



**HAL**  
open science

# **Analyse Numérique et discrétisation par éléments spectraux avec joints des équations tridimensionnelles de l'électromagnétisme**

Mohammed El Rhabi

► **To cite this version:**

Mohammed El Rhabi. Analyse Numérique et discrétisation par éléments spectraux avec joints des équations tridimensionnelles de l'électromagnétisme. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2002. Français. <NNT: >. <tel-00002224>

**HAL Id: tel-00002224**

**<https://theses.hal.science/tel-00002224v1>**

Submitted on 6 Jan 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



---

# Analyse numérique et discrétisation par éléments spectraux avec joints des équations tridimensionnelles de l'électromagnétisme.

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 04/12/2002

pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie**

Mention

**Mathématiques Appliquées**

par

Mohammed EL RHABI

### Composition du jury

Christine BERNARDI	<i>Directrice de thèse</i>
Tahar Z. BOULMEZAOUD	<i>Co-directeur de thèse</i>
Monique DAUGE	<i>Examineur</i>
Georges DELAUNAY	<i>Examineur</i>
Yvon MADAY	<i>Président</i>
Jean Claude NÉDÉLEC	<i>Rapporteur</i>
Pierre-Arnaud RAVIART	<i>Examineur</i>
Barbara WOHLMUTH	<i>Rapporteur</i>

*Au sourire de mon fils, Othmane*

*Face à la roche, le ruisseau l'emporte toujours,  
non pas par la force mais par la persévérance.*

H. Jackson Brown.

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Yvon MADAY pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

J'exprime toute ma gratitude à Christine BERNARDI qui m'a proposé ce sujet. J'ai beaucoup apprécié sa grande disponibilité et son enthousiasme. Tout en me laissant une considérable liberté, elle a toujours eu une intuition infaillible pour orienter mes travaux.

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à Tahar Zamène BOULMEZAOU D d'avoir co-diriger cette thèse. Je n'oublierais jamais ta fameuse réponse : *“je sais mais on va faire comme ça . . . ”* lorsque je t'affirmais : *“il me semble que j'ai un problème . . . ”*. J'ai beaucoup appris à ton contact et j'espère encore apprendre.

Je remercie également Barbara WOHLMUTH et Jean Claude NÉDÉLEC d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je souhaite leur témoigner toute ma gratitude pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture du manuscrit.

Monique DAUGE, Georges DELAUNAY et Pierre-Arnaud RAVIART m'ont aussi honoré d'avoir consenti à être membres de mon jury.

J'aimerais notamment remercier l'équipe du département de mathématiques de l'université Paris XII Val de Marne (Créteil) de m'avoir chaleureusement accueilli, en particulier Colette GUILLOPPÉ, Geneviève ALLAIN et Oleg LOUKIANOV pour leurs précieux conseils pédagogiques au cours de mes deux années d'ATER.

Je profite également de ces quelques lignes pour exprimer ma gratitude à l'équipe “Traitement du Signal” du LAM de l'université de Reims Champagne-Ardenne, notamment Hassan FENNIRI, Guillaume GELLE et Maxime COLAS de m'avoir si bien accueilli en stage postdoctoral au sein de leur équipe.

Je remercie évidemment les membres du laboratoire Jacques-Louis LIONS. En particulier Mmes Boulic et Ruprecht pour leur aide précieuse et leur patience. Je remercie vivement Christian DAVID qui malgré cette période surchargée, s'est acquitté de la tâche d'impression de cette thèse avec son efficacité coutumière.

Merci aux joyeux thésards du laboratoire Jacques-Louis LIONS. Marcela je n'oublierai pas tes encouragements de dernières minutes.

Driss, je me demanderai toujours comment tu as fais pour me supporter la semaine de ma soutenance. Merci de m'avoir *coacher*, mais ce n'est que partie remise. Merci à tes frères Abdou et Youssef pour leur gentillesse et leurs encouragements. Muriel, Limam et "Limam Jr" (ou "little Muriel"), merci pour votre belle surprise, je vous en suis infiniment reconnaissant. Ali, merci de t'être déplacé malgré ton emploi du temps chargé. Yacoub, ton absence s'est vraiment ressentie, bonne chance à toi au Japon.

Mourad, Stéphane a raison, on n'est pas prêt de le<sup>1</sup> finir . . . mais on va essayer, on devrait y arriver avec l'aide de Philippe et éventuellement Pascal (quand il aura fini son galopin). "Les Monts d'Auvergne" (ou l'annexe pour les intimes), vous n'avez qu'à bien vous tenir.

Un clin d'oeil particulier à mes parents, mes frères et sœurs. Merci à vous de m'avoir supporté tout au long de mes études. Sans vos encouragements, ce travail n'aurait pas pu aboutir.

Ces remerciements seraient incomplets si je ne mentionnais le dévouement, la compréhension dont a su faire preuve, Françoise, ma femme, tout au long de ce travail. Comment oublier le cadeau que tu m'as fais cette année . . .

Othmane, ton sourire a enchanté une période qui aurait dû être plus que stressante. Merci mon bébé.

---

<sup>1</sup>pour les curieux voir remerciements de la thèse de Stéphane Del Pino (page iv)

# Résumé

Cette thèse a pour objet l'analyse et la discrétisation numérique des équations de l'électromagnétisme. Ces travaux débutent par l'étude de ces équations dans un domaine borné multiplement connexe. Un théorème d'existence général a été établi, en proposant une nouvelle approche du problème, en le reformulant à l'aide d'un opérateur approprié, tenant compte des complexités géométriques du domaine.

Dans la suite, après avoir donné un résultat de régularité, on propose une approximation numérique de la solution par une méthode spectrale. La méthode est, d'une part, analysée numériquement dans le cas d'une décomposition conforme du domaine, et d'autre, implantée dans le cadre d'un code 3D. Des tests numériques confirmant les prévisions théoriques sont exposés et comparés à ceux obtenus par une méthode d'éléments finis de type  $P^1$  qu'on présentera sommairement. En outre, les quatre premières valeurs propres du problème discret sont calculées et comparées à celui du spectre exact.

La dernière partie de cette thèse est consacrée à l'étude d'une décomposition de domaine par une méthode spectrale avec joints pour le problème de Maxwell. Il est utile de souligner que les paramètres physiques sont considérés dans cette partie comme pouvant être hétérogènes. On applique cette méthode à un problème type présenté. Ce dernier permet d'unifier deux approches qui habituellement sont distinguées : le problème d'évolution de Maxwell, et le problème de Maxwell en régime harmonique. Des estimations d'erreurs sont démontrées, elles reposent sur un lemme, qui est une variante du second lemme de Strang, permettant de décomposer l'erreur en la somme de trois erreurs principales : l'erreur sur la meilleure approximation, l'erreur de consistance et l'erreur d'intégration numérique. Cette dernière étant obtenue de manière classique, les deux autres erreurs ont nécessité une recherche plus approfondie, notamment, la définition d'opérateurs discrets et un lemme d'augmentation de degré pour l'erreur sur la meilleure approximation. Enfin des courbes d'erreurs et des tests numériques sont exposés validant un code de calcul tridimensionnel développé pour l'approximation de la solution du problème type (pour des paramètres physiques homogènes et hétérogènes).

# Abstract

The aim of this thesis is the numerical analysis and the discretisation of Maxwell's equations. The first purpose is to investigate time-harmonic Maxwell's equations in Lipschitz and multiply connected cavities of  $\mathbb{R}^3$ . We prove the wellposedness of the current source problem by means of a new formulation. The starting point is the curl-curl second order equation satisfied by the magnetic field. The use of an appropriate compact operator is at the heart of the proof. Next, we propose a discretization relying on spectral elements and numerical integration. We prove the convergence of the discrete solutions to the exact one and we derive error estimates. Examples of numerical solutions are given and compared with those obtained by a finite element method in the case of a simple geometry. The last part is to propose a mortar spectral element method for solving heterogeneous Maxwell's equations in 3D bounded cavities. This part is mainly divided into two parts. The method is based on non-conforming decomposition of the domain into the union of non-overlapping parallelepipeds. The first part is devoted to the presentation and the numerical analysis of the method. In the second part, we expose some numerical results which confirm the performance of the method.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Une brève présentation du modèle</b>	<b>17</b>
2.1	Les équations de Maxwell . . . . .	17
2.2	Les conditions de transmission . . . . .	21
2.3	Les conditions aux limites . . . . .	22
2.4	Le problème de Maxwell en régime harmonique . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Analyse du modèle en géométrie complexe</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction . . . . .	26
3.2	Outils préliminaires et considérations géométriques . . . . .	28
3.3	Position du problème. Une formulation faible. . . . .	33
3.3.1	Position du problème : le cas des basses fréquences . . . . .	34
3.3.2	Position du problème : le cas général . . . . .	35
3.4	Le spectre de $\mathcal{K}\mathcal{K}^*$ lorsque $\Omega$ est un parallélépipède . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Une méthode spectrale</b>	<b>45</b>
4.1	Introduction . . . . .	45
4.2	Régularité de la solution . . . . .	46
4.3	Approximation par une méthode spectrale . . . . .	49
4.4	Une méthode d'éléments finis. Une brève description . . . . .	56
4.5	Résultats numériques . . . . .	58

<b>5</b>	<b>Une méthode spectrale avec joints</b>	<b>65</b>
5.1	Introduction . . . . .	67
5.2	Functionnal framework . . . . .	70
5.2.1	Notations . . . . .	70
5.3	A common approach for time-harmonic and time-dependent Maxwell's equations . . . . .	74
5.4	The mortar method . . . . .	78
5.4.1	The discrete space . . . . .	78
5.4.2	The discrete problem . . . . .	84
5.4.3	Error estimate. . . . .	86
5.4.4	The numerical integration error . . . . .	98
5.5	Numerical implementation. . . . .	99
5.5.1	A basis of $H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$ . The treatment of the matching conditions .	99
5.5.2	Numerical tests . . . . .	103
<b>A</b>		<b>121</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>

# Table des figures

4.1	MEF : L'erreur relative dans $Y_T(\Omega)$ en fonction de $h$ , $k = 0.3\pi$ . . . . .	60
4.2	MS : L'erreur relative dans $Y_T(\Omega)$ en fonction de $N$ (échelle logarithmique), $k = 0.3\pi$ . . . . .	60
4.3	MEF : L'erreur relative dans $L^2(\Omega)$ en fonction de $h$ , $k = 0.3\pi$ . . . . .	61
4.4	MS : L'erreur relative dans $L^2(\Omega)$ en fonction de $N$ (échelle logarithmique), $k = 0.3\pi$ . . . . .	61
4.5	MEF : L'erreur relative $L^2$ de la divergence en fonction de $h$ , $k = 0.3\pi$ . . .	62
4.6	MS : L'erreur relative $L^2$ de la divergence en fonction de $N$ , $k = 0.3\pi$ . . . .	62
4.7	Les erreurs $L^2(\Omega)$ en fonction de $k$ pour les deux méthodes MEF (figure du haut) et MS (figure du bas) (les droites verticales en pointillé correspondent aux quatre premières valeurs propres du problème continu). L'explosion de cette norme indiquant que $k$ est une valeur propre du problème discret. . .	63
5.1	A 2D example of a conforming decomposition . . . . .	79
5.2	A 2D illustration of a non conforming decomposition . . . . .	80
5.3	A 2D illustration of an excluded domain decomposition since some mortars can not be chosen as the whole edges of sub-domains. . . . .	80
5.4	An example of the mortar decomposition in a 3D configuration. . . . .	81
5.5	A vertical section of the 3D domain used for the numerical tests with a 15 – 15 – 10 Gauss-Lobatto grid. . . . .	104

5.6	Example 1 : the three components of the exact solution at the section $y = 1/2$ (left) and of the numerical one (right) at $y = 1/2$ . The computation of the numerical solution is done with a $10 - 8 - 8$ mortar method. . . . .	107
5.7	Example 1 : The distribution at $y = 1/2$ of the numerical error when a $10 - 8 - 6$ mortar method is used for computing the numerical solution. . .	108
5.8	Example 1 : the relative $L^2$ error on the curl (in a logarithmic scale) versus $N$ for a $3N/2 - 3N/2 - N$ discretization (solid line) and a $3N/2 - N - 3N/2$ discretization (dashed line). . . . .	109
5.9	Example 1 : the relative $L^2$ error (in a logarithmic scale) versus $N$ for a $3N/2 - 3N/2 - N$ discretization (solid line) and a $3N/2 - N - 3N/2$ discretization (dashed line). . . . .	110
5.10	Example 1 : the relative $L^2$ norm of the divergence (in a logarithmic scale) versus $N$ for a $3N/2 - 3N/2 - N$ discretization (solid line) and a $3N/2 - N - 3N/2$ discretization (dashed line). . . . .	111
5.11	Example 2 : the three components of the exact heterogenous solution (left) The distribution of the numerical error when a $9 - 5 - 6$ mortar spectral method is used. . . . .	112
5.12	Example 2 : the relative $H(\mathbf{curl})$ norm of the error (in a logarithmic scale) versus $N$ for a $3N/2 - 3N/2 - N$ discretization (solid line) and a $3N/2 - N - 3N/2$ discretization (dashed line). . . . .	113
5.13	The rate of convergence $\ \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n\ _{X_T(\mu; \Omega)} / \ \mathbf{u}_n\ _{X_T(\mu; \Omega)}$ versus the number of iterations for several values of the parameter $\tau$ ( $\omega$ is fixed : $\omega = 0.1\pi$ ). A 7-5-5 discretization is used for all the tests. . . . .	114
5.14	The rate of convergence $\ \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n\ _{X_T(\mu; \Omega)} / \ \mathbf{u}_n\ _{X_T(\mu; \Omega)}$ versus the number of iterations for several values of $\omega$ ( $\tau$ is fixed : $\tau = 10$ ). A 7-5-5 discretization is used for all the tests. . . . .	115

# Chapitre 1

## Introduction

L'étude des phénomènes liés à l'électromagnétisme a suscité, ces dernières années, plusieurs travaux de recherche en mathématiques appliquées, et cela en raison de leurs nombreuses applications physiques et industrielles. Ces travaux portent essentiellement sur l'analyse théorique (existence, unicité, singularités, nouvelles formulations,...etc) et sur l'analyse numérique des équations de Maxwell telles qu'elles sont définies dans [51].

Les travaux présentés dans cette thèse partent donc des équations de Maxwell standard qui s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned}\mu\partial_t\mathbf{H} + \operatorname{rot}\mathbf{E} &= \mathbf{0}, \\ \varepsilon\partial_t\mathbf{E} - \operatorname{rot}\mathbf{H} &= -\mathbf{j}, \\ \operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) &= 0, \\ \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) &= \rho,\end{aligned}\tag{1.1}$$

$\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  désignent respectivement le champ électrique et le champ magnétique,  $\varepsilon$  la permittivité électrique et  $\mu$  la perméabilité magnétique,  $\rho$  la densité de charge et  $\mathbf{j}$  la densité de courant. Ces équations sont considérées ici dans une cavité tridimensionnelle bornée. Si on suppose que cette cavité, notée  $\Omega$ , est entourée d'un conducteur parfait, on peut alors compléter le système (1.1) par les conditions au bord

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad , \quad \mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.\tag{1.2}$$

Les méthodes d'approximation spatiale proposées dans la littérature pour approcher les solutions des équations (1.1) en différents régimes (statique, harmonique ou transitoire) sont très variées. Toutefois, ces méthodes reposent pour la plupart sur les méthodes d'éléments finis (voir par exemple les éléments H(rot) de Nédélec [55], [56]) et s'intéressent le plus souvent à des géométries bi-dimensionnelles ou alors à des géométries tridimensionnelles comportant des symétries. Les problèmes d'approximation dans des géométries tridimensionnelles, bien qu'ils ont aussi fait l'objet de beaucoup de travaux, restent encore en partie à explorer, notamment en utilisant d'autres approches numériques telles que les éléments spectraux qui sont au coeur de cette thèse.

Commençons tout d'abord par souligner qu'on s'intéresse tout au long de ce travail uniquement au régime harmonique tridimensionnel pour lequel les champs électrique et magnétique satisfont le système

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) &= \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - i\omega \varepsilon \mathbf{E} &= \mathbf{j}, \\ \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + i\omega \mu \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

où  $\omega$  est la fréquence du régime (le cas  $\omega = 0$  correspond au régime statique), avec pour conditions aux limites de  $\Omega$  :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad , \quad \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1.4}$$

Précisons tout de même que le régime transitoire est abordé à de nombreuses occasions par la suite et cela à travers des approches communes avec le régime harmonique tel qu'il est indiqué dans le chapitre 4 et plus particulièrement dans le chapitre 5.

Par ailleurs, étant donné que le problème ci-dessus peut être découplé, on choisit ici une approche en terme du **champ magnétique** qui satisfait l'équation du second ordre

$$\operatorname{rot}(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H}) - \omega^2 \mu \mathbf{H} = \operatorname{rot}(\varepsilon^{-1} \mathbf{j}), \tag{1.5}$$

avec pour conditions au bord du domaine

$$\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad , \quad \text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{j} \times \mathbf{n}. \quad (1.6)$$

Le travail exposé ici comporte plusieurs parties

- i. Dans le chapitre 2 on expose brièvement le modèle considéré, en rappelant l'origine et la nature des équations de Maxwell telles qu'elles ont été présentées dans [51]. On décrit les hypothèses et les lois physiques conduisant au problème (1.1–1.2). Enfin, on définit le problème (1.3–1.6) conduisant au problème (1.5–1.6).
- ii. Dans le chapitre 3 on s'intéresse aux questions d'existence et d'unicité de solutions du problème (1.5–1.6) dans des géométries complexes, c'est-à-dire dans un domaine borné *multiplement connexe* et ayant une régularité minimale. Un autre objectif du chapitre consiste à proposer une *nouvelle approche* théorique des équations de Maxwell en régime harmonique. Cette approche est basée sur l'introduction d'un nouvel opérateur permettant de traiter le problème de manière unifiée en tenant compte des deux complexités géométriques du domaine : son manque de régularité et sa multiple-connexité. Après une description du domaine et des outils nécessaires à l'étude du problème, ce chapitre commence par la proposition d'une formulation *faible* pour le cas des basses fréquences. On introduit alors une forme bilinéaire adaptée permettant de chercher la solution dans un espace soulagé de toutes contraintes. Ensuite, on introduit un *nouvel opérateur* de type potentiel-vecteur dont on étudie les propriétés. Le résultat final est obtenu à l'aide de l'alternative de Fredholm. On montre en particulier que les fréquences de résonance sont les *valeurs singulières* (ou les *s-valeurs*) de cet opérateur (voir [42]).
- iii. Dans le chapitre 4, on se propose de calculer cette solution approchée par une méthode spectrale. On commence par donner un résultat de régularité de la solution lorsque le domaine est régulier ou lorsque c'est un parallélépipède rectangle. On propose ensuite une méthode spectrale pour approcher la solution. La méthode est, d'une part, analysée numériquement dans le cas d'une décomposition conforme du

domaine, et d'autre, implantée dans le cadre d'un code 3D. Des tests numériques confirmant les prévisions théoriques sont exposés et comparés à ceux obtenus par une méthode d'éléments finis de type  $P^1$  qu'on présentera sommairement. Dans la dernière partie de ce chapitre, un calcul numérique des quatre premières valeurs propres du spectre du problème discret par les deux méthodes est donné et comparé à celui du spectre exact.

Il est toutefois important de souligner que les résultats concernant les estimations d'erreurs présentés ici restent valables même si le domaine n'est pas convexe pourvu que la solution soit suffisamment régulière. En effet, lorsque le domaine n'est pas convexe, de réelles complications techniques peuvent apparaître si la solution comporte une partie singulière (voir par exemple [28]). L'approximation de cette partie singulière dépasse le thème de cette analyse.

- iv. Dans le chapitre 5, on s'intéresse à une décomposition non conforme du domaine. Ce dernier est consacré à l'analyse et à l'implantation numérique d'une **méthode spectrale avec joints** pour le problème de Maxwell.

La méthode des éléments avec joints, introduite dans [15], est une méthode de décomposition de domaine initialement sans recouvrement et qui ne nécessite pas l'hypothèse de conformité. Elle a été récemment étendue à des décompositions avec recouvrement dans [2] pour le cas bidimensionnel. Celle-ci a été développée afin de coupler des approximations numériques différentes dans des sous-domaines différents.

Pour appliquer cette méthode, il est nécessaire d'introduire un espace intermédiaire défini sur le **squelette** (réunion des bords intérieurs des différents sous-domaines). Les éléments de cet espace sont appelés "*joints*". De plus, les conditions de transmission entre les domaines adjacents sont remplacées par des conditions discrètes plus faibles exprimées en termes de multiplicateurs de Lagrange.

L'avantage principal des méthodes avec joints est de pouvoir considérer des milieux

différents où, dans chaque sous-domaine, l'utilisation d'une méthode de discrétisation différente est envisageable [33], [9] (ou la même méthode avec des pas de discrétisation ou des degrés polynomiaux différents [4]). Ainsi, la discrétisation et sa finesse peuvent être choisies dans chaque sous-domaine de la façon la plus adaptée au caractère local du milieu et du champ physique inconnu.

Par ailleurs, la méthode des éléments avec joints se prête de par sa structure au parallélisme (voir [1]). En effet, les structures des discrétisations locales sont préservées et la majeure partie du résidu global, pour une résolution itérative, se fait par l'évaluation des résidus locaux, et de façon complètement découplée (dûe au fait que le raccord ne porte que sur les traces aux interfaces des fonctions d'approximation).

La méthode avec joints a été étudiée dans le cas tridimensionnel pour le problème de Poisson [9], dans le cadre d'une approximation par une méthode d'éléments finis via des multiplicateurs de Lagrange dans [10], et avec une méthode spectrale dans [11]. Elle a aussi été appliquée en utilisant les éléments finis pour le problème de Maxwell 2D et 3D dans [8, 12], à l'équation des ondes à coefficients non constants [6], à des problèmes d'ordre 4 [7], et à des problèmes elliptiques avec des ondelettes dans [16].

Dans cette partie du travail, on part du problème d'évolution en champ magnétique obtenu à partir de (1.1)

$$\mu \partial_t^2 \mathbf{H} + \mathbf{rot} (\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{H}) = \mathbf{rot} (\varepsilon^{-1} \mathbf{j}), \quad \operatorname{div} (\mu \mathbf{H}) = 0, \quad (1.7)$$

et du problème harmonique (1.5–1.6). Habituellement, une distinction est faite dans la littérature entre l'approximation du problème d'évolution et celle du problème harmonique (1.5–1.6). Cette distinction est due au fait qu'ils ne se formulent pas convenablement dans les mêmes espaces fonctionnels (une fois que le problème d'évolution est ramené à un problème stationnaire par une discrétisation en temps).

Cependant, on montre ici que si on applique un schéma implicite approprié pour la discrétisation en temps du problème d'évolution et un schéma de relaxation pour le problème harmonique on peut se ramener à une approche commune permettant d'approcher les deux problèmes à la fois. Plus précisément, on se ramène à résoudre le problème type

$$\mathbf{rot} (\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u}) + \tau \mu \mathbf{u} = \mathbf{rot} (\varepsilon^{-1} \mathbf{j}) + \mathbf{u}_0, \quad (1.8)$$

avec la condition sur le bord

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{j} \times \mathbf{n}, \quad (1.9)$$

où  $\tau$  dépend du pas de la discrétisation en temps pour le problème d'évolution ou alors c'est un paramètre à choisir convenablement pour le problème harmonique.  $\mathbf{u}_0$  est un champ donné dépendant du problème choisi. C'est à ce problème assez général que la méthode spectrale avec joints a été appliquée.

Il est utile de souligner que les paramètres physiques  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont considérés dans ce chapitre comme pouvant être hétérogènes. Toutefois, on ne s'intéresse pas à l'approximation des singularités qui peuvent apparaître à cause de ces hétérogénéités. En d'autres termes, on supposera dans ce dernier cas que la solution est suffisamment régulière (ou alors qu'on s'intéresse à l'approximation de la partie régulière de cette solution) (voir [30]).

Afin d'introduire la méthode spectrale avec joints proposée ici, on décrit dans un premier temps l'espace discret et on définit les outils indispensables à la discrétisation du problème. Puis, on montre un théorème donnant une estimation de l'erreur commise. La démonstration de ce théorème nécessite plusieurs étapes. La première commence par un lemme qui est en fait une version modifiée du second lemme de Strang. Ce lemme permet de décomposer l'erreur en la somme de trois erreurs : *l'erreur sur la meilleure approximation*, *l'erreur de consistance* et *l'erreur*

*d'intégration numérique.* L'estimation de l'erreur sur la meilleure approximation nécessite elle aussi plusieurs étapes et la définition de plusieurs opérateurs discrets (opérateurs de projection, d'augmentation de degré et de relèvement). L'estimation de l'erreur de consistance s'obtient à l'aide d'une astuce. Quant à l'estimation de l'erreur d'intégration numérique, elle se déduit de manière classique.

L'implantation numérique de la méthode nécessite la définition d'une base de l'espace de discrétisation ainsi qu'une caractérisation de l'espace des fonction *joints*, ce que l'on propose dans la partie dernière de ce chapitre. On montrera que les conditions de joints peuvent être explicitées, ce qui évitera l'inversion des matrices de joints locales. Enfin, ce chapitre se termine par la présentation et la validation numérique du code de calcul tridimensionnel développé avec cette méthode et cela dans le cas d'une géométrie 3D avec une décomposition non-conforme en trois sous-domaines.

## Conclusion

D'un point de vue théorique, les travaux présentés dans cette thèse ont abordé divers problèmes rencontrés en électromagnétisme dans des milieux bornés. On se réfère à A. Bossavit dans [20] pour plus de détails quant aux interprétations physiques et une présentation des équations de Maxwell dans d'autres champs d'applications possibles. On peut trouver, dans ce manuscrit, un résultat d'existence général dans des domaines bornés multiples connexes (chapitre 3) et une nouvelle approche de tout le problème. L'approximation spectrale du problème et l'analyse numérique correspondante ont été effectuées dans le cas d'une décomposition conforme du domaine (chapitre 4), où un résultat de régularité a été établi. Puis, pour une décomposition de domaine non conforme (chapitre 5), dans un cadre plus général, où les coefficients physiques sont variables (en espace). En outre, cette partie permet d'unifier deux approches jusqu'alors distinctes, et de travailler avec un modèle commun dans un espace commun.

Des estimations d'erreurs sont données pour les diverses méthodes appliquées, celle du

chapitre 5 constitue toutefois une innovation dans le cas d'une méthode spectrale avec joints. En effet, il semble que la mise en œuvre et l'analyse numérique d'une méthode spectrale avec joints pour le problème de Maxwell n'a pas encore fait l'objet d'une étude publiée.

D'un point de vue calcul scientifique, cette étude a conduit à l'écriture de trois codes tridimensionnels (un code éléments-finis, un code "spectral", et un code "spectral avec joints").

# Chapitre 2

## Une brève présentation du modèle

L'objet de ce chapitre préliminaire introductif est de présenter brièvement le modèle physique motivant le travail mathématique de cette thèse.

### 2.1 Les équations de Maxwell

Les phénomènes physiques liés à l'électromagnétisme dans le vide sont décrits à l'aide de deux fonctions ou distributions  $\mathbf{E}$  (le champ électrique) et  $\mathbf{B}$  (l'induction magnétique), définies sur  $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^3$ , définissant le champ électromagnétique, noté  $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ .

Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont reliés à deux fonctions : la densité de charge  $\rho$  et la densité de courant  $\mathbf{J}$ .

L'apparition de courants induits dans un conducteur<sup>1</sup> fixe, placé dans un champ électrique non stationnaire, est traduite par l'équation de Maxwell-Faraday et la conservation du flux du champ magnétique :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0.$$

En régime variable, le courant volumique  $\mathbf{J}$  n'est plus à flux conservatif compte tenu de la loi de conservation et de la variation de la charge volumique  $\rho$  au cours du temps.

---

<sup>1</sup>corps contenant une population de charges libres, qui sous l'action d'un champ électrique, se déplace créant ainsi une densité de courant macroscopique.

L'équation de continuité (ou de conservation de l'électricité) est alors définie par :

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

L'expression locale du théorème de Gauss pour les régimes stationnaires s'exprime par :

$$\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho,$$

où  $\varepsilon$  est la permittivité diélectrique du milieu.

Des expériences ont montré que le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque ne dépendait pas de l'état du mouvement des charges, ainsi le théorème de Gauss se généralise aux régimes variables. Par contre, le théorème d'Ampère ne peut pas se généraliser en régime variable. Cependant, en appliquant le théorème de Gauss généralisé et en utilisant les propriétés géométriques du champ électrique, il est aisé d'établir l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) - \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \mathbf{J},$$

où  $\mu$  est la perméabilité magnétique du milieu.

Ainsi dans le vide, en présence de charges, le champ électromagnétique  $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$  satisfait les quatre équations suivantes :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Maxwell-Faraday}), \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Gauss-magnétique}), \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho \quad (\text{Gauss-électrique}), \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) - \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (\text{Maxwell-Ampère}). \quad (2.4)$$

On remarque que

- i. Ces équations sont de type hyperbolique en  $\mathbf{E}$  et en  $\mathbf{B}$ .
- ii. Par dérivation par rapport au temps de l'équation de Gauss-électrique (2.3) et en appliquant l'opérateur  $\operatorname{div}$  à l'équation (2.4), on retrouve la relation dite de continuité ou de conservation de l'électricité :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ .

iii. L'équation (2.1) entraîne :

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{B})}{\partial t},$$

cette relation donne que  $\operatorname{div} \mathbf{B}$  est constante en temps.

iv. L'évolution de  $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$  est donnée par les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell Faraday.

v. Si  $\rho$  et  $\mathbf{J}$  sont nuls, alors  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  vérifient l'équation des ondes.

**Remarque.**—

Dans les problèmes rencontrés en électromagnétisme des milieux continus, les densités de charge et de courant ne sont pas connues, ou plutôt ne le sont que partiellement. En effet,  $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$  crée une densité de charge  $\tilde{\rho}$  et une densité de courant  $\mathbf{J}^*$  créant à leur tour un champ électrique  $\mathbf{E}^*$  et un champ magnétique  $\mathbf{B}^*$  qui sont inconnus.

Ainsi, on peut décomposer  $\rho$  et  $\mathbf{J}$  :

$$\rho = \tilde{\rho} + \rho^* \text{ et } \mathbf{J} = \mathbf{J}^* + \mathbf{j},$$

où  $\rho^*$  et  $\mathbf{j}$  représentent respectivement les densités de charge et de courant données (ou extérieures).

Le système devient alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) - \tilde{\rho} &= \rho^*, \\ \operatorname{rot} (\mathbf{B}) - \frac{\partial (\mathbf{E})}{\partial t} - \mathbf{J}^* &= \mathbf{j}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Introduisons, maintenant, deux champs de vecteurs  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{M}$  de  $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$  liés à  $\tilde{\rho}$  et  $\mathbf{J}^*$  par :

$$\begin{cases} \operatorname{div} (-\mathbf{P}) = \tilde{\rho}. \\ \operatorname{rot} (\mathbf{M}) - \frac{\partial (-\mathbf{P})}{\partial t} - \tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{J}^*. \end{cases} \tag{2.6}$$

$\mathbf{P}$  étant le vecteur de polarisation et  $\mathbf{M}$  le vecteur de magnétisation. De (2.6), on peut déduire que  $\mathbf{J}^*$  et  $\tilde{\rho}$  vérifient aussi l'équation de continuité.

Enfin, en posant :

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} - \mathbf{M},\end{aligned}\tag{2.7}$$

où  $\mathbf{D}$  est appelé l'induction électrique et  $\mathbf{H}$  le champ magnétique.

On peut vérifier que les champs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  satisfont les équations :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{D}) &= \rho^*, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{H}) - \frac{\partial(\mathbf{D})}{\partial t} &= \mathbf{j}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

◇

Dans toute la suite,  $\rho^*$  sera notée  $\rho$ , pour respecter l'usage.

Finalement, on obtient que :

- $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  les inconnues sont.
- si  $\rho$  et  $\mathbf{J}^*$  sont données 12 inconnues pour 8 équations scalaires (dont seulement 6 indépendantes).

Il est donc nécessaire de rajouter des conditions, pour pouvoir résoudre le problème. Ces conditions dites constitutives, sont des lois de comportement, entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$ , elles dépendent des considérations physiques et décrivent les propriétés du matériau considéré. Sans elles, le problème d'évolution serait indéterminé.

Ces relations sont généralement données sous les formes suivantes :

- $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  sont liés par la relation :  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,
- $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  sont liés par la relation :  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ,
- $\mathbf{J}^*$  et  $\mathbf{E}$  sont liés par la relation :  $\mathbf{J}^* = \sigma \mathbf{E}$ ,  $\sigma$  étant la conductivité électrique.

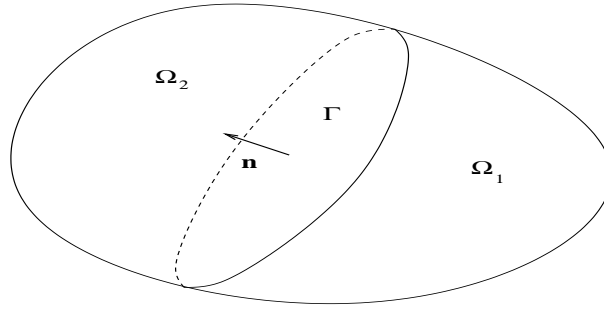
Ces lois de comportements sont caractéristiques du milieu considéré, elles sont données a posteriori.

En général,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  ont un caractère tensoriel et leur valeur n'est pas forcément constante (saturation, phénomène d'hystérésis, dépendance vis à vis de la température ...).

Dans les corps conducteurs, la conductivité électrique  $\sigma$  est strictement positive, tandis que  $\sigma$  est nulle dans les isolants (corps non conducteur).

## 2.2 Les conditions de transmission

Lors de la traversée de l'interface séparant deux milieux, le champ électromagnétique subit des discontinuités. Il est toutefois possible de considérer ces discontinuités. En effet, soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux milieux continus et  $\Gamma$  l'interface qui les sépare.



Soit  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à  $\Gamma$  dirigée de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$ . On note par  $\rho_\Gamma$  et  $J_\Gamma$  la densité de charge et de courant se créant à l'interface des deux domaines.

Les équations (2.1–2.4) intégrées sur des volumes incluant des portions de la surface  $\Gamma$ , l'application du théorème de la divergence donnent alors les conditions de transmissions :

- $(\mathbf{D}^2 - \mathbf{D}^1) \cdot \mathbf{n} = \rho_\Gamma,$
- $(\mathbf{H}^2 - \mathbf{H}^1) \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_\Gamma,$
- $(\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^1) \cdot \mathbf{n} = 0,$
- $(\mathbf{E}^2 - \mathbf{E}^1) \times \mathbf{n} = 0,$

où  $\cdot$  désignant le produit scalaire et  $\times$  le produit vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , et l'exposant  $i$ ,  $i = 1, 2$  la restriction du champ ou l'induction au domaine  $\Omega_i$ .

D'après ces conditions, la composante normale de  $\mathbf{B}$  et la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$

sont continues à la traversée de l'interface. Par contre si la densité de charge et de courant, se créant à l'interface entre deux domaines, sont non nulles, alors la composante normale de  $\mathbf{D}$  et tangentielle de  $\mathbf{H}$  sont discontinues.

Dans la suite, on supposera que l'interface est composée de surfaces à conductibilité bornée (voir [58]) ce qui assure la nullité du courant surfacique et donc la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$ .

### 2.3 Les conditions aux limites

On se place désormais dans un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  ayant pour frontière  $\Gamma$ . Si on suppose de plus que  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  est un conducteur parfait :

- $\mathbf{D} = \mathbf{E} = 0$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega \times \mathbb{R}_t$ ,
- $\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega \times \mathbb{R}_t$ .

En utilisant cette propriété, et les conditions de transmission, ainsi que la condition sur l'interface entre deux domaines du paragraphe 2.2, on en déduit sur  $\Gamma$  :

- $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = -\rho_\Gamma$ ,
- $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ ,
- $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ ,
- $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ .

Ces équations nous serviront à définir nos conditions aux limites dans toute la suite de cette étude.

### 2.4 Le problème de Maxwell en régime harmonique

On se place maintenant en régime harmonique où chaque grandeur physique varie périodiquement en temps sous la fréquence  $\omega$ , avec  $\varepsilon$  et  $\mu$  des constantes dépendant du milieu :

$$\mathbf{F}(x, t) = \mathbf{F}(x)e^{i\omega t},$$

où  $\mathbf{F}$  est l'une des grandeurs physiques  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{j}$ .

Le système se ramène alors dans  $\Omega$  aux équations suivantes :

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - i\omega \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{j}, \quad (2.10)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, \quad (2.11)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + i\omega \mu \mathbf{H} = 0, \quad (2.12)$$

définissant le problème de Maxwell en régime harmonique, les conditions sur  $\Gamma$  étant celle définies au paragraphe 2.3.

En supposant que la densité de courant est telle que  $\operatorname{rot} \mathbf{j}$  est de carré intégrable, on peut remarquer que

- i. L'équation (2.11) est redondante. En effet, en appliquant l'opérateur divergence à l'équation (2.12), on retrouve la condition de conservation du flux.
- ii. La condition sur  $\Gamma$  pour le champ électrique combinée à l'équation (2.10) donne :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{j} \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma.$$

De plus, en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation (2.10) puis en la combinant avec (2.12), on obtient l'équation du second ordre suivante :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{j}, \quad (2.13)$$

permettant de découpler le problème, on peut alors s'intéresser au problème du second ordre suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{j} \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{n} &= \mathbf{j} \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma, \\ \mathbf{E} &= (i\omega \mu)^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{j}) \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \quad (2.14)$$

**Remarque.**—

De manière symétrique, le problème peut se ramener à la seule inconnue  $\mathbf{E}$ .  $\diamond$



## **Chapitre 3**

# **Analyse du modèle en géométrie complexe**

A paraître dans "Actes des VIIemes journées Pau-Zaragoza de Mathématiques appliquées et statistiques"

Ce chapitre est consacré à l'étude théorique du problème de Maxwell en régime harmonique (introduit au paragraphe (2.4) du chapitre 2) dans un domaine à géométrie complexe.

Pour le cas général, on propose une nouvelle approche en introduisant un opérateur de type potentiel vecteur. Cet opérateur permet de traiter le problème d'une manière unifiée, tenant compte des complexités géométriques du domaine.

D'autres approches restent bien entendu possibles telle que l'utilisation directe de l'opérateur de Maxwell étudié dans [32] dans le cas d'un domaine simplement connexe avec bord régulier.

### 3.1 Introduction

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  à frontière lipschitzienne, notée  $\partial\Omega$ , et  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega$  et extérieur à  $\Omega$ . On suppose dans toute la suite que  $\Omega$  est rempli d'un matériau diélectrique homogène dans lequel on a les lois de comportement

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{x}, t), \quad (3.1)$$

où la permittivité diélectrique  $\varepsilon$  du milieu et sa perméabilité magnétique  $\mu$  sont deux constantes réelles positives. Le milieu considéré est supposé être isolant parfait et donc la densité du courant électrique  $\mathbf{j}$  provient uniquement des sources de courant et est imposée de façon extérieure.

Si, en outre, on se place en régime harmonique de pulsation  $\omega$  où

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})e^{i\omega t},$$

on aboutit alors au système (voir chapitre 2)

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{H} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} - i\omega\varepsilon\mathbf{E} &= \mathbf{j}, \\ \operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) &= 0, \\ \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) &= i\omega^{-1}\operatorname{div} \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Par ailleurs, on suppose que  $\Omega$  est en contact d'un conducteur parfait, ce qui conduit aux conditions aux limites sur  $\partial\Omega$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad , \quad \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.3)$$

Le système d'équations (3.2)+(3.3) implique divers problèmes théoriques et numériques qui ont été soulignés dans la littérature par de nombreux auteurs.

Lorsque le domaine est régulier, l'analyse des équations de Maxwell en régime harmonique a été résolu au moyen de l'opérateur de Maxwell (voir, par exemple, Leis [48] , Dautray-Lions [32]) :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{rot} \\ \mathbf{rot} & 0 \end{pmatrix}.$$

Cependant, lorsque le domaine est non régulier, à savoir si le domaine  $\Omega$  contient des côtés rentrant et des coins, le traitement des équations de Maxwell en temps-harmonique implique quelques complications sérieuses. C'est dû principalement à l'apparition de singularités près de ces coins et bords. Ce fait a été souligné la première fois par Weck [63]. Birman et Solomyak [17, 18] ont traité le problème aux valeurs propres pour les cavités non-lisses et ont clarifié la nature de ces singularités. On se réfère également à Costabel et à Dauge [28] pour une caractérisation complète des solutions singulières dans de telles cavités.

D'un point de vue analyse numérique, lorsque des méthodes standard sont utilisées pour discrétiser les équations de Maxwell en régime harmonique, divers problèmes apparaissent, notamment l'approximation des singularités (voir par exemple Kikushi [46]) mais aussi la pollution de ces méthodes par des modes parasites, par exemple dans [19], Boffi et *al.* montrent que le bon comportement de certaines méthodes classiques n'empêche pas nécessairement l'apparition de ces modes.

L'étude de la nature des singularités n'est pas l'objet de ce chapitre. Le but de ce chapitre est l'étude théorique du problème de Maxwell en régime harmonique. On commence par l'étude du problème source (3.2-3.3) dans un domaine non régulier multiplement connexe de  $\mathbb{R}^3$ . Nous proposons une nouvelle approche basée sur le problème du second ordre vérifié par le champ magnétique  $\mathbf{H}$ , que nous noterons  $\mathbf{u}$  pour simplifier :

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot} (\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u}) - \omega^2 \mu \mathbf{u} &= \mathbf{rot} (\varepsilon^{-1} \mathbf{j}) && \text{dans } \Omega, \\
\operatorname{div} (\mu \mathbf{u}) &= 0 && \text{dans } \Omega, \\
\mathbf{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{j} \times \mathbf{n} && \text{sur } \partial\Omega, \\
\mu \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Le champ électrique est alors donné par :

$$\mathbf{E} = (i\omega\varepsilon)^{-1}(\mathbf{rot} \mathbf{u} - \mathbf{j}) \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.5}$$

**Proposition 1.** *Pour des fonctions  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{j}$  assez régulières, les systèmes (3.2-3.3) et (3.4-3.5) sont équivalents, avec  $\mathbf{u}$  égale à  $\mathbf{H}$ .*

L'approche que nous utilisons pour résoudre (3.4) est basée à l'aide d'un opérateur (compact) convenablement choisi pour le cas général.

Ainsi, nous commencerons par donner une description géométrique du domaine et nous définirons les espaces nécessaires à l'étude du système (3.4). Ensuite, nous montrerons que le problème source (3.4) est bien posé.

Enfin, on propose une étude théorique du spectre de l'opérateur dans un domaine de type  $\Omega = ]0, a_1[ \times ]0, a_2[ \times ]0, a_3[$  (simplement connexe), en explicitant les valeurs propres de cet opérateur, ainsi que les vecteurs propres associés. Les valeurs propres seront comparées à celles obtenues numériquement dans le chapitre suivant.

## 3.2 Outils préliminaires et considérations géométriques

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\partial\Omega$ . On effectue les hypothèses classiques suivantes (voir [5])

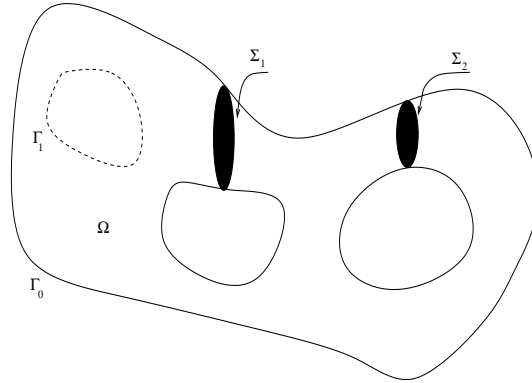
- i. Le domaine  $\Omega$  est Lipschitzien à frontière lipschitzienne.

- ii. La frontière  $\partial\Omega$  est la réunion de  $p+1$  composantes connexes  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_p$  où  $\Gamma_0$  désigne la frontière extérieure de  $\Omega$  (i.e la composante connexe de  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  de frontière  $\Gamma_0$  est non borné). On peut noter que  $p=0$  quand  $\partial\Omega$  est connexe.
- iii.  $\Omega$  est connexe mais pas nécessairement simplement connexe. Si  $\Omega$  est multiplement connexe, on suppose qu'il existe  $m$  surfaces  $\Sigma_i$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ , telles que
- Pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\Sigma_i$  est un ouvert d'une variété régulière  $\mathcal{M}_i$ .
  - Pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , la frontière de  $\Sigma_i$  est contenue dans  $\partial\Omega$ .
  - L'intersection  $\overline{\Sigma}_i \cap \overline{\Sigma}_j$  est vide si  $i \neq j$ .
  - L'ouvert

$$\mathring{\Omega} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m \Sigma_i$$

est simplement connexe et pseudo-Lipschitzien<sup>1</sup>.

En d'autres termes, l'entier  $m$  décrit la multiple connexité de  $\Omega$ . Les surfaces  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$  sont des "coupures" reliant les bords ( $\Gamma_i$ ),  $0 \leq i \leq p$  et rendant le domaine simplement connexe.



Dans la suite, on note par  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  ou dans  $L^2(\Omega)^3$ . Pour tout  $s \geq 0$ ,  $H^s(\Omega)$  est l'espace de Sobolev défini sur  $\Omega$  et  $H_0^s(\Omega)$  est la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^s(\Omega)$ . Le dual de  $H_0^s(\Omega)$  est noté par  $H^{-s}(\Omega)$ .

<sup>1</sup>voir [5] pour la définition.

D'autre part, pour tout  $i \in \{0, \dots, p\}$ ,  $H^{1/2}(\Gamma_i)$  dénote l'espace des traces sur  $\Gamma_i$  des distributions dans  $H^1(\Omega)$ , et  $H^{-1/2}(\Gamma_i)$  son dual. Le produit de dualité entre  $H^{-1/2}(\Gamma_i)$  et  $H^{1/2}(\Gamma_i)$  est donné par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_i}$ .

De même, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $H^{1/2}(\Sigma_i)$  est l'espace des restrictions à  $\Sigma_i$  des distributions dans  $H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{M}_i)$  et  $H^{1/2}(\Sigma_i)'$  son espace dual.

Considérons maintenant, les espaces

$$\begin{aligned} H(\operatorname{div}; \Omega) &= \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \}, \\ H(\operatorname{rot}; \Omega) &= \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \}, \end{aligned}$$

munis des normes

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} &= (\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{rot}; \Omega)} &= (\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On rappelle les propriétés principales de ces espaces

- i.  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$  est dense dans  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  et  $H(\operatorname{rot}; \Omega)$  (voir [40], respectivement Théorème 2.4 et 2.10).
- ii. Soit  $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ . Alors, la composante normale de  $\mathbf{v}$ , c'est à dire  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ , est définie dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  et on a la formule de Green suivante

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial\Omega} = (\mathbf{v}, \nabla \varphi) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, \varphi). \quad (3.6)$$

De plus, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , la composante normale de  $\mathbf{v}$  sur  $\Sigma_i$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  est dans  $H^{1/2}(\Sigma_i)'$ . De plus, si  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  est nulle sur  $\partial\Omega$  (voir [5], Lemme 3.10) :

$$\forall \theta \in H^1(\overset{\circ}{\Omega}), \quad \int_{\overset{\circ}{\Omega}} \mathbf{v} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \theta d\mathbf{x} + \int_{\overset{\circ}{\Omega}} (\operatorname{div} \mathbf{v}) \theta d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, [\theta]_i \rangle_{\Sigma_i}, \quad (3.7)$$

où  $[\theta]_i$  dénote le saut de  $\theta$  à travers  $\Sigma_i$  et  $\overset{\circ}{\nabla}$  le gradient dans  $\overset{\circ}{\Omega}$ .

- iii. De même, si  $\mathbf{v} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ , alors la composante tangentielle de  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} \times \mathbf{n}$ , est dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$  et on a aussi la formule de Green suivante

$$\forall \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3, \quad \langle \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle_{\partial\Omega} = (\operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{w}) - (\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{w}). \quad (3.8)$$

Considérons également les sous espaces de  $H(\text{div}; \Omega)$  et  $H(\text{rot}; \Omega)$  suivants :

$$\begin{aligned} H_0(\text{div}; \Omega) &= \{ \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega) \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \}, \\ H_0(\text{rot}; \Omega) &= \{ \mathbf{v} \in H(\text{rot}; \Omega) \mid \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \}. \end{aligned}$$

On note que  $\mathcal{D}(\Omega)^3$  est dense dans ces sous-espaces (voir [40]).

Notons aussi que la formule (3.8) reste valable si  $\mathbf{w} \in H(\text{rot}; \Omega)$  et  $\mathbf{v} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$ .

Introduisons, maintenant, les espaces

$$\begin{aligned} Y_T(\Omega) &= H_0(\text{div}; \Omega) \cap H(\text{rot}; \Omega), \\ Y_N(\Omega) &= H(\text{div}; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega), \end{aligned}$$

munis de la norme

$$\|\mathbf{v}\|_Y = (\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div } \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{rot } \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}. \quad (3.9)$$

On pose, enfin

$$\begin{aligned} G_T &= \{ \mathbf{v} \in Y_T(\Omega) \mid \text{div } \mathbf{v} = 0, \mathbf{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0} \}, \\ G_N &= \{ \mathbf{v} \in Y_N(\Omega) \mid \text{div } \mathbf{v} = 0, \mathbf{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0} \}. \end{aligned}$$

Ces deux espaces sont caractérisés par le lemme suivant

**Lemme 1.** ([34], [5]) *Les espaces vectoriels  $G_T$  et  $G_N$  sont de dimensions finies et*

$$\dim G_T = m, \quad \dim G_N = p.$$

*De plus, il existe une base  $(\mathbf{q}_i)_{i=1,\dots,m}$  (resp.  $(\mathbf{f}_i)_{i=1,\dots,p}$ ) de  $G_T$  (resp. of  $G_N$ ) telle que :*

$$\forall i, j \in \{1, \dots, m\} \quad \langle \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, p\} \quad \langle \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.11)$$

On notera par  $\mathcal{P}_T$  (resp.  $\mathcal{P}_N$ ) la projection orthogonale de  $Y_T(\Omega)$  (resp. de  $Y_N(\Omega)$ ) sur  $G_T$  (resp. sur  $G_N$ ) pour le produit scalaire associé à la norme  $\|\cdot\|_Y$ . Il est utile de remarquer que l'on peut prolonger ces projections à tout  $\mathbf{v}$  dans  $L^2(\Omega)^3$  à divergence nulle (voir [34], [5]) par :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_T \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_i} \mathbf{q}_i, \\ \mathcal{P}_N \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^p \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i.\end{aligned}$$

Les deux lemmes suivants ont été établis par Dominguez [34] quand le domaine est régulier et par Amrouche *et al.* [5] lorsque le domaine est non régulier.

**Lemme 2.** ([34], [5]) *L'application*

$$\mathbf{v} \longrightarrow |\mathbf{v}|_{Y_T(\Omega)} = (\|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^m |\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_i}|^2)^{1/2},$$

est une norme sur  $Y_T(\Omega)$  équivalente à la norme  $\|\cdot\|_Y$ .

**Lemme 3.** ([34], [5]) *L'application*

$$\mathbf{v} \longrightarrow |\mathbf{v}|_{Y_N(\Omega)} = (\|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^p |\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i}|^2)^{1/2},$$

est une norme sur  $Y_N(\Omega)$  équivalente à la norme  $\|\cdot\|_Y$ .

Dans la suite, on posera

$$\alpha_0 = \inf_{\mathbf{v} \in Y_T(\Omega), \mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{v}|_{Y_T(\Omega)}}{\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}}. \quad (3.12)$$

La constante  $\alpha_0$  est strictement positive, selon le Lemme 2.

### 3.3 Position du problème. Une formulation faible.

Considérons le système : *Étant donné  $\mathbf{j}$  dans  $L^2(\Omega)^3$ , chercher  $\mathbf{u}$  dans  $Y_T(\Omega)$  vérifiant :*

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} - k^2 \mathbf{u} = \mathbf{rot} \mathbf{j}, \quad (3.13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{j} \times \mathbf{n}, \quad (3.15)$$

où  $k$  est le nombre d'onde donné par

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu}\omega. \quad (3.16)$$

On remarque que les conditions aux limites (3.15) ont un sens si  $\mathbf{j} \in H(\operatorname{rot}, \Omega)$  (ainsi  $\mathbf{rot} \mathbf{u} \in H(\operatorname{rot}, \Omega)$ ). Toutefois, on aura tendance à travailler avec le problème suivant

*Trouver  $\mathbf{u}$  dans  $Y_T(\Omega)$  vérifiant*

$$\forall \mathbf{v} \in Y_T(\Omega), (\mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v}) + \gamma(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v}) + \delta(\mathcal{P}_T \mathbf{u}, \mathcal{P}_T \mathbf{v}) - k^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{v}), \quad (3.17)$$

où  $\mathbf{j}$  est supposé seulement dans  $L^2(\Omega)^3$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  sont deux constantes réelles positives.

**Proposition 2.** *Soit  $\mathbf{j} \in L^2(\Omega)^3$  et supposons que les constantes  $k$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  soient strictement positives et qu'elles vérifient :*

$$\frac{k^2}{\gamma} \notin EV(\Delta^{neu}), \quad \frac{k^2}{\delta} \neq 1, \quad (3.18)$$

où  $EV(\Delta^{neu})$  est l'ensemble de valeurs propres de l'opérateur de Laplace avec condition aux limites homogènes de Neumann. Alors

- Toute solution de (3.17) vérifie (3.13) et (3.14) au sens des distributions.
- Si  $\mathbf{j}$  appartient à  $H(\operatorname{rot}; \Omega)$ , alors les problèmes (3.17) et (3.13)-(3.15) sont équivalents.

*Preuve* — 1°) Soit  $\mathbf{u}$  une solution de (3.17). Alors, en choisissant  $\mathbf{v} = \mathcal{P}_T \mathbf{u}$ , on obtient facilement  $\mathcal{P}_T \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , dès que  $\frac{k^2}{\delta} \neq 1$ .

D' autre part, en considérant

$$V = \{\theta \in H^1(\Omega) \mid \Delta\theta \in L^2(\Omega), \partial_n \theta|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

En appliquant le lemme 1 de [29],  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  est dans  $H^1(\Omega)$ . En prenant  $\mathbf{v} = \nabla s$  avec  $s$  dans  $V$ , on a alors  $\mathbf{v}$  dans  $H(\operatorname{div}; \Omega)$ . En choisissant un tel champ  $\mathbf{v}$  dans (3.17), on obtient

$$\gamma(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v}) - k^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0,$$

où encore

$$\begin{aligned} & \forall s \in V, \\ & (\Delta \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{k^2}{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{u}, s) = 0. \end{aligned}$$

Il apparaît alors que  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  est solution du problème

$$\Delta(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \frac{k^2}{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (3.19)$$

$$\partial_n(\operatorname{div} \mathbf{u}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (3.20)$$

Il provient de la condition (3.18) que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ .

Enfin, avec  $\mathbf{v}$  choisie dans  $\mathcal{D}(\Omega)^3$ , on déduit que  $\mathbf{u}$  satisfait (3.13) au sens des distributions.

Si de plus  $\mathbf{j} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ , alors nécessairement

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} \in H(\operatorname{rot}; \Omega).$$

En considérant  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$  dans (3.17) et en utilisant la formule de Green (3.8), on obtient (3.15).

2°) Supposons que  $\mathbf{j} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$  et soit  $\mathbf{u}$  une solution de (3.13)-(3.15). En multipliant (3.13) par  $\mathcal{P}_T \mathbf{u}$  et en appliquant la formule de Green (3.8), il résulte l'identité

$$\mathcal{P}_T \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

En multipliant à nouveau (3.13) par  $\mathbf{v} \in Y_T(\Omega)$  et en intégrant par parties, cela nous donne (3.17).  $\diamond$

### 3.3.1 Position du problème : le cas des basses fréquences

Lorsque le nombre d'onde  $k$  est plus petit que  $\alpha_0$  définie par (3.12), il est utile de remarquer

que l'existence et l'unicité de solutions de (3.17) découlent immédiatement du théorème de Lax-Milgram et du Lemme 2 :

**Proposition 3.** *Supposons que  $\gamma \geq 1$ ,  $\delta \geq 1$  et  $k < \alpha_0$ . Alors, le problème (3.17) admet une unique solution  $\mathbf{u} \in Y_T(\Omega)$ . En outre, on a*

$$|\mathbf{u}|_{Y_T(\Omega)} \leq \frac{\alpha_0^2}{\alpha_0^2 - k^2} \|\mathbf{j}\|_{0,\Omega}. \quad (3.21)$$

On se propose de montrer l'estimation (3.21).

*Preuve* — Par définition de  $\alpha_0$ , on a

$$\forall \mathbf{u} \in Y_T(\Omega), \quad \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha_0} |\mathbf{u}|_{Y_T(\Omega)},$$

donc puisque  $\gamma \geq 1$  et  $\delta \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{k^2}{\alpha_0^2}\right) |\mathbf{u}|_{Y_T(\Omega)}^2 &\leq \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \gamma \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \delta (\mathcal{P}_T \mathbf{u}, \mathcal{P}_T \mathbf{u}) - k^2 \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 = (\mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{u}), \\ &\leq \|\mathbf{j}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

ainsi, dès que  $k < \alpha_0$ , on obtient (3.21).  $\diamond$

**Remarque.**— Si  $\mathbf{rot} \mathbf{j} \in L^2(\Omega)^3$  et  $\mathbf{j} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur  $\partial\Omega$ , l'estimation (3.21) devient

$$|\mathbf{u}|_{Y_T(\Omega)} \leq \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 - k^2} \|\mathbf{rot} \mathbf{j}\|_{0,\Omega}, \quad (3.22)$$

C'est une conséquence immédiate de l'application de la formule de Green (3.8) à droite de (3.17).  $\diamond$

### 3.3.2 Position du problème : le cas général

Le but de paragraphe est de traiter le problème (3.17) lorsque le nombre d'onde  $k$  est quelconque. On énonce le théorème suivant

**Théorème 1.** *Supposons que  $\mathbf{j} \in L^2(\Omega)^3$  et que les conditions (3.18) soient vérifiées. Alors, il existe une suite de réels strictement positifs,  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $+\infty$  telle que*

- i. Si  $k \notin \{\alpha_i, i \in \mathbb{N}\}$  alors le problème (3.17) admet une et une seule solution  $\mathbf{u}$  dans  $Y_T(\Omega)$ .
- ii. Si  $k = \alpha_m$  pour un certain entier  $m$ , alors le problème homogène (quand  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ) admet un ensemble de solutions formant un espace vectoriel  $E_m$  de dimension finie, et le problème (3.17) est résoluble dans  $Y_T(\Omega)$  si et seulement si  $\mathbf{j}$  vérifie

$$(\mathbf{j}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}) = 0, \quad (3.23)$$

pour tout  $\boldsymbol{\varphi}$  dans  $E_m$ . Si cette condition est vérifiée, la solution de (3.17) est unique à un élément de  $E_m$  près.

### Preuve du Théorème 1.

La preuve du théorème 1 se décompose en quatre étapes. L'étape 1 consiste en l'introduction et l'étude d'un nouvel opérateur. L'étape 2 est consacrée à son adjoint. L'étape 3 consiste à réécrire le problème en terme de cet opérateur. Enfin, pour conclure, l'alternative de Fredholm est appliquée à l'étape 4.

#### ÉTAPE 1. UN OPÉRATEUR.

Considérons le sous-espace fermé de  $H(\text{div}; \Omega)$

$$X = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \mid \text{div} \mathbf{v} = 0 \text{ et } \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0, \ 1 \leq i \leq p\}. \quad (3.24)$$

Pour toute fonction vectorielle  $\mathbf{w}$  dans  $X$  considérons le problème :

$$\text{Trouver } \mathbf{z} \in Y_T(\Omega) \text{ tel que } \mathbf{rot} \mathbf{z} = \mathbf{w}, \ \text{div} \mathbf{z} = 0, \ \forall i \in \{1, \dots, m\} \ \langle \mathbf{z}, \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_i} = 0. \quad (3.25)$$

**Remarque.**—  $\mathbf{z}$  appartient aussi à  $X$  ◇

**Lemme 4.** *Le problème (3.25) admet une unique solution  $\mathbf{z} \in Y_T(\Omega)$  et il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$  telle que*

$$\|\mathbf{z}\|_{Y_T(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}. \quad (3.26)$$

**Preuve du Lemme 4.**

L'existence et l'unicité sont montrées dans [5] (Théorème 3.12). La continuité est une conséquence directe du Lemme 2.  $\diamond$

Dans la suite, on notera par  $\mathcal{K}$  l'opérateur linéaire et continu défini sur  $X$  à valeurs dans  $X$  définie par

$$\mathcal{K} : \mathbf{w} \in X \mapsto \mathbf{z} \in X \text{ solution de (3.25),}$$

**Lemme 5.**  $\mathcal{K}$  est un opérateur compact de  $X$  dans  $X$ .

**Preuve du Lemme 5.**

Pour prouver la compacité de  $\mathcal{K}$ , le lemme suivant s'avère utile (voir [40], Théorème 3.1 pour la démonstration).

**Lemme 6.** Une fonction  $\mathbf{w}$  dans  $L^2(\Omega)^3$  appartient à  $X$  si et seulement si il existe un champ de vecteur  $\boldsymbol{\varphi}$  dans  $H^1(\Omega)^3$  vérifiant

$$\mathbf{w} = \text{rot } \boldsymbol{\varphi}.$$

De plus, il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$  telle que pour tout  $\mathbf{w}$  dans  $X$ , le champ correspondant  $\boldsymbol{\varphi}$  peut être choisi tel que

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}.$$

Considérons, maintenant, une suite  $(\mathbf{w}_n)_n$  de  $X$  vérifiant

$$\|\mathbf{w}_n\|_{0,\Omega} \leq C_1,$$

où  $C_1$  est une constante ne dépendant pas de  $n$ . Alors, selon le Lemme 6, il existe une suite  $(\boldsymbol{\varphi}_n)_n$  dans  $H^1(\Omega)^3$  telle que

$$\forall n, \text{rot } \boldsymbol{\varphi}_n = \mathbf{w}_n, \|\boldsymbol{\varphi}_n\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C.$$

La suite  $\boldsymbol{\varphi}_n$  étant bornée dans  $H^1(\Omega)^3$ , on peut en extraire une sous-suite (toujours notée par  $(\boldsymbol{\varphi}_n)_n$ ) convergeant fortement dans  $L^2(\Omega)^3$ .

Soit, maintenant, pour tout  $n$ ,  $s_n$  l'unique solution dans  $H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}$  du problème de Neumann

$$\forall \Psi \in H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}, \quad \int_{\Omega} \nabla s_n \cdot \nabla \Psi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}_n \cdot \nabla \Psi d\mathbf{x},$$

et soit  $(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n)_n$  la suite dans  $Y_T(\Omega)$  définie par  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n = \boldsymbol{\varphi}_n - \nabla s_n$ .

On peut aisément établir que  $(s_n)_n$  converge dans  $H^1(\Omega)^3 \setminus \mathbb{R}$ , ce qui nous permet de déduire que la suite  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n$  converge dans  $L^2(\Omega)^3$  vers un élément  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$  de  $Y_T(\Omega)$ .

De plus, comme

$$\|\mathcal{P}_T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n\|_{0,\Omega} \leq \|\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n\|_{0,\Omega},$$

il est clair que  $\mathcal{P}_T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n$  converge vers  $\mathcal{P}_T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ .

Enfin, soit  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n^* = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n - \mathcal{P}_T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n$ , cette suite vérifie  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n^* = \mathcal{K} \mathbf{w}_n$ , en effet  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n^*$  vérifie

$$\mathbf{rot} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n^* = \mathbf{w}_n, \quad \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n^* = 0, \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n^* \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \mathcal{P}_T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n^* = \mathbf{0},$$

ce qui nous permet de conclure.  $\diamond$

#### ÉTAPE 2. L' OPÉRATEUR ADJOINT.

On a besoin tout d'abord du lemme suivant

**Lemme 7.** ([5], [34]) *Un champ  $\mathbf{v}$  dans  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  vérifie*

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

*si et seulement si il existe un unique potentiel vecteur  $\Phi \in Y_N(\Omega)$  tel que*

$$\mathbf{rot} \Phi = \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \Phi = 0, \quad \langle \Phi \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (3.27)$$

En particulier, ce lemme implique que tout champ de vecteur  $\mathbf{w}$  dans  $L^2(\Omega)^3$  admet une unique décomposition sous la forme

$$\mathbf{w} = \overset{\circ}{\nabla} q + \mathbf{rot} \Phi, \quad (3.28)$$

où  $\Phi$  appartient à  $Y_N(\Omega)$  et vérifie

$$\operatorname{div} \Phi = 0, \quad \langle \Phi \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0, \quad 0 \leq i \leq p,$$

tandis que  $q$  appartient à l'espace

$$\Theta = \{s \in H^1(\overset{\circ}{\Omega}) \mid [s]_{\Sigma_i} = \text{constante}, \ 1 \leq i \leq m\},$$

et est l'unique solution dans  $\Theta \setminus \mathbb{R}$  du problème quasi-Neumann

$$\forall p \in \Theta, \int_{\overset{\circ}{\Omega}} \nabla s \cdot \nabla p \, d\mathbf{x} = \int_{\overset{\circ}{\Omega}} \mathbf{w} \cdot \overset{\circ}{\nabla} p \, d\mathbf{x},$$

où  $\overset{\circ}{\nabla} p$  dénote le prolongement à  $L^2(\Omega)^3$  du gradient  $\nabla p$  considéré au sens des distributions dans  $\mathcal{D}'(\overset{\circ}{\Omega})$ .

De plus, la décomposition (3.28) est unique dans  $(\Theta \setminus \mathbb{R}) \times Y_N(\Omega)$ .

L'opérateur  $\mathcal{K}^*$  est défini comme suit

$$\mathcal{K}^* : \mathbf{w} \in L^2(\Omega)^3 \mapsto \Phi \in X,$$

où  $\Phi$  est l'unique fonction dans la décomposition (3.28).  $\mathcal{K}^*$  est un opérateur continu défini de  $L^2(\Omega)^3$  vers  $X$ .

**Remarque.**— En général  $\text{rot}(\mathcal{K}^* \mathbf{w}) \neq \mathbf{w}$ . Cependant, si  $\mathbf{w}$  appartient à  $H(\text{div}; \Omega)$  et vérifie

$$\text{div} \mathbf{w} = \mathbf{0}, \ \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \ \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_i} = 0, \ i = 1, \dots, m, \quad (3.29)$$

alors  $\text{rot} \mathcal{K}^* \mathbf{w} = \mathbf{w}$ . ◇

Le lemme suivant donne la relation entre  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}^*$  :

**Lemme 8.** *La restriction de  $\mathcal{K}^*$  à  $X$  définit l'opérateur adjoint de  $\mathcal{K}$ .*

**Preuve du Lemme 8.**

Soit  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{z}$  deux éléments de  $X$ . La fonction  $\mathbf{z}$  peut se décomposer sous la forme

$$\mathbf{z} = \overset{\circ}{\nabla} q + \text{rot}(\mathcal{K}^* \mathbf{z}),$$

où  $q \in \Theta$ . Ainsi

$$\int_{\Omega} \mathcal{K} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{K} \mathbf{w} \cdot \overset{\circ}{\nabla} q \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{K} \mathbf{w} \cdot \text{rot}(\mathcal{K}^* \mathbf{z}) \, d\mathbf{x}.$$

En utilisant la formule de Green (3.7) et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{K} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{x} &= - \int_{\overset{\circ}{\Omega}} \operatorname{div} (\mathcal{K} \mathbf{w}) q \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^m [q]_i \langle \mathcal{K} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_i} \\ &\quad + \int_{\Omega} \operatorname{rot} (\mathcal{K} \mathbf{w}) \cdot \mathcal{K}^* \mathbf{z} \, d\mathbf{x}, \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathcal{K}^* \mathbf{z} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\mathcal{K}^*$ , restreint à  $X$ , est l'opérateur adjoint de  $\mathcal{K}$ .  $\diamond$

### ÉTAPE 3. UNE NOUVELLE FORMULATION DU PROBLÈME

Réécrivons le problème (3.17) au moyen de l'opérateur  $\mathcal{K}$ .

**Proposition 4.** *Soit  $\mathbf{j} \in L^2(\Omega)^3$  et soit  $\theta \in H_0^1(\Omega)$  la solution du problème de Dirichlet*

$$\Delta \theta = \operatorname{div} \mathbf{j} \in H^{-1}(\Omega), \quad \theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

*Posons*

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{j} - \nabla \theta \in H(\operatorname{div}; \Omega), \quad \mathbf{j}^* = \mathbf{j}_1 - \mathcal{P}_N \mathbf{j}_1,$$

*et si la condition dans (3.18) est vérifiée.*

*Alors,  $\mathbf{u}$  est solution de (3.17) si et seulement si  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathcal{K} \mathbf{j}^*$  appartient  $X$  et est solution du problème*

$$\hat{\mathbf{u}} - k^2 \mathcal{K} \mathcal{K}^* \hat{\mathbf{u}} = k^2 \mathcal{K} \mathcal{K}^* \mathbf{j}^*. \quad (3.30)$$

#### Preuve de la Proposition 4.

Tout d'abord, observons que si on pose  $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{j} - \mathbf{j}^* = \nabla \theta + \mathcal{P}_N \mathbf{j}_1$ , alors  $\boldsymbol{\ell} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$  et

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\ell} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega.$$

- i. Soit  $\mathbf{u}$  solution de (3.17). Alors, il apparaît de la Proposition 2 que  $\mathbf{u}$  vérifie (3.13), (3.14) et  $\mathcal{P}_T \mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Posons  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathcal{K} \mathbf{j}^*$ . Il s'ensuit immédiatement que  $\hat{\mathbf{u}}$  appartient à  $X \cap Y_T(\Omega)$  et

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{u}} - k^2 \hat{\mathbf{u}} = k^2 \mathcal{K} \mathbf{j}^*, \quad (3.31)$$

$$\mathcal{P}_T \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (3.32)$$

Ainsi,  $\mathbf{rot} \hat{\mathbf{u}}$  appartient à  $H(\mathbf{rot}; \Omega)$ . En outre, de (3.17), on déduit que  $\hat{\mathbf{u}}$  vérifie

$$(\mathbf{rot} \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{rot} \mathbf{v}) - k^2(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = k^2(\mathcal{K}\mathbf{j}^*, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\ell}, \mathbf{rot} \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in Y_T(\Omega).$$

En choisissant  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$ , cela donne

$$\langle \mathbf{rot} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\partial\Omega} = 0$$

Ainsi  $\mathbf{rot} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur  $\partial\Omega$ . Il en résulte que  $\mathbf{rot} \hat{\mathbf{u}}$  est dans  $X$ . Comme  $k^2(\mathcal{K}\mathbf{j}^* + \hat{\mathbf{u}})$  est dans  $L^2(\Omega)^3$  et compte tenu de (3.31) et de la décomposition (unique) (3.28)

$$\mathbf{rot} \hat{\mathbf{u}} = \mathcal{K}^*(k^2\hat{\mathbf{u}} + k^2\mathcal{K}\mathbf{j}^*).$$

De plus, comme  $\hat{\mathbf{u}}$  est dans  $X \cap Y_T(\Omega)$ , et que  $\mathcal{K}^*(k^2\hat{\mathbf{u}} + k^2\mathcal{K}\mathbf{j}^*)$  est dans  $X$ , on a

$$\hat{\mathbf{u}} = k^2\mathcal{K}\mathcal{K}^*(\hat{\mathbf{u}} + \mathcal{K}\mathbf{j}^*).$$

ii. Inversement, soit  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathcal{K}\mathbf{j}^*$  solution de (3.30). Alors,

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{K}\mathbf{j}^* = \mathcal{K}(k^2(\mathcal{K}^*\hat{\mathbf{u}} + \mathcal{K}^*\mathcal{K}\mathbf{j}^*) + \mathbf{j}^*),$$

ce qui induit que  $\mathbf{u}$  est dans  $Y_T(\Omega)$  et satisfait

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathcal{P}_T \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

On a aussi que

$$\mathbf{rot} \hat{\mathbf{u}} = k^2 \mathbf{rot} (\mathcal{K}\mathcal{K}^*(\hat{\mathbf{u}} + \mathcal{K}\mathbf{j}^*)) = k^2 \mathcal{K}^*(\hat{\mathbf{u}} + \mathcal{K}\mathbf{j}^*).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in Y_T(\Omega) \quad (\mathbf{rot} \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{rot} \mathbf{v}) &= k^2(\mathcal{K}^*(\hat{\mathbf{u}} + \mathcal{K}\mathbf{j}^*), \mathbf{rot} \mathbf{v}) \\ &= k^2(\mathbf{rot} (\mathcal{K}^*(\hat{\mathbf{u}} + \mathcal{K}\mathbf{j}^*)), \mathbf{v}), \\ &= k^2(\hat{\mathbf{u}} + \mathcal{K}\mathbf{j}^*, \mathbf{v}), \\ &= k^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

puisque  $\mathbf{rot}(\mathcal{K}^*(\hat{\mathbf{u}} + \mathcal{K}\mathbf{j}^*)) = \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{K}\mathbf{j}^*$  compte tenu du fait que  $\hat{\mathbf{u}} + \mathcal{K}\mathbf{j}^*$  vérifie les conditions (3.29) de la remarque.

On retrouve donc

$$(\mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v}) - k^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{j}^*, \mathbf{rot} \mathbf{v}) = (\mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{v}),$$

ce qui implique que  $\mathbf{u}$  est solution de (3.17).  $\diamond$

#### ÉTAPE 4. ALTERNATIVE DE FREDHOLM.

Considérons l'opérateur  $T = \mathcal{K}\mathcal{K}^*$ .  $T$  est, évidemment, auto-adjoint et compact, résultat trivial dès que l'on a établi le Lemme 5, et la continuité de  $\mathcal{K}^*$ .

Les valeurs propres de  $T$  forment une suite dénombrable  $s_1^2 \geq s_2^2 \geq \dots \geq s_n^2 \geq \dots$  où  $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$  sont, en fait, les *valeurs singulières* de l'opérateur  $\mathcal{K}$  (c'est à dire, les valeurs propres de  $(\mathcal{K}\mathcal{K}^*)^{\frac{1}{2}}$ ). Ces réels, en général, diffèrent des valeurs propres de  $\mathcal{K}$  si l'opérateur n'est pas normal. On peut notamment consulter [42] pour plus de détails.

Maintenant, appliquons l'alternative de Fredholm au problème non homogène (3.30), ce qui donne

- Si  $\frac{1}{k} \notin \{s_1, s_2, \dots\}$ , alors (3.30) admet une et une seule solution.
- Si  $\frac{1}{k} = s_m$  pour un certain  $m \in \{1, 2, \dots\}$ , alors (3.30) est résolvable si et seulement si le terme de droite vérifie

$$(\mathcal{K}\mathcal{K}^*\mathcal{K}\mathbf{j}^*, \varphi) = 0, \tag{3.33}$$

pour tout  $\varphi$  satisfaisant  $\mathcal{K}\mathcal{K}^*\varphi = s_k^2\varphi$ .

Si cette condition de compatibilité est vérifiée, alors (3.30) a une unique solution à un vecteur propre de  $T$  près (le vecteur propre associé à la valeur propre  $s_m^2$ ).

Reformulons cette condition de compatibilité (3.33) différemment. On a alors

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathcal{K}\mathcal{K}^*\mathcal{K}\mathbf{j}^*, \varphi) \\
&= (\mathbf{j}^*, \mathcal{K}^*\mathcal{K}\mathcal{K}^*\varphi) \\
&= s_m^2(\mathbf{j}^*, \mathcal{K}^*\varphi) \\
&= s_m^2(\mathbf{j} - \ell, \mathcal{K}^*\varphi) \\
&= s_m^4(\mathbf{j} - \ell, \text{rot } \varphi), \\
&= s_m^4(\mathbf{j}, \text{rot } \varphi).
\end{aligned}$$

puisque  $s_m^2 \text{rot } \varphi = \text{rot } (\mathcal{K}\mathcal{K}^*\varphi) = \mathcal{K}^*\varphi$  et  $\text{rot } \ell = \mathbf{0}$  (avec  $\ell = \mathbf{j} - \mathbf{j}^*$ ). Ceci termine la preuve du Théorème 1.  $\diamond$

### 3.4 Le spectre de $\mathcal{K}\mathcal{K}^*$ lorsque $\Omega$ est un parallélépipède

Ce paragraphe est consacré au spectre de l'opérateur  $\mathcal{K}\mathcal{K}^*$  dans le cas d'une géométrie simple.

En fait, on suppose que  $\Omega$  est un parallélépipède rectangle,  $\Omega = ]0, a_1[ \times ]0, a_2[ \times ]0, a_3[$ .

On montre que

**Proposition 5.** *Le spectre de l'opérateur  $\mathcal{K}\mathcal{K}^*$  est*

$$\sigma(\mathcal{K}\mathcal{K}^*) = \{0\} \cup \left\{ s^2 \mid \frac{1}{s^2} = \frac{n^2\pi^2}{a_1^2} + \frac{p^2\pi^2}{a_2^2} + \frac{m^2\pi^2}{a_3^2} \text{ avec } (n, p, m) \in \mathbb{N}^3 \text{ and } np + nm + mp > 0 \right\}.$$

De plus, les vecteurs propres associés sont

$$\begin{pmatrix} \alpha \sin \frac{n\pi x_1}{a_1} \cos \frac{p\pi x_2}{a_2} \cos \frac{m\pi x_3}{a_3} \\ \beta \cos \frac{n\pi x_1}{a_1} \sin \frac{p\pi x_2}{a_2} \cos \frac{m\pi x_3}{a_3} \\ \gamma \cos \frac{n\pi x_1}{a_1} \cos \frac{p\pi x_2}{a_2} \sin \frac{m\pi x_3}{a_3} \end{pmatrix},$$

où  $(n, p, m) \in \mathbb{N}^3$  et  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  sont tels que

$$\alpha \frac{n}{a_1} + \beta \frac{p}{a_2} + \gamma \frac{m}{a_3} = 0.$$

La preuve de cette proposition est donnée dans l'annexe.



# Chapitre 4

## Une méthode spectrale

Ce chapitre est consacré au calcul numérique de la solution du problème de Maxwell dans un domaine polyédrique par une méthode spectrale.

### 4.1 Introduction

Dans un premier temps, on s'intéresse à la régularité de la solution du problème (3.17) dans un domaine régulier et pour des données régulières, puis lorsque le domaine est parallélépipédique rectangle.

Ensuite, on se propose de calculer une approximation de la solution du problème (3.2)-(3.3) par une méthode spectrale avec intégration numérique et une méthode d'éléments finis de type  $P^1$  (cette dernière est présentée sommairement).

On donnera des estimations d'erreurs pour les deux méthodes, ainsi que des résultats numériques. On présentera des courbes d'erreurs entre une solution analytique et la solution calculée par un code de calcul 3D, pour chacune des deux méthodes.

Après une brève description de ces méthodes et après avoir prouvé leur convergences numériques, on se propose de les comparer en observant les courbes d'erreurs obtenues dans une géométrie simple.

Enfin, on comparera aussi les quatre premières valeurs propres du spectre du problème

discret calculé numériquement par les deux méthodes précédentes à celles du problème continu obtenues théoriquement dans le paragraphe (3.4) dans le cube unitaire.

## 4.2 Régularité de la solution

Le but de cette partie est de montrer quelques résultats de régularité de la solution lorsque le domaine est régulier et lorsque le domaine est parallélépipédique.

On énonce la proposition suivante.

**Proposition 6.** *Supposons que  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^{m,1}$  avec  $m \geq 2$  et soit  $\mathbf{j} \in L^2(\Omega)^3$  tel que*

$$\mathbf{rot} \mathbf{j} \in H^{m-2}(\Omega)^3, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{n} \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)^3,$$

alors la solution  $\mathbf{u}$  de (3.17) appartient à  $H^m(\Omega)^3$ .

Quand le domaine est un parallélépipède, on a

**Proposition 7.** *Si  $\Omega = ]0, a_1[ \times ]0, a_2[ \times ]0, a_3[$ . Supposons aussi que  $\mathbf{j} \in H(\mathbf{rot}; \Omega)$  et vérifie*

$$\mathbf{j} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega, \tag{4.1}$$

alors la solution du problème (3.17) est dans  $H^2(\Omega)^3$ . De plus, si  $k < \alpha_0$  alors

$$\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{c(\Omega)}{\alpha_0^2 - k^2} \|\mathbf{rot} \mathbf{j}\|_{0,\Omega}. \tag{4.2}$$

**Remarque.**— Dans les deux propositions,  $\mathbf{u}$  est aussi solution du problème classique (3.13)-(3.15).

### Preuve de la Proposition 6.

Rappelons, tout d'abord, le lemme

**Lemme 9** ([37], [5]). *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  de frontière de classe  $\mathcal{C}^{m,1}$  ( $m \geq 1$ ).*

*Alors, si  $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega)^3$  est tel que  $\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi} \in H^{m-1}(\Omega)^3$ ,  $\text{div} \boldsymbol{\varphi} \in H^{m-1}(\Omega)$  et  $\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  ou  $\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n} \in H^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$ , alors  $\boldsymbol{\varphi}$  appartient à  $H^m(\Omega)^3$ .*

Supposons que  $\mathbf{j} \in H(\text{rot}; \Omega)$  et que  $\mathbf{j} \times \mathbf{n} \in H^{1/2}(\partial\Omega)^3$  (cas  $m = 2$ ). Alors, d'après la Proposition 2, si la condition (3.18) est vérifiée,  $\mathbf{u}$  est aussi solution du problème classique (3.13)-(3.15).

Par conséquent,  $\text{rot } \mathbf{u} \in H(\text{rot}; \Omega)$ ,  $\text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{n} \in H^{1/2}(\partial\Omega)^3$ . Il en découle grâce au Lemme 9 que  $\text{rot } \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$ .

Maintenant, démontrons le résultat par récurrence, ainsi supposons que

$$\text{rot } \mathbf{j} \in H^{k-2}(\Omega)^3, \mathbf{j} \times \mathbf{n} \in H^{k-3/2}(\partial\Omega)^3 \implies \mathbf{u} \in H^k(\Omega)^3$$

est vrai pour  $k = 2, \dots, m$ . supposons aussi que  $\text{rot } \mathbf{j} \in H^{m-1}(\Omega)^3$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{n} \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)^3$ . L'hypothèse de récurrence, nous donne alors que  $\mathbf{u} \in H^m(\Omega)^3$ .

Posons  $\boldsymbol{\varphi} = \text{rot } \mathbf{u}$ , il s'ensuit, en utilisant le système (3.13)-(3.15) que  $\text{rot } \boldsymbol{\varphi} \in H^{m-1}(\Omega)^3$  et  $\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n} \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)^3$ .

Du lemme 6, il résulte alors que  $\boldsymbol{\varphi} = \text{rot } \mathbf{u} \in H^m(\Omega)^3$ . En appliquant de nouveau le Lemme 6 à  $\mathbf{u}$ , on déduit que  $\mathbf{u} \in H^{m+1}(\Omega)^3$ , ce qui est le résultat proposé.  $\diamond$

### Preuve de la Proposition 7.

Le point de départ est le lemme suivant :

**Lemme 10.** *Soit  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$  tel que  $\text{rot } \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$ ,  $\text{div } \mathbf{v} \in H^1(\Omega)$  et*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

*Alors  $\mathbf{v} \in H^2(\Omega)^3$  et il existe une constante  $c$ , dépendant seulement de  $\Omega$  telle que*

$$\|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega)} \leq C (\|\text{rot } \text{rot } \mathbf{v}\|_{0,\Omega} + \|\text{div } \mathbf{v}\|_{1,\Omega}). \quad (4.3)$$

### Preuve du Lemme 10.

Posons

$$\boldsymbol{\chi} = \Delta \mathbf{v} = -\text{rot } \text{rot } \mathbf{v} + \nabla(\text{div } \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^3.$$

On peut, alors, montrer après quelques calculs que chaque composante  $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (où  $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq 3}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  choisie telle que ces axes soient parallèles aux arêtes de  $\Omega$ ) de  $\mathbf{v}$  est solution du problème mixte suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v_i = \chi_i \quad \text{dans } \Omega, \\ v_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, 6\} \text{ tel que } |\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{e}_i| = 1, \\ \frac{\partial v_i}{\partial n_k} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, 6\} \text{ tel que } \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{e}_i = 0, \end{array} \right.$$

où  $(\Gamma_j)_{1 \leq j \leq 6}$  sont les faces de  $\Omega$  et  $\mathbf{n}_j$  la normal extérieure à  $(\Gamma_j)$ .

Il s'ensuit grâce à [43] (Théorème 2.5.11) que  $v_i \in H^2(\Omega)$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$  (remarquons que la convexité n'est pas suffisante). De plus, la *seconde inégalité fondamentale* dans un polygone convexe donne (voir [44, 43]) l'estimation

$$\|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|\boldsymbol{\chi}\|_{0,\Omega},$$

ce qui termine la preuve de ce Lemme 10.  $\diamond$

Maintenant, montrons le théorème 6. Soit  $\mathbf{j} \in H(\text{rot}; \Omega)$  vérifiant (4.1) et soit  $\mathbf{u}$  solution de (3.13)-(3.15). Posons  $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u}$ .  $\mathbf{v}$  est alors à divergence nulle et vérifie

$$\text{rot } \mathbf{v} = k^2 \mathbf{u} + \text{rot } \mathbf{j} \in L^2(\Omega)^3, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega.$$

De [40] (Théorème 3.7), on peut déduire alors que  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$  et vérifie

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq C \|\text{rot } \mathbf{v}\|_{0,\Omega}. \quad (4.4)$$

Par conséquent,  $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3$  d'après le Lemme 10. En outre

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} &\leq c(\Omega) \|\text{rot } \text{rot } \mathbf{u}\|_{0,\Omega} \\ &\leq c(\Omega) \|\text{rot } \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq c(\Omega) (k^2 \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} + \|\text{rot } \mathbf{j}\|_{0,\Omega}) \\ &\leq c(\Omega) (\|\mathbf{u}\|_{Y_T(\Omega)} + \|\text{rot } \mathbf{j}\|_{0,\Omega}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

L'estimation (4.2) est déduite à partir de (4.5) et (3.22).  $\diamond$

### 4.3 Approximation par une méthode spectrale

Le but de cette partie est d'exposer une méthode spectrale pour approcher la solution du problème de Maxwell en régime harmonique. Nous supposons que  $\Omega$  est un domaine polyédral de  $\mathbb{R}^3$  non nécessairement convexe. Plus précisément, on suppose qu'il existe  $d$  parallélépipèdes rectangles ouverts  $\Omega_1, \dots, \Omega_d$  tels que

- i.  $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^d \bar{\Omega}_i$ .
- ii. Pour tout  $m \neq j$  :
  - (a)  $\Omega_m \cap \Omega_j = \emptyset$ .
  - (b) L'intersection  $\bar{\Omega}_m \cap \bar{\Omega}_j$  est soit vide, un sommet, une arête ou une face de  $\Omega_m$  et  $\Omega_j$ .

Pour simplifier, on suppose aussi que  $\Omega$  est simplement connexe.

Soit  $N \geq 1$  un entier. Pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^3$ , on note par  $\mathbb{P}_N(\mathcal{O})$  l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $N$  par rapport à chacune des variables.

On rappelle la formule de quadrature de Gauss-Lobatto exacte sur  $\mathbb{P}_{2N-1}([-1, 1])$  (voir ([13],[14]) pour plus de détails) :

$$\forall p \in \mathbb{P}_{2N-1}([-1, 1]), \quad \int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=0}^N \rho_i p(\xi_i). \quad (4.6)$$

où  $\xi_0 = -1 < \xi_1 < \dots < \xi_N = 1$  sont les racines du polynôme  $(1 - x^2)L'_N(x)$  ( $L_N$  étant le polynôme de Legendre de degré  $N$ ) et  $\rho_0, \dots, \rho_N$ , les poids associés.

Pour tout  $m \in \{1, \dots, d\}$ , on note par

$$\Xi_N^{(m)} = \{\xi_\alpha^{(m)} = (\xi_i^{(m)}, \xi_j^{(m)}, \xi_\ell^{(m)}); \alpha = (i, j, \ell) \text{ avec } |\alpha| = \sup(i, j, k) \leq N\}$$

la grille de Gauss de type Legendre de  $\Omega_m$  obtenue par transformation (translation et homothétie) dans chaque direction des noeuds  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N$  et on désigne par  $\rho_\alpha, |\alpha| \leq N$ , les noeuds correspondants (remarquons que  $\Xi_N^{(m)} \cap \Xi_N^{(j)}$  est une grille du domaine  $\Omega_m \cap \Omega_j$  lorsque cette intersection n'est pas vide).

Posons

$$\Xi_N = \bigcup_{m=1}^d \Xi_N^{(m)}$$

Définissons, maintenant, le produit scalaire discret défini sur l'espace des fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$  par :

$$(u, v)_N = \sum_{m=1}^d \sum_{|\alpha| \leq N} \rho_\alpha^{(m)} u(\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(m)}) v(\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(m)}).$$

Ainsi, si  $u$  et  $v$  sont tels que

$$uv|_{\Omega_m} \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Omega_m), \quad m = 1, 2, \dots, d.$$

Alors,

$$(u, v)_N = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (4.7)$$

De même, pour toutes fonctions vectorielles  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$ , le produit scalaire sera

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_N = \sum_{i=1}^3 (u_i, v_i)_N.$$

De plus, pour toute fonction continue  $\varphi_N$  telle que

$$\varphi_N|_{\Omega_m} \in \mathbb{P}_N(\Omega_m), \quad m = 1, 2, \dots, d,$$

on a (voir [14])

$$\|\varphi_N\|_{0,\Omega}^2 \leq (\varphi_N, \varphi_N)_N \leq 27\|\varphi_N\|_{0,\Omega}^2. \quad (4.8)$$

Soit, maintenant,  $\mathcal{I}_N$ , l'opérateur d'interpolation défini sur la grille  $\Xi_N$  par :

Pour tout  $m \in \{1, \dots, d\}$ ,  $\mathcal{I}_N f|_{\Omega_m} \in \mathbb{P}_N(\Omega_m)$  et

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \Xi_N, \quad \mathcal{I}_N f(\boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{\xi}).$$

on obtient alors l'estimation d'erreur par interpolation suivante (voir [14], Théorème 14.2) :

**Lemme 11.** *Pour tout réel  $r$  et  $s$  satisfaisant*

$$0 \leq r \leq 1, \quad 2s > 3 + r, \quad (4.9)$$

*il existe une constante strictement positive  $c$  ne dépendant que de  $s$  et du domaine  $\Omega$  telle que, pour tout  $v$  dans  $H^s(\Omega)$*

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{H^r(\Omega)} \leq cN^{r-s} \|v\|_{H^s(\Omega)}. \quad (4.10)$$

*Cette dernière reste valable si  $s = 2$  et  $r = 1$ .*

Introduisons, maintenant, l'espace discret

$$Y_T^N(\Omega) = \{\mathbf{u} \in Y_T(\Omega); \mathbf{u}|_{\Omega_m} \in \mathbb{P}_N(\Omega_m)^3, \forall m = 1, \dots, d\}.$$

On pose

$$\alpha_{0,N} = \inf_{\boldsymbol{\varphi} \in Y_T^N(\Omega), \boldsymbol{\varphi} \neq \mathbf{0}} \frac{\{(\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi})_N + (\mathbf{div} \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{div} \boldsymbol{\varphi})_N\}^{\frac{1}{2}}}{(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi})_N^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.11)$$

Le lemme suivant est une conséquence directe de l'inégalité (4.8) et du Lemme 2 :

**Lemme 12.** *Il existe une constante  $c_0 > 0$  ne dépendant pas de  $N$  telle que*

$$\forall N, \quad c_0 \leq \alpha_{0,N} \leq \frac{1}{c_0}.$$

Supposons que le champ  $\mathbf{j}$  soit continu dans  $\overline{\Omega}$  et considérons le problème discret

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_N \text{ dans } Y_T^N(\Omega) \text{ vérifiant : } a_N(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) = \ell_N(\mathbf{v}_N), \quad \forall \mathbf{v}_N \in Y_T^N(\Omega), \quad (4.12)$$

où

$$a_N(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) = (\mathbf{rot} \mathbf{u}_N, \mathbf{rot} \mathbf{v}_N)_N + (\mathbf{div} \mathbf{u}_N, \mathbf{div} \mathbf{v}_N)_N - k^2(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N,$$

et

$$\ell_N(\mathbf{v}_N) = (\mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{v}_N)_N = (\mathcal{I}_N \mathbf{j}, \mathbf{v}_N)_N.$$

On établit, alors, le théorème suivant

**Théorème 2.** *Supposons que  $k < \alpha_{0,N}$ . Alors, le problème discret (4.12) admet une et une seule solution. En outre, si la solution  $\mathbf{u}$  du problème continu (3.13)-(3.15) appartient à  $H^s(\Omega)^3$  avec  $s \geq 1$  et si  $\mathbf{j}$  appartient à  $H^r(\Omega)^3$  avec  $r > 3/2$ , alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{Y_T(\Omega)} \leq c(\Omega)(N^{1-s}\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)} + N^{-r}\|\mathbf{j}\|_{H^r(\Omega)}). \quad (4.13)$$

De plus, si  $\Omega$  est un parallélépipède rectangle et si  $k < \alpha_0$ , alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{0,\Omega} \leq \frac{c(\Omega)}{(\alpha_0^2 - k^2)(\alpha_{0,N}^2 - k^2)}(N^{-s}\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)} + N^{-r}\|\mathbf{j}\|_{H^r(\Omega)}). \quad (4.14)$$

**Remarque.**— L'existence et l'unicité de la solution discrète sont, en fait, assurées même si  $k > \alpha_{0,N}$  dès que  $k$  n'est pas une valeur propre du problème (4.12).

*Preuve* — L'existence et l'unicité de la solution sont une conséquence immédiate du Théorème de Lax-Milgram.

Il reste à montrer les estimations d'erreurs.

En utilisant, le premier lemme de Strang (voir, par exemple, [26] p.18), on sait qu'il existe une constante  $C$ , ne dépendant pas de  $N$ , telle que pour tout  $\mathbf{v}_N \in Y_T^N(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{Y_T(\Omega)} \leq & \frac{c}{\alpha_{0,N}^2 - k^2} \left( \inf_{\mathbf{v}_N \in Y_T^N(\Omega)} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_N\|_{Y_T(\Omega)} + \sup_{\mathbf{z}_N \in Y_T^N(\Omega)} \frac{|a(\mathbf{v}_N, \mathbf{z}_N) - a_N(\mathbf{v}_N, \mathbf{z}_N)|}{|\mathbf{z}_N|_{Y_T(\Omega)}}) \right. \\ & \left. + \sup_{\mathbf{z}_N \in Y_T^N(\Omega)} \frac{|\ell(\mathbf{z}_N) - \ell_N(\mathbf{z}_N)|}{|\mathbf{z}_N|_{Y_T(\Omega)}} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

En choisissant  $\mathbf{v}_N$  dans  $Y_T^{N-1}(\Omega)$ , le second terme apparaissant dans le membre de droite s'annule. En effet, en vertu de la propriété d'exactitude (4.7), on obtient

$$a(\mathbf{v}_N, \mathbf{z}_N) - a_N(\mathbf{v}_N, \mathbf{z}_N) = 0, \quad \forall \mathbf{z}_N \in Y_T^N(\Omega).$$

Il reste alors le premier terme, l'erreur sur la meilleure approximation. Soit  $\Pi_N^*$ , la projection orthogonale de  $Y_T(\Omega)$  sur  $Y_T^N(\Omega)$ . On a alors le lemme suivant

**Lemme 13.** *Soit  $s \geq 1$  un réel. Il existe une constante  $C$ , ne dépendant que de  $s$  et de  $\Omega$ , telle que l'estimation*

$$|\Phi - \Pi_N^* \Phi|_{Y_T(\Omega)} \leq CN^{1-s} \|\Phi\|_{H^s(\Omega)}. \quad (4.16)$$

soit vérifiée pour tout  $\Phi \in H^s(\Omega)^3 \cap Y_T(\Omega)$ .

*Preuve —*

$$|\Phi - \Pi_N^* \Phi|_{Y_T(\Omega)} = \inf_{\mathbf{v}_N \in Y_T^N(\Omega)} |\Phi - \mathbf{v}_N|_{Y_T(\Omega)}$$

Supposons, tout d'abord, que  $s \geq 2$ . En choisissant  $\mathbf{v}_N = \mathcal{I}_N \Phi$ , il apparaît

$$\begin{aligned} |\Phi - \Pi_N^* \Phi|_{Y_T(\Omega)} &\leq |\Phi - \mathcal{I}_N \Phi|_{Y_T(\Omega)} \\ &\leq C \|\Phi - \mathcal{I}_N \Phi\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq CN^{1-s} \|\Phi\|_{H^s(\Omega)}, \end{aligned}$$

grâce au Lemme 11. Ainsi, (4.16) est vérifiée.

Supposons, maintenant, que  $s = 1$ . Alors, l'inégalité

$$|\Phi - \Pi_N^* \Phi|_{Y_T(\Omega)} \leq |\Phi|_{Y_T(\Omega)} \leq C \|\Phi\|_{H^1(\Omega)},$$

donne (4.16).

Le cas  $1 < s < 2$  se montre en utilisant un argument d'interpolation (voir [49]).

Ce qui clôt la démonstration du Lemme 13.  $\diamond$

En considérant  $\mathbf{v}_N = \Pi_{N-1}^* \mathbf{u}$  dans (4.16), on obtient

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}_N|_{Y_T^N(\Omega)} \leq CN^{1-s} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)}. \quad (4.17)$$

Par ailleurs, pour tout  $\mathbf{z}_N \in Y_T^N(\Omega)$  et  $\mathbf{j}_{N-1} \in H(\mathbf{rot}; \Omega)$  tels que  $\forall k \in \{1, \dots, d\}$   $\mathbf{j}_{N-1}|_{\Omega_m} \in \mathbb{P}_{N-1}(\Omega_m)$ , on a

$$\begin{aligned} |\ell(\mathbf{z}_N) - \ell_N(\mathbf{z}_N)| &= \left| \int_{\Omega} (\mathbf{j} - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{j}) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{z}_N d\mathbf{x} - (\mathcal{I}_N \mathbf{j} - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{z}_N)_N \right| \\ &\leq \|\mathbf{j} - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{j}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{rot} \mathbf{z}_N\|_{0,\Omega} + c \|\mathcal{I}_N \mathbf{j} - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{j}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{rot} \mathbf{z}_N\|_{0,\Omega} \quad (\text{d'après (4.8)}) \\ &\leq C (\|\mathbf{j} - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{j}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{j} - \mathcal{I}_N \mathbf{j}\|_{0,\Omega}) |\mathbf{z}_N|_{Y_T(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sup_{\mathbf{z}_N \in Y_T^N(\Omega)} \frac{|\ell(\mathbf{z}_N) - \ell_N(\mathbf{z}_N)|}{|\mathbf{z}_N|_{Y_T(\Omega)}} \leq C(\Omega) \|\mathbf{j} - \mathcal{I}_{N-1}\mathbf{j}\|_{0,\Omega}. \quad (4.18)$$

L'estimation (4.13) est immédiate à partir de (4.15), (4.17) et (4.18).

Il reste à montrer l'estimation de l'erreur dans  $L^2(\Omega)^3$  lorsque  $\Omega$  est un parallélépipède rectangle.

Cette estimation s'obtient par un argument classique de dualité :

Soit  $\boldsymbol{\chi}_N = \mathbf{u} - \mathbf{u}_N$  et soit  $\boldsymbol{\varphi} \in Y_T(\Omega)$  une solution du problème

$$a(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\chi}_N, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in Y_T(\Omega).$$

On a montré dans la preuve de la Proposition 2 que  $\boldsymbol{\varphi}$  vérifiait

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot rot } \boldsymbol{\varphi} - k^2 \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\chi}_N & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathbf{rot } \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Alors, selon la Proposition 7,  $\boldsymbol{\varphi}$  appartient à  $H^2(\Omega)^3$  et

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{c_0(\Omega)}{\alpha_0^2 - k^2} \|\boldsymbol{\chi}_N\|_{0,\Omega}.$$

Maintenant, pour tout  $\mathbf{z}_{N-1} \in Y_T^{N-1}(\Omega)$ , nous avons d'une part

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\chi}_N, \mathbf{z}_{N-1}) &= a(\mathbf{u}, \mathbf{z}_{N-1}) - a_N(\mathbf{u}_N, \mathbf{z}_{N-1}) \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{rot } \mathbf{z}_{N-1} \, d\mathbf{x} - (\mathcal{I}_N \mathbf{j}, \mathbf{rot } \mathbf{z}_{N-1})_N, \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{j} - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{j}) \cdot \mathbf{rot } \mathbf{z}_{N-1} \, d\mathbf{x} - (\mathcal{I}_N \mathbf{j} - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{j}, \mathbf{rot } \mathbf{z}_{N-1})_N. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\chi}_N, \mathbf{z}_{N-1}) &\leq c(\|\mathbf{j} - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{j}\|_{0,\Omega} + \|\mathcal{I}_N \mathbf{j} - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{j}\|_{0,\Omega}) |\mathbf{z}_{N-1}|_{Y_T(\Omega)} \\ &\leq (\|\mathbf{j} - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{j}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{j} - \mathcal{I}_N \mathbf{j}\|_{0,\Omega}) |\mathbf{z}_{N-1}|_{Y_T(\Omega)}. \end{aligned}$$

et d'autre part, avec  $\mathbf{z}_{N-1} = \Pi_{N-1}^* \boldsymbol{\varphi}$ , le Lemme 13 donne

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{z}_{N-1}|_{Y_T(\Omega)} &\leq cN^{-1} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{c}{\alpha_0^2 - k^2} N^{-1} \|\boldsymbol{\chi}_N\|_{0,\Omega}, \\ |\mathbf{z}_{N-1}|_{Y_T(\Omega)} &\leq |\boldsymbol{\varphi}|_{Y_T(\Omega)} \leq \frac{c}{\alpha_0^2 - k^2} \|\boldsymbol{\chi}_N\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\chi}_N\|_{0,\Omega}^2 &= a(\boldsymbol{\chi}_N, \boldsymbol{\varphi}) = a(\boldsymbol{\chi}_N, \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{z}_{N-1}) + a(\boldsymbol{\chi}_N, \mathbf{z}_{N-1}) \\ &\leq c \left( |\boldsymbol{\chi}_N|_{Y_T(\Omega)} |\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{z}_{N-1}|_{Y_T(\Omega)} + (\|\mathbf{j} - \mathcal{I}_N \mathbf{j}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{j} - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{j}\|_{0,\Omega}) |\mathbf{z}_{N-1}|_{Y_T(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|\boldsymbol{\chi}_N\|_{0,\Omega} \leq \frac{c(\Omega)}{\alpha_0^2 - k^2} \left( N^{-1} |\boldsymbol{\chi}_N|_{Y_T(\Omega)} + N^{-r} \|\mathbf{j}\|_{H^r(\Omega)} \right).$$

L'utilisation de (4.13) clôt la preuve.  $\diamond$

Nous allons décrire, brièvement, la mise en œuvre de la méthode.

Supposons que  $\mathbf{j}$  est donné aux nœuds de la grille  $\Xi_N$ .

Pour tout  $\boldsymbol{\xi} \in \Xi_N^{(m)}$  ( $m = 1, \dots, d$ ), on note par  $\ell_{\boldsymbol{\xi}}^{(m)}$  le polynôme de Lagrange associé au noeud  $\boldsymbol{\xi}$  dans  $\Omega_m$  ( $\ell_{\boldsymbol{\xi}}^{(m)}$  est le produit des polynômes de Lagrange correspondant à  $\boldsymbol{\xi}$  dans chaque direction). Ainsi, dans  $\Omega_m$ , la solution discrète peut être décomposée sous la forme

$$\mathbf{u}_N|_{\Omega_m} = \sum_{i=1}^3 \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi_N^{(m)}} u_{i,\boldsymbol{\xi}} \ell_{\boldsymbol{\xi}}^{(m)} \mathbf{e}_i,$$

où les  $u_{i,\boldsymbol{\xi}}$  sont les inconnues.

Les conditions aux bords  $\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n} = 0$  donnent

$$u_{i,\boldsymbol{\xi}} = 0 \text{ si } \boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega \text{ et } |\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}| = 1.$$

Le problème discret (4.12) conduit alors au système linéaire de  $3N^2(N-2)$  équations à  $3N^2(N-2)$  inconnues

$$AU = F, \tag{4.19}$$

N étant le nombre de nœuds, on se rend très vite compte que le stockage d'une telle matrice devient très vite coûteux, même pour un nombre de noeuds "petit", c'est pourquoi, dans

le code de calcul proposé, seulement le produit matrice vecteur, qui en fait est nécessaire pour l'inversion de cette matrice (par un gradient conjugué stabilisé), sera considéré.

Quelques résultats numériques seront donnés dans le paragraphe 4.5.

## 4.4 Une méthode d'éléments finis. Une brève description

L'approximation du problème de Maxwell en régime harmonique par une méthode d'éléments finis a été largement étudiée par de nombreux auteurs (voir, par exemple, [55, 56], [61], [36], [22]).

Dans ce paragraphe, on décrit une méthode d'éléments finis directe. On peut consulter [36] et [22] pour plus de détails.

Soit  $\mathcal{T}_h = \cup \kappa$  une triangulation de  $\Omega$  satisfaisant les hypothèses standard de régularité suivantes ;

- Chaque sommet de  $\Omega$  est le sommet d'un tétraèdre  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ .
- Chaque  $\kappa \in \mathcal{T}_h$  a au moins un de ses sommets à l'intérieur de  $\Omega$ .
- L'intersection de deux tétraèdres peut être soit un sommet, soit un coté entier, soit une face entière.
- Le rapport du diamètre de chaque élément  $\kappa$  dans  $\mathcal{T}_h$  au diamètre de la sphère inscrite est borné par une constante  $\sigma$  indépendante de  $\kappa$  et  $h$ , où  $h$  dénote le plus grand diamètre des tétraèdre de  $\mathcal{T}_h$ .

Soit l'espace  $Y_T^h(\Omega)$ , défini par :

$$Y_T^h(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in C^0(\overline{\Omega})^3; \forall \kappa \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}|_{\kappa} \text{ est affine, } \forall \kappa; \mathbf{v}(M_j) \cdot \mathbf{n} = 0, \forall M_j \in \Gamma \}.$$

Une base de  $Y_T^h(\Omega)$  peut être ainsi facilement construite en utilisant la base  $\omega_j$  des éléments  $P^1$  définie par :

$\omega_j$  est une fonction affine continue par morceaux sur  $\mathcal{T}_h$  vérifiant

$$\omega_j(M_m) = \delta_{m,j}.$$

Si, on suppose que les  $I$  premiers nœuds sont internes, alors une base  $\{\mathbf{w}_j\}$  de  $Y_T^h$  est donnée par

$$\mathbf{w}_{3(m-1)+i} = \omega_m \mathbf{e}_i, \quad 1 \leq m \leq I, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.20)$$

$$\mathbf{w}_{3I+2(m-I-1)+i} = \omega_m \boldsymbol{\tau}_i, \quad m > I, \quad i = 1, 2. \quad (4.21)$$

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  étant une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$  et  $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$  deux vecteurs orthonormaux, tangents au bord.

On pose

$$\alpha_{0,h} = \inf_{\mathbf{v}_h \in Y_T^h(\Omega), \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}} \frac{(\|\mathbf{rot} \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{div} \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega})^{\frac{1}{2}}}{\|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^{\frac{1}{2}}}$$

Il est clair que

$$\alpha_{0,h} \geq \alpha_0.$$

dès que l'on voit que  $Y_T^h(\Omega) \subset Y_T(\Omega)$ .

Considérons, maintenant, le problème discret ; trouver  $\mathbf{u}_h \in Y_T^h(\Omega)$  solution de

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in Y_T^h. \quad (4.22)$$

On a alors la proposition suivante (voir, par exemple, [36], [22]) :

**Proposition 8.** *Supposons que  $\Omega$  est convexe et que  $0 \leq k < \alpha_{0,h}$ , alors le problème discret (4.22) admet une unique solution  $\mathbf{u}_h$ . Si, de plus,  $k < \alpha_0$  et si la solution  $\mathbf{u}$  du problème continu (3.17) appartient à  $H^2(\Omega)^3$ , alors il existe deux constantes  $C_1(\Omega)$  et  $C_2(\Omega)$ , ne dépendant que de  $\Omega$  telles que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{Y_T(\Omega)} \leq \frac{C_1}{\alpha_0^2 - k^2} h \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}, \quad (4.23)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{C_1}{\alpha_0^2 - k^2} h^2 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}. \quad (4.24)$$

## 4.5 Résultats numériques

Ce paragraphe est consacré à l'exploitation des résultats numériques donnés par notre code.

En fait, on montrera et on comparera quelques résultats numériques obtenus par une méthode d'éléments spectraux avec intégration numérique (MS) et une méthode d'éléments finis (MEF) que nous avons décrites précédemment.

Tous ces tests ont été effectués dans le cube  $\Omega = ]-1, 1[^3$ . Remarquons que ces deux méthodes nécessitent la résolution d'un système linéaire de la forme

$$AU = F, \quad (4.25)$$

où la matrice  $A$  est une matrice, de très grande taille, d'ordre  $3N^3$ ,  $N$  désignant le nombre de noeuds.

L'inversion du système (4.25) a été effectué à l'aide d'un algorithme itératif, en fait un bigradient stabilisé. Ainsi, pour ce type d'algorithme, le stockage effectif de la matrice n'est pas nécessaire, seul l'action de ses coefficients dans le produit matrice-vecteur est requis, ce qui évite le stockage trop coûteux de la matrice.

Nous avons testé notre code pour la donnée et l'exemple analytique suivant

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} -6(z^2 - 1)(z^2 + 4xy - 2x^2 + 1) + 12(3z^2 - x^2)(1 - y^2) - 3k^2(y^2 - 1)(z^2 + 1 - 2x^2)(z^2 - 1) \\ -6(z^2 - 1)(z^2 + 4xy - 2y^2 + 1) + 12(3z^2 - y^2)(1 - x^2) - 3k^2(x^2 - 1)(z^2 + 1 - 2y^2)(z^2 - 1) \\ 24(x + y)z(1 - xy) \end{pmatrix} \\ + \frac{3\pi^2 - k^2}{\pi} \begin{pmatrix} 3 \cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \\ -2 \sin(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\pi z) \\ -\sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi z) \end{pmatrix},$$

et

$$\mathbf{u} = 6 \begin{pmatrix} 2(x^2 - 1)z(y^2 - z^2) \\ 2(y^2 - 1)z(z^2 - x^2) \\ (z^2 - 1)(x - y)(z^2 + 2xy + 1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z) \\ 4 \cos(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi z) \\ -5 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\pi z) \end{pmatrix}.$$

Les figures (4.1-4.2) et (4.3-4.4) montrent le comportement de l'erreur relative pour la norme de  $Y_T(\Omega)$  et pour la norme  $L^2(\Omega)$  en fonction du paramètre de discrétisation  $h$  (MEF) et du nombre de nœuds  $N$  dans chaque direction (MS).

Ces résultats confirment les estimations a priori obtenues dans les paragraphes précédents. On peut remarquer que l'erreur (MS) est meilleure que celle obtenue pour (MEF) à un nombre de nœuds (ou sommets) égaux, cependant, il ne faut pas négliger le fait que la solution test est analytique et qu'il est bien connu que les méthodes (MS) sont très précises dans l'approximation de telles solutions.

Les figures 4.5 et 4.6 montrent le comportement de la divergence de la solution approchée, encore une fois, l'approche par (MS) donne une meilleure approximation, en effet la divergence de la solution est théoriquement nulle, mais numériquement, la divergence de la solution approchée ne l'est pas nécessairement.

La figure 4.7 montre le comportement de l'erreur lorsque le nombre d'onde  $k$  augmente pour les deux méthodes (avec des paramètres de discrétisations fixés).

En faisant varier  $k$ , on constate l'existence de certaines valeurs approchées  $k_{0,N}, k_{1,N}, \dots$  pour la méthode (SM) et  $k_{0,h}, k_{1,h}, \dots$  pour la méthode (MEF) au voisinage desquelles l'erreur augmente et explose, puis décroît. Ces valeurs ne sont rien d'autres que les valeurs propres du problème discret (4.25). Certaines d'entre elles n'approchent aucune valeur propre du problème continu (3.4) (voir Proposition 5) comme le montre la figure 4.7, l'apparition de ces valeurs propres est due à la pénalisation par la divergence du problème. En effet, dans la cas où le domaine est convexe, il est prouvé dans [31] que la forme bilinéaire (3.17) coïncide avec la forme bilinéaire de Lamé associée aux constantes  $\mu = 1$  et  $\lambda = \gamma - 2$ , et que le spectre de cette forme bilinéaire dépend de  $\gamma$  (Lemme 3.2 de [31]). Les valeurs propres du problème discret sont aisément obtenues par la méthode (MEF) mais pour une précision moindre que celles obtenues par la méthode (MS) qui par contre nécessite une recherche plus approfondie de ces valeurs propres.

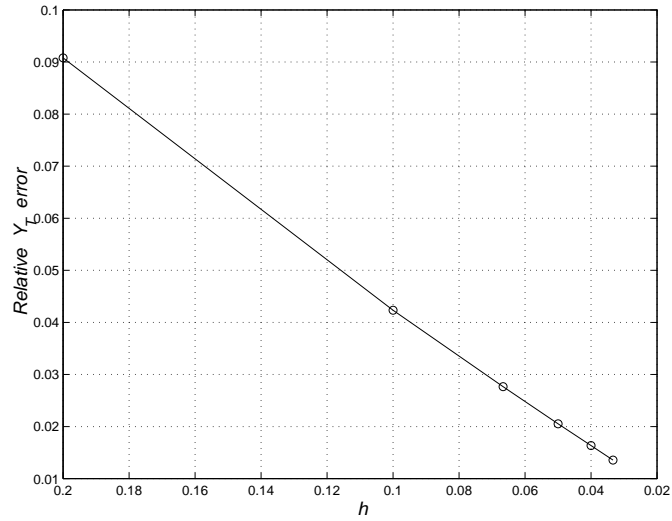


FIG. 4.1 – MEF : L'erreur relative dans  $Y_T(\Omega)$  en fonction de  $h$ ,  $k = 0.3\pi$ .

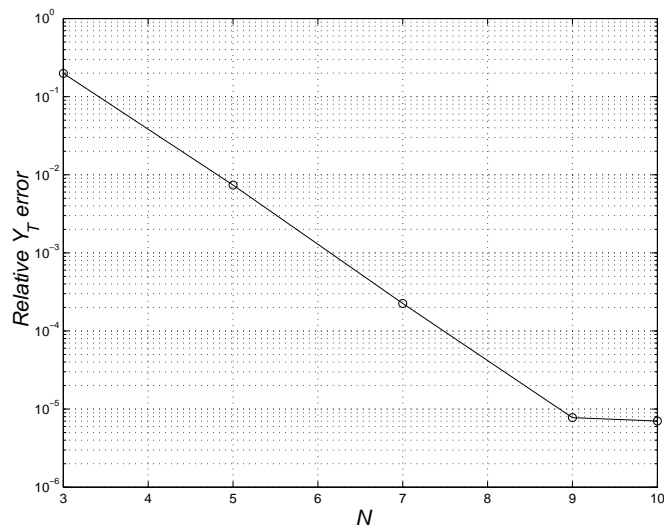
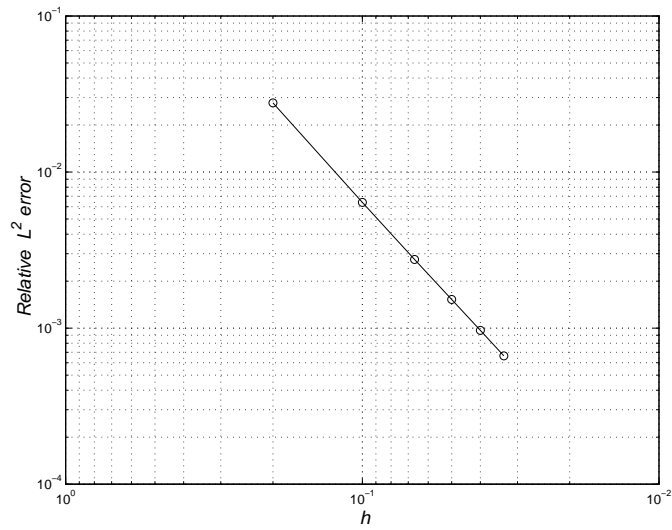
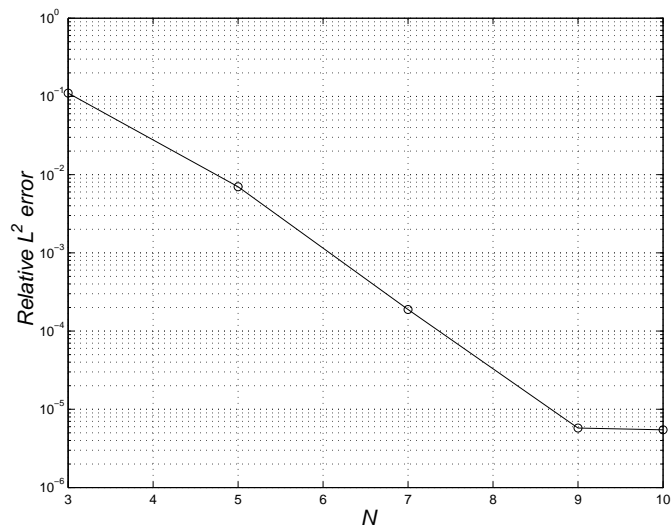
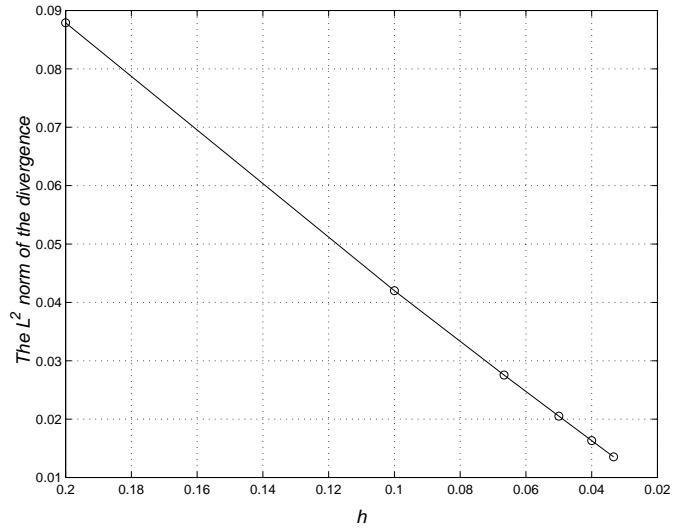
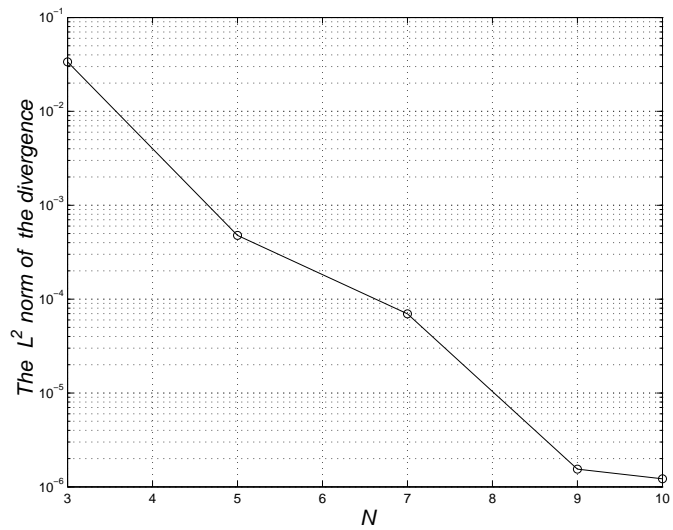


FIG. 4.2 – MS : L'erreur relative dans  $Y_T(\Omega)$  en fonction de  $N$  (échelle logarithmique),  $k = 0.3\pi$ .

FIG. 4.3 – MEF : L'erreur relative dans  $L^2(\Omega)$  en fonction de  $h$ ,  $k = 0.3\pi$ .FIG. 4.4 – MS : L'erreur relative dans  $L^2(\Omega)$  en fonction de  $N$  (échelle logarithmique),  $k = 0.3\pi$ .

FIG. 4.5 – MEF : L'erreur relative  $L^2$  de la divergence en fonction de  $h$ ,  $k = 0.3\pi$ .FIG. 4.6 – MS : L'erreur relative  $L^2$  de la divergence en fonction de  $N$ ,  $k = 0.3\pi$ .

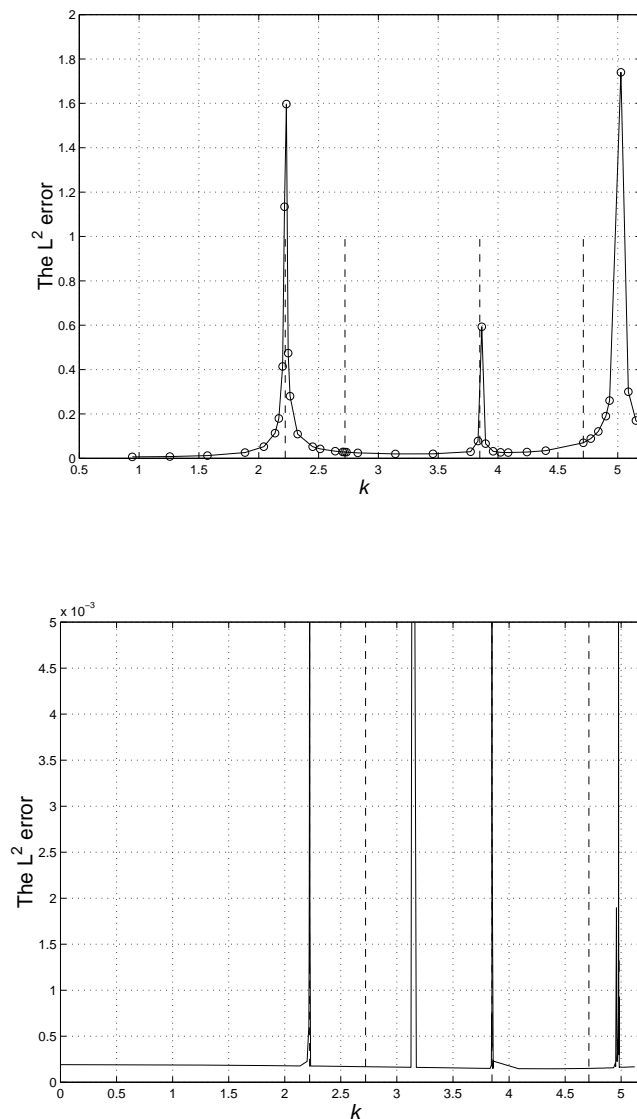


FIG. 4.7 – Les erreurs  $L^2(\Omega)$  en fonction de  $k$  pour les deux méthodes MEF (figure du haut) et MS (figure du bas) (les droites verticales en pointillé correspondent aux quatre premières valeurs propres du problème continu). L'explosion de cette norme indiquant que  $k$  est une valeur propre du problème discret.



# Chapitre 5

## Une méthode spectrale avec joints

(soumis à SIAM Journal on Numerical Analysis)

**A mortar spectral element method for 3D Maxwell's equations**

TAHAR Z. BOULMEZAOUD

Laboratoire de Mathématiques Appliquées,  
Université de Pau et des pays de l'Adour  
Avenue de l'univeristé, BP 1155, 64013, Pau Cedex, France.

Tahar.Boulmezaoud@univ-pau.fr

and

MOHAMMED EL RHABI

Laboratoire Jacques-Louis Lions,  
Université Paris VI  
175, rue du Chevaleret  
BP 187, 75013 Paris.

Mohammed.Elrhabi@math.jussieu.fr

**Abstract**

The aim of this paper is to propose a mortar spectral element method for solving heterogeneous Maxwell's equations in 3D bounded cavities. The paper is mainly divided into two parts. The method is based on non-conforming decomposition of the domain into the union of non-overlapping parallelepipeds. The first part is devoted to the presentation and the numerical analysis of the method. In the second part, we expose some numerical results which confirm the performance of the method.

## 5.1 Introduction

In the last decades, the numerical solving of Maxwell's equations received a lot of attention because of their importance in the modeling of several physical and industrial phenomenon. Indeed, a large variety of numerical methods have been proposed for solving such problems. Among these methods, there is no doubt that domain decomposition ones are of the most efficient since they bring a serious flexibility in the discretization of the original problems and in the computation of the numerical solutions by means of parallelization.

The aim of this paper is to propose and study a mortar spectral element method for solving Maxwell's equations. The mortar method was introduced in [12, 9] for coupling different spectral and finite element approximations. It is a non-conforming domain decomposition method in which the interface between subdomains is itself partitioned into the union of "mortars". The transmission conditions at the interfaces between sub-domains are then replaced by some weaker discrete conditions which are expressed in terms of Lagrange multipliers. The main advantage of such a method is, as underlined before, the possibility of coupling different, independant and non-matching numerical discretizations in the sub-domains of the partitioning.

The mortar method was successfully applied for solving second order elliptic problems when finite elements spectral elements or wavelets are used (see, e. g., [12], [5], [6], [30], [13]). It was also applied for several other problems like fourth order equations (see [2]), Stokes equation ([16, 3]) and two and three dimensionnal Maxwell's equations (with finite elements) (see [24], [4]). It turned out also that mortar methods are well adapted to parallel computation as it is shown in [18] and [7].

Here, we deal with the space discretization of heterogeneous Maxwell's equations in 3D domains by means of a mortar spectral element method. Namely, let  $\Omega$  be a bounded open set in  $\mathbb{R}^3$  with a boundary  $\partial\Omega$  and unit outward normal  $\mathbf{n}$ . Throughout this paper we assume that  $\Omega$  is simply connected and that its boundary is Lipschitz. If  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  and  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$  denote respectively the electric and magnetic fields in  $\Omega$ , then Maxwell's equations

state that

$$\begin{aligned}
\mu \partial_t \mathbf{H} + \mathbf{curl} \mathbf{E} &= \mathbf{0}, \\
\epsilon \partial_t \mathbf{E} - \mathbf{curl} \mathbf{H} &= -\mathbf{j}, \\
\operatorname{div} (\mu \mathbf{H}) &= 0, \\
\operatorname{div} (\epsilon \mathbf{E}) &= i\omega^{-1} \operatorname{div} \mathbf{j}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Hereabove and below the parameters  $\epsilon(\mathbf{x})$  and  $\mu(\mathbf{x})$  are positive functions and refer to the dielectric and magnetic permeability coefficients of the material in  $\Omega$ . The field  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  denote the imposed source of electric current density. It is assumed that coefficients  $\mu(\mathbf{x})$  and  $\epsilon(\mathbf{x})$  are real, bounded and positive, that is, there exist  $\epsilon_0, \epsilon_\infty > 0$  and  $\mu_0, \mu_\infty > 0$  such that

$$\epsilon_0 \leq \epsilon(\mathbf{x}) \leq \epsilon_\infty \text{ and } \mu_0 \leq \mu(\mathbf{x}) \leq \mu_\infty \text{ a. e. in } \Omega \tag{5.2}$$

If we assume that the boundary  $\partial\Omega$  is a perfect conductor then the electric field satisfies

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega. \tag{5.3}$$

It is usual to rewrite the system (5.1) in terms of one unknown, say the magnetic field  $\mathbf{H}$  or the electric field  $\mathbf{E}$ . Here, we choose the formulation in terms of  $\mathbf{H}$ . Eliminating  $\mathbf{E}$  from the equations above leads to magnetic system

$$\mu \partial_t^2 \mathbf{H} + \mathbf{curl} (\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{H}) = \mathbf{curl} (\epsilon^{-1} \mathbf{j}), \quad \operatorname{div} (\mu \mathbf{H}) = 0, \tag{5.4}$$

and the boundary conditions

$$\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad \epsilon^{-1} (\mathbf{curl} \mathbf{H} - \mathbf{j}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega. \tag{5.5}$$

In time-harmonic regime the magnetic field satisfies the equation

$$\mathbf{curl} (\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{H}) - \omega^2 \mu \mathbf{H} = \mathbf{curl} (\epsilon^{-1} \mathbf{j}), \quad \operatorname{div} (\mu \mathbf{H}) = 0, \tag{5.6}$$

Recall that the equation

$$\operatorname{div} (\mu \mathbf{H}) = 0$$

is redundant here since it is a straightforward consequence of (5.6).

The space discretizations of equations (5.4) and (5.6) are often distinguished in the literature. Here, we show first that the solving of both the equations can lead to the treatment of a problem of the form

$$\mathbf{curl}(\epsilon^{-1}\mathbf{curl}\mathbf{u}) + \tau\mu\mathbf{u} = \mathbf{curl}(\epsilon^{-1}\mathbf{j}) + \mathbf{u}_0, \quad (5.7)$$

where the parameter  $\tau$  is positive. This unified approach is based on the use of an implicit scheme for solving (5.4) and a relaxation algorithm for (5.6). We propose secondly a mortar spectral element for solving (5.7). Finally, we expose in the case of a 3D geometry some numerical tests which confirms the performance of the method.

It is worth noting that if  $\Omega$  is not convex then the magnetic field can have some singularities at corners and edges. The reader can refer to [14] and references therein for a characterization of these singularities. Similarly, singularities could appear also at the interfaces if the parameters  $\epsilon$  and  $\mu$  are discontinuous (see, e. g., [15]). The analysis and the approximation of these singularities are beyond the scope of this paper. Hence, we shall suppose here that the solution  $\mathbf{u}$  of the problem is piecewise regular (see the subsequent theorem 1). This assumption on the regularity of the solution is all what we need here and we do not make any other assumption on  $\Omega$  and the coefficients  $\epsilon$  and  $\mu$ . However, when the domain is non-convex or when the coefficients  $\epsilon$  and  $\mu$  are discontinuous (piecewise constants for example) the numerical method we expose here can be used only for computing the regular part of the solution. The singular part of the solution must be treated separately.

The outline of this paper is follows

- In section 5.2, we recall and state briefly some definitions and properties of the functional spaces used as a framework.
- In section 5.3, we prove that each solution of (5.6) can be approximated by relaxation of an adequate sequence of solutions of (5.7). The main advantage of that relaxation process is the unification of the numerical solving of (5.4) and (5.6) via (5.7) (provided that an appropriate implicit scheme is used for discretizing (5.4) with respect to time variable).

- Section 5.4 is devoted to a presentation of the mortar spectral method and to its numerical convergence.
- Section 5.5 deals on one hand with the treatment of some technical details related to the implementation of the mortar method. On the other hand, some numerical results are displayed after implementation of the method in a three-dimensionnal given domain.

## 5.2 Functionnal framework

### 5.2.1 Notations

In the sequel, for any integer  $d \geq 1$  and any open set  $\mathcal{O}$  of  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ) we denote by  $\mathbb{P}(\mathcal{O})$  the space of polynomial functions defined on  $\mathcal{O}$  and by  $\mathbb{P}_{N_1, \dots, N_d}(\mathcal{O})$  the space of all the polynomial functions whose degree with respect to the variable  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , is less or equal  $N_i$ . If  $N_1 = \dots = N_d = N$ , then we set  $\mathbb{P}_N(\mathcal{O}) = \mathbb{P}_{N_1, \dots, N_d}(\mathcal{O})$ . In addition, we denote by  $L^2(\mathcal{O})$  the space of square integrable functions on  $\mathcal{O}$ . This space is equipped with the inner product

$$(u, v)_{\mathcal{O}} = \int_{\mathcal{O}} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

and with the associated norm

$$\|u\|_{0, \mathcal{O}} = (u, u)_{\mathcal{O}}^{1/2}.$$

For any  $s \in \mathbb{R}$ ,  $H^s(\mathcal{O})$  denotes the classical Sobolev space and  $\|\cdot\|_{s, \mathcal{O}}$  the corresponding norm.

If  $\mathcal{O}$  is a bounded and Lipschitz open set of  $\mathbb{R}^3$  then we define the space

$$H(\mathbf{curl}; \mathcal{O}) = \{\mathbf{v} \in L^2(\mathcal{O})^3, \mathbf{curl} \mathbf{v} \in L^2(\mathcal{O})^3\},$$

It is a Hilbert space equipped with the scalar product

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{curl}, \mathcal{O}} = (\mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{0, \mathcal{O}} + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0, \mathcal{O}},$$

and the norm

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\mathbf{curl};\mathcal{O})} = \left( \|\mathbf{v}\|_{0,\mathcal{O}}^2 + \|\mathbf{curl}\mathbf{v}\|_{0,\mathcal{O}}^2 \right)^{1/2}.$$

Recall that the tangential trace operator  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \times \mathbf{n}$  is well defined and continuous from  $H(\mathbf{curl};\mathcal{O})$  into  $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ . Moreover, the following Green's formula holds

$$\forall \mathbf{v} \in H(\mathbf{curl};\mathcal{O}), \forall \mathbf{w} \in H^1(\mathcal{O})^3, \quad (\mathbf{curl}\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{curl}\mathbf{w}) + \langle \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle_{\partial\mathcal{O}}. \quad (5.8)$$

Subsequently,  $H_0(\mathbf{curl};\mathcal{O})$  denotes the subspace of vector fields in  $H(\mathbf{curl};\mathcal{O})$  with a vanishing tangential component on  $\partial\mathcal{O}$ . Similarly, for any  $s \geq 0$ , we consider the space

$$H^s(\mathbf{curl};\mathcal{O}) = \{ \mathbf{v} \in H^s(\mathcal{O})^3, \mathbf{curl}\mathbf{v} \in H^s(\mathcal{O})^3 \},$$

which is a Hilbert space endowed with the norm

$$\|\mathbf{u}\|_{H^s(\mathbf{curl};\mathcal{O})} = \left( \|\mathbf{v}\|_{s,\mathcal{O}}^2 + \|\mathbf{curl}\mathbf{v}\|_{s,\mathcal{O}}^2 \right)^{1/2}.$$

Finally, when  $\mathcal{O} = \Omega$  we consider the space

$$H(\text{div}; \mu, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \text{div}(\mu\mathbf{v}) \in L^2(\Omega) \}.$$

equipped with its natural norm

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}; \mu, \Omega)} = \left( \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div}(\mu\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2},$$

and its subspace

$$X_T(\mu; \Omega) = \{ \mathbf{u} \in H(\mathbf{curl}; \Omega) \cap H(\text{div}; \mu, \Omega) \mid \mu\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \},$$

endowed with the norm

$$\|\mathbf{u}\|_{X_T(\mu; \Omega)} = \left\{ \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{curl}\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div}(\mu\mathbf{u})\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}. \quad (5.9)$$

The following semi-norm on  $X_T(\mu; \Omega)$  will be useful in the unrolling of this paper

$$|\mathbf{u}|_{X_T(\mu; \Omega)} = \left\{ \|\mathbf{curl}\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div}(\mu\mathbf{u})\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}. \quad (5.10)$$

We state the following

**Proposition 9.** *The semi-norm (5.10) is a norm on  $X_T(\mu; \Omega)$  equivalent to the norm (5.9).*

*Proof* —

- i. Let  $\mathbf{v}$  be a function in  $X_T(\mu; \Omega)$  such that  $|\mathbf{v}|_{X_T(\mu; \Omega)} = 0$ . Then  $\operatorname{div}(\mu\mathbf{v}) = 0$  and  $\operatorname{curl}\mathbf{v} = 0$ . Hence, there exists  $s \in H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}$  such that  $\mathbf{v} = \nabla s$  (see for instance [20], Th. 2.9). Moreover,

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mu\nabla s) = 0, \\ \mu \frac{\partial s}{\partial n} = 0. \end{cases}$$

Multiplying by  $s$  and integrating by parts gives  $\nabla s = 0$ . Thus  $s$  is a constant since  $\Omega$  is connected and  $\mathbf{v} = 0$ .

- ii. Let us prove that there exists a constant  $c(\Omega, \epsilon, \mu)$  such that

$$\forall \mathbf{v} \in X_T(\mu; \Omega), \quad \|\sqrt{\mu}\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq c|\mathbf{v}|_{X_T(\mu; \Omega)}.$$

We need the following lemma (see [20])

**Lemma 1.** *Let  $\Gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq p$  be the connected components of  $\partial\Omega$ . A function  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$  satisfies*

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0 \quad 1 \leq i \leq p,$$

*if and only if there exists  $\Phi \in H^1(\Omega)^3$  such that*

$$\operatorname{curl}\Phi = \mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\Phi = 0.$$

*Furthermore, there exists a constant  $c(\Omega)$  such that the vector field  $\Phi \in H^1(\Omega)^3$  can be chosen such that*

$$\|\Phi\|_{H^1(\Omega)^3} \leq c\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}.$$

Consider now a sequence in  $X_T(\mu; \Omega)$  such that

$$|\mathbf{v}_n|_{X_T(\mu; \Omega)} \leq \frac{1}{n}, \quad \|\sqrt{\mu}\mathbf{v}_n\|_{0,\Omega} = 1.$$

Then, it follows from lemma 1 that there exists a sequence  $\{\Phi_n\}$  such that

$$\mathbf{curl} \Phi_n = \mathbf{curl} \mathbf{v}_n, \quad \operatorname{div} \Phi_n = 0,$$

and

$$\|\Phi_n\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\mathbf{curl} \mathbf{v}_n\|_{0,\Omega} \leq \frac{c}{n}.$$

This sequence  $\{\Phi_n\}$  converges strongly in  $H^1(\Omega)^3$  to  $\mathbf{0}$ . Furthermore, for any  $n$  we have  $\mathbf{curl}(\mathbf{v}_n - \Phi_n) = \mathbf{0}$ . Thus, for any  $n$  there exists a function  $s_n \in H^1(\Omega) \setminus \mathbb{R}$  such that

$$\nabla s_n = \mathbf{curl}(\mathbf{v}_n - \Phi_n).$$

We have

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu |\nabla s_n|^2 d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mu \mathbf{v}_n \nabla s_n d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mu \Phi_n \nabla s_n d\mathbf{x}, \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu \mathbf{v}_n) s_n d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mu \Phi_n \nabla s_n d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Hence,

$$\|\sqrt{\mu} \nabla s_n\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\operatorname{div}(\mu \mathbf{v}_n)\|_{0,\Omega} \inf_{c \in \mathbb{R}} \|s_n - c\|_{0,\Omega} + \|\sqrt{\mu} \Phi_n\|_{0,\Omega} \|\sqrt{\mu} \nabla s_n\|_{0,\Omega}.$$

Thus,

$$\|\sqrt{\mu} \nabla s_n\|_{0,\Omega} \leq \mu_0^{-1/2} \|\operatorname{div}(\mu \mathbf{v}_n)\|_{0,\Omega} + \|\sqrt{\mu} \Phi_n\|_{0,\Omega},$$

thanks to Poincaré-Wirtinger inequality

$$\forall \psi \in H^1(\Omega) \quad \inf_{c \in \mathbb{R}} \|\psi - c\|_{0,\Omega} \leq C \|\nabla \psi\|_{0,\Omega}.$$

Thus,  $\mu \nabla s_n$  converges strongly in  $L^2(\Omega)^3$  to  $\mathbf{0}$ . But

$$\mu \mathbf{v}_n = \mu \Phi_n + \mu \nabla s_n.$$

It follows that  $\sqrt{\mu} \mathbf{v}_n$  converges strongly in  $L^2(\Omega)^3$  to  $\mathbf{0}$  which is contradictory to  $\|\sqrt{\mu} \mathbf{v}_n\|_{0,\Omega} = 1$ .

◇

In the sequel, we set

$$\omega_0 = \inf_{\mathbf{v} \in X_T(\mu; \Omega); \operatorname{div}(\mu \mathbf{v})=0; \mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\epsilon^{-1/2} \mathbf{curl} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}}{\|\mu^{1/2} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}}. \quad (5.11)$$

Observe that  $\omega_0 > 0$  thanks to proposition 9.

### 5.3 A common approach for time-harmonic and time-dependent Maxwell's equations

The subject of this second preliminary section is to prove that the numerical solving of both time-dependent and time-harmonic Maxwell's systems can be lead to solving the same equation in terms of the magnetic field. Moreover, this equation is elliptic and admits a coercive formulation in the space  $H(\mathbf{curl}; \Omega)$  without any constraint on the divergence and on the traces at the boundary. The use of an implicit scheme for the time-dependent case and a relaxation algorithm in the harmonic case is at the heart of this unified approach. Let us consider firstly the Cauchy problem associated with the problem (5.1) with the initial conditions

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}).$$

Then, this Cauchy problem can be rewritten after some classical transformations in terms of the magnetic field as follows

$$\begin{aligned} \mu \partial_t^2 \mathbf{H} + \mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{H}) &= \mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{j}) && \text{in } \Omega, \\ \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{on } \partial\Omega, \\ \epsilon^{-1}(\mathbf{curl} \mathbf{H} - \mathbf{j}) \times \mathbf{n} &= \mathbf{0} && \text{in } \partial\Omega \times [0, T] \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t = 0) &= \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) && \text{in } \Omega, \\ (\partial_t \mathbf{H})(\mathbf{x}, t = 0) &= -\mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E}_0 && \text{in } \Omega, \end{aligned} \quad (5.12)$$

where the unknown is  $\mathbf{H}$ .

Let  $T > 0$  and let us divide the interval  $(0, T]$  into  $p$  equally-subintervals  $(t_k, t_{k+1}]$  with

$t_k = k\Delta t$ ,  $k = 0, \dots, p$ , where  $\Delta t = T/p$  is the time step. For a given sequence,  $\{u^k\}_{k=0}^p$  in  $L^2(\Omega)$  or  $L^2(\Omega)^3$  define the discrete first and second order backward finite differences

$$\partial_{\Delta t} u^k = \frac{u^k - u^{k-1}}{\Delta t}, \quad \partial_{\Delta t}^2 u^k = \frac{\partial_{\Delta t} u^k - \partial_{\Delta t} u^{k-1}}{\Delta t} = \frac{u^k - 2u^{k-1} + u^{k-2}}{\Delta t^2}.$$

Next, using these finite differences to discretize the second order time derivative leads to the discrete problem : find  $\mathbf{H}^k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , such that

$$\mu \partial_{\Delta t}^2 \mathbf{H}^k + \mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{H}^k) = \mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{j}^k), \quad (5.13)$$

where  $\mathbf{j}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t_k)$  for any  $k = 1, \dots, p$ . The initial conditions are given by

$$\mathbf{H}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) \text{ and } \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) + (\Delta t) \mathbf{curl} \mathbf{E}_0.$$

This yields that for any,  $k = 1, \dots, p$ ,  $\mathbf{H}^k$  is solution of an equation of the form

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}) + \tau \mathbf{u} &= \mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{j}) + \mathbf{u}_0, \\ \mu \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ on } \partial\Omega, \\ \mathbf{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{j} \times \mathbf{n} \text{ on } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.14)$$

where

$$\tau = 1/\Delta t^2 \text{ and } \mathbf{u}_0 = \frac{2\mathbf{H}^{k-1} - \mathbf{H}^{k-2}}{\Delta t^2}.$$

Consider now the time-harmonic regime in which the the magnetic field  $\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}; \Omega)$  is described by the equations

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{H}) - \omega^2 \mu \mathbf{H} &= \mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{j}) && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \epsilon^{-1}(\mathbf{curl} \mathbf{H} - \mathbf{j}) \times \mathbf{n} &= \mathbf{0} && \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.15)$$

The electric field is given by

$$\mathbf{E} = (i\omega\epsilon)^{-1}(\mathbf{curl} \mathbf{H} - \mathbf{j}). \quad (5.16)$$

Note that the boundary condition in (5.15) is meaningful since  $\epsilon^{-1}(\mathbf{curl} \mathbf{H} - \mathbf{j}) \in H(\mathbf{curl}, \Omega)$  thanks to the first equation of (5.15). In fact, this condition could be re-written into the form

$$(\epsilon^{-1}(\mathbf{curl} \mathbf{H} - \mathbf{j})) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ in } H^{-1/2}(\partial\Omega)^3.$$

It is worth noting that systems (5.14) and (5.15) are quite similar. The only difference is due to the sign of  $\tau$  which is positive in (5.14) while it is negative in (5.15) (in the latter  $\tau = -\omega^2 \leq 0$ ). A direct consequence of this difference is that (5.15) at the contrary of (5.14) do not admit a coercive variationnal formulation in the space  $H(\mathbf{curl}; \Omega)$ . This is why it is usually re-written into the penalized variational form : find  $\mathbf{u} \in X_T(\mu; \Omega)$  such that

$$a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell_2(\mathbf{v}), \quad (5.17)$$

where

$$a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu \mathbf{u}) \cdot \operatorname{div}(\mu \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \omega^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

and

$$\ell_2(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \epsilon^{-1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

This difference leads a lot of authors to distinguish the numerical treatment of time-dependent problem (5.14) and the time-harmonic problem (5.15). Here, in order to solve both problems by a common numerical method (and also for some other technical reasons, see remark 5.4.2 hereafter) we shall prove that any solution of (5.15) is the limit of a quickly converging sequence of solutions of (5.14). Namely, we consider the sequence

- $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ .
- For any  $n \geq 0$ ,  $\mathbf{u}_{n+1}$  is solution of the variationnal problem :  $\forall \mathbf{v} \in X_T(\mu; \Omega)$

$$(\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{curl} \mathbf{v}) + \tau(\mu \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v}) = (\omega^2 + \tau)(\mathbf{u}_n, \mu \mathbf{v}) + (\epsilon^{-1} \mathbf{j}, \mathbf{curl} \mathbf{v}), \quad (5.18)$$

where  $\tau$  fixed real not depending on  $n$ .

Note that if  $\tau > -\omega_0^2$  where  $\omega_0$  is defined by (5.11), then the bilinear form on left hand side of (5.18) is coercive by virtue of proposition 9. It stems from Lax-Milgram theorem

that the sequence  $(\mathbf{u}_n)_{n \geq 0}$  is well defined. The convergence of that sequence is stated as follows

**Proposition 10.** *Suppose that*

$$\omega < \omega_0 \text{ and } \tau > -\frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2}. \quad (5.19)$$

Then, the sequence  $(\mathbf{u}_n)_{n \geq 0}$  converges strongly in  $X_T(\mu; \Omega)$  to  $\mathbf{u}$ , where  $\mathbf{u}$  is the unique solution of (5.17). Furthermore, we have

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{X_T(\mu; \Omega)} \leq (\omega_0^2 + |\tau|)^{\frac{1}{2}} \tau_0^{n+1} \|\mathbf{u}\|_{Y_T(\Omega, \mu, \epsilon)},$$

where

$$\tau_0 = \frac{|\omega^2 + \tau|}{\omega_0^2 + \tau} < 1.$$

*Proof* – For any integer  $n \geq 0$ , set  $\Phi_n = \mathbf{u}_n - \mathbf{u}$ , where  $\mathbf{u}$  is solution of (5.17). Then,  $\Phi_n$  and satisfies  $\operatorname{div}(\mu \Phi_n) = 0$  and

$$(\epsilon^{-1} \operatorname{curl} \Phi_{n+1}, \operatorname{curl} \mathbf{v}) + \tau(\Phi_{n+1}, \mu \mathbf{v}) = (\omega^2 + \tau)(\Phi_n, \mu \mathbf{v}), \quad (5.20)$$

for all  $\mathbf{v} \in X_T(\mu; \Omega)$ . It follows that

$$(\omega_0^2 + \tau) \|\sqrt{\mu} \Phi_{n+1}\|_{0, \Omega} \leq |\omega^2 + \tau| \|\sqrt{\mu} \Phi_n\|_{0, \Omega}.$$

Thus, if  $\tau > -\omega_0^2$  we get

$$\|\sqrt{\mu} \Phi_{n+1}\|_{0, \Omega} \leq \tau_0 \|\sqrt{\mu} \Phi_n\|_{0, \Omega}.$$

Hence,

$$\|\sqrt{\mu} \Phi_{n+1}\|_{0, \Omega} \leq \tau_0^{n+1} \|\sqrt{\mu} \mathbf{u}\|_{0, \Omega}.$$

Moreover, from (5.20) then

$$\begin{aligned} \epsilon_\infty^{-1} |\Phi_{n+1}|_{X_T(\mu; \Omega)}^2 &\leq \left( -\inf(\tau, 0) \|\sqrt{\mu} \Phi_{n+1}\|_{0, \Omega} + |\omega^2 + \tau| \|\sqrt{\mu} \Phi_n\|_{0, \Omega} \right) \|\sqrt{\mu} \Phi_{n+1}\|_{0, \Omega}, \\ &\leq \left[ -\inf(\tau, 0) \tau_0^{n+1} + |\omega^2 + \tau| \tau_0^n \right] \tau_0^{n+1} \|\sqrt{\mu} \mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2, \\ &\leq (\omega_0^2 + |\tau|) \tau_0^{2n+2} \|\sqrt{\mu} \mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2. \end{aligned}$$

If  $\omega < \omega_0$  and  $2\tau > -(\omega_0^2 + \omega^2)$  then  $\tau_0 < 1$ . In this case the sequence  $\{u_n\}$  converges strongly to  $\mathbf{u}$  in  $X_T(\mu; \Omega)$ .

□

**Remark.** This relaxation scheme could be interpreted as a time-discretization of the evolution equation

$$\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}) = \omega^2 \mu \mathbf{u} + \mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{j}),$$

by using an implicit Euler's scheme.

We conclude that in both the cases (time-dependant and harmonic ones), we are lead to solve an equation of the form (5.14). The remaining of the paper is devoted to the solving of the equation by means of a mortar spectral element method.

## 5.4 The mortar method

### 5.4.1 The discrete space

Suppose that  $\Omega$  is a polyhedral domain of  $\mathbb{R}^3$  which has a non-overlapping partition of the form

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k,$$

where  $\Omega_1, \dots, \Omega_K$  are  $K$  disjoint rectangular parallelepipeds of  $\mathbb{R}^3$  whose edges are parallel to the canonical axes.

For any  $k \leq K$  we denote by  $\Gamma_{k,j}$ ,  $1 \leq j \leq 6$ , the faces of  $\Omega_k$ . We suppose that the intersection of two sub-domains is either empty, or a point or a segment or rectangle. The skeleton  $\mathcal{S}$  is defined as follows

$$\mathcal{S} = \overline{\left( \bigcup_{k=1}^K \bigcup_{j=1}^6 \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_j \right)}.$$

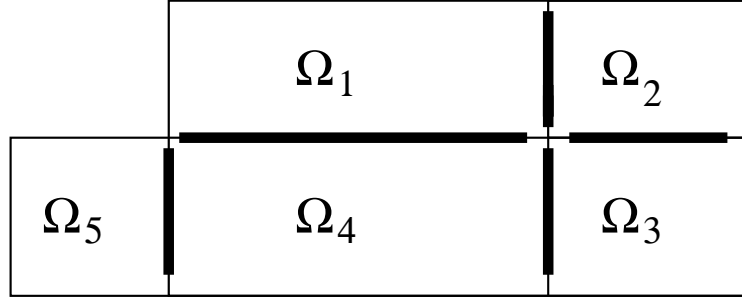


FIG. 5.1 – A 2D example of a conforming decomposition

We shall assume that this skeleton admits a partition of the form

$$\mathcal{S} = \overline{\bigcap_{s=1}^m F_s^-},$$

where, for any  $s \leq m$ ,  $F_s^-$  is a face of  $\Omega_{k(s)}$  for some  $k(s) \leq K$ . Note that this last assumption is not restrictive since it allows conforming and nonconforming geometrical decompositions (see 2D illustrations in figures 5.1, 5.2). However, it excludes some domain decompositions for which some of the portions  $F_s^-$  could not be chosen as whole faces of the subdomains (see the 2D illustration in figure 5.4.1).

Now, for any  $s \leq m$ , we set

$$\mathbb{E}(s) = \{\ell \leq K \mid \partial\Omega_\ell \cap F_s^- \neq \emptyset\}, \quad \tilde{\mathbb{E}}(s) = \mathbb{E}(s) \setminus \{k(s)\}, \quad (5.21)$$

$$M_s = N_{k(s)}. \quad (5.22)$$

The faces  $F_1^-, \dots, F_K^-$  are called *mortars* or *slave faces*.

Now, consider  $K$  integers  $N_1, \dots, N_K$  such that  $N_k \geq 2$  for all  $k \leq K$  and set

$$\delta = (N_1, \dots, N_K) \in \mathbb{N}^K. \quad (5.23)$$

Here  $\delta$  is the parameter of discretization. For any positive integer  $j \leq N_{\min}$ ,  $\delta - j$  denotes the multi-index  $(N_1 - j, \dots, N_K - j)$ .

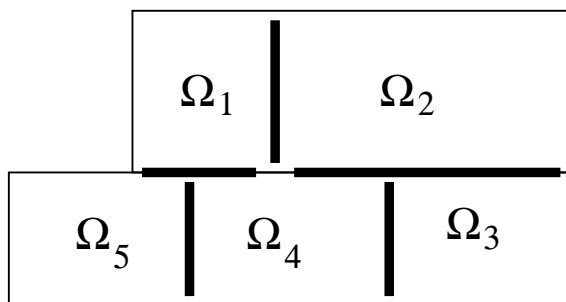


FIG. 5.2 – A 2D illustration of a non conforming decomposition

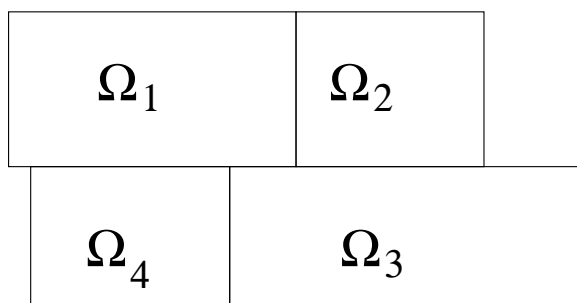


FIG. 5.3 – A 2D illustration of an excluded domain decomposition since some mortars can not be chosen as the whole edges of sub-domains.

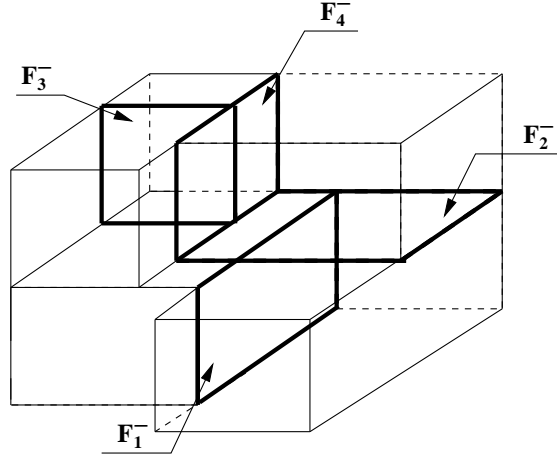


FIG. 5.4 – An example of the mortar decomposition in a 3D configuration.

In the sequel, we set

$$N_{\max} = \max_{1 \leq k \leq K} N_k, \quad N_{\min} = \min_{1 \leq k \leq K} N_k. \quad (5.24)$$

We set also

$$\eta_\delta = \max_{1 \leq s \leq m} \frac{\max_{\ell \in \mathbb{E}(s)} N_\ell}{\min_{\ell \in \mathbb{E}(s)} N_\ell} \leq \frac{N_{\max}}{N_{\min}}. \quad (5.25)$$

Observe that

$$\forall s \leq m, \forall \ell \in \mathbb{E}(s), \quad \eta_\delta^{-1} N_\ell \leq M_s \leq \eta_\delta N_\ell.$$

In order to use the numerical quadrature formulas to evaluate the integrals, we construct a Gauss-Lobato grid on  $\Omega$  as follows; firstly, we denote by  $\xi_{N,0} = -1 < \xi_{N,1} < \dots < \xi_{N,N} = 1$  the zeros of  $(1-x^2)L'_N(x)$  for any integer  $N \geq 1$ . Recall that there exists positive weights  $\rho_{N,0}, \dots, \rho_{N,N}$  such that

$$\forall p \in \mathbb{P}_{2N-1}([-1, 1]) \quad \int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=0}^N \rho_{N,i} p(\xi_{N,i}). \quad (5.26)$$

Then, for any  $k \in \{1, \dots, K\}$ , we denote by

$$\Xi^k = \{\xi_\alpha^k = (\xi_{N_k,i}^k, \xi_{N_k,j}^k, \xi_{N_k,\ell}^k); \alpha = (i, j, \ell) \text{ with } |\alpha| = \sup(i, j, \ell) \leq N_k\}$$

the grid of  $\Omega_k$  obtained by translation and homothety in each direction of the nodes  $\xi_{N_k,0}, \xi_{N_k,1}, \dots, \xi_{N_k,N_k}$  and by  $\rho_\alpha^{(k)}$ ,  $|\alpha| \leq N_k$ , the corresponding weights given by

$$\rho_\alpha^{(k)} = \rho_{N_k,i} \rho_{N_k,j} \rho_{N_k,\ell} \frac{\text{vol}(\Omega_k)}{8} \text{ with } \alpha = (i, j, \ell).$$

Now, for any  $k \leq K$ , define the discrete product on the space of continuous functions in  $\overline{\Omega}_k$  by :

$$(u, v)_{\Omega_k, N_k} = \sum_{|\alpha| \leq N_k} \rho_\alpha^k u(\boldsymbol{\xi}_\alpha^k) v(\boldsymbol{\xi}_\alpha^k).$$

Thus, if  $u$  and  $v$  are such that

$$uv|_{\Omega_k} \in \mathbb{P}_{2N_k-1}(\Omega_k),$$

then,

$$(u, v)_{\Omega_k, N_k} = \int_{\Omega_k} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (5.27)$$

Similarly, for any continuous vector functions  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$ , define the scalar product

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_k, N_k} = \sum_{i=1}^3 (u_i, v_i)_{\Omega_k, N_k}.$$

Moreover, for any continuous  $\varphi$  such that

$$\varphi|_{\Omega_k} \in \mathbb{P}_{N_k}(\Omega_k),$$

one has (see [11])

$$\|\varphi\|_{0, \Omega_k}^2 \leq (\varphi, \varphi)_{\Omega_k, N_k} \leq 27 \|\varphi\|_{0, \Omega_k}^2. \quad (5.28)$$

Now, we introduce the interpolation operator  $\mathcal{I}_\delta$  defined as follows : for any function  $v$ , continuous in each  $\Omega_k$ ,  $\mathcal{I}_\delta v$  satisfies

$$\mathcal{I}_\delta v|_{\Omega_k} \in \mathbb{P}_{N_k}(\Omega_k)$$

for and

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \Xi^k, \quad \mathcal{I}_\delta v(\boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{\xi}).$$

for each  $k \in \{1, \dots, K\}$ .

We have the following estimate of the interpolation error (see [11], Theorem 14.2) : for any  $v \in L^2(\Omega)$  such that  $v|_{\Omega_k} \in H^{s_k}(\Omega_k)$  for each  $k \leq K$

$$\|v - \mathcal{I}_\delta v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \sum_{k=1}^K N_k^{-s_k} \|v\|_{H^{s_k}(\Omega_k)}, \quad (5.29)$$

provided that the real numbers  $s_k$  satisfy

$$s_k > \frac{3}{2}. \quad (5.30)$$

Now, let  $F_s^-$ ,  $s \leq m$  be a slave face. For almost every  $\mathbf{x} \in F_s^-$  there exists a unique  $\ell \in \mathbb{E}(s)$  such that  $\mathbf{x} \in \partial\Omega_{k(s)} \cap \partial\Omega_\ell$ . For any function defined  $u$  on  $\Omega$ ,  $u^+$  denotes the value of  $u$  on the master side of the skeleton and  $u^-$  its value on the slave side. We set  $[u] = u^+ - u^-$  the jump of  $u$  across interfaces between sub-domains across interfaces. Of course any vector field in  $H(\mathbf{curl}; \Omega)$  is also in  $H(\mathbf{curl}; \Omega_k)$  for each  $k$  and satisfies the transmission condition

$$[\mathbf{u} \times \mathbf{n}_k] = 0, \quad (5.31)$$

at each interface  $\partial\Omega_k \cap \partial\Omega_l$ .

Now, for any multi-index  $\eta = (n_1, \dots, n_K) \in \mathbb{N}^K$  define  $W_\eta(\Omega)$  as the space of all the functions  $v$  defined on  $\Omega$  and verifying

$$v|_{\Omega_k} \in \mathbb{P}_{n_k}(\Omega_k). \quad (5.32)$$

In order to define the space  $H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$  which is the discrete counterpart of  $H(\mathbf{curl}; \Omega)$ , we replace the transmission conditions (5.31) by some weaker discrete conditions. Namely,  $H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$  is defined as the subspace of  $W_\delta(\Omega)^3$  of all the vector functions  $\mathbf{v}$  satisfying

$$\int_{F_s^-} (\mathbf{v}^+ \times \mathbf{n}_s - \mathbf{v}^- \times \mathbf{n}_s) \cdot \boldsymbol{\psi} d\lambda_2 = 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{M}_\delta^s(F_s^-), \quad (5.33)$$

at each slave face  $F_s^-$ ,  $s \leq m$ . Here  $\mathbb{M}_\delta^s(F_s^-)$  denotes a suitable space of Lagrange multipliers. More precisely, we choose

$$\forall 1 \leq s \leq m, \quad \mathbb{M}_\delta^s(F_s^-) = \mathbb{P}_{N_k(s)-2}(F_s^-)^2. \quad (5.34)$$

Another adequate choice is the following

$$\forall 1 \leq s \leq S, \quad \mathbb{M}_\delta^s(F_s^-) = \mathbb{P}_{N_{k(s)}-2, N_{k(s)}}(F_s^-) \times \mathbb{P}_{N_{k(s)}, N_{k(s)}-2}(F_s^-) \quad (5.35)$$

The forthcoming analysis remains valid for both the choices.

Define also the broken norm  $\|\cdot\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)}$  as follows

$$\|\mathbf{v}\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)}^2 = \sum_{k=1}^K \{(\mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_k} + (\mathbf{v}, \mathbf{v})_{\Omega_k}\}.$$

### 5.4.2 The discrete problem

Here we wish to approximate the magnetic field  $\mathbf{H}$  that satisfies the second order equation

$$\begin{aligned} \mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}) + \tau \mu \mathbf{u} &= \mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{j}) + \mathbf{u}_0 && \text{in } \Omega, \\ \mathbf{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{j} \times \mathbf{n} && \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Here  $\tau > 0$  is a given parameter,  $\mathbf{j}$  is the imposed current source and  $\mathbf{u}_0$  is a data field which comes from the use of an implicit scheme in the case of time-dependent equations or from the use of the iterative scheme in the case of time-harmonic regime.

This problem has the variational formulation : find  $\mathbf{u} \in H(\mathbf{curl}; \Omega)$  such that

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad (5.37)$$

where

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{k=1}^K \left\{ \int_{\Omega_k} \epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \tau \int_{\Omega_k} \mu \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right\}, \\ \ell(\mathbf{v}) &= \sum_{k=1}^K \left\{ \int_{\Omega_k} \epsilon^{-1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right\} \end{aligned}$$

Consider now the discrete problem : find  $\mathbf{u}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$  such that

$$a_\delta(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}_\delta) = \ell_\delta(\mathbf{v}_\delta), \quad \forall \mathbf{v} \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega), \quad (5.38)$$

with

$$a_\delta(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}_\delta) = \sum_{k=1}^K (\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}_\delta, \mathbf{curl} \mathbf{v}_\delta)_{\Omega_k, N_k} + \tau (\mu \mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}_\delta)_{\Omega_k, N_k},$$

and

$$\ell_\delta(\mathbf{v}_\delta) = \sum_{m=1}^K (\epsilon^{-1} \mathbf{j}, \mathbf{curl} \mathbf{v}_\delta)_{\Omega_k, N_k} + \sum_{m=1}^K (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_\delta)_{\Omega_k, N_k}.$$

where we supposed that  $\epsilon^{-1} \mathbf{j}$  and  $\mathbf{u}_0$  are continuous in each  $\Omega_k$ . Observe that there exist two constants  $\alpha_*(\tau, \mu_0, \epsilon_\infty)$  and  $\beta_*(\tau, \mu_0, \epsilon_\infty)$ , not depending on  $\delta = (N_1, \dots, N_K)$  such that

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega), \quad a_\delta(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_\delta) &\geq \alpha_\delta \|\mathbf{u}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)}^2, \\ \forall \mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega) \quad |a_\delta(\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}_\delta)| &\leq \beta_* \|\mathbf{u}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} \|\mathbf{v}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

thanks to (5.2) and (5.28).

**Remark.** In the case of time harmonic equations, one could be tempted to consider the discrete problem associated to the continuous problem (5.17) : find  $\mathbf{u} \in X_{T,\delta}(\mu; \Omega)$  such that

$$a_{2,\delta}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell_{2,\delta}(\mathbf{v}), \quad (5.40)$$

where

$$a_{2,\delta}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^K \{ (\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_k, N_k} + (\operatorname{div}(\mu \mathbf{u}), \operatorname{div}(\mu \mathbf{v}))_{\Omega_k, N_k} - \omega^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_k, N_k} \}$$

and

$$\ell_{2,\delta}(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^K (\epsilon^{-1} \mathbf{j}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_k, N_k}.$$

Here  $X_{T,\delta}(\mu; \Omega)$  denotes the discrete space corresponding to  $X_T(\mu; \Omega)$  which is constructed similarly to  $H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$  by adding a matching condition on the normal component at the mortars. It is worth noting that this approach leads to consider the following questions : is the semi-norm

$$\sum_{k=1}^K \left\{ \int_{\Omega_k} \epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_k} \operatorname{div}(\mu \mathbf{u}) \cdot \operatorname{div}(\mu \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \right\},$$

a uniformly elliptic norm on the discrete space  $X_{T,\delta}(\mu; \Omega)$ ? (as is the semi-norm (5.10) in the continuous case). The difficulty of this unresolved question and the uncertainty about its affirmative answer are circumvented here by the use of the iterative algorithm proposed in section 5.3.

### 5.4.3 Error estimate.

**Theorem 1.** *Let  $\mathbf{u} \in H(\mathbf{curl}; \Omega)$  be the solution of (5.37) and  $\mathbf{u}_\delta$  the solution of the (5.38). We set*

$$\boldsymbol{\lambda} = \epsilon^{-1}(\mathbf{curl} \mathbf{u} - \mathbf{j}). \quad (5.41)$$

Suppose that for each  $k \in \{1, \dots, K\}$

$$\mathbf{u} \in H^{s_k+1}(\Omega_k), \quad \boldsymbol{\lambda} \in H^{\sigma_k+1}(\Omega_k)$$

for some real numbers  $s_k > 1/2$ ,  $\sigma_k > 1/2$ . Suppose also that there exists a uniform constant  $\eta_0$  such that

$$\eta_\delta \leq \eta_0 \quad (5.42)$$

Then,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} \leq C \left( \sum_{k=1}^K N_k^{1/4-s_k} \|\mathbf{u}\|_{H^{\sigma_k+1}(\Omega_k)} + (\log N_k)^{1/2} N_k^{-\sigma_k} \|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^{\sigma_k+1}(\Omega_k)} \right) \quad (5.43)$$

**Remark.** The condition (5.42) can be dropped provided that right hand side of (5.43) is replaced by

$$C \left( (\eta_\delta^{1/4} + \eta_\delta^{3/4}) \sum_{k=1}^K N_k^{1/4-s_k} \|\mathbf{u}\|_{H^{\sigma_k+1}(\Omega_k)} + \sum_{k=1}^K \eta_\delta^{\sigma_k} (\log N_k)^{1/2} N_k^{-\sigma_k} \|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^{\sigma_k+1}(\Omega_k)} \right).$$

The proof is based on the following lemma

**Lemma 2.** *We have*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} &\leq C \left( \|\mathbf{u} - \mathcal{I}_\delta \mathbf{u}\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} + \inf_{\mathbf{v}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} \right. \\ &\quad + \sup_{\mathbf{w}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega), \mathbf{w}_\delta \neq 0} \frac{b(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - b_\delta(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta)}{\|\mathbf{w}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)}} \\ &\quad \left. + \sup_{\mathbf{w}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega), \mathbf{w}_\delta \neq 0} \frac{a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - \ell(\mathbf{w}_\delta)}{\|\mathbf{w}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)}} \right), \end{aligned} \quad (5.44)$$

where

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) = a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - \ell(\mathbf{w}_\delta), \quad b_\delta(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) = a_\delta(\mathcal{I}_\delta \mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - \ell_\delta(\mathbf{w}_\delta).$$

Note that the last three terms on the right hand side correspond respectively to the best approximation error, the consistency error and the numerical integration error.

*Proof* — This lemma is a slightly modified version of the Berger-Scott-Strang lemma (see [8]). Indeed, for any  $\mathbf{v}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$  we have

$$\begin{aligned} \alpha_* \|\mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)}^2 &\leq a_\delta(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta) = \ell_\delta(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta) - a_\delta(\mathbf{v}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta) \\ &\leq \ell_\delta(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta) + a_\delta(\mathcal{I}_\delta \mathbf{u} - \mathbf{v}_\delta, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta) - a_\delta(\mathcal{I}_\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta) \\ &\quad + a(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta) - a(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta) - \ell(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta) + \ell(\mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta). \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} \alpha_* \|\mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} &\leq \beta_* \|\mathcal{I}_\delta \mathbf{u} - \mathbf{v}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} \\ &\quad + \sup_{\mathbf{w}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega), \mathbf{w}_\delta \neq \mathbf{0}} \frac{|b(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - b_\delta(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta)|}{\|\mathbf{w}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)}} \\ &\quad + \sup_{\mathbf{w}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega), \mathbf{w}_\delta \neq \mathbf{0}} \frac{|a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - \ell(\mathbf{w}_\delta)|}{\|\mathbf{w}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)}}. \end{aligned}$$

Finally, we use the inequalities

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} + \|\mathbf{u}_\delta - \mathbf{v}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)}, \\ \|\mathcal{I}_\delta \mathbf{u} - \mathbf{v}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} &\leq \|\mathbf{u} - \mathcal{I}_\delta \mathbf{u}\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} \end{aligned}$$

which ends the proof of (5.44).  $\diamond$

### The best approximation error

The estimate of the interpolation error consists to find a good approximation of  $\mathbf{u}$  in the discrete space  $H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$ . The construction of such an approximation constitutes one of the main difficulties in the numerical analysis of the mortar methods.

**Proposition 11.** *Suppose that*

$$\mathbf{u}|_{\Omega_k} \in H^{s_k+1}(\Omega_k)$$

for some real numbers  $s_k > 3/2$  ( $k = 1, \dots, K$ ). Suppose also that the assumption (5.42) is satisfied. Then

$$\|\mathbf{u} - \mathcal{I}_\delta \mathbf{u}\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} + \inf_{\mathbf{v}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_\delta\|_{H_*(\mathbf{curl}, \Omega)} \leq c \sum_{k=1}^K N_k^{1/4-s_k} \|\mathbf{u}\|_{H^{s_k+1}(\Omega_k)}. \quad (5.45)$$

where  $c$  is not depending neither on  $\delta$  nor on  $\mathbf{u}$ .

The proof of proposition 11 is divided into several steps. We start by introducing some useful notations. Let  $\Lambda = ]-1, 1[^3$  be the unit cube and  $F = ]-1, 1[^2 \times \{1\}$  its upper face. We denote by  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$  and  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  the canonical basis of  $\mathbb{R}^3$ . Consider a collection of non trivial open rectangles  $G_1, \dots, G_r$  a collection of non trivial rectangles such that

- $G_i \cap G_j = \emptyset$  for any  $i, j$  such that  $i \neq j$ ,
- $\overline{F} = \bigcup_{i=1}^r \overline{G}_i$ ,
- The edges of each  $G_k$  is parallel to the canonical axes.

We denote by  $\tilde{H}^1(F)$  the space of all the functions  $u \in L^2(F)$  such that

$$u|_{G_i} \in H^1(G_i) \text{ for all } i \in \{1, \dots, r\}.$$

### Step 1 : Some discrete operators

For any integers  $N$  and  $M$ , we denote by  $\pi_{N,M}$  the  $L^2$  projector from  $L^2(F)$  onto  $\mathbb{P}_{N,M}(F)$  and by  $\mathbb{P}_{N,M}^{*,x}(F)$  (resp.  $\mathbb{P}_{N,M}^{*,y}(F)$ ) the space of all the polynomial functions  $v \in \mathbb{P}_{N,M}(F)$  such that  $v = 0$  at  $x = \pm 1$  (resp. at  $y = \pm 1$ ). We define also the operator  $\pi_{N,M}^{*,x}$  as follows : for all  $u \in L^2(\Omega)$ ,  $\pi_{N,M}^{*,x}u$  is the unique element of  $\mathbb{P}_{N,M}^{*,x}(F)$  such that

$$\int_F (u - \pi_{N,M}^{*,x}u) \cdot \psi \, dx \, dy = 0 \text{ for all } \psi \in \mathbb{P}_{N-2,M}(F). \quad (5.46)$$

Similarly, we define the operator  $\pi_{N,M}^{*,y}$  as follows : for all  $u \in L^2(\Omega)$ ,  $\pi_{N,M}^{*,y}u$  is the unique element of  $\mathbb{P}_{N,M}(F)$  such that

$$\int_F (u - \pi_{N,M}^{*,y}u) \cdot \psi \, dx \, dy = 0 \text{ for all } \psi \in \mathbb{P}_{N,M-2}(F). \quad (5.47)$$

We state the following

**Proposition 12.** *Let  $N \geq 1$  and  $M \geq 1$  be two integers. There exist two constants  $c_1, c_2$  not depending neither on  $N$  nor on  $M$  and such that for any function  $u \in \tilde{H}^1(F)$  the following estimates hold*

$$\|\pi_{N,M}^{*,x} u\|_{L^2(F)} \leq c_1 N^{-1} \sum_{k=1}^r (\|u\|_{H^1(G_k)} + N\|u\|_{L^2(G_k)}), \quad (5.48)$$

$$\left\| \frac{\partial(\pi_{N,M}^{*,x} u)}{\partial x} \right\|_{L^2(F)} \leq c_2 N^{1/2} \sum_{k=1}^r (\|u\|_{H^1(G_k)} + N\|u\|_{L^2(G_k)}). \quad (5.49)$$

Similar estimates hold for the operator  $\pi_{N,M}^{*,y}$  with  $N$  replaced by  $M$  and  $x$  replaced by  $y$ .

*Proof* — The proof of proposition 12 is based on the following lemma

**Lemma 3.** *Let  $N \geq 1$  and  $M \geq 1$  be two integers. There exists a constant  $c$  not depending neither on  $N$  nor on  $M$  such that for any function  $u \in \tilde{H}^1(F)$  the following estimate holds*

$$\|(\pi_{N,M} u)(\pm 1, \cdot)\|_{L^2([-1,1])} \leq c_1 N^{-1/2} \sum_{k=1}^r (\|u\|_{H^1(G_k)} + N\|u\|_{L^2(G_k)}). \quad (5.50)$$

*Proof* — Let  $u \in \tilde{H}^1(F)$ . We set  $w = \pi_{N,M} u \in \mathbb{P}_{N,M}(F)$  and

$$q_N(x, y) = (L_N(x) + L_{N+1}(x))w(1, y) \in \mathbb{P}_{N+1,M}(F).$$

We have on the one hand

$$\int_{-1}^1 w(x, y) \frac{\partial q_N}{\partial x}(x, y) dx = 2w(1, y)^2$$

since  $q_N$  is orthogonal to the space  $\mathbb{P}_{N-1,M}(F)$ . On the other hand we have

$$\int_F w(x, y) \frac{\partial q_N}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_F u(x, y) \frac{\partial q_N}{\partial x}(x, y) dx dy.$$

Hence,

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 w^2(1, y) dy &= \sum_{k=1}^r \int_{G_k} u(x, y) \frac{\partial q_N}{\partial x}(x, y) dx dy \\ &= \sum_{k=1}^r \left( - \int_{G_k} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) q_N(x, y) dx dy + \int_{\partial G_k} u(x, y) q_N(x, y) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 d\sigma \right) \\ &\leq c \sum_{k=1}^r \left( N^{-1/2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(G_k)} + \|u\|_{L^2(\partial G_k)} \right) \|w(1, \cdot)\|_{L^2([-1,1])}, \end{aligned}$$

where we used Cauchy-Schwarz inequalities combined with the estimates

$$\begin{aligned} \|q_N\|_{L^2(F)} &\leq cN^{-1/2}\|w(1, \cdot)\|_{L^2([-1, 1])} \\ |q(x, y)| &\leq (|L_{N-1}(x)| + |L_{N-2}(x)|)|w(1, y)| \leq 2|w(1, y)| \quad \forall y \in ]-1, 1[. \end{aligned}$$

Recall that there exists a constant  $C$  such that for any  $\epsilon > 0$  the inequality

$$\|u\|_{L^2(\partial G_k)} \leq c(\epsilon\|u\|_{H^1(G_k)} + \epsilon^{-1}\|u\|_{L^2(G_k)}),$$

holds for any  $u \in H^1(G_k)$ . Taking  $\epsilon = N^{-1/2}$  gives (5.50).  $\diamond$

We prove now proposition 12. Let  $u \in \tilde{H}^1(F)$  and set  $w = \pi_{N-2, M}u \in \mathbb{P}_{N, M}(F)$  and  $v = \pi_{N, M}^{*, x}u$ . We prove easily that

$$v(x, y) = w(x, y) - \frac{1}{2}(L_{N-1}(x) + L_N(x))w(1, y) - \frac{1}{2}(L_{N-1}(-x) + L_N(-x))w(-1, y).$$

Thus,

$$\|v\|_{L^2(F)} \leq \|w\|_{L^2(F)} + \frac{C}{N^{1/2}}(\|w(1, \cdot)\|_{L^2([-1, 1])} + \|w(-1, \cdot)\|_{L^2([-1, 1])}).$$

Using (5.50) yields (5.48).

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \int_F \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx dy &= - \int_F v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy \\ &= - \int_F u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy \\ &= \sum_{k=1}^r \int_{G_k} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy - \int_{\partial G_k} u \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x d\sigma \\ &\leq \sum_{k=1}^r (\|u\|_{H^1(G_k)} + N\|u\|_{L^2(\partial G_k)}) \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(G_k)}, \end{aligned}$$

where we use the inverse inequality

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(\partial G_k)} \leq N \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(G_k)}.$$

$\diamond$

## Step 2 : A lifting operator

**Lemma 4.** *Let  $N \geq 1$  and  $M \geq 1$  be two integers. Then, for all  $v \in \mathbb{P}_{N,M}^{*,x}(F)$  there exists a function  $\psi \equiv \mathcal{R}_{N,M}^y v \in \mathbb{P}_{N,M,N}(\Lambda)$  such that*

$$\begin{aligned} \psi &= v \text{ on } F, \\ \psi \mathbf{e}_2 \times \mathbf{n} &= \mathbf{0} \text{ on } \partial\Lambda \setminus F. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Moreover, there exists a constant  $c$  not depending neither on  $N$  nor on  $M$  such that

$$\|\psi \mathbf{e}_2\|_{H(\mathbf{curl}; \Lambda)}^2 \leq c \|v\|_{L^2(F)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(F)}. \quad (5.52)$$

*Proof* — In the following,  $c$  and  $C$  denote any constant not depending on  $N$  and  $M$ . We set

$$\psi(x, y, z) = \varphi_N(z)v(x, y),$$

where  $\varphi_N \in \mathbb{P}_N([-1, 1])$  will be chosen such that

$$\varphi_N(1) = 1, \quad \varphi_N(-1) = 0.$$

It is quite clear that  $\psi$  fulfills (5.51). On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2 &= \|\varphi_N\|_{L^2([-1, 1])}^2 \|v\|_{L^2(F)}^2, \\ \|\mathbf{curl}(\psi \mathbf{e}_2)\|_{L^2(\Lambda)}^2 &= \|\varphi_N\|_{L^2([-1, 1])}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(F)}^2 + \|v\|_{L^2(F)}^2 \|\varphi_N'\|_{L^2([-1, 1])}^2. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Thus, if  $v \neq 0$

$$\|\mathbf{curl}(\psi \mathbf{e}_2)\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \left( \|\varphi_N\|_{L^2([-1, 1])}^2 \omega^2 + \|\varphi_N'\|_{L^2([-1, 1])}^2 \right) \|v\|_{L^2(F)}^2.$$

where

$$\omega = \frac{\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(F)}}{\|v\|_{L^2(F)}}.$$

Note that

$$c \leq \omega \leq CN^2. \quad (5.54)$$

thanks to the inverse inequality

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(F)} \leq CN^2 \|v\|_{L^2(F)}, \quad (5.55)$$

and the Poincaré inequality

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(F)} \geq c \|v\|_{L^2(F)}. \quad (5.56)$$

Now, we choose

$$\varphi_N(z) = \alpha p_N(z) + \beta p_{N+1}(z),$$

where for any  $m \in \{N, N+1\}$ ,  $p_m(z)$  is defined as follows

$$p_m(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{\omega^{2(k+1)}} L_m^{(2k+1)}(z).$$

The coefficients  $\alpha$  and  $\beta$  are given by

$$\alpha = \frac{1}{2p_N(1)}, \quad \beta = \frac{1}{2p_{N+1}(1)}.$$

Observe that

$$|\alpha| \leq c\omega, \quad |\beta| \leq c\omega,$$

since

$$p_m(1) \geq \frac{L'_m(1)}{\omega^2} \geq \frac{cm^2}{\omega^2} \geq \frac{c}{\omega},$$

for  $m = N$  or  $m = N+1$  (thanks to (5.54)). Observe also that  $\varphi_N$  satisfies

$$\varphi_N(1) = 1, \quad \varphi_N(-1) = 0$$

and

$$\omega^2 \varphi_N(z) - \varphi_N''(z) = \alpha L'_N(z) + \beta L'_{N+1}(z), \quad (5.57)$$

Multiplying the latter by  $\varphi_N(z)$  and integrating by parts on  $] -1, 1[$  gives

$$\omega^2 \|\varphi_N\|_{L^2([-1,1])}^2 + \|\varphi_N'\|_{L^2([-1,1])}^2 = \lambda_N,$$

where we set  $\lambda_N = \varphi'_N(1) + \alpha + \beta$ .

On the other hand, multiplying (5.57) by  $2(z+1)\varphi'_N(z)$  and integrating by parts again yields

$$\omega^2 \|\varphi_N\|_{L^2(\cdot]^{-1,1})}^2 - \|\varphi'_N\|_{L^2(\cdot]^{-1,1})}^2 = 2\omega^2 - 2\varphi'_N(1)^2 - 4(\alpha + \beta)\varphi'_N(1) = 2\omega^2 - 2\lambda_N^2 + 2(\alpha + \beta)^2.$$

Hence

$$2\omega^2 \|\varphi_N\|_{L^2(\cdot]^{-1,1})}^2 = -2\lambda_N^2 + \lambda_N + 2\omega^2 + 2(\alpha + \beta)^2 \geq 0,$$

and

$$2\|\varphi'_N\|_{L^2(\cdot]^{-1,1})}^2 = 2\lambda_N^2 + \lambda_N - 2\omega^2 - 2(\alpha + \beta)^2 \geq 0.$$

It follows that

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 16\omega^2 + 16(\alpha + \beta)^2}}{4} \leq \lambda_N \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 16\omega^2 + 16(\alpha + \beta)^2}}{4} \leq C\omega.$$

Finally, we get after replacing in (5.53)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{curl}(\psi \mathbf{e}_2)\|_{L^2(\Lambda)}^2 &\leq c \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(F)} \|v\|_{L^2(F)}, \\ \|\psi\|_{L^2(\Lambda)}^2 &\leq \frac{c}{\omega} \|v\|_{L^2(F)}^2, \\ &\leq \frac{\|v\|_{L^2(F)}^3}{\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(F)}} \\ &\leq c \|v\|_{L^2(F)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(F)}, \end{aligned}$$

where we used Poincaré's inequality (5.56). Inequality (5.52) follows immediately.  $\diamond$

**Remark.** The choice of the polynomial  $\varphi_N$  is not as arbitrary as it seems. Indeed it minimizes the functional

$$\omega^2 \|\varphi_N\|_{L^2(\cdot]^{-1,1})}^2 + \|\varphi'_N\|_{L^2(\cdot]^{-1,1})}^2,$$

on the set of all the polynomial functions  $p \in \mathbb{P}_N(\cdot]^{-1,1})$  verifying the conditions  $p(1) = 1$  and  $p(-1) = 0$ .

**Proposition 13.** *Let  $N \geq 1$  and  $M \geq 1$  be two integers. Then, there exists an operator  $\mathcal{R}_{N,M}$  from  $L^2(\Lambda)^3$  onto  $\mathbb{P}_{N,M,M}(\Lambda) \times \mathbb{P}_{N,M,N}(\Lambda) \times \{0\}$  such that : for all  $\mathbf{u} \in L^2(F)^3$ ,  $\mathcal{R}_{N,M}\mathbf{u}$  satisfies*

$$\begin{aligned} \int_F (\mathcal{R}_{N,M}\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\psi} dx dy &= \int_F (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\psi} dx dy \quad \text{for any } \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{P}_{N-2,M}(F) \times \mathbb{P}_{N,M-2}(F), \\ \mathcal{R}_{N,M}\mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Lambda \setminus F. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Moreover, there exists a constant  $c$ , independent of  $N$  and  $M$  such that for all  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \tilde{H}(F)^2 \times L^2(F)$  we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_{N,M}\mathbf{u}\|_{H(\mathbf{curl};\Lambda)} &\leq c \left\{ M^{-1/4} \sum_{k=1}^r (\|u_1\|_{H^1(G_k)} + M\|u_1\|_{L^2(G_k)}) \right. \\ &\quad \left. + N^{-1/4} \sum_{k=1}^r (\|u_2\|_{H^1(G_k)} + N\|u_2\|_{L^2(G_k)}) \right\}. \end{aligned} \tag{5.59}$$

*Proof* — Let  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in L^2(F)^3$ . We set

$$\mathcal{R}_{N,M}\mathbf{u} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2,$$

where  $w_1 = (\mathcal{R}_{N,M}^x \circ \pi_{N,M}^{*,y})u_1$  and  $w_2 = (\mathcal{R}_{N,M}^y \circ \pi_{N,M}^{*,x})u_2$ . Here  $\mathcal{R}_{N,M}^y$  denotes the lifting operator of lemma 4 and  $\mathcal{R}_{N,M}^x$  denotes the similar operator obtained by exchanging  $x$  and  $y$ . It is quite clear that  $\mathcal{R}_{N,M}\mathbf{u}$  satisfies (5.58). Furthermore, we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_{N,M}\mathbf{u}\|_{H(\mathbf{curl};\Lambda)}^2 &\leq c \left( \|\pi_{N,M}^{*,y}u_1\|_{L^2(F)} \left\| \frac{\partial(\pi_{N,M}^{*,y}u_1)}{\partial y} \right\|_{L^2(F)} + \|\pi_{N,M}^{*,x}u_2\|_{L^2(F)} \left\| \frac{\partial(\pi_{N,M}^{*,x}u_2)}{\partial x} \right\|_{L^2(F)} \right) \\ &\leq c \left( M^{-1/2} \left\{ \sum_{k=1}^r (\|u_1\|_{H^1(G_k)} + M\|u_1\|_{L^2(G_k)}) \right\}^2 + \right. \\ &\quad \left. N^{-1/2} \left\{ \sum_{k=1}^r (\|u_2\|_{H^1(G_k)} + N\|u_2\|_{L^2(G_k)}) \right\}^2 \right), \end{aligned}$$

which is the desired result.  $\diamond$

**Step 3 : Proof of Proposition 11**

Let us now find an element  $\tilde{\mathbf{u}}_\delta$  in the discrete space  $H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$  which is a good approximation of  $\mathbf{u}$ . Firstly, we put

$$\tilde{\mathbf{u}}_\delta = \mathcal{I}_\delta \mathbf{u} + \mathbf{w}_\delta,$$

where  $\mathbf{w}_\delta$  will be chosen subsequently. Let  $\mathbf{z}$  be the function defined on the skeleton  $\mathcal{S}$  as follows

$$\mathbf{z} = [\mathcal{I}_\delta \mathbf{u} - \mathbf{u}] = [\mathcal{I}_\delta \mathbf{u}] \quad \text{on } F_s^-,$$

for any  $s \leq m$  ( $[\cdot]$  denotes the jump across the skeleton  $\mathcal{S}$ ). Let  $F_s^-$ ,  $s \leq m$ , be a slave face. For any  $\ell \in \mathbb{E}(s)$  we set  $\Gamma_{s,\ell} = F_s^- \cap \partial\Omega_\ell$  and we define the following extension of  $\mathbf{z}$

$$\mathcal{R}_s \mathbf{z} = \begin{cases} \mathcal{R}_{M_s} \mathbf{z} & \text{in } \Omega_{k(s)}, \\ \mathbf{0} & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

where  $\mathcal{R}_{M_s}$  is the lifting operator in  $\Omega_{k(s)}$  constructed from the operator  $\mathcal{R}_{M_s, M_s}$  of proposition 13 by translation, homothetic and rotation.

It follows from proposition 13 that

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_s \mathbf{z}\|_{H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)} &\leq cM_s^{-1/4} \sum_{\ell \in \bar{\mathbb{E}}(s)} (\|\mathbf{z} \times \mathbf{n}_s\|_{H^1(F_s^- \cap \partial\Omega_\ell)} + M_s \|\mathbf{z} \times \mathbf{n}_s\|_{L^2(F_s^- \cap \partial\Omega_\ell)}) \\ &\leq cM_s^{-1/4} \sum_{\ell \in \mathbb{E}(s)} (\|(\mathcal{I}_\delta^\ell \mathbf{u} - \mathbf{u}) \times \mathbf{n}_s\|_{H^1(F_s^- \cap \partial\Omega_\ell)} + M_s \|(\mathcal{I}_\delta^\ell \mathbf{u} - \mathbf{u}) \times \mathbf{n}_s\|_{L^2(F_s^- \cap \partial\Omega_\ell)}) \\ &\leq cM_s^{-1/4} \sum_{\ell \in \mathbb{E}(s)} (N_\ell^{1/2-s_\ell} + M_s N_\ell^{-1/2-s_\ell}) \|\mathbf{u} \times \mathbf{n}\|_{H^{1/2+s_\ell}(\partial\Omega_\ell)} \\ &\leq c(\eta_\delta^{1/4} + \eta_\delta^{3/4}) \sum_{k=1}^K N_k^{1/4-s_k} \|\mathbf{u}\|_{H^{s_k+1}(\Omega_k)}. \end{aligned}$$

Finally, we choose

$$\mathbf{w}_\delta = \sum_{s=1}^m \mathcal{R}_s \mathbf{z}.$$

Then,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_\delta\|_{H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)} &\leq \sum_{s=1}^m \|\mathcal{R}_s \mathbf{z}\|_{H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)}, \\ &\leq C(\eta_\delta^{1/4} + \eta_\delta^{3/4}) \sum_{k=1}^K N_k^{1/4-s_k} \|\mathbf{u}\|_{H^{s_k+1}(\Omega_k)}. \end{aligned}$$

Using (5.42) ends the proof of (5.45).

### The consistency error

Let  $\boldsymbol{\lambda}$  be the vector field defined by (5.41). Note that  $\boldsymbol{\lambda} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$  since

$$\mathbf{curl} \boldsymbol{\lambda} = -\tau \mu \mathbf{u} + \mathbf{u}_0 \text{ in } \Omega, \quad \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega.$$

**Proposition 14.** *Assume that for each  $k \in \{1, \dots, K\}$*

$$\boldsymbol{\lambda}|_{\Omega_k} \in H^{\sigma_k+1}(\Omega_k), \quad (5.60)$$

for some real number  $\sigma_k > 1/2$ . Then

$$\sup_{\mathbf{w}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega), \mathbf{w}_\delta \neq \mathbf{0}} \frac{a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - \ell(\mathbf{w}_\delta)}{\|\mathbf{w}_\delta\|_{H_\star(\mathbf{curl}; \Omega)}} \leq c \sum_{k=0}^K \eta_\delta^{\sigma_k} (\log N_k)^{1/2} N_k^{-\sigma_k} \|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^{\sigma_k+1}(\Omega_k)}. \quad (5.61)$$

*Proof* — Observe that

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - \ell(\mathbf{w}_\delta) &= \sum_{k=1}^K \{(\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k} + \tau(\mu \mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k} \\ &\quad - (\mathbf{curl}(\epsilon^{-1} \mathbf{j}), \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k} - (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k}\}, \\ &= \sum_{k=1}^K (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{curl} \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k} - (\mathbf{curl} \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k}. \end{aligned}$$

Suppose now that  $\boldsymbol{\lambda} \in H^1(\Omega_k)$  for any  $k \leq K$ . Then, after an integration by parts

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - \ell(\mathbf{w}_\delta) &= \sum_{k=0}^K \int_{\partial\Omega_k} (\mathbf{w}_\delta \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\lambda} d\sigma, \\ &= \sum_{s=0}^m \int_{F_s^-} [\mathbf{w}_\delta^+ \times \mathbf{n}_s - \mathbf{w}_\delta^- \times \mathbf{n}_s] \cdot \boldsymbol{\lambda} d\sigma \\ &= \sum_{s=0}^m \int_{F_s^-} [\mathbf{w}_\delta^+ \times \mathbf{n}_s - \mathbf{w}_\delta^- \times \mathbf{n}_s] \cdot (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\psi}) d\sigma, \end{aligned}$$

where  $\boldsymbol{\psi}$  is an arbitrary function defined on the skeleton  $\mathcal{S}$  and is such that  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{P}_{M_s}(F_s^-)^3$  for any  $s \leq M$ .

It follows that for any positive and sufficiently small parameters  $\rho_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , we have

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - \ell(\mathbf{w}_\delta)| &\leq c \sum_{s=1}^m \sum_{k \in \mathbb{E}(s)} \left| \int_{\partial\Omega_k} (\mathbf{w}_\delta \times \mathbf{n}) \cdot (\widetilde{\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\psi}}) d\sigma \right| \\ &\leq c \sum_{s=1}^m \sum_{k \in \mathbb{E}(s)} \|\mathbf{w}_\delta \times \mathbf{n}\|_{H^{-1/2+\rho_k}(\partial\Omega_k)} \cdot \|\widetilde{\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\psi}}\|_{H^{1/2-\rho_k}(\partial\Omega_k)} \\ &\leq c \sum_{s=1}^m \left( \sum_{k \in \mathbb{E}(s)} \rho_k^{-1/2} \|\mathbf{w}_\delta \times \mathbf{n}\|_{H^{-1/2+\rho_k}(\partial\Omega_k)} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\psi}\|_{H^{1/2-\rho_k}(F_s^-)} \right), \end{aligned}$$

where  $\widetilde{\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\psi}}$  denotes the extension by zero of  $\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\psi}$  to  $\partial\Omega_k$ . The term  $\rho_k^{-1/2}$  is due to the norm of this extension considered from  $H^{1/2-\rho_k}(F_s^-)$  into  $H^{1/2-\rho_k}(\partial\Omega_k)$ .

On the other hand, we have

$$\|\mathbf{w}_\delta \times \mathbf{n}\|_{H^{-1/2+\rho_k}(\partial\Omega_k)} \leq \|\mathbf{w}_\delta\|_{H^{\rho_k}(\Omega_k)} + \|\mathbf{curl} \mathbf{w}_\delta\|_{L^2(\Omega_k)},$$

thanks to the formula (5.8). Then

$$\|\mathbf{w}_\delta \times \mathbf{n}\|_{H^{-1/2+\rho_k}(\partial\Omega_k)} \leq c N_k^{2\rho_k} \|\mathbf{w}_\delta\|_{H(\mathbf{curl}; \Omega_k)}.$$

Finally, choosing  $\rho_k = (\log N_k)^{-1}$  we deduce that

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - \ell(\mathbf{w}_\delta)| &\leq c \sum_{s=1}^m \left( \sum_{k \in \mathbb{E}(s)} \rho_k^{-1/2} N_k^{2\rho_k} M_s^{-\sigma_k - \rho_k} \|\mathbf{w}_\delta\|_{H(\mathbf{curl}; \Omega_k)} \|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^{\sigma_k+1/2}(F_s^-)} \right) \\ &\leq c \sum_{k=0}^K \left( \sum_{k \in \mathbb{E}(s)} \eta_\delta^{\sigma_k} (\log N_k)^{1/2} N_k^{-\sigma_k} \|\mathbf{w}_\delta\|_{H(\mathbf{curl}; \Omega_k)} \|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^{\sigma_k+1/2}(F_s^-)} \right) \\ &\leq c \sum_{k=0}^K \eta_\delta^{\sigma_k} (\log N_k)^{1/2} N_k^{-\sigma_k} \|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^{\sigma_k+1}(\Omega_k)} \|\mathbf{w}_\delta\|_{H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)}, \end{aligned}$$

where we used the assumption (5.60).  $\diamond$

### 5.4.4 The numerical integration error

Let us now estimate the error due to the use of the quadrature formulas for computing the integrals appearing in the discrete problem. We state the following

**Lemma 5.** *Suppose that the vector field  $\boldsymbol{\lambda}$ , defined by (5.41), satisfies (5.60). Then, there exists a constant  $c$  not depending neither on  $\delta$  nor on  $u$  such that*

$$\sup_{\mathbf{w}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega), \mathbf{w}_\delta \neq \mathbf{0}} \frac{b(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - b_\delta(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta)}{\|\mathbf{w}_\delta\|_{H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)}} \leq c \sum_{k=1}^K N_k^{-\sigma_k} \|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^{\sigma_k+1}(\Omega_k)}. \quad (5.62)$$

where

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) = a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - \ell(\mathbf{w}_\delta), \quad b_\delta(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) = a_\delta(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - \ell_\delta(\mathbf{w}_\delta).$$

*Proof* — The estimate of the numerical integration is a classical exercise. Consider now a function  $\mathbf{z}_1 \in W_{\delta-1}(\Omega)^3$ ,  $\mathbf{z}_2 \in W_{\delta-1}(\Omega)^3$ . We have

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - b_\delta(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta)| &\leq \left| \sum_{k=1}^K (\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{z}_1, \mathbf{curl} \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k} + (\tau\mu\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 + \mathbf{z}_2, \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k}, \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^K (\mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{curl} \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k, N_k} + (\mathbf{z}_2 - \tau\mu\mathbf{u} + \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k, N_k} \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^K (\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{z}_1, \mathbf{curl} \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k} + (\mathbf{z}_2 - \mathbf{curl} \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^K (\mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{curl} \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k, N_k} + (\mathbf{curl} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{z}_2, \mathbf{w}_\delta)_{\Omega_k, N_k} \right|, \end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{w}_\delta \in H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega), \mathbf{w}_\delta \neq \mathbf{0}} \frac{|b(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta) - b_\delta(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\delta)|}{\|\mathbf{w}_\delta\|_{H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)}} &\leq c \left\{ \|\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{z}_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{curl} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{z}_2\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathcal{I}_\delta \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{z}_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{I}_\delta(\mathbf{curl} \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{z}_2\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ &\leq c \left\{ \|\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{z}_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{curl} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{z}_2\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathcal{I}_\delta \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{I}_\delta(\mathbf{curl} \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{curl} \boldsymbol{\lambda}\|_{L^2(\Omega)} \right\}. \end{aligned}$$

Choosing  $\mathbf{z}_1 = \mathcal{I}_{\delta-1} \boldsymbol{\lambda}$ ,  $\mathbf{z}_2 = \mathcal{I}_{\delta-1} \mathbf{curl} \boldsymbol{\lambda}$  and using (5.29) ends the proof of (5.62).  $\diamond$

## 5.5 Numerical implementation.

The aim of this section is to give some details about the numerical implementation of the system (5.38). We shall firstly prove that the matching conditions (5.33) can be written explicitly without any resort to numerical inversion. This leads naturally to the construction of an explicit basis of the discrete space  $H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$ . On the other hand, we shall present some numerical results in a simple 3D domain, the decomposition of which is non conforming.

### 5.5.1 A basis of $H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$ . The treatment of the matching conditions

The definition of the space  $H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$  introduced in section 5.4.1 depends on the choice of the Lagrange multiplier spaces  $\mathbb{M}_\delta^s(F_s)$ . Here we consider the spaces  $\mathbb{M}_\delta^s(F_s)$  defined by (5.34). The other choice given by (5.35) can be treated exactly by the same method.

We denote by  $\boldsymbol{\xi}_k$ ,  $1 \leq k \leq G$ , the nodes of the grid  $\Xi$ . For each  $s \in \{1, \dots, m\}$  we set

$$\begin{aligned} \Lambda_{int} &= \{k \mid \boldsymbol{\xi}_k \notin \mathcal{S}\}, \\ \Lambda_s^+ &= \{k \mid \boldsymbol{\xi}_k \in \Xi^\ell \cap \mathcal{S} \text{ for some } \ell \in \widetilde{\mathbb{E}}(s)\}, \\ \Lambda_s^- &= \{k \mid \boldsymbol{\xi}_k \in \Xi^{k(s)} \cap \mathcal{S}\}, \\ \widetilde{\Lambda}_s^- &= \{k \in \Lambda_s^- \mid \boldsymbol{\xi}_k \notin \partial F_s^-\}, \\ \widehat{\Lambda}_s^- &= \{k \in \Lambda_s^- \mid \boldsymbol{\xi}_k \in \partial F_s^-\}, \end{aligned}$$

Note that

$$\text{card}(\Lambda_s^-) = (N_{k(s)} + 1)^2, \quad \text{card}(\widetilde{\Lambda}_s^-) = (N_{k(s)} - 1)^2 = \dim(\mathbb{P}_{N_{k(s)}-2}).$$

The grid  $\Xi$  can be decomposed as follows

$$\Xi = \{\boldsymbol{\xi}_k, k \in \Lambda_{int}\} \cup \left( \bigcup_{s=1}^m (\{\boldsymbol{\xi}_k, k \in \Lambda_s^-\} \cup \{\boldsymbol{\xi}_k, k \in \Lambda_s^+\}) \right).$$

For any node  $\boldsymbol{\xi}_k$  such that  $\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\xi}_\alpha^{(j)}$ , for some integer  $j \leq K$  and some multi-indices  $\alpha$ , we denote by  $\varphi_k$  the basis function associated to  $\boldsymbol{\xi}_k$  defined as follows

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \ell_\alpha^{(j)}(\mathbf{x}) & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_j \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases},$$

where  $\ell_\alpha^{(j)}$  is the Lagrange polynomial associated to the node  $\boldsymbol{\xi}_\alpha$  in the Gauss-Lobatto grid  $\Xi^j$ .

Observe that the jump  $[\varphi_k]$  across the skeleton  $\mathcal{S}$  vanishes if  $k \in \Lambda_{int}$  but is not necessarily zero if  $k \in \bigcup_{s=1}^m (\Lambda_s^- \cup \Lambda_s^+)$ .

Now, given any vector function  $\mathbf{u}_\delta \in W_\delta(\Omega)^3$  can be written into the form

$$\mathbf{u}_\delta = \sum_{k \in \Lambda_{int}} \mathbf{u}_k^{int} \varphi_k(\mathbf{x}) + \sum_{s=1}^m \left( \sum_{k \in \Lambda_s^+ \cup \Lambda_s^-} (u_k^{nor} \mathbf{n}_s + \mathbf{u}_k^T) \varphi_k(\mathbf{x}) \right) \quad (5.63)$$

where  $\mathbf{u}_k^T \cdot \mathbf{n}_s = 0$  for any  $k \in \bigcup_{s=1}^m (\Lambda_s^+ \cup \Lambda_s^-)$ . If  $\mathbf{u}_\delta$  belongs to  $H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$  then the tangential components of  $\mathbf{u}_\delta$  at the interfaces between several domains must satisfy the matching conditions (5.33). This conditions can be interpreted as follows; at each face  $F_s^-$  of the skeleton  $\mathcal{S}$ , the tangential degrees of freedom  $\mathbf{u}_k^T$ ,  $k \in \bigcup_{s=1}^m (\Lambda_s^+ \cup \Lambda_s^-)$ , verify

$$\forall s \in \{1, \dots, m\}, \forall p \in \mathbb{P}_{N_s-2}(F_s^-) \quad \sum_{k \in \Lambda_s^+ \cup \Lambda_s^-} \left( \int_{F_s^-} [\varphi_k] \cdot p(\mathbf{x}) d\sigma \right) \mathbf{u}_k^T = 0.$$

Hence, for any  $s \in \{1, \dots, m\}$  and any  $p \in \mathbb{P}_{N_s-2}(F_s^-)$

$$\sum_{k \in \tilde{\Lambda}_s^-} \left( \int_{F_s^-} [\varphi_k] \cdot p(\mathbf{x}) d\sigma \right) \mathbf{u}_k^T = - \sum_{k \in \Lambda_s^+} \left( \int_{F_s^-} [\varphi_k] \cdot p(\mathbf{x}) d\sigma \right) \mathbf{u}_k^T - \sum_{k \in \hat{\Lambda}_s^-} \left( \int_{F_s^-} [\varphi_k] \cdot p(\mathbf{x}) d\sigma \right) \mathbf{u}_k^T. \quad (5.64)$$

Let  $U_s^+$ ,  $\tilde{U}_s^-$  and  $\hat{U}_s^-$  be the vectors containing the values  $\mathbf{u}_k^T$  when  $k$  describes  $\Lambda_s^+$ ,  $\tilde{\Lambda}_s^-$  and  $\hat{\Lambda}_s^+$  respectively. The linear system (5.64) can be written into the form

$$\tilde{Q}_s^- \tilde{U}_s^- = Q_s^+ U_s^+ + \hat{Q}_s^- \hat{U}_s^-, \quad (5.65)$$

where  $\tilde{Q}_s^-$ ,  $Q_s^+$  and  $\hat{Q}_s^-$  are given matrices. Let  $U$  be the vector containing all the values  $\mathbf{u}_k^{int}$ , ( $k \in \Lambda^{int}$ ),  $u_k^{nor}$  for  $k \in \bigcup_{s=1}^m (\Lambda_s^- \cup \Lambda_s^+)$ , and  $\mathbf{u}_k^T$  for  $k \in \bigcup_{s=1}^m \hat{\Lambda}_s^- \cup \Lambda_s^+$ . Let  $\tilde{U}$  the

vector field containing all the unknowns  $\mathbf{u}_\delta$  at all the nodes of the grid  $\Xi$ . Note that  $\tilde{U}$  contains both the *real* unknowns already stored in  $U$  and the *apparent* unknowns,  $\mathbf{u}_m^T$ ,  $m \in \bigcup_{s=1}^m \tilde{\Lambda}_s^-$ . The vectors  $U$  and  $\tilde{U}$  are linked by a relation of the form

$$\tilde{U} = QU,$$

where  $Q$  is a rectangular matrix the lines of which are mostly those of the identity except those coming from the matrices  $(\tilde{Q}_s^-)^{-1}Q_s^+$  and  $(\tilde{Q}_s^-)^{-1}\hat{Q}_s^-$  appearing in the inversion of the matching relations (5.65). Finally, the discrete problem (5.38) can be written into the form

$$Q^T A Q U = B, \quad (5.66)$$

where  $A$  is the block matrix corresponding to the bilinear form  $a_\delta(\cdot, \cdot)$  and which is of the form

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_K \end{pmatrix}$$

where for  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,  $A_k$  is the stiffness matrix in  $\Omega_k$  associated to the local bilinear form

$$a_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\epsilon^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v})_{\Omega_k, N_k} + \tau(\mu \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_k, N_k}.$$

Observe that the final matrix  $\hat{A} = Q^T A Q$  is positive definite and symmetric. It follows that the linear system (5.66) can be solved by an iterative method such that the conjugate gradient procedure.

Let us prove now that the numerical inversion of the matching linear systems (5.65) can be avoided by getting an explicit solution. We provide by the way a basis of the space  $H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$ . Let us suppose for simplicity that  $F_s^- = ]-1, 1[ \times \{0\}$ .

$$\mathbf{u}_\delta = \sum_{k \in \Lambda_{int}} \mathbf{u}_k^{int} \varphi_k + \sum_{s=1}^m \left( \sum_{k \in \Lambda_s^+ \cup \Lambda_s^-} u_k^{nor} \varphi_k \mathbf{n}_s + \sum_{k \in \Lambda_s^+ \cup \hat{\Lambda}_s^-} \mathbf{u}_k^T \tilde{\varphi}_k \right) \quad (5.67)$$

The basis functions  $\tilde{\varphi}_k$  are defined by

$$\tilde{\varphi}_k = \varphi_k - \sum_{j \in \tilde{\Lambda}_s^-} q_{k,j} \varphi_j, \quad 1 \leq s \leq m, \quad k \in \Lambda_s^+ \cup \hat{\Lambda}_s^-,$$

where the coefficients  $q_{k,j}$  are such that

$$\int_{F_s^-} [\tilde{\varphi}_k] \cdot q d\sigma = 0, \quad \forall q \in \mathbb{P}_{N_s-2}(F_s^-). \quad (5.68)$$

It is worth noting that for any  $s \leq m$  and  $k \in \hat{\Lambda}_s^+$  we have

$$\tilde{\varphi}_k = \begin{cases} \varphi_k & \text{on the master side of } F_s^-, \\ - \sum_{j \in \tilde{\Lambda}_s^-} q_{k,j} \varphi_j & \text{on the slave side of } F_s^-. \end{cases}$$

It follows that the vector  $V_k = (q_{k,1}, \dots, q_{k,\theta})$ ,  $\theta = \text{card}(\tilde{\Lambda}_s^-)$  is solution of a linear system of the form  $\tilde{Q}V_k = B_k$ .

For any  $k \in \Lambda_s^+ \cup \hat{\Lambda}_s^-$ , define on  $F_s^-$  the functions

$$\psi_k = \sum_{j \in \tilde{\Lambda}_s^-} q_{k,j} \varphi_j, \quad \tilde{\psi}_k = \begin{cases} \varphi_k^- & \text{if } k \in \hat{\Lambda}_s^-, \\ \pi_{N_s} \varphi_k^+ & \text{if } k \in \Lambda_k^+, \end{cases}$$

where  $\varphi_k^+$  (resp.  $\varphi_k^-$ ) denotes the value of  $\varphi_k$  on the master (resp. the slave) side of  $F_s^-$  and  $\pi_{N_s}$  is the orthogonal projector from  $L^2(F_s^-)$  on  $\mathbb{P}_{N_s}(F_s^-)$ . Note that for any  $k \in \Lambda_s^+$

$$\tilde{\psi}_k = \sum_{\ell,j=1}^{N_s} \frac{(2\ell+1)(2j+1)}{4} \left( \int_{F_s^-} \varphi_k^+(x,y) \cdot L_\ell(x) L_j(y) dx dy \right) L_\ell(x) L_j(y) dx dy. \quad (5.69)$$

The matching condition (5.68) can be rewritten into the form

$$\psi_k - \tilde{\psi}_k \in \mathbb{P}_{N_s-2}^\perp(F_s^-)$$

where  $\mathbb{P}_{N_s-2}^\perp(F_s^-)$  is the orthogonal of  $\mathbb{P}_{N_s-2}(F_s^-)$  in  $\mathbb{P}_{N_s}(F_s^-)$ . Noting that

$$\mathbb{P}_{N_s-2}^\perp(F_s^-) = \{p(x)L_j(y) + q(y)L_k(x), \quad p \in \mathbb{P}_{N_s}(\cdot - 1, 1[x]), \quad q \in \mathbb{P}_{N_s}(\cdot - 1, 1[y]), \quad N_s - 1 \leq j, k \leq N_s\}.$$

leads easily to the following formula

$$\begin{aligned} \psi_k = & \tilde{\psi}_k - \frac{1}{2}\tilde{\psi}_k(x, 1)(L_{N_s}(y) + L_{N_s-1}(y)) - \frac{(-1)^{N_s}}{2}\tilde{\psi}_k(x, -1)(L_{N_s}(y) - L_{N_s-1}(y)) \\ & - \frac{1}{2}\tilde{\psi}_k(1, y)(L_{N_s}(x) + L_{N_s-1}(x)) - \frac{(-1)^{N_s}}{2}\tilde{\psi}_k(-1, y)(L_{N_s}(x) - L_{N_s-1}(x)) \\ & - \left(\frac{\delta}{2}L_{N_s-1}(x) + \frac{\beta}{2}L_{N_s}(x)\right)L_{N_s-1}(y) - \left(\frac{\gamma}{2}L_{N_s-1}(x) + \frac{\lambda}{2}L_{N_s}(x)\right)L_{N_s-1}(y), \end{aligned} \quad (5.70)$$

where

$$\begin{aligned} 2\lambda &= \tilde{\psi}_k(1, 1) + (-1)^{N_s}(\tilde{\psi}_k(-1, 1) + \tilde{\psi}_k(1, -1)) + \tilde{\psi}_k(-1, -1), \\ 2\beta &= \tilde{\psi}_k(1, 1) + (-1)^{N_s}(\tilde{\psi}_k(-1, 1) - \tilde{\psi}_k(1, -1)) - \tilde{\psi}_k(-1, -1), \\ 2\gamma &= \tilde{\psi}_k(1, 1) + (-1)^{N_s}(\tilde{\psi}_k(-1, 1) + \tilde{\psi}_k(1, -1)) - \tilde{\psi}_k(-1, -1), \\ 2\delta &= \tilde{\psi}_k(1, 1) + (-1)^{N_s}(\tilde{\psi}_k(-1, 1) - \tilde{\psi}_k(1, -1)) + \tilde{\psi}_k(-1, -1). \end{aligned}$$

Finally, note that

$$\forall k \in \Lambda_s^+ \cup \widehat{\Lambda}_s^-, \forall j \in \widetilde{\Lambda}_s^-, \quad q_{k,j} = \psi_k(\boldsymbol{\xi}_{\alpha(j)}^{k(s)}),$$

where  $\boldsymbol{\xi}_{\alpha(j)}^{k(s)} \in F_s^-$  is the node associated to the function  $\varphi_j$ . That ends the inversion of (5.65) and the construction of a basis of  $H_\delta(\mathbf{curl}; \Omega)$ .

### 5.5.2 Numerical tests

Let us now confront the numerical analysis hereabove to some numerical tests. These tests are done in the cube  $\Omega = ]-1, 1[^3$  decomposed into three sub-domains

$$\Omega_1 = ]-1, 1[^2 \times ]-1, 0[, \quad \Omega_2 = ]-1, 0[\times ]-1, 1[\times ]0, 1[, \quad \Omega_3 = ]0, 1[\times ]-1, 1[\times ]0, 1[.$$

The mortar faces are (see figure 5.5)

$$\begin{aligned} F_1 &= ]-1, 0[\times ]-1, 1[\times \{0\} & k(1) &= 2, \\ F_2 &= ]0, 1[\times ]-1, 1[\times \{0\} & k(2) &= 3, \\ F_3 &= \{0\} \times ]-1, 1[\times ]-1, 0[ & k(3) &= 3. \end{aligned}$$

Figure 5.5 shows a vertical section of the domain  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ .

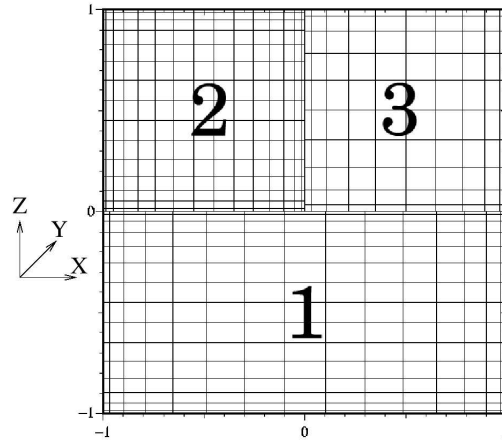


FIG. 5.5 – A vertical section of the 3D domain used for the numerical tests with a 15 – 15 – 10 Gauss-Lobatto grid.

The subject of numerical tests we make here are twofold. The purpose of the first tests concern the approximation of the problem (5.36) by the mortar spectral method exposed above (examples 1 and 2). The second family of tests deals with the approximation of the harmonic problem (5.15) by means of the relaxation scheme exposed in section 5.3 coupled with the mortar method which is used at each iteration.

### Tests on the convergence of the mortar method

In all the examples here, the parameters  $\epsilon$  and  $\mu$  are piecewise constant ; namely

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu_k, \quad \epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon_k \text{ in } \Omega_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Here for simplicity we say that a discretization is  $m - n - k$  where  $m, n, k$  are three integers if  $N_1 = m$ ,  $N_2 = n$  and  $N_3 = k$ .

*Example 1 : an homogeneous case.*

The analytical example we use is given by

$$\mathbf{u} = \mu^{-1} \mathbf{v}, \quad \mathbf{j} = \mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{v} + \tau \epsilon \mathbf{w},$$

where

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f(x)f'(y)f'(z) \\ 4f'(x)f(y)f'(z) \\ -5f'(x)f'(y)f(z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3f'(x)f(y)f(z) \\ -2f(x)f'(y)f(z) \\ -f(x)f(y)f'(z) \end{pmatrix}, \quad (5.71)$$

and  $f(t) = (\sinh 2) \sinh t - (\sinh 1) \sinh(2t)$ . Here we choose  $\epsilon_k = \mu_k = 1$  for any  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

In figure 5.6 the three components of the vector field  $\mathbf{u}$  at the section  $y = 1/2$  are displayed. The same components are shown in the same figure after a computation by the mortar method with a  $10 - 8 - 8$ . This representation put into evidence on the one hand the continuity of the tangential trace across the mortars which is ensured by the matching conditions (5.33), and the other hand the continuity of the normal trace which is implicit to the original equation.

Figure 5.7 shows the space distribution of the error when a  $10 - 8 - 6$  discretization is used. One can observe that the interface between sub-domains 1 and 2 is quasi-transparent since the error in its neighbourhood is very small. However, the error at interfaces between the sub-domain 3 and the sub-domains 1 and 2 is more significative. This is not due to the mortar matching conditions but to the diffusion of the error in sub-domain 3 where the grid is rough.

In figures 5.8, 5.9, 5.10 the relative  $L^2$  error on  $\mathbf{curl} \mathbf{u}$ , on  $\mathbf{u}$  and the  $L^2$  norm of  $\mathbf{div} \mathbf{u}_\delta$  (the latter is divided by the  $L^2$  norm of  $\mathbf{curl} \mathbf{u}$ ) are displayed respectively versus a parameter  $N$  for a  $1.5N - 1.5N - N$  and a  $1.5N - N - 1.5N$  discretizations.

*Example 2 : a heterogeneous case.*

In this second example, we keep the same exact solution of example 1, but with heterogeneous physical parameters  $\epsilon$  and  $\mu$ . Namely, we take

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 1.0, \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1.5, \\ \mu_1 &= 1.0, \quad \mu_2 = 2.0, \quad \mu_3 = 0.5. \end{aligned}$$

The three-components of this heterogeneous solution are displayed in figure 5.11 (on the left) at the section  $y = 1/2$ . The distribution of the error on each component is also displayed at the same section (on the right).

Figure 5.12 show the behavior of  $H(\mathbf{curl})$ -norm of the error and the  $L^2$ -norm of the divergence versus  $N$  when a  $1.5N - 1.5N - N$  discretization is used. These figures confirm the convergence of the method in the case of heterogeneous media (provided that the solution is regular).

### Tests on the convergence of the iterative scheme for the harmonic system

Our purpose here is to confirm numerically the convergence of the iterative scheme proposed in section for solving the harmonic problem (5.15). In all the tests here, the parameters  $\epsilon$  and  $\mu$  are supposed constant. The current density  $\mathbf{j}$  is given by

$$\mathbf{j} = \mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{v} - \omega^2 \epsilon \mathbf{w}, \quad (5.72)$$

where  $\mathbf{v}$  and  $\mathbf{w}$  are give by (5.71). The corresponding solution of (5.15) is  $\mathbf{u} = \mu^{-1} \mathbf{v}$ .

The discretization parameters are also fixed;  $N_1 = 7, N_2 = 5, N_3 = 5$ . Figures 5.13 and 5.14 show respectively the rate of convergence

$$\frac{\|\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n\|_{X_T(\mu; \Omega)}}{\|\mathbf{u}_n\|_{X_T(\mu; \Omega)}}$$

versus the iteration number  $n$  for several values of  $\tau$  (with  $\omega = 0.1\pi$ ) and for several values of  $\omega$  ( $\tau = 10$ ). It is quite clear that the smaller are  $\tau$  and  $\omega$  the quicker is the convergence. Furthermore, there exists a value  $\omega_\delta \approx 0.4\pi$  such that the algorithm does not converge if  $\omega > \omega_\delta$ . All that observations confirm the predictions of proposition 10. It is worth noting that the error do not vary with the parameter  $\tau$ . However, this parameter must not be very small since the inversion of the discrete linear system becomes fastidious.

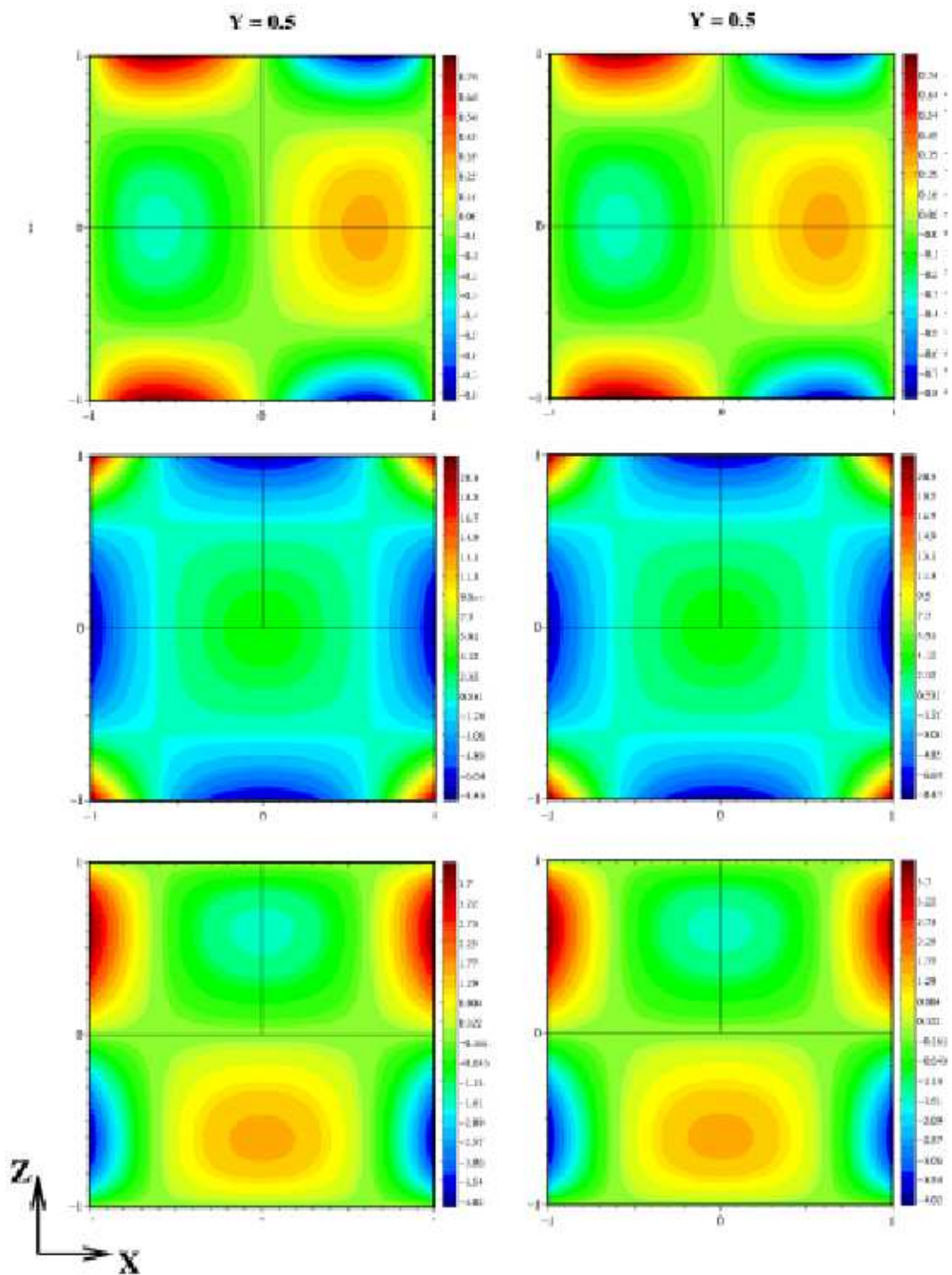


FIG. 5.6 – Example 1 : the three components of the exact solution at the section  $y = 1/2$  (left) and of the numerical one (right) at  $y = 1/2$ . The computation of the numerical solution is done with a  $10 - 8 - 8$  mortar method.

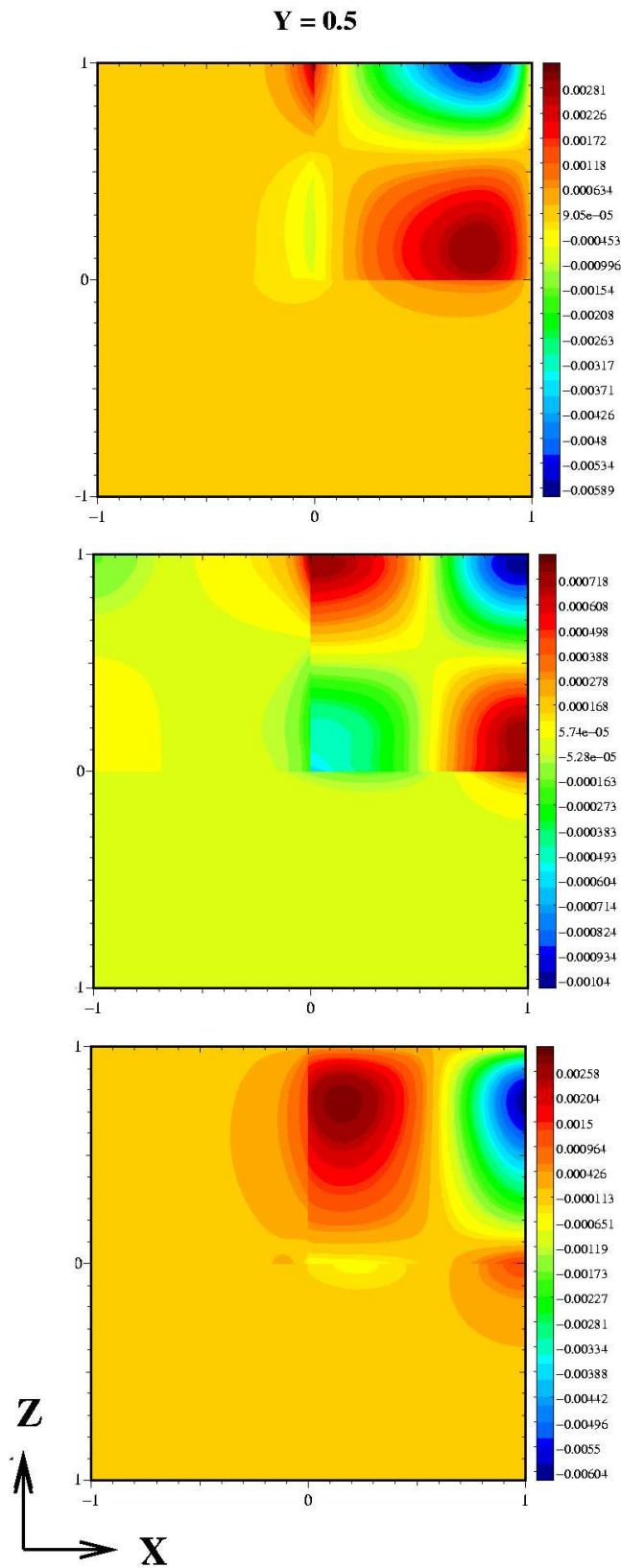


FIG. 5.7 – Example 1 : The distribution at  $y = 1/2$  of the numerical error when a 10–8–6 mortar method is used for computing the numerical solution.

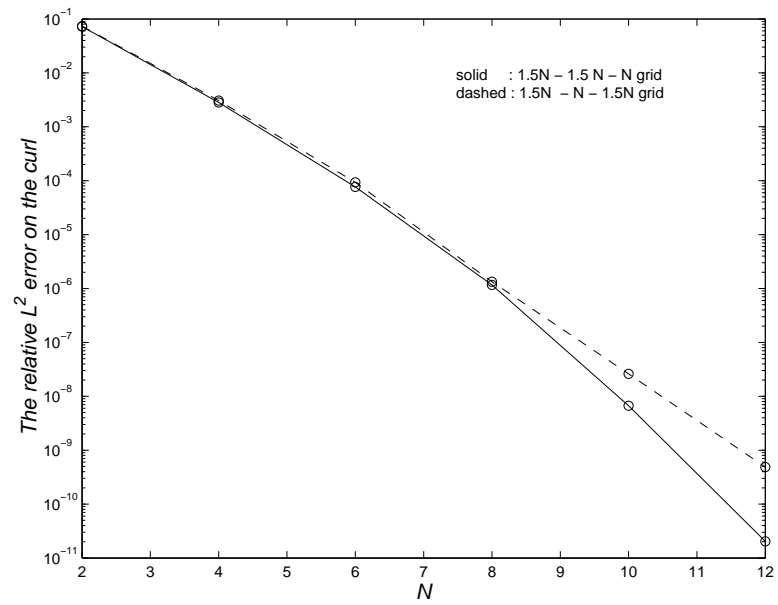


FIG. 5.8 – Example 1 : the relative  $L^2$  error on the curl (in a logarithmic scale) versus  $N$  for a  $3N/2 - 3N/2 - N$  discretization (solid line) and a  $3N/2 - N - 3N/2$  discretization (dashed line).

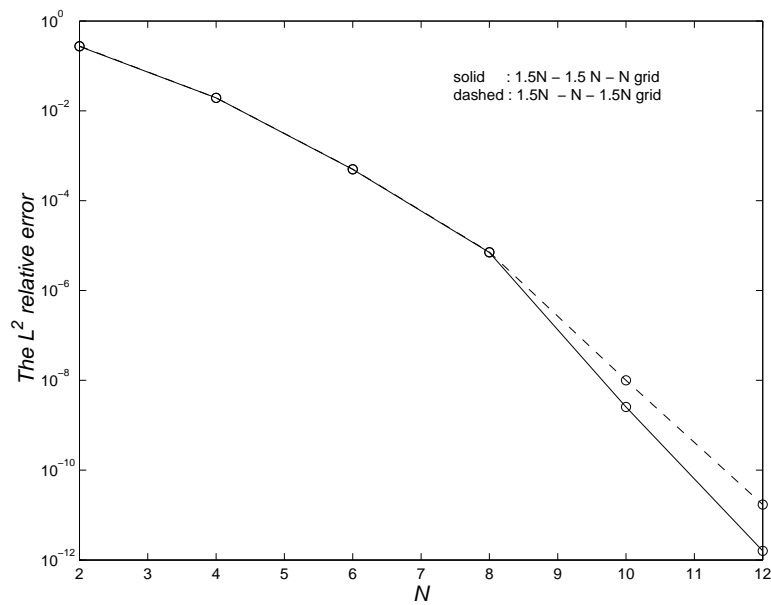


FIG. 5.9 – Example 1 : the relative  $L^2$  error (in a logarithmic scale) versus  $N$  for a  $3N/2 - 3N/2 - N$  discretization (solid line) and a  $3N/2 - N - 3N/2$  discretization (dashed line).

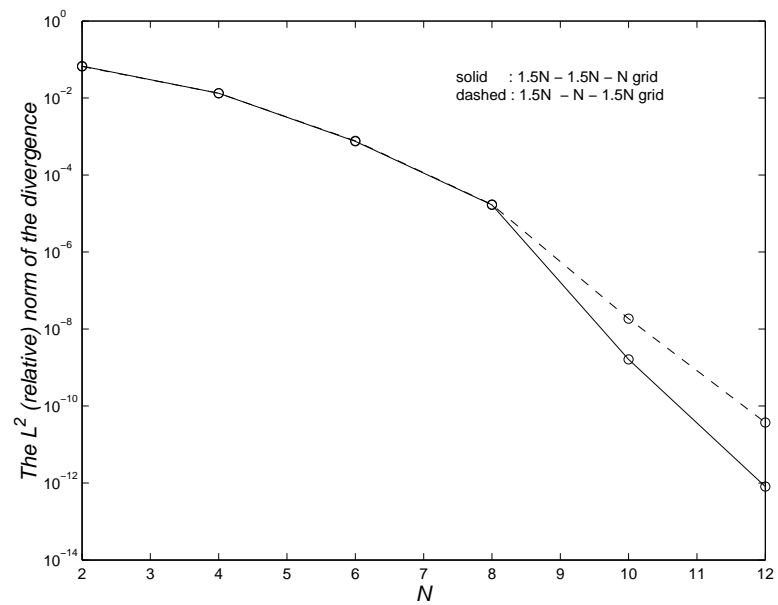


FIG. 5.10 – Example 1 : the relative  $L^2$  norm of the divergence (in a logarithmic scale) versus  $N$  for a  $3N/2 - 3N/2 - N$  discretization (solid line) and a  $3N/2 - N - 3N/2$  discretization (dashed line).

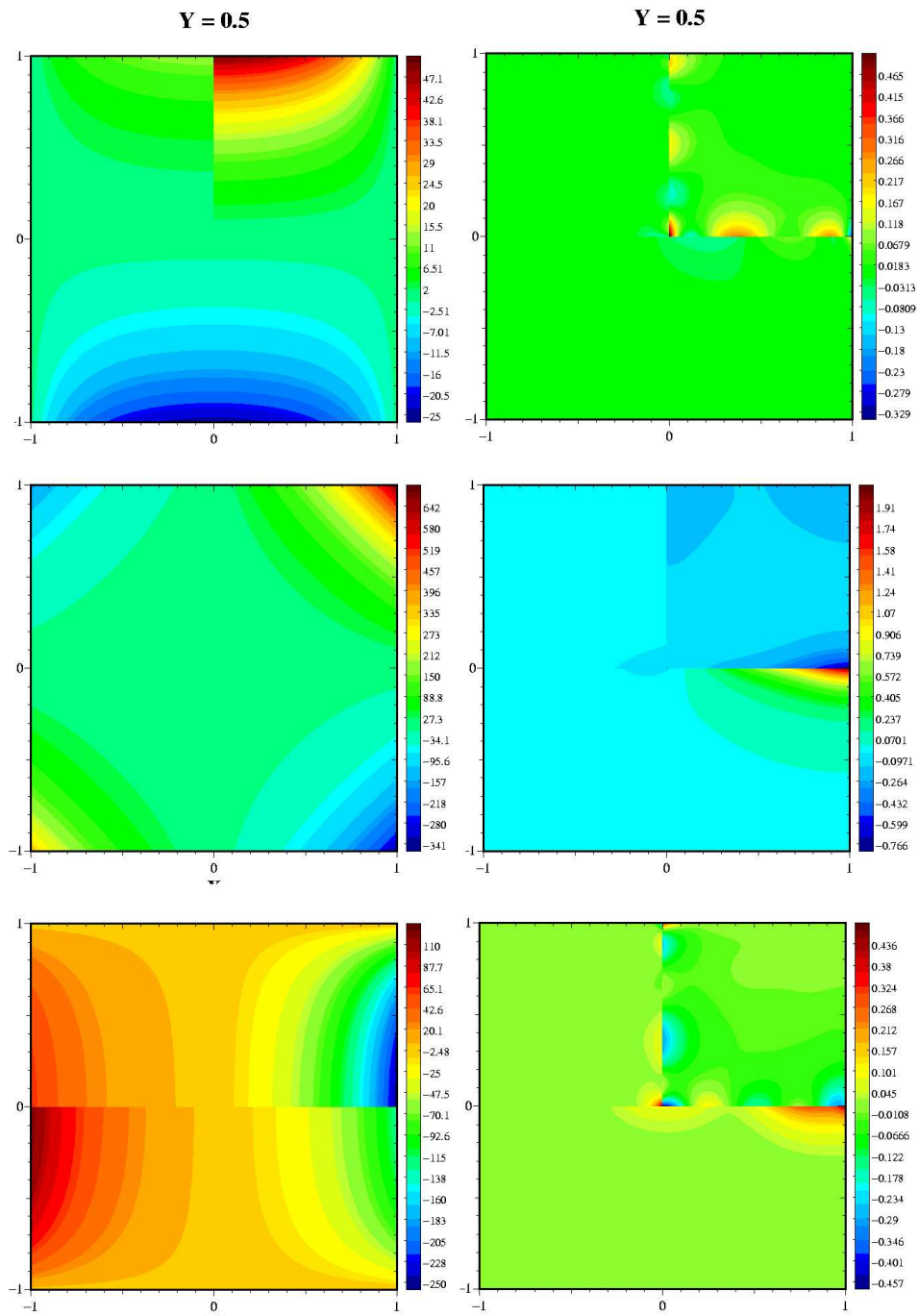


FIG. 5.11 – Example 2 : the three components of the exact heterogeneous solution (left) The distribution of the numerical error when a  $9 - 5 - 6$  mortar spectral method is used.

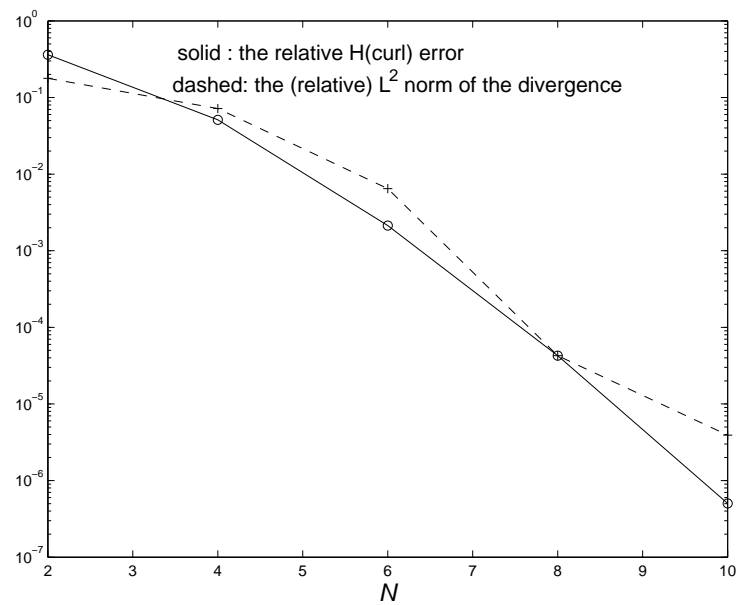


FIG. 5.12 – Example 2 : the relative  $H(\text{curl})$  norm of the error (in a logarithmic scale) versus  $N$  for a  $3N/2 - 3N/2 - N$  discretization (solid line) and a  $3N/2 - N - 3N/2$  discretization (dashed line).

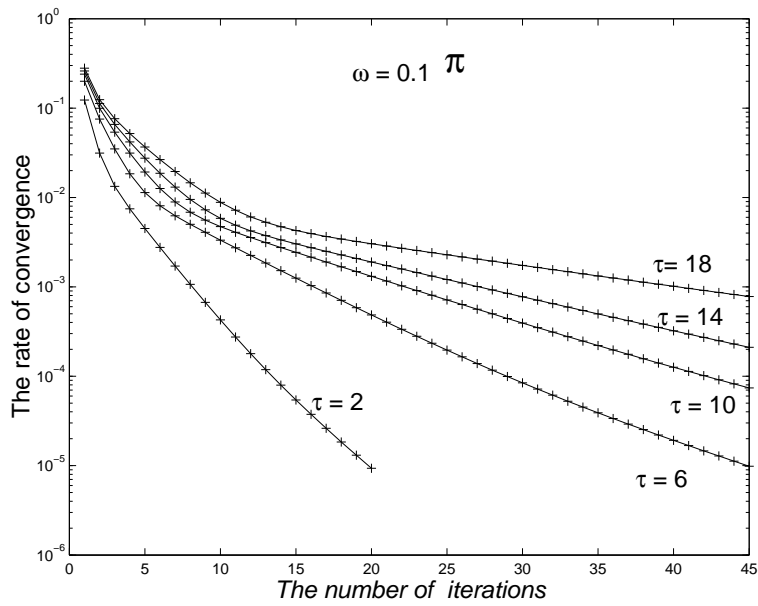


FIG. 5.13 – The rate of convergence  $\|\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n\|_{X_T(\mu; \Omega)} / \|\mathbf{u}_n\|_{X_T(\mu; \Omega)}$  versus the number of iterations for several values of the parameter  $\tau$  ( $\omega$  is fixed :  $\omega = 0.1\pi$ ). A 7-5-5 discretization is used for all the tests.

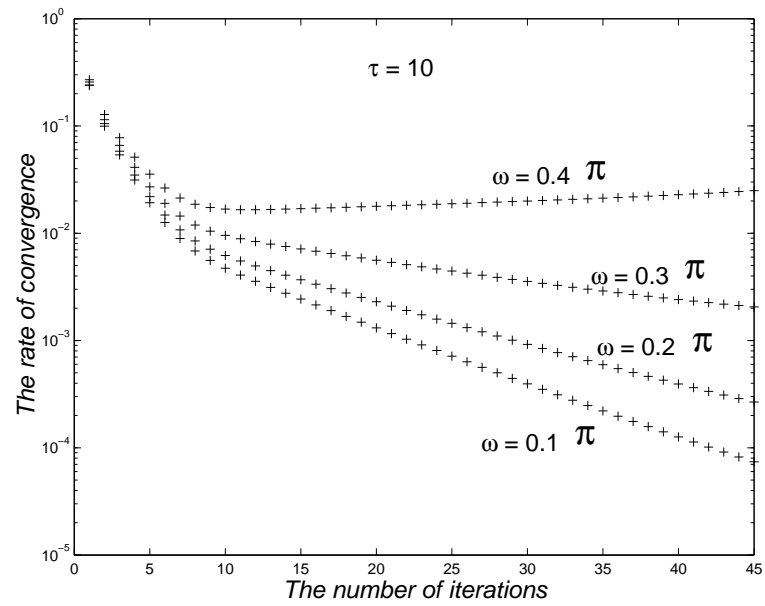


FIG. 5.14 – The rate of convergence  $\|\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n\|_{X_T(\mu; \Omega)} / \|\mathbf{u}_n\|_{X_T(\mu; \Omega)}$  versus the number of iterations for several values of  $\omega$  ( $\tau$  is fixed :  $\tau = 10$ ). A 7-5-5 discretization is used for all the tests.



# Bibliographie

- [1] C. AMROUCHE, C. BERNARDI, M. DAUGE, V. GIRAULT, *Vector potentials in Three-dimensional Non-smooth Domains*, Math. Meth. Appl. Sci., 21 (1998), p. 823–864.
- [2] Z. BELHACHMI, C. BERNARDI, *Resolution of fourth order problems by the mortar element method*, Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. 116, p. 53–58, (1994).
- [3] F. BEN BELGACEM, *The mixed mortar finite element method for the incompressible Stokes problem : convergence analysis*, SIAM J. Numer. Anal., 37, 4, p. 1085 – 1100.
- [4] F. BEN BELGACEM, A. BUFFA, Y. MADAY, *The mortar finite element method for 3D Maxwell equations : first results*, SIAM J. Numer. Anal., 39, 3, p. 880–901.
- [5] F. BEN BELGACEM, Y. MADAY, *Non conforming spectral method for second order elliptic problems in three dimensions*, East-West J. Numer. Math., 4, p. 235–251.
- [6] F. BEN BELGACEM, Y. MADAY, *Coupling spectral and finite elements for second order elliptic three-dimensional equations*, SIAM J. Numer. Anal., 36 (1999) p. 1234–1263.
- [7] F. BEN BELGACEM, Y. MADAY, *Non-conforming spectral element methodology tuned to parallel implementation*, Comput. Meth. Appl. Mecg. Engrg., 116 (1994), p. 59–67.
- [8] A. BERGER, R. SCOTT, G. STRANG, *Approximate boundary conditions in the finite element method*, Symp. Math. 10 (1972), p. 295–313.

- [9] C. BERNARDI, N. DÉBIT, Y. MADAY, *Coupling finite element and spectral methods ; first results*, Math. Comp. 54 (1990), p. 21 – 39.
- [10] C. BERNARDI, Y. MADAY, *Approximation spectrale de problèmes aux limites elliptiques*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [11] C. BERNARDI, Y. MADAY, *Basic results on spectral methods*, Preprint R94022, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI (1994).
- [12] C. BERNARDI, Y. MADAY, A.T. PATERA, *A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method*, in *Nonlinear partial differential equations and their applications*, Collège de France seminar, Pitman (1990), p. 13–51.
- [13] S. BERTOLUZZA, V. PERRIER, *The mortar method in the wavelet context*, ESAIM : M2AN, 35, 4 (2001), p. 647–673.
- [14] M. COSTABEL, M. DAUGE, *Singularities of Electromagnetic Fields in Polyhedral Domains*, Arch. Rational Mech. Anal. 151 (2000), p. 221 – 276.
- [15] M. COSTABEL, M. DAUGE, *Singularities of Maxwell interface problems*, Modél. Math. Anal. Numr. 33, 3 (1999), p. 627-649.
- [16] N. DÉBIT, Y. MADAY, *The coupling of spectral and finite element methods for the approximation of the Stokes problem*, in *Proceedings of the 8th Joint France-Italy-U.S.S.R. Symposium of Computational Mathematics and Applications*.
- [17] R. DAUTRAY, J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique*, Tome 5, Masson, Paris (1988).
- [18] P. F. FISHER, A. T. PATERA, *Parallel spectral element solution of the Stokes problem*, J. Comput. Phys., 92 (1991), p. 380-421.
- [19] E. GARCIA, *Résolution des équations de Maxwell instationnaires avec charges dans des domaines non convexes*, thèse de doctorat de l'université Paris VI.
- [20] V. GIRAULT, P.-A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag (1986).

- [21] P. GRISVARD, *Elliptic Problems in Non-smooth Domains*, Pitman (1985).
- [22] R. Leis, *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics*, Wiley (1986).
- [23] Y. MADAY, A. T. PATERA, *Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations*, States-of-the-Art Survey in Computational Mechanics, Ed. A.K Noor, ASME (1989).
- [24] F. Rapetti, *Approximation des équations de la magnétodynamique en domaine tournant par la méthode des éléments avec joints*, Ph.D. thesis, université Paris VI (2000).
- [25] J.-C. NEDELEC, *Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$* , Numer. Math. 35 (1980), p. 315–341.
- [26] ———, *A new family of mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$* , Numer. Math. 50 (1986), p. 57–81.
- [27] A. TOSELLI, *Overlapping Schwarz methods for Maxwell's equations in three dimensions*, Numer. Math. 86 (2000), p. 733-752.
- [28] A. TOSELLI, O. B. WIDLUND, B. WOHLMUTH, *An iterative substructuring method for Maxwell's equations in two dimensions*, Math. of Comp. 70 (2001), no. 235, p. 935–949.
- [29] CH. WEBER, *A Local Compactness Theorem for Maxwell's Equations*, Math. Meth. in the Appl. Sci. 2 (1980), p. 12–25.
- [30] B. I. WOHLMUTH, *A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier*, SIAM J. Numer. Anal., 38, 8 (2000), p. 989–1012.



# Annexe A

## Proof of Proposition 5.

Let  $(\varphi, \lambda) \in X \times \mathbb{R}_+$  be solution of the eigenvalue problem

$$\mathcal{K}\mathcal{K}^*\varphi = \lambda\varphi.$$

The function  $\varphi$  belongs to  $H^2(\Omega)$  according to Proposition 7. In addition, by virtue of Proposition 4, we have

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \mathbf{curl} \mathbf{curl} \varphi - \varphi = \mathbf{0}, \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \varphi = 0, \quad \text{in } \Omega, \\ \varphi \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \\ \mathbf{curl} \varphi \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{on } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

We denote by  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  the canonical basis of  $\mathbb{R}^3$ . For any  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\Gamma_{i,1}$  and  $\Gamma_{i,2}$  refers to the faces of  $\Omega$  which are perpendicular to  $\mathbf{e}_i$ . We prove easily that each component  $\varphi_i$  of  $\varphi$ ,  $i = 1, 2, 3$ , is solution of the system

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \Delta \varphi_i + \varphi_i = 0, \quad \text{in } \Omega, \\ \varphi_i = 0, \quad \text{on } \Gamma_{i,s}, \quad \forall s \in \{1, 2\}, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \Gamma_{m,s}, \quad \forall m \neq i, \forall s \in \{1, 2\}. \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

We fix  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Let  $(w_{i,n})_{n \geq 1}$  be the eigenfunctions of the operator  $-\Delta_i = -\partial_i^2$  on  $]0, a_i[$  with homogeneous Dirichlet conditions. Namely,

$$w_{i,n}(x_i) = \sin \frac{n\pi x_i}{a_i}, \quad \forall n \geq 1,$$

Then,  $\varphi_i$  can be written on the basis  $(w_{i,n})_{n \geq 1}$  into the form

$$\varphi_i = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{i,n}(x_j, x_k) w_{i,n}(x_i)$$

where  $j$  and  $k$  are such that  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . It stems from (A.2) that the functions  $(\varphi_{i,n})_{n \geq 1}$  are eigenfunctions of the 2D Laplace operator  $\Delta_{j,k} = \partial_j^2 + \partial_k^2$  with Neumann conditions. More precisely, for any  $n \geq 1$ , we have

$$\begin{aligned} \Delta_{j,k} \varphi_{i,n} + \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{n^2 \pi^2}{a_i^2} \right) \varphi_{i,n} &= 0, \quad \text{in } Q_{j,k} = ]0, a_j[ \times ]0, a_k[, \\ \frac{\partial \varphi_{i,n}}{\partial n} &= 0, \quad \text{on } \partial Q_{j,k}. \end{aligned}$$

Since  $\varphi \neq \mathbf{0}$ , there exists  $i \in \{1, 2, 3\}$  and  $n \geq 1$  such that  $\varphi_{i,n} \neq 0$ . It follows also that there exists  $p, m \in \mathbb{N}$  such that

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{n^2 \pi^2}{a_i^2} + \frac{p^2 \pi^2}{a_j^2} + \frac{m^2 \pi^2}{a_k^2}, \\ \varphi_{i,n} &= \sum_{(p,m) \in \mathcal{N}_{\lambda,n}} c_{i,n,p,m} \cos \frac{p\pi x_j}{a_j} \cos \frac{m\pi x_k}{a_k} \quad \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

where

$$\mathcal{N}_{\lambda,n} = \left\{ (p, m) \in \mathbb{N}^2 \mid \frac{n^2 \pi^2}{a_i^2} + \frac{p^2 \pi^2}{a_j^2} + \frac{m^2 \pi^2}{a_k^2} = \frac{1}{\lambda} \right\}, \quad \forall n \geq 1.$$

Hence

$$\varphi_i = \sum_{(n,p,m) \in \mathcal{N}_{\lambda,n}} c_{i,n,p,m} \sin \frac{n\pi x_i}{a_i} \cos \frac{p\pi x_j}{a_j} \cos \frac{m\pi x_k}{a_k}.$$

with

$$\mathcal{M}_{\lambda} = \left\{ (n, p, m) \in \mathbb{N}^3 \mid \frac{n^2 \pi^2}{a_i^2} + \frac{p^2 \pi^2}{a_j^2} + \frac{m^2 \pi^2}{a_k^2} = \frac{1}{\lambda} \right\}.$$

Finally, the field  $\varphi$  has the form

$$\varphi = \sum_{\alpha=(n,p,m) \mid \frac{n^2 \pi^2}{a_1^2} + \frac{p^2 \pi^2}{a_2^2} + \frac{m^2 \pi^2}{a_3^2}} \begin{pmatrix} a_{\alpha} \sin \frac{n\pi x_1}{a_1} \cos \frac{p\pi x_2}{a_2} \cos \frac{m\pi x_3}{a_3} \\ b_{\alpha} \cos \frac{n\pi x_1}{a_1} \sin \frac{p\pi x_2}{a_2} \cos \frac{m\pi x_3}{a_3} \\ c_{\alpha} \cos \frac{n\pi x_1}{a_1} \cos \frac{p\pi x_2}{a_2} \sin \frac{m\pi x_3}{a_3} \end{pmatrix}.$$

The identity  $\operatorname{div} \varphi = 0$  implies that the constants  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  must verify the condition

$$\frac{na_\alpha}{a_1} + \frac{pb_\alpha}{a_2} + \frac{mc_\alpha}{a_3} = 0, \forall \alpha.$$

□



# Bibliographie

- [1] , G.S ABDOULAEV, Y. ACHDOU, YU.A. KUZNETSOV, C. PRUD'HOMME, *On a Parallel Implementation of the Mortar Element Method*, M2AN, Vol 3, no 2, p. 242–260, (1999).
- [2] Y. ACHDOU, Y. MADAY, *The mortar element method with overlapping subdomains*, à paraître dans SIAM J. of Numerical Analysis.
- [3] R.A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [4] G. ANAGNOSTOU, A. PATERA, Y. MADAY, *A sliding mesh for partial differential equations in nonstationary geometries : application to the incompressible Navier Stokes Equations*, techn. rep., Laboratoire d'analyse numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1994).
- [5] C. AMROUCHE, C. BERNARDI, M. DAUGE, V. GIRAULT, *Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains*, Math. Meth. Appl. Sci., 21, p. 823–864, (1998).
- [6] M. AZAÏEZ, F. BEN BELGACEM, H. EL FEKIH, M. ISMAIL, *Numerical simulation of the wave equation with discontinuous coefficients by non conforming finite elements.*, Numer. Methods Partial Differential Eq, 15, pp. 637–656, (1999).
- [7] Z. BELHACHMI, C. BERNARDI, *Resolution of fourth order problems by the mortar element method*, Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. 116, p. 53–58, (1994).
- [8] A. BEN ABDALLAH, F. BEN BELGACEM, Y. MADAY, *Mortaring the two-dimensional Nédélec's finite elements for the discretisation of the Maxwell's equa-*

- tions, Preprint R99031, Laboratoire d'analyse numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1999).
- [9] F. BEN BELGACEM, *Discrétisation 3D non conforme par la méthode de décomposition de domaine des éléments avec joints : analyse mathématique et mise en œuvre pour le problème de Poisson*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1993).
- [10] F. BEN BELGACEM, *The mortar finite element method with Lagrange multipliers*, Numer. Math. 84, no. 2, p. 173–197, (1999).
- [11] F. BEN BELGACEM, Y. MADAY, *Non conforming spectral method for second order elliptic problems in three dimensions*, East-West J. Numer. Math., 4, p. 235–251, (1993).
- [12] F. BEN BELGACEM, A. BUFFA, Y. MADAY, *The mortar element method for 3D Maxwell equations : First results*, SIAM J. Numer. Anal., 39 (3), pp. 880-901, (2001).
- [13] C. BERNARDI, Y. MADAY, *Approximation spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [14] C. BERNARDI, Y. MADAY, *Basic results on spectral methods*, Preprint R94022, Laboratoire d'analyse numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1994).
- [15] C. BERNARDI, Y. MADAY, A.T. PATERA, *A new nonconforming approach to domain decomposition : The mortar elements method*, Non linear partial differential equation and their applications, Collège de France Seminar, 11 (Paris, 1989–1991), 13–51, Pitman Res. Notes Math. Ser., 299, Longman Sci. Tech., Harlow, 1994.
- [16] S. BERTOLUZZA, V. PERRIER, *The Mortar Wavelet Method*, Proc. ENUMATH 99 (1999).
- [17] M. SH. BIRMAN, SOLOMYAK,  *$L_2$  -theory of the Maxwell operator in arbitrary domains*, Usekhi Mat. Nauk 42 (1987), p. 61-67, English transl., Russian Math Surveys 42, no. 6, p. 75-96, (1987).

- [18] M. SH. BIRMAN, SOLOMYAK, On the main singularities of the electric component of the electro-magnetic field in regions with screens, *St. Petersburg Math. J.* 5, no 1, p. 125-139, (1994).
- [19] D. BOFFI, F. BREZZI, L. GASTALDI, *On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed forms*, *Math. Comp.* 69, no 229, p. 121-140, (1999).
- [20] A. BOSSAVIT, *Électromagnétisme en vue de la modélisation*, Springer-Verlag, (1993).
- [21] T. Z. BOULMEZAOUD, Y. MADAY, T. AMARI, *Approximation of linear force-free fields in 3-D domains*, *Mathematical and Computer Modelling*, 31, p. 109–129, (2000).
- [22] T. Z. BOULMEZAOUD, T. AMARI, *On the linear force-free fields in bounded and unbounded three-dimensionnal domains*, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33 No. 2, p. 359–393, (1999).
- [23] T. Z. BOULMEZAOUD, *Etude des champs de Beltrami dans des domaines de  $\mathbb{R}^3$  bornés et non-bornés et applications en astrophysique*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1998).
- [24] D. BRAESS, *Analysis of a Multigrid Algorithm for the Mortar Finite Element Method*, In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, Proceedings of DD12 (T. Chan, T. Kako, H. Kawarada, and O. Pironneau, eds.), p. 1-13, Chiba (2001).
- [25] D. BRAESS, P. DEUFLHARD, K. LIPNIKOV, *A cascadic multigrid method for mortar elements*, Preprint SC99-07, Konrad-Zuse-Zentrum, Berlin (2000).
- [26] P.-G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problem*, North-Holland, Amsterdam (1978).
- [27] M. COSTABEL, *A remark on the regularity of solution of Maxwell's equation on Lipschitz domains*, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 12, p. 365–368, (1990).
- [28] M. COSTABEL, M. DAUGE, *Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains*, *Arch. Rational Mech. Anal.* 151, p. 221 – 276, (2000).

- [29] M. COSTABEL, M. DAUGE, *Maxwell and Lamé Eigenvalues on polyhedra*, Mathematical Methods in the Applied Sciences 22, p. 243-258, (1999).
- [30] M. COSTABEL, M. DAUGE, *Singularities of Maxwell interface problems*, Modél. Math. Anal. Numér. 33, 3 (1999), p. 627-649.
- [31] M. COSTABEL, M. DAUGE, D. MARTIN, *Numerical investigation of a boundary penalization method for Maxwell equations*, Enumath'99 Proceedings (1999).
- [32] R. DAUTRAY, J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique*, Tome 5, Masson, Paris (1988).
- [33] N. DÉBIT, *La méthode des éléments à joints dans le cas du couplage des méthodes spectrales et méthodes des éléments finies : Résolution des équations de Navier Stokes*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1992).
- [34] J.-M. DOMINGUEZ, *Etude des équations de la magnétohydrodynamique stationnaires et leur approximation par éléments finis*, Thèse de Docteur Ingénieur, Université Pierre et Marie Curie (1982), Paris.
- [35] G. DUVAUT, J.-L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris (1972).
- [36] G. J. FIX, M. E. ROSE, *A comparative study of finite element and finite differences methods for Cauchy-Riemann type equation*, SIAM J. Numer. Anal., 22, p. 250-261, (1985).
- [37] C. FOIAS, R. TEMAM, *Remarques sur les équations de Navier-Stokes et phénomènes successifs de bifurcation*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. S. 4, 5, No 1, p. 29-63, (1975).
- [38] K. O. FRIEDRICHS, *Differential forms on Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., 8, p. 551-590, (1955).
- [39] J. GALY, J.L. TEYSSIER, H. BRUNET, *Electromagnétisme, régime variable*, Tome 3, Armand Colin, Paris, (1995).
- [40] V. GIRAULT, P.-A. RAVIART, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag, (1986).

- [41] J. GOBERT, *Sur une inégalité de coercivité*, J. Math. Anal. Appl., 36, p. 518–528, (1971).
- [42] I. C. GOHBERG, M. G. KREIN, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society (1969).
- [43] P. GRISVARD, *Elliptic Problems in non-smooth domains*, Pitman, (1985).
- [44] P. GRISVARD, *Singularities in boundary value problems*, Masson, (1992).
- [45] B. N. JIANG, J. WU, L. A. POVINNELI, *The origin of Spurious Solutions in Computational Electromagnetics*, J. of Computational Physics, 125, p. 104-123, (1996).
- [46] F. KIKUSHI, *Numerical analysis of electrostatic and magnetostatic problems*, Sugaku Exposition, 6, no 1, p. 33-51, (1993).
- [47] P. LACOSTE, *Solution of Maxwell equation in axisymmetric geometry by Fourier serie decompositon and by use of  $H(\text{rot})$  conforming finite element*, Numer. Math. 84, p. 577-609, (2000).
- [48] R. LEIS, *Initial Boundary Value Problem in Mathematical Physics*, Wiley (1986).
- [49] J.-L. LIONS, E. MAGENES, *Problème aux limites non-homogènes*, Tome 1, Dunod (1968).
- [50] Y. MADAY, A. T. PATERA, *Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations*, States-of-the-Art Survey in Computational Mechanics, Ed. A.K Noor, ASME (1989).
- [51] J.C. MAXWELL, *Traité d'électricité et de magnétisme*, tome 1, Ed. Gabay, Réimpression de l'édition originale de la traduction française publié en 1885 par Gauthier-Villars (1989).
- [52] P. MONK, *Analysis of the finite element method for Maxwell's equation*, SIAM J. Numer. Anal., 29, no 3, p. 714-729, (1992).
- [53] P. MONK, *Discrete compactness and approximation of Maxwell's equation in  $\mathbb{R}^3$* , Math. Comp. 70, no. 234, pp 507-523, (2000).

- [54] C. MÜLLER, *Spherical harmonics*, Lecture Notes in Mathematics, 17, Springer-Verlag, Berlin (1966).
- [55] J.-C. NEDELEC, *Mixed elements in  $\mathbb{R}^3$* , Numer. Math. 35, p. 315-341, (1980).
- [56] J.-C. NEDELEC, *A new family of mixed elements in  $\mathbb{R}^3$* , Numer. Math. 50, p. 57-81, (1986).
- [57] A. T. PATERA, *A spectral element methods for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion*, J. Comp. Phys. 54, p. 468-488, (1984).
- [58] P. POINCELOT, *Précis d'électromagnétisme théorique*, Dunod, Paris (1963).
- [59] A. TOSELLI, *Overlapping Scharuz methods for Maxwell's equation in three dimensions*, Numer. Math. 86, p. 733-752, (2000).
- [60] A. TOSELLI, O. B. WIDLUND, B. WOLMUTH, *An iterative substructuring method for Maxwell's equations in two dimensions*, Math. Compu. 70, no. 235, p. 935-949, (2001).
- [61] R. VERFÜRTH, *Mixed finite element approximation of the vector potential*, Numer. Math. 50, p. 685-695, (1987).
- [62] CH. WEBER, *A local compactness theorem for Maxwell's equations*, Math. Meth. in the Appl. Sci. 2, p. 12-25, (1980).
- [63] N. WECK, *Maxwell's boundary-value problems on Riemannian manifolds with non-smooth boundary*, J. Math. Anal Appl. 46, p. 410-437, (1974).