



**HAL**  
open science

## Sur une équation elliptique non linéaire dégénérée

Amira Obeid-El Hamidi

► **To cite this version:**

Amira Obeid-El Hamidi. Sur une équation elliptique non linéaire dégénérée. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2002. Français. NNT: . tel-00002263v1

**HAL Id: tel-00002263**

**<https://theses.hal.science/tel-00002263v1>**

Submitted on 21 Jan 2003 (v1), last revised 19 Feb 2003 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Résultats d'existence pour une équation aux dérivées partielles non linéaire elliptique dégénérée</b>	<b>13</b>
2.1	Introduction . . . . .	16
2.2	Mathematical model . . . . .	18
2.3	Notations . . . . .	22
2.4	Some properties of the functional spaces . . . . .	24
2.4.1	A trace theorem in $V(\Omega)$ . . . . .	24
2.4.2	Equivalent norms for $V^0(\Omega)$ and $W^0(\Omega)$ . . . . .	28
2.4.3	Some properties of the divergence operator . . . . .	29
2.5	Weak formulation of the boundary value problem . . . . .	31
2.6	The dual problem . . . . .	43
2.7	Conclusion and perspectives . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Une formulation relaxée pour une équation elliptique dégénérée</b>	<b>56</b>
3.1	Introduction . . . . .	58
3.2	Preliminaires and notations . . . . .	60
3.3	The relaxed problem . . . . .	62
3.4	Approximation and compactness . . . . .	64
3.5	Some properties of functional $\tilde{F}$ . . . . .	66
3.6	Existence and uniqueness of solutions . . . . .	76
3.7	Conclusion and open problems . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Résultats d'existence dans le demi-plan positif</b>	<b>86</b>
4.1	Les espaces fonctionnels . . . . .	90
4.1.1	Propriétés de $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . . . . .	90
4.1.2	Espace de trace de $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . . . . .	94
4.1.3	Propriétés de $V(B'_R, \omega_1)$ . . . . .	98
4.1.4	Equivalence des normes dans $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ . . . . .	101
4.1.5	Propriétés de $V_0(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . . . . .	107
4.1.6	Propriétés de l'opérateur divergence . . . . .	108
4.2	Formulation variationnelle . . . . .	111
4.3	Propriétés de la fonctionnelle $F$ . . . . .	113
4.4	Le problème dual . . . . .	122

4.5	Erreur de troncature . . . . .	134
4.6	Conclusion et perspectives . . . . .	138
	<b>Bibliographie</b>	<b>141</b>

# Notations

Les espaces qu'on présente ici se définissent à partir d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ .

- $\mathcal{C}_c(\Omega)$  est l'espace des fonctions continues à support compact dans  $\Omega$ .
- $\mathcal{C}^k(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur  $\Omega$  ( $k$  entier  $\geq 0$ ).
- $\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$ ,  $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ .
- $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{\xi|_\Omega; \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\}$ .

Soit  $p$  un réel satisfaisant  $1 \leq p < +\infty$ .

- $L^p(\Omega) = \{\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \xi \text{ mesurable et } \int_\Omega |\xi|^p dx dy < +\infty\}$ ,

$$\|\xi\|_{0,p,\Omega} = \left( \int_\Omega |\xi|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

- $L^\infty(\Omega) = \{\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \xi \text{ mesurable et } \exists C > 0 \text{ tel que } |\xi(x,y)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$ ,

$$\|\xi\|_{0,\infty,\Omega} = \inf\{C; |\xi(x,y)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

- $W^{1,p}(\Omega) = \{\xi \in L^p(\Omega); \nabla \xi \in (L^p(\Omega))^2\}$ ,

$$\|\xi\|_{1,p,\Omega} = \|\xi\|_{0,p,\Omega} + \|\nabla \xi\|_{0,p,\Omega}.$$

- $V(\Omega) = \{\xi \in W^{1,2}(\Omega); \partial_x \xi \in L^3(\Omega)\}$ ,

$$\|\xi\|_{V(\Omega)} = \|\xi\|_{0,2,\Omega} + \|\partial_x \xi\|_{0,3,\Omega} + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}.$$

- $W(\Omega) = \{\xi \in W^{1,1}(\Omega), \partial_y \xi \in L^2(\Omega)\}$ ,

$$\|\xi\|_{W(\Omega)} = \|\xi\|_{0,1,\Omega} + \|\partial_x \xi\|_{0,1,\Omega} + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}.$$

- $\mathbb{H}(\Omega) = L^3(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,

$$\|(p,q)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} = \|p\|_{0,3,\Omega} + \|q\|_{0,2,\Omega}.$$

- Les semi-normes associées à  $V(\Omega)$  et  $W(\Omega)$  sont respectivement données par :

$$|\xi|_{V(\Omega)} = \|\partial_x \xi\|_{0,3,\Omega} + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}$$

et

$$|\xi|_{W(\Omega)} = \|\partial_x \xi\|_{0,1,\Omega} + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}.$$

- $V^0(\Omega) = \{\xi \in V(\Omega); \int_\Omega \xi dx dy = 0\}$ .

- $W^0(\Omega) = \{\xi \in W(\Omega); \int_{\Omega} \xi \, dx \, dy = 0\}$ .

- $BV(\Omega)$  est l'espace des fonctions à variation bornée,

$$\|\xi\|_{BV(\Omega)} = \|\xi\|_{0,1,\Omega} + |D\xi|(\Omega)$$

où

$$|D\xi|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} \xi \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy; \mathbf{f} \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \|\mathbf{f}\|_{0,\infty,\Omega} \leq 1 \right\},$$

et pour tout  $\mathbf{f}$  dans  $\mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ ,

$$\|\mathbf{f}\|_{0,\infty,\Omega} = \max(\|f_1\|_{0,\infty,\Omega}, \|f_2\|_{0,\infty,\Omega}).$$

- $M_b(\Omega)$  désigne l'espace des mesures de Radon bornées sur  $\Omega$ ,

$$\|\nu\|_{M_b(\Omega)} = \sup \{\nu(f); f \in \mathcal{C}_c(\Omega), \|f\|_{0,\infty,\Omega} \leq 1\}.$$

- $N(\Omega) = \{\xi \in BV(\Omega); \partial_y \xi \in L^2(\Omega)\}$ ,

$$\|\xi\|_{N(\Omega)} = \|\xi\|_{0,2,\Omega} + |\partial_x \xi|(\Omega) + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}.$$

Pour toute fonction mesurable  $\omega$ , on définit :

- $L^p(\Omega, \omega) = \{\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} \omega |\xi|^p \, dx \, dy < \infty\}$ ,

$$\|\xi\|_{p,\Omega,\omega} = \left( \int_{\Omega} \omega |\xi|^p \, dx \, dy \right)^{1/p}.$$

On définit les fonctions suivantes :

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho'(x) = |x|, \quad \omega_1(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2 + \rho^2} \log(2 + \rho^2)} \text{ et } \omega_1' = \omega_1(\rho').$$

- $\tilde{\mathbb{H}}(\Omega) = (L^2(\Omega) \cap L^3(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ ,

$$\|(p, q)\|_{\tilde{\mathbb{H}}(\Omega)} = \|p\|_{0,2,\Omega} + \|p\|_{0,3,\Omega} + \|q\|_{0,2,\Omega}.$$

- $V(\Omega, \omega_1) = \{\xi; \omega_1 \xi \in L^2(\Omega) \cap L^3(\Omega), \nabla \xi \in \tilde{\mathbb{H}}(\Omega)\}$ ,

$$\|\xi\|_{V(\Omega, \omega_1)} = \|\omega_1 \xi\|_{0,2,\Omega} + \|\omega_1 \xi\|_{0,3,\Omega} + \|\nabla \xi\|_{\tilde{\mathbb{H}}(\Omega)}.$$

- $W^{1,2}(\Omega, \omega_1) = \{\xi; \omega_1 \xi \in L^2(\Omega); \nabla \xi \in (L^2(\Omega))^2\}$ ,

$$\|\xi\|_{W^{1,2}(\Omega, \omega_1)} = \|\omega_1 \xi\|_{0,2,\Omega} + \|\nabla \xi\|_{0,2,\Omega}.$$

Les semi-normes associées à  $V(\Omega, \omega_1)$  et  $W^{1,2}(\Omega, \omega_1)$  sont définies par :

$$\begin{aligned} |\xi|_{V(\Omega, \omega_1)} &= \|\nabla \xi\|_{\tilde{\mathbb{H}}(\Omega)}, \\ |\xi|_{W^{1,2}(\Omega, \omega_1)} &= \|\nabla \xi\|_{0,2,\Omega}. \end{aligned}$$

On désigne par

- $V_0(\Omega, \omega_1)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $V(\Omega, \omega_1)$ .
- $W_0^{1,2}(\Omega, \omega_1)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{1,2}(\Omega, \omega_1)$ .

Pour tout réel strictement positif  $R$ , on note  $B_R = B(0, R)$  la boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$  de rayon  $R$  centrée à l'origine et  $B'_R = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R}$ .





# Chapitre 1

## Introduction

Depuis une cinquantaine d'années, les écoulements transsoniques font l'objet de très nombreuses études numériques et mathématiques ([22], [37], [41]...). Les modèles étudiés sont issus de la Mécanique des Fluides. Ils régissent l'écoulement stationnaire, compressible et irrotationnel d'un gaz parfait dans un domaine d'étude (ouvert borné, extérieur d'un profil ou canal infiniment long).

En général, les écoulements transsoniques sont le siège d'ondes de chocs faibles. Les sauts d'entropie et du rotationnel sont alors très faibles. Il est donc raisonnable de traiter des écoulements transsoniques irrotationnels et isentropiques. Dans ces conditions, le système d'équations décrivant ce type d'écoulements traduit l'irrotationnalité de l'écoulement et la loi de conservation de la masse. On leur adjoint des relations au bord et des conditions à l'infini qui prennent en compte les conditions aux limites satisfaites par le fluide considéré.

Les difficultés de ces écoulements résident dans la non linéarité et le caractère elliptique, parabolique et hyperbolique des équations correspondantes. La position de la ligne de changement de type (ligne sonique) est inconnue *a priori*. La présence de lignes d'ondes de choc dont les positions sont inconnues renforce les difficultés précédentes.

Du point de vue numérique, de nombreuses méthodes de calcul pour les équations exactes ou approchées ont été élaborées. Elles conduisent à des résultats en accord avec les réalités de la mécanique, on peut citer par exemple ([21, 22, 24, 31]).

Du point de vue mathématique, le problème d'existence de solutions pour un tel modèle se pose toujours. Des résultats partiels ont été apportés par de nombreux auteurs en utilisant différentes approches : méthode de compacité par compensation, méthodes de stabilisation, méthodes variationnelles. Parmi les résultats (sur l'existence de solutions) concernant ce type d'écoulements, on peut citer les travaux de C. S. Morawetz [37], P. Klouček et J. Nečas [33], P. Klouček [34], H. P. Gittel [27, 28] et M. Pogu et G. Tournemine [41].

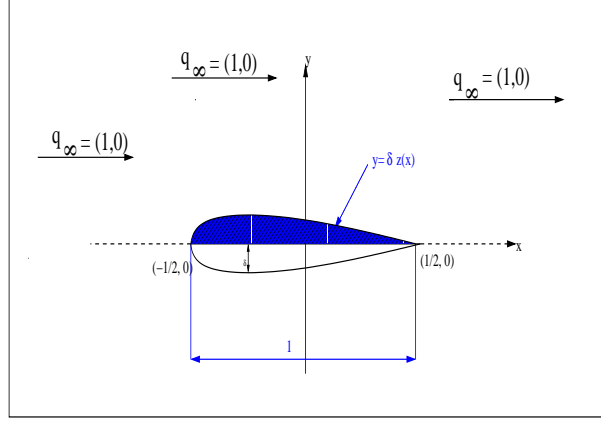
Dans [37], Morawetz a étudié les équations exactes (conservation de la masse et irrotationnalité) pour un écoulement transsonique établi dans un canal infiniment long ou à l'extérieur d'une aile. Sous l'hypothèse de conjectures significatives, l'auteur a montré l'existence de solutions faibles en utilisant la méthode de compacité par compensation, développée par F. Murat et L. C. Tartar [38]. En effet,

l'auteur a introduit un problème (de frontière libre) intermédiaire dans lequel les conditions aux limites ne sont imposées que sur la partie du bord où le module de la vitesse est inférieur strictement à la vitesse limite. L'auteur a fait ensuite l'hypothèse que ce problème intermédiaire possède une solution faible vérifiant une certaine *condition d'entropie* pour aboutir finalement à l'existence de solutions du problème initial. Quant à Klouček et Nečas [33], les auteurs ont également considéré les équations exactes décrivant les écoulements transsoniques dans un ouvert borné suffisamment régulier. Ils ont utilisé la méthode de stabilisation en rajoutant le terme  $\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi_t$ , où  $\varphi$  désigne le potentiel de vitesse, pour aboutir à une équation parabolique. L'existence, l'unicité et la régularité d'une solution du problème stabilisé ont été démontrées. Ensuite, les auteurs ont montré que la solution du problème stabilisé, forme une suite (en temps) *générique* du problème transsonique. Dans [34], Klouček a amélioré les résultats de régularité des solutions obtenues dans l'article précédent et a montré l'existence de solutions faibles *entropiques* pour le problème initial. Gittel à son tour dans [27] s'est intéressé également à l'équation exacte décrivant les écoulements transsoniques dans un ouvert borné simplement connexe. L'auteur a traité le problème comme une inégalité variationnelle sur un ensemble convexe dont les éléments satisfont une contrainte de bornitude portant sur la vitesse de l'écoulement et une *condition d'entropie*, (généralisant la *condition d'entropie* monodimensionnelle qui se traduit par une accélération finie). Ensuite, par les méthodes de calcul de variations, l'auteur a établi l'existence de solutions (pour l'inégalité variationnelle). Récemment, Gittel [28] a amélioré les résultats de [27] en remplaçant la *condition d'entropie* globale par une *condition d'entropie* locale. Ensuite la contrainte de bornitude portant sur la vitesse de l'écoulement a été affaiblie. Finalement, le problème variationnel (égalité variationnelle) a été résolu. Dans [41], Pogu et Tournemine ont étudié le problème des écoulements transsoniques (symétriques) établis autour d'un profil placé en atmosphère infinie. Les auteurs ont proposé une méthode fonctionnelle qui consiste à approcher le caractère irrotationnel de l'écoulement et à conserver l'équation de la conservation de la masse. Ensuite, ils introduisent une inégalité de saut afin de contraindre les ondes de choc à apparaître. Puis, en minimisant le rotationnel, ils parviennent à prouver l'existence de solutions faibles. Le caractère irrotationnel de cette solution faible n'est malheureusement pas garanti.

Le travail présenté dans le cadre de cette thèse concerne le cas elliptique-parabolique de l'équation modélisant l'écoulement stationnaire en régime transsonique établi autour d'un profil mince, caractérisé par un petit paramètre sans dimension  $\delta$ , et placé en atmosphère infinie. Ce profil est régulier sauf au bord de fuite où il présente une pointe d'angle non nul. Les écoulements sont supposés symétriques par rapport à l'axe des abscisses d'un repère orthonormé  $(O; x, y)$ . Ce qui permet de restreindre l'étude au demi-plan supérieur  $y \geq 0$ . Ensuite, ils sont supposés uniformes à l'infini de vitesse  $\mathbf{q}_\infty$  orienté dans la direction des abscisses et de nombre de Mach  $M_\infty \in ]0, 1[$ . On pose  $\mathbf{q}_\infty = (1, 0)$ . Le domaine de l'écoulement est donc le demi-plan positif privé du demi-profil.

L'équation du demi-profil  $\mathcal{P}$ , de frontière  $\Gamma_p$ , est donnée par :

$$\begin{cases} y = \delta z(x) \text{ pour } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ z(\frac{1}{2}) = z(-\frac{1}{2}) = 0 \text{ et } 0 \leq z \leq 1. \end{cases} \quad (1.1)$$



Profil symétrique d'épaisseur  $2\delta$

On se place dans le cas où  $\delta \ll 1$ . Ainsi, le bord du profil  $\mathcal{P}$ , noté  $\Gamma_p$ , est assimilé à un segment de droite.

En désignant par  $(u, v)$  le champ de vitesse et en supposant que la vitesse de cet écoulement est une perturbation de la vitesse à l'infini, on met en évidence l'équation des petites perturbations qui s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_x(g(u)) + \partial_y(v) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^2, \\ \partial_x v - \partial_y u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^2, \\ v(x, 0) = \sqrt{M_\infty} z'(x) \text{ sur } \Gamma_p, \\ v(x, 0) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \Gamma_p, \\ (u, v) \rightarrow (0, 0) \text{ quand } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (1.2)$$

où la fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{\gamma+1}{2}(u_{cr} - t)^2 + \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2 & \text{si } t \leq u_{cr}, \\ \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2 & \text{si } t \geq u_{cr}. \end{cases} \quad (1.3)$$

et  $z = z(x)$  décrit le bord du profil.

Les constantes  $\gamma$  et  $u_{cr}$  sont positives ( $\gamma = 1.4$  pour l'air et  $u_{cr}$  représente la vitesse critique).

Notons que les conditions mises sur  $\Gamma_p$  et  $\mathbb{R} \setminus \Gamma_p$  traduisent respectivement la condition de glissement sur le profil et la condition de symétrie de l'écoulement.

Ensuite, comme l'écoulement est symétrique, la condition de Kutta-Joukowski qui exige la continuité de la vitesse au bord de fuite est remplie.

Selon que  $u < u_{cr}$ ,  $u \geq u_{cr}$ , le système (1.2) est elliptique ou parabolique respectivement.

Si l'on note le potentiel de vitesse par  $\varphi$ , cette équation sera donnée par :

$$\begin{cases} \partial_x(g(\partial_x\varphi)) + \partial_y(\partial_y\varphi) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^2, \\ \partial_y\varphi(x, 0) = \sqrt{M_\infty} z'(x) \text{ sur } \Gamma_p, \\ \partial_y\varphi(x, 0) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \Gamma_p \\ (\partial_x\varphi, \partial_y\varphi) \rightarrow (0, 0) \text{ quand } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (1.4)$$

Le mémoire de cette thèse se compose de trois chapitres outre l'introduction (chapitre 1). Le deuxième chapitre, qui a fait l'objet d'une prépublication [3], porte sur la résolution de cette dernière équation, mais posée dans le domaine borné  $\Omega = ]-R_x, R_x[ \times ]0, R_y[$  avec  $R_x, R_y > 1$  pour entourer  $\Gamma_p$ . On suppose aussi que  $R_y$  est suffisamment large et tel que

$$\frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 R_y > \sqrt{M_\infty}. \quad (1.5)$$

On impose ensuite les conditions qui règnent à l'infini sur le reste du bord du domaine.

Dans le but d'établir l'existence et l'unicité de la solution, on introduit la formulation variationnelle du problème puis on considère la fonctionnelle dont la minimisation, sur un espace fonctionnel approprié  $V(\Omega)$  (réflexif), est équivalente à la solution faible du problème aux limites considéré. En étudiant les propriétés de cette fonctionnelle, on montre, sous l'hypothèse de profil mince (1.5), qu'elle est coercive dans les régions sous-soniques de  $\Omega$  mais qu'elle ne l'est pas dans les autres régions. Il s'ensuit que ce problème peut ne pas admettre de solution. On le plonge alors dans une famille de problèmes perturbés et en utilisant des fonctions convexes conjuguées, on lui associe un problème dual. On démontre l'existence et l'unicité d'un couple  $(u_*, v_*)$  et tel que :

$$\begin{cases} \partial_x(g(u_*)) + \partial_y v_* = 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \\ u_* \leq u_{cr} \text{ p.p. dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.6)$$

Afin d'établir une relation entre le couple de solution  $(u_*, v_*)$  et les solutions du problème initial, on part d'une suite minimisante pour le problème initial et on montre que ses points d'adhérence sont des fonctions à variation bornée  $\varphi$  dont le gradient est lié à l'unique solution du problème dual par :

$$\partial_x\varphi = u_* + \nu \text{ et } \partial_y\varphi = v_*$$

où  $\nu$  est une mesure de Radon bornée sur  $\Omega$ . Ensuite, on prouve la nullité de la mesure  $\nu$  dans les régions sous-soniques. Ce qui se traduit par l'existence et l'unicité de solutions faibles dans le cas où le système est purement elliptique.

Les résultats d'existence dans le deuxième chapitre étaient le point de départ pour formuler, dans le troisième chapitre, un second problème de minimisation prolongeant celui posé dans  $V(\Omega)$ . Ce dernier problème, appelé problème relaxé, est défini par le biais de fonctions de recession et moyennant un résultat présent dans (Alibert et Bouchitté [2], th 5.1, p. 140).

Le but principal est d'étendre les résultats déjà obtenus dans le chapitre 2 et de prouver que le problème initial, ainsi que le problème relaxé, possèdent le même infimum. Et de montrer ensuite que cet infimum est en fait un minimum (pour le problème relaxé).

Dans la littérature, on trouve un grand nombre de travaux concernant la relaxation sur les espaces  $BV(\Omega)$  ou  $W^{1,1}(\Omega)$ , on peut citer les travaux de D. Kinderlehrer et al. [32], T. Roubicek [43], L. Ambrosio et al. [5], [6] et [7], Bouchitté et al. [12], [13, 14].

Notons que notre modèle ne rentre pas dans le cadre (usuel) des situations citées antérieurement. On établit un résultat adéquat de densité dans  $BV(\Omega)$  afin de prouver les résultats cités plus-haut. Ensuite, on obtient une formulation variationnelle dans  $BV(\Omega)$  grâce aux dérivées directionnelles de la fonction convexe (du problème relaxé). On donne finalement quelques idées sur l'unicité de la solution. Ce chapitre 3 a fait aussi l'objet d'une prépublication [4].

Dans le chapitre 4, on se propose d'étudier l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (1.4). Pour cela, on considère le problème variationnel associé et on introduit un cadre fonctionnel "prolongeant" celui utilisé dans le cas borné. Le problème se réduit ainsi à un problème de minimisation convexe dont la fonctionnelle dépend seulement du gradient.

Afin de prouver l'existence d'un minimum, on prouve que cette fonctionnelle vérifie toutes les conditions requises à l'exception de la coercivité. Ensuite, on montre que si l'inégalité de Poincaré est satisfaite alors la fonctionnelle est coercive dans le convexe fermé dont les fonctions satisfont une contrainte de majoration portant sur la dérivée partielle en  $x$ . On est ainsi amené à une inégalité variationnelle au lieu d'une égalité. Puis, on établit l'existence d'une unique solution dans les régions où l'écoulement est sous-sonique (équation elliptique).

Concernant l'inégalité de Poincaré, elle n'est pas vérifiée car le domaine  $(\mathbb{R}_+^2)$  n'est borné dans aucune direction. On se propose alors d'introduire un espace de Sobolev avec poids permettant d'une part, d'avoir la même formulation faible que celle dans le cas borné et d'autre part, d'obtenir l'inégalité de Poincaré. Ce poids porte seulement sur la fonction et il est de la forme :

$$\omega_1(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2 + \rho^2} \log(2 + \rho^2)} \quad \text{où } \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.7)$$

Plusieurs auteurs ont étudié les espaces de Sobolev avec poids. On peut citer par exemple les deux ouvrages de Kufner [35] et Kufner-Opic [36] pour de plus amples détails. On trouve aussi un grand nombre de travaux concernant l'étude des EDP

définies dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ , le demi-espace  $\mathbb{R}_+^n$  et dans un domaine extérieur où l'approche est basée sur l'utilisation d'un espace de Sobolev avec poids comme cadre fonctionnel d'étude. On peut mentionner par exemple les travaux de C. Amrouche, V. Girault et J. Giroire dans [8, 9] (pour résoudre le laplacien dans  $\mathbb{R}^n$  et dans un domaine extérieur), de T. Boulmezaoud [15], de C. Amrouche et S. Nečasova [10] et de B. Hanouzet [30] (pour résoudre le laplacien dans  $\mathbb{R}_+^n$ ).

Comme auparavant, on plonge le problème dans une famille de problèmes perturbés et on utilise des fonctions convexes conjuguées pour lui associer un problème dual. On établit ainsi l'existence d'une unique solution du problème dual et telle que :

$$\begin{cases} \partial_x(g(u_*)) + \partial_y v_* = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2, \\ u_* \leq u_{cr} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2. \end{cases} \quad (1.8)$$

Ensuite, dans le cas où l'écoulement est sous-sonique, on montre l'existence d'une solution unique pour le problème initial dont le gradient n'est autre que  $(u_*, v_*)$ . Globalement, l'existence d'une fonction  $\varphi$  liée à  $(u_*, v_*)$  par une relation analogue à celle dans le cas borné, *i.e.* ,

$$\partial_x \varphi = u_* + \nu \text{ et } \partial_y \varphi = v_*$$

où  $\nu$  est une mesure positive et bornée sur  $\mathbb{R}_+^2$ , ne peut être établie qu'avec le rajout d'une certaine condition. Notons que cette condition résulte dans le cas borné de l'inégalité de Poincaré dans  $W^{1,1}$ . Ensuite, on donne quelques idées afin d'estimer l'erreur de troncature entre la solution du problème dual définie dans le cas borné et celle définie dans le demi-plan positif.







# Chapitre 2

## Résultats d'existence pour une équation aux dérivées partielles non linéaire elliptique dégénérée

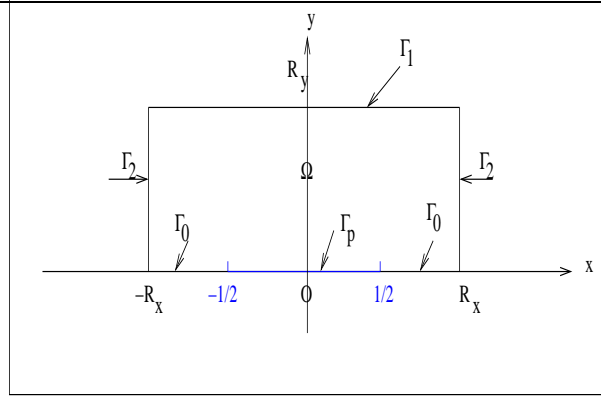
Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution de (1.4) posé dans le domaine borné  $\Omega = ]-R_x, R_x[ \times ]0, R_y[$  avec  $R_x > 1$  pour entourer  $\Gamma_p$  (pour simplifier on prend  $\Gamma_p = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times \{0\}$ ) et  $R_y$  suffisamment large et tel que

$$\frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 R_y > \sqrt{M_\infty}.$$

Ensuite, on impose les conditions qui règnent à l'infini sur le reste du bord du domaine et le système est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x(g(\partial_x\varphi)) + \partial_y(\partial_y\varphi) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \partial_y\varphi = \sqrt{M_\infty} z'(x) \text{ sur } \Gamma_p, \\ \partial_x\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ \partial_y\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

## CHAPITRE 2. RÉSULTATS D'EXISTENCE POUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRE ELLIPTIQUE DÉGÉNÉRÉE



Domaine d'étude

où la fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{\gamma+1}{2}(u_{cr}-t)^2 + \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2 & \text{si } t \leq u_{cr}, \\ \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2 & \text{si } t \geq u_{cr}. \end{cases}$$

La constante  $M_\infty$  désigne le nombre de Mach à l'infini,  $M_\infty \in ]0, 1[$ , et  $z = z(x)$  décrit le bord du profil. Les constantes  $\gamma$  et  $u_{cr}$  sont positives ( $\gamma = 1.4$  pour l'air et  $u_{cr}$  représente la vitesse critique).

Afin de prouver l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (2.1), on introduit le problème variationnel dont la fonctionnelle associée représente "l'énergie totale" du système. Ensuite, on étudie les propriétés de cette fonctionnelle, plus précisément, on montre qu'elle est coercive dans l'ensemble convexe dont les fonctions vérifient une contrainte portant sur la dérivée en  $x$ . Ce qui nous amène à une inégalité variationnelle au lieu d'une égalité. Globalement, la fonctionnelle est coercive dans un espace non réflexif. Il s'ensuit que ce problème peut ne pas admettre de solution. Ainsi, on considère une famille de problèmes perturbés et grâce aux fonctions convexes conjuguées, on lui associe un problème dual. On prouve pour ce dernier l'existence d'une unique solution  $(u_*, v_*)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \partial_x(g(u_*)) + \partial_y v_* = 0 & \text{p.p. dans } \Omega, \\ u_* \leq u_{cr} & \text{p.p. dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Puis, on montre qu'il existe une fonction  $\varphi$  à variation bornée telle que :

$$\partial_x \varphi = u_* + \nu \quad \text{et} \quad \partial_y \varphi = v_*$$

avec  $\nu$  une mesure de Radon, bornée sur  $\Omega$  et nulle dans les régions sous-soniques (de  $\Omega$ ).

Le présent chapitre est organisé comme suit : Dans la section 2 on établit la formulation mathématique du problème. Les notations et les espaces fonctionnels utilisés par la suite sont introduits dans la section 3. La section 4 concerne l'étude

## **CHAPITRE 2. RÉSULTATS D'EXISTENCE POUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRE ELLIPTIQUE DÉGÉNÉRÉE**

---

de l'espace fonctionnel où l'énergie associée au problème doit être minimisée. Dans la section 5 on définit la fonctionnelle (énergie) à minimiser. On montre ensuite un résultat d'existence et d'unicité dans les régions (du domaine étudié) où l'écoulement est strictement subsonique. La section 6 est consacrée à l'introduction et à l'étude du problème dual. On montre que ce problème dual possède une solution unique. Finalement, en utilisant cette solution unique, on montre que le problème initial possède des solutions; par contre, l'unicité de la solution n'est pas assurée. La dernière section 7 est consacrée à la conclusion du chapitre et aux perspectives.

# Existence results for a degenerated non-linear elliptic problem

M. Amara<sup>1</sup>, A. Obeid<sup>1</sup> and G. Vallet<sup>1</sup>

**Abstract.** The aim of this paper is to establish the existence of weak solutions for a "subsonic" air flow around a thin profile. This problem is described by the small disturbance equations, which are non-linear and of elliptic-parabolic type. An associated integral functional is minimized over a reflexive Banach space. Using some perturbation-duality arguments, we prove the existence of solutions which are the unique solution of the problem when the flow remains strictly subsonic.

**Key words.** degenerated elliptic equation, small disturbance equations, convex analysis, dual problem.

**AMS subject classifications.** 35M10, 35J70.

## 2.1 Introduction

We are interested in the "subsonic" steady state two-dimensional irrotational compressible flow of a perfect fluid. The mathematical model describing this flow is of variable type, *i.e.* the corresponding equation is elliptic when the flow is strictly subsonic and parabolic in the other case. The difficulties of the problem come from the non-linearity of the equations and the change of the flow type.

The problem that we treat here corresponds to the elliptic-parabolic case of the equation modelizing the transonic flow, which is the subject of several numerical and mathematical research. From numerical point of view, many simulations are realized, the results obtained are in accordance with the experimentations (see for example [4, 5, 7, 11]). From theoretical point of view, the question of existence and uniqueness of a solution to such a model arises always. Several approaches are used in the literature: compensated compactness, stabilization's method, variational approach. Among the results existing in this direction, we mention the works of C. S. Morawetz [14], P. Klouček and J. Nečas [12], Klouček [13], H. P. Gittel [9, 10] and M. Pogu and G. Tournemine [17].

Many problems are represented by this model, in particular, airflows around a thin aerodynamic profile or gas flows in a long channel.

In the present paper we consider such a flow ("subsonic") established around a thin profile placed in an infinite atmosphere. This flow is assumed to be uniform at infinity and it will be considered, in the domain, as a perturbation of the flow

---

<sup>1</sup>Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université de Pau et des Pays de l'Adour, BP1155 64013 Pau, France (Mohamed.Amara@univ-pau.fr, Amira.Obeid@univ-pau.fr, Guy.Vallet@univ-pau.fr)

## 2.1. Introduction

at infinity. By truncature, we restrict the study domain to a bounded domain  $\Omega = ]-R_x, R_x[ \times ]0, R_y[$ . The lengths  $R_x$  and  $R_y$  are chosen large enough to display the boundary conditions at infinity on the truncated boundary. If we denote by  $(u, v)$  the vector valued function which describes the velocity of the flow, the corresponding "subsonic" small disturbance model is given by:

$$\begin{cases} \partial_x g(u) + \partial_y v = 0 \text{ in } \Omega, \\ \partial_x v - \partial_y u = 0 \text{ in } \Omega, \\ v = \sqrt{M_\infty} z'(x) \text{ on } \Gamma_p, \\ u = 0 \text{ on } \Gamma_2, \\ v = 0 \text{ on } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \end{cases} \quad (2.3)$$

where the function  $g$  is defined on  $\mathbb{R}$  by:

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{\gamma+1}{2}(u_{cr} - t)^2 + \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2 & \text{if } t \leq u_{cr}, \\ \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2 & \text{if } t \geq u_{cr}. \end{cases}$$

Here  $M_\infty$  is the Mach number at infinity with  $M_\infty \in ]0, 1[$  and  $z = z(x)$  describes the equation of the normalized profile. The constants  $\gamma$  and  $u_{cr}$  are positive ( $\gamma = 1.4$  for the air and  $u_{cr}$  represents the critical speed).

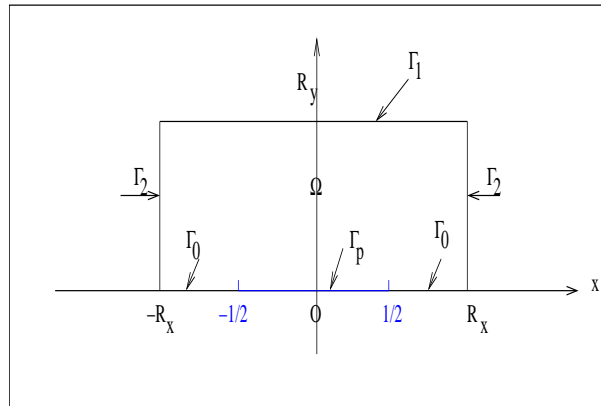


Fig. 1 Study domain

Our aim is to prove existence and uniqueness of solution to problem (2.3). For this purpose, we formulate this problem as a minimization of an associated total energy in an appropriate reflexive space. We show that the "energy" functional is coercive only in the strictly subsonic regions of  $\Omega$ . So the minimization problem does not necessarily possess a solution. Then we embed it in a family of perturbed

## 2.2. Mathematical model

---

problems, and using conjugate convex functions we construct the corresponding dual problem. We prove the existence of a unique couple  $(u_*, v_*)$  for the dual problem satisfying:

$$\begin{cases} \partial_x g(u_*) + \partial_y v_* = 0 \text{ a.e. in } \Omega, \\ u_* \leq u_{cr} \text{ a.e. in } \Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

In order to establish the relationship between  $(u_*, v_*)$  and the solutions of the initial problem, we start with a minimizing sequence for the initial problem and we prove that its adherence points are  $BV$  functions  $\varphi$  whose gradients are related to  $(u_*, v_*)$  by

$$\partial_x \varphi = u_* + \nu \text{ et } \partial_y \varphi = v_*$$

where  $\nu$  is a nonnegative bounded Radon measure. Moreover, we show that the measure  $\nu$  vanishes on the strictly subsonic regions.

The paper is organized as follows. In section 2, we formulate the mathematical model. Section 3 is concerned by the notations and functional spaces used in the sequel. After the presentation of an appropriate functional space and its properties in section 4, we reduce the problem to the minimization of a suitable "energy" functional  $F$  in section 5. Section 6 is devoted to the study of the functional  $F$  and in particular, its coerciveness property. The existence of a unique solution is proved in the strictly subsonic regions of the domain. The proof is based on a standard theorem of minimization (see, for example, Temam and al. [6]). Using the concept of perturbed problems, we give, in section 7, an approach by duality and prove the existence of a unique solution to the dual problem. Using this one, we show the existence of solutions to the original problem but the uniqueness is not guaranteed.

## 2.2 Mathematical model

The aim of this paragraph is to modelize a steady state two-dimensional irrotational compressible flow around a thin profile, characterized by a small dimensionless parameter  $\delta$ , the thickness of the profile, when the Mach number at infinity,  $M_\infty$ , is between 0 and 1. The unknown is the velocity of the flow. For simplicity, the considered flow is supposed to be symmetric with respect to the axis  $(o, x)$  and the study is taken in the higher half-space  $y \geq 0$ .

The equation of the half-profile is given by:

$$\begin{cases} y = \delta z(x) \text{ for } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ z(\frac{1}{2}) = z(-\frac{1}{2}) = 0 \text{ and } 0 \leq z \leq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

## 2.2. Mathematical model

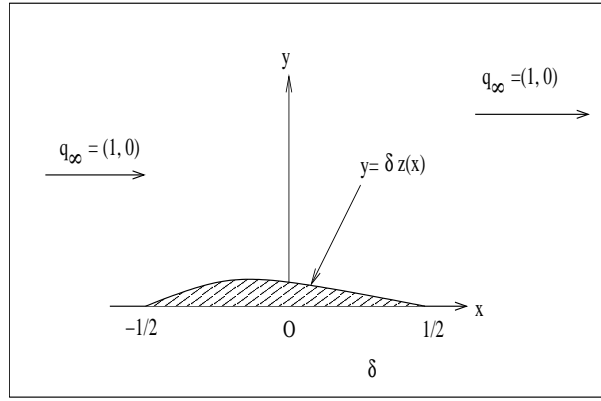


Fig. 2 Profile of thickness  $2\delta$

The flow around the profile is considered as a perturbation of the flow at infinity, which is uniform. An asymptotical analysis of the flow allows the truncature of the infinite domain. Thus, we restrict the study to a finite domain. The conditions on the truncature boundary  $\tilde{\Gamma}$  are induced by those at infinity.  $R_x$  and  $R_y$  are chosen large enough in order to display the boundary conditions at infinity on the truncated boundary and  $\delta$  is assumed to be small.

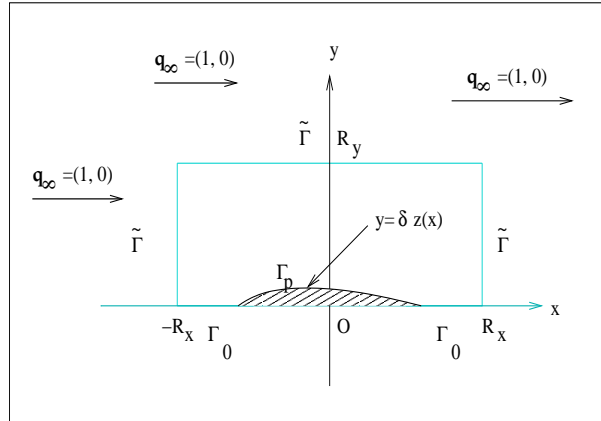


Fig. 3

We denote by:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q} = (u, v) : \text{ the flow speed,} \\ \mathbf{q}_\infty = (1, 0) : \text{ the flow speed at infinity,} \\ M_\infty : \text{ the Mach number at infinity, } M_\infty \in ]0, 1[, \\ \rho(|\mathbf{q}|^2) = [1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 (1 - |\mathbf{q}|^2)]^{\frac{1}{\gamma-1}} : \text{ the fluid density,} \\ \gamma : \text{ the ratio of the specific heats, } \gamma = 1.4 \text{ for the air,} \\ \mathbf{n} : \text{ the unit outward normal on } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

## 2.2. Mathematical model

---

The motion is governed by the following system of equations:

- conservation of the mass

$$\partial_x \rho(|\mathbf{q}|^2)u + \partial_y \rho(|\mathbf{q}|^2)v = 0 \text{ in } \Omega, \quad (2.6)$$

- irrotationality

$$\partial_x v - \partial_y u = 0 \text{ in } \Omega, \quad (2.7)$$

- the boundary condition on the profile

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_p, \quad (2.8)$$

- symmetry of the flow

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_0, \quad (2.9)$$

- the fluid speed is supposed to be uniform at infinity

$$\mathbf{q} \cong \mathbf{q}_\infty \text{ on } \tilde{\Gamma}. \quad (2.10)$$

We consider the decomposition  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_\infty + \mathbf{Q}$  where  $\mathbf{Q} = (U, V)$  is a perturbation of  $\mathbf{q}$ . We get:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{M_\infty^2} - 1 - (\gamma + 1)U - \frac{\gamma + 1}{2}U^2 - \frac{\gamma - 1}{2}V^2 \right) \partial_x U + \\ & \left( \frac{1}{M_\infty^2} - (\gamma - 1)U - \frac{\gamma - 1}{2}U^2 - \frac{\gamma + 1}{2}V^2 \right) \partial_y V - 2(V + UV)\partial_x V = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

We neglect  $U^2$ ,  $V^2$  and  $UV$  and we assume that this perturbation  $\mathbf{Q}$  is mainly horizontal, we obtain:

$$\partial_x \left[ \left( \frac{1 - M_\infty^2}{M_\infty^2} - \frac{\gamma + 1}{2}U \right) U \right] + \partial_y \left( \frac{1}{M_\infty^2}V \right) = 0. \quad (2.12)$$

Equations (2.7) and (2.12) are rewritten, under the change of variable  $y = \frac{1}{\delta^{1/3}\sqrt{M_\infty}}\tilde{y}$  and the change of unknowns  $U = \frac{\delta^{2/3}}{M_\infty}\tilde{u}$ ,  $V = \frac{\delta}{\sqrt{M_\infty}}\tilde{v}$ , as:

$$\begin{cases} \partial_x \left[ \left( K - \frac{\gamma + 1}{2}\tilde{u} \right) \tilde{u} \right] + \partial_{\tilde{y}}\tilde{v} = 0, \\ \partial_x\tilde{v} - \partial_{\tilde{y}}\tilde{u} = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

where the transonic flow parameter  $K$  and the critical speed  $u_{cr}$  are given by:

$$K = \frac{1 - M_\infty^2}{\delta^{2/3}M_\infty} \quad \text{and} \quad u_{cr} = \frac{K}{\gamma + 1}.$$



## 2.2. Mathematical model

---

Concerning the boundary conditions, we assume that  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \cong (0, 0)$  on  $\tilde{\Gamma}$ . The boundary conditions on  $\Gamma_0 \cup \Gamma_p$  (equation (2.8)) are rewritten as:

$$\tilde{v} = 0 \text{ on } \Gamma_0 \text{ and } \delta u z' = v \text{ on } \Gamma_p.$$

Thus, we obtain

$$\tilde{v} = \sqrt{M_\infty} z' + \frac{\delta^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{M_\infty}} \tilde{u} z' \text{ on } \Gamma_p.$$

We neglect the term  $\frac{\delta^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{M_\infty}} \tilde{u} z'$  in the previous expression and we obtain the small disturbance model:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x [(K - \frac{\gamma+1}{2} \tilde{u}) \tilde{u}] + \partial_{\tilde{y}} \tilde{v} = 0 \text{ in } \Omega, \\ \partial_x \tilde{v} - \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} = 0 \text{ in } \Omega, \\ (\tilde{u}, \tilde{v}) \cong (0, 0) \text{ on } \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{v} = \sqrt{M_\infty} z'(x) \text{ on } \Gamma_p, \\ \tilde{v} = 0 \text{ on } \Gamma_0, \end{array} \right. \quad (2.14)$$

We assume that  $R_y$  is large enough such that:

$$\frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 R_y > \sqrt{M_\infty}. \quad (2.15)$$

Whether  $\tilde{u} < u_{cr}$ ,  $\tilde{u} = u_{cr}$  or  $\tilde{u} > u_{cr}$ , the system (2.14) is elliptic, parabolic or hyperbolic respectively.

Let  $f$  and  $g$  be the real functions defined by:

$$f(t) = \left( K - \frac{\gamma+1}{2} t \right) t = -\frac{\gamma+1}{2} (u_{cr} - t)^2 + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2$$

and

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{if } t \leq u_{cr}, \\ f(u_{cr}) & \text{if } t \geq u_{cr}. \end{cases} \quad (2.16)$$

We consider, instead of (2.14), the following system:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x g(\tilde{u}) + \partial_{\tilde{y}} \tilde{v} = 0 \text{ in } \Omega, \\ \partial_x \tilde{v} - \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} = 0 \text{ in } \Omega, \\ (\tilde{u}, \tilde{v}) \cong (0, 0) \text{ on } \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{v} = \sqrt{M_\infty} z'(x) \text{ on } \Gamma_p, \\ \tilde{v} = 0 \text{ on } \Gamma_0. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

### 2.3. Notations

The systems (2.14) and (2.17) are equivalent if  $\tilde{u} \leq u_{cr}$ , *i.e.* when the problem remains elliptic or parabolic. Concerning the boundary conditions on  $\tilde{\Gamma}$ , we have to choose one of these conditions and we take  $\tilde{u} = 0$  on  $\Gamma_2$  or equivalently  $g(\tilde{u}) = 0$  on  $\Gamma_2$ .

Finally, the problem is written as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x g(\tilde{u}) + \partial_{\tilde{y}} \tilde{v} = 0 \text{ in } \Omega, \\ \partial_x \tilde{v} - \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} = 0 \text{ in } \Omega, \\ \tilde{v} = \sqrt{M_\infty} z'(x) \text{ on } \Gamma_p, \\ g(\tilde{u}) = 0 \text{ on } \Gamma_2, \\ \tilde{v} = 0 \text{ on } \Gamma_0 \cup \Gamma_1. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

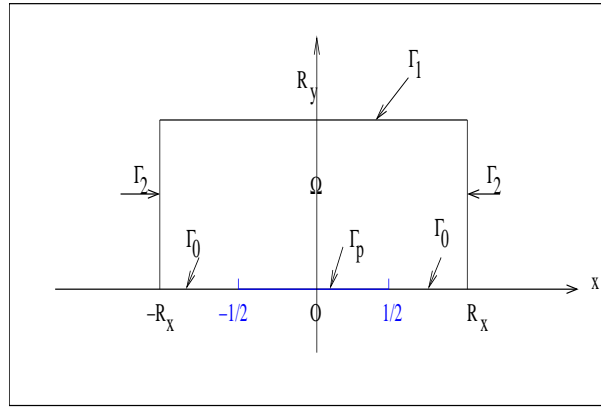


Fig. 4 Study domain

### 2.3 Notations

Let  $\Omega$  be the above bounded domain of  $\mathbb{R}^2$  and let  $m$  be a nonnegative integer. We denote by  $\mathcal{C}^m(\Omega)$  the space consisting of all functions  $\xi$  which, together with all their partial derivatives  $D^j \xi$  of orders  $|j| \leq m$ , are continuous on  $\Omega$ . We abbreviate  $\mathcal{C}^0(\Omega) \equiv \mathcal{C}(\Omega)$ . Let  $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}^m(\Omega)$ . The subspaces  $\mathcal{C}_c(\Omega)$  and  $\mathcal{D}(\Omega)$  consist of all those functions in  $\mathcal{C}(\Omega)$  and  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ , respectively, which have compact support in  $\Omega$ . We set  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \{\xi|_{\Omega}; \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\}$ . Let  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$  (or  $L^\infty(\Omega)$ ) be the space of the classes of real functions defined almost everywhere on  $\Omega$  with p-th power integrable (or essentially bounded real functions) for the Lebesgue measure  $d\Omega = dx dy$ . They are Banach spaces with the norm

$$\|\xi\|_{0,p,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |\xi(x,y)|^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

or

$$\|\xi\|_{0,\infty,\Omega} = \text{ess. sup}_{(x,y) \in \Omega} |\xi(x,y)|.$$

### 2.3. Notations

---

The Sobolev spaces  $W^{m,p}(\Omega)$  are the spaces of functions in  $L^p(\Omega)$  with derivatives of order less than or equal to  $m$  in  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ). Equipped with their natural norms:

$$\|\xi\|_{m,p,\Omega} = \left( \sum_{|j| \leq m} \|D^j \xi\|_{0,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{if } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\xi\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|j| \leq m} \|D^j \xi\|_{0,\infty,\Omega},$$

these spaces are Banach spaces.

In order to state some mathematical properties, we set

- $V(\Omega) = \{\xi \in W^{1,2}(\Omega); \partial_x \xi \in L^3(\Omega)\}$ ,  $V^0(\Omega) = \{\xi \in V(\Omega); \int_{\Omega} \xi \, d\Omega = 0\}$ ,
- $W(\Omega) = \{\xi \in W^{1,1}(\Omega), \partial_y \xi \in L^2(\Omega)\}$ ,  $W^0(\Omega) = \{\xi \in W(\Omega); \int_{\Omega} \xi \, d\Omega = 0\}$ ,
- $\mathbb{H}(\Omega) = L^3(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

The sets  $V(\Omega)$ ,  $W(\Omega)$  and  $\mathbb{H}(\Omega)$  are Banach spaces with their natural norms, respectively defined by:

$$\|\xi\|_{V(\Omega)} = \|\xi\|_{0,2,\Omega} + \|\partial_x \xi\|_{0,3,\Omega} + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega},$$

$$\|\xi\|_{W(\Omega)} = \|\xi\|_{0,1,\Omega} + \|\partial_x \xi\|_{0,1,\Omega} + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega},$$

$$\|(p, q)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} = \|p\|_{0,3,\Omega} + \|q\|_{0,2,\Omega}.$$

The seminorms associated to  $V(\Omega)$  and  $W(\Omega)$  are respectively given by:

$$|\xi|_{V(\Omega)} = \|\partial_x \xi\|_{0,3,\Omega} + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega},$$

$$|\xi|_{W(\Omega)} = \|\partial_x \xi\|_{0,1,\Omega} + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}.$$

Since  $\Omega$  is a bounded domain, we have  $V(\Omega) \subset W(\Omega)$  and for any  $\xi \in V(\Omega)$ , we get that  $\nabla \xi \in \mathbb{H}(\Omega)$ .

We denote by  $BV(\Omega)$  the space of bounded variation functions. We recall that it is a Banach space with respect to the norm

$$\|\xi\|_{BV(\Omega)} = \|\xi\|_{0,1,\Omega} + |D\xi|(\Omega)$$

where

$$|D\xi|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} \xi \operatorname{div} \mathbf{f} \, d\Omega; \mathbf{f} \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \|\mathbf{f}\|_{0,\infty,\Omega} \leq 1 \right\},$$

## 2.4. Some properties of the functional spaces

---

with, for every  $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ,  $\|\mathbf{f}\|_{0,\infty,\Omega} = \max(\|f_1\|_{0,\infty,\Omega}, \|f_2\|_{0,\infty,\Omega})$ .

We consider also the given function  $z$  in  $W_0^{1,\infty}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  and we recall that it verifies  $0 \leq z \leq 1$ .

For a measurable function  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , we define

$$\xi^+ = \max(\xi, 0) \text{ and } \xi^- = -\min(\xi, 0),$$

then  $\xi^+\xi^- = 0$ ,  $\xi^+ \geq 0$ ,  $\xi^- \leq 0$ ,  $-\xi^- \leq \xi \leq \xi^+$  and  $(\xi^+ - \xi)(\xi + \xi^-) = 0$ .

For any vector field  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ , we define the divergence of  $\mathbf{u}$  by  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \partial_x u_1 + \partial_y u_2$ .

Finally, we denote by  $c_1$ ,  $c_2$  and  $c_3$  the three nonnegative constants defined by:

$$\begin{cases} c_1 = \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |z'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ c_2 = \sqrt{M_\infty} u_{cr} + \frac{M_\infty R_y c_1^2}{2}, \\ c_3 = \sqrt{M_\infty} u_{cr} + (\gamma + 1) u_{cr}^3 (R_x R_y) + M_\infty R_y c_1^2. \end{cases}$$

## 2.4 Some properties of the functional spaces

### 2.4.1 A trace theorem in $V(\Omega)$

Our goal is to prove a trace theorem in  $V(\Omega)$  *i.e.* that we can define the trace on  $\partial\Omega$  of any element  $\xi$  of  $V(\Omega)$ . For this purpose, we begin by a density result in  $V(\Omega)$ .

**Proposition 1.** *Let  $\tilde{\Omega} = ] - 3R_x, 5R_x[ \times ] - R_y, 3R_y[$ ,*

*i) There exists a linear continuous operator  $P : V(\Omega) \rightarrow V(\tilde{\Omega})$  such that  $P\xi|_\Omega = \xi$ .*

*ii) Moreover, there exists a constant  $C$  depending only on  $\Omega$  such that*

$$\|P\xi\|_{V(\tilde{\Omega})} \leq C \|\xi\|_{V(\Omega)}.$$

*iii)  $\mathcal{D}(\tilde{\Omega})$  is dense in  $V(\Omega)$ .*

**Proof 1.** The proof of points (i) and (ii) consists in using four successive reflections (see Fig. 3).

## 2.4. Some properties of the functional spaces

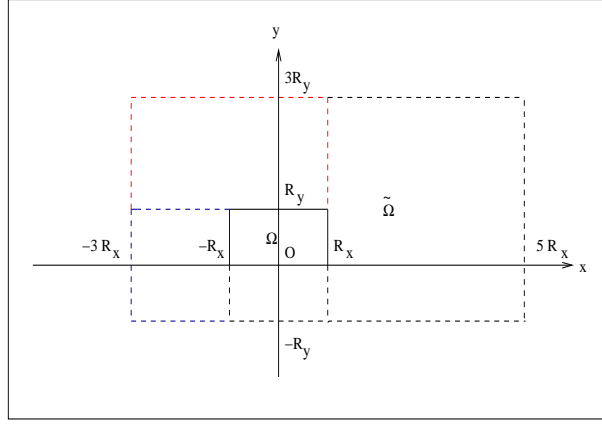


Fig. 5

We obtain then the linear continuous operator  $P : V(\Omega) \longrightarrow V(\tilde{\Omega})$  such that  $P\xi|_{\Omega} = \xi$ .

2. Let us fix an open set, say  $\mathcal{O}$ , such that  $\bar{\Omega} \subset \mathcal{O} \subset \tilde{\Omega}$  and choose a "cut-off" function  $\psi$  in  $\mathcal{D}(\tilde{\Omega})$  such that  $\psi = 1$  on  $\mathcal{O}$ . For every element  $\xi$  of  $V(\Omega)$ , the function  $\psi P\xi$  has a compact support in  $\tilde{\Omega}$  and coincides with  $P\xi$  on  $\mathcal{O}$ , so with  $\xi$  on  $\Omega$ . Therefore, we can prove by regularization that  $\xi$  is a limit in  $V(\Omega)$  of a sequence of functions of  $\mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ . ■

In order to define the trace space of functions belonging to  $V(\Omega)$ , we consider some element  $\xi$  of  $\mathcal{D}(\tilde{\Omega})$  and denote by  $\gamma_0\xi$  its restriction to  $\partial\Omega$ . The density of  $\mathcal{D}(\tilde{\Omega})$  in  $V(\Omega)$  implies that the mapping  $\xi \longmapsto \gamma_0\xi$  defined on  $\mathcal{D}(\tilde{\Omega})$  can be extended to a linear and continuous mapping, still denoted by  $\gamma_0$ , from  $V(\Omega)$  into  $L^2(\partial\Omega)$ . If we denote by  $M(\partial\Omega)$  the set of these traces, then

**Proposition 2.**  $M(\partial\Omega)$  is a Banach space with respect to the norm

$$\|\mu\|_{M(\partial\Omega)} \stackrel{def}{=} \inf_{\gamma_0\xi=\mu} \|\xi\|_{V(\Omega)}$$

and the mapping  $\gamma_0 : V(\Omega) \longrightarrow M(\partial\Omega)$  is linear, continuous and for every  $\xi \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ , we have  $\gamma_0(\xi) = \xi|_{\partial\Omega}$ .

**Proof** We introduce the quotient space  $V(\Omega)/Ker\gamma_0$  which is a Banach space for the usual quotient norm  $\|\dot{\xi}\| = \inf_{\eta \in \dot{\xi}} \|\eta\|_{V(\Omega)}$  where each class  $\dot{\xi}$  in  $V(\Omega)/Ker\gamma_0$  has a representative  $\eta$  in  $V(\Omega)$  such that  $\xi - \eta$  belongs to  $Ker\gamma_0$ . So we have  $\|\dot{\xi}\| = \inf_{\gamma_0(\eta)=\gamma_0(\xi)} \|\eta\|$ . The mapping  $\dot{\gamma}_0$  defined from  $V(\Omega)/Ker\gamma_0$  into  $M(\partial\Omega)$  by

$$\dot{\gamma}_0(\dot{\xi}) = \gamma_0(\xi).$$

is a linear bijection. Moreover, it is an isometry and then  $M(\partial\Omega)$  is a complete space. ■

## 2.4. Some properties of the functional spaces

---

**Proposition 3.** *There exists a continuous mapping  $R_0$  defined from  $M(\partial\Omega)$  into  $V(\Omega)$  such that, for every  $\mu$  in  $M(\partial\Omega)$ , we have*

$$(\gamma_0 \circ R_0) \mu = \mu.$$

**Proof** Let  $\mu \in M(\partial\Omega)$ , then there exists  $\xi \in V(\Omega)$  such that  $\gamma_0\xi = \mu$  on  $\partial\Omega$ . Let us note

$$E_\mu = \{\xi \in V(\Omega); \gamma_0\xi = \mu \text{ on } \partial\Omega\}.$$

For every  $\xi \in V(\Omega)$ , we define

$$H(\xi) = (\|\xi\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\partial_x\xi\|_{0,3,\Omega}^2 + \|\partial_y\xi\|_{0,2,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.19)$$

We remark that (2.19) is equivalent to  $\|\xi\|_{V(\Omega)}$  and that  $V(\Omega)$ , endowed by this norm, is an uniformly convex space. Applying the convex functions theory to  $E_\mu$  and to the strictly convex function  $H : E_\mu \rightarrow \mathbb{R}$  (see for example, Temam and al. [6]), there exists a unique  $\psi \in E_\mu$  such that  $H(\psi) = \inf_{\xi \in E_\mu} H(\xi)$  and so,

$$\|\psi\|_{V(\Omega)} = \|\mu\|_{M(\partial\Omega)}.$$

Therefore we define  $R_0$  by  $\mu \xrightarrow{R_0} \psi$ . For the continuity, we consider a sequence  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  and an element  $\mu$  in  $M(\partial\Omega)$ , such that  $\mu_n \rightarrow \mu$  in  $M(\partial\Omega)$ . There exists  $\psi_n$  in  $E_{\mu_n}$  and  $\psi$  in  $E_\mu$  such that  $\|\psi_n\|_{V(\Omega)} = \|\mu_n\|_{M(\partial\Omega)}$  and  $\|\psi\|_{V(\Omega)} = \|\mu\|_{M(\partial\Omega)}$ . Therefore,  $\|\psi_n\|_{V(\Omega)} \rightarrow \|\psi\|_{V(\Omega)}$ .

Our purpose is now to prove that the sequence  $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$  converges strongly to  $\psi$  in  $V(\Omega)$ . But according to the uniform convexity of the space  $V(\Omega)$ , it remains us to establish that this sequence converges weakly to  $\psi$  in  $V(\Omega)$ . Since  $\|\psi_n\|_{V(\Omega)} \rightarrow \|\psi\|_{V(\Omega)}$ , the sequence  $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$  is bounded in  $V(\Omega)$  and so, there exists a subsequence  $\{\psi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  and a function  $\varphi$  in  $V(\Omega)$ , such that  $\psi_{n_k}$  converges weakly to  $\varphi$  in  $V(\Omega)$ . Therefore,

$$\|\varphi\|_{V(\Omega)} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\psi_{n_k}\|_{V(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\psi_{n_k}\|_{V(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_{n_k}\|_{M(\partial\Omega)} = \|\mu\|_{M(\partial\Omega)}. \quad (2.20)$$

Let us note again  $\{\psi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  this subsequence. The continuity of the linear map  $\gamma_0$  from  $V(\Omega)$  into  $M(\partial\Omega)$  implies that  $\varphi$  is in  $E_\mu$  and so,

$$\|\mu\|_{M(\partial\Omega)} \leq \|\varphi\|_{V(\Omega)}. \quad (2.21)$$

Combining (2.20), (2.21) with the property of strict convexity of the function  $H$ , we have  $\varphi = \psi$  a.e. in  $\Omega$ . So, all the sequence  $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$  converges towards  $\psi$  in  $V(\Omega)$  and  $R_0$  is continuous.  $\blacksquare$

**Proposition 4.** *For any  $\zeta$  in  $M'(\partial\Omega)$  the dual space of  $M(\partial\Omega)$ , we have*

$$\|\zeta\|_{M'(\partial\Omega)} = \sup_{\{\xi \in V(\Omega), \xi \neq 0\}} \frac{\langle \zeta, \gamma_0\xi \rangle_{\partial\Omega}}{\|\xi\|_{V(\Omega)}}$$

## 2.4. Some properties of the functional spaces

---

**Proof** Since for any  $\xi$  in  $V(\Omega)$ ,  $\gamma_0\xi$  is in  $M(\partial\Omega)$  and  $\|\gamma_0\xi\|_{M(\partial\Omega)} \leq \|\xi\|_{V(\Omega)}$ ,

it follows that

$$\frac{\langle \zeta, \gamma_0\xi \rangle_{\partial\Omega}}{\|\xi\|_{V(\Omega)}} \leq \frac{\langle \zeta, \gamma_0\xi \rangle_{\partial\Omega}}{\|\gamma_0\xi\|_{M(\partial\Omega)}} \leq \sup_{\{\mu \in M(\partial\Omega), \mu \neq 0\}} \frac{\langle \zeta, \mu \rangle_{\partial\Omega}}{\|\mu\|_{M(\partial\Omega)}}.$$

Thus, to establish the result, it suffices to show that for any  $\mu$  in  $M(\partial\Omega)$ ,

$$\frac{\langle \zeta, \mu \rangle_{\partial\Omega}}{\|\mu\|_{M(\partial\Omega)}} \leq \sup_{\{\xi \in V(\Omega), \xi \neq 0\}} \frac{\langle \zeta, \gamma_0\xi \rangle_{\partial\Omega}}{\|\xi\|_{V(\Omega)}}.$$

Let us consider  $\mu$  in  $M(\partial\Omega)$ , then there exists  $\xi$  in  $V(\Omega)$  verifying  $\gamma_0\xi = \mu$  on  $\partial\Omega$  and we can define the non empty set

$$E_\mu = \{\xi \in V(\Omega); \gamma_0\xi = \mu \text{ on } \partial\Omega\}.$$

Applying the convex functions theory to  $P : E_\mu \rightarrow \mathbb{R}$  defined by  $P(\xi) = \|\xi\|_{V(\Omega)}$  (see Temam and al. [6]), we get the existence of  $\psi$  in  $E_\mu$  such that  $P(\psi) = \inf_{\xi \in E_\mu} P(\xi) \stackrel{def}{=} \|\mu\|_{M(\partial\Omega)}$  and

$$\frac{\langle \zeta, \mu \rangle_{\partial\Omega}}{\|\mu\|_{M(\partial\Omega)}} = \frac{\langle \zeta, \gamma_0\psi \rangle_{\partial\Omega}}{\|\psi\|_{V(\Omega)}} \leq \sup_{\{\xi \in V(\Omega), \xi \neq 0\}} \frac{\langle \zeta, \gamma_0\xi \rangle_{\partial\Omega}}{\|\xi\|_{V(\Omega)}}.$$

Which ends the proof. ■

**Remark 1.** Since  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  is a dense subspace of  $V(\Omega)$  with its natural topology, the image space  $\gamma_0(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$  is a dense subspace of  $M(\partial\Omega)$ . This space  $M(\partial\Omega)$  is equipped with the norm carried from  $V(\Omega)$  by  $\gamma_0$  and is contained in  $L^2(\partial\Omega)$ .

Moreover, as  $V(\Omega)$  and  $\gamma_0(\mathcal{D}(\bar{\Omega})) = \mathcal{D}(\partial\Omega)$  are dense subspaces of  $W^{1,2}(\Omega)$  and  $L^2(\partial\Omega)$  respectively, the space  $M(\partial\Omega)$  is dense in  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  and  $L^2(\partial\Omega)$  with respect to their natural topologies.

**Proposition 5.** For any  $\mu$  in  $L^2(\partial\Omega)$ , we can identify  $\mu$  as an element of  $M'(\partial\Omega)$  and we have

$$\int_{\partial\Omega} \mu \xi \, d\sigma = \langle \mu, \gamma_0\xi \rangle_{M'(\partial\Omega), M(\partial\Omega)}$$

for any  $\xi$  in  $V(\Omega)$ .

**Proof** For any  $\mu$  in  $L^2(\partial\Omega)$ , let us consider the linear functional  $L_\mu : V(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  defined for any  $\xi$  in  $V(\Omega)$  by

$$L_\mu(\xi) = \int_{\partial\Omega} \mu(\gamma_0\xi) \, d\sigma.$$

We establish by the Hölder's inequality and the continuous imbedding of  $M(\partial\Omega)$  into  $L^2(\partial\Omega)$ , that

$$|L_\mu(\xi)| = \left| \int_{\partial\Omega} \mu(\gamma_0\xi) \, d\sigma \right| \leq \|\mu\|_{0,2,\partial\Omega} \|\gamma_0\xi\|_{0,2,\partial\Omega} \leq c \|\mu\|_{0,2,\partial\Omega} \|\gamma_0\xi\|_{M(\partial\Omega)}.$$

## 2.4. Some properties of the functional spaces

---

Thus, we can write

$$\langle L_\mu, \gamma_0 \xi \rangle_{M'(\partial\Omega), M(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} \mu(\gamma_0 \xi) d\sigma.$$

Moreover, the density of  $M(\partial\Omega)$  in  $L^2(\partial\Omega)$  implies that, the map  $\tau : \mu \mapsto L_\mu$  is linear and one-to-one from  $L^2(\partial\Omega)$  into  $M'(\partial\Omega)$ . Therefore, we identify  $L^2(\partial\Omega)$  with  $\tau(L^2(\partial\Omega))$ , which is a subset of  $M'(\partial\Omega)$ , and write

$$\langle \mu, \gamma_0 \xi \rangle_{M'(\partial\Omega), M(\partial\Omega)} = \langle L_\mu, \gamma_0 \xi \rangle_{M'(\partial\Omega), M(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} \mu(\gamma_0 \xi) d\sigma.$$

So, the result. ■

### 2.4.2 Equivalent norms for $V^0(\Omega)$ and $W^0(\Omega)$

**Proposition 6.** (Poincaré-Wirtinger's inequality.) *Let consider  $q$  in  $[1, 2[$ , then there exists a constant  $c_0 > 0$ , depending only on  $\Omega$  and  $q$ , such that  $\forall \xi \in W^0(\Omega)$ ,*

$$\|\xi\|_{0,q,\Omega} \leq c_0 (\|\partial_x \xi\|_{0,1,\Omega} + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}). \quad (2.22)$$

Hence,  $W^0(\Omega)$  can be endowed equivalently by the norm

$$|\cdot|_{W(\Omega)} = \|\partial_x \cdot\|_{0,1,\Omega} + \|\partial_y \cdot\|_{0,2,\Omega}. \quad (2.23)$$

**Proof** We shall prove it by contradiction. If (2.22) is not true for some  $q$  in  $[1, 2[$ , then for any  $n \geq 1$ , there exists  $\xi_n$  in  $W^0(\Omega)$  with

$$\|\xi_n\|_{0,q,\Omega} > n(\|\partial_x \xi_n\|_{0,1,\Omega} + \|\partial_y \xi_n\|_{0,2,\Omega}).$$

Remark that  $\xi_n \neq 0$ , so that, using  $\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|_{0,q,\Omega}}$  instead of  $\xi_n$ , we can suppose that  $\|\xi_n\|_{0,q,\Omega} = 1$  and then the Hölder inequality leads to

$$\|\xi_n\|_{0,1,\Omega} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}},$$

where  $p$  is the conjugate exponent of  $q$ ,  $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ .

Therefore,

$$\|\xi_n\|_{0,1,\Omega} + \|\partial_x \xi_n\|_{0,1,\Omega} + \|\partial_y \xi_n\|_{0,2,\Omega} < |\Omega|^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{n} < cte$$

and  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  is a bounded sequence in  $W(\Omega)$ . Since the space  $W(\Omega)$  is continuously imbedded in  $W^{1,1}(\Omega)$ , the Rellich's theorem (see Brezis [2]) implies that  $W(\Omega)$  is compactly imbedded in  $L^q(\Omega)$ . Therefore there are a subsequence  $\{\xi_{n_j}\}_{j=1}^\infty$  and a



## 2.4. Some properties of the functional spaces

---

function  $\xi$  in  $L^q(\Omega)$  such that  $\xi_{n_j} \rightarrow \xi$  in  $L^q(\Omega)$  as  $j \rightarrow \infty$ .

Since  $\xi_{n_j}$  is in  $W^0(\Omega)$  then  $\int_{\Omega} \xi_{n_j} d\Omega = 0$  and thus  $\int_{\Omega} \xi d\Omega = 0$ .

Moreover, since  $\|\xi_{n_j}\|_{0,q,\Omega} = 1$ , then  $\|\xi\|_{0,q,\Omega} = 1$ .

As  $\xi_{n_j} \rightarrow \xi$  in  $L^q(\Omega)$ , one has  $\xi_{n_j} \rightarrow \xi$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$  and  $\nabla \xi_{n_j} \rightarrow \nabla \xi$  in  $(\mathcal{D}'(\Omega))^2$ .

But  $\nabla \xi_{n_j} \rightarrow \mathbf{0}$  in  $(\mathcal{D}'(\Omega))^2$ , hence  $\nabla \xi = \mathbf{0}$  in  $(\mathcal{D}'(\Omega))^2$  and using  $\int_{\Omega} \xi d\Omega = 0$ , we get  $\xi = 0$  which contradicts  $\|\xi\|_{0,q,\Omega} = 1$ .  $\blacksquare$

**Remark 2.** *Similar result can be proved for the space  $V^0(\Omega)$  with  $q = 2$ . This is related to the fact that  $V(\Omega)$  is compactly imbedded in  $L^2(\Omega)$ .*

### 2.4.3 Some properties of the divergence operator

Define the following space:

$$\mathbb{L}(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, u_2) \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega) \times L^2(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \right\},$$

which is a Banach space for the norm

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}(\Omega)} = \|u_1\|_{0,\frac{3}{2},\Omega} + \|u_2\|_{0,2,\Omega} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,2,\Omega}. \quad (2.24)$$

Let us begin with the following density theorem:

**Theorem 1.**  $(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^2$  is dense in  $\mathbb{L}(\Omega)$ .

**Proof** Let  $T$  be an element of  $\mathbb{L}'(\Omega)$ , the dual space of  $\mathbb{L}(\Omega)$ , such that  $T(\varphi) = 0$ , for any  $\varphi$  in  $(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^2$ . Let us prove that  $T$  vanishes on  $\mathbb{L}(\Omega)$ . On the one hand, since  $\mathbb{L}(\Omega)$  is a reflexive space, there is an element  $(v_1, v_2, v_3)$  in  $L^3(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  such that,  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{L}(\Omega)$ ,

$$T(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 \operatorname{div} \mathbf{u}) d\Omega.$$

Let  $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$  and  $\tilde{v}_3$  denote the extensions by zero of  $v_1, v_2$  and  $v_3$  respectively in  $\mathbb{R}^2$ . Thus we have for any  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  in  $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^2))^2$ ,

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{v}_1 \varphi_1 + \tilde{v}_2 \varphi_2 + \tilde{v}_3 \operatorname{div} \varphi) dx \\ &= \int_{\Omega} (v_1 \varphi_1 + v_2 \varphi_2 + v_3 \operatorname{div} \varphi) d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Writing the vector  $\tilde{\mathbf{v}}$  in the form  $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ , we get in the sense of distributions on  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\tilde{\mathbf{v}} = \nabla \tilde{v}_3.$$

## 2.4. Some properties of the functional spaces

---

Hence  $\tilde{v}_3 = 0$  on  $\partial\Omega$  and  $v_3$  belongs to  $V_0(\Omega)$  where

$$V_0(\Omega) = \{S \in L^2(\Omega), \nabla S \in L^3(\Omega) \times L^2(\Omega); S = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

We assume now that  $\mathcal{D}(\Omega)$  is dense in  $V_0(\Omega)$  (this result is proved in the following lemma), then there exists a sequence  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$ , such that  $\psi_k \rightarrow v_3$  in  $V_0(\Omega)$  as  $k \rightarrow \infty$  and for any  $\mathbf{u}$  in  $\mathbb{L}(\Omega)$ , we have

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \nabla v_3 \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} v_3 \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\Omega \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} \nabla \psi_k \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \psi_k \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\Omega \right) = 0. \end{aligned}$$

This completes the proof. ■

**Lemma 1.**  $\mathcal{D}(\Omega)$  is dense in  $V_0(\Omega)$ .

**Proof** Let  $S$  be some element of  $V_0(\Omega)$ . We have to prove that  $S$  is a limit in  $V_0(\Omega)$  of functions of  $\mathcal{D}(\Omega)$ . We denote by  $\tilde{S}$  the extension of  $S$  by zero outside  $\Omega$ . Every point  $M$  in  $\Gamma = \partial\Omega$  possesses an open neighborhood  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(M)$  on which  $\mathcal{A} \cap \partial\Omega$  and  $\mathcal{A} \cap \Omega$  coincides, up to a  $C^1$ -diffeomorphism, with respectively  $B \cap \partial C$  and  $B \cap C$ , where  $B$  is the unit ball in  $\mathbb{R}^2$  and  $C$  is an open cone in  $\mathbb{R}_+^2$ . Since  $\partial\Omega$  is compact, it is recovered by a finite number of such sets, say  $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^m$ . Then there is an open set  $\mathcal{A}_0$ , relatively compact in  $\Omega$ , such that

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^m \mathcal{A}_i. \quad (2.25)$$

Let  $\{\theta_i\}_{i=0}^m$  be a partition of unity subordinated to the covering (2.25);  $\theta_i$  is  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  with compact support in  $\mathcal{A}_i$  and  $\sum_{i=0}^m \theta_i(x, y) = 1$ . Then, every  $S$  in  $V(\Omega)$  can be

written as  $S = \sum_{i=0}^m \theta_i S$ .

The function  $\theta_0 \tilde{S}$  belongs to  $V(\mathbb{R}^2)$  with a compact support in  $\Omega$ . Using the mollifier sequence in  $\mathbb{R}^2$ , say  $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ , and choosing  $\varepsilon$  sufficiently small, the sequence  $\{\rho_\varepsilon * \theta_0 \tilde{S}\}_{\varepsilon>0}$  belongs to  $\mathcal{D}(\Omega)$  and converges to  $\theta_0 S$  in  $V_0(\Omega)$ .

Let us consider now one of the functions  $\theta_i S$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

We denote by  $\varphi_i$  a  $C^1$ -diffeomorphism defined from  $\mathcal{A}_i$  into  $B$  and such that

$$\begin{aligned} \varphi_i(\mathcal{A}_i \cap \Omega) &= B \cap C_i, \\ \varphi_i(\mathcal{A}_i \cap \partial\Omega) &= B \cap \partial C_i. \end{aligned}$$

The function  $\omega_i = (\theta_i S) \circ (\varphi_i^{-1}|_{B \cap C_i})$  belongs to  $V(B \cap C_i)$  and  $\omega_i|_{(\partial C_i \cap B) \cup (\partial B \cap C_i)} = 0$ . If we denote by  $\tilde{\omega}_i$  the extension of  $\omega_i$  by zero on  $\mathbb{R}_+^2 \setminus (B \cap C_i)$ ,  $\tilde{\omega}_i$  has a compact support in  $\bar{C}_i$ . Since  $\nabla \tilde{\omega}_i = \tilde{\nabla} \omega_i$  in the distributional sense in  $\mathbb{R}_+^2$  ( $V(B \cap C_i) \subset W^{1,2}(B \cap C_i)$ ), then  $\tilde{\omega}_i$  belongs to  $V(\mathbb{R}_+^2)$ .

## 2.5. Weak formulation of the boundary value problem

---

Now, the proof is reduced to the following case:  $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ , the function  $S$  belongs to  $V(\mathbb{R}_+^2)$ , satisfies  $S(\cdot, 0) = 0$  and has a compact support in  $\bar{\mathbb{R}}_+^2$ .

For any  $h > 0$ , we note by  $\tau_h \tilde{S}$  the function defined by:

$$\tau_h \tilde{S}(x, y) = \tilde{S}(x, y - h).$$

Since  $\nabla(\tau_h \tilde{S}) = \tau_h(\nabla \tilde{S})$ , the function  $\tau_h \tilde{S}$  belongs to  $V(\mathbb{R}^2)$  and converges to  $\tilde{S}$  in  $V(\mathbb{R}^2)$  as  $h$  tends to zero. Now, using the classical mollifier sequence in  $\mathbb{R}^2$ , we get that the sequence  $\{\rho_\varepsilon * \tau_h \tilde{S}\}_{\varepsilon > 0}$  converges to  $\tau_h \tilde{S}$  in  $V(\mathbb{R}^2)$ . For  $\varepsilon$  sufficiently small, the function  $\rho_\varepsilon * \tau_h \tilde{S}$  has a compact support in  $\mathbb{R}_+^2$ , which completes the proof. ■

The next theorem concerns the normal trace on the boundary, of functions of  $\mathbb{L}(\Omega)$ :

**Theorem 2.** *Denoting by  $\mathbf{n}$  the unit outer normal to  $\partial\Omega$ , then the mapping  $\gamma_n : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  defined on  $(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^2$ , can be extended by continuity to a linear and continuous mapping, still denoted by  $\gamma_n$ , from  $\mathbb{L}(\Omega)$  to  $M'(\partial\Omega)$ . Moreover, we have the Green's formula:*

$$\int_{\Omega} \xi \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \xi \, d\Omega = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_{M'(\partial\Omega), M(\partial\Omega)}, \quad \forall \xi \in V(\Omega), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{L}(\Omega).$$

**Proof** Let us define the functional  $T : (\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^2 \times V(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , for every  $\mathbf{u}$  in  $(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^2$  and  $\xi$  in  $V(\Omega)$ , by

$$T(\mathbf{u}, \xi) = \int_{\Omega} (\xi \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi) \, d\Omega.$$

We establish by the usual Green's formula, that

$$\left| \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, \xi \, d\sigma \right| = \left| \int_{\Omega} (\xi \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi) \, d\Omega \right| \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}(\Omega)} \|\xi\|_{V(\Omega)}.$$

Using Propositions (5) and (4), we get  $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{M'(\partial\Omega)} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}(\Omega)}$ . It follows that the linear functional  $\gamma_n : (\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^2 \rightarrow M'(\partial\Omega)$  defined by:  $\gamma_n(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  has a unique extension, still denoted  $\gamma_n$  to  $\mathbb{L}(\Omega)$  which verifies, for any  $\mathbf{u}$  in  $\mathbb{L}(\Omega)$ ,  $\|\gamma_n(\mathbf{u})\|_{M'(\partial\Omega)} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}(\Omega)}$ . ■

## 2.5 Weak formulation of the boundary value problem

Consider the following variational problem: find a function  $\varphi$  in  $V(\Omega)$  such that for any  $\xi$  in  $V(\Omega)$

$$\int_{\Omega} g(\partial_x \varphi) \partial_x \xi \, d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y \varphi \partial_y \xi \, d\Omega + \int_{\Gamma_p} \sqrt{M_\infty} \, z' \, \xi \, d\sigma = 0. \quad (2.26)$$

## 2.5. Weak formulation of the boundary value problem

---

Let  $G$  be the primitive of  $g$  defined by:

$$G(t) = \begin{cases} \frac{\gamma+1}{6}(u_{cr} - t)^3 - \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2(u_{cr} - t) + \frac{\gamma+1}{3}u_{cr}^3 & \text{if } t \leq u_{cr}, \\ -\frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2(u_{cr} - t) + \frac{\gamma+1}{3}u_{cr}^3 & \text{if } t \geq u_{cr}, \end{cases} \quad (2.27)$$

and let  $F$  be the functional defined on  $V(\Omega)$  by:

$$F(\xi) = \int_{\Omega} \left( G(\partial_x \xi) + \frac{1}{2} (\partial_y \xi)^2 \right) d\Omega + b(\xi), \quad (2.28)$$

where

$$b(\xi) = \int_{\Gamma_p} \sqrt{M_{\infty}} z' \xi d\sigma. \quad (2.29)$$

Therefore, the problem (2.26) can be written in the form

$$\exists \varphi \in V(\Omega), F(\varphi) \leq F(\xi) \quad \forall \xi \in V(\Omega). \quad (2.30)$$

We remark that  $F$  is a convex functional and its directional derivative at  $\varphi$  in the direction of  $\xi$  is given by:

$$\langle F'(\varphi), \xi \rangle = \int_{\Omega} g(\partial_x \varphi) \partial_x \xi d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y \varphi \partial_y \xi d\Omega + b(\xi).$$

It results that if  $\varphi$  is solution of (2.30) then

$$\int_{\Omega} g(\partial_x \varphi) \partial_x \xi d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y \varphi \partial_y \xi d\Omega + b(\xi) = 0. \quad (2.31)$$

This is a necessary and sufficient condition for the minimization problem (2.30). ■

The interpretation of this weak formulation gives first, in the sense of distributions, that

$$\partial_x g(\partial_x \varphi) + \partial_y (\partial_y \varphi) = 0.$$

It follows that  $\mathbf{u} = (g(\partial_x \varphi), \partial_y \varphi)$  belongs to  $\mathbf{L}(\Omega)$ . Therefore using the Green's formula (see theorem (2)), we get for every  $\xi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n}, \xi \rangle_{M'(\partial\Omega), M(\partial\Omega)} - \sqrt{M_{\infty}} \int_{\partial\Omega} Z'(x) \left( 1 - \frac{y}{R_y} \right) n_y \xi d\sigma = 0$$

where  $Z$  denote the extension by zero of  $z$  on  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  and  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  is the unit outer normal to  $\partial\Omega$ .

Then, using Proposition (5), we find that

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sqrt{M_{\infty}} Z'(x) \left( 1 - \frac{y}{R_y} \right) n_y = 0 \text{ in } M'(\partial\Omega).$$

## 2.5. Weak formulation of the boundary value problem

---

and it follows from the density of  $M(\partial\Omega)$  in  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  that

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sqrt{M_\infty} Z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) n_y = 0 \text{ in } H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

**Remark 3.** *We note that*

$$Z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) n_y = \begin{cases} 0 & \text{on } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ -z'(x) & \text{on } \Gamma_p. \end{cases} \quad (2.32)$$

**Proposition 7.** *The mapping  $b$  defined in (2.29) is linear continuous from  $V(\Omega)$  into  $\mathbb{R}$ .*

**Proof** We denote by  $\Omega_0 = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ]0, R_y[$  and  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  the unit outward normal to  $\partial\Omega_0$ . Using the Green's formula, we have, for any  $\xi$  in  $V(\Omega)$

$$\begin{aligned} b(\xi) &= \sqrt{M_\infty} \int_{\Gamma_p} z' \xi \, d\sigma \\ &= -\sqrt{M_\infty} \int_{\partial\Omega_0} z' \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \xi n_y \, d\sigma \\ &= -\sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z' \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi \, d\Omega + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z' \xi \, d\Omega \\ &= -\sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z' \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi \, d\Omega - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z \partial_x \xi \, d\Omega. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Now, according to Hölder's inequality, we get

$$\begin{aligned} |b(\xi)| &\leq \sqrt{M_\infty R_y} c_1 \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0} + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \|\partial_x \xi\|_{0,3,\Omega_0} (R_y)^{\frac{2}{3}} \\ &\leq \left( \sqrt{M_\infty R_y} c_1 + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y^{1/3}} \right) (\|\partial_x \xi\|_{0,3,\Omega} + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

As  $b$  is linear, the above inequality leads to the continuity. ■

**Proposition 8.** *For any  $\xi$  in  $V(\Omega)$ , we have*

$$b(\xi) \geq \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z (u_{cr} - \partial_x \xi) \, d\Omega - \frac{1}{2} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0}^2 - c_2. \quad (2.35)$$

## 2.5. Weak formulation of the boundary value problem

---

**Proof** According to (2.33), we have

$$\begin{aligned}
b(\xi) &= -\sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z' \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi \, d\Omega + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z (u_{cr} - \partial_x \xi) \, d\Omega \\
&- \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} u_{cr} z \, d\Omega \\
&\geq -\sqrt{M_\infty R_y} c_1 \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0} + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z (u_{cr} - \partial_x \xi) \, d\Omega - \sqrt{M_\infty} u_{cr} \\
&\geq -\frac{M_\infty R_y c_1^2}{2} - \frac{1}{2} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0}^2 + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z (u_{cr} - \partial_x \xi) \, d\Omega \\
&- \sqrt{M_\infty} u_{cr}. \tag{2.36}
\end{aligned}$$

This ends the proof. ■

**Proposition 9.** *The functional  $F$  is continuous on  $V(\Omega)$ .*

The proof of this proposition is based on the following lemma:

**Lemma 2.** *For any  $s, t$  in  $\mathbb{R}$ , we have:*

$$\begin{aligned}
i) \quad &G(s) - G(t) - (s-t)G'(t) = \frac{\gamma+1}{6} [(u_{cr} - s)^+ - (u_{cr} - t)^+]^2 [(u_{cr} - s)^+ \\
&\quad + 2(u_{cr} - t)^+] + \frac{\gamma+1}{2} [(u_{cr} - t)^+]^2 [(u_{cr} - s)^- - (u_{cr} - t)^-], \\
ii) \quad &G(s) - G(t) - (s-t)G'(t) = \frac{(s-t)^2}{2} G''(\xi) \geq 0 \text{ with } \xi \text{ in } ]s, t[, \\
iii) \quad &G(s) - G(t) \leq \frac{\gamma+1}{6} [|s-t|^3 + 3|s-t|^2(u_{cr} - t)^+ + 3|s-t|[(u_{cr} - t)^+]^2] + \\
&\quad \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (s-t). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Proof of proposition (9)**

## 2.5. Weak formulation of the boundary value problem

For any  $\xi_1, \xi_2$  in  $V(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned}
& |F(\xi_1) - F(\xi_2)| = \left| \int_{\Omega} (G(\partial_x \xi_1) - G(\partial_x \xi_2)) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\partial_y \xi_1)^2 - (\partial_y \xi_2)^2) d\Omega \right. \\
& + b(\xi_1 - \xi_2) \Big| \\
& \leq \frac{\gamma+1}{6} \int_{\Omega} |\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2|^3 d\Omega + \frac{\gamma+1}{2} \int_{\Omega} |\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2|^2 (u_{cr} - \partial_x \xi_2)^+ d\Omega \\
& + \frac{\gamma+1}{2} \int_{\Omega} |\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2| [(u_{cr} - \partial_x \xi_2)^+]^2 d\Omega + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_{\Omega} |\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2| d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\partial_y \xi_1 - \partial_y \xi_2)^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\partial_y \xi_2| |\partial_y \xi_1 - \partial_y \xi_2| d\Omega \\
& + \left( \sqrt{M_{\infty} R_y} c_1 + \frac{\sqrt{M_{\infty}}}{R_y^{1/3}} \right) (\|\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2\|_{0,3,\Omega} + \|\partial_y \xi_1 - \partial_y \xi_2\|_{0,2,\Omega}) \\
& \leq \frac{\gamma+1}{6} \|\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2\|_{0,3,\Omega}^3 + \frac{\gamma+1}{2} \|\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2\|_{0,3,\Omega}^2 \|(u_{cr} - \partial_x \xi_2)^+\|_{0,3,\Omega} \\
& + \frac{\gamma+1}{2} \|\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2\|_{0,3,\Omega} \|(u_{cr} - \partial_x \xi_2)^+\|_{0,3,\Omega}^2 + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \|\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2\|_{0,3,\Omega} |\Omega|^{\frac{2}{3}} \\
& + \frac{1}{2} \|\partial_y \xi_1 - \partial_y \xi_2\|_{0,2,\Omega}^2 + \|\partial_y \xi_2\|_{0,2,\Omega} \|\partial_y \xi_1 - \partial_y \xi_2\|_{0,2,\Omega} \\
& + \left( \sqrt{M_{\infty} R_y} c_1 + \frac{\sqrt{M_{\infty}}}{R_y^{1/3}} \right) (\|\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2\|_{0,3,\Omega} + \|\partial_y \xi_1 - \partial_y \xi_2\|_{0,2,\Omega}) \\
& \leq [\|\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2\|_{0,3,\Omega} + \|\partial_y \xi_1 - \partial_y \xi_2\|_{0,2,\Omega}] \tau(\xi_1, \xi_2). \tag{2.37}
\end{aligned}$$

where

$$\tau(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \frac{\gamma+1}{6} \|\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2\|_{0,3,\Omega}^2 + \frac{\gamma+1}{2} \|\partial_x \xi_1 - \partial_x \xi_2\|_{0,3,\Omega} \|(u_{cr} - \partial_x \xi_2)^+\|_{0,3,\Omega} + \\ \frac{\gamma+1}{2} \|(u_{cr} - \partial_x \xi_2)^+\|_{0,3,\Omega}^2 + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (2R_x R_y)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \|\partial_y \xi_1 - \partial_y \xi_2\|_{0,2,\Omega} + \\ \|\partial_y \xi_2\|_{0,2,\Omega} + \sqrt{M_{\infty} R_y} c_1 + \frac{\sqrt{M_{\infty}}}{R_y^{1/3}}. \end{cases} \tag{2.38}$$

**Proposition 10.** *The functional  $F$  is Gâteaux-differentiable in  $V(\Omega)$ , and its derivative is given by:*

$$\langle F'(\xi_1), \xi_2 \rangle = \int_{\Omega} g(\partial_x \xi_1) \partial_x \xi_2 d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y \xi_1 \partial_y \xi_2 d\Omega + b(\xi_2). \tag{2.39}$$

**Proof** Since the functional  $F$  is convex, for any  $\xi_1, \xi_2$  in  $V(\Omega)$  and for any  $\theta > 0$ , the expression

$$\begin{aligned}
\frac{F(\xi_1 + \theta \xi_2) - F(\xi_1)}{\theta} &= \int_{\Omega} \frac{(G(\partial_x \xi_1 + \theta \partial_x \xi_2) - G(\partial_x \xi_1))}{\theta} d\Omega \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(\partial_y \xi_1 + \theta \partial_y \xi_2)^2 - (\partial_y \xi_1)^2}{\theta} d\Omega + b(\xi_2).
\end{aligned}$$

## 2.5. Weak formulation of the boundary value problem

---

is a nondecreasing function of  $\theta$ . So, as  $\theta$  tends to 0, this expression has a limit in  $\mathbb{R}$ .

Thanks to the convexity  $t \mapsto G(t)$ , we see that the decreasing sequence in  $L^1(\Omega)$

$$h_\theta = \frac{G(\partial_x \xi_1 + \theta \partial_x \xi_2) - G(\partial_x \xi_1)}{\theta}$$

converges a.e. to  $g(\partial_x \xi_1) \partial_x \xi_2$  and the Beppo-Levi theorem leads to

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{G(\partial_x \xi_1 + \theta \partial_x \xi_2) - G(\partial_x \xi_1)}{\theta} d\Omega = \int_{\Omega} g(\partial_x \xi_1) \partial_x \xi_2 d\Omega.$$

Using the same argument with the convex function  $t \mapsto t^2$ , one has (2.39). It remains only to show the continuity of the linear mapping

$$\xi_2 \mapsto \int_{\Omega} g(\partial_x \xi_1) \partial_x \xi_2 d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y \xi_1 \partial_y \xi_2 d\Omega + b(\xi_2).$$

Using the Hölder's inequality and (2.34), we get

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} g(\partial_x \xi_1) \partial_x \xi_2 d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y \xi_1 \partial_y \xi_2 d\Omega + b(\xi_2) \right| \leq \\ & \left( \|g(\partial_x \xi_1)\|_{0, \frac{3}{2}, \Omega} + \|\partial_y \xi_1\|_{0, 2, \Omega} \right) \|\xi_2\|_{V(\Omega)} + \left( \frac{\sqrt{M_\infty} R_y c_1 + \sqrt{M_\infty}}{R_y^{1/3}} \right) \|\xi_2\|_{V(\Omega)}, \end{aligned}$$

which proves the proposition. ■

The next proposition concerns the coerciveness of the functional  $F$  on  $V(\Omega)$ .

**Proposition 11.** *For any  $\xi$  in  $V(\Omega)$ , we have*

$$F(\xi) \geq \frac{\gamma + 1}{12} \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0, 3, \Omega}^3 + \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0, 2, \Omega}^2 - c_3. \quad (2.40)$$

**Proof** We consider  $\Omega_1 = (]-R_x, -\frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, R_x[) \times ]0, R_y[$  then, for any  $\xi$  in  $V(\Omega)$ , we have

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{\Omega} \left( G(\partial_x \xi) + \frac{1}{2} (\partial_y \xi)^2 \right) d\Omega + b(\xi) \\ &= \int_{\Omega_0} G(\partial_x \xi) d\Omega + \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} (\partial_y \xi)^2 d\Omega + \int_{\Omega_1} G(\partial_x \xi) d\Omega + \int_{\Omega_1} \frac{1}{2} (\partial_y \xi)^2 d\Omega \\ &\quad - \sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z' \left( 1 - \frac{y}{R_y} \right) \partial_y \xi d\Omega - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z \partial_x \xi d\Omega \\ &= B_x^0 + B_y^0 + B_x^1 + B_y^1. \end{aligned}$$



## 2.5. Weak formulation of the boundary value problem

---

where

$$\begin{aligned}
B_x^0 &= \int_{\Omega_0} G(\partial_x \xi) d\Omega - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z \partial_x \xi d\Omega, \\
B_y^0 &= \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} (\partial_y \xi)^2 d\Omega - \sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z' \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi d\Omega, \\
B_x^1 &= \int_{\Omega_1} G(\partial_x \xi) d\Omega, \\
B_y^1 &= \int_{\Omega_1} \frac{1}{2} (\partial_y \xi)^2 d\Omega.
\end{aligned}$$

Since, for any nonnegative  $t$ ,

$$\frac{\gamma+1}{6} t^3 - \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 t + \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 \geq \frac{\gamma+1}{12} t^3 + \frac{1-\sqrt{2}}{3} (\gamma+1) u_{cr}^3 \quad (2.41)$$

we have,

$$\begin{aligned}
B_x^0 &= \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{6} [(u_{cr} - \partial_x \xi)^+]^3 d\Omega - \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (u_{cr} - \partial_x \xi) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 d\Omega - \int_{\Omega_0} \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z \partial_x \xi d\Omega \\
&= \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{6} [(u_{cr} - \partial_x \xi)^+]^3 d\Omega - \int_{\Omega_0} \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z \right) (u_{cr} - \partial_x \xi) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 d\Omega - \int_{\Omega_0} \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z u_{cr} d\Omega \\
&\geq \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{6} [(u_{cr} - \partial_x \xi)^+]^3 d\Omega - \int_{\Omega_0} \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z \right) (u_{cr} - \partial_x \xi)^+ d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 d\Omega - \int_{\Omega_0} \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z u_{cr} d\Omega \\
&\geq \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{6} [(u_{cr} - \partial_x \xi)^+]^3 d\Omega - \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (u_{cr} - \partial_x \xi)^+ d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 d\Omega - \sqrt{M_\infty} u_{cr} \\
&\geq \frac{\gamma+1}{12} \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,3,\Omega_0}^3 + \frac{1-\sqrt{2}}{3} (\gamma+1) u_{cr}^3 R_y - \sqrt{M_\infty} u_{cr}. \quad (2.42)
\end{aligned}$$

## 2.5. Weak formulation of the boundary value problem

$$\begin{aligned}
B_x^1 &= \int_{\Omega_1} G(\partial_x \xi) d\Omega \\
&= \int_{\Omega_1} \frac{\gamma+1}{6} [(u_{cr} - \partial_x \xi)^+]^3 d\Omega - \int_{\Omega_1} \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (u_{cr} - \partial_x \xi) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_1} \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 d\Omega \\
&\geq \int_{\Omega_1} \frac{\gamma+1}{6} [(u_{cr} - \partial_x \xi)^+]^3 d\Omega - \int_{\Omega_1} \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (u_{cr} - \partial_x \xi)^+ d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_1} \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 d\Omega \\
&\geq \frac{\gamma+1}{12} \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,3,\Omega_1}^3 + \frac{1-\sqrt{2}}{3} (\gamma+1) u_{cr}^3 (2R_x - 1) R_y. \quad (2.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_y^0 &= \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} (\partial_y \xi)^2 d\Omega - \int_{\Omega_0} \sqrt{M_\infty} z' \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi d\Omega \\
&= \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0}^2 + \int_{\Omega_0} \left( \frac{1}{2} \partial_y \xi - \sqrt{M_\infty} z' \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \right)^2 d\Omega \\
&- \int_{\Omega_0} M_\infty z'^2 \left(1 - \frac{y}{R_y}\right)^2 d\Omega \geq \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0}^2 - M_\infty R_y c_1^2. \quad (2.44)
\end{aligned}$$

$$B_y^1 = \frac{1}{2} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_1}^2. \quad (2.45)$$

Inequalities (2.42), (2.43), (2.44) and (2.45) complete the proof.  $\blacksquare$

**Remark 4.** A consequence of the above proposition is that  $\inf_{\xi \in V(\Omega)} F(\xi)$  is finite.

**Proposition 12.** Under the hypothesis (2.15) of thin profile, we have, for any  $\xi$  in  $V(\Omega)$ , the following inequality:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \right) \|\partial_x \xi\|_{0,1,\Omega} + \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}^2 &\leq c_3 + F(\xi) \\
+ (\gamma+1) u_{cr}^2 \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,1,\Omega}. &
\end{aligned}$$

**Proof** Using proposition (11) (notations), we have

$$\begin{aligned}
B_x^0 &= \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{6} [(u_{cr} - \partial_x \xi)^+]^3 d\Omega - \int_{\Omega_0} \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z \right) (u_{cr} - \partial_x \xi) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 d\Omega - \int_{\Omega_0} \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z u_{cr} d\Omega.
\end{aligned}$$

Therefore,

## 2.5. Weak formulation of the boundary value problem

$$\int_{\Omega_0} \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z \right) (u_{cr} - \partial_x \xi) d\Omega =$$

$$\int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{6} [(u_{cr} - \partial_x \xi)^+]^3 d\Omega + \int_{\Omega_0} \left( \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z u_{cr} \right) d\Omega - B_x^0$$

and then,

$$\int_{\Omega_0} \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z \right) (2(u_{cr} - \partial_x \xi)^+ - |u_{cr} - \partial_x \xi|) d\Omega =$$

$$\int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{6} [(u_{cr} - \partial_x \xi)^+]^3 d\Omega + \int_{\Omega_0} \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 d\Omega - \sqrt{M_\infty} u_{cr} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z(x) dx - B_x^0.$$

Hence

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z \right) \|u_{cr} - \partial_x \xi\|_{0,1,\Omega_0} = \int_{\Omega_0} \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z \right) |u_{cr} - \partial_x \xi| d\Omega \\ & \leq \int_{\Omega_0} \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z \right) |u_{cr} - \partial_x \xi| d\Omega \\ & \leq 2 \int_{\Omega_0} \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} z \right) (u_{cr} - \partial_x \xi)^+ d\Omega \\ & - \frac{\gamma+1}{6} \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,3,\Omega_0}^3 - \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 R_y + \sqrt{M_\infty} u_{cr} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z(x) dx + B_x^0 \\ & \leq (\gamma+1) u_{cr}^2 \int_{\Omega_0} (u_{cr} - \partial_x \xi)^+ d\Omega + \sqrt{M_\infty} u_{cr} + B_x^0 \\ & \leq (\gamma+1) u_{cr}^2 \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,1,\Omega_0} + \sqrt{M_\infty} u_{cr} + B_x^0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Similarly, since

$$B_x^1 = \int_{\Omega_1} \frac{\gamma+1}{6} [(u_{cr} - \partial_x \xi)^+]^3 d\Omega - \int_{\Omega_1} \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (u_{cr} - \partial_x \xi) d\Omega + \int_{\Omega_1} \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 d\Omega$$

we have,

$$\frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_{\Omega_1} (u_{cr} - \partial_x \xi) d\Omega = \frac{\gamma+1}{6} \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,3,\Omega_1}^3 + \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 (2R_x - 1) R_y - B_x^1$$

hence,

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \|u_{cr} - \partial_x \xi\|_{0,1,\Omega_1} = \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_{\Omega_1} |u_{cr} - \partial_x \xi| d\Omega \\ & = (\gamma+1) u_{cr}^2 \int_{\Omega_1} (u_{cr} - \partial_x \xi)^+ d\Omega - \frac{\gamma+1}{6} \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,3,\Omega_1}^3 \\ & - \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 (2R_x - 1) R_y + B_x^1 \\ & \leq (\gamma+1) u_{cr}^2 \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,1,\Omega_1} + B_x^1. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Inequalities (2.44), (2.45), (2.46) and (2.47) give the desired proposition.  $\blacksquare$

## 2.5. Weak formulation of the boundary value problem

---

**Remark 5.** *The above propositions (11) and (12) imply that the functional  $F$  is coercive in the subsonic case, with respect to the topology of  $V(\Omega)$ , but not globally on  $V(\Omega)$  as the following example shows:*

**Example 1.** *We have  $\Omega = ]-R_x, R_x[ \times ]0, R_y[$  and let*

$$\xi_n(x, y) = \begin{cases} -u_{cr} & \text{if } x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx u_{cr} & \text{if } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ u_{cr} & \text{if } x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

*The function  $\partial_x \xi_n$  satisfies*

$$\partial_x \xi_n(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| \geq \frac{1}{n}, \\ n u_{cr} & \text{if } |x| \leq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

*then*

$$\int_{\Omega} |\partial_x \xi_n|^3 d\Omega = 2n^2 u_{cr}^3 R_y \text{ and } \int_{\Omega} |\xi_n|^2 d\Omega \leq 2R_x R_y u_{cr}^2.$$

*We obtain then  $\|\xi_n\|_{0,2,\Omega} \leq (2R_x R_y)^{\frac{1}{2}} u_{cr}$ .*

*We have, for every  $n \geq 2$ ,*

$$G(\partial_x \xi_n) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| \geq \frac{1}{n}, \\ \frac{3n-1}{6}(\gamma+1) u_{cr}^3 & \text{if } |x| \leq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

*then*

$$0 \leq \int_{\Omega} G(\partial_x \xi_n) dx dy = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) (\gamma+1) u_{cr}^3 R_y \leq (\gamma+1) u_{cr}^3 R_y$$

*and*

$$b(\xi_n) = -\sqrt{M_{\infty}} n u_{cr} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} z(x) dx.$$

*Using  $-2\sqrt{M_{\infty}} u_{cr} \leq b(\xi_n) \leq 0$ , we deduce that*

$$\begin{aligned} F(\xi_n) &= \int_{\Omega} \left( G(\partial_x \xi_n) + \frac{1}{2} (\partial_y \xi_n)^2 \right) dx dy + b(\xi_n) \\ &\leq \int_{\Omega} G(\partial_x \xi_n) dx dy = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) (\gamma+1) u_{cr}^3 R_y \leq (\gamma+1) u_{cr}^3 R_y \end{aligned}$$

*and*

$$\begin{aligned} \|\xi_n\|_{V(\Omega)} &= \|\xi_n\|_{0,2,\Omega} + \|\partial_x \xi_n\|_{0,3,\Omega} + \|\partial_y \xi_n\|_{0,2,\Omega} \\ &\geq \|\partial_x \xi_n\|_{0,3,\Omega} = (2n^2 R_y)^{\frac{1}{3}} u_{cr}. \end{aligned}$$

*So there exists a sequence  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  such that  $\|\xi_n\|_{V(\Omega)}$  tends to  $\infty$  when  $F(\xi_n)$  remains bounded.*

## 2.5. Weak formulation of the boundary value problem

---

**Remark 6.** Since  $b$  vanishes on the set of constant functions on  $\Omega$ , there is no uniqueness of the solution for the minimization problem (2.30) on  $V(\Omega)$ . On the other hand, due to the identity  $V(\Omega) = V^0(\Omega) \oplus \{cte\}$ , we expect the uniqueness on  $V^0(\Omega)$ .

**Theorem 3.** Let the convex and closed set of subsonic flows be

$$X = \{\xi \in V^0(\Omega), \partial_x \xi \leq u_{cr} \text{ a. e. in } \Omega\},$$

then there exists a unique minimizer  $\varphi$  of  $F$  in  $X$ .

**Proof 1.** Existence of a solution:

Thanks to the proposition (11), we have, for any  $\xi$  of  $X$ ,

$$\begin{cases} \frac{\gamma+1}{12} \|u_{cr} - \partial_x \xi\|_{0,3,\Omega}^3 \leq F(\xi) + c_3 \\ \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}^2 \leq F(\xi) + c_3. \end{cases} \quad (2.48)$$

Therefore,

$$\begin{cases} \|\partial_x \xi\|_{0,3,\Omega} \leq \left( \frac{12}{\gamma+1} (F(\xi) + c_3) \right)^{1/3} + u_{cr} (\text{mes}(\Omega))^{1/3} \\ \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega} \leq 2 (F(\xi) + c_3)^{1/2}. \end{cases} \quad (2.49)$$

From proposition (6), we get

$$|\xi|_{V(\Omega)} \leq \left( \frac{12}{\gamma+1} (F(\xi) + c_3) \right)^{1/3} + u_{cr} (\text{mes}(\Omega))^{1/3} + 2 (F(\xi) + c_3)^{1/2}$$

and the classical convex functions theory for existence of minimal solutions [6] implies the existence of a solution  $\varphi$  in  $X$ .

2. Uniqueness of the solution:

Suppose that there exist two solutions  $\varphi$  and  $\psi$  in  $X$ , then  $F(\varphi) = F(\psi)$ . As  $X$  is a convex set, for any  $\theta$  in  $[0, 1]$ ,  $\theta\varphi + (1 - \theta)\psi$  belongs to  $X$ .

Since  $F$  is a convex function, we have  $F(\theta\varphi + (1 - \theta)\psi) = F(\varphi) = F(\psi)$ .

Thus  $F(\psi + \theta(\varphi - \psi)) - F(\psi) = 0$  and  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \{F(\psi + \theta(\varphi - \psi)) - F(\psi)\} = 0$ .

Therefore

$$\int_{\Omega} g(\partial_x \psi)(\partial_x \varphi - \partial_x \psi) d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y \psi (\partial_y \varphi - \partial_y \psi) d\Omega + b(\varphi - \psi) = 0. \quad (2.50)$$

and similarly,

$$\int_{\Omega} g(\partial_x \varphi)(\partial_x \psi - \partial_x \varphi) d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y \varphi (\partial_y \psi - \partial_y \varphi) d\Omega + b(\psi - \varphi) = 0. \quad (2.51)$$

## 2.5. Weak formulation of the boundary value problem

---

Combining (2.50) to (2.51), we get

$$\int_{\Omega} (g(\partial_x \varphi) - g(\partial_x \psi))(\partial_x \varphi - \partial_x \psi) d\Omega + \int_{\Omega} (\partial_y \varphi - \partial_y \psi)^2 d\Omega = 0,$$

and then

$$\int_{\Omega} \frac{\gamma+1}{2} (\partial_x \psi - \partial_x \varphi)^2 (u_{cr} - \partial_x \varphi + u_{cr} - \partial_x \psi) d\Omega + \int_{\Omega} (\partial_y \psi - \partial_y \varphi)^2 d\Omega = 0.$$

Consequently,  $\partial_x \psi = \partial_x \varphi$  a.e. in  $\Omega$  and  $\partial_y \psi = \partial_y \varphi$  a.e. in  $\Omega$ . But, since  $\psi, \varphi$  are in  $V^0(\Omega)$ , one has  $\psi = \varphi$  a.e. in  $\Omega$ .  $\blacksquare$

**Remark 7.** *The problem is well posed in  $X$ . If there exists a constant  $\delta > 0$  such that*

$$\partial_x \varphi \leq u_{cr} - \delta \text{ a.e. in } \Omega,$$

*then the solution  $\varphi$  obeys to*

$$\begin{cases} \partial_x g(\partial_x \varphi) + \partial_y (\partial_y \varphi) = 0 \text{ a.e. in } \Omega, \\ (g(\partial_x \varphi), \partial_y \varphi) \cdot \mathbf{n} - \sqrt{M_{\infty}} Z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) n_y = 0 \text{ in } H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \end{cases} \quad (2.52)$$

*where  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  is the unit outer normal to  $\partial\Omega$ .*

*To prove this, we note first that, there exists  $\varepsilon > 0$  sufficiently small such that for any  $\psi$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\varphi \pm \varepsilon \psi$  belongs to  $X$  and the first equation of (2.52) arises automatically from the relation  $\langle F'(\varphi), \xi - \varphi \rangle \geq 0$  for any  $\xi$  in  $X$ . It remains to show the boundary condition. We have also, the existence of  $\varepsilon > 0$  (sufficiently small) such that for any function  $\psi$  in  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ,  $\varphi \pm \varepsilon \psi$  belongs to  $X$ , so  $\langle F'(\varphi), \psi \rangle = 0$  i.e.*

$$\int_{\Omega} g(\partial_x \varphi) \partial_x \psi d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y \varphi \partial_y \psi d\Omega + b(\psi) = 0.$$

*Combining this equation with the Green's formula, we deduce that*

$$\langle g(\partial_x \varphi) n_x + \partial_y \varphi n_y, \psi \rangle_{M'(\partial\Omega), M(\partial\Omega)} + b(\psi) = 0$$

*and this completes the proof.*

**Remark 8.** *As the functional  $F$  is not coercive in  $V(\Omega)$ , the minimization problem (2.30) does not necessarily have a solution,  $F$  is only coercive in  $W(\Omega)$ , which is not a reflexive space. Thus, it is convenient to introduce the dual problem associated to (2.30). Indeed, the dual problem is generally simpler than the initial problem and permits to obtain more informations about the solutions of the initial problem.*

## 2.6 The dual problem

We can decompose the functional  $F$  as follows:

$$F(\xi) = I(\nabla\xi) + b(\xi) \quad \forall \xi \in V(\Omega),$$

where  $I$  is defined from  $\mathbb{H}(\Omega)$  into  $\mathbb{R}$  by:

$$I(\mathbf{q}) = \int_{\Omega} G(q_1) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q_2^2 d\Omega \quad \forall \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{H}(\Omega) = L^3(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

We introduce also the following functional  $\phi$ , defined from  $V(\Omega) \times \mathbb{H}(\Omega)$  into  $\mathbb{R}$  by

$$\phi(\xi, \mathbf{q}) = I(\nabla\xi + \mathbf{q}) + b(\xi).$$

We remark that  $\phi(\xi, \mathbf{0}) = F(\xi)$ .

Let us define

$$\mathcal{L} = \inf_{\xi \in V(\Omega)} F(\xi) = \inf_{\xi \in V^0(\Omega)} F(\xi), \quad (2.53)$$

and consider the following minimization problem defined for every  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  in  $\mathbb{H}(\Omega)$  by:

$$J(\mathbf{q}) = \inf_{\xi \in V(\Omega)} \phi(\xi, \mathbf{q}). \quad (2.54)$$

We have immediately

$$J(\mathbf{0}) = \mathcal{L}.$$

Problems (2.54) are the perturbed problems of (2.30). We consider the conjugate function  $\phi_*$  of  $\phi$  defined from  $\mathbb{L}(\Omega) \times \mathbb{H}'(\Omega)$  into  $\mathbb{R}$ . This conjugate function is based on the duality between  $V(\Omega) \times \mathbb{H}(\Omega)$  and  $\mathbb{L}(\Omega) \times \mathbb{H}'(\Omega)$  and defined for every  $\mathbf{p} \in \mathbb{L}(\Omega)$  and  $\mathbf{u} \in \mathbb{H}'(\Omega)$  by

$$\phi_*(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \sup_{\xi \in V(\Omega), \mathbf{q} \in \mathbb{H}(\Omega)} \left[ \langle \mathbf{p}, \xi \rangle_{\mathbb{L}(\Omega), V(\Omega)} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} - \phi(\xi, \mathbf{q}) \right], \quad (2.55)$$

where

$$\langle \mathbf{p}, \xi \rangle_{\mathbb{L}(\Omega), V(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \nabla \xi d\Omega + \int_{\Omega} \xi \operatorname{div} \mathbf{p} d\Omega.$$

We consider now the dual problem: find  $\mathbf{U} \in \mathbb{H}'(\Omega)$  such that

$$-\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{H}'(\Omega)} [-\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{u})]. \quad (2.56)$$

## 2.6. The dual problem

---

**Theorem 4.** *There exists  $(u_*, v_*)$  in  $L^3(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , such that*

i)  $\forall \xi \in V(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} g(u_*) \partial_x \xi \, d\Omega + \int_{\Omega} v_* \partial_y \xi \, d\Omega + b(\xi) = 0.$$

ii) For  $\mathbf{U} = (g(u_*), v_*)$ ,

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{M_{\infty}} Z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) n_y \text{ in } H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

iii)

$$u_* \leq u_{cr} \text{ a.e. in } \Omega.$$

iv)

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} \left( G(u_*) - u_* g(u_*) - \frac{1}{2} v_*^2 \right) d\Omega.$$

**Proof 1.** Since  $F$  is convex on  $V^0(\Omega)$ ,  $\inf_{\xi \in V^0(\Omega)} F(\xi)$  is finite and  $I$  is continuous on  $\mathbb{H}(\Omega)$ , all the conditions of theorem 4.1 of (Ekeland and al. [6], p. 58) are satisfied. Hence, problem (2.30) is stable *i.e.*

$$\inf_{\xi \in V(\Omega)} F(\xi) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{H}'(\Omega)} [-\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{u})],$$

and (2.56) has at least one solution  $\mathbf{U}$  in  $\mathbb{H}'(\Omega)$ .

We have

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = -\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) &= - \sup_{\xi \in V(\Omega), \mathbf{q} \in \mathbb{H}(\Omega)} \left[ \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} - \phi(\xi, \mathbf{q}) \right] \\ &= \inf_{\xi \in V(\Omega), \mathbf{q} \in \mathbb{H}(\Omega)} \left[ \phi(\xi, \mathbf{q}) - \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} \right] \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\leq \inf_{\mathbf{q} \in \mathbb{H}(\Omega)} \left[ \inf_{\xi \in V(\Omega)} \left\{ \phi(\xi, \mathbf{q}) - \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} \right\} \right] \\ &\leq \inf_{\mathbf{q} \in \mathbb{H}(\Omega)} \left[ J(\mathbf{q}) - \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} \right] \end{aligned}$$

Thus, for every  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}(\Omega)$ , we obtain that

$$\mathcal{L} \leq J(\mathbf{q}) - \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)}$$

and in particular, for every  $\xi$  in  $V(\Omega)$ , we have

$$\mathcal{L} \leq J(\nabla \xi) - \langle \mathbf{U}, \nabla \xi \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)}.$$



## 2.6. The dual problem

---

Moreover,

$$\begin{aligned}
J(\nabla \xi) &= \inf_{\zeta \in V(\Omega)} \left[ \int_{\Omega} G(\partial_x \xi + \partial_x \zeta) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \xi + \partial_y \zeta)^2 d\Omega + b(\zeta) \right] \\
&= \inf_{\zeta \in V(\Omega)} \left[ \int_{\Omega} G(\partial_x(\xi + \zeta)) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y(\xi + \zeta))^2 d\Omega + b(\zeta + \xi) \right] - b(\xi) \\
&= \mathcal{L} - b(\xi).
\end{aligned}$$

Therefore,

$$\langle \mathbf{U}, \nabla \xi \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} + b(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in V(\Omega)$$

and then

$$\langle \mathbf{U}, \nabla \xi \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} + b(\xi) = 0 \quad \text{since } V(\Omega) \text{ is a linear space.} \quad (2.57)$$

So,

$$\forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \mathbf{U}, \nabla \xi \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} + b(\xi) = 0$$

and then  $\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$  a.e. in  $\Omega$ .

2. We have

$$\begin{aligned}
\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) &= \sup_{\xi \in V(\Omega), \mathbf{q} \in \mathbb{H}(\Omega)} \left[ \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} - \phi(\xi, \mathbf{q}) \right] \\
&= \sup_{\xi \in V(\Omega), \mathbf{q} \in \mathbb{H}(\Omega)} \left[ \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} - I(\nabla \xi + \mathbf{q}) - b(\xi) \right].
\end{aligned}$$

Then we can write

$$\begin{aligned}
\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) &= \sup_{\xi \in V(\Omega), \mathbf{p} \in \mathbb{H}(\Omega)} \left[ \langle \mathbf{U}, \mathbf{p} - \nabla \xi \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} - I(\mathbf{p}) - b(\xi) \right] \\
&= \sup_{\xi \in V(\Omega), \mathbf{p} \in \mathbb{H}(\Omega)} \left[ \langle \mathbf{U}, \mathbf{p} \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} - \langle \mathbf{U}, \nabla \xi \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} - I(\mathbf{p}) - b(\xi) \right].
\end{aligned}$$

We set  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ ,  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$  and using equality (2.57), we get

$$\begin{aligned}
\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) &= \sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{H}(\Omega)} \left[ \langle \mathbf{U}, \mathbf{p} \rangle_{\mathbb{H}'(\Omega), \mathbb{H}(\Omega)} - I(\mathbf{p}) \right] \\
&= \sup_{p_1 \in L^3(\Omega), p_2 \in L^2(\Omega)} \left[ \int_{\Omega} (U_1 p_1 + U_2 p_2) d\Omega - \int_{\Omega} G(p_1) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} p_2^2 d\Omega \right] \\
&= \sup_{p_1 \in L^3(\Omega)} \left[ \int_{\Omega} (U_1 p_1 - G(p_1)) d\Omega \right] + \sup_{p_2 \in L^2(\Omega)} \left[ \int_{\Omega} \left( U_2 p_2 - \frac{1}{2} p_2^2 \right) d\Omega \right] \\
&= I_1(U_1) + I_2(U_2).
\end{aligned}$$

To compute  $I_1$  and  $I_2$ , it is sufficient (see Temam and al. [6], proposition IV.1.2), to determine for almost all  $(x, y)$  in the domain  $\Omega$ , the quantities

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} [U_1(x, y)t - G(t)] \quad \text{and} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ U_2(x, y)t - \frac{1}{2}t^2 \right].$$

## 2.6. The dual problem

---

We have immediately  $I_2(U_2) = \frac{1}{2} \|U_2\|_{0,2,\Omega}^2$ .

For  $I_1$ , the properties of the function  $G$  imply that, if  $U_1(x, y) > \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2$  on a set of positive measure, then  $I_1(U_1) = +\infty$  which contradicts  $\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) < \infty$ . So we have  $U_1(x, y) \leq \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2$  a.e. in  $\Omega$  and then

$$\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) = \int_{\Omega} \left[ U_1 \left( u_{cr} - \sqrt{u_{cr}^2 - \frac{2}{\gamma+1} U_1} \right) - G \left( u_{cr} - \sqrt{u_{cr}^2 - \frac{2}{\gamma+1} U_1} \right) + \frac{1}{2} U_2^2 \right] d\Omega.$$

We define  $u_* = u_{cr} - \sqrt{u_{cr}^2 - \frac{2}{\gamma+1} U_1}$  and  $v_* = U_2$ , we get then

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} \left( G(u_*) - u_* g(u_*) - \frac{1}{2} v_*^2 \right) d\Omega.$$

3. Now, in order to prove ii), using the Green formula proved in theorem (2), with equality (2.57), we obtain

$$\langle \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_{M'(\partial\Omega), M(\partial\Omega)} + b(\xi) = 0$$

where  $\mathbf{n}$  is the unit outward normal to  $\partial\Omega$ .

But, for every  $\xi$  in  $V(\Omega)$ ,

$$b(\xi) = -\sqrt{M_{\infty}} \int_{\partial\Omega_0} z' \left( 1 - \frac{y}{R_y} \right) \xi n_y d\sigma.$$

Then, as  $Z$  denotes the extension by zero of  $z$  on  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , and according to proposition (5), we get

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} - \sqrt{M_{\infty}} Z'(x) \left( 1 - \frac{y}{R_y} \right) n_y = 0 \text{ in } M'(\partial\Omega).$$

Now, thanks to remark (1), we find

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{M_{\infty}} Z'(x) \left( 1 - \frac{y}{R_y} \right) n_y \text{ in } H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \text{ and } L^2(\partial\Omega).$$

This achieves the proof. ■

**Remark 9.** *Problem (2.30) may have or not a solution. But if it has a solution  $\varphi$  such that  $\partial_x \varphi \leq u_{cr}$  a.e. in  $\Omega$ , then*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [G(\partial_x \varphi) - G(u_*) - (\partial_x \varphi - u_*)g(u_*)] d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \varphi - v_*)^2 d\Omega + b(\varphi) + \langle \mathbf{U}, \nabla \varphi \rangle_{\mathbf{H}(\Omega), \mathbf{H}(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

Using (2.57) and lemma (2), we get  $\nabla \varphi = (u_*, v_*)$  a.e. in  $\Omega$ .

## 2.6. The dual problem

Let us now turn to the existence theorem, which extends the result already obtained in the previous theorem.

**Theorem 5.** *Assume that the hypothesis (2.15) is satisfied, then there exist a function  $\varphi$  in  $BV(\Omega)$  and a nonnegative bounded Radon measure  $\nu$  such that:*

$$\partial_x \varphi = u_* + \nu, \quad \partial_y \varphi = v_* \quad \text{and} \quad \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0,$$

where  $(u_*, v_*)$  is defined in theorem (4).

**Proof** We recall that  $\mathcal{L} = \int_{\Omega} \left( G(u_*) - u_* g(u_*) - \frac{1}{2} v_*^2 \right) d\Omega$  and also  $\mathcal{L} = \inf_{\xi \in V^0(\Omega)} F(\xi)$ , then there exists a sequence  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  in  $V^0(\Omega)$  such that, for any  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{L} \leq F(\xi_n) < \mathcal{L} + \frac{1}{n}. \quad (2.58)$$

Using the fact that for any  $\xi$  in  $V(\Omega)$ , we have:  $b(\xi) = - \int_{\Omega} (g(u_*) \partial_x \xi + v_* \partial_y \xi) d\Omega$ , we deduce that

$$\begin{aligned} F(\xi_n) - \mathcal{L} &= \int_{\Omega} (G(\partial_x \xi_n) - G(u_*) - (\partial_x \xi_n - u_*) g(u_*)) d\Omega \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \xi_n - v_*)^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Therefore, combining (2.58) and (2.59), we get

$$\int_{\Omega} (G(\partial_x \xi_n) - G(u_*) - (\partial_x \xi_n - u_*) g(u_*)) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \xi_n - v_*)^2 d\Omega < \frac{1}{n}.$$

Thus according to lemma (2-i), we have

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \frac{\gamma+1}{6} \int_{\Omega} [(u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+ - (u_{cr} - u_*)]^2 [(u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+ + 2(u_{cr} - u_*)] d\Omega < \frac{1}{n}, \\ \frac{\gamma+1}{2} \int_{\Omega} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- d\Omega < \frac{1}{n} \quad \text{and} \quad \int_{\Omega} (\partial_y \xi_n - v_*)^2 d\Omega < \frac{1}{n}. \end{array} \right. \quad (2.60)$$

Thanks to the following relation  $(u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+ + (u_{cr} - u_*) \geq |(u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+ - (u_{cr} - u_*)|$ , we deduce that:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |(u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+ - (u_{cr} - u_*)|^3 d\Omega = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- d\Omega = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\partial_y \xi_n - v_*)^2 d\Omega = 0. \end{array} \right. \quad (2.61)$$

## 2.6. The dual problem

Therefore, we have the convergence of  $\{(u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+\}_{n=1}^\infty$  to  $(u_{cr} - u_*)$  in  $L^3(\Omega)$  and  $\{\partial_y \xi_n\}_{n=1}^\infty$  to  $v_*$  in  $L^2(\Omega)$ .

Using Proposition (12),  $\{\partial_x \xi_n\}_{n=1}^\infty$  is a bounded sequence in  $L^1(\Omega)$  and Poincaré-Wirtinger's inequality implies that  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  is a bounded sequence in  $W^{1,1}(\Omega)$ . Therefore, thanks to Rellich's theorem (see Brezis [2]), a subsequence  $\{\xi_{n_j}\}_{j=1}^\infty$  can be extracted such that there exists a function  $\varphi$  in  $L^2(\Omega)$  with  $\xi_{n_j} \rightarrow \varphi$  in  $L^q(\Omega)$  as  $j \rightarrow \infty$ , for any  $q$  in  $[1, 2]$ . Furthermore, we have  $v_* = \partial_y \varphi$  a.e. in  $\Omega$ .

Let us note again  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  this subsequence. Then, by the lower semicontinuity of measure variation,

$$|D\varphi|(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} |D\xi_n|(\Omega) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} (\|\partial_x \xi_n\|_{0,1,\Omega} + \|\partial_y \xi_n\|_{0,1,\Omega}) < \infty,$$

and  $\varphi$  belongs to  $BV(\Omega)$ .

Now, for any nonnegative  $\psi$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$ , we have

$$\begin{aligned} & \langle \partial_x \varphi - u_*, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle \partial_x \varphi - \partial_x \xi_n, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} + \langle \partial_x \xi_n - u_*, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\ &= - \int_{\Omega} (\varphi - \xi_n) \partial_x \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- \psi \, d\Omega \\ &+ \langle u_{cr} - u_* - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\ &\geq - \int_{\Omega} (\varphi - \xi_n) \partial_x \psi \, d\Omega + \langle u_{cr} - u_* - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} & \langle \partial_x \varphi - u_*, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ - \int_{\Omega} (\varphi - \xi_n) \partial_x \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} (u_{cr} - u_* - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+) \psi \, d\Omega \right] = 0. \end{aligned}$$

It follows that  $\partial_x \varphi \geq u_*$  in the sense of distributions. So,  $\partial_x \varphi = u_* + \nu$  where  $\nu$  is a nonnegative distribution. Since  $\varphi$  is in  $BV(\Omega)$ ,  $\nu$  is a bounded nonnegative Radon measure defined by:

$$\forall \psi \in \mathcal{D}^+(\Omega), \nu(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- \psi \, d\Omega.$$

■

We define

$$\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega; u_*(x, y) < u_{cr}\} \quad (2.62)$$

**Proposition 13.** *We have  $\nu(\Omega_*) = 0$ .*

## 2.6. The dual problem

**Proof** Consider, for every  $m \geq 1$ , the sets  $\Omega_*^m = \{(x, y) \in \Omega; u_*(x, y) \leq u_{cr} - \frac{1}{m}\}$ , then we have

$$\Omega_* = \cup_{m \geq 1} \Omega_*^m.$$

Since  $\{\Omega_*^m\}_{m \geq 1}$  is a nondecreasing sequence of  $\nu$ -measurable sets, then

$$\nu(\Omega_*) = \nu(\cup_{m \geq 1} \Omega_*^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \nu(\Omega_*^m).$$

Then, it is sufficient to prove that  $\nu(\Omega_*^m) = 0$ .

In order to do, just remark that for every  $m \geq 1$ , we have

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- d\Omega \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_*^m} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- d\Omega \\ &\geq \frac{1}{m^2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_*^m} (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- d\Omega \\ &= \frac{1}{m^2} \nu(\Omega_*^m) \geq 0. \end{aligned}$$

which ends the proof. ■

The last result concerns the uniqueness of the solution and more precisely:

**Proposition 14.** *The couple of functions  $(u_*, v_*)$  defined by theorem (4) is unique.*

**Proof** Let  $(u_*, v_*)$  and  $(\tilde{u}_*, \tilde{v}_*)$  two solutions defined as in theorem (4) and let  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  and  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  two minimizing sequences in  $V^0(\Omega)$  of the functional  $F$  such that:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_y \varphi_n = v_*$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_y \psi_n = \tilde{v}_*$  in  $L^2(\Omega)$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^+ = (u_{cr} - u_*)$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^+ = (u_{cr} - \tilde{u}_*)$  in  $L^3(\Omega)$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^- d\Omega = 0$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_{cr} - \tilde{u}_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^- d\Omega = 0$ .

For any  $\xi$  in  $V(\Omega)$ , we have

$$\int_{\Omega} g(u_*) \partial_x \xi d\Omega + \int_{\Omega} v_* \partial_y \xi d\Omega + b(\xi) = 0$$

and

$$\int_{\Omega} g(\tilde{u}_*) \partial_x \xi d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{v}_* \partial_y \xi d\Omega + b(\xi) = 0,$$

so, for  $\xi = \varphi_n - \psi_n$ , we get,

$$\int_{\Omega} (g(u_*) - g(\tilde{u}_*)) \partial_x (\varphi_n - \psi_n) d\Omega + \int_{\Omega} (v_* - \tilde{v}_*) \partial_y (\varphi_n - \psi_n) d\Omega = 0.$$

## 2.7. Conclusion and perspectives

---

This expression is decomposed as following

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma+1}{2} \int_{\Omega} (u_{cr} - \tilde{u}_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^+ d\Omega - \frac{\gamma+1}{2} \int_{\Omega} (u_{cr} - \tilde{u}_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^- d\Omega \\
& - \frac{\gamma+1}{2} \int_{\Omega} (u_{cr} - \tilde{u}_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^+ d\Omega + \frac{\gamma+1}{2} \underbrace{\int_{\Omega} (u_{cr} - \tilde{u}_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^- d\Omega}_{=0} \\
& - \frac{\gamma+1}{2} \int_{\Omega} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^+ d\Omega + \frac{\gamma+1}{2} \underbrace{\int_{\Omega} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^- d\Omega}_{=0} \\
& + \frac{\gamma+1}{2} \int_{\Omega} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^+ d\Omega - \frac{\gamma+1}{2} \int_{\Omega} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^- d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (v_* - \tilde{v}_*) (\partial_y \varphi_n - v_*) d\Omega + \int_{\Omega} (v_* - \tilde{v}_*)^2 d\Omega + \int_{\Omega} (v_* - \tilde{v}_*) (\tilde{v}_* - \partial_y \psi_n) d\Omega \\
& = 0.
\end{aligned}$$

The terms without underbrace have a limit as  $n$  tends to  $\infty$  and the terms with underbrace are nonnegative. Then we obtain, when  $n$  tends to  $\infty$ , that

$$\frac{\gamma+1}{2} \int_{\Omega} (u_* - \tilde{u}_*)^2 (u_{cr} - u_* + u_{cr} - \tilde{u}_*) d\Omega + \int_{\Omega} (v_* - \tilde{v}_*)^2 d\Omega \leq 0$$

and we deduce that  $u_* = \tilde{u}_*$  a.e. in  $\Omega$ ,  $v_* = \tilde{v}_*$  a.e. in  $\Omega$ . ■

**Remark 10.** • If  $\partial_x \varphi < u_{cr}$  a.e. in  $\Omega$  then  $u_* = \partial_x \varphi$  a.e. in  $\Omega$  and  $\varphi$  is the unique solution of (2.30).

• If  $u_* < u_{cr}$  a.e. in  $\Omega$  then  $\partial_x \varphi = u_*$  a.e. in  $\Omega$  and  $\varphi$  is the unique solution of (2.30).

• If  $\varphi$  and  $\psi$  are two solutions of (2.30), then there exists  $f$  in  $BV([-R_x, R_x])$  such that

$$\varphi(x, y) = \psi(x, y) + f(x) \quad \text{for almost every } (x, y) \text{ of } \Omega \quad \text{and} \quad \int_{-R_x}^{R_x} f(x) dx = 0.$$

## 2.7 Conclusion and perspectives

We have presented a mathematical model for subsonic air flow around a thin profile, in terms of a non-linear degenerated elliptic equation. In order to solve this problem, a variational problem associated with an integral functional has been chosen.

We have proved the existence of a unique solution under the constraint that the flow speed remains strictly subsonic i.e. it is majorated by the critical speed. We proved also the existence of a relaxed solution in the general unconstrained case;

## 2.7. Conclusion and perspectives

---

this solution is called relaxed since the variational problem is not coercive in our initial reflexive  $B$ -space. Moreover, as the problem is a degenerated one, we have only proved:

- In the general case, the existence of the flow speed and its uniqueness in the vertical direction,

- In the particular subsonic case, the complete existence and uniqueness.

In the general case, bounded Radon measures appear in the super-critical part of the horizontal speed i.e.  $\partial_x \varphi$ . Questions remain on:

- The qualitative control of this Radon measure in order to prove the uniqueness of the solution.

- The dependence of this solution on the parameters  $\delta$  and  $M_\infty$ , more precisely the continuous dependence of  $\Omega_*$  on these parameters.

# Bibliography

- [1] R. Adams, *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*. Masson, Paris, 1992.
- [3] J. F. Ciavaldini, M. Pogu et G. Tournemine, *Un théorème d'existence et d'unicité concernant les écoulements compressibles autour d'un profil à pointe*. Rev. Roum. Math. Pures Appl, 27, n°3, pp.291-298, 1982.
- [4] J.D. Cole and L.P. Cook, *Transonic aerodynamics*. North Holland, 1986.
- [5] G.S. Dulikravich, *Analysis of artificial dissipation models for the transonic full-potential equations*. A.I.A.A. Journal, 26, n°10, pp.1238-1245, 1988.
- [6] I. Ekeland and R. Temam, *Convex analysis and variational problems*. North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [7] D. Euvrard et G. Tournemine, *Méthode directe de calcul de l'écoulement sonique autour d'un profil d'aile donnée. Cas d'un écoulement symétrique*. J. Mec., Paris 12, pp.419-461, 1973.
- [8] L.C. Evans and R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in advanced mathematics, CRC Press, London, 1992.
- [9] H.P. Gittel, *Studies on transonic flow problems by nonlinear variational inequalities*. Z. Anal. Anwend. 6, pp.449-458, 1987.
- [10] H.P. Gittel, *A variational approach to transonic potential flow problems*. Math. Meth. Appl. Sci., 23, pp.1347-1372, 2000.
- [11] A. Jameson, *Transonic flow calculation, in numerical methods in fluids dynamics*. H.J. Wirz and J.J. Smolder eds., Mac Graw Hill, 1978.
- [12] P. Klouček and J. Nečas, *The solution of transonic flow problems by the method of stabilization*. Appl. Anal. 37, n°1-4, pp.143-167, 1990.
- [13] P. Klouček, *On the existence of the entropic solution for the transonic flow problem*. Nonlinear Anal. Theory methods Appl. 22, n °4, pp.467-480, 1994.
- [14] C.S. Morawetz, *On a weak solution for a transonic flow problem*. Comm. Pure. Appl. Math, 38, n°6, pp.797-817, 1985.



## BIBLIOGRAPHY

---

- [15] J. Nečas, *Ecoulements de fluide, compacité par entropie*. Masson, Paris, 105p., 1989.
- [16] M. Pogu et G. Tournemine, *Modélisation et résolution d'équations de la mécanique des milieux continus*. Ellipses, 1992.
- [17] M. Pogu and G. Tournemine, *Some mechanical and mathematical aspects on transonic flows*. Ann. Sci. Math. Québec 24, n°1, pp.87-106, 2000.





# Chapitre 3

## Une formulation relaxée pour une équation elliptique dégénérée

Dans le chapitre précédent, on a montré sous la condition de profil mince (2.15), que la fonctionnelle  $F$  définie par (2.28) est coercive dans  $W(\Omega)$ . Ensuite, on a cherché la limite des suites minimisantes dans  $BV(\Omega)$ , et une solution admissible a été trouvée en utilisant des arguments de la théorie de perturbation et de dualité (voir Ekeland et Temam [23]). Dans ce chapitre, on est amené à formuler un second problème de minimisation prolongeant celui défini sur  $V(\Omega)$ . Ce dernier problème, appelé problème relaxé, est défini par le biais de fonctions de récession et moyennant un résultat présent dans (Alibert et Bouchitté [2]).

Le but de ce chapitre est de prouver que le problème initial ainsi que le problème relaxé possèdent le même infimum. Et de montrer ensuite que cet infimum est en fait un minimum pour le problème relaxé.

Dans la littérature, on trouve un grand nombre de travaux concernant la relaxation et la semi-continuité inférieure sur les espaces  $BV(\Omega)$  ou  $W^{1,1}(\Omega)$ , pour les fonctionnelles intégrales de la forme :

$$I(\xi) = \int_{\Omega} f(x, \xi, \mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Omega} h\left(x, \frac{\mu}{|\mu|}\right) \, d|\mu|,$$

où  $\mathbf{u}$  est la densité de la partie absolument continue de  $\nabla\xi$  par rapport à la mesure de Lebesgue et  $\mu$  sa partie singulière, avec l'hypothèse qu'il existe  $p$  dans  $[1, +\infty[$  et deux constantes positives  $c$  et  $C$  tels que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad c(\|\xi\|^p - 1) \leq f(\cdot, \xi, \cdot) \leq C(\|\xi\|^p + 1).$$

On peut trouver dans D. Kinderlehrer et al. [32] (pour la semi-continuité) et dans T. Roubicek [43] (pour la relaxation) quelques approches basées sur la théorie de la mesure de Young.

On peut mentionner les références L. Ambrosio et al. [5], [6] et [7] dans le cas de la modélisation de segmentation d'image où l'on tient compte de l'ensemble de "discontinuité approximative" de  $\xi$ . Cet ensemble,  $S_{\xi}$ , apparaît dans le problème de minimisation puisque

$$\mu = (\xi^+ - \xi^-)n_x \mathcal{H}_{\perp S_{\xi}}^{n-1} + C_{\xi}$$

### CHAPITRE 3. UNE FORMULATION RELAXÉE POUR UNE ÉQUATION ELLIPTIQUE DÉGÉNÉRÉE

---

où  $\mathcal{H}^{n-1}$  est la mesure de Hausdorff de dimension  $n - 1$  sur  $\mathbb{R}^n$  et  $C_\xi$  est la partie de Cantor de la mesure  $\nabla\xi$ .

Dans L. Ambrosio et al. ([5], [6] et [7]),  $p$  est supposé appartenir à  $]1, +\infty[$ . Ainsi, les résultats de semi-continuité inférieure et de compacité conduisent à l'étude des espaces  $SBV$  des fonctions spéciales à variation bornée, i.e., des fonctions  $\xi$  dans  $BV$  telles que  $C_\xi = 0$ . Dans ce contexte, le fait que  $p > 1$  est essentiel.

On peut mentionner des travaux similaires sur des problèmes d'élasticité, (par exemple C. Baiocchi et al. [11]) où l'on étudie les espaces,  $BD(\Omega)$ , des fonctions à déformation bornée.

Un deuxième exemple concerne les problèmes variationnels où il y a transitions de phases. Dans ce cas, (voir Bouchitté et al. [12], [13, 14] ou I. Fonseca [26]),  $p$  est supposé être égal à 1. Ainsi, on doit considérer la relaxation et la semi-continuité dans  $BV(\Omega)$ .

Dans notre cas, le modèle ne rentre pas dans le cadre des situations citées antérieurement car  $p$  doit être égal à 3 pour  $\frac{\partial\xi}{\partial x} < u_{cr}$ , 1 pour  $\frac{\partial\xi}{\partial x} > u_{cr}$  et 2 pour  $\frac{\partial\xi}{\partial y}$ . On établit alors, un résultat adéquat de densité dans  $BV(\Omega)$  afin de prouver les résultats cités plus-haut. Ensuite, on obtient une formulation variationnelle dans  $BV(\Omega)$  grâce aux dérivées directionnelles de la fonction convexe du problème relaxé. On donne finalement quelques idées sur l'unicité de la solution.

Le chapitre est organisé comme suit : on introduit, dans la section 2, quelques notations et on fait une brève discussion sur la fonction de récession et ses propriétés. La section 3 est consacrée à la position du problème relaxé dans un sous-espace de  $BV(\Omega)$ . Après une brève description des propriétés de ce sous-espace dans la section 4, on étudie dans la section 5 le problème relaxé et on établit dans la section 6 un résultat d'existence de solutions, résultat qui généralise ceux démontrés dans Amara et al. [3].

# A relaxed formulation for a degenerated elliptic non-linear equation

M. Amara<sup>1</sup>, A. Obeid<sup>1</sup> and G. Vallet<sup>1</sup>

**Abstract** We consider an elliptic-parabolic PDE, governing the flow of a steady state two-dimensional irrotational compressible fluid around a thin profile. The mathematical modelling is formulated in term of a non-coercive variational problem with an integral functional. We propose a relaxed formulation in  $BV(\Omega)$  and prove that the minimum of the relaxed problem is the infimum of the initial one. We give also some information on the uniqueness of the solution.

**Key words.** Ill posed variational problem, relaxed problem, degenerated elliptic equation, functions of bounded variation.

**AMS subject classifications.** 35M10 - 35J70 - 35R25 - 49J45

## 3.1 Introduction

In this paper, we are interested by a variational problem associated with an integral functional of the form

$$F(\xi) = \int_{\Omega} G(\partial_x \xi) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \xi)^2 d\Omega + \sqrt{M_{\infty}} \int_{\Gamma_p} z' \xi d\sigma \quad (3.1)$$

where  $\Omega = ] -R_x, R_x[ \times ]0, R_y[, \Gamma_p = ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times \{0\}$ , and for any real  $t$ ,

$$G(t) = \frac{\gamma + 1}{6} (u_{cr} - t)_+^3 - \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 (u_{cr} - t) + \frac{\gamma + 1}{3} u_{cr}^3 \quad (3.2)$$

(by  $t_+$  we mean the positive part of  $t$ ), where  $\gamma$  and  $u_{cr}$  are positive constants,  $M_{\infty} \in ]0, 1[$  and  $z \in W_0^{1,\infty}(] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$  with  $0 \leq z \leq 1$ , which makes convex the functional  $F$ . Since  $F$  is invariant with respect to the constants, the problem is then:

$$\begin{aligned} & \text{Minimise } F(\xi) \text{ such that } \xi \in V(\Omega) \text{ and } \int_{\Omega} \xi d\Omega = 0, \\ & \text{where } V(\Omega) = \{ \xi \in L^2(\Omega), \partial_x \xi \in L^3(\Omega), \partial_y \xi \in L^2(\Omega) \}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

This problem arises from the modelling of the flow of a steady state two-dimensional irrotational compressible fluid around a thin profile (cf. M. Pogu et al. [18] and M. Amara et al. [2] for some details about the modelling). The conservation of the fluid density leads us to the following partial differential equation:

$$\operatorname{div}(g(\partial_x \varphi), \partial_y \varphi) = 0 \text{ in } \Omega \quad (3.4)$$

---

<sup>1</sup>Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université de Pau et des Pays de l'Adour, BP1155 64013 Pau, France (Mohamed.Amara@univ-pau.fr, Amira.Obeid@univ-pau.fr, Guy.Vallet@univ-pau.fr)

### 3.1. Introduction

---

where, for any real  $t$ ,  $g(t) = G'(t) = -\frac{\gamma+1}{2}(u_{cr} - t)_+^2 + \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2$ ;  
with the following boundary conditions:

$$\partial_y \varphi = \sqrt{M_\infty} z'(x) \text{ on } \Gamma_p \quad \text{and} \quad (g(\partial_x \varphi), \partial_y \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \setminus \Gamma_p.$$

**Remark 11.** *One may notice that (3.4) is a degenerated elliptic equation since it is elliptic if  $\partial_x \varphi < u_{cr}$  and parabolic if  $\partial_x \varphi \geq u_{cr}$ .*

It has been shown in M. Amara et al. [2] that, under the condition of thin profile,

$$\frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 R_y > \sqrt{M_\infty} \quad (3.5)$$

$F$  is coercive for the  $V(\Omega)$ -topology in the convex set

$$X = \left\{ \xi \in V(\Omega), \partial_x \xi \leq u_{cr}, \int_\Omega \xi \, d\Omega = 0 \right\}$$

and that it is globally coercive in

$$W(\Omega) = \left\{ \xi \in L^2(\Omega), \partial_x \xi \in L^1(\Omega), \partial_y \xi \in L^2(\Omega), \int_\Omega \xi \, d\Omega = 0 \right\}.$$

Therefore, we have looked for the limit of minimising sequences in  $BV(\Omega)$  and an admissible solution has been found, using some perturbation-duality arguments. The aim of this paper is to extend these results by using a relaxation method and prove that

$$\inf_{\xi \in V(\Omega), \int_\Omega \xi \, d\Omega = 0} F(\xi) = \min_{\xi \in N(\Omega), \int_\Omega \xi \, d\Omega = 0} \tilde{F}(\xi) \quad (3.6)$$

where  $N(\Omega) = \{\xi \in BV(\Omega), \partial_y \xi \in L^2(\Omega)\}$  and, for any  $\xi$  in  $N(\Omega)$ ,

$$\tilde{F}(\xi) = \int_\Omega G(u) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_\Omega (\partial_y \xi)^2 \, d\Omega + \int_\Omega G^\infty\left(\frac{\mu}{|\mu|}\right) d|\mu| + \sqrt{M_\infty} \int_{\Gamma_p} z' \xi \, d\sigma. \quad (3.7)$$

In the previous equality,  $G^\infty$  denotes the recession function of  $G$ ,  $u$  is the absolutely continuous part of the Radon measure  $\partial_x \xi$  with respect to the Lebesgue measure,  $\mu$  denotes the singular part and  $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ .

There is an extensive literature related to the question of relaxation and lower semicontinuity on  $BV(\Omega)$ , or  $W^{1,1}(\Omega)$ , for integral functional of the form

$$I(\xi) = \int_\Omega f(x, \xi, \mathbf{u}) \, d\Omega + \int_\Omega h\left(x, \frac{\mu}{|\mu|}\right) d|\mu|,$$

where  $\mathbf{u}$  is the density of the absolutely continuous part of  $\nabla \xi$  with respect to the Lebesgue measure and  $\mu$  the singular part, mainly assuming that there exists  $p$  in  $[1, +\infty[$  and two positive constants,  $c$  and  $C$ , such that

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad c(\|\xi\|^p - 1) \leq f(\cdot, \xi, \cdot) \leq C(\|\xi\|^p + 1).$$

### 3.2. Preliminaires and notations

---

One may find in D. Kinderlehrer et al. [17] (for the semicontinuity) and T. Roubicek [20] (for the relaxation) some approaches based on the Young measure theory.

Thanks to the contribution of geometric measures in the theory of bounded variation functions (see L.C. Evans and al. [14], E. Guisti [16] or W.P. Ziemer [22]), minimisation problems associated with function  $\tilde{F}$  have been considered.

See for example the case of image segmentation modelling (see L. Ambrosio and al. [3], [4] and [5]) where one has to take into account the set of "jumps" of  $\xi$ . This set,  $S_\xi$ , appears in the minimisation formulation since

$$\mu = (\xi^+ - \xi^-)n_x \mathcal{H}_{\perp S_\xi}^{n-1} + C_\xi$$

where  $\mathcal{H}^{n-1}$  is the  $n - 1$  dimensional Hausdorff measure on  $\mathbb{R}^n$  and  $C_\xi$  the Cantor part of measure  $\nabla \xi$ .

In L. Ambrosio and al. ([3], [4] and [5]),  $p$  is assumed to belong to  $]1, +\infty[$ . Thus, Ambrosio's lower semicontinuity and compactness theorems lead to the study of  $SBV$ , the space of special functions with bounded variation, i.e.,  $BV$  functions  $\xi$  such that  $C_\xi = 0$ .

In this context, the fact that  $p > 1$  is essential.

Let us also mention similar studies, related to elasticity (see C. Baiocchi and al. [6]) problems, that lead to the study of  $BD(\Omega)$ , the space of bounded deformation.

A second example is the analysis of variational problems for phase transitions. In this case (see G. Bouchitté and al. [7], [8, 9] or I. Fonseca [15]),  $p$  is assumed to be 1. Thus, one has to consider relaxation and semicontinuity in  $BV(\Omega)$ .

In our modelling,  $p$  has to be 3 for  $\frac{\partial \xi}{\partial x} < u_{cr}$ , 1 for  $\frac{\partial \xi}{\partial x} > u_{cr}$  and 2 for  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ . Thus, the problem (3.3) comes out of the usual context.

In the sequel, we propose to prove (3.6) by using an adapted density result in  $BV(\Omega)$  and then, thanks to the directional derivatives of the convex function  $\tilde{F}$ , we obtain a variational formulation in  $BV(\Omega)$ . We give also some information about the uniqueness of the solution.

The plan of the paper is the following: in section 2, we introduce some notations and present a short discussion on the recession function, with its properties. Section 3 is devoted to the presentation of the relaxed problem in a sub-space of  $BV(\Omega)$ . After a brief discussion of properties of the sub-space in section 4, we study in section 5 the relaxed problem and establish in section 6 the existence of solutions, theorems which generalize the previous results of Amara et al. [2].

## 3.2 Preliminaires and notations

In this section, we introduce some tools needed in the sequel.

- We denote by  $L^p(\Omega)$  and  $W^{m,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  ( $m$  an integer) the standard Lebesgue and Sobolev spaces respectively. Endowed with their natural norms (see L.C. Evans and al. [14] or W.P. Ziemer [22]), these spaces are Banach spaces.



### 3.2. Preliminaires and notations

---

- For a given measure  $\nu$  on  $\Omega$ , we adopt the following notations:

$|\nu| = \nu^+ + \nu^-$  for the total variation measure associated to  $\nu$  and  $|\nu|(\Omega)$  for its total variation in  $\Omega$ . Recall here that  $\nu = \nu^+ - \nu^-$  where  $\nu^+$  and  $\nu^-$  are the non-negative and nonpositive parts of  $\nu$ .

Similarly, for any function  $\xi$  defined on  $\Omega$ , we denote by  $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$  and by  $\xi = \xi^+ - \xi^-$ , where  $\xi^+$  and  $\xi^-$  are the nonnegative and nonpositive parts of  $\xi$ .

- We denote by  $M(\Omega)$  the set of all the Radon measures. The space  $M_b(\Omega)$  consists of all the bounded Radon measures. This last space is a Banach space, endowed with the norm

$$\|\nu\|_{M_b(\Omega)} = |\nu|(\Omega).$$

- We say that  $\xi$  in  $L^1(\Omega)$  is a function of bounded variation, and we write  $\xi$  in  $BV(\Omega)$ , if its distributional first derivatives belongs to  $M_b(\Omega)$ .  $BV(\Omega)$  is a Banach space with respect to the norm

$$\|\xi\|_{BV(\Omega)} = \|\xi\|_{0,1,\Omega} + |D\xi|(\Omega),$$

where

$$|D\xi|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} \xi \operatorname{div} \mathbf{f} \, d\Omega; \mathbf{f} \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \|\mathbf{f}\|_{0,\infty,\Omega} \leq 1 \right\}.$$

- For any convex function  $f$  from  $\mathbb{R}$  to  $\mathbb{R}$ , we recall that the recession function of  $f$ , denoted by  $f^\infty$ , is defined by:

$$f^\infty(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} f(x_0 + \lambda x) \quad (3.8)$$

where  $x_0$  is any element of  $\mathbb{R}$ .

We remark that the limit in (3.8) exists and that the above definition is independent of  $x_0$ .

$f^\infty$  is a convex function, positively homogeneous of degree 1.

- Now, for any valued measure  $\nu$  on  $\Omega$ , and any Borel positively one-homogeneous function  $f$ , we write  $\int_{\Omega} f(\nu)$  in place of  $\int_{\Omega} f\left(\frac{d\nu}{d|\nu|}\right) d|\nu|$ , where  $\frac{d\nu}{d|\nu|}$  is the Radon-Nikodym derivative of  $\nu$ .

For any convex function from  $\mathbb{R}$  to  $\mathbb{R}$ , we set

$$\int_{\Omega} f(\nu) = \int_{\Omega} f(\omega) \, d\Omega + \int_{\Omega} f^\infty\left(\frac{d\nu^s}{d|\nu^s|}\right) d|\nu^s|$$

where  $\nu = \omega \, d\mathcal{L} + \nu^s$ , ( $\omega$  in  $L^1(\Omega)$  and  $\nu^s$  singular with respect to the Lebesgue measure) and  $\frac{d\nu}{d|\nu|}$  is the Radon Nikodym derivatives of  $\nu$  with respect to  $|\nu|$  (see Baiocchi and al. [6]).

### 3.3. The relaxed problem

---

• Finally, we denote by  $c_1$ ,  $c_2$  and  $c_3$  the three nonnegative constants given by:

$$\begin{cases} c_1 = \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |z'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ c_2 = \sqrt{M_\infty} u_{cr} + \frac{M_\infty R_y c_1^2}{2}, \\ c_3 = \sqrt{M_\infty} u_{cr} + (\gamma + 1) u_{cr}^3 (R_x R_y) + M_\infty R_y c_1^2. \end{cases}$$

### 3.3 The relaxed problem

Now, we are in position to introduce  $\tilde{F}$  the relaxed functional of  $F$ . Thanks to Amara et al. [2], we know that any minimizing sequence  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  of  $F$  in  $V(\Omega)$ , is bounded in  $W^{1,1}(\Omega)$  and  $\{\partial_y \xi_n\}_{n=1}^\infty$  in  $L^2(\Omega)$ . Thus, we are able to extract a convergent subsequence to a function  $\varphi$  in  $L^1(\Omega)$  such that  $\partial_x \varphi$  is a bounded Radon measure. Then, by using the Lebesgue decomposition theorem, there exists a unique couple of measures  $(\nu^a, \nu^s)$  defined on the  $\sigma$ -field of all Borel subsets of  $\Omega$ ,  $\mathcal{B}$ , such that:

$$\partial_x \varphi = \nu^a + \nu^s$$

where  $\nu^a$  is the absolutely continuous part with respect to the Lebesgue measure and  $\nu^s$  is the singular part. Next, according to the Radon-Nikodym theorem and since  $\nu^a$  is a bounded measure, we have the existence of a unique function  $\omega$  in  $L^1(\Omega)$ , such that for any Borel subset  $A$  in  $\mathcal{B}$ ,

$$\nu^a(A) = \int_A \omega d\Omega.$$

Therefore, it follows by (Alibert and Bouchitté, [1]; theorem 5.1, p. 140) that

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_\Omega G(\partial_x \xi_n) d\Omega \geq \int_\Omega G(\omega) d\Omega + \int_\Omega G^\infty(+1) d\{\nu^s\}^+ + \int_\Omega G^\infty(-1) d\{\nu^s\}^-.$$

But, since the definition of the *recession function* gives us:

$$\begin{aligned} G^\infty(t) &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} G(\lambda t) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{\gamma+1}{6} ((u_{cr} - \lambda t)^+)^3 - \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (u_{cr} - \lambda t) + \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3 \right] \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{if } t < 0, \\ \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 t & \text{if } t \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.9}$$

### 3.3. The relaxed problem

---

we get,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} G(\partial_x \xi_n) d\Omega \geq \int_{\Omega} G(\omega) d\Omega + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \{\nu^s\}^+(\Omega) + (+\infty) \{\nu^s\}^-(\Omega). \quad (3.10)$$

Moreover, since  $\partial_y \xi_n$  converges to  $\partial_y \varphi$  in  $L^2(\Omega)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (\partial_y \xi_n)^2 d\Omega = \int_{\Omega} (\partial_y \varphi)^2 d\Omega. \quad (3.11)$$

Recall that here for any  $n \geq 1$ , (see [2])

$$\begin{aligned} b(\xi_n) &= \sqrt{M_{\infty}} \int_{\Gamma_p} z' \xi_n d\sigma \\ &= -\sqrt{M_{\infty}} \int_{\Omega_0} z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi_n d\Omega + \frac{\sqrt{M_{\infty}}}{R_y} \int_{\Omega_0} z'(x) \xi_n d\Omega, \end{aligned}$$

where  $\Omega_0 = ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ]0, R_y[$ .

So,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(\xi_n) = b(\varphi)$  since  $\xi_n$  converges weakly to  $\varphi$  in  $L^2(-R_x, R_x; W^{1,2}([0, R_y]))$ .

In particular, for any  $\varphi$  in  $L^2(-R_x, R_x; W^{1,2}([0, R_y]))$ ,

$$b(\varphi) = -\sqrt{M_{\infty}} \int_{\Omega_0} z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \varphi d\Omega + \frac{\sqrt{M_{\infty}}}{R_y} \int_{\Omega_0} z'(x) \varphi d\Omega. \quad (3.12)$$

Using (3.10), (3.11) and (3.12), we get

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(\xi_n) &\geq \int_{\Omega} G(\omega) d\Omega + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \{\nu^s\}^+(\Omega) + (+\infty) \{\nu^s\}^-(\Omega) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \varphi)^2 d\Omega + b(\varphi). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Therefore, if we define the spaces

$$N(\Omega) = \{\xi \in BV(\Omega); \partial_y \xi \in L^2(\Omega)\},$$

$$N^0(\Omega) = \left\{ \xi \in N(\Omega); \int_{\Omega} \xi d\Omega = 0 \right\}$$

and we introduce the map

$$\tilde{F} : N(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

defined for any  $\xi$  in  $N(\Omega)$  by:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\xi) &= \int_{\Omega} G(\omega) d\Omega + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \{\nu^s\}^+(\Omega) + (+\infty) \{\nu^s\}^-(\Omega) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \xi)^2 d\Omega + b(\xi), \end{aligned} \quad (3.14)$$

then one has,

$$\tilde{F}(\xi) = F(\xi) \text{ if } \xi \text{ is in } V(\Omega) \text{ and } \liminf_{n \rightarrow \infty} F(\xi_n) \geq \tilde{F}(\varphi).$$

### 3.4. Approximation and compactness

---

**Proposition 15.**  $BV(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , with a continuous injection.

**Proof** There exists a positive constant  $c(\Omega)$  such that for any  $\varphi$  in  $W^{1,1}(\Omega)$ ,

$$\|\varphi\|_{0,2,\Omega} \leq c(\Omega)\|\varphi\|_{BV(\Omega)}. \quad (3.15)$$

Moreover, if  $\xi$  belongs to  $BV(\Omega)$ , we can construct a sequence  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  in  $W^{1,1}(\Omega)$ , with

$$\begin{cases} \varphi_n \rightarrow \xi \text{ in } L^1(\Omega), \\ |D\varphi_n|(\Omega) \rightarrow |D\xi|(\Omega) \text{ as } n \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.16)$$

Taking the lower limit in (3.15), with  $\varphi$  replaced by  $\varphi_n$ , we obtain a similar relation for any  $\xi$  of  $BV(\Omega)$ :

$$\|\xi\|_{0,2,\Omega} \leq c(\Omega)\|\xi\|_{BV(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

So,  $N(\Omega)$  is a Banach space equipped with its natural norm

$$\|\xi\|_{N(\Omega)} = \|\xi\|_{0,2,\Omega} + |\partial_x \xi|(\Omega) + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}.$$

Now, we are turning up to minimize the functional  $\tilde{F}$  in a suitable class of functions. This functional is defined for all  $\xi$  in  $N(\Omega)$ , but may assume the value  $+\infty$ . Indeed,  $\tilde{F}(\xi) < +\infty$  if and only if  $\{\nu^s\}^-$  vanishes and  $(u_{cr} - \omega)^+$  belongs to  $L^3(\Omega)$ .

Thus, if we set  $\tilde{X} = \{\xi \in N^0(\Omega); (u_{cr} - \omega)^+ \in L^3(\Omega); \{\nu^s\}^- = 0\}$ ,

we are naturally led to be interested in the problem

$$\exists \varphi \in \tilde{X}, \quad \inf_{\xi \in \tilde{X}} \tilde{F}(\xi) = \tilde{F}(\varphi). \quad (3.17)$$

The next results concern the properties of functions of bounded variation. For full information on this function space, we refer to Evans and al. [14], Giusti [16] and Ziemer [22].

### 3.4 Approximation and compactness

**Proposition 16.** 1) For any  $\xi$  in  $N(\Omega)$ , there exists a sequence  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  in  $C^\infty(\bar{\Omega})$  such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\xi_n - \xi|^2 d\Omega = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\partial_x \xi_n|(\Omega) = |\partial_x \xi|(\Omega) \text{ and } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\partial_y \xi_n - \partial_y \xi|^2 d\Omega = 0. \quad (3.18)$$

2) For any bounded sequence  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  in  $N(\Omega)$ , there exist a subsequence  $\{\xi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  and a function  $\xi$  in  $N(\Omega)$  such that,  $\xi_{n_k}$  converges towards  $\xi$  in  $L^q(\Omega)$ , for all  $q$  in  $[1, 2[$ .

### 3.4. Approximation and compactness

---

**Proof** The first assertion is just a generalization of Giusti (theorem 1.17, [16]) from  $L^1(\Omega)$  to  $L^2(\Omega)$ , to assert that  $W = \{\xi \in W^{1,1}(\Omega); \partial_y \xi \in L^2(\Omega)\}$  approximates  $N(\Omega)$  in the sense of (16). But, since  $C^\infty(\bar{\Omega})$  is dense in  $W$ , we conclude that  $C^\infty(\bar{\Omega})$  approximates  $N(\Omega)$  as claimed (see Casas and al. [12]).

Concerning 2), let us choose a sequence  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  in  $C^\infty(\bar{\Omega})$  such that:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} |\xi_n - \varphi_n|^2 d\Omega < \frac{1}{n}, \\ \sup_n \int_{\Omega} |\partial_x \varphi_n| d\Omega < \infty, \\ \int_{\Omega} |\partial_y \xi_n - \partial_y \varphi_n|^2 d\Omega < \frac{1}{n}. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Such a sequence exists according to 1). Thanks to Rellich's theorem (Brezis [11], p. 169), there exist a subsequence, still denoted by  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  and a function  $\xi$  in  $L^2(\Omega)$  such that  $\varphi_n$  converges to  $\xi$  in  $L^q(\Omega)$ , for all  $q$  in  $[1, 2[$ . But then (3.16) implies that  $\xi_n$  converges towards  $\xi$  in  $L^q(\Omega)$  and the lower semi-continuity of measure variation ensures that  $\xi$  belongs to  $BV(\Omega)$ . In order to conclude, one has just to remark that thanks to (3.16),  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  is a bounded sequence in the Hilbert space  $L^2(-R_x, R_x; W^{1,2}([0, R_y]))$ .

**Proposition 17.** (*Sobolev-Poincaré's inequality*)

*There exists a positive constant  $c$ , depending only on  $\Omega$ , such that,*

$\forall \xi \in N^0(\Omega),$

$$\|\xi\|_{0,2,\Omega} \leq c(|\partial_x \xi|(\Omega) + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}).$$

**Remark 12.**  $N^0(\Omega)$  can be endowed equivalently by the norm

$$\|\cdot\|_{N^0(\Omega)} = |\partial_x \cdot|(\Omega) + \|\partial_y \cdot\|_{0,2,\Omega}.$$

**Proof** Let us introduce the continuous linear map

$$T : N(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

defined, for any  $\xi$  in  $N(\Omega)$ , by:

$$T(\xi) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} \xi d\Omega.$$

Thanks to Ziemer (theorem 5.11.1, p. 261, [22]), there exists a constant  $c'(\Omega)$  such that for any  $\xi$  in  $N(\Omega)$ ,  $\|\xi - T(\xi)\|_{0,2,\Omega}$  is dominated by  $c'(\Omega)\|T\|\|D\xi|(\Omega)$ , where  $\|T\|$  denotes the norm of  $T$  in  $N'(\Omega)$ , the dual space of  $N(\Omega)$ .

### 3.5. Some properties of functional $\tilde{F}$

Thus, if we consider the total variation of  $\xi$ :

$$\begin{aligned} |D\xi|(\Omega) &= |\partial_x \xi|(\Omega) + \|\partial_y \xi\|_{0,1,\Omega} \\ &\leq |\partial_x \xi|(\Omega) + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega} \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (1 + \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}})(|\partial_x \xi|(\Omega) + \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}), \end{aligned}$$

and we have  $c = c'(\Omega) \frac{1 + \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}}}{\text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}}}$ . ■

### 3.5 Some properties of functional $\tilde{F}$

In this part, we list some properties of the relaxation functional  $\tilde{F}$ , defined by (3.14).

**Proposition 18.** *The mapping  $b$  defined in (3.12) is linear continuous from  $N(\Omega)$  into  $\mathbb{R}$ . Moreover,*

$$b(\xi) = \sqrt{M_\infty} \int_{\Gamma_p} z'(x) \xi \, d\sigma. \quad (3.20)$$

**Proof** As  $b$  is a linear mapping from  $N(\Omega)$  to  $\mathbb{R}$  and since for any  $\xi$  in  $N(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |b(\xi)| &\leq \sqrt{M_\infty} R_y c_1 \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega} + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y^{\frac{1}{2}}} c_1 \|\xi\|_{0,2,\Omega} \\ &\leq \left( \sqrt{M_\infty} R_y c_1 + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y^{\frac{1}{2}}} c_1 \right) \|\xi\|_{N(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$b$  is continuous.

So, it remains to prove (3.20). In order to, if we denote by  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  the unit outer normal to  $\partial\Omega_0$ , and as for a.e.  $x$ ,  $\xi(x, \cdot)$  belongs to  $W^{1,2}(]0, R_y[)$ , the Green's formula with respect to  $y$  implies that

$$\begin{aligned} b(\xi) &= -\sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi \, d\Omega + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z'(x) \xi \, d\Omega \\ &= -\sqrt{M_\infty} \left[ \int_{\partial\Omega_0} z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) n_y \xi \, d\sigma - \int_{\Omega_0} \xi \partial_y \left( z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \right) \, d\Omega \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z'(x) \xi \, d\Omega \\ &= \sqrt{M_\infty} \int_{\Gamma_p} z' \xi \, d\sigma. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### 3.5. Some properties of functional $\tilde{F}$

Let us consider now the set of finite energy and its properties.

**Proposition 19.** *The set  $\tilde{X}$  is a convex cone.*

**Proof**  $\tilde{X}$  is convex, since the mappings  $t \mapsto t^+$  and  $t \mapsto t^-$  are convex real functions.

It remains to establish that  $\tilde{X}$  is a cone. For this reason, let us choose a nonnegative  $\lambda$  and  $\xi$  in  $\tilde{X}$  with  $\partial_x \xi = \omega d\Omega + \nu^s$ . The convexity of  $t \mapsto t^+$  leads to

$$(u_{cr} - \lambda \omega)^+ = (\lambda u_{cr} + (1 - \lambda) u_{cr} - \lambda \omega)^+ \leq \lambda (u_{cr} - \omega)^+ + (1 - \lambda)^+ u_{cr} \in L^3(\Omega)$$

and

$$\{\lambda \nu^s\}^- = \lambda \{\nu^s\}^- = 0. \quad \blacksquare$$

Let us analyse the Gâteaux derivative of  $\tilde{F}$  on  $\tilde{X}$ .

**Proposition 20.** *For any  $\xi_1, \xi_2$  in  $\tilde{X}$  such that  $\partial_x \xi_1 = \omega_1 d\Omega + \nu_1^s$ ,  $\partial_x \xi_2 = \omega_2 d\Omega + \nu_2^s$  one has,*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{F}(\xi_1 + \theta \xi_2) - \tilde{F}(\xi_1)}{\theta} = \langle \tilde{F}'(\xi_1), \xi_2 \rangle,$$

where

$$\langle \tilde{F}'(\xi_1), \xi_2 \rangle = \int_{\Omega} g(\omega_1) \omega_2 d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y \xi_1 \partial_y \xi_2 d\Omega + b(\xi_2) + \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 \nu_2(\Omega). \quad (3.22)$$

**Proof** Since  $\tilde{F}$  is convex on  $\tilde{X}$ , for any  $\xi_1, \xi_2$  in  $\tilde{X}$  and for any positive  $\theta$ , the function

$$\theta \mapsto \frac{\tilde{F}(\xi_1 + \theta \xi_2) - \tilde{F}(\xi_1)}{\theta}$$

is nondecreasing. So, as  $\theta$  tends to  $0^+$ , this sequence has always a limit in  $\bar{\mathbb{R}}$ .

Now, we compute,

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{F}(\xi_1 + \theta \xi_2) - \tilde{F}(\xi_1)}{\theta} \\ &= \int_{\Omega} \frac{G(\omega_1 + \theta \omega_2) - G(\omega_1)}{\theta} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(\partial_y \xi_1 + \theta \partial_y \xi_2)^2 - (\partial_y \xi_1)^2}{\theta} d\Omega \\ &+ \frac{b(\xi_1 + \theta \xi_2) - b(\xi_1)}{\theta} + \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 \left( \frac{\nu_1 + \theta \nu_2 - \nu_1}{\theta} \right) (\Omega) \\ &= \int_{\Omega} \frac{G(\omega_1 + \theta \omega_2) - G(\omega_1)}{\theta} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(\partial_y \xi_1 + \theta \partial_y \xi_2)^2 - (\partial_y \xi_1)^2}{\theta} d\Omega \\ &+ b(\xi_2) + \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 \nu_2(\Omega). \end{aligned}$$

### 3.5. Some properties of functional $\tilde{F}$

---

Let us show that

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{G(\omega_1 + \theta \omega_2) - G(\omega_1)}{\theta} d\Omega = \int_{\Omega} \omega_2 g(\omega_1) d\Omega.$$

Before discussing the limit of  $\int_{\Omega} \frac{G(\omega_1 + \theta \omega_2) - G(\omega_1)}{\theta} d\Omega$ , as  $\theta$  tends to  $0^+$ , it will be necessary to give a sense to  $\int_{\Omega} g(\omega_1) \omega_2 d\Omega$ . For this purpose,  $\int_{\Omega} g(\omega_1) \omega_2 d\Omega$  is rewritten as:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(\omega_1) \omega_2 d\Omega &= \int_{\Omega} g(\omega_1^+) \omega_2^+ d\Omega - \int_{\Omega} g(\omega_1^+) \omega_2^- d\Omega + \int_{\Omega} g(-\omega_1^-) \omega_2^+ d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} g(-\omega_1^-) \omega_2^- d\Omega. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Since for any nonnegative  $t$ ,  $0 \leq g(t) \leq \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2$ , the integrands in the two first terms on the right-hand side of this last equality belong to  $L^1(\Omega)$ . As  $g$  is a nondecreasing function, the third integrand is a nonpositive measurable function. For the last term, due to the inequality:

$$\omega_2^- = \frac{|\omega_2| - \omega_2}{2} \leq \frac{u_{cr} + |u_{cr} - \omega_2|}{2} - \frac{u_{cr} - (u_{cr} - \omega_2)}{2} = (u_{cr} - \omega_2)^+,$$

its integrand is in  $L^1(\Omega)$ . Thus,  $\int_{\Omega} g(\omega_1) \omega_2 d\Omega$  exists in  $\bar{\mathbb{R}}$  and is finite if and only if  $\int_{\Omega} g(-\omega_1^-) \omega_2^+ d\Omega > -\infty$ .

Now, let us define

$$h_{\theta} = \frac{G(\omega_1 + \theta \omega_2) - G(\omega_1)}{\theta}.$$

In view of the convexity of the function  $G$ , we see that the sequence  $\{h_{\theta}\}_{\theta>0}$  is nondecreasing with respect to  $\theta$ . So, since  $\tilde{X}$  is a convex cone, for any  $\theta$  in  $]0, 1]$ ,  $h_{\theta}$  belongs to  $L^1(\Omega)$  and thanks to the Beppo-Levi theorem,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{G(\omega_1 + \theta \omega_2) - G(\omega_1)}{\theta} d\Omega = \int_{\Omega} g(\omega_1) \omega_2 d\Omega.$$

Moreover, the same kind of demonstration gives:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{(\partial y \xi_1 + \theta \partial y \xi_2)^2 - (\partial y \xi_1)^2}{\theta} d\Omega &= \int_{\Omega} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(\partial y \xi_1 + \theta \partial y \xi_2)^2 - (\partial y \xi_1)^2}{\theta} d\Omega \\ &= 2 \int_{\Omega} \partial y \xi_2 \partial y \xi_1 d\Omega, \end{aligned}$$

and leads to (3.22). ■



### 3.5. Some properties of functional $\tilde{F}$

**Remark 13.** If  $\xi_2$  is not an element of  $\tilde{X}$ ,  $\langle \tilde{F}'(\xi_1), \xi_2 \rangle$  exists too. Indeed, if for one positive value of  $\theta$ ,  $\xi_1 + \theta\xi_2$  belongs to  $\tilde{X}$ , the same proof holds; if for any positive  $\theta$ ,  $\xi_1 + \theta\xi_2$  does not belong to  $\tilde{X}$ , then  $\tilde{F}(\xi_1 + \theta\xi_2)$  is infinite, all as well as  $\langle \tilde{F}'(\xi_1), \xi_2 \rangle$ .

**Proposition 21.** Let  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  be a sequence in  $\tilde{X}$  such that  $\xi_n$  converges weakly to  $\xi$  i.e.

$$\begin{cases} \xi_n \rightharpoonup \xi \text{ in } L^2(\Omega), \\ \partial_x \xi_n \rightharpoonup \partial_x \xi \text{ in } M_b(\Omega), \\ \partial_y \xi_n \rightharpoonup \partial_y \xi \text{ in } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (3.24)$$

Then

$$\tilde{F}(\xi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}(\xi_n). \quad (3.25)$$

**Remark 14.** If moreover, the right-hand side of (3.25) is finite,  $\xi$  is in  $\tilde{X}$ .

**Proof** Let us set  $\partial_x \xi_n = \omega_n d\Omega + \nu_n^s$  and  $\partial_x \xi = \omega d\Omega + \nu^s$ . It is clear that

$$|\partial_x \xi_n|(\Omega) = \|\omega_n\|_{0,1,\Omega} + |\nu_n^s|(\Omega),$$

and so, sequences  $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$  and  $\{\nu_n^s\}_{n=1}^\infty$  are bounded in  $L^1(\Omega)$  and  $M_b(\Omega)$  respectively.

Therefore, two subsequences exist, still denoted  $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$  and  $\{\nu_n^s\}_{n=1}^\infty$ , which converge weakly to  $\tau$  and  $\rho$  respectively in  $M_b(\Omega)$ . Thanks to the Lebesgue decomposition theorem, we set:

$$\begin{cases} \tau = u_1 d\Omega + \nu^{1,s}, \\ \rho = u_2 d\Omega + \nu^{2,s}, \end{cases}$$

with  $u_1, u_2$  in  $L^1(\Omega)$ ,  $u_2 \geq 0$ ,  $\nu^{1,s}, \nu^{2,s}$  being two singular parts with respect to the Lebesgue measure and  $\nu^{2,s} \geq 0$ . We get from these notations that

$$\partial_x \xi = (u_1 + u_2) d\Omega + (\nu^{1,s} + \nu^{2,s}) = \omega d\Omega + \nu^s.$$

The sequence  $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$  satisfies (Alibert and Bouchitté [1]; theorem 5.1, p. 140) and we get,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} G(\omega_n) d\Omega \geq \int_{\Omega} G(u_1) d\Omega + (+\infty) \{\nu^{1,s}\}^-(\Omega) + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \{\nu^{1,s}\}^+(\Omega). \quad (3.26)$$

Since  $G$  is a convex function and as  $u_2$  is nonnegative, we get:

$$G(u_1) + u_2 g(u_1 + u_2) \geq G(u_1 + u_2).$$

### 3.5. Some properties of functional $\tilde{F}$

But, since

$$g(u_1 + u_2) \leq \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2,$$

one has:

$$G(u_1) + \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 u_2 \geq G(u_1 + u_2),$$

Since  $\nu^{2,s}$  is a nonnegative measure, (3.26) is rewritten:

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} G(\omega_n) d\Omega \geq \int_{\Omega} G(u_1 + u_2) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 u_2 d\Omega \\ & + (+\infty) (\{\nu^{1,s}\}^-(\Omega) + \{\nu^{2,s}\}^-(\Omega)) + \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 \{\nu^{1,s}\}^+(\Omega) \\ & \geq \int_{\Omega} G(u_1 + u_2) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 u_2 d\Omega + (+\infty) (\nu^{1,s}(\Omega) + \nu^{2,s}(\Omega))^- \\ & + \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 \{\nu^{1,s}\}^+(\Omega) \\ & = \int_{\Omega} G(u_1 + u_2) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 u_2 d\Omega + \infty (\nu^s)^-(\Omega) \\ & + \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 \{\nu^{1,s}\}^+(\Omega). \end{aligned} \quad (3.27)$$

As  $\{\nu_n^s\}_{n=1}^{\infty}$  converges weakly to the nonnegative measure  $\rho$  in  $M_b(\Omega)$ , then

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \nu_n^s(\Omega) \geq \int_{\Omega} u_2 d\Omega + \nu^{2,s}(\Omega) = \rho(\Omega). \quad (3.28)$$

Since the sequence  $\{\partial_y \xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  converges weakly to  $\partial_y \xi$  in  $L^2(\Omega)$ , then

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \xi_n)^2 d\Omega \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \xi)^2 d\Omega. \quad (3.29)$$

At last, recall that

$$b(\xi_n) = -\sqrt{M_{\infty}} \int_{\Omega_0} z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi_n d\Omega + \frac{\sqrt{M_{\infty}}}{R_y} \int_{\Omega_0} z'(x) \xi_n d\Omega$$

and thus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b(\xi_n) = b(\xi). \quad (3.30)$$

Therefore, inequalities (3.27), (3.28), (3.29) and (3.30) complete the proof.  $\blacksquare$

Our purpose now is to look for a lower bound for  $\tilde{F}$ . So we must add a new condition satisfied by  $z$ . By analogy with [2], we assume that the extension of  $z$  by zero outside  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , say  $Z$ , belongs to  $\mathcal{C}^1([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$  (see Rodrigues [19]).

**Proposition 22.** *For any  $\xi$  in  $\tilde{X}$  with  $\partial_x \xi = \omega d\Omega + \nu^s$ ,*

$$b(\xi) \geq -c_2 - \frac{1}{2} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0}^2 + \frac{\sqrt{M_{\infty}}}{R_y} \int_{\Omega_0} z(u_{cr} - \omega) d\Omega - \frac{\sqrt{M_{\infty}}}{R_y} \int_{\Omega_0} d\nu^s.$$

### 3.5. Some properties of functional $\tilde{F}$

**Proof** Since  $Z$  belongs to  $\mathcal{C}^1([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ , we get:

$$\begin{aligned}
b(\xi) &= -\sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi \, d\Omega - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z(x) \omega \, d\Omega \\
&\quad - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z(x) \, d\nu^s \\
&\geq -\frac{M_\infty R_y c_1^2}{2} - \frac{1}{2} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0}^2 + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z(u_{cr} - \omega) \, d\Omega - \sqrt{M_\infty} u_{cr} \\
&\quad - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} d\nu^s. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Proposition 23.** Assume that the hypothesis (3.5) is satisfied. Then for any  $\xi$  in  $\tilde{X}$  such that  $\partial_x \xi = \omega \, d\Omega + \nu^s$ ,

$$\tilde{F}(\xi) \geq \frac{\gamma+1}{12} \|(u_{cr} - \omega)^+\|_{0,3,\Omega}^3 + \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}^2 - c_3 + \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \right) \int_{\Omega} d\nu^s.$$

**Proof** For any  $\xi$  in  $\tilde{X}$ ,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\xi) &= \int_{\Omega} G(\omega) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \xi)^2 \, d\Omega + b(\xi) + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_{\Omega} d\nu^s \\
&= \int_{\Omega} G(\omega) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \xi)^2 \, d\Omega - \sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi \, d\Omega \\
&\quad - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z(x) \omega \, d\Omega - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z(x) \, d\nu^s + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_{\Omega} d\nu^s \\
&= \int_{\Omega_0} G(\omega) \, d\Omega - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z(x) \omega \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (\partial_y \xi)^2 \, d\Omega \\
&\quad - \sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi \, d\Omega + \int_{\Omega_1} G(\omega) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} (\partial_y \xi)^2 \, d\Omega \\
&\quad - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z(x) \, d\nu^s + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_{\Omega} d\nu^s \\
&= B_x^0 + B_y^0 + B_x^1 + B_y^1 + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_{\Omega} d\nu^s - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z(x) \, d\nu^s
\end{aligned}$$

where  $\Omega_1 = (]-R_x, -\frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, R_x[) \times ]0, R_y[$  and

$$\begin{aligned}
B_x^0 &= \int_{\Omega_0} G(\omega) \, d\Omega - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z(x) \omega \, d\Omega, \\
B_y^0 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (\partial_y \xi)^2 \, d\Omega - \sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z'(x) \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi \, d\Omega, \\
B_x^1 &= \int_{\Omega_1} G(\omega) \, d\Omega, \\
B_y^1 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} (\partial_y \xi)^2 \, d\Omega.
\end{aligned}$$

### 3.5. Some properties of functional $\tilde{F}$

Using the same techniques as presented in Amara et al. [2], we get

$$\begin{aligned} B_x^0 &\geq \frac{\gamma+1}{12} \|(u_{cr} - \omega)^+\|_{0,3,\Omega_0}^3 + \frac{1-\sqrt{2}}{3}(\gamma+1) u_{cr}^3 R_y - \sqrt{M_\infty} u_{cr}. \\ B_y^0 &\geq \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0}^2 - M_\infty R_y c_1^2. \\ B_x^1 &\geq \frac{\gamma+1}{12} \|(u_{cr} - \omega)^+\|_{0,3,\Omega_1}^3 + \frac{1-\sqrt{2}}{3}(\gamma+1) u_{cr}^3 (2R_x - 1) R_y. \\ B_y^1 &= \frac{1}{2} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_1}^2. \end{aligned}$$

Hence the result. ■

**Remark 15.** *As a consequence of the above proposition,  $\inf_{\xi \in \tilde{X}} \tilde{F}(\xi)$  is finite.*

**Proposition 24.** *Under the condition of thin profile (3.5), we have for any  $\xi$  in  $\tilde{X}$  with  $\partial_x \xi = \omega d\Omega + \nu^s$ ,*

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \right) \left( \int_\Omega d\nu^s + \|\omega\|_{0,1,\Omega} \right) + \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}^2 \leq \\ &c_3 + \tilde{F}(\xi) + (\gamma+1) u_{cr}^2 \|(u_{cr} - \omega)^+\|_{0,1,\Omega} \end{aligned}$$

**Proof** Choosing again the notations used in the proposition (23) and since  $0 \leq Z \leq 1$ , we get:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \right) \|u_{cr} - \omega\|_{0,1,\Omega_0} &\leq (\gamma+1) u_{cr}^2 \|(u_{cr} - \omega)^+\|_{0,1,\Omega_0} \\ &\quad + \sqrt{M_\infty} u_{cr} + B_x^0, \\ \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \|u_{cr} - \omega\|_{0,1,\Omega_1} &\leq (\gamma+1) u_{cr}^2 \|(u_{cr} - \omega)^+\|_{0,1,\Omega_1} + B_x^1, \\ \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}^2 &\leq \frac{1}{2} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_1}^2 + \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0}^2 \\ &\leq B_y^1 + B_y^0 + M_\infty R_y c_1^2. \end{aligned}$$

Therefore, as  $\nu^s$  is a nonnegative measure, one has the proposition. ■

**Remark 16.** *In the sequel of this section, our goal is to show that*

$$\inf_{\xi \in \tilde{X}} \tilde{F}(\xi) = \inf_{\xi \in V(\Omega)} F(\xi).$$

*In order to prove such a result, we propose to show that for any  $\xi$  of  $\tilde{X}$ , there exists a sequence  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  in  $V(\Omega)$  such that  $\tilde{F}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\xi_n)$ . But, since the result of proposition (16) is not adapted to this convergence, we cannot use it and we have to obtain another density result.*

### 3.5. Some properties of functional $\tilde{F}$

---

**Lemma 3 (Temam [21]; lemma 1.1, p. 7).** *For any positive  $\lambda$ , let us introduce the linear transformation (homothetic)  $\sigma_\lambda$  defined for any  $(x, y)$  in  $\Omega$  by:*

$$\sigma_\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$$

where

$$\sigma_\lambda \Omega = \{(\lambda x, y); (x, y) \in \Omega\}.$$

1) *If  $p$  is a distribution in  $\Omega$ , then the distribution  $\sigma_\lambda p$  can be defined in  $\mathcal{D}'(\sigma_\lambda \Omega)$  by:*

$$\langle \sigma_\lambda p, \varphi \rangle_{\sigma_\lambda \Omega} = \lambda \langle p, \sigma_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \rangle_\Omega, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\sigma_\lambda \Omega), \quad (3.31)$$

where  $(\sigma_{\frac{1}{\lambda}} \varphi)(x, y) = \varphi(\lambda x, y)$ .

*The derivatives of  $\sigma_\lambda p$  are related to the derivatives of  $p$  by the formula:*

$$\langle \partial_x(\sigma_\lambda p), \varphi \rangle_{\sigma_\lambda \Omega} = \frac{1}{\lambda} \langle \sigma_\lambda \partial_x p, \varphi \rangle_{\sigma_\lambda \Omega}, \quad (3.32)$$

$$\langle \partial_y(\sigma_\lambda p), \varphi \rangle_{\sigma_\lambda \Omega} = \langle \sigma_\lambda \partial_y p, \varphi \rangle_{\sigma_\lambda \Omega}. \quad (3.33)$$

*If  $\lambda$  converges towards  $1^+$ , then the restriction to  $\Omega$  of  $\sigma_\lambda p$  converges to  $p$  in the distribution sense.*

2) *If  $p$  is in  $L^\alpha(\Omega)$  with  $\alpha$  in  $[1, +\infty[$ , then  $\sigma_\lambda p$  is in  $L^\alpha(\sigma_\lambda \Omega)$ . For  $\lambda$  converges towards  $1^+$ , the restriction to  $\Omega$  of  $\sigma_\lambda p$  converges to  $p$  in  $L^\alpha(\Omega)$ .*

We can now prove the following approximation:

**Theorem 6.** *For any  $\xi$  in  $\tilde{X}$ , there exists a sequence  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  in  $V(\Omega)$  such that:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_n \rightarrow \xi \text{ in } L^2(\Omega), \\ |\partial_x \xi_n|(\Omega) \rightarrow |\partial_x \xi|(\Omega), \\ \partial_y \xi_n \rightarrow \partial_y \xi \text{ in } L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.34)$$

**Proof** Let  $\xi$  in  $\tilde{X}$  with  $\partial_x \xi = \omega d\Omega + \nu^s$ . For any  $n \geq 1$ , we define

$$\Omega^n = \left\{ \left( \frac{n+1}{n} x, y \right); (x, y) \in \Omega \right\}$$

and for  $(x, y)$  in  $\Omega^n$ ,

$$\xi^n(x, y) = \sigma_{\frac{n+1}{n}} \xi(x, y) = \xi \left( \frac{n}{n+1} x, y \right).$$

### 3.5. Some properties of functional $\tilde{F}$

Let  $\varepsilon > 0$  and let  $\rho_\varepsilon$  be a family of nonnegative mollifiers in  $\mathbb{R}$ .

Since for any  $0 < \varepsilon < d([\cdot - R_x, R_x], \partial([\cdot - \frac{n+1}{n}R_x, \frac{n+1}{n}R_x])$  and for any  $\xi$  in  $W^{1,p}(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ), the sequence  $\{\rho_\varepsilon * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi\}_{\varepsilon>0}$  converges to  $\sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi$  in  $W^{1,p}(\Omega)$  as  $\varepsilon$  tends to 0. Then, for fixed  $\delta > 0$ , we may choose  $\varepsilon_\delta < d([\cdot - R_x, R_x], \partial([\cdot - \frac{n+1}{n}R_x, \frac{n+1}{n}R_x])$  such that:

$$\begin{aligned} \|\rho_{\varepsilon_\delta} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi - \sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi\|_{0,2,\Omega} &< \delta, \\ \|\rho_{\varepsilon_\delta} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\omega - \sigma_{\frac{n+1}{n}}\omega\|_{0,1,\Omega} &< \delta, \\ \|\rho_{\varepsilon_\delta} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\partial_y\xi - \sigma_{\frac{n+1}{n}}\partial_y\xi\|_{0,2,\Omega} &< \delta. \end{aligned}$$

Now, for  $n \geq 1$ , there exists  $\varepsilon_n < d([\cdot - R_x, R_x], \partial([\cdot - \frac{n+1}{n}R_x, \frac{n+1}{n}R_x])$  such that:

$$\begin{aligned} \|\rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi - \sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi\|_{0,2,\Omega} &< \frac{1}{n}, \\ \|\rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\omega - \sigma_{\frac{n+1}{n}}\omega\|_{0,1,\Omega} &< \frac{1}{n}, \\ \|\rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\partial_y\xi - \sigma_{\frac{n+1}{n}}\partial_y\xi\|_{0,2,\Omega} &< \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

The function

$$\xi_n(x, y) = \frac{n+1}{n}(\rho_{\varepsilon_n} * \xi^n)(x, y) = \frac{n+1}{n} \int_{-\varepsilon_n}^{+\varepsilon_n} \xi \left( \frac{n}{n+1}(x-t), y \right) \rho_{\varepsilon_n}(t) dt$$

satisfies the desired properties. In fact, for any  $n \geq 1$ ,  $\xi_n$  belongs to  $V(\Omega)$ .

On the other hand, the second part of the previous lemma implies

$$\begin{aligned} \|\xi_n - \xi\|_{0,2,\Omega} &= \left\| \frac{n+1}{n}(\rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi) - \xi \right\|_{0,2,\Omega} \\ &\leq \left\| \frac{1}{n}\rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi \right\|_{0,2,\Omega} + \|\rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi - \sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi\|_{0,2,\Omega} + \|\sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi - \xi\|_{0,2,\Omega} \\ &\leq \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \|\xi\|_{0,2,\Omega} + \|\rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi - \sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi\|_{0,2,\Omega} \\ &+ \|\sigma_{\frac{n+1}{n}}\xi - \xi\|_{0,2,\Omega}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n - \xi\|_{0,2,\Omega} = 0$ .

According to the first part in the previous lemma, we get:

$$\begin{aligned} \partial_x \xi_n &= \rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\omega + \rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\nu^s \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega^n), \\ \partial_y \xi_n &= \frac{n+1}{n} \rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}}\partial_y\xi \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega^n), \end{aligned}$$

and similarly,

$$\partial_y \xi_n \rightarrow \partial_y \xi \text{ in } L^2(\Omega),$$

### 3.5. Some properties of functional $\tilde{F}$

$$\rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} \omega \rightarrow \omega \text{ in } L^1(\Omega).$$

Let us fix  $f$  in  $\mathcal{C}_c(\Omega)$ ,  $\|f\|_{0,\infty,\Omega} \leq 1$  and note that

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} \nu^s, f \rangle_{\Omega} &= \langle \sigma_{\frac{n+1}{n}} \nu^s, \rho_{\varepsilon_n} * f \rangle_{\Omega} \\ &= \frac{n+1}{n} \langle \nu^s, \sigma_{\frac{n}{n+1}}(\rho_{\varepsilon_n} * f) \rangle_{\sigma_{\frac{n}{n+1}} \Omega} \\ &\leq \frac{n+1}{n} |\nu^s|(\sigma_{\frac{n}{n+1}} \Omega) \\ &\leq \frac{n+1}{n} |\nu^s|(\Omega). \end{aligned}$$

Thus, we deduce that

$$|\rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} \nu^s|(\Omega) \leq \frac{n+1}{n} |\nu^s|(\Omega), \quad (3.36)$$

and hence we may assume that  $\rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} \nu^s$  converges to  $\nu^s$  weakly, and consequently

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} \nu^s|(\Omega) = |\nu^s|(\Omega).$$

Thus, the result is proved.  $\blacksquare$

**Remark 17.** Here, we do not need, as presented in [21], to construct a regularization with respect to  $x$  and  $y$ . In fact, since  $\xi$  is already a Sobolev function with respect to  $y$ , we only need to regularize it in the  $ox$  direction.

We are now able to give the major result of this paper

**Theorem 7.** If we note  $\mathcal{L} = \inf_{\xi \in V(\Omega)} F(\xi)$  then

$$\mathcal{L} = \inf_{\xi \in \tilde{X}} \tilde{F}(\xi).$$

**Proof** Since  $V(\Omega)$  is a subset of  $\tilde{X}$ , it suffices to prove that  $\mathcal{L} \leq \inf_{\xi \in \tilde{X}} \tilde{F}(\xi)$ , i.e.

for any  $\xi$  in  $\tilde{X}$ ,

$$\mathcal{L} \leq \tilde{F}(\xi).$$

In order to, for any  $\xi$  in  $\tilde{X}$  such that  $\partial_x \xi = \omega d\Omega + \nu^s$ , we consider the sequence  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  introduced in the previous theorem, and we have to prove that for any  $\xi$  in  $\tilde{X}$ ,

$$\tilde{F}(\xi) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} F(\xi_n).$$

Let us note  $\omega = u_1 + u_2$  where  $u_1 = u_{cr} - (u_{cr} - \omega)^+$  and  $u_2 = (u_{cr} - \omega)^-$ . Since  $\nu^s$  is a nonnegative measure and since  $u_2 \geq 0$ , one has:

$$\begin{aligned} (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+ &= (u_{cr} - \rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} \omega - \rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} \nu^s)^+ \\ &\leq (u_{cr} - \rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} \omega)^+ \\ &\leq (u_{cr} - \rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} u_1)^+. \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3.6. Existence and uniqueness of solutions

---

Since  $u_1 \leq u_{cr}$  and due to the properties of the mollifier sequence  $\rho_{\varepsilon_n}$ , we have

$$\rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} u_1 \leq u_{cr}. \quad (3.38)$$

Therefore, combining (3.37) with (3.38), we get:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} [(u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+]^3 d\Omega &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [(u_{cr} - \rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} u_1)^+]^3 d\Omega \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [(u_{cr} - \rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} u_1)]^3 d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (u_{cr} - u_1)^3 d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [(u_{cr} - \omega)^+]^3 d\Omega. \end{aligned}$$

Next, since

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (u_{cr} - \partial_x \xi_n) d\Omega &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_{cr} - \rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} \omega - \rho_{\varepsilon_n} * \sigma_{\frac{n+1}{n}} \nu^s) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (u_{cr} - \omega) d\Omega - \nu^s(\Omega), \end{aligned}$$

and as  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  converges to  $\xi$  in  $L^2(\Omega)$  and  $\{\partial_y \xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  converges to  $\partial_y \xi$  in  $L^2(\Omega)$ , we get:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F(\xi_n) \leq \tilde{F}(\xi).$$

So, the result holds. ■

## 3.6 Existence and uniqueness of solutions

**Theorem 8.** *There exists a function  $\varphi$  in  $\tilde{X}$  with  $\partial_x \varphi = \omega d\Omega + \nu^s$  such that*

i)  $\tilde{F}(\varphi) = \mathcal{L}$ ,

ii) *For  $u_1 = u_{cr} - (u_{cr} - \omega)^+$ , we have*

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} \left( G(u_1) - u_1 g(u_1) - \frac{1}{2} (\partial_y \varphi)^2 \right) d\Omega.$$

**Proof** The first assertion is a trivial consequence of the results obtained in the previous paper [2]. Indeed, the coercive failure of the energy functional  $F$  leads us to look for a solution that is not in  $V(\Omega)$  but in the larger space  $N(\Omega)$ . We conclude from the theorem (2.24), that the infimum in (3.17) is actually a minimum.



### 3.6. Existence and uniqueness of solutions

---

In order to prove the second assertion, let  $\varphi$  be a solution of the problem (3.17). Then,  $\varphi$  satisfies the properties

$$\varphi \in \tilde{X}; \quad \langle \tilde{F}'(\varphi), \psi - \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \psi \in \tilde{X}. \quad (3.39)$$

On the one hand, since the set  $\tilde{X}$  is a convex cone, then for any  $\lambda > 0$  and for any  $\xi$  in  $\tilde{X}$ ,  $\lambda\xi + \varphi$  is in  $\tilde{X}$ . If we use (3.39) with  $\psi = \lambda\xi + \varphi$ , we have

$$\langle \tilde{F}'(\varphi), \varphi \rangle \geq 0,$$

and on the other hand, 0 belongs to  $\tilde{X}$  and

$$\langle \tilde{F}'(\varphi), \varphi \rangle \leq 0.$$

Since  $\varphi$  belongs to  $\tilde{X}$  and according to proposition (20), we get

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F}'(\varphi), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \omega g(\omega) d\Omega + \int_{\Omega} (\partial_y \varphi)^2 d\Omega + b(\varphi) + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \nu^s(\Omega) \\ &= \int_{\Omega} \omega g(\omega) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \varphi)^2 d\Omega + \tilde{F}(\varphi) - \int_{\Omega} G(\omega) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.40)$$

As any solution  $\varphi$  in  $\tilde{X}$  of the problem (3.17) satisfies

$$\tilde{F}(\varphi) = \mathcal{L}, \quad (3.41)$$

then, thanks to (3.40) and (3.41), we have

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} G(\omega) d\Omega - \int_{\Omega} \omega g(\omega) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \varphi)^2 d\Omega.$$

Now, for  $u_1 = u_{cr} - (u_{cr} - \omega)^+$ , we have

$$\begin{aligned} G(\omega) - G(u_1) &= -\frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (u_{cr} - \omega) + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (u_{cr} - u_1) \\ &= -\frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 [(u_{cr} - \omega) - (u_{cr} - \omega)^+] \\ &= \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (u_{cr} - \omega)^-, \end{aligned}$$

and,

$$\begin{aligned} \omega g(\omega) - u_1 g(u_1) &= (\omega - u_1)g(\omega) + [g(\omega) - g(u_1)] u_1 \\ &= [(u_{cr} - u_1) - (u_{cr} - \omega)]g(\omega) \\ &= [(u_{cr} - \omega)^+ - (u_{cr} - \omega)]g(\omega) \\ &= \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (u_{cr} - \omega)^-. \end{aligned}$$

### 3.6. Existence and uniqueness of solutions

Consequently,

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} G(u_1) d\Omega - \int_{\Omega} u_1 g(u_1) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \varphi)^2 d\Omega. \blacksquare$$

**Remark 18.** Let us note that, for any  $\psi$  of  $\tilde{X}$ ,  $\langle \tilde{F}'(\varphi), \psi \rangle \geq 0$ . So for any  $\psi$  of  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\langle \tilde{F}'(\varphi), \psi \rangle = 0$  (since  $\psi$  and  $-\psi$  belong to  $\tilde{X}$ ). Therefore,  $\text{div}(g(u), \partial_y \varphi) = 0$  in the distribution sense in  $\Omega$ .

**Remark 19.** Using properties of  $\tilde{F}$ , the first assertion of this last theorem can be proved. Indeed, let  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  be a minimizing sequence in  $\tilde{X}$ ; by proposition (23) and (24), we can conclude that  $\{\partial_x \xi_n, \partial_y \xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a bounded sequence in  $M_b(\Omega) \times L^2(\Omega)$  and by proposition (17),  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a bounded sequence in  $L^2(\Omega)$ . The conclusion now follows by extracting a weakly convergent subsequence and using the lower semi-continuity proposition (21).

Let us now give a result concerning the uniqueness of solutions for the problem (3.17). This result extends the result obtained in Amara et al. [2].

**Theorem 9.** Let  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  be two solutions of the problem (3.17) such that

$$\partial_x \varphi_1 = \omega_1 d\Omega + \nu_1^s \quad \text{and} \quad \partial_x \varphi_2 = \omega_2 d\Omega + \nu_2^s.$$

i) For  $u_1 = u_{cr} - (u_{cr} - \omega_1)^+$  and  $u_2 = u_{cr} - (u_{cr} - \omega_2)^+$ , we have

$$u_1 = u_2 \text{ a.e. in } \Omega \text{ and } \partial_y \varphi_1 = \partial_y \varphi_2 \text{ a.e. in } \Omega,$$

ii) Under the condition of thin profile (3.5), there exists a function  $f$  in  $BV([-R_x, R_x])$ ,  $\int_{-R_x}^{R_x} f(x) dx = 0$  such that:

$\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) + f(x)$  for almost every  $(x, y)$  of  $\Omega$  and  $\int_{\Omega} \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_{\infty}}}{R_y} Z(x) \right) df = 0$ , where  $Z$  is the extension of  $z$  by zero outside  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

**Proof** Considering, as proved in proposition (20), the limit of  $\frac{\tilde{F}(\varphi_1 + \theta(\varphi_2 - \varphi_1)) - \tilde{F}(\varphi_1)}{\theta}$  as  $\theta$  tends to  $0^+$ , one has:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F}'(\varphi_1), \varphi_2 - \varphi_1 \rangle &= \int_{\Omega} g(\omega_1) (\omega_2 - \omega_1) d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y \varphi_1 (\partial_y \varphi_2 - \partial_y \varphi_1) d\Omega \\ &+ b(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (\nu_2^s(\Omega) - \nu_1^s(\Omega)) \end{aligned} \quad (3.42)$$

and, similarly,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F}'(\varphi_2), \varphi_1 - \varphi_2 \rangle &= \int_{\Omega} g(\omega_2) (\omega_1 - \omega_2) d\Omega + \int_{\Omega} \partial_y \varphi_2 (\partial_y \varphi_1 - \partial_y \varphi_2) d\Omega \\ &+ b(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 (\nu_1^s(\Omega) - \nu_2^s(\Omega)) \end{aligned} \quad (3.43)$$

### 3.6. Existence and uniqueness of solutions

---

Thus, we remark that, since  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  are two solutions of the problem (3.17), we have

$$\langle \tilde{F}'(\varphi_1), \varphi_2 - \varphi_1 \rangle \geq 0, \quad \langle \tilde{F}'(\varphi_2), \varphi_1 - \varphi_2 \rangle \geq 0,$$

Adding (3.42) to (3.43), we get

$$\int_{\Omega} (\omega_1 - \omega_2)(g(\omega_1) - g(\omega_2)) d\Omega + \int_{\Omega} (\partial_y \varphi_1 - \partial_y \varphi_2)^2 d\Omega \leq 0.$$

As  $g$  is a non decreasing function, we get

$$\int_{\Omega} (\omega_1 - \omega_2)(g(\omega_1) - g(\omega_2)) d\Omega = 0 \quad \text{and} \quad \int_{\Omega} (\partial_y \varphi_1 - \partial_y \varphi_2)^2 d\Omega = 0. \quad (3.44)$$

Therefore,  $\partial_y \varphi_1 = \partial_y \varphi_2$  a.e. in  $\Omega$  and by construction of  $g$ ,  $(u_{cr} - \omega_1)^+ = (u_{cr} - \omega_2)^+$  a.e. in  $\Omega$ .

This is i).

In order to prove ii), let us consider  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  two solutions of the problem (3.17) such that  $\partial_x \varphi_1 = \omega_1 d\Omega + \nu_1^s$  and  $\partial_x \varphi_2 = \omega_2 d\Omega + \nu_2^s$ . Thanks to the first assertion, there exists a function  $f$  in  $BV([-R_x, R_x])$  such that for almost all  $(x, y)$  of  $\Omega$ ,

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) + f(x).$$

According to the Lebesgue decomposition theorem, we have

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_2 + u \text{ a.e. in } \Omega, \\ \nu_1 = \nu_2 + \mu \text{ a.e. in } \Omega, \end{cases}$$

where  $u$  is the absolutely continuous part of  $df$  with respect to the Lebesgue measure and  $\mu$  is its singular part.

Let us consider  $A = \{(x, y) \in \Omega; \omega_1 < u_{cr} \text{ a.e. in } \Omega\}$  and  $B = \{(x, y) \in \Omega; \omega_1 \geq u_{cr} \text{ a.e. in } \Omega\}$ .

### 3.7. Conclusion and open problems

Then, since  $\partial_y \varphi_1 = \partial_y \varphi_2$  a.e. in  $\Omega$  and  $\omega_1 = \omega_2$  a.e. in  $A$ , we get:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\varphi_1) &= \int_{\Omega} G(\omega_1) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \varphi_1)^2 d\Omega + b(\varphi_1) + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \nu_1(\Omega) \\
&= \int_A G(\omega_1) d\Omega + \int_B G(\omega_1) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \varphi_1)^2 d\Omega + b(\varphi_1) + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \nu_1(\Omega) \\
&= \int_A G(\omega_1) d\Omega - \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_B (u_{cr} - \omega_1) d\Omega + \frac{\gamma+1}{3} \int_B u_{cr}^3 d\Omega \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \varphi_1)^2 d\Omega + b(\varphi_1) + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \nu_1(\Omega) \\
&= \int_A G(\omega_2) d\Omega - \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_B (u_{cr} - \omega_2) d\Omega + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_B u d\Omega \\
&\quad + \frac{\gamma+1}{3} \int_B u_{cr}^3 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \varphi_2)^2 d\Omega + b(\varphi_2) + b(f) + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \nu_2(\Omega) \\
&\quad + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \mu(\Omega) \\
&= \int_A G(\omega_2) d\Omega + \int_B G(\omega_2) d\Omega + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_{\Omega} df + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_y \varphi_2)^2 d\Omega \\
&\quad + b(\varphi_2) + b(f) + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \nu_2(\Omega) \\
&= \tilde{F}(\varphi_2) + \int_{\Omega} \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_{\infty}}}{R_y} Z(x) \right) df.
\end{aligned}$$

Since  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  are two solutions of (3.17), then  $\tilde{F}(\varphi_1) = \tilde{F}(\varphi_2)$  and so, (??) is proved.  $\blacksquare$

**Remark 20.** Following L.C. Evans [14], let us denote by  $\lambda$  and  $\mu$ , respectively the approximative limit-sup and the approximative limit-inf of  $\varphi$ . Then, since  $\varphi$  is a bounded variation function, if  $S_{\varphi} = \{(x, y) \in \Omega, \lambda < \mu\}$  denotes the set of approximative discontinuity, one has  $\partial_x \varphi_{\perp S_{\varphi}} = (\varphi^+ - \varphi^-) n_x d\mathcal{H}_{\perp S_{\varphi}}^1$  and  $\varphi$  is  $\mathcal{H}^1$ -a.e. approximatively continuous in  $\Omega \setminus S_{\varphi}$ .

Moreover, since  $\varphi$  belongs to  $N(\Omega)$ , for a.e.  $x$  in  $]-R_x, R_x[$ , the function  $y \mapsto \varphi(x, y)$  belongs to  $W^{1,2}(]0, R_y])$ . Thus, there exists a countably family of  $C^1$ -hypersurfaces such that  $S_{\varphi} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} \times [a_{x_n}, b_{x_n}]$   $\mathcal{H}^1$ -a.e.

### 3.7 Conclusion and open problems

We have proved the existence of a solution of problem (3.17).

- The solution is not unique since two solutions are equal modulo a function  $f$ . This function depends only on the horizontal variable and its first derivative is "orthogonal" to the function  $\frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_{\infty}}}{R_y} Z$ .
- It is not a solution of the initial problem since it is a solution of  $\operatorname{div}(g(u), \partial_y \varphi) = 0$

### 3.7. Conclusion and open problems

---

in the distribution sense in  $\Omega$  and not of  $\operatorname{div}(g(\partial_x\varphi), \partial_y\varphi) = 0$ . The degenerated behaviour of the problem is illustrated by the singular part  $\mu$ . We have  $\partial_x\varphi = u d\Omega + \mu$ ; when  $u \leq u_{cr}$  *i.e.*, the problem remains elliptic, then we have  $\mu = 0$  and we get the solution of the initial problem and the PDE. But, when we have not  $u \leq u_{cr}$  a.e. in  $\Omega$ , the degeneracy of the problem appears in the parabolic zones (*i.e.* where  $u \geq u_{cr}$ ).

# Bibliography

- [1] J.J. Alibert and G. Bouchitté, *Non-uniform integrability and generalized Young measures*. J. Convex Anal. 4, n°1, pp.129-147, 1997.
- [2] M. Amara, A. Obeid and G. Vallet, *Existence results for a degenerated non-linear elliptic problem*. Prépublication de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour n°2001/30, 2001.
- [3] L. Ambrosio, *Existence theory for a new class of variational problems*. Arch. Ration. Mech. Anal. 111, n°4, pp.291-322, 1990.
- [4] L. Ambrosio, *On the lower semicontinuity of quasiconvex integrals in  $SBV(\Omega, \mathbb{R}^k)$* . Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 23, n°3, pp.405-425, 1994.
- [5] L. Ambrosio, A. Braides and A. Garroni, *Special functions with bounded variation and with weakly differentiable traces on the jump set*. NoDEA, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 5, n°2, pp.219-243, 1998.
- [6] C. Baiocchi, G. Buttazzo, F. Gastaldi and F. Tomarelli, *General existence theorems for unilateral problems in continuum mechanics*. Arch. Ration. Mech. Anal. 100, n°2, pp.149-189, 1988.
- [7] G. Bouchitté and G. Dal Maso, *Integral representation and relaxation of convex local functionals on  $BV(\Omega)$* . Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 20, n°4, pp.483-533, 1993.
- [8] G. Bouchitté, I. Fonseca and L. Mascarenhas, *A global method for relaxation*. Arch. Ration. Mech. Anal. 145, n°1, pp.51-98, 1998.
- [9] G. Bouchitté, I. Fonseca and L. Mascarenhas, *Relaxation of variational problems under trace constraints*. Nonlinear Analysis, n°49, pp.221-246, 2002.
- [10] A. Braides and V. Chiadò Piat, *A derivation formula for convex integral functionals defined on  $BV(\Omega)$* . J. Convex Anal. 2, n°1/2, pp.69-85, 1995.
- [11] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris, 1992.
- [12] E. Casas, K. Kunisch and C. Pola, *Regularization by functions of bounded variation and applications to image enhancement*. Appl. Math. Optimization 40, n°2, pp.229-257, 1999.

- [13] I. Ekeland and R. Temam, *Convex analysis and variational problems*. North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [14] L.C. Evans and R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in advanced mathematics, CRC Press, London, 1992.
- [15] I. Fonseca and S. Mueller, *Relaxation of quasiconvex functionals in  $BV(\Omega, \mathbb{R}^p)$  for integrands  $f(x, u, \nabla u)$* . Arch. Ration. Mech. Anal. 123, n°1, pp.1-49, 1993.
- [16] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Birkhäuser, Basel, 1983.
- [17] D. Kinderlehrer and P. Pedregal, *Weak convergence of integrands and the Young measure representation*. SIAM J. Math. Anal. 23, n °1, pp.1-19, 1992.
- [18] M. Pogu and G. Tournemine, *Modélisation et résolution d'équations de la mécanique des milieux continus*. Ellipses, 1992.
- [19] J. F. Rodrigues, *Obstacle problems in mathematical physics*. Lisbon, 1986.
- [20] T. Roubicek, *Relaxation of vectorial variational problems*. Math. Bohem. 120, n°4, pp.411-430, 1995.
- [21] R. Temam, *Navier-Stockes equations*. North Holland, Amsterdam, 1979.
- [22] W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.







# Chapitre 4

## Résultats d'existence dans le demi-plan positif

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des résultats d'existence et d'unicité de la solution pour le problème :

$$\begin{cases} \partial_x(g(\partial_x\varphi)) + \partial_y(\partial_y\varphi) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^2, \\ \partial_y\varphi(x, 0) = \sqrt{M_\infty} z'(x) \text{ sur } ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ , \\ \partial_y\varphi(x, 0) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ , \\ (\partial_x\varphi, \partial_y\varphi) \rightarrow (0, 0) \text{ quand } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (4.1)$$

On rappelle ici que  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{\gamma+1}{2}t^2 + (\gamma+1)u_{cr}t & \text{si } t \leq u_{cr}, \\ \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2 & \text{si } t \geq u_{cr}, \end{cases} \quad (4.2)$$

$z \in W_0^{1,\infty}(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$ ,  $\gamma > 1$ ,  $u_{cr} > 0$  et  $M_\infty \in ]0, 1[$ .

On pose le problème dans un espace de Sobolev avec poids, dont les propriétés locales coïncident avec celles utilisées dans le cas borné, soit  $V^0(\Omega)$  (voir [3, 4]). Cet espace diffère de  $V^0(\Omega)$  par l'introduction d'un poids qui décrit le comportement des fonctions à l'infini. Ici, il s'agit d'un poids de la forme :

$$\omega_1(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2 + \rho^2} \log(2 + \rho^2)} \text{ où } \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.3)$$

et l'espace variationnel correspondant est :

$$V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1) = \{\xi; \omega_1\xi \in L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2) \text{ et } \nabla\xi \in (L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)\}. \quad (4.4)$$

Le poids défini par (4.3) est choisi, d'une part pour obtenir une inégalité de type Poincaré et d'autre part, pour que (4.1) conduise à une formulation similaire à celle

## CHAPITRE 4. RÉSULTATS D'EXISTENCE DANS LE DEMI-PLAN POSITIF

---

du cas borné *i.e.* une solution faible du problème (4.1) est une fonction  $\varphi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  telle que pour toute fonction  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ , on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} g(\partial_x \varphi) \partial_x \xi \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_y \varphi \partial_y \xi \, dx \, dy + \sqrt{M_\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z' \xi \, dx = 0. \quad (4.5)$$

Plusieurs auteurs ont étudié les espaces de Sobolev avec poids. On peut citer par exemple les deux ouvrages de Kufner [35] et Kufner-Opic [36] pour de plus amples détails. On trouve aussi un grand nombre de travaux concernant l'étude des EDP définies dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ , le demi-espace  $\mathbb{R}_+^n$  et dans un domaine extérieur où l'approche est basée sur l'utilisation d'un espace de Sobolev avec poids comme cadre fonctionnel d'étude. On peut mentionner par exemple les travaux de C. Amrouche, V. Girault et J. Giroire dans [8, 9] (pour résoudre le laplacien dans  $\mathbb{R}^n$  et dans un domaine extérieur), de T. Boulmezaoud [15], de C. Amrouche et S. Nečasová [10] et de B. Hanouzet [30] (pour résoudre le laplacien dans  $\mathbb{R}_+^n$ ).

Le but de ce travail est d'étudier l'existence et l'unicité d'une fonction  $\varphi$  satisfaisant (4.5). Pour ce faire, on considère la fonctionnelle dont la minimisation sur  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  est équivalente à la solution faible du problème aux limites considéré, soit  $F$ . En étudiant les propriétés de cette fonctionnelle, on montre sous l'hypothèse de profil mince qu'elle est coercive dans les régions sous-soniques de  $\mathbb{R}_+^2$  mais qu'elle ne l'est pas dans les autres régions. Il s'ensuit que ce problème peut ne pas admettre de solution. On le plonge alors dans une famille de problèmes perturbés et en utilisant des fonctions convexes conjuguées, on lui associe un problème dual. On démontre l'existence et l'unicité d'un couple  $(u_*, v_*)$  dans  $(L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)$  et tel que :

i)  $\forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} g(u_*) \partial_x \xi \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} v_* \partial_y \xi \, dx \, dy + \sqrt{M_\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z' \xi \, dx = 0,$$

ii)  $u_* \leq u_{cr}$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ ,

iii)

$$\inf_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} F(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( G(u_*) - u_* g(u_*) - \frac{1}{2} v_*^2 \right) \, dx \, dy.$$

Ensuite, en rajoutant une condition qui résulte dans le cas borné de l'inégalité de Poincaré dans  $W^{1,1}$ , on montre l'existence d'une fonction  $\varphi$  liée à  $(u_*, v_*)$  par :

$$\partial_x \varphi = u_* + \nu \text{ et } \partial_y \varphi = v_*$$

où  $\nu$  est une mesure positive et bornée sur  $\mathbb{R}_+^2$ .

Enfin, on donne quelques idées afin d'estimer l'erreur de troncature entre la solution du problème dual définie dans le cas borné et celle définie sur le demi-plan positif. Plus précisément, on note :  $R_x = R_y = R$ ,  $\Omega_R = ]-R, R[ \times ]0, R[$ ,  $(g(u_R), v_R)$  est

## CHAPITRE 4. RÉSULTATS D'EXISTENCE DANS LE DEMI-PLAN POSITIF

---

la solution du problème dual (le cas borné) et on montre  $\{(U_R, V_R)\}_R$  est une suite de Cauchy dans  $(L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)$  où  $(U_R, V_R)$  est le prolongement par zéro de  $(u_R, v_R)$  dans  $\mathbb{R}_+^2$ . Ainsi, on aboutit à l'existence d'un couple  $(U, V)$  dans  $(L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)$  tel que :

i)  $\forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} g(U) \partial_x \xi \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} V \partial_y \xi \, dx \, dy + \sqrt{M_\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z' \xi \, dx = 0,$$

ii)  $U \leq u_{cr}$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ ,

iii)

$$\inf_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} F(\xi) \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( G(U) - U g(U) - \frac{1}{2} V^2 \right) \, dx \, dy.$$

Le présent chapitre est organisé comme suit : Dans la section 1 on étudie les espaces variationnels dont on a besoin. Dans la section 2 on définit la fonctionnelle (énergie) à minimiser. La section 3 est consacrée à l'étude de cette fonctionnelle et à prouver un résultat d'existence et d'unicité dans les régions (du domaine étudié) où l'écoulement est sous-sonique. Dans la section 4, on introduit un problème dual et on montre qu'il possède une solution unique. Ensuite, par le rajout d'une condition, on montre l'existence d'une fonction liée à la solution du problème dual par une relation analogue à celle dans le cas borné. Enfin, on estime l'erreur de troncature entre la solution du problème dual définie dans le cas borné et celle définie dans  $\mathbb{R}_+^2$ . La dernière section 5 est consacrée à la conclusion du chapitre.

On complète cette introduction par quelques notations :

Soit  $p$  un réel,  $p \geq 1$ . Pour tout ouvert non borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  et pour toute fonction mesurable  $\omega$ , on définit :

- $L^p(\Omega, \omega) = \{\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_\Omega \omega |\xi|^p \, dx \, dy < \infty\}$ . Muni de la norme

$$\|\xi\|_{p, \Omega, \omega} = \left( \int_\Omega \omega |\xi|^p \, dx \, dy \right)^{1/p},$$

$L^p(\Omega, \omega)$  est un espace de Banach réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

On définit les fonctions suivantes :

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho'(x) = |x|, \quad \omega_1(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2 + \rho^2} \log(2 + \rho^2)} \text{ et } \omega'_1 = \omega_1(\rho').$$

- $\tilde{\mathbb{H}}(\Omega) = (L^2(\Omega) \cap L^3(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ ,

- $V(\Omega, \omega_1) = \{\xi; \omega_1 \xi \in L^2(\Omega) \cap L^3(\Omega), \nabla \xi \in \tilde{\mathbb{H}}(\Omega)\}$ ,

## CHAPITRE 4. RÉSULTATS D'EXISTENCE DANS LE DEMI-PLAN POSITIF

---

- $W^{1,2}(\Omega, \omega_1) = \{\xi; \omega_1 \xi \in L^2(\Omega), \nabla \xi \in (L^2(\Omega))^2\}$ .

$\widetilde{\mathbb{H}}(\Omega)$ ,  $V(\Omega, \omega_1)$  et  $W^{1,2}(\Omega, \omega_1)$  sont des espaces de Banach réflexifs munis de leurs normes naturelles :

$$\begin{aligned} \|(p, q)\|_{\widetilde{\mathbb{H}}(\Omega)} &= \|p\|_{0,2,\Omega} + \|p\|_{0,3,\Omega} + \|q\|_{0,2,\Omega}, \\ \|\xi\|_{V(\Omega, \omega_1)} &= \|\omega_1 \xi\|_{0,2,\Omega} + \|\omega_1 \xi\|_{0,3,\Omega} + \|\nabla \xi\|_{\widetilde{\mathbb{H}}(\Omega)}, \\ \|\xi\|_{W^{1,2}(\Omega, \omega_1)} &= \|\omega_1 \xi\|_{0,2,\Omega} + \|\nabla \xi\|_{0,2,\Omega}. \end{aligned}$$

Les semi-normes associées à  $V(\Omega, \omega_1)$  et  $W^{1,2}(\Omega, \omega_1)$  sont définies par :

$$\begin{aligned} |\xi|_{V(\Omega, \omega_1)} &= \|\nabla \xi\|_{\widetilde{\mathbb{H}}(\Omega)}, \\ |\xi|_{W^{1,2}(\Omega, \omega_1)} &= \|\nabla \xi\|_{0,2,\Omega}. \end{aligned}$$

On désigne par

- $V_0(\Omega, \omega_1)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $V(\Omega, \omega_1)$ .
- $W_0^{1,2}(\Omega, \omega_1)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{1,2}(\Omega, \omega_1)$ .

Pour tout réel strictement positif  $R$ , on note  $B_R = B(0, R)$  la boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$  de rayon  $R$  centrée à l'origine et  $B'_R = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R}$ .

**Remarque 1.** • *La fonction  $\omega_1$  est de carré sommable sur  $\mathbb{R}^2$ . Il s'ensuit que  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  contient les constantes.*

- *Les seuls polynômes contenus dans  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  sont les polynômes constants.*

Pour établir le premier point, il suffit de calculer

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^2 dx dy = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2 + \rho^2) \log^2(2 + \rho^2)} \rho d\rho,$$

ainsi que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^3 dx dy = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} \log^3(2 + \rho^2)} \rho d\rho,$$

où  $(\rho, \theta)$  sont les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, & y = \rho \sin \theta, \\ 0 \leq \rho < \infty, & \text{et } \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

Soient  $\alpha, \beta$  deux réels strictement positifs, comme

$$\int_0^\infty \frac{1}{(2 + \rho^2)^\alpha \log^\beta(2 + \rho^2)} \rho d\rho$$

n'est convergente que si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

## 4.1. Les espaces fonctionnels

---

i) si  $\alpha > 1$  (ce qui prouve que  $\int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^3 dx dy < +\infty$ )

ii) si  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ , (ce qui vérifie que  $\int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^2 dx dy < +\infty$ )

alors  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  ne contient pas les polynômes de degré  $\geq 1$  (car si  $\xi$  appartient à  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ ,  $\nabla \xi$  appartient à  $\tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^2)$ ).

## 4.1 Les espaces fonctionnels

### 4.1.1 Propriétés de $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$

Ce paragraphe est consacré à l'étude de l'espace fonctionnel sur lequel va reposer la formulation variationnelle du problème aux limites (4.1). Plus précisément, on établit des résultats de densité, d'existence d'une application trace et d'une inégalité de Poincaré.

**Théorème 1.** *L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  est dense dans  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ .*

**Preuve** La démonstration se fait par troncature et régularisation.

1) Troncature : on introduit une fonction croissante  $\psi$  dans  $\mathcal{C}^\infty([0, +\infty[)$  avec  $0 \leq \psi(t) \leq 1$ ,  $\psi(t) = 1$  pour  $t \geq 1$  et  $\psi(t) = 0$  pour  $t \leq \frac{1}{2}$  et on pose, pour  $n$  assez grand ( $n \geq 3$ )

$$\psi_n(x, y) = \psi\left(\frac{\log n}{\log(2 + \rho^2(x, y))}\right).$$

Ensuite, pour tout  $\xi$  un élément de l'espace  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ , on considère

$$\xi_n(x, y) = \psi_n(x, y) \xi(x, y).$$

Les fonctions  $\xi_n$  sont dans  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ , à support compact et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\xi_n - \xi\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)} = 0.$$

Si l'on note  $\Omega_n^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2 + \rho^2(x, y) \geq n\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^2 |\xi_n - \xi|^2 dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^2 |\psi_n \xi - \xi|^2 dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^2 |\psi_n - 1|^2 |\xi|^2 dx dy \\ &= \int_{\Omega_n^1} \omega_1^2 |\psi_n - 1|^2 |\xi|^2 dx dy \\ &\leq \int_{\Omega_n^1} \omega_1^2 |\xi|^2 dx dy. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_{\Omega_n^1} \omega_1^2 |\xi|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^2 |\xi|^2 \chi_{\Omega_n^1} dx dy, \quad (4.6)$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

---

où  $\chi_{\Omega_n^1}$  est la fonction indicatrice de  $\Omega_n^1$  définie par :

$$\chi_{\Omega_n^1} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \Omega_n^1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué à la suite de fonctions de  $L^1(\mathbb{R}^2)$ , soit  $\{\omega_1^2 |\xi|^2 \chi_{\Omega_n^1}\}_{n=3}^\infty$ , assure ainsi la convergence de (4.6) vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

De la même manière on démontre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^3 |\xi_n - \xi|^3 dx dy = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_n \partial_x \xi - \partial_x \xi|^2 dx dy = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_n \partial_x \xi - \partial_x \xi|^3 dx dy = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_n \partial_y \xi - \partial_y \xi|^2 dx dy = 0. \end{array} \right.$$

Reste à montrer que  $(\xi \partial_x \psi_n, \xi \partial_y \psi_n)$  tend vers zéro dans  $(L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)$ .

On a :

$$\begin{aligned} \partial_x \psi_n(x, y) &= \log n \cdot \psi' \left( \frac{\log n}{\log(2 + \rho^2(x, y))} \right) \frac{-1}{\log^2(2 + \rho^2(x, y))} \frac{2x}{(2 + \rho^2(x, y))}, \\ \partial_y \psi_n(x, y) &= \log n \cdot \psi' \left( \frac{\log n}{\log(2 + \rho^2(x, y))} \right) \frac{-1}{\log^2(2 + \rho^2(x, y))} \frac{2y}{(2 + \rho^2(x, y))}. \end{aligned}$$

De plus,  $\psi' \left( \frac{\log n}{\log(2 + \rho^2(x, y))} \right)$  est majoré par une constante strictement positive  $k_1$  indépendante de  $n$  et  $\nabla \psi_n(x, y) \neq 0$ , dans l'ensemble

$$\Omega_n^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; n \leq 2 + \rho^2(x, y) \leq n^2\}.$$

Alors

$$|\partial_x \psi_n| \leq 2k_1 \omega_1, \quad |\partial_y \psi_n| \leq 2k_1 \omega_1$$

et

$$|\nabla \psi_n| = \sqrt{(\partial_x \psi_n)^2 + (\partial_y \psi_n)^2} \leq 3k_1 \omega_1.$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

Par suite,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \psi_n|^2 |\xi|^2 dx dy &= \int_{\Omega_n^2} |\nabla \psi_n|^2 |\xi|^2 dx dy \\ &\leq \int_{\Omega_n^2} 9k_1^2 \omega_1^2 |\xi|^2 dx dy \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x \psi_n|^3 |\xi|^3 dx dy &= \int_{\Omega_n^2} |\partial_x \psi_n|^3 |\xi|^3 dx dy \\ &\leq \int_{\Omega_n^2} 8k_1^3 \omega_1^3 |\xi|^3 dx dy. \end{aligned} \quad (4.8)$$

On démontre de la même manière que (4.6) que les deux termes de droite de (4.7) et (4.8) tendent vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

2) Régularisation : Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $\{\rho_\varepsilon\}_\varepsilon$  une suite régularisante dans  $\mathbb{R}^2$ . Comme pour  $n \geq 3$  fixé,  $\xi_n$  est dans  $V(\mathbb{R}^2)$  alors, d'après les propriétés de la suite  $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ,

$$\rho_\varepsilon * \xi_n \rightarrow \xi_n \text{ dans } V(\mathbb{R}^2) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On rappelle ici que :

$$V(\mathbb{R}^2) = \{\xi \in L^2(\mathbb{R}^2), \nabla \xi \in (L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^3(\mathbb{R}^2)) \times L^2(\mathbb{R}^2)\}$$

D'autre part, on a :

$$\text{supp}(\rho_\varepsilon * \xi_n) \subset \overline{B(0, \varepsilon) + \text{supp}\xi_n} \subset K_n \text{ et } \text{supp}(\xi_n) \subset K_n \text{ (compact).}$$

Il existe un  $\varepsilon_n > 0$  tel que

$$\|\rho_{\varepsilon_n} * \xi_n - \xi_n\|_{V(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{n}.$$

Mais comme  $\omega_1$  est majoré par  $\frac{1}{\sqrt{2} \log 2}$  alors il existe une constante strictement positive  $c$  telle que :

$$\|\rho_{\varepsilon_n} * \xi_n - \xi_n\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)} \leq c \|\rho_{\varepsilon_n} * \xi_n - \xi_n\|_{V(\mathbb{R}^2)}.$$

Ainsi, la suite  $\{\rho_{\varepsilon_n} * \xi_n\}_{n \geq 3}$  est une suite de fonctions dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  qui converge vers  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ . Ceci termine la démonstration.  $\blacksquare$

**Théorème 2.** (Opérateur de prolongement) Il existe un opérateur de prolongement

$$P_1 : V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1) \longrightarrow V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$$

linéaire tel que pour tout  $\xi$  de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 \xi|_{\mathbb{R}_+^2} = \xi \\ \|P_1 \xi\|_{2, \mathbb{R}^2, \omega_1^2} \leq \sqrt{2} \|\xi\|_{2, \mathbb{R}_+^2, \omega_1^2}, \\ \|P_1 \xi\|_{3, \mathbb{R}^2, \omega_1^3} \leq \sqrt{2} \|\xi\|_{3, \mathbb{R}_+^2, \omega_1^3}, \\ \|P_1 \xi\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)} \leq \sqrt{2} \|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}. \end{array} \right.$$



## 4.1. Les espaces fonctionnels

---

On rappelle ici que

$$\begin{aligned}
 \|P_1 \xi\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)} &= \|P_1 \xi\|_{2, \mathbb{R}^2, \omega_1^2} + \|P_1 \xi\|_{3, \mathbb{R}^2, \omega_1^3} + \|\partial_x(P_1 \xi)\|_{0, 2, \mathbb{R}^2} + \|\partial_x(P_1 \xi)\|_{0, 3, \mathbb{R}^2} \\
 &+ \|\partial_y(P_1 \xi)\|_{0, 2, \mathbb{R}^2} \\
 &= \|\omega_1 P_1 \xi\|_{0, 2, \mathbb{R}^2} + \|\omega_1 P_1 \xi\|_{0, 3, \mathbb{R}^2} + \|\partial_x(P_1 \xi)\|_{0, 2, \mathbb{R}^2} + \|\partial_x(P_1 \xi)\|_{0, 3, \mathbb{R}^2} \\
 &+ \|\partial_y(P_1 \xi)\|_{0, 2, \mathbb{R}^2}.
 \end{aligned}$$

**Preuve** Pour  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ , on pose :

$$P_1 \xi(x, y) = \begin{cases} \xi(x, y) & \text{si } y \geq 0, \\ \xi(x, -y) & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

(prolongement par réflexion).

On a :

$$\partial_x P_1 \xi(x, y) = \begin{cases} \partial_x \xi(x, y) & \text{si } y \geq 0, \\ \partial_x \xi(x, -y) & \text{si } y < 0, \end{cases} \quad \partial_y P_1 \xi(x, y) = \begin{cases} \partial_y \xi(x, y) & \text{si } y \geq 0, \\ -\partial_y \xi(x, -y) & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

On va vérifier que, pour tout  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ ,  $P_1 \xi$  est dans  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  en montrant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|P_1 \xi\|_{2, \mathbb{R}^2, \omega_1^2} \leq \sqrt{2} \|\xi\|_{2, \mathbb{R}_+^2, \omega_1^2}, \\ \|P_1 \xi\|_{3, \mathbb{R}^2, \omega_1^3} \leq \sqrt{2} \|\xi\|_{3, \mathbb{R}_+^2, \omega_1^3}, \\ \|\partial_x(P_1 \xi)\|_{0, 2, \mathbb{R}^2} \leq \sqrt{2} \|\partial_x \xi\|_{0, 2, \mathbb{R}_+^2}, \\ \|\partial_x(P_1 \xi)\|_{0, 3, \mathbb{R}^2} \leq \sqrt{2} \|\partial_x \xi\|_{0, 3, \mathbb{R}_+^2}, \\ \|\partial_y(P_1 \xi)\|_{0, 2, \mathbb{R}^2} \leq \sqrt{2} \|\partial_y \xi\|_{0, 2, \mathbb{R}_+^2}. \end{array} \right.$$

On se contente de montrer la première inégalité, la démonstration des autres inégalités se fait de façon analogue. Pour ce faire, exprimons :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^2 |P_1 \xi|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}_-^2} \omega_1^2 |P_1 \xi|^2 dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} \omega_1^2 |P_1 \xi|^2 dx dy.$$

En faisant le changement de variable  $Y = -y$  dans

$$\int_{\mathbb{R}_-^2} \omega_1^2 |P_1 \xi|^2 dx dy$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_-^2} \omega_1^2 |P_1 \xi|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}_+^2} \omega_1^2 |P_1 \xi|^2 dx dy$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

et

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^2 |P_1 \xi|^2 dx dy \leq 2 \int_{\mathbb{R}_+^2} \omega_1^2 |\xi|^2 dx dy$$

et  $P_1 \xi$  appartient à  $L^2(\mathbb{R}^2, \omega_1^2)$ . ■

**Corollaire 1.** (*Densité*) *L'espace  $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  est dense dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ .*

**Preuve** Soit  $\xi$  un élément de l'espace  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . D'après le théorème (2), il existe une fonction  $P_1 \xi$  de  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  qui prolonge  $\xi$  par zéro dans  $\mathbb{R}_-^2$ . On applique alors le théorème (1) qui assure l'existence d'une suite de fonctions  $\{\rho_{\varepsilon_n} * \xi_n\}_{n=3}^\infty$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  convergeant vers  $P_1 \xi$  dans  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ . Soit  $\psi_n$  la restriction de  $\rho_{\varepsilon_n} * \xi_n$  à  $\mathbb{R}_+^2$ . Ainsi la suite  $\{\psi_n\}_{n=3}^\infty$  est une suite de  $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  qui converge vers  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . ■

### 4.1.2 Espace de trace de $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$

Comme toute fonction  $\xi$  appartenant à  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  est localement dans  $V(\mathbb{R}_+^2)$  (déjà défini dans ([3])), la trace de  $\xi$  sur l'hyperplan  $\mathcal{R} = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$  est localement dans  $M(\mathcal{R})$  (voir [3]).

Nous nous proposons d'étudier les traces sur l'hyperplan  $\mathcal{R}$  des fonctions de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ , pour cela, nous aurons besoin des espaces

$$\begin{aligned} W^{1,2}(\mathbb{R}_+^2, \omega_1) &= \{\xi; \omega_1 \xi \in L^2(\mathbb{R}_+^2); \nabla \xi \in (L^2(\mathbb{R}_+^2))^2\}, \\ X(\mathbb{R}_+^2, \omega'_1) &= \{\xi; \omega'_1 \xi \in L^2(\mathbb{R}_+^2); \nabla \xi \in (L^2(\mathbb{R}_+^2))^2\}, \end{aligned}$$

qui sont des espaces de Banach réflexifs pour les normes définies respectivement par :

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} &= \|\omega_1 \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2} + \|\nabla \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}, \\ \|\xi\|_{X(\mathbb{R}_+^2, \omega'_1)} &= \|\omega'_1 \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2} + \|\nabla \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}. \end{aligned}$$

Les deux théorèmes qui suivent sont déjà énoncés dans (Amrouche & Nečasová [10], p. 269-270).

**Théorème 3.** *Les espaces  $W^{1,2}(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  et  $X(\mathbb{R}_+^2, \omega'_1)$  ont les mêmes traces sur l'hyperplan  $\mathcal{R}$ .*

Si l'on note

$$W^{\frac{1}{2},2}(\mathcal{R}, \omega'_1) = \left\{ \mu; \sqrt{\omega'_1} \mu \in L^2(\mathcal{R}); \int_0^{+\infty} t^{-2} dt \int_{\mathbb{R}} |\mu(x+t, 0) - \mu(x, 0)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Muni de la norme

$$\|\mu\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\mathcal{R}, \omega'_1)} = \|\sqrt{\omega'_1} \mu\|_{0,2,\mathcal{R}} + \left( \int_0^{+\infty} t^{-2} dt \int_{\mathbb{R}} |\mu(x+t, 0) - \mu(x, 0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$W^{\frac{1}{2},2}(\mathcal{R}, \omega'_1)$  est un espace de Banach réflexif.

## 4.1. Les espaces fonctionnels

---

**Théorème 4.** *L'application trace*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2}) &\longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{R}) \\ \xi &\longmapsto \xi|_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

se prolonge en une application linéaire, continue, surjective notée encore  $\gamma_0$  de  $W^{1,2}(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  dans  $W^{\frac{1}{2},2}(\mathcal{R}, \omega'_1)$ .

Maintenant, on est en mesure d'énoncer :

**Lemme 1.** *Il existe une constante strictement positive  $k_2$  telle que*

$$\forall \xi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2}), \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi(x, 0)|^2}{\sqrt{2+x^2} \log(2+x^2)} dx \leq k_2 \|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}. \quad (4.9)$$

**Preuve** Soit  $\xi$  un élément de  $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ . En utilisant le théorème (4), on déduit qu'il existe une constante strictement positive  $k_2$  telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi(x, 0)|^2}{\sqrt{2+x^2} \log(2+x^2)} dx \leq \|\gamma_0 \xi\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\mathcal{R}, \omega'_1)} \leq k_2 \|\xi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}.$$

Ensuite l'inclusion de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  dans  $W^{1,2}(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  avec injection continue entraîne

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi(x, 0)|^2}{\sqrt{2+x^2} \log(2+x^2)} dx \leq k_2 \|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)},$$

et l'application trace  $\gamma_0$  sur  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  dans  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$  se prolonge en une application linéaire continue de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  dans  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$ . ■

Dans toute la suite, on désigne par  $M(\mathcal{R}, \omega'_1)$  l'espace trace de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . Muni de la norme

$$\|\mu\|_{M(\mathcal{R}, \omega'_1)} = \inf_{\mu = \gamma_0 \xi} \|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)},$$

l'espace  $M(\mathcal{R}, \omega'_1)$  est un espace de Banach.

**Proposition 1.** *Pour tout  $\zeta$  dans  $(M(\mathcal{R}, \omega'_1))'$ , le dual de l'espace  $M(\mathcal{R}, \omega'_1)$ , on a :*

$$\|\zeta\|_{(M(\mathcal{R}, \omega'_1))'} = \sup_{\{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \xi \neq 0\}} \frac{\langle \zeta, \gamma_0 \xi \rangle_{\mathcal{R}}}{\|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}}$$

**Preuve** Soit  $\xi$  un élément de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . D'après la définition de l'application trace  $\gamma_0$ , on a  $\gamma_0 \xi$  est un élément de  $M(\mathcal{R}, \omega'_1)$  et  $\|\gamma_0 \xi\|_{M(\mathcal{R}, \omega'_1)} \leq \|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}$ .

Ainsi, on peut affirmer que :

$$\frac{\langle \zeta, \gamma_0 \xi \rangle_{\mathcal{R}}}{\|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}} \leq \frac{\langle \zeta, \gamma_0 \xi \rangle_{\mathcal{R}}}{\|\gamma_0 \xi\|_{M(\mathcal{R}, \omega'_1)}} \leq \sup_{\{\mu \in M(\mathcal{R}, \omega'_1), \mu \neq 0\}} \frac{\langle \zeta, \mu \rangle_{\mathcal{R}}}{\|\mu\|_{M(\mathcal{R}, \omega'_1)}}.$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

Maintenant, pour établir l'inégalité inverse, il suffit de montrer que pour tout  $\mu$  de  $M(\mathcal{R}, \omega'_1)$ , on a :

$$\frac{\langle \zeta, \mu \rangle_{\mathcal{R}}}{\|\mu\|_{M(\mathcal{R}, \omega'_1)}} \leq \sup_{\{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \xi \neq 0\}} \frac{\langle \zeta, \gamma_0 \xi \rangle_{\mathcal{R}}}{\|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}}.$$

Soit  $\mu$  un élément de  $M(\mathcal{R}, \omega'_1)$ . Grâce à la surjectivité de l'application trace  $\gamma_0$ , il existe  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  tel que  $\gamma_0 \xi = \mu$  sur  $\mathcal{R}$ .

On considère le convexe fermé non vide :

$$E_\mu = \{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1); \gamma_0 \xi = \mu \text{ sur } \mathcal{R}\}.$$

On introduit la fonctionnelle  $P : E_\mu \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $P(\xi) = \|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}$  et on la minimise sur  $E_\mu$ . Il existe alors  $\psi$  dans  $E_\mu$  tel que  $P(\psi) = \inf_{\xi \in E_\mu} P(\xi) \stackrel{def}{=} \|\mu\|_{M(\mathcal{R}, \omega'_1)}$  (voir Ekeland & Temam [23]; p. 34).

Finalement,

$$\frac{\langle \zeta, \mu \rangle_{\mathcal{R}}}{\|\mu\|_{M(\mathcal{R}, \omega'_1)}} = \frac{\langle \zeta, \gamma_0 \psi \rangle_{\mathcal{R}}}{\|\psi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}} \leq \sup_{\{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \xi \neq 0\}} \frac{\langle \zeta, \gamma_0 \xi \rangle_{\mathcal{R}}}{\|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}}.$$

D'où le résultat. ■

**Proposition 2.** *L'espace  $\mathcal{D}(\mathcal{R})$  est dense dans  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$*

**Preuve** La démonstration se fait, comme dans le théorème (1), par troncature et régularisation.

1) Troncature : on introduit une fonction décroissante  $\psi$  dans  $\mathcal{C}^\infty([0, +\infty[)$  avec  $0 \leq \psi(t) \leq 1$ ,  $\psi(t) = 1$  pour  $t \leq 1$  et  $\psi(t) = 0$  pour  $t \geq 2$  et on pose, pour  $n$  assez grand

$$\Psi_n(x) = \psi\left(\frac{\sqrt{2+x^2}}{n}\right).$$

Ensuite, pour tout  $\xi$  un élément de l'espace  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$ , on considère

$$\xi_n(x, 0) = \Psi_n(x) \xi(x, 0).$$

Les fonctions  $\xi_n$  sont dans  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$ , à support compact et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\xi_n - \xi\|_{L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)} = 0.$$

Si l'on note  $\Omega_n^3 = \{x \in \mathbb{R}; \sqrt{2+x^2} \geq n\}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\xi_n(x, 0) - \xi(x, 0)|^2 \omega'_1(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} |\Psi_n(x) \xi(x, 0) - \xi(x, 0)|^2 \omega'_1(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\Psi_n(x) - 1|^2 |\xi(x, 0)|^2 \omega'_1(x) dx \\ &= \int_{\Omega_n^3} |\Psi_n(x) - 1|^2 |\xi(x, 0)|^2 \omega'_1(x) dx \\ &\leq \int_{\Omega_n^3} |\xi(x, 0)|^2 \omega'_1(x) dx \end{aligned}$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

---

On montre, de la même manière que dans la preuve du théorème (1), que le terme de droite de cette inégalité tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

2) Régularisation : Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $\{\rho_\varepsilon\}_\varepsilon$  une suite régularisante dans  $\mathbb{R}$ . Comme  $\xi_n$  est dans  $L^2(\mathcal{R})$  alors, d'après les propriétés de la suite  $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ,

$$\rho_\varepsilon * \xi_n \rightarrow \xi_n \text{ dans } L^2(\mathcal{R}) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

D'autre part, on a :

$$\text{supp}(\rho_\varepsilon * \xi_n) \subset \overline{B(0, \varepsilon) + \text{supp}\xi_n} \subset K_n \text{ et } \text{supp}(\xi_n) \subset K_n.$$

Il existe un  $\varepsilon_n > 0$  tel que

$$\|\rho_{\varepsilon_n} * \xi_n - \xi_n\|_{L^2(\mathcal{R})} \leq \frac{1}{n}.$$

Mais comme  $\omega'_1$  est majoré par  $\frac{1}{\sqrt{2 \log 2}}$  alors il existe une constante strictement positive  $c$  telle que :

$$\|\rho_{\varepsilon_n} * \xi_n - \xi_n\|_{L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)} \leq c \|\rho_{\varepsilon_n} * \xi_n - \xi_n\|_{L^2(\mathcal{R})}.$$

Ainsi, la suite  $\{\rho_{\varepsilon_n} * \xi_n\}_n$  est une suite de fonctions dans  $\mathcal{D}(\mathcal{R})$  qui converge vers  $\xi$  dans  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$ . Ceci achève la démonstration. ■

**Proposition 3.** *Tout élément  $\mu$  de l'espace  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$  peut être identifié comme élément de  $(M(\mathcal{R}, \omega'_1))'$  et on a :*

$$\forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1) \quad \langle \mu, \gamma_0 \xi \rangle_{(M(\mathcal{R}, \omega'_1))', M(\mathcal{R}, \omega'_1)} = \int_{\mathcal{R}} \omega'_1 \mu(\gamma_0 \xi) dx.$$

**Preuve** Soit  $\mu$  est un élément de  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$ . Comme pour tout  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ ,  $\gamma_0 \xi$  appartient à  $M(\mathcal{R}, \omega'_1)$  qui est inclus dans  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$ , alors l'application  $L_\mu$  définie sur  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  par :

$$L_\mu(\xi) = \int_{\mathcal{R}} \omega'_1 \mu(\gamma_0 \xi) dx$$

est une forme linéaire sur  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ .

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne la majoration suivante :

$$\forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1) \quad |L_\mu(\xi)| = \left| \int_{\mathcal{R}} \omega'_1 \mu(\gamma_0 \xi) dx \right| \leq \|\mu\|_{2, \mathcal{R}, \omega'_1} \|\gamma_0 \xi\|_{2, \mathcal{R}, \omega'_1}.$$

Ensuite, l'inclusion de  $M(\mathcal{R}, \omega'_1)$  dans  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$  avec injection continue donne :

$$\forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1) \quad \|\gamma_0 \xi\|_{2, \mathcal{R}, \omega'_1} \leq \|\gamma_0 \xi\|_{M(\mathcal{R}, \omega'_1)}.$$

Ainsi, on peut affirmer que :

$$\forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1) \quad |L_\mu(\xi)| = \left| \int_{\mathcal{R}} \omega'_1 \mu(\gamma_0 \xi) dx \right| \leq \|\mu\|_{2, \mathcal{R}, \omega'_1} \|\gamma_0 \xi\|_{M(\mathcal{R}, \omega'_1)}.$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

Par conséquent,  $L_\mu$  définit bien un élément de  $(M(\mathcal{R}, \omega'_1))'$  vérifiant :

$$\forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1) \quad L_\mu(\xi) = \langle L_\mu, \gamma_0 \xi \rangle_{(M(\mathcal{R}, \omega'_1))', M(\mathcal{R}, \omega'_1)}.$$

En utilisant la densité de  $\mathcal{D}(\mathcal{R})$  dans  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$  (proposition (2)), on déduit que  $M(\mathcal{R}, \omega'_1)$  est aussi dense dans  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$ . Ensuite, l'application linéaire

$$\tau : \mu \longmapsto L_\mu$$

est injective de  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$  dans  $(M(\mathcal{R}, \omega'_1))'$  et on peut identifier  $L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$  à  $\tau(L^2(\mathcal{R}, \omega'_1))$ , qui est un sous-espace de  $(M(\mathcal{R}, \omega'_1))'$ . Par conséquent

$$\langle \mu, \gamma_0 \xi \rangle_{(M(\mathcal{R}, \omega'_1))', M(\mathcal{R}, \omega'_1)} = \langle L_\mu, \gamma_0 \xi \rangle_{(M(\mathcal{R}, \omega'_1))', M(\mathcal{R}, \omega'_1)} = \int_{\mathcal{R}} \omega'_1 \mu(\gamma_0 \xi) dx.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Dans le but de montrer l'inégalité de Poincaré dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ , on procède de la manière suivante. Tout d'abord, on prouve l'inégalité dans l'espace  $V_0(B'_R, \omega_1)$  qui est défini comme étant l'adhérence de  $\mathcal{D}(B'_R)$  dans  $V(B'_R, \omega_1)$  où  $B'_R$  est le complémentaire de  $B_R$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Ensuite, par une partition adéquate de l'unité, on étend l'inégalité sur l'espace  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ . Et finalement, grâce à l'opérateur de prolongement  $P_1$ , on établit le résultat. C'est pourquoi on a besoin d'étudier l'espace  $V(B'_R, \omega_1)$  qui est un espace de Banach réflexif pour la norme  $\|\cdot\|_{V(B'_R, \omega_1)}$ .

### 4.1.3 Propriétés de $V(B'_R, \omega_1)$

**Théorème 5.** *Il existe un opérateur de prolongement*

$$P_2 : V(B'_R, \omega_1) \longrightarrow V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$$

linéaire, tel que pour tout  $\xi$  de  $V(B'_R, \omega_1)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_2 \xi|_{B'_R} = \xi \\ \|P_2 \xi\|_{2, \mathbb{R}^2, \omega_1^2} \leq k_3 \|\xi\|_{2, B'_R, \omega_1^2}, \\ \|P_2 \xi\|_{3, \mathbb{R}^2, \omega_1^3} \leq k_3 \|\xi\|_{3, B'_R, \omega_1^3}, \\ \|P_2 \xi\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)} \leq k_3 \|\xi\|_{V(B'_R, \omega_1)}, \end{array} \right.$$

où  $k_3$  dépend seulement de  $R$ .

**Preuve** La démonstration se fait par une partition adéquate de l'unité. En effet, étant donné que le bord de  $B'_R$  est compact et de classe  $C^\infty$  alors il existe des ouverts  $\{U_i\}_{i=1}^k$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $\partial B'_R \subset \cup_{i=1}^k U_i$  et il existe des applications  $H_i : B(0, 1) \longrightarrow U_i$  bijectives telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_i \in \mathcal{C}^1(\overline{B(0, 1)}), \quad H_i^{-1} \in \mathcal{C}^1(\overline{U_i}), \quad H_i(B(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^2) = U_i \cap B'_R, \\ H_i([-1, 1] \times \{0\}) = U_i \cap \partial B'_R. \end{array} \right.$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

Il existe alors des fonctions  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k$  de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta_i \leq 1 \quad \forall i = 0, 1, \dots, k \text{ et } \sum_{i=0}^k \theta_i = 1 \text{ sur } \mathbb{R}^2, \\ \text{supp}\theta_i \text{ est compact et } \text{supp}\theta_i \subset U_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k, \\ \text{supp}\theta_0 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \partial B'_R. \end{array} \right.$$

Etant donné  $\xi$  dans  $V(B'_R, \omega_1)$ , on écrit :

$$\xi = \sum_{i=0}^k \theta_i \xi = \sum_{i=0}^k \xi_i, \quad \text{où } \xi_i = \theta_i \xi.$$

On prolonge maintenant chacune des fonctions  $\xi_i$  à  $\mathbb{R}^2$  en distinguant  $\xi_0$  et les  $\{\xi_i\}_{i=1}^k$

a) **Prolongement de  $\xi_0$**  : On définit le prolongement de  $\xi_0$  à  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\tilde{\xi}_0(x, y) = \begin{cases} \xi_0(x, y) & \text{si } (x, y) \in B'_R, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \overline{B}_R. \end{cases}$$

On montre que  $\tilde{\xi}_0$  appartient à  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  et  $\nabla \tilde{\xi}_0 = \widetilde{\nabla} \xi_0$ . En effet :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^2 |\tilde{\xi}_0|^2 dx dy &= \int_{B'_R} \omega_1^2 |\xi_0|^2 dx dy \\ &\leq \int_{B'_R} \omega_1^2 |\xi|^2 dx dy. \end{aligned}$$

De la même manière, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega_1^3 |\tilde{\xi}_0|^3 dx dy \leq \int_{B'_R} \omega_1^3 |\xi|^3 dx dy.$$

Reste à prouver que  $\nabla \tilde{\xi}_0$  appartient à  $(L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^3(\mathbb{R}^2)) \times L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $\nabla \tilde{\xi}_0 = \widetilde{\nabla} \xi_0$ .

En effet, pour tout  $\psi$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ ,  $\frac{1}{\omega_1} \partial_x \psi$  appartient à  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et on a :

$$\begin{aligned} \langle \partial_x \tilde{\xi}_0, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} &= - \int_{B'_R} \xi_0 \partial_x \psi dx dy = - \int_{B'_R} \theta_0 \xi \partial_x \psi dx dy \\ &= - \int_{B'_R} \xi (\partial_x (\theta_0 \psi) - \psi \partial_x \theta_0) dx dy. \end{aligned}$$

Etant donné que  $\theta_0 \psi$  appartient à  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  à support compact dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \partial B'_R$  alors  $\theta_0 \psi$  appartient à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \setminus \partial B'_R)$  et  $\theta_0 \psi|_{B'_R}$  appartient à  $\mathcal{D}(B'_R)$ . Ainsi

$$- \int_{B'_R} \xi (\partial_x (\theta_0 \psi)) dx dy = \int_{B'_R} (\theta_0 \psi) \partial_x \xi dx dy$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

---

et

$$\begin{aligned} \langle \partial_x \tilde{\xi}_0, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} &= \int_{B'_R} (\theta_0 \psi) \partial_x \xi + \psi \xi \partial_x \theta_0 \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\theta_0 \partial_x \tilde{\xi} + \tilde{\xi} \partial_x \theta_0) \psi \, dx \, dy. \end{aligned}$$

D'où

$$\partial_x \tilde{\xi}_0 = \theta_0 \partial_x \tilde{\xi} + \tilde{\xi} \partial_x \theta_0.$$

De la même manière, on prouve que :

$$\partial_y \tilde{\xi}_0 = \theta_0 \partial_y \tilde{\xi} + \tilde{\xi} \partial_y \theta_0$$

et par suite

$$\nabla \tilde{\xi}_0 = \theta_0 \nabla \tilde{\xi} + \tilde{\xi} \nabla \theta_0.$$

Etant donné que  $0 \leq \theta_0 \leq 1$  et  $\nabla \theta_0$  est à support compact ( $\nabla \theta_0 = -\sum_{i=1}^k \nabla \theta_i$ ) alors  $\nabla \tilde{\xi}_0$  est bien un élément de  $(L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^3(\mathbb{R}^2)) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ . Ainsi  $\tilde{\xi}_0$  appartient à  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ .

b) **Prolongement de  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$**  : On pose pour  $(x, y)$  dans  $B(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^2$ ,

$$v_i(x, y) = \xi(H_i(x, y)).$$

On a  $v_i$  appartient à  $V(B(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^2)$ . On définit ensuite sur  $B(0, 1)$  le prolongement par réflexion de  $v_i$ , soit  $\bar{v}_i$  qui appartient à  $V(B(0, 1))$ . On pose pour  $(x', y')$  dans  $U_i$ ,

$$w_i(x', y') = \bar{v}_i(H_i^{-1}(x', y')).$$

On a alors  $w_i$  appartient à  $V(U_i)$ ,  $w_i = \xi$  sur  $U_i \cap B'_R$  et il existe une constante strictement positive  $k_4$  telle que

$$\|w_i\|_{V(U_i)} \leq k_4 \|\xi\|_{V(U_i \cap B'_R)}.$$

Enfin, on pose pour  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\tilde{\xi}_i = \begin{cases} \theta_i w_i & \text{si } (x, y) \in U_i, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus U_i. \end{cases}$$

On a  $\tilde{\xi}_i$  appartient à  $V(\mathbb{R}^2)$  donc à  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ ,  $\tilde{\xi}_i = \xi_i$  sur  $U_i \cap B'_R$  et il existe une constante strictement positive  $k_5$  telle que :

$$\|\tilde{\xi}_i\|_{V(\mathbb{R}^2)} \leq k_5 \|\xi\|_{V(U_i \cap B'_R)}.$$

Ainsi l'opérateur  $P_2 \xi = \tilde{\xi}_0 + \sum_{i=1}^k \tilde{\xi}_i$  possède toutes les propriétés désirées. ■



## 4.1. Les espaces fonctionnels

**Corollaire 2.**  $\mathcal{D}(\overline{B'_R})$  est dense dans  $V(B'_R, \omega_1)$

**Preuve** Soit  $\xi$  un élément de l'espace  $V(B'_R, \omega_1)$ . Il découle du théorème (5) qu'il existe une fonction  $P_2\xi$  qui prolonge  $\xi$  à l'extérieur de  $B'_R$ . On utilise le théorème (1) qui assure l'existence d'une suite de fonctions  $\{\rho_{\varepsilon_n} * \xi_n\}_{n=3}^{\infty}$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  convergeant vers  $P_2\xi$  dans  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ . Soit  $\psi_n$  la restriction de  $\rho_{\varepsilon_n} * \xi_n$  à  $B'_R$ . Ainsi la suite  $\{\psi_n\}_{n=3}^{\infty}$  est une suite de  $\mathcal{D}(\overline{B'_R})$  qui converge vers  $\xi$  dans  $V(B'_R, \omega_1)$ . ■

Afin de définir les traces des fonctions appartenant à  $V(B'_R, \omega_1)$ , on considère un élément  $\xi$  de  $\mathcal{D}(\overline{B'_R})$  et on désigne sa restriction au bord par  $\gamma_0\xi$ . Comme  $\xi$  appartient à  $V(\mathcal{O})$  pour tout ouvert borné  $\mathcal{O}$  contenu dans  $B'_R$ , alors  $\xi$  appartient à  $V(B'_R \cap B_{2R})$ . Il s'ensuit, d'après le deuxième chapitre, que  $\gamma_0\xi$  appartient à  $L^2(\partial B'_R)$  et il existe une constante strictement positive  $c$  telle que  $\|\gamma_0\xi\|_{0,2,\partial B'_R} \leq c\|\xi\|_{V(B'_R, \omega_1)}$ . Ensuite la densité de  $\mathcal{D}(\overline{B'_R})$  dans  $V(B'_R, \omega_1)$  implique que l'application  $\xi \mapsto \gamma_0\xi$  définie sur  $\mathcal{D}(\overline{B'_R})$  se prolonge en une application linéaire continue, notée encore par  $\gamma_0$ , de  $V(B'_R, \omega_1)$  dans  $L^2(\partial B'_R)$ .

### 4.1.4 Equivalence des normes dans $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$

Afin d'établir l'inégalité de Poincaré dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ , quelques résultats sont nécessaires, le premier est donné par :

**Lemme 2.** (Kufner et Opic [36], p. 289-290) Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$ .

Posons  $a_* = \inf\{|x|; x \in \Omega\}$  et  $a_* > 1$ . Soient  $1 \leq p \leq q < \infty$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  des réels, et soient

$$\begin{cases} \omega(x) = |x|^\alpha \log^\gamma |x|, \\ v_0(x) = |x|^{\beta-p} \log^\delta |x|, \\ v_1(x) = |x|^\beta \log^\delta |x|. \end{cases}$$

On considère

$$W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1) = \{\xi \in L^p(\Omega, v_0); \nabla\xi \in L^p(\Omega, v_1)\}.$$

Alors l'injection de  $W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$  dans  $L^q(\Omega, \omega)$  est compacte si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{n}{q} - \frac{n}{p} + 1 > 0, \\ \frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} + 1 < 0. \end{cases}$$

**Application** Pour tout réel  $R$  strictement positif, on désigne par  $B_R$  la boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$  de rayon  $R$  et centrée à l'origine. On note  $B'_R = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R}$ . Ensuite,

## 4.1. Les espaces fonctionnels

pour tout  $(x, y)$  de  $B'_R$ , on pose

$$\begin{cases} \omega(x, y) = (2 + x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}} \log^\gamma(2 + x^2 + y^2), \\ v_0(x, y) = (2 + x^2 + y^2)^{\frac{\beta-p}{2}} \log^\delta(2 + x^2 + y^2), \\ v_1(x, y) = (2 + x^2 + y^2)^{\frac{\beta}{2}} \log^\delta(2 + x^2 + y^2). \end{cases}$$

Pour  $n = 2, p = 2, q = 3, \alpha = -3, \gamma = -3, \beta = -\frac{1}{2}$  et  $\delta = -2$ , l'injection de  $W^{1,2}(B'_R; v_0, v_1)$  dans  $L^3(B'_R, \omega_1^3)$  est compacte.

**Remarque 2.** • Pour  $n = 2, p = 2, q = 3, \alpha = -3, \gamma = -3, \beta = -\frac{1}{2}$  et  $\delta = -2$ , l'injection de  $V(B'_R, \omega_1)$  dans  $W^{1,2}(B'_R; v_0, v_1)$  est continue.

En effet, pour tout  $\xi$  dans  $V(B'_R, \omega_1)$ , on a :

$$\int_{B'_R} v_0 |\xi|^2 dx dy \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \int_{B'_R} \omega_1^2 |\xi|^2 dx dy,$$

et

$$\int_{B'_R} v_1 |\nabla \xi|^2 dx dy \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{4}} \log^2 2} \int_{B'_R} |\nabla \xi|^2 dx dy.$$

Il s'ensuit que l'injection de  $V(B'_R, \omega_1)$  dans  $L^3(B'_R, \omega_1^3)$  est compacte.

**Théorème 6.** (Amrouche, Girault et Giroire [8], p. 597) Soit  $R$  un réel strictement positif et suffisamment large. Il existe une constante strictement positive  $C_R^1$  telle que pour toute fonction  $\xi$  dans  $W_0^{1,2}(B'_R, \omega_1)$ , on a :

$$\|\xi\|_{2, B'_R, \omega_1^2} \leq C_R^1 \|\nabla \xi\|_{0, 2, B'_R}.$$

On peut maintenant montrer le

**Théorème 7.** Soit  $R$  un réel strictement positif et suffisamment large. Il existe une constante strictement positive  $C_R^2$  telle que pour tout  $\xi$  dans  $V_0(B'_R, \omega_1)$ , on a :

$$\|\xi\|_{2, B'_R, \omega_1^2} + \|\xi\|_{3, B'_R, \omega_1^3} \leq C_R^2 (\|\nabla \xi\|_{0, 2, B'_R} + \|\partial_x \xi\|_{0, 3, B'_R}). \quad (4.10)$$

**Preuve** Comme  $\mathcal{D}(B'_R)$  est dense dans  $V_0(B'_R, \omega_1)$ , alors il suffit d'établir ce résultat dans  $\mathcal{D}(B'_R)$ .

La preuve de ce théorème se fait par contradiction. En effet, supposons que pour tout  $n \geq 1$ , il existe une suite  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  dans  $\mathcal{D}(B'_R)$  telle que

$$\|\xi_n\|_{2, B'_R, \omega_1^2} + \|\xi_n\|_{3, B'_R, \omega_1^3} \geq n (\|\nabla \xi_n\|_{0, 2, B'_R} + \|\partial_x \xi_n\|_{0, 3, B'_R}).$$

En remplaçant  $\xi_n$  par  $\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|_{2, B'_R, \omega_1^2} + \|\xi_n\|_{3, B'_R, \omega_1^3}}$ , on se ramène à

$$\|\xi_n\|_{2, B'_R, \omega_1^2} + \|\xi_n\|_{3, B'_R, \omega_1^3} = 1 \text{ et } \|\nabla \xi_n\|_{0, 2, B'_R} + \|\partial_x \xi_n\|_{0, 3, B'_R} < \frac{1}{n}.$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

---

La suite  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  est alors bornée dans  $V(B'_R, \omega_1)$ . En utilisant la réflexivité de cet espace de Banach, on peut extraire une sous-suite, encore notée  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ , qui converge faiblement vers un élément  $\xi$  de  $V(B'_R, \omega_1)$ . Ensuite la remarque (2) entraîne la convergence forte de  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  vers  $\xi$  dans  $L^3(B'_R, \omega_1^3)$ . Puisque  $L^3(B'_R, \omega_1^3)$  est un espace de distributions alors

$$\xi_n \rightarrow \xi \text{ dans } \mathcal{D}'(B'_R).$$

Mais comme  $\|\nabla \xi_n\|_{0,2,B'_R}$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini, alors

$$\nabla \xi_n \rightarrow 0 \text{ dans } (\mathcal{D}'(B'_R))^2$$

et  $\xi = \text{cte p.p. dans } B'_R$ . Ainsi la continuité de l'application trace de  $V(B'_R, \omega_1)$  dans  $L^2(\partial B'_R)$  entraîne que  $\xi = 0$  p.p. dans  $B'_R$ .

Maintenant pour aboutir à une contradiction, il suffit de prouver que  $\xi_n$  converge fortement vers zéro dans  $L^2(B'_R, \omega_1^2)$ . Pour cela, on introduit une partition adéquate de l'unité

$$\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}^\infty(B'_R), \quad 0 \leq \psi_1, \psi_2 \leq 1 \quad \psi_1 + \psi_2 = 1 \text{ dans } B'_R$$

avec

$$\text{supp} \psi_1 \subset \overline{B}_{2R+2} \text{ et } \text{supp} \psi_2 \subset B'_{2R}.$$

Comme l'espace  $V(B_{2R+2} \cap B'_R, \omega_1)$  est identique à  $V(B_{2R+2} \cap B'_R)$  alors l'injection compacte de  $V(B_{2R+2} \cap B'_R)$  dans  $L^2(B_{2R+2} \cap B'_R)$  entraîne que

$$\xi_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B_{2R+2} \cap B'_R),$$

et alors

$$\psi_1 \xi_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B_{2R+2} \cap B'_R).$$

En utilisant le fait que  $\psi_1$  est identiquement nulle à l'extérieur de  $B_{2R+2}$ , on conclut que

$$\psi_1 \xi_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B'_R)$$

et comme  $\omega_1$  est majorée par  $\frac{1}{\sqrt{2 \log 2}}$  alors

$$\psi_1 \xi_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(B'_R, \omega_1^2). \quad (4.11)$$

Il reste à examiner  $\psi_2 \xi_n$ . Comme pour tout  $n \geq 1$ ,  $\xi_n$  est un élément de  $\mathcal{D}(B'_R)$  et  $\psi_2$  est un élément de  $\mathcal{C}^\infty(B'_R)$  qui s'annule sur  $\overline{B}_{2R} \cap B'_R$  alors  $\psi_2 \xi_n$  appartient à  $W_0^{1,2}(B'_{2R}, \omega_1)$ . Le théorème (6) implique qu'il existe une constante strictement positive  $C_R^1$  telle que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\|\psi_2 \xi_n\|_{2, B'_{2R}, \omega_1^2} \leq C_R^1 \|\nabla(\psi_2 \xi_n)\|_{0,2, B'_{2R}}.$$

Il est intéressant de souligner que  $\psi_2$  est identiquement nulle à l'extérieur de  $B'_{2R}$ , et égale à 1 à l'extérieur de  $B_{2R+2}$  et

$$\begin{aligned} \|\psi_2 \xi_n\|_{2, B'_R, \omega_1^2} &\leq C_R^1 \left( \|\nabla(\psi_2 \xi_n)\|_{0,2, B'_{2R} \cap B_{2R+2}} + \|\nabla(\psi_2 \xi_n)\|_{0,2, B'_{2R+2}} \right) \\ &\leq C_R^1 \left( \|\nabla(\psi_2 \xi_n)\|_{0,2, B'_{2R} \cap B_{2R+2}} + \|\nabla \xi_n\|_{0,2, B'_{2R+2}} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

---

Comme  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  converge fortement vers zéro dans  $L^2(B'_{2R} \cap B_{2R+2})$  et  $\|\nabla \xi_n\|_{0,2,B'_R}$  converge vers zéro, alors après passage à la limite sur  $n$ , l'inégalité précédente (4.12) entraîne que

$$\psi_2 \xi_n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(B'_R, \omega_1^2). \quad (4.13)$$

Les résultats (4.11) et (4.13) réunis montrent que

$$\xi_n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(B'_R, \omega_1^2).$$

Ceci achève la démonstration. ■

**Théorème 8.** *La semi-norme  $|\cdot|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)}$  définie sur  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)/\mathbb{R}$  est une norme équivalente à la norme quotient.*

**Preuve** Soit  $\xi$  un élément de  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ . Comme cet espace contient les constantes, alors pour toute constante réelle  $k$ ,

$$|\xi|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)} = |\xi + k|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)} \leq \|\xi + k\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)}. \quad (4.14)$$

On rappelle que la norme quotient est définie par :

$$\|\dot{\xi}\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)/\mathbb{R}} = \inf_{k \in \mathbb{R}} \|\xi + k\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)},$$

et on a donc :

$$|\xi|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)} \leq \|\dot{\xi}\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)/\mathbb{R}}.$$

Pour montrer ce théorème, il suffit de vérifier que :

$$\exists k_5 > 0, \forall \dot{\xi} \in V(\mathbb{R}^2, \omega_1)/\mathbb{R}, \|\dot{\xi}\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)/\mathbb{R}} \leq k_5 |\xi|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)}.$$

La démonstration de cette inégalité se fait en deux étapes. La première consiste à choisir un représentant adéquat de la classe  $\dot{\xi}$ . Pour cela, on fixe un ouvert borné  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^2$  de mesure strictement positive et on choisit le représentant  $\xi$  de la classe  $\dot{\xi}$  de  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  qui satisfait :

$$\int_{\mathcal{O}} \xi \, dx \, dy = 0. \quad (4.15)$$

Ensuite, la seconde étape consiste à prouver qu'il existe une constante strictement positive  $k_6$  telle que :

$\forall \xi \in V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ , vérifiant (4.15)

$$\|\xi\|_{2, \mathbb{R}^2, \omega_1^2} + \|\xi\|_{3, \mathbb{R}^2, \omega_1^3} \leq k_6 (\|\nabla \xi\|_{0,2, \mathbb{R}^2} + \|\partial_x \xi\|_{0,3, \mathbb{R}^2}) \quad (4.16)$$

On commence par établir cette inégalité. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose l'existence d'une suite  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  de  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  vérifiant (4.15) et telle que :

$$\|\xi_n\|_{2, \mathbb{R}^2, \omega_1^2} + \|\xi_n\|_{3, \mathbb{R}^2, \omega_1^3} > n (\|\nabla \xi_n\|_{0,2, \mathbb{R}^2} + \|\partial_x \xi_n\|_{0,3, \mathbb{R}^2}).$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

En divisant cette dernière inégalité par  $\|\xi_n\|_{2,\mathbb{R}^2,\omega_1^2} + \|\xi_n\|_{3,\mathbb{R}^2,\omega_1^3}$  ( $\xi_n \neq 0$ ), on se ramène au cas où

$$\begin{cases} \|\xi_n\|_{2,\mathbb{R}^2,\omega_1^2} + \|\xi_n\|_{3,\mathbb{R}^2,\omega_1^3} = 1, \\ \|\nabla \xi_n\|_{0,2,\mathbb{R}^2} + \|\partial_x \xi_n\|_{0,3,\mathbb{R}^2} < \frac{1}{n}, \end{cases}$$

et la suite  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  est alors bornée dans  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ . En utilisant la réflexivité de cet espace de Banach, on peut extraire une sous-suite, encore notée  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ , qui converge faiblement vers un élément  $\xi$  de  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ . Etant donné que  $|\xi_n|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)}$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini, la semi-continuité inférieure de la semi-norme sur  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  entraîne que  $|\xi|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)} = 0$ . Ainsi  $\xi$  est une constante. Mais, comme pour tout  $n \geq 1$ ,  $\xi_n$  vérifie (4.15) et  $\xi_n$  converge faiblement vers une constante dans  $L^2(\mathcal{O})$ , l'identité (4.15) implique que  $\xi \equiv 0$ .

Maintenant, pour aboutir à une contradiction, il suffit de prouver que  $\xi_n$  converge fortement vers 0 dans  $L^2(\mathbb{R}^2, \omega_1^2)$  et dans  $L^3(\mathbb{R}^2, \omega_1^3)$ . Une partition adéquate de l'unité permet de considérer séparément le cas du domaine borné  $B_{R+1}$  où la topologie de  $V(B_{R+1}, \omega_1)$  coïncide avec celle de  $V(B_{R+1})$  (voir [3]), et l'extérieur de  $B_R$  où le théorème (7) peut être appliqué.

Soit  $R$  un réel strictement positif et soient  $\psi_1$  et  $\psi_2$  deux fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  telles que

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi_1, \psi_2 \leq 1, \quad \psi_1 + \psi_2 = 1 \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ \text{supp} \psi_1 \subset \overline{B}_{R+1}, \quad \text{supp} \psi_2 \subset B'_R. \end{aligned}$$

Puisque pour  $R$  fixé,  $V(B_{R+1}, \omega_1)$  est identique à  $V(B_{R+1})$ , sous-espace de  $W^{1,2}(B_{R+1})$ , alors  $\xi_n$  converge faiblement vers zéro dans  $W^{1,2}(B_{R+1})$ . L'injection compacte de  $W^{1,2}(B_{R+1})$  dans  $L^2(B_{R+1})$  et dans  $L^3(B_{R+1})$  implique que :

$$\xi_n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(B_{R+1}) \text{ et dans } L^3(B_{R+1})$$

et alors

$$\psi_1 \xi_n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(B_{R+1}) \text{ et dans } L^3(B_{R+1}).$$

En plus, en utilisant le fait que  $\psi_1$  est identiquement nulle à l'extérieur de  $B_{R+1}$ , on conclut que :

$$\psi_1 \xi_n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\mathbb{R}^2) \text{ et dans } L^3(\mathbb{R}^2). \quad (4.17)$$

Il reste à examiner le comportement de  $\psi_2 \xi_n$ . Comme pour tout  $n$ ,  $\xi_n$  est un élément de  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  et  $\psi_2$  est un élément  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  qui s'annule sur  $\overline{B}_R$  alors  $\psi_2 \xi_n$  appartient à  $V_0(B'_R, \omega_1)$ . Le théorème (7) entraîne que :

$$\|\psi_2 \xi_n\|_{2,B'_R,\omega_1^2} + \|\psi_2 \xi_n\|_{3,B'_R,\omega_1^3} \leq C_R^2 (\|\nabla(\psi_2 \xi_n)\|_{0,2,B'_R} + \|\partial_x(\psi_2 \xi_n)\|_{0,3,B'_R}).$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

Il est intéressant de souligner que  $\psi_2$  est identiquement nulle à l'extérieur de  $B'_R$ , égale à 1 à l'extérieur de  $B_{R+1}$  et

$$\begin{aligned} \|\psi_2 \xi_n\|_{2, \mathbb{R}^2, \omega_1^2} + \|\psi_2 \xi_n\|_{3, \mathbb{R}^2, \omega_1^3} &\leq C_R^2 \left( \|\nabla(\psi_2 \xi_n)\|_{0,2, B'_R \cap B_{R+1}} + \|\nabla(\psi_2 \xi_n)\|_{0,2, B'_{R+1}} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_x(\psi_2 \xi_n)\|_{0,3, B'_R \cap B_{R+1}} + \|\partial_x(\psi_2 \xi_n)\|_{0,3, B'_{R+1}} \right) \\ &\leq C_R^2 \left( \|\nabla(\psi_2 \xi_n)\|_{0,2, B'_R \cap B_{R+1}} + \|\nabla \xi_n\|_{0,2, B'_{R+1}} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_x(\psi_2 \xi_n)\|_{0,3, B'_R \cap B_{R+1}} + \|\partial_x \xi_n\|_{0,3, B'_{R+1}} \right). \end{aligned}$$

Etant donné que  $\xi_n$  converge fortement vers zéro dans  $L^2(B'_R \cap B_{R+1})$  et dans  $L^3(B'_R \cap B_{R+1})$  (l'injection de  $W^{1,2}(B'_R \cap B_{R+1}, \omega_1)$  dans  $L^2(B'_R \cap B_{R+1})$  et dans  $L^3(B'_R \cap B_{R+1})$  est compacte),  $\|\nabla \xi_n\|_{0,2, \mathbb{R}^2}$  et  $\|\partial_x \xi_n\|_{0,3, \mathbb{R}^2}$  converge vers zéro, alors après passage à la limite sur  $n$ , l'inégalité précédente entraîne que :

$$\psi_2 \xi_n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\mathbb{R}^2, \omega_1^2) \text{ et dans } L^3(\mathbb{R}^2, \omega_1^3). \quad (4.18)$$

Les résultats (4.17) et (4.18) réunis montrent que :

$$\xi_n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\mathbb{R}^2, \omega_1^2) \text{ et dans } L^3(\mathbb{R}^2, \omega_1^3),$$

d'où la contradiction avec le fait que

$$\|\xi_n\|_{2, \mathbb{R}^2, \omega_1^2} + \|\xi_n\|_{3, \mathbb{R}^2, \omega_1^3} = 1.$$

Nous allons maintenant caractériser l'inégalité de Poincaré sur  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ .

**Corollaire 3.** *La semi-norme  $|\cdot|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}$  est une norme sur l'espace  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$  équivalente à la norme quotient.*

**Preuve** Soit  $\xi$  un élément de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . Comme cet espace contient les constantes, alors pour toute constante réelle  $k$ ,

$$|\xi|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} = |\xi + k|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} \leq \|\xi + k\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}. \quad (4.19)$$

On en déduit que :

$$|\xi|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} \leq \|\dot{\xi}\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}}.$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe une constante  $k_7$  strictement positive telle que :

$$\forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \quad \|\dot{\xi}\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}} \leq k_7 |\xi|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}.$$

Pour ce faire, soit  $\xi$  un élément de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  et soit  $P_1$  l'opérateur de prolongement déjà défini dans le théorème (2). Les résultats du théorème (8) combinés avec les propriétés de l'opérateur de prolongement entraînent que :

$$\|P_1 \dot{\xi}\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)/\mathbb{R}} \leq k_5 |P_1 \xi|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)} \leq k_5 \sqrt{2} |\xi|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}. \quad (4.20)$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

D'autre part, comme  $\|\dot{\xi}\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}} = \inf_{k \in \mathbb{R}} \|\xi + k\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}$  et  $P_1 \xi|_{\mathbb{R}_+^2} = \xi$ , on déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \|\dot{\xi}\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}} \leq \|\xi + k\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} = \|P_1 \xi + k\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} \leq \|P_1 \xi + k\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)}.$$

En prenant la borne inférieure dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\|\dot{\xi}\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}} \leq \|P_1 \dot{\xi}\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)/\mathbb{R}}, \quad (4.21)$$

et l'on trouve le résultat énoncé en combinant les deux inégalités (4.20) et (4.21). ■

Pour la suite, on aura également besoin de l'espace  $V_0(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  qui est défini comme étant l'adhérence de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . Muni de la norme  $\|\cdot\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}$ ,  $V_0(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  est un espace de Banach réflexif.

### 4.1.5 Propriétés de $V_0(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$

**Lemme 3.** *Si  $\xi$  est un élément de  $V_0(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ , la fonction  $\tilde{\xi}$ , prolongement de  $\xi$  par zéro dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+^2$ , appartient à  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ .*

**Preuve** soit  $\xi$  un élément de  $V_0(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . Il s'agit de montrer que  $\tilde{\nabla} \tilde{\xi} = \nabla \tilde{\xi}$  au sens des distributions sur  $\mathbb{R}^2$ . Pour cela, on se sert de la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$  dans  $V_0(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  (par définition) pour établir l'existence d'une suite  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n - \xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} = 0.$$

Ensuite, pour tout  $\mathbf{u}$  dans  $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^2))^2$ ,  $\frac{1}{\omega_1} \text{div} \mathbf{u}$  appartient à  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla} \tilde{\xi}, \mathbf{u} \rangle_{((\mathcal{D}(\mathbb{R}^2))^2)', (\mathcal{D}(\mathbb{R}^2))^2} &= - \int_{\mathbb{R}_+^2} \xi \text{div} \mathbf{u} \, dx \, dy \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+^2} \xi_n \text{div} \mathbf{u} \, dx \, dy \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+^2} \nabla \xi_n \cdot \mathbf{u} \, dx \, dy \\ &= \langle \tilde{\nabla} \tilde{\xi}, \mathbf{u} \rangle_{((\mathcal{D}(\mathbb{R}^2))^2)', (\mathcal{D}(\mathbb{R}^2))^2}. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. ■

**Lemme 4.** *Soit  $\xi$  un élément de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . Si la fonction  $\tilde{\xi}$ , prolongement de  $\xi$  par zéro à l'extérieur de  $\mathbb{R}_+^2$  appartient à  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  alors  $\xi$  appartient à  $V_0(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ .*

**Preuve** Soit  $\xi$  un élément de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  et tel que son prolongement par zéro à l'extérieur de  $\mathbb{R}_+^2$ ,  $\tilde{\xi}$ , soit dans  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ . Il s'agit de prouver qu'une telle fonction  $\xi$  appartient à  $V_0(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . Pour ce faire, on introduit la même fonction de troncature  $\psi_n$  qu'en théorème (1) et on pose pour  $n$  suffisamment large ( $n \geq 3$ ),

$$\xi_n(x, y) = \psi_n(x, y) \tilde{\xi}(x, y).$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

---

On a alors  $\xi_n$  est un élément de  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  et à support compact dans  $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ . Ensuite, d'après la preuve du théorème (1), on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n - \tilde{\xi}\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)} = 0.$$

Ainsi on se ramène au cas où la fonction  $\xi$  appartient à  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  et à support compact dans  $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ . Il s'agit de montrer qu'une telle fonction  $\xi$  est limite, dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ , d'une suite de fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$ .

Pour tout  $h > 0$  (suffisamment petit), on note  $\tau_h \xi$  la fonction définie par :

$$\tau_h \xi(x, y) = \xi(x, y - h).$$

(Pour  $y < h$ ,  $\tau_h \xi(x, y) = 0$ ).

Puisque  $\nabla(\tau_h \xi) = \tau_h(\nabla \xi)$ , la fonction  $\tau_h \xi$  appartient à  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$ . De plus,  $\tau_h \xi$  converge vers  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}^2, \omega_1)$  quand  $h$  tend vers zéro.

Finalement, on introduit pour  $\varepsilon > 0$ , une suite régularisante  $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  telle que :

$$\rho_\varepsilon \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(x, y) dx dy = 1, \quad \text{supp} \rho_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$$

(où  $B(0, \varepsilon)$  est la boule dans  $\mathbb{R}^2$  de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$ ).

Si  $\varepsilon < h$  alors il existe  $\mathcal{V}_h \subset \subset \mathbb{R}_+^2$  tel que :

$$\text{supp}(\rho_\varepsilon * \tau_h \xi) \subset \mathcal{V}_h \quad \text{et} \quad \text{supp}(\tau_h \xi) \subset \mathcal{V}_h.$$

Puisque  $\tau_h \xi$  est dans  $V(\mathbb{R}^2)$  alors on peut choisir un  $\varepsilon_h < h$  tel que :

$$\|\rho_{\varepsilon_h} * \tau_h \xi - \tau_h \xi\|_{V(\mathbb{R}^2)} = \|\rho_{\varepsilon_h} * \tau_h \xi - \tau_h \xi\|_{V(\mathcal{V}_h)} < h$$

ou encore

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\rho_{\varepsilon_h} * \tau_h \xi - \tau_h \xi\|_{V(\mathbb{R}^2, \omega_1)} = 0 \quad \text{car} \quad \omega_1 \text{ est majoré par } \frac{1}{\sqrt{2} \log 2}.$$

La fonction  $\rho_{\varepsilon_h} * \tau_h \xi$  appartient à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$  et converge vers  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . Ceci achève la démonstration. ■

### 4.1.6 Propriétés de l'opérateur divergence

Pour tout vecteur  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ , on définit la divergence de  $\mathbf{u}$  par  $\text{div} \mathbf{u} = \partial_x u_1 + \partial_y u_2$ .

On introduit l'espace de Sobolev avec poids

$$\mathbb{L}\left(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1}\right) = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, u_2) \in (L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}_+^2) \cap L^2(\mathbb{R}_+^2)) \times L^2(\mathbb{R}_+^2); \right.$$



#### 4.1. Les espaces fonctionnels

---

$$\left. \frac{1}{\omega_1} \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}_+^2) \cap L^2(\mathbb{R}_+^2) \right\},$$

qui est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})} &= \|u_1\|_{0, \frac{3}{2}, \mathbb{R}_+^2} + \|u_1\|_{0, 2, \mathbb{R}_+^2} + \|u_2\|_{0, 2, \mathbb{R}_+^2} + \left\| \frac{1}{\omega_1} \operatorname{div} \mathbf{u} \right\|_{0, \frac{3}{2}, \mathbb{R}_+^2} \\ &+ \left\| \frac{1}{\omega_1} \operatorname{div} \mathbf{u} \right\|_{0, 2, \mathbb{R}_+^2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

**Lemme 5.** *L'espace  $(\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2}))^2$  est dense dans  $\mathbb{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})$ .*

**Preuve** La preuve de ce lemme est basée sur le résultat suivant :

Un sous-espace  $\mathcal{M}$  d'un espace de Banach  $M$  est dense dans  $M$  si et seulement si tout élément de l'espace dual  $M'$  de  $M$  qui s'annule sur  $\mathcal{M}$ , s'annule aussi sur  $M$ .

Pour ce faire, on considère une forme linéaire et continue  $T$  sur  $\mathbb{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})$  telle que  $T$  soit nulle sur  $(\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2}))^2$  et le lemme sera démontré une fois prouvé que  $T$  est identiquement nulle sur  $\mathbb{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})$ .

Puisque  $\mathbb{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})$ , muni de la norme (4.22) est un espace de Banach réflexif alors pour tout élément  $T$  du dual  $(\mathbb{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1}))'$ , le théorème de représentation de Riesz (voir Adams, [1]; corollary 3.3, p. 46) assure l'existence d'un unique élément  $(v_1, v_2, v_3)$  dans  $(L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)) \times L^2(\mathbb{R}_+^2) \times (L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2))$  tel qu'on ait :  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})$ ,

$$T(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( v_1 u_1 + v_2 u_2 + \frac{1}{\omega_1} v_3 \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dx dy.$$

On introduit les extensions  $\tilde{v}_1$ ,  $\tilde{v}_2$  et  $\tilde{v}_3$  par zéro à l'extérieur de  $\mathbb{R}_+^2$ . L'égalité

$$\forall \mathbf{u} \in (\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2}))^2 \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( v_1 u_1 + v_2 u_2 + \frac{1}{\omega_1} v_3 \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dx dy = 0$$

entraîne que :

$$\forall \mathbf{u} \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^2))^2$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( \tilde{v}_1 u_1 + \tilde{v}_2 u_2 + \frac{1}{\omega_1} \tilde{v}_3 \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( v_1 u_1 + v_2 u_2 + \frac{1}{\omega_1} v_3 \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Au sens des distributions sur  $\mathbb{R}^2$ , cette égalité implique que, pour  $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ ,

$$\tilde{\mathbf{v}} = \nabla \left( \frac{1}{\omega_1} \tilde{v}_3 \right).$$

## 4.1. Les espaces fonctionnels

Ainsi, comme  $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$  et  $\tilde{v}_3$  appartiennent à  $(L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^3(\mathbb{R}^2)), L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $(L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^3(\mathbb{R}^2))$  respectivement, ceci entraîne que

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_1} \tilde{v}_3 \in L^3(\mathbb{R}^2, \omega_1^3) \cap L^2(\mathbb{R}^2, \omega_1^2), \\ \nabla \left( \frac{1}{\omega_1} \tilde{v}_3 \right) \in (L^3(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)) \times L^2(\mathbb{R}^2). \end{cases}$$

Le lemme (4) permet d'affirmer l'appartenance de  $\frac{1}{\omega_1} v_3$  à l'espace  $V_0(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . On utilise ensuite la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$  dans  $V_0(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  laquelle induit l'existence d'une suite  $\{S_n\}_{n=1}^\infty$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$  telle que :

$$\begin{cases} \omega_1(x, y) S_n \rightarrow v_3 \text{ in } L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2), \\ \nabla S_n \rightarrow \mathbf{v} \text{ in } (L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)) \times L^2(\mathbb{R}_+^2). \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout élément  $\mathbf{u}$  appartenant à l'espace  $\mathbb{L} \left( \mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1} \right)$  on peut écrire l'égalité suivante :

$$T(\mathbf{u}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \langle \nabla S_n, \mathbf{u} \rangle + \langle \omega_1 S_n, \frac{1}{\omega_1} \operatorname{div} \mathbf{u} \rangle \right] = 0.$$

Ceci termine la démonstration. ■

• Le théorème qui suit concerne la trace normale des fonctions de  $\mathbb{L} \left( \mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1} \right)$  sur le bord :

**Théorème 9.** *L'application  $\gamma_n : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  définie sur  $(\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2}))^2$ , se prolonge par continuité en une application linéaire continue, notée encore  $\gamma_n$ , de  $\mathbb{L} \left( \mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1} \right)$  dans  $(M(\mathcal{R}, \omega_1'))'$ . De plus, on a la formule de Green :*

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \xi \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbf{u} \cdot \nabla \xi \, dx \, dy = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \gamma_0 \xi \rangle_{(M(\mathcal{R}, \omega_1'))', M(\mathcal{R}, \omega_1)}, \quad \forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1),$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur du bord  $\mathcal{R}$ .

**Preuve** Soit l'application

$$T : (\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2}))^2 \times V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

$$T(\mathbf{u}, \xi) = \int_{\mathbb{R}_+^2} (\xi \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi) \, dx \, dy$$

## 4.2. Formulation variationnelle

---

pour tout  $\mathbf{u}$  dans  $(\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+^2))^2$  et tout  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ .

La formule de Green est, en ce cas, vraie et on a :

$$T(\mathbf{u}, \xi) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \gamma_0 \xi \, d x. \quad (4.23)$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \gamma_0 \xi \, d x &\leq \left| \int_{\mathbb{R}_+^2} (\xi \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi) \, d x \, d y \right| \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})} \|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}. \end{aligned}$$

Comme pour tout  $\mathbf{u}$  dans  $(\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+^2))^2$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\mathcal{R}}$  appartient à  $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ , alors  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\mathcal{R}}$  appartient à  $L^2(\mathcal{R})$  ( $\subset L^2(\mathcal{R}, \omega'_1)$ ). La proposition (3) nous permet d'identifier  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\mathcal{R}}$  comme un élément de  $(M(\mathcal{R}, \omega'_1))'$  et ensuite

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \gamma_0 \xi \rangle_{(M(\mathcal{R}, \omega'_1))', M(\mathcal{R}, \omega'_1)} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})} \|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}.$$

Ensuite, la proposition (1) entraîne que :

$$\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{(M(\mathcal{R}, \omega'_1))'} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})}.$$

Il s'ensuit alors que l'application  $\gamma_n : (\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+^2))^2 \longrightarrow (M(\mathcal{R}, \omega'_1))'$  définie par :

$$\gamma_n(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

se prolonge en une application linéaire continue, notée encore  $\gamma_n$ , de  $\mathbf{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})$  dans  $(M(\mathcal{R}, \omega'_1))'$ , telle que pour tout  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbf{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})$

$$\|\gamma_n(\mathbf{u})\|_{(M(\mathcal{R}, \omega'_1))'} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})}.$$

D'où le résultat. ■

## 4.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème est donnée par : trouver  $\varphi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  tel que pour tout  $\xi$  de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} g(\partial_x \varphi) \partial_x \xi \, d x \, d y + \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_y \varphi \partial_y \xi \, d x \, d y + \sqrt{M_\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z'(x) \xi \, d x = 0. \quad (4.24)$$

## 4.2. Formulation variationnelle

Soit  $G$  la primitive de  $g$  définie par :

$$G(t) = \begin{cases} \frac{\gamma+1}{6}(u_{cr}-t)^3 - \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2(u_{cr}-t) + \frac{\gamma+1}{3}u_{cr}^3 & \text{si } t \leq u_{cr}, \\ -\frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2(u_{cr}-t) + \frac{\gamma+1}{3}u_{cr}^3 & \text{si } t \geq u_{cr}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{\gamma+1}{6}t^3 + \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}t^2 & \text{si } t \leq u_{cr}, \\ \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}^2t - \frac{\gamma+1}{6}u_{cr}^3 & \text{si } t \geq u_{cr}, \end{cases}$$

et soit  $F$  la fonctionnelle définie pour tout  $\xi$  de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  par :

$$F(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^2} G(\partial_x \xi) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (\partial_y \xi)^2 dx dy + b(\xi) \quad (4.25)$$

où

$$b(\xi) = \sqrt{M_\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z'(x) \xi dx. \quad (4.26)$$

On verra par la suite que la fonctionnelle  $F$  est continue, convexe et est Gâteaux-différentiable sur  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . En ce cas, le problème (4.24) est équivalent au problème de minimisation

$$\varphi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \quad F(\varphi) \leq F(\xi), \quad \forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1). \quad (4.27)$$

L'interprétation de la formulation faible du problème entraîne d'abord, au sens des distributions sur  $\mathbb{R}_+^2$ , que :

$$\partial_x(g(\partial_x \varphi)) + \partial_y(\partial_y \varphi) = 0.$$

Il s'ensuit que  $\mathbf{u} = (g(\partial_x \varphi), \partial_y \varphi)$  appartient à  $\mathbf{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})$ . Ensuite, en utilisant la formule de Green (voir théorème (9)), on a pour tout  $\xi$  dans  $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ ,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{n}, \xi \rangle_{(M(\mathcal{R}, \omega_1))', M(\mathcal{R}, \omega_1)} + b(\xi) = 0.$$

Mais pour tout  $\xi$  dans  $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ ,

$$b(\xi) = \sqrt{M_\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z'(x) \xi dx = -\sqrt{M_\infty} \int_{\mathbb{R}} Z'(x) \xi \cdot n_y dx,$$

où  $\mathbf{n} = (0, n_y)$  est la normale unitaire à  $\mathcal{R}$  dirigée vers l'extérieur de  $\mathbb{R}_+^2$  et  $Z$  est le prolongement de  $z$  par zéro à l'extérieur de  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ . Alors en utilisant la proposition (3), il vient :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sqrt{M_\infty} Z'(x) n_y = 0 \text{ dans } (M(\mathcal{R}, \omega_1))'$$

et formellement,

$$\partial_y \varphi = \sqrt{M_\infty} Z'(x) \text{ dans } (M(\mathcal{R}, \omega_1))'.$$

Nous allons maintenant étudier les propriétés de la fonctionnelle  $F$ .

### 4.3 Propriétés de la fonctionnelle $F$

**Proposition 4.** *L'application linéaire  $b$  est continue sur  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ .*

**Preuve** On reprend les mêmes notations que dans [3] et on pose  $\Omega_0 = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ]0, R_y[$  avec

$$R_y > \frac{2}{\gamma + 1} \frac{\sqrt{M_\infty}}{u_{cr}^2}. \quad (4.28)$$

Comme les propriétés de la restriction de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  à  $\Omega_0$  coïncident avec celles de l'espace de Sobolev  $V(\Omega_0)$  déjà introduit dans [3] alors on peut appliquer la formule de Green prouvée dans [3] par rapport à  $y$  et  $x$  respectivement. Il en résulte

$$\begin{aligned} b(\xi) &= -\sqrt{M_\infty} \int_{\partial\Omega_0} z' \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) n_y \xi \, dx \\ &= -\sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z' \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi \, dx \, dy - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z \partial_x \xi \, dx \, dy \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |b(\xi)| &\leq \sqrt{M_\infty R_y} c_1 \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0} + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y^{\frac{1}{3}}} \|\partial_x \xi\|_{0,3,\Omega_0} \\ &\leq \sqrt{M_\infty R_y} c_1 \|\partial_y \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2} + \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y^{\frac{1}{3}}} \|\partial_x \xi\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

où  $c_1 = \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |z'(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$ . ■

Afin d'établir la continuité de la fonctionnelle  $F$  sur  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ , quelques résultats sont nécessaires. Le premier est donné par :

**Lemme 6.** *Pour tous  $s, t$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :*

- $G(t)$  s'écrit comme

$$\begin{aligned} G(t) &= G(u_{cr} - (u_{cr} - t)^+) + G(u_{cr} + (u_{cr} - t)^-) - G(u_{cr}) \\ &= -\frac{\gamma + 1}{6} (u_{cr} - (u_{cr} - t)^+)^3 + \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr} (u_{cr} - (u_{cr} - t)^+)^2 + \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr}^2 (u_{cr} - t)^-. \end{aligned}$$

- $G(s) - G(t) - (s - t)g(t) = G(u_{cr} - (u_{cr} - s)^+) - G(u_{cr} - (u_{cr} - t)^+) - ((u_{cr} - t)^+ - (u_{cr} - s)^+)g(u_{cr} - (u_{cr} - t)^+) + \frac{\gamma + 1}{2} [(u_{cr} - t)^+]^2 ((u_{cr} - s)^- - (u_{cr} - t)^-)$ .

### 4.3. Propriétés de la fonctionnelle $F$

**Remarque 3.** Soit  $\xi$  un élément dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . Alors :

- l'ensemble

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; \partial_x \xi \geq u_{cr} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2\}$$

est de mesure finie et  $u_{cr}$  appartient à  $L^p(C)$  pour tout  $p$  dans  $[1, \infty[$ .

- $(u_{cr} - \partial_x \xi)^-$  appartient à  $L^p(\mathbb{R}_+^2)$  pour tout  $p$  dans  $[1, 3]$ .

Pour établir le premier point, il suffit de remarquer que :

$$u_{cr}^3 \text{ mes}(C) = \int_C u_{cr}^3 dx dy \leq \int_C (\partial_x \xi)^3 dx dy \leq \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial_x \xi|^3 dx dy < \infty.$$

Ensuite, pour tout  $p$  dans  $[1, \infty[$ ,

$$\int_C u_{cr}^p dx dy = u_{cr}^p \text{ mes}(C) < \infty.$$

Le second point est une conséquence immédiate du premier. Il suffit de voir que pour tout  $p$  dans  $[1, 3]$ , l'inégalité de Hölder implique que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^2} |(u_{cr} - \partial_x \xi)^-|^p dx dy &= \int_C (\partial_x \xi - u_{cr})^p dx dy \\ &\leq \left( \int_C (\partial_x \xi - u_{cr})^3 dx dy \right)^{\frac{p}{3}} \text{mes}(C)^{1-\frac{p}{3}}. \end{aligned}$$

Maintenant, on est en mesure d'énoncer :

**Proposition 5.** La fonctionnelle  $F$  est convexe et continue sur  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ .

**Preuve** La convexité de  $G$  entraîne celle de  $F$ .

La preuve de la continuité de  $F$  est basée sur le résultat suivant (voir Ekeland & Temam [23]; p. 11) :

Soit  $V$  un espace de Banach et soit  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. Il est équivalent de dire :

- il existe un ouvert  $\mathcal{O}$  non vide sur lequel  $F$  est majorée par une constante  $a < +\infty$ .
- $F$  y est continue.

Pour ce faire on introduit la boule unité centrée à l'origine

$$B(0, 1) = \{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1); \|\xi\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} < 1\}$$

et on montre que  $F$  y est majorée par une constante strictement positive  $a$ .

Pour tout  $\xi$  élément de  $B(0, 1)$ , on a d'après la première partie du lemme (6) et la remarque (3) la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |F(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}_+^2} G(\partial_x \xi) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (\partial_y \xi)^2 dx dy + b(\xi) \right| \\ &\leq \frac{\gamma+1}{6} \|u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2}^3 + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr} \|u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}^2 \\ &+ \frac{\gamma+1}{2} u_{cr} \|\partial_x \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2} \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^-\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2} + \frac{1}{2} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}^2 + |b(\xi)|. \end{aligned}$$

### 4.3. Propriétés de la fonctionnelle $F$

En se servant des inégalités

$$|u_{cr} - (u_{cr} - t)^+| \leq |t| \text{ et } (u_{cr} - t)^- \leq |t|,$$

il vient :

$$\begin{aligned} |F(\xi)| &\leq \frac{\gamma + 1}{6} \|\partial_x \xi\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2}^3 + \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr} \|\partial_x \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}^2 \\ &+ \frac{\gamma + 1}{2} u_{cr} \|\partial_x \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}^2 + |b(\xi)|. \end{aligned} \quad (4.30)$$

L'inégalité (4.29) combinée avec (4.30) entraîne le résultat recherché.  $\blacksquare$

**Proposition 6.** *La fonctionnelle  $F$  est Gâteaux-différentiable dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ , et sa dérivée est donnée par :*

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1),$$

$$\langle F'(\xi_1), \xi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^2} g(\partial_x \xi_1) \partial_x \xi_2 \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_y \xi_1 \partial_y \xi_2 \, dx \, dy + b(\xi_2). \quad (4.31)$$

**Preuve** Etant donné que  $F$  est convexe, alors pour tous  $\xi_1, \xi_2$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  et pour tout  $\theta$ , l'expression

$$\begin{aligned} \frac{F(\xi_1 + \theta \xi_2) - F(\xi_1)}{\theta} &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{(G(\partial_x \xi_1 + \theta \partial_x \xi_2) - G(\partial_x \xi_2))}{\theta} \, dx \, dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{(\partial_y \xi_1 + \theta \partial_y \xi_2)^2 - (\partial_y \xi_1)^2}{\theta} \, dx \, dy + b(\xi_2). \end{aligned}$$

est une fonction croissante de  $\theta$ . Donc, quand  $\theta$  tend vers zéro, cette expression a toujours une limite dans  $\mathbb{R}$ .

On montre que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{(G(\partial_x \xi_1 + \theta \partial_x \xi_2) - G(\partial_x \xi_2))}{\theta} \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}_+^2} g(\partial_x \xi_1) \partial_x \xi_2 \, dx \, dy.$$

Etant donné que  $G$  est convexe, alors, d'une part,

$$h_\theta = \frac{G(\partial_x \xi_1 + \theta \partial_x \xi_2) - G(\partial_x \xi_1)}{\theta}$$

est une fonction décroissante en  $\theta$  quand  $\theta$  décroît vers zéro et d'autre part,

$$G(\partial_x \xi_1 + \theta \partial_x \xi_2) - G(\partial_x \xi_1) - \theta \partial_x \xi_2 g(\partial_x \xi_1) \geq 0.$$

Il en résulte que  $\{h_\theta\}_{\theta > 0}$  est une suite décroissante dans  $L^1(\mathbb{R}_+^2)$  et

$$\inf_{\theta} \int_{\mathbb{R}_+^2} h_\theta \, dx \, dy \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} g(\partial_x \xi_1) \partial_x \xi_2 \, dx \, dy > -\infty.$$

### 4.3. Propriétés de la fonctionnelle $F$

Le théorème de convergence monotone de Beppo-Levi (voir Brezis, [17]; théorème IV.1, p. 54) combiné avec la convergence presque partout de la suite  $\{h_\theta\}_{\theta>0}$  vers  $g(\partial_x \xi_1) \partial_x \xi_2$  entraîne le résultat recherché.

Le même raisonnement donne :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{(\partial_y \xi_1 + \theta \partial_y \xi_2)^2 - (\partial_y \xi_1)^2}{\theta} dx dy = 2 \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_y \xi_1 \partial_y \xi_2 dx dy.$$

Reste à prouver la continuité de l'application linéaire

$$\xi_2 \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+^2} g(\partial_x \xi_1) \partial_x \xi_2 dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_y \xi_1 \partial_y \xi_2 dx dy + b(\xi_2).$$

Pour ce faire, pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$ , on écrit  $g(t)$  sous la forme :

$$g(t) = -\frac{\gamma+1}{2}(u_{cr} - (u_{cr} - t)^+)^2 + (\gamma+1)u_{cr}(u_{cr} - (u_{cr} - t)^+).$$

L'inégalité de Hölder implique que :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}_+^2} g(\partial_x \xi_1) \partial_x \xi_2 dx dy \right| &\leq \frac{\gamma+1}{2} \|u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_1)^+\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2}^2 \|\partial_x \xi_2\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2} \\ &\quad + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr} \|u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_1)^+\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2} \|\partial_x \xi_2\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}. \end{aligned}$$

Ensuite, les inégalités

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |u_{cr} - (u_{cr} - t)^+| \leq |t| \quad \text{et} \quad (u_{cr} - t)^- \leq |t|,$$

donnent :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}_+^2} g(\partial_x \xi_1) \partial_x \xi_2 dx dy \right| &\leq \frac{\gamma+1}{2} \|\partial_x \xi_1\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2}^2 \|\partial_x \xi_2\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2} \\ &\quad + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr} \|\partial_x \xi_1\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2} \|\partial_x \xi_2\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

La continuité de la forme linéaire  $b$  combinée avec celle de

$$\xi_2 \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_y \xi_1 \partial_y \xi_2 dx dy$$

et l'inégalité (4.32) entraîne le résultat.  $\blacksquare$

**Proposition 7.** *Supposons que la condition du profil mince (4.28) est satisfaite. Alors, pour tout  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ , on a :*

$$\begin{aligned} F(\xi) &\geq \frac{\gamma+1}{12} \|u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2}^3 + \frac{\gamma+1}{4} u_{cr} \|u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}^2 \\ &\quad + \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \right) \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^-\|_{0,1,\mathbb{R}_+^2} + \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}^2 \\ &\quad - \sqrt{M_\infty} u_{cr} - \frac{M_\infty c_1^2 R_y}{3}, \end{aligned}$$



### 4.3. Propriétés de la fonctionnelle $F$

**Preuve** Soit  $\xi$  un élément de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ ,

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_+^2} G(\partial_x \xi) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (\partial_y \xi)^2 + b(\xi) \\
 &= \int_{\Omega_0} G(\partial_x \xi) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (\partial_y \xi)^2 dx dy + \int_{\Omega_1} G(\partial_x \xi) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} (\partial_y \xi)^2 dx dy \\
 &\quad - \sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z' \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi dx dy - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z \partial_x \xi dx dy \\
 &= B_x^0 + B_y^0 + B_x^1 + B_y^1.
 \end{aligned}$$

On rappelle ici que  $\Omega_0 = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ]0, R_y[$ ,

$\Omega_1 = ((]-\infty, -\frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[) \times ]0, +\infty[) \cup (]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ]R_y, +\infty[)$  et

$$\begin{aligned}
 B_x^0 &= \int_{\Omega_0} G(\partial_x \xi) dx dy - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z \partial_x \xi dx dy, \\
 B_y^0 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (\partial_y \xi)^2 dx dy - \sqrt{M_\infty} \int_{\Omega_0} z' \left(1 - \frac{y}{R_y}\right) \partial_y \xi dx dy, \\
 B_x^1 &= \int_{\Omega_1} G(\partial_x \xi) dx dy, \\
 B_y^1 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} (\partial_y \xi)^2 dx dy.
 \end{aligned}$$

D'après le premier point du lemme (6), on a :

$$\begin{aligned}
 B_x^0 &= \int_{\Omega_0} \left( -\frac{\gamma+1}{6} (u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+)^3 + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr} (u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+)^2 \right) dx dy \\
 &\quad + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_{\Omega_0} (u_{cr} - \partial_x \xi)^- dx dy - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z \partial_x \xi dx dy \\
 &= \int_{\Omega_0} \left( -\frac{\gamma+1}{6} (u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+)^3 + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr} (u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+)^2 \right) dx dy \\
 &\quad + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_{\Omega_0} (u_{cr} - \partial_x \xi)^- dx dy - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z (u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+) dx dy \\
 &\quad - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \int_{\Omega_0} z (u_{cr} - \partial_x \xi)^- dx dy
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité :

$$\forall t \leq u_{cr} \quad -\frac{\gamma+1}{6} t^3 + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr} t^2 \geq \frac{\gamma+1}{12} |t|^3 + \frac{\gamma+1}{4} u_{cr} t^2,$$

il vient :

$$\begin{aligned}
 B_x^0 &\geq \frac{\gamma+1}{12} \|u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,3,\Omega_0}^3 + \frac{\gamma+1}{4} u_{cr} \|u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,2,\Omega_0}^2 \\
 &+ \left( \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 - \frac{\sqrt{M_\infty}}{R_y} \right) \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^-\|_{0,1,\Omega_0} - \sqrt{M_\infty} u_{cr}. \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_y^0 &= \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0}^2 + \int_{\Omega_0} \left( \frac{1}{2} \partial_y \xi - \sqrt{M_\infty} z' \left( 1 - \frac{y}{R_y} \right) \right)^2 dx dy \\
 &- M_\infty \int_{\Omega_0} z'^2 \left( 1 - \frac{y}{R_y} \right)^2 dx dy \\
 &\geq \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_0}^2 - \frac{M_\infty c_1^2 R_y}{3}. \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_x^1 &= \int_{\Omega_1} G(\partial_x \xi) dx dy \\
 &= \int_{\Omega_1} \left( -\frac{\gamma+1}{6} (u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+)^3 + \frac{\gamma+1}{2} u_{cr} (u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+)^2 \right) dx dy \\
 &+ \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \int_{\Omega_0} (u_{cr} - \partial_x \xi)^- dx dy \\
 &\geq \frac{\gamma+1}{12} \|u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,3,\Omega_1}^3 + \frac{\gamma+1}{4} u_{cr} \|u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi)^+\|_{0,2,\Omega_1}^2 \\
 &+ \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \|(u_{cr} - \partial_x \xi)^-\|_{0,1,\Omega_1}. \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

$$B_y^1 \geq \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega_1}^2. \tag{4.36}$$

En combinant les inégalités (4.33), (4.34), (4.35) et (4.36), on établit le résultat demandé.  $\blacksquare$

Une conséquence immédiate de cette proposition est que  $\inf_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} F(\xi)$  est fini.

La fonctionnelle  $F$  n'est pas coercive sur  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  comme le prouve l'exemple suivant :

**Exemple 1.** Soit la suite

$$\xi_n(x, y) = \begin{cases} -\frac{u_{cr}}{(1-x)(1+y)^2} & \text{si } x \leq -\frac{1}{n}, \\ \frac{n^2 u_{cr}}{n+1} \frac{x}{(1+y)^2} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{u_{cr}}{(1+x)(1+y)^2} & \text{si } x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Les fonctions  $\partial_x \xi_n$  et  $\partial_y \xi_n$  vérifient

### 4.3. Propriétés de la fonctionnelle $F$

$$\partial_x \xi_n(x, y) = \begin{cases} -\frac{u_{cr}}{(1-x)^2(1+y)^2} & \text{si } x \leq -\frac{1}{n}, \\ \frac{n^2 u_{cr}}{n+1} \frac{1}{(1+y)^2} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ -\frac{u_{cr}}{(1+x)^2(1+y)^2} & \text{si } x \geq \frac{1}{n}, \end{cases} \quad \partial_y \xi_n(x, y) = \begin{cases} \frac{2u_{cr}}{(1-x)(1+y)^3} & \text{si } x \leq -\frac{1}{n}, \\ -\frac{2n^2 u_{cr}}{n+1} \frac{x}{(1+y)^3} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ -\frac{2u_{cr}}{(1+x)(1+y)^3} & \text{si } x \geq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial_x \xi_n|^2 dx dy = \frac{2u_{cr}^2}{9} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 + \frac{2n u_{cr}^2}{3} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial_x \xi_n|^3 dx dy = \frac{2u_{cr}^3}{25} \left(\frac{n}{n+1}\right)^5 + \frac{2n^2 u_{cr}^3}{5} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial_y \xi_n|^2 dx dy = \frac{8n}{5(n+1)} u_{cr}^2 + \frac{8n}{15(n+1)^2} u_{cr}^2,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{|\xi_n|^2}{(2+x^2+y^2) \log^2(2+x^2+y^2)} dx dy \leq \frac{2u_{cr}^2}{3 \log^2 2},$$

et,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{|\xi_n|^3}{(2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \log^3(2+x^2+y^2)} dx dy \leq \frac{u_{cr}^3}{16 \log^3 2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|\xi_n\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} &= \|\xi_n\|_{2, \mathbb{R}_+^2, \omega_1^2} + \|\xi_n\|_{3, \mathbb{R}_+^2, \omega_1^3} + \|\partial_x \xi_n\|_{0, 2, \mathbb{R}_+^2} + \|\partial_x \xi_n\|_{0, 3, \mathbb{R}_+^2} + \|\partial_y \xi_n\|_{0, 2, \mathbb{R}_+^2} \\ &\geq \left(\frac{2}{5} n^2\right)^{1/3} \frac{n}{n+1} u_{cr}. \end{aligned}$$

En calculant

$$G(\partial_x \xi_n) = \begin{cases} \frac{\gamma+1}{6} u_{cr}^3 \left[ \frac{1}{(1+y)^6 (1-x)^6} + \frac{3}{(1+y)^4 (1-x)^4} \right] & \text{si } x \leq -\frac{1}{n}, \\ \frac{\gamma+1}{6} u_{cr}^3 \left[ -\frac{n^6}{(n+1)^3 (1+y)^6} + \frac{3n^4}{(n+1)^2 (1+y)^4} \right] & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}, y \geq \frac{n}{\sqrt{n+1}} - 1, \\ \frac{\gamma+1}{6} u_{cr}^3 \left[ \frac{3n^2}{(n+1)(1+y)^2} - 1 \right] & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}, y \leq \frac{n}{\sqrt{n+1}} - 1, \\ \frac{\gamma+1}{6} u_{cr}^3 \left[ \frac{1}{(1+y)^6 (1+x)^6} + \frac{3}{(1+y)^4 (1+x)^4} \right] & \text{si } x \geq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

il vient :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} G(\partial_x \xi_n) dx dy \leq 2 \frac{\gamma+1}{3} u_{cr}^3,$$

### 4.3. Propriétés de la fonctionnelle $F$

$$b(\xi_n) \leq 2\sqrt{M_\infty} u_{cr},$$

et alors

$$\begin{aligned} F(\xi_n) &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( G(\partial_x \xi_n) + \frac{1}{2}(\partial_y \xi_n)^2 \right) dx dy + b(\xi_n) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( G(\partial_x \xi_n) + \frac{1}{2}(\partial_y \xi_n)^2 \right) dx dy \\ &\leq (\gamma + 1) u_{cr}^3 + \frac{16}{15} u_{cr}^2 + 2\sqrt{M_\infty} u_{cr}. \end{aligned}$$

Ainsi  $\|\xi_n\|_{V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)}$  tend vers  $\infty$  et  $F(\xi_n)$  reste borné.

**Remarque 4.** Comme  $z(-\frac{1}{2}) = z(\frac{1}{2}) = 0$ , alors la forme linéaire continue  $b$ , qui est définie sur  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  par :

$$\forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \quad b(\xi) = \sqrt{M_\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z' \xi dx,$$

s'annule pour les fonctions constantes. Ceci entraîne que :

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \quad F(\xi) = F(\xi + k),$$

et toute solution du problème (4.27) est définie à une constante additive près dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ . On se propose donc de mener notre étude dans l'espace quotient  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ .

Maintenant, on va utiliser la proposition (7) pour établir un résultat d'existence et d'unicité de solutions pour le problème (4.27) vérifiant une contrainte. On considère le convexe fermé non vide

$$X = \{ \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}, \partial_x \xi \leq u_{cr} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2 \}, \quad (4.37)$$

et on a :

**Théorème 10.** Il existe un unique  $\varphi$  dans  $X$  vérifiant :

$$F(\varphi) \leq F(\xi) \quad \forall \xi \in X.$$

**Preuve** Etape 1 : Existence d'une solution.

D'après la proposition (7), on a pour tout  $\xi$  de  $X$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma + 1}{12} \|\partial_x \xi\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2}^3 \leq F(\xi) + \sqrt{M_\infty} u_{cr} + M_\infty c_1^2 \frac{R_y}{3}, \\ \frac{\gamma + 1}{4} u_{cr} \|\partial_x \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}^2 \leq F(\xi) + \sqrt{M_\infty} u_{cr} + M_\infty c_1^2 \frac{R_y}{3}, \\ \frac{1}{4} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\Omega}^2 \leq F(\xi) + \sqrt{M_\infty} u_{cr} + M_\infty c_1^2 \frac{R_y}{3}. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

### 4.3. Propriétés de la fonctionnelle $F$

---

Il découle de l'inégalité de Poincaré établie en corollaire (3), que la fonctionnelle  $F$  est coercive sur le convexe fermé  $X$ . Ensuite la théorie classique de minimisation des fonctions convexes (voir Ekeland & Temam [23]; p. 34) entraîne l'existence d'une fonction  $\varphi$  dans  $X$  vérifiant :

$$F(\varphi) \leq F(\xi) \quad \forall \xi \in X.$$

Etape 2 : Unicité de la solution.

Supposons qu'il existe deux solutions  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $X$ , alors

$$F(\varphi) = F(\psi).$$

Comme  $X$  est un ensemble convexe, pour tout  $\theta$  de  $[0, 1]$ ,  $\theta\varphi + (1 - \theta)\psi$  appartient à  $X$  et est solution du problème :

$$F(\theta\varphi + (1 - \theta)\psi) = F(\varphi) = F(\psi),$$

ou encore  $F(\psi + \theta(\varphi - \psi)) - F(\psi) = 0$  et  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \{F(\psi + \theta(\varphi - \psi)) - F(\psi)\} = 0$ .

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} g(\partial_x \psi)(\partial_x \varphi - \partial_x \psi) dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_y \psi(\partial_y \varphi - \partial_y \psi) dx dy + b(\varphi - \psi) = 0. \quad (4.39)$$

De la même manière, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} g(\partial_x \varphi)(\partial_x \psi - \partial_x \varphi) dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_y \varphi(\partial_y \psi - \partial_y \varphi) dx dy + b(\psi - \varphi) = 0. \quad (4.40)$$

En combinant (4.39) avec (4.40), on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (g(\partial_x \psi) - g(\partial_x \varphi))(\partial_x \psi - \partial_x \varphi) dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} (\partial_y \psi - \partial_y \varphi)^2 dx dy = 0.$$

Puisque  $g$  est croissante, alors

$$(g(\partial_x \psi) - g(\partial_x \varphi))(\partial_x \psi - \partial_x \varphi) = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2 \text{ et } (\partial_y \psi - \partial_y \varphi)^2 = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2,$$

ou encore,

$$-\frac{\gamma+1}{2} (\partial_x \psi - \partial_x \varphi)^2 (u_{cr} - \partial_x \varphi + u_{cr} - \partial_x \psi) = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2$$

et  $(\partial_y \psi - \partial_y \varphi)^2 = 0$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ .

Par conséquent,  $\partial_x \psi = \partial_x \varphi$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$  et  $\partial_y \psi = \partial_y \varphi$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ . Mais, comme  $\psi$  et  $\varphi$  appartiennent à  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ , on a  $\psi = \varphi$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ . ■

#### 4.4. Le problème dual

---

**Remarque 5.** Le problème de minimisation (4.27) est bien posé dans  $X$ . S'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\partial_x \varphi \leq u_{cr} - \delta \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2,$$

alors  $\varphi$  satisfait :

$$\begin{cases} \partial_x g(\partial_x \varphi) + \partial_y (\partial_y \varphi) = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2, \\ \partial_y \varphi = \sqrt{M_\infty} Z'(x) \text{ dans } (M(\mathcal{R}), \omega_1)'. \end{cases} \quad (4.41)$$

Pour le prouver, on note qu'il existe un  $\varepsilon > 0$  assez petit tel que pour tout  $\psi$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$ , les fonctions  $\varphi \pm \varepsilon \psi$  appartiennent à  $X$  et

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} g(\partial_x \varphi) \partial_x \psi \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_y \varphi \partial_y \psi \, dx \, dy = 0 \quad (4.42)$$

découle immédiatement de l'inégalité

$$\langle F'(\varphi), \xi - \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in X.$$

Pour prouver les conditions aux bords. On sait qu'il existe un  $\varepsilon > 0$  assez petit tel que pour tout  $\psi$  appartient à  $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ , les fonctions  $\varphi \pm \varepsilon \psi$  appartiennent à  $X$  et  $\langle F'(\varphi), \psi \rangle = 0$  c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} g(\partial_x \varphi) \partial_x \psi \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_y \varphi \partial_y \psi \, dx \, dy + b(\psi) = 0.$$

La formule de Green combinée avec cette dernière relation entraîne :

$$b(\psi) + \langle \partial_y \varphi \cdot n_y, \psi \rangle_{(M(\mathcal{R}, \omega_1))', M(\mathcal{R}, \omega_1)} = 0$$

où  $\mathbf{n} = (n_x, n_y) = (0, -1)$  est la normale unitaire au bord  $\mathcal{R}$ , dirigée vers l'extérieur de  $\mathbb{R}_+^2$ . Il s'ensuit que

$$\partial_y \varphi = \sqrt{M_\infty} Z'(x) \text{ dans } (M(\mathcal{R}, \omega_1))'.$$

**Remarque 6.** On ne peut pas conclure sur l'existence de solutions de (4.27) car la fonctionnelle  $F$  n'est pas coercive sur  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ . Il est intéressant de considérer plutôt le problème dual en utilisant des fonctions convexes conjuguées.

## 4.4 Le problème dual

Dans cette partie, on associe au problème de minimisation (4.27), son problème dual et on étudie les relations entre les solutions de ces deux problèmes.

On note

$$\mathcal{L} = \inf_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} F(\xi). \quad (4.43)$$

#### 4.4. Le problème dual

On remarque que la fonction à minimiser  $F$  s'écrit :

$$F(\xi) = I(\nabla\xi) + b(\xi)$$

où  $I$  est la fonction définie de  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2) = (L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)$  dans  $\mathbb{R}$  par :  
 $\forall \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \tilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)$ ,

$$I(\mathbf{q}) = \int_{\mathbb{R}_+^2} G(q_1) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} q_2^2 dx dy \text{ et } b \text{ est donné par (4.26)}$$

On introduit maintenant la fonction  $\phi$  définie de  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\phi(\xi, \mathbf{q}) = I(\nabla\xi + \mathbf{q}) + b(\xi).$$

On remarque que  $\phi(\xi, \mathbf{0}) = F(\xi)$ .

Pour tout  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  de  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)$ , on considère le problème de minimisation

$$J(\mathbf{q}) = \inf_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} \phi(\xi, \mathbf{q}). \quad (4.44)$$

On observe que  $J(\mathbf{0}) = \mathcal{L}$ .

Les problèmes (4.44) sont les problèmes perturbés de (4.27).

On considère la fonction conjuguée  $\phi_*$  de  $\phi$  définie sur  $\mathbb{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1}) \times \tilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2)$  par :  
 pour tout  $\mathbf{p} \in \mathbb{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})$ ,  $\mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2)$ ,

$$\phi_*(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \sup_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \mathbf{q} \in \tilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \langle \mathbf{p}, \xi \rangle_{\mathbb{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1}), V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{q} \rangle_{\tilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \tilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} - \phi(\xi, \mathbf{q}) \right],$$

où

$$\langle \mathbf{p}, \xi \rangle_{\mathbb{L}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1}), V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} = \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbf{p} \nabla \xi dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} \xi \operatorname{div} \mathbf{p} dx dy.$$

Le problème

$$\sup_{\mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2)} [-\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{u})] \quad (4.45)$$

est le problème dual associé au problème (4.27).

L'étude de ce problème dual nous donne :

**Théorème 11.** *Supposons que la condition du profil mince (4.28) est satisfaite. Alors Il existe  $(u_*, v_*)$  dans  $(L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)$  tel que*

i)  $\forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} g(u_*) \partial_x \xi dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} v_* \partial_x \xi dx dy + b(\xi) = 0.$$

#### 4.4. Le problème dual

ii)

$$v_* = \sqrt{M_\infty} Z'(x) \text{ dans } (M(\mathcal{R}, \omega'_1))'.$$

iii)  $u_* \leq u_{cr}$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ .

iv)

$$\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( G(u_*) - u_* g(u_*) - \frac{1}{2} v_*^2 \right) dx dy$$

**Preuve 1.** La fonctionnelle  $F$  étant convexe sur  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ ,  $\inf_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}} F(\xi)$

étant fini et  $I$  étant continue sur  $\tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)$ , toutes les conditions du théorème 4.1 de (Ekeland & Temam [23]; p. 58) sont satisfaites. Ainsi, on peut affirmer que le problème (4.27) est stable :

$$\inf_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} F(\xi) = \sup_{\mathbf{u} \in \tilde{\mathbb{H}}'(\mathbb{R}_+^2)} [-\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{u})],$$

et que (4.45) a au moins une solution  $\mathbf{U}$  dans  $\tilde{\mathbb{H}}'(\mathbb{R}_+^2)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) \\ &= - \sup_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \mathbf{q} \in \tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\tilde{\mathbb{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)} - \phi(\xi, \mathbf{q}) \right] \\ &= \inf_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \mathbf{q} \in \tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \phi(\xi, \mathbf{q}) - \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\tilde{\mathbb{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \right] \\ &\leq \inf_{\mathbf{q} \in \tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \inf_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} \left\{ \phi(\xi, \mathbf{q}) - \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\tilde{\mathbb{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \right\} \right] \\ &= \inf_{\mathbf{q} \in \tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \left[ J(\mathbf{q}) - \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\tilde{\mathbb{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \right]. \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout  $\mathbf{q} \in \tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)$ ,

$$\mathcal{L} \leq J(\mathbf{q}) - \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\tilde{\mathbb{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)},$$

en particulier, pour tout  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{L} \leq J(\nabla \xi) - \langle \mathbf{U}, \nabla \xi \rangle_{\tilde{\mathbb{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)}. \quad (4.46)$$

Puisque,

$$\begin{aligned} J(\nabla \xi) &= \inf_{\zeta \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} \left[ \int_{\mathbb{R}_+^2} G(\partial_x \xi + \partial_x \zeta) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (\partial_y \xi + \partial_y \zeta)^2 dx dy + b(\zeta) \right] \\ &= \inf_{\zeta \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} \left[ \int_{\mathbb{R}_+^2} G(\partial_x(\xi + \zeta)) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (\partial_y(\xi + \zeta))^2 dx dy + b(\zeta + \xi) \right] \\ &- b(\xi) = \mathcal{L} - b(\xi). \end{aligned} \quad (4.47)$$



#### 4.4. Le problème dual

Ainsi, (4.46) combiné avec (4.47) entraîne

$$\langle \mathbf{U}, \nabla \xi \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} + b(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}.$$

Etant donné que  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$  est un espace vectoriel, on déduit que

$$\langle \mathbf{U}, \nabla \xi \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} + b(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}. \quad (4.48)$$

Parsuite,

$$\forall \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2), \langle \mathbf{U}, \nabla \xi \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} + b(\xi) = 0,$$

et  $\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ .

2. On calcule :

$$\begin{aligned} \phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) &= \sup_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \mathbf{q} \in \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} - \phi(\xi, \mathbf{q}) \right] \\ &= \sup_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \mathbf{q} \in \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \langle \mathbf{U}, \mathbf{q} \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} - I(\nabla \xi + \mathbf{q}) - b(\xi) \right]; \end{aligned}$$

posant, à  $\xi$  fixé,  $\mathbf{p} = \nabla \xi + \mathbf{q}$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) &= \sup_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \mathbf{p} \in \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \langle \mathbf{U}, \mathbf{p} - \nabla \xi \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} - I(\mathbf{p}) - b(\xi) \right] \\ &= \sup_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1), \mathbf{p} \in \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \langle \mathbf{U}, \mathbf{p} \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} - \langle \mathbf{U}, \nabla \xi \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \right. \\ &\quad \left. - I(\mathbf{p}) - b(\xi) \right]. \end{aligned}$$

On note  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ ,  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$  et on utilise l'égalité (4.48), il vient :

$$\begin{aligned} \phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) &= \sup_{\mathbf{p} \in \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \langle \mathbf{U}, \mathbf{p} \rangle_{\widetilde{\mathbf{H}}'(\mathbb{R}_+^2), \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbb{R}_+^2)} - I(\mathbf{p}) \right] \\ &= \sup_{p_1 \in L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2), p_2 \in L^2(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \int_{\mathbb{R}_+^2} (U_1 p_1 + U_2 p_2) \, dx \, dy \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}_+^2} G(p_1) \, dx \, dy - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} p_2^2 \, dx \, dy \right] \\ &= \sup_{p_1 \in L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \int_{\mathbb{R}_+^2} (U_1 p_1 - G(p_1)) \, dx \, dy \right] \\ &+ \sup_{p_2 \in L^2(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( U_2 p_2 - \frac{1}{2} p_2^2 \right) \, dx \, dy \right] \\ &= I_1(U_1) + I_2(U_2). \end{aligned}$$

#### 4.4. Le problème dual

Maintenant, on utilise un résultat dû à Krasnoselski (proposition IV.1.2, Ekeland & Temam [23], p. 76) qui permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} I_1(U_1) &= \sup_{p_1 \in L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \int_{\mathbb{R}_+^2} (U_1 p_1 - G(p_1)) dx dy \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \sup_{t \in \mathbb{R}} [U_1(x, y)t - G(t)] dx dy, \\ I_2(U_2) &= \sup_{p_2 \in L^2(\mathbb{R}_+^2)} \left[ \int_{\mathbb{R}_+^2} (U_2 p_2 - \frac{1}{2} p_2^2) dx dy \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \sup_{t \in \mathbb{R}} [U_2(x, y)t - \frac{1}{2} t^2] dx dy. \end{aligned}$$

Ainsi, pour les calculer, il suffit de déterminer, pour presque tout  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}_+^2$ ,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} [U_1(x, y)t - G(t)] \text{ et } \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ U_2(x, y)t - \frac{1}{2} t^2 \right].$$

Si  $U_1 > \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2$  sur un ensemble de mesure strictement positif, alors  $I_1(U_1) = +\infty$ .

Ce qui contredit le fait que  $\phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) < \infty$  et par suite  $U_1 \leq \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ .

Par conséquent,

$$I_1(U_1) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \left[ U_1 \left( u_{cr} - \sqrt{u_{cr}^2 - \frac{2}{\gamma+1} U_1} \right) - G \left( u_{cr} - \sqrt{u_{cr}^2 - \frac{2}{\gamma+1} U_1} \right) \right] dx dy,$$

et  $I_2(U_2) = \frac{1}{2} \|U_2\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}^2$ . En conclusion,

$$\begin{aligned} \phi_*(\mathbf{0}, \mathbf{U}) &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left[ U_1 \left( u_{cr} - \sqrt{u_{cr}^2 - \frac{2}{\gamma+1} U_1} \right) - G \left( u_{cr} - \sqrt{u_{cr}^2 - \frac{2}{\gamma+1} U_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} U_2^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

On pose  $u_* = u_{cr} - \sqrt{u_{cr}^2 - \frac{2}{\gamma+1} U_1}$  et  $v_* = U_2$ . Ensuite, les inégalités

$$|g(u_*)| \geq \frac{\gamma+1}{2} u_{cr} |u_*| \text{ et } |g(u_*)| \geq \frac{\gamma+1}{2} |u_*|^2$$

impliquent que  $u_*$  appartient à  $L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)$  et

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} \left( G(u_*) - u_* g(u_*) - \frac{1}{2} v_*^2 \right) dx dy.$$

3. Maintenant, en vue d'établir ii), on utilise la formule de Green présentée dans le théorème (9). Plus précisément, comme  $\mathbf{U}$  appartient à  $\mathbf{IL}(\mathbb{R}_+^2, \frac{1}{\omega_1})$  alors pour  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ , on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \xi \operatorname{div} \mathbf{U} dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbf{U} \nabla \xi dx dy = \langle \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_{(M(\mathcal{R}, \omega_1))', M(\mathcal{R}, \omega_1)}.$$

#### 4.4. Le problème dual

La relation  $\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$  combinée avec (4.48) entraînent que :

$$\langle \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_{(M(\mathcal{R}, \omega'_1))', M(\mathcal{R}, \omega'_1)} + b(\xi) = 0.$$

Mais, pour tout  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ ,

$$b(\xi) = -\sqrt{M_\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z' n_y \xi \, dx,$$

où  $\mathbf{n} = (0, n_y)$  est la normale unitaire au bord  $\mathcal{R}$  dirigée vers l'extérieur de  $\mathbb{R}_+^2$ . On désigne par  $Z$  le prolongement de  $z$  par zéro à l'extérieur de  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , et on applique la proposition (3), il vient :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} - \sqrt{M_\infty} Z'(x) n_y = 0 \text{ dans } (M(\mathcal{R}, \omega'_1))'$$

et,

$$-v_* + \sqrt{M_\infty} Z'(x) = 0 \text{ dans } (M(\mathcal{R}, \omega'_1))'.$$

Ceci achève la démonstration. ■

**Remarque 7.** Si le problème (4.27) possède une solution  $\varphi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$  telle que  $\partial_x \varphi \leq u_{cr}$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ , alors  $\nabla \varphi = (u_*, v_*)$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ .

Pour le prouver, il suffit d'évaluer :

$$\begin{aligned} 0 &= F(\varphi) - \mathcal{L} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} (G(\partial_x \varphi) - G(u_*) + u_* g(u_*)) \, dx \, dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} ((\partial_y \varphi)^2 + (v_*)^2) \, dx \, dy + b(\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} (G(\partial_x \varphi) - G(u_*) - (\partial_x \varphi - u_*) g(u_*)) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (\partial_y \varphi - v_*)^2 \, dx \, dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+^2} g(u_*) \partial_x \varphi \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} v_* \partial_y \varphi \, dx \, dy + b(\varphi). \end{aligned}$$

Le théorème précédent combiné avec la convexité de  $G$  induit le résultat demandé.

**Proposition 8.** Sous la condition du profil mince (4.28), toute suite minimisante  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  de (4.27) (dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ ) vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+\}_{n=1}^\infty \text{ converge fortement vers } u_* \\ \text{dans } L^3(\mathbb{R}_+^2) \text{ et dans } L^2(\mathbb{R}_+^2), \\ \{\partial_y \xi_n\}_{n=1}^\infty \text{ converge fortement vers } v_* \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+^2), \\ \{(u_{cr} - \partial_x \xi_n)^-\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée dans } L^1(\mathbb{R}_+^2), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- \, dx \, dy = 0. \end{array} \right.$$

#### 4.4. Le problème dual

**Preuve** Soit  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  une suite dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$  telle que :

$$\mathcal{L} \leq F(\xi_n) < \mathcal{L} + \frac{1}{n}, \quad (4.49)$$

(une telle suite existe car  $\mathcal{L} = \inf_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}} F(\xi)$ ).

Comme pour tout élément  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ , on a :

$$b(\xi) = - \int_{\mathbb{R}_+^2} (g(u_*)\partial_x \xi + v_*\partial_y \xi) dx dy$$

alors,

$$\begin{aligned} F(\xi_n) - \mathcal{L} &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( G(\partial_x \xi_n) + \frac{1}{2}(\partial_y \xi_n)^2 \right) dx dy + b(\xi_n) \\ &- \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( G(u_*) - u_*g(u_*) - \frac{1}{2}v_*^2 \right) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} (G(\partial_x \xi_n) - G(u_*) - (\partial_x \xi_n - u_*)g(u_*)) dx dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (\partial_y \xi_n - v_*)^2 dx dy. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Le lemme (6) ii) combiné avec (4.49) et (4.50) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \int_{\mathbb{R}_+^2} [G(u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+) - G(u_*) \\ \quad - (u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+ - u_*)g(u_*)] dx dy < \frac{1}{n}, \\ \frac{\gamma+1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- dx dy < \frac{1}{n}, \\ \int_{\mathbb{R}_+^2} (\partial_y \xi_n - v_*)^2 dx dy < \frac{1}{n}. \end{array} \right. \quad (4.51)$$

En utilisant l'inégalité

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad s, t \leq u_{cr} \quad -s - 2t \geq |s - t| - 3u_{cr},$$

il vient :

$$\begin{aligned} G(s) - G(t) - (s - t)g(t) &= \frac{\gamma+1}{2}u_{cr}(s - t)^2 - \frac{\gamma+1}{6}(s - t)^2(s + 2t) \\ &\geq \frac{\gamma+1}{6}|s - t|^3, \end{aligned}$$

#### 4.4. Le problème dual

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma+1}{6} \int_{\mathbb{R}_+^2} |u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+ - u_*|^3 dx dy < \frac{1}{n}, \\ \frac{\gamma+1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- dx dy < \frac{1}{n}, \\ \int_{\mathbb{R}_+^2} (\partial_y \xi_n - v_*)^2 dx dy < \frac{1}{n}. \end{array} \right. \quad (4.52)$$

Ensuite, comme pour tous  $s, t \leq u_{cr}$ ,

$$G(s) - G(t) - (s-t)g(t) = \frac{\gamma+1}{2} u_{cr} (s-t)^2 - \frac{\gamma+1}{6} (s-t)^3 - \frac{\gamma+1}{2} t (s-t)^2,$$

alors (4.51) et (4.52) entraînent :

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma+1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} |u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+ - u_*|^2 dx dy \\ & \leq \frac{2}{n} + \frac{\gamma+1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} |u_*|^3 dx dy \right)^{\frac{1}{3}} \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} |u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+ - u_*|^3 dx dy \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Donc,  $\{u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+\}_{n=1}^\infty$  converge fortement vers  $u_*$  dans  $L^3(\mathbb{R}_+^2)$  et  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$  et  $\{\partial_y \xi_n\}_{n=1}^\infty$  converge fortement vers  $v_*$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ . Ensuite la proposition (7) entraîne que les suites  $\{u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+\}_{n=1}^\infty$  et  $\{(u_{cr} - \partial_x \xi_n)^-\}_{n=1}^\infty$  sont respectivement bornées dans  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$  et  $L^1(\mathbb{R}_+^2)$ .

**Remarque 8.**  $\xi_n$  appartient à  $L^2(\mathbb{R}_+^2, \omega_1^2)$  entraîne que  $\xi_n$  appartient à  $L^1(\mathbb{R}_+^2, \omega_1^2)$  puisque

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \omega_1^2 |\xi_n| dx dy \leq \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} \omega_1^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} \omega_1^2 |\xi_n|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{\log 2}} \|\xi_n\|_{2, \mathbb{R}_+^2, \omega_1^2}$$

**Théorème 12.** Supposons que la condition du profil mince (4.28) est satisfaite. Si la suite  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  est bornée dans  $L^1(\mathbb{R}_+^2, \omega_1^2)$  alors il existe une fonction  $\varphi$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+^2, \omega_1^4)$  et une mesure  $\nu$  sur  $\mathbb{R}_+^2$  positive et bornée et telles que :

$$\partial_x \varphi = u_* + \nu \quad \text{et} \quad \partial_y \varphi = v_*.$$

#### 4.4. Le problème dual

**Preuve** Comme

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^2} \omega_1^2 |u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+| dx dy &\leq \frac{1}{\sqrt{2} \log 2} \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} \omega_1^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} |u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\log^3 2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}, \\
\int_{\mathbb{R}_+^2} \omega_1^2 |(u_{cr} - \partial_x \xi_n)^-| dx dy &\leq \frac{1}{2 \log^2 2} \int_{\mathbb{R}_+^2} |(u_{cr} - \partial_x \xi_n)^-| dx dy, \\
\int_{\mathbb{R}_+^2} \omega_1^2 |\partial_y \xi_n| dx dy &\leq \frac{1}{\sqrt{2} \log 2} \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} \omega_1^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial_y \xi_n|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\log^3 2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2},
\end{aligned}$$

alors  $\{\omega_1^2 \partial_x \xi_n, \omega_1^2 \partial_y \xi_n\}_{n \geq 1}$  est bornée dans  $L^1(\mathbb{R}_+^2) \times L^1(\mathbb{R}_+^2)$ .

Ensuite un calcul simple montre que

$$|\partial_x \omega_1|, |\partial_y \omega_1| \leq \sqrt{2} \omega_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\log 2} \right)$$

et  $\{\xi_n \partial_x(\omega_1^2), \xi_n \partial_y(\omega_1^2)\}_{n \geq 1}$  appartient à  $L^1(\mathbb{R}_+^2) \times L^1(\mathbb{R}_+^2)$ . Il s'ensuit que  $\{\omega_1^2 \xi_n\}_{n \geq 1}$  est bien dans  $W^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$ .

A ce stade, on a besoin de deux résultats préliminaires suivants :

**Proposition 9.** *Il existe un opérateur de prolongement (par réflexion)*

$$P_3 : W^{1,1}(\mathbb{R}_+^2) \longrightarrow W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$$

linéaire tel que pour tout  $\xi$  de  $W^{1,1}(\mathbb{R}_+^2)$  :

$$\begin{cases} P_3 \xi|_{\mathbb{R}_+^2} = \xi \\ \|P_3 \xi\|_{0,1,\mathbb{R}^2} \leq 2 \|\xi\|_{0,1,\mathbb{R}_+^2}, \\ \|\nabla(P_3 \xi)\|_{0,1,\mathbb{R}^2} \leq 2 \|\nabla \xi\|_{0,1,\mathbb{R}_+^2}. \end{cases}$$

**Théorème 13.** (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg).

$W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$  et il existe une constante  $C$  strictement positive telle que :

$$\|\xi\|_{0,2,\mathbb{R}^2} \leq C \|\nabla \xi\|_{0,1,\mathbb{R}^2} \quad \forall \xi \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2).$$

#### 4.4. Le problème dual

Ces résultats nous permettent de confirmer l'existence d'une constante  $C$  strictement positive telle que :

$$\begin{aligned} \|\omega_1^2 \xi_n\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2} &= \|P_3(\omega_1^2 \xi_n)\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2} \leq \|P_3(\omega_1^2 \xi_n)\|_{0,2,\mathbb{R}^2} \leq C \|\nabla(P_3(\omega_1^2 \xi_n))\|_{0,1,\mathbb{R}^2} \\ &\leq 2C \|\nabla(\omega_1^2 \xi_n)\|_{0,1,\mathbb{R}_+^2} \leq 4C\sqrt{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\log 2} \right) \|\omega_1^2 \xi_n\|_{0,1,\mathbb{R}_+^2} + 2C \|\omega_1^2 \nabla \xi_n\|_{0,1,\mathbb{R}_+^2}. \end{aligned}$$

Si la suite  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  est bornée dans  $L^1(\mathbb{R}_+^2, \omega_1^2)$  alors elle l'est aussi dans  $L^2(\mathbb{R}_+^2, \omega_1^4)$ . La réflexivité de  $L^2(\mathbb{R}_+^2, \omega_1^4)$  entraîne l'existence d'une sous-suite, notée encore  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ , convergeant faiblement vers une fonction  $\varphi$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+^2, \omega_1^4)$ . Ensuite  $v_* = \partial_y \varphi$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ .

Maintenant pour toute fonction  $\psi$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$ ,  $\psi \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} &\langle \partial_x \varphi - u_*, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)} = \langle \partial_x \varphi - \partial_x \xi_n, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)} + \langle \partial_x \xi_n - u_*, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)} \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+^2} (\varphi - \xi_n) \partial_x \psi \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- \psi \, dx \, dy \\ &+ \langle u_{cr} - u_* - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)} \\ &\geq - \int_{\mathbb{R}_+^2} (\varphi - \xi_n) \partial_x \psi \, dx \, dy + \langle u_{cr} - u_* - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\langle \partial_x \varphi - u_*, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ - \int_{\mathbb{R}_+^2} (\varphi - \xi_n) \partial_x \psi \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - u_* - (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^+) \psi \, dx \, dy \right] = 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $\partial_x \varphi - u_*$  est une distribution positive sur  $\mathbb{R}_+^2$ , d'où l'existence d'une mesure positive  $\nu$  sur  $\mathbb{R}_+^2$  avec  $\partial_x \varphi = u_* + \nu$ . En plus,  $\nu$  est définie par :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2), \psi \geq 0, \nu(\psi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- \psi \, dx \, dy.$$

D'où le résultat. ■

On définit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; u_*(x, y) < u_{cr}\},$$

**Proposition 10.** *Sous les notations précédentes, on a  $\nu(A) = 0$ .*

**Preuve** Considérons pour tout  $m \geq 1$ , les ensembles

$$A_m = \cup_{m \geq 1} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2; u_*(x, y) \leq u_{cr} - \frac{1}{m} \right\},$$

on a alors

$$A = \cup_{m \geq 1} A_m.$$

#### 4.4. Le problème dual

Comme  $\{A_m\}_{m \geq 1}$  est une suite croissante d'ensembles  $\nu$ -mesurables alors

$$\nu(A) = \nu(\cup_{m \geq 1} A_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \nu(A_m).$$

A ce stade, il suffit de montrer que  $\nu(A_m) = 0$ .

Pour ce faire,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- dx dy \\ &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_m} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- dx dy \\ &\geq \frac{1}{m^2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_m} (u_{cr} - \partial_x \xi_n)^- dx dy \\ &= \frac{1}{m^2} \nu(A_m) \geq 0. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. ■

**Proposition 11.** *Le couple de fonctions  $(u_*, v_*)$  défini par le théorème (11) est unique.*

**Preuve** Soient  $(u_*, v_*)$  et  $(\tilde{u}_*, \tilde{v}_*)$  deux solutions définies comme dans le théorème (11) et soient  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  et  $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$  deux suites minimisantes de (4.27) (dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ ) telles que :

1.  $\{\partial_y \varphi_n\}_{n=1}^\infty$  et  $\{\partial_y \psi_n\}_{n=1}^\infty$  convergent fortement vers  $v_*$  et  $\tilde{v}_*$  respectivement dans  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ .
2.  $\{u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^+\}_{n=1}^\infty$  et  $\{u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^+\}_{n=1}^\infty$  convergent vers  $u_*$  et  $\tilde{u}_*$  fortement dans  $L^3(\mathbb{R}_+^2)$  et faiblement dans  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^- dx dy = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - \tilde{u}_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^- dx dy = 0$ .

On a pour tout  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} g(u_*) \partial_x \xi dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} v_* \partial_y \xi dx dy + b(\xi) = 0$$

et

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} g(\tilde{u}_*) \partial_x \xi dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} \tilde{v}_* \partial_y \xi dx dy + b(\xi) = 0.$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient que pour tout  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)/\mathbb{R}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (g(u_*) - g(\tilde{u}_*)) \partial_x \xi dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} (v_* - \tilde{v}_*) \partial_y \xi dx dy = 0.$$



#### 4.4. Le problème dual

---

On note, après avoir remplacé  $\xi$  par  $\varphi_n - \psi_n$ ,

$$(*) = \int_{\mathbb{R}_+^2} (g(u_*) - g(\tilde{u}_*)) \partial_x(\varphi_n - \psi_n) dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} (v_* - \tilde{v}_*) \partial_y(\varphi_n - \psi_n) dx dy.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{\mathbb{R}_+^2} (g(u_*) - g(\tilde{u}_*)) [(u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^+) - (u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^+)] dx dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+^2} \underbrace{(g(u_*) - g(\tilde{u}_*)) [(u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^- - (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^-]} dx dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+^2} (v_* - \tilde{v}_*) (\partial_y \varphi_n - v_*) dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} (v_* - \tilde{v}_*)^2 dx dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+^2} (v_* - \tilde{v}_*) (\tilde{v}_* - \partial_y \psi_n) dx dy. \end{aligned}$$

Il découle de  $(*) = 0$  que :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+^2} \underbrace{(g(u_*) - g(\tilde{u}_*)) [(u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^- - (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^-]} dx dy = \\ &- \int_{\mathbb{R}_+^2} (g(u_*) - g(\tilde{u}_*)) [(u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^+) - (u_{cr} - (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^+)] dx dy \\ &- \int_{\mathbb{R}_+^2} (v_* - \tilde{v}_*) (\partial_y \varphi_n - v_*) dx dy - \int_{\mathbb{R}_+^2} (v_* - \tilde{v}_*)^2 dx dy - \int_{\mathbb{R}_+^2} (v_* - \tilde{v}_*) (\tilde{v}_* - \partial_y \psi_n) dx dy. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \underbrace{(g(u_*) - g(\tilde{u}_*)) [(u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^- - (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^-]} dx dy \\ &= \frac{\gamma + 1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - \tilde{u}_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^- dx dy \\ &- \frac{\gamma + 1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - \tilde{u}_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^- dx dy \\ &- \frac{\gamma + 1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^- dx dy \\ &+ \frac{\gamma + 1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^- dx dy \\ &= I_n^1 - I_n^2, \end{aligned}$$

## 4.5. Erreur de troncature

où

$$\begin{aligned}
I_n^1 &= \frac{\gamma + 1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - \tilde{u}_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^- dx dy \\
&+ \frac{\gamma + 1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^- dx dy, \\
I_n^2 &= \frac{\gamma + 1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - \tilde{u}_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \psi_n)^- dx dy \\
&+ \frac{\gamma + 1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_{cr} - u_*)^2 (u_{cr} - \partial_x \varphi_n)^- dx dy.
\end{aligned}$$

En se servant des propriétés de deux suites  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  et  $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ , on obtient que la suite  $\{I_n^2\}_{n=1}^\infty$  converge vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini. Ensuite, la croissance de la fonction  $g$  entraîne que la suite  $\{I_n\}_{n=1}^\infty$  admet une limite négative quand  $n$  tend vers l'infini. Il s'ensuit que la suite positive  $\{I_n^1\}_{n=1}^\infty$  admet une limite négative quand  $n$  tend vers l'infini. D'où la convergence de  $\{I_n^1\}_{n=1}^\infty$  vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

Finalement, par passage à la limite sur  $n$ , il vient :

$$(g(u_*) - g(\tilde{u}_*))(u_* - \tilde{u}_*) = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2 \text{ et } (v_* - \tilde{v}_*)^2 = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2.$$

Mais comme  $g$  est croissante alors  $u_* = \tilde{u}_*$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ ,  $v_* = \tilde{v}_*$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ . ■

## 4.5 Erreur de troncature

Dans toute la suite on supposera que  $R_x = R_y = R$ , on notera  $\Omega_R = ]-R, R[ \times ]0, R[$  et  $\inf_{\xi \in V(\Omega_R)} F_R(\xi) = \mathcal{L}_R$  où

$$F_R(\xi) = \int_{\Omega_R} G(\partial_x \xi) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} (\partial_y \xi)^2 dx dy + \sqrt{M_\infty} \int_{\Gamma_p} z' \xi dx,$$

pour tout  $\xi$  dans  $V(\Omega_R)$ .

Dans le deuxième chapitre, on a montré l'existence d'un unique couple  $(u_R, v_R)$  dans  $L^3(\Omega_R) \times L^2(\Omega_R)$  tel que :

$$\mathcal{L}_R = \int_{\Omega_R} \left( G(u_R) - u_R g(u_R) - \frac{1}{2} v_R^2 \right) dx dy.$$

Ensuite on a prouvé dans le quatrième chapitre l'existence d'un unique couple  $(u, v)$  dans  $(L^2(\mathbb{R}_+^2) \cap L^3(\mathbb{R}_+^2)) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)$  tel que :

$$\mathcal{L} = \inf_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} F(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( G(u) - u g(u) - \frac{1}{2} v^2 \right) dx dy,$$

## 4.5. Erreur de troncature

---

où

$$F(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^2} G(\partial_x \xi) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (\partial_y \xi)^2 dx dy + \sqrt{M_\infty} \int_{\Gamma_p} z' \xi dx.$$

Dans cette partie, on s'intéresse à estimer la différence entre  $(u, v)$  et  $(u_R, v_R)$  en norme  $L^3 \times L^2$  (erreur de troncature).

Pour ce faire, on montre que :

- $\{\mathcal{L}_R\}_R$  est une suite croissante majorée par  $\mathcal{L}$ .
- Si pour tout  $R > 1$  on désigne par  $(U_R, V_R)$  le prolongement de  $(u_R, v_R)$  par zéro dans  $\mathbb{R}_+^2$  alors  $(U_R, V_R)$  est une suite de Cauchy dans  $L^3(\mathbb{R}_+^2) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)$ .

Afin d'établir ces résultats, on choisit deux réels strictement positifs  $R, R'$  tels que  $1 < R \leq R'$ .

On commence par démontrer le premier point. D'après la définition de  $F_R$ , on a  $F_R(\xi) \leq F_{R'}(\xi)$  et ceci pour tout  $\xi$  dans  $V(\Omega_{R'})$  ( $\Omega_R \subset \Omega_{R'}$  et " $V(\Omega_{R'}) \subset V(\Omega_R)$ "). Donc, par passage à la limite inf sur  $V(\Omega_{R'})$ , on trouve

$$\inf_{\xi \in V(\Omega_{R'})} F_R(\xi) \leq \inf_{\xi \in V(\Omega_{R'})} F_{R'}(\xi) = \mathcal{L}_{R'}. \quad (4.53)$$

Ensuite

$$\mathcal{L}_R = \inf_{\xi \in V(\Omega_R)} F_R(\xi) \leq \inf_{\xi \in V(\Omega_{R'})} F_R(\xi). \quad (4.54)$$

Une combinaison de (4.53) et (4.54) entraîne que  $\mathcal{L}_R \leq \mathcal{L}_{R'}$ . De la même manière, on a  $\mathcal{L}_R \leq \mathcal{L}$ .

Il s'ensuit que  $\{\mathcal{L}_R\}_R$  converge vers une limite qu'on note  $l \leq \mathcal{L}$ .

Pour le second, pour tout élément  $\xi$  dans  $V(\Omega_{R'})$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} g(u_R) \partial_x \xi dx dy + \int_{\Omega_R} v_R \partial_y \xi dx dy + b(\xi) &= 0, \\ \int_{\Omega_{R'}} g(u_{R'}) \partial_x \xi dx dy + \int_{\Omega_{R'}} v_{R'} \partial_y \xi dx dy + b(\xi) &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} (g(u_R) - g(u_{R'})) \partial_x \xi dx dy + \int_{\Omega_R} (v_R - v_{R'}) \partial_y \xi dx dy \\ + \int_{\Omega_{R'} \setminus \Omega_R} (-g(u_{R'}) \partial_x \xi - v_{R'} \partial_y \xi) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Soit  $\xi_n^{R'}$  une suite dans  $V(\Omega_{R'})$  telle que

$$\mathcal{L}_{R'} \leq F_{R'}(\xi_n^{R'}) < \mathcal{L}_{R'} + \frac{1}{n}.$$

#### 4.5. Erreur de troncature

En remplaçant  $\xi$  par  $\xi_n^{R'}$  et en passant à la limite, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R} (g(u_R) - g(u_{R'}))u_{R'} \, dx \, dy - \frac{\gamma+1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_R} (u_{cr} - u_R)^2 (u_{cr} - \partial_x \xi_n^{R'})^- \, dx \, dy \\ & + \int_{\Omega_R} (v_R - v_{R'})v_{R'} \, dx \, dy + \int_{\Omega_{R'} \setminus \Omega_R} (-g(u_{R'})u_{R'} - v_{R'}^2) \, dx \, dy \\ & - \frac{\gamma+1}{2} u_{cr}^2 \nu_{R'}(\Omega_{R'} \setminus \Omega_R) = 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_R} (u_{cr} - u_R)^2 (u_{cr} - \partial_x \xi_n^{R'})^- \, dx \, dy < +\infty$  et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R} (g(u_R) - g(u_{R'}))u_{R'} \, dx \, dy + \int_{\Omega_R} (v_R - v_{R'})v_{R'} \, dx \, dy \\ & + \int_{\Omega_{R'} \setminus \Omega_R} (-g(u_{R'})u_{R'} - v_{R'}^2) \, dx \, dy \geq 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{R'} - \mathcal{L}_R & - \int_{\Omega_R} \left( G(u_{R'}) - G(u_R) - (u_{R'} - u_R)g(u_R) + \frac{1}{2}(v_{R'} - v_R)^2 \right) \, dx \, dy \\ & = \int_{\Omega_R} ((g(u_R) - g(u_{R'}))u_{R'} + (v_R - v_{R'})v_{R'}) \, dx \, dy \\ & + \int_{\Omega_{R'} \setminus \Omega_R} \left( G(u_{R'}) - u_{R'}g(u_{R'}) - \frac{1}{2}v_{R'}^2 \right) \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (4.56)$$

L'inégalité (4.55) entraîne :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{R'} - \mathcal{L}_R & \geq \int_{\Omega_R} \left( G(u_{R'}) - G(u_R) - (u_{R'} - u_R)g(u_R) + \frac{1}{2}(v_{R'} - v_R)^2 \right) \, dx \, dy \\ & + \int_{\Omega_{R'} \setminus \Omega_R} \left( G(u_{R'}) + \frac{1}{2}v_{R'}^2 \right) \, dx \, dy \\ & = \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( G(U_{R'}) - G(U_R) - (U_{R'} - U_R)g(U_R) + \frac{1}{2}(V_{R'} - V_R)^2 \right) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Ensuite, l'inégalité

$$\forall s, t \in \mathbb{R}; \quad s, t \leq u_{cr}, \quad G(s) - G(t) - (s - t)g(t) \geq \frac{\gamma+1}{6} |s - t|^3$$

jointe à la croissance et la convergence de la suite  $\{\mathcal{L}_R\}_R$  entraîne que que  $(U_R, V_R)$  est une suite de Cauchy dans  $L^3(\mathbb{R}_+^2) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)$ . D'où l'existence d'un couple  $(U, V)$  dans  $L^3(\mathbb{R}_+^2) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)$  tel que  $(U_R, V_R)$  converge vers  $(U, V)$  dans  $L^3(\mathbb{R}_+^2) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)$ . D'un autre côté, comme pour tous  $s, t$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $s, t \leq u_{cr}$ , on a :

$$G(s) - G(t) - (s - t)g(t) = \frac{\gamma+1}{2}(s - t)^2 - \frac{\gamma+1}{6}(s - t)^3 - \frac{\gamma+1}{2}t(s - t)^2,$$

#### 4.5. Erreur de troncature

---

alors

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma+1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} |U_{R'} - U_R|^2 dx dy \\
& \leq \mathcal{L}_{R'} - \mathcal{L}_R + \frac{\gamma+1}{6} \int_{\mathbb{R}_+^2} |U_{R'} - U_R|^3 dx dy + \frac{\gamma+1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} U_R (U_{R'} - U_R)^2 dx dy \\
& \leq \mathcal{L}_{R'} - \mathcal{L}_R + \frac{\gamma+1}{6} \int_{\mathbb{R}_+^2} |U_{R'} - U_R|^3 dx dy + \frac{\gamma+1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} |U_R|^3 dx dy \right)^{\frac{1}{3}} \\
& \times \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} |U_{R'} - U_R|^3 dx dy \right)^{\frac{2}{3}},
\end{aligned}$$

et la suite  $U_R$  converge vers  $U$  fortement dans  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ .

Puisque  $U_R$  converge vers  $U$  dans  $L^3(\mathbb{R}_+^2)$  alors il existe une sous-suite extraite de  $U_R$  qui converge presque partout vers  $U$ . Ensuite,  $U_R \leq u_{cr}$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$  entraîne que  $U \leq u_{cr}$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ .

Soit  $\xi$  un élément dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ . On sait d'après le deuxième chapitre que :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (g(U_R) \partial_x \xi + V_R \partial_y \xi) dx dy + b(\xi) = 0.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}_+^2} [(g(U_R) - g(U)) \partial_x \xi + (V_R - V) \partial_y \xi] dx dy \right| \\
& \leq \frac{\gamma+1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} |[2u_{cr}(U_R - U) + (U_R - U)^2 + 2U_R(U - U_R)] \partial_x \xi| dx dy \\
& + \int_{\mathbb{R}_+^2} |(V_R - V) \partial_y \xi| dx dy \\
& \leq (\gamma+1) \left[ u_{cr} \|U_R - U\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2} \|\partial_x \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2} + \|U_R - U\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2}^2 \|\partial_x \xi\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2} \right. \\
& \left. + 2 \|U_R\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2} \|U - U_R\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2} \|\partial_x \xi\|_{0,3,\mathbb{R}_+^2} \right] + \|V_R - V\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2} \|\partial_y \xi\|_{0,2,\mathbb{R}_+^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,  $(U, V)$  appartient à  $(L^3(\mathbb{R}_+^2) \cap L^2(\mathbb{R}_+^2)) \times L^2(\mathbb{R}_+^2)$ ,  $U \leq u_{cr}$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$  et pour tout  $\xi$  dans  $V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (g(U) \partial_x \xi + V \partial_y \xi) dx dy + b(\xi) = 0.$$

## 4.6. Conclusion et perspectives

---

$$\begin{aligned}
\text{Ensuite, } l &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( G(U) - Ug(U) - \frac{1}{2}V^2 \right) dx dy \text{ puisque } l = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_R \text{ et} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left[ G(U) - Ug(U) + \frac{1}{2}V^2 - \left( G(U_R) - U_Rg(U_R) - \frac{1}{2}V_R^2 \right) \right] dx dy \\
&= \frac{\gamma + 1}{3} \int_{\mathbb{R}_+^2} [(U - U_R)^3 + 3UU_R(U - U_R)] dx dy \\
&\quad - \frac{\gamma + 1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} [(U - U_R)^2 + 2U_R(U - U_R)] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} (V^2 - V_R^2) dx dy.
\end{aligned}$$

On déduit qu'il existe un couple  $(U, V)$  dans  $\tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R}_+^2)$  tel que :

i)  $\forall \xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} g(U) \partial_x \xi dx dy + \int_{\mathbb{R}_+^2} V \partial_y \xi dx dy + b(\xi) = 0.$$

ii)  $U \leq u_{cr}$  p.p. dans  $\mathbb{R}_+^2$ .

iii)

$$\inf_{\xi \in V(\mathbb{R}_+^2, \omega_1)} F(\xi) = \mathcal{L} \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( G(U) - Ug(U) - \frac{1}{2}V^2 \right) dx dy.$$

Ainsi on ne peut pas conclure sur l'égalité entre  $(U, V)$  et  $(u, v)$  et par conséquent on ne peut pas confirmer que  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \|u_R - u\|_{0,3,\Omega_R} = 0$  et  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \|v_R - v\|_{0,3,\Omega_R} = 0$ . ■

## 4.6 Conclusion et perspectives

Ce chapitre concerne les écoulements subsoniques d'un gaz parfait établi autour d'un profil mince placé en atmosphère infinie. Le problème est décrit par une équation non linéaire elliptique dégénérée. Afin de résoudre ce problème, on minimise la fonctionnelle représentant "l'énergie totale" du système. Ensuite, on prouve l'existence d'une unique solution  $(u_*, v_*)$  pour le problème dual associé satisfaisant :

$$\begin{cases} \partial_x(g(u_*)) + \partial_y v_* = 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2, \\ u_* \leq u_{cr} \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+^2. \end{cases}$$

Puis dans le cas où l'écoulement est sous-sonique, on montre l'existence d'une unique solution du problème initial dont le gradient n'est autre que  $(u_*, v_*)$ . Ensuite, on prouve sous certaine condition l'existence d'une fonction  $\varphi$  liée à  $(u_*, v_*)$  par une relation analogue à celle obtenue dans le cas borné. Cette condition dérive dans le cas borné de l'inégalité de Poincaré dans  $W^{1,1}$ . Ensuite, on donne quelques idées pour estimer l'erreur de troncature entre la solution du problème dual définie dans le cas borné et celle définie sur le demi-plan.

Nos perspectives de recherche dans cette direction sont :

## 4.6. Conclusion et perspectives

---

- Estimer l'erreur de troncature.
- Etablir l'existence de  $\varphi$  sans aucune contrainte.
- Etablir la dépendance de  $(u_*, v_*)$  par rapport à  $M_\infty$ .





# Bibliographie

- [1] R. Adams, *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] J.J. Alibert and G. Bouchitté, *Non-uniform integrability and generalized Young measures*. J. Convex Anal. 4, n°1, pp. 129-147, 1997.
- [3] M. Amara, A. Obeid and G. Vallet, *Existence results for a degenerated non-linear elliptic problem*. Prépublication de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour n°2001/30, 2001.
- [4] M. Amara, A. Obeid and G. Vallet, *A relaxed formulation for a degenerated elliptic non-linear equation*. Prépublication de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour n°2001/31, 2001.
- [5] L. Ambrosio, *Existence theory for a new class of variational problems*. Arch. Ration. Mech. Anal. 111, n°4, pp.291-322, 1990.
- [6] L. Ambrosio, *On the lower semicontinuity of quasiconvex integrals in  $SBV(\Omega, \mathbb{R}^k)$* . Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 23, n°3, pp.405-425, 1994.
- [7] L. Ambrosio, A. Braides and A. Garroni, *Special functions with bounded variation and with weakly differentiable traces on the jump set*. NoDEA, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 5, n°2, pp.219-243, 1998.
- [8] C. Amrouche, V. Girault and J. Giroire, *Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in  $\mathbb{R}^n$* . J. Math. Pures et Appl., IX. Ser. 73, n°6, pp.579-606, 1994.
- [9] C. Amrouche, V. Girault and J. Giroire, *Dirichlet and Neumann exterior problems for the  $n$ -dimensional Laplace operator : an approach in weighted Sobolev spaces*. J. Math. Pures et Appl., Ser. 76, n°1, pp.55-81, 1997.
- [10] C. Amrouche and S. Nečasova, *Laplace equation in the half-space with a nonhomogeneous Dirichlet boundary condition*. Math. Bohem. 126, n°2, pp.265-274, 2001.
- [11] C. Baiocchi, G. Buttazzo, F. Gastaldi and F. Tomarelli, *General existence theorems for unilateral problems in continuum mechanics*. Arch. Ration. Mech. Anal. 100, n°2, pp.149-189, 1988.
- [12] G. Bouchitté and G. Dal Maso, *Integral representation and relaxation of convex local functionals on  $BV(\Omega)$* . Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 20, n°4, pp.483-533, 1993.
- [13] G. Bouchitté, I. Fonseca and L. Mascarenhas, *A global method for relaxation*. Arch. Ration. Mech. Anal. 145, n°1, pp.51-98, 1998.

- [14] G. Bouchitté, I. Fonseca and L. Mascarenhas, *Relaxation of variational problems under trace constraints*. Nonlinear Analysis, n°49, pp.221-246, 2002.
- [15] T. Z. Boulmezaoud, *Espaces de Sobolev avec poids pour l'équation de Laplace dans le demi-espace*. C. R. Acad. Sci., T. 328, Série I, pp.221-226, 1999.
- [16] A. Braides and V. Chiadò Piat, *A derivation formula for convex integral functionals defined on  $BV(\Omega)$* . J. Convex Anal. 2, n°1/2, pp.69-85, 1995.
- [17] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*. Masson, Paris, 1992.
- [18] E. Casas, K. Kunisch and C. Pola, *Regularization by functions of bounded variation and applications to image enhancement*. Appl. Math. Optimization 40, n°2, pp.229-257, 1999.
- [19] J. F. Ciavaldini, M. Pogu and G. Tournemine, *Un théorème d'existence et d'unicité concernant les écoulements compressibles autour d'un profil à pointe*. Rev. Roum. Math. Pures Appl, 27, n°3, pp.291-298, 1982.
- [20] J. D. Cole and J. Kevorkian, *Perturbation methods in applied mathematics*. Springer-Verlag, 1980.
- [21] J.D. Cole and L.P. Cook, *Transonic aerodynamics*. North Holland, 1986.
- [22] G.S. Dulikravich, *Analysis of artificial dissipation models for the transonic full-potential equations*. A.I.A.A. Journal, 26, n°10, pp.1238-1245, 1988.
- [23] I. Ekeland and R. Temam, *Convex analysis and variational problems*. North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [24] D. Euvrard and G. Tournemine, *Méthode directe de calcul de l'écoulement sonique autour d'un profil d'aile donnée. Cas d'un écoulement symétrique*. J. Mec., Paris 12, pp.419-461, 1973.
- [25] L.C. Evans and R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in advanced mathematics, CRC Press, London, 1992.
- [26] I. Fonseca and S. Mueller, *Relaxation of quasiconvex functionals in  $BV(\Omega, \mathbb{R}^p)$  for integrands  $f(x, u, \nabla u)$* . Arch. Ration. Mech. Anal. 123, n°1, pp.1-49, 1993.
- [27] H.P. Gittel, *Studies on transonic flow problems by nonlinear variational inequalities*. Z. Anal. Anwend. 6, pp.449-458, 1987.
- [28] H.P. Gittel, *A variational approach to transonic potential flow problems*. Math. Meth. Appl. Sci., 23, pp.1347-1372, 2000.
- [29] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Birkhäuser, Basel, 1983.
- [30] B. Hanouzet, *Espaces de Sobolev avec poids, application au problème de Dirichlet dans un demi espace*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 46, pp.227-272, 1971.
- [31] A. Jameson, *Transonic flow calculation, in numerical methods in fluids dynamics*. H.J. Wirz & J.J. Smolder eds., Mac Graw Hill, 1978.
- [32] D. Kinderlehrer and P. Pedregal : *Weak convergence of integrands and the Young measure representation*. SIAM J. Math. Anal. 23, n°1, pp.1-19, 1992.

- [33] P. Klouček and J. Nečas, *The solution of transonic flow problems by the method of stabilization*. Appl. Anal. 37, n°1-4, pp.143-167, 1990.
- [34] P. Klouček, *On the existence of the entropic solution for the transonic flow problem*. Nonlinear Anal. Theory methods Appl. 22, n°4, pp.467-480, 1994.
- [35] A. Kufner, *Weighted Sobolev spaces*. Chichester, Wiley, 1985.
- [36] A. Kufner and B. Opic, *Hardy - type inequalities*. New York, Wiley, 1985.
- [37] C.S. Morawetz, *On a weak solution for a transonic flow problem*. Comm. Pure Appl. Math. 38, n°6, pp.797-817, 1985.
- [38] F. Murat, *Compacité par compensation*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 5, pp. 489-507, 1978.
- [39] J. Nečas, *Ecoulements de fluide, compacité par entropie*. Masson, Paris, 105p., 1989.
- [40] M. Pogu and G. Tournemine, *Modélisation et résolution d'équations de la mécanique des milieux continus*. Ellipses, 1992.
- [41] M. Pogu and G. Tournemine, *Some mechanical and mathematical aspects on transonic flows*. Ann. Sci. Math. Québec 24, n°1, pp.87-106, 2000.
- [42] J. F. Rodrigues, *Obstacle problems in mathematical physics*. Lisbon, 1986.
- [43] T. Roubicek, *Relaxation of vectorial variational problems*. Math. Bohem. 120, n°4, pp.411-430, 1995.
- [44] R. Temam, *Navier-Stockes equations*. North-Holland, Amsterdam, 1979.