



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude et à la modélisation d'un modèle de convection-diffusion dégénéré: application à l'étude du comportement migratoire des civelles dans l'estuaire de l'Adour

Olivier Pardo

► **To cite this version:**

Olivier Pardo. Contribution à l'étude et à la modélisation d'un modèle de convection-diffusion dégénéré: application à l'étude du comportement migratoire des civelles dans l'estuaire de l'Adour. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2002. Français. NNT: . tel-00002291

**HAL Id: tel-00002291**

**<https://theses.hal.science/tel-00002291>**

Submitted on 18 Jan 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Contribution à l'étude et à la modélisation  
d'un modèle de convection-diffusion  
dégénéré

---

*Application à l'étude du comportement migratoire  
des civelles dans l'estuaire de l'Adour*

Olivier Pardo

Mémoire de Thèse

16 Décembre 2002



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Avant-Propos</b>	<b>7</b>
<b>II</b>	<b>Description du comportement migratoire des civelles dans l'estuaire de l'Adour</b>	<b>15</b>
1.1	Présentation du bassin de l'Adour . . . . .	17
1.2	Aspects biologiques du cycle de vie de l'anguille . . . . .	17
1.3	Modes de pêche . . . . .	23
1.3.1	La pêche professionnelle . . . . .	23
1.3.2	Méthode d'échantillonnage . . . . .	23
1.4	Rôle de la civelle dans l'économie locale . . . . .	26
<b>III</b>	<b>Description du cadre d'étude et présentation des variables utilisées</b>	<b>29</b>
<b>1</b>	<b>Présentation du cadre d'étude</b>	<b>31</b>
<b>2</b>	<b>Présentation des différents modèles</b>	<b>33</b>
2.1	Modèle de la vitesse du courant : équations de Saint-Venant (shallow water)	33
2.2	Modèle de l'indice d'éclairement dans la colonne d'eau . . . . .	35
2.3	Modèle de l'évolution de la densité des civelles . . . . .	38
2.3.1	Conditions de migration . . . . .	38
2.3.2	Obtention de l'équation de densité de civelles . . . . .	39

<b>IV</b>	<b>Résultats mathématiques</b>	<b>47</b>
<b>1</b>	<b>Résultats mathématiques pour l'équation de la civelse (III.7)</b>	<b>49</b>
1.1	Démonstration de la positivité . . . . .	49
1.2	Estimation de la solution dans l'espace $L^1(\Omega)$ . . . . .	51
1.3	Estimation de la solution dans l'espace $L^2(\Omega)$ . . . . .	52
<b>2</b>	<b>Recherche de solutions stationnaires des équations courant (III.1) et luminosité (III.4)</b>	<b>59</b>
2.1	Rappels sur la théorie du degré topologique . . . . .	59
2.1.1	Degré topologique de Leray-Schauder . . . . .	60
2.2	L'équation du courant . . . . .	63
2.2.1	Recherche de solutions particulières du système (IV.2) . . . . .	64
2.2.2	Recherche de solutions plus générales du système (IV.2) . . . . .	67
2.3	L'équation de l'intensité lumineuse dans la colonne d'eau . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Recherche de solutions de l'équation civelse (III.7)</b>	<b>75</b>
3.1	Résolution des équations d'évolution à l'aide de la théorie des semi-groupes - Rappels . . . . .	77
3.1.1	Opérateurs accréatifs . . . . .	77
3.1.2	Semi-groupes linéaires . . . . .	79
3.2	Etude dans la zone $\mathcal{A}$ . . . . .	83
3.3	Etude dans les zones $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ . . . . .	93
3.3.1	Dans la zone $\mathcal{B}$ . . . . .	93
3.3.2	Dans la zone $\mathcal{D}$ . . . . .	96
3.4	Etude dans la zone $\mathcal{C}$ . . . . .	99
3.5	Conclusion et perspectives de la partie théorique . . . . .	103
<b>V</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>105</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>107</b>
1.1	Cadre d'étude . . . . .	107
1.2	Présentation de l'algorithme de résolution numérique de l'équation civelse .	109

1.2.1	Principe des directions alternées - Présentation de notre algorithme	110
<b>2</b>	<b>Visualisation des résultats</b>	<b>115</b>
2.1	Outil de visualisation . . . . .	115
2.2	Comparatif “canal” - “réel” . . . . .	116
2.2.1	Comparatif au 16.12.1997. . . . .	117
2.2.2	Commentaires préliminaires : . . . . .	121
2.3	Evolution du comportement migratoire sur 30 jours. . . . .	121
2.3.1	Commentaires et discussion : . . . . .	128
<b>VI</b>	<b>Annexe</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>Démonstration de la proposition IV.1</b>	<b>139</b>
<b>B</b>	<b>Global stability for a Phytoplankton-Nutrient system</b>	<b>145</b>
<b>C</b>	<b>Weight-controlled recruitment of the anchovy in the late larval stage</b>	<b>165</b>





# Première partie

## Avant-Propos



Avec l'accroissement continu de la population mondiale, de plus en plus de pays se sont tournés vers l'exploitation intensive des ressources maritimes. La crise agricole (ESB, fièvre aphteuse, la tremblante du mouton, Dioxine du poulet,...) que subit de plein fouet actuellement l'Europe toute entière et qui se propage mondialement montre les limites de l'élevage intensif. Par contre, elle a permis de mettre en lumière chez les consommateurs que nous sommes, une nouvelle façon de consommer : Le *BIO*, et qui est plus bio qu'un poisson frais, sauvage, aux yeux bleus, pêché par nos gaillards matelots près de nos côtes ?

Cette nouvelle démarche, additionnée à une surexploitation mondiale des ressources maritimes, doit nous faire prendre conscience que ces ressources, si importantes de nos jours, ne sont pas infinies. Si la destruction d'une forêt est apparente à nos yeux, la destruction de la faune maritime est, elle, malheureusement invisible. Depuis les années 70 l'opinion publique a été alertée par les associations écologiques sur ces problèmes. Que ce soient les questions de marées noires, qui hélas sont encore présentes dans nos mémoires (dernièrement l'Erika ou encore l'Exxon-Valdez), de pollutions chimiques, de surexploitation, la mer est un milieu fragile dont les capacités de production ne sont pas sans limites. Avec l'ouverture de l'Europe des 15 et la mondialisation de l'économie, le problème de la pêche et de sa réglementation s'est imposé comme une nécessité. Beaucoup de villes côtières d'Europe, et d'ailleurs, tirent leurs principales ressources économiques de la pêche ciblée de certaines espèces (par exemple les pêcheurs professionnels de l'estuaire de l'Adour avec la pêche de la civelle, du saumon, de l'alose ou encore de la lamproie ; les pêcheurs de la côte Basque avec la pêche de l'anchois ou du thon). La surexploitation d'une de ces espèces peut induire une baisse des ressources économiques de la région considérée et entraîner la raréfaction de cette espèce.

Rappelons ici que l'anguille européenne (*Anguilla anguilla*) est une espèce exploitée à la fois dans les eaux douces, saumâtres et maritimes de la zone européenne. L'importance de la pêche en général dans l'économie du littoral basque, et singulièrement celle de la civelle, mets extrêmement apprécié et coûteux dans cette région ainsi que dans la région voisine, de l'autre versant des Pyrénées, explique l'intérêt tout particulier présenté par l'étude sur le fleuve Adour, dont la description sera effectuée dans la section suivante. Des études récentes ont attiré l'attention sur le déclin prononcé des captures de cette espèce durant les vingt dernières années, avec en particulier l'effondrement spectaculaire de certaines pêcheries comme le montre la lecture des tableaux 1 et 2 de la section suivante. La situation

est arrivée au point où l'application du principe de précaution semble devoir aboutir à une interdiction de la pêche ou à des restrictions sur son exploitation. L'importance socio-économique de cette pêcherie rend pour l'instant difficile l'élaboration d'une politique qui aboutirait à une remise en cause même partielle de cette activité. Sur le plan européen un groupe d'experts estime que près de 25000 personnes vivent directement du produit de cette pêche et pour le bassin de l'Adour la pêche de la civelle contribue pour environ 75 % au chiffre d'affaires annuel ; M. Maumus [26]. D'autre part, il se pose un réel problème de connaissance scientifique qui fait que l'on ne sait pas aujourd'hui exactement si la diminution constatée est le résultat d'une surexploitation ou si elle traduit une dégradation plus globale de l'environnement.

Les experts de la communauté européenne doivent tenir compte de tous ces paramètres socio-économiques et scientifiques avant de prendre des décisions de réglementation et d'encadrement de l'exploitation. L'une des questions posées aux scientifiques, concernant l'exploitation de la ressource elle-même, est de déterminer de manière aussi précise que possible cette ressource. La difficulté de la tâche réside dans le fait que la ressource est invisible, mobile et dispersée, cela vaut pour toutes les espèces marines ou aquatiques exploitées à l'état naturel.

Il existe plusieurs méthodes pour l'estimation de la ressource. L'une des premières, historiquement, se fondait sur l'hypothèse de stationnarité et de stabilité de la ressource. On suppose alors que la population exploitée se trouve dans un équilibre stable et que la pêche ne crée qu'une petite perturbation qui est détruite (ou compensée) par reproduction. On travaille alors avec des systèmes statiques avec des paramètres représentant les traits démographiques, physiques et d'exploitation. Cette méthode a été mise en défaut dans la plupart des pêcheries par l'apparition de fluctuations importantes allant parfois jusqu'à des phases de quasi-extinction qui ont imposé le rôle de la dynamique. Les statistiques offrent actuellement les techniques d'estimations les plus populaires. En s'appuyant sur un minimum d'hypothèses concernant le cycle de vie de l'espèce et de son environnement, les statistiques visent à déduire des données recueillies auprès des pêcheurs, autant que des campagnes à la mer, des estimations de divers indicateurs de l'état actuel de la ressource et des prévisions sur l'état dans un futur proche. La qualité de ces estimations se heurte toutefois aux connaissances fondamentales que l'on a sur le fonctionnement de la population exploitée. Dans le cas de l'anchois du Golfe de Gascogne, *Engraulis encrasicolus*,

qui représente la principale pêcherie de cette région, les données des débarquements des pêcheurs, d'une part, des campagnes à la mer pour l'estimation des œufs et la collecte des informations météorologiques, d'autre part, sont utilisées depuis plusieurs années pour le calcul d'indicateurs qui servent ensuite dans les prises de décision concernant l'exploitation de cette espèce. Les écarts observés dans plusieurs cas entre les prévisions et les quantités réellement prises conduisent à mettre en doute les conditions d'estimation statistiques. Ce qui est en cause dans ces calculs, ce n'est pas l'outil statistique, ce sont les modèles utilisés : ainsi, il n'est sans doute pas indifférent d'appliquer une mortalité larvaire moyenne répartie pendant la période de reproduction, de préférence à un scénario dans lequel la mortalité serait essentiellement concentrée dans les heures suivant la naissance. Il est également probablement important de tenir compte de la répartition spatialement hétérogène de la nourriture des larves dans le calcul du taux de croissance. Une évolution récente s'est fait jour dans les organismes incitateurs de la recherche pour favoriser le développement d'une modélisation plus proche du fonctionnement observé des espèces.

Le projet européen, conduit au sein de l'équipe du Professeur Ovide Arino, se situe dans cette ligne de recherche. Ayant pour objectif initial de produire un modèle de croissance et de survie de la larve sous l'action conjuguée de l'environnement physique (l'intensité du courant est fournie par un modèle de circulation) et biologique (le phytoplancton, considéré comme la nourriture principale des larves dans leur phase passive), la croissance par "broutage" du phytoplancton n'a pu être modélisée faute de données sur le phytoplancton.

Le travail présenté ici a son origine dans ce projet européen et comme objectif premier l'approfondissement du couplage larve-phytoplancton. Il s'agissait d'une part d'étudier les mécanismes de type seuil qui entrent en jeu dans le recrutement des larves, et, d'autre part, de coupler ce mécanisme avec la dynamique du phytoplancton. Le lecteur trouvera dans les deux travaux : O. Pardo and O. Arino [28] et O. Pardo [29], présentés dans les annexes B et C (à la fin de ce mémoire) une partie des recherches entreprises au début de la thèse.

Le premier travail avait pour objectif d'établir un modèle dynamique décrivant le stade larvaire passif des larves d'anchois (stade où elles sont le plus vulnérables) en vue de formuler le taux de recrutement de larves d'anchois passives dans le stade supérieur, dit actif. La croissance des larves dépend principalement de la quantité de nourriture présente

dans leurs voisinages. Ainsi, notre modèle est couplé à un modèle dynamique décrivant le système complexe phytoplancton-nutriments. L'étude de la stabilité des équilibres de ce dernier système nous a amené à produire le deuxième travail.

Pour des raisons indépendantes de la volonté de l'équipe d'accueil de cette thèse, il est apparu que la modélisation de la dynamique de l'anchois ne serait pas appuyée par des campagnes à la mer et qu'en particulier aucune donnée sur le phytoplancton n'était disponible. En même temps divers organismes liés à l'exploitation des ressources vivantes dans la région manifestaient un intérêt pour des efforts de modélisation sur la civelle. La partie principale de ce mémoire rend compte d'une part, de la modélisation de la dynamique de la civelle, et, d'autre part, de l'analyse du modèle.

# Introduction

La modélisation des flux de civelles s'insère dans le programme européen pluridisciplinaire DG XIV composé des équipes suivantes : biologistes du LHA<sup>1</sup> - IFREMER<sup>2</sup> de Bidart sous la direction de P. Prouzet, biologistes de l'EPHE<sup>3</sup> de Perpignan sous la direction de R. Lecomte-Finiger, numériciens de l'UPPA<sup>4</sup> sous la direction de M. Amara, statisticiens de l'INSA<sup>5</sup> de Toulouse sous la direction de B. Truong-Van, du LABSAD<sup>6</sup> de Grenoble sous la direction de G. Drouet d'Aubigny et enfin de l'équipe de Systèmes Dynamiques de l'UPPA sous la direction de O. Arino.

L'objectif, ambitieux, est d'aider à la gestion rationnelle de la pêche à la civelle, dans le double souci de préserver l'espèce, d'une part, et d'autre part, d'améliorer l'exploitation de cette ressource. L'étude se focalise sur le bassin de l'Adour, considéré comme zone-atelier dont les résultats seront transposables à de nombreuses autres rivières. Par ailleurs l'Adour présente des caractéristiques propres qui en font un terrain d'étude privilégié.

Nous présentons ici le fruit des recherches entreprises au sein de l'équipe de Systèmes Dynamiques.

Dans le but de rédiger un mémoire accessible à un large public pluridisciplinaire, le plan de ce manuscrit s'articule autour de plusieurs parties indépendantes. Si nécessaire, les notions de mathématiques employées dans une partie seront rappelées au début de celle-ci. De même, nous avons retranscrit la chronologie de notre travail dans la rédaction.

La première partie est consacrée à la description du comportement migratoire des civelles dans l'estuaire de l'Adour. Nous exposons aussi la méthode d'échantillonnage mise

---

<sup>1</sup>Laboratoire Halieutique d'Aquitaine

<sup>2</sup>Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la MER

<sup>3</sup>Ecole Pratique des Hautes Etudes

<sup>4</sup>Université de Pau et des Pays de l'Adour

<sup>5</sup>Institut National des Sciences Appliquées

<sup>6</sup>Laboratoire de Statistique et Analyse de Données

en place par l'équipe de biologistes du LHA de Bidart, les données recueillies devant être, par la suite, exploitées numériquement ; le mode de pêche professionnel y est également détaillé. En conclusion de cette première partie nous avons mis l'accent sur le rôle joué par les civelles dans l'économie locale et mis en lumière l'importance que pouvait avoir ce travail au sein du programme européen.

De la description du comportement migratoire des civelles et dans le but d'établir notre modèle dans la deuxième partie, nous avons retenu les recommandations des biologistes et halieutes. Il s'agit d'un système d'équations qui même dans le cas simplifié du modèle canal présente des difficultés importantes. C'est une équation d'évolution défini par un opérateur de migration qui change de type à la fois dans l'espace et au cours du temps. La variabilité temporelle est la plus intéressante puisqu'elle est associée à la marée qui est le phénomène physique crucial pour l'arrivée et le déplacement des civelles dans l'estuaire. Pour des raisons de temps, mais aussi du fait des incertitudes ayant pesé sur le choix du modèle, nous n'avons pas été en mesure d'aborder la résolution théorique du modèle en toute généralité. Nous nous sommes placés pour la résolution théorique dans l'hypothèse de stationnarité du courant. Cette hypothèse est admissible dans certaines phases de la marée. Sous cette hypothèse, le domaine peut être subdivisé en quatre sous-domaines fixes dans chacun desquels il est possible de résoudre séparément l'équation. Le couplage entre les solutions dans les différents sous-domaines se fait à travers les interfaces de contact. Nous avons d'abord établi l'existence d'une solution stationnaire de l'équation courant s'agissant d'une équation non-linéaire du second ordre avec des conditions aux limites aux deux bouts, la démonstration nécessite l'utilisation d'un théorème de point fixe de type topologique.

Parallèlement, nous avons développé, dans la cinquième partie, une approche par simulations numériques qui s'affranchit de la contrainte de stationnarité. Les résultats obtenus par résolution par différences finies sont conformes aux objectifs qualitatifs du modèle. Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse sont évidemment préliminaires, une discussion sur les difficultés rencontrées et les perspectives de développement ultérieur est faite à la fin du mémoire.



## **Deuxième partie**

# **Description du comportement migratoire des civelles dans l'estuaire de l'Adour**



### 1.1 Présentation du bassin de l'Adour

L'Adour est un fleuve du sud-ouest de la France (43°30' N et 1°32' W) long de 335 km, prenant naissance près du Tourmalet (Hautes Pyrénées) et se jetant dans l'Atlantique à Anglet (Pyrénées Atlantiques). Il représente le 5ième réseau hydrographique de France avec 16733 km<sup>2</sup> de bassin versant. L'estuaire de l'Adour se divise en trois zones où les réglementations sur l'exercice de la pêche sont différentes. Une zone maritime qui s'étend sur 22 km, depuis l'embouchure jusqu'à la limite de salure des eaux, fixée par décret (4 juillet 1853) au pont d'Urt. La pêche est sous le contrôle des Affaires Maritimes et seuls les marins pêcheurs peuvent y exercer leurs activités. Une zone fluviale mixte qui s'étend du pont d'Urt jusqu'au pont de Vimport sur l'Adour (57 km de l'embouchure) et à Sordes sur le Gave d'Oloron (53 km de la mer). Dans cette zone, la pêche est sous le contrôle de la DDA<sup>7</sup>. Une zone fluviale où seuls, les pêcheurs professionnels fluviaux peuvent pratiquer la pêche sous le contrôle de la DDA. Depuis le début du siècle, le nombre de marins pêcheurs sur l'Adour, comme au niveau national, est en constante diminution, Prouzet *et al.* [33]. En 1998, 66 marins pêcheurs étaient licenciés au CIPE<sup>8</sup>. On comptait également 70 pêcheurs fluviaux relevant du régime agricole et entre 20 et 25 pêcheurs fluviaux non agricoles.

### 1.2 Aspects biologiques du cycle de vie de l'anguille

L'anguille européenne *Anguilla anguilla* Linné, poisson téléostéen<sup>9</sup> anguilliforme appartient à la famille des Anguillidae. C'est une espèce migratrice amphihaline thalassotroque dont le stock continental est réparti sur le pourtour de l'Europe de l'Ouest et du Nord de l'Afrique. Son cycle de vie peut se résumer brièvement à l'aide de la figure II.2. L'anguille adulte, l'anguille argentée, va durant sa migration en grande profondeur acquérir sa maturité sexuelle. Cette migration est nommée migration catadrome. Après la ponte des anguilles argentées dans la mer des Sargasses<sup>10</sup>, celles-ci vont mourir et les œufs

---

<sup>7</sup>Direction Départementale de l'Agriculture.

<sup>8</sup>Commission Interprofessionnelle des Poissons migrateurs et des Estuaires.

<sup>9</sup>**Téléostéen** : (du grec *osteon* os), poisson osseux à bouche terminale, aux branchies recouvertes par des opercules, à écailles plates et fines.

<sup>10</sup>**Sargasse** : Algue brune à thalle très long et flottant, dont l'accumulation forme, au large des côtes de Floride (Mer des Sargasses), une véritable forêt marine.

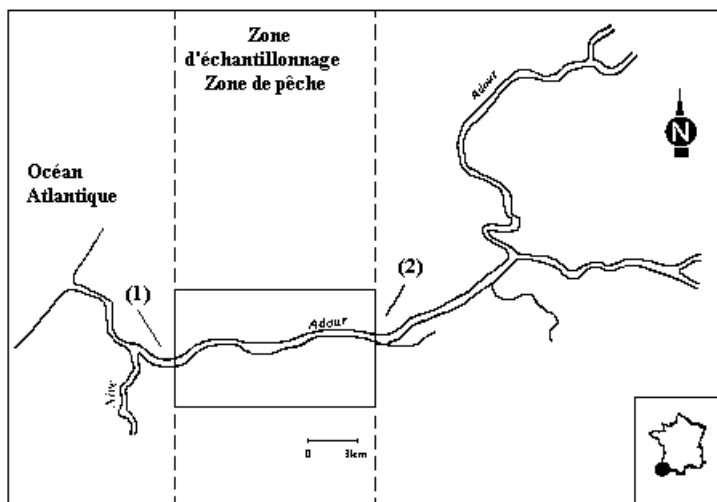


FIG. II.1 – Localisation de la zone d'échantillonnage dans la partie maritime de l'estuaire de l'Adour. (1) Pont de l'autoroute (Bayonne) - (2) Pont d'Urt. Source IFREMER

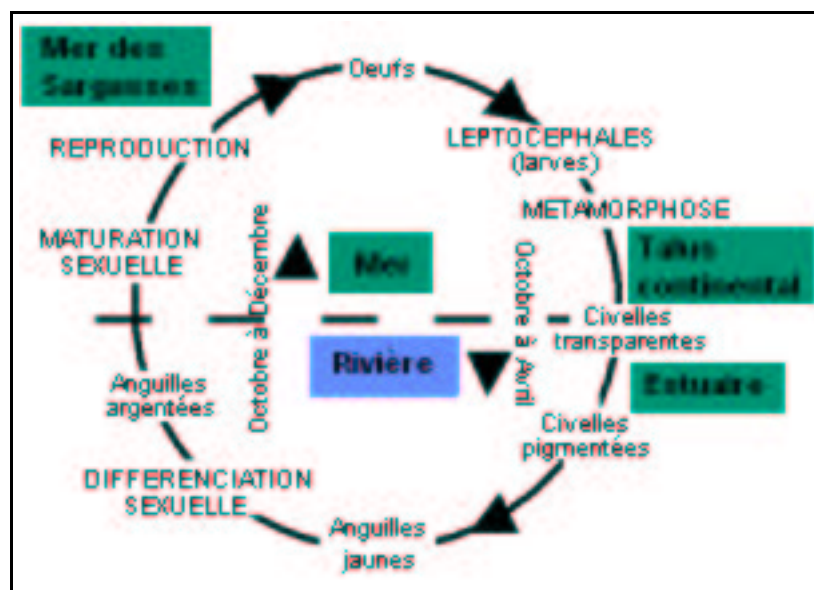


FIG. II.2 – Cycle de vie de l'anguille, *Anguilla anguilla* L. Source Web

vont éclore donnant naissance à des larves leptocephales<sup>11</sup> (figure II.3). Ces larves ressemblent à des feuilles de Saule de quelques millimètres de longueur (figure II.4). A l'aide du courant du Gulf-Stream et d'une nage active, les leptocephales vont migrer, depuis la

<sup>11</sup>Du grec *leptos* mince et *kephalê* tête

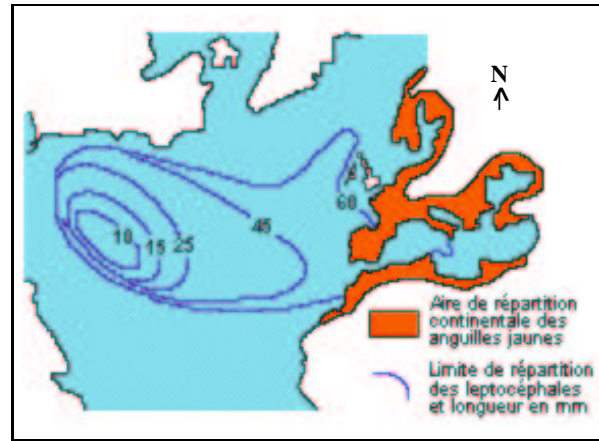


FIG. II.3 – Aire de frai et répartition de l'anguille d'Europe et d'Afrique. Source Web

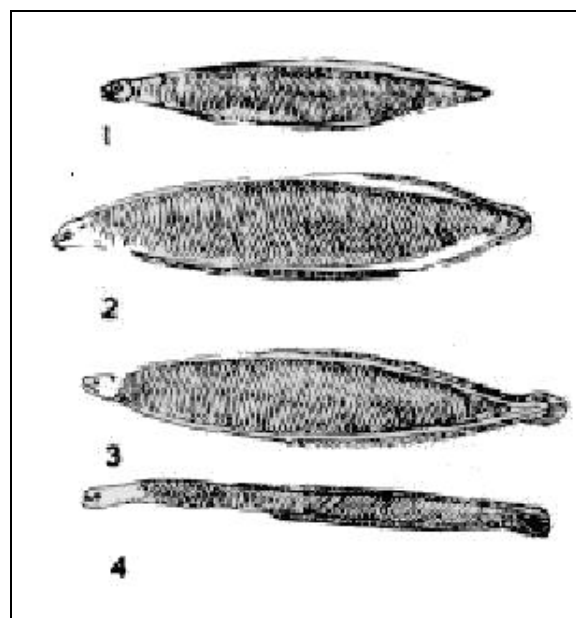


FIG. II.4 – Evolution morphologique et métamorphose de la larve leptocéphale à la civele d'après Bigelow et Schroeder, 1953. 1. Leptocéphale de 49 mm, 2. Leptocéphale de 55 mm, 3. Leptocéphale de 58 mm, 4. Stade de métamorphose 61 mm. Source Web

mer des Sargasses, vers les côtes africaines et européennes. Durant toute la migration elles ne vont pas cesser de s'alimenter pour constituer un maximum de réserves énergétiques en vue de leur métamorphose future en civele. Ce sont des individus pélagiques<sup>12</sup>, vivant

<sup>12</sup>De la haute mer

entre 35 et 600 mètres de profondeur, Tesch [37]. Lucifuges, comme dans tous les autres stades de vie de l'anguille, elles possèdent un mouvement nycthéral<sup>13</sup> dans la colonne d'eau semblable à celui du plancton.

Dès leur arrivée près du talus du plateau continental, les leptocéphales vont débiter leur métamorphose en civelles transparentes, (figure II.5).



FIG. II.5 – *Attente des civelles près du fond de conditions hydrodynamiques favorables pour poursuivre leurs migrations vers l'amont. Source Web*

Sur la côte Basque le talus du plateau continental se situe très près des côtes et de l'estuaire de l'Adour. La distance à parcourir par les civelles, pour atteindre l'entrée de l'estuaire, est ainsi réduite. La métamorphose est déclenchée par un seuil de taille à atteindre par les larves leptocéphales. Elle s'échelonne sur une période variant de 30 à 90 jours suivant la latitude. Cette métamorphose s'accompagne d'un arrêt total de l'alimentation des futures civelles transparentes, le tube digestif étant fermé et des organes vitaux étant dans l'incapacité de fonctionner dans un environnement différent de celui de la haute mer. Elles vont donc maigrir et réduire sensiblement en taille durant leur migration

---

<sup>13</sup> **Nycthéral** : relatif au nyctémère; qui a la durée du nyctémère. **Nyctémère** : (du grec *nuktos* nuit et *héméra* jour) Durée de 24 heures comportant un jour et une nuit. Le nyctémère est une unité physiologique de temps, comportant une période de veille et une période de sommeil.

vers l'amont de la rivière. L'effet dynamique des courants de marée conjugué à un très fort développement des cellules olfactives, permettant la détection des eaux douces de rivière chargées en limons et en phéromones d'adultes anguilles, vont amener les civelles à se diriger à proximité des estuaires, Sola *et al.* [35].

La migration de la mer vers la rivière est qualifiée d'anadrome. L'estuaire de la rivière Adour, comme tous ceux de la façade atlantique est soumis à deux phénomènes, la marée dynamique d'une part et la marée saline d'autre part. Le premier se caractérise par la propagation d'une onde physique dans le cours d'eau suivi d'un apport d'eau dans la rivière par marée montante. Si le débit de la rivière est faible et le coefficient de marée assez élevé, on assiste alors à une montée du niveau des eaux et à l'inversion du sens du courant qui est dirigé d'aval vers l'amont. Un front variable de marée dynamique se crée alors à l'endroit où les actions du débit de la rivière et de la marée se compensent. Un processus inverse se produit lors de la marée descendante où le sens du courant et de la marée sont identiques et complémentaires. La marée saline quant à elle résulte en fait de cet apport d'eau salée dans la rivière. Elle se produit toujours après la marée dynamique. De même un front de salinité se crée à la frontière entre l'eau salée entrante et l'eau douce de la rivière.

Le liquide physiologique du corps des larves leptocéphales est d'une densité proche de celle de l'eau de mer qui est plus dense que l'eau douce. Un processus lent d'osmorégulation<sup>14</sup>, dès le début de la migration, se met en place pour permettre aux civelles transparentes de perdre le sel contenu dans leur métabolisme en vue d'acquérir une densité proche de celle de l'eau douce de la rivière. Cette osmorégulation s'effectue par paliers successifs au cours de la migration dans la zone soumise à l'influence de la marée saline.

Dans le but d'économiser le maximum d'énergie, les civelles ne s'alimentant pas, la migration vers l'amont de la rivière s'effectue en utilisant l'influence de la marée dynamique, elle est donc passive, Elie et Rochard [9]. Dès que le courant est porteur vers l'amont, les civelles se répartissent dans la colonne d'eau, ayant une densité plus faible que celle de l'eau de la rivière, en essayant de trouver la veine de courant la plus porteuse. Si le sens du courant devient défavorable (elles peuvent lutter contre des contre-courants de faibles amplitudes de l'ordre de 0.3 à 0.5 ms<sup>-1</sup>, Elie et Rochard [9]) elles se réfugient le plus ra-

---

<sup>14</sup>**Osmose** : Transfert du solvant d'une solution diluée vers une solution concentrée au travers d'une membrane dite permselective.

pidement possible, en se laissant tomber au fond de la rivière, McCleave et Kleckner [24]. Près du fond elles doivent trouver une qualité granulométrique du substrat du lit de la rivière favorable à leur enfouissement, ni trop faible ni trop importante. On assiste alors au phénomène de *densité - dépendance* : les individus se regroupant sur des parcelles ayant les bons critères granulométriques. Lors de cette recherche de la zone d'enfouissement favorable, il peut arriver que les civelles régressent dans leur migration vers l'amont.

L'intensité du courant est donc un des facteurs déterminants dans la migration longitudinale des civelles vers l'amont.

Les civelles étant lucifuges, l'intensité lumineuse dans la colonne d'eau est un facteur influençant leur répartition sur la verticale. Au-dessus d'une certaine valeur seuil de l'intensité lumineuse dans la colonne d'eau, les civelles vont rester près du fond de la rivière ou sur la tranche d'eau inférieure favorable, pouvant migrer sur le fond vers l'amont si l'intensité du courant est favorable, de Casamajor *et al.* [6]. L'intensité lumineuse dans la colonne d'eau dépend de plusieurs facteurs. Elle dépend tout d'abord de l'intensité lumineuse à la surface qui elle-même est influencée par la nébulosité et le cycle lunaire. Cette intensité lumineuse va décroître exponentiellement au fur et à mesure que l'on s'approchera du fond de la rivière. Ce phénomène est dû principalement à la turbidité de l'eau qui absorbe (pour les substances dissoutes) et diffuse (pour les substances en suspension) la lumière dans toute la colonne d'eau.

Petit à petit les civelles vont ainsi migrer passivement dans la rivière. A l'aval du front de salinité elles vont stabuler dans l'attente d'achever leurs transformations internes. La métamorphose finale est déclenchée lorsque la température de la rivière atteint une valeur seuil (9°-12°). Elle s'accompagne de l'ouverture du tube digestif et du développement de la vessie gazeuse (stade VI A3). Tous ces éléments réunis font que les civelles vont acquérir une nage active et utiliser au mieux, grâce à leur vessie gazeuse et une densité proche de celle de l'eau douce de la rivière, les courants et l'influence de la marée dynamique pour progresser encore plus en amont de la rivière. On assiste alors à la formation de cordons de civelles. L'ultime étape est la pigmentation<sup>15</sup> totale de la civelle qui avait été progressive tout au long de la migration influencée par la température de l'eau. A ce stade la civelle a achevé sa métamorphose en anguilllette, modèle réduit de la future anguille adulte.

---

<sup>15</sup>La pigmentation permet de déterminer les différents stades de vie de la civelle.



### 1.3 Modes de pêche

#### 1.3.1 La pêche professionnelle

La civelle est un alevin. La Communauté Européenne interdit toute pêche d'alevins et donc de civelles. A l'heure actuelle la pêche à la civelle en France se perpétue, par dérogation, comme une pêche traditionnelle et ancestrale.

Sur l'Adour, les pêcheurs pêchent la civelle à l'aide d'un tamis<sup>16</sup> soit poussé depuis le bateau soit tenu à la main par les pêcheurs à pieds sur les berges. C'est une pêche pratiquée uniquement en surface durant une période délimitée administrativement<sup>17</sup>. Les pêcheurs la pratiquent uniquement durant la nuit et sous des conditions environnementales favorables : lune noire, marée montante...



FIG. II.6 – *Tamis utilisé par les pêcheurs dans l'Adour. Source IFREMER*

#### 1.3.2 Méthode d'échantillonnage

Les données qui ont motivé ce travail ont été recueillies par les membres du LHA implanté à Bidart (Pyrénées Atlantiques).

---

<sup>16</sup>De 1.20 mètres de diamètre

<sup>17</sup>Du 01 Novembre au 31 Mars

Les prélèvements s'effectuent à l'aide de deux embarcations motorisées (figure II.7).

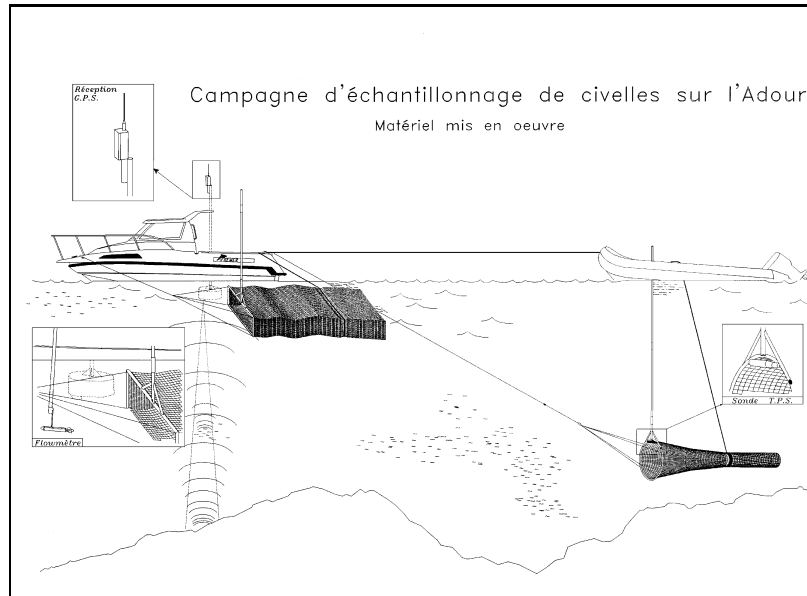


FIG. II.7 – *Croquis des embarcations et du matériel utilisé. Source IFREMER*

Trois transects, un sur chaque rive et un au milieu de l'estuaire, déterminent la répartition transversale des individus en surface et au fond. La zone d'échantillonnage se situe en aval de l'île de Berenx à 16 km de l'embouchure durant des conditions hydro-climatiques variées au cours de la saison de pêche. Chaque transect dure 5 mn, le cap et la vitesse sont constants (transect parallèle à l'axe du fleuve à une vitesse de l'ordre de 2 noeuds).

Les prélèvements en surface sont réalisés depuis un bateau de 6,8 m équipé d'un moteur de 50 CV. Il abrite l'appareillage électronique (ordinateurs portables, GPS...) permettant la collecte des paramètres environnementaux caractérisant les captures. Le tamis est immergé depuis le bateau à l'aide d'un treuil. Il s'agit d'un tamis circulaire de 0,9 m de diamètre. La profondeur du tamis est de 3,6 m. La poche ainsi formée a un maillage carré de 1 mm de coté. Il se positionne sur le bâbord du bateau.

Pour les prélèvements en profondeur un bateau pneumatique de 4 m de long, tracté par le bateau principal, permet l'immersion d'un deuxième tamis. Celui-ci, de 0,9 m de diamètre, assure le prélèvement des individus en profondeur. Il est emmanché et tenu à la main depuis le pneumatique. Il peut être immergé jusqu'à 7 m de profondeur. La profondeur du tamis est de 3,6 m. Le cône ainsi formé a un maillage carré de 1,6 mm

à l'entrée du filet et de 1 mm au fond. Une sonde mesure la température, la salinité, la turbidité et la vitesse du flôt en profondeur. Elle se situe à l'entrée du filet et caractérise les conditions du milieu au moment des captures. L'engin de pêche est immergé à la main, le plus près possible du fond en fonction de la topographie du site. La sonde indique exactement dans quelle tranche d'eau les civelles ont été prélevées.

Les dimensions du tamis utilisé par les professionnels sont proches de celles du tamis utilisé pour ces prélèvements, mais pour les professionnels, la profondeur est limitée à 1,3 m.

Le positionnement du bateau est assuré par un GPS de type NR5825 équipé d'une antenne de correction différentielle dans la bande MF et HF (moyenne et haute fréquence). Une balise permet de traiter les corrections reçues dans la bande des ondes UHF26 . Elle augmente la précision sur le positionnement (entre 0,5 à 1 m) grâce à la réception d'une station de référence à terre des services maritimes de la Direction Départementale de l'Équipement. Cette station se localise à l'embouchure de l'estuaire de l'Adour. La balise est indispensable pour travailler en estuaire car les ondes MF et HF sont reçues uniquement en mer et en zone côtière. La zone prospectée pour l'échantillonnage de la civelle se localise trop loin de la limite transversale de la mer pour capter les ondes dans ces gammes de fréquences. Celles-ci circulent librement au niveau de la mer, mais leur propagation est limitée par des obstacles quand elles se propagent au dessus de la terre (constructions, villes, collines, etc). Un traceur de route, logiciel *MaxSea* sur PC portable (cartes IGN du tracé de l'Adour intégrées au logiciel), donne en temps réel la position du bateau ainsi que sa progression sur l'estuaire. Le GPS précédemment décrit est connecté au traceur de route pour la localisation du bateau sur la carte. Ces deux appareils utilisent le même indicateur de référence cartographique WGS8427. Cet indicateur identifie la référence gésique et le type de représentations avec lesquelles la position affichée est déterminée. Un sondeur numérique à haute résolution de type OSSIAN sur un PC portable donne la profondeur au centimètre près. La base du sondeur ou transducteur se positionne sur le tribord du bateau dans un sabot métallique immergé à 50 cm sous la surface. Le profil du fond ainsi que les échos des différentes cibles rencontrées sont enregistrés en continu pendant la sortie.

Ces fichiers peuvent être traités en écho-intégration (extension OSSIAN) à partir de lectures de fichiers archivés. Cette technique se base sur la proportionnalité entre l'énergie

de l'écho et la densité de poissons. Les paramètres de navigation sont également enregistrés dans ces fichiers : cap du navire, coordonnées géographiques, vitesse du courant au fond etc...

### 1.4 Rôle de la civelle dans l'économie locale

La moyenne annuelle, pour la période 1989-1998 des débarquements (Tableau 1) des pêcheries estuariennes se situe aux alentours de 50 T/an, Prouzet *et al.* [34]. En ce qui concerne le chiffre d'affaires, la principale espèce est l'anguille (surtout le stade civelle) qui constitue entre 30 et 74,3 % du chiffre d'affaires global (Tableau 2).

Espèces	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
<i>Saumon</i>	5.6	15.4	10.9	19.5	14.5	9	6	9	7.4	10.7
<i>Truite</i>	2.6	3	3.6	3	1.7	3	2	2	2.4	3.3
<i>Alose</i>	25.2	17.7	28.6	11.6	12.8	49	44	59	42	33
<i>Lamproie</i>	7.4	12	15	24	27.3	1	3	8	19.1	21.6
<i>Mulet</i>	17.5	27.9	23.7	12	21.4	16	9	4	5.1	11.8
<i>Div. Marins</i>	5.2	5.5	5.5	5.5	5.5	3	2	2	4.5	4.1
<i>Civelle</i>	<b>21</b>	<b>10</b>	<b>3.9</b>	<b>15</b>	<b>9.4</b>	<b>6</b>	<b>19</b>	<b>9</b>	<b>12.2</b>	<b>8.5</b>
<i>Anguille</i>	13.5	7.6	7.6	7.6	7.6	12	13	6	7	7
<i>Crevette</i>	2.1	1.9	2.4	1.2	1.2	1	2	1	0.4	?

Tableau 1. Répartition par espèce, en % du poids total capturé, des débarquements dans l'estuaire de l'Adour. Source IFREMER

<b>Espèces</b>	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
<i>Civelle</i>	<b>3600</b>	<b>1890</b>	<b>770</b>	<b>5250</b>	<b>2200</b>	<b>1050</b>	<b>3100</b>	<b>2520</b>	<b>5280</b>	<b>1500</b>
<i>Anguille</i>	345	143	160	227.5	275	350	374.5	206.25	206	128
<i>Crevette</i>	45	36	55	33	35	17.5	59.5	24	9	?
<i>Alose</i>	269	155	370	192.5	187.5	364	270	412.5	250	201
<i>Lamproie</i>	315	305	490	1140	1120	67.5	126	429	900	630
<i>Saumon</i>	288	460	465	864	680	369	253	478.5	290	286
<i>Truite</i>	77	57	85	79	60	74	63	74.75	55	44
<i>Div. Marins</i>	121	130	130	210	225	69	44	65	100	65
<i>Mulet</i>	37.5	45	45	30	50	37.5	17.5	20	20	14
<b>TOTAL</b>	5097.5	3221	2570	8026	4832.5	2398.5	4307.5	4230	7110	2868
<i>% Civelle</i>	<b>70.6</b>	<b>58.7</b>	<b>30</b>	<b>65.4</b>	<b>45.5</b>	<b>43.7</b>	<b>72</b>	<b>59.6</b>	<b>74.3</b>	<b>52.1</b>
<i>% Salmonidés</i>	7.2	16.1	21.4	11.8	15.3	18.5	7.3	4.9	4.9	11.5
<i>% Lamproie</i>	6.2	9.5	19.1	14.2	23.2	2.8	2.9	10.1	12.7	22
<i>% Alose</i>	5.3	4.8	14.4	2.4	3.9	15.2	6.3	9.8	3.5	7
<i>% Div. Marins</i>	2.4	4	5.1	2.6	4.7	2.9	1	1.5	1.4	2.3

Tableau 2. Répartition des chiffres d'affaires, en milliers de francs, par espèce de 1989 à 1998 sur l'Adour. Source IFREMER

L'examen attentif de ces deux tableaux illustre bien le rôle important que joue la civelle dans le revenu global des pêcheurs. Il est donc indispensable pour la communauté européenne de savoir précisément l'impact de l'action de pêche sur le stock de civelle avant d'entreprendre toute nouvelle réglementation. L'objet de ce travail est, à l'aide d'une bonne connaissance du comportement et des mécanismes migratoires de la civelle dans l'estuaire de l'Adour, de construire un modèle mathématique, le plus fidèle possible, modélisant la migration des civelles dans l'estuaire de l'Adour.



## **Troisième partie**

### **Description du cadre d'étude et présentation des variables utilisées**





# Chapitre 1

## Présentation du cadre d'étude

Cette partie est consacrée à la présentation des différentes variables utilisées par la suite ainsi que du modèle. La portion de l'Adour retenue pour notre étude se situe entre l'embouchure et 30 km en amont de celle-ci. Cette distance arbitraire correspond au jeu de données sur la bathymétrie réelle de l'Adour que nous possédons (source IFREMER). D'après la description biologique du mode migratoire des civelles, que nous avons détaillée dans la partie précédente, nous avons décidé d'établir un modèle en deux dimensions spatiales : horizontale et verticale.

- Pour la variable longitudinale  $x$ , nous choisissons le sens positif de l'aval vers l'amont. Le domaine sera délimité horizontalement par,  $x_0$  pouvant représenter l'embouchure et par  $x_1 > x_0$ . On note  $\Omega_x$  l'intervalle  $]x_0, x_1[$ .

- Pour la variable verticale  $z$ , l'orientation positive retenue est du fond vers la surface. Le zéro correspond à celui des cartes marines et le fond sera de profondeur variable. On note  $Z_{Fond}(x)$  l'ordonnée au point  $x$  représentant la profondeur du fleuve. On considère ici que le temps d'observation,  $t \in [t_0, T]$ , est très petit par rapport à l'échelle des temps de modification du lit de la rivière, ainsi la variable fond,  $Z_{Fond}$ , ne dépend pas du temps mais uniquement de la position le long du fleuve. L'ordonnée de la surface au point  $x$  est désignée par la variable  $\zeta(t, x)$  qui dépend elle du temps  $t$  à travers l'influence de la marée. Dans la suite, on désigne par  $\Omega_z(x)$  l'intervalle  $]Z_{Fond}(x), \zeta(t, x)[$ . On a  $Z_{Fond}(x) < 0$ , pour tout  $x \in \Omega_x$ , tandis que la fonction  $\zeta$  sera toujours positive.

En définitive tout point  $(t, x, z)$  du domaine d'étude appartient à l'ensemble  $Q$  suivant

$$Q \equiv ]t_0, T[ \times \bigcup_{x \in \Omega_x} [\{x\} \times \Omega_z(x)] \equiv ]t_0, T[ \times \Omega,$$

dont une représentation graphique est

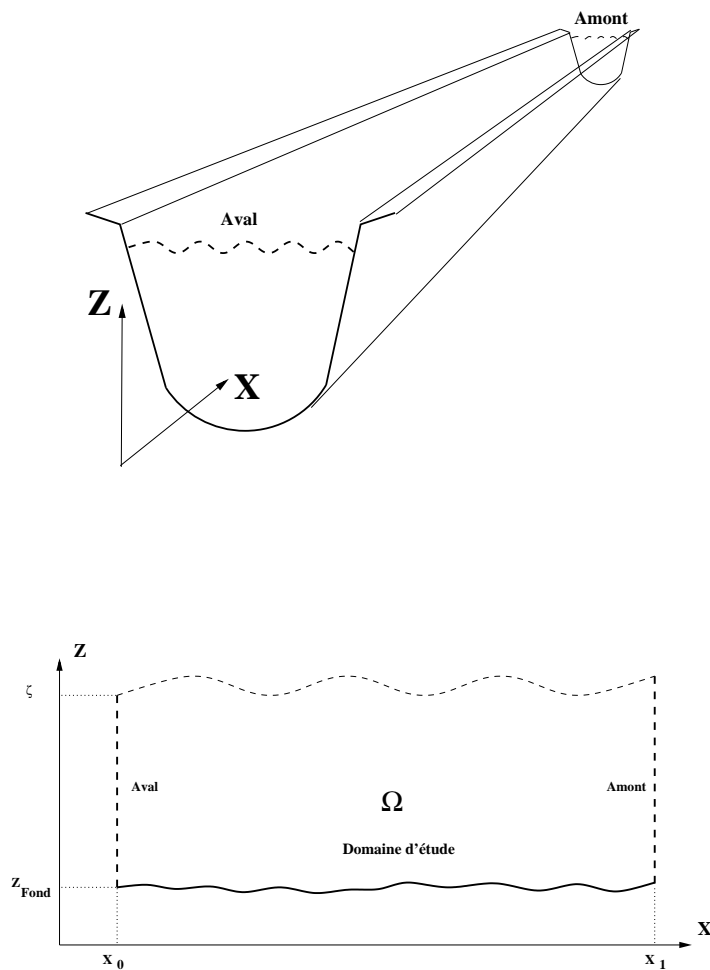


FIG. III.1 – *Dessin de "l'Adour" et coupe horizontale.*

# Chapitre 2

## Présentation des différents modèles

### 2.1 Modèle de la vitesse du courant : équations de Saint-Venant (shallow water)

L'écoulement en eau peu profonde, comme c'est le cas ici, peut être décrit par le système d'équations de Saint-Venant. Ce système est issu des équations de Navier-Stokes, voir R. Teman [36], P. L. Viollet [38], O. Pironneau [31] ou G. P. Galdi [14] par exemple, avec l'hypothèse d'hydrostaticité de la pression et exprime la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Il existe une littérature abondante sur l'étude mathématique et numérique des équations de Saint-Venant, citons par exemple l'ouvrage W. H. Graf [15], ou encore le recueil de publications [32]. En effet ce modèle peut décrire des sujets importants aussi divers que la dispersion d'un polluant ou de sédiments dans une rivière (ou dans une mer peu profonde), ou encore les effets des crues.

Dans le modèle de migration des civelles l'équation du courant joue un rôle essentiel. Le modèle de canal que nous utilisons ici conduit à un système de deux équations aux dérivées partielles en  $\sigma$  et  $u$ , où  $\sigma$  représente la section mouillée et  $u$  la vitesse du courant (dont on peut supposer qu'elle a été obtenue par moyenne sur la section mouillée). Le système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{gu^2}{R_h^{4/3} S_t} + N_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

### III.2.1 Modèle de la vitesse du courant : équations de Saint-Venant (shallow water)

où  $g$  représente la gravité et  $N_h > 0$  le coefficient de viscosité du fluide. On a décomposé la section mouillée sous la forme

$$\sigma(t, x) = \sigma_0(x) + L(x) \times \zeta(t, x) \quad (\text{III.2})$$

où  $\sigma_0$  est la section mouillée minimale,  $L(x)$  la largeur de la rivière en  $x$  et  $\zeta(x)$  l'élévation de l'eau au dessus du zéro des cartes marines. Une illustration de cette formule est donnée dans la figure III.1 suivante

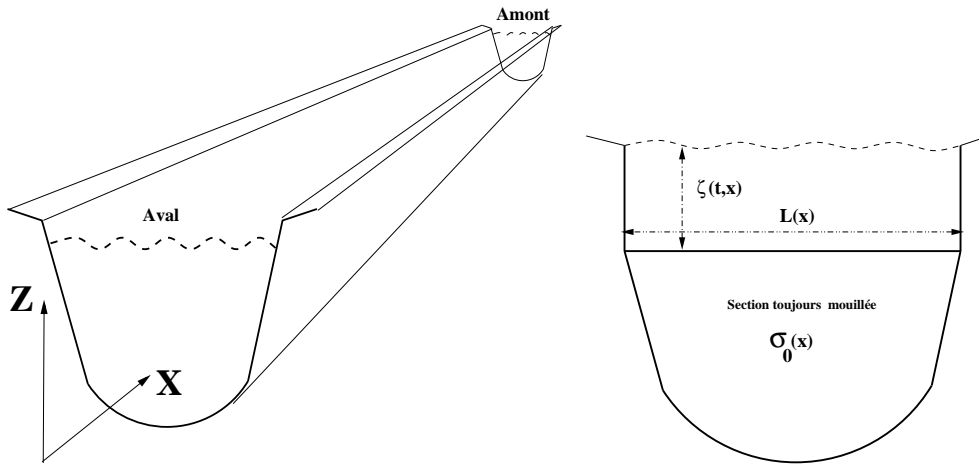


FIG. III.1 – Dessin du canal et coupe verticale.

Le système (III.1) est complété par des conditions initiales prises à un instant  $t_0$  et des conditions aux limites qui expriment la variation de la hauteur d'eau et de la vitesse du courant à un bout (en  $x = x_0$ ) imposée par le phénomène de la marée et la vitesse du courant à l'autre bout, traduisant la variabilité des arrivées des eaux en provenance de la zone amont.

$$u(t, x_0) = u_0(t); u(t, x_1) = u_1(t); \zeta(t, x_0) = \zeta^0(t) \geq 0 \text{ et } \zeta(t, x_1) = \zeta^1(t) \geq 0. \quad (\text{III.3})$$

Les signes de  $u_0$  et de  $u_1$  seront discutés dans la partie suivante.

D'un point de vue numérique, le système (III.1) à été traité numériquement par P. Lazure [21] et nous utiliserons, après quelques modifications, le code en langage Fortran 77 que l'auteur a établi, dans nos simulations numériques.

La résolution du système (III.1) présente plusieurs problèmes qui font qu'aujourd'hui encore, la question même de l'existence de solutions pour des conditions initiales données est ouverte : les problèmes sont liés à la dégénérescence de l'équation en  $\sigma$  ( $u$  peut s'annuler) et aux non linéarités présentes dans l'équation en  $u$ . De plus, l'idéal aurait été d'avoir un terme forçant correspondant à la marée, c'est-à-dire une condition sur la vitesse et le niveau en  $x = x_0$  qui varie de manière périodique. La complexité de la démarche nous a conduit à adopter la stratégie de rechercher des solutions stationnaires. En effet, on peut considérer le mouvement comme une succession de mouvements stationnaires pour plusieurs valeurs de la vitesse et du niveau en  $x = x_0$ . L'enchaînement peut être réalisé en introduisant un grand pas de temps qui est de l'ordre de grandeur de la durée du phénomène stationnaire et de résoudre le système sur une suite de pas de temps. Au pas de temps  $n\Delta t$ , on a un système stationnaire qui s'établit, et les civelles se déplacent dans l'intervalle  $[0, \Delta t]$ . Au pas de temps suivant  $(n+1)\Delta t$ , les civelles sont au début dans l'état où elles sont arrivées à la fin du pas de temps précédent. On calcule la vitesse stationnaire pour le nouveau pas de temps et l'on fait bouger les civelles pendant la période  $[0, \Delta t]$ .

## 2.2 Modèle de l'indice d'éclairement dans la colonne d'eau

Les modifications de l'intensité lumineuse ambiante, induites par la variabilité de la turbidité de l'eau, jouent un rôle primordial sur les mouvements verticaux des civelles dans la colonne d'eau, *cf.* M.-N. De Casamajor *et al.* [6].

La turbidité est un facteur peu étudié d'un point de vue mathématique, pourtant ce paramètre modifie la pénétration de la lumière dans l'eau en fonction de la nature et de la quantité de sédiments présents en suspension dans le milieu. D'autres paramètres, tels que le cycle lunaire, solaire ou la nébulosité peuvent aussi modifier l'intensité lumineuse.

Des formulations exponentielles de la décroissance de l'intensité lumineuse dans l'eau de mer sont fréquentes dans la littérature. (voir par exemple l'article de P. Franks [13], A. Ivanoff [16] ou de H. Lacombe [19]). Le principe fondamental peut se résumer ainsi : lorsqu'un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  se propage dans l'eau, la diminution  $dI_\lambda$  de l'intensité lumineuse  $I_\lambda$  dans une couche d'épaisseur  $dz$  infiniment

$T < 5$	eau légèrement claire
$5 < T < 40$	eau légèrement trouble
$T > 40$	eau trouble

FIG. III.2 – Variation de la clarté de l'eau en fonction de la turbidité.

mince est proportionnelle à  $I_\lambda$  et à  $dz$  et est exprimée par l'équation

$$dI_\lambda = -\chi_\lambda I_\lambda dz, \text{ soit } I_\lambda(z) = I_\lambda(0) \exp(-\chi_\lambda z),$$

$\chi_\lambda$  représentant le coefficient d'absorption. La difficulté réside dans l'estimation ou la formulation de ce coefficient. Dans une rivière, un des paramètres incontournables dans la formulation de ce coefficient est bien la turbidité de l'eau  $T$ . La turbidité est mesurée en NTU<sup>1</sup> et le lien entre la clarté de l'eau et ce coefficient peut être résumé grossièrement dans le tableau III.2. Expérimentalement d'après [6], le seuil des 40 NTU correspond à la différence entre une eau pratiquement claire et une eau trouble à très opaque, donc à une limite pour que la lumière pénètre dans l'eau.

L'indice d'éclairement,  $E(t, x, z)$ , à l'instant  $t$  au niveau  $z$  de la colonne d'eau dépend de l'intensité d'éclairement à la surface de l'eau  $I_n(t)$  et indirectement de la turbidité de l'eau  $T$ . Nous proposons la formulation exponentielle suivante

$$E(t, x, z) = I_n(t) \exp(z - \zeta(t, x)) \exp(g(T)) \quad (\text{III.4})$$

La multiplication par  $z - \zeta(t, x)$  traduit l'effet d'accumulation le long de la colonne d'eau. La fonction  $g(T)$  doit reproduire le lien entre la turbidité de l'eau et la "propagation" de l'intensité lumineuse dans la colonne d'eau évoquée dans le tableau III.2.

D'un point de vue numérique, nous avons choisi d'utiliser le tableau de données présenté dans l'article de M.-N. De Casamajor *et al.* [6]. Par conséquent, nous allons considérer une turbidité moyenne durant les simulations numériques, ce qui est physiquement envisageable sur de courtes périodes. Cette dernière, d'après [6] sur la période du 21.11.1997 au 23.02.1998, prend ses valeurs entre 10 NTU et 184 NTU. Nous emploierons pour notre modèle numérique l'expression suivante de  $g(T)$ , reproduisant approximative-

<sup>1</sup>Unité de mesure de Turbidité Néphélogométrique.

ment le tableau III.2

$$g(T) = \frac{T^2}{200(T - 200)},$$

dont une représentation graphique est donnée dans la figure III.3.

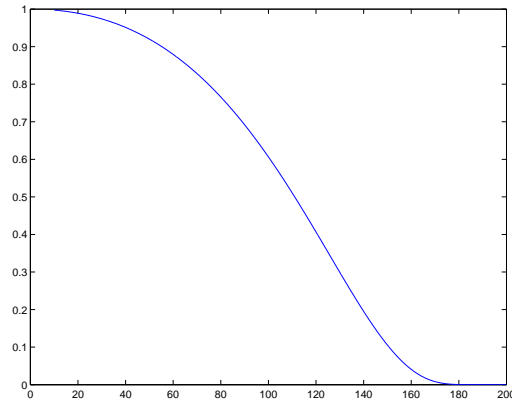


FIG. III.3 – Courbe  $y = \exp(g(T))$ .

La fonction périodique  $I_n$  doit prendre en compte soit l'intensité lumineuse de la lune, sous-entendu son cycle, soit l'intensité lumineuse du soleil, donc son inclinaison et sa distance vis-à-vis de la terre; de plus la nébulosité ainsi que les conditions climatiques (humidité de l'air, température ...) ne doivent pas être omis. Il paraît donc évident qu'une formulation satisfaisante de  $I_n$  est très difficile à mettre en œuvre. En effet, certains paramètres cités ci-dessus sont souvent appréciés de façon qualitative. Par exemple dans l'article de M.-N. De Casamajor *et al.* [6] la nébulosité avait été jugée, lors des sorties de pêche nocturnes, par les quantificateurs : N pour un ciel nuageux (très ou peu ?) et D pour un ciel dégagé. De même, l'intensité lumineuse de la lune avait été évaluée à l'aide des croissants de lune (PL : pleine lune, PQ : premier quartier etc...). Ces variables, ainsi estimées, sont très difficilement exploitables.

Au vu de la remarque précédente, nous avons simplifié la représentation de  $I_n$ . Numériquement, nous avons employé l'expression périodique de  $I_n$ , de période 24h, suivante

$$I_n(t) = \frac{1}{2} \left( \cos\left(\pi + \frac{t\pi}{12}\right) + 1 \right).$$

Elle traduit le phénomène très schématique suivant : l'intensité lumineuse est maximale à midi ( $t = 12h$ ) et nulle à minuit ( $t = 24h$ ). La prise en compte des éléments, sus-cités, perturbant ce cycle lumineux est laissée pour un futur travail.

On désigne par  $\widehat{E}$  la valeur maximale d'intensité lumineuse pour qu'il y ait une migration verticale des civelles dans la colonne d'eau. On peut lier ce seuil à une turbidité proche des 40-50 NTU.

Notons qu'il existe une autre méthode pour mesurer la transparence de l'eau à la lumière visible, il s'agit de l'emploi du disque de Secchi. Ce disque comporte des quadrants blancs et noirs alternés, il est plongé dans le cours d'eau et on mesure la profondeur à laquelle le disque n'est plus visible. Evidemment son utilisation est limitée à des portions de fleuve ayant une faible hydrodynamique et durant les périodes diurnes.

## 2.3 Modèle de l'évolution de la densité des civelles

### 2.3.1 Conditions de migration

Comme nous l'avons vu dans la deuxième partie, la répartition de la densité de civelles dans toute la colonne d'eau est influencée par l'intensité du courant  $u(t, x)$  et par l'intensité lumineuse  $E(t, x, z)$ .

Nos hypothèses d'interruption de migration, d'après la description du cycle de vie de la civelle sont les suivantes : si la vitesse du courant est inférieure à  $\widehat{u}$  ou si l'intensité lumineuse est supérieure à  $\widehat{E}$ , les civelles plongent vers le fond de la rivière. Cette plongée s'effectue avec une certaine vitesse positive  $\mathcal{V}_C$ , propre aux civelles, que nous avons choisie pour le moment constante indépendante de la position dans la colonne d'eau. A l'arrivée près du fond on suppose que les civelles arrêtent leur déplacement vertical et s'enfouissent dans le sédiment. On peut résumer tous ces types de comportements migratoires dans le tableau récapitulatif suivant

	$u(t, x) > \widehat{u}$	$u(t, x) < \widehat{u}$	
$E(t, x, z) > \widehat{E}$	migration uniquement sur le fond	enfouissement	(III.5)
$E(t, x, z) < \widehat{E}$	migration dans toute la colonne d'eau	enfouissement	

Le changement discontinu de comportement dans la migration des civelles a été modélisé par l'introduction de la fonction d'Heaviside  $H(s)$ , définie ainsi

$$\begin{aligned}
 H(s) &= 1 \text{ si } s > 0, \\
 H(s) &= 0 \text{ sinon.}
 \end{aligned}$$



### 2.3.2 Obtention de l'équation de densité de civelles

On désignera par  $\Delta f$  la variation de la fonction  $f$  entre deux instants très proches  $t$  et  $t + \Delta t$  :

$$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Pour simplifier l'écriture, on utilisera la notation  $\delta f$  :

$$\delta f = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t};$$

pour représenter le taux de variation instantané d'une propriété dans une région. On ajoutera éventuellement un signe pour représenter la cause de la variation. Ainsi, par exemple,  $\delta_{long}$  sera la contribution à la variation du déplacement longitudinal de la propriété.

Pour obtenir l'équation vérifiée par la densité de civelles, on se place dans un domaine arbitraire  $[x_1, x_2] \times [z_1, z_2]$  où  $x_2$  a été choisi très proche de  $x_1$  et  $z_2$  très proche de  $z_1$ . On considère que le courant a une intensité  $u(t, x)$  fournie par le système d'équations (III.1) et l'intensité lumineuse  $E(t, x, z)$  par l'équation (III.4).

On se place entre deux instants très proches  $t$  et  $t + \Delta t$ ,  $\Delta t > 0$ , et on compte ce qui rentre et ce qui sort durant cette période de ce domaine rectangulaire arbitraire. La variation totale de densité de civelles,  $\Delta C$ , dans ce domaine est en fait la somme des variations dûes aux causes suivantes :

- l'action du courant longitudinal, notée  $\Delta_{long}C$ ,
- le transport vertical propre aux civelles, notée  $\Delta_{vert}C$ ,
- la diffusion dans la colonne d'eau, notée  $\Delta_{diffu}C$ ,
- la mortalité, notée  $\Delta_{mort}C$ .

Ainsi, l'équation générale décrivant la variation de densité de civelles est la suivante

$$\Delta C = \Delta_{long}C + \Delta_{vert}C + \Delta_{diffu}C + \Delta_{mort}C. \quad (\text{III.6})$$

La variation totale de densité,  $\Delta C$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$  est :

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} C(t + \Delta t, x, z) dx dz - \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} C(t, x, z) dx dz,$$

en divisant par  $\Delta t$  et en faisant tendre cette quantité vers zéro il vient finalement

$$\delta C = \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial C}{\partial t} dx dz.$$

D'après le tableau de migration (III.5), le déplacement longitudinal des civelles a lieu seulement si l'intensité du courant  $u(t, x)$  est supérieure à la valeur de blocage de la migration,  $\hat{u}$ . Son action se modélise donc ainsi : si la valeur de  $u$  est favorable à une migration vers l'amont, des individus vont rentrer dans ce domaine en  $x_1$  alors que d'autres vont en sortir en  $x_2$  durant la courte période  $\Delta t$ , ainsi on obtient le terme suivant

$$\int_{z_1}^{z_2} u(t, x_1) H(u(t, x_1) - \hat{u}) C(t, x_1, z) dz \Delta t - \int_{z_1}^{z_2} u(t, x_2) H(u(t, x_2) - \hat{u}) C(t, x_2, z) dz \Delta t$$

En divisant par  $\Delta t$  et en faisant tendre  $\Delta t$  vers zéro on obtient la variation longitudinale

$$\delta_{long} C = - \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} [u(t, x) H(u(t, x) - \hat{u}) C(t, x, z)] dx dz.$$

Dans la verticale, les observations, lorsque la migration s'effectue dans toute la colonne d'eau, font conclure à une dispersion au hasard que l'on représente comme une diffusion. Cette diffusion n'est pas de nature physique, elle est liée à l'espèce et peut être évaluée expérimentalement. La variation de densité des civelles sur la verticale est fonction de l'indice d'éclairement dans la colonne d'eau et de la vitesse du courant d'après le tableau (III.5). Par exemple, si l'indice d'éclairement est inférieur à la valeur de blocage de la migration  $\hat{E}$  et si l'intensité du courant est supérieure à  $\hat{u}$  alors il y aura un déplacement dans toute la colonne d'eau. On définit la fonction des contraintes de migration verticale,  $f(t, x, z)$ , comme suit

$$f(t, x, z) = \mathcal{V}_C \left[ H(\hat{u} - u(t, x)) + H(u(t, x) - \hat{u}) H(E(t, x, z) - \hat{E}) \right] \left( \frac{z - Z_{Fond}(x)}{\zeta(t, x) - Z_{Fond}(x)} \right)^\alpha$$

avec  $\alpha \geq 1$ . Le terme fractionnaire traduit le fait suivant : si  $z$  est proche du fond alors le déplacement vers le fond sera moins rapide que si  $z$  était proche de la surface. Comme précédemment, lorsque  $f$  agit ( $f \neq 0$ ), les civelles plongent, donc des individus quittent le domaine en  $z_1$  mais d'autres entrent en  $z_2$ , ainsi le bilan des variations verticales s'écrit

$$- \int_{x_1}^{x_2} f(t, x, z_1) C(t, x, z_1) dx \Delta t + \int_{x_1}^{x_2} f(t, x, z_2) C(t, x, z_2) dx \Delta t$$

En divisant par  $\Delta t$  et en faisant tendre  $\Delta t$  vers zéro on obtient

$$\delta_{vert} C = \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial z} [f(t, x, z) C(t, x, z)] dz dx.$$

La diffusion a lieu tant sur la verticale que le long du fleuve, avec des coefficients de diffusion respectifs  $k_v(z)$  et  $k_h(x)$ , que nous avons choisis indépendants du temps d'observation.  $k_v(z)$  est un coefficient de dispersion "comportemental" ; on peut imaginer que ce coefficient diminue quand on va vers la surface et qu'il augmente quand la vitesse horizontale augmente.  $k_h(x)$  est la diffusion imposée par la turbulence du courant. En revanche la diffusion verticale est liée à l'intensité lumineuse et à la vitesse du courant par la fonction de contraintes suivante

$$g(t, x, z) = H(u(t, x) - \hat{u}) H(\hat{E} - E(t, x, z))$$

et la diffusion horizontale est liée à l'intensité du courant. L'action de  $\Delta_{diffu}C$  se modélise donc ainsi

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} g(t, x, z_1) k_v(z_1) \frac{\partial C(t, x, z_1)}{\partial z} dx \Delta t - \int_{x_1}^{x_2} g(t, x, z_2) k_v(z_2) \frac{\partial C(t, x, z_2)}{\partial z} dx \Delta t \\ & + \int_{z_1}^{z_2} k_h(x_1) H(u(t, x_1) - \hat{u}) \frac{\partial C(t, x_1, z)}{\partial x} dz \Delta t \\ & - \int_{z_1}^{z_2} k_h(x_2) H(u(t, x_2) - \hat{u}) \frac{\partial C(t, x_2, z)}{\partial x} dz \Delta t \end{aligned}$$

En divisant par  $\Delta t$  et en faisant tendre  $\Delta t$  vers zéro on a

$$\begin{aligned} \delta_{diffu}C &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ g(t, x, z) k_v(z) \frac{\partial C(t, x, z)}{\partial z} \right] dz dx \\ & + \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_h(x) H(u(t, x) - \hat{u}) \frac{\partial C(t, x, z)}{\partial x} \right] dx dz \end{aligned}$$

La mortalité naturelle est notée  $\mu_n(t, x, z)$ , liée à la biologie de l'espèce. L'action de pêche sur les civelles entraîne une mortalité notée  $\mu_p(t, x, z, C(t, x, z))$  dépendant de la quantité de civelle présente à proximité de la surface et des conditions environnementales. En effet, l'action de pêche a lieu sur une fine tranche d'eau près de la surface délimitée par le diamètre  $d$  du tamis employé, de plus la pêche s'exerce uniquement lors du flot et durant la nuit. Finalement, on propose l'expression suivante

$$\delta_{mort}C = \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1}^{z_2} (\mu_n(t, x, z) + \mu_p(t, x, z, C)) C dz dx$$

où le coefficient  $\mu_p$  devra traduire les faits énoncés précédemment, ou pourra choisir par exemple

$$\mu_p(t, x, z, C) = \mu(C) \times H(u(t, x) - \hat{u}) H(z - (\zeta(t, x) - d)).$$

En conclusion, d'après l'équation (IV.5), en passant aux densités, il vient pour presque tout  $(t, x, z) \in Q$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} [u(t, x) H(u(t, x) - \hat{u}) C] & \text{(III.7)} \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mathcal{V}_C \left[ H(\hat{u} - u(t, x)) + H(u(t, x) - \hat{u}) H(E(t, x, z) - \hat{E}) \right] \times \right. \\
 & \times \left. \left( \frac{z - Z_{Fond}(x)}{\zeta(t, x) - Z_{Fond}(x)} \right)^\alpha C \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ H(u(t, x) - \hat{u}) H(\hat{E} - E(t, x, z)) k_v(z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ H(u(t, x) - \hat{u}) k_h(x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \\
 & - (\mu_n(t, x, z) + \mu_p(t, x, z, C)) C
 \end{aligned}$$

◆ **Condition initiale :**

En  $t = t_0$ , instant initial, on suppose que la densité est connue, c'est une fonction  $C_0$  et on a donc

$$C(t_0, x, z) = C_0(x, z) \geq 0. \quad \text{(III.8)}$$

◆ **Conditions de bord :**

Bords horizontaux :

Sur les frontières horizontales, on impose qu'il n'y a pas de flux sortant à travers la couche de surface  $\zeta(t, x)$  et la couche du fond  $Z_{fond}(x)$  et ceci pour toutes les abscisses  $x$  et pour tout temps  $t$ . Si on considère le vecteur unitaire de la normale extérieure à la couche de surface ou du fond noté indifféremment  $\vec{\nu}(\nu_x, \nu_z)$ , pour qu'il n'y ait pas de flux sortant, il faut imposer que le vecteur tangent à la trajectoire soit perpendiculaire au vecteur  $\vec{\nu}$  dès que la trajectoire rencontre l'une de ces surfaces. Il vient la condition suivante de "non-transfert"

$$\begin{aligned}
 & \nu_x \left[ u H(u - \hat{u}) C - H(u - \hat{u}) k_h \frac{\partial C}{\partial x} \right] & \text{(III.9)} \\
 & - \nu_z \left[ \mathcal{V}_C \left[ H(\hat{u} - u) + H(u - \hat{u}) H(E - \hat{E}) \right] \left( \frac{z - Z_{Fond}}{\zeta - Z_{Fond}} \right)^\alpha C \right. \\
 & \left. + H(u - \hat{u}) H(\hat{E} - E) k_v \frac{\partial C}{\partial z} \right] \Big|_{\text{bord horizontaux}} = 0.
 \end{aligned}$$

En surface, pour  $z = \zeta(t, x)$ , la condition devient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \zeta(t, x)}{\partial x} \left[ uH(u - \hat{u})C - H(u - \hat{u})k_h \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \\ & + \mathcal{V}_C \left[ H(\hat{u} - u) + H(u - \hat{u})H(E - \hat{E}) \right] C \\ & + H(u - \hat{u})H(\hat{E} - E)k_v(\zeta(t, x)) \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Pour ce qui est de la condition au fond, en  $z = Z_{Fond}(x)$ , il vient

$$\frac{\partial Z_{Fond}(x)}{\partial x} \left[ uH(u - \hat{u})C - H(u - \hat{u})k_h \frac{\partial C}{\partial x} \right] + H(u - \hat{u})H(\hat{E} - E)k_v(Z_{Fond}(x)) \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.11})$$

Bords verticaux :

A la frontière verticale aval,  $x = x_0$ , on suppose qu'il existe un flux entrant (quand les conditions hydrodynamiques sont réalisées) de civelles,  $\mathcal{F}(t, x_0, z) \geq 0$ , connu. D'après l'écriture du modèle, comme on le verra par la suite, il n'est pas utile de se donner une condition supplémentaire pour le bord  $x = x_1$ . On suppose que le bord  $x = x_1$  est assez en "amont" pour que l'effet de la marée dynamique n'atteigne pas ce point et que la vitesse du courant y soit généralement inférieure à  $\hat{u}$ , ainsi il n'y aura pas de sortie de civelle en  $x = x_1$ . Les civelles arrivées à ce niveau vont donc rester au fond en stabulation jusqu'à ce que la température de l'eau atteigne une valeur seuil où leur développement reprend et elles commencent une nouvelle migration vers l'amont.

Pour qu'il y ait un flux entrant de civelles par la frontière  $x = x_0$  il faut que le produit scalaire entre le vecteur tangent à la trajectoire et le vecteur unitaire de la normale extérieure à la frontière  $x = x_0$  soit négatif. Le vecteur unitaire de la normale extérieure à la frontière en  $x = x_0$  est le vecteur  $(-1, 0)$ . Ainsi, la condition de bord devient

$$uH(u - \hat{u})C - H(u - \hat{u})k_h \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \mathcal{F}(t, x_0, z) \quad (\text{III.12})$$

**Remarque III.1** *On peut noter, dans l'égalité précédente, que  $\mathcal{F} \equiv 0$  lorsque  $u(t, x) \leq \hat{u}$  pour tout  $(t, x) \in [t_0, T] \times [x_0, x_1]$ , c'est-à-dire lorsque les conditions de migrations vers l'amont ne sont pas réunies.*

En conclusion, si on note  $\Gamma$  le bord du domaine spatial  $\Omega$  et  $\vec{\eta} = (\eta_x, \eta_z)$  le vecteur unitaire de la normale extérieure à  $\Gamma$ , les conditions de bord précédentes peuvent se regrouper dans la formulation suivante plus faible :

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq \eta_x \left[ -uH(u - \hat{u})C + H(u - \hat{u})k_h \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \quad (III.13) \\
 & + \eta_z \left[ \mathcal{V}_C \left[ H(\hat{u} - u) + H(u - \hat{u})H(E - \hat{E}) \right] \left[ \left( \frac{z - Z_{Fond}}{\zeta - Z_{Fond}} \right)^\alpha C \right] \right. \\
 & \left. + H(u - \hat{u})H(\hat{E} - E)k_v \frac{\partial C}{\partial z} \right] \Big|_{\Gamma} \leq \mathcal{F}(t, x_0, z)
 \end{aligned}$$

**Remarque : un problème de frontières libres ?**

De ce qui précède, notre domaine d'étude peut être divisé, suivant les conditions de migrations, en quatre régions distinctes où le comportement migratoire est complètement déterminé, les équations du modèle n'y étant plus dégénérées. Ces sous-domaines évoluent au cours du temps, leurs frontières sont caractérisées par les deux courbes transverses :  $z = z^*(t, x)$  et  $x = \hat{X}(t)$  correspondant aux limites "hydro-climatiques" de migration. Elles correspondent à la résolution respective des équations  $E(t, x, z) = \hat{E}$  et  $u(t, x) = \hat{u}$ . Dans l'approche mathématiques que nous allons mener par la suite la transition entre deux zones contigues donnera lieu à de nouvelles conditions aux limites exprimant la compatibilité entre les valeurs définies à l'interface des deux zones depuis chacune des deux zones.

A première vue, l'étude mathématique qui résulterait de notre modèle (III.1), (III.4), (III.7) *hydrodynamique-luminosité-densité* est tel qu'il est écrit très difficile à mettre en œuvre. Il s'agit d'un modèle couplé, non-linéaire, dégénéré et présentant des problèmes de frontières libres, évoqués précédemment.

L'approche que nous avons voulu mener, dans un soucis de préservation du cadre général, est de procéder à l'étude mathématiques de notre modèle dans le cas où ce dernier possède des coefficients stationnaires. Cet aspect est envisageable dans le cas de temps d'observation court, de l'ordre de l'heure.

Avec des vitesses stationnaires, le domaine spatial peut être divisé en quatre régions distinctes à l'intérieur de chacune desquelles l'équation se réduit à une équation de type connu.

Ainsi, dans un premier temps nous allons nous intéresser à justifier l'existence de solutions stationnaires du modèle hydrologique (III.1); en ce qui concerne le modèle de luminosité (III.4) le résultat est trivial. Par la suite, nous établirons un résultat d'existence

des solutions de l'équation (III.7) dans les différentes zones dans un cadre particulier.

Avant tout, nous présentons dans ce qui suit des résultats qualitatifs globaux obtenus sur les solutions (en supposant leurs existence à cette étape de la rédaction) de l'équation (III.7).





**Quatrième partie**

**Résultats mathématiques**



# Chapitre 1

## Résultats mathématiques pour l'équation de la civelle (III.7)

Dans cette section nous allons présenter les résultats obtenus sur l'équation de la civelle (III.7) : nous montrons la positivité des solutions, dès que les conditions initiales sont positives ; puis dans un second temps, nous donnons des estimations des solutions dans les espaces fonctionnels  $L^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$ , quand la donnée initiale est respectivement dans ces espaces. Nous soulignons qu'il s'agit, pour l'instant, de résultats conditionnels, nous supposons qu'une solution existe et est **suffisamment régulière** pour que l'on puisse effectuer un certain nombre de calculs. On pourra par exemple choisir des fonctions  $C$  appartenant à l'espace fonctionnel  $L^2(t_0, T; H^2(\Omega))$  avec  $\frac{\partial C}{\partial t} \in L^2(t_0, T; L^2(\Omega))$ . L'existence locale et globale sera établie par la suite dans un cadre particulier.

### 1.1 Démonstration de la positivité

Pour simplifier les calculs, on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t, x) = u(t, x)H(u(t, x) - \hat{u}) \\ b(t, x, z) = \mathcal{V}_C \left[ H(\hat{u} - u(t, x)) + H(u(t, x) - \hat{u}) H(E(t, x, z) - \hat{E}) \right] \left( \frac{z - Z_{Fond}(x)}{\zeta(t, x) - Z_{Fond}(x)} \right)^\alpha \geq 0 \\ d(t, x, z) = H(u(t, x) - \hat{u}) H(\hat{E} - E(t, x, z)) k_v(z) \geq 0 \\ e(t, x) = H(u(t, x) - \hat{u}) k_h(x) \geq 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, d'après l'équation (III.7), le modèle d'évolution de la densité de civelle s'écrit plus simplement

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} [a(t, x)C] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} [b(t, x, z)C] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] - (\mu_n(t, x, z) + \mu_p(t, x, z, C)) C \end{aligned} \quad (IV.1)$$

La condition initiale au temps  $t = t_0$  est la suivante

$$C(t_0, x, z) = C_0(x, z) \geq 0. \quad (IV.2)$$

Les conditions aux limites "horizontales", telles qu'il n'y ait pas de flux à travers la surface  $\zeta(t, x)$  et le fond  $Z_{fond}(x)$  à l'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ , deviennent d'après l'inéquation (III.13)

$$0 \leq \eta_x \left[ -a(t, x)C + e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \eta_z \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \Big|_{\Gamma} \leq \mathcal{F}(t, x_0, z). \quad (IV.3)$$

La démonstration de la **positivité** de la densité de civelles se fait par l'absurde. On définit une fonction test qui n'est autre que la partie négative de  $C$  :

$$C^- = \begin{cases} -C & \text{si } C < 0 \\ 0 & \text{si } C \geq 0 \end{cases}, \text{ ainsi il vient } \frac{\partial C^-}{\partial x_i} = \begin{cases} -\frac{\partial C}{\partial x_i} & \text{si } C < 0 \\ 0 & \text{si } C \geq 0 \end{cases} \text{ pour } x_i = x, z, t.$$

On va démontrer par la suite la propriété suivante

**Proposition IV.1** *Soit  $C_0 \geq 0$ . Si  $C(t, x, z)$  est une solution de l'équation (IV.1) assez régulière telle que  $C|_{t=t_0} = C_0$  alors  $C(t, x, z)$  est positive.*

**Démonstration:**

L'idée de la preuve est d'aboutir, en multipliant par  $C^-$  l'équation (IV.1) et en intégrant sur le domaine spatial  $\Omega$ , à l'inégalité suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (C^-)^2 \leq M_1 \int_{\Omega} (C^-)^2 \quad (IV.4)$$

où

$$M_1 = \frac{1}{\varepsilon} \|u(t, x)\|_{\infty}^2 + \frac{\alpha \mathcal{V}_C P^{\alpha-1}}{2 \|Z_{Fond}\|_{\infty}^{\alpha}},$$

$P$  représentant la profondeur maximale du domaine. En intégrant entre  $t_0$  et  $t$  l'inégalité (IV.4) il vient

$$\int_{\Omega} (C^-(t, x, z))^2 \leq \int_{\Omega} (C^-(t_0, x, z))^2 \exp[M_1 (t - t_0)]$$

Or, par hypothèse, la condition initiale a été choisie telle que

$$C(t_0, x, z) = C_0(x, z) \geq 0$$

ce qui conduit à

$$\int_{\Omega} (C^-(t, x, z))^2 \leq 0.$$

Dès lors, la partie négative de  $C$  :  $C^-$  est nulle, ce qui entraîne que la solution de l'équation (IV.1),  $C(t, x, z)$ , est positive pour tout  $(t, x, z) \in Q$ . ■

**Remarque :** le détail complet de cette démonstration se trouve dans l'annexe à la fin de ce mémoire.

## 1.2 Estimation de la solution dans l'espace $L^1(\Omega)$

Ayant démontré la positivité de la solution de l'équation (IV.1), nous allons maintenant dans cette section, donner une estimation d'une telle solution dans l'espace  $L^1(\Omega)$ . On supposera dans cette section que  $\mathcal{F} \in L^1(t_0, T; L^1(\Gamma))$ . La solution de l'équation (IV.1) vérifie la proposition suivante

**Proposition IV.2** *Soit  $C_0 \in L^1(\Omega)$ . Si  $C$  est une solution assez régulière de l'équation (IV.1) définie sur l'intervalle  $[t_0, T]$ , telle que  $C|_{t=t_0} = C_0$ , alors il existe une constante positive  $K = K(C_0, T)$  telle que*

$$\|C(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leq K, \forall t \in [t_0, T].$$

### Démonstration:

Pour établir ce résultat nous allons, dans un premier temps, intégrer l'équation générale (IV.1) sur le domaine spatial  $\Omega$ . On obtient alors l'égalité suivante

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} dx dz = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left[ -a(t, x)C + e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] dx dz$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] dx dz - \int_{\Omega} (\mu_n(t, x, z) + \mu_p(t, x, z, C)) C dx dz$$

En utilisant une formule d'intégration pour les deux premiers termes du membre de droite de l'égalité précédente il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} dx dz &= \int_{\Gamma} \left[ -a(t, x)C + e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \eta_x + \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \eta_z d\sigma \\ &\quad - \int_{\Omega} (\mu_n(t, x, z) + \mu_p(t, x, z, C(t, x, z))) C dx dz \end{aligned}$$

où  $\Gamma$  représente la frontière du domaine  $\Omega$  et  $(\eta_x, \eta_z)$  le vecteur unitaire de la normale extérieure à  $\Gamma$ . Or, d'après la condition de bord (III.13) vérifiée par  $C$ , en supposant que le flux d'entrée des civelles  $\mathcal{F} \in L^1_{loc}([t_0, T] \times \Gamma)$ , l'équation précédente se simplifie ainsi

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} dx dz \leq \int_{\Gamma} \mathcal{F}(t, x_0, z) d\sigma - \int_{\Omega} (\mu_n(t, x, z) + \mu_p(t, x, z, C)) C dx dz$$

De la positivité des coefficients de mortalité  $\mu_p$  et  $\mu_n$  il s'ensuit l'inégalité

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} dx dz \leq \int_{\Gamma} \mathcal{F}(t, x_0, z) d\sigma$$

Après intégration de l'inéquation sus-obtenue, il vient

$$\int_{\Omega} C(t, x, z) dx dz \leq \int_{\Omega} C_0(x, z) dx dz + \int_{t_0}^t \int_{\Gamma} \mathcal{F}(s, x_0, z) d\sigma ds$$

en employant la positivité de  $C$  pour tout  $t \in [t_0, T]$  et le fait que le flux d'entrée de civelles  $\mathcal{F}$  en  $x = x_0$  est borné, la quantité  $\int_{\Gamma} \mathcal{F}(s, x_0, z) d\sigma$  peut se majorer par une constante positive  $\mathcal{F}_{\infty}$  et ainsi il existe une application bornée positive  $K(C_0)$  telle que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C(t, x, z) dx dz &\leq \mathcal{F}_{\infty}(T - t_0) + \int_{\Omega} C_0(x, z) dx dz \\ &\leq \mathcal{F}_{\infty}(T - t_0) + \|C_0\|_{L^1(\Omega)} = K \end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat cherché. ■

### 1.3 Estimation de la solution dans l'espace $L^2(\Omega)$

Maintenant, nous allons établir une estimation de la solution de notre modèle dans l'espace  $L^2(\Omega)$ . Nous supposons ici que  $\mathcal{F} \in L^2(\Gamma)$ . Cette section est consacrée à la démonstration de la proposition suivante

**Proposition IV.3** Soit  $C_0 \in L^2(\Omega)$ . Si  $C$  est une solution assez régulière de l'équation (IV.1) définie sur l'intervalle  $[t_0, T]$ , telle que  $C|_{t=t_0} = C_0$ , alors il existe une constante  $\alpha = \alpha(T, C_0)$  telle que

$$\|C(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha, \forall t \in [t_0, T].$$

**Démonstration:**

Pour la suite de la démonstration nous allons utiliser les mêmes notations que celles adoptées dans l'équation (IV.1). En multipliant l'équation (IV.1) par  $C$  et après intégration sur  $\Omega$  il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} \times C &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} [a(t, x)C] \times C + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left[ e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \times C \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} [b(t, x, z)C] \times C + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left[ d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \times C \\ &- \int_{\Omega} (\mu_n(t, x, z) + \mu_p(t, x, z, C)) \times C^2 \end{aligned}$$

En utilisant une formule d'intégration il s'ensuit l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} C^2 \right) &= \int_{\Gamma} \left\{ \left( -a(t, x)C + e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right) \eta_x + \left( b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right) \eta_z \right\} C d\sigma \\ &+ \int_{\Omega} a(t, x)C \frac{\partial C}{\partial x} - \int_{\Omega} e(t, x) \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 \\ &- \int_{\Omega} b(t, x, z)C \frac{\partial C}{\partial z} - \int_{\Omega} d(t, x, z) \left( \frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 \\ &- \int_{\Omega} (\mu_n(t, x, z) + \mu_p(t, x, z, C)) C^2 \end{aligned}$$

où  $\Gamma$  désigne la frontière de  $\Omega$  et  $(\eta_x, \eta_z)$  les composantes du vecteur unitaire de la normale extérieure à  $\Gamma$ . En utilisant l'inégalité III.13 il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} C^2 \right) &\leq \int_{\Gamma} \mathcal{F}(t, x_0, z) C d\sigma + \int_{\Omega} a(t, x)C \frac{\partial C}{\partial x} - \int_{\Omega} e(t, x) \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 \\ &- \int_{\Omega} b(t, x, z)C \frac{\partial C}{\partial z} - \int_{\Omega} d(t, x, z) \left( \frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

En procédant d'une manière analogue à celle utilisée précédemment dans la démonstration de la positivité de  $C$ , nous allons nous intéresser dans un premier temps aux termes horizontaux.

• **Pour les termes horizontaux :**

D'après la remarque III.1 faite sur  $\mathcal{F}$ , nous allons considérer les trois premiers termes de l'égalité sus écrite, en effet ils possèdent le même support, s'annulant lorsque  $u(t, x) \leq \hat{u}$ . En supposant, par exemple, que l'on se place en début de marée montante la régularité de l'application  $u$  est choisie de telle sorte que, pour tout  $t$ , il existe un réel strictement positif  $\delta$  tel que  $u(t, x) > \hat{u}$  pour  $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$ . On nommera  $\Gamma_\delta$  la partie du bord de  $\Gamma$  ainsi définie

$$\Gamma_\delta = \{(t, x) \in [t_0, T] \times [x_0, x_1] \text{ tels que } u(t, x) > \hat{u}\} \cap \Gamma.$$

Ainsi sur cette partie du bord, le flux d'entrée  $\mathcal{F}$  est non nul et borné. Il vient, sachant que  $\mathcal{F}$  est élément de  $L^2(\Gamma)$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \mathcal{F}(t, x_0, z) C d\sigma + \int_{\Omega} a(t, x) C \frac{\partial C}{\partial x} - \int_{\Omega} e(t, x) \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|\mathcal{F}\|_{\Gamma_\delta}^2 + \frac{1}{2} \|C\|_{\Gamma_\delta}^2 + \int_{u(t,x) > \hat{u}} u(t, x) C \frac{\partial C}{\partial x} - \int_{u(t,x) > \hat{u}} k_h(x) \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

où  $\|\cdot\|_{\Gamma_\delta}$  désigne la norme de  $L^2(\Gamma_\delta)$ . En employant l'inégalité de Young avec un réel  $\varepsilon > 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \mathcal{F}(t, x_0, z) C d\sigma + \int_{\Omega} a(t, x) C \frac{\partial C}{\partial x} - \int_{\Omega} e(t, x) \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|\mathcal{F}\|_{\Gamma_\delta}^2 + \frac{1}{2} \|C\|_{\Gamma_\delta}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|u(t, x)\|_\infty^2 \int_{u(t,x) > \hat{u}} C^2 + \int_{u(t,x) > \hat{u}} \left[ \frac{\varepsilon}{2} - k_h(x) \right] \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

Maintenant nous allons donner une estimation de la norme  $\|C\|_{\Gamma_\delta}$ . On a

$$C(t, x_0, z) = C(t, x, z) - \int_{x_0}^x \frac{\partial C}{\partial x}(t, \gamma, z) d\gamma,$$

qui conduit à l'inégalité

$$|C(t, x_0, z)| \leq |C(t, x, z)| + \left( \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial C}{\partial x}(t, \gamma, z) \right)^2 d\gamma \right)^{1/2} \sqrt{x - x_0},$$



soit encore, après intégration

$$\delta |C(t, x_0, z)| \leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} |C(t, x, z)| dx + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left\{ \left( \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial C}{\partial x}(t, \gamma, z) \right)^2 d\gamma \right)^{1/2} \sqrt{x - x_0} \right\} dx.$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le second membre de droite, il vient

$$\begin{aligned} \delta |C(t, x_0, z)| &\leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} |C(t, x, z)| dx \\ &+ \left( \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial C}{\partial x}(t, \gamma, z) \right)^2 d\gamma dx \right)^{1/2} \left( \int_{x_0}^{x_0+\delta} (x - x_0) dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

A présent, en élevant au carré l'inégalité précédente on obtient

$$\begin{aligned} \delta^2 |C(t, x_0, z)|^2 &\leq 2 \left( \int_{x_0}^{x_0+\delta} |C(t, x, z)| dx \right)^2 \\ &+ 2 \left( \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial C}{\partial x}(t, \gamma, z) \right)^2 d\gamma dx \right) \left( \int_{x_0}^{x_0+\delta} (x - x_0) dx \right). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \delta^2 |C(t, x_0, z)|^2 &\leq 2\delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} |C(t, x, z)|^2 dx \\ &+ \delta^2 \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial C}{\partial x}(t, \gamma, z) \right)^2 d\gamma dx. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial C}{\partial x}(t, \gamma, z) \right)^2 d\gamma dx &= \int_{x_0}^{x_0+\delta} (x_0 + \delta - \gamma) \left( \frac{\partial C}{\partial x}(t, \gamma, z) \right)^2 d\gamma \\ &\leq \delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left( \frac{\partial C}{\partial x}(t, \gamma, z) \right)^2 d\gamma \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \delta^2 |C(t, x_0, z)|^2 &\leq 2\delta \int_{x_0}^{x_0+\delta} |C(t, x, z)|^2 dx \\ &+ \delta^3 \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left( \frac{\partial C}{\partial x}(t, \gamma, z) \right)^2 d\gamma \end{aligned}$$

Maintenant, en intégrant cette inégalité sur le domaine vertical, il s'ensuit

$$\begin{aligned} \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t,x)} |C(t, x_0, z)|^2 dz &\leq \frac{2}{\delta} \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t,x)} \int_{x_0}^{x_0+\delta} |C(t, x, z)|^2 dx dz \\ &+ \delta \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t,x)} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left( \frac{\partial C}{\partial x}(t, \gamma, z) \right)^2 d\gamma dz \end{aligned}$$

Finalement en regroupant les termes précédents, il vient

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \mathcal{F}(t, x_0, z) C d\sigma + \int_{\Omega} a(t, x) C \frac{\partial C}{\partial x} - \int_{\Omega} e(t, x) \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 \\ &\leq \left( \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\varepsilon} \|u(t, x)\|_{\infty}^2 \right) \int_{\Omega} C^2 + \int_{\Omega} \left[ \frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - k_h(x) \right] \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \|\mathcal{F}\|_{\Gamma_{\delta}}^2 \end{aligned}$$

En choisissant la valeur de  $\varepsilon$ ,  $\delta$  étant assez petit, de telle sorte que

$$\varepsilon \leq 2k_h(x) - \delta$$

on obtient en conclusion

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \mathcal{F}(t, x_0, z) C d\sigma + \int_{\Omega} a(t, x) C \frac{\partial C}{\partial x} - \int_{\Omega} e(t, x) \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{IV.6}) \\ &\leq \left( \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\varepsilon} \|u(t, x)\|_{\infty}^2 \right) \int_{\Omega} C^2 + \frac{1}{2} \|\mathcal{F}\|_{\Gamma_{\delta}}^2 \end{aligned}$$

• **Pour les termes verticaux :**

En se référant à la démonstration de la positivité effectuée auparavant, on s'intéresse d'abord au domaine où :  $u(t, x) > \hat{u}$  et  $E(t, x, z) < \hat{E}$ . Ainsi dans ce sous domaine il vient

$$- \int_{\Omega} \left[ b(t, x, z) C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \frac{\partial C}{\partial z} = - \int_{\{u(t,x) > \hat{u} \text{ et } E(t,x,z) < \hat{E}\}} k_v(z) \left( \frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 \leq 0.$$

Dans le domaine complémentaire où :  $u(t, x) < \hat{u}$  ou  $E(t, x, z) > \hat{E}$  on obtient

$$- \int_{\Omega} \left[ b(t, x, z) C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \frac{\partial C}{\partial z} = - \int_{\{u(t,x) < \hat{u} \text{ ou } E(t,x,z) > \hat{E}\}} \mathcal{V}_C \left( \frac{z - Z_{Fond}(x)}{\zeta(t, x) - Z_{Fond}(x)} \right)^{\alpha} C \frac{\partial C}{\partial z}$$

Or, en posant

$$f(t, x) = -\frac{\mathcal{V}_C}{(\zeta(t, x) - Z_{Fond}(x))^\alpha},$$

il vient

$$\begin{aligned} & - \int_{\{u(t,x) < \hat{u} \text{ ou } E(t,x,z) > \hat{E}\}} \mathcal{V}_C \left( \frac{z - Z_{Fond}(x)}{\zeta(t, x) - Z_{Fond}(x)} \right)^\alpha C \frac{\partial C}{\partial z} \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t,x)} (z - Z_{Fond}(x))^\alpha C \frac{\partial C}{\partial z} dz dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t,x)} (z - Z_{Fond}(x))^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} C^2 \right] dz dx \end{aligned}$$

Après une intégration par partie il s'en suit

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t,x)} (z - Z_{Fond}(x))^\alpha C \times \frac{\partial C}{\partial z} dz dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) (\zeta(t, x) - Z_{Fond}(x))^\alpha (C(t, x, \zeta(t, x)))^2 dz dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t,x)} \alpha (z - Z_{Fond}(x))^{\alpha-1} C^2 dz dx \end{aligned}$$

Or par hypothèse, pour tout  $(t, x) \in [t_0, T] \times \Omega_x$ ,  $C(t, x, \zeta(t, x)) = 0$ , alors

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t,x)} (z - Z_{Fond}(x))^\alpha C \frac{\partial C}{\partial z} dz dx = \\ & - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t,x)} \alpha (z - Z_{Fond}(x))^{\alpha-1} C^2 dz dx. \end{aligned}$$

Finalement, pour les termes verticaux on a l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[ b(t, x, z) C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \frac{\partial C}{\partial z} = \\ & - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t,x)} \alpha (z - Z_{Fond}(x))^{\alpha-1} C^2 dz dx \leq M \int_{\Omega} C^2 dx dz \quad (\text{IV.7}) \end{aligned}$$

où

$$M = \frac{\alpha \mathcal{V}_C P^{\alpha-1}}{2 \|Z_{Fond}\|_{\infty}^{\alpha}},$$

$P$  représentant la profondeur maximale de notre domaine.

En fin de compte, en réunissant les deux inégalités (IV.6) et (IV.7) en vertu de l'inégalité (IV.5) on est conduit à l'inégalité

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} C^2 \right) \leq \beta \int_{\Omega} C^2 + \frac{1}{2} \|\mathcal{F}\|_{\Gamma_{\delta}}^2,$$

où

$$\beta = M + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\varepsilon} \|u(t, x)\|_{\infty}^2 > 0.$$

En intégrant l'inéquation sus écrite entre  $t_0$  et  $t$  il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C(t)^2 &\leq \int_{\Omega} C_0^2 + 2\beta \int_{t_0}^t \int_{\Omega} C(s)^2 ds + (t - t_0) \|\mathcal{F}\|_{\Gamma_{\delta}}^2 \\ &\leq \int_{\Omega} C_0^2 + 2\beta \int_{t_0}^t \int_{\Omega} C(s)^2 ds + (T - t_0) \|\mathcal{F}\|_{\Gamma_{\delta}}^2, \end{aligned}$$

qui entraîne, en utilisant le lemme de Gronwall, le résultat suivant

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C(t)^2 &\leq \left[ \int_{\Omega} C_0^2 + (T - t_0) \|\mathcal{F}\|_{\Gamma_{\delta}}^2 \right] \exp 2\beta(t - t_0), \\ &\leq \left[ \|C_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + (T - t_0) \|\mathcal{F}\|_{\Gamma_{\delta}}^2 \right] \exp 2\beta(T - t_0) = \alpha. \end{aligned}$$

qui conclut la preuve. ■

# Chapitre 2

## Recherche de solutions stationnaires des équations courant (III.1) et luminosité (III.4)

Cette partie est consacrée à la recherche de solutions stationnaires du modèle d'intensité du courant puis dans un deuxième temps de celui d'éclairement dans la colonne d'eau.

Avant tout, nous allons rappeler, ici, quelques résultats de la théorie du degré topologique, dont celui de **Leray-Schauder** que nous utiliserons par la suite. Tous ces résultats sont classiques et sont exposés dans plusieurs ouvrages. Nous avons utilisé l'exposé de O. Kavian [17].

### 2.1 Rappels sur la théorie du degré topologique

Soient  $N \geq 1$  un entier,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$  une fonction continue et  $b \in \mathbb{R}^N$  un point donné. L'idée du degré topologique est d'associer à la fonction  $f$ , à l'ouvert  $\Omega$  et au point cible  $b$  un entier dépendant continûment de  $f$  et dans une certaine mesure de  $b$  tel que si cet entier est non nul alors l'équation suivante

$$x \in \Omega, f(x) = b,$$

admet une solution.

### 2.1.1 Degré topologique de Leray-Schauder

Dans la résolution des équations aux dérivées partielles on est constamment amené à utiliser des théorèmes de points fixe, mais en règle générale ces théorèmes doivent être appliqués dans des espaces de dimension infinie. Alors que pour des espaces de dimensions finies on utilise le degré topologique de Brouwer il n'est pas possible d'étendre, telle quelle, cette notion aux espaces de dimension infinie. Rappelons aussi que dans un espace de dimension infinie, une application continue peut très bien être non bornée sur les fermés bornés.

Le bon cadre d'étude, pour introduire une notion de degré topologique et établir des théorèmes de point fixe analogues au théorème de Brouwer, est celui des opérateurs compacts.

**Définition IV.1** Soient  $X$  un espace de Banach et  $\Omega$  une partie de  $X$ . Si  $T : \Omega \rightarrow X$  est un opérateur continu, on dit que  $T$  est **compact** si pour toute partie bornée  $B$  de  $\Omega$ ,  $T(B)$  est relativement compact dans  $X$ .

On notera en particulier que si  $T$  est compact, alors  $T$  est borné sur les parties bornées de  $X$ .

Nous allons maintenant définir un degré topologique pour des applications qui sont des perturbations compactes de l'identité, i.e. des opérateurs  $\Phi$  du type  $\Phi \equiv I - T$  où  $T$  est compact et  $I$  désigne l'application identité de  $X$ . Le point de départ est le degré topologique de Brouwer. Sans perte de généralité, on peut supposer que le point cible est l'origine. On commence par énoncer quelques lemmes concernant les opérateurs compacts. Dans la suite  $X$  désigne un espace de Banach de norme  $\| \cdot \|$ .

**Lemme IV.1** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $X$ . Si  $T : \overline{\Omega} \rightarrow X$  est compact et n'a pas de point fixe sur  $\partial\Omega$ , alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $u \in \partial\Omega$  on ait :

$$\|u - Tu\| \geq \varepsilon.$$

**Lemme IV.2** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $X$  et  $T : \overline{\Omega} \rightarrow X$  un opérateur compact sans point fixe sur  $\partial\Omega$ . Alors si  $\varepsilon > 0$  est tel que  $\|u - Tu\| \geq 4\varepsilon$  pour tout  $u \in \partial\Omega$ , il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie  $E_\varepsilon$  de  $X$  et un opérateur  $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \rightarrow E_\varepsilon$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall u \in \overline{\Omega}, \quad \|T_\varepsilon u - Tu\| &\leq \varepsilon \\ \forall u \in \partial\Omega, \quad \|u - T_\varepsilon u\| &\geq 3\varepsilon \end{aligned}$$

**Théorème IV.1 et définition du degré topologique de Leray-Schauder.**

Soient  $X$  un espace de Banach,  $\Omega$  un ouvert borné de  $X$ ,  $T : \overline{\Omega} \rightarrow X$  un opérateur compact sans point fixe sur  $\partial\Omega$ . Alors  $\varepsilon > 0$ ,  $E_\varepsilon \subset X$  et  $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \rightarrow E_\varepsilon$  étant donnés par le lemme précédent on considère  $F$ , un sous-espace vectoriel de dimension finie contenant  $E_\varepsilon$  et tel que  $\Omega_F \equiv F \cap \Omega \neq \emptyset$ . On définit le degré topologique de Leray-Schauder par :

$$\deg(I - T, \Omega, 0) \equiv \deg(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F).$$

Cette définition ne dépend que de  $T$  et de  $\Omega$ . Si  $b \in X$  est tel que  $b \notin (I - T)(\partial\Omega)$ , le degré de  $I - T$  dans  $\Omega$  par rapport à la cible  $b$  est défini comme étant :

$$\deg(I - T, \Omega, b) \equiv \deg(I - T - b, \Omega, 0).$$

Maintenant nous réunissons les propriétés vérifiées par le degré topologique de Leray-Schauder. La démonstration de ces résultats découle de la définition du degré de Leray-Schauder, ainsi que des propriétés analogues à celles du degré de Brouwer. Dans toute la suite on suppose que  $X$  est un espace de Banach,  $\Omega$  un ouvert borné de  $X$  et  $T : \Omega \rightarrow X$  un opérateur compact.

**Proposition IV.4 Additivité.**

Si  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont deux ouverts bornés disjoints et  $T : \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \rightarrow X$  un opérateur compact sans point fixe sur  $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ , alors :

$$\deg(I - T, \Omega_1 \cup \Omega_2, 0) = \deg(I - T, \Omega_1, 0) + \deg(I - T, \Omega_2, 0).$$

**Proposition IV.5 Invariance par homotopie.**

Soient  $b \in X$  et  $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow X$  une application compacte telle que pour tout  $(u, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$  on ait :  $u - H(u, t) \neq b$ . Alors le degré  $\deg(I - H(\cdot, t), \Omega, b)$  est constant pour tout  $t \in [0, 1]$  :

$$\deg(I - H(\cdot, t), \Omega, b) = \deg(I - H(\cdot, 0), \Omega, b).$$

Finalement, un résultat important pour la suite est le suivant

**Proposition IV.6** Si  $b \in X$  est tel que pour tout  $u \in \overline{\Omega}$  on ait :  $u - Tu \neq b$ , alors  $\deg(I - T, \Omega, b) = 0$ .

**Corollaire IV.1** *Si  $b \in X$  est tel que pour tout  $u \in \partial\Omega$  on ait  $u - Tu \neq b$  et  $\deg(I - T, \Omega, b) \neq 0$  alors il existe  $u \in \Omega$  tel que  $u - Tu = b$ .*

**Proposition IV.7** *Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $b \in \mathbb{R}^N$ . En désignant par  $I$  l'application identité, on a :*

$$\deg(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in \Omega \\ 0 & \text{si } b \notin \Omega \end{cases}$$

**Remarque IV.1** *Ce résultat, très important, peut être étendu aux espaces de dimension infinie. En effet, dans l'ouvrage de K. Deimling [7] on trouve le résultat de normalisation suivant :*

*Soit  $X$  un espace de Banach et  $\Omega$  un ouvert borné de  $X$ . Soit  $T$  une application continue et compacte de  $\overline{\Omega} \rightarrow X$ , telle que  $b \notin (I - T)(\partial\Omega)$  alors si  $b \in \Omega$*

$$\deg(I - T, \Omega, b) = 1.$$



A présent, retournons à ce qui a motivé ce chapitre : la recherche de solutions stationnaires des équations courant et de l'intensité lumineuse dans la colonne d'eau.

## 2.2 L'équation du courant

L'intensité du courant est régie par le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{g u^2}{R_h^{4/3} S_t} + N_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Ce modèle est complété par les conditions initiales et de bord (III.3). Le système d'équations (IV.1) possède trois fonctions inconnues :  $u$ ,  $\sigma$  et  $\zeta$ , mais il existe une relation (III.2) entre les fonctions inconnues  $\sigma$  et  $\zeta$  qui permet d'éliminer une des inconnues .

### Le système stationnaire :

Les solutions stationnaires du système (IV.1) vérifient le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \sigma(x)u(x) = K \\ N_h u''(x) - g \zeta'(x) - u(x)u'(x) - C_0 u^2(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

avec  $C_0 = \frac{g}{R_h^{4/3} S_t} > 0$  et  $K \in \mathbb{R}$ , muni des conditions de bord

$$u(x_0) = u_0 < 0, \zeta(x_0) = \zeta^0 \text{ et } u(x_1) = u_1 < 0. \quad (\text{IV.3})$$

**Remarque IV.2** *Si l'on recherche des solutions stationnaires  $u$  de telle sorte que le point  $x = x_1$  soit assez loin en amont, alors la valeur de  $u$  en ce point  $x_1$  sera négative. Il en sera donc de même pour le signe de la constante  $K$  qui entraînera ainsi la négativité de  $u_0$ . **Par conséquent, dans la suite nous nous intéressons à rechercher uniquement des solutions stationnaires négatives.***

### 2.2.1 Recherche de solutions particulières du système (IV.2)

- Si  $u_0 = u_1 = 0$ ,  $u \equiv 0$  est une solution du système (IV.2).

En effet, si  $u_0 = u_1 = 0$ , la solution  $u \equiv 0$ , vérifie d'une part les conditions de bord et d'autre part en remplaçant cette valeur dans la deuxième équation de (IV.2) ceci entraîne que  $\zeta'(x) \equiv 0$ . Ainsi  $\zeta(x) = \zeta(x_0) \equiv \zeta_0$  et donc  $\sigma(x) = \sigma_0(x) + L(x) \times \zeta_0$ . Parmi les valeurs possibles de  $\zeta_0$  on peut avoir  $\zeta_0 = 0$  ce qui entraîne que  $\sigma(x) \equiv \sigma_0(x)$ , il n'y a donc pas dans ce cas d'élévation d'eau. On peut voir aussi que tout nombre "raisonnable"  $\zeta_0$  est solution.

Réciproquement, si  $\zeta(x) = \zeta_0$  alors  $u \equiv 0$  est solution de (IV.2) en supposant que  $u_0 = u_1 = 0$ .

- Une question qui fait suite au cas précédent est de savoir si une solution constante non nulle existe, avec  $u_0 = u_1 \neq 0$ .

Si  $u(x) \equiv \bar{u} \neq 0$ , en fait  $\bar{u} = u_0 = u_1$ , alors d'après la première équation de (IV.2),  $\sigma(x) \equiv \bar{\sigma} \in \mathbb{R}^+$  et la seconde équation de (IV.2) entraîne, en supposant que  $C_0 \neq 0$ ,

$$\bar{u}^2 = -\frac{g\zeta'(x)}{C_0}.$$

Ainsi pour que  $\bar{u}$  existe il faut que  $\zeta'(x)$  soit constant (indépendant de  $x$ ) et négatif, soit

$$\zeta'(x) \equiv -k_1, \text{ avec } k_1 \in \mathbb{R}^+ \left( k_1 = \frac{C_0 \bar{u}^2}{g} \right).$$

Or, d'après la relation (III.2) on obtient l'égalité suivante

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{L(x)} (\bar{\sigma} - \sigma_0(x)) \right) = -k_1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{L(x)} (\bar{\sigma} - \sigma_0(x)) = -k_1 (x - x_0) + \frac{1}{L(x_0)} (\bar{\sigma} - \sigma_0(x_0))$$

soit encore

$$L(x) = \frac{\bar{\sigma} - \sigma_0(x)}{\frac{1}{L(x_0)} (\bar{\sigma} - \sigma_0(x_0)) - k_1 (x - x_0)}$$

Il faut que la largeur  $L(x)$  soit positive et décroissante en remontant vers l'amont pour tout  $x \in [x_0, x_1]$ , sachant que  $\bar{\sigma} \geq \sigma_0$ , ce qui se traduit par les relations suivantes

$$\begin{cases} L(x_0) < \frac{\bar{\sigma} - \sigma_0(x)}{k_1(x - x_0)}, \text{ pour tout } x \in ]x_0, x_1] \\ L'(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

Or, d'après la relation vérifiée par  $L$ , après dérivation on obtient

$$L'(x) = \frac{-\sigma'_0(x) \left[ \frac{1}{L(x_0)} (\bar{\sigma} - \sigma_0(x_0)) - k_1(x - x_0) \right] + k(\bar{\sigma} - \sigma_0(x))}{\left[ \frac{1}{L(x_0)} (\bar{\sigma} - \sigma_0(x_0)) - k_1(x - x_0) \right]^2}$$

par conséquent la relation  $L'(x) < 0$  devient

$$\sigma'_0(x) > \frac{k_1(\bar{\sigma} - \sigma_0(x))}{\frac{1}{L(x_0)} (\bar{\sigma} - \sigma_0(x_0)) - k_1(x - x_0)} = k_1 L(x).$$

En fin de compte, il vient

$$\begin{cases} \sigma'_0(x) > 0 \\ \sigma_0(x) > \sigma_0(x_0) + k_1 \int_{x_0}^x L(s) ds \end{cases}$$

On obtient donc une minoration de la croissance de la section mouillée en fonction de la décroissance de l'élévation de l'eau suivant les  $x$  croissants. Ceci est en fait légitime, car si l'on veut que la section totale soit constante et qu'en même temps la largeur et la hauteur d'eau décroissent, on aboutit forcément à un accroissement de la section mouillée pour compenser cette perte de surface. Evidemment, un tel cas de figure n'aurait pas de sens car cela supposerait que la profondeur de la rivière s'accroisse suivant les  $x$  croissants (l'orientation choisie est d'aval vers l'amont), ce qui est contradictoire avec notre cadre d'étude.

**Réciproquement**, supposons que

$$\begin{cases} L(x) = \frac{\bar{\sigma} - \sigma_0(x)}{\frac{1}{L(x_0)} (\bar{\sigma} - \sigma_0(x_0)) - k_1(x - x_0)} \\ \sigma(x) = \bar{\sigma} \neq 0 \end{cases}$$

Ceci implique que

$$\frac{1}{L(x)} (\bar{\sigma} - \sigma_0(x_0)) = -k_1 (x - x_0) + \frac{1}{L(x_0)} (\bar{\sigma} - \sigma_0(x_0))$$

c'est-à-dire, après dérivation

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{L(x)} (\bar{\sigma} - \sigma_0(x_0)) \right] = -k_1$$

dont on déduit

$$\zeta'(x) = -k_1.$$

En remplaçant ces expressions de  $\zeta$  et de  $\sigma$  dans le problème (IV.2) on aboutit au système d'équations suivant

$$\begin{cases} \bar{\sigma} u'(x) = 0 \\ N_h u''(x) + g k_1 - u(x) u'(x) - C_0 u^2(x) = 0 \end{cases} ,$$

ce qui entraîne

$$\begin{cases} u'(x) = 0 \\ u^2(x) = \frac{g k_1}{C_0} \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

ainsi  $u(x) = \bar{u} \in \mathbb{R}$ .

**Remarque IV.3** Des inégalités (IV.4), il vient

$$L(x_0) < \frac{\bar{\sigma} - \sigma_0(x)}{k_1 (x_1 - x_0)}$$

soit encore

$$0 < k_1 \leq \frac{\zeta(x_0)}{x_1 - x_0}$$

En substituant la valeur de  $k_1$  par cette inégalité dans l'expression (IV.5) on obtient l'estimation de  $\bar{u}$  donc de  $u_0$  et de  $u_1$  suivante

$$-\sqrt{\frac{\zeta(x_0)g}{(x_1 - x_0) C_0}} \leq \bar{u} = u_0 = u_1 < 0.$$

### 2.2.2 Recherche de solutions plus générales du système (IV.2)

La partie précédente était destinée à montrer l'existence de solutions constantes. On recherche maintenant l'existence de solutions stationnaires plus générales du système d'équations (IV.2) muni des conditions de bord (IV.3).

La première équation du système (IV.2) est

$$\sigma(x)u(x) \equiv K, \text{ avec } K \in \mathbb{R}^-.$$

En remplaçant l'expression précédente de  $\sigma$  dans l'équation stationnaire issue de (III.2) on obtient

$$\zeta(x) = \frac{1}{L(x)} \left[ \frac{K}{u(x)} - \sigma_0(x) \right],$$

impliquant la relation suivante

$$\zeta'(x) = \frac{-L'(x)}{L^2(x)} \left[ \frac{K}{u(x)} - \sigma_0(x) \right] - \frac{1}{L(x)} \left[ \frac{Ku'(x)}{u^2(x)} + \sigma'_0(x) \right].$$

Ainsi la deuxième équation du système (IV.2) est équivalente à

$$N_h u''(x) - g \left\{ \frac{-L'(x)}{L^2(x)} \left[ \frac{K}{u(x)} - \sigma_0(x) \right] - \frac{1}{L(x)} \left[ \frac{Ku'(x)}{u^2(x)} + \sigma'_0(x) \right] \right\} \\ - u(x)u'(x) - C_0 u^2(x) = 0.$$

Comme par hypothèse  $u \neq 0$  et  $L \neq 0$ , on multiplie cette équation par le produit  $u^2(x) \times L^2(x)$  ce qui nous donne le problème général suivant

$$N_h L^2(x) u^2(x) u''(x) + L(x) [gK - L(x)u^3(x)] u'(x) \tag{IV.6} \\ + gKL'(x)u(x) + g[L(x)\sigma'_0(x) - L'(x)\sigma_0(x)] u^2(x) - C_0 L^2(x) u^4(x) = 0$$

muni des conditions de bord (IV.3).

#### Résolution de l'équation (IV.6) dans un cadre particulier

Pour résoudre l'équation (IV.6) on se place dans un cadre moins général en supposant dans ce paragraphe que

$$L(x) \equiv L \text{ avec } L \in \mathbb{R}^{+,*}.$$

Sous ces hypothèses, d'après l'équation (IV.6), on obtient le problème simplifié suivant

$$N_h L u^2(x) u''(x) + [gK - L u^3(x)] u'(x) + g \sigma'_0(x) u^2(x) - C_0 L u^4(x) = 0 \quad (\text{IV.7})$$

muni des conditions de bord (IV.3).

**Proposition IV.8** *En supposant que  $\sigma'_0(x) < 0$  pour tout  $x \in [x_0, x_1]$ , il existe un réel  $R$  strictement positif indépendant de la solution tel que  $|u(x)| \leq R$  pour tout  $x \in [x_0, x_1]$ .*

**Démonstration:**

Dans la suite de la démonstration nous allons supposer, sans perte de généralité, que  $u_1 < u_0$ . Avant toute chose, nous pouvons remarquer qu'il n'existe pas de point  $x \in ]x_0, x_1[$  tel que  $u(x) > u_0$ . En effet, si un tel point existe, alors  $\max_{x_0 \leq x \leq x_1} u(x)$  serait atteint en un point  $\hat{x} \in ]x_0, x_1[$ . En ce point, on aura  $u'(\hat{x}) = 0$ .

★ Si en ce point  $u(\hat{x}) \neq 0$ , d'après l'équation (IV.7) on devrait avoir  $u''(\hat{x}) > 0$  ce qui est contraire à la concavité de la courbe en ce point.

★ Si maintenant,  $u(\hat{x}) = 0$ , l'intégration de l'équation (IV.7) entre  $x_0$  et  $x$ , avec  $x < \hat{x}$  donne l'approximation suivante

$$u'(x) \sim \frac{gK}{N_h L} \frac{1}{u(x)}$$

quand  $x$  tend vers  $\hat{x}$ , ainsi  $u'(x) < 0$  dans un voisinage à gauche de  $\hat{x}$ . Le théorème des accroissements finis appliqués entre  $x$  et  $\hat{x}$  ( $x$  assez près de  $\hat{x}$ ) donne

$$u(\hat{x}) - u(x) = (\hat{x} - x) u'(\zeta), \quad \zeta \in ]x, \hat{x}[$$

ou encore

$$|u(x)| = (\hat{x} - x) u'(\zeta)$$

ce qui donne une contradiction sur le signe.

Maintenant, prenons l'hypothèse de la proposition et supposons qu'il existe un point  $\hat{x} \in ]x_0, x_1[$  tel que  $u'(\hat{x}) = 0$  ( $u(\hat{x}) \leq u_0$ ) alors d'après l'équation (IV.7)  $u''(\hat{x}) > 0$ .

• Ceci signifie que l'on a l'une des trois possibilités suivantes :  $u'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in [x_0, x_1]$ ; ou bien que  $u'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [x_0, x_1]$ ; ou enfin  $u'(x) < 0$  pour tout  $x \in [x_0, \hat{x}[$  et  $u'(x) > 0$  pour tout  $x \in ]\hat{x}, x_1]$  avec  $u'(\hat{x}) = 0$ . Dans les deux premiers cas, la fonction  $u$  est majorée en valeur absolue par  $|u_0|$ .

Dans le troisième cas, d'après l'équation (IV.7), après intégration entre  $\hat{x}$  et  $x$  pour  $x \in ]\hat{x}, x_1]$ , on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned} u'(x) & - \frac{gK}{N_h L} \frac{1}{u(x)} - \frac{1}{2N_h} u^2(x) + \frac{g}{N_h L} [\sigma_0(x) - \sigma_0(\hat{x})] \\ & - \frac{C_0}{N_h} \int_{\hat{x}}^x u^2(s) ds + f(u(\hat{x})) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

où

$$f(y) = \frac{gK}{N_h L} \frac{1}{y} + \frac{1}{2N_h} y^2 \quad (\text{IV.9})$$

En prenant  $x = x_1$  dans l'équation (IV.8) il vient l'inégalité (sachant que  $u'(x_1) > 0$ )

$$|u(\hat{x})|^2 < \frac{2gK}{L} \left| \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u(\hat{x})} \right| + u_1^2 + \frac{2g}{L} |\sigma_0(x_1) - \sigma_0(\hat{x})| + 2C_0 \int_{\hat{x}}^{x_1} u^2(s) ds.$$

En utilisant le fait que  $u$  est croissante sur l'intervalle  $]\hat{x}, x_1]$  il s'ensuit

$$|u(\hat{x})|^2 < \frac{2gK}{L} \left| \int_{u(\hat{x})}^{u_1} \frac{dz}{z^2} \right| + u_1^2 + \frac{2g}{L} |\sigma_0(x_1) - \sigma_0(\hat{x})| + 2C_0 u_1^2 (x_1 - \hat{x}).$$

Après une majoration du terme intégral, on obtient

$$|u(\hat{x})|^2 \leq \frac{2gK}{L} \frac{1}{u_1^2} |u_1 - u(\hat{x})| + u_1^2 + \frac{2g}{L} |\sigma_0(x_1) - \sigma_0(\hat{x})| + 2C_0 u_1^2 (x_1 - \hat{x}).$$

En regroupant les termes, on obtient l'inéquation du second degré suivante

$$|u(\hat{x})|^2 + a |u(\hat{x})| + b < 0 \quad (\text{IV.10})$$

où

$$a = -\frac{2gK}{L u_1^2} < 0,$$

et

$$b = -\frac{2gK}{L |u_1|} - u_1^2 - \frac{2g}{L} |\sigma_0(x_1) - \sigma_0(\hat{x})| - 2C_0 u_1^2 (x_1 - \hat{x}) < 0.$$

Le polynôme (IV.10) admet deux racines réelles de signe contraire  $u_-$  et  $u_+$  et la racine dont la valeur absolue est la plus grande est positive. Donc l'inégalité (IV.10) implique que  $u(\hat{x}) \in ]u_-, u_+[$ .

En conclusion, nous avons montré l'existence d'un réel  $R \in \mathbb{R}^{+,*}$ , ne dépendant que des coefficients de l'équation (IV.7) et des valeurs  $u_0$  et  $u_1$  tel que : pour toute solution de l'équation (IV.7) vérifiant les conditions de bords (IV.3) on a pour tout  $x \in [x_0, x_1]$

$$|u(x)| \leq R, \quad (\text{IV.11})$$

ce qui conclut la preuve. ■

**Remarque IV.4** *L'hypothèse de la proposition,  $\sigma'_0(x) < 0$  pour tout  $x \in [x_0, x_1]$ , est tout à fait légitime. En effet, cette condition traduit le fait que la section toujours mouillée du fleuve est décroissante en  $x$ , traduisant le fait que le lit de la rivière se rétrécit quand on se dirige vers l'amont.*

Nous considérons maintenant le problème de l'existence de solutions de l'équation (IV.7). Nous allons transformer la recherche de solutions de l'équation (IV.7) en un problème de point fixe.

De la proposition précédente, la fonction  $u$  ne peut pas s'annuler sur l'intervalle  $[x_0, x_1]$ . Nous pouvons donc diviser par  $u^2$  dans l'équation (IV.7), il vient

$$N_h L u''(x) + \left[ \frac{gK}{u^2(x)} - L u(x) \right] u'(x) + g \sigma'_0(x) - C_0 L u^2(x) = 0.$$

Cette équation peut s'intégrer entre  $x_0$  et  $x$ , il s'ensuit

$$\begin{aligned} N_h L (u'(x) - u'(x_0)) + gK \left( \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(x)} \right) - \frac{L}{2} [u^2(x) - u_0^2] \\ + g [\sigma_0(x) - \sigma_0(x_0)] - C_0 L \int_{x_0}^x u^2(s) ds = 0. \end{aligned}$$

En regroupant les termes nous aboutissons finalement à l'équation suivante

$$\begin{aligned} u'(x) = u'(x_0) + \frac{gK}{N_h L} \frac{1}{u(x)} + \frac{1}{2N_h} u^2(x) - \frac{g}{N_h L} [\sigma_0(x) - \sigma_0(x_0)] \\ + \frac{C_0}{N_h} \int_{x_0}^x u^2(s) ds - f(u_0). \end{aligned}$$

où  $f$  a été définie dans (IV.9). Le terme  $u'(x_0)$  est une inconnue de cette équation. Au vu des conditions aux limites (IV.3) que nous avons choisies, nous allons utiliser la valeur de  $u$  en  $x_1$  pour déterminer celle de  $u'(x_0)$ . Dans un premier temps nous allons intégrer une nouvelle fois l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} u(x) = u_0 + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{gK}{N_h L} \int_{x_0}^x \frac{1}{u(s)} ds + \frac{1}{2N_h} \int_{x_0}^x u^2(s) ds \\ - \frac{g}{N_h L} \int_{x_0}^x \sigma_0(s) ds + \frac{g}{N_h L} \sigma_0(x_0)(x - x_0) \\ + \frac{C_0}{N_h} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^s u^2(t) dt ds - f(u_0)(x - x_0). \end{aligned}$$



Ainsi

$$\begin{aligned}
 u(x) = & u_0 + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{gK}{N_h L} \int_{x_0}^x \frac{1}{u(s)} ds + \frac{1}{2N_h} \int_{x_0}^x u^2(s) ds \quad (\text{IV.12}) \\
 & - \frac{g}{N_h L} \int_{x_0}^x \sigma_0(s) ds + \frac{g}{N_h L} \sigma_0(x_0)(x - x_0) \\
 & + \frac{C_0}{N_h} \int_{x_0}^x (x - s) u^2(s) ds - f(u_0)(x - x_0).
 \end{aligned}$$

En prenant la valeur en  $x = x_1$  dans cette équation, nous pouvons en déduire l'expression de  $u'(x_0)$  suivante

$$\begin{aligned}
 u'(x_0) = & \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0} - \frac{gK}{N_h L(x_1 - x_0)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{u(s)} ds \\
 & - \frac{1}{2N_h(x_1 - x_0)} \int_{x_0}^{x_1} u^2(s) ds + \frac{g}{N_h L(x_1 - x_0)} \int_{x_0}^{x_1} \sigma_0(s) ds \\
 & - \frac{g}{N_h L} \sigma_0(x_0) - \frac{C_0}{N_h(x_1 - x_0)} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - s) u^2(s) ds + f(u_0)
 \end{aligned}$$

En remplaçant cette expression de  $u'(x_0)$  dans l'équation (IV.12), on se ramène, après avoir regroupé les termes, au problème de point fixe suivant

$$u = \Xi(u) \quad (\text{IV.13})$$

où pour tout  $x \in [x_0, x_1]$

$$\Xi(u)(x) = \Phi(x) + \Psi(u)(x), \quad (\text{IV.14})$$

avec

$$\Phi(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} u_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} u_1,$$

et  $\Psi(u)$  est définie par

$$\begin{aligned}
 \Psi(u)(x) = & \frac{gK}{N_h L} \left\{ \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^x \frac{1}{u(s)} ds - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int_x^{x_1} \frac{1}{u(s)} ds \right\} \\
 & + \frac{1}{2N_h} \left\{ \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^x u^2(s) ds - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int_x^{x_1} u^2(s) ds \right\} \\
 & - \frac{g}{N_h L} \left\{ \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^x \sigma_0(s) ds - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int_x^{x_1} \sigma_0(s) ds \right\} \\
 & + \frac{C_0}{N_h} \left\{ \int_{x_0}^x \frac{(x_0 - s)(x_1 - s)}{x_1 - x_0} u^2(s) ds - \int_x^{x_1} \frac{(x - x_0)(x_1 - s)}{x_1 - x_0} u^2(s) ds \right\}.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que l'on a les égalités suivantes

$$\Phi(x_0) = u_0 \text{ et } \Phi(x_1) = u_1$$

et

$$\Psi(u)(x_0) = 0 \text{ et } \Psi(u)(x_1) = 0.$$

Maintenant nous allons utiliser la propriété IV.5 d'invariance par homotopie du degré topologique pour prouver l'existence d'une solution du problème de point fixe (IV.13). Avant toute chose, nous faisons le changement de fonction suivant sur  $[x_0, x_1]$

$$\tilde{u} = u - \Phi,$$

qui conduit au problème de point fixe suivant

$$\tilde{u} = \Psi(\tilde{u} + \Phi) \equiv \tilde{\Psi}(\tilde{u}). \tag{IV.15}$$

Cette transformation permet essentiellement de formuler le problème de point fixe dans un espace vectoriel, l'espace

$$\mathcal{C}_0^0 = \{u \in \mathcal{C}^0([x_0, x_1]; \mathbb{R}) \text{ avec } u(x_0) = u(x_1) = 0\}.$$

Nous allons à présent construire une homotopie entre l'application  $\tilde{\Psi}$  et une application triviale pour laquelle le calcul du degré est immédiat.

On définit l'application suivante  $H : \mathcal{C}_0^0 \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{C}_0^0$  telle que

$$H(\tilde{u}; \lambda) = \lambda \tilde{\Psi}(\tilde{u}).$$

Nous allons par la suite nous intéresser au problème de point fixe suivant

$$\tilde{u} = H(\tilde{u}; \lambda)$$

soit

$$(I - H(\cdot; \lambda))\tilde{u} = 0. \tag{IV.16}$$

Les solutions du problème (IV.16) vérifient la proposition suivante

**Proposition IV.9** *Les solutions  $\tilde{u}$  du problème de point fixe (IV.16) vérifient la proposition IV.8 pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ , avec la même constante  $R$ .*

**Démonstration:**

La preuve découle de celle utilisée pour la proposition IV.8. Soit  $\tilde{u}$  une solution du problème de point fixe (IV.16). Alors, pour tout  $x \in [x_0, x_1]$  il vient, en utilisant la définition de  $\tilde{u}$

$$u''(x) = \lambda \Psi''(x).$$

Par suite,  $u''$  vérifie l'équation suivante

$$u''(x) + \lambda \left[ \left( \frac{gK}{N_h L u^2(x)} - \frac{u(x)}{N_h} \right) u'(x) + \frac{g}{N_h L} \sigma'_0(x) - \frac{C_0}{N_h} u^2(x) \right] = 0,$$

avec les mêmes conditions de bord (IV.3). En procédant d'une manière analogue à celle employée dans la preuve de la proposition IV.8, la solution de l'équation sus-écrite vérifie l'équation (IV.10) sans  $\lambda$ , ce qui conclut la preuve. ■

Nous allons maintenant définir un ouvert borné  $X$  de l'espace fonctionnel  $\mathcal{C}_0^0$ . De la proposition précédente IV.8 nous déduisons que tout point fixe de (IV.13) vérifie l'inégalité suivante

$$-R - 1 < u < u_0 + \eta$$

où  $\eta > 0$  est choisi tel que  $u_0 + \eta < 0$ . Ainsi, de la définition de  $\tilde{u}$  il vient avec  $0 < \eta < -u_0$

$$-R - 1 < \tilde{u} + \Phi < u_0 + \eta \Rightarrow -R - u_0 - 1 < \tilde{u} < u_0 - u_1 + \eta$$

Par suite, on pose

$$X = \{v \in \mathcal{C}_0^0; -R - u_0 - 1 < v < u_0 - u_1 + \eta\}$$

$X$  est un ouvert borné de l'espace fonctionnel  $\mathcal{C}_0^0$ , de plus l'application précédente  $H$  définie de  $\overline{X} \times [0, 1]$  à valeurs dans  $\mathcal{C}_0^0$  est compacte. En effet, l'application  $H$  transforme les bornés de  $\overline{X} \times [0, 1]$  en des bornés de l'espace  $\mathcal{C}^1$ , ainsi la preuve de la compacité de  $H$  découle du théorème d'Ascoli.

Nous allons à présent démontrer le résultat suivant

**Proposition IV.10** *deg*  $(I - H(\bullet; 0), X, 0)$  existe et est non nul.

**Démonstration:**

En effet, pour  $\lambda = 0$  on est amené à résoudre le problème de point fixe suivant

$$\tilde{u} = 0.$$

Or l'application  $0 \in X$  et en utilisant la proposition IV.7 étendue aux espaces de dimensions infinies on en déduit que

$$\deg(I, X, 0) = 1 = \deg(I - H(\bullet; 0), X, 0).$$

■

De ce qui précède, les solutions  $u$  sont telles que  $-R - 1 < u < u_0 + \eta$ , ainsi pour tout  $\tilde{u} \in \partial X$  et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  on a  $\tilde{u} - H(\tilde{u}, \lambda) \neq 0$ , alors pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  en utilisant la proposition IV.5 il vient

$$\deg(I - H(\bullet; \lambda), X, 0) = \deg(I - H(\bullet; 0), X, 0) \neq 0.$$

En conclusion, en regroupant les résultats précédents, en utilisant le corollaire IV.1 on peut conclure que le problème de point fixe (IV.16), donc celui (IV.13), admet une solution  $u \in X$ .

## 2.3 L'équation de l'intensité lumineuse dans la colonne d'eau

D'après l'équation vérifiée par l'intensité lumineuse dans la colonne d'eau, (III.4), en prenant le coefficient de turbidité  $T$  indépendant du temps, la solution stationnaire de l'intensité lumineuse dans la colonne d'eau est

$$E(x, z) = I_n \exp(z - \zeta(x)) \exp(g(T)). \tag{IV.17}$$

# Chapitre 3

## Recherche de solutions de l'équation civelle (III.7)

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à montrer l'existence, dans un cadre particulier, de solutions de l'équation civelle (III.7). Nous allons nous placer dans le cas où les deux coefficients de mortalité sont constants, dont la somme sera notée  $\mu$ . De plus, les deux coefficients de diffusion  $k_h$  et  $k_v$  seront également choisis constants. On supposera que le domaine d'étude est fixe, c'est-à-dire que les frontières horizontales du domaine sont indépendantes du temps d'observation  $t$  et de la variable spatiale  $x$ . On pose  $Z_{Fond} \equiv Z_{Fond}(x)$  et  $Z_{Surf} \equiv \zeta(t, x)$ , ainsi notre domaine spatial d'étude se réduit au rectangle  $\Omega = ]x_0, x_1[ \times ]Z_{Fond}, Z_{Surf}[$ . On choisit de prendre la vitesse du courant  $u$  et l'intensité lumineuse dans la colonne d'eau  $E$  stationnaires. L'existence de telles applications stationnaires a été établie dans le chapitre précédent.

Le domaine  $\Omega$  se décompose alors, d'après le tableau de migration (III.5), en quatre zones distinctes délimitées par les courbes indépendantes du temps  $x = \hat{X}$  et  $z = z^*(x)$ , où les civelles y possèdent un unique mode de migration. Ces deux courbes sont obtenues respectivement en résolvant les équations  $u(x) = \hat{u}$  et  $E(x, z) = \hat{E}$ .

	$u > \hat{u}$
$E \geq \hat{E}$	<p style="text-align: center;">Zone <math>\mathcal{A}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>Migration sur le fond</b></p> $\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [uC] + \mathcal{V}_C \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{z - Z_{Fond}}{Z_{Surf} - Z_{Fond}} \right)^\alpha C \right] + k_h \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \mu C$
$E < \hat{E}$	<p style="text-align: center;">Zone <math>\mathcal{C}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>Migration dans toute la colonne d'eau</b></p> $\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [uC] + k_h \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + k_v \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \mu C$

	$u \leq \hat{u}$
$E \geq \hat{E}$	<p style="text-align: center;">Zone <math>\mathcal{B}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>Plongent vers le fond et s'enfouissent</b></p> $\frac{\partial C}{\partial t} = \mathcal{V}_C \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{z - Z_{Fond}}{Z_{Surf} - Z_{Fond}} \right)^\alpha C \right] - \mu C$
$E < \hat{E}$	<p style="text-align: center;">Zone <math>\mathcal{D}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>Plongent vers le fond et s'enfouissent</b></p> $\frac{\partial C}{\partial t} = \mathcal{V}_C \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{z - Z_{Fond}}{Z_{Surf} - Z_{Fond}} \right)^\alpha C \right] - \mu C$

Les équations précédentes du tableau étant complétées par une condition initiale (III.8) et des conditions de bord (III.13), d'après le modèle général d'évolution. Maintenant, nous allons, dans ces quatre zones montrer l'existence de solutions. Dans un premier temps, nous allons rappeler les éléments mathématiques que nous utiliserons par la suite dans ce chapitre.

## 3.1 Résolution des équations d'évolution à l'aide de la théorie des semi-groupes - Rappels

Le paragraphe ci-dessous est consacré à une présentation succincte de la caractérisation des semi-groupes à l'aide des opérateurs accréatifs. Pour la clarté de la rédaction les démonstrations des résultats présentés ici ne seront pas explicitées, mais indiquées sous forme de références bibliographiques.

### 3.1.1 Opérateurs accréatifs

Un opérateur d'un ensemble  $X$  est une application de  $X$  dans  $\mathcal{P}(X)$ , ensemble des parties de  $X$ . On dit qu'un opérateur  $A$  est univoque si pour tout  $x \in X$ ,  $Ax$  contient au plus un élément. Le domaine d'un opérateur  $A$  est l'ensemble  $D(A) = \{x \in X, Ax \neq \emptyset\}$  et l'image de  $A$  est l'ensemble  $Im(A) = \bigcup_{x \in X} Ax$ . Nous identifierons  $A$  avec son graphe dans  $X \times X$ , c'est-à-dire  $\{(x, y) \in X \times X, y \in Ax\}$ . Nous noterons  $A^{-1}$  l'opérateur de graphe, le symétrique de celui de  $A$ , c'est-à-dire  $y \in A^{-1}x$  si et seulement si  $x \in Ay$ ; on a évidemment  $D(A^{-1}) = Im(A)$  et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

Si  $X$  est un espace vectoriel, étant donnés deux opérateurs  $A$  et  $B$  et deux scalaires  $\alpha, \beta$  on définit

$$\alpha A + \beta B : x \in X \rightarrow \alpha Ax + \beta Bx = \{\alpha a + \beta b, a \in Ax \text{ et } b \in Bx\}$$

Nous avons évidemment  $D(\alpha A + \beta B) = D(A) \cap D(B)$ .

Maintenant nous allons définir la catégorie des opérateurs qui nous intéresse ici : les **opérateurs accréatifs** (ou **monotone** dans le cas où  $X$  serait un espace de Hilbert).

**Définition IV.2** Soit  $X$  un espace vectoriel normé. On dit qu'un opérateur  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  est **accréatif** ( $-A$  est **dissipatif**) si et seulement si

$$\|x - \hat{x}\|_X \leq \|x - \hat{x} + \lambda(Ax - A\hat{x})\|_X$$

pour tous  $x, \hat{x} \in D(A)$  et  $\lambda > 0$ .

En d'autres termes, l'opérateur  $A$  est accréatif si et seulement si pour tout  $\lambda > 0$ , l'opérateur  $(I + \lambda A)^{-1}$  est une contraction (opérateur univoque lipschitzien de rapport 1).

Si de plus  $Im(I + \lambda A) = X$  pour tout  $\lambda > 0$ , alors on dira que  $A$  est **m-accréatif**.

### IV.3.1 Résolution des équations d'évolution à l'aide de la théorie des semi-groupes - Rappels

---

Introduisons maintenant quelques notations qui nous permettrons par la suite de donner une autre caractérisation de l'accrétivité souvent plus facile à démontrer dans la pratique. Cette alternative a été exposée dans l'article de L.C. Evans [12]. Pour tous  $x, y \in X$  on définit le crochet suivant

$$[x, y]_+ \equiv \inf_{\lambda > 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda}.$$

La définition précédente induit le résultat suivant

**Proposition IV.11** *On peut vérifier qu'un opérateur  $A$  est **accrétif** si et seulement si*

$$[x - \hat{x}, Ax - A\hat{x}]_+ \geq 0 \text{ pour tous } x, \hat{x} \in D(A).$$

L'avantage de cette caractérisation est que pour certains espaces  $X$  le crochet  $[\cdot, \cdot]_+$  est facile à calculer comme le montre la proposition suivante :

**Proposition IV.12** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .*

(i) *Si  $X = L^p(\Omega)$  pour  $1 < p < \infty$ ,*

$$[f, g]_+ = \begin{cases} \frac{1}{\|f\|^{p-1}} \int |f|^{p-1} \operatorname{sgn} f \cdot g dx & \text{si } f \neq 0 \\ \|g\| & \text{si } f \equiv 0 \end{cases}$$

(ii) *Si  $X = L^1(\Omega)$ ,*

$$[f, g]_+ = \int_{\{f>0\}} g dx - \int_{\{f<0\}} g dx + \int_{f=0} |g| dx$$

Nous noterons l'opérateur **résolvant** associé à  $A$  :  $J_\lambda^A$  (ou plus simplement  $J_\lambda$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'opérateur  $(I + \lambda A)^{-1}$ . D'après la définition précédente d'un opérateur accrétif il vient le résultat suivant :

**Proposition IV.13** *Soit  $A$  un opérateur accrétif alors l'opérateur  $J_\lambda^A$  est une contraction.*

Dans la suite on sera amené à résoudre des problèmes qui pourront s'écrire sous la forme générale du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + A(u(t)) = f(t), & 0 < t < \infty \\ u(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$



### IV.3.1 Résolution des équations d'évolution à l'aide de la théorie des semi-groupes - Rappels

---

où l'opérateur  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  avec  $X$  un espace de Banach,  $x_0 \in \overline{D(A)}$ ,  $f : [0, +\infty[ \rightarrow X$ . L'idée clef, dans la recherche d'une solution  $u$  du problème précédent lorsque l'opérateur  $A$  est **m-accréatif**, est d'approcher le problème (IV.1) par une suite de problèmes (IV.2) dans lesquels la dérivée en temps est approchée par un quotient différentiel de pas  $\lambda_n > 0$  et le terme  $f(t)$  par une fonction en escalier  $f^n(t)$  définie ainsi  $f^n(t) = f_k^n$  pour  $k\lambda_n \leq t < (k+1)\lambda_n$  :

$$\begin{cases} \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{\lambda_n} + A(x_k^n) = f_k^n & k = 1, 2, \dots \\ x_0^n = x_0 \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

qui peut se réécrire ainsi

$$\begin{cases} x_k^n = (I + \lambda_n A)^{-1} (x_{k-1}^n + f_k^n) & k = 1, 2, \dots \\ x_0^n = x_0 \end{cases}$$

soit encore en utilisant la définition de l'opérateur résolvant associé à  $A$

$$\begin{cases} x_k^n = J_\lambda^A (x_{k-1}^n + f_k^n) & k = 1, 2, \dots \\ x_0^n = x_0 \end{cases}$$

L'opérateur  $A$  étant m-accréatif ( $Im(I + \lambda_n A) = X$ ) on peut résoudre récursivement le problème précédent et ainsi construire une approximation de la solution définie par morceaux  $u^n(t) = x_k^n$  pour  $k\lambda_n \leq t < (k+1)\lambda_n$ . Le théorème suivant montre que sous certaines hypothèses l'approximation précédente converge :

**Théorème IV.2** *Soit  $A$  un opérateur m-accréatif et  $x_0 \in \overline{D(A)}$ . Supposons que  $f \in L^1(0, T; X)$  pour  $0 < T < \infty$  et que l'approximation  $f^n \rightarrow f$  dans  $L^1(0, T; X)$  quand  $n \rightarrow +\infty$   $\lambda_n \rightarrow 0$ ; alors  $u^n(t)$  converge uniformément sur  $[0, T]$  vers  $u(t)$ .*

Quand  $f$  sera nulle on écrira souvent  $u(t) = S(t)x_0$  où la famille d'opérateurs  $S(t)$  ( $t \geq 0$ ) est le semi-groupe généré par l'opérateur  $A$ .

### 3.1.2 Semi-groupes linéaires

Dans cette section on va rassembler les résultats fondamentaux de la théorie des opérateurs linéaires ainsi que des semi-groupes linéaires qui leurs sont associés. La majorité de ces résultats proviennent des ouvrages de Pazy [30] et de K.J. Engel et R. Nagel [27].

### IV.3.1 Résolution des équations d'évolution à l'aide de la théorie des semi-groupes - Rappels

---

Avant tout on rappelle les définitions et propriétés des opérateurs linéaires bornés. On désignera par  $X$  un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|_X$  et  $\mathcal{L}(X)$  l'espace des applications linéaires continues de  $X$  dans lui-même muni de la norme  $\|\cdot\|$ . Pour une application  $A \in \mathcal{L}(X)$  on a par définition :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_X = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X}.$$

**Définition IV.3** *Un opérateur linéaire dans  $X$  est un couple  $(D(A); A)$  où  $D(A)$  est un sous espace vectoriel de  $X$  (Domaine de  $A$ ) et  $A : D(A) \rightarrow X$  est une application linéaire. On dit que  $A$  est **borné** si il existe une constante  $c \in \mathbb{R}^+$  telle que  $\|Ax\|_X \leq c\|x\|_X$  pour tout  $x \in D(A)$ .*

**Définition IV.4** *On appelle graphe d'un opérateur  $A$  l'ensemble suivant*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}.$$

*Un opérateur sera dit **fermé** si son graphe est fermé.*

**Définition IV.5** *Soit  $A$  un opérateur linéaire de  $D(A)$  sur  $X$ . On appelle ensemble résolvant de  $A$ , l'ensemble suivant*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (I + \lambda A) \text{ est bijective de } D(A) \text{ sur } X \text{ et } (I + \lambda A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

*L'opérateur  $(I + \lambda A)^{-1} \equiv J_\lambda^A$  est appelé l'opérateur résolvant de  $A$ . Le spectre de  $A$ ,  $\sigma(A)$  est l'ensemble complémentaire de  $\rho(A)$ ,  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ .*

Définissons à présent les semi-groupes linéaires :

**Définition IV.6** *Une famille  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  d'éléments  $T(t) \in \mathcal{L}(X)$  pour  $t \geq 0$  forme un **semi-groupe linéaire de classe  $\mathcal{C}^0$**  dans  $X$ , si elle vérifie les conditions suivantes :*

- i)  $T(s + t) = T(s)T(t)$  pour tous  $s, t \geq 0$  (propriété algébrique),*
- ii)  $T(0) = I$  (identité de  $\mathcal{L}(X)$ ),*
- iii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0$  pour tout  $x \in X$  (propriété topologique).*

Soit  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe linéaire de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $X$ , il vérifie la propriété suivante :

**Proposition IV.14**

- i)  $t \rightarrow \|T(t)\|$  est bornée sur tout intervalle compact  $[0, \alpha]$  ;
- ii) Pour tout  $x \in X$ , la fonction  $t \rightarrow T(t)x$  est continue (à valeurs dans  $X$ ) sur  $\mathbb{R}^+$  ;
- iii) Il existe des constantes réelles  $\omega$  et  $M$  telles que  $\|T(t)\| \leq M \exp(\omega t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Définissons à présent une catégorie de semi-groupes linéaires que l'on rencontrera par la suite :

**Définition IV.7** Un semi-groupe  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  de classe  $\mathcal{C}^0$  est appelé **semi-groupe linéaire de contraction** de classe  $\mathcal{C}^0$  si il vérifie l'inégalité suivante :  $\|T(t)\| \leq 1$ , pour tout  $t \geq 0$ .

A chaque semi-groupe linéaire  $T(t)$  on fait correspondre une famille d'opérateurs  $A_h$  définie par la relation suivante :

$$A_h x = \frac{1}{h}(T(h)x - x), \text{ pour } h > 0 \text{ et } x \in X.$$

En général  $A_h x$  n'admet pas de limite pour tout  $x \in X$  quand  $h \rightarrow 0$ .

**Définition IV.8** On appelle **générateur infinitésimal** du semi-groupe linéaire  $T(t)$ , l'opérateur  $A$  qui a pour domaine  $D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x \text{ existe} \right\}$  et tel que :

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x, \text{ pour } x \in D(A).$$

Nous allons, maintenant, caractériser le générateur infinitésimal d'un semi-groupe linéaire borné et uniformément continu. Il vient le théorème suivant

**Théorème IV.3** Un opérateur linéaire  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe linéaire borné et uniformément continu si et seulement si  $A$  est borné.

D'après la définition précédente, chaque semi-groupe possède un unique générateur infinitésimal et si ce semi-groupe est borné, uniformément continu, son générateur infinitésimal est lui-même borné, d'où le corollaire suivant :

**Corollaire IV.2** Soit  $T(t)$  un semi-groupe uniformément continu, d'opérateurs linéaires bornés. Alors

- Il existe une constante  $\omega \geq 0$  telle que :  $\|T(t)\| \leq \exp(\omega t)$ .
- Il existe un unique opérateur linéaire borné  $A$  tel que :  $T(t) = \exp(tA)$ .

### IV.3.1 Résolution des équations d'évolution à l'aide de la théorie des semi-groupes - Rappels

---

- L'opérateur  $A$  défini précédemment est le générateur infinitésimal de  $T(t)$ .
- $t \rightarrow T(t)$  est différentiable en norme et  $\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A$ .

Une caractérisation des opérateurs qui sont générateurs infinitésimaux d'un semi-groupe de classe  $\mathcal{C}^0$  existe et elle est donnée par les théorèmes de Hille-Yosida et Lumer-Phillips.

#### **Théorème IV.4 Hille-Yosida**

Un opérateur linéaire  $A$  (non borné) est générateur infinitésimal d'un  $\mathcal{C}^0$  semi-groupe de contractions  $T(t)$ ,  $t > 0$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $A$  est fermé et  $\overline{D(A)} = X$ .
- $\rho(A) \supset \mathbb{R}^+$  et pour tout  $\lambda > 0$  on a :  $\|J_\lambda^A\| \leq \frac{1}{\lambda}$ .

La deuxième hypothèse entraîne que l'opérateur  $A$  est  $m$ -dissipatif, ainsi on obtient le théorème suivant :

#### **Théorème IV.5 Lumer-Phillips**

Soit  $A$  un opérateur linéaire à domaine dense dans  $X$ .

- Si  $A$  est  $m$ -dissipatif, alors  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $\mathcal{C}^0$  semi-groupe de contraction sur  $X$ .
- Si  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $\mathcal{C}^0$  semi-groupe de contraction sur  $X$ , alors  $A$  est  $m$ -dissipatif. De plus,  $A$  est fortement dissipatif et  $J_\lambda^A x = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)T(t)x dt$ ,  $\forall \lambda > 0$  et  $\forall x \in X$ .

A présent, revenons à ce qui a motivé ce chapitre : la recherche de solutions dans les différentes zones. Nous différencierons l'étude, distinctement, dans chacune des quatre zones du précédent tableau (III.5).

## 3.2 Etude dans la zone $\mathcal{A}$

La zone  $\mathcal{A}$  peut se réécrire ainsi

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, z); x_0 \leq x \leq \hat{X} \text{ et } z^*(x) \leq z \leq Z_{Surf} \right\}.$$

D'après le modèle général, la condition de non transfert à la surface se simplifie et l'on obtient

$$C(t, x, Z_{Surf}) = 0.$$

Par contre on n'a aucune indication sur la donnée le long des frontières  $z = z^*(x)$  et  $x = \hat{X}$ . Dans cette zone, le problème associé, d'après l'équation générale (III.7), est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} = k_h \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} [uC] + \mathcal{V}_C \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{z - Z_{Fond}}{Z_{Surf} - Z_{Fond}} \right)^\alpha C \right] - \mu C \\ u(x_0)C(t, x_0, z) - k_h \frac{\partial C(t, x_0, z)}{\partial x} = \mathcal{F}(t, x_0, z) \geq 0 \\ \hat{u}C(t, \hat{X}, z) - k_h \frac{\partial C(t, \hat{X}, z)}{\partial x} = 0 \\ C(t_0, x, z) = C_0(x, z) \end{array} \right. \quad (\text{IV.3})$$

où la troisième égalité traduit le fait que nous supposons qu'il n'y a pas de flux à travers la frontière verticale  $x = \hat{X}$ . Pour tout  $x$  fixé, l'équation précédente se réduit à une équation hyperbolique du premier ordre en  $z$  qui peut être résolue par intégration le long des courbes caractéristiques. Ce sont des courbes dont la représentation paramétrique est de la forme  $(\bar{t}(s), \bar{z}(s))$  solution du système d'équations différentielles ordinaires suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{t}(s)}{ds} = 1 \\ \frac{d\bar{z}(s)}{ds} = -\mathcal{V}_C \left( \frac{\bar{z}(s) - Z_{Fond}}{Z_{Surf} - Z_{Fond}} \right)^\alpha \Rightarrow \frac{d\bar{z}}{(\bar{z} - Z_{Fond})^\alpha} = \frac{-\mathcal{V}_C}{(Z_{Surf} - Z_{Fond})^\alpha} ds. \end{array} \right.$$

En intégrant cette égalité entre  $t_0$  et  $t$ , puis entre  $z_0 \in [z^*(x); Z_{Surf}]$  et  $z$  il vient finalement

$$\bar{z}(t) = Z_{Fond} + \left[ (z_0 - Z_{Fond})^{-\alpha+1} + \frac{\mathcal{V}_C (\alpha - 1) (t - t_0)}{(Z_{Surf} - Z_{Fond})^\alpha} \right] \frac{1}{-\alpha + 1}.$$

On pose pour simplifier

$$\bar{z}(t) = \zeta(t, t_0, z_0). \quad (\text{IV.4})$$

La densité de civelle  $C(t, x, z)$  devient donc le long de ces courbes caractéristiques (IV.4)

$$C(t, x, \zeta(t, t_0, z_0)) \equiv \bar{C}(t, x).$$

D'après l'équation vérifiée par  $C$ , (IV.3),  $\bar{C}$  vérifie l'équation suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} &= \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} &= \frac{\partial C}{\partial t} - \mathcal{V}_C \left( \frac{z - Z_{Fond}}{Z_{Surf} - Z_{Fond}} \right)^\alpha \frac{\partial C}{\partial z} \end{aligned}$$

ainsi il vient

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = k_h \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} [u\bar{C}] + \left[ \alpha \mathcal{V}_C \frac{(\zeta(t, t_0, z_0) - Z_{Fond})^{\alpha-1}}{(Z_{Surf} - Z_{Fond})^\alpha} - \mu \right] \bar{C},$$

qui peut se réécrire comme suit

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = k_h \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} [u\bar{C}] + h(t)\bar{C} \quad (\text{IV.5})$$

où

$$h(t) = \alpha \mathcal{V}_C \frac{(\zeta(t, t_0, z_0) - Z_{Fond})^{\alpha-1}}{(Z_{Surf} - Z_{Fond})^\alpha} - \mu. \quad (\text{IV.6})$$

La condition initiale et les conditions aux bords verticaux deviennent respectivement

$$\begin{cases} \bar{C}(t_0, x) = \bar{C}_0(x) \\ u(x_0)\bar{C}(t, x_0) - k_h \frac{\partial \bar{C}(t, x_0)}{\partial x} = \bar{\mathcal{F}}(t, x_0) \geq 0 \\ \hat{u}\bar{C}(t, \hat{X}) - k_h \frac{\partial \bar{C}(t, \hat{X})}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Nous allons nous ramener, dans un premier temps, à un problème homogène. En utilisant un changement de variable adéquat, on peut retrouver, à partir de la solution de l'équation homogène, la solution du problème général. On pose

$$W(t, x) = \bar{C}(t, x) + g(t, x)$$

où

$$g(t, x) = -\frac{\overline{\mathcal{F}}(t, x_0) (x - \widehat{X})^2}{u(x_0) (x_0 - \widehat{X})^2} + \frac{2\overline{\mathcal{F}}(t, x_0) (x - \widehat{X})^2 (x - x_0)}{u(x_0) (x_0 - \widehat{X})^3}. \quad (\text{IV.7})$$

Il est immédiat de vérifier que

$$W(t, x_0) = \overline{\mathcal{C}}(t, x_0) - \frac{\overline{\mathcal{F}}(t, x_0)}{u(x_0)} \text{ et } W(t, \widehat{X}) = \overline{\mathcal{C}}(t, \widehat{X}),$$

et que

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} &= \frac{\partial \overline{\mathcal{C}}(t, x)}{\partial x} - 2 \frac{\overline{\mathcal{F}}(t, x_0) (x - \widehat{X})}{u(x_0) (x_0 - \widehat{X})^2} \\ &+ \frac{4\overline{\mathcal{F}}(t, x_0) (x - \widehat{X}) (x - x_0)}{u(x_0) (x_0 - \widehat{X})^3} + \frac{2\overline{\mathcal{F}}(t, x_0) (x - \widehat{X})^2}{u(x_0) (x_0 - \widehat{X})^3}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(t, \widehat{X})}{\partial x} &= \frac{\partial \overline{\mathcal{C}}(t, \widehat{X})}{\partial x} \\ \frac{\partial W(t, x_0)}{\partial x} &= \frac{\partial \overline{\mathcal{C}}(t, x_0)}{\partial x} \end{aligned}$$

$W$  vérifie ainsi les conditions de bord homogènes suivantes

$$\begin{cases} u(x_0)W(t, x_0) - k_h \frac{\partial W(t, x_0)}{\partial x} = 0 \\ \widehat{u}W(t, \widehat{X}) - k_h \frac{\partial W(t, \widehat{X})}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

La condition initiale devient quant à elle

$$W(t_0, x) = \overline{\mathcal{C}}_0(x) - \frac{\overline{\mathcal{F}}(t_0, x_0) (x - \widehat{X})^2}{u(x_0) (x_0 - \widehat{X})^2} + \frac{2\overline{\mathcal{F}}(t_0, x_0) (x - \widehat{X})^2 (x - x_0)}{u(x_0) (x_0 - \widehat{X})^3} \equiv W_0(x).$$

Finalement,  $W$  vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [uW] + k_h \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + h(t)W + G(t, x) \quad (\text{IV.8})$$

où

$$G(t, x) = \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(x)g(t, x)] - k_h \frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial x^2} - h(t)g(t, x) \quad (\text{IV.9})$$

avec les conditions au bord et initiale suivantes

$$\begin{cases} W(t_0, x) = W_0(x) \\ u(x_0)W(t, x_0) - k_h \frac{\partial W(t, x_0)}{\partial x} = 0 \\ \hat{u}W(t, \hat{X}) - k_h \frac{\partial W(t, \hat{X})}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Regardons maintenant de plus près l'équation homogène (IV.8). Nous allons dans un premier temps effectuer un nouveau changement de variables. On pose

$$V(t, x) = \exp \left[ - \int_{t_0}^t h(s) ds \right] W(t, x) \quad (\text{IV.10})$$

ainsi l'équation (IV.8) devient

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [uV] + k_h \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \exp \left[ - \int_{t_0}^t h(s) ds \right] G(t, x) \quad (\text{IV.11})$$

munie de la condition initiale

$$V(t_0, x) = W_0(x)$$

et des conditions de bord

$$\begin{cases} u(x_0)V(t, x_0) - k_h \frac{\partial V(t, x_0)}{\partial x} = 0 \\ \hat{u}V(t, \hat{X}) - k_h \frac{\partial V(t, \hat{X})}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Nous allons supposer pour la suite que  $u \in W^{1,\infty}(|x_0, \hat{X}|)$ . On appelle  $A$  l'opérateur différentiel défini par l'expression de droite de l'équation (IV.11)

$$A\Phi = -k_h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial(u(x)\Phi)}{\partial x}. \quad (\text{IV.13})$$

A cet opérateur  $A$  est associé un domaine  $D(A)$  défini ainsi

$$D(A) = \left\{ \Phi \in L^1(|x_0, \hat{X}|) : A\Phi \in L^1(|x_0, \hat{X}|) \text{ et } \Phi \text{ vérifie les conditions au bord (IV.12)} \right\}.$$

Le problème précédent (IV.11) peut être réécrit ainsi pour tout  $V \in D(A)$  :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + AV = \exp \left[ - \int_{t_0}^t h(s) ds \right] G(t, \cdot) & t > t_0 \\ V(t_0, x) = W_0(x) \end{cases}$$



avec les conditions de bord associées dans la définition du domaine de l'opérateur  $A$ . L'opérateur linéaire  $A$  est défini dans un ensemble de fonction de  $]x_0, \widehat{X}[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Le choix le plus naturel est de considérer l'ensemble des fonctions  $\Phi$  telles que :  $\Phi \in L^1(]x_0, \widehat{X}[)$  et  $A\Phi \in L^1(]x_0, \widehat{X}[)$ . Pour de telles fonctions, toutefois, définir des valeurs au bord n'est pas évident, mais en fait, sous certaines hypothèses on peut vérifier le lemme suivant :

**Lemme IV.3** *Sous l'hypothèse précédente faite sur  $u$  :  $u \in W^{1,\infty}(]x_0, \widehat{X}[)$ , soit  $f \in L^1(]x_0, \widehat{X}[)$  telle que  $Af \in L^1(]x_0, \widehat{X}[)$ , alors  $\frac{df}{dx} \in W^{1,1}(]x_0, \widehat{X}[)$  et  $f \in W^{1,1}(]x_0, \widehat{X}[)$ .*

**Démonstration:**

Soit  $f \in L^1(I)$ , où  $I = ]x_0, \widehat{X}[$ , comme  $h \in L^\infty(I)$  et  $k_h \in \mathbb{R}$ , d'après l'hypothèse du lemme, il vient :  $\frac{d}{dx} \left( k_h \frac{df}{dx} - u(x)f \right) \in L^1(I)$ . L'application dérivée précédente est prise aux sens des distributions sur  $I$ , ainsi en posant  $g = \left( k_h \frac{df}{dx} - u(x)f \right)$ , on a  $g \in \mathcal{D}'(I)$  avec  $\frac{dg}{dx} \in L^1(I)$ . Or, en utilisant un résultat de J. Deny et J.L. Lions [8], on peut conclure que  $g \in L^1_{loc}(I)$ . Ainsi on en déduit que  $\frac{df}{dx} \in L^1(I)$  ce qui permet de conclure que  $f \in W^{1,1}(I)$ . Dans le même temps, comme

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{k_h} \left[ -Af + u(x) \frac{df}{dx} + \frac{du}{dx} f \right] \in L^1(I)$$

on en déduit que  $\frac{df}{dx} \in W^{1,1}(I)$ . ■

L'injection de l'espace  $W^{1,1}(]x_0, \widehat{X}[)$  dans  $\mathcal{C}^0([x_0, \widehat{X}])$  étant continue, H. Brezis [3], toute application appartenant à l'espace  $W^{1,1}(]x_0, \widehat{X}[)$  admet donc des valeurs aux deux bouts de l'intervalle. On peut donc définir pour les applications  $f \in D(A)$  leurs valeurs au bord du domaine. D'après le lemme précédent, nous sommes capables de définir correctement le domaine de l'opérateur  $A$ . Nous allons montrer, en utilisant la théorie des semi-groupes, dont on a rappelé des éléments en début de ce chapitre, que le problème de Cauchy associé à l'opérateur  $A$  :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + AV = \exp \left[ - \int_{t_0}^t h(s) ds \right] G(t, \cdot), & t > t_0 \\ V(t_0, x) = W_0(x) \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

admet une unique solution avec les conditions de bord homogènes associées dans la définition du domaine  $D(A)$ .

On va montrer que l'opérateur  $A$  est en fait le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction de classe  $\mathcal{C}^0$  dans l'espace  $L^1(]x_0, \widehat{X}[)$  en utilisant le théorème de Lumer-Phillips. Tout d'abord l'opérateur  $A$  vérifie la proposition suivante

**Proposition IV.15** *L'opérateur  $A$  est  $m$ -accrétif.*

**Démonstration:**

Ceci revient à montrer, dans un premier temps, que pour tout  $f \in D(A)$  :

$$\langle Af, \operatorname{sgn} f \rangle \geq 0,$$

où  $\operatorname{sgn} f$  représente, la fonction bornée sur l'intervalle  $]x_0, \widehat{X}[$ , signe de  $f$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le crochet de dualité de  $L^1(]x_0, \widehat{X}[)$ ,  $L^\infty(]x_0, \widehat{X}[)$ . Pour la suite des calculs on se donne l'approximation suivante de la fonction signe

$$\operatorname{sgn} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f}{|f| + \varepsilon}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \langle Af, \operatorname{sgn} f \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle Af, \frac{f}{|f| + \varepsilon} \right\rangle \\ &= -k_h \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\widehat{X}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{f}{|f| + \varepsilon} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\widehat{X}} \frac{\partial(u(x)f)}{\partial x} \frac{f}{|f| + \varepsilon} dx \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \langle Af, \operatorname{sgn} f \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \left( u(x)f - k_h \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{f}{|f| + \varepsilon} \right]_{x_0}^{\widehat{X}} + k_h \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\widehat{X}} \varepsilon \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2}{(|f| + \varepsilon)^2} dx \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\widehat{X}} \varepsilon \frac{u(x)f \frac{\partial f}{\partial x}}{(|f| + \varepsilon)^2} dx \end{aligned}$$

En utilisant les conditions de bord (IV.12) il s'ensuit

$$\langle Af, \operatorname{sgn} f \rangle = k_h \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\widehat{X}} \varepsilon \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2}{(|f| + \varepsilon)^2} dx - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\widehat{X}} \varepsilon \frac{u(x)f \frac{\partial f}{\partial x}}{(|f| + \varepsilon)^2} dx \quad (\text{IV.15})$$

Le premier terme de cette égalité étant positif, on s'intéresse au signe du second terme. Le signe de la solution stationnaire de l'équation courant,  $u$ , étant négatif d'après l'étude effectuée dans le chapitre précédent, il vient

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\hat{X}} \varepsilon \frac{u(x) f \frac{\partial f}{\partial x}}{(|f| + \varepsilon)^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\hat{X}} \varepsilon |u(x)| \frac{f \frac{\partial f}{\partial x}}{(|f| + \varepsilon)^2} dx$$

Or

$$\left| \varepsilon |u(x)| \frac{f \frac{\partial f}{\partial x}}{(|f| + \varepsilon)^2} \right| \leq |u(x)| \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \frac{\varepsilon |f|}{(|f| + \varepsilon)^2}$$

et comme

$$(|f| + \varepsilon)^2 = |f|^2 + 2\varepsilon |f| + \varepsilon^2 \geq 2\varepsilon |f|$$

on a l'inégalité suivante

$$\left| \varepsilon |u(x)| \frac{f \frac{\partial f}{\partial x}}{(|f| + \varepsilon)^2} \right| \leq \frac{1}{2} |u(x)| \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|.$$

Finalement, si l'on définit la suite de fonctions  $\Phi_\varepsilon$  ainsi

$$\Phi_\varepsilon = \varepsilon |u| \frac{f \frac{\partial f}{\partial x}}{(|f| + \varepsilon)^2},$$

alors par construction il s'agit d'une suite de fonctions de  $L^1(]x_0, \hat{X}[)$  telle que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon = 0$  et il existe une fonction  $\varphi \in L^1(]x_0, \hat{X}[)$  telle que  $|\Phi_\varepsilon| \leq \varphi$  pour presque tout  $x \in ]x_0, \hat{X}[$ . En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, voir par exemple H. Brezis [3], il vient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\hat{X}} |\Phi_\varepsilon - 0| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\hat{X}} \left| \varepsilon |u(x)| \frac{f \frac{\partial f}{\partial x}}{(|f| + \varepsilon)^2} \right| = 0.$$

En définitive, en reprenant l'égalité (IV.15) on obtient

$$\langle Af, \operatorname{sgn} f \rangle = k_h \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0}^{\hat{X}} \varepsilon \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2}{(|f| + \varepsilon)^2} dx \geq 0$$

ce qui nous donne l'accrétivité de l'opérateur  $A$ .

Maintenant, en montrant que l'application  $I + \lambda A$  est surjective  $\forall \lambda > 0$ , c'est-à-dire que pour tout  $f \in L^1(]x_0, \widehat{X}[)$ ,  $\exists v \in D(A)$  tel que  $v + \lambda Av = f$ , on pourra conclure à la m-accrétivité de l'opérateur  $A$ .

Supposons que pour un certain  $\lambda_0$  on ait  $Im(I + \lambda_0 A) = L^1(]x_0, \widehat{X}[)$ . On va montrer alors que pour tout  $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$  on a  $Im(I + \lambda A) = L^1(]x_0, \widehat{X}[)$ . Notons d'abord que pour tout  $f \in L^1(]x_0, \widehat{X}[)$ , il existe un unique  $u \in D(A)$  tel que  $u + \lambda_0 Au = f$ . En effet, si on désigne par  $\underline{u}$  une autre solution alors on a  $(u - \underline{u}) + A(u - \underline{u}) = 0$ . En prenant le crochet de dualité défini précédemment avec  $u - \underline{u}$  et en utilisant l'accrétivité de l'opérateur  $A$ , on en déduit que  $\|u - \underline{u}\|_{L^1(]x_0, \widehat{X}[)}^2 = 0$ , ce qui entraîne que  $u = \underline{u}$ . L'opérateur qui à  $f$  associe  $u$  est noté  $(I + \lambda_0 A)^{-1}$  et l'on a  $\|(I + \lambda_0 A)^{-1}\|_{L^1(]x_0, \widehat{X}[)} \leq 1$ . On cherche à résoudre l'équation  $u + \lambda Au = f$  avec  $\lambda > 0$ . Cette équation peut se réécrire ainsi :

$$u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u$$

soit encore

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[ \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u \right]$$

On voit alors que si  $|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}| < 1$ , c'est-à-dire lorsque  $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$  alors le problème de point fixe précédent admet une solution d'après le théorème de point fixe de Banach. En conclusion, si l'opérateur  $A$  est m-accrétif alors  $I + A$  est surjectif. D'après ce qui précède  $I + \lambda A$  sera surjectif pour  $\lambda > \frac{1}{2}$  donc aussi pour  $\lambda > \frac{1}{4}$ , etc ... Par récurrence,  $I + \lambda A$  est surjectif pour tout  $\lambda > 0$ , ce qui conclut la preuve. ■

En vue d'utiliser le théorème de Lumer-Phillips, il reste à montrer que le domaine de l'opérateur  $A$  est dense dans  $L^1(]x_0, \widehat{X}[)$ , et nous avons le résultat suivant :

**Proposition IV.16**  $D(A)$  est dense dans  $L^1(]x_0, \widehat{X}[)$ .

**Démonstration:**

On va utiliser la définition classique suivante : un ensemble  $B$  est dense dans un autre ensemble  $A$  si et seulement si l'ensemble orthogonal à  $B$  se réduit au singleton  $\{0\}$ .

Soit  $f \in L^1(]x_0, x_1[)$  telle que le crochet de dualité défini précédemment  $\langle f, v \rangle = 0 \forall v \in D(A)$ . Montrons que  $f = 0$ . L'opérateur  $A$  étant m-accrétif, il existe un élément  $v_0 \in D(A)$  tel que  $v_0 + Av_0 = f$ . Or,

$$0 = \langle f, v_0 \rangle = |v_0|^2 + (Av_0, v_0) \geq |v_0|^2$$

inégalité qui implique que  $v_0 = 0$  impliquant que  $f = 0$ , ce qui conclut la preuve. ■

Finalement en réunissant les deux résultats précédents, on en déduit, en utilisant le théorème de Lumer-Phillips, que l'opérateur  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $\mathcal{C}^0$  semi-groupe de contraction dans  $L^1([x_0, \widehat{X}])$ .

Ainsi, on peut conclure que l'opérateur  $(A, D(A))$  génère un semi-groupe de contraction positif de classe  $\mathcal{C}^0$  dans l'espace  $L^1([x_0, \widehat{X}])$ . La positivité de l'opérateur découle à l'aide d'une démonstration analogue à celle utilisée dans la quatrième partie.

Si on note  $T(t)$  le  $\mathcal{C}^0$  semi-groupe de contraction positif dont le générateur infinitésimal associé est  $A$ ; la solution du problème (IV.14) est en exploitant la formule (??)

$$V(t) = T(t)W_0 + \int_0^t T(s) \exp \left[ - \int_{t_0}^s h(z) dz \right] G(s) ds \text{ avec } \|T\| \leq 1.$$

Finalement la solution de l'équation générale le long des courbes caractéristiques est donnée par la formulation suivante :

$$\overline{C}(t, x) = W(t, x) - g(t, x) = V(t, x) \exp \left[ \int_{t_0}^t h(s) ds \right] - g(t, x),$$

où  $V$  et  $g$  ont été définis précédemment.



### 3.3 Etude dans les zones $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$

#### 3.3.1 Dans la zone $\mathcal{B}$

Le domaine d'étude  $\mathcal{B}$  se réduit à

$$\mathcal{B} = \left\{ (x, z); \hat{X} \leq x \leq x_1 \text{ et } z^*(x) \leq z \leq Z_{Surf} \right\}.$$

D'après le modèle général la densité de civelle est régie par l'équation suivante

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mathcal{V}_C \left( \frac{z - Z_{Fond}}{Z_{Surf} - Z_{Fond}} \right)^\alpha C \right] - \mu C$$

avec la condition initiale

$$C(t_0, x, z) = C_0(x, z)$$

La condition de non transfert à la surface (III.10) se simplifie et on obtient

$$C(t, x, Z_{Surf}) = 0.$$

Pour tout  $x$  fixé, l'équation précédente se réduit à une équation hyperbolique du premier ordre en  $z$  qui peut être résolue par intégration le long des courbes caractéristiques. Ce sont des courbes dont la représentation paramétrique est de la forme  $(\bar{t}(s), \bar{z}(s))$  solution du système d'équations différentielles ordinaires suivant

$$\begin{cases} \frac{d\bar{t}(s)}{ds} = 1 \\ \frac{d\bar{z}(s)}{ds} = -\mathcal{V}_C \left( \frac{\bar{z}(s) - Z_{Fond}}{Z_{Surf} - Z_{Fond}} \right)^\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{d\bar{z}}{(\bar{z} - Z_{Fond})^\alpha} = \frac{-\mathcal{V}_C}{(Z_{Surf} - Z_{Fond})^\alpha} ds$$

En fait, il s'agit des mêmes courbes caractéristiques (IV.4) définies précédemment dans la zone  $\mathcal{A}$ . La densité de civelle  $C(t, x, z)$  devient donc le long de ces courbes caractéristiques

$$C(t, x, \zeta(t, t_0, z_0)) \equiv \bar{C}(t, x).$$

$\zeta$  représente la profondeur  $z$  atteinte par une civelle à l'instant  $t$  qui se trouvait en  $z_0$  à l'instant  $t_0$ . On peut remarquer que  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} < 0$  ce qui implique que quel que soit  $t > t_0$  alors  $z < z_0$ . Ainsi, d'après l'équation vérifiée par  $C$ ,  $\bar{C}$  vérifie l'équation suivante

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{C}}{dt} &= \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \frac{d\bar{C}}{dt} &= \frac{\partial C}{\partial t} - \mathcal{V}_C \left( \frac{z - Z_{Fond}}{Z_{Surf} - Z_{Fond}} \right)^\alpha \frac{\partial C}{\partial z} \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = \left[ \frac{\alpha \mathcal{V}_C (\zeta(t, t_0, z_0) - Z_{Fond})^{\alpha-1}}{(Z_{Surf} - Z_{Fond})^\alpha} - \mu \right] \bar{C}(t, x).$$

En intégrant cette équation entre  $t_0$  et  $t$  il vient

$$\bar{C}(t, x) = \bar{C}(t_0, x) \exp \int_{t_0}^t \left[ \frac{\alpha \mathcal{V}_C (\zeta(s, t_0, z_0) - Z_{Fond})^{\alpha-1}}{(Z_{Surf} - Z_{Fond})^\alpha} - \mu \right] ds. \quad (\text{IV.16})$$

Reste à estimer la valeur de  $\bar{C}(t_0, x)$ . Or

$$\begin{aligned} z_0 &= \zeta(t_0, t_0, z_0) \\ &= \zeta(t_0, t_0, \zeta(t_0, t, z)) \\ &= \zeta(t_0, t, z) \end{aligned}$$

car si l'on considère que

$$\zeta(t_0, t, z) = \Phi(t_0 - t)(z) \text{ avec } \Phi(t_1) \circ \Phi(t_0) = \Phi(t_0 + t_1)$$

alors

$$\begin{aligned} \zeta(s, t_0, \zeta(t_0, t, z)) &= \Phi(s - t_0)\zeta(t_0, t, z) \\ &= \Phi(s - t_0) \circ \Phi(t_0 - t)(z) \\ &= \Phi(s - t)(z) \\ &= \zeta(s, t, z). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\bar{C}(t_0, x) = C(t_0, x, \zeta(t_0, t_0, z_0)) = C_0(x, \zeta(t_0, t_0, z_0)) = C_0(x, \zeta(t_0, t, z)),$$

qui est une donnée du problème. Finalement l'équation (IV.16) devient

$$C(t, x, z) = C_0(x, \zeta(t_0, t, z)) \exp \int_{t_0}^t \left[ \frac{\alpha \mathcal{V}_C (\zeta(s, t, z) - Z_{Fond})^{\alpha-1}}{(Z_{Surf} - Z_{Fond})^\alpha} - \mu \right] ds.$$

L'équation du problème est donc résolue suivant des caractéristiques verticales, ainsi il n'y pas lieu de s'imposer des conditions supplémentaires sur la frontière verticale  $x = \hat{X}$  délimitant les deux domaines. On peut aussi remarquer que lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , les



trajectoires  $\zeta$  tendent vers le fond, donc vis-à-vis du domaine étudié vers  $z = z^*(x)$ . Du point de vue comportemental, dans ce domaine  $\mathcal{B}$ , les civelles ont tendance à quitter ce domaine par la frontière  $z = z^*(x)$ . De plus, du fait d'une condition au bord nulle en  $z = Z_{surf}$  le domaine  $\mathcal{B}$  se vide petit à petit de son contenu qui migre dans la zone inférieure  $\mathcal{D}$ .

### 3.3.2 Dans la zone $\mathcal{D}$

Nous avons

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, z); \widehat{X} \leq x \leq x_1 \text{ et } Z_{Fond} \leq z \leq z^*(x) \right\}.$$

D'après le modèle général la densité de civelle est régie par l'équation ci-dessous :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mathcal{V}_C \left( \frac{z - Z_{Fond}}{Z_{Surf} - Z_{Fond}} \right)^\alpha C \right] - \mu C,$$

avec la condition initiale

$$C(t_0, x, z) = C_0(x, z).$$

La condition de non transfert au fond est indéterminée du fait du terme  $z - Z_{Fond}$  dans l'équation et comme précédemment, nous n'avons aucune indication sur la donnée sur les frontières  $z = z^*(x)$  et  $x = \widehat{X}$ . Du fait de la présence d'un terme d'ordre 1 en  $z$ , il faut se donner une condition de bord horizontale supplémentaire en  $z = z^*(x)$ . La zone  $\mathcal{B}$  est au-dessus de la zone  $\mathcal{D}$ . Dans la zone  $\mathcal{B}$  les civelles migrent vers le fond de cette zone,  $z = z^*(x)$ , avec la possibilité de franchir cette frontière. On va donc se donner une condition de continuité le long de cette frontière  $z = z^*(x)$  en considérant que la densité des individus de la zone  $\mathcal{B}$  est égale à la densité des individus de la zone  $\mathcal{D}$  le long de la frontière  $z = z^*(x)$ . On obtient donc la condition de bord suivante

$$C(t, x, z^*(x)) = C_{\mathcal{B}}(t, x, z^*(x))$$

où la densité de civelles dans la zone  $\mathcal{B}$ ,  $C_{\mathcal{B}}$ , est connue d'après ce qui précède. On peut donc maintenant résoudre notre équation en employant la même méthode des courbes caractéristiques que précédemment. Les courbes caractéristiques dans ce domaine sont identiques à celle de la zone  $\mathcal{B}$  c'est-à-dire on a

$$z = Z_{Fond} + \left[ (z_0 - Z_{Fond})^{-\alpha+1} + \frac{\mathcal{V}_C (\alpha - 1) (t - t_0)}{(Z_{Surf} - Z_{Fond})^\alpha} \right]^{\frac{1}{-\alpha + 1}},$$

soit encore

$$z = \zeta(t, t_0, z_0).$$

Nous avons les mêmes propriétés de décroissance de ces courbes caractéristiques que précédemment. La densité de civelle  $C(t, x, z)$  devient donc le long de ces courbes caractéristiques  $C(t, x, \zeta(t, t_0, z_0)) \equiv \overline{C}(t, x)$ . Ainsi, d'après l'équation vérifiée par  $C$ ,  $\overline{C}$

vérifie l'équation suivante

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{C}}{dt} &= \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \frac{d\bar{C}}{dt} &= \frac{\partial C}{\partial t} - \mathcal{V}_C \left( \frac{z - Z_{Fond}}{Z_{Surf} - Z_{Fond}} \right)^\alpha \frac{\partial C}{\partial z}\end{aligned}$$

ainsi il vient

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = \left[ \frac{\alpha \mathcal{V}_C (\zeta(t, t_0, z_0) - Z_{Fond})^{\alpha-1}}{(Z_{Surf} - Z_{Fond})^\alpha} - \mu \right] \bar{C}(t, x).$$

En intégrant cette équation entre  $t_0$  et  $t$  on obtient

$$\bar{C}(t, x) = \bar{C}(t_0, x) \exp \int_{t_0}^t \left[ \frac{\alpha \mathcal{V}_C (\zeta(s, t_0, z_0) - Z_{Fond})^{\alpha-1}}{(Z_{Surf} - Z_{Fond})^\alpha} - \mu \right] ds.$$

Reste à estimer la valeur de  $\bar{C}(t_0, x)$ . Or

$$\begin{aligned}z_0 &= \zeta(t_0, t_0, z_0) \\ &= \zeta(t_0, t_0, \zeta(t_0, t, z)) \\ &= \zeta(t_0, t, z)\end{aligned}$$

car si l'on considère que

$$\zeta(t_0, t, z) = \Phi(t_0 - t)(z) \text{ avec } \Phi(t_1) \circ \Phi(t_0) = \Phi(t_0 + t_1)$$

alors

$$\begin{aligned}\zeta(s, t_0, \zeta(t_0, t, z)) &= \Phi(s - t_0)\zeta(t_0, t, z) \\ &= \Phi(s - t_0) \circ \Phi(t_0 - t)(z) \\ &= \Phi(s - t)(z) \\ &= \zeta(s, t, z)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\bar{C}(t_0, x) = C(t_0, x, \zeta(t_0, t_0, z_0)) = C_0(x, \zeta(t_0, t_0, z_0)) = C_0(x, \zeta(t_0, t, z)),$$

qui est une donnée du problème. Donc finalement on obtient

$$C(t, x, z) = C_0(x, \zeta(t_0, t, z)) \exp \int_{t_0}^t \left[ \frac{\alpha \mathcal{V}_C (\zeta(s, t, z) - Z_{Fond})^{\alpha-1}}{(Z_{Surf} - Z_{Fond})^\alpha} - \mu \right] ds.$$

**En conclusion**, les zones  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{D}$  peuvent être regroupées en une même zone unique  $\tilde{\mathcal{B}}$  ainsi définie

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ (x, z); \hat{X} \leq x \leq x_1 \text{ et } Z_{Fond} \leq z \leq Z_{Surf} \right\},$$

où la densité de civelle vérifie l'équation avec les conditions aux limites et initiale suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mathcal{V}_C \left( \frac{z - Z_{Fond}}{Z_{Surf} - Z_{Fond}} \right)^\alpha C \right] - \mu C \\ C(t_0, x, z) = C_0(x, z) \\ C(t, x, Z_{Surf}) = 0 \end{cases}$$

La résolution dans cette zone se faisant en utilisant la même méthode des courbes caractéristiques que précédemment.

### 3.4 Etude dans la zone $\mathcal{C}$

Le domaine d'étude,  $\mathcal{C}$ , est le suivant

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, z); x_0 \leq x \leq \widehat{X} \text{ et } Z_{Fond} \leq z \leq z^*(x) \right\}.$$

D'après le modèle général (III.7) l'équation à résoudre est

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [uC] + k_h \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + k_v \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \mu C \\ C(t_0, x, z) = C_0(x, z) \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

munie des conditions de bord horizontales

$$u(x_0)C(t, x_0, z) - k_h \frac{\partial C(t, x_0, z)}{\partial x} = \mathcal{F}(t, x_0, z) \geq 0 \quad (\text{IV.18})$$

$$\widehat{u}C(t, \widehat{X}, z) - k_h \frac{\partial C(t, \widehat{X}, z)}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

où la deuxième égalité a été ajoutée en vue de traduire le fait que l'on suppose qu'il n'y a pas de flux sortant à travers la frontière  $x = \widehat{X}$ . La condition de non transfert au fond devient

$$\frac{\partial C(t, x, Z_{Fond})}{\partial z} = 0. \quad (\text{IV.20})$$

Du fait de la présence d'un terme d'ordre deux en  $z$ , il est nécessaire de se donner une condition de bord supplémentaire que nous avons choisi d'établir sur la frontière horizontale supérieure  $z = z^*(x)$ . A l'instar de la condition (IV.18) formulée ci-dessus, il existe un flux "connu" entrant de civelles provenant de la zone supérieure  $\mathcal{A}$ . On nomme  $\mathcal{F}_A(t, x, z^*(x))$  ce flux entrant, qui dépend implicitement de la quantité de civelles dans la zone  $\mathcal{A}$  se trouvant sur la frontière  $z = z^*(x)$ . Ainsi, on propose la condition de bord

$$\left( u(x)C(t, x, z^*(x)) - k_h \frac{\partial C(t, x, z^*(x))}{\partial x} \right) \frac{dz^*(x)}{dx} + k_v \frac{\partial C(t, x, z^*(x))}{\partial z} = \mathcal{F}_A(t, x, z^*(x)) \quad (\text{IV.21})$$

On se donne deux espaces de Hilbert réels  $H = L^2(\mathcal{C})$  muni de sa norme de classique  $\| \cdot \|_{0,\mathcal{C}}$  et l'espace  $V$  tel que  $V \hookrightarrow H$  où  $V = H^1(\mathcal{C})$  muni de sa norme classique  $\| \cdot \|_V$ .

Pour chaque  $t \in [t_0, T]$  et pour tout  $w, v \in V$  soit  $a$  la forme bilinéaire définie sur  $V \times V$  :

$$\begin{aligned} a(t; w, v) = & - \iint_{\mathcal{C}} u(x)w \frac{\partial v}{\partial x} dz dx + k_h \iint_{\mathcal{C}} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dz dx \\ & + k_v \iint_{\mathcal{C}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz dx + \iint_{\mathcal{C}} \mu w v dz dx \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

Le problème (IV.17) peut se réécrire ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } w \in W(t_0, T) = \left\{ w \in L^2(t_0, T; V), \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(t_0, T; V') \right\} \hookrightarrow \mathcal{C}^0([t_0, T]; H) \text{ vérifiant} \\ \left\langle \frac{dw(t)}{dt}, v \right\rangle + a(t; w(t), v) = \int_{Z_{Fond}}^{z^*(x)} \mathcal{F}(t, x_0, z) v(x_0, z) dz + \int_{x_0}^{\hat{X}} \mathcal{F}_A(t, x, z^*(x)) v(x, z^*(x)) dx, \\ \text{pour presque tout } t \in [t_0, T], \forall v \in V. \\ w(t_0) = C_0. \end{array} \right. \quad (\text{IV.23})$$

où pour presque tout  $t \in [t_0, T]$ ,  $\mathcal{F} \in L^2(t_0, T; L^2(\Gamma))$  et  $\mathcal{F}_A \in L^2(t_0, T; L^2(\Gamma))$ .

A présent nous allons démontrer le résultat suivant

**Proposition IV.17** *En supposant que les coefficients  $k_v, k_h$  et l'application  $\mu$  sont strictement positifs, pour tout  $w, v \in V$ , la fonction  $t \rightarrow a(t; w, v)$  est mesurable et l'application  $v \rightarrow \int_{Z_{Fond}}^{z^*(x)} \mathcal{F}(t, x_0, z) v(x_0, z) dz + \int_{x_0}^{\hat{X}} \mathcal{F}_A(t, x, z^*(x)) v(x, z^*(x)) dx$  est linéaire continue sur  $V$  par continuité de l'application trace partielle sur  $V$ .*

*De plus il existe une constante  $\Theta > 0$  (indépendante de  $t \in [t_0, T]$ ,  $w$  et  $v$ ) telle que*

$$|a(t; w, v)| \leq \Theta \|w\|_V \|v\|_V, \text{ pour tout } w, v \in V$$

*Enfin, il existe deux constantes  $\lambda, \alpha > 0$  telles que*

$$a(t; v, v) + \lambda |v|_{0,\mathcal{C}}^2 \geq \alpha \|v\|_V^2, \forall t \in [t_0, T] \text{ et } v \in V$$

**Démonstration:**

Continuité :

En employant l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient

$$|a(t; w, v)| \leq [\|u\|_\infty + k_h + k_v + \|\mu\|_\infty] \|w\|_V \|v\|_V \equiv \Theta \|w\|_V \|v\|_V$$

où  $\|\cdot\|_\infty$  désigne la norme du sup sur l'espace approprié.

Coercivité :

Quelque soit  $v \in V$  on a

$$\begin{aligned} a(t; v, v) &= - \iint_{\mathcal{C}} u(x) v \frac{\partial v}{\partial x} dz dx + k_h \iint_{\mathcal{C}} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dz dx + k_v \iint_{\mathcal{C}} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 dz dx \\ &+ \iint_{\mathcal{C}} \mu v^2 dz dx \end{aligned}$$

Par hypothèses, les termes  $k_h$ ,  $k_v$  et l'application  $\mu$  sont non nulles sur  $[t_0, T] \times \mathcal{C}$ , il vient

$$a(t; v, v) \geq \min(k_h, k_v, \mu) \|v\|_V^2 - \iint_{\mathcal{C}} u(x)v \frac{\partial v}{\partial x} dz dx$$

En appliquant l'inégalité de Young avec  $\varepsilon > 0$  il vient

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\mathcal{C}} u(x)v \frac{\partial v}{\partial x} dz dx \right| &\leq \|u\|_{\infty} \left[ \frac{1}{2\varepsilon} \iint_{\mathcal{C}} |v|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \iint_{\mathcal{C}} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 \right] \\ &\leq \|u\|_{\infty} \left[ \frac{1}{2\varepsilon} |v|_{0,\mathcal{C}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|v\|_V^2 \right] \end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$a(t; v, v) + \frac{1}{2\varepsilon} \|u\|_{\infty} |v|_{0,\mathcal{C}}^2 \geq \left( \min(k_h, k_v, \mu) - \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{\infty} \right) \|v\|_V^2 \equiv \alpha \|v\|_V^2$$

où  $\varepsilon$  est choisi de telle sorte que  $\alpha > 0$  :

$$0 < \varepsilon < \frac{2}{\|u\|_{\infty}} \min(k_h, k_v, \mu)$$

ce qui conclut la preuve. ■

Nous pouvons à présent énoncer le principal résultat de cette partie :

**Proposition IV.18** *Soit  $C_0 \in H$ , alors  $\exists!$   $C \in W(t_0, T)$  solution du problème (IV.23).*

**Démonstration:**

La démonstration découle des propriétés prouvées dans la proposition IV.17 en appliquant le théorème de J.L. Lions [22]. ■





### 3.5 Conclusion et perspectives de la partie théorique

Résumons d'abord le contenu de cette partie : nous avons fait une brève description du cycle de vie de l'anguille et de son comportement en soulignant les traits fondamentaux. Nous avons présenté un modèle de migration de la civelle dans l'estuaire, modèle incorporant quelques un de ces traits fondamentaux, qui a été ensuite étudié d'un point de vue théorique.

L'objectif visé dans l'étude du modèle est principalement qualitatif : reproduire les mouvements des civelles en réponse aux courants et à la luminosité (turbidité), les changements de comportement (montée vers la surface puis descente vers le fond). Quelques considérations qualitatives, telles l'estimation de seuils de changement en fonction des paramètres calculables, sont également envisageables. La complexité du modèle n'a pas permis d'aller très loin dans ces directions. Nous avons observé que l'équation du modèle change de type au cours du temps et dans l'espace ; la partie advective de l'équation a pour coefficients la fonction "vitesse du courant", elle-même solution d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire très compliquée.

Dans le but de simplifier cette partie de l'équation, nous avons cherché à travailler avec des vitesses stationnaires (en temps). L'existence de solutions de ce type a occupé tout une section de la thèse et a nécessité l'utilisation de la théorie du degré.

Avec des vitesses stationnaires, le domaine spatial peut être divisé en quatre régions à l'intérieur de chacune desquelles l'équation se réduit à une équation d'un type connu. La relation entre les solutions obtenues dans chaque région est établie à l'interface de deux régions. Il a été remarqué que l'hypothèse de courant stationnaire a pour conséquence que la fonction vitesse du courant doit avoir un signe fixe. En supposant qu'à la frontière amont du domaine, la vitesse est toujours dirigée d'amont vers aval, on en conclut que dans ce cas les seuils courants stationnaires sont dirigés vers l'aval, ce qui interdit le cas d'un courant ayant en amont et en aval des signes opposés. L'intérêt d'une telle solution est limité puisqu'en particulier elle ne peut correspondre qu'à une marée de très faible amplitude.

Une situation beaucoup plus réaliste et bien plus intéressante serait le cas périodique forcé ; les variations périodiques de la marée entraînent, en pratique, des variations périodiques du courant. A notre connaissance, une démonstration mathématique de l'entraînement périodique du courant (dans l'estuaire) par la marée n'a jamais été faite. Une étude

préparatoire de l'entraînement périodique du courant et de la population de civelles a été mise en œuvre au moyen de simulations numériques. Les résultats de cette étude sont exposés dans la partie suivante du mémoire.

**Cinquième partie**

**Résultats numériques**



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Cadre d'étude

La partie précédente était consacrée à la présentation du problème général dont une étude mathématique, dans un cadre particulier, a été produite.

Le phénomène de migration ici étudié possède cependant une réalité physique, aussi était-il intéressant de pouvoir observer, caractériser une solution. L'instrument numérique a été employé, en fait, pour pallier à ce manque de techniques aptes mathématiquement à nous donner entière satisfaction. Ainsi cette partie est consacrée à la modélisation numérique de l'équation générale (III.7) dans le but d'illustrer le comportement migratoire des civelles détaillé dans le tableau (III.5).

Nous avons utilisé, après quelques modifications, pour les données hydrodynamiques (intensité du courant et cote de la surface libre) le modèle (III.1) programmé en langage Fortran 77 par P. Lazure [21]. Ce modèle résoud, avec un coefficient de marée évoluant au cours du temps et un débit constant, dont la valeur est laissée au soin de l'expérimentateur, le système d'équations (III.1) présenté dans la troisième partie. Initialement conçu pour résoudre le système d'équations (III.1) dans un canal régulier ayant une profondeur linéaire décroissante vers l'amont (l'orientation positive étant vers le haut et le zéro correspondant à celui des cartes marines) on a transposé, ici, les résultats obtenus dans un domaine dont le fond correspond à la bathymétrie "réelle" de l'Adour sur 30 km depuis l'embouchure (données IFREMER disponibles tous les 200 mètres). Le comportement migratoire des civelles n'est pas directement lié à la géométrie du domaine

comme le montrera le comparatif de comportement effectué dans le chapitre suivant. Par conséquent nous modéliserons, par la suite, uniquement le comportement migratoire des civelles dans le domaine “réel”.

Le modèle hydrodynamique ne prenant pas en compte la largeur du fleuve, il est à noter que la bathymétrie “réelle” de l'Adour, figure V.1, correspond à une moyenne sur toutes les sections du fleuve (tous les 200 mètres) des différentes hauteurs d'eau mesurées en considérant la hauteur des berges. Ainsi, comme le montre la figure (à l'instant initial) V.2 la bathymétrie “réelle” que nous employons ici est différente de la vraie bathymétrie que l'on rencontrerait en trois dimensions. En effet, à l'embouchure, dans le cas “réel”, nous n'avons qu'une profondeur maximale de l'ordre de 7 à 8 mètres ne permettant pas le passage de bateaux à fort tirant d'eau alors que Bayonne est un port de pêche et de commerce acceptant évidemment ce type de navires.

Nous avons inclu notre domaine d'étude, variable au cours du temps, dans un rectangle “effilé” fixe possédant une longueur de 30 km et une largeur de 10 mètres, suffisamment grandes pour inclure (quelles que soient les conditions de fortes marées ou de crues) les variations de hauteur d'eau. L'axe vertical  $x = 0$  représentera l'entrée du domaine, proche de l'embouchure, orienté positivement vers l'amont. L'axe horizontal  $z = 0$  matérialisera le zéro des cartes marines, la courbe décrivant le véritable fond se situant au dessous de cette droite. Le temps initial,  $t = 0$ , représente l'heure zéro du jour indiqué dans le modèle hydrologique.

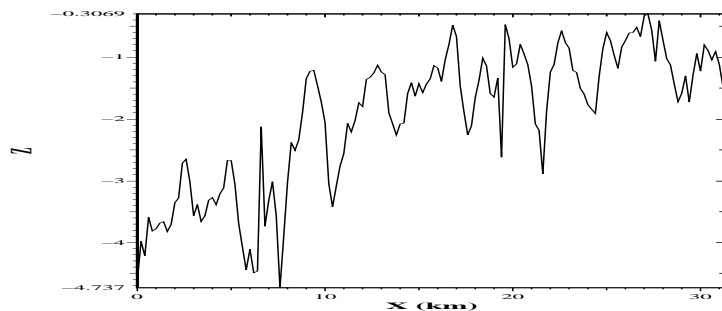


FIG. V.1 – Coupe transversale du fond “réel” suivant les abscisses.

Nous avons opté pour une méthode itérative de résolution : la méthode des directions alternées, dont nous présentons maintenant le principe.

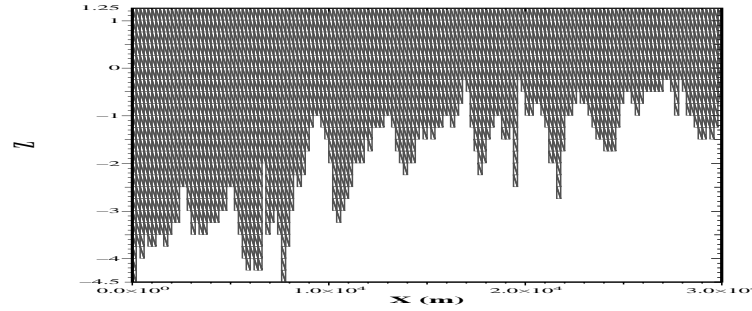


FIG. V.2 – Maillage du domaine d'étude "réel" avec  $dx = 200$  m et  $dz = 0.25$  m.

## 1.2 Présentation de l'algorithme de résolution numérique de l'équation civelle

Le domaine d'étude possédant une forme géométrique simple, la méthode de discrétisation que nous avons employée est celle des différences finies. Notre maillage est donc invariant au cours du temps. Seule la prise en compte, lors des simulations, des variations de la frontière horizontale supérieure induit les fluctuations de la forme globale de notre domaine d'étude.

La résolution de problèmes bidimensionnels étant assez coûteuse en temps de calcul et pour le stockage des données, nous avons décidé d'employer conjointement la méthode des directions alternées et des pas fractionnaires. L'idée générale de cette démarche réside dans l'introduction de calculs intermédiaires pour calculer la valeur de  $C^{n+1}$  à partir de celle de  $C^n$ ,  $n$  désignant l'indice d'itération du temps. Chaque calcul intermédiaire ne nécessite que la résolution de systèmes définis par des morceaux de l'opérateur complet correspondant à la discrétisation de problèmes monodimensionnels. La résolution de ces systèmes intermédiaires est plus rapide qu'il n'y paraît car on est en présence de systèmes tridiagonaux.

L'équation générale de notre problème peut se réécrire ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} [a(t, x)C] + \frac{\partial}{\partial z} [b(t, x, z)C] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] - \mu(t, x, z)C, \end{aligned} \quad (\text{V.1})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t, x) = u(t, x)H(u(t, x) - \hat{u}) \\ b(t, x, z) = \mathcal{V}_C \left[ H(\hat{u} - u(t, x)) + H(u(t, x) - \hat{u}) H(E(t, x, z) - \hat{E}) \right] \left( \frac{z - Z_{Fond}(x)}{\zeta(t, x) - Z_{Fond}(x)} \right)^\alpha \\ d(t, x, z) = k_v H(u(t, x) - \hat{u}) H(\hat{E} - E(t, x, z)) \\ e(t, x) = k_h H(u(t, x) - \hat{u}) \\ \mu(t, x, z) = \mu_n + \mu_p H(u(t, x) - \hat{u}) H(z - d) \end{array} \right.$$

$d$  représentant la différence entre la cote de la surface de l'eau et le diamètre du tamis de pêche.

Conditions initiale et de bord :

Nous avons choisi de prendre une condition initiale, sauf mention contraire, constante (nulle ou non) dans tout le domaine d'étude, ceci dans le but de mieux visualiser les variations de densité au cours du temps.

En ce qui concerne les conditions de bord, il a fallu être vigilant en se donnant des conditions supplémentaires, notamment lorsque, entre deux pas d'espace horizontaux successifs, les frontières horizontales du domaine étaient différentes. En ces points, d'ordonnées comprises entre ces deux cotes, nous avons rajouté des conditions de bord de type Neumann homogène.

Après plusieurs tests numériques, un "problème" est apparu dans la discrétisation de la condition de bord en  $x = x_0$ . En effet, le flux d'entrée opère, sous la condition que  $u(t, x_0) > \hat{u}$ , avec une intensité  $u(t, x_0)$  qui peut être négative. Dès lors, la discrétisation de la condition de bord en  $x = x_0$  entraîne parfois le calcul d'une densité négative qui se traduit par un flux sortant et une perte de matière. En réponse à ce problème nous avons, numériquement, remplacé la valeur de  $u(t, x_0)$  par sa valeur absolue :  $u(t, x_0) \operatorname{sgn}(u(t, x_0)) - u(t, x_0) \operatorname{sgn}(-u(t, x_0))$ , où la fonction  $\operatorname{sgn}$  sera définie ultérieurement.

**1.2.1 Principe des directions alternées - Présentation de notre algorithme**

Choisissons les pas d'espace  $dx = \frac{30000}{X}$  et  $dz = \frac{10}{Z}$  où  $X$  et  $Z$  sont deux entiers représentant respectivement le nombre d'itérations suivant l'axe horizontal et vertical. La



## V.1.2 Présentation de l'algorithme de résolution numérique de l'équation civile

---

fonction approchée sera évaluée aux points

$$(x_i, z_j) = (idx, jdz), \quad i = 0, \dots, X \text{ et } j = 0, \dots, Z.$$

Nous avons lissé la fonction d'Heaviside, en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  définie comme suit

$$\begin{cases} H_p(s) = 0 & \text{si } s \leq 0 \\ H_p(s) = -\frac{2s^3}{p^3} + \frac{3s^2}{p^2} & \text{si } 0 \leq s \leq p \\ H_p(s) = 1 & \text{si } s > p \end{cases}$$

On définit les opérateurs  $A$  et  $B$  de telle manière que l'équation générale (V.1) se récrive ainsi

$$\frac{\partial C}{\partial t} = AC + BC - \mu C,$$

où

$$\begin{aligned} AC &= -\frac{\partial}{\partial x} [a(t, x)C] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \\ BC &= \frac{\partial}{\partial z} [b(t, x, z)C] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

Nous avons discrétisé ces deux opérateurs de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (AC)_{i,j} &= -\frac{1}{dx} [a_{i+1/2} C_{i+1/2,j} - a_{i-1/2} C_{i-1/2,j}] \\ &+ \frac{1}{dx^2} [e_{i-1/2} C_{i-1,j} - (e_{i-1/2} + e_{i+1/2}) C_{i,j} + e_{i+1/2} C_{i+1,j}] \\ (BC)_{i,j} &= \frac{1}{dz} [b_{i,j+1/2} C_{i,j+1/2} - b_{i,j-1/2} C_{i,j-1/2}] \\ &+ \frac{1}{dz^2} [d_{i,j-1/2} C_{i,j-1} - (d_{i,j-1/2} + d_{i,j+1/2}) C_{i,j} + d_{i,j+1/2} C_{i,j+1}] \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} a_{i+1/2} = \frac{1}{2} [a_{i+1} + a_i] \text{ et } b_{i,j+1/2} = \frac{1}{2} [b_{i,j+1} + b_{i,j}] \\ C_{i,j+1/2} = C_{i,j+1} \text{ et } C_{i,j-1/2} = C_{i,j} \\ C_{i+1/2,j} = \begin{cases} C_{i+1,j} & \text{si } a_{i+1/2} \leq 0 \\ C_{i,j} & \text{si } a_{i+1/2} > 0 \end{cases} \end{cases}$$

## V.1.2 Présentation de l'algorithme de résolution numérique de l'équation civile

Pour traduire la prise en compte du signe de  $a_{i+1/2}$  nous avons employé la fonction signe usuelle

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Par conséquent

$$C_{i+1/2,j} = \text{sgn}(a_{i+1/2})C_{i,j} + \text{sgn}(-a_{i+1/2})C_{i+1,j}.$$

En définitive

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [a(t, x)C] &= \frac{1}{dx} [-a_{i-1/2} \text{sgn}(a_{i-1/2})C_{i-1,j} + (a_{i+1/2} \text{sgn}(a_{i+1/2}) - a_{i-1/2} \text{sgn}(-a_{i-1/2})) C_{i,j} \\ &+ a_{i+1/2} \text{sgn}(-a_{i+1/2})C_{i+1,j}]. \end{aligned} \quad (\text{V.2})$$

Pour le terme de transport vertical il n'y a pas lieu de prendre en compte un sens comme dans le cas horizontal, puisque ce dernier est toujours orienté vers le fond du domaine, ainsi

$$\frac{\partial}{\partial z} [b(t, x, z)C] = \frac{1}{dz} [b_{i,j+1/2}C_{i,j+1} - b_{i,j-1/2}C_{i,j}]. \quad (\text{V.3})$$

En utilisant la méthode des directions alternées et des pas fractionnaires, l'équation générale se discrétise ainsi

$$\begin{cases} \frac{2}{dt}(C^{n+\frac{1}{2}} - C^n) - (AC)^{n+\frac{1}{2}} - (BC)^n = -\mu C^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{2}{dt}(C^{n+1} - C^{n+\frac{1}{2}}) - (AC)^{n+\frac{1}{2}} - (BC)^{n+1} = -\mu C^{n+1} \end{cases}$$

à savoir, en regroupant les termes

$$\begin{cases} \left( \frac{2}{dt} - A^{n+\frac{1}{2}} + \mu \right) C^{n+\frac{1}{2}} = \left( \frac{2}{dt} + B^n \right) C^n \\ \left( \frac{2}{dt} - B^{n+1} + \mu \right) C^{n+1} = \left( \frac{2}{dt} + A^{n+\frac{1}{2}} \right) C^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

où la notation  $A^n$  désigne le fait que les coefficients de l'opérateurs  $A$  sont pris à l'instant  $n$ . Pour résoudre un tel système, connaissant la valeur de  $C$  à l'instant  $n$ ;  $C^n$ ; on résoud dans un premier temps la première équation (résolution suivant les  $x$  avec  $z$  fixé) ce qui nous permet d'obtenir la valeur de  $C$  à l'instant intermédiaire  $n + \frac{1}{2}$ . En introduisant cette valeur de  $C$  dans la deuxième équation (résolution suivant les  $z$  avec  $x$  fixé) on obtient en définitive la valeur de  $C$  à l'instant  $n + 1$ .

### Algorithme de résolution numérique de l'équation civelle

L'algorithme que nous avons employé peut être résumé par la figure V.3. Dans un premier temps, après avoir donné la date du début de simulation, on compile le modèle hydrodynamique. Ce dernier nous fournit l'intensité du courant et la hauteur d'eau à un pas de temps donné, fixé par l'utilisateur. Nous avons pour objectif futur, pour un gain de temps de calcul et surtout de stockage des données, en utilisant par exemple la librairie *cfortran.h*, de lier notre programme en C avec celui en Fortran 77.

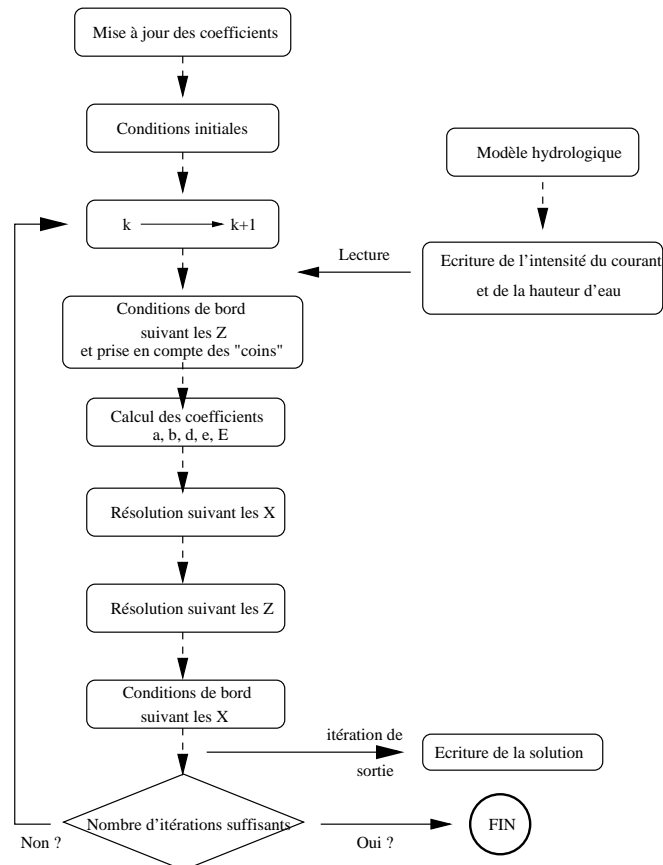


FIG. V.3 – *Algorithme de résolution numérique du modèle civelle.*

Dans tous les jeux de simulations futurs les valeurs des coefficients correspondent à celles indiquées dans le tableau V.4, sauf mention contraire. Le coefficient  $\mathcal{V}_C$  a été évalué en suivant la règle suivante : la vitesse de plongée des civelles ne peut pas excéder la moitié de leur taille (de l'ordre, pour simplifier, de 10 cm) par seconde (après discussion auprès des membres du laboratoire IFREMER).

## V.1.2 Présentation de l'algorithme de résolution numérique de l'équation civile

---

Une estimation du coefficient  $\hat{u}$  et de  $\hat{E}$  a été appréciée à l'aide des articles de M.-N. De Casamajor [5] et d'Elie et Rochard [9]. Le flux d'entrée  $\mathcal{F}_0$ , étant difficilement mesurable et ne possédant aucune estimation de sa valeur, nous avons choisi arbitrairement une valeur constante assez généreuse. Son action aura lieu si et seulement si l'intensité du courant est supérieure au seuil de migration  $\hat{u}$ .

débit	$k_h$	$k_v$	$\mathcal{V}_C$	$\mu_n$	$\mu_p$
$m^3.s^{-1}$	$m^2.s^{-1}$	$m^2.s^{-1}$	$m.s^{-1}$	$s^{-1}$	$s^{-1}$
$100 \leq d \leq 1500$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$5.0 \cdot 10^{-2}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$

$dx$	$dz$	$\hat{u}$	$\hat{E}$	$\mathcal{F}_0$	$C_0$
$m$	$m$	$m.s^{-1}$	?	$g.m^{-2}.s^{-1}$	$g.m^{-3}$
200	0.1	-0.3	0.92	5	$0 \leq C_0 \leq 10.0$

FIG. V.4 – Tableaux récapitulatifs des coefficients employés lors des différentes simulations futures.

# Chapitre 2

## Visualisation des résultats

Dans toutes les simulations il appartenait à l'expérimentateur de donner la date du début de la simulation, date qui sous-entend le fait qu'implicitement on connaisse le coefficient de marée associé et le débit du fleuve. Ce dernier est constant durant toute la simulation et sa valeur est indiquée en tout début de celle-ci.

### 2.1 Outil de visualisation

Le logiciel de visualisation que nous avons employé est *PlotMTV*. Notre domaine d'étude est maillé par des rectangles élémentaires  $200 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$ , voir la figure V.2. Ce maillage est fixe mais notre domaine évolue au cours du temps par le biais des variations de la surface de l'eau.

Le principe de fonctionnement du logiciel est le suivant : après avoir donné les coordonnées et les valeurs correspondantes des quatre sommets de tous les rectangles élémentaires du domaine d'étude, le logiciel procède à deux interpolations triangulaires successives par rectangle élémentaire pour calculer la valeur moyenne correspondante. L'échelle des valeurs (à droite des figures) est fixée par l'utilisateur.

Pour les données environnementales, telles que le débit du fleuve, le coefficient de marée ou encore la turbidité, nous avons utilisé, le plus souvent possible, le tableau récapitulatif des variables environnementales présent dans le papier de M. N. de Casamajor *et al.* [6]. Ces données correspondent aux 102 observations collectées lors des 23 sorties nocturnes sur le terrain durant la période de pêche 1997/1998.

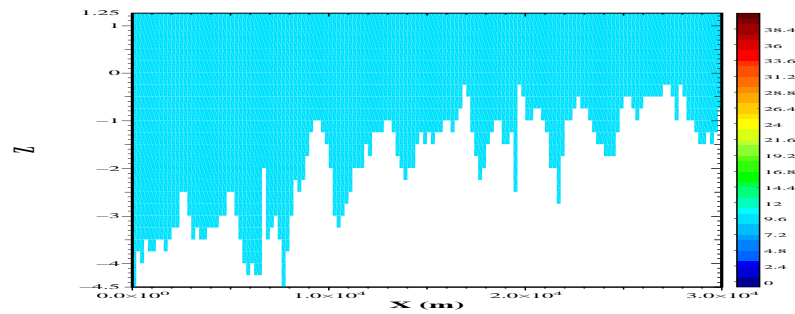


FIG. V.1 – *Condition initiale.*

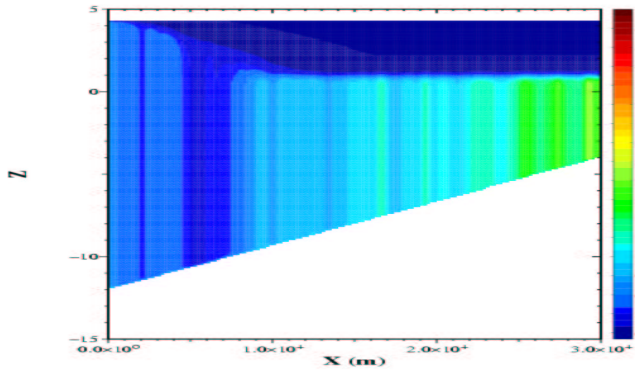
## 2.2 Comparatif “canal” - “réel”

Malgré le commentaire sus-écrit, au sujet de la bathymétrie, dans un souci d’authenticité nous avons effectué de préférence nos simulations dans le domaine spatial correspondant aux données “réelles” de bathymétrie. Dans cette section nous motivons donc ce choix en comparant, à une même date sous les mêmes conditions hydroclimatiques, les résultats numériques obtenus dans ces deux domaines.

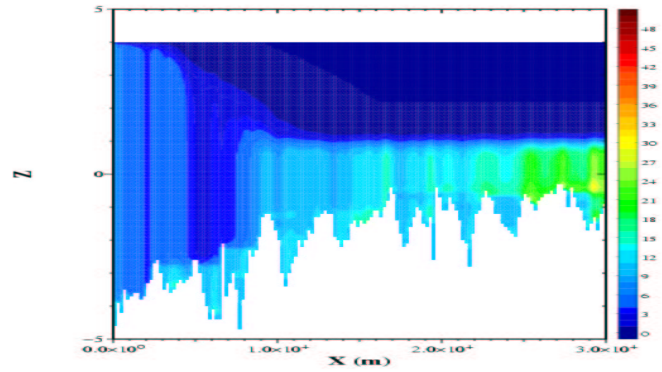
Nous avons retenu arbitrairement la date du 16 décembre 1997 correspondant à un coefficient de marée assez élevé (89) et un débit quant à lui égal à  $258 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . La turbidité est de 20 NTU.

La durée des deux simulations est de 24h. Nous présenterons, toutes les 6 heures trois triplets de graphiques. Ce laps de temps représente approximativement la durée d’une marée. Chaque triplet est composé de la représentation graphique de la solution obtenue dans le cas canal, puis le cas “réel” et enfin de l’intensité du courant à l’heure indiquée.

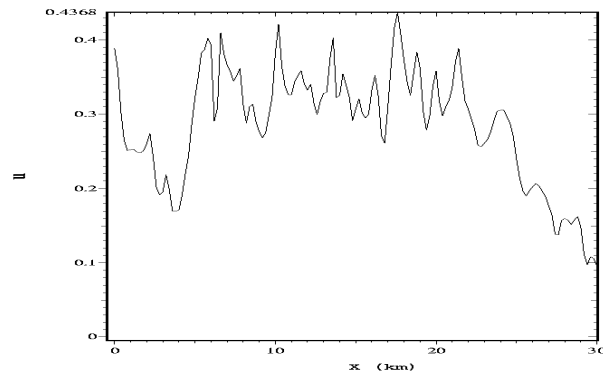
2.2.1 Comparatif au 16.12.1997.



(a) Canal

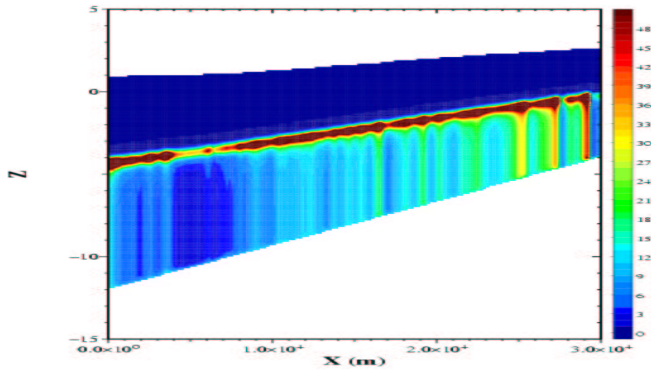


(b) “réel”

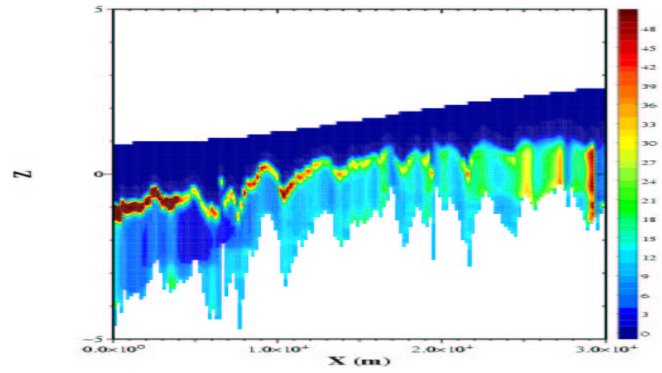


(c) Courant

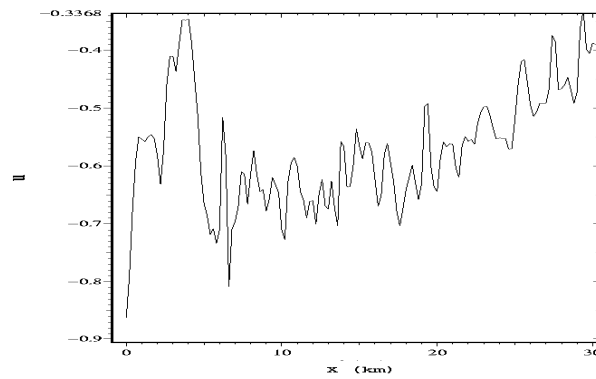
FIG. V.2 – Evolution de la densité des civelles au cours du temps, dans le cas “réel” et canal à 6h le 16.12.1997.



(a) Canal



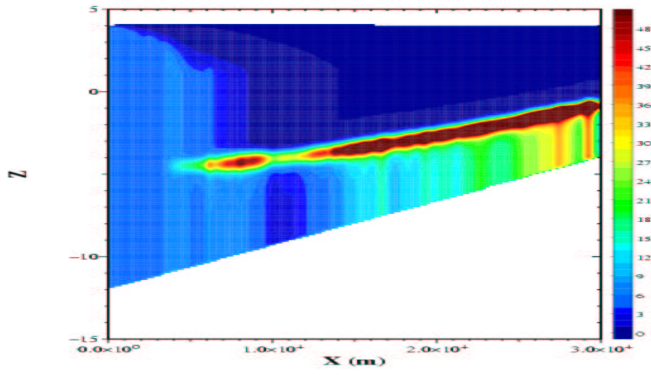
(b) “réel”



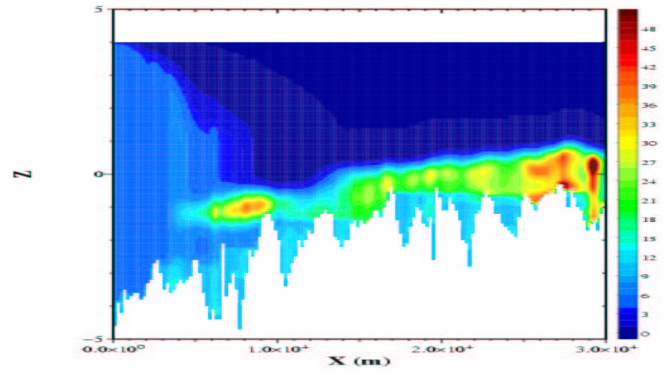
(c) Courant

FIG. V.3 – Evolution de la densité des civelles au cours du temps, dans le cas “réel” et canal à 12h le 16.12.1997.

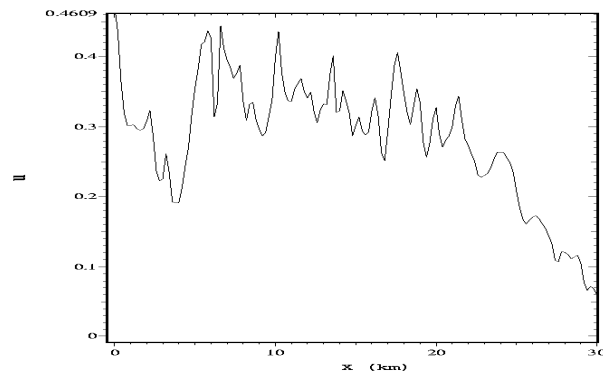




(a) Canal

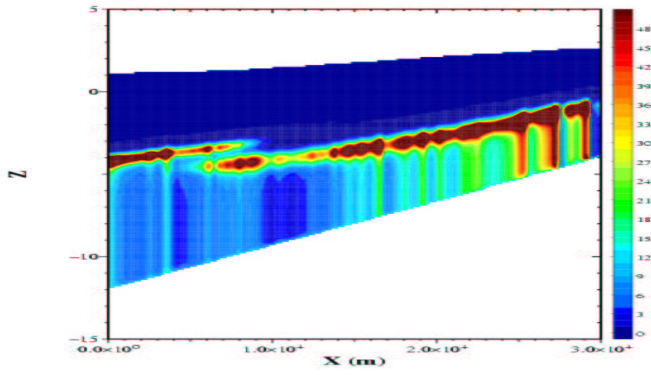


(b) “réel”

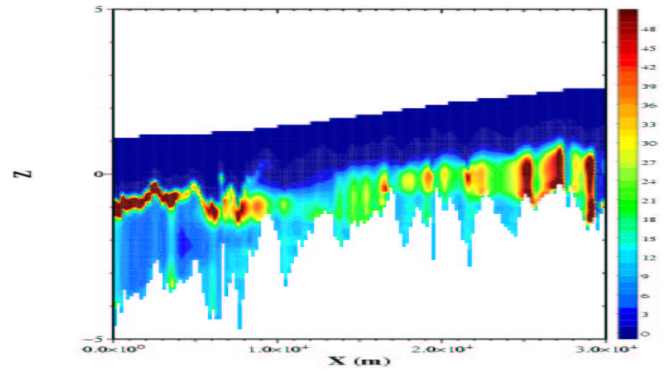


(c) Courant

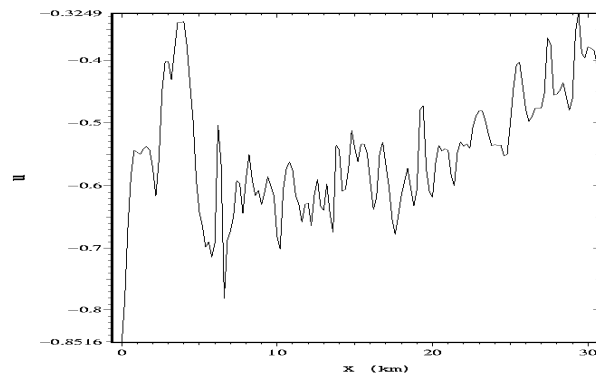
FIG. V.4 – Evolution de la densité des civelles au cours du temps, dans le cas “réel” et canal à 18h le 16.12.1997.



(a) Canal



(b) “réel”



(c) Courant

FIG. V.5 – Evolution de la densité des civelles au cours du temps, dans le cas “réel” et canal à 24h le 16.12.1997.

### 2.2.2 Commentaires préliminaires :

La présentation des résultats numériques est limitée, en nombre, par la taille des fichiers obtenus de l'ordre du Méga-octet et des inconvénients que cela entraînent.

Dans les figures précédentes nous pouvons constater dans un premier temps que le domaine d'étude ne joue pas un rôle prédominant dans le comportement migratoire des civelles. En effet, à une heure fixée, le comportement global est identique dans les deux domaines. Par conséquent nos simulations futures auront lieu uniquement dans le domaine "réel".

Les quatre heures retenues pour les sorties graphiques sont "distantes" approximativement d'une marée. Les répercussions de la marée sont clairement identifiables en regardant l'allure de la surface du domaine. Ainsi, par exemple, dans la figure V.3 la pente de la surface de l'eau est positive traduisant l'action d'un débit plus important que peut avoir la marée : nous sommes donc en période d'une marée descendante.

L'influence de la marée conditionne évidemment le comportement migratoire des civelles. Ce dernier correspond bien à celui que l'on avait évoqué dans le tableau migratoire III.5. En effet, lors d'une période de marée montante, par exemple dans la figure V.4, la valeur de  $u$  est positive et supérieure à  $\hat{u}$ , les individus migrent vers l'amont dans toute la colonne d'eau. Dès que les conditions hydrodynamiques de migrations deviennent défavorables les individus migrent vers le fond du domaine (figure V.5) seule une intensité du courant favorable les fera migrer de nouveau dans toute la colonne d'eau. Cette migration est limitée verticalement par l'action de la luminosité qui crée une frontière horizontale infranchissable.

Maintenant, dans la section suivante nous allons procéder à une simulation sur une période de 30 jours dans le but de mettre en évidence l'action jouée par le flux d'entrée.

## 2.3 Evolution du comportement migratoire sur 30 jours.

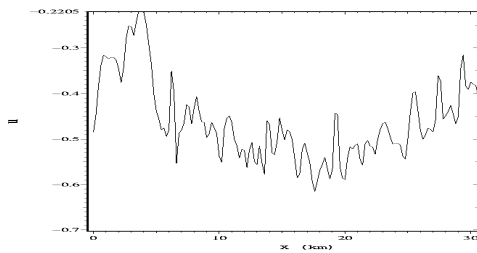
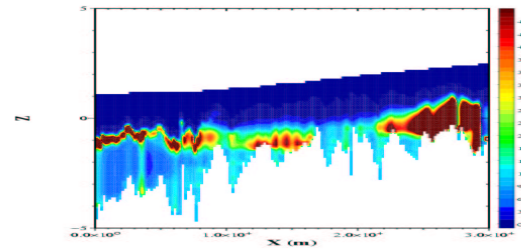
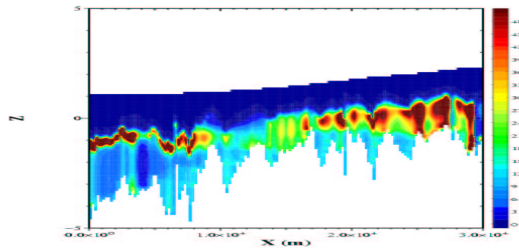
Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus lors d'une simulation d'une durée de 30 jours correspondant au mois de novembre 1997. Les valeurs des coefficients correspondent au tableau V.4, le débit du fleuve étant de l'ordre de  $250 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  et la

## V.2.3 Evolution du comportement migratoire sur 30 jours.

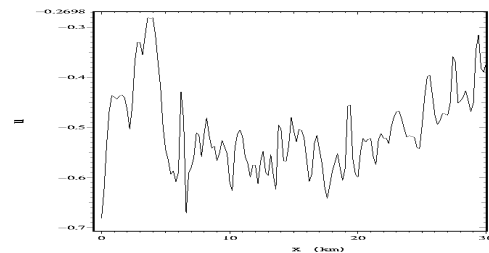
turbidité de 20 NTU.

Nous proposons ci-dessous deux types de sorties graphiques : avec une condition initiale constante non nulle puis avec avec une condition initiale nulle.

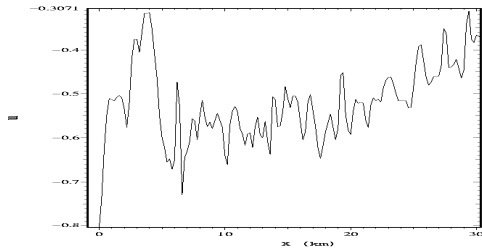
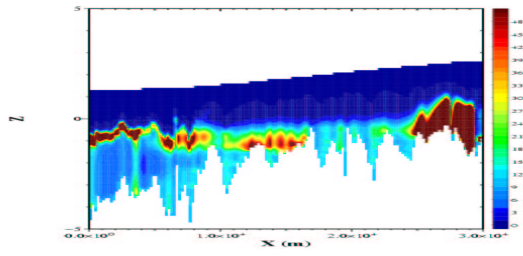
- Avec une condition initiale non nulle :



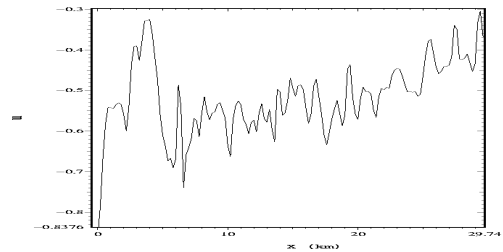
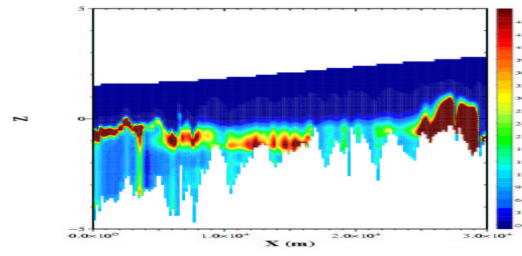
(c) 02 novembre 1997



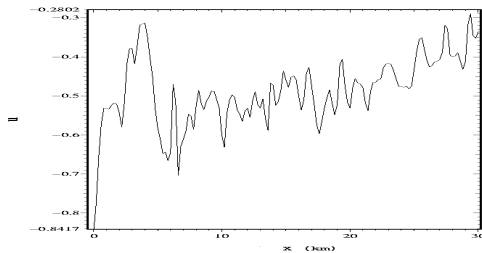
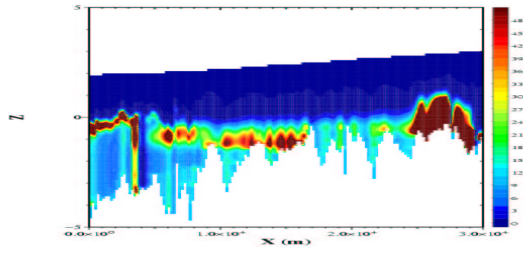
(d) 03 novembre 1997



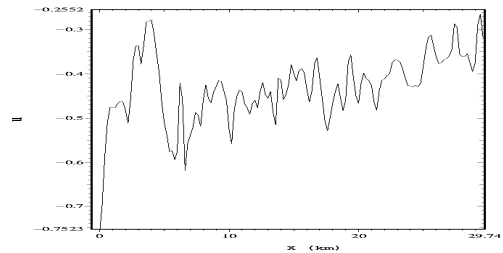
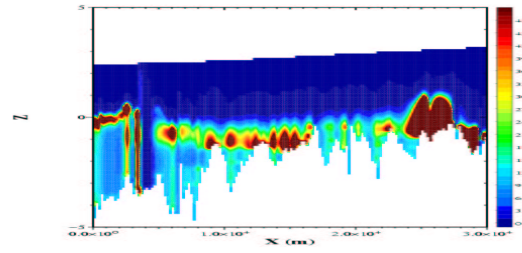
(g) 04 novembre 1997



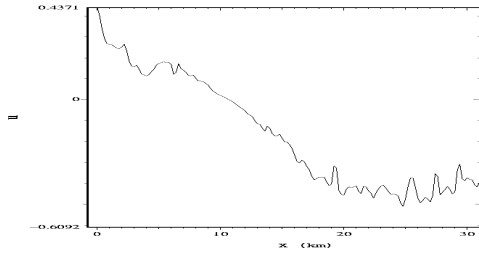
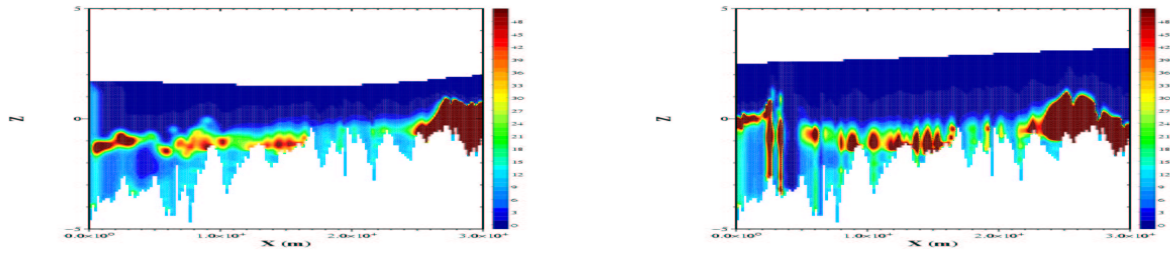
(h) 05 novembre 1997



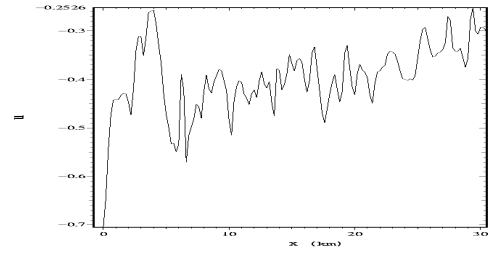
(k) 06 novembre 1997



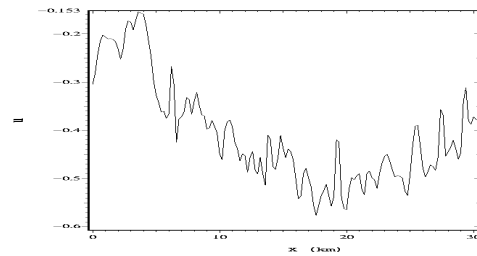
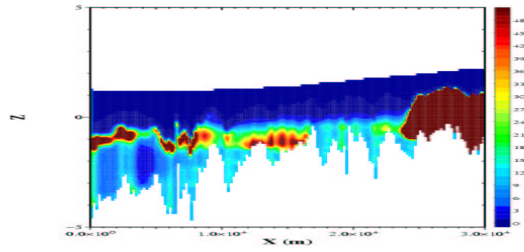
(l) 07 novembre 1997



(o) 14 novembre 1997



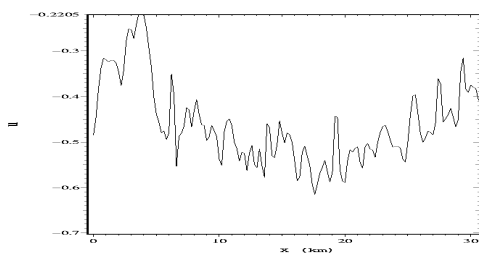
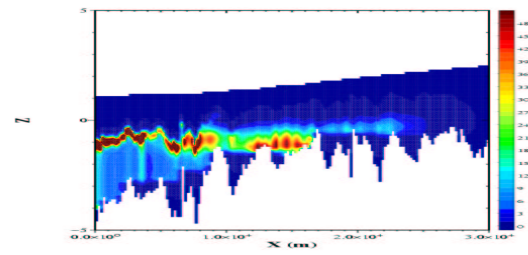
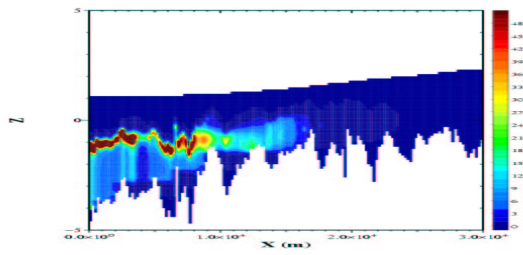
(p) 21 novembre 1997



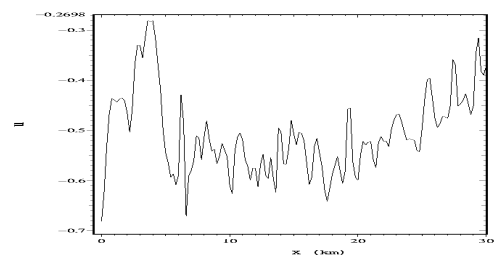
(r) 30 novembre 1997

FIG. V.6 – Evolution de la densité des civelles au cours du temps avec une condition initiale non nulle.

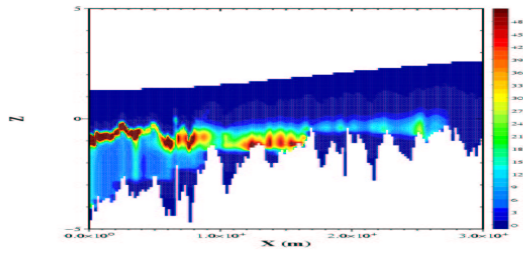
- Avec une condition initiale nulle :



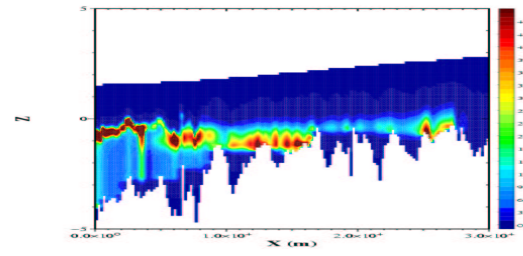
(c) 02 novembre 1997



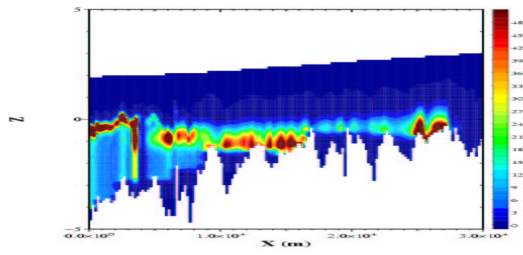
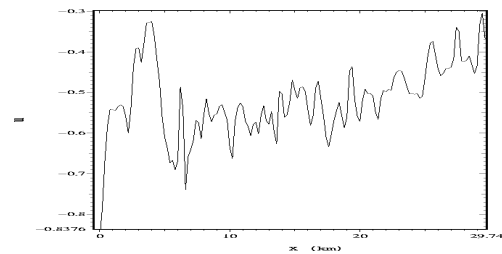
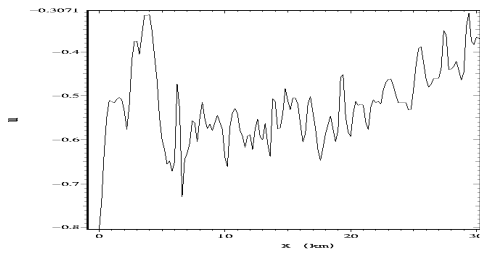
(d) 03 novembre 1997



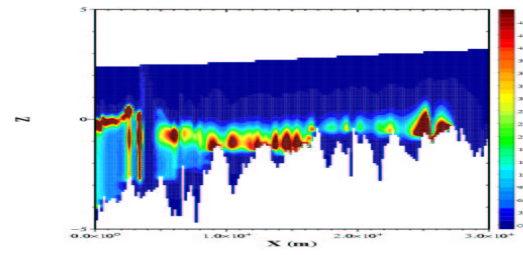
(g) 04 novembre 1997



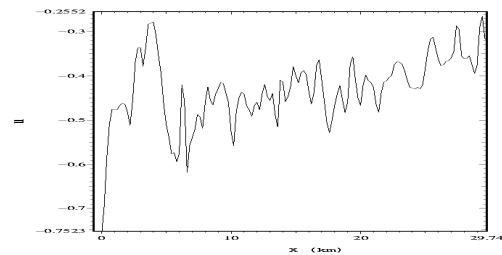
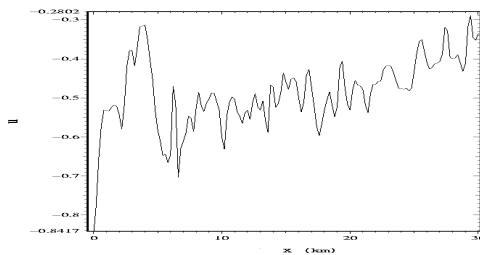
(h) 05 novembre 1997



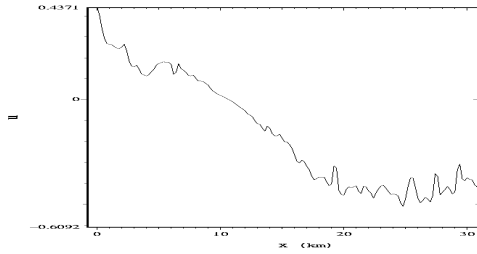
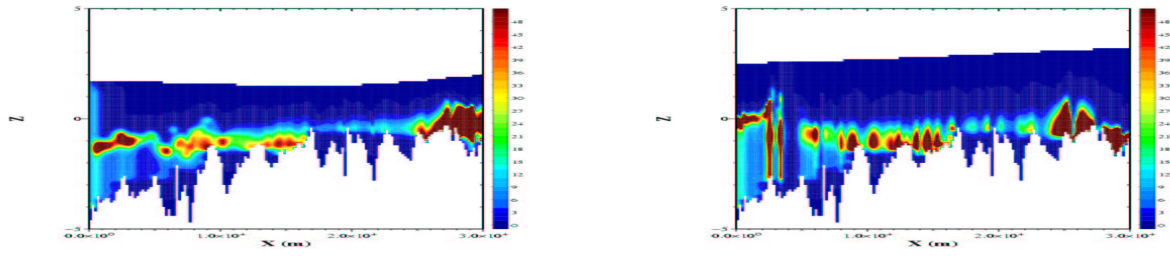
(k) 06 novembre 1997



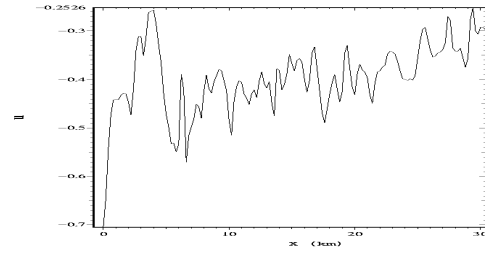
(l) 07 novembre 1997



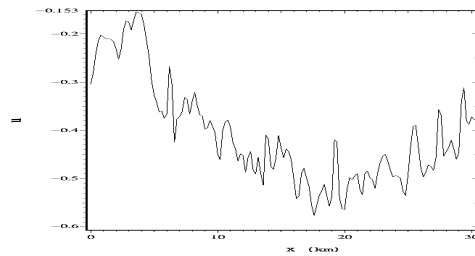
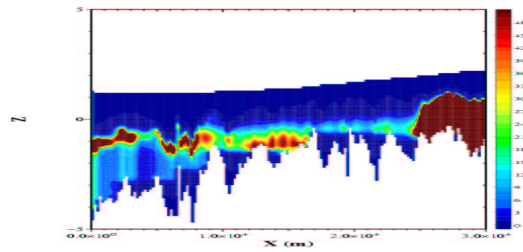




(o) 14 novembre 1997



(p) 21 novembre 1997



(r) 30 novembre 1997

FIG. V.7 – Evolution de la densité des civelles au cours du temps avec une condition initiale nulle.

### 2.3.1 Commentaires et discussion :

A l'instar des commentaires précédents, le mouvement migratoire observé au cours du temps correspond bien à celui présenté dans le tableau III.5. On peut remarquer une accumulation des individus au cours du temps le long de la frontière  $x = \hat{X} = 30$  km du fait d'une condition de type Neumann homogène en ce bord. Lors de la migration vers le fond du domaine les individus ne s'agglutinent pas le long de la frontière inférieure mais juste au dessus. Ceci est lié aux conditions supplémentaires de bord que nous avons dû nous donner pour résoudre numériquement, à l'aide des différences finies, notre problème. En effet, il a fallu être vigilant en comparant la valeur de l'indice du fond au pas d'espace  $i$  avec celui en  $i + 1$ . En effet, dans le cas où  $fond[i] < fond[i - 1]$  il ne faut résoudre l'équation qu'à partir de l'indice  $j = fond[i - 1]$  au pas d'espace  $i$ . Les variations de profondeur étant fortes entre deux pas d'espace (200 m), la résolution n'a lieu qu'au delà d'une certaine profondeur (variable elle aussi), le lien avec la section inférieure est assuré par des conditions de bord de type Neumann homogène. Ce phénomène est clairement identifiable en comparant les figures obtenues avec une condition initiale nulle et celles obtenues avec une condition initiale non nulle.

Un autre problème rencontré, lors de la mise en œuvre de la méthode de discrétisation par les différences finies explicites, fût la stabilité et la convergence du modèle numérique. Ces problèmes proviennent de la forme "très allongée" de notre domaine et de frontières très irrégulières. Nous avons retenu les coefficients présentés dans le tableau V.4 après plusieurs répétitions d'un même test. Le test résidait dans la sommation sur tout le domaine des densités (avec un flux et une mortalité nuls) et l'observation du taux de "perte" au cours du temps. Les coefficients du tableau V.4 correspondent à un taux de perte négligeable.

La migration verticale, vers la surface de l'eau, n'a lieu que si les conditions hydrodynamiques et de luminosités sont réunies. Cette dernière opère uniquement par diffusion dont le coefficient, pour des soucis de stabilité numérique, est assez faible. De ce fait, son action n'est pas aussi clairement visible que ne l'est la migration vers le fond du domaine qui a lieu par advection. Pour pallier ce problème il faudrait envisager l'introduction d'un terme de transport vertical supplémentaire. Mais quel serait le coefficient correspondant à ce transport ? Une vitesse propre aux civelles ou, comme dans le cas du transport horizontal, la composante verticale du courant ? Pour ce qui est de la deuxième possibi-

lité, l'élaboration d'un modèle hydrodynamique en 2D, voire 3D, par l'équipe d'analyse numérique de l'UPPA nous permettra d'envisager cette éventualité prochainement.

En fin de compte, l'approche par les différences finies peut être vue comme une première démarche de résolution car elle comporte des difficultés de mise en œuvre dont la plus importante est le problème de la discrétisation des frontières du domaine. Par contre, son efficacité pour visualiser les comportements successifs de migration mis en évidence dans le tableau III.5 ne fait aucun doute. L'étape numérique suivante, qui sera mise en place prochainement, sera l'emploi des volumes finis ou des éléments finis être en totale adéquation avec le procédé numérique utilisé par l'équipe d'analyse numérique de l'UPPA dans le développement du modèle hydrodynamique en 2D et 3D.



# Bibliographie

- [1] P. Benilan, 1972, *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thèse Orsay.
  
- [2] M. Benmimoun, 2000, *On the asymptotic behavior of solutions to a class of degenerate parabolic problems of Neumann type*, *Nonlinear Analysis* 42, 1293-1308.
  
- [3] H. Brezis, 1999, *Analyse fonctionnelle théorie et application*, Dunod.
  
- [4] I. Cantrelle, 1981, *Etude de la migration et de la pêche des civelles (*Anguilla anguilla* L. 1758) dans l'estuaire de la Gironde*, Thèse doc., 3ème cycle, Université de Paris VI, 238p.
  
- [5] M.-N. De Casamajor, 1998, *Comportement migratoire de la civelle d'anguille (*Anguilla anguilla* L.) dans l'estuaire de l'Adour en fonction de la variabilité des conditions environnementales*, Thèse doc., 3ème cycle, Université de Pau, 136p.
  
- [6] M.-N. De Casamajor, N. Bru et P. Prouzet, 1999, *Influence de la luminosité nocturne et de la turbidité sur le comportement vertical de migration de la civelle d'anguille (*Anguilla Anguilla* L.) dans l'estuaire de l'Adour*, *Bull. Fr. Pêche Piscic.*, 355, pp. 327-347.
  
- [7] K. Deimling, 1985, *Nonlinear Functional analysis*, Springer-Verlag, 450 p.

- [8] J. Deny et J.L. Lions, 1954, *Les espaces du type Beppo-Levi*, Ann. Inst. Fourier, 5, 305-370.
- [9] P. Elie et Rochard, 1994, *Migration des civelles d'anguilles (Anguilla anguilla L.) dans les estuaires, modalités du phénomène et caractéristiques des individus*, Bull. fr. Pêche Piscic., 355, pp. 81-88.
- [10] D. Euvrard, 1994, *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson.
- [11] L.C. Evans, 1977, *Differentiability of a Nonlinear Semigroup in  $L^1$* , J. of Math. Analysis and Applications 60, 703-715.
- [12] L.C. Evans, 1978, *Applications of Nonlinear Semigroup theory to certain Partial Differential Equations*, in Nonlinear Evolution Equations edited by M.G. Crandall proceedings of a symposium, Academic Press 1977.
- [13] P. Franks and L. Walstad, 1997, *Phytoplankton patches at front : a model of formation and response to wind events*, J. Marine Res. 55, pp. 1-29.
- [14] G. P. Galdi, 1994, *Introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*, Vol. 38, Vol. 39, Springer-verlag 451 p.
- [15] H. W. Graf, 1998, *Fluvial hydraulics. Flow and transport processes in channels of simple geometry*, J. Wiley and Sons edition, 681 p.
- [16] A. Ivanoff, 1972, *Introduction à l'océanographie, propriétés physiques et chimiques des eaux de mer*, Librairie Vuibert, Tome I et II.

- [17] O. Kavian, 1993, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, Mathématiques et applications Vol. 13., 328p.
- [18] W. Krawcewicz and J. Wu, 1997, *Theory of Degrees with applications to Bifurcations and Differential Equations*, Canadian Mathematical Society series of monographs and advanced texts.
- [19] H. Lacombe, 1965, *Cours d'océanographie physique*, Edition Gauthier-Villars Paris, 392 p.
- [20] P. Lascaux et R. Théodor, 1987, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, Masson, Vol. 01 et 02.
- [21] P. Lazure, 1998, *Mise en oeuvre d'un modèle hydrodynamique 1D*, Rapport Interne Ifremer Brest.
- [22] R. Dautray et J.L. Lions, 1988, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Vol. 01 à 09.
- [23] J.L. Lions et E. Magenes, 1968, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Vol. 01 à 03.
- [24] J.D. McCleave and R.C. Kleckner, 1982, *Selective tidal stream transport in the estuarine migration of glass eels of the American eel (*Anguilla rostrata*)*, J. Cons. Int. Explor. Mer, 40, pp. 262-271.
- [25] J.D. McCleave and G.S. Wippelhauser, 1987, *Behavioural aspects of selective tidal stream transport in juvenile American eels*, American Fisheries Society Symposium, 4, pp. 138-150.

- [26] M. Maumus, 2000, *Allocution lors de la journée "civelle" de Pau du 8 novembre*, site web : <http://www.ifremer.fr/drvrhspn/dossiers/civelle.htm>
- [27] K.J. Engel and R. Nagel, 2000, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Graduate texts in mathematics, Springer-verlag, Berlin.
- [28] O. Pardo and O. Arino, *Weight-controlled recruitment of the anchovy in the late larval stage*, Natural Resource Modeling, Vol. 14, No. 2, pp. 257-286, 2001.
- [29] O. Pardo *Global stability for a Phytoplankton-Nutrient system*, Journal of Biological System, Vol. 8, No. 2, pp. 195-209, 2000.
- [30] A. Pazy, 1983, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-verlag, New-York.
- [31] O. Pironneau, 1989, *Finite element methods for fluids*, J. Wiley and Sons and Masson editions, 205 p.
- [32] *Proceedings of the International Workshop on : Numerical Modelling of Hydrodynamics Systems. Zaragoza (Spain). June 21-24 1999*, publié par l'université de Zaragoza.
- [33] P. Prouzet, J.P. Martinet et F.-X. Cuende, 1994, *Les Pêches professionnelles dans les estuaires de la Loire et de l'Adour : Les Pêches Estuariennes du bassin de l'Adour*, Repères Océan, 6, pp. 31-78.
- [34] P. Prouzet, J.P. Martinet et F.-X. Cuende, 1999, *Rapport sur la pêche des marins pêcheurs dans l'estuaire de l'Adour en 1998*. Rapport interne DRV/RH/LHA.
- [35] C. Sola, P.G. Guilianini et E.A. Ferrero, 1993, *Ultrastructural characterization of the olfactory organ in glass eels, Anguilla Anguilla (Osteichthyres, anguilliformes)*,



Boll. Zool., 60, pp. 253-261.

- [36] R. Teman, 1979, *Navier-Stokes Equations, theory and numerical analysis*, Vol. 2, North-Holland publishing company-Amsterdam, 519 pp.
- [37] F.W. Tesch, 1977, *The eel : Biology and Management of Anguillid Eels*, Chapman and Hall, London, 423p.
- [38] P. L. Violette, 1997, *Mécanique des fluides à masse volumique variable : aérodynamique, thermodynamique, écoulements stratifiés, transfert de chaleur*, presses des Ponts et Chaussées Paris, 242 pp.
- [39] G.F. Webb, 1985, *Theory of nonlinear Age-Dependent population dynamics*, monographs and textbooks in pure and applied mathematics 89.



# Sixième partie

## Annexe



# Annexe A

## Démonstration de la proposition

### IV.1

Rappelons avant tout le résultat souhaité

**Proposition** Soit  $C_0 \geq 0$ . Si  $C(t, x, z)$  est une solution de l'équation (IV.1) assez régulière telle que  $C|_{t=t_0} = C_0$  alors  $C(t, x, z)$  est positive.

**Démonstration:**

On multiplie par  $C^-$  l'équation (IV.1) et en intégrant sur le domaine spatial  $\Omega$  on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} \times C^- dx dz &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} [a(t, x)C] \times C^- dx dz + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} [b(t, x, z)C] \times C^- dx dz \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left[ d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \times C^- dx dz + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left[ e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \times C^- dx dz \\ &- \int_{\Omega} (\mu_n(t, x, z) + \mu_p(t, x, z, C)) C \times C^- dx dz \end{aligned}$$

Regardons terme à terme cette équation. Tout d'abord

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} \times C^- dx dz &= - \int_{\Omega} \frac{\partial C^-}{\partial t} \times C^- dx dz \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (C^-)^2 dx dz = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (C^-)^2 dx dz. \end{aligned}$$

D'après la formule de Green il vient, en regroupant les termes, l'égalité suivante

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (C^-)^2 dx dz = \int_{\Gamma} \left( \left[ a(t, x)C - e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \eta_x - \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \eta_z \right) C^- d\sigma$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \left[ -a(t, x)C + e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \frac{\partial C^-}{\partial x} dx dz \\
& + \int_{\Omega} \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \frac{\partial C^-}{\partial z} dx dz \\
& - \int_{\Omega} (\mu_n(t, x, z) + \mu_p(t, x, z, C)) \times (C^-)^2 dx dz
\end{aligned}$$

où  $\Gamma$  représente la frontière du domaine  $\Omega$  et  $(\eta_x, \eta_z)$  les composantes du vecteur unitaire de la normale extérieure à  $\Gamma$ . Or les conditions au bord (IV.3) impliquent que

$$\left[ a(t, x)C - e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \eta_x - \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \eta_z \Big|_{\Gamma} \leq 0$$

ainsi l'équation précédente se simplifie en utilisant la positivité des coefficients de mortalité  $\mu_n$  et  $\mu_p$  il vient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (C^-)^2 dx dz & \leq \int_{\Omega} \left[ -a(t, x)C + e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \frac{\partial C^-}{\partial x} dx dz \\
& + \int_{\Omega} \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \frac{\partial C^-}{\partial z} dx dz
\end{aligned} \tag{1}$$

Maintenant regardons terme à terme cette inéquation. On va distinguer les termes correspondant à un transport ou à une diffusion horizontale de ceux correspondant à un transport ou à une diffusion verticale.

## Pour les termes horizontaux

On constate que les termes de transport et de diffusion horizontale s'annulent pour les mêmes valeurs de  $u$  et de  $E$ , or

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ -a(t, x)C + e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \frac{\partial C^-}{\partial x} &= - \int_{\Omega} u(t, x) H(u(t, x) - \hat{u}) C \times \frac{\partial C^-}{\partial x} \\ &+ \int_{\Omega} H(u(t, x) - \hat{u}) k_h(x) \frac{\partial C}{\partial x} \times \frac{\partial C^-}{\partial x} \end{aligned}$$

Cette égalité peut se réécrire ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ -a(t, x)C + e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \frac{\partial C^-}{\partial x} &= \int_{\Omega} u(t, x) H(u(t, x) - \hat{u}) C^- \times \frac{\partial C^-}{\partial x} \\ &- \int_{\Omega} H(u(t, x) - \hat{u}) k_h(x) \times \left( \frac{\partial C^-}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ -a(t, x)C + e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \frac{\partial C^-}{\partial x} &= \int_{u(t, x) > \hat{u}} u(t, x) C^- \times \frac{\partial C^-}{\partial x} \\ &- \int_{u(t, x) > \hat{u}} k_h(x) \times \left( \frac{\partial C^-}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young avec un réel  $\varepsilon > 0$  et après avoir regroupé les termes il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ -a(t, x)C + e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \frac{\partial C^-}{\partial x} &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \|u(t, x)\|_{\infty}^2 \int_{u(t, x) > \hat{u}} (C^-)^2 \\ &+ \int_{u(t, x) > \hat{u}} \left[ \frac{\varepsilon}{2} - k_h(x) \right] \left( \frac{\partial C^-}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

où  $\| \cdot \|_{\infty}$  désigne la norme du sup sur  $]t_0, T[ \times ]x_0, x_1[$ . En choisissant le réel  $\varepsilon$  de telle sorte que le second terme du membre de droite de l'inégalité précédente devienne négatif, c'est-à-dire lorsque

$$\varepsilon \leq 2k_h(x) \text{ pour tout } x,$$

on obtient l'inégalité suivante

$$\boxed{\int_{\Omega} \left[ -a(t, x)C + e(t, x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \frac{\partial C^-}{\partial x} \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|u(t, x)\|_{\infty}^2 \int_{\Omega} (C^-)^2 \quad (2)}$$

## Pour les termes verticaux

Sur la verticale, contrairement au cas précédent, les termes de diffusion et de transport vertical ne s'annulent jamais en même temps : quand un des termes (transport ou diffusion) s'annule alors automatiquement l'autre terme devient non nul. En exploitant cette caractéristique propre au domaine vertical, on a divisé le domaine d'étude en deux sous-domaines complémentaires. Tout d'abord on a considéré le domaine où

$$u > \hat{u} \text{ et } E < \hat{E}$$

correspondant à une migration des individus dans toute la colonne d'eau et donc, à l'existence d'une diffusion verticale et à l'absence de transport vertical. Le deuxième domaine est

$$u < \hat{u} \text{ ou } E > \hat{E}$$

il correspond à l'existence du transport vertical et à l'absence de diffusion verticale. D'après les expressions des termes  $b$  et  $d$  il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \frac{\partial C^-}{\partial z} &= \int_{\Omega} \mathcal{V}_C [H(\hat{u} - u(t, x)) \\ &+ H(u(t, x) - \hat{u}) H(E(t, x, z) - \hat{E})] \left( \frac{z - Z_{Fond}(x)}{\zeta(t, x) - Z_{Fond}(x)} \right)^\alpha C \times \frac{\partial C^-}{\partial z} \\ &+ \int_{\Omega} H(u(t, x) - \hat{u}) H(\hat{E} - E(t, x, z)) k_v(z) \frac{\partial C}{\partial z} \times \frac{\partial C^-}{\partial z}. \end{aligned}$$

En définissant l'application  $\mathcal{H}(t, x, z)$  comme suit

$$\mathcal{H}(t, x, z) = \frac{\mathcal{V}_C}{(\zeta(t, x) - Z_{Fond}(x))^\alpha} \left[ H(\hat{u} - u(t, x)) + H(u(t, x) - \hat{u}) H(E(t, x, z) - \hat{E}) \right],$$

l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \frac{\partial C^-}{\partial z} &= \int_{\Omega} \mathcal{H}(t, x, z) (z - Z_{Fond}(x))^\alpha C \times \frac{\partial C^-}{\partial z} \\ &+ \int_{\Omega} H(u(t, x) - \hat{u}) H(\hat{E} - E(t, x, z)) k_v(z) \frac{\partial C}{\partial z} \times \frac{\partial C^-}{\partial z}. \end{aligned}$$

En remplaçant  $C$  par sa partie négative dans l'égalité sus-écrite on obtient

$$\int_{\Omega} \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \frac{\partial C^-}{\partial z} = - \int_{\Omega} \mathcal{H}(t, x, z) (z - Z_{Fond}(x))^\alpha C^- \times \frac{\partial C^-}{\partial z}$$



$$- \int_{\Omega} H(u(t, x) - \hat{u}) H(\hat{E} - E(t, x, z)) k_v(z) \left( \frac{\partial C^-}{\partial z} \right)^2$$

- Dans le premier cas où

$$u > \hat{u} \text{ et } E < \hat{E}$$

l'application  $\mathcal{H}$  est identiquement nulle, ainsi

$$\int_{\Omega} \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \frac{\partial C^-}{\partial z} = \tag{3}$$

$$- \int_{\Omega} H(u(t, x) - \hat{u}) H(\hat{E} - E(t, x, z)) k_v(z) \left( \frac{\partial C^-}{\partial z} \right)^2 \leq 0$$

- Dans le deuxième cas où

$$u < \hat{u} \text{ ou } E > \hat{E}$$

on a

$$\mathcal{H}(t, x, z) = \frac{\mathcal{V}_C}{(\zeta(t, x) - Z_{Fond}(x))^\alpha} = f(t, x).$$

Par conséquent

$$\int_{\Omega} \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \frac{\partial C^-}{\partial z} = - \int_{\Omega} f(t, x) (z - Z_{Fond}(x))^\alpha C^- \times \frac{\partial C^-}{\partial z}$$

Le membre de droite peut se réécrire ainsi

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t, x)} (z - Z_{Fond}(x))^\alpha C^- \times \frac{\partial C^-}{\partial z} dz dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t, x)} (z - Z_{Fond}(x))^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} (C^-)^2 \right] dz dx \end{aligned}$$

Après une intégration par partie il vient

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t, x)} (z - Z_{Fond}(x))^\alpha C^- \times \frac{\partial C^-}{\partial z} dz dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) (\zeta(t, x) - Z_{Fond}(x))^\alpha (C^-(t, x, \zeta(t, x)))^2 dz dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t, x)} \alpha (z - Z_{Fond}(x))^{\alpha-1} (C^-)^2 dz dx \end{aligned}$$

Or par hypothèse, pour tout  $(t, x) \in [t_0, T] \times \Omega_x$ ,  $C(t, x, \zeta(t, x)) = 0$ , alors

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t, x)} (z - Z_{Fond}(x))^\alpha C^- \times \frac{\partial C^-}{\partial z} dz dx = \\ & -\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t, x)} \alpha (z - Z_{Fond}(x))^{\alpha-1} (C^-)^2 dz dx \end{aligned}$$

finalement

$$\int_{\Omega} \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \frac{\partial C^-}{\partial z} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \int_{Z_{Fond}(x)}^{\zeta(t, x)} \alpha (z - Z_{Fond}(x))^{\alpha-1} (C^-)^2 dz dx.$$

Le membre de droite de cette dernière expression peut se majorer par une constante positive  $M$

$$\int_{\Omega} \left[ b(t, x, z)C + d(t, x, z) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \frac{\partial C^-}{\partial z} \leq M \int_{\Omega} (C^-)^2 dz dx \quad (4)$$

où

$$M = \frac{\alpha \mathcal{V}_C P^{\alpha-1}}{2 \|Z_{Fond}\|_{\infty}^{\alpha}},$$

$P$  représentant la profondeur maximale du domaine. Finalement, en regroupant les inégalités précédentes (2), (3) et (4), on obtient, en utilisant l'inégalité (1), une majoration de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (C^-)^2 \leq M_1 \int_{\Omega} (C^-)^2 \quad (5)$$

où

$$M_1 = \frac{1}{\varepsilon} \|u(t, x)\|_{\infty}^2 + M.$$

En intégrant entre  $t_0$  et  $t$  l'inégalité (5) il vient

$$\int_{\Omega} (C^-(t, x, z))^2 \leq \int_{\Omega} (C^-(t_0, x, z))^2 \exp M_1 (t - t_0)$$

Or, par hypothèse, la condition initiale a été choisie telle que

$$C(t_0, x, z) = C_0(x, z) \geq 0$$

ce qui conduit à

$$\int_{\Omega} (C^-(t, x, z))^2 \leq 0.$$

Dès lors, la partie négative de  $C$  :  $C^-$  est nulle, ce qui entraîne que la solution de l'équation (IV.1),  $C(t, x, z)$ , est positive pour tout  $(t, x, z) \in Q$ . ■

# Annexe B

## Global stability for a Phytoplankton-Nutrient system

Olivier PARDO

*Journal of Biological System, Vol. 08, No 2, pp. 195-209, 2000.*

**Abstract** : the model proposed by A.H. Taylor et al. [17] is discussed, with a view to determining the global asymptotic stability of the equilibria. The system consists of two autonomous differential equations, modeling the couple Phytoplankton-Nutrient with no delay on the recycling efficiency of nutrient by bacterial decomposition. Two distinct cases, persistence and extinction of phytoplankton are considered. In each case we will state the local and then the global stability of the equilibria by constructing an appropriate Lyapunov function and using the LaSalle's invariance principle. Also, in the case of extinction of phytoplankton we have introduced a supply of nutrient in the system and we have revealed the bloom of phytoplankton, which appears biologically in upwelling conditions.

**Key-words** : Global stability - Predator-Prey system - Lyapunov function - LaSalle's invariance principle - Bifurcation parameter

### Introduction

The dynamic relationship between phytoplankton and nutrient has long been and will continue to be one of the dominant problems in both ecology and mathematical

---

ecology, due to its universal existence and importance. The phytoplankton occupies a central position in the food chain, it transforms mineral nutrients into primitive biotic material using external energy, provided by the sun. A wealth of phytoplankton-nutrient models can be found in the literature. The earliest attempt to model vertical profiles of phytoplankton was that of G.A. Riley et al. [16] in the Western North Atlantic ocean. Since then, numerical models with increasing degrees of complexity have been constructed, some of these being discussed and compared by B.C. Patten [14], T. Platt et al. [15], J.H. Steele and E.W. Henderson [17] and M.J.R. Fasham et al. [4]. These models could be seen as predator-prey systems. Many authors have studied the problem of global stability in predator-prey systems, J. Hofbauer and J.W.H. So [6], S.B. Hsu [7], S.B. Hsu and T.W. Huang [8], Y. Kuang [9], Y. Kuang and E. Beretta [10]. We have tried to follow the same direction as in the above mentioned papers.

Here, we are interested in a model proposed by A.H. Taylor et al. [17]. This model describes the nutrient dependent growth of a single phytoplankton species, allowing for sinking and variable vertical mixing. The source of much behavior is elucidated by consideration of a yet more schematic view of reality. The author considers as a model a layer of phytoplankton growing over a pool of nutrients. He supposes the layer of thickness  $h$  and the positive concentration of nutrient and phytoplankton  $N$  and  $P$  respectively, with  $N_0$  and  $P_0$  being the corresponding concentrations in the lower part of the water column. We assume that  $N_0$  and  $P_0$  are constant. The phytoplankton density at this level is negligible and will be assumed to be zero, that is  $P_0 = 0$ .

The system of ordinary differential equations dealt with in A.H. Taylor et al. [17] reads as

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \left( \beta N - m - \frac{v}{h} - \frac{k}{h} \right) P \\ \frac{dN}{dt} = -\gamma (\beta N - \varepsilon m) P + \frac{k}{h} (N_0 - N) \end{cases} \quad (1)$$

where  $\beta$ ,  $v$ ,  $h$ ,  $k$ ,  $\gamma$ ,  $m$ ,  $\varepsilon$  are positive constants that stand respectively for phytoplankton specific growth rate, the sinking speed of phytoplankton cells, the thickness of the layer, the turbulent diffusion coefficient, the conversion factor of carbon to chlorophyll ratio, the phytoplankton death rate, the recycling efficiency, allowing for the possibility that not all of the pool of nutrients from this loss of cells is returned to minerals,  $\varepsilon \in [0, 1]$ .

The objective of this paper is to perform global qualitative analysis of the phytoplankton-nutrient system (1). Specifically, we will establish global stability results in two distinct

---

cases : when  $N_0 > N^*$ , where  $N^*$  denotes the nutrient equilibrium in the upper layer in the situation of persistence and when  $N_0 < N^*$ , in which case we will show extinction of phytoplankton and global convergence to the pair  $(N_0, 0)$ .

Similar qualitative studies have already been undertaken in the literature. In particular, our work is very close to the one by E. Beretta et al. [2]. The model dealt with in [2] resembles our system (1). There are differences however due to the fact that E. Beretta et al. [2] deal with a chemostat. The differences in Nature should be that the chemostat is well mixed while the phytoplankton grows in a highly stratified environment essentially made up by the thermocline. Heterogeneity induced by the stratification is modeled here in the simplest way by assuming that the phytoplankton nutrient system is well mixed in each of the two layers with a constant value  $P = 0$ ,  $N = N_0$  in the lower layer and the diffusion between the two layers is modeled by the terms  $\frac{k}{h}P$  and  $\frac{k}{h}(N_0 - N)$ . What we obtain in this way resembles the chemostat with the flux from the lower layer interpreted as the nutrient brought in the chemostat. The terms  $\frac{k}{h}P$  and  $\frac{k}{h}N$  could be considered the washout terms of a chemostat. The main difference is that the phytoplankton can be recycled into new nutrient, a property which has no analog in the chemostat.

We have also studied the importance of upwelling in the bloom of phytoplankton (a natural and common occurrence near the coast) as follows :

In the case of extinction of phytoplankton when  $N_0 < N^*$ , we will introduce in system (1) a supply of nutrient,  $\alpha N_0$ , where  $0 \leq \alpha \leq 1$ . We will show that for a value above  $\alpha_0$ , then the situation of extinction of phytoplankton disappears, and on the contrary, a bloom of phytoplankton appears. Such a phenomenon appears biologically during upwelling conditions. Upwelling causes the upward movement of water from depth into the surface layer. Since the temperature in the sea usually decreases with depth, the upwelled water will be colder than the surface water which it displaces. Very often it has higher concentrations of nutritive salts than the surface water, which may have been depleted of nutrients by the growth of phytoplankton. Regions of upwelling are usually regions of high biological productivity. The enhanced growth of phytoplankton can support a greater zooplankton concentration which in turn can maintain fish populations. For more details see K.F. Bowden [3].

The paper is organized as follows : in the next section we find the equilibriums of system (1). In section 3 we state the general properties verified by the solution of system

(1). Section 4 consists of two main parts : in the first part, we establish the persistence of system (1), that is to say, we state the global asymptotic stability of the non trivial equilibrium in the case  $N_0 > N^*$ . In the second part, we establish the extinction of phytoplankton by proving the global asymptotic stability of the second equilibrium of system (1), in the case  $N_0 < N^*$ . In section 5 we introduce the upwelling hypothesis. In section 6 we present some numerical simulations which confirm our results. The paper ends with a brief discussion.

## Determination of the equilibrium points.

In this section, we will determine the equilibrium points of system (1), the equations for equilibrium points are the following

$$\begin{cases} \left( \beta N - m - \frac{v}{h} - \frac{k}{h} \right) P = 0 \\ -\gamma (\beta N - \varepsilon m) P + \frac{k}{h} (N_0 - N) = 0 \end{cases} .$$

There are at most two solutions :  $(0, N_0)$  and if  $P$  is not equal to zero, the couple  $(P^*, N^*)$  where

$$N^* = \frac{1}{\beta} \left( m + \frac{v}{h} + \frac{k}{h} \right). \quad (2)$$

and

$$P^* = \frac{k \left( \beta N_0 - m - \frac{v}{h} - \frac{k}{h} \right)}{\beta \gamma h \left( m + \frac{v}{h} + \frac{k}{h} - \varepsilon m \right)} = \frac{k (N_0 - N^*)}{\gamma h \left( m + \frac{v}{h} + \frac{k}{h} - \varepsilon m \right)},$$

thus

$$P^* = \frac{k (N_0 - N^*)}{\gamma h (\beta N^* - \varepsilon m)}. \quad (4)$$

**Remarque VI.1** *If we have  $N_0 = N^*$ , then the system (1) possesses only one equilibrium point  $(0, N_0)$ . In the sequel, we will suppose that  $N_0 \neq N^*$ , so we have to distinguish two cases :  $N_0 > N^*$  and  $N_0 < N^*$ .*

**Lemme VI.1** *As  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , a necessary and sufficient condition for  $(P^*, N^*)$  to be an admissible equilibrium is that  $N_0 > N^*$ .*

**Proof** It is evident, by the definition of  $P^*$  and  $N^*$ . ■

We should point out that the equilibria we are looking for correspond to the respective values of phytoplankton and nutrients in the upper part of the water column. In stable conditions of temperature and winds, the situation usually stabilizes to a positive concentration of phytoplankton and a near zero concentration of nutrients. So, in typical calm conditions, we are expecting that  $N^* \ll N_0$ . The case when  $N^* > N_0$  corresponds to a situation when dissipation by mortality, sinking and turbulence of the phytoplankton is not compensated by its production. So,  $N^*$  represents the concentration of nutrients which is necessary to balance birth and death mechanisms of the phytoplankton.

In the case where  $N_0 > N^*$ , in virtue of the relation (2) and (3) verified by  $P^*$  and  $N^*$ , system (1) reads as

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \beta (N - N^*) P \\ \frac{dN}{dt} = (N - N^*) \left( -\gamma\beta P - \frac{k}{h} \right) - \gamma (\beta N^* - \varepsilon m) (P - P^*) \end{cases} \quad (5)$$

Now, we will establish the general properties verified by the solution of system (1).

## General properties verified by the solution of system (1)

In the following we will develop some properties of system (1). First of all, let

$$H = \{(P, N), P > 0 \text{ and } N > 0\},$$

then we have the following lemma

**Lemme VI.2** *The subset  $H$  is positively invariant.*

Before the proof, let us state the following lemma

**Lemme VI.3** *The set  $\{(P, N) \in H, P(t) = 0 \text{ for all } t\}$  is invariant.*

**Proof** Just note that for  $P = 0$  then  $\frac{dP}{dt} = 0$ . ■

Now we can state the proof of lemma 3.1

---

**Proof** The proof of positivity is standard. We first observe from the first equation of system (1) if we assume that for  $t = 0$   $P(0) > 0$ , then

$$P(t) = P(0) \exp \left[ \int_0^t \beta(N(s) - N^*) ds \right] > 0 \text{ for all } t > 0.$$

Then, we note that from the second equation of system (1)

$$\frac{dN}{dt} \geq - \left( \gamma\beta + \frac{k}{h} \right) N,$$

which again implies that

$$N(t) \geq N(0) \exp \left[ - \left( \gamma\beta + \frac{k}{h} \right) t \right],$$

again if we assume that for  $t = 0$   $N(0) > 0$ , positivity of  $N$  holds for all  $t > 0$ , this concludes the proof. ■

Now, we are interested in the boundedness of solution of system (1), we have the following lemma

**Lemme VI.4** *We have for every  $(P, N) \in H$*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq N_0 \text{ and } \limsup_{t \rightarrow +\infty} P(t) \leq \left( \frac{N_0}{\gamma} \right).$$

**Proof** By virtue of the equation verified by  $(P, N)$  in system (1), it follows that

$$\frac{d(N + \gamma P)}{dt} \leq -\frac{k}{h} [(N + \gamma P) - N_0].$$

Using the variation of constants formula, this inequality is transformed into

$$(N(t) + \gamma P(t)) \leq (N(0) + \gamma P(0)) \exp[-\frac{k}{h}t] + \left( 1 - \exp[-\frac{k}{h}t] \right) N_0,$$

from which we get two properties

$$(N + \gamma P)(t) \leq \max[(N(0) + \gamma P(0)), N_0], \quad \forall t \geq 0,$$

and

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (N + \gamma P)(t) \leq N_0.$$

From the second one and non negativity of  $N$  and  $P$ , we deduce the two inequalities stated in lemma 3.3, this concludes the proof. ■



## Study of the stability of the equilibrium of system (1).

By remark 2.1 of section 2, we have to distinguish two different cases :  $N_0 > N^*$  and  $N_0 < N^*$ .

**First case :  $N_0 > N^*$ .**

In this case, system (1) has two different equilibrium points,  $(0, N_0)$  and  $(P^*, N^*)$  where  $N^*$  and  $P^*$  have been respectively stated in (2) and (3). The variational matrix of system (1) takes the form

$$J(P, N) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(P, N)}{\partial g(P, N)} & \frac{\partial f(P, N)}{\partial g(P, N)} \\ \frac{\partial P}{\partial P} & \frac{\partial N}{\partial N} \end{bmatrix}.$$

From the equations satisfied by  $f(P, N)$  and  $g(P, N)$  it follows

$$J(P, N) = \begin{bmatrix} \left( \beta N - m - \frac{v}{h} - \frac{k}{h} \right) & \beta P \\ -\gamma (\beta N - \varepsilon m) & \left( -\gamma \beta P - \frac{k}{h} \right) \end{bmatrix}.$$

**Study of the local stability of the equilibrium  $(0, N_0)$ .**

At the point  $(0, N_0)$ ,  $J(P, N)$  takes the form

$$J(0, N_0) = \begin{bmatrix} \left( \beta N_0 - m - \frac{v}{h} - \frac{k}{h} \right) & 0 \\ -\gamma (\beta N_0 - \varepsilon m) & -\frac{k}{h} \end{bmatrix}.$$

We evaluate the eigenvalues of this matrix

$$\det [J(0, N_0) - \lambda Id] = \begin{vmatrix} \left( \beta N_0 - m - \frac{v}{h} - \frac{k}{h} \right) - \lambda & 0 \\ -\gamma (\beta N_0 - \varepsilon m) & -\frac{k}{h} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det [J(0, N_0) - \lambda Id] = \left[ \left( \beta N_0 - m - \frac{v}{h} - \frac{k}{h} \right) - \lambda \right] \left[ -\frac{k}{h} - \lambda \right].$$

This matrix possesses two different eigenvalues  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \beta N_0 - m - \frac{v}{h} - \frac{k}{h} = \beta (N_0 - N^*) \\ \lambda_2 = -\frac{k}{h} \end{cases}.$$

The second eigenvalue is always negative, and by hypothesis the first one is positive. Then, the equilibrium  $(0, N_0)$  is an unstable saddle point, with the axis  $[0; N)$  as an invariant stable manifold.

### Study of the local stability of the equilibrium $(P^*, N^*)$ .

At the point  $(P^*, N^*)$ , the variational matrix  $J(P, N)$  takes the form

$$J(P^*, N^*) = \begin{bmatrix} 0 & \beta P^* \\ -\gamma(\beta N^* - \varepsilon m) & -\left(\gamma\beta P^* + \frac{k}{h}\right) \end{bmatrix}.$$

It is easy to see that the determinant of  $J(P^*, N^*)$  is always positive and its trace is always negative this yields that  $J(P^*, N^*)$  has two distinct negative eigenvalues. Then, the equilibrium point  $(P^*, N^*)$  is locally asymptotically stable.

### Study of the global stability of the equilibrium $(P^*, N^*)$ .

We restrict our attention to the only admissible subset with a biological meaning,  $H$ , of the plane

$$H = \{(P, N), P > 0 \text{ and } N > 0\}.$$

Let us note that  $\beta N^* - \varepsilon m > 0$ , by the relation (2) verified by  $N^*$ , now we are able to state the main theorem of this subsection.

**Théorème VI.1** *The equilibrium  $(P^*, N^*)$  is globally asymptotically stable in  $H$ .*

**Proof** We start by constructing the following Lyapunov function

$$V(P, N) = \frac{\gamma(\beta N^* - \varepsilon m)(P - P^*)^2}{P} + \beta(N - N^*)^2 \\ + \gamma(\beta N^* - \varepsilon m) \int_{P^*}^P \frac{(\zeta - P^*)^2}{\zeta^2} d\zeta.$$

Then the time derivative of  $V$  computed along the solutions of system (1) is

$$\dot{V}(P, N) = -2\beta(N - N^*)^2 \left( \gamma\beta P + \frac{k}{h} \right) < 0,$$

for all  $(P, N) \in H$ . Consider the following subset  $S$  of  $H$

$$S \equiv \{(P, N) \in \overline{H} : \dot{V}(P, N) = 0\},$$

the largest invariant set  $M$  in  $S$  is  $\{(P, N) \in \overline{H}, N \equiv N^*\}$ , but by the relation verified by  $(P, N)$  in system (4) we obtain  $M \equiv \{(P^*, N^*)\}$ . Thus, the proof follows directly from lemma 3.3 and LaSalle's invariance principle, see J. Hale and H. Koçak [5]. ■

### Second case : $N_0 < N^*$ .

In the case  $N_0 < N^*$ , system (1) has only one equilibrium point in the set  $H$ , that is :  $(0, N_0)$ . Using the same method as in the previous subsection, we will show that  $(0, N_0)$  is globally asymptotically stable.

### Study of the global stability of the equilibrium $(0, N_0)$ .

We will now show that stability is in fact global. In this aim, we will construct, as in the previous subsection, a Lyapunov function, thus we have the following theorem

**Théorème VI.2** *The equilibrium  $(0, N_0)$  is globally asymptotically stable in  $H$ .*

**Proof** We start by constructing the following Lyapunov function

$$W(P, N) = \frac{\beta}{2} (N - N_0)^2 + \gamma [\beta (N^* - N_0) + \beta N^* - \varepsilon m] P$$

Then the time derivative of  $W$  computed along the solutions of system (1) is

$$\begin{aligned} \dot{W}(P, N) &= -\gamma\beta^2 (N - N^*)^2 P - \gamma\beta (N^* - N_0) (\beta N^* - \varepsilon m) P \\ &\quad - \frac{k}{h} \beta (N_0 - N)^2 < 0, \end{aligned}$$

for all  $(P, N) \in H$ . Consider the following subset  $X$  of  $H$

$$X \equiv \{(P, N) \in \overline{H} : \dot{W}(P, N) = 0\},$$

the largest invariant set  $Y$  in  $X$  is  $\{(P, N) \in \overline{H}, P \equiv 0 \text{ and } N \equiv N_0\}$ , then we obtain  $Y \equiv \{(0, N_0)\}$ . Thus, the proof follows directly from lemma 3.3 and LaSalle's invariance principle, see J. Hale and H. Koçak [5]. ■

## Influence of upwelling

In this part, we will study the effects of upwelling in the stability switches of system (1). Upwelling cause the upward movement of water from depth into the surface layer. They bring up a pool of nutrient in the vicinity of phytoplankton cell, that induce a bloom of phytoplankton density. So, assume that they have a constant efficiency equal to  $\alpha \in [0, 1]$ , thus system (1) becomes

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \left( \beta N - m - \frac{v}{h} - \frac{k}{h} \right) P \\ \frac{dN}{dt} = -\gamma (\beta N - \varepsilon m) P + \frac{k}{h} (N_0 - N) + \alpha N_0 \end{cases} . \quad (6)$$

Suppose now that we are in a situation of depletion of phytoplankton, that is when  $N_0 < N^*$ . This would be the situation after a number of days where phytoplankton has first grown up to a point where the nutrient needed exceeds  $N_0$ . The aim of this part is to reveal, by the variation of  $\alpha$ , the onset of a further production of phytoplankton. This system possesses two distinct equilibrium points, the trivial one is  $(0, \frac{h}{k} \left( \alpha + \frac{k}{h} \right) N_0)$  and the non-trivial one  $(P^\#, N^\#)$  where

$$P^\# = \frac{\frac{k}{h}(N_0 - N^*) + \alpha N_0}{\gamma(\beta N^* - \varepsilon m)} \text{ and } N^\# = N^*,$$

where  $N^*$  is defined in (2).  $P^\#$  will be admissible as soon as

$$\alpha > \frac{k}{h} \left( \frac{N^* - N_0}{N_0} \right) \equiv \alpha_0. \quad (7)$$

### Study of the global stability of $(0, \frac{h}{k} \left( \alpha + \frac{k}{h} \right) N_0)$ and $(P^\#, N^\#)$

Now we are interested in the global stability of this equilibrium point. We are in position to state the main result of this section.

**Théorème VI.3** *For  $0 < \alpha \leq \alpha_0$ , the equilibrium point  $(0, \frac{h}{k} \left( \alpha + \frac{k}{h} \right) N_0)$  is globally stable in  $H$ . For  $\alpha_0 < \alpha \leq 1$ , the equilibrium point  $(P^\#, N^\#)$  is globally stable in  $H$ .*

**Proof** The proof is similar as in theorem 4.2 for  $(0, \frac{h}{k} \left( \alpha + \frac{k}{h} \right) N_0)$  and as in theorem 4.1 for  $(P^\#, N^\#)$ . For  $(0, \frac{h}{k} \left( \alpha + \frac{k}{h} \right) N_0)$  we construct the following Lyapunov function

$$W_\alpha(P, N) = \frac{\beta}{2} \left( N - \frac{h}{k} \left( \alpha + \frac{k}{h} \right) N_0 \right)^2 + \gamma \left[ \beta \left( N^* - \frac{h}{k} \left( \alpha + \frac{k}{h} \right) N_0 \right) + \beta N^* - \varepsilon m \right] P$$

Then the time derivative of  $W_\alpha$  computed along the solutions of system (5) is

$$\begin{aligned} \dot{W}_\alpha(P, N) &= -\gamma\beta^2 (N - N^*)^2 P \\ &\quad - \gamma\beta \left( N^* - \frac{h}{k} \left( \alpha + \frac{k}{h} \right) N_0 \right) (\beta N^* - \varepsilon m) P \\ &\quad - \frac{k}{h} \beta \left( \frac{h}{k} \left( \alpha + \frac{k}{h} \right) N_0 - N \right)^2 < 0, \end{aligned}$$

for all  $(P, N) \in H$ . Consider the following subset  $X_\alpha$  of  $H$

$$X_\alpha \equiv \{(P, N) \in \overline{H} : \dot{W}_\alpha(P, N) = 0\},$$

the largest invariant set  $Y_\alpha$  in  $X_\alpha$  is  $\{(P, N) \in \overline{H}, P \equiv 0 \text{ and } N \equiv \frac{h}{k} \left( \alpha + \frac{k}{h} \right) N_0\}$ , then we obtain  $Y_\alpha \equiv \{(0, \frac{h}{k} \left( \alpha + \frac{k}{h} \right) N_0)\}$ . Thus, the proof follows directly from lemma 3.3 and LaSalle's invariance principle, see J. Hale and H. Koçak [5]. Now, for  $(P^\#, N^\#)$  we construct the following Lyapunov function

$$\begin{aligned} V_\alpha(P, N) &= \frac{\gamma(\beta N^* - \varepsilon m) (P - P^\#)^2}{P} + \beta (N - N^*)^2 \\ &\quad + \gamma(\beta N^* - \varepsilon m) \int_{P^\#}^P \frac{(\zeta - P^\#)^2}{\zeta^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Then the time derivative of  $V_\alpha$  computed along the solutions of system (5) is

$$\dot{V}_\alpha(P, N) = -2\beta (N - N^*)^2 \left( \gamma\beta P + \frac{k}{h} \right) < 0,$$

for all  $(P, N) \in H$ . Consider the following subset  $S_\alpha$  of  $H$

$$S_\alpha \equiv \{(P, N) \in \overline{H} : \dot{V}_\alpha(P, N) = 0\},$$

the largest invariant set  $M_\alpha$  in  $S_\alpha$  is  $\{(P, N) \in \overline{H}, N \equiv N^*\}$ , but by the relation verified by  $(P, N)$  in system (5) we obtain  $M_\alpha \equiv \{(P^\#, N^\#)\}$ . Thus, the proof follows directly from lemma 3.3 and LaSalle's invariance principle, see J. Hale and H. Koçak [5].■

**Remarque VI.2** *The previous Lyapunov function  $W_\alpha(P, N)$  and  $V_\alpha(P, N)$  are the generalization of the Lyapunov function  $W(P, N)$  and  $V(P, N)$  defined respectively in the proof of theorem 4.2 and theorem 4.1.*

**Remarque VI.3** *Note that when  $\alpha_0 < \alpha \leq 1$ ,  $P^\# > P^*$ . Thus, the supply of nutrient induces an increase of phytoplankton production. The maximal density is reached when  $\alpha$  is maximal, that is when  $\alpha = 1$ , and for this value we obtain the maximal phytoplankton density*

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{\frac{k}{h}(N_0 - N^*) + N_0}{\gamma(\beta N^* - \varepsilon m)} \\ &= P^* + \frac{N_0}{\gamma(\beta N^* - \varepsilon m)}. \end{aligned}$$

*Also, the supply of phytoplankton is equal to  $\frac{N_0}{\gamma(\beta N^* - \varepsilon m)} < \frac{N^*}{\gamma(\beta N^* - \varepsilon m)}$ . Note also that the corresponding density of nutrient is constant, equal to  $N^*$ .*

Now, we will present some numerical simulation to illustrate our result of global stability.

## Computer simulations

The following computer simulations were performed with a computer program due to Y.A. Kuznetsov [11], content 1.4, a numerical integrator for differential equations, on system (1). This program has made possible for us to draw orbits of the solutions of system (1) and then to compare these curves with the mathematical results we have found in the last sections. The parameter estimates were taken from A.H. Taylor et al. [17]. Thus, we have

$$\begin{aligned} \beta &= 0.18 \text{ m}^3 (\text{mM N})^{-1} \text{ h}^{-1}, \quad m = 0.0087 \text{ h}^{-1}, \quad v = 0.036 \text{ m h}^{-1}, \\ h &= 25 \text{ m}, \quad k = 1.152 \text{ m h}^{-1}, \quad \gamma = 0.503 \text{ mM N (mg Chl)}^{-1}, \quad \varepsilon = 0.2. \end{aligned}$$

---

With these values, we obtain

$$N^* = 0.312 (mM N) m^{-3} \text{ and } P^* = 1.683 \times (N_0 - N^*).$$

For the first case ( $N_0 > N^*$ ), we have taken  $N_0 = 0.5 (mM N) m^{-3}$  to get  $N_0 > N^*$  and thus  $P^* = 0.316 (mg Chl) m^{-3}$ , and for the second case  $N_0 = 0.1 (mMN) m^{-3}$ . The results are depicted in figure 1. The behavior of the solutions shows clearly that they all approach the interior steady state  $(P^*, N^*) = (0.316, 0.312)$ . This shows that this equilibrium is globally asymptotically stable.

For the second case illustrated by figure 2, the behavior of the solutions shows clearly that they approach the equilibrium  $(0, N_0) = (0, 0.1)$ .

For system (5) we have computed solutions for different values of  $\alpha$  shown in figure 3. We can observe that as  $\alpha$  increases (from zero to one) the orbits increase simultaneously before they start to oscillate near the equilibrium point  $(P^\#, N^\#)$ . Clearly the behavior of the solutions shows the global asymptotic stability of the family of equilibrium points  $(P^\#, N^\#)$ .

## Discussion

The paper by A.H. Taylor et al. [17] treats a one dimensional stratified system with a single phytoplankton and a single nutrient. The aim of the authors was to show that the phytoplankton and the nutrient reach a dynamical equilibrium in both the shelf and ocean cases. They used only numerical methods to state these results. We were interested in providing a mathematical study of this system in a simplified case, when the authors consider as a model, a layer of phytoplankton growing over a pool of nutrient. Thus, we have showed that there exist two important cases, the case when the system is persistent  $N_0 > N^*$  and the case when the phytoplankton becomes extinct  $N_0 < N^*$ . In both cases, with an appropriate Lyapunov function and LaSalle's invariance principle, we have shown global asymptotic stability of the equilibria of system (1), and thus we proved mathematically the result of the paper by A.H. Taylor et al. [17].

Let us relate our analytical results to the underlying biological and physical processes. The discussion can be focused on the value of  $N^*$  in terms of  $m$ ,  $\beta$ ,  $v$ ,  $h$ , and  $k$ . From the formula of  $N^*$  in terms of these parameters, it is immediate to see that  $N^*$  is increasing in

---

$m$ ,  $v$  and  $k$ , while it is decreasing in  $\beta$  and  $h$ . The biological parameters are :  $m$ ,  $v$  and  $\beta$ . Clearly, increasing the phytoplankton death rate or its sinking speed will tend to be detrimental to the phytoplankton. Above a certain level of either one of the two parameters (all other parameters being fixed),  $N^*$  exceeds  $N_0$ , which corresponds to the phytoplankton extinction. The same effect can be obtained by decreasing  $\beta$ , the phytoplankton growth rate. Of course, the above three parameters are indirectly related to physical processes, with some seemingly paradoxical effects : thus, the sinking rate will tend to decrease when the temperature drops. At the same time,  $\beta$  will decrease, that is, the variation of temperature has opposite effects on the sinking rate and the growth rate of the phytoplankton. Directly related to physical processes are the parameters  $h$  and  $k$ . Indeed, increasing the thickness of the mixed layer  $h$  will tend to decrease the relative mixing coefficient  $\frac{k}{h}$  and thus increase the time of recruitment of the nutrient in the upper part. This will lead to a reduction of  $N^*$  which results in further phytoplankton. On the contrary, as soon as  $N^*$  exceeds  $N_0$ , the requirements for the maintenance of new stationary phytoplankton overtake the resources available, this leads to the extinction of phytoplankton.

In section 5, we have also introduced the phenomenon of upwelling, that is, the rising of waters from deeper layers to the surface. Such waters enrich the upper layer with nutrient. We restricted our consideration to the case when the instant rate of enrichment is constant, equal to a fraction  $\alpha$  of the concentration  $N_0$ . Stability analysis with this additional term shows that starting from  $N^* > N_0$  there exists  $\alpha_0 > 0$  such that for  $\alpha > \alpha_0$  a positive equilibrium arises, which is also globally asymptotically stable. In real conditions, upwelling is activated by coastal winds, blowing downward on western coasts in the north hemisphere, see for more details G. Neumann [13]. One can imagine that during a season wind events alternate with calm periods, with the consequence that  $\alpha$  should be changed to a function with succession of time intervals where it is equal to zero or positive. The phytoplankton abundance will follow the same trend, to behave asymptotically periodically with the same period as  $\alpha$ . It may also happen that calm periods do not last long enough for the phytoplankton production to drop significantly. In this line of thought, it would be of interest to determine threshold values below which phytoplankton will not drop more than a given percent.

Thus, qualitatively, the model considered in this paper reproduces roughly the scenario depicted in previous work, see notably, J.S. Wroblewski [19]. However, the model has some



---

obvious deficiencies : notably, it assumes that recycling from phytoplankton to nutrient is instantaneous, although it seems obvious that some delay should be accounted for. Investigating the role of the delay will be the task of a future work.

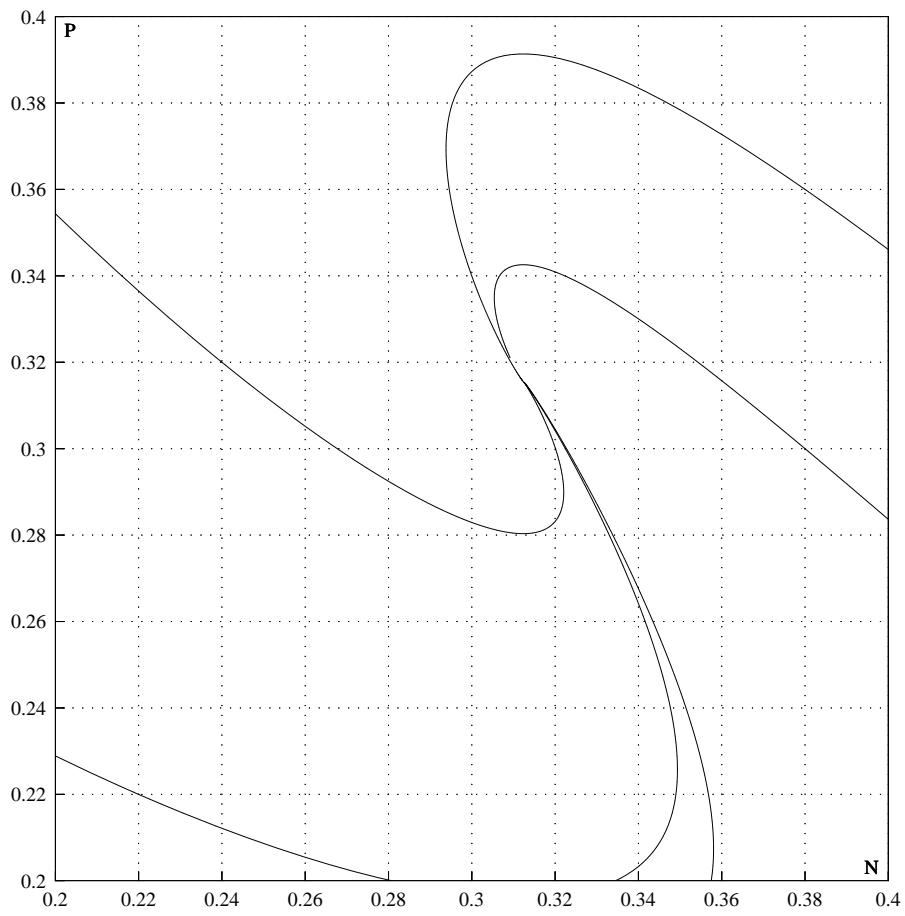


FIG. VI.1 – Orbits of system (1) in the first case when  $N_0 > N^*$

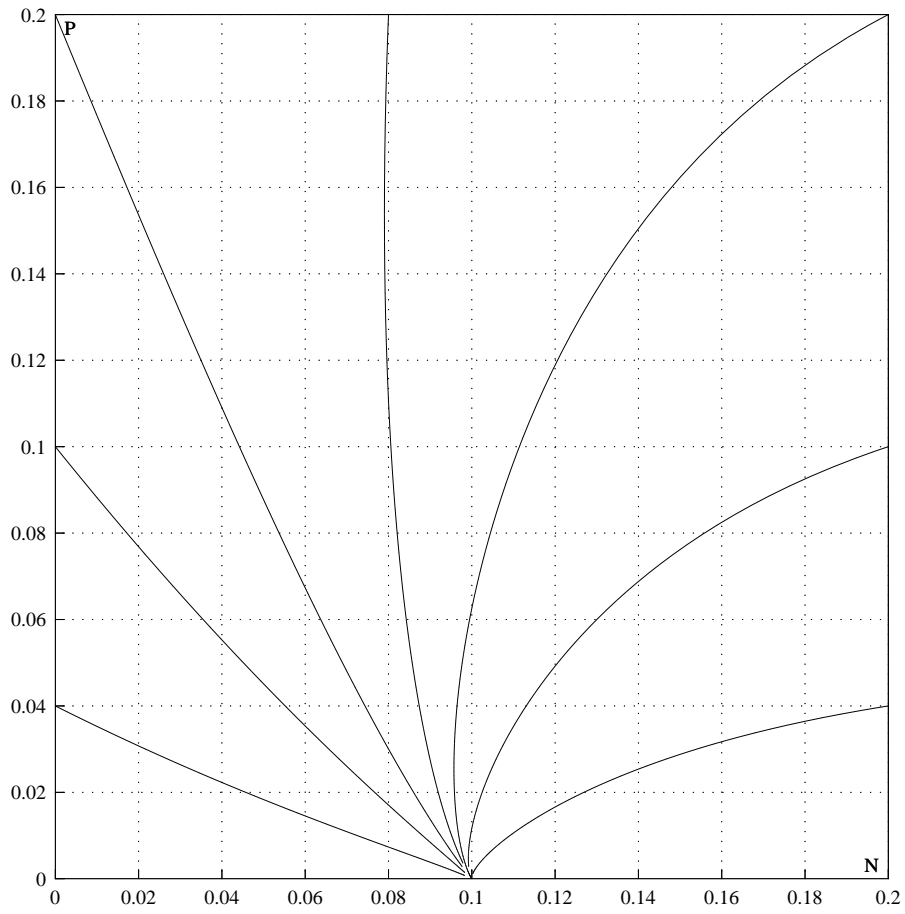


FIG. VI.2 – Orbits of system (1) in the second case when  $N_0 < N^*$

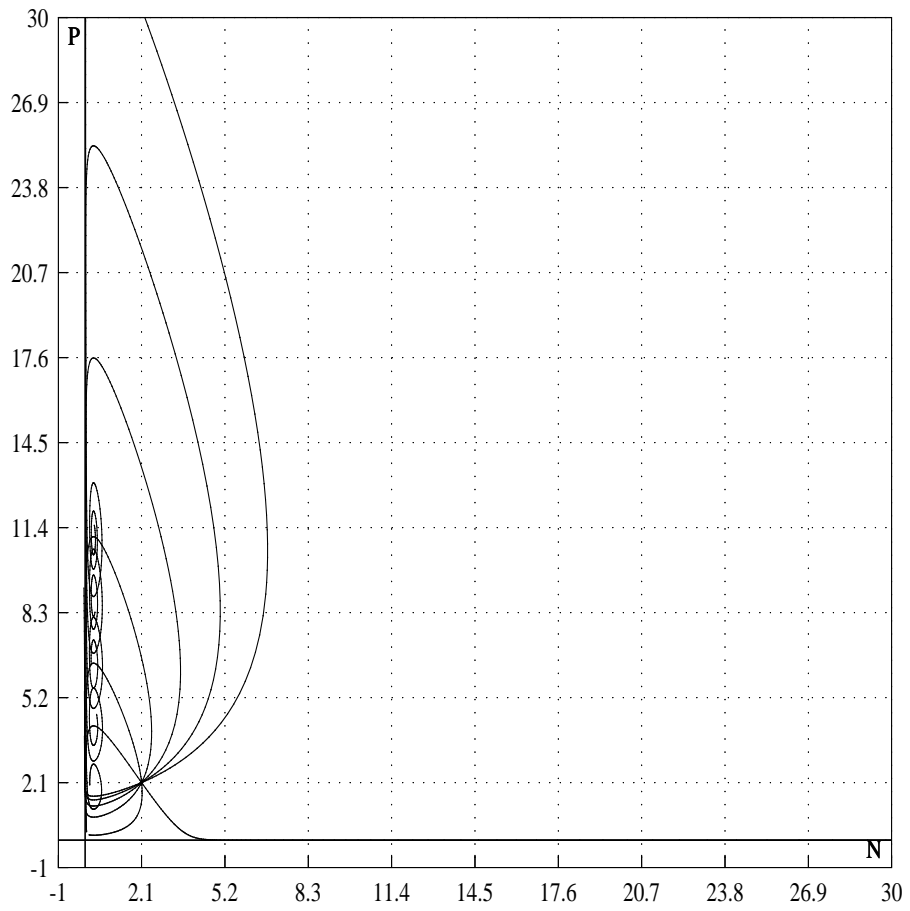


FIG. VI.3 – Orbits of system (5) for  $\alpha = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  and  $1$ .

# Bibliographie

- [1] Ardito A. and Ricciardi P., Lyapunov functions for a generalized Gause-type model, *J. Math. Biol.* **33** (1995) pp. 816-828.
- [2] Beretta E., Bischi G.I. and Solimano F., Stability in chemostat equations with delayed nutrient recycling, *J. Math. Biol.* **28** (1990) pp. 99-111.
- [3] Bowden K.F., Physical oceanography of coastal waters, (Ellis Horwood series in marine science, 1983).
- [4] Fashman M.J.R., Holligan P.M. and Pugh P.R., The spatial and temporal development of the spring phytoplankton bloom in the Celtic sea, April 1979, *Prog. Oceanog.* **12** (1983) pp. 87-145.
- [5] Hale J. and Koçak H., Dynamics and bifurcations, (Springer-Verlag New York Inc., 1991).
- [6] Hofbauer J. and So J.W.H., Multiple Limit Cycles for Predator-Prey Models, *Math. Biosci.* **99** (1990) pp. 71-75.
- [7] Hsu S.B., On Global Stability of a Predator-Prey System, *Math. Biosci.* **39** (1978) pp. 1-10.
- [8] Hsu S.B. and Huang T.W., Global Stability for a class of Predator-Prey systems, *SIAM J. Appl. Math.* **55** (1995) pp. 763-783.
- [9] Kuang Y., Global Stability of Gause-type Predator-Prey systems, *J. Math. Biol.* **28** (1990) pp. 463-474.
- [10] Kuang Y. and Beretta E., Global qualitative analysis of a ratio-dependent Predator-Prey system, *J. Math. Biol.* **36** (1998) pp. 389-406.
- [11] Kuznetsov Y.A., Elements of Applied Bifurcation Theory, Applied Mathematical Sciences, (Springer-Verlag **112** 1998).

- [12] LaSalle J.P., Stability theory for Ordinary Differential Equations, *J. Diff. Eqs.* **4** (1968) pp. 57-65.
- [13] Neumann G., Ocean currents, (Elsevier publ. company, 1968).
- [14] Patten B.C., Mathematical models of plankton production, *Int. Revue. ges Hydrobiol.* **53** (1968) pp. 357-408.
- [15] Platt T., Denman K.L. and Jassby A.D., Modelling the productivity of phytoplankton, In : Goldberg, E.D., McCCase, I.N., O'Brien, J.J. and Steele, J.H. (Editors), *The Sea Vol. 6 : Marine Modelling*, John WILEY and Sons, New York, London, Sydney, Toronto, (1977) pp. 857-890.
- [16] Riley G.A., Stommel H. and Bumpus D.F., Quantitative ecology of the plankton of the western North Atlantic, *Bull. Bingham Oceanogr. Coll.* **12** (1949) pp. 1-169.
- [17] Steele J.H. and Henderson E.W., Simulation of vertical structure in a plankton ecosystem, *Scot. Fish. Res. Rep.* **5** (1976).
- [18] Taylor A.H., Harris J.R.W. and Aiken J., The interaction of physical and biological process in a model of the vertical distribution of phytoplankton under stratification, *Marine Interfaces Ecohydrodynamics*, Jacques C. Nihoul (Editor), Elsevier Oceanography series, **42** (1986) pp. 313-330.
- [19] Wroblewski J.S., Formulation of growth and mortality of larval northern anchovy in a turbulent feeding environment, *Mar. Ecol. Prog. Ser.* **20** (1984) pp. 13-22.

# Annexe C

## Weight-controlled recruitment of the anchovy in the late larval stage

Olivier PARDO and Ovide ARINO

*Natural Resource Modeling, Vol. 14, No 2, pp. 257-286, 2001.*

**Abstract** : a formula for the rate of recruitment of the anchovy in the late larval stage is proposed. Recruitment is assumed to occur when the weight crosses a threshold value. The study is undertaken in the framework of a model of fish dynamics which is presented in the first part of the paper.

**Key-words** : Population dynamics, diffusion and advection processes, recruitment.

### Introduction

The fishing of small clupeids represents 25% of world tonnage of fish in 1993 with 21 millions ton, see J. Csirke [1995] for more details. But, between the years 60/70, the tonnage has been reduced by two. On the whole, between France and Spain, the value of this fishery comes to about US\$80 millions. More than 400 ships and between 2,000 and 3,000 fishermen are concerned. Thus, there exists an increasing economic need for evaluating the abundance of anchovy and its variations.

The anchovy species that we study here is '*Engraulis encrasicolus*' of the bay of Biscay. As most fish, the life cycle of the anchovy is divided essentially into four distinct stages marked by specific physiological behavioral traits : the egg stage, the larval stage, the

---

juvenile and the adult stages. The first two stages can be subdivided into shorter periods, each of them being associated with the acquisition of a particular organ in the development of the embryo or of a function during the larval growth. Two especially crucial steps in the development are 1) the resorption of the yolk-sac, when the larva switches from endogenous to exogenous feeding S. Regner [1985]; 2) the period when the swimbladder becomes functional, allowing the larva to control its vertical movement.

In this paper, we have been interested in modelling only the segment of the larval stage which spans between the resorption of the yolk-sac and the beginning of the active vertical movement. During this period, the larvae are still passive. While, during the egg stage and the early larval stage, until the resorption of the yolk-sac, the anchovy is self-sufficient and its mortality is mainly caused by predation, including cannibalism, and natural mortality, it is not so in the next part of the larval stage, after the larva switches to exogenous feeding. This is a period when the larva is the most sensitive to its environment because it must find food to survive, but its active movement is restricted since the swimbladder is not functional yet, thus, it does not control its vertical movement. Its survival is highly dependent on the presence, in its immediate vicinity, of a sufficient density of phytoplankton, its principal food. At the end of this period, the larva is active, it starts to gather with other anchovies and form fish schools. This is the beginning of the late larval stage.

The first purpose of the work we present here was to describe a model of population dynamics for the anchovy in the last segment of the passive larval stage, from the resorption of the yolk-sac to the beginning of the late larval stage. The model takes into account, in two separate equations, both the demography and the biology. Demography means the number of individuals in terms of time and space; biology refers to the mechanisms by which the individuals grow and progress through the various stages. We assume that these mechanisms can be globally represented by the weight, that is, we model the variation of weight, at the individual level, as a balance of the phytoplankton eaten, on the one hand, and the cost incurred by larval activity on the other hand. The other purpose of this work, not completed yet, was to estimate the density of larvae arriving in the late larval stage. More precisely, we aim at estimating a probability of recruitment of the post-yolk-sac larvae into the active stage (late larvae) in terms of some parameters and as a function of time. This is similar in spirit to a previous work by Arino et al. [1996] on the sole of the



---

Bay of Biscay, *Solea solea*, where such an estimate was obtained, however in the case of a much simpler model. What we present here on this subject is only preliminary.

This paper is organized as follows. In the next section we will present the state variables; in section 3, we will set up the model which will be considered throughout the paper. We determine an equation for each of the state variables. Section 4 is devoted to the estimation of the number of larvae entering the active vertical movement. We follow the line of research initiated by Arino et al. [1996], that is, we are looking for somewhat explicit formulae allowing in particular the expression of the late larvae belonging to a certain cohort in terms of the larvae of the same cohort at the end of the yolk-stage. Section 4 consists of two main parts : in the first part, we establish a general formula for the time rate of late larvae. In order to keep the computations simple enough, diffusion is neglected. In the second part, two examples are presented in detail. The first example is a slight generalization of the situation considered by Arino et al. [1996] for the dynamics of the sole. Example 2 explores the role played by spatial advection in the development of larvae. At the expense of further simplifications, we derive a formula which enlightens the role of the space in the recruitment of larvae. The paper ends with a brief discussion.

## State variables

In the sequel, we consider the evolution of cohorts of anchovy larvae which are carried by the current in a certain domain  $D$  of the ocean, and we consider that  $t = 0$  stands for the first day of the current year. We consider four main state variables :

$L_e(a, t, P)$  is, at time  $t$ , the density, with respect to age  $a$  and position  $P$  of individuals in the passive larval phase. The index  $e$  below  $L$  stands for "early".  $P \equiv (x, y, z)$  is a point in the sea :  $x$  is the abscissa on a West-East axis,  $y$  is the abscissa on a South-North axis and  $z$  is the depth, oriented positively towards the surface. The domain  $D$  is supposed of a size such that the sea surface can be considered a plane. Ideally,  $D$  is a region enclosing an isolated patch of eggs, with lateral boundaries far enough not to be reached by the eggs and subsequent material during the time of the observation. The origin is a point in the sea surface, in the "middle" of  $D$ .

$W_e(a, t, P)$  is, at time  $t$ , the weight density with respect to age and space of individuals in the passive larval phase.

$\varphi(t, P)$  is, at time  $t$ , the density with respect to space of phytoplankton cells.

$N(t, P)$  is, at time  $t$ , the concentration of nutrients with respect to space.

## The Model Equations

### The dynamics of the passive larvae density

The function  $L_e$  satisfies the following system of equations

$$\frac{\partial L_e}{\partial a} + \frac{\partial L_e}{\partial t} + \nabla_P \cdot [L_e \vec{V}(t, P)] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(t, z) \frac{\partial L_e}{\partial z} \right] = -\mu(a, t)L_e, \quad (1)$$

$$L_e(a, 0, P) = 0, \quad (2)$$

$$L_e(0, t, P) = L_r(t, P). \quad (3)$$

$\vec{V}(t, P)$  is the velocity vector field of the sea current. This velocity depends on time and the position in the sea. It is one of the data of the problem, assumed to be a solution of the Navier-Stokes equations governing the dynamics of the water volume under consideration, or more realistically, computed numerically based on a numerical model fed by real data.  $K(t, z)$  is the turbulent diffusion coefficient that depends on time and depth S. Pond and G.L. Pickard [1983].

$\mu(a, t)$  is the mortality rate of the passive larvae at age  $a$ , due to natural mortality and the effect of predation.

$L_r(t, P)$  is the density with respect to  $t$  and  $P$  of the larvae which have just gone out of the yolk-sac period. The index  $r$  is for "resorbed". After integration over a region  $\Omega$  of the ocean, what we obtain is the number of larvae reaching the post yolk-sac stage per unit of time. In this work,  $L_r$  is a data of the problem. There are very few field data of larvae at this precise moment of their development. The only systematic data are indeed those collected in egg surveys. Such surveys use sampling devices which can capture very small biotic material : the higher dispersion of larvae compared to eggs makes estimation of larval abundance based on such samples questionable. So, only the eggs at the various stages of their development can be reasonably and are in fact estimated. The dynamics of the anchovy, from the time when eggs are laid and fertilized to the end of the yolk-sac period can be described from a model of larval growth and survival (see for example Arino et al.

[1999]). The input of the model by Arino et al. [1996] is the time and space distribution of eggs : size growth of eggs and larvae is modelled by empirical growth functions determined in the laboratory, which, under saturated phytoplankton concentration, depend only on the temperature. This situation suits satisfactorily the early life of the anchovy when it does not feed on phytoplankton yet.

Boundary conditions both at the sea-bed and on the surface, and in the horizontal directions (lateral boundaries) are missing. We pointed out that the lateral boundary conditions can be omitted since horizontal migration is a transport with finite speed and we are assuming that we start from a patch of eggs which needs more time to reach those boundaries than the time of observation. This assumption is not essential, however, and a more general situation could be handled. The important fact here is that we are not taking into account the larvae who enter the domain  $D$ , from outside, after  $t = 0$ . The vertical boundary conditions should express the fact that both the surface and the seabed are barriers that none of the materials considered in this model (larva, phytoplankton, nutrients) can cross. Vertical boundary conditions are only useful in dealing with the second order diffusion terms which, for simplicity, we will drop in our study.

## The dynamics of the passive larvae weight

The function  $W_e$  satisfies the following system of equations

$$\frac{\partial W_e}{\partial a} + \frac{\partial W_e}{\partial t} + \nabla_P \cdot [W_e \vec{V}(t, P)] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(t, z) \frac{\partial W_e}{\partial z} \right] = k(t) f(t, P, W_e, \varphi) \varphi - (\alpha + \beta (w^* - W_e)^\theta) W_e, \quad (4)$$

$$W_e(a, 0, P) = 0, \quad (5)$$

$$W_e(0, t, P) = h(t, P). \quad (6)$$

where  $\theta > 1$ . Here  $k(t)$  is a periodic function which models the feeding regime of the larvae within a 24 hour period. For example,  $k \equiv 0$  during the night, since the larvae do not regularly feed at night, see P. Re [1994] for more details. At the same time, the larvae possess an absorption capacity  $f(t, P, W_e, \varphi)$ . We assume that the ingestion capacity of the larvae increases with weight. This function can be non linear. The dependence of  $f$  on  $\varphi$  is more of a threshold nature : below a certain density, it is likely that the rate of capture of the phytoplankton by the larvae will be close to zero. The larvae lose weight

---

for one main reason, the energy consumption by the larval metabolism. The model chosen for this takes into account the observed fact that life is more difficult to underweighted larvae than it is to those whose weight is close to the threshold for reaching the juvenile stage. Aggravation of life condition, as a result of poor feeding, is twofold : 1) it costs more energy to a larva to sustain its activity when it is underweighted, which is stressed by the quantity  $\beta (w^* - W_e)^\theta$ ,  $\theta > 0$ ; 2) such larvae get less food than more weighted ones, which is accounted for by the monotonicity of  $f(t, P, W_e, \varphi)$ . The way food deprivation acts on the feeding capacity is however more complicated than the above point 2) suggests. A more sound proposition would be that larvae deprived of food for some days will find more difficult to successfully catch the prey. So, the rate of successful encounter of the prey does not just depend on the actual weight of the larva, it should reflect cumulated loss over some period of time. The dependence of  $f$  on  $t$  and  $P$  gives the possibility to take into account the effect of any admissible abiotic factors we can think of. For example, this can be the accessibility of the phytoplankton, which certainly depends on the physical environment of the larvae, or it can be the temperature, as a global indicator of this environment. Finally, we note that  $w^*$  is the critical weight that passive larvae have to reach to cross the passive phase and the function  $h(t, P)$  is the weight of larvae at the beginning of the exogenous feeding phase. In fact, there is no reason to believe that the weight of larvae at the end of the yolk-sac stage is the same for all the larvae occupying the same position at the same time. It may differ due to the age, it may also differ due to an initial variability. Since we are reinitializing the age from the beginning of the post yolk-sac period, we should also at the same time uniform the weight. So,  $h(t, P)$  should be considered as the uniform (after averaging) weight of the larvae which, at time  $t$ , are in  $P$  and start to feed on phytoplankton.

**Remark : weight versus size**

We chose the weight as a structure variable. In the literature, however, the body size, that is, the length of the body of an individual, is used, rather than the weight, in particular associated with the completion of physiological stages : on the body size scale, the late larval stage starts when the larva is around 10mm long (R.M. Peterman et al. [1988]). This is roughly when the larva starts to control its vertical movement (functional swimbladder) (M.M. Mullin [1993], fig. 4.9). There are allometric relationships between

the size and the weight. In terms of such relationships, one can consider the weight and the body size as equivalent parameters and, in principle, use indifferently one or the other. It is intuitively clear however that there must be some fundamental differences between the two quantities. On the one hand, the weight seems to be more sensitive, especially during the larval growth, to the daily food regime, while the body length changes at a slower pace. It is more suited than length to a daily book-keeping. On the other hand, the respective variabilities of the weight and the length on completion of developmental stages have been compared : it is higher for the weight. So, the length should be preferred to the weight when setting up threshold values for significant physiological changes. But, no clear law of variation of the length is known. This explains that in spite of its shortcomings, we are using the weight in this paper, and we use  $w^*$  as a threshold value for the completion of the passive larval stage.

## The dynamics of phytoplankton cells and nutrient

The functions  $\varphi$  and  $N$  satisfy the following system of equations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = [\alpha(I)\Phi(N) - m] \varphi - \nabla_P \cdot [\vec{V}(t, P)\varphi] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(z, t) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right], \quad (7)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma [\alpha(I)\Phi(N) - \varepsilon m] \varphi - \nabla_P \cdot [\vec{V}(t, P)N] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(z, t) \frac{\partial N}{\partial z} \right], \quad (8)$$

$$\varphi(0, P) = \varphi_0(P), \quad (9)$$

$$N(0, P) = N_0(P). \quad (10)$$

The specific growth rate for excess nutrient,  $\alpha(I)$ , was obtained from the light intensity  $I$  at any depth by the 'tanh' formula of A.D. Jassby and T. Platt [1976]

$$\alpha(I) = \alpha_0 P_m \tanh \left( \frac{\alpha' I}{P_m} \right),$$

where  $\alpha'$  is the initial slope of the light saturation curve and  $P_m$  is the assimilation number,  $\alpha_0$  is a constant. The extent of reduction in growth rate by nutrient limitation is determined by a Michaelis-Menten relation

$$\Phi(N) = \frac{N}{N + \varpi},$$

where  $\varpi$  is the half-saturation, independent of depth, see J.J. MacIsaac and R.C. Dugdale [1969] for more details. The specific loss rate,  $m$ , includes the mortality of cells due to

---

death, grazing and the loss due to respiration. This death regenerates the nutrient with an efficiency  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Assuming the nutrient to be a nitrogen,  $\gamma$  is the conversion factor. The role of the anchovy as depleting the phytoplankton is neglected, as it can be noticed that equation (7) does not contain any of the state variables associated with the anchovy. However, equation (4) indicates that the larvae eat phytoplankton, and as a consequence of the book-keeping principle, the nonlinear term  $k(t)f(W_e)\varphi$  should be added to equation (7) with a negative sign. Accordingly, some part of the larval biomass should be added to equation (8). All this is considered negligible compared to the other factors acting on the phytoplankton. In fact, rather than a prey-predator relationship, with variations on each species induced by the other species, the coupling between the phytoplankton and the larvae should be thought of as one between the parameters and the state variables of a system : the phytoplankton, ideally at a steady state, would be seen as a parameter entering the equations of the larvae, with possibly a threshold value  $\varphi^*$  such that, in the regions where  $\varphi < \varphi^*$  or the time periods when  $\varphi < \varphi^*$ , the feeding rate of the larvae will be so low that it will drive the larvae to extinction. In fact, there should be a family of such steady-states, dependent upon the values of some external parameters (wind, temperature, light), some solutions being uniformly above  $\varphi^*$ , some uniformly below  $\varphi^*$ , and some crossing the value  $\varphi^*$ . Finally, some sort of stability should hold so that transient solutions arising from perturbations of the external parameters would rapidly approach one of the steady-states after the perturbations have faded. Verifying rigorously such a scenario is a vast mathematical programme which is out of the scope of this paper.

If we suppose that  $\varphi \equiv \varphi(t, z)$  and that  $\vec{V}(t, P)$  is a constant vector, then we get the model proposed by A.H. Taylor et al. [1986]. We have performed an analytical study of this model, see O. Pardo [2000] for more details.

## The complete system

The complete system is composed of the four equations, (1), (4), (7), (8) satisfied respectively by  $L_e$ ,  $W_e$ ,  $\varphi$  and  $N$ , and the initial and boundary conditions, (2), (3) for  $L_e$ , (5), (6) for  $W_e$  and (9), (10) for  $\varphi$  and  $N$ .

We will not deal here with the resolution of the system. We will now elaborate on the computation of a probability of recruitment in the late larval stage. As said above, this corresponds to the period when the swimbladder becomes functional, that is, when the

weight reaches the value  $w^*$ . In order to keep the computations simple enough, we assume from now on that the diffusion is negligible, so that all the equations reduce to transport equations and can be solved using the method of lines.

## The solution of the equation of larvae

In the sequel, we make the hypothesis of incompressibility S. Pond and G.L. Pickard [1983], that is to say

$$\operatorname{div} \vec{V}(t, P) = 0.$$

Thus equation (1) can be rewritten as

$$\frac{\partial L_e}{\partial a} + \frac{\partial L_e}{\partial t} + \vec{V}(t, P) \cdot \vec{\nabla}_P L_e = -\mu(a, t)L_e. \quad (11)$$

We reduce the problem to one time variable (instead of  $a, t, P$ ) by restricting equation (1) along the characteristic lines of the equation, that is, the trajectories of the solutions of the system of ordinary differential equations

$$\begin{cases} \frac{da}{ds} = 1 \\ \frac{dt}{ds} = 1 \\ \frac{dP}{ds} = \vec{V}(t(s), P(s)) \end{cases} \quad (12)$$

Since  $L_e(a, 0, P) = 0$ ,  $L_e$  remains identically null along the characteristic lines initiated from the half line  $t = 0, a > 0$ . Only the characteristic lines starting from  $a = 0, t > 0$  are of interest here. The general expression of such a solutions is

$$a = s, t = s + t_0, P = \bar{P}(s) = \bar{P}(s, t_0, P_0)$$

where  $\bar{P}(s, t_0, P_0)$  is the position at time  $t$  of a particle whose initial position at time  $t_0$  was  $P_0$ . Later on in the text, we will also use the flow in the coordinates  $(t, P)$  associated with equation (12), that is,

$$\Phi(a, t_0, P_0) = (t_0 + a, \bar{P}(a, t_0, P_0)). \quad (13)$$

We denote accordingly,

$$\bar{L}_e(s) = L_e(s, s + t_0, \bar{P}(s, t_0, P_0)),$$

---


$$\bar{\mu}(s) = \mu(s, s + t_0),$$

and, similarly, for the restriction to a characteristic line of any function of the variables  $a, t, P$ .

The equation satisfied by  $\bar{L}_e$  is

$$\frac{d\bar{L}_e}{ds} = -\bar{\mu}(s)\bar{L}_e(s).$$

This equation has for solution

$$\bar{L}_e(s) = \bar{L}_e(0) \exp - \int_0^s \bar{\mu}(\sigma) d\sigma.$$

We have to determine  $\bar{L}_e(0) = L_e(0, t_0, P_0)$ . In view of (3), we have

$$L_e(0, t_0, P_0) = L_r(t_0, P_0),$$

thus,

$$\bar{L}_e(s) = L_r(t_0, P_0) \exp - \int_0^s \bar{\mu}(\sigma) d\sigma.$$

Coming back to the expression of  $L_e$ , we obtain the following

$$L_e(a, t, P) = L_r(t - a, \bar{P}(t - a, t, P)) \exp - \int_0^a \mu(\sigma, t - a + \sigma) d\sigma. \quad (14)$$

## Estimate of the number of larvae entering the late larval stage

We start with a brief discussion about the way we want to compute an estimate of the number of larvae entering the late larval stage. The method we use is based on the same principle as the one used in a previous paper by Arino et al. [1996] for estimating a probability of recruitment of the sole, *Solea solea*, in the juvenile stage. The computations in that case are very simple, so we will quickly go through them in order to explain what we want to do here. First of all, we underline a distinctive feature of the model under consideration, also present in Arino et al. [1996], that is : the weight is coupled to the population density. Instead of being another variable supplementing the space and time coordinates to provide a representation of the larvae in a six dimensional space, the weight is treated as a co-state variable, a function of space and time coordinates, which



---

follows the same trajectory as the larvae to which it is coupled. The main role of the weight function in the context of this section is to allow the computation of the time, age and position at which individuals exit from the larval stage. In Arino et al. [1996], it was assumed that the instant rate of variation of the weight is a function of the average temperature  $T(t)$  and time only, not of the space and the actual weight :

$$\frac{\partial W}{\partial a} + \frac{\partial W}{\partial t} = g(t, T(t)). \quad (15)$$

We point out that equation (15) is in fact a special case of equation (4). It corresponds to the case when  $W_e$  does not depend on the position, and  $f(t, P, W_e, \varphi)$  does not depend on  $W_e$ ,  $\varphi$  depends only on time and  $\alpha = \beta = 0$ . Such a simple model can be integrated easily and yields the following expression for  $W_e$ , neglecting the weight at age  $a = 0$ ,

$$W_e(a, t) = \int_{t-a}^t g(s, T(s)) ds. \quad (16)$$

Assuming that  $g$  is positive, one obtains immediately that  $W_e(a, t)$  is increasing in  $a$ , so that the equation

$$W_e(a, t) = w^*$$

has at most one solution. Assuming that there is one for each  $t$ , we denote it  $a^*(t)$ . The interpretation of  $a^*(t)$  is that it is the age of those larvae who cross the threshold associated with the weight  $w^*$  at time  $t$ , and  $t - a^*(t)$  is the birth date. Another property that can be deduced from (16) is that  $a^{*'}(t) < 1$ . This property has a natural interpretation, that is, it means that there is no overlap of successive cohorts at the point of exit from the larval stage : the first individuals to be born will be the first to be recruited. In terms of  $a^*$  it is possible to express the exit flow rate as a function of the inflow rate : the ratio of the first number to the second one gives the rate of recruitment of the corresponding cohort. A lower estimate of this rate, independent on the cohorts, was computed, which was taken as the probability of recruitment. Here, we follow the same general principles although the situation is a little bit more complicated. As for the sole, we consider that the exit from the larval stage takes place when the larvae reach a threshold weight  $w^*$ . However, the situation is different from the one dealt with in Arino et al. [1996], since the weight is not monotonically increasing. The lack of monotonicity may be due to two causes (see equation (4)) : the lack of phytoplankton or the excess of energy cost. For a

moment, let us come back to the model of weight growth of Arino et al. [1996], modified by introducing an energy cost of the same type as in equation (4). Equation (15) becomes

$$\frac{\partial W_e}{\partial a} + \frac{\partial W_e}{\partial t} = g(t, T(t)) - W_e(a, t)\gamma(W_e(a, t)). \quad (17)$$

We have observed that the model of Arino et al. [1996] can in fact be considered as a special case of equation (4). It is also true for equation (17), providing we assume that in equation (4) we can give the dependence on  $W_e$  in the right hand side a more general form than it has. So, we may assume that equation (17) is just a simplified case of equation (4). It is not simple enough however to be computed. Assuming for making it even simpler that  $\gamma(W_e)$  is a constant  $\alpha > 0$ , equation (17) reduces to

$$\frac{\partial W_e}{\partial a} + \frac{\partial W_e}{\partial t} = g(t, T(t)) - \alpha W_e(a, t). \quad (18)$$

Let us remember that we are concerned here by the segment of the larval life which goes from the moment when the yolk-sac is resorbed (the beginning of the exogenous feeding), taken as age  $a = 0$ , to the moment when the larva reaches the weight  $w^*$ . Although the weight of the larvae at the beginning of the exogenous feeding is probably variable, it is convenient to assume that it is not so, that is, all the larvae begin this stage with the same weight,  $W_0 < w^*$ . Equation (18) is to be solved for each age cohort in the post yolk-sac period, that is, individuals having started this period at a same time  $t_0$ . For such a cohort, there is the following relationship between the age and the chronological time :  $t = t_0 + a$ . Defining

$$\overline{W}_e(a) = W_e(a, t_0 + a),$$

equation (18) yields the following

$$\overline{W}'_e(a) = \overline{g}(a) - \alpha \overline{W}_e(a), \quad (19)$$

where  $\overline{g}(a) = g(t_0 + a, T(t_0 + a))$ . We also have :  $\overline{W}_e(0) = W_0$ . The solution reads as

$$\overline{W}_e(a) = \exp(-\alpha a)W_0 + \int_0^a \exp(-\alpha(a-s))\overline{g}(s)ds$$

which, in terms of the variables  $a$  and  $t$ , gives

$$W_e(a, t) = \exp(-\alpha a)W_0 + \int_{t-a}^t \exp(-\alpha(t-s))g(s, T(s))ds. \quad (20)$$

---

Comparing with equations (15) and (16), one can see that  $\overline{W}_e(a)$  is always increasing in the case of equation (15), while equation (19) shows that the same property holds here only if  $\overline{g}(a) > \alpha \overline{W}_e(a)$ , which has the obvious interpretation that the weight gained from food consumption is more than the one lost for sustaining activity. We also noticed that  $W_e(a, t)$  is increasing in  $a$ , in the case of equation (15) : this ensures that at most one cohort reaches the juvenile stage at a given time. This is not always true in the case of equation (19). Taking the partial derivative, with respect to  $a$ , of formula (20) leads to

$$\frac{\partial W_e(a, t)}{\partial a} = \exp(-\alpha a)[- \alpha W_0 + g(t - a, T(t - a))]. \quad (21)$$

Formula (21) shows that  $\frac{\partial W_e(a, t)}{\partial a}$  has a constant sign along the trajectory of a cohort and its sign is determined by the feeding conditions which were prevailing at the beginning of the trajectory (age  $a = 0$ ). It is difficult to interpret this property since it is based at least in part on the technical assumption that the initial weight is the same for all the cohorts. It suggests to incorporate another threshold to the model, that is, only the larvae whose endogenous feeding stage ends at a time  $t$  such that

$$g(t, T(t)) \geq \alpha W_0 \quad (22)$$

will switch to active feeding at this time. The other ones reach the value  $W_0$  at a time  $t_1$  such that

$$g(t_1, T(t_1)) < \alpha W_0.$$

No feeding occurs from this time on, so these larvae start to lose weight exponentially, that is,  $W_e(t) = W_0 \exp -\alpha(t - t_1)$ , until either the weight goes below a certain value  $w_{\min}$ , a threshold for starvation and death, whatever future feeding conditions could be, or, there exists  $t_2 > t_1$  such that

$$g(t_2, T(t_2)) \geq \alpha W_e(t_2) \geq \alpha w_{\min}.$$

Active feeding will then start from the very first moment  $t_2$  when the above two inequalities hold simultaneously. The weight starts to grow, from  $t_2$  onwards, according to the same formula as (20) with  $W_0$  changed to  $W_e(t_2)$ . Age in the active feeding should be initialized to 0 at this time.

The condition  $g(t, T(t)) \geq \alpha W_0$  to be satisfied at the beginning of the active feeding period would be a rough way to account for the accessibility of the prey, in particular at

---

a time when the larva has not yet adapted to its new feeding habit. Accessibility of the resource is a concept which combines several factors : the concentration of the resource (here, the phytoplankton), its quality (some prey will be too big, others could be too small), as well as the physical environment (current and turbulence). All these factors together make the resource more or less available. This degree of availability compares to the cost incurred by the larva in its effort to catch the prey.

The mechanisms involved in the successful feeding of some larvae and the failure of probably many others are far from being understood yet. There is a growing view that larval survival is tightly related with them finding around high concentrations of food. This view is in particular supported by laboratory experiments which indicate that the minimum rate of phytoplankton necessary to sustain larval life in the laboratory is well above the usual concentrations of phytoplankton observed in the field. It is also believed that such findings should be made as soon as possible after the resorption of the yolk-sac. Finally, so to speak, success attracts success and accordingly for failure : larvae which were able to feed abundantly immediately after they started to look for food will have the possibility to go through periods of low food abundance. At the other end, those larvae which were not successful from the beginning will have more and more difficulty to search. The effect of entrainment produced by the first feeding success is roughly reflected by condition (22). There are however probably many other circumstances in its active feeding life time when the larva is faced with low food accessibility : its ability to withstand such conditions will then increase with weight (as modelled in equation (4)). A deterministic description of the succession of bad and good feeding periods and an estimation of how bad they can be is out of reach. A very preliminary step in this direction is the choice of the value  $w_{\min} < W_0$  such that no larva which, after having reached the weight  $W_0$ , falls below  $w_{\min}$  will become juvenile.

We now return to equation (4) where, as already mentioned, we assume that  $K(t, z) = 0$  and we assume that the quantities  $W_0$ ,  $w^*$  and  $w_{\min}$  are as was said in the previous discussion. If  $W_e(a, t, P)$  is a solution of (4), with  $W_e(0, t_0, P_0) = W_0$ , and  $\overline{W}_e(a)$  is the restriction of  $W_e(a, t, P)$  to a characteristic line starting from  $(0, t_0, P_0)$ , then we follow  $\overline{W}_e(a)$  until the first  $\bar{a} = \bar{a}(t_0, P_0) > 0$  such that

$$\overline{W}_e(\bar{a}) = w^*$$

providing that  $\overline{W}_e(a) > w_{\min}$  for every  $0 < a < \bar{a}$ . In order to compute the flux of larvae

entering the late larval stage, it is first necessary to determine the set of points (the admissible set) in the space of  $(a, P)$  where, at time  $t$ ,  $W_e(a, t, P) = w^*$ . Let  $(a, t, P)$  be a given point. In terms of the flow  $\Phi$  defined by (13), we have

$$(t_0, P_0) = \Phi(-a, t, P)$$

therefore, the characteristic line passing through  $(a, t, P)$  is given by

$$(t(s), P(s)) = \Phi(s - a, t, P).$$

So, the relations defining the exit set at time  $t$ ,  $\mathcal{R}(t)$ , are

$$W_e(a, t, P) = w^*, \text{ and } w_{\min} < W_e(s, \Phi(s - a, t, P)) < w^* \text{ for } 0 < s < a \quad (23)$$

$$\mathcal{R}(t) = \{(a, P) : \text{formula (23) holds}\}$$

From (23), it is clear that to a given  $(t, P)$  is associated at most one  $a$  such that (23) holds. Assuming for simplicity that there is always a solution, then we can define  $a^*(t, P) = a$ , with  $a$  given by (23). The exit set  $\mathcal{R}(t)$  is the boundary of a larger open set, which we will call admissible set, denoted  $\mathcal{A}(t)$  and defined as follows

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) = \{ & (a, P) : W_e(a, t, P) < w^*, \\ & \text{and } w_{\min} < W_e(s, \Phi(s - a, t, P)) < w^* \text{ for } 0 < s < a\}. \end{aligned} \quad (24)$$

We point out that for each  $(a, P) \in \mathcal{A}(t)$ , we have  $a < a^*(t, P)$ . The section of  $\mathcal{A}(t)$  over a point  $P$  is the collection of ages of larvae, all in between the post yolk-sac and the functional swimbladder period, susceptible to reach the juvenile stage. We denote

$$\mathcal{A}_\sigma(t) = \{P : \exists a, (a, P) \in \mathcal{A}(t)\}.$$

For each point  $P$  of the set  $\mathcal{A}_\sigma(t)$ , we determine all the trajectories that can be followed by larvae, which at time  $t$  are positioned at  $P$ , and have never experienced starving conditions. For each  $P \in \mathcal{A}_\sigma(t)$ , the set of  $a$ , such that  $(a, P) \in \mathcal{A}(t)$  is a union of open intervals : each "hole" between two intervals corresponds to a trajectory crossing an inhospitable region where larvae would be deprived of food to the point of going below the threshold for starvation.

We will now evaluate the variation, within a small time interval  $[t, t + \Delta t]$ , of the population of larvae, located in a given region  $\Omega$  of the ocean, which have the potential

to reach the late larval stage. At time  $t$ , the number of larvae in this situation is given by the following integral

$$L_{pot}(t) = \int_{\mathcal{A}_{\Omega}(t)} L_e(a, t, P) da dP, \quad (25)$$

where

$$\mathcal{A}_{\Omega}(t) = \{(a, P) : (a, P) \in \mathcal{A}(t) \text{ and } P \in \Omega\}.$$

We denote  $L_l(t, P)$  the spatial density of the larvae entering the late larval stage at time  $t$ . The variation of  $L_{pot}(t)$  between  $t$  and  $t + \Delta t$  is caused by four factors : 1)The arrival of new post yolk-sac larvae, of weight  $W_0$ ; 2)The natural mortality; 3)The advection by currents; 4)The passage into the late larval stage.

**New post yolk-sac larvae :**

$$\left[ \int_{\Omega} L_e(0, t, P) dP \right] \Delta t. \quad (26)$$

**Natural mortality :**

$$\left[ \int_{\mathcal{A}_{\Omega}(t)} L_e(a, t, P) \mu(a, t) da dP \right] \Delta t. \quad (27)$$

**Advection by currents :**

$$\left[ \int_{\partial \mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)} \left[ \int_{\{a:(a,P) \in \overline{\mathcal{A}(t)}\}} L_e(a, t, P) da \right] \vec{V}(t, P) \cdot \vec{n}(P) \sigma(dP) \right] \Delta t. \quad (28)$$

in which the notation  $\partial \mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)$  corresponds to the boundary of  $\mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)$ ,  $\overline{\mathcal{A}(t)}$  is the closure of  $\mathcal{A}(t)$ ,  $\vec{n}(P)$  is the unit normal vector to  $\partial \mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)$  at the point  $P$ , oriented outwards and  $\sigma(dP)$  is the element of surface on  $\partial \mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)$ .

**Passage into the late larval stage :**

We obtain the following general formula for the flux of early juveniles

$$L_l(t, P) = 1_{\mathcal{A}_{\sigma}(t)}(P) L_e(a^*(t, P), t, P) \quad (29)$$

$$- 1_{\mathcal{A}_{\sigma}(t)}(P) \left[ \int \vec{\nabla}_P 1_{\{a:(a,P) \in \overline{\mathcal{A}(t)}\}}(a) L_e(a, t, P) da \right] \cdot \vec{V}(t, P)$$

$$+1_{\Sigma_\sigma(t)}(P)L_e(a^*(t, P), t, P) \frac{\frac{\partial W_e}{\partial t}}{\left| \frac{\partial W_e}{\partial a} \right|},$$

see appendix 1 for more details. We will now illustrate formula (29) by two examples.

### Example 1

We consider the situation considered in Arino et al. [1996], that is, growth is governed by equation (15), which integrates to

$$W_e(a, t) = W_0 + \int_{t-a}^t g(s, T(s)) ds.$$

$W_e$  is increasing along each cohort, which implies that  $W_e \geq W_0$ . So,  $\mathcal{A}(t)$  has a simple description : in particular,  $a^*(t, P) = a^*(t)$  and

$$\mathcal{A}(t) = ]0, a^*(t)[ \times D$$

which yields

$$\mathcal{A}_\sigma(t) = \Sigma_\sigma(t) = D.$$

Since  $\mathcal{A}(t)$  is a product of two sets, with the end points of the set of ages independent on the position, it implies that  $\vec{\nabla}_{P1_{\{a:(a,P) \in \mathcal{A}(t)\}}}(a) = 0$ , formula (48) boils down to

$$L_l(t, P) = L_e(a^*(t), t, P) + L_e(a^*(t), t, P) \frac{\frac{\partial W_e}{\partial t}}{\left| \frac{\partial W_e}{\partial a} \right|}.$$

Using the notation  $\bar{g}(t) = g(t, T(t))$ , we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_e}{\partial t} &= \bar{g}(t) - \bar{g}(t-a), \\ \frac{\partial W_e}{\partial a} &= \bar{g}(t-a). \end{aligned}$$

Introducing these values in the formula for  $L_l(t, P)$ , we obtain

$$L_l(t, P) = L_e(a^*(t), t, P) \frac{\bar{g}(t)}{\bar{g}(t-a^*(t))}. \quad (30)$$

---

Now, differentiating the identity

$$W_e(a^*(t), t) = w^*$$

with respect to  $t$  yields

$$a^{*'}(t) = -\frac{\frac{\partial W_e}{\partial t}}{\frac{\partial W_e}{\partial a}}.$$

In terms of  $a^*(t)$ , formula (30) gives

$$L_l(t, P) = (1 - a^{*'}(t))L_e(a^*(t), t, P) \quad (31)$$

which is precisely the formula obtained in Arino et al. [1996] for the sole. Using the expression of  $L_e(a, t, P)$  in terms of  $L_r$  given in (14), we obtain

$$L_l(t, P) = \quad (32)$$

$$(1 - a^{*'}(t)) \exp - \left[ \int_0^{a^*(t)} \mu(\sigma, t - a^*(t) + \sigma) d\sigma \right] L_r(t - a^*(t), \bar{P}(t - a^*(t), t, P))$$

Formula (32) gives the flux of larvae entering the late larval stage at time  $t$  and position  $P$  in terms of the flux of larvae at the end of the yolk-sac stage which, at time  $t$  and position  $P$ , would be susceptible to enter the late larval stage. So, the ratio

$$\frac{L_l(t, P)}{L_r(t - a^*(t), \bar{P}(t - a^*(t), t, P))}$$

gives, at this time and this position, the rate of recruitment of a cohort of larvae at the end of the yolk-sac stage in the late larval stage. In this simplified example where we assume that the growth conditions are the same all over the place, the rate of recruitment is independent on the positions, it is a function of time only. On the other hand, the magnitude of the flux depends on the position since the ratio compares the number of late larvae at a given position  $P$  to the number of larvae that were driven by the current from the previous position  $\bar{P}$  they were at, at time  $t - a^*(t)$ .



---

## Example 2

In this example, we assume that some spatial dependence holds for weight growth. Our main assumption is that the current is constant and is oriented westwards

$$\vec{V}(t, P) = \vec{U} = (U_1, 0, 0).$$

This implies that all the properties under consideration in this study are invariant through time along the North-South and the vertical components. We also assume that the nutrient concentration is constant  $N = \bar{N}$  which is feasible under the assumption of velocity constancy (see equation (8)). This gives the equation for phytoplankton (equation (7)) the following expression

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = C(\bar{N})\varphi - U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (33)$$

in which  $C(\bar{N})$  is the constant rate of production of phytoplankton due to the nutrients. We complete the equation for the phytoplankton by an initial value

$$\varphi(0, x) = \varphi_0(x)$$

and a boundary condition, which corresponds to a source term

$$\varphi(t, \xi) = \tilde{\varphi}(t)$$

$\xi$  represents the most coastward abscissa of the region under consideration. Finally, we assume that the growth rate of the weight (equation (4)) as a result of eating phytoplankton is linear in  $\varphi$ , independent on  $W_e$ , which gives the following equation for the weight

$$\frac{\partial W_e}{\partial a} + \frac{\partial W_e}{\partial t} + U_1 \frac{\partial W_e}{\partial x} = k(t)f(t)\varphi - \alpha W_e. \quad (34)$$

It is then possible to integrate the state variables  $\varphi$ ,  $L_e$  and  $W_e$  with respect to the spatial variables  $y$  and  $z$  and work with the integrated state variables, functions of  $a$ ,  $t$  and  $x$  only. Thus we obtain, see appendix 2 for more details

$$\begin{aligned} L_l(t, x) &= [1 - U_1 a^{(2)'}(x)] L_e(a^{(2)}(x), t, x) && \text{if } x > U_1 t + \xi \text{ and } a^{(2)}(x) < +\infty, \\ L_l(t, x) &= 0 && \text{otherwise.} \end{aligned}$$

At this point, it would be possible to continue as has been done in Example 1 : one can express  $L_e$  in terms of  $L_r$  and compute the ratio of the flux of late larvae to the flux of the larvae at the end of the yolk-sac stage. We defer this to future work.

---

## Discussion

We have described by mathematical equations the last segment of the passive larval stage of the anchovy, that is, the part between the resorption of the yolk-sac and the development of an inflated swimbladder. This is a critical phase when the larva switches from endogenous to exogenous feeding. Thus, its survival depends strongly on its ability to find and catch food while its movement in the water column is impaired by the lack of a functional swimbladder. Following the same approach as in a previous work by Arino et al. [1996], the state of the targetted population is determined, at every moment  $t$ , by two densities : one,  $L_e$ , is associated with the demography while the other one,  $W_e$ , is more reflective of the physiology. Competition as well as density-dependence effects have been considered negligible since, from field data, it seems clear that eggs and early larvae disperse soon after spawning L. Motos et al. [1991]. So, the equation for the demography is linear. Nonlinear effects and probably also threshold effects are in action in the variation of weight. The nonlinearity chosen here is an attempt to account for part of these effects. The main goal of the work was to derive a general formula for the rate of recruitment in the late larval stage in terms of the population which has completed successfully the yolk-sac period. In this respect, formula (48) is the main result of the paper : its generality is large enough to encompass two completely different examples, example 1 concentrating on the role of temperature on the rate of recruitment, while example 2 shows the possible role of spatial heterogeneity. The paper considers a relatively small segment of the life cycle of the anchovy, seemingly the most crucial part, since it corresponds to the passage from endogenous to exogenous feeding S. Regner [1985]. A model of the earlier phase from the egg stage to the end of the yolk-sac period has been set up by Arino et al. [1999]. Combined with the result of this paper, it allows the computation of a rate of recruitment from the egg into the late larval stage. Finally, the rate of recruitment from the egg into the juvenile stage, of main interest for fishery management, entails the study of the late larval stage, until the beginning of filter feeding (J.R. Hunter and H. Dorr [1982] ; M.M. Mullin [1993]). This will be considered in future work.

# Bibliographie

- [1] O. Arino, C. Koutsikopoulos and A. Ramzi [1996], Elements of mathematical modeling of evolution in number of a sole population, *J. Biol. Systems* vol. 4., 4, 445-458.
- [2] O. Arino, A. Boussouar and P. Prouzet [1999], Modeling of the larval stage of the anchovy of the Bay of Biscay. Estimation of the rate of recruitment in the juvenile stage, Project 96/048 DG XIV, Final report in preparation.
- [3] A. Borja, A. Uriarte, V. Valencia, L. Motos and A. Uriarte [1996], Relationships between anchovy (*Engraulis encrasicolus* L.) recruitment and the environment in the Bay of Biscay, *Scientia Marina* vol. 60.(supl.2), 179-192.
- [4] J. Csirke [1995], Fluctuations in abundance of small and mid-size pelagics, *Scientia Marina*, vol. 59.(3-4), 481-492.
- [5] D.H. Cushing [1990], Plankton production and year class strength in fish populations : an update of match/mismatch hypothesis, *Adv. Mar. Biol.* 26, 249-293.
- [6] J.R. Hunter and H. Dorr [1982], Thresholds for filter feeding in northern anchovy, *Engraulis Mordax*, CalCOFI Rep., Vol. XXIII.
- [7] A.D. Jassby and T. Platt [1976], Mathematical formulation of the relationship between photosynthesis and light for phytoplankton, *Limnol. Oceanogr.*, 21, 540-547.
- [8] W.C. Leggett and E. Deblois [1994], Recruitment in marine fishes : is it regulated by starvation and predation in the egg and larval stages?, *Netherlands Journal of Sea Research* 32(2), 119-134.
- [9] J.J. MacIsaac and R.C. Dugdale [1969], The kinetics of nitrate and ammonium uptake by natural populations of marine phytoplankton, *deep-Sea Res.* 16, 45-57.

- [10] L. Motos, J. Santiago and A. Uriarte [1991], Assessment of spawning biomass of the Bay of Biscay anchovy population, *Engraulis Encrasicolus* L., using the daily egg production method. ICES CM/H :33.
- [11] M.M. Mullin [1993], Webs and Scales Physical and ecological processes in marine fish recruitment, University of Washington Press, pp. 131.
- [12] O. Pardo [2000], Global stability for a phytoplankton-nutrient system, J. of Biological System, Vol. 08, No 02, 195-209.
- [13] R.M. Peterman, M.J. Bradford, N.C.H. Lo and R.D. Methot [1988], Contribution of early life stages to interannual variability in recruitment of northern anchovy (*Engraulis Mordax*), Can. J. Fish. Aquat. Sci. Vol. 45, 8-16.
- [14] S. Pond and G.L. Pickard [1983], Introductory Dynamical Oceanography, Pergamon Press, second edition, pp. 329.
- [15] P. Re [1994], Anchovy spawning in Mira estuary (1985/1992), Nova serie, vol. 27., 423-454.
- [16] S. Regner [1985], Ecology of planktonic stages of the anchovy, Acta. Adriat., 26(1) : 5-113.
- [17] A.H. Taylor, J.R.W. Harris and J. Aiken [1986], The interaction of physical and biological process in a model of the vertical distribution of phytoplankton under stratification, Marine Interfaces Ecohydrodynamics, Jacques C. Nihoul (Editor), Elsevier Oceanography series, vol 42., 313-330.
- [18] A. Uriarte, P. Prouzet and B. Villamor [1996], Bay of Biscay and Ilbero anchovy populations and their fisheries, Scientia Marina, vol 60.(supl.2), 237-255.

# Appendix 1

## Determination of the early juveniles flux

The total density entering the late larval stage during a period  $\Delta t$  is

$$\left[ \int_{\Omega} L_l(t, P) dP \right] \Delta t. \quad (35)$$

What we have to do now is to evaluate the difference

$$L_{pot}(t + \Delta t) - L_{pot}(t) \quad (36)$$

which we divide into two parts

$$L_{pot}(t + \Delta t) - L_{pot}(t) = \Delta^{(1)} L_{pot} + \Delta^{(2)} L_{pot} \quad (37)$$

with

$$\Delta^{(1)} L_{pot} = \int_{\mathcal{A}_{\Omega}(t+\Delta t)} [L_e(a, t + \Delta t, P) - L_e(a, t, P)] dadP \quad (38)$$

and

$$\Delta^{(2)} L_{pot} = \int_{\mathcal{A}_{\Omega}(t+\Delta t)} L_e(a, t, P) dadP - \int_{\mathcal{A}_{\Omega}(t)} L_e(a, t, P) dadP. \quad (39)$$

Under some differentiability assumptions on  $L_e$  that we will not specify, we can write :

$$\Delta^{(1)} L_{pot} = \left[ \int_{\mathcal{A}_{\Omega}(t)} \frac{\partial L_e}{\partial t}(a, t, P) dadP \right] \Delta t + o(\Delta t).$$

Using equation (11), we can change  $\frac{\partial L_e}{\partial t}$  to  $-\frac{\partial L_e}{\partial a} - \vec{V}(t, P) \cdot \vec{\nabla}_P L_e - \mu L_e$ , which, if we omit the  $o(\Delta t)$  quantity, yields

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)} L_{pot} = & - \left[ \int_{\mathcal{A}_{\Omega}(t)} \left[ \frac{\partial L_e}{\partial a}(a, t, P) \right] dadP \right] \Delta t \\ & - \left[ \int_{\mathcal{A}_{\Omega}(t)} \left[ \vec{V}(t, P) \cdot \vec{\nabla}_P L_e + \mu(a, t) L_e(a, t, P) \right] dadP \right] \Delta t. \end{aligned} \quad (40)$$

Let us now consider  $\Delta^{(2)} L_{pot}$ . This quantity can be written in the form

$$\Delta^{(2)} L_{pot} = \int_{\mathcal{A}_{\Omega}(t+\Delta t) \setminus \mathcal{A}_{\Omega}(t)} L_e(a, t, P) dadP - \int_{\mathcal{A}_{\Omega}(t) \setminus \mathcal{A}_{\Omega}(t+\Delta t)} L_e(a, t, P) dadP. \quad (41)$$

Let us examine the integral over  $\mathcal{A}_\Omega(t+\Delta t)\setminus\mathcal{A}_\Omega(t)$ . The contributions of  $L_e$  which survive for each  $\Delta t > 0$  small enough are those in the vicinity of the surface  $\Sigma_\Omega(t) = \{(a, P) \in \overline{\mathcal{A}_\Omega(t)} : W_e(a, t, P) = w^*\}$  and such that  $\frac{\partial W_e}{\partial t}(a, t, P) < 0$ . For any point  $(a, P)$  in  $\Sigma_\Omega(t)$ , there is a small portion of the normal line to  $\Sigma_\Omega(t)$  at  $(a, P)$  which belongs to the set  $\mathcal{A}_\Omega(t+\Delta t)\setminus\mathcal{A}_\Omega(t)$ . An estimate of the length of this portion is

$$\frac{\delta(a, t, P)}{\Delta t} \equiv \frac{\frac{\partial W_e}{\partial t}}{\left(\left|\frac{\partial W_e}{\partial a}\right|^2 + |\nabla_P W_e|^2\right)^{1/2}}. \quad (42)$$

The same formula holds for  $\mathcal{A}_\Omega(t)\setminus\mathcal{A}_\Omega(t+\Delta t)$ , with  $\delta > 0$  this time. In terms of  $\delta$ , we have the following expression for  $\Delta^{(2)}L_{pot}$

$$\Delta^{(2)}L_{pot} = - \int_{\Sigma_\Omega(t)} L_e(a, t, P) \delta(a, t, P) d\Sigma_\Omega(t)(a, P),$$

where the notation  $d\Sigma_\Omega(t)(a, P)$  stands for the surface integral over  $\Sigma_\Omega(t)$ , that is :

$$d\Sigma_\Omega(t)(a, P) = \frac{\left(\left|\frac{\partial W_e}{\partial a}\right|^2 + |\nabla_P W_e|^2\right)^{1/2}}{\left|\frac{\partial W_e}{\partial a}\right|} dP$$

which yields

$$\Delta^{(2)}L_{pot} = - \int_{\Sigma_{\Omega_\sigma}(t)} L_e(a^*(t, P), t, P) \frac{\frac{\partial W_e}{\partial t}}{\left|\frac{\partial W_e}{\partial a}\right|} dP \Delta t. \quad (43)$$

Coming back to the estimate of the variation of  $L_{pot}$  within the time interval  $[t, t+\Delta t]$  we can write, first of all

$$\begin{aligned} L_{pot}(t+\Delta t) - L_{pot}(t) &= \left[ \int_\Omega L_e(0, t, P) dP \right] \Delta t \\ &\quad - \left[ \int_{\mathcal{A}_\Omega(t)} L_e(a, t, P) \mu(a, t) da dP \right] \Delta t \\ &\quad - \left[ \int_{\partial\mathcal{A}_{\Omega_\sigma}(t)} \left[ \int_{\{a:(a,P) \in \overline{\mathcal{A}(t)}\}} L_e(a, t, P) da \right] \vec{V}(t, P) \cdot \vec{n}(P) \sigma(dP) \right] \Delta t \\ &\quad - \left[ \int_\Omega L_l(t, P) dP \right] \Delta t \end{aligned} \quad (44)$$

The above expression is to be balanced with the one in terms of  $\Delta^{(1)}L_{pot}$  (40) and  $\Delta^{(2)}L_{pot}$  (43), that is

$$\begin{aligned}
& J_{pot}(t + \Delta t) - J_{pot}(t) = \tag{45} \\
& - \left[ \int_{\mathcal{A}_\Omega(t)} \left[ \frac{\partial L}{\partial a}(a, t, P) + \vec{V}(t, P) \cdot \vec{\nabla}_P L + \mu(a, t) L(a, t, P) \right] dadP \right] \Delta t \\
& - \left[ \int_{\Sigma_{\Omega\sigma}(t)} L(a^*(t, P), t, P) \frac{\frac{\partial W}{\partial t}}{\left| \frac{\partial W}{\partial a} \right|} dP \right] \Delta t
\end{aligned}$$

In the expression (44), we note that

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial \mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)} \left[ \int_{\{a:(a,P) \in \overline{\mathcal{A}(t)}\}} L_e(a, t, P) da \right] \vec{V}(t, P) \cdot \vec{n}(P) \sigma(dP) \\
& = \int_{\mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)} \operatorname{div}_P \left\{ \left[ \int_{\{a:(a,P) \in \overline{\mathcal{A}(t)}\}} L_e(a, t, P) da \right] \vec{V}(t, P) \right\} dP
\end{aligned}$$

The integral over  $\mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)$  breaks down into the sum of two quantities :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)} \left[ \int \vec{\nabla}_P 1_{\{a:(a,P) \in \overline{\mathcal{A}(t)}\}}(a) L_e(a, t, P) da \right] \cdot \vec{V}(t, P) dP \\
& + \int_{\mathcal{A}_\Omega(t)} \vec{\nabla}_P L_e(a, t, P) \cdot \vec{V}(t, P) dP,
\end{aligned}$$

where, for any subset  $S$ , we denote  $1_S$  the indicator function of  $S$ . After elimination of the quantities which appear in both expressions (44) and (45), and division by  $\Delta t$ , we arrive at a first relationship :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} L_e(0, t, P) dP - \int_{\Omega} L_l(t, P) dP \tag{46} \\
& - \int_{\mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)} \left[ \int \vec{\nabla}_P 1_{\{a:(a,P) \in \overline{\mathcal{A}(t)}\}}(a) L_e(a, t, P) da \right] \cdot \vec{V}(t, P) dP \\
& = - \int_{\mathcal{A}_\Omega(t)} \frac{\partial L_e}{\partial a}(a, t, P) dadP - \int_{\Sigma_{\Omega\sigma}(t)} L_e(a^*(t, P), t, P) \frac{\frac{\partial W_e}{\partial t}}{\left| \frac{\partial W_e}{\partial a} \right|} dP
\end{aligned}$$

From the definition of  $\mathcal{A}_\Omega(t)$  and the observation made above that  $a^*(t, P)$  is, for each  $P$ , the lowest upper bound of the  $a$  such that  $(a, P) \in \mathcal{A}_\Omega(t)$ , we deduce that

$$\int_{\mathcal{A}_\Omega(t)} \frac{\partial L_e}{\partial a}(a, t, P) dadP = \int_{\mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)} L_e(a^*(t, P), t, P) dP - \int_{\Omega} L_e(0, t, P) dP. \tag{47}$$

Substituting the right hand side of (47) in (46), we obtain, after elimination of  $\int_{\Omega} L_e(0, t, P)dP$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} L_l(t, P)dP = \\ & - \int_{\mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)} \left[ \int \vec{\nabla}_P 1_{\{a:(a,P) \in \overline{\mathcal{A}(t)}\}}(a) L_e(a, t, P) da \right] \cdot \vec{V}(t, P) dP \\ & + \int_{\mathcal{A}_{\Omega\sigma}(t)} L_e(a^*(t, P), t, P) dP + \int_{\Sigma_{\Omega\sigma}(t)} L_e(a^*(t, P), t, P) \frac{\frac{\partial W_e}{\partial t}}{\left| \frac{\partial W_e}{\partial a} \right|} dP \end{aligned}$$

This equality being true for each open subset  $\Omega$  allows to deduce equality of the functions under the integrals. We obtain a general formula for the flux of early juveniles

$$\begin{aligned} & L_l(t, P) = 1_{\mathcal{A}\sigma}(t)(P) L_e(a^*(t, P), t, P) \tag{48} \\ & - 1_{\mathcal{A}\sigma}(t)(P) \left[ \int \vec{\nabla}_P 1_{\{a:(a,P) \in \overline{\mathcal{A}(t)}\}}(a) L_e(a, t, P) da \right] \cdot \vec{V}(t, P) \\ & + 1_{\Sigma\sigma}(t)(P) L_e(a^*(t, P), t, P) \frac{\frac{\partial W_e}{\partial t}}{\left| \frac{\partial W_e}{\partial a} \right|} \end{aligned}$$



## Appendix 2

### Example 2

We do this and we keep the same notations for the integrated state variables. In spite of all the above simplifying assumptions, the problem at hand is not trivial. The main difficulty is in describing the admissible set  $\mathcal{A}(t)$ , since this time the weight  $W_e$  is not always increasing with respect to age. In order to determine  $\mathcal{A}(t)$ , as given by formula (24), we first have to compute the flow  $\Phi = \Phi(s, t_0, P_0) = (t(s), x(s))$ . The derivation is straightforward

$$t(s) = s + t_0, \quad x(s) = sU_1 + x_0.$$

It is also very easy to solve equation (34). We arrive at the following formula

$$\begin{aligned} W_e(a, t, x) &= \exp(-\alpha a)W_0 \\ &+ \int_{t-a}^t \exp[-\alpha(t-\sigma)] k(\sigma)f(\sigma)\varphi(\sigma, x + (\sigma-t)U_1)d\sigma \end{aligned} \quad (49)$$

where, substituting for  $\varphi$  its expression in terms of  $\varphi_0$  and  $\tilde{\varphi}$  obtained by solving equation (33), that is,

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) &= \exp(C(\bar{N})t)\varphi_0(x - U_1t), \text{ for } x - U_1t < \xi \\ \varphi(t, x) &= \exp(C(\bar{N})\frac{x-\xi}{U_1})\tilde{\varphi}(t - \frac{x-\xi}{U_1}), \text{ for } x - U_1t > \xi \end{aligned}$$

gives

$$\begin{aligned} W_e(a, t, x) &= \exp(-\alpha a)W_0 + \\ &\varphi_0(x - tU_1) \exp(-\alpha t) \int_{t-a}^t \exp[(\alpha + C(\bar{N}))\sigma] k(\sigma)f(\sigma)d\sigma \\ &\quad \text{if } x - U_1t < \xi, \\ & \\ W_e(a, t, x) &= \exp(-\alpha a)W_0 + \\ &\tilde{\varphi}(t - \frac{x-\xi}{U_1}) \exp(-\alpha t + C(\bar{N})\frac{x-\xi}{U_1}) \int_{t-a}^t \exp[\alpha\sigma] k(\sigma)f(\sigma) \\ &\quad \text{if } x - U_1t > \xi. \end{aligned} \quad (50)$$

To make the above formula more explicit, we further assume that the product

$$k(t)f(t) = \kappa$$

is a constant. This leads to

$$\begin{aligned}
W_e(a, t, x) = & \exp(-\alpha a)W_0 + \\
& \kappa\varphi_0(x - tU_1) \exp [C(\bar{N})t] \frac{[1 - \exp -(\alpha + C(\bar{N}))a]}{(\alpha + C(\bar{N}))} \\
& \text{if } x - U_1t < \xi,
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
W_e(a, t, x) = & \exp(-\alpha a)W_0 + \\
& \kappa\tilde{\varphi}(t - \frac{x - \xi}{U_1}) \exp(C(\bar{N})\frac{x - \xi}{U_1}) \frac{[1 - \exp -\alpha a]}{\alpha} \\
& \text{if } x - U_1t > \xi.
\end{aligned}$$

We will now restrict our attention to an even more simplified situation which, however, is feasible : we assume that

$$\varphi_0 = 0 \text{ and } \tilde{\varphi} \text{ is constant, } \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_C.$$

This would correspond to the case of phytoplankton coming into a region from an external source. The formulae for  $W$  reduce to the following

$$\begin{aligned}
W_e(a, t, x) = & \exp(-\alpha a)W_0 \\
& \text{if } x - U_1t < \xi,
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
W_e(a, t, x) = & \exp(-\alpha a)W_0 + \kappa\tilde{\varphi}_C \exp(C(\bar{N})\frac{x - \xi}{U_1}) \frac{[1 - \exp -\alpha a]}{\alpha} \\
& \text{if } x - U_1t > \xi.
\end{aligned}$$

The restriction  $\bar{W}_e(s)$  of  $W_e$  along a characteristic line  $t(s) = s + t_0$ ,  $x(s) = sU_1 + x_0$ , starting from a point  $(0, t_0, x_0)$  gives

$$\begin{aligned}
\bar{W}_e(s) = & \exp(-\alpha s)W_0 \\
& \text{if } x_0 - U_1t_0 < \xi,
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
\bar{W}_e(s) = & \exp(-\alpha s)W_0 + \kappa\tilde{\varphi}_C \exp(C(\bar{N}) \left[ s + \frac{x_0 - \xi}{U_1} \right]) \frac{[1 - \exp -\alpha s]}{\alpha} \\
& \text{if } x_0 - U_1t_0 > \xi.
\end{aligned}$$

Formula (53) shows that some initial values  $(0, t_0, x_0)$  will automatically drive the larvae to starvation and death : this is when  $x_0 - U_1t_0 < \xi$ . In contrast, in the complimentary subset, we may have, according to the parameters and the initial value, either initial weight loss followed by gain, or gain from the beginning. We will continue our computations under the following additional assumption

$$-\alpha W_0 + \kappa\tilde{\varphi}_C > 0 \tag{54}$$

a situation when the weight increases from the beginning in the set

$$\{(t_0, x_0) : x_0 - U_1 t_0 > \xi\}.$$

In order to compute the recruitment rate in the late larval stage, we first have to determine the set  $\mathcal{A}(t)$ . It is made up of two subsets : 1) for those points  $(a, t, x)$  for which  $x - U_1 t < \xi$ , it is defined by the condition  $\exp(-\alpha a)W_0 > w_{\min}$ . We will denote  $\mathcal{A}^{(1)}(t)$  this set. Thus, we have

$$\mathcal{A}^{(1)}(t) = \left] 0, \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{W_0}{w_{\min}}\right) \right[ \times \{(t, x) : x - U_1 t < \xi\}. \quad (55)$$

2) for the points  $(a, t, x)$  for which  $x - U_1 t > \xi$ , the condition on  $a$  is just

$$\exp(-\alpha a)W_0 + \kappa\tilde{\varphi}_C \exp\left(C(\bar{N})\frac{x - \xi}{U_1}\right) \frac{[1 - \exp -\alpha a]}{\alpha} < w^*,$$

which is equivalent to

$$a < \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{\kappa\tilde{\varphi}_C \exp\left(C(\bar{N})\frac{x - \xi}{U_1}\right) - \alpha W_0}{\kappa\tilde{\varphi}_C \exp\left(C(\bar{N})\frac{x - \xi}{U_1}\right) - \alpha w^*} \right] \equiv a^{(2)}(x). \quad (56)$$

It should be noted that formula (56) is not always defined. While condition (54) ensures that  $\kappa\tilde{\varphi}_C \exp\left(C(\bar{N})\frac{x - \xi}{U_1}\right) - \alpha W_0 > 0$ , no assumption has been made regarding the quantity  $\alpha w^*$  compared to  $\kappa\tilde{\varphi}_C$ . If  $\alpha w^* > \kappa\tilde{\varphi}_C$ , for some values of  $x$ , the inequality defining  $a^{(2)}(x)$  holds true for all  $a$ , which implies that  $a^{(2)}(x) = +\infty$ , in this case, meaning that the feeding rate is too low to allow the larva to reach the threshold  $w^*$  in finite time. So, for definiteness, we will extend  $a^{(2)}(x)$  to the set of  $x$  such that  $\kappa\tilde{\varphi}_C \exp\left(C(\bar{N})\frac{x - \xi}{U_1}\right) - \alpha w^* < 0$  by setting  $a^{(2)}(x) = +\infty$  on this set. The corresponding subset of  $\mathcal{A}(t)$ , denoted  $\mathcal{A}^{(2)}(t)$ , is defined by

$$\mathcal{A}^{(2)}(t) = \{(a, t, x) : x - U_1 t > \xi \text{ and } a < a^{(2)}(x)\} \quad (57)$$

where  $a^{(2)}(x)$  is given by formula (56) or  $a^{(2)}(x) = +\infty$ .

Finally, we have

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}^{(1)}(t) \cup \mathcal{A}^{(2)}(t)$$

from which we deduce that

$$\mathcal{A}_\sigma(t) = D$$

and

$$\Sigma(t) = \{(a^{(2)}(x), x) : x \geq U_1 t + \xi \text{ and } a^{(2)}(x) < +\infty\}$$

which yields

$$\Sigma_\sigma(t) = \{x : x \geq U_1 t + \xi\} \cap \overline{\{x : a^{(2)}(x) < +\infty\}}.$$

For  $x \in \Sigma_\sigma(t)$ , we have

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} = 0 \text{ and } \frac{\partial W_e}{\partial a} = \exp(-\alpha a) \left[ -\alpha W_0 + \kappa \tilde{\varphi}_C \exp(C(\bar{N}) \frac{x - \xi}{U_1}) \right]. \quad (58)$$

We are now ready to compute  $L_l(t, x)$  as given by formula (48). Noting first that the function  $a^*(t, x)$  has  $\mathcal{A}_\sigma^{(2)}(t)$  as a domain and is such that  $a^*(t, x) = a^{(2)}(x)$ , formula (48) reduces to

$$L_l(t, x) = \left( \left[ 1 - U_1 a^{(2)'}(x) \right] + 1_{\Sigma_\sigma(t)}(x) \frac{\frac{\partial W_e}{\partial t}}{\left| \frac{\partial W_e}{\partial a} \right|} \right) L_e(a^{(2)}(x), t, x).$$

Combining the above results, and using notably formula (58), it follows that

$$\begin{aligned} L_l(t, x) &= \left[ 1 - U_1 a^{(2)'}(x) \right] L_e(a^{(2)}(x), t, x) \\ &\quad \text{if } x > U_1 t + \xi \text{ and } a^{(2)}(x) < +\infty, \\ L_l(t, x) &= 0 \quad \text{otherwise.} \end{aligned}$$