HAL
open science

Problèmes de réaction-diffusion avec convection : Une étude mathématique et numérique.

Rozenn Texier-Picard

To cite this version:

Rozenn Texier-Picard. Problèmes de réaction-diffusion avec convection : Une étude mathématique et numérique.. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2002. Français. NNT : . tel-00002038

HAL Id: tel-00002038

https://theses.hal.science/tel-00002038v1

Submitted on 27 Nov 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 60 - 2002

Année 2002

THÈSE

présentée devant

l'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT

(arrêté du 30 mars 1992)

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée et soutenue publiquement le 13 juin 2002

par

Rozenn TEXIER PICARD

Problèmes de réaction-diffusion avec convection : Une étude mathématique et numérique.

Directeurs de thèse :

Vitaly VOLPERT,
Martine MARION.

JURY :	Martine MARION,	Directrice de thèse
	Geneviève RAUGEL,	Rapporteur
	Christophe CHEVERRY,	
	Youri EGOROV,	Rapporteur
	Emmanuel GRENIER,	
	Marc MASSOT,	
	Vitaly VOLPERT,	Directeur de thèse.

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Vitaly Volpert, qui m'a proposé ce sujet très vaste et a su me guider dans des travaux variés. Il m'a appris à maîtriser des outils nouveaux, élégants et originaux. Son intuition m'a aidée dans bien des situations.

Je remercie également Martine Marion, dont la collaboration m'a permis d'aborder des méthodes différentes, et d'avoir une meilleure connaissance des outils et résultats usuels dans le domaine des équations de réaction-diffusion et des équations de Navier Stokes.

Il n'a pas été évident de réunir sept personnalités dans ce jury, et je suis touchée que chacune des personnes sollicitées ait accepté d'en faire partie, malgré un emploi du temps souvent chargé. Je tiens à les en remercier tous, et plus particulièrement Geneviève Raugel et Youri Egorov, qui ont accepté d'être rapporteurs pour ma thèse. Je suis très honorée de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Leurs remarques m'ont permis d'améliorer significativement la rédaction de ce manuscrit.

D'autres collègues, proches ou lointains, ont participé aux travaux présentés ici. John Pojman, d'abord, chimiste à l'Université du Sud Mississipi, dont l'enthousiasme communicatif m'a fortement motivée sur les problèmes des chapitres 3 et 4. Je le remercie à la fois pour la confiance qu'il m'a accordée, et pour les éclaircissements physiques qu'il m'a donnés à plusieurs reprises. Je remercie également Thierry Dumont, qui a participé à l'étude numérique du chapitre 4, Youssef Rouchdy, qui au cours de son stage de DEA m'a aidée à élucider les conditions au bord de type "non glissement", et Ilya Kostin, qui m'a montré comment obtenir une estimation globale d'énergie pour le chapitre 4. Enfin, je remercie mon mari, Clément Picard, qui m'a aidée plus d'une fois à éclaircir des points un peu délicats.

Pour terminer, je salue chaleureusement les personnels, aussi bien administratifs que scientifiques, de Maply, ainsi que les invités, étudiants et stagiaires que j'ai cotoyés pendant ces quatre années. Ma gratitude va particulièrement à Marc Massot, qui a animé pendant plusieurs années le groupe de travail "Modélisation Mathématique des Milieux Réactifs", et favorisé les échanges entre les membres de cette thématique et des chercheurs extérieurs au laboratoire, ainsi qu'à Stéphane Genieys, qui a pris le relais cette année.

Enfin, merci à tous ceux qui ont porté de l'intérêt à mes travaux, et qui m'ont donné des idées pour les continuer.

Table des matières

1. Motivations exp´erimentales 11
2. Mod`ele math´ematique 12
3. Plan de la th`ese 14

1 Propriétés qualitatives des opérateurs de réaction-diffusion-convection 17

1. Introduction 17
2. Op´erateurs et espaces 18
3. Propri´et´e de Fredholm et indice 21
   3.1. Propri´et´e de Fredholm 21
   3.2. Calcul de l'indice de Fredholm 23
4. Op´erateurs propres 24
   4.1. De l'importance des espaces pond´er´es 24
   4.2. Les r´esultats 25
5. Degr´e topologique 28
6. Recherches d'ondes progressives 30
   6.1. Le probl`eme de l'invariance par translation 30
   6.2. Fonctionnalisation de la vitesse du front 31
7. Application `a des probl`emes concrets 34
   7.1. Cas de conditions au bord de type "surface libre" 34
   7.2. Cas de conditions de non-glissement 37
8. Conclusions 40

2 Etude de bifurcations pour un problème de réaction-diffusion-convection 43

1. Introduction 43
2. Principaux r´esultats 44
3. Spectre et bifurcations 51
   3.1. Introduction 51
   3.2. Etude des valeurs propres 53
4. Stabilit´e de la solution monodimensionnelle 57
5. Stabilit´e des solutions convectives 63
   5.1. Le probl`eme de valeurs propres classique 64
   5.2. Le probl`eme de C-valeurs propres 69
6. Conclusions et discussion 75

3 Influence de la tension de surface sur un front de polymérisation 79
1. Introduction 79
2. Mod`ele math´ematique 81
2.1. Pr´esentation des ´equations et de la m´ethode 81
2.2. Onde progressive 84
3. Conditions de saut `a l'interface 85
3.1. Conditions pour la temp´erature 85
3.2. Conditions pour la vitesse 89
4. Analyse de stabilit´e lin´eaire 91
4.1. Stabilit´e cellulaire : th´eorie g´en´erale 92
4.2. En pratique 93
4.3. Etude de la valeur critique 96
5. Comparaison avec des valeurs de param`etres exp´erimentales 98
6. Conclusions et discussion 100

4 Convection dans les liquides miscibles 103
1. Introduction 103
1.1. Aspects exp´erimentaux 104
1.2. Mod`eles math´ematiques 105
2. Pr´esentation du mod`ele 106
3. Existence et unicit´e 107
3.1. Formulation faible 107
3.2. Introduction d'un probl`eme approch´e de dimension finie. 110
3.3. Estimations a priori ind´ependantes de m. 112
3.4. Passage `a la limite quand $m \to +\infty$ 116
3.5. Unicit´e de la solution 123
4. Etude num´erique - cas des gouttes miscibles 125
4.1. Sch´ema num´erique 125
4.2. Test : ´evolution d'une goutte sph´erique 130
4.3. Evolution d'une goutte elliptique 133
4.4. Evolution d'une goutte tr`es allong´ee 136
5. Etude d'interfaces diffuses presque planes 137
6. Conclusions et perspectives 138

Table des figures

1.1 Importance des espaces pond´er´es 25

2.1 Front plan et fronts convectifs 44
2.2 Diff´erents types de bifurcations 51
2.3 R´esolution graphique de $\lambda_R(\mu) = \mu$ 62
2.4 Le contour pour l'´etape 3 du lemme 5.3 67
2.5 R´esolution graphique de $\overset{0}{\lambda}_R(\mu) = \mu$. 70
2.6 R´esolution graphique de : $\overset{1}{\lambda}_{R,k_0}(\mu) = \mu$ 72

3.1 Effet de Marangoni dans le cas d'une surface libre eau/air. 80
3.2 Pourquoi l'instabilit´e de Marangoni ne peut exister. 80
3.3 Photo d'un front de polym´erisation 83
3.4 Comportement du terme de r´eaction en fonction de Z 87
3.5 Fronti`ere de stabilit´e : cas th´eorique. 93
3.6 Valeur critique en fonction de k 97
3.7 Lignes de courant de la perturbation de vitesse. 98

4.1 Concentration. Cas d'une goutte sph´erique 132
4.2 Evolution de la fonction de courant. Cas d'une goutte elliptique. 132
4.3 Evolution de la concentration. Cas d'une goutte elliptique. 134
4.4 Evolution de concentration (diff´erence par rapport `a la concentration initiale). Goutte elliptique. 134
4.5 Fonction de courant apr`es 2.5s dans le cas d'une goutte elliptique. 135
4.6 Test de pr´ecision. Cas d'une goutte elliptique. 135
4.7 Comparaison avec un mod`ele sans convection. 140
4.8 Evolution de la concentration et de la fonction de courant pour une goutte tr`es allong´ee. 141
4.9 Evolution en 25s dans le cas d'une diffusion plus faible (goutte allong´ee). 142
4.10 Evolution en 25s dans le cas d'un coeffi cient k plus important (goutte allong´ee). . 142
4.11 Test de pr´ecision. Goutte tr`es allong´ee. 143
4.12 Evolution de la concentration. Cas d'une zone ´etroite. 143
4.13 Evolution de la fonction de courant. Cas d'une zone ´etroite. 144
4.14 Evolution de la concentration. Cas d'une zone large. 144
4.15 Evolution de la fonction de courant. Cas d'une zone large. 144

Introduction

1. Motivations expérimentales

Certaines réactions chimiques peuvent se produire dans des zones très localisées en espace, et se propager au cours du temps à travers un réacteur. On parle alors de réaction frontale. Un des exemples les mieux connus est la combustion en milieu gazeux : on observe alors la propagation d'une zone de réaction, appelée flamme, séparant les gaz frais des gaz brûlés. Pour qu'un front de réaction puisse se développer, il faut que la réaction ait une énergie d'activation élevée, ce qui va lui permettre de se développer dans une zone étroite, et qu'elle soit exothermique, afin de fournir l'énergie nécessaire à la propagation du front. La réaction de polymérisation possède ces propriétés, et il a été observé expérimentalement qu'elle pouvait sous certaines conditions se propager sous forme de front (voir par exemple [6]).

Prenons donc l'exemple d'une polymérisation frontale qui se propage dans un tube vertical, le polymère chaud étant sous le monomère froid. Nous ferons l'hypothèse que les deux liquides ont, à température donnée, la même densité. Alors, dans des conditions de gravité usuelles, le polymère, plus chaud, va avoir tendance à remonter dans le monomère. C'est le phénomène de convection naturelle. En fonction de la valeur du nombre de Rayleigh, les courants occasionnés peuvent être plus ou moins importants. On observe expérimentalement qu'ils peuvent déstabiliser le front plan, et donner naissance à des fronts bidimensionnels.

Si l'expérience est réalisée en microgravité, réelle ou simulée, le phénomène de convection naturelle peut devenir négligeable. D'autres formes de convection, invisibles dans des conditions expérimentales usuelles, apparaissent alors. En particulier, la tension de surface entre les deux liquides peut conduire à une instabilité. En effet, cette tension dépend de la température. Si la température est perturbée en un point de l'interface, cette tension peut être modifiée, ce qui peut engendrer des courants convectifs. Cette interaction entre la tension de surface et une température non uniforme est connue sous le nom d'effet Marangoni. Comment la tension de surface interagit-elle avec une réaction chimique frontale ? Ici, les résultats expérimentaux sont encore inexistants, puisqu'une telle étude nécessiterait plusieurs minutes de microgravité. La lourdeur du protocole implique donc une démarche inverse : l'étude mathématique est menée préalablement aux études

expérimentales. Une vérification est prévue à la Station Spatiale Internationale, qui permettra de confirmer ou non le modèle.

2. Modèle mathématique

Cette thèse de doctorat a pour objets la modélisation et l'étude mathématiques de problèmes de réaction-diffusion avec convection dans un milieu incompressible. Une des motivations essentielles est d'étudier l'influence de la convection sur des réactions frontales. Toutefois, les résultats du chapitre 1 sont plus généraux, et peuvent s'appliquer à des réactions non frontales.

Les modèles mathématiques présentés consistent en un système de réaction-diffusion avec des termes convectifs

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v.\nabla\theta = d\Delta\theta + F(\theta) \tag{1}$$

couplé avec les équations de Navier-Stokes incompressibles contenant une force volumique (ou surfacique dans le chapitre 3) Φ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta v + \Phi, \tag{2}$$

$$\text{div}\, v = 0. \tag{3}$$

Ici θ est un vecteur dont les composantes peuvent être la température et les concentrations, v est la vitesse du fluide, p est sa pression. F est un terme source correspondant à la production ou la consommation des différentes espèces chimiques, et au dégagement de chaleur dûs à une éventuelle réaction chimique.

Pour compléter les équations (1)-(3), nous imposons des conditions au bord de Neumann pour θ, pour traduire la nullité du flux de chaleur et de masse à travers les parois, et pour la vitesse v nous considèrerons ou bien des conditions de "non-glissement" du fluide sur les parois, c'est-à-dire $v = 0$, ou bien des conditions dites de "surface libre", à savoir

$$v \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial(v \cdot \mathbf{t})}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$

où $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ désignent des vecteurs unitaires, respectivement tangent et normal à la frontière.

Dans le cas d'un ouvert non borné, nous ajouterons des conditions à l'infini.

Enfin, le problème présentant une dépendance en temps, nous nous intéresserons suivant les cas à un problème de Cauchy, en imposant une donnée initiale pour θ et v, ou à la recherche d'ondes progressives pour ces problèmes.

La nature physique des forces volumiques Φ peut être diverse. Nous en étudions ici deux types : la force de gravité et les forces capillaires.

Le cas le plus connu et étudié correspond à la force de gravité, qui peut mener à un mouvement du fluide, appelé convection naturelle. Ce phénomène est dû à la dépendance de la densité du milieu par rapport à la température ou aux concentrations, et il apparaît lorsque la distribution de température ou des concentrations n'est pas homogène. Dans le cas où cette dépendance est faible, on peut utiliser l'approximation de Boussinesq, où on suppose que la densité est constante sauf dans le terme de force volumique. Après linéarisation, ce dernier prend la forme :

$$\Phi = g\beta(\theta^T - \theta_0^T)e_2. \tag{4}$$

Ici, g est l'accélération de la pesanteur, β est le vecteur formé des coefficients de dépendance de la densité par rapport aux θ_j, e_2 est le vecteur unité dans la direction verticale. Dans toute la thèse, nous supposons pour simplifier que la densité ne dépend que de la température. β est alors un scalaire appelé coefficient d'expansion thermique.

Il y a beaucoup d'études, essentiellement numériques, consacrées au modèle (1) - (4). Le cas le plus connu est celui où le terme de réaction F est nul, et où le vecteur θ ne contient qu'une seule composante, la température. On parle alors de convection de Rayleigh-Bénard [1]. Les études mathématiques de ce modèle, surtout en présence d'un terme de réaction F, sont beaucoup moins nombreuses. Dans les premiers chapitres de la thèse, nous développons de nouveaux outils qui permettent d'étudier les ondes de réaction-diffusion-convection.

Remarquons que dans le cas où $v = 0$, le système de réaction-diffusion (1) peut avoir des solutions du type ondes progressives, c'est-à-dire des solutions que se propagent avec un profil et une vitesse constants. Ce type de solutions peut par exemple décrire la propagation de flammes, ou plus généralement de réactions frontales. L'existence et la stabilité des ondes progressives pour des systèmes de réaction-diffusion font l'objet de nombreux travaux [2, 3, 6, 8, 9, 10]. Cependant, si la densité du milieu dépend de θ, alors la distribution non homogène de température et de concentration associée à ces ondes peut déclencher la convection naturelle. Il est alors nécessaire d'étudier un couplage avec les équations de Navier-Stokes, afin d'étudier l'apparition éventuelle d'ondes de réaction-diffusion-convection.

On considère également dans cette thèse le cas de forces de type capillaire. En effet, les études expérimentales de fronts de polymérisation ont montré que le monomère et le polymère peuvent être séparés par une interface [6]. Nous vérifions que l'instabilité de Marangoni n'existe pas dans la configuration étudiée, c'est-à-dire que la distribution de température stationnaire induite par la réaction chimique, et les gradients de tension superficielle qui en résultent ne sont pas à l'origine d'une instabilité. Par contre, nous montrons qu'une nouvelle instabilité peut apparaître grâce à l'interaction entre les phénomènes capillaires et la réaction chimique. Pour cela, nous supposons que les deux liquides sont non miscibles, et nous considérons des forces Φ localisées sur l'interface.

Nous étudions ensuite le cas plus difficile des liquides miscibles, où la force Φ est répartie dans toute la zone de transition entre les deux liquides. Suivant une idée de Korteweg [4], nous posons

$$\Phi = \operatorname{div} T, \quad \text{où } T_{11} = k\left(\frac{\partial C}{\partial x_2}\right)^2, \quad T_{12} = T_{21} = -k\frac{\partial C}{\partial x_1}\frac{\partial C}{\partial x_2}, \quad T_{22} = k\left(\frac{\partial C}{\partial x_1}\right)^2. \tag{5}$$

Ici, C désigne la fraction massique d'un des liquides. Le domaine étant encore mal connu des physiciens eux-mêmes, nous nous limitons dans ce cas, pour simplifier, à des systèmes isothermes et sans réaction chimique ($F = 0$). Nous montrons numériquement que les forces capillaires peuvent générer des courants et des modifications d'un profil de concentration.

3. Plan de la thèse

Le plan de la thèse est le suivant :

La première partie de la thèse concerne la convection naturelle. Nous apportons ici de nouveaux résultats sur l'existence de fronts de réaction convectifs. En effet, la principale méthode utilisée jusqu'à présent par les théoriciens de la combustion pour étudier des couplages avec l'hydrodynamique consiste à se ramener à des problèmes plus simples par des développements asymptotiques formels, tenant compte des différentes échelles spatio-temporelles entrant en jeu (échelle caractéristique de la réaction, échelle caractéristique de la diffusion...) Ici, nous utilisons une méthode très différente, basée sur le degré topologique, pour étudier les bifurcations de solutions à partir d'un front monodimensionnel non convectif. Cette méthode nous permet de traiter le problème dans son intégralité, sans avoir recours à des développements asymptotiques.

L'utilisation du degré topologique pour des problèmes de réaction-diffusion est déjà bien connue, mais on utilise en général le degré de Leray-Schauder dans des ouverts bornés. Ici, le domaine est non borné, et le couplage avec les équations de Navier-Stokes rend un passage à la limite du borné vers le non borné assez difficile. Par ailleurs, cette méthode ne permettrait pas de mener l'étude de bifurcations que nous présentons ici. Le degré topologique pour des opérateurs de réaction-diffusion-convection n'étant pas construit avant ce travail, nous présentons au chapitre 1 une construction basée sur les propriété qualitatives de ces opérateurs : sous certaines hypothèses, ils sont propres et ont la propriété de Fredholm.

Au chapitre 2, nous utilisons le degré pour donner des résultats de bifurcation. Nous montrons aussi l'instabilité des fronts plans, lorsque le nombre de Rayleigh dépasse une valeur critique, et étudions également d'éventuelles instabilités pour les fronts convectifs.

La deuxième partie de la thèse concerne la convection due aux phénomènes capillaires. Dans le chapitre 3, nous étudions le cas de liquides non miscibles. Ce travail a été réalisé

en collaboration avec John Pojman, chimiste à l'Université du Sud Mississipi (USM). L'objectif est d'étudier l'influence de la tension interfaciale sur la stabilité d'un front de polymérisation. Dans des conditions expérimentales habituelles, cette influence est tout à fait négligeable devant les phénomènes de convection naturelle étudiés dans la première partie. Toutefois, si on réduit fortement la convection naturelle en réalisant les expériences en microgravité, la tension de surface peut interagir avec la réaction chimique pour générer des courants de convection. Nous montrons que, sous certaines conditions, ces courants de convection peuvent déstabiliser le front.

Ce chapitre est d'abord un travail de modélisation. Nous faisons ici, comme F. Zeldovich et Frank-Kamenetsky, l'approximation d'une zone de réaction infiniment étroite pour ramener le problème mathématique à un problème d'interface [11, 7]. La difficulté majeure de cette étude consiste ensuite à trouver les bonnes conditions de saut sur l'interface, c'est-à-dire la bonne expression de la force Φ, qui est ici une force de surface, pour prendre en compte la tension superficielle, et sa dépendance par rapport à la température.

L'hypothèse des liquides non miscibles simplifie l'analyse mathématique, mais l'expérience montre que les systèmes monomère-polymère sont souvent miscibles. Dans le quatrième chapitre, nous traitons donc le cas de liquides miscibles, dans une configuration isotherme et en l'absence de réaction chimique. Nous montrons avec ce modèle l'existence et l'unicité de la solution pour le problème couplé (1) - (3), (5) dans un domaine borné. Nous présentons des résultats numériques concernant l'évolution de gouttes de liquides miscibles. Nous montrons que leur comportement est proche de celui de gouttes non miscibles sous l'action de la tension de surface. En particulier, des gouttes de forme elliptique ont tendance à s'arrondir, tandis que des gouttes très allongées tendent à se séparer en plusieurs gouttes plus petites. L'obtention de tels résultats par une méthode numérique est tout à fait nouvelle, et une vérification expérimentale est prévue. Nous donnons enfin des résultats numériques sur la stabilité d'une interface diffuse presque plane.

Références bibliographiques

[1] C. Bernardi, B. M´etivet, and B. Pernaud-Thomas, *Couplage deséquations de Navier-Stokes et de la chaleur: le modèle et son approximation par éléments finis*, RAIRO Mod´el. Math. Anal. Num´er. Vol. 29 (1995), 871–921.

[2] M. Garbey, A. Taik, and V. Volpert, *Linear stability analysis of reaction fronts in liquids*, Quart. Appl. Math., Vol. 54 (1996), 225-247.

[3] M. Garbey, A. Taik, and V. Volpert, *Influence of natural convection on stability of reaction fronts in liquids*, Quart. Appl. Math., Vol. 56 (1998), 1-35.

[4] D.J. Korteweg, *Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité considérables mais connues et sur la théorie de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation continue de la densité*, Archives N´eerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles 6 (1901), 1-24.

[5] B.J. Matkowsky, and G.I. Sivashinsky, *An asymptotic derivation of two models in flame theory associated with the constant density approximation*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 37 (1979), 686-699.

[6] B. McCaughey, J.A. Pojman, C. Simmons, and V.A. Volpert, *The effect of convection on a propagating front with a liquid product: comparison of theory and experiments*, Chaos, Vol. 8 (1998), 520-529.

[7] B. V. Novozhilov, *The rate of propagation of the front of an exothermic reaction in a condensed phase*, Dokl. Phys. Chem. **141**, 836–838, (1961).

[8] V.A. Volpert, and A.I. Volpert, *Existence and stability of traveling waves in chemical kinetics*, In: Dynamics of Chemical and Biological Systems, Nauka, Novosibirsk (1989), 56-131 (in Russian).

[9] V.A. Volpert, and A.I. Volpert, *Waves of chemical transformation having complex kinetics*, Dokl. Phys. Chemistry Vol. 309 (1989), 1-3, 877-879.

[10] V. Volpert, and A. Volpert, *Convective instability of reaction fronts. Linear stability analysis*, Eur. J. Appl. Math., Vol. 9 (1998), 507-525.

[11] Ya. B. Zeldovich and D. A. Frank-Kamenetsky, *A theory of thermal propagation of flame*, Acta Physicochim. USSR **9**, 341–350 (1938).

Chapitre 1

Propriétés qualitatives des opérateurs de réaction-diffusion-convection

Résumé. Ce chapitre est consacr´e aux op´erateurs de r´eaction-diffusion-convection dans des cylindres non born´es. Nous ´etudions des conditions suffi santes pour que ces op´erateurs aient la propri´et´e de Fredholm et soient propres. Cela nous permet de construire le degr´e topologique. Nous montrons ensuite comment ces r´esultats peuvent s'´etendre `a des probl`emes d'ondes progressives. A la fi n de ce chapitre nous donnons des applications pour deux probl`emes couplant des ´equations de r´eaction-diffusion et les ´equations de Navier-Stokes. Dans le chapitre suivant nous utiliserons ces r´esultats et en particulier le degr´e topologique pour ´etudier les bifurcations sur le premier de ces probl`emes.

1. Introduction

Cette partie est consacrée à des opérateurs de réaction-diffusion-convection dans des cylindres non bornés. Elle fait suite à des travaux assez similaires déjà publiés pour des opérateurs de réaction-diffusion sans convection : propriété de Fredholm, construction du degré, étude des valeurs propres... [18]

Au cours des dernières décennies, les méthodes utilisées pour étudier analytiquement les problèmes couplant des phénomènes chimiques, diffusifs et hydrodynamiques se ramenaient principalement à des développements asymptotiques formels qui prenaient en compte différentes échelles spatio-temporelles : échelle de la réaction chimique, échelle de la diffusion... Ces méthodes conduisent à travailler sur un système simplifié, où les différents phénomènes physiques mis en jeu sont bien séparés. Ici, nous utilisons un outil

très différent, qui nous permet de considérer le système couplé sans simplification : le degré topologique. L'idée n'est pas nouvelle : le degré de Leray-Schauder est un outil classique pour montrer l'existence de solutions pour des problèmes elliptiques dans un domaine borné. On peut alors, par passage à la limite, obtenir l'existence d'ondes dans des domaines non bornés, pour lesquels le degré de Leray-Schauder ne peut s'appliquer. Mais même en l'absence de convection naturelle, ce passage à la limite nécessite des estimations assez fines. Ici, le couplage avec les équations de Navier-Stokes rend cette méthode très délicate. Notre approche est donc différente : puisque le passage à la limite vers le non borné présente des difficultés, il paraît plus avantageux de pouvoir appliquer une méthode de degré topologique directement dans des domaines non bornés. Le prix à payer est la construction d'un degré "ad hoc" pour une classe d'opérateurs que nous préciserons dans la section 2. Cette construction est basée sur la propriété de Fredholm de ces opérateurs, et leur qualité d'opérateurs propres. Nous définirons donc ces deux notions dans la section 3, et donnerons des conditions suffisantes pour que les opérateurs que nous considérons soient Fredholm et propres. Cela nous permettra, dans la section 4, de construire le degré. Dans la section 5, nous étendons ces résultats pour les problèmes d'ondes progressives.

2. Opérateurs et espaces

Considérons des problèmes de réaction-diffusion-convection dans des cylindres non bornés de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$:

$$a(x)\Delta w + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial w}{\partial x_i} + B(x, \nabla w) + G(x, w) = 0, \tag{2.1}$$

$$x \in \partial\Omega : w_i = 0,\ i = 1, ..., k,\ \ \frac{\partial w_i}{\partial n} = 0,\ i = k+1, ..., p. \tag{2.2}$$

Ici, $x = (x_1, ..., x_n) = (x', x_n)$, $w = (w_1, ..., w_p)$, $G = (G_1, ..., G_p)$, $\Omega = \Omega' \times \mathbb{R}$ est un cylindre non borné, de section bornée $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ et d'axe dans la direction x_n, $\partial/\partial n$ est la dérivée normale, a et b_i sont des matrices $p \times p$, $B(x, \nabla w)$ est un vecteur de composantes

$$B_k(x, \nabla w) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij}^{(k)}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_j} \right),\ k = 1, ..., p,$$

où les $b_{ij}^{(k)}(x)$ sont des matrices $p \times p$, et $(\ ,\ )$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^p$.

On suppose que a est symétrique définie positive,

$$a \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), b_i \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}), b_{ij}^{(k)} \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}),\ 0 < \alpha < 1,$$

$$G(x, w) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^p),$$

et que la frontière $\partial\Omega$ est de classe $C^{2+\alpha}$. On suppose de plus que les limites suivantes existent :

$$a^{\pm}(x') = \lim_{x_n\to\pm\infty} a(x), \;\; b_i^{\pm}(x') = \lim_{x_n\to\pm\infty} b_i(x), \;\; b_{ij}^{(k)\pm}(x') = \lim_{x_n\to\pm\infty} b_{ij}^{(k)}(x),$$

$$G^{\pm}(x', w) = \lim_{x_n\to\pm\infty} G(x, w).$$

Ici $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$.

On considère les problèmes limites

$$a^{\pm}(x')\Delta' w + \sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\pm}(x')\frac{\partial w}{\partial x_i} + B^{\pm}(x', \nabla w) + G^{\pm}(x', w) = 0, \tag{2.3}$$

$$x' \in \partial\Omega' : w_i = 0, \; i = 1, ..., k, \;\; \frac{\partial w_i}{\partial n} = 0, \; i = k+1, ..., p \tag{2.4}$$

dans la section Ω' du cylindre. Supposons qu'ils ont des solutions $w^+(x')$ et $w^-(x')$ dans $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}')$. On cherche des solutions du problème (2.1), (2.2) vérifiant

$$w^{\pm}(x') = \lim_{x_n\to\pm\infty} w(x). \tag{2.5}$$

On va se ramener à des conditions au bord homogènes pour nos inconnues. Soit donc

$$\phi(x) = s(x_n)w^+(x') + (1 - s(x_n))w^-(x'), \tag{2.6}$$

où $s(x_n)$ est une fonction suffisamment régulière, égale à 1 pour $x_n \geqslant 1$ et à 0 pour $x_n \leqslant 0$. On écrit $w(x)$ sous la forme : $w(x) = \phi(x) + u(x)$, où $u(x)$ est une solution du problème

$$a(x)\Delta(u + \phi) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial(u + \phi)}{\partial x_i} + B(x, \nabla(u + \phi)) + G(x, u + \phi) = 0, \tag{2.7}$$

$$x \in \partial\Omega : u_i = 0, \; i = 1, ..., k, \;\; \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0, \; i = k+1, ..., p. \tag{2.8}$$

Introduisons les espaces de Hölder

$$E_1^0 = \left\{ u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), \; u_{i|\partial\Omega} = 0, \; i = 1, ..., k, \;\; \frac{\partial u_i}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \; i = k+1, ..., p \right\},$$

$$E_2^0 = C^{\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Ils sont munis des normes suivantes :

$$\|u\|_{E_2^0} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{x,y\,\in\Omega,\; x\neq y} \frac{|u(x) - x(y)|}{|x - y|^{\alpha}},$$

et

$$\|u\|_{E_1^0} = \|u\|_{E_2^0} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{E_2^0} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{E_2^0}.$$

Nous allons chercher u dans des espaces de Hölder pondérés, c'est-à-dire que nous posons :

$$E_1 = \{u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}),\ \mu(x_n)u \in E_1^0\}, \quad E_2 = \{u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}),\ \mu(x_n)u \in E_2^0\},$$

où μ est une fonction régulière, appelée "fonction poids". Les espaces E_1 et E_2 seront munis des normes suivantes :

$$\|u\|_{E_1} = \|\mu u\|_{E_1^0}, \quad \|u\|_{E_2} = \|\mu u\|_{E_2^0}.$$

Prenons $\mu(x_n) = 1 + x_n^2$. Remarquons que les fonctions exponentiellement décroissantes à l'infini appartiennent à l'espace pondéré, et que

$$\frac{\mu'(x_n)}{\mu(x_n)} \to 0,\ \frac{\mu''(x_n)}{\mu(x_n)} \to 0,\ \ x_n \to \pm\infty. \tag{2.9}$$

Nous utiliserons cette propriété dans la suite. Enfin, remarquons que la multiplication par la fonction poids ne change pas les conditions au bord.

Considérons maintenant l'opérateur

$$A(u) = a(x)\Delta(u+\phi) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial(u+\phi)}{\partial x_i} + B(x, \nabla(u+\phi)) + G(x, u+\phi) \tag{2.10}$$

agissant de E_1 dans E_2 ou de E_1^0 dans E_2^0. Nous verrons dans ce qui suit que le choix des espaces est important. En particulier, dans des espaces sans poids, les opérateurs considérés ne sont pas propres, et donc le degré topologique ne peut pas être défini [2].

Soit $u_0 \in E_1$. On peut définir l'opérateur linéarisé

$$Lu = a(x)\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + e(x)u + \mathcal{B}u,$$

agissant de E_1 dans E_2 ou de E_1^0 dans E_2^0. Ici,

$$e(x) = G'_u(x, u_0(x) + \phi(x)),$$

où G'_u est la dérivée de G par rapport à la seconde variable, et $\mathcal{B}$ est un opérateur linéaire, de composantes

$$(\mathcal{B}u)_k = \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij}^{(k)}(x)\frac{\partial(u_0+\phi)}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij}^{(k)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial(u_0+\phi)}{\partial x_j} \right),$$

$$k = 1, ..., p.$$

Enfin, on pose

$$e^{\pm}(x') = \lim_{x_n \to \pm\infty} e(x) = G^{\pm\prime}{}_u(x', w^{\pm}(x')).$$

Dans la section 3, nous étudions la propriété de Fredholm de l'opérateur L, dans la section 4 nous donnons des conditions suffisantes pour que l'opérateur A soit propre, et dans la section 5 nous construisons le degré topologique. Dans le chapitre 2, nous appliquons ce degré pour étudier les bifurcations, puis nous analysons le spectre de l'opérateur linéarisé autour des nouvelles solutions.

3. Propriété de Fredholm et indice

Considérons l'opérateur $L : E_1 \to E_2$ introduit dans la section précédente. L sera dit résoluble normalement si son image est fermée. Nous dirons que L a la propriété de Fredholm si son noyau est de dimension finie α, si son image est fermée, et de codimension finie β. Dans ce cas, l'indice de Fredholm de L est défini par l'égalité $\kappa = \beta - \alpha$.

Tous les résultats de cette section concernant la propriété de Fredholm peuvent être obtenus dans des espaces de Hölder sans poids, mais le poids est important pour la construction du degré topologique à la section 6.

3.1. Propriété de Fredholm

Définissons les opérateurs $L^{\pm} : E_1^0 \to E_2^0$ par

$$L^{\pm}u = a^{\pm}(x')\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i^{\pm}(x')\frac{\partial u}{\partial x_i} + e^{\pm}(x')u + \mathcal{B}^{\pm}u,$$

où

$$(\mathcal{B}^{\pm}u)_k = \sum_{i,j=1}^{n}\left(b_{ij}^{(k)\pm}(x')\frac{\partial w^{\pm}(x')}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i,j=1}^{n}\left(b_{ij}^{(k)\pm}(x')\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial w^{\pm}(x')}{\partial x_j}\right),$$

$$k = 1, ..., p.$$

Condition 1. Les équations

$$L^{\pm}u = 0$$

n'ont pas de solution non nulle dans E_1^0.

Condition 2. Quel que soit $\lambda \geqslant 0$, les équations

$$L^{\pm}u - \lambda u = 0$$

n'ont pas de solution non nulle dans E_1^0.

THÉORÈME 3.1. – *L'opérateur L est normalement résoluble et son noyau est de dimension finie si et seulement si la Condition 1 est satisfaite. Si la condition 2 est satisfaite, alors L est un opérateur de Fredholm d'indice nul.*

Remarque. – La preuve de ce théorème est donnée dans [18], dans le cas de conditions aux limites du type Dirichlet ou Neumann. Ici, certaines composantes vérifient la condition de Dirichlet, et d'autres la condition de Neumann. Le théorème reste valable. Nous en donnons ici les principales idées.

L'idée de la preuve est la suivante. On commence par montrer que si la condition 1 est satisfaite, alors la dimension du noyau est finie. D'après le théorème de Riesz, il est équivalent de montrer que sous la condition 1, toute suite bornée dans le noyau de L a une sous-suite convergente.

Considérons donc une suite bornée (u_m) de $\ker L$. Par le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de Ω. En appliquant ce même procédé aux suites des dérivées partielles, on extrait une sous-suite qui converge dans C^2 sur tout compact. Pour simplifier nous la notons toujours u_m. Pour montrer que la convergence a lieu dans l'espace E_1, on pose $v_m = \mu(u_m - u)$, où u est la limite de u_m. Il nous faut montrer que (v_m) tend vers 0 dans $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

On commence par montrer que v_m tend vers 0 uniformément sur Ω. Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite de points (x^m) tels que pour tout m, $|v_m(x^m)| \geqslant \epsilon > 0$. Nécessairement, la dernière composante de la suite (x^m) est non bornée, car cette suite ne peut pas rester dans un compact. On peut donc supposer que cette composante x_n^m tend vers $\pm\infty$. On pose alors $w_m(x) = v_m(x+x^m)$. On a donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $|w_m(0)| \geqslant \epsilon$. Par ailleurs, comme précédemment, on peut extraire de la suite (w_m) une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une limite w. On peut alors montrer que w est solution d'un des problèmes $L^{\pm}w = 0$. (Ce passage à la limite est détaillé dans un cas un peu plus général, dans la preuve du théorème 4.1, nous ne l'écrirons donc pas ici.) Donc w est nulle, d'après la condition 1. Mais ceci contredit le fait que, par passage à la limite, $|w(0)| \geqslant \epsilon > 0$. Cette contradiction prouve que la suite v_m tend vers 0 uniformément sur Ω. L'estimation de Schauder permet de conclure que la convergence de v_m a lieu dans l'espace de Hölder $C^{2+\alpha}$, et donc u_n tend vers u pour la norme de E_1. Ceci prouve que le noyau de L est de dimension finie.

Pour montrer que l'image de L est fermée, on prend une suite $f_m = Lu_m$, qui converge dans E_2 vers une limite f. Le noyau de L étant de dimension finie, il admet un supplémentaire fermé G. On peut donc décomposer u_m sous la forme $u_m = v_m + w_m$, avec $v_m \in \ker L$ et $w_m \in G$. Montrons que la suite (w_m) est bornée. On raisonne par l'absurde. Si (w_m) n'est pas bornée, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que sa norme tend vers l'infini. On pose alors

$$\bar{w}_m = \frac{w_m}{\|w_m\|}, \quad \bar{f}_m = \frac{f_m}{\|w_m\|}.$$

On a toujours $L\bar{w}_m = \bar{f}_m$, et cette fois la suite $(\bar{w}_m)$ est bornée. De plus, la suite $(\bar{f}_m)$ tend vers 0 dans E_2, lorque n tend vers l'infini. La suite $(\bar{w}_m)$ admet une sous-suite qui converge en norme C^2 sur tout compact vers une limite $\bar{w}$, qui doit vérifier $L\bar{w} = 0$. Or $w_m \in G$, qui est fermé, donc $\bar{w} \in G$. De plus, $\bar{w} \in \ker L$. Ces deux espaces étant en somme directe, il vient que $\bar{w} = 0$. Mais ceci contredit le fait que

$$\|\bar{w}\| = \lim_{n \to +\infty} \|\bar{w}_m\| = 1.$$

Cette contradiction prouve que la suite (w_m) est nécessairement bornée. On peut alors comme précédemment en extraire une sous-suite qui converge pour la norme E_1, et sa limite w sera telle que $Lw = f$. Ainsi f est dans l'image de L, donc cette image est fermée.

La réciproque de cette première proposition s'établit par exemple en appliquant une transformée de Fourier formelle [18]. Ce sens nous intéressant peu pour ce qui suit, nous ne détaillerons pas cette partie de la preuve.

Il reste à montrer que sous la condition 2, l'image est de codimension finie, et l'indice de Fredholm de L est nul. On rappelle pour cela le résultat suivant (voir par exemple [7]) :

LEMME 3.2. – *Soit (L_τ), $\tau \in [0,1]$ une famille d'opérateurs entre deux espaces de Banach E_1 et E_2. Supposons que cette famille est continue par rapport à τ pour la norme d'opérateurs, et que pour tout τ le noyau de L_τ est de dimension finie et son image est fermée. Alors si l'un des L_τ a la propriété de Fredholm, tous les L_τ sont des opérateurs de Fredholm, et ils ont même indice.*

Supposons donc la condition 2 satisfaite. L est un opérateur sectoriel, en particulier pour λ réel suffisamment grand, $L - \lambda I$ est inversible. Soit λ vérifiant cette propriété, et posons $L_\tau = L - \tau\lambda I$, pour $\tau \in [0,1]$. L_1 est inversible, donc il a la propriété de Fredholm et son indice est nul. De plus, pour tout $\tau \in [0,1]$, l'opérateur L_τ vérifie la condition 1, donc son noyau est de dimension finie et son image est fermée. Ceci permet de conclure que pour tout τ, L_τ est Fredholm, et que son indice est indépendant de τ. En particulier, pour $\tau = 0$ on obtient le résultat cherché.

3.2. Calcul de l'indice de Fredholm

Supposons maintenant que les solutions $w^\pm(x')$ des problèmes limites (2.3), (2.4) sont constantes : $w^\pm(x') \equiv w^\pm$. Alors les opérateurs $\mathcal{B}^\pm$ sont nuls. On obtient le résultat suivant, qui va nous permettre dans la section 7 de relier l'indice de l'opérateur de réaction-diffusion-convection à celui de l'opérateur de réaction-diffusion associé.

LEMME 3.3. – *Supposons que la condition 1 est vérifiée, que les fonctions $w^{\pm}(x')$ sont constantes et que la codimension de l'image de l'opérateur $L^{(0)}$ est finie, où*

$$L^{(0)}u = a(x)\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + e(x)u = Lu - \mathcal{B}u.$$

Alors L et $L^{(0)}$ ont la propriété de Fredholm, et l'indice de l'opérateur L est égal à l'indice de l'opérateur $L^{(0)}$.

La preuve de ce lemme résulte directement de l'invariance par homotopie de la propriété de Fredholm et de l'indice (lemme 3.2). En effet, l'homotopie

$$L_\tau = \tau L + (1-\tau)L^{(0)}$$

préserve la condition 1. Le lemme est démontré.

4. Opérateurs propres

La construction du degré topologique (voir section 6) nécessite de prouver que les opérateurs $A : E_1 \to E_2$ définis à la Section 3, mais aussi les homotopies $A : E_1 \times [0,1] \to E_2$ sont propres, c'est-à-dire que l'image réciproque d'un compact, intersectée avec une boule fermée, est compacte.

4.1. De l'importance des espaces pondérés

C'est pour cette propriété que le poids polynômial μ affecté à nos espaces de Hölder est essentiel. En effet, des opérateurs elliptiques dans des espaces non pondérés peuvent ne pas être propres [2]. Le fait que les opérateurs de réaction-diffusion dans des espaces pondérés sont propres est étudié dans [18]. Ici, nous étudions des opérateurs de réaction-diffusion-convection, mais la démarche reste la même. Commençons par expliquer pourquoi ce poids est nécessaire.

Remarquons que si un opérateur A est propre, alors toute suite bornée du noyau de A doit être relativement compacte. En effet, $\{0\}$ est un compact de l'ensemble d'arrivée. Or il est facile de vérifier que les solutions du système (7.1)-(7.5) sont invariantes par translation dans la direction x_2, au sens suivant : si $u = (\theta, \omega, \psi)$ est solution pour une certaine vitesse $c \in \mathbb{R}$, alors toute fonction u_h définie par $u_h(x_1, x_2) = u(x_1, x_2 + h)$, $h \in \mathbb{R}$, est également solution pour la même vitesse. Naturellement, la famille de solutions $(u_h)_{h\in\mathbb{R}}$ n'est pas relativement compacte. Dans un espace de Hölder non pondéré, tel que E_1^0, cette famille serait bornée, puisque toutes les fonctions u_h auraient la même norme (voir Figure 1.1, à gauche).

Pour avoir un opérateur propre, il faut donc se placer sur un espace tel que cette famille ne soit pas bornée. On le fait en multipliant la fonction par un poids qui tend vers l'infini lorsque x_2 tend vers $\pm\infty$ (voir Figure 1.1, à droite).

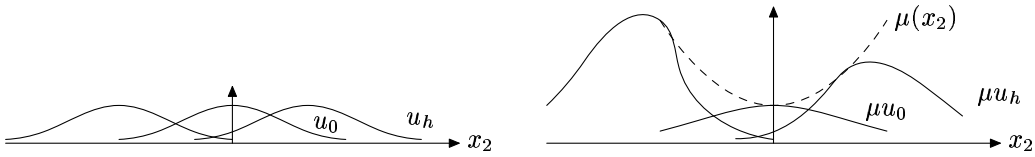


FIG. 1.1 – A gauche : La famille $(u_h)_{h\in\mathbb{R}}$ est bornée dans E_1^0 mais n'est pas relativement compacte. A droite : La famille $(u_h)_{h\in\mathbb{R}}$ n'est pas bornée dans E_1. Si B est une boule fermée de E_1, $\{u_h, h \in \mathbb{R}\} \cap B$ est compacte.

4.2. Les résultats

Considérons donc une homotopie de la forme

$$\begin{aligned} A(u,\tau) &= a(x,\tau)\Delta(u+\phi) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,\tau)\frac{\partial(u+\phi)}{\partial x_i} + \\ &\quad B(x,\nabla(u+\phi),\tau) + G(x,u+\phi,\tau), \end{aligned}$$

où

$$B_k(x,\nabla w,\tau) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(b_{ij}^{(k)}(x,\tau)\frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_j}\right),\ k=1,...,p,$$

$a(x,\tau), b_i(x,\tau), b_{ij}^{(k)}(x,\tau) \in C^\alpha(\bar\Omega)$, $G(x,u+\phi,\tau) \in C^2(\bar\Omega\times\mathbb{R}^p)$ pour tout τ.

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout τ les limites suivantes existent :

$$a^\pm(x',\tau) = \lim_{x_n\to\pm\infty} a(x,\tau),\quad b_i^\pm(x',\tau) = \lim_{x_n\to\pm\infty} b_i(x,\tau),$$

$$b_{ij}^{(k)\pm}(x',\tau) = \lim_{x_n\to\pm\infty} b_{ij}^{(k)}(x,\tau),$$

$$e^\pm(x',\tau) = \lim_{x_n\to\pm\infty, w\to w^\pm} G'_u(x,w,\tau), \tag{4.1}$$

2. On a les convergences suivantes lorsque τ tend vers τ_0 :

$$\|a(x,\tau)-a(x,\tau_0)\|_{C^\alpha(\bar\Omega)} \to 0,\quad \|b_i(x,\tau)-b_i(x,\tau_0)\|_{C^\alpha(\bar\Omega)} \to 0,$$

$$\left\|b_{ij}^{(k)}(x,\tau)-b_{ij}^{(k)}(x,\tau_0)\right\|_{C^\alpha(\bar\Omega)} \to 0$$

quand $\tau\to\tau_0$, et

$$\|\left(G(x,u(x)+\phi(x),\tau)-G(x,u(x)+\phi(x),\tau_0)\right)\mu\|_{C^\alpha(\bar\Omega)} \to 0$$

uniformément par rapport à u dans un borné de E_1.

Pour simplifier la présentation nous supposerons que les limites $w^{\pm}(x')$ et $\phi(x)$ sont indépendantes de τ. Le résultat est le suivant :

THÉORÈME 4.1. – *Si la Condition 1 est satisfaite pour tout $\tau \in [0,1]$, alors l'opérateur $A(u,\tau)$: $E_1 \times [0,1] \to E_2$ est propre.*

Démonstration. – L'idée est essentiellement la même que pour montrer que le noyau est de dimension finie dans le théorème 3.1. La difficulté ici est que la dépendance en τ alourdit les expressions et les calculs. Soient (u_m) une suite bornée dans E_1 et (τ_m) une suite bornée dans $\mathbb{R}$ telles que

$$A(u_m,\tau_m) = f_m \to f_0,\ m \to +\infty, \tag{4.2}$$

la convergence ayant lieu dans l'espace E_2. Nous allons montrer qu'on peut extraire de la suite (u_m) une sous-suite convergente. Sans perte de généralité on peut supposer que $\tau_m \to \tau_0$. Comme (u_m) est bornée dans $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) qu'elle converge vers une limite $u_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ dans C^2 uniformément sur tout borné de $\bar{\Omega}$ [18]. La suite (u_m) étant bornée dans l'espace pondéré E_1, la convergence de u_m vers u_0 est uniforme dans $C^2(\bar{\Omega})$. Montrons qu'elle a lieu dans la norme de E_1.

En passant à la limite dans (4.2), on obtient

$$A(u_0,\tau_0) = f_0. \tag{4.3}$$

Posons

$$v_m = \mu u_m,\ v_0 = \mu u_0,\ w_m = v_m - v_0,\ g_m = \mu f_m,\ g_0 = \mu f_0.$$

En faisant la différence entre (4.2) et (4.3) et en la multipliant par μ on obtient

$$(A(u_m,\tau_m) - A(u_m,\tau_0))\mu + (A(u_m,\tau_0) - A(u_0,\tau_0))\mu = g_m - g_0. \tag{4.4}$$

Posons encore

$$r_m = (A(u_m,\tau_m) - A(u_m,\tau_0))\mu.$$

On remarque que, grâce à la deuxième condition page 25

$$\|r_m\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \to 0,\ m \to \infty.$$

L'équation (4.4) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} a(x,\tau_0)\Delta w_m - b_n(x,\tau_0) w_m \frac{\mu'}{\mu} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x,\tau_0)\frac{\partial w_m}{\partial x_j} - \\ a(x,\tau_0)\left(-w_m \frac{\mu''}{\mu} - 2\frac{\partial w_m}{\partial x_n}\frac{\mu'}{\mu} + w_m\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2\right) + \\ (B(x,\nabla(u_m+\phi),\tau_0) - B(x,\nabla(u_0+\phi),\tau_0))\mu + \\ (G(x,u_m+\phi,\tau_0) - G(x,u_0+\phi,\tau_0))\mu = g_m - g_0 - r_m. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Or

$$(G(x,u_m+\phi,\tau_0)-G(x,u_0+\phi,\tau_0))\mu=\int_0^1 G'_u(x,u_0+\phi+t(u_m-u_0),\tau_0)dt\ w_m.$$

Posons

$$\beta_{ijk}\equiv\mu\times\left(b_{ij}^{(k)}(x,\tau_0)\frac{\partial(u_m+\phi)}{\partial x_i},\frac{\partial(u_m+\phi)}{\partial x_j}\right)$$
$$-\mu\times\left(b_{ij}^{(k)}(x,\tau_0)\frac{\partial(u_0+\phi)}{\partial x_i},\frac{\partial(u_0+\phi)}{\partial x_j}\right),$$

de sorte que le terme

$$(B(x,\nabla(u_m+\phi),\tau_0)-B(x,\nabla(u_0+\phi),\tau_0))\mu$$

dans (4.5) est le vecteur de composantes

$$\sum_{i,j=1}^n\beta_{ijk},\quad k=1,\cdots p.$$

Remarquons que pour $i,j\neq n$ nous avons

$$\beta_{ijk}=\left(b_{ij}^{(k)}(x,\tau_0)\frac{\partial w_m}{\partial x_i},\frac{\partial(u_m+\phi)}{\partial x_j}\right)+\left(b_{ij}^{(k)}(x,\tau_0)\frac{\partial(u_m+\phi)}{\partial x_i},\frac{\partial w_m}{\partial x_j}\right),$$

et

$$\beta_{ink}=\left(b_{ij}^{(k)}(x,\tau_0)\frac{\partial w_m}{\partial x_i},\frac{\partial(u_m+\phi)}{\partial x_n}\right)$$
$$+\left(b_{ij}^{(k)}(x,\tau_0)\frac{\partial(u_m+\phi)}{\partial x_i},\frac{\partial w_m}{\partial x_n}-w_m\frac{\mu'}{\mu}\right),$$

$$\beta_{njk}=\left(b_{ij}^{(k)}(x,\tau_0)\frac{\partial w_m}{\partial x_n}-w_m\frac{\mu'}{\mu},\frac{\partial(u_m+\phi)}{\partial x_j}\right)$$
$$+\left(b_{ij}^{(k)}(x,\tau_0)\frac{\partial(u_m+\phi)}{\partial x_n},\frac{\partial w_m}{\partial x_j}\right).$$

Montrons tout d'abord que la suite (w_m) tend vers 0 uniformément dans $C(\bar\Omega)$. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors il existe une sous-suite $x^{(m)}$ telle que $|w_m(x^{(m)})|\geqslant\epsilon>0$. De plus, la coordonnée $x_n^{(m)}$ des points $x^{(m)}$ est non bornée. On peut donc supposer que $x_n^{(m)}\to\pm\infty$. Introduisons les fonctions

$$\tilde w_m(x)=w_m(x+x^{(m)}).$$

On a

$$\|\tilde{w}_m\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} \leqslant M,$$

où la constante M est indépendante de m. Ainsi, de la suite de fonctions $(\tilde{w}_m)$ on peut extraire une sous-suite $(\tilde{w}_{m_k})$ qui converge vers une limite $\tilde{w}_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ dans C^2 uniformément sur tout borné de $\bar{\Omega}$. On a $|\tilde{w}_0(0)| \geqslant \epsilon > 0$.

Par ailleurs, les fonctions $\tilde{w}_{m_k}(x)$ vérifient l'équation (4.5) avec les coefficients translatés. Or

$$\frac{\mu'}{\mu} \to 0, \ \frac{\mu''}{\mu} \to 0,$$

lorsque $x_n \to \infty$, et

$$\left| \frac{\partial(u_m + \phi)}{\partial x_i}(x + x^{(m)}) \right| \leqslant \frac{M}{\mu(x_n + x_n^{(m)})},$$

donc les termes $\beta_{ijk}(x + x^{(m)})$ tendent vers zéro quand m tend vers l'infini, et ceci quels que soient $i, j = 1, ...n$ et $k = 1, ...p$.

Par ailleurs le terme

$$\int_0^1 G'_u(x + x^{(m)}, u_0 + \phi + t(u_m - u_0), \tau_0)dt$$

tend vers $e^{\pm}(x')$ grâce à la condition (4.1) et aux inégalités

$$|(u_m+\phi)(x+x^{(m)})-w^{\pm}| \leqslant \frac{M}{\mu(x_n + x_n^{(m)})}, \quad |(u_0+\phi)(x+x^{(m)})-w^{\pm}| \leqslant \frac{M}{\mu(x_n + x_n^{(m)})}.$$

Ainsi on obtient à la limite

$$L^{\pm}\tilde{w}_0 = 0.$$

Ceci contredit la Condition 1, car $\tilde{w}_0$ est nécessairement non nul.

Ainsi, nous avons prouvé que la convergence $w_m \to 0$ est uniforme dans $C(\bar{\Omega})$. Comme les fonctions w_m sont uniformément bornées dans $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, alors cette convergence a lieu dans $C^2(\bar{\Omega})$. Grâce aux estimations de Schauder, on en déduit que $w_m \to w_0$ dans $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Le théorème est démontré. □

5. Degré topologique

L'utilisation du degré topologique pour montrer l'existence de solutions à des problèmes elliptiques n'est pas nouvelle. La méthode classique consiste à se placer dans un domaine borné, et à ramener l'opérateur elliptique à une perturbation compacte de l'identité. On peut alors appliquer le degré de Leray-Schauder.

Soit par exemple à résoudre le problème aux limites suivant :

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + f(u) = 0$$

$$u(x) = 0, x \in \partial\Omega,$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

On sait que pour toute fonction $g \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, il existe une unique solution $v \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ au problème

$$\Delta v = g, \quad v(x) = 0, x \in \partial\Omega,$$

et que l'opérateur T qui à g associe cette solution v est compact de $C^\alpha(\bar{\Omega})$ dans lui-même. On se ramène ainsi à trouver les zéros d'un opérateur qui peut s'écrire comme perturbation compacte de l'identité. On peut donc utiliser le degré de Leray-Schauder.

Dans ce qui précède, la compacité de l'opérateur T est essentielle. Dans un ouvert non borné, on perd cette propriété, on ne peut donc plus appliquer le degré de Leray-Schauder. Cependant, le degré peut être défini pour des opérateurs propres, qui ont la propriété de Fredholm. Nous expliquons ici cette construction. Dans la section 6 de ce chapitre, nous l'aménageons afin d'utiliser le degré pour la recherche d'ondes progressives.

L'une des approches pour construire le degré topologique pour des opérateurs elliptiques dans des ouverts non bornés est basée sur la propriété de Fredholm. Dans [6] le degré est construit pour des opérateurs de Fredholm bornés et propres agissant d'un espace de Banach dans lui-même. Dans [18] ces résultats sont utilisés pour construire le degré pour des opérateurs de réaction-diffusion dans des domaines non bornés. Ici, nous généralisons ces résultats pour des opérateurs de réaction-diffusion-convection.

Soit Φ la classe des opérateurs $A(u) : E_1 \to E_2$ de la forme (2.10) vérifiant les propriétés suivantes :

1. L'opérateur A est deux fois Fréchet dérivable. Les fonctions $a^\pm(x')$, $b_i^\pm(x')$, $b_{ij}^{(k)\pm}(x')$, $e^\pm(x')$, et $\partial a^\pm(x')/\partial x_i$, $i = 1, ..., n$ sont continues.
2. La condition 2 page 21 est satisfaite.

On définit aussi la classe H des opérateurs $A(u, \tau) : E_1 \times [0, 1] \to E_2$ vérifiant :

1. Pour tout $\tau \in [0, 1]$, $A(., \tau) \in \Phi$.
2. $A(u, \tau)$ est deux fois Fréchet dérivable par rapport à τ. Les fonctions $a^\pm(x', \tau)$, $b_i^\pm(x', \tau)$, $b_{ij}^{k\pm}(x', \tau)$, $e^\pm(x', \tau)$, et $\partial a^\pm(x', \tau)/\partial x_i$, $i = 1, ..., n$ sont continues par rapport à x et τ.

THÉORÈME 5.1. – *Il existe un unique degré topologique pour les classes Φ et H.*

La preuve de ce théorème repose sur les propriétés démontrées aux sections 3 et 4, et est similaire à celle que l'on trouve dans [18] pour des opérateurs de réaction-diffusion.

Rappelons quelques propriétés du degré topologique en général, et de celui que nous construisons ici.

Si $A \in \Phi$ et si $u \in E_1$ est un point stationnaire pour A, tel que $A'(u)$ est inversible, alors le degré topologique de A relativement à un voisinage suffisamment petit de u ne dépend pas de ce voisinage. Ce degré est égal à $(-1)^\nu$, où ν est le nombre de valeurs propres strictement positives de l'opérateur linéarisé $A'(u)$, comptées avec leurs multiplicités. Remarquons que ν est bien fini, grâce à la condition 2 page 21. Nous appelons "indice du point stationnaire u" la valeur $(-1)^\nu$.

6. Recherches d'ondes progressives

Notre étude est motivée du point de vue des applications par la recherche d'ondes progressives pour les problèmes de réaction-diffusion-convection. Si nous nous posons la même question pour les opérateurs plus généraux introduits à la section 1, nous obtenons un cas particulier du problème (2.1), (2.2), où les coefficients ne dépendent pas de la variable x_n qui correspond à la direction de l'axe du cylindre. En contrepartie, le déplacement du front à vitesse c fait intervenir une dérivée de w par rapport à x_n :

$$a(x')\Delta w + c\frac{\partial w}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x')\frac{\partial w}{\partial x_i} + B(x', \nabla w) + G(x', w) = 0, \tag{6.1}$$

$$w(x', \pm\infty) = w^{\pm}(x') \tag{6.2}$$

$$x \in \partial\Omega : w_i = 0,\ i = 1, ..., k,\ \ \frac{\partial w_i}{\partial n} = 0,\ i = k+1, ..., p, \tag{6.3}$$

Rappelons qu'ici, c est une inconnue qui est à déterminer avec la fonction $w(x)$.

6.1. Le problème de l'invariance par translation

Comme nous l'avons déjà souligné, les solutions du problème (6.1) - (6.3) sont invariantes par rapport aux translations dans la direction x_n. En particulier, s'il existe une solution w de ce problème pour une certaine vitesse c, alors on a une famille entière de solutions en considérant les fonctions du type $w(x', x_n + h)$, $h \in \mathbb{R}$ et la même vitesse c.

Dans la section précédente, nous avons construit le degré pour des espaces de Hölder pondérés, et nous avons montré l'importance du poids pour cette construction. (Dans des espaces sans poids, le degré ne peut pas être construit, voir [2].)

D'un autre côté, dans l'espace E_1 muni du poids μ, la norme $\|w(x', x_n + h)\|$ d'une telle solution tend vers l'infini lorsque $h \to \pm\infty$. En effet,

$$\begin{aligned} \|w(x', x_n + h)\|_{E_1} &\geqslant \sup_{x\in\Omega} \|w(x', x_n + h)\mu(x_n)\| \\ &\geqslant \sup_{x\in\Omega} \|w(x)\mu(x_n - h)\| \to +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, si D est un domaine borné de l'espace fonctionnel E_1, qui contient une solution du problème (6.1) - (6.3), alors il existe une branche de solutions qui intersecte la frontière de D. On ne peut donc pas définir le degré relativement à un tel ouvert D. Les seuls ouverts pour lesquels le degré est bien défini sont ceux qui ne contiennent aucune solution dans leur adhérence... Mais pour de tels ouverts, l'utilisation du degré n'est pas très utile.

Une autre approche de cette difficulté consiste à remarquer que si w_1 est un point stationnnaire suffisamment régulier ($w_1 \in C^{3+\alpha}$), alors l'opérateur linéarisé L_1 correspondant au problème (6.1) - (6.3) a une valeur propre nulle correspondant à la fonction propre

$$u_0 = \frac{\partial w_1}{\partial x_n}. \tag{6.4}$$

En effet, toutes les fonctions de la forme

$$(x', x_n) \mapsto w_1(x', x_n + h)$$

sont également solutions ; en dérivant par rapport à h, on constate que $L_1 u_0 = 0$.

Il nous faut remédier à ce problème en "supprimant l'invariance par translation" des solutions. En d'autres termes, il faut modifier l'opérateur linéarisé L_1, de façon à supprimer sa valeur propre nulle, si elle est simple (ou baisser sa multiplicité, si elle est multiple). Nous verrons en fait dans la suite que pour les applications que nous envisageons, il est suffisant de le faire pour l'opérateur linéarisé autour d'une solution particulière w_1.

6.2. Fonctionnalisation de la vitesse du front

L'un des procédés consiste à introduire une fonctionnalisation de l'inconnue c [14], [15], [18]. Cela signifie qu'au lieu de la constante inconnue c, nous introduisons une fonctionnelle $c(w) = c(u + \phi)$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $c(. + \phi)$ est lipschitzienne sur tout sous-ensemble borné de E_1 et est continûment Fréchet-dérivable,
2. la fonction définie par $\tilde{c}(h) = c(w_1(x', x_n + h))$ est décroissante par rapport à $h \in \mathbb{R}$, et a pour limites $\tilde{c}(-\infty) = +\infty$, $\tilde{c}(+\infty) = -\infty$;
3. la solution w_1 du problème (6.1) - (6.3) satisfait

$$\left\langle c'(w_1), \frac{\partial w_1}{\partial x_n} \right\rangle < 0,$$

où $\langle , \rangle$ est le crochet de dualité entre E_1^* et E_1.

Il y a différentes façons de construire une fonctionnelle satisfaisant à ces conditions. Nous pouvons la prendre sous la forme suggérée par [14] :

$$c(w) = \ln \int_\Omega |w(x) - w^+(x')|^2 \sigma(x_n) dx,$$

où σ est une fonction croissante, avec $\sigma(-\infty) = 0, \sigma(+\infty) = 1$, et

$$\int_{-\infty}^0 \sigma(x_n) dx_n < \infty.$$

Remarquons que

$$\tilde{c}(h) = \ln \int_\Omega |w_1(x) - w^+(x')|^2 \sigma(x_n - h) dx.$$

En dérivant par rapport à h, on montre que $\tilde{c}$ est bien une fonction décroissante.

Les propriétés 2 et 3 sont vérifiées par exemple si w_1 est une fonction monotone par rapport à x_n. Enfin, on vérifie facilement la première condition sur la fonctionnelle.

Ainsi, on remplace l'équation (6.1) par l'équation

$$a(x')\Delta w + c(w)\frac{\partial w}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^n b_i(x')\frac{\partial w}{\partial x_i} + B(x', \nabla w) + G(x', w) = 0. \tag{6.5}$$

Notons que si le problème (6.2) - (6.5) a une solution w, alors le problème (6.1) - (6.3) a une solution avec la valeur $c = c(w)$.

En linéarisant l'équation (6.5) autour de la solution w_1, on obtient trois types de termes :

- les termes issus de la linéarisation de l'équation sans déplacement du front, c'est-à-dire l'opérateur $L = A'(w_1)$ défini dans la section 3,
- le terme $c(w_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$,
- le terme issu de la linéarisation de la fonctionnelle c, à savoir : $\dfrac{\partial w_1}{\partial x_n}\langle c'(w_1), u\rangle$.

Notons comme ci-dessus L_1 l'opérateur linéarisé correspondant au problème (6.1) - (6.3), avec $c = c(w_1)$:

$$L_1 u \equiv Lu + c(w_1)\frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

Alors l'équation (6.5) linéarisée peut s'écrire :

$$L_1 u + \frac{\partial w_1}{\partial x_n}\langle c'(w_1), u\rangle = 0. \tag{6.6}$$

Cette fonctionnalisation modifie les valeurs propres de l'opérateur. On montre le résultat suivant :

LEMME 6.1. – *Supposons que 0 soit valeur propre simple de L_1, et considérons l'opérateur L_2 défini par :*

$$L_2 u = L_1 u + < c'(w_1), u > \frac{\partial w_1}{\partial x_n}.$$

Alors

1. *0 n'est pas valeur propre de L_2, mais L_2 a une valeur propre strictement négative $\Lambda =< c'(w_1), u_0) >$ associée à la fonction propre u_0 définie par (6.4).*
2. *Toutes les autres valeurs propres de L_2 sont aussi valeurs propres de L_1.*

Démonstration. – Nous avons déjà vu que 0 est valeur propre simple de L_1, associée à la fonction propre u_0 définie par (6.4). Supposons que 0 soit valeur propre simple de L_1, et vérifions que la fonctionnalisation "supprime" cette valeur propre (cf. [14]). Montrons donc que 0 n'est plus valeur propre de l'opérateur L_2. Notons d'abord que, grâce à la relation $L_1 u_0 = 0$, $\Lambda =< c'(w_1), u_0 >$ est valeur propre de L_2, avec comme fonction propre u_0. Les conditions 2 et 3 dans la définition de la fonctionnelle impliquent que cette valeur propre est strictement négative. Dans l'hypothèse où les coefficients sont suffisamment réguliers

$$a \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), b_i \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}),$$

on peut définir l'opérateur formellement adjoint L_1^*. On montre qu'il vérifie lui aussi la condition 2 (en appliquant une transformée de Fourier formelle), et donc qu'il est Fredholm d'indice 0.

Supposons que (6.6), (6.3) ait une solution non nulle u. Soit v une fonction propre correspondant à la valeur propre nulle de l'opérateur L_1^*. En multipliant (6.6) par v et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\langle c'(w_1), u \rangle \int_\Omega (u_0, v) dx = 0.$$

Puisque 0 est valeur propre simple, l'intégrale ci-dessus est non nulle. Ainsi, $\langle c'(w_1), u \rangle = 0$, et d'après (6.6) on conclut que u et u_0 sont proportionnelles. Or l'égalité $\langle c'(w_1), u_0 \rangle = 0$ contredit la dernière condition imposée pour la fonctionnelle $c(w)$. Le point 1 est démontré.

Montrons maintenant le point 2. Soit λ une valeur propre de L_2, et soit v une fonction propre de L_2^* associée à la valeur propre $\bar{\lambda}$, alors

$$L_2^* v = L_1^* v + c'(w_1) < v, u_0 >= \bar{\lambda} v. \tag{6.7}$$

On multiplie par u_0 et on intègre :

$$< c'(w_1), u_0 >< v, u_0 >= \bar{\lambda} < v, u_0 > .$$

Si le produit $< v, u_0 >$ est nul, alors la relation (6.7) nous dit que $\bar{\lambda}$ est valeur propre de L_1^*, donc λ est valeur propre de L_1. Si le produit est non nul, alors $\lambda =< c'(w_1), u_0 >$. Ainsi, toutes les valeurs propres de L_2 sont valeurs propres de L_1, à l'exception de la valeur propre $< c'(w_1), u_0 >$ qui remplace la valeur propre nulle de L_1.

En conclusion, la fonctionnalisation de la vitesse conduit à sélectionner une seule solution parmi la famille de solutions du problème initial, et elle supprime la valeur propre nulle due à l'invariance par translation. Elle change aussi l'opérateur, mais ses autres valeurs propres sont inchangées. La construction du degré topologique pour les opérateurs avec vitesse fonctionnalisée reste pratiquement identique [18]. Nous noterons désormais γ le degré topologique construit pour ces opérateurs, et nous l'utiliserons dans le chapitre 2 pour la recherche d'ondes progressives convectives.

7. Application à des problèmes concrets

7.1. Cas de conditions au bord de type "surface libre"

Considérons le problème suivant, dans l'ouvert Ω défini par :

$$\Omega = \{(x_1, x_2), 0 < x_1 < l, \ -\infty < x_2 < \infty\}.$$

$$\begin{aligned}
D\Delta\theta - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \left(c + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + F(\theta) &= 0 && (7.1)\\
P\Delta\omega - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + \left(c + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + PR\frac{\partial\theta_0}{\partial x_1} &= 0 && (7.2)\\
\Delta\psi + \omega &= 0 && (7.3)\\
\theta(x_1, \pm\infty) = \theta^{\pm}, \quad \psi(x_1, \pm\infty) = \omega(x_1, \pm\infty) &= 0. && (7.4)
\end{aligned}$$

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0, \ \psi = 0, \ \omega = 0. \qquad (7.5)$$

Nous montrerons au chapitre 2 que ce problème découle assez naturellement du couplage des équations de réaction-diffusion avec les équations de Navier-Stokes, dans le cas où les conditions aux limites pour la vitesse sont de type "surface libre", c'est-à-dire

$$x_1 = 0, l : v_1 = 0, \ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0.$$

Les valeurs aux limites $\theta^{\pm}$ sont indépendantes de x_1. Comme à la section 2, on définit donc ϕ par (2.6) où $w^{\pm} = (\theta^{\pm}, 0, 0)$ et on écrit l'inconnue comme $w = u + \phi$, où $u \in E_1$ est toujours notée : $u = (\theta, \omega, \psi)$.

Considérons l'opérateur $A_R : E_1 \to E_2$ correspondant au système (7.1)-(7.5), $c \in \mathbb{R}$ étant fixé, et notons L_R l'opérateur linéarisé autour d'un triplet $(\bar{\theta}(x), \bar{\omega}(x), \bar{\psi}(x))$. L_R est considéré comme opérateur de E_1 dans E_2. Les problèmes limites $L_R^{\pm} u = 0,\ u \in E_1^0$, prennent la forme

$$D\Delta\theta + c\,\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + F'(\theta^{\pm})\theta = 0 \tag{7.6}$$

$$P\Delta\omega + c\,\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + PR\frac{\partial\theta_0}{\partial x_1} = 0 \tag{7.7}$$

$$\Delta\psi + \omega = 0 \tag{7.8}$$

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0,\ \psi = 0,\ \omega = 0. \tag{7.9}$$

En appliquant les résultats de la section 3, on obtient le lemme suivant :

LEMME 7.1. – *Si les problèmes*

$$D\Delta\theta + c\,\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + F'(\theta^{\pm})\theta = 0,\ \ \frac{\partial\theta}{\partial x_1}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{7.10}$$

n'ont pas de solution non nulle dans $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, alors l'opérateur L_R est normalement résoluble et son noyau est de dimension finie.

Pour prouver ce lemme, il suffit de remarquer que le problème (7.7)-(7.9) avec $\theta \equiv 0$ n'a pas de solution non nulle dans $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. La condition 1 du théorème 3.1 est donc vérifiée, et le lemme est démontré.

Considérons maintenant l'opérateur

$$L_1\theta = D\Delta\theta + c\,\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + F'(\bar{\theta})\theta$$

défini de l'espace

$$F_1 = \left\{\theta \in C_{\mu}^{2+\alpha}(\bar{\Omega}),\ \frac{\partial\theta}{\partial x_1}|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

dans l'espace $F_2 = C_{\mu}^{\alpha}(\bar{\Omega})$. On a le théorème suivant, qui donne l'indice de Fredholm d'un opérateur de réaction-diffusion-convection en fonction de l'indice de l'opérateur de réaction-diffusion associé.

THÉORÈME 7.2. – *Si*
– *$\bar{\theta}$, $\bar{\psi}$ et $\bar{\omega}$ vérifient les conditions aux limites (7.4),*
– *la condition du lemme 7.1 est satisfaite,*
– *la codimension de l'image de L_1 est finie,*
alors l'opérateur L_R a la propriété de Fredholm, et il a le même indice que L_1.

Démonstration. – Le résultat est clairement vrai pour $R = 0$, car l'opérateur

$$(\omega, \psi) \mapsto \left(P\Delta\omega + c\frac{\partial \omega}{\partial x_2},\ \Delta\psi + \omega \right),$$

défini de l'espace $\{(\omega, \psi) \in C^{2+\alpha}_{\mu}(\bar{\Omega}), \omega_{|\partial\Omega} = \psi_{|\partial\Omega} = 0\}$ dans l'espace $C^{\alpha}_{\mu}(\bar{\Omega})$ est inversible. Pour $R \neq 0$, l'homotopie $L_{\tau R}, \tau \in [0, 1]$ prouve que L_R est Fredholm. En effet, l'homotopie ne modifie pas la première composante, donc le lemme 7.1 montre que pour tout τ, l'image de $L_{\tau R}$ est fermée et son noyau est de dimension finie. Le lemme 3.2 et en particulier l'invariance de l'indice par homotopie dans la classe des opérateurs de Fredholm permet de conclure. □

Remarque. – Ce théorème montre que le couplage avec les équations de Navier-Stokes ne modifie pas l'indice des opérateurs de réaction-diffusion. Cet indice est calculé dans [3].

Nous verrons dans la Section 6 que la construction du degré topologique nécessite la condition 2. Dans le cas du problème (7.1)-(7.5) cette condition s'exprime ainsi :

Condition 2'. Quel que soit $\lambda \geqslant 0$, les problèmes

$$D\Delta\theta + c\,\frac{\partial \theta}{\partial x_2} + F'(\theta^{\pm})\theta = \lambda\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_1}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{7.11}$$

n'ont pas de solution non nulle dans $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

Ainsi nous avons le théorème :

THÉORÈME 7.3. – *Si la condition 2' est satisfaite, alors l'opérateur L_R est de Fredholm, et d'indice nul.*

Remarquons que les problèmes (7.11) sont à coefficients constants, donc il peuvent être réduits à des problèmes algébriques. En appliquant formellement la transformée de Fourier par rapport à la variable x_2, nous obtenons les problèmes de valeurs propres sur l'intervalle $0 \leqslant x_1 \leqslant l$:

$$D\theta'' + (-D\xi^2 + ci\xi E_p + F'(\theta^{\pm}))\theta = \lambda\theta, \quad \theta'(0) = \theta'(l) = 0. \tag{7.12}$$

Ici, le prime indique une dérivation par rapport à la variable x_1. La condition 2' est alors équivalente au fait que les problèmes (7.12) n'ont pas de solution non nulle, quels que soient les réels ξ et $\lambda \geqslant 0$. Sans perte de généralité on peut supposer que $l = \pi$. Alors les valeurs propres du problème (7.12) peuvent être calculées à partir des égalités

$$det(-(k^2 + \xi^2)D + ci\xi E_p + F'(\theta^{\pm}) - \lambda I_p) = 0 \tag{7.13}$$

pour tout réel ξ et tout entier k. Ici, I_p est la matrice identité.

Si la matrice $F'(\theta^{\pm})$ a une valeur propre réelle strictement positive, alors il est clair que (7.13) a une solution pour un $\lambda > 0$, et donc la condition 2' n'est pas vérifiée.

Supposons maintenant que toutes les valeurs propres de la matrice $F'(\theta^{\pm})$ sont dans le demi-plan gauche. Dans le cas équidiffusif où la matrice D des coefficients de diffusion est scalaire ($D = dI_p$), toutes les valeurs propres de la matrice

$$T(\xi, k) = -(k^2 + \xi^2)D + ci\xi + F'(\theta^{\pm})$$

sont aussi dans le demi-plan gauche, et la condition 2' est satisfaite. Si D n'est pas scalaire, alors la condition 2' peut ne pas être vérifiée. En effet, si les coefficients de diffusion diffèrent fortement les uns des autres, alors la matrice $T(\xi, k)$ peut avoir des valeurs propres à partie réelle positive. Ceci est similaire à l'instabilité de Turing, où un état homogène est stable sans diffusion, mais peut devenir instable lorsqu'il y a diffusion.

7.2. Cas de conditions de non-glissement

Supposons maintenant qu'au lieu des conditions au bord de surface libre, on impose des conditions de non glissement, plus réalistes du point de vue physique :

$$x_1 = 0, l : v_1 = v_2 = 0.$$

Après transformation vers une formulation fonction de courant - fonction tourbillon, on obtient le système (7.1)-(7.4), et les conditions au bord (7.5) sont remplacées par

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0,\ \psi = 0,\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \tag{7.14}$$

On voit que ces conditions au bord vont rendre l'étude plus difficile, dans la mesure où on n'a aucune condition pour la fonction tourbillon ω, mais deux conditions pour la fonction de courant ψ. Nous allons montrer que, sous la condition 2', l'opérateur a toujours la propriété de Fredholm. Pour montrer que son noyau est de dimension finie et que son image est fermée, la même preuve qu'à la section 3 s'applique, à condition de vérifier que l'opérateur considéré est bien elliptique, cette fois au sens d'Agmon-Douglis-Nirenberg [1], et satisfait les estimations de Schauder. Par contre, pour montrer que la codimension de l'image est finie, on ne peut appliquer la même démarche, car avec les conditions au

bord imposées ici, nous ne savons pas si l'opérateur est sectoriel. Une homotopie avec un opérateur inversible construit "à la main" permettra cependant de conclure.

Commençons par vérifier l'ellipticité au sens d'Agmon-Douglis-Nirenberg. En linéarisant le système (7.1)-(7.4) autour d'un triplet $(\bar{\theta}, \bar{\omega}, \bar{\psi})$, on voit que le problème linéarisé peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \qquad \text{dans } \Omega \\ Bu &= 0 \qquad \text{dans } \partial\Omega, \end{aligned}$$

où L et B sont donnés par les matrices :

$$L = \begin{pmatrix} D\Delta - \partial_2\bar{\psi}\,\partial_1 + \partial_1\bar{\psi}\,\partial_2 + F'(\theta_0) & 0 & -\partial_1\bar{\theta}\,\partial_2 + \partial_2\bar{\theta}\,\partial_1 \\ R\partial_1 & P\Delta - \partial_2\bar{\psi}\,\partial_1 + \partial_1\bar{\psi}\,\partial_2 & -\partial_1\bar{\omega}\,\partial_2 + \partial_2\bar{\omega}\,\partial_1 \\ 0 & 1 & \Delta \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} \partial_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons que cette notation matricielle va s'avérer plus commode ici pour montrer l'ellipticité au sens d'Agmon-Douglis-Nirenberg. Suivant la technique de [1], nous allons définir des poids sur chaque ligne et chaque colonne, afin de déterminer la partie principale de l'opérateur L. Il est clair qu'il nous faut garder le couplage des deuxième et troisième lignes pour que les conditions au bord donnent un problème bien posé. Nous posons donc :

$$t_1 = 2, t_2 = 2, t_3 = 4; \quad s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = -2; \quad r_1 = -1, r_2 = -3, r_3 = -4.$$

Avec ces conventions les symboles principaux de L et B deviennent

$$a_0(x,\zeta) = \begin{pmatrix} D|\zeta|^2 & 0 & 0 \\ 0 & P|\zeta|^2 & 0 \\ 0 & 1 & |\zeta|^2 \end{pmatrix}, \quad b_0(x,\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On montre aisément que, avec ces conventions, les opérateurs sont elliptiques au sens d'Agmon-Douglis-Nirenberg et satisfont toutes les conditions nécessaires pour que l'estimation de Schauder soit valable, l'opérateur L étant considéré entre les espaces

$$\begin{aligned} E_1 = \big\{ u = (\theta, \omega, \psi), \theta \in C^{2+\alpha}_\mu(\bar{\Omega}), \omega \in C^{2+\alpha}_\mu(\bar{\Omega}), \psi \in C^{4+\alpha}_\mu(\bar{\Omega}), \\ \frac{\partial\theta}{\partial x_1}|_{\partial\Omega} = 0,\ \psi|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \big\} \end{aligned}$$

et

$$E_2 = C^\alpha_\mu(\bar\Omega) \times C^\alpha_\mu(\bar\Omega) \times C^{2+\alpha}_\mu(\bar\Omega).$$

Dès lors, on montre comme au lemme 7.1 que si les problèmes (7.10) n'ont pas de solution non nulle dans $C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$, alors l'opérateur L est d'image fermée et son noyau est de dimension finie. Pour montrer que la codimension de l'image est finie, on construit l'homotopie

$$L_\tau = (1-\tau)L + \tau L_1, \quad \tau \in [0,1],$$

où L_1 est l'opérateur défini de E_1 dans E_2 par

$$L_1(\theta,\omega,\psi) = (D\Delta\theta - \theta, P\Delta\omega, \Delta\psi + \omega).$$

L'inversibilité de L_1 découle aisément de résultats classiques d'existence et d'unicité dans C^α pour les deux problèmes

$$\Delta\theta - \theta = f, \quad \frac{\partial\theta}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

et

$$\Delta^2\psi = g, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

où f et g sont respectivement dans $C^{2+\alpha}$ et $C^{4+\alpha}$.

Pour conclure que L est un opérateur de Fredholm d'indice nul, il reste seulement à vérifier que l'homotopie construite préserve le fait que l'image est fermée et que le noyau est de dimension finie, c'est-à-dire que la condition 1 est préservée.

Supposons que les valeurs propres de $F'(\theta^\pm)$ sont dans le demi-plan gauche. Alors celles de $(1-\tau)F'(\theta^\pm) - \tau\, Id$ le sont aussi, pour tout $\tau \in [0,1]$, donc les problèmes

$$D\Delta\theta + (1-\tau)c\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + [(1-\tau)F'(\theta^\pm) - \tau]\theta = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x_1}|_{\partial\Omega} = 0$$

n'ont pas de solution non nulle dans $C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$. On a donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 7.4. – *Considérons le système (7.1)-(7.4) avec les conditions aux limites (7.14) Si les valeurs propres de $F'(\theta^\pm)$ sont dans le demi-plan gauche, alors la linéarisation de ce système définit un opérateur de Fredholm, d'indice nul.*

8. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré plusieurs propriétés qualitatives pour des opérateurs abstraits de réaction-diffusion-convection dans des cylindres non bornés. Nous avons vu que, sous certaines conditions, ils sont propres et ont la propriété de Fredholm. Nous avons construit un degré topologique pour cette famille d'opérateurs, et évoqué deux exemples concrets dans la Section 7.

Dans le chapitre suivant, nous quittons le registre des opérateurs abstraits et étudions de façon plus détaillée l'exemple présenté à la Section 7.1. Grâce à la théorie que nous venons de présenter, nous donnons des théorèmes de bifurcations et d'instabilité. Ces résultats montrent à quel point le travail présenté dans ce premier chapitre est intéressant non seulement du point de vue théorique, mais aussi du point de vue de ses applications.

Références bibliographiques

[1] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying the general boundary conditions II*, Communications on pure and applied mathematics, Vol. 17 (1964), 35-92.

[2] C. Barillon, V. Volpert, *Topological degree for a class of elliptic operators in R^n*, TMNA, Vol. 14 (1999), 275-293.

[3] J.F. Collet, and V. Volpert, *Computation of the index of linear elliptic operators in unbounded cylinders*, J. Funct. Analysis, Vol. 164 (1999), 34-59.

[4] E.N. Dancer, *Boundary-value problems for ordinary differential equations on infinite intervals*, Proc. London Math. Soc., Vol. 30(3) (1975), 76–94.

[5] E.N. Dancer, *Boundary-value problems for ordinary differential equations on infinite intervals II*, Quart. J. Math. Oxford, Vol. 28(2) (1977), 101–115.

[6] C.C. Fenske, *Extensio gradus ad quasdam applicationes Fredholmii*, Mitt. Math. Seminar, Giessen, Vol. 121 (1976), 65–70.

[7] I. Gohberg, and M. Krein, *The basic propositions on defect numbers and indices of linear operators,* A.M.S. Transl., 13(2) (1960), 185–264.

[8] C. Isnard, *The topological degree on Banach manifolds,* Global Anal. Appl., 2 (1974), 291–313.

[9] D.H. Sattinger, *Weighted norms for the stability of traveling waves*, J. Differential Eqs. Vol 25 (1977), 130-144.

[10] S. Smale, *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. Math., Vol. 87 (1965), 861–866.

[11] I.V. Skrypnik, "Nonlinear Elliptic Equations of Higher Order," Naukova Dumka, Kiev, 1973 (Russian).

[12] I.V. Skrypnik, "Nonlinear elliptic boundary value problems," Teubner-Texte zur Mathematik Vol. 91, Teubner, 1986.

[13] A.I. Volpert, and V.A. Volpert, *Construction of the Leray-Schauder degree for elliptic operators in unbounded domains,* Ann. Inst. H. Poincar´e, Vol. 11(3) (1994), 245–273.

[14] A.I. Volpert, and V.A. Volpert, *Applications of the rotation theory of vector fi elds to the study of wave solutions of parabolic equations,* Trans. Moscow Math. Soc., (1990), 59–108.

[15] A.I. Volpert, V.A. Volpert, and V.A. Volpert, "Travelling Wave Solutions of Parabolic Systems," Translation of Mathematical Monographs, Vol. 140, Amer. Math. Society, Providence, 1994.

[16] V.A. Volpert, and A.I. Volpert, *Existence and stability of traveling waves in chemical kinetics,* In: Dynamics of Chemical and Biological Systems, Nauka, Novosibirsk (1989), 56-131 (in Russian).

[17] V.A. Volpert, and A.I. Volpert, *Waves of chemical transformation having complex kinetics,* Dokl. Phys. Chemistry Vol. 309 (1989), 1-3, 877-879.

[18] V. Volpert, A. Volpert, and J.F. Collet, *Topological degree for elliptic operators in unbounded cylinders*, Adv. Diff. Eq., Vol. 4 (1999), 777-812.

Chapitre 2

Etude de bifurcations pour un problème de réaction-diffusion-convection

Résumé. Lorsqu'une r´eaction exothermique se propage dans un fluide sous forme de front plan, la convection naturelle induite par le d´egagement de chaleur peut perturber le front. Nous utilisons ici le degr´e topologique construit au chapitre 1 pour montrer l'existence d'ondes progressives non planes, d´eform´ees par des courants de convection, pour un nombre de Rayleigh suffisamment grand. Nous nous int´eressons enfin `a d'´eventuelles instabilit´es qui peuvent affecter ces solutions.

1. Introduction

Considérons une réaction frontale dans un tube cylindrique. Nous prendrons l'exemple de la polymérisation, et nous appuierons sur les résultats expérimentaux publiés par [13]. En l'absence de convection, un front plan séparant les réactifs des produits se propage à vitesse constante, c. Augmentons progressivement le nombre de Rayleigh R, c'est-à-dire le paramètre qui détermine l'apparition ou non de la convection naturelle dans le milieu. On observe expérimentalement que lorsque R dépasse une valeur critique, la convection apparaît, déstabilisant le front plan (voir Figure 2.1). Mais malgré les courants de convection, la structure d'onde progressive ne semble pas détruite : le front est déformé, mais il continue de se propager, avec une vitesse qui peut être différente.

Ce sont ces résultats que nous souhaitons retrouver mathématiquement. Dans tout ce qui suit, le nombre de Rayleigh R jouera le rôle d'un paramètre de bifurcation. Nous allons modéliser le problème par un système d'équations de réaction-diffusion couplées

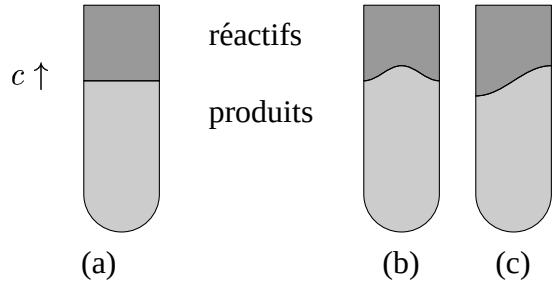


FIG. 2.1 – (a) Front plan sans convection. Lorsque le nombre de Rayleigh dépasse une valeur critique, on observe expérimentalement des fronts non plans, axisymétriques (b) ou antisymétriques (c).

avec les équations de conservation du moment de Navier-Stokes. La recherche d'ondes progressives nous conduit à transformer le problème parabolique en un problème elliptique. Dans le cas où ce dernier admet une solution monodimensionnelle sans convection (front plan), nous montrons que pour R suffisamment grand, l'apparition de la convection le déstabilise, et que de nouvelles solutions non planes apparaissent. Soulignons que les courants de convection ne sont pas imposés de l'extérieur, mais qu'ils apparaissent spontanément à cause de la chaleur dégagée par la réaction : on parle de convection naturelle.

Dans la Section 3, nous analyserons le spectre discret de l'opérateur linéarisé autour de la solution monodimensionnelle (front plan). Cette étude nous permettra à la fois d'étudier les bifurcations pour prouver, sous certaines conditions, l'apparition de solutions convectives, et de discuter de l'apparition d'instabilités affectant cette solution monodimensionnelle lorsque la convection apparaît (Section 4). Dans la Section 4, nous donnerons aussi quelques compléments sur le spectre des opérateurs linéarisés autour d'une onde convective, au voisinage du nombre de Rayleigh critique.

Mais avant tout, il nous a paru nécessaire de commencer par énoncer les principaux résultats de ce chapitre. C'est ce que nous ferons dans la Section 2. Les démonstrations seront données dans les sections ultérieures.

2. Principaux résultats

Considérons un système d'équations de réaction-diffusion, couplées avec les équations de Navier-Stokes, sous l'approximation de Boussinesq :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T &= \kappa \Delta T + \tilde{F}_0(T, A) && (2.1)\\
\frac{\partial A_j}{\partial t} + v \cdot \nabla A_j &= d_j \Delta A_j + \tilde{F}_j(T, A), \quad j = 1, ..., m && (2.2)\\
\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta v + \beta g (T - T_0) \tau && (2.3)\\
\text{div } v &= 0 && (2.4)
\end{aligned}$$

Ici T est la température, A_j sont les concentrations des différentes espèces chimiques impliquées, $v = (v_1, v_2)$ est la vitesse du fluide, p la pression, κ la diffusivité thermique, d_j sont les coefficients de diffusion moléculaire, ρ est la densité, β est le coefficient de dilatation, g l'accélération de la pesanteur, T_0 une température de référence, τ un vecteur unitaire dans la direction verticale, $\tilde{F}_j$, $j = 0..., m$ sont des termes non-linéaires décrivant les taux des réactions chimiques. Leur forme particulière déterminée par les équations de la cinétique chimique n'entrera pas en considération dans ce chapitre.

Le système d'équations (2.1)-(2.4) est considéré dans la bande

$$\Omega = \{(x_1, x_2), 0 < x_1 < l, \, -\infty < x_2 < \infty\}.$$

(Nous nous limitons à deux dimensions d'espace, bien que le problème de départ soit à trois dimensions, pour pouvoir introduire plus loin la fonction de courant et la fonction tourbillon. Nous verrons que ces deux dimensions sont suffisantes pour faire apparaître des phénomènes convectifs et des ondes progressives non planes.)

Nous supposons la nullité des flux de chaleur et de matière à travers la paroi du réacteur

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \; \frac{\partial A_j}{\partial x_1} = 0, \tag{2.5}$$

et imposons pour la vitesse des conditions au bord de type "surface libre" :

$$x_1 = 0, l : v_1 = 0, \; \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0. \tag{2.6}$$

Nous verrons plus loin que ces conditions permettent quelques simplifications, et surtout des informations plus complètes sur le spectre de l'opérateur linéarisé. Dans le cas plus réaliste de conditions de non-glissement du fluide sur les parois, on a montré au chapitre 1 que la propriété de Fredholm reste valable, que l'opérateur reste propre, et que par conséquent le degré topologique peut être généralisé. Par contre, nous verrons qu'il n'est pas possible de mener l'étude des valeurs propres dans ce cas.

Enfin, nous imposons des conditions à l'infini :

$$T(x_1, \pm\infty) = T^{\pm}, \quad A_j(x_1, \pm\infty) = A_j^{\pm}, \quad v(x_1, \pm\infty) = 0. \tag{2.7}$$

Les équations de Navier-Stokes sont écrites sous l'approximation de Boussinesq : le milieu est considéré incompressible et la densité constante, sauf dans le terme qui décrit l'action de la gravité. (Ce terme fait apparaître une linéarisation de la densité par rapport à la température.) L'existence de solutions pour de tels problèmes de réaction-diffusion-convection et certaines de leurs propriétés sont étudiées dans [1], [2], [8], [9].

Pour formuler les résultats essentiels, nous faisons les hypothèses suivantes :

– on a égalité des coefficients de diffusion :

$$\kappa = d_1 = ... = d_m = D,$$

– la cinétique chimique permet la réduction vers un système dit monotone [17], c'est à dire qu'il existe un changement de variables linéaire

$$\theta_i = a_{i0}T + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}A_j, \quad i = 0, ...m,$$

tel que le système

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\Delta\theta + F(\theta), \tag{2.8}$$

où $\theta = (\theta_0, \cdots \theta_m)$, $F = (F_0, \cdots F_m)$, satisfait la condition

$$\frac{\partial F_i}{\partial \theta_j} > 0, \quad i, j = 0, ...m, \ i \neq j. \tag{2.9}$$

Ici, $F(\theta) = a\tilde{F}(a^{-1}\theta)$, où $a = (a_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant m}$ est la matrice du changement de variables. Pour simplifier, nous supposerons désormais que θ_0 est la température adimensionnée, et que $\theta_1, \cdots \theta_m$ sont des variables de concentration.

Notons que le système de réaction-diffusion (2.8) est équivalent au problème (2.1), (2.2), avec $v = 0$. Sous certaines conditions, que nous allons préciser, ce problème admet une solution onde progressive, c'est-à-dire de la forme

$$\theta(x_1, x_2, t) = \tilde{\theta}(x_1, x_2 - ct).$$

(Ici, c est la vitesse du front, c'est donc une constante scalaire.) Citons par exemple le résultat d'existence établi dans [16].

Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées :

– $F(\theta^+) = F(\theta^-) = 0$, où $\theta^+ < \theta^-$ (les inégalités entre vecteurs sont à comprendre composante par composante) ;

– la fonction F a un nombre fini de zéros $\theta^{(1)}$, ..., $\theta^{(s)}$ dans l'intervalle $\theta^+ < \theta < \theta^-$;

– les matrices $F'(\theta^{\pm})$ ont leurs valeurs propres dans le demi-plan gauche, et chacune des matrices $F'(\theta^{(i)})$, $i = 1, \cdots s$, a au moins une valeur propre dans le demi-plan droit.

Alors il existe une onde progressive monotone solution de (2.8), i.e. il existe un réel c_1 et une fonction Θ tels que

– la fonction θ définie par $\theta(x,t) = \Theta(x_2 - c_1 t)$ soit solution du problème (2.8),
– $\Theta(\pm\infty) = \theta^{\pm}$, et
– la fonction à valeurs vectorielles Θ soit décroissante sur chaque composante.

Remarquons que l'inégalité (2.9) peut être large si on suppose que les matrices $F'(\theta^{\pm})$ sont irréductibles.

Naturellement, cette onde de réaction-diffusion fournit aussi une solution onde progressive du système complet (2.1)-(2.4), en posant $v = 0$, et p constante. Une des motivations de ce chapitre est de mettre en évidence l'existence d'ondes progressives "convectives", c'est-à-dire pour lesquelles la vitesse du fluide n'est pas identiquement nulle. Cela nous conduit à remplacer le problème (2.1)-(2.6) par le problème elliptique :

Trouver $c \in \mathbb{R}$ et $(\theta, v, p) : \Omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, solutions du système

$$-c\frac{\partial \theta}{\partial x_2} + v \cdot \nabla\theta = D\Delta\theta + F(\theta) \tag{2.10}$$

$$-c\frac{\partial v}{\partial x_2} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p + P\Delta v + PR(\theta_0 - \theta_0^*)\tau \tag{2.11}$$

$$\text{div } v = 0 \tag{2.12}$$

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0,\ v_1 = 0,\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0. \tag{2.13}$$

$$\theta(x_1, \pm\infty) = \theta^{\pm}, \quad v(x_1, \pm\infty) = 0. \tag{2.14}$$

Ici, les équations de Navier-Stokes sont écrites sous forme adimensionnée, P étant le nombre de Prandtl et R le nombre de Rayleigh. Il est clair qu'une solution onde progressive du système (2.8) est aussi une solution avec $v = 0$ du problème ci-dessus. Remarquons enfin que dans ce nouveau système, le réel c (vitesse du front) est une inconnue à déterminer.

Nous allons maintenant introduire la fonction de courant ψ, définie à une constante additive près par :

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

et la fonction tourbillon ω,

$$\omega = -\Delta\psi.$$

Enfin, pour simplifier la présentation, nous supposons ici que θ est une variable scalaire ; les résultats se généralisent au cas des systèmes monotones, au sens de la condition (2.9). Avec ces notations le problème (2.10)-(2.14) prend la forme :

Trouver $c \in \mathbb{R}$ et $(\theta, \omega, \psi) : \Omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, solutions du système

$$D\Delta\theta - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \left(c + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\,\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + F(\theta) = 0 \tag{2.15}$$

$$P\Delta\omega - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\,\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + \left(c + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\,\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + PR\frac{\partial\theta_0}{\partial x_1} = 0 \tag{2.16}$$

$$\Delta\psi + \omega = 0 \tag{2.17}$$

$$\theta(x_1, \pm\infty) = \theta^{\pm}, \quad \psi(x_1, \pm\infty) = \omega(x_1, \pm\infty) = 0. \tag{2.18}$$

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0,\ \psi = 0,\ \omega = 0. \tag{2.19}$$

Remarquons que les conditions au bord de surface libre nous ont permis d'obtenir des conditions au bord simples pour ω et ψ. Par contre, des conditions de non-glissement ne peuvent pas être formulées en termes de fonction tourbillon ; on obtient à la place deux conditions au bord pour la fonction de courant (voir Chapitre 1, Section 7.2).

On linéarise le problème (2.15)-(2.19) autour de la solution $\theta = \Theta(x_2)$, $\omega = 0$, $\psi = 0$, et on considère le problème de valeurs propres

$$D\Delta\theta + c\,\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + F'(\Theta(x_2))\theta + \Theta'(x_2)\,\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \lambda\theta \tag{2.20}$$

$$P\Delta\omega + c\,\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + PR\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \lambda\omega \tag{2.21}$$

$$\Delta\psi + \omega = \lambda\psi \tag{2.22}$$

$$\theta(x_1, \pm\infty) = \theta^{\pm}, \quad \psi(x_1, \pm\infty) = \omega(x_1, \pm\infty) = 0. \tag{2.23}$$

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0,\ \psi = 0,\ \omega = 0. \tag{2.24}$$

Ses coefficients ne dépendant pas de la variable x_2, il est commode d'étudier les modes de Fourier. Supposons que $l = \pi$. On cherche alors des solutions sous la forme :

$$\begin{aligned} \theta(x_1, x_2) &= \Theta(x_2) + \theta_k(x_2)\cos(kx_1), \\ \omega(x_1, x_2) &= \omega_k(x_2)\sin(kx_1), \\ \psi(x_1, x_2) &= \psi_k(x_2)\sin(kx_1). \end{aligned}$$

Ici, θ_k vérifie des conditions homogènes à l'infini. On obtient le problème de valeurs

propres à une dimension d'espace :

$$\begin{aligned} D\theta_k^{''} + c\,\theta_k' + (F'(\Theta(x_2)) - Dk^2)\theta_k + k\Theta'(x_2)\psi_k &= \lambda\theta_k \\ P\omega_k^{''} + c\,\omega_k' - Pk^2\omega_k - PRk\theta_k &= \lambda\omega_k \\ \psi_k^{''} - k^2\psi_k + \omega_k &= \lambda\psi_k. \\ \theta_k(\pm\infty) = 0, \quad \psi_k(\pm\infty) = \omega_k(\pm\infty) &= 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Les principaux résultats de ce chapitre sont énoncés dans les théorèmes 2.1 et 2.2.

THÉORÈME 2.1. –

1. *Pour tout entier négatif $k = -1, -2...$ il existe une unique valeur critique $R_c(k)$ telle que la valeur propre principale du problème (2.25) soit strictement négative pour $R < R_c(k)$ et strictement positive pour $R > R_c(k)$.*
2. *Toutes les valeurs critiques $R_c(k)$ sont positives, et il existe une valeur minimale $R_c(k_0)$. Si $R_c(k) \neq R_c(k_0)$ pour $k \neq k_0$, alors $R_c(k_0)$ est un point de bifurcation, i.e. dans chaque voisinage de $R_c(k_0)$, dans chaque voisinage de c_1 et dans chaque voisinage de la solution monodimensionnelle $(\Theta, 0, 0)$, il existe des valeurs de R et c, et un triplet (θ, ω, ψ) avec $\psi \not\equiv 0$, $\omega \not\equiv 0$, solution du problème (2.15)-(2.19). (Dans la suite, nous appellerons un tel triplet "solution convective".)*

Remarques. –

1. Comme d'habitude dans les problèmes décrivant des solutions ondes progressives", la constante c dans (2.15)-(2.19) est inconnue. Elle doit être trouvée en même temps que la solution (θ, ω, ψ). Quand nous formulons le problème en termes d'opérateurs, nous introduisons une fonctionnalisation du paramètre c. Cela signifie qu'au lieu de la constante inconnue c nous considérons une fonctionnelle donnée $c(\theta, \omega, \psi)$. Cela supprime la valeur propre nulle de l'opérateur linéarisé et permet la construction du degré topologique (voir section 6.2).
2. La seconde remarque concerne la stabilité de la solution monodimensionnelle. Elle est déterminée par le problème de valeur propre

$$D\Delta\theta + c\,\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + F'(\Theta(x_2))\theta + \Theta'(x_2)\,\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \lambda\theta \tag{2.26}$$

$$P\Delta\omega + c\,\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + PR\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \lambda\omega \tag{2.27}$$

$$\Delta\psi + \omega = 0 \tag{2.28}$$

$$\theta(x_1, \pm\infty) = \theta^{\pm}, \quad \psi(x_1, \pm\infty) = \omega(x_1, \pm\infty) = 0. \tag{2.29}$$

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0,\ \psi = 0,\ \omega = 0. \tag{2.30}$$

qui est différent du problème (2.20)-(2.24). Dans la Section 3, nous montrons que pour $R = R_c(k_0)$ une valeur propre simple de ce problème migre du demi-plan gauche au demi-plan droit, en passant par zéro. Nous montrons aussi que pour $R \leqslant R_c(k_0)$ il n'y a pas de valeur propre réelle supérieure à celle-ci. Cependant, nous ne pouvons pas montrer qu'il n'y a pas de valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle supérieure.

3. Le problème de valeurs propres important physiquement est (2.26)-(2.30), c'est-à-dire le problème sans λ dans la dernière équation. Cependant le problème (2.20)-(2.24) va nous intéresser pour deux raisons : tout d'abord, il apparaît naturellement dans l'analyse de bifurcations, lorsqu'on calcule l'indice de la solution monodimensionnelle. Ensuite, il a des propriétés que nous détaillerons dans la Section 3, et qui permettent de donner une représentation mimimax pour la valeur propre principale. Nous utiliserons cette représentation pour étudier ensuite le problème (2.26)-(2.30).

Concernant la stabilité des solutions convectives, nous avons la même restriction que dans la deuxième remarque. On montre dans la section 5 le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2. – *Si des solutions convectives existent seulement pour $R > R_c(k_0)$ (bifurcation surcritique), alors parmi elles il existe des réels c et des solutions $(\theta_2, \omega_2, \psi_2)$ pour lesquelles le problème*

$$\begin{aligned}
D\Delta\theta - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \left(c + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x_2} + F'(\theta_2(x))\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} &= \lambda\theta \\
P\Delta\omega - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \left(c + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + PR\frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= \lambda\omega \\
\Delta\psi + \omega &= 0
\end{aligned}$$

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0,\ \psi = 0,\ \omega = 0.$$

n'a pas de valeur propre strictement positive, pour R suffisamment proche de $R_c(k_0)$ (voir Figure 2.2 (b)). Si des solutions convectives existent seulement pour $R < R_c(k_0)$ (bifurcation sous-critique), alors parmi elles il existe des réels c et des solutions $(\theta_2, \omega_2, \psi_2)$ pour lesquelles le problème a une valeur propre positive ou nulle, pour R suffisamment proche de $R_c(k_0)$ (voir Figure 2.2 (a)).

Remarque. – Ce résultat n'est pas exhaustif, par exemple on peut avoir une solution convective pour $R < R_c(k_0)$ et une autre pour $R > R_c(k_0)$, comme décrit sur la Figure

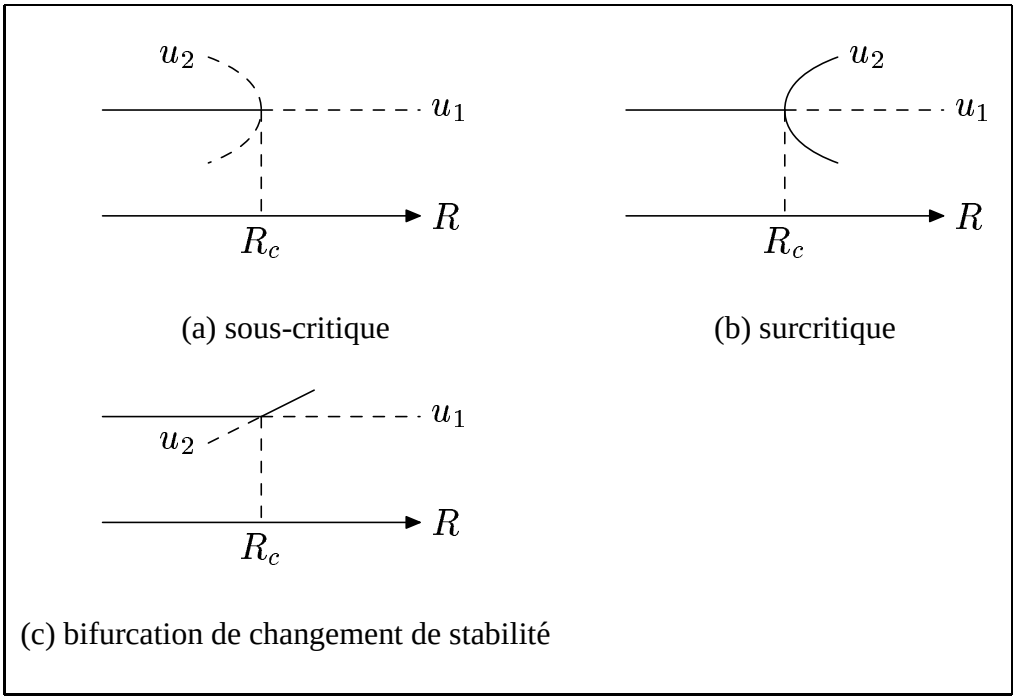


FIG. 2.2 – Différents types de bifurcations

2.2 (c). Remarquons que l'argument du degré ne nous permet pas de savoir à quel type de bifurcation on a affaire.

3. Spectre et bifurcations

Dans cette section, nous étudions le problème (2.15)-(2.19), dans le cas où θ est une variable scalaire, et nous allons montrer le théorème 2.1. Tous les résultats de cette section restent valables pour des systèmes d'équations caractérisés par la condition supplémentaire

$$\frac{\partial F_i}{\partial \theta_j} > 0, \ i \neq j$$

dans le cas équidiffusif [17], [18], [19].

3.1. Introduction

Le résultat principal de cette section est l'existence d'un point de bifurcation, noté $R_c(k_0)$. Nous montrons cette existence en utilisant le degré topologique que nous venons de construire. Nous donnons ici en quelques lignes l'idée de la preuve, pour mieux comprendre les motivations de l'étude du spectre que nous allons présenter. Avant tout, il nous paraît utile de reformuler le résultat à montrer de façon plus simple.

Supposons qu'il existe une solution $\Theta(x_2)$ décroissante au problème

$$\begin{cases} D\Theta'' + c\Theta' + F(\Theta) = 0, \\ \Theta(-\infty) = \theta^-,\ \Theta(+\infty) = \theta^+. \end{cases}$$

Notons comme au chapitre précédent,

$$\phi(x) = s(x_2)\theta^+ + (1 - s(x_2))\theta^-, \tag{3.1}$$

où s est une fonction suffisamment régulière, égale à 1 pour $x_2 \geqslant 1$ et à 0 pour $x_2 \leqslant 0$. Notons $u_1 = (\Theta - \phi, 0, 0)$. Alors on a $u_1 \in E_1$. On note encore $A_R : E_1 \times \mathbb{R} \to E_2$ l'opérateur associé au problème (2.15)-(2.19), c'est-à-dire

$$\forall u = (\theta, \omega, \psi) \in E_1, \forall c \in \mathbb{R},\ A_R(u, c) = (f, g, h)$$

$$\begin{aligned} f &= D\Delta\theta - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \left(c + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + F(\theta + \phi) \\ g &= P\Delta\omega - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + \left(c + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + PR\frac{\partial\theta_0}{\partial x_1} \\ h &= \Delta\psi + \omega. \end{aligned}$$

THÉORÈME 3.1. – *Supposons les hypothèses suivantes vérifiées :*
(H_1) *:* $F'(\theta^\pm) < 0$,
(H_2) *:* $R_c(k) > R_c(k_0)$ *pour* $k \neq k_0$, *où les nombres* $R_c(k)$ *sont définis à la Section 2.*
Alors $R_c(k_0)$ *est un point de bifurcation, c'est-à-dire que pour tout* ϵ *positif, pour tout voisinage* V *de* u_1 *dans* E_1, *il existe des valeurs* $R \in]R_c(k_0) - \epsilon, R_c(k_0) + \epsilon[$, $u_2 \in V$ *et* $c_2 \in]c_1 - \epsilon, c_1 + \epsilon[$, *avec* $u_2 \neq u_1$, *solutions du problème* $A_R(u_2, c_2) = 0$. *De plus,* u_2 *est une solution convective, i.e.* $\psi_2 \not\equiv 0$.

Idée de la preuve :
Considérons la fonctionnelle c définie à la section 6.2 du chapitre 1. Nous notons $\tilde{A}_R$ l'opérateur défini sur E_1 par

$$\forall u \in E_1,\ \tilde{A}_R(u) = A_R(u, c(u + \phi)),$$

où ϕ est définie par la relation (3.1) page 52. $\tilde{A}_R$ est donc l'opérateur obtenu à partir de A_R par fonctionnalisation du paramètre c. On a en particulier $\tilde{A}_R(u_1) = 0$ pour tout $R > 0$.
Nous allons démontrer que, sous les hypothèses (H_1) et (H_2), on a :

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0,\ \forall V \text{ voisinage de } u_1 \text{ dans } E_1, \\ &\qquad \exists R \in]R_c(k_0) - \epsilon, R_c(k_0) + \epsilon[, \exists u_2 \in V, u_2 \neq u_1, \text{ tels que } \tilde{A}_R(u_2) = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Remarquons d'abord que l'hypothèse (H_1) correspond aux conditions sous lesquelles le degré topologique peut être défini pour des opérateurs tels que A_R, et donc également pour $\tilde{A}_R$. Nous noterons ici ce degré γ.

Supposons que (3.2) est faux. Alors il existe un voisinage V de u_1 tel que pour tout $u \in V$, $u \neq u_1$, et pour tout R voisin de $R_c(k_0)$, $\tilde{A}_R(u) \neq 0$. Quitte à restreindre V, on peut supposer que ceci reste vrai pour u dans l'adhérence de V. Ainsi, l'opérateur $\tilde{A}_R$ ne s'annule pas sur le bord du voisinage V de u_1, donc le degré topologique de $\tilde{A}_R$ relativement à ce voisinage sera bien défini.

Puisque u_1 est un point stationnaire de $\tilde{A}_R$, on peut définir l'indice de ce point (voir section 5 du chapitre 1) lorsque $\tilde{A}'_R(u_1)$ est inversible. Cette hypothèse est vérifiée pour presque tout R dans un intervalle suffisamment petit $]R_c(k_0) - \epsilon, R_c(k_0) + \epsilon[$. En effet, la fonctionnalisation de la vitesse du front a supprimé la valeur propre nulle, si celle-ci était simple. Cet indice vaut alors $(-1)^{\nu_1(R)}$, où $\nu_1(R)$ est le nombre de valeurs propres positives de $\tilde{A}'_R(u_1)$, comptées avec leurs multiplicités. De plus, comme u_1 est le seul point stationnaire de $\tilde{A}_R$ dans V, on a

$$\gamma(\tilde{A}_R, V) = (-1)^{\nu_1(R)}.$$

Par ailleurs, l'opérateur $\tilde{A}_R$ dépend continûment de R. En fixant deux valeurs distinctes R_1 et R_2, on peut donc le voir comme une homotopie entre $\tilde{A}_{R_1}$ et $\tilde{A}_{R_2}$. Pour tout $R \in [R_1, R_2]$, l'opérateur $\tilde{A}_R$ ne s'annule pas sur le bord de V, donc cette homotopie laisse le degré invariant. On a donc : $\gamma(A_{R_1}, V) = \gamma(A_{R_2}, V)$, ou encore

$$(-1)^{\nu_1(R_1)} = (-1)^{\nu_1(R_2)}.$$

Ainsi, pour obtenir une contradiction et prouver le théorème, il suffit de montrer que pour la valeur $R_c(k_0)$, l'entier $\nu_1(R)$ change de parité. Nous allons montrer que ce résultat est vrai sous l'hypothèse (H_2). Nous voyons donc que, pour montrer le théorème, il ne reste plus qu'à calculer le nombre $\nu_1(R)$ de valeurs propres strictement positives de l'opérateur linéarisé, et à étudier la dépendance de ce nombre en fonction du paramètre R.

3.2. Etude des valeurs propres

On a vu au chapitre précédent que les valeurs propres de $\tilde{A}'_R(u)$ coïncident avec celles de $A'_R(u)$, à ceci près que la valeur propre nulle est remplacée par une valeur propre strictement négative Λ (voir Chapitre 1, Section 6). Dans ce paragraphe, nous travaillerons pour simplifier avec l'opérateur A_R. Nous allons d'abord déterminer les valeurs propres de $A'_R(u_1)$, puis nous en déduirons celles de $\tilde{A}'_R(u_1)$.

Supposons que $F'(\theta^{\pm}) < 0$, de sorte que la condition 2' page 36 soit vérifiée. Supposons également qu'il existe une solution $\Theta(x_2)$ décroissante. En linéarisant le problème (2.15)-(2.19) autour de la solution $\theta = \Theta(x_2), \psi = \omega = 0$, on obtient le problème de valeurs

propres suivant :

$$D\Delta\theta + c\,\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + F'(\Theta(x_2))\theta + \Theta'(x_2)\,\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \lambda\theta \tag{3.3}$$

$$P\Delta\omega + c\,\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + PR\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \lambda\omega \tag{3.4}$$

$$\Delta\psi + \omega = \lambda\psi \tag{3.5}$$

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0,\ \psi = 0,\ \omega = 0. \tag{3.6}$$

Supposons que $l = \pi$. Alors on peut chercher une solution sous la forme

$$\theta(x) = \tilde{\theta}(x_2)\cos kx_1,\ \psi(x) = \tilde{\psi}(x_2)\sin kx_1,\ \omega(x) = \tilde{\omega}(x_2)\sin kx_1, \tag{3.7}$$

où k est un entier. On obtient

$$D\tilde{\theta}'' + c\,\tilde{\theta}' + (F'(\Theta(x_2)) - Dk^2)\tilde{\theta} + k\Theta'(x_2)\tilde{\psi} = \lambda\tilde{\theta} \tag{3.8}$$

$$P\tilde{\omega}'' + c\,\tilde{\omega}' - Pk^2\tilde{\omega} - PRk\tilde{\theta} = \lambda\tilde{\omega} \tag{3.9}$$

$$\tilde{\psi}'' - k^2\tilde{\psi} + \tilde{\omega} = \lambda\tilde{\psi}. \tag{3.10}$$

Pour $k = 0$, les valeurs propres sont indépendantes de R, et ont une partie réelle strictement négative, mis à part la valeur propre $\lambda = 0$.

Pour $k \neq 0$, le système peut s'écrire sous la forme :

$$au'' + bu' + c_k(x_2)u = \lambda u,$$

où a est une matrice diagonale constante, à coefficients diagonaux strictement positifs $a_1 = D, a_2 = P, a_3 = 1$, b est une martice diagonale constante à coefficients diagonaux positifs ou nuls $b_1 = b_2 = c, b_3 = 0$, et $c_k(x_2)$ est une matrice dont les coefficients en dehors de la diagonale sont

$$c_{13} = k\Theta'(x_2),\quad c_{21} = -PRk,\quad c_{32} = 1.$$

On a $\Theta'(x_2) < 0$ donc si $k < 0$, tous les coefficients non diagonaux sont positifs ou nuls. Dans ce cas, le système (3.8)-(3.10) est appelé système monotone, et sa valeur propre principale, notée dans la suite $\lambda_0(R, k)$ vérifie des propriétés spécifiques (voir par exemple [21]).

Pour $k < 0$ fixé, le spectre continu du problème (3.8)-(3.10) est situé dans le demi-plan gauche. Plus précisément, tous les points $\sigma \in \mathbb{C}$ de ce spectre continu vérifient :

$$Re\,\sigma \leqslant \min(F'(\Theta^{\pm}) - Dk^2, -Pk^2, -k^2) = m_k < 0.$$

Supposons que la partie réelle de $\lambda_0(R,k)$ soit strictement supérieure à la borne supérieure m_k du spectre continu. Alors $\lambda_0(R,k)$ est une valeur propre réelle, simple, la fonction propre correspondante est positive, et on a la représentation minimax

$$\begin{aligned}\lambda_0(R,k) &= \sup_{\rho}\inf_{i,x_2}\frac{a_i\rho_i^{''}+b_i\rho_i'+\sum_{j=1}^3 c_{ij}(x_2)\rho_j}{\rho_i}\\ &= \inf_{\rho}\sup_{i,x_2}\frac{a_i\rho_i^{''}+b_i\rho_i'+\sum_{j=1}^3 c_{ij}(x_2)\rho_j}{\rho_i},\end{aligned}$$

où $\rho=(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ est une fonction arbitraire à composantes positives, bornées, et de classe C^2.

Alors la valeur propre principale $\lambda_0(R,k)$ est une fonction croissante du paramètre R. Il existe une valeur critique $R=R_c(k)$ telle que

$$\lambda_0(R,k)<0,\ R<R_c(k),\quad \lambda_0(R,k)>0,\ R>R_c(k).$$

Ceci peut être démontré en estimant la valeur propre principale $\lambda_0(R,k)$ par les valeurs propres de problèmes à coefficients constants sur un intervalle borné.

Rappelons que cette étude de valeurs propres a pour objet le calcul de l'indice de la solution monodimensionnelle u_1, qui doit nous permettre de montrer l'existence d'un point de bifurcation R_c. On veut donc montrer l'existence d'une valeur R_c pour laquelle l'indice de u_1 pour l'opérateur $\tilde{A}_R$ change, c'est-à-dire que la parité du nombre de valeurs propres positives de $\tilde{A}_R'(u_1)$ change.

Nous avons vu que $A_R'(u_1)$ a toujours la valeur propre nulle, qui correspond à l'invariance par translation, et apparaît dans le système (3.8)-(3.10) lorsque $k=0$. La fonctionnalisation de la vitesse du front, expliquée au paragraphe 6.2, nous a permis de supprimer cette valeur propre nulle si elle est simple, ou de diminuer sa multiplicité, si c'est une valeur propre multiple.

Pour calculer l'indice de la solution monodimensionnnelle, nous devons considérer l'opérateur avec vitesse fonctionnalisée, $\tilde{A}_R$, donc il ne faut pas tenir compte de la valeur propre nulle de $A_R'(u_1)$ liée à l'invariance par translation, c'est-à-dire celle qui apparaît pour $k=0$. Par contre, si 0 est valeur propre d'un des problèmes (3.8)-(3.10) avec $k\neq 0$, elle doit être prise en compte. Ces considérations justifient les notations suivantes :

LEMME 3.2. –

– *Soit V_k l'ensemble des valeurs propres du problème (3.8)-(3.10), pour tout entier $k<0$ fixé, et soit V_0 l'ensemble des valeurs propres non nulles de (3.8)-(3.10) avec $k=0$. Posons*

$$V=\bigcup_{k\leqslant 0}V_k.$$

Alors

- *l'ensemble des valeurs propres de* $A'_R(u_1)$ *est* $V \cup \{0\}$,
- *l'ensemble des valeurs propres de* $\tilde{A}'_R(u_1)$ *est* $V \cup \{\Lambda\}$, *où* Λ *est définie à la page 33.*

– *Soit* $\lambda_0(R)$ *(respectivement* $\lambda_0(R,k)$*) la valeur propre principale à partie réelle maximale dans* V *(respectivement* V_k*, pour tout entier* $k \leqslant 0$*). Alors* $\lambda_0(R) = \max_{k<0} \lambda_0(R,k)$*, cette valeur propre est réelle, et a une fonction propre associée positive. Si* $\lambda_0(R)$ *est supérieure à* Λ*, alors c'est aussi la valeur propre principale de* $\tilde{A}'_R(u_1)$.

Remarque. – Nous avons montré au chapitre 1 que $\Lambda < 0$. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux valeurs de R telles que $\lambda_0(R)$ soit dans un voisinage de 0. Quitte à prendre un voisinage assez petit, on peut donc supposer que la condition $\lambda_0(R) > \Lambda$ est vérifiée.

Démonstration. –

Considérons une valeur propre λ du problème (3.3)-(3.6), et la fonction propre correspondante (θ, ω, ψ). On multiplie la première équation par $\cos kx_1$, les deux autres par $\sin kx_1$ et on intègre par rapport à x_1. Les fonctions

$$\tilde{\theta}_k(x_2) = \int_0^\pi \theta(x) \cos kx_1 dx_1,\ \tilde{\omega}_k(x_2) = \int_0^\pi \omega(x) \sin kx_1 dx_1,$$
$$\tilde{\psi}_k(x_2) = \int_0^\pi \psi(x) \sin kx_1 dx_1 \quad (3.11)$$

sont solutions du problème (3.8)-(3.10) et il existe au moins une valeur de k pour laquelle l'une des fonctions $\tilde{\theta}_k, \tilde{\omega}_k, \tilde{\psi}_k$ n'est pas identiquement nulle. En effet, pour tout x_2 fixé nous pouvons considérer ces fonctions comme coefficients de la série de Fourier. Si pour tout x_2 et tout k ces coefficients sont nuls, alors les fonctions $\theta(x), \omega(x), \psi(x)$ sont identiquement nulles. Ainsi $\lambda \in V_k$.

Réciproquement, si $\lambda \in V_k, k < 0$ et $(\tilde{\theta}, \tilde{\omega}, \tilde{\psi})$ est une fonction propre associée du problème (3.8)-(3.10) alors (3.7) est une fonction propre du problème (3.3)-(3.6) pour la valeur propre λ. Ceci est valable aussi pour $\lambda \in V_O$ car toute fonction propre associée est de la forme $(\theta, 0, 0)$ où $\theta \not\equiv 0$. Le premier point est démontré. Le second point en découle directement grâce aux propriétés des problèmes monotones [21].

Considérons les nombres $R_c(k)$, pour tout entier strictement négatif k. Si nous montrons que cette famille admet un élément minimal $R_c(k_0)$, alors nous saurons que la valeur propre princpale $\lambda_0(R)$ du problème (3.3)-(3.6) est nulle pour $R = R_c(k_0)$ et devient positive si $R > R_c(k_0)$. Si ce k_0 où le minimum est atteint est unique, c'est-à-dire si

$$\min_{k \neq k_0} R_c(k) = R_c(k_1) > R_c(k_0),$$

alors pour $R_c(k_0) < R < R_c(k_1)$, le problème (3.3)-(3.6) aura une seule valeur propre positive, et on a montré qu'elle est simple, donc l'indice de u_1 sera égal à -1. Cet argument permet donc de conclure que $R_c(k_0)$ est un point de bifurcation, au sens énoncé dans le théorème 7.1.

Il reste donc à démontrer que la suite $R_c(k), k \in \mathbb{Z}^-$ est minorée. Ce résultat découle d'estimations a priori sur les valeurs propres $\lambda_0(R,k)$. Nous le démontrerons dans la section 4 (voir corollaire 4.5). □

4. Stabilité de la solution monodimensionnelle

Remarquons que le signe de la valeur propre principale du problème (3.3)-(3.6) ne nous permet pas de tirer de conclusion directe sur la stabilité de la solution monodimensionnelle par rapport au problème d'évolution

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = D\Delta\theta - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \left(c + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + F(\theta) \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = P\Delta\omega - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + \left(c + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + PR\frac{\partial\theta}{\partial x_1} \tag{4.2}$$

$$0 = \Delta\psi + \omega \tag{4.3}$$

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0,\ \psi = 0,\ \omega = 0, \tag{4.4}$$

que l'on obtient en introduisant la fonction de courant et la fonction tourbillon dans le problème parabolique habituel en formulation vitesse, pression. En effet, le problème de valeurs porpres associé à ce système est

$$D\Delta\theta + c\,\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + F'(\Theta(x_2))\theta + \Theta'(x_2)\,\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \lambda\theta \tag{4.5}$$

$$P\Delta\omega + c\,\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + PR\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \lambda\omega \tag{4.6}$$

$$\Delta\psi + \omega = 0 \tag{4.7}$$

$$x_1 = 0, l : \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0,\ \psi = 0,\ \omega = 0. \tag{4.8}$$

Ce problème diffère de (3.3)-(3.6) par la dernière équation (4.7), qui ne contient pas de terme $\lambda\psi$ dans le second membre. Il peut s'écrire sous la forme

$$A'_R(u_1)u = \lambda Cu,$$

où la matrice C est donnée par : $C = diag(1,1,0)$. Dans la suite nous dirons qu'un nombre complexe λ est valeur propre du problème (4.5)-(4.8), ou encore une "C-valeur

propre" de l'opérateur linéarisé $A'_R(u_1)$, si ce problème a une solution non-nulle. Comme précédemment, ces valeurs propres s'obtiennent comme valeurs propres des problèmes

$$\begin{aligned} D\tilde{\theta}'' + c\,\tilde{\theta}' + (F'(\Theta(x_2)) - Dk^2)\tilde{\theta} + k\Theta'(x_2)\tilde{\psi} &= \lambda\tilde{\theta} && (4.9)\\ P\tilde{\omega}'' + c\,\tilde{\omega}' - Pk^2\tilde{\omega} - PRk\tilde{\theta} &= \lambda\tilde{\omega} && (4.10)\\ \tilde{\psi}'' - k^2\tilde{\psi} + \tilde{\omega} &= 0 && (4.11) \end{aligned}$$

pour $k \in \mathbb{Z}$.

Nous allons étudier les valeurs propres principales des problèmes (4.5)-(4.8) et (4.9)-(4.11). Auparavant nous montrons le lemme suivant :

LEMME 4.1. – *Il existe une fonction continue, croissante, et à valeurs positives $M(R)$, indépendante de l'entier $k < 0$, telle que pour $Re\ \lambda > M(R)$ les problèmes (4.9)-(4.11) n'ont pas de solution non nulle.*

Démonstration. – Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ à partie réelle positive, telle que le problème (4.9)-(4.11) ait une solution complexe non nulle (θ, ω, ψ). (Pour simplifier, on omet les tildes). Posons

$$M_1 = \sup_{x_2 \in R} |F'(\Theta(x_2))|, \quad M_2 = \sup_{x_2 \in R} |\Theta'(x_2)|.$$

On multiplie (4.9) par $\bar{\theta}$, (4.10) par $\bar{\omega}$ et (4.11) par $\bar{\psi}$ et on intègre par rapport à $x_2 \in \mathbb{R}$. Ici, les barres représentent les fonctions complexes conjuguées. En utilisant les limites à l'infini

$$\theta(x),\ \omega(x),\ \psi(x),\ \theta'(x),\ \omega'(x),\ \psi'(x) \longrightarrow 0, \qquad \text{quand } x_2 \to \pm\infty$$

et en prenant la partie réelle de la somme de ces équations intégrées, on obtient

$$\begin{aligned} \int F'(\Theta)|\theta|^2 + k\int Re\,(\Theta'\psi\bar{\theta}) - PRk\int Re(\theta\bar{\omega}) + \int Re(\omega\bar{\psi}) \\ = (Re\ \lambda + Dk^2)\int |\theta|^2 + D\int |\theta'|^2 \\ + (Re\ \lambda + Pk^2)\int |\omega|^2 + P\int |\omega'|^2 + k^2\int |\psi|^2 + \int |\psi|'^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int F'(\Theta)|\theta|^2 + k\int Re\,(\Theta'\psi\bar{\theta}) - PRk\int Re(\theta\bar{\omega}) + \int Re(\omega\bar{\psi}) \\ \geqslant (Re\ \lambda + Pk^2)\int |\omega|^2 + (Re\ \lambda + Dk^2)\int |\theta|^2 + k^2\int |\psi|^2. \end{aligned}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, les intégrales du membre de gauche peuvent être estimées par

$$\left|\int F'(\Theta)|\theta|^2\right| \leqslant M_1 \int |\theta|^2,$$

$$\left|\int Re(\Theta'\psi\bar{\theta})\right| \leqslant M_2 \int \left|\psi\bar{\theta}\right| \leqslant M_2 \left(\epsilon \int |\psi|^2 + \frac{1}{4\epsilon}\int |\theta|^2\right),$$

$$\left|\int Re\,(\omega\bar{\theta})\right| \leqslant \epsilon \int |\omega|^2 + \frac{1}{4\epsilon}\int |\theta|^2, \quad \left|\int Re\,(\psi\bar{\omega})\right| \leqslant \epsilon \int |\psi|^2 + \frac{1}{4\epsilon}\int |\omega|^2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(k^2 - \epsilon\,(1 - kM_2)) \int |\psi|^2 \leqslant \left(M_1 - \frac{kM_2}{4\epsilon} - \frac{PRk}{4\epsilon} - Dk^2 - Re\,\lambda\right) \int |\theta|^2 \\ + \left(\frac{1}{4\epsilon} - PRk\epsilon - Pk^2 - Re\,\lambda\right) \int |\omega|^2.\end{aligned}$$

Choisissons ϵ tel que $0 < \epsilon(1 - kM_2) < k^2$. Il peut être choisi indépendamment de $k < 0$. Puisque (θ, ω, ψ) est non nul et $k < 0$, on obtient que

$$Re\,\lambda \leqslant M(R,k) := \max\left(\frac{1}{4\epsilon} - PRk\epsilon - Pk^2, M_1 - \frac{kM_2}{4\epsilon} - \frac{PRk}{4\epsilon} - Dk^2\right).$$

Les deux expressions sont majorées par rapport à $k < 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Le lemme est démontré. □

En vertu de ce lemme, nous pouvons définir $\lambda_C(R,k)$, valeur propre à partie réelle maximale pour le problème (4.9)-(4.11) et $\lambda_C(R)$ valeur propre à partie réelle maximale parmi les $\lambda_C(R,k)$. Une différence essentielle par rapport au cas de la Section 3 est qu'ici, nous ne savons pas si ces valeurs propres sont réelles. Par contre, nous allons les comparer à celles de la Section 3, lorsque c'est possible. Les lemmes qui suivent donnent quelques résultats sur les valeurs propres de (4.9)-(4.11), en distinguant plusieurs cas selon le signe de $\lambda_0(R,k)$.

LEMME 4.2. – *Si $\lambda_0(R,k) < 0$, alors pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, le problème (4.9)-(4.11) n'a pas de solution non nulle.*

Démonstration. – Supposons que le problème (4.9)-(4.11) ait une solution non nulle pour un $\lambda \geqslant 0$. Alors $\sigma = 0$ est une valeur propre du problème monotone

$$\begin{aligned} D\tilde{\theta}'' + c\,\tilde{\theta}' + (F'(\Theta(x_2)) - Dk^2)\tilde{\theta} + k\Theta'(x_2)\tilde{\psi} - \lambda\tilde{\theta} &= \sigma\tilde{\theta} \\ P\tilde{\omega}'' + c\,\tilde{\omega}' - Pk^2\tilde{\omega} - PRk\tilde{\theta} - \lambda\tilde{\omega} &= \sigma\tilde{\omega} \\ \tilde{\psi}'' - k^2\tilde{\psi} + \tilde{\omega} &= \sigma\tilde{\psi} \end{aligned}$$

et sa valeur propre principale $\sigma_0(\lambda)$ est donc positive ou nulle. Comme $\lambda \geqslant 0$ le spectre continu de ce problème est dans le demi-plan gauche, et les résultats sur les systèmes monotones peuvent s'appliquer. Ainsi, $\sigma_0(0) \geqslant \sigma_0(\lambda) \geqslant 0$. Mais par ailleurs on sait que $\sigma_0(0) = \lambda_0(R,k) < 0$. Cette contradiction démontre le lemme. □

LEMME 4.3. – *Si $\lambda_0(R,k) = 0$, alors $\lambda_C(R,k) = 0$.*

Démonstration. – Les problèmes (3.8)-(3.10) et (4.9)-(4.11) coïncident si $\lambda = 0$. La solution du problème (3.8)-(3.10) est positive. Ainsi il existe une solution positive de (4.9)-(4.11) avec $\lambda = 0$. Il en résulte que toutes les autres valeurs propres du problème (4.9)-(4.11) ont une partie réelle négative [20]. Le lemme est prouvé. □

LEMME 4.4. – *On a les résultats suivants :*
(i) Si $\lambda_0(R) = 0$, alors $\lambda_C(R) = 0$;
(ii) Si $\lambda_0(R) > 0$, alors $\lambda_C(R) > 0$;

Démonstration. –
Commençons par prouver l'affirmation (i). Supposons que $\lambda_0(R) = 0$. Alors d'après le lemme 3.2, pour tout $k < 0$, $\lambda_0(R,k) \leqslant 0$ et $\lambda_0(R,k_0) = 0$ pour un certain k_0. En vertu du lemme 4.3, $\lambda_C(R,k_0) = 0$, donc $\lambda_C(R)$ est positif ou nul. De plus, il existe k_1 tel que $\lambda_C(R) = \lambda_C(R,k_1) \geqslant 0$. En vertu du lemme 4.2, $\lambda_0(R,k_1)$ ne peut pas être strictement négatif, donc $\lambda_0(R,k_1) = 0$. En appliquant une fois de plus le lemme 4.3, on obtient $\lambda_C(R,k_1) = \lambda_C(R) = 0$.

Prouvons maintenant (ii). Soit $k < 0$ tel que $\lambda_0(R,k) > 0$. On pose $R^* = R_c(k)$. Alors $\lambda_0(R^*,k) = 0$, donc $\lambda_C(R^*,k) = 0$. On veut démontrer que $\lambda_C(R,k) > 0$.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et considérons le problème

$$\begin{aligned} D\theta'' + c\,\theta' + (F'(\Theta(y)) - Dk^2)\theta + k\Theta'(y)\psi &= \lambda\theta \\ P\omega'' + c\,\omega' - Pk^2\omega - PRk\theta &= \lambda\omega \\ \psi'' - k^2\psi + \omega + \mu\psi &= \lambda\psi. \end{aligned}$$

Notons $\lambda_R(\mu)$ sa valeur propre principale. Alors λ_R est une fonction croissante et continue de R et μ, et on a $\lambda_{R^*}(0) = 0$.

Etape 1 : Montrons que pour $\mu > 0$, $\lambda_{R^*}(\mu) < \mu$. Supposons le contraire. Alors il existe $\mu > 0$ tel que $\lambda_{R^*}(\mu) \geqslant \mu$. Par définition de $\lambda_{R^*}(\mu)$, il existe une solution non nulle au problème

$$\begin{aligned} D\theta'' + c\,\theta' + (F'(\Theta(x_2)) - Dk^2)\theta + k\Theta'(x_2)\psi - \lambda_{R^*}(\mu)\theta &= 0 \\ P\omega'' + c\,\omega' - Pk^2\omega - PR^*k\theta - \lambda_{R^*}(\mu)\omega &= 0 \\ \psi'' - k^2\psi + \omega + (\mu - \lambda_{R^*}(\mu))\psi &= 0. \end{aligned}$$

Mais zéro est la valeur propre principale du problème

$$\begin{aligned} D\theta'' + c\,\theta' + (F'(\Theta(x_2)) - Dk^2)\theta + k\Theta'(x_2)\psi &= 0 \\ P\omega'' + c\,\omega' - Pk^2\omega - PR^*k\theta &= 0 \\ \psi'' - k^2\psi + \omega &= 0. \end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que la valeur propre principale est une fonction croissante des coefficients non diagonaux. Remarquons que ce résultat est applicable ici, car pour tout $\mu \geqslant 0$, la condition $\lambda_R(\mu) > 0$ assure que le spectre continu se trouve dans le demi-plan gauche.

Etape 2 : Par continuité, on déduit de l'étape 1 que pour $R > R^*$, avec $R - R^*$ suffisamment petit, $\lambda_R(0) > 0$, $\lambda_R(\mu) < \mu$ pour μ suffisamment grand. Or $\lambda_R(\mu)$ est une fonction continue de μ donc l'équation $\lambda_R(\mu) = \mu, \mu > 0$ a une solution. Montrons que ceci reste vrai pour tout $R > R^*$. Supposons que ce n'est pas le cas, et posons

$$R_0 = \inf\{R > R^*, \forall \mu > 0, \lambda_R(\mu) \neq \mu\}.$$

Si $R < R_0$ il existe $\mu > 0$ tel que $\lambda_R(\mu) = \mu$. Alors μ est valeur propre de (4.9)-(4.11). Donc $\mu \leqslant M(R) \leqslant M(R_0)$, où $M(R)$ est comme au lemme 4.1. Ainsi pour $\mu > M(R_0)$ et $R < R_0$ on a $\lambda_R(\mu) \neq \mu$. Comme à l'étape 1 on montre que $\lambda_R(\mu) < \mu$.

Fixons $\mu_0 > M(R_0)$ et passons à la limite dans l'inégalité précédente lorsque R tend vers R_0 par valeurs inférieures. On obtient : $\lambda_{R_0}(\mu_0) \leqslant \mu_0$. Par ailleurs il existe une suite décroissante (R_n) de limite R_0 telle que les équations $\lambda_{R_n}(\mu) = \mu$ n'aient pas de solution positive. Comme $\lambda_{R_n}(0) > \lambda_{R^*}(0) = 0$ on a $\lambda_{R_n}(\mu) > \mu$ pour tout $\mu > 0$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient $\lambda_{R_0}(\mu) \geqslant \mu$. Ainsi $\lambda_{R_0}(\mu_0) = \mu_0$, et μ_0 est valeur propre de (4.9)-(4.11). Mais ceci contredit le fait que $\mu_0 > M(R_0)$. On a montré que pour tout $R > R^*$ l'équation $\lambda_R(\mu) = \mu$ a une solution positive μ (voir Figure 2.3).

Cette solution est valeur propre du problème (4.9)-(4.11) et la fonction propre associée est positive. En effet, elle correspond à la valeur propre principale du problème

$$\begin{aligned} D\theta'' + c\,\theta' + (F'(\Theta(y)) - Dk^2)\theta + k\Theta'(y)\psi &= \lambda_R(\mu)\theta \\ P\omega'' + c\,\omega' - Pk^2\omega - PRk\theta &= \lambda_R(\mu)\omega \\ \psi'' - k^2\psi + \omega + \mu\psi &= \lambda_R(\mu)\psi. \end{aligned}$$

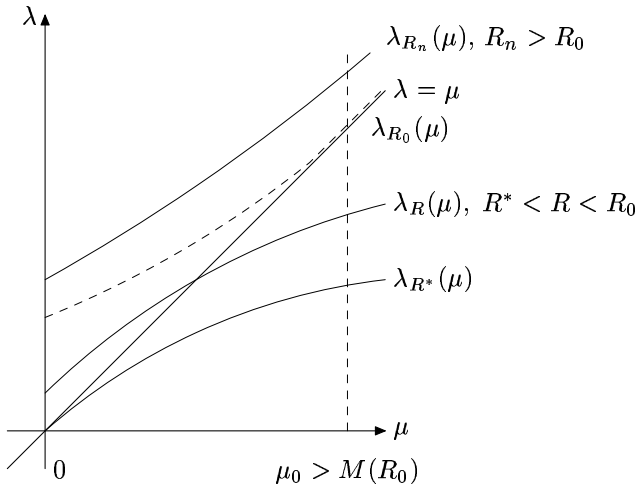


FIG. 2.3 – Résolution graphique de $\lambda_R(\mu) = \mu$

Ainsi μ est la valeur propre principale du problème (4.9)-(4.11).

On a donc prouvé que $\lambda_C(R,k) > 0$. Ainsi $\lambda_C(R) \geqslant \lambda_C(R,k) > 0$, et (ii) est démontré. □

COROLLAIRE 4.5. – *Il existe k_0 tel que $R_c(k_0)$ est la valeur minimale des $R_c(k)$, pour $k = -1, -2, ...$*

Démonstration. – Remarquons d'abord que pour tout $k < 0$, $R_c(k) \geqslant 0$. En effet pour $R = 0$ le problème (3.8)-(3.10) n'a pas de valeur propre positive ou nulle. Montrons maintenant que $R_c(k) \to +\infty$ quand $k \to -\infty$. Cela revient à montrer que pour R fixé, et pour $|k|$ assez grand, $\lambda_0(R,k)$ est négatif. L'estimation du lemme 4.1 montre que $Re\ \lambda_C(R,k) < 0$. Mais nous venons de montrer que si $\lambda_0(R,k)$ était positif ou nul, alors $\lambda_C(R,k)$ le serait aussi. Le corollaire est démontré. Ce corollaire est justement le résultat qui nous manquait pour conclure la preuve du théorème 3.1 (bifurcations). □

THÉORÈME 4.6. – *$\lambda_C(R) = 0$ si et seulement si $\lambda_0(R) = 0$, et $\lambda_C(R) > 0$ si et seulement si $\lambda_0(R) > 0$.*

Démonstration. – Il est clair que si $\lambda_C(R) = 0$ alors $\lambda_0(R) \geqslant 0$. En effet si $\lambda_C(R,k_1) = 0$ alors le problème (4.9)-(4.11) a une solution pour $k = k_1$ et $\lambda = 0$. Mais ce problème coïncide avec (3.8)-(3.10). Ainsi

$$\lambda_0(R) \geqslant \lambda_0(R,k_1) \geqslant 0.$$

Grâce au lemme 4.4, ceci prouve la première équivalence. Il reste à montrer que si

$\lambda_C(R) > 0$ alors $\lambda_0(R) > 0$, ce qui découle des lemmes 4.2 et 4.4. Le théorème est démontré. □

Remarque. – Soit $R_c(k_0)$ le minimum des $R_c(k)$, pour $k = -1, -2, ...$ Pour cette valeur de R la valeur propre principale du problème (3.3)-(3.6) vaut zéro. Sous l'hypothèse (H_2), i.e. si $R_c(k) \neq R_c(k_0)$ pour $k \neq k_0$ alors c'est un point de bifurcation et des ondes progressives convectives existent pour un certain R dans tout voisinage de $R_c(k_0)$. Si la valeur propre principale du problème (4.5)-(4.8) est réelle au voisinage de $R_c(k_0)$, alors la solution $\theta = \Theta, \omega = \psi = 0$ est stable pour $R < R_c(k_0)$ et instable pour $R > R_c(k_0)$.

Sans la condition que $\lambda_C(R)$ est réel au voisinage de $R_c(k_0)$, on peut seulement affirmer le résultat suivant : si $R < R_c(k_0)$, alors la valeur propre réelle maximale de (4.5)-(4.8) est négative. Toutefois, nous n'avons pas montré qu'il n'y avait pas de couple de valeurs propres complexes non réelles, à partie réelle positive. Nous ne savons donc pas si une instabilité de type "oscillatoire" peut exister. Lorsque $R > R_c(k_0)$, la valeur propre réelle maximale devient positive donc la solution est instable.

5. Stabilité des solutions convectives

Nous venons d'analyser le spectre de l'opérateur linéarisé autour de la solution monodimensionnelle, et nous avons démontré qu'elle est instable lorsque $R > R_c(k_0)$. Les mêmes arguments permettent d'étudier d'éventuelles instabilités des solutions convectives. Dans toute cette section nous supposons que les conditions du Théorème 3.1 page 52 sont satisfaites.

Par commodité, nous introduisons les notations suivantes :

- $R_c = R_c(k_0)$;
- $A_R : E_1 \times \mathbb{R} \to E_2$ est l'opérateur correspondant au problème (2.15)-(2.17) ;
- $(u_1, c_1) \in E_1 \times \mathbb{R}$ est la solution monodimensionnelle, $A_R(u_1, c_1) = 0, \ \forall R$;
- $(u_2, c_2) \in E_1 \times \mathbb{R}$ est une solution bidimensionnelle dans un voisinage de (u_1, c_1), telle que $A_R(u_2, c_2) = 0$ pour un certain R voisin de R_c.
- $L_R^1 = A'_R(u_1, c_1)$, $L_R^2 = A'_R(u_2, c_2)$, où le prime désigne la dérivation par rapport à la variable $u \in E_1$;
- C est la matrice $C = diag(1, 1, 0)$, et $P_3 = I_3 - C$.

Nous noterons également $\lambda_0(L_R^i)$, $i = 1, 2$, la valeur propre principale de $L_R^i u = \lambda u$, que nous désignerons sous le nom de problème de valeurs propres classique, et $\lambda_C(L_R^i)$ la valeur propre principale de $L_R^i u = \lambda C u$. Nous appellerons ce dernier problème le problème de "C-valeurs propres" pour L_R^i.

5.1. Le problème de valeurs propres classique

Les résultats concernant le spectre des opérateurs L_R^2 sont basés sur deux remarques.

Premièrement, la propriété de Fredholm permet d'affirmer que si deux solutions u_1 et u_2 sont proches, alors les valeurs propres des opérateurs linéarisés sont aussi proches, dans un sens qui sera précisé plus bas. Nous avons montré au Chapitre 1 la propriété de Fredholm, pour les espaces E_1 et E_2 (voir Théorème 3.1, page 22). Remarquons que la preuve de ce théorème n'utilise pas la forme du poids μ, et qu'il reste valable dans les espaces de Hölder sans poids E_1^0 et E_2^0. Par commodité, nous travaillerons avec ces espaces sans poids pour établir les résultats qui ne nécessitent pas le degré topologique, mais uniquement la propriété de Fredholm.

La deuxième remarque repose sur l'invariance par homotopie du degré. Nous avons établi à la Section 3 l'existence de solutions convectives u_2 proches de u_1, pour des nombres de Rayleigh proches de la valeur critique R_c. Par l'argument ci-dessus, les valeurs propres du linéarisé L_R^2 sont proches de celles de $L_{R_c}^1$. Or ce dernier possède une valeur propre nulle. Pour étudier la stabilité de l'onde u_2, il faut préciser la position par rapport à l'axe des ordonnées de la valeur propre de L_R^2 correspondante.

Justement, le degré topologique donne des informations sur l'indice des solutions bidimensionnelles, et donc sur le nombre de valeurs propres positives du problème linéarisé. Il permet ainsi de préciser le signe de la valeur propre voisine de zéro.

Notons que, pour utiliser le degré, il faut cette fois travailler dans les espaces pondérés E_1 et E_2. Par ailleurs, comme dans la section 3, la méthode du degré topologique nécessite de fonctionnaliser la vitesse c. Dans le cas de l'onde monodimensionnelle nous avons montré que la fonctionnalisation ne change pas les valeurs propres de l'opérateur linéarisé, sauf la valeur propre nulle qui est remplacée par une valeur propre

$$\Lambda = \left\langle c'(w_1), \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right\rangle < 0, \quad \text{où } w_1 = u_1 + \phi.$$

Il en est de même pour la solution bidimensionnelle, à ceci près que la nouvelle valeur propre

$$\left\langle c'(w_2), \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right\rangle$$

peut être nulle si l'onde w_2 n'est pas monotone par rapport à x_2. Cependant, on remarque que, par continuité, cette valeur propre est strictement négative pour $\|u_1 - u_2\|_{E_1}$ suffisamment petit. Ainsi, pour étudier l'existence de valeurs propres avec une partie réelle positive ou nulle, il suffit d'étudier le spectre des opérateurs sans fonctionnalisation. C'est ce que nous faisons ici.

Reformulons d'abord le résultat qui a été prouvé dans la section 3, concernant les bifurcations locales :

LEMME 5.1. – *Pour tout $\eta > 0$ il existe $R > 0$, $|R - R_c| < \eta$ tel que l'équation $A_R(u, c) = 0$ ait une solution (u_2, c_2), avec $u_2 \neq u_1$, $|c_2 - c_1| < \eta$ et $\|u_1 - u_2\|_{E_1} < \eta$.*

Pour étudier la stabilité des solutions issues de cette bifurcation, il nous faut déterminer le signe des valeurs propres de L^2_R. Nous allons les comparer avec les valeurs propres de $L^1_{R_c}$, grâce aux propriétés des opérateurs de Fredholm [7]. Il faut pour cela que l'espace de départ et l'espace d'arrivée soient identiques. Dans la suite nous considérons donc les opérateurs L^1_R et L^2_R agissant de C^α dans lui-même, avec pour domaine E^0_1. Dans tout ce paragraphe nous utilisons la notation $\|.\|$ au lieu de $\|.\|_{C^\alpha}$. Notons que la propriété de Fredholm est conservée lorsque les opérateurs agissent de C^α dans lui-même. Remarquons par contre que dans ces espaces, les opérateurs L^1_R et L^2_R ne sont plus bornés. Ainsi, pour comparer leurs valeurs propres il nous faut prouver l'estimation suivante :

LEMME 5.2. – *Pour tout $k > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout R, $|R - R_c| < \eta$, pour tout $u_2 \in E^0_1$, $\|u_1 - u_2\|_{C^2} < \eta$, et pour tout $u \in E^0_1$, $u \neq 0$, on ait :*

$$\|L^1_{R_c} u - L^2_R u\| < k \left(\|u\| + \|L^1_{R_c} u\|\right).$$

Remarque. – Les normes utilisées ici ne sont pas les mêmes que dans le lemme précédent. Cependant, le poids μ étant toujours supérieur ou égal à 1, on a l'inégalité

$$\|u_1 - u_2\|_{C^2} \leqslant \|u_1 - u_2\|_{E_1}.$$

Les conditions du lemme 5.2 seront donc bien vérifiées par les solutions données dans le lemme 5.1.

Démonstration. –
L'expression à majorer est de la forme

$$L^1_{R_c} u - L^2_R u = b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + (b_2 + c_1 - c_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + eu,$$

où c_1 et c_2 sont des scalaires (vitesses associées aux ondes u_1 et u_2), et où b_1, b_2 et e sont des matrices telles que

$$\|b_i\| \leqslant \|\nabla u_1 - \nabla u_2\| + P|R - R_c|, \ i = 1, 2, \quad \|e\| \leqslant \|F'(u_1) - F'(u_2)\|.$$

Supposons que $\|u_1 - u_2\|_{C^2} < \eta$. Alors on a $\|\nabla u_1 - \nabla u_2\| < 3\eta$. De plus, comme $F \in C^2$ il existe une constante $K > 0$ telle que $\|F'(u_1) - F'(u_2)\| < K\eta$. Si de plus $|R - R_c| < \eta$ et $|c_2 - c_1| < \eta$ alors

$$\|L^1_{R_c}(u) - L^2_R(u)\| < K_1 \eta \, (\|u\| + \|\nabla u\|).$$

Grâce à l'estimation de Schauder,

$$\|\nabla u\| \leqslant \|u\|_{E_1^0} \leqslant M(\|L^1_{R_c}u\| + \|u\|).$$

On obtient finalement

$$\|L^1_{R_c}u - L^2_R u\| < K_2\eta\ (\|u\| + \|\ L^1_{R_c}u\|).$$

Le lemme est démontré. □

Remarquons que, grâce à la continuité de la fonctionnelle c du chapitre 1, la condition $|c_2 - c_1| < \eta$ sera automatiquement vérifiée pour $c_i = c(u_i + \phi)$ dès que $\|u_1 - u_2\|_{E_1}$ est suffisamment petite. Dans la suite, pour simplifier la présentation, nous ne prendrons pas explicitement en compte la variation de la vitesse du front c. Les résultats énoncés restent valables.

LEMME 5.3. – *Soit $\epsilon > 0$ tel que tout nombre complexe λ, avec $0 < |\lambda| \leqslant \epsilon$, soit un point régulier pour $L^1_{R_c}$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour*

$$|R - R_c| < \eta, \quad \|u_1 - u_2\|_{C^2} < \eta,$$

l'opérateur L^2_R a exactement une valeur propre simple $\lambda_0 \in B(0,\epsilon)$, et tous les autres points de $\bar{\mathcal{D}} \cup \bar{B}(0,\epsilon)$ sont réguliers pour L^2_R, où

$$\mathcal{D} = \{\lambda \in \mathbb{C}, Re\ \lambda > 0, |\lambda| > \epsilon\}.$$

Démonstration. –
La preuve consiste en trois étapes :

1. L^2_R a une valeur propre simple dans la boule ouverte, et tous les autres points de la boule fermée sont réguliers ;
2. L^2_R n'a que des points réguliers en dehors d'un secteur angulaire $C_{M,\beta}$, représenté sur la Figure 2.4 ;
3. L^2_R n'a que des points réguliers dans $\bar{C}_{M,\beta} \cap \bar{\mathcal{D}}$ (voir Figure 2.4).

Etape 1. Elle est basée sur une remarque de [7] : la somme des multiplicités des valeurs propres à l'intérieur d'un contour donné est préservée si on modifie peu l'opérateur. Plus précisément, il existe une constante positive k_1 telle que pour tout opérateur $A : E_2^0 \to E_2^0$ vérifiant l'estimation

$$\|Au\| < k_1(\|u\| + \|L^1_{R_c}u\|),\ \forall u \in E_1^0, u \neq 0,$$

$L^1_{R_c} + A$ a une seule valeur propre simple dans la boule $B(0, \epsilon)$, et tous les autres points de la boule fermée sont réguliers. Le lemme 5.2 complète la preuve de cette première étape.

Etape 2. Pour tout $\beta \in (0, \pi/2)$ on peut trouver un réel positif M dépendant seulement de Ω, β, des coefficients principaux de L^2_R et des conditions aux limites, tels que les points situés à l'extérieur de l'angle $C_{M,\beta}$ soient réguliers. Notons que M ne dépend ni de R ni de u_2.

Etape 3. Elle est indentique à l'étape 1, mais ici on considère le contour délimitant la région $C_{M,\beta} \cap \mathcal{D}$ (voir Figure 2.4), où $L^1_{R_c}$ n'a que des points réguliers. □

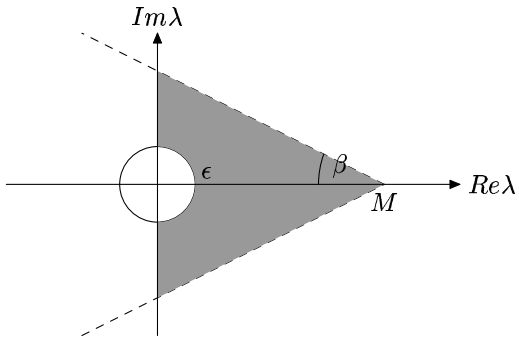


FIG. 2.4 – Les domaines introduits dans la preuve du lemme 5.3. L'angle $C_{M,\beta}$ est situé entre les demi-droites en pointillé. La région $C_{M,\beta} \cap \mathcal{D}$ considérée dans l'étape 3 est grisée.

Le lemme est démontré. On obtient aisément le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5.4. – *Si ϵ, η, u_2 et R sont comme au lemme 5.3, alors L^2_R a au plus une valeur propre à partie réelle positive ou nulle. De plus, cette valeur propre est réelle.*

En effet, si elle n'était pas réelle, alors sa conjuguée serait aussi valeur propre, ce qui contredit l'unicité. □

Avec ce corollaire, on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 5.5. – *Si des solutions convectives existent uniquement pour $R > R_c$ (bifurcation surcritique), alors parmi elles il y a des solutions u_2 pour lesquelles $\lambda_0(L^2_R) \leqslant 0$, pour R suffisamment proche de R_c (voir fig. 1b).*

Si des solutions convectives existent uniquement pour $R < R_c$ (bifurcation sous-critique), alors parmi elles il y a des solutions u_2 pour lesquelles $\lambda_0(L^2_R) \geqslant 0$, pour R suffisamment proche de R_c (voir fig. 1a).

Remarque. – Pour prouver ce théorème, on utilise le degré topologique. On travaillera donc dans cette démonstration avec les espaces pondérés E_1 et E_2.

Démonstration. –
Considérons le premier cas. La preuve du second cas est similaire. Supposons qu'il n'y ait pas de solution convective pour $R \leqslant R_c$. Soient ϵ et η comme au Lemme 5.3, et soit V la boule de centre u_1 et de rayon η dans E_1. Alors A_{R_c} n'a pas de zéro sur la frontière de V. L'homotopie A étant propre et continue, on va montrer qu'on peut choisir $R_0 \in (R_c - \eta, R_c)$, $R_1 \in (R_c, R_c + \eta)$ tels que

$$\forall R \in [R_0, R_1],\ \forall u \in \partial V,\ \|A_R(u)\| \neq 0. \tag{5.1}$$

En effet, supposons le contraire. Alors pour tout entier n suffisamment grand,

$$\exists R_n \in \left[R_c - \frac{1}{n}, R_c + \frac{1}{n}\right], \exists u_n \in \partial V, A_{R_n}(u_n) = 0.$$

La suite (R_n, u_n) prend ses valeurs dans le compact $A^{-1}(0) \cap ([R_c - 1, R_c + 1] \times \partial V)$. On peut donc choisir une sous-suite convergente, de limite (R_c, u), $u \in \partial V$. A étant continu par rapport à R et u, on trouve que $A_{R_c}(u) = 0$, $u \in \partial V$, ce qui contredit l'hypothèse.

Grâce à (5.1), on peut appliquer l'invariance par homotopie du degré sur V, et on a :

$$\gamma(A_{R_0}, V) = \gamma(A_{R_1}, V). \tag{5.2}$$

(Ici, γ désigne le degré topologique construit au chapitre 1 pour les opérateurs avec vitesse fonctionnalisée.) Rappelons que la bifurcation est supposée surcritique. Ainsi, pour $R = R_0$ la seule solution est l'onde monodimensionnelle et son indice est égal à 1. Donc $\gamma(A_{R_0}, V) = 1$.

D'autre part, supposons que toutes les solutions convectives u_2 soient telles que $\lambda_0(L_R^2) > 0$. Alors grâce au corollaire 5.4, la valeur propre positive est simple, et toutes les autres valeurs propres de L_R^2 ont une partie réelle négative. Ainsi l'indice de chaque solution convective u_2 vaut -1, et $\gamma(A_{R_1}, V) \leqslant -1$, ce qui contredit l'égalité (5.2). Remarquons que les indices peuvent être utilisés car aucune des solutions possibles ne possède la valeur propre zéro pour l'opérateur linéarisé correspondant. Cette contradiction démontre le théorème. □

Remarques. –

1. Comme il est dit dans la section 2, ce résultat n'est pas exhaustif. D'autres situations sont possibles, par exemple celle de la Figure 2.2 (c), où

$$\gamma(A_{R_0}, V) = \gamma(A_{R_1}, V) = 0.$$

2. Comme à la section 4, la question de la stabilité d'une solution bidimensionnelle u_2 par rapport au problème d'évolution (4.1)-(4.4) conduit au problème de C-valeurs propres :
$$L_R^2 u = \lambda C u. \tag{5.3}$$
Nous allons donc maintenant comparer ces C-valeurs propres aux valeurs propres classiques.

5.2. Le problème de C-valeurs propres

Comme pour la stabilité de la solution monodimensionnelle nous introduisons le problème auxiliaire
$$L_R^2 u + \mu P_3 u = \lambda u, \tag{5.4}$$
où $P_3 = I_3 - C$ est la matrice de projection sur la troisième coordonnée, et μ est un paramètre réel. Rappelons que I_3 est la matrice identité. Pour $\mu = \lambda$ les deux problèmes (5.3) et (5.4) sont équivalents.

LEMME 5.6. – *Il existe une constante $\eta > 0$ telle que si $|R - R_c| < \eta$, $\|u_2 - u_1\|_{C^2} < \eta$, et si $\lambda_0(L_R^2) \geqslant 0$ alors $\lambda_C(L_R^2) \geqslant 0$.*

Démonstration. –

Supposons que le problème $L_R^2 u = \lambda u$ ait une valeur propre à partie réelle positive ou nulle. Alors par le corollaire 5.4, elle est réelle. De plus, elle est aussi valeur propre du problème (5.4) avec $\mu = 0$. En d'autres termes, $\lambda_R^2(0) \geqslant 0$, où $\lambda_R^2(\mu)$ est la valeur propre principale du problème (5.4). Si $\lambda_R^1(\mu)$ désigne la valeur propre principale du problème
$$L_R^1 u + \mu P_3 u = \lambda u, \tag{5.5}$$
alors pour tout $\mu \geqslant 0$, $\lambda_{R_c}^1(\mu) = \lambda_{R_c}^2(\mu)$. En effet, pour $R = R_c$, u_1 et u_2 coïncident. $\lambda_R^2(\mu)$ est continue par rapport à μ et R. Donc
$$\lambda_R^2(\mu) \to \lambda_{R_c}^1(\mu), \quad R \to R_c. \tag{5.6}$$
On a vu dans la preuve du lemme 4.4 que
$$\forall \mu > 0, \lambda_{R_c}^1(\mu) < \mu. \tag{5.7}$$
Fixons $\mu > 0$. D'après (5.6) et (5.7) il existe $\eta > 0$ tel que
$$|R - R_c| < \eta \Rightarrow \lambda_R^2(\mu) < \mu.$$
Ainsi pour $|R - R_c| < \eta$ l'équation $\lambda_R^2(\mu) = \mu$ a au moins une solution $\mu \geqslant 0$ (voir Figure 2.5).

Cette solution est valeur propre de (5.3). Le lemme est démontré. □

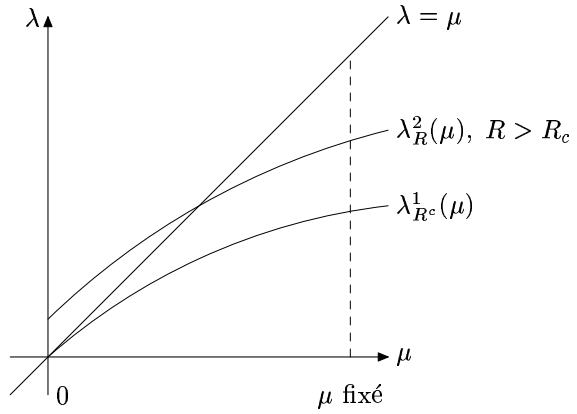


FIG. 2.5 – Résolution graphique de $\lambda^2_R(\mu) = \mu$.

Le même argument peut permettre de montrer que si $\lambda_0(L^2_R) < 0$, alors le problème (5.3) a une valeur propre strictement négative (ce résultat est établi au lemme 5.7). Mais naturellement ceci n'est pas suffisant pour prouver que $\lambda_C(L^2_R) < 0$. Il nous faut montrer que toutes les valeurs propres de (5.3) ont une partie réelle strictement négative. Ceci peut être démontré en comparant (5.3) avec le problème similaire pour l'opérateur $L^1_{R_c}$, comme nous l'avons fait dans la section 5.1. Cette comparaison donne le lemme 5.8 qui, associé au lemme 5.7, fait le lien entre le problème de valeurs propres classique et le problème de C-valeurs propres pour les solutions bidimensionnelles, quand $|R - R_c|$ et $\|u_1 - u_2\|_{E_1}$ sont petits.

LEMME 5.7. – *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $\eta > 0$ telle que pour $|R - R_c| < \eta$, $\|u_2 - u_1\|_{C^2} < \eta$, si $\lambda_0(L^2_R) < 0$ alors le problème (5.3) a une valeur propre réelle λ, $-\epsilon < \lambda < 0$.*

Démonstration. –

La preuve est similaire à celle du lemme 5.6. La seule chose qu'il nous faut établir est l'existence de $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall \mu,\ -\epsilon < \mu < 0,\ \lambda^1_{R_c}(\mu) > \mu.$$

Prenons d'abord ϵ tel que le spectre essentiel soit dans le demi-plan $\{Re\lambda < -\epsilon\}$. Ainsi, on peut appliquer les méthodes de la section 4.

Nous savons que les valeurs propres de (5.5) sont aussi valeurs propres de

$$\begin{aligned} D\tilde{\theta}'' + c\,\tilde{\theta}' + (F'(\Theta(x_2)) - Dk^2)\tilde{\theta} + k\Theta'(x_2)\tilde{\psi} &= \lambda\tilde{\theta} \\ P\tilde{\omega}'' + c\,\tilde{\omega}' - Pk^2\tilde{\omega} - PRk\tilde{\theta} &= \lambda\tilde{\omega} \\ \tilde{\psi}'' - k^2\tilde{\psi} + \tilde{\omega} + \mu\tilde{\psi} &= \lambda\tilde{\psi} \end{aligned}$$

pour certains entiers $k < 0$. Notons $\lambda^1_{R,k}(\mu)$ la valeur propre principale de ce problème. Alors elle est réelle, et

$$\lambda^1_R(\mu) = \sup_{k\in\mathbb{Z},k<0} \lambda^1_{R,k}(\mu) \geqslant \lambda^1_{R_c,k_0}(\mu),$$

où k_0 est l'entier qui réalise le minimum des $R_c(k), k \in \mathbb{Z}, k < 0$. Ainsi, il suffit de prouver que

$$\forall \mu,\ -\epsilon < \mu < 0,\ \lambda^1_{R_c,k_0}(\mu) > \mu. \tag{5.8}$$

Avant d'établir (5.8), remarquons que pour tous R et k, l'équation $\lambda^1_{R,k}(\mu) = \mu$ ne peut pas avoir plus d'une solution réelle μ. En effet, une telle solution est la valeur propre principale du problème monotone

$$\begin{aligned} D\theta'' + c\theta' + (F'(\Theta(x_2)) - Dk^2)\theta + k\Theta'(x_2)\psi &= \lambda^1_{R,k}(\mu)\theta \\ P\omega'' + c\omega' - Pk^2\omega - PRk\theta &= \lambda^1_{R,k}(\mu)\omega \\ \psi'' - k^2\psi + \omega + \mu\psi &= \lambda^1_{R,k}(\mu)\psi. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction propre correspondante est positive. Mais μ est aussi une valeur propre du problème (4.9)-(4.11), avec la même fonction propre positive. Donc μ est nécessairement la valeur propre principale de ce problème, et l'unicité en découle.

Montrons maintenant (5.8). Tout d'abord, nous savons que $\lambda^1_{R_c,k_0}(0) = 0$. D'après l'observation ci-dessus, nous pouvons en déduire que

$$\forall \mu,\ -\epsilon < \mu < 0,\ \lambda^1_{R_c,k_0}(\mu) \neq \mu.$$

Mais la fonction $\lambda^1_{R_c,k_0}(\mu)$ est continue par rapport à μ. Ainsi, si (5.8) n'est pas vérifiée, alors

$$\forall \mu,\ -\epsilon < \mu < 0,\ \lambda^1_{R_c,k_0}(\mu) < \mu.$$

Pour conclure, on utilise un résultat de stricte monotonie de la valeur propre principale d'un problème monotone, par rapport à ses coefficients [22]. En particulier, pour $R > R_c$ et pour tout $\mu,\ -\epsilon < \mu < 0$, on a : $\lambda^1_{R,k_0}(\mu) > \lambda^1_{R_c,k_0}(\mu)$.

Soit R suffisamment proche de R_c pour que les inégalités suivantes soient satisfaites, comme dans la Figure 2.6 :

$$\lambda^1_{R,k_0}(-\epsilon) < -\epsilon, \quad \lambda^1_{R,k_0}(1) < 1.$$

On a aussi $\lambda^1_{R,k_0}(0) > 0$. Ainsi, l'équation $\lambda^1_{R,k_0}(\mu) = \mu$ a au moins deux solutions réelles, ce qui donne une contradiction. Nous avons donc démontré la relation (5.8), et la fin de la preuve de ce lemme est identique à celle du lemme 5.6. □

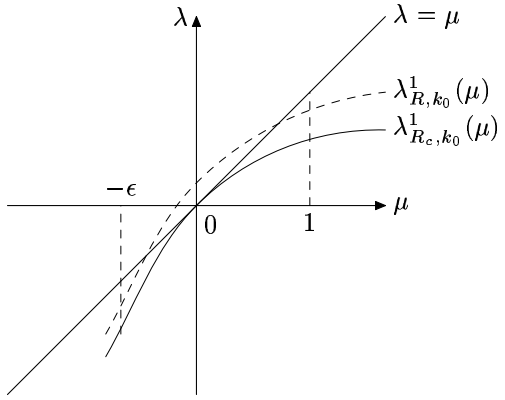


FIG. 2.6 – Résolution graphique de : $\lambda^1_{R,k_0}(\mu) = \mu$

Il reste à prouver que le problème (5.3) n'a pas de valeur propre à partie réelle strictement positive. Nous allons montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel qu'il ait une unique valeur propre dans le domaine $\bar{\mathcal{D}} \cup \bar{B}(0, \epsilon)$.

LEMME 5.8. – *Il existe $\epsilon > 0$ tel que les problèmes (5.9), $i = 1, 2$, ont exactement une valeur propre simple dans $B(0, \epsilon)$, et tel que tous les autres points de la boule fermée sont réguliers.*

Démonstration. –
L'idée de la preuve est la même que pour le lemme 5.3. La difficulté ici réside dans le fait qu'il n'y a pas de λ pour la troisième composante. Nous ne pouvons donc pas utiliser directement le résultat de conservation de la somme des multiplicités des valeurs propres pour une petite perturbation de l'opérateur. Pour l'appliquer nous allons transformer notre problème en un problème de valeurs propres usuel. Comme pour le lemme 5.3, nous utilisons ici des espaces de Hölder sans poids.

Notons $u_i = (\theta_i, \omega_i, \psi_i)$, $i = 1, 2$, ($\omega_1 = \psi_1 = 0$) et remarquons que pour $i = 1, 2$, le problème

$$L^i_R u = \lambda C u, \quad u \in E^0_1 \tag{5.9}$$

est équivalent au problème

$$\begin{aligned} D\Delta\theta + b(\psi_i, \theta_i, \psi, \theta) + F'(\theta_i)\theta &= \lambda\theta \\ -P\Delta\Delta\psi + b(\psi_i, -\Delta\psi_i, \psi, -\Delta\psi) + PR\frac{\partial\theta}{\partial x_1} &= -\lambda\Delta\psi, \\ \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0, \psi = \Delta\psi = 0, &\qquad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

où

$$b(w_i, v_i, w, v) = -\frac{\partial w_i}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial v_i}{\partial x_1} + \left(c + \frac{\partial w_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial v_i}{\partial x_2}.$$

Ici, E_1^0 est l'espace de Hölder défini au chapitre 1 (voir page 20).

Considérons l'opérateur $\Delta^{-1} : C^\alpha \to \{u \in C^{2+\alpha}, u_{|\partial\Omega} = 0\}$, qui à une fonction donnée $f \in C^\alpha$ associe l'unique fonction $\psi \in C^{2+\alpha}, \psi_{|\partial\Omega} = 0, \Delta\psi = f$. Il est bien défini et continu.

Définissons les espaces

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left\{\theta \in C^{2+\alpha}(\bar\Omega), \frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0, x \in \partial\Omega\right\},\\
F_2 &= \{\psi \in C^{4+\alpha}(\bar\Omega), \psi = \Delta\psi = 0, x \in \partial\Omega\},\\
F_3 &= C^\alpha(\bar\Omega),\\
F_4 &= \{g \in C^{2+\alpha}(\bar\Omega), g = 0, x \in \partial\Omega\},\\
F &= F_1 \times F_2, \quad E = F_3 \times F_4.
\end{aligned}$$

et les opérateurs $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2 : F_1 \times F_2 \to F_3 \times F_4$ par $\mathcal{L}^i(\theta, \psi) = (f_i, g_i)$, où

$$\begin{aligned}
f_i &= D\Delta\theta + b(\psi_i, \theta_i, \psi, \theta) + F'(\theta_i)\theta,\\
g_i &= -\Delta^{-1}\left(P\Delta\Delta\psi + b(\psi_i, -\Delta\psi_i, \psi, -\Delta\psi) + PR\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right), \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Avec ces notations, les problèmes (5.9) sont équivalents à

$$\bar u = (\theta, \psi) \in F_1 \times F_2, \quad \mathcal{L}^i\bar u = \lambda\bar u.$$

Il reste à montrer que

1. pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\mathcal{L}^i - \lambda I$ sont des opérateurs de Fredholm d'indice nul, pour $i = 1, 2$;
2. si $|R - R_c| < \eta$, $\|u_1 - u_2\|_{C^{2+\alpha}} < \eta$, alors

$$\forall \bar u \in F = F_1 \times F_2,\ \|\mathcal{L}^1\bar u - \mathcal{L}^2\bar u\|_E < k(\|\mathcal{L}^1\bar u\|_E + \|\bar u\|_E),$$

   où $E = F_3 \times F_4$.

Le premier point est clair, car la condition 2 pour $\mathcal{L}^i$ est équivalente au fait que le problème

$$L_R^{i\,\pm} u = \lambda C u$$

n'ait pas de solution non triviale pour $\lambda \geqslant 0$. Ceci est assuré par la condition $F'(\theta^\pm) < 0$. Par conséquent, nous savons que les valeurs propres de $\mathcal{L}^i$ sont isolées. Pour $R = R_c$, 0 est

valeur propre simple de $\mathcal{L}^1$, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que tout complexe λ avec $0 < |\lambda| < \epsilon$ soit régulier pour $\mathcal{L}^1$, donc également régulier pour le problème $L^1_{R_c} u = \lambda C u, u \in E^0_1$.

Pour prouver le deuxième point, on utilise les estimations de Schauder, et la continuité de Δ^{-1} comme opérateur de F_4 dans F_2. On en déduit d'abord que

$$\forall \bar{u} \in F,\ \|\bar{u}\|_F \leqslant K(\|\mathcal{L}^1 \bar{u}\|_E + \|\bar{u}\|_E). \tag{5.10}$$

Or pour $\bar{u} = (\theta, \psi) \in F$, $(\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^1)\bar{u}$ est le couple

$$(\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^1)\bar{u} = (b(\psi_2 - \psi_1, \theta_2 - \theta_1, \psi, \theta), b(\psi_2 - \psi_1, \Delta\psi_2 - \Delta\psi_1, \psi, \Delta\psi))$$

On peut trouver $\eta > 0$ tel que si $\|u_1 - u_2\|_{C^{2+\alpha}} < \eta$, alors

$$\|b(\psi_2 - \psi_1, \theta_2 - \theta_1, \psi, \theta)\|_{C^\alpha} \leqslant \epsilon$$

et

$$\|b(\psi_2 - \psi_1, \Delta\psi_2 - \Delta\psi_1, \psi, \Delta\psi)\|_{C^\alpha} \leqslant \epsilon.$$

Ainsi,

$$\forall \bar{u} \in F_1 \times F_2,\ \|\mathcal{L}^1 \bar{u} - \mathcal{L}^2 \bar{u}\|_E \leqslant \epsilon K \left(\|\theta\|_{C^{1+\alpha}} + \|\psi\|_{C^{3+\alpha}}\right) \leqslant \epsilon K \|\bar{u}\|_F. \tag{5.11}$$

La conclusion du point 2 découle des estimations (5.10) et (5.11). La fin de la preuve est identique à la première étape du lemme 5.3. □

COROLLAIRE 5.9. – *Il existe une constante $\eta > 0$ telle que pour $|R - R_c| < \eta$, $\|u_2 - u_1\|_{C^{2+\alpha}} < \eta$, si $\lambda_0(L^2_R) \leqslant 0$ et si $\lambda_C(L^1_R)$ est réel alors $\lambda_C(L^2_R) \leqslant 0$. Si le problème $L^1_R u = \lambda C u$ a des valeurs propres à partie réelle strictement positive, alors la somme de leurs multiplicités est égale à la somme des multiplicités des valeurs propres à partie réelle strictement positive pour le problème $L^2_R u = \lambda C u$.*

Démonstration. –

Considérons une solution u_2 avec $\lambda_0(L^2_R) \leqslant 0$. D'après le lemme 5.7, nous savons que le problème (5.3) a une valeur propre réelle $\lambda \in (-\epsilon, 0)$. D'après le lemme 5.8, il n'a pas de valeur propre à partie réelle strictement positive dans la boule $\bar{B}(0, \epsilon)$. Il reste à montrer que la somme des multiplicités des valeurs propres dans le domaine $\bar{\mathcal{D}}$ défini au début de la section est la même que pour le problème $L^1_R u = \lambda C u$. Ceci découle des mêmes arguments que dans la preuve du lemme 5.3.

Ainsi, nous avons démontré le théorème suivant, qui est l'analogue du théorème 5.5, cette fois pour le problème de C-valeurs propres.

THÉORÈME 5.10. – *Si des solutions convectives existent uniquement pour $R > R_c$ (bifurcation surcritique), alors parmi elles il y a des solutions u_2 pour lesquelles le problème (5.3) n'a pas de valeur propre réelle positive, pour R assez proche de R_c.*

Si des solutions convectives existent uniquement pour $R < R_c$ (bifurcation sous-critique), alors parmi elles il y a des solutions u_2 pour lesquelles le problème (5.3) a une valeur propre réelle positive ou nulle, pour R assez proche de R_c.

6. Conclusions et discussion

Le résultat essentiel de ce chapitre est l'existence d'ondes convectives voisines de la solution monodimensionnelle, pour le problème couplé (2.15)-(2.19). On montre également que la solution monodimensionnelle devient instable lorsque le nombre de Rayleigh dépasse une valeur critique, et on étudie aussi d'éventuelles instabilités des ondes convectives.

Notons que le résultat de bifurcations est donné sous l'hypothèse (H_2), et que nous ne sommes pas actuellement en mesure de donner des conditions suffisantes sous lesquelles cette hypothèse est vérifiée. On peut se poser la question de la généricité de cette hypothèse : en modifiant légèrement les coefficients du problème (diffusivité, viscosité, etc.) on perturbe les valeurs critiques $R_c(k)$. Dans le cas où (H_2) n'est pas vérifiée pour certaines valeurs de ces coefficients, on peut espérer qu'elle le soit pour des valeurs légèrement perturbées.

Par ailleurs, il faut souligner que les résultats de ce chapitre ne se généralisent pas de façon simple à l'exemple présenté à la section 7.2 du chapitre 1, qui considère des conditions au bord de non glissement du fluide sur les parois. En effet, dans une formulation fonction de courant - fonction tourbillon, cet exemple donne des conditions aux limites plus compliquées. Nous avons vu que la propriété de Fredholm restait valable. Par contre, l'étude des valeurs propres réalisée ici pour le cas des conditions de "surface libre" est basée de façon essentielle sur l'introduction de séries de Fourier. Dans le cas de conditions au bord différentes, on ne peut plus utiliser cette démarche, et le problème reste donc ouvert.

Références bibliographiques

[1] A. Agouzal, and K. Allali, *Analyse numérique d'un modèle couplant les équations de Navier-Stokes et de la chaleur*, Extracta Mathematica, to appear.

[2] C. Bernardi, B. M´etivet, and B. Pernaud-Thomas, *Couplage deséquations de Navier-Stokes et de la chaleur: le modèle et son approximation par éléments finis*, RAIRO Mod´el. Math. Anal. Num´er. Vol. 29 (1995), 871–921.

[3] G. Bowden, M. Garbey, V. Ilyashenko, J. Pojman, S. Solovyov, A. Taik, and V. Volpert, *The effect of convection on a propagating front with a solid product: comparison of theory and experiments*, J. Chem. Physics B, Vol. 101 (1997), 678-686.

[4] B.F. Edwards, J.W. Wilder, and K. Showalter, *Onset of Convection for autocatalytic reaction fronts: Lateraly unbounded system*, Phys. Rev. A43 (1991), 749.

[5] M. Garbey, A. Taik, and V. Volpert, *Linear stability analysis of reaction fronts in liquids*, Quart. Appl. Math., Vol. 54 (1996), 225-247.

[6] M. Garbey, A. Taik, and V. Volpert, *Influence of natural convection on stability of reaction fronts in liquids*, Quart. Appl. Math., Vol. 56 (1998), 1-35.

[7] I. Gohberg, and M. Krein, *The basic propositions on defect numbers and indices of linear operators,* A.M.S. Transl., 13(2) (1960), 185–264.

[8] S. Malham, and J.X. Xin, *Global solutions to a reactive Boussinesq system with front data on an infinite domain*, Comm. Math. Phys. 193 (1998), no. 2, 287–316.

[9] O. Manley, M. Marion, and R. Temam, *Equations of combustion in the presence of complex chemistry,* Indiana Univ. Math. J. 42 (1993), no. 3, 941–967

[10] J. Masere, D.A. Vasquez, B.F. Edwards, J.W. Wilder, and K. Showalter, *Nonaxisymmetric and Axisymmetric Convection in Propagating Reaction-Diffusion Fronts*, J. Phys. Chem., Vol. 98 (1994), 6505-6508.

[11] B.J. Matkowsky, and G.I. Sivashinsky, *An asymptotic derivation of two models in flame theory associated with the constant density approximation*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 37 (1979), 686-699.

[12] B.J. Matkowsky, and G.I. Sivashinsky, *Acceleration effects on the stability of flame propagation*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 37 (1979), 669-685.

[13] B. McCaughey, J.A. Pojman, C. Simmons, and V.A. Volpert, *The effect of convection on a propagating front with a liquid product: comparison of theory and experiments*, Chaos, Vol. 8 (1998), 520-529.

[14] J.A. Pojman, R. Craven, A. Khan, and W. West, *Convective instabilities in traveling fronts of addition polymerization*, J. Physical Chemistry Vol. 96 (1992), 7466-7472.

[15] J.A. Pojman, and I.R. Epstein, *Convective effects on chemical waves. 1. Mechanisms and stability criteria*, J. Phys. Chem., Vol. 94 (1990), 4966-4972.

[16] A.I. Volpert, and V.A. Volpert, *Applications of the rotation theory of vector fi elds to the study of wave solutions of parabolic equations,* Trans. Moscow Math. Soc., (1990), 59–108.

[17] A.I. Volpert, V.A. Volpert, and V.A. Volpert, "Travelling Wave Solutions of Parabolic Systems," Translation of Mathematical Monographs, Vol. 140, Amer. Math. Society, Providence, 1994.

[18] V.A. Volpert, and A.I. Volpert, *Existence and stability of traveling waves in chemical kinetics,* In: Dynamics of Chemical and Biological Systems, Nauka, Novosibirsk (1989), 56-131 (in

Russian).

[19] V.A. Volpert, and A.I. Volpert, *Waves of chemical transformation having complex kinetics*, Dokl. Phys. Chemistry Vol. 309 (1989), 1-3, 877-879.

[20] V. Volpert, and A. Volpert, *Convective instability of reaction fronts. Linear stability analysis*, Eur. J. Appl. Math., Vol. 9 (1998), 507-525.

[21] V. Volpert, and A. Volpert, *Spectrum of elliptic operators and stability of travelling waves.* Asymptotic Analysis, Vol. 23 (2000), 114-134.

[22] V. Volpert, and A. Volpert, *Location of spectrum and stability of solutions for monotone parabolic system*, Adv. Diff. Eq., Vol.2 (1997), 811-830.

Chapitre 3

Influence de la tension de surface sur un front de polymérisation

Résumé. Ce chapitre concerne l'´etude de fronts de polym´erisation qui transforment un monom`ere liquide en polym`ere liquide. On suppose que le monom`ere et le polym`ere sont non miscibles et on ´etudie l'influence de la tension superficielle sur la stabilit´e du front. Le mod`ele math´ematique comporte des ´equations de r´eaction-diffusion coupl´ees avec les ´equations de Navier-Stokes. Les conditions de saut `a l'interface prennent en compte la tension superficielle. Des arguments physiques simples montrent qu'une distribution de temp´erature identique `a celle cr´e´ee par la r´eaction ne peut pas conduire `a une instabilit´e de Marangoni pour des syst`emes qui ne r´eagissent pas. Nous faisons une analyse de stabilit´e lin´eaire et nous montrons que l'interaction de la r´eaction chimique et de la tension superficielle peut conduire `a une instabilit´e bas´ee sur un m´ecanisme diff´erent : la chaleur produite par la r´eaction fait d´ecroître la tension superficielle et initie un mouvement du fluide. Ce courant apporte plus de monom`ere dans la zone de r´eaction et on peut supposer que ceci augmente la production de chaleur. Ce m´ecanisme peut rendre le front instable si le nombre de Marangoni d´epasse une valeur critique.

1. Introduction

Pour des systèmes sans réaction chimique, les instabilités liées à la tension de surface sont connues sous le nom d'instabilité de Marangoni. Elles proviennent de la dépendance de la tension de surface par rapport à la température, et apparaissent lorsqu'on chauffe le liquide par dessous (voir Figure 3.1 (a)). Si au contraire, le liquide est chauffé par le

haut, l'instabilité de Marangoni ne peut exister (voir Figure 3.1 (b)), car le liquide qui est ramené vers l'interface tempère la perturbation de la température.

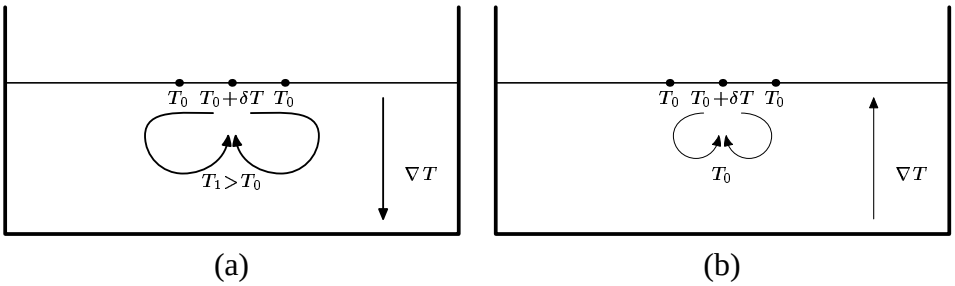


FIG. 3.1 – Effet de Marangoni dans le cas d'une surface libre eau/air. La configuration (a) est instable, la configuration (b) est stable.

Dans notre cas, nous considérons une réaction exothermique qui se propage dans un réacteur. Dans la solution stationnaire, la température est uniforme dans le polymère, tandis qu'un gradient de température se forme dans le monomère, froid à l'infini, et chauffé par le polymère au voisinage de l'interface (voir Figure 3.2). En dehors de toute considération chimique, un raisonnement simple montre que l'instabilité de Marangoni n'existe pas pour cette distribution de température.

En effet, si on augmente ponctuellement la température de l'interface, le liquide en ce point va être chassé sur les côtés, et remplacé par du monomère plus froid. Toutefois, on ne peut écarter complétement la réaction chimique à l'origine du gradient de température. Une analyse de stabilité linéaire autour de la solution stationnaire montre que l'interaction de la réaction et de la tension de surface est à l'origine d'une instabilité. Elle peut s'expliquer par le fait que le monomère ramené vers l'interface à cause de la perturbation de la tension de surface accélère la réaction, augmentant ainsi encore la température du front. Ce mécanisme conduit à une instabilité si le nombre de Marangoni frontal dépasse

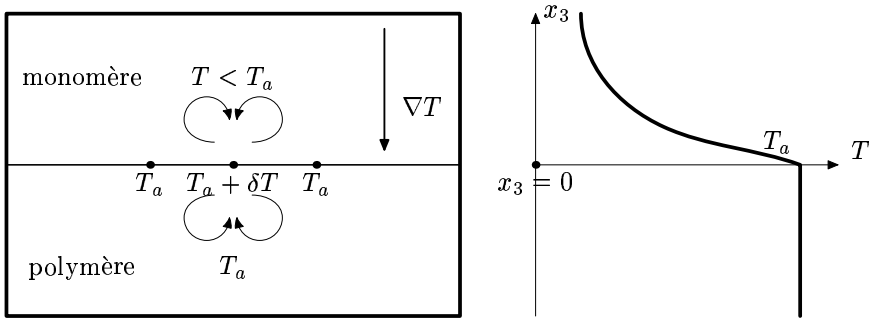


FIG. 3.2 – A droite : distribution de température créée par la réaction pour la solution stationnaire. Avec cette distribution, l'instabilité de Marangoni ne peut exister.

une valeur critique. Cela se traduit par des courants convectifs qui peuvent déformer le front.

Nous calculons les valeurs critiques du nombre de Marangoni, et nous les comparons avec des valeurs expérimentales. Cette comparaison montre que l'instabilité peut avoir lieu avec des paramètres réalistes, mais qu'elle sera difficile à observer expérimentalement. Il faut en effet que les viscosités du monomère et du polymère soient proches, ce qui suppose plutôt de considérer un monomère et un oligomère, c'est-à-dire une courte chaine de molécules de monomères. Le risque de cette manœuvre est d'augmenter la miscibilité des deux composés.

D'autre part, ces expériences doivent être réalisées dans des conditions de microgravité simulées pour éviter l'interférence des instabilités induites par la pesanteur. Il faut aussi choisir des valeurs des paramètres telles que l'instabilité thermique ne soit pas possible. Enfin, l'incompressibilité du monomère et du polymère exclut la possibilité d'une instabilité hydrodynamique.

2. Modèle mathématique

2.1. Présentation des équations et de la méthode

Nous considérons un modèle basé sur les équations de la température et du taux de conversion, et les équations de Navier-Stokes. On suppose que

1. Le monomère et le polymère sont incompressibles, non miscibles, ont la même densité ρ, la même diffusivité thermique κ et des viscosités éventuellement différentes, ν_1 pour le polymère et ν_2 pour le monomère.
2. La réaction chimique est une réaction à un pas, d'ordre zéro, et son taux de réaction est donné par
$$W = k(T)\varphi(\alpha),$$
où T est la température, α représente le taux de conversion,
$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leqslant \alpha < 1, \\ 0 \text{ si } \alpha = 1, \end{cases}$$
et
$$k(T) = k_0 \exp(-E/(RT)).$$
Ici, E est l'énergie d'activation, R la constante des gaz parfaits, et k_0 est un facteur pré-exponentiel.
3. L'influence des parois est négligeable.
4. Le coefficient de diffusion massique est très inférieur au coefficient de diffusion thermique, de sorte que la diffusion de masse peut être négligée. Cette condition est valable pour la polymérisation frontale.

Sous ces hypothèses nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v.\nabla T = \kappa \Delta T + qW, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + v.\nabla \alpha = W, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v.\nabla v_i = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \text{ div } \left[\nu\left(\nabla v_i + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right],\ i = 1, 2, 3, \tag{2.3}$$

$$\text{div } v = 0. \tag{2.4}$$

Ici $v = (v_1, v_2, v_3)$ est la vitesse du milieu, p est la pression, q est la chaleur dégagée par la réaction, $\nu = \nu(\alpha, T)$ est la viscosité du milieu,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \text{ et } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

La viscosité dépend beaucoup plus du taux de conversion que de la température. Dans la suite nous considérons ν uniquement comme fonction de α et nous posons $\nu(0) = \nu_2$, $\nu(1) = \nu_1$.

Le système d'équations (2.1)-(2.4) est considéré dans l'espace entier

$$-\infty < x_1, x_2, x_3 < +\infty.$$

On suppose que le front se propage dans la direction x_3 et que

$$\begin{array}{llll} T \to T_0, & \alpha \to 0, & v \to 0 & \text{quand } x_3 \to +\infty, \\ T \to T_a = T_0 + q, & \alpha \to 1, & v \to 0 & \text{quand } x_3 \to -\infty. \end{array}$$

Nous introduisons des variables et paramètres sans dimensions :

$$c^2 = k_0 \kappa \frac{RT_a^2}{2E} \exp\left(-\frac{E}{RT_a}\right),$$

$$\bar{x}_i = \frac{x_i c}{\kappa}, i = 1, 2, 3 \quad \bar{t} = \frac{tc^2}{\kappa}, \quad \bar{p} = \frac{c^2 p}{\rho}, \quad \theta = \frac{T - T_a}{q}.$$

Désormais, nous omettrons pour simplifier les barres, et $\nabla, \Delta,$ div seront des opérateurs définis avec les nouvelles variables. Le problème se réécrit alors sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v.\nabla \theta = \Delta\theta + Z \exp\left(\frac{\theta}{Z^{-1} + \delta\theta}\right)\varphi(\alpha) \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + v.\nabla \alpha = Z \exp\left(\frac{\theta}{Z^{-1} + \delta\theta}\right)\varphi(\alpha) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v.\nabla v_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + P\Delta v_i + \nabla P.\left(\nabla v_i + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right),\ i = 1, 2, 3 \tag{2.7}$$

$$\text{div } v = 0 \tag{2.8}$$

avec les conditions à l'infini :

$$\begin{array}{llll} \theta \to -1, & \alpha \to 0, & \text{et } v \to 0 & \text{quand } x_3 \to +\infty \\ \theta \to 0, & \alpha \to 1, & \text{et } v \to 0 & \text{quand } x_3 \to -\infty. \end{array}$$

Ici, $Z = qE/(RT_a^2)$ est le nombre de Zeldovich, $\delta = RT_a/E$. On introduit également une viscosité adimensionnée $P = \nu/\kappa$, qui peut varier en fonction de x entre deux bornes $P_1 = \nu_1/\kappa$ (nombre de Prandtl pour le polymère) et $P_2 = \nu_2/\kappa$ (nombre de Prandtl pour le monomère). P_1 et P_2 sont considérés comme des constantes.

Remarquons que dans la plupart des cas, le monomère et le polymère sont miscibles. Toutefois, même dans ce cas, le gradient de concentration dans la zone de mélange peut être très élevé, on peut donc le modéliser par une interface séparant deux liquides. L'un d'eux contient essentiellement le monomère, l'autre essentiellement le polymère [2] (voir Figure 3.3).

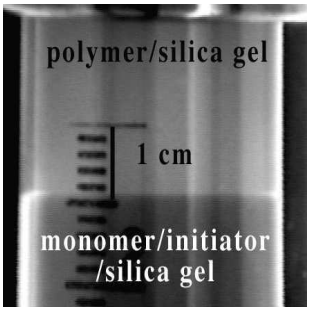


FIG. 3.3 – Un front de polymérisation avec un monomère et un polymère séparés par un gradient de concentration très élevé. Du gel de silice est utilisé pour empêcher la convection. Adapté de [14].

Le but de cette étude est d'étudier l'influence de la tension superficielle sur la stabilité du front. Pour mener cette étude de stabilité, on utilise la méthode dite de la zone de réaction infiniment étroite. Ceci consiste à supposer que la réaction chimique se déroule sur une surface $x_3 = \zeta(x_1, t)$. Cette approche, développée par Zeldovich et Frank-Kamenetskii pour la combustion en milieu gazeux [20] a ensuite été reprise pour l'étude des fronts de réaction en phase condensée [13]. Dans notre cas, elle conduit à considérer que le monomère est situé dans la région $x_3 > \zeta(x_1, t)$, et le polymère dans $x_3 < \zeta(x_1, t)$. Alors à la place des équations (2.5) et (2.6), nous avons en dehors de la zone de réaction

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v.\nabla\theta = \Delta\theta, \quad x_3 \neq \zeta(x_1, t) \tag{2.9}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & x_3 > \zeta(x_1, t), \\ 1, & x_3 < \zeta(x_1, t). \end{cases} \tag{2.10}$$

Les équations (2.7) - (2.10) doivent être complétées par des conditions de saut à l'interface pour la température et pour la vitesse. Nous les présentons dans la section 3.

2.2. Onde progressive

Il est bien connu que ce problème a une solution onde progressive, pour laquelle

$$\zeta_s(x_1,t) = ut, \quad v_s = 0, \quad \alpha_s(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_3 > ut, \\ 1, & \text{si } x_3 < ut, \end{cases}$$

et θ_s ne dépend que de $x_3 - ut$. Nous présentons rapidement le calcul de cette solution. Dans un premier temps, il faut expliciter les conditions de saut que l'on obtient pour cette solution, à partir du problème (2.5), (2.6). Considérons donc provisoirement le cas où Z est fini. Avec les hypothèses ci-dessus, les équations (2.5), (2.6) donnent

$$\begin{aligned} \theta_s'' + \quad u\theta_s' \quad &+ Z \exp\left(\frac{\theta_s}{Z^{-1} + \delta\theta_s}\right) \varphi(\alpha_s) = 0, \\ u\alpha_s' \quad &+ Z \exp\left(\frac{\theta_s}{Z^{-1} + \delta\theta_s}\right) \varphi(\alpha_s) = 0. \end{aligned}$$

Soustrayons ces deux équations : les termes de réaction s'annulent, et il reste :

$$\theta_s'' + u(\theta_s' - \alpha_s') = 0.$$

Intégrons maintenant cette équation dans la zone de réaction, et faisons tendre sa largeur vers 0. On impose la continuité de θ_s à l'interface :

$$\theta_s(+0) = \theta_s(-0) = 0,$$

0 étant la température du polymère. Il reste alors après intégration

$$[\theta_s']_-^+ = u[\alpha_s]_-^+ = -u.$$

Ici, les crochets désignent le saut d'une fonction à travers la zone de réaction,

$$[f]_-^+ = f(\zeta - 0) - f(\zeta + 0).$$

De plus, de part et d'autre de la zone de réaction, l'équation de θ_s devient simplement

$$\theta_s'' + u\theta_s' = 0.$$

On obtient donc la solution suivante :

$$\theta_s(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = x_3 - ut < 0, \\ -1 + \exp(-uz) & \text{si } z = x_3 - ut > 0. \end{cases}$$

Nous souhaitons étudier la stabilité de cette solution. Dans la suite, nous considérons des perturbations de cette solution, telles que la température, le taux de conversion et la vitesse ne dépendent pas de la variable x_2, et que $v_2 = 0$. Cette hypothèse ne modifie pas les conditions de l'instabilité. Nous supposons également que α est de la forme (2.10), où $\zeta(x_1, t)$ est voisin de ut. Nous allons tout d'abord préciser la forme que prennent les conditions de saut à l'interface pour ces nouvelles solutions.

3. Conditions de saut à l'interface

3.1. Conditions pour la température

Les conditions de saut pour la température ont une forme usuelle [6, 13] et nous les rappelons brièvement.

– Comme pour la solution stationnaire, la température est continue à l'interface :

$$[\theta]_-^+ = 0. \tag{3.1}$$

Nous noterons par la suite $\theta(\zeta)$ la température du front. Pour une petite perturbation de l'onde progressive, on a

$$\theta(\zeta) \simeq 0.$$

– Pour obtenir les autres conditions de saut, on revient provisoirement à une zone de transition de largeur non nulle, et donc à un nombre de Zeldovich Z fini. On reprend donc les équations (2.5), (2.6) de la section précédente. En soustrayant (2.6) de (2.5), on annule les termes de réaction :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \Delta\theta - v.\nabla\theta + v.\nabla\alpha. \tag{3.2}$$

On peut maintenant passer formellement à la limite lorsque Z tend vers l'infini, c'est-à-dire considérer une zone infiniment étroite. On fait alors le changement de variable $z = x_3 - \zeta(x_1, t)$, pour se ramener à un front de réaction fixé en $z = 0$.
De plus, notre intention étant de mener une étude de stabilité linéaire pour la solution "onde progressive", nous allons dès à présent négliger les termes d'ordre 2. Considérons de petites perturbations de cette solution. Par exemple, si nous posons $v = v_s + \tilde{v}$, $\theta = \theta_s + \tilde{\theta}$, où v_s et θ_s correspondent à la solution onde progressive, et $\tilde{v}$ et $\tilde{\theta}$ sont de petites perturbations, alors le terme

$$v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \tilde{v_1} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_1}$$

est d'ordre 2. Il peut être négligé dans l'analyse de stabilité linéaire. De plus, α ne dépend que de z, donc le terme

$$v_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}$$

est nul. L'équation (3.2) devient alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}(t, x_1) - v_z \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right).$$

Notons que cette équation est à prendre au sens des distributions,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \text{ et } \frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

n'étant a priori plus des fonctions. En particulier, α n'est pas continue à l'interface,

$$\alpha(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z < 0, \\ 0, & \text{si } z > 0. \end{cases}$$

Nous allons intégrer l'équation ainsi obtenue à travers la zone de réaction, c'est-à-dire pour z compris entre 0^- et 0^+. Les intégrales des fonctions disparaissent, et il reste :

$$[\theta']_-^+ = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_z(0^+). \tag{3.3}$$

– Revenons à l'équation (2.5). En la multipliant par $\partial\theta/\partial x_3$, et en négligeant comme précédemment les termes d'ordre 2, nous obtenons :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_3} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} - v_3 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right)^2 + Z \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \exp\left(\frac{\theta}{Z^{-1} + \delta\theta} \right) \varphi(\alpha).$$

Comme précédemment, nous intégrons cette équation dans la zone de réaction, donc pour x_3 variant entre deux bornes a et b, $a < b$, puis nous passons à la limite de la zone infiniment étroite, c'est-à-dire que nous faisons tendre simultanément le nombre de Zeldovich vers l'infini, et les bornes a et b vers ζ^- et ζ^+. Le membre de gauche tend vers 0 ; le premier terme du membre de droite va donner à la limite le saut de ${\theta'}^2$, tandis que le second terme tend vers 0. Nous détaillons maintenant le traitement du dernier terme. L'intégrale dans la zone de réaction donne :

$$Z \int_a^b \theta'(x_3) \exp\left(\frac{\theta(x_3)}{Z^{-1} + \delta\theta(x_3)} \right) \varphi(\alpha(x_3)) dx_3.$$

Notons que dans la zone de réaction, $\varphi(\alpha(x_3)) = 1$. Faisons le changement de variable $\tau = \theta(x_3)$. On obtient alors :

$$Z \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} \exp\left(\frac{\tau}{Z^{-1} + \delta\tau} \right) d\tau.$$

La fonction θ étant décroissante, on aura $-1 < \theta(b) < \theta(a)$. L'intégrale ci-dessus est donc négative, car les bornes d'intégration sont dans l'ordre décroissant, et la fonction à intégrer est positive. Dans la limite de la zone étroite, la température est continue donc $\theta(b)$ et $\theta(a)$ tendent vers la température du front $\theta(\zeta)$. Cependant, la fonction à intégrer n'est pas bornée lorsque Z tend vers l'infini. On peut visualiser son comportement sur la Figure 3.4.

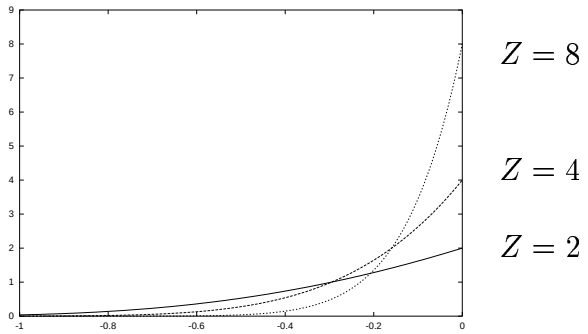


FIG. 3.4 – Comportement de la fonction $\phi_Z(\tau) = Z \exp\left(Z \dfrac{\tau}{1+k\tau}\right)$ pour $k = 0.5$, et pour différentes valeurs de Z.

Pour résoudre cette difficulté, on fixe l'une des bornes de l'intégrale (ici, $\theta(b)$) à -1. Cette approximation peut se justifier par des développements asymptotiques [9]. L'idée est de remarquer grâce à des estimations de $\theta(b)$ que, lorsque Z tend vers l'infini, l'intégrale

$$\int_{-1}^{\theta(b)} Z \exp\left(\frac{\tau}{Z^{-1}+\delta\tau}\right) d\tau$$

tend vers 0. Ces considérations conduisent à écrire l'approximation suivante :

$$\int_{\theta(b)}^{\theta(a)} \exp\left(\frac{\tau}{Z^{-1}+\delta\tau}\right) d\tau \simeq \int_{-1}^{\theta(\zeta)} \exp\left(\frac{\tau}{Z^{-1}+\delta\tau}\right) d\tau.$$

On obtient finalement la condition de saut :

$$[\theta'^2]_-^+ = 2Z \int_{-1}^{\theta(\zeta)} \exp\left(\frac{\tau}{Z^{-1}+\delta\tau}\right) d\tau. \tag{3.4}$$

Dans le cas de la solution "onde progressive" décrite précédemment, cette condition doit aussi être réalisée. Or, pour cette solution, on a $[\theta_s'^2]_-^+ = u^2$, d'où on tire l'égalité :

$$u^2 = 2Z \int_{-1}^{0} \exp\left(\frac{\tau}{Z^{-1}+\delta\tau}\right) d\tau,$$

u étant la vitesse normale de propagation du front.
Remarquons que, pour une petite perturbation de cette solution, $\theta(\zeta)$ reste voisin de zéro. En posant

$$F(\theta) = 2Z \int_{-1}^{\theta} \exp\left(\frac{\tau}{Z^{-1} + \delta\tau}\right) d\tau,$$

on peut donc écrire un développement limité de F au voisinage de zéro. F est bien dérivable, et sa dérivée en 0 vaut $F'(0) = 2Z$. Ainsi, la condition de saut devient au premier ordre

$$[\theta'^2]_-^+ = u^2 + 2Z\theta(\zeta). \tag{3.5}$$

Pour mener l'analyse de stabilité linéaire, on considère de petites perturbations de la solution stationnaire. On pose donc

$$\begin{aligned}
\zeta(t, x_1) &= ut + \xi(t, x_1) = ut + \varepsilon \exp(\omega t + ikx_1), && (3.6)\\
\theta(t, x_1, x_3) &= \theta_s(x_3 - ut) + \theta_j(z) \exp(\omega t + ikx_1), && (3.7)\\
v(t, x_1, x_3) &= v_s(x_3 - ut) + v_j(z) \exp(\omega t + ikx_1), && (3.8)\\
\alpha(t, x_1, x_3) &= \alpha_s(x_1, x_3 - \zeta(t, x_1)). && (3.9)
\end{aligned}$$

Ici, $z = x_3 - ut - \xi(t, x_1)$, et $j = 1$ ($j = 2$) correspond à la région $z < 0$ ($z > 0$). Les fonctions θ_j et v_j sont supposées petites (d'ordre ε). Remarquons que le taux de conversion α est directement lié à ζ, de sorte qu'on a bien de part et d'autre du front des liquides purs.

Avec ces notations, on a au premier ordre,

$$\theta(t, x_1, \zeta \pm 0) = \theta_s(\pm 0) + \xi\theta_s'(\pm 0) + \theta_j(\pm 0) \exp(\omega t + ikx_1),$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_3}(t, x_1, \zeta \pm 0) = \theta_s'(\pm 0) + \xi\theta_s''(\pm 0) + {\theta_j}'(\pm 0) \exp(\omega t + ikx_1).$$

Ces développements limités sont justifiés, bien que la fonction θ_s ne soit pas dérivable en zéro, parce qu'elle admet cependant des dérivées à gauche et à droite à tout ordre en 0. En négligeant les termes d'ordre 2, on obtient

$$\begin{aligned}
\theta_2(0) - \theta_1(0) &= \varepsilon u, && (3.10)\\
\theta_2'(0) - \theta_1'(0) &= -\varepsilon(\omega + u^2) + v_2(0), && (3.11)\\
u^2\varepsilon + \theta_2'(0) &= -\frac{Z}{u}\theta_1(0). && (3.12)
\end{aligned}$$

3.2. Conditions pour la vitesse

Les premières conditions

$$[v_3]_-^+ = \left[\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right]_-^+ = 0 \tag{3.13}$$

ont une forme habituelle. Elles découlent de la continuité de la vitesse à l'interface :

$$\begin{aligned} &v_1(x_1, \zeta(x_1,t) - 0) = v_1(x_1, \zeta(x_1,t) + 0), \text{ et} \\ &v_3(x_1, \zeta(x_1,t) - 0) = v_3(x_1, \zeta(x_1,t) + 0), \ \forall x_1. \end{aligned}$$

En dérivant la première égalité par rapport à x_1, on obtient

$$\left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right]_-^+ = 0.$$

Dans cette relation, le second terme est d'ordre 2, puisque pour l'onde progressive ζ ne dépend que de t et v_1 est nul. En négligeant ce terme, on obtient au premier ordre la relation de saut

$$\left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right]_-^+ = 0.$$

On utilise enfin l'incompressibilité du fluide

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0,$$

ce qui permet d'obtenir la deuxième partie de la condition (3.13).

La condition suivante provient de l'équilibre des contraintes tangentielles sur l'interface [3]. Dans l'approximation linéaire elle peut s'écrire sous la forme :

$$\left[\frac{P}{P_2}\left(-\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\right]_-^+ = M\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta}{\partial x_3}\zeta'\right). \tag{3.14}$$

Ici, M est un paramètre sans dimension défini par

$$M = -\frac{d\sigma}{dT}\frac{q}{c\rho\nu_2}, \tag{3.15}$$

où σ est le coefficient de tension de surface. On l'appelle le nombre de Marangoni frontal. Si nous définissons la largeur de la zone de préchauffage par $h = \kappa/c$, alors M prend la forme

$$M = -\frac{d\sigma}{dT}\frac{qh}{\kappa\rho\nu_2},$$

et coïncide avec le nombre de Marangoni usuel.

Dans l'approximation de la zone de réaction infiniment étroite, le gradient de température est discontinu à l'interface. Ainsi, dans l'équation (3.14), le dernier terme du membre de droite n'est pas défini. Rappelons que dans la zone de réaction

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_3} = -u(\theta + 1 - \alpha).$$

Si on suppose que la transition de phase se place pour un taux de conversion critique $\alpha = \alpha_c$ alors on peut déterminer le gradient de concentration à l'interface. Mais ceci rajoute un paramètre supplémentaire α_c, $0 \leqslant \alpha_c \leqslant 1$. Pour simplifier les calculs, nous posons $\alpha_c = 1$. Dans ce cas,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_3} = O(\varepsilon)$$

et le terme correspondant peut être négligé dans l'analyse de stabilité linéaire.

On différentie l'équation (3.14) par rapport à x_1 afin d'éliminer les dérivées en x_3 grâce à la relation d'incompressibilité (2.4). Les dérivées de P par rapport à x_1 sont d'ordre ε, et donnent donc des termes d'ordre 2. En les négligeant nous obtenons :

$$\left[\frac{P}{P_2}\left(-\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2}\right)\right]_-^+ = M\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2}. \tag{3.16}$$

Dans le cas où $v_3 = 0$ à l'interface, alors l'équation (3.16) prend la forme usuelle [21]. Cependant nous ne pouvons pas supposer a priori que cette condition est satisfaite.

Pour obtenir la dernière condition de saut à l'interface nous considérons le cas où l'interface a une largeur finie non nulle et nous passons à la limite lorsque cette largeur tend vers 0. Pour simplifier nous supposons que dans le cas d'une largeur non nulle, α est continue dans tout le domaine, et est deux fois dérivable dans la zone de mélange. (Par exemple, α peut être constant de part et d'autre de la zone de réaction, et être linéaire à l'intérieur de la zone de réaction.)

Supposons que $P(\alpha)$ est de classe C^2 en tant que fonction de α. Alors, $P(\alpha(x_3))$ est deux fois dérivable comme fonction de x_3 à l'intérieur de la zone de réaction. En négligeant les termes d'ordre élevé, l'équation (2.7) devient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + P\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3 \partial x_1}\right) + P'\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right), \\
\frac{\partial v_3}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x_3} + P\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2}\right) + 2P'\frac{\partial v_3}{\partial x_3},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

où $P' = \frac{\partial P}{\partial x_3}$. Appliquons deux fois le rotationnel pour éliminer le gradient de pression et les termes en v_1. On obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}\Delta v_3 = \quad & P\left(-\frac{\partial^4 v_3}{\partial x_3^4} - 2\frac{\partial^4 v_3}{\partial x_3^2 \partial x_1^2} - \frac{\partial^4 v_3}{\partial x_1^4}\right) + 2P'\left(-\frac{\partial^3 v_3}{\partial x_3^3} - \frac{\partial^3 v_3}{\partial x_1^2 \partial x_3}\right) \\ & + P''\left(-\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2}\right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

En cherchant v_3 sous la forme $v_3(x_1, x_3, t) = v(x_3 - ut)\exp(\omega t + ikx_1)$, on trouve enfin :

$$(Pv'')'' + k^2(P'v - 3Pv')' + uv''' + (Pk^2 - \omega)v'' - k^2uv' + k^2(Pk^2 + \omega)v = 0.$$

Supposons que $P(\alpha(x_3))$ soit C^1 sur tout le domaine. Ceci est vérifié par exemple si α est C^1, ou si α satisfait une condition de Lipschitz sur le bord de la zone de réaction, et si la dérivée de $P(\alpha)$ vérifie : $P'(\alpha)|_{\alpha=0} = P'(\alpha)|_{\alpha=1} = 0$. Intégrons l'égalité ci-dessus à travers la zone de réaction. Sachant que v'' est bornée, que P' est continue et nulle en dehors de la zone de réaction, on obtient à la limite lorsque sa largeur tend vers 0 :

$$\left[Pv''' - 3k^2Pv' + uv''\right]_-^+ = 0. \tag{3.19}$$

Pour une interface immobile ($u = 0$) cette condition de saut coïncide avec le résultat habituel [21]. Notons que si on ne suppose pas que P est deux fois dérivable alors d'autres conditions de saut apparaissent pour la vitesse [5]. Pour autant, cela ne signifie pas que le problème est surdéterminé. En effet, le problème (3.17) n'est pas équivalent au problème (3.18), et nous avons besoin de conditions supplémentaires pour déterminer les fonctions arbitraires qui apparaissent dans (3.18).

4. Analyse de stabilité linéaire

Nous obtenons le problème linéarisé suivant :

– $z < 0$ (polymère) :

$$\theta_1'' + u\theta_1' + (\omega - k^2)\theta_1 = 0, \tag{4.1}$$

$$\omega(v_1'' - k^2 v_1) = P_1(v_1'''' - 2k^2 v_1'' + k^4 v_1) + u(v_1''' - k^2 v_1') \tag{4.2}$$

– $z > 0$ (monomère) :

$$\theta_2'' + u\theta_2' + (\omega - k^2)\theta_2 = -uv_2 e^{-uz_2}, \tag{4.3}$$

$$\omega(v_2'' - k^2 v_2) = P_2(v_2'''' - 2k^2 v_2'' + k^4 v_2) + u(v_2''' - k^2 v_2') \tag{4.4}$$

– $z = 0$ (interface) :

$$\begin{aligned}
\theta_2(0) - \theta_1(0) &= \varepsilon u && (4.5)\\
\theta_2'(0) - \theta_1'(0) &= -\varepsilon(\omega + u^2) + v_1(0) && (4.6)\\
u^2\varepsilon + \theta_2'(0) &= -\frac{Z}{u}\theta_1(0) && (4.7)\\
v_1(0) &= v_2(0) && (4.8)\\
v_1'(0) &= v_2'(0) && (4.9)\\
P_2(v_2''(0) + k^2 v_2(0)) &= P_1(v_1''(0) + k^2 v_1(0)) + M P_2 k^2 \theta_1(0) && (4.10)\\
P_2 v_2'''(0) - 3k^2 P_2 v_2'(0) + u v_2''(0) &= P_1 v_1'''(0) - 3k^2 P_1 v_1'(0) + u v_1''(0) && (4.11)
\end{aligned}$$

On rappelle que les fonctions $\theta_1, \theta_2, v_1, v_2$ sont bornées en $\pm\infty$.

4.1. Stabilité cellulaire : théorie générale

Le but de cette étude est d'obtenir la frontière de stabilité "cellulaire" du front plan. On utilise ici une terminologie classique pour les problèmes de chimie et d'hydrodynamique. L'idée est la suivante :

En terme de système dynamique, le problème considéré peut s'écrire sous la forme très générale :

$$u_t = F_P(u), \tag{4.12}$$

où u est le vecteur désignant la solution dans l'espace des phases (ici, $u = (\theta, \alpha, v)$), P est un ensemble de paramètres (ici, les nombres de Prandtl P_1, P_2, le nombre de Marangoni...), et F_P est un champ de vecteurs dans l'espace des phases, dépendant de ces paramètres. L'indice t désigne la dérivation par rapport au temps. Notons u_s la solution stationnaire. Comme nous l'avons fait dans (3.6) - (3.8), cherchons des solutions de l'équation (4.12) sous la forme $u = u_s + U(x_2)\exp(\omega t + ikx_1)$, où $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$. On obtient au premier ordre le problème de valeurs propres :

$$\omega\, U \exp(ikx_1) = L_P(U \exp(ikx_1)),$$

où L_P est l'opérateur linéarisé :

$$L_P = F_P'(u_s).$$

Notons que les valeurs propres ω dépendent à la fois de k et de l'ensemble de paramètres P. Dans les cas simples, elles peuvent être données par une relation de dispersion qui s'écrit sous la forme

$$\omega = \alpha(k, P) + i\beta(k, P), \tag{4.13}$$

où α et β sont réels.

Remarquons que les perturbations considérées dépendent du temps de la façon suivante : si la partie réelle de ω est strictement négative, elles décroissent vers 0 avec le temps, si la partie réelle de ω est strictement positive, elles explosent.

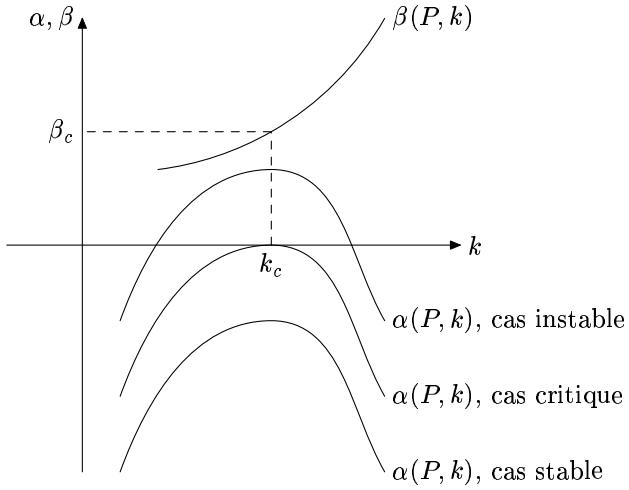


FIG. 3.5 – Frontière de stabilité : cas théorique. La relation de dispersion donne les parties réelle et imaginaire de la valeur propre ω en fonction de k. Souvent, la partie réelle α présente un maximum en fonction de k ; suivant le signe de ce maximum, la solution stationnaire est stable ou instable.

Très souvent, la fonction $\alpha(k, P)$ donnée par la relation de dispersion (4.13) présente un maximum (dépendant des paramètres P) en fonction de k. Si les paramètres sont tels que ce maximum est strictement positif, alors la solution stationnaire est instable ; si par contre il est strictement négatif, alors elle est stable. La frontière de stabilité correspond donc aux paramètres pour lesquels ce maximum est nul (voir Figure 4.1.).

Lorsque cette situation se produit, trois cas de figure sont possibles. Si la partie imaginaire $\beta(k_c) = \beta_c$ associée au maximum de $\alpha(k)$ est nulle, on parle d'instabilité cellulaire. On observe alors le développement de structures convectives spatiales régulières. Citons par exemple l'instabilité de Rayleigh-Bénard où, sous l'action de la convection naturelle, des rouleaux convectifs peuvent être observés dans une couche horizontale de fluide chauffée par dessous.

Si β_c est non nul, tandis que k_c est nul, alors on n'a pas de structure spatiale, mais des oscillations temporelles apparaissent : c'est le cas de la réaction de Belousov-Zhabotinsky en chimie. On parle alors d'instabilité oscillatoire. Enfin, si k_c et β_c sont non-nuls, l'instabilité se traduit par la propagation d'ondes.

4.2. En pratique

Dans le cas étudié ici, le nombre d'inconnues entrant en jeu est trop grand pour qu'on puisse écrire directement la relation de dispersion (4.13), et voir différents types d'instabilités. On s'intéresse donc uniquement à l'instabilité cellulaire, c'est-à-dire qu'on va chercher des paramètres critiques pour lesquels la partie imaginaire et la partie réelle de ω

s'annulent simultanément. La frontière de stabilité correspond alors au cas où le problème (4.1)-(4.11) a au moins une solution non triviale, avec $\omega = 0$.

Posons donc $\omega = 0$. Le système (4.1)-(4.4) peut alors être résolu explicitement. Les solutions qui restent bornées à l'infini prennent la forme :

$$\begin{aligned} v_1(z) &= c_1 e^{kz} + c_2 e^{\lambda_2 z}, z < 0, && (4.14)\\ \theta_1(z) &= c_3 e^{\mu_1 z}, z < 0, && (4.15)\\ v_2(z) &= c_4 e^{-kz} + c_5 e^{\lambda_4 z}, z > 0, && (4.16)\\ \theta_2(z) &= c_6 e^{\mu_2 z} + c_7 e^{-(k+u)z} + c_8 e^{(\lambda_4 - u)z}, z > 0. && (4.17) \end{aligned}$$

Ici,

$$\lambda_2 = \frac{-u}{2P_1} + \sqrt{\frac{u^2}{4P_1^2} + k^2}, \quad \lambda_4 = \frac{-u}{2P_2} - \sqrt{\frac{u^2}{4P_2^2} + k^2},$$

$$\mu_1 = \frac{-u}{2} + \sqrt{\frac{u^2}{4} + k^2}, \quad \mu_2 = \frac{-u}{2} - \sqrt{\frac{u^2}{4} + k^2},$$

c_7 et c_8 sont tels que

$$\theta_2(z) = c_7 e^{-(k+u)z} + c_8 e^{(\lambda_4 - u)z}$$

soit une solution particulière de l'équation (4.3), et $c_1, \cdots c_6$ sont des constantes à déterminer en fonction des conditions de saut.

Tout d'abord, en injectant (4.17) et (4.16) dans (4.3), c_6 disparaît et on obtient :

$$\begin{aligned} \theta_2'' + u\theta_2' - k^2\theta_2 &= c_7 k u e^{-(k+u)z} + c_8(\lambda_4^2 - \lambda_4 u - k^2)e^{(\lambda_4 - u)z}\\ &= c_7 k u e^{-(k+u)z} + c_8\left(\frac{-u\lambda_4}{P_2} - \lambda_4 u\right)e^{(\lambda_4 - u)z}\\ &= -u e^{-uz}(c_4 e^{-kz} + c_5 e^{\lambda_4 z}) \end{aligned}$$

Ainsi, on a les égalités :

$$c_7 = -\frac{c_4}{k}, \quad c_8 = \frac{c_5}{\lambda_4}\frac{P_2}{P_2 + 1}.$$

En substituant les solutions (4.14)-(4.17) dans (4.6)-(4.11), on obtient un système d'équations algébriques linéaires pour les constantes $c_1, \cdots c_8$:

$$\begin{aligned}
c_6 + c_7 + c_8 - c_3 &= \varepsilon u, \\
c_6\mu_2 - c_7(k+u) + c_8(\lambda_4 - u) - c_3\mu_1 &= -\varepsilon u^2 + c_1 + c_2, \\
c_6\mu_2 - c_7(k+u) + c_8(\lambda_4 - u) + u^2\varepsilon &= -Z/u\, c_3, \\
c_1 + c_2 &= c_4 + c_5 \\
c_1 k + c_2\lambda_2 &= -c_4 k + c_5\lambda_4 \\
-P_2(2c_4k^2 + c_5\lambda_4^2 + c_5k^2) + P_1(2c_1k^2 + c_2\lambda_2^2 + c_2k^2) &= -Mk^2c_3, \\
P_2(-c_4k^3 + c_5\lambda_4^3) + u(c_4k^2 + c_5\lambda_4^2) - 3k^2P_2(-c_4k + c_5\lambda_4) &= \\
P_1(c_1k^3 + c_2\lambda_2^3) + u(c_1k^2 + c_2\lambda_2^2) &- 3k^2P_1(c_1k + c_2\lambda_2).
\end{aligned}$$

On se ramène par substitution à un système d'inconnues c_4 et c_5. Des manipulations élémentaires sur le système précédent donnent :

$$c_3 = -\frac{c_1 + c_2}{\mu_1 + \frac{Z}{\mu}} = -\frac{c_4 + c_5}{\mu_1 + \frac{Z}{\mu}},$$

$$c_6 = \frac{c_5}{\lambda_4}\frac{P_2}{P_2 + 1} + \frac{c_4}{k} + \varepsilon u - \frac{c_4 + c_5}{\mu_1 + \frac{Z}{\mu}},$$

$$c_2 = \frac{-2c_4k + c_5(\lambda_4 - k)}{\lambda_2 - k},$$

et enfin,

$$c_1 = c_4 + c_5 - c_2 = c_4\frac{\lambda_2 + k}{\lambda_2 - k} + c_5\frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_2 - k}.$$

En injectant ces valeurs dans les deux dernières équations du système page 95, on obtient le système suivant de deux équations :

$$\begin{aligned}
&- P_2k^2c_4 - P_2(\lambda_4^2 + k^2)c_5 + 2P_1k^2\frac{\lambda_2 + k}{\lambda_2 - k}c_4 + 2P_1k^2\frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_2 - k}c_5 \\
&\qquad - P_1(k^2 + \lambda_2^2)\frac{2k}{\lambda_2 - k}c_4 + P_1(k^2 + \lambda_2^2)\frac{\lambda_4 - k}{\lambda_2 - k}c_5 = Mk^2\frac{c_4 + c_5}{\mu_1 + \frac{Z}{\mu}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-2P_1k^3 + uk^2)\left(\frac{\lambda_2 + k}{\lambda_2 - k}c_4 + \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_2 - k}c_5\right) \\
&\qquad - 2P_1k^2\lambda_2\left(\frac{-2k}{\lambda_2 - k}c_4 + \frac{\lambda_4 - k}{\lambda_2 - k}c_5\right) = (2P_2k^3 + uk^2)c_4 - 2P_2k^2\lambda_4c_5
\end{aligned}$$

Ce système admet des solutions non triviales c_4 et c_5 si et seulement si son déterminant est nul. Dans ce cas, on vérifie que $(c_1, \cdots c_8)$, déterminé grâce aux relations précédentes,

est solution du système page 95. Après quelques simplifications, la condition d'existence d'une solution non triviale prend la forme :

$$M = \left(\sqrt{u^2 + 4k^4} - u + \frac{2Z}{u}\right)\frac{H}{kP_2}, \tag{4.18}$$

où

$$H = \frac{(P_1 - P_2)[2k^2u + k(\lambda_4 - \lambda_2)u + (\lambda_4 + k)(\lambda_2 - k)(P_1(k - \lambda_2) - P_2(k + \lambda_4))]}{2(P_1 - P_2)(\lambda_4 + k)(\lambda_2 - k) + u(\lambda_4 - \lambda_2 + 2k)} + \frac{u^2(\lambda_4 - \lambda_2)}{2(P_1 - P_2)(\lambda_4 + k)(\lambda_2 - k) + u(\lambda_4 - \lambda_2 + 2k)}.$$

Notons M_{cr} le membre de droite de (4.18). Si M est supérieur à cette valeur critique donnée par (4.18) alors l'instabilité peut se produire, tandis que si $M < M_{cr}$ la solution stationnaire sera stable.

4.3. Etude de la valeur critique

On étudie la dépendance de M_{cr} par rapport aux paramètres dans deux cas limites : $P_1 = P_2$, et $P_1 \to +\infty$.

– Si $P_1 = P_2 = P$, alors

$$\lambda_2 = \frac{-u}{2P} + \sqrt{\frac{u^2}{4P^2} + k^2}, \quad \lambda_4 = \frac{-u}{2P} - \sqrt{\frac{u^2}{4P^2} + k^2},$$

et H a une forme relativement simple :

$$H = \frac{u\sqrt{\frac{u^2}{P^2} + 4k^2}}{\sqrt{\frac{u^2}{P^2} + 4k^2} - 2k}.$$

Remarquons que cette expression, et donc également la valeur critique M_{cr} sont positives.

– Si $P_1 \to +\infty$, alors

$$\begin{aligned} P_1(k - \lambda_2) &= P_1k + \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{u^2}{4} + P_1^2k^2} \\ &= P_1k + \frac{u}{2} - P_1k\left(1 + \frac{u^2}{8P_1^2k^2}\right) + o\left(\frac{1}{P_1}\right) \\ &= \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8P_1k} + o\left(\frac{1}{P_1}\right) \end{aligned}$$

et $H = \mathcal{N}/\mathcal{D}$ où

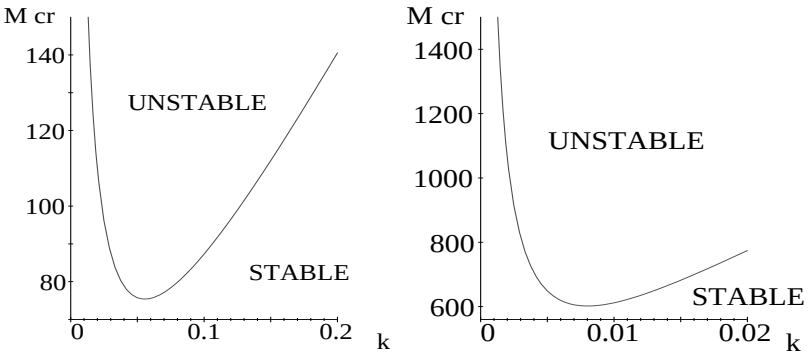
$$\mathcal{N} = P_1 k u(k+\lambda_4) + u^2(\lambda_4 - k) + o(P_1) \sim P_1 k(k+\lambda_4)u < 0,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= (\lambda_4+k)(2P_1(\lambda_2-k)+u) + (2P_2(\lambda_4+k)+u)(k-\lambda_2)\\ &= (\lambda_4+k)\frac{u^2}{4P_1k} + \frac{u}{2P_1}(2P_2(\lambda_4+k)+u) + o\left(\frac{1}{P_1}\right).\end{aligned}$$

Or $\lambda_4 + k < 0$ et $2P_2(\lambda_4+k)+u < 0$ donc $\mathcal{D} < 0$. Ainsi, $H \to +\infty$ as $P_1 \to +\infty$. Plus precisément, $H \sim \alpha P_1^2$.

Un autre problème intéressant est le comportement de M_{cr} quand $k \to 0$, P_1 et P_2 étant fixés. On remarque facilement que dans ce cas, $\lambda_2 \to 0$, $\lambda_4 \to -u/P_2$ de sorte que $H \to u \neq 0$. Ceci montre que M_{cr} tend vers l'infini lorsque $k \to 0$. On a aussi : M_{cr} tend vers l'infini lorsque $k \to +\infty$. Par conséquent, $M_{cr}(k)$ atteint un minimum pour une certaine valeur $k = k^*$.

Dans le cas général la frontière de stabilité ne peut pas être obtenue analytiquement, mais on peut observer numériquement que M_{cr} est toujours positif (voir Figure 3.6), ce qui est cohérent du point de vue physique, et prouve que la solution stationnaire peut perdre sa stabilité.

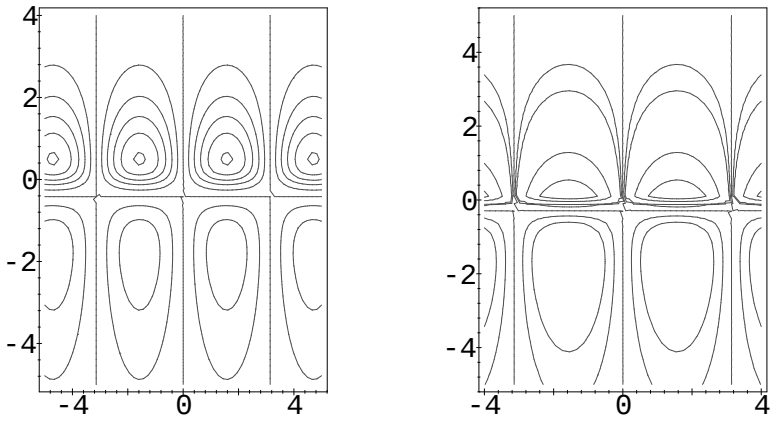


(a) (b)

FIG. 3.6 – M_{cr} en fonction du nombre d'ondes k pour $\nu_2 = 0.01$ cm^2/s, et (a) $\nu_1 = \nu_2$; (b) $\nu_1 = 10\,\nu_2$.

On calcule facilement la fonction de courant, ce qui permet de savoir comment se présente l'instabilité (voir Figure 3.7). L'ordonnée zéro représente l'interface, et on observe un fort tourbillon au-dessus de l'interface (dans le monomère), créé par cette instabilité. Remarquons que les lignes de courant intersectent l'interface, à cause de la

réaction chimique (le monomère se transforme en polymère). Soulignons que la Figure 3.7 représente le champ de vitesses dans des coordonnées attachées au front. On observe également un contre-tourbillon dans le polymère, induit par le tourbillon dans le monomère. Dans la Figure 3.7b, le polymère est plus visqueux, et les lignes de courant traversent plus difficilement l'interface. Elles sont aussi plus plates au voisinage de l'interface.



(a) (b)

FIG. 3.7 – Lignes de courant de la perturbation de vitesse. (a) $\nu_1 = \nu_2 = 0.01$ cm^2/s ; (b) $\nu_1 = 2\,\nu_2$, $\nu_2 = 0.01$ cm^2/s.

5. Comparaison avec des valeurs de paramètres expérimentales

Nous prenons des valeurs de paramètres correspondant à la polymérisation du benzylacrylate dans du diméthylformamide (voir [2]).

- Vitesse du front : $c = 0.6$ cm/min,
- Chaleur de la réaction : $q = 140$ K,
- Conductivité thermique : $\kappa = 6 \cdot 10^{-2}$ cm^2/min,
- Densité : $\rho = 1$ g/cm^3.

Il nous faut aussi estimer la dérivée de la tension de surface par rapport à la température. Mais d'une part nous ne connaissons pas de système expérimental pour lequel le monomère et le polymère correspondant soient totalement non miscibles, d'autre part même dans le cas de monomères et polymères miscibles nous n'avons pas d'estimation des dérivées en température, mais seulement des estimations de la tension de surface. Par contre, ces dérivées sont connues dans le cas du couple eau/air. Nous supposons donc

que le rapport entre les coefficients de tension de surface pour les systèmes eau/air et monomère/polymère sont du même ordre que les rapports de leurs dérivées par rapport à la température. Cette conjecture nous conduit à poser : $d\sigma/dT = -5.4$ g/(min^{2}K)=-1.5 mN/(m.K).

Nous faisons varier les paramètres ν_1 et ν_2, et nous trouvons les valeurs expérimentales M_{exp} grâce à la formule (3.15). Nous déterminons également pour chaque choix de viscosité le minimum de la fonction M_{cr} donnée par (4.18) et la valeur du nombre d'onde correspondant k^* (voir Tableau 3.1). Le nombre d'onde détermine la période spatiale d des structures convectives : $d = 2\pi/k$.

Cas	ν_2 (cm^2/min)	ν_1 (cm^2/min)	M_{exp}	min de M_{cr}	période (cm)
1	1.5	1.5	840	75	28.5
2	1.5	15	840	600	190.4
3	6	6	210	75	78.5
4	6	60	210	610	–

TAB. 3.1 – Comparaison des nombres de Marangoni experimentaux et critiques pour différentes viscosités : dans les cas 1, 2 et 3, l'instabilité est possible, et la période spatiale correspondante est indiquée.

On remarque que dans les cas 1 à 3, M_{exp} est supérieur au minimum de la valeur critique M_{cr}, et que l'instabilité peut se produire. Cependant la période d est trop grande pour observer cette instabilité expérimentalement, car cette période est supérieure aux diamètres des tubes expérimentaux.

Considérons plutôt les nombres d'onde correspondant à des diamètres de tube $d_a = 1.5$ cm et $d_b = 3$ cm, et calculons les valeurs correspondantes du nombre de Marangoni critique. Les nombres d'ondes correspondant aux diamètres d_a et d_b sont $k_a \simeq 0.42$ et $k_b \simeq 0.21$, respectivement. Les valeurs du nombre de Marangoni critique pour $k = k_a$ (respectivement $k = k_b$) valent 690 (respectivement 340) dans le cas 1, 21000 (respectivement 10500) dans le cas 2, et 2800 (resepctivement 1420) dans le cas 3. Donc pour $k = k_a$ ou $k = k_b$, l'instabilité ne peut être observée que dans le premier cas.

Si nous fixons $\nu_2 = 1.5$ cm^2/min, et $k = k_b$, alors l'instabilité peut être observée pour 1.5 cm^2/min $\leqslant \nu_1 \leqslant 3.18$ cm^2/min. (La viscosité maximale admissible pour le polymère est donc seulement un peu plus du double de la viscosité du monomère.) Pour $k = k_a$, cette condition devient : 1.5 cm^2/min $\leqslant \nu_1 \leqslant 1.8$ cm^2/min. Nous voyons que la viscosité du produit de la réaction doit être suffisamment proche de celle du monomère pour que l'instabilité soit observable. Ainsi, le poids moléculaire des chaines de polymère doit être très bas, ce qui peut être obtenu expérimentalement en ajoutant un agent de transfert de chaine [2].

6. Conclusions et discussion

Dans ce chapitre, nous étudions analytiquement la propagation de fronts de réactions exothermiques dans des liquides. Nous trouvons qu'un nouveau type d'instabilité peut apparaître comme résultat de l'interaction de la chimie et de l'hydrodynamique. Elle peut s'expliquer ainsi : supposons que l'état stationnaire est légèrement perturbé, et que la température augmente localement en un point du front. Ceci peut conduire à un mouvement convectif qui apporte du monomère frais dans la zone de réaction. Bien que ce monomère soit plus froid que le front, il accélère la réaction et augmente la production de chaleur, de sorte que la perturbation est amplifiée et que le processus peut conduire à une instabilité.

On trouve les conditions dans lesquelles cette instabilité apparaît. Elles peuvent s'écrire sous la forme : $M > M_{cr}(P_1, P_2, u, k)$, c'est-à-dire que le nombre de Marangoni frontal doit être supérieur à une valeur critique dépendant des nombres de Prandtl P_1 (polymère) et P_2 (monomère), de la vitesse du front u, et du nombre d'ondes de la perturbation k. Nous montrons que cette valeur critique a un minimum en tant que fonction de k.

Les conditions critiques de l'instabilité correspondent à des valeurs de paramètres réalistes, bien qu'il semble difficile de trouver un système expérimental approprié. En effet, dans la plupart des cas, l'instabilité ne peut être observée parce que le nombre d'ondes k est trop petit. Si nous faisons correspondre k avec les dimensions du tube, nous obtenons que l'instabilité peut être observée lorsque la viscosité du produit de la réaction est suffisamment proche de celle du monomère. Ceci est réalisable expérimentalement, mais le risque est d'augmenter la miscibilité des deux liquides, et dans ce cas le modèle ne convient plus.

Par ailleurs, nous avons supposé que les densités du monomère et du polymère sont égales, ce qui n'est pas tout à fait exact. Physiquement le polymère est toujours plus dense que le monomère.

Dans la section 5, nous avons évoqué la difficulté pour estimer la tension de surface et sa dérivée par rapport à la température.

Les valeurs que nous utilisons dans la section 5 correspondent à une polymérisation en solution. Dans le cas d'un système sans solvant, le dégagement de chaleur q est beaucoup plus important, de l'ordre de $q = 200\ K$. Ceci peut donc aider à observer l'instabilité.

Notons enfin que cette étude ne peut pas être réalisée expérimentalement dans des conditions de gravité usuelles, car la gravité peut engendrer des courants de convection d'amplitude supérieure à ceux qui sont dus à la tension de surface. Il est bien connu que dans le cas de fronts descendants existe l'instabilité de Rayleigh-Taylor et dans le cas de fronts ascendants, la convection naturelle, étudiée au Chapitre 2 (voir aussi [2, 14]). Ainsi, la microgravité est nécessaire pour l'étude expérimentale.

Références bibliographiques

[1] G. Bowden, *et al.*,J. Phys. Chem. B, **101**, 678 (1997).

[2] B. McCaughey, J. A. Pojman, C. Simmons and V.A. Volpert, *The effect of convection on a propagating front with a liquid product: Comparison of theory and experiments*, Chaos **8**, 520 (1998).

[3] S. H. Davis and G. M. Homsy, *Energy stability theory for free surface problems: buoyancy-thermocapillary layers*, J. Fluid Mech. **98**, 527–553 (1980).

[4] N. R. Demarquette, M. R. Kamal, *Interfacial Tension in Polymer Melts. I: An Improved Pendant Drop Apparatus*, Polym. Eng. Sci. **34**, 1823–1833 (1994).

[5] E. N. Ferm, D. J. Wolkind, *Onset of Rayleigh-Bénard-Marangoni Instability: Comparison between theory and experiment*, J. Non-Equilib. Thermodyn. **7** 169–190 (1981).

[6] M. Garbey, A. Ta¨ı k, and V. Volpert, *Linear stability analysis of reaction fronts in liquids*, Q. Appl. Math. **54**, 225–247 (1996).

[7] M. Garbey, A. Ta¨ı k, and V. Volpert, *Influence of natural convection on stability of reaction fronts in liquids*, Quart. Appl. Math. **56**, 1–35 (1998).

[8] H. Gramespacher, J. Meissner, *Interfacial tension between polymer melts measured by shear oscillations of their blends*, J. Rheol. **36**, 1127–1141 (1992).

[9] A. M. Il'in, S. I. Khudyaev, *on the Asymptotics of stationary combustion waves in condensed medium*, Khinicheskaya Fizika **8** (4), 525-532 (1989).

[10] V. M. Ilyashenko and J. A. Pojman, Chaos **8**, 285 (1998).

[11] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1987).

[12] B. J. Matkowsky and G. I. Sivashinsky, SIAM J. Appl. Math. **35**, 465–478 (1978).

[13] B. V. Novozhilov, *The rate of propagation of the front of an exothermic reaction in a condensed phase*, Dokl. Phys. Chem. **141**, 836–838, (1961).

[14] J. A. Pojman, V. M. Ilyashenko, and A. M. Khan, *Free-Radical Frontal Polymerization: Self-Propagating Thermal Reaction Waves*, J. Chem. Soc. Faraday Trans. **92**, 2825–2837 (1996).

[15] J. A. Pojman, A. M. Khan and L. J. Mathias, Microg. sci. technol. **X**, 36 (1997).

[16] F. Quirion, J. Pageau, *Interfacial Tension Between Low Molecular Weight Polymers from the Static Analysis of Cylindrical Drops and Their Break-up Dynamics*, J. Poly. Sci., Part B: Poly. Phys. **33**, 1867–1875 (1995).

[17] Vit. A. Volpert, Vl. A. Volpert, S. P. Davtyan, I.N. Megrabova, and N.F. Surkov, SIAM J. Appl. Math. **52**, 368–383 (1992).

[18] Vit. A. Volpert, Vl. A. Volpert, J. A. Pojman, and S. E. Solovyov, *Hydrodynamic stability of a polymerization front*, Euro. J. Appl. Math. (ISSN 0956–7925), **7**, 303–320 (1996).

[19] Ya. B. Zeldovich, G. I. Barenblatt, V. B. Librovich, and G. M. Makhviladze, *The Mathematical theory of combustion and explosion* (Consultants Bureau, New York, 1985).

[20] Ya. B. Zeldovich and D. A. Frank-Kamenetsky, *A theory of thermal propagation of flame*, Acta Physicochim. USSR **9**, 341–350 (1938).

[21] A. X. Zhao, C. Wagner, R. Narayanan, and R. Friedrich, *Bilayer Rayleigh-Marangoni convection: transitions in flow structures at the interface*, Proc. R. Soc. Lond., Ser. A **451**, 487–502, (1995).

Chapitre 4

Convection dans les liquides miscibles

Résumé. Nous consid´erons ici des interfaces diffuses entre liquides miscibles. Lorsque deux liquides miscibles sont mis en contact, ils diffusent imm´ediatement l'un dans l'autre. Si le coefficient de diffusion massique est suffisamment petit, les gradients de concentration restent forts pendant un certain temps, et on observe exp´erimentalement des ph´enom`enes analogues `a la tension superficielle (on parle de "tension de surface ´equivalente"). Ces ph´enom`enes tendent `a disparaître avec le temps `a cause de la diffusion. Nous proposons un mod`ele bas´e sur une id´ee de Korteweg, qui consiste `a ajouter une contrainte suppl´ementaire dans les ´equations de Navier-Stokes, pour tenir compte de l'h´et´erog´en´eit´e du milieu. Nous montrons un r´esultat d'existence et d'unicit´e globales en temps dans un rectangle. Puis nous pr´esentons des r´esultats num´eriques sur la simulation de ce mod`ele, dans le cas isotherme.

1. Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons étudié l'influence de la tension de surface sur la stabilité d'un front de réaction. Cependant la plupart des monomères et polymères sont miscibles. Pour certains systèmes, on peut observer des interfaces diffuses entre le monomère et le polymère, mais elles sont transitoires, les deux espèces finissant par diffuser l'une dans l'autre. Cela nous amène à l'étude des phénomènes capillaires dans des liquides miscibles.

Le modèle du chapitre 3 ne s'applique pas dans le cas des liquides miscibles. Pour autant, les phénomènes de type "tension de surface" peuvent exister pendant la durée où la zone de mélange reste mince, et où le gradient de concentration est important.

1.1. Aspects expérimentaux

Lorsqu'on verse de l'huile dans un verre d'eau, elle remonte à la surface, étant moins dense que l'eau. Si la quantité d'huile versée est asez importante, on voit assez vite les deux phases se séparer en couches superposées : les deux liquides ne sont pas miscibles. Mais si la quantité d'huile est faible, elle va simplement former une grosse goutte à la surface. Si on remue un peu, cette grosse goutte se scinde en une multitude de gouttelettes, couramment appelées "yeux". Ces gouttelettes prennent une forme circulaire, du fait de la tension de surface : le cercle réalise en effet un minimum de l'énergie associée à cette tension de surface.

Dans cette expérience très simple, deux phénomènes entrent en jeu : la gravité, qui fait remonter l'huile en surface, et la tension de surface. L'action de la gravité est en général prépondérante, mais la tension superficielle peut être non négligeable, dans le cas de couches minces (comme dans l'expérience ci-dessus) ou de domaines minces. C'est pourquoi les mises en évidence expérimentales de la tension de surface se font généralement dans des tubes capillaires, ou des cellules de Hele-Shaw, c'est-à-dire entre deux plaques verticales de plexiglas espacées de quelques millimètres seulement. On peut également, mais c'est plus compliqué et plus coûteux, mettre en évidence la tension de surface dans des conditions de microgravité réelle ou simulée.

Imaginons la même expérience que précédemment mais où l'huile est remplacée par de la glycérine (ou glycérol). Cette fois, les deux liquides sont miscibles, et vont donc diffuser l'un dans l'autre. Une zone de mélange se forme lentement entre l'eau et la glycérine. Si la diffusivité est assez faible, les gradients de concentration vont rester élevés pendant un certain temps, et on pourra parler d'une "interface diffuse", transitoire, entre l'eau et la glycérine. Peut-on observer des phénomènes analogues à la tension superficielle pour ces interfaces diffuses ?

On a vu que dans le cas de liquides non miscibles, l'interaction de la gravité oblige à prendre certaines précautions pour observer des phénomènes capillaires. A plus forte raison, si ce phénomène existe de façon transitoire pour des liquides miscibles, son observation ne doit pas être aisée. En 1997, Petitjeans et Kurowski ont mis en évidence dans le cas de liquides miscibles des instabilités similaires à celles induites par la tension superficielle pour des liquides non miscibles, [9]. Ils concluent qu'il doit exister une "tension superficielle équivalente" pour les fluides miscibles.

La mesure expérimentale de la tension de surface est possible grâce à une méthode proposée par Vonnegut pour des fluides non miscibles [13]. Reprenons l'exemple de l'eau et de l'huile ; l'idée consiste alors à introduire dans un tube d'eau une goutte d'huile. Quand on fait tourner le tube sur lui-même, on observe que la goutte s'allonge dans la direction de l'axe du tube, afin de minimiser l'énergie de rotation. D'un autre côté, la tension de surface a tendance à empêcher l'allongement de la goutte. Lorsque l'équilibre

entre ces deux forces est atteint, la dimension de la goutte donne une mesure de la tension de surface entre les deux liquides.

L'utilisation du tensiomètre à goutte tournante a été reprise par Petitjeans pour des fluides miscibles [8], permettant d'estimer les paramètres que nous utiliserons pour les simulations numériques (voir Section 4).

Notons par ailleurs que plusieurs travaux ont été consacrés à différents aspects de la tension superficielle équivalente [9, 4]. Cependant, nous n'avons pas connaissance de travaux sur des courants causés par des gradients de concentration ou de température, en l'absence de convection naturelle.

1.2. Modèles mathématiques

Bien que la mise en évidence expérimentale de cette tension équivalente soit très récente, des modèles d'interface diffuse ont été proposés depuis plus d'un siècle. Les motivations étaient toutefois différentes : il s'agissait principalement d'étudier des interfaces entre un liquide et sa vapeur.

Lorsque de l'eau liquide est en équilibre avec sa vapeur, une interface se crée entre les deux phases. Au voisinage du point critique, la frontière entre le liquide et la vapeur tend à disparaître, et on peut parler d'interface diffuse. Il est alors commode de considérer l'eau (liquide et vapeur) comme un seul fluide, avec des gradients de densité importants dans la région de l'interface diffuse. Ces gradients de densité peuvent conduire à l'apparition de courants convectifs.

En 1901, Korteweg a l'idée de modéliser ce phénomène en introduisant une contrainte supplémentaire dans les équations de Navier-Stokes : en plus des contraintes de pression et de viscosité, il ajoute un tenseur dont les composantes s'expriment en fonction des dérivées premières et secondes de la densité. Son approche est purement théorique, et la forme très générale proposée pour ce tenseur n'est guère utilisable en pratique [5]. Mais l'idée naît que les gradients de densité dans un fluide peuvent engendrer des forces, analogues à la tension de surface entre fluides non miscibles, mais qui décroissent avec le temps du fait de la diffusion.

En 1949, Zeldovich [15] s'intéresse à l'existence d'une tension interfaciale transitoire, et propose pour cette tension l'expression

$$\sigma = k\frac{[C]^2}{\delta}, \tag{1.1}$$

où $[C]$ est la variation de fraction massique à travers la zone de transition, et δ est la largeur de cette zone. Cette relation fut généralisée par Rousar et Nauman [10] à des systèmes loin de l'équilibre, pour des gradients de concentration linéaires.

En 1958, Cahn et Hilliard calculent, là encore avec une approche très théorique, la densité d'énergie libre d'un fluide non homogène. Ils obtiennent la relation suivante :

$$e = e_0 + k|\nabla\rho|^2,$$

où e_0 est la densité d'énergie d'un fluide homogène, k est un coefficient dont le signe n'est pas précisé, et ρ désigne la densité du fluide. Ils retrouvent dans ce cadre la relation (1.1) proposée par Zeldovich.

Le modèle que nous proposons dans la section 2 est obtenu à partir du modèle de Korteweg, en ne considérant que les dérivées d'ordre 1, et en particularisant les coefficients. Le choix de coefficients que nous proposons n'est pas arbitraire : il est en accord avec la théorie de Cahn-Hilliard.

Notons qu'au lieu des gradients de densité, nous considérons des gradients de concentration uniquement, les deux espèces étant supposées de même densité. Dans la section 2, nous présentons le modèle. Dans la section 3, nous montrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution dans un rectangle. Dans les sections 4 et 5, nous donnons des résultats numériques sur la simulation de ce modèle, d'abord pour des gouttes, puis pour des interfaces planes. Dans tout ce chapitre, la température est supposée constante.

2. Présentation du modèle

Considérons des fluides incompressibles, de même densité ρ, de même viscosité μ. On suppose que les flux de chaleur et de matière sont faibles. Sous ces hypothèses, les équations de conservation de la masse et du moment s'écrivent sous la forme suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \cdot \nabla C = d\,\Delta C, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\, u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\,\Delta u + \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\, T, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{div}\, u = 0. \tag{2.3}$$

Ici, u désigne la vitesse du fluide, p la pression, et d le coefficient de diffusion, supposé indépendant de C. Enfin, Δ désigne le laplacien et $T = (T_{ij})_{i,j=1,2}$ est le tenseur des contraintes de type Korteweg. Ce dernier peut s'écrire (voir [1])

$$T_{11} = k\left(\frac{\partial C}{\partial x_2}\right)^2, \quad T_{12} = T_{21} = -k\frac{\partial C}{\partial x_1}\frac{\partial C}{\partial x_2}, \quad T_{22} = k\left(\frac{\partial C}{\partial x_1}\right)^2,$$

où C désigne la fraction massique du premier liquide, et où k dépend du système et de la température. Soulignons que cette constante k est le facteur qui apparaît devant le terme en gradient carré dans la théorie de Cahn-Hilliard [2] ($e = e_0 + k|\nabla C|^2$). Nous pouvons l'estimer par des mesures expérimentales de tension de surface (voir section 4).

Nous allons considérer ce problème dans un domaine rectangulaire $\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[$, avec des conditions au bord de type Neumann pour la concentration et des conditions de non glissement du fluide pour la vitesse :

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad u_1 = u_2 = 0. \tag{2.4}$$

Ajoutons enfin les conditions initiales

$$C(x,0) = C_0(x); \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{2.5}$$

3. Existence et unicité

3.1. Formulation faible

Dans cette section, nous prenons $\rho = 1$ pour simplifier les écritures, et nous supposons que k est positif ou nul. Cette hypothèse est essentielle dans les estimations qui vont nous conduire à l'existence d'une solution. Nous allons introduire une formulation faible du problème (2.1)-(2.5).

Pour cela, supposons que C, u soit une solution régulière du problème, par exemple $C \in C^2(Q)$, $u \in (C^2(Q))^2$, où $Q = \Omega \times]0,T[$. Soient $B \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v \in \mathcal{D}(\Omega)^2$, avec $\operatorname{div} v = 0$. Ici, $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. On multiplie l'équation (2.1) par B, et (2.2) par v, et on intègre sur Ω. Après intégration par parties des termes en laplacien, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial C}{\partial t}, B\right) + d(\nabla C, \nabla B) + \left(\sum_{i=1}^{2} u_i D_i C, B\right) &= 0, \\
\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \nu(\nabla u, \nabla v) + \left(\sum_{i=1}^{2} u_i D_i u, v\right) - (\operatorname{div} T(C), v) &= 0,
\end{aligned}$$

où

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, 2,$$

et $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, ou dans $L^2(\Omega)^2$.

Pour écrire la formulation faible de ce problème, on définit d'abord les espaces suivants. Les espaces concernant la concentration sont ici notés avec un indice 1 :

$$V_1 = \left\{ C \in H^2(\Omega), \frac{\partial C}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad H_1 = H^1(\Omega),$$

et ceux concernant la vitesse avec un indice 2. On définit tout d'abord

$$\mathcal{V}_2 = \{u \in \mathcal{D}(\Omega)^2, \ \operatorname{div} u = 0\},$$

et on note V_2 et H_2 les adhérences de $\mathcal{V}_2$ respectivement dans $H_0^1(\Omega)^2$ et dans $L^2(\Omega)^2$. Ces espaces sont classiques dans la théorie des équations de Navier-Stokes, et on montre (voir par exemple [12]) que

$$V_2 = \left\{ u \in (H_0^1(\Omega))^2, \operatorname{div} u = 0 \right\}, \quad H_2 = \left\{ u \in (L^2(\Omega))^2, \operatorname{div} u = 0, \ u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Supposons donnés $(C_0, u_0) \in H_1 \times H_2$. La formulation faible consiste à :
Trouver

$$C \in L^2(0,T;V_1) \cap L^\infty(0,T;H_1),$$
$$u \in L^2(0,T;V_2) \cap L^\infty(0,T;H_2),$$

satisfaisant

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}, B\right) + d(\nabla C, \nabla B) + \left(\sum_{i=1}^{2} u_i D_i C, B\right) = 0, \forall B \in V_1, \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \nu(\nabla u, \nabla v) + \left\langle \sum_{i=1}^{2} u_i D_i u, v \right\rangle - \langle \operatorname{div} T(C), v\rangle = 0, \forall v \in V_2, \quad (3.2)$$

$$C(0,x) = C_0(x), \quad (3.3)$$

$$u(0,x) = u_0(x). \quad (3.4)$$

Ici, $<,>$ désigne le crochet de dualité V_2', V_2, où V_2' désigne le dual de V_2.

Vérifions que cette formulation faible a bien un sens.

– Les termes de convection

$$\left(\sum_{i=1}^{2} u_i D_i C, B\right), \quad \left\langle \sum_{i=1}^{2} u_i D_i u, v \right\rangle$$

sont bien définis, car en dimension 2, $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^4(\Omega)$. Plus précisément, pour ce qui concerne le terme $(\sum_{i=1}^{2} u_i D_i C, B)$:

$$u_i, D_i C \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^4(\Omega)),$$

donc $u_i D_i C \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Le terme considéré a donc un sens.
Le même raisonnement s'applique pour le terme $< \sum_{i=1}^{2} u_i D_i u, v >$.

– Quant au terme nouveau par rapport aux équations de Navier-Stokes,

$$< \operatorname{div} T(C), v >,$$

il a un sens lorsque $v \in V_2$. En effet, $\operatorname{div} T(C)$ est une somme de termes de la forme $\lambda D_i(D_j C D_k C)$, avec $i, j, k = 1, 2$, où λ est une constante dépendant de i, j, k.

$$\text{Si } C \in L^2(0,T;V_1), \text{ alors } D_j C, D_k C \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$

donc $D_j C D_k C \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ (en utilisant encore l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$). On en déduit que

$$\lambda D_i(D_j C D_k C) \in L^1(0,T;V_2'),$$

et comme $v \in V_2$, le produit a bien un sens dans la dualité V_2', V_2.

– Il reste à vérifier que les conditions initiales ont un sens. L'équation (3.1) peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt}(C,B) = \left(d\Delta C - \sum_{i=1}^{2} u_i D_i C, B \right).$$

Si $C \in L^2(0,T;V_1)$ et $u \in L^2(0,T;V_2)$ on a en particulier

$$\Delta C \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ et } \sum_{i=1}^{2} u_i D_i C \in L^1(0,T;L^2(\Omega)),$$

donc

$$\frac{dC}{dt} \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Ainsi, C est égale presque partout à une fonction continue de $[0,T]$ dans $L^2(\Omega)$. En particulier, $C(0)$ a donc un sens dans $L^2(\Omega)$.
De même, l'équation (3.2) peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt}(u,v) = \left\langle \nu\Delta u - \sum_{i=1}^{2} u_i D_i u + \text{ div } T(C), v \right\rangle.$$

Si $C \in L^2(0,T;V_1)$ et $u \in L^2(0,T;V_2)$ on a en particulier $\Delta u \in L^2(0,T;V_2')$, et il est classique dans la théorie des équations de Navier-Stokes que

$$\sum_{i=1}^{2} u_i D_i u \in L^1(0,T;V_2').$$

Enfin, comme nous venons de le voir,

$$\text{div } T(C) \in L^1(0,T;V_2'), \quad \text{donc } \frac{du}{dt} \in L^1(0,T;V_2').$$

Ainsi, u est égale presque partout à une fonction continue de $[0,T]$ dans V_2'. En particulier, $u(0)$ a donc un sens dans V_2'.

Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

THÉORÈME 3.1. – *Pour tout temps positif T, il existe un unique couple C, u, avec*

$$C \in L^2(0,T;V_1) \cap L^\infty(0,T;H_1),$$

$$u \in L^2(0,T;V_2) \cap L^\infty(0,T;H_2),$$

solution du système (3.1)-(3.4). De plus, u est égale presque partout à une fonction continue de $[0,T]$ dans H_2, et C, ∇C sont égales presque partout à des fonctions continues de $[0,T]$ dans L^2.

La démonstration de l'existence repose sur des estimations a priori et sur la méthode de Faedo-Galerkin. Cette approche est classique pour les problèmes paraboliques, et en particulier les équations de Navier-Stokes (voir par exemple [7, 11, 12]). Elle consiste en plusieurs étapes :

- Introduction d'un problème approché en dimension finie,
- Obtention d'estimations a priori sur les solutions du problème approché,
- Passage à la limite,
- Démonstration de l'unicité.

3.2. Introduction d'un problème approché de dimension finie.

On introduit $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de V_1 formée des fonctions propres de l'opérateur $-\Delta$ associé aux conditions aux limites de Neumann :

$$-\Delta B_m = \lambda_m B_m, \quad \frac{\partial B_m}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Soit (v_m) une base hilbertienne de V_2. Notons encore E_m et F_m les sous-espaces vectoriels engendrés par les m premiers vecteurs de ces bases hilbertiennes,

$$E_m = [B_1, \cdots, B_m], \quad F_m = [v_1, \cdots, v_m].$$

Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, cherchons les solutions maximales $C_m, u_m : [0, T_m[\to E_m \times F_m$, du problème

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial t}, B_j\right) + d(\nabla C_m, \nabla B_j) + \left(\sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i C_m, B_j\right) = 0, \ 1 \leqslant j \leqslant m, \quad (3.5)$$

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}, v_j\right) + \nu(\nabla u_m, \nabla v_j) + \left\langle \sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i u_m, v_j \right\rangle - < \operatorname{div} T(C_m), v_j > = 0, \ 1 \leqslant j \leqslant m, \quad (3.6)$$

$$C_m(0,x) = C_{0m}(x), \quad (3.7)$$

$$u_m(0,x) = u_{0m}(x), \quad (3.8)$$

où C_{0m} et u_{0m} sont les projections orthogonales de C_0 et u_0 sur E_m et F_m respectivement.

On peut chercher C_m, u_m sous la forme

$$C_m = \sum_{j=1}^{m} \phi_{j,m}(t) B_j, \quad u_m = \sum_{j=1}^{m} \psi_{j,m}(t) v_j,$$

où $\phi_m = (\phi_{j,m}(t))_{1\leqslant j\leqslant m}$ et $\psi_m = (\psi_{j,m}(t))_{1\leqslant j\leqslant m}$ sont solutions du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B_1}\phi_m'(t) + d\mathbf{B_2}\phi_m(t) + a_1(\psi_m, \phi_m) &= 0 && (3.9)\\
\mathbf{U_1}\psi_m'(t) + d\mathbf{U_2}\psi_m(t) + a_2(\psi_m, \psi_m) + a_3(\phi_m, \phi_m) &= 0 && (3.10)\\
\phi_m(0) &= \phi_{0m} && (3.11)\\
\psi_m(0) &= \psi_{0m}. && (3.12)
\end{aligned}$$

Ici, $\mathbf{B_1}$ et $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{U_1}$ et $\mathbf{U_2}$ sont les matrices carrées d'ordre m définies par

$$\mathbf{B_1} = ((B_i, B_j))_{i,j=1,\cdots m}, \quad \mathbf{B_2} = ((\nabla B_i, \nabla B_j))_{i,j=1,\cdots m},$$

$$\mathbf{U_1} = ((v_i, v_j))_{i,j=1,\cdots m}, \quad \mathbf{U_2} = ((\nabla v_i, \nabla v_j))_{i,j=1,\cdots m},$$

et a_1, a_2, a_3 sont des fonctions bilinéaires de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ de composantes

$$a_{1,k}(\psi, \phi) = \left(\sum_{i=1,m} \psi_i v_i \cdot \sum_{j=1}^{m} \phi_j \nabla B_j, B_k \right),$$

$$a_{2,k}(\psi, \phi) = \left(\sum_{i=1,m} \psi_i v_i \cdot \sum_{j=1}^{m} \phi_j \nabla v_j, v_k \right),$$

et

$$a_{3,k}(\phi, \psi) = -\sum_{r,s=1}^{2} b_{rs}(\phi, \psi) \frac{\partial v_{kr}}{\partial x_s}.$$

Ici, $b_{11}, b_{12} = b_{21}, b_{22}$ désignent les formes bilinéaires associées à $T(C)$:

$$b_{11}(\phi, \psi) = k \sum_{i,j=1}^{m} \phi_{i,m}\psi_{j,m} \frac{\partial B_i}{\partial x_2}\frac{\partial B_j}{\partial x_2},$$

$$b_{12}(\phi, \psi) = b_{21}(\phi, \psi) = -k \sum_{i,j=1}^{m} \phi_{i,m}\psi_{j,m} \frac{\partial B_i}{\partial x_1}\frac{\partial B_j}{\partial x_2},$$

$$b_{22}(\phi, \psi) = k \sum_{i,j=1}^{m} \phi_{i,m}\psi_{j,m} \frac{\partial B_i}{\partial x_1}\frac{\partial B_j}{\partial x_1}.$$

Remarquons que les matrices $\mathbf{B_1}$ et $\mathbf{U_1}$ sont inversibles par construction. Ainsi, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution (ϕ_m, ψ_m) sur un intervalle maximal $[0, T_m[$. De plus, on a soit $T_m = +\infty$, et les solutions sont globales, soit T_m est fini, et nécessairement,

$$\lim_{t \to T_m} (\|\phi_m(t)\| + \|\psi_m(t)\|) = +\infty,$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^m$.

3.3. Estimations a priori indépendantes de m.

On se propose maintenant d'obtenir des estimations a priori indépendantes de m. Elles permettront d'abord de montrer que les solutions maximales ci-dessus sont globales, puis de passer à la limite quand m tend vers $+\infty$.

Un remarque cruciale (Kostin, [6]) pour obtenir les estimations a priori consiste à établir l'identité :

$$\operatorname{div} T(C) = \frac{k}{2}\nabla|\nabla C|^2 - k\Delta C\nabla C. \tag{3.13}$$

En effet, div $T(C)$ est le vecteur de composantes

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{22}}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} &= k\frac{\partial}{\partial x_1}\left((\frac{\partial C}{\partial x_2})^2\right) - k\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2}\frac{\partial C}{\partial x_1} - k\frac{\partial^2 C}{\partial x_2 \partial x_1}\frac{\partial C}{\partial x_2} \\ &= \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(|\nabla C|^2\right) - \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left((\frac{\partial C}{\partial x_1})^2\right) + \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left((\frac{\partial C}{\partial x_2})^2\right) \\ &\qquad -k\Delta C\frac{\partial C}{\partial x_1} + k\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2}\frac{\partial C}{\partial x_1} - k\frac{\partial^2 C}{\partial x_2 \partial x_1}\frac{\partial C}{\partial x_2} \\ &= \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(|\nabla C|^2\right) - k\Delta C\frac{\partial C}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

On procède de même pour la deuxième composante.

Désormais, la notation $|\cdot|$ désigne la norme dans $L^2(\Omega)$ ou dans $(L^2(\Omega))^2$. Nous allons maintenant chercher à obtenir des estimations des solutions approchées.

Tout d'abord, en multipliant chaque équation (3.5) par $\phi_{jm}(t)$, et en sommant de $j = 1$ à m, on obtient l'égalité

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|C_m|^2 + d|\nabla C_m|^2 = 0. \tag{3.14}$$

En effet, grâce à la relation d'incompressibilité (div $u_m = 0$) et à la condition au bord

($u_m = 0$) on a :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i C_m, C_m\right) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i C_m \, C_m \, dx \\
&= -\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} D_i(u_{mi} C_m) \, C_m \, dx \\
&= -\int_\Omega C_m^2 \text{ div } u_m \, dx - \left(\sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i C_m, C_m\right) \\
&= -\left(\sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i C_m, C_m\right) = 0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, grâce au choix de la base (B_m), il apparaît que $-k\Delta C_m$ appartient à l'espace E_m. En particulier, en multipliant chaque équation (3.5), $1 \leqslant j \leqslant m$, par $k\lambda_j \phi_{jm}(t)$, et en sommant de $j = 1$ à m, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(k|\nabla C_m|^2\right) + dk|\Delta C_m|^2 - k\left\langle \sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i C_m, \Delta C_m \right\rangle = 0. \tag{3.15}$$

De même, en multipliant chaque équation (3.6) par $\psi_{jm(t)}$, et en les sommant on obtient

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}, u_m\right) + \nu|\nabla u_m|^2 + \sum_{i=1}^{2}(u_{mi} D_i u_m, u_m) - < \text{ div } T(C_m), u_m > = 0.$$

Comme précédemment, le terme

$$\sum_{i=1}^{2}(u_{mi} D_i u_m, u_m)$$

est nul grâce à la relation d'incompressibilité. Quant au dernier terme, il devient grâce à (3.13) :

$$- < \text{ div } T(C_m), u_m > = -\frac{k}{2} < \nabla|\nabla C_m|^2, u_m > + k < \Delta C_m \nabla C_m, u_m > .$$

Après intégration par parties, il vient :

$$< \nabla|\nabla C_m|^2, u_m > = - < |\nabla C_m|^2, \text{ div } u_m > = 0.$$

(Le terme de bord s'annule car u_m est nul sur le bord.) On obtient ainsi l'égalité :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u_m|^2\right) + \nu|\nabla u_m|^2 + k\left\langle \sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i C_m, \Delta C_m \right\rangle = 0. \tag{3.16}$$

En sommant (3.15) et (3.16), les derniers termes s'annulent, et on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(k|\nabla C_m|^2 + |u_m|^2\right) + dk|\Delta C_m|^2 + \nu|\nabla u_m|^2 = 0. \tag{3.17}$$

Il résulte de l'intégration de (3.14) l'estimation suivante

$$|C_m(t)|^2 \leqslant |C_m(0)|^2 \leqslant |C_0|^2.$$

Ensuite, (3.17) donne par intégration entre 0 et t

$$\begin{aligned} k|\nabla C_m(t)|^2 \ + \ |u_m(t)|^2 \ + \ 2dk\int_0^t |\Delta C_m(\tau)|^2 d\tau \ &+ \ 2\nu\int_0^t |\nabla u_m(\tau)|^2 d\tau \\ &= \ k|\nabla C_m(0)|^2 + |u_m(0)|^2 \\ &= \ k|\nabla C_{0m}|^2 + |u_{0m}|^2 \\ &\leqslant \ k\|C_0\|_{H_1}^2 + \|u_0\|_{H_2}^2. \end{aligned}$$

On a donc en particulier

$$k|\nabla C_m(t)|^2 + |u_m(t)|^2 \leqslant k\|C_0\|_{H_1}^2 + \|u_0\|_{H_2}^2,$$

$$2kd\int_0^t |\Delta C_m(\tau)|^2 d\tau \leqslant k\|C_0\|_{H_1}^2 + \|u_0\|_{H_2}^2,$$

et

$$2\nu\int_0^t |\nabla u_m(\tau)|^2 d\tau \leqslant k\|C_0\|_{H_1}^2 + \|u_0\|_{H_2}^2.$$

En revenant au système différentiel (3.9)-(3.12) satisfait par les coordonnées, il résulte de ces estimations qu'il ne peut pas y avoir explosion en temps fini des solutions. Celles-ci sont donc globales en temps et définies sur $[0, T]$, pour tout $T > 0$.

Les estimations ci-dessus montrent de plus que

(C_m) est bornée indépendamment de m dans $L^\infty(0, T; H_1) \cap L^2(0, T; V_1)$,

(u_m) est bornée indépendamment de m dans $L^\infty(0, T; H_2) \cap L^2(0, T; V_2)$.

Pour étudier le passage à la limite $m \to +\infty$, il est maintenant essentiel d'obtenir des estimations sur les dérivées en temps,

$$u_m' = \frac{d\,u_m}{dt}, \quad C_m' = \frac{d\,C_m}{dt}.$$

Vérifions d'abord que u'_m est bornée dans $L^2(0,T;V'_2)$. Pour cela, notons P_m le projecteur de V_2 sur F_m défini par

$$P_m v = \sum_{j=1}^{m} < v, v_j > v_j.$$

L'équation de u_m se ré-écrit :

$$u'_m - \nu P_m(\Delta u_m) + P_m\left(\sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i u_m\right) - P_m(\text{ div } T(C_m)) = 0. \tag{3.18}$$

Vérifions que

$$\Delta u_m, \quad \sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i u_m, \quad \text{div } T(C_m)$$

sont bornés (indépendamment de m) dans $L^2(0,T;V'_2)$. On sait que u_m est bornée dans $L^\infty(0,T;H_2) \cap L^2(0,T;V_2)$. Il en résulte aisément que Δu_m est bornée dans $L^2(0,T;V'_2)$. C'est le cas aussi pour le terme $u_{mi} D_i u_m$, classique dans les équations de Navier-Stokes. Etudions donc plus en détail le terme nouveau div $T(C_m)$. Remarquons premièrement que pour $v \in V_2$,

$$\langle D_i(D_j C_m D_k C_m), v\rangle = -\left(D_j C_m D_k C_m, D_i v\right),$$

où le second membre est un produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|D_i(D_j C_m D_k C_m)\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \|D_j C_m D_k C_m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \|D_j C_m\|_{L^4(\Omega)} \|D_k C_m\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leqslant \sqrt{2}|D_j C_m|^{\frac{1}{2}} |D_k C_m|^{\frac{1}{2}} \|D_j C_m\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)} \|D_k C_m\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

On utilise ici le résultat classique d'interpolation suivant (voir par exemple [12]) :

LEMME 3.2. – *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Alors, pour toute fonction $v \in H^1_0(\Omega)$,*

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leqslant 2^{\frac{1}{4}} |v|^{\frac{1}{2}} |\nabla v|^{\frac{1}{2}}.$$

Revenant à (3.19), les deux premiers facteurs du membre de droite sont bornés indépendamment de m dans $L^\infty(0,T)$, et les deux autres le sont dans $L^4(0,T)$. Donc le produit est borné dans $L^2(0,T)$. Ainsi, div $T(C_m)$ est bien bornée indépendamment de m dans l'espace $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Enfin, revenant à (3.18), il reste à montrer que la composition par P_m conserve les bornes dans V_2'. Pour cela, on remarque que, par construction,

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V_2,V_2)} \leqslant 1.$$

Par ailleurs, P_m est auto-adjoint, donc par transposition on obtient

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V_2',V_2')} \leqslant 1.$$

On obtient ainsi le résultat voulu : u_m' est bornée dans $L^2(0,T;V_2')$.

Montrons de même que C_m' est bornée dans $L^2(0,T;V_1')$. Notons Q_m le projecteur de $H_0^1(\Omega)$ sur E_m défini par

$$Q_m B = \sum_{j=1}^{m} < B, B_j > B_j.$$

L'équation de C_m devient :

$$C_m' - dQ_m(\Delta C_m) + Q_m \left(\sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i C_m \right) = 0.$$

Des arguments similaires à ceux ci-dessus permettent aisément de conclure que

$$\sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i C_m, \quad \Delta C_m$$

sont bornés (indépendamment de m) dans $L^2(0,T;L^2)$. De plus, on a, comme précédemment,

$$\|Q_m\|_{\mathcal{L}(V_1,V_1)} \leqslant 1,$$

avec Q_m auto-adjoint, donc par transposition on obtient

$$\|Q_m\|_{\mathcal{L}(V_1',V_1')} \leqslant 1.$$

On obtient ainsi le résultat voulu : C_m' est bornée dans $L^2(0,T;V_1')$.

3.4. Passage à la limite quand $m \to +\infty$

On utilise maintenant le résultat de compacité suivant (voir par exemple [7]) :

THÉORÈME 3.3. – *Soient B_0, B, B_1 trois espaces de Banach, avec $B_0 \subset B \subset B_1$, B_0 et B_1 étant réflexifs. Supposons que l'injection de B_0 dans B est compacte. Soit*

$$W = \{v \in L^{p_0}(0,T;B_0), v' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

avec $1 < p_i < +\infty$, $i = 0, 1$. Alors $W \subset L^{p_0}(0,T;B)$ et l'injection est compacte.

Appliquons ce théorème avec

$$W_1 = \{B \in L^2(0,T;V_1), B' \in L^2(0,T;V_1')\},$$

$$W_2 = \{u \in L^2(0,T;V_2), u' \in L^2(0,T;V_2')\}.$$

Alors W_1 (respectivement W_2) s'injecte dans $L^2(0,T;H^1)$ (respectivement $L^2(0,T;(L^2)^2)$) et l'injection est compacte.

On en déduit qu'on peut extraire de (C_m) et (u_m) des sous-suites (encore notées C_m, u_m) telles que les convergences suivantes aient lieu :

$C_m \to C$	dans $L^2(0,T;V_1)$ faible,
$C_m \to C$	dans $L^\infty(0,T;H_1)$ faible-*,
$C_m' \to C'$	dans $L^2(0,T;V_1')$ faible,
$C_m \to C$	dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ fort et presque partout,
$\nabla C_m \to \nabla C$	presque partout,

et

$u_m \to u$	dans $L^2(0,T;V_2)$ faible,
$u_m \to u$	dans $L^\infty(0,T;H_2)$ faible-*,
$u_m' \to u'$	dans $L^2(0,T;V_2')$ faible,
$u_m \to u$	dans $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$ fort et presque partout.

Passons maintenant à la limite dans l'équation de C_m. Soit $\psi \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ telle que $\psi(T) = 0$. On a

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial C_m}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i C_m, \psi(t) B_j \right) + d(\nabla C_m, \psi(t) \nabla B_j) \right] dt = 0. \tag{3.20}$$

– La convergence des termes linéaires est immédiate. Par exemple,

$$C_m' \to C' \text{ dans } L^2(0,T;V_1') \text{ faible}$$

implique que

$$\int_0^T \left(\frac{\partial C_m}{\partial t}, \psi(t) B_j \right) dt \to \int_0^T \left(\frac{\partial C}{\partial t}, \psi(t) B_j \right) dt$$

quand m tend vers $+\infty$. De même, $C_m \to C$ dans $L^2(0,T;H^1)$ fort implique que

$$\int_0^T d(\nabla C_m, \psi(t) \nabla B_j) dt \to \int_0^T d(\nabla C, \psi(t) \nabla B_j) dt.$$

– Par ailleurs, on a vu que $C_m \to C$ dans $L^2(0,T;H^1)$ fort donc dans $L^2(0,T;L^4)$ fort ; et de même $u_m \to u$ dans $L^2(0,T;V_2)$ faible donc dans $L^2(0,T;L^4)$ faible. Notons $Q =]0,T[\times\Omega$. Par intégration par parties, et en utilisant la relation div $u_m = 0$, on a :

$$\int_0^T \left(\sum_{i=1}^2 u_{mi} D_i C_m, \psi(t) B_j \right) dt = -\int_Q C_m \sum_{i=1}^2 u_{mi} \psi(t) D_i B_j \, dx \, dt$$

Le membre de droite tend, quand m tend vers $+\infty$, vers

$$-\int_Q C \sum_{i=1}^2 u_i \psi(t) D_i B_j \, dx \, dt.$$

En effet, notons I_m la différence :

$$\begin{aligned} |I_m| &= \left| \int_Q C \sum_{i=1}^2 u_i \psi(t) D_i B_j \, dx \, dt - \int_Q C_m \sum_{i=1}^2 u_{mi} \psi(t) D_i B_j \, dx \, dt \right| \\ &\leqslant \left| \int_Q (C - C_m) \sum_{i=1}^2 u_{mi} \psi(t) D_i B_j \, dx \, dt \right| + \left| \int_Q C \sum_{i=1}^2 (u_i - u_{mi}) \psi(t) D_i B_j \, dx \, dt \right| \end{aligned}$$

Le premier terme I_m^1 se majore par

$$\begin{aligned} I_m^1 &\leqslant \int_0^T \left(\int_\Omega (C - C_m)^4 \, dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_\Omega u_m^4 \, dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_\Omega (\nabla B_j)^2 \psi(t)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt, \\ &\leqslant \left[\int_0^T \|C - C_m\|^2_{L^4(\Omega)} dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T \|u_m\|^2_{L^4(\Omega)} dt \right]^{\frac{1}{2}} \sup_{t \in [0,T]} |\psi(t)| \|\nabla B_j\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|C - C_m\|_{L^2(0,T;L^4)} \, \|u_m\|_{L^2(0,T;L^4)} \, \|\psi(t) \nabla B_j\|_{L^\infty(0,T;L^2)}. \end{aligned}$$

Le premier facteur tend vers 0 et les autres sont bornés, donc I_m^1 tend vers 0.
Quant au deuxième terme, on remarque que

$$C \in L^2(0,T;L^4(\Omega)) \text{ et } \psi(t) D_i B_j \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

et donc on a

$$C \psi(t) D_i B_j \in L^2(0,T;L^{4/3}(\Omega)).$$

Il en résulte que

$$\int_Q C \sum_{i=1}^2 (u_i - u_{mi}) \psi(t) D_i B_j \, dx \, dt = \langle u - u_m, C \psi(t) \nabla B_j \rangle_{L^2(0,T;L^4(\Omega)), L^2(0,T;L^{4/3}(\Omega))},$$

qui tend vers 0 d'après la convergence faible $L^2(0,T;L^4)$ des u_m. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(\sum_{i=1}^2 u_{mi} D_i C_m, \psi(t) B_j\right) dt \quad &\longrightarrow \quad -\int_Q C \sum_{i=1}^2 u_i \psi(t) D_i B_j \, dx \, dt \\ &= \quad \int_0^T \left(\sum_{i=1}^2 u_i D_i C, \psi(t) B_j\right) dt.\end{aligned}$$

Par linéarité et densité, on obtient

$$\int_0^T \left(\frac{\partial C}{\partial t} - d\Delta C + \sum_{i=1}^2 u_i D_i C, \psi(t) B\right) dt = 0, \quad \forall B \in V_1 \tag{3.21}$$

donc C satisfait l'égalité

$$\frac{\partial C}{\partial t} - d\Delta C + \sum_{i=1}^2 u_i D_i C = 0$$

au sens des distributions.

Reste à vérifier la condition initiale pour C. L'égalité (3.21) donne par intégration par parties, $\forall B \in V_1$:

$$-\int_0^T (C, B\psi'(t))dt - (C(0), B)\psi(0) + \int_0^T \left(-d\Delta C + \sum_{i=1}^2 u_i D_i C, \psi(t) B\right) dt = 0.$$

Par ailleurs, (3.20) donne de même pour $1 \leqslant j \leqslant m$,

$$\begin{aligned}-\int_0^T (C_m, B_j\psi'(t))dt - (C_m(0), B_j)\psi(0) \\ + \int_0^T \left(-d\Delta C_m + \sum_{i=1}^2 u_{mi} D_i C_m, \psi(t) B_j\right) dt = 0,\end{aligned}$$

où $C_m(0) = C_{0m} \to C_0$ quand $m \to +\infty$. On obtient donc par passage à la limite

$$\begin{aligned}-\int_0^T (C, B_j\psi'(t))dt - (C_0, B_j)\psi(0) \\ \int_0^T \left(-d\Delta C + \sum_{i=1}^2 u_i D_i C, \psi(t) B_j\right) dt = 0, \quad j \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Il en résulte que $C(0) = C_0$ presque partout.

Etudions maintenant le passage à la limite dans l'équation de u_m. On procède de la même manière : pour toute fonction $\psi \in C^1([0,T],\mathbb{R})$, avec $\psi(T)=0$, on a :

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u_m}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i u_m - \text{ div } T(C_m), \psi(t) v_j \right\rangle + \nu(\nabla u_m, \psi(t)\nabla v_j)\, dt = 0. \quad (3.22)$$

– Comme pour l'équation en C, la convergence des termes linéaires est immédiate. Ainsi, la convergence dans $L^2(0,T;V_1')$ faible de u_m' vers u', respectivement la convergence dans $L^2(0,T;H_2)$ faible de u_m, donne la convergence des termes

$$\int_0^T \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}, v\right) dt, \qquad \text{respectivement } \int_0^T \nu(\nabla u_m, \psi(t)\nabla v_j)\, dt.$$

– La convergence du terme

$$\int_0^T \left\langle \sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i u_m, \psi(t) v_j \right\rangle dt$$

s'obtient comme précédemment par application de la formule de Stokes :

$$\int_0^T \left\langle \sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i u_m, \psi(t) v_j \right\rangle dt = -\int_Q \sum_{i=1}^{2} u_{mi}\psi(t) u_m \cdot D_i v_j\, dx\, dt$$

Montrons que cette expression tend, quand m tend vers $+\infty$, vers

$$-\int_Q \sum_{i=1}^{2} u_i \psi(t) u \cdot D_i v_j\, dx\, dt.$$

Pour cela, notons J_m la différence, alors

$$|J_m| = \left| \int_Q \sum_{i=1}^{2} (u_{mi}u_m - u_i u)\psi(t) \cdot D_i v_j\, dx\, dt \right| \leqslant J_m^1 + J_m^2,$$

où

$$\begin{aligned} J_m^1 &= \left| \int_Q \sum_{i=1}^{2} (u_{mi} - u_i) u_m \psi(t) \cdot D_i v_j\, dx\, dt \right|, \\ J_m^2 &= \left| \int_Q \sum_{i=1}^{2} u_i (u_m - u) \psi(t) \cdot D_i v_j\, dx\, dt \right|. \end{aligned}$$

La convergence faible dans $L^2(0,T;L^4(\Omega))$ de u_m implique la convergence du deuxième terme J_m^2 vers 0. Pour J_m^1, il faut montrer que le terme $(u_{mi} - u_i)u_m$ converge

faiblement dans $L^2(Q)$. Remarquons d'abord qu'il est borné dans cet ensemble. En effet,

$$\begin{aligned}\int_0^T |(u_{mi}-u_i)u_m|^2 dt &\leqslant \int_0^T \|(u_{mi}-u_i)\|_{L^4}^2 \|u_m\|_{L^4}^2 dt \\ &\leqslant 2\int_0^T |(u_{mi}-u_i)|_{L^2}|u_m|_{L^2}\|(u_{mi}-u_i)\|_{H^1}\|u_m\|_{H^1} dt.\end{aligned}$$

Les normes $L^2(\Omega)$ sont bornées dans $L^\infty(0,T)$ et les normes $H^1(\Omega)$ le sont dans $L^2(0,T)$. Le produit est donc borné dans $L^1(0,T)$. On sait par ailleurs que u_m tend vers u presque partout dans Q, donc $(u_{mi}-u_i)u_m$ tend vers 0 presque partout. La convergence de J_m^1 résulte alors du lemme suivant (voir par exemple [7]).

LEMME 3.4. – *Soit Q un ouvert borné de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Soient g_m et g des éléments de $L^q(Q)$, $1 < q < +\infty$, tels que*

$$\|g_m\|_{L^q(Q)} \leqslant K, \quad g_m \to g \text{ presque partout dans } Q.$$

Alors $g_m \to g$ faiblement dans $L^q(Q)$.

En prenant $g_m = (u_{mi}-u_i)u_m$, $q=2$, on obtient la convergence cherchée. Ainsi, on a montré que

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\langle \sum_{i=1}^2 u_{mi}D_i u_m, \psi(t)v_j \right\rangle dt &\longrightarrow -\int_Q \sum_{i=1}^2 u_i\psi(t)u\cdot D_i v_j\, dx\, dt. \\ &= \int_0^T \left\langle \sum_{i=1}^2 u_i D_i u, \psi(t)v_j \right\rangle dt.\end{aligned}$$

– Reste à montrer la convergence du terme $\int_0^T <$ div $T(C_m), \psi(t)v_j > dt$. Rappelons que div $T(C_m)$ est une somme de termes de la forme

$$D_i(D_l C_m . D_k C_m),\ i,l,k = 1,2.$$

Etudions donc le terme générique :

$$< D_i(D_l C_m . D_k C_m), \psi(t)v_j >= - < D_l C_m . D_k C_m, \psi(t) D_i v_j > .$$

On a vu que $D_l C_m D_k C_m$ est borné dans $L^2(Q)$, donc il existe $\chi_{lk} \in L^2(Q)$ tel que

$$D_l C_m D_k C_m \to \chi_{lk} \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible.}$$

Vérifions que $\chi_{lk} = D_l C . D_k C$.

On sait déjà que C_m tend vers C dans $L^2(0,T;H^1)$ fort. En particulier, $D_lC_mD_kC_m$ tend vers D_lCD_kC dans $L^1(Q)$ fort. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on a bien $\chi_{lk} = D_lC.D_kC$. Ainsi,

$$< D_i(D_lC_m.D_kC_m), \psi(t)v_j > \to < D_i(D_lC.D_kC), \psi(t)v_j >$$

dans $L^1(0,T)$ fort. Après sommation et intégration sur $[0,T]$ on obtient bien

$$\int_0^T < \text{ div } T(C_m), \psi(t)v_j > dt \to \int_0^T < \text{ div } T(C), \psi(t)v_j > dt.$$

Ainsi, l'équation sur u_m donne à la limite

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \sum_{i=1}^{2} u_i D_i u - \text{ div } T(C), \psi(t)v \right\rangle dt = 0, \quad \forall v \in V_2. \tag{3.23}$$

On vérifie de même la condition initiale pour u : soit $\psi \in \mathcal{D}([0,T])$, avec $\psi(T) = 0$. On intègre par parties les égalités (3.22) et (3.23). Il vient :

$$-\int_0^T (u_m, v_j\psi'(t))dt - (u_{0m}, v_j)\psi(0)$$
$$+\int_0^T \left\langle -\nu\Delta u_m + \sum_{i=1}^{2} u_{mi} D_i u_m - \text{ div } T(C_m), \psi(t)v_j \right\rangle dt = 0.$$

et

$$-\int_0^T (u, v_j\psi'(t))dt - (u(0), v_j)\psi(0)$$
$$+\int_0^T \left\langle -\nu\Delta u + \sum_{i=1}^{2} u_i D_i u - \text{ div } T(C), \psi(t)v_j \right\rangle dt = 0,$$

Par passage à la limite dans la première relation, on obtient l'égalité $u(0) = u_0$.

Ceci conclut la preuve de l'existence. Les estimations obtenues permettent aussi de montrer le résultat de régularité suivant :

LEMME 3.5. – *Soit C, u une solution du problème faible. Alors u est égale presque partout à une fonction continue de $[0,T]$ dans H_2, et C, ∇C sont égales presque partout à des fonctions continues de $[0,T]$ dans L^2.*

3.5. Unicité de la solution

Il reste donc à prouver l'unicité de la solution. Pour cela, supposons qu'on ait deux solutions (C_1, u_1) et (C_2, u_2). (On remarquera qu'ici, les indices 1 et 2 ne désignent plus, comme précédemment, les composantes du vecteur vitesse, u_1 et u_2 étant maintenant deux vecteurs.) Posons $C = C_1 - C_2$ et $u = u_1 - u_2$. C et u sont solutions du problème

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial C}{\partial t} - d\Delta C + u_1 \cdot \nabla C_1 - u_2 \cdot \nabla C_2, B\right) &= 0 \\
\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u_1 \cdot \nabla)u_1 - (u_2 \cdot \nabla)u_2, v\right) &= k\left(\nabla(|\nabla C_1|^2 - |\nabla C_2|^2), v\right) \\
&\quad -k\left(\Delta C_1 \nabla C_1 - \Delta C_2 \nabla C_2, v\right).
\end{aligned}$$

Prenons dans la première équation $B = -k\Delta C$ et dans la deuxième $v = u$, et sommons les égalités obtenues. Il vient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u|^2 + k|\nabla C|^2) + kd\,|\Delta C|^2 + \nu|\nabla u|^2 \\
&\qquad = -\int_\Omega ((u.\nabla)u_2)u\,dx + k\int_\Omega (\Delta C_1 \nabla C \cdot u + \Delta C \nabla C \cdot u_1)\,dx. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Il reste à estimer les intégrales du membre de droite. On utilise pour cela l'inégalité de Hölder et le lemme 3.2. Il en résulte immédiatement le lemme suivant :

LEMME 3.6. – *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Alors, pour toutes fonctions $f, g, h \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\left|\int_\Omega ((f.\nabla)g)h\,dx\right| \leqslant 2^{\frac{1}{2}}|f|^{\frac{1}{2}}|\nabla f|^{\frac{1}{2}}|\nabla g||h|^{\frac{1}{2}}|\nabla h|^{\frac{1}{2}}.$$

Par application du lemme 3.6, on a

$$\left|\int_\Omega ((u.\nabla)u_2)u\,dx\right| \leqslant \sqrt{2}|u|\,|\nabla u|\,|\nabla u_2| \leqslant \epsilon|\nabla u|^2 + C_\epsilon|u|^2|\nabla u_2|^2.$$

On a également, par application du lemme 3.2 et de l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \Delta C_1 \nabla C \cdot u\,dx\right| &\leqslant \sqrt{2}|D^2C_1||D^2C|^{\frac{1}{2}}|\nabla C|^{\frac{1}{2}}|\nabla u|^{\frac{1}{2}}|u|^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \epsilon\left(|D^2C|^2 + |\nabla u|^2\right) + C_\epsilon|D^2C_1|^2\,|\nabla C|\,|u|,
\end{aligned}$$

où D^2C, D^2C_1 désignent les dérivées secondes de C et C_1 par rapport aux variables d'espace. Remarquons que, grâce à la régularité du laplacien, on peut remplacer dans les

estimations ci-dessus les termes $|D^2C|$ et $|D^2C_1|$ par $|\Delta C|$ et $|\Delta C_1|$ respectivement. En effet, on a le lemme suivant (voir par exemple [3]) :

LEMME 3.7. – *Soit Ω un rectangle du plan, et f une fonction de $L^2(\Omega)$. Alors la solution du problème*

$$\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

appartient à $H^2(\Omega)$, et vérifie :

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant k\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par application de ce lemme, on obtient :

$$\left|\int_\Omega \Delta C_1 \nabla C \cdot u \, dx\right| \leqslant \epsilon \left(|\Delta C|^2 + |\nabla u|^2\right) + C_\epsilon |\Delta C_1|^2 \, |\nabla C| \, |u|.$$

On a de même

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \Delta C \, \nabla C \cdot u_1 \, dx\right| &\leqslant \sqrt{2}|\Delta C|^{\frac{3}{2}}|\nabla C|^{\frac{1}{2}}|\nabla u_1|^{\frac{1}{2}}|u_1|^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \epsilon|\Delta C|^2 + C_\epsilon|\nabla C|^2 \, |\nabla u_1|^2 \, |u_1|^2. \end{aligned}$$

(On utilise ici le résultat élémentaire suivant :

$$\forall \epsilon > 0, \exists C_\epsilon > 0, \forall x, y > 0, x^3 y \leqslant \epsilon x^4 + C_\epsilon y^4.)$$

Prenons ϵ tel que $2\epsilon < \min(\nu, kd)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[|u|^2 + k|\nabla C|^2\right] &\leqslant C_\epsilon \left(|u|^2|\nabla u_2|^2 + |\Delta C_1|^2 \, |\nabla C| \, |u| + |\nabla C|^2|u_1|^2|\nabla u_1|^2\right) \\ &\leqslant C_\epsilon \left(|\nabla u_2|^2 + |\Delta C_1|^2 + |u_1|^2|\nabla u_1|^2\right) \left[|u|^2 + k|\nabla C|^2\right] \end{aligned} \tag{3.25}$$

Notons ϕ la fonction définie sur $[0, T]$ par

$$\phi(t) = |\nabla u_2|^2 + |\Delta C_1|^2 + |u_1|^2|\nabla u_1|^2.$$

On a : $u_1, u_2 \in L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^2) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $C_1 \in L^2(0, T; H^2)$ donc ϕ est intégrable sur $[0, T]$. L'inégalité (3.25) peut donc se réécrire

$$\forall t \geqslant 0, \ \frac{d}{dt}\left[\exp\left(-C_\epsilon \int_0^t \phi(s) ds\right)\left(|u|^2 + k|\nabla C|^2\right)\right] \leqslant 0.$$

Il en résulte que

$$\forall t \geqslant 0, \ \exp\left(-C_\epsilon \int_0^t \phi(s) ds\right)\left(|u|^2 + k|\nabla C|^2\right) \leqslant |u(0)|^2 + k|\nabla C(0)|^2.$$

Or $u(0) = u_1(0) - u_2(0) = 0$, et $\nabla C(0) = \nabla C_1(0) - \nabla C_2(0) = 0$. Donc u et ∇C sont identiquement nulles. C est donc constante sur Ω. Mais alors la première équation vérifiée par C devient

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} - d\Delta C + u \cdot \nabla C, B\right) = 0, \quad \forall B \in H_1,$$

soit encore, sachant que $\nabla C = 0$ et donc $\Delta C = 0$,

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}, B\right) = 0, \quad \forall B \in H_1.$$

En prenant $C = B$ on obtient bien que, pour tout temps t, $C(t) = C(0) = 0$. L'unicité est démontrée. □

4. Etude numérique - cas des gouttes miscibles

Cette première étude numérique a pour objet de montrer l'apparition de courants de convection induits seulement par des gradients de concentration dans un système formé de deux fluides miscibles. Nous étudions également l'influence de ces courants sur les gouttes, et cherchons en particulier à comparer ses effets à ceux de la tension superficielle entre fluides non miscibles.

Les paramètres sont estimés pour le système eau - glycérol (glycérine). Nous montrons qu'avec des valeurs réalistes de ces paramètres, des courants significatifs peuvent apparaître, et que des gouttes de liquides miscibles ont un comportement proche de gouttes non miscibles. Une confirmation expérimentale de ces phénomènes est prévue à la Station Spatiale Internationale.

Pour ces simulations numériques, nous introduisons une formulation fonction de courant, fonction tourbillon. Nous considérons pour la fonction tourbillon des conditions au bord du second ordre, dérivées des conditions de non glissement pour la vitesse. Le problème est discrétisé par différences finies, et résolu par une méthode de directions alternées.

4.1. Schéma numérique

Les équations (2.2) et (2.3) peuvent se réécrire en utilisant une formulation fonction de courant - fonction tourbillon. On pose donc

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

et

$$\omega = -\Delta\psi = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Les équations pour la vitesse prennent alors la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial t} &= \nu\Delta\omega - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\omega}{\partial x_2} \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2}\right)\right]. \qquad (4.1)\\ 0 &= \Delta\psi + \omega. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

Quant à la condition au bord $u = 0$, elle devient :

$$\nabla\psi|_{\partial\Omega} = 0,$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{t}}|_{\partial\Omega} = 0,$$

où $\mathbf{t}$ désigne le vecteur tangent à $\partial\Omega$, défini presque partout. Puisque la dérivée tangentielle de ψ est nulle sur le bord, ψ est constante sur ce bord, et on peut fixer cette constante à zéro. Nous prenons donc dans le calcul de ψ la condition au bord de Dirichlet, tandis que la condition sur la dérivée normale est transformée et remplacée par une condition au bord artificielle sur la fonction tourbillon, que nous détaillons plus bas.

Le domaine rectangulaire est maillé en subdivisant $[0, L_1]$ et $[0, L_2]$ en N_1, respectivement N_2 sous-intervalles, avec des pas d'espace h_1 et h_2 constants dans chaque direction. On se donne également un pas de temps h_t, et on note $C^n_{i,j}$ une valeur approchée de la fraction massique à l'instant nh_t, sur le noeud de coordonnées (ih_1, jh_2). La condition initiale imposée fixe la valeur des $C^0_{i,j}$. Les dérivées spatiales d'ordre 1 et 2 sont approchées par des quotients aux différences finies centrés :

$$\frac{\partial C}{\partial x_1}(ih_1, jh_2, nh_t) \simeq \frac{C^n_{i+1,j} - C^n_{i-1,j}}{2h_1},$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2}(ih_1, jh_2, nh_t) \simeq \frac{C^n_{i+1,j} - 2C^n_{i,j} + C^n_{i-1,j}}{h_1^2}.$$

Pour chaque pas de temps n, on calcule successivement la concentration C^n, la fonction tourbillon W^n, la fonction de courant Z^n, puis les vitesses horizontale et verticale U^n et V^n. Toutes ces variables sont en fait des matrices indexées par $0 \leqslant i \leqslant N_1, 0 \leqslant j \leqslant N_2$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons les variables ci-dessus connues, et détaillons le calcul de C^{n+1}. Il se fait en deux étapes (directions alternées) : dans la première étape, les dérivées par rapport à x_2 sont traitées de manière explicite, utilisant les valeurs déjà calculées à l'étape n, tandis que les dérivées par rapport à x_1 sont traitées de manière implicite.

Dans la deuxième étape, ce sont les dérivées par rapport à x_1 qui sont traitées de manière explicite, tandis que les dérivées par rapport à x_2 sont traitées de manière implicite. On introduit donc un pas de temps fractionnaire $h_t/2$, et on note $C^{n+1/2}$ le résultat de la première étape.

Plus précisément, on résout tout d'abord le système suivant, pour j variant de 1 à N_2-1 :

$$\begin{aligned}
\frac{C_{i,j}^{n+1/2}-C_{i,j}^{n}}{h_t/2} &= d\left(\frac{C_{i+1,j}^{n+1/2}-2C_{i,j}^{n+1/2}+C_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1^2}+\frac{C_{i,j+1}^{n}-2C_{i,j}^{n}+C_{i,j-1}^{n}}{h_2^2}\right)\\
&\quad -U_{i,j}^{n}\frac{C_{i+1,j}^{n+1/2}-C_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h_1}-V_{i,j}^{n}\frac{C_{i,j+1}^{n}-C_{i,j-1}^{n}}{2h_2},\ 1\leqslant i\leqslant N_1-1\\
C_{0,j}^{n+1/2} &= C_{1,j}^{n+1/2},\\
C_{N_1,j}^{n+1/2} &= C_{N_1-1,j}^{n+1/2}.
\end{aligned}$$

Les deux dernières équations du système correspondent aux conditions aux limites de Neumann pour les bords verticaux.

Pour la deuxième étape, on résout de même le problème suivant, pour i variant de 1 à N_1-1 :

$$\begin{aligned}
\frac{C_{i,j}^{n+1}-C_{i,j}^{n+1/2}}{h_t/2} &= d\left(\frac{C_{i+1,j}^{n+1/2}-2C_{i,j}^{n+1/2}+C_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1^2}+\frac{C_{i,j+1}^{n+1}-2C_{i,j}^{n+1}+C_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2}\right)\\
&\quad -U_{i,j}^{n}\frac{C_{i+1,j}^{n+1/2}-C_{i-1,j}^{n+1/2}}{2h_1}-V_{i,j}^{n}\frac{C_{i,j+1}^{n+1}-C_{i,j-1}^{n+1}}{2h_2},\ 1\leqslant j\leqslant N_2-1\\
C_{i,0}^{n+1} &= C_{i,1}^{n+1},\\
C_{i,N_2}^{n+1} &= C_{i,N_2-1}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ici, les deux dernières équations correspondent aux conditions aux limites de Neumann pour les bords horizontaux. Enfin, on impose les valeurs de C sur les bords verticaux en utilisant à nouveau la condition de Neumann sur ces bords. On pose donc pour tout $0\leqslant j\leqslant N_2$,

$$\begin{aligned}
C_{0,j}^{n+1} &= C_{1,j}^{n+1},\\
C_{N_1,j}^{n+1} &= C_{N_1-1,j}^{n+1}.
\end{aligned}$$

L'équation de la fonction tourbillon est discrétisée de la même façon que la précédente. La condition au bord introduite pour la fonction tourbillon provient d'un développement limité de la fonction de courant au voisinage du bord.

Considérons par exemple le bord $x_1=0, 0\leqslant x_2\leqslant L_2$. Rappelons que sur ce bord, la fonction tourbillon vaut

$$\omega(0,x_2)=-\Delta\psi(0,x_2)=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}(0,x_2)-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}(0,x_2).$$

(On omet ici la dépendance en temps, ce dernier étant fixé dans ces calculs.) Or sur ce bord, ψ ne dépend pas de x_2, donc on obtient finalement

$$\omega(0, x_2) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}(0, x_2).$$

De même,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(0, x_2) = -\frac{\partial^3 \psi}{\partial x_1^3}(0, x_2).$$

Ecrivons le développement limité de ψ par rapport à la variable x_1 au voisinage de $x_1 = 0$. On a :

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(0, x_2) + x_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(0, x_2) + \frac{x_1^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}(0, x_2) + \frac{x_1^3}{6}\frac{\partial^3 \psi}{\partial x_1^3}(0, x_2) + o(x_1^3).$$

Les deux premiers termes du développement limité s'annulent (on rappelle qu'on a fixé $\psi = 0$ sur le bord) et on obtient

$$\psi(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2}{2}\omega(0, x_2) - \frac{x_1^3}{6}\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(0, x_2) + o(x_1^3).$$

Autrement dit, pour le problème discrétisé, fixons $i = 0, j \in [0, N_2]$. On note $Z_{1,j}^n$ une valeur approchée de $\psi(nh_t, h_1, jh_2)$, $W_{0,j}^n$ une valeur approchée de $\omega(0, jh_2)$. Une valeur approchée de la dérivée partielle de ω par rapport à x_1 est alors donnée par le quotient

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(0, jh_2) \simeq \frac{W_{1,j}^n - W_{0,j}^n}{h_1}.$$

En substituant ces valeurs approchées dans le développement limité, et en négligeant le terme $o(x_1^3)$, on obtient

$$Z_{1,j}^n = -\frac{h_1^2}{2}W_{0,j}^n - \frac{h_1^3}{6}\frac{W_{1,j}^n - W_{0,j}^n}{h_1} = -\frac{h_1^2}{6}(2W_{0,j}^n + W_{1,j}^n).$$

On obtient donc la condition au bord suivante sur le bord $i = 0$:

$$W_{0,j}^n = -\frac{1}{2}W_{1,j}^n - \frac{3Z_{1,j}^n}{h_1^2}.$$

Sur les trois autres bords, on obtient par la même technique des conditions similaires.

Quant à la fonction de courant, elle est solution d'un problème sans dérivée en temps (4.2), avec la condition au bord

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

On peut donc la voir comme limite quand τ tend vers $+\infty$ du problème d'évolution

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \omega = \Delta\psi, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \psi(\tau = 0) = \psi(nh_t).$$

Notons que la variable τ est indépendante du temps t, qui est gardé constant si n est fixé. On notera h_τ un pas associé à la variable τ. On calcule ainsi à chaque étape une valeur approchée Z^{n+1} de ψ à partir de la fonction tourbillon W^{n+1} (déjà calculée) en posant

$$Z_{i,j}^{n+1,1} = Z_{i,j}^{n},$$

et en itérant le schéma suivant, pour m supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned}
\frac{Z_{i,j}^{n+1,m+1/2} - Z_{i,j}^{n+1,m}}{h_\tau/2} &= W_{i,j}^{n+1} + \left(\frac{Z_{i+1,j}^{n+1,m+1/2} - 2Z_{i,j}^{n+1,m+1/2} + Z_{i-1,j}^{n+1,m+1/2}}{h_1^2} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{Z_{i,j+1}^{n+1,m} - 2Z_{i,j}^{n+1,m} + Z_{i,j-1}^{n+1,m}}{h_2^2} \right), \\
&\qquad 1 \leqslant i \leqslant N_1 - 1, \\
Z_{0,j}^{n+1,m+1/2} &= 0, \\
Z_{N_1,j}^{n+1,m+1/2} &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{Z_{i,j}^{n+1,m+1} - Z_{i,j}^{n+1,m+1/2}}{h_\tau/2} &= W_{i,j}^{n+1} + \left(\frac{Z_{i+1,j}^{n+1,m+1/2} - 2Z_{i,j}^{n+1,m+1/2} + Z_{i-1,j}^{n+1;m+1/2}}{h_1^2} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{Z_{i,j+1}^{n+1,m+1} - 2Z_{i,j}^{n+1,m+1} + Z_{i,j-1}^{n+1m+1}}{h_2^2} \right), \\
&\qquad 1 \leqslant j \leqslant N_2 - 1, \\
Z_{i,0}^{n+1,m+1} &= 0, \\
Z_{i,N_2}^{n+1,m+1} &= 0.
\end{aligned}$$

Ce processus est itéré jusqu'à ce que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

1. $\forall i, j, \left| Z_{i,j}^{n+1,m+1} - Z_{i,j}^{n+1,m+1/2} \right| < \epsilon$, où ϵ est une précision fixée,
2. $m > 100$.

Remarque. – Nous n'avons pas fait d'étude de convergence ou de stabilité pour ce schéma. Il semble cependant donner des résultats satisfaisants dans les simulations numériques ci-dessous.

Valeurs des paramètres.

Nous estimons le paramètre k à partir de mesures de tension de surface. Petitjeans fut le premier à utiliser un tensiomètre à goutte tournante pour mesurer une tension de surface transitoire [8]. Il mesura pour le système eau/glycérol une tension de 0.6 mN/m, le diamètre de la goutte ayant atteint une valeur quasi-stationnaire après 100 secondes. Nous utilisons la relation (1.1) pour en déduire une estimation de k. Dans cette relation, $[C]$ représente le saut de la fraction massique à travers la zone de transition, donc $[C] = 1$. On estime la largeur δ de la zone de mélange grâce à la distance de diffusion, $\delta \simeq (dt)^{1/2}$. Petitjeans et Maxworthy ont mesuré pour le système glycérol/eau un coefficient de diffusion de l'ordre de 10^{-10} m^2/s. En prenant une durée de l'ordre de 100s, on obtient $\delta \simeq 10^{-4}$ m. Avec ces valeurs, nous obtenons $k \simeq 6 \times 10^{-8}$ N. Bien qu'il ne s'agisse que d'ordre de grandeur, ces estimations vont nous permettre de procéder à des simulations réalistes.

La valeur de δ estimée ci-dessus est trop faible pour que cette zone soit discrétisée correctement avec un maillage simple. Dans les simulations, nous utilisons une valeur δ dix fois supérieure pour garder plus de points de discrétisation dans cette zone. En contrepartie, nous augmentons aussi la valeur de k, après avoir vérifié que le résultat des simulations varie peu si on garde le produit δk constant. Dans la suite de cette section, nous prenons les valeurs suivantes :

$$\nu = 10^{-4}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}; \quad d = 2.5 \times 10^{-8}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}; \quad k = 1.08 \times 10^{-6}\ \mathrm{N}.$$

4.2. Test : évolution d'une goutte sphérique

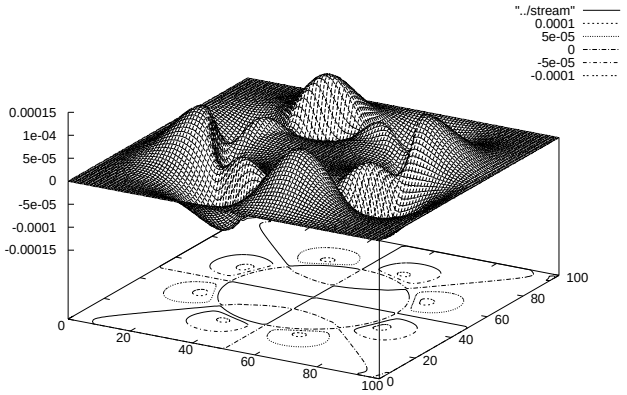
Nous testons d'abord le code sur une goutte sphérique. Nous étudions l'évolution des concentrations et de la fonction de courant.

Evolution de la concentration

La figure 4.1 montre la différence entre la concentration après 1s et la concentration initiale. Notons que les différences sont très faibles, en comparaison de celles obtenues pour les simulations suivantes. Cette évolution peut être considérée comme due majoritairement à la diffusion.

Evolution de la fonction de courant

Au bout de quelques centaines d'itérations (environ 20 ms), la fonction de courant prend la forme suivante, qui évolue très peu :



Le maximum de la fonction de courant augmente pendant les 1500 premières itérations (0.15s) puis diminue lentement, de même que le maximum de la vitesse.

On voit sur la figure 4.2 que plus le maillage est raffiné, plus le maximum de la fonction de courant est petit. Les courants observés n'ont donc pas de réalité physique, ce sont des phénomènes numériques.

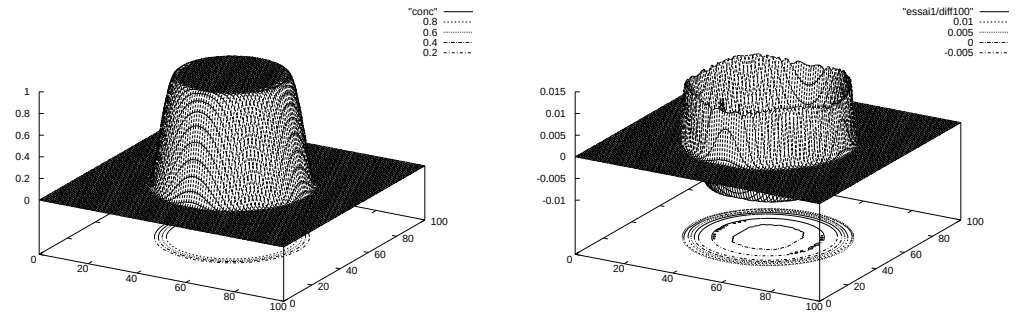


FIG. 4.1 – A gauche : Concentration initiale. A droite : différence entre la concentration après 2s et la concentration initiale. La concentration reste à peu près constante au cours des itérations.

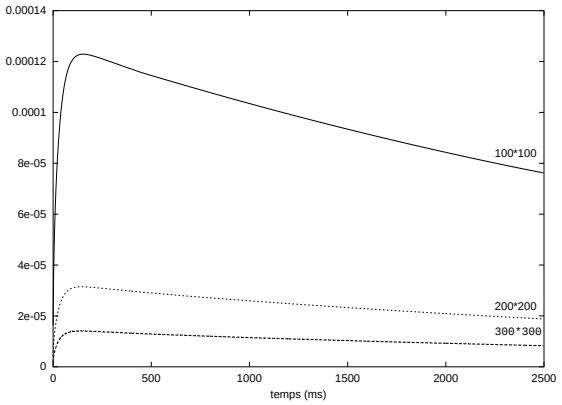


FIG. 4.2 – Maximum de la fonction de courant au cours des 2,5 premières secondes. La courbe la plus haute correspond à un maillage de 100 mailles sur 100. La plus basse correspond à 300 mailles sur 300 et la courbe intermédiaire correspond à 200 mailles sur 200.

4.3. Evolution d'une goutte elliptique

Nous étudions ici une goutte de forme elliptique dans un domaine rectangulaire. Dans le cas de gouttes non miscibles, on sait que la tension de surface aurait tendance à faire évoluer cette goutte vers une goutte circulaire. Nous montrons que cette tendance est conservée ici dans le cas de gouttes miscibles.

Evolution de la concentration

On voit sur la figure 4.3 qu'en 10s, l'ellipse évolue vers un cercle (diminution du grand axe, augmentation du petit axe).

Si on calcule comme précédemment la différence entre la concentration après 2s et la concentration initiale, on voit que cette différences est beaucoup plus importante que dans le cas de la goutte sphérique (figure 4.4).

Evolution de la fonction de courant

Au bout de quelques centaines d'itérations, la fonction de courant prend la forme présentée sur la figure 4.5. Remarquons que les courants visualisés sur le rectangle de base ont tendance à ramener le liquide du grand axe (apogée) de l'ellipse vers le petit axe (périgée), ce qui tend à la ramener vers un cercle.

Le maximum de la fonction de courant augmente pendant les 1000 premières itérations (0.05s) puis diminue lentement, de même que le maximum de la vitesse. Avec une précision supérieure en espace et en temps, le résultat est identique (voir figure 4.6).

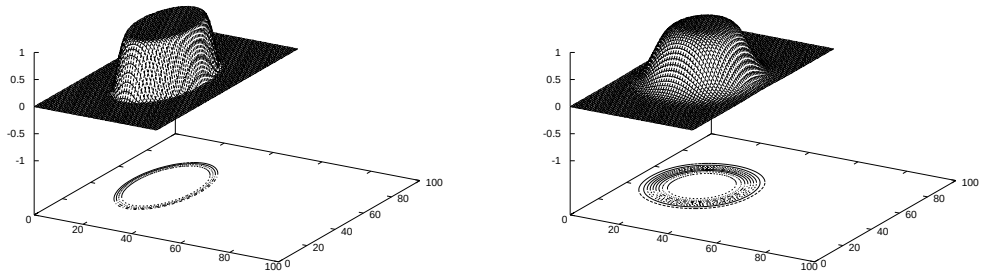
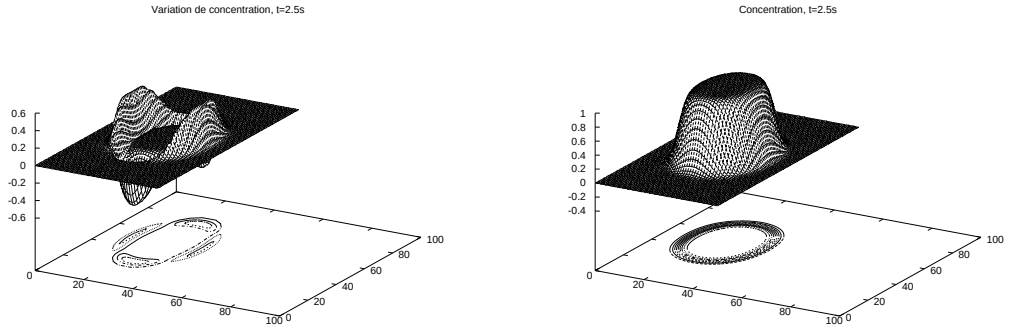


FIG. 4.3 – A gauche : Concentration initiale. A droite : Concentration après 10s. Contrairement au cas de la goutte à symétrie radiale, ici la concentration évolue significativement au cours des itérations.



(a) (b)

FIG. 4.4 – Concentration après 2s. (a) Différence par rapport à la concentration initiale. (b) Concentration “brute”.

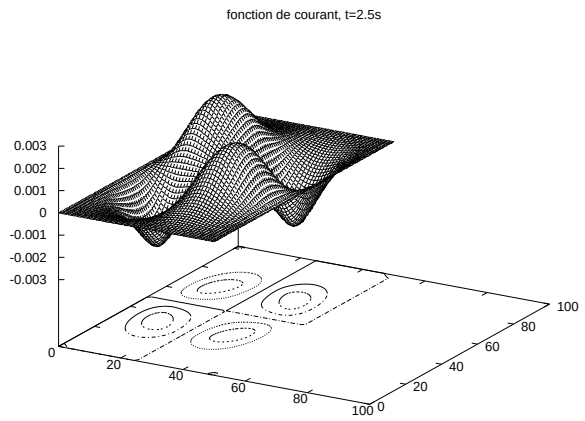


FIG. 4.5 – Fonction de courant après 2.5s dans le cas d'une goutte elliptique.

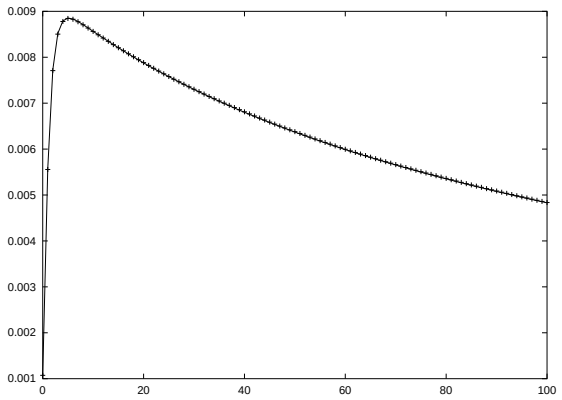


FIG. 4.6 – Maximum de la fonction de courant au cours de la 1ère seconde (goutte elliptique). La courbe en traits pleins correspond à un maillage de 100 mailles sur 200, ht=5.10^{-5}s. Les croix représentent un maillage de 150 sur 300 mailles, ht=2.10^{-5}s.

Comparaison avec un modèle sans convection

Les évolutions de concentration observées sont-elles dues majoritairement à la diffusion ou aux phénomènes de convection dus aux gradients de concentration ? Pour répondre à cette question, on compare les résultats obtenus précédemment avec ceux que l'on obtiendrait dans un modèle purement diffusif, sans convection.

4.4. Evolution d'une goutte très allongée

Le dernier cas étudié est l'évolution d'une goutte très allongée. Dans le cas de liquides non miscibles, l'effet de la tension de surface est de séparer cette goutte en petites gouttelettes qui évoluent vers des formes sphériques. Nous verrons qu'on observe ici un comportement assez proche, c'est-à-dire que la goutte va avoir tendance à se contracter au milieu et former deux renflements aux extrémités. Nous n'avons toutefois pas réussi à observer une séparation complète en deux gouttes, l'effet observé dans la section 4.3 (tendance à se contracter vers une sphère) étant finalement prédominant.

Influence du coefficient de diffusion

Les calculs précédents ne présentant pas de séparation totale de la goutte, nous avons essayé de modifier les paramètres d et k pour voir si les résultats obtenus étaient quantitativement différents. En divisant la diffusion par deux, on obtient des résultats similaires, mais la goutte a plus vite tendance à se contracter en une goutte de plus en plus ronde (voir figure 4.9).

Influence du coefficient k

La figure 4.10 montre que l'augmentation du coefficient k accentue également la tendance de contraction de la goutte vers une sphère, au détriment de la tendance à se séparer.

Vérifications de précision

La zone de mélange étant initialement très mince, et contenant donc peu de points de discrétisation, il est important de vérifier la précision des calculs pour s'assurer que cette zone a été bien traitée. On le fait comme précédemment en comparant les valeurs maximales prises par la fonction de courant, pour différents maillages. On voit sur la figure 4.11 le maximum de la fonction de courant pour des temps petits, avec différents pas d'espace. On peut noter que, lorsqu'on raffine le maillage, le maximum de la fonction de courant augmente, mais semble converger, au sens où les courbes sont de plus en plus proches au fur et à mesure que le maillage est raffiné.

5. Etude d'interfaces diffuses presque planes

Le travail de la section 4 sur les gouttes a permis de mettre en évidence l'influence du stress de Korteweg sur les liquides miscibles. En particulier nous avons vu qu'il peut générer des courants dont les effets sont proches de ceux de la tension de surface dans le cas de liquides non miscibles. L'objet de cette section est l'étude de ces courants dans le cas d'interfaces diffuses planes ente deux liquides miscibles. Plus exactement, nous considérons deux liquides miscibles séparés par une zone de transition plus ou moins large. La température est maintenue constante, mais on considère des interfaces légèrement courbées, donc des perturbations d'interfaces planes. On sait que dans le cas de liquides non miscibles, la tension de surface serait à l'origine de courants pour dus au fait que l'interface n'est pas plane et que donc la tension de surface n'est pas minimale. Nous observons numériquement que ces courants existent également dans le cas des liquides miscibles, et nous présentons l'évolution de concentration qui en découle.

Cas d'une zone de transition étroite

On étudie numériquement l'évolution d'une zone de transition étroite. Considérons une diffusion moléculaire très faible $d = 0.001 = \kappa/10$. Le domaine est un carré de côté 1cm. On étudie l'influence de la tension de surface sur la courbure de la zone de transition.

On considère une distribution initiale de concentration qui est une légère perturbation d'un front plan (voir Figure 4.12 a). Après quelques dizaines de millisecondes, la zone de transition présente des renflements. Au cours du temps, ces renflements se propagent le long de cette zone et semblent osciller. Nous avons répété ces calculs en améliorant la précision en temps et en espace, et ces observations se confirment. Nous vérifions la convergence des profils de concentration à un instant donné, lorsque le pas de temps tend vers 0.

Les lignes de niveau de la fonction de courant (voir Figure 4.13) décrivent le mouvement du fluide.

Cas d'une zone de transition plus large

La concentration initiale est montrée à la figure 4.14 (a). Le comportement est similaire au cas précédent(voir figure 4.14). La fonction de courant est montrée à la figure 4.15.

6. Conclusions et perspectives

On présente dans ce chapitre un modèle mathématique simple pour les phénomènes de tension de surface équivalente dans les fluides miscibles. Nous montrons que ce modèle est pertinent, à la fois du point de vue mathématique et du point de vue physique. En effet, il possède une énergie qui satisfait la théorie de Cahn-Hilliard, qui décroît globalement en temps. Il s'en suit que le problème de Cauchy est bien posé. De plus, les résultats numériques sont cohérents avec les prédictions que l'on pouvait faire à partir du cas non miscible : évolution vers une goutte sphérique, scission d'une longue goutte en gouttelettes.

Une confirmation expérimentale de ces résultats nécessiterait des conditions d'apesanteur, pour éviter la convection naturelle. Des expériences préliminaires ont été effectuées lors de vols paraboliques dans un avion KC-135 de la NASA. [14] Elles consistaient à injecter une goutte d'eau dans la glycérine, ou une goutte de glycérine dans l'eau. Le comportement prédit par les simulations n'a toutefois pas pu être observé, probablement parce que la durée de microgravité était trop brève (1 ou 2s).

Des expériences supplémentaires sont prévues dans la Station Spatiale Internationale, pour le cas des interfaces planes. Elles seront réalisées avec le poly(dodecyl acrylate) et son monomère, qui sont miscibles.

Références bibliographiques

[1] L. Antanovskii, *Microscale theory of surface tension*, Physical Review E 54 (1996), 6285-6290.

[2] J.W. Cahn, J.E. Hilliard, *Free Energy of a Nonuniform System.* I. Interfacial Free Energy, J. Chem. Phys. 28 (1958), 258-267.

[3] P. Grisvard, Singularities in Boundary value problems, Research Notes in Applied Mathematics, 1992.

[4] D.D. Joseph, Y.Y. Renardy, *Lubricated Transport, Drops and Miscible Fluids*, in: Fundamentals of Two-Fluid Dynamics, Springer, New-York, 1992.

[5] D.J. Korteweg, *Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité considérables mais connues et sur la théorie de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation continue de la densité*, Archives N´eerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles 6 (1901), 1-24.

[6] I. Kostin, communication personnelle.

[7] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes elliptiques non linéaires*, Dunod, 1969.

[8] P. Petitjeans, *Une Tension de Surface pour les Fluides Miscibles*, C.R. Acad. Sci. Paris, S´erie II b 322 (1996), 673-679.

[9] P. Petitjeans, *Fluides Non Miscible/Fluides Miscibles : des Similitudes Intéressantes*, C.R. Acad. Sci. Paris, S´erie II b 325 (1997), 587-592.

[10] I. Rousar, E.B. Nauman, *A Continuum Analysis of Surface Tension in Nonequilibrium Systems*, Chem. Eng. Comm. 129 (1994), 19-28.

[11] R. Temam, Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis, SIAM, 1983.

[12] R. Temam, On the Theory and Numerical analysis of the Navier-Stokes Equations, Orsay, 1973.

[13] B. Vonnegut, *Rotating Bubble Method for the Determination of Surface and Interfacial Tensions*, Rev. Sci. Instrum. 13 (1942), 6-9.

[14] Volpert V.A., Pojman J.A., Texier-Picard R., Convection induced by composition gradients in miscible liquids, C.R. Acad. Sci. Paris, S´erie II b, `a paraˆı tre.

[15] Y.B. Zeldovich, *About Surface Tension of a Boundary between two Mutually Soluble Liquids*, Zhur. Fiz. Khim. 23 (in Russian) (1949), 931-935.

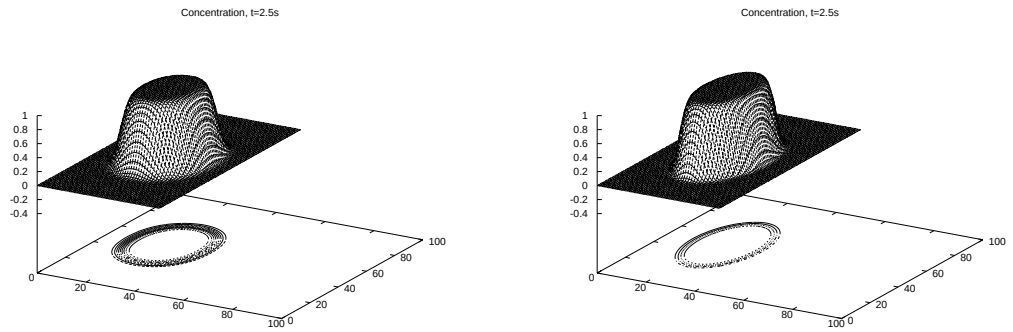


FIG. 4.7 – Concentration après 2.5 s. A gauche : modèle avec convection. A droite : modèle sans convection.

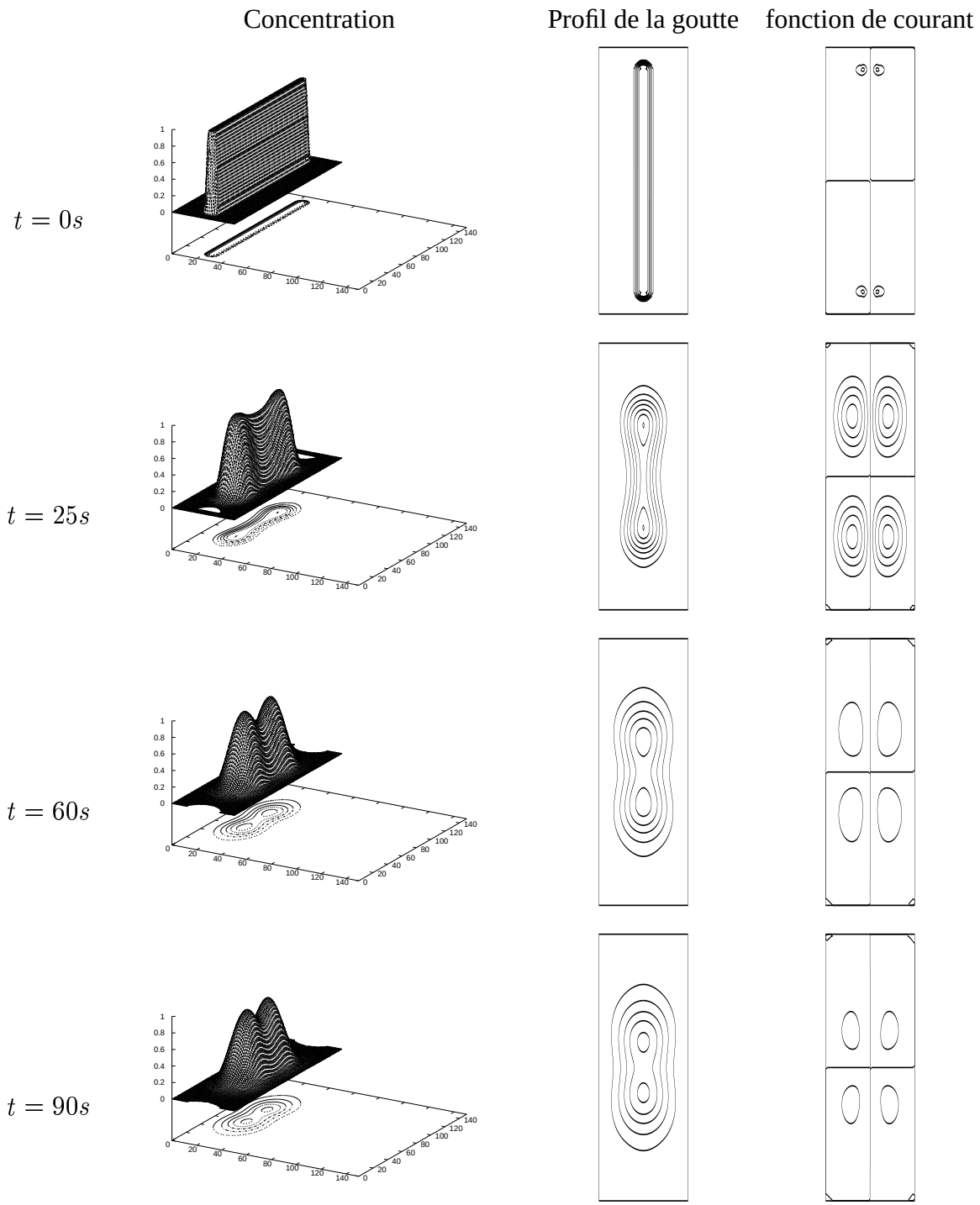


FIG. 4.8 – Evolution de la concentration et de la fonction de courant pour une goutte très allongée.

Concentration Profil de la goutte fonction de courant

$t = 25s$

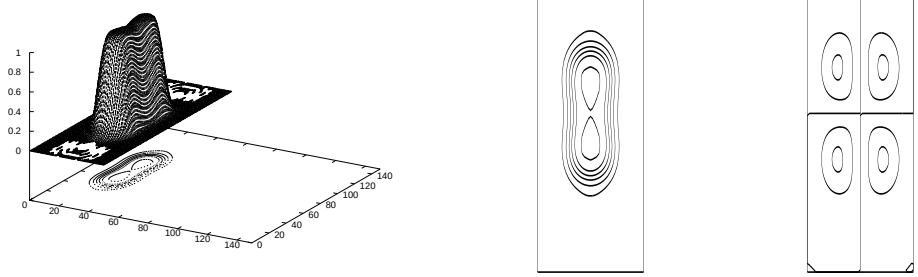


FIG. 4.9 – Evolution en 25s dans le cas d'une diffusion plus faible (goutte allongée).

Concentration Profil de la goutte fonction de courant

$t = 25s$

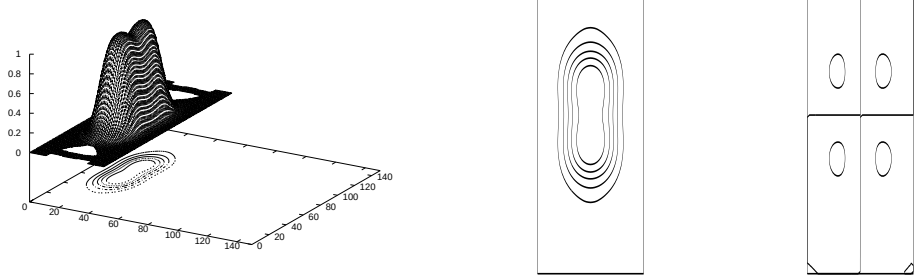


FIG. 4.10 – Evolution en 25s dans le cas d'un coefficient k plus important (goutte allongée).

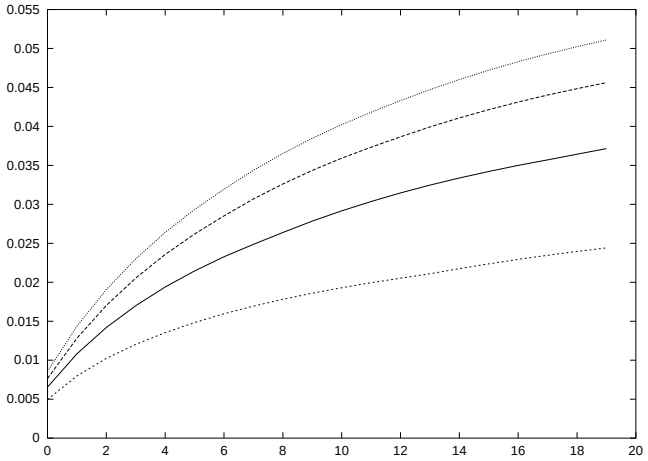


FIG. 4.11 – Evolution du maximum de la fonction de courant au cours des 40 premières millisecondes (goutte allongée). De bas en haut, les points correspondent à des maillages de 90 sur 30 points, 150 sur 50 points, 300 sur 100 points et 450 sur 150 points.

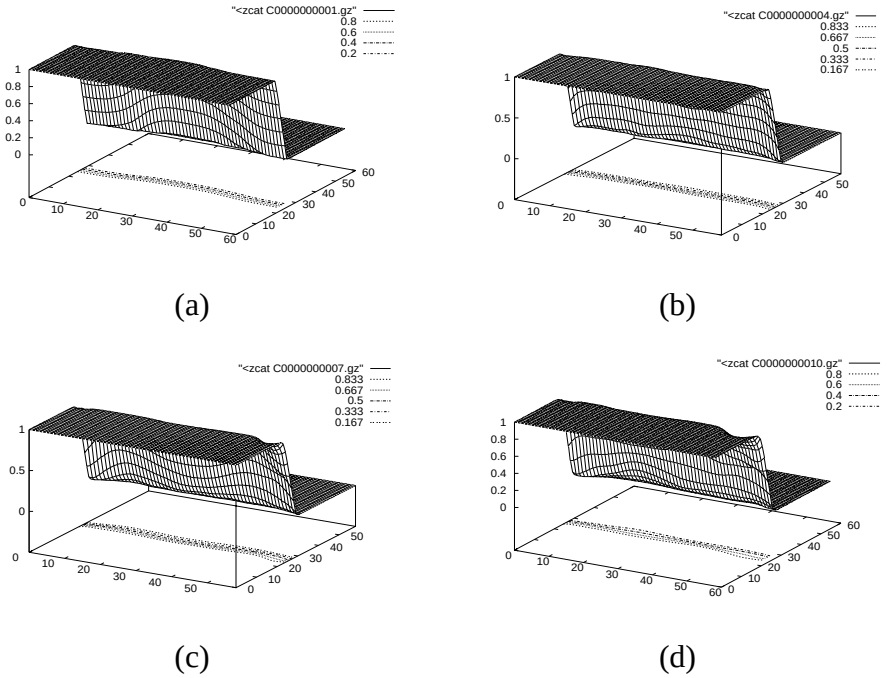
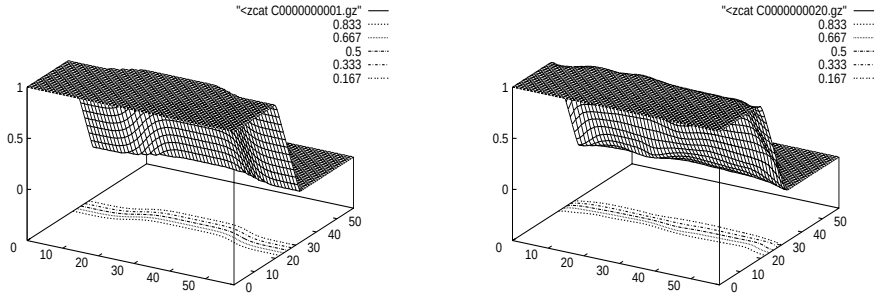


FIG. 4.12 – Concentration à t=0s (a), t=0.075s (b), t=0.1312s (c) et t=0.1875s (d). Cas d'une zone de transition étroite.

(a) (b)

FIG. 4.13 – Fonction de courant à t=0.075s (a) et t=0.1875s (b). Cas d'une zone de transition étroite.



(a) (b)

FIG. 4.14 – Concentration à t=0s (a), t=0.15s (b). Cas d'une zone de transition large.

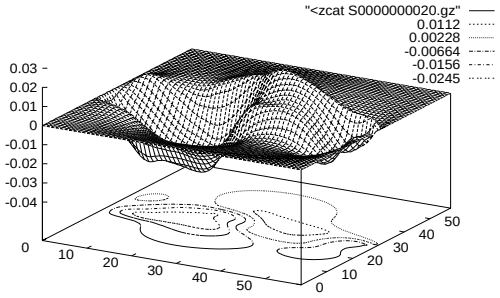


FIG. 4.15 – Fonction de courant à t=0.15s. Cas d'une zone de transition large.

Reaction-diffusion-convection problems : A mathematical and numerical analysis.

Abstract. *We study mathematically and numerically reaction-diffusion problems with convection. In the first part we prove that under some conditions the reaction-diffusion-convection operators are proper and have the Fredholm property, and we construct a topological degree for these operators. We use the degree to study bifurcations and prove the existence of traveling waves of reaction-diffusion with natural convection. We also study convective instabilities for these solutions. In the second part we investigate the influence of interfacial tension on the stability of fronts. In the case of immiscible liquids we prove that the interaction of the chemical reaction and interfacial tension may lead to a new type of instability. In the case of miscible liquids we model the transient surface tension by an additional stress in the Navier-Stokes equations. We show that the corresponding mathematical problem has a unique solution, and we observe numerically that the concentration gradients may induce convective flows. We simulate the evolution of a miscible drop under the influence of these flows : it behaves like an immiscible drop under the action of surface tension, with a tendency to get circular, or to break into droplets. We also show numerically that the tension may amplify small perturbations of plane fronts.*

Résumé. Nous ´etudions math´ematiquement et num´eriquement des probl`emes de r´eaction-diffusion avec convection. Dans la premi`ere partie, nous montrons sous certaines conditions que les op´erateurs consid´er´es ont la propri´et´e de Fredholm, sont propres, et nous construisons un degr´e topologique pour ces op´erateurs. Nous utilisons le degr´e pour ´etudier les bifurcations pour un probl`eme d'ondes progressives de r´eaction-diffusion-convection, et nous montrons l'existence de fronts de r´eaction modifi´es par la convection naturelle. Nous nous int´eressons ´egalement aux instabilit´es convectives pour ces solutions. Nous ´etudions dans la deuxi`eme partie l'influence de la tension de surface sur la stabilit´e des fronts. Dans le cas de liquides non miscibles, nous montrons que l'interaction de la tension de surface et de la r´eaction chimique peut conduire `a une instabilit´e nouvelle. Dans le cas de liquides miscibles, nous mod´elisons la tension transitoire par une contrainte suppl´ementaire dans les ´equations de Navier-Stokes. Nous montrons que le probl`eme math´ematique correspondant a une solution unique, et nous observons num´eriquement que les gradients de concentration peuvent engendrer des courants convectifs. Nous simulons l'´evolution d'une goutte miscible sous l'influence de ces courants : elle est comparable `a celle d'une goutte non miscible sous l'action de la tension de surface, avec une tendance `a s'arrondir ou `a se scinder en gouttelettes. Nous montrons num´eriquement que la tension transitoire peut amplifier de petites d´eformations de fronts plans.

Discipline : Mathématiques

Mots-clés : réaction-diffusion, convection, opérateurs de Fredholm, degré topologique, bifurcations, stabilité, équations de Navier-Stokes, contraintes de Korteweg, tension de surface.

Laboratoire : MAPLY - UMR 5585
(Mathématiques Appliquées de Lyon)
Université Claude Bernard Lyon I
Bâtiment Doyen Jean Braconnier
21, avenue Claude Bernard
69622 Villeurbanne cedex