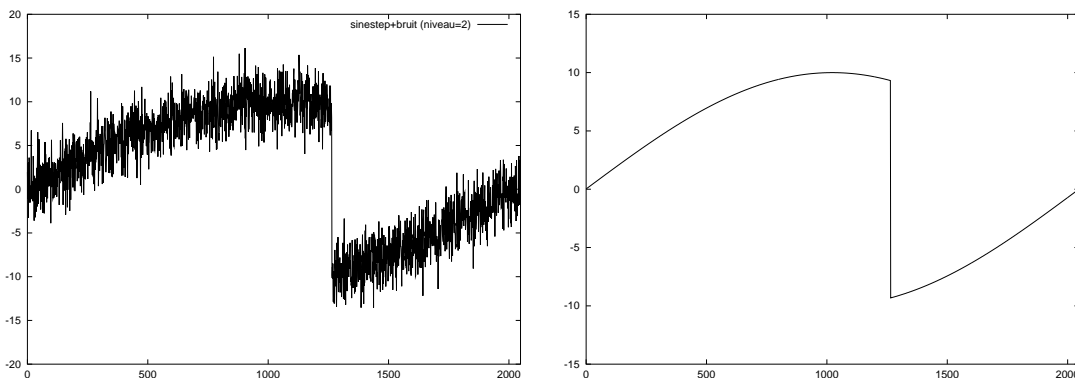


FIG. 5.50 – “Sinestep” : signal bruité et signal débruité en utilisant une stratégie adaptative de seuillage (PSNR=45.87)

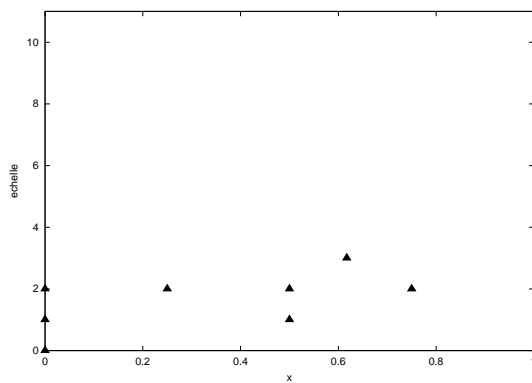


FIG. 5.51 – Détails utilisés dans la reconstruction

### 5.2.3 Débruitage des images

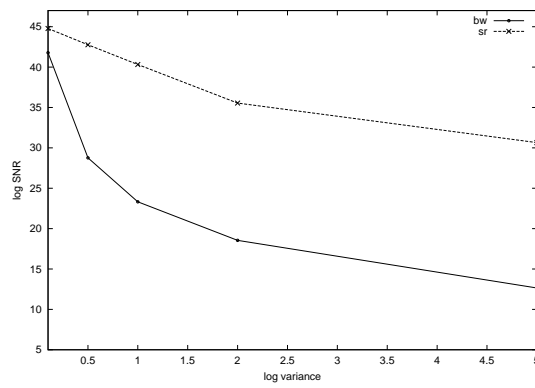


FIG. 5.52 – PSNR versus variance “sinestep”



Nous terminons ce chapitre par quelques tests numériques sur le débruitage des images. Nous effectuerons sur les quatre images tests “ellipse”, “graphe”, “peppers” et “phare”, une comparaison des méthodes suivantes :

1. Débruitage invariant par translation dans une représentation BW.
2. Débruitage invariant par translation dans une représentation EA.

Une troisième méthode possible consisterait à appliquer un débruitage invariant par translation dans une représentation EA, avec seuillage modifié suivant la stratégie présentée à la fin de la section précédente : mettre à zéro les coefficients descendants d’un carré singulier où on a utilisé la prédiction EA. Nous ne présentons pas les résultats de cette méthode car les tests numériques ont révélé qu’elle n’apportait aucune amélioration sur les méthodes précédentes, tant pour les images géométriques que pour les images réelles.

Les figures 5.53, 5.54, 5.55, 5.56, 5.57, 5.58, 5.59 et 5.60, illustrent les résultats numériques obtenus dans le cas d’un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2 = 0.01$  (les images étant normalisées entre 0 et 1). Pour ce niveau de bruit peu élevé, les différences entre les méthodes sont imperceptible, avec quelques différences dans le PSNR en faveur des représentations EA pour les images synthétiques et BW pour les images réelles.

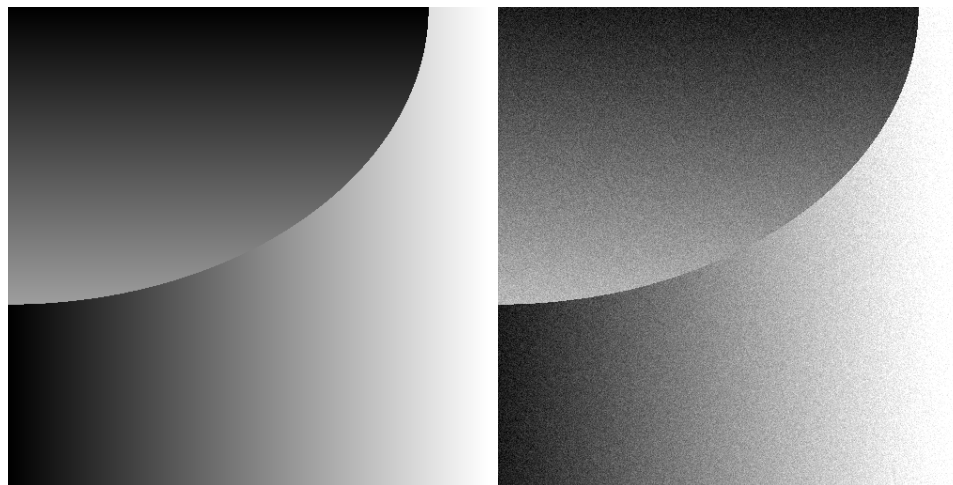


FIG. 5.53 – Image originale et la version bruitée (niveau du bruit  $\sigma^2 = 0.01$ )

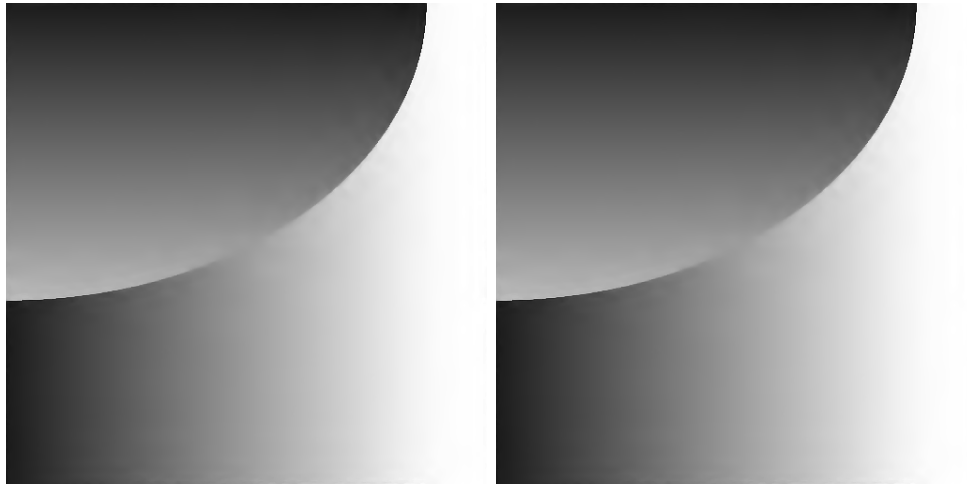


FIG. 5.54 – Résultats de débruitage en utilisant le seuillage invariant par translation avec une représentation BW (PSNR 32.6) et EA (PSNR 32.9)

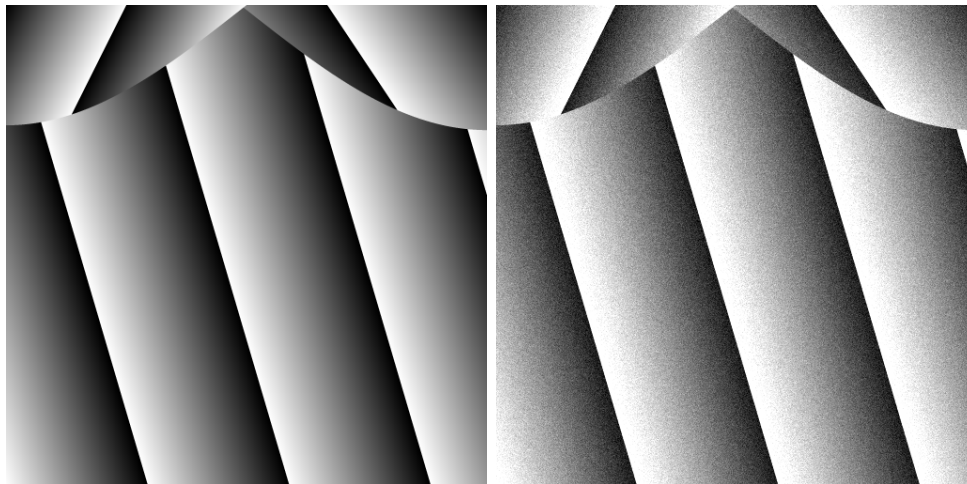


FIG. 5.55 – Image originale et la version bruitée (niveau du bruit  $\sigma^2 = 0.01$ )

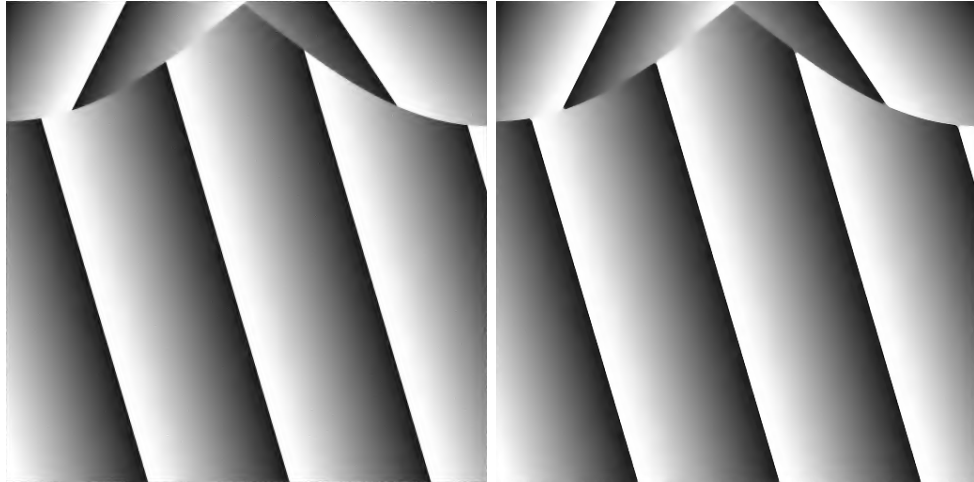


FIG. 5.56 – Résultats de débruitage en utilisant le seuillage invariant par translation avec une représentation BW (PSNR 30.4) et EA (PSNR 30.9)

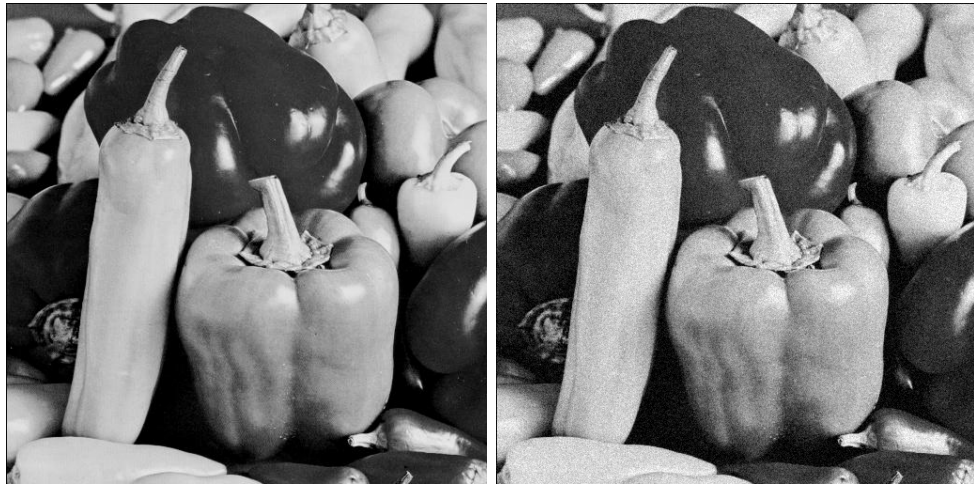


FIG. 5.57 – Image originale et la version bruitée (niveau du bruit  $\sigma^2 = 0.01$ )

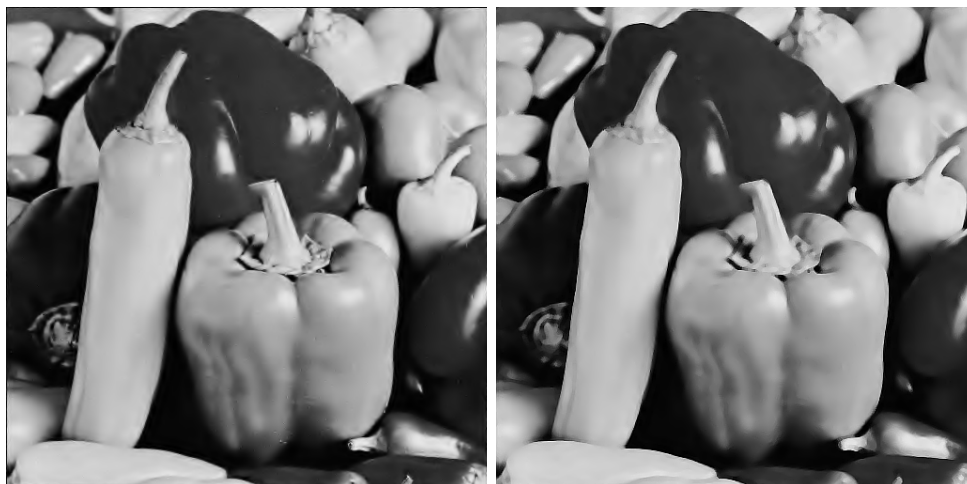


FIG. 5.58 – Résultats numériques de débruitage en utilisant le seuillage invariant par translation avec une représentation BW (PSNR 29.8) et EA (PSNR 28.8)



FIG. 5.59 – Image originale et sa version bruitée (niveau du bruit  $\sigma^2 = 0.01$ )



FIG. 5.60 – Résultats de débruitage en utilisant le seuillage invariant par translation avec une représentation BW (PSNR 28.1) et EA (PSNR 27.4)

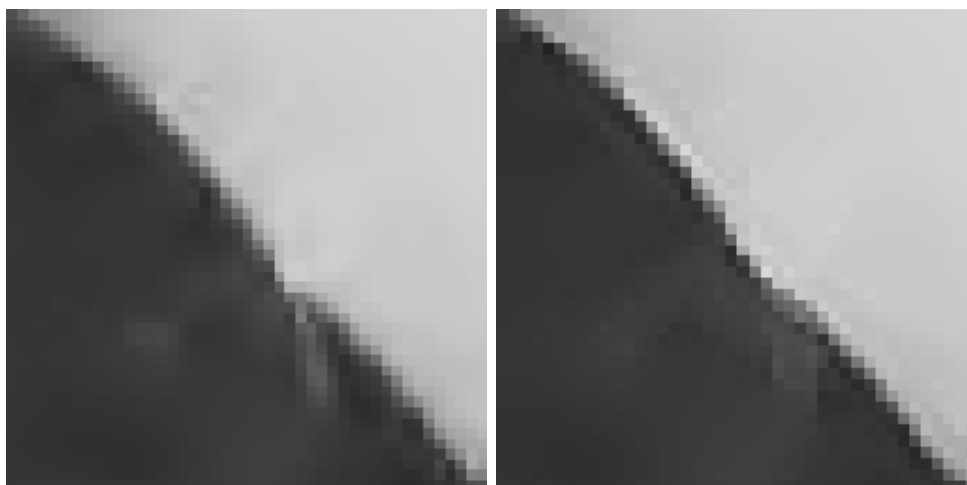


FIG. 5.61 – Agrandissement autour d'un contour débruité avec BW et EA

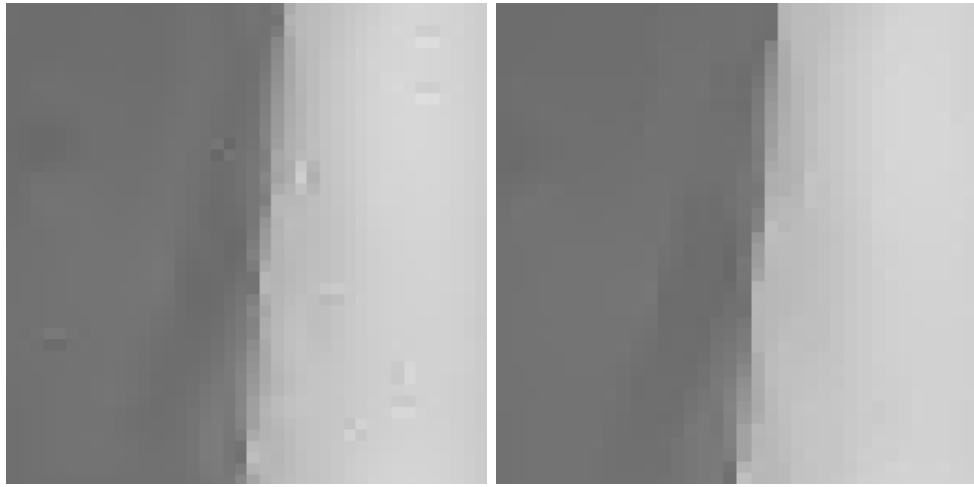


FIG. 5.62 – Agrandissement autour d’un contour débruité avec BW et EA

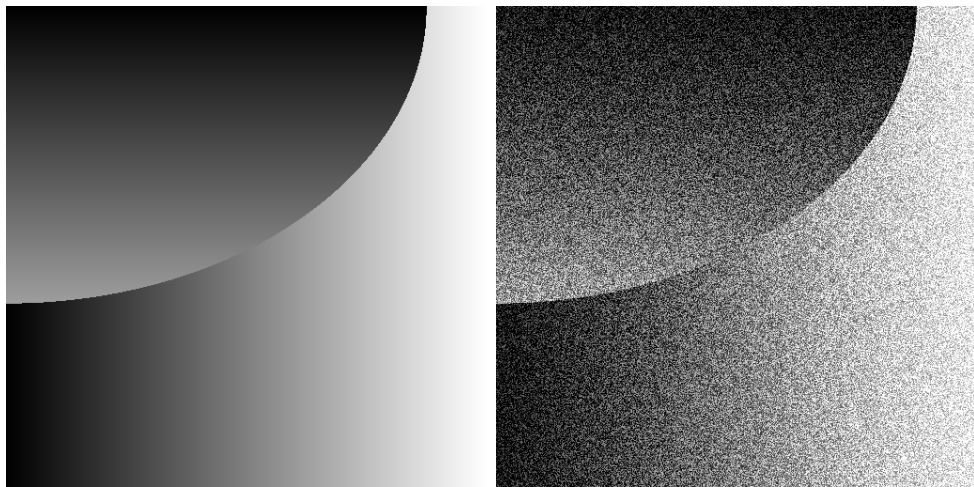


FIG. 5.63 – Image originale et la version bruitée (niveau du bruit  $\sigma^2 = 0.1$ )

Les figures 5.63, 5.64, 5.65, 5.66, 5.67, 5.68, 5.69 et 5.70, illustrent les résultats numériques obtenus dans le cas d’un bruit blanc gaussien de variance dix fois plus élevée  $\sigma^2 = 0.1$ . Dans ce cas, la représentation EA apporte en outre des améliorations visuelles dans le cas des images géométriques, et une légère amélioration en PSNR sur l’image “peppers”. Pour examiner de plus près le comportement des deux méthodes, nous présentons sur les figures 5.61

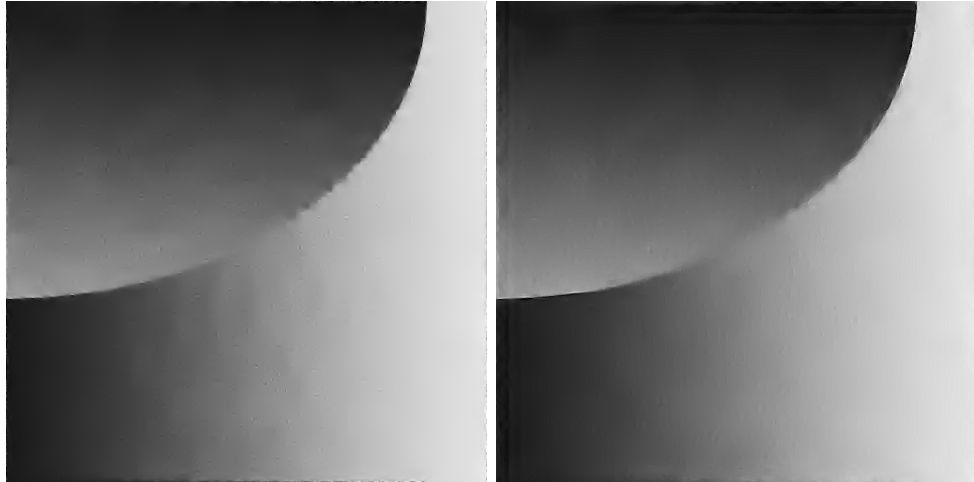


FIG. 5.64 – Résultats de débruitage en utilisant le seuillage invariant par translation avec une représentation BW (PSNR 24.91) et EA (PSNR 26.16)

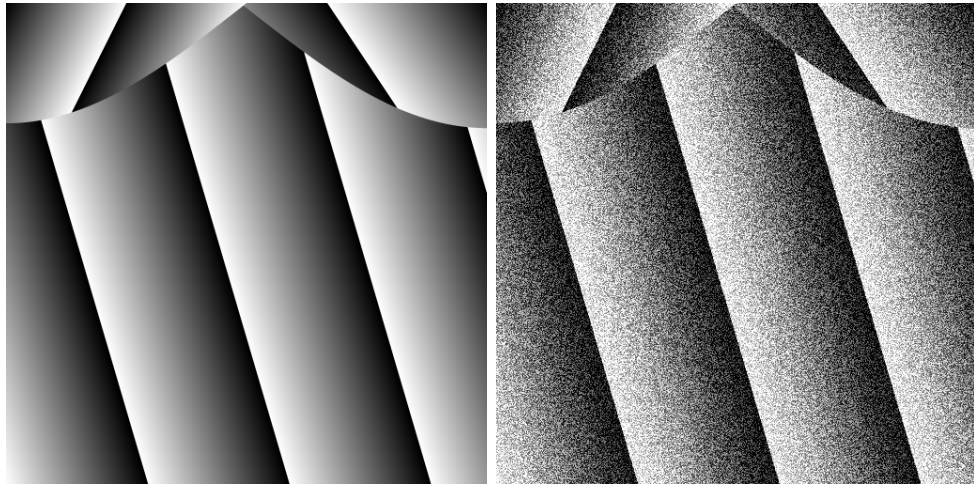


FIG. 5.65 – Image originale et la version bruitée (niveau du bruit  $\sigma^2 = 0.1$ )

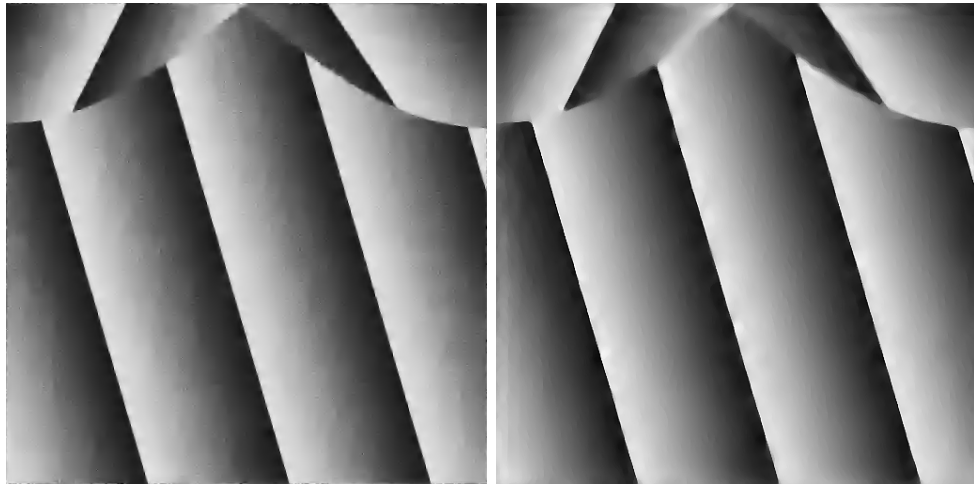


FIG. 5.66 – Résultats de débruitage en utilisant le seuillage invariant par translation avec une représentation BW (PSNR 22.76) et EA (PSNR 24.51)

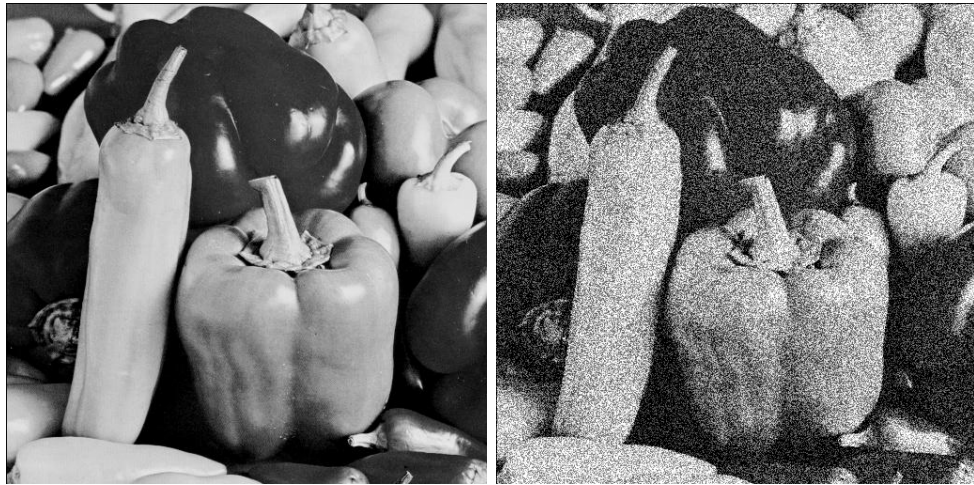


FIG. 5.67 – Image originale et la version bruitée (niveau du bruit  $\sigma^2 = 0.1$ )





FIG. 5.68 – Résultats numériques de débruitage en utilisant le seuillage invariant par translation avec une représentation BW (PSNR 22.35) et EA (PSNR 22.71)

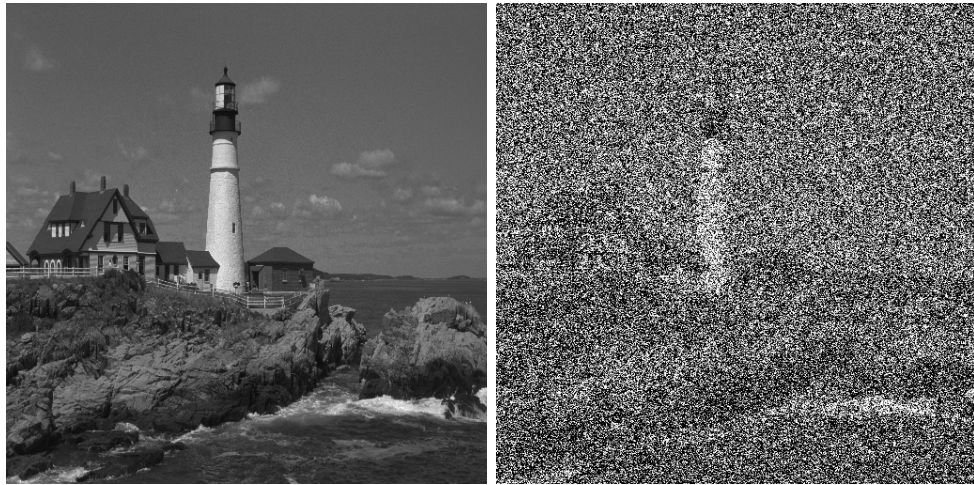


FIG. 5.69 – Image originale et sa version bruitée (niveau du bruit  $\sigma^2 = 0.1$ )



FIG. 5.70 – Résultats de débruitage en utilisant le seuillage invariant par translation avec une représentation BW (PSNR 24.49) et EA (PSNR 24.18)

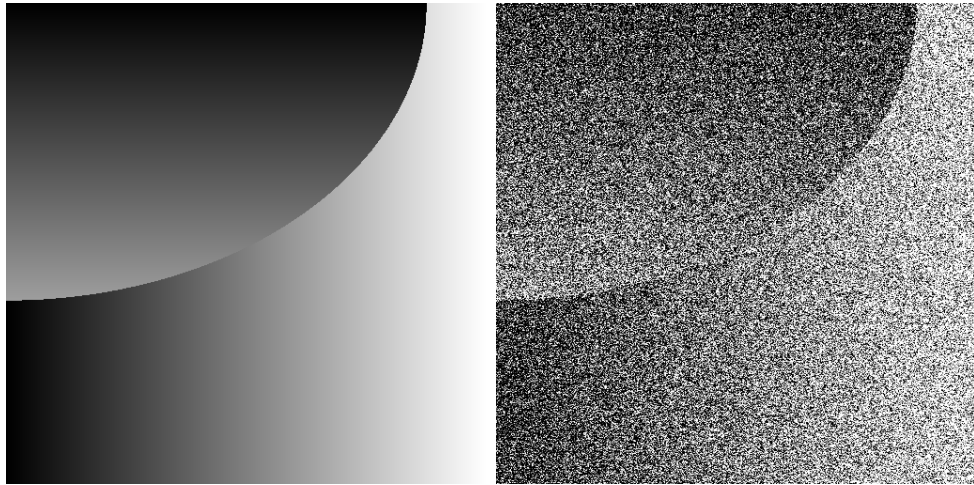


FIG. 5.71 – Image originale et la version bruitée (niveau du bruit  $\sigma^2 = 1$ )

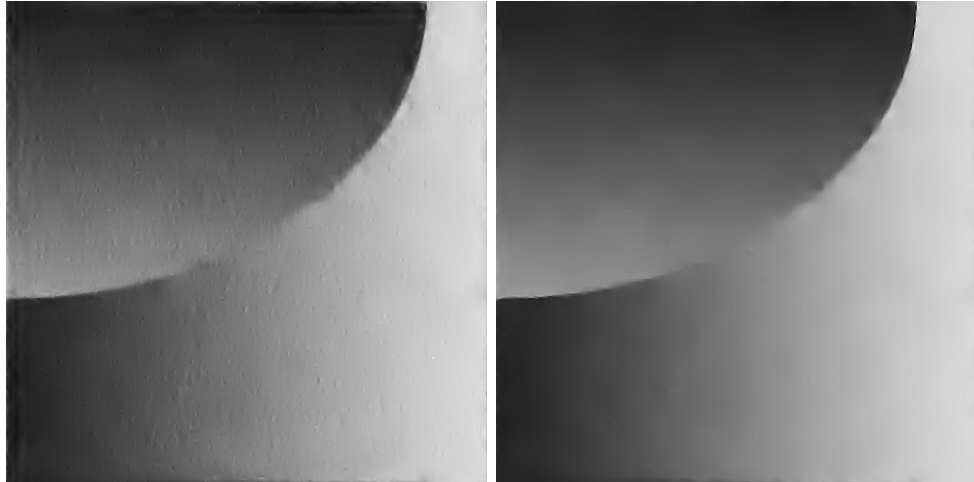


FIG. 5.72 – Résultats de débruitage en utilisant le seuillage invariant par translation avec une représentation BW (PSNR 21.13) et EA (PSNR 23.40)

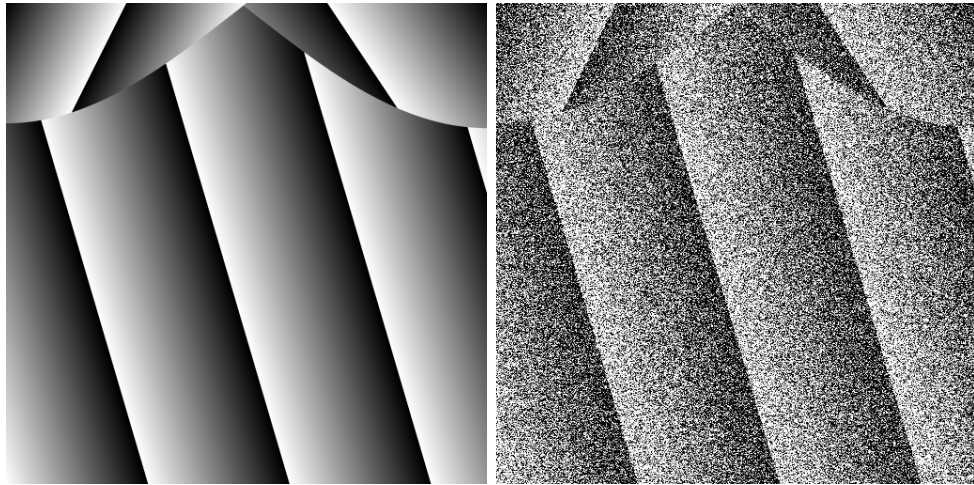


FIG. 5.73 – Image originale et la version bruitée (niveau du bruit  $\sigma^2 = 1$ )

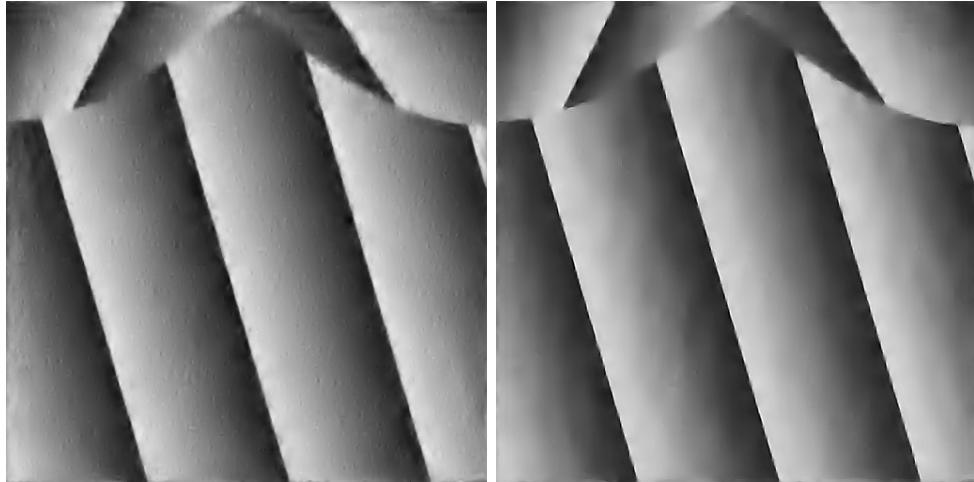


FIG. 5.74 – Résultats de débruitage en utilisant le seuillage invariant par translation avec une représentation BW (PSNR 18.76) et EA (PSNR 21.10)



FIG. 5.75 – Image originale et la version bruitée (niveau du bruit  $\sigma^2 = 1$ )



FIG. 5.76 - Résultats numériques de débruitage en utilisant le seuillage invariant par translation avec une représentation BW (PSNR 19.50) et EA (PSNR 20.18)

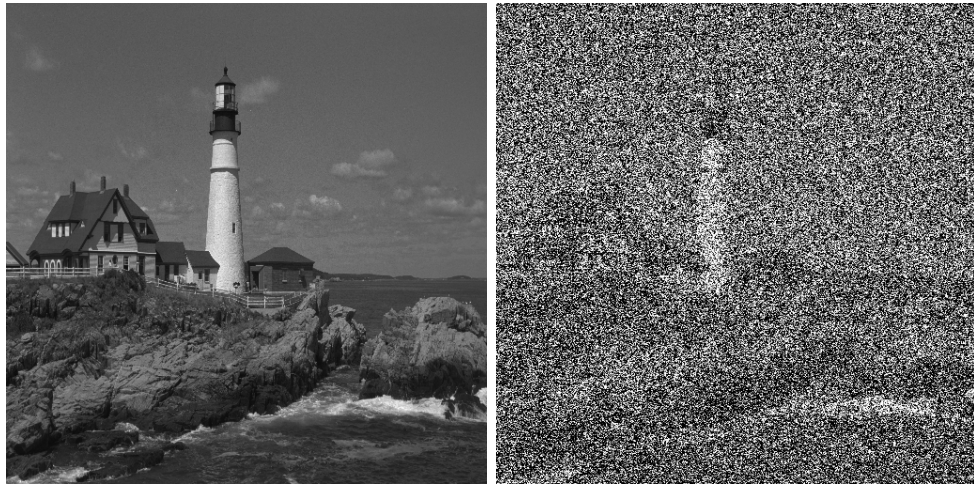


FIG. 5.77 - Image originale et sa version bruitée (niveau du bruit  $\sigma^2 = 1$ )



FIG. 5.78 – Résultats de débruitage en utilisant le seuillage invariant par translation avec une représentation BW (PSNR 14.91) et EA (PSNR 17.80)

et 5.62 des agrandissements de régions situées au voisinage d'un contour pour les images "peppers" et "phare". Tout comme dans le cadre de la compression d'image nous constatons que la méthode basée sur la représentation EA tend à restituer des contours nets.

Les figures 5.71, 5.72, 5.73, 5.74, 5.75, 5.76, 5.77 et 5.78, illustrent enfin les résultats numériques pour un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2 = 1$ . Dans ce cas, on constate que la représentation EA apporte des améliorations en PSNR et visuelles pour toutes les images.

#### 5.2.4 Conclusion

Au vu de ces expériences numériques, on peut affirmer que les représentations non-linéaires apportent des améliorations significatives au débruitage dans deux situations : débruitage des fonctions régulières par morceaux dans le cas monodimensionnel en utilisant une procédure de seuillage modifiée dans la représentation ENO-SR, et débruitage des images lorsque le niveau de bruit est élevé ce qui conduit la méthode basée sur la représentation BW à lisser fortement les contours. Par ailleurs les effets du bruit sur les processus non-linéaires de sélection de stencil, de détection de singularité et de reconstruction de fonctions constantes par morceaux sont particulièrement difficiles à appréhender.



# Chapitre 6

## Conclusions et perspectives

Pour clore ce mémoire, nous pouvons formuler quelques axes de recherche qui se dégagent de façon naturelle de nos travaux :

1. D'un point de vue théorique, il serait intéressant de creuser la question de la stabilité et en particulier d'éliminer la contrainte  $s > 1/p$  sur la régularité de la donnée que l'on perturbe. D'autre part nos résultats de stabilité ne s'appliquent ici qu'aux représentations WENO. Il serait donc souhaitable de développer des méthodes de reconstruction de fonctions discontinues du type ENO-SR et ENO-EA possédant en outre de bonnes propriétés de stabilité.
2. Du point de vue des applications aux images, nous avons constaté à plusieurs reprises l'insuffisance du modèle simplifié des fonctions polynomiales par morceaux sur lequel se fonde la prédiction ENO-EA. Une perspective ambitieuse serait d'utiliser dans la prédiction des modèles plus sophistiqués intégrant par exemple un degré de netteté des contours et une composante de texture. La difficulté principale d'une telle approche est que l'on augmente alors significativement le nombre de paramètres présent dans de tels modèles ce qui rend leur identification plus difficile et plus sensible au bruit. Une perspective plus modeste mais qui peut donner d'excellent résultats pratique est le développement de codeurs hybrides fondés sur une séparation préalable d'une partie géométrique sur laquelle on applique le codage ENO-EA et d'une partie texturée que l'on traite de manière différente.
3. Il serait enfin intéressant d'explorer d'autres applications des représentations non-linéaires de type ENO-SR et ENO-EA. Un exemple, envisagé en collaboration avec des chercheurs de l'ENST, est le codage video. Dans cette application, les discontinuités se situent aussi bien dans l'espace



(contour) que dans le temps (rupture de plan), et on cherche à utiliser les représentations non-linéaires pour ces deux aspects. Dans une toute autre direction, il serait légitime d'examiner les applications de la reconstruction ENO-EA en simulation numérique des phénomènes de propagation de fronts, domaine dans lequel les méthodes ENO avaient initialement été introduite dans le cadre monodimensionnel.

# Bibliographie

- [1] R. Adams (1975) *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York.
- [2] Alvarez, L., P.L. Lions et J.M. Morel (1992) *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM J. Numer. Anal., 29 :845-866.
- [3] Arandiga, F. et R. Donat (1999) *A class of nonlinear multiscale decomposition*, preprint, University of Valencia, à paraître dans Numerical Algorithms.
- [4] Amat, S., F. Arandiga, A. Cohen et R. Donat (1999) *Tensor product multiresolution analysis with error control*, preprint, University of Valencia, à paraître dans Signal Processing.
- [5] Amat, S., F. Arandiga, A. Cohen, R. Donat, G. Garcia, et M. Von Oehsen (2002) *Data compression with ENO Schemes : a case study*, Appl.Comput.Harmon.Anal.11,273-288.
- [6] Antonini, M., M. Barlaud, I. Daubechies et P. Mathieu (1992), Image coding using wavelet transforms, *IEEE Trans. Image Processing* 1, 205-220.
- [7] Arandiga, F., Cohen, A., Donat, R. et Dyn N. (2000) *Interpolation of piecewise smooth functions*, (en preparation)
- [8] Arandiga, F., Donat, R. et Harten A. (1998) *Multiresolution Based On Weighted Averages Of The Hat Function*, à paraître dans SIAM Journal on Numerical Analysis.
- [9] Baraniuk, R., R.L. Claypoole, G. Davis, G et W. Sweldens (1997), *Nonlinear Wavelet Transforms for Image Coding*, Proc. 31st Asilomar Conference.
- [10] Baraniuk, R., R.L. Claypoole, G. Davis, G et W. Sweldens (1999), *Nonlinear Wavelet Transforms for Image Coding via Lifting scheme*, à paraître dans IEEE Trans. on Image Processing.
- [11] Candes, E. et D. Donoho (1999), *Ridgelets : a key to higher-dimensional intermittency ?*, à paraître dans Phil. Trans. Roy. Soc.

- [12] Candes, E. et D. Donoho (1999), *A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation For Objects with Edges, Curves and Surfaces*, L. L. Schumaker et al. (eds), Vanderbilt University Press, Nashville, TN.
- [13] Cavaretta, A.S., W. Dahmen et C.A. Michelli (1991), *Stationary Subdivision*, Memoirs of Amer. Math. Soc., Volume 93.
- [14] Chan T., X.-D Liu et S. Osher (1994) *Weighted essentially non-oscillatory schemes*, Journal of Comput. Phys., 115 :200-212.
- [15] P.G. Ciarlet (1991), *Basic error estimates for the finite element method*, dans : P.G. Ciarlet et J.L. Lions, eds, Handbook of Numerical Analysis, vol. 2, Elsevier, Amsterdam.
- [16] Cohen, A. (1999) *Wavelets in numerical analysis*, Handbook of Numerical Analysis, vol. VII, P.G. Ciarlet et J.L. Lions, eds., Elsevier, Amsterdam.
- [17] Cohen, A. et R. Ryan (1995) *Wavelets and multiscale signal processing*, Chapman and Hall, London.
- [18] Cohen, A., W. Dahmen, I. Daubechies et R. DeVore (2001) *Tree approximation and optimal encoding*, Applied and Computational Harmonic Analysis 11, 192-226.
- [19] Cohen, A., W. Dahmen, I. Daubechies et R. DeVore (2002) *Harmonic analysis of the space BV*, à paraître dans Revista Mathematica Iberoamericana.
- [20] Cohen, A., I. Daubechies et J.C. Feauveau (1992) *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, Comm. in Pure and Appl. Math., vol. 45, 485-560.
- [21] Cohen, A., I. Daubechies M.Orchard et O.Gulieriz, (2000) *On the importance of combining wavelet-based non-linear approximation with coding strategies*, accepté dans IEEE Trans. Inf. Theory.
- [22] Cohen, A., R.Devore, G.Kerkyacharian et D.Picard,(2001) *Maximal spaces with given rate of convergence for thresholding algorithms*, Applied and Computational Harmonic Analysis 11, 167-191.
- [23] Cohen,A., R.Devore, P.Petrushev and H.Xu, (1999) *Non linear approximation 0and the space BV(R2)*, Amer. J. Math. 121, 587-628.
- [24] Cohen, A., N. Dyn et B. Matei (2000) *On the smoothness and stability of quasilinear subdivision schemes with application to ENO interpolation*, à paraître dans Appl. Comp. Harm. Anal.
- [25] Cohen, A. et B. Matei (2001) *Compact representations of images by edge adapted multiscale transforms*, IEEE-ICIP Conference, Tessaloniki.

- [26] Cohen, A. et B. Matei (2002) *Nonlinear subdivisions schemes : applications to image processing*, Tutorial on multiresolution in geometric modelling, A.Iske, E.Quack and M.Floater eds., Springer, 2002.
- [27] Coifman, R.R. et D. Donoho (1995) *Translation Invariant Denosing*, preprint.
- [28] Coifman, R.R. et Y. Meyer (1991)*Remarques sur l'analyse de Fourier à femêtre* , C.R.A.S. 312, 259-261.
- [29] Coifman, R.R., Y. Meyer, S. Quake et M.W. Wickerhauser (1993) *Signal Processing and compression with wavelet packets*, Progress in wavelet analysis and applications, Y. Meyer, S. Roques (eds.) Ed. Frontières, Gif-sur-Yvette, France.
- [30] Daubechies, I. (1992) *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia.
- [31] Daubechies, I. et J. Lagarias (1991)*Two Scale differences Equations : I.Existence and global regularity of solutions*, SIAM J. Math. Anal.22,1388-1410.
- [32] Daubechies, I. et J. Lagarias, (1992)*Two Scale differences Equations II.Local Regularity, infinite products of matrices and fractals*, SIAM J. Math. Anal.23,1031-1079.
- [33] Deslaurier, G. et S. Dubuc (1989) *Symmetric Iterative Interpolation Scheme*, Constr. Approx. 5 :49-68.
- [34] DeVore R. (1993) *Nonlinear Approximation*, Acta Numerica.
- [35] DeVore, R. et G.G. Lorentz. *Constructive Approximation*, Springer Verlag, Berlin, 1993.
- [36] Donoho, D. (1993), *Unconditional Bases are Optimal Bases for Data Compression and for Statistical Estimation* , Applied and Computational Harmonical Analysis,1, 100-115.
- [37] Donoho, D. (1993), *Smooth wavelet decompositions with blocky coefficients kernels*, Recent Advances in Wavelet Analysis, L.L. Schumaker and G. Webb (eds), Boston : Academic Press, 259-308.
- [38] Donoho, D., I. Johnstone, G. Kerkyacharian et D. Picard, (1994) Wavelet shrinkage : Asymptotia? (with discussion), *J. Roy. Stat. Soc. Ser. B* **57**, 301-369.
- [39] Dyn, N.(1992) *Subdivision Schemes in computer aided geometric design*, Advances in Numerical Analysis II., Subdivision algorithms and radial functions, W.A. Light (ed.), Oxford University Press,36-104.

- [40] Dyn, N., J. Gregory, et D. Levin (1991) *Analysis of uniform binary subdivision schemes for curve design*, Constr. Approx. 7 :127-147.
- [41] Dyn, N., M. Floater, et A. Iske (2002) *Adaptive Thinning for Bivariate Scattered Data*, à paraître dans le Journal of Computational and Applied Mathematics.
- [42] Falzon, F. et S. Mallat(1998) *Analysis of low bit rate image transform coding*, IEEE Trans.Signal Processing, 4.
- [43] Gill, P.E. et Murray, W.(eds.) (1984), *Numerical methods for constrained optimization*, Academic Press, New York.
- [44] Glimm, J., Graham, M.J., Grove J.V. et Plohr B.J. (eds.) (1994) *Hyperbolic problems : theory, numerics, applications*. Proceedings of the 5th International Conference held at the University of New York.
- [45] Han, B. et R. Jia (1998), *Multivariate refinement equations and convergence of subdivision schemes* SIAM J. Math. Anal.29, 1177-1199.
- [46] Harten, A.(1993) *Discrete multiresolution analysis and generalized wavelets*, Journal of Applied Numerical Mathematics,12 :153-193.
- [47] Harten, A.(1993) *ENO Schemes with Subcell Resolution*, Journal of Applied Numerical Mathematics,12 :153-193.
- [48] Harten, A., B. Enquist, S. Osher and S. Chakravarthy (1987). *Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III*, Journal of Comput. Phys., 71 :231-303.
- [49] Jiang, G. et C.-W. Shu (1996), *Efficient implementation of weighted ENO schemes*, Journal of Comput. Phys., 126 :202-228.
- [50] Hueckel, M.H. (1971), *An operator which locates edges in digitized pictures*, Journal of ACM., 18 :113-125.
- [51] Lepennec E. et S. Mallat (2001) *Bandelet representation for image compression*, IEEE-ICIP Conference, Tessaloniki.
- [52] Mallat, S. (1998), *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, New York.
- [53] Marr, D. (1982), *Vision*, Freeman.
- [54] Matei, B. (2000) *Smoothness characterization and stability in nonlinear multiscale representation* , (en preparation).
- [55] Meyer, Y. (1990)*Ondelettes et Operateurs 1 : Ondelettes*. Paris : Hermann.
- [56] Osher, S et L. Rudin (1990), *Feature Oriented image enhancement usin shock filters* , SIAM J. Numer. Anal., 27 :919-940.

- [57] Pearlman, W.A., et A.Said (1996), *An image multiresolution representation for lossless and lossy compression*, IEEE Trans. Image Proc., vol. 5, no. 9, 1303-1310.
- [58] Rao, K.R., P. Yip (1990) *Discrete Cosine Transform, Algorithms, Advantages, Applications*, Academic Press, Boston.
- [59] Shapiro, J. (1993), *Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients*, IEEE-Signal Processing, 12 :3445–3462.
- [60] Taubman, David. (1998), *Embedded Block Coding with Optimized Truncation*, Signal Processing : Image Communication, vol. 17, Elseviers.
- [61] Triebel, H. (1983) *Theory of function spaces*, Birkhauser, Basel.
- [62] Vetterli, M. (2001) *Wavelets, approximation and compression*. IEEE Signal Processing Magazine, vol. 18, no. 5, pp. 59–73.
- [63] Vetterli M., P. Marziliano et T. Blu. (2002) Sampling signals with finite rate of innovation. to appear, IEEE Tr. on Signal Processing.