



HAL
open science

Mauvaises places ramifiées dans le corps des modules d'un revêtement

Stéphane Flon

► **To cite this version:**

Stéphane Flon. Mauvaises places ramifiées dans le corps des modules d'un revêtement. Mathématiques [math]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2002. Français. NNT : . tel-00002259

HAL Id: tel-00002259

<https://theses.hal.science/tel-00002259>

Submitted on 10 Jan 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 3124

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES

SPECIALITÉ : GÉOMÉTRIE ARITHMÉTIQUE

par

Stéphane FLON

Mauvaises places ramifiées dans le corps des modules d'un revêtement

Soutenue le 7 juin 2002 devant le jury composé de

Directeur de Thèse :	M. EMSALEM,	Université Lille I
Rapporteurs :	M. MATIGNON,	Université de Bordeaux I
	S WEWERS,	Université de Bonn
Examineurs :	P. DÈBES,	Université Lille I
	J-C. DOUAI,	Université Lille I

Stéphane Flon

MAUVAISES PLACES
RAMIFIÉES DANS LE
CORPS DES MODULES
D'UN REVÊTEMENT

Stéphane Flon

MAUVAISES PLACES RAMIFIÉES DANS
LE CORPS DES MODULES D'UN
REVÊTEMENT

Stéphane Flon

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je souhaite exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Michel EMSALEM, qui m'a communiqué sa passion, sa curiosité et son ouverture mathématiques, et m'a toujours prodigué des pistes de recherche fructueuses.

Je lui suis infiniment reconnaissant pour toute la patience, la disponibilité et le dévouement dont il a fait preuve. J'ai tiré de sa fréquentation un immense enrichissement sur le plan mathématique, et plus encore peut-être sur le plan humain.

Je suis particulièrement reconnaissant aux rapporteurs de ce travail, qui ne m'ont pas seulement permis d'en améliorer de nombreux points.

Michel MATIGNON m'a initié de bonne grâce à la théorie des revêtements algébriques lors d'un stage de Magistère effectué à Bordeaux, et a donc grandement contribué à me faire découvrir les joies de la recherche dans ce domaine.

Sans Stefan WEWERS, et son propre travail de recherche, je n'aurais jamais pu écrire ce travail. Sa thèse a été une grande source d'inspiration.

Je remercie aussi vivement Pierre DEBES et Jean-Claude DOUAI, qui ont gentiment accepté de compléter mon jury. Je les remercie pour l'enthousiasme dont ils ont toujours fait preuve s'agissant de mathématiques, et pour leur bienveillance à mon égard.

J'ai rencontré de nombreux chercheurs au cours de ce travail, et je tiens à tous les remercier pour leur simplicité, leur cordialité et leur passion communicative.

Je suis l'obligé de Bruno DESCHAMPS, qui a toujours su m'épauler dans mon initiation au monde de la recherche mathématique.

C'est à Oberwolfach, ce merveilleux temple dédié aux mathématiques, que j'ai compris toute la chance que j'ai de côtoyer une telle communauté, pacifique, généreuse, accueillant un nouveau venu comme s'il avait toujours été là. Que Pierre LOCHAK et Jurgen WOLFART acceptent toute ma gratitude pour m'y avoir gentiment invité.

Je n'oublie pas ma famille, mes amis et collègues, qui m'ont tous aidé, chacun à leur manière, et à des degrés divers, à mener à bien ce travail. Je ne peux les citer tous, mais je voudrais avoir un mot particulier pour Jean-Christophe et Cyrille. Je leur dois beaucoup, ils m'ont spontanément apporté leur soutien, et ont grandement facilité mon organisation.

Enfin, je remercie Karine du fond du cœur. Elle m'a beaucoup plus aidé qu'elle ne le croit.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	7
Introduction	11
Espaces de Hurwitz	11
Corps des modules	12
Plan	13
1. Revêtement modéré restreint à une section	17
1.1. Revêtements étales, revêtements modérément ramifiés	17
1.2. Description locale d'un revêtement modérément ramifié	23
1.3. Restriction d'un revêtement modéré à une section	33
2. Espaces de Hurwitz sur un anneau	41
2.1. Préliminaires sur les revêtements de \mathbb{P}^1	41
2.2. Corps des modules, corps de définition	45
2.3. Espace de Hurwitz sur un anneau et corps des modules	46
3. Étude au bord du revêtement $\bar{\pi} : \bar{H}' \rightarrow \bar{U}'$	53
3.1. Compactification de l'espace de configuration de points	54
3.2. Le groupe des tresses pures de Hurwitz	67
3.3. Étude au bord du revêtement de Hurwitz	74
3.4. Générateurs de l'inertie pour le revêtement $\bar{\pi}$	81
4. Ramification dans le corps des modules	101
4.1. Ramification dans le corps des modules	102
4.2. L'exemple des groupes diédraux	107
5. Gerbe de Hurwitz et bonnes places	117

5.1. Gerbe de Hurwitz, gerbe des modèles	117
5.2. Bons modèles	120
A. Lemme de Hensel	125
B. Action des twists sarments sur $H'(D_p)$	127
Bibliographie	131
Index	137

INTRODUCTION

Soit K un corps. Le *problème inverse de Galois sur K* consiste à se demander si tout groupe fini G est groupe de Galois d'une extension de K . À ce jour, la conjecture historique énonçant que le problème inverse de Galois sur \mathbb{Q} admet une réponse positive, reste ouverte.

Si K est un corps de nombres (et, plus généralement, si K est hilbertien), on peut répondre par l'affirmative à ce problème si l'on sait répondre par l'affirmative au *problème inverse de Galois régulier sur K* , problème qui consiste à se demander si tout groupe fini G est groupe de Galois d'une extension *régulière* de $K(T)$. Ce problème *régulier* possède l'avantage d'admettre une interprétation géométrique en termes de revêtements algébriques, et donc de permettre l'utilisation des techniques de géométrie algébrique et arithmétique. En particulier, la construction d'espaces des modules de revêtements (les *espaces de Hurwitz*) a permis de prouver -même si leur utilisation n'est parfois que sous-jacente- de nombreux résultats (par exemple la réalisation régulière du Monstre sur \mathbb{Q} , ou la résolution du problème inverse de Galois sur le corps des nombres totalement p -adiques, pour tout p).

Espaces de Hurwitz

Fixons deux entiers r et d , et un groupe fini $G \hookrightarrow S_d$. Il existe un espace des modules grossier pour la catégorie des (G -)revêtements de la droite projective de degré d , de monodromie $G \hookrightarrow S_d$, et à r points de branchement. Cet espace est appelé *espace de Hurwitz* pour cette catégorie (ou ces invariants); il est noté H' (resp. H) dans le cas des points de branchement ordonnés (resp. non ordonnés). Cet espace est

défini sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, et chacun de ses points géométriques représente une classe d'isomorphisme de (G) -revêtements.

De plus H (resp H') apparaît de façon naturelle comme un revêtement fini étale $\pi : H \rightarrow U_r$ (resp. $\pi : H' \rightarrow U^r$) sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/|G|])$ de l'espace de configuration de points U_r (resp. U^r) (on associe, à chaque classe d'isomorphisme de revêtements, leur ensemble commun de points de branchement).

S.Wewers a proposé dans [Wew98a] des compactifications de U^r et des espace de Hurwitz, de sorte que π se prolonge en un revêtement modérément ramifié le long de diviseurs à croisements normaux

$$\bar{\pi} : \bar{H}' \rightarrow \bar{U}^r$$

Corps des modules

On prouve par des méthodes topologiques que le problème inverse de Galois régulier admet une réponse positive sur le corps \mathbb{C} , et, à l'aide du théorème de spécialisation de Grothendieck, qu'il en est de même sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Soit G un groupe fini fixé, que l'on cherche à réaliser régulièrement sur le plus petit corps possible ; le résultat précédent assure l'existence d'un revêtement $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ algébrique de groupe de monodromie G . Dans le cas des points de branchement ordonnés (resp. dans le cas des points de branchement non ordonnés), on note par K le compositum des corps de rationalité des points de branchement (resp. le corps de rationalité du diviseur de branchement $(a_1) + \dots + (a_r)$) de f , qui est un corps de nombres. Il correspond au revêtement f un point h de l'espace de Hurwitz H pour les invariants qu'impose f .

Il existe un corps qui intervient naturellement lorsque l'on cherche un corps de définition de f le plus petit possible : c'est le *corps des modules* M . Ce corps, qui est une extension finie de K , n'est pas toujours un corps de définition pour f , mais il est contenu dans chacun d'entre eux. Sybilla Beckmann a prouvé dans [Bec89] que la ramification dans l'extension M/K ne pouvait avoir lieu qu'en certaines places de K , que l'on appelle *mauvaises places*. Une mauvaise place est une place qui divise l'ordre du groupe de monodromie, ou en laquelle les points de branchement coalescent. Le résultat principal de cette thèse est de montrer comment on peut calculer les indices de ramification pour une mauvaise place ne divisant pas l'ordre du groupe de monodromie, en utilisant la théorie

des *espaces de Hurwitz*. La stratégie employée est d'utiliser la géométrie et l'arithmétique des espaces de Hurwitz, et notamment de s'appuyer sur le fait connu suivant : le corps des modules M est aussi le corps de rationalité du point h dans H .

Soit v une mauvaise place de K ne divisant pas l'ordre du groupe de monodromie, c'est-à-dire une place où les points de branchement coalescent (se rencontrent). Le point \mathbf{a} de U^r induit une section $\bar{\mathbf{a}}$ sur \bar{U}^r , et la réduction du lieu de branchement en v induit un point $\bar{\mathbf{a}}$ du bord de \bar{U}^r . Les indices de ramification au-dessus de v dans les différents corps des modules des revêtements de lieu de branchement \mathbf{a} sont les indices de ramification des points de la fibre de $\bar{\pi}$ au-dessus de $\bar{\mathbf{a}}$. L'idée consiste alors à calculer cette ramification, en s'appuyant sur le théorème d'Abhyankar qui affirme qu'un revêtement modérément ramifié le long de diviseurs à croisements normaux (ici $\bar{\pi}$) est, localement pour la topologie étale, de type kummérien généralisé. C'est le calcul que l'on effectue, dans un cadre plus général, au cours du premier chapitre.

Plus précisément, soit $f : Y \rightarrow S$ un revêtement modérément ramifié le long de diviseurs à croisements normaux $(D_i)_i$. On se donne une section $\phi : \text{Spec}(R) \rightarrow S$, où R est un anneau de Dedekind. On suppose que $\text{Im}(\phi) \not\subseteq \cup_i \text{Supp}(D_i)$, et que la section ϕ rencontre les diviseurs D_i ($1 \leq i \leq d$) en le point spécial x . Soit m_i l'ordre d'intersection de ϕ avec D_i (voir la définition 1.3.6). On montre alors (théorème 1.3.7) que, pour tout choix *cohérent* de générateurs de l'inertie g_i ($1 \leq i \leq d$) au voisinage de x (définition 1.2.3), l'élément $g_1^{m_1} \dots g_d^{m_d}$ est un générateur de l'inertie pour le revêtement $\phi^*(f)$.

Plan

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à l'étude de quelques aspects des *revêtements modérément ramifiés le long de diviseurs à croisements normaux*, qui nous seront utiles aux troisième et quatrième chapitres. Après un bref rappel des définitions fondamentales (revêtements étales, kummériens généralisés, et modérément ramifiés), on propose une démonstration du théorème d'Abhyankar (théorème 1.2.2). On introduit aussi dans ce paragraphe la notion de choix *cohérent* de générateurs de

l'inertie (définition 1.2.3), et on montre qu'on peut se ramener à la recherche d'un choix cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage d'un point *complexe* (proposition 1.2.4).

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème 1.3.7 (évoqué ci-dessus), qui évalue la ramification d'un revêtement obtenu par restriction d'un revêtement modérément ramifié $f : Y \rightarrow S$ (le long de diviseurs à croisements normaux D_i) à une section du type

$$\mathrm{Spec}(R) \rightarrow S$$

où R est un anneau de Dedekind (la restriction est la normalisée du pullback). Retenons que l'application du théorème 1.3.7 nécessite le calcul des ordres d'intersection de la section avec les différents diviseurs D_i , et la donnée d'un système cohérent de générateurs de l'inertie. Ce théorème est une variante globale du théorème 1.3.5, lui-même conséquence du théorème 1.3.3, qui décrit l'inertie d'un revêtement kummérien restreint à une section.

Le deuxième chapitre est une introduction à la théorie des espaces de Hurwitz (définitions classiques des (G-)revêtements de la droite projective (et de leurs invariants principaux), du corps des modules, et des espaces de Hurwitz sur un anneau). On y passe en revue des résultats connus mais essentiels pour la suite (par exemple le lien entre corps des modules et espaces de Hurwitz).

Le troisième chapitre consiste en une étude détaillée du revêtement complété $\bar{\pi}$, dans la perspective d'appliquer les résultats du premier chapitre (théorème 1.3.7). En particulier, après une introduction à la complétion de l'espace de configuration de points U^r construite dans [Wew98a], la proposition 3.1.23 donne une description de la section sur \bar{U}^r que l'on obtient lorsque l'on réduit un point de U^r défini sur un corps K en une place v où ses coordonnées coalescent. On obtient notamment les ordres d'intersection de cette section avec les diviseurs S^I du bord de \bar{U}^r .

On décrit au cours des deux paragraphes suivants le lien entre le groupe des tresses pures de Hurwitz et le mapping class group pur, et on en déduit une description précise de la monodromie du revêtement générique géométrique π_η (*i.e* l'action du groupe des tresses pures sur une fibre générique géométrique de π). Les formules 3.3.3 et 3.4.12 donnent les actions de certains twists de Dehn sur l'ensemble des classes de Nielsen,

les *twists sarments* (définition 3.3.2). Le dernier paragraphe montre comment on peut obtenir, à partir des *twists sarments*, un choix *cohérent* de générateurs de l'inertie au voisinage de tout point de \overline{U} .

Le quatrième chapitre débute par une démonstration du résultat de Beckmann à l'aide des espaces de Hurwitz. On généralise ensuite ce résultat en étudiant le cas d'une mauvaise place v ne divisant pas l'ordre de G . Le travail préliminaire réalisé au cours des trois premiers chapitres permet une description de la ramification de la place v dans les différents corps des modules de revêtements de degré, de monodromie et de points de branchement donnés (théorème 4.1.5). On étudie ensuite le cas particulier des groupes diédraux.

Le dernier chapitre de cette thèse se distingue des précédents en ce qu'il n'utilise plus la géométrie des espaces de Hurwitz, mais les *gerbes* au-dessus de ces espaces des modules grossiers. Le théorème 5.2.1 donne l'existence et l'unicité (à isomorphisme près) d'un bon modèle (*i.e.* un modèle tel que la réduction sur la fibre spéciale du revêtement déduit sur l'anneau soit lisse et géométriquement irréductible) sur l'extension non ramifiée maximale du corps de rationalité du lieu de branchement en une bonne place ([DH98], [Ems99]); le théorème 5.2.3 concerne la stabilité (au sens de Dew) d'un tel modèle, et le théorème 5.2.4 exhibe un exemple de descente sur le complété du corps des modules en une bonne place ([DH98], [Ems99]). Il précise les énoncés précédemment obtenus (théorème 3.1 de [DH98] et corollaire 2.6 de [Ems99]) en ce qu'il affirme l'existence d'un *bon* modèle sur le complété du corps des modules en une bonne place.

CHAPITRE 1

REVÊTEMENT MODÉRÉ RESTREINT À UNE SECTION

Dans tout ce chapitre, S désigne un schéma localement noethérien et normal.

Le premier paragraphe de ce chapitre rappelle des généralités sur les revêtements étales et sur les revêtements modérément ramifiés. On définit aussi dans ce premier paragraphe la notion de revêtement kummérien généralisé, en suivant l'exposé [GM71] d'A. Grothendieck et J. P. Murre. Ces derniers revêtements sont des cas particuliers de revêtement modérés le long de diviseurs à croisements normaux, et on démontre au paragraphe suivant le théorème d'Abhyankar, qui affirme que réciproquement, un revêtement modéré est, localement pour la topologie étale, un revêtement kummérien généralisé.

Les résultats principaux de ce chapitre se trouvent dans le paragraphe 1.3, consacré à l'étude de l'inertie de la restriction d'un revêtement modérément ramifié (le long de diviseurs à croisements normaux) à une section (théorèmes 1.3.3, 1.3.4 et 1.3.7).

1.1. Revêtements étales, revêtements modérément ramifiés

1.1.1. Ramification dans les anneaux de Dedekind, dans les morphismes de schémas. — On rappelle ici la notion élémentaire de ramification dans les anneaux de Dedekind, et celle qui en découle pour les morphismes de schémas.

1.1.1.1. Ramification dans les anneaux de Dedekind. — Soit A un anneau de Dedekind de corps des fractions K , L/K une extension finie

de degré n . La fermeture intégrale B de A dans L est un anneau de Dedekind.

Soit \mathfrak{p} un idéal premier de A ; l'idéal $\mathfrak{p}B$ de B se décompose donc en produit d'idéaux premiers :

$$\mathfrak{p}B = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}}$$

Le nombre $e_{\mathfrak{P}}$ est l'indice de ramification de \mathfrak{P} dans l'extension L/K , et $f_{\mathfrak{P}} := [B/\mathfrak{P} : A/\mathfrak{p}]$ est le degré résiduel de \mathfrak{P} dans l'extension L/K .

Citons trois cas particuliers de ramification :

- Si $e_{\mathfrak{P}} = 1$ et B/\mathfrak{P} est séparable sur A/\mathfrak{p} , on dit que L/K est *non ramifiée en \mathfrak{P}* . Si L/K n'est ramifiée en aucun idéal premier de B divisant \mathfrak{p} , on dit que L/K est *non ramifiée au-dessus de \mathfrak{p}* (ou en \mathfrak{p}).
- Si l'extension résiduelle B/\mathfrak{P} sur A/\mathfrak{p} est séparable pour tout idéal premier \mathfrak{P} de B divisant \mathfrak{p} , et si la caractéristique résiduelle est nulle ou ne divise aucun $e_{\mathfrak{P}}$, on dit que la ramification de L/K en \mathfrak{p} est *modérée*.
- Si un seul idéal premier \mathfrak{P} de B divise \mathfrak{p} , et si $f_{\mathfrak{P}} = 1$, on dit que l'extension L/K est *totalelement ramifiée en \mathfrak{p}* .

Pour toute extension galoisienne L/K , le groupe de Galois G agit sur l'ensemble des idéaux premiers de B divisant \mathfrak{p} . Soit \mathfrak{P} l'un de ces idéaux : le *groupe de décomposition de \mathfrak{P}* dans L/K est le stabilisateur de \mathfrak{P} par cette action. Un élément de ce groupe définit par passage au quotient un A/\mathfrak{p} -automorphisme de B/\mathfrak{P} . Le noyau du morphisme ainsi défini est le *groupe d'inertie* de \mathfrak{P} dans L/K .

On peut retenir de la lecture de [Ser62] que, dans le cas où la ramification de L/K en \mathfrak{p} est modérée, le sous-groupe d'inertie de G est un groupe *cyclique* d'ordre l'indice de ramification (commun, puisque L/K est galoisienne) des idéaux premiers divisant \mathfrak{p} .

1.1.1.2. Ramification dans les morphismes de schémas. — Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme fini de schémas normaux, y un point de codimension 1 dans Y , d'image x dans X . L'indice de ramification e_y de l'extension d'anneaux de valuation discrète $\mathcal{O}_{Y,y}$ sur $\mathcal{O}_{X,x}$ est l'indice de ramification de y au-dessus de x dans f . On dit que le morphisme f est *non ramifié* en y si l'extension $\mathcal{O}_{Y,y}$ sur $\mathcal{O}_{X,x}$ est non ramifiée. On dit que le morphisme

f est *non ramifié* (resp. *modérément ramifié*) en x si l'extension $\mathcal{O}_{Y,y}$ sur $\mathcal{O}_{X,x}$ l'est, pour tout y au-dessus de x .

Cette notion peut se généraliser à un morphisme $f : Y \rightarrow X$ localement de type fini : f est dit non ramifié en $y \in Y$ si $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Y,y}$ est une extension finie séparable de $k(x)$, où $x = f(y)$. Cette définition nous permettra de définir la notion de revêtement étale au paragraphe suivant.

1.1.2. Revêtements étales, revêtements modérés. —

1.1.2.1. Morphismes plats et étales. — On suit ici l'exposé [GM71] d'A. Grothendieck et J. P. Murre. Un morphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow B$ est dit *plat* si B est plat en tant qu' A -module (la structure de module provenant de ϕ), c'est à dire si le foncteur "changement de base" $- \otimes_A B$ de la catégorie des A -modules vers la catégorie des B -modules est exact (on rappelle que cela signifie que toute suite exacte est transformée en une suite exacte). Un morphisme $f : Y \rightarrow X$ de schémas est dit *plat* si pour tout $y \in Y$ le morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ (où $x = f(y)$) est plat. Il est dit *fidèlement plat* si en outre il est surjectif.

Un morphisme (d'anneaux ou de schémas) est dit *étale* s'il est plat et non ramifié. Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme étale, on dit que Y est un *X -schéma étale*. Les propriétés suivantes bien connues nous seront utiles pour la suite (cf. par exemple [Mil80] ou [Gro71]) :

Propriétés (Exemples de morphismes étales)

- *Toute immersion ouverte est étale ;*
- *La composition de deux morphismes étales est un morphisme étale ;*
- *Tout morphisme obtenu par changement de base d'un morphisme étale est étale ;*
- *Si fg est étale et que f est non ramifié, alors g est étale.*

Si X est un schéma, et $\text{Ét}(X)$ catégorie des X -schémas étales, on définit la topologie étale comme la topologie pour laquelle un recouvrement d'un objet U par des ouverts fondamentaux consiste en une famille finie de morphismes $\phi_i : U_i \rightarrow U$ tels que la réunion des images des ϕ_i recouvre U .

On définit aussi la classique notion de revêtement étale :

Définition 1.1.1. — Un morphisme $f : X \rightarrow S$ fini et étale est un *revêtement étale*.

Pour définir la notion de revêtement modérément ramifié, on introduit d'abord la notion de diviseurs à croisements normaux :

Définition 1.1.2. — Soit $D = (D_i)$ un ensemble fini de diviseurs (positifs) sur S . on dit que les (D_i) sont à *croisements strictement normaux* si, pour tout $s \in (\cup_i \text{Supp } (D_i))$, on a :

1. $\mathcal{O}_{S,s}$ est un anneau local régulier,
2. Si $I_s = \{i; s \in \text{Supp } (D_i)\}$, alors pour tout $i \in I_s$, D_i peut s'écrire $D_i = \sum_{\lambda} \text{div } (x_{i,\lambda})$, avec $x_{i,\lambda} \in \mathcal{O}_{S,s}$ et où les $(x_{i,\lambda})_{i,\lambda}$ font partie d'un système régulier de paramètres en s .

Définition 1.1.3. — On dit que les (D_i) sont à *croisements normaux* si, localement pour la topologie étale, les (D_i) sont à croisements strictement normaux.

Nous sommes maintenant en mesure d'étendre la notion de revêtement, en permettant un certain type de ramification :

Définition 1.1.4. — On se donne un système de diviseurs à croisements normaux D . Un morphisme $f : X \rightarrow S$ est un *revêtement modérément ramifié le long de D* si :

- f est fini ;
- f est étale au-dessus de $S - D$;
- toute composante irréductible de X domine une composante irréductible de S ;
- X est normal ;
- pour tout point s de D de codimension 1 dans S , f est modérément ramifié en s .

1.1.3. Revêtements kummériens généralisés. — Ces revêtements sont des cas particuliers de revêtements modérément ramifiés ; nous verrons au cours du sous-paragraphe suivant que, réciproquement, tout revêtement modérément ramifié est isomorphe, localement, à un revêtement kummérien généralisé (c'est le théorème d'Abhyankar).

On fixe un ensemble fini d'entiers positifs n_i , $i \in I$, ensemble que l'on note \underline{n} .

Soit $\mathbb{Z}_{\underline{n}}$ le groupe additif $\oplus_{i \in I} \mathbb{Z}/n_i \mathbb{Z}$. Considérons le S -schéma en groupes

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[\mathbb{Z}_{\underline{n}}])$$

$(\mathcal{O}_S[\mathbb{Z}_{\underline{n}}])$ désigne la \mathcal{O}_S -algèbre du groupe $\mathbb{Z}_{\underline{n}}$ à coefficients dans \mathcal{O}_S .

Cette construction se généralise à tout groupe abélien, et si $L = (\mathbb{Z}_{\underline{n}})/N$ est un quotient de $\mathbb{Z}_{\underline{n}}$, on a la suite exacte de groupes algébriques, pour la topologie plate :

$$1 \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[L]) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[\mathbb{Z}_{\underline{n}}]) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[N]) \rightarrow 1$$

Posons

$$A_{\underline{n}} := (\mathcal{O}_S[(U_i)_{i \in I}] / ((U_i^{n_i} - 1)_{i \in I}))$$

Le S -schéma

$$\mu_{\underline{n}, S} := \mathrm{Spec}(A_{\underline{n}})$$

est un schéma en groupes sur S , isomorphe à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[\mathbb{Z}_{\underline{n}}])$ par l'isomorphisme canonique de \mathcal{O}_S -algèbres

$$\mathcal{O}_S[\mathbb{Z}_{\underline{n}}] \simeq A_{\underline{n}}$$

envoyant $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ (le 1 est en i -ème position) sur l'image u_i de U_i dans $A_{\underline{n}}$.

Soit $\underline{a} = (a_i)_{i \in I}$ un ensemble de sections régulières sur S (i.e. ces sections ne sont des diviseurs de zéro dans aucun $\mathcal{O}_{S,s}$). On introduit la \mathcal{O}_S -algèbre

$$A_{\underline{n}}^{\underline{a}} := \mathcal{O}_S[(T_i)_{i \in I}] / ((T_i^{n_i} - a_i)_{i \in I})$$

ainsi que le schéma $Z_{\underline{n}}^{\underline{a}} := \mathrm{Spec}(A_{\underline{n}}^{\underline{a}})$. Soit t_i l'image de T_i dans $A_{\underline{n}}^{\underline{a}}$. Le S -schéma en groupes $\mu_{\underline{n}, S}$ agit sur $Z_{\underline{n}}^{\underline{a}}$, ce qui conduit à la définition d'un revêtement kummérien :

Définition 1.1.5. — Soit X un S -schéma, et G un S -schéma en groupe opérant sur X au-dessus de S . Le couple (X, G) est appelé *revêtement kummérien* de S relativement aux sections \underline{a} si (X, G) est isomorphe à un couple $(Z_{\underline{n}}^{\underline{a}}, \mu_{\underline{n}})$ pour un choix convenable d'entiers $\underline{n} = (n_i)_{i \in I}$, chaque n_i étant premier aux caractéristiques résiduelles de S .

Remarque 1.1.6. — Soit ζ une racine $(n_1 \dots n_r)$ -ème de l'unité, et $\zeta_i = \zeta^{n_1 \dots \hat{n}_i \dots n_r}$.

Soit ϕ l'application bilinéaire de groupes abéliens

$$\phi : \left(\prod_{1 \leq i \leq r} \langle \zeta_i \rangle \right) \times (\mathbb{Z}_{\underline{n}}) \rightarrow \langle \zeta \rangle$$

définie par

$$\left(\left(\zeta_1^{\beta_1}, \dots, \zeta_r^{\beta_r} \right), (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \right) \mapsto \prod_{1 \leq i \leq r} \zeta_i^{\beta_i \alpha_i}$$

Cette application fournit une dualité entre ces deux groupes.

Le revêtement kummérien (X, G) , isomorphe au couple $(Z_{\underline{n}}^{\underline{a}}, \mu_{\underline{n}})$, est un revêtement galoisien de groupe $\prod_{1 \leq i \leq r} \langle \zeta_i \rangle$, dual de $\mathbb{Z}_{\underline{n}}$ par ϕ

Notation. — Si l'on note par D_i le diviseur induit par la section a_i , on dit aussi que le couple (X, G) est un *revêtement kummérien* de S relativement aux diviseurs $(D_i)_{i \in I}$.

Définissons maintenant la notion de revêtement kummérien généralisé.

On se donne un quotient $L = (\mathbb{Z}_{\underline{n}})/N$ de $\mathbb{Z}_{\underline{n}}$.

Si l'on note K le dual de $\text{Spec}(\mathcal{O}_S[L])$, alors $\mu_{\underline{n}}/K$ est le dual de $\text{Spec}(\mathcal{O}_S[N])$

Le schéma K est le spectre de l'orthogonal de N par ϕ , ce qui fait que, si l'on note par u'_i l'image de u_i dans $\mathcal{O}_S[L]$, on a :

$$N = \{ \underline{\alpha} \in \mathbb{Z}_{\underline{n}}; \prod_{i \in I} (u'_i)^{\alpha_i} = 1 \}$$

A. Grothendieck et J. P. Murre montrent de plus que, si l'on introduit la sous- \mathcal{O}_S -algèbre de $A_{\underline{n}}^{\underline{a}}$:

$$\underline{B} = \bigoplus_{\underline{\alpha} \in N} t^{\underline{\alpha}} \mathcal{O}_S$$

on a un isomorphisme

$$Z_{\underline{n}}^{\underline{a}}/K \simeq \text{Spec}(\underline{B})$$

Définition 1.1.7. — Soit X un S -schéma, et G un S -schéma en groupe opérant sur X au-dessus de S . Le couple (X, G) est appelé *revêtement kummérien généralisé* de S relativement aux sections \underline{a} si (X, G) est isomorphe à un couple $(Z_{\underline{n}}^{\underline{a}}/K, \mu_{\underline{n}}/K)$ pour un choix convenable d'entiers $\underline{n} = (n_i)_{i \in I}$, chaque n_i étant premier aux caractéristiques résiduelles de S , et d'un sous-groupe fermé K de $\mu_{\underline{n}}$.

1.2. Description locale d'un revêtement modérément ramifié

On montre dans ce paragraphe le théorème d'Abhyankar, affirmant qu'un revêtement modérément ramifié le long de diviseurs à croisements normaux est, localement pour la topologie étale, un quotient d'un revêtement kummérien (*i.e.* un revêtement kummérien généralisé, cf. la définition 1.1.7). Outre le fait que ce théorème est -à notre connaissance- d'accès relativement difficile dans la littérature ([GM71] en fait mention, on en trouve une démonstration plus détaillée dans l'appendice du chapitre XIII de Michèle Raynaud dans [Gro71]), ce paragraphe permet aussi d'introduire la notion de *système cohérent de générateurs de l'inertie*, notion essentielle à l'application des théorèmes du prochain paragraphe. On montre de plus dans ce paragraphe qu'un système cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage d'un point complexe induit un système cohérent de l'inertie au voisinage d'un point sur un corps de caractéristique positive.

1.2.1. Générateurs de l'inertie. — Soit X un S -schéma régulier, propre sur S , muni de S -diviseurs à croisements normaux $D = \sum D_i$, où les D_i sont irréductibles. On considère la catégorie galoisienne des revêtements algébriques de X modérément ramifiés le long de D , et $\pi_1^{mod}(X, x_0)$ le groupe fondamental basé au point x_0 n'appartenant pas au support de D (voir [GM71]). Considérons un pro-objet universel $\tilde{X} \rightarrow X$ de cette catégorie, muni d'un point y au dessus de x_0 . On a un (anti-) isomorphisme canonique $\varphi_y : \pi_1^{mod}(X, x_0) \simeq \text{Gal}(\tilde{X}/X)$. Cet isomorphisme dépend du choix de y au-dessus x_0 ; si l'on change y , l'isomorphisme précédent est composé par un automorphisme intérieur.

Les groupes d'inertie J_i au dessus de la composante D_i de D dans le revêtement $\tilde{X} \rightarrow X$ sont bien définis (à conjugaison près). Ce sont des groupes procycliques. On appellera *groupe d'inertie le long de D_i* le sous-groupe procyclique de $\pi_1^{mod}(X, x_0)$ (défini à conjugaison près), image réciproque de J_i dans l'isomorphisme précédent.

Si l'on change de point base (x_1 à la place de x_0), tout choix d'un "chemin" α allant de x_0 à x_1 (c'est à dire un élément du groupoïde fondamental $\pi_1^{mod}(X, x_0, x_1)$) définit un isomorphisme $\tilde{\alpha} : \pi_1^{mod}(X, x_0) \rightarrow \pi_1^{mod}(X, x_1)$. Par ailleurs α définit une bijection de la fibre de x_0 dans $\tilde{X} \rightarrow X$ vers celle de x_1 , et si y_0 et y_1 sont des éléments de ces fibres qui se correspondent par cette bijection, $\varphi_{y_1} \circ \tilde{\alpha} = \varphi_{y_0}$. Les groupes d'inertie

le long de D_i dans $\pi_1^{\text{mod}}(X, x_0)$ et dans $\pi_1^{\text{mod}}(X, x_1)$ se correspondent donc par $\tilde{\alpha}$.

Définition 1.2.1. — On appellera *générateur de l'inertie* le long de D_i tout générateur d'un groupe d'inertie le long de D_i dans $\pi_1(X, x_0)$. Il résulte de ce qui précède, que si γ est un générateur de l'inertie le long de D_i , il en est de même de tout conjugué de γ .

1.2.2. Théorème d'Abhyankar. — On rappelle d'abord le classique lemme d'Abhyankar, qui permettra de prouver la proposition 1.2.2.

Lemme d'Abhyankar. — Soit R un anneau de valuation discrète complet de corps des fractions K . Soit L/K (resp. M/K) une extension galoisienne modérément ramifiée d'indice e (resp. N). On suppose que e divise N .

Alors l'extension LM/M est non ramifiée.

Démonstration. — Le groupe d'inertie I de LM sur K s'envoie surjectivement par un morphisme p (resp. q) sur $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ (resp. sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$). La ramification étant modérée, le groupe I est cyclique; par conséquent, le morphisme de I vers $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ déduit de p et de la surjection $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ coïncide avec q , et donc $\text{Ker}(p) \supseteq \text{Ker}(q)$. Un élément du noyau de q fixe L , et donc LM , et ne peut être que trivial; le groupe d'inertie de LM sur M (qui n'est autre que $\text{Ker}(q)$) est donc lui-même trivial. \square

Soit X un schéma lisse sur $\text{Spec}(R)$ (où R est un anneau de valuation discrète complet), muni de diviseurs à croisements normaux \underline{D} , et x un point géométrique, à l'intersection de composantes des diviseurs D_1, \dots, D_m définies sur $\text{Spec}(R)$. Si x est un point spécial, on note par p la caractéristique résiduelle de $\mathcal{O}_{X,x}$. Soient t_1, \dots, t_m des paramètres locaux définissant D_1, \dots, D_m sur R .

On considère la limite projective $\varinjlim \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$, où V parcourt tous les voisinages étales de x . Il existe un isomorphisme canonique entre cette limite projective et l'hensélisé strict $\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ (cf. [Mil80] p. 38).

Soit $D_1^{\text{sh}}, \dots, D_m^{\text{sh}}$ les images réciproques dans $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}})$ des composantes de D_1, \dots, D_m passant par le point x . On définit de la même façon l'image réciproque $\underline{D}^{\text{sh}}$. Pour tout voisinage étale V de x , on définit de façon analogue D_i^V et \underline{D}^V . Lorsque $x = \bar{x}$ est un point spécial, l'anneau $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{\text{sh}}$ est isomorphe à l'anneau $R^{\text{nr}}[[t_1, \dots, t_n]]_h$, qui est la clôture algébrique de l'anneau $R^{\text{nr}}[t_1, \dots, t_n]$ dans l'anneau $R^{\text{nr}}[[t_1, \dots, t_n]]$ (cf.

[Mil80]). Dans le cas où $x = x_\eta$ est un point générique, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x_\eta}^{sh}$ est isomorphe à l'anneau $\overline{K}[[t_1, \dots, t_n]]_h$

Pour tout voisinage étale V de x dans X , on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh}) \\ & \nearrow & \downarrow \\ x & \rightarrow & V \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

La flèche $\varphi : \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh}) \rightarrow X$ induit un foncteur

$$\text{Rev}_{\underline{D}}(X) \rightarrow \text{Rev}_{\underline{D}^{sh}}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh}))$$

des catégories des revêtements de X (resp. de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh})$), modérément ramifiés le long de \underline{D} (resp. \underline{D}^{sh}). La deuxième catégorie est équivalente à la catégorie des revêtements cohérents modérés d'ouverts étales V de x .

Ce foncteur induit un morphisme entre les groupes fondamentaux modérés :

$$\pi_1^{mod}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh}) - (D_1^{sh} \cup \dots \cup D_m^{sh})) \rightarrow \pi_1^{mod}(X - (D_1 \cup \dots \cup D_m))$$

Proposition 1.2.2. — *Lorsque $x = \bar{x}$ est un point spécial (resp. lorsque $x = x_\eta$ est un point générique), on a un isomorphisme*

$$\pi_1^{mod}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{sh}) - (D_1^{sh} \cup \dots \cup D_m^{sh})) \simeq (\hat{\mathbb{Z}}^{(p')}(1))^m$$

respectivement

$$\pi_1^{mod}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x_\eta}^{sh}) - (D_1^{sh} \cup \dots \cup D_m^{sh})) \simeq (\hat{\mathbb{Z}}(1))^m$$

Plus précisément, la limite inductive

$$\varinjlim \left(\text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{e_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{e_m}}] \right) \right)$$

pour la relation de divisibilité sur les entiers e_i premiers à p pour \bar{x} (resp. tous les entiers e_i pour $x = x_\eta$), est un pro-revêtement universel de $\mathcal{O}_{X,x}^{sh}$, modéré le long de $D_1^{sh}, \dots, D_m^{sh}$.

En particulier, dans le cas d'un point spécial, p ne divise pas les indices de ramification de tout revêtement modérément ramifié le long de \underline{D}^{sh} .

De plus, si $\underline{\zeta}$ est un système cohérent de racines de l'unité premières à p (resp. de racines de l'unité), et, pour tout e premier à p (resp. tout entier), ζ_e la racine primitive e -ième de l'unité correspondante, alors les automorphismes définis par

$$t_i^{\frac{1}{e_i}} \mapsto \zeta_{e_i} t_i^{\frac{1}{e_i}}$$

pour i variant entre 1 et m , sont des générateurs des groupes d'inertie des D_i^{sh} , $1 \leq i \leq m$.

Définition 1.2.3. — Tout système de générateurs de ce type est appelé système cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage de x .

Démonstration. — On prouve la proposition 1.2.2. On se contentera de traiter le cas d'un point de la fibre spéciale (la démonstration pour un point de la fibre générique étant similaire). L'isomorphisme annoncé est une conséquence immédiate de l'existence du revêtement universel décrit dans la proposition. Soit $Y \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh})$ un revêtement sur $\text{Spec}(R)$, modérément ramifié le long de $D_1^{sh}, \dots, D_m^{sh}$. On peut se limiter au cas où Y est connexe. L'anneau local au voisinage du point générique de D_i est un anneau de valuation discrète, et les indices de ramification des points de la fibre de Y au-dessus de ce point sont bien définis. Soit n_i le plus petit commun multiple des indices de ramification de la clôture galoisienne $\hat{Y} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh})$ du revêtement $Y \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh})$.

Considérons le morphisme fini

$$g' : \tilde{Z} \rightarrow \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right)$$

obtenu à partir du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z & \rightarrow & \hat{Y} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right) & \rightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh}) \end{array}$$

où \tilde{Z} est le normalisé de Z .

Soit U l'ouvert de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh})$, complémentaire du support des diviseurs D_i .

Soit U' (resp. V) son image réciproque dans $\text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right)$ (resp. dans \hat{Y}). La restriction $V \rightarrow U$ est étale, et donne par changement de base $U' \rightarrow U$ un morphisme fini étale $V' \rightarrow U'$. L'ouvert U' étant normal, V' est aussi normal, et est donc le normalisé de U' dans le corps des fonctions de Z . Le morphisme $V' \rightarrow U'$ coïncide donc avec la restriction de g' à V' . Or le lemme d'Abhyankar prouve que g' est non ramifié en codimension 1. Le schéma $\text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right)$ est régulier, et \tilde{Z} est normal par définition. Le théorème de pureté prouve donc que g' est étale.

Comme l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}]$ est en fait strictement hensélien (c'est une extension entière finie d'un tel anneau), il s'ensuit que le morphisme $\tilde{Z} \rightarrow \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right)$ est isomorphe à un certain nombre de copies du morphisme trivial (cf. le corollaire 3.12 de [Mil80]). On a donc obtenu un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right) & \rightarrow & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} \right) \end{array}$$

Il reste à prouver que les entiers n_i sont premiers à p . Le seul cas difficile est celui où R est de caractéristique nulle (si la caractéristique de R est égale à p , cela découle en effet de la définition d'un revêtement modérément ramifié). Nous allons suivre la même stratégie que M. Raynaud dans [Gro71], p. 429, en supposant que p divise par exemple n_1 , et aboutir à une contradiction. Cette contradiction proviendra du fait que si l'on dispose d'un revêtement $Y \rightarrow \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} \right)$ modérément ramifié, et que l_1, \dots, l_m sont des entiers tels que le revêtement

$$\tilde{Z}' \rightarrow \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{l_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{l_m}}] \right)$$

obtenu par normalisation à partir du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 Z' & \rightarrow & Y \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{l_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{l_m}}] \right) & \rightarrow & \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} \right)
 \end{array}$$

soit étale, alors chaque indice de ramification du revêtement $Y \rightarrow \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} \right)$ au-dessus de D_i^{sh} divise l_i .

En posant $B := \mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{p}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}]$, on peut se ramener au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{Z} & \rightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Spec} \left(B[t_1^{\frac{1}{p}}] \right) & \rightarrow & \text{Spec} (B)
 \end{array}$$

Les revêtements verticaux sont respectivement étale et modérément ramifié. Soit U l'ouvert $\text{Spec} (B) - D_1$, et \bar{U} son intersection avec la fibre spéciale. Notons par f le revêtement $Y \rightarrow \text{Spec} (B)$, et par \bar{f} sa restriction à la fibre spéciale. Le diagramme précédent induit un diagramme sur les fibres spéciales (avec des notations évidentes) :

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{\tilde{Z}} & \rightarrow & \bar{Y} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \overline{\text{Spec} \left(B[t_1^{\frac{1}{p}}] \right)} & \rightarrow & \overline{\text{Spec} (B)}
 \end{array}$$

Si l'on note $u_1 := t_1^{\frac{p}{n_1}}$, et $u_i := t_i^{\frac{1}{n_i}}$, pour tout $i \in \{2, \dots, m\}$, alors

$$\overline{\text{Spec} (B)} \simeq \text{Spec} \left(\bar{k}[[u_1, \dots, u_m]]_h \right)$$

et

$$\overline{\text{Spec} \left(B[t_1^{\frac{1}{p}}] \right)} \simeq \text{Spec} \left(\bar{k}[[u_1, \dots, u_m]]_h [u_1^{\frac{1}{p}}] \right)$$

Le morphisme $\overline{\text{Spec} \left(B[t_1^{\frac{1}{p}}] \right)} \rightarrow \overline{\text{Spec} (B)}$ est donc purement radiciel, et induit donc une équivalence de catégories entre les revêtements étales

de ces deux schémas. En particulier, le morphisme

$$\tilde{Z} \rightarrow \overline{\text{Spec} \left(B[t_1^{\frac{1}{p}}] \right)}$$

provient d'un unique revêtement *étale* $g_1 : \overline{Y}_1 \rightarrow \text{Spec}(\overline{k}[[t_1, \dots, t_n]]_h)$.

Les restrictions à \overline{U} de \overline{f} et g_1 sont isomorphes, et \overline{f} est donc étale. Il s'étend donc de façon unique en un revêtement étale $f' : Y' \rightarrow \text{Spec}(B)$. Les restrictions $f|_U$ et $f'|_U$ sont isomorphes, car leurs restrictions à la fibre spéciale le sont. Les revêtements f et f' sont donc isomorphes. Ceci entraîne le fait que f est étale, ce qui est contradictoire avec la définition des n_i . \square

On déduit facilement de la proposition 1.2.2 le théorème d'Abhyankar (appelé lemme d'Abhyankar relatif dans [Gro71], chapitre XIII, proposition 5.5) :

Théorème d'Abhyankar. — *Soit X un schéma sur $\text{Spec}(R)$, muni d'un système \underline{D} de diviseurs à croisements normaux. Soit $x \rightarrow X$ un point géométrique de X , et D_1, \dots, D_m les composantes des diviseurs passant par ce point. Soit $Y \rightarrow X$ un revêtement de X modérément ramifié le long de \underline{D} .*

Il existe un R -voisinage étale V de x et un revêtement kummérien $W \rightarrow V$, modérément ramifié le long des D_i^V ($1 \leq i \leq m$), tel que si l'on pose $Y' := Y \times_X V$, le morphisme $Y' \rightarrow V$ est dominé par un morphisme $\coprod W \rightarrow V$.

En particulier, les indices de ramification sont premiers à la caractéristique résiduelle de R .

Démonstration. — On se ramène ici aussi au cas où Y est connexe. Posons $\tilde{Y}'' := Y \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh})$, la proposition 1.2.2 fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh}[t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right) & \rightarrow & Y'' & \rightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y & \rightarrow & X \end{array}$$

Le revêtement $\tilde{Y}'' \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh})$ est un revêtement kummérien généralisé. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/n_m\mathbb{Z})$ tel que

$$\tilde{Y}'' \simeq \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right) / H$$

Il existe un voisinage étale V_1 de x assez petit sur lequel t_1, \dots, t_m sont régulières, et tel que

$$\text{Aut}_{V_1} \left(\mathcal{O}_{V_1} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right) \simeq \text{Aut}_{\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{sh})} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right)$$

Soit H_1 l'image de H dans $\text{Aut}_{V_1} \left(\mathcal{O}_{V_1} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right)$ par cet isomorphisme, et

$$Y'_1 := \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{V_1} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right) / H_1$$

On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right) & \rightarrow & \tilde{Y}'' & \rightarrow & \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} \right) \\ & & \square & & \downarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{V_1} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right) & \rightarrow & Y'_1 & \rightarrow & V_1 \end{array}$$

Si l'on pose $Y_2 := Y \times_X V_1$, on a

$$Y_2 \times_{V_1} \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} \right) \simeq Y'_1 \times_{V_1} \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} \right)$$

Il existe donc un ouvert étale $V \rightarrow V_1$ tel que

$$Y_2 \times_{V_1} V \simeq Y'_1 \times_{V_1} V$$

On a donc le diagramme suivant (en posant $Y' := Y \times_X V$) :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right) & \rightarrow & \tilde{Y}'' & \rightarrow & \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X,x}^{sh} \right) \\ & & \square & & \downarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec} \left(\mathcal{O}_V [t_1^{\frac{1}{n_1}}, \dots, t_m^{\frac{1}{n_m}}] \right) & \rightarrow & \tilde{Y}' & \rightarrow & V \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y & \rightarrow & X \end{array}$$

□

1.2.3. Comparaison analytique/algébrique. — On reprend le contexte du paragraphe précédent. On suppose que la caractéristique de R est nulle, et que sa caractéristique résiduelle p est positive. Soit K (resp. k) le corps des fractions (resp. le corps résiduel) de R . Le corps K (et donc R) se plonge dans \mathbb{C} . On se fixe un tel plongement ρ .

Soit \bar{x} un point géométrique de X sur la fibre spéciale, à l'intersection des diviseurs D_1, \dots, D_m . Ce point se prolonge en un point sur $\text{Spec}(R)$, tel que le point x_η de la fibre générique soit aussi à l'intersection de ces mêmes diviseurs $D_{1,\eta}, \dots, D_{m,\eta}$ (et eux seulement). On note par $x_{\eta,\mathbb{C}}$ le point complexe correspondant (via ρ).

Le but de ce paragraphe est de montrer une propriété de "transfert" d'un système cohérent de générateurs de l'inertie, qui permet de se limiter à la recherche de générateurs cohérents au voisinage d'un point complexe (cette proposition sera déterminante dans la situation du revêtement $\bar{\pi} : \bar{H}' \rightarrow \bar{U}'$) :

Proposition 1.2.4. — *Tout choix d'un système cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage du point $x_{\eta,\mathbb{C}}$ induit un choix cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage de \bar{x} .*

Démonstration. — La preuve de cette proposition se fait en deux temps : on effectue d'abord une correspondance entre des choix cohérents de générateurs de l'inertie au voisinage de \bar{x} et x_η respectivement, puis une correspondance entre de tels choix au voisinage de x_η et de $x_{\eta,\mathbb{C}}$.

Le foncteur restriction à la fibre générique induit un morphisme surjectif de groupes fondamentaux (défini à conjugaison près car dépendant des points base choisis) :

$$\pi_1^{mod}(X_K - (D_{1,\eta} \cup \dots \cup D_{m,\eta})) \rightarrow \pi_1^{mod}(X - (D_1 \cup \dots \cup D_m))$$

On a de plus le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{mod}(X_{\bar{K}} - \bigcup_i D_{i,\eta,\bar{K}}) & \rightarrow & \pi_1^{mod}(X_R - \bigcup_i D_i) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_1^{mod}\left(\text{Spec}\left(\mathcal{O}_{X_{\bar{K}},x_\eta}^{sh}\right) - \bigcup_i D_{i,\eta,\bar{K}}^{sh}\right) & \rightarrow & \pi_1^{mod}\left(\text{Spec}\left(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}^{sh}\right) - \bigcup_i D_i^{sh}\right) \end{array}$$

Toutes les flèches sont définies à conjugaison près (car tributaires d'un choix de points base), excepté le morphisme

$$\pi_1^{mod} \left(\text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X_{\overline{K}}, x_\eta}^{sh} \right) - \bigcup_i D_{i, \eta, \overline{K}}^{sh} \right) \rightarrow \pi_1^{mod} \left(\text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X, \overline{x}}^{sh} \right) - \bigcup_i D_i^{sh} \right)$$

qui est défini sans ambiguïté, car on choisit le même point base pour ces deux groupes fondamentaux, à savoir le point générique géométrique.

Si l'on se restreint aux p' -parties, ce dernier morphisme devient un isomorphisme canonique, et on a plus précisément le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1^{(p')} (X - \bigcup_i D_i) \\ & & \uparrow \\ \pi_1^{(p')} (X_{\overline{K}} - \bigcup_i D_{i, \eta, \overline{K}}) & \simeq & \pi_1^{(p')} (X_{R^{nr}} - \bigcup_i D_{i, R^{nr}}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_1^{(p')} \left(\text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X_{\overline{K}}, x_\eta}^{sh} \right) - \bigcup_i D_{i, \eta, \overline{K}}^{sh} \right) & \simeq & \pi_1^{mod} \left(\text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X, \overline{x}}^{sh} \right) - \bigcup_i D_i^{sh} \right) \end{array}$$

Un système cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage de x_η donne donc canoniquement un système cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage de \overline{x} .

De la même façon, le théorème de spécialisation de Grothendieck donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{(p')} (X_{\mathbb{C}} - \bigcup_i D_{i, \eta, \mathbb{C}}) & \simeq & \pi_1^{(p')} (X_{\overline{K}} - \bigcup_i D_{i, \eta, \overline{K}}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_1^{(p')} \left(\text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}, x_\eta, \mathbb{C}}^{sh} \right) - \bigcup_i (D_{i, \eta, \mathbb{C}}^{sh}) \right) & \simeq & \pi_1^{(p')} \left(\text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X_{\overline{K}}, x_\eta}^{sh} \right) - \bigcup_i (D_{i, \eta, \overline{K}}^{sh}) \right) \end{array}$$

où les flèches verticales correspondent à des foncteurs de restriction à un voisinage étale, et les flèches horizontales correspondent à des foncteurs d'extension des scalaires de \overline{K} à \mathbb{C} (ces flèches étant définies à automorphisme intérieur près).

Il reste à comparer les topologies étales et complexe. Or, suivant les notes de cours sur la cohomologie étale de Milne (p.6, disponible sur Internet) : pour toute variété algébrique complexe X , non singulière, et tout voisinage étale $(U, u) \rightarrow (X, x)$ d'un point x de X , il existe un voisinage complexe V de x , tel que l'inclusion $(V, x) \hookrightarrow (X, x)$ se factorise en

$$(V, x) \hookrightarrow (U, u) \hookrightarrow (X, x)$$

la première application étant analytique complexe, la seconde étant algébrique.

Ainsi, chaque voisinage étale est "encadré" par deux voisinages complexes, et un système cohérent de générateurs de l'inertie pour la topologie complexe induit un système cohérent de générateurs de l'inertie dans $\pi_1^{(p')} \left(\text{Spec} \left(\mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}, x, \eta, \mathbb{C}}}^{sh} \right) - \bigcup_i (D_{i, \eta, \mathbb{C}}^{sh}) \right)$. \square

1.3. Restriction d'un revêtement modéré à une section

Soit $f : Y \rightarrow S$ un revêtement modéré le long d'un système de diviseurs à croisements normaux $D = \sum_{i=1}^n D_i$.

Soit s un point de S , et t un point de Y au-dessus de s . Notons par I l'ensemble des entiers entre 1 et n tels que s appartienne au support de D_i . On suppose que cet ensemble est non vide, et on écrit pour simplifier $I := \{1, \dots, d\}$ pour un certain entier d entre 1 et n .

Nous définissons dans un premier temps la notion de *groupe d'inertie de D_i au voisinage de t* (qui provient du fait que f est localement, en s et t , un revêtement galoisien). Cette notion nous sera utile pour décrire ensuite l'inertie de la restriction de f à une section $\text{Spec}(R) \rightarrow S$, où R sera d'abord un anneau hensélien (cas local), puis un anneau de Dedekind (cas global).

On sait, d'après le théorème d'Abhyankar (cf. 1.2.2), que localement pour la topologie étale, le revêtement $f : Y \rightarrow S$ s'écrit au voisinage de s et t comme un revêtement kummérien généralisé f^1 , quotient du revêtement galoisien

$$f^0 : \text{Spec} \left(\mathcal{O}_S[(T_i)_{1 \leq i \leq d}] / ((T_i^{e_i} - a_i)_{1 \leq i \leq d}) \right) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_S)$$

de groupe $G \simeq \prod_{1 \leq i \leq d} (\mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z})$.

On pose dorénavant

$$A := \mathcal{O}_S[(T_i)_{1 \leq i \leq d}] / ((T_i^{e_i} - a_i)_{1 \leq i \leq d})$$

et t_i désignera l'image de T_i dans A .

Définition 1.3.1. — Le groupe d'inertie de D_i au voisinage de t dans le revêtement f est le groupe d'inertie de D_i dans le revêtement galoisien f^1 .

Ce groupe ne dépend pas (à isomorphisme près) du revêtement f^1 choisi pour décrire localement f comme un quotient d'un revêtement kummérien.

Les diviseurs D_i sont totalement ramifiés dans f^0 . Soit ζ une racine primitive $(e_1 \dots e_d)$ -ème de l'unité. On pose $\zeta_i := \zeta^{e_1 \dots \hat{e}_i \dots e_d}$, qui est une racine primitive e_i -ème de l'unité (sur \mathbb{C} , on peut choisir le système $\zeta_j := e^{\frac{2i\pi}{e_j}}$, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$). Le groupe d'inertie de D_i au voisinage de t dans le revêtement kummérien f^0 est un groupe cyclique d'ordre e_i , engendré par l'élément g_i défini par :

$$g_i : t_i \mapsto \zeta_i t_i$$

Ces générateurs de l'inertie forment un choix cohérent.

Intéressons-nous maintenant à la restriction de f le long d'une section

$$s : \text{Spec}(R^h) \rightarrow S$$

où R^h est un anneau local strictement hensélien, d'uniformisante π et de corps des fractions K^h . On suppose que le point générique n'appartient pas au support de D .

Soit $s_\eta : \text{Spec}(K^h) \rightarrow S$ le point générique de l'image de s et t_η un point de la fibre de s_η dans le revêtement f .

Définition 1.3.2. — Le morphisme s correspond à un morphisme $\tilde{s} : \mathcal{O}_S \rightarrow R^h$. On peut écrire $\tilde{s}(a_i) = u_i \pi^{m_i}$, où u_i est une unité de R^h . L'entier m_i est par définition l'ordre d'intersection du diviseur $D_i = (a_i)$ en s (on généralisera plus tard cette notion au cas où s est une section sur un anneau de Dedekind).

On considère le normalisé $s^*(f^0) : X \rightarrow \text{Spec}(R^h)$ du pullback $s^*(f^0)$ de f^0 par s (où X est le normalisé de $\text{Spec}(A) \times_S \text{Spec}(R^h)$); c'est un revêtement de degré $e_1 \dots e_d$, et on l'appelle la restriction du revêtement f^0 à s . Le théorème à venir donne plus de précisions sur ce revêtement. On introduit d'abord quelques notations.

Posons $\delta_i = (e_i, m_i)$, $e'_i = \frac{e_i}{\delta_i}$, $m'_i := \frac{m_i}{\delta_i}$, et, pour tout k entre 1 et d , $E_{1,\dots,k} := \text{ppcm}(e'_1, \dots, e'_k)$. On peut remarquer que :

$$\begin{aligned} & (e_1 \dots e_k, m_1 e_2 \dots e_k, \dots, e_1 \dots e_{k-1} m_k) \\ &= \delta_1 \dots \delta_k (e'_1 \dots e'_k, m'_1 e'_2 \dots e'_k, \dots, e'_1 \dots e'_{k-1} m'_k) = \frac{e_1 \dots e_k}{E_{1,\dots,k}} \end{aligned}$$

La dernière égalité provient par exemple de l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \min(\nu'_1 + \dots + \nu'_k, \mu'_1 + \nu'_2 + \dots + \nu'_k, \dots, \nu'_1 + \dots + \nu'_{k-1} + \mu'_k) \\ & \quad + \max(\nu'_1, \dots, \nu'_k) = \nu'_1 + \dots + \nu'_k \end{aligned}$$

pour tout $2k$ -uplet d'entiers ν'_i et μ'_i tels que $\mu'_i = 0$ si $\nu'_i \neq 0$.

Posons enfin $E := E_{1,\dots,d} = \text{ppcm}(e'_i)_{1 \leq i \leq d}$, et $r = e_1 \dots e_d / E$. Nous avons le théorème suivant (à comparer avec le théorème 1.2 de [Bec91]) :

Théorème 1.3.3. — $X = \coprod_{1 \leq j \leq r} X_j$, où chaque morphisme $X_j \rightarrow \text{Spec}(R^h)$ est isomorphe au morphisme

$$\text{Spec}\left(R^h[\pi^{\frac{1}{E}}]\right) \rightarrow \text{Spec}(R^h)$$

De plus, le groupe G agit naturellement sur X , et, pour chaque j ($1 \leq j \leq r$), le fixateur de X_j est isomorphe au groupe d'inertie de X_j sur $\text{Spec}(R^h)$.

Enfin, le groupe d'inertie de X_j au-dessus de $\text{Spec}(R^h)$ est engendré par $g_1^{m_1} \dots g_d^{m_d}$.

Le revêtement f^1 est un revêtement galoisien de groupe G' un quotient de G . On notera par g'_i l'image de g_i dans G' . Le théorème précédent donne immédiatement un résultat analogue pour un revêtement kummérien généralisé :

Théorème 1.3.4. — Le groupe d'inertie de chaque composante irréductible de la restriction de f^1 à s au-dessus de π dans le revêtement $s^*(f^1) : Y^1 \times_S \text{Spec}(R^h) \rightarrow \text{Spec}(R^h)$ est engendré par l'élément

$$(g'_1)^{m_1} \dots (g'_r)^{m_r}$$

Ce théorème permet de décrire l'inertie de chaque composante du revêtement f restreint à la section s , en tenant compte de l'isomorphisme local entre f et f^1 :

Théorème 1.3.5. — *Le groupe d'inertie au voisinage de tout point au-dessus de π dans le revêtement restreint $s^*(\tilde{f})$ est le sous-groupe de G' engendré par l'élément $(g'_1)^{m_1} \dots (g'_d)^{m_d}$.*

Démonstration. — On montre le théorème 1.3.3 (les autres en étant une conséquence immédiate). Le schéma X est isomorphe au normalisé de

$$\text{Spec} \left(R^h[t_1, \dots, t_d] / (t_i^{e_i} - u_i \pi^{m_i})_{1 \leq i \leq d} \right)$$

Quitte à effectuer le changement de variables $t'_i := t_i / u_i^{\frac{1}{e_i}}$, on peut supposer que $u_i = 1$.

Posons $P_i := t_i^{e_i} - \pi^{m_i}$, , pour tout $i \in \underline{d}$.

Pour tout $k \in \underline{d}$, on formule l'hypothèse de récurrence suivante :

(H_k) : L'anneau

$$K^h[t_1, \dots, t_k] / (P_i)_{1 \leq i \leq k}$$

est constitué de $e_1 \dots e_k / E_{1, \dots, k}$ composantes irréductibles. De plus, toute composante irréductible de cet anneau est isomorphe à $K^h[\pi^{\frac{1}{E_{1, \dots, k}}}]$.

Enfin, l'inertie de chacune de ces composantes est engendrée par l'élément $g_1^{m_1} \dots g_k^{m_k}$.

Preuve de (H_1)

Le polynôme P_1 peut s'écrire $P_1 = t_1^{e'_1 \delta_1} - \pi^{m'_1 \delta_1}$, et sa décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $K^h[t_1]$ est donc :

$$P_1 = \prod_{j=1}^{\delta_1} P_{1,j} = \prod_{j=1}^{\delta_1} \left(t_1^{e'_1} - \zeta_1^{j e'_1} \pi^{m'_1} \right)$$

(ces facteurs sont irréductibles car $(m'_1, e'_1) = 1$, et sont premiers entre eux deux à deux).

Le schéma $\text{Spec} (K^h[t_1] / (P_1))$ est donc constitué de $\delta_1 = \frac{e_1}{e'_1}$ composantes irréductibles, et comme e'_1 et m'_1 sont premiers entre eux, chacune de ces composantes est isomorphe à $K^h[\pi^{\frac{1}{e'_1}}]$.

On vérifie immédiatement que l'inertie de chaque composante irréductible de $K^h[t_1] / (P_1)$ est engendrée par $t_1 \mapsto \zeta_1^{\delta_1} \cdot t_1$, donc par $g_1^{\delta_1}$, qui engendre un groupe cyclique d'ordre e'_1 . Or m'_1 est premier à e'_1 , et $\zeta_1^{\delta_1 m'_1} = \zeta_1^{m_1}$: l'inertie est donc aussi engendrée par $t_1 \mapsto \zeta_1^{m_1} \cdot t_1$, donc par $g_1^{m_1}$.

Hérédité

On suppose (H_k) (avec $1 \leq k \leq d-1$), et on montre (H_{k+1}) .

Soit C une composante irréductible de $K^h[t_1, \dots, t_k]/(P_i)_{1 \leq i \leq k}$: elle est isomorphe à $K^h[\pi^{\frac{1}{E_{1, \dots, k}}}]$. On a l'égalité :

$$K^h[t_1, \dots, t_{k+1}]/(P_i)_{1 \leq i \leq k+1} = (K^h[t_1, \dots, t_k]/(P_i)_{1 \leq i \leq k})[t_{k+1}]/(P_{k+1})$$

On est donc ramené à trouver les composantes irréductibles de

$$\text{Spec} \left(K^h[\pi^{\frac{1}{E_{1, \dots, k}}}] [t_{k+1}] / (P_{k+1}) \right)$$

Le nombre total de composantes irréductibles sera égal au nombre de composantes irréductibles de ce dernier schéma, multiplié par le nombre $e_1 \dots e_k / E_{1, \dots, k}$.

Écrivons $P_{k+1} = t_{k+1}^{e_{k+1}} - \pi^{m_{k+1}} = t_{k+1}^{e_{k+1}} - \left(\pi^{\frac{1}{E_{1, \dots, k}}} \right)^{m_{k+1} E_{1, \dots, k}}$. En copiant ce qui a été fait au cours de la preuve de (H_1) , et en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} (e_{k+1}, m_{k+1} E_{1, \dots, k}) &= \delta_{k+1} (e'_{k+1}, m'_{k+1} E_{1, \dots, k}) = \delta_{k+1} (e'_{k+1}, E_{1, \dots, k}) \\ &= e_{k+1} \frac{E_{1, \dots, k}}{E_{1, \dots, k+1}} \end{aligned}$$

on obtient tout de suite que $K^h[\pi^{\frac{1}{E_{1, \dots, k}}}] [t_{k+1}] / (P_{k+1})$ est constitué de $e_{k+1} \frac{E_{1, \dots, k}}{E_{1, \dots, k+1}}$ composantes irréductibles, isomorphes à $K^h[\pi^{\frac{1}{E_{1, \dots, k+1}}}]$.

Il ne reste plus qu'à prouver l'assertion sur l'inertie pour prouver (H_{k+1}) .

Notons par \bar{t}_i l'image de t_i dans la composante C . Nous avons vu avant ce théorème que :

$$(e_1 \dots e_k, m_1 e_2 \dots e_k, \dots, e_1 \dots e_{k-1} m_k) = \frac{e_1 \dots e_k}{E_{1, \dots, k}}$$

Il existe donc des entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta$ tels que :

$$\frac{e_1 \dots e_k}{E_{1, \dots, k}} = \beta e_1 \dots e_k + \sum_{1 \leq i \leq k} \alpha_i (m_i e_1 \dots \hat{e}_i \dots e_k)$$

Cette égalité prouve que l'élément $\pi' := \pi^\beta \prod_{1 \leq i \leq k} t_i^{\alpha_i}$ vérifie

$$\pi'^{e_1 \dots e_k} = \left(\pi^\beta \prod_{1 \leq i \leq k} \bar{t}_i^{\alpha_i} \right)^{e_1 \dots e_k} = \pi^{\beta e_1 \dots e_k} \prod_{1 \leq i \leq k} \pi^{\alpha_i m_i e_1 \dots \hat{e}_i \dots e_k} = \pi^{\frac{e_1 \dots e_k}{E_{1, \dots, k}}}$$

Il existe donc un entier l entre 1 et $\frac{e_1 \dots e_k}{E_{1, \dots, k}}$ tel que $\pi'^{E_{1, \dots, k}} = \zeta^{l E_{1, \dots, k}} \pi$. On ne nuit pas à la généralité de la suite en supposant que $l = 0$.

La décomposition de P_{k+1} sur $K^h[\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k]$ est donc

$$P_{k+1} = \prod_{j=1}^{e_{k+1} \frac{E_{1, \dots, k}}{E_{1, \dots, k+1}}} \left(t_{k+1}^{\frac{E_{1, \dots, k+1}}{E_{1, \dots, k}}} - \zeta_{k+1}^{j \frac{E_{1, \dots, k+1}}{E_{1, \dots, k}}} \left(\pi^\beta \prod_{1 \leq i \leq k} t_i^{\alpha_i} \right)^{m'_{k+1} \frac{E_{1, \dots, k+1}}{e'_{k+1}}} \right)$$

Soit C' une composante de $K^h[t_1, \dots, t_{k+1}]/(P_i)_{1 \leq i \leq k+1}$. Un élément $(g_1^{m_1} \dots g_k^{m_k})^a g_{k+1}^b$ de G appartient au groupe d'inertie de C' si et seulement si :

$$\zeta_{k+1}^{be_{k+1} \frac{E_{1, \dots, k+1}}{E_{1, \dots, k}}} = (\zeta_1^{m_1 \alpha_1} \dots \zeta_k^{m_k \alpha_k})^{am'_{k+1} \frac{E_{1, \dots, k+1}}{e'_{k+1}}}$$

En effet, $t_{k+1}^{\frac{E_{1, \dots, k+1}}{E_{1, \dots, k}}}$ est multiplié par $\zeta_{k+1}^{be_{k+1} \frac{E_{1, \dots, k+1}}{E_{1, \dots, k}}}$ lorsque l'on applique $(g_1^{m_1} \dots g_k^{m_k})^a g_{k+1}^b$, et $t_i^{\alpha_i m'_{k+1} \frac{E_{1, \dots, k+1}}{e'_{k+1}}}$ est multiplié par $\zeta_i^{am_i \alpha_i m'_{k+1} \frac{E_{1, \dots, k+1}}{e'_{k+1}}}$.

Notons $\zeta_{1, \dots, k+1} := \zeta^{e_{k+2} \dots e_d}$.

L'équation précédente peut s'écrire, en utilisant la relation de Bezout :

$$\zeta_{1, \dots, k+1}^{be_{1 \dots e_{k+1}} \frac{E_{1, \dots, k+1}}{E_{1, \dots, k}}} = \zeta_{1, \dots, k+1}^{ae_{1 \dots e_k} m_{k+1} \frac{E_{1, \dots, k+1}}{E_{1, \dots, k}}}$$

Le choix $a = 1$ et $b = m_{k+1}$ donne donc un élément du groupe d'inertie de C' . Comme cet élément est d'ordre $E_{1, \dots, k+1}$, c'est un générateur de ce groupe.

Autrement dit, $g_1^{m_1} \dots g_d^{m_d}$ est un générateur du groupe d'inertie de C' . \square

On généralise ce résultat au cas global, *i.e.* lorsqu'on effectue la restriction de f à une section $\phi : \text{Spec}(R) \rightarrow S$, où R est un anneau de Dedekind. On suppose que $\text{Im}(\phi) \not\subseteq \cup_{i \in \{1, \dots, n\}} \text{Supp}(D_i)$. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de R , et s son image dans S par ϕ ; on note $R_{\mathfrak{p}}^h$ l'hensélisé strict du localisé en \mathfrak{p} de R , et π une uniformisante de cet anneau.

La section ϕ se relève en

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(R) & \xrightarrow{\phi} & S \\ \uparrow & \nearrow & \\ \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}}^h) & & \phi_{\mathfrak{p}}^h \end{array}$$

ce qui correspond à un morphisme

$$\tilde{\phi}_{\mathfrak{p}}^h : \mathcal{O}_S \rightarrow R_{\mathfrak{p}}^h$$

On peut écrire $\tilde{\phi}_{\mathfrak{p}}^h(a_i) = u_i \pi^{m_i}$, où u_i est une unité de $R_{\mathfrak{p}}^h$.

La définition suivante généralise la définition 1.3.2.

Définition 1.3.6. — l'entier m_i est l'ordre d'intersection du diviseur $D_i = (a_i)$ avec ϕ en s .

La section ϕ induit de plus le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \Phi & & \\ & & \downarrow & & \\ \phi^* f & \phi^* Y & \rightarrow & Y & \\ & \downarrow & \square & \downarrow & f \\ & \mathrm{Spec}(R) & \rightarrow & S & \\ & & \phi & & \end{array}$$

Notons par I le sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$ constitué des entiers i tels que s appartienne au support de D_i . Soit \mathfrak{q} un point de $\phi^* Y$ au-dessus de \mathfrak{p} , et $t = \Phi(\mathfrak{q})$ son image dans Y par Φ .

On définit la restriction $\tilde{\phi}^* f$ du revêtement f à la section ϕ comme le normalisé du pullback $\phi^* f$. On peut évaluer plus précisément la ramification de \mathfrak{q} au-dessus de \mathfrak{p} dans $\tilde{\phi}^* f$, en utilisant le théorème 1.3.3 :

Théorème 1.3.7. — Pour tout choix cohérent g_1, \dots, g_d de générateurs de l'inertie de D_i au voisinage de s , le groupe d'inertie de \mathfrak{q} au-dessus de \mathfrak{p} dans le revêtement restreint $\tilde{\phi}^* f$ est engendré par l'élément $g_1^{m_1} \dots g_d^{m_d}$

Ce théorème admet pour conséquence immédiate le résultat suivant :

Corollaire 1.3.8. — Soit e_i l'indice de ramification de la composante au-dessus de D_i contenant t , et soit m_i l'ordre d'intersection du diviseur D_i avec ϕ en s .

Alors l'indice de ramification de \mathfrak{q} au-dessus de \mathfrak{p} est un diviseur de E , où E est le plus petit entier tel que

$$e_i | m_i E$$

pour tout i appartenant à I .

Si $|I| = 1$, l'indice de ramification est égal à E .

Ce corollaire entraîne une condition suffisante très simple pour que \mathfrak{p} ne se ramifie pas :

Corollaire 1.3.9. — *Si, pour tout i appartenant à I , l'indice de ramification e_i divise l'ordre d'intersection m_i de D_i avec ϕ en s , alors \mathfrak{p} n'est pas ramifiée.*

On pourra se reporter au paragraphe 4.1 pour une application de ces résultats au calcul de la ramification dans le corps des modules en une mauvaise place ne divisant pas l'ordre du groupe de monodromie. Pour appliquer le théorème 1.3.7, il faut trouver un choix cohérent de générateurs de l'inertie, ce qui fait l'objet de la fin du troisième chapitre.

CHAPITRE 2

ESPACES DE HURWITZ SUR UN ANNEAU

Ce chapitre passe en revue les notions et résultats fondamentaux de la théorie des espaces de Hurwitz. Les espaces de Hurwitz sont des espaces des modules grossiers pour des catégories de (G-)revêtements de \mathbb{P}^1 . On rappelle dans le premier paragraphe de ce chapitre les notions fondamentales sur les (G-)revêtements de la droite projective. Le deuxième paragraphe consiste en une courte introduction à la notion de corps des modules. On trouve dans le troisième et dernier paragraphe de ce chapitre les définitions d'espace des modules fin et grossier, ainsi que le théorème de S. Wewers de construction des espaces de Hurwitz, qui autorise des considérations arithmétiques sur ces espaces. Ce paragraphe s'achève par le lien simple mais essentiel entre espace de Hurwitz et corps des modules, et par la description de l'extension du revêtement $\pi : H' \rightarrow U^r$ en un revêtement modérément ramifié le long de diviseurs à croisements normaux.

2.1. Préliminaires sur les revêtements de \mathbb{P}^1

2.1.1. Revêtements et G-revêtements. — Dans la suite, K est un corps et K^s désigne une clôture séparable fixée.

Définition 2.1.1. — Un *revêtement de la droite projective sur K* est un morphisme fini, plat, et génériquement étale $f : X \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ sur K , X étant une courbe projective lisse et géométriquement irréductible sur K .

Un *morphisme entre deux revêtements* $f_1 : X \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ et $f_2 : X' \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ est un morphisme $\phi : X \rightarrow X'$ tel que $f_2 \circ \phi = f_1$ (autrement dit, c'est un \mathbb{P}_K^1 -morphisme de X vers X').

On sait qu'à un revêtement $f : X \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ est associée une extension finie régulière $K(X)/K(t)$ (où $K(t)$ est le corps des fractions rationnelles sur K). Cette correspondance fournit en fait une équivalence (contravariante) de catégories entre la catégorie des revêtements de \mathbb{P}_K^1 et celle des extensions finies régulières séparables de $K(t)$.

Si L est un corps contenant K , et $f : X \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ un revêtement sur K , on obtient un revêtement $f \times_K L$ sur L par extension des scalaires (de K à L).

Définition 2.1.2. — Soit t_0 un point géométrique de \mathbb{P}^1 ; par *fibre géométrique du revêtement f* on entend l'ensemble $(f \times_K K^s)^{-1}(t_0)$, et on le note $f^{-1}(t_0)$.

Tout automorphisme de f agit sur une telle fibre.

Définition 2.1.3. — Un revêtement $f : X \rightarrow \mathbb{P}_K^1$, est dit *galoisien* si le groupe $\text{Aut}(X/\mathbb{P}_K^1)$ des automorphismes de f agit simplement transitivement sur toute fibre géométrique du revêtement. De façon équivalente, f est galoisien si et seulement si l'extension séparable $K(X)/K(t)$ est galoisienne.

Définition 2.1.4. — Un G -revêtement de groupe G sur K est la donnée conjointe d'un revêtement galoisien $f : X \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ sur K , et d'un isomorphisme $h : G \rightarrow \text{Aut}(X/\mathbb{P}_K^1)$ de G sur le groupe des automorphismes du revêtement.

Un *morphisme entre deux G -revêtements de groupe G*

$$(f_1 : X \rightarrow \mathbb{P}^1, h_1 : G \rightarrow \text{Aut}(X/\mathbb{P}^1))$$

$$(f_2 : X' \rightarrow \mathbb{P}^1, h_2 : G \rightarrow \text{Aut}(X'/\mathbb{P}^1))$$

est un isomorphisme $\phi : X \rightarrow X'$ de revêtements induisant un isomorphisme

$$\tilde{\phi} : \text{Aut}(X/\mathbb{P}^1) \rightarrow \text{Aut}(X'/\mathbb{P}^1)$$

tel que $\tilde{\phi} \circ h_1 = h_2$.

Définition 2.1.5. — On se donne un revêtement connexe $f : X \rightarrow \mathbb{P}_K^1$. On définit la *clôture galoisienne* $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ de f comme le revêtement correspondant à la clôture galoisienne de $K(X)/K(t)$ par l'équivalence précédemment citée.

Notation. — On écrit (G-)revêtement pour désigner indifféremment un revêtement ou un G-revêtement.

2.1.2. Invariants élémentaires d'un (G-)revêtement. — À un (G-)revêtement de \mathbb{P}_K^1 sont associés quatre invariants élémentaires (qui ne dépendent donc que de la classe d'isomorphisme du revêtement) :

Le degré du (G-)revêtement, qui est le degré de $K(X)/K(t)$.

Le groupe de monodromie géométrique du (G-)revêtement, qui est le groupe des automorphismes de la clôture galoisienne $\widehat{f}_{K^s} : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{P}_{K^s}^1$ de f_{K^s} , groupe opposé à $\text{Gal} \left(K^s(\widehat{X}_{K^s})/K^s(t) \right)$.

L'ensemble des points de branchement du (G-)revêtement, t_1, \dots, t_r , qui sont les points de la droite projective où la fibre géométrique possède moins de points que le degré du revêtement. On appelle le diviseur $(t_1) + \dots + (t_r)$ le *diviseur de branchement du (G-)revêtement*.

Si x est un point de la fibre au-dessus d'un point de branchement t , les complétés des anneaux locaux de X en x et de \mathbb{P}^1 en t donnent une extension d'anneaux de valuation discrète. L'*indice de ramification* e_x de x est l'indice de ramification de cette extension. Le point x est appelé un *point de ramification* si $e_x > 1$ (bien sûr, il existe toujours au moins un point de ramification au-dessus d'un point de branchement). Si cette extension est séparable et que la caractéristique du corps résiduel ne divise pas l'ordre du groupe de monodromie, on dit que la ramification est *modérée* en x . Sinon, on dit que la ramification est *sauvage*. Si le revêtement f n'a pas de point de ramification, on dit qu'il est *non ramifié*. Un revêtement non ramifié est étale (un revêtement est plat par définition).

L'invariant canonique d'inertie du revêtement : on fixe une clôture séparable K^s de K , et un système cohérent de racines de l'unité dans K^s , $(\zeta_e)_{(e,p)=1}$, où ζ_e est une racine primitive e -ème de l'unité (p étant la caractéristique de K). Pour tout e premier à p , l'ensemble des racines e -èmes de l'unité (dans K^s) sera noté Ω_e .

Notons par $\{t_1, \dots, t_r\}$ l'ensemble des points de ramification de f . On suppose que f est modérément ramifié en un certain point x_i au-dessus de t_i , l'indice de ramification étant noté e_{x_i} .

Le groupe d'inertie G_0 de l'extension correspondante est un groupe cyclique d'ordre e_{x_i} , car la ramification est modérée (cf. [Ser62]). On note

π une uniformisante locale de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}$. L'application $G_0 \rightarrow \Omega_{e_{x_i}}$, qui à un élément s de G_0 associe l'élément $s(\pi)/\pi \bmod \pi$ est en fait un isomorphisme de groupes, indépendant du choix de π (*loc. cit.*). L'antécédent de $\zeta_{e_{x_i}}$ par cet isomorphisme est le *générateur distingué de l'inertie en t_i* (qui dépend du système cohérent $(\zeta_e)_{(e,p)=1}$ choisi).

On définit alors C_i comme la classe de conjugaison des générateurs d'inertie distingués au-dessus de t_i .

L'invariant canonique d'inertie du revêtement est le r -uplet (ordonné ou non selon que les points de ramification le sont ou pas)

$$\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$$

2.1.3. L'action de Galois sur les (G-)revêtements. — On considère une extension galoisienne L/K . Le groupe $\text{Gal}(L/K)$ agit de façon naturelle sur les (G-)revêtements sur L . En effet, donnons-nous un (G-)revêtement $f : X \rightarrow \mathbb{P}_L^1$, et σ un élément du groupe de Galois de L sur K . Le revêtement f^σ résultant de l'action de σ sur f est défini par le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} X^\sigma & \longrightarrow & X \\ f^\sigma \downarrow & \square & \downarrow f \\ \mathbb{P}_K^1 \times_K L & \xrightarrow{\quad id_{\mathbb{P}_K^1} \times \sigma \quad} & \mathbb{P}_K^1 \times_K L \end{array}$$

On note G_K le groupe de Galois absolu $\text{Gal}(K^s/K)$. Un élément σ de G_K agit sur tout (G-)revêtement f défini sur K^s . Les invariants de f^σ se déduisent de ceux de f : le groupe de monodromie de f^σ est le même que celui de f ; le diviseur de branchement de f est inchangé par l'action de σ dans le cas où il est défini sur K . Dans ce dernier cas, l'invariant canonique de l'inertie de f^σ se déduit de celui de f par action du caractère cyclotomique.

2.2. Corps des modules, corps de définition

Dans cette section, on introduit les notions de corps de définition et de corps des modules. On décrit sommairement l'obstruction à ce que le corps des modules soit un corps de définition.

Donnons-nous un (G-)revêtement $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{K^s}^1$ défini sur K^s , de groupe de monodromie G , et de diviseur de branchement défini sur K .

Définition 2.2.1. — Un sous-corps k de K^s est un *corps de définition* du revêtement (resp. du G-revêtement) f s'il existe un revêtement (resp. un G-revêtement) $f' : X' \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ tel que f et $f' \times_k K^s$ soient deux revêtements (resp. G-revêtements) isomorphes; un tel (G-)revêtement sera appelé un *modèle de f sur k* .

On considère une extension galoisienne L/K , ainsi qu'un (G-)revêtement $f : X \rightarrow \mathbb{P}_L^1$, de lieu de branchement défini sur K . On a vu qu'un élément σ de $\text{Gal}(L/K)$ induit un (G-)revêtement $f^\sigma : X^\sigma \rightarrow \mathbb{P}_L^1$.

Soit $G(f) := \{\sigma \in \text{Gal}(L/K), \text{ tel que } f^\sigma \simeq f\}$ où $f^\sigma \simeq f$ signifie que f^σ et f sont isomorphes *sur L* en tant que revêtements (resp. G-revêtements).

Définition 2.2.2. — Le *corps des modules du revêtement (resp. du G-revêtement) f relativement à l'extension L/K* est le corps $L^{G(f)}$; on le notera M (resp. M_G). On appellera *corps des modules d'un (G-)revêtement f relativement à K* le corps des modules relativement à K^s/K .

Le corps des modules de f relativement à K est une extension finie de K contenue dans chaque corps de définition de f contenant K . Le corps des modules d'un revêtement est donc d'une certaine façon le plus petit corps de définition possible pour le revêtement considéré. Ce n'est cependant pas toujours un corps de définition. On peut se référer à ce sujet aux articles [CH85], [Cou94], [CG95], qui présentent des exemples de (G-)revêtements de corps des modules \mathbb{Q} , ne pouvant se définir sur \mathbb{R} , car ne possédant pas de données de descente de \mathbb{C} à \mathbb{R} .

L'obstruction à ce que le corps des modules soit un corps de définition est assez bien connue; dans le cas des G-revêtements, elle peut s'exprimer en termes de cohomologie abélienne (dans un H^2). On pourra consulter [Dèb90] et [Dèb95] sur le sujet. P. Dèbes et J-C. Douai ont décrit dans [DD97] l'obstruction dans le cas des revêtements, qui se traduit cette

fois en termes de cohomologie non abélienne, et fait intervenir toute une famille d'éléments d'un H^2 non abélien.

Ces résultats prouvent entre autres que l'obstruction est levée (*i.e.* le (G-)revêtement admet un modèle sur son corps des modules) dans le cas où G_K est un groupe projectif profini. Il en sera en particulier ainsi si K est de dimension cohomologique ≤ 1 (par exemple lorsque K est fini).

2.3. Espace de Hurwitz sur un anneau et corps des modules

2.3.1. Espaces des modules fins, espaces des modules grossiers. — On note $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles.

Définition 2.3.1. — Pour tout objet X d'une catégorie \mathcal{C} , on note $\widehat{X} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns$ le foncteur contravariant qui à un objet Y de \mathcal{C} associe l'ensemble $\text{Hom}(Y, X)$.

Définition 2.3.2. — Soit F un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns$. On dit que F est *représentable* s'il existe un objet X de \mathcal{C} tel que F et \widehat{X} soient isomorphes. On dit alors que F est *représenté* par X .

Tout morphisme $\beta : X \rightarrow X'$ induit un morphisme $\widehat{X} \rightarrow \widehat{X}'$, que l'on note β_* .

Le foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{E}ns)$, qui à un objet X de \mathcal{C} associe \widehat{X} est pleinement fidèle, et par conséquent, si $\omega : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}'$ est un isomorphisme, il existe un unique isomorphisme $\beta : X \rightarrow X'$ tel que $\beta_* = \omega$. De plus, ce foncteur fournit une équivalence de catégories entre \mathcal{C} et la sous-catégorie de $\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{E}ns)$ constituée des foncteurs représentables.

Si \mathcal{C} est une catégorie *fibrée* au-dessus de la catégorie $\mathcal{S}ch$ des schémas, on obtient un foncteur $\phi_{\mathcal{C}} : \mathcal{S}ch \rightarrow \mathcal{E}ns$ en associant à un objet S de $\mathcal{S}ch$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de \mathcal{C} au-dessus de S .

Définition 2.3.3. — Tout schéma représentant le foncteur $\phi_{\mathcal{C}}$ est appelé un *espace des modules fin pour la catégorie \mathcal{C}* .

Remarque 2.3.4. — Un tel schéma est unique, à isomorphisme unique près.

Définition 2.3.5. — $\phi_{\mathcal{C}}$ est dit *faiblement représentable* s'il existe un schéma H et un morphisme de foncteurs $\alpha : \phi_{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{H}$ tels que :

- Pour tout objet H' de \mathcal{C} muni d'un morphisme $\alpha' : \phi_{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{H'}$, il existe un unique morphisme $\theta : H \rightarrow H'$ tel que $\alpha' = \theta_* \circ \alpha$,
- Si k est algébriquement clos, $S = \text{Spec}(k)$, alors α_S est une bijection (entre $\phi_{\mathcal{C}}(S)$ et $\text{Hom}(S, H)$)

La deuxième condition peut se formuler ainsi : il y a bijection entre les classes d'isomorphisme d'objets de \mathcal{C} définis sur k et les points k -rationnels de H .

Définition 2.3.6. — On dit que H est un *espace des modules grossier* pour la catégorie fibrée \mathcal{C} .

2.3.2. Espaces de Hurwitz. — Les espaces de Hurwitz sont des espaces de modules grossiers pour les revêtements de \mathbb{P}^1 : ainsi les points géométriques d'un espace de Hurwitz sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de revêtements de \mathbb{P}^1 de la catégorie considérée définis sur un corps algébriquement clos.

Historiquement, l'article fondateur de cette théorie est [Hur91]. Dans cet article, Hurwitz construit une variété complexe dont chaque point représente un revêtement *simple* de degré d (i.e. chaque fibre possède au moins $d - 1$ éléments).

Fulton, afin de montrer l'irréductibilité des espaces de modules de courbes de genre g , a montré dans [Ful69] qu'il existe un espace paramétrant les revêtements simples sur \mathbb{Z} .

Fried a généralisé la notion (dans [Fri77]) sur un corps de caractéristique nulle afin de traiter le problème de Galois inverse, problème qui consiste à réaliser tout groupe fini comme groupe de Galois sur un corps donné.

S. Wewers a généralisé la construction de Fulton pour prouver que les espaces de M. Fried peuvent se définir sur \mathbb{Z} (il construit dans [Wew98a] des schémas lisses sur \mathbb{Z} dont la fibre générique sur \mathbb{Q} donne les espaces construits par Fried).

Si on fixe le nombre de points de branchement r , la catégorie des droites projectives \mathbb{P}_S^1 r pointées (resp. r -marquées) admet un espace des modules fin (resp. grossier), *l'espace de configuration de r points ordonnés (resp. non ordonnés)* U^r (resp. U_r) :

Définition 2.3.7. — *L'espace de configuration de r points ordonnés* est le schéma $U^r := (\mathbb{P}^1)^r - \Delta_r$, où Δ_r est la diagonale grasse (on rappelle que la diagonale grasse Δ_r est l'ensemble des r -uplets de \mathbb{P}^1 où deux coordonnées au moins coïncident).

L'espace de configuration de r points non ordonnés est le schéma quotient $U_r := U^r/S_r$.

Considérons la catégorie $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}$ (resp. $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}^G$) des revêtements (resp. G -revêtements) de \mathbb{P}^1 de degré d , modérément ramifiés le long d'un diviseur de Cartier relatif lisse de degré r , de monodromie $G \rightarrow S_d$ et d'inertie \mathbf{C} .

Il existe un plus petit corps de nombres L pour lequel \mathbf{C} est invariant (à l'ordre des classes de conjugaison près dans le cas non ordonné) par l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L)$. C'est une extension cyclotomique de \mathbb{Q} . On dit que \mathbf{C} est *rationnelle* sur L . Ainsi, dans le cas des points de branchement ordonnés, \mathbf{C} est rationnelle sur \mathbb{Q} si et seulement si, pour tout entier m premier à l'ordre de G , et tout i , on a $C_i^m = C_i$.

Soit \mathcal{O}_L l'anneau des entiers de L .

S. Wewers a prouvé dans [Wew98a] le résultat suivant :

Théorème (Wewers). — *Il existe un espace des modules grossier, noté $H_G^{ab}(\mathbf{C})$ (resp. $H_G^{in}(\mathbf{C})$), pour la catégorie $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}$ (resp. $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}^G$); cet espace est défini sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_L)$.*

De plus, on a un revêtement fini étale naturel $\pi : H'^{ab} \rightarrow U^r$ (resp. $\pi : H'^{in} \rightarrow U^r$) sur $\text{Spec}\left(\mathcal{O}_L\left[\frac{1}{|G|}\right]\right)$, qui à une classe d'équivalence de revêtements associe leur ensemble ordonné de points de branchements.

Quand il n'y a pas de risque de confusion, on note H'^{ab} pour $H_G^{ab}(\mathbf{C})$, et H'^{in} pour $H_G^{in}(\mathbf{C})$. On notera aussi \mathcal{H}' pour désigner $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}$ ou $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}^G$.

Définition 2.3.8. — H'^{ab} (resp. H'^{in}) est appelé *espace de Hurwitz pour les revêtements (resp. G -revêtements) de \mathbb{P}^1 de degré d , à r de points de branchement ordonnés, de monodromie $G \hookrightarrow S_d$ et d'inertie \mathbf{C} .*

On dispose de résultats analogues dans le cas où l'on n'ordonne pas les points de branchement des (G -)revêtements (les espaces de Hurwitz étant alors notés $H_G^{ab}(\mathbf{C})$ et $H_G^{in}(\mathbf{C})$).

2.3.3. Corps des modules et espaces de Hurwitz. — On suppose que le revêtement $H^{ab} \rightarrow U^r$ est défini sur un corps K ; le groupe de Galois absolu G_K agit alors sur toute fibre géométrique au-dessus d'un point de $U^r(K)$. Comme un point de l'espace de Hurwitz est une classe d'isomorphisme de (G-)revêtements, et que l'on connaît l'action de G_K sur ces derniers, il est naturel de chercher un lien entre les deux actions.

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ un revêtement sur \overline{K} . Soit $\sigma \in G_K$ un élément du groupe de Galois absolu. L'automorphisme σ agit sur f , pour donner un revêtement f^σ . Par ailleurs, σ agit sur la fibre du revêtement $H^{ab} \rightarrow U_r$ contenant $[f]$; on note $[f]^\sigma$ le point $\sigma.[f]$ de la fibre.

Proposition 2.3.9. — $[f]^\sigma = [f^\sigma]$.

Démonstration. — C'est une conséquence de la définition d'un espace des modules grossier. L'élément σ de $\text{Gal}(L/K)$ induit un automorphisme de $\text{Spec}(L)$ au-dessus de $\text{Spec}(K)$, noté σ^* .

Au revêtement f est associé un élément de l'ensemble $\phi_{\mathcal{H}}(\text{Spec}(L))$, à savoir la classe d'isomorphisme de f au-dessus de $\text{Spec}(L)$, que l'on note $(C \rightarrow \text{Spec}(L))$. L'automorphisme σ^* induit par le foncteur $\phi_{\mathcal{H}}$ une application $\phi_{\mathcal{H}}(\sigma^*)$ de l'ensemble $\phi_{\mathcal{H}}(\text{Spec}(L))$ dans lui-même; en particulier, $\phi_{\mathcal{H}}(\sigma^*)$ envoie l'objet $(C \rightarrow \text{Spec}(L))$ sur une nouvelle classe d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{H}_{d,r,G,C}$ au-dessus de $\text{Spec}(L)$, que l'on note $(\sigma C \rightarrow \text{Spec}(L))$. Par définition de f^σ , la classe de f^σ est l'objet $(\sigma C \rightarrow \text{Spec}(L))$, et, par conséquent, le point correspondant dans l'espace de Hurwitz (par l'application $\alpha_{\text{Spec}(L)}$) est $[f^\sigma]$.

Par ailleurs, l'application $\alpha_{\text{Spec}(L)}$ envoie l'objet $(C \rightarrow \text{Spec}(L))$ sur un point $h : \text{Spec}(L) \rightarrow H$ de l'espace de Hurwitz. L'automorphisme σ^* donne, avec le foncteur \widehat{H} , une application $\widehat{H}(\sigma^*)$ de l'ensemble des points L -rationnels de H (i.e. $\widehat{H}(\text{Spec}(L))$) dans lui-même. L'image de h par cette application est un point $h^\sigma : \text{Spec}(L) \rightarrow H$, qui est en fait $[f]^\sigma$.

Par définition d'un espace des modules grossier, α est un morphisme de foncteurs ; le diagramme suivant est donc commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \phi_{\mathcal{H}}(\mathrm{Spec}(L)) & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{H}}(\sigma^*)} & \phi_{\mathcal{H}}(\mathrm{Spec}(L)) \\
 \downarrow \alpha_{\mathrm{Spec}(L)} & & \downarrow \alpha_{\mathrm{Spec}(L)} \\
 \widehat{H}(\mathrm{Spec}(L)) & \xrightarrow{\widehat{H}(\sigma^*)} & \widehat{H}(\mathrm{Spec}(L))
 \end{array}$$

Il s'ensuit que $[f]^\sigma = [f^\sigma]$. □

De cette proposition découle le lien entre espace de Hurwitz et corps des modules (que l'on énonce dans le cas des revêtements à lieu de branchement ordonné, mais qui reste valable dans les autres cas).

En effet, soit $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ un revêtement de degré d , avec r points de branchement, de monodromie $G \rightarrow S_d$, et d'inertie \mathbf{C} . Il lui est associé un point h dans l'espace de Hurwitz pour la catégorie $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}$.

Corollaire 2.3.10. — *Le corps des modules de f est le corps de rationalité de h dans H'^{ab} .*

2.3.4. Complétion du revêtement π . — On introduit dans ce paragraphe les compactifications des espaces de Hurwitz et des espaces de configuration de points que S. Wewers a proposées dans [Wew98a].

Soit \mathcal{H}' une catégorie de (G-)revêtements de \mathbb{P}^1 à points de branchement ordonnés. Il existe des champs $\overline{\mathcal{H}}'$ et $\overline{\mathcal{U}}'$, admettant des espaces des modules grossiers \overline{H}' et \overline{U}' , propres sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L[1/|G|])$ et $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ respectivement, et des immersions ouvertes $\mathcal{H}' \subset \overline{\mathcal{H}}'$ et $\mathcal{U}' \subset \overline{\mathcal{U}}'$. Le champ $\overline{\mathcal{U}}'$ admet même en fait un espace des modules *fin* \overline{U}' , qui est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, dont nous donnerons une description plus complète au paragraphe 3.1. Cet espace et ce champ sont construits pour refléter la coalescence des points de branchement. Le champ \mathcal{H} est construit de manière à respecter cette façon de représenter la coalescence des points de branchement. La catégorie utilisée est celle des revêtements *admissibles*. On renvoie au texte [Wew98b] pour une définition précise de ces derniers revêtements. Le résultat suivant (cf. [Wew98a]) est fondamental pour la suite :

Théorème 2.3.11. — *Le revêtement étale π se prolonge de façon naturelle en un revêtement modérément ramifié le long de diviseurs à croisements normaux $\bar{\pi} : \bar{H}' \rightarrow \bar{U}'$ au-dessus de $\text{Spec}(\mathcal{O}_L[1/|G|])$.*

Remarque 2.3.12. — Ce théorème admet un analogue pour le cas des (G-)revêtements à points de branchement non ordonnés. La différence principale réside dans le fait que le champ $\bar{\mathcal{U}}_r$ n'admet pas d'espace des modules fins (ce qui est déjà le cas du champ \mathcal{U}_r , car ses objets possèdent des automorphismes non triviaux).

Par ailleurs, les seuls nombres premiers divisant l'ordre du groupe de monodromie géométrique du revêtement $\bar{\pi}$ sont ceux qui divisent l'ordre de G (comme le montre la formule 3.3.3 par exemple)

Ce théorème, et plus particulièrement la description de $\bar{\pi}$ ouvre la perspective d'appliquer les résultats du premier chapitre, et en premier lieu le théorème 1.3.7, ce qui permettra d'évaluer la ramification dans les différents corps des modules de revêtements possédant les mêmes invariants (y compris les points de branchement), au cours du quatrième chapitre.

CHAPITRE 3

ÉTUDE AU BORD DU REVÊTEMENT

$$\bar{\pi} : \bar{H}' \rightarrow \bar{U}^r$$

Ce chapitre consiste en une étude du revêtement π , et de son complété $\bar{\pi}$, en s'appuyant sur le lien entre le *groupe des tresses pures de Hurwitz* à r brins (qui est le groupe fondamental de U^r), et le *mapping class group pur* de la sphère r -pointée (voir le paragraphe 3.2) : le sous-paragraphe 3.3.2 décrit la monodromie du revêtement π_η induit sur les fibres génériques géométriques, et les propositions 3.4.6 et 3.4.7 donnent la ramification dans $\bar{\pi}$ au-dessus de toute composante irréductible du bord de \bar{U}^r .

Ce chapitre s'inscrit avant tout dans la perspective d'appliquer le résultat de restriction d'un revêtement modérément ramifié du premier chapitre au revêtement $\bar{\pi}$ (ce que nous ferons au chapitre suivant). L'application du théorème 1.3.7 nécessite en effet un travail préalable, en deux étapes : déterminer les ordres d'intersection d'une section avec les différents diviseurs qu'elle croise en un point, et définir un choix *cohérent* de générateurs de l'inertie au voisinage de ce point.

On effectue la première étape au cours du paragraphe 3.1, après avoir rappelé la compactification de U^r proposée par S. Wewers.

Pour la seconde étape, on déplace le problème du groupe des tresses au mapping class group $\Gamma_{0,r}$. On s'intéresse plus particulièrement à une certaine classe de twists de Dehn, les *twists sarments* (définition 3.3.2). Ces twists, dont on calcule l'action sur le groupe fondamental de la sphère r -pointée en 3.3.3, sont des générateurs de l'inertie des composantes irréductibles de \bar{U}^r (proposition 3.4.5). On montre au cours du paragraphe 3.4.3 que ces twists permettent, pour tout point du bord de \bar{U}^r , un choix cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage de ce point. Étant donné un tel choix, les formules de la proposition 3.4.12 donnent l'action de tout

mot en ces twists : l'application du théorème de restriction 1.3.7 au revêtement $\bar{\pi}$ est donc effective.

3.1. Compactification de l'espace de configuration de points

On suit dans ce paragraphe la construction d'une compactification de l'espace de configuration de points effectuée dans [GHvdP88] et [Wew98a].

Pour décrire cette complétion \bar{U}' , on introduit les notions d'*arbre de droites projectives* (resp. d'*arbres-graphes*) stables à r points marqués et à racine distinguée.

Les points géométriques de cet espace seront des arbres stables de droites projectives à racine distinguée. On donnera de plus la paramétrisation de [GHvdP88] de cet espace par les birapports. Si on dispose d'une section $\text{Spec}(K) \rightarrow U'$, où K est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète R d'uniformisante π , dont les coordonnées coalescent modulo π , alors la fibre spéciale de $\text{Spec}(R) \rightarrow \bar{U}'$ induit un point du bord de \bar{U}' , dont nous allons décrire les épaisseurs des singularités, en fonction des ordres de coalescence des coordonnées de la section.

Cette complétion sera construite comme un espace des modules fins pour un certain champ, dont les points géométriques seront ces arbres stables de droites projectives. En particulier, le groupe des automorphismes d'un tel arbre sera trivial.

Dans la suite de ce chapitre, r est un entier ≥ 2 , et $\underline{r} := \{1, \dots, r\}$

3.1.1. Préliminaires sur les arbres stables de droites projectives.

3.1.1.1. Arbres de droites projectives et arbres-graphes. — Ce chapitre reprend les définitions d'arbres de droites projectives de [GHvdP88] et d'arbre combinatoire r -pointé à racine distinguée, nécessaires à la construction d'une complétion de l'espace de configuration de points.

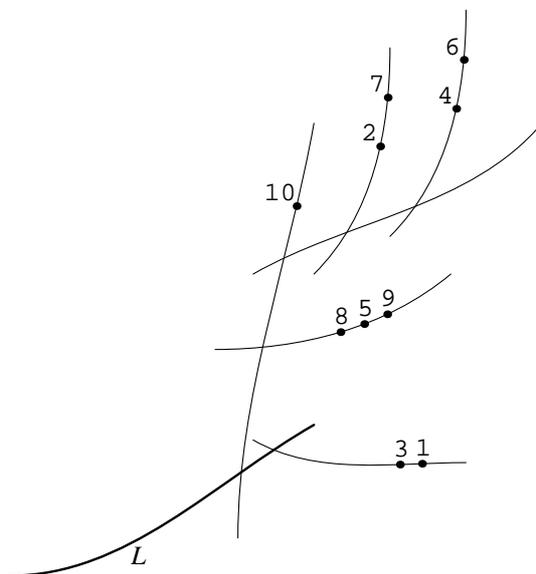
Soit C un schéma projectif connexe sur un corps algébriquement clos k et $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)$ un r -uplet de points k -rationnels distincts de C . Soit L une composante de C et λ un morphisme de C dans \mathbb{P}_k^1 .

Définition 3.1.1. — On dit que (C, ϕ, L, λ) (ou même (C, ϕ)) est un *arbre stable de droites projectives à r points marqués et à racine distinguée* si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. toute composante de C est isomorphe à \mathbb{P}_k^1
2. tout point singulier de C est k -rationnel et est un point double ordinaire
3. le graphe d'intersection des différentes composantes de C est un arbre
4. Le morphisme $\lambda : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un isomorphisme sur L et est constant sur les autres composantes de C
5. ϕ ne comprend que des points réguliers
6. chaque composante de C autre que L contient au moins trois points parmi les points doubles et les points ϕ_1, \dots, ϕ_r

On appelle ϕ la *marque* de (C, ϕ, L, λ) , et L la *racine* de C .

Exemple. — Voici un exemple d'arbre de droites projectives à 10 points marqués :



Remarque 3.1.2. — La racine est donc la seule composante à ne pas vérifier obligatoirement la condition 6, dite de stabilité ; cependant, l'isomorphisme λ fait que l'on peut considérer cette composante comme marquée par $0, 1, \infty$ par exemple, afin qu'elle vérifie la condition de stabilité.

Le graphe d'intersection des différentes composantes de C est un arbre, que l'on nomme T . On appelle T_0 l'ensemble de ses sommets (qui correspondent aux différentes composantes, isomorphes à \mathbb{P}_k^1 , de C), T_1 l'ensemble de ses arêtes (qui correspondent aux points doubles de C).

La marque ϕ induit une application $\psi : \underline{r} \rightarrow T_0$, en associant à $i \in \underline{r}$ la composante à laquelle ϕ_i appartient, puis le sommet correspondant.

À la racine de C correspond un sommet de T , aussi appelé *racine*.

Définition 3.1.3. — On appelle le couple (T, ψ) le *type combinatoire* de (C, ϕ) .

Un tel arbre vérifie des conditions analogues à celles définissant un arbre stable de droites projectives et à racine distinguée, ce qui conduit à la notion d'arbre (graphe) stable à r points marqués à racine distinguée :

Définition 3.1.4. — Soit T un arbre fini (au sens de la théorie des graphes), T_0 l'ensemble de ses sommets, T_1 l'ensemble de ses arêtes, et $\psi : \underline{r} \rightarrow T_0$ une application. Le triplet (T, ψ, σ_0) (ou plus simplement le couple (T, ψ)) est appelé *arbre stable à n points marqués à racine distinguée* si, pour tout sommet σ autre que la *racine* σ_0 , le nombre

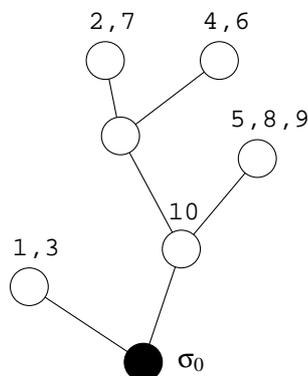
$$\text{val}(t) := \#\psi^{-1}(t) + \#\{\text{arêtes dont un bout est } t\}$$

est supérieur ou égal à 3.

Exemple. — Voici l'arbre stable à 10 points marqués associé à l'exemple 3.1.1.1 :

Remarque 3.1.5. — On peut rajouter comme dans le cas des arbres de droites projectives deux marques à la racine pour s'assurer de sa stabilité.

Définition 3.1.6. — On peut associer un ordre (partiel) des sommets à un tel arbre : pour tout sommet, l'ensemble des sommets qui lui sont inférieurs sont ceux qui se situent sur le chemin de ce sommet à la racine (la racine est ainsi le plus petit sommet) ; nous le noterons \geq . Le sommet *père* d'un sommet σ différent de la racine est le plus grand sommet qui lui soit inférieur (ou encore le premier sommet différent de σ par lequel



passé le chemin de σ à la racine). Un sommet *fil*s de σ est un sommet dont σ est père.

On définit les notions correspondantes de composantes mère et fille d'un arbre stable r -pointé de droites projectives.

Notation. — Le sommet $\psi(i)$ sera noté σ_i (il se peut donc que $\sigma_i = \sigma_j$ avec $i \neq j$). Soit σ un sommet de T ; soit $I(\sigma)$ l'ensemble des indices i de \underline{r} tels que $\sigma_i \geq \sigma$. Si σ et σ' sont deux sommets différents de la racine, alors $I(\sigma) \neq I(\sigma')$ par stabilité de l'arbre. Si $I = I(\sigma)$, la notation σ_I désignera le sommet σ . Dans le seul cas ambigu où il existe un sommet $\sigma \neq \sigma_0$ tel que $I(\sigma_0) = I(\sigma) = \underline{r}$, la notation $\sigma_{\underline{r}}$ désignera le sommet σ (et pas la racine).

Enfin, pour tout sommet $\sigma = \sigma_{I(\sigma)}$ différent de la racine, l'arête $t_{I(\sigma)}$ de T est l'unique arête dont le sommet terminal est σ .

Soit σ un sommet de T . On définit une relation d'équivalence \sim_σ sur \underline{r} par :

$i \sim_\sigma j$ si et seulement si $\sigma_i = \sigma_j$ ou σ_i peut être relié à σ_j par un chemin dans T ne passant pas par σ .

3.1.1.2. Paramétrisation locale. — Ici, (C, ϕ) est un arbre stable de droites projectives à r points marqués, et (T, ψ) est son type combinatoire.

Si L est une composante de C , il existe une unique projection $\pi_L : C \rightarrow L$ qui envoie les autres composantes de C sur des points k -rationnels de L .

Définition 3.1.7. — Soit $d = (d_1, d_2, d_3)$ un triplet d'éléments distincts de \underline{r} . Il existe une unique composante L_d de C telle que les projections $\pi_L(d_1), \pi_L(d_2), \pi_L(d_3)$ soient distincts. On l'appelle la *composante médiane* de d .

On obtient ainsi un unique morphisme

$$\lambda_d : C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$$

vérifiant $\lambda_d(\phi_{d_1}) = 0, \lambda_d(\phi_{d_2}) = \infty, \lambda_d(\phi_{d_3}) = 1$. Ce morphisme se restreint en un isomorphisme sur L_d , et en une application constante sur les autres composantes de C .

Définition 3.1.8. — On définit V_r comme l'ensemble des quadruplets d'indices distincts de \underline{r} . Pour tout $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in V_r$, on définit le *birapport*

$$\lambda_w := \lambda_{(w_1, w_2, w_3)}(\phi_{w_4})$$

Notons par b_{w_i} (pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$), la projection de ϕ_{w_i} sur la composante médiane $L_{(w_1, w_2, w_3)}$, $1 \leq i \leq 4$. Alors

$$\lambda_w = [b_{w_1}, b_{w_2}, b_{w_3}, b_{w_4}]$$

Si l'on se donne une paramétrisation μ de la composante $L_{(w_1, w_2, w_3)}$, telle que $\mu(b_{w_i}) \neq \infty$, alors on a l'égalité suivante :

$$\lambda_w = \frac{\mu(b_{w_4}) - \mu(b_{w_1})}{\mu(b_{w_4}) - \mu(b_{w_2})} \frac{\mu(b_{w_3}) - \mu(b_{w_2})}{\mu(b_{w_3}) - \mu(b_{w_1})}$$

Ceci justifie le terme de "birapport".

Posons

$$V_T := \left\{ w = (w_i)_{i \in \underline{4}} \in V_r : \exists \sigma \in T_0, w_1 \sim_\sigma w_4, \text{ et } w_2 \approx_\sigma w_1, w_3 \approx_\sigma w_1 \right\}$$

Proposition 3.1.9. — L'ensemble des éléments w de V_r pour lesquels $\lambda_w = 0$ est l'ensemble V_T .

Démonstration. — Par définition, $\lambda_w = \lambda_{(w_1, w_2, w_3)}(\phi_{w_4})$. Supposons donc que w appartienne à V_T ; si $w_2 \approx_\sigma w_3$, σ est la composante médiane de w_1, w_2, w_3 , et $\lambda_w = 0$. Si $w_2 \sim_\sigma w_3$, et si d est la médiane de w_1, w_2, w_3 , on va prouver que $w_1 \sim_d w_4$, et que ni w_2 ni w_3 ne sont d -équivalents à w_1 . Cela provient du fait que le chemin de $\psi(w_1)$ à d passe par σ (sinon,

il y aurait deux chemins allant de $\psi(w_1)$ à $\psi(w_2)$ ou de $\psi(w_1)$ à $\psi(w_3)$). Le second point résulte de la définition de la médiane.

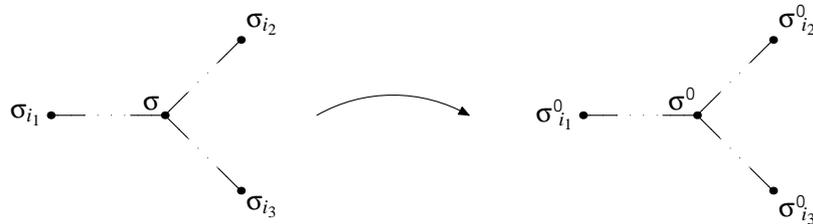
Réciproquement, si $\lambda_w = 0$, et si l'on note par d la composante médiane de w_1, w_2, w_3 , alors $w_1 \sim_d w_4$ puisque $\pi_{L_d}(\phi_{w_4}) = 0$. \square

3.1.1.3. Contractions et embranchements. — Ce chapitre ne fait qu'introduire des notions utiles liées à la théorie des graphes, qui permettront au cours des paragraphes suivants de décrire le bord du complété de l'espace de configuration de points.

Définition 3.1.10. — Soient $(T, \psi, \sigma_0), (T', \psi', \sigma'_0)$ deux arbres stables à r points marqués à racine distinguée, $\epsilon : T \rightarrow T'$ une application. On dit que ϵ est une *contraction* - et que T' est un *contracté* de T - si

1. $\epsilon(T_0) = T'_0, \epsilon(\sigma_0) = \sigma'_0$, et $\epsilon \circ \psi = \psi'$;
2. Pour tout sommet σ' de T' , $\epsilon^{-1}(\sigma')$ est un sous-arbre de T ;
3. Pour tout couple (σ, t) , où σ est un *bout* de l'arête t (*i.e.* un des deux sommets définissant t), on a l'alternative suivante : $\epsilon(\sigma) = \epsilon(t)$ (si $\epsilon(t)$ est un sommet), ou $\epsilon(\sigma)$ est un bout de $\epsilon(t)$ (si $\epsilon(t)$ est une arête).

Remarque 3.1.11. — Si ϵ est une telle contraction, elle est déterminée de façon unique par les deux arbres marqués (T, ψ, σ_0) et (T', ψ', σ'_0) . En effet, il nous suffit par la troisième condition de déterminer les images des sommets. On connaît l'image de tout sommet marqué et de la racine (par la première condition). Tout autre sommet σ est bout d'au moins trois arêtes distinctes ; il peut donc se décrire comme intersection de trois chemins dans T dont les extrémités sont des sommets marqués (ou la racine), mettons $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}$ et σ_{i_3} . L'image de σ est donc l'unique sommet à l'intersection des images des trois chemins $\sigma'_{i_1} - \dots \rightarrow \sigma'_{i_2}, \sigma'_{i_2} - \dots \rightarrow \sigma'_{i_3}$, et $\sigma'_{i_3} - \dots \rightarrow \sigma'_{i_1}$ (on utilise les conditions 2 et 3, qui entraînent que l'image d'un chemin par une contraction est un chemin).



Définition 3.1.12. — On appelle *contraction forte* toute contraction dont le contracté n'est constitué que de deux sommets.

Soit $I \subset \underline{r}$, où $|I| \geq 2$. On définit l'arbre T_I comme l'arbre constitué de deux sommets, la racine étant marquée par $\underline{r} - I$, l'autre sommet par I .

Pour tout arbre graphe stable r -marqué, l'ensemble des contractions fortes de T est en bijection avec ses arêtes : si t_I est une arête de T , la contraction forte qui lui est associée est la contraction de T sur T_I .

Le lemme de théorie des graphes suivant sera utile pour décrire le bord de \bar{U}' (proposition 3.1.17)

Lemme 3.1.13. — Soient T et T' deux arbres combinatoires stables. T se contracte en T' si et seulement si T se contracte en toutes les contractions fortes de T' .

Définition 3.1.14. — Soit T un arbre combinatoire, et σ et σ' deux sommets de T . On appelle *embranchement de σ et σ'* et on note $(\sigma \vee \sigma')$ le plus petit sommet (c'est à dire le plus proche de la racine) du chemin reliant σ à σ' (il est aisé de vérifier qu'un tel sommet existe et est unique). Si $\sigma = \psi(i)(= \sigma_i)$ et $\sigma' = \psi(j)(= \sigma_j)$, on note leur embranchement $\sigma_{i,j}$.

Propriétés. — Si σ , σ' et σ'' sont trois sommets tels que $\sigma' \geq \sigma'' \geq (\sigma \vee \sigma')$, alors $(\sigma \vee \sigma') = (\sigma \vee \sigma'')$. De plus, tout sommet est un embranchement.

Définition 3.1.15. — Soit t une arête de T , et w un quadruplet d'indices distincts dans \underline{r} . On dit que

- t sépare w si $\{\psi(w_1), \psi(w_4)\}$ et $\{\psi(w_2), \psi(w_3)\}$ sont de part et d'autre de t
- w distingue t si t est la seule arête de T séparant w

Propriété. — Pour tout arbre combinatoire stable, toute arête est distinguée par au moins un quadruplet d'indices.

Démonstration. — Soit donc $t = \sigma^0 \rightarrow \sigma^1$ une arête de T . On prend pour w_2 et w_3 deux indices tels que $\sigma_{w_2 w_3} = \sigma^1$. Si σ^0 est marqué par deux indices, on les choisit pour w_1 et w_4 . Si σ^0 n'est marqué que par un seul indice, on le choisit pour w_1 et on prend pour w_4 tout indice marquant n'importe quel sommet différent de σ^0 et non supérieur à σ^1 (il en existe clairement). Si σ^0 n'est marqué par aucun indice, on choisit

pour w_1 un indice quelconque de n'importe quel sommet supérieur à σ^0 mais non comparable à σ^1 (il en existe par stabilité en σ^0), et pour w_4 tout indice de tout sommet non supérieur à σ^0 . \square

Remarquons de plus que, si w distingue t , on a obligatoirement $\sigma_{w_2w_3} = \sigma^1$ ou $\sigma_{w_1w_4} = \sigma^1$ (sinon, t ne sépare pas w).

3.1.2. Description globale de l'espace de configuration de points et de son complété. — On rappelle que l'espace de configuration de points est le schéma $U^r := (\mathbb{P}^1)^r \setminus \Delta_r$, où Δ_r désigne la diagonale grasse (constituée des r -uplets où deux coordonnées au moins sont égales).

On peut voir un point géométrique de U^r comme un arbre stable particulier de droites projectives r marqué et à racine distinguée, ne comportant qu'une seule composante, la racine. L'adjonction des arbres stables de droites projectives r marqués et à racine distinguée permet une compactification de U^r . Cette complétion reflète bien s'il y a lieu la façon dont les points de branchement coalescent.

Proposition 3.1.16. — *Il existe un schéma projectif \overline{U}^r lisse sur \mathbb{Z} , tel que : pour tout corps algébriquement clos k , les points k -rationnels de \overline{U}^r sont les arbres stables de droites projectives à r points marqués et à racine distinguée. Le schéma U^r s'injecte naturellement dans \overline{U}^r .*

Ce schéma est construit comme espace des modules fins pour un certain champ (cf. [Wew98a]). La situation des points non ordonnés est moins simple, car le champ intervenant alors n'est pas représentable et n'admet donc pas d'espace des modules fins.

Nous allons maintenant décrire le bord $S^r := \overline{U}^r \setminus U^r$ de \overline{U}^r .

On peut trouver la proposition suivante dans [Wew98a], dont la deuxième partie est une conséquence du lemme 3.1.13 :

Proposition 3.1.17. — *Le bord S^r de \overline{U}^r est constitué de diviseurs à croisements normaux, dont les composantes irréductibles sont les S^I , où $I \subseteq \underline{r}$ et $|I| \geq 2$.*

De plus, si X est un point de S^r d'arbre combinatoire correspondant T , alors X appartient à tous les S^I pour lesquels T_I est un contracté de T , et à ceux-ci seulement.

Définition 3.1.18. — Soit T un arbre combinatoire stable r marqué à racine distinguée. Les points géométriques du schéma S^T correspondent aux points de \bar{U}^r (qui sont des arbres de droites projectives) dont l'arbre combinatoire correspondant se contracte en T .

Soit $I \subseteq \underline{r}$, où $|I| \geq 2$. Le schéma S^{T_I} coïncide avec S^I (on rappelle que T_I est l'arbre constitué de deux sommets, la racine étant marquée par $\underline{r} \setminus I$, l'autre sommet par I).

En suivant [GHvdP88], nous savons que les birapports forment un système régulier de paramètres au voisinage de tout point de \bar{U}^r . Soit X un point du bord de \bar{U}^r , de type combinatoire T . Soit t_I une arête de T . La proposition 3.1.9 indique que, pour toute composante du bord S^I , on peut choisir pour paramètre le birapport λ_w , où w distingue l'arête t_I de T .

3.1.3. Coalescence de points de ramification en une place ; ordre d'intersection d'une section avec un diviseur. — Soit R un anneau de valuation discrète complet, de valuation v , d'uniformisante π . On note par K (resp. k_v) le corps des fractions (resp. le corps résiduel) de R . On suppose que k_v est algébriquement clos.

On considère r points distincts de \mathbb{P}^1 définis sur $K : a_1, \dots, a_r$. Ces points a_1, \dots, a_r définissent des sections $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r$ de \mathbb{P}_R^1 , qui peuvent se rencontrer sur la fibre spéciale. On se place dans cette situation.

Le point $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_r)$ de U^r est défini sur K . Le schéma \bar{U}^r étant projectif sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, le point \mathbf{a} s'étend de manière unique en une section

$$\tilde{\mathbf{a}} : \text{Spec}(R) \rightarrow \bar{U}^r$$

La restriction de cette section à la fibre spéciale induit un point $\bar{\mathbf{a}}$ du bord de \bar{U}^r , à l'intersection de certains diviseurs à croisements normaux S^I .

Le but de ce paragraphe est de décrire la section $\tilde{\mathbf{a}}$, notamment son ordre d'intersection avec tout diviseur S^I qu'elle rencontre en $\bar{\mathbf{a}}$. Cette section se construit en effectuant des éclatements successifs en tout point de la fibre spéciale où deux sections \tilde{a}_i et \tilde{a}_j se rencontrent, jusqu'à obtenir un modèle *stable*.

Définition 3.1.19. — Un modèle sur R de \mathbb{P}_K^1 marqué par a_1, \dots, a_r est dit *stable* si :

- les sections \tilde{a}_i ne se rencontrent pas sur la fibre spéciale ;
- la fibre spéciale, pointée par les intersections des sections \tilde{a}_i , est un arbre stable de droites projectives r -pointé.

On donne dès maintenant un résumé des résultats obtenus au cours de ce paragraphe, après ces quelques définitions :

Définition 3.1.20. — Soit $A \subseteq \{a_1, \dots, a_r\}$, comportant au moins deux éléments. On appelle *ordre de congruence* de A le nombre

$$v(A) := \inf\{\text{ord}(a, a') ; a, a' \in A, a \neq a'\}$$

où

- $\text{ord}(a, a') = v(a - a')$ si $v(a) \geq 0$ et $v(a') \geq 0$;
- $\text{ord}(a, a') = v(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'})$ si $v(a) \leq 0$ et $v(a') \leq 0$;
- $\text{ord}(a, a') = 0$ sinon.

Définition 3.1.21. — Soit X un modèle sur R de \mathbb{P}_K^1 marqué par a_1, \dots, a_r . On dit que X est un modèle *stabilisable* si la fibre spéciale X_v est un arbre stable de droites projectives pointé par r' points (avec $r' \leq r$) à racine distinguée (l'arbre étant marqué par son intersection avec les différentes sections \tilde{a}_i).

Un modèle stable est donc un modèle stabilisable où les sections \tilde{a}_i ne se rencontrent pas.

Définition 3.1.22. — Soit X un modèle stabilisable, et T l'arbre-graphe correspondant.

On value chaque sommet σ_I par $\theta(\sigma_I) := v(\{a_i\}_{i \in I})$. La valuation θ des sommets induit une valuation des arêtes, en posant $\theta(t) := \theta(\sigma^1) - \theta(\sigma^0)$, pour toute arête $t : \sigma^0 \rightarrow \sigma^1$.

Si t est une arête de T , on note $e(t)$ l'épaisseur de la singularité x correspondant à t (i.e. $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \simeq R[[t_1, t_2]] / (t_1 t_2 - \pi^{e(t)})$).

Proposition 3.1.23. — Il existe un unique modèle stable X sur R de \mathbb{P}_K^1 marqué par a_1, \dots, a_r (à isomorphisme unique près).

La fibre spéciale X_v est un arbre stable de droites projectives r -pointé et à racine distinguée. L'ensemble des sommets de l'arbre T correspondant à X_v est l'ensemble σ_I , où I parcourt l'ensemble des paquets de coalescence des points a_1, \dots, a_r selon les puissances de π .

Pour tout point double x_I de X_v , d'arête correspondante t_I , l'épaisseur $e(x_I)$ de la singularité en x_I est égale à l'ordre d'intersection de $\tilde{\mathbf{a}}$ avec le diviseur S^I . De plus, si T est valué par θ (cf. la définition 3.1.22 ci-dessous), on a :

$$e(x_I) = \theta(t_I)$$

Définition 3.1.24. — Soit X un modèle stabilisable. On suppose que deux sections \tilde{a}_i et \tilde{a}_j se rencontrent sur la fibre spéciale en un point x . Le point x étant régulier, $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} = (R[[t]])$. Les sections \tilde{a}_i et \tilde{a}_j sont définies respectivement par $t = \alpha_i$ et $t = \alpha_j$. On définit l'ordre de contact de \tilde{a}_i et \tilde{a}_j pour le modèle X par

$$c_X(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) := \text{ord}(\alpha_i, \alpha_j)$$

où

- $\text{ord}(\alpha_i, \alpha_j) = v(\alpha_i - \alpha_j)$ si $v(\alpha_i) \geq 0$ et $v(\alpha_j) \geq 0$;
- $\text{ord}(\alpha_i, \alpha_j) = v(\alpha_i^{-1} - \alpha_j^{-1})$ si $v(\alpha_i) \leq 0$ et $v(\alpha_j) \leq 0$;
- $\text{ord}(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ sinon.

On généralise cette notion au cas de deux sections ne se rencontrant pas, en posant l'ordre de contact de ces sections comme étant nul.

On appelle *ordre de contact en un point de la fibre spéciale* le plus petit ordre de contact entre deux sections passant par ce point.

On appelle *nombre de contacts en un point de la fibre spéciale* le nombre de sections passant par ce point.

Remarque 3.1.25. — Dans le cas de \mathbb{P}_R^1 , l'ordre de contact de \tilde{a}_i avec \tilde{a}_j est simplement le nombre $\text{ord}(a_i - a_j)$.

Lemme 3.1.26 (lemme d'éclatement). — Si l'on éclate un modèle stabilisable X en un point x de la fibre spéciale où deux sections \tilde{a}_i et \tilde{a}_j se rencontrent, pour obtenir un modèle stabilisable X' , alors les épaisseurs des singularités provenant de celles de X sont inchangées, et, si e est l'épaisseur du nouveau point double, on a :

$$c_{X'}(\tilde{a}'_i, \tilde{a}'_j) = c_X(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) - e$$

En particulier, l'épaisseur e est égale à l'ordre de contact en x .

Démonstration. — Localement au voisinage du point spécial où l'on éclate, on change l'anneau $R[[t]]$ en l'anneau $R[[t]][u_1, u_2]^{\text{proj}} / (\pi^e u_2 - t u_1)$. La fibre exceptionnelle est donnée par $t = 0$. Si \tilde{a}_i admet l'équation suivante $t - \pi^{\alpha_i} \gamma_i$, où γ_i est inversible, alors \tilde{a}'_i admet l'équation $u_2 - \pi^{\alpha_i - e} \gamma_i u_1$, et on a donc bien la formule annoncée.

Soit m l'ordre de contact en x pour le modèle X , et x_0 le point double de X' associé au point x de X . Comme X' est stabilisable, deux sections \tilde{a}'_{i_1} et \tilde{a}'_{i_2} au moins ne se rencontrent pas sur la fibre exceptionnelle. On a donc $e = c_X(\tilde{a}_{i_1}, \tilde{a}_{i_2}) \geq m$. Si $e > m$, alors une section au moins sur X' rencontre la fibre spéciale en le point double x_0 , ce qui est impossible. \square

On a réciproquement le lemme suivant :

Lemme 3.1.27 (lemme d'élagage). — *Soit X un modèle stabilisable. On obtient encore un modèle stabilisable X' en écrasant une composante bout L sur sa composante mère. Les épaisseurs des singularités restantes sont égales aux épaisseurs correspondantes sur X , et si \tilde{a}_i et \tilde{a}_j sont deux sections rencontrant la composante L dans le modèle X , on a*

$$c_{X'}(\tilde{a}'_i, \tilde{a}'_j) = c_X(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) + e$$

Définition 3.1.28. — *Soit X un modèle stabilisable. Soit L une composante de X . On appelle *élagage de X en L* l'arbre obtenu en écrasant toutes les composantes filles de L comme dans le lemme d'élagage.*

Le lemme précédent assure que si X est un modèle stabilisable, tous ses élagués sont des modèles stabilisables.

Proposition 3.1.29. — *Il existe un modèle stable sur R de \mathbb{P}_K^1 marqué par a_1, \dots, a_r .*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le nombre maximal de contacts.

H_j : il existe un modèle stabilisable tel que le nombre de contacts maximal soit $\leq j$ ($1 \leq j \leq r$).

H_r est trivialement vérifiée (le modèle évident \mathbb{P}_R^1 convient).

$H_{j+1} \rightarrow H_j$ ($1 \leq j \leq r-1$). En chaque point de la fibre spéciale où il y a $(j+1)$ contacts, on effectue un éclatement de cette composante comme dans le lemme d'éclatement. Le modèle ainsi construit a donc un nombre maximal de contacts au plus j .

Bien sûr, l'hypothèse H_0 signifie qu'il existe un modèle stable sur R de \mathbb{P}_K^1 marqué par a_1, \dots, a_r . \square

Lemme 3.1.30. — *Soit X un modèle stabilisable, et T l'arbre-graphe correspondant.*

Soit σ un sommet de T , marqué par i et j . Alors

$$v(a_i - a_j) = \sum e(t) + c_X(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)$$

où t décrit les arêtes du chemin de σ_0 à σ .

Démonstration. — On le prouve par récurrence sur la longueur du chemin de σ_0 à σ . Soit σ' le sommet père de σ , et t l'arête $\sigma' \rightarrow \sigma$. On élague en σ' ; notons par X' le modèle stabilisable obtenu. Par le lemme d'élagage

$$c_{X'}(\tilde{a}'_i, \tilde{a}'_j) = e(t) + c_X(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)$$

et par hypothèse de récurrence on a le résultat. \square

On déduit de ce lemme le lien entre les épaisseurs des singularités et la valuation θ (cf. la définition 3.1.22).

Lemme 3.1.31. — *Étant donné un modèle stable, on a*

$$\theta(\sigma_I) = \sum e(t),$$

où t parcourt les arêtes du chemin de σ_0 à σ_I .

Pour chaque arête t de T , de point double correspondant x ,

$$\theta(t) = e(x)$$

Démonstration. — On peut écrire le sommet σ_I comme un embranchement de deux sommets σ_i et σ_j . Les points ϕ_i et ϕ_j se projettent en deux points distincts de la composante associée à σ_I

Pour le modèle X' obtenu par élagage de X en σ_I , on a $v(a_i - a_j) = \sum e(t)$ d'après le lemme précédent. Le résultat se déduit alors du fait que $\theta(\sigma_I) = v(a_i - a_j)$.

Soit $k \notin I$, et $i \in I$. Alors $(\sigma_k \vee \sigma_i) < \sigma_I$, et donc $v(a_i - a_j) = \theta((\sigma_k \vee \sigma_i)) = \sum_{\sigma_0 \rightarrow \alpha(\sigma_k, \sigma_i)} e(t) < \sum_{\sigma_0 \rightarrow \sigma_I} e(t) = \theta(\sigma_I)$. \square

Pour achever la preuve de la proposition 3.1.23, il reste à calculer les ordres d'intersection de la section $\tilde{\mathbf{a}}$ avec les diviseurs S^I en $\bar{\mathbf{a}}$:

Proposition 3.1.32. — *L'ordre d'intersection de la section $\tilde{\mathbf{a}}$ avec S^I est égal à $e(x_I)$, où x_I est le point nodal de $\bar{\mathbf{a}}$ correspondant à l'arête t_I .*

Démonstration. — Nous savons que les birapports constituent un système régulier de paramètres au voisinage de $\bar{\mathbf{a}}$. Soit x_I un point double de $\bar{\mathbf{a}}$, d'arête correspondante t_I . Nous allons montrer que pour tout quadruplet $w \subseteq \underline{r}$ distinguant t_I , alors $v(\lambda_w) = e(\sigma_I)$, ce qui nous donnera l'ordre d'intersection de la section $\tilde{\mathbf{a}}$ avec S^I . Rappelons que si l'on note b_{w_i} la projection de a_{w_i} sur la composante médiane $L_{(w_1, w_2, w_3)}$ ($1 \leq i \leq 4$), on a

$$\lambda_w = [b_{w_1}, b_{w_2}, b_{w_3}, b_{w_4}]$$

On a donc $v(\lambda_w) = v(b_{w_4} - b_{w_1}) - v(b_{w_4} - b_{w_2}) + v(b_{w_3} - b_{w_2}) - v(b_{w_3} - b_{w_1})$.

On écrit $\sigma_{t_I}^0 \rightarrow \sigma_{t_I}^1$ l'arête t_I en extension : il est clair que l'on peut supposer -quitte à échanger $\{w_2, w_3\}$ et $\{w_1, w_4\}$ - que $\sigma_{w_1 w_4} = \sigma_{t_I}^1$. La composante médiane $L_{(w_1, w_2, w_3)}$ correspond alors au sommet $\sigma_{t_I}^0$. Les points b_{w_1} , b_{w_2} et b_{w_3} ne sont donc pas congrus modulo π . En revanche, b_{w_4} et b_{w_1} sont congrus modulo π et $v(b_{w_4} - b_{w_1}) = e(t_I)$ d'après le lemme d'élagage. Enfin, b_{w_4} n'est pas congru à b_{w_2} modulo π .

On a donc la formule attendue : $v(\lambda_w) = e(t_I)$. \square

3.2. Le groupe des tresses pures de Hurwitz

La deuxième partie de ce chapitre introduit les groupe des tresses pures de Hurwitz à r brins, et le mapping class group pur $\Gamma_{0,r}$ de la sphère r -pointée. Il décrit le lien entre ces deux groupes, et en particulier la façon dont les relations de la présentation du mapping class group pur par les *twists de Dehn* se relèvent dans le groupe des tresses pures (proposition 3.2.8). Ceci permettra d'effectuer des calculs dans $\Gamma_{0,r}$ plutôt que dans le groupe des tresses pures.

Le livre de référence sur le sujet est [Bir74]; la présentation par les twists de Dehn se trouve dans les articles [Ger96] et [Luo97].

3.2.1. Mapping class group pur de la sphère r -pointée. — On fixe un entier naturel r supérieur ou égal à 3, et r points a_1, \dots, a_r de la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 . On note $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_r)$ et $A := \{a_1, \dots, a_r\}$.

Le terme de *\mathbf{a} -homéomorphisme* (resp. de *\mathbf{a} -isotopie*) désignera un homéomorphisme (resp. une isotopie) laissant chaque point de A fixe.

Définition 3.2.1. — Le *mapping class group (pur)* de la sphère r -pointée est le groupe $\Gamma_{0,r}$ des classes d' \mathbf{a} -isotopie des \mathbf{a} -homéomorphismes de \mathbb{S}^2 .

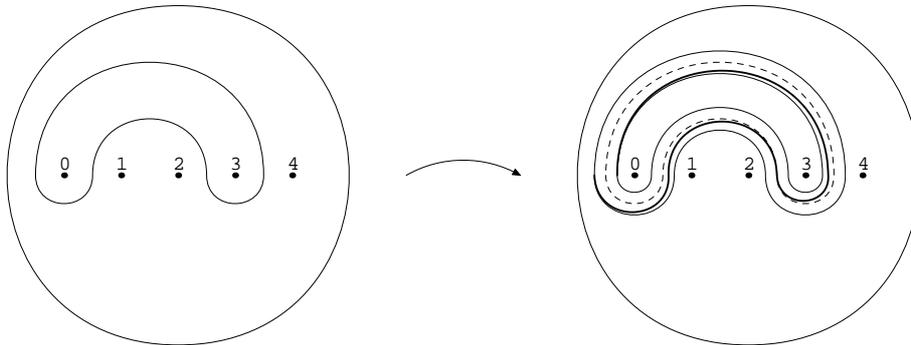
Remarque 3.2.2. — On obtient le mapping class group non pur en demandant seulement aux homéomorphismes de laisser A globalement invariant.

Ce groupe ne dépend -à isomorphisme près- que du cardinal de A (ici r), ce qui justifie la notation de ce groupe. On suppose dans la suite que $a_i = i$, pour tout $i \in \underline{r}$.

On peut bien sûr définir le mapping class group $\Gamma_{g,r}^m$ d'une surface $\Sigma_{g,r}^m$ compacte orientable de genre g , à m bords et r -pointée, pour tous g, m, r . On connaît une présentation du mapping class group de ces surfaces, par utilisation des *twists de Dehn*.

Construction des twists de Dehn : si $\alpha = [a]$ est une classe d' \mathbf{a} -isotopie de chemin fermé simple de $\Sigma_{g,r}^m$ évitant les r points de A , on lui associe un twist de Dehn D_α comme suit : la surface étant orientable, il existe un voisinage cylindrique V_a de a évitant A . L'homéomorphisme $(z, \theta) \mapsto (z, \theta + (z+1)\pi)$ du cylindre $[-1; 1] \times \mathbb{S}^1$ -qui consiste à tordre progressivement d'un tour le cylindre- induit un homéomorphisme de V_a , dont l'extension à $\Sigma_{g,r}^m$ par l'identité est un \mathbf{a} -homéomorphisme. Sa classe d' \mathbf{a} -isotopie est D_α .

Exemple. — Voici un exemple de construction d'un twist de Dehn : on épaissit le lacet pour obtenir un ruban, que l'on tord uniformément.



Soit α et β deux classes d'**a**-isotopie de chemins fermés simples de $\Sigma_{g,r}^m$ évitant A . On appelle *nombre d'intersections* de α et β le nombre minimal d'intersections entre deux représentants de α et β ; on note ce nombre par $|\alpha \cap \beta|$.

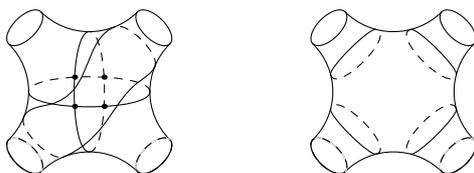
Lorsque $|\alpha \cap \beta| = 2$, on peut choisir des voisinages cylindriques de α et β sur $\mathbb{S}^2 - A$ suffisamment fins pour que l'union V de ces deux voisinages soit homéomorphe à $\Sigma_{0,0}^4$. On note par $D_{\partial(\alpha,\beta)}$ le produit des twists de Dehn associés aux quatre chemins fermés simples du bord de V . De même, on peut aussi définir le composé $\alpha\beta$: écrivons $\alpha = [c_\alpha]$ et $\beta = [c_\beta]$, où c_α et c_β se croisent en deux points, et fixons une orientation de la sphère. On définit le chemin c' , obtenu en partant d'un point de c_α , en bifurquant sur c_β lorsque l'on croise ce chemin (en respectant l'orientation), et en réitérant l'opération à chaque croisement. On pose alors $\alpha\beta = [c']$. On vérifie que cette construction ne dépend pas des chemins choisis, ni de l'orientation choisie.

L'intérêt principal des twists de Dehn est la présentation du mapping class group qu'ils fournissent :

Théorème 3.2.3. — *On obtient une présentation de $\Gamma_{0,r}$ en prenant les twists de Dehn comme générateurs, et les relations suivantes :*

- $D_\alpha = 1$ si α est d'homotopie triviale ;
- $D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha$ si $|\alpha \cap \beta| = 0$;
- $D_\alpha D_\beta D_{\alpha\beta} = D_{\partial(\alpha,\beta)}$ si $|\alpha \cap \beta| = 2$ (relation de la lanterne).

La figure 3.2.1 explicite les différents chemins intervenant dans la relation de la lanterne, et rend plus claire la dénomination "lanterne".



Remarque 3.2.4. — - Cette présentation n'est qu'un cas particulier des résultats de S. Gervais (affinés par F. Luo). En effet, ils prouvent dans les articles [Ger96] et [Luo97] que le mapping class group général $\Gamma_{g,r}^m$ admet aussi une présentation par les twists de Dehn, similaire à celle de $\Gamma_{0,r}$, où l'on doit cependant ajouter deux types de

relations lorsque deux classes de chemins sont d'intersection simple (cas qui ne se produit pas sur la sphère), et changer l'hypothèse $|\alpha \cap \beta| = 2$ en $|\alpha \cap \beta| = 2_0$ (intersection algébrique nulle) dans la relation de la lanterne (ces deux hypothèses étant équivalentes sur la sphère).

- Les deux dernières formules de la présentation entraînent la formule bien connue

$$D_{D_\alpha(\beta)} = D_\alpha D_\beta D_\alpha^{-1}$$

pour toute donnée de deux classes d'**a**-isotopie α et β de chemins fermés simples sur $\Sigma_{g,r}^m$. Remarquons que cette formule se généralise en

$$D_{\lambda(\beta)} = \lambda D_\beta \lambda^{-1}$$

pour tout élément λ de $\Gamma_{0,r}$.

3.2.2. Le groupe des tresses pures de Hurwitz ; lien avec $\Gamma_{0,r}$.

— On rappelle que l'espace de configuration de points (complexe) est défini par

$$U^r := \{\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r) \in (\mathbb{S}^2)^r, \forall i \neq j, b_i \neq b_j\}$$

Le *groupe des tresses pures (de Hurwitz) de la sphère* $B^r \mathbb{S}^2$ est le groupe fondamental de U^r , de point base \mathbf{a} .

On peut trouver dans [Bir74] la proposition suivante :

Proposition 3.2.5. — *Le centre de $B^r \mathbb{S}^2$ est d'ordre 2.*

On notera z_r son élément non trivial.

Une tresse pure de la sphère est représentée par une application $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) : [0; 1] \rightarrow U^r$, telle que $\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = a_i$, et où γ_i est un chemin fermé simple fermé.

Pour toute tresse b ainsi choisie, il existe une isotopie h de \mathbb{S}^2 (ne laissant pas nécessairement les a_i fixes) telle que pour tout i entre 1 et r , et tout réel t entre 0 et 1, $h_t(a_i) = \gamma_i(t)$, et telle que $h_0 = Id_{\mathbb{S}^2}$. On pose alors

$$\phi(b) := [h_1] \in \Gamma_{0,r}$$

(où $[h_1]$ désigne la classe d'**a**-isotopie de h_1).

On vérifie que ϕ est bien défini, et est en fait un morphisme de groupes ; plus précisément, on a le théorème suivant ([Bir74]) :

Théorème 3.2.6. — *Le morphisme de groupes $\phi : B^r\mathbb{S}^2 \rightarrow \Gamma_{0,r}$ est surjectif, de noyau le centre de $B^r\mathbb{S}^2$.*

On s'intéresse maintenant aux antécédents par ϕ d'un twist de Dehn (le théorème précédent et la proposition 3.2.5 prouve que l'on a exactement deux antécédents par élément de $\Gamma_{0,r}$).

Soit $\alpha = [a]$ une classe d'a-isotopie de chemin fermé simple sur $\mathbb{S}^2 - A$: α sépare la sphère et donc A en deux, mettons en $A_I := \{a_i\}_{i \in I}$, et en $A_J := \{a_i\}_{i \in J}$.

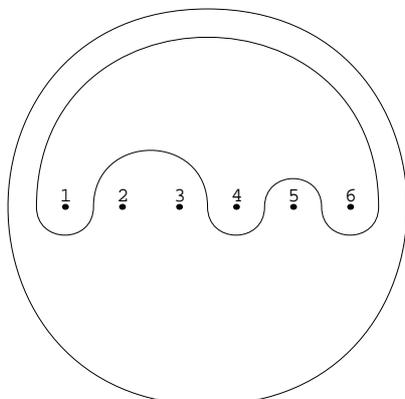
On peut choisir une isotopie $h^{\alpha,I}$ de \mathbb{S}^2 laissant $\{a_i\}_{i \in J}$ fixe, telle que $h_0^{\alpha,I} = Id$ et $[h_1^{\alpha,I}] = D_\alpha$. On dit par raccourci qu'on a fixé J .

L'application :

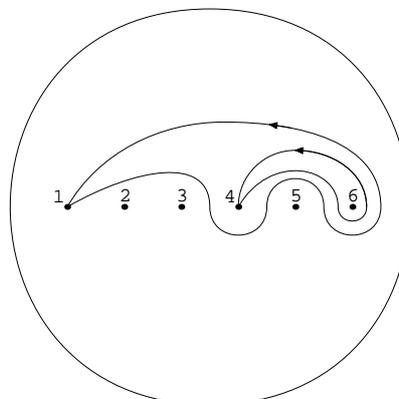
$$t \mapsto \left(h_t^{\alpha,I}(a_1), \dots, h_t^{\alpha,I}(a_r) \right)$$

définit une tresse pure de $B^r\mathbb{S}^2$, que l'on note $b_{\alpha,I}$. On peut bien sûr choisir de fixer I , et obtenir une tresse $b_{\alpha,J}$.

Exemple. — Dans cet exemple, $r = 6$, et on considère le twist D associé au chemin c_0 (figure de gauche), qui sépare 1, 4 et 6 de 2, 3 et 5. La tresse obtenue en fixant 2, 3 et 5 est représentée à droite.



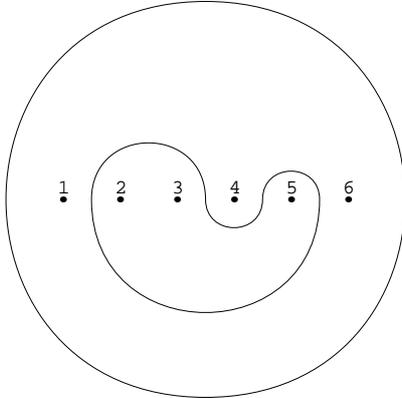
on choisit de xer 2;3 et 5



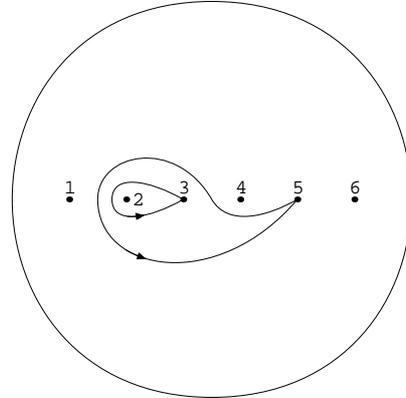
representant de la tresse alors obtenue

Le twist D est bien sûr engendré par le chemin c_1 (a-isotope à c_0) représenté ci-dessous (on a passé la branche du haut de c_0 en bas). Si l'on choisit cette fois de fixer 1, 4 et 6, on obtient la tresse représentée ci-dessous à droite.

L'introduction du chemin c_1 permet juste de mieux visualiser la partie de la sphère que l'on bouge.



on choisit de x er 1 4 et 6



représentant de la tresse alors obtenue

Proposition 3.2.7. — $b_{\alpha,I}$ et $b_{\alpha,J}$ sont les deux antécédents de D_α par ϕ .

Démonstration. — $b_{\alpha,I}$ et $b_{\alpha,J}$ sont par construction des antécédents de D_α par ϕ . Il reste à voir qu'ils sont distincts.

Si I ou J est vide, on retrouve les deux éléments du centre de $B^r\mathbb{S}^2$ (on trouve 1 et z_r selon que l'on fixe \underline{r} ou \emptyset).

Supposons donc que I et J ne soient pas vides. Quitte à échanger les rôles de I et J , on se ramène au cas où $\#I \geq 2$. On choisit i_0, i_1 distincts (resp. j) dans I (resp. J). On peut toujours choisir un représentant de $b_{\alpha,I}$ (resp. $b_{\alpha,J}$) fixant a_{i_0} (resp. a_j). Ces deux représentants fournissent deux tresses b'_I et b'_J dans $B^3\mathbb{S}^2$, par le morphisme d'"oubli" des lacets γ_k pour $k \notin \{i_0, i_1, j\}$. Or la tresse b'_J est triviale par construction, tandis que b'_I ne l'est pas, puisque a_{i_1} tourne autour de a_{i_0} . \square

Nous allons maintenant décrire comment les relations de présentation du mapping class group de la sphère r -pointée par les twists de Dehn se relèvent en des relations entre tresses.

Proposition 3.2.8. — Les relations du théorème de présentation de $\Gamma_{0,r}$ se relèvent de la façon suivante dans le groupe des tresses :

- Si $D_\alpha = 1$, et que α sépare \emptyset de \underline{r} , alors $b_{\alpha,\emptyset} = 1$, et $b_{\alpha,\underline{r}} = z_r$;
- Si $D_\alpha = 1$ et que α sépare $\{m\}$ de son complémentaire $\underline{r} - \{m\}$, alors $b_{\alpha,\{m\}} = 1$ et $b_{\alpha,\underline{r}-\{m\}} = z_r$;
- Si $|\alpha \cap \beta| = 0$, alors $b_\alpha b_\beta = b_\beta b_\alpha$, pour tous antécédents respectifs b_α et b_β de D_α et D_β ;

- Si $|\alpha \cap \beta| = 2$, et que b_{α, I_α} et b_{α, I_β} sont deux antécédents respectifs de D_α et D_β , alors la relation de la lanterne se relève telle quelle à condition de choisir pour les twists de Dehn $D_{\alpha\beta}$, et des tresses qui fixent $\underline{r} - (I \cup J)$ pour ceux constituant $D_{\partial(\alpha, \beta)}$.

Démonstration. — Seuls les deux derniers points méritent d'être démontrés : on choisit deux antécédents respectifs b_{α, I_α} et b_{β, I_β} de D_α et de D_β .

Pour le premier point, il n'y a rien à montrer si un des ensembles I_α, I_β ou son complémentaire est vide ou est un singleton. On se place donc dans le cas contraire où chacun de ces ensembles est de cardinal au moins 2. Comme la commutation entre b_{α, I_α} et b_{β, I_β} entraîne la commutation de deux antécédents quelconques de D_α et D_β , on peut supposer que $I_\alpha \subseteq I_\beta$. Soit $i_0 \in I_\alpha$; on peut choisir des représentants $\gamma_{\alpha, I_\alpha}$ et γ_{β, I_β} de b_{α, I_α} et de b_{β, I_β} qui laissent a_{i_0} et $(\underline{r} - I_\beta)$ fixes.

Le chemin

$$\gamma_{\alpha, I_\alpha} \gamma_{\beta, I_\beta} \gamma_{\alpha, I_\alpha}^{-1} \gamma_{\beta, I_\beta}^{-1}$$

est donc un représentant de la tresse $b_{\alpha, I_\alpha} b_{\beta, I_\beta} b_{\alpha, I_\alpha}^{-1} b_{\beta, I_\beta}^{-1}$, qui laisse au moins trois points de $\{a_1, \dots, a_r\}$ fixes. Cette tresse ne peut donc pas être la tresse z_r (car z_3 n'est pas triviale) : elle est donc triviale.

Pour la deuxième formule, on remarque que changer I_α en son complémentaire revient à multiplier les tresses

$$b_{\alpha, I_\alpha}, b_{\alpha\beta, (I_\alpha \cup I_\beta) - (I_\alpha \cap I_\beta)}, b_{c_1, I_\alpha \cap ({}^c I_\beta)}, b_{c_4, I_\alpha \cup I_\beta}$$

par z_r , à échanger $b_{c_2, I_\alpha \cap I_\beta}$ et $b_{c_3, ({}^c I_\alpha) \cap I_\beta}$ et à laisser b_{β, I_β} fixe (c_1, c_2, c_3, c_4 désignent les chemins constituant le bord de $\partial(\alpha, \beta)$ entourant respectivement $I_\alpha \cap ({}^c I_\beta)$, $I_\alpha \cap I_\beta$, $({}^c I_\alpha) \cap I_\beta$, $I_\alpha \cup I_\beta$).

Il suffit donc de prouver l'égalité pour un choix précis de I_α et I_β .

L'hypothèse $|\alpha \cap \beta| = 2$ impose que les ensembles $I_\alpha \cap I_\beta, ({}^c I_\alpha) \cap ({}^c I_\beta), I_\alpha \cap ({}^c I_\beta), ({}^c I_\alpha) \cap I_\beta$ ne sont pas vides (et donc aussi que $r \geq 4$). On en déduit d'une part que les ensembles $I_\alpha, I_\beta, ({}^c I_\alpha), ({}^c I_\beta)$ possèdent au moins deux éléments, et d'autre part que si $r \geq 5$, on peut (quitte à changer I_α, I_β en leur complémentaire) supposer que $\underline{r} - (I_\alpha \cup I_\beta) \geq 2$.

On choisit alors dans ce dernier cas des représentants des tresses considérées qui fixent a_{i_0} (où l'on s'est donné $i_0 \in I_\alpha \cap I_\beta$) et a_j , pour tout $j \in \underline{r} - (I_\alpha \cup I_\beta)$. La tresse

$$b_\alpha b_\beta b_{\alpha\beta} (b_{c_1} b_{c_2} b_{c_3} b_{c_4})^{-1}$$

admet donc un représentant laissant trois points fixes ; elle est donc différente de z_r , et par conséquent triviale.

Si $r = 4$, on rajoute un cinquième point pour se ramener au cas précédent. \square

3.3. Étude au bord du revêtement de Hurwitz

Le but de ce paragraphe est de donner une description combinatoire précise de la monodromie du revêtement π_η , en termes d'action du groupe des tresses pures sur les classes de Nielsen. Pour cela, on s'appuie sur le lien entre le groupe des tresses pures de Hurwitz et le mapping class group pur, et sur les actions respectives de ces groupes sur une fibre générique géométrique de π_η et le groupe fondamental de la sphère r -pointée. Nous explicitons en particulier l'action de certains twists de Dehn -les *twists sarments* (voir la définition 3.3.2)- sur $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ (proposition 3.3.3), formule que nous généraliserons en 3.4.12 en donnant l'action sur le groupe fondamental de la sphère r -pointée de n'importe quel mot en des twists sarments commutant deux à deux.

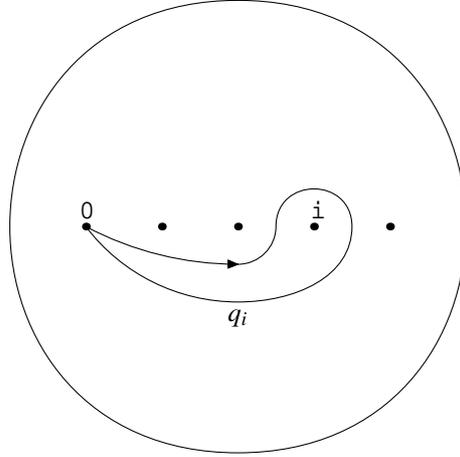
3.3.1. L'action de $\Gamma_{0,r}$ sur le groupe fondamental de la sphère r -pointée. —

3.3.1.1. Interprétation de cette action dans $\Gamma_{0,(r+1)}$. — Soit a_0 un point de $\mathbb{S}^2 - A$. On note par $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ le groupe fondamental (topologique) de $\mathbb{S}^2 - A$ de point base a_0 . Pour toute donnée de deux points base, à tout chemin les liant est associé un isomorphisme naturel entre les deux groupes fondamentaux, en sorte que l'on peut choisir $a_0 = 0$. On rappelle que l'on a choisi le point $\mathbf{a} = (1, \dots, r)$ comme point base du groupe des tresses.

Le groupe $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ admet une présentation standard, liée à un choix standard de lacets sur $\mathbb{S}^2 - \underline{x}$. On note par q_i la classe d'homotopie du lacet de $\mathbb{S}^2 - A$ partant de a_0 , passant sous a_1, \dots, a_{i-1} entourant a_i dans le sens des aiguilles d'une montre, et revenant à a_0 en passant sous a_{i-1}, \dots, a_1 .

La figure 3.3.1.1 montre l'allure de q_i (ou, plus exactement, de l'un de ses représentants).

Proposition 3.3.1. — *Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A, 0)$ admet la présentation suivante :*



- *Générateurs* : $(q_i)_{i \in \mathcal{I}}$
- *Relations* : $q_1 \dots q_r = 1$

Le groupe $\Gamma_{0,r}$ agit naturellement sur le groupe $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ par automorphismes extérieurs de la façon suivante : on choisit pour tout élément de $\Gamma_{0,r}$ un représentant h vérifiant $h(a_0) = a_0$. Soit $[l]$ la classe d' \mathbf{a} -isotopie d'un lacet l sur $\mathbb{S}^2 - A$ basé en a_0 . Alors $[h] \cdot [l] := [h \circ l]$ définit une action de $\Gamma_{0,r}$ sur $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$.

On peut interpréter cette action extérieure en considérant le mapping class group de la sphère $(r+1)$ -pointée, par les points a_0, \dots, a_r . En effet, les lacets q_i correspondent à des tresses de la sphère à $(r+1)$ -brins, dont l'image dans $\Gamma_{0,(r+1)}$ est l'inverse du twist de Dehn associé à la classe β_i d'un chemin b_i entourant a_0 et a_i en passant à l'aller et au retour sous a_1, \dots, a_{i-1} . Appelons par Γ_{a_0} le sous-groupe de $\Gamma_{0,(r+1)}$ engendré par les D_{β_i} . Notons par A_0 l'ensemble $A \cup a_0$, et \mathbf{a}_0 le $(r+1)$ -uplet $(0, 1, \dots, r) = (a_0, a_1, \dots, a_r)$.

Soit α une classe d' \mathbf{a} -isotopie de chemin fermé simple de $\mathbb{S}^2 - A$. Choisissons un représentant a de α ne passant pas par a_0 . On note par α_0 la classe d' \mathbf{a}_0 -isotopie de a . On définit l'image par action extérieure de $D_\alpha \in \Gamma_{0,r}$ sur $D_{\beta_i} \in \Gamma_{a_0}$ comme le twist $D_{D_{\alpha_0}(\beta_i)} = D_{\alpha_0} D_{\beta_i} D_{\alpha_0}^{-1}$. L'action extérieure de $\Gamma_{0,r}$ sur $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ déduite coïncide bien avec l'action déjà mentionnée.

Pour que cette définition ait un sens, il faut bien sûr vérifier qu'elle ne dépend pas du choix de a . Ceci n'a *a priori* rien d'évident, puisque deux tels représentants a et a' de α ne définissent pas toujours la même classe d' \mathfrak{a}_0 -isotopie. On prouve cependant que les actions ainsi définies ne diffèrent que par un automorphisme intérieur de Γ_{a_0} . En effet, on peut choisir pour des tresses d'images respectives $D_{[a]}$ et $D_{[a']}$ dans $\Gamma_{0,(r+1)}$, des représentants qui ne diffèrent que par le chemin que parcourt a_0 . La tresse résultante, antécédent de $D_{[a]}D_{[a']}^{-1}$ peut donc être considérée comme un élément de $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$. En tant que telle, l'élément de $\Gamma_{0,(r+1)}$ qui lui est associé est donc engendré par les D_{β_i} , ce qui entraîne le résultat annoncé.

Nous allons maintenant expliciter, avec l'aide de cette interprétation, et de cette dernière remarque, l'action de certains twists de Dehn sur $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$, les *twists sarments* (cf. la définition 3.3.2 et la proposition 3.3.3). Ces twists seront utiles pour définir un choix cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage d'un point du bord de \bar{U}^r .

Définition 3.3.2. — Pour toute partition (I_1, I_2, I_3) d'un sous-ensemble *plein* (i.e. constitué d'entiers consécutifs) de \underline{r} , dont les extrémités appartiennent à I_1 , on définit le *twist sarment* $D_{[I_1, I_2, I_3]}$, associé à la partition (I_1, I_2, I_3) , comme le twist entourant I_1 , passant au-dessus de I_2 et au-dessous de I_3 .

Si $I_3 = \emptyset$, on note le twist sarment $D_{[I_1, I_2]}$. Un tel twist est un *twist fer-à-cheval*. Si en outre I_1 n'est constitué que de deux éléments i et j , le twist est un *fer-à-cheval fin*, et on le note D_{ij} . Un tel twist est l'image (par ϕ) d'un *générateur d'Artin* du groupe des tresses (pour une présentation du groupe des tresses pures de Hurwitz à r brins par ces générateurs, voir [Bir74] p. 20).

Si $I_2 = I_3 = \emptyset$, on note le twist D_{I_1} . Un tel twist est appelé *twist rectangle*.

Notations. — Soit I un sous-ensemble de \underline{r} , et i et j tels que $1 \leq i \leq j \leq r$. On note

$$q_{i \overrightarrow{j}}$$

le produit des q_m , pour m appartenant à $I \cap \{i, \dots, j\}$, le produit s'effectuant dans l'ordre naturel déduit de celui de \mathbb{N} .

On note

$$q_{j \perp i} := \left(q_{i \perp j} \right)^{-1}$$

Enfin, on prolonge de manière récursive ces notations en permettant l'indexation par plusieurs flèches.

L'analogie de la relation de Chasles

$$q_{i \perp j} q_{j \perp k} = q_{i \perp k}$$

n'est valable que dans le cas où $j \notin I$.

On écrira $i \rightarrow j$ au lieu de $i \perp j$ lorsque $I = \underline{r}$.

On utilisera librement une notation analogue pour les D_{β_i} .

Les twists sarments permettront de définir un choix cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage d'un point du bord de \overline{U}^r . La proposition suivante donne l'action d'un twist sarment à n'importe quelle puissance :

Proposition 3.3.3. — *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout twist sarment $D_{[I, I', I'']}$, l'action de $D_{[I, I', I'']}^n$ sur $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} - D_{[I, I', I'']}^n \cdot q_i &= q_i \text{ pour } i \notin I \cup I'' \\ - D_{[I, I', I'']}^n \cdot q_i &= \left(q_{i \xrightarrow{I'} 1 \xrightarrow{I \cup I'} r \xrightarrow{I'} i} \right)^n q_i \text{ pour } i \in I \\ - D_{[I, I', I'']}^n \cdot q_i &= \left(q_{i \xrightarrow{I'} 1 \xrightarrow{I \cup I'} r \xrightarrow{I'} i} \right)^n \left(q_{i \xrightarrow{I \cup I'} 1 \xrightarrow{I'} r \xrightarrow{I \cup I'} i} \right)^n q_i \text{ pour } i \in I'' \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit $D_{[I, I', I'']}$ un twist sarment. On choisit le représentant de ce twist qui a servi à le définir, et on note par $D_{[I, I', I'']}^0$ le twist de $\Gamma_{0, (r+1)}$ associé. Comme ce twist est d'intersection nulle avec tout twist D_{β_i} pour lequel $i \notin (I \cup I'')$, il a une action triviale sur ces derniers.

Pour $i \in I$, soit $D_{[I, I', I'']}^1$ le twist obtenu en fusionnant le chemin b_i et le chemin qui a permis de définir le twist sarment $D_{[I, I', I'']}^0$. Ce twist a une action triviale sur D_{β_i} , et on remarque que l'on a l'égalité suivante (c'est une conséquence de la relation de la lanterne) :

$$\left(D_{\beta: i \xrightarrow{I'} 1 \xrightarrow{I \cup I'} r \xrightarrow{I'} i} \right) \left(D_{[I, I', I'']}^0 \right) = D_{[I, I', I'']}^1$$

L'élévation de cette égalité à la puissance n donne, par commutation des éléments considérés :

$$\left(D_{\beta:i \xrightarrow{1} I \cup I', r \xrightarrow{1} i} \right)^n (D_{[I, I', I'']}^0)^n = (D_{[I, I', I'']}^1)^n$$

Comme $\left(D_{[I, I', I'']}^1 \right)^n$ commute avec D_{β_m} , on obtient :

$$(D_{[I, I', I'']}^0)^n D_{\beta_i} = \left(D_{\beta:i \xrightarrow{1} I \cup I', r \xrightarrow{1} i} \right)^{-n} D_{\beta_i}$$

Enfin, comme la tresse q_i induit l'élément $D_{\beta_i}^{-1}$ de $\Gamma_{0,r}$, on obtient le résultat annoncé.

Pour $i \in I''$, le twist passe à l'aller et au retour sous a_i . Soit $D'_{[I, I', I'']}^1$ le twist de $\Gamma_{0,(r+1)}$ obtenu en choisissant pour représentant de $D_{[I, I', I'']}$ le chemin $a'_{[I, I', I'']}$ obtenu à partir de $a_{[I, I', I'']}$ en changeant la portion de chemin passant sous a_i à l'aller par un chemin contournant a_0 . Soit $D'^2_{[I, I', I'']}$ le twist de $\Gamma_{0,(r+1)}$ obtenu en choisissant pour représentant de $D_{[I, I', I'']}$ le chemin $a''_{[I, I', I'']}$, obtenu à partir de $a'_{[I, I', I'']}$, en changeant la portion de chemin passant sous a_i au retour par un chemin contournant a_0 .

On peut vérifier que l'on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \left(D_{\beta:i \xrightarrow{1} I \cup I', r \xrightarrow{1} i} \right) D_{[I, I', I'']}^0 &= D'^1_{[I, I', I'']} \\ \left(D_{\beta:i \xrightarrow{1} I \cup I', r \xrightarrow{1} i} \right) D'^1_{[I, I', I'']} &= D'^2_{[I, I', I'']} \end{aligned}$$

En élevant ces égalités à la puissance n (et en tenant compte des relations de commutation), on obtient :

$$\left(D_{\beta:i \xrightarrow{1} I \cup I', r \xrightarrow{1} i} \right)^n \left(D_{\beta:i \xrightarrow{1} I \cup I', r \xrightarrow{1} i} \right)^n (D_{[I, I', I'']}^0)^n = \left(D'^2_{[I, I', I'']} \right)^n$$

Or $\left(D'^2_{[I, I', I'']} \right)^n$ a une action triviale sur q_i . Ceci donne bien le résultat. \square

Bien entendu, les twists fer-à-cheval étant des cas particuliers de twists sarments, on en déduit l'action à une puissance quelconque de ces twists.

Proposition 3.3.4. — *Pour tout twist fer-à-cheval $D_{[I_1, I_2]}$, et tout $n \in \mathbb{N}$ l'action de $D_{[I_1, I_2]}^n$ sur $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ est donnée par :*

$$- D_{[I_1, I_2]} \cdot q_i = q_i \text{ pour } i \notin I_1$$

$$- D_{[I_1, I_2]} \cdot q_i = \left(q_{\begin{smallmatrix} I_2 \\ i \rightarrow 1 \rightarrow r \rightarrow i \end{smallmatrix}} \right)^n \quad q_i \text{ pour } i \in I_1.$$

En particulier, on trouve les formules suivantes pour les twists rectangles et pour les twists fer-à-cheval fins :

Proposition 3.3.5. — *L'action du twist rectangle D_I sur $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ est donnée par :*

- $D_I \cdot q_i = q_i$ pour $i \notin I$
 - $D_I \cdot q_i = \binom{q_{i_0 \dots i_k}}{(q_{i_0} \dots q_{i_k})} q_i$ pour $i \in I$
- pour tout sous-ensemble plein $I = \{i_0, \dots, i_k\}$ de \underline{r} .

Proposition 3.3.6. — *L'action du twist fer-à-cheval fin D_{ij} sur le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ est donnée par :*

- $D_{ij} \cdot q_m = q_m$ pour $m \neq i, j$
 - $D_{ij} \cdot q_i = \binom{(q_i \dots q_{j-1}) q_j}{(q_i \dots q_{j-1})} q_i$
 - $D_{ij} \cdot q_j = \binom{(q_i \dots q_{j-1})^{-1} q_i}{(q_i \dots q_{j-1})^{-1}} q_j$
- pour tous les entiers i et j tels que $1 \leq i < j \leq \underline{r}$.

Remarque 3.3.7. — La proposition 3.4.12 à venir donnera l'action (sur le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$) d'un mot quelconque en des twists de Dehn commutant deux à deux.

3.3.2. Le revêtement $\bar{\pi} : \bar{H}^r \rightarrow \bar{U}^r$. — On effectue ici le lien entre l'action de $\Gamma_{0,r}$ sur $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ et la monodromie du revêtement générique géométrique π_η . Ce lien permet de transposer les formules précédemment obtenues (proposition 3.3.3), et la formule 3.4.12 à venir, en des formules d'actions des tresses pures de Hurwitz sur les classes de Nielsen.

Soit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ un point géométrique de U^r . Par définition d'un espace des modules grossier, la fibre du revêtement π en ξ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements (algébriques) de \mathbb{P}^1 de degré d , de groupe de monodromie G , et de points de branchement ξ_1, \dots, ξ_r (dans cet ordre). On sait que la catégorie des revêtements algébriques de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ est équivalente à la catégorie des revêtements analytiques de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, et, partant, à la catégorie des représentations

$$\phi : \pi_1^{\text{top}}(\mathbb{S}^2 - \{\xi_1, \dots, \xi_r\}) \rightarrow G$$

L'isomorphie entre deux telles représentations s'exprime par l'existence d'un automorphisme intérieur de $\pi_1(\mathbb{S}^2 - \{\xi_1, \dots, \xi_r\})$ envoyant l'une sur l'autre.

On obtient donc, à partir de la présentation de $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ déjà donnée, la description combinatoire classique de toute fibre générique géométrique de π .

Proposition 3.3.8. — *La fibre de π en ξ est en bijection avec l'ensemble*

$$SNi^*(G) := \{g_1, \dots, g_r \in G, G = \langle g_i \rangle, g_1 \dots g_r = 1\} / N$$

où N agit par conjugaison sur l'ensemble $\{g_1, \dots, g_r \in G, G = \langle g_i \rangle, g_1 \dots g_r = 1\}$, et est le normalisateur de G dans S_d dans le cas des revêtements, et G lui-même dans celui des G -revêtements.

On remplace l'astérisque par "ab" dans le cas des revêtements, et par "in" dans le cas des G -revêtements.

Définition 3.3.9. — L'ensemble $SNi^*(G)$ est appelé *l'ensemble des classes de Nielsen*.

Définition 3.3.10. — On définit de manière analogue l'ensemble des classes de Nielsen $SNi^*(\mathbf{C})$, lorsque l'on impose des conditions sur l'invariant d'inertie.

La description du revêtement induit par π sur les fibres génériques géométriques, en termes d'action du groupe fondamental sur une fibre, se déduit de l'action de $\Gamma_{0,r}$ sur le groupe fondamental de la sphère r pointée.

Proposition 3.3.11. — *Les actions de $B^r\mathbb{S}^2$ sur $SNi^*(G)$ respectivement déduites du revêtement π et de la représentation de $B^r\mathbb{S}^2$ dans $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ coïncident.*

En particulier, et à titre d'exemple, on peut décrire le revêtement π_η induit par π sur les fibres génériques géométriques en donnant l'action des générateurs standards A_{ij} de la présentation d'Artin (cf. [Bir74] p. 20) :

Proposition 3.3.12. — *La description du revêtement π_η en termes de l'action de $B^r\mathbb{S}^2$ sur $SNi^*(G)$ est donnée par l'action des tresses d'Artin : pour tout $\underline{g} \in SNi^*(G)$,*

$$A_{ij} \cdot \underline{g} = \underline{g}'$$

où

- $g'_m = g_m$ pour $m \neq i, j$, et
- $g'_i = \begin{pmatrix} (g_i \cdots g_{j-1}) & \\ & g_j \end{pmatrix} g_i$
- $g'_j = \begin{pmatrix} (g_i \cdots g_{j-1})^{-1} & \\ & g_i \end{pmatrix} g_j$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que A_{ij} s'envoie sur D_{ij} dans le mapping class group pur, et d'utiliser la formule déjà connue de l'action de ce twist sur $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$. □

3.4. Générateurs de l'inertie pour le revêtement $\bar{\pi}$

L'objectif de ce paragraphe est de donner une description précise, à l'aide des twists sarments, d'un choix de générateurs cohérents au voisinage de tout point de \bar{U}^r . Nous décrivons dans un premier temps (proposition 3.4.5) les *générateurs de l'inertie le long de S^I dans le groupe fondamental $\pi_1(U^r, (1, \dots, r))$* (voir la définition 1.2.1). Les propositions 3.4.6 et 3.4.7 permettent de décrire la ramification de $\bar{\pi}$ au-dessus de S^I . Nous proposons ensuite une procédure (cf. la proposition 3.4.9 et la définition 3.4.11) pour choisir des twists sarments fournissant un système cohérent de générateurs de l'inertie (proposition 3.4.17).

3.4.1. Générateurs de l'inertie pour l'espace \bar{U}^r . — On a décrit en 3.1.17 le bord de \bar{U}^r (en suivant la construction de S. Wewers) : ses composantes irréductibles sont les S^I (définis en 3.1.18), où I parcourt les sous-ensembles de \underline{r} , de cardinal ≥ 2 .

Le groupe symétrique agit sur l'espace \bar{U}^r (algébriquement, et donc analytiquement sur \mathbb{C}). Si σ est une permutation, $\sigma \cdot (S^I) = S^{\sigma(I)}$. Si \mathbf{a} est un point base de U^r , la permutation σ induit un isomorphisme naturel $\bar{\sigma} : \pi_1(U^r, \mathbf{a}) \rightarrow \pi_1(U^r, \sigma(\mathbf{a}))$. Dans cet isomorphisme l'image d'un générateur de l'inertie le long de S^I dans $\pi_1(U^r, \mathbf{a})$ s'envoie sur un générateur de l'inertie le long de $S^{\sigma(I)}$ dans $\pi_1(U^r, \sigma(\mathbf{a}))$. On peut donc se contenter de décrire les générateurs de l'inertie le long de S^k (avec $2 \leq k \leq r$) dans $\pi_1(U^r, (1, \dots, r))$.

Si b est une tresse engendrant le groupe d'inertie le long d'une composante du bord de \bar{U}' , et si $\phi(b)$ est son image dans $\Gamma_{0,r}$, nous dirons par abus de langage que $\phi(b)$ est un générateur du groupe d'inertie le long de cette composante.

Le résultat préliminaire suivant sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite. On note \mathbf{D} le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 dans \mathbb{C} . On note U' le sous-ensemble de $U^r(\mathbb{C})$ défini par : $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r) \in U'$ si et seulement si

- $\mathbf{u} \in U^r(\mathbb{C})$;
- pour tout $i \leq k$, $|u_i| < k + \frac{1}{2}$;
- pour tout $j \geq k + 1$, $|u_j| > k + \frac{1}{2}$.

Pour tout $\mathbf{u} \in U'$, on définit l'immersion holomorphe $\varphi_{\mathbf{u}} : \mathbf{D} - \{0\} \rightarrow U^r$ par

$$\varphi_{\mathbf{u}}(z) = (\varphi_i(z)) = (zu_1, \dots, zu_k, u_{k+1}, \dots, u_r)$$

Soit c le cercle de centre 0 et de rayon $k + \frac{1}{2}$, et \mathbf{u} un élément de U' . On note par $b_{c,\mathbf{u}}$ la tresse de $\pi_1(U^r, \mathbf{u})$ relevant le twist $D_{[c]}$ en fixant $\{u_{k+1}, \dots, u_r\}$.

Enfin, $S_0^k := S^k - \cup_I (S^k \cap S^I)$ désigne la composante du bord S^k privée de son intersection avec les autres composantes.

Lemme 3.4.1. — *Soit $\mathbf{u} := (u_1, \dots, u_r) \in U'$. L'application $\varphi_{\mathbf{u}}$ se prolonge par continuité en 0 en une immersion holomorphe fermée $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}} : \mathbf{D} \rightarrow \bar{U}'$. Le point $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}}(0)$ est un point de S_0^k .*

Plus précisément, si x_e sur la composante exceptionnelle (resp. x_r sur la racine) est le point d'intersection de cette composante avec la racine (resp. avec la composante exceptionnelle), alors $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}}(0)$ est l'unique point de S_0^k tel que :

- $x_r = 0$, et la racine est pointée par les $\phi_j := u_j$, pour tout $j \in \underline{r} - \underline{k}$;
- il existe un isomorphisme μ de la composante exceptionnelle sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$ vérifiant $\mu(\phi_i) = u_i$, pour tout $i \in \underline{k}$, et $\mu(x_e) = \infty$.

De plus, tout chemin g sur U' induit via $\tilde{\varphi}$ un chemin \bar{g} sur S_0^I , en posant, pour tout $t \in [0; 1]$:

$$\bar{g}(t) := \tilde{\varphi}_{g(t)}(0)$$

Deux chemins homotopes sur U' induisent deux chemins homotopes sur S_0^k .

L'application de $\mathbf{D} \times [0; 1]$ dans \bar{U}^r définie par

$$(z, t) \mapsto \tilde{\varphi}_{g(t)}(z)$$

induit un voisinage cylindrique du chemin \bar{g} dans \bar{U}^r .

Réciproquement soit \mathbf{u}_0 un point de U' , et \mathbf{x}_0 le point $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}_0}(0)$ de S_0^k . Tout élément $[\gamma]$ de $\pi_1(S_0^k, \mathbf{x}_0)$ se relève en une tresse de Hurwitz $[\hat{\gamma}]$ du groupe $\pi_1(U^r, \mathbf{u}_0)$, au sens où :

$$[\tilde{\varphi}_{\hat{\gamma}(\cdot)}(0)] = [\gamma]$$

Ce relevé est défini à une puissance de b_{c, \mathbf{u}_0} près. Cette opération de relèvement définit un isomorphisme

$$\text{Cen}(b_{c, \mathbf{u}_0}) / \langle b_{c, \mathbf{u}_0} \rangle \simeq \pi_1(S_0^k, \mathbf{x}_0)$$

où $\text{Cen}(b_{c, \mathbf{u}_0}) / \langle b_{c, \mathbf{u}_0} \rangle$ est le centralisateur de b_{c, \mathbf{u}_0} dans $\pi_1(U^r, \mathbf{u}_0)$.

Remarque 3.4.2. — Deux points \mathbf{u} et \mathbf{u}' définissent des immersions holomorphes de \mathbf{D} au voisinage d'un même point de S_0^k si et seulement si il existe une similitude envoyant u_i sur u'_i , pour tout $i \in \underline{k}$, et $u'_j = u_j$ pour $j \geq k + 1$ (car ces similitudes sont les seuls automorphismes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ fixant ∞).

Démonstration. — On se souvient (cf. la proposition 3.1.9) que les birapports λ_w constituent un système régulier de paramètres au voisinage de tout point de \bar{U}^r . Or on peut vérifier que le birapport

$$\lambda_w(\varphi_{\mathbf{u}}(z)) = [\varphi_{w_1}(z), \varphi_{w_2}(z), \varphi_{w_3}(z), \varphi_{w_4}(z)]$$

tend (lorsque z tend vers 0) vers une constante non nulle lorsque $\{w_1, w_4\}$ et $\{w_2, w_3\}$ ne sont pas de part et d'autre de $k + \frac{1}{2}$, et est équivalent à αz (où α est une constante non nulle) lorsqu'ils le sont.

En effet, ceci découle du fait que $\varphi_{i_1}(z) - \varphi_{i_2}(z)$ est équivalent (en 0) à

- $(u_{i_1} - u_{i_2}) \cdot z$ si $\{i_1, i_2\} \subset \{1, \dots, k\}$;
- u_{i_1} si $i_1 \geq (k + 1)$ et $i_2 \leq k$;
- $u_{i_1} - u_{i_2}$ si $\{i_1, i_2\} \in \{(k + 1), \dots, r\}$.

Ceci prouve que l'application holomorphe $\varphi_{\mathbf{u}}$ du disque épointé se prolonge par continuité en 0, et que $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}}(0)$ est un point de S_0^k . L'application $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}}$ est donc une immersion holomorphe.

Il est clair que $x_r = 0$, et que la racine est pointée par $\phi_j := u_j$, pour tout $j \in \underline{r - k}$.

Soit ϕ_{i_0} et ϕ_{i_1} deux points de la composante exceptionnelle \mathcal{C}^e , et μ l'unique isomorphisme de \mathcal{C}^e sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$ tel que $\mu(\phi_{i_0}) = u_{i_0}$, $\mu(\phi_{i_1}) = u_{i_1}$, et $\mu(x_e) = \infty$. Soit ϕ_{i_2} un autre point marqué de \mathcal{C}^e (si il y en a). Soit $j \in \{k+1, \dots, r\}$ (s'il n'en existe pas, on marque la racine par 1 par exemple). On a :

$$\begin{aligned} [\phi_{i_0}, \phi_{i_1}, x_e, \phi_{i_2}] &= \lim_{z \rightarrow 0} \lambda_{(i_0, i_1, j, i_2)}(\varphi_{\mathbf{u}}(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} [u_{i_0}z, u_{i_1}z, u_j, u_{i_2}z] = [u_{i_0}, u_{i_1}, \infty, u_{i_2}] \end{aligned}$$

d'après les équivalences ci-dessus, et

$$[\mu(\phi_{i_0}), \mu(\phi_{i_1}), \mu(x_e), \mu(\phi_{i_2})] = [u_{i_0}, u_{i_1}, \infty, \mu(\phi_{i_2})]$$

par choix de $\mu(\phi_{i_0})$, $\mu(\phi_{i_1})$ et $\mu(x_e)$.

Or le birapport est inchangé par μ (le birapport de quatre points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est indépendant de la carte de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ choisie) : on a donc $\mu(\phi_{i_2}) = u_{i_2}$.

Il ne reste qu'à prouver la dernière partie du lemme (la seconde étant immédiate). On se ramène au cas où $\mathbf{u}_0 = \mathbf{a} = (1, \dots, r)$, et $\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} = \tilde{\varphi}_{\mathbf{a}}(0)$. Pour ce faire, nous allons établir une correspondance entre $\text{Cen}(D_{[c]}) / \langle D_{[c]} \rangle$ et $\pi_1(S_0^k, \mathbf{b})$ (où $\text{Cen}(D_{[c]})$ désigne le centralisateur de $D_{[c]}$ dans $\Gamma_{0,r}$).

Soit $\delta \in \text{Cen}(D_{[c]})$: on a $D_{\delta[c]} = \delta D_{[c]} \delta^{-1} = D_{[c]}$. Par conséquent, $\delta[c] = [c]$. Il existe un homéomorphisme d' représentant δ , et un chemin c' , \mathbf{a} -isotope à c par une application t , tels que $d'(c') = c$. Si l'on pose $d = d' \circ t(1, \cdot)$, on obtient un autre représentant de la classe d'isotopie de δ , tel que $d|_c = Id_c$. Soit $\mathbf{D}_1 := \{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) ; |z| \leq k + \frac{1}{2}\}$, et $\mathbf{D}_2 := \{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) ; |z| \geq k + \frac{1}{2}\}$. On peut écrire de façon unique $d = d_1 d_2$, où d_1 (resp. d_2) restreint à \mathbf{D}_2 (resp. \mathbf{D}_1) est l'identité. Ces deux homéomorphismes induisent respectivement des éléments de $\Gamma_{0,k+1}$ et $\Gamma_{0,r-k+1}$, la sphère étant respectivement pointée par $1, \dots, k, \infty$, et par $0, k+1, \dots, r$. On

peut vérifier que l'élément de $\Gamma_{0,k+1} \times \Gamma_{0,r-k+1}$ ainsi défini ne dépend pas du choix de d . Ceci définit en fait un isomorphisme

$$\text{Cen}(D_{[c]}) / \langle D_{[c]} \rangle \simeq \Gamma_{0,k+1} \times \Gamma_{0,r-k+1}$$

En effet, ce morphisme est surjectif car deux éléments de $\Gamma_{0,k+1}$ et de $\Gamma_{0,r-k+1}$ quelconques admettent des représentants fixant respectivement \mathbf{D}_2 et \mathbf{D}_1 . Il est injectif car les seuls éléments non triviaux du mapping class group de la sphère k -pointée (resp. $(r-k)$ -pointée) et à 1 bord induisant un élément trivial par pincement du bord sont ceux engendrés par le twist D_ϵ , où ϵ est la classe d'isotopie d'un chemin fermé simple autour de ce bord.

Le groupe fondamental $\pi_1(S_0^k, \mathbf{b})$ est canoniquement isomorphe au groupe

$$\Gamma_{0,k+1} \times B^{(r-k+1)}$$

où $\Gamma_{0,k+1}$ est le sous-groupe du mapping class group de la sphère $k+1$ -pointée par $1, \dots, k, \infty$, et $B^{(r-k+1)}$ est le groupe fondamental de U^{r-k+1} basé en $(0, k+1, \dots, r)$. On a donc un morphisme naturel

$$\pi_1(S_0^k, \mathbf{b}) \rightarrow \text{Cen}(D_{[c]}) / \langle D_{[c]} \rangle$$

surjectif, et de noyau $\{(1, 1), (1, z_{r-k+1})\}$ (via l'isomorphisme canonique entre $\pi_1(S_0^k, \mathbf{b})$ et $\Gamma_{0,k+1} \times B^{(r-k+1)}$).

Le morphisme naturel $B^r \mathbb{S}^2 \rightarrow \Gamma_{0,r}$ induit un morphisme

$$\psi : \text{Cen}(b_{c,\mathbf{a}}) \rightarrow \text{Cen}(D_{[c]})$$

Le noyau du morphisme composé

$$\text{Cen}(b_{c,\mathbf{a}}) \rightarrow \text{Cen}(D_{[c]}) \rightarrow \text{Cen}(D_{[c]}) / \langle D_{[c]} \rangle$$

est égal à $\psi^{-1}(\langle D_{[c]} \rangle) = \langle b_{c,\mathbf{a}}, z_r \rangle$

Notons par z'_{r-k+1} la tresse $z_r b_{c,\mathbf{a}}^{-1}$, et par \bar{z}'_{r-k+1} son image dans le groupe $\text{Cen}(b_{c,\mathbf{a}}) / \langle b_{c,\mathbf{a}} \rangle$. Le morphisme

$$\text{Cen}(b_{c,\mathbf{a}}) / \langle b_{c,\mathbf{a}} \rangle \rightarrow \text{Cen}(D_{[c]}) / \langle D_{[c]} \rangle$$

est donc surjectif, de noyau $\{1, \bar{z}'_{r-k+1}\}$, ce qui donne l'isomorphisme annoncé. □

On revient à la description des générateurs de l'inertie le long de S^k dans $\pi_1(U^r, (1, \dots, r))$:

Lemme 3.4.3. — Soit c le cercle de centre 0 et de rayon $k + \frac{1}{2}$; le twist de Dehn $D_{[c]}$ est un générateur de l'inertie le long de S^k dans $\pi_1(U^r, (1, \dots, r))$. Les autres générateurs sont de la forme $D_{[c']}^m$, où $[c']$ est la classe d'isotopie d'un chemin séparant \underline{k} de son complémentaire, et $m \in \hat{\mathbb{Z}}^\times$.

Démonstration. — Considérons la flèche $f^0 : \mathbf{D} - 0 \rightarrow U^r$ qui à z fait correspondre $(z, 2z, \dots, kz, (k+1), \dots, r)$. C'est une immersion holomorphe.

Le lemme 3.4.1 prouve que f^0 se prolonge en une immersion fermée $f : \mathbf{D} \rightarrow \bar{U}^r$, et que $\mathbf{b} := f(0)$ appartient à S^k , et à aucune autre composante du bord de \bar{U}^r .

Il existe un paramétrage Λ de U^r au voisinage de \mathbf{b} qui comporte λ , où $\lambda = 0$ est une équation locale de S^k . On peut toujours supposer (cf. la preuve du lemme) que, si $\Lambda(f(z)) = (\lambda_1(z), \dots, \lambda_N(z))$, on a $\lambda_1(z) \simeq uz$, où u est une constante positive, et, pour tout j différent de 1, le birapport $\lambda_j(f(z))$ tend (en 0) vers une constante non nulle. Cela prouve que la section f est transverse à S^k en \mathbf{b} (i.e. l'image de \mathbf{D} par f n'est pas tangente à S_0^I). On peut donc en conclure que la restriction à \mathbf{D} d'un revêtement de $U^r(\mathbb{C})$ ramifié le long des S^I est un revêtement de \mathbf{D} ramifié en 0 et que les indices de ramification de ce dernier revêtement sont égaux aux indices de ramification du revêtement initial le long des différentes composantes du diviseur de ramification qui se projettent sur S^I .

L'inertie le long de S^k dans $\pi_1(U^r, (1, \dots, r))$ est engendrée par le lacet $s \mapsto f(e^{2i\pi s})$ de U^r . Ce lacet représente une tresse qui se relève en $D_{[c]}$: cette tresse est un générateur de l'inertie le long de S^k dans $\pi_1(U^r, (1, \dots, r))$, et son action sur $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$ coïncide avec celle de $D_{[c]}$.

Les autres générateurs du groupe engendré par $D_{[c]}$ sont de la forme $D_{[c]}^m$, où $m \in \hat{\mathbb{Z}}^\times$. Les groupes d'inertie étant définis à conjugaison près, tout autre générateur est donc de la forme $(\alpha D_{[c]} \alpha^{-1})^m$ où $m \in \hat{\mathbb{Z}}^\times$, et $\alpha \in \Gamma_{0,r}$. On se souvient (cf. la remarque 3.2.4) que $\alpha D_{[c]} \alpha^{-1} = D_{\alpha([c])}$; on remarque enfin que $\alpha([c])$ parcourt les classes d'isotopie de chemins fermés séparant \underline{k} de son complémentaire. En effet, si c' est un tel chemin,

il est isotope à c en ne se permettant de bouger que \underline{k} (mais pas $\{(k + 1), \dots, r\}$). Une telle isotopie définit un homéomorphisme ν de la sphère laissant $(k + 1), \dots, r$ fixes, tel que $\nu(c') = c$, et tel que $\nu(i)$ appartienne au disque de centre 0 et de rayon $k + \frac{1}{2}$. Il ne reste plus qu'à utiliser la k -transitivité du groupe des homéomorphismes du disque sur l'ensemble des points intérieurs à ce disque pour obtenir le résultat souhaité. \square

Du lemme et des remarques préliminaires sur l'action du groupe symétrique, on déduit l'énoncé suivant.

Proposition 3.4.4. — *Les générateurs de l'inertie de long de S^I dans $\pi_1(U^r, \mathbf{a})$ sont de la forme $D_{[d]}^m$, où $[d]$ est la classe d'isotopie d'un chemin séparant I de son complémentaire J , et $m \in \hat{\mathbb{Z}}^\times$. En particulier, les générateurs de l'inertie le long de S^I et S^J coïncident.*

3.4.2. Application au revêtement $\bar{\pi}$. — Nous revenons à l'étude du revêtement $\bar{\pi} : \bar{H}' \rightarrow \bar{U}^r$, auquel est associé l'ensemble $SNi^*(G)$ des classes de Nielsen.

On note par Δ^I le diviseur $\bar{\pi}^{-1}(S^I)$ du bord de \bar{H}' . On définit de plus les sous-ensembles $S_0^I := S^I - \cup_{J \neq I, |J| \geq 2} (S^I \cap S^J)$ et $\Delta_0^I := \bar{\pi}^{-1}(S_0^I)$ (ces ensembles interviendront dans la preuve de la proposition 3.4.6).

D'après ce qui précède, on a le résultat suivant :

Proposition 3.4.5. — *Soit $[c]$ la classe d' \mathbf{a} -isotopie (cf. le début du paragraphe 3.2) d'un chemin séparant I de son complémentaire J (i.e. séparant les points $a_i, i \in I$ des points $a_j, j \in J$). Alors le twist de Dehn $D_{[c]}$ est un générateur de l'inertie autour de S^I dans le revêtement $\bar{\pi} : \bar{H}' \rightarrow \bar{U}^r$. En particulier, S^I et S^J ont les mêmes générateurs de l'inertie.*

Cela décrit la ramification au-dessus d'un point de S_0^I . La proposition 3.4.6 précise ce résultat en décrivant la ramification des composantes irréductibles de Δ^I (en déterminant quels points de $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{b})$ appartiennent à une même composante de Δ^I).

En appliquant ces résultats au cas particulier du fer-à-cheval entourant I , on donne en 3.4.7 une méthode combinatoire pour calculer l'indice de ramification de toute composante irréductible de Δ^I .

Stefan Wewers a montré des résultats analogues dans le cas des points de branchement non ordonnés. Les preuves qui suivent sont d'ailleurs inspirées de [Wew98a]. D'autre part, Malle et Matzat ont formulé et démontré un cas particulier des propositions suivantes, précisément le cas où $|I| = 2$ (cf. [MM99], chapitre III, théorème 8.3).

Proposition 3.4.6. — *Soit c un chemin fermé simple séparant I de son complémentaire J . Les composantes irréductibles de Δ^I sont en bijection avec les orbites des $D_{[c]}$ -orbites de $SNi^*(G)$ sous l'action du centralisateur de $D_{[c]}$. De plus, l'indice de ramification d'une telle composante est égal au cardinal de n'importe quelle $D_{[c]}$ -orbite la représentant.*

Démonstration. — On note $\mathbf{a} = (1, \dots, r) \in U^r$. On se ramène comme on l'a fait précédemment à prouver ce résultat dans le cas où \mathbf{a} est le point base du groupe des tresses pures de Hurwitz, où $I = \underline{k}$, et où le chemin c parcourt le cercle de centre 0 et de rayon $k + \frac{1}{2}$.

Nous avons (cf. 3.4.3) une immersion holomorphe f de \mathbf{D} dans \bar{U}^r :

$$f(z) = (z, \dots, zk, k+1, \dots, r)$$

L'immersion f vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbf{b} := f(0) \in \underline{k}$;
- Pour tout élément non nul z de \mathbf{D} , $f(z) \in U^r$;
- l'immersion f est transverse à S^I ;
- $s \mapsto f(e^{2i\pi s})$ représente une tresse relevant $D_{[c]}$.

Soit β_1, \dots, β_l les points de la fibre $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{b})$. On peut associer à chacun de ces β_i une immersion $f_i : \mathbf{D} \hookrightarrow \bar{H}'$ (pas nécessairement de façon unique), et un entier $e_i \geq 1$, tels que $f_i(0) = \beta_i$, et tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & f_i \\ & & \downarrow \\ z \mapsto z^{e_i} & \mathbf{D} & \longrightarrow \bar{H}' \\ & \downarrow & \downarrow \bar{\pi} \\ & \mathbf{D} & \longrightarrow \bar{U}^r \\ & & f \end{array}$$

Par construction de f , les points $\alpha_i := f_i(1)$ représentent les différentes $D_{[c]}$ -orbites de $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$. Ceci donne donc une bijection entre la fibre de $\bar{\pi}$ en \mathbf{b} , et les $D_{[c]}$ -orbites de $SNi^*(G)$. De plus, l'indice de ramification de la composante irréductible de $\Delta^{\underline{k}}$ contenant β_i au-dessus de $S^{\underline{k}}$ est

égal à e_i , mais aussi au cardinal de la $D_{[c]}$ -orbite de la classe de Nielsen correspondant à α_i .

L'idée consiste maintenant à se ramener à des considérations topologiques (et même de connexité), en remarquant, en suivant ce qu'a fait S. Wewers dans [Wew98a], prop. 4.3.2, que les composantes irréductibles de Δ^k correspondent de manière canonique aux composantes connexes de Δ_0^k .

Nous allons prouver que l'isomorphisme entre $\text{Cen}(b_{c,\mathbf{a}})/\langle b_{c,\mathbf{a}} \rangle$ et le groupe fondamental $\pi_1(S_0^I, \mathbf{b})$, introduit dans la preuve du lemme 3.4.1, est compatible avec les actions respectives de ces groupes sur les ensembles $\{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_l\} = b_{c,\mathbf{a}} \setminus \bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$ et sur $\{\beta_1, \dots, \beta_l\} = \bar{\pi}^{-1}(\mathbf{b})$.

Pour cela, nous allons définir comme dans [Wew98a] -et en nous appuyant sur le lemme 3.4.1- une déformation continue d'un chemin dans U^r allant de α_i à α_j , en un chemin dans Δ_0^I allant de β_i à β_j , et réciproquement.

Soit $[\tilde{g}]$ un élément de $\text{Cen}(b_{c,\mathbf{a}})/\langle b_{c,\mathbf{a}} \rangle$ tel que $[\tilde{g}].\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_j$. On peut supposer, quitte à multiplier g par une puissance adéquate de $b_{c,\mathbf{a}}$, que

$$[g].\alpha_i = \alpha_j$$

L'application continue $h : [0; 1]^2 \rightarrow \bar{U}^r$, définie par

$$h(s, t) = \tilde{\varphi}_{g(t)}(s)$$

vérifie $h(\cdot, 0) = h(\cdot, 1) = f$, et $h(1, \cdot) = g$.

L'application h se relève de façon unique en une application continue $\tilde{h} : [0; 1]^2 \rightarrow \bar{H}'$ si l'on impose que, pour tout $s \in [0; 1]$, on ait $\tilde{h}(s, 0) = f_i(s)$. Le chemin $\tilde{h}(1, \cdot)$ dans H' relie α_i à α_j , et le chemin $\tilde{h}(\cdot, 0)$ (resp. $\tilde{h}(\cdot, 1)$) de \bar{H}' relie α_i à β_i (resp. α_j à β_j) : le chemin $\tilde{h}(c, \cdot)$ sur Δ_0^I relie donc β_i à β_j .

Donnons-nous réciproquement un élément $[\gamma]$ de $\pi_1(S_0^I, \mathbf{b})$, tel que

$$[\gamma].\beta_i = \beta_j$$

Il existe un lacet $\hat{\gamma}$ sur U' partant de \mathbf{a} , tel que

$$[\tilde{\varphi}_{\hat{\gamma}(\cdot)}(0)] = [\gamma]$$

On définit, comme dans le cas réciproque, une application continue $h : [0; 1]^2 \rightarrow \bar{U}'$, avec

$$h(s, t) = \tilde{\varphi}_{\tilde{\gamma}(t)}(s)$$

On définit aussi l'unique relevé \tilde{h} de h dans \bar{H}' , vérifiant $\tilde{h}(\cdot, 0) = f_i$. On peut supposer, quitte à multiplier $\tilde{\gamma}$ par une puissance de $b_{c, \mathbf{a}}$, que $\tilde{h}(\cdot, 1) = f_j$. Le chemin $\tilde{h}(1, \cdot)$ relie donc α_i à α_j . □

Dans le cas du point base \mathbf{a} , et du twist fer-à-cheval généralisé D_I , il est facile de trouver des générateurs de $\text{Cen}(D_I)$, ce qui permet de réduire la recherche des composantes irréductibles de Δ^I à un simple calcul :

Corollaire 3.4.7. — *Les composantes irréductibles de $\Delta^I = \bar{\pi}^{-1}(S^I)$ sont en bijection avec l'ensemble $SNi^*(G)/\sim$, où \sim désigne la relation d'équivalence engendrée par :*

Deux classes de Nielsen \underline{g} et \underline{g}' sont équivalentes si (mais pas seulement si !) il en existe deux représentants respectifs, (g_1, \dots, g_r) et (g'_1, \dots, g'_r) , tels que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

– *il existe i_0, i_1 appartenant à I , avec $i_0 < i_1$, tels que*

$$g'_{i_0} = ((g_{i_0} \dots g_{i_1})(g_{i_0+1} \dots g_{i_1-1})^{-1}) g_{i_0}$$

$$g'_{i_1} = ((g_{i_0+1} \dots g_{i_1-1})^{-1}(g_{i_0} \dots g_{i_1})) g_{i_1}$$

et $g'_i = g_i$, pour tout $i \notin \{i_0, i_1\}$;

– *il existe j_0, j_1 appartenant à J , avec $j_0 < j_1$, tels que*

$$g'_{j_0} = (g_{j_0} g_{j_1}) g_{j_0}$$

$$g'_{j_1} = (g_{j_0} g_{j_1}) g_{j_1}$$

$$g'_i = [g_{j_0}, g_{j_1}] g_i$$

pour tout $i \in \{j_0 + 1, \dots, j_1 - 1\}$, et $g'_i = g_i$ pour tout $i \notin \{j_0, j_0 + 1, \dots, j_1 - 1, j_1\}$.

Démonstration. — Le seul problème est de montrer que le sous-groupe $\text{Cen}(D_I)$ de $\Gamma_{0,r}$ est engendré par les twists fer-à-cheval $D_{\{i,j\}}$, $i, j \in I$, avec $i < j$, et les twists $D'_{\{i,j\}} := D_{[\{i,j\}, \emptyset, \{i+1, \dots, j-1\}]}$, $i, j \in J$, avec $i < j$. Or le groupe $\text{Cen}(D_I)$ est isomorphe à $\Gamma_{0,k+1} \times \Gamma_{0,|J|+1}$. De plus, cet isomorphisme, composé avec la deuxième (resp. la première) projection,

envoie les twists $D_{\{i,j\}}$, $i, j \in I$, $i < j$ (resp. $D'_{\{i,j\}}$, $i, j \in J$, $i < j$) sur l'élément neutre.

On est donc ramené à prouver que $\Gamma_{0,k+1}$ et $\Gamma_{0,|J|+1}$ sont respectivement engendrés par les projections des $(D_{\{i,j\}})_{i,j \in I}$ et $(D'_{\{i,j\}})_{i,j \in J}$.

C'est facile pour la première assertion : en effet, comme le groupe des tresses pures *du plan* à k brins est engendré par les tresses A_{ij} , $1 \leq i < j \leq k$, le groupe des tresses pures *de la sphère* à $k+1$ brins (on rajoute le brin 0) est aussi engendré par les tresses A_{ij} , $1 \leq i < j \leq k$. Or les $D_{\{i,j\}}$ sont les images des générateurs d'Artin A_{ij} , avec $1 \leq i < j \leq k+1$, du groupe des tresses pures de la sphère à $k+1$ brins.

Pour le second isomorphisme, on remarque que $D_{\{i,j\}}$ et $D'_{\{i,j\}}$ sont conjugués par la conjugaison complexe, qui fournit un automorphisme de $\Gamma_{0,|J|+1}$: les projections des $(D'_{\{i,j\}})_{i,j \in J}$ sur $\Gamma_{0,|J|+1}$ engendrent donc le sous-groupe de $\Gamma_{0,|J|+1}$, engendré par les projections des $D_{\{i,j\}}$, pour $i, j \in J$. Or on vient de prouver que la projection de $\langle (D_{\{i,j\}})_{i,j \in J} \rangle$ est le groupe $\Gamma_{0,|J|+1}$. \square

Remarque 3.4.8. — La fibre $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$ est en bijection avec l'ensemble \underline{d} (où d est le cardinal de $SNi^*(G)$). Soit ϕ une *numérotation* de cette fibre, c'est-à-dire une bijection de $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$ sur \underline{d} .

Grâce à cette correspondance, on peut dire que $D_{[c]}$ agit sur \underline{d} .

Soit $\lambda \in \Gamma_{0,r}$. Cet élément induit une bijection $\bar{\lambda}$ de la fibre $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$ sur elle-même. De plus, si l'on change le lacet c en le lacet $\lambda(c)$, on obtient un nouveau générateur de l'inertie

$$D_{[\lambda(c)]} = \lambda D_{[c]} \lambda^{-1}$$

On peut vérifier que l'action de $D_{\lambda[c]}$ sur \underline{d} pour la numérotation ϕ de la fibre $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$ coïncide avec l'action de $D_{[c]}$ sur \underline{d} pour la numérotation $\bar{\lambda} \circ \phi$ de $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$.

De plus, comme

$$\text{Cen}(D_{\lambda[c]}) = \lambda \text{Cen}(D_{[c]}) \lambda^{-1}$$

l'action de $\text{Cen}(D_{\lambda[c]})$ sur ${}_{D_{\lambda[c]}} \backslash \underline{d}$ pour la numérotation ϕ de $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$ coïncide avec celle de $\text{Cen}(D_{[c]})$ sur ${}_{D_{[c]}} \backslash \underline{d}$ pour la numérotation $\bar{\lambda} \circ \phi$ de $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$.

Par conséquent, on a le résultat suivant :

Fait. — Changer la classe $[c]$ en la classe $\lambda([c])$ revient, tant pour l'énumération de $\overline{\pi}^{-1}(\underline{b})$ que pour celle des composantes irréductibles de Δ^I , à changer la numérotation ϕ de la fibre $\overline{\pi}^{-1}(\underline{a})$ par $\overline{\lambda} \circ \phi$.

3.4.3. Choix cohérent de générateurs de l'inertie. — Nous avons vu une description combinatoire de la fibre de π en un point géométrique de U^r (au moyen des classes de Nielsen). Nous avons aussi vu comment calculer la ramification au-dessus d'un diviseur irréductible S^I du bord de U^r , en choisissant l'un quelconque des générateurs de l'inertie autour de S^I .

Le passage d'un de ces générateurs à un autre, qui est une conjugaison, revient à réindexer la fibre par les éléments de $SNi^*(G)$ (cf. la remarque 3.4.8).

Cependant, si l'on a en vue de calculer la ramification dans le corps des modules d'un revêtement, et d'appliquer le théorème 1.3.7 en un point du bord où passent plusieurs de ces composantes, il nous faudra prendre un voisinage étale des points considérés, où le revêtement est localement kummérien généralisé. En particulier, les générateurs de l'inertie le long des différentes composantes commutent. La proposition 3.4.9 montre comment construire des twists qui engendrent l'inertie le long des composantes considérées, et qui commutent deux à deux. La définition 3.4.11 arrête un choix de tels générateurs pour la suite.

Le théorème 1.3.5 impose de surcroît que ce choix soit cohérent. Nous montrerons dans un second paragraphe que ces twists conviennent (et qu'il est donc inutile de les conjuguer ou d'en prendre une puissance par un élément de $\hat{\mathbb{Z}}^\times$).

3.4.3.1. Choix de générateurs locaux de l'inertie. — Il est facile, étant donnée une situation combinatoire précise (arbre stable), de choisir des twists sarments commutant deux à deux pour ces contraintes combinatoires.

Proposition 3.4.9. — *Pour tout point complexe du bord de U^r , on peut choisir des générateurs de l'inertie des diviseurs irréductibles S^I passant par ce point qui commutent deux à deux.*

Démonstration. — On peut traduire le problème de la manière suivante : pour tout arbre stable r -pointé T préalablement fixé, trouver pour tout

I tel que T se contracte en T_I , un choix de twist entourant I de sorte que les twists ainsi choisis commutent deux à deux. Les twists sarments vont permettre de tels choix.

On appelle *arête de i -ème niveau* toute arête de T dont le sommet terminal est éloigné de i de la racine (ainsi, une arête de premier niveau est une arête partant de la racine).

On définit deux relations binaires sur l'ensemble des arêtes de T ; $T_I \leq T_J$ si $I \subset J$, et $T_I \ll T_J$ si $\min I < \min J$. La relation \leq est un ordre, la relation \ll est un ordre pour l'ensemble des arêtes de niveau donné.

On décrit maintenant une procédure de construction de twists commutant deux à deux. De manière informelle, elle consiste à construire les twists dans un certain ordre, à partir de lacets passant sous les points a_i lorsque cela est possible, mais d'intersection nulle avec chaque lacet déjà construit.

Procédure : une fois construits les twists sarments pour les arêtes de niveau i , on construit les twists sarments pour les arêtes de niveau $i + 1$ de la façon suivante :

Soit T_J de niveau i ; l'ensemble des arêtes de niveau $i + 1$ qui sont inférieures pour la relation \leq à T_J est ordonnable pour la relation \ll :

$$T_{I_1} \ll \cdots \ll T_{I_m}$$

Si $D_{[J, J', J'']}$ est le twist sarment déjà associé à T_J , on définit $D_{[I_l, I'_l, I''_l]}$ en définissant I'_l par récurrence sur l :

- pour $l = 1$, $I''_1 = \bar{I}_1 \cap J''$
- pour $l \in \{2, \dots, m\}$, $I''_l = (\bar{I}_l \cap J'') \cup (\cup_{I' < I_l} (I' \cap \bar{I}_l))$

Pour tout twist $D_{[I_l, I'_l, I''_l]}$ ainsi construit, on peut choisir un chemin c_{I_l} de sorte que $D_{c_{I_l}} = D_{[I_l, I'_l, I''_l]}$, et que c_{I_l} soit d'intersection nulle avec c_J et avec $c_{I_{l'}}$, pour tout $l' \neq l$. De plus, il est clair que c_L et $c_{L'}$ sont séparés par c_{I_l} , dès lors que $T_L \leq T_{I_l}$ et que $T_L \not\leq T_{I_l}$.

Ceci entraîne la commutation entre deux twists $D_{[I, I', I'']}$ et $D_{[J, J', J'']}$ ainsi construits : en effet, considérons l'embranchement S des sommets initiaux de T_I et de T_J , et les arêtes T_I^0 et T_J^0 au-dessus de ces arêtes et de sommet initial S . Ces deux arêtes sont bien sûr distinctes (par définition de l'embranchement). On a $T_I \leq T_I^0$, et $T_J \not\leq T_I^0$: $D_{[I, I', I'']}$ et $D_{[J, J', J'']}$ commutent donc bien. \square

Remarque 3.4.10. — La procédure que nous avons décrite permet un choix compatible de générateurs de l'inertie au voisinage d'un point du bord de U^r . Il existe bien entendu beaucoup d'autres choix. Nous allons d'ailleurs en décrire ici un autre, que l'on obtiendra par le biais d'une étape préliminaire à cette procédure. Cet autre choix est motivé par le fait que les twists que nous allons construire ne concerneront pas 1, et donc que, étant donné un représentant d'une classe de Nielsen quelconque \underline{g} , et un mot M en ces twists, le représentant de $M.\underline{g}$ que l'on obtient par la formule 3.4.12 vérifiera $g'_1 = g_1$. Cette propriété facilitera grandement la preuve du fait que si M est mot non vide en ces twists, il n'est pas équivalent au mot trivial (cf. l'annexe).

Étape préliminaire (facultative). Soit T un arbre stable à racine distinguée quelconque. Cette étape consiste à prouver que pour effectuer un choix compatible de générateurs de l'inertie, on peut se ramener canoniquement à effectuer un tel choix pour un arbre (stable) dont la racine est marquée par 1. Le procédé entraîne incidemment que la racine de ce nouvel arbre est stable.

On explique d'abord comment se ramener à un arbre dont même la racine est stable :

Si la racine n'est pas un sommet stable, c'est que l'on est dans l'une des deux situations suivantes : la racine n'est pas marquée et deux arêtes seulement en partent (on les nomme T_{I_0} et T_{cI_0}), ou alors la racine est marquée par au plus un point, et une seule arête en part (on la nomme $T_{\underline{r}}$ où $T_{\underline{r}-\{i_0\}}$ selon le cas).

Dans le premier cas, on change T en n'importe lequel des deux arbres obtenus en contractant l'une des arêtes partant de la racine. Dans le deuxième, on change T en l'arbre obtenu en contractant l'arête partant de la racine (et on est éventuellement revenu au premier cas). Soit T' l'arbre obtenu. Quel est le lien entre les T'_I et les T_I ? Dans le premier cas, on a fait disparaître une indexation par I_0 ou cI_0 , mais on a gardé l'autre indexation. Dans l'autre cas on a fait disparaître l'indexation par \underline{r} ou $\underline{r} - \{i_0\}$.

Or dans le premier cas, on sait que S^{I_0} et $S^{(cI_0)}$ ont les mêmes générateurs de l'inertie, et il suffit donc d'en préciser un seul (l'autre lui sera

égal). Dans le second cas, on sait qu'il n'y a précisément pas d'inertie autour de S^z comme de $S^{(z-\{i_0\})}$. L'élément correspondant sera trivial.

On montre maintenant comment on peut se ramener à un arbre stable marqué par 1 :

On vient de voir que l'on pouvait toujours supposer que T était un arbre stable à racine distinguée et stable (quitte à changer T en T'). Le fait de changer la racine en le sommet marqué par 1 nous donne encore un arbre stable à racine distinguée, que l'on nomme T'' . En revanche, il est tout à fait possible que les indexations des arêtes diffèrent (c'est le cas dès que l'on a effectivement changé de racine). On est tout simplement passé de l'indexation I à cI si 1 appartenait à I , et on n'a changé aucune autre indexation. Comme S^I et $S^{({}^cI)}$ ont les mêmes générateurs, il est très simple de passer d'un choix cohérent de générateurs de l'inertie associé à l'arbre T'' à un tel choix pour l'arbre T .

Définition 3.4.11. — Soit T un arbre-graphe stable à racine distinguée. Soit T'' l'arbre-graphe stable obtenu par l'étape préliminaire décrite à la remarque précédente. Nous noterons D_I^T le twist associé à T_I'' dans cette procédure, et B^T le sous-groupe de $\Gamma_{0,r}$ engendré par ces twists.

3.4.3.2. Action d'un mot de B^T . — Soit $D_I^T = D_{[I,I',I'']}$ un twist défini en 3.4.11. Nous avons donné en 3.3.3 l'action à toute puissance d'un tel twist.

Notons par $\alpha_I(i)$ et $\beta_I(i)$ les éléments suivants :

- $\alpha_I(i) = \beta_I(i) = 1$ si $i \in I'$;
- $\alpha_I(i) = \left(q_{i \xrightarrow{1} I \xrightarrow{r} i} \right)$ et $\beta_I(i) = 1$ si $i \in I$;
- $\alpha_I(i) = \left(q_{i \xrightarrow{1} I \xrightarrow{r} i} \right)$ et $\beta_I(i) = \left(q_{i \xrightarrow{1} I' \xrightarrow{r} i} \right)$ si $i \in I''$.

en sorte que pour tout i , et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(D_I^T)^n . q_i = (\alpha_I(i))^n (\beta_I(i))^n q_i$$

Examinons un peu la preuve de la proposition 3.3.3 : l'idée consistait à calculer l'action de ce twist sur q_i en déformant le lacet $a_{[I,I',I'']}$ (qui a permis de définir le twist sarment $D_I^T = D_{[I,I',I'']}$), de telle sorte que le nouveau lacet soit d'intersection nulle avec b_i . Dans le cas où $i \in I''$, on a changé la portion de $a_{[I,I',I'']}$ la plus basse passant sous a_i , en la

faisant contourner a_0 . Puis on a fait de même avec l'autre portion. Cette stratégie s'étend aisément au cas de plusieurs twists D_I^T :

Il existe un choix de chemins c_I^T tels que :

- $D_{[c_I^T]} = D_I^T$;
- les chemins c_I^T ne se croisent pas.

Pour un tel choix, et pour i fixé on définit un ordre sur les $\alpha_I(i)$ et $\beta_I(i)$ (I variant), en associant à chaque $\alpha_I(i)$ (resp. $\beta_I(i)$) la branche de c_I^T la plus basse (resp. la plus haute) passant au-dessous ou au-dessus de i , et en considérant l'altitude de ces branches.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.4.12. — *L'action du mot*

$$\prod (D_I^T)^{n_I}$$

sur q_i est égale à la conjugaison par

$$\prod \gamma_I(i)^{n_I}$$

où $\gamma_I(m)$ décrit les $\alpha_I(m)$ et $\beta_I(m)$, et où le produit s'effectue dans l'ordre que l'on vient de définir.

3.4.3.3. Cohérence du système (D_I^T) des générateurs de l'inertie. — On montre dans ce paragraphe que le choix des D_I^T fournit un choix cohérent de générateurs de l'inertie. Ceci est motivé par la situation suivante :

Soit G un groupe fini. On considère un espace de Hurwitz H' , associé à ce groupe G (et à d'autres invariants). Soit R un anneau hensélien complet de corps des fractions K de caractéristique 0 et de corps résiduel k de caractéristique positive q ne divisant pas l'ordre de G . Soit $s : \text{Spec}(R) \rightarrow \overline{U}'$ une section sur \overline{U}' . Le revêtement $\pi : \overline{H}' \rightarrow \overline{U}'$ est modérément ramifié sur $\text{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{|G|}\right]\right)$, le long de diviseurs à croisements normaux S^I .

On souhaite appliquer dans le prochain chapitre les résultats du premier chapitre à cette situation, c'est-à-dire décrire l'inertie du revêtement restreint $s^*(\tilde{\pi})$.

Pour pouvoir appliquer le théorème 1.3.5, on doit s'être donné un choix cohérent (cf. la définition 1.2.3) de générateurs de l'inertie. Le but de ce paragraphe est de montrer que les twists D_I^T définis en 3.4.11 forment un

tel choix cohérent. Remarquons que ce choix ne dépend en fait que du type combinatoire du point du bord sur lequel on se place.

Nous allons d'abord prouver que ces générateurs forment un système cohérent au voisinage d'un point complexe du bord de \bar{U}^r . Cela résultera d'une généralisation du lemme 3.4.1, décrivant un moyen d'obtenir un voisinage "tubulaire" d'un tel point se trouvant à l'intersection de plusieurs diviseurs S^I . La proposition 1.2.4 permettra de conclure que ces twists fournissent un choix cohérent au voisinage d'un point du bord de \bar{U}^r défini sur un corps de caractéristique positive.

Posons $\mathbf{a} = (1, \dots, r)$, et soit T un arbre-graphe stable à r points marqués (et à racine distinguée) tel que ses arêtes t_{I_1}, \dots, t_{I_m} soient indexées par des sous-ensembles pleins (*i.e.* constitués d'entiers consécutifs). On se fixe une carte affine de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$. Pour toute arête t_I de T , on pose

$$a_I := \frac{\sum_{i \in I} a_i}{|I|}$$

On fixe des rayons $r_I > 0$ tels que les cercles $\mathcal{C}_I := \mathcal{C}(a_I, r_I)$ soient disjoints, et chaque cercle \mathcal{C}_I entoure les points $a_i, i \in I$ (un tel choix de rayons existe toujours). Pour toute arête t_I de T , on note \mathbf{D}_I le disque ouvert de centre a_I et de rayon r_I .

Dénotons par U^T le sous-ensemble de $U^r(\mathbb{C})$ constitué des points $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)$ tels que, pour tout i appartenant à \underline{r} , u_i appartient au disque \mathbf{D}_I si et seulement si $i \in I$.

Pour tout élément \mathbf{u} de U^T , on définit l'application holomorphe

$$\varphi_{\mathbf{u}}^T : (\mathbf{D} - \{0\})^m \rightarrow U^r$$

$$\mathbf{z} = (z_{I_1}, \dots, z_{I_m}) \mapsto (\varphi_{\mathbf{u}, i}^T(z_{I_1}, \dots, z_{I_m}))_{1 \leq i \leq r}$$

par la formule suivante : pour tout $i \in \underline{r}$, soit $I_i^0 \supset I_i^1 \supset \dots \supset I_i^{l_i}$ les paquets contenant i , rangés par ordre décroissant ; on pose

$$\varphi_{\mathbf{u}, i}^T(\mathbf{z}) = a_{I_i^0} + (a_{I_i^1} - a_{I_i^0}) z_{I_i^0} + \dots + (u_i - a_{I_i^{l_i}}) z_{I_i^0} z_{I_i^1} \dots z_{I_i^{l_i}}$$

Remarque 3.4.13 (Interprétation géométrique de φ^T)

On fixe m nombres complexes non nuls $z_{I_j} = \nu_{I_j} e^{2i\pi\theta_{I_j}}$ du disque unité. Soit ρ_{I_j} la similitude de centre a_{I_j} , d'angle θ_{I_j} et de rapport ν_{I_j} . Alors,

pour tout $i \in \mathcal{I}$, le nombre complexe $\varphi_{\mathbf{u},i}^T(\mathbf{z})$ est l'affixe du point du plan complexe, image du point d'affixe u_i par la similitude

$$\rho_{I_i^0} \rho_{I_i^1} \cdots \rho_{I_i^{l_i}}$$

Définition 3.4.14. — Pour tout arbre-graphe stable T' (à r points marqués et à racine distinguée), on note par $S_0^{T'}$ le diviseur $S^{T'}$ (voir la définition 3.1.18), privé de ses intersections avec les diviseurs S^J , pour tout J tel qu'aucune arête de T' ne soit indexée par J .

On est maintenant en mesure d'énoncer le

Lemme 3.4.15. — Pour tout $\mathbf{u} \in U^T$, l'application $\varphi_{\mathbf{u}}^T$ se prolonge de manière unique en une application holomorphe

$$\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}}^T : \mathbf{D}^m \rightarrow \bar{U}'$$

Pour tout $\mathbf{z} \in \mathbf{D}^m$, le point $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}}^T(\mathbf{z})$ appartient à $S_0^{T'}$, où T' est le contracté de T en toutes ses arêtes t_I telles que z_I ne soit pas nul.

En particulier, le point $\varphi_{\mathbf{u}}^T(0)$ est un point de S_0^T .

Plus précisément, ce dernier point est l'arbre stable (C, ϕ) de droites projectives à racine distinguée, de type combinatoire T , tel que, pour chaque composante C_I , il existe un isomorphisme μ_I de cette composante sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, tel que

- si i marque t_I , alors $\mu_I(\phi_i) = u_i$;
- si x_{C_I} est la projection de la composante mère de C_I sur C_I , alors $\mu_I(x_{C_I}) = \infty$;
- si $x_{I'}$ est la projection d'une composante fille $C_{I'}$ sur C_I , alors

$$\mu_I(x_{I'}) = a_{I'}$$

Enfin, tout chemin $\gamma = (\gamma_{I_i})_{1 \leq i \leq m}$ dans U^T induit un voisinage "tubulaire" d'un point de S_0^T dans \bar{U}' .

Démonstration. — Pour simplifier la preuve, on peut supposer que les z_I ne tendant pas vers 0 sont égaux à 1. Il est alors facile de vérifier que $\varphi_{\mathbf{u}}^T$ coïncide avec $\varphi_{\mathbf{u}}^{T'}$, où T' est le contracté de T en toutes ses arêtes t_I telles que $z_I = 1$. On est donc ramené à prouver le résultat lorsque tous les z_I tendent vers 0.

On montre qu'un birapport λ_w tend vers 0 (lorsque les z_I tendent vers 0) si et seulement si w sépare au moins une arête de T .

Soit i et j deux éléments de \mathcal{I} . Soit $\sigma_{I_k}^0$ l'embranchement des deux sommets σ_{I_i} et σ_{I_j} . Alors on a l'équivalence suivante (lorsque les z_I tendent vers 0) :

$$\varphi_{\mathbf{u},i}^T(\mathbf{z}) - \varphi_{\mathbf{u},j}^T(\mathbf{z}) \sim z_{I_1}^0 \dots z_{I_k}^0 \left(a_{I_{k+1,i}^0} - a_{I_{k+1,j}^0} \right)$$

où $I_{k+1,i}^0$ et $I_{k+1,j}^0$ désignent le paquet de coalescence suivant I_k^0 , contenant respectivement i et j .

Si le quadruplet w n'est séparé par aucune arête de T , on peut supposer que $\sigma_{w_4,w_2} = \sigma_{w_4,w_3}$, et que $\sigma_{w_1,w_2} = \sigma_{w_1,w_3}$ (il suffit en effet de considérer l'embranchement des quatre points σ_{w_i} , $1 \leq i \leq 4$). Le birapport tend donc vers une constante non nulle.

Si au contraire le quadruplet w est séparé par au moins une arête t_I , le birapport est équivalent à un multiple de z_I (par une constante non nulle, et éventuellement par d'autres variables $z_{I'}$). En effet, le sommet final de t_I n'est l'embranchement que d'une seule paire de sommets σ_i , $1 \leq i \leq 4$. En tout état de cause, ce birapport tend vers 0.

Si on considère un quadruplet *distinguant* une arête t_I (cf. la définition 3.1.15), le birapport est équivalent à un multiple de z_I (par une constante non nulle). Des calculs identiques à ceux effectués dans la preuve du lemme 3.4.1 permettent la description du point du bord obtenu annoncée. \square

Dans un voisinage tubulaire défini à l'aide de ce lemme, on définit, pour toute arête t_I de T , le lacet

$$\begin{aligned} c_{I_j} &: [0; 1] \rightarrow U^r \\ \theta &\mapsto \varphi_{\mathbf{a}}^T(1, \dots, 1, e^{2i\pi\theta}, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

C'est un générateur de l'inertie autour de S^{I_j} . Ce lacet représente une tresse qui se relève en le twist rectangle D_{I_j} . Le résultat suivant permettra de conclure que ces twists forment un choix cohérent :

Lemme 3.4.16. — *Soit Λ un revêtement kummérien*

$$\Lambda : \text{Spec} \left(\mathbb{C}[V_1, \dots, V_m] / (V_j^{e_j} - U_j)_{1 \leq j \leq m} \right) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[U_1, \dots, U_m])$$

Alors les lacets $c_j : \theta \mapsto e^{2i\pi\theta} U_j$ définissent un choix cohérent de générateurs de l'inertie dans le revêtement Λ .

Le lemme 3.4.15, ajouté à ce dernier lemme, et au fait que le birapport λ_I est égal à z_I (à un facteur non nul près, voir la preuve du lemme 3.4.15), prouve que les twists rectangles D_{I_j} forment un choix cohérent au voisinage d'un point de S_0^T .

Pour un autre point du bord de \bar{U}' , associé à un arbre de coalescence quelconque, nous avons défini un choix de twists sarments commutant deux à deux. Il existe un choix de lacets définissant ces twists, ne se rencontrant pas. On se ramène alors au cas précédemment traité, en conjuguant la sphère de Riemann par un homéomorphisme (laissant l'ensemble $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ globalement invariant) envoyant chacun de ces lacets sur un cercle du type \mathcal{C}_I .

On a donc obtenu le résultat suivant :

Proposition 3.4.17. — *Pour tout arbre-graphe T , les twists D_I^T forment un système local cohérent de générateurs de l'inertie autour de tout point complexe du bord de \bar{U}' .*

Comme nous l'avons dit plus haut, la proposition 1.2.4 prouve que la proposition 3.4.17 reste valable pour un point de \bar{U}' défini sur un corps de caractéristique positive.

CHAPITRE 4

RAMIFICATION DANS LE CORPS DES MODULES

Fixons deux entiers d et r , un groupe fini $G \hookrightarrow S_d$, et un r -uplet de classes de conjugaison $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$ d'éléments de G . Considérons la catégorie \mathcal{C} des (G -)revêtements de la droite projective, de degré d , de monodromie $G \hookrightarrow S_d$, à r points de branchement (ordonnés), et d'inertie $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$.

On se donne un corps de nombres K sur lequel chaque classe C_i est rationnelle, ainsi que r points distincts a_1, \dots, a_r de \mathbb{P}_K^1 .

Notons par $[f_1], \dots, [f_l]$ les différentes classes d'isomorphie de revêtements de \mathcal{C} ramifiés en a_1, \dots, a_r . Soit M_i le corps des modules de f_i relativement à K .

Ce chapitre est consacré à une application des résultats précédemment obtenus à l'étude de la ramification dans les extensions M_i/K d'une place v ne divisant pas l'ordre de G . Le cas où les points de branchement a_1, \dots, a_r ne coalescent pas en v est bien connu : c'est le résultat de Beckmann affirmant qu'une telle place ne se ramifie pas dans M_i/K (et ce pour tout $i \in \underline{l}$).

On commence ce chapitre par une démonstration de ce fait (théorème 4.1.3), s'appuyant sur la géométrie et l'arithmétique de l'espace de Hurwitz et du revêtement $\pi : H \rightarrow U_r$.

Nous allons considérer ensuite le cas où les points de branchement coalescent en v , et nous aurons besoin du revêtement $\bar{\pi} : \bar{H}' \rightarrow \bar{U}^r$ (et non plus seulement du revêtement π). L'idée consistera à considérer la restriction du revêtement modéré $\bar{\pi}$, en suivant ce qui a été fait en 1.3, et

en utilisant la paramétrisation locale du paragraphe 3.1.23. Le résultat principal est le théorème 4.1.5.

Le deuxième paragraphe de ce chapitre sera consacré à une étude de l'exemple des groupes diédraux.

4.1. Ramification dans le corps des modules

4.1.1. Bonnes places du corps des modules. — On rappelle d'abord ici les définitions d'une bonne et d'une mauvaise place. La preuve ne nécessite pas que les points de branchement soient ordonnés.

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ un (G-)revêtement de la droite projective de points de branchement a_1, \dots, a_r . On suppose que f est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Soit K le corps de rationalité du diviseur de branchement $(a_1) + \dots + (a_r)$; on a $K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$. Soit M le corps des modules de f relativement à $\overline{\mathbb{Q}}/K$.

Définition 4.1.1. — Une *bonne place* est une place v de K vérifiant les deux conditions :

- $v \nmid |G|$ (où G est le groupe de monodromie du (G-)revêtement),
- le diviseur $(a_1) + \dots + (a_r)$ s'étend en un diviseur lisse sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$ (où \mathcal{O}_v est l'anneau de valuation discrète du complété en v de K).

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque v divise $|G|$ ou que les points branchements coalescent modulo v , la place v est dite *mauvaise*.

Remarque 4.1.2. — Il n'y a qu'un nombre fini de mauvaises places.

Montrons le résultat de Beckmann :

Théorème 4.1.3. — *Le corps des modules M ne peut être ramifié qu'en de mauvaises places.*

Démonstration. — La preuve que nous donnons est inspirée de [CL]. Au (G-)revêtement f sont associés les invariants classiques : degré, lieu de branchement, groupe de monodromie, et invariant d'inertie. On note H l'espace de Hurwitz pour ces invariants.

Notons S_K l'ensemble (fini) des mauvaises places de K . On note \mathcal{O}_K (resp. \mathcal{O}_M) l'anneau des entiers de K (resp. M) sur \mathbb{Z} . Le localisé de cet anneau se note $\mathcal{O}_K[S_K^{-1}]$.

L'ensemble des points de branchement définit un K -point a de U_r ; il s'étend en une section \underline{a} de U_r définie sur $\mathcal{O}_K[S_K^{-1}]$. Le point h de H associé à f est rationnel sur M :

$$\text{Spec}(M) \xrightarrow{h} H$$

Soit v une bonne place de K , et w une place de M au-dessus de v . On note \mathcal{O}_{K_v} (resp. \mathcal{O}_{M_w}) le localisé et complété de $\mathcal{O}_K[S_K^{-1}]$ (resp. \mathcal{O}_M) en v (resp. en w). Les corps des fractions sont notés respectivement K_v et M_w . On note \underline{a}_v la restriction de \underline{a} modulo v , et h_w le point M_w -rationnel de H déduit de h .

Le revêtement $H \rightarrow U_r$ étant étale, le morphisme

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) \times_{U_r} H \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v})$$

induit par le morphisme $\text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) \rightarrow U_r$ provenant de \underline{a} est aussi étale. Il est fini, car propre. L'anneau \mathcal{O}_{K_v} est hensélien : $\text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) \times_{U_r} H$ est donc isomorphe à un schéma $\text{Spec}(A)$, où $A = \prod_{i \in I} A_i$ est un produit (fini) de \mathcal{O}_{K_v} -algèbres finies A_i .

Comme le morphisme $H \rightarrow U_r$ est propre, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(M_w) & \rightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) & \rightarrow & U_r \end{array}$$

produit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathcal{O}_{M_w}) & \rightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) & \rightarrow & U_r \end{array}$$

Ce dernier diagramme induit un morphisme

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_{M_w}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) \times_{U_r} H \simeq \text{Spec}(A)$$

de variétés affines au-dessus de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v})$. Il lui correspond un morphisme de \mathcal{O}_{K_v} -algèbres finies

$$\prod_{i \in I} A_i \rightarrow \mathcal{O}_{M_w}$$

Ce morphisme est nécessairement nul sur toutes les composantes A_i sauf une, que l'on note A_{i_0} . Le morphisme restreint à A_{i_0} réalise un

morphisme injectif $\varphi_0 : A_{i_0} \rightarrow \mathcal{O}_{M_w}$. Comme le corps des fractions de A_{i_0} est le corps résiduel de h_w , à savoir M_w , φ_0 est un isomorphisme.

Le morphisme $\text{Spec}(\mathcal{O}_{M_w}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) \times_{U^r} H$ est donc une immersion ouverte; la composition

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_{M_w}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) \times_{U^r} H \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v})$$

est donc étale. On en conclut qu'il n'y a pas de ramification en la bonne place v dans l'extension M/K . \square

Remarque 4.1.4. — Il convient de remarquer que cette preuve du théorème de Beckmann, si elle diffère dans son approche de la preuve originale, utilise des résultats puissants concernant les espaces de Hurwitz, lesquels sont eux-mêmes prouvés par des méthodes proches, dans l'esprit, de celles de S. Beckmann. Il faut donc voir cette preuve comme une illustration de la richesse arithmétique des espaces de Hurwitz.

4.1.2. Mauvaises places ne divisant pas l'ordre de G . — On suppose dans ce paragraphe que les points de branchement coalescent en v : l'arbre de coalescence T_v des points de branchement en v n'est pas réduit à la racine. Rappelons que cet arbre est muni d'une valuation θ_v , dépendant des ordres de coalescence des points de branchement (cf. la définition 3.1.22).

Soit H' l'espace de Hurwitz associé à la catégorie \mathcal{C} , et π le revêtement naturel $H' \rightarrow U^r$, et $SNi^*(\mathbf{C})$ l'ensemble des classes de Nielsen associé. Posons $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_r)$. La fibre $\pi^{-1}(\mathbf{a})$ est en bijection avec l'ensemble $\{[f_1], \dots, [f_i]\}$. De plus, le corps de rationalité de chacun de ces points est le corps des modules correspondant.

Soit \mathcal{O}_K l'anneau des entiers de K , et \mathcal{O}_{K_v} le localisé de \mathcal{O}_K en v ; on note par π_v une uniformisante de cet anneau. Le point \mathbf{a} de U^r s'étend en une section

$$s : \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) \rightarrow \overline{U}^r$$

dont l'image de la fibre spéciale appartient au bord de \overline{U}^r .

Le normalisé du morphisme tiré par cette section

$$s^*(\pi) : \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) \times_{\overline{U}^r} \overline{H}' \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v})$$

est la restriction de $\bar{\pi}$ à s . La fibre $\pi^{-1}(\mathbf{a})$ est le spectre de la K -algèbre finie $\prod_{i \in I} M_i$. La fibre générique de $s^*(\pi)$, qui est la fibre tirée de $\pi^{-1}(\mathbf{a})$ par le morphisme $\text{Spec}(K_v) \rightarrow \text{Spec}(K)$, est le spectre de la K -algèbre étale $\prod_{i \in I} \prod_{w_{i,j}|v} M_{i,w_{i,j}}$, où les $w_{i,j}$ parcourent les places de M_i divisant v , et $M_{i,w_{i,j}}$ désignant le complété de M_i en la place $w_{i,j}$.

Par ailleurs, on sait d'après le théorème d'Abhyankar que ce revêtement est l'union disjointe de plusieurs revêtements kummériens généralisés. On a donné en 1.3 (théorème 1.3.7) un générateur local de l'inertie d'un revêtement modérément ramifié restreint à une section, en fonction de certains générateurs de l'inertie des différents diviseurs passant par ce point. Ici, les générateurs de l'inertie que nous avons choisis sont les D_I^T . On sait que les ordres d'intersection sont donnés par la valuation θ des arêtes du type combinatoire du point considéré (cette valuation est définie en 3.1.22). Nous avons prouvé en 3.4.3.3 que ce choix de générateurs est cohérent (cf. la définition 1.2.3); si l'on appelle ω -orbite les orbites de $SNi^*(\mathbf{C})$ sous l'action du mot

$$\omega := \prod_I (D_I^T)^{\theta(t_I)}$$

alors l'ensemble des places au-dessus de v est en bijection avec les ω -orbites de $SNi^*(\mathbf{C})$, les indices de ramification étant donnés par les cardinaux de ces ω -orbites.

Ceci nous amène au résultat suivant :

Théorème 4.1.5 (principal). — *L'ensemble des places au-dessus de v dans les différents corps des modules M_i est en bijection avec l'ensemble des ω -orbites de $SNi^*(\mathbf{C})$. De plus, l'indice de ramification d'une telle place est égal au cardinal de la ω -orbite lui correspondant.*

Notez que la formule 3.4.12 donne une description combinatoire précise des ω -orbites. Le théorème 4.1.5 est donc effectif.

Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante pour que v ne se ramifie dans aucun des corps des modules M_i :

Corollaire 4.1.6. — *La place v ne se ramifie dans aucun des corps des modules M_i si et seulement si l'action du mot*

$$\prod_I (D_I^T)^{\theta(t_I)}$$

sur $SNi^*(\mathbf{C})$ est triviale.

Le cas particulier suivant donne une condition suffisante évidente pour que la place v ne se ramifie dans aucun des M_i . On verra au paragraphe suivant, consacré à l'exemple des groupes diédraux, que cette condition peut aussi être nécessaire.

Corollaire 4.1.7. — *Pour tout I , soit n_I le plus petit commun multiple des indices de ramification des composantes de Δ_I au-dessus de S^I (c'est aussi l'ordre de l'action de D_I^T sur l'ensemble des classes de Nielsen). L'arbre de coalescence T_v des points a_1, \dots, a_r en v est valué par θ (définition 3.1.22).*

Si, pour tout arête t_I de l'arbre T_v , le nombre n_I divise $\theta(t_I)$, alors la place v n'est ramifiée dans aucune extension M_i/K ($i \in \underline{I}$).

Remarquons que si un des revêtements kummériens généralisés décrivant localement π en \mathbf{a} est en fait kummérien de groupe $\oplus_I (\mathbb{Z}/e_I\mathbb{Z})$, cette condition est en fait nécessaire.

En effet, pour un revêtement kummérien (non généralisé), l'indice de ramification de chaque composante irréductible du revêtement restreint est égal à E , où

$$E = \text{ppcm}_I \left(\frac{n_I}{(n_I, m_I)} \right)$$

(I parcourant les paquets de coalescence des points de branchement).

Pour étudier localement le revêtement $\bar{\pi}$ en \mathbf{a}_v , et le séparer en plusieurs revêtements kummériens généralisés, on est amené à considérer les B^T -orbites de $SNi^*(\mathbf{C})$. Le groupe de monodromie de chacun de ces revêtements est isomorphe à un quotient du groupe $\oplus_I (\mathbb{Z}/e_I\mathbb{Z})$. Ce quotient dépend des relations entre les actions des différents twists D_I^T sur $SNi^*(\mathbf{C})$. Il se peut qu'une de ces relations provienne déjà d'une relation entre ces twists : on sait par exemple que si le cardinal de I est égal à r ou $r - 1$, le générateur D_I^T est trivial, ou encore que si des paquets complémentaires $\{a_i\}_{i \in I}$ et $\{a_j\}_{j \in J}$ coalescent séparément en v , alors $D_I^T = D_J^T$. La proposition suivante assure que toute autre relation se déduit de ces exemples (la preuve de cette proposition est reportée en annexe (en B.0.1), car elle s'appuie sur l'exemple non encore traité des groupes diédraux) :

Proposition. — *Le groupe B^T défini en 3.4.11, admet la présentation suivante :*

- *générateurs : les D_I^T*
- *relations :*
 - $D_I^T \cdot D_J^T = D_J^T \cdot D_I^T$,
 - et si il y a lieu*
 - $D_I^T = e$ *si I est de cardinal $r - 1$ ou r*
 - $D_I^T = D_J^T$ *si I et J sont complémentaires dans \underline{r}*

Le cas où l'un des twists est trivial ne change rien aux indices de ramification. Le cas où deux paquets complémentaires indexés par I_1 et I_2 coalescent conduit à considérer les groupes de monodromie comme des quotients du groupe $\bigoplus_{I \neq I_1} (\mathbb{Z}/n_I \mathbb{Z})$, et les orbites de $SNi^*(\mathbb{C})$ sous l'action sur mot $D_{I_2}^{\theta(t_{I_1})+\theta(t_{I_2})} D_{I_3}^{\theta(t_{I_3})} \dots D_{I_k}^{\theta(t_{I_k})}$ de $\Gamma_{0,r}$.

4.2. L'exemple des groupes diédraux

Les groupes diédraux sont les groupes finis engendrés par deux involutions. Cette qualité en fait des groupes réalisables régulièrement sur $\mathbb{R}(T)$ avec des points de branchement réels (voir l'article [DF90] de P. Dèbes et de M. Fried). Il est donc sensé de chercher à les réaliser régulièrement sur $\mathbb{Q}(T)$ avec des points de branchement rationnels. Cette recherche est motivée par les commentaires suivants.

P. Dèbes et M. Fried ont montré que la réalisation régulière de D_p sur $\mathbb{Q}(T)$, où p est un nombre premier supérieur à 7, nécessite au moins six points de branchement. La preuve utilise notamment un théorème de Mazur (théorème 3 de [Ser77], ou [MS76]). Le résultat et le caractère profond de la preuve contrastent avec le fait que tout groupe symétrique (cf. le paragraphe 7.4.1 de [Ser92]), mais aussi le Monstre par exemple (cf. 7.4.7, [Ser92]), peuvent être réalisés régulièrement sur $\mathbb{Q}(T)$ avec seulement trois points de branchement. Cela a amené les auteurs à formuler la conjecture suivante :

Conjecture 4.2.1. — *on ne peut réaliser régulièrement sur $\mathbb{Q}(T)$ qu'un nombre fini de groupes diédraux si l'on fixe une borne au nombre de points de branchement.*

Si l'on se donne un groupe diédral D_p (p premier impair) réalisé régulièrement sur $\mathbb{Q}(T)$ avec r points de branchement, et que l'on note par

C_1, \dots, C_r les invariants canoniques de l'inertie en ces points, on sait que le r -uplet (C_1, \dots, C_r) est rationnel. De deux choses l'une : ou bien ce r -uplet est rationnel car chacune des classes C_i l'est, et alors les points de branchement sont rationnels et leur invariant canonique de l'inertie est la classe des involutions, ou bien ce r -uplet n'est rationnel que globalement, et alors l'un des invariants d'inertie est une classe d'une rotation. Dans ce dernier cas, l'orbite de cette classe de rotation par action du caractère cyclotomique est de cardinal $\frac{p-1}{2}$. La rationalité du r -uplet impose donc $r \geq \frac{p-1}{2}$.

Le cas véritablement pertinent concernant cette conjecture est donc, comme l'ont noté P. Dèbes et M. Fried, le cas où :

D_p est réalisé régulièrement sur $\mathbb{Q}(T)$ avec r points de branchement rationnels, et chaque invariant canonique de l'inertie est la classe des involutions

Nous noterons par \mathbf{C} le r -uplet constitué de la répétition r fois de la classe C des involutions (*i.e.* des symétries).

Les résultats du chapitre précédent permettent de donner la ramification dans le corps des modules au-dessus de tout premier différent de 2 et p . Avant d'effectuer ces calculs de ramification, nous allons étudier plus en détail l'espace de Hurwitz $H'(\mathbf{C})$ associé à la catégorie des revêtements de la droite projective à r points de branchement, de groupe de monodromie D_p , et d'invariant canonique de l'inertie \mathbf{C} . Remarquez que r est nécessairement pair.

4.2.1. Résultats préliminaires sur les groupes diédraux. — Ici, p désignera toujours un nombre premier impair, et r est un nombre pair ≥ 4 .

Nous noterons ρ (resp. σ) une rotation (resp. une symétrie) fixée de D_p , en sorte que D_p admet la présentation suivante :

$$D_p = \langle \rho, \sigma \mid \rho^p = \sigma^2 = e; \sigma\rho\sigma = \rho^{-1} \rangle$$

Les éléments de D_p sont donc, outre l'élément neutre e :

- les symétries $\sigma, \rho\sigma, \dots, \rho^{p-1}\sigma$
- les rotations $\rho, \rho^2, \dots, \rho^{p-1}$

Les formules de conjugaisons, utiles pour la suite, sont les suivantes :

$$(\rho^j\sigma)(\rho^i\sigma) = \rho^{2j-i}\sigma$$

$$(\rho^j)(\rho^i\sigma) = \rho^{i+2j}\sigma$$

$$(\rho^j\sigma)(\rho^i) = \rho^{-i}$$

$$(\rho^j)(\rho^i) = \rho^i$$

Fait. — $H'(\mathbf{C})$ est une composante irréductible de $H'(D_p)$ définie sur \mathbb{Q} .

Démonstration. — Nous allons montrer que le mapping class group $\Gamma_{0,r}$ agit transitivement sur $SNi(\mathbf{C})$.

Soit $(\rho^{\alpha_i}\sigma)_{1 \leq i \leq r}$ et $(\rho^{\beta_i}\sigma)_{1 \leq i \leq r}$ deux représentants de deux éléments de $SNi(\mathbf{C})$. On choisit

$$\beta_i = \beta_{r-i} = \rho^{i-1}\sigma, i \in \{1, \dots, r/2\}$$

et on va prouver par récurrence que cet élément appartient à l'orbite de $(\rho^{\alpha_i}\sigma)_{1 \leq i \leq r}$ sous $\Gamma_{0,r}$.

On formule l'hypothèse de récurrence suivante, pour tout élément k de $\{0, \dots, r\}$:

(*Hyp_k*) Il existe des entiers $\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_r$ tels que

$$(\rho^{\beta_1}\sigma, \dots, \rho^{\beta_k}\sigma, \rho^{\gamma_{k+1}}\sigma, \dots, \rho^{\gamma_r}\sigma)$$

appartienne à l'orbite de $(\rho^{\alpha_i}\sigma)_{1 \leq i \leq r}$ sous $\Gamma_{0,r}$.

La condition (*Hyp₀*) est vide.

Supposons que l'on ait (*Hyp_k*), pour un certain $k \in \{0, \dots, r-1\}$, et montrons (*Hyp_{k+1}*).

Cas 1 : il existe $i > k+1$ tel que γ_{k+1} et γ_i ne soient pas congrus modulo p . Soit m un entier tel que $\gamma_{k+1} + 2m(\gamma_{k+1} - \gamma_i) \equiv \beta_{k+1} \pmod{p}$. On prouve (*Hyp_{k+1}*) par action répétée m fois du twist $D_{[\{k+1,i\}, \emptyset, \{k+2, \dots, i-1\}]}$ sur $(\rho^{\beta_1}\sigma, \dots, \rho^{\beta_k}\sigma, \rho^{\gamma_{k+1}}\sigma, \dots, \rho^{\gamma_r}\sigma)$ (cf. les formules de la proposition 7.6 et le formulaire précédant cette démonstration).

Cas 2 : si $k+1 = r$, il n'y a rien à prouver car g_r est entièrement déterminé par g_1, \dots, g_{r-1} .

Cas 3 : $\gamma_{k+1} \equiv \dots \equiv \gamma_r \pmod{p}$ (et $k + 1 < r$). On a obligatoirement $k \geq 2$.

L'action de

$$D_{[\{2,k+1,k+2\},\emptyset,\{3,\dots,k\}]} D_{[\{1,k+1,k+2\},\emptyset,\{2,\dots,k\}]}$$

sur $(\rho^{\beta_1}\sigma, \dots, \rho^{\beta_k}\sigma, \rho^{\gamma_{k+1}}\sigma, \dots, \rho^{\gamma_r}\sigma)$ a pour unique effet de changer l'élément $\rho^{\gamma_{k+1}}\sigma$ en position $k + 1$ et $k + 2$ en l'élément $\rho^{\gamma_{k+1}+2}\sigma$.

Cas 3.1 : si $k + 2 < r$, on est donc ramené au cas 1.

Cas 3.2 : si $k + 2 = r$, l'action éventuellement itérée de cet élément permet d'obtenir le résultat. □

Décrivons maintenant la ramification dans le revêtement $\bar{\pi}$:

Proposition 4.2.2. — *Le revêtement générique $\bar{\pi}_\eta : \bar{H}_\eta(\mathbf{C}) \rightarrow \bar{U}_\eta^r$ est un revêtement modérément ramifié le long de diviseurs à croisements normaux, de degré $\frac{1}{2}(p^{r-2} - 1)$. Pour tout sous-ensemble I de \underline{r} , de cardinal k compris entre 2 et $r - 2$, tout point \mathbf{b} de S_0^I , la fibre $\bar{\pi}_\eta^{-1}(\mathbf{b})$ est constituée de :*

$\frac{1}{2}(p^{r-3} - 1)$ (resp. $\frac{1}{2}(p^{r-k-1} + p^{k-1} - 2)$) points sur une composante irréductible de Δ^I non ramifiée au-dessus de S^I , et de $\frac{1}{2}(p^{r-3} - p^{r-4})$ (resp. de $\frac{1}{4}(p^{r-2} - p^{r-k-1} - p^{k-1} + 1)$) points sur une composante irréductible de Δ^I d'indice de ramification p (resp. 2) si k est pair (resp. impair).

En particulier, tout générateur de l'inertie D_I le long de S^I est d'ordre p si k est pair, et d'ordre 2 si k est impair (et est trivial si I est de cardinal r ou $r - 1$).

Démonstration. — Le degré de $\bar{\pi}_\eta$ est le cardinal de $SNi^*(\mathbf{C})$. Le nombre de r -uplets (g_1, \dots, g_r) engendrant D_p , et tels que $g_1 \dots g_r = 1$ et $g_1 = \sigma$ est égal à $p^{r-2} - 1$ (en effet, la seule contrainte sur le $(r - 2)$ -uplet (g_2, \dots, g_{r-1}) est qu'il soit différent de (σ, \dots, σ) , et g_r est déterminé par la condition $g_1 \dots g_r = 1$). Comme un élément de $SNi^*(\mathbf{C})$ a exactement deux représentants commençant par σ (d'ailleurs conjugués entre eux par cet élément), le degré de $\bar{\pi}_\eta$ est bien $\frac{1}{2}(p^{r-2} - 1)$.

Pour calculer la ramification au-dessus d'un diviseur irréductible S^I de \bar{U}^r , on se ramène comme précédemment à calculer l'action du twist D_k sur l'ensemble $SNi^*(\mathbf{C})$. On sait que la fibre géométrique d'un point de

S_0^k (i.e. qui appartient à S^I et à ce diviseur seul) est en bijection avec les $D_{\underline{k}}$ -orbites de $SNi^*(\mathbf{C})$, et que l'indice de ramification de la composante irréductible contenant un point donné de la fibre est le cardinal de la $D_{\underline{k}}$ -orbite lui correspondant.

Si k est pair (resp. impair), une $D_{\underline{k}}$ -orbite est triviale ou de cardinal p (resp. triviale ou de cardinal 2). Cela dépend en effet de l'ordre de la conjugaison d'une symétrie par une rotation (si k est pair), ou par une autre symétrie (si k est impair). Il nous suffit donc de calculer le cardinal Ω des éléments de $SNi^*(\mathbf{C})$ invariants sous l'action de $D_{\underline{k}}$.

Soit \underline{g} une classe de Nielsen représentée par (g_1, \dots, g_r) , et telle que

$$D_{\underline{k}} \cdot \underline{g} = \underline{g}$$

Nous allons compter le nombre de telles classes de Nielsen, en effectuant une partition en quatre sous-ensembles Ω_i ($i \in \{1, \dots, 4\}$) -correspondant aux quatre cas traités ci-dessous-, de l'ensemble Ω de ces classes de Nielsen fixées par $D_{\underline{k}}$.

Cas 1 : les cardinaux de $\{g_1, \dots, g_k\}$ et $\{g_{k+1}, \dots, g_r\}$ sont supérieurs ou égaux à 2. Comme $((g_1 \dots g_k g_1), \dots, (g_1 \dots g_k g_k), g_{k+1}, \dots, g_r)$ est un représentant de \underline{g} et que $|\{g_{k+1}, \dots, g_r\}| \geq 2$, on doit avoir, pour tout $i \in \underline{k}$:

$$(g_1 \dots g_k g_i) = g_i$$

Or le cardinal de $\{g_1, \dots, g_k\}$ est supérieur (ou égal) à 2, ce qui impose que $g_1 \dots g_k = 1$.

Si k est impair, ceci est impossible (un produit d'un nombre impair de symétries n'est pas l'identité), et $\Omega_1 = 0$. Si k est pair, et que l'on impose que g_1 soit égal à σ , il y a $p^{k-2} - 1$ choix pour les k premières coordonnées, et $p^{r-k-1} - p$ choix pour les $r - k$ dernières (on s'interdit en effet les p cas où ces dernières coordonnées sont égales). Ces choix étant indépendants (et en tenant compte du fait que \underline{g} a exactement deux représentants commençant par σ), on a

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} p (p^{k-2} - 1) (p^{r-k-2} - 1)$$

Cas 2 : les ensembles $\{g_1, \dots, g_k\}$ et $\{g_{k+1}, \dots, g_r\}$ sont réduits à un singleton.

Si k est impair, on a $\Omega_2 = 0$, car les produits $g_1 \dots g_k$ et $g_{k+1} \dots g_r$ sont inverses, et égaux respectivement à g_1 et g_r , ce qui contredit le fait que D_p est engendré par les g_i .

Si k est pair, on peut toujours imposer que les k premières coordonnées de \underline{g} soient égales à σ , et

$$\Omega_2 = \frac{p-1}{2}$$

Cas 3 : $\{g_1, \dots, g_k\}$ comporte au moins deux éléments, et $\{g_{k+1}, \dots, g_r\}$ est réduit à un singleton.

On peut toujours imposer que les $r-k$ dernières coordonnées de \underline{g} soient égales à σ .

Si k est impair, on doit choisir les k premières coordonnées de telles sorte que $g_1 \dots g_k = \sigma$. Il est facile de voir que les $k-1$ premières coordonnées ont pour unique condition de ne pas être toutes égales à σ :

$$\Omega_3 = \frac{1}{2} (p^{k-1} - 1)$$

Si k est pair, la condition que doivent vérifier les $k-1$ premières coordonnées est de ne pas être toutes égales :

$$\Omega_3 = \frac{1}{2} (p^{k-1} - p)$$

Cas 4 : $\{g_1, \dots, g_k\}$ est réduit à un singleton, et $\{g_{k+1}, \dots, g_r\}$ comporte au moins deux éléments.

C'est le cas dual du troisième : si k est impair, on a

$$\Omega_4 = \frac{1}{2} (p^{r-k-1} - 1)$$

et si k est pair,

$$\Omega_4 = \frac{1}{2} (p^{r-k-1} - p)$$

Ces dénombrements nous donnent le cardinal de Ω :

Si k est impair,

$$\Omega = \frac{1}{2} (p^{k-1} + p^{r-k-1} - 2)$$

Si k est pair, on remarque, en développant

$$((p^{k-2} - 1) + 1) ((p^{r-k-2} - 1) + 1)$$

que

$$\Omega = \frac{1}{2} (p^{r-3} - 1)$$

On trouve enfin le nombre Ω' de points de la fibre appartenant à une composante ramifiée d'indice 2 (resp. p) si k est impair (resp. pair), en remarquant que $\Omega + 2\Omega' = d$ si k est pair (resp. $\Omega + p\Omega' = d$ si k est impair). □

4.2.2. Fibres rationnelles de π au-dessus d'un point rationnel de U^r . — Soit q un nombre premier différent de 2 et de p . on s'intéresse ici à la ramification de q dans les différents corps des modules.

Fait. — Soit $M := (D_{I_1}^T)^{n_1} \dots (D_{I_l}^T)^{n_l}$ un mot de B^T ayant une action triviale sur $SNi^*(\mathbf{C})$. Alors chaque monôme $(D_{I_j}^T)^{n_j}$ a une action triviale sur $SNi^*(\mathbf{C})$, *i.e.* n_j est un multiple de p (resp. est pair) si le cardinal de I_j est pair (resp. impair).

Démonstration. — Supposons qu'un des monômes constituant M n'ait pas une action triviale. On peut supposer qu'aucun des monômes n'a une action triviale (quitte à supprimer ceux qui ont une action triviale dans M).

Pour prouver que ceci est absurde, on peut copier la preuve de la proposition B.0.3 de l'annexe, en prenant $g_{j_0} = \rho\sigma$ (et non ρ , qui est interdit dans $SNi^*(\mathbf{C})$). On a alors $g'_{i_0} = \binom{(\rho^\epsilon\sigma)^{n_1^0}}{\rho^\epsilon\sigma} g_{i_0}$ si I_1^0 est de cardinal impair, et $g'_{i_0} = \binom{(\rho)^{\epsilon n_1^0}}{\rho} g_{i_0}$ si I_1^0 est de cardinal pair (ϵ valant 1 ou -1). Le monôme $D_{I_1^0}^T$ a donc une action triviale sur $SNi^*(\mathbf{C})$, ce qui est absurde. □

Soit \mathbf{a} un point \mathbb{Q} -rationnel de U^r , et q un nombre premier. Soit H' un espace de Hurwitz au-dessus de U^r . On dit que le nombre premier q ne se ramifie pas dans la fibre au-dessus de \mathbf{a} si q ne se ramifie dans aucune extension M/\mathbb{Q} , où M parcourt les corps de rationalité (qui sont des corps des modules) des points de H' au-dessus de \mathbf{a} .

Le fait précédent donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre premier ne se ramifie pas dans la fibre au-dessus d'un point de branchement à coordonnées rationnelles. La valuation θ à laquelle on fait référence dans cette proposition provient de la définition 3.1.22.

Proposition 4.2.3. — Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$ un point \mathbb{Q} -rationnel de U^r , et q un nombre premier différent de 2 et de p . Il existe au moins une extension M_i/\mathbb{Q} dans laquelle au moins une place au-dessus de q est non ramifiée. De plus, le nombre q ne se ramifie dans aucune extension M_i/\mathbb{Q} si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

Pour deux arêtes t_I et t_J indexées par des paquets complémentaires, le nombre $\theta(t_I) + \theta(t_J)$ est pair si I est de cardinal impair, et est un multiple de p si I est de cardinal pair.

Pour toute autre arête t_I de l'arbre de coalescence de $\{a_1, \dots, a_r\}$ en q , on a :

- $\theta(t_I)$ est pair si I est de cardinal impair ;
- $\theta(t_I)$ est un multiple de p si I est de cardinal pair.

Démonstration. — Interprétons les deux énoncés de cette proposition en termes de ω -orbites : le premier affirme qu'il existe au moins une ω -orbite de cardinal 1, le deuxième que si toutes les ω -orbites sont de cardinal 1, alors pour tout I , e_I divise m_I (la réciproque étant évidente). Ce deuxième énoncé n'est donc qu'une nouvelle formulation du fait précédent.

Quitte à faire agir une tresse (non pure) sur U^r , on peut supposer que a_1 ne coalesce pas avec d'autre point de branchement en q , et qu'on est en outre dans l'une des situations suivantes : a_r ne coalesce pas avec d'autre point de branchement en q , ou chacune des arêtes t_I telles que $r \in I$ est indexée par un sous-ensemble plein (*i.e.* I est constitué d'entiers consécutifs), et le plus grand de ces ensembles est de cardinal impair.

La preuve de la première assertion est alors évidente : il suffit par exemple de prendre $g_i = \sigma$, pour tout i différent de 1 tel que a_i ne coalesce pas avec a_r , puis $g_i = \rho\sigma$ pour tout i tel que a_i coalesce avec a_r (y compris a_r), et choisir g_1 pour que le produit $g_1 \dots g_r$ soit égal à 1. \square

Exemple. — Supposons que $r = 4$. Soit p un nombre premier impair quelconque. Soit $\mathbf{a} = (0, 1, 2, \infty)$: aucun nombre premier q différent de 2 et p ne se ramifie dans la fibre au-dessus de \mathbf{a} .

Pour $r \geq 6$, il semble difficile de trouver un point de U^r à coordonnées rationnelles tel que les seuls premiers qui se ramifient (éventuellement) dans les corps des modules correspondants soient 2 et p .

Pour $r = 6$, et $p = 3$, le point $(0, 1, 2, 3, 4, \infty)$ convient par exemple.

Si l'on connaît deux nombres carrés a^2 et b^2 premiers entre eux tels que leur somme et leur différence soit une puissance p -ème, on a un tel point pour $r = 6$:

$$(0, a^2, -a^2, b^2, -b^2, \infty)$$

En effet, soit q un nombre premier différent de 2 : si q divise a , le seul arbre possible est celui où la racine est marquée par a_4, a_5, a_6 , et l'unique autre sommet par a_1, a_2, a_3 . Or l'ordre commun de coalescence en q de ces trois nombres est $2v_q(a)$, qui est donc pair. De même pour un nombre premier divisant b . Si par exemple a^2 et b^2 sont congrus modulo q , l'arbre de coalescence est constitué de trois sommets, la racine marquée par a_6 et a_1 , et les deux autres sommets sont respectivement marqués par a_1 et a_3 , et par a_2 et a_5 . Or p divise $v_q(a_1 - a_4) = v_q(a_2 - a_5)$. La situation est analogue lorsque a^2 et $-b^2$ sont congrus modulo q .

CHAPITRE 5

GERBE DE HURWITZ ET BONNES PLACES

On se place dans le contexte du paragraphe 4.1.1 sur le théorème de Beckmann (v est une bonne place). Après avoir introduit les *gerbes de Hurwitz* et les *gerbe et variété des modèles* associées à un (G-)revêtement donné, on montre l'existence d'un *bon modèle* sur K_v^{nr} (extension maximale non ramifiée de K_v). On montre ensuite que tout bon modèle sur K_v^{nr} est *stable au sens de Dew*. On applique enfin ces résultats pour prouver, sous certaines hypothèses, l'existence d'un *bon modèle* sur M_w .

Les théorèmes démontrés dans ce chapitre se distinguent des précédents en ce qu'ils utilisent les gerbes au-dessus des espaces de Hurwitz (notamment les gerbe et variété des modèles), et non plus seulement ces derniers (*i.e.* des espaces des modules grossiers).

5.1. Gerbe de Hurwitz, gerbe des modèles

Pour les définitions rigoureuses des notions de champs (algébriques) et de gerbes, on renvoie aux articles [Dou01] et [Ems01], ainsi qu'au livre [LMB00].

5.1.1. Champs et Gerbes de Hurwitz. — Nous avons défini les espaces de Hurwitz comme des espaces de modules grossiers pour des catégories fibrées au-dessus de la catégorie des schémas. La lettre \mathcal{H} désignera ici l'une quelconque de ces catégories. On se donne un schéma de base S dont les degrés résiduels ne divisent pas l'ordre du groupe G .

La catégorie \mathcal{H} peut être vue comme un S -champ, c'est-à-dire une S -catégorie fibrée en groupoïdes dans laquelle les morphismes se recollent et où toute donnée de descente est effective.

Le champ \mathcal{H} vérifie deux conditions supplémentaires qui en font un champ algébrique. Une de ces conditions est que \mathcal{H} admet une *présentation*, c'est-à-dire qu'il existe un S -schéma Z et un 1-morphisme de S -champs $Z \rightarrow \mathcal{H}$ surjectif et lisse (cf. [Dou01]). L'intérêt d'une telle présentation est qu'elle permet de ramener l'étude de certains problèmes sur le champ \mathcal{H} à des problèmes sur le schéma Z .

Si on restreint le champ \mathcal{H} à une composante géométriquement irréductible H de l'espace des modules grossier, le S -champ \mathcal{H} vérifie les deux conditions suivantes, qui en font une S -gerbe au-dessus de H : deux objets d'une même fibre sont localement isomorphes, et toute fibre est localement non vide (pour la topologie étale) (cf. [DDE00]). L'intérêt de cette gerbe est qu'elle mesure l'obstruction à l'existence d'une famille de Hurwitz \mathcal{F} d'espace de paramètre H , *i.e.* un morphisme fini et plat $\mathcal{F} \rightarrow H \times_{U_r} \mathbf{P}^1$, où \mathcal{F} est une variété quasi-projective, et pour chaque point $h = [f]$ de H , la fibre $\mathcal{F}_h \rightarrow \mathbf{P}^1$ est un représentant de la classe d'isomorphisme $[f]$.

5.1.2. Gerbe et variété des modèles du (G-)revêtement f . — La variété des modèles d'un (G-)revêtement a été définie dans [DDMB00].

L'application à cette variété des modèles de théorèmes profonds d'approximation p -adique permet par exemple d'obtenir le théorème suivant (cf. [DDMB00]) :

Théorème 5.1.1. — *Soit $f : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ un (G-)revêtement défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de corps des modules \mathbb{Q} , et p un bon premier. Alors le (G-)revêtement a un modèle sur \mathbb{Q}^{tp} (l'extension algébrique maximale de \mathbb{Q} décomposant p).*

Nous nous contenterons ici de retrouver de façon élémentaire (lemme de Hensel), par l'utilisation de la variété des modèles, des résultats démontrés par ailleurs (théorèmes 5.2.1, 5.2.3).

Au (G-)revêtement $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ correspond un point h sur une composante irréductible H de l'espace de Hurwitz adéquat, dont le corps de rationalité n'est autre que le corps des modules M . Au-dessus de cet

espace H se trouve la gerbe de Hurwitz \mathcal{H} associée. En effectuant le produit fibré de $h : \text{Spec}(M) \rightarrow H$ et $\mathcal{H} \rightarrow H$ au-dessus de H , on obtient une nouvelle gerbe \mathcal{G}_h , dont l'espace des modules grossier est $\text{Spec}(M)$. Cette gerbe \mathcal{G}_h est la *gerbe des modèles du (G-)revêtement f* . Les objets $\text{Spec}(L) \rightarrow \mathcal{G}_h$ de la gerbe \mathcal{G}_h définis sur une extension L de M sont les modèles de f sur L .

La gerbe \mathcal{G}_h s'étend en une gerbe sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_M[S^{-1}])$ (où S désigne l'ensemble des mauvaises places de f), que nous noterons $\mathcal{G}_{\tilde{h}}$, et que nous appellerons encore *gerbe des modèles*. Nous avons vu en effet que pour toute bonne place w de M , le morphisme $h : \text{Spec}(M) \rightarrow H$ s'étend en un morphisme $\text{Spec}(\mathcal{O}_{M_w}) \rightarrow H$ (preuve du théorème 4.1.3). On obtient donc un morphisme

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_M[S^{-1}]) \rightarrow H$$

La gerbe $\mathcal{G}_{\tilde{h}}$ est le pullback de la gerbe $\mathcal{H} \rightarrow H$ par ce morphisme ; sa fibre générique est bien la gerbe \mathcal{G}_h considérée précédemment (au-dessus de $\text{Spec}(M)$).

Comme la gerbe de Hurwitz, la gerbe des modèles du (G-)revêtement f mesure une obstruction : plus précisément, cette gerbe est *neutre* (*i.e.* admet une section) si et seulement si f possède un M -modèle.

La gerbe $\mathcal{G}_{\tilde{h}}$, pullback du champ algébrique \mathcal{H} , est aussi un champ algébrique. On peut choisir une présentation par un schéma $Z_{\tilde{h}} \rightarrow \mathcal{G}_{\tilde{h}}$, telle que $Z_{\tilde{h}}$ soit muni d'une action de GL_N au-dessus de $\mathcal{O}_M[S^{-1}]$ et telle que $Z_{\tilde{h}}$ soit isomorphe à $[Z_{\tilde{h}}/\text{GL}_N]$ (cf. la preuve de "(ii) implique (iii)" du théorème 6.1 p. 48 de [LMB00], ou [DDMB00]).

Cette présentation peut en outre être choisie de façon à vérifier les propriétés suivantes (cf. [DDMB00], [Ems01]) :

- le schéma $Z_{\tilde{h}}$ est une variété lisse sur $\mathcal{O}_M[S^{-1}]$, de fibre générique géométriquement irréductible sur $M = k(h)$.
- le schéma $Z_{\tilde{h}}$ est un objet de $\mathcal{G}_{\tilde{h}}$, autrement dit il y a une famille de modèles $\chi_{\tilde{h}} \rightarrow Z_{\tilde{h}}$ sur $Z_{\tilde{h}}$.
- tout point de la gerbe des modèles $\mathcal{G}_{\tilde{h}}$ défini sur un corps se relève en un point de sa présentation $Z_{\tilde{h}}$.
- pour l'action de GL_N sur $Z_{\tilde{h}}$, et pour tout schéma T : deux points z_1 et z_2 , T -rationnels de $Z_{\tilde{h}}$, sont dans une même orbite sous $\text{GL}_{N,T}$ si et seulement si les fibres $z_1^*(\chi_{\tilde{h}})$ et $z_2^*(\chi_{\tilde{h}})$ sont isomorphes.

– pour tout schéma T , et tous points z_1 et $z_2 : T \rightarrow Z_{\bar{h}}$, le schéma

$$G_{z_1, z_2} := \{g \in \mathrm{GL}_N; g \cdot z_1 = z_2\}$$

est fini étale sur T .

La variété $Z_{\bar{h}}$ est appelée *variété des modèles* du revêtement f .

Remarque 5.1.2. — La troisième propriété utilise le résultat suivant (lemme 4.10 p. 124 de [Mil80]) :

Lemme 5.1.3. — *Tout torseur sous GL_N sur un corps est trivial.*

En effet, un modèle de f sur une extension L de M correspond à une section $s : \mathrm{Spec}(L) \rightarrow \mathcal{G}_{\bar{h}}$; le pullback $Z_{\bar{h}} \times_{\mathcal{G}_{\bar{h}}} \mathrm{Spec}(L)$ est un torseur sous GL_N sur $\mathrm{Spec}(L)$, et est donc trivial. Il existe donc une section

$$\mathrm{Spec}(L) \rightarrow Z_{\bar{h}} \times_{\mathcal{G}_{\bar{h}}} \mathrm{Spec}(L)$$

qui, composée avec la flèche naturelle $Z_{\bar{h}} \times_{\mathcal{G}_{\bar{h}}} \mathrm{Spec}(L) \rightarrow Z_{\bar{h}}$, donne un relèvement $\mathrm{Spec}(L) \rightarrow Z_{\bar{h}}$ de s .

5.2. Bons modèles

5.2.1. Existence d'un bon modèle sur K_v^{nr} . — Soit $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ un $(G-)$ revêtement défini sur \bar{K} , de diviseur de ramification défini sur K , de corps des modules M sur K . Soit v une bonne place de K (cf. le paragraphe 4.1.1), w une place de M au-dessus de v . Notons K_v^{nr} l'extension maximale non ramifiée du localisé et complété de K en v (qui est égale à M_w^{nr} d'après le théorème de Beckmann). On prouve dans ce paragraphe que f admet un *bon modèle* f_v sur K_v^{nr} , *i.e.* que la réduction modulo v du revêtement déduit de f_v sur l'anneau est lisse et géométriquement irréductible (on dit aussi que le revêtement sur l'anneau a *bonne réduction*). Pour prouver cela, on se place dans la gerbe et la variété des modèles.

Théorème 5.2.1. — *Le $(G-)$ revêtement f admet un bon modèle f_v sur K_v^{nr} , unique à isomorphisme près défini sur K_v^{nr} .*

Démonstration. — Le $(G-)$ revêtement f fournit un point de $Z_{\bar{h}}$:

$$z : \mathrm{Spec}(\bar{K}_v) \rightarrow Z_{\bar{h}}$$

Ce point se spécialise en un point de la fibre spéciale $\bar{z} : \mathrm{Spec}(\bar{k}_v) \rightarrow Z_{\bar{h}}$, où k_v est le corps résiduel de l'anneau des entiers \mathcal{O}_{K_v} de K_v .

Notons $\mathcal{O}_{K_v}^{nr}$ l'extension maximale non ramifiée de \mathcal{O}_{K_v} . Le lemme de Hensel (cf. l'annexe), assure l'existence d'un point $\text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}^{nr}) \rightarrow Z_{\tilde{h}}$ de la variété des modèles tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & Z_{\tilde{h}} \\ & \nearrow & \uparrow \\ \text{Spec}(\overline{k_v}) & \rightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}^{nr}) \end{array}$$

Un tel diagramme exprime l'existence d'un modèle de f sur l'anneau $\mathcal{O}_{K_v}^{nr}$ (ayant bonne réduction) et donc d'un bon modèle sur K_v^{nr} .

Prouvons maintenant l'unicité à isomorphisme près défini sur K_v^{nr} : on se donne z_1 et z_2 deux bons modèles sur $\mathcal{O}_{K_v}^{nr}$; les deux modèles $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$ obtenus sur $\overline{k_v}$ sont isomorphes. Il existe donc un élément \overline{g} de $\text{GL}_N(\overline{k_v})$ tel que $\overline{z_2} = \overline{g} \cdot \overline{z_1}$.

On a vu que $G_{z_1, z_2} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}^{nr})$ est lisse ; le lemme de Hensel permet donc d'étendre \overline{g} en un élément g de $G_{z_1, z_2}(\mathcal{O}_{K_v}^{nr})$. Les deux (bons) modèles z_1 et z_2 sont donc isomorphes sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}^{nr})$. \square

Remarque 5.2.2. — Le théorème 4.1.3 est une conséquence de ce théorème.

5.2.2. Stabilité (au sens de Dew) d'un bon modèle sur K_v^{nr} . — On est passé dans le paragraphe précédent d'un modèle de f sur $\overline{K_v}$ (f lui-même) à un (bon) modèle f_v de f sur K_v^{nr} . Rien ne dit que le corps des modules de f relativement à $\overline{K_v}/K_v$ et le corps des modules de f_v relativement à K_v^{nr}/K_v soient égaux (on sait *a priori* que le second contient le premier). C'est cependant le cas ici ; en suivant la terminologie de Dew dans [Dew91], on dit que le modèle trouvé sur K_v^{nr} est *stable au sens de Dew*.

Théorème 5.2.3. — *Tout bon modèle f_v de f sur K_v^{nr} est stable au sens de Dew.*

Démonstration. — Le corps des modules de f_v relativement à K_v^{nr}/K_v est aussi le corps des modules M'_w de f_v relativement à M_w^{nr}/M_w . C'est le sous-corps de M_w^{nr} fixé par

$$G(f_v) = \{ \sigma \in \text{Gal}(M_w^{nr}/M_w), f_v \simeq f_v^\sigma \text{ sur } M_w^{nr} \}$$

On cherche à prouver que $M'_w = M_w$, *i.e.* que $G(f_v) = \text{Gal}(M_w^{nr}/M_w)$.

Soit $\sigma \in \text{Gal}(M_w^{nr}/M_w)$; l'action de σ sur f_v fournit un nouveau bon modèle de f , noté f_v^σ . A ces deux modèles correspondent deux points z et z^σ de Z_h définis sur M_w^{nr} . Les deux modèles f_v et f_v^σ sont isomorphes sur $\overline{M_w}$, ce qui se traduit dans la variété des modèles par l'existence d'un élément \tilde{g} de $G_{z,z^\sigma}(\overline{M_w})$.

Or $G_{z,z^\sigma} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{M_w}^{nr})$ est fini étale : à l'élément \tilde{g} de $G_{z,z^\sigma}(\overline{M_w})$ correspond donc par spécialisation un élément \bar{g} de $G_{z,z^\sigma}(\overline{k_w})$, que le lemme de Hensel permet de relever en un élément de $G_{z,z^\sigma}(M_w^{nr})$, ce qui prouve que $\sigma \in G(f_v)$. \square

5.2.3. Cas d'existence d'un bon modèle sur M_w . — On suppose dans cette partie que le (G) -revêtement est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, le diviseur de branchement étant défini sur un corps de nombres K . Soit v une bonne place de K et w une place (au-dessus de v) du corps des modules M de f relativement à $\overline{\mathbb{Q}}/K$. Avec les notations précédentes, le groupe $\text{Gal}(K_v^{nr}/K_v)$ est de dimension cohomologique ≤ 1 , et les résultats cités précédemment concernant l'obstruction sur le corps des modules permettent d'affirmer que f admet un modèle sur le complété M_w en w de M .

On a en fait un résultat plus précis :

Théorème 5.2.4. — *Le (G) -revêtement f défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ admet un bon modèle sur le complété M_w du corps des modules en toute bonne place w .*

Démonstration. — On note par k_w le corps résiduel de \mathcal{O}_{M_w} .

Le théorème 5.2.1 donne l'existence d'un bon modèle de f sur $\mathcal{O}_{M_w}^{nr} = \mathcal{O}_{K_v}^{nr}$, représenté par un point z de $Z_h(\mathcal{O}_{M_w})$, et donc l'existence d'un modèle sur $\overline{k_w}$, représenté par \bar{z} .

Soit \bar{f} la réduction de f sur la fibre spéciale. La question de la descente de $\overline{k_w}$ à k_w est gouvernée par le groupe de cohomologie non abélienne $H^2(k_w, \text{Aut}(\bar{f}))$. Le fait que le groupe $\text{Gal}(\overline{k_w}/k_w)$ soit de dimension cohomologique ≤ 1 entraîne que la gerbe des modèles de \bar{f} est neutre (cf. Corollaire 1.3 p. 119 de [DDE00]). On dispose donc de données de descente de $\overline{k_w}$ à k_w , c'est-à-dire, pour tout $\sigma \in \text{Gal}(\overline{k_w}/k_w)$, d'un morphisme $\phi_\sigma : \bar{z} \rightarrow \bar{z}^\sigma$, et de relations entre ces morphismes exprimant la descente.

Le morphisme $\phi_\sigma \in G_{\bar{z}, \bar{z}^\sigma}(\bar{k}_w)$ s'étend de façon unique en un morphisme $f_\sigma \in G_{z, z^\sigma}(\mathcal{O}_{M_w}^{nr})$, car le morphisme $G_{z, z^\sigma} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{M_w}^{nr})$ est fini étale (cf. 5.1.2).

Ces morphismes f_σ sont des données de descente de $\mathcal{O}_{M_w}^{nr}$ à \mathcal{O}_{M_w} (ils vérifient les mêmes relations que les ϕ_σ), d'où l'existence d'un *bon* modèle sur M_w . \square

Remarque 5.2.5. — Le fait que le morphisme

$$G_{z, z^\sigma} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{M_w}^{nr})$$

soit fini étale recouvre l'équivalence de catégories entre revêtements modérés de $\mathbb{P}_{k_w}^1$ et revêtements modérés de $\mathbb{P}_{M_w}^{nr}$ (cf. [GM71]).

APPENDICE A

LEMME DE HENSEL

On donne ici une version du lemme de Hensel adaptée à nos besoins (preuve du théorème 5.2.1 en particulier). On peut trouver une version de ce lemme dans le cas où Y est étale sur R dans [GD67], théorème 18.5.11 b).

Lemme de Hensel. — Soit R un anneau local hensélien, de corps résiduel k , d'idéal maximal \mathfrak{M} . On se donne un schéma lisse Y sur R . On suppose qu'il existe un point x défini sur k sur la réduction Y_k :

$$x : \operatorname{Spec}(k) \rightarrow Y_k$$

Alors il existe un point y de Y défini sur R de réduction x :

$$\begin{array}{ccc} y : \operatorname{Spec}(R) & \rightarrow & Y \\ & \uparrow & \uparrow \\ x : \operatorname{Spec}(k) & \rightarrow & Y_k \end{array}$$

Démonstration. — Le point x défini sur k fournit un point y de l'espace topologique Y . Le schéma Y étant lisse sur R , il existe un voisinage affine $V = \operatorname{Spec}(C)$ de y tel que

$$C = R[T_1, \dots, T_n] / (P_1, \dots, P_m)$$

avec $m \leq n$, et telle que les mineurs $m \times m$ de la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial P_i}{\partial T_j}\right)$ engendrent C (proposition 3.24 c) de [Mil80]).

Par définition, le point x consiste en la donnée d'un homomorphisme

$$\phi : R[T_1, \dots, T_n] / (P_1, \dots, P_m) \otimes_R k \rightarrow k$$

ce qui correspond à la donnée d'un n uplet (x_1, \dots, x_n) d'éléments de k vérifiant

$$\overline{P_1}(x_1, \dots, x_n) = \dots = \overline{P_m}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

où $\overline{P_i}$ désigne la réduction de P_i modulo \mathfrak{M} .

La matrice jacobienne $\left(\frac{\partial \overline{P_i}}{\partial T_j}\right)(x)$ est de rang m . On peut donc appliquer le lemme de Hensel tel qu'énoncé dans [Gre69] (lemme 5.21) (qui est une légère généralisation du théorème 4.2 d') de [Mil80]), pour obtenir un élément de R^n , de réduction x , tel que $P_1(y) = \dots = P_m(y) = 0$. Le point y est un point de V (et donc de Y), défini sur R , et de réduction x . \square

APPENDICE B

ACTION DES TWISTS SARMENTS SUR $H'(D_p)$

Nous avons laissé en suspens lors d'un chapitre précédent la question des relations générales entre des twists générateurs (et cohérents) de l'inertie en un point du bord de U^r . L'idée, pour montrer la proposition alors énoncée, est d'utiliser le fait que si un mot de B^T n'a pas une action triviale sur tous les $H'(D_p)$ (r est fixé mais p peut varier), ce mot ne peut être équivalent au mot trivial (on se place dans le contexte du paragraphe 4.2 consacré à l'exemple des groupes diédraux).

Proposition B.0.1. — *Le groupe B^T défini en 3.4.11, admet la présentation suivante :*

- *générateurs : les D_I^T*
- *relations :*
 - $D_I^T \cdot D_J^T = D_J^T \cdot D_I^T$,
et si il y a lieu
 - $D_I^T = e$ *si I est de cardinal $r - 1$ ou r*
 - $D_I^T = D_J^T$ *si I et J sont complémentaires dans \underline{r}*

Remarque B.0.2. — La deuxième relation n'apparaît que dans la situation où la racine est marquée par au plus un point et n'est reliée qu'à un seul autre sommet.

La troisième relation n'apparaît que dans la situation où la racine n'est pas marquée et est reliée à exactement deux sommets, ou lorsque la racine n'est pas marquée, et est reliée à un unique sommet qui n'est pas non plus marqué.

On va en fait montrer le résultat suivant qui entraîne la proposition B.0.1.

Proposition B.0.3. — Soit $M := (D_{I_1}^T)^{n_1} \dots (D_{I_k}^T)^{n_k}$ un mot non vide de B^T où, pour tous l et m appartenant à \underline{r} ($l \neq m$) :

- deux sous-ensembles I_l et I_m ne sont ni égaux, ni complémentaires ;
- chaque exposant n_l est non nul ;
- I_l n'est de cardinal ni $r - 1$, ni r .

Il existe un ensemble fini de nombres premiers P tel que, pour tout $p \notin P$, M agit non trivialement dans le revêtement $H'(D_p) \rightarrow U^r$.

Démonstration. — On écrira exceptionnellement dans cette démonstration D_I au lieu de D_I^T , afin d'aérer la notation.

Nous allons exhiber deux classes de Nielsen \underline{g} et \underline{g}' de $SNi(\mathbf{C})$ (où \mathbf{C} sera un r -uplet de classes de conjugaison de D_p), tels que $M.\underline{g} = \underline{g}'$, et pourtant $\underline{g} \neq \underline{g}'$. Pour prouver que $\underline{g} \neq \underline{g}'$, nous allons en donner deux représentants respectifs (g_1, \dots, g_r) et (g'_1, \dots, g'_r) , ainsi qu'un entier i_0 tel que $g_1 = g'_1$ soit une symétrie, et que $g'_{i_0} \notin \{g_{i_0}, {}^{(g_1)}g_{i_0}\}$.

Première étape : choix de i_0 .

On choisit pour i_0 le plus petit élément de $I_1 \cup \dots \cup I_r$. La façon dont on a construit la procédure permet d'assurer que $i_0 \geq 2$.

Notons $I_1^0 \supset I_2^0 \supset \dots \supset I_{m_0}^0$ les ensembles I_l ($l \in \{1, \dots, k\}$) contenant i_0 .

Deuxième étape : choix de g .

Soit j_0 le plus grand élément de $I_1^0 - I_2^0$. Clairement, $j_0 \neq i_0$ (si $m_0 = 1$, l'ensemble I_2^0 est vide, et j_0 est bien différent de i_0).

Pour tout élément l de $\{1\} \cup I_1^0 \cup I_1'^0$ différent de j_0 , on pose $g_l = \sigma$. On peut remarquer que cela entraîne que $g_l = \sigma$ dès que l appartient à $I_2^0 \cup \dots \cup I_{m_0}^0 \cup I_2'^0 \cup \dots \cup I_{m_0}'^0$.

Si le cardinal de I_1^0 est pair, on prendra $g_{j_0} = \rho\sigma$; sinon, on prendra $g_{j_0} = \rho$; ce choix, qui peut sembler arbitraire, sera justifié lors de la troisième étape.

J'affirme qu'il reste des éléments g_l non spécifiés, que l'on est donc libre d'ajuster afin de vérifier la condition $g_1 \dots g_r = 1$. En effet, on a pour l'instant spécifié les classes C_l , pour $l \in \{1\} \cup I_1^0 \cup I_1'^0$. Si $I_1'^0$ n'est pas vide, alors nécessairement $i_0 > 2$ (cf. procédure), et l'on a encore rien imposé à C_2 . Si I_1^0 est vide, il est de toute façon impossible que $I_1^0 = \{2, \dots, r\}$ (par hypothèse).

On fixe ainsi les g_l restants afin de vérifier la relation $g_1 \dots g_r = 1$; si l'on note par C_l la classe de conjugaison de g_l dans D_p , et \mathbf{C} le r -uplet

(C_1, \dots, C_r) , alors le r -uplet (g_1, \dots, g_r) représente une classe de Nielsen \underline{g} de $SNi(\mathbf{C})$.

Troisième étape : action de M sur \underline{g} .

On note $\underline{g}' := M.\underline{g}$, et l'on choisit comme représentant (g'_1, \dots, g'_r) de \underline{g}' celui que l'on obtient d'après la formule de la proposition 3.4.12.

On a bien sûr $g'_1 = g_1$ (c'est d'ailleurs un fait général, la procédure a été conçue pour vérifier cette propriété).

Par construction de B^T (cf. la procédure), aucun twist D_{I_l} ($l \in \underline{k}$) ne passe en-dessous de i_0 . Les seuls éléments g_l intervenant dans la formule 3.4.12 pour déterminer g'_{i_0} sont donc ceux pour lesquels l appartient à $I_1^0 \cup I_1'^0$ (c'est-à-dire ceux que l'on a spécifiés). Ils sont tous égaux à σ , sauf g_{j_0} , qui n'interviendra véritablement que pour le calcul de l'action de $D_{I_1^0}^{n_1^0}$.

Posons $\underline{g}'' := D_{I_2^0}^{n_2^0} \dots D_{I_{m_0}^0}^{n_{m_0}^0}.\underline{g}$, et soit (g''_1, \dots, g''_r) son représentant déduit de (g_1, \dots, g_r) par la formule 3.4.12.

Il est facile de voir que $g''_1 = g'_{i_0} = \sigma$ (on conjugue σ par lui-même ou par e).

Reste à calculer l'action de $D_{I_1^0}^{n_1^0}$. On peut vérifier que

$$g'_{i_0} = \binom{\rho^{\epsilon n_1^0}}{\rho^{\epsilon n_1^0}} g''_{i_0} = \binom{\rho^{\epsilon n_1^0}}{\rho^{\epsilon n_1^0}} g_{i_0}$$

où ϵ vaut 1 ou -1 . En effet, on conjugue g''_{i_0} par l'élément $\delta^{n_1^0}$, où $\delta := g_{i_0} \xrightarrow{I_1^0 \cup I_1'^0} r \xrightarrow{I_1^0} i_0$. Chaque g_l intervenant dans cet élément est égal à σ , sauf g_{j_0} . De plus, si $l \in I_1'^0$, l'élément g_l apparaît (exactement) deux fois. S'il apparaît de part et d'autre de g_{j_0} , on remarque que $\sigma g_{j_0} \sigma$ se déduit de g_{j_0} en remplaçant ρ par son inverse. S'il apparaît du même côté, on peut simplifier les deux g_l dans δ . En conclusion, quitte à remplacer ρ par son inverse, on peut supprimer les éléments g_l dans δ , pour tout $l \in I_1'^0$. Si $|I_1^0|$ est pair (resp. impair), il reste donc un produit de $|I_1^0|$ (resp. $|I_1^0| - 1$) éléments σ avec ρ ou ρ^{-1} . Par conséquent, δ est égal à ρ ou à son inverse.

Dernière étape : conclusion.

On a choisi $g_1 = g_{i_0} = \sigma$. Comme g_1 est une symétrie, \underline{g}' admet exactement deux représentants tels que la première coordonnée soit égale à σ : ce sont (g'_1, \dots, g'_r) et $(\sigma g'_1, \dots, \sigma g'_r)$. Par conséquent, si $\underline{g} = \underline{g}'$, alors $g'_{i_0} = g_{i_0}$.

Soit maintenant un nombre premier p ne divisant pas n_1^0 . On a nécessairement $g'_{i_0} \neq g_{i_0}$ et, partant :

$$\underline{g'} \neq \underline{g}$$

Le mot M de B^T n'a donc pas une action triviale sur $SNi(\mathbf{C})$.

□

BIBLIOGRAPHIE

- [Art70] M. ARTIN – *Théorèmes de représentation pour les espaces algébriques*, vol. 44, Presses de l'Université de Montréal, 1970.
- [Bec89] S. BECKMANN – « Ramified primes in the field of moduli of branched coverings of curves », *Journal of Algebra* **125** (1989), p. 236–255.
- [Bec91] ———, « On extensions of number fields obtained by specializing branched coverings », *J. rein. angew. Math.* **419** (1991), p. 27–53.
- [Bir74] J. BIRMAN – *Braids, links, and mapping class groups*, vol. 82, Princeton Univ. Press, Annals of Math. studies, 1974.
- [CG95] J.-M. COUVEIGNES & L. GRANBOULAN – « Dessins from a geometric point of view », *The Grothendieck theory of Dessins d'Enfants*, Leila Schneps ed., Camb. U. Press, 1995, p. 79–113.
- [CGKZ98] D. J. COLLINS, R. I. GRIGORCHUK, P. F. KURCHANOV & H. ZIESCHANG – *Combinatorial group theory and applications to geometry*, vol. 58, E.M.S. Springer-Verlag, 1998.
- [CH85] K. COOMBES & D. HARBATER – « Hurwitz families and arithmetic Galois groups », *Duke Math. J.* **52** (1985), p. 821–839.
- [CL] A. CHAMBERT-LOIR – « Sur le corps de définition de revêtements », *Manuscrit*.

- [Cou94] J.-M. COUVEIGNES – « Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0 », *Annales de l'Inst. Fourier* **44(1)** (1994), p. 1–38.
- [DD97] P. DÈBES & J.-C. DOUAI – « Algebraic covers : Field of moduli versus field of definition », *Annales Sci. E.N.S.* **30** (1997), p. 303–338.
- [DD99] ———, « Gerbes and covers », *Comm. in Algebra* **27-2** (1999), p. 577–594.
- [DDE00] P. DÈBES, J.-C. DOUAI & M. EMSALEM – « Familles de Hurwitz et cohomologie non abélienne », *Ann. de l'Institut Fourier* **50** (2000), p. 113–149.
- [DDMB00] P. DÈBES, J.-C. DOUAI & L. MORET-BAILLY – « Descent problems over large fields (preprint) », À paraître, 2000.
- [Dèb90] P. DÈBES – « Groupes de Galois sur $k(t)$ », *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux* **2** (1990), p. 229–243.
- [Dèb95] ———, « Covers of \mathbb{P}^1 over the p -adics », *Contemporary Math.* **186** (1995), p. 217–238.
- [Dew91] E. DEW – « Field of moduli of arithmetic covers », Thèse, Université de pennsylvanie, 1991.
- [DF90] P. DÈBES & M. FRIED – « Nonrigid constructions in galois theory », *Pacific J. Math.* **56** (1990), p. 81–122.
- [DH98] P. DÈBES & D. HARBATER – « Fields of definition of p -adics covers », *J. rein. angew. Math.* **498** (1998), p. 223–236.
- [Dou01] J.-C. DOUAI – « Descente, champs et gerbes de Hurwitz », *Séminaires et congrès* **5** (2001), p. 119–131.
- [EH00] D. EISENBUD & J. HARRIS – *The geometry of schemes*, vol. 197, Springer-Verlag, 2000.
- [Ems99] M. EMSALEM – « On reduction of covers of arithmetic surfaces », *Cont. Math.* **245** (1999), p. 117–132.

- [Ems01] ———, « Sur les espaces de Hurwitz », *Séminaires et congrès* **5** (2001), p. 69–99.
- [Fri77] M. FRIED – « Fields of definition of function fields and Hurwitz families. groups as Galois groups », *Comm. in Alg.* **1** (1977), p. 17–82.
- [Ful69] W. FULTON – « Hurwitz schemes and the irreducibility of the moduli of algebraic curves », *Math. Ann.* **90** (1969), p. 542–575.
- [FV91] M. FRIED & H. VÖLKLEIN – « The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces », *Math. Ann.* **290** (1991), p. 771–800.
- [GD67] A. GROTHENDIECK & J. DIEUDONNÉ – *Elements de géométrie algébrique iv*, Publications I.H.E.S., 1967.
- [Ger96] S. GERVAIS – « Presentation and central extensions of mapping class groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **348-8** (1996), p. 3097–3132.
- [GHvdP88] L. GERRITZEN, F. HERRLICH & M. VAN DER PUT – « Stable n -pointed trees of projective lines », *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen* **91** (1988), p. 131–163.
- [GM71] A. GROTHENDIECK & J. MURRE – *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme*, vol. 208, Springer-Verlag, 1971.
- [Gre69] M. GREENBERG – *Lectures on forms in many variables*, W.A. Benjamin, 1969.
- [Gro71] A. GROTHENDIECK – *Séminaire de géométrie algébrique*, vol. *i*, vol. 224, Springer-Verlag, 1971.
- [Hen00] Y. HENRIO – « Arbres de Hurwitz et automorphismes d'ordre p des disques et des couronnes p -adiques formels », Thèse, Université de Bordeaux I, 2000.

- [Hur91] A. HURWITZ – « Über Riemann'sche flächen mit gegebenen verzweigungspunkten », *Math. Ann.* **39** (1891), p. 1–61.
- [Koc97] H. KOCH – *Algebraic number theory*, vol. 62, E.M.S. Springer-Verlag, 1997.
- [LMB00] G. LAUMON & L. MORET-BAILLY – *Champs algébriques*, Springer-Verlag, 2000.
- [Luo97] F. LUO – « A presentation of the mapping class group », *Math. Res. Lett.* **4** (1997), p. 735–739.
- [Mil80] MILNE – *Etale cohomology*, Princeton University Press, 1980.
- [MM99] G. MALLE & B. H. MATZAT – *Inverse galois theory*, Springer-Verlag, 1999.
- [MS76] B. MAZUR & J.-P. SERRE – *Points rationnels des courbes modulaires $x_0(n)$* , vol. 469, Séminaire Bourbaki, 1976.
- [Mur67] J. MURRE – *Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group*, Tata institute of fundamental research, Bombay, 1967.
- [Ray70] M. RAYNAUD – *Anneaux locaux henséliens*, vol. 169, Springer-Verlag, 1970.
- [RD78] R. & A. DOUADY – *Algèbre et théories galoisiennes (2 volumes)*, Cedic/Fernand Nathan, 1978.
- [Ser62] J.-P. SERRE – *Corps locaux*, Hermann, 1962.
- [Ser77] ———, *Points rationnels des courbes modulaires*, vol. 511, Séminaire Bourbaki, 1977.
- [Ser92] ———, *Topics in galois theory*, Jones and Bartlett Publishers, 1992.
- [Sti93] J. STILLWELL – *Classical topology and combinatorial group theory*, vol. 72, Springer-Verlag, 1993.

- [Sus90] H. J. SUSSMANN – « Real analytic desingularisation and subanalytic sets : an elementary approach », *Trans. Amer. Math. Soc.* **317** (1990), p. 417–424.
- [Völ96] H. VÖLKLEIN – *Groups as galois groups*, vol. 53, Adv. Math. Cambridge Univ. Press, 1996.
- [Wew98a] S. WEWERS – « Construction of Hurwitz spaces », Thèse, Université d'Essen, 1998.
- [Wew98b] ———, « Deformation of tame admissible covers of curves », 1998, Institut für Experimentelle Mathematik Essen.
- [Zur93] M.-A. ZURRO – « The Abhyankar-Jung theorem revisited », *J. Pure Appl. Algebra* **90** (1993), p. 275–282.

INDEX

- a-homéomorphisme, 67
- a-isotopie, 67
- $A_{\underline{n}}$, 21
- $A_{\underline{n}}^{\alpha}$, 21
- arête séparant un quadruplet, 60
- birapport, 58
- bon modèle, 120
- bonne place, 102
- bonne réduction, 120
- $B^r\mathbb{S}^2$, 70
- \mathbf{C} , 44
- classes de Nielsen, 80
- composante médiane, 58
- contraction, 59
- contraction forte, 60
- $c_X(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j)$, 64
- $D_{[a]}$, 68
- D_{α} , 68
- $D_{[I_1, I_2, I_3]}$, 76
- D_i^{sh} , 24
- D_i^V , 24
- diviseurs à croisements normaux, 20
- élagage, 65
- embranchement, 60
- $e(t)$, 63
- $\Gamma_{0,r}$, 68
- générateur de l'inertie le long de D_i , 24
- gerbe des modèles, 119
- $\mathcal{G}_{\tilde{h}}$, 119
- $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}$, 48
- $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}^G$, 48
- $H_G'^{ab}(\mathbf{C})$, 48
- $H_G'^{in}(\mathbf{C})$, 48
- invariant d'inertie d'un revêtement, 43
- $I(\sigma)$, 57
- λ_w , 58
- mauvaise place, 102
- modèle stabilisable, 63
- modèle stable, 63
- modèle stable au sens de Dew, 121
- $\mu_{\underline{n},S}$, 21
- ω , 105
- ordre d'intersection d'un diviseur avec une section, 34
- ordre de congruence, 63
- ordre de contact de deux sections, 64
- $\mathcal{O}_S[\mathbb{Z}_{\underline{n}}]$, 21
- $\mathcal{O}_{X,x\eta}^{sh}$, 25
- $\mathcal{O}_{X,\tilde{x}}^{sh}$, 24
- q_i , 74
- $q_{i\perp j}$, 76
- quadruplet distinguant une arête, 60
- relation de la lanterne, 69
- restriction d'un revêtement à une section, 34
- revêtement modérément ramifié, 20
- revêtement de la droite projective, 41
- G-revêtement, 42
- (G-)revêtement, 43

- revêtement kummérien, 21
 revêtement kummérien généralisé, 22
 S^I , 61
 σ_i , 57
 σ_I , 57
 $\sigma_{i,j}$, 60
 $(\sigma \vee \sigma')$, 60
 $SNi^*(\mathbf{C})$, 80
 $SNi^*(G)$, 80
 S^r , 61
 S^T , 62
 système cohérent de générateurs de
 l'inertie, 26
 θ , 63
 $t_{I(\sigma)}$, 57
 T_I , 60
 twist de Dehn, 68
 twist fer-à-cheval, 76
 twist fer-à-cheval fin, 76
 twist sarment, 76
 U^r , 48
 U_r , 48
 variété des modèles, 120
 $Z_{\tilde{h}}$, 120
 $Z_{\underline{n}}^a$, 21
 $Z_{\underline{n}}$, 20
 z_r , 70

Abstract

This work is based on the link between the field of moduli of a cover and Hurwitz spaces. Given a cover, arithmetic aspects of these spaces provide results about ramification in the field of moduli over the rationality field of the branch points. For instance, Beckmann's theorem, which limits search of ramification in this extension to some places, namely the bad places, is proved in a natural way in this context.

A finer analysis of Hurwitz spaces gives information about the bad places that do not divide the order of the monodromy group of the cover (but for which the branch locus becomes singular, though) : the point is to consider the cover of the completion of the Hurwitz space over the completion of the configuration space. Given any such place, the branch locus extends to an arithmetic section on this latter space, and restriction of the Hurwitz cover provides data on the ramification of the chosen place in the field of moduli. We study this restriction problem in a more general context, in which we consider the case of the restriction to a section of a tamely ramified cover over a divisor with normal crossings, using Abhyankar's theorem. In order to give an explicit version of this ramification result on the field of moduli, we introduce integers that depend on the coalescing orders between branch points, and a choice of inertia generators around the boundary components of the configuration space that meet the given arithmetic section. For this purpose, we define a certain type of Dehn twists, the so called "twists sarments", and we describe their action on the set of Nielsen classes.

Last part of this work contains various results of descent of the field of definition of a cover, by studying gerbs over Hurwitz spaces (and not merely these coarse moduli spaces).

Key words : Moduli field, covers of the projective line, Kummer covers, tamely ramified covers, Hurwitz spaces, fundamental group, Hurwitz pure braid group, mapping class group, Dehn twists, Nielsen classes, gerb of models

Résumé

Ce travail se fonde sur le lien entre le corps des modules d'un revêtement et les espaces de Hurwitz. Pour un revêtement donné, l'arithmétique de ces espaces fournit des résultats sur la ramification du corps des modules au-dessus du corps de rationalité des points de branchement. Le théorème de Beckmann, qui circonscrit la ramification dans cette extension à certaines places, les mauvaises places, trouve ainsi une démonstration naturelle.

Une analyse plus fine des espaces de Hurwitz fournit des informations sur les mauvaises places ne divisant pas l'ordre du groupe de monodromie du revêtement (mais où les points de branchement se rencontrent) : l'idée consiste à considérer le revêtement du complété de l'espace de Hurwitz au-dessus du complété de l'espace de configuration de points. Pour une telle place, le lieu de branchement du revêtement se prolonge en une section arithmétique sur ce dernier espace, et la restriction du revêtement de Hurwitz à cette section fournit de l'information sur la ramification dans le corps des modules en la place considérée. Nous étudions ce problème de restriction dans un cadre plus général, en considérant le cas d'un revêtement modérément ramifié le long de diviseurs à croisements normaux restreint à une section, et en nous basant sur le théorème d'Abhyankar. Nous donnons une version effective de ce résultat de ramification dans le corps des modules, en fonction d'entiers qui dépendent des relations de congruence entre les points de branchement, ainsi que d'un choix de générateurs de l'inertie autour des composantes du bord de l'espace de configuration de points croisant la section. À cet effet, nous introduisons un certain type de twists de Dehn, les twists sarments, et nous décrivons leur action sur l'ensemble des classes de Nielsen.

Une dernière partie de ce travail regroupe des résultats divers de descente du corps de définition d'un revêtement, qui utilisent des gerbes au-dessus des espaces de Hurwitz.

Mots clefs : Corps des modules, revêtements de la droite projective, espaces de Hurwitz, revêtements kummériens, revêtements modérément ramifiés, groupe fondamental, groupe des tresses pures de Hurwitz, mapping class group, twists de Dehn, classes de Nielsen, gerbe des modèles.