HAL
open science

Stabilite multidimensionnelle d'interfaces dynamiques. Application aux transitions de phase liquide-vapeur.

Jean-François Coulombel

To cite this version:

Jean-François Coulombel. Stabilite multidimensionnelle d'interfaces dynamiques. Application aux transitions de phase liquide-vapeur.. Mathématiques [math]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2002. Français. NNT : . tel-00002134

HAL Id: tel-00002134

https://theses.hal.science/tel-00002134

Submitted on 16 Dec 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Normale Supérieure de Lyon
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

N° attribué par la bibliothèque | 0 | 2 | E | N | S | L | 0 | 2 | 3 | 8 |

THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON**

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement

par

Jean-François Coulombel

le 13 décembre 2002

Titre :

STABILITÉ MULTIDIMENSIONNELLE D'INTERFACES DYNAMIQUES
APPLICATION AUX TRANSITIONS DE PHASE LIQUIDE-VAPEUR

Directrice de thèse :

Sylvie Benzoni-Gavage

Jury

M.	Serge Alinhac,	Rapporteur
Mme	Sylvie Benzoni-Gavage,	Directrice de thèse
M.	Heinrich Freistühler,	Examinateur
M.	Olivier Guès,	Rapporteur
M.	Guy Métivier,	Examinateur
M.	Denis Serre,	Examinateur

À mes parents,

Remerciements

Mes premiers remerciements iront à Sylvie Benzoni-Gavage, qui a encadré cette thèse avec beaucoup de patience et de gentillesse. Elle a su m'orienter dans le vaste monde des systèmes hyperboliques et m'a ainsi fait découvrir des sujets qui m'ont enthousiasmé. Elle a su aussi me remotiver quand cela s'avérait nécessaire (indispensable?). Je la remercie très sincèrement pour sa disponibilité et sa bonne humeur, et j'espère que nous aurons l'occasion de collaborer à nouveau. Guy Métivier a également beaucoup contribué à l'achèvement de ce travail. Il a su me faire partager ses vastes connaissances en m'initiant notamment aux mystères de l'analyse microlocale. Son aide m'a été fort précieuse, et je tiens à lui exprimer mes plus vifs remerciements.

Il n'est pas de thèse sans rapporteurs. Serge Alinhac et Olivier Guès ont accepté de jouer ce rôle, et je leur en suis très reconnaissant. Je les remercie pour l'attention qu'ils ont portée au manuscrit ainsi que pour leur participation au jury. Les avoir eus pour juges est un véritable honneur.

Une part importante de cette thèse trouve son origine dans les travaux d'Heinrich Freistühler. C'est donc un grand plaisir de l'avoir à mon jury, et je le remercie d'avoir accepté d'en faire partie. J'ai eu l'occasion de le rencontrer à plusieurs reprises. L'intérêt constant qu'il a manifesté pour l'avancement de mes travaux a été une grande source de motivation.

J'ai eu la chance de côtoyer Denis Serre tout au long de ce travail. Je le remercie d'avoir patiemment répondu aux nombreuses questions que je lui ai posées. Sa longue expérience des systèmes de lois de conservation m'a beaucoup aidé. C'est une grande joie pour moi que mon "grand-père" s'intéresse à ce qu'a fait son "petit-fils".

Au cours des deux années écoulées, j'ai eu l'occasion de rencontrer des chercheurs qui m'ont témoigné beaucoup d'attention. Je suis particulièrement reconnaissant à Andrea Corli, Michael Shearer et Mark Williams pour leurs encouragements et leurs conseils.

Enfin, j'ai bénéficié à l'UMPA de conditions de travail en tout point exceptionnelles, et d'un environnement scientifique de grande qualité. Un grand merci à tous les membres de l'équipe EDP, passés et présents, avec une mention spéciale à David, Frédéric et Stéphane, et un non moins grand merci à Bruno pour avoir toujours su répondre aux questions les plus diverses. Mille mercis à Gérard et Virginia pour m'avoir si souvent simplifié la vie, et un grand coup de chapeau à Mylène et Cyril pour m'avoir supporté si longtemps. J'attends impatiemment de les voir soutenir à leur tour...

Mon monitorat à l'École Centrale m'a permis de faire des pauses salutaires dans mon travail de recherche. J'ai été très chaleureusement accueilli par l'ensemble du personnel du département de mathématiques, et c'est avec beaucoup de plaisir que je remercie toute l'équipe enseignante. Par ailleurs, la relecture d'ouvrages d'analyse numérique m'a également fait découvrir de nouveaux horizons, et j'adresse mes plus sincères remerciements à Michelle Schatzman pour m'avoir confié sa prose.

Il y a cependant une vie au-delà des opérateurs pseudo-différentiels et des systèmes hyperboliques! D'ailleurs cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans tous les bons moments

où j'ai provisoirement abandonné mon travail. Parce qu'ils m'ont tant apporté au cours de nos (trop brèves) rencontres, j'adresse mes plus chaleureux remerciements à Delphine, Christophe, Chloé, Jean-Pierre, Laure, Benoit, Pierre-Yves, Tomoko et Yannick. Leur amitié est un de mes biens les plus précieux. Malgré l'éloignement, Fabien, Julien et Vincent ont également beaucoup compté pour moi tout au long de ces dernières années, et j'espère pouvoir les voir plus souvent à l'avenir.

Enfin, j'ai reçu des membres de ma famille une aide inestimable, sans laquelle ce travail n'aurait jamais abouti. Je leur exprime toute ma gratitude, et les remercie pour tout l'amour dont ils m'ont entouré.

Table des matières

1 Introduction **1**
1.1 Systèmes de lois de conservation multidimensionnels 1
1.1.1 Présentation générale 1
1.1.2 Ondes de choc multidimensionnelles 6
1.1.3 Rappels sur les problèmes mixtes à coefficients constants 10
1.1.4 Stabilité des ondes de choc 12
1.2 Équations d'Euler pour un fluide de van der Waals 15
1.2.1 Loi de van der Waals 15
1.2.2 Transition de phase isotherme 16
1.2.3 Critères d'admissibilité des transitions de phase 20
1.2.4 Stabilité des transitions de phase visco-capillaires 22
1.2.5 Stabilité des transitions de phase purement capillaires 23

2 Conditions au bord pour les équations d'Euler **29**
2.1 Les équations d'Euler pour un gaz parfait polytropique 30
2.2 Conditions sur une paroi de sortie 32
2.2.1 Conditions au bord strictement dissipatives 33
2.2.2 L'analyse modale 33
2.2.3 Deux exemples 36
2.3 Conditions sur une paroi d'entrée 37
2.3.1 Conditions au bord dissipatives 38
2.3.2 L'analyse modale 38
2.3.3 Exemples en dimension 1 et 2 40
2.4 Conditions sur une paroi non adhérente 44
2.5 Exemple de traitement formel 45
2.5.1 Fluides supersoniques rentrants 45
2.5.2 Fluides subsoniques sortants 46
2.5.3 Fluides subsoniques rentants 47

3 Le problème linéarisé à coefficients constants **49**
3.1 Linéarisation des équations 50
3.2 Analyse modale et stabilité faible des transitions de phase planes 53
3.3 Élimination du front 58
3.4 Estimations a priori pour le problème (3.8) 64
3.5 Preuve du théorème 3.2 67
3.5.1 Réduction du symbole 67
3.5.2 Construction microlocale 69
3.5.3 Preuve du théorème 3.2 77

3.6 Quelques remarques 78

4 Calcul symbolique à paramètre 83
4.1 Espaces et normes utilisés 83
4.1.1 Espaces de Sobolev à poids 83
4.1.2 Autres espaces fonctionnels 84
4.2 Calcul pseudodifférentiel à paramètre 86
4.3 Calcul paradifférentiel à paramètre 88
4.3.1 Découpage dyadique 88
4.3.2 Symboles et opérateurs paradifférentiels 91
4.3.3 Lien avec le paraproduit 99
4.3.4 Calcul symbolique 103
4.3.5 Inégalités de Gårding 106
4.3.6 Symboles réguliers et développements finis 108
4.3.7 Petit récapitulatif 111
4.4 Calcul dans un demi-espace 112

5 Chocs sous-compressifs multidimensionnels 113
5.1 Description du problème 113
5.2 Le problème linéarisé à coefficients constants 117
5.2.1 Linéarisation des équations 117
5.2.2 Stabilité d'un choc sous-compressif plan 120
5.2.3 Preuve du théorème 5.1 121
5.3 Le problème linéarisé à coefficients variables 122
5.3.1 Linéarisation des équations 122
5.3.2 Paralinéarisation des équations 124
5.3.3 Preuve de l'inégalité (5.33) 127
5.4 Résolution du problème linéarisé 129
5.4.1 Le problème dual. Premières propriétés 130
5.4.2 Existence de solutions dans des espaces à poids 134
5.4.3 Le problème mixte à condition initiale nulle 138
5.4.4 Le problème mixte général 140
5.5 Résolution du problème non linéaire 141
5.5.1 Les relations de compatibilité 142
5.5.2 Estimations H^s pour le problème linéarisé 144
5.5.3 Preuve du théorème 5.6 145
5.6 Application aux transitions de phase 148

6 Weakly stable multi-d shocks 151
6.1 Introduction 151
6.2 The constant coefficients analysis 154
6.2.1 The weak stability condition 156
6.2.2 The weak stability of planar shock waves 161
6.2.3 Proof of theorem 6.1 162
6.3 The variable coefficients analysis 167
6.3.1 The linearized equations 168
6.3.2 The paralinearized equations 169
6.3.3 Geometrical assumptions 174

6.3.4 Energy estimates near instability points 177
6.3.5 Energy estimates far from instability points 186
6.3.6 The main result 189
6.4 The example of gas dynamics 191
6.4.1 The case of Lax shocks 191
6.4.2 The case of reversible phase transitions 194
6.5 Paradifferential calculus with a parameter 195

A Analyse dyadique **199**
A.1 Décomposition de Littlewood-Paley 199
A.2 Espaces de Sobolev 202
A.3 Espaces de Hölder et classes de Zygmund 202
A.4 Quelques applications 204

B Les résultats du chapitre 4 **207**
B.1 Théorème de Hardy-Littlewood-Wiener 207
B.2 Résultats d'analyse harmonique 211

C Note sur un article de Robinet, Gressier, Casalis et Moschetta **215**
C.1 A theoretical argument 215
C.2 The calculation of [84] 216
C.3 A general calculation 217

Table des figures

1.1 Explosion d'une solution de l'équation de Burgers 5
1.2 Loi de van der Waals pour l'eau à différentes températures 16
1.3 Points de Maxwell 17
1.4 Loi des aires généralisée 22

2.1 Écoulement compressible dans une tuyère. 29
2.2 Vérification de la condition de Kreiss uniforme. 41

3.1 Points exceptionnels pour le système (3.9). 56

4.1 Découpage dyadique à paramètre: coupe en $\gamma = 3/4$. 90

5.1 Caractéristiques rentrant dans le choc 115

6.1 Characteristics entering the shock front 155
6.2 Bicharacteristic curves originating from the boundary 176

Chapitre 1

Introduction

On s'intéresse dans ce travail à la stabilité des ondes de choc multidimensionnelles. De telles ondes apparaissent naturellement dans l'étude des systèmes hyperboliques de lois de conservation, mais l'analyse de leur stabilité est encore peu développée en plusieurs variables d'espace. Le travail fondateur est dû à Andrew Majda [65, 64], qui a mené jusqu'à son terme l'analyse de la stabilité des ondes de choc, sous une hypothèse fondamentale dite de stabilité uniforme. Dans ce travail, nous considérons le cas où cette hypothèse de stabilité uniforme n'est pas satisfaite. On doit alors faire face à des instabilités "neutres". Le but principal de notre travail est de décrire la propagation de ces modes neutralement instables, et de préciser en quoi les instabilités rencontrées modifient les résultats de Majda. Les résultats que nous obtenons devraient permettre de montrer la stabilité non linéaire des ondes de chocs faiblement stables.

La première partie de cette introduction est consacrée à des rappels sur les systèmes hyperboliques de lois de conservation. Nous rappellerons notamment les notions d'ondes de choc et de stabilité uniforme au sens de Majda. Dans une deuxième partie, nous verrons deux modèles de transitions de phase liquide-vapeur, les unes étant uniformément stables, les autres ne l'étant pas. Ce dernier exemple motivera le cadre général que nous proposerons pour étendre les résultats de Majda à une grande classe de chocs non uniformément stables. Nos résultats sont détaillés à la fin de ce chapitre.

1.1 Systèmes de lois de conservation multidimensionnels

1.1.1 Présentation générale

De nombreux phénomènes physiques sont décrits par des équations aux dérivées partielles qui se mettent sous la forme

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} f_j(U) = 0 \,. \tag{1.1}$$

Dans l'équation (1.1), t est la variable de temps et $x_1, \ldots, x_d$ sont les variables d'espace. Le vecteur U peut représenter des quantités telles que les champs électrique et magnétique, la densité et la vitesse d'un fluide... Les fonctions f_j sont définies sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^N$ (qui est l'ensemble des états possibles du système) et sont à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. On les supposera de classe $\mathscr{C}^\infty$. On cherche alors une solution U de (1.1), définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, et à valeurs dans $\mathscr{U}$.

On ne s'intéressera par la suite qu'à des **systèmes multidimensionnels**, c'est-à-dire $N \geq 2$ et $d \geq 2$. Les phénomènes que nous étudierons dans ce travail n'apparaissent jamais ni dans l'étude des lois de conservation scalaires ($N = 1$), ni dans le cas unidimensionnel ($d = 1$).

Donnons quelques exemples de tels systèmes d'évolution. Parmi les équations de la physique qui se mettent sous la forme (1.1), on citera les équations de Maxwell dans le vide[1]:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{B} + \text{rot } \vec{E} = 0 \,, \\ \partial_t \vec{E} - \text{rot } \vec{B} = 0 \,, \end{cases}$$

où $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$ désigne le champ magnétique et $\vec{E} \in \mathbb{R}^3$ le champ électrique. Au prix de changements d'inconnues, des équations du second ordre comme l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \,,$$

ainsi que l'équation de l'élasticité linéaire (pour un matériau de coefficients de Lamé α et β)

$$\partial_t^2 z - \text{div } (Tz) = 0 \,, \quad Tz := \alpha(\nabla z + (\nabla z)^t) + (\beta - \alpha)(\text{div } z) I \,,$$

se mettent aussi sous la forme (1.1). L'exemple qui servira de fil directeur tout au long de ce travail est celui de la dynamique des gaz. En variables dites Euleriennes, il s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div } (\rho \mathbf{u}) = 0 \,, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \text{div } (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \,, \\ \partial_t (\frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e) + \text{div } \left[(\frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e + p) \mathbf{u} \right] = 0 \,, \end{cases} \tag{1.2}$$

avec les notations traditionnelles pour les quantités physiques: ρ désigne la densité du fluide, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ la vitesse, p la pression et e l'énergie interne par unité de masse (dite aussi énergie interne spécifique). Le vecteur correspondant au U de l'équation (1.1) est

$$U := \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \frac{1}{2}\rho |\mathbf{u}|^2 + \rho e \end{pmatrix} .$$

C'est le vecteur des variables conservatives. Le système (1.2) est fermé par une équation d'état qui décrit le comportement du gaz considéré. Cette équation se met en général sous la forme

$$p = p(\rho, e) \,.$$

En d'autres termes, la pression à l'intérieur du gaz est déterminée par la densité et l'énergie interne. L'équation d'état la plus fréquemment employée est celle des gaz parfaits polytropiques, pour laquelle on a

$$p = (\gamma - 1) \, \rho \, e \,,$$

1. On s'est ramené, moyennant un changement d'échelles, à des constantes physiques égales à 1.

où γ est la constante adiabatique ($\gamma = 5/3$ pour un gaz monoatomique et $\gamma = 7/5$ pour un gaz diatomique). Nous reviendrons sur les équations d'état dans la partie suivante quand nous détaillerons les modèles de transitions de phase.

Le système (1.2) peut également décrire le comportement de liquides, ou même de matériaux solides dans certains régimes de température et de pression, comme le détaille, par exemple, Jaouen dans sa thèse [54]. Pour cette raison, on l'appelle également système de l'hydrodynamique. Sa dérivation (formelle) remonte à d'Alembert, mais on s'y réfère souvent comme aux équations d'Euler.

Un modèle simplifié de (1.2) est le système de la dynamique des gaz isentropiques. Rappelons que le second principe de la thermodynamique assure l'existence d'une fonction s, appellée entropie spécifique, vérifiant

$$T\,ds = de - \frac{p}{\rho^2}\,d\rho\,,$$

où T est la température. Si $(\rho, \mathbf{u}, e)$ est une solution régulière (disons de classe $\mathscr{C}^1$) de (1.2), on montre que s vérifie

$$\partial_t s + \mathbf{u}\cdot\nabla s = 0\,.$$

L'entropie est donc constante le long des "lignes de courant". Si l'on suppose que s est constante dans tout l'espace, cette dernière équation est trivialement satisfaite et (1.2) se réduit au système de la dynamique des gaz isentropiques:

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \operatorname{div}\,(\rho\mathbf{u}) = 0\,, \\ \partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}\,(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p = 0\,, \end{cases} \tag{1.3}$$

la pression p n'étant plus fonction que de la densité ρ. Ce dernier système constitue un exemple simple de système non linéaire pour lequel de nombreux calculs explicites peuvent être menés à bien.

On distingue deux grandes classes de problèmes associés à (1.1):

1. Le problème de Cauchy: dans ce cas, $\Omega = \mathbb{R}^d$ et on adjoint à (1.1) une condition initiale $U(t=0) = U_0$.
2. Le problème mixte: dans ce cas, Ω est un ouvert distinct de $\mathbb{R}^d$ et on adjoint à (1.1) une condition initiale et une condition sur le bord $\partial\Omega$.

Dans ce travail, nous nous intéresserons essentiellement à des problèmes mixtes.

Nous commençons cependant par rappeler quelques résultats sur le problème de Cauchy pour le système (1.1). Pour les solutions régulières, c'est-à-dire de classe $\mathscr{C}^1$, le système (1.1) est équivalent à

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{d} A_j(U)\,\partial_{x_j} U = 0\,, \tag{1.4}$$

où $A_j(U) := df_j(U)$ est la matrice jacobienne de f_j au point U. L'écriture (1.4) est la forme quasilinéaire de (1.1). Comme l'explique Serre dans [92, chapitre 3], on ne sait résoudre proprement (1.4) (pour des données initiales régulières) que si le système est **hyperbolique**. Par hyperbolique, on entend ici que le symbole

$$A(U,\xi) := \sum_{j=1}^{d} \xi_j\,A_j(U)$$

est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, uniformément en $\xi \in \mathbb{R}^d$, pour tout $U \in \mathscr{U}$. L'hyperbolicité est une condition nécessaire pour résoudre (1.4). Une condition suffisante pour résoudre (1.4) (avec une condition initiale U_0 dans un espace de Sobolev H^k, k suffisamment grand) est que le système (1.4) soit **symétrisable** au sens de Friedrichs, c'est-à-dire qu'il existe une application

$$\Sigma : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{M}_N(\mathbb{R}) ,$$

telle que pour tout U et pour tout j, $\Sigma(U)A_j(U)$ soit symétrique et $\Sigma(U)$ soit symétrique définie positive. On demande également que Σ soit de classe $\mathscr{C}^\infty$. Une telle application Σ est appellée un **symétriseur** (de Friedrichs) du système.

Rappelons que tout système symétrisable est hyperbolique, voir [92, chapitre 3].

Revenons sur l'exemple de la dynamique des gaz. Formulée dans les variables $(\rho, \mathbf{u}, s)$, l'écriture quasilinéaire du système (1.2) est

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 , \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \dfrac{1}{\rho} \nabla p = 0 , \\ \partial_t s + \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0 , \end{cases}$$

où la pression p est désormais fonction de ρ et de s. Le symbole $A(U, \xi)$ correspondant est donné par

$$A(U,\xi) := \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \xi & \rho\, \xi^t & 0 \\ \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial \rho} \xi & (\mathbf{u} \cdot \xi)\, I_d & \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial S} \xi \\ 0 & 0 & \mathbf{u} \cdot \xi \end{pmatrix} .$$

On vérifie (voir par exemple [15]) que $A(U, \xi)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} > 0 .$$

D'un point de vue physique, c'est une restriction raisonnable, voir [54]. La quantité $\partial_\rho p$ étant homogène au carré d'une vitesse, on définit la vitesse du son c en posant

$$c := \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} .$$

Avec cette définition, les valeurs propres de $A(U, \xi)$ sont

$$\begin{aligned} \lambda_1(U,\xi) &:= \mathbf{u} \cdot \xi - c\,|\xi| && \text{avec multiplicité } m_1 = 1 , \\ \lambda_2(U,\xi) &:= \mathbf{u} \cdot \xi && \text{avec multiplicité } m_2 = d , \\ \lambda_3(U,\xi) &:= \mathbf{u} \cdot \xi + c\,|\xi| && \text{avec multiplicité } m_3 = 1 . \end{aligned}$$

On vérifie également (voir [15]) que le système (1.2) admet un symétriseur de Friedrichs dès que la vitesse du son est bien définie.

Pour un système quasilinéaire symétrisable (et donc hyperbolique), l'existence (locale en temps) et l'unicité de solutions régulières a été montrée indépendamment par divers

auteurs, notamment Gårding [42] et Kato [56]. On renvoie aux ouvrages [15] et [66] pour les détails de la preuve du théorème 1.1 ci-dessous. Par commodité, on supposera que le domaine d'hyperbolicité $\mathscr{U}$ contient l'origine.

Théorème 1.1 (Solutions régulières). *Soit $U_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, avec $s > d/2+1$, telle que l'image de U_0 soit relativement compacte dans $\mathscr{U}$. Il existe un réel $T > 0$ et une unique fonction $U \in \mathscr{C}^0([0,T], H^s(\mathbb{R}^d)) \cap \mathscr{C}^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$ telle que U est solution de* (1.4) *et $U_{|_{t=0}} = U_0$.*

Grâce au résultat d'unicité, on peut définir le temps maximal T^* d'existence de la solution à donnée initiale U_0 (T^* ne dépend que de la condition initiale). Typiquement, le temps maximal T^* est fini, c'est-à-dire que la solution n'est plus régulière à partir de T^*, $U(T^*, \cdot) \notin H^s(\mathbb{R}^d)$. On dira que la solution explose en temps fini (en anglais, on parle de blowup). Ce phénomène de blowup est discuté en détails par Alinhac dans [6].

À titre d'exemple, la figure 1.1 représente l'allure de la solution de l'équation de Burgers

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0\,,$$

à différents instants. L'onde se déplace progressivement vers la droite et cesse d'être régulière au bout d'un temps fini.

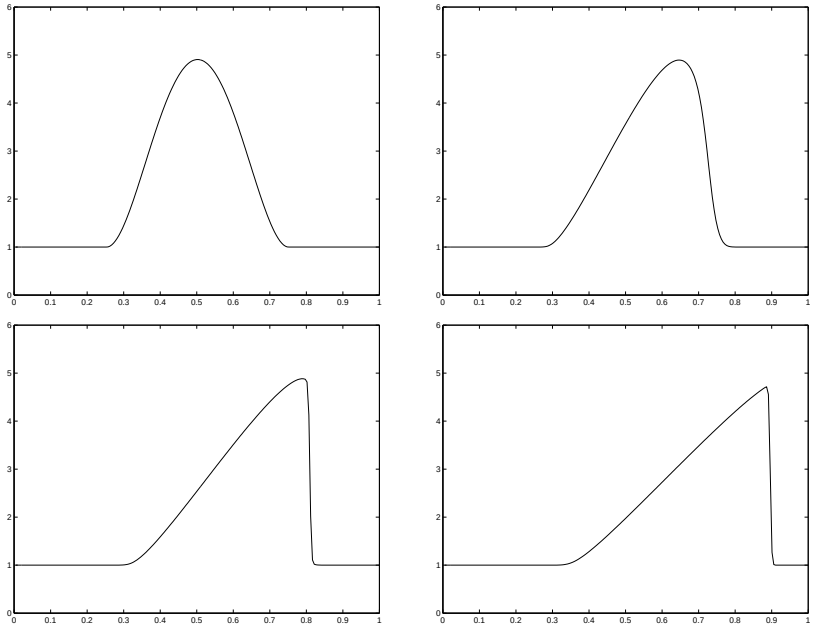


FIG. 1.1 – *Explosion d'une solution de l'équation de Burgers*

En dynamique des gaz, une classe de données initiales donnant des solutions régulières non globales a été exhibée par Sideris [100]. À l'inverse, des solutions régulières globales sont construites par Grassin dans [43].

L'explosion en temps fini des solutions de (1.1) est liée à la formation d'ondes de choc; ces ondes sont des solutions de (1.1) régulières de part et d'autre d'une hypersurface de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Un problème naturel qui se pose est de résoudre (1.1) pour une donnée initiale

U_0 régulière de part et d'autre d'une hypersurface de $\mathbb{R}^d$. Dans toute sa généralité, le problème est d'une complexité assez terrifiante car une seule surface de discontinuité peut en générer instantanément plusieurs. En effet, quand on considère le problème de Riemann unidimensionnel

$$\partial_t U + \partial_x f(U) = 0\,, \quad U_{|t=0} = \begin{cases} U_r & \text{si } x > 0, \\ U_l & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

la solution U à l'instant $t > 0$ présente, en général, plusieurs points de discontinuité (ou de non dérivabilité), même si elle ne possède qu'un seul point de discontinuité à l'instant initial (voir par exemple [62, 63, 92]). En plusieurs dimensions d'espace, la situation est identique et l'on s'attend à ce qu'une unique hypersurface de discontinuité à l'instant initial en engendre instantanément plusieurs dans la solution. En revanche, si la condition initiale vérifie certaines relations de compatibilité, la solution ne présentera qu'une seule hypersurface de discontinuité. Dans tout ce travail, nous nous limiterons à ce cas. Les ondes que nous considèrerons prendront la forme d'ondes de choc. On renvoie aux travaux d'Alinhac [4, 5] pour l'étude des ondes de raréfaction et aux travaux de Métivier et Sablé-Tougeron [71, 88] pour l'étude des ondes de gradient (ou ondes soniques).

1.1.2 Ondes de choc multidimensionnelles

Comme on cherche une solution discontinue de (1.1), on ne parlera plus désormais que de solutions faibles. La proposition 1.1 ci-dessous caractérise les solutions régulières par morceaux de (1.1). Pour simplifier les écritures, on notera y le vecteur $(x_1, \ldots, x_{d-1})$.

Proposition 1.1 (Conditions de Rankine-Hugoniot). *Soient $\Gamma := \{x_d - \varphi(t,y) = 0\}$ une hypersurface régulière de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et U une fonction régulière jusqu'au bord sur $\{x_d > \varphi(t,y)\}$ et $\{x_d < \varphi(t,y)\}$. Alors U est solution de (1.1) si et seulement si U est une solution (classique) de (1.1) de part et d'autre de Γ et si les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites en tout point de Γ:*

$$\forall\, \mathbf{x} = (t, y, x_d) \in \Gamma\,, \quad \partial_t \varphi\, [U](\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \varphi\, [f_j(U)](\mathbf{x}) - [f_d(U)](\mathbf{x}) = 0\,, \tag{1.5}$$

les dérivées partielles de φ étant évaluées en (t,y) et $[f_j(U)](\mathbf{x})$ désignant le saut de $f_j(U)$ au point $\mathbf{x}$. Plus précisément, on a

$$[f_j(U)](\mathbf{x}) := \lim_{s \to 0^+} f_j(U(\mathbf{x} + s\mathbf{n})) - f_j(U(\mathbf{x} - s\mathbf{n}))\,,$$

où $\mathbf{n} := (-\partial_t \varphi, -\partial_{x_1}\varphi, \ldots, -\partial_{x_{d-1}}\varphi, 1)$ est un vecteur normal à Γ au point $\mathbf{x}$.

Le résultat repose sur la formule de Green. On renvoie aux ouvrages [20, 92] pour la preuve. L'hypersurface Γ n'est pas connue à l'avance. Nous sommes donc face à un problème à frontière libre. En suivant Majda [65], nous montrons tout d'abord comment on se ramène à une géométrie fixe en *redressant* le front Γ. Si φ est une fonction régulière sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$, on définit un changement de variables Φ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ par la formule

$$\Phi(t, y, x_d) := (t, y, x_d + \varphi(t,y))\,.$$

L'application Φ envoie l'hyperplan $\{x_d = 0\}$ sur Γ et le demi-espace $\{x_d > 0\}$, respectivement $\{x_d < 0\}$, sur la région $\{x_d > \varphi(t,y)\}$, respectivement $\{x_d < \varphi(t,y)\}$. On redresse alors les fonctions de la manière suivante: si U est définie de part et d'autre de Γ, on définit $U_\sharp$ par

$$\forall\,(t,y,x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}\,, \quad U_\sharp(t,y,x_d) := U(\Phi(t,y,x_d))\,,$$

de sorte que $U_\sharp$ est régulière sur les demi-espaces $\{\pm x_d > 0\}$. On note $U_\sharp^+$ (respectivement $U_\sharp^-$) la restriction de $U_\sharp$ à $\{x_d > 0\}$ (respectivement $\{x_d < 0\}$). Finalement, on pose

$$\widetilde{A_d}(v,\nabla\psi) := A_d(v) - \partial_t\psi\, I - \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, A_j(v)\,,$$

et on vérifie que U est solution de (1.1) si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\partial_t U_\sharp^+ + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(U_\sharp^+)\,\partial_{x_j} U_\sharp^+ + \widetilde{A_d}(U_\sharp^+,\nabla\varphi)\,\partial_{x_d} U_\sharp^+ = 0\,, \quad x_d > 0\,,\\
&\partial_t U_\sharp^- + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(U_\sharp^-)\,\partial_{x_j} U_\sharp^- + \widetilde{A_d}(U_\sharp^-,\nabla\varphi)\,\partial_{x_d} U_\sharp^- = 0\,, \quad x_d < 0\,,\\
&\qquad\qquad \partial_t\varphi\,[U_\sharp] + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j}\varphi\,[f_j(U_\sharp)] - [f_d(U_\sharp)] = 0\,, \quad x_d = 0\,.
\end{aligned}$$

Pour se ramener au seul domaine $\{x_d \geq 0\}$, on considère la fonction

$$(t,y,x_d) \longmapsto U_\sharp^-(t,y,-x_d)\,,$$

définie pour $x_d > 0$. Avec un léger abus de notations, on continue de noter $U_\sharp^-$ cette fonction inconnue, et on omet le signe $\sharp$ pour alléger les écritures. On est ainsi ramené à chercher une solution régulière (U^+, U^-, φ) du problème

$$\begin{aligned}
&\partial_t U^+ + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(U^+)\,\partial_{x_j} U^+ + \widetilde{A_d}(U^+,\nabla\varphi)\,\partial_{x_d} U^+ = 0\,, \quad x_d > 0\,,\\
&\partial_t U^- + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(U^-)\,\partial_{x_j} U^- - \widetilde{A_d}(U^-,\nabla\varphi)\,\partial_{x_d} U^- = 0\,, \quad x_d > 0\,,\\
&\qquad\qquad \partial_t\varphi\,[U] + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j}\varphi\,[f_j(U)] - [f_d(U)] = 0\,, \quad x_d = 0\,,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

avec une condition initiale régulière $(U_0^+, U_0^-, \varphi_0)$.

Quand on cherche une solution de (1.1) régulière de part et d'autre d'une hypersurface, le problème de Cauchy se reformule donc comme un problème mixte non linéaire dans le demi-espace $\{x_d > 0\}$. Les conditions sur le bord $\{x_d = 0\}$ sont données par les conditions de saut de Rankine-Hugoniot. Notons que ce problème mixte n'est pas standard car il ne porte pas sur les seules fonctions inconnues (U^+, U^-). Les dérivées de la fonction φ (qui est indépendante de x_d) interviennent à la fois dans les équations à l'intérieur et dans les conditions au bord.

Nous allons maintenant décrire les conditions initiales que nous considèrerons par la suite. Il nous faut, pour cela, revenir à la forme quasilinéaire (1.4).

Rappelons que l'existence d'un symétriseur Σ assure que le symbole $A(U,\xi)$ défini par

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad A(U,\xi) := \sum_{j=1}^{d} \xi_j\, A_j(U) \tag{1.7}$$

est diagonalisable pour tout $U \in \mathscr{U}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. Pour des raisons techniques qui seront exposées plus loin, nous ferons l'hypothèse, un peu plus forte, d'hyperbolicité "à multiplicité constante". Plus précisément, on suppose qu'il existe des applications $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{U} \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, et des entiers $m_1, \ldots, m_q$ tels que les $\lambda_i(U,\xi)$ soient les valeurs propres, de multiplicité m_i, de la matrice $A(U,\xi)$, et vérifient

$$\forall\, U \in \mathscr{U}\,, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\,, \quad \lambda_1(U,\xi) < \cdots < \lambda_q(U,\xi)\,.$$

Nous avons vu que cette hypothèse est vérifiée par le système de la dynamique des gaz (1.2) (elle est également vérifiée par le système (1.3) et par les autres exemples cités au début de ce chapitre).

Il existe des solutions très simples de (1.6) qui correspondent (avant redressement du front) à des solutions constantes de part et d'autre d'un hyperplan. En effet, soit

$$\mathbf{U} := \begin{cases} U_r & \text{si } x_d > \sigma t + \nu \cdot y, \\ U_l & \text{si } x_d < \sigma t + \nu \cdot y, \end{cases} \tag{1.8}$$

où U_r et U_l sont deux éléments distincts de $\mathscr{U}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et ν est un vecteur dans $\mathbb{R}^{d-1}$. Clairement, $\mathbf{U}$ est solution de (1.1) si et seulement si

$$\sigma\,[\mathbf{U}] + \sum_{j=1}^{d-1} \nu_j\,[f_j(\mathbf{U})] = [f_d(\mathbf{U})]\,.$$

Remarquons tout de suite qu'on peut effectuer un changement de référentiel pour se ramener au cas $\nu = 0$ et $\sigma = 0$ (en pratique, cela simplifie beaucoup les calculs), mais nous ne ferons pas cette simplification tout de suite. La terminologie suivante remonte à Lax [62]:

Définition 1.1. *On dira que* $\mathbf{U}$ *est un* <u>*choc de Lax*</u> *s'il existe un entier* $p \in \{1, \ldots, q\}$ *tel que*

$$\lambda_{p-1}(U_l,\xi) < \sigma < \lambda_p(U_l,\xi) \quad \textit{et} \quad \lambda_p(U_r,\xi) < \sigma < \lambda_{p+1}(U_r,\xi) \tag{1.9}$$

où $\xi := (-\nu, 1) \in \mathbb{R}^d$. *Dans le cas* $p = 1$, *respectivement* $p = q$ *(on dit dans ce cas que le choc est extrême), on ignore la première inégalité sur la gauche, respectivement la seconde inégalité sur la droite.*

On dira que $\mathbf{U}$ *est une* <u>*discontinuité de contact*</u> *s'il existe un entier* $p \in \{1, \ldots, q\}$ *tel que*

$$\lambda_p(U_l,\xi) = \sigma = \lambda_p(U_r,\xi)\,.$$

En dynamique des gaz, on parle aussi de nappe de tourbillon.

Schématiquement, on s'attend à ce que les chocs de Lax soient des structures stables (d'ailleurs, on les observe physiquement) et à ce que les discontinuités de contact soient des structures instables. Plus précisément, si l'on perturbe légèrement un choc (de Lax) plan à l'instant initial, la solution de (1.1) aura la même allure que la condition initiale. En revanche, si l'on perturbe à l'instant initial une discontinuité de contact plane, la solution peut très vite développer des singularités et on ne peut guère espérer montrer un théorème général d'existence pour de telles données initiales.

Tout l'objet de notre travail est de préciser les hypothèses sous lesquelles l'assertion précédente sur les chocs est vraie.

Dans le cas des chocs de Lax, A. Majda [65, 64] a montré, au début des années 80, comment construire des solutions régulières de (1.6) pour des données initiales qui sont des perturbations convenables (au sens où elles vérifient certaines relations de compatibilité) d'un choc plan. Une hypothèse cruciale dans le travail de Majda est celle dite de **stabilité uniforme**. Cette hypothèse est l'extension, pour le problème (1.6), de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme pour les problèmes mixtes standard (voir par exemple [23, 48, 61]).

Pour résoudre (1.6), Majda associe un schéma itératif de type Picard pour les équations à l'intérieur à un schéma de type Newton pour les conditions au bord. Pour cela, il doit résoudre une suite de problèmes linéarisés de la forme

$$\partial_t U_{k+1}^+ + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(U_k^+)\,\partial_{x_j} U_{k+1}^+ + \widetilde{A_d}(U_k^+, \nabla\varphi_k)\,\partial_{x_d} U_{k+1}^+ = F_k^+ \,,$$

$$\partial_t U_{k+1}^- + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(U_k^-)\,\partial_{x_j} U_{k+1}^- - \widetilde{A_d}(U_k^-, \nabla\varphi_k)\,\partial_{x_d} U_{k+1}^- = F_k^- \,,$$

dans le domaine $\{x_d > 0\}$ avec des conditions au bord

$$\partial_t \varphi_{k+1}\,[U_k] + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j}\varphi_{k+1}\,[f_j(U_k)] - \widetilde{A_d}(U_k^+, \nabla\varphi_k)\,U_{k+1}^+ + \widetilde{A_d}(U_k^-, \nabla\varphi_k)\,U_{k+1}^- = G_k \,,$$

en $\{x_d = 0\}$. Pour résoudre de tels problèmes, Majda commence, de façon classique, par montrer des estimations d'énergie a priori. Nous insistons sur le fait que son travail repose sur des estimations sans perte de dérivées. Typiquement, des données F_k^+, F_k^- et G_k dans L^2 donnent une unique solution $(U_{k+1}^+, U_{k+1}^-, \nabla\varphi_{k+1})$ dans L^2. Comme cela est montré dans [65], on ne peut obtenir des estimations sans perte de dérivée que si l'on considère des chocs uniformément stables.

Motivé par un exemple, que nous détaillerons dans la partie suivante, le présent travail a pour but d'examiner les chocs qui **ne sont pas uniformément stables**, mais sont seulement faiblement stables. Nous étendons les résultats linéaires de Majda à de tels chocs, moyennant certaines hypothèses sur la nature des instabilités. L'extension (certainement très technique) du résultat non linéaire de Majda constitue la perspective principale de notre travail. L'étude des nappes de tourbillon, en dimension deux d'espace, est une autre perspective qui s'inscrit dans la continuité des idées que nous allons développer.

Avant d'expliciter la condition de stabilité uniforme de Majda, nous allons faire quelques rappels sur les problèmes mixtes standard, en insistant notamment sur la condition dite de Kreiss-Lopatinskii uniforme.

1.1.3 Rappels sur les problèmes mixtes à coefficients constants

On considère un problème mixte (standard) linéaire, et à coefficients constants:

$$\begin{aligned} \partial_t v + \sum_{j=1}^{d} A_j\, \partial_{x_j} v = f\,, \qquad & x_d > 0\,,\, t > 0\,, \\ Bv = g\,, \qquad & x_d = 0\,,\, t > 0\,, \\ v_{|t=0} = v_0\,, \qquad & x_d > 0\,,\, t = 0\,, \end{aligned} \tag{1.10}$$

avec $A_j \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,N}(\mathbb{R})$. On se place dans le cadre des systèmes hyperboliques à multiplicité constante, comme décrit précédemment, et l'on supposera que la matrice A_d est inversible. Le bord $\{x_d = 0\}$ est dit non caractéristique. Si q désigne le nombre de valeurs propres strictement positives de A_d (comptées avec multiplicité), c'est un fait désormais bien établi (voir [93]) qu'il faut imposer exactement q conditions scalaires indépendantes en $\{x_d = 0\}$ pour pouvoir obtenir un problème bien-posé. Quitte à diminuer le nombre de lignes de B (si B n'est pas de rang maximal), on supposera $q = p$ et B de rang maximal.

Pour savoir si le problème est bien-posé (disons dans L^2), on commence par regarder le problème homogène sans condition initiale (on étend v par 0 pour les temps négatifs). Après transformée de Laplace en t et transformée de Fourier en $y = (x_1, \ldots, x_{d-1})$, on trouve formellement que v vérifie

$$\begin{aligned} \left(\tau\, I + i \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j\, A_j\right) \widehat{v} + A_d\, \frac{d\widehat{v}}{dx_d} = 0 \qquad & x_d > 0\,, \\ B\widehat{v} = 0 \qquad & x_d = 0\,, \end{aligned}$$

avec $\tau \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement positive et $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$. La matrice A_d étant inversible, on obtient que $\widehat{v}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d\widehat{v}}{dx_d} = \mathscr{A}(\tau, \eta)\, \widehat{v} \tag{1.11}$$

sur $]0, +\infty[$, avec la condition aux limites $B\widehat{v}(0) = 0$. La matrice $\mathscr{A}(\tau, \eta)$ est définie par

$$\mathscr{A}(\tau, \eta) := -A_d^{-1} \left(\tau\, I + i \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j\, A_j\right)\,.$$

Dans [47], Hersh commence par remarquer que (1.11) est hyperbolique, au sens des systèmes dynamiques, pour Re $\tau > 0$. La matrice $\mathscr{A}(\tau, \eta)$ n'a pas de valeur propre imaginaire pure. L'espace $\mathbb{C}^N$ se décompose ainsi en somme directe du sous-espace stable, noté $\mathscr{E}^-(\tau, \eta)$, et du sous-espace instable, noté $\mathscr{E}^+(\tau, \eta)$, de $\mathscr{A}(\tau, \eta)$. Pour mémoire, ces sous-espaces sont les sous-espaces propres généralisés associés aux valeurs propres de $\mathscr{A}$ de partie réelle strictement négative ($\mathscr{E}^-$) et de partie réelle strictement positive ($\mathscr{E}^+$). Un argument de continuité/connexité montre que la dimension de ces sous-espaces est indépendante de (τ, η). En choisissant $\tau = 1$ et $\eta = 0$, on trouve que la dimension de $\mathscr{E}^-(\tau, \eta)$ est égale à p.

Hersh montre ensuite qu'une condition nécessaire pour que le problème mixte (1.10) soit bien-posé est

$$\text{Ker } B \cap \mathscr{E}^-(\tau, \eta) = \{0\}$$

pour tout (τ, η) tel que Re $\tau > 0$. Dans le cas contraire, la problème est violemment mal-posé, au sens de Hadamard, dans tous les espaces de Sobolev H^s (même au prix d'une perte arbitrairement grande de dérivées). Cette condition nécessaire, qu'on désignera sous le nom de condition de Lopatinskii, peut se reformuler de la manière suivante: pour tout (τ, η) tel que Re $\tau > 0$, il existe une constante $c(\tau, \eta) > 0$ vérifiant

$$\forall\, Z \in \mathscr{E}^-(\tau, \eta)\,, \quad |B\,Z| \geq c(\tau, \eta)\,|Z|\,.$$

Le gros inconvénient de cette condition est qu'elle ne permet pas (à elle seule) de montrer des estimations d'énergie a priori (elle n'exclut pas non plus les pertes de dérivées, aussi grandes soient elles). Elle permet juste de résoudre (1.10) pour des données de classe $\mathscr{C}^\infty$, mais on ne peut rien dire pour des données dans des espaces de Sobolev.

La condition de Lopatinskii admet la caractérisation suivante: pour tout (τ, η), on se donne une base $(Z_1(\tau, \eta), \ldots, Z_p(\tau, \eta))$ de $\mathscr{E}^-(\tau, \eta)$. Alors le problème (1.10) vérifie la condition de Lopatinskii si et seulement si

$$\Delta(\tau, \eta) := \det(B\,Z_1(\tau, \eta), \ldots, B\,Z_p(\tau, \eta))$$

ne s'annule pour aucune valeur de (τ, η). La fonction Δ est appellée déterminant de Lopatinskii. Elle dépend bien sûr du choix de la base de $\mathscr{E}^-$.

On doit à Kreiss [61] la caractérisation des problèmes mixtes bien-posés dans L^2 (et par extension dans H^s). Par bien-posé, on entend que pour des termes source f et g dans $L^2(\{x_d > 0\})$ et $L^2(\{x_d = 0\})$, (1.10) admet une unique solution $v \in L^2(\{x_d > 0\})$ dont la trace sur $\{x_d = 0\}$ est aussi dans L^2, avec, en plus, une estimation d'énergie. Ces estimations seront abondamment discutées dans la suite de ce travail (par exemple, au chapitre 3), et nous nous en tiendrons ici à cette description succinte. Le point important est que de tels problèmes (nous dirons qu'ils sont fortement bien-posés) sont caractérisés par la condition dite de Lopatinskii (ou Kreiss-Lopatinskii) **uniforme**. Cette condition s'énonce de la façon suivante: il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout (τ, η) avec Re $\tau > 0$, on ait

$$\forall\, Z \in \mathscr{E}^-(\tau, \eta)\,, \quad |B\,Z| \geq c\,|Z|\,.$$

Dans la pratique, il est difficile de vérifier cette condition <u>sous cette forme</u>. Pour la vérifier, on a recours à un prolongement par continuité du sous-espace stable. En effet, le sous-espace $\mathscr{E}^-(\tau, \eta)$ est de dimension constante pour Re $\tau > 0$ et on peut montrer (voir par exemple [15]) que ce sous-espace se prolonge continûment aux points $(\tau, \eta) \in i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$, avec $(\tau, \eta) \neq (0, 0)$. Notons que le prolongement obtenu contient toujours le sous-espace stable de la matrice $\mathscr{A}(\tau, \eta)$ mais peut également contenir tout ou partie du sous-espace central. Pour $\tau \in i\mathbb{R}$, le sous-espace central de $\mathscr{A}(\tau, \eta)$ (i.e. associé aux valeurs propres imaginaires pures) n'a aucune raison d'être vide. Au risque de créer des confusions, on continue de noter $\mathscr{E}^-(\tau, \eta)$ le prolongement du sous-espace stable aux points $(\tau, \eta) \in i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$. En utilisant l'homogénéité de $\mathscr{A}$, on vérifie que le problème (1.10) satisfait la condition de Lopatinskii uniforme si et seulement si

$$\text{Ker } B \cap \mathscr{E}^-(\tau, \eta) = \{0\}$$

pour tout (τ, η) tel que Re $\tau \geq 0$ (inégalité **au sens large**) et $(\tau, \eta) \neq (0, 0)$. Là encore, le déterminant de Lopatinskii est un outil adéquat pour tester cette condition. Il s'agit uniquement de trouver une base $(Z_1, \ldots, Z_p)$ du sous-espace prolongé $\mathscr{E}^-$ aux points (τ, η),

avec $\tau \in i\mathbb{R}$, puis de calculer le déterminant $\Delta(\tau, \eta)$ défini ci-dessus (le point délicat est de trouver une base du prolongement de $\mathscr{E}^-$).

Dans le chapitre 2, nous traitons complètement l'étude des conditions au bord pour les équations d'Euler (1.2) de la dynamique des gaz polytropiques. Nous montrerons notamment comment la vérification de la condition de Lopatinskii (uniforme) peut être menée à bien par un logiciel de calcul formel, ce qui évite de faire à la main des calculs parfois difficiles. Ce chapitre correspond à un travail réalisé avec Sylvie Benzoni-Gavage et Stéphane Aubert (École Centrale de Lyon & Fluorem), qui sera publié prochainement dans l'AIAA Journal [13].

Le système (1.2) étant non linéaire (les conditions au bord qu'on adjoint peuvent l'être également), la vérification de la condition de Lopatinskii (uniforme) se fait en linéarisant (1.2) et les conditions au bord autour d'un état constant. Pour le passage à des résultats non linéaires, on renvoie au travail de Mokrane [77]. Sans entrer dans les détails, la condition de Lopatinskii uniforme (quand elle est satisfaite) permet de mettre en place un schéma itératif de type Picard et de résoudre les problèmes non linéaires.

Quand la condition de Lopatinskii uniforme n'est pas satisfaite, et quand le problème n'est pas non plus violemment mal-posé, on ne dispose pas de résultat général d'existence de solutions pour les problèmes (non) linéaires. Certains cas particuliers ont néanmoins été résolus. Le système d'Euler (1.2) avec un bord glissant a été traité par divers auteurs, voir par exemple [10, 44, 90, 91] (dans ce problème, le bord est caractéristique, mais on dispose d'une propriété de dissipativité). Le cas du système de l'élasticité, avec les fameuses ondes de Rayleigh, est traité par Sablé-Tougeron [87]. Certains problèmes linéaires (avec des conditions au bord particulières) sont résolus par Domanski dans [32]. Pour finir, signalons l'étude plus générale d'Ohkubo et Shirota [78]. Shirota montre cependant dans [99] que l'analyse de [78] ne s'étend pas au cas des chocs non uniformément stables en dynamique des gaz. En fait, cette analyse comporte des hypothèses très restrictives qui limitent son application, voir [98].

1.1.4 Stabilité des ondes de choc

L'étude de la stabilité des chocs (de Lax) suit la démarche que nous avons décrite pour les problèmes mixtes. On commence par linéariser les équations (1.6) autour d'un choc plan $\mathbf{U}$ donné par (1.8). Pour simplifier, on supposera $\nu = 0$ et $\sigma = 0$. Le linéarisé de (1.6) autour du choc stationnaire $\mathbf{U}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathscr{L} v &:= \partial_t v + \sum_{j=1}^{d} \mathscr{A}_j \, \partial_{x_j} v = f \,, \quad x_d > 0 \,, \\ \mathscr{B}(v, \psi) &:= \partial_t \psi \, [\mathbf{U}] + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \psi \, [f_j(\mathbf{U})] + M \, v = g \,, \quad x_d = 0 \,, \end{aligned} \tag{1.12}$$

où l'on a posé

$$\mathscr{A}_j := \begin{pmatrix} A_j(U_r) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_j(U_l) \end{pmatrix} \qquad \text{pour } 1 \le j \le d-1 \,, \tag{1.13a}$$

$$\mathscr{A}_d := \begin{pmatrix} A_d(U_r) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -A_d(U_l) \end{pmatrix} \,, \tag{1.13b}$$

$$M := \begin{pmatrix} -A_d(U_r) & A_d(U_l) \end{pmatrix} \,. \tag{1.13c}$$

Remarquons que (1.12) est un problème mixte linéaire, à coefficients constants, non standard car il ne porte pas que sur la seule fonction v. Des dérivées partielles du front inconnu ψ interviennent dans les conditions au bord. Une étape importante dans l'analyse de (1.12), et sur laquelle nous reviendrons, consiste à éliminer le front des conditions au bord.

Les inégalités de Lax (1.9) assurent que la matrice $\mathscr{A}_d$ est inversible. Le bord $\{x_d = 0\}$ est non caractéristique. L'analyse modale de (1.12) se déroule donc exactement comme décrit ci-dessus pour un problème mixte standard. Après transformée de Laplace en temps et transformée de Fourier dans les variables spatiales tangentielles, on obtient le système

$$\frac{d\widehat{v}}{dx_d} = \mathscr{A}(\tau,\eta)\,\widehat{v} \qquad x_d > 0\,,$$

$$\left(\tau\,[\mathbf{U}] + i\sum_{j=1}^{d-1}\eta_j\,[f_j(\mathbf{U})]\right)\widehat{\psi} + M\,\widehat{v}(0) = 0\,,$$

où $\mathscr{A}(\tau,\eta)$ est définie, comme précédemment, par

$$\mathscr{A}(\tau,\eta) := -\mathscr{A}_d^{-1}\left(\tau\,I + i\sum_{j=1}^{d-1}\eta_j\,\mathscr{A}_j\right)\,.$$

Pour alléger les écritures, on notera

$$b(\tau,\eta) := \tau\,[\mathbf{U}] + i\sum_{j=1}^{d-1}\eta_j\,[f_j(\mathbf{U})]\,.$$

À cause de la structure de blocs des matrices $\mathscr{A}_j$, voir (1.13a)-(1.13b), le système (1.12) est hyperbolique à multiplicité constante. Les résultats de Hersh [47] s'appliquent, et on note $\mathscr{E}^-(\tau,\eta)$ le sous-espace stable de $\mathscr{A}(\tau,\eta)$ pour Re $\tau > 0$.

Nous avons vu que la dimension de $\mathscr{E}^-$ est constante, égale au nombre de valeurs propres strictement positives de $\mathscr{A}_d$. Un résultat de Boillat, qu'on pourra consulter dans [92, chapitre 3], assure que le champ caractéristique $\lambda_p(U,\xi)$ est linéairement dégénéré si λ_p est de multiplicité $m_p \geq 2$. Dans ce cas, on ne peut pas avoir des inégalités strictes comme en (1.9) (de tels champs conduisent à des discontinuités de contact). On supposera donc, en plus des inégalités de Lax (1.9), que λ_p est une valeur propre simple, $m_p = 1$. En général, λ_p est une valeur propre vraiment non linéaire de (1.4). On vérifie alors que $\mathscr{E}^-(\tau,\eta)$ est de dimension $N-1$ quand Re $\tau > 0$. Comme nous l'avons indiqué au paragraphe précédent, le sous-espace $\mathscr{E}^-(\tau,\eta)$ se prolonge continûment aux points $(\tau,\eta) \in i\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$, $(\tau,\eta) \neq (0,0)$.

Dans [65], Majda définit la notion de stabilité uniforme d'un choc plan de la façon suivante:

Définition 1.2 (Stabilité uniforme). *Le choc plan* $\mathbf{U}$ *est dit uniformément stable s'il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour tout* $(\tau,\eta) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}^{d-1}$ *vérifiant* $|\tau|^2 + |\eta|^2 = 1$ *et* Re $\tau \geq 0$, *on ait*

$$\forall\,(\chi, Z) \in \mathbb{C}\times\mathscr{E}^-(\tau,\eta)\,, \quad |\chi\,b(\tau,\eta) + M\,Z| \geq c\,(|\chi| + |Z|)\,.$$

À la lumière du paragraphe précédent, la notion de stabilité uniforme d'un choc (de Lax) est l'extension directe de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme. En raison de

l'homogénéité, de degré 1, du symbole $b(\tau,\eta)$, il est plus commode de se restreindre à des valeurs "normalisées" de (τ,η).

• **Remarque :** Pour un choc uniformément stable, on a notamment

$$|b(\tau,\eta)| \geq c\,\sqrt{|\tau|^2+|\eta|^2},$$

pour tout $(\tau,\eta)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}^{d-1}$. Le symbole $b(\tau,\eta)$ ne s'annule donc que pour $(\tau,\eta)=(0,0)$. On dit qu'un tel symbole est elliptique. Signalons que cette propriété n'est jamais vérifiée pour des lois de conservation **scalaires** en dimension d'espace $d\geq 2$. En revanche, dans le cas de la dynamique des gaz (isentropique ou non isentropique), le symbole b est toujours elliptique. Mis à part l'exemple des lois de conservation scalaires, nous ne connaissons pas d'autre situation où le symbole b n'est pas elliptique.

La stabilité des ondes de choc en dynamique des gaz est un sujet dont l'étude remonte à la Seconde Guerre mondiale. Elle est analysée notamment dans [29, 33, 35, 59, 114]. Il existe par ailleurs divers articles de revue sur le sujet, par exemple [9, 68, 105], sans oublier l'analyse complète de Majda [65] (on pourra trouver le détail des calculs de Majda dans [15, 55]). Notons que la plupart des auteurs s'arrête à la condition nécessaire de stabilité (le paramètre τ vérifie Re $\tau>0$). De toutes ces analyses, il ressort que la stabilité (uniforme ou non uniforme) des chocs plans est étroitement liée à la loi de pression (voir le chapitre 6 et [26] pour le cas isentropique, et [15, 55, 65] pour le cas non isentropique). Notamment, pour un gaz parfait polytropique, **tous** les chocs de Lax sont **uniformément** stables. Pour des lois de pression plus compliquées, un fait général demeure: les chocs d'amplitude faible ou modérée sont uniformément stables, tandis que les chocs de forte amplitude peuvent être "neutralement" instables. Quant aux instabilités violentes, elles revêtent un caractère exceptionnel.

Dans un article récent de Robinet *et al.* [84], il est affirmé, au contraire, que certains chocs de Lax (pour la dynamique des gaz parfaits polytropiques) sont violemment instables au sens de Hadamard, c'est-à-dire que la condition de stabilité uniforme est violée en des points pour lesquels Re $\tau>0$. Cette affirmation est erronée, comme on peut s'en rendre compte en reprenant les calculs de [84]. L'annexe C contient la note de correction [28] que nous avons écrite avec Sylvie Benzoni-Gavage et Denis Serre.

Pour des systèmes généraux, il existe à notre connaissance peu de résultats sur la stabilité uniforme. Dans [69, annexe A], Métivier montre que les chocs de faible amplitude sont uniformément stables pour des systèmes 2×2 en dimension 2 d'espace, quand les deux champs caractéristiques sont vraiment non linéaires. Ce résultat est étendu par Métivier dans [70] au cas des chocs extrêmes pour des systèmes arbitraires (toujours sous une hypothèse de vraie non linéarité, et une hypothèse supplémentaire de convexité de la valeur propre λ_p).

Pour finir, nous mentionnerons le système de la magnétohydrodynamique, que l'on trouvera dans [92, 31]. Ce système n'est pas à multiplicité constante, et on ne sait pas si les résultats de Majda s'appliquent (pour le savoir, il faudrait vérifier la "structure de blocs" définie par Majda dans [65]). Indépendamment de Majda, Blokhin [16, 17] a proposé une méthode alternative pour l'étude des chocs multidimensionnels. Cette méthode conduit aux mêmes résultats que ceux de Majda, et repose également sur la condition de stabilité uniforme. L'application de cette méthode au système de la magnétohydrodynamique est discutée dans [18]. On renvoie également au travail de Trakhinin [109] pour des résultats en MHD relativiste.

1.2 Équations d'Euler pour un fluide de van der Waals

1.2.1 Loi de van der Waals

Nous avons vu que le système (1.2) décrit l'évolution d'un fluide compressible (liquide ou gaz). La loi de pression d'un tel fluide est habituellement donnée comme fonction de la densité et de l'énergie interne, $p = p(\rho, e)$. Elle peut également être donnée comme fonction de la densité et de la température. Dans le cas des gaz parfaits polytropiques, on obtient

$$p = \frac{RT}{M}\rho\,,$$

où R est la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz considéré. Dans les unités du système international, on a

$$R = 8,3144\, J.K^{-1}.mol^{-1}\,.$$

Le modèle des gaz parfaits se base sur deux hypothèses principales: les molécules sont assimilées à des points matériels et le gaz est suffisamment dilué pour que les molécules n'interagissent pas entre elles. Il apparaît également comme une asymptotique possible (on parle de limite hydrodynamique) de l'équation de Boltzmann, voir [112].

Le modèle de van der Waals apporte deux corrections au modèle des gaz parfaits: les molécules ont désormais un volume non nul, et elles interagissent entre elles. En notant $v := M/\rho$ le volume molaire, l'équation d'état de van der Waals prend la forme

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}\,, \tag{1.14}$$

avec a et b des constantes strictement positives (qui dépendent du fluide) et R la constante des gaz parfaits. Notons que p n'est définie que pour $v > b$ (ce qui revient à imposer $\rho < M/b$). Pour l'eau, les constantes a et b valent

$$a = 553600\, J.cm^3.mol^{-2}\,,$$
$$b = 30,49\, cm^3.mol^{-1}\,.$$

Le lecteur trouvera dans [113] les valeurs des paramètres pour d'autres fluides.

On rappelle quelques propriétés des courbes isothermes de (1.14), voir la figure 1.2. Tout d'abord, la fonction p (vue comme fonction de v) est strictement positive sur $]b, +\infty[$ si et seulement si $T > T_{min}$, où la température *minimale* T_{min} est définie par $T_{min} := a/(4bR)$. Il est donc naturel de ne retenir que des températures supérieures à T_{min}. Si la température T est supérieure ou égale à la température *critique* $T_c := 8a/(27bR)$, la courbe isotherme $(v \mapsto p(v))$ est strictement décroissante sur $]b, +\infty[$. En revanche, pour $T < T_c$, la courbe isotherme est strictement décroissante sur un intervalle $]b, v_*[$, puis strictement croissante sur un intervalle $]v_*, v^*[$ et enfin strictement décroissante sur $]v^*, +\infty[$. De plus, l'isotherme possède deux points d'inflexion v_i et v^i vérifiant

$$b < v_* < v_i < v^* < v^i\,.$$

Pour l'eau, on trouve

$$T_{min} = 546\ K\,, \qquad T_c = 647\ K\,,$$

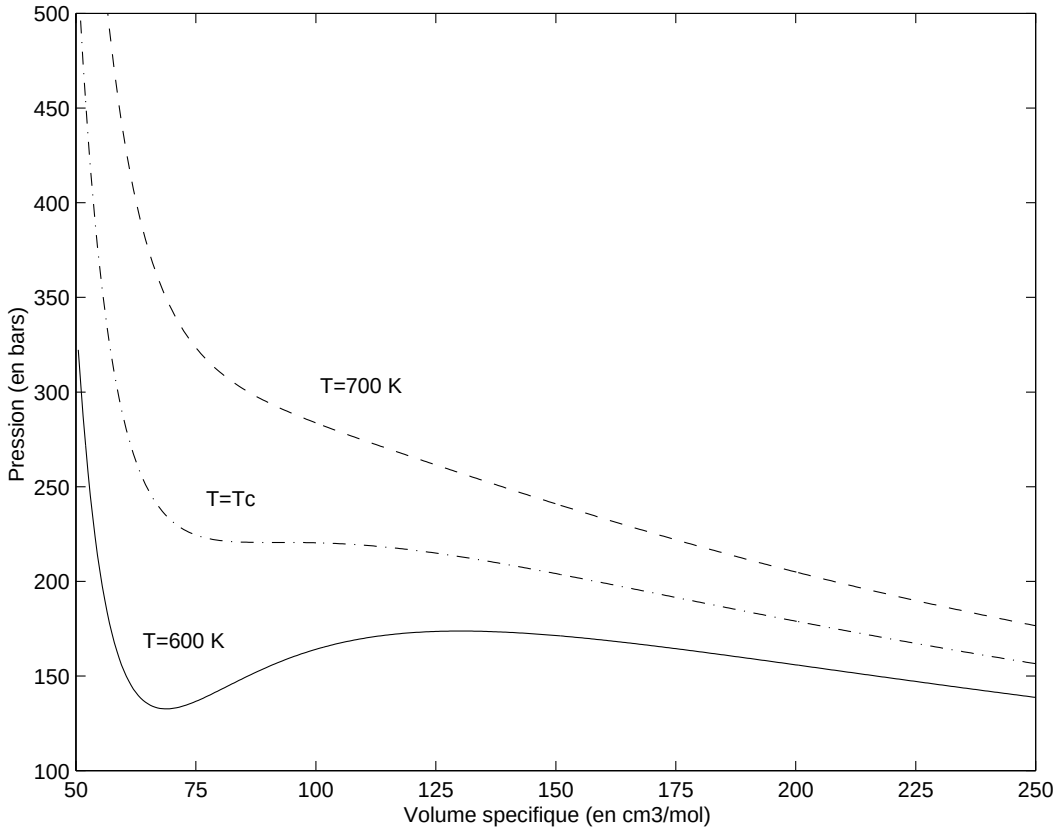


FIG. 1.2 – *Loi de van der Waals pour l'eau à différentes températures*

et à $T = 600\ K$, on obtient

$$v_* = 68,8\ cm^3.mol^{-1}\,, \qquad v_i = 81,3\ cm^3.mol^{-1}\,,$$
$$v^* = 130,1\ cm^3.mol^{-1}\,, \qquad v^i = 205,8\ cm^3.mol^{-1}\,.$$

Dans le cas $T_{min} < T < T_c$, l'isotherme de van der Waals est une fonction non monotone du volume molaire. En plus des points particuliers déjà exhibés (extrêma locaux, points d'inflexion), elle possède deux autres points remarquables, appelés points de Maxwell (nous verrons leur importance au prochain paragraphe). Les points de Maxwell v_m et v^m sont définis par les relations

$$p(v_m) = p(v^m) =: \overline{p} \qquad \text{et} \qquad \int_{v_m}^{v^m} (p(v) - \overline{p})\, dv = 0\,. \tag{1.15}$$

Ces points admettent une interprétation géométrique simple, illustrée à la figure 1.3: ils sont donnés par la "règle des aires égales". Pour l'eau à 600 K, on obtient

$$v_m = 58,7\ cm^3.mol^{-1} \qquad \text{et} \qquad v^m = 182,6\ cm^3.mol^{-1}\,.$$

1.2.2 Transition de phase isotherme

On s'intéresse à l'évolution d'un fluide isotherme (i.e. à température constante) dans l'espace $\mathbb{R}^d$. Le fluide étant isotherme, il n'y a pas conservation de l'énergie et on ne

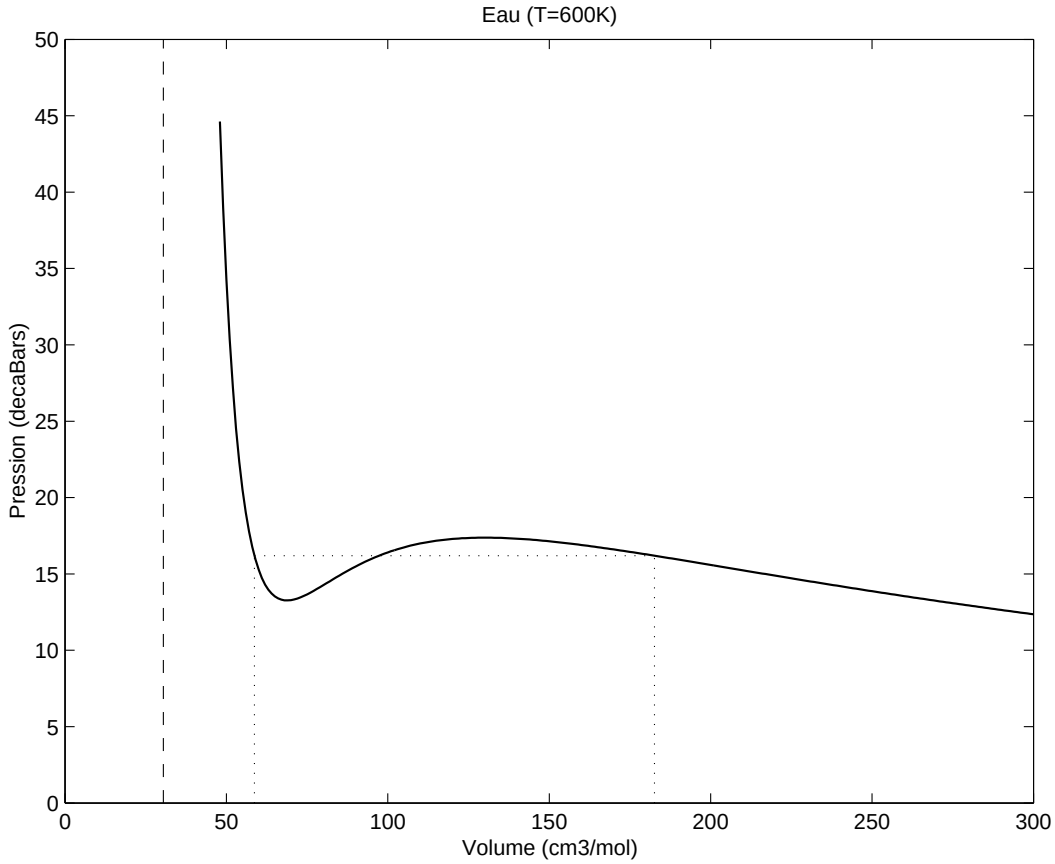


FIG. 1.3 – *Points de Maxwell*

retient que les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Les équations de l'hydrodynamique se réduisent à

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u}) = 0\,, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla\, p = 0\,. \end{cases} \tag{1.16}$$

On suppose que le fluide obéit à une loi de pression de van der Waals

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}\,, \tag{1.17}$$

avec $v = 1/\rho$ le volume molaire (pour simplifier, la masse molaire est prise égale à 1), et T la température, vérifiant $T_{min} < T < T_c$, de sorte que la pression p est une fonction non monotone de la densité ρ (voir le paragraphe précédent).

Le système (1.16) n'est hyperbolique que dans la région $\{p'(\rho) > 0\}$. En reprenant les notations de la partie 1.1, le symbole $A(U,\xi)$, $U := (\rho, \mathbf{u})$, est donné par

$$A(U,\xi) := \begin{pmatrix} \mathbf{u}\cdot\xi & \rho\,\xi^t \\ \dfrac{p'(\rho)}{\rho}\,\xi & (\mathbf{u}\cdot\xi) I_d \end{pmatrix}\,.$$

Ses valeurs propres sont

$$\begin{aligned}
\lambda_1(U,\xi) &= \mathbf{u}\cdot\xi - c\,|\xi| && \text{avec multiplicité } m_1 = 1\,,\\
\lambda_2(U,\xi) &= \mathbf{u}\cdot\xi && \text{avec multiplicité } m_2 = d-1\,,\\
\lambda_3(U,\xi) &= \mathbf{u}\cdot\xi + c\,|\xi| && \text{avec multiplicité } m_3 = 1\,.
\end{aligned}$$

Là encore, nous avons désigné par c la vitesse du son dans le fluide

$$c := \sqrt{p'(\rho)}\,,$$

tant que $p'(\rho) > 0$.

Lorsque le volume molaire v appartient à l'intervalle $[v_*, v^*]$, la vitesse du son est imaginaire pure et le symbole $A(U,\xi)$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Cette région est appellée *zone spinodale*. Elle n'est pas observable physiquement et correspond à des états violemment instables. Ces instabilités sont mises en évidence et étudiées dans [36, 52]. Le domaine d'hyperbolicité du système (1.16) possède donc deux composantes connexes:

$$\mathscr{U} := (]0, 1/v^*[\times\mathbb{R}^d) \cup (]1/v_*, 1/b[\times\mathbb{R}^d)\,.$$

Chacune de ces deux composantes connexes est appellée une *phase*. La zone $v \in]b, v_*[$ est la phase liquide et la zone $v \in]v^*, +\infty[$ est la phase vapeur.

Pour éviter les instabilités liées à la zone spinodale, on s'intéresse à des solutions discontinues de (1.16) pour lesquelles le volume molaire prend ses valeurs dans chacune des deux phases. Une telle solution sera appellée une *transition de phase*. Notamment, le volume molaire n'est jamais dans la zone spinodale, et la vitesse du son est bien définie.

Une transition de phase plane est donnée par

$$\mathbf{U} := \begin{cases} (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{si } x_d > \sigma t,\\ (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{si } x_d < \sigma t,\end{cases}$$

où les états "à gauche" et "à droite" sont reliés par les relations de Rankine-Hugoniot:

$$\sigma[\rho] = [\rho\mathbf{u}\cdot e_d]\,, \tag{1.18a}$$

$$\sigma[\rho\mathbf{u}] = [\rho(\mathbf{u}\cdot e_d)\mathbf{u}] + [p]e_d\,. \tag{1.18b}$$

Là encore, e_d désigne le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On peut réécrire (1.18a) sous la forme

$$\rho_r(\mathbf{u}_r\cdot e_d - \sigma) = \rho_l(\mathbf{u}_l\cdot e_d - \sigma) =: j\,,$$

où j désigne le flux de matière à travers l'interface $\{x_d = \sigma t\}$. L'équation (1.18b) devient

$$-j[\mathbf{u}] = [p]e_d\,. \tag{1.19}$$

On se placera toujours dans le cas où les états ρ_l et ρ_r ne sont pas dans la même phase.

Si $j = 0$, on a équilibre des pressions $p(\rho_r) = p(\rho_l)$, mais cela n'implique pas $\rho_r = \rho_l$ (la fonction p étant non monotone). Cette situation correspond à une transition de phase statique, pour laquelle il n'y a pas de transfert de masse à travers l'interface. La vitesse normale $\mathbf{u}\cdot e_d$ est alors continue à travers l'interface. Ce cas est apparenté aux discontinuités de contact (définition 1.1). La courbe isotherme étant non monotone (figure 1.3), il existe a priori une infinité d'interfaces statiques. La seule observable physiquement est celle

correspondant à la droite de Maxwell, c'est-à-dire que $1/\rho_r$ et $1/\rho_l$ sont les points de Maxwell v_m et v^m. Sans trop entrer dans les détails (on renvoie par exemple à [54]), les points de Maxwell sont les seuls pour lesquels l'enthalpie libre est la même de part et d'autre de l'interface (ce qui est requis par la thermodynamique).

Si $j \neq 0$ (on parle de transition de phase dynamique par opposition au cas statique), (1.19) assure que le saut de la vitesse est colinéaire au vecteur e_d, et on montre facilement les relations

$$j^2 = -\frac{[p]}{[v]}, \qquad [\mathbf{u} \cdot e_d] = -[p]/j\,.$$

On introduit les nombres de Mach:

$$M_r := \frac{|\mathbf{u}_r \cdot e_d - \sigma|}{c_r} \qquad \text{et} \qquad M_l := \frac{|\mathbf{u}_l \cdot e_d - \sigma|}{c_l}\,.$$

La vitesse du son c est bien définie car les volumes molaires $v_r := 1/\rho_r$ et $v_l := 1/\rho_l$ ne sont pas dans la zone spinodale. On vérifie alors que les nombres de Mach satisfont

$$M_r^2 = \frac{[p]/[v]}{p'(v_r)} \qquad \text{et} \qquad M_l^2 = \frac{[p]/[v]}{p'(v_l)}\,. \tag{1.20}$$

Notamment, lorsque les volumes molaires sont proches des points de Maxwell, on a les inégalités

$$M_r < 1 \qquad \text{et} \qquad M_l < 1\,.$$

On parle de transition de phase **subsonique**. Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'à de telles transitions de phase. Rappelons qu'en dynamique des gaz, les chocs de Lax sont supersoniques en amont du choc et subsonique en aval (si $j > 0$, on a $M_l > 1$ et $M_r < 1$). Les transitions de phase qui nous intéressent ne satisfont donc pas les inégalités de Lax (1.9), mais vérifient, dans le cas $j > 0$:

$$\lambda_1(U_l, e_d) < \sigma < \lambda_2(U_l, e_d) \qquad \text{et} \qquad \lambda_1(U_r, e_d) < \sigma < \lambda_2(U_r, e_d)\,.$$

Dans le cas $j < 0$, elles vérifient

$$\lambda_2(U_l, e_d) < \sigma < \lambda_3(U_l, e_d) \qquad \text{et} \qquad \lambda_2(U_r, e_d) < \sigma < \lambda_3(U_r, e_d)\,.$$

Dans la terminologie de Freistühler [38, 39], les transitions de phase subsoniques sont des chocs sous-compressifs de type 0 (la discontinuité est dite sous-compressive quand il y a moins de caractéristiques rentrantes que pour un choc de Lax). De telles discontinuités sont mal modélisées par les équations d'Euler: d'une part, il y a trop de transitions de phase statiques (une seule étant physiquement admissible) et on se rend assez vite compte que, dans ce modèle, les transitions de phase sont violemment instables vis-à-vis de petites perturbations (cela provient du fait qu'on a trop peu de caractéristiques rentrant dans la discontinuité). Un critère d'admissibilité est donc requis pour modéliser proprement les transitions de phase subsoniques. Ce critère viendra se rajouter aux conditions de Rankine-Hugoniot reliant les deux états U_r et U_l de part et d'autre de l'interface.

De même que les ondes de choc possèdent divers critères d'admissibilité (inégalités de Lax, profil visqueux, critère entropique), tous à peu près équivalents (voir [15]), il existe plusieurs critères d'admissibilité pour les transitions de phase subsoniques. Les premiers

ont été proposés indépendamment par Slemrod [101, 102] et Truskinovsky [110], voir également [96]. À part dans le chapitre 5, nous adopterons le critère "capillaire" (la définition en sera donnée au prochain paragraphe). Le principal avantage de ce critère, par rapport aux autres, est qu'il fournit une condition de saut supplémentaire explicite.

Une question naturelle qui se pose (mais qui ne sera pas abordée ici) est la résolution du problème de Riemann en présence de transitions de phase. Le critère d'admissibilité choisi joue alors un rôle important dans la construction de l'ensemble de Hugoniot. La littérature sur le sujet est vaste. On renvoie par exemple à [46, 53, 54, 95, 97], la liste n'étant pas exhaustive.

1.2.3 Critères d'admissibilité des transitions de phase

Comme nous l'avons vu plus haut, les transitions de phase subsoniques nécessitent un critère d'admissibilité. Chez certains auteurs (voir [1] par exemple) ce critère est appelé relation cinétique.

Le critère visco-capillaire

Le critère visco-capillaire proposé par Slemrod [101] demande que les états U_r et U_l soient reliés par une onde progressive solution du système (1.16) auquel on a ajouté des termes "régularisants". Plus précisément, si l'on se donne

$$\mathbf{U} := \begin{cases} (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{si } x_d > n \cdot y + \sigma t, \\ (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{si } x_d < n \cdot y + \sigma t, \end{cases}$$

avec $n \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $\sigma \in \mathbb{R}$, on dira que $\mathbf{U}$ est une transition de phase **admissible**, au sens du critère visco-capillaire, s'il existe une onde progressive

$$\rho(t, y, x_d) = \rho((x_d - n \cdot y - \sigma t)/\varepsilon)\,, \quad \mathbf{u}(t, y, x_d) = \mathbf{u}((x_d - n \cdot y - \sigma t)/\varepsilon)$$

solution du système

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u}) &= 0\,, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla\, p &= \nu\varepsilon\, \Delta \mathbf{u} - \varepsilon^2\, \nabla(\Delta v)\,, \end{aligned}$$

avec les conditions

$$\rho(+\infty) = \rho_r\,,\ \rho(-\infty) = \rho_l\,, \quad \mathbf{u}(+\infty) = \mathbf{u}_r\,,\ \mathbf{u}(-\infty) = \mathbf{u}_l\,.$$

On rappelle que $v = 1/\rho$ désigne le volume molaire. Les coefficients de viscosité ν, et de capillarité ε, sont strictement positifs. Une telle onde progressive sera appelée un profil visco-capillaire de la transition de phase $\mathbf{U}$.

Le critère purement capillaire

Il est obtenu en négligeant les effets dus à la viscosité et en prenant $\nu = 0$ dans le critère visco-capillaire. Cette opération est physiquement discutable, mais nous allons voir qu'elle conduit à une relation de saut explicite.

On désigne par F l'énergie libre spécifique, définie par $F'(v) = -p(v)$. L'énergie libre par unité de volume, notée $f(\rho)$, est alors définie par $f(\rho) := \rho F(1/\rho)$. Dans [11], il est

montré qu'une transition de phase $\mathbf{U}$ admet un profil capillaire si et seulement si les états U_r et U_l vérifient les conditions de Rankine-Hugoniot

$$\sigma[\rho] = [\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]\,,$$
$$\sigma[\rho \mathbf{u}] = [\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}] + [p]\mathbf{n}\,,$$

avec $\mathbf{n} := (-n, 1) \in \mathbb{R}^d$, ainsi que la relation de saut supplémentaire

$$[F] + [v]\frac{p(v_r) + p(v_l)}{2} = 0\,. \tag{1.21}$$

Cette condition de saut est explicite, au sens où elle ne fait pas intervenir le profil. Si l'on adopte le critère visco-capillaire, avec un coefficient de viscosité $\nu > 0$, la relation cinétique obtenue fait intervenir le profil et s'écrit

$$[F] + [v]\frac{p(v_r) + p(v_l)}{2} = -\nu j \int_{-\infty}^{+\infty} v'(z)^2\, dz\,, \tag{1.22}$$

où j désigne le flux de matière à travers l'interface et $z \mapsto v(z)$ est un profil visco-capillaire.

Si les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites, (1.21) est équivalent à

$$\left[\frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma)^2 + |\mathbf{n}|^2 f'\right] = 0\,. \tag{1.23}$$

La condition de saut (1.21) n'est rien d'autre qu'une loi des aires égales généralisée, voir la figure 1.4. Rappelons que pour une transition de phase dynamique, $j \neq 0$, il n'y a pas équilibre des pressions, et on a même $[p][v] < 0$.

La relation (1.21) rappelle la dynamique des gaz (non isentropique), si l'on remplace l'énergie libre F par l'énergie interne E. Dans les deux cas, elle traduit la conservation de l'énergie totale du système.

• **Remarque :** En plus de leur caractère subsonique, qui les différencie des chocs de Lax, les transitions de phase admissibles (pour le critère capillaire) ont une autre propriété remarquable: elles sont réversibles. Plus précisément, si

$$\mathbf{U} := \begin{cases} (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{si } x_d > \sigma t, \\ (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{si } x_d < \sigma t, \end{cases}$$

est une transition de phase admissible, alors

$$\widetilde{\mathbf{U}} := \begin{cases} (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{si } x_d > \sigma t, \\ (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{si } x_d < \sigma t, \end{cases}$$

est également une transition de phase admissible. Les chocs sont, quant à eux, des processus irréversibles, car l'entropie physique croît au travers du choc.

Par ailleurs, si l'on se donne un état $(\rho_l, \mathbf{u}_l)$, avec $v_l = 1/\rho_l$ proche d'un point de Maxwell:

$$v_l \in]v_m - \delta, v_m[\qquad \text{ou} \qquad v_l \in]v^m, v^m + \delta[\,,$$

il existe un unique réel $\sigma < \mathbf{u}_l \cdot e_d$ et un unique état $(\rho_r, \mathbf{u}_r)$ tel que

$$\mathbf{U} := \begin{cases} (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{si } x_d > \sigma t, \\ (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{si } x_d < \sigma t, \end{cases}$$

définisse une transition de phase admissible (voir [11]). L'état de gauche détermine donc à la fois la vitesse de propagation de l'interface et l'état de droite.

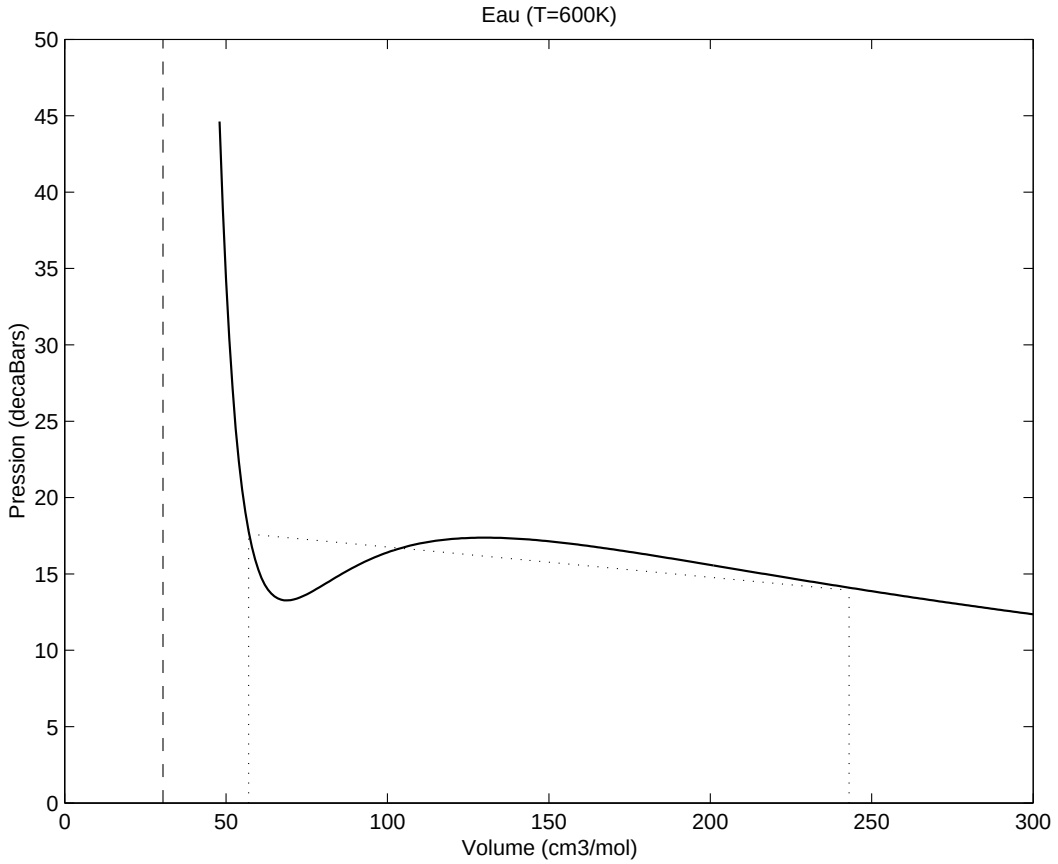


FIG. 1.4 – *Loi des aires généralisée*

1.2.4 Stabilité des transitions de phase visco-capillaires

Maintenant que nous disposons d'une relation de saut supplémentaire, fourni par l'un des deux critères donnés plus haut, on s'attend à ce que les transitions de phase (admissibles) définissent des structures stables; plus précisément, on se demande si l'on peut résoudre le problème de Cauchy associé à (1.16), lorsque la donné initiale prend la forme d'une transition de phase (dynamique et admissible). Ce problème ne rentre pas directement dans le cadre défini par Majda pour l'étude des chocs de Lax (il y ici une relation de saut supplémentaire). Il rentre en revanche dans le cadre proposé par Freistühler [38, 39] pour étendre les résultats de Majda aux chocs sous-compressifs. La démarche proposée par Freistühler suit assez fidèlement celle de Majda, et repose sur une extension appropriée de la condition de stabilité uniforme. La définition est analogue à la définition 1.2, en tenant compte à la fois des conditions de Rankine-Hugoniot et de la condition de saut supplémentaire (relation (1.21) ou (1.22) selon le critère adopté). On renvoie au chapitre 5 pour la définition précise de la stabilité uniforme des chocs sous-compressifs.

Si l'on choisit le critère visco-capillaire, avec $\nu > 0$, les transitions de phase admissibles vérifient la condition de stabilité uniforme, comme l'a montré Benzoni-Gavage dans [12]. Le théorème général énoncé par Freistühler [39] assure alors l'existence, locale en temps, de transitions de phase non triviales (c'est-à-dire de solutions régulières par morceaux de

(1.16) vérifiant la condition de saut supplémentaire (1.22)). Nous détaillerons la preuve de ce résultat au chapitre 5. Notre analyse suit celle de Majda [65, 64] et Freistühler [38, 39], en tenant compte des améliorations de Métivier et Mokrane [73, 77], mais apporte également certaines modifications qui tiennent compte du caractère sous-compressif de la discontinuité.

1.2.5 Stabilité des transitions de phase purement capillaires

Comme cela est montré dans [11], les transitions de phase réversibles (celles vérifiant le critère purement capillaire) ne sont pas uniformément stables. On ne sait donc rien dire, a priori, sur la stabilité linéaire/non linéaire de telles transitions de phase. Nous avons donc repris le travail de Majda pour étudier les modifications à apporter en vue de montrer l'existence de transitions de phase non triviales.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, l'existence des transitions de phase réversibles est un problème non linéaire à frontière libre. On prendra garde que les conditions de saut comprennent les conditions de Rankine-Hugoniot ainsi que la condition de saut (1.21) (ou, de façon équivalente, la relation (1.23)). Après redressement du front inconnu, ce problème non linéaire à frontière libre se reformule comme un problème mixte dans un demi-espace, que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
&\partial_t u^+ + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(u^+)\,\partial_{x_j} u^+ + \widetilde{A_d}(u^+, \nabla\varphi)\,\partial_{x_d} u^+ = 0\,, \quad x_d > 0\,,\\
&\partial_t u^- + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(u^-)\,\partial_{x_j} u^- - \widetilde{A_d}(u^-, \nabla\varphi)\,\partial_{x_d} u^- = 0\,, \quad x_d > 0\,,\\
&\qquad\qquad \partial_t\varphi\, b_0(u) + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j}\varphi\, b_j(u) - b_d(u) = 0\,, \quad x_d = 0\,,
\end{aligned} \tag{1.24}$$

en gardant la notation

$$\widetilde{A_d}(v, \nabla\psi) := A_d(v) - \partial_t\psi\, I - \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, A_j(v)\,.$$

Les vecteurs $b_0(u), \ldots, b_d(u)$ sont construits à partir des conditions de Rankine-Hugoniot (1.18) et de la relation (1.23).

Une première étape consiste à étudier le problème (1.24) linéarisé autour d'une transition de phase plane. Le problème mixte (non standard) obtenu est alors à coefficients constants. Cette étude est détaillée au chapitre 3 et correspond à notre article [26], paru dans le SIAM Journal on Mathematical Analysis.

Le problème linéarisé (à coefficients constants) se met sous la forme

$$\begin{cases}
\mathscr{L} v := \partial_t v + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \mathscr{A}_j\, \partial_{x_j} v = f & x_d > 0\,,\\
\mathscr{B}(v, \psi) := \partial_t\psi\, b_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, b_j + M\, v_{|_{x_d=0}} = g & x_d = 0\,,
\end{cases} \tag{1.25}$$

et ressemble donc beaucoup au problème linéarisé (1.12) obtenu dans l'étude des chocs de Lax. Comme Majda, on essaie de montrer une estimation d'énergie dans des espaces à

poids: on pose $\widetilde{v} := \exp(-\gamma t) v$ et $\widetilde{\psi} := \exp(-\gamma t)\psi$. On vérifie que (1.25) est alors équivalent au système

$$\begin{cases} \mathscr{L}^\gamma \widetilde{v} := \gamma \widetilde{v} + \mathscr{L}\widetilde{v} = \exp(-\gamma t) f & x_d > 0\,, \\ \mathscr{B}^\gamma(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) := \gamma \widetilde{\psi}\, b_0 + + \mathscr{B}(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) = \exp(-\gamma t) g & x_d = 0\,. \end{cases} \tag{1.26}$$

On munit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ de la norme à poids

$$\|u\|_{s,\gamma}^2 := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\gamma^2 + |\xi|^2)^s \, |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\,,$$

et l'espace $L^2(\mathbb{R}^+, H^s(\mathbb{R}^d))$ de la norme

$$\|\!|u|\!\|_{s,\gamma}^2 := \int_0^{+\infty} \|u(.,x_d)\|_{s,\gamma}^2 \, dx_d\,.$$

Dans le cas des chocs de Lax uniformément stables, Majda [65] montre l'inégalité d'énergie suivante:

$$\gamma \, \|\!|\widetilde{v}|\!\|_{0,\gamma}^2 + \|\widetilde{v}_{|x_d=0}\|_{0,\gamma}^2 + \|\widetilde{\psi}\|_{1,\gamma}^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma} \, \|\!|\mathscr{L}^\gamma \widetilde{v}|\!\|_{0,\gamma}^2 + \|\mathscr{B}^\gamma(\widetilde{v}, \widetilde{\psi})\|_{0,\gamma}^2 \right)\,.$$

Nous verrons au chapitre 5 que cette estimation est encore valable pour des chocs sous-compressifs uniformément stables au sens de Freistühler.

Dans le cas des transitions de phase réversibles, qui ne sont pas uniformément stables, on montre l'estimation suivante (voir le chapitre 3):

Théorème 1.2 (Stabilité des transitions de phase planes). *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\widetilde{v} \in H^2(\{x_d > 0\})$ et pour tout $\widetilde{\psi} \in H^2(\{x_d = 0\})$, on a*

$$\gamma^2 \, \|\!|\widetilde{v}|\!\|_{1/2,\gamma}^2 + \gamma^2 \, \|\widetilde{v}_{|x_d=0}\|_{0,\gamma}^2 + \gamma^2 \, \|\widetilde{\psi}\|_{1,\gamma}^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma} \, \|\!|\mathscr{L}^\gamma \widetilde{v}|\!\|_{1,\gamma}^2 + \|\mathscr{B}^\gamma(\widetilde{v}, \widetilde{\psi})\|_{1,\gamma}^2 \right)\,. \tag{1.27}$$

Par rapport au cas uniformément stable, on perd donc des dérivées, à la fois dans l'intérieur du domaine et sur la frontière. Plus généralement, la violation de la condition de stabilité uniforme entraine génériquement la perte d'une dérivée sur le bord $\{x_d = 0\}$. Quant aux pertes de dérivées à l'intérieur, cela dépend de la localisation des points où la condition de stabilité uniforme n'est pas satisfaite. La comparaison entre les transitions de phase et les chocs de Lax en hydrodynamique classique illustre bien les différents comportements possibles (on renvoie aux chapitres 3 et 6 ainsi qu'à notre article [26]). En effet, quand on étudie la stabilité des chocs de Lax en dynamique des gaz isentropique, le problème linéarisé autour d'un choc plan se met encore sous la forme

$$\begin{cases} \mathscr{L}^\gamma \widetilde{v} = \exp(-\gamma t) f & x_d > 0\,, \\ \mathscr{B}^\gamma(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) = \exp(-\gamma t) g & x_d = 0\,, \end{cases}$$

et nous montrons le résultat suivant (on trouvera les hypothèses détaillées dans [26]):

Théorème 1.3 (Stabilité des chocs de Lax plans). *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\widetilde{v} \in H^2(\{x_d > 0\})$ et pour tout $\widetilde{\psi} \in H^2(\{x_d = 0\})$, on a*

$$\gamma \, \|\!|\widetilde{v}|\!\|_{0,\gamma}^2 + \|\widetilde{v}_{|x_d=0}\|_{0,\gamma}^2 + \|\widetilde{\psi}\|_{1,\gamma}^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma^3} \, \|\!|\mathscr{L}^\gamma \widetilde{v}|\!\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|\mathscr{B}^\gamma(\widetilde{v}, \widetilde{\psi})\|_{1,\gamma}^2 \right)\,.$$

On retiendra que dans ce cas moins favorable, on perd une dérivée complète à l'intérieur (toujours dans les variables tangentielles). Il est donc très important de localiser les points où la condition de stabilité uniforme n'est pas satisfaite. On obtient en effet des résultats différents selon leur localisation. Un cas pathologique (mais toutefois exceptionnel), qui n'est pas abordé dans ce travail, se produit quand la condition de stabilité uniforme est violée aux points $(\tau, \eta) \in i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ pour lesquels le symbole $\mathscr{A}(\tau, \eta)$ n'est pas diagonalisable, mais admet un ou des blocs de Jordan. Une étude détaillée de ce cas reste à faire.

Pour établir les théorèmes 1.2 et 1.3, on construit un symétriseur de Kreiss adapté à notre problème. Bien que faite initialement pour des problèmes uniformément stables, la technique de Kreiss est en réalité très souple, en ce sens qu'elle peut s'adapter à beaucoup de problèmes faiblement stables. Nous montrerons en détail aux chapitres 3 et 6 comment adapter cette technique à une grande classe de problèmes mixtes faiblement stables. Nous avons présenté cette nouvelle technique lors de la Neuvième Conférence Internationale sur les Problèmes Hyperboliques, qui s'est déroulée à Pasadena (États-Unis) en mars 2002. Un résumé de notre exposé [27] paraîtra prochainement dans les Actes de ce congrès.

Si l'on veut suivre l'analyse de Majda, il faut étendre l'estimation d'énergie (1.27) au cas d'un système linéarisé à coefficients variables. On veut donc montrer l'analogue de (1.27) pour le problème (1.24) linéarisé autour d'une solution approchée $\mathbf{a}$ non constante. Un tel problème linéarisé s'écrit schématiquement

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\mathbf{a}}(v, \psi) &:= \partial_t v + \sum_{j=1}^{d} \mathscr{A}_j \, \partial_{x_j} v - \sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j} \psi \, \mathscr{A}_j \, \partial_{x_d} \mathbf{a} + \mathscr{C} v = f \quad x_d > 0 \,, \\ \mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v, \psi) &:= \partial_t \psi \, b_0 + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \psi \, b_j + M \, v_{|_{x_d=0}} = g \quad x_d = 0 \,, \end{aligned} \tag{1.28}$$

où les matrices $\mathscr{A}_j$, M, et les vecteurs b_j ne sont désormais **plus constants**, mais dépendent de (t, y, x_d). Ces applications ont typiquement la même régularité que la solution approchée $\mathbf{a}$. Quant à la matrice $\mathscr{C}$, qui constitue la principale nouveauté par rapport au problème linéarisé à coefficients constants, elle possède la même régularité que les dérivées premières de $\mathbf{a}$.

Pour mettre en place un schéma itératif en vue de résoudre (1.24), il est important de pouvoir traiter un problème linéarisé de la forme (1.28) pour une solution approchée $\mathbf{a}$ "peu régulière", c'est-à-dire de classe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$, mais pas de classe $\mathscr{C}^\infty$. L'outil adapté pour montrer une estimation d'énergie analogue à (1.27) est alors le calcul paradifférentiel, introduit par Bony dans [19]. Nous exposerons au chapitre 4 tous les résultats dont nous aurons besoin par la suite. La plupart de ces résultats se trouvant éparpillés dans la littérature, nous avons jugé utile de les rassembler, avec leur preuve, afin de donner un aperçu complet des techniques mises en jeu.

Nous verrons au chapitre 6 que pour une solution approchée $\mathbf{a}$ de classe $\mathscr{C}^2$, **vérifiant une certaine hypothèse de petitesse** (hypothèse 6.7), le problème (1.28) vérifie la même estimation d'énergie que le problème linéarisé à coefficients constants. Plus précisément, on a le résultat suivant:

Théorème 1.4 (Stabilité linéaire des transitions de phase). *Il existe deux constantes $C > 0$ et $\gamma_0 \geq 1$ telles que, pour tout $\widetilde{v} \in H^2(\{x_d > 0\})$, pour tout $\widetilde{\psi} \in H^2(\{x_d = 0\})$*

et pour tout $\gamma \geq \gamma_0$, on a

$$\gamma^2 \|\widetilde{v}\|^2_{1/2,\gamma} + \gamma^2 \|\widetilde{v}_{|x_d=0}\|^2_{0,\gamma} + \gamma^2 \|\widetilde{\psi}\|^2_{1,\gamma} \leq C \left(\frac{1}{\gamma} \|\mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{a}} \widetilde{v}\|^2_{1,\gamma} + \|\mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{a}}(\widetilde{v}, \widetilde{\psi})\|^2_{1,\gamma} \right) . \quad (1.29)$$

Dans le cas des chocs de Lax en dynamique des gaz isentropique (on trouvera les hypothèses détaillées au chapitre 6), la version "à coefficients variables" du théorème 1.3 se formule de la façon suivante:

Théorème 1.5 (Stabilité linéaire des chocs de Lax). *Il existe deux constantes $C > 0$ et $\gamma_0 \geq 1$ telles que, pour tout $\widetilde{v} \in H^2(\{x_d > 0\})$, pour tout $\widetilde{\psi} \in H^2(\{x_d = 0\})$ et pour tout $\gamma \geq \gamma_0$, on a*

$$\gamma \|\widetilde{v}\|^2_{0,\gamma} + \|\widetilde{v}_{|x_d=0}\|^2_{0,\gamma} + \|\widetilde{\psi}\|^2_{1,\gamma} \leq C \left(\frac{1}{\gamma^3} \|\mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{a}} \widetilde{v}\|^2_{1,\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \|\mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{a}}(\widetilde{v}, \widetilde{\psi})\|^2_{1,\gamma} \right) .$$

Plusieurs remarques nous semblent à la fois utiles et nécessaires:

Grâce à l'analyse à coefficients constants, on connait l'estimation que l'on veut montrer. Ce fait est certainement plus important qu'il n'y paraît au premier abord, car il conditionne toute l'étape dite de *paralinéarisation des équations*, et les estimations d'erreur. Il est donc crucial de savoir à quel résultat on veut aboutir, et cela rend indispensable, à nos yeux, l'analyse à coefficients constants.

Pour *boucler* l'estimation d'énergie, nous aurons besoin d'une solution approchée de classe $\mathscr{C}^2$, ce qui représente un cran de régularité supplémentaire par rapport au cas uniformément stable (voir [73]). Cela n'est guère étonnant, car les pertes de dérivées auxquelles on s'attend rendent nécessaires des estimations plus fines lors de l'étape de paralinéarisation. Comme on perd ici une dérivée (à l'intérieur et sur le bord), on a besoin d'un cran supplémentaire de régularité.

L'hypothèse de petitesse mentionnée plus haut nous semble pertinente, en ce sens qu'on doit certainement s'attendre à de nouveau phénomènes dans le cas où elle n'est pas satisfaite. Cette affirmation requiert toutefois une analyse approfondie et constitue un autre développement de notre travail. D'un point de vue pratique, l'hypothèse de petitesse permet de suivre les singularités et de montrer une estimation d'énergie qui tient compte de leur localisation le long de courbes bicaractéristiques (cela fait l'objet du théorème 6.2).

Nous avons préféré rédiger l'analyse du chapitre 6 dans un cadre général pour les chocs de Lax, étendant ainsi l'analyse de Majda, et sous des hypothèses plus faibles que celles vérifiées par les transitions de phase réversibles (ces hypothèses plus faibles sont vérifiées par une grande classe de chocs en dynamique des gaz isentropique). Cependant, les résultats du chapitre 6 (en particulier les théorèmes 6.2 et 6.3) s'étendent presque directement au cas des transitions de phase réversibles, et permettent d'obtenir le théorème 1.4.

Le terme d'ordre 0 en v qui apparait dans (1.28) doit être traité avec précaution lorsque l'on veut montrer une estimation d'énergie avec pertes de dérivées. En particulier, nous verrons au chapitre 6 qu'il est possible de diagonaliser simultanément les parties d'ordre 1 et d'ordre 0 de l'opérateur $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$.

Pour finir, signalons que l'analyse des chapitres 3 et 6 portent sur des problèmes mixtes non standard, obtenus dans l'étude des ondes de choc ou des transitions de phase. L'analyse est en fait plus simple quand on traite des problèmes mixtes standard, car on évite certaines opérations telles que "l'élimination du front" ou l'introduction de la "bonne inconnue". En particulier, nous pensons que les méthodes développées dans ce travail doivent permettre d'obtenir une estimation d'énergie pour la classe de problèmes WR exhibée dans [14]. Cela reste cependant à vérifier en détail.

Chapitre 2

Conditions au bord pour les équations d'Euler

Ce chapitre correspond à l'article [13], qui paraîtra prochainement dans l'*AIAA Journal*.

Nous abordons dans ce chapitre le problème des conditions au bord pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz. Considérons par exemple l'écoulement d'un fluide compressible non visqueux dans une tuyère, figure 2.1 (les flèches représentent les lignes de courant du fluide). Si on veut simuler l'évolution temporelle du fluide, il faut imposer des conditions sur les "parois" d'entrée, de sortie et sur le bord de la tuyère.

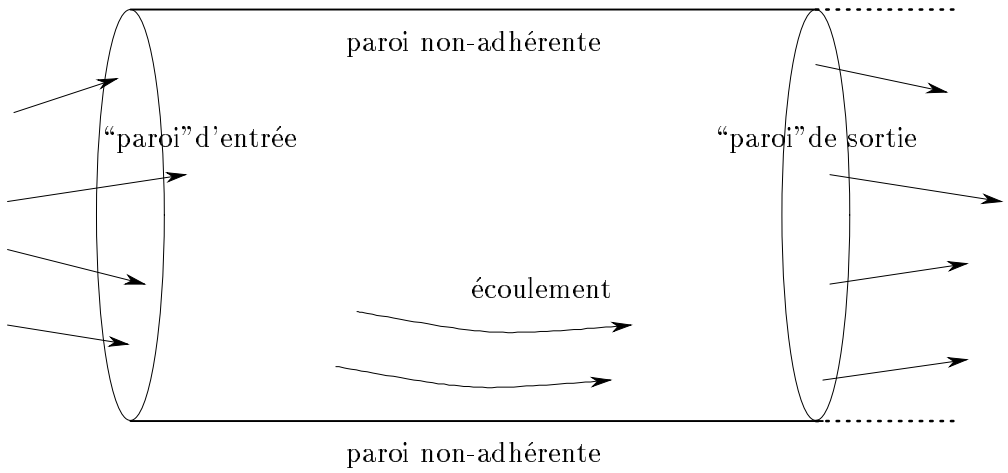


FIG. 2.1 – *Écoulement compressible dans une tuyère.*

La paroi non adhérente que constitue le bord de la tuyère ne pose pas de problème majeur: il est naturel d'y imposer une condition de glissement. Le fluide doit avoir une vitesse tangente à la paroi. Cette condition reflète précisément la nature non adhérente de la paroi. En revanche, l'entrée et la sortie de la tuyère n'ont parfois aucune réalité physique et servent à limiter "artificiellement" le domaine où l'on étudie le fluide. Pour simuler l'évolution temporelle du fluide, il faut alors prescrire des conditions sur ces parois, mais aucune quantité physique (densité, pression, température, etc...) ne semble s'imposer plus qu'une autre.

Le travail présenté ci-dessous a été effectué en collaboration avec Sylvie Benzoni-Gavage et Stéphane Aubert[1] et fait l'objet d'un article à paraître dans l'AIAA Journal [13]. La motivation est la suivante: les conditions au bord imposées lors de simulations numériques jouent un rôle crucial dans les résultats obtenus, et il est important que ces conditions au bord conduisent à un problème bien-posé (de sorte que les erreurs numériques ne se retrouvent pas trop amplifiées lors des simulations). La vérification de la condition de Lopatinskii (qui assure que le problème est bien-posé) est cependant souvent perçue comme inextricable, bien qu'elle ait été menée à bien dans de nombreux cas, voir par exemple [55, 79]. Il nous a donc paru judicieux de mettre en oeuvre un outil formel permettant de vérifier (rapidement) la condition de Lopatinskii pour un jeu arbitraire de conditions au bord. Nous montrerons notamment à travers quelques exemples les différences entre problèmes en une dimension d'espace et problèmes multidimensionnels.

Nous n'aborderons pas l'étude des schémas numériques pour des problèmes aux limites. On renvoie par exemple à [45, 60, 107, 108] pour divers résultats sur ce sujet. Un autre sujet que nous n'aborderons pas est la recherche (et l'étude) de conditions aux limites absorbantes. On renvoie à [34, 111] et aux références incluses.

2.1 Les équations d'Euler pour un gaz parfait polytropique

Nous considérons les équations d'Euler décrivant l'évolution (dans un domaine de l'espace $\mathbb{R}^d$) d'un fluide compressible non visqueux en l'absence d'échanges de chaleur avec l'extérieur:

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t \rho + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u}) = 0\,, \\ \partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}\,(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla\, p = 0\,, \\ \partial_t(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho e) + \operatorname{div}\,\left[(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho e + p)\,\mathbf{u}\right] = 0\,. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Les quantités ρ, p et e sont liées par une équation d'état $p = p(\rho, e)$. Nous supposerons que le fluide suit la loi des gaz parfaits polytropiques. L'équation d'état est alors

$$p = (\gamma - 1)\,\rho\, e \tag{2.2}$$

où γ est la constante adiabatique du fluide. Cette équation s'écrit également

$$p = \frac{RT}{M}\,\rho\,,$$

où R est la constante des gaz parfaits, M la masse molaire du fluide et T la température.

En utilisant (2.2), le système (2.1) est équivalent, pour les solutions régulières, au système quasilinéaire suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t\,\rho + \mathbf{u}\cdot\nabla\,\rho + \rho\,\operatorname{div}\,\mathbf{u} = 0\,, \\ \partial_t\,\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\,\mathbf{u} + \dfrac{1}{\rho}\,\nabla\,p = 0\,, \\ \partial_t\,p + \mathbf{u}\cdot\nabla\,p + \gamma p\,\operatorname{div}\,\mathbf{u} = 0\,. \end{array}\right. \tag{2.3}$$

On s'intéresse alors aux conditions au bord qu'il faut ajouter au système (2.3) lorsque l'on considère un écoulement dans le demi-espace $\{x_d > 0\}$ (x_d désigne la dernière coordonnée

1. Département de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, École Centrale de Lyon

du vecteur position $x \in \mathbb{R}^d$). On procède de la manière suivante: on linéarise les équations (2.3) autour d'un état de référence $(\rho, \mathbf{u}, p)$ qui correspond à l'état du fluide en un point du bord, à un instant fixé. Les perturbations par rapport à cet état de référence sont notées $(\dot\rho, \dot{\mathbf{u}}, \dot p)$. Les équations (2.3) linéarisées autour de l'état de référence forment le système linéaire de l'acoustique, qui prend la forme

$$\begin{cases} \partial_t \dot\rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \dot\rho + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = 0 \,, \\ \partial_t \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} + \rho^{-1} \nabla \dot p = 0 \,, \\ \partial_t \dot p + \mathbf{u} \cdot \nabla \dot p + \gamma p \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = 0 \,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Le système de l'acoustique (2.4) est un système hyperbolique linéaire à coefficients constants. Nous l'écrirons sous la forme usuelle

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^{d} A_j \, \partial_{x_j} U = 0 \,, \quad A_j \in \mathscr{M}_{d+2}(\mathbb{R}) \,, \tag{2.5}$$

où U désigne le vecteur $(\dot\rho, \dot{\mathbf{u}}, \dot p)$. Le symbole associé au système (2.5) est l'application à valeurs matricielles $A(\xi)$ définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ par

$$A(\xi) := \sum_{j=1}^{d} \xi_j \, A_j = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \xi & \rho \, \xi^t & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{u} \cdot \xi \, I_d & \dfrac{1}{\rho} \xi \\ 0 & \gamma p \, \xi^t & \mathbf{u} \cdot \xi \end{pmatrix} .$$

Le système (2.5) admet un symétriseur matriciel, que l'on peut par exemple choisir comme suit:

$$S := \begin{pmatrix} c^2 & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & \rho^2 I_d & \mathbf{0} \\ -1 & \mathbf{0} & \dfrac{2}{c^2} \end{pmatrix} ,$$

où c désigne la vitesse du son dans le fluide. Pour les gaz parfaits, la vitesse du son est donnée par la relation

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \,.$$

Avec cette définition de S (on vérifiera sans peine que S est symétrique définie positive), on obtient

$$S \, A_d = \begin{pmatrix} c^2 \, u & 0 & 0 & 0 & -u \\ 0 & \rho^2 \, u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \, u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^2 \, u & \rho \\ -u & 0 & 0 & \rho & \dfrac{2u}{c^2} \end{pmatrix} , \tag{2.6}$$

où u désigne la dernière coordonnée du vecteur $\mathbf{u}$. La relation précédente vaut pour $d = 3$. La relation correspondante pour $d = 1$ ou $d = 2$ s'obtient en diminuant la taille du bloc diagonal central.

L'existence d'un symétriseur matriciel pour le système (2.5) permet d'envisager les conditions au bord sous l'angle de leur (stricte) "dissipativité", en suivant la méthode initiée par Friedrichs [41]. Cette approche est développée, par exemple, dans [79, 91]. Mais les travaux de Kreiss ont montré que des conditions au bord non dissipatives pouvaient également conduire à un problème bien-posé, c'est-à-dire pour lequel on dispose de bonnes estimations d'énergie. De telles conditions au bord vérifient la condition de Lopatinskii (ou encore Kreiss-Lopatinskii) **uniforme** (en abrégé CKU). Notamment, des conditions au bord strictement dissipatives vérifient la CKU (voir [93]) mais il existe également des conditions au bord non dissipatives vérifiant la CKU (voir [67, 79]).

Dans la suite de notre étude, nous distinguerons plusieurs cas:

1. la composante normale u de la vitesse est strictement négative: cela correspond à une paroi de sortie,
2. u est strictement positive: cela correspond à une paroi d'entrée,
3. $u = 0$: ce dernier cas correspond à une vraie paroi. Il se traite de façon différente des deux premiers cas. Nous l'examinerons à la section 2.4.

Nous commencerons par examiner le premier cas (qui se révèle plus facile que le second). Cela nous permettra de développer les arguments qui serviront dans l'approche systématique des conditions au bord pour les parois d'entrée (section 2.3).

2.2 Conditions sur une paroi de sortie

Nous examinons ici le cas d'une paroi de sortie: l'état de référence vérifie donc $u < 0$. On rappelle que la paroi correspond à l'hyperplan $\{x_d = 0\}$ et que u désigne la dernière coordonnée du vecteur $\mathbf{u}$. Les valeurs propres de la matrice A_d sont u (avec multiplicité d) et $u \pm c$ (avec multiplicité 1 chacune). On fera l'hypothèse (raisonnable) que l'état de référence ne correspond pas à un régime sonique: en d'autres termes, on supposera $|u| \neq c$ (cette hypothèse sera faite tacitement à la section suivante). Deux cas sont à envisager:

1. le fluide est dans un régime supersonique; on a alors $u < -c$. On compte $d + 2$ caractéristiques sortantes et aucune caractéristique rentrante dans le demi-espace.
2. le fluide est dans un régime subsonique, c'est-à-dire $-c < u$. On compte $d + 1$ caractéristiques sortantes et une caractéristique rentrante dans le demi-espace.

C'est alors un fait bien établi et connu depuis longtemps (voir [22, 41, 80]) qu'il ne faut prescrire aucune quantité sur le bord dans le cas supersonique et qu'il faut en prescrire une dans le cas subsonique. Nous laissons donc de côté le cas supersonique, et envisageons une condition au bord (linéarisée) de la forme

$$B \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = 0 \, .$$

Comme on a une seule condition au bord, B est ici une matrice ligne.

2.2.1 Conditions au bord strictement dissipatives

Il est clair que dans le cas $u < 0$, la restriction de la matrice symétrique $S\,A_d$ au sous-espace engendré par les $d+1$ premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{d+2}$ est définie négative: la matrice de la restriction est diagonale, voir (2.6).

Si l'on impose la pression du fluide sur la paroi de sortie, la condition au bord homogène (linéarisée autour de notre état de référence) s'écrit:

$$\dot{p} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = 0\,. \tag{2.7}$$

La matrice des conditions au bord est alors

$$B := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}\,,$$

et son noyau est exactement le sous-espace engendré par les $d+1$ premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{d+2}$. La condition au bord (2.7) est donc strictement dissipative, au sens où elle vérifie:

$$\forall\, X \in \text{ Ker } B\,, \quad X \neq 0\,, \quad X^t\, S\, A_d\, X < 0\,.$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, une telle condition au bord conduit à un problème bien-posé (voir [93] pour un exposé complet). D'autres conditions peuvent être envisagées, et nous allons maintenant détailler l'analyse modale qui conduit à la CKU.

2.2.2 L'analyse modale

On cherche des solutions de (2.4) sous la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{p} \end{pmatrix} (t, y, x_d) = e^{\tau t + i\eta\cdot y} \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{p} \end{pmatrix} (x_d)\,,$$

où τ est un nombre complexe de partie réelle positive ou nulle, η est un vecteur dans $\mathbb{R}^{d-1}$, $\dot{\rho}$, $\dot{\mathbf{u}}$ et $\dot{p}$ sont des fonctions **bornées** sur $[0, +\infty[$. Le but de l'analyse modale (développée notamment dans [47, 61]) est de déterminer s'il existe de telles fonctions qui vérifient de plus la (ou les) condition(s) au bord homogène(s) que l'on s'est donnée(s).

Une analyse en tout point comparable à celle effectuée dans [11] va nous fournir un paramétrage du sous-espace stable du système dynamique dont le vecteur $(\dot{\rho}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{p})$ est solution: pour cela, on décompose la vitesse de référence $\mathbf{u}$ en (w, u) avec $w \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $u \in \mathbb{R}$ (composante tangentielle et composante normale). On décompose de même le vecteur $\dot{\mathbf{u}}$ en $(\dot{w}, \dot{u})$ avec $\dot{w} \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $\dot{u} \in \mathbb{R}$. On obtient le système dynamique:

$$\begin{cases} (\tau + i\eta\cdot w)\dot{\rho} + u\,\dot{\rho}' + \rho\, i\eta\cdot\dot{w} + \rho\,\dot{u}' = 0\,, \\ (\tau + i\eta\cdot w)\dot{w} + u\,\dot{w}' + \rho^{-1}\, i\eta\,\dot{p} = 0\,, \\ (\tau + i\eta\cdot w)\dot{u} + u\,\dot{u}' + \rho^{-1}\,\dot{p}' = 0\,, \\ (\tau + i\eta\cdot w)\dot{p} + u\,\dot{p}' + \gamma p\, i\eta\cdot\dot{w} + \gamma p\,\dot{u}' = 0\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Un calcul rapide montre que les modes propres du système (2.8) sont les nombres complexes ω solutions des équations polynomiales

$$\tau + i\eta \cdot w + u\,\omega = 0\,, \tag{2.9a}$$

$$(\tau + i\eta \cdot w + u\,\omega)^2 = c^2(\omega^2 - |\eta|^2)\,. \tag{2.9b}$$

La racine ω_0 de (2.9a) est de partie réelle strictement positive (resp. strictement négative) quand τ est de partie réelle strictement positive et $u < 0$ (resp. $u > 0$). Toujours dans le cas où τ est de partie réelle strictement positive, l'équation (2.9b) admet:

- ⋆) deux racines de partie réelle strictement positive dans le cas $u < -c$,
- ⋆) deux racines de partie réelle strictement négative dans le cas $u > c$,
- ⋆) une racine de partie réelle strictement positive et une racine de partie réelle strictement négative dans le cas $|u| < c$.

D'autre part, les racines ω de (2.9a)-(2.9b) admettent un prolongement continu aux points (τ, η) tels que $\mathrm{Re}\ \tau = 0$ et $(\tau, \eta) \neq (0, 0)$. Cela permet de prolonger continûment le sous-espace stable de (2.8) en ces points.

Dans le cas d'un fluide subsonique sortant, le seul mode contribuant au sous-espace stable est la racine ω_1 de (2.9b) de partie réelle strictement négative. Le sous-espace stable de (2.8) est alors la droite vectorielle

$$\mathscr{E}^-(\tau, \eta) = \mathbb{C}\, r_1(\tau, \eta) \quad \text{avec} \quad r_1(\tau, \eta) := \begin{pmatrix} \rho\,(\widetilde{\tau} + u\,\omega_1)/c^2 \\ -i\eta \\ -\omega_1 \\ \rho\,(\widetilde{\tau} + u\,\omega_1) \end{pmatrix},$$

où l'on a posé (pour alléger les notations):

$$\widetilde{\tau} := \tau + i\eta \cdot w\,.$$

Si l'on se donne une condition au bord (linéarisée) sous la forme d'une matrice ligne B, la CKU revient à vérifier

$$B \cdot r_1(\tau, \eta) \neq 0$$

pour tout $(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $\mathrm{Re}\ \tau \geq 0$ et $(\tau, \eta) \neq (0, 0)$. On dira que la condition au bord B vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii simple (en abrégé CK) si

$$B \cdot r_1(\tau, \eta) \neq 0$$

pour tout $(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $\mathrm{Re}\ \tau > 0$. Si cette condition n'est pas satisfaite, la condition au bord B conduit à un problème violemment mal-posé (voir [14, 93]). La quantité $B \cdot r_1(\tau, \eta)$ est appellée déterminant de Lopatinskii (dans le cas d'un fluide subsonique sortant, nous avons un déterminant 1×1). La non annulation de ce déterminant caractérise la CKU.

À partir de cette caractérisation de la CKU, il est possible de mettre en oeuvre une approche systématique: on se donne une quantité (dépendant de la densité, de la vitesse et de la pression) que le logiciel de calcul formel va linéariser. On obtient ainsi la matrice B.

Ensuite, on calcule $B \cdot r_1(\tau, 0)$. Génériquement, cette expression ne s'annule pas. Notons que pour $\mathrm{Re}\,\tau \geq 0$ et $\tau \neq 0$, on a

$$\mathscr{E}^-(\tau, 0) = \mathbb{C}\, r_1(\tau, 0) \quad \text{avec} \quad r_1(\tau, 0) := \begin{pmatrix} 1/c \\ 0 \\ 1/\rho \\ c \end{pmatrix} .$$

Si l'on prescrit la pression ou la composante normale de la vitesse, on voit immédiatement que $B \cdot r_1(\tau, 0)$ ne s'annule pas. Prescrire une composante tangentielle de la vitesse conduit en revanche à un problème violemment mal-posé.

On suppose maintenant η non nul et on utilise les variables réduites:

$$V := \frac{\tau}{i|\eta|}, \quad n := \frac{\eta}{|\eta|}, \quad \Omega_1 := \frac{\omega_1}{i|\eta|} \quad \text{et} \quad \widetilde{V} := V + n \cdot w .$$

Lorsque le vecteur η est non nul, le sous-espace stable $\mathscr{E}^-(\tau, \eta)$ s'écrit

$$\mathscr{E}^-(\tau, \eta) = \mathbb{C}\, R_1 \quad \text{avec} \quad R_1 := \begin{pmatrix} \rho\,(\widetilde{V} + u\,\Omega_1)/c^2 \\ -n \\ -\Omega_1 \\ \rho\,(\widetilde{V} + u\,\Omega_1) \end{pmatrix} ,$$

ce qui fournit une expression de $B \cdot R_1$ en fonction de V, n et Ω_1. Rappelons quelques propriétés essentielles des paramètres V, n et Ω_1: le nombre complexe V est de partie imaginaire négative (et même strictement négative lorsque $\mathrm{Re}\,\tau > 0$). Le nombre complexe Ω_1 est de partie imaginaire strictement positive lorsque V est de partie imaginaire strictement négative. Enfin, le vecteur unitaire n est tout simplement égal au réel 1 lorsque l'on traite des écoulements bidimensionnels (le cas $n = -1$ s'obtient par un argument de conjugaison). Pour des écoulements tridimensionnels, on écrit le vecteur n sous la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$.

Il s'agit de déterminer si $B \cdot R_1$ peut s'annuler. On raisonne de la façon suivante:

⋆) ou bien l'expression de $B \cdot R_1$ ne dépend pas de Ω_1 (il est alors aisé de voir si cette expression peut s'annuler ou non pour les différentes valeurs de V et n),

⋆) ou bien Ω_1 apparaît linéairement dans l'expression de $B \cdot R_1$. Si $B \cdot R_1$ s'annule, on obtient une expression $\Omega_1 = \Omega^*(V)$ que l'on peut reporter dans (2.9b). Cette expression sera une fonction affine de V (dont les coefficients dépendront de l'état de référence).

Avec les variables réduites, l'équation (2.9b) prend la forme:

$$(\widetilde{V} + u\,\Omega_1)^2 = c^2\,(\Omega_1^2 + 1) . \tag{2.10}$$

Dans notre second cas, on obtient un polynôme à coefficients réels de degré au plus 2 dont V est racine (rappelons que V est un nombre complexe de partie imaginaire négative).

Si le polynôme admet une unique racine V_0 de partie imaginaire strictement négative, on calcule le nombre complexe $\Omega^*(V_0)$ correspondant, et il s'agit de vérifier si ce nombre est de partie imaginaire strictement positive ou non: s'il l'est, le problème est violemment mal-posé; sinon, les conditions au bord vérifient la CKU.

Si le polynôme n'admet que des racines réelles V_1 et V_2 (éventuellement confondues), la CK est vérifiée. Pour vérifier la CKU, les valeurs V_1 et V_2 donnent des valeurs $\Omega^*(V_1)$ et $\Omega^*(V_2)$. Par ailleurs, l'équation (2.10) donne

$$\Omega_1 = \frac{u\,\widetilde{V} - \operatorname{sgn}(V)\,c\,\sqrt{\widetilde{V}^2 - (c^2 - u^2)}}{c^2 - u^2} \tag{2.11}$$

si $\widetilde{V}^2 \geq (c^2 - u^2)$, et

$$\Omega_1 = \frac{u\,\widetilde{V} + ic\,\sqrt{(c^2 - u^2) - \widetilde{V}^2}}{c^2 - u^2} \tag{2.12}$$

si $\widetilde{V}^2 < (c^2 - u^2)$. Ces expressions sont obtenues grâce aux relations de Cauchy-Riemann sur les fonctions holomorphes. Comme $\Omega^*(V_1)$ et $\Omega^*(V_2)$ sont des réels, on doit avoir nécessairement $\widetilde{V_i}^2 \geq (c^2 - u^2)$ et il s'agit de vérifier que les expressions $\Omega^*(V_1)$ et $\Omega^*(V_2)$ coïncident avec l'expression de Ω_1 donnée par (2.11). Si les expressions ne sont pas égales, la CKU est satisfaite. Si les deux expressions sont égales (disons pour la valeur V_1), alors les conditions au bord génèrent des ondes de bord et ne satisfont pas la CKU. Ces ondes de bord sont des solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{p} \end{pmatrix} (t, y, x_d) = e^{\tau t + i\eta\cdot y + \omega x_d} \begin{pmatrix} \overline{\rho} \\ \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{p} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \overline{\rho} \\ \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{p} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{d+2} \setminus \{0\},$$

avec $\tau \in i\mathbb{R}$ et $\omega \in i\mathbb{R}$, ou plus généralement des combinaisons linéaires de solutions de cette forme. Lorsque ω est de partie réelle strictement négative, on parle d'ondes de surface.

2.2.3 Deux exemples

Regardons tout d'abord ce que donne notre méthode dans le cas où l'on impose la pression (condition au bord strictement dissipative). Le déterminant dans le cas monodimensionnel ($\eta = 0$) est

$$\Delta_1 = c \neq 0\,,$$

ce qui permet de passer au cas $\eta \neq 0$. Le déterminant de Lopatinskii vaut alors

$$\Delta = V + \beta + u\,\Omega_1 \quad \text{avec } \beta := n \cdot w\,.$$

Si ce déterminant s'annule, on reporte dans (2.10) et on obtient

$$V^2 + 2V\beta + \beta^2 + u^2 = 0\,,$$

ce qui implique (comme $\operatorname{Im} V \leq 0$ et $u < 0$), que V est donné par

$$V = -\beta + i\,u\,.$$

Comme on a supposé $\Delta = 0$, cela donne

$$\Omega_1 = -\frac{V + \beta}{u} = -i\,,$$

ce qui est clairement impossible car Ω_1 est de partie imaginaire positive. On retrouve le fait que la condition au bord satisfait la CKU.

Essayons maintenant d'imposer la vitesse normale comme condition au bord. Le déterminant dans le cas monodimensionnel est

$$\Delta_1 = -\frac{1}{\rho} \neq 0\,,$$

ce qui permet, là encore, de passer au cas $\eta \neq 0$. Le déterminant de Lopatinskii est donné par

$$\Delta = -\frac{\Omega_1}{\rho}\,,$$

et si ce déterminant s'annule (ce qui équivaut à l'annulation de Ω_1), on obtient

$$V^2 + 2V\beta + \beta^2 - c^2 = 0\,,$$

en gardant la même définition que précédemment pour β. Les racines de cette équation sont réelles et V est alors donné par

$$V = V_1 := -\beta - c < 0 \quad \text{ou} \quad V = V_2 := -\beta + c > 0\,.$$

On trouve $\widetilde{V_1}^2 = \widetilde{V_2}^2 = c^2 > c^2 - u^2$, et la relation (2.11) donne

$$\Omega_1(V_1) = \frac{u\,\widetilde{V_1} + c\,\sqrt{c^2 - (c^2 - u^2)}}{c^2 - u^2} = \frac{-2u\,c}{c^2 - u^2} \neq 0\,.$$

On obtient de la même manière

$$\Omega_1(V_2) = \frac{u\,\widetilde{V_2} - c\,\sqrt{c^2 - (c^2 - u^2)}}{c^2 - u^2} = \frac{2u\,c}{c^2 - u^2} \neq 0\,,$$

ce qui assure que le mode propre Ω_1 ne peut pas s'annuler: la condition au bord vérifie la CKU.

2.3 Conditions sur une paroi d'entrée

On s'intéresse dans cette section au cas des parois d'entrée: l'état de référence autour duquel le système (2.1) est linéarisé vérifie $u > 0$. Nous ferons à nouveau l'hypothèse $u \neq c$ (le fluide n'est pas dans un régime sonique). Si le fluide est dans un régime supersonique ($u > c$), on compte $d + 2$ caractéristiques rentrantes dans le demi-espace $\{x_d > 0\}$; si en revanche le fluide est dans un régime subsonique ($u < c$), on compte $d + 1$ caractéristiques rentrantes.

Là encore, le régime supersonique se révèle fort simple à traiter: il faut imposer l'état entier du fluide sur le bord, c'est-à-dire $d + 2$ quantités scalaires indépendantes. On peut éventuellement choisir de prescrire d'autres quantités que $\dot{\rho}$, $\dot{\mathbf{u}}$ et $\dot{p}$, en vérifiant leur indépendance au besoin à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Nous focaliserons désormais notre attention sur les régimes subsoniques.

Pour un régime subsonique, il faut imposer $d+1$ quantités scalaires indépendantes, par exemple la vitesse et la densité du fluide (ou la vitesse et la pression). Néanmoins, aucun choix ne semble plus naturel qu'un autre et la recherche de conditions au bord strictement dissipatives est plus compliquée que dans le cas des parois de sortie.

2.3.1 Conditions au bord dissipatives

Toujours en suivant Friedrichs [41], il nous faut trouver une matrice B à $d+1$ lignes et $d+2$ colonnes telle que

$$\forall X \in \text{ Ker } B\,, \quad X \neq 0\,, \quad X^t S A_d X < 0\,.$$

L'exemple suivant a été proposé par les simulations numériques menées par Stéphane Aubert: on choisit comme conditions au bord (non linéaires) les quantités

$$p\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad , \quad T+\frac{|\mathbf{u}|^2}{2c_p} \quad \text{et} \quad \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\,,$$

où c_p désigne la capacité calorifique massique du fluide et T la température du fluide. Pour un fluide obéissant à l'équation d'état (2.2), on a

$$M\,c_p = \frac{\gamma\,R}{\gamma-1} \quad \text{et} \quad p = \frac{RT}{M}\,\rho\,,$$

avec M la masse molaire du fluide et R la constante des gaz parfaits. Les conditions au bord linéarisées homogènes s'écrivent

$$\begin{aligned} \dot{p} - c^2\,\dot{\rho} &= 0\,, \\ \dot{p} + \rho\,\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}} &= 0\,, \\ \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}}\,\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} &= 0\,. \end{aligned}$$

Le noyau de la matrice B correspondante est la droite vectorielle engendrée par le vecteur

$$X_0 := \begin{pmatrix} -\rho|\mathbf{u}|^2/c^2 \\ \mathbf{u} \\ -\rho|\mathbf{u}|^2 \end{pmatrix}\,.$$

Un calcul immmédiat donne

$$X_0^t\,S A_d\,X_0 = -\rho^2\,u\,|\mathbf{u}|^2\left(1-\frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}\right) < 0\,,$$

ce qui assure que les conditions au bord données ci-dessus sont strictement dissipatives.

D'autres conditions au bord strictement dissipatives sont énoncées dans [79]. Dans le cas des écoulements isentropiques, des conditions au bord strictement dissipatives plus simples ont été proposées dans [91].

2.3.2 L'analyse modale

Le point de départ est le même que pour les parois de sortie. On effectue une transformée de Laplace en la variable t et une transformée de Fourier dans les variables spatiales tangentielles. Cela fournit le système dynamique (2.8), dont les modes propres sont les nombres complexes ω solutions de (2.9a) et (2.9b). Rappelons que la racine ω_0 de (2.9a) est de partie réelle strictement négative quand Re $\tau > 0$ et que (2.9b) admet une racine de partie réelle strictement négative (notée ω_1) et une racine de partie réelle strictement positive (notée ω_2) lorsque Re $\tau > 0$ et $0 < u < c$.

Les modes propres ω_0 et ω_1 coïncident pour les valeurs de (τ, η) vérifiant

$$\eta \neq 0 \quad \text{et} \quad \tau = u\,|\eta| - i\eta \cdot w\,.$$

Les couples (τ, η) vérifiant ces relations seront appelés "points de branchement". En de tels points, on a $\omega_0 = \omega_1 = -|\eta|$. Le sous-espace stable du système dynamique (2.8) est l'hyperplan

$$\mathscr{E}^-(\tau, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & i\eta & \omega_0 & \dfrac{\omega_0\,\omega_1 - |\eta|^2}{\rho\,(\widetilde{\tau} + u\,\omega_1)} \end{pmatrix}^{\perp}. \tag{2.13}$$

Lorsque $\eta = 0$, on obtient notamment

$$\mathscr{E}^-(\tau, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & -1 & \dfrac{1}{\rho\,c} \end{pmatrix}^{\perp}.$$

L'expression (2.13) du sous-espace stable est également valable aux points de branchement, puisque la quantité

$$\frac{\omega_0\,\omega_1 - |\eta|^2}{\rho\,(\widetilde{\tau} + u\,\omega_1)}$$

a pour limite $-|\eta|/u$ lorsque $\tau \to u\,|\eta| - i\eta \cdot w$. On a donc

$$\mathscr{E}^-(u|\eta| - i\eta \cdot w, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & i\eta & -|\eta| & \dfrac{|\eta|}{\rho u} \end{pmatrix}^{\perp}.$$

On raisonne comme dans le cas des parois de sortie: on se donne $d+1$ quantités scalaires qui correspondent aux conditions sur la paroi d'entrée. Le logiciel de calcul formel se charge de les linéariser autour de l'état de référence, ce qui fournit une matrice B à $d+1$ lignes et $d+2$ colonnes. Il s'agit de vérifier que pour tout couple (τ, η) tel que $\operatorname{Re}\tau \geq 0$ et $(\tau, \eta) \neq (0, 0)$, on a

$$\operatorname{Ker} B \cap \mathscr{E}^-(\tau, \eta) = \{0\}\,.$$

En utilisant notre expression du sous-espace stable, cette condition se caractérise facilement par la non annulation d'un déterminant (dit déterminant de Lopatinskii) de taille $(d+2) \times (d+2)$.

On calcule en premier lieu le déterminant de Lopatinskii dans le cas $\eta = 0$:

$$\Delta_1 := \begin{vmatrix} & & B & \\ 0 & \mathbf{0} & -1 & \dfrac{1}{\rho\,c} \end{vmatrix}.$$

Il est clair que l'on ne peut pas prescrire la vitesse et la pression: le problème serait violemment mal-posé, quelle que soit la dimension d'espace (cette constatation était déjà faite dans [49]).

On calcule ensuite le déterminant aux points de branchement:

$$\Delta_{br} := \begin{vmatrix} & & B & \\ 0 & in & -1 & \dfrac{1}{\rho\,u} \end{vmatrix},$$

où n est un vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^{d-1}$. L'annulation de ce déterminant revêt un caractère exceptionnel. On travaille alors avec les variables réduites introduites précédemment. Le déterminant de Lopatinskii est donné par

$$\Delta := \begin{vmatrix} & & B & \\ 0 & u\,n & -(V+\beta) & \dfrac{u-(V+\beta)\,\Omega_1}{\rho\,(V+\beta+u\,\Omega_1)} \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \beta = n \cdot w\,.$$

Si Δ ne fait pas intervenir Ω_1, il est relativement aisé de voir si ce déterminant peut s'annuler pour les différentes valeurs de n et V (rappelons que V est de partie imaginaire négative ou nulle). Un exemple est donné au paragraphe 2.3.3. En revanche, si l'expression de Δ fait intervenir Ω_1, il est souvent mal aisé de prédire une annulation du déterminant. On adopte la même démarche qu'à la section 2.2. Si le déterminant s'annule, on obtient (après réduction au même dénominateur) une expression $\Omega_1 = \Omega^*(V)$ que l'on injecte dans (2.10). Cela fournit un polynôme de degré 4 à coefficients réels dont V est racine.

La remarque importante pour la suite de l'analyse est que le polynôme obtenu admet toujours pour racine les valeurs de V qui correspondent aux points de branchement: une fois réduite au même dénominateur, l'expression de Δ est une fraction rationnelle dont numérateur et dénominateur s'annulent aux points de branchement (cela provient de notre paramétrisation du sous-espace stable). Comme les points de branchement ont été analysés au préalable, on peut factoriser le polynôme de degré 4 par le polynôme

$$V^2 + 2\beta\,V + \beta^2 + u^2\,,$$

ce qui nous conduit à un polynôme P de degré 2 dont V est racine. La fin de l'analyse est alors tout à fait similaire à la procédure décrite pour les fluides subsoniques sortants (la relation (2.11) est encore valide).

Les différentes étapes sont résumées à la figure 2.2.

2.3.3 Exemples en dimension 1 et 2

Dans le cas d'un écoulement unidimensionnel, le sous-espace stable est indépendant de τ et le déterminant de Lopatinskii ne dépend que de l'état de référence. Deux quantités doivent être prescrites (pour un fluide subsonique) sur la paroi d'entrée.

Si on choisit d'imposer la pression et la température, les conditions au bord linéarisées prennent la forme

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{p}{\rho^2} & 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix}$$

et le déterminant de Lopatinskii a pour valeur

$$\Delta = \frac{p}{\rho^2} \neq 0\,.$$

Si on choisit d'imposer la vitesse et la température, les conditions au bord linéarisées s'écrivent

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{p}{\rho^2} & 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix}$$

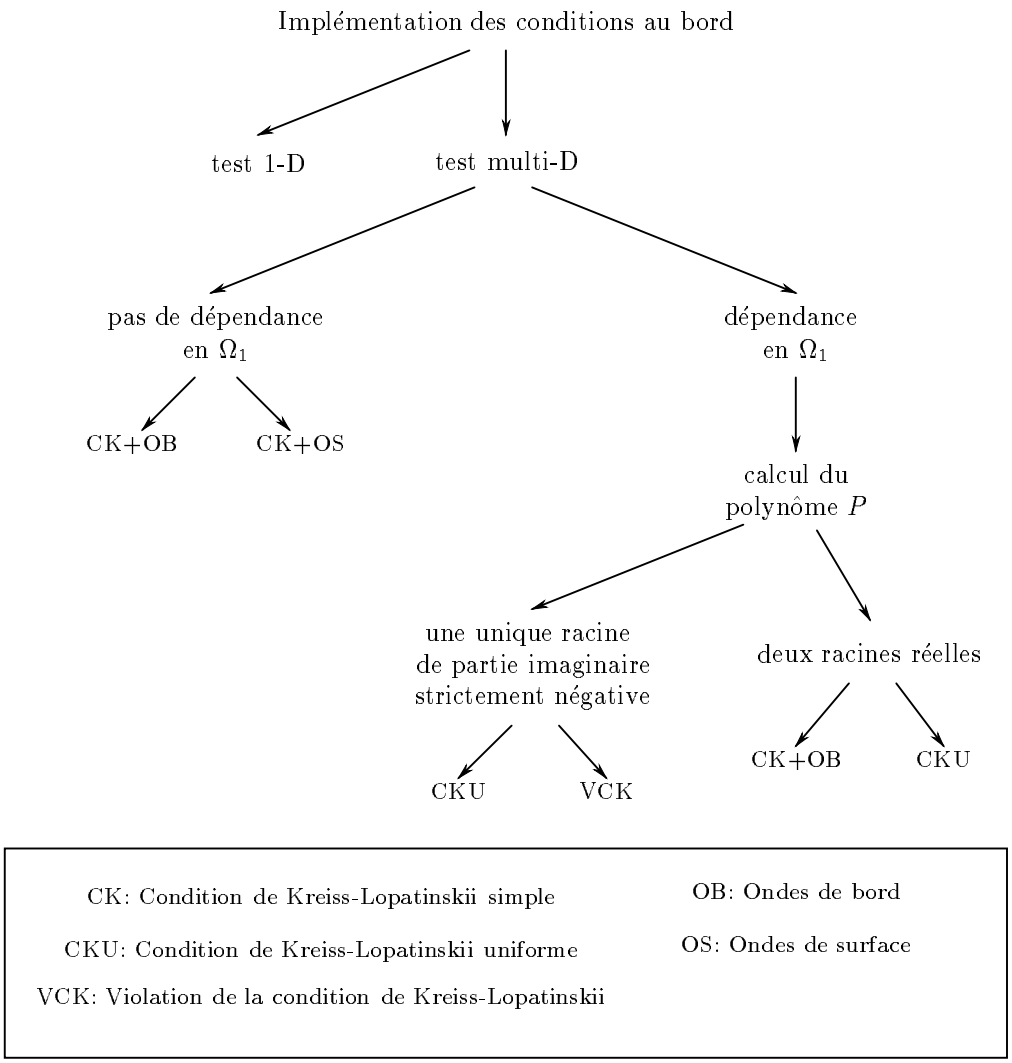


FIG. 2.2 – *Vérification de la condition de Kreiss uniforme.*

et le déterminant de Lopatinskii vaut

$$\Delta = \frac{p}{\rho^3\, c} \neq 0\,.$$

Dans les deux cas, les conditions au bord vérifient la CKU en dimension 1 d'espace et notre deuxième exemple fournit des conditions au bord qui ne sont pas strictement dissipatives. En effet, le noyau de la matrice B_2 est la droite vectorielle engendrée par

$$X_2 := \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ p \end{pmatrix}\,,$$

ce qui donne

$$X_2^t\, S\, A_1\, X_2 = \rho\, u\, p \left(\gamma + \frac{2}{\gamma} - 2\right) > 0\,.$$

Voyons maintenant ce que donne notre second exemple en dimension 2 d'espace: nous choisissons désormais d'imposer les deux composantes de la vitesse et la température du fluide. La matrice des conditions au bord (linéarisées) s'écrit

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{p}{\rho^2} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de Lopatinskii pour $\eta = 0$ est donné par

$$\Delta_1 = -\frac{p}{\rho^3\, c} \neq 0\,,$$

tandis que le déterminant aux points de branchement vaut

$$\Delta_{br} = -\frac{p}{\rho^3\, u} \neq 0\,.$$

Enfin, hors des points de branchement, le déterminant de Lopatinskii (exprimé à l'aide des variables réduites) vaut

$$\Delta = \frac{p\,\left(-u + (V+w)\,\Omega_1\right)}{\rho^3\,(V + w + u\,\Omega_1)}\,.$$

Aux points où Δ s'annule, V est racine du polynôme

$$P(X) := (X+w)^2 + u^2 - c^2$$

qui a deux racines réelles. Cela assure que les conditions au bord vérifient la CK. Les racines de P sont

$$V_1 = -w + \sqrt{c^2 - u^2} \quad \text{et} \quad V_2 = -w - \sqrt{c^2 - u^2}\,.$$

Pour $V = V_1$, la formule (2.11) donne

$$\Omega_1 = \frac{u\,\sqrt{c^2 - u^2}}{c^2 - u^2} = \frac{u}{\sqrt{c^2 - u^2}}\,,$$

tandis que l'hypothèse d'annulation de Δ donne

$$\Omega_1 = \frac{u}{V + w} = \frac{u}{\sqrt{c^2 - u^2}}\,.$$

Les deux valeurs coïncident donc la CKU est violée (le même raisonnement s'applique pour $V = V_2$). En résumé, les conditions aux limites génèrent des ondes de bord (selon la terminologie de [32]). Rappelons que ces ondes sont des solutions de la forme

$$U(t, y, x_d) = e^{\tau t + i\eta\cdot y + \omega x_d} \begin{pmatrix} \overline{\rho} \\ \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{p} \end{pmatrix}\,,$$

avec $\tau \in i\mathbb{R}$ et $\omega \in i\mathbb{R}$. En particulier, elles sont d'énergie infinie, c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} |U(t, y, x_d)|^2 \, dx_d = +\infty \,,$$

ce qui les distingue des ondes de surface ($\mathrm{Re}\,\omega < 0$) que nous rencontrerons dans l'étude des transitions de phase. Les ondes de Rayleigh sont un autre exemple bien connu d'ondes de surface, voir [14, 87, 106].

L'exemple précédent de conditions au bord en dimension 2 d'espace illustre la grande différence de comportement entre les problèmes unidimensionnels et les problèmes multidimensionnels.

On peut également se demander comment étendre notre premier exemple en dimension 1 au cas de la dimension 2: il faut imposer une quantité scalaire supplémentaire. Nous choisirons par exemple la composante tangentielle de la vitesse. Les conditions au bord linéarisées sont représentées par la matrice

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{p}{\rho^2} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{pmatrix} .$$

Le déterminant de Lopatinskii pour $\eta = 0$ vaut

$$\Delta_1 = -\frac{p}{\rho^2} \neq 0$$

et le déterminant aux points de branchement vaut

$$\Delta_{br} = -\frac{p}{\rho^2} \neq 0 \,.$$

Dans le cas général, le déterminant de Lopatinskii est donné par

$$\Delta = -\frac{p\,(V + w)}{\rho^2} \,,$$

et ne dépend pas de Ω_1. Il est clair que ce déterminant s'annule pour $V = -w \in \mathbb{R}$ donc la CK est vérifiée tandis que la CKU est violée. Pour $V = -w$, on a

$$\Omega_1 = \frac{ic}{\sqrt{c^2 - u^2}} \,,$$

et le sous-espace stable de (2.8) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{\rho\, u\, \Omega_1} \end{pmatrix}^{\perp} .$$

Les solutions non triviales de (2.8) qui vérifient les conditions au bord homogènes doivent satisfaire, en $x_2 = 0$, les relations

$$\dot{\rho} = 0 \quad \dot{w} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{p} = 0 \,,$$

c'est-à-dire être proportionnel au vecteur

$$X_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On montre que de tels vecteurs sont les traces de fonctions propres de (2.8) associées au mode propre ω_0 (solution de (2.9a)). Pour $V = -w$, ω_0 est nul. Nous sommes donc à nouveau en présence d'ondes d'énergie infinie (bien que ω_1 soit de partie réelle strictement négative aux points d'annulation du déterminant de Lopatinskii).

2.4 Conditions sur une paroi non adhérente

Le cas des parois non adhérentes diffère des deux cas que nous avons traités auparavant: en effet, le bord $\{x_d = 0\}$ est désormais caractéristique et le problème relève alors de la théorie développée par Majda et Osher [67] ou des travaux de Guès [44].

La paroi étant imperméable, l'état de référence autour duquel nous linéarisons le système (2.1) vérifie $u = 0$. La matrice A_d admet alors une valeur propre strictement positive c (avec multiplicité 1), une valeur propre strictement négative $-c$ (avec multiplicité 1) et la valeur propre 0 (avec multiplicité d). Suivant Majda et Osher, il faut donc prescrire exactement une quantité sur le bord (il y a exactement une caractéristique rentrante), et nous imposons naturellement la condition de glissement

$$\dot{u} = 0 .$$

Cette condition au bord est représentée par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Remarquons que la restriction de la matrice $S\,A_d$ au sous-espace Ker B est négative ou nulle (elle est en fait identiquement nulle), et que Ker B n'est strictement inclus dans aucun sous-espace jouissant de cette propriété (car Ker B est un hyperplan et $S\,A_d$ n'est pas négative ou nulle). On dira de la condition de glissement qu'elle est maximalement dissipative (voir [44]).

Après transformations de Laplace et de Fourier, le système (2.3) devient

$$\begin{cases} \widetilde{\tau}\dot{\rho} + \rho\, i\eta \cdot \dot{w} + \rho\, \dot{u}' = 0 , \\ \widetilde{\tau}\dot{w} + \rho^{-1}\, i\eta\, \dot{p} = 0 , \\ \widetilde{\tau}\dot{u} + \rho^{-1}\, \dot{p}' = 0 , \\ \widetilde{\tau}\dot{p} + \gamma p\, i\eta \cdot \dot{w} + \gamma p\, \dot{u}' = 0 . \end{cases}$$

Pour Re $\tau > 0$, le système dynamique ci-dessus admet un mode propre ω_1 de partie imaginaire strictement négative, qui est racine de l'équation

$$\widetilde{\tau}^2 = c^2(\omega^2 - |\eta|^2) .$$

La valeur en 0 d'une fonction propre est un multiple du vecteur

$$r_1(\tau, \eta) = \begin{pmatrix} \rho\, \widetilde{\tau}/c^2 \\ -i\eta \\ -\omega_1 \\ \rho\, \widetilde{\tau} \end{pmatrix} .$$

Vérifier la condition de stabilité simple et/ou uniforme revient à chercher les valeurs de (τ, η) telles que ω_1 soit nul. Cela est clairement impossible pour Re $\tau > 0$ car ω_1 est alors de partie réelle strictement négative: la condition de stabilité simple est vérifiée. En revanche, il est facile de voir que ω_1 est nul pour $\eta \neq 0$ et $\widetilde{\tau} = \pm ic|\eta|$. La condition de glissement génère donc des ondes de bord qui sont de la forme

$$\exp[i(\pm c|\eta|t + \eta \cdot y)] \begin{pmatrix} \pm i\rho|\eta| \\ -ic\eta \\ 0 \\ \pm i\rho c^2|\eta| \end{pmatrix},$$

avec $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ non nul. Remarquons que ces ondes de bord ne dépendent pas de la variable x_d. La condition de glissement sur le bord vérifie donc la condition de stabilité simple mais ne vérifie pas la condition de stabilité uniforme.

2.5 Exemple de traitement formel

Nous montrons ci-dessous comment implémenter en MAPLE© les opérations décrites dans les sections 2.2 et 2.3 (on se reportera notamment à la figure 2.2 pour le cas des fluides subsoniques rentrants).

Rappelons que dans le cas des fluides supersoniques sortants, aucune condition au bord n'est à prescrire, et nous nous concentrerons donc sur les trois cas restants.

2.5.1 Fluides supersoniques rentrants

C'est le cas le plus simple: il s'agit seulement de vérifier l'indépendance des conditions au bord prescrites. Un test simple est le suivant:

<u>Fluides unidimensionnels</u>

```
f1 :=(rho,v,p)->rho*v:
f2 :=(rho,v,p)->p/rho:        (Prescription des conditions au bord)
f3 :=(rho,v,p)->p:

with (linalg):        (Vérification de l'indépendance des conditions au bord)

B :=matrix(3,3,[
D[1](f1) (rho,v,p), D[2](f1) (rho,v,p), D[3](f1) (rho,v,p),
D[1](f2) (rho,v,p), D[2](f2) (rho,v,p), D[3](f2) (rho,v,p),
D[1](f3) (rho,v,p), D[2](f3) (rho,v,p), D[3](f3) (rho,v,p) ]):
simplify( det(B) );
```

Les procédures pour les fluides bidimensionnels et tridimensionnels sont en tout point analogues, la matrice `B` étant juste de taille 4 ou 5. Dans cet exemple, le déterminant de la matrice `B` est égal à p/ρ qui est effectivement non nul.

2.5.2 Fluides subsoniques sortants

Nous nous placerons dans les hypothèses formulées à la section 2.2, c'est-à-dire (en gardant les notations précédentes) $-c < u < 0$. On peut alors utiliser un programme de la forme suivante[2]:

Fluides unidimensionnels

```
f :=(rho,v,p)->p:
Delta :=simplify( (D[1](f) (rho,v,p))/c
- (D[2](f) (rho,v,p))/(rho) + c*(D[3](f) (rho,v,p)) );
```

Fluides bidimensionnels

```
f :=(rho,v1,v2,p)->p:
```

⋆) Calcul du déterminant 1-D

```
Delta1 :=simplify( (D[1](f) (rho,v1,v2,p))/c
- (D[3](f) (rho,v1,v2,p))/(rho) + c*(D[4](f) (rho,v1,v2,p)) );
```

⋆) Calcul du déterminant de Lopatinskii à l'aide des variables réduites

```
Delta :=simplify( (D[1](f) (rho,v1,v2,p))*(V+v1+omega*v2)/c^2
- (D[2](f) (rho,v1,v2,p))/(rho) - (D[3](f) (rho,v1,v2,p))*omega/(rho)
+ (D[4](f) (rho,v1,v2,p))*(V+v1+omega*v2) );
```

⋆) Recherche de zéros éventuels

```
eigenmode :=simplify( solve(Delta,omega) ):
P :=simplify( subs( omega=eigenmode,
(V+v1+omega*v2)^2 - ((omega)^2+1)*c^2 ) ):
collect(P,V);
```

Fluides tridimensionnels

Le cas des fluides tridimensionnels est un peu plus compliqué du fait que n est un vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^2$ que l'on écrit sous le forme $(\cos\theta, \sin\theta)$. On utilise alors la notation `beta` pour désigner le produit scalaire $n \cdot w$ (voir les sections 2.2 et 2.3). On peut utiliser un programme de la forme suivante:

```
f :=(rho,v1,v2,v3,p)->v3:

Delta1 :=simplify( (D[1](f) (rho,v1,v2,v3,p))/c
- (D[4](f) (rho,v1,v2,v3,p))/(rho) + c*(D[5](f) (rho,v1,v2,v3,p)) );

Delta :=simplify( (D[1](f) (rho,v1,v2,v3,p))*(V+beta+omega*v3)/(c^2)
- (D[2](f) (rho,v1,v2,v3,p))*cos(theta)/(rho)
- (D[3](f) (rho,v1,v2,v3,p))*sin(theta)/(rho)
- (D[4](f) (rho,v1,v2,v3,p))*omega/(rho)
+ (D[5](f) (rho,v1,v2,v3,p))*(V+beta+omega*v3) );
```

2. On a noté `omega` le mode propre réduit Ω_1.

```
eigenmode :=simplify( solve(Delta,omega) ):
P:=simplify( subs( omega=eigenmode,
(V+beta+omega*v3)^2 - ((omega)^2+1)*c^2) ):
collect(P,V);
```

Non seulement l'analyse de la section 2.2 montre qu'il est hors de question de prescrire une composante de la vitesse tangentielle, mais il est également préférable que la vitesse tangentielle n'apparaisse pas du tout dans la condition au bord. Le déterminant de Lopatinskii aura une expression plus simple.

2.5.3 Fluides subsoniques rentants

Nous présentons maintenant le cas le plus délicat, celui des fluides subsoniques rentrants, tel qu'il est décrit à la figure 2.2.

Fluides unidimensionnels

On pourra par exemple utiliser un programme de la forme

```
f1 :=(rho,v,p)->v:
f2 :=(rho,v,p)->p/rho:
with (linalg):
B :=matrix(3,3,[
D[1](f1) (rho,v,p), D[2](f1) (rho,v,p), D[3](f1) (rho,v,p),
D[1](f2) (rho,v,p), D[2](f2) (rho,v,p), D[3](f2) (rho,v,p),
0, -1, (rho*c)^(-1) ]);
Delta :=simplify( det(B) );
```

Fluides bidimensionnels

L'apparition de points de branchement nécessite un calcul préliminaire, comme nous l'avons détaillé à la section 2.3.

```
f1 :=(rho,v1,v2,p)->v1:
f2 :=(rho,v1,v2,p)->p:
f3 :=(rho,v1,v2,p)->p/rho:
with(linalg):
```

$\star$) Calcul du déterminant 1-D

```
A :=matrix(4,4,[
D[1](f1) (rho,v1,v2,p), D[2](f1) (rho,v1,v2,p),
D[3](f1) (rho,v1,v2,p), D[4](f1) (rho,v1,v2,p),
D[1](f2) (rho,v1,v2,p), D[2](f2) (rho,v1,v2,p),
D[3](f2) (rho,v1,v2,p), D[4](f2) (rho,v1,v2,p),
D[1](f3) (rho,v1,v2,p), D[2](f3) (rho,v1,v2,p),
D[3](f3) (rho,v1,v2,p), D[4](f3) (rho,v1,v2,p),
0, 0, -1, (rho*c)^(-1) ]):
Delta1 :=simplify( det(A) );
```

⋆) Calcul du déterminant aux points de branchement

```
B :=matrix(4,4,[
D[1](f1) (rho,v1,v2,p), D[2](f1) (rho,v1,v2,p),
D[3](f1) (rho,v1,v2,p), D[4](f1) (rho,v1,v2,p),
D[1](f2) (rho,v1,v2,p), D[2](f2) (rho,v1,v2,p),
D[3](f2) (rho,v1,v2,p), D[4](f2) (rho,v1,v2,p),
D[1](f3) (rho,v1,v2,p), D[2](f3) (rho,v1,v2,p),
D[3](f3) (rho,v1,v2,p), D[4](f3) (rho,v1,v2,p),
0, I, -1, (rho*v2)^(-1) ]):
Delta2 :=simplify( det(B) );
```

⋆) Calcul du déterminant de Lopatinskii à l'aide des variables réduites

```
C :=matrix(4,4,[
D[1](f1) (rho,v1,v2,p), D[2](f1) (rho,v1,v2,p),
D[3](f1) (rho,v1,v2,p), D[4](f1) (rho,v1,v2,p),
D[1](f2) (rho,v1,v2,p), D[2](f2) (rho,v1,v2,p),
D[3](f2) (rho,v1,v2,p), D[4](f2) (rho,v1,v2,p),
D[1](f3) (rho,v1,v2,p), D[2](f3) (rho,v1,v2,p),
D[3](f3) (rho,v1,v2,p), D[4](f3) (rho,v1,v2,p),
0, v2, -V-v1, (v2 -(V+v1)*omega)/(rho*(V +v1+omega*v2)) ]):
Delta :=simplify( det(C) );
```

⋆) Recherche de zéros éventuels

```
eigenmode :=simplify( solve(Delta,omega) ):
Q1 :=simplify( numer( simplify( subs( omega=eigenmode,
(V+v1+omega*v2)^2 - ((omega)^2+1)*c^2) ))):
collect(Q1,V):
verif :=rem(Q1,V^2+2*v1*V+(v1)^2+(v2)^2,V,'Q2');
P :=collect(Q2,V);
```

⋆) Recherche numérique de zéros éventuels (en désespoir de cause)[3]

```
g := 1.4:
v1 := ... :
v2 := ... :
p := ... :
rho := ... :
c :=sqrt(g*p/rho):
eigenmode;
solve(P,V);
```

3. La notation **gamma** est déjà utilisée par MAPLE© pour désigner la constante ... d'Euler. On désignera donc par g la constante adiabatique du fluide.

Chapitre 3

Le problème linéarisé à coefficients constants

Ce chapitre correspond à l'article [26], paru dans le
SIAM Journal on Mathematical Analysis.

On s'intéresse aux équations d'Euler pour un fluide isotherme:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u}) = 0\,, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla\, p = 0\,, \end{cases}$$

où le fluide suit une loi de pression de van der Waals, et on cherche à établir l'existence d'une solution $(\rho, \mathbf{u})$ régulière de part et d'autre d'une hypersurface $\{x_d = \varphi(t,y)\}$ qui définisse une transition de phase admissible. On décompose les vitesses $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ en $\mathbf{u} = (w, u)$ avec $w \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $u \in \mathbb{R}$. Après redressement du front, on est ramené à chercher une solution régulière $(\rho^+, \mathbf{u}^+, \rho^-, \mathbf{u}^-, \varphi)$ du système

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho^+ + \nabla_y \cdot (\rho^+ w^+) + \partial_{x_d}(\rho^+ u^+) - \partial_{x_d}(\rho^+ u^+)\partial_t \varphi - \partial_{x_d}(\rho^+ w^+) \cdot \nabla_y \varphi = 0\,, \\
\partial_t(\rho^+ w^+) + \nabla_y \cdot (\rho^+ w^+ \otimes w^+) + \partial_{x_d}(\rho^+ u^+ w^+) - \partial_{x_d}(\rho^+ w^+)\partial_t \varphi \\
-\partial_{x_d}(\rho^+ w^+ \otimes w^+) \cdot \nabla_y \varphi + \nabla_y p(\rho^+) - \partial_{x_d} p(\rho^+)\, \nabla_y \varphi = 0\,, \\
\partial_t(\rho^+ u^+) + \nabla_y \cdot (\rho^+ u^+ w^+) + \partial_{x_d}(\rho^+ (u^+)^2) - \partial_{x_d}(\rho^+ u^+)\partial_t \varphi \\
-\partial_{x_d}(\rho^+ u^+ w^+) \cdot \nabla_y \varphi + \partial_{x_d} p(\rho^+) = 0\,, \\
\partial_t \rho^- + \nabla_y \cdot (\rho^- w^-) - \partial_{x_d}(\rho^- u^-) + \partial_{x_d}(\rho^- u^-)\partial_t \varphi + \partial_{x_d}(\rho^- w^-) \cdot \nabla_y \varphi = 0\,, \\
\partial_t(\rho^- w^-) + \nabla_y \cdot (\rho^- w^- \otimes w^-) - \partial_{x_d}(\rho^- u^- w^-) + \partial_{x_d}(\rho^- w^-)\partial_t \varphi \\
+\partial_{x_d}(\rho^- w^- \otimes w^-) \cdot \nabla_y \varphi + \nabla_y p(\rho^-) + \partial_{x_d} p(\rho^-)\, \nabla_y \varphi = 0\,, \\
\partial_t(\rho^- u^-) + \nabla_y \cdot (\rho^- u^- w^-) - \partial_{x_d}(\rho^- (u^-)^2) + \partial_{x_d}(\rho^- u^-)\partial_t \varphi \\
+\partial_{x_d}(\rho^- u^- w^-) \cdot \nabla_y \varphi - \partial_{x_d} p(\rho^-) = 0\,,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

dans le domaine $\{x_d > 0\}$ avec les conditions

$$\begin{aligned}
[\rho]\partial_t \varphi + [\rho w] \cdot \nabla_y \varphi - [\rho u] = 0\,, \\
[\rho w]\partial_t \varphi + [\rho w (w \cdot \nabla_y \varphi)] - [\rho u w] + [p]\nabla_y \varphi = 0\,, \\
[\rho u]\partial_t \varphi + [\rho u (w \cdot \nabla_y \varphi)] - [\rho u^2] - [p] = 0\,, \\
\frac{1}{2}\left[(u - w \cdot \nabla_y \varphi - \partial_t \varphi)^2\right] + (1 + |\nabla_y \varphi|^2)[f'] = 0\,,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

sur le bord $\{x_d = 0\}$. Les conditions sur le bord sont les conditions de saut usuelles de Rankine-Hugoniot et la condition de saut supplémentaire provenant du critère capillaire. On rappelle que f désigne l'énergie libre par unité de volume et que sa dérivée f' est le potentiel chimique. De plus, on a la relation $\rho f' - f = p$.

Pour résoudre (3.1)-(3.2), on commence par étudier le système linéarisé autour d'une transition de phase plane. Le but de ce chapitre est de montrer une estimation a priori pour les solutions d'un tel problème linéarisé. Ce travail constitue la moitié de l'article [26]. Dans l'autre moitié de [26], on s'est consacré à l'étude des chocs de Lax non uniformément stables en dynamique des gaz. Nous y reviendrons dans la partie 3.6.

3.1 Linéarisation des équations

On étudie donc dans un premier temps le système linéarisé autour d'une transition de phase plane. Pour cela, on se fixe une transition de phase plane

$$\mathbf{U} = \begin{cases} U_l = (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{si } x_d < \sigma t, \\ U_r = (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{si } x_d > \sigma t. \end{cases}$$

Les états U_l et U_r sont reliés par les conditions de saut

$$\begin{aligned} \sigma[\rho] - [\rho u] &= 0\,, \\ \sigma[\rho w] - [\rho u w] &= 0\,, \\ \sigma[\rho u] - [\rho u^2] - [p] &= 0\,, \\ \frac{1}{2}\left[(u-\sigma)^2\right] + [f'] &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

On définit le flux de matière j à travers l'interface par

$$j := \rho_r(u_r - \sigma) = \rho_l(u_l - \sigma)\,,$$

et on se place dans une situation où $j \neq 0$. Si $j = 0$, il n'y a pas de transfert de masse entre les deux côtés de l'interface et on se trouve en présence d'une interface statique (ce cas est donc apparenté aux discontinuités de contact). Par opposition au cas statique $j = 0$, on dira que $\mathbf{U}$ est une transition de phase dynamique quand $j \neq 0$, ce que nous supposerons désormais. Quitte à effectuer un changement de référentiel galiléen, les relations (3.3) montrent que l'on peut se ramener au cas

$$w_l = w_r = 0 \quad \text{et} \quad \sigma = 0\,.$$

Avec ce changement de référentiel, le flux de matière à travers l'hyperplan $\{x_d = 0\}$ est donné par $j = \rho_r u_r = \rho_l u_l$ et nous supposerons $j > 0$. Si $j < 0$, on se ramène au cas $j > 0$ en faisant le changement de variables $x_d \to -x_d$, ce qui revient à échanger les états U_l et U_r.

Le système (3.1) linéarisé autour de la solution particulière $\mathbf{U}$ s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \dot\rho^\pm \pm u_{r,l}\partial_{x_d}\dot\rho^\pm + \rho_{r,l}\nabla_y \cdot \dot w^\pm \pm \rho_{r,l}\partial_{x_d}\dot u^\pm = 0\,, \\ \partial_t \dot w^\pm \pm u_{r,l}\partial_{x_d}\dot w^\pm + \dfrac{c_{r,l}^2}{\rho_{r,l}}\nabla_y \dot\rho^\pm = 0\,, \\ \partial_t \dot u^\pm \pm u_{r,l}\partial_{x_d}\dot u^\pm \pm \dfrac{c_{r,l}^2}{\rho_{r,l}}\partial_{x_d}\dot\rho^\pm = 0\,, \end{cases} \tag{3.4}$$

où $c := \sqrt{p'(\rho)}$ est la vitesse du son dans le fluide (les états U_l et U_r sont pris hors de la zone spinodale). Les conditions de saut (3.2) linéarisées autour de $\mathbf{U}$ s'écrivent

$$\begin{aligned} u_r\dot\rho^+ + \rho_r\dot u^+ - u_l\dot\rho^- - \rho_l\dot u^- - [\rho]\,\partial_t\psi &= 0\,,\\ \rho_r u_r\dot w^+ - \rho_l u_l\dot w^- - [p]\,\nabla_y\psi &= 0\,,\\ (u_r^2+c_r^2)\dot\rho^+ + 2\rho_r u_r\dot u^+ - (u_l^2+c_l^2)\dot\rho^- - 2\rho_l u_l\dot u^- &= 0\,,\\ c_r^2\frac{\dot\rho^+}{\rho_r} + u_r\dot u^+ - c_l^2\frac{\dot\rho^-}{\rho_l} - u_l\dot u^- - [u]\,\partial_t\psi &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

En notant $U^+ := (\dot\rho^+, \dot{\mathbf{u}}^+)$ et $U^- := (\dot\rho^-, \dot{\mathbf{u}}^-)$, on vérifie que (3.4)-(3.5) se met sous la forme

$$\partial_t U^+ + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(U_r)\,\partial_{x_j}U^+ + A_d(U_r)\,\partial_{x_d}U^+ = 0 \quad x_d > 0\,, \tag{3.6a}$$

$$\partial_t U^- + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(U_l)\,\partial_{x_j}U^- - A_d(U_l)\,\partial_{x_d}U^- = 0 \quad x_d > 0\,, \tag{3.6b}$$

$$\partial_t\psi\, b_0 + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, b_j + M\,(U^+, U^-) = 0 \quad x_d = 0\,, \tag{3.6c}$$

où l'on a noté

$$A_j(\rho,\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} \mathbf{u}\cdot e_j & \rho\, e_j^t \\ \dfrac{c^2}{\rho}\, e_j & \mathbf{u}\cdot e_j\, I_d \end{pmatrix} \qquad \text{pour } 1 \le j \le d\,,$$

$$b_0 := \begin{pmatrix} -[\rho] \\ \mathbf{0}_d \\ -[u] \end{pmatrix}\,, \quad b_j := \begin{pmatrix} 0 \\ -[p]e_j \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{pour } 1 \le j \le d-1,$$

$$M := \begin{pmatrix} u_r & \mathbf{0} & \rho_r & -u_l & \mathbf{0} & -\rho_l \\ \mathbf{0} & \rho_r u_r\, I_{d-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\rho_l u_l\, I_{d-1} & \mathbf{0} \\ (u_r^2+c_r^2) & \mathbf{0} & 2\rho_r u_r & -(u_l^2+c_l^2) & \mathbf{0} & -2\rho_l u_l \\ c_r^2/\rho_r & \mathbf{0} & u_r & -c_l^2/\rho_l & \mathbf{0} & -u_l \end{pmatrix}\,,$$

avec e_j le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Il est important de savoir résoudre le problème linéaire (3.6) en présence de termes source f^+, f^- et g dans des espaces fonctionnels convenables, dans le but de mettre en place un schéma itératif pour résoudre les équations non linéaires. On considérera donc le problème linéarisé non homogène:

$$\begin{cases} \partial_t U^+ + \displaystyle\sum_{j=1}^{d-1} A_j(U_r)\,\partial_{x_j}U^+ + A_d(U_r)\,\partial_{x_d}U^+ = f^+ \quad x_d > 0\,,\\ \partial_t U^- + \displaystyle\sum_{j=1}^{d-1} A_j(U_l)\,\partial_{x_j}U^- - A_d(U_l)\,\partial_{x_d}U^- = f^- \quad x_d > 0\,,\\ \partial_t\psi\, b_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, b_j + M\,(U^+, U^-) = g \quad x_d = 0\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

En notant $U := (U^+, U^-)$, (3.7) est un système du premier ordre en (U, ψ) que nous écrirons

$$\begin{cases} \partial_t U + \sum_{j=1}^{d} \mathscr{A}_j \, \partial_{x_j} U = f & x_d > 0 \,, \\ \partial_t \psi \, b_0 + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \psi \, b_j + M \, U = g & x_d = 0 \,. \end{cases} \tag{3.8}$$

Les matrices $\mathscr{A}_j$ sont diagonales par blocs car U^+ et U^- vérifient des équations découplées dans le domaine $\{x_d > 0\}$. Pour $\xi \neq 0$, la matrice

$$\sum_{j=1}^{d} \xi_j \, \mathscr{A}_j$$

est diagonalisable (car les équations d'Euler sont hyperboliques hors de la zone spinodale) et ses valeurs propres sont $\mathbf{u}_{r,l} \cdot \xi$ avec multiplicité $d-1$ et $\mathbf{u}_{r,l} \cdot \xi \pm c_{r,l}|\xi|$ avec multiplicité 1 chacune. On va donc étudier un problème aux limites pour un système hyperbolique à multiplicité constante.

• **Remarque :** le problème (3.6) ne relève pas de la théorie des problèmes mixtes hyperboliques *classiques*, traitée notamment par Hersh et Kreiss [47, 48, 61], car des dérivées partielles de ψ interviennent dans les conditions au bord. Sous un hypothèse de stabilité uniforme, Majda montre dans [65] comment reformuler les conditions au bord de telle sorte que le front inconnu ψ n'apparaisse que dans une seule condition aux limites. L'idée est alors de mettre provisoirement de côté cette condition et de résoudre le problème mixte *classique* obtenu pour U. Une fois que U et $U(x_d = 0)$ sont déterminées, la dernière condition aux limites est une équation de transport linéaire sur ψ à intégrer sur les caractéristiques. Nous verrons à la partie 3.3 comment "isoler" le front inconnu ψ dans une seule condition aux limites. Le problème mixte classique obtenu pour U s'étudiera au moyen d'un symétriseur de Kreiss modifié.

On considère ici une transition de phase **U subsonique** de part et d'autre de l'hyperplan $\{x_d = 0\}$, c'est-à-dire qu'on a

$$0 < u_r < c_r \quad \text{et} \quad 0 < u_l < c_l \,.$$

Une telle solution des équations d'Euler ne vérifie pas les inégalités de Lax [62] car la matrice $\mathscr{A}_d$ possède autant de valeurs propres strictement négatives que de valeurs propres strictement positives. On a donc une caratéristique rentrante (comptée avec multiplicité) de plus que dans le cas d'un choc de Lax. Dans la terminologie de Freistühler [38], on dit que **U** est un choc sous-compressif de type 0.

Remarquons que la matrice $\mathscr{A}_d$ est inversible car elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont $u_{r,l}$ et $u_{r,l} \pm c_{r,l}$. Le bord $\{x_d = 0\}$ est dit non caractéristique.

Pour étudier la stabilité linéaire de la transition de phase **U**, on commence par chercher si le problème mixte (3.6) satisfait une condition de stabilité uniforme analogue à celle énoncée par Majda dans [65] pour les chocs de Lax (l'extension aux chocs sous-compressifs de la notion de stabilité uniforme de Majda a été formulée par Freistühler [39]). Cette

étude, qui est l'analyse par modes normaux du problème (3.6), a montré dans [11] que la condition nécessaire de stabilité faible est vérifiée mais que la condition de stabilité uniforme est mise en défaut en raison de l'existence d'ondes de surface. On rappelle les principaux résultats de [11] à la partie suivante.

L'étape suivante consiste à obtenir des "estimations d'énergie" a priori. L'outil ad hoc pour obtenir de telles estimations est un symétriseur symbolique que Kreiss est parvenu à construire sous une hypothèse de stabilité uniforme [61]. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, la construction de Kreiss [23, 61, 81] ne peut pas fonctionner. Nous montrerons qu'il est néanmoins possible d'obtenir une estimation a priori pour le problème (3.8) en modifiant la construction de Kreiss aux points où la condition de stabilité uniforme est violée. Ces modifications seront détaillées à la partie 3.5. Des "pertes de dérivées" sont à prévoir car une estimation d'énergie dans L^2 est équivalente à la condition de stabilité uniforme, comme l'ont montré Kreiss et Majda [61, 65]. Il s'agit donc de montrer une estimation avec le moins de pertes possible. Des estimations avec pertes de dérivées ont déjà été établies dans d'autres problèmes [32, 87, 37, 70].

3.2 Analyse modale et stabilité faible des transitions de phase planes

On étudie tout d'abord les deux systèmes dynamiques homogènes:

$$\left(\gamma + i\vartheta + i\sum_{j=1}^{d-1}\eta_j A_j(U_r)\right) V^+ + A_d(U_r)\,\frac{dV^+}{dx_d} = 0\,, \tag{3.9}$$

$$\left(\gamma + i\vartheta + i\sum_{j=1}^{d-1}\eta_j A_j(U_l)\right) V^- - A_d(U_l)\,\frac{dV^-}{dx_d} = 0\,, \tag{3.10}$$

qui s'obtiennent à partir de (3.6a) et (3.6b) en effectuant le changement de fonction inconnue $U \to \exp(-\gamma t)U$ (le paramètre γ étant un réel positif ou nul) puis une transformée de Fourier en (t, y); les variables duales sont notées respectivement ϑ et η. La même opération sera réalisée sur les conditions au bord.

Pour alléger les écritures, on notera $\tau := \gamma + i\vartheta$.

On restreint dans un premier temps l'étude des systèmes dynamiques (3.9) et (3.10) à des valeurs strictement positives du paramètre γ. L'hyperbolicité des équations d'Euler exclut l'existence de solutions oscillantes aux systèmes (3.9) et (3.10), ce qui revient à dire que les modes propres de (3.9) et (3.10) sont de partie réelle non nulle si $\gamma > 0$. Pour $\gamma > 0$, (3.9) et (3.10) sont donc hyperboliques au sens des systèmes dynamiques. Pour chacun de ces deux systèmes dynamiques, l'espace $\mathbb{C}^{d+1}$ se décompose en somme directe d'un sous-espace stable et d'un sous-espace instable (qui sont les sous-espaces propres généralisés associés respectivement aux valeurs propres de partie réelle strictement négative et aux valeurs propres de partie réelle strictement positive). Le lemme 3.1 ci-dessous donne l'expression des modes propres de (3.9) et (3.10) ainsi qu'un paramétrage des sous-espaces stables.

Lemme 3.1 (Benzoni-Gavage). [11]. *Soit* $(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$ *tel que* $\mathrm{Re}\,\tau > 0$. *L'équation polynomiale*

$$(\tau + u_r\,\omega)^2 = c_r^2\,(\omega^2 - |\eta|^2) \tag{3.11}$$

admet une unique racine ω_3^r de partie réelle strictement négative. L'autre racine, notée ω_1^r, est de partie réelle strictement positive. De façon similaire, l'équation

$$(\tau - u_l\,\omega)^2 = c_l^2\,(\omega^2 - |\eta|^2)$$

admet une unique racine ω_1^l de partie réelle strictement négative. L'autre racine, notée ω_3^l, est de partie réelle strictement positive. On définit $\omega_2^r := -\tau/u_r$ et $\omega_2^l := \tau/u_l$. Alors le sous-espace stable $E_r^-(\tau,\eta)$ de (3.9) est un hyperplan. Pour $\tau \neq u_r|\eta|$, c'est-à-dire pour $\omega_2^r \neq \omega_3^r$, il se décompose en

$$E_r^-(\tau,\eta) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \rho_r(\tau + u_r\,\omega_3^r) \\ -c_r^2\,i\eta \\ -c_r^2\,\omega_3^r \end{pmatrix} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_2^r Z_2^r \\ i\eta\cdot Z_2^r \end{pmatrix},\, Z_2^r \in \mathbb{C}^{d-1} \right\}. \tag{3.12}$$

Pour $\tau = u_r|\eta|$ et $\eta \neq 0$, on a simplement

$$E_r^-(\tau,\eta) = \left(c_r^2|\eta|, \rho_r u_r\,i\eta, -\rho_r u_r|\eta|\right)^\perp .$$

Le sous-espace stable $E_l^-(\tau,\eta)$ de (3.10) est la droite vectorielle

$$E_l^-(\tau,\eta) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \rho_l(\tau - u_l\,\omega_1^l) \\ -c_l^2\,i\eta \\ c_l^2\,\omega_1^l \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

On dispose également d'un paramétrage semblable des sous-espaces instables E_r^+ et E_l^+ qui fait intervenir ω_1^r, ω_2^l et ω_3^l, voir [11].

Après changement de fonctions inconnues et transformation de Fourier en (t,y), le problème (3.8) s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dx_d} = \mathscr{A}(\tau,\eta)\,V(x_d) + \mathscr{A}_d^{-1}\,\widehat{F} & x_d > 0\,, \\[2ex] \Psi\,b(\tau,\eta) + M\,V(0) = \widehat{G} & x_d = 0\,, \end{cases} \tag{3.14}$$

où l'on a posé

$$\mathscr{A}(\tau,\eta) := -\mathscr{A}_d^{-1}\left(\tau + i\sum_{j=1}^{d-1}\eta_j\mathscr{A}_j\right) \quad \text{et} \quad b(\tau,\eta) := \tau b_0 + i\sum_{j=1}^{d-1}\eta_j b_j\,. \tag{3.15}$$

D'après la construction des matrices $\mathscr{A}_j$, on a

$$\mathscr{A}(\tau,\eta) = \begin{pmatrix} \mathscr{A}_r(\tau,\eta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathscr{A}_l(\tau,\eta) \end{pmatrix}$$

avec les notations évidentes

$$\mathscr{A}_{r,l}(\tau,\eta) := \mp A_d(U_{r,l})^{-1}\left(\tau + i\sum_{j=1}^{d-1}\eta_j A_j(U_{r,l})\right). \tag{3.16}$$

Le système dynamique homogène

$$\frac{dV}{dx_d} = \mathscr{A}(\tau,\eta)\, V\,,$$

n'admet pas de solution oscillante si Re $\tau > 0$. De plus, pour $(\tau,\eta) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}^{d-1}$ tel que Re $\tau > 0$, le sous-espace stable $\mathscr{E}^-(\tau,\eta)$ de ce système dynamique est donné par

$$\mathscr{E}^-(\tau,\eta) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_r \\ Z_l \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2(d+1)} \ \text{ t.q. } Z_r \in E_r^-(\tau,\eta) \ \text{ et } \ Z_l \in E_l^-(\tau,\eta) \right\}.$$

• **Remarque :** les modes propres $\omega_k^{r,l}$ définis au lemme 3.1, c'est-à-dire les valeurs propres de la matrice $\mathscr{A}(\tau,\eta)$, admettent un prolongement continu aux points $(\tau,\eta) \in i\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$. On vérifie que ω_1^r et ω_3^r coïncident si et seulement si $\tau = \pm i|\eta|\sqrt{c_r^2 - u_r^2}$. De façon analogue, ω_1^l et ω_3^l coïncident si et seulement si $\tau = \pm i|\eta|\sqrt{c_l^2 - u_l^2}$. On vérifie également qu'aux points $(\tau,\eta) \in i\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$, $\omega_2^{r,l}$ est toujours distinct de $\omega_{1,3}^{r,l}$. En dehors des points où certains modes propres coïncident, on dispose d'une base de vecteurs propres de $\mathscr{A}(\tau,\eta)$, cette base dépend analytiquement de (τ,η). Nous nous servirons de l'existence d'une telle base dans la construction du symétriseur (partie 3.5). La figure 3.1 récapitule les différents points "exceptionnels" du système (3.9). Grâce à l'homogénéité des modes propres $\omega_k^{r,l}$, on s'est restreint à des paramètres (τ,η) tels que $|\tau|^2 + |\eta|^2$ soit constant. Pour $d = 2$, l'ensemble de ces paramètres est une demi-sphère que nous avons représenté par un disque.

Le prolongement des modes propres permet de prolonger continûment le sous-espace $\mathscr{E}^-$ aux points $(\tau,\eta) \in i\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$ distincts de l'origine (le prolongement continu ayant lieu dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{2(d+1)}$ de dimension $d+1$). Aux points $(\tau,\eta) \in i\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}\setminus\{0\}$, le sous-espace $\mathscr{E}^-(\tau,\eta)$ contient les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de $\mathscr{A}(\tau,\eta)$ de partie réelle strictement négative ainsi que les sous-espaces propres associés à certaines valeurs propres imaginaires pures. En effet, ω_2^r est imaginaire pur dès que τ est imaginaire pur. Les modes ω_1^r et ω_3^r sont imaginaires purs pour $\tau \in i\mathbb{R}$ et

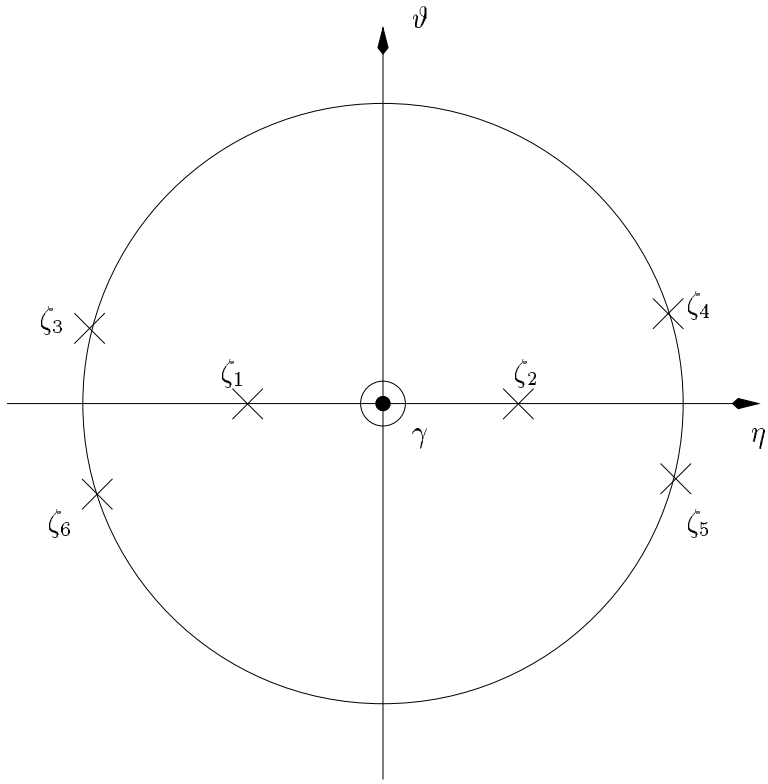
$$|\tau| \geq |\eta|\,\sqrt{c_r^r - u_r^2}\,.$$

Dans la figure 3.1, cette zone correspond aux deux arcs de cercle supérieur $\zeta_3\zeta_4$ et inférieur $\zeta_5\zeta_6$. Cette région est communément appellée la "zone hyperbolique", voir par exemple [14, 23]. Lorsque τ est imaginaire pur et

$$|\tau| < |\eta|\,\sqrt{c_r^r - u_r^2}\,,$$

ω_1^r est de partie réelle strictement positive et ω_3^r de partie réelle strictement négative.

Lemme 3.2 (prolongement du sous-espace stable). *Le sous-espace $\mathscr{E}^-(\tau,\eta)$ se prolonge continûment en un sous-espace vectoriel de dimension $d+1$ aux points $(\tau,\eta) \in i\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$ tels que $(\tau,\eta) \neq (0,0)$.*



$$\zeta_1, \zeta_2 \quad \omega_2^r = \omega_3^r$$
$$\zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6 \quad \omega_1^r = \omega_3^r$$

FIG. 3.1 – *Points exceptionnels pour le système* (3.9).

Pour $\tau = i\vartheta \neq 0$, le sous-espace $\mathscr{E}^-(\tau, \eta)$ se décompose en somme de trois sous-espaces vectoriels:

$$\mathscr{E}^-(\tau, \eta) = \{(Z_r, Z_l) \in E_r^-(\tau, \eta) \times E_l^-(\tau, \eta)\}$$

avec

$$E_r^-(\tau, \eta) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} \rho_r(\tau + u_r\, \omega_3^r) \\ -c_r^2\, i\eta \\ -c_r^2\, \omega_3^r \end{pmatrix} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_2^r Z_2^r \\ i\eta \cdot Z_2^r \end{pmatrix}, Z_2^r \in \mathbb{C}^{d-1} \right\}$$

et

$$E_l^-(\tau, \eta) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} \rho_l(\tau - u_l\, \omega_1^l) \\ -c_l^2\, i\eta \\ c_l^2\, \omega_1^l \end{pmatrix}.$$

Pour $\tau = 0$ et $\eta \neq 0$, $\omega_2^r = 0$ et on a

$$E_r^-(\tau, \eta) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} \rho_r(\tau + u_r\, \omega_3^r) \\ -c_r^2\, i\eta \\ -c_r^2\, \omega_3^r \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^\perp \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $\eta^\perp = 0$ si $d = 1$ ou $d = 2$, et $\eta^\perp = (-\eta_2, \eta_1)$ si $d = 3$ et $\eta = (\eta_1, \eta_2)$.

Le résultat de stabilité faible des interfaces liquide-vapeur s'énonce de la manière suivante:

Proposition 3.1 (Benzoni-Gavage). [11]. *Il existe $V_0 > 0$ tel que pour $(\tau, \eta) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}^{d-1}$ vérifiant* Re $\tau \geq 0$, $(\tau, \eta) \neq (0, 0)$ *et* $\tau \neq \pm iV_0|\eta|$, *on a*

$$\big\{(Z, \chi) \in \mathscr{E}^-(\tau, \eta) \times \mathbb{C} \ \text{ t.q. } \ \chi\, b(\tau, \eta) + M\, Z = 0\big\} = \{0\}\,,$$

et pour $\eta \neq 0$, l'ensemble

$$\big\{(Z, \chi) \in \mathscr{E}^-(\pm iV_0|\eta|, \eta) \times \mathbb{C} \ \text{ t.q. } \ \chi\, b(\pm iV_0|\eta|, \eta, 0) + M\, Z = 0\big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{2d+3}$ de dimension 1. Si (Z, χ) appartient à cette droite vectorielle, alors

$$Z_r \in \mathbb{C}\begin{pmatrix} \rho_r(\tau + u_r\,\omega_3^r) \\ -c_r^2\, i\eta \\ -c_r^2\,\omega_3^r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_l \in \mathbb{C}\begin{pmatrix} \rho_l(\tau - u_l\,\omega_1^l) \\ -c_l^2\, i\eta \\ c_l^2\,\omega_1^l \end{pmatrix}\,,$$

c'est-à-dire Z_r n'a pas de composante sur le sous-espace propre associé à ω_2^r. Aux points $(\pm iV_0|\eta|, \eta)$, ω_3^r et ω_1^l sont de partie réelle strictement négative, ce qui explique la dénomination "ondes de surface".

Par définition, V_0^2 est la racine strictement positive du polynôme

$$P(X) := \frac{c_r^2 c_l^2 - u_r^2 u_l^2}{u_r^2 u_l^2} X^2 + (c_r^2 - u_r^2 + c_l^2 - u_l^2)X - (c_r^2 - u_r^2)(c_l^2 - u_l^2)\,.$$

En particulier, on a

$$V_0^2 < \min(c_r^2 - u_r^2, c_l^2 - u_l^2) \quad \text{et} \quad V_0^2 < u_r u_l\,.$$

• **Remarque :** la proposition 3.1 assure notamment qu'en dimension 1 d'espace, **U** vérifie la condition de stabilité uniforme. Dans un tel contexte, Freistühler [38] a montré comment construire les solutions régulières par morceaux du système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0\,, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_x p = 0\,, \end{cases} \tag{3.17}$$

pour des données initiales (ρ_0, u_0) du type

$$(\rho_0, u_0) = \begin{cases} (\rho_0^+(x), u_0^+(x)) & x > 0\,, \\ (\rho_0^-(x), u_0^-(x)) & x < 0\,, \end{cases}$$

avec $(\rho_0^\pm, u_0^\pm)$ régulières jusqu'en $x = 0$ et vérifiant

$$\lim_{x\to 0^+} (\rho_0^+(x), u_0^+(x)) = (\rho_r, u_r)\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} (\rho_0^-(x), u_0^-(x)) = (\rho_l, u_l)\,.$$

Sur un certain intervalle de temps $[0, T]$, la solution est régulière de part et d'autre d'une courbe $x = X(t)$, et vérifie les conditions de Rankine-Hugoniot, ainsi que la relation de saut supplémentaire, en chaque point de cette courbe.

Freistühler [38] étudie également le cas où la donnée initiale est toujours du type

$$(\rho_0, u_0) = \begin{cases} (\rho_0^+(x), u_0^+(x)) & x > 0\,, \\ (\rho_0^-(x), u_0^-(x)) & x < 0\,, \end{cases}$$

avec, cette fois,

$$\lim_{x\to 0^+} (\rho_0^+(x), u_0^+(x)) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} (\rho_0^-(x), u_0^-(x))$$

proches de (ρ_r, u_r) et (ρ_l, u_l). Pour un tel "problème de Riemann", la solution présente généralement une transition de phase et un choc de Lax (ou une onde de raréfaction). Pour résoudre ce dernier problème de Cauchy, il faut que les champs caractéristiques de (3.17) soient vraiment non linéaires ou linéairement dégénérés au sens de Lax [62]. Cette hypothèse est vérifiée si et seulement si $p''(\rho_r) \neq 0$ et $p''(\rho_l) \neq 0$. Cette hypothèse de vraie non linéarité est satisfaite par toutes les transitions de phase subsonique sauf une. Il existe en effet un unique point $v^i > v^m$ tel que $p''(v^i) = 0$, v^m étant le point de Maxwell dans la phase gazeuse.

Dans le cas multidimensionnel, Freistühler [39] donne également un résultat d'existence (locale) de chocs sous-compressifs sous une hypothèse de stabilité uniforme. La proposition 3.1 montre que cette hypothèse n'est pas satisfaite par les transitions de phase réversibles (c'est-à-dire lorsque la relation de saut supplémentaire est donnée par le critère capillaire).

La construction d'un symétriseur symbolique pour le problème (3.14) nécessite au préalable de reformuler les conditions au bord en "éliminant" le front afin de se ramener à un problème mixte classique sur U (avec une condition au bord symbolique) pour lequel on appliquera la méthode de Kreiss. "Éliminer le front" consiste à effectuer de façon régulière des opérations sur les conditions au bord de (3.14) de sorte que le front Ψ n'intervienne plus que dans la dernière condition au bord.

3.3 Élimination du front

On se donne une vitesse et une fréquence de référence strictement positives, notées respectivement $\widetilde{V}$ et $\widetilde{\gamma}$, et on note Σ_+ l'ensemble

$$\Sigma_+ = \{(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1} \quad \text{t.q.} \quad \operatorname{Re} \tau \geq 0 \ \text{ et } \ |\tau|^2 + \widetilde{V}^2 |\eta|^2 = \widetilde{\gamma}^2\}\,.$$

En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on identifiera Σ_+ à la demi-sphère unité de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Le symbole $b(\tau, \eta)$ défini par (3.15) se simplifie, en utilisant les conditions de Rankine-Hugoniot (3.3), en

$$b(\tau, \eta) = \begin{pmatrix} -\tau[\rho] \\ ij[u]\eta \\ 0 \\ -\tau[u] \end{pmatrix}\,. \tag{3.18}$$

On observe que $b(\tau,\eta) \neq 0$ pour $(\tau,\eta) \neq (0,0)$, car on a $[\rho] \neq 0$ et $[u] \neq 0$. De plus, $b(\tau,\eta)$ est homogène de degré 1 en (τ,η). Le problème consiste à construire une base de $\mathbb{C}^{d+2}$ contenant $b(\tau,\eta)$, et dépendant régulièrement de (τ,η). Comme la projection sur $b(\tau,\eta)^\perp$ est analytique en (τ,η), il est toujours possible de trouver une base de $b(\tau,\eta)^\perp$ dépendant analytiquement de (τ,η), d'après Kato [57]. En pratique, il est plus commode, voir nécessaire, de construire ce changement de base "à la main", comme cela est détaillé dans la proposition suivante.

Lemme 3.3. *Il existe une application Q, de classe $\mathscr{C}^\infty$, définie sur le demi-espace $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ privé de l'origine, homogène de degré 0 et à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille $d+2$ telle que, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, les $d+1$ premières composantes du vecteur $Q(\zeta)\, b(\zeta)$ sont nulles.*

Preuve

Comme $b(\tau,\eta)$ est homogène par rapport à (τ,η), il suffit de construire Q sur Σ_+ et d'étendre Q par homogénéité de degré 0.

Pour $d=2$, on pose

$$\forall\,(\tau,\eta) \in \Sigma_+, \quad Q(\tau,\eta) := \begin{pmatrix} [u] & 0 & 0 & -[\rho] \\ 0 & \tau & 0 & ij\eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i\widetilde{V}^2\eta & 0 & j\overline{\tau} \end{pmatrix},$$

et pour $d=3$, on pose

$$\forall\,(\tau,\eta) \in \Sigma_+, \quad Q(\tau,\eta) := \begin{pmatrix} [u] & 0 & 0 & 0 & -[\rho] \\ 0 & \tau & 0 & -i\widetilde{V}\eta_2 & ij\eta_1 \\ 0 & 0 & \tau & i\widetilde{V}\eta_1 & ij\eta_2 \\ 0 & -i\widetilde{V}\eta_2 & i\widetilde{V}\eta_1 & \overline{\tau} & 0 \\ 0 & i\widetilde{V}^2\eta_1 & i\widetilde{V}^2\eta_2 & 0 & j\overline{\tau} \end{pmatrix}.$$

En utilisant (3.18), on vérifie que les $(d+1)$ premières composantes de $Q(\tau,\eta)b(\tau,\eta)$ sont toujours nulles. Vérifions maintenant que $Q(\tau,\eta)$ est inversible. Par homogénéité, il suffit de le vérifier pour $(\tau,\eta) \in \Sigma_+$. Pour $d=2$, on a

$$\det Q(\tau,\eta) = j[u]\left(|\tau|^2 + \widetilde{V}^2\eta^2\right) = j[u]\widetilde{\gamma}^2 \neq 0\,,$$

et pour $d=3$, on a

$$\det Q(\tau,\eta) = j[u]\left(|\tau|^2 + \widetilde{V}^2|\eta|^2\right)^2 = j[u]\widetilde{\gamma}^4 \neq 0\,,$$

ce qui assure que la matrice $Q(\tau,\eta)$ est inversible en tout point (τ,η) du demi-espace $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ privé de l'origine.

□

Désignons par α la dernière composante de $Q\,b$. En utilisant les propriétés d'homogénéité de Q et de b, on obtient

$$\forall\,(\tau,\eta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \quad \alpha(\tau,\eta) = -j[u]\widetilde{\gamma}\sqrt{|\tau|^2 + \widetilde{V}^2|\eta|^2} \neq 0\,, \tag{3.19}$$

cette relation étant valable pour $d = 2$ et $d = 3$.

Le résultat du lemme 3.3 permet de reformuler les conditions au bord en isolant le front dans la dernière équation. En effet, pour (τ, η) dans le demi-espace $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ privé de l'origine, on écrit la matrice $Q(\tau, \eta)\, M$ à $(d+2)$ lignes et $2(d+1)$ colonnes sous la forme

$$Q(\tau, \eta)\, M := \begin{pmatrix} B(\tau, \eta) \\ \ell(\tau, \eta) \end{pmatrix} , \tag{3.20}$$

où $\ell(\tau, \eta)$ est une matrice ligne. Avec (3.20), les conditions sur le bord $\{x_d = 0\}$ pour le problème (3.14) s'écrivent de manière équivalente

$$\begin{pmatrix} B(\tau, \eta) \\ \ell(\tau, \eta) \end{pmatrix} V(0) + \Psi \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha(\tau, \eta) \end{pmatrix} = Q(\tau, \eta)\, \widehat{G} .$$

L'application ℓ définie par (3.20) est homogène de degré 0 et continue donc, en utilisant (3.19), il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(\gamma^2 + \vartheta^2 + \widetilde{V}^2 |\eta|^2)\, |\Psi|^2 \leq C\, \left(|V(0)|^2 + |G|^2 \right) . \tag{3.21}$$

Une telle estimation découlerait de la condition de stabilité uniforme si elle était satisfaite (voir le chapitre 5). Ici, elle signifie que le symbole b associé au front est elliptique. Il est intéressant de noter que cette estimation n'est **pas** satisfaite pour les chocs de Lax des équations **scalaires**, voir à ce sujet [65] et [93].

On s'est ainsi ramené à prouver une estimation d'énergie pour le problème aux limites

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dx_d} = \mathscr{A}(\tau, \eta)\, V + \mathscr{A}_d^{-1}\, \widehat{F} & x_d > 0 , \\ \\ B(\tau, \eta)\, V(0) = \widehat{G} & x_d = 0 , \end{cases} \tag{3.22}$$

et nous allons obtenir cette estimation en utilisant un symétriseur de Kreiss. Grâce à (3.21) et au théorème de Plancherel, on en déduira une estimation a priori pour le problème (3.8).

• **Remarque :** la proposition 3.1 assure que la restriction B^- de $B(\tau, \eta)$ au sous-espace stable $\mathscr{E}^-(\tau, \eta)$ est bijective pour $\tau \neq \pm i V_0 |\eta|$. Aux points $(\pm i V_0 |\eta|, \eta)$, la restriction de B au sous-espace stable a un noyau de dimension 1. On va tout d'abord chercher une estimation sur le comportement de l'inverse de B^- au voisinage de ces points. Cela permettra d'adapter la construction de Kreiss.

On se fixe un vecteur η^* (non nul) dans $\mathbb{R}^{d-1}$ tel que $(i V_0 |\eta^*|, \eta^*) \in \Sigma_+$. Soit alors $Z = (Z_r, Z_l) \in \mathscr{E}^-(\tau, \eta)$, avec $(\tau, \eta) \in \Sigma_+$ proche de $(i V_0 |\eta^*|, \eta^*)$. Les lemmes 3.1 et 3.2 permettent de décomposer Z_r et Z_l en

$$Z_r = Z_3^r \begin{pmatrix} \rho_r(\tau + u_r\, \omega_3^r) \\ -c_r^2\, i\eta \\ -c_r^2\, \omega_3^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_2^r Z_2^r \\ i\eta \cdot Z_2^r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_l = Z_1^l \begin{pmatrix} \rho_l(\tau - u_l\, \omega_1^l) \\ -c_l^2\, i\eta \\ c_l^2\, \omega_1^l \end{pmatrix} .$$

Avec ces notations, on a le résultat suivant:

Proposition 3.2. *Il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de $(iV_0|\eta^*|, \eta^*)$ dans Σ_+ et une constante $c > 0$ telle que pour tout $\zeta \in \mathscr{V}$ et pour tout $Z \in \mathscr{E}^-(\zeta)$, on a*

$$|B(\zeta)\, Z|^2 \geq c\,\gamma^2 \left(|Z_3^r|^2 + |Z_1^l|^2 \right) + c\,|Z_2^r|^2 \,. \tag{3.23}$$

Une estimation analogue a lieu dans un voisinage convenable de $(-iV_0|\eta^*|, \eta^*)$ dans Σ_+.

Preuve

En suivant [11], on introduit les quantités

$$a_3^r := \tau u_r - (c_r^2 - u_r^2)\omega_3^r \quad \text{et} \quad a_1^l := \tau u_l + (c_l^2 - u_l^2)\omega_1^l \,.$$

Soit $(\tau, \eta) \in \Sigma_+$ proche de $(iV_0|\eta^*|, \eta^*)$. En décomposant $Z \in \mathscr{E}^-(\tau, \eta)$ comme indiqué précédemment, on obtient

$$M\,Z = \begin{pmatrix} \rho_r a_3^r & -\rho_l a_1^l & i\rho_r \eta^t \\ -ijc_r^2\eta & ijc_l^2\eta & j\tau/u_r\, I_{d-1} \\ \rho_r(c_r^2\tau + u_r a_3^r) & -\rho_l(c_l^2\tau + u_l a_1^l) & 2ij\eta^t \\ c_r^2\tau & -c_l^2\tau & iu_r\eta^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_3^r \\ Z_1^l \\ Z_2^r \end{pmatrix} .$$

On en déduit l'expression de $B(\tau, \eta)\, Z$ en multipliant cette égalité par la matrice $Q(\tau, \eta)$ (donnée au lemme 3.3). Si $d = 2$, on obtient

$$B(\tau, \eta)\, Z = \begin{pmatrix} \rho_r[u]a_3^r - c_r^2[\rho]\tau & c_l^2[\rho]\tau - \rho_l[u]a_1^l & 2i\langle\rho\rangle[u]\eta \\ 0 & 0 & j(\tau^2/u_r - u_r\eta^2) \\ \rho_r(c_r^2\tau + u_r a_3^r) & -\rho_l(c_l^2\tau + u_l a_1^l) & 2ij\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_3^r \\ Z_1^l \\ Z_2^r \end{pmatrix} .$$

On écrit $B(\tau, \eta)\, Z$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & \xi_4 \\ \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_3^r \\ Z_1^l \\ Z_2^r \end{pmatrix} .$$

Avec ces notations, on a $\xi_4 = \tau^2/u_r - u_r\eta^2$ et $\xi_6 = c_l^2\tau + u_l a_1^l$. Au point $(iV_0|\eta^*|, \eta^*)$, on obtient

$$\xi_4 = -\frac{V_0^2}{u_r}(\eta^*)^2 - u_r(\eta^*)^2 \neq 0 \,,$$

donc ξ_4 ne s'annule pas au voisinage de $(iV_0|\eta^*|, \eta^*)$. D'après [11], la quantité a_1^l est de partie réelle non nulle pour $\tau = iV_0|\eta^*|$ et $\eta = \eta^*$. On en déduit que la quantité $\xi_6 = c_l^2\tau + u_l a_1^l$ ne s'annule pas non plus au voisinage de $(iV_0|\eta^*|, \eta^*)$. On écrit alors

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & \xi_6 & \xi_7 \\ 0 & 0 & \xi_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & \xi_4 \\ \xi_5 & \xi_6 & \xi_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_6 - \xi_2\xi_5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_6 & 0 & 0 \\ -\xi_5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} .$$

et il nous suffit de montrer une estimation du type

$$|\xi_1\xi_6 - \xi_2\xi_5| \geq c\,\gamma \tag{3.24}$$

pour $(\tau,\eta) \in \Sigma_+$ voisin de $(iV_0|\eta^*|,\eta^*)$. Cela donnera effectivement (3.23) dans le cas $d=2$. Introduisons les variables réduites

$$V := \frac{\tau}{i|\eta|}\,, \quad A_3^r := \frac{a_3^r}{i|\eta|} \quad \text{et} \quad A_1^l := \frac{a_1^l}{i|\eta|}\,,$$

ainsi que la racine carrée complexe

$$\begin{aligned} \mathscr{R} \ : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+ &\longrightarrow \{z\in\mathbb{C} \ \text{t.q. Im } z>0\} \\ z &\longmapsto \mathscr{R}(z) \quad \text{avec} \quad \mathscr{R}(z)^2 = z\,. \end{aligned}$$

Les quantités

$$\mathscr{W}_r(V) := \mathscr{R}(V^2-(c_r^2-u_r^2)) \quad \text{et} \quad \mathscr{W}_l(V) := \mathscr{R}(V^2-(c_l^2-u_l^2))$$

sont bien définies au voisinage de V_0 d'après la proposition 3.1 et dépendent holomorphiquement de V. De plus, voir [11], on a les relations

$$A_3^r = -c_r\mathscr{W}_r(V)\ ,\ A_1^l = c_l\mathscr{W}_l(V) \quad \text{et} \quad c_rc_lV_0^2 + u_ru_l\mathscr{W}_l(V_0)\mathscr{W}_r(V_0) = 0\,.$$

Avec ces définitions, on obtient

$$\xi_1\xi_6 - \xi_2\xi_5 = c_rc_l\eta^2[\rho]^2\left(c_rc_lV^2 + u_ru_l\mathscr{W}_r(V)\mathscr{W}_l(V)\right)\,.$$

On montre ensuite, voir [12], que V_0 est une racine simple de la fonction holomorphe

$$V \longmapsto c_rc_lV^2 + u_ru_l\mathscr{W}_r(V)\mathscr{W}_l(V)\,.$$

Par un argument classique de fonctions holomorphes [85], on a une factorisation du type

$$c_rc_lV^2 + u_ru_l\mathscr{W}_r(V)\mathscr{W}_l(V) = (V-V_0)\,g(V)$$

avec g holomorphe au voisinage de V_0 et $g(V_0)\neq 0$. Pour (τ,η) voisin de $(iV_0|\eta^*|,\eta^*)$, on en déduit l'estimation

$$|\xi_1\xi_6 - \xi_2\xi_5| \geq c\,|V-V_0| \geq c\,\gamma\,.$$

Cela conclut la preuve de la proposition dans le cas $d=2$. On passe au cas $d=3$.

Pour $Z\in\mathscr{E}^-(\tau,\eta)$ et $(\tau,\eta)\in\Sigma_+$, le vecteur $B(\tau,\eta)\,Z$ est donné par

$$B(\tau,\eta)\,Z = \begin{pmatrix} \rho_r[u]a_3^r - c_r^2[\rho]\tau & c_l^2[\rho]\tau - \rho_l[u]a_1^l & 2i\langle\rho\rangle[u]\eta_1 & 2i\langle\rho\rangle[u]\eta_2 \\ -i\rho_r\widetilde{V}\eta_2(c_r^2\tau + u_ra_3^r) & i\rho_l\widetilde{V}\eta_2(c_l^2\tau + u_la_1^l) & j(\tau^2/u_r - u_r\eta_1^2 + 2\widetilde{V}\eta_1\eta_2) & j(-u_r\eta_1\eta_2 + 2\widetilde{V}\eta_2^2) \\ i\rho_r\eta_1(c_r^2\tau + u_ra_3^r) & -i\rho_l\widetilde{V}\eta_1(c_l^2\tau + u_la_1^l) & j(-u_r\eta_1\eta_2 - 2\widetilde{V}\eta_1^2) & j(\tau^2/u_r - u_r\eta_2^2 - 2\widetilde{V}\eta_1\eta_2) \\ \rho_r\overline{\tau}(c_r^2\tau + u_ra_3^r) & -\rho_l\overline{\tau}(c_l^2\tau + u_la_1^l) & ij(2\overline{\tau}\eta_1 - \tau\eta_2\widetilde{V}/u_r) & ij(2\overline{\tau}\eta_2 + \tau\eta_1\widetilde{V}/u_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_3^r \\ Z_1^l \\ Z_2^r \end{pmatrix}\,.$$

Rappelons que $Z_3^r, Z_1^l \in \mathbb{C}$ et $Z_2^r \in \mathbb{C}^2$. À partir de l'égalité précédente et après quelques calculs, on aboutit à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\widetilde{V}\eta_1 & \overline{\tau} & 0 \\ 0 & -i\widetilde{V}\eta_2 & 0 & \overline{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B(\tau,\eta)\, Z = \begin{pmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 \\ \mathbf{0} & \Xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_3^r \\ Z_1^l \\ Z_2^r \end{pmatrix} .$$

où les matrices Ξ_1 et Ξ_3 sont données par

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} \rho_r[u]a_3^r - c_r^2[\rho]\tau & c_l^2[\rho]\tau - \rho_l[u]a_1^l \\ \rho_r\overline{\tau}(c_r^2\tau + u_r a_3^r) & -\rho_l\overline{\tau}(c_l^2\tau + u_l a_1^l) \end{pmatrix}$$

et

$$\Xi_3 := \begin{pmatrix} j\overline{\tau}(\tau^2/u_r - u_r\eta_1^2) + j\tau\eta_2^2\widetilde{V}^2/u_r & -j\overline{\tau}u_r\eta_1\eta_2 - j\tau\eta_1\eta_2\widetilde{V}^2/u_r \\ -j\overline{\tau}u_r\eta_1\eta_2 - j\tau\eta_1\eta_2\widetilde{V}^2/u_r & j\overline{\tau}(\tau^2/u_r - u_r\eta_2^2) + j\tau\eta_1^2\widetilde{V}^2/u_r \end{pmatrix} .$$

Nous n'aurons pas besoin de l'expression de Ξ_2. Dans l'étude du cas $d = 2$, nous avons vu que la matrice Ξ_1 est inversible sauf en $(\tau,\eta) = (iV_0|\eta^*|, \eta^*)$ où elle a un noyau de dimension 1. On a également montré une estimation du type

$$|\det \Xi_1| \geq c\,\gamma ,$$

pour $(\tau,\eta) \in \Sigma_+$ proche de $(iV_0|\eta^*|, \eta^*)$. Le déterminant de Ξ_3 est donné par

$$\det \Xi_3 = j^2\,|\tau|^2\,\widetilde{\gamma}^2 \left(\frac{\tau^2}{u_r^2} - |\eta|^2\right) ,$$

et cette relation assure que Ξ_3 est inversible pour tout $(\tau,\eta) \in \Sigma_+$ proche de $(iV_0|\eta^*|, \eta^*)$. Des opérations élémentaires sur les matrices montrent alors qu'il existe une matrice inversible P de taille 4 et une matrice inversible p de taille 2 (dépendant de façon régulière de τ et η) telles que

$$P(\tau,\eta)\, B(\tau,\eta)\, Z = \begin{pmatrix} \det \Xi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\tau,\eta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_3^r \\ Z_1^l \\ Z_2^r \end{pmatrix}$$

ce qui conclut la preuve dans le cas $d = 3$.

□

• **Remarque :** la violation de la condition de stabilité uniforme se traduit par la présence du "poids" γ dans l'estimation (3.23). Sous l'hypothèse de stabilité uniforme de Majda (voir [65, 73, 77]), l'analogue de (3.23) serait

$$|B(\tau,\eta)\, Z| \geq c\,|Z| .$$

Dans le cas des transitions de phase, le résultat de la proposition 3.2 semble optimal au sens où l'homogénéité des expressions exclut a priori une estimation faisant intervenir une puissance moindre de γ. Par ailleurs, il semble indispensable pour vérifier le résultat de la

proposition 3.2 de disposer d'une formule explicite pour $Q(\tau,\eta)$. Cela motive, a posteriori, la construction du changement de base "à la main".

Remarquons également qu'on a montré une estimation plus fine que (3.23). En reprenant la preuve, on aboutit à une estimation du type

$$|B(\tau,\eta)\,Z|^2 \geq c\,\gamma^2|\Upsilon_3 Z_3^r + \Upsilon_1 Z_1^l|^2 + c\,|Z_3^r|^2 + c\,|Z_2^r|^2\,,$$

avec Υ_3 et Υ_1 dépendant de façon $\mathscr{C}^\infty$ de (τ,η). Par rapport au cas uniformément stable, on ne perd de l'information (en $\gamma=0$) que sur une combinaison linéaire des coordonnées Z_3^r et Z_1^l.

3.4 Estimations a priori pour le problème (3.8)

Dans un souci de simplification, et ceci ne change en rien l'analyse qui va suivre, **on supposera normalisées la vitesse et la fréquence de référence**, c'est-à-dire

$$\widetilde{V}=1 \quad \text{et} \quad \widetilde{\gamma}=1\,,$$

ce qui revient à adimensionner les équations. L'ensemble Σ_+ est identifiée à la demi-sphère unité de $\mathbb{R}^{d+1}$, où les coordonnées sont désormais sans dimension.

Les notations suivantes seront utilisées de façon systématique par la suite (nous y reviendrons au chapitre 4). Pour $s\in\mathbb{R}$ et $\gamma>0$, on définit le symbole $\lambda^{s,\gamma}$ par

$$\forall\,\xi\in\mathbb{R}^d\,,\quad \lambda^{s,\gamma}(\xi):=(\gamma^2+|\xi|^2)^{s/2}\,.$$

L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ est alors muni de la norme à poids

$$\|u\|_{s,\gamma}^2:=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^{2s,\gamma}(\xi)\,|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi\,,$$

et l'espace $L^2(\mathbb{R}^+,H^s(\mathbb{R}^d))$ est muni de la norme à poids

$$|\!|\!|u|\!|\!|_{s,\gamma}^2:=\int_0^{+\infty}\|u(.,x_d)\|_{s,\gamma}^2\,dx_d\,.$$

On désignera par Ω le demi-espace

$$\Omega=\mathbb{R}_+^{d+1}:=\Big\{(t,x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^{d+1}\ \text{t.q.}\ x_d>0\Big\}\,.$$

Définissons les opérateurs

$$\begin{cases}\mathscr{L}v:=\partial_t v+\displaystyle\sum_{j=1}^d\mathscr{A}_j\,\partial_{x_j}v\,,\\[2ex] \mathscr{B}(v,\psi):=\partial_t\psi\,b_0+\displaystyle\sum_{j=1}^{d-1}\partial_{x_j}\psi\,b_j+M\,v_{|x_d=0}\,,\end{cases}$$

ainsi que les opérateurs "à poids"

$$\begin{cases}\mathscr{L}^\gamma v:=\mathscr{L}v+\gamma v\,,\\ \mathscr{B}^\gamma(v,\psi):=\mathscr{B}(v,\psi)+\gamma\psi\,b_0\,.\end{cases}\tag{3.25}$$

On vérifie que (v, ψ) est solution de

$$\begin{cases} \mathscr{L} v = f\,, & x_d > 0\,, \\ \mathscr{B}(v, \psi) = g\,, & x_d = 0\,, \end{cases}$$

si et seulement si $\widetilde{v} := \exp(-\gamma t) v$ et $\widetilde{\psi} := \exp(-\gamma t)\psi$ sont solutions de

$$\begin{cases} \mathscr{L}^\gamma \widetilde{v} = \exp(-\gamma t) f\,, & x_d > 0\,, \\ \mathscr{B}^\gamma(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) = \exp(-\gamma t) g\,, & x_d = 0\,. \end{cases} \tag{3.26}$$

On travaille alors sur ce système "à poids", et on omet d'écrire les tildas pour simplifier. On a une estimation avec pertes de dérivées pour les solutions de (3.26).

Théorème 3.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H^2(\Omega)$, pour tout $\psi \in H^{3/2}(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\gamma \geq 1$, on a*

$$\gamma^2 \left(\|v\|^2_{0,\gamma} + \|v_{|x_d=0}\|^2_{-1/2,\gamma} + \|\psi\|^2_{1/2,\gamma} \right) \leq C \left(\frac{1}{\gamma^2} \|\mathscr{L}^\gamma v\|^2_{1,\gamma} + \|\mathscr{B}^\gamma(v, \psi)\|^2_{1/2,\gamma} \right) .$$

La preuve repose sur l'existence d'un symétriseur de Kreiss généralisé. Pour toute matrice carrée M, on note

$$\mathrm{Re}\, M := (M + M^*)/2\,.$$

On définirait de la même manière la partie réelle d'un opérateur continu sur un espace de Hilbert. On a alors le résultat suivant:

Théorème 3.2. *Il existe une application $R(\tau, \eta)$ définie sur le demi-espace $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ privé de l'origine, homogène de degré 0, de classe $\mathscr{C}^\infty$, à valeurs dans l'ensemble des matrices hermitiennes de taille $2(d+1)$, et des constantes C et $c > 0$ telles que*

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, (R(\tau, \eta)\mathscr{A}(\tau, \eta)) &\geq c\, \gamma^2\, \lambda^{-1,\gamma}(\vartheta, \eta)\, I\,, \\ R(\tau, \eta) + C B(\tau, \eta)^* B(\tau, \eta) &\geq c\, \gamma^2\, \lambda^{-2,\gamma}(\vartheta, \eta)\, I\,, \end{aligned} \tag{3.27}$$

pour tout (τ, η).

La preuve du théorème 3.2 sera détaillée à la partie 3.5. Nous montrons comment l'existence d'un symétriseur R vérifiant (3.27) implique le résultat du théorème 3.1.

Preuve du théorème 3.1

On se donne $v \in H^2(\Omega)$, $\psi \in H^{3/2}(\mathbb{R}^d)$, et on désigne par $\widehat{v}(\xi, x_d)$ la transformée de Fourier de $v(t, y, x_d)$ par rapport aux d premières variables (t, y). Avec les notations des parties 3.2 et 3.3, on a $\xi = (\vartheta, \eta)$. On pose

$$F := \mathscr{L}^\gamma v \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad G := \mathscr{B}^\gamma(v, \psi) \in H^{1/2}(\omega)\,.$$

La relation (3.21) montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $\gamma \geq 1$, on a

$$\lambda^{1,\gamma}(\xi)\, |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \leq C\, \lambda^{-1,\gamma}(\xi) \left(|\widehat{v}(\xi, 0)|^2 + |\widehat{G}(\xi)|^2 \right) ,$$

ce qui implique

$$\|\psi\|^2_{1/2,\gamma} \leq C\left(\|v_{|x_d=0}\|^2_{-1/2,\gamma} + \|G\|^2_{-1/2,\gamma}\right) \leq C\left(\|v_{|x_d=0}\|^2_{-1/2,\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\|G\|^2_{1/2,\gamma}\right). \quad (3.28)$$

D'après la relation (3.15) définissant la matrice $\mathscr{A}(\tau,\eta)$, on sait que $\widehat{v}$ vérifie

$$\frac{d\widehat{v}}{dx_d} = \mathscr{A}(\tau,\eta)\,\widehat{v} + \mathscr{A}_d^{-1}\,\widehat{F}\,,$$

avec toujours $\xi = (\vartheta,\eta)$ et $\tau = \gamma + i\vartheta$. On prend le produit scalaire de cette égalité avec $\lambda^{1,\gamma}(\xi)\,R\,\widehat{v}$ et on intègre par rapport à (ξ, x_d), γ demeurant fixe. On obtient

$$-2\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^{1,\gamma}(\xi)\,\langle R\widehat{v}, \mathscr{A}_d^{-1}\,\widehat{F}\rangle\,d\xi dx_d =$$
$$\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^{1,\gamma}(\xi)\,\langle\widehat{v}(0), R\,\widehat{v}(0)\rangle\,d\xi + 2\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^{1,\gamma}(\xi)\,\langle\widehat{v}, R\mathscr{A}\,\widehat{v}\rangle\,d\xi dx_d\,.$$

On prend la partie réelle de cette égalité et on utilise les propriétés (3.27) du symétriseur R. On trouve

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^{1,\gamma}\,\langle\widehat{v}(0), R\,\widehat{v}(0)\rangle\,d\xi &\geq c\,\gamma^2\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^{-1,\gamma}\,|\widehat{v}(0)|^2\,d\xi - C\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^{1,\gamma}\,|B\,\widehat{v}(0)|^2\,d\xi\\ &\geq c\,\gamma^2\,\|v_{|x_d=0}\|^2_{-1/2,\gamma} - C\,\|G\|^2_{1/2,\gamma}\,,\end{aligned}$$

et

$$2\ \mathrm{Re}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^{1,\gamma}(\xi)\,\langle\widehat{v}, R\mathscr{A}\,\widehat{v}\rangle\,d\xi dx_d \geq 2\,c\,\gamma^2\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{v}|^2\,d\xi dx_d = 2\,c\,\gamma^2\,|\!|\!|v|\!|\!|^2_{0,\gamma}\,.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}-2\ \mathrm{Re}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^{1,\gamma}(\xi)\,\langle R\widehat{v}, \mathscr{A}_d^{-1}\,\widehat{F}\rangle\,d\xi dx_d&\\ \geq 2c\,\gamma^2\,|\!|\!|v|\!|\!|^2_{0,\gamma} + c\,\gamma^2\|v_{|x_d=0}\|^2_{-1/2,\gamma} - C\|G\|^2_{1/2,\gamma}\,.&\end{aligned}$$

D'autre part, l'inégalité de Young et une borne uniforme sur $\|R(\tau,\eta)\|$ donnent

$$-2\ \mathrm{Re}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\lambda^{1,\gamma}(\xi)\,\langle R\widehat{v}, \mathscr{A}_d^{-1}\,\widehat{F}\rangle\,d\xi dx_d \leq c\,\gamma^2\,|\!|\!|v|\!|\!|^2_{0,\gamma} + \frac{C}{\gamma^2}\,|\!|\!|F|\!|\!|^2_{1,\gamma}\,,$$

et on arrive à l'estimation

$$\gamma^2\left(|\!|\!|v|\!|\!|^2_{0,\gamma} + \|v_{|x_d=0}\|^2_{-1/2,\gamma}\right) \leq C\left(\frac{1}{\gamma^2}\,|\!|\!|F|\!|\!|^2_{1,\gamma} + \|G\|^2_{1/2,\gamma}\right).$$

L'estimation (3.28) permet de conclure.

□

3.5 Preuve du théorème 3.2

3.5.1 Réduction du symbole

La première étape dans la construction du symétriseur de Kreiss consiste à obtenir une réduction par blocs du symbole $\mathscr{A}(\tau,\eta)$. Cette opération a été menée à bien par Kreiss [61] pour des systèmes strictement hyperboliques avec un bord non caractéristique. L'extension au cas des systèmes symétriques et d'un bord uniformément caractéristique a été réalisée par Majda et Osher [67]. Dans les deux cas, la construction du symétriseur repose sur une structure de blocs dont Majda a donné l'énoncé général [65]. Cette structure est une propriété satisfaite dès que le système est à multiplicité constante (voir [72]), ce qui est le cas dans cette étude.

Bien que la structure de blocs ait été vérifiée pour le symbole $\mathscr{A}$ par Majda dans [65], on rappelle les différentes étapes de la réduction du symbole en vue d'un énoncé précis des modifications apportées dans la construction du symétriseur par rapport au cas classique (i.e. sous une hypothèse de stabilité uniforme).

Pour $(\tau,\eta)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}^{d-1}$ tel que $\mathrm{Re}\,\tau>0$, les polynômes

$$\begin{aligned} P^-(\tau,\eta,\omega) &:= (\omega-\omega_3^r)(\omega-\omega_1^l)(\omega-\omega_2^r)^{d-1}\,,\\ P^+(\tau,\eta,\omega) &:= (\omega-\omega_3^l)(\omega-\omega_1^r)(\omega-\omega_2^l)^{d-1}\,,\end{aligned}$$

vérifient

$$\begin{cases} \mathscr{E}^-(\tau,\eta) = \mathrm{Im}\ P^+(\tau,\eta,\mathscr{A}(\tau,\eta))\,,\\ \mathscr{E}^+(\tau,\eta) = \mathrm{Im}\ P^-(\tau,\eta,\mathscr{A}(\tau,\eta))\,.\end{cases}$$

C'est essentiellement du au théorème de Cayley-Hamilton. Le prolongement par continuité des modes $\omega_k^{r,l}$ aux points $(\tau,\eta)\in i\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$ permet de prolonger continûment les coefficients des polynômes P^- et P^+, et par conséquent de prolonger continûment les applications

$$(\tau,\eta)\longmapsto P^{\pm}(\tau,\eta,\mathscr{A}(\tau,\eta))$$

en des applications continues définies pour tout $(\tau,\eta)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}^{d-1}$ vérifiant $(\tau,\eta)\neq(0,0)$ et $\mathrm{Re}\,\tau\geq 0$. Définissons l'ensemble Σ_0 comme la frontière de Σ_+, c'est-à-dire

$$\Sigma_0 := \{(\tau,\eta)\in\Sigma_+ \text{ t.q. } \mathrm{Re}\,\tau=0\}\,.$$

La réduction microlocale du symbole $\mathscr{A}$ (proposition 3.3 ci-dessous) montre que, pour $(\tau,\eta)\in\Sigma_0$, le rang de $P^+(\tau,\eta,\mathscr{A}(\tau,\eta))$ est encore égal à $d+1$. Grâce au résultat du lemme 3.2, on a donc

$$\forall\,(\tau,\eta)\in\Sigma_+\,,\quad \mathscr{E}^-(\tau,\eta) = \mathrm{Im}\ P^+(\tau,\eta,\mathscr{A}(\tau,\eta))\,. \tag{3.29}$$

En suivant la méthode de Kreiss [23, 61], on montre le résultat suivant.

Proposition 3.3. *Soit $\zeta_0\in\Sigma_+\setminus\Sigma_0$. Il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de ζ_0 dans Σ_+ et une application T définie sur $\mathscr{V}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille $2(d+1)$, tels que*

$$\forall\,\zeta\in\mathscr{V}\,,\quad T(\zeta)^{-1}\mathscr{A}(\zeta)\,T(\zeta)=\begin{pmatrix} a^-(\zeta) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & a^+(\zeta)\end{pmatrix}\,,$$

où le spectre de $a^-(\zeta)$ (respectivement $a^+(\zeta)$) est de partie réelle strictement négative (respectivement strictement positive).

Soit $\zeta_0 = (i\vartheta_0, \eta_0) \in \Sigma_0$ tel que $\vartheta_0 \neq \pm|\eta_0|\sqrt{c_{r,l}^2 - u_{r,l}^2}$. Il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de ζ_0 dans Σ_+ et une application T définie sur $\mathscr{V}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille $2(d+1)$, tels que

$$\forall\, \zeta \in \mathscr{V}\,, \quad T(\zeta)^{-1}\mathscr{A}(\zeta)\,T(\zeta) = \begin{pmatrix} \omega_3^r & & & & & \\ & \omega_2^r I_{d-1} & & & \mathbf{0} & \\ & & \omega_1^l & & & \\ & & & \omega_3^l & & \\ & \mathbf{0} & & & \omega_2^l I_{d-1} & \\ & & & & & \omega_1^r \end{pmatrix}.$$

Soit $\zeta_0 = (i\vartheta_0, \eta_0) \in \Sigma_0$ tel que $\vartheta_0 = \pm|\eta_0|\sqrt{c_r^2 - u_r^2}$. Il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de ζ_0 dans Σ_+ et une application T définie sur $\mathscr{V}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille $2(d+1)$, tels que

$$\forall\, \zeta \in \mathscr{V}\,, \quad T(\zeta)^{-1}\mathscr{A}(\zeta)\,T(\zeta) = \begin{pmatrix} \omega_1^l & & & & & \\ & \omega_2^r I_{d-1} & & & \mathbf{0} & \\ & & a_r(\zeta) & & & \\ & & & \omega_2^l I_{d-1} & & \\ & \mathbf{0} & & & & \\ & & & & & \omega_3^l \end{pmatrix},$$

avec $a_r(\zeta)$ une matrice carrée de taille 2 vérifiant

$$a_r(\zeta_0) = \begin{pmatrix} i\kappa_r & i \\ 0 & i\kappa_r \end{pmatrix},$$

où $i\kappa_r$ est la racine double (imaginaire pure) du polynôme

$$\left(\sqrt{c_r^2 - u_r^2}\,X^2 \pm i|\eta|u_r\right)^2.$$

La réduction du symbole au voisinage des points $(\pm i|\eta|\sqrt{c_l^2 - u_l^2}, \eta) \in \Sigma_0$ est analogue.

Preuve

• On considère tout d'abord un point $\zeta_0 \in \Sigma_+ \setminus \Sigma_0$. La matrice $\mathscr{A}(\zeta_0)$ n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle, et on peut donc se fixer un contour C^- (repectivement C^+) de $\mathbb{C}$, inclus dans le demi-plan $\{\ \mathrm{Re}\ z < 0\}$ (respectivement $\{\ \mathrm{Re}\ z > 0\}$), entourant les valeurs propres de $\mathscr{A}(\zeta_0)$ de partie réelle strictement négative (respectivement strictement positive). Pour $\zeta \in \Sigma_+$ voisin de ζ_0, les projecteurs spectraux

$$\Pi^-(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C^-} (zI - \mathscr{A}(\zeta))^{-1}\,dz\,,$$
$$\Pi^+(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C^+} (zI - \mathscr{A}(\zeta))^{-1}\,dz\,,$$

sont bien définis et dépendent de façon $\mathscr{C}^\infty$ de ζ (voir [57]). On a de plus

$$\mathrm{Rang}\ \Pi^\pm(\zeta) = d+1\,,$$
$$\mathbb{C}^{2(d+1)} = \ \mathrm{Im}\ \Pi^-(\zeta) \oplus\ \mathrm{Im}\ \Pi^+(\zeta)\,.$$

On se donne une base $(e_1^-, \ldots, e_{d+1}^-)$ de Im $\Pi^-(\zeta_0)$ (i.e. une base de $\mathscr{E}^-(\zeta_0)$) et une base $(e_1^+, \ldots, e_{d+1}^+)$ de Im $\Pi^+(\zeta_0)$ (i.e. une base de $\mathscr{E}^+(\zeta_0)$). Pour ζ voisin de ζ_0, les familles $(\Pi^-(\zeta)e_1^-, \ldots, \Pi^-(\zeta)e_{d+1}^-)$ et $(\Pi^+(\zeta)e_1^+, \ldots, \Pi^+(\zeta)e_{d+1}^+)$ sont des bases de Im $\Pi^-(\zeta)$ et de Im $\Pi^+(\zeta)$. La réunion de ces deux familles est une base de $\mathbb{C}^{2(d+1)}$ qui a les propriétés requises.

• Si $\zeta_0 = (i\vartheta_0, \eta_0) \in \Sigma_0$ vérifie $\vartheta_0 \neq \pm|\eta_0|\sqrt{c_{r,l}^2 - u_{r,l}^2}$, alors les modes propres ω_1^r et ω_3^r sont distincts et le théorème des fonctions implicites assure qu'ils dépendent de façon $\mathscr{C}^\infty$ de ζ au voisinage de ζ_0 (il en est de même pour ω_1^l et ω_3^l). Une base de vecteurs propres de $\mathscr{A}(\zeta)$, dépendant de façon $\mathscr{C}^\infty$ de ζ au voisinage de ζ_0 est donnée par le lemme 3.1.

• Soient $\zeta_0 = (i\vartheta_0, \eta_0) \in \Sigma_0$ tel que $\vartheta_0 = |\eta_0|\sqrt{c_r^2 - u_r^2}$ et $i\kappa_r$ donné comme dans la proposition. Le sous-espace propre de $\mathscr{A}(i\vartheta_0, \eta_0)$ associé à $i\kappa_r$ est de dimension 1 et cette valeur propre est de multiplicité 2. Comme $(c_r^2 - u_r^2) \neq (c_l^2 - u_l^2)$, ω_1^l et ω_3^l sont distincts au point ζ_0.

Rappelons que $\mathscr{A}(\tau, \eta)$ est diagonale par blocs

$$\mathscr{A}(\tau, \eta) = \begin{pmatrix} \mathscr{A}_r(\tau, \eta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathscr{A}_l(\tau, \eta) \end{pmatrix},$$

les valeurs propres de $\mathscr{A}_r(\zeta_0)$ étant ω_2^r et $i\kappa_r$, et les valeurs propres de $\mathscr{A}_l(\zeta_0)$ étant ω_k^l avec $1 \leq k \leq 3$. On sait qu'il existe une base régulière (i.e. $\mathscr{C}^\infty$) diagonalisant $\mathscr{A}_l(\zeta)$ pour ζ proche de ζ_0. On se concentre donc sur $\mathscr{A}_r(\zeta)$. On se donne deux contours C_1 et C_2 dans $\mathbb{C}$ entourant respectivement $i\kappa_r$ et ω_2^r, et d'intérieurs disjoints. Pour ζ proche de ζ_0, on définit les projecteurs spectraux

$$\Pi_1(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} (zI - \mathscr{A}_r(\zeta))^{-1}\, dz\,,$$
$$\Pi_2(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_2} (zI - \mathscr{A}_r(\zeta))^{-1}\, dz\,.$$

Ces projecteurs vérifient

$$\text{Rang } \Pi_1(\zeta) = 2 \quad \text{Rang } \Pi_2(\zeta) = d - 1\,,$$
$$\mathbb{C}^{d+1} = \text{ Im } \Pi_1(\zeta) \oplus \text{ Im } \Pi_2(\zeta)\,,$$

et dépendent régulierement de ζ au voisinage de ζ_0. On se donne maintenant (e_1, e_2) une base de Im $\Pi_1(\zeta_0)$ et $(e_3, \ldots, e_{d+1})$ une base de Im $\Pi_2(\zeta_0)$, de telle sorte que $(e_1, \ldots, e_{d+1})$ forme une base de Jordan de $\mathscr{A}_r(\zeta_0)$. Alors la réunion des familles $(\Pi_1(\zeta)e_1, \Pi_1(\zeta)e_2)$ et $(\Pi_2(\zeta)e_3, \ldots, \Pi_2(\zeta)e_{d+1})$ possède toutes les propriétés requises (elle est notamment de classe $\mathscr{C}^\infty$ par rapport à ζ, bien que ω_1^r et ω_3^r ne soient déterminés que continument au voisinage de ζ_0).

□

3.5.2 Construction microlocale

On commence par construire un symétriseur microlocal en utilisant la proposition 3.3 et le sous-espace stable $\mathscr{E}^-$. Les propriétés de ce symétriseur microlocal sont énoncées dans le théorème suivant.

Théorème 3.3. *Pour tout $\zeta_0 \in \Sigma_+$, il existe un voisinage ouvert $\mathscr{V}$ de ζ_0 dans Σ_+ et des matrices $r(\zeta)$, $T(\zeta)$ dépendant de façon $\mathscr{C}^\infty$ de ζ sur $\mathscr{V}$ et vérifiant*

$r(\zeta)$ est hermitienne,

$T(\zeta)$ est inversible et, en notant $a(\zeta) := T(\zeta)^{-1}\mathscr{A}(\zeta)\,T(\zeta)$, $\widetilde{B}(\zeta) := B(\zeta)\,T(\zeta)$, il existe des constantes C et $c > 0$ telles que

$$\mathrm{Re}\ (r(\zeta)\,a(\zeta)) \geq c\,\gamma^2 I\,, \tag{3.30a}$$

$$r(\zeta) + C\,\widetilde{B}(\zeta)^*\widetilde{B}(\zeta) \geq c\,\gamma^2 I\,, \tag{3.30b}$$

pour tout $\zeta \in \mathscr{V}$.

La démonstration du théorème 3.3 nécessite trois résultats préliminaires qui seront utilisés pour construire le symétriseur au voisinage des points $\zeta_0 \in \Sigma_0$.

Lemme 3.4. *Soit $\zeta_0 = (i\vartheta_0, \eta_0)$ un point de Σ_0 tel que la matrice $\mathscr{A}(\zeta)$ soit diagonalisable sur un voisinage $\mathscr{V}$ de ζ_0, c'est-à-dire $\vartheta_0 \neq |\eta_0|\sqrt{c_{r,l}^2 - u_{r,l}^2}$.*

Si les modes propres $\omega_{1,3}^r$ sont de partie réelle non nulle au point ζ_0 (i.e. $|\vartheta_0| < |\eta_0|\sqrt{c_r^2 - u_r^2}$), alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall\,\zeta \in \mathscr{V}\,, \quad \begin{cases} -\mathrm{Re}\ \omega_3^r(\zeta) \geq c \geq c\,\gamma\,, \\ \ \ \mathrm{Re}\ \omega_1^r(\zeta) \geq c \geq c\,\gamma\,. \end{cases}$$

Si les modes propres $\omega_{1,3}^r$ sont imaginaires purs au point ζ_0 (i.e. $|\vartheta_0| > |\eta_0|\sqrt{c_r^2 - u_r^2}$), les dérivées partielles

$$\frac{\partial \omega_1^r}{\partial \gamma}(\zeta_0) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial \omega_3^r}{\partial \gamma}(\zeta_0)$$

sont réelles et non nulles. Il existe alors une constante $c > 0$ telle que

$$\forall\,\zeta \in \mathscr{V}\,, \quad \begin{cases} -\mathrm{Re}\ \omega_3^r(\zeta) \geq c\,\gamma\,, \\ \ \ \mathrm{Re}\ \omega_1^r(\zeta) \geq c\,\gamma\,. \end{cases}$$

Des inégalités semblables ont lieu pour ω_1^l et ω_3^l.

Preuve

Le premier point du lemme exprime uniquement la continuité des modes propres par rapport à ζ. On passe donc au second point. Soit $\zeta_0 = (i\vartheta_0, \eta_0) \in \Sigma_0$ tel que $|\vartheta_0| > |\eta_0|\sqrt{c_r^2 - u_r^2}$. L'équation (3.11) dont ω_3^r est racine s'écrit

$$(c_r^2 - u_r^2)\omega^2 - 2\tau u_r \omega - \tau^2 - c_r^2|\eta|^2 = 0\,.$$

Cette équation admettant deux racines distinctes pour $(\tau, \eta) = (i\vartheta_0, \eta_0)$, le théorème des fonctions implicites assure que ω_3^r est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de $(i\vartheta_0, \eta_0)$. On obtient alors

$$\left[2(c_r^2 - u_r^2)\omega_3^r - 2\tau u_r\right] \frac{\partial \omega_3^r}{\partial \gamma} = 2u_r\omega_3^r + 2\tau\,.$$

Au point $(i\vartheta_0, \eta_0)$, on a $u_r\omega_3^r \neq -\tau$, donc les deux termes $\partial_\gamma \omega_3^r$ et $[2(c_r^2 - u_r^2)\omega_3^r - 2\tau u_r]$ ne peuvent pas s'annuler. En $(\tau, \eta) = (i\vartheta_0, \eta_0)$, on a

$$\left[2(c_r^2 - u_r^2)\omega_3^r - 2\tau u_r\right] \in i\mathbb{R} \quad \text{et} \quad 2u_r\omega_3^r + 2\tau \in i\mathbb{R}\,,$$

donc la dérivée partielle $\partial_\gamma \omega_3^r$ est bien un nombre réel non nul.

Soit maintenant $(\tau, \eta) \in \Sigma_+$ voisin de ζ_0. On sait que

$$\text{Re } \omega_3^r(\zeta) = \text{ Re } (\omega_3^r(\zeta) - \omega_3^r(\zeta_0))\,,$$

car $\omega_3^r(\zeta_0) \in i\mathbb{R}$ et on sait également que ω_3^r est de partie réelle strictement négative si $\gamma > 0$. On a donc nécessairement

$$\frac{\partial \omega_3^r}{\partial \gamma}(\zeta_0) < 0\,.$$

La conclusion du lemme s'obtient à l'aide d'un développement de Taylor.

□

Le lemme suivant énonce une propriété similaire dans le cas où un bloc de Jordan apparaît dans la réduction de $\mathscr{A}$.

Lemme 3.5. *Soit a_r la matrice définie par la proposition 3.3 au voisinage du point $\zeta_0 = (i|\eta_0|\sqrt{c_r^2 - u_r^2}, \eta_0) \in \Sigma_+$. On pose*

$$D_r(\zeta) := \frac{\partial a_r}{\partial \gamma}(\zeta)$$

pour ζ voisin de ζ_0. Alors l'élément α_r en bas à gauche de $D_r(\zeta_0)$ est un réel non nul. Ce résultat est valable aux autres points où la réduction du symbole fait apparaître un bloc de Jordan (qui ne peut être qu'un bloc de taille 2).

Preuve

Soit $\zeta_0 = (i|\eta_0|\sqrt{c_r^2 - u_r^2}, \eta_0) = (i\vartheta_r, \eta_0) \in \Sigma_0$. Pour $\tau = \gamma + i\vartheta$ voisin de $i\vartheta_r$, avec $\gamma \geq 0$, on définit

$$\Delta_r(\vartheta, \gamma, \omega) := \det\left[\omega I_2 - a_r(\tau, \eta_0)\right]\,.$$

La définition de la matrice a_r donne l'égalité

$$\Delta_r(\vartheta, \gamma, \omega) = \mu\left[c_r^2\left(\omega^2 - |\eta_0|^2\right) - (\tau - u_r\omega)^2\right]\,, \tag{3.31}$$

pour une certain réel $\mu \neq 0$. On obtient ainsi

$$\frac{\partial \Delta_r}{\partial \gamma}(\vartheta, \gamma, \omega) = -2\,\mu\,(\tau - u_r\omega)\,.$$

En particulier, on obtient

$$\frac{\partial \Delta_r}{\partial \gamma}(\vartheta_r, 0, i\kappa_r) \in i\mathbb{R}^*\,. \tag{3.32}$$

D'autre part, on a

$$i\kappa_r I_2 - a_r(\zeta_0) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

En écrivant

$$D_r(\zeta_0) = \frac{\partial a_r}{\partial \gamma}(\zeta_0) = \begin{pmatrix} * & * \\ \alpha_r & * \end{pmatrix} ,$$

les $*$ désignant des nombres complexes, on trouve par multilinéarité

$$\partial_\gamma \Delta_r(\vartheta_r, 0, i\kappa_r) = \det \begin{pmatrix} * & -i \\ \alpha_r & 0 \end{pmatrix} = i\alpha_r .$$

En combinant avec (3.32), on obtient $\alpha_r \in \mathbb{R}$ et $\alpha_r \neq 0$.

□

Lemme 3.6. *Soit a_r la matrice définie par la proposition 3.3 au voisinage de $\zeta_0 = (i|\eta_0|\sqrt{c_r^2 - u_r^2}, \eta_0)$. Pour $\zeta = (\gamma + i\vartheta, \eta)$ voisin de ζ_0, on note $\zeta' := (i\vartheta, \eta)$. Alors (quitte à restreindre le voisinage sur lequel est définie a_r) il existe un changement de base $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{C}^2$ tel que pour tout ζ voisin de ζ_0, la matrice $a_r(\zeta')$ soit à coefficients imaginaires purs.*

Preuve

Une preuve élégante de ce lemme, que nous reproduisons ici, est due à Ralston [81]. Notons e_1 et e_2 la base canonique de $\mathbb{C}^2$, et définissons les matrices

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad B_r(\zeta) := a_r(\zeta) - a_r(\zeta_0) .$$

Comme $B_r(\zeta_0) = 0$, quitte à restreindre le voisinage de ζ_0 sur lequel est défini a_r, les vecteurs $e_1' := (N - iB_r(\zeta'))\, e_2$ et e_2 forment une base de $\mathbb{C}^2$, et cette base dépend de façon $\mathscr{C}^\infty$ de ζ. Dans cette nouvelle base, la matrice $N - iB_r(\zeta')$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Le polynôme caractéristique de $N - iB_r(\zeta')$ est donc

$$P(X) = X^2 - b_1 X - b_2 .$$

D'après la proposition 3.3, on a

$$a_r(\zeta_0) = i(\kappa_r I_2 + N) ,$$

avec $\kappa_r \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$N - iB_r(\zeta') = -ia_r(\zeta') - \kappa_r I_2 ,$$

d'où l'on déduit l'expression

$$P(X) = \det\left[ia_r(\zeta') + (\kappa_r + X)I_2\right] = -\det\left[-a_r(i\vartheta, \eta) + i(\kappa_r + X)I_2\right] .$$

À l'aide de la relation (3.31), on montre que P est un polynôme à coefficients réels. On a donc bien construit un changement de base $\mathscr{C}^\infty$ tel que la matrice $ia_r(\zeta')$ soit à coefficients réels dans cette base.

□

Nous supposerons désormais $a_r(\tau,\eta)$ à coefficients imaginaires purs pour $\gamma = 0$. On peut maintenant passer à la preuve du théorème 3.3, en distinguant les quatre types de point ζ_0 que l'on peut rencontrer.

Construction de r au voisinage d'un point intérieur

On suit ici l'analyse de Kreiss [23, 61]. Soient $\zeta_0 \in \Sigma_+ \backslash \Sigma_0$, $\mathscr{V}$ et T donnés par la proposition 3.3. Comme $a^-(\zeta_0)$ (respectivement $a^+(\zeta_0)$) a son spectre de partie réelle strictement négative (respectivement positive), il existe deux matrices hermitiennes définies positives H^- et H^+ telles que

$$\mathrm{Re}\,(H^\pm\, a^\pm(\zeta_0)) = \pm I\,.$$

Il suffit en effet de prendre

$$\begin{aligned} H^- &:= 2\int_0^{+\infty} \exp(sa^-(\zeta_0))^* \exp(sa^-(\zeta_0))\, ds\,,\\ H^+ &:= 2\int_0^{+\infty} \exp(-sa^+(\zeta_0))^* \exp(-sa^+(\zeta_0))\, ds\,. \end{aligned}$$

C'est le théorème de Lyapunov [8]. Par un argument de continuité, on a

$$\forall\, \zeta \in \mathscr{V}\,, \qquad \mathrm{Re}\; H^- a^-(\zeta) \le -\frac{1}{2}\, I \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}\; H^+ a^+(\zeta) \ge \frac{1}{2}\, I\,,$$

pour tout $\zeta \in \mathscr{V}$, quitte à restreindre $\mathscr{V}$. On choisit alors r constante sur $\mathscr{V}$, de la forme

$$r := \begin{pmatrix} -H^- & 0 \\ 0 & \mu H^+ \end{pmatrix}\,,$$

avec $\mu \ge 1$ à fixer convenablement. On vérifie tout d'abord que cette définition de r donne

$$\mathrm{Re}\,(r\, a(\zeta)) \ge \frac{1}{2}\, I \ge \frac{1}{2}\,\gamma^2\, I\,,$$

c'est-à-dire (3.30a). On va maintenant fixer μ pour avoir (3.30b).

Soit $W \in \mathbb{C}^{2(d+1)}$. On note W^- le vecteur formé des $(d+1)$ premières coordonées de W et W^+ le vecteur formé des $(d+1)$ dernières. La restriction de $B(\zeta_0)$ au sous-espace $\mathscr{E}^-(\zeta_0)$ est injective. De plus, le changement de base $T(\zeta_0)$ a été choisi de telle sorte que les $d+1$ premières coordonnées (dans la nouvelle base) correspondent aux composantes sur le sous-espace stable $\mathscr{E}^-(\zeta_0)$. On écrit alors

$$\widetilde{B}(\zeta_0)\, W = \widetilde{B}(\zeta_0) \begin{pmatrix} W^- \\ 0 \end{pmatrix} + \widetilde{B}(\zeta_0) \begin{pmatrix} 0 \\ W^+ \end{pmatrix}\,,$$

et on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|W^-|^2 \le C\, \left(|W^+|^2 + |\widetilde{B}(\zeta_0)\, W|^2 \right)\,.$$

On obtient (3.30b) en écrivant

$$\begin{aligned} \langle W\,,\, r\, W\rangle &= \langle W^-\,,\, H^-\, W^-\rangle + \mu \langle W^+\,,\, H^+\, W^+\rangle - 2\langle W^-\,,\, H^-\, W^-\rangle \\ &\ge c\, \left(|W^-|^2 + \mu\, |W^+|^2 \right) - C\, |W^-|^2 \\ &\ge c\, |W^-|^2 + (\mu c - C)\, |W^+|^2 - C\, |\widetilde{B}(\zeta_0)\, W|^2\,. \end{aligned}$$

Pour μ suffisamment grand, on aboutit bien à

$$r + C\,\widetilde{B}(\zeta_0)^*\widetilde{B}(\zeta_0) \geq c\,I \geq c\,\gamma^2\,I\,,$$

c'est-à-dire (3.30b). Par continuité, cette estimation est valable pour tout $\zeta \in \mathscr{V}$ et pas seulement pour ζ_0.

□

Construction de r au voisinage d'un point d'annulation du déterminant de Lopatinskii

Soit $\zeta_0 \in \Sigma_0$ un point de la forme $(\pm iV_0|\eta|, \eta)$. En utilisant la majoration de V_0 donnée à la proposition 3.1, la proposition 3.3 assure l'existence d'un voisinage $\mathscr{V}$ de ζ_0 sur lequel le symbole $\mathscr{A}(\zeta)$ est diagonalisable, avec une matrice de changement de base $T(\zeta)$. On rappelle qu'au voisinage de ζ_0, les modes propres ω_3^r et ω_1^l (respectivement ω_3^l et ω_1^r) sont de partie réelle strictement négative (respectivement positive).

On choisit $r(\zeta)$ de la forme

$$r(\zeta) := \begin{pmatrix} -\gamma^2 & & & & & \\ & -I_{d-1} & & & \mathbf{0} & \\ & & -\gamma^2 & & & \\ & & & \mu & & \\ & \mathbf{0} & & & \mu I_{d-1} & \\ & & & & & \mu \end{pmatrix},$$

avec $\mu \geq 1$ à fixer ultérieurement et nous allons montrer que ce choix donne (3.30a)-(3.30b). Par rapport au cas "uniformément stable", on a multiplié les composantes de r sur le sous-espace stable par des puissances positives de γ. On obtient l'expression suivante pour $\mathrm{Re}\ r(\zeta)\,a(\zeta)$:

$$\mathrm{Re}\ r(\zeta)\,a(\zeta) = \begin{pmatrix} -\gamma^2\ \mathrm{Re}\ \omega_3^r & & & & & \\ & \gamma/u_r\,I_{d-1} & & & \mathbf{0} & \\ & & -\gamma^2\ \mathrm{Re}\ \omega_1^l & & & \\ & & & \mu\ \mathrm{Re}\ \omega_3^l & & \\ & \mathbf{0} & & & \mu\gamma/u_l\,I_{d-1} & \\ & & & & & \mu\ \mathrm{Re}\ \omega_1^r \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\mathrm{Re}\ (r(\zeta)\,a(\zeta)) \geq c\,\gamma^2\,I$$

pour tout ζ voisin de ζ_0. Maintenant qu'on a vérifié (3.30a), on va fixer μ pour avoir (3.30b).

Soit $W \in \mathbb{C}^{2(d+1)}$. En notant W^- le vecteur formé des $d+1$ premières composantes de W et W^+ le vecteur formé des $d+1$ dernières, la proposition 3.2 assure qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\gamma^2\ (|W_1^-|^2 + |W_3^-|^2) + |W_2^-|^2 \leq C\ \left(|W^+|^2 + |\widetilde{B}(\zeta)\,W|^2\right)\,,$$

pourvu qu'on écrive

$$W^- = \begin{pmatrix} W_1^- \\ W_2^- \\ W_3^- \end{pmatrix}, \quad W_1^-, W_3^- \in \mathbb{C}, \quad W_2^- \in \mathbb{C}^{d-1}.$$

La définition de $r(\zeta)$ donne

$$\begin{aligned} \langle W\,,\, r(\zeta)\,W\rangle &= \gamma^2\,\left(|W_1^-|^2 + |W_3^-|^2\right) + |W_2^-|^2 + \mu\,|W^+|^2 \\ &\qquad - 2\gamma^2\,\left(|W_1^-|^2 + |W_3^-|^2\right) - 2\,|W_2^-|^2 \\ &\geq \gamma^2\,\left(|W_1^-|^2 + |W_3^-|^2\right) + |W_2^-|^2 + \mu\,|W^+|^2 - C\,|W^+|^2 - C\,|\widetilde{B}(\zeta)\,W|^2\,. \end{aligned}$$

On affaiblit cette estimation en écrivant

$$\langle W\,,\, r(\zeta)\,W\rangle \geq \gamma^2\,|W^-|^2 + (\mu - C)\,|W^+|^2 - C\,|\widetilde{B}(\zeta)\,W|^2\,.$$

En choisissant μ suffisamment grand, on obtient

$$\langle W\,,\, r(\zeta)\,W\rangle \geq \gamma^2\,|W|^2 - C\,|\widetilde{B}(\zeta)\,W|^2\,,$$

c'est-à-dire (3.30b). Dans la partie 3.6, nous verrons comment obtenir une meilleure estimation (au prix de quelques calculs supplémentaires). Bien que l'estimation (3.30b) ne soit pas tout à fait optimale, nous verrons qu'elle a le mérite de conduire facilement à un symétriseur global vérifiant (3.27).

□

Construction de r au voisinage des autres points de diagonalisation du symbole

Comme dans le cas précédent, on choisit r diagonal:

$$r = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & -I_{d-1} & & & \mathbf{0} & \\ & & -1 & & & \\ & & & \mu & & \\ & \mathbf{0} & & & \mu I_{d-1} & \\ & & & & & \mu \end{pmatrix},$$

avec $\mu \geq 1$. Le lemme 3.4 assure qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall\,\zeta \in \mathscr{V}\,, \qquad \mathrm{Re}\,(r(\zeta)\,a(\zeta)) \geq c\,\gamma\,I\,,$$

ce qui donne immédiatement (3.30a).

Un raisonnement analogue à celui effectué pour les points intérieurs montre que, pour un choix convenable de μ, on a une estimation du type

$$r + C\widetilde{B}(\zeta)^*\widetilde{B}(\zeta) \geq c\,I \geq c\,\gamma^2\,I\,.$$

Le raisonnement est effectivement transposable car la restriction de $B(\zeta_0)$ au sous-espace $\mathscr{E}^-(\zeta_0)$ est injective.

□

Construction de r au voisinage des points de Jordan

Pour finir, on traite le cas où un bloc de Jordan apparaît dans la réduction du symbole. D'après le résultat de la proposition 3.3 et la relation (3.29), le prolongement du sous-espace stable $\mathscr{E}^-$ au point ζ_0 est le sous-espace engendré par les $(d+1)$ premiers vecteurs de la nouvelle base. On choisit

$$r(\zeta) := \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -I_{d-1} & & \mathbf{0} & \\ & & h_r(\zeta) & & \\ & \mathbf{0} & & \mu I_{d-1} & \\ & & & & \mu \end{pmatrix},$$

avec $\mu \geq 1$ et $h_r(\zeta)$ hermitienne. Si on arrive à trouver $h_r(\zeta)$, dépendant de façon $\mathscr{C}^\infty$ de ζ au voisinage de ζ_0, telle que

$$\forall\, \zeta \in \mathscr{V}\,, \quad \mathrm{Re}\,\left(h_r(\zeta)\, a_r(\zeta)\right) \geq c\,\gamma\, I\,,$$

alors le lemme 3.4 permettra de conclure que

$$\mathrm{Re}\,\left(r(\zeta)\, a(\zeta)\right) \geq c\,\gamma\, I\,,$$

pour une certaine constante $c > 0$ et on aura donc (3.30a).

D'après l'analyse de Kreiss [61], voir également [23], on sait qu'il suffit de choisir

$$h_r(\zeta) := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix}}_{E} + \underbrace{\begin{pmatrix} f(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{F(\zeta)} - i\gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -g \\ g & 0 \end{pmatrix}}_{G},$$

où e_1, e_2 et g sont des réels et f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs réelles, s'annulant en ζ_0. En gardant les notations introduites aux lemmes 3.5 et 3.6, le développement de Taylor de $a_r(\zeta)$ donne

$$a_r(\zeta) = i(\kappa_r I + N - iB_r(\zeta')) + \gamma D_r(\zeta') + \gamma^2 M(\zeta)\,,$$

où M est une matrice dépendant de façon $\mathscr{C}^\infty$ de ζ. Rappelons que $\zeta' = (i\vartheta, \eta)$ si $\zeta = (\gamma + i\vartheta, \eta)$. D'après le lemme 3.6, on a

$$-iB_r(\zeta') = \begin{pmatrix} b_1(\zeta') & 0 \\ b_2(\zeta') & 0 \end{pmatrix},$$

où b_1 et b_2 sont des fonctions réelles, nulles en ζ_0. On choisit alors

$$f(\zeta) := e_1\, b_1(\zeta') + e_2\, b_2(\zeta')\,,$$

qui est à valeurs réelles et qui s'annule en ζ_0. Ce choix de f implique que la matrice

$$(E + F(\zeta))\ \left(N - iB_r(\zeta')\right)$$

est réelle et symétrique. On obtient donc

$$\mathrm{Re}\,\left(h_r(\zeta)\, a_r(\zeta)\right) = \gamma\ \mathrm{Re}\,\left(G\,N + E\,D_r(\zeta')\right) + \gamma\, L(\zeta)\,,$$

où L est une matrice hermitienne qui dépend de façon $\mathscr{C}^\infty$ de ζ et qui s'annule en ζ_0. Le choix de E et de G donne

$$\mathrm{Re}\,(G\,N + E\,D_r(\zeta_0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1\alpha_r & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

où α_r est un réel non nul (lemme 3.5) et les quantités désignées par des $*$ dépendent uniquement de e_1 et de e_2 mais pas de g. On fixe $e_1 := 1/\alpha_r$. Une fois e_2 fixé, un choix suffisamment grand de g donnera

$$\mathrm{Re}\,(h_r(\zeta)\,a_r(\zeta)) \geq c\,\gamma\,I\,,$$

ce qui donnera (3.30a). Il reste donc à vérifier qu'on peut fixer e_2, indépendamment de g, de sorte qu'on ait (3.30b).

Au point ζ_0, le symétriseur r est donné par

$$r(\zeta_0) = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & -I_{d-1} & & & \mathbf{0} & \\ & & 0 & e_1 & & \\ & & e_1 & e_2 & & \\ & \mathbf{0} & & & \mu I_{d-1} & \\ & & & & & \mu \end{pmatrix},$$

et on rappelle que le sous-espace stable $\mathscr{E}^-(\zeta_0)$ est engendré par les $d+1$ premiers vecteurs de la nouvelle base, en vertu de la relation (3.29) . La condition de stabilité uniforme étant vérifiée au point ζ_0, il suffit de reprendre le raisonnement effectué aux points elliptiques pour conclure: si e_2 et μ sont choisis suffisamment grands (et g n'intervient pas dans ce choix), on a (3.30b) au point ζ_0. Par un argument de continuité, on a encore (3.30b) au voisinage de ζ_0. On fixe alors g et on obtient r vérifiant (3.30a) et (3.30b).

□

3.5.3 Preuve du théorème 3.2

On passe à la preuve du théorème 3.2 en suivant la technique de recollement développée dans [23] et [77]. On a pour l'instant construit, microlocalement, un symétriseur r dans une décomposition de $\mathbb{C}^{2(d+1)}$ faisant intervenir le sous-espace stable $\mathscr{E}^-$. Il s'agit à présent de revenir dans la base canonique de $\mathbb{C}^{2(d+1)}$ et de construire globalement le symétriseur.

La demi-sphère Σ_+ étant compacte, on peut choisir un nombre fini de voisinages $(\mathscr{V}_i)_{1\leq i\leq I}$ donnés par le théorème 3.3 et fixer une partition de l'unité $(\chi_i)_{1\leq i\leq I}$ subordonnée à ce recouvrement; plus précisément, les fonctions χ_i sont positives, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et vérifient

$$\forall\, i = 1, \ldots, I, \quad \mathrm{Supp}\,\chi_i \subset \mathscr{V}_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{I} \chi_i^2 \equiv 1\,.$$

On note T_i et r_i les applications, définies sur $\mathscr{V}_i$, données par le théorème 3.3. On définit une application R sur Σ_+ par la formule

$$\forall\, \zeta \in \Sigma_+, \quad R(\zeta) := \sum_{i=1}^{I} \chi_i^2(\zeta)\,\left(T_i(\zeta)^{-1}\right)^*\, r_i(\zeta)\,T_i(\zeta)^{-1}\,.$$

Il est immédiat que cette formule définit une application R sur Σ_+, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et à valeurs dans l'ensemble des matrices hermitiennes. On a de plus

$$\mathrm{Re}\ (R(\zeta)\mathscr{A}(\zeta)) \geq c\,\gamma^2 \sum_{i=1}^{I} \chi_i^2(\zeta)\ \left(T_i(\zeta)^{-1}\right)^* T_i(\zeta)^{-1}\,,$$

$$R(\zeta) + C\,B(\zeta)^* B(\zeta) \geq c\,\gamma^2 \sum_{i=1}^{I} \chi_i^2(\zeta)\ \left(T_i(\zeta)^{-1}\right)^* T_i(\zeta)^{-1}\,,$$

pour certaines constantes C et $c > 0$. Pour tout $\zeta \in \Sigma_+$, la matrice

$$\sum_{i=1}^{I} \chi_i^2(\zeta)\ \left(T_i(\zeta)^{-1}\right)^* T_i(\zeta)^{-1}$$

est hermitienne définie positive. Par compacité de Σ_+, il existe de constantes C et $c > 0$ telles que

$$\mathrm{Re}\ (R(\zeta)\,\mathscr{A}(\zeta)) \geq c\,\gamma^2\, I\,,$$
$$R(\zeta) + C\,B(\zeta)^* B(\zeta) \geq c\,\gamma^2\, I\,,$$

pour tout $\zeta \in \Sigma_+$. Cela montre (3.27) lorsque $\zeta \in \Sigma_+$. On étend R en une application homogène de degré 0 définie pour tout $\zeta = (\tau, \eta)$ vérifiant $\mathrm{Re}\ \tau \geq 0$ et $(\tau, \eta) \neq (0, 0)$. On obtient (3.27) pour toutes les valeurs de (τ, η) en utilisant l'homogénéité de $\mathscr{A}$ et B.

□

3.6 Quelques remarques

Le résultat du théorème 3.1 peut être amélioré de façon à préciser les "pertes de dérivée". Rappelons que pour un choc plan uniformément stable, Majda avait montré l'estimation

$$\gamma\,\|v\|_{0,\gamma}^2 + \|v_{|_{x_d=0}}\|_{0,\gamma}^2 + \|\psi\|_{1,\gamma}^2 \leq C\,\left(\frac{1}{\gamma}\,\|\mathscr{L}^\gamma v\|_{0,\gamma}^2 + \|\mathscr{B}^\gamma(v,\psi)\|_{0,\gamma}^2\right)\,,$$

grâce à un symétriseur R vérifiant

$$\mathrm{Re}\ (R(\zeta)\,\mathscr{A}(\zeta)) \geq c\,\gamma\, I\,,$$
$$R(\zeta) + C\,B(\zeta)^* B(\zeta) \geq c\, I\,,$$

pour tout $\zeta \in \Sigma_+$.

Pour comparer notre résultat avec celui de Majda, il faudrait montrer une estimation d'énergie avec le même membre de droite que celui intervenant dans l'estimation de Majda. Il est possible de montrer une telle estimation, mais au prix de quelques calculs supplémentaires (le théorème 3.1 avait l'avantage d'être simple à prouver une fois que l'on disposait d'un symétriseur symbolique). La méthode que nous allons employer ici reprend celle que nous avons utilisée dans [26] pour l'étude des chocs de Lax (non uniformément stables) en dynamique des gaz isentropique.

Reprenons notre partition de l'unité (χ_i) associée au recouvrement de Σ_+ par les ouverts $(\mathscr{V}_i)$. On prolonge les fonctions χ_i en des fonctions homogènes de degré 0 par rapport à (τ, η).

Si la condition de stabilité uniforme est vérifiée en tout point de $\mathscr{V}_i$, on dispose d'un changement de base T et d'un symétriseur r, définis sur $\mathscr{V}_i$, tels que

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(r(\zeta)\,a(\zeta)) &\geq c\,\gamma\,I\,, \\ r(\zeta) + C\,\widetilde{B}(\zeta)^*\widetilde{B}(\zeta) &\geq c\,I\,. \end{aligned}$$

On garde les notations du théorème 3.3 pour a et $\widetilde{B}$. Des calculs similaires à ceux effectués dans la preuve du théorème 3.2 aboutissent à l'estimation maximale L^2 de Kreiss:

$$\begin{aligned} \gamma \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_i^2\,|\widehat{v}(\xi,x_d)|^2\,d\xi dx_d + \int_{\mathbb{R}^d} \chi_i^2\,|\widehat{v}(\xi,0)|^2\,d\xi \\ \lesssim \frac{1}{\gamma} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_i^2\,|\widehat{F}(\xi,x_d)|^2\,d\xi dx_d + \int_{\mathbb{R}^d} \chi_i^2\,|\widehat{G}(\xi)|^2\,d\xi\,. \end{aligned}$$

Si $\mathscr{V}_i$ est un voisinage d'un point où la condition de stabilité uniforme est violée, il existe un changement de base T diagonalisant $\mathscr{A}$ et un symétriseur r de la forme

$$r(\tau,\eta) = \begin{pmatrix} -\gamma^2 & & & \\ & -I_{d-1} & & \\ & & -\gamma^2 & \\ & & & \mu\,I_{d+1} \end{pmatrix},$$

pour $(\tau,\eta) \in \Sigma_+$. On étend T en une application homogène de degré 0 en (τ,η) et r en une application homogène de degré 1 en (τ,η). On définit alors

$$V_i := \chi_i\,T^{-1}\,\widehat{v}\,,$$

avec $\tau = \gamma + i\vartheta$ et $\xi = (\vartheta,\eta)$. On vérifie que V_i est solution de

$$\frac{dV_i}{dx_d} = T(\tau,\eta)^{-1}\,\mathscr{A}(\tau,\eta)\,T(\tau,\eta)\,V_i + \chi_i(\tau,\eta)\,T(\tau,\eta)^{-1}\,\mathscr{A}_d^{-1}\,\widehat{F}\,. \tag{3.33}$$

Prenons le produit scalaire de (3.33) avec $r(\tau,\eta)V_i$ et intègrons par rapport à (ξ,x_d). On trouve

$$\begin{aligned} -\,2\,\mathrm{Re} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \langle r\,V_i, \chi_i\,T^{-1}\,\mathscr{A}_d^{-1}\,\widehat{F}\rangle\,d\xi dx_d \\ = \int_{\mathbb{R}^d} \langle V_i(0), r\,V_i(0)\rangle\,d\xi + 2\,\mathrm{Re} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \langle V_i, r\,T^{-1}\,\mathscr{A}\,T\,V_i\rangle\,d\xi dx_d\,. \end{aligned}$$

On utilise maintenant la minoration

$$\mathrm{Re}\,(r\,T^{-1}\,\mathscr{A}\,T) \geq c\,\gamma \begin{pmatrix} \gamma & & & \\ & \lambda^{1,\gamma}(\xi)\,I_{d-1} & & \\ & & \gamma & \\ & & & \mu\,\lambda^{1,\gamma}(\xi)\,I_{d+1} \end{pmatrix} =: c\,\gamma\,s(\tau,\eta)^2\,,$$

avec $s(\tau,\eta)$ hermitienne définie positive, homogène de degré 1/2 par rapport à (τ,η). On obtient

$$\begin{aligned} -\,2\,\mathrm{Re} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \langle r\,V_i, \chi_i\,T^{-1}\,\mathscr{A}_d^{-1}\,\widehat{F}\rangle\,d\xi dx_d \geq c\,\gamma^2 \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{-1,\gamma}(\xi)\,\chi_i^2\,|\widehat{v}(\xi,0)|^2\,d\xi \\ - C \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{1,\gamma}(\xi)\,\chi_i^2\,|\widehat{G}(\xi)|^2\,d\xi + 2\,c\,\gamma \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |s(\tau,\eta)\,V_i(\tau,\eta,x_d)|^2\,d\xi dx_d\,. \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'inégalité de Schwarz donne

$$
\begin{aligned}
&-2\ \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \langle r\, V_i, \chi_i\, T^{-1}\, \mathscr{A}_d^{-1}\, \widehat{F} \rangle\, d\xi\, dx_d \\
&\leq c\,\gamma \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |s(\tau,\eta)\, V_i(\tau,\eta,x_d)|^2\, d\xi dx_d + \frac{C}{\gamma} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_i^2\, |s(\tau,\eta)\, \widehat{F}(\xi,x_d)|^2\, d\xi dx_d\,.
\end{aligned}
$$

On aboutit alors à une estimation du type

$$
\begin{aligned}
\gamma^2 \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_i^2\, |\widehat{v}(\xi,x_d)|^2\, d\xi dx_d + \gamma^2 \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{-1,\gamma}(\xi)\, \chi_i^2\, |\widehat{v}(\xi,0)|^2\, d\xi \\
\leq \frac{C}{\gamma} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{1,\gamma}(\xi)\, \chi_i^2\, |\widehat{F}(\xi,x_d)|^2\, d\xi dx_d + C \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{1,\gamma}(\xi)\, \chi_i^2\, |\widehat{G}(\xi)|^2\, d\xi\,.
\end{aligned}
$$

On se convaincra que cette inégalité est aussi vérifiée aux points de stabilité uniforme (cette dernière estimation étant plus faible que l'estimation maximale L^2 de Kreiss). Les χ_i formant une partition de l'unité, on obtient finalement

$$
\gamma^2\, \|v\|_{0,\gamma}^2 + \gamma^2\, \|v_{|x_d=0}\|_{-1/2,\gamma}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma}\, \|F\|_{1/2,\gamma}^2 + \|G\|_{1/2,\gamma}^2\,.
$$

En appliquant cette estimation à $\Lambda^{-1/2,\gamma} v$, ce qui revient à "décaler les indices", et en récupérant une estimation appropriée pour le front ψ (grâce à (3.21)), on finit de montrer le résultat suivant:

Théorème 3.4. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in H^2(\Omega)$ et pour tout $\psi \in H^2(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$
\gamma^2\, \|v\|_{-1/2,\gamma}^2 + \gamma^2\, \|v_{|x_d=0}\|_{-1,\gamma}^2 + \gamma^2\, \|\psi\|_{0,\gamma}^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma}\, \|\mathscr{L}^\gamma v\|_{0,\gamma}^2 + \|\mathscr{B}^\gamma(v,\psi)\|_{0,\gamma}^2 \right)\,. \quad (3.34)
$$

On reconnaitra dans (3.34) le membre de droite de l'estimation de Majda. Au final, on voit qu'on peut ne perdre qu'une dérivée sur le bord et une demi-dérivée à l'intérieur dans les variables tangentielles (le théorème 3.2 semblait indiquer que l'on perdait une dérivée à l'intérieur). Dans tous les cas, il semble difficile de montrer une estimation sans perte de dérivée à l'intérieur, par exemple une estimation du type

$$
\gamma\, \|v\|_{0,\gamma}^2 + \gamma^2\, \|v_{|x_d=0}\|_{-1,\gamma}^2 + \gamma^2\, \|\psi\|_{0,\gamma}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma}\, \|F\|_{0,\gamma}^2 + \|G\|_{0,\gamma}^2\,.
$$

Notons cependant que Sablé-Tougeron [87] était parvenue à une estimation de ce type (pas de perte de dérivée à l'intérieur) dans un problème d'élastodynamique. Dans notre étude, les singularités au bord (là où $v(x_d = 0)$ est moins régulière que G) semblent se propager dans l'intérieur du domaine. Un tel phénomène exclut toute estimation sans perte de dérivée à l'intérieur. Nous reviendrons sur ce point dans l'étude à coefficients variables (chapitre 6).

Remarquons également que Majda "gagne" une dérivée sur le front inconnu ψ. Ici, ce gain de dérivée est annulé par la perte d'une dérivée sur $v(x_d = 0)$. Au final, on ne gagne rien, mais on ne perd rien non plus.

En dynamique des gaz isentropique (on renvoie à [26] pour l'étude détaillée), il y a des exemples de chocs de Lax pour lesquels la condition de stabilité uniforme est violée mais, aux points (τ, η) correspondants, les valeurs propres de $\mathscr{A}$ sont <u>toutes</u> imaginaires pures. Ce cas est moins favorable que celui des transitions de phase et nous montrons dans [26] une estimation avec perte d'une dérivée sur le bord et une dérivée à l'intérieur:

$$\gamma \, \|v\|_{0,\gamma}^2 + \|v_{|_{x_d=0}}\|_{0,\gamma}^2 + \|\psi\|_{1,\gamma}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3} \, \|F\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|G\|_{1,\gamma}^2 \, .$$

Chapitre 4

Calcul symbolique à paramètre

Dans ce chapitre, nous allons mettre en place les outils dont nous nous servirons aux chapitres 5 et 6.

4.1 Espaces et normes utilisés

4.1.1 Espaces de Sobolev à poids

On définit sur $\mathbb{R}^d$ des fonctions $\lambda^{s,\gamma}$, pour $\gamma > 0$ et $s \in \mathbb{R}$, par

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda^{s,\gamma}(\xi) := (\gamma^2 + |\xi|^2)^{s/2}\,,$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^d$. On adoptera la notation simplifiée λ^s pour désigner la fonction $\lambda^{s,1}$, c'est-à-dire

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda^s(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{s/2}\,.$$

On désigne par $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^N)$ (ou plus simplement $\mathscr{S}$) l'espace de Schwartz des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^N$. Enfin, pour tout réel s, $H^s(\mathbb{R}^d)$ (ou H^s s'il n'y a pas d'ambiguïté) désigne l'espace de Sobolev des distributions tempérées u dont la transformée de Fourier vérifie $\lambda^s \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On adopte la définition suivante pour la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall\, f \in L^1(\mathbb{R}^d)\,, \quad \mathscr{F} f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}\, f(x)\, dx\,,$$

avec le prolongement usuel de $\mathscr{F}$ à $L^2(\mathbb{R}^d)$ (par le théorème de Plancherel) et à l'espace des distributions tempérées $\mathscr{S}'$. Ce prolongement sera noté $\widehat{\ }$, comme le lecteur y est habitué. L'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ est muni de la norme

$$\|u\|_s^2 := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{2s}(\xi)\, |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi\,,$$

qui en fait un espace de Hilbert, voir [2, 20, 115].

On peut également, à $\gamma > 0$ fixé, munir H^s de la norme équivalente

$$\|u\|_{s,\gamma}^2 := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{2s,\gamma}(\xi)\, |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi\,,$$

qui fait également de H^s un espace de Hilbert, noté $H^s_\gamma(\mathbb{R}^d)$ pour éviter d'éventuelles confusions. Le théorème de Riesz permet d'identifier $H^{-s}_\gamma(\mathbb{R}^d)$ au dual topologique de $H^s_\gamma(\mathbb{R}^d)$. Enfin, on adoptera les notations standard

$$H^{-\infty} := \bigcup_s H^s \quad \text{et} \quad H^{+\infty} := \bigcap_s H^s \,.$$

Ces normes à paramètre sur l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ permettent de définir également des normes à paramètre sur l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ lorsque Ω est un demi-espace et k un entier naturel. En effet, soit

$$\Omega = \mathbb{R}^{d+1}_+ := \left\{ (x_0, \ldots, x_{d-1}, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \text{ t.q. } x_d > 0 \right\} .$$

On définit sur $H^k(\Omega)$ la norme

$$|\!|\!| u |\!|\!|^2_{k,\gamma} := \sum_{j=0}^{k} \int_0^{+\infty} \|\partial^j_{x_d} u(., x_d)\|^2_{k-j,\gamma} \, dx_d \,,$$

qui (à γ fixé) est une norme équivalente à la norme usuelle sur $H^k(\Omega)$. D'autre part, il est clair que la norme $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_{k,\gamma}$ est une norme hilbertienne. Là encore, on notera $H^k_\gamma(\Omega)$ l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ muni de la norme $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_{k,\gamma}$ pour souligner la dépendance de la norme vis-à-vis du paramètre γ.

Pour rendre les résultats plus lisibles, on fera donc la distinction entre modules et normes de vecteurs (normes "à une barre"), normes d'espaces de Sobolev dans un espace tout entier (normes "à deux barres") et normes d'espaces de Sobolev dans un demi-espace (normes "à trois barres"). Les normes des autres espaces fonctionnels utilisés par la suite auront une notation spécifique que nous allons détailler dans le prochain paragraphe.

4.1.2 Autres espaces fonctionnels

Comme on le verra dans la partie 4.2, les espaces de Sobolev sont le cadre naturel pour utiliser le calcul pseudodifférentiel: on peut justifier en partie cette affirmation par le fait qu'un symbole pseudodifférentiel (lorsqu'il dépend de ξ) est *essentiellement* un multiplicateur de Fourier (les variations de $a(x,\xi)$ sont dues principalement aux variations de ξ et peu aux variations de x, c'est-à-dire "$a(x,\xi) \approx a(0,\xi)$").

Un symbole pseudodifférentiel $a(x,\xi)$ est par définition une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ par rapport aux variables (x,ξ): un symbole pseudodifférentiel est donc très régulier par rapport à ses deux variables. Un des atouts du calcul paradifférentiel est de pouvoir traiter des symboles $a(x,\xi)$ qui sont peu réguliers en x (encore faut-il introduire une *échelle de régularité* pour classer les différents symboles). Le cadre adéquat est celui des espaces de Hölder. On en rappelle donc la définition.

Si r est un nombre positif non entier et k sa partie entière, l'espace de Hölder d'indice r, noté $C^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^N)$, est l'ensemble des applications u de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}^N$, de classe $\mathscr{C}^k$ telle que u ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à k soient bornées et telle qu'il existe une constante C vérifiant

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ t.q. } |\alpha| = k \,, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^d \,, \quad |\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \le C|x-y|^{r-k} \,.$$

L'espace C^r est muni de la norme

$$\|u\|_{C^r} := \sum_{\alpha/|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} + \sup_{|\beta|=k} \sup_{x\neq y} \frac{|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)|}{|x-y|^{r-k}}$$

qui en fait un espace de Banach.

Si $r = 0$, on peut définir l'espace de Hölder d'indice 0 comme l'ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}^N$; en d'autres termes, l'espace de Hölder d'indice 0 n'est rien d'autre que $L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^N)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$. C'est donc un espace de Banach. Notons que les éléments de L^∞ sont en fait des classes d'équivalence de fonctions et pas tout-à-fait des fonctions à proprement parler. Un moyen de se défaire de cette *épine* serait de définir l'espace de Hölder d'indice 0 comme l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$ (on préserverait le caractère d'espace de Banach). La définition précédente peut alors apparaître quelque peu arbitraire. Nous allons tâcher de la justifier dans ce qui va suivre.

Si k est un entier naturel, rien ne semble empêcher dans la définition précédente de $C^{k+1-\varepsilon}$ de prendre $\varepsilon = 0$. L'espace de Hölder d'indice $k+1$ *serait* alors l'ensemble des applications u de classe $\mathscr{C}^k$, bornée ainsi que toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à k et dont les dérivées d'ordre k sont lipschitziennes. Le théorème de Rademacher assure qu'une telle fonction u est $k+1$ fois dérivable presque partout (pour la mesure de Lebesgue) et que les dérivées d'ordre $k+1$ sont des fonctions essentiellement bornées (on renvoie à [115] pour un exposé détaillé); de plus la fonction u appartient à l'espace de Sobolev $W^{k+1,\infty}$. Un choix raisonnable (du moins à notre sens) d'espace de Hölder d'indice $k+1$ est donc l'espace $W^{k+1,\infty}$. Cet espace est muni de la norme usuelle

$$\|u\|_{W^{k+1,\infty}} := \sum_{\alpha/|\alpha|\leq k+1} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} ,$$

qui en fait un espace de Banach, voir [2, 115]. Le choix de L^∞ pour l'espace de Hölder d'indice 0 se trouve justifié par cette convention.

Avec cette définition, l'espace de Hölder d'indice 1 n'est rien d'autre que l'espace des fonctions bornées lipschitziennes (quelquefois noté $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)$). Pour éviter d'éventuelles confusions, on préférera la notation $W^{k,\infty}$ à la notation C^k pour l'espace de Hölder d'indice k ainsi défini (ce qui évite, au passage, d'avoir à distinguer entre C^k et $\mathscr{C}^k$). Les trois espaces de Hölder principalement utilisés par la suite seront en fait L^∞, $W^{1,\infty}$ et $W^{2,\infty}$ (qui sont des espaces de Sobolev). On peut néanmoins énoncer les résultats du calcul paradifférentiel (tels qu'ils sont exposés à la partie 4.3) dans ce cadre plus général, voir par exemple [51].

• **Remarque :** la convention adoptée pour la définition des espaces de Hölder d'ordre entier assure que la dérivation agit continûment de C^{r+1} dans C^r pour tout réel $r \geq 0$ (ce qui est le moins que l'on puisse demander). De plus, les espaces de Hölder forment une famille décroissante d'espaces vectoriels. Cependant, notre choix d'espaces de Hölder d'indice entier crée un décalage entre espaces de Sobolev et espaces de Hölder. Plus précisément, l'espace $H^{r+d/2}(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans l'espace C^r uniquement si r n'est pas un entier. Une définition plus uniforme est celle adoptée dans [51, 75]: l'espace de Hölder C^r est défini comme étant la classe de Zygmund [1] C^r_*; les injections de Sobolev

1. Il nous a paru utile de consacrer une annexe au rappel des principaux résultats de l'analyse dyadique,

sont alors valables pour tout réel $r \geq 0$. Cela permet de plus de définir les espaces de Hölder d'indice négatif. L'avantage de la convention adoptée ici est qu'elle nécessite moins de prérequis et rend parfois les preuves des résultats plus claires.

4.2 Calcul pseudodifférentiel à paramètre

On énonce dans cette partie une version à paramètre du calcul pseudodifférentiel. Dans sa version classique (i.e. sans paramètre), la théorie est exposée dans [7, 23, 51, 58, 89]. Le passage aux symboles et opérateurs à paramètre ne comporte guère de difficulté. Une étude précise de ces opérateurs à paramètre est faite dans [3], voir également les exercices de [23, chapitre IV]. Nous verrons dans les deux prochains chapitres que l'introduction de ce paramètre permet d'absorber facilement les "termes d'erreur", notamment dans l'inégalité de Gårding.

Cette partie vise essentiellement à préciser la dépendance des normes d'opérateurs par rapport au paramètre γ. Notons que les symboles pseudodifférentiels à paramètre que nous avons rencontrés dans la partie 3.4 étaient de simples multiplicateurs de Fourier. Pour ces symboles très particuliers, les résultats énoncés ci-après se démontrent de façon immédiate en utilisant le théorème de Plancherel.

Dans tout ce qui suit, les symboles seront des applications à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées à coefficients complexes $\mathscr{M}_N(\mathbb{C})$ (que l'on notera aussi $\mathbb{C}^{N\times N}$).

Définition 4.1 (Symbole pseudodifférentiel). *Un symbole pseudodifférentiel à paramètre de degré m est une application $a(x,\xi,\gamma)$ définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [1,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{C}^{N\times N}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ par rapport à (x,ξ) et telle que pour tous multi-entiers α,β, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ vérifiant*

$$\forall\,(x,\xi,\gamma), \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a\,(x,\xi,\gamma)| \leq C_{\alpha,\beta}\,\lambda^{m-|\beta|,\gamma}(\xi)\,.$$

En général, les symboles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ par rapport aux trois variables (x,ξ,γ). On notera S^m la classe des symboles pseudodifférentiels à paramètre de degré m, et

$$S^{+\infty} := \bigcup\nolimits_m S^m \quad , \quad S^{-\infty} := \bigcap\nolimits_m S^m\,.$$

• **Exemple :** soit $a(\xi,\gamma)$ une fonction définie sur le demi-espace $\mathbb{R}^d \times [0,+\infty[$ privé de l'origine, homogène de degré m par rapport à (ξ,γ) et de classe $\mathscr{C}^\infty$. Alors a est un symbole pseudodifférentiel à paramètre de degré m (plus précisément, la restriction de a au domaine $\{\gamma \geq 1\}$ est un symbole pseudodifférentiel à paramètre de degré m). En particulier, l'application $\lambda^{m,\gamma}$ est un symbole pseudodifférentiel à paramètre de degré m.

Si a est un symbole pseudodifférentiel à paramètre, le calcul pseudodifférentiel classique définit (à γ fixé) un opérateur $\mathrm{Op}^\gamma(a)$ continu sur $\mathscr{S}$ qui se prolonge en un opérateur continu sur $\mathscr{S}'$. On dira que $\mathrm{Op}^\gamma(a)$ est un opérateur pseudodifférentiel à paramètre. Rappelons tout d'abord la définition de $\mathrm{Op}^\gamma(a)$.

---

cette branche de l'analyse ayant apporté de nombreux résultats ces dernières décennies dans l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires. On y trouvera notamment la définition des classes de Zygmund.

Théorème 4.1. *Soit $a \in S^{+\infty}$ et $\phi \in \mathscr{S}$. La formule*

$$\mathrm{Op}^\gamma(a)\phi\,(x) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\, a(x,\xi,\gamma)\,\widehat{\phi}(\xi)\,d\xi$$

définit une fonction $\mathrm{Op}^\gamma(a)\phi \in \mathscr{S}$, et l'opérateur $\mathrm{Op}^\gamma(a)$ est continu sur $\mathscr{S}$. De plus, il existe un unique symbole à paramètre, noté adj(a), tel que

$$\forall\,\phi,\psi \in \mathscr{S}, \quad \langle \mathrm{Op}^\gamma(a)\phi,\psi\rangle_{L^2} = \langle \phi, \mathrm{Op}^\gamma(adj(a))\psi\rangle_{L^2}\,.$$

Si $a \in S^m$, alors $adj(a) \in S^m$ et $adj(a) - a^* \in S^{m-1}$ (la notation a^* désignant l'adjoint au sens usuel pour les matrices). Plus précisément, on dispose du développement asymptotique:

$$adj(a) \sim \sum_\alpha \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha \partial_x^\alpha\, a^*\,. \tag{4.1}$$

Le théorème 4.1 permet d'étendre la définition de $\mathrm{Op}^\gamma(a)$ à $\mathscr{S}'$ de la façon suivante:

Définition 4.2 (Opérateur pseudodifférentiel). *Soit $a \in S^{+\infty}$. L'opérateur pseudodifférentiel à paramètre de symbole a est l'application $\mathrm{Op}^\gamma(a) : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ défini par*

$$\forall\, u \in \mathscr{S}', \quad \forall\,\varphi \in \mathscr{S}, \quad \langle \mathrm{Op}^\gamma(a)u,\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}} := \langle u, \mathrm{Op}^\gamma(adj(a))\varphi\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}\,.$$

On utilisera également la notation $a(x,D,\gamma)$ (cette écriture souligne la différence des rôles joués par les deux variables x et ξ).

On introduit la terminologie suivante:

Définition 4.3. *Une famille $\{P^\gamma\}_{\gamma\geq 1}$ d'opérateurs sur $\mathscr{S}'$ est dite d'ordre inférieur ou égal à m ($\leq m$ en abrégé) si pour tout réel s, P^γ envoie continûment H^s_γ sur H^{s-m}_γ (pour tout $\gamma \geq 1$) et s'il existe une constante C indépendante de γ telle que*

$$\forall\,\gamma \geq 1\,, \quad \forall\, u \in H^s_\gamma\,, \quad \|P^\gamma u\|_{s-m,\gamma} \leq C\,\|u\|_{s,\gamma}\,.$$

L'identification $(H^s_\gamma)' \simeq H^{-s}_\gamma$ permet de montrer que si $\{P^\gamma\}$ est une famille d'ordre $\leq m$, alors la famille des adjoints $\{(P^\gamma)^*\}$ est également d'ordre $\leq m$.

On peut maintenant énoncer les principaux résultats du calcul pseudodifférentiel à paramètre.

Théorème 4.2. *Soient $a \in S^m$ et $b \in S^{m'}$. Alors*

la famille $\{\mathrm{Op}^\gamma(a)\}$ est d'ordre $\leq m$,

la famille $\{(\mathrm{Op}^\gamma(a))^* - \mathrm{Op}^\gamma(a^*)\}$ est d'ordre $\leq m-1$,

la famille $\{\mathrm{Op}^\gamma(a)\circ\mathrm{Op}^\gamma(b) - \mathrm{Op}^\gamma(ab)\}$ est d'ordre $\leq m+m'-1$,

en notant $[P_1,P_2]$ le commutateur de deux opérateurs (ou de deux matrices) P_1 et P_2, la famille $\{[\mathrm{Op}^\gamma(a),\mathrm{Op}^\gamma(b)] - \mathrm{Op}^\gamma([a,b])\}$ est d'ordre $\leq m+m'-1$.

• **Exemple :** on notera $\Lambda^{m,\gamma}$ l'opérateur pseudodifférentiel à paramètre de symbole $\lambda^{m,\gamma}$. La famille $\{\Lambda^{m,\gamma}\}$ est d'ordre $\leq m$ et chaque opérateur $\Lambda^{m,\gamma}$ est une isométrie bijective entre H^s_γ et H^{s-m}_γ, dont l'inverse est $\Lambda^{-m,\gamma}$.

Tout se passe donc comme dans le cas sans paramètre, pourvu que l'on prenne soin de faire intervenir judicieusement le paramètre dans la définition 4.1 et dans les normes sur les espaces de Sobolev. Rappelons que le symbole $a\#b$ de l'opérateur $\mathrm{Op}^\gamma(a)\circ\mathrm{Op}^\gamma(b)$ admet le développement asymptotique:

$$a\#b \sim \sum_\alpha \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha a\,\partial_x^\alpha b\,. \tag{4.2}$$

Il nous reste à énoncer une version à paramètre de l'inégalité de Gårding, qui relie la *positivité* d'un symbole à la *positivité* de son opérateur. Si M est une matrice carrée à coefficients complexes, on note $(\mathrm{Re}\,M)$ la matrice $(M+M^*)/2$. Cette notation rend valide la relation

$$\forall\, x\in\mathbb{C}^N\,,\quad \mathrm{Re}\,(Mx\cdot x) = (\mathrm{Re}\,M)x\cdot x \qquad \text{(produit hermitien dans } \mathbb{C}^N).$$

Théorème 4.3 (Inégalité de Gårding). *Soit $a\in S^{2m}$. On suppose qu'il existe un réel $c>0$ vérifiant*

$$\forall\,(x,\xi,\gamma),\quad \mathrm{Re}\;a(x,\xi,\gamma)\geq c\,\lambda^{2m,\gamma}(\xi)\,I\,.$$

Alors il existe $\gamma_0\geq 1$ tel que

$$\forall\,\gamma\geq\gamma_0\,,\quad \forall\,u\in H^m_\gamma(\mathbb{R}^d)\,,\quad \mathrm{Re}\,\langle \mathrm{Op}^\gamma(a)u,\,u\rangle_{H^{-m},H^m}\geq \frac{c}{2}\,\|u\|^2_{m,\gamma}\,.$$

L'introduction d'un paramètre γ suffisamment grand permet ainsi de s'affranchir du reste présent dans l'inégalité de Gårding usuelle et qui empêche l'opérateur d'être tout à fait positif, voir [7, 89].

4.3 Calcul paradifférentiel à paramètre

On présente dans cette partie une version à paramètre du calcul paradifférentiel inventé par Bony [19] et amélioré par Meyer [75] (on pourra également se reporter à [24, 51]). Tout comme dans [73], nous avons privilégié l'aspect "calcul symbolique" en partant de la définition d'un symbole paradifférentiel et en construisant les opérateurs paradifférentiels associés (le paraproduit apparaît comme un cas particulier d'opérateur paradifférentiel). Cette partie est donc calquée, dans ses grandes lignes, sur la partie précédente.

Cet exposé s'inspire des travaux antérieurs de Métivier [73] et Mokrane [77]. Nous avons tâché notamment de garder les notations qui y sont introduites.

4.3.1 Découpage dyadique

Le découpage dyadique à paramètre est semblable au découpage classique (i.e. sans paramètre) qui est exposé à l'annexe A. La seule modification est que la fonction de

troncature en fréquences χ dépend également du paramètre γ. Plus précisément, on se fixe une fonction χ de classe $\mathscr{C}^\infty$, à support compact dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, positive, radiale et vérifiant

$$\gamma_1^2 + |\xi_1|^2 \geq \gamma_2^2 + |\xi_2|^2 \Longrightarrow \chi(\xi_1, \gamma_1) \leq \chi(\xi_2, \gamma_2)\,,$$
$$\begin{cases} \chi(\xi,\gamma) = 1 & \text{si } \left(\gamma^2 + |\xi|^2\right)^{1/2} \leq 1/2, \\ \chi(\xi,\gamma) = 0 & \text{si } \left(\gamma^2 + |\xi|^2\right)^{1/2} \geq 1. \end{cases}$$

On définit alors une fonction φ par $\varphi(\xi,\gamma) := \chi(\xi/2, \gamma/2) - \chi(\xi,\gamma)$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, à support dans la couronne $\{1/2 \leq (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \leq 2\}$, radiale et positive.

Le paramètre γ est désormais **toujours** positif ou nul. Si u est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$, on définit les blocs dyadiques $\Delta_p^\gamma u$ et les sommes partielles $S_p^\gamma u$ (à paramètre) de u par les formules

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}\,, \quad \Delta_p^\gamma u := \varphi(2^{-p}D, 2^{-p}\gamma)u \quad \text{et} \quad S_p^\gamma u := \chi(2^{-p}D, 2^{-p}\gamma)u\,,$$

de sorte que l'on a la relation

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}\,, \quad S_{p+1}^\gamma u - S_p^\gamma u = \Delta_p^\gamma u\,.$$

Par ailleurs, on remarque que les blocs $\Delta_p^\gamma u$ sont nuls dès que $\gamma \geq 2^{p+1}$ (par exemple, si $\gamma \geq 1$, les blocs d'indice strictement négatif sont nuls). De même, les sommes partielles $S_p^\gamma u$ sont identiquement nulles si $\gamma \geq 2^p$ (notamment pour tout entier $p \leq 0$ si $\gamma \geq 1$).

À γ fixé, le découpage décrit ci-dessus est exactement le même que le découpage classique: on prend tout d'abord en compte les basses fréquences ($S_0^\gamma u$ pour fixer les idées), puis des couronnes où les fréquences sont, en norme, de l'ordre de 2^p. Ceci est illustré à la figure 4.1: les basses fréquences correspondent à une boule puis on a des couronnes.

On montre facilement que les estimations fondamentales des décompositions dyadiques classiques (voir [7, 24] et l'annexe A, relations (A.1)-(A.2)) s'étendent au découpage dyadique à paramètre:

$$\sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha \Delta_p^\gamma u\|_{L^2} \leq C_k\, 2^{pk} \|u\|_{L^2} \quad , \quad \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha S_p^\gamma u\|_{L^2} \leq C_k\, 2^{pk} \|u\|_{L^2}\,,$$
$$\sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha \Delta_p^\gamma u\|_{L^\infty} \leq C_k\, 2^{pk} \|u\|_{L^\infty} \quad , \quad \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha S_p^\gamma u\|_{L^\infty} \leq C_k\, 2^{pk} \|u\|_{L^\infty}\,,$$

la constante C_k ne dépendant que de l'entier k et pas de (p, u, γ).

Les espaces de Sobolev H_γ^s admettent la caractérisation suivante:

Proposition 4.1. *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $\gamma \geq 1$. Alors $u \in H_\gamma^s(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si*

- *pour tout $p \geq 0$, $\Delta_p^\gamma u \in L^2(\mathbb{R}^d)$*
- *la suite $(2^{ps}\|\Delta_p^\gamma u\|_0)_{p\geq 0}$ est de carré sommable.*

De plus, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de s (et pas de γ) telle que

$$\forall\, u \in H_\gamma^s(\mathbb{R}^d)\,, \quad C^{-1}\, \|u\|_{s,\gamma}^2 \leq \sum_{p\geq 0} 2^{2ps}\, \|\Delta_p^\gamma u\|_0^2 \leq C\, \|u\|_{s,\gamma}^2\,.$$

On rappelle que les blocs $\Delta_p^\gamma u$ sont nuls pour $\gamma \geq 1$ et p strictement négatif.

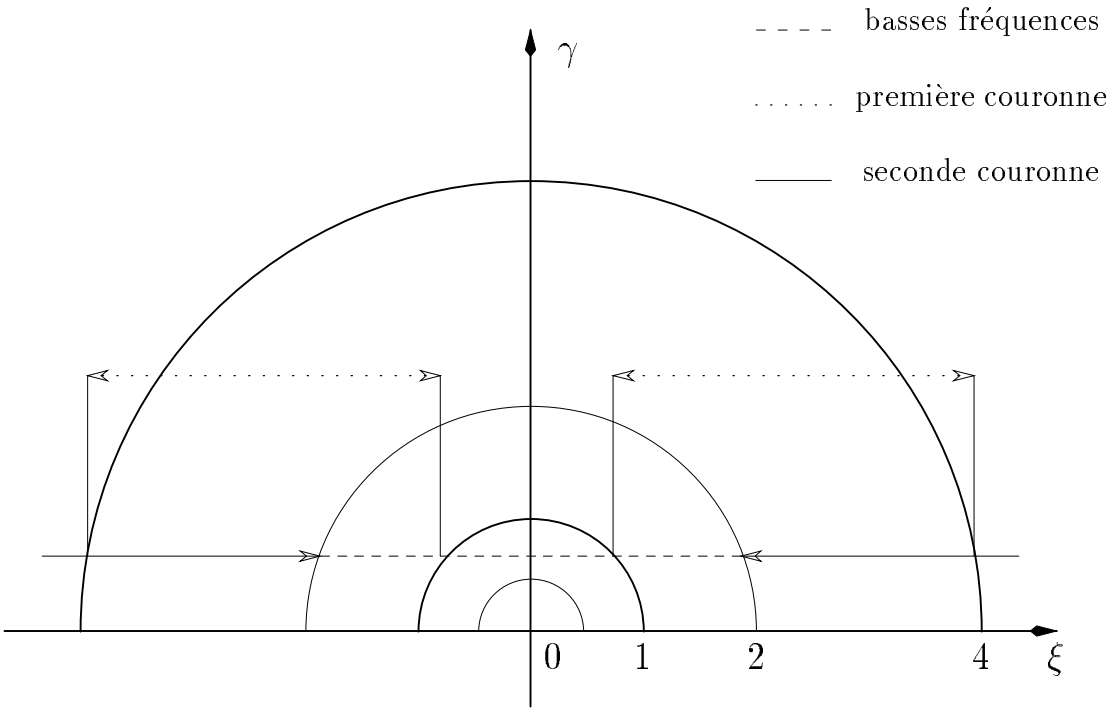


FIG. 4.1 – *Découpage dyadique à paramètre: coupe en* $\gamma = 3/4$.

On a ainsi une décomposition de u en une somme de distributions qui ont chacune leur spectre dans une couronne de $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[$. La proposition 4.1 admet la "réciproque" suivante:

Proposition 4.2. *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 1$ *et* $R > 1$. *On définit* $\widetilde{\mathscr{C}_p} := \{\xi \in \mathbb{R}^d, 2^p/R \leq (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \leq 2^p R\}$. *Soit* $(u_p)_{p\geq 0}$ *une suite dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *vérifiant*

- *pour tout* $p \geq 0$, Supp $\widehat{u_p} \subset \widetilde{\mathscr{C}_p}$
- *la suite* $(2^{ps}\|u_p\|_0)_{p\geq 0}$ *est de carré sommable.*

Alors on a

$$u := \sum_{p\geq 0} u_p \in H^s_\gamma(\mathbb{R}^d) \qquad et \qquad \|u\|^2_{s,\gamma} \leq C \sum_{p\geq 0} 2^{2ps}\|u_p\|_0^2 \,,$$

pour une certaine constante $C > 0$ *ne dépendant que de* R *et de* s. *Si* $s > 0$, *le résultat demeure si l'on remplace les couronnes* $\widetilde{\mathscr{C}_p}$ *par les boules* $\widetilde{\mathscr{B}_p} := \{\xi \in \mathbb{R}^d, (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \leq 2^p R\}$.

Ces deux résultats se prouvent de la même manière que dans le cadre usuel des décompositions de Littlewood-Paley, c'est-à-dire quand $\gamma = 0$ (voir l'annexe A). Le point important est que les constantes ne dépendent pas du paramètre γ pourvu que l'on munisse l'espace de Sobolev H^s de la norme à poids $\|\cdot\|_{s,\gamma}$.

Nous aurons également besoin dans cette partie du découpage dyadique classique (sans paramètre) dont nous allons fixer les notations. Les blocs dyadiques et les sommes partielles se définissent dans ce cas de la manière suivante:

$$\forall\, q \in \mathbb{Z}\,, \quad \Delta_q u := \varphi(2^{-q}D, 0)\, u \quad \text{et} \quad S_q u := \chi(2^{-q}D, 0)\, u\,,$$

c'est-à-dire en prenant γ égal à 0 dans les décompositions à paramètre. Ces notations sont cohérentes avec celles que nous avons adoptées dans l'annexe A. En particulier, on a encore la relation

$$\forall\, q \in \mathbb{Z}\,, \quad S_{q+1}u - S_q u = \Delta_q u\,.$$

4.3.2 Symboles et opérateurs paradifférentiels

La notion de symbole paradifférentiel est une extension "directe" de la notion de symbole pseudodifférentiel: on autorise maintenant la fonction $a(x,\xi,\gamma)$ à être moins régulière par rapport à la variable x. Les symboles paradifférentiels sont donc classés d'après leur régularité en x et d'après leur degré.

Définition 4.4 (Symbole paradifférentiel). *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. On appelle symbole paradifférentiel (à paramètre) de degré m et de régularité k une application a définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [1,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{C}^{N\times N}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ par rapport à ξ et telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, il existe une constante C_α vérifiant*

$$\forall\,(\xi,\gamma)\,, \quad \|\partial_\xi^\alpha a(\cdot,\xi,\gamma)\|_{W^{k,\infty}} \leq C_\alpha\, \lambda^{m-|\alpha|,\gamma}(\xi)\,. \tag{4.3}$$

L'ensemble des symboles paradifférentiels de degré m et de régularité k sera noté Γ_k^m. On peut également définir Γ_r^m pour $r > 0$ non entier en utilisant l'espace de Hölder[2] C^r. Notons que tout élément de $W^{k,\infty}$ peut être vu comme un symbole, ne dépendant ni de ξ ni de γ, de degré 0 et de régularité k.

L'espace Γ_k^m est naturellement muni d'une structure d'espace de Fréchet, les seminormes sur Γ_k^m étant définies par

$$\mathrm{N}_p(a) = \sup_{|\alpha|\leq p}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d,\gamma\geq 1} \lambda^{|\alpha|-m,\gamma}(\xi)\, \|\partial_\xi^\alpha a(\cdot,\xi,\gamma)\|_{W^{k,\infty}}\,.$$

Contrairement aux symboles pseudodifférentiels, on ne sait pas définir directement un opérateur continu de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$ associé à un symbole dans Γ_k^m (ces symboles étant trop peu réguliers en x). On se fixe donc le programme suivant:

1. Trouver une sous-classe Σ_k^m de Γ_k^m dans laquelle on sait associer naturellement un opérateur (d'ordre $\leq m$) à un symbole (de degré m).
2. Construire un procédé de régularisation permettant de passer de la classe Γ_k^m à la classe Σ_k^m.

On pourra alors associer à un symbole dans la classe Γ_k^m un opérateur d'ordre $\leq m$ (ou plus exactement une famille d'opérateurs d'ordre $\leq m$). Cependant, l'opérateur ainsi obtenu dépendra du procédé de régularisation choisi: il sera donc défini *modulo quelque chose*. Ces idées pour l'instant un peu vagues seront clarifiées par la suite.

2. Si on utilise les classes de Zygmund comme espaces de Hölder, on peut également définir des symboles de régularité négative, voir [51].

La sous-classe Σ_k^m

On appellera spectre d'une distribution tempérée le support de sa transformée de Fourier. La classe Σ_k^m est alors définie de la façon suivante:

Définition 4.5. *On note Σ_k^m l'ensemble des symboles $\sigma \in \Gamma_k^m$ vérifiant la propriété spectrale suivante: il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que*

$$\forall\,(\xi,\gamma)\,, \qquad \text{Spectre } \sigma(\cdot,\xi,\gamma) \subset \{\eta \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |\eta| \le \varepsilon\,(\gamma^2+|\xi|^2)^{1/2}\}\,. \tag{4.4}$$

Si $\sigma \in \Sigma_0^m$, on montre facilement que σ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ par rapport aux variables (x,ξ). De plus, le lemme de Bernstein (voir l'annexe A) assure que pour tous multi-entiers α,β, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ vérifiant

$$\forall\,(x,\xi,\gamma)\,, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma\,(x,\xi,\gamma)| \le C_{\alpha,\beta}\,\lambda^{m-|\beta|+|\alpha|,\gamma}(\xi)\,.$$

Le symbole σ appartient donc à la classe $S_{1,1}^m$ de Hörmander (une étude détaillée de cette classe est faite dans [51]). Pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^N)$, la formule

$$\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u\,(x) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\,\sigma(x,\xi,\gamma)\,\widehat{u}(\xi)\,d\xi$$

définit une fonction $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^N)$ et l'opérateur $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)$ est continu de $\mathscr{S}$ dans lui-même. Le point essentiel pour la suite est que $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)$ opère également sur les distributions à spectre compact.

Proposition 4.3. *Soient $\sigma \in \Sigma_0^m$ et u une distribution tempérée à spectre compact. La formule*

$$\forall\,x \in \mathbb{R}^d\,, \quad \mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u\,(x) := \left\langle \frac{1}{(2\pi)^d}\,e^{ix\cdot}\,\sigma(x,\cdot,\gamma),\widehat{u}\right\rangle_{\mathscr{C}^\infty,\mathscr{E}'}$$

définit une fonction $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, bornée, à spectre compact. On a de plus

$$\text{Spectre } \mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d / \exists\,\eta \in \text{Supp } \widehat{u} \text{ t.q. } |\xi-\eta| \le \varepsilon(\gamma^2+|\eta|^2)^{1/2}\}\,,$$

ce dernier ensemble étant un compact de $\mathbb{R}^d$.

• **Remarque :** rappelons que σ est à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées $\mathscr{M}_N(\mathbb{C})$, ce qui explique la position inhabituelle de $\widehat{u}$ dans le crochet de dualité. Par ailleurs, la proposition s'applique aussi bien au cas où u est à valeurs dans $\mathbb{C}$ qu'au cas où u est à valeurs dans $\mathbb{C}^N$ ou encore dans $\mathscr{M}_N(\mathbb{C})$.

Preuve

Le fait que $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u$ soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ et bornée repose sur le "théorème de dérivation sous le crochet", voir [20], et sur les estimations (4.3).

Soit $K := \{\xi \in \mathbb{R}^d / \exists\,\eta \in \text{Supp } \widehat{u} \text{ t.q. } |\xi-\eta| \le \varepsilon(\gamma^2+|\eta|^2)^{1/2}\}$. Comme Supp $\widehat{u}$ est compact, K est fermé et borné dans $\mathbb{R}^d$, donc compact. On se donne une fonction f de

classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que Supp f et K soient disjoints. Il existe alors un voisinage V de Supp $\widehat{u}$ dans $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall\, \xi \in \text{ Supp } f\,, \quad \forall\, \eta \in V\,, \quad |\xi - \eta| > \varepsilon\,(\gamma^2 + |\eta|^2)^{1/2}\,.$$

Le "théorème d'intégration sous le crochet" (voir [20]) donne

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x)\,\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u(x) &= \left\langle \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot(\xi-\eta)}\, f(\xi)\, d\xi\right)\sigma(x,\eta,\gamma), \widehat{u}(\eta)\right\rangle_{\mathscr{C}^\infty,\mathscr{E}'} \\ &= \left\langle \frac{1}{(2\pi)^d}\,\widehat{\tau_\eta f}(x)\,\sigma(x,\eta,\gamma), \widehat{u}(\eta)\right\rangle_{\mathscr{C}^\infty,\mathscr{E}'}\end{aligned}$$

où $\tau_\eta f(\xi) := f(\xi+\eta)$. La fonction $\widehat{f}\,\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ (produit d'une fonction à décroissance rapide et d'une fonction bornée) et on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)\,\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{Q_k} \widehat{f}(x)\,\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u(x)\,dx\,,$$

avec $Q_k = [-k,k]^d$ (c'est une simple application du théorème de convergence dominée). Le "théorème d'intégration sous le crochet" donne

$$\int_{Q_k} \widehat{f}(x)\,\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u(x)\,dx = \left\langle \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{Q_k} \widehat{\tau_\eta f}(x)\,\sigma(x,\eta,\gamma)\,dx, \widehat{u}(\eta)\right\rangle_{\mathscr{C}^\infty,\mathscr{E}'}\,.$$

On vérifie alors que les fonctions F_k définies par

$$\forall\, \eta \in \mathbb{R}^d\,, \quad F_k(\eta) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{Q_k} \widehat{\tau_\eta f}(x)\,\sigma(x,\eta,\gamma)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{Q_k} e^{ix\cdot\eta}\,\widehat{f}(x)\,\sigma(x,\eta,\gamma)\,dx$$

convergent uniformément sur tout compact vers la fonction

$$F(\eta) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\tau_\eta f}(x)\,\sigma(x,\eta,\gamma)\,dx\,.$$

De même, les dérivées $\partial^\alpha F_k$ convergent uniformément sur tout compact vers $\partial^\alpha F$. Comme $\widehat{u}$ est à support compact, et donc d'ordre fini, on obtient par passage à la limite

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)\,\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u(x)\,dx = \langle F(\eta), \widehat{u}(\eta)\rangle_{\mathscr{C}^\infty,\mathscr{E}'}\,.$$

D'après l'hypothèse faite sur le support de f, on a

$$\text{Supp } \tau_\eta f = \text{ Supp } f - \eta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |\xi| > \varepsilon\,(\gamma^2 + |\eta|^2)^{1/2}\}$$

pour tout $\eta \in V$. Par ailleurs, la propriété spectrale (4.4) donne

$$\text{Supp } \mathscr{F}\sigma(\cdot,\eta,\gamma) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |\xi| \le \varepsilon\,(\gamma^2 + |\eta|^2)^{1/2}\}\,.$$

La fonction F est donc identiquement nulle sur V (voisinage de Supp $\widehat{u}$). On en déduit la relation d'orthogonalité

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)\,\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u(x)\,dx = 0\,,$$

qui assure que $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)u$ a son spectre contenu dans K.

□

La proposition 4.3 permet de montrer le résultat fondamental pour les symboles appartenant à la classe Σ_k^m:

Théorème 4.4. *Soient $\sigma \in \Sigma_0^m$ et $s \in \mathbb{R}$. L'opérateur $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)$ se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu de H_γ^{s+m} dans H_γ^s et la famille $\{\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)\}_{\gamma\geq 1}$ est d'ordre inférieur ou égal à m (voir la définition 4.3).*

Preuve

Soient $u \in \mathscr{S}$ et $\gamma \geq 1$. On applique à u la décomposition de Littlewood-Paley à paramètre:

$$u = \sum_{p\geq 0} \Delta_p^\gamma u\,, \qquad \text{(série convergente dans } H_\gamma^{s+m})$$

le premier terme $S_0^\gamma u$ étant nul. On écrit $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)\,\Delta_p^\gamma u = \mathrm{Op}^\gamma(\sigma_p)\,\Delta_p^\gamma u$, où σ_p est défini par

$$\forall\,(x,\xi,\gamma)\,,\quad \sigma_p(x,\xi,\gamma) := \chi(2^{-(p+2)}\xi, 2^{-(p+2)}\gamma)\sigma(x,\xi,\gamma)\,.$$

L'égalité $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)\,\Delta_p^\gamma = \mathrm{Op}^\gamma(\sigma_p)\,\Delta_p^\gamma$ se déduit simplement de l'identité

$$\forall\,(\xi,\gamma)\,,\quad \varphi(2^{-p}\xi, 2^{-p}\gamma)\,\chi(2^{-(p+2)}\xi, 2^{-(p+2)}\gamma) = \varphi(2^{-p}\xi, 2^{-p}\gamma)\,.$$

On montre alors l'estimation suivante:

$$\|\mathrm{Op}^\gamma(\sigma_p)\,\Delta_p^\gamma u\|_0 \leq C\,2^{pm}\,\|\Delta_p^\gamma u\|_0\,,$$

où C est une constante ne dépendant ni de p, ni de γ, ni de u. L'idée de la preuve (que nous ne détaillerons pas) est que $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma_p)$ est un opérateur pseudodifférentiel (à paramètre) d'ordre 0 dont le symbole est à support compact en (ξ,γ). Sa norme d'opérateur sur L^2 ne dépend donc que des quantités[3]

$$\|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma_p\|_{L^\infty}\,,\quad \alpha,\beta \in \{0,1\}^d\,,$$

et ces quantités sont majorées par $C\,2^{pm}$ indépendamment de γ. D'autre part, la proposition 4.3 assure que $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)\,\Delta_p^\gamma u$ a son spectre contenu dans la couronne

$$\{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } (1-\varepsilon)2^{p-1} \leq (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \leq (1+\varepsilon)2^{p+1}\}\,.$$

On utilise alors les propositions 4.2 et 4.1 ainsi que la densité de $\mathscr{S}$ dans H^{s+m} pour conclure (l'hypothèse $\varepsilon < 1$ se révèle ici indispensable, alors qu'elle ne sert pas dans la preuve de la proposition 4.3).

□

L'inclusion $\Sigma_k^m \subset \Sigma_0^m$, pour $k \in \mathbb{N}$, permet d'appliquer le théorème 4.4 à n'importe quel symbole $\sigma \in \Sigma_k^m$. On a donc achevé la première partie du programme que nous nous étions fixé.

• **Remarque :** la propriété spectrale (4.4) du symbole σ permet d'éviter les pathologies usuelles des opérateurs associés à des symboles dans la classe $S_{1,1}^m$. En effet, de tels opérateurs sont toujours continus de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$. En revanche, ils ne se prolongent (en général) en opérateurs continus de H^{s+m} dans H^s que si $s > 0$, voir [25, 51, 75]. Le théorème 4.4 assure en fait que l'opérateur $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma)$ appartient à l'algèbre de Bourdaud $\mathrm{Op}^\gamma\, S_{1,1}^m \cap (\mathrm{Op}^\gamma\, S_{1,1}^m)^*$ (voir [51, chapite IX] et les références citées).

3. On peut montrer cette assertion en utilisant la méthode décrite à l'exercice I.5.3 de [7].

Régularisation des symboles paradifférentiels

Il s'agit maintenant de mettre en place un procédé de régularisation permettant de passer de la classe Γ_k^m à la classe Σ_k^m. Cela se fait au moyen de fonctions de troncature "basses fréquences". On est ainsi conduit à la définition suivante:

Définition 4.6 (Fonction de troncature (admissible)). *Soit $\psi(\eta,\xi,\gamma)$ une fonction de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times[1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et telle que pour tous multi-entiers α,β, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ vérifiant*

$$\forall\,(\eta,\xi,\gamma),\quad |\partial_\eta^\alpha\partial_\xi^\beta\psi\,(\eta,\xi,\gamma)|\le C_{\alpha,\beta}\,\lambda^{-|\alpha|-|\beta|,\gamma}(\xi)\,.$$

On dira que ψ est une fonction de troncature s'il existe $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ tels que

$$\begin{aligned}\psi(\eta,\xi,\gamma)&=1\quad si\quad |\eta|\le\varepsilon_1(\gamma^2+|\xi|^2)^{1/2}\,,\\ \psi(\eta,\xi,\gamma)&=0\quad si\quad |\eta|\ge\varepsilon_2(\gamma^2+|\xi|^2)^{1/2}\,.\end{aligned}\tag{4.5}$$

On dira que ψ est une fonction de troncature <u>admissible</u> si de plus $\varepsilon_2<1$.

• **Exemple :** les fonctions χ et φ utilisées pour la décomposition de Littlewood-Paley permettent de construire une fonction de troncature admissible (qui servira de fonction de troncature de référence). En effet, pour $(\eta,\xi,\gamma)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times[1,+\infty[$, on pose

$$\psi_0(\eta,\xi,\gamma):=\sum_{p\ge0}\chi(2^{2-p}\eta,0)\,\varphi(2^{-p}\xi,2^{-p}\gamma)\,,\tag{4.6}$$

la somme ne comportant au maximum que deux termes non nuls. Alors ψ_0 est une fonction de troncature admissible (on peut prendre $\varepsilon_1=1/16$ et $\varepsilon_2=1/2$).

Lemme 4.1. *Soit ψ une fonction de troncature (pas nécessairement admissible). On note K^ψ la transformée de Fourier inverse de $\psi(\cdot,\xi,\gamma)$, c'est-à-dire*

$$\forall\,(x,\xi,\gamma)\,,\quad K^\psi(x,\xi,\gamma):=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot\eta}\,\psi(\eta,\xi,\gamma)\,d\eta\,.$$

Alors K^ψ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et l'application

$$(\xi,\gamma)\longmapsto\partial_\xi^\alpha K^\psi(\cdot,\xi,\gamma)$$

est continue de $\mathbb{R}^d\times[1,+\infty[$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ pour tout multi-entier α. De plus, il existe une constante $C_\alpha>0$ telle que

$$\forall\,(\xi,\gamma)\,,\quad \|\partial_\xi^\alpha K^\psi(\cdot,\xi,\gamma)\|_{L^1}\le C_\alpha\,\lambda^{-|\alpha|,\gamma}(\xi)\,.\tag{4.7}$$

On dira que K^ψ est le noyau régularisant associé à ψ.

Preuve

La fonction $\eta \mapsto \psi(\eta,\xi,\gamma)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et à support compact. Il est alors clair que l'application $x \mapsto K^\psi(x,\xi,\gamma)$ appartient à la classe de Schwartz $\mathscr{S}$. La différentiabilité de K^ψ par rapport à ses trois variables s'établit par le théorème de convergence dominée de Lebesgue: on a notamment le droit de dériver par rapport à ξ sous le signe $\int$.

La topologie sur $\mathscr{S}$ est définie par la famille de semi-normes

$$\sup_{\eta\in\mathbb{R}^d}\left[(1+|\eta|)^p\left|\partial^\beta\widehat{f}(\eta)\right|\right], \quad \beta\in\mathbb{N}^d, \quad p\in\mathbb{N},$$

et les propriétés de support (4.5) des fonctions de troncature permettent de montrer la continuité de l'application

$$(\xi,\gamma)\in\mathbb{R}^d\times[1,+\infty[\longmapsto \partial_\xi^\alpha K^\psi(\cdot,\xi,\gamma)\in\mathscr{S}.$$

Il ne reste donc plus qu'à établir les estimations (4.7). Ce sont des applications immédiates du lemme 4.2 ci-dessous. Nous énonçons ce lemme séparément car il nous sera encore utile par la suite.

□

Le lemme suivant peut être vu comme une version revisitée du théorème de Paley-Wiener (tout du moins de la partie facile de ce théorème) qu'on trouvera par exemple dans [86]. Il n'est donc pas surprenant que la preuve du lemme reprenne dans ses grandes lignes la preuve de ce théorème.

Lemme 4.2 (Estimations L^1). *Soit $\theta(\eta,\xi,\gamma)$ une fonction de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times[1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ par rapport à (η,ξ) et telle que*

$$\theta(\eta,\xi,\gamma)=0 \quad si \quad |\eta|\geq\delta\,(\gamma^2+|\xi|^2)^{1/2},$$

pour un certain $\delta>0$. On suppose de plus qu'il existe un réel m tel que pour tous multi-entiers α,β, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ vérifiant

$$\forall\,(\eta,\xi,\gamma),\quad |\partial_\eta^\alpha\partial_\xi^\beta\theta\,(\eta,\xi,\gamma)|\leq C_{\alpha,\beta}\,\lambda^{m-|\alpha|-|\beta|,\gamma}(\xi).$$

On définit $\Theta(\cdot,\xi,\gamma)$ comme la transformée de Fourier inverse de θ par rapport à sa première variable, c'est-à-dire

$$\forall\,(x,\xi,\gamma),\quad \Theta(x,\xi,\gamma):=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot\eta}\,\theta(\eta,\xi,\gamma)\,d\eta.$$

Alors pour tout multi-entier β, il existe une constante $C_\beta>0$ telle que

$$\forall\,(\xi,\gamma),\quad \|\partial_\xi^\beta\,\Theta\,(\cdot,\xi,\gamma)\|_{L^1}\leq C_\beta\,\lambda^{m-|\beta|,\gamma}(\xi). \tag{4.8}$$

Preuve

D'après les propriétés de support de $\theta(\cdot,\xi,\gamma)$, on a tout d'abord

$$|\Theta(x,\xi,\gamma)|\leq C_0\,\lambda^{m+d,\gamma}(\xi).$$

Soit α un multi-entier. En intégrant par parties, on obtient

$$x^\alpha\,\Theta(x,\xi,\gamma)=\frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot\eta}\,\partial_\eta^\alpha\theta(\eta,\xi,\gamma)\,d\eta,$$

et on en déduit qu'il existe une constante C_α telle que

$$|x^\alpha|\,|\Theta(x,\xi,\gamma)| \leq C_\alpha\,\lambda^{m+d-|\alpha|,\gamma}(\xi)\,.$$

En sommant sur les multi-entiers α de longueur $d+1$, on trouve

$$\left(1+\sum_{|\alpha|=d+1}\lambda^{|\alpha|,\gamma}(\xi)\,|x^\alpha|\right)|\Theta(x,\xi,\gamma)| \leq C_d\,\lambda^{m+d,\gamma}(\xi)\,.$$

Finalement, il existe une constante $C>0$ indépendante de (x,ξ,γ) telle que

$$|\Theta(x,\xi,\gamma)| \leq C\,\lambda^{m+d,\gamma}(\xi)\,\big(1+|x|\lambda^{1,\gamma}(\xi)\big)^{-(d+1)}\,,$$

ce qui donne (4.8) pour $|\alpha|=0$, après intégration et changement de variables. En appliquant ce résultat à $\partial_\xi^\beta\,\theta$, on obtient (4.8) pour tous les multi-entiers β.

□

Les noyaux K^ψ associés à des fonctions de troncature admissibles servent à passer de la classe des symboles Γ_k^m à la classe Σ_k^m: comme on peut s'y attendre, la régularisation va s'effectuer à l'aide d'une convolution.

Théorème 4.5. *Soit ψ une fonction de troncature* <u>*admissible*</u>*. L'application*

$$a \longmapsto \sigma_a^\psi(x,\xi,\gamma) := \int_{\mathbb{R}^d} K^\psi(x-y,\xi,\gamma)\,a(y,\xi,\gamma)\,dy$$

envoie Γ_k^m dans Σ_k^m pour tous $m\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}$ (le noyau K^ψ est défini au lemme 4.1). Si k est un entier <u>*non nul*</u>*, alors*

$$a\in\Gamma_k^m \quad\Longrightarrow\quad a-\sigma_a^\psi\in\Gamma_{k-1}^{m-1}\,.$$

Notamment, si ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions de troncature admissibles, $\sigma_a^{\psi_1}-\sigma_a^{\psi_2}\in\Sigma_{k-1}^{m-1}$ (en supposant toujours $k\neq 0$).

• **Remarque :** Les fonctions de troncature vérifient $\psi(0,\xi,\gamma)=1$, donc le procédé de régularisation décrit au théorème 4.5 laisse invariants les multiplicateurs de Fourier. Plus précisément, si $b(\xi,\gamma)$ est un symbole dans la classe Γ_0^m (en fait b appartient à toutes les classes Γ_k^m), le procédé de régularisation donne

$$\forall\,(\xi,\gamma)\,,\quad \sigma_b^\psi(\xi,\gamma)=b(\xi,\gamma)\,.$$

Preuve

Si $a\in\Gamma_0^m$, σ_a^ψ est la convolée d'une fonction dans L^1 et d'une fonction dans L^∞, donc on a l'estimation

$$\|\sigma_a^\psi(\cdot,\xi,\gamma)\|_{L^\infty} \leq \|a(\cdot,\xi,\gamma)\|_{L^\infty}\,\|K^\psi(\cdot,\xi,\gamma)\|_{L^1} \leq C_0\,\lambda^{m,\gamma}(\xi)\,.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure que σ_a^ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par rapport à ξ et que l'on peut dériver sous le signe $\int$. La formule de Leibniz et les estimations (4.7) sur K^ψ permettent de montrer que σ_a^ψ appartient à la classe Γ_0^m.

On montre ensuite que la transformée de Fourier (par rapport à la première variable) de σ_a^ψ est donnée par

$$\mathscr{F}(\sigma_a^\psi)(\eta,\xi,\gamma) = \psi(\eta,\xi,\gamma)\,\mathscr{F}(a)(\eta,\xi,\gamma)\,,$$

et donc Supp $\mathscr{F}(\sigma_a^\psi)(\cdot,\xi,\gamma) \subset \{\eta \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |\eta| \le \varepsilon_2(\gamma^2+|\xi|^2)^{1/2}\}$, ce qui montre l'appartenance de σ_a^ψ à la classe Σ_0^m car ψ est une fonction de troncature admissible.

À l'aide de changements de variables et d'intégrations par parties, on montre par récurrence (sur k) le résultat suivant:

$$\forall\, a \in \Gamma_k^m\,, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \le k\,, \qquad \partial_x^\alpha \sigma_a^\psi = \sigma_{\partial_x^\alpha a}^\psi\,.$$

On obtient ainsi $\sigma_a^\psi \in \Sigma_k^m$ pour tout $a \in \Gamma_k^m$.

Montrons maintenant le second point du théorème. Soit $a \in \Gamma_1^m$. On définit $b := a - \sigma_a^\psi \in \Gamma_1^m \subset \Gamma_0^m$, et on va montrer que $b \in \Gamma_0^{m-1}$. Pour cela, on considère la décomposition de Littlewood-Paley classique (i.e. sans paramètre) de $\partial_\xi^\alpha b\,(\cdot,\xi,\gamma)$, avec $\alpha \in \mathbb{N}^d$:

$$\partial_\xi^\alpha b\,(x,\xi,\gamma) = \underbrace{S_0(\partial_\xi^\alpha b)\,(x,\xi,\gamma)}_{b_{-1}} + \sum_{p\ge 0} \underbrace{\Delta_p(\partial_\xi^\alpha b)\,(x,\xi,\gamma)}_{b_p}\,.$$

Pour $p \ge 0$, on sait que

$$\widehat{b_p}\,(\eta,\xi,\gamma) = \partial_\xi^\alpha\left[\varphi(2^{-p}\eta,0)\,(1-\psi(\eta,\xi,\gamma))\,\widehat{a}(\eta,\xi,\gamma)\right]\,,$$

tandis que

$$\widehat{b_{-1}}\,(\eta,\xi,\gamma) = \partial_\xi^\alpha\left[\chi(\eta,0)\,(1-\psi(\eta,\xi,\gamma))\,\widehat{a}(\eta,\xi,\gamma)\right].$$

On a donc l'inclusion Supp $\widehat{b_p} \subset \{\eta \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |\eta| \le 2^{p+1}\}$ pour tout $p \ge -1$.

Soit ε_1 donné par la définition 4.6. Pour (ξ,γ) vérifiant $\varepsilon_1(\gamma^2+|\xi|^2)^{1/2} > 2^{p+1}$, on a $\widehat{b_p}(\cdot,\xi,\gamma) \equiv 0$. Ceci montre que les premiers termes dans la décomposition de $\partial_\xi^\alpha b$ (jusqu'à un certain rang) sont nuls. Plus précisément, si on définit J comme l'ensemble d'indices

$$J := \{p \ge -1 \text{ t.q. } 2^p \ge \frac{\varepsilon_1}{2}\,(\gamma^2+|\xi|^2)^{1/2}\}\,,$$

on obtient

$$\partial_\xi^\alpha b\,(x,\xi,\gamma) = \sum_{p\in J} b_p(x,\xi,\gamma)\,,$$

et on en déduit

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\alpha b\,(x,\xi,\gamma)| &\le \sum_{p\in J} \|b_p\,(\cdot,\xi,\gamma)\|_{L^\infty} \le \sum_{p\in J} 2^{-p}\,C_0\,\|\partial_\xi^\alpha b\|_{W^{1,\infty}} \\ &\le \sum_{p\in J} 2^{-p}\,C_0\,(\gamma^2+|\xi|^2)^{(m-|\alpha|)/2} \le C_1\,\lambda^{m-|\alpha|-1,\gamma}(\xi)\,.\end{aligned}$$

On a donc prouvé l'existence d'une constante C indépendante de (ξ,γ) vérifiant

$$\|\partial_\xi^\alpha\,(a-\sigma_a^\psi)\,(\cdot,\xi,\gamma)\|_{L^\infty} \le C\,\lambda^{m-|\alpha|-1,\gamma}(\xi)\,,$$

dès que $a \in \Gamma_1^m$. Cela montre que $a - \sigma_a^\psi \in \Gamma_0^{m-1}$.

La preuve du cas général $a \in \Gamma_k^m$, avec k non nul, se traite par récurrence.

□

Ce dernier résultat conclut la seconde partie du programme: si $a \in \Gamma_0^m$, on lui associe l'opérateur $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma_a^\psi)$, que l'on notera désormais $T_a^{\psi,\gamma}$. Cette famille d'opérateurs (qui dépend de γ) est d'ordre $\leq m$. Le théorème 4.5 assure que pour $a \in \Gamma_1^m$, la famille d'opérateurs $T_a^{\psi,\gamma}$ associée au symbole a est définie de manière unique modulo les familles d'opérateurs d'ordre $\leq (m-1)$. On peut donc se restreindre à une fonction de troncature admissible particulière: nous choisirons la fonction ψ_0 définie par (4.6).

Pour simplifier, on notera T_a^γ l'opérateur $T_a^{\psi_0,\gamma}$. Nous allons maintenant étudier plus précisément l'opérateur T_a^γ lorsque a est un symbole ne dépendant pas de (ξ, γ).

4.3.3 Lien avec le paraproduit

Remarquons tout d'abord que si $a \in L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{N\times N})$, on a

$$\sigma_a^{\psi_0}(x,\xi,\gamma) = \sum_{p\geq 0} S_{p-2}a\,(x)\,\varphi(2^{-p}\xi, 2^{-p}\gamma)\,,$$

et on obtient alors, pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^N)$, la relation

$$T_a^\gamma u = \sum_{p\geq 0} S_{p-2}a\,\Delta_p^\gamma u\,.$$

Le lecteur averti reconnaîtra la formule du paraproduit de Bony, voir [19]. Nous savons déjà que T_a^γ est borné dans L^2 (puisque a est de degré 0), et donc $a - T_a^\gamma$ est borné dans L^2. Les inégalités fondamentales sur les blocs dyadiques donnent l'estimation

$$\sum_{p\geq 0} \|S_{p-2}a\,\Delta_p^\gamma u\|_0^2 \leq C\,\|a\|_{L^\infty}^2 \sum_{p\geq 0} \|\Delta_p^\gamma u\|_0^2 \leq C\,\|a\|_{L^\infty}^2\,\|u\|_0^2\,.$$

On vérifie de plus qu'on a l'inclusion

$$\text{Spectre}\ \left[S_{p-2}a\,\Delta_p^\gamma u\right] \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } 2^{p-2} \leq (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \leq 2^{p+2}\}\,,$$

et la proposition 4.2 assure l'existence d'une constante C indépendante de a, u et γ, telle que

$$\|T_a^\gamma u\|_0 \leq C\,\|a\|_{L^\infty}\,\|u\|_0\,.$$

Cela assure l'existence d'une constante C telle que

$$\|au - T_a^\gamma u\|_0 \leq C\,\|a\|_{L^\infty}\,\|u\|_0\,. \tag{4.9}$$

L'estimation (4.9) peut être améliorée si le symbole a est supposé un peu plus régulier, par exemple dans $W^{1,\infty}$. Le théorème 4.6 ci-dessous majore de façon précise l'erreur que l'on commet en remplaçant la multiplication par a par la paramultiplication par a.

Théorème 4.6. *Soient $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\gamma \geq 1$. Alors on a*

$$\|a\,u - T_a^\gamma u\|_0 \leq \frac{C}{\gamma}\,\|a\|_{W^{1,\infty}}\,\|u\|_0\,, \tag{4.10}$$

$$\|a\,\partial_{x_j} u - T_a^\gamma(\partial_{x_j} u)\|_0 \leq C\,\|a\|_{W^{1,\infty}}\,\|u\|_0\,, \tag{4.11}$$

pour une certaine constante C indépendante de (a, u, γ).

Preuve

Soient $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En utilisant la formule du paraproduit, on montre la relation

$$a\,u - T_a^\gamma u = \sum_{p\geq -2} \Delta_p a\, S_{p+3}^\gamma u\,.$$

On sait que $S_{p+3}^\gamma u$ est nulle dès que $\gamma > 2^{p+3}$ (on le voit en regardant le spectre de $S_{p+3}^\gamma u$). On obtient alors

$$\begin{aligned}\|a\,u - T_a^\gamma u\|_0 &\leq \sum_{2^p\geq 2^{-3}\gamma} \|\Delta_p a\|_{L^\infty}\, \|S_{p+3}^\gamma u\|_0 \leq \sum_{2^p\geq 2^{-3}\gamma} \|\Delta_p a\|_{L^\infty}\, \|u\|_0 \\ &\leq \sum_{2^p\geq 2^{-3}\gamma} C_0\, 2^{-p} \|a\|_{W^{1,\infty}}\, \|u\|_0 \leq \frac{C_1}{\gamma}\, \|a\|_{W^{1,\infty}}\, \|u\|_0\,.\end{aligned}$$

L'estimation (4.10) s'obtient alors par densité de $\mathscr{S}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Montrons désormais (4.11). On se donne $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et on définit $b := \partial_{x_j} a$. En dérivant le paraproduit $T_a^\gamma u$, on obtient

$$\partial_{x_j}(T_a^\gamma u) = T_b^\gamma u + T_a^\gamma(\partial_{x_j} u)\,,$$

ce qui donne

$$a\,\partial_{x_j} u - T_a^\gamma(\partial_{x_j} u) = \partial_{x_j}(a\,u - T_a^\gamma u) - (b\,u - T_b^\gamma u)\,.$$

Comme $b \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, la famille $\{b - T_b^\gamma\}_{\gamma\geq 1}$ est d'ordre ≤ 0 avec une norme d'opérateur inférieure à $C\,\|a\|_{W^{1,\infty}}$. On est ainsi ramené à l'étude du terme $\partial_{x_j}(a\,u - T_a^\gamma u)$. Écrivons

$$a\,u - T_a^\gamma u = \sum_{p\geq -2} \Delta_p a\, S_{p+3}^\gamma u = \sum_{p\geq -2} \Delta_p a \left[S_{p+3}^\gamma u - S_{p-2}^\gamma u\right] + \sum_{p\geq 3} \Delta_p a\, S_{p-2}^\gamma u\,.$$

On obtient alors

$$\partial_{x_j}(a\,u - T_a^\gamma u) = \partial_{x_j} \underbrace{\sum_{p\geq -2} \Delta_p a \left[S_{p+3}^\gamma u - S_{p-2}^\gamma u\right]}_{A_1} + \underbrace{\sum_{p\geq 3} \Delta_p a\, S_{p-2}^\gamma(\partial_{x_j} u)}_{A_2} + \underbrace{\sum_{p\geq 3} \Delta_p b\, S_{p-2}^\gamma u}_{A_3}\,,$$

grâce à la commutativité de ∂_{x_j} et S_p^γ et à la commutativité de ∂_{x_j} et Δ_p. Nous allons étudier séparément chacun des termes A_1, A_2, A_3.

<u>Étude du terme A_1.</u>
On remarque tout d'abord qu'on a l'inclusion

$$\text{Spectre } \left[\Delta_p a\,(S_{p+3}^\gamma u - S_{p-2}^\gamma u)\right] \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |\xi| \leq 10 \times 2^p\}$$

indépendamment de γ. On a de plus

$$\|\Delta_p a\,(S^\gamma_{p+3}u - S^\gamma_{p-2}u)\|_0^2 \le 5\,\|\Delta_p a\|^2_{L^\infty} \sum_{q=p-2}^{p+2} \|\Delta^\gamma_q u\|_0^2 \le C_0\,2^{-2p}\,\|a\|^2_{W^{1,\infty}} \sum_{q=p-2}^{p+2} \|\Delta^\gamma_q u\|_0^2\,,$$

et on obtient ainsi

$$\sum_{p\ge -2} 2^{2p}\,\|\Delta_p a\,(S^\gamma_{p+3}u - S^\gamma_{p-2}u)\|_0^2 \le C_1\,\|a\|^2_{W^{1,\infty}}\,\|u\|_0^2\,.$$

On en déduit[4] que le terme A_1 appartient à $H^1(\mathbb{R}^d)$, avec

$$\|A_1\|_1 \le C\,\|a\|_{W^{1,\infty}}\,\|u\|_0\,,$$

la constante C ne dépendant pas de (γ, a, u). Cela donne l'estimation souhaitée (dans $L^2(\mathbb{R}^d)$) du terme $\partial_{x_j} A_1$.

<u>Étude du terme A_2</u>.
Comme dans l'étude du terme A_1, on remarque tout d'abord qu'on a

$$\text{Spectre } S^\gamma_{p-2}(\partial_{x_j}u) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \le 2^{p-2}\} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |\xi| \le 2^{p-2}\}\,,$$
$$\text{Spectre } \Delta_p a \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } 2^{p-1} \le |\xi| \le 2^{p+1}\}\,,$$

et donc $\Delta_p a\, S^\gamma_{p-2}(\partial_{x_j}u)$ a son spectre dans la couronne $\{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } 2^{p-2} \le |\xi| \le 2^{p+2}\}$, quelle que soit la valeur de γ. On a de plus

$$\begin{aligned}\|\Delta_p a\, S^\gamma_{p-2}(\partial_{x_j}u)\|_0 &\le \sum_{q=0}^{p-3} \|\Delta_p a\|_{L^\infty}\,\|\partial_{x_j}\Delta^\gamma_q u\|_0 \le C_0\,\|a\|_{W^{1,\infty}} \sum_{q=0}^{p-3} 2^{q-p}\|\Delta^\gamma_q u\|_0 \\ &\le C_0\,\|a\|_{W^{1,\infty}} \sum_{q=0}^{p} 2^{q-p}\|\Delta^\gamma_q u\|_0 =: C_0\,\|a\|_{W^{1,\infty}}\,\rho_p\,,\end{aligned}$$

en utilisant une nouvelle fois la commutativité des opérateurs ∂_{x_j} et Δ^γ_q. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\rho_p^2 \le \left(\sum_{q=0}^{p} 2^{q-p}\right)\left(\sum_{q=0}^{p} 2^{q-p}\,\|\Delta^\gamma_q u\|_0^2\right) \le 2\sum_{q=0}^{p} 2^{q-p}\,\|\Delta^\gamma_q u\|_0^2\,,$$

ce qui donne, après sommation, l'inégalité

$$\sum_{p\ge 3} \|\Delta_p a\, S^\gamma_{p-2}(\partial_{x_j}u)\|_0^2 \le C_1\,\|a\|^2_{W^{1,\infty}}\,\|u\|_0^2\,.$$

On en déduit (encore par la proposition A.3) que le terme A_2 appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$ et qu'il existe une constante C (indépendante de γ, a, u) telle que

$$\|A_2\|_0 \le C\,\|a\|_{W^{1,\infty}}\,\|u\|_0\,.$$

4. Voir la proposition A.3 de l'annexe A.

Étude du terme A_3.

Le spectre de $\Delta_p b\, S^\gamma_{p-2} u$ est contenu dans la couronne $\{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } 2^{p-2} \leq |\xi| \leq 2^{p+2}\}$ (on applique le même raisonnement que celui effectué pour le terme A_2). Il s'agit donc d'obtenir une estimation sur la quantité

$$\sum_{p\geq 3} \|\Delta_p b\, S^\gamma_{p-2} u\|_0^2 \,.$$

L'estimation cherchée repose sur trois résultats que nous énonçons tout de suite:

Lemme 4.3. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On définit deux fonctions u_* et u^* par*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad u_*(x) := \sup_{p\geq 0} \sup_{|y-x|\leq 2^{-p}} |S^\gamma_p u(y)|\,,$$
$$u^*(x) := \sup_{R>0} \frac{1}{R^d} \int_{\mathscr{B}(x,R)} |u(z)|\, dz\,.$$

Alors il existe une constante C indépendante de (u,γ) telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad u_*(x) \leq C\, u^*(x)\,.$$

Théorème 4.7 (Hardy-Littlewood-Wiener). *Soit $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ avec $1 < q \leq +\infty$. On définit la fonction maximale de u, notée u^*, par*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad u^*(x) := \sup_{R>0} \frac{1}{R^d} \int_{\mathscr{B}(x,R)} |u(z)|\, dz\,.$$

Alors $u^* \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et il existe $C(q,d) > 0$ (ne dépendant que de q et de d) telle que

$$\forall\, u \in L^q(\mathbb{R}^d)\,, \quad \|u^*\|_{L^q} \leq C(q,d)\, \|u\|_{L^q}\,.$$

Théorème 4.8. *Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On suppose que la fonction v_* définie par*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad v_*(x) := \sup_{p\geq 0} \sup_{|y-x|\leq 2^{-p}} |v_p(y)|$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une constante $C > 0$, ne dépendant ni de f ni de la suite (v_p), telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{p\geq 0} |\Delta_p f(x)\, v_p(x)|^2\, dx \leq C\, \|f\|^2_{L^\infty}\, \|v_*\|_0^2\,.$$

Montrons comment ces trois résultats donnent l'estimation cherchée. On veut appliquer le théorème 4.8 à la fonction b et à la suite $(v_p := S^\gamma_{p-2} u)_{p\geq 3}$. Par définition, on a

$$v_*(x) = \sup_{p\geq 3} \sup_{|y-x|\leq 2^{-p}} |S^\gamma_{p-2} u(y)| \leq \sup_{p\geq 3} \sup_{|y-x|\leq 2^{2-p}} |S^\gamma_{p-2} u(y)| = u_*(x)\,.$$

Le lemme 4.3 et le théorème 4.7 assurent que la fonction v_* est dans L^2, avec une norme majorée par $C\,\|u\|_0$. Le théorème 4.8 permet de conclure qu'il existe une constante C (indépendante de a, u et γ) telle que

$$\sum_{p\geq 3} \|\Delta_p b\, v_p\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{p\geq 3} |\Delta_p b(x)\, v_p(x)|^2\, dx \leq C\, \|a\|_{W^{1,\infty}}^2\, \|u\|_0^2\,.$$

On applique à nouveau la proposition A.3 pour conclure.

□

La preuve des trois résultats précédents fait l'objet de l'annexe B. On renvoie à [104] pour des résultats supplémentaires sur le théorème de Hardy-Littlewood-Wiener. Le théorème 4.8 est un énoncé relatif aux mesures de Carleson, voir [25].

• **Remarque importante:** En reprenant la preuve du théorème 4.6, on voit que l'on a montré qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $a \in W^{1,\infty}$ et pour tout $u \in L^2$, on ait

$$\|a\,u - T_a^\gamma u\|_0 \leq \frac{C}{\gamma}\, \|a\|_{W^{1,\infty}}\, \|u\|_0 \quad \text{et} \quad \|\partial_{x_j}(a\,u - T_a^\gamma u)\|_0 \leq C\, \|a\|_{W^{1,\infty}}\, \|u\|_0\,,$$

la constante C étant indépendante de $\gamma \geq 1$. Cela donne l'estimation

$$\|a\,u - T_a^\gamma u\|_{1,\gamma} \leq C\, \|a\|_{W^{1,\infty}}\, \|u\|_0\,.$$

L'opérateur $a - T_a^\gamma$ est donc "1-régularisant" avec une norme d'opérateur majorée par $C\,\|a\|_{W^{1,\infty}}$. Notons que le symbole $a - \sigma_a^{\psi_0}$ appartient à la classe Γ_0^{-1} (car $a \in \Gamma_1^0$) ce qui permettait d'espérer (sans pour autant le prouver) le résultat du théorème 4.6.

4.3.4 Calcul symbolique

On s'intéresse dans ce paragraphe au comportement des opérateurs paradifférentiels vis-à-vis de la composition et de l'adjonction. Pour $a \in \Gamma_0^m$ et ψ une fonction de troncature admissible, on rappelle que $T_a^{\psi,\gamma}$ désigne l'opérateur (à paramètre) $\mathrm{Op}^\gamma(\sigma_a^\psi)$.

Théorème 4.9. *Soient $a \in \Gamma_1^m$ et $b \in \Gamma_1^{m'}$. Alors $ab \in \Gamma_1^{m+m'}$ et pour toute fonction de troncature admissible ψ, la famille $\{T_a^{\psi,\gamma} \circ T_b^{\psi,\gamma} - T_{ab}^{\psi,\gamma}\}_{\gamma\geq 1}$ est d'ordre $\leq m + m' - 1$.*

Preuve

L'appartenance de ab à $\Gamma_1^{m+m'}$ se montre à l'aide de la formule de Leibniz. On remarque ensuite que si ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions de troncature admissibles, la famille

$$\Big\{ (T_a^{\psi_1,\gamma} \circ T_b^{\psi_1,\gamma} - T_{ab}^{\psi_1,\gamma}) - (T_a^{\psi_2,\gamma} \circ T_b^{\psi_2,\gamma} - T_{ab}^{\psi_2,\gamma}) \Big\}_{\gamma\geq 1}$$

est d'ordre $\leq m + m' - 1$. Il suffit donc de prouver le théorème pour une seule fonction de troncature admissible (choisie à notre convenance). On se donne une fonction de troncature admissible ψ telle que la constante ε_2 intervenant dans la définition 4.6 vérifie $4\varepsilon_2 < 1$. On note σ_a, σ_b et σ_{ab} les symboles régularisés associés aux symboles a, b et ab.

Définissons une fonction σ par la formule

$$\forall\,(x,\xi,\gamma)\,, \quad \sigma(x,\xi,\gamma) := e^{-ix\cdot\xi}\, T_a^{\psi,\gamma}(\rho_{\xi,\gamma})(x) \quad \text{avec} \quad \rho_{\xi,\gamma}(x) := e^{ix\cdot\xi}\, \sigma_b(x,\xi,\gamma)\,.$$

La fonction σ ainsi définie est le symbole de l'opérateur $T_a^{\psi,\gamma} \circ T_b^{\psi,\gamma}$, voir [51]. Nous allons montrer tout d'abord que $\sigma \in \Sigma_0^{m+m'}$, puis que $\sigma - \sigma_a \sigma_b \in \Sigma_0^{m+m'-1}$.

Comme $\sigma_b(\cdot, \xi, \gamma)$ est à spectre compact, il en est de même pour $\rho_{\xi,\gamma}$. La fonction $T_a^{\psi,\gamma}(\rho_{\xi,\gamma})$ est alors donnée (proposition 4.3) par

$$\begin{aligned} T_a^{\psi,\gamma}(\rho_{\xi,\gamma})(x) &= \left\langle (2\pi)^{-d}\, e^{ix\cdot\eta}\, \sigma_a(x,\eta,\gamma), \widehat{\rho_{\xi,\gamma}}(\eta) \right\rangle \\ &= \left\langle (2\pi)^{-d}\, e^{ix\cdot\eta}\, \sigma_a(x,\eta,\gamma), \widehat{\sigma}_b(\eta-\xi,\xi,\gamma) \right\rangle , \end{aligned}$$

et on obtient finalement

$$\sigma(x,\xi,\gamma) = \left\langle (2\pi)^{-d}\, e^{ix\cdot\eta}\, \sigma_a(x,\eta+\xi,\gamma), \widehat{\sigma}_b(\eta,\xi,\gamma) \right\rangle .$$

La proposition 4.3 assure que le spectre de $T_a^{\psi,\gamma}(\rho_{\xi,\gamma})$ est contenue dans le compact

$$K := \left\{ \eta \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } \exists\, \eta' \in \mathscr{B}(\xi, \varepsilon_2 \lambda^{1,\gamma}(\xi)) \quad |\eta - \eta'| \le \varepsilon_2 (\gamma^2 + |\eta'|^2)^{1/2} \right\} .$$

Ainsi $\sigma(\cdot, \xi, \gamma)$ est à spectre compact et son spectre est contenu dans le translaté $K - \xi$. Soit alors $\eta \in K$ et $\eta' \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$|\eta' - \xi| \le \varepsilon_2 (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad |\eta - \eta'| \le \varepsilon_2 (\gamma^2 + |\eta'|^2)^{1/2} .$$

On a

$$\begin{aligned} |\eta - \xi|^2 \le 2|\eta - \eta'|^2 + 2|\eta' - \xi|^2 &\le 2\varepsilon_2^2 \left(\gamma^2 + 2|\xi|^2 + 2|\eta' - \xi|^2\right) + 2\varepsilon_2^2\, \lambda^{2,\gamma}(\xi) \\ &\le 2\varepsilon_2^2 \left(3\gamma^2 + 4|\xi|^2\right) + 2\varepsilon_2^2\, \lambda^{2,\gamma}(\xi) \le 16\varepsilon_2^2\, \lambda^{2,\gamma}(\xi) . \end{aligned}$$

Cela montre que le spectre de $\sigma(\cdot, \xi, \gamma)$ est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon $4\varepsilon_2 \lambda^{1,\gamma}(\xi)$; en d'autres termes, σ vérifie la propriété spectrale (4.4). Nous allons maintenant montrer que $\sigma \in \Gamma_0^{m+m'}$.

On se fixe α_1 et α_2 tels que $4\varepsilon_2 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, et on se donne une fonction de troncature admissible θ "associée" à α_1, α_2. Comme $\widehat{\sigma}_b(\cdot, \xi, \gamma)$ est à support dans la boule de centre 0 de rayon $\varepsilon_2\, \lambda^{1,\gamma}(\xi)$ (ce qui donne $\theta\, \widehat{\sigma}_b = \widehat{\sigma}_b$), on obtient

$$\begin{aligned} \sigma(x,\xi,\gamma) &= \int_{\mathbb{R}^d} H(x, x-y, \xi, \gamma)\, \sigma_b(y,\xi,\gamma)\, dy \\ \text{avec} \quad H(x,z,\xi,\gamma) &:= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iz\cdot\eta}\, \sigma_a(x, \xi+\eta, \gamma)\, \theta(\eta,\xi,\gamma)\, d\eta . \end{aligned}$$

On veut appliquer le lemme 4.2 d'estimations L^1 à la fonction

$$\widetilde{\theta}(x,\eta,\xi,\gamma) := \sigma_a(x, \eta+\xi, \gamma)\, \theta(\eta,\xi,\gamma) .$$

Notons que lorsque $\eta \in \operatorname{Supp} \theta(\cdot, \xi, \gamma)$, on a l'encadrement

$$(1-\alpha_2)\, \lambda^{1,\gamma}(\xi) \le (\gamma^2 + |\xi+\eta|^2)^{1/2} \le (1+\alpha_2)\, \lambda^{1,\gamma}(\xi) .$$

À l'aide de cet encadrement, on montre que $\widetilde{\theta}$ vérifie toutes les hypothèses du lemme 4.2 (la variable x étant vue ici comme un paramètre supplémentaire). Cela permet d'obtenir des bornes du type

$$\forall\, (x,\xi,\gamma) , \quad \|\partial_\xi^\beta H(x, \cdot, \xi, \gamma)\|_{L^1} \le C_\beta\, \lambda^{m-|\beta|,\gamma}(\xi) .$$

On obtient l'appartenance du symbole σ à la classe $\Gamma_0^{m+m'}$ à l'aide du théorème de convergence dominée. Comme σ vérifie la propriété spectrale (4.4), on a bien $\sigma \in \Sigma_0^{m+m'}$.

Montrons maintenant que $\sigma - \sigma_a\sigma_b \in \Sigma_0^{m+m'-1}$. Comme on a supposé $4\varepsilon_2 < 1$, le symbole $\sigma_a\sigma_b$ vérifie la propriété spectrale (4.4), donc appartient à la classe $\Sigma_0^{m+m'}$. En appliquant la formule de Taylor à la fonction $\sigma_a(x,\cdot,\gamma)$ au point ξ, on trouve

$$\sigma(x,\xi,\gamma) = \sigma_a(x,\xi,\gamma)\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}^{-1}(\theta(\cdot,\xi,\gamma))(x-y)\,\sigma_b(y,\xi,\gamma)\,dy \\ + \sum_{j=1}^d \frac{1}{i}\int_{\mathbb{R}^d} G_j(x,x-y,\xi,\gamma)\,(\partial_{x_j}\sigma_b)(y,\xi,\gamma)\,dy\,,$$

les fonctions $G_j(x,z,\xi,\gamma)$ étant données par

$$G_j(x,z,\xi,\gamma) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{iz\cdot\eta}\left[\int_0^1 \partial_{\xi_j}\sigma_a(x,\xi+t\eta,\gamma)\,dt\right]\theta(\eta,\xi,\gamma)\,d\eta\,.$$

Remarquons tout d'abord qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}^{-1}(\theta(\cdot,\xi,\gamma))(x-y)\,\sigma_b(y,\xi,\gamma)\,dy = \left[\mathscr{F}^{-1}(\theta(\cdot,\xi,\gamma)) * \sigma_b(\cdot,\xi,\gamma)\right](x) \\ = \mathscr{F}^{-1}\left[\theta(\cdot,\xi,\gamma)\,\widehat{\sigma}_b(\cdot,\xi,\gamma)\right](x) = \mathscr{F}^{-1}\left[\widehat{\sigma}_b(\cdot,\xi,\gamma)\right](x) = \sigma_b(x,\xi,\gamma)\,.$$

En reportant ci-dessus, on obtient

$$(\sigma - \sigma_a\sigma_b)(x,\xi,\gamma) = \sum_{j=1}^d \frac{1}{i}\int_{\mathbb{R}^d} G_j(x,x-y,\xi,\gamma)\,(\partial_{x_j}\sigma_b)(y,\xi,\gamma)\,dy.$$

En utilisant à nouveau le lemme 4.2, on montre les estimations

$$\forall\,(x,\xi,\gamma)\,,\quad \|\partial_\xi^\beta G_j(x,\cdot,\xi,\gamma)\|_{L^1} \le C_\beta\,\lambda^{m-1-|\beta|,\gamma}(\xi)\,,$$

ce qui permet de conclure que $\sigma - \sigma_a\sigma_b \in \Sigma_0^{m+m'-1}$.

Comme $a \in \Gamma_1^m$ et $b \in \Gamma_1^{m'}$, le théorème 4.5 assure que

$$a - \sigma_a \in \Gamma_0^{m-1}\,,\quad b - \sigma_b \in \Gamma_0^{m'-1} \quad \text{et} \quad ab - \sigma_{ab} \in \Gamma_0^{m+m'-1}\,.$$

On obtient ainsi $\sigma_a\sigma_b - \sigma_{ab} \in \Gamma_0^{m+m'-1}$, et donc $\sigma - \sigma_{ab} \in \Gamma_0^{m+m'-1}$. On sait de plus que σ et σ_{ab} vérifient la propriété spectrale (4.4), ce qui donne $\sigma - \sigma_{ab} \in \Sigma_0^{m+m'-1}$. Le théorème 4.4 permet de conclure.

□

On étudie maintenant les adjoints des opérateurs paradifférentiels. Rappelons que si $\{P^\gamma\}_{\gamma\ge1}$ est d'ordre $\le m$, la famille des adjoints $\{(P^\gamma)^*\}_{\gamma\ge1}$ est également d'ordre $\le m$.

Théorème 4.10. *Soit $a \in \Gamma_1^m$. Alors la famille $\{(T_a^{\psi,\gamma})^* - T_{a^*}^{\psi,\gamma}\}_{\gamma\ge1}$ est d'ordre $\le (m-1)$ pour toute fonction de troncature admissible ψ. On rappelle que a^* désigne l'adjoint de a au sens usuel pour les matrices.*

Preuve

Là encore, il suffit de montrer le théorème pour une seule fonction de troncature admissible ψ: on choisit $\psi(\eta,\xi,\gamma)$ paire par rapport à η, et telle que $2\varepsilon_2 < 1$ (on rappelle que ψ est une fonction positive, voir la définition 4.6). Comme K^ψ est alors à valeurs réelles, on obtient l'égalité $(\sigma_a)^* = \sigma_{a^*}$ (on oublie de rappeler ψ en exposant dans les symboles régularisés pour alléger les écritures). Par ailleurs, le symbole σ de l'opérateur $(T_a^{\psi,\gamma})^*$ est donné (voir [51]) par

$$\widehat{\sigma}(\eta,\xi,\gamma) = \widehat{\sigma_a^*}(\eta,\eta+\xi,\gamma)\,.$$

Nous allons vérifier que σ satisfait la propriété spectrale (4.4). On remarque tout d'abord que le spectre de $\sigma(\cdot,\xi,\gamma)$ est inclus dans l'ensemble

$$K := \{\eta \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |\eta| \le \varepsilon_2\,(\gamma^2 + |\xi+\eta|^2)^{1/2}\}\,.$$

Comme $2\varepsilon_2 < 1$, on en déduit que pour tout $\eta \in K$, on a

$$|\eta| \le \varepsilon_2\,(\gamma^2+|\xi|^2)^{1/2} + \varepsilon_2\,|\eta| \quad \text{et donc} \quad |\eta| \le 2\varepsilon_2\,(\gamma^2+|\xi|^2)^{1/2}\,,$$

ce qui montre effectivement que σ satisfait la propriété spectrale (4.4). On se donne α_1 et α_2 vérifiant $2\varepsilon_2 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ et θ une fonction de troncature associée à α_1, α_2. Le symbole σ est alors donné par

$$\sigma(x,\xi,\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} H(x,y,\xi,\gamma)\,dy$$
$$\text{avec} \quad H(x,y,\xi,\gamma) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\eta}\,\sigma_{a^*}(y,\xi+\eta,\gamma)\,\theta(\eta,\xi,\gamma)\,d\eta.$$

On ne peut pas appliquer directement le lemme 4.2 (la variable y intervient à la fois dans le terme oscillant et dans le symbole σ_{a^*}). Néanmoins, les estimations satisfaites par σ_{a^*} et θ permettent d'aboutir aux mêmes estimations dans L^1 pour $\partial_\xi^\alpha\,H(x,\cdot,\xi,\gamma)$. De cette façon, on montre que $\sigma \in \Sigma_0^m$.

En appliquant la formule de Taylor à la fonction $\sigma_{a^*}(y,\cdot,\gamma)$ au point ξ, on trouve

$$\sigma(x,\xi,\gamma) = \sigma_{a^*}(x,\xi,\gamma) + \sum_{j=1}^d \frac{1}{i}\int_{\mathbb{R}^d} G_j(x,y,\xi,\gamma)\,dy$$
$$\text{avec} \quad G_j(x,y,\xi,\gamma) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\eta}\left[\int_0^1 (\partial_{\xi_j}\,\partial_{x_j}\,\sigma_{a^*})(y,\xi+t\eta,\gamma)\,dt\right]\theta(\eta,\xi,\gamma)\,d\eta.$$

Les estimations dans L^1 de $\partial_\xi^\alpha\,G_j(x,\cdot,\xi,\gamma)$ (obtenues en suivant la même démarche qu'au lemme 4.2) permettent de montrer que $\sigma - \sigma_{a^*} \in \Sigma_0^{m-1}$, et de conclure.

□

4.3.5 Inégalités de Gårding

On énonce l'analogue du théorème 4.3, c'est-à-dire l'inégalité de Gårding pour les opérateurs paradifférentiels à paramètre.

Théorème 4.11 (Inégalité de Gårding). *Soient $a \in \Gamma_1^{2m}$ et ψ une fonction de troncature admissible. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall\,(x,\xi,\gamma), \quad \mathrm{Re}\;a(x,\xi,\gamma) \ge c\,\lambda^{2m,\gamma}(\xi)\,I\,.$$

Alors il existe $\gamma_0 \geq 1$ tel que

$$\forall\, \gamma \geq \gamma_0\,, \quad \forall\, u \in H^m_\gamma(\mathbb{R}^d)\,, \quad \mathrm{Re}\,\langle T_a^{\psi,\gamma} u, u\rangle_{H^{-m},H^m} \geq \frac{c}{2}\,\|u\|^2_{m,\gamma}\,.$$

Preuve

On pose $\varepsilon := c/4$, et on définit un symbole σ par

$$\sigma(x,\xi,\gamma) := \ \mathrm{Re}\ a(x,\xi,\gamma) - (c-\varepsilon/2)\,\lambda^{2m,\gamma}(\xi)\,I\,.$$

On vérifie que $\sigma \in \Gamma_1^{2m}$ et que σ est à valeurs dans les matrices hermitiennes. Comme $a \in \Gamma_1^{2m}$, il existe une constante $C_0 > 0$ vérifiant

$$\forall\,(x,\xi,\gamma)\,, \quad \frac{\varepsilon}{2}\,\lambda^{2m,\gamma}(\xi) \leq \sigma(x,\xi,\gamma) \leq C_0\,\lambda^{2m,\gamma}(\xi)\,.$$

On se donne un contour circulaire Γ inclus dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\,\zeta > 0\}$, symétrique par rapport à l'axe réel et contenant le segment $[\varepsilon/2, C_0]$ dans son intérieur. On note $\sqrt{\cdot}$ la racine carrée complexe définie sur $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty,0]$ à valeurs dans $\{\mathrm{Re}\,\zeta > 0\}$. On sait alors (voir [57]) que l'unique racine carrée hermitienne définie positive (notée b) du symbole $\lambda^{-2m,\gamma}\,\sigma$ est donnée par la formule de Dunford

$$b = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \sqrt{\zeta}\,(\zeta - \lambda^{-2m,\gamma}\,\sigma)^{-1}\,d\zeta\,.$$

On montre alors à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue que b est un symbole dans la classe Γ_1^0, ce qui assure que le symbole σ admet une unique racine carrée hermitienne définie positive $s \in \Gamma_1^m$: le symbole s est égal à $\lambda^{m,\gamma}\,b$. Cela permet de décomposer Re a en

$$\mathrm{Re}\ a(x,\xi,\gamma) = (c-\varepsilon/2)\lambda^{2m,\gamma}(\xi)\,I + s(x,\xi,\gamma)^*\,s(x,\xi,\gamma)\,.$$

Rappelons que le symbole régularisé de $\lambda^{2m,\gamma}$ est exactement $\lambda^{2m,\gamma}$. On obtient ainsi

$$\frac{1}{2}\left(T_a^{\psi,\gamma} + T_{a^*}^{\psi,\gamma}\right) = (c-\varepsilon/2)\,\Lambda^{2m,\gamma} + T_{s^*s}^{\psi,\gamma}\,.$$

En appliquant les théorèmes 4.9 et 4.10 du calcul symbolique, on trouve

$$\mathrm{Re}\ T_a^{\psi,\gamma} = (c-\varepsilon/2)\,\Lambda^{2m,\gamma} + (T_s^{\psi,\gamma})^*\,T_s^{\psi,\gamma} + R^\gamma\,,$$

les restes $\{R^\gamma\}_{\gamma\geq 1}$ étant d'ordre $\leq (2m-1)$. Pour $u \in H^m_\gamma$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\ \langle T_a^{\psi,\gamma} u, u\rangle_{H^{-m},H^m} &= (c-\varepsilon/2)\,\|u\|^2_{m,\gamma} + \|T_s^{\psi,\gamma} u\|_0^2 + \mathrm{Re}\ \langle R^\gamma u, u\rangle_{H^{-m},H^m} \\
&\geq (c-\varepsilon/2)\,\|u\|^2_{m,\gamma} - \|u\|_{m,\gamma}\,\|R^\gamma u\|_{-m,\gamma} \\
&\geq (c-\varepsilon/2)\,\|u\|^2_{m,\gamma} - \varepsilon/2\,\|u\|^2_{m,\gamma} - 1/(2\varepsilon)\,\|R^\gamma u\|^2_{-m,\gamma} \\
&\geq (c-\varepsilon)\|u\|^2_{m,\gamma} - \frac{C'}{2\varepsilon}\|u\|^2_{m-1,\gamma}\,,
\end{aligned}$$

la constante C' ne dépendant pas de γ. Par ailleurs, on a $\gamma\|u\|_{m-1,\gamma} \leq \|u\|_{m,\gamma}$. En reportant la valeur de ε ($\varepsilon = c/4$), on en déduit l'inégalité

$$\mathrm{Re}\ \langle T_a^{\psi,\gamma} u, u\rangle_{L^2} \geq \left(\frac{3c}{4} - \frac{2C'}{c\,\gamma^2}\right)\|u\|^2_{m,\gamma}\,.$$

On pose $\gamma_0 := \max(1, \sqrt{8\,C'}/c)$. Pour $\gamma \geq \gamma_0$, on a donc

$$\mathrm{Re}\ \langle T_a^{\psi,\gamma} u, u\rangle_{L^2} \geq (\frac{3c}{4} - \frac{c}{4})\|u\|_{m,\gamma}^2 = \frac{c}{2}\,\|u\|_{m,\gamma}^2\,.$$

□

Il arrive parfois que le symbole ne soit positif que pour certaines valeurs des variables espace-fréquence. On dispose alors d'une version localisée du théorème 4.11. On renvoie à l'annexe de [74] pour la preuve.

Théorème 4.12 (Inégalité de Gårding localisée). *Soient $a \in \Gamma_1^{2m}$, $\chi \in \Gamma_1^0$ et ψ une fonction de troncature admissible. On suppose qu'il existe un symbole $\widetilde{\chi} \in \Gamma_1^0$ et une constante $c > 0$ telle que $\widetilde{\chi} \geq 0$, $\widetilde{\chi}\,\chi = \chi$ et*

$$\forall\,(x,\xi,\gamma), \quad \widetilde{\chi}^2(x,\xi,\gamma)\,\mathrm{Re}\ a(x,\xi,\gamma) \geq c\,\widetilde{\chi}^2(x,\xi,\gamma)\,\lambda^{2m,\gamma}(\xi)\,I\,.$$

Alors il existe $\gamma_0 \geq 1$ et $C > 0$ tels que

$$\forall\,\gamma \geq \gamma_0\,, \forall\,u \in H_\gamma^m(\mathbb{R}^d)\,, \quad \mathrm{Re}\ \langle T_a^{\psi,\gamma} T_\chi^{\psi,\gamma} u, T_\chi^{\psi,\gamma} u\rangle_{H^{-m},H^m} \geq \frac{c}{2}\,\|T_\chi^{\psi,\gamma} u\|_{m,\gamma}^2 - C\,\|u\|_{m-1,\gamma}^2\,.$$

4.3.6 Symboles réguliers et développements finis

Nous allons montrer comment des hypothèses de régularité supplémentaires sur les symboles permettent d'améliorer les résultats des thérorèmes 4.6, 4.9 et 4.10. Rappelons qu'un cran de régularité sur a faisait passer de l'estimation (4.9) aux estimations (4.10) et (4.11). Nous allons montrer qu'un cran de régularité supplémentaire sur a permet d'améliorer les estimations (4.10) et (4.11).

Théorème 4.13. *Soient $a \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\gamma \geq 1$. Alors on a les estimations*

$$\|a\,u - T_a^\gamma u\|_{1,\gamma} \leq \frac{C}{\gamma}\,\|a\|_{W^{2,\infty}}\,\|u\|_0\,, \tag{4.12}$$

$$\|a\,\partial_{x_j} u - T_a^\gamma(\partial_{x_j} u)\|_{1,\gamma} \leq C\,\|a\|_{W^{2,\infty}}\,\|u\|_0\,, \tag{4.13}$$

pour une certaine constante C indépendante de (a, u, γ).

Preuve

Elle est en tout point similaire à celle du théorème 4.6 à quelques détails près: pour estimer une norme du type $\|f\|_{1,\gamma}$, nous allons tâcher d'appliquer la proposition 4.2. On se donne $a \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Rappelons tout d'abord la formule

$$a\,u - T_a^\gamma u = \sum_{p \geq -2} \Delta_p a\, S_{p+3}^\gamma u\,.$$

Rappelons également que la fonction $S_{p+3}^\gamma u$ est nulle tant que $\gamma \geq 2^{p+3}$. Des deux inclusions

$$\mathrm{Spectre}\ (\Delta_p a) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } 2^{p-1} \leq |\xi| \leq 2^{p+1}\}\,,$$
$$\mathrm{Spectre}\ (S_{p+3}^\gamma u) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \leq 2^{p+3}\}\,,$$

on déduit

$$\text{Spectre } (\Delta_p a\, S^\gamma_{p+3} u) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \leq 10 \times 2^p\}\,.$$

On a de plus

$$\sum_{2^p \geq 2^{-3}\gamma} 2^{2p} \|\Delta_p a\, S^\gamma_{p+3} u\|_0^2 \leq \sum_{2^p \geq 2^{-3}\gamma} 2^{2p} \|\Delta_p a\|^2_{L^\infty} \|S^\gamma_{p+3} u\|_0^2$$
$$\leq \sum_{2^p \geq 2^{-3}\gamma} 2^{2p}\, 2^{-4p}\, C_0 \|a\|^2_{W^{2,\infty}} \|u\|_0^2 \leq \frac{C_1}{\gamma^2} \|a\|^2_{W^{2,\infty}} \|u\|_0^2\,.$$

On applique alors la proposition 4.2 pour obtenir (4.12).

Comme dans la preuve du théorème 4.6, on définit $b := \partial_{x_j} a \in W^{1,\infty}$. On écrit

$$a\, \partial_{x_j} u - T^\gamma_a(\partial_{x_j} u) = \partial_{x_j}(a\, u - T^\gamma_a u) - (b\, u - T^\gamma_b u)\,,$$

et le théorème 4.6 assure l'existence d'une constante C telle que

$$\|b\, u - T^\gamma_b u\|_{1,\gamma} \leq C \|b\|_{W^{1,\infty}} \|u\|_0 \leq C \|a\|_{W^{2,\infty}} \|u\|_0\,,$$

avec C indépendante de (a, u, γ). On se ramène à nouveau à l'étude du terme $\partial_{x_j}(a\, u - T^\gamma_a u)$, que l'on décompose en

$$\partial_{x_j}(a\, u - T^\gamma_a u) =$$
$$\partial_{x_j} \underbrace{\sum_{p \geq -2} \Delta_p a \left[S^\gamma_{p+3} u - S^\gamma_{p-2} u\right]}_{A_1} + \underbrace{\sum_{p \geq 3} \Delta_p a\, S^\gamma_{p-2}(\partial_{x_j} u)}_{A_2} + \underbrace{\sum_{p \geq 3} \Delta_p b\, S^\gamma_{p-2} u}_{A_3}\,,$$

et nous allons estimer séparément chacun des trois termes (dans les espaces H^2_γ ou H^1_γ).

<u>Étude du terme A_1</u>.
On remarque tout d'abord que

$$\text{Spectre } \left[\Delta_p a\, (S^\gamma_{p+3} u - S^\gamma_{p-2} u)\right] \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \leq 10 \times 2^p\}\,.$$

Comme $a \in W^{2,\infty}$, on a

$$\sum_{p \geq -2} 2^{4p} \|\Delta_p a\, (S^\gamma_{p+3} u - S^\gamma_{p-2} u)\|_0^2 \leq C_0 \|a\|^2_{W^{2,\infty}} \sum_{p \geq -2} \sum_{q=p-2}^{p+2} \|\Delta^\gamma_q u\|_0^2 \leq C_1 \|a\|^2_{W^{2,\infty}} \|u\|_0^2\,.$$

D'après la proposition 4.2, $A_1 \in H^2_\gamma$ et $\|A_1\|_{2,\gamma} \leq C \|a\|_{W^{2,\infty}} \|u\|_0$. On obtient ainsi

$$\|\partial_{x_j} A_1\|_{1,\gamma} \leq C \|a\|_{W^{2,\infty}} \|u\|_0\,.$$

<u>Étude du terme A_2</u>.

On sait que

$$\text{Spectre } (\Delta_p a\, S^\gamma_{p-2}\partial_{x_j} u) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \leq 3 \times 2^p\}\,.$$

On a de plus

$$\sum_{p\geq 3} 2^{2p}\, \|\Delta_p a\, S^\gamma_{p-2}(\partial_{x_j} u)\|_0^2 \leq C_0\, \|a\|^2_{W^{2,\infty}} \sum_{p\geq 3} 2^{-2p} \left(\sum_{q=0}^{p} \|\Delta^\gamma_q\, \partial_{x_j} u\|_0 \right)^2$$
$$\leq C_1\, \|a\|^2_{W^{2,\infty}} \sum_{p\geq 3} \left(\sum_{q=0}^{p} 2^{q-p} \|\Delta^\gamma_q u\|_0 \right)^2 \leq C_2\, \|a\|^2_{W^{2,\infty}}\, \|u\|_0^2\,.$$

On applique la proposition 4.2 pour conclure.

<u>Étude du terme A_3.</u>
Ce terme est défini par

$$A_3 := \sum_{p\geq 3} \Delta_p b\, S^\gamma_{p-2} u$$

et on sait que la fonction $S^\gamma_{p-2}u$ est nulle tant que $\gamma \geq 2^{p-2}$. On note donc p_0 le plus petit entier supérieur ou égal à 3 tel que $2^{p_0} \geq 4\gamma$. On obtient

$$\|A_3\|_0 \leq \sum_{p\geq p_0} \|\Delta_p b\|_{L^\infty}\, \|S^\gamma_{p-2} u\|_0 \leq C_0\, \|b\|_{W^{1,\infty}}\, \|u\|_0 \sum_{p\geq p_0} 2^{-p} \leq \frac{C_1}{\gamma}\, \|a\|_{W^{2,\infty}}\, \|u\|_0\,,$$

que nous écrirons plutôt

$$\gamma\, \|A_3\|_0 \leq C\, \|a\|_{W^{2,\infty}}\, \|u\|_0\,.$$

Comme $b \in W^{1,\infty}$, pour tout entier $k \in \{1, \ldots, d\}$, on a

$$\partial_{x_k} A_3 = \sum_{p\geq 3} \Delta_p(\partial_{x_k} b)\, S^\gamma_{p-2} u + \sum_{p\geq 3} \Delta_p b\, S^\gamma_{p-2}(\partial_{x_k} u)\,.$$

Nous avons montré dans la preuve du théorème 4.6 des estimations du type

$$\|\sum_{p\geq 3} \Delta_p(\partial_{x_k} b)\, S^\gamma_{p-2} u\|_0 \leq C\, \|\partial_{x_k} b\|_{L^\infty}\, \|u\|_0\,,$$
$$\|\sum_{p\geq 3} \Delta_p b\, S^\gamma_{p-2}(\partial_{x_k} u)\|_0 \leq C\, \|b\|_{W^{1,\infty}}\, \|u\|_0\,.$$

On en déduit l'inégalité

$$\|\partial_{x_k} A_3\|_0 \leq C\, \|a\|_{W^{2,\infty}}\, \|u\|_0\,,$$

et donc

$$\|A_3\|^2_{1,\gamma} = \gamma^2 \|A_3\|_0^2 + \sum_{k=1}^{d} \|\partial_{x_k} A_3\|_0^2 \leq C\, \|a\|^2_{W^{2,\infty}}\, \|u\|_0^2\,,$$

ce qui conclut la preuve de (4.13).

□

On énonce à présent le résultat analogue des théorèmes 4.9 et 4.10. Ce résultat est l'illustration du propos de Bony dans [19]: "Tout le calcul pseudo-différentiel classique (produit, adjoint, inverse, ...) s'étend aux opérateurs para-différentiels, le calcul symbolique étant fini et non pas asymptotique".

Théorème 4.14. *Soit $a \in \Gamma_2^m$ et $b \in \Gamma_2^{m'}$. Alors les familles*

$$\left\{ T_a^{\psi,\gamma} \circ T_b^{\psi,\gamma} - \left(T_{ab}^{\psi,\gamma} + T_{-i\sum_j \partial_{\xi_j} a\, \partial_{x_j} b}^{\psi,\gamma} \right) \right\}_{\gamma \geq 1}$$
$$\left\{ (T_a^{\psi,\gamma})^* - \left(T_{a^*}^{\psi,\gamma} + T_{-i\sum_j \partial_{\xi_j} \partial_{x_j} a^*}^{\psi,\gamma} \right) \right\}_{\gamma \geq 1}$$

sont respectivement d'ordre $\leq m + m' - 2$ et d'ordre $\leq m - 2$ (pour toute fonction de troncature admissible ψ). On notera que les termes des développements finis ne sont rien d'autre que les premiers termes des développements asymptotiques (4.1) *et* (4.2).

La preuve est entièrement similaire à celle des théorèmes 4.9 et 4.10. L'hypothèse de régularité sur les symboles permet de pousser le développement de Taylor un cran plus loin et donne le second terme dans le développement des opérateurs.

Pour des symboles $a \in \Gamma_2^m$ et $b \in \Gamma_2^{m'}$ qui <u>commutent</u>, on déduit du théorème 4.14 que le reste

$$\left[T_a^{\psi,\gamma}, T_b^{\psi,\gamma} \right] - T_{-i\{a,b\}}^{\gamma}$$

est d'ordre $\leq m + m' - 2$, où $\{a, b\}$ désigne le crochet de Poisson de a et b:

$$\{a, b\} := \sum_{j=1}^{d} \partial_{\xi_j} a\, \partial_{x_j} b - \partial_{\xi_j} b\, \partial_{x_j} a\,.$$

4.3.7 Petit récapitulatif

Après cet exposé assez détaillé de la théorie du calcul paradifférentiel, nous donnons un petit aide-mémoire des résultats que nous utiliserons par la suite. Comme nous aurons abondamment besoin des théorèmes du calcul symbolique (théorèmes 4.9 et 4.10), nous ne considèrerons que des symboles de régularité au moins égale à 1. En vue du résultat du théorème 4.5, on peut se restreindre à une fonction de troncature donnée: nous choisirons bien évidemment la fonction ψ_0 donnée par (4.6). Rappelons tout d'abord le processus que nous avons mis en place:

$$a \in \Gamma_1^m \quad \overset{\text{régularisation}}{\longrightarrow} \quad \underbrace{\sigma_a \in \Sigma_1^m}_{\text{symbole}} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{T_a^\gamma := \mathrm{Op}^\gamma(\sigma_a)}_{\text{opérateur d'ordre} \leq m} \quad .$$

On a alors les résultats suivants:

$$a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \|a\, \partial_{x_j} u - T_a^\gamma(\partial_{x_j} u)\|_0 \leq C\, \|a\|_{W^{1,\infty}}\, \|u\|_0$$
$$\|a\, u - T_a^\gamma u\|_{1,\gamma} \leq C\, \|a\|_{W^{1,\infty}}\, \|u\|_0 \quad \text{(1-régularisation)}\,.$$

$$a \in \Gamma_1^m\,, \quad b \in \Gamma_1^{m'}\,, \quad T_a^\gamma \circ T_b^\gamma = T_{ab}^\gamma + \text{reste d'ordre} \leq m + m' - 1, \quad \text{(composition)}\,,$$
$$a \in \Gamma_1^m\,, \quad (T_a^\gamma)^* = T_{a^*}^\gamma + \text{reste d'ordre} \leq m - 1, \quad \text{(adjoint)}\,.$$

Pour des symboles plus réguliers, on a

$$a \in \Gamma_2^m\,, \quad b \in \Gamma_2^{m'}\,, \quad T_a^\gamma \circ T_b^\gamma = T_{ab}^\gamma + T^\gamma_{-i\sum_j \partial_{\xi_j} a\, \partial_{x_j} b} \\ + \text{reste d'ordre} \leq m + m' - 2, \quad \text{(composition)}\,.$$

Lorsque a et b <u>commutent</u>, on en déduit

$$a \in \Gamma_2^m\,, \quad b \in \Gamma_2^{m'}\,, \quad T_a^\gamma \circ T_b^\gamma - T_b^\gamma \circ T_a^\gamma = T^\gamma_{-i\{a,b\}} \\ + \text{reste d'ordre} \leq m + m' - 2, \quad \text{(commutation)}\,.$$

Enfin, on a

$$a \in \Gamma_2^m\,, \quad (T_a^\gamma)^* = T_{a^*}^\gamma + T^\gamma_{-i\sum_j \partial_{\xi_j}\partial_{x_j} a^*} + \text{reste d'ordre} \leq m - 2, \quad \text{(adjoint)}\,.$$

4.4 Calcul dans un demi-espace

Les notions de symbole et d'opérateur paradifférentiels (à paramètre) sur $\mathbb{R}^d$ s'étendent sans trop de difficulté au demi-espace $\Omega = \mathbb{R}^d \times]0, +\infty[$. Un point générique de Ω sera noté $(x_0, \ldots, x_d)$.

En faisant un léger abus de notations, on désigne par Γ_k^m l'ensemble des symboles $a(x_0, \ldots, x_d, \xi, \gamma)$, définies sur $\Omega \times \mathbb{R}^d \times [1, +\infty[$, telles que l'application $x_d \mapsto a(\cdot, x_d, \cdot)$ soit bornée dans la classe Γ_k^m définie à la partie précédente. L'opérateur paradifférentiel T_a^γ est alors défini par la formule:

$$\forall\, u \in \mathscr{C}_c^\infty(\overline{\Omega})\,, \quad \forall\, x_d \geq 0\,, \quad (T_a^\gamma u)(\cdot, x_d) := T^\gamma_{a(x_d)} u(\cdot, x_d)\,.$$

Pour un tel calcul "tangentiel", les théorèmes de paralinéarisation 4.6 et 4.13 s'étendent immédiatement. Prenons par exemple le théorème 4.6. Si $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$, on peut voir a comme un symbole dans la classe Γ_1^0. Pour $u \in \mathscr{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$, on obtient

$$\begin{aligned} \|a\, u - T_a^\gamma u\|_0^2 &= \int_0^{+\infty} \|a(x_d)\, u(x_d) - T^\gamma_{a(x_d)} u(x_d)\|_0^2\, dx_d \\ &\lesssim \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{+\infty} \|a(x_d)\|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}\, \|u(x_d)\|_0^2\, dx_d \lesssim \frac{1}{\gamma^2}\, \|a\|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)}\, \|u\|_0^2\,, \end{aligned}$$

qui est l'analogue de (4.10). On vérifie de même que pour tout entier $j = 0, \ldots, d-1$ et pour tout $u \in \mathscr{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$, on a

$$\|a\, \partial_{x_j} u - T_a^\gamma \partial_{x_j} u\|_0 \lesssim \|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\, \|u\|_0\,.$$

Pour $j = d$, on n'a en revanche pas d'autre majoration possible que

$$\|a\, \partial_{x_d} u - T_a^\gamma \partial_{x_d} u\|_0 \lesssim \|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\, \|\partial_{x_d} u\|_0\,.$$

Il sera donc important de distinguer les variables tangentielles $x_0, \ldots, x_{d-1}$ de la variable normale x_d.

Chapitre 5

Chocs sous-compressifs multidimensionnels

Le but de ce chapitre est de démontrer en détails le théorème d'existence (locale en temps) de chocs sous-compressifs multidimensionnels, énoncé par Freistühler [39] en 1998, sous une hypothèse de stabilité uniforme. Pour être tout à fait précis, l'énoncé de Freistühler porte sur une donnée initiale régulière de part et d'autre d'une hypersurface compacte. Nous donnerons ici la preuve du résultat dans le cas d'une donnée initiale régulière de part et d'autre d'une hypersurface proche d'un hyperplan.

5.1 Description du problème

On se donne un système de n lois de conservation:

$$\sum_{j=0}^{d} \partial_{x_j} f_j(u) = 0\,. \tag{5.1}$$

Les variables d'espace sont notées $(x_1, \ldots, x_d)$ et appartiennent à l'espace $\mathbb{R}^d$. La variable de temps sera notée indifférement x_0 ou t. Les flux $f_0, \ldots, f_d$ sont des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ définies sur un ouvert $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n$ et sont à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que le flux f_0 est un $\mathscr{C}^\infty$ difféomorphisme de $\mathscr{U}$ sur son image. La matrice jacobienne de f_j au point u est notée $A_j(u)$. À titre d'exemple, les équations d'Euler (1.3), considérées aux chapitres 1 et 3, se mettent sous la forme (5.1).

On supposera la dimension de l'espace au moins égale à 2 et on fera dans tout ce chapitre l'hypothèse d'hyperbolicité à multiplicité constante:

Hypothèse 5.1. *Le symbole*

$$A(u,\xi) := \sum_{j=1}^{d} \xi_j\, A_0(u)^{-1}\, A_j(u) \tag{5.2}$$

est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ pour tout $u \in \mathscr{U}$, uniformément par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus 0$, avec des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{U} \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, de multiplicités fixes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Les valeurs propres sont arrangées de telle sorte que

$$\forall\, u \in \mathscr{U}\,, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\,, \quad \lambda_1(u,\xi) < \cdots < \lambda_m(u,\xi)\,.$$

Grâce au théorème de structure de blocs de Métivier [72], les systèmes à multiplicité constante forment un cadre approprié pour l'étude des problèmes mixtes ou des ondes de choc. Notons cependant que les équations de Lundquist en magnétohydrodynamique (qu'on trouvera par exemple dans [31]) ne vérifient pas l'hypothèse 5.1 et la question est toujours ouverte de savoir si ces équations vérifient ou non la structure de blocs définie par Majda [65].

Le but de ce chapitre est d'établir l'existence (locale en temps) de chocs sous-compressifs: une telle solution est une fonction u régulière de part et d'autre d'une hypersurface $\Gamma = \{x_d - \varphi(x_0, \ldots, x_{d-1}) = 0\}$ et vérifie les conditions de Rankine-Hugoniot

$$\sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j} \varphi \, [f_j(u)](\mathbf{x}) - [f_d(u)](\mathbf{x}) = 0 \tag{5.3}$$

en tout point $\mathbf{x} \in \Gamma$, ainsi que certaines conditions supplémentaires (nous y reviendrons). Pour alléger les écritures, on omettra désormais de préciser la dépendance en $\mathbf{x}$ du saut $[f_j(u)]$. Considérons tout d'abord le cas simple d'une solution constante de part et d'autre d'un hyperplan:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_r & \text{si } x_d > \sigma x_0 + \nu \cdot y, \\ u_l & \text{si } x_d < \sigma x_0 + \nu \cdot y, \end{cases} \tag{5.4}$$

où y est le vecteur composé des coordonnées spatiales tangentielles $y = (x_1, \ldots, x_{d-1})$, ν est un vecteur dans $\mathbb{R}^{d-1}$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ est la vitesse normale de propagation du front. Cette situation correspond à un front d'équation

$$\varphi(x_0, \ldots, x_{d-1}) = \sigma x_0 + \sum_{j=1}^{d-1} \nu_j x_j \, .$$

Clairement, $\mathbf{u}$ est solution faible de (5.1) si et seulement si φ satisfait (5.3), c'est-à-dire

$$\sigma \, [f_0(\mathbf{u})] + \sum_{j=1}^{d-1} \nu_j \, [f_j(\mathbf{u})] = [f_d(\mathbf{u})] \, .$$

Quitte à effectuer une rotation des axes de coordonnées, on peut supposer $\nu = 0$. En changeant la variable d'espace x_d en $x_d - \sigma t$, et le flux f_d en $f_d - \sigma f_0$, on peut également supposer que le choc est stationnaire, c'est-à-dire $\sigma = 0$. Remarquons que l'hypothèse 5.1 est invariante par changement de référentiel.

Nous allons maintenant discuter de l'admissibilité de la solution $\mathbf{u}$. Nous commencerons par supposer que $\mathbf{u}$ est non caractéristique; plus précisément, on fait l'hypothèse suivante:

Hypothèse 5.2. *Il existe deux entiers $p, q \in \{1, \ldots, m\}$ tels que*

$$\lambda_{q-1}(u_l, e_d) < 0 < \lambda_q(u_l, e_d) \quad \textit{et} \quad \lambda_p(u_r, e_d) < 0 < \lambda_{p+1}(u_r, e_d)$$

où $e_d := (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^d$ est le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$, et correspond à la direction de propagation de $\mathbf{u}$.

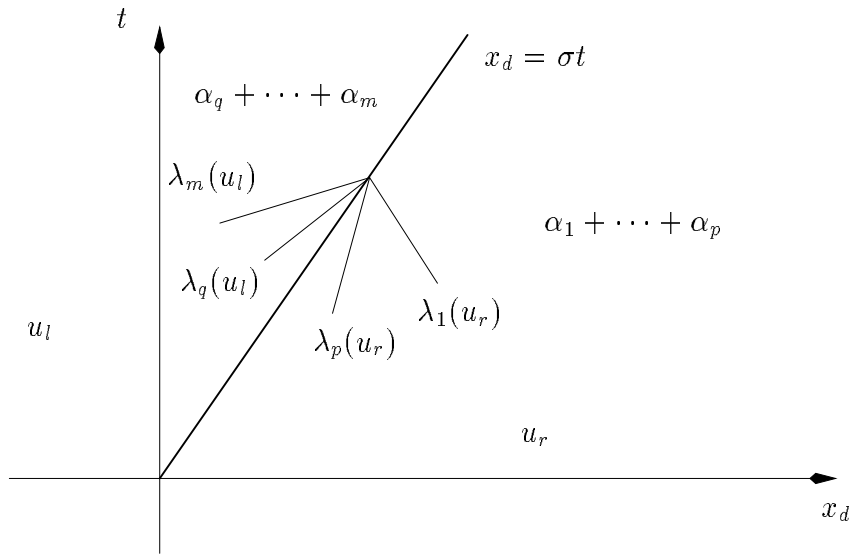


FIG. 5.1 – *Caractéristiques rentrant dans le choc*

Si $q = 1$ (resp. $p = m$) on ignore la première inégalité sur la gauche (resp. la seconde inégalité sur la droite). L'hypothèse 5.2 se traduit graphiquement par la figure 5.1 (on n'a pas supposé ici $\sigma = 0$).

En suivant l'analyse de Freistühler [38], on définit le nombre

$$\kappa := (\alpha_q + \cdots + \alpha_m) + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_p) - n\,, \tag{5.5}$$

qui mesure l'excès de caractéristiques rentrant dans le choc par rapport à n. La terminologie couramment employée est alors la suivante:

Définition 5.1. *Si $\kappa = 1$ (i.e. $p = q$ et λ_p valeur propre simple), on dit que* $\mathbf{u}$ *est un p-choc de Lax.*
Si $\kappa < 1$ (i.e. $p < q$), on dit que $\mathbf{u}$ *est un choc sous-compressif.*
Si $\kappa > 1$ (i.e. $p > q$), on dit que $\mathbf{u}$ *est un choc sur-compressif.*

En présence de chocs sous-compressifs, le problème de Riemann monodimensionnel associé à (5.1) admet en général plusieurs solutions distinctes. On renvoie par exemple à [53, 76, 95, 97]. Un critère d'admissibilité est donc nécessaire pour identifier les chocs sous-compressifs "physiquement admissibles". En dynamique des gaz ou en élastodynamique, divers critères ont été proposés, voir par exemple [101, 102, 110] et le chapitre 1 pour le critère visco-capillaire ou [30, 46] pour le critère de taux d'entropie. Nous ne rentrerons pas dans le choix du critère d'admissibilité et adopterons une approche "abstraite" qui motive la définition suivante:

Définition 5.2. *Soit* $\mathbf{u}$ *donné par* (5.4) *un choc sous-compressif. On dira que* $\mathbf{u}$ *est une discontinuité* **admissible** *si*

$$\begin{aligned} \sigma\,[f_0(\mathbf{u})] + \sum_{j=1}^{d-1} \nu_j\,[f_j(\mathbf{u})] - [f_d(\mathbf{u})] = 0\,, \\ g(u_l, u_r, \sigma, \nu) = 0\,, \end{aligned} \tag{5.6}$$

où $g : \mathscr{U} \times \mathscr{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}^{N-n}$ *est une fonction de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *fixée et* N *est un entier tel que*

$$N - n = 1 - \kappa \geq 1 .$$

Ainsi $N - n$ *compte le nombre de conditions de saut supplémentaires prescrites et* N *est le nombre total de conditions de saut.*

Le problème de l'existence de chocs sous-compressifs se formule, comme pour les chocs de Lax, en un problème à frontière libre (la fonction φ définissant le front fait partie des inconnues du problème). Nous nous ramenons premièrement à un domaine fixe via le changement de variables:

$$\Phi(x_0, \ldots, x_d) := (x_0, \ldots, x_{d-1}, x_d + \varphi(x_0, \ldots, x_{d-1})) .$$

Le changement de variables Φ envoie l'hyperplan $\{x_d = 0\}$ sur l'hypersurface Γ et les demi-espaces $\{\pm x_d > 0\}$ sur les deux régions délimitées par Γ. On effectue ensuite le changement de fonctions inconnues

$$\forall\, (x_0, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad u_\sharp(x_0, \ldots, x_d) := u(\Phi(x_0, \ldots, x_d)) ,$$

de sorte que $u_\sharp$ est régulière (disons de classe $\mathscr{C}^1$) de part et d'autre de $\{x_d = 0\}$ si et seulement si u est régulière de part et d'autre de Γ. En notant $u_\sharp^+$ (resp. $u_\sharp^-$) la restriction de $u_\sharp$ au demi-espace $\{x_d > 0\}$ (resp. $\{x_d < 0\}$), on vérifie aisément que u est une solution **admissible** de (5.1) si et seulement si $u_\sharp^+, u_\sharp^-, \varphi$ est une solution régulière du problème

$$\begin{cases} L(u_\sharp^\pm, \varphi)\, u_\sharp^\pm = 0 , & \pm\, x_d > 0 , \\ B(u_\sharp^+, u_\sharp^-, \varphi) = 0 , & x_d = 0 , \end{cases} \tag{5.7}$$

où les opérateurs L et B sont définis par

$$L(v, \psi)\, w := \sum_{j=0}^{d-1} A_j(v)\, \partial_{x_j} w + \widetilde{A_d}(v, \nabla\psi)\, \partial_{x_d} w \tag{5.8a}$$

$$\text{avec} \quad \widetilde{A_d}(v, \nabla\psi) := A_d(v) - \sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, A_j(v) \tag{5.8b}$$

$$B(w^+, w^-, \psi) := \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, [f_j(w)] - [f_d(w)] \\ \\ g(w^-, w^+, \partial_{x_0}\psi, \nabla_y\psi) \end{pmatrix} . \tag{5.8c}$$

En changeant la variable x_d en $-x_d$ dans l'équation d'évolution pour $u_\sharp^-$, on transforme le problème à frontière libre en un problème aux limites non linéaire dans le demi-espace $\{x_d > 0\}$. Les conditions sur le bord $\{x_d = 0\}$ sont données par les conditions de Rankine-Hugoniot et les conditions d'admissibilité. Le but de ce chapitre est d'établir le résultat suivant: sous une hypothèse de stabilité uniforme sur $\mathbf{u}$, le problème aux limites (5.7) admet une unique solution régulière (locale en temps) pour toute donnée initiale convenable $(u_\sharp^0, \varphi^0)$ proche de $\mathbf{u}$ [1]. Ce résultat, formulé par Freistühler [39], étend le travail de Majda au cadre des chocs sous-compressifs proposé dans [39]. Tout comme dans l'analyse de Majda, une part importante du présent travail consiste à établir la stabilité linéaire d'un choc (plan) vis-à-vis de petites perturbations.

1. Un énoncé rigoureux sera donné par la suite.

5.2 Le problème linéarisé à coefficients constants

5.2.1 Linéarisation des équations

On examine rapidement le problème linéarisé à coefficients constants pour établir les hypothèses principales. On fixe un choc sous-compressif $\mathbf{u}$ (avec $\nu = 0$ et $\sigma = 0$) et on définit les opérateurs linéarisés de la façon suivante: considérons la famille $u_s = \mathbf{u} + sv$ et $\varphi_s = s\psi$. Posons

$$\mathscr{L}_{\mathbf{u}}(v^{\pm}, \psi) := \frac{d}{ds} L(u_s^{\pm}, \varphi_s)\, u_s^{\pm}\,|_{s=0}\,, \tag{5.9a}$$

$$\mathscr{B}_{\mathbf{u}}(v, \psi) := \frac{d}{ds} B(u_s^{+}, u_s^{-}, \varphi_s)\,|_{s=0}\,. \tag{5.9b}$$

Comme $\mathbf{u}$ est constant de part et d'autre de l'hyperplan $\{x_d = 0\}$, les opérateurs linéarisés s'écrivent

$$\mathscr{L}_{\mathbf{u}}(v^{\pm}, \psi) = \mathscr{L}_{\mathbf{u}} v^{\pm} = \sum_{j=0}^{d} A_j(u_{r,l})\, \partial_{x_j} v^{\pm}\,, \quad \pm x_d > 0\,,$$

$$\mathscr{B}_{\mathbf{u}}(v, \psi) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\,[f_j(\mathbf{u})] - A_d(u_r)\, v^{+} + A_d(u_l)\, v^{-} \\ \\ \displaystyle\frac{\partial g}{\partial \sigma} \cdot \partial_{x_0}\psi + d_{\nu} g \cdot \nabla_y \psi + d_{u_r} g \cdot v^{+} + d_{u_l} g \cdot v^{-} \end{pmatrix} \quad x_d = 0\,.$$

On définit

$$\begin{aligned} b_0(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} [f_0(\mathbf{u})] \\ \partial g/\partial\sigma \end{pmatrix} \quad , \quad b_j(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} [f_j(\mathbf{u})] \\ \partial g/\partial\nu_j \end{pmatrix} \quad 1 \le j \le d-1\,, \\ \text{et} \quad M(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} v^{+} \\ v^{-} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -A_d(u_r) \\ d_{u_r} g \end{pmatrix} v^{+} + \begin{pmatrix} A_d(u_l) \\ d_{u_l} g \end{pmatrix} v^{-}\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Avec ces notations, l'opérateur $\mathscr{B}_{\mathbf{u}}$ s'écrit

$$\mathscr{B}_{\mathbf{u}}(v, \psi) = \sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, b_j(\mathbf{u}) + M(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} v^{+} \\ v^{-} \end{pmatrix}\,,$$

et nous sommes conduits à étudier le problème

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbf{u}} v^{\pm} = f_{\pm} & \pm x_d > 0\,, \\ \mathscr{B}_{\mathbf{u}}(v, \psi) = g & x_d = 0\,, \end{cases} \tag{5.11}$$

pour des termes sources $f_{\pm}$ et g dans des espaces fonctionnels convenables.

Comme nous l'avons déjà noté au chapitre 3, le problème (5.11) est un problème mixte à coefficients constants non standard car les conditions au bord font intervenir des dérivées partielles de la fonction ψ. Ce problème s'attaque néanmoins avec la même méthode que celle initiée par Kreiss pour les problèmes mixtes standard. On effectue formellement une transformée de Laplace en la variable x_0 et une transformée de Fourier en les variables

$(x_1, \ldots, x_{d-1})$. On effectue également le changement de variable $x_d \to -x_d$ dans l'équation d'évolution sur v^-. On obtient le système d'équations différentielles ordinaires

$$\left(\tau\, A_0(u_r) + i \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j\, A_j(u_r)\right) V^+ + A_d(u_r)\, \frac{dV^+}{dx_d} = F_+\,, \tag{5.12a}$$

$$\left(\tau\, A_0(u_l) + i \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j\, A_j(u_l)\right) V^- - A_d(u_l)\, \frac{dV^-}{dx_d} = F_-\,, \tag{5.12b}$$

dans le domaine $\{x_d > 0\}$, avec les conditions au bord

$$\left(\tau\, b_0(\mathbf{u}) + i \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j\, b_j(\mathbf{u})\right) \Psi + M(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} V^+(0) \\ V^-(0) \end{pmatrix} = G\,, \tag{5.13}$$

sur $\{x_d = 0\}$. Le nombre complexe $\tau = \gamma + i\eta_0$ a une partie réelle positive et $(\eta_1, \ldots, \eta_{d-1})$ est un vecteur dans $\mathbb{R}^{d-1}$. Contrairement à ce qui a été fait au chapitre 3, on notera ici η le vecteur $(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$.

Observons que le bord $\{x_d = 0\}$ est non caractéristique en vertu de l'hypothèse 5.2: les deux matrices $A_d(u_r)$ et $A_d(u_l)$ sont inversibles. Cela permet de réécrire les équations différentielles (5.12a)-(5.12b) en

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx_d} \begin{pmatrix} V^+ \\ V^- \end{pmatrix} = \mathscr{A}(\mathbf{u}, \eta, \gamma) \begin{pmatrix} V^+ \\ V^- \end{pmatrix} + \mathscr{A}_d(\mathbf{u})^{-1} \begin{pmatrix} F_+ \\ F_- \end{pmatrix} \\ \text{avec } \mathscr{A}(\mathbf{u}, \eta, \gamma) := \begin{pmatrix} \mathscr{A}_r(\mathbf{u}, \eta, \gamma) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathscr{A}_l(\mathbf{u}, \eta, \gamma) \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{5.14}$$

les matrices $\mathscr{A}_{r,l}$ et $\mathscr{A}_d$ étant définies par

$$\mathscr{A}_{r,l}(\mathbf{u}, \eta, \gamma) := \mp A_d(u_{r,l})^{-1} \left(\gamma\, A_0(u_{r,l}) + i \sum_{j=0}^{d-1} \eta_j\, A_j(u_{r,l})\right),$$

$$\mathscr{A}_d(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} A_d(u_r) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -A_d(u_l) \end{pmatrix}.$$

En posant

$$\mathscr{A}_j(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} A_j(u_r) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_j(u_l) \end{pmatrix}, \quad 0 \le j \le d-1\,,$$

on a également

$$\mathscr{A}(\mathbf{u}, \eta, \gamma) = -\mathscr{A}_d(\mathbf{u})^{-1} \left(\gamma\, \mathscr{A}_0(\mathbf{u}) + i \sum_{j=0}^{d-1} \eta_j\, \mathscr{A}_j(\mathbf{u})\right).$$

Il nous reste à définir le symbole

$$b(\mathbf{u}, \eta, \gamma) := \gamma\, b_0(\mathbf{u}) + i \sum_{j=0}^{d-1} \eta_j\, b_j(\mathbf{u})\,, \tag{5.15}$$

associé au front.

Comme le remarque Hersh dans [47], la partie homogène du système (5.14) est hyperbolique tant que $\gamma > 0$, c'est-à-dire que la matrice $\mathscr{A}(\mathbf{u}, \eta, \gamma)$ n'a pas de valeur propre imaginaire pure quand $\gamma > 0$. On note alors $\mathscr{E}^-(\mathbf{u}, \eta, \gamma)$ le sous-espace stable de la matrice $\mathscr{A}(\mathbf{u}, \eta, \gamma)$; ce sous-espace est constitué des traces en $x_d = 0$ des solutions de (5.14) pour $F_+ = F_- = 0$ qui sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par un argument de continuité et de connexité, on montre que la dimension de ce sous-espace est indépendante de η et est égale à la dimension de $\mathscr{E}^-(\mathbf{u}, 0, \gamma)$. Pour calculer cette dimension, on remarque que les valeurs propres de $\mathscr{A}(\mathbf{u}, 0, \gamma)$ sont les racines ω de l'équation de dispersion

$$\det[\omega I - \mathscr{A}(\mathbf{u}, 0, \gamma)] = 0 \,.$$

En utilisant la définition de $\mathscr{A}(\mathbf{u}, 0, \gamma)$, on voit facilement que ω est valeur propre de $\mathscr{A}(\mathbf{u}, 0, \gamma)$ si et seulement si $\gamma A_0(u_r) + \omega A_d(u_r)$ ou $\gamma A_0(u_l) - \omega A_d(u_l)$ n'est pas inversible. En d'autres termes, ω est racine de l'équation de dispersion si et seulement s'il existe un entier $k \in \{1, \ldots, m\}$ tel que

$$\lambda_k(u_r, e_d)\, \omega = -\gamma \quad \text{ou} \quad \lambda_k(u_l, e_d)\, \omega = \gamma \,,$$

avec $e_d := (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^d$. L'hypothèse 5.2 assure que de telles valeurs de ω sont strictement négatives pour $k = p+1, \ldots, m$ dans le premier cas et pour $k = 1, \ldots, q-1$ dans le second cas. En tenant compte des multiplicités, cela montre que $\mathscr{E}^-(\mathbf{u}, 0, \gamma)$ est de dimension $n - \kappa$ lorsque $\gamma > 0$.

Pour $\underline{\eta} \neq 0$, le sous-espace $\mathscr{E}^-(\mathbf{u}, \eta, \gamma)$ admet un prolongement par continuité quand $(\eta, \gamma) \to (\underline{\eta}, 0)$, voir [15]. Nous continuerons de noter $\mathscr{E}^-(\mathbf{u}, \underline{\eta}, 0)$ ce prolongement. Comme cela est détaillé dans [11, 65] et au chapitre 3 pour les équations d'Euler, les éléments de $\mathscr{E}^-(\mathbf{u}, \eta, 0)$ ne sont pas forcément les traces en $x_d = 0$ de solutions de carré intégrable de (5.14). Cela tient à l'apparition de valeurs propres imaginaires pures de $\mathscr{A}$ quand γ s'annule.

Afin de prendre en compte les propriétés d'homogénéité des symboles $\mathscr{A}$ et b, on définit la demi-sphère de $\mathbb{R}^{d+1}$ par

$$\Sigma_+ := \{(\eta, \gamma) \in \mathbb{R}^{d+1} \ \text{ t.q. } \ \gamma^2 + |\eta|^2 = 1 \text{ et } \gamma \geq 0\} \,.$$

La frontière de Σ_+ est notée Σ_0, c'est-à-dire

$$\Sigma_0 := \{(\eta, 0) \in \mathbb{R}^{d+1} \ \text{ t.q. } \ |\eta|^2 = 1\} \,.$$

En suivant les travaux de Majda [65] et Freistühler [39], nous faisons l'hypothèse de stabilité uniforme suivante:

Hypothèse 5.3 (Stabilité uniforme). *Il existe une constante strictement positive c telle que pour tout $(\eta, \gamma) \in \Sigma_+$, on a*

$$\forall\, (\chi, Z) \in \mathbb{C} \times \mathscr{E}^-(\mathbf{u}, \eta, \gamma) \,, \quad |\chi\, b(\mathbf{u}, \eta, \gamma) + M(\mathbf{u})\, Z| \geq c\, (|\chi| + |Z|) \,. \tag{5.16}$$

Par compacité de Σ_+, cela revient à supposer que pour tout $(\eta, \gamma) \in \Sigma_+$, le sous-espace

$$\big\{(\chi, Z) \in \mathbb{C} \times \mathscr{E}^-(\mathbf{u}, \eta, \gamma) \ \text{ s.t. } \ \chi\, b(\mathbf{u}, \eta, \gamma) + M(\mathbf{u})\, Z = 0\big\}$$

est réduit à $\{0\}$. En effet, l'application

$$(\chi, Z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{2n} \longmapsto \chi\, b(\mathbf{u}, \eta, \gamma) + M(\mathbf{u})\, Z$$

est à valeurs dans $\mathbb{C}^N$, avec $N = n - \kappa + 1$, et que N est égale à la dimension de $\mathbb{C} \times \mathscr{E}^-$, l'hypothèse de stabilité uniforme revient à supposer que les applications

$$(\chi, Z) \in \mathbb{C} \times \mathscr{E}^-(\mathbf{u}, \eta, \gamma) \longmapsto \chi\, b(\mathbf{u}, \eta, \gamma) + M(\mathbf{u})\, Z$$

sont des isomorphismes (en pratique, on teste l'injectivité). Comme l'explique Freistühler dans [39], l'hypothèse 5.3 est l'extension directe pour les chocs sous-compressifs de la notion de stabilité uniforme (pour les chocs de Lax) de Majda, une fois prescrites les conditions d'admissibilité.

Dans le prochain paragraphe, nous montrons comment l'hypothèse 5.3 conduit à une estimation maximale dans L^2 pour le problème linéarisé (5.11).

5.2.2 Stabilité d'un choc sous-compressif plan

Observons que le symbole b défini par (5.15) est homogène de degré 1 par rapport à (η, γ) donc l'hypothèse 5.3 donne l'estimation

$$\forall\, (\eta, \gamma) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \quad c\,(\gamma^2 + |\eta|^2) \leq |b(\mathbf{u}, \eta, \gamma)|^2 . \tag{5.17}$$

En particulier, le vecteur $b(\mathbf{u}, \eta, \gamma)$ n'est jamais nul tant que $(\eta, \gamma) \neq (0, 0)$, et on peut définir le projecteur orthogonal

$$\Pi(\mathbf{u}, \eta, \gamma)\, h := h - \frac{\langle h, b(\mathbf{u}, \eta, \gamma)\rangle}{|b(\mathbf{u}, \eta, \gamma)|^2}\, b(\mathbf{u}, \eta, \gamma) .$$

Remarquons que Π est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et homogène de degré 0 par rapport à (η, γ). En multipliant (5.13) par Π et b^*, on obtient une écriture équivalente des conditions au bord:

$$\Pi(\mathbf{u}, \eta, \gamma) M(\mathbf{u})\, V(0) = \Pi(\mathbf{u}, \eta, \gamma)\, G , \tag{5.18a}$$

$$|b(\mathbf{u}, \eta, \gamma)|^2\, \Psi = \langle G - M(\mathbf{u})\, V(0), b(\mathbf{u}, \eta, \gamma)\rangle . \tag{5.18b}$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz à (5.18b) et en utilisant (5.17), on trouve

$$\forall\, (\eta, \gamma) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \quad (\gamma^2 + |\eta|^2)\, |\Psi|^2 \leq C\, (|G|^2 + |V(0)|^2) \tag{5.19}$$

ce qui donnera une estimation (en norme H^1) de Ψ en fonction des normes L^2 de g et de $v(x_d = 0)$. Nous nous concentrons donc sur le problème aux limites:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dx_d} = \mathscr{A}(\mathbf{u}, \eta, \gamma)\, V + \mathscr{A}_d(\mathbf{u})^{-1}\, F & x_d > 0 , \\ \Pi(\mathbf{u}, \eta, \gamma) M(\mathbf{u})\, V(0) = \Pi(\mathbf{u}, \eta, \gamma)\, G , \end{cases} \tag{5.20}$$

et nous allons montrer comment obtenir une estimation de V et de $V(0)$ dans L^2 en fonction de F et G.

Avant d'énoncer le résultat de stabilité linéaire pour un choc plan, nous rappelons les notations introduites au chapitre 4. On désigne par Ω et ω les domaines

$$\Omega := \mathbb{R}^{d+1}_+ = \{(x_0, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \text{ t.q. } x_d > 0\} \quad \text{et} \quad \omega := \mathbb{R}^d = \partial\Omega .$$

Pour $\gamma > 0$ et $s \in \mathbb{R}$, on rappelle la notation

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda^{s,\gamma}(\xi) := (\gamma^2 + |\xi|^2)^{s/2}\,,$$

qui permet de définir les espaces de Sobolev à poids $H^s_\gamma(\omega)$ et $H^k_\gamma(\Omega)$ pour $s \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ (on renvoie au chapitre 4 pour les définitions de ces espaces).

Tout comme au chapitre 3, nous verrons la transformée de Laplace comme une transformée de Fourier des fonctions $\widetilde{v} = \exp(-\gamma t) v$ et $\widetilde{\psi} = \exp(-\gamma t)\psi$, avec $\gamma \geq 0$. En introduisant les opérateurs à poids

$$\mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{u}} \widetilde{v} := \mathscr{L}_{\mathbf{u}} \widetilde{v} + \gamma \mathscr{A}_0(\mathbf{u})\, \widetilde{v} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{u}}(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) := \mathscr{B}_{\mathbf{u}}(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) + \gamma \widetilde{\psi}\, b_0(u)\,,$$

on vérifie facilement que (5.11) est équivalent au système

$$\begin{cases} \mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{u}} \widetilde{v} = \exp(-\gamma t) f & x_d > 0\,, \\ \mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{u}}(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) = \exp(-\gamma t) g & x_d = 0\,. \end{cases}$$

Pour simplifier la suite de l'exposé, on omet le tilda sur v et ψ. L'estimation (à coefficients constants) sur (v, ψ) est la même que dans l'étude des chocs de Lax:

Théorème 5.1. *Soit* $\mathbf{u}$ *un choc sous-compressif plan admissible vérifiant l'hypothèse 5.3. Il existe une constante* $C > 0$ *ne dépendant que de* $\mathbf{u}$ *telle que pour tout* $v \in H^1(\Omega)$*, pour tout* $\psi \in H^1(\omega)$ *et pour tout* $\gamma \geq 1$*, on a*

$$\gamma \|v\|_0^2 + \|v_{|x_d=0}\|_0^2 + \|\psi\|^2_{1,\gamma} \leq C \left(\frac{1}{\gamma} \|\mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{u}} v\|_0^2 + \|\mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{u}}(v, \psi)\|_0^2 \right)\,. \tag{5.21}$$

5.2.3 Preuve du théorème 5.1

La preuve du théorème 5.1 suit la méthode de Kreiss [61] et de Majda [65], et repose sur l'existence d'un symétriseur de Kreiss:

Proposition 5.1 (Symétriseur de Kreiss). [23, 61, 72]. *Sous l'hypothèse 5.3, il existe une application* $\mathscr{C}^\infty$ *à valeurs maticielles* S *définie sur* Σ_+ *telle que*
$\forall\, (\eta, \gamma) \in \Sigma_+\,, \quad S(\eta, \gamma)$ *est hermitienne,*
il existe des constantes strictement positives c *et* C *vérifiant*

$$\forall\, (\eta, \gamma) \in \Sigma_+\,, \quad \mathrm{Re}\, (S(\eta, \gamma) \mathscr{A}(\mathbf{u}, \eta, \gamma)) \geq c\, \gamma\, I\,, \tag{5.22a}$$

$$S(\eta, \gamma) + C\, \beta(\eta, \gamma)^* \beta(\eta, \gamma) \geq c\, I \quad \text{avec} \quad \beta(\eta, \gamma) := \Pi(\mathbf{u}, \eta, \gamma) M(\mathbf{u})\,. \tag{5.22b}$$

On étend l'application S en une application homogène de degré 0 par rapport à (η, γ), définie sur le demi-espace $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \setminus \{0\}$, de sorte que les inégalités (5.22a) et (5.22b) sont encore vraies pour toutes les valeurs de $(\eta, \gamma) \neq (0, 0)$. Soient $v \in H^1(\Omega)$ et $\psi \in H^1(\omega)$. On définit

$$F := \mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{u}} v \in L^2(\Omega) \quad , \quad G := \mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{u}}(v, \psi) \in L^2(\omega)\,,$$

et on part des égalités

$$\frac{d\widehat{v}}{dx_d} = \mathscr{A}(\mathbf{u}, \eta, \gamma)\, \widehat{v} + \mathscr{A}_d^{-1}(\mathbf{u})\, \widehat{F}\,,$$
$$\beta(\eta, \gamma)\, \widehat{v}(0) = \Pi(\mathbf{u}, \eta, \gamma)\, \widehat{G}\,.$$

On prend le produit scalaire de l'équation différentielle ci-dessus par $S(\eta,\gamma)\widehat{v}$ puis on intègre par rapport à $\eta \in \mathbb{R}^d$ puis par rapport à $x_d \geq 0$, on obtient

$$-2\ \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \widehat{v}, S(\eta,\gamma)\mathscr{A}_d^{-1}(\mathbf{u})\,\widehat{F}\rangle\, d\eta dx_d =$$
$$2\ \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \widehat{v}, S(\eta,\gamma)\mathscr{A}(\mathbf{u},\eta,\gamma)\,\widehat{v}\rangle\, d\eta dx_d + \int_{\mathbb{R}^d} \langle \widehat{v}(0), S(\eta,\gamma)\,\widehat{v}(0)\rangle d\eta\,.$$

On utilise alors les propriétés (5.22a)-(5.22b) du symétriseur S et le théorème de Plancherel. On trouve

$$2\ \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \widehat{v}, S(\eta,\gamma)\mathscr{A}(\mathbf{u},\eta,\gamma)\,\widehat{v}\rangle\, d\eta dx_d \geq c\,\gamma \|v\|_0^2\,,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \widehat{v}(0), S(\eta,\gamma)\,\widehat{v}(0)\rangle d\eta \geq c\,\|v_{|x_d=0}\|_0^2 - C\,\|G\|_0^2\,.$$

Il ne reste qu'à appliquer l'inégalité de Young, ainsi qu'une borne uniforme sur $S(\eta,\gamma)$ pour obtenir

$$\gamma\|v\|_0^2 + \|v_{|x_d=0}\|_0^2 \leq C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|_0^2 + \|G\|_0^2\right)\,.$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'intégration de (5.19) par rapport à η donne

$$\|\psi\|_{1,\gamma}^2 \leq C\left(\|G\|_0^2 + \|v_{|x_d=0}\|_0^2\right)\,,$$

et on obtient (5.21) en sommant les deux dernières inégalités.

5.3 Le problème linéarisé à coefficients variables

Pour montrer la stabilité non linéaire du choc plan $\mathbf{u}$, il est crucial d'établir l'analogue de (5.21) pour un opérateur linéarisé autour d'un état proche de $\mathbf{u}$ mais non constant de part et d'autre d'un hyperplan. Nous allons établir une telle estimation dans cette partie.

5.3.1 Linéarisation des équations

Nous gardons le même choc plan $\mathbf{u}$ que dans la partie précédente. D'après l'hypothèse 5.2, il existe un ouvert $\mathscr{O}$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ contenant l'origine tel que pour tout $(w_r, w_l, \sigma, \nu) \in \mathscr{O}$, on a

$$u_r + w_r \in \mathscr{U}\,, \quad u_l + w_l \in \mathscr{U}\,,$$
$$\lambda_{q-1}(u_l + w_l, \xi) < \sigma < \lambda_q(u_l + w_l, \xi) \quad \text{et} \quad \lambda_p(u_r + w_r, \xi) < \sigma < \lambda_{p+1}(u_r + w_r, \xi)$$

où $\xi := (-\nu, 1) \in \mathbb{R}^d$. En d'autres termes, $\mathscr{O}$ est un ouvert tel que les chocs plans associés à des éléments de $\mathscr{O}$ sont non caractéristiques. On peut de plus choisir $\mathscr{O}$ de telle sorte que les chocs plans associés à des éléments de $\mathscr{O}$ vérifient l'hypothèse de stabilité uniforme 5.3. On fixe alors un compact $\mathscr{K} \subset \mathscr{O}$ et on considère des applications $\dot{u}_r, \dot{u}_l, \varphi$ telles que φ est définie sur $\mathbb{R}^d$, $\dot{u}_r$ (resp. $\dot{u}_l$) est définie sur $\{x_d \geq \varphi(x_0,\ldots,x_{d-1})\}$ (resp. $\{x_d \leq \varphi(x_0,\ldots,x_{d-1})\}$) et $(\dot{u}_r, \dot{u}_l, \nabla\varphi)$ est à valeurs dans le compact $\mathscr{K}$. On définit la fonction

$$\mathbf{a} := \begin{cases} u_r + \dot{u}_r(\mathbf{x}) & \text{si } x_d > \varphi(x_0,\ldots,x_{d-1}), \\ u_l + \dot{u}_l(\mathbf{x}) & \text{si } x_d < \varphi(x_0,\ldots,x_{d-1}). \end{cases} \tag{5.23}$$

Nous n'avons pas encore précisé la régularité des applications $\dot{u}_r$, $\dot{u}_l$ et φ. On peut y penser comme à des perturbations régulières du choc stationnaire $\mathbf{u}$. Nous serons plus précis par la suite.

Introduisons maintenant les opérateurs linéarisés autour de $\mathbf{a}$. On considère une famille $u_s = \mathbf{a}_\sharp + sv$ et $\varphi_s = \varphi + s\psi$ et on pose

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}(v^\pm, \psi) := \frac{d}{ds} L(u_s^\pm, \varphi_s)\, u_s^\pm \,|_{s=0}\,, \tag{5.24a}$$

$$\mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v, \psi) := \frac{d}{ds} B(u_s^+, u_s^-, \varphi_s)\,|_{s=0}\,. \tag{5.24b}$$

Pour mémoire, $\mathbf{a}_\sharp$ désigne la fonction redressée déduite de $\mathbf{a}$ après le changement de variables Φ (dépendant de φ). Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathbf{a}}(v^\pm, \psi) = &\sum_{j=0}^{d-1} A_j(\mathbf{a}_\sharp^\pm)\, \partial_{x_j} v^\pm + \sum_{j=0}^{d-1} (dA_j(\mathbf{a}_\sharp^\pm)\cdot v^\pm)\, \partial_{x_j}\mathbf{a}_\sharp^\pm + \widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \nabla\varphi)\, \partial_{x_d} v^\pm \\ &- \sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, A_j(\mathbf{a}_\sharp^\pm)\, \partial_{x_d}\mathbf{a}_\sharp^\pm + (d_u\widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \nabla\varphi)\cdot v^\pm)\, \partial_{x_d}\mathbf{a}_\sharp^\pm\,, \qquad \pm x_d > 0\,,\end{aligned}$$

et

$$\mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v, \psi) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, [f_j(\mathbf{a}_\sharp)] - \widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^+, \nabla\varphi)\, v^+ + \widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^-, \nabla\varphi)\, v^- \\ \\ \displaystyle\frac{\partial g}{\partial\sigma}\cdot\partial_{x_0}\psi + d_\nu g\cdot\nabla_y\psi + d_{u_r} g\cdot v^+ + d_{u_l} g\cdot v^- \end{pmatrix}, \qquad x_d = 0\,.$$

Dans l'expression ci-dessus, les dérivées partielles de g sont évaluées en $(\mathbf{a}_\sharp^+, \mathbf{a}_\sharp^-, \nabla\varphi)$. L'opérateur $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$ se décompose en

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}(v^\pm, \psi) = L(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \varphi)\, v^\pm - \sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, A_j(\mathbf{a}_\sharp^\pm)\, \partial_{x_d}\mathbf{a}_\sharp^\pm + E(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \varphi)\, v^\pm$$

où L est défini en (5.8a)-(5.8b) et

$$E(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \varphi)\, v^\pm := \sum_{j=0}^{d-1} (dA_j(\mathbf{a}_\sharp^\pm)\cdot v^\pm)\, \partial_{x_j}\mathbf{a}_\sharp^\pm + (d_u\widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \nabla\varphi)\cdot v^\pm)\, \partial_{x_d}\mathbf{a}_\sharp^\pm$$

est la partie d'ordre 0 de $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$. La partie principale de $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$ est obtenue en ne gardant que les termes d'ordre 1 en $v^\pm$ et coïncide donc avec l'opérateur $L(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \varphi)$. On notera encore $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$ la partie principale de cet opérateur. Avec les notations de (5.10), la partie principale des équations linéarisées se met sous la forme

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbf{a}} v = \displaystyle\sum_{j=0}^{d} \mathscr{A}_j(\mathbf{a})\, \partial_{x_j} v\,, & x_d > 0\,, \\ \mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v, \psi) = \displaystyle\sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, b_j(\mathbf{a}) + M(\mathbf{a})\, v\,, & x_d = 0\,, \end{cases} \tag{5.25}$$

une fois posé $v := (v^+, v^-)$ et une fois effectué le changement de variable $x_d \to -x_d$ dans l'équation d'évolution sur v^-. On se fixe comme objectif d'établir une estimation du même type que (5.21) pour les opérateurs à poids

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma} v := \mathscr{L}_{\mathbf{a}} v + \gamma\, \mathscr{A}_0(\mathbf{a})\, v\,, & x_d > 0\,, \\ \mathscr{B}_{\mathbf{a}}^{\gamma}(v,\psi) := \mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v,\psi) + \gamma\, \psi\, b_0(\mathbf{a})\,, & x_d = 0\,. \end{cases}$$

5.3.2 Paralinéarisation des équations

Afin de quantifier les résultats à venir, nous nous fixons une constante $K > 0$ et supposons que

$$\|\nabla\varphi\|_{W^{1,\infty}(\omega)} \le K \quad \text{et} \quad \|\mathbf{a}_\sharp\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \le K\,.$$

Les opérateurs $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma}$ et $\mathscr{B}_{\mathbf{a}}^{\gamma}$ ayant des coefficients peu réguliers, nous allons remplacer ces opérateurs par leur version paralinéaire afin d'établir l'estimation d'énergie cherchée.

On définit les symboles suivants:

$$\mathbf{b}(x_0,\dots,x_{d-1},\eta,\gamma) := \gamma\, \mathbf{b}_0(x_0,\dots,x_{d-1}) + i \sum_{j=0}^{d-1} \eta_j\, \mathbf{b}_j(x_0,\dots,x_{d-1})$$
$$\text{où} \quad \mathbf{b}_j(x_0,\dots,x_{d-1}) := b_j(\mathbf{a}_\sharp(x_0,\dots,x_{d-1},0))\,.$$

On a ainsi $\mathbf{b}_j \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ et par conséquent $\mathbf{b} \in \Gamma_1^1$. En appliquant le théorème 4.6, on obtient

$$\|\gamma \mathbf{b}_0\, \psi - T_{\gamma\mathbf{b}_0}^{\gamma}\psi\|_0 \le C\, \|\mathbf{b}_0\|_{W^{1,\infty}}\, \|\psi\|_0 \le \frac{C(K)}{\gamma}\, \|\psi\|_{1,\gamma}\,,$$
$$\|\mathbf{b}_j\, \partial_{x_j}\psi - T_{i\eta_j\mathbf{b}_j}^{\gamma}\psi\|_0 = \|\mathbf{b}_j \partial_{x_j}\psi - T_{\mathbf{b}_j}^{\gamma}\partial_{x_j}\psi\|_0 \le C(K)\, \|\psi\|_0 \le \frac{C(K)}{\gamma}\, \|\psi\|_{1,\gamma}\,,$$

ce qui donne

$$\|\gamma\, \mathbf{b}_0\, \psi + \sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j}\psi\, \mathbf{b_j} - T_{\mathbf{b}}^{\gamma}\psi\|_0 \le \frac{C(K)}{\gamma}\, \|\psi\|_{1,\gamma}\,. \tag{5.26}$$

On définit également le symbole

$$\mathbf{M}(x_0,\dots,x_{d-1}) := M(\mathbf{a}_\sharp(x_0,\dots,x_{d-1},0)) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)\,.$$

Le théorème 4.6 donne

$$\|\mathbf{M}\, v_{|x_d=0} - T_{\mathbf{M}}^{\gamma} v_{|x_d=0}\|_0 \le \frac{C(K)}{\gamma}\, \|v_{|x_d=0}\|_0\,. \tag{5.27}$$

En combinant (5.26) et (5.27), on trouve

$$\|\mathscr{B}_{\mathbf{a}}^{\gamma}(v,\psi) - T_{\mathbf{b}}^{\gamma}\psi - T_{\mathbf{M}}^{\gamma} v_{|x_d=0}\|_0 \le \frac{C(K)}{\gamma}\, (\|\psi\|_{1,\gamma} + \|v_{|x_d=0}\|_0)\,. \tag{5.28}$$

Cela permettra de remplacer l'opérateur $(v,\psi) \mapsto \mathscr{B}_{\mathbf{a}}^{\gamma}(v,\psi)$ par sa verion paralinéaire $(v,\psi) \mapsto T_{\mathbf{b}}^{\gamma}\psi + T_{\mathbf{M}}^{\gamma} v$.

Passons maintenant aux équations d'évolution dans le domaine $\{x_d > 0\}$. En posant

$$\mathbf{A}_j(x_0, \ldots, x_d) := \mathscr{A}_j(\mathbf{a}_\sharp(x_0, \ldots, x_d)) \in W^{1,\infty}(\Omega)\,,$$

il est clair que $\mathbf{A}_d$ est uniformément inversible:

$$\|\mathbf{A}_d^{-1}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C(K)\,,$$

et le théorème 4.6 donne

$$\begin{aligned}
\|\gamma \mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_0\, v - \gamma T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_0} v\|_0 &\leq C(K)\, \|v\|_0\,,\\
\|\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_j\, \partial_{x_j} v - T^\gamma_{i\eta_j \mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_j} v\|_0 &\leq C(K)\, \|v\|_0 \qquad 0 \leq j \leq d-1\,.
\end{aligned}$$

Le symbole

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \eta, \gamma) := -\mathbf{A}_d(\mathbf{x})^{-1} \left(\gamma\, \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) + i \sum_{j=0}^{d-1} \eta_j\, \mathbf{A}_j(\mathbf{x}) \right)\,, \quad \mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_d)\,,$$

vérifie $\mathbf{A} \in \Gamma_1^1$ et d'après les estimations précédentes, on a

$$\|\mathbf{A}_d^{-1}\, \mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{a}} v - \partial_{x_d} v + T^\gamma_{\mathbf{A}} v\|_0 \leq C(K)\, \|v\|_0\,. \tag{5.29}$$

Cela permettra de remplacer l'opérateur $v \mapsto \mathbf{A}_d^{-1}\, \mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{a}} v$ par sa version paralinéaire $v \mapsto \partial_{x_d} v - T^\gamma_{\mathbf{A}} v$.

Nous sommes ainsi amenés à montrer une estimation d'énergie du même type que (5.21) pour le problème paralinéarisé

$$\begin{cases} \partial_{x_d} v - T^\gamma_{\mathbf{A}} v = F & x_d > 0\,,\\ T^\gamma_{\mathbf{b}} \psi + T^\gamma_{\mathbf{M}} v_{|x_d=0} = G & x_d = 0\,. \end{cases}$$

Comme nous l'avons fait à coefficients constants, nous allons éliminer le front ψ dans les conditions au bord. Rappelons que les perturbations prennent leurs valeurs dans un compact $\mathscr{K} \subset \mathscr{O}$ et que les chocs associés aux éléments de $\mathscr{O}$ sont uniformément stables. Il existe donc une constante $c > 0$ ne dépendant que de $\mathscr{K}$ telle que

$$\forall\, (x_0, \ldots, x_{d-1}, \eta, \gamma)\,, \quad c\,(\gamma^2 + |\eta|^2) \leq |\mathbf{b}(x_0, \ldots, x_{d-1}, \eta, \gamma)|^2\,. \tag{5.30}$$

On peut ainsi définir le projecteur orthogonal $\mathbf{\Pi}(x_0, \ldots, x_{d-1}, \eta, \gamma)$ par la formule

$$\mathbf{\Pi}(x_0, \ldots, x_{d-1}, \eta, \gamma)\, h := h - \frac{\langle h, \mathbf{b}(x_0, \ldots, x_{d-1}, \eta, \gamma)\rangle}{|\mathbf{b}(x_0, \ldots, x_{d-1}, \eta, \gamma)|^2}\, \mathbf{b}(x_0, \ldots, x_{d-1}, \eta, \gamma)\,,$$

et on a ainsi $\mathbf{\Pi} \in \Gamma_1^0$ car $\mathbf{\Pi}$ est homogène de degré 0 par rapport à (η, γ). En notant

$$\boldsymbol{\beta}(x_0, \ldots, x_{d-1}, \eta, \gamma) := \mathbf{\Pi}(x_0, \ldots, x_{d-1}, \eta, \gamma)\, \mathbf{M}(x_0, \ldots, x_{d-1})\,,$$

on a $\boldsymbol{\beta} \in \Gamma_1^0$ et le théorème 4.9 permet de montrer les inégalités

$$\begin{aligned}
\|T^\gamma_{\mathbf{\Pi}} T^\gamma_{\mathbf{b}} \psi\|_0 = \|T^\gamma_{\mathbf{\Pi}} T^\gamma_{\mathbf{b}} \psi - T^\gamma_{\mathbf{\Pi}\mathbf{b}} \psi\|_0 &\leq C(K)\, \|\psi\|_0 \leq \frac{C(K)}{\gamma}\, \|\psi\|_{1,\gamma}\,,\\
\|T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}} v_{|x_d=0} - T^\gamma_{\mathbf{\Pi}} T^\gamma_{\mathbf{M}} v_{|x_d=0}\|_0 &\leq C(K)\, \|v_{|x_d=0}\|_{-1,\gamma} \leq \frac{C(K)}{\gamma}\, \|v_{|x_d=0}\|_0\,.
\end{aligned}$$

La décomposition

$$T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}} v_{|x_d=0} = T^\gamma_{\mathbf{\Pi}}(T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi + T^\gamma_{\mathbf{M}} v_{|x_d=0}) - T^\gamma_{\mathbf{\Pi}} T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi + (T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}} v_{|x_d=0} - T^\gamma_{\mathbf{\Pi}} T^\gamma_{\mathbf{M}} v_{|x_d=0})$$

permet de montrer l'estimation

$$\|T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}} v_{|x_d=0}\|_0 \leq C(K)\ \left[\|G\|_0 + \frac{1}{\gamma}\ \left(\|\psi\|_{1,\gamma} + \|v_{|x_d=0}\|_0\right)\right]\ , \tag{5.31}$$

avec $G = T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi + T^\gamma_{\mathbf{M}} v_{|x_d=0}$. On remplacera donc $\|G\|_0$ par $\|T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}} v_{|x_d=0}\|_0$.

La relation (5.30) permet d'appliquer l'inégalité de Gårding (théorème 4.11) au symbole $\mathbf{b}^*\mathbf{b} \in \Gamma^2_1$. En utilisant également le théorème 4.10, on trouve pour tout $\gamma \geq \gamma_0$:

$$\|\psi\|^2_{1,\gamma} \leq C(K)\ \mathrm{Re}\ \langle T^\gamma_{\mathbf{b}^*\mathbf{b}}\psi, \psi\rangle_{L^2} \leq C(K)\ \left(\|T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi\|^2_0 + \ \mathrm{Re}\ \langle R^\gamma\psi, \psi\rangle_{L^2}\right)$$

où $\{R^\gamma\}$ est une famille d'ordre ≤ 1. Cela donne

$$\|\psi\|^2_{1,\gamma} \leq C(K)\ \left(\|T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi\|^2_0 + C(K)\,\|\psi\|_{1,\gamma}\,\|\psi\|_0\right) \leq \frac{C(K)}{\gamma}\,\|\psi\|^2_{1,\gamma} + C(K)\,\|T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi\|^2_0\,.$$

Quitte à augmenter la valeur de γ_0, on trouve finalement

$$\forall\,\gamma \geq \gamma_0\,, \quad \|\psi\|^2_{1,\gamma} \leq C(K)\,\|T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi\|^2_0 \leq C(K)\ \left(\|G\|^2_0 + \|v_{|x_d=0}\|^2_0\right)\ . \tag{5.32}$$

Si nous récapitulons les estimations précédentes, on voit qu'il nous suffit de montrer une estimation du type:

$$\forall\,\gamma \geq \gamma_0\,, \quad \gamma\|v\|^2_0 + \|v_{|x_d=0}\|^2_0 \leq C(K)\ \left(\frac{1}{\gamma}\,\|\partial_{x_d} v - T^\gamma_{\mathbf{A}} v\|^2_0 + \|T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}} v_{|x_d=0}\|^2_0\right)\ . \tag{5.33}$$

En utilisant les inégalités (5.31) et (5.32), on aura alors (quitte à augmenter une nouvelle fois γ_0):

$$\gamma\|v\|^2_0 + \|v_{|x_d=0}\|^2_0 + \|\psi\|^2_{1,\gamma} \leq C(K)\ \left(\frac{1}{\gamma}\,\|\partial_{x_d} v - T^\gamma_{\mathbf{A}} v\|^2_0 + \|T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi + T^\gamma_{\mathbf{M}} v_{|x_d=0}\|^2_0\right)\ .$$

En utilisant (5.28) et (5.29), on finira d'établir l'estimation à coefficients variables que nous pouvons énoncer de la façon suivante:

Théorème 5.2. *Soit* $\mathbf{a}$ *donnée par* (5.23) *une perturbation d'un choc sous-compressif plan* $\mathbf{u}$ *vérifiant*

$$\|\dot{u}_{r,l}\|_{W^{1,\infty}} \leq K\,, \quad \|\nabla\varphi\|_{W^{1,\infty}} \leq K\,,$$

où K *est un réel strictement positif fixé. Supposons que* $(\dot{u}_{r,l}, \nabla\varphi)$ *prend ses valeurs dans un ensemble compact* $\mathscr{K} \subset \mathscr{O}$ *et que* $(\dot{u}_{r,l}, \varphi)$ *est à support compact. Alors il existe deux constantes* $C > 0$ *et* $\gamma_0 \geq 1$, *ne dépendant que de* K *et* $\mathscr{K}$ *telles que pour tout* $v \in H^1(\Omega)$ *et tout* $\psi \in H^1(\omega)$, *on a:*

$$\forall\,\gamma \geq \gamma_0\,, \quad \gamma\|v\|^2_0 + \|v_{|x_d=0}\|^2_0 + \|\psi\|^2_{1,\gamma} \leq C\ \left(\frac{1}{\gamma}\,\|\mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{a}} v\|^2_0 + \|\mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{a}}(v,\psi)\|^2_0\right)\ , \tag{5.34}$$

les opérateurs $\mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{a}}$ *et* $\mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{a}}$ *étant définis en* (5.25).

5.3.3 Preuve de l'inégalité (5.33)

Comme dans l'étude du problème linéarisé à coefficients constants, nous allons établir l'inégalité (5.33) en exploitant l'existence d'un symétriseur de Kreiss:

Proposition 5.2 (Symétriseur de Kreiss). *Si* $\mathbf{a}$ *vérifie les mêmes hypothèses qu'au théorème 5.2, il existe une application*

$$\mathscr{S} : \overline{\Omega} \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

vérifiant les propriétés suivantes:
$\forall\, z$, *la matrice* $\mathscr{S}(z)$ *est hermitienne,*
$\mathscr{S}$ *est homogène de degré* 0 *par rapport à* (η, γ) *et* $\mathscr{S} \in \Gamma_1^0$,
$\forall\, z \in \omega \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$, *on a*

$$\mathscr{S}(z) + C\,\boldsymbol{\beta}(z)^*\boldsymbol{\beta}(z) \geq c\,I\,, \tag{5.35}$$

il existe un nombre fini I *d'applications à valeurs matricielles telles que*

$$\mathrm{Re}\,(\mathscr{S}(z)\mathbf{A}(z)) = \sum_{i=1}^{I} V_i(z)^* \begin{pmatrix} \gamma H_i(z) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_i(z) \end{pmatrix} V_i(z)\,,$$

où V_i *et* H_i *sont homogènes de degré* 0 *par rapport à* (η, γ) *et appartiennent à* Γ_1^0, E_i *est homogène de degré* 1 *par rapport à* (η, γ) *et appartient à* Γ_1^1, *et ces applications vérifient*

$$\sum_{i=1}^{I} V_i(z)^* V_i(z) \geq c\,I\,, \quad H_i(z) \geq c\,I\,, \quad E_i(z) \geq c\,(\gamma + |\eta|)\,I\,. \tag{5.36}$$

La preuve de la proposition 5.2 est basée sur les mêmes idées que celles utilisées au chapitre 3. Le passage aux coefficients variables s'effectue en gelant les coefficients et en reproduisant l'analyse à coefficients constants. La propriété de support de $(\dot{u}_{r,l}, \varphi)$ permet de recoller la construction microlocale et d'obtenir un symétriseur défini globalement. On renvoie à [23] pour les détails. Nous montrons à présent comment ce résultat permet de montrer (5.33).

Le point de départ est à nouveau le système

$$\begin{cases} \partial_{x_d} v - T_{\mathbf{A}}^{\gamma} v = F & x_d > 0\,, \\ T_{\boldsymbol{\beta}}^{\gamma} v = G & x_d = 0\,. \end{cases}$$

Posons

$$\mathbf{S}^{\gamma}(x_d) := \frac{1}{2}\left((T_{\mathscr{S}(x_d)}^{\gamma})^* + T_{\mathscr{S}(x_d)}^{\gamma} \right)\,.$$

Comme $\mathscr{S} \in \Gamma_1^0$, $\{\mathbf{S}^{\gamma}\}$ est une famille bornée et lipschitzienne d'opérateurs autoadjoints sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ (les bornes étant uniformes par rapport à γ). On multiplie léquation

$$\partial_{x_d} v - T_{\mathbf{A}}^{\gamma} v = F$$

par $\mathbf{S}^\gamma(x_d)v(x_d)$ puis on intègre en $(x_0,\dots,x_d)\in\Omega$. On obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S}^\gamma(0)v(0),v(0)\rangle_{L^2(\omega)} + 2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathbf{A}} v, v\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} &= -2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma v, F\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\quad -\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle \frac{d\mathbf{S}^\gamma}{dx_d} v, v\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)}\,.\end{aligned} \tag{5.37}$$

Les bornes sur $\mathscr{S}$ donnent

$$\forall\,\gamma\geq 1\,,\quad \|\mathbf{S}^\gamma v\|_0 \leq C\,\|v\|_0 \quad \text{et} \quad \|\frac{d\mathbf{S}^\gamma}{dx_d} v\|_0 \leq C\,\|v\|_0\,,$$

ce qui permet de majorer le membre de droite dans (5.37) par

$$C\,\|v\|_0\,\|F\|_0 + C\,\|v\|_0^2\,. \tag{5.38}$$

De plus, la relation (5.35) donne, pour γ suffisamment grand

$$\mathrm{Re}\ \langle T^\gamma_{\mathscr{S}(0)} v(0), v(0)\rangle_{L^2(\omega)} + C\,\mathrm{Re}\ \langle T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\beta}} v(0), v(0)\rangle_{L^2(\omega)} \geq \frac{c}{2}\,\|v(0)\|^2_{L^2(\omega)}\,,$$

par l'inégalité de Gårding (théorème 4.11). Les théorèmes 4.9 et 4.10 assurent que les restes

$$T^\gamma_{\mathscr{S}(0)} - \mathbf{S}^\gamma(0) \quad \text{et} \quad T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\beta}} - (T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}})^* T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}}$$

sont d'ordre ≤ -1, et on obtient donc (quitte à augmenter γ_0):

$$\langle \mathbf{S}^\gamma(0)v(0), v(0)\rangle_{L^2(\omega)} + C\,\|T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}} v(0)\|^2_{L^2(\omega)} \geq \frac{c}{4}\,\|v(0)\|^2_{L^2(\omega)}\,, \tag{5.39}$$

Il nous reste à "minorer" l'opérateur $\mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathbf{A}}$ à l'aide de (5.36). Définissons

$$\forall\, z\in\overline{\Omega}\times(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\setminus\{0\})\,,\quad a_i(z) := \begin{pmatrix}\gamma H_i(z) & 0\\ 0 & E_i(z)\end{pmatrix}\,.$$

Les théorèmes 4.9 et 4.10 assurent que les restes

$$\mathrm{Re}\ (\mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathbf{A}}) - \ \mathrm{Re}\ T^\gamma_{\mathrm{Re}\ \mathscr{S}\mathbf{A}} \quad \text{et} \quad T^\gamma_{V_i^* a_i V_i} - (T^\gamma_{V_i})^* T^\gamma_{a_i} T^\gamma_{V_i}$$

sont d'ordre ≤ 0, ce qui permet d'obtenir

$$\mathrm{Re}\ \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathbf{A}} v, v\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \geq \mathrm{Re}\ \sum_{i=1}^{I} \langle\!\langle T^\gamma_{a_i} v_i, v_i\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} - C\,\|v\|_0^2$$

avec $v_i := T^\gamma_{V_i} v$. En utilisant la structure diagonale par blocs de a_i et l'inégalité de Gårding sur chaque bloc, on trouve

$$\mathrm{Re}\ \langle\!\langle T^\gamma_{a_i} v_i, v_i\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \geq c\,\gamma\,\|v_i\|_0^2\,,$$

et donc

$$\mathrm{Re}\ \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathbf{A}} v, v\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \geq c\,\gamma\,\sum_{i=1}^{I}\|v_i\|_0^2 - C\,\|v\|_0^2\,.$$

Finalement, l'ellipticité du symbole $\sum_i V_i^* V_i$ donne pour γ grand

$$\|v\|_0^2 \leq C \sum_{i=1}^{I} \operatorname{Re} \langle\langle T^\gamma_{V_i^* V_i} v, v \rangle\rangle_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^{I} \|v_i\|_0^2 + \frac{C}{\gamma} \|v\|_0^2 \,.$$

En combinant ces inégalités, on aboutit à

$$\operatorname{Re} \langle\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathbf{A}} v, v \rangle\rangle_{L^2(\Omega)} \geq c\,\gamma\, \|v\|_0^2 \,.$$

Il suffit maintenant d'utiliser (5.39) pour conclure que le membre de gauche de (5.37) est minoré par

$$c\,\gamma\, \|v\|_0^2 + c\, \|v_{|x_d=0}\|_0^2 - C\, \|T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}} v_{|x_d=0}\|_0^2 \,,$$

et ceci finit de montrer (5.33). Comme nous l'avons remarqué au paragraphe précédent, cela permet d'établir le théorème 5.2 en utilisant les estimations des erreurs de paralinéarisation.

5.4 Résolution du problème linéarisé

Dans cette partie, nous allons résoudre le problème linéarisé (5.25) auquel est ajouté une condition initiale. On rappelle que les opérateurs linéarisés s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\mathbf{a}} v &= \sum_{j=0}^{d} \mathscr{A}_j(\mathbf{a})\, \partial_{x_j} v \quad x_d > 0 \,, \\ \mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v, \psi) &= \sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j} \psi\, b_j(\mathbf{a}) + M(\mathbf{a})\, v \quad x_d = 0 \,. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Nous allons d'abord résoudre le problème sans condition initiale

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbf{a}} v = f & x_d > 0 \,, \\ \mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v, \psi) = g & x_d = 0 \,, \end{cases}$$

pour des termes source f et g dans des espaces L^2 à poids. On montrera ensuite que les solutions de ce problème sont nulles dans le passé lorsque f et g sont nulles dans le passé. On montrera finalement comment résoudre le problème avec condition initiale.

Le problème sans condition initiale est résolu à l'aide d'un problème dual adapté que nous introduisons au prochain paragraphe. Dans [73], Métivier utilise la forme particulière des conditions de Rankine-Hugoniot ainsi qu'un symétriseur à la Friedrichs pour mener à bien cette étape. Dans le cas des chocs sous-compressifs, ces arguments ne sont pas transposables et certaines modifications sont nécessaires. Nous aurons cependant besoin d'un symétriseur à la Friedrichs (pour établir le théorème 5.4 ci-dessous), et formulons tout de suite l'hypothèse suivante:

Hypothèse 5.4. *Il existe une application*

$$\Sigma : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,,$$

de classe $\mathscr{C}^\infty$, telle que pour tout $u \in \mathscr{U}$ et pour tout $j = 1, \ldots, d$, $\Sigma(u) A_j(u)$ soit symétrique, et $\Sigma(u) A_0(u)$ soit symétrique définie positive.

5.4.1 Le problème dual. Premières propriétés

Nous n'utiliserons plus le symbole b défini en (5.15) et noterons désormais b la matrice

$$b(\mathbf{a}) := \begin{pmatrix} b_0(\mathbf{a}) & \cdots & b_{d-1}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} ,$$

les vecteurs b_j étant définis par (5.10). On a ainsi

$$\mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v, \psi) = b(\mathbf{a})\, \nabla\psi + M(\mathbf{a})\, v\,.$$

L'hypothèse 5.3 de stabilité uniforme assure que pour tout $\mathbf{a}$ prenant ses valeurs dans l'ouvert $\mathscr{O}$, la matrice $b(\mathbf{a})$ est injective. Quitte à restreindre $\mathscr{O}$, on peut supposer que cet ouvert est une boule. Pour tout $\mathbf{a}$ fixé dans $\mathscr{O}$, il existe une matrice inversible $P(\mathbf{a})$ telle que

$$P(\mathbf{a})\, b(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} I_d \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} .$$

D'après un résultat de géométrie différentielle, qu'on pourra consulter dans [50, chapitre 4], l'application $P : \mathscr{O} \to Gl_N(\mathbb{R})$ peut être choisie de classe $\mathscr{C}^\infty$, ce que nous supposerons désormais (cela tient au fait que $\mathscr{O}$ est une boule et donc est un espace contractile).

Pour éviter d'introduire de nouvelles notations, on continue de noter $M(\mathbf{a})$ la matrice $P(\mathbf{a})\, M(\mathbf{a})$. Les conditions au bord s'écrivent ainsi, de manière équivalente,

$$\mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v, \psi) = \begin{pmatrix} \nabla\psi \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + M(\mathbf{a})\, v\,.$$

Nous faisons à présent l'hypothèse (raisonnable) suivante

Hypothèse 5.5. *La matrice $M(\mathbf{u}) \in \mathscr{M}_{N,2n}(\mathbb{R})$ est de rang maximal.*

Dans l'étude des chocs de Lax, cette hypothèse est automatiquement satisfaite car les chocs de Lax sont non caractéristiques, voir [73]. L'hypothèse 5.5 est raisonnable car dans la pratique, on rajoute des conditions de saut indépendantes des conditions de Rankine-Hugoniot.

Quitte à restreindre à nouveau l'ouvert $\mathscr{O}$, on supposera désormais que la matrice $M(\mathbf{a})$ est de rang maximal pour tout $\mathbf{a}$ prenant ses valeurs dans $\mathscr{O}$. Nous avons alors le résultat suivant:

Lemme 5.1. *Il existe une application de classe $\mathscr{C}^\infty$, $N : \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{M}_{2n-N,2n}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\mathbf{a}$ on a*

$$\mathbb{R}^{2n} = \operatorname{Ker} M(\mathbf{a}) \oplus \operatorname{Ker} N(\mathbf{a})\,.$$

Il existe de plus des applications $\mathscr{C}^\infty$

$$M' : \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{M}_{2n,N}(\mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad N' : \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{M}_{2n,2n-N}(\mathbb{R})$$

telles que pour tout $\mathbf{a}$, on a

$$I_{2n} = M'(\mathbf{a})\, M(\mathbf{a}) + N'(\mathbf{a})\, N(\mathbf{a})\,.$$

Preuve

La matrice $M(\mathbf{a})$ est de rang maximal pour tout $\mathbf{a} \in \mathscr{O}$. Quitte à restreindre $\mathscr{O}$, il existe une application N de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{O}$, à valeurs dans $\mathscr{M}_{2n-N,2n}(\mathbb{R})$, et telle que

$$\begin{pmatrix} M(\mathbf{a}) \\ N(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

soit une matrice inversible. Une telle matrice $N(\mathbf{a})$ vérifie automatiquement

$$\mathbb{R}^{2n} = \text{Ker } M(\mathbf{a}) \oplus \text{Ker } N(\mathbf{a})$$

et $N(\mathbf{a})$ est nécessairement de rang maximal.

Le second point du lemme 5.1 s'obtient en écrivant

$$\begin{pmatrix} M(\mathbf{a}) \\ N(\mathbf{a}) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} M'(\mathbf{a}) & N'(\mathbf{a}) \end{pmatrix} .$$

Les applications M' et N' ainsi définies sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{O}$ et vérifient bien

$$I_{2n} = M'(\mathbf{a})\, M(\mathbf{a}) + N'(\mathbf{a})\, N(\mathbf{a}) .$$

□

Définissons

$$M^{\text{adj}}(\mathbf{a}) := (\mathscr{A}_d(\mathbf{a})\, M'(\mathbf{a}))^t \quad \text{et} \quad N^{\text{adj}}(\mathbf{a}) := (\mathscr{A}_d(\mathbf{a})\, N'(\mathbf{a}))^t , \tag{5.41}$$

de sorte que

$$\mathscr{A}_d(\mathbf{a}) = M^{\text{adj}}(\mathbf{a})^t\, M(\mathbf{a}) + N^{\text{adj}}(\mathbf{a})^t\, N(\mathbf{a}) .$$

Nous avons le résultat suivant:

Lemme 5.2. *Pour tout* $\mathbf{a}$ *prenant ses valeurs dans* $\mathscr{O}$*, l'espace* $\mathbb{R}^{2n}$ *se décompose en*

$$\mathbb{R}^{2n} = \text{Ker } M^{\text{adj}}(\mathbf{a}) \oplus \text{Ker } N^{\text{adj}}(\mathbf{a}) .$$

Preuve

Les matrices $M(\mathbf{a})$ et $N(\mathbf{a})$ sont chacune de rang maximal, et (5.41) donne

$$\begin{aligned} \text{Ker } M^{\text{adj}}(\mathbf{a}) &= \text{Im } (\mathscr{A}_d(\mathbf{a})\, M'(\mathbf{a}))^\perp = \text{Im } (\mathscr{A}_d(\mathbf{a})\, M'(\mathbf{a})\, M(\mathbf{a}))^\perp , \\ \text{Ker } N^{\text{adj}}(\mathbf{a}) &= \text{Im } (\mathscr{A}_d(\mathbf{a})\, N'(\mathbf{a}))^\perp = \text{Im } (\mathscr{A}_d(\mathbf{a})\, N'(\mathbf{a})\, N(\mathbf{a}))^\perp . \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 5.1 et les deux égalités précédentes, on obtient

$$\dim \text{Ker } M^{\text{adj}}(\mathbf{a}) + \dim \text{Ker } N^{\text{adj}}(\mathbf{a}) = 2n$$

et

$$\text{Ker } M^{\text{adj}}(\mathbf{a}) \cap \text{Ker } N^{\text{adj}}(\mathbf{a}) = \{0\} .$$

□

En intégrant par parties, on montre que pour tout $u, v \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a les égalités

$$\langle\!\langle \mathscr{L}_{\mathbf{a}} u, v \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle\!\langle u, \mathscr{L}_{\mathbf{a}}^* v \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \text{et} \qquad \langle\!\langle \mathscr{L}_{\mathbf{a}}^\gamma u, v \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle\!\langle u, (\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^\gamma)^* v \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} ,$$

où les opérateurs $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^*$ et $(\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^\gamma)^*$ sont donnés par

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^* := -\sum_{j=0}^{d} \mathscr{A}_j(\mathbf{a})^t \partial_{x_j} - \left(\sum_{j=0}^{d} \partial_{x_j} \mathscr{A}_j(\mathbf{a})^t \right) \quad \text{et} \quad (\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^\gamma)^* := \mathscr{L}_{\mathbf{a}}^* + \gamma \mathscr{A}_0(\mathbf{a})^t .$$

Les conditions au bord pour le problème dual sont définies de la manière suivante:

$$N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, v_{|x_d=0} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\left(M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, v_{|x_d=0}\right) = 0 , \tag{5.42}$$

où $M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})$ est la matrice formée des d premières lignes de $M^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})$. Dans (5.42), on a noté "div" l'opérateur divergence dans le domaine $\omega = \mathbb{R}^d$. L'introduction de ces conditions au bord est motivée par le résultat suivant:

Proposition 5.3. *Soient $\gamma \geq 1$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\omega)$. Une solution faible $(v, \psi) \in L^2(\Omega) \times L^2(\omega)$ du problème*

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbf{a}}^\gamma v = f & x_d > 0 , \\ \mathscr{B}_{\mathbf{a}}^\gamma(v, \psi) = g & x_d = 0 , \end{cases}$$

est un couple de fonctions tel que pour tout $w \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ vérifiant

$$N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} = 0 \quad \textit{et} \quad \operatorname{div}_{-\gamma}\left(M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0}\right) = 0 ,$$

on a

$$\langle\!\langle f, w \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g, M^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a}) w_{|x_d=0} \rangle_{L^2(\omega)} = \langle\!\langle v, (\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^\gamma)^* w \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} .$$

L'opérateur $\operatorname{div}_{-\gamma}$ *est défini sur $H^1(\omega; \mathbb{R}^d)$ par*

$$\operatorname{div}_{-\gamma} w := -\gamma w_0 + \sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j} w_j .$$

De plus, le problème aux limites

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbf{a}}^* w = 0 , & x_d > 0 , \\ N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} = 0 , \quad \operatorname{div}\left(M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0}\right) = 0 , & x_d = 0 , \end{cases} \tag{5.43}$$

satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii rétrograde uniforme, c'est-à-dire l'analogue de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme en changeant γ en $-\gamma$.

Preuve

Soit $v \in L^2(\Omega)$ tel que $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^\gamma v \in L^2(\Omega)$. Un résultat classique de Friedrichs [41] assure que la trace de v sur ω est bien définie et appartient à $H^{-1/2}(\omega)$. Pour tout $w \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$, on a de plus

$$\langle\!\langle \mathscr{L}_{\mathbf{a}}^\gamma v, w \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle\!\langle v, (\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^\gamma)^* w \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \mathscr{A}_d(\mathbf{a})\, v_{|x_d=0}, w_{|x_d=0} \rangle_{H^{-1/2}(\omega), H^{1/2}(\omega)} .$$

Si le couple (v, ψ) vérifie également

$$\begin{pmatrix} \nabla^\gamma \psi \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + M(\mathbf{a})\, v_{|x_d=0} = g\,, \quad \text{avec} \quad \nabla^\gamma \psi := \begin{pmatrix} \gamma\psi + \partial_{x_0}\psi \\ \partial_{x_1}\psi \\ \vdots \\ \partial_{x_{d-1}}\psi \end{pmatrix}\,,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathscr{A}_d(\mathbf{a})\, v_{|x_d=0}, w_{|x_d=0} \rangle_{H^{-1/2}(\omega), H^{1/2}(\omega)} &= \langle g, w_{|x_d=0} \rangle_{L^2(\omega)} + \langle \psi, \mathrm{div}_{-\gamma}\, M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} \rangle_{L^2(\omega)} \\ &\quad + \langle N(\mathbf{a})\, v_{|x_d=0}, N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} \rangle_{H^{-1/2}(\omega), H^{1/2}(\omega)}\,. \end{aligned}$$

On en déduit facilement le premier résultat de la proposition 5.3. On étudie à présent le problème mixte (5.43). La condition de Kreiss-Lopatinskii rétrograde uniforme se vérifie en gelant les coefficients et en effectuant une analyse par modes normaux. Après transformée de Fourier-Laplace, le système d'équations différentielles obtenu est

$$\mathscr{A}_d(\mathbf{a})^t \frac{d\widehat{w}}{dx_d} - \left(\gamma \mathscr{A}_0(\mathbf{a})^t - i \sum_{j=0}^{d-1} \eta_j\, \mathscr{A}_j(\mathbf{a})^t \right) \widehat{w} = 0\,, \quad x_d > 0\,,$$

avec les conditions au bord

$$N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, \widehat{w}(0) = 0\,, \quad (-\gamma + i\eta_0, i\eta_1, \ldots, i\eta_{d-1}) \cdot M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, \widehat{w}(0) = 0\,.$$

Si l'on pose $e := (\gamma + i\eta_0, i\eta_1, \ldots, i\eta_{d-1})^t$, la dernière condition au bord s'écrit

$$\langle M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, \widehat{w}(0), e \rangle_{\mathbb{C}^d} = 0\,,$$

le produit scalaire étant défini par la structure hermitienne usuelle de $\mathbb{C}^d$ (la notation $\perp$ désignera l'orthogonal au sens de ce produit hermitien).

Dans [23], il est montré que le sous-espace stable de la matrice

$$(\mathscr{A}_d(\mathbf{a})^t)^{-1} \left(\gamma \mathscr{A}_0(\mathbf{a})^t - i \sum_{j=0}^{d-1} \eta_j\, \mathscr{A}_j(\mathbf{a})^t \right)$$

est $(\mathscr{A}_d(\mathbf{a})\, \mathscr{E}^-(\eta, \gamma))^\perp$. On doit donc vérifier que pour tout $(\eta, \gamma) \in \Sigma_+$, l'ensemble

$$\left\{ Z \in (\mathscr{A}_d(\mathbf{a})\, \mathscr{E}^-(\eta, \gamma))^\perp \text{ t.q. } N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, Z = 0 \text{ et } \langle M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, Z, e \rangle_{\mathbb{C}^d} = 0 \right\}$$

est réduit à $\{0\}$. Soit donc $Z \in (\mathscr{A}_d(\mathbf{a})\, \mathscr{E}^-(\eta, \gamma))^\perp$ vérifiant $Z \in \mathrm{Ker}\, N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})$ et

$$\langle M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, Z, e \rangle_{\mathbb{C}^d} = 0\,.$$

Soit $Y \in \mathbb{C}^N$. Grâce à l'hypothèse 5.3 de stabilité uniforme, on sait qu'il existe $\chi \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathscr{E}^-(\eta, \gamma)$ tel que

$$Y = \chi \begin{pmatrix} e \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + M(\mathbf{a})\, X\,.$$

Un calcul rapide donne

$$\begin{aligned}\langle M^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, Z, Y\rangle_{\mathbb{C}^N} &= \overline{\chi}\langle M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, Z, e\rangle_{\mathbb{C}^d} + \langle M^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, Z, M(\mathbf{a})\, X\rangle_{\mathbb{C}^N}\\ &= \langle Z, M^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})^t\, M(\mathbf{a})\, X\rangle_{\mathbb{C}^{2n}} = \langle Z, \mathscr{A}_d(\mathbf{a})\, X\rangle_{\mathbb{C}^{2n}} - \langle Z, N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})^t\, N(\mathbf{a})\, X\rangle_{\mathbb{C}^{2n}} = 0\,,\end{aligned}$$

cette relation étant valable pour tout $Y \in \mathbb{C}^N$. On a donc $Z \in \operatorname{Ker} M^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})$, et par hypothèse, $Z \in \operatorname{Ker} N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})$. Donc $Z = 0$, et la proposition 5.3 est établie.

□

Le problème dual (5.43) est un problème mixte standard qui vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme rétrograde, et ses coefficients sont dans $W^{1,\infty}$ (car la fonction $\mathbf{a}$ est dans $W^{1,\infty}$). L'analyse de la partie précédente s'applique également à ce problème, et on en déduit que pour tout $\gamma \geq \gamma_0$, et pour tout $w \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ vérifiant

$$N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div}_{-\gamma}\,(M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0}) = 0\,,$$

on a l'estimation

$$\gamma\, |\!|\!| w |\!|\!|_0^2 + \|w_{|x_d=0}\|_0^2 \leq \frac{C}{\gamma}\, |\!|\!| (\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma})^* w |\!|\!|_0^2\,. \tag{5.44}$$

Les constantes γ_0 et C ne dépendent que de la constante $K > 0$, que nous avons fixée, et du compact $\mathscr{K}$, lui aussi fixé (voir l'énoncé du théorème 5.2).

5.4.2 Existence de solutions dans des espaces à poids

Pour $\gamma \geq 1$, on note $\exp(\gamma t)\, L^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f définies sur Ω et telles que $\exp(-\gamma t)\, f \in L^2(\Omega)$. On définit de façon analogue les espaces $\exp(\gamma t)\, H^k(\Omega)$, $\exp(\gamma t)\, L^2(\omega)$, etc...

L'inégalité (5.44) va nous permettre de montrer le résultat suivant:

Proposition 5.4. *Sous les hypothèses 5.1-5.5 et les hypothèses du théorème 5.2, il existe un réel $\gamma_0 \geq 1$ tel que pour tout $\gamma \geq \gamma_0$, pour tout $f \in \exp(\gamma t)\, L^2(\Omega)$ et pour tout $g \in \exp(\gamma t)\, L^2(\omega)$, il existe un couple $(v, \psi) \in \exp(\gamma t)\, L^2(\Omega) \times \exp(\gamma t)\, H^{1/2}(\omega)$ solution faible de*

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbf{a}} v = f & x_d > 0\,,\\ \mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v, \psi) = g & x_d = 0\,. \end{cases} \tag{5.45}$$

Preuve

On choisit γ_0 tel que pour tout $\gamma \geq \gamma_0$, (5.44) ait lieu. Soit F le sous-espace vectoriel

$$F := \{w \in \mathscr{D}(\overline{\Omega}) \text{ t.q. } N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div}_{-\gamma}\,(M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0}) = 0\}\,.$$

On définit une forme linéaire ℓ sur $(\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma})^*\, F$ en posant

$$\ell[(\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma})^* w] := \langle\!\langle \exp(-\gamma t) f, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \exp(-\gamma t) g, M^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\omega)}\,.$$

L'inégalité (5.44) assure que ℓ est définie sans ambiguïté. On a de plus, toujours grâce à (5.44):

$$|\ell[(\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma})^* w]| \leq C\, |\!|\!| (\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma})^* w |\!|\!|_0\,.$$

Les théorèmes de Hahn-Banach et de Riesz (voir [21]) assurent qu'il existe une fonction $\widetilde{v} \in L^2(\Omega)$ telle que pour tout $w \in F$, on a

$$\ell[(\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma})^* w] = \langle\!\langle \widetilde{v}, (\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma})^* w \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} . \tag{5.46}$$

Si l'on choisit $w \in \mathscr{D}(\Omega)$ comme fonction test (on vérifie que $\mathscr{D}(\Omega) \subset F$), on trouve que $\widetilde{v}$ est solution faible de

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma} \widetilde{v} = \exp(-\gamma t) f ,$$

dans l'ouvert $\{x_d > 0\}$. De manière équivalente, la fonction $v := \exp(\gamma t)\widetilde{v}$ est solution faible de

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}} v = f .$$

Le lemme de Friedrichs [41] assure que la trace de $\widetilde{v}$ sur ω est bien définie et appartient à $H^{-1/2}(\omega)$. De plus, pour tout $w \in F$, on a l'égalité

$$\langle\!\langle \widetilde{v}, (\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma})^* w \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle\!\langle \exp(-\gamma t) f, w \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle M(\mathbf{a})\, \widetilde{v}_{|x_d=0}, M^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} \rangle_{H^{-1/2}(\omega), H^{1/2}(\omega)} .$$

En combinant cette relation avec (5.46), on trouve

$$\begin{aligned} \forall\, w \in F , \qquad \langle M(\mathbf{a})\, \widetilde{v}_{|x_d=0}, M^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} \rangle_{H^{-1/2}(\omega), H^{1/2}(\omega)} = \\ \langle \exp(-\gamma t) g, M^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} \rangle_{L^2(\omega)} . \end{aligned} \tag{5.47}$$

Par un argument de continuité, (5.47) a encore lieu pour toute fonction $w \in H^1(\Omega)$ vérifiant $N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} = 0$ et $\mathrm{div}_{-\gamma} M_1^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} = 0$. Rappelons que la trace d'une fonction $w \in H^1(\Omega)$ sur ω est bien définie et appartient à $H^{1/2}(\omega)$.

Soit θ une fonction de $H^{1/2}(\omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. On écrit $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ où θ_1 (resp. θ_2) est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{R}^{N-d}$). Il existe alors une fonction $w \in H^1(\Omega)$ telle que

$$N^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} = 0 \quad \text{et} \quad M^{\mathrm{adj}}(\mathbf{a})\, w_{|x_d=0} = \theta .$$

Par conséquent, pour tout $\theta_2 \in H^{1/2}(\omega)$, on a

$$\langle M(\mathbf{a})\, \widetilde{v}_{|x_d=0}, (0, \theta_2) \rangle_{H^{-1/2}(\omega), H^{1/2}(\omega)} = \langle \exp(-\gamma t) g, (0, \theta_2) \rangle_{L^2(\omega)} ,$$

et pour tout $\theta_1 \in H^{1/2}(\omega)$ vérifiant $\mathrm{div}_{-\gamma}\, \theta_1 = 0$, on a

$$\langle M(\mathbf{a})\, \widetilde{v}_{|x_d=0}, (\theta_1, 0) \rangle_{H^{-1/2}(\omega), H^{1/2}(\omega)} = \langle \exp(-\gamma t) g, (\theta_1, 0) \rangle_{L^2(\omega)} .$$

La fin de la preuve repose alors sur le lemme suivant:

Lemme 5.3. *Soit $\gamma \geq 1$ et $u \in H^{-1/2}(\omega; \mathbb{R}^d)$ tel que pour tout $w \in \mathscr{D}(\omega; \mathbb{R}^d)$, on a*

$$\mathrm{div}_{-\gamma}\, w = 0 \Longrightarrow \langle u, w \rangle_{H^{-1/2}(\omega), H^{1/2}(\omega)} = 0 .$$

Alors il existe $\psi \in H^{1/2}(\omega; \mathbb{R})$ tel que

$$u = \nabla^{\gamma} \psi := \begin{pmatrix} \gamma \psi + \partial_{x_0} \psi \\ \partial_{x_1} \psi \\ \vdots \\ \partial_{x_{d-1}} \psi \end{pmatrix} .$$

De plus, ψ vérifie $\|\psi\|_{1/2,\gamma} \leq \|u\|_{-1/2,\gamma}$.

En appliquant le lemme 5.3, on obtient l'existence d'une fonction $\widetilde{\psi} \in H^{1/2}(\omega)$ telle que

$$\mathscr{B}_{\mathbf{a}}^{\gamma}(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) = \begin{pmatrix} \nabla^{\gamma}\widetilde{\psi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + M(\mathbf{a})\, \widetilde{v}_{|x_d=0} = \exp(-\gamma t) g\,,$$

et on conclut la preuve de la proposition 5.4 en posant $\psi := \exp(\gamma t)\widetilde{\psi}$.

□

Preuve du lemme 5.3

On considère tout d'abord le cas $u \in \mathscr{S}(\omega; \mathbb{R}^d)$, et on pose

$$\psi := (\gamma^2 - \Delta)^{-1}(\mathrm{div}_{-\gamma}\, u) \in \mathscr{S}(\omega; \mathbb{R})\,.$$

Observons que l'opérateur $\gamma^2 - \Delta$ est bien inversible car $\gamma \geq 1$. La définition de ψ donne immédiatement

$$\mathrm{div}_{-\gamma}\,(u - \nabla^{\gamma}\psi) = 0$$

et pour tout $w \in \mathscr{D}(\omega; \mathbb{R}^d)$ vérifiant $\mathrm{div}_{-\gamma}\, w = 0$, les hypothèses du lemme donnent

$$\langle \nabla^{\gamma}\psi, w\rangle_{L^2(\omega)} = 0 \quad \text{et} \quad \langle u - \nabla^{\gamma}\psi, w\rangle_{L^2(\omega)} = 0\,.$$

Par continuité, ces égalités ont également lieu si $w \in \mathscr{S}(\omega; \mathbb{R}^d)$. Nous allons maintenant montrer que $u = \nabla^{\gamma}\psi$. Toute fonction $W \in \mathscr{S}(\omega; \mathbb{R}^d)$ se décompose en

$$W = \nabla^{\gamma}\theta + w \quad \text{avec} \quad \mathrm{div}_{-\gamma}\, w = 0\,.$$

En effet, la décomposition ci-dessus est obtenue pour

$$\theta := (\gamma^2 - \Delta)^{-1}(\mathrm{div}_{-\gamma}\, W) \in \mathscr{S}(\omega; \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad w := W - \nabla^{\gamma}\theta \in \mathscr{S}(\omega; \mathbb{R}^d)\,.$$

On vérifie alors que

$$\langle u - \nabla^{\gamma}\psi, W\rangle_{L^2(\omega)} = 0$$

et donc $u = \nabla^{\gamma}\psi$. La définition de ψ donne directement l'estimation du lemme. Le cas général $u \in H^{-1/2}$ s'obtient par densité/continuité.

□

La proposition 5.4 ne statue pas sur l'unicité des solutions obtenues par cette méthode. Cette question trouve sa réponse dans le résultat suivant:

Théorème 5.3. *Soit* $(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) \in L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\omega)$ *une solution faible de*

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma}\widetilde{v} = \exp(-\gamma t) f & x_d > 0\,, \\ \mathscr{B}_{\mathbf{a}}^{\gamma}(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) = \exp(-\gamma t) g & x_d = 0\,. \end{cases}$$

Alors il existe une suite $(\widetilde{v}^\nu, \widetilde{\psi}^\nu) \in H^1(\Omega) \times H^1(\omega)$ *telle que*

$$\widetilde{v}^\nu \longrightarrow \widetilde{v} \quad \textit{dans } L^2(\Omega)\,, \tag{5.48a}$$

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^\gamma \widetilde{v}^\nu \longrightarrow \exp(-\gamma t) f \quad \textit{dans } L^2(\Omega)\,, \tag{5.48b}$$

$$\widetilde{v}^\nu_{|x_d=0} \longrightarrow \widetilde{v}_{|x_d=0} \quad \textit{dans } H^{-1/2}(\omega)\,, \tag{5.48c}$$

$$\widetilde{\psi}^\nu \longrightarrow \widetilde{\psi} \quad \textit{dans } H^{1/2}(\omega)\,, \tag{5.48d}$$

$$\mathscr{B}_{\mathbf{a}}^\gamma(\widetilde{v}^\nu, \widetilde{\psi}^\nu) \longrightarrow \exp(-\gamma t) g \quad \textit{dans } L^2(\omega)\,. \tag{5.48e}$$

En particulier, on en déduit que $\widetilde{\psi} \in H^1(\omega)$, $\widetilde{v}_{|x_d=0} \in L^2(\omega)$ *et que* (v, ψ) *vérifie l'inégalité d'énergie*

$$\gamma \|\widetilde{v}\|_0^2 + \|\widetilde{v}_{|x_d=0}\|_0^2 + \|\widetilde{\psi}\|_{1,\gamma}^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma} \|\exp(-\gamma t) f\|_0^2 + \|\exp(-\gamma t) g\|_0^2 \right)\,. \tag{5.49}$$

La solution $(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) \in L^2(\Omega) \times H^1(\omega)$ *est donc unique.*

Preuve

La suite régularisée $(\widetilde{v}^\nu, \widetilde{\psi}^\nu)$ est obtenue par convolution dans les variables tangentielles. Plus précisément, on se fixe une fonction $\rho(x_0, \ldots, x_{d-1})$, positive, de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact, et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho \, dx_0 \cdots dx_{d-1} = 1\,.$$

On définit, comme d'habitude, la suite de fonctions

$$\rho^\nu(x_0, \ldots, x_{d-1}) := \nu^d \, \rho(\nu x_0, \ldots, \nu x_{d-1})\,, \qquad \nu \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,,$$

et on pose

$$\widetilde{v}^\nu := \rho^\nu \star \widetilde{v}\,, \qquad \widetilde{\psi}^\nu := \rho^\nu \star \widetilde{\psi}\,.$$

Pour $\widetilde{v}^\nu$, la convolution n'a lieu que dans les variables tangentielles $(x_0, \ldots, x_{d-1})$. La régularité de $(\widetilde{v}^\nu, \widetilde{\psi}^\nu)$ dans les variables tangentielles est classique (voir [21]). La régularité de $\widetilde{v}^\nu$ par rapport à la variable x_d est une conséquence de l'équation

$$\gamma \mathscr{A}_0(\mathbf{a}) \, \widetilde{v} + \sum_{j=0}^{d} \mathscr{A}_j(\mathbf{a}) \, \partial_{x_j} \widetilde{v} = \exp(-\gamma t) f\,.$$

Cette égalité s'écrit de façon équivalente

$$\partial_{x_d} \widetilde{v} = -\gamma \mathscr{A}_d(\mathbf{a})^{-1} \mathscr{A}_0(\mathbf{a}) \, \widetilde{v} - \sum_{j=0}^{d-1} \mathscr{A}_d(\mathbf{a})^{-1} \mathscr{A}_j(\mathbf{a}) \, \partial_{x_j} \widetilde{v} - \mathscr{A}_d(\mathbf{a})^{-1} \exp(-\gamma t) f\,.$$

La définition de $\widetilde{v}^\nu$ donne $\partial_{x_d} \widetilde{v}^\nu \in L^2(\Omega)$ et finalement $\widetilde{v}^\nu \in H^1(\Omega)$, voir [23, 77]. La convergence (5.48b) se montre comme dans [77]. Les convergences (5.48a) et (5.48d) sont standard, et le lemme de Friedrichs entraine (5.48c). Pour ne pas alourdir la rédaction, on renvoie aux références déjà citées [23, 77].

L'estimation d'énergie (5.33), ainsi que les convergences (5.48b) et (5.48e), assurent que les suites $\widetilde{v}^\nu_{|x_d=0}$ (resp. $\widetilde{\psi}^\nu$) sont de Cauchy dans $L^2(\omega)$ (resp. $H^1(\omega)$). On en déduit que $\widetilde{v}_{|x_d=0} \in L^2(\omega)$ et $\widetilde{\psi} \in H^1(\omega)$. L'estimation (5.49) s'obtient par passage à la limite dans (5.33).

□

5.4.3 Le problème mixte à condition initiale nulle

Maintenant que nous savons résoudre le problème linéarisé (5.45) dans des espaces à poids, nous allons montrer comment résoudre le problème mixte avec condition initiale nulle.

Pour tout réel T, on définit $\Omega_T := \Omega \cap \{t < T\}$ et $\omega_T := \omega \cap \{t < T\}$. À partir de ce paragraphe, on notera $L^2_\gamma(\Omega_T)$ l'espace $\exp(\gamma t)L^2(\Omega_T)$, $H^1_\gamma(\Omega_T)$ l'espace $\exp(\gamma t)H^1(\Omega_T)$, etc... Les normes sur ces espaces sont définis de manière évidente, par exemple

$$\|\psi\|_{L^2_\gamma(\omega_T)} := \|\exp(-\gamma t)\psi\|_{L^2(\omega_T)}\,,$$
$$\|\psi\|_{H^1_\gamma(\omega_T)} := \|\exp(-\gamma t)\psi\|_{H^1(\omega_T)} \approx \gamma\|\psi\|_{L^2_\gamma(\omega_T)} + \|\nabla\psi\|_{L^2_\gamma(\omega_T)}\,.$$

On a tout d'abord le lemme de support suivant:

Lemme 5.4. *Soit $(v,\psi) \in L^2_\gamma(\Omega) \times H^1_\gamma(\omega)$ la solution de (5.45) pour $f \in L^2_\gamma(\Omega)$ et $g \in L^2_\gamma(\omega)$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors, quitte à augmenter γ_0, v et ψ sont nulles pour $t < t_0$ dès que f et g sont nulles pour $t < t_0$.*

On se ramène au cas $t_0 = 0$ par translation. Le lemme découle alors de l'estimation (5.49), qui est uniforme en γ. On renvoie à [23, 73] pour les détails.

Nous sommes désormais en mesure de résoudre le problème mixte avec donnée initiale nulle:

Théorème 5.4. *Soient $T > 0$, $f \in L^2(\Omega_T)$ et $g \in L^2(\omega_T)$, deux fonctions nulles pour $t < 0$. Il existe une unique solution $(v,\psi) \in L^2(\Omega_T) \times H^1(\omega_T)$ de*

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbf{a}} v = f & x_d > 0\,,\ t < T\,, \\ \mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v,\psi) = g & x_d = 0\,,\ t < T\,, \end{cases}$$

telle que (v,ψ) soit nulle pour $t < 0$. La solution v vérifie, de plus, $v \in \mathscr{C}^0([0,T], L^2(\mathbb{R}^d_+))$, et pour tout $t < T$

$$\begin{aligned} e^{-2\gamma t}\,\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} + \gamma\|v\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)} + \|v_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t)} + \|\psi\|^2_{H^1_\gamma(\omega_t)} \\ \leq C\left(\frac{1}{\gamma}\,\|f\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)} + \|g\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t)}\right)\,. \end{aligned} \tag{5.50}$$

La paramètre γ est choisi, comme d'habitude, suffisamment grand, et la constante C est indépendante de t, T, γ, f, g.

Preuve

On commence par prolonger f et g par 0 pour $t > T$. Ces prolongements appartiennent aux espaces $L^2_\gamma(\Omega)$ et $L^2_\gamma(\omega)$ pour tout $\gamma \geq 1$. Par le théorème 5.3, il existe une solution $(v,\psi) \in L^2_\gamma(\Omega) \times H^1_\gamma(\omega)$ de

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbf{a}} v = f & x_d > 0\,, \\ \mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v,\psi) = g & x_d = 0\,. \end{cases}$$

De plus, (v,ψ) satisfait (5.49). En particulier, la restriction de (v,ψ) à $\{t<T\}$ vérifie

$$\begin{aligned}\gamma\|v\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_T)}+\|v_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\omega_T)}+\|\psi\|^2_{H^1_\gamma(\omega_T)}&\le\gamma\|v\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)}+\|v_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\omega)}+\|\psi\|^2_{H^1_\gamma(\omega)}\\&\lesssim\frac{1}{\gamma}\|f\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)}+\|g\|^2_{L^2_\gamma(\omega)}=\frac{1}{\gamma}\|f\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_T)}+\|g\|^2_{L^2_\gamma(\omega_T)}\,.\end{aligned}\tag{5.51}$$

Le lemme 5.4 assure que v et ψ sont nulles pour $t<0$, et par conséquent $v\in L^2(\Omega_T)$, $\psi\in H^1(\Omega_T)$. Il s'agit de montrer que la solution ainsi construite est unique.

Soit (v,ψ) est une solution dans $L^2(\Omega_T)\times H^1(\omega_T)$, nulle pour $t<0$, avec $f\equiv 0$ et $g\equiv 0$. On se donne $T_1<T$ et ϑ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\begin{aligned}\vartheta(t)&=1\qquad\text{si } t\le T_1\,,\\ \vartheta(t)&=0\qquad\text{si } t\ge T\,.\end{aligned}$$

On vérifie que $(\vartheta v,\vartheta\psi)\in L^2_{\gamma'}(\Omega)\times H^1_{\gamma'}(\omega)$, pour tout $\gamma'\ge 1$. De plus, $\mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{a}}(\vartheta v)$ et $\mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{a}}(\vartheta v,\vartheta\psi)$ sont nulles pour $t<T_1$. D'après le lemme 5.4, $(\vartheta v,\vartheta\psi)$ est identiquement nulle pour $t<T_1$. Ainsi, v et ψ sont nulles pour $t<T_1$, et donc pour tout $t<T$.

On passe désormais à la dernière partie du théorème. C'est maintenant que nous allons exploiter l'existence d'un symétriseur matriciel. L'hypothèse 5.4 assure que le système

$$\mathscr{A}_0(\mathbf{a})\,\partial_{x_0}v+\sum_{j=1}^d\mathscr{A}_j(\mathbf{a})\,\partial_{x_j}v=f$$

est symétrisable au sens de Friedrichs, un symétriseur étant donné par

$$S:=\begin{pmatrix}\Sigma(\mathbf{a}^+) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Sigma(\mathbf{a}^-)\end{pmatrix}.$$

Supposons pour l'instant que la solution v trouvée ci-dessus, nulle dans le passé, soit dans $H^1(\Omega_T)$. À l'aide du symétriseur S, on montre facilement l'estimation

$$\exp(-2\gamma t)\|v(t)\|^2_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^d_+)}+\gamma\|v\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)}\le C\,\|f\|_{L^2_\gamma(\Omega_t)}\,\|v\|_{L^2_\gamma(\Omega_t)}+\|v_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t)}\,.$$

Lorsque v est seulement dans $L^2(\Omega_T)$, l'inégalité ci-dessus est encore vraie (on utilise une suite régularisée et on passe à la limite). D'après (5.51), on a

$$\|v_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t)}\le C\left(\frac{1}{\gamma}\|f\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)}+\|g\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t)}\right),$$

donc, en combinant les deux dernières inégalités, on obtient

$$\exp(-2\gamma t)\|v(t)\|^2_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^d_+)}\le C\left(\frac{1}{\gamma}\|f\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)}+\|g\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t)}\right),$$

ce qui assure que v est continu (en temps) à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^d_+)$. L'estimation (5.50) est à présent immédiate.

□

5.4.4 Le problème mixte général

Pour conclure cette partie, il nous reste à examiner le problème mixte avec condition initiale:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{d} \mathscr{A}_j(\mathbf{a})\,\partial_{x_j} v = f\,, \qquad & x_d > 0\,,\ t \in]0,T[\,, \\ \mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v,\psi) = g\,, \qquad & x_d = 0\,,\ t \in]0,T[\,, \\ v_{|t=0} = v_0\,, \qquad \psi_{|t=0} = \psi_0\,, \qquad & x_d > 0\,,\ t = 0\,, \end{aligned} \tag{5.52}$$

l'opérateur $\mathscr{B}_{\mathbf{a}}$ étant défini par

$$\mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v,\psi) := \begin{pmatrix} \nabla\psi \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + M(\mathbf{a})\, v_{|x_d=0}\,.$$

Les données du problème (5.52) sont

$$f \in L^2(]0,T[\times\mathbb{R}^d_+)\,, \quad g \in L^2(]0,T[\times\mathbb{R}^{d-1})\,, \quad v_0 \in L^2(\mathbb{R}^d_+)\,, \quad \psi_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1})\,. \tag{5.53}$$

Lorsque les coefficients sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, le passage du problème mixte à condition initiale nulle au problème mixte général est dû à Rauch [82]. Le problème (5.52) étant linéaire, on cherche la solution comme la superposition de la solution d'un problème de Cauchy et de la solution d'un problème mixte à donnée initiale nulle.

Pour $T > 0$, on notera $\Omega_T^+ := \Omega_T \cap \{t > 0\} =]0,T[\times\mathbb{R}^d_+$ et $\omega_T^+ := \omega_T \cap \{t > 0\}$. Nous commençons par établir le résultat suivant:

Proposition 5.5. *En plus de* (5.53), *on suppose* $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$. *Alors il existe une solution* $(v,\psi) \in L^2(\Omega_T^+) \times H^1(\omega_T^+)$ *de* (5.52), *vérifiant de plus* $v_{|x_d=0} \in L^2(\omega_T^+)$.

Preuve

On commence par prolonger v_0 en un élément de $H^1(\mathbb{R}^d)$. On prolonge également les coefficients de $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$ sur $\{x_d < 0\}$, de telle sorte que $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$ demeure un opérateur hyperbolique à multiplicité constante, à coefficients lipschitziens sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$. On note alors v^1 la solution (unique) du problème de Cauchy

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}} v^1 = 0\,, \qquad v^1_{|t=0} = v^0\,.$$

Cette solution vérifie $v^1 \in \mathscr{C}^0([0,T]; H^1(\mathbb{R}^d))$. La trace $v^1_{|x_d=0}$ est donc bien définie et vérifie $v^1_{|x_d=0} \in L^2(\omega_T^+)$.

On fixe maintenant $\psi^1 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\psi^1_{|t=0} = \psi_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$, et on pose

$$g^1 := g - M(\mathbf{a}) v^1_{|x_d=0} - \begin{pmatrix} \nabla\psi^1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in L^2(\omega_T^+)\,.$$

On continue de noter f et g^1 les prolongements de f et g^1 par 0 pour $t < 0$. Ces prolongements vérifient $f \in L^2_\gamma(\Omega_T)$ et $g^1 \in L^2_\gamma(\omega_T)$ pour tout $\gamma \geq 1$. Le théorème 5.4 assure l'existence de $(v^2,\psi^2) \in L^2(\Omega_T) \times H^1(\omega_T)$ solution de

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}} v^2 = f\,, \qquad \mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v^2,\psi^2) = g^1\,,$$

avec $(v^2,\psi^2) \equiv 0$ pour $t < 0$. On vérifie alors que $(v,\psi) := (v^1 + v^2, \psi^1 + \psi^2)$ est une solution de (5.52) sur l'intervalle de temps $]0,T[$.

□

Pour finir l'analyse du problème (5.52), on montre que la solution exhibée à la proposition 5.5 est "forte", i.e. limite de solutions avec $v \in H^1(\Omega_T^+)$. On montre ensuite que cette solution est unique. Nous ne détaillerons par cette partie de la preuve qui fait à nouveau appel au problème dual, et renvoyons à [73] pour les détails. La proposition 5.5 permet de montrer le résultat suivant, qui clot l'analyse (dans L^2) du problème linéarisé:

Théorème 5.5. *Soit $T > 0$. Pour toutes données comme en* (5.53), *le problème* (5.52) *admet une unique solution $(v, \psi) \in L^2(\Omega_T^+) \times H^1(\omega_T^+)$. Cette solution vérifie de plus $v \in \mathscr{C}^0([0,T]; L^2(\mathbb{R}_+^d))$ et $v_{|x_d=0} \in L^2(\omega_T^+)$.*

Si $\mathscr{K} \subset \mathscr{O}$ est un ensemble compact, $K > 0$ et $\mathbf{a} = (\mathbf{a}^+, \mathbf{a}^-, \nabla\varphi)$ défini par (5.23), *prenant ses valeurs dans $\mathscr{K}$, constant hors d'un compact et vérifiant $\|\mathbf{a}\|_{W^{1,\infty}(\Omega_T^+)} \leq K$, alors il existe des constantes γ_0 et $C > 0$ (ne dépendant que de $\mathscr{K}$ et de K) telles que pour tout $\gamma \geq \gamma_0$, pour tout $t \in [0,T]$, la solution de* (5.52) *vérifie*

$$\begin{aligned} e^{-2\gamma t} \|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} + \gamma \|v\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t^+)} + \|v_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t^+)} + \|\psi\|^2_{H^1_\gamma(\omega_t^+)} \\ \leq C \left(\frac{1}{\gamma} \|f\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t^+)} + \|g\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t^+)} + \|v_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} + \|\psi_0\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1})} \right) . \end{aligned} \tag{5.54}$$

On commence par montrer le résultat pour une donnée initiale $v_0 \in H^1(\mathbb{R}_+^d)$, en utilisant la proposition 5.5. L'estimation (5.54) permet de traiter le cas d'une donnée initiale $v_0 \in L^2(\mathbb{R}_+^d)$ par un argument de densité. Les arguments de [73] sont transposables, en utilisant le problème dual défini précédemment.

5.5 Résolution du problème non linéaire

Dans cette partie, nous montrons comment résoudre le problème non linéaire (5.7). Rappelons que l'on cherche une solution régulière (u^+, u^-, φ) du problème

$$\begin{aligned} A_0(u^+)\,\partial_t u^+ + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(u^+)\,\partial_{x_j} u^+ + \widetilde{A_d}(u^+, \nabla\varphi)\,\partial_{x_d} u^+ = 0\,, \quad t \in]0,T[\,,\ x_d > 0\,, \\ A_0(u^-)\,\partial_t u^- + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(u^-)\,\partial_{x_j} u^- - \widetilde{A_d}(u^-, \nabla\varphi)\,\partial_{x_d} u^- = 0\,, \quad t \in]0,T[\,,\ x_d > 0\,, \end{aligned} \tag{5.55}$$

avec les conditions au bord

$$\begin{aligned} \partial_t\varphi\,[f_0(u)] + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j}\varphi\,[f_j(u)] - [f_d(u)] = 0\,, \quad t \in]0,T[\,,\ x_d = 0\,, \\ g(u^-, u^+, \partial_t\varphi, \nabla_y\varphi) = 0\,, \quad t \in]0,T[\,,\ x_d = 0\,, \end{aligned} \tag{5.56}$$

et une condition initiale $(u_0^+, u_0^-, \varphi_0)$. La solution (u^+, u^-) est cherchée sous la forme

$$u^+ = u_r + v^+\,, \qquad u^- = u_l + v^-\,,$$

avec (u_r, u_l) un choc sous-compressif stationnaire, admissible. Dans toute la suite, on notera $u := (u^+, u^-)$, $v = (v^+, v^-)$, et on identifiera fréquemment u et v (qui ne diffèrent

que d'un vecteur constant). Le système (5.55)-(5.56) sera noté en abrégé

$$\begin{cases} L(u,\nabla\varphi)u = 0\,, & t\in\,]0,T[\,,\ x_d>0\,,\\ B(u,\nabla\varphi) = 0\,, & t\in\,]0,T[\,,\ x_d=0\,. \end{cases}$$

Rappelons également qu'on s'est fixé un ouvert

$$\mathscr{O} := \Big\{(v^+,v^-,\theta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d \text{ t.q. } |v^+|+|v^-|+|\theta|<\delta_0\Big\}$$

avec $\delta_0>0$ suffisamment petit, de telle sorte que pour toute perturbation lipschitzienne $(\dot u^+,\dot u^-,\nabla\varphi)$ prenant ses valeurs dans un ensemble compact $\mathscr{K}\subset\mathscr{O}$, le théorème 5.5 demeure valable.

L'ensemble Ω_T^+ étant défini, comme précédemment, par $\Omega_T^+ :=]0,T[\times\mathbb{R}^d_+$, on note $CH^s(\Omega_T^+)$, $s\in\mathbb{N}$, l'ensemble des distributions v sur Ω_T^+ telles que

$$\forall\, j=0,\dots,s \qquad \partial_t^j v\in\mathscr{C}^0([0,T];H^{s-j}(\mathbb{R}^d_+))\,.$$

Dans cette partie, nous allons montrer le résultat suivant:

Théorème 5.6. *Soit s un entier tel que $s>(d+3)/2$. Pour tout $v_0\in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^d_+)$ et $\varphi_0\in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ tels que $(v_0,\nabla\varphi_0)$ prenne ses valeurs dans un compact $\mathscr{K}\subset\mathscr{O}$ et vérifient les relations de compatibilité (explicitées ci-dessous) à l'ordre $s-1$, il existe $T>0$ et $(v,\varphi)\in CH^s(\Omega_T^+)\times H^{s+1}(\omega_T^+)$ solution du problème* (5.55)-(5.56). *De plus, une telle solution est unique.*

Remarquons qu'une telle solution (v,φ) est régulière, au sens où v est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à (t,x), et φ est de classe $\mathscr{C}^2$ par rapport à (t,y).

5.5.1 Les relations de compatibilité

Comme l'expliquent Massey et Rauch dans [83], les relations de compatibilité évoquées ci-dessus sont nécessaires pour obtenir une solution v dans l'espace CH^s. Plus précisément, pour une solution (v,φ) comme dans le théorème 5.6, on obtient notamment

$$\partial_t\varphi_{|t=0}\,[f_0(u_0)]+\sum_{j=1}^{d-1}\partial_{x_j}\varphi_0\,[f_j(u_0)]-[f_d(u_0)]=0\,,$$
$$g(u_0^-,u_0^+,\partial_t\varphi_{|t=0},\nabla_y\varphi_0)=0\,,$$

sur le bord $\{x_d=0\}$. Une condition nécessaire pour que le théorème 5.6 soit valable est donc qu'il existe une fonction $\varphi_1\in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que

$$\varphi_1\,[f_0(u_0)]+\sum_{j=1}^{d-1}\partial_{x_j}\varphi_0\,[f_j(u_0)]-[f_d(u_0)]=0\,,$$
$$g(u_0^-,u_0^+,\varphi_1,\nabla_y\varphi_0)=0\,.$$

L'existence d'un telle fonction φ_1 est la première relation de compatibilité.

De même, les équations (5.55) définissent la trace $\partial_t v_{|t=0}$ dans $\{x_d > 0\}$ par une formule du type

$$\partial_t v_{|t=0} = -\sum_{j=1}^{d-1} \mathscr{A}_0(u_0)^{-1}\mathscr{A}_j(u_0)\,\partial_{x_j} v_0 - \mathscr{A}_0(u_0)^{-1}\mathscr{A}_d(u_0,\nabla\varphi_0)\,\partial_{x_d} v_0\,,$$

où, par abus de notations, on a noté $\nabla\varphi_0 := (\varphi_1, \nabla_y\varphi_0)$. La définition des matrices $\mathscr{A}_j$ est immédiate à partir de (5.55). On vérifie (voir [73]) que la formule précédente définit une fonction $v_1 := \partial_t v_{|t=0} \in H^{s-1}(\mathbb{R}^d_+)$. La seconde relation de compatibilité est alors obtenue en dérivant par rapport à t les conditions au bord (5.56) et en évaluant en $t = 0$, la trace $v_1 = \partial_t v_{|t=0}$ étant définie ci-dessus. On obtient un système d'équations (assez compliqué) que doit vérifier la trace $\varphi_2 := \partial_t^2\varphi_{|t=0}$. Une telle fonction φ_2 appartient nécessairement à l'espace $H^{s-3/2}(\mathbb{R}^{d-1})$. L'existence d'une telle fonction $\varphi_2 \in H^{s-3/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ est la seconde relation de compatibilité.

Au final, en dérivant $s-1$ fois les conditions au bord, et en utilisant les équations (5.55), on montre le résultat préliminaire suivant:

Lemme 5.5. *Soient $v_0 \in H^s(\mathbb{R}^d_+)$ et $\varphi_0 \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$, $s > (d+3)/2$. Les s premières relations de compatibilité, obtenues en dérivant $j = 0,\dots,s-1$ fois les équations* (5.55) *et les conditions au bord* (5.56) *puis en évaluant en $t = 0$, déterminent de manière unique les traces*

$$v_k := \partial_t^k v_{|t=0} \in H^{s-k}(\mathbb{R}^d_+)\,, \qquad \varphi_k := \partial_t^k\varphi_{|t=0} \in H^{s+1/2-k}(\mathbb{R}^{d-1})\,, \qquad k = 1,\dots s\,.$$

On dira que les données (v_0,φ_0) sont compatibles à l'ordre $s-1$ s'il existe de telles fonctions $v_1,\dots,v_s,\varphi_1,\dots,\varphi_s$ vérifiant les s premières relations de compatibilité.

Pour éviter d'alourdir la rédaction, on renvoie à nouveau à [73] pour l'appartenance des traces v_k, φ_k aux espaces $H^{s-k}(\mathbb{R}^d_+)$, $H^{s+1/2-k}(\mathbb{R}^{d-1})$. Remarquons que les conditions de compatibilité sont plus astreignantes que dans l'étude des chocs de Lax, car il y a ici des relations de saut supplémentaires, représentées par la fonction g. Cependant, les faits suivants demeurent:

Tout choc plan admissible vérifie les relations de compatiblité à l'ordre $+\infty$. Cela correspond aux données initiales $v_0 \equiv 0$ et $\varphi_0 \equiv 0$.

Si $v_0 \in \mathscr{C}_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ est infiniment plate en $x_d = 0$, alors la donnée $(v_0, 0)$ est compatible à l'ordre $+\infty$.

Les relations de compatibilité permettent de construire des solutions approchées de (5.55)-(5.56), comme nous le détaillons dans la proposition suivante:

Proposition 5.6. *Soient $v_0 \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^d_+)$ et $\varphi_0 \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ des données compatibles à l'ordre $s-1$. Alors il existe des fonctions $v \in H^{s+1}(\Omega)$ et $\varphi \in H^{s+1}(\omega)$ telles que*

$$\forall\, j = 0,\dots,s-1\,, \qquad \begin{cases} \partial_t^j[L(u,\nabla\varphi)u]_{|t=0} = 0\,, \\ \partial_t^j B(u,\nabla\varphi)_{|t=0} = 0\,. \end{cases} \tag{5.57}$$

Preuve

Les données étant compatibles à l'ordre $s-1$, il existe des fonctions

$$v_k \in H^{s-k+1/2}(\mathbb{R}^d_+)\,, \qquad \varphi_k \in H^{s+1/2-k}(\mathbb{R}^{d-1})\,, \qquad k=1,\dots s\,,$$

vérifiant les s premières relations de compatibilité. On relève ces fonctions en $v \in H^{s+1}(\Omega)$ et $\varphi \in H^{s+1}(\omega)$ vérifiant

$$\partial_t^j v_{|t=0} = v_j\,, \qquad \partial_t^j \varphi_{|t=0} = \varphi_j\,, \qquad j=0,\dots,s\,.$$

Comme les données (v_0,φ_0) sont compatibles, on obtient effectivement

$$\partial_t^j [L(u,\nabla\varphi)u]_{|t=0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_t^j B(u,\nabla\varphi)_{|t=0} = 0$$

pour tout $j=0,\dots,s-1$.

□

5.5.2 Estimations H^s pour le problème linéarisé

Dans la partie 5.4, nous avons vu que le problème linéarisé était bien posé dans L^2. Nous montrons ici que le problème linéarisé est bien posé dans H^s. Cela permettra d'établir un "contrôle en grande norme", et de montrer la convergence du schéma itératif que nous allons mettre en place.

Pour $\gamma \geq 1$, et $s \in \mathbb{N}$, l'espace $H^s_\gamma(\Omega_T) := \exp(\gamma t) H^s(\Omega_T)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{H^s_\gamma(\Omega_T)} := \sum_{|\alpha|\leq s} \gamma^{s-|\alpha|}\, \|\exp(-\gamma t)\, \partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega_T)}\,.$$

L'espace $H^s_\gamma(\omega_T)$ est muni d'une norme similaire. Enfin, l'espace $CH^s(\Omega_T)$ désigne l'espace des distributions v sur Ω_T qui vérifient $\partial_t^j v \in \mathscr{C}^0(]-\infty,T]; H^{s-j}(\mathbb{R}^d_+))$, pour tout $j = 0,\dots,s$. Pour $v \in CH^s(\Omega_T)$, on note

$$|\!|\!| v(t) |\!|\!|_{s,\gamma} := \sum_{|\alpha|\leq s} \gamma^{s-|\alpha|}\, \|\partial^\alpha v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}\,.$$

Comme dans la partie précédente, on se fixe $\dot u \in CH^s(\Omega_T)$ et $\varphi \in H^{s+1}(\omega_T)$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall\,(t,y,x_d)\,, \quad (\dot u(t,y,x_d), \nabla\varphi(t,y)) \in \mathscr{K} \subset \mathscr{O}\,, \\ \dot u \equiv 0 \ \text{ et } \ \varphi \equiv 0 \quad \text{pour } \ t<0\,, \\ \|\nabla\varphi\|_{W^{1,\infty}(\omega_T)} \leq K\,, \quad \|\dot u\|_{W^{1,\infty}(\Omega_T)} \leq K\,. \end{cases}$$

De telles fonctions vérifient $\dot u \in H^s_\gamma(\Omega_T)$ et $\varphi \in H^{s+1}_\gamma(\omega_T)$ pour tout $\gamma \geq 1$. On note $u := (u_r, u_l) + \dot u$ et on considère le problème linéarisé

$$\begin{cases} L(u,\nabla\varphi)v = f \in H^s(\Omega_T)\,, & t<T\,,\ x_d>0\,, \\ DB(u,\nabla\varphi)\cdot(v,\psi) = g \in H^s(\omega_T)\,, & t<T\,,\ x_d=0\,, \\ v \equiv 0 \ \text{ et } \ \psi \equiv 0 & t<0\,. \end{cases} \tag{5.58}$$

Dans (5.58), les seconds membres f et g sont identiquement nuls pour $t<0$. Pour f et g dans L^2, l'estimation de v et $\nabla\psi$ dans L^2 découle du théorème 5.4. Lorsque f et g sont dans H^s, on a le résultat suivant:

Théorème 5.7. *Soient $s > (d+3)/2$, $f \in H^s(\Omega_T)$ et $g \in H^s(\omega_T)$ telles que $f \equiv 0$ et $g \equiv 0$ pour $t < 0$. Alors il existe un unique couple $(v, \psi) \in H^s(\Omega_T) \times H^{s+1}(\omega_T)$ solution de (5.58), vérifiant $(v, \psi) \equiv 0$ pour $t < 0$. Cette solution vérifie également $v \in CH^s(\Omega_T)$ et $v_{|_{x_d=0}} \in H^s(\omega_T)$. De plus, il existe deux constantes $C > 0$ et $\gamma_0 \geq 1$, ne dépendant que de $\mathscr{K}$ et K, telles que pour tout $t < T$*

$$\begin{aligned}\sqrt{\gamma}\,\|v\|_{H^s_\gamma(\Omega_T)} + e^{-\gamma t}\,\|v(t)\|_{s,\gamma} + \|\psi\|_{H^{s+1}_\gamma(\omega_T)} &\leq C\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\|f\|_{H^s_\gamma(\Omega_T)} + \|g\|_{H^s_\gamma(\omega_T)}\right)\\ &+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,C\left(1 + \|v\|_{W^{1,\infty}(\Omega_T)} + \|f\|_{L^\infty(\Omega_T)}\right)\left(\|\dot{u}\|_{H^s_\gamma(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{H^{s+1}_\gamma(\omega_T)}\right).\end{aligned} \tag{5.59}$$

Pour montrer le théorème 5.7, on commence par estimer a priori les dérivées tangentielles $\partial^\alpha_{t,y} v$ et $\partial^\alpha_{t,y}\psi$. Pour cela, on écrit l'équation vérifiée par ces fonctions, et on utilise l'estimation L^2 du théorème 5.4. Pour les dérivées normales $\partial^\alpha_{x_d} v$, on utilise directement l'équation

$$\partial_{x_d} v = \mathscr{A}_d^{-1}\left(f - \sum_{j=0}^{d-1} \mathscr{A}_j\,\partial_{x_j} v\right).$$

Dans les deux cas, on estime les "seconds membres" des équations en utilisant des inégalités de Gagliardo-Nirenberg (à poids). Les détails de la preuve étant assez techniques, nous ne les reproduirons pas et renvoyons à [73] et [77].

On montre ensuite que la solution (v, ψ) exhibée au théorème 5.4 est régulière, i.e. dans $H^s(\Omega_T) \times H^{s+1}(\omega_T)$, à l'aide d'une régularisation dans les variables tangentielles.

5.5.3 Preuve du théorème 5.6

On se donne un entier $s > (d+3)/2$ et des données initiales $v_0 \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^d_+)$, $\varphi_0 \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$, qui sont compatibles à l'ordre $s-1$. On suppose également que $(v_0, \nabla\varphi_0)$ prend ses valeurs dans un compact $\mathscr{K} \subset \mathscr{O}$, où

$$\mathscr{O} := \left\{(v^+, v^-, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |v^+| + |v^-| + |\theta| < \delta_0\right\}$$

est un ensemble de "perturbations" pour lesquelles le problème linéarisé (5.58) vérifie les théorèmes 5.5 et 5.7.

On fixe $\delta_1 > 0$ tel que $\delta_1 < \delta_0$ et

$$\|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d_+)} + \|\nabla\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \delta_1\,,$$

avec $\nabla\varphi_0 = (\varphi_1, \nabla_y\varphi_0)$, φ_1 étant donnée par la première relation de compatibilité. La proposition 5.6 fournit deux fonctions $v^{app} \in H^{s+1}(\Omega)$ et $\varphi^{app} \in H^{s+1}(\Omega)$ telles que d'une part

$$\forall\, j = 0, \ldots, s-1\,, \qquad \begin{cases}\partial_t^j[L(u^{app}, \nabla\varphi^{app})u^{app}]_{|_{t=0}} = 0\,,\\ \partial_t^j B(u^{app}, \nabla\varphi^{app})_{|_{t=0}} = 0\,,\end{cases}$$

et d'autre part

$$(v^{app}, \varphi^{app})_{|_{t=0}} = (v_0, \varphi_0)\,.$$

On définit la fonction

$$f^{app} := \begin{cases} -L(u^{app}, \nabla\varphi^{app})u^{app} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

ainsi que la fonction

$$g^{app} := \begin{cases} -B(u^{app}, \nabla\varphi^{app}) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

D'après la proposition 5.6, on a

$$\forall\, j = 0, \ldots, s-1\,, \qquad \partial_t^j f^{app}{}_{|t=0} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t^j g^{app}{}_{|t=0} = 0\,.$$

Comme, par ailleurs, les restrictions de f^{app} et g^{app} à $\{t > 0\}$ sont dans $H^s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d_+)$ et $H^s(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1})$, la formule des sauts montre que $f^{app} \in H^s(\Omega)$ et $g^{app} \in H^s(\omega)$.

Pour résoudre le système (5.58), on définit le schéma itératif suivant: étant donné

$$(u_\nu, \varphi_\nu) = (u^{app} + v_\nu, \varphi^{app} + \psi_\nu)\,, \quad \nu \in \mathbb{N}\,,$$

on pose

$$f_\nu := \begin{cases} -L(u_\nu, \nabla\varphi_\nu)u^{app} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

et

$$g_\nu := \begin{cases} DB(u_\nu, \nabla\varphi_\nu)\cdot(v_\nu, \psi_\nu) - B(u_\nu, \nabla\varphi_\nu) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

On résoud ensuite le problème linéaire

$$\begin{cases} L(u_\nu, \nabla\varphi_\nu)v_{\nu+1} = f_\nu\,, & t < T\,,\ x_d > 0\,, \\ DB(u_\nu, \nabla\varphi_\nu)\cdot(v_{\nu+1}, \psi_{\nu+1}) = g_\nu\,, & t < T\,,\ x_d = 0\,, \\ v_{\nu+1} \equiv 0 \ \text{ et } \ \psi_{\nu+1} \equiv 0 & t < 0\,. \end{cases} \tag{5.60}$$

On initialise le schéma itératif en prenant

$$v_0 \equiv 0 \quad \text{et} \quad \psi_0 \equiv 0\,.$$

Les principales propriétés du schéma itératif sont résumées dans le résultat suivant:

Théorème 5.8. *Il existe des constantes $T > 0$ et $\alpha > 0$ telles que la suite (v_ν, ψ_ν) solution de (5.60) est bien définie et vérifie*
$\|v_\nu\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \|\nabla\varphi_\nu\|_{L^\infty(\omega_T)} \le \alpha$,
(v_ν, ψ_ν) est bornée dans $CH^s(\Omega_T) \times H^{s+1}(\omega_T)$ et converge dans $L^2(\Omega_T) \times H^1(\omega_T)$.

Preuve

On commence par examiner le premier pas d'itération $\nu = 0$. Par construction de la solution approchée (v^{app}, φ^{app}), il existe des réels $T > 0$, $\delta_2 \in]\delta_1, \delta_0[$ et $K > 0$ tels que

$$\|v^{app}\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \|\nabla\varphi^{app}\|_{L^\infty(\omega_T)} \leq \delta_2 \,,$$
$$\|v^{app}\|_{W^{1,\infty}(\Omega_T)} + \|\nabla\varphi^{app}\|_{W^{1,\infty}(\omega_T)} \leq K \,.$$

Il s'agit alors de montrer le théorème 5.8 pour une certaine constante $\alpha > 0$ telle que $\delta_2 + \alpha < \delta_0$. Ainsi (u_ν, φ_ν) sera une perturbation "non caractéristique et uniformément stable" du choc sous-compressif (plan) de référence.

On montre le résultat du théorème par récurrence, en remarquant qu'il n'y a rien à faire pour $\nu = 0$ car $v_0 \equiv 0$ et $\psi_0 \equiv 0$. On suppose vrai jusqu'à l'entier ν qu'il existe deux constantes $T > 0$ et $K > 0$ telles que

$$\forall\, \mu \leq \nu \,, \quad \|v_\mu\|_{CH^s(\Omega_T)} + \|\psi_\mu\|_{H^{s+1}(\omega_T)} \leq K \,,$$

et $(v_\mu, \psi_\mu) \equiv 0$ pour $t < 0$. Quitte à restreindre T, on peut supposer que T vérifie $KT \leq \alpha$, avec $\alpha > 0$ fixé tel que $\delta_2 + \alpha < \delta_0$. Les injections de Sobolev donnent alors

$$\forall\, \mu \leq \nu \,, \quad \|v_\mu\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \|\nabla\psi_\mu\|_{L^\infty(\omega_T)} \leq \alpha \,.$$

Si $(v_\nu, \psi_\nu) \in CH^s(\Omega_T) \times H^{s+1}(\omega_T)$ vérifie l'hypothèse de récurrence, alors les fonctions f_ν et g_ν vérifient

$$\forall\, j = 0, \ldots, s-1 \,, \qquad \partial_t^j f_{\nu|_{t=0}} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t^j g_{\nu|_{t=0}} = 0 \,,$$

et la formule des sauts montre que $f_\nu \in H^s(\Omega_T)$ et $g_\nu \in H^s(\omega_T)$. Par construction, f_ν et g_ν sont nulles pour $t < 0$. On a de plus

$$\|f_\nu\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C_1(K)\, \varepsilon(T) \quad \text{et} \quad \|g_\nu\|_{H^s(\omega_T)} \leq C_1(K)\, \varepsilon(T) \,,$$

pour certaines constantes $C_1(K)$ et $\varepsilon(T)$, ne dépendant pas de ν, vérifiant $\varepsilon(T) \to 0$ quand $T \to 0$.

Le problème (5.60) remplit donc toutes les hypothèses du théorème 5.7. On en déduit que $(v_{\nu+1}, \psi_{\nu+1}) \in CH^s(\Omega_T) \times H^{s+1}(\omega_T)$ et vérifient

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\gamma}\, \|v_{\nu+1}\|_{H^s_\gamma(\Omega_T)} + e^{-\gamma t}\, \|v_{\nu+1}(t)\|_{s,\gamma} + \|\psi_{\nu+1}\|_{H^{s+1}_\gamma(\omega_T)} \\
&\qquad \leq C_2(K) \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\, \|f_\nu\|_{H^s_\gamma(\Omega_T)} + \|g_\nu\|_{H^s_\gamma(\omega_T)} \right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\, C_2(K) \left(1 + \|v_\nu\|_{W^{1,\infty}(\Omega_T)} + \|f_\nu\|_{L^\infty(\Omega_T)}\right) \left(\|v_\nu\|_{H^s_\gamma(\Omega_T)} + \|\psi_\nu\|_{H^{s+1}_\gamma(\omega_T)} \right) .
\end{aligned}$$

On vérifie maintenant que pour γ grand (le choix de γ ne dépendant que de K) et pour T suffisamment petit (le choix de T ne dépendant également que de K), on a

$$\|v_{\nu+1}\|_{CH^s(\Omega_T)} + \|\psi_{\nu+1}\|_{H^{s+1}(\omega_T)} \leq K \,,$$

de sorte que $(v_{\nu+1}, \psi_{\nu+1})$ vérifie aussi l'hypothèse de récurrence.

La convergence dans $L^2(\Omega_T) \times H^1(\omega_T)$ de la suite (v_ν, ψ_ν) résulte de (5.50).

□

Par un résultat classique d'interpolation, la suite (v_ν, ψ_ν) converge fortement dans tous les espaces $CH^{s'}(\Omega_T) \times H^{s'+1}(\omega_T)$ avec $s' < s$, et la limite (v, ψ) fournit une solution (u, φ) des équations (5.55)-(5.56). En écrivant les équations vérifiées par $\partial^\beta v$ et $\partial^\beta \psi$, le théorème 5.5 montre que $(v, \psi) \in CH^s(\Omega_T) \times H^{s+1}(\omega_T)$.

5.6 Application aux transitions de phase

Dans cette partie, nous montrons comment l'analyse développée ci-dessus s'applique à l'étude des transitions de phase liquide-vapeur isothermes. On renvoie à [12] pour la preuve des résultats que nous allons énoncer. On s'intéresse aux équations d'Euler pour un fluide isotherme:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u}) = 0\,, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla\, p = 0\,, \end{cases}$$

où l'on a gardé les notations du chapitre 1. Ce système vérifie les hypothèses 5.1 et 5.4 dans la région d'hyperbolicité $\{p'(\rho) > 0\}$. Dans la suite, on note $v := 1/\rho$ le volume spécifique du fluide et on suppose que le fluide suit une loi de pression de van der Waals:

$$p(\rho) = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}\,.$$

On se place à une température T inférieure à la température critique T_c de sorte que l'isotherme $(v \mapsto p(v))$ est strictement décroissante excepté sur un intervalle $[v_*, v^*]$. Rappelons que les points d'équilibre de Maxwell sont l'unique couple (v_m, v^m) tel que

$$v_m < v_* < v^* < v^m\,, \quad p(v_m) = p(v^m) =: \overline{p} \quad \text{et} \quad \int_{v_m}^{v^m} (p(v) - \overline{p})\, dv = 0\,.$$

On se donne une discontinuité plane

$$\mathbf{U} := \begin{cases} (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{si } \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} > \sigma t\,, \\ (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{si } \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} < \sigma t\,, \end{cases}$$

solution des équations d'Euler avec $(1/\rho_r, 1/\rho_l)$ proche des points de Maxwell. Sans perte de généralité, on peut alors supposer

$$\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{n} - c_r < \sigma < \mathbf{u}_r\cdot\mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_l\cdot\mathbf{n} - c_l < \sigma < \mathbf{u}_l\cdot\mathbf{n}\,,$$

où c désigne, comme d'habitude, la vitesse du son dans le fluide. Nous sommes donc dans la situation d'un choc sous-compressif avec $\kappa = 0$ (voir (5.5) et la définition 5.1). Le critère d'admissibilité visco-capillaire proposé par Slemrod et Truskinovsky [101, 102, 110] impose l'existence d'une onde progressive

$$\rho(t,\mathbf{x}) = \rho((\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - \sigma t)/\varepsilon)\,, \quad \mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{u}((\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - \sigma t)/\varepsilon)$$

avec

$$\rho(+\infty) = \rho_r\,, \rho(-\infty) = \rho_l\,, \quad \mathbf{u}(+\infty) = \mathbf{u}_r\,, \mathbf{u}(-\infty) = \mathbf{u}_l\,,$$

qui soit solution des équations d'Euler auxquelles on a ajouté un coefficient de capillarité ε^2 et un coefficient de viscosité $\nu\varepsilon$ $(\nu > 0)$:

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho + \operatorname{div}\,(\rho\,\mathbf{u}) = 0\,, \\ &\partial_t(\rho\,\mathbf{u}) + \operatorname{div}\,(\rho\,\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla\, p(\rho) = \nu\varepsilon\Delta\mathbf{u} - \varepsilon^2\nabla(\Delta v)\,. \end{aligned}$$

On note F l'énergie libre spécifique, $F'(v) = -p(v)$. Il est alors montré dans [12] que les transitions de phase admissibles satisfont les conditions de Rankine-Hugoniot ainsi que la condition de saut (non explicite) supplémentaire

$$[F] + [v]\frac{p(v_r) + p(v_l)}{2} = -\nu\, j \int_{-\infty}^{+\infty} v'(\xi)^2\, d\xi\,.$$

Comme au chapitre 1, on a noté j le flux de matière à travers l'interface:

$$j := \rho_r(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n} - \sigma) = \rho_l(\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} - \sigma)\,.$$

En tenant compte des conditions de Rankine-Hugoniot, la condition d'admissibilité peut se réécrire

$$\left[\frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma)^2 + f'(\rho)\right] = -\nu\, j \int_{-\infty}^{+\infty} v'(\xi)^2\, d\xi\,,$$

avec $f(\rho) := \rho F(1/\rho)$ l'énergie libre par unité de volume. On a donc une forme (non explicite) pour la fonction g introduite à la définition 5.2. Le théorème suivant est établi dans [12] (on renvoie à cet article pour l'énoncé précis):

Théorème 5.9 (Benzoni-Gavage). [12]. *Pour un coefficient ν suffisamment petit, il existe des transitions de phase admissibles et de telles transitions de phase sont linéairement uniformément stables, c'est-à-dire satisfont l'hypothèse 5.3.*

Pour appliquer les résultats de stabilité et d'existence des parties précédentes, il nous reste à vérifier l'hypothèse 5.5. Par un changement de référentiel galiléen, on peut supposer $\sigma = 0$, $\mathbf{n} = (0, \ldots, 0, 1)$ et que la vitesse du fluide de part et d'autre du choc est parallèle à $\mathbf{n}$, c'est-à-dire $\mathbf{u}_{r,l} = (0, \ldots, 0, u_{r,l})$.

Dans le cas des équations d'Euler avec la condition de saut supplémentaire donnée par le critère visco-capillaire, la matrice M définie en (5.10) est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} u_r & \mathbf{0} & \rho_r & -u_l & \mathbf{0} & -\rho_l \\ \mathbf{0} & \rho_r u_r I_{d-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\rho_l u_l I_{d-1} & \mathbf{0} \\ u_r^2 + c_r^2 & \mathbf{0} & 2\rho_r u_r & -(u_l^2 + c_l^2) & \mathbf{0} & -2\rho_l u_l \\ f''(\rho_r) & \mathbf{0} & u_r & (\tilde{\nu} u_l - f''(\rho_l)) & \mathbf{0} & (\tilde{\nu}\rho_l - u_l) \end{pmatrix},$$

avec $\tilde{\nu} = \alpha\,\nu + o(\nu)$, α étant une constante strictement positive. On rappelle que f est l'énergie libre par unité de volume. Pour montrer que M est de rang maximal, nous allons montrer que la mtrice M_1 constituée des $(d+1)$ premières colonnes de M et de la dernière colonne de M est inversible. On a

$$f''(\rho) = \frac{1}{\rho}\, p'(\rho) = \frac{c^2}{\rho}$$

et donc

$$M_1 = \begin{pmatrix} u_r & \mathbf{0} & \rho_r & -\rho_l \\ \mathbf{0} & \rho_r u_r I_{d-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ u_r^2 + c_r^2 & \mathbf{0} & 2\rho_r u_r & -2\rho_l u_l \\ \dfrac{c_r^2}{\rho_r} & \mathbf{0} & u_r & (\tilde{\nu}\rho_l - u_l) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de M_1 est donné par

$$\det M_1 = (\rho_r u_r)^{d-1} \left(u_r^2 - c_r^2\right) \left([u]\,[\rho] + \tilde{\nu}\,\rho_r\,\rho_l\right),$$

ce qui montre que M_1 est inversible pour tout $\tilde{\nu}$ suffisamment petit (ou encore pour tout ν suffisamment petit). Les transitions de phase admissibles vérifient donc l'hypothèse 5.5. Toute l'analyse développée dans ce chapitre s'applique donc. On en déduit la stabilité non linéaire des transitions de phase planes dynamiques et admissibles (au sens du critère visco-capillaire).

Chapitre 6

Weakly stable multi-d shocks

Cet article a fait l'objet d'une prépublication du laboratoire de mathématiques de l'ENS Lyon. Il est actuellement soumis pour publication.

6.1 Introduction

In [65] and [64], Majda proved the existence of multidimensional shock waves for hyperbolic systems of conservation laws. The analysis relied on a uniform stability assumption. However, previous works [11, 26] have exhibited some examples where the uniform stability condition breaks down. In [26], we have begun to extend Majda's linear analysis to these particular examples, namely we have proved an energy estimate on a constant coefficients linearized system. Here we adopt a general approach and prove a complete linear stability result for a class of shock waves that are not uniformly stable. The analysis is closely related to what was done in [26].

To avoid any possible confusion, we shall not include the case of nonclassical shock waves in this work though this field has known a significant increase of interest over the past few years, see e.g. [11, 12, 38, 40] and the references therein.

We shall focus in this paper on **multidimensional** hyperbolic **systems**: the one-dimensional case is far different from the multidimensional case since shock waves are either uniformly stable or violently unstable, see [66]. The scalar case is also known to be very different from the system case since scalar conservation laws provide us with a unified theory of existence and uniqueness of solutions in the large, see e.g. [31, 92].

We consider a system of N conservation laws in time-space $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$:

$$\sum_{j=0}^{d} \partial_j f_j(u) = 0 \,, \tag{6.1}$$

where x_0 is the time variable, also denoted by t in the sequel, $(x_1, \ldots, x_d)$ is the space variable and ∂_j stands for the partial derivative with respect to x_j. The fluxes $f_0, \ldots, f_d$ are $\mathscr{C}^\infty$ functions defined on an open set U of $\mathbb{R}^N$ with values in $\mathbb{R}^N$. The jacobian matrix of f_j at point u will be denoted by $A_j(u)$.

We assume that the system (6.1) does not consist of a single conservation law (in one or several space variables), that is, $N \geq 2$. We also assume that the space dimension is $d \geq 2$ (see the preceeding remarks). We first assume that (6.1) is a symmetric hyperbolic system of conservation laws:

Assumption 6.1. *There exists a $\mathscr{C}^\infty$ mapping $\Sigma : U \longrightarrow \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ such that*
$\forall\, j = 0, \dots, d \quad \forall\, u \in U \quad \Sigma(u)\, A_j(u)$ *is symmetric,*
$\forall\, K$ *compact* $\subset U \quad \exists\, c_K > 0$ *such that* $\Sigma(u)\, A_0(u) \geq c_K\, I$ *for all* $u \in K$.

Recall that assumption 6.1 is satisfied when there exists a strictly convex entropy, see [31, 92]. Assumption 6.1 is met by many physical examples such as Euler equations of gas dynamics, Maxwell equations or the wave equation. Moreover, assumption 6.1 is the key tool to solve the Cauchy problem associated with (6.1) for smooth initial data (namely in a Sobolev space of large index), see [66, 92].

Because the system has been assumed to be symmetric hyperbolic, the matrix $A(u, \xi)$ defined by the formula:

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad A(u, \xi) := A_0(u)^{-1} \sum_{j=1}^{d} \xi_j\, A_j(u) \tag{6.2}$$

is diagonalizable over $\mathbb{R}$ for all state $u \in U$ and all wave vector $\xi \in \mathbb{R}^d$ (see [92]). However, we shall need a little more than hyperbolicity to carry out the study of the linear stability of shock waves. In [61], the system was assumed to be strictly hyperbolic but it has been shown in [65] that a suitable "block structure condition" (that is met by strictly hyperbolic systems) is sufficient to carry out the study of initial boundary value problems and the study of the linear stability of shock waves, see also [23, 73, 77]. The block structure condition will be recalled further in this paper. In [72], Métivier has shown that the block structure condition was met by every hyperbolic system with constant multiplicity. We are thus naturally led to make the assumption that (6.1) is a system with constant multiplicity:

Assumption 6.2. *There exist $\mathscr{C}^\infty$ real valued mappings $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ defined on $U \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, and fixed integers $m_1, \dots, m_q$ such that the λ_j's are the eigenvalues, with multiplicity m_j, of the matrix $A(u, \xi)$ defined by* (6.2). *Furthermore, the λ_j's satisfy*

$$\forall\, u \in U\,, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\,, \quad \lambda_1(u, \xi) < \cdots < \lambda_q(u, \xi)\,.$$

We point out that assumption 6.2 is easily checked on the system. However, one could replace assumption 6.2 by the more abstract block structure condition, as was made in [65, 73, 77].

Example: consider Euler's equations of isentropic gas dynamics in space dimension d:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u}) = 0\,, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla\, p = 0\,, \end{cases}$$

where ρ stands for the density of the fluid, $\mathbf{u}$ for the velocity, p for the pressure. Quantities ρ and p are linked by an equation of state $p = p(\rho)$. In the domain $\{\rho > 0\}$, hyperbolicity (we mean assumption 6.1) amounts to requiring that the pressure satisfies

$$c^2 := \frac{dp}{d\rho} > 0\,.$$

As usual, c denotes the sound speed in the fluid. Under this condition on the pressure law, Euler's equations are endowed with a strictly convex entropy, so assumption 6.1 is met. Moreover, the eigenvalues of the corresponding matrix $A(U,\xi)$, $U=(\rho,\mathbf{u})$, are given by

$$\begin{aligned}
\lambda_1(U,\xi) &= \mathbf{u}\cdot\xi - c\,|\xi| && \text{with multiplicity } m_1 = 1\,,\\
\lambda_2(U,\xi) &= \mathbf{u}\cdot\xi && \text{with multiplicity } m_2 = d-1\,,\\
\lambda_3(U,\xi) &= \mathbf{u}\cdot\xi + c\,|\xi| && \text{with multiplicity } m_3 = 1\,.
\end{aligned}$$

and therefore assumption 6.2 is met. We shall detail in section 6.4 how the general analysis of this paper applies in the context of isentropic gas dynamics.

Note that Lundquist's equations of magnetohydrodynamics violate assumption 6.2. The study of shock waves in MHD is a very intricate subject due to the appearance of many "pathologies" (nonconstant multiplicity, occurrence of under- and over-compressive shocks, etc...). We refer to [18] and to the references therein for some results on this subject.

Because of the natural development of singularities in finite time, see [6], it appears natural to seek solutions to (6.1) as functions that are smooth on either side of a hypersurface of $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$. Recall the following classical result:

Proposition 6.1. *Let $\Gamma=\{x_d-\varphi(x_0,\dots,x_{d-1})=0\}$ be a smooth hypersurface in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, and let u be a smooth function on either side of Γ. Then u is a weak solution of* (6.1) *if and only if u satisfies* (6.1) *(in the classical sense) on either side of Γ and if the Rankine-Hugoniot conditions hold at each point of Γ:*

$$\forall\,\mathbf{x}=(x_0,\dots,x_d)\in\Gamma\,,\quad \sum_{j=0}^{d-1}\partial_j\varphi\,[f_j(u)](\mathbf{x})-[f_d(u)](\mathbf{x})=0\,, \tag{6.3}$$

the partial derivatives of φ in the above formula being evaluated at $(x_0,\dots,x_{d-1})$. In (6.3), *we have let $[f_j(u)](\mathbf{x})$ denote the jump of the quantity $f_j(u)$ across the hypersurface:*

$$[f_j(u)](\mathbf{x}) := \lim_{s\to 0^+}\left(f_j(u(\mathbf{x}+s\mathbf{n}))-f_j(u(\mathbf{x}-s\mathbf{n}))\right)\quad \textit{with}\ \ \mathbf{n}=(-\partial_0\varphi,\dots,-\partial_{d-1}\varphi,1)\,.$$

The existence of such a piecewise smooth solution to (6.1) is a free boundary problem since the function φ defining the hypersurface Γ is part of the unknown of the problem. To overcome this first difficulty, we begin by straightening the variables in order to work in a fixed domain: given a smooth function φ on $\mathbb{R}^d$, we define a change of variables in $\mathbb{R}^{d+1}$ by the formula:

$$\Phi(x_0,\dots,x_d) := (x_0,\dots,x_{d-1},x_d+\varphi(x_0,\dots,x_{d-1}))\,.$$

We have chosen here the standard change of variables (as in [65, 73, 77]): it maps the hyperplane $\{x_d=0\}$ onto the hypersurface Γ and the two half-spaces $\{\pm x_d>0\}$ on the two sides of Γ. Other choices for the change of variables (that may be appropriate for characteristic problems) may be found in [37]. We now perform a change of unknown functions. If u is a smooth function on either side of Γ, then the function $u_\sharp$ defined by

$$\forall\,(x_0,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^{d+1}\,,\quad u_\sharp(x_0,\dots,x_d) := u(\Phi(x_0,\dots,x_d))$$

is smooth on either side of the hyperplane $\{x_d = 0\}$. Denoting by $u_\sharp^+$ (respectively $u_\sharp^-$) the restriction of $u_\sharp$ to the half-space $\{x_d > 0\}$ (respectively $\{x_d < 0\}$), proposition 6.1 asserts that u is a weak solution of (6.1) if and only if

$$\begin{cases} L(u_\sharp^\pm, \varphi)\, u_\sharp^\pm = 0 & \text{if } \pm x_d > 0, \\ B(u_\sharp^+, u_\sharp^-, \varphi) = 0 & \text{if } x_d = 0, \end{cases} \tag{6.4}$$

where operators L and B are defined by the following formulas:

$$L(v, \psi)\, w := \sum_{j=0}^{d-1} A_j(v)\, \partial_j w + \widetilde{A_d}(v, \nabla\psi)\, \partial_d w \tag{6.5a}$$

$$\text{with} \quad \widetilde{A_d}(v, \nabla\psi) := A_d(v) - \sum_{j=0}^{d-1} \partial_j \psi\, A_j(v) \tag{6.5b}$$

$$B(w^+, w^-, \psi) := \sum_{j=0}^{d-1} \partial_j \psi\, [f_j(w)] - [f_d(w)]\,. \tag{6.5c}$$

Now that the domain is fix, the problem reduces to the following question: given an initial datum u^0 that is smooth on either side of a hypersurface $\{x_d = \varphi^0(x_1, \ldots, x_{d-1})\}$, does there exist a solution $(u_\sharp, \varphi)$ of (6.4) with initial value $(u_\sharp^0, \varphi^0)$, at least locally in time? This question has received a positive answer in [64] under the so-called uniform stability condition (we shall recall it in section 6.2), see [66, 93] for a description of the method. The main idea is that equations (6.5a)-(6.5c) are satisfied for planar shocks and the linear uniform stability of these trivial solutions implies the existence of nontrivial solutions. As detailed in [11, 26, 94], the uniform stability condition breaks down in some cases and Majda's nonlinear existence result can not be applied anymore. Our purpose is therefore to derive a linear stability result under a weaker condition than Majda's one.

6.2 The constant coefficients analysis

We first examine the linear stability of a planar shock in order to formulate our "weak stability" assumptions. A planar shock is a solution of (6.1) that takes the form

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_r & \text{if } x_d > \sigma t + \nu \cdot y, \\ \mathbf{u}_l & \text{if } x_d < \sigma t + \nu \cdot y, \end{cases} \tag{6.6}$$

where $\mathbf{u}_r$ and $\mathbf{u}_l$ are fixed vectors belonging to the open set U, $y = (x_1, \ldots, x_{d-1})$ is the vector formed by the tangential space coordinates, ν is a vector in $\mathbb{R}^{d-1}$ and σ is the normal speed of propagation of the front. This corresponds to the equation

$$\varphi(x_0, \ldots, x_{d-1}) = \sigma x_0 + \sum_{j=1}^{d-1} \nu_j x_j$$

for the shock front curve. We easily check that $\mathbf{u}$ is a solution of (6.1) if and only if the Rankine-Hugoniot relations

$$\sigma\, [f_0(\mathbf{u})] + \sum_{j=1}^{d-1} \nu_j\, [f_j(\mathbf{u})] = [f_d(\mathbf{u})] \tag{6.7}$$

are satisfied. Performing a rotation of the axis, we may assume $\nu = 0$. Changing last space variable x_d into $x_d - \sigma t$, we may also assume that the shock is stationary, that is, $\sigma = 0$. Note that assumption 6.2 is still satisfied after this change of observer.

Following Lax [62], we assume that $\mathbf{u}$ is a p-shock:

Assumption 6.3. *There exists an integer $p \in \{1, \dots, q\}$ such that the following inequalities hold:*

$$\lambda_{p-1}(\mathbf{u}_l, e_d) < 0 < \lambda_p(\mathbf{u}_l, e_d) \quad \textit{and} \quad \lambda_p(\mathbf{u}_r, e_d) < 0 < \lambda_{p+1}(\mathbf{u}_r, e_d)$$

where $e_d := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^d$ is the direction of propagation of the shock $\mathbf{u}$. Moreover, λ_p is a simple eigenvalue, that is, $m_p = 1$.

In the case $p = 1$ (respectively $p = q$), that is, in the case of an extreme shock, the first inequality on the left (respectively the last on the right) is ignored. Recall that assumption 6.3 is made in order to avoid under- (or over-)determinacy of the boundary value problem (6.4). In view of the number of jump conditions, the number of characteristics (counted with their multiplicity) entering the shock front curve has to be equal to $N + 1$, see figure 6.1. Recall also that if λ_p is a multiple eigenvalue, that is, $m_p > 1$, the p-th field is linearly degenerate by Boillat's theorem, see [92]. This is a second reason why we assume that λ_p is a simple eigenvalue.

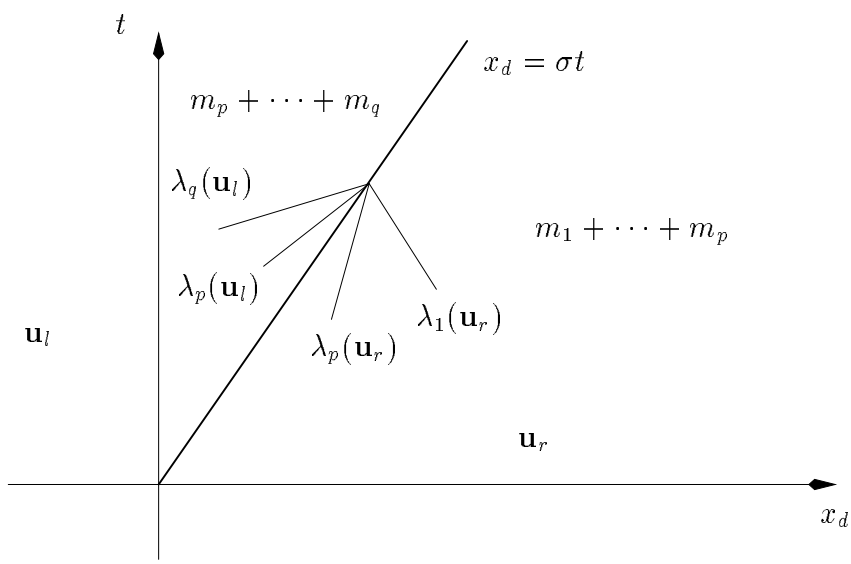


FIG. 6.1 – *Characteristics entering the shock front*

Remark: applying the implicit functions theorem, we easily see that the set of solutions (σ, ν, u_l, u_r) of the Rankine-Hugoniot relations (6.7) consists, in the neighborhood of $(0, 0, \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)$ of all vectors of the form

$$(\sigma, \nu, u_l, h(\sigma, \nu, u_l))$$

where h is a $\mathscr{C}^\infty$ mapping defined on a neighborhood of $(0, 0, \mathbf{u}_l) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \times U$ and satisfies $h(0, 0, \mathbf{u}_l) = \mathbf{u}_r$. Moreover, planar shock waves that are close to our reference planar shock wave $\mathbf{u}$ are p-shocks, that is, meet assumption 6.3.

In what follows, we base most of our analysis on the reference shock wave $\mathbf{u}$ but we shall also need to deal with shock waves that are close to $\mathbf{u}$. These shock waves share the main properties of $\mathbf{u}$.

6.2.1 The weak stability condition

We now introduce the linearized operators around the shock $\mathbf{u}$: consider a family $u_s = \mathbf{u}_\sharp + sv$ and $\varphi_s = s\psi$. Then we define

$$\mathscr{L}_{\mathbf{u}}(v^\pm, \psi) := \frac{d}{ds} L(u_s^\pm, \varphi_s)\, u_s^\pm \,|_{s=0}\,, \tag{6.8a}$$

$$\mathscr{B}_{\mathbf{u}}(v, \psi) := \frac{d}{ds} B(u_s^+, u_s^-, \varphi_s)\,|_{s=0}\,. \tag{6.8b}$$

Since $\mathbf{u}$ is constant on either side of $\{x_d = 0\}$, the linearized operators read

$$\mathscr{L}_{\mathbf{u}}(v^\pm, \psi) = \mathscr{L}_{\mathbf{u}} v^\pm = \sum_{j=0}^{d} A_j(\mathbf{u}_{r,l})\, \partial_j v^\pm\,, \quad \pm x_d > 0\,,$$

$$\mathscr{B}_{\mathbf{u}}(v, \psi) = \sum_{j=0}^{d-1} \partial_j \psi\, [f_j(\mathbf{u})] - A_d(\mathbf{u}_r)\, v^+ + A_d(\mathbf{u}_l)\, v^-\,, \quad x_d = 0\,.$$

We let $b_j(\mathbf{u}) := [f_j(\mathbf{u})]$ (for $j = 0, \dots, d-1$) and

$$M(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} v^+ \\ v^- \end{pmatrix} := -A_d(\mathbf{u}_r)\, v^+ + A_d(\mathbf{u}_l)\, v^-\,.$$

Then the linearized boundary value operator $\mathscr{B}_{\mathbf{u}}$ reads

$$\mathscr{B}_{\mathbf{u}}(v, \psi) = \sum_{j=0}^{d-1} \partial_j \psi\, b_j(\mathbf{u}) + M(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} v^+ \\ v^- \end{pmatrix}\,.$$

We are interested in the following boundary value problem for the unknown functions (v, ψ):

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbf{u}} v^\pm = f_\pm & \text{for } \pm x_d > 0\,, \\ \mathscr{B}_{\mathbf{u}}(v, \psi) = g & \text{for } x_d = 0\,, \end{cases} \tag{6.9}$$

where $f_\pm$ and g are source terms.

Note that system (6.9) is a constant coefficients hyperbolic boundary value problem; moreover, the boundary $\{x_d = 0\}$ is noncharacteristic because of assumption 6.3: both matrices $A_d(\mathbf{u}_r)$ and $A_d(\mathbf{u}_l)$ are regular. Kreiss' theory [61] does not apply directly because partial derivatives of ψ are involved in the boundary conditions. Nonetheless, we attack problem (6.9) by the same kind of arguments: formally, we perform a Laplace transform in x_0 and a Fourier transform in the tangential space variables $(x_1, \dots, x_{d-1})$. We also make the change of variables $(x_d \to -x_d)$ in the evolution equation for v^-. This yields the following system of ODEs:

$$\left(\tau\, A_0(\mathbf{u}_r) + i \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j\, A_j(\mathbf{u}_r) \right) V^+ + A_d(\mathbf{u}_r)\, \frac{dV^+}{dx_d} = \widehat{F_+}\,, \tag{6.10a}$$

$$\left(\tau\, A_0(\mathbf{u}_l) + i \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j\, A_j(\mathbf{u}_l) \right) V^- - A_d(\mathbf{u}_l)\, \frac{dV^-}{dx_d} = \widehat{F_-}\,, \tag{6.10b}$$

in the domain $\{x_d > 0\}$, with the boundary conditions:

$$\left(\tau\, b_0(\mathbf{u}) + i\sum_{j=1}^{d-1} \eta_j\, b_j(\mathbf{u})\right)\Psi + M(\mathbf{u})\begin{pmatrix} V^+(0) \\ V^-(0)\end{pmatrix} = \widehat{G}\,, \tag{6.11}$$

on $\{x_d = 0\}$. The complex number $\tau = \gamma + i\eta_0$ has nonnegative real part and $(\eta_1, \ldots, \eta_{d-1})$ is a wave vector in $\mathbb{R}^{d-1}$. In the sequel, we shall denote by η the vector $(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$.

Because the boundary is noncharacteristic, we may rewrite (6.10a)-(6.10b) as an ODEs system of the form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_d}\begin{pmatrix} V^+ \\ V^-\end{pmatrix} &= \mathscr{A}(\mathbf{u},\eta,\gamma)\begin{pmatrix} V^+ \\ V^-\end{pmatrix} + \mathscr{A}_d(\mathbf{u})^{-1}\begin{pmatrix} \widehat{F_+} \\ \widehat{F_-}\end{pmatrix} \\ \text{with}\quad \mathscr{A}(\mathbf{u},\eta,\gamma) &:= \begin{pmatrix} \mathscr{A}_r(\mathbf{u},\eta,\gamma) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathscr{A}_l(\mathbf{u},\eta,\gamma)\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Matrices $\mathscr{A}_{r,l}$ and $\mathscr{A}_d$ in (6.12) are defined by

$$\mathscr{A}_{r,l}(\mathbf{u},\eta,\gamma) := \mp A_d(\mathbf{u}_{r,l})^{-1}\left(\gamma\, A_0(\mathbf{u}_{r,l}) + i\sum_{j=0}^{d-1}\eta_j\, A_j(\mathbf{u}_{r,l})\right),$$

$$\mathscr{A}_d(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} A_d(\mathbf{u}_r) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -A_d(\mathbf{u}_l)\end{pmatrix}.$$

Defining

$$\mathscr{A}_j(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} A_j(\mathbf{u}_r) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_j(\mathbf{u}_l)\end{pmatrix}, \quad 0 \le j \le d-1\,,$$

we easily find

$$\mathscr{A}(\mathbf{u},\eta,\gamma) = -\mathscr{A}_d(\mathbf{u})^{-1}\left(\gamma\,\mathscr{A}_0(\mathbf{u}) + i\sum_{j=0}^{d-1}\eta_j\,\mathscr{A}_j(\mathbf{u})\right).$$

We also define the symbol associated with the shock front:

$$b(\mathbf{u},\eta,\gamma) := \gamma\, b_0(\mathbf{u}) + i\sum_{j=0}^{d-1}\eta_j\, b_j(\mathbf{u})\,. \tag{6.13}$$

As pointed out by Hersh [47], the homogeneous part of the ODEs (6.12) is hyperbolic when $\gamma > 0$, that is, the matrix $\mathscr{A}$ has no purely imaginary eigenmodes when $\gamma > 0$. For $\gamma > 0$, we define $\mathscr{E}^-(\mathbf{u},\eta,\gamma)$ as the stable subspace of $\mathscr{A}$, which is the set of initial values of solutions to (6.12) that are square integrable on $[0, +\infty[$ when $\widehat{F_+} = \widehat{F_-} = 0$. Because of the decoupled nature of (6.12), the stable subspace $\mathscr{E}^-(\mathbf{u},\eta,\gamma)$ is nothing but the product of the stable subspaces of $\mathscr{A}_r$ and $\mathscr{A}_l$. In the case of an extreme shock, one of these two stable subspaces is trivial. The dimension of $\mathscr{E}^-(\mathbf{u},\eta,\gamma)$ is equal to the dimension of $\mathscr{E}^-(\mathbf{u},0,\gamma)$ for all η (this is just a continuity/connectedness argument). To compute the

dimension of $\mathscr{E}^-(\mathbf{u},0,\gamma)$, we seek the eigenmodes of $\mathscr{A}(\mathbf{u},0,\gamma)$. These are the roots ω of the dispersion equation

$$\det\left[\omega I - \mathscr{A}(\mathbf{u},0,\gamma)\right] = 0\,.$$

The definition of $\mathscr{A}$ shows that $\omega I - \mathscr{A}(\mathbf{u},0,\gamma)$ is singular if and only if $\gamma A_0(\mathbf{u}_r) + \omega A_d(\mathbf{u}_r)$ or $\gamma A_0(\mathbf{u}_l) - \omega A_d(\mathbf{u}_l)$ are singular. As a consequence, ω satisfies the dispersion equation if and only if there exists an integer $k \in \{1,\dots,q\}$ such that

$$\lambda_k(\mathbf{u}_r, e_d)\,\omega = -\gamma \quad \text{ or } \quad \lambda_k(\mathbf{u}_l, e_d)\,\omega = \gamma\,,$$

where $e_d := (0,\dots,0,1) \in \mathbb{R}^d$. Assumption 6.3 shows that such values of ω are negative for $k = p+1,\dots,q$ in the first case and $k = 1,\dots,p-1$ in the second case. Taking multiplicities into account, this shows that $\mathscr{E}^-(\mathbf{u},0,\gamma)$ (and therefore $\mathscr{E}^-(\mathbf{u},\eta,\gamma)$) has dimension $N-1$ as long as $\gamma > 0$.

For fixed $\underline{\eta} \neq 0$, the stable subspace $\mathscr{E}^-(\mathbf{u},\eta,\gamma)$ admits a continuous extension when $(\eta,\gamma) \to (\underline{\eta},0)$, see [15] (the argument makes use of the compactness of Grassmanian manifolds); we still denote this extension by $\mathscr{E}^-(\mathbf{u},\underline{\eta},0)$. Note that for $\gamma = 0$, vectors in the extended stable subspace are not always boundary values of square integrable functions because of the possible occurence of purely imaginary eigenmodes. This is widely detailed in [11, 26] for Euler equations of isentropic gas dynamics.

We define the hemisphere of $\mathbb{R}^{d+1}$ as

$$\Sigma_+ := \{(\eta,\gamma) \in \mathbb{R}^{d+1} \text{ s.t. } \gamma^2 + |\eta|^2 = 1 \text{ and } \gamma \geq 0\}\,.$$

The boundary of Σ_+ will be denoted by Σ_0, that is,

$$\Sigma_0 := \{(\eta,0) \in \mathbb{R}^{d+1} \text{ s.t. } |\eta|^2 = 1\}\,.$$

Recall the following definition:

Definition 6.1 (Majda). [65]. *The planar shock* $\mathbf{u}$ *is said to satisfy the uniform stability condition if there exists a positive constant* $c > 0$ *such that for all* $(\eta,\gamma) \in \Sigma_+$, *one has*

$$\forall\,(\chi,Z) \in \mathbb{C} \times \mathscr{E}^-(\mathbf{u},\eta,\gamma)\,, \quad |\chi\, b(\mathbf{u},\eta,\gamma) + M(\mathbf{u})\,Z| \geq c\,(|\chi| + |Z|)\,.$$

By compactness of Σ_+, the uniform stability condition is equivalent to the requirement that for all $(\eta,\gamma) \in \Sigma_+$, the "critical" subspace

$$\left\{(\chi,Z) \in \mathbb{C} \times \mathscr{E}^-(\mathbf{u},\eta,\gamma) \text{ s.t. } \chi\, b(\mathbf{u},\eta,\gamma) + M(\mathbf{u})\,Z = 0\right\}$$

is trivial, that is, reduced to $\{0\}$. The word "critical" is not standard but its use here intends to show the major place that is occupied by this subspace in the normal modes analysis.

Recall that a planar shock is uniformly stable if and only if solutions of (6.9) satisfy a maximal L^2 estimate as in the study of linear hyperbolic boundary value problems, see [65, proposition 1]. The uniform stability condition is thus the direct extension of Kreiss' uniform condition for standard hyperbolic boundary value problems [61].

As noted by Majda [65, lemma 4.1], the uniform stability condition enables to isolate the shock front Ψ appearing in (6.11) in a single equation. We emphasize that this operation **can not** be achieved for scalar conservation laws in space dimension more than 1.

Our approach is slightly different: we shall allow some instability but these instabilities can only stem from the traces of solutions to the dynamical system (6.12) and not from the shock front symbol defined by (6.13). More precisely, we make the following assumption:

Assumption 6.4. *There exists a positive constant c such that*

$$\forall\,(\eta,\gamma)\in\Sigma_+\,,\quad |b(\mathbf{u},\eta,\gamma)|\geq c\,. \tag{6.14}$$

Of course, an analogue estimate is valid for all states u_r, u_l close to $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_l$.

Remark: assumption 6.4 is equivalent (see [49, chapter 4] or [57]) to the requirement that there exists a $\mathscr{C}^\infty$ mapping $P:\Sigma_+\to Gl_N(\mathbb{C})$ such that

$$\forall\,(\eta,\gamma)\in\Sigma_+\,,\quad P(\mathbf{u},\eta,\gamma)\,b(\mathbf{u},\eta,\gamma)=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\1\end{pmatrix}\,,$$

and one can even choose P depending smoothly on the states $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_l$.

It is clear that (6.14) holds if $\mathbf{u}$ satisfies Majda's uniform stability condition. In a pseudodifferential setting, b is an overdetermined elliptic symbol (γ is seen as a parameter and we are thus dealing with pseudodifferential symbols with a parameter). It is shown in [26] that assumption 6.4 is met in some cases where the uniform stability condition is violated: the main example concerns shock waves in isentropic gas dynamics when the pressure law is not a convex function of the density.

Assumption 6.4 enables us to reformulate boundary conditions (6.11) by isolating the unknown shock front Ψ in a single equation. Because of (6.14), we can define for all $(\eta,\gamma)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ the orthogonal projector

$$\Pi(\mathbf{u},\eta,\gamma)\,h:=h-\frac{\langle h,b(\mathbf{u},\eta,\gamma)\rangle}{|b(\mathbf{u},\eta,\gamma)|^2}\,b(\mathbf{u},\eta,\gamma)\,.$$

Multiplying (6.11) by Π and b^* yields the new boundary conditions

$$\Pi(\mathbf{u},\eta,\gamma)M(\mathbf{u})\,V(0)=\Pi(\mathbf{u},\eta,\gamma)\,\widehat{G}\,, \tag{6.15a}$$

$$|b(\mathbf{u},\eta,\gamma)|^2\,\Psi=\langle\widehat{G}-M(\mathbf{u})\,V(0),b(\mathbf{u},\eta,\gamma)\rangle\,. \tag{6.15b}$$

Observe that b is homogeneous of degree 1 in (η,γ) so (6.14) is equivalent to

$$\forall\,(\eta,\gamma)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\,,\quad c\,(\gamma^2+|\eta|^2)\leq|b(\mathbf{u},\eta,\gamma)|^2\,.$$

Using Schwarz' inequality in (6.15b), we obtain

$$\forall\,(\eta,\gamma)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\,,\quad(\gamma^2+|\eta|^2)\,|\Psi|^2\leq C\,(|\widehat{G}|^2+|V(0)|^2) \tag{6.16}$$

for a suitable constant C depending only on the shock $\mathbf{u}$. It is thus sufficient to get an estimate on $V(0)$ and we shall get from (6.16) an estimate on Ψ. In order to obtain the desired estimate on $V(0)$, we attack the following boundary value problem:6.

$$\begin{cases}\dfrac{dV}{dx_d}=\mathscr{A}(\mathbf{u},\eta,\gamma)\,V+\mathscr{A}_d(\mathbf{u})^{-1}\,\widehat{F} & \text{for } x_d>0,\\ \Pi(\mathbf{u},\eta,\gamma)M(\mathbf{u})\,V(0)=\Pi(\mathbf{u},\eta,\gamma)\,\widehat{G}\,.\end{cases} \tag{6.17}$$

To avoid overloading the paper, we introduce the notation:

$$\beta(\mathbf{u},\eta,\gamma) := \Pi(\mathbf{u},\eta,\gamma)M(\mathbf{u})\,.$$

This is the symbol of the "reduced" boundary conditions.

Isolating the front yields a boundary value problem where the boundary operator takes the form of a Fourier multiplier of order 0. Indeed, the homogeneity property of b implies that Π is homogeneous of degree 0 with respect to (η,γ). More precisely, Π is a pseudodifferential symbol of degree 0 (γ is seen as a parameter), and so is also β. We refer to [3] and [23] for a detailed study of pseudodifferential calculus with a parameter; the introduction of a parameter in Bony's paradifferential calculus [20, 75] has been achieved in [77], see also [73].

Our final assumption is that the boundary conditions defined by the symbol β satisfy the Kreiss-Lopatinskii condition but violate the **uniform** Kreiss-Lopatinskii condition. It is important for what follows that this assumption is met by all planar shock waves close to $\mathbf{u}$:

Assumption 6.5. *For all planar shock waves u close to the reference shock wave $\mathbf{u}$, the following properties hold:*

If $(\eta,\gamma)\in\Sigma_+$ and $\gamma>0$, the reduced critical subspace

$$\big\{Z\in\mathscr{E}^-(u,\eta,\gamma)\ \ s.t.\ \ \beta(u,\eta,\gamma)\,Z=0\big\}$$

is trivial.

If $(\underline{\eta},0)\in\Sigma_0$ is a point where the reduced critical subspace

$$\big\{Z\in\mathscr{E}^-(u,\underline{\eta},0)\ \ s.t.\ \ \beta(u,\underline{\eta},0)\,Z=0\big\}$$

is nontrivial, then there exists a neighborhood $\mathscr{V}$ of $(\underline{\eta},0)$ in Σ_+ and a constant $c>0$ such that

$$\forall\,(\eta,\gamma)\in\mathscr{V}\,,\quad \forall\,Z\in\mathscr{E}^-(u,\eta,\gamma)\,,\quad |\beta(u,\eta,\gamma)\,Z|\geq c\,\gamma\,|Z|\,. \tag{6.18}$$

Furthermore, there exists a $\mathscr{C}^\infty$ mapping $Q(u,\cdot):\mathscr{V}\to Gl_{2N}(\mathbb{C})$ depending smoothly on u such that, for all $z=(\eta,\gamma)\in\mathscr{V}$, one has

$$Q(u,z)\,\mathscr{A}(u,z)\,Q(u,z)^{-1}=\begin{pmatrix}\omega_1(z)I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_J(z)I_{n_J}\end{pmatrix}\,,$$

where the ω_j's are complex valued functions, and I_{n_j} is the identity matrix with size n_j. Moreover, the integers n_j's are independant of (u,z), and the ω_j's satisfy

$$\mathrm{Re}\ \omega_j(z)\geq c\,\gamma$$

or

$$\mathrm{Re}\ \omega_j(z)\leq -c\,\gamma\,,$$

for all $z\in\mathscr{V}$. In applications, it may happen that some of the ω_j's have negative or positive real part when $\gamma=0$. In such a case, one would have

$$\mathrm{Re}\ \omega_j(z)\geq c\quad (or\ \ \leq -c)$$

for all $z\in\mathscr{V}$.

The terminology we shall use throughout the paper is the following:

Definition 6.2. *The planar shock wave* $\mathbf{u}$ *is said to be weakly stable if it satisfies assumptions 6.3-6.4-6.5. In particular, all planar shock waves close to* $\mathbf{u}$ *are also weakly stable.*

Before stating our main result on such weakly stable planar shocks, let us explain in a few words the meaning of assumption 6.5. The first condition asserts that the shock wave is not violently unstable: it must satisfy the analogue of the Kreiss-Lopatinskii condition for linear hyperbolic boundary value problems. The second condition asserts that the uniform stability condition is violated "at order 1". Recall that when Majda's uniform stability condition is met, one has an estimate of the type

$$\forall\,(\eta,\gamma)\in\mathscr{V}\,,\quad \forall\,Z\in\mathscr{E}^-(u,\eta,\gamma)\,,\quad |\beta(u,\eta,\gamma)\,Z|\geq c\,|Z|\,.$$

In our study, the allowed instability yields a power of γ in (6.18).

When (η,γ) tends to an instability point $(\underline{\eta},0)$, part of the stable and unstable subspaces of $\mathscr{A}(u,\eta,\gamma)$ form a central subspace. The last requirement of assumption 6.5 implies that the restriction of $\mathscr{A}(u,\eta,\gamma)$ to this subspace (that is central when $\gamma=0$) is smoothly diagonalizable. In gas dynamics, there are examples of shock waves for which the uniform stability condition breaks down at a point where the symbol is not smoothly diagonalizable, see [26, 65]. Unfortunately, we have not been able to deal with this case: one major problem is the failure of the differentiability of the eigenmodes at such points. We refer to the work by Okhubo and Shirota [78] for some aspects of these phenomena.

Remark: making assumption 6.5 for all planar shock waves close to $\mathbf{u}$ is not very restrictive (first because it is satisfied in both examples we study). In fact, if assumption 6.5 is satisfied by the shock wave $\mathbf{u}$, then it is automatically satisfied by all shock waves close to $\mathbf{u}$ provided that all the ω_j's are purely imaginary when $\gamma=0$ in the neighborhood of the instability points, see [14]. This theoretical result applies to weakly stable shock waves in isentropic gas dynamics, see [26]. In the case of phase transitions in a van der Waals fluid, instability points belong to a region of the parameters (η,γ) where some eigenmodes have negative real part and it is not a direct consequence of [14] that assumption 6.5 is satisfied by all planar shock waves close to $\mathbf{u}$ (but fortunately the calculations show that it is true).

6.2.2 The weak stability of planar shock waves

In this paragraph, we show that if $\mathbf{u}$ is a weakly stable planar shock, then the constant coefficients boundary value problem (6.9) is "well-posed", in the sense that solutions to (6.9) satisfy an a priori energy estimate. Since we deal with shock waves that violate Majda's uniform stability condition, the energy estimate will involve losses of derivatives with respect to the source terms f and g.

We need first of all to introduce a few notations. Denote by Ω and ω the domains

$$\Omega:=\mathbb{R}^{d+1}_+=\{(x_0,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^{d+1}\ \text{ s.t. }\ x_d>0\}\quad\text{ and }\quad \omega:=\mathbb{R}^d=\partial\Omega\,.$$

For $\gamma>0$ and $s\in\mathbb{R}$ we define the following symbols

$$\forall\,\xi\in\mathbb{R}^d,\quad \lambda^{s,\gamma}(\xi):=(\gamma^2+|\xi|^2)^{s/2}\,.$$

The usual Sobolev spaces $H^s(\omega)$ are equipped with the following weighted norms (depending on the positive parameter γ):

$$\|v\|_{s,\gamma}^2 := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{2s,\gamma}(\xi)\, |\widehat{v}(\xi)|^2\, d\xi\,.$$

We shall write $\|\cdot\|_0$ instead of $\|\cdot\|_{0,\gamma}$ since there is no dependance on the parameter γ for the L^2 norm. These weighted norms enable to construct a parameter version of the classical pseudodifferential calculus which is of constant use in the study of hyperbolic boundary value problems, see e.g. [3, 61, 65, 73].

The space $L^2(\mathbb{R}^+, H^s(\mathbb{R}^d))$ is also equipped with the weighted norm:

$$|\!|\!| v |\!|\!|_{s,\gamma}^2 := \int_0^{+\infty} \|v(\cdot, x_d)\|_{s,\gamma}^2\, dx_d\,. \tag{6.19}$$

We shall also write $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_0$ instead of $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{0,\gamma}$. Typically, we shall use the spaces $L^2(\Omega)$ and $L^2(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}^d))$.

Eventually, the scalar products of $L^2(\omega)$ and $L^2(\Omega)$ will be denoted as follows:

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\omega)} := \int_\omega f(y)\, \overline{g(y)}\, dy\,, \quad \langle\!\langle f, g\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x)\, \overline{g(x)}\, dx\,.$$

The Laplace transform performed in the normal modes analysis amounts to working with the new functions $\widetilde{v} := \exp(-\gamma t) v$ and $\widetilde{\psi} := \exp(-\gamma t)\psi$, with $\gamma > 0$. This leads to the introduction of the "weighted" operators:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{u}}^\gamma \widetilde{v} := \mathscr{L}_{\mathbf{u}} \widetilde{v} + \gamma \mathscr{A}_0(\mathbf{u})\, \widetilde{v} \quad \text{and} \quad \mathscr{B}_{\mathbf{u}}^\gamma(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) := \mathscr{B}_{\mathbf{u}}(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) + \gamma \widetilde{\psi}\, b_0(\mathbf{u})\,.$$

One easily checks that (6.9) is equivalent to

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathbf{u}}^\gamma \widetilde{v} = \exp(-\gamma t) f & \text{for } x_d > 0\,, \\ \mathscr{B}_{\mathbf{u}}^\gamma(\widetilde{v}, \widetilde{\psi}) = \exp(-\gamma t) g & \text{for } x_d = 0\,. \end{cases}$$

For convenience, we drop the tilda from $\widetilde{v}$ and $\widetilde{\psi}$ (keeping in mind that all functions have been multiplied by a decreasing exponential function and therefore also depend on the parameter γ). Our result on weakly stable planar shock waves can be stated as follows:

Theorem 6.1. *Let* $\mathbf{u}$ *be a weakly stable planar shock. Then for all* $v \in H^2(\Omega)$*, for all* $\psi \in H^2(\omega)$ *and for all* $\gamma \geq 1$*, one has:*

$$\gamma\, |\!|\!| v |\!|\!|_0^2 + \|v_{|x_d=0}\|_0^2 + \|\psi\|_{1,\gamma}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3}\, |\!|\!| \mathscr{L}_{\mathbf{u}}^\gamma(v, \psi) |\!|\!|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2}\, \|\mathscr{B}_{\mathbf{u}}^\gamma(v, \psi)\|_{1,\gamma}^2\,. \tag{6.20}$$

Energy estimates in Sobolev spaces of higher order are available, provided that v *and* ψ *are sufficiently regular. Similar estimates also hold for planar shock waves* u *close to* $\mathbf{u}$*.*

6.2.3 Proof of theorem 6.1

The proof of theorem 6.1 follows the earlier works of Kreiss [61] and Majda [65] with suitable modifications. It can be found in [26] in the case of isentropic gas dynamics.

Recall first that assumption 6.2 ensures that system (6.1) satisfies the so-called block structure condition. More precisely, we have:

Proposition 6.2 (Block structure condition). [72]. *If assumption 6.2 is satisfied, then for all shock wave u close to $\mathbf{u}$, for all $\underline{z} \in \Sigma_+$, there exists a neighborhood $\mathscr{V}$ of $\underline{z}$ in Σ_+ and regular matrices $Q(u,z)$ depending smoothly on u and $z \in \mathscr{V}$ such that*

$$\forall\, z \in \mathscr{V}\,, \quad Q(u,z)\mathscr{A}(u,z)\,Q(u,z)^{-1} = \begin{pmatrix} a^-(z) & & & & \\ & a^+(z) & & \mathbf{0} & \\ & & a_1(z) & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & a_K(z) \end{pmatrix}.$$

Furthermore, the spectrum of $a^-(z)$ (respectively $a^+(z)$) is contained in the half-plane $\{\mathrm{Re}\,\zeta < 0\}$ (respectively $\{\mathrm{Re}\,\zeta > 0\}$), and for all $k = 1, \dots, K$, the matrix $a_k(z)$ has purely imaginary coefficients when $\gamma = 0$ and $a_k(\underline{z})$ satisfies

$$a_k(\underline{z}) = \omega_k I + iN_k \quad \textit{with } \omega_k \in i\mathbb{R} \textit{ and } N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finally, the lower left-hand corner coefficient of $\partial a_k/\partial\gamma\,(\underline{z})$ is a nonzero real number. Note that the dimensions of the blocks $a^\pm$ and a_k may depend on $\underline{z}$ but not on $z \in \mathscr{V}$.

Let us go back to assumption 6.5: if $\underline{z}$ is a point of Σ_0 such that the critical subspace

$$\left\{Z \in \mathscr{E}^-(u,\underline{z}) \ \text{ s.t. } \ \beta(u,\underline{z})\,Z = 0\right\}$$

is nontrivial, then we have assumed that all the blocks a_k (defined by proposition 6.2 above) have dimension 1 and that the blocks a^+ and a^- can be chosen under diagonal form. In particular, when z belongs to a suitable neighborhood of $\underline{z}$, $a_k(z)$ is a complex number ω_k such that $\omega_k \in i\mathbb{R}$ when $\gamma = 0$ and $\partial\omega_k/\partial\gamma\,(\underline{z})$ is real and does not vanish. If $\mathrm{Re}\,\omega_k < 0$ when $\gamma > 0$, we obtain

$$\mathrm{Re}\,\omega_k(z) \le -c\,\gamma\,, \tag{6.21}$$

whereas we obtain

$$\mathrm{Re}\,\omega_k(z) \ge c\,\gamma \tag{6.22}$$

if $\mathrm{Re}\,\omega_k > 0$ when $\gamma > 0$. In both cases, c is a positive constant depending on u and $\underline{z}$. We refer to [26] for a detailed study of the block structure condition in the case of isentropic gas dynamics. Assumption 6.5 then simply amounts to counting the multiplicities of the eigenvalues of $\mathscr{A}(u,z)$ near instability points.

We are now going to construct a microlocal symmetrizer in order to prove (6.20).

• Let $\underline{z} \in \Sigma_+ \setminus \Sigma_0$. Since $\mathscr{A}(u,\underline{z})$ has no purely imaginary eigenvalue (by Hersh's result [47]), there exists a neighborhood $\mathscr{V}$ of $\underline{z}$ in Σ_+ and invertible matrices $Q(u,z)$ depending smoothly on $z \in \mathscr{V}$ (and also smoothly on u close to $\mathbf{u}$) such that

$$\forall\, z \in \mathscr{V}\,, \quad Q(u,z)\mathscr{A}(u,z)\,Q(u,z)^{-1} = \begin{pmatrix} a^-(z) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a^+(z) \end{pmatrix},$$

$$\text{with } \mathrm{Sp}\ a^-(\underline{z}) \subset \{\mathrm{Re}\,\zeta < 0\} \quad \text{ and } \mathrm{Sp}\ a^+(\underline{z}) \subset \{\mathrm{Re}\,\zeta > 0\}\,.$$

Matrices $a^-(z)$ and $a^+(z)$ are defined by Dunford's formula, see [23, 57]. As noted in [72], this reduction explains why the block structure condition needs only to be checked in the neighborhood of points belonging to Σ_0. By Lyapunov's theorem, see [8], there exists two positive definite hermitian matrices H^+ and H^- such that

$$\mathrm{Re}\,(H^\pm\, a^\pm(\underline{z})) = \pm I\,.$$

For convenience, we define the real part of a square matrix N as $(N+N^*)/2$ and we do the same for operators on a Hilbert space. Following Kreiss [61] (see also [23]), we choose r of the form

$$r(z) := \begin{pmatrix} -H^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha H^+ \end{pmatrix},$$

where α is a real number greater than 1, to be chosen large enough. Because the critical subspace is trivial when z belongs to a neighborhood of $\underline{z}$, it is proved in [23] that for α large enough, the following estimates hold

$$\mathrm{Re}\,(r(z)\,Q(u,z)\mathscr{A}(u,z)\,Q(u,z)^{-1}) \geq 1/2\,I\,,$$
$$r(z) + C\,\widetilde{\beta}(u,z)^*\widetilde{\beta}(u,z) \geq c\,I\,, \qquad \text{where} \qquad \widetilde{\beta}(u,z) := \beta(u,z)\,Q(u,z)^{-1}\,.$$

Constants c and C are positive and depend only on $(u,\underline{z})$.

• Let now $\underline{z} \in \Sigma_0$ be a point where the critical subspace is trivial. It appears from proposition 6.2 that Jordan blocks may occur in the reduction of the symbol $\mathscr{A}$. In such a case, the construction of the symmetrizer is rather technical. We refer to [61, 81] and [15, 23, 26, 77] for the details. Following these anterior works, we conclude that there exists a neighborhood $\mathscr{V}$ of $\underline{z}$ in Σ_+ and $\mathscr{C}^\infty$ matrix valued mappings r and $Q(u,\cdot)$ defined on $\mathscr{V}$ such that for all $z \in \mathscr{V}$, $r(z)$ is hermitian, $Q(u,z)$ is regular and

$$\mathrm{Re}\,(r(z)\,Q(u,z)\mathscr{A}(u,z)\,Q(u,z)^{-1}) \geq c\,\gamma\,I\,,$$
$$r(z) + C\,\widetilde{\beta}(u,z)^*\widetilde{\beta}(u,z) \geq c\,I\,, \quad \widetilde{\beta}(u,z) := \beta(u,z)\,Q(u,z)^{-1}\,.$$

• Let $\underline{z} \in \Sigma_0$ be a point where the critical subspace is nontrivial. From assumption 6.5, we know that there exists a neighborhood $\mathscr{V}$ of $\underline{z}$ in Σ_+ and invertible matrices $Q(u,z)$, depending smoothly on $z \in \mathscr{V}$, such that

$$Q(u,z)\,\mathscr{A}(u,z)\,Q(u,z)^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_1(z)I_{n_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \omega_{J'}(z)I_{n_{J'}} & & & \\ & & & \omega_{J'+1}(z)I_{n_{J'+1}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \omega_J(z)I_{n_J} \end{pmatrix},$$

where the ω_j's have negative real part when $\gamma > 0$ and $j = 1,\dots,J'$ and have positive real part when $\gamma > 0$ and $j = J'+1,\dots,J$. We have just reordered the diagonal blocks appearing in assumption 6.3. Let us remark that the stable subspace $\mathscr{E}^-(u,z)$ (that has dimension $N-1$ for all z) is spanned by the $N-1$ first column vectors of $Q(u,z)^{-1}$. In particular, we have

$$n_1 + \cdots + n_{J'} = N-1 \quad \text{and} \quad n_{J'+1} + \cdots + n_J = N+1\,.$$

For $z \in \mathscr{V}$, we choose $r(z)$ of the form

$$r(z) := \begin{pmatrix} -\gamma^2 I_{N-1} & \\ & \alpha I_{N+1} \end{pmatrix},$$

where α is a real number greater than 1, to be fixed large enough. Because of the local behavior of the ω_j's, see (6.21) and (6.22), we have

$$\mathrm{Re}\,(r(z)\,Q(u,z)\mathscr{A}(u,z)\,Q(u,z)^{-1}) \geq c \begin{pmatrix} \gamma^3 I_{N-1} & \\ & \alpha\,\gamma\, I_{N+1} \end{pmatrix},$$

for all $z \in \mathscr{V}$. If $W \in \mathbb{C}^{2N}$, we denote by W^- the vector composed by the $N-1$ first coordinates of W and W^+ the vector composed by the $N+1$ last coordinates of W (this corresponds to a decomposition between the incoming part and the outgoing part), so we can write

$$\beta(u,z)\,Q(u,z)^{-1}\,W = \beta(u,z)\,Q(u,z)^{-1}\begin{pmatrix} W^- \\ 0 \end{pmatrix} + \beta(u,z)\,Q(u,z)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ W^+ \end{pmatrix},$$

and using (6.18), we have

$$\left|\beta(u,z)\,Q(u,z)^{-1}\begin{pmatrix} W^- \\ 0 \end{pmatrix}\right| \geq c\,\gamma\,|W^-|\,,$$

which implies

$$\gamma^2\,|W^-|^2 \lesssim |W^+|^2 + |\widetilde{\beta}(u,z)\,W|^2\,, \quad \widetilde{\beta}(u,z) := \beta(u,z)\,Q(u,z)^{-1}.$$

Choosing α large enough yields

$$r(z) + C\widetilde{\beta}(u,z)^*\widetilde{\beta}(u,z) \geq c\,\gamma^2\,I\,,$$

for all $z \in \mathscr{V}$. This completes the microlocal construction of the symmetrizer.

• We now turn to the proof of (6.20). For all $\underline{z} \in \Sigma_+$, the previous analysis establishes the existence of a neighborhood $\mathscr{V}$ of $\underline{z}$ in Σ_+ and of smooth mappings r and Q with suitable properties. Because Σ_+ is a smooth compact manifold, there exists a finite covering $\mathscr{V}_i$, $1 \leq i \leq I$, of Σ_+ by such neighborhoods and a smooth partition of unity χ_i, $1 \leq i \leq I$, subordinated to this covering. Functions χ_i are $\mathscr{C}^\infty$, nonnegative and satisfy

$$\forall\, i = 1,\ldots,I \quad \mathrm{Supp}\ \chi_i \subset \mathscr{V}_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{I} \chi_i^2 \equiv 1\,.$$

Let now $v \in H^2(\Omega)$ and $\psi \in H^2(\omega)$. We denote by $V(\eta, x_d)$ the Fourier transform of v with respect to the d first variables $(x_0,\ldots,x_{d-1})$. We also define

$$F := \mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{u}}(v,\psi) \in H^1(\Omega)\,, \quad G := \mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{u}}(v,\psi) \in H^1(\omega)\,.$$

We extend all mappings r_i and Q_i on all Σ_+ assuming them to be constant outside of $\mathscr{V}_i$ (this is of pure convenience since only the value of these mappings on the support of χ_i will be involved in the following calculations). Then we extend χ_i and Q_i as homogeneous functions of degree 0 in (η,γ). For $z = (\eta,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, we define

$$V_i(z, x_d) := \chi_i(z)\,Q_i(\mathbf{u}, z)\,V(\eta, x_d)\,.$$

We thus get the relation

$$\frac{dV_i}{dx_d} = Q_i(\mathbf{u},z)\,\mathscr{A}(\mathbf{u},z)\,Q_i(\mathbf{u},z)^{-1}\,V_i(z,x_d) + \chi_i(z)\,Q_i(\mathbf{u},z)\,\mathscr{A}_d(\mathbf{u})^{-1}\,\widehat{F}(\eta,x_d)\,. \tag{6.23}$$

If $\mathscr{V}_i$ is a neighborhood of a point $\underline{z_i}$ where the critical subspace is trivial, we extend r_i as a homogeneous function of degree 0 in (η,γ). We take the scalar product of (6.23) with $r_i(z)\,V_i(z,x_d)$ and integrate with respect to (η,x_d), γ being fixed. Using the inequalities

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(r_i(z)\,Q_i(\mathbf{u},z)\,\mathscr{A}(\mathbf{u},z)\,Q_i(\mathbf{u},z)^{-1}) &\geq c\,\gamma\,I\,,\\ r_i(z) + C\,\widetilde{\beta}_i(\mathbf{u},z)^*\,\widetilde{\beta}_i(\mathbf{u},z) &\geq c\,I\,,\end{aligned}$$

we obtain Kreiss' maximal L^2 inequality

$$\gamma\|\chi_i V\|_0^2 + \|\chi_i V_{|x_d=0}\|_0^2 \lesssim \frac{1}{\gamma}\|\chi_i\widehat{F}\|_0^2 + \|\chi_i\Pi\widehat{G}\|_0^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3}\,\|\chi_i\lambda^{1,\gamma}\widehat{F}\|_0^2 + \frac{1}{\gamma^2}\,\|\chi_i\lambda^{1,\gamma}\Pi\widehat{G}\|_0^2\,.$$

If $\mathscr{V}_i$ is a neighborhood of a point $\underline{z_i}$ where the critical subspace is nontrivial, we extend r_i as a homogeneous function of degree 2 in (η,γ). We have

$$r_i(z) + C\,\lambda^{2,\gamma}(\eta)\,\widetilde{\beta}_i(\mathbf{u},z)^*\,\widetilde{\beta}_i(\mathbf{u},z) \geq c\,\gamma^2\,I\,,$$

and therefore, taking the scalar product of (6.23) with $r_i(z)\,V_i(z,x_d)$ and integrating with respect to (η,x_d) yields the inequality

$$\begin{aligned}&-2\ \mathrm{Re}\,\langle\!\langle r_i\,V_i,\chi_i\,Q_i\,\mathscr{A}_d^{-1}\,\widehat{F}\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)}\\ &\qquad\geq c\,\gamma^2\,\|\chi_i V_{|x_d=0}\|_0^2 - C\,\|\chi_i\lambda^{1,\gamma}\Pi\widehat{G}\|_0^2 + 2\ \mathrm{Re}\,\langle\!\langle V_i, r_iQ_i\mathscr{A}Q_i^{-1}V_i\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

Recall that r_i has diagonal form

$$r_i(z) = \begin{pmatrix}-\gamma^2 I_{N-1} & \\ & \alpha\,\lambda^{2,\gamma}(\eta)\,I_{N+1}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\gamma I_{N-1} & \\ & \sqrt{\alpha}\,\lambda^{1,\gamma}(\eta)\,I_{N+1}\end{pmatrix}^2 =: s(z)^2\,,$$

and r_i satisfies

$$\mathrm{Re}\,(r_i(z)Q_i(z)\mathscr{A}(z)Q_i(z)^{-1}) \geq c\,\gamma\,s(z)^2\,.$$

We have

$$2\,\mathrm{Re}\,\langle\!\langle V_i, r_iQ_i\mathscr{A}Q_i^{-1}V_i\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \geq c\,\gamma\,\|s(z)\,V_i\|_0^2\,,$$

and Schwarz' inequality yields

$$\begin{aligned}-2\ \mathrm{Re}\,\langle\!\langle r_iV_i,\chi_iQ_i\mathscr{A}_d^{-1}\widehat{F}\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{c}{2}\gamma\,\|s(z)V_i\|_0^2 + \frac{C}{\gamma}\,\|\chi_i s(z)\widehat{F}\|_0^2\\ &\leq \frac{c}{2}\gamma\,\|s(z)V_i\|_0^2 + \frac{C}{\gamma}\,\|\chi_i\lambda^{1,\gamma}\widehat{F}\|_0^2\,.\end{aligned}$$

Eventually, we obtain

$$\gamma^3\,\|\chi_i\,V\|_0^2 + \gamma^2\,\|\chi_i V_{|x_d=0}\|_0^2 \lesssim \frac{1}{\gamma}\,\|\chi_i\,\lambda^{1,\gamma}\widehat{F}\|_0^2 + \|\chi_i\lambda^{1,\gamma}\Pi\widehat{G}\|_0^2\,.$$

Since the χ_i's form a partition of unity, Plancherel's theorem yields

$$\gamma \|v\|_0^2 + \|v_{|x_d=0}\|_0^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3} \|\mathscr{L}_{\mathbf{u}}^\gamma v\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|\mathscr{B}_{\mathbf{u}}^\gamma(v,\psi)\|_{1,\gamma}^2 .$$

To conclude the proof, we integrate (6.16) with respect to $\eta \in \mathbb{R}^d$:

$$\|\psi\|_{1,\gamma}^2 \lesssim \|v_{|x_d=0}\|_0^2 + \|\mathscr{B}_{\mathbf{u}}^\gamma(v,\psi)\|_0^2 \lesssim \|v_{|x_d=0}\|_0^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|\mathscr{B}_{\mathbf{u}}^\gamma(v,\psi)\|_{1,\gamma}^2 ,$$

and this gives (6.20).

□

Remark: in [65, proposition 2], Majda stated an energy estimate similar to (6.20) for isentropic Euler equations. We point out that his result was obtained under the assumption $\mathscr{L}_{\mathbf{u}}^\gamma v \equiv 0$. Theorem 6.1 thus extends this earlier result and indicates that losses of derivatives occur both in the interior domain and on the boundary. This shows a major difference between our analysis and earlier works such as [78, 87].

6.3 The variable coefficients analysis

Let $\mathbf{u}$ be a weakly stable planar shock. Because of assumption 6.3, there exists an open set $\mathscr{U}$ in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ containing the origin such that for all $(w_r, w_l, \sigma, \nu) \in \mathscr{U}$, we have

$$\mathbf{u}_r + w_r \in U , \quad \mathbf{u}_l + w_l \in U ,$$
$$\lambda_{p-1}(\mathbf{u}_l + w_l, \xi) < \sigma < \lambda_p(\mathbf{u}_l + w_l, \xi) \quad \text{and} \quad \lambda_p(\mathbf{u}_r + w_r, \xi) < \sigma < \lambda_{p+1}(\mathbf{u}_r + w_r, \xi)$$

where $\xi := (-\nu, 1) \in \mathbb{R}^d$. In other words, $\mathscr{U}$ is an open set such that all planar shocks associated with elements of $\mathscr{U}$ are p-shocks. Shrinking $\mathscr{U}$ if necessary, all planar shock waves associated with elements of $\mathscr{U}$ are weakly stable. We fix a compact subset $\mathscr{K} \subset \mathscr{U}$ and consider mappings $\dot{u}_r, \dot{u}_l, \varphi$ such that φ is defined on $\mathbb{R}^d$, $\dot{u}_r$ (resp. $\dot{u}_l$) is defined on $\{x_d \geq \varphi(x_0, \ldots, x_{d-1})\}$ (resp. $\{x_d \leq \varphi(x_0, \ldots, x_{d-1})\}$). Eventually, we assume that $(\dot{u}_r, \dot{u}_l, \nabla\varphi)$ takes its values in $\mathscr{K}$ and is compactly supported. We define a function

$$\mathbf{a} := \begin{cases} \mathbf{u}_r + \dot{u}_r(\mathbf{x}) & \text{if } x_d > \varphi(x_0, \ldots, x_{d-1}), \\ \mathbf{u}_l + \dot{u}_l(\mathbf{x}) & \text{if } x_d < \varphi(x_0, \ldots, x_{d-1}), \end{cases} \tag{6.24}$$

and make the following assumption:

Assumption 6.6. *For all point $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_d)$ such that $x_d = \varphi(x_0, \ldots, x_{d-1})$, the function*

$$\mathbf{a}_{\mathbf{x}} := \begin{cases} \mathbf{u}_r + \dot{u}_r(\mathbf{x}) & \text{if } y_d > \nabla\varphi \cdot (y_0, \ldots, y_{d-1}), \\ \mathbf{u}_l + \dot{u}_l(\mathbf{x}) & \text{if } y_d < \nabla\varphi \cdot (y_0, \ldots, y_{d-1}), \end{cases}$$

is a planar shock wave. An equivalent formulation is that the Rankine-Hugoniot jump conditions are satisfied at each point $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{d-1}, \varphi(x_0, \ldots, x_{d-1}))$:

$$\sum_{j=0}^{d-1} \partial_j \varphi \, [f_j(\mathbf{a})](\mathbf{x}) = [f_d(\mathbf{a})](\mathbf{x}) .$$

In the above relations, the gradient $\nabla\varphi$ is evaluated at $(x_0, \ldots, x_{d-1})$.

The regularity of $\dot{u}_r, \dot{u}_l$ and φ has not been precised. One can think of them as mild perturbations of the stationary shock wave $\mathbf{u}$ (some kind of first order correction in an asymptotic expansion). We shall be more precise in the sequel.

6.3.1 The linearized equations

As in paragraph 6.2.1, we introduce the linearized operators around $\mathbf{a}$: consider a family $u_s = \mathbf{a}_\sharp + sv$ and $\varphi_s = \varphi + s\psi$. Then we define

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}(v^\pm, \psi) := \frac{d}{ds} L(u_s^\pm, \varphi_s)\, u_s^\pm \,|_{s=0}\,, \tag{6.25a}$$

$$\mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v, \psi) := \frac{d}{ds} B(u_s^+, u_s^-, \varphi_s)\,|_{s=0}\,. \tag{6.25b}$$

Recall that $\mathbf{a}_\sharp$ is the function deduced from $\mathbf{a}$ after the change of variables Φ, see section 6.1. A direct computation shows that

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathbf{a}}(v^\pm, \psi) = &\sum_{j=0}^{d-1} A_j(\mathbf{a}_\sharp^\pm)\, \partial_j v^\pm + \sum_{j=0}^{d-1} [\nabla A_j(\mathbf{a}_\sharp^\pm) \cdot v^\pm]\, \partial_j\, \mathbf{a}_\sharp^\pm + \widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \nabla\varphi)\, \partial_d\, v^\pm \\ &- \sum_{j=0}^{d-1} \partial_j \psi\, A_j(\mathbf{a}_\sharp^\pm)\, \partial_d\, \mathbf{a}_\sharp^\pm + [\nabla_u \widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \nabla\varphi) \cdot v^\pm]\, \partial_d\, \mathbf{a}_\sharp^\pm\,, \qquad \pm x_d > 0\,,\end{aligned}$$

and

$$\mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v, \psi) = \sum_{j=0}^{d-1} \partial_j \psi\, [f_j(\mathbf{a}_\sharp)] - \widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^+, \nabla\varphi)\, v^+ + \widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^-, \nabla\varphi)\, v^-\,, \qquad x_d = 0\,.$$

We decompose the linearized operator $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$ as

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}(v^\pm, \psi) = L(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \varphi)\, v^\pm - \sum_{j=0}^{d-1} \partial_j \psi\, A_j(\mathbf{a}_\sharp^\pm)\, \partial_d\, \mathbf{a}_\sharp^\pm - \mathscr{C}(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \varphi)\, v^\pm$$

where L is defined by (6.5a)-(6.5b) and

$$\mathscr{C}(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \varphi)\, v^\pm := -\sum_{j=0}^{d-1} [\nabla A_j(\mathbf{a}_\sharp^\pm) \cdot v^\pm]\, \partial_j\, \mathbf{a}_\sharp^\pm - [\nabla_u \widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^\pm, \nabla\varphi) \cdot v^\pm]\, \partial_d\, \mathbf{a}_\sharp^\pm \tag{6.26}$$

is the zero order part (in $v^\pm$) of $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$.

As was done in section 6.2, we write the linearized equations as a first order system in $v := (v^+, v^-)$ and ψ in the domain $\{x_d > 0\}$. Define

$$\mathscr{A}_j(\mathbf{a}) := \begin{pmatrix} A_j(\mathbf{a}_\sharp^+) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_j(\mathbf{a}_\sharp^-) \end{pmatrix} \quad \text{for } 0 \le j \le d-1,$$

$$\mathscr{A}_d(\mathbf{a}) := \begin{pmatrix} \widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^+, \nabla\varphi) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^-, \nabla\varphi) \end{pmatrix}\,,$$

$$b_j(\mathbf{a}) := [f_j(\mathbf{a}_\sharp)] \text{ for } 0 \le j \le d-1 \quad \text{and} \quad M(\mathbf{a}) := \begin{pmatrix} -\widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^+, \nabla\varphi) & \widetilde{A_d}(\mathbf{a}_\sharp^-, \nabla\varphi) \end{pmatrix}\,.$$

The linearized operators read

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}(v,\psi) = \sum_{j=0}^{d} \mathscr{A}_j(\mathbf{a})\,\partial_j v - \sum_{j=0}^{d-1} \partial_j \psi\, \mathscr{A}_j(\mathbf{a})\,\partial_d\, \mathbf{a}_\sharp - \mathscr{C}(\mathbf{a})\, v \quad x_d > 0\,,$$

$$\mathscr{B}_{\mathbf{a}}(v,\psi) = \sum_{j=0}^{d-1} \partial_j \psi\, b_j(\mathbf{a}) + M(\mathbf{a})\, v \quad x_d = 0\,.$$

Recall that the perturbation $(\dot{u}_r, \dot{u}_l, \nabla\varphi)$ takes its values in the compact set $\mathscr{K} \subset \mathscr{U}$ so the matrix $\mathscr{A}_d(\mathbf{a})$ is regular.

We now introduce the positive weight γ, that is, we change functions v and ψ and deal with $\widetilde{v} := \exp(-\gamma t) v$ and $\widetilde{\psi} := \exp(-\gamma t)\psi$. As in section 6.2, we introduce the weighted operators

$$\mathscr{L}^{\gamma}_{\mathbf{a}}(\widetilde{v},\widetilde{\psi}) := \mathscr{L}_{\mathbf{a}}(\widetilde{v},\widetilde{\psi}) + \gamma\, \mathscr{A}_0(\mathbf{a})\, \widetilde{v} - \gamma\, \widetilde{\psi}\, \mathscr{A}_0(\mathbf{a})\, \partial_d\, \mathbf{a}_\sharp\,,$$
$$\text{and} \quad \mathscr{B}^{\gamma}_{\mathbf{a}}(\widetilde{v},\widetilde{\psi}) := \mathscr{B}_{\mathbf{a}}(\widetilde{v},\widetilde{\psi}) + \gamma\, \widetilde{\psi}\, b_0(\mathbf{a})\,.$$

For simplicity, we drop the tildas and the $\sharp$ index. We fix an integer $m > (d+5)/2$ and assume that $\varphi \in H^{m+1/2}(\mathbb{R}^d)$ and $(\dot{u}_r, \dot{u}_l) \in H^m(\Omega)$. Using some classical properties of Sobolev spaces, see [2], we have

$$\nabla\varphi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d), \quad (\dot{u}_r, \dot{u}_l) \in W^{2,\infty}(\Omega) \quad \text{and} \quad (\dot{u}_r, \dot{u}_l) \in L^2(\mathbb{R}^+, W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d))\,.$$

Because the coefficients of the linearized operators have limited smoothness, a convenient way to derive an energy estimate analogous to (6.20) is to use the paradifferential calculus of Bony, see [20, 75]. With this strategy in mind, we are going to estimate the error between the linearized operators and their paralinearized version.

6.3.2 The paralinearized equations

We refer to appendix 6.5 for the definition of paradifferential symbols and for the main results of paradifferential calculus.

1) Paralinearization of the boundary conditions

Define the following symbols:

$$\mathbf{b}(x_0,\dots,x_{d-1},\eta,\gamma) := \gamma\, \mathbf{b}_0(x_0,\dots,x_{d-1}) + i \sum_{j=0}^{d-1} \eta_j\, \mathbf{b}_j(x_0,\dots,x_{d-1})$$
$$\text{where } \mathbf{b}_j(x_0,\dots,x_{d-1}) := b_j(\mathbf{a}(x_0,\dots,x_{d-1},0))\,.$$

Then we have $\mathbf{b}_j \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ and as a consequence $\mathbf{b} \in \Gamma^1_2$. Theorem 6.9 yields

$$\|\gamma\, \mathbf{b}_0\, \psi - T^{\gamma}_{\gamma\mathbf{b}_0}\psi\|_{1,\gamma} \lesssim \|\mathbf{b}_0\|_{W^{1,\infty}}\, \gamma\, \|\psi\|_0 \lesssim \|\psi\|_{1,\gamma}\,,$$
$$\|\mathbf{b}_j\, \partial_j\psi - T^{\gamma}_{i\eta_j\mathbf{b}_j}\psi\|_{1,\gamma} = \|(\mathbf{b}_j - T^{\gamma}_{\mathbf{b}_j})(\partial_j\psi)\|_{1,\gamma} \lesssim \|\partial_j\psi\|_0 \lesssim \|\psi\|_{1,\gamma}\,,$$

and we thus obtain

$$\|\gamma\, \mathbf{b}_0\, \psi + \sum_{j=0}^{d-1} \partial_j\psi\, \mathbf{b_j} - T^{\gamma}_{\mathbf{b}}\psi\|_{1,\gamma} \lesssim \|\psi\|_{1,\gamma}\,. \tag{6.27}$$

We also define

$$\mathbf{M}(x_0,\dots,x_{d-1}) := M(\mathbf{a}(x_0,\dots,x_{d-1},0)) \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)\,,$$

and theorem 6.9 yields

$$\|\mathbf{M}\, v_{|x_d=0} - T^\gamma_{\mathbf{M}} v_{|x_d=0}\|_{1,\gamma} \lesssim \|v_{|x_d=0}\|_0\,. \tag{6.28}$$

Combining (6.27) and (6.28), we get

$$\|\mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{a}}(v,\psi) - T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi - T^\gamma_{\mathbf{M}} v_{|x_d=0}\|_{1,\gamma} \lesssim \|\psi\|_{1,\gamma} + \|v_{|x_d=0}\|_0\,. \tag{6.29}$$

We shall therefore replace the linearized boundary operator $(v,\psi) \mapsto \mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{a}}(v,\psi)$ by its paralinearized version $(v,\psi) \mapsto T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi + T^\gamma_{\mathbf{M}} v$.

2) Paralinearization of the evolution equations

We are now going to paralinearize the evolution equations after multiplying by $\mathscr{A}_d^{-1}$. Define

$$\mathbf{A}_j(x_0,\dots,x_d) := \mathscr{A}_j(\mathbf{a}(x_0,\dots,x_d))\,, \quad \mathbf{C}(x_0,\dots,x_d) := \mathscr{C}(\mathbf{a}(x_0,\dots,x_d))\,.$$

Because $\nabla\varphi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ and $\mathbf{a} \in W^{2,\infty}(\Omega)$, we have $\mathbf{A}_j \in W^{2,\infty}(\Omega)$ and $\mathbf{C} \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Recall that first order derivatives of $\mathbf{a}$ appear in the definition of $\mathbf{C}$, see (6.26), so we do not have $\mathbf{C} \in W^{2,\infty}(\Omega)$.

The matrix valued mapping $\mathbf{A}_d$ is uniformly invertible, namely

$$\|\mathbf{A}_d^{-1}\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \le C\,.$$

Using the definition (6.19) and theorem 6.9, we obtain the following estimates

$$\begin{aligned}
\|\gamma\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_0\, v - \gamma T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_0} v\|_{1,\gamma} &\lesssim \|v\|_0\,,\\
\|\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_j\,\partial_j v - T^\gamma_{i\eta_j\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_j} v\|_{1,\gamma} &\lesssim \|v\|_0 \qquad \text{for } 0 \le j \le d-1\,,\\
\|\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}\, v - T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}} v\|_{1,\gamma} &\lesssim \|v\|_0\,.
\end{aligned}$$

Those estimates are obtained by a simple integration of the paraproduct estimates in $\mathbb{R}^d$ and from the definition of the paradifferential operators in a half-space, see appendix 6.5.

As for equation (6.12), for $\mathbf{x} \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^d$ and $\gamma \ge 0$, we define the symbol

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},\eta,\gamma) := -\mathbf{A}_d(\mathbf{x})^{-1}\left(\gamma\,\mathbf{A}_0(\mathbf{x}) + i\sum_{j=0}^{d-1}\eta_j\,\mathbf{A}_j(\mathbf{x})\right)\,.$$

It is clear that $\mathbf{A} \in \Gamma^1_2$ and the previous inequalities yield

$$\left\|\gamma\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_0\, v + \sum_{j=0}^{d-1}\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_j\,\partial_j v - \mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}\, v + T^\gamma_{\mathbf{A}} v + T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}} v\right\|_{1,\gamma} \lesssim \|v\|_0\,. \tag{6.30}$$

We have thus estimated the error terms in v when paralinearizing $\mathbf{A}_d^{-1}\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma}(v,\psi)$. We now turn to the error terms in ψ. There are two such terms that are

$$\gamma\psi\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_0\,\partial_d\,\mathbf{a} - \gamma\,T^{\gamma}_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_0\partial_d\mathbf{a}}\psi$$
$$\text{and}\qquad \mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_j\,\partial_d\,\mathbf{a}\,\partial_j\psi - T^{\gamma}_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_j\partial_d\mathbf{a}}\partial_j\psi\,,\quad 0\le j\le d-1\,.$$

Using theorem 6.9 and the property $\partial_d\mathbf{a}\in L^2(\mathbb{R}^+,W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))$, we obtain

$$\|\gamma\,\psi\,\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_0\,\partial_d\,\mathbf{a} - \gamma\,T^{\gamma}_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_0\partial_d\mathbf{a}}\psi\|_{1,\gamma}\lesssim\gamma\,\|\psi\|_0\lesssim\|\psi\|_{1,\gamma}\,,$$
$$\|\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_j\partial_d\,\mathbf{a}\,\partial_j\,\psi - T^{\gamma}_{i\eta_j\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_j\partial_d\mathbf{a}}\psi\|_{1,\gamma}\lesssim\|\partial_j\,\psi\|_0\lesssim\|\psi\|_{1,\gamma}\,.$$

We thus get the estimate

$$\left\|\gamma\psi\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_0\,\partial_d\,\mathbf{a}+\sum_{j=0}^{d-1}\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{A}_j\,\partial_d\,\mathbf{a}\,\partial_j\,\psi+T^{\gamma}_{\mathbf{A}\partial_d\mathbf{a}}\psi\right\|_{1,\gamma}\lesssim\|\psi\|_{1,\gamma}\,. \tag{6.31}$$

Combining (6.30) and (6.31), we have proved

$$\|\mathbf{A}_d^{-1}\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma}(v,\psi)-\partial_d\,v+T^{\gamma}_{\mathbf{A}}v+T^{\gamma}_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}v-T^{\gamma}_{\mathbf{A}\partial_d\mathbf{a}}\psi\|_{1,\gamma}\lesssim\|v\|_0+\|\psi\|_{1,\gamma}\,. \tag{6.32}$$

As for the boundary operator, we shall therefore replace the linearized operator $(v,\psi)\mapsto\mathbf{A}_d^{-1}\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma}(v,\psi)$ by its paralinearized version $(v,\psi)\mapsto\partial_d\,v-T^{\gamma}_{\mathbf{A}}v-T^{\gamma}_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}v+T^{\gamma}_{\mathbf{A}\partial_d\mathbf{a}}\psi$.

3) Change of unknown function

Unlike in the uniformly stable case, the linearized operator involves in our case a zero order operator in v and a first order operator in ψ. We shall use a change of unknown functions, that is due to Alinhac [4], and that simplifies the expression of $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$. If we let $v=\dot v+\psi\,\partial_d\mathbf{a}$, we have

$$\mathscr{L}_{\mathbf{a}}(v,\psi)=L(\mathbf{a},\varphi)\,\dot v-\mathscr{C}(\mathbf{a},\varphi)\,\dot v+\psi\,\partial_d\,[L(\mathbf{a},\varphi)\mathbf{a}]\,.$$

The function $\dot v$ is referred to as the "good unknown" of the problem. We emphasize that this change of unknown functions yields an operator in $(\dot v,\psi)$ with only zero order term in ψ: roughly speaking, the operator $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}$ reduces to an operator with only first and zero order terms in $\dot v$, since the zero order terms in ψ will be easily estimated.

As regards the paralinearized equations, the previous result suggests to make the change of unknown functions $v:=\dot v+T^{\gamma}_{\partial_d\mathbf{a}}\psi$. We are going to show that the paralinearized operator is equal to $\partial_d\,\dot v-T^{\gamma}_{\mathbf{A}}\dot v-T^{\gamma}_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}\dot v$ plus some error terms whose norm can be controlled.

A straightforward computation shows that

$$\partial_d\,v-T^{\gamma}_{\mathbf{A}}v-T^{\gamma}_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}v+T^{\gamma}_{\mathbf{A}\partial_d\mathbf{a}}\psi=\partial_d\,\dot v-T^{\gamma}_{\mathbf{A}}\dot v-T^{\gamma}_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}\dot v+e_1-e_2+e_3$$

where

$$e_1:=T^{\gamma}_{\partial_d^2\mathbf{a}}\psi\,,\quad e_2:=T^{\gamma}_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}T^{\gamma}_{\partial_d\mathbf{a}}\psi\,,\quad e_3:=(T^{\gamma}_{\mathbf{A}\partial_d\mathbf{a}}-T^{\gamma}_{\mathbf{A}}T^{\gamma}_{\partial_d\mathbf{a}})\psi\,.$$

Because $\mathbf{a} \in H^m(\Omega)$ and $m > (d+5)/2$, we have

$$|||e_i|||_{1,\gamma} \lesssim \|\psi\|_{1,\gamma} \quad 1 \le i \le 3\,,$$

and therefore

$$\left|\left|\left|\left(\partial_d\, v - T^\gamma_{\mathbf{A}} v - T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}} v + T^\gamma_{\mathbf{A}\partial_d \mathbf{a}}\psi\right) - \left(\partial_d\, \dot v - T^\gamma_{\mathbf{A}} \dot v - T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}} \dot v\right)\right|\right|\right|_{1,\gamma} \lesssim \|\psi\|_{1,\gamma}\,.$$

As a consequence, we shall focus our attention on the operator $\partial_d\, \dot v - T^\gamma_{\mathbf{A}} \dot v - T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}} \dot v$ and try to derive an energy estimate for this operator.

Remark: after changing unknown functions, the paralinearized boundary operator reads $T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi + T^\gamma_{\mathbf{M}} \dot v_{|x_d=0} + T^\gamma_{\mathbf{M}} T^\gamma_{\partial_d \mathbf{a}}\psi$, and we see that the last term in this sum satisifies

$$\|T^\gamma_{\mathbf{M}} T^\gamma_{\partial_d \mathbf{a}}\psi\|_{1,\gamma} \lesssim \|\psi\|_{1,\gamma}\,.$$

To summarize, we have proved

$$\begin{aligned} \left|\left|\left|\mathbf{A}_d^{-1}\mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{a}}(v,\psi) - \left(\partial_d\, \dot v - T^\gamma_{\mathbf{A}} \dot v - T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}} \dot v\right)\right|\right|\right|_{1,\gamma} &\le C\left(|||v|||_0 + \|\psi\|_{1,\gamma}\right)\,, \\ \left\|\mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{a}}(v,\psi) - \left(T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi + T^\gamma_{\mathbf{M}} \dot v_{|x_d=0}\right)\right\|_{1,\gamma} &\le C\left(\|v_{|x_d=0}\|_0 + \|\psi\|_{1,\gamma}\right)\,. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Furthermore, the relation $v = \dot v + T^\gamma_{\partial_d \mathbf{a}}\psi$ yields

$$\begin{aligned} \|v_{|x_d=0}\|_0^2 &\le 2\left(\|\dot v_{|x_d=0}\|_0^2 + C\|\psi\|_0^2\right) \le 2\left(\|\dot v_{|x_d=0}\|_0^2 + \frac{C}{\gamma^2}\|\psi\|_{1,\gamma}^2\right)\,, \\ |||v|||_0^2 &\le 2\left(|||\dot v|||_0^2 + C\|\psi\|_0^2\right) \le 2\left(|||\dot v|||_0^2 + \frac{C}{\gamma^2}\|\psi\|_{1,\gamma}^2\right)\,, \end{aligned}$$

and we thus get

$$\gamma|||\dot v|||_0^2 + \|\dot v_{|x_d=0}\|_0^2 \ge \frac{1}{2}\left(\gamma|||v|||_0^2 + \|v_{|x_d=0}\|_0^2\right) - \frac{C}{\gamma}\|\psi\|_{1,\gamma}^2\,. \tag{6.34}$$

It is now clear that the change of unknown function is appropriate because an energy estimate of the same type as (6.20) for $(\dot v, \psi)$ will yield a similar energy estimate for (v, ψ).

All constants appearing in (6.33) and (6.34) are uniform with respect to the norms of the perturbations and the compact set $\mathscr{K}$. Namely, if the perturbation $(\dot u_r, \dot u_l, \nabla\varphi)$ is valued in $\mathscr{K}$ and satisfies

$$\|\varphi\|_{H^{m+1/2}(\omega)} \le K\,, \quad \|(\dot u_r, \dot u_l)\|_{H^m(\Omega)} \le K\,,$$

for some constant $K > 0$ and some integer $m > (d+5)/2$, then the constants appearing in (6.33)-(6.34) only depend on K and $\mathscr{K}$.

4) Eliminating the shock front

Using assumption 6.4, we know that there exists a positive constant $c > 0$ such that

$$\mathbf{b}^*(x_0, \dots, x_{d-1}, \eta, \gamma)\, \mathbf{b}(x_0, \dots, x_{d-1}, \eta, \gamma) \geq c\,(\gamma^2 + |\eta|^2)\,.$$

The constant c only depends on the compact set $\mathscr{K}$. The symbol $\mathbf{b}^*\mathbf{b}$ is of degree 2 and elliptic so, applying Gårding's inequality (theorem 6.7), we obtain

$$\forall\, \gamma \geq \gamma_0\,, \quad \|\psi\|_{1,\gamma}^2 \lesssim \ \mathrm{Re}\ \langle T^\gamma_{\mathbf{b}^*\mathbf{b}}\psi, \psi\rangle_{L^2} \lesssim \|T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi\|_0^2 + \ \mathrm{Re}\ \langle R^\gamma\psi, \psi\rangle_{L^2}$$

where $\{R^\gamma\}$ is a family of order ≤ 1. We thus get

$$\|\psi\|_{1,\gamma}^2 \lesssim \|T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi\|_0^2 + \|\psi\|_{1,\gamma}\,\|\psi\|_0 \lesssim \frac{1}{\gamma}\,\|\psi\|_{1,\gamma}^2 + \|T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi\|_0^2\,.$$

Up to a greater choice of γ_0, we finally get

$$\begin{aligned} \forall\, \gamma \geq \gamma_0\,, \quad \|\psi\|_{1,\gamma}^2 &\lesssim \|T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi\|_0^2 \lesssim \|T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi + T^\gamma_{\mathbf{M}}\dot{v}_{|x_d=0}\|_0^2 + \|\dot{v}_{|x_d=0}\|_0^2 \\ &\lesssim \frac{1}{\gamma^2}\,\|T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi + T^\gamma_{\mathbf{M}}\dot{v}_{|x_d=0}\|_{1,\gamma}^2 + \|\dot{v}_{|x_d=0}\|_0^2\,, \end{aligned} \tag{6.35}$$

which is the variable coefficients version of (6.16).

Introducing the orthogonal projector $\mathbf{\Pi}(y, \eta, \gamma)$ on $\mathbf{b}(y, \eta, \gamma)^\perp$, we have $\mathbf{\Pi} \in \Gamma_2^0$, $\mathbf{\Pi}\mathbf{b} \equiv 0$ so theorem 6.6 gives

$$\|T^\gamma_{\mathbf{\Pi}}T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi\|_{1,\gamma} \lesssim \|\psi\|_{1,\gamma}\,, \quad \|T^\gamma_{\mathbf{\Pi}}T^\gamma_{\mathbf{M}}\dot{v}_{|x_d=0} - T^\gamma_{\mathbf{\Pi}\mathbf{M}}\dot{v}_{|x_d=0}\|_{1,\gamma} \lesssim \|\dot{v}_{|x_d=0}\|_0\,.$$

Using the decomposition

$$T^\gamma_{\mathbf{\Pi}\mathbf{M}}\dot{v}_{|x_d=0} = (T^\gamma_{\mathbf{\Pi}\mathbf{M}} - T^\gamma_{\mathbf{\Pi}}T^\gamma_{\mathbf{M}})\dot{v}_{|x_d=0} + T^\gamma_{\mathbf{\Pi}}(T^\gamma_{\mathbf{M}}\dot{v}_{|x_d=0} + T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi) - T^\gamma_{\mathbf{\Pi}}T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi\,,$$

we end up with

$$\|T^\gamma_{\mathbf{\Pi}\mathbf{M}}\dot{v}_{|x_d=0}\|_{1,\gamma} \lesssim \|\dot{v}_{|x_d=0}\|_0 + \|T^\gamma_{\mathbf{b}}\psi + T^\gamma_{\mathbf{M}}\dot{v}_{|x_d=0}\|_{1,\gamma} + \|\psi\|_{1,\gamma}\,. \tag{6.36}$$

From now on, we focus on the system

$$\begin{cases} \partial_d\,\dot{v} - T^\gamma_{\mathbf{A}}\dot{v} - T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}\dot{v} = F & x_d > 0, \\ T^\gamma_{\mathbf{\Pi}\mathbf{M}}\dot{v}_{|x_d=0} = G & x_d = 0, \end{cases}$$

and try to derive an energy estimate of the type

$$\gamma\,\|\dot{v}\|_0^2 + \|\dot{v}_{|x_d=0}\|_0^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3}\,\|F\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2}\,\|G\|_{1,\gamma}^2\,,$$

for all $\gamma \geq \gamma_0$. Using (6.33),(6.34), (6.35),(6.36) and a greater choice of the constant γ_0, we shall obtain the variable coefficients analogue of our basic estimate (6.20). A precise result will be stated in paragraph 6.3.6.

As was done in the constant coefficients case, we define the symbol $\boldsymbol{\beta}$ of the reduced boundary conditions:

$$\forall\,(y, \eta, \gamma) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\,, \quad \boldsymbol{\beta}(y, \eta, \gamma) := \mathbf{\Pi}(y, \eta, \gamma)\mathbf{M}(y)\,.$$

Our goal is to derive an a priori estimate for the paralinearized system:

$$\begin{cases} \partial_d\,\dot{v} - T^\gamma_{\mathbf{A}}\dot{v} - T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}\dot{v} = F & x_d > 0, \\ T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}}\dot{v}_{|x_d=0} = G & x_d = 0. \end{cases}$$

6.3.3 Geometrical assumptions

Let us go back to assumption 6.5. For all planar shock waves u close to $\mathbf{u}$, we define the set of critical frequencies $\Sigma_{cr}(u)$ as the set of those $(\eta,\gamma)\in\Sigma_+$ such that the critical subspace

$$\left\{Z\in\mathscr{E}^-(u,\eta,\gamma)\ \text{ s.t. }\ \beta(u,\eta,\gamma)\,Z=0\right\}$$

is not reduced to $\{0\}$. From assumption 6.5, we know that frequencies $(\eta,\gamma)\in\Sigma_{cr}(u)$ satisfy $\gamma=0$. Another requirement of assumption 6.5 is that there exists a neighborhood $\mathscr{V}_{cr}(u)$ of $\Sigma_{cr}(u)$ in Σ_+ and a smooth mapping $Q_0(u)$ defined on $\mathscr{V}_{cr}(u)$ with values in $Gl_{2N}(\mathbb{C})$ such that

$$Q_0\,\mathscr{A}\,Q_0^{-1}=\begin{pmatrix}\omega_1 I_{n_1} & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_J I_{n_J}\end{pmatrix}.$$

To deal with the variable coefficients case, we need to assume that $\Sigma_{cr}(u)$ is endowed with an "equation". More precisely, we assume that there exists a smooth **real** valued function $\widetilde{\sigma}$ (defined for all shock waves u close to $\mathbf{u}$) such that

$$\begin{aligned}\Sigma_{cr}(u)&=\{(\eta,\gamma)\in\Sigma_+\ \text{ s.t. }\ \gamma+i\widetilde{\sigma}(u,\eta,\gamma)=0\}\\&=\{(\eta,0)\in\Sigma_0\ \text{ s.t. }\ \widetilde{\sigma}(u,\eta,0)=0\}\,.\end{aligned}$$

We refer to section 6.4 for an example. The function $\widetilde{\sigma}$ is extended as an homogeneous mapping of degree 1 with respect to (η,γ).

Given the perturbed planar shock $\mathbf{a}$, we define the set of the so-called "critical points" as

$$\Sigma_{\mathrm{c}}:=\{(x,\eta,\gamma)\in\partial\Omega\times\Sigma_+\ \text{ s.t. }\ (\eta,\gamma)\in\Sigma_{cr}(\mathbf{a}(x))\}\,. \tag{6.37}$$

We already know from assumption 6.5 that there exists a neighbourhood $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}^0$ of Σ_{c} in $\partial\Omega\times\Sigma_+$ such that the symbol $\mathbf{A}(z)$ is diagonalizable on $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}^0$:

$$Q_0(z)\mathbf{A}(z)Q_0(z)^{-1}=\begin{pmatrix}\omega_1(z)I_{n_1} & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_J(z)I_{n_J}\end{pmatrix}=:D_1(z)\,. \tag{6.38}$$

This corresponds to a diagonlization of the symbol $\mathbf{A}$ on the boundary $\partial\Omega$, when the frequencies are close to the unstable frequencies.

On the boundary $\partial\Omega$ of the space domain, the set of space-frequency variables is thus decomposed as the union of a set $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}^0$ that contains all the unstable points and a set that contains only uniformly stable points. In the subsequent analysis, we shall show that the instabilities originating from the critical set Σ_{c} propagate in the interior domain along bicharacteristic curves. In order to control where these instabilities propagate, we are led to the important assumption that these bicharacteristic curves are well-defined in all the interior domain:

Assumption 6.7. *There exists an open set $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}\subset\overline{\Omega}\times\Sigma_+$ satisfying*

$$\mathscr{V}_{\mathrm{c}}\cap\{x_d=0\}=\mathscr{V}_{\mathrm{c}}^0$$

and there exists a symbol Q_0 of degree 0 and regularity 2 defined on $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}$ such that (6.38) *holds on all $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}$.*

Moreover, decomposing ω_j as $\omega_j = \gamma e_j + i h_j$ (all mappings are defined on $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}$), the solutions of the hamiltonian ODEs system

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dx_d} &= \frac{\partial h_j}{\partial \eta_k}(x,\eta,\gamma)\,, \quad k=0,\dots,d-1\,,\\ \frac{d\eta_k}{dx_d} &= -\frac{\partial h_j}{\partial x_k}(x,\eta,\gamma)\,, \quad k=0,\dots,d-1\,,\\ &(x_0,\dots,x_{d-1},\eta_0,\dots,\eta_{d-1},\gamma)_{|x_d=0} \in \mathscr{V}_{\mathrm{c}}^0 \end{aligned} \tag{6.39}$$

are defined for all $x_d \geq 0$ (that is, stay in $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}$ for all $x_d \geq 0$). These solutions are referred to as bicharacteristic curves.

Note that assumption 6.7 is met in the constant coefficients case. Indeed, $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}^0$ may be chosen as the product $\partial\Omega \times \mathscr{V}_{cr}(\mathbf{u})$, and we choose in this case

$$\mathscr{V}_{\mathrm{c}} := \overline{\Omega} \times \mathscr{V}_{cr}(\mathbf{u})\,.$$

Then the mapping Q_0 exists because of assumption 6.5, and it is independent of x, as well as the ω_j's. The ODEs system (6.39) then reduces to

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dx_d} &= \frac{\partial h_j}{\partial \eta_k}(\eta,\gamma)\,, \quad k=0,\dots,d-1\,,\\ \frac{d\eta_k}{dx_d} &= 0\,, \quad k=0,\dots,d-1\,,\\ &(x_0,\dots,x_{d-1},\eta_0,\dots,\eta_{d-1},\gamma)_{|x_d=0} \in \mathscr{V}_{\mathrm{c}}^0\,. \end{aligned}$$

Our choice of $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}$ implies that the bicharacteristic curves stay in $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}$ (frequencies are constant along these curves because h_j does not depend on x).

In the variable coefficients case, we recall that the perturbation $(\dot{u}_r, \dot{u}_l)$ has compact support. So if (x_k, η_k) is a solution of (6.39), η_k is constant for x_d large enough. From standard ODEs arguments, we claim that assumption 6.7 is satisfied when $\mathbf{a}$ is a sufficiently small perturbation of $\mathbf{u}$ (one can choose $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}$ as in the coefficients case, provided the perturbation is small enough). We refer to figure 6.2 for a schematic picture of the situation.

For $(y,\eta,\gamma) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, define

$$\sigma(y,\eta,\gamma) := \widetilde{\sigma}(\mathbf{a}(y),\eta,\gamma)\,,$$

so we have $\sigma \in \Gamma_2^1(\mathbb{R}^d)$.

With the help of assumption 6.7, it is possible to construct a solution of the transport equation

$$\begin{aligned} \partial_{x_d}\sigma_j + \sum_{k=0}^{d-1} \partial_{x_k}\sigma_j\,\partial_{\eta_k}h_j - \partial_{\eta_k}\sigma_j\,\partial_{x_k}h_j = 0\,, &\quad (x,\eta,\gamma) \in \mathscr{V}_{\mathrm{c}}\,,\\ \sigma_{j|_{x_d=0}} = \sigma\,, &\quad (x,\eta,\gamma) \in \mathscr{V}_{\mathrm{c}}^0\,, \end{aligned} \tag{6.40}$$

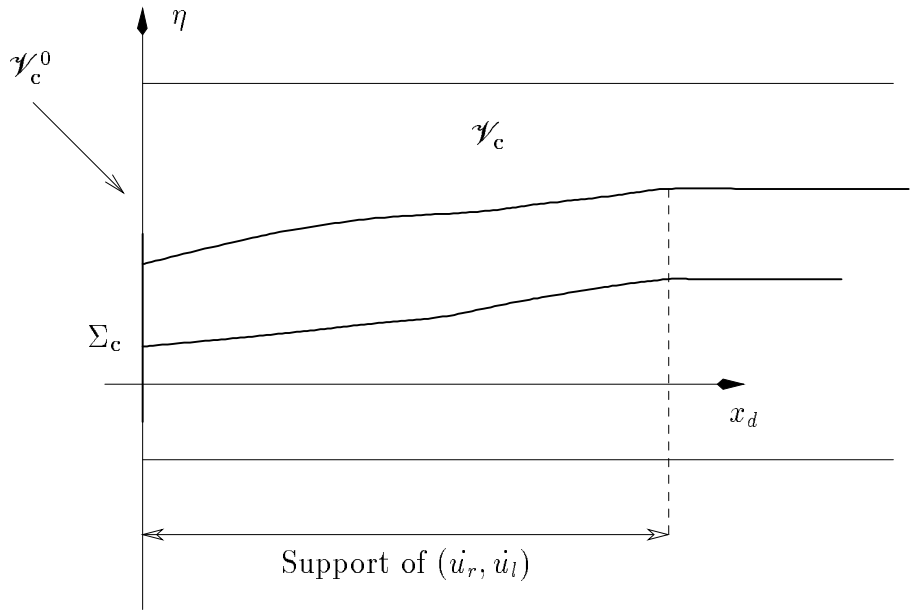


FIG. 6.2 – *Bicharacteristic curves originating from the boundary*

and the solution σ_j of this equation is homogeneous of degree 1 with respect to (η, γ). The solution σ_j is constant along the characteristic curves of equation (6.40), and these curves are exactly the bicharacteristic curves defined above.

Note that (6.40) also reads

$$\partial_{x_d}\sigma_j + \{\sigma_j, h_j\} = 0 \,,$$

where $\{\sigma_j, h_j\}$ is the Poisson bracket of σ_j and h_j.

For convenience, we extend all mappings ω_j, $1 \leq j \leq J$ (and thus D_1) as symbols of degree 1 and regularity 2 defined for all (x, η, γ). We therefore have $\omega_j \in \Gamma_2^1$. We choose these extensions such that one has either

$$e_j \geq c > 0 \quad \text{or} \quad e_j \leq -c < 0$$

where $\omega_j = \gamma e_j + i h_j$. Extending the ω_j's allows to define a global solution σ_j of (6.40), meaning that σ_j is defined for all $(x, \eta, \gamma) \in \Omega \times \Sigma_+$ and not only for $(x, \eta, \gamma) \in \mathscr{V}_c$. This global solution belongs to Γ_2^1. What is important is that we have **not** changed the value of σ_j on the set $\mathscr{V}_c$ since σ_j is constant along the bicharacteristic curves. The functions σ_j are weights that vanish only on the curves originating from the critical points. We shall see in the sequel that they are appropriate in the derivation of an energy estimate.

Finally, we need to precise the behavior of the restriction of the boundary symbol $\boldsymbol{\beta}$ to the stable subspace. Recall that the first $N-1$ column vectors of the matrix $Q_0(z)^{-1}$ span the stable subspace $\mathscr{E}^-(z)$ when $z \in \mathscr{V}_c^0$. We write:

$$Q_0(z)^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{in}(z) & Q_{out}(z) \end{pmatrix} \,, \quad Q_{in}(z) \in \mathscr{M}_{2N,N-1}(\mathbb{C}) \,,$$

and make the following assumption:

Assumption 6.8. *There exist two mappings P_1 and P_2 defined on $\mathscr{V}_c^0$ such that for all $z \in \mathscr{V}_c^0$, $P_1(z) \in Gl_{N-1}(\mathbb{C})$ and P_1 is a symbol of degree 0 and regularity 1,*

for all $z \in \mathscr{V}_c^0$, $P_2(z) \in Gl_{N-1}(\mathbb{C})$ and P_2 is a symbol of degree 0 and regularity 1, for all $z \in \mathscr{V}_c^0$, one has

$$P_1(z)\,\boldsymbol{\beta}(z)\,Q_{in}(z)\,P_2(z) = \begin{pmatrix} \lambda^{-1,\gamma}(\eta)(\gamma + i\sigma(z)) & 0 \\ 0 & I_{N-2} \end{pmatrix} =: \boldsymbol{\beta}_{in}(z)\,. \tag{6.41}$$

In the constant coefficients case, assumption 6.8 implies (6.18). The meaning of assumption 6.8 is that the restriction of $\boldsymbol{\beta}$ to the stable subspace has a kernel of dimension 1 (this was not part of assumption 6.5) and "$\boldsymbol{\beta}$ vanishes at order 1 on this kernel".

With these preliminary reductions in mind, we can turn to the derivation of our energy estimates. We fix a nonnegative cut-off function χ verifying

χ is a smooth (that is, $\mathscr{C}^\infty$) symbol of degree 0 and Supp $\chi \subset \mathscr{V}_c$,

$\chi \equiv 1$ in a neighborhood of the bicharacteristic curves originating from Σ_c. In other words, out of the region where $\chi \equiv 1$, one has $|\sigma_j| \geq c > 0$ for all j.

Define $\chi_0 := (1 - \chi)$ and observe that χ_0 has its support in the set of uniformly stable points.

6.3.4 Energy estimates near instability points

The aim of this paragraph is to derive three different energy estimates in the neighborhood of instability points. We show how to control the $L^2(H^1)$ norm of the outgoing modes. For the incoming modes, we show how to control the L^2 norm and the $L^2(H^1)$ norm far from the bicharacteristic curves starting from the critical set Σ_c.

Before establishing our main energy estimates, we prove a reduction result that will help us to deal with the zero order terms in the equations. Recall that relation (6.38) holds on all the open set $\mathscr{V}_c$ and not only on its trace $\mathscr{V}_c^0$. In terms of symbolic calculus, we are looking for a symbol Q_{-1} of degree -1 and regularity 1 such that

$$(Q_0 + Q_{-1})\#(\partial_d - \mathbf{A} - \mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}) = (\partial_d - D_1 - D_0)\#(Q_0 + Q_{-1})$$

where the composition of symbols is to be understood as the expansion to first or second order (depending on the regularity with respect to x), see theorem 6.6. Recall that our symbols have finite smoothness in the space variable so the expansions of adjoints or composed symbols are only finite and not asymptotic.

The existence of Q_{-1} is given by the following lemma:

Lemma 6.1. *Let Q_0 be defined by assumption 6.7, and define D_1 as in (6.38). There exists a symbol Q_{-1} of degree -1 and regularity 1, defined on $\mathscr{V}_c$, such that*

$$\begin{aligned}(Q_0 + Q_{-1})(\mathbf{A} + \mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}) + \partial_d Q_0 \\ + \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{d-1}(\partial_{\eta_k} Q_0 \partial_{x_k}\mathbf{A} - \partial_{\eta_k} D_1 \partial_{x_k} Q_0) - (D_1 + D_0)(Q_0 + Q_{-1})\end{aligned}$$

is a symbol of degree -1 and regularity 1, and D_0 is a block diagonal symbol (of degree 0 and regularity 1) whose blocks have dimensions $n_1, \ldots, n_J$ as those of D_1.

Proof. Using the equality $Q_0\mathbf{A} = D_1 Q_0$, the problem reduces to finding a symbol Q_{-1} of degree -1 such that

$$\left[Q_{-1}Q_0^{-1}, D_1\right] + Q_0\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}Q_0^{-1} + \partial_d Q_0 + \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{d-1}\partial_{\eta_k}Q_0\partial_{x_k}\mathbf{A} - \partial_{\eta_k}D_1\partial_{x_k}Q_0$$

is block diagonal (it will automatically be a symbol of degree 0). Here above $[M, N]$ denotes the commutator of two matrices M and N. Using that D_1 is block diagonal (with diagonal blocks $\omega_1 I_{n_1}, \ldots, \omega_J I_{n_J}$), a simple calculation shows that one can choose $Q_{-1}Q_0^{-1}$ (and therefore Q_{-1}) such that the extra diagonal blocks of $[Q_{-1}Q_0^{-1}, D_1]$ cancel those of

$$Q_0\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}Q_0^{-1} + \partial_d Q_0 + \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{d-1}\partial_{\eta_k}Q_0\partial_{x_k}\mathbf{A} - \partial_{\eta_k}D_1\partial_{x_k}Q_0\,.$$

Because the diagonal blocks of $[Q_{-1}Q_0^{-1}, D_1]$ are identically zero, one can only cancel the extra diagonal blocks. It stems from this simple calculation that $Q_{-1}Q_0^{-1}$ is of degree -1 and regularity 1, and therefore so is Q_{-1}. This proves the lemma. □

Note that Q_{-1} and D_0 are only defined for space-frequency variables belonging to $\mathscr{V}_{\mathbf{c}}$ but, as was done for D_1, we extend D_0 as a global symbol of degree 0 and regularity 1.

In all the sequel, we denote by Q the sum $Q_0 + Q_{-1}$. The following calculations heavily use the fact that Q defines a "good diagonalization basis" of the paralinearized operator

$$\dot{v} \longmapsto \partial_d\dot{v} - T^\gamma_{\mathbf{A}}\dot{v} - T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}\dot{v}\,.$$

Let $\dot{v} \in H^2(\Omega)$ and define

$$F := \partial_d\dot{v} - T^\gamma_{\mathbf{A}}\dot{v} - T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}\dot{v} \in H^1(\Omega)\,.$$

We also define

$$w := T^\gamma_{\chi Q}\dot{v}$$

and we first show that w satisfies a paradifferential equation whose first and zero order symbol are block diagonal. The paradifferential equation involves error terms that will be absorbed at the very end of the analysis. In all this paragraph, R^γ always denotes an operator of order ≤ -1 that represents the current error terms in the computations. We have

$$\begin{aligned}
\partial_d\, w &= T^\gamma_{(\partial_d\chi)Q}\dot{v} + T^\gamma_{\chi\partial_d Q}\dot{v} + T^\gamma_{\chi Q}(\partial_d\dot{v}) \\
&= T^\gamma_{(\partial_d\chi)Q}\dot{v} + T^\gamma_{\chi\partial_d Q}\dot{v} + T^\gamma_{\chi Q}(T^\gamma_{\mathbf{A}}\dot{v} + T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}\dot{v} + F) \\
&= T^\gamma_{(\partial_d\chi)Q_0}\dot{v} + T^\gamma_{\chi\partial_d Q_0}\dot{v} + T^\gamma_{\chi Q(\mathbf{A}+\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C})}\dot{v} + T^\gamma_{r^1}\dot{v} + R^\gamma\dot{v} + T^\gamma_{\chi Q}F\,,
\end{aligned}$$

where

$$r^1 := \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{d-1}\partial_{\eta_k}(\chi Q_0)\,\partial_{x_k}\mathbf{A}\,.$$

Lemma 6.1 implies that

$$\chi\partial_d Q_0 + \chi Q(\mathbf{A} + \mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}) + r^1 \\ - \left((D_1 + D_0)\chi Q + \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{d-1}(\partial_{\eta_k}\chi)Q_0\,\partial_{x_k}\mathbf{A} + \chi(\partial_{\eta_k}D_1)\,\partial_{x_k}Q_0 \right)$$

is of degree -1, and we thus get

$$\partial_d\, w = T^\gamma_{(\partial_d\chi)Q_0}\dot{v} + (T^\gamma_{D_1} + T^\gamma_{D_0})w + T^\gamma_{r^2}\dot{v} + T^\gamma_{r^3}\dot{v} + R^\gamma\dot{v} + T^\gamma_{\chi Q}F\,,$$

where

$$r^2 := \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{d-1}(\partial_{\eta_k}\chi)Q_0\,\partial_{x_k}\mathbf{A} + \chi(\partial_{\eta_k}D_1)\,\partial_{x_k}Q_0\,,$$

$$r^3 := -\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{d-1}(\partial_{\eta_k}D_1)\,\partial_{x_k}(\chi Q_0)\,.$$

After simplifying $r^2 + r^3$, we get the relation

$$\partial_d\, w = T^\gamma_{D_1}w + T^\gamma_{D_0}w + T^\gamma_r\dot{v} + R^\gamma\dot{v} + T^\gamma_{\chi Q}F\,, \tag{6.42}$$

with

$$r := (\partial_d\chi)\,Q_0 + \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{d-1}(\partial_{\eta_k}\chi)\,Q_0\,\partial_{x_k}\mathbf{A} - (\partial_{x_k}\chi)\,(\partial_{\eta_k}D_1)\,Q_0\,. \tag{6.43}$$

As a consequence, r is of order 0 and is identically zero in the domain where $\chi \equiv 1$. Therefore r has its support far from the "unstable" points.

Recall that D_1 is diagonal and D_0 is block diagonal:

$$D_1 = \begin{pmatrix} \omega_1\, I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_J\, I_{n_J} \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_J \end{pmatrix},$$

so (6.42) can be written as a collection of J equations

$$\partial_d\, w_j = T^\gamma_{\omega_j}w_j + T^\gamma_{C_j}w_j + T^\gamma_{r_j}\dot{v} + R^\gamma\dot{v} + T^\gamma_{\chi Q_j}F\,, \tag{6.44}$$

with $\mathrm{Re}\,\omega_j < 0$ when $\gamma > 0$ and $1 \le j \le J'$, and $\mathrm{Re}\,\omega_j > 0$ when $\gamma > 0$ and $J'+1 \le j \le J$.

1) Estimate for the outgoing modes

We first deal with the indexes j for which $\mathrm{Re}\,\omega_j > 0$ when $\gamma > 0$. Recall that ω_j is defined for all (η, γ) and satisfies

$$\forall\,(\eta,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+\,, \qquad \mathrm{Re}\,\omega_j \ge c\,\gamma\,.$$

We choose $\Lambda^{2,\gamma}$ as a symmetrizer for (6.44), where $\Lambda^{2,\gamma}$ is the Fourier multiplier of symbol $\lambda^{2,\gamma}(\eta)$. Taking the scalar product in $L^2(\Omega)$ of (6.44) with $\Lambda^{2,\gamma} w_j$, we get

$$\begin{aligned}-\|w_j(0)\|_{1,\gamma}^2 = 2 \text{ Re } \langle\!\langle \Lambda^{1,\gamma} T^\gamma_{\omega_j} w_j, \Lambda^{1,\gamma} w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} + 2 \text{ Re } \langle\!\langle \Lambda^{1,\gamma} T^\gamma_{C_j} w_j, \Lambda^{1,\gamma} w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \\ +2 \text{ Re } \langle\!\langle \Lambda^{1,\gamma} T^\gamma_{r_j} \dot{v}, \Lambda^{1,\gamma} w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} + 2 \text{ Re } \langle\!\langle \Lambda^{1,\gamma} R^\gamma \dot{v}, \Lambda^{1,\gamma} w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \\ +2 \text{ Re } \langle\!\langle \Lambda^{1,\gamma} T^\gamma_{\chi Q_j} F, \Lambda^{1,\gamma} w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} .\end{aligned}$$

Taking the order of the different operators into account and using Young's inequality, we obtain

$$\begin{aligned}&- 2 \text{ Re } \langle\!\langle \Lambda^{1,\gamma} T^\gamma_{C_j} w_j, \Lambda^{1,\gamma} w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \le C \, |\!|\!| w_j |\!|\!|_{1,\gamma}^2 , \\ &- 2 \text{ Re } \langle\!\langle \Lambda^{1,\gamma} T^\gamma_{r_j} \dot{v}, \Lambda^{1,\gamma} w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \le \frac{C}{\gamma} \, |\!|\!| T^\gamma_{r_j} \dot{v} |\!|\!|_{1,\gamma}^2 + \varepsilon \, \gamma \, |\!|\!| w_j |\!|\!|_{1,\gamma}^2 , \\ &- 2 \text{ Re } \langle\!\langle \Lambda^{1,\gamma} R^\gamma \dot{v}, \Lambda^{1,\gamma} w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \le \frac{C}{\gamma} \, |\!|\!| \dot{v} |\!|\!|_0^2 + \varepsilon \, \gamma \, |\!|\!| w_j |\!|\!|_{1,\gamma}^2 , \\ &- 2 \text{ Re } \langle\!\langle \Lambda^{1,\gamma} T^\gamma_{\chi Q_j} F, \Lambda^{1,\gamma} w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \le \frac{C}{\gamma} \, |\!|\!| T^\gamma_{\chi Q} F |\!|\!|_{1,\gamma}^2 + \varepsilon \, \gamma \, |\!|\!| w_j |\!|\!|_{1,\gamma}^2 ,\end{aligned}$$

for some $\varepsilon > 0$ to be fixed. Using theorem 6.6, the difference

$$\Lambda^{1,\gamma} \, T^\gamma_{\omega_j} - T^\gamma_{\omega_j} \, \Lambda^{1,\gamma}$$

is of order ≤ 1 so we have

$$2 \text{ Re } \langle\!\langle \Lambda^{1,\gamma} T^\gamma_{\omega_j} w_j, \Lambda^{1,\gamma} w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \ge 2 \text{ Re } \langle\!\langle T^\gamma_{\omega_j} \Lambda^{1,\gamma} w_j, \Lambda^{1,\gamma} w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} - C \, |\!|\!| w_j |\!|\!|_{1,\gamma}^2 .$$

Applying Gårding's inequality (theorem 6.7), we finally get

$$2 \text{ Re } \langle\!\langle \Lambda^{1,\gamma} T^\gamma_{\omega_j} w_j, \Lambda^{1,\gamma} w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \ge (c \, \gamma - C) \, |\!|\!| w_j |\!|\!|_{1,\gamma}^2 .$$

It is now clear that an appropriate choice of ε yields the $L^2(H^1)$ estimate

$$\gamma \, |\!|\!| w_j |\!|\!|_{1,\gamma}^2 + \|w_j(0)\|_{1,\gamma}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma} \, |\!|\!| T^\gamma_{\chi Q} F |\!|\!|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma} \, \left(|\!|\!| \dot{v} |\!|\!|_0^2 + |\!|\!| T^\gamma_r \dot{v} |\!|\!|_{1,\gamma}^2 \right) . \tag{6.45}$$

2) Estimate for the incoming modes

We now deal with the indexes j for which Re $\omega_j < 0$ when $\gamma > 0$ (and therefore Re $\omega_j \le -c\gamma$). We first choose the identity as a symmetrizer and perform the same computation as above. One can indeed proceed in a similar way because the symmetrizer is a constant coefficients operator (that is, a Fourier multiplier). Because of the sign of Re ω_j, we have

$$\gamma \, |\!|\!| w_j |\!|\!|_0^2 \lesssim \|w_j(0)\|_0^2 + \frac{1}{\gamma^3} \, |\!|\!| T^\gamma_{\chi Q} F |\!|\!|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^3} \, \left(|\!|\!| \dot{v} |\!|\!|_0^2 + |\!|\!| T^\gamma_{r_j} \dot{v} |\!|\!|_{1,\gamma}^2 \right) ,$$

and we rewrite this estimate as

$$\gamma^3 \, |\!|\!| w_j |\!|\!|_0^2 \lesssim \gamma^2 \, \|w_j(0)\|_0^2 + \frac{1}{\gamma} \, |\!|\!| T^\gamma_{\chi Q} F |\!|\!|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma} \, \left(|\!|\!| \dot{v} |\!|\!|_0^2 + |\!|\!| T^\gamma_r \dot{v} |\!|\!|_{1,\gamma}^2 \right) . \tag{6.46}$$

The right-hand terms in (6.45) and (6.46) have similar expressions. The only difference is that the boundary value of w_j is on the right-hand side of the inequality when we deal with an incoming mode.

At this stage, it is important to note that both right-hand side terms in (6.45) and (6.46) involve the $L^2(H^1)$ norm of $T_r^\gamma \dot{v}$, and r is identically zero in the region $\{\chi \equiv 1\}$, see (6.43). In particular, r is identically zero near the bicharacteristic curves originating from Σ_{c}. However, r is not identically zero in $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}$ so, in order to absorb the error term $\|T_r^\gamma \dot{v}\|_{1,\gamma}$, we need to control the $L^2(H^1)$ norm of the w_j's in $\mathscr{V}_{\mathrm{c}}$ far from the bicharacteristic curves. We are thus going to estimate $T_{\sigma_j}^\gamma w_j$.

We choose $S_j := (T_{\sigma_j}^\gamma)^* T_{\sigma_j}^\gamma$ as a symmetrizer for (6.44). Recall that S_j is of order ≤ 2 since $\sigma_j \in \Gamma_2^1$. We take the scalar product in $L^2(\Omega)$ of (6.44) with $S_j w_j$. This yields

$$\begin{aligned} -\|T_\sigma^\gamma w_j(0)\|_0^2 = & \ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle (\partial_d S_j) w_j, w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} + 2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle S_j T_{\omega_j}^\gamma w_j, w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \\ & + 2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle S_j T_{C_j}^\gamma w_j, w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} + 2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle S_j T_{r_j}^\gamma \dot{v}, w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \\ & + 2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle S_j R^\gamma \dot{v}, w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} + 2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle S_j T_{\chi Q_j}^\gamma F, w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

First observe that

$$\partial_d S_j = (T_{\partial_d \sigma_j}^\gamma)^* T_{\sigma_j}^\gamma + (T_{\sigma_j}^\gamma)^* T_{\partial_d \sigma_j}^\gamma ,$$

so we have

$$\mathrm{Re}\ \langle\!\langle (\partial_d S_j) w_j, w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} = 2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle T_{\partial_d \sigma_j}^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} .$$

We recall that $\sigma_j \in \mathbb{R}$, hence the difference

$$T_{\sigma_j}^\gamma T_{C_j}^\gamma - T_{C_j}^\gamma T_{\sigma_j}^\gamma$$

is of order ≤ 0, and we get

$$\begin{aligned} 2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle T_{\sigma_j}^\gamma T_{C_j}^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} & \leq C\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2 + C\, \|w_j\|_0\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\| \\ & \leq C\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2 + \frac{C}{\gamma}\, \|w_j\|_0^2 + \varepsilon\, \gamma\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2 , \end{aligned}$$

for some $\varepsilon > 0$ to be fixed. Because $T_{\sigma_j}^\gamma$ is of order ≤ 1, Young's inequality yields

$$\begin{aligned} 2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle T_{\sigma_j}^\gamma T_{r_j}^\gamma \dot{v}, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} & \leq \frac{C}{\gamma}\, \|T_{r_j}^\gamma \dot{v}\|_{1,\gamma}^2 + \varepsilon\, \gamma\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2 , \\ 2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle T_{\sigma_j}^\gamma R^\gamma \dot{v}, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} & \leq \frac{C}{\gamma}\, \|\dot{v}\|_0^2 + \varepsilon\, \gamma\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2 , \\ 2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle T_{\sigma_j}^\gamma T_{\chi Q_j}^\gamma F, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} & \leq \frac{C}{\gamma}\, \|T_{\chi Q}^\gamma F\|_{1,\gamma}^2 + \varepsilon\, \gamma\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2 . \end{aligned}$$

Collecting these first inequalities, we already have

$$\begin{aligned} -2\ \mathrm{Re}\ \langle\!\langle T_{\partial_d \sigma_j}^\gamma w_j + T_{\sigma_j}^\gamma T_{\omega_j}^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} & \leq \|T_\sigma^\gamma w_j(0)\|_0^2 + (C + 4\varepsilon\, \gamma)\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2 \\ & + \frac{C}{\gamma}\, \|T_{\chi Q}^\gamma F\|_{1,\gamma}^2 + \frac{C}{\gamma}\, \|w_j\|_0^2 + \frac{C}{\gamma}\, \left(\|\dot{v}\|_0^2 + \|T_r^\gamma \dot{v}\|_{1,\gamma}^2\right) . \end{aligned} \tag{6.47}$$

We are now going to derive a lower bound for the left-hand term in (6.47). Write $\omega_j = \gamma\, e_j + ih_j$ with $e_j, h_j \in \mathbb{R}$ and $e_j \in \Gamma_2^0$, $h_j \in \Gamma_2^1$. From theorem 6.6, we have

$$T_{\sigma_j}^\gamma T_{\omega_j}^\gamma = \gamma\, T_{e_j}^\gamma T_{\sigma_j}^\gamma + \gamma\, T_{-i\{\sigma_j,e_j\}}^\gamma + \gamma R^\gamma + T_{ih_j}^\gamma T_{\sigma_j}^\gamma + T_{\{\sigma_j,h_j\}}^\gamma + R_0^\gamma\,,$$

where R^γ still denotes an operator of order ≤ -1 and R_0^γ denotes an operator of order ≤ 0. Recall that σ_j is a solution to the transport equation

$$\begin{cases} \partial_d\, \sigma_j + \{\sigma_j, h_j\} = 0 \quad x_d > 0\,, \\ \sigma_j{}_{|x_d=0} = \sigma\,, \end{cases}$$

so we get

$$\begin{aligned} -2 \text{ Re } \langle\!\langle T_{\partial_d\sigma_j}^\gamma w_j + T_{\sigma_j}^\gamma T_{\omega_j}^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} &= -2\gamma \text{ Re } \langle\!\langle T_{e_j}^\gamma T_{\sigma_j}^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &-2\gamma \text{ Re } \langle\!\langle T_{-i\{\sigma_j,e_j\}}^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} - 2\gamma \text{ Re } \langle\!\langle R^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &-2 \langle\!\langle (\text{Re } T_{ih_j}^\gamma) T_{\sigma_j}^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} - 2 \text{ Re } \langle\!\langle R_0^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Let us first examine the last three terms of the right-hand side. Because $ih_j \in i\mathbb{R}$, the operator Re $T_{ih_j}^\gamma$ is of order ≤ 0 and we have

$$\begin{aligned} -2\langle\!\langle (\text{Re } T_{ih_j}^\gamma) T_{\sigma_j}^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} &\geq -C\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2\,, \\ -2 \text{ Re } \langle\!\langle R_0^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} &\geq -C\, \|w_j\|_0\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0\,, \\ -2\gamma \text{ Re } \langle\!\langle R^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} &\geq -C\,\gamma\, \|w_j\|_{-1,\gamma}\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0 \geq -C\, \|w_j\|_0\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0\,. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Applying Gårding's inequality (theorem 6.7), we obtain

$$-2\gamma \text{ Re } \langle\!\langle T_{e_j}^\gamma T_{\sigma_j}^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \geq c\,\gamma\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2\,, \tag{6.49}$$

so it only remains to derive a lower bound for the term

$$-2\gamma \text{ Re } \langle\!\langle T_{-i\{\sigma_j,e_j\}}^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)}\,.$$

Because $\sigma_j \in \Gamma_2^1$, the operator $T_{-i\{\sigma_j,e_j\}}^\gamma$ is of order ≤ 0 and therefore

$$\begin{aligned} -2\gamma \text{ Re } \langle\!\langle T_{-i\{\sigma_j,e_j\}}^\gamma w_j, T_{\sigma_j}^\gamma w_j \rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} &\geq -C\,\gamma\, \|w_j\|_0\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0 \\ &\geq -\varepsilon\,\gamma\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2 - C\,\gamma\, \|w_j\|_0^2\,. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Choosing ε appropriately and taking the sum of (6.47)-(6.48)-(6.49)-(6.50), we get the second estimate for the incoming modes:

$$\gamma\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2 \lesssim \|T_\sigma^\gamma w_j(0)\|_0^2 + \frac{1}{\gamma}\, \|T_{\chi Q}^\gamma F\|_{1,\gamma}^2 + \gamma\, \|w_j\|_0^2 + \frac{1}{\gamma}\, \left(\|\dot v\|_0^2 + \|T_r^\gamma \dot v\|_{1,\gamma}^2\right)\,. \tag{6.51}$$

Take the sum of (6.46) and (6.51). Choosing γ large enough, we have

$$\begin{aligned} \gamma^3\, \|w_j\|_0^2 + \gamma\, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2 \lesssim \gamma^2\, \|w_j(0)\|_0^2 + \|T_\sigma^\gamma w_j(0)\|_0^2 + \frac{1}{\gamma}\, \|T_{\chi Q}^\gamma F\|_{1,\gamma}^2 \\ + \frac{1}{\gamma}\, \left(\|\dot v\|_0^2 + \|T_r^\gamma \dot v\|_{1,\gamma}^2\right)\,. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Let us decompose the vector w in

$$w = \begin{pmatrix} w_{in} \\ w_{out} \end{pmatrix}, \quad w_{in} \in \mathbb{C}^{N-1}, \quad w_{out} \in \mathbb{C}^{N+1}.$$

The vector w_{in} is the collection of the w_j's that correspond to incoming modes and w_{out} is the collection of the w_j's that correspond to outgoing modes. Taking the sum of (6.45) and (6.52), we obtain

$$\begin{aligned} &\gamma \, \|w_{out}\|_{1,\gamma}^2 + \gamma^3 \, \|w_{in}\|_0^2 + \sum_{incoming} \gamma \, \|T_{\sigma_j}^\gamma w_j\|_0^2 + \|w_{out}(0)\|_{1,\gamma}^2 \\ &\lesssim \gamma^2 \, \|w_{in}(0)\|_0^2 + \|T_\sigma^\gamma w_{in}(0)\|_0^2 + \frac{1}{\gamma} \, \|T_{\chi Q}^\gamma F\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma} \, \left(\|\dot{v}\|_0^2 + \|T_r^\gamma \dot{v}\|_{1,\gamma}^2 \right), \end{aligned} \tag{6.53}$$

and we want to show an estimate of the type

$$\gamma^2 \, \|w_{in}(0)\|_0^2 + \|T_\sigma^\gamma w_{in}(0)\|_0^2 \lesssim \|G\|_{1,\gamma}^2 + \|w_{out}(0)\|_{1,\gamma}^2,$$

where

$$G := T_{\boldsymbol{\beta}}^\gamma \dot{v}(0).$$

3) Estimate for the boundary terms

We fix four cut-off functions $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ such that

$$\begin{aligned} &\chi_1 \equiv 1 \text{ on a neighborhood of Supp } \chi \cap \{x_d = 0\}, \\ &\chi_2 \equiv 1 \text{ on a neighborhood of Supp } \chi_1, \\ &\chi_3 \equiv 1 \text{ on a neighborhood of Supp } \chi_2, \\ &\chi_4 \equiv 1 \text{ on a neighborhood of Supp } \chi_3, \end{aligned}$$

and Supp $\chi_4 \subset \mathscr{V}_c^0 \subset \partial\Omega \times \Sigma_+$. These cut-off functions are introduced in order to use the localized Gårding's inequality (theorem 6.8). They are extended as homogeneous mappings of degree 0 with respect to (η, γ). We write

$$T_{\chi_2 \boldsymbol{\beta} Q_0^{-1}}^\gamma w(0) = T_{\chi_2 \boldsymbol{\beta} Q_{in}}^\gamma w_{in}(0) + T_{\chi_2 \boldsymbol{\beta} Q_{out}}^\gamma w_{out}(0).$$

Using the definition $w = T_{\chi Q}^\gamma \dot{v}$, we obtain

$$T_{\chi_2 \boldsymbol{\beta} Q_0^{-1}}^\gamma w(0) = T_\chi^\gamma G + R^\gamma \dot{v}(0),$$

where R^γ is an operator of order ≤ -1. We thus get

$$\|T_{\chi_2 \boldsymbol{\beta} Q_{in}}^\gamma w_{in}(0)\|_{1,\gamma} \lesssim \|G\|_{1,\gamma} + \|w_{out}(0)\|_{1,\gamma} + \|\dot{v}(0)\|_0. \tag{6.54}$$

We are now going to introduce the basis of the stable subspace in which $\boldsymbol{\beta}$ has a reduced expression. Because $\chi_4 \chi_2 \equiv \chi_2$, we have

$$\chi_2 \boldsymbol{\beta} Q_{in} = (\chi_4 P_1^{-1}) \underbrace{(\chi_2 P_1 \boldsymbol{\beta} Q_{in} P_2)}_{\chi_2 \boldsymbol{\beta}_{in}} (\chi_4 P_2^{-1}).$$

We therefore obtain

$$T^{\gamma}_{\chi_2\boldsymbol{\beta}Q_{in}} w_{in}(0) = T^{\gamma}_{\chi_4 P_1^{-1}} T^{\gamma}_{\chi_2\boldsymbol{\beta}_{in}} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0) + R^{\gamma} w_{in}(0) \,,$$

and this yields the inequality

$$\|T^{\gamma}_{\chi_4 P_1^{-1}} T^{\gamma}_{\chi_2\boldsymbol{\beta}_{in}} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0)\|_{1,\gamma} \lesssim \|G\|_{1,\gamma} + \|w_{out}(0)\|_{1,\gamma} + \|\dot{v}(0)\|_0 \,. \tag{6.55}$$

We first show that we have an estimate of the type

$$\|T^{\gamma}_{\chi_4 P_1^{-1}} T^{\gamma}_{\chi_2\boldsymbol{\beta}_{in}} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0)\|_{1,\gamma} \geq c\, \|T^{\gamma}_{\chi_2\boldsymbol{\beta}_{in}} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0)\|_{1,\gamma} - C\, \|w_{in}(0)\|_0 \,.$$

Define

$$W := T^{\gamma}_{\chi_2\boldsymbol{\beta}_{in}} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0) \,.$$

We first check that

$$\|T^{\gamma}_{\chi_4 P_1^{-1}} W\|_{1,\gamma} = \|\Lambda^{1,\gamma} T^{\gamma}_{\chi_4 P_1^{-1}} W\|_0 \geq \|T^{\gamma}_{\chi_4 P_1^{-1}} \Lambda^{1,\gamma} W\|_0 - C\, \|w_{in}(0)\|_0 \,.$$

We also note that

$$T^{\gamma}_{\chi_3} \Lambda^{1,\gamma} W = \Lambda^{1,\gamma} W + R^{\gamma}_0 W \,,$$

where R^{γ}_0 is of order ≤ 0. We thus get

$$\|T^{\gamma}_{\chi_4 P_1^{-1}} W\|_{1,\gamma} \geq \|T^{\gamma}_{\chi_4 P_1^{-1}} T^{\gamma}_{\chi_3} \Lambda^{1,\gamma} W\|_0 - C\, \|w_{in}(0)\|_0 \,.$$

We are now going to use the ellipticity of $(P_1^{-1})^* P_1^{-1}$ on the support of χ_4. We write

$$\begin{aligned} \|T^{\gamma}_{\chi_4 P_1^{-1}} T^{\gamma}_{\chi_3} \Lambda^{1,\gamma} W\|_0^2 &= \langle (T^{\gamma}_{\chi_4 P_1^{-1}})^* T^{\gamma}_{\chi_4 P_1^{-1}} T^{\gamma}_{\chi_3} \Lambda^{1,\gamma} W, T^{\gamma}_{\chi_3} \Lambda^{1,\gamma} W\rangle \\ &\geq \ \mathrm{Re}\, \langle T^{\gamma}_{\chi_4^2 (P_1^{-1})^* P_1^{-1}} T^{\gamma}_{\chi_3} \Lambda^{1,\gamma} W, T^{\gamma}_{\chi_3} \Lambda^{1,\gamma} W\rangle - C\, \|T^{\gamma}_{\chi_3} \Lambda^{1,\gamma} W\|_0\, \|T^{\gamma}_{\chi_3} \Lambda^{1,\gamma} W\|_{-1,\gamma} \,, \end{aligned}$$

and we now apply Gårding's inequality (theorem 6.8) to obtain

$$\|T^{\gamma}_{\chi_4 P_1^{-1}} T^{\gamma}_{\chi_3} \Lambda^{1,\gamma} W\|_0^2 \geq c\, \|T^{\gamma}_{\chi_3} \Lambda^{1,\gamma} W\|_0^2 - C\, \|w_{in}(0)\|_0^2 \geq c\, \|\Lambda^{1,\gamma} W\|_0^2 - C\, \|w_{in}(0)\|_0^2 \,.$$

Plugging this later inequality in (6.55) yields

$$\|\Lambda^{1,\gamma} T^{\gamma}_{\chi_2\boldsymbol{\beta}_{in}} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0)\|_0 \lesssim \|G\|_{1,\gamma} + \|w_{out}(0)\|_{1,\gamma} + \|\dot{v}(0)\|_0 \,. \tag{6.56}$$

Observe that the difference

$$\Lambda^{1,\gamma} T^{\gamma}_{\chi_2\boldsymbol{\beta}_{in}} - T^{\gamma}_{\chi_2 \lambda^{1,\gamma}\boldsymbol{\beta}_{in}}$$

is of order ≤ 0 so (6.56) also reads

$$\|T^{\gamma}_{\chi_2 \lambda^{1,\gamma}\boldsymbol{\beta}_{in}} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0)\|_0 \lesssim \|G\|_{1,\gamma} + \|w_{out}(0)\|_{1,\gamma} + \|\dot{v}(0)\|_0 \,. \tag{6.57}$$

It is time to use the particular structure of $\boldsymbol{\beta}_{in}$ to derive a lower bound for the left-hand term in (6.57). Recall that

$$\chi_2 \lambda^{1,\gamma} \boldsymbol{\beta}_{in} = \begin{pmatrix} \chi_2(\gamma + i\sigma) & 0 \\ 0 & \chi_2 \lambda^{1,\gamma} I_{N-2} \end{pmatrix} .$$

The relation $\chi_4 \chi_1 \equiv \chi_4$ yields

$$T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0) = T^{\gamma}_{\chi_1} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0) + R^{\gamma} w_{in}(0) ,$$

so we rewrite (6.57) as

$$\| T^{\gamma}_{\chi_2 \lambda^{1,\gamma} \boldsymbol{\beta}_{in}} T^{\gamma}_{\chi_1} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0) \|_0 \lesssim \|G\|_{1,\gamma} + \|w_{out}(0)\|_{1,\gamma} + \|\dot{v}(0)\|_0 . \tag{6.58}$$

The decomposition

$$T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0) := \begin{pmatrix} W_1 \\ W' \end{pmatrix} , \quad W_1 \in \mathbb{C}, \quad W' \in \mathbb{C}^{N-2} ,$$

gives

$$\| T^{\gamma}_{\chi_2 \lambda^{1,\gamma} \boldsymbol{\beta}_{in}} T^{\gamma}_{\chi_1} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0) \|_0^2 = \| T^{\gamma}_{\chi_2(\gamma + i\sigma)} T^{\gamma}_{\chi_1} W_1 \|_0^2 + \| T^{\gamma}_{\chi_2 \lambda^{1,\gamma}} T^{\gamma}_{\chi_1} W' \|_0^2 .$$

Because $\chi_2 \chi_1 \equiv \chi_1$ and $\chi_1 \chi \equiv \chi$, we obtain

$$\| T^{\gamma}_{\chi_2 \lambda^{1,\gamma}} T^{\gamma}_{\chi_1} W' \|_0 \geq c \, \|W'\|_{1,\gamma} - C \, \|w_{in}(0)\|_0 \geq c \, \|T^{\gamma}_{\sigma} W'\|_0 - C \, \|w_{in}(0)\|_0 ,$$

and using that $\sigma \in \mathbb{R}$, we also obtain

$$\| T^{\gamma}_{\chi_2(\gamma + i\sigma)} T^{\gamma}_{\chi_1} W_1 \|_0 \geq c \, (\gamma \, \|W_1\|_0 + \|T^{\gamma}_{\sigma} W_1\|_0) - C \, \|w_{in}(0)\|_0 .$$

Eventually, we get the lower-bound

$$\begin{aligned} \| T^{\gamma}_{\chi_2 \lambda^{1,\gamma} \boldsymbol{\beta}_{in}} T^{\gamma}_{\chi_1} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0) \|_0 \geq c \, \Big(\gamma \, \| T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0) \|_0 + \| T^{\gamma}_{\sigma} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0) \|_0 \Big) \\ - C \, \|\dot{v}(0)\|_0 . \end{aligned} \tag{6.59}$$

To conclude, we perform the same kind of calculations as those already done with $\chi_4 P_1^{-1}$ to show that

$$\begin{aligned} \| T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0) \|_0 &\geq c \, \|w_{in}(0)\|_0 - C \, \|\dot{v}(0)\|_{-1,\gamma} , \\ \| T^{\gamma}_{\sigma} T^{\gamma}_{\chi_4 P_2^{-1}} w_{in}(0) \|_0 &\geq c \, \|T^{\gamma}_{\sigma} w_{in}(0)\|_0 - C \, \|\dot{v}(0)\|_0 . \end{aligned}$$

The boundary terms thus satisfy:

$$\gamma^2 \, \|w_{in}(0)\|_0^2 + \|T^{\gamma}_{\sigma} w_{in}(0)\|_0^2 \lesssim \|G\|_{1,\gamma}^2 + \|w_{out}(0)\|_{1,\gamma}^2 + \|\dot{v}(0)\|_0^2 . \tag{6.60}$$

Combining (6.53) and (6.60), we obtain our main energy estimate localized near the instability points:

$$\begin{aligned} \gamma \, \|w_{out}\|_{1,\gamma}^2 + \gamma^3 \, \|w_{in}\|_0^2 + \sum_{incoming} \gamma \, \|T^{\gamma}_{\sigma_j} w_j\|_0^2 + \|w_{out}(0)\|_{1,\gamma}^2 + \gamma^2 \, \|w_{in}(0)\|_0^2 + \|T^{\gamma}_{\sigma} w_{in}(0)\|_0^2 \\ \lesssim \|G\|_{1,\gamma}^2 + \|\dot{v}(0)\|_0^2 + \frac{1}{\gamma} \, \|T^{\gamma}_{\chi Q} F\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma} \, \left(\|\dot{v}\|_0^2 + \|T^{\gamma}_{r} \dot{v}\|_{1,\gamma}^2 \right) . \end{aligned} \tag{6.61}$$

6.3.5 Energy estimates far from instability points

In this paragraph, we show how to estimate the $L^2(H^1)$ norm of $\dot{v}$ far from the instability points. We fix a smooth cut-off function $\widetilde{\chi}$ such that

$$\widetilde{\chi} \equiv 1 \text{ on Supp } \chi_0 \cap \{x_d = 0\}\,,$$

so we have $\widetilde{\chi}\chi_{0|_{x_d=0}} \equiv \chi_{0|_{x_d=0}}$, and we also ask that the support of $\widetilde{\chi}$ does not meet the set of critical points $\Sigma_{\mathbf{c}}$. This is possible because the support of $\chi_{0|_{x_d=0}}$ does not meet $\Sigma_{\mathbf{c}}$. With this requirement, the uniform stability condition is met at all point in the support of $\widetilde{\chi}$. The cut-off function $\widetilde{\chi}$ is introduced in order to use a localized Gårding's inequality.

To derive the desired energy estimate, we shall use a classical Kreiss' symmetrizer that is microlocalized around uniformly stable points.

Proposition 6.3 (Kreiss' symmetrizers). *There exists a mapping*

$$S : \overline{\Omega} \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

satisfying the following properties:
$\forall\, z$, the matrix $S(z)$ is hermitian,
S is a symbol of degree 2 and regularity 2,
$\forall\, z \in \partial\Omega \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$, one has

$$\widetilde{\chi}(z)^2\, S(z) + C\, \widetilde{\chi}(z)^2\, \lambda^{2,\gamma}(\eta)\, \boldsymbol{\beta}(z)^* \boldsymbol{\beta}(z) \geq c\, \widetilde{\chi}(z)^2\, \lambda^{2,\gamma}(\eta)\, I\,, \tag{6.62}$$

there exists a finite set of matrix valued mappings such that

$$\mathrm{Re}\,(S(z)\mathbf{A}(z)) = \sum_l V_l(z)^* \begin{pmatrix} \gamma H_l(z) & 0 \\ 0 & E_l(z) \end{pmatrix} V_l(z)\,,$$

where V_l and E_l are homogeneous of degree 1 with respect to (η, γ) (and belong to Γ_2^1), H_l is homogeneous of degree 0 with respect to (η, γ) (and belongs to Γ_2^0), and the following inequalities hold:

$$\sum_l V_l(z)^*\, V_l(z) \geq c\, \lambda^{2,\gamma}(\eta)\, I\,, \quad H_l(z) \geq c\, I\,, \quad E_l(z) \geq c\, \lambda^{1,\gamma}(\eta)\, I\,. \tag{6.63}$$

We define $w := T^\gamma_{\chi_0} \dot{v}$ and compute the equation satisfied by w. The calculations are entirely similar to those done in the preceeding paragraph, namely

$$\partial_d\, w = T^\gamma_{\mathbf{A}}\, w + T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}\, w + T^\gamma_{r^0}\, \dot{v} + R^\gamma\, \dot{v} + T^\gamma_{\chi Q}\, F\,, \tag{6.64}$$

with

$$r^0 := \partial_d \chi_0 + \frac{1}{i}\,\{\chi_0, \mathbf{A}\} = \partial_d \chi_0 + \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{d-1} (\partial_{\eta_k} \chi_0)\, \partial_{x_k} \mathbf{A} - (\partial_{\eta_k} \mathbf{A})\, \partial_{x_k} \chi_0\,. \tag{6.65}$$

Let $\{\mathbf{S}^\gamma(x_d)\}$ be given by

$$\mathbf{S}^\gamma(x_d) := \frac{1}{2}\left((T^\gamma_{S(x_d)})^* + T^\gamma_{S(x_d)} \right)\,.$$

Because $S \in \Gamma_2^2$, $\{\mathbf{S}^\gamma\}$ is a bounded Lipschitzean family of selfadjoint operators from $L^2(H^2(\mathbb{R}^d))$ to $L^2(\Omega)$ (the bounds are uniform with respect to the parameter $\gamma \geq 1$). The starting point to derive the energy estimate is to take the scalar product of (6.64) with $\mathbf{S}^\gamma\, w$ and integrate with respect to $(x_0, \ldots, x_d) \in \Omega$. We find

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}^\gamma(0)\, w(0), w(0)\rangle_{L^2(\omega)} + 2 \text{ Re } \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathbf{A}} w, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} = - \text{ Re } \langle\!\langle \frac{d\mathbf{S}^\gamma}{dx_d} w, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \\ -2 \text{ Re } \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}} w, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} - 2 \text{ Re } \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{r^0} \dot{v}, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} - 2 \text{ Re } \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma R^\gamma \dot{v}, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \\ -2 \text{ Re } \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\chi_0} F, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} . \end{aligned} \tag{6.66}$$

The right-hand side of (6.66) is easily estimated. We write $\mathbf{S}^\gamma$ as

$$\mathbf{S}^\gamma = \Lambda^{1,\gamma}\, \Lambda^{-1,\gamma}\, \mathbf{S}^\gamma$$

and use that $\Lambda^{1,\gamma}$ is selfadjoint. Because $\Lambda^{-1,\gamma}\mathbf{S}^\gamma$ is of order ≤ 1, we obtain

$$\begin{aligned} - \text{ Re } \langle\!\langle \frac{d\mathbf{S}^\gamma}{dx_d} w, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} &\leq C\, \|w\|^2_{1,\gamma}\,, \\ -2 \text{ Re } \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}} w, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} &\leq C\, \|w\|^2_{1,\gamma}\,, \\ -2 \text{ Re } \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{r^0} \dot{v}, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{C}{\gamma}\, \|T^\gamma_{r^0} \dot{v}\|^2_{1,\gamma} + \varepsilon\, \gamma\, \|w\|^2_{1,\gamma}\,, \\ -2 \text{ Re } \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma R^\gamma \dot{v}, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{C}{\gamma}\, \|\dot{v}\|^2_0 + \varepsilon\, \gamma\, \|w\|^2_{1,\gamma}\,, \\ -2 \text{ Re } \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\chi_0} F, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{C}{\gamma}\, \|T^\gamma_{\chi_0} F\|^2_{1,\gamma} + \varepsilon\, \gamma\, \|w\|^2_{1,\gamma}\,, \end{aligned}$$

so we get

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}^\gamma(0) w(0), w(0)\rangle_{L^2(\omega)} + 2 \text{ Re } \langle\!\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathbf{A}} w, w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \leq (C + 3\varepsilon\, \gamma)\, \|w\|^2_{1,\gamma} \\ + \frac{C}{\gamma}\, \|T^\gamma_{\chi_0} F\|^2_{1,\gamma} + \frac{C}{\gamma}\, \left(\|\dot{v}\|^2_0 + \|T^\gamma_{r^0} \dot{v}\|^2_{1,\gamma}\right) . \end{aligned} \tag{6.67}$$

We are now going to derive a lower bound for the left-hand side of (6.67) by means of Gårding's inequalities. We first deal with the boundary term. First note that

$$\mathbf{S}(0) - T^\gamma_{S(0)}$$

is of order ≤ 1, so we have

$$\langle \mathbf{S}^\gamma(0) w(0), w(0)\rangle_{L^2(\omega)} = \text{ Re } \langle T^\gamma_{S(0)}(0) w(0), w(0)\rangle_{L^2(\omega)} + \mathscr{O}(\|w(0)\|_{1,\gamma}\, \|w(0)\|_0)\,.$$

Using (6.62), we can apply Gårding's inequality (theorem 6.8) and derive

$$\text{ Re } \langle T^\gamma_{S(0)}(0) w(0), w(0)\rangle_{L^2(\omega)} + C \text{ Re } \langle T^\gamma_{\lambda^{2,\gamma}\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\beta}} w(0), w(0)\rangle_{L^2(\omega)} \geq c\, \|w(0)\|^2_{1,\gamma} - C\, \|\dot{v}(0)\|^2_0\,.$$

Observe that

$$T^\gamma_{\lambda^{2,\gamma}\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\beta}} - \left[\Lambda^{1,\gamma} T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}}\right]^* \left[\Lambda^{1,\gamma} T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}}\right]$$

is of order ≤ 1 so we have

$$\mathrm{Re}\,\langle T^{\gamma}_{\lambda^2,\gamma\boldsymbol{\beta}^*\boldsymbol{\beta}}w(0),w(0)\rangle_{L^2(\omega)} = \|T^{\gamma}_{\boldsymbol{\beta}}w(0)\|^2_{1,\gamma} + \mathscr{O}(\|w(0)\|_{1,\gamma}\,\|w(0)\|_0)\,.$$

For γ large enough, we therefore obtain

$$\langle \mathbf{S}^{\gamma}(0)\,w(0),w(0)\rangle_{L^2(\omega)} \geq c\,\|w(0)\|^2_{1,\gamma} - C\,\|T^{\gamma}_{\boldsymbol{\beta}}w(0)\|^2_{1,\gamma} - C\,\|\dot{v}(0)\|^2_0\,, \tag{6.68}$$

and we now deal with the interior term. Since

$$\mathrm{Re}\;\mathbf{S}^{\gamma}T^{\gamma}_{\mathbf{A}} - T^{\gamma}_{\mathrm{Re}\,(S\mathbf{A})}$$

is of order ≤ 2, we have

$$2\;\mathrm{Re}\;\langle\!\langle \mathbf{S}^{\gamma}T^{\gamma}_{\mathbf{A}}w,w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \geq 2\;\mathrm{Re}\;\langle\!\langle T^{\gamma}_{\mathrm{Re}\,(S\mathbf{A})}w,w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} - C\,|\!|\!|w|\!|\!|^2_{1,\gamma}\,.$$

Define

$$\forall\, z\in\overline{\Omega}\times(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+\setminus\{0\})\,,\quad a_i(z) := \begin{pmatrix}\gamma H_i(z) & 0\\ 0 & E_i(z)\end{pmatrix}\,.$$

Then the remainders

$$T^{\gamma}_{V_l^*a_lV_l} - (T^{\gamma}_{V_l})^*T^{\gamma}_{a_l}T^{\gamma}_{V_l}$$

are of order ≤ 2, so we get

$$2\;\mathrm{Re}\;\langle\!\langle \mathbf{S}^{\gamma}T^{\gamma}_{\mathbf{A}}w,w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \geq \mathrm{Re}\;\sum_l \langle\!\langle T^{\gamma}_{a_l}w_l,w_l\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} - C\,|\!|\!|w|\!|\!|^2_{1,\gamma}$$

where $w_l := T^{\gamma}_{V_l}w$. Using the block decomposition of a_i and Gårding's inequality (theorem 6.7) on each block, we obtain

$$\mathrm{Re}\;\langle\!\langle T^{\gamma}_{a_l}w_l,w_l\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \geq c\,\gamma\,|\!|\!|w_l|\!|\!|^2_0\,,$$

and the ellipticity of the symbol $\sum_l V_l^*V_l$ yields, for γ large enough, the estimate

$$|\!|\!|w|\!|\!|^2_{1,\gamma} \lesssim \sum_l\;\mathrm{Re}\;\langle\!\langle T^{\gamma}_{V_l^*V_l}w,w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \lesssim \sum_l |\!|\!|w_l|\!|\!|^2_0 + \frac{1}{\gamma}\,|\!|\!|w|\!|\!|^2_{1,\gamma}\,.$$

Combining all these inequalities, we conclude that

$$\mathrm{Re}\;\langle\!\langle \mathbf{S}^{\gamma}T^{\gamma}_{\mathbf{A}}w,w\rangle\!\rangle_{L^2(\Omega)} \geq c\,\gamma\,|\!|\!|w|\!|\!|^2_{1,\gamma} \tag{6.69}$$

for γ large enough. We now use (6.68) and (6.69) to derive a lower bound for the left-hand term of (6.67). Choosing ε appropriately, we end up with

$$\gamma\,|\!|\!|w|\!|\!|^2_{1,\gamma} + \|w(0)\|^2_{1,\gamma} - \|T^{\gamma}_{\boldsymbol{\beta}}w(0)\|^2_{1,\gamma} - \|\dot{v}(0)\|^2_0 \lesssim \frac{1}{\gamma}\,|\!|\!|T^{\gamma}_{\chi_0}F|\!|\!|^2_{1,\gamma} + \frac{1}{\gamma}\,\left(|\!|\!|\dot{v}|\!|\!|^2_0 + |\!|\!|T^{\gamma}_{r^0}\dot{v}|\!|\!|^2_{1,\gamma}\right)\,.$$

To conclude, observe that the remainder

$$T^{\gamma}_{\boldsymbol{\beta}}T^{\gamma}_{\chi_0} - T^{\gamma}_{\chi_0}T^{\gamma}_{\boldsymbol{\beta}}$$

is of order ≤ -1 so we have

$$\|T^{\gamma}_{\boldsymbol{\beta}}w(0)\|^2_{1,\gamma} \lesssim \|G\|^2_{1,\gamma} + \|\dot{v}(0)\|^2_0\,.$$

Eventually, we have proved

$$\gamma\,|\!|\!|T^{\gamma}_{\chi_0}\dot{v}|\!|\!|^2_{1,\gamma} + \|T^{\gamma}_{\chi_0}\dot{v}(0)\|^2_{1,\gamma} \lesssim \|G\|^2_{1,\gamma} + \|\dot{v}(0)\|^2_0 + \frac{1}{\gamma}\,|\!|\!|T^{\gamma}_{\chi_0}F|\!|\!|^2_{1,\gamma} + \frac{1}{\gamma}\,\left(|\!|\!|\dot{v}|\!|\!|^2_0 + |\!|\!|T^{\gamma}_{r^0}\dot{v}|\!|\!|^2_{1,\gamma}\right)\,. \tag{6.70}$$

6.3.6 The main result

This paragraph is devoted to the very end of the analysis. We first prove the following:

Theorem 6.2. *For all $\dot v \in H^1(\Omega)$, we define the localized norm of $\dot v$ as*

$$\tilde{|\!|\!|}\dot v\tilde{|\!|\!|}^2 := |\!|\!|T^\gamma_{\chi_0}\dot v|\!|\!|^2_{1,\gamma} + |\!|\!|\dot v_{out}|\!|\!|^2_{1,\gamma} + \gamma^2\,|\!|\dot v_{in}|\!|^2_0 + \sum_{1\le j\le J'} |\!|\!|T^\gamma_{\sigma_j}\dot v_j|\!|\!|^2_0$$

where notations are similar to those of paragraph 6.3.4:

$$T^\gamma_{\chi Q}\dot v = \begin{pmatrix}\dot v_{in}\\ \dot v_{out}\end{pmatrix}, \quad \dot v_{in}\in\mathbb{C}^{N-1}, \quad \dot v_{out}\in\mathbb{C}^{N+1} \quad \textit{and} \quad \dot v_{in} = \begin{pmatrix}\dot v_1\\ \vdots\\ \dot v_{J'}\end{pmatrix}.$$

For $\dot v(0)\in H^1(\mathbb{R}^d)$ we define in a similar way the localized norm of $\dot v(0)$ as

$$\tilde{|\!|}\dot v(0)\tilde{|\!|}^2 := |\!|\!|T^\gamma_{\chi_0}\dot v(0)|\!|\!|^2_{1,\gamma} + |\!|\dot v_{out}(0)|\!|^2_{1,\gamma} + \gamma^2\,|\!|\dot v_{in}(0)|\!|^2_0 + |\!|T^\gamma_\sigma\dot v_{in}(0)|\!|^2_0\,.$$

Then there exist two constants $C>0$ and $\gamma_0\ge 1$ such that for all $\gamma\ge\gamma_0$ and for all $(v,\psi)\in H^2(\Omega)\times H^2(\mathbb{R}^d)$, the following estimate holds:

$$\gamma\,\tilde{|\!|\!|}\dot v\tilde{|\!|\!|}^2 + \tilde{|\!|}\dot v(0)\tilde{|\!|}^2 \le C\left(\frac{1}{\gamma}|\!|\!|F|\!|\!|^2_{1,\gamma} + |\!|G|\!|^2_{1,\gamma}\right), \tag{6.71}$$

where

$$\dot v := v - T^\gamma_{\partial_d\mathbf{a}}\psi\,, \quad F := \partial_d\dot v - T^\gamma_{\mathbf{A}}\dot v - T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}}\dot v \quad \textit{and} \quad G := T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}}\dot v_{|x_d=0}\,.$$

Proof. Using (6.61) and (6.70), we have already proved that there exists two constants C and γ_0 such that for all $\gamma\ge\gamma_0$, one has

$$\begin{aligned}\gamma\,\tilde{|\!|\!|}\dot v\tilde{|\!|\!|}^2 + \tilde{|\!|}\dot v(0)\tilde{|\!|}^2 \le C\left(\frac{1}{\gamma}|\!|\!|F|\!|\!|^2_{1,\gamma} + |\!|G|\!|^2_{1,\gamma}\right) + C\,|\!|\dot v(0)|\!|^2_0\\ + \frac{C}{\gamma}\left(|\!|\dot v|\!|^2_0 + |\!|T^\gamma_r\dot v|\!|^2_0 + |\!|T^\gamma_{r^0}\dot v|\!|^2_0\right)\end{aligned} \tag{6.72}$$

where r is given by (6.43) and r^0 is given by (6.65). We first show that the localized norm verifies

$$\gamma\,|\!|\dot v|\!|_0 \le C\,\tilde{|\!|\!|}\dot v\tilde{|\!|\!|} \tag{6.73}$$

for γ large enough and $C>0$. Write

$$I = \chi_0 I + \chi I = \chi_0 I + (\tilde\chi Q_0^{-1})\chi Q_0\,,$$

where $\tilde\chi$ is a suitable cut-off function such that $\tilde\chi\chi=\chi$. Then we have

$$\begin{aligned}\gamma\,|\!|\dot v|\!|_0 &\le \gamma\,|\!|T^\gamma_{\chi_0}\dot v|\!|_0 + C\gamma\,|\!|T^\gamma_{\chi Q_0}\dot v|\!|_0 \le |\!|\!|T^\gamma_{\chi_0}\dot v|\!|\!|_{1,\gamma} + C\gamma\,|\!|T^\gamma_{\chi Q}\dot v|\!|_0 + C\gamma\,|\!|T^\gamma_{\chi Q_{-1}}\dot v|\!|_0\\ &\le |\!|\!|T^\gamma_{\chi_0}\dot v|\!|\!|_{1,\gamma} + |\!|\dot v_{out}|\!|_{1,\gamma} + \gamma\,|\!|\dot v_{in}|\!|_0 + C\,|\!|\dot v|\!|_0 \le C\,\tilde{|\!|\!|}\dot v\tilde{|\!|\!|} + C\,|\!|\dot v|\!|_0\end{aligned}$$

and this gives (6.73) when γ is large enough. In a completely similar way, we get

$$\gamma \, \|\dot{v}(0)\|_0 \leq C \, \|\dot{v}(0)\tilde{\|} \, . \tag{6.74}$$

Using (6.73) and (6.74), (6.72) yields

$$\gamma \, \|\dot{v}\tilde{\|}^2 + \|\dot{v}(0)\tilde{\|}^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma} \, \|F\|_{1,\gamma}^2 + \|G\|_{1,\gamma}^2 \right) + \frac{C}{\gamma} \, \left(\|T_r^\gamma \dot{v}\|_{1,\gamma}^2 + \|T_{r^0}^\gamma \dot{v}\|_{1,\gamma}^2 \right) \, , \tag{6.75}$$

and we need to absorb the last two error terms on the right-hand side.

To absorb the term $T_r^\gamma \dot{v}$, we decompose the symbol r as a linear combination of χ_0 and the σ_j's. Recall that r is a symbol of degree 0 and regularity 1 that is identically zero in the region $\{\chi \equiv 1\}$. In the region $\{\chi \leq 1/2\}$, we have $\chi_0 \geq 1/2$ so we can write

$$r := \alpha_0 \, (\chi_0 \, I) \, ,$$

with α a symbol of degree 0. In the region $\{1 > \chi \geq 1/2\}$, we can write

$$r := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{J'} \\ \alpha_{out} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 I_{n_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_{J'} I_{n_{J'}} & \\ & & & I_{N+1} \end{pmatrix} (\chi \, Q_0) \, ,$$

because the two last matrices are regular in the region where r is not identically zero (this is because $|\sigma_j| \geq c$ when r is not zero). Up to introducing new cut-off functions, we can decompose r as

$$r = \alpha_0 \, (\chi_0 \, I) + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{J'} \\ \alpha_{out} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 I_{n_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_{J'} I_{n_{J'}} & \\ & & & I \end{pmatrix} (\chi \, Q_0) \, ,$$

where α_0 and α_{out} are of degree 0 and $\alpha_1, \ldots, \alpha_{J'}$ are of degree -1 (because the σ_j's are of degree 1). Using the above decomposition, we easily derive

$$\|T_r^\gamma \dot{v}\|_{1,\gamma} \lesssim \|T_{\chi_0}^\gamma \dot{v}\|_{1,\gamma} + \|\dot{v}_{out}\|_{1,\gamma} + \sum_{1 \leq j \leq J'} \|T_{\sigma_j}^\gamma \dot{v}_j\|_0 \lesssim \|\dot{v}\tilde{\|} \, .$$

The same kind of arguments also work for the term $T_{r^0}^\gamma$ because r^0 is identically zero near the bicharacteristic curves. Eventually, (6.75) yields, for γ large enough:

$$\gamma \, \|\dot{v}\tilde{\|}^2 + \|\dot{v}(0)\tilde{\|}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma} \, \|F\|_{1,\gamma}^2 + \|G\|_{1,\gamma}^2 \, . \tag{6.76}$$

□

Theorem 6.2 gives a precise statement of the location of the possible singularities of $\dot{v}$, that is, where $\dot{v}$ is less regular that the source terms F and G. However, an important consequence of theorem 6.2 is that our constant coefficients energy estimate holds for variable coefficients system:

Theorem 6.3. *Let* $\mathbf{a}$, *defined by* (6.24), *satisfy assumptions 6.6-6.8. Then for all* $v \in H^2(\Omega)$, $\psi \in H^2(\mathbb{R}^d)$ *and for all* $\gamma \geq \gamma_0$, *one has*

$$\gamma \, \|v\|_0^2 + \|v_{|x_d=0}\|_0^2 + \|\psi\|_{1,\gamma}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3} \, \|\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^\gamma(v,\psi)\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|\mathscr{B}_{\mathbf{a}}^\gamma(v,\psi)\|_{1,\gamma}^2 \, . \tag{6.77}$$

Proof. The result is now a direct consequence of the paralinearization estimates. Let v and ψ be given and define $\dot{v}$ as the good unknown of the problem. Let

$$F := \partial_d \dot{v} - T^\gamma_{\mathbf{A}} \dot{v} - T^\gamma_{\mathbf{A}_d^{-1}\mathbf{C}} \dot{v} \quad \text{and} \quad G := T^\gamma_{\boldsymbol{\beta}} \dot{v}_{|x_d=0} \,.$$

Using (6.76) and (6.73)-(6.74), we get

$$\gamma \, |\!|\!| \dot{v} |\!|\!|_0^2 + \|\dot{v}(0)\|_0^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3} \, |\!|\!| F |\!|\!|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|G\|_{1,\gamma}^2 \,.$$

We know from (6.36) that G satisfies

$$\|G\|_{1,\gamma}^2 \lesssim \|\dot{v}(0)\|_0^2 + \|T^\gamma_{\mathbf{b}} \psi + T^\gamma_{\mathbf{M}} \dot{v}_{|x_d=0}\|_{1,\gamma}^2 + \|\psi\|_{1,\gamma}^2 \,,$$

so we have

$$\gamma \, |\!|\!| \dot{v} |\!|\!|_0^2 + \|\dot{v}(0)\|_0^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3} \, |\!|\!| F |\!|\!|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|T^\gamma_{\mathbf{b}} \psi + T^\gamma_{\mathbf{M}} \dot{v}_{|x_d=0}\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|\psi\|_{1,\gamma}^2 \,.$$

Using (6.33), we obtain

$$\gamma \, |\!|\!| \dot{v} |\!|\!|_0^2 + \|\dot{v}(0)\|_0^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3} \, |\!|\!| F |\!|\!|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|\mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{a}}(v,\psi)\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|\psi\|_{1,\gamma}^2 \,,$$

and using once again (6.33) (for the term $|\!|\!| F |\!|\!|_{1,\gamma}$) yields

$$\gamma \, |\!|\!| \dot{v} |\!|\!|_0^2 + \|\dot{v}(0)\|_0^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3} \, |\!|\!| \mathscr{L}^\gamma_{\mathbf{a}}(v,\psi) |\!|\!|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|\mathscr{B}^\gamma_{\mathbf{a}}(v,\psi)\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \, \|\psi\|_{1,\gamma}^2 \,.$$

Estimate (6.34) yields the estimate for v (and not $\dot{v}$) while (6.35) enables us to recover the estimate on the shock front ψ and to derive (6.77). □

6.4 The example of gas dynamics

6.4.1 The case of Lax shocks

When dealing with a concrete example, it is more convenient to have distinct notations for the Laplace variable and the Fourier variable. We shall thus denote by τ the Laplace dual variable of t (τ is a complex number of positive real part) and by $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ the Fourier dual variable of $(x_1, \ldots, x_{d-1})$. Consequently, the stable subspace will be denoted by $\mathscr{E}^-(\tau,\eta)$, the front symbol will be denoted by $b(\tau,\eta)$ and so on.

Consider Euler's equations of isentropic gas dynamics:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u}) = 0 \,, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \,, \end{cases} \tag{6.78}$$

where p is an increasing but nonconvex function of $\rho > 0$. System (6.78) satisfies both assumptions 6.1 and 6.2. For a planar shock wave

$$\mathbf{U} = \begin{cases} (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{if } x \cdot \nu < \sigma t, \\ (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{if } x \cdot \nu > \sigma t, \end{cases}$$

where ν is a unit vector in $\mathbb{R}^d$, the Rankine-Hugoniot conditions read

$$\rho_r(\mathbf{u}_r \cdot \nu - \sigma) = \rho_l(\mathbf{u}_l \cdot \nu - \sigma) =: j\,,$$
$$j[\mathbf{u}] + [p]\nu = 0\,,$$

and we shall assume $j \neq 0$. Then the tangential velocity is continuous across the shock front and, up to changing observer, we may assume

$$\nu = (0, \ldots, 0, 1)\,, \quad \sigma = 0\,, \quad \mathbf{u}_{r,l} = (0, \ldots, 0, u_{r,l})\,, \quad j = \rho_r u_r = \rho_l u_l > 0\,.$$

The Mach number on both sides of the shock front is defined by

$$M_{r,l} := \frac{u_{r,l}}{c_{r,l}} \quad \text{with} \quad c_{r,l} := \sqrt{p'(\rho_{r,l})}\,.$$

As usual, c denotes the sound speed in the fluid. One easily checks that $\mathbf{U}$ is a 1-shock if and only if

$$M_l > 1\,, \quad M_r < 1\,.$$

In such a case, the following result is proved in [65]:

Proposition 6.4 (Majda). [65]. *The shock* $\mathbf{U}$ *is uniformly stable if and only if*

$$M_r^2 \left(\frac{\rho_r}{\rho_l} - 1 \right) < 1\,.$$

When p is not a convex function of ρ, one may have

$$M_r^2 \left(\frac{\rho_r}{\rho_l} - 1 \right) > 1\,. \tag{6.79}$$

In this case, the following is proved in [26]:

Proposition 6.5. [26]. *There exists* $V_1 > 0$ *such that for all* $(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$ *satisfying* $\mathrm{Re}\,\tau \geq 0$, $(\tau, \eta) \neq (0, 0)$ *and* $\tau \neq \pm i V_1 |\eta|$, *one has*

$$\left\{ (Z, \chi) \in \mathscr{E}^-(\tau, \eta) \times \mathbb{C} \text{ s.t. } \chi\, b(\tau, \eta) + M\, Z = 0 \right\} = \{0\}\,,$$

and for $\eta \neq 0$, *the set*

$$\left\{ (Z, \chi) \in \mathscr{E}^-(\pm i V_1 |\eta|, \eta) \times \mathbb{C} \text{ s.t. } \chi\, b(\pm i V_1 |\eta|, \eta) + M\, Z = 0 \right\}$$

is a one dimensional subspace of $\mathbb{C}^{2d+3}$.

By definition, V_1^2 *is the smallest root of the polynomial*

$$P_1(X) := (c_r^2 - u_r^2)(X^2 + u_r^2 u_l^2) + \left[4 u_r^2 c_r^2 - 2 u_r u_l (c_r^2 + u_r^2) \right] X\,,$$

that has two distinct positive roots (the greatest is denoted V_2^2*). Furthermore we have*

$$c_r^2 - u_r^2 < V_1^2 < u_r u_l \frac{c_r^2 - u_r^2}{c_r^2 + u_r^2} < V_2^2\,.$$

We recall a few results of [26]. The eigenvalues ω_j's of the symbol $\mathscr{A}(\mathbf{U},\tau,\eta)$ are $\omega_2^r := -\tau/u_r$, $\omega_2^l := \tau/u_l$ and the roots $\omega_{1,3}^r$, $\omega_{1,3}^l$ of the polynomial equations:

$$(\tau + u_r\omega)^2 = c_r^2(\omega^2 - |\eta|^2)\,, \tag{6.80a}$$

$$(\tau - u_l\omega)^2 = c_l^2(\omega^2 - |\eta|^2)\,. \tag{6.80b}$$

We choose ω_3^r as the root of negative real part of (6.80b) when $\mathrm{Re}\,\tau > 0$. We also define $a_3^r := \tau u_r - (c_r^2 - u_r^2)\omega_3^r$.

It is proved in [26] that assumptions 6.4 and 6.5 hold as long as (6.79) is satisfied. Therefore, all planar shock waves satisfying (6.79) are weakly stable in the sense of definition 6.2. Moreover, in a suitable neighborhood of the critical frequencies $\Sigma_{cr}(\mathbf{U})$, there exists a $\mathscr{C}^\infty$ basis (that we write under the form of a rectangular matrix Q_{in}) of the stable subspace $\mathscr{E}^-$ such that

$$\beta(\tau,\eta)\,Q_{in} = \begin{pmatrix} \rho_r(c_r^2\tau + u_r a_3^r) & 2ij\eta^t \\ ij\eta(c_r^2\tau + u_l a_3^r) & -\rho_r(\tau^2 I_{d-1} + u_r u_l \eta\otimes\eta) \end{pmatrix}\,. \tag{6.81}$$

Using simple calculations on matrices, we are going to show that assumption 6.8 holds. Let us first look at the 2-dimensional case: η is a real number and βQ_{in} is a 2×2 matrix.

For all complex numbers $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5$ such that $\xi_4 \neq 0$ and $\xi_5 \neq 0$, the identity

$$\begin{pmatrix} 1/\xi_5 & -\xi_2/(\xi_4\xi_5) \\ 0 & 1/\xi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_3 & \xi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_4 & 0 \\ -\xi_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3)/\xi_5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.82}$$

is a straightforward calculation. If we write (6.81) under the form

$$\beta(\tau,\eta)\,Q_{in} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_3 & \xi_4 \end{pmatrix}\,,$$

we can easily check that ξ_4 does not vanish in the neighborhood of the critical frequencies. In the neighborhood of $(\pm iV_1|\eta|,\eta) \in \Sigma_+$, the determinant of $\beta(\tau,\eta)\,Q_{in}$ reads

$$\xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3 = (\tau - iV_1|\eta|)\,h(\tau,\eta) \quad \text{or} \quad \xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3 = (\tau + iV_1|\eta|)\,h(\tau,\eta)$$

for a suitable $\mathscr{C}^\infty$ function h that does not vanish, see [26]. Setting $\xi_5 := h(\tau,\eta)$, we obtain two regular matrices $P_1(\tau,\eta)$ and $P_2(\tau,\eta)$ such that

$$P_1(\tau,\eta)\,\beta(\tau,\eta)\,Q_{in}\,P_2(\tau,\eta) = \begin{pmatrix} \tau \pm iV_1|\eta| & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

This is nothing but assumption 6.8 since the set of critical frequencies is precisely defined by $\tau = \pm iV_1|\eta|$. In this case, the set of critical frequencies $\Sigma_{cr}(\mathbf{U})$ has exactly four connected components and we have a real equation of each of them.

In space dimension 3, the computations are similar. Observe that the matrix $\tau^2 I_{d-1} + u_r u_l \eta\otimes\eta$ is regular (near the critical frequencies) according to proposition 6.5. Hence βQ_{in} reads

$$\beta\,Q_{in} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_4 & \xi_5 & \xi_6 \\ \xi_7 & \xi_8 & \xi_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \ell \\ * & \Xi \end{pmatrix}\,,$$

where $\Xi := (\tau^2 I_{d-1} + u_r u_l \eta \otimes \eta)$. One has $\det \Xi \neq 0$ near the critical frequencies. We check the identity

$$\begin{pmatrix} 1 & -\ell\,\Xi^{-1} \\ 0 & \Xi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_4 & \xi_5 & \xi_6 \\ \xi_7 & \xi_8 & \xi_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_5\xi_9 - \xi_6\xi_8 & 0 & 0 \\ \xi_6\xi_7 - \xi_4\xi_9 & 1 & 0 \\ \xi_4\xi_8 - \xi_5\xi_7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(\beta\, Q_{in}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

and we can conclude that assumption 6.8 is also satisfied in the 3-dimensional case. As a consequence, both theorems 6.2 and 6.3 hold under assumptions 6.6 and 6.7. In particular, theorems 6.2 and 6.3 hold for small perturbations of the planar shock $\mathbf{U}$.

6.4.2 The case of reversible phase transitions

In this paragraph, we consider Euler's equations for an isothermal fluid:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u}) = 0\,, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla\, p = 0\,, \end{cases} \tag{6.83}$$

where p is a van der Waals pressure law:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}\,, \quad v := 1/\rho\,.$$

The temperature T is assumed to be lower than the critical temperature $T_c := 8a/(27br)$, so p is a nonmonotone function of ρ. In the hyperbolicity region $\{p'(\rho) > 0\}$, system (6.83) satisfies both assumptions 6.1 and 6.2.

As was made in chapter 3, we consider a planar stationary dynamic phase transition

$$\mathbf{U} = \begin{cases} U_r = (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{if } x_d < 0, \\ U_l = (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{if } x_d > 0, \end{cases}$$

that is subsonic on either side of the interface $\{x_d = 0\}$ and satisfies the pure capillary criterion. As detailed in chapter 1 and 3, $\mathbf{U}$ does not satisfy Lax' shock inequalities (assumption 6.3), but we may assume without loss of generality that $\mathbf{U}$ satisfies

$$\lambda_1(U_l, e_d) < \sigma < \lambda_2(U_l, e_d) \qquad \text{and} \qquad \lambda_1(U_r, e_d) < \sigma < \lambda_2(U_r, e_d)\,.$$

Those inequalities correspond to the situation $j > 0$, where j denotes the mass transfer across the interface. The case $j < 0$ is completely analogous.

The system we consider is (3.1)-(3.2). With an appropriate definition of operators L and B, this system can be written under the form (6.4). The boundary operator B takes into account the Rankine-Hugoniot conditions and the additional jump condition. We have seen in chapter 3 that both assumptions 6.4 and 6.5 are met by $\mathbf{U}$. This allowed us to prove theorem 3.4 and establish the weak stability of planar reversible phase transitions.

We now consider a perturbation $(\dot{U}_r, \dot{U}_l, \varphi)$ of $\mathbf{U}$ such that assumptions 6.6 and 6.7 hold. More precisely, if we set

$$\mathbf{a} := \begin{cases} U_r + \dot{U}_r(\mathbf{x}) & \text{if } x_d > \varphi(x_0, \ldots, x_{d-1}), \\ U_l + \dot{U}_l(\mathbf{x}) & \text{if } x_d < \varphi(x_0, \ldots, x_{d-1}), \end{cases}$$

then $\mathbf{a}$ defines an admissible dynamic phase transition at each point $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_d)$ such that $x_d = \varphi(x_0, \ldots, x_{d-1})$). As regards assumption 6.7 (that is the assumption on the

bicharacteristic curves), we need only assume that it is satisfied by the eigenmodes ω_3^r and ω_1^l. Recall that ω_3^r and ω_1^l are the roots of negative real part of the polynomial equations

$$(\tau + u_r\,\omega)^2 = c_r^2\,(\omega^2 - |\eta|^2)\,,$$
$$(\tau - u_l\,\omega)^2 = c_l^2\,(\omega^2 - |\eta|^2)\,.$$

According to proposition 3.1, these complex numbers still have negative real part at the points where the uniform stability condition fails.

We have seen in the proof of proposition 3.2 that assumption 6.8 is met by every dynamic phase transition. As a consequence, the calculations of the preceeding section can be reproduced in the case of reversible phase transitions. Using also the "ellipticity" of the eigenmodes ω_3^r and ω_1^l in the neighborhood of the unstable points, we end up with the following energy estimate:

Theorem 6.4. *Let* $\mathbf{a}$ *be a perturbation of the dynamic phase transition* $\mathbf{U}$ *that satisfies assumptions 6.6 and 6.7. Then for all* $v \in H^2(\Omega)$, $\psi \in H^2(\mathbb{R}^d)$ *and for all* $\gamma \geq \gamma_0$ *(where* γ_0 *only depends on* $\mathbf{a}$*), one has*

$$\|v\|_{1/2,\gamma}^2 + \|v_{|x_d=0}\|_0^2 + \|\psi\|_{1,\gamma}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3}\,\|\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma}(v,\psi)\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2}\,\|\mathscr{B}_{\mathbf{a}}^{\gamma}(v,\psi)\|_{1,\gamma}^2\,,$$

where the operators $\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^{\gamma}$ *and* $\mathscr{B}_{\mathbf{a}}^{\gamma}$ *correspond to the linearization of* (3.1)-(3.2) *about the function* $\mathbf{a}$.

6.5 Paradifferential calculus with a parameter

In this appendix, we collect the main results of the paradifferential calculus of Bony and Meyer [20, 75] that we use in this paper. The introduction of a positive parameter was achieved by Mokrane [77], see also [73]. We refer to these papers for the proofs of the results stated below. We first recall the classification of paradifferential symbols:

Definition 6.3. *A paradifferential symbol of degree* $m \in \mathbb{R}$ *and regularity* k *(*$k = 0$ *or* $k = 1$*) is a function* $a(x,\xi,\gamma) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [0,+\infty[\to \mathbb{C}^{N\times N}$ *such that* a *is* $\mathscr{C}^\infty$ *smooth with respect to* ξ *and for all* $\alpha \in \mathbb{N}^d$*, there exists a constant* C_α *verfying*

$$\forall\,(\xi,\gamma)\,,\quad \|\partial_\xi^\alpha a(\cdot,\xi,\gamma)\|_{W^{k,\infty}} \leq C_\alpha\,\lambda^{m-|\alpha|,\gamma}(\xi) = C_\alpha\,(\gamma^2 + |\xi|^2)^{(m-|\alpha|)/2}\,.$$

The set of paradifferential symbols of degree m *and regularity* k *is denoted by* Γ_k^m*. We denote by* Σ_k^m *the set of paradifferential symbols* a *such that for a suitable* $\varepsilon \in]0,1[$ *one has*

$$\forall\,(\xi,\gamma)\,,\quad \mathrm{Supp}\,\mathscr{F}_x\,a(\cdot,\xi,\gamma) \subset \{\eta \in \mathbb{R}^d / |\eta| \leq \varepsilon\,(\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2}\}\,.$$

Of course, the symbols in Σ_k^m are $\mathscr{C}^\infty$ functions with respect to both variables x and ξ, and for all $a \in \Sigma_k^m$, we have the estimates

$$\forall\,(x,\xi,\gamma)\,,\quad |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sigma\,(x,\xi,\gamma)| \leq C_{\alpha,\beta}\,\lambda^{m-|\alpha|+|\beta|,\gamma}(\xi)\,.$$

Thus any symbol $a \in \Sigma_k^m$ belongs to Hörmander's class $S_{1,1}^m$ [51] and defines an operator $P^\gamma(a)$ on the Schwartz' class $\mathscr{S}$ by the usual formula

$$\forall\, u \in \mathscr{S}\,, \quad P^\gamma(a)u(x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\, a(x,\xi,\gamma)\, \widehat{u}(\xi)\, d\xi\,.$$

We shall use the following terminology:

Definition 6.4. *A family of operators $\{P^\gamma\}$ defined for $\gamma \geq 1$ will be said of order $\leq m$ ($m \in \mathbb{R}$) if the operators P^γ are uniformly bounded from H_γ^{s+m} to H_γ^s:*

$$\forall\, \gamma \geq 1\,, \quad \forall\, u \in H_\gamma^{s+m}\,, \quad \|P^\gamma u\|_{s,\gamma} \leq C(s,m)\, \|u\|_{s+m,\gamma}\,.$$

The following theorem is crucial for the sequel of the analysis:

Theorem 6.5. *If $a \in \Sigma_k^m$, the family $\{P^\gamma(a)\}$ is of order $\leq m$.*

The regularization of symbols in the class Γ_k^m is achieved by a convolution with admissible cut-off functions:

Definition 6.5. *Let $\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ be a $\mathscr{C}^\infty$ function such that the following estimates hold for all $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$:*

$$\forall\, (\eta,\xi,\gamma), \quad |\partial_\eta^\alpha \partial_\xi^\beta \psi\,(\eta,\xi,\gamma)| \leq C_{\alpha,\beta}\, \lambda^{-|\alpha|-|\beta|,\gamma}(\xi)\,.$$

We shall say that ψ is an admissible cut-off function if there exist real numbers $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$ satisfying

$$\begin{aligned} \psi(\eta,\xi,\gamma) &= 1 \quad \textit{if} \quad |\eta| \leq \varepsilon_1(\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2}\,, \\ \psi(\eta,\xi,\gamma) &= 0 \quad \textit{if} \quad |\eta| \geq \varepsilon_2(\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2}\,. \end{aligned}$$

An example of cut-off function is the following: let χ be a nonnegative $\mathscr{C}^\infty$ function on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ such that

$$\gamma_1^2 + |\xi_1|^2 \geq \gamma_2^2 + |\xi_2|^2 \Longrightarrow \chi(\xi_1,\gamma_1) \leq \chi(\xi_2,\gamma_2)\,,$$
$$\begin{cases} \chi(\xi,\gamma) = 1 & \text{if } \left(\gamma^2 + |\xi|^2\right)^{1/2} \leq 1/2, \\ \chi(\xi,\gamma) = 0 & \text{if } \left(\gamma^2 + |\xi|^2\right)^{1/2} \geq 1. \end{cases}$$

We define a function $\varphi(\xi,\gamma) := \chi(\xi/2,\gamma/2) - \chi(\xi,\gamma)$. Then the function ψ_0 defined by

$$\psi_0(\eta,\xi,\gamma) := \sum_{p\geq 0} \chi(2^{2-p}\eta, 0)\, \varphi(2^{-p}\xi, 2^{-p}\gamma)$$

is an admissible cut-off function (one can take $\varepsilon_1 = 1/16$ and $\varepsilon_2 = 1/2$).

If ψ is an admissible cut-off function, the inverse Fourier transform K^ψ of $\psi(\cdot,\xi,\gamma)$ satisfies

$$\forall\, (\xi,\gamma)\,, \quad \|\partial_\xi^\alpha K^\psi(\cdot,\xi,\gamma)\|_{L^1} \leq C_\alpha\, \lambda^{-|\alpha|,\gamma}(\xi)\,.$$

These L^1 bounds on $\partial_\xi^\alpha K^\psi$ enable to establish the following proposition:

Proposition 6.6. *Let ψ be an admissible cut-off function. The mapping*

$$a \longmapsto \sigma_a^\psi(x,\xi,\gamma) := \int_{\mathbb{R}^d} K^\psi(x-y,\xi,\gamma)\, a(y,\xi,\gamma)\, dy$$

is continuous from Γ_k^m to Σ_k^m for all m.

If $a \in \Gamma_1^m$, then $a - \sigma_a^\psi \in \Gamma_0^{m-1}$. In particular, if ψ_1 and ψ_2 are two admissible cut-off functions and $a \in \Gamma_1^m$, then $\sigma_a^{\psi_1} - \sigma_a^{\psi_2} \in \Sigma_0^{m-1}$.

Fixing an admissible cut-off function ψ, we define the paradifferential operator $T_a^{\psi,\gamma}$ by the formula

$$T_a^{\psi,\gamma} := P^\gamma(\sigma_a^\psi)\,.$$

If ψ_1 and ψ_2 are two admissible cut-off functions and $a \in \Gamma_1^m$, then proposition 6.6 and theorem 6.5 show that the family $\{T_a^{\psi_1,\gamma} - T_a^{\psi_2,\gamma}\}$ is of order $\leq (m-1)$.

The symbolic calculus is based on the following theorem:

Theorem 6.6. *Let $a \in \Gamma_1^m$ and $b \in \Gamma_1^{m'}$. Then $ab \in \Gamma_1^{m+m'}$ and the family*

$$\{T_a^{\psi,\gamma} \circ T_b^{\psi,\gamma} - T_{ab}^{\psi,\gamma}\}_{\gamma\geq 1}$$

is of order $\leq m+m'-1$ for all admissible cut-off function ψ.

Let $a \in \Gamma_1^m$. Then for all admissible cut-off function ψ, the family

$$\{(T_a^{\psi,\gamma})^* - T_{a^*}^{\psi,\gamma}\}_{\gamma\geq 1}$$

is of order $\leq m-1$.

Let $a \in \Gamma_2^m$ and $b \in \Gamma_2^{m'}$. Then $ab \in \Gamma_2^{m+m'}$ and the family

$$\{T_a^{\psi,\gamma} \circ T_b^{\psi,\gamma} - T_{ab}^{\psi,\gamma} - T_{-i\sum_j \partial_{\xi_j} a \partial_{x_j} b}^{\psi,\gamma}\}_{\gamma\geq 1}$$

is of order $\leq m+m'-2$ for all admissible cut-off function ψ.

Let $a \in \Gamma_2^m$. Then the family

$$\{(T_a^{\psi,\gamma})^* - T_{a^*}^{\psi,\gamma} - T_{-i\sum_j \partial_{\xi_j} \partial_{x_j} a^*}^{\psi,\gamma}\}_{\gamma\geq 1}$$

is of order $\leq m-2$ for all admissible cut-off function ψ.

The next theorem is the parameter version of Gårding's inequality:

Theorem 6.7. *Let $a \in \Gamma_1^{2m}$ and ψ be and admissible cut-off function. Assume that there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\forall\,(x,\xi,\gamma), \quad \mathrm{Re}\; a(x,\xi,\gamma) \geq c\,\lambda^{2m,\gamma}(\xi)\, Id\,.$$

Then there exists $\gamma_0 \geq 1$ such that

$$\forall\,\gamma \geq \gamma_0\,, \forall\, u \in H_\gamma^m\,, \quad \mathrm{Re}\; \langle T_a^{\psi,\gamma} u, u\rangle_{H^{-m},H^m} \geq \frac{c}{2}\,\|u\|_{m,\gamma}^2\,.$$

We also have a localized version of Gårding's inequality:

Theorem 6.8. *Let $a \in \Gamma_1^{2m}$, $\chi \in \Gamma_1^0$ and ψ be and admissible cut-off function. Assume that there exists $\widetilde{\chi} \in \Gamma_1^0$ and a constant $c > 0$ such that $\widetilde{\chi} \geq 0$, $\widetilde{\chi}\,\chi = \chi$ and*

$$\forall\,(x,\xi,\gamma), \quad \widetilde{\chi}^2(x,\xi,\gamma)\,\mathrm{Re}\,a(x,\xi,\gamma) \geq c\,\widetilde{\chi}^2(x,\xi,\gamma)\,\lambda^{2m,\gamma}(\xi)\,I\,.$$

Then there exists $\gamma_0 \geq 1$ and $C > 0$ such that

$$\forall\,\gamma \geq \gamma_0\,, \forall\,u \in H_\gamma^m(\mathbb{R}^d)\,, \quad \mathrm{Re}\,\langle T_a^{\psi,\gamma} T_\chi^{\psi,\gamma} u, T_\chi^{\psi,\gamma} u\rangle_{H^{-m},H^m} \geq \frac{c}{2}\,\|T_\chi^{\psi,\gamma} u\|_{m,\gamma}^2 - C\,\|u\|_{m-1,\gamma}^2\,.$$

We now study the case of paraproducts: they are defined by the particular choice of ψ_0 as cut-off function. We shall write T_a^γ instead of $T_a^{\psi_0,\gamma}$ for the paradifferential operators obtained after smoothing by the function ψ_0. We have the important result:

Theorem 6.9. *Let $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and $\gamma \geq 1$. Then we have*

$$\|a\,u - T_a^\gamma u\|_0 \leq \frac{C}{\gamma}\,\|a\|_{W^{1,\infty}}\,\|u\|_0\,,$$
$$\|a\,\partial_j u - T_a^\gamma(\partial_j u)\|_0 \leq C\,\|a\|_{W^{1,\infty}}\,\|u\|_0\,,$$

for a suitable constant C that is independent of (a,u,γ).

If $a \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$, we have

$$\|a\,u - T_a^\gamma u\|_{1,\gamma} \leq \frac{C}{\gamma}\,\|a\|_{W^{2,\infty}}\,\|u\|_0\,,$$
$$\|a\,\partial_j u - T_a^\gamma(\partial_j u)\|_{1,\gamma} \leq C\,\|a\|_{W^{2,\infty}}\,\|u\|_0\,,$$

for a suitable constant C that is independent of (a,u,γ).

We can extend the paradifferential calculus to symbols defined on a half-space in the following way: we still denote by Γ_k^m the set of symbols $a(x_0,\ldots,x_d,\eta,\gamma)$ defined on $\Omega \times (\mathbb{R}^d \times [0,+\infty[\,\setminus\{0\})$ such that the mapping $x_d \mapsto a(\cdot,x_d,\cdot)$ is bounded into Γ_k^m. We define the paradifferential operator T_a^γ by

$$\forall\,u \in \mathscr{C}_c^\infty(\overline{\Omega})\,, \quad \forall\,x_d \geq 0\,, \quad (T_a^\gamma u)(\cdot,x_d) := T_{a(x_d)}^\gamma u(\cdot,x_d)\,.$$

Using theorem 6.9 and integrating with respect to x_d, we obtain for all symbol $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$ and all $u \in L^2(\Omega)$ the estimates:

$$|\!|\!|a\,u - T_a^\gamma u|\!|\!|_0 \leq \frac{C}{\gamma}\,\|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,|\!|\!|u|\!|\!|_0\,,$$
$$|\!|\!|a\,\partial_j u - T_a^\gamma(\partial_j u)|\!|\!|_0 \leq C\,\|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,|\!|\!|u|\!|\!|_0\,, \quad 0 \leq j \leq d-1\,.$$

Annexe A

Analyse dyadique

Cette annexe regroupe quelques résultats d'analyse "dyadique". Cette terminologie sera justifiée par la construction des décompositions de Littlewood-Paley que nous aborderons à la partie A.1. Les méthodes présentées ici ont connu un véritable essor depuis la fin des années 70: citons parmi les travaux fondateurs l'ouvrage de Coifman et Meyer [25] et le calcul paradifférentiel de Bony [19] (amélioré peu de temps après par Meyer [75]). Ces résultats se sont révélés très efficaces dans l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires: propagation des singularités, de la régularité etc... Le lecteur trouvera dans [7, chapitre II] et [24, chapitre 2] les preuves des résultats que nous allons exposer. Elles sont souvent étonnantes de simplicité comparées à d'autres preuves plus anciennes.

A.1 Décomposition de Littlewood-Paley

On rappelle tout d'abord la définition d'une décomposition de Littlewood-Paley pour une distribution tempérée. On se fixe une fonction χ de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^d$, positive, radiale et vérifiant les propriétés suivantes:

$$|\xi_1| \geq |\xi_2| \Longrightarrow \chi(\xi_1) \leq \chi(\xi_2) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \chi(\xi) = 1 & \text{si } |\xi| \leq 1/2, \\ \chi(\xi) = 0 & \text{si } |\xi| \geq 1. \end{cases}$$

En définissant une fonction φ par $\varphi(\xi) := \chi(\xi/2) - \chi(\xi)$, on se convainc aisément que φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, à support dans la couronne $\{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$, positive et radiale.

On a la propriété de "partition de l'unité"

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \chi(\xi) + \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi(2^{-p}\xi) = 1\,,$$

la somme ne pouvant comporter au plus que deux termes non nuls, ainsi que la relation de "quasi-orthogonalité" qui s'en déduit immédiatement

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \quad 1/2 \leq \chi^2(\xi) + \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi^2(2^{-p}\xi) \leq 1\,.$$

On a donc *découpé* l'espace des fréquences en une boule centrée en 0 (les basses fréquences) et en couronnes $\mathscr{C}_p$ où les fréquences sont, en norme, de l'ordre de 2^p. Cela permet de

décomposer les éléments de $\mathscr{S}'$ en somme de distributions à spectre compact (le spectre d'une distribution tempérée étant défini comme le support de sa transformée de Fourier). En effet, pour $u \in \mathscr{S}'$ et $p \in \mathbb{Z}$, on définit

$$\Delta_p u := \varphi(2^{-p}D)\,u \quad \text{et} \quad S_p u := \chi(2^{-p}D)\,u\,.$$

Remarquons que les distributions $S_p u$ ne sont pas forcément nulles pour $p < 0$ (notre définition est en cela différente de celle de quelques ouvrages). La transformée de Fourier étant un isomorphisme sur $\mathscr{S}'$, cela revient à définir $\Delta_p u$ et $S_p u$ par les formules

$$\widehat{\Delta_p u} = \varphi(2^{-p}\xi)\,\widehat{u} \quad \text{et} \quad \widehat{S_p u} = \chi(2^{-p}\xi)\,\widehat{u}\,,$$

ces opérations étant bien définies car les fonctions χ et φ sont bornées. La définition de la fonction φ donne immédiatement la relation

$$\forall\, u \in \mathscr{S}'\,, \quad \forall\, p \in \mathbb{Z}\,, \quad S_{p+1}u - S_p u = \Delta_p u\,.$$

• **Remarque :** le point de vue adopté dans [51] est un peu différent. L'espace des fréquences est *découpé* de façon continue, et les distributions tempérées sont décomposées sous la forme d'intégrales

$$u = \psi(D)\,u + \int_1^\infty \phi\left(\frac{D}{t}\right) u\,\frac{dt}{t}\,,$$

les fonctions ψ et ϕ jouant respectivement les rôles que nous avons attribués à χ et φ. Nous nous en tiendrons dans cette annexe au découpage "discret" en boule et couronnes.

Rappelons que si u est une distribution à spectre compact, alors u est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ à croissance au plus polynomiale, voir [20]. Notamment, si $u \in \mathscr{S}'$, les blocs dyadiques $\Delta_p u$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, mais on ne peut rien dire a priori sur leur intégrabilité. Cette question trouvera sa réponse dans le lemme de Bernstein, dont on trouvera une preuve détaillée dans [24]. Le lemme de Bernstein est à la base des théorèmes de caractérisation de divers espaces fonctionnels (voir les parties A.2 et A.3). Introduisons tout d'abord quelques notations: pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $\mathscr{B}(x,R)$ la boule (euclidienne) fermée de centre x et de rayon R, et $\mathscr{C}(x,R_1,R_2)$ la couronne fermée centrée en x de petit rayon R_1 et de grand rayon R_2.

Lemme A.1 (Bernstein). *Soient R et λ deux réels strictement positifs avec $R \geq 1$. Il existe une constante $C > 0$ (ne dépendant que de R) telle que pour tout entier k, pour tous $a, b \in [1,+\infty]$, $b \geq a$, et pour tout $u \in L^a(\mathbb{R}^d)$, on a:*

$$\operatorname{Supp}\,\widehat{u} \subset \mathscr{B}(0,R\lambda) \;\Rightarrow\; \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^b} \leq C^{k+1}\,\lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a}\,,$$

$$\operatorname{Supp}\,\widehat{u} \subset \mathscr{C}(0,R^{-1}\lambda,R\lambda) \;\Rightarrow\; C^{-(k+1)}\lambda^k\|u\|_{L^a} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \leq C^{k+1}\lambda^k\,\|u\|_{L^a}\,.$$

Par ailleurs, il est relativement aisé de montrer l'existence d'une constante C (ne dépendant que de la fonction χ, que nous avons fixée une fois pour toute) telle que

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}\,, \quad \forall\, u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)\,, \quad \|\Delta_p u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^\infty} \quad \text{et} \quad \|S_p u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^\infty}\,.$$

On obtient directement ces deux estimations à partir de la définition des blocs dyadiques: si $\widetilde{\chi}$ et $\widetilde{\varphi}$ désignent respectivement les transformées de Fourier inverses des fonctions χ et φ, on a

$$\Delta_p u(x) = 2^{pd} \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\varphi}(2^p(x-y))u(y)\,dy \quad \text{et} \quad S_p u(x) = 2^{pd} \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\chi}(2^p(x-y))u(y)\,dy\,.$$

On en déduit les estimations annoncées par des inégalités classiques de convolution.

En appliquant ces estimations et le lemme de Bernstein (avec $\lambda = 2^p$, $p \in \mathbb{Z}$), on obtient deux résultats d'une extrême importance pour ce qui va suivre:

i) $a = b = 2$. On obtient les inégalités

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}\,, \quad \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha \Delta_p u\|_0 \le C_k\, 2^{pk}\, \|u\|_0\,, \qquad \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha S_p u\|_0 \le C_k\, 2^{pk}\, \|u\|_0\,, \tag{A.1}$$

avec une constante C_k ne dépendant que de k, et pas de p et u.

ii) $a = b = +\infty$. On obtient les inégalités

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}\,, \quad \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha \Delta_p u\|_{L^\infty} \le C_k\, 2^{pk}\, \|u\|_{L^\infty}\,, \quad \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha S_p u\|_{L^\infty} \le C_k\, 2^{pk}\, \|u\|_{L^\infty}\,. \tag{A.2}$$

On déduit de la propriété de quasi-orthogonalité que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a l'encadrement [1]

$$\|S_0 u\|_0^2 + \sum_{p\ge 0} \|\Delta_p u\|_0^2 \le \|u\|_0^2 \le 2\left(\|S_0 u\|_0^2 + \sum_{p\ge 0} \|\Delta_p u\|_0^2\right)\,.$$

Si $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a donc $S_0 u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $(\|\Delta_p u\|_0)_{p\ge 0} \in \ell^2$, et on définit de manière évidente des normes équivalentes. On énoncera à la partie suivante un résultat qui généralise ce point de vue.

Signalons également une estimation des normes des blocs dyadiques $\Delta_p u$ dans les espaces de Sobolev: pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante C_s telle que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on a

$$C_s^{-1}\, 2^{ps} \|\Delta_p u\|_0 \le \|\Delta_p u\|_s \le C_s\, 2^{ps} \|\Delta_p u\|_0\,,$$

avec les notations introduites au chapitre 4 pour les normes usuelles (i.e. sans paramètre) des espaces de Sobolev. Ces deux dernières estimations suggèrent que la *régularité* de la distribution u se mesure à la rapidité de la convergence (dans ℓ^2) de la série de terme général $\|\Delta_p u\|_0$ (le premier terme $\|S_0 u\|_0$ ne posera pas de problème majeur). Cette idée sera détaillée à la partie suivante.

Pour conclure cette introduction, on énonce le résultat essentiel de convergence de la décomposition de Littlewood-Paley.

Proposition A.1. *Pour tout $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a $\lim_{p\to+\infty} S_p u = u$ (au sens de la convergence dans $\mathscr{S}'$). Si de plus $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors la convergence a lieu (en norme) dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

1. Cette estimation peut être comprise comme un théorème de Pythagore.

A.2 Espaces de Sobolev

Une première application du découpage dyadique est la caractérisation des espaces de Sobolev par le "comportement" de la série de terme général $\|\Delta_p u\|_0$: plus la série converge vite (c'est-à-dire plus $\|\Delta_p u\|_0$ tend rapidement vers 0), plus la distribution u est "régulière" (dans un espace de Sobolev d'indice grand). Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante:

Proposition A.2. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C_s > 0$ telle que*

$$\forall\, u \in H^s(\mathbb{R}^d)\,, \quad \frac{1}{C_s}\|u\|_s^2 \leq 2^{-2s}\|S_0 u\|_0^2 + \sum_{p\geq 0} 2^{2ps}\|\Delta_p u\|_0^2 \leq C_s\|u\|_s^2\,.$$

En d'autres termes, la proposition A.2 assure que l'application

$$u \in H^s(\mathbb{R}^d) \longmapsto \left(2^{-2s}\|S_0 u\|_0^2 + \sum_{p\geq 0} 2^{2ps}\|\Delta_p u\|_0^2\right)^{1/2}$$

est une norme (hilbertienne) sur $H^s(\mathbb{R}^d)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_s$ définie au chapitre 4. La proposition A.2 admet une généralisation souvent utilisée pour étudier la régularité de certaines distributions (voir la partie A.4).

Proposition A.3. *Soient $R \geq 1$ et $s \in \mathbb{R}$. On définit la boule $\widetilde{\mathscr{B}} := \mathscr{B}(0,R)$ et la couronne $\widetilde{\mathscr{C}} := \mathscr{C}(0,R^{-1},R)$. Il existe une constante $C > 0$ (ne dépendant que de R et de s) telle que pour toute suite $(u_p)_{p\geq 0}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant*

$$\mathrm{Supp}\ \widehat{u_p} \subset 2^p\,\widetilde{\mathscr{C}} \quad \textit{et} \quad (2^{ps}\|u_p\|_0)_{p\geq 0} \in \ell^2\,,$$

alors on a

$$u := \sum_{p\geq 0} u_p \in H^s(\mathbb{R}^d) \quad \textit{et} \quad \|u\|_s^2 \leq C\sum_{p\geq 0} 2^{2ps}\|u_p\|_0^2\,.$$

Si $s > 0$, on peut relaxer l'hypothèse $\mathrm{Supp}\ \widehat{u_p} \subset 2^p\,\widetilde{\mathscr{C}}$ *en* $\mathrm{Supp}\ \widehat{u_p} \subset 2^p\,\widetilde{\mathscr{B}}$.

On renvoie à [24] pour les détails de la preuve. L'idée principale est que deux décompositions dyadiques sont "à peu près" les mêmes: chaque couronne $2^p\widetilde{\mathscr{C}}$ est contenu dans la réunion de N_0 couronnes du type $2^q\mathscr{C}(0,1/2,2)$, où N_0 est un entier ne dépendant que de R, et pas de p. La même idée sert à traiter le second point (l'hypothèse $s > 0$ se révèle nécessaire pour conclure).

A.3 Espaces de Hölder et classes de Zygmund

La partie précédente a mis en valeur le lien entre régularité (dans les espaces de Sobolev) et comportement (dans ℓ^2) des normes $\|\Delta_p u\|_0$. Nous allons détailler maintenant le lien entre régularité (dans les espaces de Hölder) et comportement (dans ℓ^∞) des normes $\|\Delta_p u\|_{L^\infty}$. Les preuves reposent encore essentiellement sur le lemme de Bernstein.

Proposition A.4. *Soit α un réel positif* <u>*non entier*</u>*. Il existe une constante C (ne dépendant que de α) telle que pour toute fonction $u \in C^\alpha$, on a*

$$\sup_p \left(2^{-\alpha}\|S_0 u\|_{L^\infty}, 2^{p\alpha}\|\Delta_p u\|_{L^\infty}\right) \leq C\,\|u\|_{C^\alpha}\,.$$

La proposition A.4 admet une "réciproque", que l'on peut énoncer sous des hypothèses assez générales: il n'est pas nécessaire que les distributions intervenant dans la décomposition de u aient leur spectre dans des couronnes dyadiques. Il suffit que leur spectre soit inclus dans des boules dyadiques (comme lorsque l'on montre l'appartenance d'une distribution à un espace de Sobolev d'indice strictement positif).

Proposition A.5. *Soient $R > 0$ et $\alpha > 0$* <u>*non entier*</u>*. Il existe une constante C (ne dépendant que de R et de α) telle que pour toute suite $(f_p)_{p\geq 0}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifiant* $\operatorname{Supp} \widehat{f_p} \subset 2^p\mathscr{B}(0,R)$ *et* $(2^{p\alpha}\|f_p\|_{L^\infty}) \in \ell^\infty$*, on a*

$$f := \sum_{p\geq 0} f_p \in C^\alpha \quad \textit{et} \quad \|f\|_{C^\alpha} \leq C\left(\sup_p 2^{p\alpha}\,\|f_p\|_{L^\infty}\right)\,.$$

L'hypothèse $\alpha \notin \mathbb{N}$ se révèle cruciale dans la preuve: la constante C explose lorsque α se rapproche de $[\alpha]$ ou de $[\alpha]+1$, voir [24].

On déduit des propositions A.4 et A.5 qu'une fonction $u \in L^\infty$ appartient à l'espace de Hölder C^α, <u>α non entier</u>, si et seulement si

$$\|S_0 u\|_{L^\infty} + \sup_{p\geq 0} 2^{p\alpha}\|\Delta_p u\|_{L^\infty} < +\infty$$

et la quantité ci-dessus définit une norme équivalente à la norme introduite au chapitre 4. Comme dans le cas des espaces de Sobolev, la décomposition en blocs dyadiques permet de caractériser complètement la régularité hölderienne.

Nous allons maintenant examiner le cas des espaces de Hölder d'indice entier, avec la convention adoptée au chapitre 4. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, le lemme de Bernstein assure l'existence d'une constante C_k telle que

$$\forall\, u \in W^{k,\infty}\,, \quad \|S_0 u\|_{L^\infty} + \sup_p 2^{pk}\|\Delta_p u\|_{L^\infty} \leq C_k\,\|u\|_{W^{k,\infty}}\,.$$

À ce stade, un nouvel espace de distributions apparaît naturellement. Pour tout réel r, on définit C^r_* comme l'ensemble des distributions tempérées u vérifiant

$$\forall\, p \geq 0\,, \quad \Delta_p u \in L^\infty\,, \quad S_0 u \in L^\infty \quad \text{et} \quad \|S_0 u\|_{L^\infty} + \sup_p 2^{pr}\|\Delta_p u\|_{L^\infty} < +\infty\,.$$

La quantité précédente définit bien évidemment une norme sur C^r_*, qui en fait un espace de Banach. Cet espace est la classe de Zygmund d'indice r. On a vu que si r est un réel positif non entier, C^r_* est exactement l'espace de Hölder C^r. De plus, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $W^{k,\infty}$ s'injecte continûment dans C^k_*, mais l'inclusion est stricte pour tout k. Un contre exemple (pour $k=0$) est fourni par la distribution tempérée $\sum_{p\in\mathbb{N}} \exp(i2^p x)$.

La toute première application de l'analyse développée ci-dessus est un des théorèmes d'injection de Sobolev:

Théorème A.1 (Sobolev). *Soit $s > d/2$ tel que $s - d/2$ soit non entier. Alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $C^{s-d/2}$. Si $s = k + d/2$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans C^k_*.*

La caractérisation des espaces de Hölder d'indice non entier permet d'établir ce résultat en quelques lignes: c'est une simple application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

A.4 Quelques applications

Les caractérisations des espaces de Sobolev et de Hölder permettent d'obtenir de nombreux résultats de régularité sur les produits de fonctions, ou bien sur les fonctions composées. Les résultats suivants se démontrent aisément par une utilisation systématique du découpage dyadique. On renvoie à l'ouvrage d'Alinhac et Gérard [7, chapitre II] pour les preuves. L'approche adoptée par Chemin dans [24] est relativement identique mais utilise déjà la décomposition "paraproduits + reste", qui n'est pas indispensable pour établir les quelques résultats qui suivent.

Commençons tout d'abord par la régularité d'un produit[2] de fonctions hölderiennes:

Proposition A.6. *Soit α un réel positif* <u>*non entier*</u>*. Il existe une constante C (ne dépendant que de α) telle que pour toutes fonctions $u, v \in C^\alpha$, le produit uv vérifie*

$$uv \in C^\alpha \quad et \quad \|uv\|_{C^\alpha} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{C^\alpha} + \|u\|_{C^\alpha}\|v\|_{L^\infty}\right) .$$

Le résultat peut bien sûr se prouver à l'aide de la formule de Leibniz; néanmoins, l'utilisation des blocs dyadiques se révèle efficace et élégante.

La caractérisation des espaces de Sobolev vue à la partie A.2 permet également d'établir la régularité d'un produit de fonctions $H^s(\mathbb{R}^d)$:

Proposition A.7. *Soit $s \geq 0$. Il existe une constante C_s telle que pour toutes fonctions $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^s(\mathbb{R}^d)$, le produit uv vérifie*

$$uv \in H^s(\mathbb{R}^d) \quad et \quad \|uv\|_s \leq C_s\left(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_s + \|u\|_s\|v\|_{L^\infty}\right) .$$

Pour $s = 1$, le résultat repose essentiellement sur la relation $(uv)' = u'v + uv'$ (encore faut-il l'établir pour des dérivées au sens des distributions, voir [21]). Pour $s = 2$, on pourra comparer le résultat de la proposition A.7 avec la formule de Leibniz

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'' .$$

L'estimation dans L^2 du terme $u'v'$ est susceptible de créer quelques problèmes. Pour un réel s non entier, une preuve directe reposerait sur le calcul de $\widehat{uv}$, ce qui conduirait à une formule de convolution peu maniable.

La proposition A.7 admet un complément qui répond au problème soulevé sur le terme $u'v'$ dans la formule de Leibniz à l'ordre 2.

Proposition A.8. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Il existe une constante C_k telle que pour toutes fonctions $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^k(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \text{ t.q. } |\alpha| + |\beta| = k\,, \quad \|\partial^\alpha u\, \partial^\beta v\|_0 \leq C_k\, \left(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_k + \|u\|_k\|v\|_{L^\infty}\right) .$$

2. Le terme de produit peut être entendu comme produit scalaire ou plus généralement comme produit d'une matrice par une autre matrice lorsque les dimensions le permettent.

Signalons que les résultats des propositions A.7 et A.8 peuvent également se montrer à l'aide de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, voir [2, 7].

Nous concluons cette annexe par un résultat sur la régularité dans les espaces de Sobolev d'une fonction composée (nous renvoyons à [7, 75] pour la preuve).

Théorème A.2. *Soient $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ nulle en 0, et $s > 0$. Pour toute fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^s(\mathbb{R}^d)$ à valeurs réelles, on a $F(u) \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^s(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|F(u)\|_s \leq C \, \|u\|_s$$

où la constante C ne dépend que de F et de $\|u\|_{L^\infty}$. Plus précisément, il existe une fonction croissante $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$\|F(u)\|_s \leq C(\|u\|_{L^\infty}) \, \|u\|_s \, .$$

Il n'existe pas de formule exploitable pour la transformée de Fourier de $F(u)$. On décompose donc $F(u)$ en une somme de la forme

$$F(u) = m_{-1} \, S_0 u + \sum_{p \geq 0} m_p \, \underbrace{\Delta_p u}_{u_p} \, ,$$

avec un choix adéquat des fonctions m_p. La preuve du théorème A.2 repose alors sur le lemme des "multiplicateurs de Meyer" (ce qui explique la notation m_p):

Lemme A.2 (Meyer). [75]. *Soit δ un réel et $(m_p)_{p \geq 0}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant pour tout entier k:*

$$\forall \, p \geq 0 \, , \quad \sum_{|\alpha| = k} \|\partial^\alpha m_p\|_{L^\infty} \leq C_k \, 2^{p(k+\delta)} \, .$$

Alors l'application $\left(M : u \mapsto \sum_{p \geq 0} m_p u_p\right)$ envoie continûment $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s-\delta}(\mathbb{R}^d)$ pour tout réel $s > \delta$. De plus, la norme d'opérateur ne dépend que des constantes C_0 et $C_{[s-\delta]+1}$.

Un exemple simple de multiplicateurs de Meyer est fourni par la suite $(\Delta_p a)_{p \geq 0}$ ou par la suite $(S_p a)_{p \geq 0}$ lorsque $a \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Le réel δ correspondant est 0. L'opérateur M est alors borné de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même pour tout $s > 0$ (le résultat est faux en général pour $s = 0$, voir [25]); l'opérateur M n'est donc pas un opérateur pseudodifférentiel au sens classique, c'est-à-dire tel que nous les avons définis au chapitre 4.

Le résultat du théorème A.2 s'étend bien sûr au cas où F est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}^N$ telle que $F(0) = 0$ (les fonctions u étant alors à valeurs dans $\mathbb{R}^d$).

Annexe B

Les résultats du chapitre 4

Nous donnons ici la preuve des trois résultats admis à la partie 4.3. Dans le cadre de cette annexe, nous désignerons par μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. La mesure d'un borélien A sera notée $\mu[A]$. L'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de sa structure usuelle d'espace euclidien. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et r positif, $\mathscr{B}(x,r)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon r; la boule ouverte de centre x et de rayon r sera notée $\overset{\circ}{\mathscr{B}}(x,r)$.

B.1 Théorème de Hardy-Littlewood-Wiener

La preuve présentée ci-dessous s'inspire dans une très large mesure de celle donnée dans [104] (nous avons notamment repris la plupart des notations qui y sont utilisées). Le lecteur pourra également se reporter à [115]. On trouvera dans [104] les hypothèses minimales (sur la famille de boules et sur la mesure) sous lesquelles le résultat demeure valable. Dans un souci de simplification, nous nous restreindrons au cas où la mesure sur $\mathbb{R}^d$ est la mesure de Lebesgue et où les boules sont définies par la structure euclidienne de $\mathbb{R}^d$. Le théorème de Hardy-Littlewood-Wiener s'énonce alors de la manière suivante:

Théorème B.1 (Hardy-Littlewood-Wiener). *Soit $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq q \leq +\infty$. On définit la fonction maximale de f, notée Mf, par*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad Mf(x) := \sup_{R>0} \frac{1}{\mu[\mathscr{B}(x,R)]} \int_{\mathscr{B}(x,R)} |f(z)|\, d\mu(z) \in [0,+\infty]\,.$$

Alors Mf est une fonction positive mesurable. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\alpha > 0$ on a

$$\mu\left[\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } Mf(x) > \alpha\}\right] \leq \frac{3^d}{\alpha}\, \|f\|_{L^1}\,, \tag{B.1}$$

et donc Mf est finie presque partout. Si $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$, avec $1 < q \leq +\infty$, alors Mf est finie presque partout et $Mf \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Il existe de plus une constante $C(q,d) > 0$ (ne dépendant que de q et de d) telle que

$$\forall\, f \in L^q(\mathbb{R}^d)\,, \quad \|Mf\|_{L^q} \leq C(q,d)\, \|f\|_{L^q}\,.$$

Cet énoncé diffère un peu de celui que nous avons donné au chapitre 4 dans la normalisation des intégrales définissant Mf. Néanmoins, comme $\mu[\mathscr{B}(x,R)] = R^d\, \mu[\mathscr{B}(0,1)]$, on

a uniquement multiplié la fonction maximale par une constante[1] ne dépendant que de d, ce qui ne change en rien le résultat du théorème.

Il est clair que si x et y sont deux points de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $\mathscr{B}(x,r) \cap \mathscr{B}(y,r) \neq \emptyset$ pour un certain r positif, alors on a $\mathscr{B}(y,r) \subset \mathscr{B}(x,3r)$ et $\mathscr{B}(x,r) \subset \mathscr{B}(y,3r)$ (c'est l'inégalité triangulaire). Bien sûr le résultat demeure si on prend des boules ouvertes.

Nous utiliserons dans la preuve du théorème B.1 un lemme de recouvrement dû à Vitali:

Lemme B.1 (Vitali). *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ une réunion finie de boules $B_1, \ldots, B_N$ (ouvertes ou fermées). Il existe alors une sous-famille $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ de boules deux-à-deux disjointes telles que*

$$\mu\left[\bigcup_\ell B_{i_\ell}\right] = \sum_\ell \mu[B_{i_\ell}] \geq 3^{-d}\,\mu[E]\,.$$

Preuve

On note x_j (resp. R_j) le centre (resp. le rayon) de la boule B_j. On fixe $i_1 \in \{1, \ldots, N\}$ tel que R_{i_1} soit maximal parmi les R_j, $1 \leq j \leq N$. On définit ensuite l'ensemble d'indices J_1 par

$$J_1 := \{j \in \{1, \ldots, N\} \text{ t.q. } B_j \cap B_{i_1} \neq \emptyset\}\,.$$

Pour $j \in J_1$, on a $\mathscr{B}(x_j, R_j) \cap \mathscr{B}(x_{i_1}, R_{i_1}) \neq \emptyset$, et donc $\mathscr{B}(x_j, R_{i_1}) \cap \mathscr{B}(x_{i_1}, R_{i_1}) \neq \emptyset$ (car $R_j \leq R_{i_1}$). On obtient ainsi

$$\bigcup_{j \in J_1} B_j \subset \bigcup_{j \in J_1} \mathscr{B}(x_j, R_{i_1}) \subset \mathscr{B}(x_{i_1}, 3R_{i_1})\,.$$

On déduit de cette inclusion l'inégalité

$$3^d\,\mu[B_{i_1}] \geq \mu\left[\bigcup_{j \in J_1} B_j\right]\,.$$

On choisit maintenant $i_2 \in \{1, \ldots, N\} \setminus J_1$ tel que R_{i_2} soit maximal parmi les réels R_j, $j \in \{1, \ldots, N\} \setminus J_1$, et on réitère la construction (le processus s'arrête car on a pris une union finie de boules). Cela fournit une partition $J_1, \ldots, J_k$ de l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$ et une sous-famille de boules $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ telles que les B_{i_ℓ} soient deux-à-deux disjointes (par construction) et telles que

$$\forall\, \ell = 1, \ldots, k, \qquad 3^d\,\mu[B_{i_\ell}] \geq \mu\left[\bigcup_{j \in J_\ell} B_j\right]\,.$$

En additionant ces inégalités, on obtient le résultat

$$3^d \sum_{\ell=1}^k \mu[B_{i_\ell}] \geq \sum_{\ell=1}^k \mu\left[\bigcup_{j \in J_\ell} B_j\right] \geq \mu[E]\,.$$

□

On peut désormais passer à la preuve du théorème.

1. La valeur exacte de $\mu[\mathscr{B}(0,1)]$ est $\pi^{d/2}/\Gamma(1+d/2)$, où Γ est la fonction d'Euler.

Preuve du théorème B.1

Montrons tout d'abord que la fonction Mf est mesurable (il est clair que c'est une fonction positive). Comme $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$, chaque fonction

$$x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \frac{1}{\mu[\mathscr{B}(x,r)]} \int_{\mathscr{B}(x,r)} |f(z)|\, d\mu(z) = \frac{C(d)}{r^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\mathscr{B}(x,r)}(z)\, |f(z)|\, d\mu(z)$$

est mesurable (et même continue), lorsque r est un réel strictement positif fixé. Il suffit alors de remarquer qu'on a

$$Mf(x) = \sup_{r \in \mathbb{Q}, r>0} \frac{1}{\mu[\mathscr{B}(x,r)]} \int_{\mathscr{B}(x,r)} |f(z)|\, d\mu(z)\,,$$

ce qui assure que Mf est une fonction mesurable, voir [85].

On définit une fonction maximale auxiliaire $\widetilde{M}f$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d\,, \quad \widetilde{M}f(x) := \sup_B \frac{1}{\mu[B]} \int_B |f(z)|\, d\mu(z)\,,$$

la supremum portant sur toutes les boules euclidiennes B de mesure non nulle et contenant x ($\widetilde{M}f$ est la fonction maximale décentrée associée à f). En adaptant le raisonnement précédent, on montre que $\widetilde{M}f$ est une fonction mesurable. D'autre part, l'inégalité $Mf \leq \widetilde{M}f$ est immédiate.

La preuve de "l'inégalité de Chebyshev" (B.1) utilise judicieusement la régularité intérieure de la mesure de Lebesgue: soient en effet $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha > 0$. On définit un ensemble E_α par

$$E_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } \widetilde{M}f(x) > \alpha \right\}\,.$$

C'est un ensemble mesurable car $\widetilde{M}f$ est mesurable. Soit K un compact inclus dans E_α. Pour chaque point $y \in K$, on a $\widetilde{M}f(y) > \alpha$ donc il existe une boule euclidienne B_y de mesure non nulle, contenant y, et telle que

$$\mu[B_y] < \frac{1}{\alpha} \int_{B_y} |f(z)|\, d\mu(z)\,.$$

Comme le rayon de B_y est non nul, on peut supposer que B_y est une boule ouverte. Par compacité de K, on extrait un sous-recouvrement fini $B_{y_1}, \ldots, B_{y_N}$ de K par de telles boules. Le lemme B.1 assure qu'on peut trouver k boules (que l'on notera $B^1, \ldots, B^k$) deux-à-deux disjointes parmi ces N boules, de telle sorte que

$$\mu[K] \leq \mu[B_{y_1} \cup \cdots \cup B_{y_N}] \leq 3^d \left(\mu[B^1] + \cdots + \mu[B^k] \right)\,.$$

On obtient alors

$$\mu[K] \leq \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^{k} \int_{B^j} |f(z)|\, d\mu(z) \leq \frac{3^d}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|\, d\mu(z) = \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_{L^1}\,,$$

la seconde inégalité provenant du fait que les boules $B^1, \ldots, B^k$ sont deux-à-deux disjointes. En utilisant la régularité de la mesure de Lebesgue, on obtient finalement $\mu[E_\alpha] \leq 3^d/\alpha \|f\|_{L^1}$. Comme $Mf \leq \widetilde{M}f$, on a facilement l'inclusion

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } Mf(x) > \alpha\right\} \subset E_\alpha\,,$$

et cela achève la preuve de l'estimation (B.1). Par un argument classique, on en déduit que Mf est finie presque partout dès que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, voir [85].

La preuve du second point du théorème dans le cas $q = +\infty$ repose sur l'inégalité de Hölder. Dans ce cas, Mf est finie partout et on a $0 \leq Mf(x) \leq \|f\|_{L^\infty}$ pour tout x. On peut donc choisir $C(+\infty, d) = 1$. La fin du théorème se déduit du théorème de Marcinkiewicz (voir [103]) en remarquant que M est de type faible $(1,1)$ et de type faible $(+\infty, +\infty)$, avec de plus

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)\,.$$

Pour être complet, nous reproduisons la fin de la preuve: on se donne $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$ avec $1 < q < +\infty$. Pour $\alpha > 0$, on définit une fonction f_α par

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \alpha/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction f_α vérifie $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$ et on montre aisément (avec la définition des fonctions maximales) l'inégalité $Mf \leq Mf_\alpha + \alpha/2$. On obtient ainsi

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } Mf(x) > \alpha\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } Mf_\alpha(x) > \alpha/2\right\}\,,$$

donc, en appliquant l'estimation (B.1) à la fonction f_α, on a

$$\begin{aligned} \mu\left[\{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } Mf(x) > \alpha\}\right] &\leq 3^d \frac{2}{\alpha} \|f_\alpha\|_{L^1} \leq 3^d \frac{2}{\alpha} \int_{\{2|f|>\alpha\}} |f(z)|\, d\mu(z) \\ &\leq 3^d \frac{2}{\alpha} \int_{\{2|f|>\alpha\}} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{q-1} |f(z)|^q\, d\mu(z) \leq 3^d \frac{2^q}{\alpha^q} \|f\|_{L^q}^q\,. \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction maximale Mf est finie presque partout. On a de plus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (Mf)^q\, d\mu = q \int_0^{+\infty} \mu[\{Mf > \alpha\}]\, \alpha^{q-1}\, d\alpha &\leq 2\, q\, 3^d \int_0^{+\infty} \|f_\alpha\|_{L^1}\, \alpha^{q-2}\, d\alpha \\ &\leq 2\, q\, 3^d \int_0^{+\infty} \alpha^{q-2} \int_{\{2|f|>\alpha\}} |f(z)|\, d\mu(z)\, d\alpha. \end{aligned}$$

Le théorème de Fubini-Tonelli (voir [85]) assure qu'on a[2]

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \alpha^{q-2} \int_{\{2|f|>\alpha\}} |f(z)|\, d\mu(z)\, d\alpha &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \left(\int_0^{2|f(z)|} \alpha^{q-2}\, d\alpha\right) d\mu(z) \\ &= \frac{2^{q-1}}{q-1} \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|^q\, d\mu(z) = \frac{2^{q-1}}{q-1} \|f\|_{L^q}^q < +\infty\,. \end{aligned}$$

2. On remarquera l'importance de l'hypothèse $q > 1$ dans le calcul.

On a bien montré l'appartenance de Mf à l'espace L^q, avec l'estimation

$$\|Mf\|_{L^q} \leq \left(\frac{q\,2^q\,3^d}{q-1}\right)^{1/q} \|f\|_{L^q}\,.$$

□

B.2 Résultats d'analyse harmonique

Nous donnons maintenant les preuves du lemme 4.3 et du théorème 4.8 (on rappelera les énoncés pour faciliter la lecture). Cet exposé reprend les travaux de Mokrane [77], ainsi que [73, 74].

Lemme B.2. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On définit deux fonctions u_* et u^* par*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad u_*(x) := \sup_{k\geq 0} \sup_{|y-x|\leq 2^{-k}} |S_k^\gamma u(y)|\,,$$
$$u^*(x) := \sup_{R>0} \frac{1}{R^d} \int_{\mathscr{B}(x,R)} |u(z)|\, d\mu(z)\,.$$

Il existe une constante C indépendante de u telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad u_*(x) \leq C\, u^*(x)\,.$$

Preuve

On se donne un entier k et deux points x et y dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant $|y-x| \leq 2^{-k}$. On note $\widetilde{\chi}$ la transformée de Fourier inverse de χ par rapport à sa première variable (voir la partie 4.3 pour les propriétés de χ). L'application

$$\gamma \in [0, +\infty[\quad \longmapsto \quad \widetilde{\chi}(\cdot, \gamma) \in \mathscr{S}$$

est continue, nulle pour $\gamma \geq 1$. Il existe donc une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\forall\, z \in \mathbb{R}^d, \quad \forall\, \gamma \geq 0\,, \quad (1+|z|)^{d+1}\, |\widetilde{\chi}(z,\gamma)| \leq C_0\,. \tag{B.2}$$

Par définition, S_k^γ est un opérateur de convolution de noyau $2^{kd}\,\widetilde{\chi}(2^k\cdot, 2^{-k}\gamma)$, c'est-à-dire que pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$S_k^\gamma u(y) = 2^{kd} \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\chi}(2^k(y-z), 2^{-k}\gamma)\, u(z)\, d\mu(z)\,.$$

On décompose $S_k^\gamma u(y)$ en

$$S_k^\gamma u(y) = I_1(x,y) + I_2(x,y)$$

avec

$$I_1(x,y) := 2^{kd} \int_{|z-x|\leq 2.2^{-k}} \widetilde{\chi}(2^k(y-z), 2^{-k}\gamma)\, u(z)\, d\mu(z)\,,$$
$$I_2(x,y) := 2^{kd} \int_{|z-x|\geq 2.2^{-k}} \widetilde{\chi}(2^k(y-z), 2^{-k}\gamma)\, u(z)\, d\mu(z)\,.$$

De l'estimation (B.2), on déduit la majoration

$$|I_1(x,y)| \leq 2^{kd}\, C_0 \int_{|z-x|\leq 2.2^{-k}} |u(z)|\, d\mu(z) \leq C_0\, 2^d\, u^*(x)\,.$$

Si z est un point de $\mathbb{R}^d$ tel que $|z-x| \geq 2.2^{-k}$, alors on a $|y-z| \geq 2^{-k}$, ce qui donne (en utilisant à nouveau (B.2)) la majoration

$$\begin{aligned} |I_2(x,y)| &\leq 2^{kd}\, C_0 \int_{|y-z|\geq 2^{-k}} \Big(1+2^k|y-z|\Big)^{-(d+1)}\, |u(z)|\, d\mu(z) \\ &\leq 2^{kd}\, C_0 \int_{|z|\geq 2^{-k}} (2^k|z|)^{-(d+1)}\, |u(y-z)|\, d\mu(z)\,. \end{aligned}$$

On découpe le domaine $\{|z| \geq 2^{-k}\}$ en l'union disjointe des couronnes $\mathscr{C}_j := \{2^{j-k} \leq |z| < 2^{j-k+1}\}$, avec $j \in \mathbb{N}$. On obtient

$$|I_2(x,y)| \leq C_0\, 2^{kd} \sum_{j\geq 0} 2^{-j(d+1)} \int_{\mathscr{C}_j} |u(y-z)|\, d\mu(z)\,.$$

Lorsque $z \in \mathscr{C}_j$, on a $|x-(y-z)| \leq 2^{-k} + 2^{j-k+1} \leq 2^{2+j-k}$. Un nouveau changement de variables donne ainsi

$$\begin{aligned} |I_2(x,y)| &\leq C_0\, 2^{kd} \sum_{j\geq 0} 2^{-j(d+1)} \int_{\mathscr{B}(x,2^{2+j-k})} |u(z)|\, d\mu(z) \\ &\leq C_0 \sum_{j\geq 0} 2^{-j}\, 2^{2d}\, u^*(x) = 2^{2d+1}\, C_0\, u^*(x)\,. \end{aligned}$$

En prenant le supremum en $y \in \mathscr{B}(x,2^{-k})$ puis le supremum en $k \in \mathbb{N}$, on obtient le résultat.

□

Avant de donner la preuve du théorème 4.8, nous allons montrer le lemme suivant:

Lemme B.3. *Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit*

$$\Omega_k := \{x \in \Omega \ \text{ t.q. } \ \mathring{\mathscr{B}}\,(x,2^{-k}) \subset \Omega\}\,.$$

Alors la suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et on a

$$\Omega = \bigcup\nolimits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k\,.$$

De plus, il existe une constante C ne dépendant ni de f ni de Ω telle que

$$\sigma(f) := \sum_{k\geq 0} \|\Delta_k f\|^2_{L^2(\Omega_k)} \leq C\, \|f\|^2_{L^\infty}\, \mu[\Omega]\,. \tag{B.3}$$

Preuve

La première assertion du lemme est triviale car Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On décompose f en $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 := f \cdot \mathbf{1}_\Omega$. On vérifie facilement que

$$\sigma(f) \leq 2\,\sigma(f_1) + 2\,\sigma(f_2)\,,$$

et nous allons majorer chacun de ces deux termes, en utilisant les propriétés respectives de f_1 et f_2.

La majoration de $\sigma(f_1)$ est assez grossière. On écrit

$$\sigma(f_1) = \sum_{k\geq 0} \|\Delta_k f_1\|^2_{L^2(\Omega_k)} \leq \sum_{k\geq 0} \|\Delta_k f_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|^2_{L^\infty}\,\mu[\Omega]\,.$$

Majorons maintenant $\sigma(f_2)$. Rappelons que Δ_k est un opérateur de convolution de noyau $2^{kd}\,\widetilde{\chi}(2^k\cdot, 0)$. En particulier, le noyau de Δ_k appartient à la classe de Schwartz $\mathscr{S}$. Pour tout point x dans $\mathbb{R}^d$, on a

$$\Delta_k f_2(x) = 2^{kd} \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\chi}(2^k(x-y), 0)\, f_2(y)\, d\mu(y)\,,$$

et la fonction f_2 est identiquement nulle sur Ω.

On se donne alors deux entiers ℓ et k vérifiant $0 \leq \ell \leq k$ et $x \in \Omega_\ell$. Si y n'appartient pas à Ω, on a $|x-y| \geq 2^{-\ell}$. Pour $x \in \Omega_\ell$, on obtient donc

$$\begin{aligned} |\Delta_k f_2(x)| = 2^{kd} \left| \int_{\Omega^c} \widetilde{\chi}(2^k(x-y), 0)\, f_2(y)\, d\mu(y) \right| &\leq \|f_2\|_{L^\infty}\, 2^{kd} \int_{|z|\geq 2^{-\ell}} |\widetilde{\chi}(2^k z, 0)|\, d\mu(z) \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \int_{|z|\geq 2^{k-\ell}} |\widetilde{\chi}(z, 0)|\, d\mu(z)\,. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on définit

$$g_m := \int_{|z|\geq 2^m} |\widetilde{\chi}(z, 0)|\, d\mu(z)\,.$$

Comme la fonction $\widetilde{\chi}(\cdot, 0)$ appartient à la classe de Schwartz, la suite $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable, sa somme ne dépendant que de la fonction χ que nous nous sommes fixés au chapitre 4. On fabrique une partition de Ω de la façon suivante: on pose

$$\Omega'_0 := \Omega_0 \quad \text{et} \quad \Omega'_\ell := \Omega_\ell \setminus \Omega_{\ell-1} \text{ pour } \ell \geq 1\,.$$

Les ensembles Ω'_ℓ sont deux-à-deux disjoints et on vérifie facilement les relations

$$\Omega_k = \bigcup\nolimits_{0\leq \ell\leq k} \Omega'_\ell\,, \qquad \Omega = \bigcup\nolimits_{\ell\in\mathbb{N}} \Omega'_\ell\,.$$

Les estimations ponctuelles (B.4) sur $|\Delta_k f_2(x)|$ (pour $x \in \Omega_\ell$, $\ell \leq k$) donnent la majoration

$$\int_{\Omega_k} |\Delta_k f_2(x)|^2\, d\mu(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \int_{\Omega'_\ell} |\Delta_k f_2(x)|^2\, d\mu(x) \leq \|f\|^2_{L^\infty} \sum_{\ell=0}^{k} g^2_{k-\ell}\, \mu[\Omega'_\ell]\,.$$

Finalement, on obtient

$$\sigma(f_2) = \sum_{k\geq 0} \|\Delta_k f_2\|^2_{L^2(\Omega_k)} \leq \|f\|^2_{L^\infty} \sum_{k\geq 0}\sum_{\ell=0}^{k} g^2_{k-\ell}\, \mu[\Omega'_\ell] \leq \|f\|^2_{L^\infty}\, \mu[\Omega] \sum_{m\geq 0} g^2_m\,,$$

ce qui conclut la preuve.

□

Nous pouvons conclure cette annexe avec la preuve du théorème 4.8 qui s'énonce comme suit:

Théorème B.2. *Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On suppose que la fonction v_* définie par*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad v_*(x) := \sup_{k\geq 0} \sup_{|y-x|\leq 2^{-k}} |v_k(y)|$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une constante $C > 0$, ne dépendant ni de f ni de la suite (v_k), telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k\geq 0} |\Delta_k f(x)\, v_k(x)|^2\, d\mu(x) \leq C\, \|f\|^2_{L^\infty}\, \|v_*\|^2_0 .$$

Preuve

On écrit tout d'abord

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_k f(x)\, v_k(x)|^2\, d\mu(x) = 2\int_0^{+\infty} \lambda\, \|\Delta_k f\|^2_{L^2(U_k(\lambda))}\, d\lambda ,$$

où $U_k(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |v_k(x)| > \lambda\}$. On définit également un ensemble $\Omega(\lambda)$ en posant $\Omega(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |v_*(x)| > \lambda\}$. Nous allons tout d'abord montrer que $\Omega(\lambda)$ est ouvert.

Soit $x \in \Omega(\lambda)$; il existe un entier k_0 et un point $y \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$|x-y| \leq 2^{-k_0} \quad \text{et} \quad |v_{k_0}(y)| > \lambda .$$

Comme v_{k_0} est continue, on peut supposer que y vérifie $|x-y| < 2^{-k_0}$. Il est alors clair que pour tout z dans la boule ouverte $\overset{\circ}{\mathscr{B}}(y, 2^{-k_0})$, on a $v_*(z) \geq |v_{k_0}(y)| > \lambda$. On en déduit que $\overset{\circ}{\mathscr{B}}(x, 2^{-k_0}) \cap \overset{\circ}{\mathscr{B}}(y, 2^{-k_0})$ est un voisinage ouvert de x contenu dans $\Omega(\lambda)$, ce qui montre que $\Omega(\lambda)$ est ouvert.

On définit les ensembles $\Omega(\lambda)_k$ comme au lemme B.3. Le raisonnement précédent assure qu'on a l'inclusion

$$U_k(\lambda) \subset \Omega(\lambda)_k$$

pour tout entier k. En appliquant le lemme B.3 à la fonction f et à l'ouvert $\Omega(\lambda)$, on obtient les majorations

$$\sum_{k\geq 0} \|\Delta_k f\|^2_{L^2(U_k(\lambda))} \leq \sum_{k\geq 0} \|\Delta_k f\|^2_{L^2(\Omega(\lambda)_k)} \leq C\, \|f\|^2_{L^\infty}\, \mu[\Omega(\lambda)] .$$

ce qui donne finalement

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k\geq 0} |\Delta_k f(x)\, v_k(x)|^2\, d\mu(x) \leq 2C\, \|f\|^2_{L^\infty} \int_0^{+\infty} \lambda\, \mu[\Omega(\lambda)]\, d\lambda = C\, \|f\|^2_{L^\infty}\, \|v_*\|^2_0 ,$$

d'où le théorème.

□

Annexe C

Note sur un article de Robinet, Gressier, Casalis et Moschetta

Jean-François Coulombel, Sylvie Benzoni-Gavage et Denis Serre
Journal of Fluid Mechanics, 469:401-405, 2002.

In [84], an instability for shock waves in gas dynamics is exhibited. The fluid was assumed to obey the polytropic perfect gas pressure law. We show in this note that such an instability does not occur, as proved in the extensive work of Majda [65]. Details of the complete calculations of [65] may be found in [55]. Two arguments are developed: we give first a mathematical result that is violated by the conclusions of [84]. Then we detail the results of [84] and show why they do not yield any conclusion. Finally, we develop a general calculation and show that an instability can not occur.

C.1 A theoretical argument

Following the pioneer works of D'yakov [33], Erpenbeck [35] and Kontorovič [59], Majda [65] proved that planar shock waves are always uniformly stable when the fluid obeys a polytropic perfect gas pressure law. We refer to [68] for a review of the stability of shock waves in real gas dynamics. Note that Majda's result also holds for isentropic gas dynamics, see Majda [65] or [66] for a review. The existence of "branching points" (where the instability mentioned in [84] is supposed to occur) is pointed out and it is clearly shown that they do not give rise to any instability.

Via a normal modes analysis, the stability of a planar shock wave amounts to checking that a certain function Δ (called the Lopatinskii determinant), that depends on a wave vector k_y and a complex frequency ω, does not vanish when the imaginary part of ω is positive (whatever the wave vector is). Since the involved quantities depend holomorphically on the frequency ω, $\Delta(k_y, \cdot)$ can be defined as a holomorphic function on the half-plane $\{ \operatorname{Im} \omega > 0\}$. Note that Δ also depends continuously on both states ahead and behind the shock front.

If there exists a non zero wave vector k_y and a complex frequency ω of positive imaginary part such that $\Delta(k_y, \omega) = 0$, then the same property holds for close planar shocks (that is if we perturb the upstream and downstream states), see [14]. With this statement in mind, it is clear that the result of [84] can not hold because the exhibited instability meets the previous assumptions but only occur for isolated values of the Mach numbers.

C.2 The calculation of [84]

We keep the notations of [84] and detail the computations of paragraph §2.8: one has $\omega = ik_y\overline{U_1}$ and

$$k_x^{(1)} = -ik_y\frac{1+\overline{M}_1^2}{1-\overline{M}_1^2}\,, \quad k_x^{(2)} = k_x^{(3)} = k_x^{(4)} = ik_y\,.$$

The subspace Ker $(\mathbf{M}_1 - k_x^{(2)}\mathbf{M}_2)$ is spanned by the two vectors

$$\mathbf{V}_2 = \left(1, -\frac{\overline{\rho}_1}{\overline{T}_1}, 0, 0\right)^t \quad \text{and} \quad \mathbf{V}_3 = (0,0,1,-i)^t\,.$$

Note that

$$\mathbf{V}_4 = \left(\frac{i\overline{U}_1}{rk_y}, 0, \frac{1}{k_y}, \frac{-(1+i)}{k_y}\right)^t$$

is a solution of the equation

$$(\mathbf{M}_1 - k_x^{(2)}\mathbf{M}_2)\mathbf{V}_4 = \mathbf{M}_2\mathbf{V}_3.$$

Thus the $\mathbf{V}_i$'s form a Jordan basis of $\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1$ ($\mathbf{V}_1$ is an eigenvector for the eigenvalue $k_x^{(1)}$ but is of no use in the stability analysis). The problem reduces to determine whether there exist complex coefficients $(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, X)$ such that

$$\begin{aligned}
\overline{U}_1\,\rho_f + \overline{\rho}_1\,u_f - \overline{U}_1(\overline{\rho}_1 - \overline{\rho}_0)k_y\,X &= 0\,,\\
(r\overline{T}_1 + \overline{U}_1^2)\,\rho_f + r\overline{\rho}_1\,T_f + 2\overline{\rho}_1\overline{U}_1\,u_f &= 0\,,\\
v_f + i(\overline{U}_1 - \overline{U}_0)k_y\,X &= 0\,,\\
C_p\,T_f + \overline{U}_1\,u_f - \overline{U}_1(\overline{U}_1 - \overline{U}_0)k_y\,X &= 0\,,
\end{aligned} \tag{C.1}$$

where T_f, ρ_f, u_f and v_f are defined by

$$(T_f, \rho_f, u_f, v_f)^t = \mathbf{C}_2\mathbf{V}_2 + \mathbf{C}_3\mathbf{V}_3 + \mathbf{C}_4\mathbf{V}_4\,. \tag{C.2}$$

In [84], page 248, the authors claim that a non trivial solution exists when the upstream and downstream Mach numbers are given by

$$\overline{M_0}^{\,2} = \frac{5+\gamma}{3-\gamma} \quad \text{and} \quad \overline{M_1}^{\,2} = \frac{1}{3}\,.$$

The numbers $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ and $\mathbf{C}_4$ are given by

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_2 &= \frac{\overline{U}_1(\overline{U}_1 - \overline{U}_0)}{\gamma r}\frac{2(2\gamma-1)}{(2\gamma-1)\overline{M}_1^2+3}\,k_yX\,,\\
\mathbf{C}_3 &= -(\overline{U}_1 - \overline{U}_0)\frac{2(1+i)}{(2\gamma-1)\overline{M}_1^2+3}\,k_yX\,,\\
\mathbf{C}_4 &= k_y(\overline{U}_1 - \overline{U}_0)\frac{2i}{(2\gamma-1)\overline{M}_1^2+3}\,k_yX\,.
\end{aligned}$$

With these expressions, we obtain

$$\begin{aligned} v_f &= -i\mathbf{C}_3 - \frac{1+i}{k_y}\mathbf{C}_4 \\ &= i(\overline{U}_1 - \overline{U}_0)\frac{2(1+i)}{(2\gamma-1)\overline{M}_1^2+3}k_yX - (1+i)\frac{2i(\overline{U}_1-\overline{U}_0)}{(2\gamma-1)\overline{M}_1^2+3}k_yX = 0\,. \end{aligned}$$

From the linearized Rankine-Hugoniot conditions, we obtain

$$v_f = ik_y(\overline{U}_1 - \overline{U}_0)X = 0$$

and thus $X = 0$. As a consequence, we obtain $\mathbf{C}_2 = 0$, $\mathbf{C}_3 = 0$ and $\mathbf{C}_4 = 0$! Thus an instability associated with the complex frequency $\omega = ik_y\overline{U}_1$ does not occur.

C.3 A general calculation

More generally, we are going to show that under the assumption $\gamma \leq 2$, the only solution to equations (C.1)-(C.2) is the trivial solution: this result is independant of the Mach numbers (the only inequality we shall use is $\overline{M}_1 < 1$). Instead of the previous definition of $\mathbf{V}_4$, we set

$$\mathbf{V}_4 = \left(\frac{\overline{U}_1}{r}, 0, 1, 0\right)^t.$$

This amounts to add $(-1+i)/k_y\mathbf{V}_3$ to the previous definition and multiply by $(-ik_y)$. With this new expression of $\mathbf{V}_4$, we obtain

$$T_f = \mathbf{C}_2 + \frac{\overline{U}_1}{r}\mathbf{C}_4\,, \quad \rho_f = -\frac{\overline{\rho}_1}{\overline{T}_1}\mathbf{C}_2\,, \quad u_f = \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_4 \quad \text{and} \quad v_f = -i\mathbf{C}_3\,.$$

Recall that C_p is given by

$$C_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} = \frac{\overline{a}_1^2}{(\gamma-1)\overline{T}_1}\,,$$

where a denotes the sound speed in the fluid. If we set $Y = k_yX$, we are led to solve the linear system

$$-\frac{\overline{\rho}_1\overline{U}_1}{\overline{T}_1}\mathbf{C}_2 + \overline{\rho}_1\mathbf{C}_3 + \overline{\rho}_1\mathbf{C}_4 - \overline{U}_1(\overline{\rho}_1 - \overline{\rho}_0)Y = 0\,, \tag{C.3}$$

$$-\frac{\overline{U}_1}{\overline{T}_1}\mathbf{C}_2 + 2\mathbf{C}_3 + 3\mathbf{C}_4 = 0\,, \tag{C.4}$$

$$\mathbf{C}_3 - (\overline{U}_1 - \overline{U}_0)Y = 0\,, \tag{C.5}$$

$$\frac{\overline{a}_1^2}{(\gamma-1)\overline{T}_1}\mathbf{C}_2 + \overline{U}_1\mathbf{C}_3 + \frac{2\gamma-1}{\gamma-1}\overline{U}_1\mathbf{C}_4 - \overline{U}_1(\overline{U}_1 - \overline{U}_0)Y = 0\,. \tag{C.6}$$

With the help of equation (C.5), equation (C.6) becomes

$$-\frac{\overline{U}_1}{\overline{T}_1}\mathbf{C}_2 = (2\gamma-1)\overline{M}_1^2\mathbf{C}_4\,.$$

We now place the previous expression of $\mathbf{C}_2$ and the expression of $\mathbf{C}_3$ (deduced from equation (C.5)) into equations (C.3) and (C.4). This yields the following linear system in $(\mathbf{C}_4, Y)$:

$$\begin{aligned} \overline{\rho}_1 \left[(2\gamma-1)\overline{M}_1^2+1\right] \mathbf{C}_4 + (\overline{\rho}_1+\overline{\rho}_0)(\overline{U}_1-\overline{U}_0)Y = 0\,, \\ \left[(2\gamma-1)\overline{M}_1^2+3\right] \mathbf{C}_4 + 2(\overline{U}_1-\overline{U}_0)Y = 0\,. \end{aligned} \tag{C.7}$$

Here we have used the relation $\overline{\rho}_1\overline{U}_1 = \overline{\rho}_0\overline{U}_0$ which is a consequence of the Rankine-Hugoniot jump conditions.

There exists a non trivial solution $(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, X)$ if and only if there exists a non trivial solution of (C.7). This amounts to requiring that the determinant of this 2×2 system vanishes. This determinant is proportional to

$$\left[(2\gamma-1)\overline{M}_1^2-1\right]\overline{\rho}_1 - \left[(2\gamma-1)\overline{M}_1^2+3\right]\overline{\rho}_0\,,$$

and we conclude that an instability occurs if and only if

$$\left[(2\gamma-1)\overline{M}_1^2-1\right]\overline{\rho}_1 = \left[(2\gamma-1)\overline{M}_1^2+3\right]\overline{\rho}_0\,. \tag{C.8}$$

Equation (C.8) can not hold if $(2\gamma-1)\overline{M}_1^2 \le 1$, so we assume $(2\gamma-1)\overline{M}_1^2 > 1$ and that (C.8) holds. We get

$$\overline{\rho}_1 = \alpha\overline{\rho}_0 \quad \text{and} \quad \overline{U}_0 = \alpha\overline{U}_1$$

where α is the positive number given by

$$\alpha = \frac{(2\gamma-1)\overline{M}_1^2+3}{(2\gamma-1)\overline{M}_1^2-1} = 1 + \frac{4}{(2\gamma-1)\overline{M}_1^2-1}\,.$$

Since $\gamma \le 2$ and $\overline{M}_1 < 1$, we get $\underline{\alpha > 3}$.

Recall that the planar shock wave satisfies the Rankine-Hugoniot conditions:

$$\begin{aligned} \overline{\rho}_1\overline{U}_1 &= \overline{\rho}_0\overline{U}_0\,, \\ \overline{\rho}_0\overline{U}_0^2 - \overline{\rho}_1\overline{U}_1^2 &= r(\overline{\rho}_1\overline{T}_1 - \overline{\rho}_0\overline{T}_0)\,, \\ \frac{\gamma r}{\gamma-1}(\overline{T}_1-\overline{T}_0) &= \frac{1}{2}(\overline{U}_0^2-\overline{U}_1^2)\,. \end{aligned}$$

From these equalities, we obtain the relation

$$\overline{a}_1^2 = \gamma r\overline{T}_1 = \gamma\alpha\overline{U}_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}(1+\alpha)\overline{U}_1^2\,,$$

and we have assumed that

$$\overline{a}_1^2 < (2\gamma-1)\overline{U}_1^2\,.$$

We obtain therefore the inequality

$$\gamma\alpha - \frac{\gamma-1}{2}(1+\alpha) < 2\gamma-1\,,$$

that is

$$\alpha < \frac{5\gamma-3}{\gamma+1} = 5 - \frac{8}{\gamma+1} < 3\,.$$

This yields a contradiction, and therefore $\mathbf{C}_4 = 0$ and $Y = 0$. As a consequence $\mathbf{C}_2 = 0$, $\mathbf{C}_3 = 0$. The planar shock is stable, as stated in [65].

Bibliographie

[1] R. Abeyaratne, J. Knowles. Kinetic relations and the propagation of phase boundaries in solids. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 114(2):119–154, 1991.

[2] R. A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York-London, 1975.

[3] M. S. Agranovič. Boundary value problems for systems with a parameter. *Math. USSR-Sb.*, 13:25–64, 1971.

[4] S. Alinhac. Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels. *Comm. Partial Differential Equations*, 14(2):173–230, 1989.

[5] S. Alinhac. Unicité d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels. *Indiana Univ. Math. J.*, 38(2):345–363, 1989.

[6] S. Alinhac. *Blowup for nonlinear hyperbolic equations.* Birkhäuser, Boston, 1995.

[7] S. Alinhac, P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser.* InterEditions, Paris, 1991.

[8] V. I. Arnol'd. *Équations différentielles ordinaires.* Mir-Librairie du Globe, Paris, 1996.

[9] A. A. Barmin, S. A. Egorushkin. Stability of shock waves. *Adv. Mech.*, 15(1-2):3–37, 1992.

[10] H. Beirão da Veiga. On the existence theorem for the barotropic motion of a compressible inviscid fluid in the half-space. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 163:265–289, 1993.

[11] S. Benzoni-Gavage. Stability of multi-dimensional phase transitions in a van der Waals fluid. *Nonlinear Anal.*, 31(1-2):243–263, 1998.

[12] S. Benzoni-Gavage. Stability of subsonic planar phase boundaries in a van der Waals fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 150(1):23–55, 1999.

[13] S. Benzoni-Gavage, J. F. Coulombel, S. Aubert. Boundary conditions for Euler equations. *AIAA Journal*, À paraître.

[14] S. Benzoni-Gavage, F. Rousset, D. Serre, K. Zumbrun. Generic types and transitions in hyperbolic initial-boundary value problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 132(A):1073–1104, 2002.

[15] S. Benzoni-Gavage, D. Serre. *First order systems of hyperbolic partial differential equations with applications.* En préparation.

[16] A. M. Blokhin. Estimation of the energy integral of a mixed problem for gas dynamics equations with boundary conditions on the shock wave. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 22(4):23–51, 229, 1981.

[17] A. M. Blokhin. Uniqueness of the classical solution of a mixed problem for equations of gas dynamics with boundary conditions on a shock wave. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 23(5):17–30, 222, 1982.

[18] A. M. Blokhin, Y. L. Trakhinin. Stability of fast parallel MHD shock waves in polytropic gas. *Eur. J. Mech. B Fluids*, 18(2):197–211, 1999.

[19] J. M. Bony. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(2):209–246, 1981.

[20] J. M. Bony. *Cours d'analyse Théorie des distributions et analyse de Fourier.* Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001.

[21] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris, 1983.

[22] S. R. Chakravarthy. Euler equations-implicit schemes and boundary conditions. *AIAA Journal*, 21(5):699–706, 1983.

[23] J. Chazarain, A. Piriou. *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires.* Gauthier-Villars, Paris, 1981.

[24] J. Y. Chemin. *Fluides parfaits incompressibles.* Astérisque, Vol. 230, Paris, 1995.

[25] R. R. Coifman, Y. Meyer. *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels.* Astérisque, Vol. 57, Paris, 1978.

[26] J. F. Coulombel. Weak stability of nonuniformly stable multidimensional shocks. *SIAM J. Math. Anal.*, 34(1):142–172, 2002.

[27] J. F. Coulombel. Weak stability of multidimensional shock waves. In *Ninth Conference on Hyperbolic Problems (Pasadena, 2002).* Springer-Verlag, À paraître.

[28] J. F. Coulombel, S. Benzoni-Gavage, D. Serre. Note on a paper by Robinet, Gressier, Casalis and Moschetta. *J. Fluid Mech.*, 469:401–405, 2002.

[29] R. Courant, K. O. Friedrichs. *Supersonic flow and shock waves.* Springer-Verlag, New York, 1976.

[30] C. M. Dafermos. The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws. *J. Differential Equations*, 14:202–212, 1973.

[31] C. M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[32] W. Domański. Surface and boundary waves for linear hyperbolic systems: applications to basic equations of electrodynamics and mechanics of continuum. *J. Tech. Phys.*, 30(3-4):283–300, 1989.

[33] S. P. D'yakov. On the stability of shock waves. *Ž. Eksper. Teoret. Fiz.*, 27:288–295, 1954.

[34] B. Engquist, A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139):629–651, 1977.

[35] J. Erpenbeck. Stability of step shocks. *Phys. Fluids*, 5(10):1181–1187, 1962.

[36] H. Fan. On a model of the dynamics of liquid/vapor phase transitions. *SIAM J. Appl. Math.*, 60(4):1270–1301, 2000.

[37] J. Francheteau, G. Métivier. *Existence de chocs faibles pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels.* Astérisque, Vol. 268, Paris, 2000.

[38] H. Freistühler. The persistence of ideal shock waves. *Appl. Math. Lett.*, 7(6):7–11, 1994.

[39] H. Freistühler. Some results on the stability of non-classical shock waves. *J. Partial Differential Equations*, 11(1):25–38, 1998.

[40] H. Freistühler, C. Fries, C. Rohde. Existence, bifurcation, and stability of profiles for classical and non-classical shock waves. In *Ergodic theory, analysis, and efficient simulation of dynamical systems*, pages 287–309, 814. Springer, Berlin, 2001.

[41] K. O. Friedrichs. Symmetric positive linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 11:333–418, 1958.

[42] L. Gårding. Problème de Cauchy pour les systèmes quasi-linéaires d'ordre un strictement hyperboliques. In *Les Équations aux Dérivées Partielles (Paris, 1962)*, pages 33–40. Éditions du CNRS, Paris, 1963.

[43] M. Grassin. Global smooth solutions to Euler equations for a perfect gas. *Indiana Univ. Math. J.*, 47(4):1397–1432, 1998.

[44] O. Guès. Problème mixte hyperbolique quasi-linéaire caractéristique. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(5):595–645, 1990.

[45] B. Gustafsson, H. O. Kreiss, A. Sundström. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. II. *Math. Comp.*, 26:649–686, 1972.

[46] H. Hattori. The Riemann problem for a van der Waals fluid with entropy rate admissibility criterion—isothermal case. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 92(3):247–263, 1986.

[47] R. Hersh. Mixed problems in several variables. *J. Math. Mech.*, 12:317–334, 1963.

[48] R. L. Higdon. Initial-boundary value problems for linear hyperbolic systems. *SIAM Rev.*, 28(2):177–217, 1986.

[49] C. Hirsch. *Numerical Computation of internal and external flows. Vol. II: Computational methods for inviscid and viscous flows.* John Wiley & Sons, New York-London, 1992.

[50] M. W. Hirsch. *Differential topology.* Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.

[51] L. Hörmander. *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations.* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[52] D. Y. Hsieh, X. P. Wang. Phase transition in van der Waals fluid. *SIAM J. Appl. Math.*, 57(4):871–892, 1997.

[53] R. D. James. The propagation of phase boundaries in elastic bars. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 73(2):125–158, 1980.

[54] S. Jaouen. Étude mathématique et numérique de stabilité pour des modèles hydrodynamiques avec transition de phase. *Thèse, Université de Paris 6*, 2001.

[55] H. K. Jenssen, G. Lyng. Evaluation of the Lopatinskii determinant for multidimensional Euler equations. `http://www.math.ntnu.no/conservation/2002/`, À paraître dans Handbook of Mathematical Fluid Mechanics.

[56] T. Kato. The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 58(3):181–205, 1975.

[57] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[58] J. J. Kohn, L. Nirenberg. An algebra of pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18:269–305, 1965.

[59] V. M. Kontorovič. Stability of shock waves in relativistic hydrodynamics. *Soviet Physics JETP*, 34 (7):127–132, 1958.

[60] H. O. Kreiss. Stability theory for difference approximations of mixed initial boundary value problems. I. *Math. Comp.*, 22:703–714, 1968.

[61] H. O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23:277–298, 1970.

[62] P. D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 10:537–566, 1957.

[63] P. D. Lax. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves.* SIAM, Philadelphia, 1973.

[64] A. Majda. The existence of multidimensional shock fronts. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 43(281):v+93, 1983.

[65] A. Majda. The stability of multidimensional shock fronts. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 41(275):iv+95, 1983.

[66] A. Majda. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[67] A. Majda, S. Osher. Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(5):607–675, 1975.

[68] R. Menikoff, B. J. Plohr. The Riemann problem for fluid flow of real materials. *Rev. Modern Phys.*, 61(1):75–130, 1989.

[69] G. Métivier. Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation, en dimension deux d'espace. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 296(2):431–479, 1986.

[70] G. Métivier. Stability of multi-dimensional weak shocks. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(7):983–1028, 1990.

[71] G. Métivier. Ondes soniques. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 70(2):197–268, 1991.

[72] G. Métivier. The block structure condition for symmetric hyperbolic systems. *Bull. London Math. Soc.*, 32(6):689–702, 2000.

[73] G. Métivier. Stability of multidimensional shocks. In *Advances in the theory of shock waves*, pages 25–103. Birkhäuser, Boston, 2001.

[74] G. Métivier, K. Zumbrun. Large viscous boundary layers for noncharacteristic nonlinear hyperbolic problems. *Preprint*, 2002.

[75] Y. Meyer. Remarques sur un théorème de J. M. Bony. *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II*, 1:1–20, 1981.

[76] M. S. Mock. Systems of conservation laws of mixed type. *J. Differential Equations*, 37(1):70–88, 1980.

[77] A. Mokrane. Problèmes mixtes hyperboliques non linéaires. *Thèse, Université de Rennes I*, 1987.

[78] T. Ohkubo, T. Shirota. On structures of certain L^2-well-posed mixed problems for hyperbolic systems of first order. *Hokkaido Math. J.*, 4:82–158, 1975.

[79] J. Oliger, A. Sundström. Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics. *SIAM J. Appl. Math.*, 25 (3):419–446, 1978.

[80] T. J. Poinsot, S. K. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *J. Comput. Phys.*, 101(1):104–129, 1992.

[81] J. V. Ralston. Note on a paper of Kreiss. *Comm. Pure Appl. Math.*, 24(6):759–762, 1971.

[82] J. Rauch. L^2 is a continuable initial condition for Kreiss' mixed problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 25:265–285, 1972.

[83] J. Rauch, F. J. Massey III. Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 189:303–318, 1974.

[84] J.-Ch. Robinet, J. Gressier, G. Casalis, J.-M. Moschetta. Shock wave instability and the carbuncle phenomenon: same intrinsic origin? *J. Fluid Mech.*, 417:237–263, 2000.

[85] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, New York, 1987.

[86] W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill, New York, 1991.

[87] M. Sablé-Tougeron. Existence pour un problème de l'élastodynamique Neumann non linéaire en dimension 2. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 101(3):261–292, 1988.

[88] M. Sablé-Tougeron. Ondes de gradients multidimensionnelles. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 106(511):viii+93, 1993.

[89] X. Saint Raymond. *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators.* CRC Press, Boca Raton, 1991.

[90] S. Schochet. The compressible Euler equations in a bounded domain: existence of solutions and the incompressible limit. *Comm. Math. Phys.*, 104(1):49–75, 1986.

[91] P. Secchi. Inflow-outflow problems for inviscid compressible fluids. *Commun. Appl. Anal.*, 2(1):81–110, 1998.

[92] D. Serre. *Systems of conservation laws. 1.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[93] D. Serre. *Systems of conservation laws. 2.* Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[94] D. Serre. La transition vers l'instabilité pour les ondes de choc multidimensionnelles. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(12):5071–5093, 2001.

[95] M. Shearer. The Riemann problem for a class of conservation laws of mixed type. *J. Differential Equations*, 46(3):426–443, 1982.

[96] M. Shearer. Admissibility criteria for shock wave solutions of a system of conservation laws of mixed type. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 93(3-4):233–244, 1982/83.

[97] M. Shearer. Nonuniqueness of admissible solutions of Riemann initial value problems for a system of conservation laws of mixed type. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 93(1):45–59, 1986.

[98] T. Shirota. On the propagation speed of hyperbolic operator with mixed boundary conditions. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I*, 22:25–31, 1972.

[99] T. Shirota. On the stability of planar step shock fronts in multidimensional spaces. *Hokkaido Math. J.*, 11(3):337–352, 1982.

[100] T. C. Sideris. Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids. *Comm. Math. Phys.*, 101(4):475–485, 1985.

[101] M. Slemrod. Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 81(4):301–315, 1983.

[102] M. Slemrod. Admissibility criteria for phase boundaries. In *Nonlinear hyperbolic problems (St. Etienne, 1986)*, pages 163–171. Lecture Notes in Math., Vol. 1270. Springer, Berlin, 1987.

[103] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, Princeton, 1970.

[104] E. M. Stein. *Harmonic analysis.* Princeton University Press, Princeton, 1993.

[105] G. W. Swan, G. R. Fowles. Shock wave stability. *Phys. Fluids*, 18(1):28–35, 1975.

[106] M. E. Taylor. Rayleigh waves in linear elasticity as a propagation of singularities phenomenon. In *Partial differential equations and geometry (Park City, 1977)*, pages 273–291. Dekker, New York, 1979.

[107] V. Thomée. A difference method for a mixed boundary problem for symmetric hyperbolic systems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 13:122–136, 1963.

[108] V. Thomée. Stability theory for partial difference operators. *SIAM Rev.*, 11:152–195, 1969.

[109] Y. L. Trakhinin. On stability of shock waves in relativistic magnetohydrodynamics. *Quart. Appl. Math.*, 59(1):25–45, 2001.

[110] L. Truskinovsky. About the "normal growth" approximation in the dynamical theory of phase transitions. *Contin. Mech. Thermodyn.*, 6(3):185–208, 1994.

[111] S. V. Tsynkov. Numerical solution of problems on unbounded domains. *Appl. Numer. Math.*, 27(4):465–532, 1998.

[112] C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In *Handbook of Mathematical Fluid Mechanics. Vol. I.* Elsevier, 2002.

[113] R. C. Weast, M. J. Astle, editor. *CRC Handbook of Chemistry and Physics.* CRC Press, Boca Raton, 1980.

[114] H. Weyl. Shock waves in arbitrary fluids. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2:103–122, 1949.

[115] W. P. Ziemer. *Weakly differentiable functions.* Springer-Verlag, New York, 1989.