



**HAL**  
open science

# Diffusion Brillouin stimulée dans les fibres optiques : bruit d'intensité du laser et brûlage de trou spectral dans le générateur et l'amplificateur

Lionel Stepien

► **To cite this version:**

Lionel Stepien. Diffusion Brillouin stimulée dans les fibres optiques : bruit d'intensité du laser et brûlage de trou spectral dans le générateur et l'amplificateur. Physique [physics]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2002. Français. NNT : . tel-00002296

**HAL Id: tel-00002296**

**<https://theses.hal.science/tel-00002296v1>**

Submitted on 20 Jan 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université**

DANS LA SPÉCIALITÉ : LASERS, MOLÉCULES ET RAYONNEMENT  
ATMOSPHERIQUE

présentée par

**Lionel STEPIEN**

DIFFUSION BRILLOUIN STIMULÉE DANS LES FIBRES  
OPTIQUES : BRUIT D'INTENSITÉ DU LASER ET BRÛLAGE  
DE TROU SPECTRAL DANS LE GÉNÉRATEUR ET  
L'AMPLIFICATEUR

Soutenue le 17 décembre 2002 devant le jury composé de :

Jean Michel ROBBE	Président
Andrei A. FOTIADI	Rapporteur
Carlos MONTES	Rapporteur
Daniel DOLFI	Examineur
Stéphane RANDOUX	Directeur de thèse
Jaouad ZEMMOURI	Directeur de thèse



*A ma famille.*



*“Notre force, c’est le groupe”*

Vahid Halilhodzic



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>10</b>
<b>1 Généralités sur les systèmes Brillouin à fibre</b>	<b>17</b>
1.1 La diffusion Brillouin . . . . .	18
1.1.1 La diffusion spontanée par un milieu transparent . . . . .	18
1.1.2 La diffusion Brillouin spontanée . . . . .	21
1.1.3 La diffusion Brillouin stimulée . . . . .	24
1.1.3.1 Mécanismes de la diffusion Brillouin stimulée . . . . .	24
1.1.3.2 Modélisation de la diffusion Brillouin stimulée . . . . .	25
1.2 Systèmes à diffusion Brillouin stimulée . . . . .	30
1.2.1 Le générateur Brillouin à fibre optique . . . . .	30
1.2.2 L'amplificateur Brillouin à fibre optique . . . . .	33
1.2.2.1 Description et modélisation . . . . .	33
1.2.2.2 Etats stationnaires . . . . .	34
1.2.2.3 Comportements dynamiques . . . . .	38
1.2.3 Le laser Brillouin à fibre optique . . . . .	39
1.2.3.1 Description et modélisation . . . . .	39
1.2.3.2 Solutions stationnaires et seuil d'oscillation du laser Brillouin . . . . .	41
1.2.3.3 Comportements dynamiques . . . . .	44
1.3 Etablissement du système d'équations régissant la dynamique des va- riations relatives des amplitudes des différentes ondes impliquées dans le processus de diffusion Brillouin stimulée . . . . .	46
1.3.1 Linéarisation autour des solutions stationnaires . . . . .	46
1.3.2 Système d'équations linéarisées portant sur les variations re- latives d'amplitude . . . . .	48
<b>2 Bruit d'intensité dans les lasers Brillouin à fibre optique</b>	<b>51</b>
2.1 Le bruit d'intensité . . . . .	52
2.1.1 Le bruit d'un laser . . . . .	52



2.1.2	Evaluation du bruit d'intensité . . . . .	56
2.1.2.1	Notions générales . . . . .	56
2.1.2.2	Exemples . . . . .	57
2.1.3	Sources de bruit d'intensité . . . . .	59
2.1.3.1	Sources de bruit d'intensité d'un laser conventionnel	59
2.1.3.2	Sources de bruit d'intensité du laser Brillouin à fibre optique . . . . .	61
2.1.4	Fonction de transfert . . . . .	65
2.2	Fonction de transfert des variations du coefficient de réinjection au laser . . . . .	67
2.2.1	Détermination théorique . . . . .	67
2.2.1.1	Modèle . . . . .	67
2.2.1.2	Fonction de transfert au seuil . . . . .	69
2.2.1.3	Fonction de transfert au delà du seuil . . . . .	76
2.2.2	Expérience . . . . .	80
2.2.2.1	Principe . . . . .	80
2.2.2.2	Dispositif expérimental . . . . .	80
2.2.2.3	Résultats expérimentaux . . . . .	85
2.3	Fonction de transfert des fluctuations de l'intensité du laser de pompe	87
2.3.1	Théorie . . . . .	87
2.3.1.1	Modèle . . . . .	87
2.3.1.2	Fonction de transfert au seuil . . . . .	89
2.3.1.3	Fonction de transfert au delà du seuil . . . . .	96
2.3.2	Expérience . . . . .	100
2.3.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	100
2.3.2.2	Résultats expérimentaux . . . . .	102
<b>3</b>	<b>Brûlage de trou spectral dans les générateurs et amplificateurs Brillouin à fibre</b>	<b>109</b>
3.1	Remise en cause de la nature de l'élargissement spectral de la diffusion Brillouin stimulée dans les fibres . . . . .	110
3.1.1	Elargissements homogène et inhomogène dans les systèmes atomiques . . . . .	111
3.1.2	Saturation et brûlage de trou en régimes d'élargissements ho- mogène et inhomogène . . . . .	112
3.1.3	Elargissement spectral dans les générateurs et les amplifica- teurs Brillouin à fibre . . . . .	114
3.1.4	Polémique sur la nature de l'élargissement spectral du proces- sus de diffusion Brillouin stimulée dans les fibres . . . . .	117

3.2	Origin of spectral hole burning in Brillouin fiber amplifiers and generators . . . . .	123
	<b>Conclusion</b>	<b>161</b>
	<b>Annexes</b>	<b>167</b>
<b>A</b>	<b>Rappel de quelques notions essentielles sur les systèmes linéaires invariants</b>	<b>167</b>
A.1	Signal déterministe . . . . .	167
A.2	Signal aléatoire . . . . .	168
<b>B</b>	<b>Détermination de la fréquence de la résonance des fonctions de transfert au seuil</b>	<b>171</b>
B.1	Cas de la fonction de transfert pour les variations du coefficient de réinjection . . . . .	171
B.2	Cas de la fonction de transfert pour les variations de l'amplitude du laser de pompe . . . . .	173
<b>C</b>	<b>Détermination du module des fonctions de transfert à basse fréquence</b>	<b>175</b>
C.1	Détermination de $ G_R(\nu \simeq 0) $ . . . . .	175
C.2	Détermination de $ G_P(\nu \simeq 0) $ . . . . .	178
<b>D</b>	<b>Bruit d'intensité du champ de pompe en sortie de fibre</b>	<b>181</b>
D.1	Modèle . . . . .	181
D.2	Théorie . . . . .	182
D.3	Expérience . . . . .	184
	<b>Bibliographie</b>	<b>188</b>



# Introduction

Les premières fibres optiques présentant une faible atténuation (quelques dB/km) sont apparues au début des années 1970 [Kapron et al., 1970]. Elles ont été non seulement à l'origine d'une révolution dans le domaine des télécommunications optiques, mais elles ont aussi ouvert ce nouveau domaine de recherche qu'est l'optique non linéaire guidée. En effet, la densité de puissance confinée dans une fibre peut être suffisamment importante pour que la réponse du milieu au champ électromagnétique ne soit plus linéaire. Ceci a permis d'observer de nouveaux phénomènes comme par exemple les solitons optiques [Mollenauer et al., 1980] ou les processus de diffusions Raman et Brillouin stimulées [Stolen et al., 1972] [Ippen et Stolen, 1972]. C'est à ce dernier processus que nous allons nous intéresser dans cette thèse. A partir de celui-ci, on peut réaliser trois types de sources de rayonnement cohérent : le générateur, l'amplificateur et le laser Brillouin.

Deux études seront exposées dans cette thèse. La première porte sur le bruit d'intensité du laser Brillouin à fibre. La seconde traite du brûlage de trou spectral dans le générateur et l'amplificateur Brillouin à fibre.

Le bruit d'intensité d'un laser est extrêmement faible devant celui d'une source de lumière classique. L'amplitude et la phase de cette dernière fluctuent énormément, ce qui reflète le caractère aléatoire de la génération des ondes. Ceci n'est pas le cas des sources de lumière cohérente, et en particulier du laser. C'est en effet une source dont l'intensité et la phase sont les moins fluctuantes. Grâce à ces propriétés, les lasers ont des applications dans de nombreux domaines tels que la spectroscopie, le stockage d'informations, la chirurgie, l'interférométrie, l'holographie ou la transmission de données. De récentes études ont montré que le laser Brillouin à fibre possède un bruit de phase extrêmement faible. Comme c'est aussi une source fibrée facilement intégrable, il est couramment employé pour la réalisation de capteurs "tout fibre" tels que les gyroscopes. Le bruit de phase d'un laser Brillouin étant très faible, il est raisonnable de penser que celui-ci est susceptible de posséder un faible bruit d'intensité. Si cela était le cas, le laser Brillouin s'avèrerait être très utile pour des applications telles que les télécommunications optiques par exemple. C'est pourquoi nous nous proposons de réaliser dans le cadre de cette thèse la toute première étude

du bruit d'intensité du laser Brillouin.

La seconde partie de cette thèse est consacrée à l'étude des mécanismes conduisant à l'apparition du brûlage de trou spectral dans le générateur et l'amplificateur Brillouin à fibre. Cette étude s'inscrit dans un contexte précis. En 2000, l'observation expérimentale du brûlage de trou spectral dans le spectre des fluctuations de l'intensité d'un générateur Brillouin a donné lieu à une vive polémique. En effet, le brûlage de trou étant généralement la preuve d'un élargissement spectral inhomogène, les auteurs de l'expérience l'ont interprété comme tel, même si l'élargissement spectral du processus de diffusion Brillouin stimulée était jusqu'alors supposé de nature homogène. De plus, toujours selon ces auteurs, cet élargissement inhomogène proviendrait de la capacité de la fibre monomode à guider des vecteurs d'onde inclinés par rapport à l'axe de propagation. Ceci remettait en cause l'un des fondements de l'optique non linéaire guidée où l'on suppose que l'interaction longitudinale entre les ondes selon l'axe de la fibre est découplée de la distribution monomode transverse, moyennant un recouvrement des profils des modes, ce qui se traduit par un modèle unidimensionnel. Toutefois cette interprétation du brûlage de trou n'a pas été partagée par tous. En effet, des simulations numériques ont reproduit le brûlage de trou en supposant l'élargissement spectral de nature homogène. Par ailleurs, la présence d'un brûlage de trou a aussi été obtenue dans la bande de gain de l'amplificateur Brillouin mais restait mal expliquée. Une grande confusion régnait donc quant à la nature de l'élargissement spectral du processus de diffusion Brillouin stimulée. Elle provient d'une méconnaissance de l'origine du phénomène de brûlage de trou. Nous nous attacherons donc à la déterminer aussi bien dans les amplificateurs que dans les générateurs Brillouin à fibre.

Dans le premier chapitre, nous rappellerons tout d'abord quelques notions sur le processus de diffusion Brillouin stimulée dans les fibres optiques. Nous présenterons ensuite les caractéristiques générales des générateurs, des amplificateurs et des lasers Brillouin à fibre. Nous dériverons enfin un système d'équations linéarisées régissant la dynamique des variations relatives des amplitudes des champs. Celui-ci sera à la base des études théoriques menées dans les deux chapitres suivants. Il permettra en particulier de déterminer des fonctions de transfert caractérisant la réponse linéaire du laser et de l'amplificateur Brillouin à de faibles modulations d'amplitude se produisant autour des solutions stationnaires.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de bruit d'intensité du laser Brillouin. Nous commencerons par exposer la démarche permettant de caractériser le bruit d'intensité d'un laser. Après avoir déterminé quelles sont les sources de bruit prédominantes dans le laser Brillouin, nous étudierons leur impact sur le bruit d'intensité de celui-ci. L'influence de chaque source sera évaluée au moyen d'une fonction de

transfert. Chacune d'elles sera étudiée de manière théorique puis les résultats seront confrontés à l'expérience.

L'étude du brûlage de trou spectral apparaissant dans le générateur et l'amplificateur Brillouin à fibre sera présentée dans le chapitre 3. Nous resituerons tout d'abord le contexte dans lequel notre travail a été effectué. Puis, au travers d'une publication parue dans *Physical Review A*, nous exposerons notre travail théorique réalisé en supposant que l'élargissement spectral du processus de diffusion Brillouin stimulée est de nature homogène. Nous expliquerons alors entre autres quelle est l'origine de l'apparition du brûlage de trou spectral.



# CHAPITRE 1





# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes Brillouin à fibre

### Introduction

Ce premier chapitre commencera par un rappel sur les notions générales concernant la diffusion Brillouin. Nous évoquerons les principes de base des diffusions spontanée et stimulée. Les étapes conduisant au modèle cohérent à trois ondes seront brièvement exposées. Nous présenterons ensuite les caractéristiques générales des trois systèmes Brillouin à fibre à savoir le générateur, l'amplificateur et le laser. La modélisation de ceux-ci diffère au niveau des conditions aux bords, ce qui entraîne des comportements dynamiques très différents. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'élaboration d'un modèle décrivant l'évolution des variations relatives de l'amplitude des champs mis en jeu lors de la diffusion Brillouin stimulée. Il est obtenu à partir du modèle cohérent à trois ondes et sera à la base des études théoriques exposées au cours des chapitres suivants.

## 1.1 La diffusion Brillouin

Il existe de nombreux phénomènes physiques qui entraînent une diffusion de la lumière. L'effet Brillouin est de ceux-ci. Il consiste en l'interaction entre deux ondes optiques et une onde acoustique. L'objet de cette première partie de chapitre est de présenter les notions de base relatives à la diffusion Brillouin et d'exposer les étapes permettant d'obtenir le système d'équations usuellement employé pour la modéliser.

### 1.1.1 La diffusion spontanée par un milieu transparent

La diffusion est un phénomène que l'on observe tous les jours sans que l'on y prête attention. Par exemple, c'est elle qui donne au ciel de la Terre sa couleur bleue [Lewis, 1995]. En effet, lorsque les rayons du soleil pénètrent dans l'atmosphère terrestre, ils rencontrent une couche de gaz qui diffuse une partie de la lumière dans toutes les directions. La couleur du ciel provient alors de la longueur d'onde de la lumière la plus diffusée. De manière générale, lorsqu'un rayonnement de fréquence  $\nu_0$  se propage dans un milieu diélectrique transparent sujet à des fluctuations, on observe qu'une partie de la lumière est diffusée dans toutes les directions de l'espace [Boyd, 1992] (Figure 1.1).

Lorsque la fréquence  $\nu$  de la radiation diffusée est la même que la fréquence de la radiation incidente  $\nu_0$ , la diffusion est élastique (Figure 1.2). L'efficacité de la diffusion élastique dépend fortement de l'écart entre la fréquence du rayonnement incident  $\nu_0$  et la fréquence de la transition  $\nu_a$  du milieu atomique considéré [Grynberg et al., 1997]. Cependant, la fréquence  $\nu$  de la radiation diffusée peut être différente de la fréquence de la radiation incidente  $\nu_0$ . La diffusion est alors inélastique.

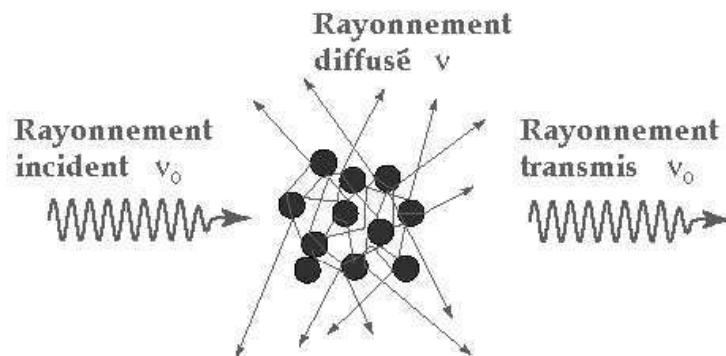


FIG. 1.1 – Diffusion de la lumière. Un rayonnement incident de fréquence  $\nu_0$  se propage dans un milieu transparent. Une partie de la lumière est diffusée à la fréquence  $\nu$ .

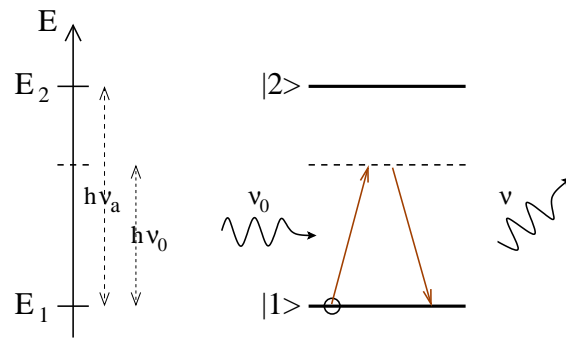


FIG. 1.2 – *Processus de diffusion élastique :  $\nu = \nu_0$ . La fréquence du rayonnement diffusé  $\nu$  est la même que celle du faisceau incident  $\nu_0$ .*

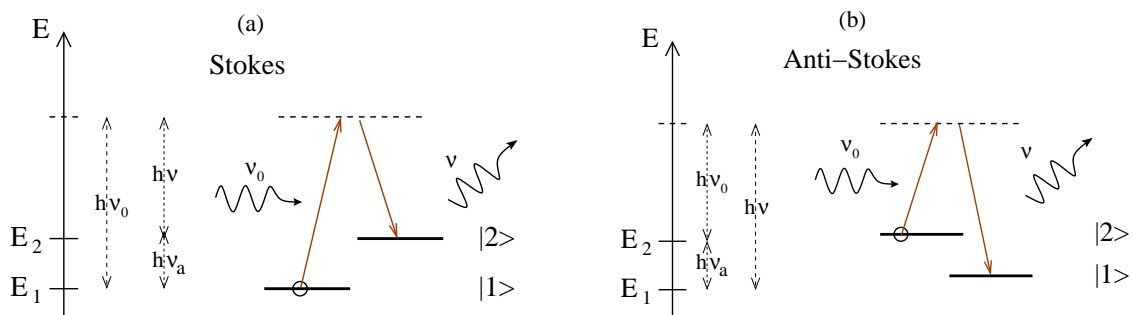


FIG. 1.3 – *Processus de diffusion inélastique Stokes (a) et anti-Stokes (b) : un rayonnement de fréquence  $\nu_0$  est diffusé à la fréquence  $\nu$ .*

### Spectre de diffusion d'une lumière monochromatique

Quand un faisceau de lumière monochromatique traverse un milieu moléculaire transparent, une partie du rayonnement est diffusée. La lumière diffusée possède un spectre qui se présente généralement comme celui schématisé sur la figure 1.4. Lorsque la fréquence de l'onde incidente  $\nu_0$  est supérieure (resp. inférieure) à celle de l'onde diffusée, cette dernière est alors appelée onde Stokes (resp. onde anti-Stokes) (Fig.1.3-a et Fig.1.3-b). Il existe quatre types de diffusion : la diffusion Rayleigh, la diffusion Rayleigh d'aile, la diffusion Raman et la diffusion Brillouin. Elles se démarquent entre elles par la valeur du décalage en fréquence entre le faisceau incident et le faisceau diffusé, par la largeur spectrale occupée par celui-ci (liée au temps de relaxation du milieu diffusant), ainsi que par leur efficacité. Les valeurs de ces caractéristiques sont regroupées dans le tableau 1.1.

La diffusion Rayleigh est dite quasi-élastique car la fréquence du rayonnement diffusé est pratiquement la même que celle du rayonnement incident. Elle est générée

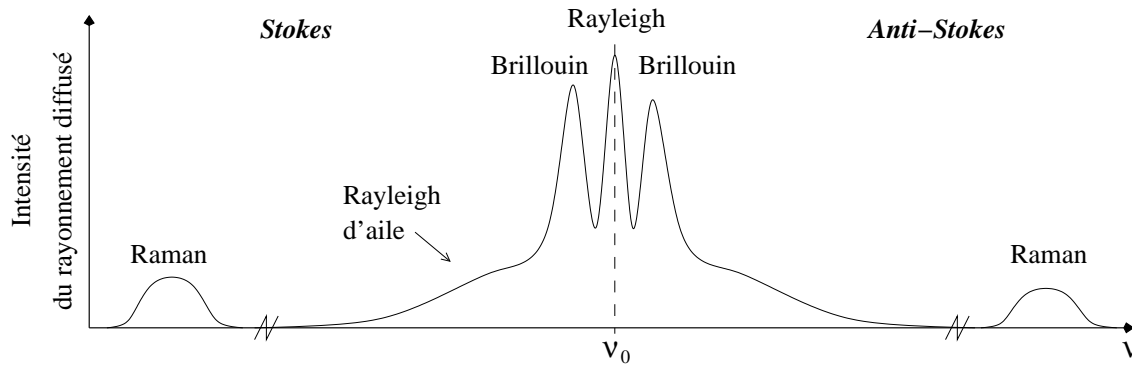


FIG. 1.4 – Spectre d'un rayonnement diffusé par un milieu moléculaire transparent.

par des fluctuations localisées de densité du milieu. Ces variations sont décrites sous forme de fluctuations d'entropie.

La diffusion Rayleigh d'aile provient des fluctuations dans l'orientation des molécules du milieu. Elle se distingue par une largeur spectrale très importante. Cela est dû au fait que le processus de réorientation des molécules d'un milieu dense est très rapide.

De tous ces processus, la diffusion Raman est celle qui produit le décalage spectral le plus important. Il est de l'ordre de 20 THz. Cette diffusion est très utilisée, en particulier en spectroscopie moléculaire, car elle provient de l'interaction de la lumière avec les modes de vibration des molécules du milieu diffusant. Le concept de phonon optique est utilisé pour caractériser le processus de diffusion Raman [Boyd, 1992].

La variation d'indice due aux différences de pression engendrées par une onde acoustique se propageant dans un milieu entraîne aussi une diffusion de la lumière. Cette diffusion est appelée diffusion Brillouin [Brillouin, 1922]. C'est de cette diffusion dont nous allons discuter tout au long de ce mémoire.

Processus de diffusion	Décalage en fréquence (GHz)	Temps de relaxation (sec)	Largeur de raie (GHz)	Section efficace ( $\text{cm}^{-1}$ )	gain (m/W)
Raman	20000	$10^{-12}$	150	$10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-11}$
Brillouin	15	$10^{-9}$	$150 \cdot 10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-10}$
Rayleigh	0	$10^{-8}$	$150 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$10^{-12}$
Rayleigh d'aile	0	$10^{-12}$	150	$10^{-6}$	$10^{-11}$

TAB. 1.1 – Ordre de grandeur de paramètres caractérisant les processus de diffusion dans les milieux moléculaires denses (d'après [Boyd, 1992]).

### 1.1.2 La diffusion Brillouin spontanée

Lors d'un processus de diffusion Brillouin, une partie d'une onde incidente est diffusée de façon inélastique par une onde acoustique. La différence de fréquence entre l'onde incidente et l'onde diffusée est égale à la fréquence  $\nu_a$  de cette onde matérielle. Celle-ci engendre un réseau d'indice dont le pas correspond à la longueur d'onde  $\lambda_a$  de l'onde acoustique. Pour se représenter schématiquement la diffusion par une onde matérielle, on considère qu'à chaque fois qu'un faisceau incident rencontre un front d'onde du réseau, une partie du faisceau est diffusée comme l'illustre la figure 1.5. Tous les faisceaux diffusés interfèrent de façon constructive lorsqu'un accord de phase est vérifié. Le réseau d'indice est mobile du fait du déplacement de l'onde acoustique. L'effet Doppler va donc entraîner un décalage en fréquence entre l'onde incidente et l'onde diffusée. Lorsqu'une onde acoustique se propage dans le même sens (resp. dans le sens opposé) que l'onde incidente, un champ Stokes (resp. anti-Stokes) de fréquence inférieure (resp. supérieure) au champ de pompe est obtenu. De plus, l'intensité du champ électromagnétique généré par diffusion Brillouin est d'autant plus importante que l'intensité de l'onde acoustique sera grande.

Une approche quantique nous permet de compléter la description qualitative de la diffusion Brillouin. On considère alors qu'une interaction s'effectue entre un phonon acoustique, un photon de pompe et un photon Stokes (si création d'un phonon acoustique) ou anti-Stokes (si annihilation d'un phonon acoustique). L'efficacité de la diffusion anti-Stokes est beaucoup plus faible que celle de la diffusion Stokes [Hill et al., 1976a]. Cela peut s'expliquer par le peuplement des niveaux d'énergie mis en jeu lors de la transition d'un photon Stokes ou anti-Stokes [Yariv, 1989]. Une autre raison vient du fait que le réservoir de phonons acoustiques se vide au cours du processus de diffusion anti-Stokes. Ce dépeuplement limite très fortement l'efficacité

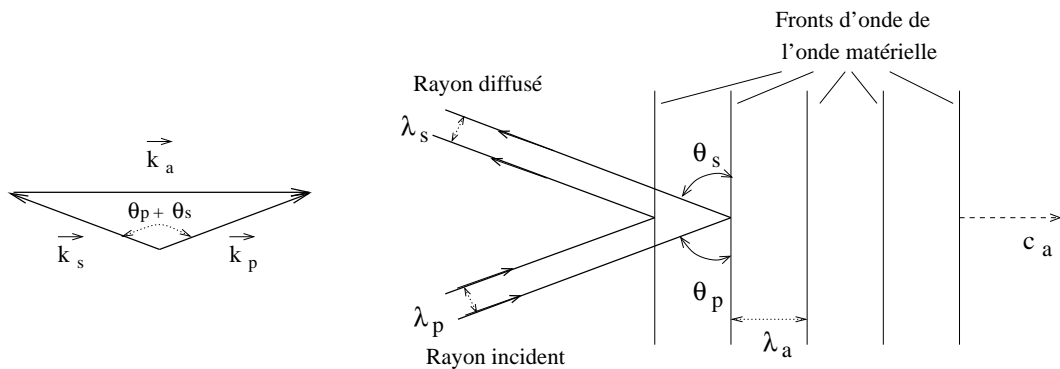


FIG. 1.5 – Représentation schématique de la diffusion par une onde matérielle progressive (type Stokes).

du processus. La diffusion anti-Stokes sera négligée dans le cadre de ce mémoire, et nous n'y ferons plus allusion par la suite.

La diffusion Brillouin est soumise aux lois de conservation de l'énergie et de l'adaptation des vitesses de phase qui s'écrivent :

$$\nu_s = \nu_p - \nu_a \quad (1.1a)$$

$$\vec{k}_s = \vec{k}_p - \vec{k}_a \quad (1.1b)$$

où  $\vec{k}_i$  et  $\nu_i$  ( $i = p, s, a$ ) sont respectivement les vecteurs d'onde et les fréquences de l'onde de pompe, de l'onde Stokes et de l'onde acoustique. Sur la figure 1.6 est représenté le schéma reliant les vecteurs d'onde  $\vec{k}_a$ ,  $\vec{k}_p$  et  $\vec{k}_s$  pour un angle de diffusion  $\theta$  quelconque. Chaque onde vérifie de plus une relation de dispersion :

$$|\vec{k}_a| = \frac{2\pi\nu_a}{c_a}; \quad |\vec{k}_p| = \frac{2\pi n\nu_p}{c}; \quad |\vec{k}_s| = \frac{2\pi n\nu_s}{c} \quad (1.2)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide,  $c_a$  est la vitesse de propagation de l'onde acoustique dans le milieu d'indice  $n$ . Comme la fréquence de l'onde acoustique est très faible devant celles des ondes optiques, les modules de  $\vec{k}_p$  et  $\vec{k}_s$  possèdent des valeurs très voisines.

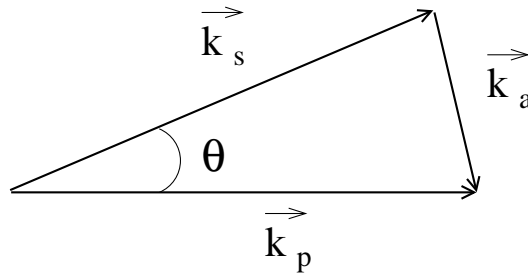


FIG. 1.6 – Représentation des vecteurs d'onde lors d'un processus de diffusion Stokes.

Pour un angle de diffusion  $\theta$  quelconque, la relation entre les modules des trois vecteurs d'onde s'écrit

$$|\vec{k}_a|^2 = |\vec{k}_p|^2 + |\vec{k}_s|^2 - 2|\vec{k}_p||\vec{k}_s| \cos \theta \quad (1.3)$$

La fréquence de l'onde acoustique peut alors être déduite grâce aux relations de dispersion (1.2) [Boyd, 1992] :

$$\nu_a \simeq 2\nu_p \frac{nc_s}{c_a} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.4)$$

## La diffusion Brillouin dans les fibres optiques

Dans une fibre optique monomode, l'onde Stokes rétrodiffusée se propage dans le sens opposé à l'onde de pompe et à l'onde matérielle. Cette contrainte conduit à une relation simple entre les vecteurs d'ondes :  $|\vec{k}_a|^2 = |\vec{k}_p|^2 + |\vec{k}_s|^2$  (Fig. 1.7).

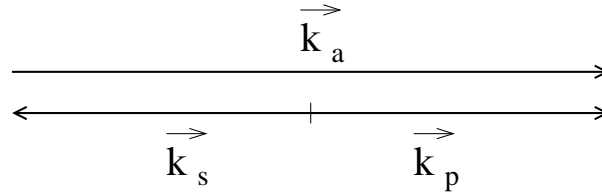


FIG. 1.7 – Représentation des vecteurs d'onde lors d'un processus de diffusion Stokes dans une fibre optique ( $\theta = \pi$ ).

Nous allons maintenant nous intéresser aux ordres de grandeur caractéristiques du processus de diffusion Brillouin dans les fibres. Considérons un champ incident de longueur d'onde égale à 800 nm ( $\nu_p = 375$  THz) injecté dans une fibre optique en silice d'indice  $n$  égal à environ 1.45. Les ondes acoustiques qui se propagent dans un tel milieu ont une vitesse d'environ 6 km/s [Agrawal, 2001b]. Le champ Stokes rétrodiffusé par la fibre est décalé de 21 GHz par rapport à la fréquence de l'onde de pompe (Fig. 1.8). Ce décalage, correspondant à la fréquence de l'onde acoustique, dépend de la fréquence de l'onde incidente ainsi que de l'indice de la fibre (voir relation (1.4)). Remarquons que le rayonnement Stokes rétrodiffusé s'étale sur une plage spectrale qui est souvent appelée la bande de diffusion Brillouin. La largeur à mi-hauteur de celle-ci est notée  $\Delta\nu_B$ . Que l'élargissement de la bande de diffusion soit de nature homogène ou inhomogène (sujet dont nous discuterons dans le troisième chapitre),  $\Delta\nu_B$  est de quelques dizaines de MHz pour les fibres optiques. Si l'élargissement est supposé de nature homogène,  $\Delta\nu_B$  est directement reliée à la

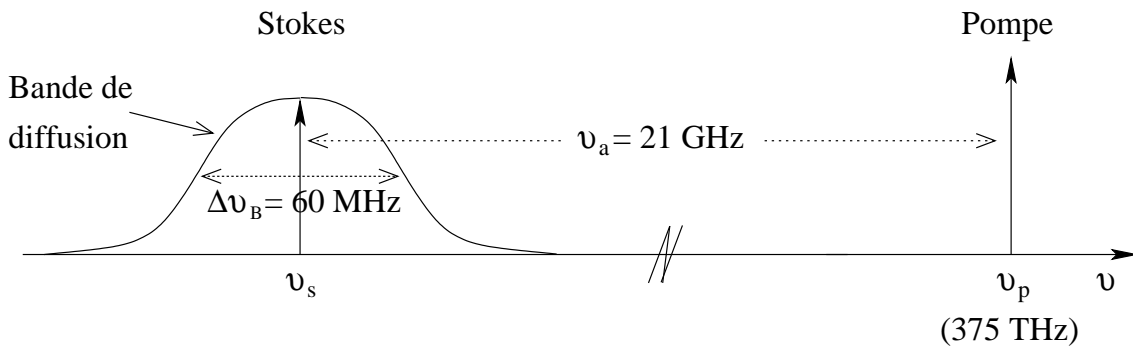


FIG. 1.8 – Diffusion Brillouin dans une fibre optique en silice (longueur d'onde de la pompe : 800 nm) : représentation schématique des champs optiques impliqués et valeurs des fréquences mises en jeu.



durée de vie  $\tau$  des phonons acoustiques dans le matériau par la relation  $\tau = 1/(\pi\Delta\nu_B)$ . Cette durée, caractéristique de l'amortissement de l'onde matérielle, est de l'ordre de 10 ns [Agrawal, 2001*b*]. En fait,  $\Delta\nu_B$  dépend de la longueur d'onde du champ de pompe [Heiman et al., 1979] ainsi que de la composition du milieu [Shibata et al., 1987]. La valeur exacte de  $\Delta\nu_B$  est spécifique à chaque fibre optique et aucune règle exacte ne permet de la calculer précisément. Tout comme de nombreux auteurs ([Yu et al., 1995], [Picholle, 1991]), nous l'avons déterminée en recherchant la meilleure adéquation possible entre les résultats numériques et expérimentaux. Au chapitre 2, nous étudierons un laser Brillouin à fibre pompé à 800 nm. La valeur de  $\Delta\nu_B$  retenue pour décrire ce système est de 60 MHz [Randoux, 1995]. Au chapitre 3, la longueur d'onde de pompe choisie pour notre étude est de 1550 nm et la valeur de  $\Delta\nu_B$  est alors estimée à 20 MHz [Niklès et al., 1997].

### 1.1.3 La diffusion Brillouin stimulée

#### 1.1.3.1 Mécanismes de la diffusion Brillouin stimulée

Lorsque l'intensité du faisceau de pompe devient importante, les variations d'indice du milieu sont induites par les ondes optiques et le processus de diffusion Brillouin devient stimulé. Schématiquement, le milieu va réagir au battement des ondes optiques par l'intermédiaire de l'électrostriction (Figure 1.9). Quand un champ électromagnétique est appliqué à un milieu, la matière migre grâce à l'électrostriction vers les régions où le champ électromagnétique est le plus intense. Ainsi l'interaction entre l'onde de pompe et l'onde Stokes, engendrant un battement à la fréquence  $\nu_a$ , va générer grâce à l'électrostriction une onde matérielle de fréquence  $\nu_a$ . Une variation de densité du milieu entraînant une variation d'indice, une modulation d'indice du milieu à la fréquence  $\nu_a$  est créée. Ce réseau d'indice mobile va pouvoir rétrodiffuser un champ Stokes. Ce dernier va renforcer le battement existant qui va à son tour pouvoir rétrodiffuser un champ Stokes plus important qui va lui même renforcer le battement qui va... En régime de diffusion spontanée, lorsqu'une onde se propage dans une fibre optique, seul une très faible partie de son énergie est rétrodiffusée par effet Brillouin (la section efficace différentielle de diffusion par unité d'angle solide est de l'ordre de  $10^{-6}cm^{-1}$ ). Cet effet de diffusion est donc très faible. Mais lorsque l'intensité de l'onde incidente devient très forte, le régime de diffusion Brillouin stimulée est atteint et l'efficacité de conversion du rayonnement de pompe en rayonnement Stokes peut ainsi atteindre plusieurs dizaines de pourcent.

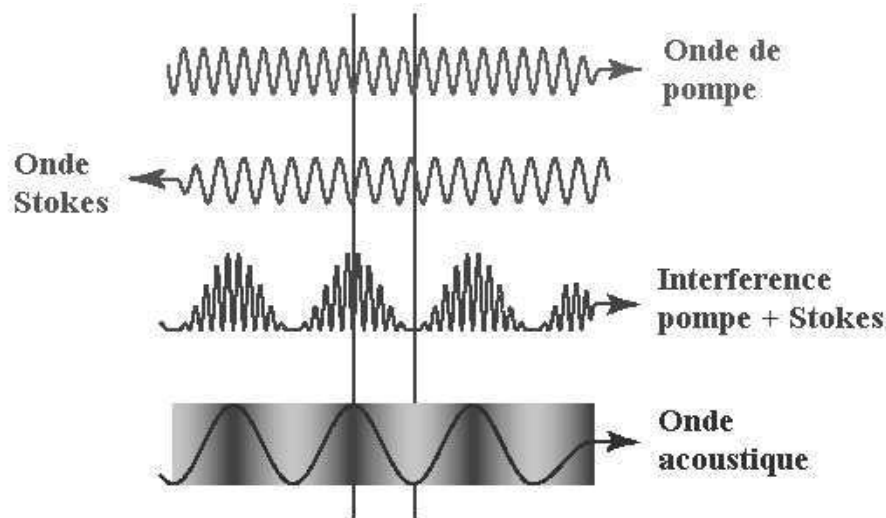


FIG. 1.9 – Interaction de l'onde de pompe avec l'onde Stokes donnant lieu à un battement à la fréquence de l'onde acoustique. Une onde de matière à la fréquence du battement est générée grâce à l'électrostriction.

### 1.1.3.2 Modélisation de la diffusion Brillouin stimulée

Dans un processus de diffusion Brillouin stimulée, trois ondes interagissent par électrostriction : deux ondes électromagnétiques (l'onde de pompe et l'onde Stokes) et une onde matérielle (onde acoustique). Le but de cette partie de chapitre est de modéliser l'interaction de ces trois ondes pour aboutir au système d'équations usuellement employé pour décrire la diffusion Brillouin stimulée : le modèle cohérent à trois ondes. L'établissement de celui-ci est entièrement détaillé dans le mémoire de thèse de Stéphane Randoux [Randoux, 1995]. Seules les principales étapes permettant l'établissement et la compréhension seront exposées dans la suite de cette partie. Nous élaborerons tout d'abord une équation capable de rendre compte du comportement des champs électromagnétiques dans une fibre optique. Puis nous établirons l'équation gouvernant l'évolution de l'onde matérielle soumise à une force électrostrictive. Nous aboutirons enfin au modèle cohérent à trois ondes sous sa forme normalisée.

#### Equation d'évolution des ondes électromagnétiques

L'évolution d'un champ électromagnétique  $\vec{E}$  traversant un milieu diélectrique est décrite par les équations de Maxwell. La fibre optique est un milieu diélectrique libre de toute charge et de tout courant. Si la diffusion Brillouin stimulée est le seul effet non linéaire se manifestant dans le cœur de la fibre d'indice  $n$ , l'équation

décrivant la propagation du champ électromagnétique total s'écrit :

$$\Delta \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{P_{DBS}}}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide.  $\overrightarrow{P_{DBS}}$  représente la polarisation non linéaire liée à l'effet Brillouin. Cette dernière est proportionnelle aux faibles variations  $\delta\rho(t)$  de masse volumique de la silice. Ces variations  $\delta\rho$  entraînent de faibles variations de la permittivité diélectrique  $\delta\epsilon$ . Si  $\delta\rho$  est suffisamment faible pour que  $\delta\epsilon$  lui reste proportionnel, on peut écrire que

$$\delta\epsilon = \left( \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \right)_T \delta\rho \quad (1.6)$$

où T est la température supposée constante de la fibre. La polarisation  $\overrightarrow{P_{DBS}}$  s'écrit alors

$$\overrightarrow{P_{DBS}} = \epsilon_0 \left( \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \right)_T \delta\rho \vec{E} \quad (1.7)$$

L'équation décrivant la propagation du champ électromagnétique  $\vec{E}$  dans une fibre optique où la seule non linéarité est la diffusion Brillouin stimulée s'écrit finalement :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \epsilon_0 \mu_0 \left( \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \right)_T \frac{\partial^2 \delta\rho \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.8)$$

Remarquons que nous n'avons pas pris en compte l'effet Kerr. Toutefois, ce dernier est un phénomène non négligeable lorsque la longueur de la fibre et les intensités des champs sont très importantes.

### Equation d'évolution de l'onde matérielle

Si la propagation de l'onde matérielle dans la fibre n'entraîne que des déplacements de matière d'amplitude faible, on peut supposer que la réponse de la silice aux contraintes est de nature élastique. Le milieu est donc assimilable à un fluide visqueux et compressible. L'évolution des déplacements de matière est alors décrite par l'équation fondamentale de la dynamique des fluides [Landau et Lifchitz, 1971]

$$\rho(\vec{r}, t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, t) - \overrightarrow{grad} \mathcal{P}(\vec{r}, t) + \eta \nabla^2 \vec{v} - \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \overrightarrow{grad}(\text{div } \vec{v}) \quad (1.9)$$

où  $\rho$  est la densité de matière.  $\vec{v}$  représente la vitesse d'un élément infinitésimal de matière repéré par la position  $\vec{r}$ .  $\zeta$  et  $\eta$  sont respectivement les coefficients de viscosité et de cisaillement de Navier.  $\mathcal{P}(\vec{r}, t)$  est la pression locale interne.

$\vec{F}(\vec{r}, t)$  est la force électrostrictive s'appliquant à chaque élément de matière. Elle est proportionnelle au gradient de l'intensité du champ électromagnétique de telle sorte que [Lorrain et Corson, 1979]

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \overrightarrow{grad} (E^2(\vec{r}, t)) \quad (1.10)$$

Par ailleurs, les déplacements de matière induisent des variations de la densité locale. Le flux de matière entrant dans un élément de volume étant égal au flux de matière sortant, l'équation de conservation de matière peut s'écrire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\rho \vec{v}) \quad (1.11)$$

De plus, la pression locale interne  $\mathcal{P}(\vec{r}, t)$  développée autour de sa valeur moyenne  $P_0$  au premier ordre par rapport aux variations de densité  $\delta\rho(t)$  s'écrit [Feynman et al., 1994]

$$\mathcal{P}(\vec{r}, t) = \mathcal{P}_0 + c_a^2 \delta\rho(t) \quad (1.12)$$

où  $c_a$  est la vitesse de propagation de l'onde acoustique dans le milieu. Nous allons considérer que les variations transverses de densité sont négligeables par rapport à celles qui se produisent suivant l'axe de propagation  $\left( \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial z^2} \right)$ . Lorsque le milieu est une fibre optique monomode, ceci correspond au fait que seules les ondes possédant un vecteur d'onde collinéaire à l'axe de symétrie du guide se propagent. On suppose donc qu'il n'existe qu'une seule relation possible entre les vecteurs d'ondes des champs mis en jeu dans le processus de diffusion Brillouin stimulée. En supposant que le profil transverse des champs électromagnétiques n'évolue pas, l'équation qui décrit l'évolution de l'onde matérielle s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \delta\rho(z, t)}{\partial t^2} - \frac{3\zeta + 4\eta}{3\rho_0} \frac{\partial^3 \delta\rho(z, t)}{\partial t \partial z^2} - c_a^2 \frac{\partial^2 \delta\rho(z, t)}{\partial z^2} = -\frac{\epsilon_0 \rho_0}{2} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \frac{\partial^2 E^2(z, t)}{\partial z^2} + \tilde{f}(z, t) \quad (1.13)$$

où  $\rho_0$  représente la densité du matériau non perturbé et  $\tilde{f}(z, t)$  est un terme de bruit introduit phénoménologiquement. Ce dernier caractérise les fluctuations de densité du milieu se produisant à l'équilibre thermique. C'est donc un terme décrivant non seulement la diffusion Brillouin spontanée mais servant aussi d'initiateur à la diffusion Brillouin stimulée. Gaeta et Boyd ont montré que ce bruit était réparti sur toute la longueur de la fibre [Gaeta et Boyd, 1991].

### Modèle cohérent à trois ondes

L'équation d'évolution de l'onde matérielle (Eq. 1.13) et l'équation d'évolution de l'onde électromagnétique (Eq. 1.8) données précédemment vont nous permettre d'obtenir un modèle décrivant la diffusion Brillouin stimulée. Celui-ci est restreint au cadre où seule une onde Stokes est générée. De plus, nous allons considérer que la polarisation des champs est maintenue tout le long de la fibre. Ainsi les champs peuvent être caractérisés par des grandeurs scalaires. Cela signifie qu'une fibre à maintien de polarisation est employée et que la direction de polarisation des champs reste parallèle à une de ses lignes neutres. On considère en outre que chaque onde est constituée d'une porteuse de haute fréquence modulée par une enveloppe de spectre étroit. Le champ électromagnétique total est composé d'un champ de pompe, d'un champ Stokes, et s'écrit :

$$E(z, t) = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_p(z, t)e^{i(\omega_p t - k_p z)} + \mathcal{E}_s(z, t)e^{i(\omega_s t + k_s z)} + C.C.) \quad (1.14)$$

L'onde acoustique caractérisant les variations de densité s'écrit

$$\rho'(z, t) = \frac{1}{2} (\mathcal{B}(z, t)e^{i(\omega_a t - k_a z)} + C.C.) \quad (1.15)$$

où  $\omega_j = 2\pi\nu_j$  (j=p,s,a).  $\mathcal{E}_p$ ,  $\mathcal{E}_s$  et  $\mathcal{B}$  sont respectivement les enveloppes complexes des ondes de pompe, Stokes et acoustique. Les deux expressions (1.14) et (1.15) sont introduites dans les équations de propagation (1.13) et (1.8). Puis l'approximation des enveloppes lentement variables est effectuée. Elle consiste à considérer que l'enveloppe du champ varie peu pendant une période relative aux oscillations rapides de la porteuse. En utilisant la normalisation explicitée dans le mémoire de thèse de Stéphane Randoux [Randoux, 1995] et reportée dans le tableau 1.2, on obtient finalement un modèle dit modèle cohérent à trois ondes qui s'écrit :

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \zeta} = -gB\varepsilon_s \quad (1.16a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \zeta} = gB^*\varepsilon_p \quad (1.16b)$$

$$\frac{1}{\beta_a} \frac{\partial B}{\partial \tau} + B = \varepsilon_s^* \varepsilon_p + f(\tau, \zeta) \quad (1.16c)$$

où  $\varepsilon_p$ ,  $\varepsilon_s$  et  $B$  sont respectivement les amplitudes complexes des ondes pompe, Stokes et acoustique. Les amplitudes des champs optiques sont normalisées par rapport à la valeur maximale du champ de pompe  $E_0$  injecté à l'extrémité d'entrée de la fibre.

Les variables de temps et d'espace sont normalisées de la manière suivante :

$$\tau = \frac{c}{nL} \cdot t \quad (1.17a)$$

$$\zeta = \frac{z}{L} \quad (1.17b)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière,  $n$  est l'indice de la fibre de longueur  $L$ . Le temps est donc normalisé par rapport au temps de transit des photons dans la fibre.  $\beta_a = \pi \Delta \nu_B \frac{nL}{c}$  est le taux d'amortissement normalisé de l'onde acoustique.  $g$  représente le gain Brillouin normalisé. Une représentation schématique des différentes ondes présentes dans le modèle cohérent est donnée sur la figure 1.10.

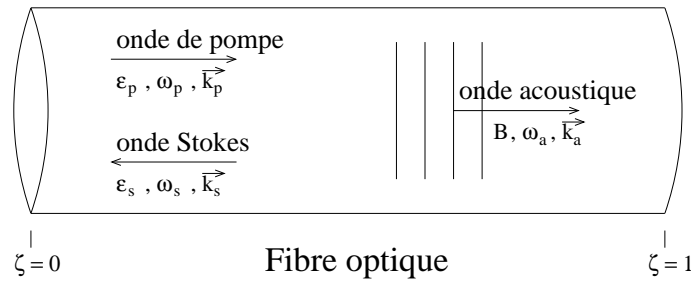


FIG. 1.10 – Représentation schématique des ondes impliquées dans le processus de la diffusion Brillouin stimulée dans une fibre optique.

Le modèle cohérent est usuellement employé pour rendre compte des propriétés des systèmes à fibre fonctionnant à partir du processus de diffusion Brillouin stimulée. Il en existe trois types : le générateur, l'amplificateur et le laser. Les principales propriétés de ces trois systèmes sont rappelées dans la prochaine partie de ce chapitre.

Amplitude du champ acoustique normalisée $B$ :	$B = \frac{-i\gamma_a}{ E_0 ^2 V_3} \rho$
Constante de couplage Brillouin normalisée $g$ :	$g = \frac{V_1 V_3 n L}{\gamma_a c}  E_0 ^2$
Taux d'amortissement de l'onde acoustique $\gamma_a$ :	$\gamma_a = \frac{3\zeta + 4\eta}{6\rho_0} \frac{\omega_a^2}{c_a^2}$
Constante de couplage $V_1$ :	$V_1 = \frac{\omega_p}{2n^2} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T$
Constante de couplage $V_3$ :	$V_3 = \rho_0 \epsilon_0 \frac{\omega_a}{4c_a^2} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T$

TAB. 1.2 – Termes utilisés dans la normalisation qui permet d'aboutir au modèle cohérent à trois ondes (d'après [Randoux, 1995]).

## 1.2 Systèmes à diffusion Brillouin stimulée

Le but de cette partie est de présenter les trois types de systèmes Brillouin à fibre, à savoir le générateur, l'amplificateur et le laser. Ceux-ci diffèrent essentiellement de par les conditions de bords [Boyd, 1992]. Nous aborderons tout d'abord le cas du générateur Brillouin. Nous discuterons ensuite des caractéristiques de base de l'amplificateur Brillouin. Nous terminerons enfin par une description des propriétés fondamentales du laser Brillouin.

### 1.2.1 Le générateur Brillouin à fibre optique

Dans un générateur Brillouin, une unique onde de pompe d'intensité  $I_p(0)$  est injectée dans la fibre optique (cf. Fig. 1.11). L'intensité moyenne  $I_s(0)$  de l'onde Stokes rétrodiffusée dépend bien évidemment de  $I_p(0)$ . Contrairement au cas de l'amplificateur que nous étudierons par la suite, le générateur est un système intrinsèquement bruyant dont le comportement est gouverné par le terme  $f(\zeta, \tau)$  représentatif des fluctuations thermiques de densité de la fibre. Sa dynamique de nature stochastique est décrite par le modèle cohérent à trois ondes auquel il est nécessaire de n'adjoindre qu'une condition de bord portant sur l'amplitude du champ de pompe en  $\zeta = 0$  :

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \zeta} = -gB\varepsilon_s \quad (1.18a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \zeta} = gB^*\varepsilon_p \quad (1.18b)$$

$$\frac{1}{\beta_a} \frac{\partial B}{\partial \tau} + B = \varepsilon_s^* \varepsilon_p + f(\tau, \zeta) \quad (1.18c)$$

$$\varepsilon_p(\zeta = 0, \tau) = \mu \quad (1.18d)$$

$\mu$  représente l'amplitude supposée constante du champ de pompe dont la phase est en outre supposée constante et nulle.

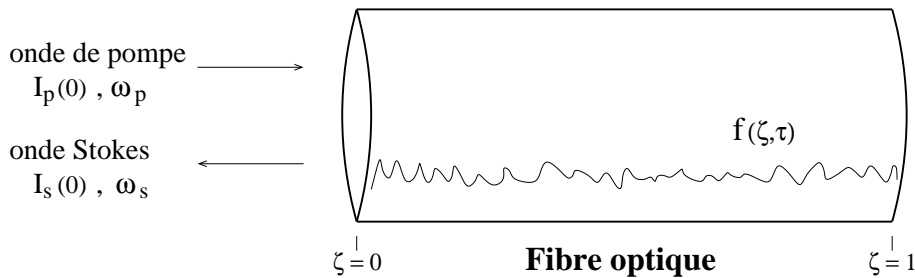


FIG. 1.11 – Représentation schématique d'un générateur Brillouin.

### Comportement du générateur Brillouin

Le fonctionnement d'un générateur Brillouin est généralement caractérisé par la réflectivité  $R$  définie comme étant le rapport entre la valeur moyenne de l'intensité Stokes rétrodiffusée  $I_s(0)$  et  $I_p(0)$  l'intensité du laser de pompe. Le second paramètre habituellement employé est le gain simple passage  $G_F$  s'exprimant comme le produit du gain Brillouin (en  $m/W$ ), de l'intensité du laser de pompe (en  $W/m^2$ ) et de la longueur de la fibre (en  $m$ ). Dans le cadre de notre normalisation,  $G_F$  s'écrit simplement

$$G_F = 2gI_p(0). \quad (1.19)$$

La figure 1.12 représente l'évolution habituelle de la réflectivité  $R$  d'un générateur Brillouin à fibre en fonction du gain simple passage  $G_F$ . Elle a été obtenue par intégration numérique du modèle à trois ondes (Eqs. (1.18)) et pour des valeurs de paramètres  $g = 10.98$  et  $\beta_A = 18.22$ . Ceux-ci correspondent à une expérience qui serait réalisée à une longueur d'onde de 1550 nm dans une fibre de longueur de 60 m pour laquelle la largeur de la bande de gain Brillouin serait de 20 MHz [Niklès et al., 1997]. On note que la réflectivité du générateur est extrêmement faible tant que  $G_F$  n'a pas atteint une valeur seuil  $G_{thr}$  voisine de 20.

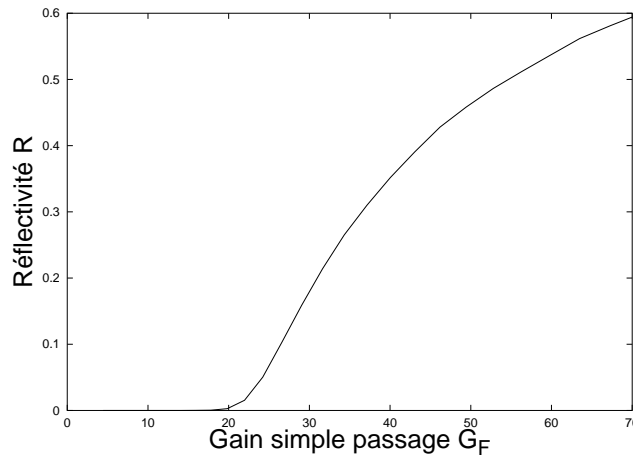


FIG. 1.12 – Dépendance de la réflectivité  $R$  d'un générateur Brillouin à fibre en fonction du gain simple passage  $G_F$  ( $g=10.98$ ,  $\beta_A=18.22$ ).

La figure 1.13 représente l'évolution bruyante de la réflectivité du générateur sous et au delà du seuil. Ce comportement stochastique du champ Stokes est modélisé en utilisant le modèle cohérent à trois ondes et en considérant que la source des fluctuations (les fluctuations thermiques de densité de la fibre) est spatialement répartie sur toute la fibre [Boyd et al., 1990]. Il est à noter que le temps de corrélation des fluctuations de l'intensité des fluctuations Stokes est beaucoup plus petit sous le seuil qu'au delà de celui-ci. Le spectre optique du rayonnement Stokes délivré par le



générateur, large de plusieurs dizaines de MHz, subit un net effet de rétrécissement lorsque la valeur du gain simple passage augmente (voir Fig 1.14).

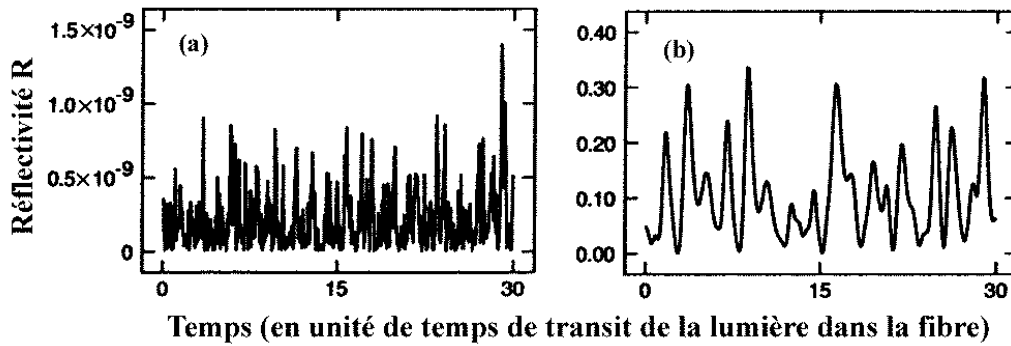


FIG. 1.13 – Evolution temporelle de  $R$  obtenue par intégration numérique dans le cas où  $G_{thr} = 25.5$  : (a) :  $G_F = 2$ , (b) :  $G_F = 30$  (d'après [Boyd et al., 1990]).

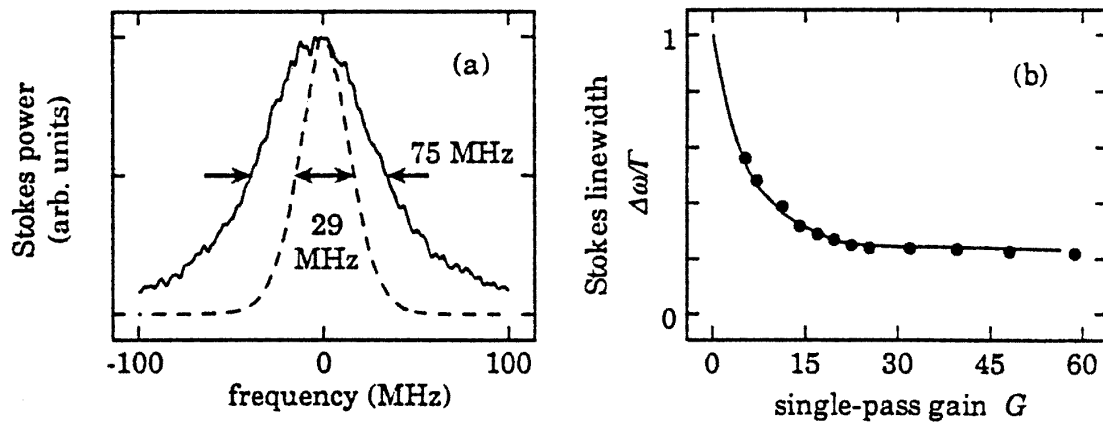


FIG. 1.14 – (a) Spectre du champ Stokes pour deux puissances du laser de pompe (en trait plein : faible puissance ; en traits hachurés forte puissance). (b) Dépendance de la largeur spectrale du champ Stokes par rapport à  $G_F$  : la courbe est obtenue théoriquement en se basant sur le modèle cohérent à trois ondes, les points noirs représentent les résultats expérimentaux (d'après [Gaeta et Boyd, 1991]).

## 1.2.2 L'amplificateur Brillouin à fibre optique

### 1.2.2.1 Description et modélisation

Un amplificateur Brillouin est un système de type “pompe - sonde”. Une représentation schématique en est donnée sur la figure 1.15. Une onde de pompe de fréquence  $\nu_p$  est injectée dans une fibre optique. A l'autre extrémité de la fibre est envoyée une onde “sonde” de fréquence  $\nu_s$  légèrement différente de la fréquence de l'onde de pompe  $\nu_p$ . Cette onde sonde peut être amplifiée par le processus de diffusion Brillouin. Pour cela, il faut que la différence entre les fréquences des ondes pompe et sonde soit très proche de la fréquence  $\nu_a$  de l'onde matérielle mise en jeu lors de la diffusion Brillouin. En fait, il faut que la fréquence  $\nu_s$  de la sonde tombe dans la bande de gain créée par l'onde de pompe (cf. Fig. 1.16). Si cette condition est vérifiée, l'onde de sonde est amplifiée tandis que l'onde de pompe est déplétée.

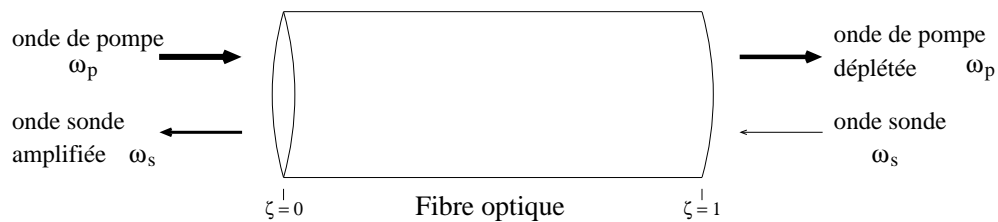


FIG. 1.15 – Représentation schématique d'un amplificateur Brillouin.

### Modélisation de l'amplificateur Brillouin

Le comportement de l'amplificateur Brillouin est décrit au moyen du modèle cohérent à trois ondes (cf. Eq. 1.16). Cependant, contrairement au cas du générateur, la diffusion Brillouin stimulée n'est plus initiée par le terme de bruit  $f(\zeta, \tau)$ . L'injection de deux rayonnements laser dans la fibre rend en effet négligeable l'influence

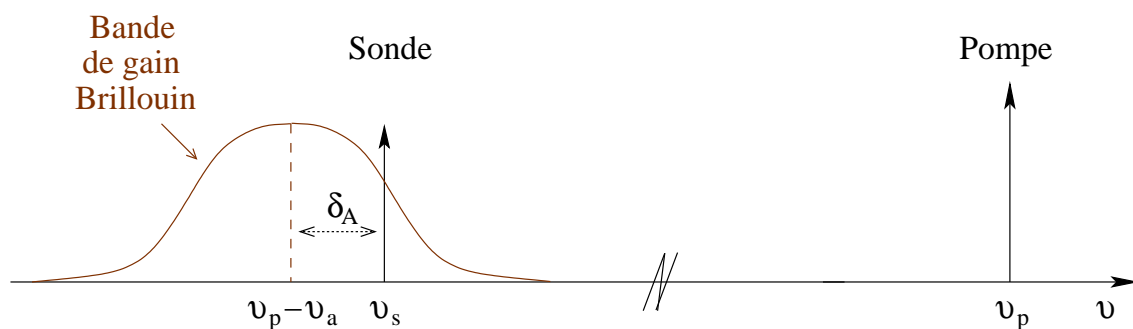


FIG. 1.16 – Amplificateur Brillouin : représentation schématique des ondes mises en jeu.

du bruit de diffusion spontanée. De ce fait, on considère habituellement que le processus dominant lors de l'amplification du rayonnement de sonde est uniquement la diffusion Brillouin stimulée. Le modèle usuellement employé pour décrire la dynamique de l'amplificateur Brillouin est donc constitué de l'ensemble d'équations suivant :

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \zeta} = -gB\varepsilon_s \quad (1.20a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \zeta} = gB^*\varepsilon_p \quad (1.20b)$$

$$\frac{1}{\beta_a} \frac{\partial B}{\partial \tau} + B = \varepsilon_s^*\varepsilon_p \quad (1.20c)$$

$$\varepsilon_p(\zeta = 0, \tau) = \mu \quad (1.20d)$$

$$\varepsilon_s(\zeta = 1, \tau) = a_s e^{i\delta\tau} \quad (1.20e)$$

$\varepsilon_j(z, t)$  ( $j = p, s, a$ ) sont respectivement les amplitudes complexes des ondes de pompe, sonde et acoustique.  $\mu$  et  $a_s$  représentent respectivement les amplitudes des champs délivrés par les lasers de pompe et sonde.  $\delta$  est proportionnel à l'écart  $\delta_A$  entre la fréquence centrale de la bande de gain Brillouin et celle de la sonde ( $\delta = 2\pi nL\delta_A/c$ ). Le jeu d'équations (1.20) sera utilisé dans le chapitre 3 traitant de la nature de la bande de gain Brillouin. Pour déterminer les états stationnaires et les comportements dynamiques de l'amplificateur Brillouin, il est malgré tout préférable pour des raisons de commodités de calcul de se placer dans le repère tournant à la fréquence de l'onde sonde [Chow et Bers, 1993], [Botineau et al., 1994]. Dans celui-ci, le système d'équations (1.20) se réécrit

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \zeta} = -gB\varepsilon_s \quad (1.21a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \zeta} = gB^*\varepsilon_p \quad (1.21b)$$

$$\frac{1}{\beta_a} \frac{\partial B}{\partial \tau} + (1 + i\delta)B = \varepsilon_s^*\varepsilon_p \quad (1.21c)$$

$$\varepsilon_p(\zeta = 0, \tau) = \mu \quad (1.21d)$$

$$\varepsilon_s(\zeta = 1, \tau) = a_s \quad (1.21e)$$

### 1.2.2.2 Etats stationnaires

Reprenons le système d'équations (1.21). Les variables  $\varepsilon_p$ ,  $\varepsilon_s$ , et  $B$  étant complexes, on peut les écrire sous la forme  $\varepsilon_j(z, t) = A_j e^{i\phi_j}$  ( $j = p, s, a$ ). On obtient alors six équations couplées. Trois d'entre elles décrivent le comportement des amplitudes et les trois le comportement des phases. L'amplificateur Brillouin atteint son état

stationnaire lorsque la dérivée par rapport au temps des amplitudes complexes est nulle. Dans ce cas, les équations s'écrivent :

$$\frac{\partial A_p}{\partial \zeta} = -g A_a A_s \cos \theta, \quad (1.22a)$$

$$\frac{\partial A_s}{\partial \zeta} = -g A_a A_p \cos \theta, \quad (1.22b)$$

$$A_a = A_p A_s \cos \theta, \quad (1.22c)$$

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial \zeta} = -g \frac{A_a A_s}{A_p} \sin \theta, \quad (1.22d)$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial \zeta} = g \frac{A_a A_p}{A_s} \sin \theta, \quad (1.22e)$$

$$\delta = -\frac{A_p A_s}{A_a} \sin \theta, \quad (1.22f)$$

où  $\theta(\zeta, \tau) = \phi_s(\zeta, \tau) + \phi_a(\zeta, \tau) - \phi_p(\zeta, \tau)$ . En combinant les relations (1.22c) et (1.22f), on constate que  $\cos^2 \theta = (1 + \delta^2)^{-1}$ . Les équations (1.22a) et (1.22b) peuvent alors être réécrites sous la forme suivante

$$\frac{dI_p}{d\zeta} = -\frac{2g}{1 + \delta^2} I_p I_s \quad (1.23a)$$

$$\frac{dI_s}{d\zeta} = -\frac{2g}{1 + \delta^2} I_p I_s \quad (1.23b)$$

où  $I_p$  et  $I_s$  sont les intensités respectives des champs pompe et sonde. Ces deux équations nous montrent l'influence de  $\delta$  sur le couplage entre les ondes pompe et sonde. Lorsque  $\delta$  est nul, la fréquence de l'onde sonde est identique à la fréquence centrale de la bande de gain, et le couplage est maximal. Plus  $\delta$  est grand, et plus le couplage entre les ondes s'amenuise conduisant à un gain de l'amplificateur plus faible.

Au vu des équations (1.23a) et (1.23b), on s'aperçoit que  $\frac{\partial I_p(\zeta)}{\partial \zeta} = \frac{\partial I_s(\zeta)}{\partial \zeta}$ . En régime stationnaire, les profils spatiaux des intensités de l'onde de pompe et de l'onde sonde sont donc identiques à une constante  $\Omega$  près :

$$I_p(\zeta) = I_s(\zeta) + \Omega \quad (1.24)$$

A partir de la relation (1.24), l'équation (1.23b) va pouvoir se réécrire sous la forme suivante

$$\frac{dI_s(\zeta)}{d\zeta} = -G_\delta (I_s(\zeta) + \Omega) I_s \quad (1.25)$$

où  $G_\delta = 2g(1 + \delta^2)^{-1}$ . La solution générale de cette équation s'écrit sous la forme suivante

$$I_s(\zeta) = \frac{K\Omega e^{-G_\delta \Omega \zeta}}{1 - K e^{-G_\delta \Omega \zeta}} \quad (1.26)$$

où la constante d'intégration  $K$  dépend des conditions de bord du système Brillouin considéré.

Pour un amplificateur Brillouin, les conditions de bord sont données par les équations (1.21d) et (1.21e). Adaptées au système d'équations (1.23a), les conditions de bord s'écrivent maintenant

$$I_p(\zeta = 0, \tau) = \mu^2 \quad (1.27a)$$

$$I_s(\zeta = 1, \tau) = a_s^2 \quad (1.27b)$$

Notons  $K_A$  la constante d'intégration pour l'amplificateur. En remarquant que  $\Omega = I_p(\zeta = 0) - I_s(\zeta = 0)$ , on montre à partir de la relation (1.26) que  $K_A = I_s(\zeta = 0)/I_p(\zeta = 0)$ . Prenons le cas où le fréquence de la sonde est résonante avec celle du centre de la courbe de gain, ce qui implique que  $\delta = 0$ . En introduisant cette relation dans la solution générale (1.26), on trouve que les profils spatiaux des intensités stationnaires  $I_p(\zeta)$  et  $I_s(\zeta)$  s'écrivent

$$I_p(\zeta) = \frac{I_p(0)(1-r)}{1-r \exp(-\gamma \zeta)}, \quad (1.28a)$$

$$I_s(\zeta) = \frac{I_p(0)r(1-r)}{\exp(\gamma \zeta) - r}, \quad (1.28b)$$

$$\text{où } r = \frac{I_s(0)}{I_p(0)} \text{ et } \gamma = 2g I_p(0)(1-r).$$

$r$  est le rapport entre l'intensité de la sonde en  $\zeta = 0$  et l'intensité de la pompe en  $\zeta = 0$ . Sa signification physique est comparable à la réflectivité  $R$  du générateur définie au paragraphe 1.2.1. On peut caractériser trois régimes de fonctionnement de l'amplificateur correspondant à des situations physiques différentes : le régime de faible interaction, le régime de faible saturation et le régime de saturation forte. Il est possible dans les trois cas d'effectuer une approximation des solutions exactes données par les équations (1.28).

### Régime d'interaction faible

En régime d'interaction faible, la déplétion de la pompe peut être ignorée de sorte que la sonde est amplifiée exponentiellement. A l'ordre le plus bas en  $r$ ,  $I_p(\zeta)$  et  $I_s(\zeta)$  peuvent être approximées par

$$I_p(\zeta) = I_p(0), \quad (1.29a)$$

$$I_s(\zeta) = r I_p(0) e^{-2g I_p(0) \zeta} \quad (1.29b)$$

Cette solution approximée est en accord avec la solution générale (1.28) tant que  $r$  reste inférieur à  $10^{-4}$ . Les courbes (i) représentent respectivement les fonctions  $I_p(\zeta)$  et de  $I_s(\zeta)$  dans le cas où  $r = 10^{-5}$ .

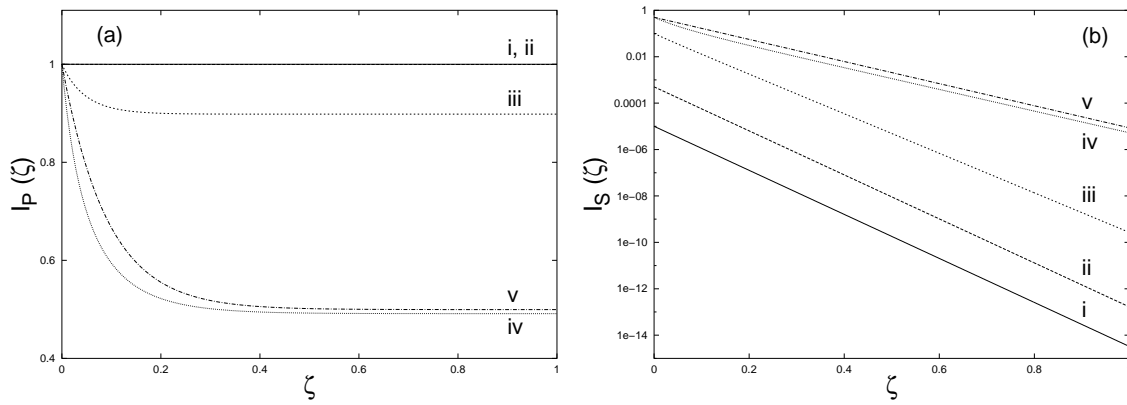


FIG. 1.17 – Profil spatial des intensités des champs de pompe (a) et sonde (b) obtenus par la solution générale (1.28) : i :  $r = 10^{-5}$  ; ii :  $r = 0.005$  ; iii :  $r = 0.1$  ; iv :  $r = 0.5$ . Les solutions approximées (1.29), (1.30) et (1.31) se superposent à la solution générale (1.28), mis à part dans le cas où  $r = 0.5$  (courbe v tracée à partir des Eqs. (1.31)).  $g = 10.98$  et  $\beta_A = 18.22$ .

### Régime de saturation faible

Le régime de saturation faible est obtenu pour des valeurs de  $r$  de l'ordre de  $10^{-3} - 10^{-2}$ . La déplétion de la pompe est encore négligeable. La sonde est toujours amplifiée de manière exponentielle mais le gain simple passage égal à  $2gI_p(0)$  en régime d'interaction faible a maintenant légèrement chuté. Il vaut  $2gI_p(0)(1-r)$  et on parle de saturation de gain. Les solutions stationnaires s'écrivent alors

$$I_p(\zeta) = I_p(0), \quad (1.30a)$$

$$I_s(\zeta) = r I_p(0) e^{-2g I_p(0)(1-r)\zeta} \quad (1.30b)$$

Elles sont tracées sur les figures 1.17 (a) et 1.17 (b) pour  $r = 0.005$  (courbes ii).

### Régime de saturation forte

Le régime de saturation forte est obtenu pour des valeurs de  $r$  supérieures à  $10^{-2}$ . Dans ce régime, la déplétion de pompe n'est plus négligeable. Pour la prendre en compte, un développement limité de l'expression (1.28a) est effectué à l'ordre 1 en  $r$ . En négligeant le terme  $r^2 e^{-\gamma\zeta}$ , le profil de l'intensité de la pompe peut être approximé pour des valeurs de  $r$  comprises entre  $10^{-2} - 10^{-1}$  par

$$I_p(\zeta) = I_p(0) [1 - r(1 - e^{-2g I_p(0)(1-r)\zeta})], \quad (1.31a)$$

$$I_s(\zeta) = r I_p(0) e^{-2g I_p(0)(1-r)\zeta} \quad (1.31b)$$

Les courbes (iii) des 1.17 (a) et 1.17 (b) représentent les fonctions  $I_p(\zeta)$  et  $I_s(\zeta)$  pour  $r = 0.1$ . Pour des valeurs de  $r$  supérieures à 0.1, les relations (1.28a) et (1.28b)

ne peuvent plus être remplacées par les expressions approximées (1.31). On peut le constater sur la figure 1.17 où pour  $r=0.5$ , la courbe (iv) obtenue à l'aide des solutions approchées (1.31) est différente de celle obtenue à partir de la solution générale (1.28a).

### 1.2.2.3 Comportements dynamiques

L'amplificateur Brillouin, tout comme le laser, est susceptible de fonctionner en régime stable ou instable. A partir du jeu d'équations (1.23), C. C. Chow et A. Bers ont réalisé une étude permettant d'obtenir la carte de stabilité présentée sur la figure 1.18 [Chow et Bers, 1993]. Lorsque le désaccord en fréquence  $\delta$  est nul, les états stationnaires sont toujours stables. En revanche, des zones d'instabilités délimitées par une bifurcation de Hopf sont observées pour des valeurs non nulles de désaccord en fréquence. Dans la fenêtre de fonctionnement périodique, la fréquence des oscillations est très proche de  $\delta$ . Lorsque la pompe possède une amplitude supérieure à  $\mu_c$ , autour de  $\delta = 1$ , l'amplificateur Brillouin fonctionne en régime quasipériodique. Il existe pour ce régime deux fréquences caractéristiques. La première fréquence est la même que celle du régime périodique, c'est à dire  $\delta$ . La seconde fréquence corres-

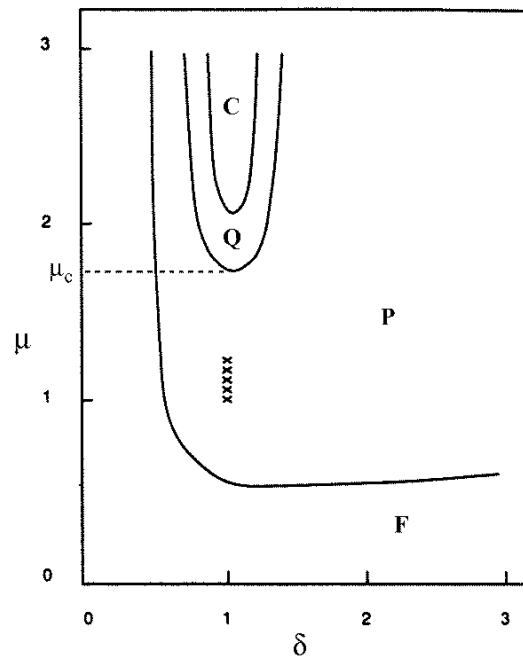


FIG. 1.18 – Diagramme de stabilité de l'amplificateur Brillouin pour  $L = 40$  et  $\varepsilon = 0.0025$ .  $F$  représente la zone des états stables,  $P$  celle des états périodiques,  $Q$  celle des états quasipériodiques et  $C$  celle des états chaotiques (d'après [Chow et Bers, 1993]).

pond à l'inverse de deux fois le temps de parcours des photons dans la fibre. Lorsque l'intensité de la pompe est encore plus importante, on observe un régime chaotique dans une région très étroite autour de  $\delta = 1$ . Une bifurcation subcritique délimite cette zone chaotique de la zone quasipériodique.

### 1.2.3 Le laser Brillouin à fibre optique

Le troisième système générant de la lumière à partir de la diffusion Brillouin stimulée est le laser. Après une rapide présentation des principaux montages expérimentaux utilisés pour le réaliser, nous rappellerons le modèle habituellement employé pour en décrire le comportement. Le régime stationnaire, le seuil d'oscillation et les divers comportements dynamiques seront ensuite explicités.

#### 1.2.3.1 Description et modélisation

Même si l'acronyme "L.A.S.E.R." correspond littéralement à un système dans lequel l'amplification de la lumière a lieu par un processus d'émission stimulée, le mot laser est de nos jours employé pour identifier tout système générant un rayonnement cohérent à partir d'un milieu amplificateur introduit dans une cavité. Dans le cas où l'amplification s'effectue par diffusion Brillouin stimulée, on parle de laser Brillouin.

On rencontre généralement deux types de laser Brillouin qui se différencient de part la cavité réalisée. Le premier est le laser Brillouin dit "tout fibre". Il peut être conçu au moyen d'un coupleur [Agrawal, 2001a] (Fig. 1.19) ou d'un circulateur [Montes et al., 1999]. Grâce à des taux de rebouclage très importants, la finesse de la cavité est souvent très élevée et le seuil du laser très bas (inférieur au mW) [Stokes et al., 1982]. Dans le cas d'un résonateur Perot-Fabry, on peut aussi envisager l'utilisation de miroirs de Bragg photoinscrits [Lecoeuche et al., 2000].

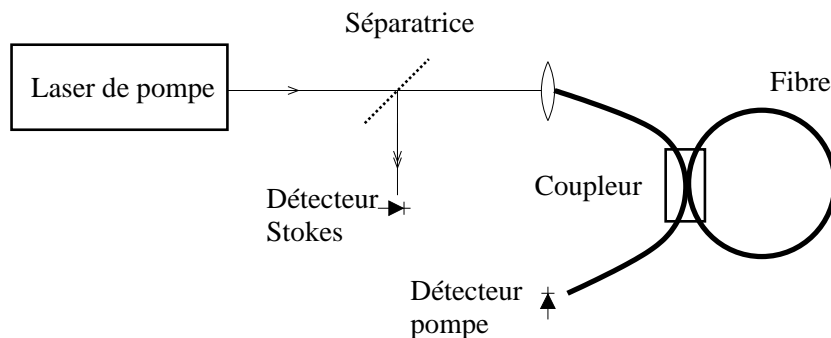


FIG. 1.19 – Schéma de principe d'un laser Brillouin "tout fibre". La cavité de finesse élevée est fermée par un coupleur (d'après [Smith et al., 1991]).



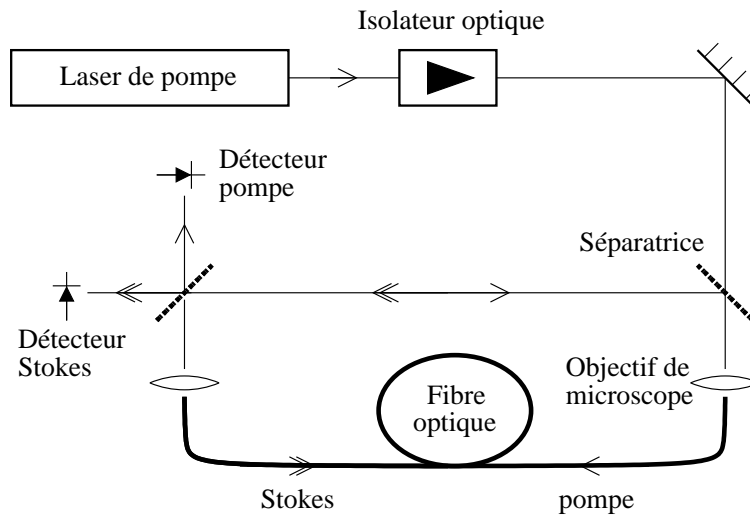


FIG. 1.20 – Schéma de principe d'un laser Brillouin en anneau dont la cavité comporte un bras aérien (d'après [Hill et al., 1976b]).

Le second type de laser est réalisé au moyen d'une cavité en anneau. Celle-ci est constituée d'un bras aérien et est de faible finesse (Fig. 1.20). Les pertes sont importantes ce qui rend le seuil d'oscillation assez élevé (100 mW) [Hill et al., 1976a]. Un laser de pompe de grande puissance doit donc être employé. Cependant le bras aérien est un atout pour l'expérimentation puisqu'il permet par exemple d'insérer divers éléments d'optique dans la cavité. C'est d'ailleurs ce type de laser Brillouin que nous utiliserons par la suite pour effectuer nos études expérimentales.

### Modélisation du laser Brillouin

Le modèle cohérent à trois ondes est couramment employé pour décrire la dynamique de la diffusion Brillouin stimulée dans les fibres. On doit adjoindre à ce dernier des conditions de bouclage rendant compte des caractéristiques d'un laser. Celles d'un laser comportant un bras aérien diffèrent légèrement de celles d'un laser tout fibre dans la mesure où la propagation des champs dans ce bras induit un retard (cf. Fig. 1.21). Cependant, dans la majeure partie des dispositifs expérimentaux, la longueur du bras aérien est très inférieure à celle de la fibre optique. Le retard correspondant est négligeable et on peut par conséquent considérer que les conditions de bouclage sont identiques pour les deux types de laser. De plus, par souci de simplicité et de cohérence entre le cadre des études théorique et expérimentale que nous effectuerons par la suite, nous considérons que l'onde de pompe n'est pas rebouclée dans la cavité. Ceci s'effectue en insérant un isolateur optique dans la cavité (cf. Fig. 1.21). Finalement, le modèle utilisé pour décrire le comportement d'un laser

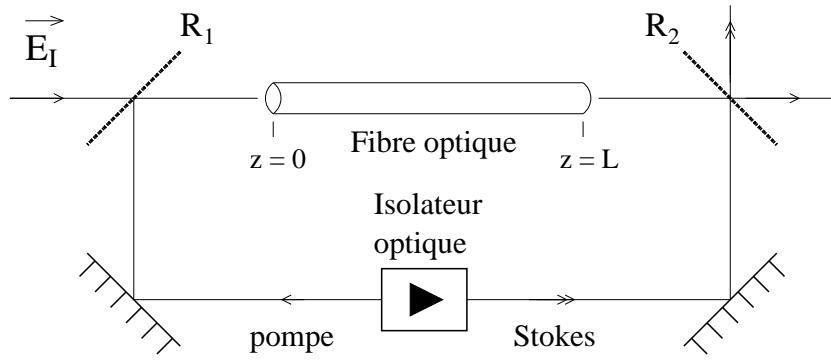


FIG. 1.21 – Représentation schématique d'un laser Brillouin comportant un bras aérien [Randoux, 1995]. Un champ de pompe incident  $E_I$  est injecté dans une cavité en anneau via un miroir dont le coefficient de réflexion est  $R_1$ . Une partie du faisceau de pompe et du faisceau Stokes sortent de la cavité par un second miroir de coefficient de réflexion  $R_2$ .

Brillouin est constitué de l'ensemble d'équations suivant :

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \zeta} = -gB\varepsilon_s \quad (1.32a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \zeta} = gB^*\varepsilon_p \quad (1.32b)$$

$$\frac{1}{\beta_a} \frac{\partial B}{\partial \tau} + B = \varepsilon_s^* \varepsilon_p + f(\tau, \zeta) \quad (1.32c)$$

$$\varepsilon_p(\zeta = 0, \tau) = \mu \cdot e^{i\phi_0(\tau)} \quad (1.32d)$$

$$\varepsilon_s(\zeta = 1, \tau) = R \cdot e^{i\delta_s} \varepsilon_s(\zeta = 0, \tau) \quad (1.32e)$$

où  $R = \sqrt{R_1 R_2}$  représente le coefficient de réinjection de la cavité (à ne pas confondre avec la réflectivité  $R$  définie pour un générateur).  $\phi_0$  est la phase du champ de pompe et  $\delta_s$  représente un terme de déphasage associé au fait que la cavité n'est pas nécessairement résonante.

### 1.2.3.2 Solutions stationnaires et seuil d'oscillation du laser Brillouin

Dans le modèle cohérent à trois ondes, le terme de bruit  $f(\tau, \zeta)$  ne sert que d'initiateur à la diffusion Brillouin. Il sera négligé pour l'étude des solutions stationnaires. Considérons de plus le cas où la cavité est résonante pour le champ Stokes, ce qui implique que  $\delta_s = 0$ . Les solutions stationnaires obéissent aux mêmes équations différentielles que celles caractérisant l'amplificateur dans le cas où  $\delta$  est nul.

$$\frac{dI_p}{d\zeta} = -2gI_pI_s \quad (1.33a)$$

$$\frac{dI_s}{d\zeta} = -2gI_pI_s \quad (1.33b)$$

De même que pour l'amplificateur, les fonctions  $I_p(\zeta)$  et  $I_s(\zeta)$  sont identiques à une constante près  $\Omega$  indépendante de  $\zeta$  de sorte que si  $\Omega = I_p(\zeta) - I_s(\zeta) = I_p(0) - I_s(0)$ , alors l'équation (1.33b) s'écrit sous la forme :

$$\frac{dI_s(\zeta)}{d\zeta} = -2g(I_s(\zeta) + \Omega)I_s \quad (1.34)$$

La résolution de l'équation (1.34) nous amène à considérer deux cas. Lorsque l'intensité Stokes est nulle ( $I_s(\zeta) = 0$ ), le laser est éteint. L'intensité de la pompe reste constante dans la fibre ( $I_p(\zeta) = \mu^2$ ). Dans le second cas, l'intensité Stokes est non nulle. La solution générale de l'équation (1.34) est évidemment la même que celle trouvée pour l'amplificateur (cf. Eq. 1.26) et s'écrit

$$I_s(\zeta) = \frac{K\Omega e^{2g\Omega\zeta}}{1 - Ke^{-2g\Omega\zeta}} \quad (1.35)$$

Cependant, la constante d'intégration  $K$  (notée  $K_L$  pour le laser) est différente de celle obtenue pour l'amplificateur et peut être trouvée à partir de conditions de bouclage qui s'écrivent :

$$I_p(\zeta = 0) = \mu^2 \quad (1.36a)$$

$$I_s(\zeta = 1) = R^2 I_s(\zeta = 0) \quad (1.36b)$$

A partir des relations (1.35) et (1.36b), on trouve que  $K_L = \frac{R^2 - e^{-2g\Omega}}{(R^2 - 1)e^{-2g\Omega}}$ . On en déduit que

$$I_s(\zeta) = \frac{(R^2 - e^{-2g\Omega})\Omega e^{2g\Omega\zeta}}{(R^2 - 1)e^{-2g\Omega} - (R^2 - e^{-2g\Omega})e^{2g\Omega\zeta}} \quad (1.37a)$$

A partir de cette relation (1.37a), on montre que

$$I_p(\zeta) = \frac{(R^2 - 1)\Omega e^{2g\Omega\zeta}}{(R^2 - 1)e^{-2g\Omega} - (R^2 - e^{-2g\Omega})e^{2g\Omega\zeta}} \quad (1.37b)$$

Sur la figure 1.22 sont représentées les évolutions spatiales des intensités des champs de pompe et Stokes lorsque la cavité est de faible finesse (Fig. 1.22(a)) et de grande finesse (Fig. 1.22(b)). On constate que plus  $R$  est important, et moins la dépendance en  $\zeta$  des solutions stationnaires est marquée.

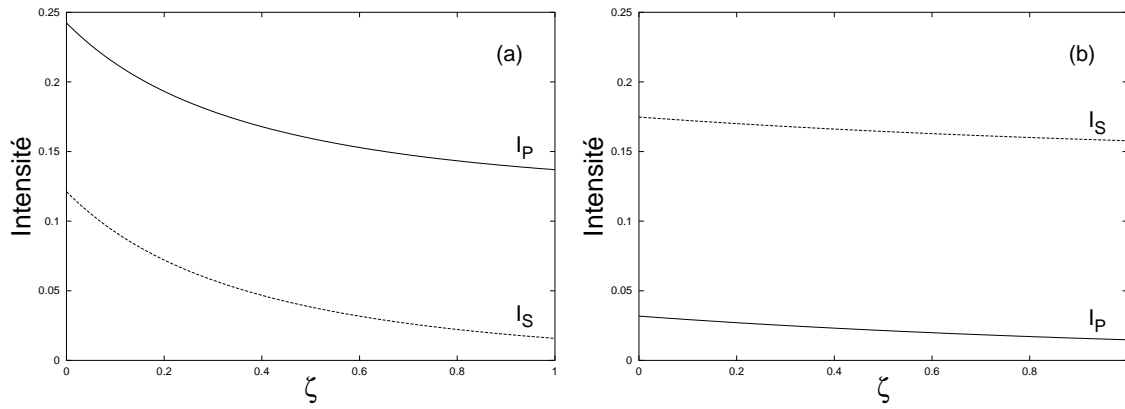


FIG. 1.22 – Intensités stationnaires des champs de pompe  $I_p$  et Stokes  $I_s$  d'un laser Brillouin oscillant dans (a) une cavité de faible finesse ( $R = 0.36$ ) et (b) dans une cavité de finesse élevée ( $R = 0.95$ );  $\mu = 1.2 \mu_{thr}$ ,  $g = 6.04$  et  $\beta_A = 10.93$ .

### Seuil d'oscillation du laser Brillouin

Le seuil d'oscillation  $\mu_{thr}$  du laser Brillouin est atteint lorsque les pertes de la cavité sont compensées par le gain. On montre à partir des équations (1.32d) et (1.37b) que  $\mu_{thr}$  s'écrit sous la forme [Montes et al., 1994b] :

$$\mu_{thr} = \sqrt{\frac{-\ln R}{g}} \quad (1.38)$$

Le seuil du laser est d'autant plus faible que le coefficient  $R$  est élevé. Il suffit d'un laser de pompe de quelques milliwatts pour qu'un laser Brillouin fonctionnant dans une cavité de grande finesse puisse osciller [Stokes et al., 1982]. Au seuil d'oscillation laser,  $I_s(\zeta)$  est négligeable et  $I_p(\zeta) \simeq -\ln R/g$ .

### 1.2.3.3 Comportements dynamiques

A l'instar de nombreux lasers conventionnels [Siegman, 1986], le laser Brillouin peut fonctionner en régime instable ou stable (nommé aussi régime de "miroir Brillouin"). En 1994, C. Montes et son équipe effectuèrent la première analyse de stabilité de l'état stationnaire du laser Brillouin (cf. Fig. 1.23). Ceci a permis de caractériser théoriquement la bifurcation de Hopf qui délimite les comportements stable et instable observés expérimentalement [Montes et al., 1994a], [Montes et al., 1994b] dans les lasers Brillouin à fibre de grande longueur (i.e.  $\simeq 100$  m).

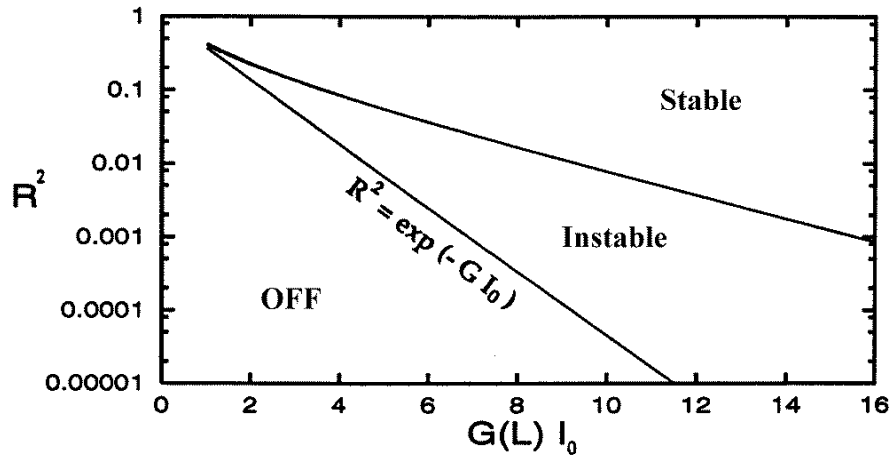


FIG. 1.23 – Diagramme de stabilité du laser Brillouin obtenu dans le cadre du modèle cohérent pour des lasers Brillouin à fibre de grande longueur (i.e.  $\simeq 100$  m (d'après [Montes et al., 1994a])).

Puis en 1995, l'équipe de Lille a montré que la longueur de la cavité était un paramètre affectant de manière essentielle pour la stabilité du laser (cf. Fig. 1.24) [Randoux et al., 1995a]. Pour une finesse de cavité donnée, il existe une longueur de cavité critique  $L_c$  en dessous de laquelle l'intensité de l'onde Stokes est stable quelque soit le niveau de pompage. Pour tout un domaine de longueurs supérieures à  $L_c$ , le système initialement stable au voisinage du seuil, se déstabilise au travers d'une bifurcation de Hopf lorsque la puissance de pompe devient suffisamment élevée. Le laser émet alors des impulsions mais ce régime disparaît à haut niveau de pompage pour à nouveau céder place au régime de miroir Brillouin. Pour des longueurs très supérieures à  $L_c$ , le laser est instable au seuil, puis fonctionne en régime de miroir Brillouin lorsque le pompage est suffisamment fort. L'ensemble de ces comportements est synthétisé sur le diagramme de stabilité de la figure 1.24. Les instabilités observées au seuil peuvent être expliquées à l'aide d'une approche

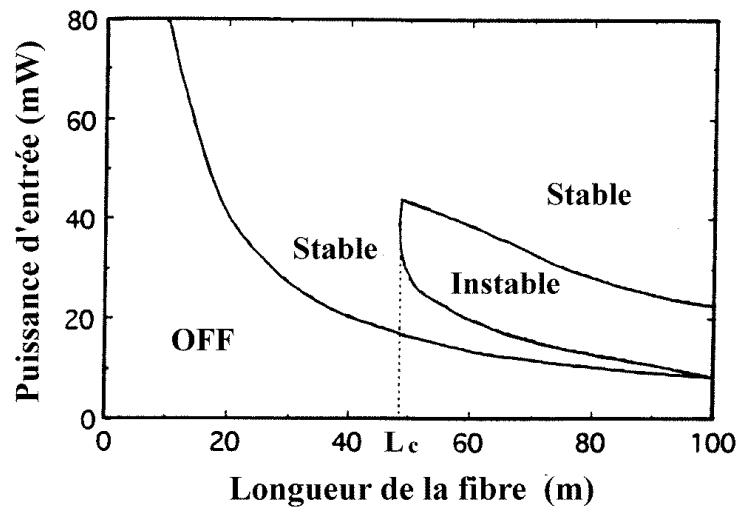


FIG. 1.24 – *Diagramme de stabilité du laser Brillouin obtenu dans le cadre du modèle cohérent (d'après [Randoux et al., 1995a]).*

modale. L'intervalle spectral libre fixe le nombre  $N$  de modes de cavité présents sous la bande de gain Brillouin caractérisée par sa largeur à mi hauteur  $\Delta\nu_B$  (cf. Fig. 1.25). La longueur  $L$  de la fibre étant fixée,  $N$  est donné par :

$$N = \frac{\Delta\nu_B n L}{c} \quad (1.39)$$

Si la longueur est faible,  $N$  est petit, et seul un mode oscillera. Quand la longueur devient importante,  $N$  est élevé et la compétition entre les modes devient importante, ce qui entraîne l'apparition d'un régime impulsif.

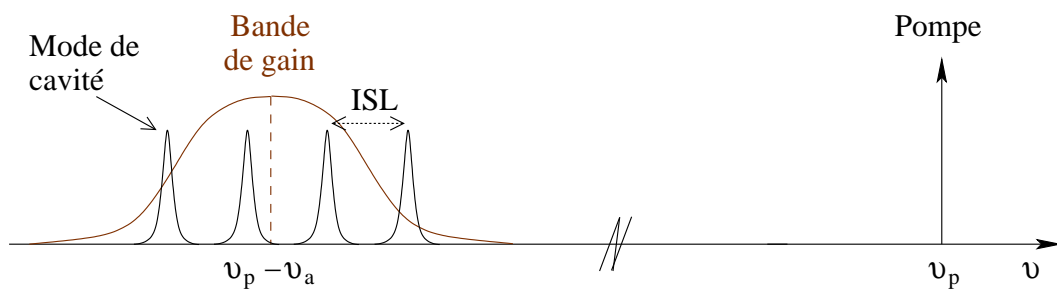


FIG. 1.25 – *Laser Brillouin : représentation de la disposition des modes de cavité sous la bande de gain.*

### 1.3 Etablissement du système d'équations régissant la dynamique des variations relatives des amplitudes des différentes ondes impliquées dans le processus de diffusion Brillouin stimulée

En y adjoignant des conditions de bords spécifiques, le générateur, l'amplificateur et le laser Brillouin peuvent être décrits par le modèle cohérent à trois ondes. Les travaux de cette thèse ont pour but de caractériser d'une part le bruit d'intensité du laser Brillouin à fibre optique et d'étudier d'autre part certains problèmes relatifs à l'élargissement de la bande de gain Brillouin. Pour mener à bien ces deux sujets de prime abord indépendants, il est nécessaire de caractériser l'évolution de faibles variations des amplitudes des champs pompe, Stokes et acoustique autour de l'état stationnaire. Pour cela, nous allons tout d'abord linéariser les équations d'amplitudes du modèle cohérent, puis écrire un système d'équations dont les variables sont les variations relatives des amplitudes.

#### 1.3.1 Linéarisation autour des solutions stationnaires

Reprenons le modèle cohérent à trois ondes permettant de décrire la diffusion Brillouin stimulée dans les fibres optiques monomodes. Les enveloppes des ondes  $\varepsilon_p$ ,  $\varepsilon_s$  et  $B$  étant complexes, elles peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\varepsilon_j(\zeta, \tau) = A_j(\zeta, \tau)e^{i\phi_j(\zeta, \tau)} \quad (j = p, s) \quad (1.40a)$$

$$B(\zeta, \tau) = A_a(\zeta, \tau)e^{i\phi_a(\zeta, \tau)} \quad (1.40b)$$

où les  $A_j(\zeta, \tau)$  et les  $\phi_j(\zeta, \tau)$  ( $j = p, s, a$ ) représentent respectivement les amplitudes et les phases des ondes pompe, Stokes et acoustique. En injectant ces dernières expressions dans les équations (1.16) du modèle cohérent à trois ondes, on obtient le jeu suivant de six équations

$$\frac{\partial A_p}{\partial \tau} + \frac{\partial A_p}{\partial \zeta} = -gA_a A_s \cos \theta, \quad (1.41a)$$

$$\frac{\partial A_s}{\partial \tau} - \frac{\partial A_s}{\partial \zeta} = gA_a A_p \cos \theta, \quad (1.41b)$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial A_a}{\partial \tau} + A_a = A_p A_s \cos \theta, \quad (1.41c)$$

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi_p}{\partial \zeta} = -g \frac{A_a A_s}{A_p} \sin \theta, \quad (1.41d)$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \phi_s}{\partial \zeta} = -g \frac{A_a A_p}{A_s} \sin \theta, \quad (1.41e)$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial \phi_a}{\partial \tau} = -\frac{A_p A_s}{A_a} \sin \theta, \quad (1.41f)$$

où  $\theta(\zeta, \tau) = \phi_s(\zeta, \tau) + \phi_a(\zeta, \tau) - \phi_p(\zeta, \tau)$ . Les trois premières équations décrivent la dynamique des amplitudes, et les trois autres la dynamique des phases. Ces six équations sont couplées par la variable  $\theta(\zeta, \tau)$  qui est une fonction des phases des trois champs. Les fluctuations de phase du laser de pompe sont responsables des fluctuations de la phase du champ Stokes et du champ acoustique [Debut et al., 2000]. Comme la diffusion Brillouin stimulée est sujette à des conditions de résonance et d'accord de phase, les fluctuations sont couplées, de sorte que  $\theta(\zeta, \tau)$  fluctue finalement très peu [Debut et al., 2001]. Dans le cas où la cavité est résonante pour le champ Stokes, la valeur moyenne de  $\theta(\zeta, \tau)$  est nulle, ce qui permet de considérer qu'au premier ordre en  $\theta(\zeta, \tau)$ ,  $\cos \theta \simeq 1$ . Dans ces conditions, les trois équations qui décrivent la dynamique des phases sont découplées de celles gouvernant la dynamique des amplitudes qui s'écrivent

$$\frac{\partial A_p}{\partial \tau} + \frac{\partial A_p}{\partial \zeta} = -g A_a A_s, \quad (1.42a)$$

$$\frac{\partial A_s}{\partial \tau} - \frac{\partial A_s}{\partial \zeta} = g A_a A_p, \quad (1.42b)$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial A_a}{\partial \tau} + A_a = A_p A_s. \quad (1.42c)$$

Lorsque l'on s'intéressera au bruit d'intensité du laser Brillouin (chapitre 2), les fluctuations absolues d'amplitude sont très faibles par rapport à l'amplitude moyenne. De même, lorsque l'on étudiera les problèmes relatifs à l'élargissement de la bande de gain Brillouin (chapitre 3), les champs pompe, Stokes et acoustique varieront faiblement autour de leur état stationnaire. Nous recherchons donc des solutions du système (1.42) s'écrivant sous la forme

$$A_i(\zeta, \tau) = A_i^0(\zeta) + \delta A_i(\zeta, \tau) \quad (i = p, s, a) \quad (1.43)$$

où les fonctions  $A_i^0(\zeta)$  ( $i = p, s, a$ ) représentent les amplitudes stationnaires des champs de pompe, Stokes et acoustique. Leurs expressions sont respectivement rappelées pour l'amplificateur et le laser dans les parties 1.2.2 et 1.2.3. Les termes  $\delta A_i(\zeta, \tau)$  représentent les variations absolues des amplitudes  $A_i(\zeta)$  par rapport à l'état stationnaire. En utilisant la relation (1.43), les équations du système (1.42) vont pouvoir être linéarisées autour de l'état stationnaire, ce qui donne



$$\frac{\partial(\delta A_p)}{\partial\tau} + \frac{\partial(\delta A_p)}{\partial\zeta} = -g.A_a^0(\zeta).\delta A_s - g.A_s^0(\zeta).\delta A_a \quad (1.44a)$$

$$\frac{\partial(\delta A_s)}{\partial\tau} - \frac{\partial(\delta A_s)}{\partial\zeta} = g.A_a^0(\zeta).\delta A_p + g.A_p^0(\zeta).\delta A_a \quad (1.44b)$$

$$\frac{1}{\beta_a} \frac{\partial(\delta A_a)}{\partial\tau} + \delta A_a = g.A_p^0(\zeta).\delta A_s + g.A_s^0(\zeta).\delta A_p \quad (1.44c)$$

### 1.3.2 Système d'équations linéarisées portant sur les variations relatives d'amplitude

Les variations relatives d'amplitude (notées  $\widetilde{\delta A}_i(\zeta, \tau)$ ) correspondent au rapport entre les variations absolues  $\delta A_i(\zeta, \tau)$  et l'amplitude stationnaire  $A_i^0(\zeta)$  :

$$\widetilde{\delta A}_i = \frac{\delta A_i}{A_i^0} \quad (i = p, s, a) \quad (1.45)$$

Par ailleurs, au vu de l'équation (1.41f), on remarque que l'amplitude stationnaire de l'onde acoustique est donnée par la relation suivante

$$A_a^0 = A_p^0.A_s^0 \quad (1.46)$$

A partir des relations (1.45) et (1.46), le système d'équations linéarisées va pouvoir se réécrire en fonction des variations relatives d'amplitude de la façon suivante

$$\frac{\partial\widetilde{\delta A}_p}{\partial\tau} + \frac{\partial\widetilde{\delta A}_p}{\partial\zeta} = gI_s(\zeta) \left( \widetilde{\delta A}_p - \widetilde{\delta A}_a - \widetilde{\delta A}_s \right), \quad (1.47a)$$

$$\frac{\partial\widetilde{\delta A}_s}{\partial\tau} - \frac{\partial\widetilde{\delta A}_s}{\partial\zeta} = gI_p(\zeta) \left( \widetilde{\delta A}_p + \widetilde{\delta A}_a - \widetilde{\delta A}_s \right), \quad (1.47b)$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial\widetilde{\delta A}_a}{\partial\tau} = \widetilde{\delta A}_p + \widetilde{\delta A}_s - \widetilde{\delta A}_a, \quad (1.47c)$$

C'est ce système d'équations linéarisées portant sur les variations relatives d'amplitude qui sera employé pour les études théoriques réalisées dans les deux prochains chapitres. Il va permettre d'obtenir les fonctions de transfert des sources de bruit d'intensité du laser Brillouin. Il nous servira aussi à prouver que la présence d'un trou dans la bande de gain Brillouin n'est pas nécessairement la preuve d'un élargissement inhomogène de celle-ci.

## CHAPITRE 2



# Chapitre 2

## Bruit d'intensité dans les lasers Brillouin à fibre optique

### Introduction

Il est maintenant bien établi [Zarinetchi et al., 1991] et démontré [Debut et al., 2000] que le bruit de phase d'un laser Brillouin à fibre est très faible. L'objet de ce deuxième chapitre de thèse est d'étudier le bruit d'intensité de ces lasers. Après avoir rappelé quelques généralités sur le bruit d'un laser, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'évaluation de son bruit d'intensité. Cependant, ce dernier changeant suivant les conditions de fonctionnement du laser, il est plus intéressant de connaître les facteurs qui le modifient et donc prévoir son évolution. Pour cela, nous allons déterminer les sources à l'origine du bruit d'intensité des lasers. Nous montrerons que seules deux d'entre elles sont prépondérantes. Le bruit d'intensité provient en effet essentiellement des fluctuations du coefficient de réinjection de la cavité ainsi que du bruit d'intensité du laser de pompe. L'influence d'une source de bruit donnée sur le bruit d'intensité est caractérisée par une "fonction de transfert". Celle qui s'applique aux fluctuations du coefficient de réinjection de la cavité sera déterminée de manière théorique dans la deuxième partie de ce chapitre où nos résultats seront également confrontés à l'expérience. Finalement, suivant un plan analogue, la fonction de transfert pour le bruit d'intensité du laser de pompe sera étudiée dans une troisième partie de chapitre.

## 2.1 Le bruit d'intensité

De nombreuses études du bruit d'intensité dans les lasers ont déjà été menées. Après avoir abordé les concepts de base sur le bruit d'intensité, nous présenterons les diverses sources de bruits existant dans les lasers conventionnels et dans les lasers Brillouin à fibre. Nous verrons que le lien entre une source de bruit donnée et le bruit d'intensité qu'elle engendre sur le rayonnement laser est caractérisé par une fonction de transfert. Celle-ci est à la base de l'étude du bruit d'intensité d'un laser.

### 2.1.1 Le bruit d'un laser

Une source de lumière classique, comme une lampe à incandescence, émet un rayonnement incohérent. Chaque atome émet un train d'onde qui ne possède aucune corrélation avec ceux qui sont émis par les atomes voisins. De plus, la phase des trains d'onde émis successivement par le même atome est aléatoire. Contrairement à une source de lumière conventionnelle, toutes les ondes émises par les atomes d'un laser sont corrélées. Ainsi le rayonnement laser possède des propriétés de cohérence spatiale et temporelle que n'ont pas les sources de lumière traditionnelles. Ses propriétés de directivité, d'intensité (aussi bien en puissance qu'en stabilité) et de largeur spectrale sont bien meilleures que celles d'une source de lumière classique (voir les figures 2.1 et 2.2).

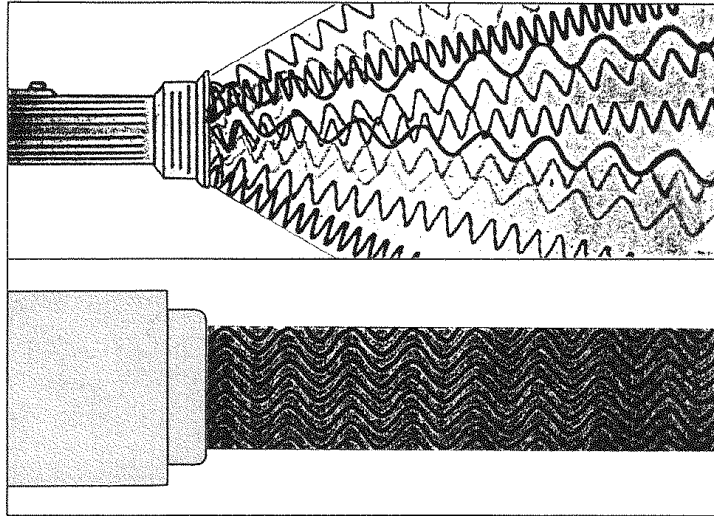


FIG. 2.1 – Représentation schématique de l'émission d'une source de lumière classique (en haut) et d'une source de lumière laser (en bas) (d'après [Siegman, 1986]).

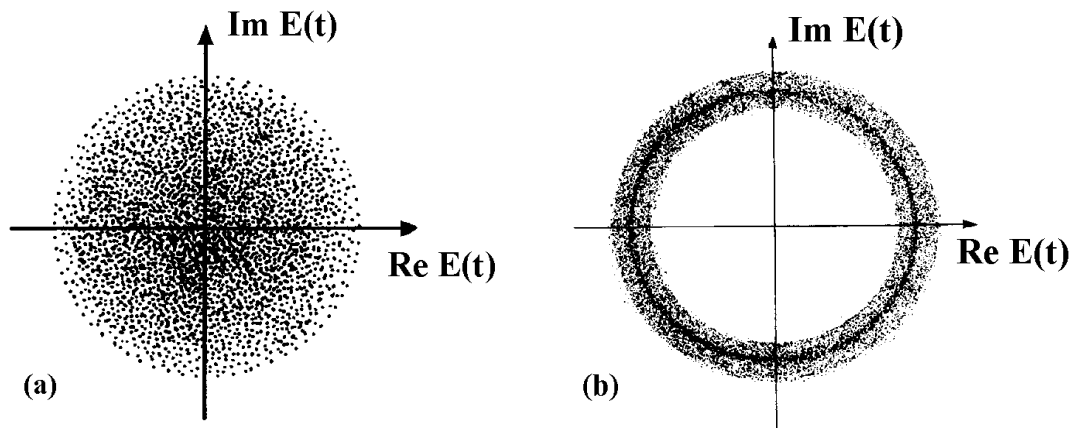


FIG. 2.2 – Représentation schématique de la distribution de la densité de probabilité du champ complexe d'une source de lumière classique (a) (d'après [Siegman, 1986]) et du champ complexe de la lumière laser (b) (d'après [Petermann, 1991]).

Cependant, le rayonnement d'un laser n'est jamais parfaitement cohérent en raison de l'existence de faibles perturbations. Il est très difficile de rendre non fluctuants les paramètres d'un laser, et même quand cela est réalisé, l'émission spontanée vient perturber l'émission stimulée. Le champ laser total provient ainsi principalement de l'émission stimulée, à laquelle il faut toujours ajouter une petite contribution perturbative. Cette dernière génère un champ électromagnétique d'amplitude et de phase aléatoires. Le champ total possède donc une amplitude et une phase qui fluctuent légèrement dans le temps. Ceci est schématisé sur la figure 2.3 où est représenté dans un repère tournant à la fréquence  $\nu_0$  du laser un champ  $\vec{E}_{\nu_0}$  provenant de l'émission stimulée auquel on adjoint un champ perturbatif de faible amplitude  $\vec{E}_{pert}$ .

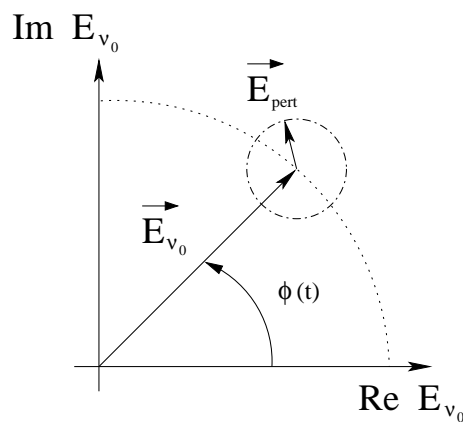


FIG. 2.3 – Représentation d'un champ laser dans un repère tournant à  $\nu_0$ .

Le bruit de phase est à l'origine de l'existence de la largeur spectrale non nulle du rayonnement d'un laser. La composante de  $\vec{E}_{pert}$  perpendiculaire à  $\vec{E}_{\nu_0}$  conduit à une modification de la phase  $\phi$  du champ laser. L'accumulation de ces perturbations au cours du temps va faire évoluer  $\phi$  d'une quantité aléatoire qui devient non négligeable à partir d'un certain temps que l'on appelle temps de cohérence  $\tau_c$ . C'est le temps moyen mis par la phase pour diffuser d'une quantité égale à un radian [van Exter et al., 1992]. Ce temps de cohérence  $\tau_c$  est relié à la largeur spectrale  $\Delta\nu$  par la relation

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau_c} \quad (2.1)$$

Notons que les fluctuations d'amplitude correspondent, elles, sur la figure 2.3 à la composante  $\vec{E}_{pert}$  parallèle à  $\vec{E}_{\nu_0}$ .

Les lasers à inversion de population sont souvent décrits par des modèles à quatre niveaux d'énergie. Une représentation schématique en est donnée sur la figure 2.4 où la transition laser s'effectue entre les niveaux d'énergie  $E_1$  et  $E_2$ . Un système de pompage permet de réaliser l'inversion de population en transférant des atomes de leur état fondamental  $E_0$  à un état excité d'énergie  $E_3$ . Les atomes se désexcitent par des transitions non radiatives du niveau  $E_3$  vers le niveau  $E_2$  [Benkert et al., 1990], [Fox et al., 1984]. Il n'existe donc aucune relation entre la phase du laser de pompe et celle du rayonnement émis.

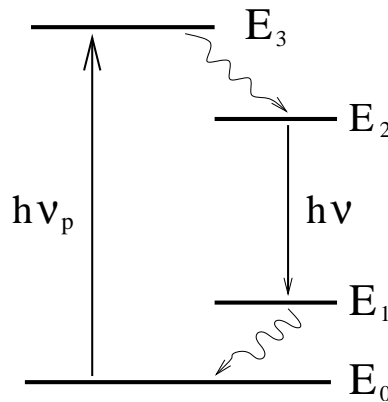


FIG. 2.4 – Représentation schématique d'un laser à 4 niveaux.

Par contre, il existe un lien très fort entre la phase du laser de pompe et la phase du rayonnement émis dans le cas de sources délivrant un rayonnement cohérent obtenu par interaction non linéaire entre plusieurs ondes. Nous pouvons citer comme exemple de telles sources le laser Brillouin ou l'oscillateur paramétrique optique (O.P.O.). Le principe de fonctionnement de ces lasers est schématisé sur la figure 2.5. Une onde de pompe se propage dans un milieu non linéaire et interagit avec lui

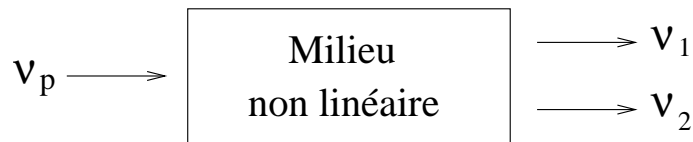


FIG. 2.5 – Représentation schématique d'une interaction non linéaire entre 3 ondes.

pour générer des ondes de fréquences différentes. Cette onde de pompe de fréquence  $\nu_p$  va transférer son bruit sur les ondes de fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . Il est possible, sous certaines conditions, de favoriser le transfert du bruit sur une onde plutôt que sur l'autre. Ceci permet de réduire le bruit du rayonnement laser de sortie. Graham et Haken ont été les premiers à prévoir cet effet de réduction de bruit de phase dans les O.P.O. [Graham et Haken, 1968]. Ils ont mis en évidence le fait que le bruit de phase de la pompe est d'autant mieux transféré sur une onde que celle-ci possède un taux de pertes important. Ceci reste vrai dans le laser Brillouin. En régime de miroir, celui-ci possède une largeur spectrale beaucoup plus faible que celle du laser de pompe. Zarinetchi, Ezekiel et Smith ont montré expérimentalement pour la première fois en 1991 que le rapport entre la largeur spectrale de leur laser de pompe et celle du laser Brillouin était de 10000 [Zarinetchi et al., 1991]. Cet effet de très forte réduction de la largeur spectrale a été caractérisé expérimentalement et théoriquement en 2000 par Debut, Randoux et Zemmouri. Ils ont montré que le bruit de phase du laser Brillouin est dominé par celui du laser de pompe [Debut et al., 2000], [Debut et al., 2001]. A partir du modèle cohérent à trois ondes, il a été montré que le bruit de phase du laser de pompe est transféré à l'onde Stokes après avoir été atténué, moyenné et filtré. L'efficacité de la réduction du bruit de phase dépend du taux d'amortissement de l'onde acoustique ainsi que du taux de pertes de la cavité.

Si les effets de réduction de bruit de phase dans le laser Brillouin sont maintenant bien compris et bien caractérisés, il est cependant à noter qu'aucune étude n'a été entreprise jusqu'à présent pour caractériser son bruit d'intensité et chercher en particulier à déterminer si des effets de réduction de ce bruit étaient observables. L'objectif de ce chapitre est de répondre à cette question. Pour cela, nous déterminerons quelles sont les sources de bruit d'intensité du laser Brillouin, et quelles sont leurs influences relatives sur le rayonnement Stokes.

Avant d'en arriver là, rappelons que de nombreux domaines scientifiques requièrent des lasers de faible bruit d'intensité. En métrologie, les mesures seront d'autant plus précises que le niveau de bruit d'intensité est bas. Dans le domaine des télécommunications, un des facteurs qui limite le débit d'informations est le bruit d'intensité des sources lasers [Yariv, 1997]. Dans le domaine de la spectro-



scopie haute sensibilité, des sources lasers faiblement bruyantes sont nécessaires pour pouvoir détecter de la façon la plus précise possible les faisceaux partiellement absorbés [Marin et al., 1997]. Dans le domaine des mesures interférométriques, qui compte parmi les mesures optiques les plus sensibles, les interféromètres requièrent des sources lasers possédant le bruit le plus faible possible. A titre d'exemple citons les détecteurs optiques d'ondes gravitationnelles [Caves, 1981], constitués d'interféromètres de Michelson, qui tentent de mesurer de très faibles effets provoqués par le passage éventuel d'une onde gravitationnelle [Huen, 1986].

## 2.1.2 Evaluation du bruit d'intensité

Après avoir rappelé quelques caractéristiques importantes du bruit d'un laser, nous allons maintenant chercher à évaluer son bruit d'intensité. Puis, nous étudierons deux cas particuliers : un bruit blanc et un bruit coloré.

### 2.1.2.1 Notions générales

L'intensité  $I(t)$  du rayonnement provenant d'un laser fonctionnant en régime continu fluctue toujours autour d'une valeur moyenne  $\langle I \rangle$  d'une faible quantité  $\delta I(t)$  (figure 2.6) de sorte que

$$I(t) = \langle I \rangle + \delta I(t) \quad (2.2)$$

$\delta I$  est une variable aléatoire considérée ergodique (cf. annexe A) comme toutes celles que nous rencontrerons par la suite. Les performances d'un laser en termes de bruit d'intensité sont couramment évaluées par une grandeur appelée R.I.N., acronyme anglais de Relative Intensity Noise qui sera pour des raisons de commodité souvent employé par la suite. Le R.I.N. mesure le bruit d'intensité relatif qui correspond aux

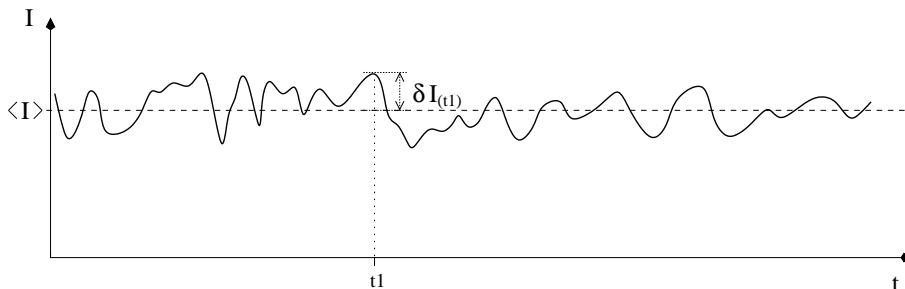


FIG. 2.6 – Intensité d'un laser fluctuant faiblement dans le temps autour d'une valeur moyenne  $\langle I \rangle$ .

variations absolues d'intensité rapportées à l'intensité moyenne du laser :

$$\tilde{\delta I}(t) = \frac{\delta I(t)}{\langle I \rangle} \quad (2.3)$$

La fonction d'autocorrélation est généralement utilisée pour rendre compte des caractéristiques temporelles d'une intensité bruyante. La fonction d'autocorrélation des fluctuations relatives d'intensité  $C_{\tilde{\delta I}\tilde{\delta I}}$  est définie par la relation suivante

$$C_{\tilde{\delta I}\tilde{\delta I}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{\delta I}(t) \cdot \tilde{\delta I}(t + \tau) dt \quad (2.4)$$

Le R.I.N. est simplement défini comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation des fluctuations relatives d'intensité du laser

$$S_{\tilde{\delta I}\tilde{\delta I}}(\nu) = RIN(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\tilde{\delta I}\tilde{\delta I}}(\tau) \cdot e^{-i2\pi\tau\nu} d\tau \quad (2.5)$$

Le R.I.N. représente la densité spectrale des fluctuations relatives d'intensité du laser. En d'autres termes, à une fréquence  $\nu$  donnée, et dans une bande spectrale large de 1 Hz, il représente le rapport entre la puissance du bruit et le carré de l'intensité moyenne.

### 2.1.2.2 Exemples

#### Bruit blanc

De façon à clairement illustrer le concept de R.I.N., prenons comme premier exemple le cas particulier d'un signal dont la composante fluctuante est un bruit blanc gaussien. Considérons le cas où les variations relatives de l'intensité de ce signal sont de  $10^{-3}$  (Fig. 2.7 a-1). La fonction d'autocorrélation des fluctuations relatives correspondante est un pic de Dirac (Fig. 2.7 a-2). La transformée de Fourier de ce pic est un spectre d'amplitude constante dont la valeur dépendra de l'importance des variations absolues du signal par rapport à la valeur moyenne du signal (Fig. 2.7 a-3). Le R.I.N. sera le même pour toute les fréquences et sera d'environ -160 dB/Hz dans notre exemple.

#### Bruit coloré

Considérons le cas plus réaliste d'un bruit coloré limité dans les hautes fréquences, comme un bruit blanc ayant traversé un filtre passe bas. Etudions les caractéristiques d'un tel bruit dans le cas où les variations relatives de l'intensité de ce signal sont de  $10^{-3}$  (Fig. 2.7 b-1). La fonction d'autocorrélation d'un tel signal n'est plus un pic de Dirac, mais une double exponentielle dont la largeur à mi-hauteur dépend du temps de corrélation du signal (Fig. 2.7 b-2). Comme on peut l'observer sur la figure 2.7 b-3, la densité spectrale de puissance décroît à partir d'une fréquence de coupure inversement proportionnelle au temps de corrélation .

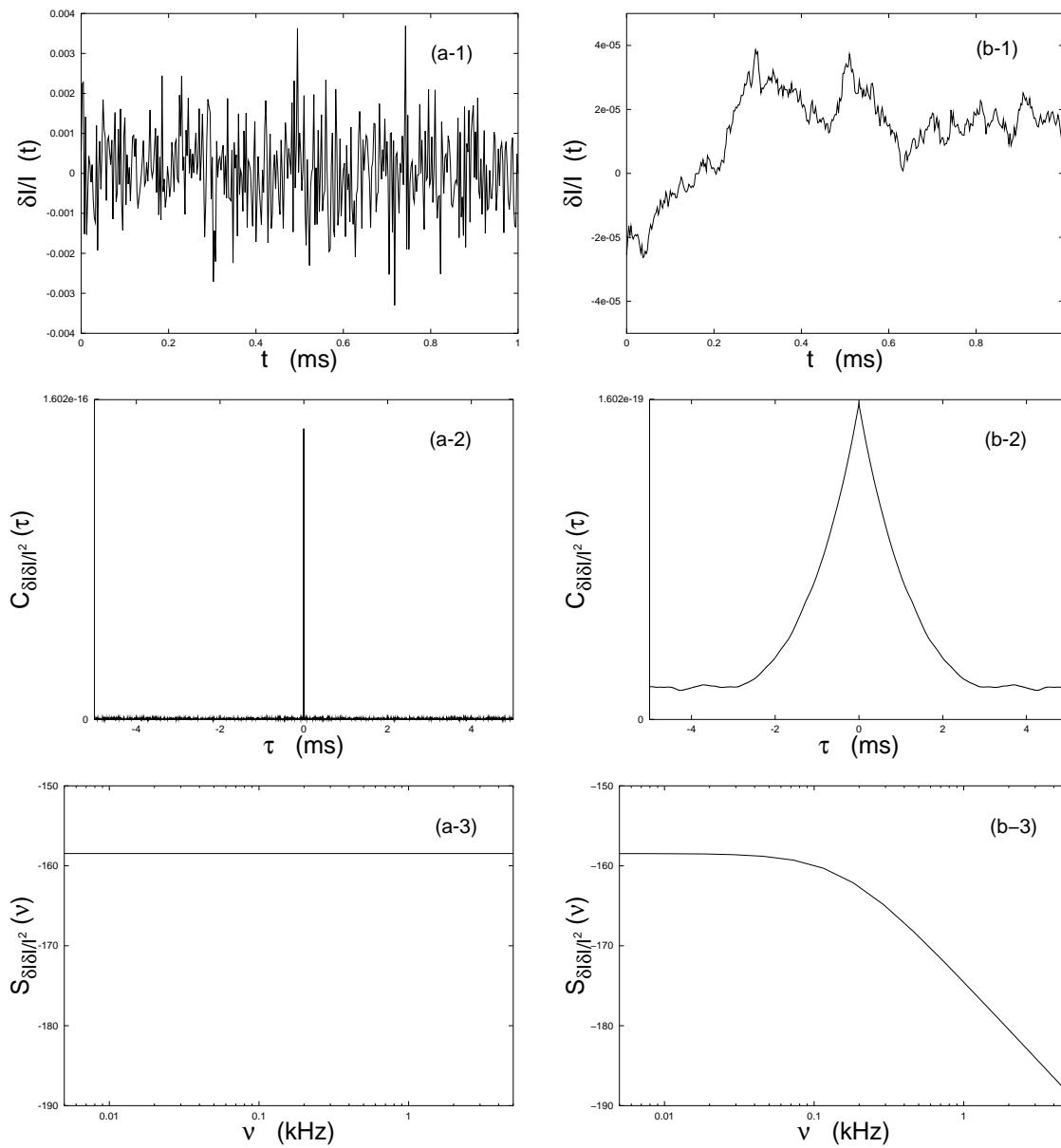


FIG. 2.7 – Evolution temporelle (1), fonction d'autocorrélation (2) et transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation (3) des variations relatives d'intensité dont la composante fluctuante est le bruit blanc (a) ou un bruit coloré (b).

### 2.1.3 Sources de bruit d'intensité

Après avoir donné les outils permettant d'évaluer le bruit d'intensité d'un laser, il nous faut maintenant déterminer quelle en est l'origine. Nous allons tout d'abord présenter les sources de bruits dominantes dans les lasers conventionnels. Puis, nous discuterons des sources de bruit existant dans les lasers Brillouin. Nous distinguerons les sources de bruits prépondérantes de celles à négliger.

#### 2.1.3.1 Sources de bruit d'intensité d'un laser conventionnel

L'intensité du rayonnement émis par un laser conventionnel est faiblement fluctuante car quelques uns de ses paramètres varient légèrement dans le temps. Il existe principalement trois paramètres qui engendrent du bruit d'intensité dans un laser : le système de pompage, la cavité laser et l'émission spontanée. Ces trois paramètres sont représentés sur le schéma synoptique de la figure 2.8.

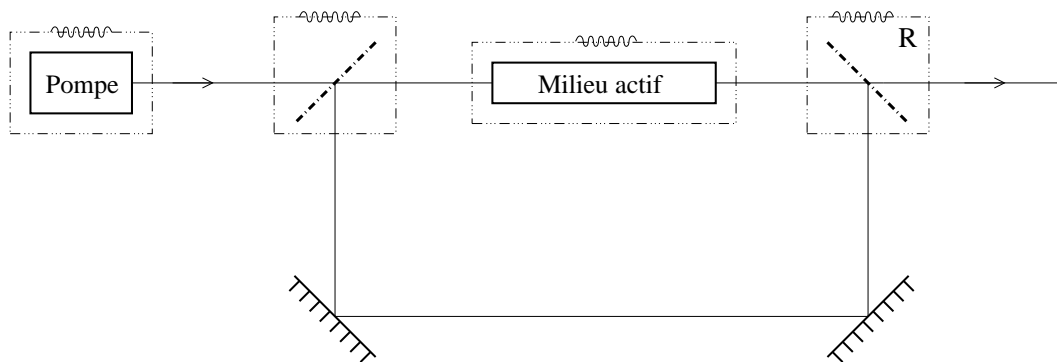


FIG. 2.8 – Schéma des différents paramètres bruyants d'un laser.

Le système de pompage engendre généralement du bruit d'intensité sur le laser car il est lui même légèrement bruyant. Une variation de l'intensité de la source de pompe entraîne bien évidemment une variation de l'intensité du laser. Dans le cas d'un pompage optique et pour les raisons invoquées dans le paragraphe 2.1.1, il est à noter que le bruit de phase de la source de pompage n'a généralement pas d'impact significatif sur le bruit d'intensité du laser. Une part du bruit d'intensité du laser provient également de la cavité. Des fluctuations de sa longueur induisent essentiellement du bruit de phase qui n'affecte généralement pas le niveau d'intensité du laser dans la mesure où les celles-ci restent suffisamment faibles. Par ailleurs, il faut aussi prendre en compte les fluctuations des pertes de la cavité. Elles proviennent du bruit technique basse fréquence causé par des vibrations mécaniques, des nuisances sonores ainsi que des fluctuations thermiques. La dernière source de bruit d'un laser conventionnel provient de l'émission spontanée qui est aussi à l'origine du démarrage

du laser. Très importante au seuil, son impact s'atténue au fur et à mesure que le rayonnement laser s'intensifie.

Le spectre de bruit d'intensité d'un laser monomode longitudinal est généralement dominé par un pic qui apparaît au voisinage de la fréquence de relaxation  $\nu_R$  (figure 2.9 courbe 1). Celui-ci caractérise le fait que lorsqu'une perturbation écarte le niveau d'intensité de son état stationnaire, le laser tend à rejoindre ce niveau en oscillant préférentiellement autour de sa fréquence propre de relaxation. Pour des fréquences inférieures à  $\nu_R$ , le bruit d'intensité relatif est constant. Pour des fréquences supérieures à  $\nu_R$ , le R.I.N. chute très rapidement pour atteindre une valeur très faible.

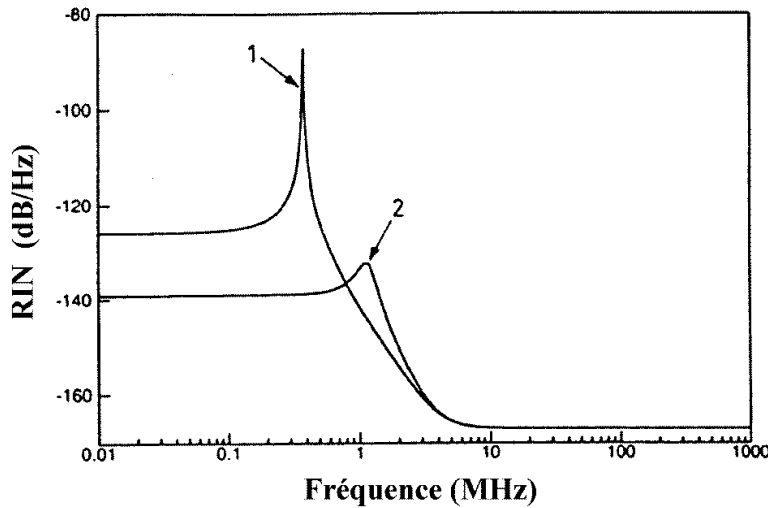


FIG. 2.9 – Spectre du bruit d'intensité typique d'un laser Nd :YAG pompé par diode : laser non injecté (courbe 1) et injecté (courbe 2) (d'après [Svelto, 1998]).

Le niveau de bruit du laser dépend de son type et de son mode de fonctionnement. Sur la figure 2.9, on peut constater que le niveau de bruit d'un laser Nd :YAG dépend de la source de pompage. En effet, quand cette dernière est une diode laser injectée, le niveau de bruit est bien plus faible (Fig. 2.9 courbe 2) que lorsque que le pompage est effectué par une diode non injectée (Fig. 2.9 courbe 1).

Chaque type de laser possède des particularités qu'il faut prendre en compte pour identifier ses sources de bruit [Svelto, 1998]. Pour un laser à gaz, des perturbations proviennent généralement de fluctuations dans le courant d'alimentation du système de pompage, de l'instabilité du processus de décharge, et du désalignement des miroirs engendré par des vibrations existantes dans la cavité. Pour les lasers à colorant, les fluctuations de densité ainsi que la présence de bulles d'air dans la solution du milieu actif sont les sources de bruit les plus fréquentes. Pour les lasers solides, les

fluctuations de la pompe (que ce soit une lampe ou une diode) et les désalignements de la cavité sont les principales causes de bruit. Pour les lasers à semi-conducteur, le bruit provient du courant de pompage, de l'émission spontanée ainsi que du bruit de recombinaison électron-trou.

Lorsque toutes les fluctuations d'origines mécanique, thermique, acoustique ou électrique ont été supprimées, il subsiste malgré tout des fluctuations résiduelles d'origine quantique [Yariv, 1997]. Celles-ci sont caractérisées par l'inégalité de Heisenberg qui interdit de mesurer simultanément avec une précision infinie les valeurs de deux observables conjuguées. Cette inégalité appliquée aux observables conjuguées du champ électromagnétique (la phase et l'amplitude) implique l'existence de fluctuations quantiques. Ce bruit est connu sous le nom de bruit de grenaille (shot noise) ou bruit quantique standard. On a longtemps considéré que le bruit quantique standard constituait une limite insurmontable. Cependant, au milieu des années 1980, plusieurs expériences ont montré que, si les fluctuations quantiques étaient inévitables, leur effet sur les mesures pouvaient être contourné [Wu et al., 1986], [Yamamoto et al., 1986]. L'inégalité de Heisenberg impose une condition sur le produit des variances des observables conjuguées : il est donc possible de réduire les fluctuations d'une des observables sous le bruit quantique standard, au prix de voir les fluctuations de l'autre augmenter en conséquence. De tels états sont dits comprimés. A partir de ces états, des sources lasers dites "à état comprimé" (plus connues sous l'anglicisme *squeezed lasers*) ont été réalisées. Il est ainsi possible d'obtenir des lasers dont le bruit d'intensité est extrêmement faible. Cependant, la réalisation de lasers à état comprimés est délicate et la majorité des applications ne requiert pas un niveau de bruit aussi faible.

### 2.1.3.2 Sources de bruit d'intensité du laser Brillouin à fibre optique

On réalise un laser Brillouin à fibre optique en injectant le faisceau d'un laser de pompe dans une fibre placée à l'intérieur d'une cavité. Ce type de dispositif est schématisé sur la figure 2.10.

A l'instar de la plupart des lasers, le bruit d'intensité du laser Brillouin à fibre provient de la diffusion spontanée, du laser de pompe et de la cavité. Reprenons le modèle cohérent à trois ondes permettant de décrire l'effet Brillouin.

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \zeta} = -gB\varepsilon_s \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \zeta} = gB^* \varepsilon_p \quad (2.6b)$$

$$\frac{1}{\beta_a} \frac{\partial B}{\partial \tau} + B = \varepsilon_s^* \varepsilon_p + f(\zeta, \tau) \quad (2.6c)$$

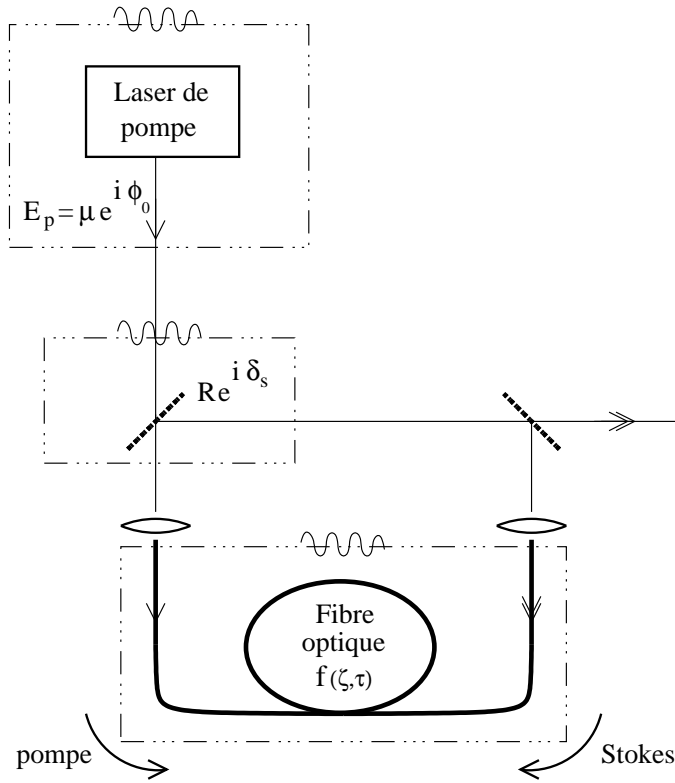


FIG. 2.10 – Schéma synoptique des différentes sources de bruit du laser Brillouin.

La diffusion spontanée est caractérisée par le terme de bruit  $f(\zeta, \tau)$  contenu dans l'équation (2.6c). L'influence du bruit de pompage et de réinjection est contenue dans les équations de bouclages vues au premier chapitre (Eq. (1.32d) et (1.32e)) et rappelées ci-dessous

$$\varepsilon_p(\zeta = 0, \tau) = \mu \cdot e^{i\phi_0(\tau)} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_s(\zeta = 1, \tau) = R \cdot e^{i\delta_s} \cdot \varepsilon_s(\zeta = 0, \tau) \quad (2.8)$$

où  $\mu$  est un paramètre de pompe sans dimension,  $\phi_0$  est la phase du laser de pompe,  $R$  est le taux de réinjection et  $\delta_s$  représente le terme de désaccord de phase qui caractérise le fait que la cavité n'est pas forcément résonnante. Tous ces termes sont des sources de bruit engendrant potentiellement des fluctuations d'intensité du rayonnement Stokes. Avant d'examiner de manière détaillée l'impact de ces sources de bruit sur l'intensité Stokes, nous allons tout d'abord déterminer si certaines d'entre elles ne pourraient pas être négligées.

### Influence du bruit de pompage

Comme les lasers conventionnels optiquement pompés, le laser Brillouin est sujet à la fois au bruit d'intensité et au bruit de phase du laser de pompe. Le bruit

d'intensité du pompage dépend de la source de lumière employée pour pomper le laser Brillouin à fibre. Prenons le cas d'une diode laser commerciale. Celle-ci possède un R.I.N. d'environ  $-150$  dB/Hz. Ceci correspond, comme on peut le constater au vu de l'exemple étudié dans le paragraphe 2.1.2.2 à des fluctuations relatives du paramètre  $\mu$  d'un peu moins de  $10^{-3}$ . D'autres sources de lumière, comme les lasers à solide ou les lasers à gaz, sont utilisées pour pomper le laser Brillouin à fibre. Leur niveau de bruit d'intensité est généralement plus important que celui des diodes commerciales. Il correspond d'ordinaire à des fluctuations relatives du paramètre  $\mu$  d'environ  $10^{-2}$ . Quoi qu'il en soit, le bruit d'intensité du laser de pompe n'est a priori pas négligeable et une part importante de ce chapitre sera consacré à l'étude de son influence sur le bruit d'intensité du laser Brillouin.

Le bruit de phase influe, quant à lui, essentiellement sur la largeur spectrale des lasers. Il dépend de la source de lumière utilisée pour pomper le laser Brillouin à fibre. Cependant, la largeur spectrale des lasers de pompe habituellement employés est généralement faible (inférieure à 1 MHz), ce qui signifie que le bruit de phase est faible [Debut et al., 2001]. De plus, comme nous l'avons vu au chapitre 1 (cf. Eq. 1.41b), l'évolution des amplitudes peut être découplée de celles des phases tant que les fluctuations de celles-ci sont faibles. Le bruit de phase du laser de pompe n'aura donc pratiquement pas d'incidence directe sur le bruit d'intensité du laser Brillouin. C'est une source de bruit faible et sans grande influence qui sera négligée dans notre étude.

### **Influence de la cavité sur le bruit du laser**

C'est par deux sources de bruit différentes que la cavité peut participer aux fluctuations d'intensité du laser Brillouin. L'une provient du désaccord de phase  $\delta_s$  et l'autre provient du coefficient de réinjection  $R$  de la cavité. Les fluctuations du terme de désaccord de phase  $\delta_s$  correspondent à des variations de longueur de la cavité. Celles-ci peuvent être dues à des fluctuations thermiques ou mécaniques. Lorsque la cavité n'est pas asservie, les fluctuations de la longueur peuvent dépasser la longueur d'onde du champ Stokes, ce qui provoque des sauts de mode. Ceux-ci vont se manifester par de brusques et très fortes oscillations d'intensité [Randoux et al., 1995a]. Le laser Brillouin ne fonctionne alors pas en régime continu, et il n'est alors pas possible de définir de R.I.N.. Cependant lorsque la cavité est suffisamment bien stabilisée, les fluctuations de longueur deviennent très faibles [Ponikvar et Ezekiel, 1981] et n'induisent que des effets de dérive de la fréquence du laser Brillouin. Nous restreindrons notre étude aux situations pour lesquelles l'influence des fluctuations du paramètre  $\delta_s$  peut être négligée. Ceci comprend bien sûr les lasers Brillouin dont la longueur est asservie. Tous les autres lasers Brillouin sont concernés dans la mesure où l'on considère leur évolution sur des échelles de temps plus courtes que la milliseconde



(temps caractéristique des fluctuations techniques induisant des sauts de modes).

Le coefficient de réinjection  $R$  peut lui aussi fluctuer de manière lente (bruit thermique, bruit acoustique, vibrations mécaniques) ce qui engendre du bruit de basse fréquence. Les lasers Brillouin possédant une cavité de faible finesse sont généralement constitués d'une cavité à bras aérien conduisant à d'importantes fluctuations du taux de réinjection  $R$ . Les lasers Brillouin tout fibrés ne sont pas sujets à ce genre de problème. Cependant ils oscillent dans une cavité de finesse élevée. L'intensité du champ Stokes intracavité, fortement liée au taux de réinjection  $R$ , est très élevée et la moindre variation de  $R$  aura de fortes répercussions sur l'intensité du laser Brillouin. C'est pourquoi il n'est pas possible de négliger cette source de bruit potentielle.

### Influence de la diffusion Brillouin spontanée

La dernière source de bruit à considérer est la diffusion Brillouin spontanée décrite par le terme  $f(\zeta, \tau)$  de l'équation (2.6c). Celle-ci joue un rôle analogue à celui de l'émission spontanée dans un laser conventionnel. Elle provient des fluctuations thermiques de l'indice de réfraction de la fibre. Elle est à l'origine du démarrage du laser et contribuera en tant que processus bruyant aux fluctuations d'intensité du rayonnement Stokes. A partir de l'étude de R.W. Boyd et R. Rzażewski sur l'importance de la diffusion spontanée lors de processus de diffusion stimulée [Boyd et al., 1990], et avec notre normalisation, on montre que  $f(\zeta, \tau)/(\mu_{thr}^2)$  est de l'ordre de  $10^{-6}$ . Rappelons que  $\mu_{thr}$  est l'amplitude normalisée du champ de pompe au seuil.

Bien au dessus du seuil, l'amplitude du champ Stokes  $\varepsilon_s$  est du même ordre de grandeur que  $\varepsilon_p$  qui est comparable à  $\mu_{thr}$ . Le rapport  $|f(\zeta, \tau)/\varepsilon_p \varepsilon_s^*|$  sera donc de l'ordre de  $10^{-6}$ . Le terme de diffusion spontanée  $f(\zeta, \tau)$  peut alors être négligé devant le terme de la diffusion stimulée  $\varepsilon_p \varepsilon_s^*$ . Le bruit de pompage de l'ordre de  $10^{-2}$ - $10^{-3}$  masquera le bruit engendré par la diffusion spontanée. Par contre, ceci n'est plus vrai lorsque l'on se place juste au dessus du seuil de démarrage du laser Brillouin. En effet, l'amplitude du champ Stokes est très faible. Considérons le cas où  $|\varepsilon_s|$  est de l'ordre de  $10^{-6}|\mu_{thr}|$ . Le champ de pompe intracavité  $\varepsilon_p$  est proche de  $\mu_{thr}$ . Le rapport  $|f(\zeta, \tau)/\varepsilon_p \varepsilon_s^*|$  est donc de l'ordre de 1. Le terme de diffusion spontanée  $f(\zeta, \tau)$  et le terme de la diffusion stimulée  $\varepsilon_p \varepsilon_s^*$  sont ainsi du même ordre de grandeur. La diffusion spontanée ne peut pas alors être négligée. Toutefois, dans la plupart des situations d'intérêt pratique, le laser Brillouin opère suffisamment loin du seuil pour que l'on considère que le bruit engendré par la diffusion spontanée est négligeable. C'est à ce genre de situation que nous restreindrons notre étude.

Finalement, les sources de bruit que nous prendrons en compte dans l'étude du bruit d'intensité du laser Brillouin à fibre sont le bruit d'intensité du laser de pompe

ainsi que les fluctuations du coefficient de réinjection de la cavité laser. Cependant, chaque source transférera son bruit sur l'intensité du champ Stokes avec plus ou moins d'efficacité. Pour déterminer l'impact des deux sources de bruit principales sur le bruit d'intensité, il est judicieux de calculer les fonctions de transfert appropriées.

#### 2.1.4 Fonction de transfert

Dans un laser, le bruit d'intensité total est évalué par le R.I.N.. Cependant le R.I.N. n'est que la conséquence de la présence de sources de bruit et surtout de l'efficacité avec laquelle elles se répercutent sur le bruit du laser. Il permet d'évaluer le bruit d'intensité d'un laser, mais ils ne permet pas d'étudier l'influence des sources de bruit sur les fluctuations d'intensité du laser. L'outil généralement utilisé pour caractériser ceci est la fonction de transfert notée  $G(\nu)$ . Celle-ci détermine l'efficacité avec laquelle une source de bruit donnée va influencer l'intensité du laser. On peut montrer (voir annexe A) que la relation qui lie le bruit d'intensité relatif du laser à la densité spectrale de puissance  $S_i(\nu)$  de chacune des sources de bruit  $i$  et à la fonction de transfert  $G_i(\nu)$  correspondante s'écrit

$$RIN(\nu) = \sum_{i=1}^N |G_i(\nu)|^2 \cdot S_i(\nu) \quad (2.9)$$

où  $N$  est le nombre de sources de bruit du laser étudié. Cette relation n'est valable que dans la mesure où les sources de bruit n'exercent qu'une influence perturbative si bien que l'on peut considérer que la réponse du laser demeure de nature linéaire. Si le module  $|G_i(\nu)|$  d'une fonction de transfert donnée est inférieur à l'unité, l'impact de la source de bruit correspondante est faible. Ces fonctions de transfert sont obtenues en modulant faiblement la source de bruit  $i$  à la fréquence  $\nu$  sur une plage spectrale prédéfinie. L'intensité du laser Brillouin sera alors ainsi modulée. La valeur de la fonction de transfert à la fréquence considérée est simplement le rapport entre l'indice de modulation de l'intensité du laser et celui appliqué à la source de bruit.

La plupart des fonctions de transfert des lasers conventionnels possèdent de nombreuses similitudes. Une fonction de transfert typique est présentée en trait plein sur la figure 2.11. On peut généralement observer un pic à la fréquence de relaxation du système. Pour des fréquences inférieures à celle-ci, la valeur de la fonction de transfert est constante. Pour des fréquences supérieures à la fréquence de relaxation, la fonction décroît.

Les fonctions de transfert d'un certain nombre de lasers ont déjà été déterminées tant expérimentalement que théoriquement par de nombreux auteurs. Par exemple, Taccheo et ses collaborateurs [Taccheo et al., 1998a] ont étudié le laser à verre codopé Er-Yb et ont montré qu'à l'instar du laser Brillouin, il possède les deux mêmes

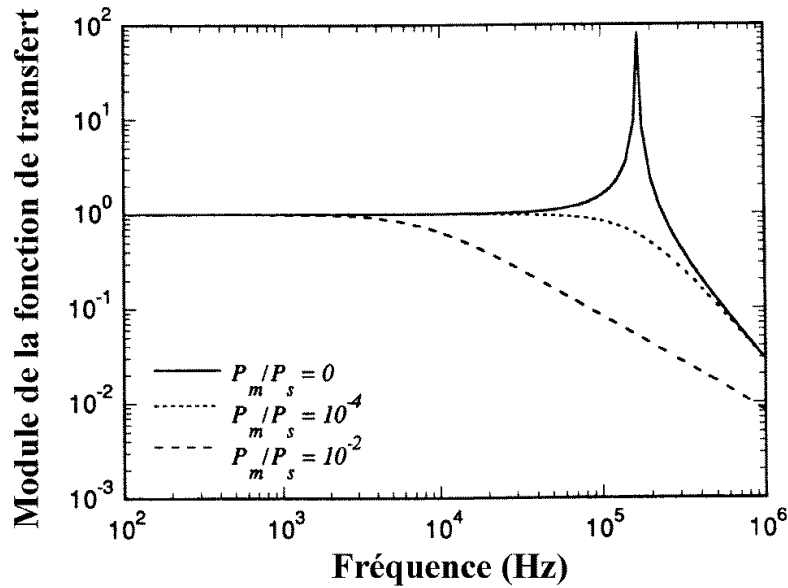


FIG. 2.11 – *Module de la fonction de transfert des fluctuations d'intensité du laser de pompe : cas d'un laser solide injecté pour trois rapports de la puissance du laser maître  $P_m$  sur la puissance du laser esclave  $P_s$ . Le laser est pompé trois fois au dessus de son seuil d'oscillation (d'après [Farinas et al., 1995] ).*

sources de bruit prédominantes que sont les fluctuations du pompage et celle du taux de réinjection. Dans les O.P.O., la source de bruit importante provient des fluctuations du laser de pompe [Lee et al., 1998]. Dans la plupart des lasers, les fonctions de transfert sont caractérisées par l'existence d'un pic apparaissant à la fréquence de relaxation. L'amplitude de celui-ci peut être considérablement diminuée au moyen de systèmes optoélectroniques de contre-réaction [Taccheo et al., 1998b]. Ainsi, les lasers injectés-verrouillés possèdent un niveau de bruit qui peut être considérablement réduit par l'injection d'une source externe [Ottaway et al., 1994], [Farinas et al., 1995]. Comme on peut en outre le voir sur la figure 2.11, le bruit d'intensité est d'autant plus faible que le niveau d'injection est élevé.

Bien que le bruit d'intensité soit mesuré par le R.I.N., il ne peut être proprement caractérisé que par la détermination des fonctions de transfert des sources de bruit prépondérantes. Il en existe deux pour le laser Brillouin : les variations des pertes de la cavité et les fluctuations de l'intensité de la pompe. Il nous faut maintenant caractériser les fonctions de transferts correspondantes. Nous débuterons par l'étude de la fonction de transfert des fluctuations du coefficient de réinjection, puis nous déterminerons la fonction de transfert des variations de l'intensité du laser de pompe.

## 2.2 Fonction de transfert des variations du coefficient de réinjection au laser

Nous commençons notre étude par la détermination de la fonction de transfert  $G_R$  relative aux variations du coefficient de réinjection de la cavité. Un travail théorique sera tout d'abord réalisé ce qui nous permettra de cerner le comportement de  $G_R$ . Puis une étude expérimentale sera effectuée dans le but de valider nos résultats théoriques.

### 2.2.1 Détermination théorique

La détermination théorique des fonctions de transfert caractérisant le bruit du laser Brillouin est réalisée à partir d'un système d'équations linéarisées provenant du modèle cohérent à trois ondes, et dont les variables sont les fluctuations relatives des amplitudes des champs (voir chapitre 1, Eqs. (1.47)). Des conditions de bouclage adaptées à la source de bruit étudiée sont adjointes à ces équations. Nous allons tout d'abord caractériser la fonction de transfert  $G_R$  lorsque le laser Brillouin évolue près de son seuil d'oscillation. Nous montrerons ensuite que cette fonction de transfert obtenue au seuil d'oscillation laser n'est pas très différente de celles caractérisant le laser lorsque celui-ci fonctionne bien au dessus de son seuil.

#### 2.2.1.1 Modèle

##### Modèle linéarisé sur les variations relatives d'amplitude des champs

La fonction de transfert  $G_R$  caractérise la réponse linéaire du laser à une faible variation du coefficient de réinjection. Pour la déterminer, nous utilisons le système d'équations linéarisées basé sur les variations relatives d'amplitudes que nous avons obtenu au premier chapitre (cf. Eqs. (1.47)).

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A_p}}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{\delta A_p}}{\partial \zeta} = g I_s(\zeta) \left( \widetilde{\delta A_p} - \widetilde{\delta A_a} - \widetilde{\delta A_s} \right) \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A_s}}{\partial \tau} - \frac{\partial \widetilde{\delta A_s}}{\partial \zeta} = g I_p(\zeta) \left( \widetilde{\delta A_p} + \widetilde{\delta A_a} - \widetilde{\delta A_s} \right) \quad (2.10b)$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial \widetilde{\delta A_a}}{\partial \tau} = \widetilde{\delta A_p} + \widetilde{\delta A_s} - \widetilde{\delta A_a} \quad (2.10c)$$

Ce système d'équations a été obtenu à partir d'une linéarisation des équations d'amplitude du modèle cohérent à trois ondes. Les variables de ce système  $\widetilde{\delta A_p}$ ,  $\widetilde{\delta A_s}$  et  $\widetilde{\delta A_a}$  sont respectivement les variations relatives d'amplitude des ondes de pompe, Stokes et acoustique définies au chapitre 1 (Eq. (1.45)).

### Conditions de bouclage

Pour modéliser le comportement d'un laser Brillouin, des conditions de bouclage sur les champs pompe et Stokes doivent être rajoutées au système d'équations (2.10). Pour simplifier l'étude, les fonctions de transfert seront déterminées dans le cas où le champ de pompe n'effectue qu'un seul passage dans la fibre. Ceci revient expérimentalement à insérer un isolateur optique dans la cavité du laser Brillouin. Dans ce cas, l'amplitude du champ de pompe à l'entrée de la fibre  $A_p(\zeta = 0, \tau)$  est simplement égale à l'amplitude  $\mu$  du champ (cf. Eq (2.11a)) délivré par le laser de pompe.

Contrairement au champ de pompe, le champ Stokes oscille dans une cavité dans laquelle il est recouplé avec une efficacité fixée par le coefficient de réinjection  $R$ . Considérons que celui-ci fluctue légèrement dans le temps d'une quantité  $\delta R(\tau)$  autour de sa valeur moyenne  $R$ . Les conditions de bouclage sur l'amplitude du champ de pompe  $A_p(\zeta, \tau)$  et du champ Stokes  $A_s(\zeta, \tau)$  vont ainsi s'écrire

$$A_p(\zeta = 0, \tau) = \mu \quad (2.11a)$$

$$A_s(\zeta = 1, \tau) = [R + \delta R(\tau)] . A_s(\zeta = 0, \tau) \quad (2.11b)$$

Cependant, pour que ces conditions de bouclages soient compatibles avec le système d'équations (2.10), il est nécessaire de réaliser un changement de variables. Après un rapide calcul, on montre que les conditions de bouclage sur les fluctuations relatives des amplitudes des champs de pompe et Stokes s'écrivent

$$\widetilde{\delta A}_p(\zeta = 0, \tau) = 0 \quad (2.12a)$$

$$\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 1, \tau) = \widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \tau) + \widetilde{\delta R}(\tau) \quad (2.12b)$$

où  $\widetilde{\delta R}(\tau) = \delta R(\tau)/R$  représente les variations relatives du coefficient de réinjection de la cavité. Les variations relatives d'amplitude du champ de pompe en  $\zeta = 0$  sont nulles, tandis que les variations relatives de l'amplitude du champ Stokes en  $\zeta = 1$  sont l'addition de celles en  $\zeta = 0$  et celles du coefficient de réinjection.

### Fonction de transfert étudiée

La fonction de transfert  $G_R(\nu)$  pour les fluctuations du coefficient de réinjection est définie par

$$G_R(\nu) = \frac{\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \nu)}{\widetilde{\delta R}(\nu)} \quad (2.13)$$

où  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \nu)$  et  $\widetilde{\delta R}(\nu)$  sont les transformées de Fourier respectives de  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \tau)$  et de  $\widetilde{\delta R}(\tau)$ . Si  $\widetilde{\delta R}(\tau)$  est modulé de manière sinusoidale à une fréquence  $\nu$ , la fonction de transfert  $G_R(\nu)$  représente le rapport entre l'indice de modulation d'amplitude du champ Stokes et celui de la modulation appliquée.

### 2.2.1.2 Fonction de transfert au seuil

Nous allons débiter notre étude de  $G_R(\nu)$  par sa détermination près du seuil d'oscillation du laser Brillouin. Dans ce cas, l'intensité du champ Stokes  $I_s(\zeta)$  est suffisamment faible pour que le membre de droite de l'équation (2.10a) soit négligeable. Celle-ci se réécrit alors simplement

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \zeta} = 0. \quad (2.14)$$

Cette équation caractérise simplement la propagation de la perturbation dans un milieu où le gain est nul. Comme la condition de bord (2.12a) impose que les fluctuations de la pompe sont nulles en  $\zeta = 0$ , alors elles seront nulles dans toute la fibre. Quand le laser Brillouin fonctionne près de son seuil d'oscillation, on aura

$$\widetilde{\delta A}_p(\zeta, \tau) = 0 \quad (2.15)$$

Par conséquent, près du seuil d'oscillation, les fluctuations du taux de réinjection n'influencent pas l'onde de pompe. Comme le champ de pompe n'est pas rebouclé dans la cavité, il ne peut donc pas subir l'influence directe des variations du coefficient de réinjection. Par ailleurs, l'onde Stokes étant très faible, le champ de pompe n'est pas perturbé par celle-ci lors de sa propagation dans la fibre si bien que  $\widetilde{\delta A}_p(\zeta, \tau)$  est nul.

Lorsque le champ de pompe n'est pas rebouclé dans la cavité, sa distribution d'intensité stationnaire au seuil est constante [Montes et al., 1994b] et vaut (voir chapitre 1, Eq. (1.38))

$$I_p(\zeta) = I_p^{seuil} = \frac{-\ln R}{g} \quad (2.16)$$

Au voisinage du seuil, le système d'équations (2.10) se transforme grâce aux relations (2.15) et (2.16) sous la simple forme suivante

$$\widetilde{\delta A}_p(\zeta, \tau) = 0 \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \widetilde{\delta A}_s}{\partial \zeta} = -\ln R \left( \widetilde{\delta A}_a - \widetilde{\delta A}_s \right) \quad (2.17b)$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial \widetilde{\delta A}_a}{\partial \tau} = \widetilde{\delta A}_s - \widetilde{\delta A}_a \quad (2.17c)$$

Dans l'espace de Fourier, le système (2.17) devient

$$\widetilde{\delta A}_p(\zeta, \nu) = 0 \quad (2.18a)$$

$$i2\pi\nu\widetilde{\delta A}_s - \frac{\partial\widetilde{\delta A}_s}{\partial\zeta} = -\ln R \left( \widetilde{\delta A}_a - \widetilde{\delta A}_s \right) \quad (2.18b)$$

$$\frac{i2\pi\nu}{\beta_A}\widetilde{\delta A}_a = \widetilde{\delta A}_s - \widetilde{\delta A}_a \quad (2.18c)$$

où  $\widetilde{\delta A}_i(\zeta, \nu)$  ( $i = p, s, a$ ) sont respectivement les transformées de Fourier des fluctuations relatives des amplitudes des ondes de pompe, Stokes et acoustique. Soulignons le fait que le temps  $\tau$  a été normalisé par rapport au temps de parcours de la lumière dans la fibre (voir chapitre 1 Eq. (1.17)). La longueur de la cavité étant confondue avec celle de la fibre (chapitre 1, partie 1.2.3.1), la fréquence  $\nu$  est donc normalisée par rapport à l'intervalle spectral libre de la cavité. L'équation (2.18c) permet d'obtenir l'expression suivante pour  $\widetilde{\delta A}_a$  :

$$\widetilde{\delta A}_a(\zeta, \nu) = \frac{\beta_A}{\beta_A + i2\pi\nu} \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu) \quad (2.19)$$

En introduisant la relation (2.19) dans l'équation (2.18b), on trouve que les fluctuations relatives de l'amplitude du champ Stokes sont régies par l'équation différentielle simple

$$\frac{\partial\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu)}{\partial\zeta} = i2\pi\nu \left( 1 - \frac{\ln R}{\beta_A + i2\pi\nu} \right) \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu) \quad (2.20)$$

Cette équation différentielle du premier ordre se résout en tenant compte de la condition de bouclage (2.12b). On obtient alors l'expression suivante pour la fonction de transfert :

$$G_R(\nu) = \frac{\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \nu)}{\widetilde{\delta R}(\nu)} = \frac{1}{e^{C_1(\nu)} - 1} \quad (2.21)$$

où  $C_1(\nu) = i2\pi\nu \left( 1 - \frac{\ln R}{\beta_A + i2\pi\nu} \right)$

Le module de la fonction  $G_R(\nu)$  est représenté sur la figure 2.12 pour trois valeurs du coefficient de réinjection  $R$  : 0.95, 0.36 et 0.15 et pour les paramètres  $g = 6.04$ ,  $\beta_A = 10.93$ . Ces paramètres sont habituellement utilisés dans notre équipe pour caractériser le laser Brillouin à fibre que nous réalisons expérimentalement ([Randoux et al., 1995a], [Randoux et al., 1995b], [Debut et al., 2000]). Ces valeurs normalisées correspondent aux valeurs physiques suivantes :  $L = 12$  m,  $n = 1.45$ ,  $\Delta\nu_B = 60$  MHz. On peut noter que pour les valeurs de  $R$  choisies, les fonctions de transfert présentent un comportement général semblable.

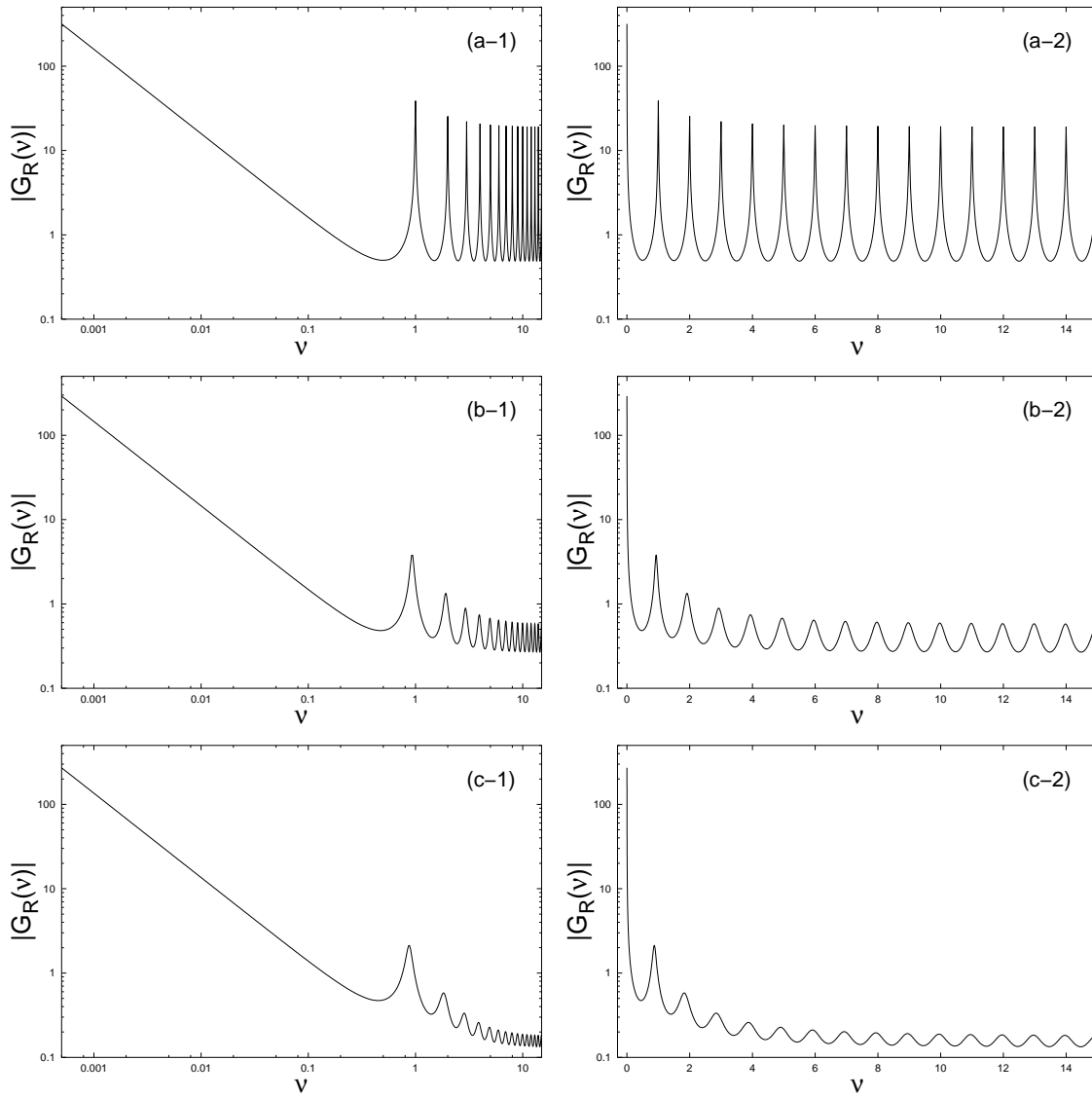


FIG. 2.12 – Représentation de  $|G_R(\nu)|$  au seuil. Les fonctions représentées sont obtenues grâce à l'équation (2.21) ( $g = 6.04$  et  $\beta_A = 10.93$ ). Elles sont représentées en échelles logarithmiques (colonne de gauche, graphe 1) et semi-logarithmiques (colonne de droite, graphe 2) pour trois valeurs de  $R$  :  $R = 0.95$  : (a-1), (a-2) ;  $R = 0.36$  : (b-1), (b-2) ;  $R = 0.15$  : (c-1), (c-2).



Pour des fréquences normalisées bien inférieures à l'unité ( $\nu < 0.5$ ), lorsque la fréquence est multipliée d'un facteur 10, la valeur de la fonction de transfert est divisée par 10. Dans cette gamme spectrale, l'équation (2.21) se simplifie au moyen d'un développement limité au premier ordre de l'exponentielle et le module de  $G_R(\nu)$  s'écrit alors simplement

$$|G_R(\nu)| = \frac{1}{2\pi\nu(1 - \frac{\ln R}{\beta_A})} = \frac{1}{2\pi\nu(1 + \frac{\Gamma_c}{\gamma_A})} \quad (2.22)$$

Cette relation (2.22) montre qu'à basse fréquence, le laser Brillouin se comporte comme un intégrateur parfait lors du transfert des fluctuations du coefficient de réinjection. Les variations relatives de l'amplitude du champ Stokes résultent, à une constante près, de l'intégration des fluctuations relatives du coefficient de réinjection, si bien que

$$\widetilde{\delta A_s}(\zeta = 0, \tau) = \frac{1}{1 + \frac{\Gamma_c}{\gamma_A}} \int_{-\infty}^{\tau} \widetilde{\delta R}(\tau') d\tau' \quad (2.23)$$

où  $(1 + \Gamma_c/\gamma_A)$  joue le rôle d'une constante d'intégration.

### Résonances de la fonction de transfert

Comme nous montre la figure 2.12, la fonction de transfert présente des résonances à des fréquences normalisées voisines de multiples entiers de l'unité. C'est l'origine de ce comportement que nous allons maintenant chercher à étudier de manière plus approfondie. Pour cela, on réalise d'abord le changement de variables suivant

$$\widetilde{\delta B_s}(\zeta, \tau) = \widetilde{\delta A_s}(\zeta, \tau) - \zeta \cdot \widetilde{\delta R}(\tau) \quad (2.24)$$

L'intérêt de ce changement de variables est double. Comme nous allons le voir, il permet d'une part d'introduire la variable fluctuante  $\widetilde{\delta R}$  dans l'équation différentielle gouvernant l'évolution de  $\widetilde{\delta B_s}(\zeta, \tau)$ . D'autre part, la condition de bouclage (2.12b) se transforme et acquiert une périodicité spatiale en s'écrivant

$$\widetilde{\delta B_s}(\zeta = 1, \tau) = \widetilde{\delta B_s}(\zeta = 0, \tau) \quad (2.25)$$

A partir du changement de variables (2.24), l'équation (2.20) devient

$$\frac{\partial \widetilde{\delta B_s}(\zeta, \nu)}{\partial \zeta} = C_1(\nu) \cdot \widetilde{\delta B_s}(\zeta, \nu) - [1 - C_1(\nu) \cdot \zeta] \cdot \widetilde{\delta R}(\nu) \quad (2.26)$$

où  $C_1(\nu) = i2\pi\nu \left( 1 - \frac{\ln R}{\beta_A + i2\pi\nu} \right)$

$\widetilde{\delta B}_s(\zeta, \nu)$  est la transformée de Fourier de  $\widetilde{\delta B}_s(\zeta, \tau)$ . Du fait de l'équation (2.25), des solutions à l'équation différentielle (2.26) peuvent être cherchées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta B}_s(\zeta, \nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n(\nu) \cdot e^{ik_n \zeta} & (2.27) \\ \text{où } k_n &= 2\pi n \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \\ \text{et } \alpha_n^*(\nu) &= \alpha_{-n}(\nu) \end{aligned}$$

Les fonctions  $e^{ik_n \zeta}$  obéissent à la condition d'orthonormalité suivante :

$$\int_0^1 e^{ik_n \zeta} \cdot e^{-ik_m \zeta} d\zeta = \delta_{n,m} \quad (2.28)$$

En injectant la relation (2.27) dans l'équation (2.26), et en s'appuyant sur la condition d'orthonormalité (2.28), on obtient les expressions suivantes pour les fonctions  $\alpha_n$  :

$$n = 0 : \quad \alpha_0(\nu) = \frac{2 - C_1(\nu)}{2C_1(\nu)} \cdot \widetilde{\delta R}(\nu) \quad (2.29a)$$

$$n \neq 0 : \quad \alpha_n(\nu) = \frac{C_1(\nu)}{i2\pi n [C_1(\nu) - i2\pi n]} \cdot \widetilde{\delta R}(\nu) \quad (2.29b)$$

En introduisant les relations (2.29) dans la relation (2.27) et en remarquant grâce à la relation (2.24) que  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \nu) = \widetilde{\delta B}_s(\zeta = 0, \nu)$ , on montre que la fonction de transfert s'écrit finalement

$$\begin{aligned} G_R(\nu) &= \frac{2 - C_1(\nu)}{2C_1(\nu)} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{C_1(\nu)}{i2\pi n [C_1(\nu) - i2\pi n]} & (2.30) \\ &= S_0(\nu) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} S_n(\nu) \end{aligned}$$

Chaque fonction  $S_n(\nu)$  contribue à la fonction de transfert  $G_R(\nu)$ . Cependant, chacune d'entre elles possède un impact très fort sur une plage spectrale donnée et une faible influence ailleurs. C'est ce que l'on peut constater sur la figure 2.13 où est représentée la fonction de transfert donnée par la relation (2.21) ainsi que les fonctions  $|S_{-1}|$ ,  $|S_0|$  et  $|S_{+1}|$ . Le coefficient de réinjection choisi est de 0.95. A basse fréquence, la fonction de transfert et la fonction  $|S_0|$  sont confondues. La fonction  $|S_0|$  est donc prédominante par rapport aux autres fonctions. Par contre, autour de la fréquence unité, c'est la fonction  $|S_{+1}|$  qui est prépondérante. On peut d'ailleurs observer de la même manière qu'autour de la fréquence  $\nu = n$ , c'est la fonction  $|S_n|$  qui donne la principale composante de la fonction de transfert. Par ailleurs, la fréquence des résonances n'est pas exactement un multiple entier de l'unité. Sur la

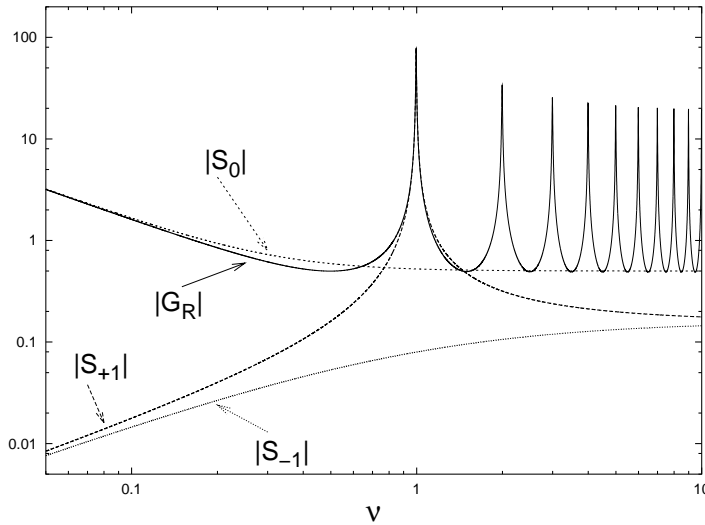


FIG. 2.13 – Comparaison de la fonction  $|G_R(\nu)|$  et des fonctions  $|S_{-1}|$ ,  $|S_0|$  et  $|S_{+1}|$  pour  $R = 0.95$ .

figure 2.14 est représentée en trait plein l'évolution de la fréquence de la résonance  $\nu_R$  en fonction du coefficient de réinjection de la cavité. La fréquence de résonance s'éloigne de l'unité lorsque la finesse de la cavité du laser diminue.

Calculons maintenant la fréquence de la résonance au seuil. Seules les étapes importantes du calcul vont être mentionnées dans ce paragraphe. Les détails peuvent être trouvés dans l'annexe B. Comme la fréquence de résonance est proche de l'unité, nous pouvons considérer que la structure spatiale de  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta, \tau)$  peut être approximée par une sinusoïde de fréquence spatiale égale à un. La fonction de transfert est donc simplement la somme de  $S_{+1}(\nu)$  et  $S_{-1}(\nu)$ . Cependant, comme on peut le constater sur la figure 2.13, aux alentours de  $\nu = 1$ ,  $S_{-1}$  est négligeable par rapport à  $S_{+1}$ . Au final, lorsque la fréquence est proche de la fréquence unité,  $G_R(\nu)$  peut être approximé par  $S_{+1}(\nu)$  si bien que

$$G_R(\nu) = \frac{C_1(\nu)}{i2\pi [C_1(\nu) - i2\pi]} \quad (2.31)$$

Chercher la fréquence de la résonance revient à chercher le maximum du module de  $G_R(\nu)$  au voisinage de  $\nu = 1$ . A partir de la relation (2.31), le module carré de  $G_R(\nu)$  va s'écrire sous la forme suivante

$$|G_R(\nu)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{A(\nu)}{B(\nu)} \quad (2.32)$$

où  $A(\nu)$  et  $B(\nu)$  sont des fonctions polynômiales de  $\nu$  données en annexe B. Sachant que la résonance se trouve autour de  $\nu = 1$ , on effectue le changement de variables

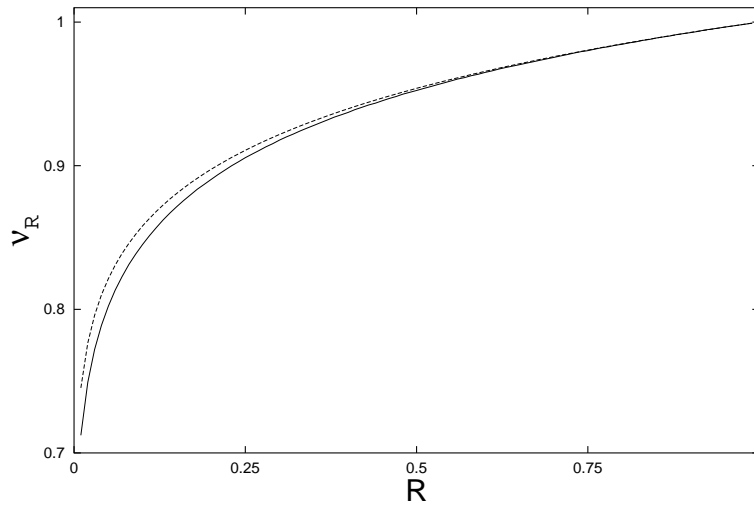


FIG. 2.14 – Evolution de la fréquence de résonance  $\nu_R$  au seuil en fonction du coefficient de réinjection de la cavité : la courbe en trait plein est obtenue par simulation numérique La courbe en pointillés est obtenue grâce à l'expression approximée (2.33).

$\varepsilon = \nu - 1$  où  $\varepsilon$  représente la faible différence entre la fréquence de résonance et la fréquence unité. La fréquence de résonance  $\nu_R$  sera obtenue en cherchant le maximum du rapport des polynômes  $A(\varepsilon)/B(\varepsilon)$ . Après avoir calculé la dérivée de ce rapport, on montre que  $\nu_R$  est donnée par l'expression

$$\nu_R = 1 - \frac{V}{V^2 + \left(\frac{2\pi}{\ln R}\right)^2} \quad (2.33)$$

où  $V = 1 - \frac{\beta_A}{\ln R} = 1 + \frac{\gamma_A}{\Gamma_c}$

Sur la figure (2.14) est représentée en traits hachurés la fréquence de résonance  $\nu_R$  en fonction du coefficient de réinjection de la cavité  $R$ , et en trait plein l'évolution de la fréquence de la résonance obtenue en cherchant numériquement le maximum de la fonction de transfert. On s'aperçoit que l'accord est d'autant moins bon avec la relation (2.33) que la finesse de la cavité est faible. Ceci provient du fait que la contribution des fonctions  $S_n(\nu)$  d'ordre  $n$  supérieur à 1 n'est plus négligeable lorsque la finesse de la cavité se dégrade.

A haute fréquence ( $\nu > 5$ ), le module de la fonction de transfert oscille autour d'une valeur constante comme on peut le constater sur les figures 2.12. La relation (2.21) se simplifie pour des fréquences normalisées bien supérieures à l'unité et se réduit à l'expression

$$|G_R(\nu)| = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 - 2R \cos(2\pi\nu)}} \quad (2.34)$$

Cette relation nous informe que lorsque  $R$  diminue,  $|G_R|$  suit la même évolution. De plus, lorsque  $R$  tend vers 0,  $|G_R|$  oscillera autour de  $R$  comme on peut le constater sur la figure (2.12 c-2), où  $R$  est égal à 0.15. A haute fréquence, plus la cavité sera de faible finesse et moins les fluctuations du coefficient de réinjection seront transférées efficacement sur l'intensité du champ Stokes.

### 2.2.1.3 Fonction de transfert au delà du seuil

Au dessus du seuil, le comportement de la fonction de transfert se modifie suivant le niveau de pompage comme l'illustrent les courbes de la figure 2.15 où  $R = 0.36$  et  $R = 0.95$ . A basse fréquence, la réponse linéaire du laser n'est plus analogue à celle

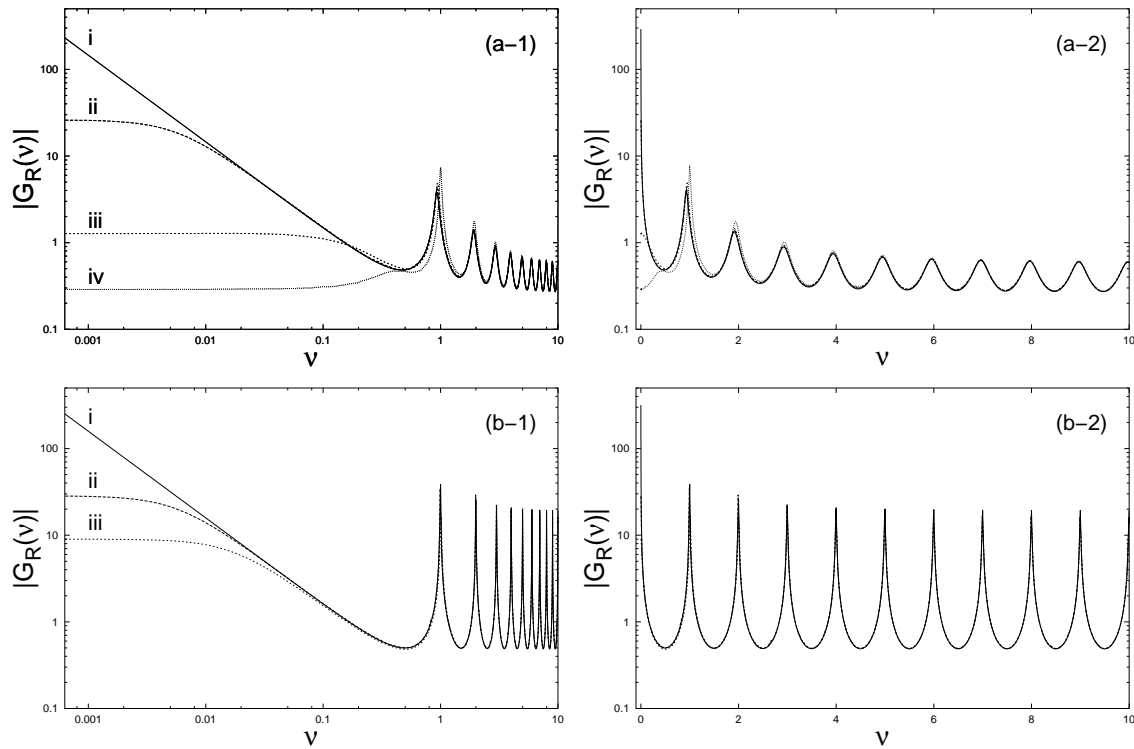


FIG. 2.15 – Représentation de  $|G_R(\nu)|$  pour plusieurs niveaux de pompage  $\mu/\mu_{thr}$  ( $g = 6.04$  et  $\beta_A = 10.93$ ). Les courbes sont représentées en échelles logarithmiques (colonne de gauche, graphe 1) et semi-logarithmiques (colonne de droite, graphe 2) pour deux valeurs de  $R$  :  $R = 0.36$  (graphe a) et  $R = 0.95$  (graphe b). Les courbes en trait plein (i) sont obtenues grâce à l'équation (2.21) caractérisant  $|G_R(\nu)|$  au seuil.  $R = 0.36$  : les courbes (ii), (iii) et (iv) en pointillés sont obtenues par simulation numérique pour des taux de pompages  $\mu/\mu_{thr}$  respectivement égaux à 1.01, 1.20 et 2.00.  $R = 0.95$  : les courbes (ii) et (iii) sont obtenues par simulation numérique pour des valeurs de  $\mu/\mu_{thr}$  respectivement égales à 1.20 et 5.00.

d'un intégrateur parfait mais à celle d'un filtre passe-bas. La valeur de la fonction de transfert est maintenant constante sur une plage spectrale d'autant plus large que le laser oscille loin du seuil. La valeur  $|G_R(\nu \simeq 0)|$  de la fonction de transfert sur cette plage spectrale est en outre d'autant plus faible que  $\mu/\mu_{thr}$  est élevé. La valeur analytique de  $|G_R(\nu \simeq 0)|$  est obtenue après une série de calculs assez lourds qui est développée en annexe C du mémoire. Nous nous contenterons d'en présenter les étapes importantes dans la suite de ce paragraphe. La détermination du module de la fonction de transfert  $|G_R(\nu)|$  à basse fréquence est obtenue à partir de développements polynômiaux des profils d'intensité stationnaire et des variations relatives d'amplitude du champ Stokes. Nous réalisons tout d'abord le changement de variable suivant :

$$\widetilde{\delta B}_s(\zeta, \nu) = \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu) - \zeta \cdot \widetilde{\delta R}(\nu) \quad (2.35)$$

Ce changement de variable est identique à celui utilisé pour la détermination de la fréquence de la résonance (page 72). La condition de bouclage (2.12b) se modifie et acquiert la périodicité spatiale donnée par la relation

$$\widetilde{\delta B}_s(\zeta = 0, \nu) = \widetilde{\delta B}_s(\zeta = 1, \nu) \quad (2.36)$$

Reprenons le modèle d'équations sur les variations relatives d'amplitude (2.10). Dans l'espace de Fourier, celui-ci se simplifie lorsque la fréquence est petite ( $\nu \ll 1$ ) (voir annexe C), ce qui nous permet d'écrire que le comportement de  $\widetilde{\delta B}_s(\zeta, \nu)$  est régi par l'équation

$$\frac{d\widetilde{\delta B}_s(\zeta)}{d\zeta} = -2g I_s(\zeta) \left( \widetilde{\delta B}_s(\zeta) + \zeta \widetilde{\delta R} \right) + C_R \quad (2.37)$$

où  $C_R$  est une constante d'intégration indépendante de  $\zeta$ .

Au voisinage de  $\zeta = 0$  et de  $\zeta = 1$ ,  $\widetilde{\delta B}_s(\zeta)$  peut être approximé par des polynômes fonction de  $\zeta$ .

$$\widetilde{\delta B}_{s0}(\zeta) = \widetilde{\delta B}_s(0) + a_1\zeta + \frac{a_2}{2}\zeta^2 + \frac{a_3}{6}\zeta^3 + \frac{a_4}{24}\zeta^4 \quad (2.38a)$$

$$\widetilde{\delta B}_{s1}(\zeta) = \widetilde{\delta B}_s(1) + b_1(\zeta - 1) + \frac{b_2}{2}(\zeta - 1)^2 + \frac{b_3}{6}(\zeta - 1)^3 + \frac{b_4}{24}(\zeta - 1)^4 \quad (2.38b)$$

où les facteurs  $a_i$  et  $b_i$  sont des inconnus. On peut de même écrire l'intensité du champ Stokes  $I_s(\zeta)$  sous forme de polynômes de  $\zeta$  au voisinage de  $\zeta = 0$  et de  $\zeta = 1$

$$I_{s0}(\zeta) = I_s(0) + \alpha_1\zeta + \frac{\alpha_2}{2}\zeta^2 + \frac{\alpha_3}{6}\zeta^3 \quad (2.39a)$$

$$I_{s1}(\zeta) = I_s(0) + \beta_1(\zeta - 1) + \frac{\beta_2}{2}(\zeta - 1)^2 + \frac{\beta_3}{6}(\zeta - 1)^3 \quad (2.39b)$$

Les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont connus car le profil stationnaire de l'intensité du champ Stokes peut être déterminé analytiquement (voir chapitre 1, eqs. (1.37)). Les expressions de ces facteurs sont données dans l'annexe C. Il est nécessaire de développer les formes polynômiales (2.38a), (2.38b), (2.39a) et (2.39b) de  $\widetilde{\delta B}_s(\zeta)$  et  $I_s(\zeta)$  au minimum à l'ordre quatre en  $\zeta$  pour pouvoir effectuer les calculs nous permettant de déterminer  $|G_R(\nu \simeq 0)|$ . Elles sont injectées dans l'équation (2.37) ce qui nous permet d'obtenir des relations entre les  $a_i$  et les  $\alpha_i$ , de même qu'entre les  $b_i$  et  $\beta_i$ .  $C_R$  est déterminé en imposant comme conditions qu'en  $\zeta = 1/2$ , les fonctions  $\widetilde{\delta B}_{s0}$  et  $\widetilde{\delta B}_{s1}$  se raccordent de sorte qu'elles sont non seulement égales mais que leurs dérivées premières et secondes le sont aussi. Nous trouvons au final que le module de la fonction de transfert s'écrit

$$|G_R(\nu \simeq 0)| = \left| \frac{\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0)}{\widetilde{\delta R}} \right| = \frac{g/2 + M/D}{I_s(0) - N/D} \quad (2.40)$$

où M, N et D sont des fonctions polynômiales de  $I_s(\zeta = 0)$  dont les coefficients sont donnés en annexe C. La figure (2.16) permet de comparer l'évolution de  $|G_R(\nu \simeq 0)|$  donnée par la relation (2.40) à celle résultant de l'intégration des équations. Cette évolution est présentée en fonction du rapport  $\mu/\mu_{thr}$  et est donnée pour deux valeurs du coefficient de réinjection R (R = 0.36 sur la figure (2.16.a) et R = 0.95 sur la figure (2.16.b)). On s'aperçoit que les résultats analytiques et numériques sont en accord sur une plage de  $\mu/\mu_{thr}$  bien plus importante pour R = 0.95. Ceci s'explique par le fait que la relation analytique (2.40) est obtenue à partir d'un calcul basé sur le développement polynômial en  $\zeta$  de l'intensité du champ stationnaire  $I_s(\zeta)$ . Ce développement est d'autant plus juste que la dépendance spatiale du profil stationnaire  $I_s(\zeta)$  est moins prononcée. Celle-ci étant bien plus faible lorsque la

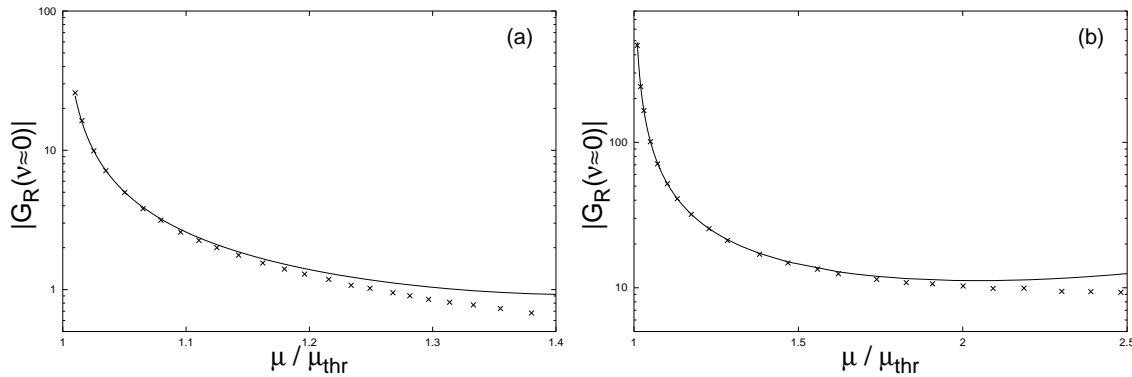


FIG. 2.16 – Valeur à basse fréquence  $|G_R(\simeq 0)|$  de la fonction de transfert pour deux coefficients de réinjection de la cavité (R = 0.36 (a) et R = 0.95 (b)). Les courbes en trait plein sont obtenues à l'aide de la relation (2.40). Les croix sont obtenues par intégration numérique des équations du modèle cohérent (Eqs. (2.6)).

cavité est de finesse élevée, l'approximation polynômiale est bien meilleure quand  $R = 0,95$  que lorsque  $R = 0,36$ .

Loin du seuil, la fonction  $|G_R(\nu)|$  présente des fréquences de résonance légèrement différentes de celles enregistrées au seuil. L'évolution de la fréquence de résonance en fonction du rapport  $\mu/\mu_{thr}$  est présentée sur la figure (2.17) pour deux valeurs de coefficient de réinjection  $R$  ( $R = 0,36$  (a) et  $R = 0,95$  (b)). Elle est obtenue à l'aide de simulations numériques. Le déplacement de la fréquence de résonance par rapport à sa fréquence au seuil est d'autant plus faible que la cavité est de finesse élevée.

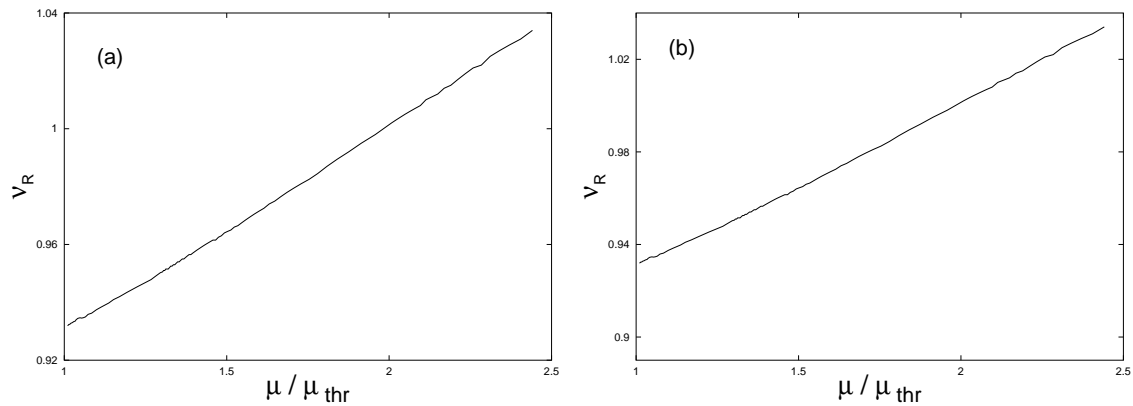


FIG. 2.17 – Evolution de la fréquence de la résonance en fonction du rapport  $\mu/\mu_{thr}$  :  $R = 0,36$  (a) et  $R = 0,95$  (b).

Pour conclure cette partie, rappelons les résultats théoriques importants que nous venons d'obtenir pour la fonction de transfert  $|G_R(\nu)|$ . Nous avons tout d'abord étudié cette dernière au seuil du laser Brillouin. Nous avons déterminé son expression analytique. Nous avons montré qu'à basse fréquence,  $|G_R(\nu)|$  se comporte comme un intégrateur parfait tandis qu'à haute fréquence, la fonction de transfert tend vers une valeur égale à  $R$ . De plus, on note la présence d'une résonance et de ses harmoniques autour des fréquences multiples entiers de l'intervalle spectral libre de la cavité. Au delà du seuil d'oscillation, la fonction de transfert se modifie notablement uniquement à basse fréquence. En effet, sur toute une plage de basses fréquences, la valeur de  $|G_R(\nu)|$  est constante. Nous avons enfin constaté que la fréquence de résonance évolue linéairement mais faiblement en fonction du rapport  $\mu/\mu_{thr}$ .



## 2.2.2 Expérience

Après avoir déterminé théoriquement les principales caractéristiques de  $|G_R|$ , nous allons maintenant chercher à valider expérimentalement notre étude théorique. Nous allons tout d'abord expliciter la démarche nous permettant de déterminer expérimentalement  $|G_R|$ . Une description du dispositif expérimental sera ensuite donnée. Nous présenterons enfin les résultats expérimentaux que nous comparerons avec ceux obtenus théoriquement.

### 2.2.2.1 Principe

Pour obtenir une fonction de transfert, il faut déterminer comment les fluctuations d'une source de bruit donnée se répercutent sur l'intensité du champ laser. Pour ce faire, une faible modulation sinusoïdale de fréquence  $\nu$  est appliquée à l'une des sources de bruit principales (intensité du laser de pompe ou coefficient de réinjection de la cavité dans le cas du laser Brillouin) avec un indice de modulation  $m_x$ . La modulation est transférée sur l'intensité du laser. Cette dernière sera légèrement modulée avec un indice de modulation  $m_y$ . Le rapport des indices de modulation  $m_y/m_x$  est la valeur de la fonction de transfert à la fréquence de modulation  $\nu$ . Pour obtenir la fonction de transfert, il suffit de recommencer l'expérience sur une plage appropriée de fréquences de modulation. Cette méthode est couramment employée pour déterminer une fonction de transfert de manière expérimentale [Taccheo et al., 1998a], [Lee et al., 1998].

### 2.2.2.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé est représenté sur la figure (2.18). Il comporte un dispositif de pompage, un laser Brillouin ainsi qu'un système de modulation et de détection. Le système de pompage est constitué d'un laser à argon ionisé (COHERENT Innova 400-20) et d'un laser Saphir-Titane (COHERENT 899-29). Le laser à argon ionisé émet un rayonnement continu d'une puissance de 15 W. Il pompe un laser Saphir-Titane monomode longitudinal. Celui-ci émet un rayonnement linéairement polarisé à 810 nm, de puissance élevée (2 W) et de largeur spectrale étroite (inférieure à 500 kHz). Le faisceau délivré par le laser Saphir-Titane traverse un isolateur de Faraday (Gsänder DL11) transmettant 95 % de la puissance de la pompe. Toute onde retour, pouvant en particulier provenir du laser Brillouin, subit une atténuation de 30 dB, ce qui l'empêche de perturber de manière significative le laser Saphir-Titane. Le laser Brillouin est constitué d'une cavité comportant un bras aérien d'une longueur d'environ 50 cm. Le faisceau de pompe est couplé dans une fibre optique après une réflexion sous une incidence de  $45^\circ$  sur la séparatrice  $S_1$ .

L'injection du rayonnement de pompe dans la fibre s'effectue au moyen d'un objectif de microscope (de grossissement  $\times 20$  et ouverture numérique 0.25). La puissance optique injectée dans la fibre est d'environ 120 mW. Un objectif de microscope identique est également placé à l'autre extrémité de la fibre de façon à permettre l'injection du rayonnement Stokes dans la fibre. La fibre optique est monomode et à maintien de polarisation. Son extrémité d'entrée est positionnée de telle façon que l'un de ses axes propres soit parallèle à la direction de polarisation du laser de pompe. La polarisation rectiligne est ainsi maintenue tout le long de la fibre, et l'extrémité de sortie est orientée de façon à ce que le même axe propre soit parallèle à la direction de polarisation du rayonnement incident. Dans le résonateur en anneau ainsi réalisé, les champs de pompe et Stokes demeurent linéairement polarisés. Ceci permet d'éviter que des instabilités de polarisation apparaissent [Randoux et al., 1997]. L'insertion d'une séparatrice  $S_2$  permet d'extraire une partie du champ Stokes de la cavité. La longueur de la fibre est de 12 m. L'intervalle spectral libre de la cavité est d'environ 17 MHz. Cette valeur est comparable à la largeur de la bande de diffusion Brillouin qui est d'environ 60 MHz à 810 nm. De ce fait, un seul mode est susceptible d'osciller et l'émission est de type monomode longitudinal. Un isolateur de Faraday est placé entre les séparatrices  $S_1$  et  $S_2$ . Sa présence a pour conséquence d'empêcher l'onde de pompe de se propager plus d'une fois dans la fibre. Les conditions de l'étude expérimentale ainsi entreprise sont donc identiques à l'étude théorique effectuée lors du paragraphe précédent.

Moduler la variable R revient à moduler les pertes de la cavité. Pour cela, un modulateur électro-optique est inséré dans la cavité entre l'isolateur optique et la séparatrice  $S_1$ . Celui-ci est constitué d'un cristal anisotrope qui, sous l'effet d'un champ électrique, subit une modification de ses indices de réfraction. Associé à l'isolateur optique, le modulateur électro-optique permet de moduler les pertes de la cavité de la façon suivante. On positionne le modulateur de telle façon que l'un des axes propres du cristal soit légèrement tourné par rapport à la direction de polarisation du champ Stokes. En appliquant un champ électrique sinusoïdal de fréquence  $\nu_m$ , l'état de polarisation du champ Stokes est légèrement modulé à la fréquence  $\nu_m$  [Yariv, 1997]. L'isolateur de Faraday joue le rôle de polariseur, ne laissant passer que la composante du champ Stokes parallèle à celle de la pompe. A la sortie du laser (après  $S_2$ ), l'intensité Stokes sera légèrement modulée avec un indice de modulation  $m_s$ . Sa polarisation sera toujours parallèle à celle de la pompe. L'intensité de l'onde Stokes  $I_s(t)$  à la sortie du laser peut alors simplement s'écrire

$$I_s(t) = \bar{I}_s [1 + m_s(\nu_m) \sin(2\pi\nu_m t)] \quad (2.41)$$

où  $\bar{I}_s$  représente l'intensité de l'onde Stokes si aucun champ électrique n'est appliqué au modulateur électro-optique.

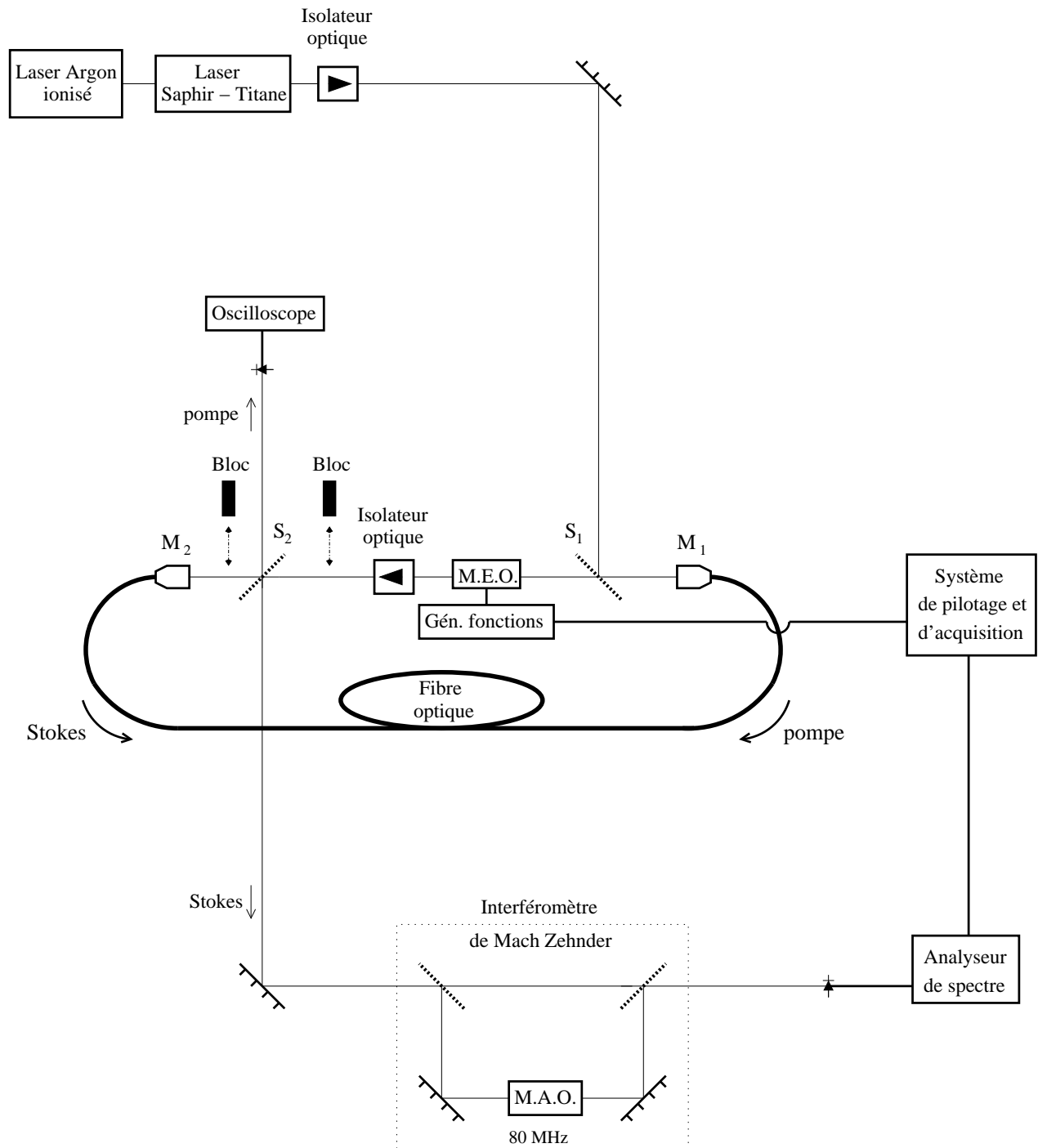


FIG. 2.18 – Représentation schématique du dispositif expérimental permettant de déterminer  $|G_R(\nu)|$ .

Pour déterminer la fonction de transfert  $|G_R(\nu)|$ , il nous faut connaître l'indice de modulation des pertes  $m_R$  appliqué grâce au modulateur électro-optique. Pour ce faire, on peut simplement mesurer la modulation d'intensité vue par un faisceau traversant uniquement le modulateur électro-optique et l'isolateur. A cet effet, on insère un bloc entre l'objectif de microscope  $M_2$  et la séparatrice  $S_2$  (voir figure 2.18). Ceci a pour effet d'empêcher l'oscillation laser. Cependant, une faible part du faisceau de pompe est réfléchiée par l'extrémité d'entrée de la fibre (réflexion de Fresnel). C'est ce faisceau qui va être modulé et qui va nous permettre de connaître l'indice de modulation  $m_R$  des pertes de la cavité que l'on a introduit grâce au modulateur électro-optique et à l'isolateur. L'intensité de ce faisceau lumineux  $I_R(t)$  en sortie d'isolateur optique s'écrit

$$I_R(t) = \overline{I_R} [1 + m_R(\nu_m) \sin(2\pi\nu_m t)] \quad (2.42)$$

où  $\overline{I_R}$  représente l'intensité du faisceau lumineux si aucun champ électrique n'est appliqué au modulateur électro-optique.

Les indices de modulation  $m_R$  et  $m_S$  peuvent simplement être déterminés en réalisant l'analyse spectrale des signaux  $I_R(t)$  et  $I_S(t)$  reçus par une photodiode. Chaque spectre est composé d'un pic central et de deux pics latéraux. L'amplitude du pic central dépend de l'intensité moyenne du champ. Les pics latéraux, de fréquence  $\pm\nu_m$  résultent de la modulation. La différence d'amplitude entre les deux types de pics est caractéristique de l'indice de modulation du signal. Cependant l'analyseur de spectre utilisé dans nos expériences ne permet pas de mesurer la composante continue. On s'affranchit de ce problème en utilisant un interféromètre de Mach-Zehnder incluant un modulateur acousto-optique dans l'un de ses deux bras. Ce système va nous permettre de transposer la totalité du spectre autour d'une fréquence  $\nu_0$  égale à 80 MHz. A la sortie de l'interféromètre de Mach-Zehnder, l'intensité de chaque champ modulé s'écrit

$$I_i(t) = \overline{I_i} [1 + m_i(\nu_m) \sin(2\pi\nu_m t)] \sin(2\pi\nu_0 t) \quad (2.43)$$

où  $i = s, R$ . Les spectres des signaux  $I_S(t)$  et  $I_R(t)$  présentés sur les figures 2.19 (a) et 2.19 (b) dans le cas où  $\nu_0 = 80$  MHz et  $\nu_m = 200$  kHz.

Appelons  $I_0^{dB}$  et  $I_{0m}^{dB}$  les amplitudes respectives du pic central et des pics latéraux. La différence d'amplitude entre les deux pics sera appelée  $\Delta^{dB}$  ( $\Delta^{dB} > 0$ , voir la figure 2.19) où

$$\Delta^{dB} = I_0^{dB} - I_{0m}^{dB} \quad (2.44)$$

$\Delta^{dB}$  est caractéristique de l'indice de modulation  $m_i$ . Pour trouver le lien entre  $\Delta^{dB}$  et  $m_i$ , reprenons la relation (2.43). Dans l'espace de Fourier, celle-ci se met sous la

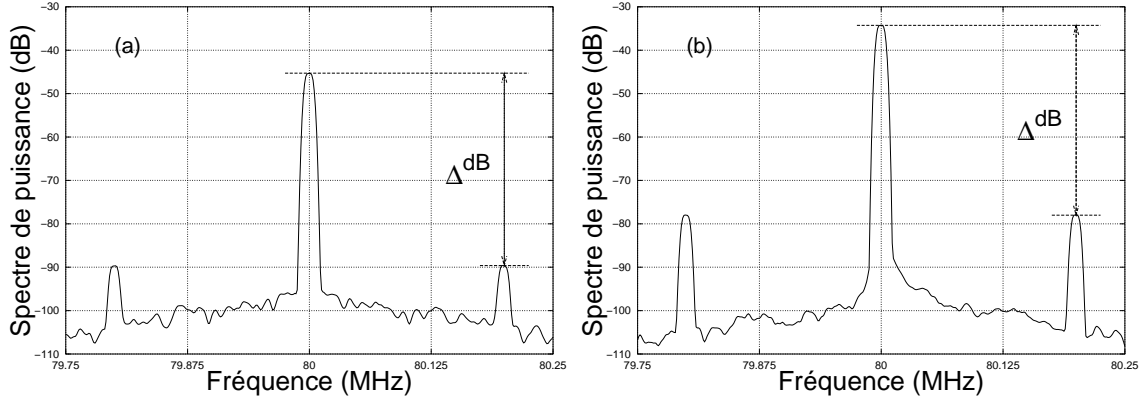


FIG. 2.19 – Exemples expérimentaux de spectres obtenus en modulant (a) l'intensité du faisceau de pompe réfléchi par l'extrémité d'entrée de la fibre (mesure de  $m_R$ ), (b) les pertes de la cavité (mesure de  $m_s$ ).

forme suivante

$$\begin{aligned}
 I_i(\nu) &= \frac{\bar{I}_i}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)] \\
 &+ \frac{m_i \bar{I}_i}{4} [\delta(\nu - (\nu_0 + \nu_m)) + \delta(\nu + (\nu_0 + \nu_m)) \\
 &+ \delta(\nu - (\nu_0 - \nu_m)) + \delta(\nu + (\nu_0 - \nu_m))] \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

Au vu de cette relation (2.45), on remarque que le pic central possède une amplitude  $I_0^{dB}$  égale à  $\bar{I}_i/2$  et que celle d'une bande latérale  $I_{0m}^{dB}$  est égale à  $m_i \bar{I}_i/4$ .  $\Delta^{dB}$  va donc s'écrire

$$\Delta^{dB} = 20 \log\left(\frac{\bar{I}_i}{2}\right) - 20 \log\left(\frac{m_i \bar{I}_i}{4}\right) \quad (2.46)$$

A partir de cette relation (2.46), un rapide calcul nous amène à la relation liant  $m_i$  à  $\Delta^{dB}$

$$m_i = 2.10^{-\frac{\Delta^{dB}}{20}} \quad (2.47)$$

Pour une fréquence de modulation  $\nu_m$ , on mesure la différence d'amplitude  $\Delta^{dB}$  à la fois pour les pertes de la cavité et pour le champ Stokes. On obtient ainsi les indices de modulation  $m_R$  et  $m_s$ . La valeur de la fonction de transfert à la fréquence  $\nu_m$  est donnée par le rapport des indices de modulation  $m_s/m_R$ . Pour obtenir la fonction de transfert sur une plage spectrale voulue, l'acquisition des données a été automatisée grâce à un système informatique contrôlé par le logiciel Labview. Il permet d'obtenir 200 points de mesure en quelques minutes.

L'étude théorique nous a montré que le comportement de la fonction de transfert  $G_R$  dépend très fortement du niveau de pompage du laser. Un moyen simple

d'évaluer celui-ci consiste à mesurer dans quelles proportions le rayonnement de pompe est déplété lors de son passage dans la fibre. Pour ce faire, on utilise une photodiode connectée à l'oscilloscope représenté sur la figure 2.18. On  $\mu/\mu_{thr}$  compare simplement le niveau  $V_1$  détecté lorsque le laser oscille au niveau  $V_0$  lorsque toute oscillation est interdite par l'insertion d'un bloc entre la séparatrice  $S_2$  et l'isolateur intracavité (voir figure 2.18). Pour des raisons de commodité, nous définissons ce «taux de déplétion» comme étant le rapport  $(V_1 - V_0) / V_0$ . Il permet d'estimer le niveau de pompage du laser Brillouin et d'obtenir une valeur approchée de  $\mu/\mu_{thr}$ .

### 2.2.2.3 Résultats expérimentaux

Les expériences ont été réalisées pour différents niveaux de pompage du laser Brillouin. Sur les figures 2.20(a) et 2.20(b) sont présentés en trait plein deux exemples de fonctions de transfert obtenues expérimentalement. Chaque fonction de transfert est composée de 200 points de mesure s'étalant sur une plage de fréquence allant de 20 kHz à 20 MHz. L'indice de modulation  $m_R$  de l'amplitude du coefficient de réinjection est d'environ 0.01 sur les trois décades correspondantes.

La fonction de transfert  $|G_R(\nu)|$  obtenue expérimentalement est représentée en trait plein sur la figure 2.20(a). La fonction de transfert déterminée numériquement est représentée en traits pointillés. Celle-ci a été obtenue en utilisant les paramètres du laser Brillouin usuellement employés dans notre équipe à savoir  $R = 0.36$ ,  $g = 6.04$  et  $\beta_A = 10.93$ . Le paramètre de pompage  $\mu/\mu_{thr}$  a été ajusté de sorte que les résultats numériques et expérimentaux soient les plus proches possibles. La valeur de ce rapport  $\mu/\mu_{thr}$  ainsi déterminée est de 1.093. La fonction de transfert obtenue expérimentalement est très proche de celle trouvée numériquement. De plus, l'accord entre les taux de déplétion obtenus numériquement et expérimentalement (proches de 20 %) nous permet de confirmer la concordance des résultats.

La fonction de transfert obtenue expérimentalement pour un taux de déplétion d'environ 40 % est représentée en trait plein sur la figure 2.20(b). En traits hachurés est tracée la fonction de transfert obtenue numériquement en utilisant les mêmes paramètres  $R$ ,  $g$  et  $\beta_A$  qu'auparavant. Le paramètre de pompage  $\mu/\mu_{thr}$  le mieux indiqué pour faire correspondre les fonctions de transfert théorique et expérimentale est 1.165. Le comportement de la fonction de transfert obtenue expérimentalement est à nouveau en bon accord avec celui trouvé numériquement. On constate bien une diminution de la valeur de la fonction de transfert à basse fréquence lorsque le niveau de pompage augmente. De plus, la concordance entre les taux de déplétion obtenus numériquement et expérimentalement (proches de 40 %) nous permet à nouveau de confirmer l'accord des résultats.

Avant de passer à l'étude de l'influence des fluctuations de l'intensité du laser de pompe, il nous faut faire une remarque au sujet de l'origine du pic observé expérimentalement à 17 MHz. L'étude théorique nous informe de l'existence de résonances à des fréquences proches de multiples de l'intervalle spectral libre de la cavité. On peut aussi observer expérimentalement un pic à l'intervalle spectral libre de la cavité. Cependant, notre cavité n'étant pas asservie, des sauts de modes longitudinaux [Lecoeuche et al., 1996] génèrent un battement à l'intervalle spectral libre sur l'intensité Stokes. L'imprécision de la mesure de la fonction de transfert est ainsi plus importante autour de 17 MHz que pour les autres fréquences.

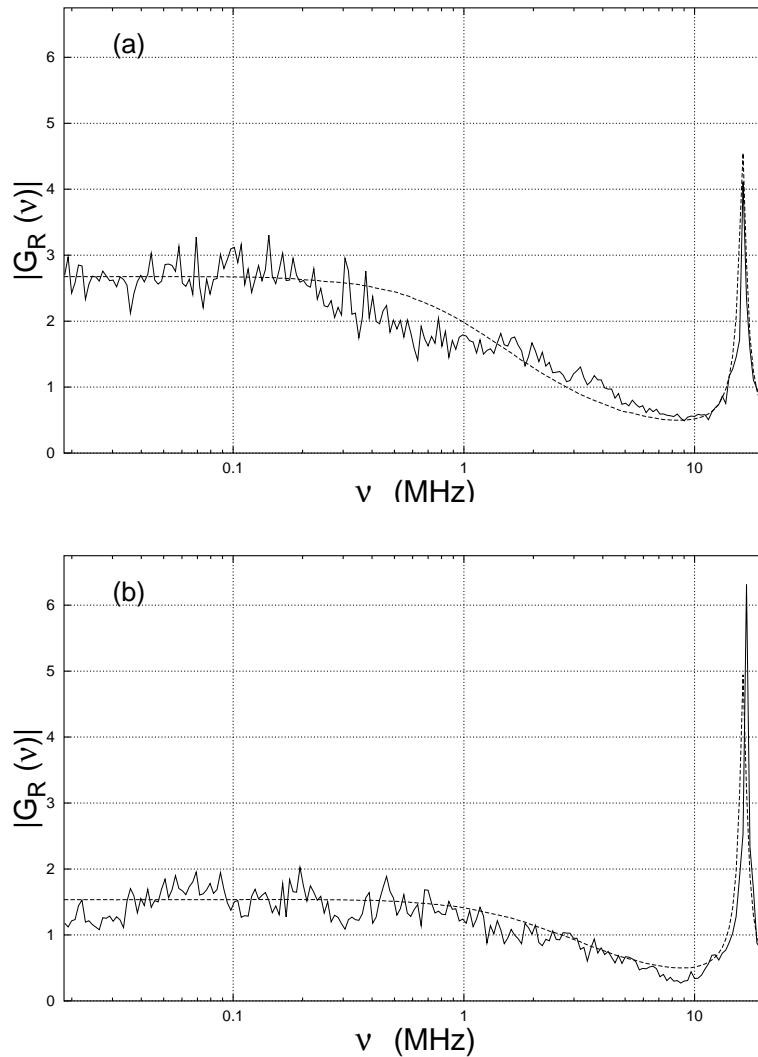


FIG. 2.20 – Fonction de transfert des fluctuations du coefficient de réinjection  $R$  obtenue expérimentalement (trait plein). En traits hachurés est donnée la fonction de transfert déterminée numériquement en utilisant les paramètres  $R=0.36$ ,  $g=6.04$ ,  $\beta_A = 10.93$  et courbe (a) :  $\mu/\mu_{thr} = 1.093$ , courbe (b)  $\mu/\mu_{thr} = 1.165$ .

## 2.3 Fonction de transfert des fluctuations de l'intensité du laser de pompe

### Introduction

La démarche utilisée pour étudier  $G_R$  va être réemployée pour déterminer le comportement de la fonction de transfert  $G_P$  du bruit d'intensité du laser de pompe. Nous allons constater que les deux fonctions de transfert possèdent de nombreuses similitudes, en particulier en ce qui concerne leur comportement à basse fréquence au delà du seuil. Mais elles présentent aussi des différences fondamentales. En effet, nous allons observer en plus de formes de résonances très différentes, l'existence d'antirésonances. Suivant une démarche analogue à celle précédemment employée, nous étudierons les caractéristiques essentielles de  $G_P$  sur le plan théorique. Puis nous confronterons nos résultats à l'expérience.

### 2.3.1 Théorie

#### 2.3.1.1 Modèle

##### Modèle linéarisé sur les variations relatives d'amplitude des champs

Comme nous l'avons déjà expliqué au paragraphe 2.1.3.2, le bruit d'intensité du laser de pompe est transféré au rayonnement Stokes émis par le laser Brillouin. Pour déterminer la fonction de transfert  $G_P$  correspondante, nous utilisons le même modèle que celui employé pour caractériser  $G_R$ , à savoir le système d'équations linéarisées basé sur les variations relatives d'amplitude rappelé ci dessous :

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \zeta} = g I_s(\zeta) \left( \widetilde{\delta A}_p - \widetilde{\delta A}_a - \widetilde{\delta A}_s \right) \quad (2.48a)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \widetilde{\delta A}_s}{\partial \zeta} = g I_p(\zeta) \left( \widetilde{\delta A}_p + \widetilde{\delta A}_a - \widetilde{\delta A}_s \right) \quad (2.48b)$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial \widetilde{\delta A}_a}{\partial \tau} = \widetilde{\delta A}_p + \widetilde{\delta A}_s - \widetilde{\delta A}_a \quad (2.48c)$$

Ces équations ont été obtenues à partir de la linéarisation des équations d'amplitude du modèle cohérent à trois ondes. On rappelle que  $\widetilde{\delta A}_p$ ,  $\widetilde{\delta A}_s$  et  $\widetilde{\delta A}_a$  sont respectivement les variations relatives d'amplitude des ondes de pompe, Stokes et acoustique (voir chapitre 1).



### Conditions de bouclage

Des conditions de bouclage appropriées doivent être adjointes au système d'équations (2.48). A l'instar de  $G_R$ , la fonction caractérisant le transfert du bruit d'intensité du laser de pompe sera déterminée dans le cas où le champ de pompe n'effectue qu'un seul passage dans la fibre. On considère que l'amplitude du laser de pompe fluctue maintenant dans le temps d'une quantité  $\delta\mu(\tau)$  autour d'une valeur moyenne  $\mu$  (cf. Eq. (2.49a)). Par ailleurs, le champ Stokes oscille dans une cavité caractérisée par le coefficient de réinjection  $R$  maintenant constant. Les conditions de bouclage sur l'amplitude du champ de pompe  $A_p(\zeta, \tau)$  et du champ Stokes  $A_s(\zeta, \tau)$  vont donc s'écrire

$$A_p(\zeta = 0, \tau) = \mu + \delta\mu(\tau), \quad (2.49a)$$

$$A_s(\zeta = 1, \tau) = RA_s(\zeta = 0, \tau). \quad (2.49b)$$

Pour rendre ces conditions de bouclage compatibles avec le système d'équations (2.48), il nous faut réaliser un changement de variables pour passer des amplitudes de champ  $A_i(\zeta, \tau)$  aux variations relatives d'amplitude des champs  $\widetilde{\delta A}_i(\zeta, \tau)$ . On montre après un simple calcul que les conditions de bouclage sur les variations relatives d'amplitude des champs pompe et Stokes s'écrivent

$$\widetilde{\delta A}_p(\zeta = 0, \tau) = \widetilde{\delta\mu}(\tau), \quad (2.50a)$$

$$\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 1, \tau) = \widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \tau), \quad (2.50b)$$

où  $\widetilde{\delta\mu}(\tau) = \delta\mu(\tau)/\mu$  représente les variations relatives du champ délivré par le laser de pompe.

### Fonction de transfert étudiée

La fonction de transfert  $G_p$  est déterminée en étudiant le lien entre les variations relatives d'intensité du champ de pompe entrant dans la fibre et les variations relatives du champ Stokes sortant de la cavité. La fonction de transfert des fluctuations de l'intensité du pompage sur le laser Brillouin est donc définie par

$$G_P(\nu) = \frac{\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \nu)}{\widetilde{\delta\mu}(\nu)} \quad (2.51)$$

où  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \nu)$  et  $\widetilde{\delta\mu}(\nu)$  sont les transformées de Fourier respectives de  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \tau)$  et de  $\widetilde{\delta\mu}(\tau)$ .

### 2.3.1.2 Fonction de transfert au seuil

Près du seuil d'oscillation du laser Brillouin, l'intensité du champ Stokes  $I_s(\zeta, \nu)$  est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger le membre de droite de l'équation (2.48a). Celle-ci se réécrit donc simplement

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \zeta} = 0. \quad (2.52)$$

Au voisinage du seuil, une faible fluctuation de l'amplitude du champ de pompe parcourt la fibre sans être affectée. Au vu de la condition de bord (2.50a), on peut en déduire la relation suivante

$$\widetilde{\delta A}_p(\zeta, \tau) = \widetilde{\delta \mu}(\tau - \zeta). \quad (2.53)$$

Par ailleurs, nous avons vu au chapitre 1 que lorsque le champ de pompe n'est pas rebouclé dans la cavité, son intensité stationnaire  $I_p(\zeta)$  au seuil vaut  $-\ln R/g$  [Randoux et al., 1995b]

$$I_p^{seuil} = \frac{-\ln R}{g} \quad (2.54)$$

Au voisinage du seuil d'oscillation du laser Brillouin, le système d'équations (2.48) peut être écrit grâce aux relations (2.53) et (2.54) sous la forme suivante

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} = -\ln R \left[ \widetilde{\delta \mu}(\tau - \zeta) + \widetilde{\delta A}_a(\zeta, \tau) - \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau) \right] \quad (2.55a)$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial \widetilde{\delta A}_a(\zeta, \tau)}{\partial \tau} = \widetilde{\delta \mu}(\tau - \zeta) + \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau) - \widetilde{\delta A}_a(\zeta, \tau) \quad (2.55b)$$

Dans l'espace de Fourier, il devient

$$i2\pi\nu \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu) - \frac{\partial \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu)}{\partial \zeta} = -\ln R \left[ \widetilde{\delta \mu}(\nu) \cdot e^{-i2\pi\nu\zeta} + \widetilde{\delta A}_a(\zeta, \nu) - \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu) \right] \quad (2.56a)$$

$$\frac{i2\pi\nu}{\beta_A} \widetilde{\delta A}_a(\zeta, \nu) = \widetilde{\delta \mu}(\nu) \cdot e^{-i2\pi\nu\zeta} + \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu) - \widetilde{\delta A}_a(\zeta, \nu) \quad (2.56b)$$

où  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu)$  et  $\widetilde{\delta A}_a(\zeta, \nu)$  sont respectivement les transformées de Fourier des fluctuations relatives des amplitudes des ondes Stokes et acoustique. L'équation (2.56b) nous conduit à l'expression suivante de  $\widetilde{\delta A}_a(\zeta, \nu)$

$$\widetilde{\delta A}_a(\zeta, \nu) = \frac{\beta_A}{\beta_A + i2\pi\nu} \left[ \widetilde{\delta \mu}(\nu) e^{-i2\pi\nu\zeta} + \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu) \right] \quad (2.57)$$

Après avoir introduit l'expression (2.57) dans l'équation (2.56a), on obtient une équation différentielle du premier ordre régissant l'évolution spatiale de la transformée de Fourier des variations relatives de l'amplitude Stokes  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu)$  :

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu)}{\partial \zeta} = C_1(\nu) \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu) - C_2(\nu) \widetilde{\delta \mu}(\nu) e^{-i2\pi\nu\zeta} \quad (2.58)$$

$$\text{où } C_1(\nu) = i2\pi\nu \left( 1 - \frac{\ln R}{\beta_A + i2\pi\nu} \right), \quad (2.59a)$$

$$C_2(\nu) = -\ln(R) \left( \frac{2\beta_A + i2\pi\nu}{\beta_A + i2\pi\nu} \right). \quad (2.59b)$$

L'équation de bouclage (2.50b) nous permet de résoudre l'équation (2.58) et de trouver la fonction de transfert  $G_P(\nu)$  qui s'écrit finalement

$$G_P(\nu) = \frac{C_2(\nu)}{C_1(\nu) + i2\pi\nu} \frac{\exp(C_1(\nu)) - \exp(-i2\pi\nu)}{\exp(C_1(\nu)) - 1}. \quad (2.60)$$

Le module  $|G_P(\nu)|$  de cette fonction est représenté sur la figure 2.21 pour trois valeurs du coefficient de réinjection  $R$  : 0.95, 0.36 et 0.15, et pour les valeurs habituelles de nos paramètres à savoir  $g = 6, 04$ ,  $\beta_A = 10, 93$ .

Pour des fréquences normalisées bien inférieures à l'unité ( $\nu < 0.5$ ), lorsque la fréquence est multipliée d'un facteur 10, la valeur de la fonction de transfert est divisée par 10. L'expression (2.60) se simplifie au moyen d'un développement limité au premier ordre des trois exponentielles et peut être approximée par

$$|G_P(\nu)| = \frac{|\ln(R^2)|}{2\pi\nu(1 + \frac{\Gamma_c}{\gamma_A})}. \quad (2.61)$$

Comme pour  $G_R(\nu)$ , le système Brillouin se comporte à basse fréquence comme un intégrateur parfait lors du transfert des fluctuations d'intensité du laser de pompe.

$$\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \tau) = \frac{|\ln(R^2)|}{1 + \frac{\Gamma_c}{\gamma_A}} \int_{-\infty}^{\tau} \widetilde{\delta \mu}(\tau') d\tau'. \quad (2.62)$$

Cependant, la constante d'intégration est maintenant  $(1 + \Gamma_c/\gamma_A)/|\ln(R^2)|$ . Dans les cavités de très bonne finesse,  $\ln(R^2)$  est proche de zéro et  $|G_P(\nu)|$  peut donc être très faible. Le laser Brillouin peut donc être beaucoup moins bruyant que son laser de pompe.

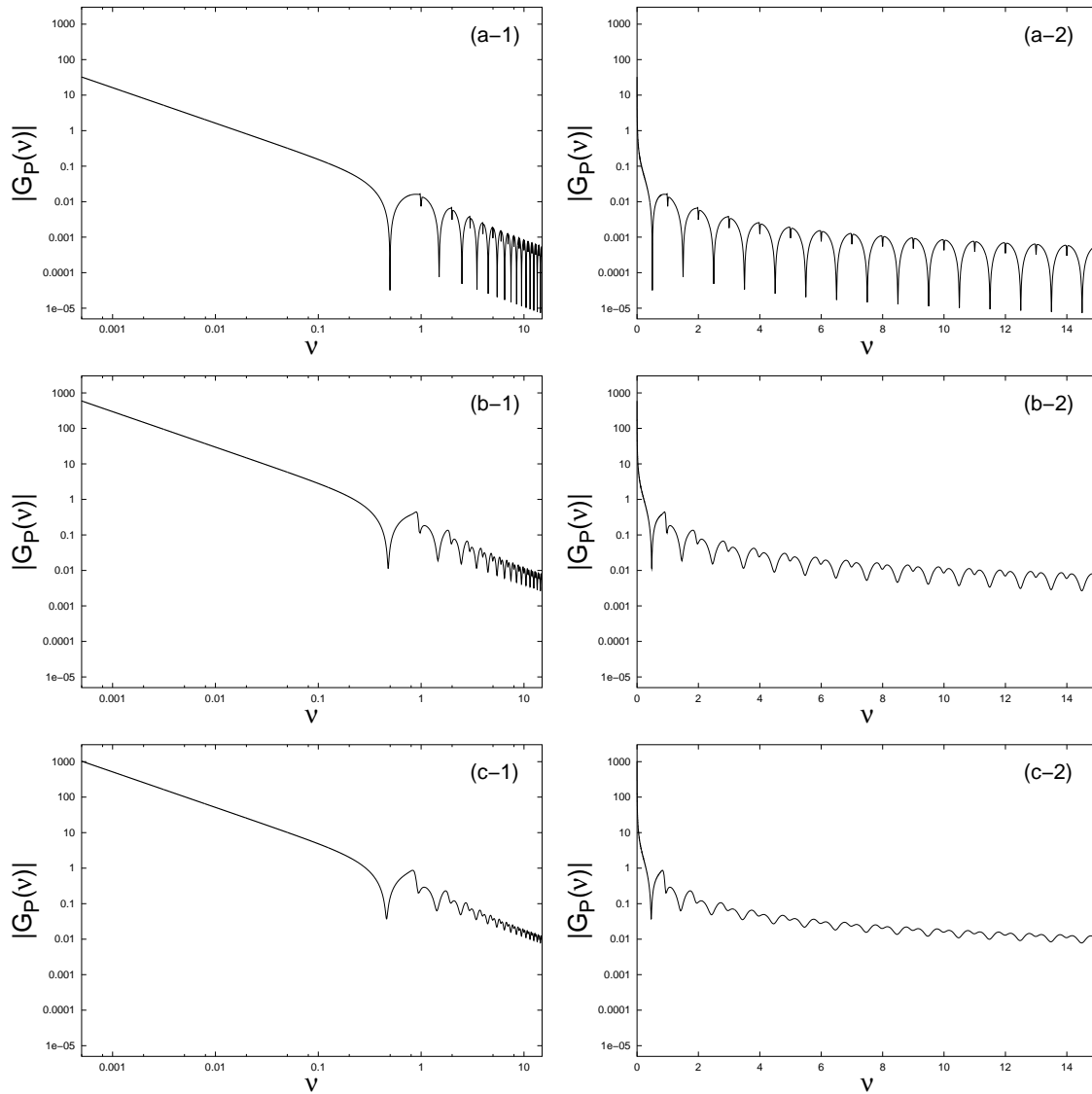


FIG. 2.21 – Représentation de  $|G_P(\nu)|$  au seuil. Les fonctions représentées sont obtenues grâce à l'équation (2.60) ( $g = 6.04$  et  $\beta_A = 10.93$ ). Elles sont représentées en échelles logarithmiques (colonne de gauche, graphe 1) et semi-logarithmiques (colonne de droite, graphe 2) pour trois valeurs de  $R$  :  $R = 0.95$  : (a-1), (a-2);  $R = 0.36$  : (b-1), (b-2);  $R = 0.15$  : (c-1), (c-2).

## Résonances et antirésonances de $G_P$

### Résonance de la fonction de transfert $G_P$

De même que pour la fonction de transfert  $G_R$ ,  $G_P$  présente des résonances à des fréquences voisines de multiples entiers de l'intervalle spectral libre (voir la figure 2.21). Ces résonances proviennent du terme  $[e^{C_1} - 1]$  au dénominateur des expressions (2.21) et (2.60). Cependant la forme des résonances de  $G_P$  est bien différente de celles de  $G_R$ . En plus de résonances,  $G_P$  présente des antirésonances qui s'expriment dans la forme analytique (2.60) par la présence au numérateur du terme  $[e^{C_1} - e^{-i2\pi\nu}]$ . Ces antirésonances apparaissent aux fréquences multiples de la moitié de l'intervalle spectral libre. De ce fait, aux fréquences voisines de multiples entiers de l'intervalle spectral libre de la cavité, les effets de la résonance et de l'antirésonance s'ajoutent. Dans les cavités de haute finesse, les effets se compensent quasiment, si bien que seul un petit pic est observé à ces fréquences (Fig. 2.21(a-1)). Avant d'aborder le calcul de la fréquence de résonance, nous allons expliquer l'origine des antirésonances.

### Antirésonance de la fonction de transfert $G_P$

L'existence de ces antirésonances est avant tout liée à la condition de bouclage sur  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau)$  donnée par l'équation (2.50b). Pour expliquer ceci, considérons que le laser de pompe est faiblement modulé à la fréquence  $\nu_0$  de sorte que  $\widetilde{\delta A}_p(\zeta = 0, \tau) = a_p \sin(2\pi\nu_0\tau)$ . Près du seuil d'oscillation du laser Brillouin, cette faible modulation se propage dans la fibre sous la forme d'une onde sinusoïdale progressive, si bien que :

$$\widetilde{\delta A}_p(\zeta, \tau) = a_p \sin(2\pi\nu_0[\tau - \zeta]) \quad (2.63)$$

Cette onde ne va pas induire comme variation du champ Stokes  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau)$  une onde progressive. Du fait des conditions de bord (2.50b),  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau)$  est nécessairement une onde stationnaire et s'écrit sous la forme

$$\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau) = a_s(\nu_0) \sin(2\pi\nu_0\tau + \phi(\nu_0)) \left( s_0(\nu_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(\nu_0) \sin(n\pi\zeta) \right). \quad (2.64)$$

La cavité joue le rôle de filtre en sélectionnant les fréquences spatiales. Si la fréquence  $\nu_0$  correspond à une fréquence multiple de  $\nu = 1/2$ ,  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau)$  ne sera composée que d'une seule fonction  $s_n$ . Dans le cas contraire,  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau)$  sera constituée d'une infinité de fonctions  $s_n$ . Pour illustrer notre propos, les fonctions  $\widetilde{\delta A}_p(\zeta, \tau)$  et  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau)$  sont présentées à deux instants différents sur la figure 2.22. Que ce soit pour une fréquence de modulation  $\nu_0$  de 0.35 (figures 2.22(a) et 2.22(b)) ou pour  $\nu_0 = 0.5$  (figures 2.22(c) et 2.22(d)),  $\widetilde{\delta A}_p(\zeta, \tau)$  se comporte comme une onde progressive et  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau)$  comme une onde stationnaire. Lorsque la fréquence de modulation est

quelconque (comme c'est le cas pour les figures 2.22(a) et 2.22(b) qui sont obtenues pour  $\nu_0 = 0.35$ ), la fréquence spatiale du champ de pompe ne coïncide pas avec une des fréquences autorisées par la cavité, ce qui entraîne que  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta, \tau)$  est composé de plusieurs fonctions  $s_n$  non nulles. En particulier, si  $s_0$  est différent de 0, la relation (2.64) montre que  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta = 0, \tau)$  est non nul et que  $|G_P|$  est donc différent de 0. Par contre, lorsque  $\nu_0$  correspond à une fréquence harmonique de la fréquence  $\nu = 1/2$  (comme c'est le cas des figures 2.22(c) et 2.22(d) qui sont obtenues pour  $\nu_0 = 0.5$ ),  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta, \tau)$  n'est composée que par une seule fonction  $s_n$  non nulle ( $n=1$  dans notre exemple).  $s_0$  est nul, ce qui entraîne le fait que  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta = 0, \tau)$  est nul. La présence d'antirésonances peut donc être observée pour toutes les fréquences harmoniques de la fréquence  $\nu = 1/2$ . La cavité filtre les fréquences multiples de la moitié de l'intervalle spectral libre de la cavité, ce qui engendre l'apparition d'antirésonances.

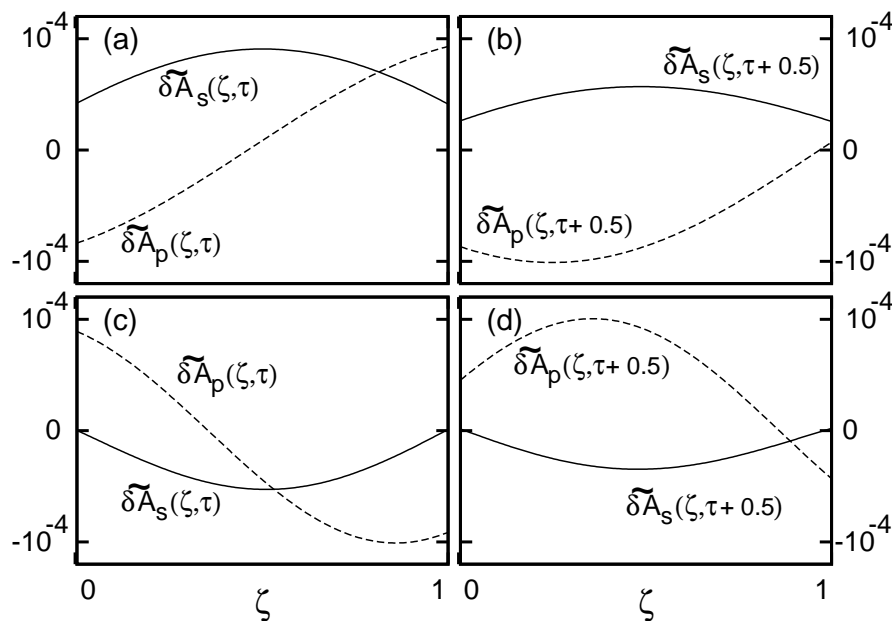


FIG. 2.22 – Profil spatial des variations relatives d'amplitude de la pompe et de la Stokes obtenus à deux instants différents pour une modulation de fréquence  $\nu_0 = 0.35$  (figures (a) et (b)) et pour une modulation de fréquence  $\nu_0 = 0.5$  (figures (c) et (d)). Les paramètres utilisés pour cette simulation sont  $R=0.36$ ,  $g=6.04$ ,  $\beta_A = 10.93$  et  $\mu/\mu_{thr} = 1.02$ .

### Fréquence de la résonance

La détermination de la fréquence de résonance de  $|G_P|$  s'effectue de la même façon que pour  $|G_R|$ . Cependant, la condition de bouclage (2.50b) montre que la fonction  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta, \tau)$  présente une périodicité spatiale rendant inutile l'introduction d'un changement de variables. De ce fait, des solutions à l'équation différentielle (2.58) peuvent être immédiatement cherchées sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta A_s}(\zeta, \nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n(\nu) . e^{ik_n \zeta} & (2.65) \\ \text{où } k_n &= 2\pi n \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \\ \text{et } \alpha_n^*(\nu) &= \alpha_{-n}(\nu) \end{aligned}$$

Les fonctions  $e^{ik_n \zeta}$  obéissent à la condition d'orthonormalité suivante :

$$\int_0^1 e^{ik_n \zeta} . e^{-ik_m \zeta} d\zeta = \delta_{n,m} \quad (2.66)$$

En injectant la relation (2.65) dans l'équation (2.58), et en s'appuyant sur la condition d'orthonormalité (2.66), on obtient l'expression suivante pour les fonctions  $\alpha_n(\nu)$  :

$$\alpha_n(\nu) = \frac{C_2(\nu)}{C_1(\nu) - i2\pi n} \text{sinc}[\pi(\nu + n)] . e^{-i\pi(\nu+n)} \widetilde{\delta \mu}(\nu) \quad (2.67)$$

où  $C_1(\nu)$  et  $C_2(\nu)$  sont les coefficient donnés respectivement par les relations (2.59a) et (2.59b). Introduisons l'expression (2.67) dans la relation (2.65). En tenant compte de la condition de bouclage (2.50a) et de la définition de  $G_P(\nu)$  (Eq. (2.51)), on montre que la fonction de transfert s'écrit finalement

$$\begin{aligned} G_P(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_2(\nu)}{C_1(\nu) - i2\pi n} \text{sinc}[\pi(\nu + n)] . e^{-i\pi(\nu+n)} & (2.68) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n(\nu) \end{aligned}$$

De la même façon que pour  $G_R(\nu)$ , chaque fonction  $S_n(\nu)$  contribue de manière prépondérante à la fonction de transfert  $G_P(\nu)$  autour de  $\nu = n$ .

Calculons à présent la fréquence de résonance  $\nu_R$  au seuil. Nous n'aborderons que les principales étapes du calcul. Elles sont similaires à celles du calcul de la fréquence de résonance de  $G_R(\nu)$ . Les détails sont toutefois exposés dans l'annexe B du mémoire.  $\nu_R$  étant proche de l'unité, nous pouvons considérer, comme pour  $G_R(\nu)$ , que la structure spatiale de  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta, \tau)$  peut être approximée par une sinusoïde de fréquence spatiale et temporelle égale à un. La fonction de transfert  $G_P$  est donc

la somme des fonctions  $S_{+1}$  et  $S_{-1}$ . De même que pour  $G_R$ ,  $S_{-1}$  est négligeable devant  $S_{+1}$  autour de  $\nu = 1$ , si bien que  $G_P$  s'écrit

$$G_P(\nu) = \frac{C_2(\nu)}{i2\pi n - C_1(\nu)} \text{sinc}[\pi(\nu + 1)] \cdot e^{-i\pi\nu} \quad (2.69)$$

$\nu_R$  est obtenu en cherchant le maximum du module de  $G_P(\nu)$  au voisinage de  $\nu = 1$ . A partir de la relation (2.69), le module de la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme suivante :

$$|G_P(\nu)|^2 = \frac{(\ln R)^2 A(\nu)}{4\pi^2 B(\nu)} \quad (2.70)$$

où  $A(\nu)$  et  $B(\nu)$  sont des fonctions de  $\nu$  données en annexe B. On effectue le changement de variable  $\varepsilon = \nu - 1$ , ce qui nous permet de trouver que la fréquence de résonance  $\nu_R$  est donnée par la relation

$$\nu_R = \frac{1}{1 - \frac{\ln R}{\beta_A}} = \frac{1}{1 + \frac{\Gamma_c}{\gamma_A}} \quad (2.71)$$

L'évolution de  $\nu_R$  en fonction de  $R$  est représentée sur la figure 2.23. La courbe en trait plein est obtenue par intégration numérique du modèle cohérent à trois ondes, tandis que la courbe en traits pointillés est obtenue à partir de la relation analytique (2.71).

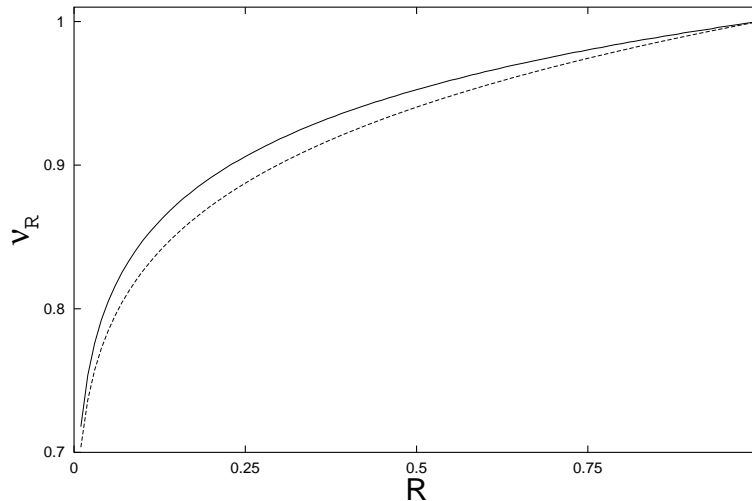


FIG. 2.23 – Evolution de la fréquence de résonance  $\nu_R$  en fonction du coefficient de réinjection de la cavité : la courbe en trait plein est obtenue par simulation numérique. La courbe en pointillés est obtenue grâce à l'expression approximée (2.71).

Aux hautes fréquences ( $\nu > 5$ ),  $|G_P(\nu)|$  décroît comme à basse fréquence d'un facteur 10 lorsque la fréquence est multipliée par 10. Notons cependant la présence



des harmoniques de la résonance et de l'antirésonance comme on peut le constater au vu de la figure 2.21. A haute fréquence, le comportement de  $|G_P|$  est donc différent de celui de  $|G_R|$  (on rappelle que  $|G_R|$  tend vers R quand  $\nu$  tend vers l'infini).

Nous venons de déterminer les différentes caractéristiques de la fonction de transfert  $|G_P(\nu)|$  au seuil d'oscillation du laser Brillouin. Etudions maintenant le comportement de  $|G_P(\nu)|$  lorsque l'on s'éloigne du seuil.

### 2.3.1.3 Fonction de transfert au delà du seuil

Au delà du seuil d'oscillation du laser Brillouin, la fonction de transfert  $|G_P(\nu)|$  dépend du taux de pompage comme on peut l'observer sur la figure 2.24. A basse fréquence, la réponse linéaire du laser n'est plus analogue à celle d'un intégrateur parfait mais à celle d'un filtre passe bas. La plage de fréquence sur laquelle  $|G_P|$  est constant est d'ailleurs d'autant plus grande que le niveau de pompage  $\mu/\mu_{thr}$  croît. La valeur de  $|G_P|$  à basse fréquence (notée  $|G_P(\nu \simeq 0)|$ ) a été obtenue suite à des calculs qui sont exposés en détail dans l'annexe C du mémoire. Les étapes importantes de ceux-ci sont les mêmes que celles rencontrées pour la détermination de  $|G_R(\nu \simeq 0)|$ . Un développement polynômial des profils spatiaux de l'intensité et des variations relatives d'amplitudes du champ Stokes permet d'écrire qu'aux voisinages de  $\zeta = 0$  et  $\zeta = 1$  :

$$I_{s0}(\zeta) = I_s(0) + \alpha_1 \zeta + \frac{\alpha_2}{2} \zeta^2 + \frac{\alpha_3}{6} \zeta^3 \quad (2.72a)$$

$$I_{s1}(\zeta) = I_s(0) + \beta_1(\zeta - 1) + \frac{\beta_2}{2}(\zeta - 1)^2 + \frac{\beta_3}{6}(\zeta - 1)^3 \quad (2.72b)$$

$$\widetilde{\delta A}_{s0}(\zeta) = \widetilde{\delta A}_s(0) + a_1 \zeta + \frac{a_2}{2} \zeta^2 + \frac{a_3}{6} \zeta^3 + \frac{a_4}{24} \zeta^4 \quad (2.73a)$$

$$\widetilde{\delta A}_{s1}(\zeta) = \widetilde{\delta A}_s(1) + b_1(\zeta - 1) + \frac{b_2}{2}(\zeta - 1)^2 + \frac{b_3}{6}(\zeta - 1)^3 + \frac{b_4}{24}(\zeta - 1)^4 \quad (2.73b)$$

Les formes polynômiales (2.72a), (2.72b), (2.73) et (2.73b) doivent être développées au minimum à l'ordre quatre en  $\zeta$  pour pouvoir déterminer  $|G_P(\nu \simeq 0)|$ . Les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont connus car grâce à la solution analytique du profil de  $I_s(\zeta)$  (voir chapitre 1). Leurs valeurs sont données dans l'annexe C.  $a_i$  et  $b_i$  sont par contre inconnus. Par ailleurs, on réécrit le système (2.48) dans l'espace de Fourier (voir annexe C Eqs. (C.16)). Il se simplifie à basse fréquence ( $\nu \ll 1$ ). La dépendance en fréquence disparaît, et le système (2.48) se réduit finalement à l'équation

$$\frac{d\widetilde{\delta A}_s(\zeta)}{d\zeta} = -2g I_s(\zeta) \widetilde{\delta A}_s(\zeta) + C_p \quad (2.74)$$

où  $C_p$  est une constante d'intégration indépendante de  $\zeta$ . En injectant les formes polynômiales de  $I_s(\zeta)$  et de  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta)$  dans l'équation (2.74), on obtient des relations

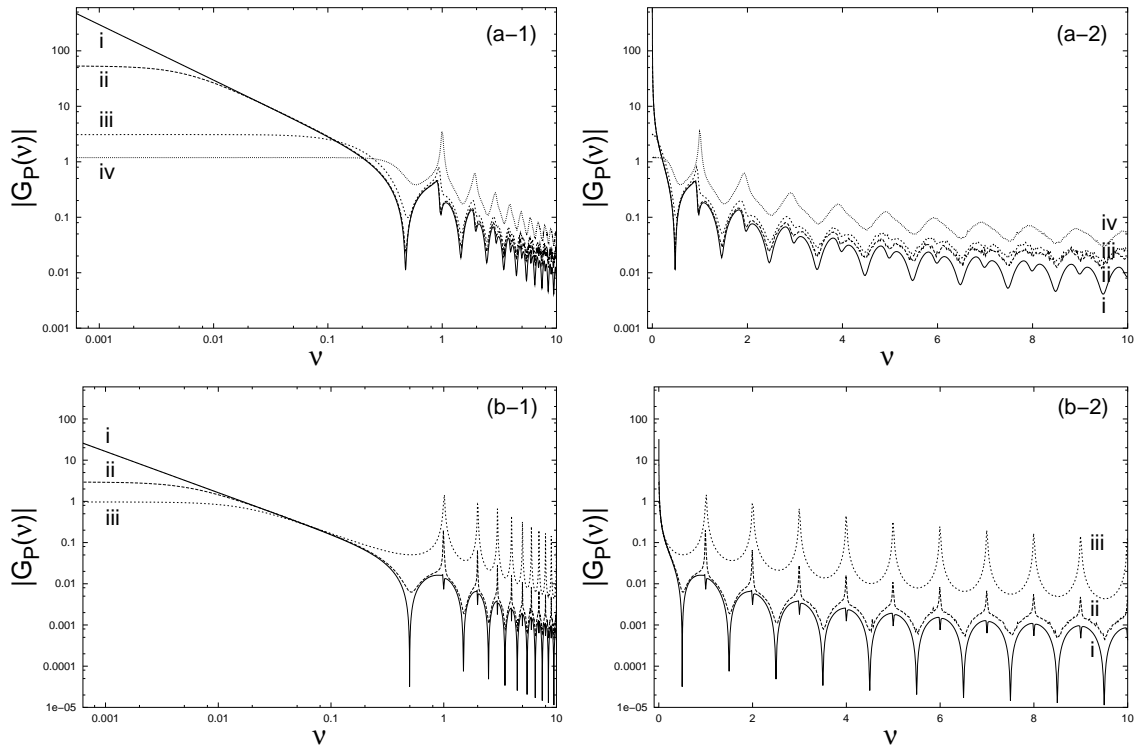


FIG. 2.24 – Représentation de  $|G_P(\nu)|$  pour plusieurs niveaux de pompage  $\mu/\mu_{thr}$  ( $g = 6.04$  et  $\beta_A = 10.93$ ). Les courbes sont représentées en échelles logarithmiques (colonne de gauche, graphe 1) et semi-logarithmiques (colonne de droite, graphe 2) pour deux valeurs de  $R$  :  $R = 0.36$  (graphe a) et  $R = 0.95$  (graphe b). Les courbes en trait plein (i) sont obtenues grâce à l'équation (2.21) caractérisant  $|G_P(\nu)|$  au seuil.  $R = 0.36$  : les courbes (ii), (iii) et (iv) en pointillés sont obtenues par simulation numérique pour des pompage  $\mu/\mu_{thr}$  respectivement égales à 1.01, 1.20 et 2.00.  $R = 0.95$  : les courbes (ii) et (iii) sont obtenues par simulation numérique pour des valeurs de  $\mu/\mu_{thr}$  respectivement égales à 1.20 et 5.00.

entre les  $a_i$  et les  $\alpha_i$ , ainsi qu'entre les  $b_i$  et  $\beta_i$ . On détermine  $C_p$  en imposant comme condition qu'en  $\zeta = 1/2$ , les fonctions  $\widetilde{\delta A_{s_0}}$  et  $\widetilde{\delta A_{s_1}}$  se raccordent de même que leurs dérivées premières et secondes. En remplaçant  $C_p$  par sa valeur dans l'équation (2.74), on trouve que le module de la fonction de transfert s'écrit

$$|G_P(\nu \simeq 0)| = \left| \frac{\widetilde{\delta A_s}(\zeta = 0)}{\widetilde{\delta A_p}(\zeta = 0)} \right| = \frac{\mu^2}{I_s(0) - N/D}. \quad (2.75)$$

où  $N$  et  $D$  sont les mêmes fonctions polynômiales de  $I_s(\zeta = 0)$  que celles rencontrées lors du calcul de  $|G_R(\nu \simeq 0)|$ . L'évolution de  $|G_P(\nu \simeq 0)|$  en fonction de  $\mu/\mu_{thr}$  obtenue à partir de la relation analytique (2.75) est tracée en trait plein sur la figure 2.25. On peut la comparer aux résultats numériques indiqués par des croix sur cette même figure. L'accord entre les deux résultats s'améliore lorsque  $R$  tend vers 1. La solution analytique, obtenue au moyen d'un développement polynômial en  $\zeta$  de  $I_s(\zeta)$ , est en effet d'autant plus juste que la dépendance spatiale de  $I_s(\zeta)$  est moins prononcée.

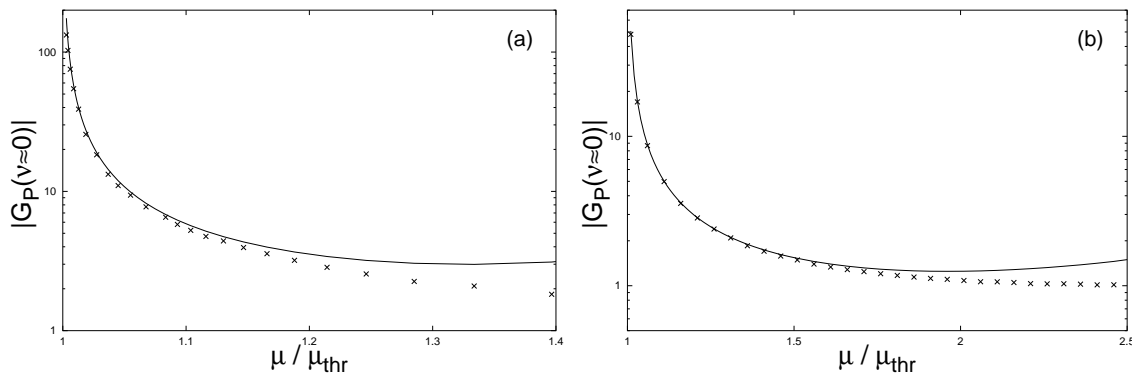


FIG. 2.25 – Valeur à basse fréquence de la fonction de transfert  $G_P$  pour deux coefficients de réinjection de la cavité ( $R = 0.36$  (a) et  $R = 0.95$  (b)). Les résultats obtenus à l'aide de la relation (2.75) sont représentés en trait plein. Les points sont obtenus par intégration numérique du modèle cohérent à trois ondes (Eqs. (2.6)).

Comme pour  $|G_R(\nu)|$ , la fréquence de résonance dépend du niveau de pompage du laser. L'évolution de  $\nu_R$  en fonction de  $\mu/\mu_{thr}$  est représentée sur la figure 2.26 par les courbes en trait plein. Elle est obtenue à l'aide de simulations numériques pour deux valeurs de  $R$  ( $R = 0.36$  (a) et  $R = 0.95$  (b)). La dépendance de la fréquence de résonance par rapport au niveau de pompage est d'autant plus faible que  $R$  s'approche de 1. Les courbes en traits pointillés sur la figure 2.26 représentent l'évolution de la fréquence de la résonance de  $|G_P(\nu)|$  en fonction de  $\mu/\mu_{thr}$ . On constate que plus  $R$  est proche de 1, et plus les fréquences de la résonance de  $|G_P(\nu)|$  et de  $|G_R(\nu)|$  évoluent de façon similaire.

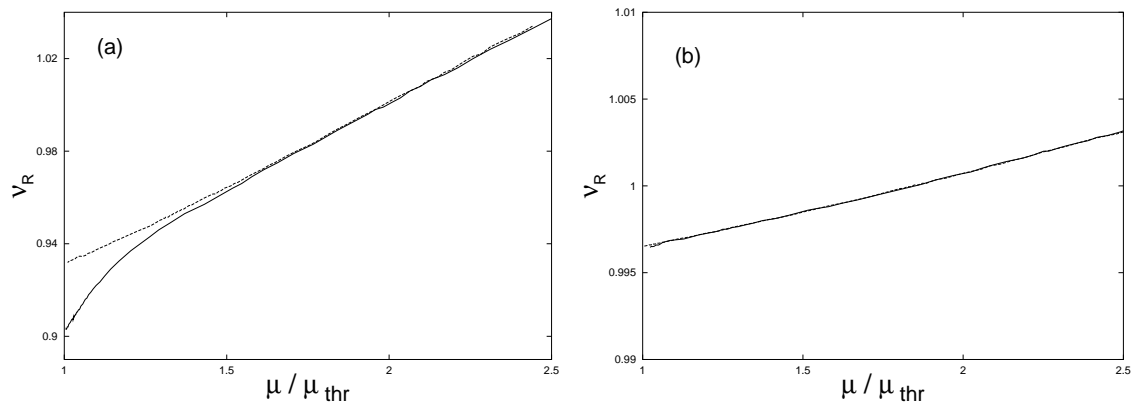


FIG. 2.26 – Evolution de la fréquence de la résonance en fonction du rapport  $\mu/\mu_{thr}$  en trait plein pour  $|G_P(\nu)|$  et en traits hachurés pour  $|G_R(\nu)|$  :  $R = 0.36$  (a) et  $R = 0.95$  (b).

Pour conclure notre étude théorique de  $G_P$ , remarquons que l'effet d'antirésonance s'estompe à mesure que le niveau de pompage augmente. Ce phénomène s'explique simplement par le fait qu'au delà du seuil, l'onde de pompe ne se propage plus dans la fibre sans modification. En effet, comme  $I_s(\zeta)$  n'est plus négligeable, le membre de droite de l'équation (2.48) n'est plus nul.  $\widetilde{\delta A_p}(\zeta, \tau)$  va donc se déformer lors de sa propagation dans la fibre et dévier de sa forme sinusoïdale. Pour des fréquences de modulation  $\nu_0$  multiples de la moitié de l'intervalle spectral libre de la cavité, le profil de  $\widetilde{\delta A_p}(\zeta, \tau)$  n'est plus composée d'une seule fréquence spatiale. Le profil de  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta, \tau)$  est donc constitué de multiples fréquences discrètes. Plusieurs fonctions  $s_n(\nu)$  sont nécessaires à sa description, en particulier  $s_0$ .  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta = 0, \tau)$  n'est donc plus nul pour des fréquences harmoniques de la fréquence  $\nu = 1/2$  et l'effet d'antirésonance disparaît.

Avant d'aborder la partie expérimentale, rappelons les résultats théoriques importants que nous avons obtenus pour  $|G_P(\nu)|$ . Nous avons commencé par étudier la fonction de transfert au seuil d'oscillation du laser Brillouin.  $|G_P(\nu)|$  a été déterminé analytiquement. La fonction de transfert se comporte comme un intégrateur parfait à basse fréquence. En outre, le terme  $\ln(R^2)$  qui se trouve au numérateur de cette fonction (voir l'expression (2.61)) permet à cette dernière de prendre des valeurs bien plus faibles dans des cavités de grande finesse. Par ailleurs, la fonction de transfert continue de décroître lorsque la fréquence augmente. De plus, une résonance et ses harmoniques sont présentes aux alentours des fréquences multiples entiers de l'intervalle spectral libre de la cavité. On constate en plus une antirésonance et ses harmoniques autour des fréquences multiples entiers de  $\nu = 1/2$ . Nous avons enfin caractérisé  $|G_P(\nu)|$  au delà du seuil d'oscillation du laser. Nous nous sommes

aperçu que le niveau de pompage influe essentiellement sur la fonction de transfert à basse fréquence. En effet, les valeurs de  $|G_P(\nu)|$  sont constantes sur une plage de fréquences d'autant plus grande que le niveau de pompage est important.

### 2.3.2 Expérience

Les principales caractéristiques de  $|G_P(\nu)|$  étant déterminées, nous allons maintenant confronter notre étude théorique à l'expérience. Le descriptif du dispositif expérimental sera d'abord donné. Puis, nous présenterons les résultats expérimentaux que nous comparerons à ceux obtenus théoriquement.

#### 2.3.2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé pour déterminer  $|G_P(\nu)|$  est proche de celui précédemment employé pour obtenir  $|G_R(\nu)|$ . Le système de pompage est le même tout comme le système de détection ainsi que la fibre optique (cf. Fig. 2.27). Cette dernière est également positionnée de façon à ce que les champs de pompe et Stokes soient linéairement polarisés. Une séparatrice  $S_1$  permet d'injecter le champ de pompe dans la fibre. Une seconde séparatrice  $S_2$  permet d'extraire une partie du champ Stokes de la cavité. Entre  $S_1$  et  $S_2$  se trouve un isolateur de Faraday qui empêche l'onde de pompe de circuler dans la cavité.

La modulation de l'intensité s'effectue au moyen d'un modulateur électro-optique placé non plus à l'intérieur de la cavité mais juste derrière le laser de pompe, comme il est illustré sur la figure (2.27). Un des axes propres du cristal du modulateur est légèrement décalé par rapport à la direction de polarisation du champ de pompe. L'application d'une tension de l'ordre d'une dizaine de volts au modulateur permet de légèrement moduler l'état de polarisation du champ à la sortie de celui-ci. Le modulateur associé à un cube polariseur permet d'obtenir un rayonnement linéairement polarisé. En traversant le cube polariseur après le modulateur électro-optique, l'intensité du faisceau de pompe  $I_P(t)$  est faiblement modulée et s'écrit

$$I_P(t) = \overline{I_P} [1 + m_P(\nu_m) \sin(2\pi\nu_m t)] \quad (2.76)$$

où  $\overline{I_P}$  représente l'intensité de l'onde de pompe si aucun champ électrique n'est appliqué au modulateur électro-optique.  $\nu_m$  et  $m_P$  sont respectivement la fréquence et l'indice de modulation d'intensité du faisceau de pompe. Une séparatrice  $S_3$  est placée juste derrière le cube polariseur pour prélever une partie du rayonnement de pompe. A la sortie du laser Brillouin, l'intensité du champ Stokes  $I_s(t)$  sera aussi légèrement modulée à une fréquence  $\nu_m$  avec un indice de modulation  $m_s$

$$I_s(t) = \overline{I_s} [1 + m_s(\nu_m) \sin(2\pi\nu_m t)] \quad (2.77)$$

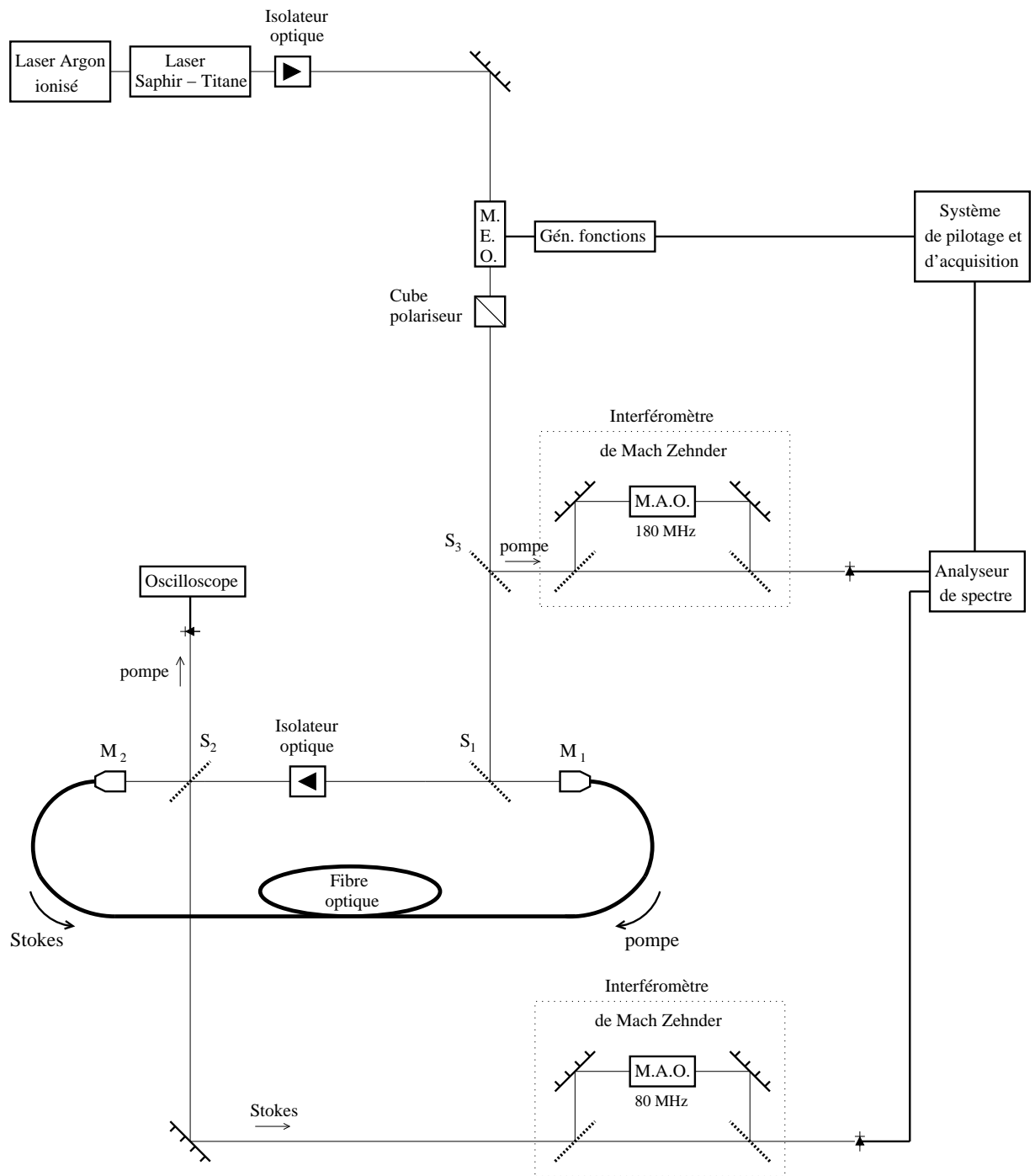


FIG. 2.27 – Représentation schématique du dispositif expérimental permettant de déterminer  $|G_P(\nu)|$ .

où  $\overline{I_s}$  représente l'intensité de l'onde Stokes si aucun champ électrique n'est appliqué au modulateur électro-optique.  $m_P$  et  $m_s$  sont obtenus en réalisant l'analyse spectrale des signaux  $I_P(t)$  et  $I_s(t)$ . Cette analyse est la même que celle effectuée dans la partie 2.2.2.2 pour déterminer expérimentalement  $|G_R(\nu)|$ . Il est toutefois nécessaire de disposer maintenant de deux interféromètres de Mach-Zehnder (voir figure 2.27) permettant de transposer les spectres autour d'une porteuse radio-fréquence. La valeur de la fonction de transfert  $|G_P|$  à la fréquence  $\nu_m$  est donnée par le rapport  $m_s/m_P$ . Par ailleurs, une photodiode connectée à un oscilloscope est utilisée pour déterminer le taux de déplétion de l'intensité de la pompe. Il permet ainsi d'estimer le niveau de pompage du laser Brillouin.

### 2.3.2.2 Résultats expérimentaux

Comme la fonction de transfert dépend du niveau de pompage, les expériences ont été réalisées pour différentes intensités du laser de pompe. Sur la figure 2.28(a) et 2.28(b) sont présentées en trait plein deux fonctions de transfert obtenues expérimentalement. Elles sont composées de 200 points de mesure pour des fréquences comprises entre 20 kHz et 20 MHz. L'indice de modulation  $m_P$  de l'intensité du champ de pompe est de l'ordre de 0.01 sur toute cette plage spectrale.

Une première fonction de transfert déterminée expérimentalement est présentée sur la figure 2.28(a). En traits hachurés est tracée une fonction de transfert obtenue par intégration numérique du modèle cohérent à trois ondes. Le calcul est effectué en prenant les valeurs de paramètres suivantes :  $R = 0.36$ ,  $g = 6.04$  et  $\beta_A = 10.93$ . Le niveau de pompage  $\mu/\mu_{thr}$  est le seul paramètre libre. Il a été ajusté de telle façon que les résultats numériques et expérimentaux soient les plus proches possibles. La valeur du rapport  $\mu/\mu_{thr}$  ainsi déterminée est de 1.115. On constate que les comportements expérimentaux et numériques sont très proches sur toute la gamme spectrale étudiée. De plus, la concordance entre les taux de déplétion obtenus numériquement et expérimentalement (proches de 30%) nous permet de confirmer l'accord entre les résultats.

Sur la figure 2.28(b) est présentée en trait plein une fonction de transfert obtenue expérimentalement pour une intensité de pompe plus importante. La fonction de transfert, obtenue par intégration numérique avec les mêmes valeurs de paramètres que précédemment, est tracée en pointillés. Le paramètre de pompage  $\mu/\mu_{thr}$  permettant le meilleur accord entre les résultats numériques et expérimentaux est de 1.361. De plus, l'accord entre les taux de déplétion obtenus numériquement et expérimentalement (proches de 60 %) nous permet de confirmer la concordance entre les résultats.

Tout comme pour  $|G_R|$ , on constate bien que la valeur de  $|G_P|$  à basse fréquence

diminue lorsque l'intensité du pompage augmente. On rappellera par ailleurs que l'origine du pic observé à l'intervalle spectral libre de la cavité n'est pas le même que celui obtenu théoriquement pour les mêmes raisons que celles présentées pour  $|G_R(\nu)|$  (cf. partie 2.2.2.3). En effet, comme la cavité n'est pas asservie, des sauts de modes longitudinaux génèrent un battement à l'intervalle spectral libre de la cavité sur l'intensité Stokes. Ceci augmente l'imprécision de la mesure de la fonction de transfert autour de 17 MHz.

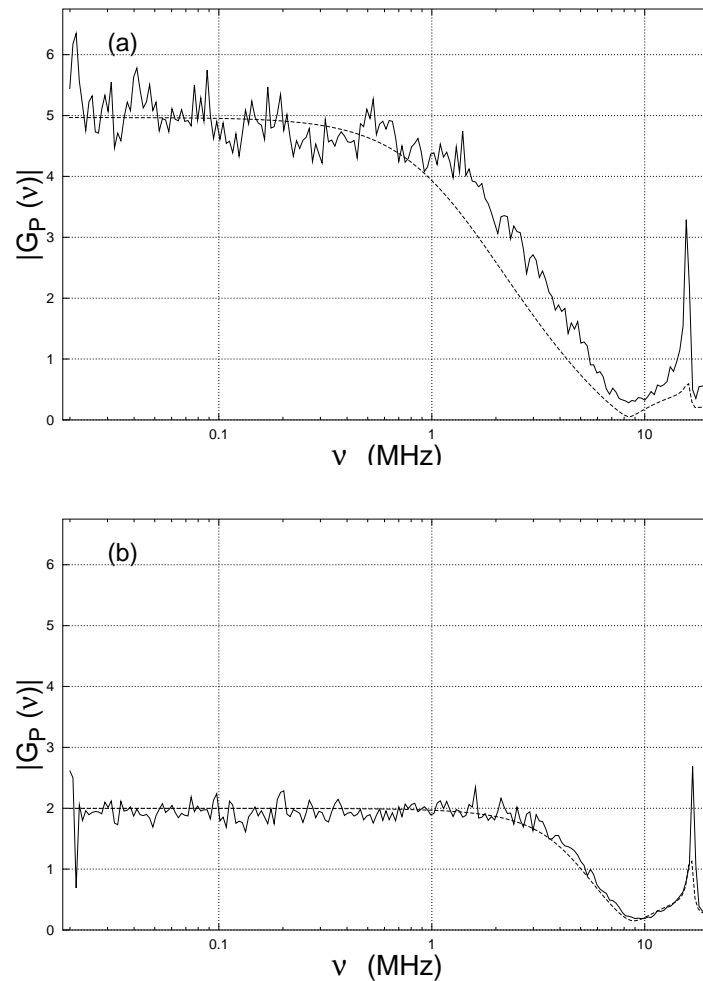


FIG. 2.28 – Module de la fonction de transfert de l'intensité du laser de pompe obtenu expérimentalement (trait plein). La fonction de transfert déterminée numériquement est représentée en traits hachurés pour les paramètres  $R=0.36$ ,  $g=6.04$ ,  $\beta_A = 10.93$  et courbe (a) :  $\mu/\mu_{thr} = 1.115$ , courbe (b)  $\mu/\mu_{thr} = 1.361$ .



## Conclusion et perspectives

L'étude du bruit d'intensité du laser Brillouin exposée dans ce chapitre est la toute première réalisée sur le sujet. Nous avons tout d'abord établi qu'elle devait être effectuée en déterminant la fonction de transfert de chaque source de bruit d'intensité. Ces dernières ont été identifiées et seules deux d'entre elles sont prépondérantes : les fluctuations du coefficient de réinjection de la cavité et le bruit d'intensité du laser de pompe. Puis, nous avons entrepris une étude théorique des fonctions de transfert de chacune des deux sources de bruit. Nous avons montré que celles-ci dépendent entre autres du niveau de pompage ainsi que du taux de pertes de la cavité. Notre travail théorique fut ensuite validé par une confrontation à des résultats expérimentaux obtenus en utilisant un laser Brillouin oscillant dans une cavité possédant un bras aérien.

Une des finalités de notre travail est aussi de déterminer si le laser Brillouin peut être utilisé pour réduire le bruit d'intensité du laser de pompe. Contrairement au bruit de phase, la réduction du bruit d'intensité n'est pas toujours obtenue. En effet, nous avons constaté que  $|G_P(\nu)|$  dépend fortement du niveau de pompage  $\mu/\mu_{thr}$  ainsi que du coefficient de réinjection de la cavité. Lorsque le rapport  $\mu/\mu_{thr}$  augmente, la valeur de  $|G_P|$  à basse fréquence diminue et peut descendre sous l'unité (voir la figure 2.25). Quand la valeur de  $R$  tend vers 1, l'ensemble de la fonction de transfert diminue comme on peut le voir sur la figure 2.29. De plus, le seuil d'un laser Brillouin est bien plus bas lorsque la cavité est de finesse élevée (voir chapitre 1). Ainsi, pour une intensité de laser de pompe donnée, le rapport  $\mu/\mu_{thr}$  est beaucoup plus grand pour une cavité de finesse élevée que pour une cavité de finesse faible. Finalement, un laser Brillouin tout fibre peut posséder un bruit d'intensité beaucoup plus faible que celui de son laser de pompe sous certaines conditions de finesse de cavité et de niveau de pompage. Il nous faut malgré tout rappeler la présence de résonances aux fréquences multiples de l'intervalle spectral libre de la cavité. Elle a pour conséquence d'amplifier le bruit à ces fréquences. *A contrario*, les antirésonances permettent de réduire très fortement le bruit d'intensité à la fréquence moitié de l'intervalle spectral libre de la cavité. Par ailleurs, la contribution des fluctuations du coefficient de réinjection au bruit d'intensité du laser ne doit pas être oubliée. Ces variations proviennent des fluctuations mécaniques et thermiques basse fréquence. Elles dépendent donc de la stabilité mécanique et thermique de la cavité. Dans le cas où la stabilité du coefficient de réinjection est bien contrôlée, la source de bruit devient négligeable, et le bruit d'intensité du laser Brillouin ne provient plus que de celui du laser de pompe.

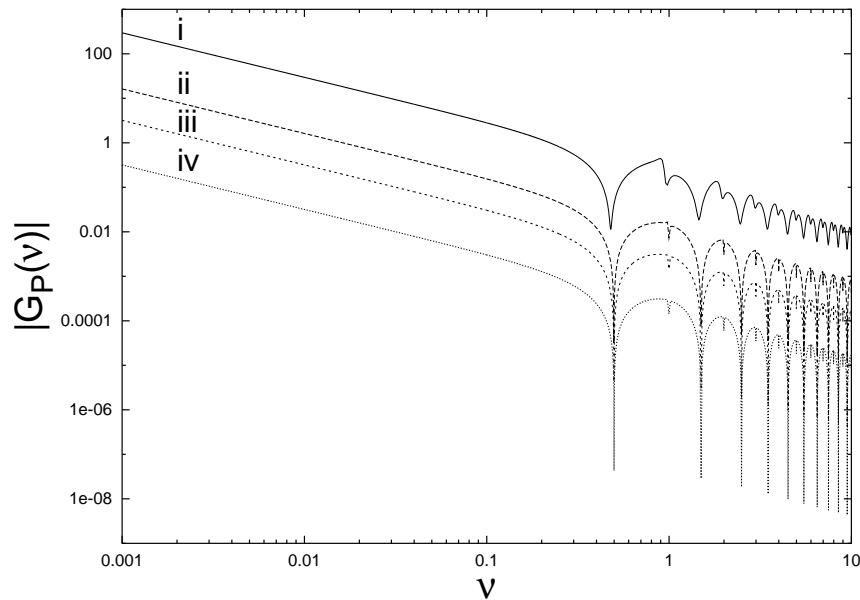


FIG. 2.29 – Représentation de  $|G_P(\nu)|$  au seuil pour 4 valeurs de  $R$  : (i) :  $R = 0.36$ , (ii) :  $R = 0.95$ , (iii) :  $R = 0.99$ , (iv) :  $R = 0.999$  ( $g = 6.04$  et  $\beta_A = 10.93$ ).

Les lasers Brillouin oscillant dans une cavité de grande finesse peuvent représenter des sources intéressantes pour la réduction du bruit d'intensité de certains lasers de pompe. Cependant, il nous faut compléter notre étude. Tout d'abord, nous n'avons pas mesuré le spectre du bruit d'intensité de notre laser Brillouin car ce dernier n'est pas suffisamment stable. Un laser Brillouin tout fibre pompé par une diode stabilisée en fréquence permettrait de réaliser cette mesure et de la comparer au R.I.N. des lasers conventionnels. Par ailleurs, l'étude a été effectuée dans le cas où le champ de pompe ne s'est propagé que sur un tour de cavité. Si l'onde de pompe peut osciller dans la cavité, les conditions de bouclage sont modifiées et le transfert du bruit d'intensité du laser de pompe sur l'intensité du rayonnement Stokes sera alors différent des cas traités dans ce chapitre. Toutefois, les fonctions de transfert seront probablement proches de celles que nous avons déterminées dans la thèse. Pour terminer, nous pouvons aussi évoquer l'éventualité d'utiliser le laser Brillouin comme filtre pour le laser de pompe. En effet, le bruit d'intensité du champ de pompe est modifié après s'être propagé dans la cavité du laser Brillouin. Une première approche de ces modifications est donné dans l'annexe D de ce mémoire. Elle montre que le bruit basse fréquence peut être réduit sous certaines conditions. Une étude plus approfondie permettrait de connaître pleinement les possibilités de réduction de bruit qu'offre ce type de filtrage.



## CHAPITRE 3



# Chapitre 3

## Brûlage de trou spectral dans les générateurs et amplificateurs Brillouin à fibre

### Introduction

La diffusion Brillouin stimulée est généralement considérée comme un processus dans lequel l'élargissement spectral est de nature homogène. Toutes les observations expérimentales reportées jusque récemment étaient en effet correctement reproduites par le modèle cohérent à trois ondes, modèle établi en supposant l'élargissement spectral de nature homogène. Tout ceci a été toutefois remis en cause en 2000. En effet, V.I. Kovalev et R.G. Harrison ont annoncé avoir observé un brûlage de trou dans le spectre des fluctuations de l'intensité du rayonnement Stokes délivré par un générateur Brillouin à fibre [Kovalev et Harrison, 2000]. Ce phénomène étant généralement la conséquence d'un élargissement spectral inhomogène, les auteurs l'ont interprété en tant que tel et ont expliqué que l'élargissement inhomogène du processus diffusion Brillouin stimulée provenait du fait que la fibre serait susceptible de guider toute une distribution de vecteurs d'onde de directions légèrement inclinées par rapport à l'axe de propagation. Cette interprétation était lourde de conséquences puisqu'elle remettait en cause une partie de la théorie de l'optique guidée où l'on suppose que l'interaction longitudinale entre les ondes selon l'axe de la fibre est découplée de la distribution transverse, ce qui conduit à un modèle unidimensionnel. Cependant, cette analyse n'a pas été partagée par tous, et une vive polémique s'est instaurée au sein de la communauté scientifique travaillant dans le domaine. En effet, certains auteurs ont montré au moyen de simulations numériques que le même phénomène de brûlage de trou pouvait être obtenu dans le cadre du modèle usuel à trois ondes où l'on suppose un élargissement spec-

tral homogène. Par ailleurs, ce même phénomène de brûlage de trou a été aussi observé expérimentalement dans la bande de gain d'un amplificateur Brillouin à fibre [Takushima et Kikuchi, 1999]. Ce résultat était également à priori déconcertant puisqu'il était aussi parfaitement reproduit dans le cadre du modèle cohérent à trois ondes [Takushima et Kikuchi, 1995]. Après la publication des résultats expérimentaux de V.I. Kovalev et R.G. Harrison, une grande confusion régnait donc au sujet de la nature de l'élargissement spectral de la diffusion Brillouin stimulée dans les fibres.

Le travail présenté dans ce troisième chapitre a pour but de clarifier cette situation. Nous présenterons tout d'abord les différences entre élargissements homogène et inhomogène. Nous resituerons ensuite de manière plus détaillée le cadre dans lequel la polémique a éclaté. Puis nous présenterons notre travail théorique au travers d'un article publié dans "Physical Review A". Notre étude théorique est effectuée en supposant que l'élargissement spectral est de nature homogène. Nous étudierons les mécanismes à l'origine de l'apparition du brûlage de trou observé dans l'amplificateur et dans le générateur Brillouin. Pour cela, nous serons amenés à déterminer analytiquement la fonction de transfert caractérisant la réponse linéaire d'un amplificateur à une faible modulation d'amplitude du signal injecté. Cette fonction de transfert sera calculée pour différents régimes de fonctionnement de l'amplificateur. Puis, nous montrerons que les mécanismes à l'origine de l'apparition du brûlage de trou spectral sont communs à l'amplificateur et au générateur.

### **3.1 Remise en cause de la nature de l'élargissement spectral de la diffusion Brillouin stimulée dans les fibres**

Nous commencerons par rappeler quelques notions sur l'élargissement homogène et inhomogène dans les systèmes atomiques. Nous nous attacherons en particulier à mettre en avant les différences fondamentales entre les deux types d'élargissement. La nature de l'élargissement du spectre du champ Stokes dans les générateurs et les amplificateurs Brillouin à fibre optique sera ensuite discutée. Enfin, nous expliciterons les raisons pour lesquelles une vive polémique est apparue à ce sujet.

### 3.1.1 Elargissements homogène et inhomogène dans les systèmes atomiques

Les termes d'élargissements homogène et inhomogène ont tout d'abord été introduits dans le domaine de la spectroscopie. Les atomes peuvent rayonner de la lumière à plusieurs fréquences naturelles fixées par les transitions autorisées entre leurs différents niveaux d'énergie. De nombreux matériaux possèdent ainsi un grand nombre de raies d'émission. La largeur spectrale  $\Delta\nu$  de celles-ci est non nulle et dépend de nombreux facteurs [Allen et Eberly, 1987]. Toutefois, l'élargissement spectral d'une raie d'émission est uniquement de deux types : homogène ou inhomogène.

#### Elargissement homogène

L'élargissement d'une raie est dit homogène lorsque tous les atomes du système sont identiques et possèdent la même transition de fréquence  $\nu_a$ . La raie d'émission est centrée autour de cette fréquence. Sa forme est généralement décrite par une lorentzienne [Yariv, 1989] :

$$\mathcal{L}(\nu) = \frac{\Delta\nu}{2\pi[(\nu - \nu_a)^2 + (\Delta\nu/2)^2]} \quad (3.1)$$

L'élargissement homogène provient de mécanismes de pertes d'énergie comme les désexcitations radiatives (émission spontanée) ou les désexcitations non-radiatives (collisions inélastiques entre atomes...). Il dépend aussi de mécanismes de déphasage comme les collisions élastiques [Siegman, 1986].

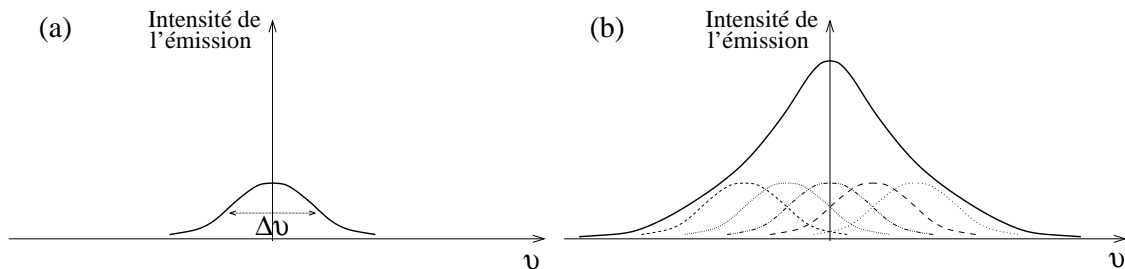


FIG. 3.1 – Représentation schématique d'une raie élargie de manière homogène (a) ou inhomogène (b) .

#### Elargissement inhomogène

L'élargissement d'une raie est inhomogène lorsque dans un milieu donné, les atomes d'une même espèce sont différenciables. Ils sont alors rangés par classes et la raie d'émission est la superposition d'un grand nombre de raies élargies de manière



homogène. Chacune de celles-ci provient d'une classe d'atomes. Elles possèdent une même largeur  $\Delta\nu$  mais aussi une fréquence centrale spécifique. Sur la figure 3.1b est représentée cette raie dans le cas simpliste où n'existent que cinq classes d'atomes de fréquences de transition distinctes. Pour un milieu solide, l'élargissement inhomogène de la raie vient du fait que l'environnement des atomes est différent d'un site atomique à un autre. Dans les milieux gazeux, l'élargissement inhomogène est généré par l'effet Doppler qui provient du mouvement des atomes.

Aucun élargissement n'est purement homogène. Lorsque l'écart entre les fréquences centrales des groupes d'atomes devient importante devant la largeur de l'élargissement homogène, alors l'élargissement inhomogène devient dominant. Dans le cas contraire, on considère que l'élargissement est homogène. Pour finir, remarquons que dans certains cas, la nature de l'élargissement peut changer suivant les conditions de température et de pression. En effet, pour un milieu gazeux par exemple, la nature de l'élargissement peut être modifiée par la pression car celle-ci influence l'importance de l'effet Doppler. A faible pression, l'élargissement inhomogène prédomine. A haute pression, l'effet Doppler devient négligeable et l'élargissement est alors plutôt de nature homogène.

### 3.1.2 Saturation et brûlage de trou en régimes d'élargissements homogène et inhomogène

Il n'est pas aisé de déterminer si un spectre est élargi de façon homogène ou inhomogène. Une expérience de type "pompe-sonde" (représentée sur la figure 3.2) permet de faire la distinction grâce au phénomène de saturation du milieu. Considérons une onde de "sonde" de faible intensité et de fréquence  $\nu$  qui se propage dans un milieu atomique absorbant. La capacité d'absorption du milieu pour une onde de fréquence  $\nu$  est représentée par le coefficient d'absorption  $\chi''(\nu)$ . Ce dernier dépend en particulier du nombre d'atomes pouvant absorber un rayonnement de fréquence  $\nu$  en passant d'un niveau d'énergie  $E_1$  à un niveau d'énergie  $E_2$  (où  $E_2$  est supérieur à  $E_1$  et  $E_2 - E_1 = h\nu$ ). En traversant le milieu, une partie de la sonde est absorbée ce qui dépeuple le niveau d'énergie  $E_1$  au profit du niveau d'énergie  $E_2$ .

Injectons maintenant dans le milieu une onde de pompe suffisamment intense pour dépeupler fortement le niveau d'énergie  $E_1$ . Le milieu est alors dit "saturé". Dans ces conditions, lorsque la sonde traverse le milieu, son coefficient d'absorption  $\chi''$  est d'autant plus faible que la pompe est intense. Toutefois, comme nous allons le voir par la suite, le comportement de  $\chi''$  diffère suivant la nature homogène ou inhomogène de la raie. Notons par ailleurs qu'il est possible d'obtenir cet effet de

saturation dans un milieu amplificateur en considérant non pas l'absorption mais le gain de la sonde [Yariv, 1989]. Celui-ci diminue lorsque l'onde de forte intensité, en s'amplifiant, sature le gain du milieu [Siegman, 1986].

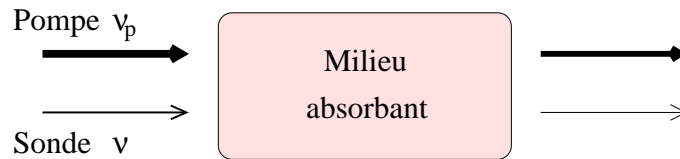


FIG. 3.2 – Représentation schématique d'une expérience de type "pompe-sonde" permettant d'observer le comportement du coefficient d'absorption d'un milieu saturé.

### Elargissement homogène

Prenons tout d'abord le cas où l'élargissement de la raie d'absorption est de nature homogène. Lorsque milieu est saturé par la présence d'un fort champ de pompe, le coefficient d'absorption  $\chi''$  diminue uniformément pour toute la plage de fréquence où la sonde est absorbée (voir figure 3.3a). Plus l'intensité de la pompe est importante et plus le coefficient d'absorption diminue [Yariv, 1989]. Cette diminution de  $\chi''$  est malgré tout toujours identique pour toutes les fréquences où la sonde est absorbée de telle façon que la forme de  $\chi''(\nu)$  demeure inchangée. Ceci vient du fait que les atomes étant identiques, ils réagissent tous de la même manière. La bande d'absorption va donc subir dans son ensemble l'effet de saturation.

Notons toutefois que la fonction  $\chi''(\nu)$  peut présenter un trou lorsque l'intensité du champ saturant est extrêmement forte [Schwarz et Tan, 1967], [Sargent, 1978]. Celui-ci provient d'une modulation périodique de la population de l'état fondamental à la fréquence du battement entre les champs de pompe et de sonde [Boyd et al., 1981], [Hillman et al., 1982], [Boyd et Mukamel, 1984]. Ce phénomène a été observé expérimentalement dans le rubis [Hillman et al., 1983].

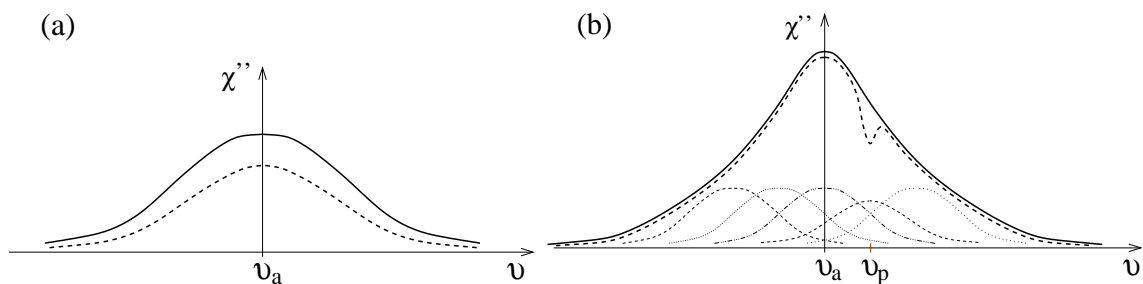


FIG. 3.3 – Représentation schématique du coefficient d'absorption saturé (traits pointillés) et non saturée (trait plein) : élargissement homogène (a) et élargissement inhomogène (b).

### Elargissement inhomogène

Considérons le cas où l'élargissement est inhomogène. Lorsque l'on sature l'absorption du milieu grâce à une onde de pompe de forte intensité, un trou apparaît à la fréquence  $\nu_p$  de la pompe (voir la figure 3.3b). L'existence de ce trou s'explique par le fait que la pompe ne sature que l'absorption de la classe d'atomes de fréquence de transition égale à  $\nu_p$ . La pompe ne modifie pas le coefficient d'absorption des autres classes d'atomes [Yariv, 1989]. La superposition des courbes d'absorption de toutes les classes d'atomes donne finalement une courbe possédant un trou à la fréquence de la pompe. Plus l'intensité de la pompe est forte et la profondeur du trou est grande. Cet effet est nommé "brûlage de trou" plus connu sous l'anglicisme "hole burning".

Nous venons de présenter le comportement de la courbe d'absorption saturée d'un système atomique. Il dépend de la nature de l'élargissement de la bande d'absorption. Pour un élargissement inhomogène, la saturation n'affecte qu'une partie de la courbe d'absorption. Cette dernière va ainsi présenter un trou dont la profondeur augmente avec l'intensité du champ saturant. Pour un élargissement homogène, la courbe d'absorption subit dans son ensemble l'effet de saturation. Toutefois, lorsque l'intensité du champ saturant est très importante, la courbe d'absorption peut alors éventuellement aussi présenter un trou. La présence d'un trou dans la bande d'absorption n'est donc pas obligatoirement la preuve que la nature de l'élargissement est homogène.

### 3.1.3 Elargissement spectral dans les générateurs et les amplificateurs Brillouin à fibre

Au chapitre 1, nous avons présenté les propriétés générales de la diffusion Brillouin dans les fibres optiques. Nous allons maintenant plus particulièrement nous intéresser aux caractéristiques du spectre du champ Stokes produit par un générateur et à celles de la bande de gain d'un amplificateur. Nous nous attacherons à déterminer si les résultats théoriques obtenus en supposant que l'élargissement spectral de nature homogène permettent de rendre compte des résultats expérimentaux.

#### Spectre du champ diffusé dans un générateur Brillouin

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, le générateur Brillouin à fibre est réalisé en injectant un champ de pompe dans le guide. Une partie de l'intensité de ce champ est rétrodiffusée sous la forme d'un rayonnement Stokes. Le générateur est caractérisé par la réflectivité  $R$  et le gain simple passage  $G_F$ . Le spectre du champ Stokes est

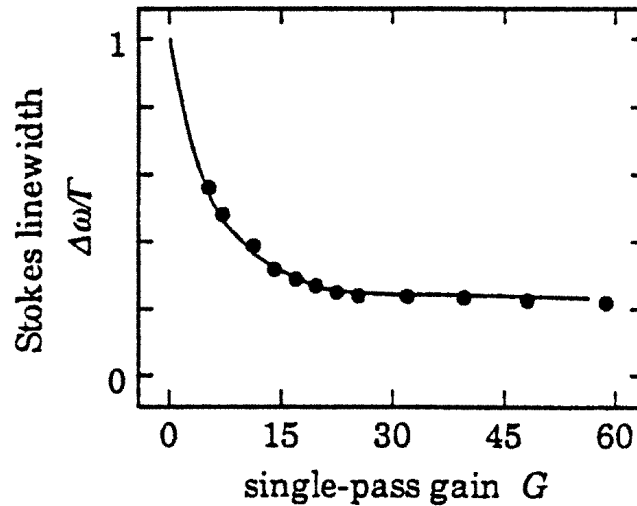


FIG. 3.4 – Générateur Brillouin : dépendance de la largeur spectrale du champ Stokes par rapport au gain simple passage. La courbe est obtenue théoriquement en se basant sur le modèle cohérent à trois ondes, les points représentent les résultats expérimentaux (d’après [Gaeta et Boyd, 1991]).

centré à la fréquence  $\nu_s$  et possède une largeur  $\Delta\nu$ . A.L. Gaeta et R.W. Boyd ont étudié expérimentalement l’évolution de cette largeur  $\Delta\nu$  [Gaeta et Boyd, 1991]. Quand  $G_F$  augmente, la largeur du spectre du champ diffusé se réduit proportionnellement à  $G_F^{-\frac{1}{2}}$  puis tend vers une valeur limite de l’ordre du cinquième de  $\Delta\nu$ . Les résultats expérimentaux sont représentés sur la figure 3.4 par des cercles. L’évolution de la largeur  $\Delta\nu$  en fonction de  $G_F$  a été étudié théoriquement à l’aide du modèle cohérent à trois ondes. Elle est donnée en trait plein sur la figure 3.4. Comme on peut le constater sur cette figure, l’évolution théorique obtenue est en parfait accord avec les résultats expérimentaux. Le modèle cohérent à trois ondes permet donc de caractériser de manière satisfaisante les propriétés spectrales du générateur Brillouin.

### Bande de gain d’un amplificateur Brillouin

La bande de gain d’un amplificateur Brillouin est déterminable au moyen d’un dispositif de type “pompe-sonde” (voir chapitre 1). Une onde de pompe est injectée à l’une des extrémités de la fibre et une onde de sonde à l’autre extrémité. La sonde est amplifiée et l’on mesure son gain. En balayant la fréquence de la sonde, on détermine la bande de gain de l’amplificateur. M. Niklès et ses collaborateurs ont effectué une mesure expérimentale de celle-ci et l’ont comparée au résultat théorique (voir la figure 3.5) [Niklès et al., 1997]. Ce dernier a été obtenu en utilisant l’expression analytique du coefficient de gain donnée par ce modèle cohérent (chapitre 1,

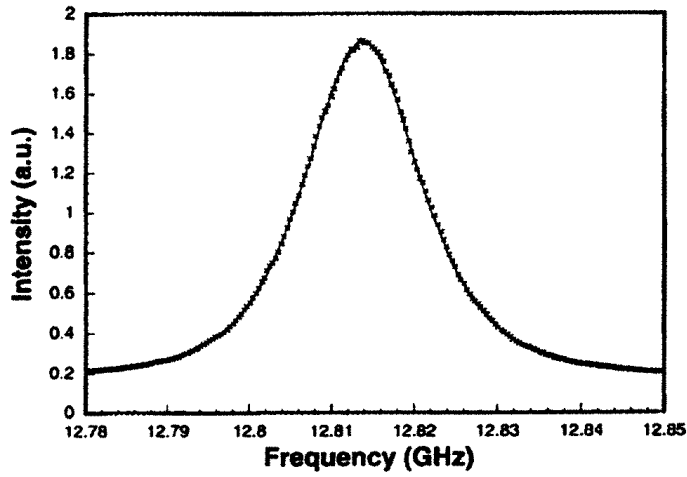


FIG. 3.5 – Bande de gain de l'amplificateur Brillouin : en trait plein est tracé le résultat théorique obtenu à l'aide du modèle cohérent et le résultat expérimental est représenté par des croix (d'après [Niklès et al., 1997]).

[Boyd, 1992]). L'accord entre les deux résultats est très bon. Le modèle cohérent permet donc de parfaitement caractériser la bande de gain de l'amplificateur Brillouin.

### Elargissement homogène dans le modèle cohérent à trois ondes

Comme nous l'avons déjà remarqué, le modèle cohérent à trois ondes est le modèle habituellement employé pour décrire la diffusion Brillouin stimulée dans les fibres optiques. Ce modèle a été établi en considérant que l'élargissement spectral du processus de diffusion Brillouin stimulée est de nature homogène. Voyons les différentes suppositions que cela implique.

On suppose tout d'abord qu'il n'existe qu'une unique onde Stokes de fréquence  $\nu_s$  fixe. On considère de plus que la largeur de la bande de diffusion Brillouin  $\Delta\nu_B$  dépend uniquement du temps de vie  $\tau_a$  des phonons acoustiques dans la fibre.  $\Delta\nu_B$  et  $\tau_a$  sont reliés par la relation  $\tau_a = 1/(\pi\Delta\nu_B)$ . Le milieu étant supposé homogène, la valeur de  $\tau_a$  est constante sur toute la longueur de la fibre. Ceci implique que la constitution de cette dernière ainsi que les contraintes mécaniques qu'elle subit sont identiques sur toute la longueur de la fibre. Précisons que  $\tau_a$  est présent dans le modèle cohérent au travers du taux d'amortissement acoustique  $\beta_a$  ( $\beta_a = \frac{nL}{c\tau_a} = \frac{\pi nL\Delta\nu_B}{c}$ ).

De plus, on suppose que les variations transverses de la densité sont négligeables par rapport aux variations longitudinales ( $\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial z^2}$ ). L'onde acoustique est donc considérée comme une onde plane. On suppose ainsi qu'il n'existe pour l'onde acoustique qu'un seul vecteur d'onde. Ce dernier est de plus parallèle à l'axe de propagation.

Par ailleurs, on considère que les variations d'indice induites par l'effet Brillouin sont négligeables devant la valeur du saut d'indice entre le cœur et la gaine. Ceci signifie que la structure du mode de propagation n'est pas affectée par l'effet non linéaire de sorte qu'il est alors possible de découpler l'évolution transverse des champs optiques de leur évolution longitudinale. En d'autres termes, ceci revient à considérer que dans une fibre optique, la diffusion Brillouin stimulée est décrite dans le cadre d'un modèle unidimensionnel. Cette approximation est couramment effectuée dans le domaine de l'optique guidée.

### **Facteurs modifiant le spectre du champ Stokes**

De nombreux paramètres d'une fibre optique influencent la largeur  $\Delta\nu_B$  et la fréquence centrale  $\nu_s$  du spectre du champ Stokes. Lorsque ces caractéristiques varient le long du guide, le spectre du champ diffusé peut être sujet à un élargissement inhomogène.  $\nu_s$  et  $\Delta\nu_B$  dépendent par exemple de la nature des constituants de la fibre ainsi que de leurs concentrations [Shibata et al., 1987]. La température ainsi que les contraintes mécaniques que la fibre subit modifient également le spectre du champ Stokes [Niklès et al., 1997]. On peut ajouter à cette liste la forme du profil transverse de la fibre [Botineau et al., 1995] de même que son diamètre [Shiraki et al., 1995].

#### **3.1.4 Polémique sur la nature de l'élargissement spectral du processus de diffusion Brillouin stimulée dans les fibres**

Il existe actuellement une polémique autour de la nature de l'élargissement spectral de diffusion Brillouin stimulée dans les fibres. En 2000, V.I. Kovalev et R.G. Harrison ont présenté dans *Physical Review Letters* des résultats expérimentaux jamais observés jusqu'alors [Kovalev et Harrison, 2000]. Ils ont enregistré le spectre des fluctuations de l'intensité du champ Stokes délivré par un générateur Brillouin à fibre et y ont constaté l'apparition d'un trou lorsque l'intensité du laser de pompe devient suffisamment élevée (voir Fig. 3.6). Ils ont considéré que ce phénomène était dû à un élargissement inhomogène du spectre de la diffusion Brillouin stimulée. Selon eux, cet élargissement proviendrait du fait que la fibre est susceptible de guider non pas un unique vecteur d'onde dont la direction coïnciderait avec l'axe de propagation mais toute une distribution de vecteurs d'onde de directions légèrement inclinées par rapport à l'axe de propagation (Fig. 3.7). Toujours selon eux, les caractéristiques de cette distribution angulaire (et en particulier l'écart maximum  $\alpha_c$  entre le vecteur

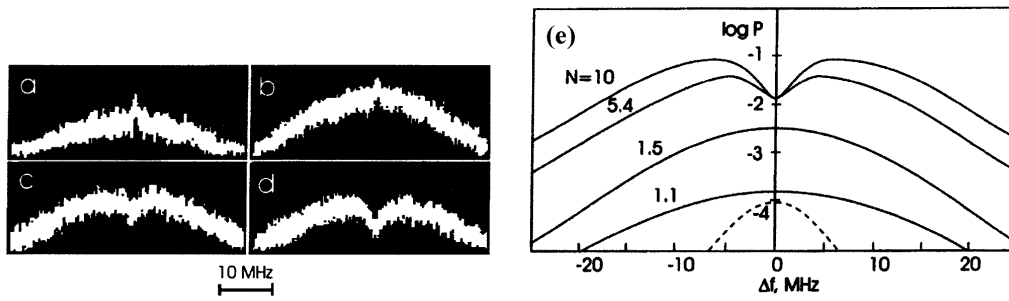


FIG. 3.6 – Expériences réalisées dans le générateur Brillouin par V.I. Kovalev et R.G. Harrison : Spectres des fluctuations de l'intensité du champ Stokes rétrodiffusé obtenus pour différents niveaux de puissance de la pompe  $N$  normalisée par rapport au seuil du générateur ( (a) :  $N = 1.1$ ; (b)  $N = 1.5$ ; (c)  $N = 5.4$ ; (d)  $N = 10.0$ ). Les spectres obtenus ont été reproduits sur la figure (e). La courbe en traits hachurés correspond à la différence entre les spectres obtenus pour  $N = 1.5$  et pour  $N = 10.0$  (d'après [Kovalev et Harrison, 2000]).

d'onde et l'axe de propagation) sont fixées par l'ouverture numérique de la fibre. Dans ces conditions, l'angle  $\theta$  entre les vecteurs d'onde  $\vec{k}_p$  et  $\vec{k}_s$  caractérisant la propagation des champs pompe et Stokes n'est plus unique et égal à  $\pi$  mais varie continuellement entre  $\pi - 2\alpha_c$  et  $\pi$ . De ce fait, il n'existerait plus un unique décalage Brillouin mais un continuum de décalages et au final, la raie de diffusion serait élargie de manière inhomogène. Ceci signifierait qu'il est impossible de décrire le processus de diffusion Brillouin stimulée dans les fibres à l'aide d'un modèle unidimensionnel. A partir de leur vision du processus d'élargissement inhomogène, V.I. Kovalev et R.G. Harrison ont expliqué que la présence du brûlage de trou spectral est due au

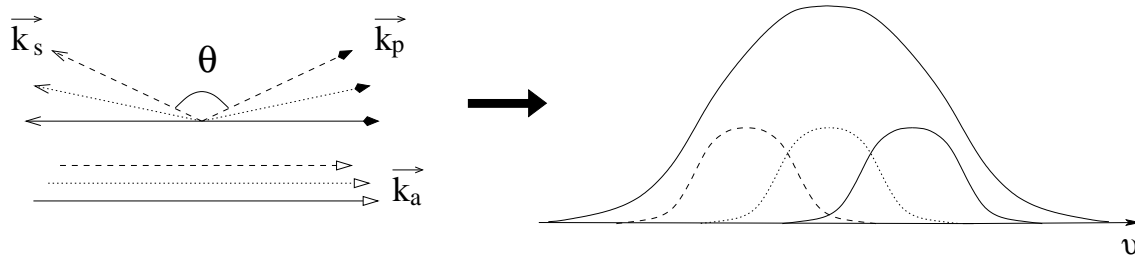


FIG. 3.7 – Origine de l'élargissement inhomogène de la bande de diffusion Brillouin d'après V.I. Kovalev et R.G. Harrison : différents vecteurs d'onde  $\vec{k}_p$  peuvent se propager dans une fibre. A chaque vecteur d'onde du champ de pompe est associée un vecteur d'onde  $\vec{k}_s$  et un vecteur d'onde  $\vec{k}_a$  de façon à ce que la condition  $\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_a$  soit vérifiée. Dans ces conditions, il n'existe pas un unique décalage Brillouin mais un continuum de décalages Brillouin.

fait que l'amplification de l'onde Stokes dépend de l'orientation du vecteur  $\vec{k}_p$ . Ils ont affirmé que le gain est maximal pour le vecteur  $\vec{k}_p$  parallèle à l'axe optique de la fibre. La composante du champ de pompe correspondante est alors la plus fortement déplétée. Ceci engendrerait selon V.I. Kovalev et R.G. Harrison l'apparition du brûlage de trou spectral.

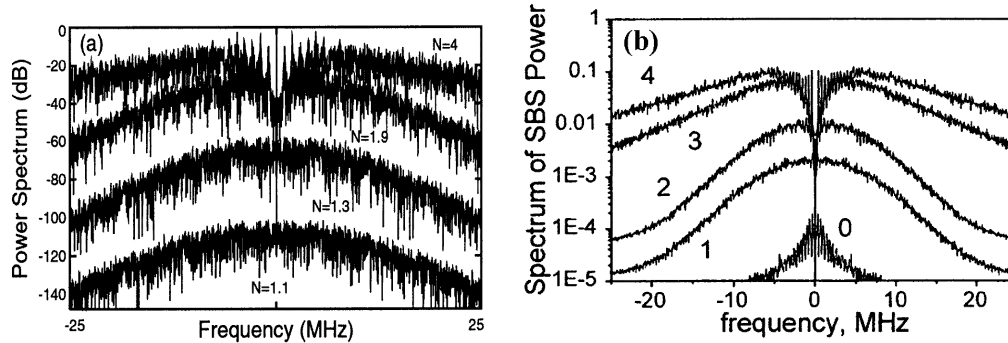


FIG. 3.8 – Générateur : Spectre de puissance du champ Stokes obtenu par intégration numérique du modèle cohérent à trois ondes pour différents niveaux de puissance de pompe normalisée  $N$  : (a) d'après [Randoux et Zemmouri, 2002]; (b) d'après [Fotiadi et al., 2002] : (1)  $N = 1.1$ ; (2)  $N = 1.5$ ; (3)  $N = 5.4$ ; (4)  $N = 10.0$ ; (0) différence entre le spectre à  $N = 1.5$  et à  $N = 10.0$ .

Deux articles ont cependant contredit l'interprétation des résultats expérimentaux formulée par V.I. Kovalev et R.G. Harrison. Le premier est un commentaire dans lequel S. Randoux et J. Zemmouri ont montré grâce à des simulations numériques que tous les comportements observés expérimentalement pouvaient être reproduits dans le cadre du modèle cohérent à trois ondes où l'on suppose que la diffusion Brillouin stimulée est un processus où l'élargissement spectral est de nature homogène [Randoux et Zemmouri, 2002]. Selon eux, le brûlage de trou est lié au profil spatial du champ de pompe. Ils ont en effet montré que ce dernier est sujet à de fortes variations lorsque le trou apparaît dans le spectre des fluctuations de l'intensité Stokes. Dans le second article, A.A. Fotiadi et son équipe ont obtenu des résultats numériques analogues [Fotiadi et al., 2002] (cf. Fig. 3.8b). De plus ils ont expliqué que le spectre du champ Stokes et le spectre des fluctuations de l'intensité Stokes ne sont pas identiques. Ils ont vérifié numériquement qu'aucun trou n'apparaît dans le spectre du champ Stokes alors que, pourtant, on constatait dans les mêmes conditions la présence d'un trou dans le spectre des fluctuations d'intensité.

Une vive polémique s'installa au sein de la communauté scientifique travaillant dans le domaine puisque V.I. Kovalev et R.G. Harrison ont continué à considérer que l'élargissement spectral du processus de diffusion Brillouin était inhomogène



[Kovalev et Harrison, 2002a], [Kovalev et Harrison, 2002b]. En outre, l'apparition d'un trou dans la bande de gain d'un amplificateur Brillouin avait été précédemment prédite [Takushima et Kikuchi, 1995] puis observée expérimentalement par Y. Takushima et K. Kikuchi [Takushima et Kikuchi, 1999]. L'amplificateur Brillouin qu'ils étudient est cependant un peu particulier puisqu'il met en jeu trois ondes. Une onde de pompe et une onde signal sont injectées aux deux extrémités de la fibre (voir la figure 3.9). Les fréquences de ces deux ondes sont fixes. La troisième onde est un

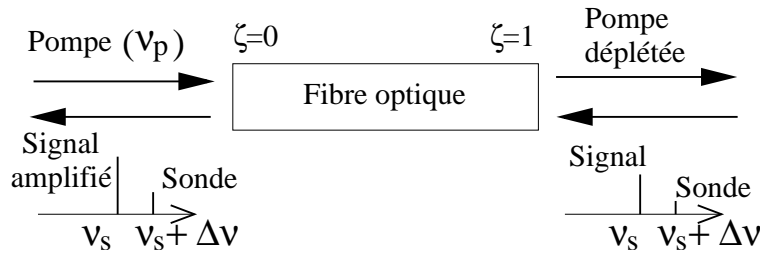


FIG. 3.9 – Représentation schématique de l'amplificateur à trois ondes utilisé par Y. Takushima et K. Kikuchi pour mettre en évidence l'apparition d'un trou dans la bande de gain (d'après [Takushima et Kikuchi, 1995]).

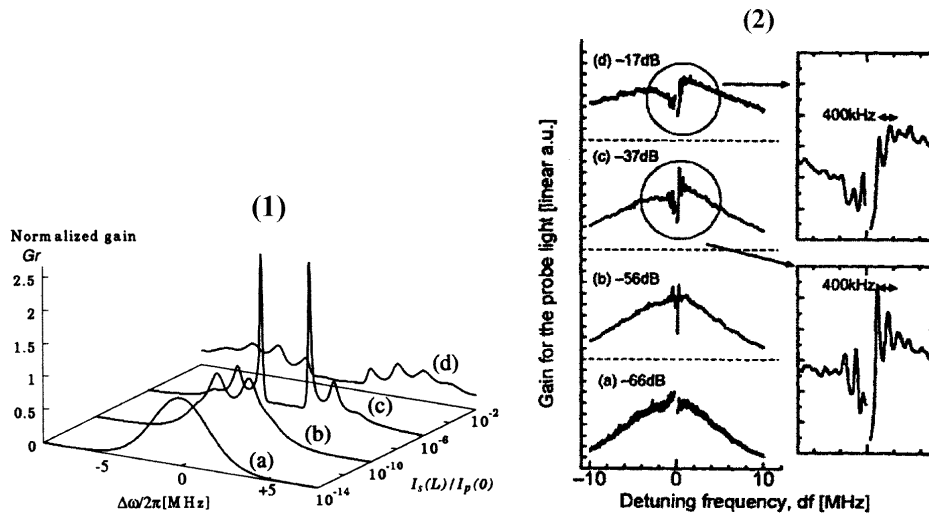


FIG. 3.10 – Brûlage de trou dans un amplificateur Brillouin par Y. Takushima et K. Kikuchi : gain de la sonde pour différentes intensités de signal. (a) : résultats théoriques obtenus par intégration numérique d'équations dérivées du modèle cohérent (d'après [Takushima et Kikuchi, 1995]). (b) : résultats expérimentaux. Les valeurs en décibels indiquent le rapport entre la puissance de l'onde signal et celle de l'onde de pompe (d'après [Takushima et Kikuchi, 1999]).

faisceau de sonde injecté dans la fibre par la même extrémité que l'onde signal. La fréquence de cette sonde est balayée, ce qui permet d'obtenir sa bande de gain. C'est dans celle-ci qu'ils ont d'abord montré théoriquement la possibilité de l'apparition d'un trou pour des intensités de signal suffisantes pour saturer l'amplificateur (voir Fig. 3.10a). Cela a été vérifié expérimentalement par la suite (voir Fig. 3.10b). Toutefois, aucune interprétation satisfaisante ne fut donnée quant à l'origine de l'apparition de ce brûlage de trou spectral.

Pour résumer, un brûlage de trou dans le spectre des fluctuations de l'intensité du champ Stokes délivré par un générateur Brillouin à fibre a été observé pour la première fois expérimentalement par V.I. Kovalev et R.G. Harrison en 2000. Ces derniers ont considéré que cette observation est la preuve de l'élargissement spectral inhomogène de la diffusion Brillouin stimulée dans les fibres. D'après eux, ceci proviendrait du fait que la fibre est capable de guider toute une distribution de vecteurs d'onde de directions légèrement inclinées par rapport à l'axe de propagation. Cette interprétation est lourde de conséquences puisqu'elle remet en cause une partie de la théorie de l'optique guidée où l'on utilise généralement des modèles unidimensionnels pour rendre compte des phénomènes observés. Cependant, cette remise en cause de la nature de l'élargissement spectral est sujette à polémique. En effet, des simulations numériques effectuées dans le cadre du modèle cohérent à trois ondes où l'élargissement spectral est supposé homogène révèlent des comportements analogues à ceux observés expérimentalement. Par ailleurs, un brûlage de trou a aussi été observé expérimentalement dans la bande de gain d'un amplificateur Brillouin. Ce résultat a été reproduit théoriquement à l'aide du même modèle à trois ondes. Toutefois, la présence du brûlage de trou, qui est généralement la signature d'un élargissement inhomogène, n'a pas été expliquée dans le cadre du modèle à trois ondes, que ce soit pour le générateur ou pour l'amplificateur. En outre, aucune connexion n'est établie entre le brûlage de trou observé dans le générateur et celui observé dans l'amplificateur. Une grande confusion règne donc quant à la nature de l'élargissement spectral du processus de diffusion Brillouin stimulée dans les fibres.

La publication qui suit, parue en mai 2002 dans *Physical Review A*, a pour but de clarifier la situation quant à la nature de l'élargissement spectral de la diffusion Brillouin stimulée dans les fibres. Dans cet article, notre travail est effectué en supposant que l'élargissement spectral est de nature homogène. La fonction de transfert caractérisant la réponse linéaire d'un amplificateur à une faible modulation d'amplitude du signal injecté  $y$  est d'abord déterminée analytiquement. Pour cela, nous étudions l'évolution des variations relatives d'amplitude des champs comme nous l'avons fait au chapitre 2 pour déterminer la réponse linéaire du laser à une faible

modulation d'amplitude. Nous calculons cette fonction de transfert pour différents régimes de fonctionnement de l'amplificateur. Ceci nous permet d'expliquer l'origine du brûlage de trou. La fin de l'article est consacré au générateur. Nous montrons que les causes de l'apparition du brûlage de trou sont identiques pour le générateur et pour l'amplificateur.

## 3.2 Origin of spectral hole burning in Brillouin fiber amplifiers and generators

### Origin of spectral hole burning in Brillouin fiber amplifiers and generators

L. Stépien, S. Randoux, and J. Zemmouri

*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR 8523*

*Centre d'Études et de Recherches Lasers et Applications,*

*Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France)*

**PHYSICAL REVIEW A, Volume 65, 053812, mai 2002**

#### Abstract

We show theoretically that the spectral hole burning recently observed in Brillouin fiber amplifiers and generators can be interpreted without invoking an inhomogeneous broadening of the Brillouin line. By using the three-wave model of stimulated Brillouin scattering (SBS), we first investigate the linear response of a Brillouin fiber amplifier to a weak amplitude modulation of the injected signal wave. The transfer functions that fully characterize this response are analytically calculated. The fact that they may exhibit a dip is shown to be due both to the gain saturation and to the coupling between the pump and signal perturbations that counterpropagate around the steady-state intensity profiles. These transfer functions also appropriately characterize the way through which noisy perturbations are filtered in SBS fiber generators. The spectral hole burning observed in generators is thus simply connected to spectral hole burning studied in SBS amplifiers.

## 1. Introduction

Stimulated Brillouin scattering (SBS) is a nonlinear process that manifests through the generation of a backward-propagating Stokes wave whose frequency is downshifted from that of the pump laser<sup>1</sup>. In optical fibers, two experimental configurations permit to study this interaction in a simple way: i) the SBS generator, and ii) the SBS amplifier<sup>2</sup>. In the former configuration, great care is taken to avoid Fresnel reflections from the fiber ends and only one laser beam is injected into the fiber core. SBS is then initiated from thermally excited sound waves and the intensity of the generated Stokes wave is found to exhibit fluctuations of a stochastic nature<sup>3-5</sup>. In the amplifier configuration, Fresnel reflections are also eliminated from the fiber ends but a strong pump field and a weak signal are now launched into the fiber. The signal is strongly amplified if its frequency falls within the Brillouin gain bandwidth that typically broadens up to several tens of MHz<sup>6</sup>. The linewidth of the Stokes radiation delivered by Brillouin fiber generators is also of this order of magnitude<sup>4</sup>. This spectral broadening around the exact Stokes frequency arises from the finite response time ( $\simeq 10$  ns) of the acoustic wave involved in the SBS interaction.

There is currently a lot of controversy about the exact nature of spectral broadening of SBS in optical fibers. Recent experiments performed both in a Brillouin fiber amplifier and in a Brillouin fiber generator have indeed revealed features that are usually observed as a laser radiation resonantly interacts with an atomic medium in which absorption lines are inhomogeneously broadened<sup>7</sup>. Actually, hole burning has been observed in the gain spectrum of a Brillouin fiber amplifier<sup>8</sup> and in the spectrum of intensity fluctuations of the Stokes light emitted by a Brillouin fiber generator<sup>9</sup>. As spectral hole burning usually typify the interaction of laser radiation with a inhomogeneously broadened system, all the features experimentally observed have been attributed to an inhomogeneous broadening of the Brillouin line. According to Kovalev and Harrison who performed experiments in a Brillouin fiber generator<sup>9</sup>, this inhomogeneous broadening arises from the waveguide interaction of the pump and Stokes waves. Following their interpretation, there is not only one Stokes

frequency shift as it should be the case if the SBS interaction involved plane waves. A continuum of frequency shifted Stokes components is generated because a single-mode fiber is able to guide a fan of beam directions within a small angle. However, this interpretation has been disputed by two of us (RZ) who have shown that the behaviors reported by Kovalev and Harrison can be simulated without invoking an inhomogeneous broadening of the Brillouin line<sup>10</sup>. In particular, RZ have shown that the hole burning presented in ref.<sup>9</sup> can be reproduced by numerically integrating the equations of the usual three-wave model of SBS in which both homogeneous broadening and plane wave propagation are assumed. In the Brillouin fiber amplifier, Takushima and Kikuchi have also shown that the occurrence of spectral gain hole burning can be described by using this three-wave model<sup>11</sup>. Nevertheless, some confusion now surrounds the nature of spectral broadening of SBS in optical fibers partly because the physical mechanisms responsible for spectral hole burning of a homogeneously broadened Brillouin line remain unclear. Furthermore, no connection has been established between the spectral hole burning found in Brillouin fiber amplifiers and the spectral hole burning observed in Brillouin fiber generators.

The aim of this paper is to study theoretically the mechanisms inducing the emergence of spectral hole burning in a Brillouin line that is supposed to be homogeneously broadened. By using the three-wave model of SBS, we will show in particular that these mechanisms are identical both in the Brillouin fiber amplifier and in the Brillouin fiber generator. This paper is organized in the following way. The three-wave model of SBS is briefly presented in Sec. 2. The origin of spectral gain hole burning in Brillouin fiber amplifiers is studied in Sec. 3. In particular, we investigate the linear response of the Brillouin fiber amplifier to a weak amplitude modulation of the injected signal. Analytical expressions for the transfer functions that fully characterize this response are determined for three different amplification regimes. The results obtained are then used in Sec. 4 to explain the occurrence of hole burning in the spectrum of intensity fluctuations of Brillouin fiber generators. We thus show that the noisy perturbations propagating in generators are simply filtered by the transfer functions determined for the amplifier.

## 2. The three-wave model of SBS

The theoretical study presented throughout this paper enters within the framework of the three-wave model of SBS that is commonly used to describe the dynamics of Brillouin fiber lasers<sup>12</sup>, amplifiers<sup>13</sup> and generators<sup>4</sup>. Let us recall that this model is derived by assuming that the nonlinear interaction does not alter the mode characteristics of the guide so that the transverse evolution of the optical fields can be decoupled from their longitudinal one. As the SBS process is then supposed to involve infinite plane waves propagating collinearly along the fiber axis, the theoretical treatment is greatly simplified. In particular, this means that only one phase matching relation is verified and that the mechanisms of inhomogeneous broadening by the guiding suggested in ref.<sup>9</sup> cannot be described by using such an approach. The acoustic damping being supposed uniform in the fiber, the three-wave model of SBS is furthermore established by assuming that the Brillouin line is homogeneously broadened. Assuming linear polarization for the light beams and slowly varying envelopes for all the waves, neglecting the weak attenuation of the fiber and the perturbative optical Kerr effect, the dimensionless equations describing the SBS interaction read

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \zeta} = -g B \varepsilon_s, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \zeta} = g B^* \varepsilon_p, \quad (1b)$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial B}{\partial \tau} + B = \varepsilon_p \varepsilon_s^* + f(\zeta, \tau). \quad (1c)$$

$\varepsilon_p$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $B$  represent, respectively, the complex envelopes of the pump, Stokes and acoustic waves. The time  $\tau$  is normalized to the transit time of the light inside the fiber.  $\zeta$  is the space coordinate that is normalized to the fiber length  $L$ . The fields  $\varepsilon_p$  and  $\varepsilon_s$  are measured in units of the maximum pump field  $E_{max}$  available at the entrance end of the fiber.  $g$  is the normalized SBS coupling constant.  $\beta_A$  that represents the normalized damping rate of the acoustic wave is equal to  $\pi \Delta \nu_B n L / c$  where  $c/n$  and  $\Delta \nu_B$  are the phase velocity of light

inside the fiber and the Brillouin spontaneous linewidth, respectively. Full details concerning the adopted normalization are given in ref.<sup>14</sup>.

$f(\zeta, \tau)$  is a weak noise term describing the random thermal fluctuations of density occurring inside the fiber. As it represents spontaneous scattering, its relative importance is much weaker than that of the term  $\varepsilon_p \varepsilon_s^*$  associated to stimulated Brillouin scattering. However, its influence cannot be neglected in Brillouin fiber generators in which the stochastic fluctuations of the Stokes intensity are completely shaped by the randomness of spontaneous scattering<sup>3,4</sup>. In Brillouin fiber amplifiers, two counterpropagating laser fields are launched into the fiber and the dynamics no longer remains noise dominated but becomes purely deterministic<sup>13</sup>. In typical experiments, Brillouin amplifiers operate in a stable fixed state in which the signal wave is strongly and monotonically amplified<sup>6</sup>. The influence of the noise term  $f(\zeta, \tau)$  is then commonly fully neglected<sup>11,15</sup>.

The normalized parameters used throughout this paper are  $g = 10.98$  and  $\beta_A = 18.22$ . They are computed from SBS coupling constants commonly found in the literature<sup>14,16</sup> and from physical values corresponding to typical optical-fiber experiments. The fiber length is supposed to be 60 m and its core diameter is equal to 8  $\mu\text{m}$ . At a pumping wavelength of 1550 nm,  $\Delta\nu_B$  is estimated to 20 MHz<sup>6</sup>. The maximum pump field  $E_{max}$  chosen for the normalization is 2.27 MV/m and corresponds to an injected pump power of 500 mW. To clearly precise the relation between our reduced variables and physically measurable quantities, a normalized pump intensity  $|\varepsilon_p(\zeta = 0)|^2$  equal to unity corresponds to a pump power of 500 mW injected inside the fiber core. A normalized time variation of unity corresponds to 0.29  $\mu\text{s}$  and a normalized angular frequency  $\omega$  of  $2\pi$  corresponds to a physical angular frequency of  $2\pi \times 3.4 \cdot 10^6$  rad/s.

### 3. Spectral gain hole burning in Brillouin fiber amplifiers

The aim of this section is to study the mechanisms responsible for the emergence of hole burning in the gain bandwidth of Brillouin fiber amplifiers. In Sec. 3 A, we first recall the



approach adopted in ref.<sup>11</sup> by Takushima and Kikuchi who have proposed a configuration in which spectral hole burning is evidenced by injecting three optical waves into a Brillouin fiber amplifier. After a brief discussion about the relation between this approach and pump-probe studies performed in atomic systems, we show that this three-wave configuration is equivalent to a two-wave configuration in which the amplitude of the signal wave is weakly modulated. This permits to greatly simplify the theoretical treatment since only the equations governing the evolution of the field amplitudes have to be considered. These amplitude equations are linearized and the problem is reduced to the determination of transfer functions characterizing the way through which the amplitude modulation is filtered by the amplifier. These transfer functions fully characterize the linear response of the amplifier and they are analytically calculated for three different regimes ranging from unsaturated to saturated amplification. By using appropriate approximated expressions for the stationary pump and signal intensity profiles, Sec. 3 B, 3 C and 3 D are thus devoted to the theoretical treatment of the weak interaction, the weak saturation and the strong saturation regimes, respectively.

### A. Theoretical approach and approximations

In ref.<sup>11</sup>, Takushima and Kikuchi consider that the Brillouin amplifier operates in a stable fixed state obtained by injecting two counterpropagating laser beams into the fiber [see Fig. 1(a)]. A strong pump field (resp. a weak signal field) oscillating at an optical frequency  $\nu_p$  (resp.  $\nu_s$ ) is launched into the fiber at  $\zeta = 0$  (resp.  $\zeta = 1$ ). The frequency detuning  $\nu_p - \nu_s$  between the two fields is equal to the Brillouin shift in silica so that the signal is strongly and resonantly amplified. Additionally, a probe field oscillating at a frequency  $\nu_s + \Delta\nu$  is launched in the fiber at  $\zeta = 1$  [see Fig. 1(b)]. Whatever  $\zeta$ , the amplitude  $a_{pr}(\zeta)$  of this field is much weaker than that of the pump and signal fields. The gain  $G_{pr} = a_{pr}(\zeta = 0)/a_{pr}(\zeta = 1)$  experienced by the probe in the amplifier is then measured as function of  $\Delta\nu$ . If the intensity of the signal wave is sufficiently low, the gain of the amplifier is not saturated and a bell-

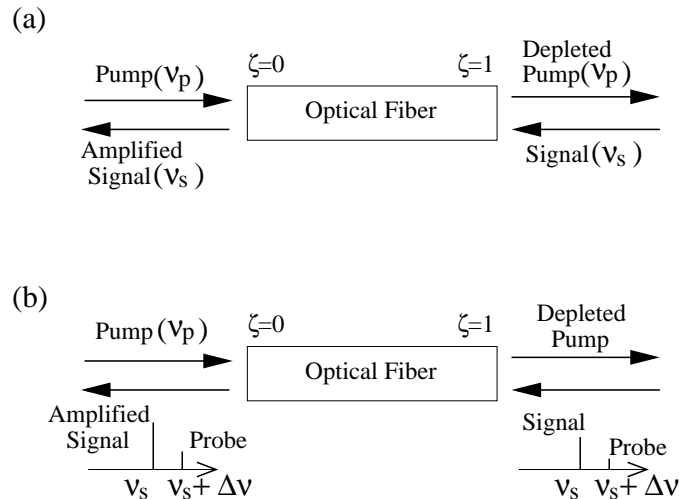


Fig. 1. Two possible configurations for studying Brillouin fiber amplifiers. (a) Usual two-wave configuration studied in ref.<sup>13</sup>. (b) Three-wave configuration studied in ref.<sup>11</sup>.

shaped curve is recorded. On the other hand, the function  $G_{pr}(\Delta\nu)$  is found to exhibit a dip around  $\Delta\nu \simeq 0$  as gain saturation is reached. The theoretical analysis performed by Takushima and Kikuchi enters within the framework of the three-wave model presented in Sec. 2. Eqs. (1) are linearized by assuming that the probe field generates weak perturbations that propagate around the stationary profiles of the pump and signal fields. This leads to four differential equations governing the longitudinal evolution of the complex amplitudes of various sidebands oscillating at  $\pm\Delta\nu$ . Finally, these equations are numerically integrated and the function  $G_{pr}(\Delta\nu)$  is plotted for increasing values of the signal intensity.

The approach adopted by Takushima and Kikuchi is quite analogous to that used in pump-probe studies performed in atomic systems. In standard pump-probe experiments, the pump beam “prepares” the atomic system that is subsequently monitored by the probe beam. In ref.<sup>11</sup> and<sup>8</sup>, the pump and signal beams “prepare” the Brillouin fiber amplifier in a stationary state that is subsequently monitored by the probe beam. In inhomogeneously broadened atomic systems, it is well-known that a dip is observed in the probe absorption profile as the pump beam saturates one segment of the absorption line. However, the emergence of spectral hole burning at the frequency of the pump laser must not be interpreted

straightforwardly as being a signature of an inhomogeneous broadening of the absorption line. The presence of a strong wave may indeed cause the absorption line to appear to be “hole-burned” when probed by a second wave, even though the broadening mechanisms are homogeneous<sup>17</sup>. This phenomenon has been studied in the 1980’s. It arises from a periodic modulation of the ground state population at the beat frequency between the pump and probe fields<sup>18,19</sup>. From this brief summary about spectral hole burning in atomic systems, it appears that the mechanisms responsible for the emergence of a dip in the Brillouin gain spectrum may be subtle and that no simple conclusion can be drawn straightforwardly from the observation of such a phenomenon.

After this qualitative discussion, let us now examine how the theoretical treatment of spectral hole burning in Brillouin fiber amplifiers can be further developed. To describe the behavior of the Brillouin fiber amplifier represented in Fig. 1(b), Eqs. (1) must be completed by the following boundary conditions

$$\varepsilon_p(\zeta = 0, \tau) = \mu, \quad (2a)$$

$$\varepsilon_s(\zeta = 1, \tau) = a_s (1 + \alpha e^{i\Delta\Omega\tau}). \quad (2b)$$

$\mu$  is a dimensionless pump parameter and  $a_s$  represents the amplitude of the signal field injected into the amplifier.  $\alpha$  is a small dimensionless parameter determining the ratio between the probe and signal amplitudes ( $\alpha = a_{pr}/a_s \simeq 10^{-3}$ ).  $\Delta\Omega$  is proportional to the frequency detuning between the signal and the probe fields ( $\Delta\Omega = 2\pi \Delta\nu nL/c$ ). By considering that  $\alpha \ll 1$ , the intensity  $I_s(\zeta = 1, \tau)$  and the phase  $\phi_s(\zeta = 1, \tau)$  of the complex field  $\varepsilon_s(\zeta = 1, \tau)$  can be easily determined and read

$$I_s(\zeta = 1, \tau) = |\varepsilon_s(\zeta = 1, \tau)|^2 \simeq a_s^2 (1 + 2\alpha \cos(\Delta\Omega\tau)), \quad (3a)$$

$$\tan(\phi_s(\zeta = 1, \tau)) \simeq \alpha \sin(\Delta\Omega\tau). \quad (3b)$$

These expressions show that adding a weak probe field that is frequency detuned to a resonant signal field is equivalent to weakly modulate both the amplitude and the phase of

the signal wave. Let us now examine how this simple result can be used to simplify the theoretical analysis and let us first transform the complex variables of Eqs.(1) to modulus-phase form. By neglecting the noise term  $f(\zeta, \tau)$  of Eq. (1c), we obtain

$$\frac{\partial A_p}{\partial \tau} + \frac{\partial A_p}{\partial \zeta} = -g A_a A_s \cos \theta, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial A_s}{\partial \tau} - \frac{\partial A_s}{\partial \zeta} = g A_a A_p \cos \theta, \quad (4b)$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial A_a}{\partial \tau} + A_a = A_p A_s \cos \theta, \quad (4c)$$

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi_p}{\partial \zeta} = -g \frac{A_a A_s}{A_p} \sin \theta, \quad (4d)$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \phi_s}{\partial \zeta} = -g \frac{A_a A_p}{A_s} \sin \theta, \quad (4e)$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial \phi_a}{\partial \tau} = -\frac{A_p A_s}{A_a} \sin \theta, \quad (4f)$$

where  $A_i$  and  $\phi_i$  ( $i = p, s, a$ ) represent respectively the amplitudes and phases of the pump, Stokes and acoustic waves. The variable  $\theta(\zeta, \tau)$  is a function of the phases that is equal to  $\phi_s(\zeta, \tau) + \phi_a(\zeta, \tau) - \phi_p(\zeta, \tau)$ . The amplitude and the phase of the signal wave at  $\zeta = 1$  being weakly modulated, one can consider that the amplitudes and the phases of all the waves involved in the SBS interaction will weakly fluctuate around their steady state. In these conditions, solutions of Eqs. (4) can be sought under the following form

$$A_i(\zeta, \tau) = A_i^0(\zeta) + \delta A_i(\zeta, \tau) \quad (i = p, s, a), \quad (5a)$$

$$\phi_i(\zeta, \tau) = \phi_i^0(\zeta) + \delta \phi_i(\zeta, \tau) \quad (i = p, s, a). \quad (5b)$$

The functions  $A_i^0(\zeta)$  (resp.  $\phi_i^0(\zeta)$ ) are the steady-state profiles of the field amplitudes (resp. phases) calculated in ref.<sup>13</sup>. The functions  $\delta A_i(\zeta, \tau)$  (resp.  $\delta \phi_i(\zeta, \tau)$ ) represent the slight deviations of these amplitudes (resp. phases) from their steady-state profiles. If the frequency

of the signal wave is precisely tuned to the center of the Brillouin gain bandwidth, all the stationary phase profiles  $\phi_i^0(\zeta)$  are uniformly equal to zero<sup>13</sup> and the variable  $\theta(\zeta, \tau)$  then slightly fluctuates around zero. The term  $\cos \theta$  present in Eqs. (4a), (4b), and (4c) only brings second-order terms that are neglected when the linearization is performed by substituting Eqs.(5) into Eqs.(4). To the first order, amplitude fluctuations are thus decoupled from phase fluctuations. As we are mainly interested in determining the gain experienced by the probe wave, we will forget the phase equations and we will only consider the equations governing the spatiotemporal evolution of the amplitude fluctuations.

By introducing relative amplitude fluctuations defined as  $\widetilde{\delta A}_i(\zeta, \tau) = \delta A_i(\zeta, \tau)/A_i^0(\zeta)$ , we obtain

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \zeta} = gI_s(\zeta) (\widetilde{\delta A}_p - \widetilde{\delta A}_a - \widetilde{\delta A}_s), \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \widetilde{\delta A}_s}{\partial \zeta} = gI_p(\zeta) (\widetilde{\delta A}_p + \widetilde{\delta A}_a - \widetilde{\delta A}_s), \quad (6b)$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial \widetilde{\delta A}_a}{\partial \tau} = \widetilde{\delta A}_p + \widetilde{\delta A}_s - \widetilde{\delta A}_a, \quad (6c)$$

where the functions  $I_i(\zeta) = [A_i^0(\zeta)]^2$  ( $i = p, s$ ) represent the steady-state intensity profiles of the pump and signal waves inside the Brillouin fiber amplifier. These equations must be completed by boundary conditions expressing that the amplitude of the pump laser is constant whereas the amplitude of the signal field is sinusoidally modulated. They read

$$\widetilde{\delta A}_p(\zeta = 0, \tau) = 0, \quad (7a)$$

$$\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 1, \tau) = \alpha \cos(\Delta\Omega \tau). \quad (7b)$$

With these boundary conditions, the spectra of the various fields at the input and output ends of the fiber consist of carriers and weak sidebands. This is schematically represented in Fig. 2 that shows the spectral components involved in a Brillouin fiber amplifier submitted to a weak amplitude modulation of the injected signal wave. Let us emphasize that this

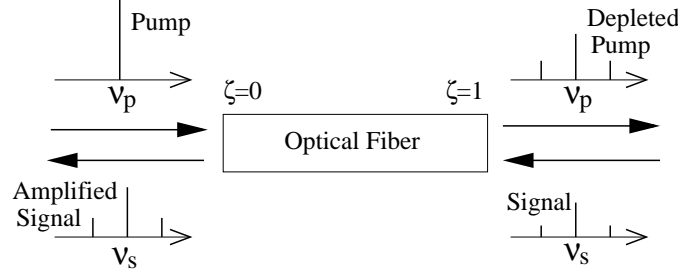


Fig. 2. Schematic representation of a Brillouin fiber amplifier submitted to a weak amplitude modulation of the signal. This configuration is equivalent to that presented in Fig. 1(b).

configuration is equivalent to the one studied by Takushima and Kikuchi in ref.<sup>11</sup> [see also Fig. 1(b)]. However, it should be noted that Takushima and Kikuchi directly linearize the set of Eqs. (1) to obtain a set of four complex differential equations that is solved only numerically. On the other hand, our theoretical treatment can now be further developed and as shown hereafter, analytical solutions can be found from the unsaturated to the saturated amplification regimes.

The next step of our theoretical analysis consists in taking the Fourier transforms of Eqs. (6). We then obtain two coupled differential equations governing the spatial evolutions of the Fourier transforms  $\delta\widetilde{A}_p(\zeta, \omega)$  and  $\delta\widetilde{A}_s(\zeta, \omega)$  of the functions  $\delta\widetilde{A}_p(\zeta, \tau)$  and  $\delta\widetilde{A}_s(\zeta, \tau)$ .

They read

$$\frac{\partial\delta\widetilde{A}_s(\zeta, \omega)}{\partial\zeta} = i\omega \left( \frac{gI_p(\zeta)}{\beta_A + i\omega} + 1 \right) \delta\widetilde{A}_s(\zeta, \omega) - gI_p(\zeta) \left( 1 + \frac{\beta_A}{\beta_A + i\omega} \right) \delta\widetilde{A}_p(\zeta, \omega), \quad (8a)$$

$$\frac{\partial\delta\widetilde{A}_p(\zeta, \omega)}{\partial\zeta} = -gI_s(\zeta) \left( 1 + \frac{\beta_A}{\beta_A + i\omega} \right) \delta\widetilde{A}_s(\zeta, \omega) + i\omega \left( \frac{gI_s(\zeta)}{\beta_A + i\omega} - 1 \right) \delta\widetilde{A}_p(\zeta, \omega). \quad (8b)$$

With our normalization, the steady-state intensity profiles of the pump and signal waves calculated in ref.<sup>13</sup> read

$$I_p(\zeta) = \frac{I_p(0)(1-r)}{1-r\exp(-\gamma\zeta)}, \quad (9a)$$

$$I_s(\zeta) = \frac{I_p(0)r(1-r)}{\exp(\gamma\zeta) - r}, \quad (9b)$$

with

$$r = \frac{I_s(0)}{I_p(0)}, \quad (10a)$$

$$\gamma = 2g I_p(0) (1 - r). \quad (10b)$$

For small values of the parameter  $r$  (i. e.  $r < 10^{-4}$ ), the amplifier operates in the weak interaction regime. Pump depletion can be ignored and the signal wave is exponentially amplified. In other words, the stationary pump and signal profiles can be approximated to

$$I_p(\zeta) = I_p(0), \quad (11a)$$

$$I_s(\zeta) = r I_p(0) \exp(-\gamma \zeta), \quad (11b)$$

with  $\gamma = 2g I_p(0)$ . For values of  $r$  ranging approximately between  $10^{-2}$  and  $10^{-3}$ , the Brillouin fiber amplifier operates in the weak saturation regime. Pump depletion is then not very pronounced and it can be ignored. Eqs. (11) are still adequate but  $\gamma$  can no longer be approximated to  $2g I_p(0)$  and Eq. (10b) must be used to describe the weak gain reduction that occurs in this regime. For values of  $r$  comprised between  $10^{-2}$  and 1, the amplifier operates in the strong saturation regime in which pump depletion cannot be ignored. For moderate values of  $r$  (i. e.  $r < 0.1$ ), an approximate expression of the pump intensity profile can be found by expanding Eq. (9a) to the first order in  $r$ . It reads

$$I_p(\zeta) = I_p(0) (1 - r (1 - \exp(-\gamma \zeta))). \quad (12)$$

It can be easily seen that the exponential term of Eq. (12) does not play an important role for values of  $\zeta$  greater than  $1/\gamma \simeq 0.1$ . The signal amplification thus remains nearly exponential even in the strong saturation regime. As long as  $r$  does not exceed 0.1, Eqs. (11b) and (12) therefore describe intensity profiles that are very close to the exact solutions given by Eqs. (9). By using the approximated intensity profiles given above, Sections 3 B, 3 C and 3 D are devoted to the analytical resolution of the set of Eqs. (8) in the weak interaction, weak saturation and strong saturation regimes, respectively.

### B. Weak interaction regime

By using Eqs. (11), the set of Eqs. (8) is first transformed into a second order differential equation that reads

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega)}{\partial \zeta^2} + 2(\Gamma_0 + \Gamma_1 e^{-\gamma \zeta}) \frac{\partial \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega)}{\partial \zeta} + (\omega^2 + 2i\omega(\Gamma_0 - \Gamma_1 e^{-\gamma \zeta}) + \Omega_1^2 e^{-\gamma \zeta}) \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega) = 0 \quad (13)$$

with

$$\Gamma_0 = \frac{-i\omega g I_p(0)}{2(\beta_A + i\omega)}, \quad \Gamma_1 = \frac{-i\omega g I_s(0)}{2(\beta_A + i\omega)}, \quad \text{and} \quad \Omega_1^2 = \frac{-4\beta_A g^2 I_p(0) I_s(0)}{\beta_A + i\omega}. \quad (14)$$

In the weak interaction regime, the signal intensity is so weak that the problem can be examined to the lowest order in  $I_s(0)$ . The coefficients  $\Gamma_1$  and  $\Omega_1^2$  are thus considered as being equal to zero and Eq. (13) then simply becomes

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega)}{\partial \zeta^2} + 2\Gamma_0 \frac{\partial \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega)}{\partial \zeta} + \Omega_0^2 \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega) = 0 \quad (15)$$

with

$$\Omega_0^2 = \omega^2 \left( 1 + \frac{g I_p(0)}{\beta_A + i\omega} \right). \quad (16)$$

Taking the spatial Fourier transform of Eq. (15), we obtain a polynomial equation of degree 2 for the wave number  $k$  characterizing the propagation of the perturbation  $\widetilde{\delta A}_s$  inside the amplifier. The two roots of the polynomial provide two dispersion relations that read

$$k_1 = \omega \left( 1 + \frac{g I_p(0)}{\beta_A + i\omega} \right), \quad (17a)$$

$$k_2 = -\omega. \quad (17b)$$

The solution of Eq. (15) can then simply be written as

$$\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega) = C_1 \exp(ik_1 \zeta) + C_2 \exp(ik_2 \zeta) \quad (18)$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are integration constants that must be determined from the boundary conditions. In particular, the combination of Eq. (7a) with Eq. (8a) permits to obtain



a condition showing that  $C_2$  is equal to zero. Taking into account this last result and substituting Eq. (18) into Eq. (8a) yields  $\widetilde{\delta A}_p(\zeta, \omega) = 0$ . Therefore, in the weak interaction regime, the pump wave is much stronger than the signal wave and it remains unaffected by the amplitude modulation applied to the signal at  $\zeta = 1$ . Moreover it is worth noticing that the propagation of the signal perturbation is supported by only one of the two possible wave vectors ( $C_2 = 0$ ). The gain experienced by a signal perturbation oscillating at an angular frequency  $\omega$  can thus be directly determined from the imaginary part of  $k_1$  and it simply reads

$$|G_0(\omega)| = \left| \frac{\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \omega)}{\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 1, \omega)} \right| = \exp\left(\frac{-g I_p(0) \omega^2}{\beta_A^2 + \omega^2}\right). \quad (19)$$

The function  $|G_0(\omega)|$  is plotted in Fig. 3(a) and its analytical expression can be directly connected to the usual expression of the gain of a Brillouin amplifier<sup>2,11</sup>. When pump depletion is ignored, the gain  $G_{Ampli}(\omega)$  experienced by a signal wave that is detuned by  $\omega$  from the center of the Brillouin bandwidth indeed reads

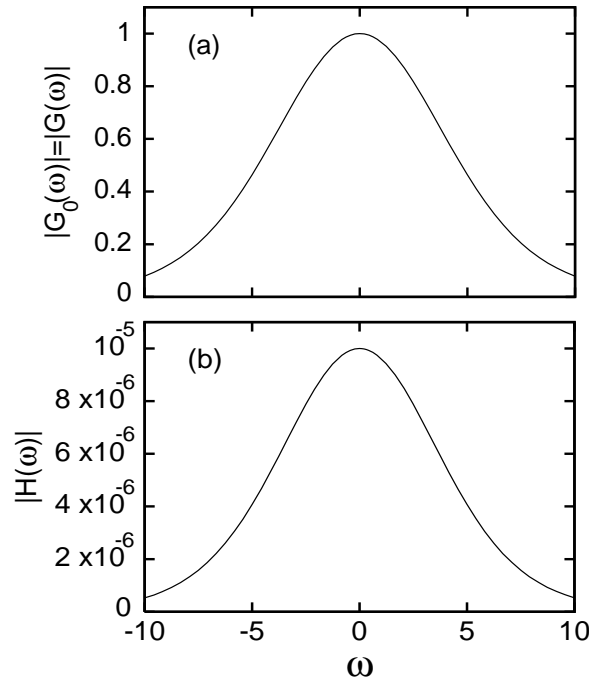


Fig. 3. Transfer functions characterizing the linear response of the Brillouin fiber amplifier in the weak interaction regime. The parameters used are:  $g = 10.98$ ,  $\beta_A = 18.22$ ,  $I_p(0) = 1$ ,  $r = 10^{-5}$ .

$$G_{Ampli}(\omega) = \frac{I_s(\zeta = 0)}{I_s(\zeta = 1)} = \exp\left(\frac{2g I_p(0) \beta_A^2}{\beta_A^2 + \omega^2}\right). \quad (20)$$

Normalizing this last expression with respect to the maximum gain  $\exp(2g I_p(0))$  and taking the square root of the obtained result simply leads to Eq. (19). This means that all the configurations presented in Figs. 1 and 2 provide results that are qualitatively analogous about the gain bandwidth in the weak interaction regime.

### C. Weak saturation regime

In the weak saturation regime, the parameter  $r$  is approximately between  $10^{-3}$  and  $10^{-2}$ . In these conditions,  $\Gamma_1$  can still be neglected with respect to  $\Gamma_0$  in Eq. (13). On the other hand, the term  $\Omega_1^2$  clearly plays a role that cannot be ignored for values of  $\omega$  that are sufficiently low [see expressions (14) and the third term of the left-hand side of Eq. (13)].

These considerations being taken into account, our working equation becomes

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega)}{\partial \zeta^2} + 2\Gamma_0 \frac{\partial \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega)}{\partial \zeta} + (\Omega_0^2 + \Omega_1^2 e^{-\gamma \zeta}) \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega) = 0. \quad (21)$$

One of the coefficients of Eq. (21) being function of  $\zeta$ , the treatment already performed for Eq. (15) cannot be applied. In particular, it is not possible to derive two dispersion relations for the propagation of the signal perturbation. Nevertheless, the solution of Eq. (21) can be found by introducing the new variable  $u = \exp(-\gamma \zeta)$ . This yields the equation

$$\gamma^2 u^2 \frac{\partial^2 \widetilde{\delta A}_s(u, \omega)}{\partial u^2} + \gamma u (\gamma - 2\Gamma_0) \frac{\partial \widetilde{\delta A}_s(u, \omega)}{\partial u} + (\Omega_0^2 + \Omega_1^2 u) \widetilde{\delta A}_s(u, \omega) = 0 \quad (22)$$

that admits the solution

$$\widetilde{\delta A}_s(u, \omega) = \left( C'_1 J_A(B\sqrt{u}) + C'_2 Y_A(B\sqrt{u}) \right) u^{\Gamma_0/\gamma}, \quad (23)$$

where  $J_A(B\sqrt{u})$  and  $Y_A(B\sqrt{u})$  are Bessel functions of the first and second kinds, respectively<sup>20</sup>. The coefficients  $A$  and  $B$  are given by

$$A = \frac{2\sqrt{\Gamma_0^2 - \Omega_0^2}}{\gamma} \quad \text{and} \quad B = \frac{2\Omega_1}{\gamma}. \quad (24)$$

The integration constants  $C'_1$  and  $C'_2$  must be determined from the boundary conditions. From their expressions, it is in particular possible to derive the analytical expressions of two transfer functions  $|G(\omega)|$  and  $|H(\omega)|$  defined as

$$|G(\omega)| = \left| \frac{\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \omega)}{\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 1, \omega)} \right| \quad \text{and} \quad |H(\omega)| = \left| \frac{\widetilde{\delta A}_p(\zeta = 1, \omega)}{\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 1, \omega)} \right|. \quad (25)$$

$|G(\omega)|$  (resp.  $|H(\omega)|$ ) relates the amplitude fluctuations of the signal at  $\zeta = 0$  (resp. the pump at  $\zeta = 1$ ) to the amplitude fluctuations of the signal applied at  $\zeta = 1$ . Their analytical forms involve complicated combinations of Bessel functions that are given in Appendix A.

Let us now discuss the modifications affecting the functions  $|G(\omega)|$  and  $|H(\omega)|$  as  $r$  increases. First of all, it is worth noticing that there is no significant difference between  $|G(\omega)|$  and  $|G_0(\omega)|$  when the Stokes intensity  $I_s(0)$  is much weaker than the pump intensity  $I_p(0)$ . This is illustrated in Fig. 3(a) that shows that the two functions are identical in the weak interaction regime for  $r = 10^{-5}$ . The analytical forms of  $|G_0(\omega)|$  and  $|G(\omega)|$  differ because they are not built from the same basis functions. The approach used to obtain the expression of  $|G_0(\omega)|$  is indeed very simple and permits to obtain a solution that writes as a linear combination of exponential functions [Eq. (18)]. This means that the propagation modes authorized for the signal perturbation inside the amplifier are progressive sine waves that are exponentially damped. As the boundary condition for the pump wave [Eq. (7a)] imposes that only one of these propagation modes is excited, the gain  $|G_0(\omega)|$  experienced by the signal perturbation is the simple exponential function given by Eq. (19). On the other hand, the approach leading to the analytical expression of  $|G(\omega)|$  [Eq. (A2)] is much less restrictive than the previous one. The solution is also much more complicated and writes as a linear combination of Bessel functions [Eq. (23)]. This means that the propagation of the signal perturbation inside the amplifier still involves two propagation modes but they do not remain simple progressive sine waves. Moreover, it should be noted that both of them are excited even in the weak interaction regime ( $C'_1 \neq C'_2 \neq 0$ ). Fig. 3(b) shows that  $|H(\omega)|$  is a bell-shaped function characterized by a peak value that is very small ( $\simeq r = 10^{-5}$ ) in the weak interaction regime. This means that the signal fluctuation propagates inside the

amplifier without significantly perturbing the pump amplitude. This result was also found in Sec. 3B by treating Eq. (13) to the lowest order in  $I_s(0)$ .

Increasing  $r$  to a numerical value of  $2 \cdot 10^{-3}$  first leads to a weak gain saturation. This is illustrated in Fig. 4(a) that shows that the function  $|G(\omega)|$  deviates from the simple exponential form presented in Fig. 3(a). It flattens out and saturates to a constant value of 0.96 at low frequencies. This figure is simply found to be the ratio between the saturated gain  $\exp(\gamma)$  and the unsaturated gain  $\exp(2gI_p(0))$ . The function  $|H(\omega)|$  presents a shape that is comparable to that of  $|G(\omega)|$  [see Fig. 4-b]. However, its peak value that remains of the order of  $r$  has now increased to approximately  $1.9 \cdot 10^{-3}$ . As shown in Fig. 5(a), further increase in the parameter  $r$  leads to the emergence of a dip in the gain profile  $|G(\omega)|$ . For  $r = 0.01$ , the central value of the gain  $|G(0)|$  has fallen to 0.824. This value remains close to the ratio between the saturated and the unsaturated gain that is equal to 0.802. As shown in Fig. 5(b), the shape of the transfer function  $|H(\omega)|$  is comparable to that of  $|G(\omega)|$  but

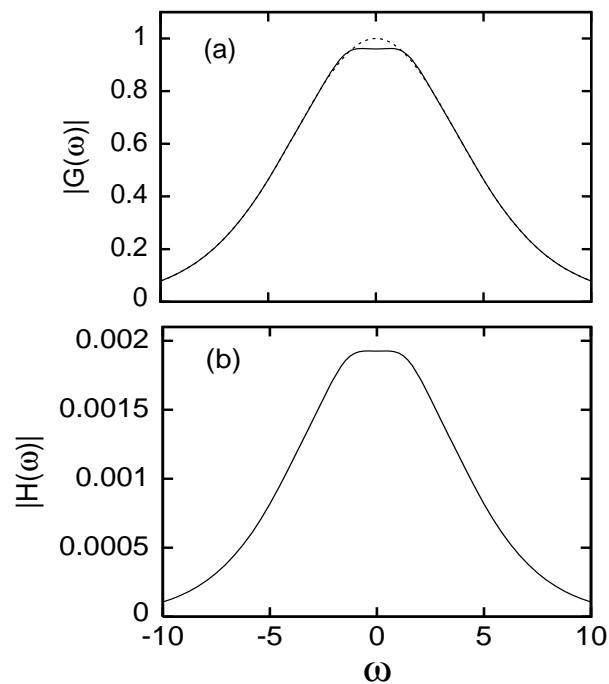


Fig. 4. Transfer functions characterizing the linear response of the Brillouin fiber amplifier in the weak saturation regime. The function  $|G_0(\omega)|$  plotted in dashed lines is shown for reference. The parameters used are:  $g = 10.98$ ,  $\beta_A = 18.22$ ,  $I_p(0) = 1$ ,  $r = 2 \cdot 10^{-3}$ .

it should be noticed that its peak value has further increased to a value of approximately 0.0095. Summarizing our results, the central value of the gain  $|G(0)|$  is approximately the ratio between the saturated and the unsaturated gain. Increasing  $r$  leads to a decrease of  $|G(0)|$  and to an increase of the weight taken by the transfer function  $|H(\omega)|$  whose peak value is always close to  $r$ . Therefore the emergence of spectral gain hole burning in the Brillouin fiber amplifier is due both to the gain saturation and to the coupling between the signal and pump perturbations. Gain saturation induces a flattening of the transfer function  $|G(\omega)|$  but the intensity of the signal wave is then so high that the coupling between the signal and pump perturbations cannot be neglected. Contrary to the weak interaction regime, the perturbation applied to the signal at  $\zeta = 1$  is not only carried by the signal wave but it is also seen by the pump wave. For a particular frequency range, the coupling strength between the signal and pump perturbations is maximum and the two perturbations reinforce each other. This results in an increase of the gain  $|G(\omega)|$  in spectral domains that are symmetrically placed around  $\omega = 0$ . Therefore, the emergence of a dip in the gain profile can be seen rather as the growth of sidebands than as the birth of a spectral hole.

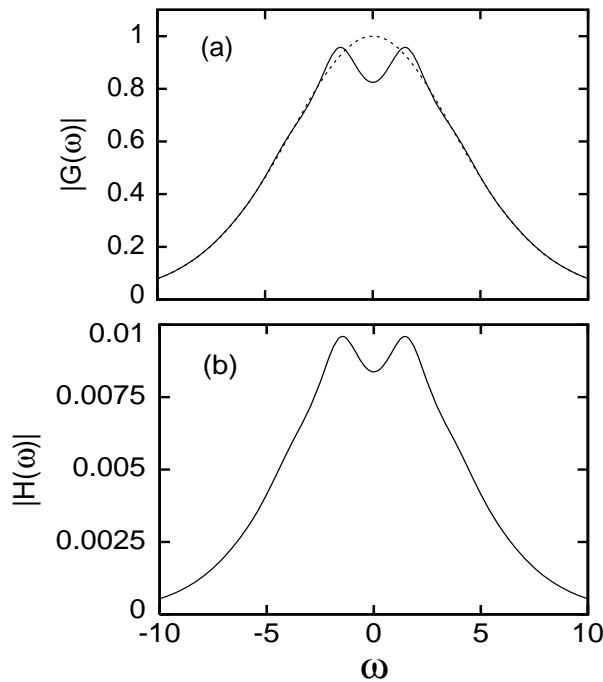


Fig. 5. Same as Fig. 4 but with  $r = 10^{-2}$ .

#### D. Strong saturation regime

For values of the parameter  $r$  ranging approximately between  $10^{-2}$  and 1, the Brillouin fiber amplifier operates in the strong saturation regime in which pump depletion cannot be ignored. The set of Eqs. (8) has been analytically solved by Fotiadi *et al* in ref.<sup>21</sup> for situations in which pump depletion is especially pronounced (i. e. for  $r \simeq 1$ ). As shown in detail in Appendix B, Eqs. (8) can also be analytically solved in the strong saturation regime for values of  $r$  ranging approximately between  $10^{-2}$  and 0.1. The simplified analytical expressions of the stationary intensity profiles given by Eqs. (11b) and (12) are thus used and the set of Eqs. (8) is transformed into a second order differential equation. Contrary to the weak saturation regime, the solution of this equation is no longer a sum of Bessel functions but of Whittaker functions (see Eq. (B4))<sup>20</sup>. As shown in Fig. 6 obtained for  $r = 0.1$ , the transfer functions  $|G(\omega)|$  and  $|H(\omega)|$  that are determined from the analytical solution (Eqs. (B6) and (B8)) exhibit a dip that is much deeper than in the weak interaction

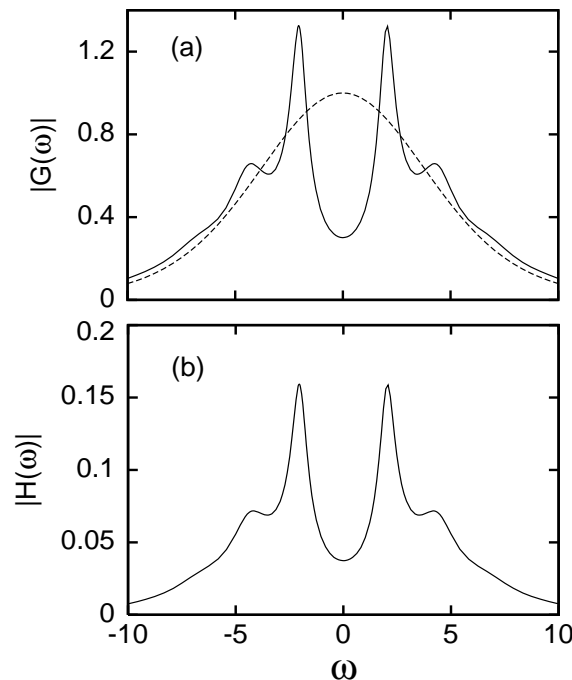


Fig. 6. Transfer functions characterizing the linear response of the Brillouin fiber amplifier in the strong saturation regime. The function  $|G_0(\omega)|$  plotted in dashed lines is shown for reference.

The parameters used are:  $g = 10.98$ ,  $\beta_A = 18.22$ ,  $I_p(0) = 1$ ,  $r = 0.1$ .

regime. Moreover the two transfer functions are of the same order of magnitude and both of them exhibit a multipeak structure. Let us note that the validity of the analytical solution given in Appendix B has been tested by numerically integrating Eqs. (6) and (7). The relative difference between the analytical and the numerical solutions is lower than 1% as long as  $r$  does not exceed 0.1. For values of  $r$  greater than 0.1, the stationary intensity profiles can no longer be approximated by Eqs. (11b) and (12) so that the quantitative disagreement between the analytical and numerical solutions becomes significant. In very saturated amplification regimes, numerical simulations must therefore be used to characterize the linear response of the amplifier. The transfer functions that are plotted in Fig. 7 for  $r = 0.5$  have thus been numerically computed.

For  $\omega > 0$ , Fig. 6 and Fig. 7 show that the angular frequency difference  $\Delta\omega$  between two consecutive peaks of a given transfer function is approximately equal to  $\pi$ . Actually, it is worth noticing that similar features would be qualitatively observed in an empty Fabry-Perot cavity with the same length as our fiber. In such a resonator, a forward- and a backward-

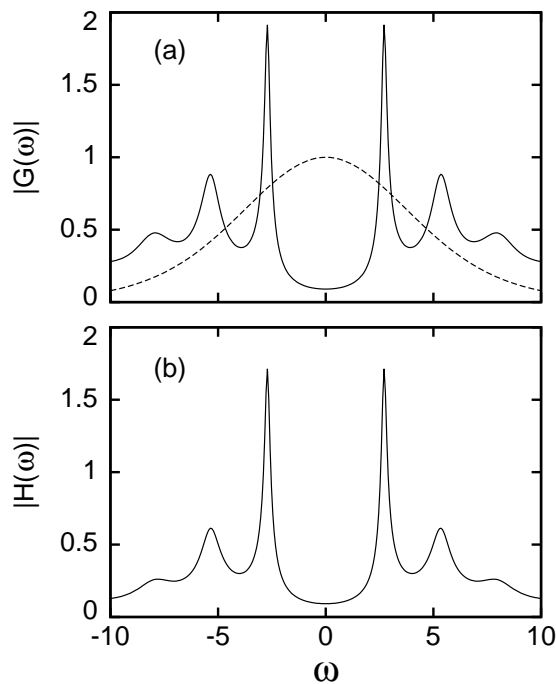


Fig. 7. Same as Fig. 6 but with  $r = 0.5$ . Contrary to all the figures previously presented, the plotted transfer functions are obtained from numerical simulations (see the text).

propagating wave are coupled by reflective boundary conditions at the right- and left-hand mirrors<sup>22</sup>. This results in the emergence of resonances separated by a normalized angular frequency equal to  $\pi$ . Let us now explain why a similar frequency difference appears in the Brillouin fiber amplifier, even though there is no mirror at the boundaries. This feature only arises from the fact that two coupled perturbations obeying well-defined boundary conditions counterpropagate in the amplifier. In the strong saturation regime, the pump and signal perturbations propagating around the stationary intensity profiles are of the same order of magnitude. These counterpropagating perturbations are coupled by the SBS interaction [see Eqs. (6a) and (6b)] and they must obey precise boundary conditions given by Eqs. (7). The combination of wave counterpropagation, SBS coupling and boundary conditions is sufficient to give rise to resonances separated by an angular frequency difference approximately equal to  $\pi$ . This is shown in Appendix C in which very rough approximations are performed to simplify the problem and to show that the considered effect is only due to the presence of the three ingredients previously mentioned.

It should be noticed that it is very difficult to avoid feedback from the boundaries in an optical fiber medium. It is furthermore well established that the presence of weak Fresnel reflections at the fiber ends gives rise to periodic self-oscillations of the Stokes intensity<sup>5,27,28</sup>. In such a configuration, the system is no longer a simple amplifier but it is termed a Brillouin fiber laser. The period of the observed steady oscillations is twice the transit time of the light in the fiber. In other words, the normalized angular frequency characteristic of the Stokes self-oscillations is equal to  $\pi$  when the SBS medium is enclosed within a Fabry-Perot cavity. It should be emphasized that these fluctuations of the Stokes intensity are not weak but result from oscillations on a limit cycle. Although their fundamental frequency can be found by a linear stability analysis<sup>27,29</sup>, these self-oscillations involve the nonlinear response of the Brillouin fiber laser. On the other hand, the transfer functions considered in the present section characterize the linear response of the amplifier to a weak modulation of the signal amplitude. The same frequency found both in the laser and in the amplifier therefore characterizes responses and regimes that are fully different. On one hand, it represents the



fundamental frequency of self-oscillations occurring in nonlinear regime and on the other hand, it appears in a linear response to a weak modulation.

#### 4. Spectral hole burning in Brillouin fiber generators

In this Section, we study theoretically the mechanisms leading to the emergence of hole burning in the spectrum of intensity fluctuations of the Stokes light emitted by Brillouin fiber generators. In particular, we will put emphasis on the connection between this phenomenon and the spectral hole burning already studied in Sec. 3 for Brillouin fiber amplifiers. The pump field being now the only external field injected inside the fiber, the only boundary condition that is taken into account is given by Eq. (2a). The weak noise term  $f(\zeta, \tau)$  of Eq. (1c) describes the thermal excitation of acoustic waves. In the Brillouin fiber generator, it is responsible for the initiation of the SBS process but also for the existence of a stochastic dynamics<sup>3</sup>. Contrary to Sec. 3, its influence is now fully taken into account. The noise source  $f(\zeta, \tau)$  being spatially distributed, the noise dominated SBS dynamics can only be studied by numerical simulations that have been performed by integrating the set of Eqs. (1) with a procedure based on the method of characteristics<sup>22,23</sup>. In order to unambiguously connect our numerical results to previous works performed on Brillouin fiber generators, we have

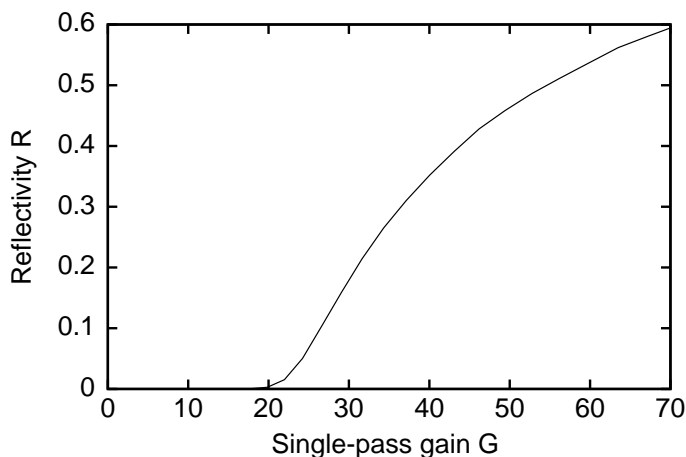


Fig. 8. Dependence of the reflectivity of a Brillouin fiber generator on the single-pass gain  $G_F$  ( $g = 10.98$ ,  $\beta_A = 18.22$ ).

chosen to use the parameters commonly employed to describe the power transfer characteristics of SBS generators. The first of these parameters is the reflectivity  $R$  defined as the ratio between the average output Stokes power and the incident pump power ( $R = \langle |\varepsilon_s(\zeta = 0, \tau)|^2 \rangle / \mu^2$ ). The other relevant parameter is the single-pass gain  $G_F$  defined as the product between the SBS gain factor measured in  $m/W$ , the pump laser intensity and the fiber length<sup>1</sup>. With our normalization, it is also simply given by  $G_F = 2g\mu^2$ . As shown in Fig. 8, the dependence of the SBS reflectivity on the single-pass gain  $G_F$  obtained from our numerical simulations is identical to that usually found in the SBS literature<sup>2,3</sup>. We especially underline this point since Kovalev and Harrison mention in ref.<sup>24</sup> that “our numerical modeling of SBS (presented in ref.<sup>10</sup>) gives results which are intrinsically inconsistent and contradictory to the physics and practice of SBS”. As they also find in ref.<sup>24</sup> many contradictions in the numerical results presented in our Comment<sup>10</sup> to their original letter<sup>9</sup>, detailed numerical results supplementing those already published in ref.<sup>10</sup> are presented hereafter. By using the parameters commonly employed to describe the physics of Brillouin fiber generators and by clearly specifying their numerical values, we hope to definitely clarify the situation and to conclusively demonstrate the consistency of our numerical simulations. Finally, the power spectra of the Stokes intensity fluctuations given hereafter are also presented in order to be directly compared to the transfer functions determined in Sec. 3.

In Sec. 3 A, we have pointed out an analogy between pump-probe experiments in atomic systems and the three-wave configuration proposed by Takushima and Kikuchi to study the Brillouin fiber amplifier [see Fig. 1(b)]. A similar analogy can be drawn between fluorescence experiments in two-level atoms and studies performed in Brillouin fiber generators. In both cases, only one pump beam is injected inside the medium. In the Brillouin fiber generator, the backscattered Stokes light exhibits intensity fluctuations of a stochastic nature<sup>3,5</sup>. In two-level atomic systems, intensity fluctuations are observed in the emitted fluorescence<sup>25</sup>. In particular, it has been shown that the phase noise of the pump laser strongly affects the fluorescence intensity and the fluctuations of the fluorescence intensity<sup>26</sup>. Our numerical

simulations have also shown that the Brillouin generator is sensitive to the phase noise of the pump laser. The SBS threshold is thus found to be dependent on the pump laser linewidth. However, the effects described below remain qualitatively unchanged with or without the presence of pump phase noise.

For a value of the single-pass gain close above the SBS threshold ( $G_F = 22$ ), the time evolutions of the Stokes and pump intensities are plotted in Fig. 9(a) and 9(b), respectively. The power spectra corresponding to these time series are presented in Fig. 9(c) and 9(d). Let us emphasize that the temporal signals presented in Fig. 9 are obtained after an integration time that is long enough to ensure that the system evolution is well after any transient process associated with the turn on of the pump laser. As shown in Fig. 9(a), the fluctuations in the Stokes intensity obtained from our numerical simulations are very similar to those reported by Boyd *et al* in ref.<sup>3</sup>. Despite the weak reflectivity ( $R \simeq 1\%$ ), it should be noticed that the pump field at the output end of the fiber ( $\zeta = 1$ ) exhibits weak intensity fluctuations

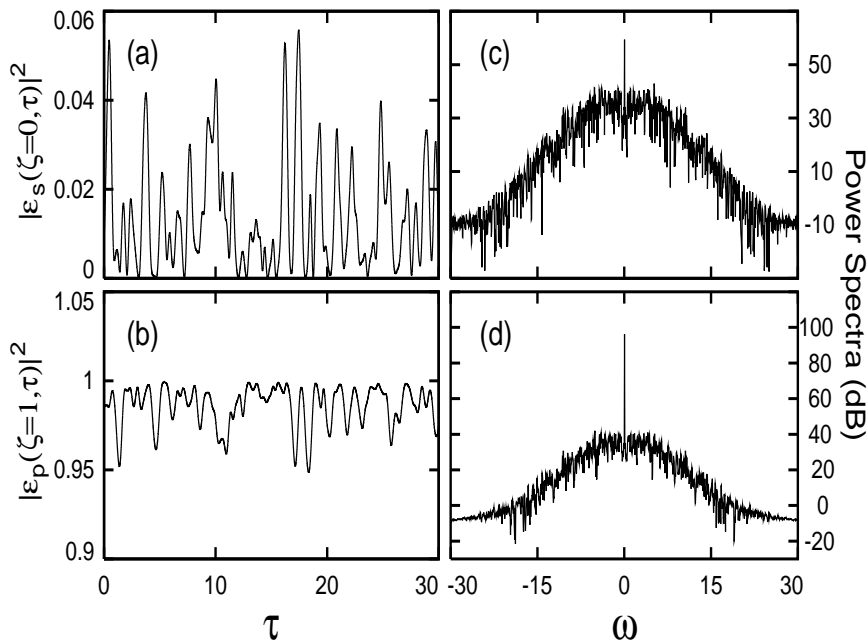


Fig. 9. Dynamical behavior of a Brillouin fiber generator operating close above threshold ( $G_F = 22$ ,  $g = 10.98$ ,  $\beta_A = 18.22$ ). Time series of the Stokes intensity at  $\zeta = 0$  (a) and corresponding power spectrum (c). Time series of the pump intensity at  $\zeta = 1$  (b) and corresponding power spectrum (d).

around a strong DC background [see Fig. 9(b)]. The power spectrum of this signal is thus composed of a strong DC component that is approximately 50 dB above the noise level [see Fig. 9(d)]. As shown in Fig. 9(c), the power spectrum of the Stokes intensity fluctuations is qualitatively similar to the power spectrum of the pump intensity fluctuations. The only significant difference lies in the weight of the DC component that is only 20 dB above the noise level. Figure 10 shows time series and power spectra obtained well above the SBS threshold for  $G_F = 60$ . The reflectivity is now approximately of 50% and the intensity of the pump and Stokes fields is strongly fluctuating. The power spectra are very different from those of Fig. 9. As in the experiments of ref.<sup>9</sup>, both of them now exhibit a pronounced dip around  $\omega = 0$ . Moreover, a careful analysis of Fig. 10(c) and 10(d) reveals several peaks that are symmetrically and regularly spaced around  $\omega = 0$ . This strongly suggests to compare the power spectra of Fig. 10 with the transfer functions presented in Fig. 7. To this end, we rescale the function  $|G(\omega)|$  by plotting the function  $G_{dB}(\omega) = 20 \log |G(\omega)|$  that permits a direct comparison between power spectra and transfer functions. Figure 11(b) thus shows that the power spectrum of Fig. 10(c) obtained for  $R = 50\%$  is very similar to the transfer

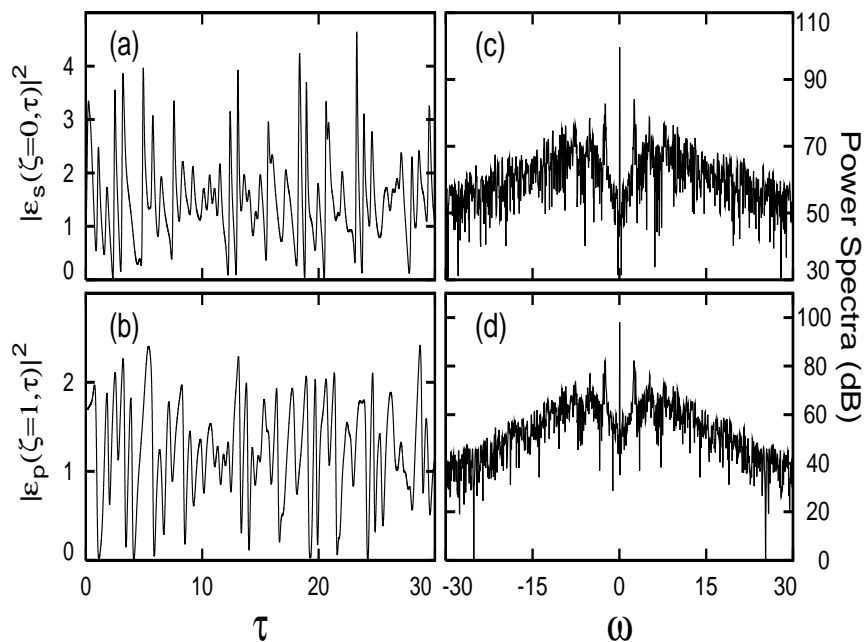


Fig. 10. Same as Fig. 9 but well above threshold ( $G_F = 60$ ).

function of Fig. 7(a) computed for a ratio  $r = I_s(0)/I_p(0)$  of 0.5. Let us notice that the spectrum presented in Fig. 11(b) has been obtained by averaging the power spectra of Stokes intensity fluctuations over 100 realizations of the random process  $f(\zeta, \tau)$ . This averaging procedure permits to remove almost all the noise that superimposes on the spectrum of Fig. 10(c). This is also especially useful for noise spectra computed for weak reflectivities. Figure 11(a) indeed reveals a small dip in the power spectrum obtained for a reflectivity of 1%. As shown in Fig. 9(c), it is not observable on only one spectrum. However, it is very similar to the dip characterizing the transfer function  $G_{dB}(\omega)$  that has been computed for a Brillouin fiber amplifier operating in the weak saturation regime for  $r = I_s(0)/I_p(0) = 0.01$ .

Let us now summarize our results and discuss their significance. In a Brillouin fiber

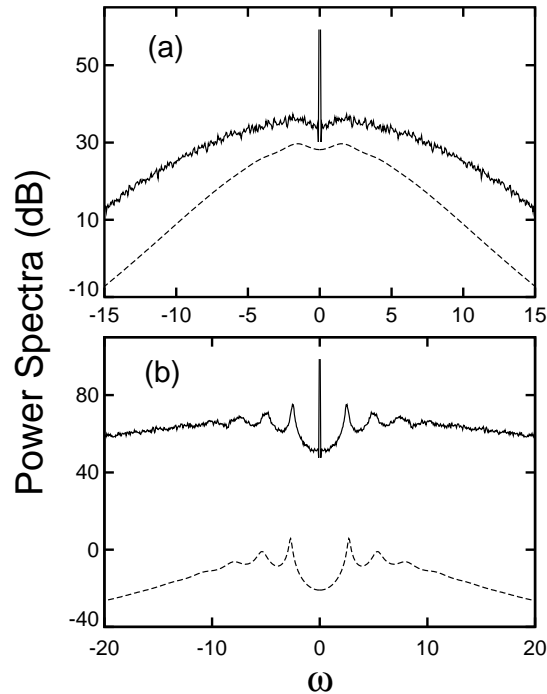


Fig. 11. Comparison between the power spectra of Stokes intensity fluctuations in the Brillouin fiber generator (full lines) and the transfer functions  $G_{dB}(\omega)$  of the Brillouin fiber amplifier (dashed lines). (a) Weak reflectivity ( $R \simeq 1\%$ ,  $G_F = 22$ ) and weak saturation regime ( $r = 0.01$ ). (b) Strong reflectivity ( $R \simeq 50\%$ ,  $G_F = 60$ ) and strong saturation regime ( $r = 0.5$ ). Note that an arbitrary offset of 30 dB has been added to the transfer function of Fig. 11-a in order to permit a direct comparison between the two small dips.

generator reflecting a given percentage  $R$  of the incident pump intensity, the power spectrum of the Stokes intensity fluctuations is very similar to the transfer function characterizing the linear response of a Brillouin fiber amplifier operating in such a way that  $r = I_s(0)/I_p(0)$  is equal to  $R$ . Rigorously speaking, the transfer functions considered in Sec. 3 properly characterize the intensity noise properties of a Brillouin amplifier operating in the configuration represented in Fig. 1(a). Instead of a weak intensity modulation applied at the output end of the fiber [see Fig. 2], a weak noise source must obviously be added to the signal wave at  $\zeta = 1$ . The spectral density of signal intensity noise at  $\zeta = 0$  is then simply obtained by multiplying the spectral density of signal intensity noise at  $\zeta = 1$  by  $|G(\omega)|^2$ .

In a Brillouin fiber generator, the situation is not so simple. First of all, no signal wave is injected inside the fiber. This means that no stationary state can be rigorously defined. However for weak reflectivities, pump depletion can be neglected and the Stokes light is exponentially amplified on the average as it propagates inside the fiber<sup>2</sup>. This is illustrated in Fig. 12(a) and 12(b) that show the Stokes and pump intensity profiles at an arbitrary time. The term  $f(\zeta, \tau)$  induces weak fluctuations around the exponential Stokes intensity

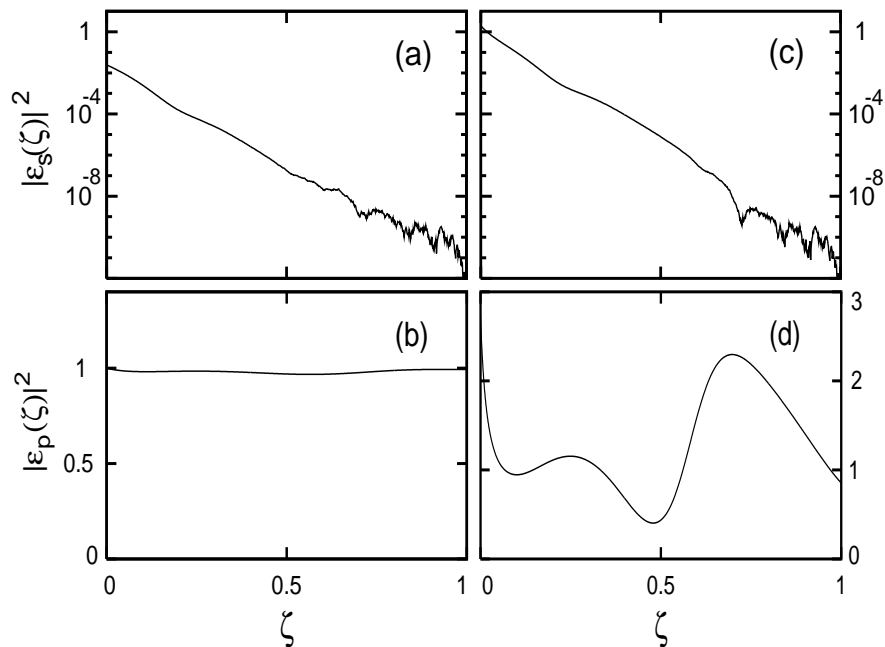


Fig. 12. Longitudinal profiles of the Stokes (a), (c) and pump (b), (d) intensities at an arbitrary time for gain factors  $G_F$  of 22 (a), (b) and 60 (c), (d).

profile [see Fig. 12(a)] but the reflectivity is so small that the pump intensity profile is not significantly perturbed [see Fig. 12(b)]. Contrary to the situation previously described for the Brillouin fiber amplifier, the origin of the weak fluctuations is not a localized noise source but a spatially distributed noise source. Nevertheless, we can apply arguments identical to those previously used for the discussion of noise properties of Brillouin fiber amplifiers. The weak fluctuations around the exponential intensity profile characterizing the average amplification of the Stokes wave are filtered by the transfer function  $|G(\omega)|$  studied in Sec. 3 C. This results in a noise power spectrum at  $\zeta = 0$  that is very similar to the transfer function of the amplifier.

For higher reflectivities, the coupling between the Stokes and pump fluctuations becomes significant. This is illustrated in Fig. 12(c) and 12(d) that show that the Stokes field is now so intense that its fluctuations induce strong variations of the pump intensity profile. The coupled pump and Stokes perturbations counterpropagate around mean intensity profiles that are determined by the reflectivity. The situation can thus be compared to the one studied in Sec. 3 D for a Brillouin fiber amplifier operating in the strong saturation regime. Despite the fact that the intensity fluctuations are now stronger, the analysis previously developed for the weak reflectivity regime still qualitatively holds for the strong reflectivity regime. The Stokes intensity fluctuations are filtered by the transfer function  $|G(\omega)|$  numerically computed in Sec. 3 D for a Brillouin fiber amplifier operating in the strong saturation regime. This results in a dip in the power spectrum of Stokes intensity fluctuations and in the emergence of peaks arising from the counterpropagation and the coupling between pump and Stokes fluctuations inside the generator.

## 5. Conclusion

In summary, spectral hole burning in Brillouin fiber amplifiers and generators has been theoretically studied. Transfer functions characterizing the linear response of the Brillouin amplifier to a weak amplitude modulation of the injected signal wave have been analytically

determined for three different amplification regimes. The fact that these transfer functions may exhibit a dip is due both to the gain saturation and the coupling between the pump and signal perturbations that counterpropagate around the steady-state intensity profiles. The transfer functions also relate the intensity noise of the amplified signal wave to the intensity noise of the injected signal wave. In other words, they characterize the way through which a weak noisy perturbation propagating around the stationary intensity profiles is filtered by the Brillouin fiber amplifier. In the Brillouin fiber generator, one cannot consider that the Stokes intensity fluctuates around a well-defined stationary profile but around a mean spatial profile determined by the reflectivity. Nevertheless, the Stokes intensity fluctuations are filtered in the same way as signal intensity fluctuations in a Brillouin fiber amplifier. This results in a dip in the power spectrum of the Stokes intensity noise.

Our interpretation of spectral hole burning in Brillouin fiber generators is very different from the interpretation proposed by Kovalev and Harrison in ref.<sup>9</sup>. In particular, we have shown that this effect can be understood without invoking an inhomogeneous broadening of the Brillouin line. However, one significant qualitative difference between theoretical and experimental results must be underlined. The power spectra of Stokes intensity fluctuations obtained from our numerical simulations [see Fig. 10(c) and Fig. 1 of ref.<sup>10</sup>] show evidence of peaks regularly spaced that are not found in the experiments [see Fig. 1 of ref.<sup>9</sup>]. Following our interpretation, these peaks are a signature of the interaction between the counterpropagating pump and signal fluctuations. In our opinion, the fact that they are not observed in the experiments may be due either to their weakness or to a poor instrumental resolution. Another way to experimentally check the existence of coupling between Stokes and pump intensity fluctuations would simply consist in putting a photodiode at the output end of the fiber in order to monitor the time evolution of the transmitted pump intensity. The observation of a dip in the power spectrum of pump intensity fluctuations would then indisputably validate our interpretation of spectral hole burning in Brillouin fiber generators.



### Acknowledgments

The Centre d'Etudes et de Recherches Lasers et Applications (CERLA) is supported by the Ministère chargé de la Recherche, the Région Nord/Pas de Calais and the Fonds Européen de Développement Economique des Régions. This work was partially supported by the European contract "Intereg II Nord-Pas de Calais/Kent".

### Appendix A: Analytical determination of the transfer functions $|G(\omega)|$ and $|H(\omega)|$ in the weak saturation regime

Combining Eq. (7a) with Eq. (8a) permits to obtain a condition for  $\delta\widetilde{A}_s(u, \omega)$  that reads

$$\left. \frac{\partial \delta\widetilde{A}_s(u, \omega)}{\partial u} \right|_{u=1} = D \delta\widetilde{A}_s(u=1, \omega) \quad (\text{A1})$$

with  $D = -i\Omega_0^2/(\gamma\omega)$ . From this condition and by using Eq. (23), we obtain

$$|G(\omega)| = \left| \frac{(P J_A(B) + Q Y_A(B)) \exp(\Gamma_0)}{P J_A(Be^{-\gamma/2}) + Q Y_A(Be^{-\gamma/2})} \right| \quad (\text{A2})$$

with

$$P = B Y_{A+1}(B) - N Y_A(B), \quad (\text{A3a})$$

$$Q = -B J_{A+1}(B) + N J_A(B), \quad (\text{A3b})$$

$$N = A + \frac{2\Gamma_0}{\gamma} - 2D. \quad (\text{A3c})$$

The analytical expression of  $|H(\omega)|$  derived from Eq. (8a) and Eq. (23) reads

$$|H(\omega)| = \left| \frac{T(P S_J + Q S_Y)}{P J_A(Be^{-\gamma/2}) + Q Y_A(Be^{-\gamma/2})} \right| \quad (\text{A4})$$

with

$$S_J = -B e^{-\gamma/2} J_{A+1}(Be^{-\gamma/2}) + N J_A(Be^{-\gamma/2}), \quad (\text{A5a})$$

$$S_Y = -B e^{-\gamma/2} Y_{A+1}(B e^{-\gamma/2}) + N Y_A(B e^{-\gamma/2}), \quad (\text{A5b})$$

$$T = \frac{\gamma}{2g I_p(0) \left(1 + \frac{\beta_A}{\beta_A + i\omega}\right)}. \quad (\text{A5c})$$

**Appendix B: Analytical determination of the transfer functions  $|G(\omega)|$  and  $|H(\omega)|$  in the strong saturation regime**

By using Eqs. (11b) and (12) the set of Eqs. (8) is transformed into a second order differential equation that reads

$$\frac{\partial^2 \delta \widetilde{A}_s(\zeta, \omega)}{\partial \zeta^2} + 2 \left( \Delta_0 + \Delta_1 e^{-\gamma \zeta} \right) \frac{\partial \delta \widetilde{A}_s(\zeta, \omega)}{\partial \zeta} + \left( \Theta_0^2 + \Theta_1^2 e^{-\gamma \zeta} \right) \delta \widetilde{A}_s(\zeta, \omega) = 0 \quad (\text{B1})$$

with

$$\Delta_0 = \frac{-i\omega\gamma}{4(\beta_A + i\omega)}, \quad \Delta_1 = \frac{g\beta_A r I_p(0)}{\beta_A + i\omega}, \quad (\text{B2a})$$

$$\Theta_0 = \omega^2 \left( 1 + \frac{\gamma}{2(\beta_A + i\omega)} \right), \quad \text{and} \quad \Theta_1 = -2gr I_p(0) \left( i\omega + \frac{2\beta_A g I_p(0)}{\beta_A + i\omega} \right). \quad (\text{B2b})$$

As already achieved in Sec. 3C, we introduce the new variable  $u = \exp(-\gamma\zeta)$  and Eq. (B1) becomes

$$\gamma^2 u^2 \frac{\partial^2 \delta \widetilde{A}_s(u, \omega)}{\partial u^2} + \gamma u (\gamma - 2\Delta_0 - 2\Delta_1 u) \frac{\partial \delta \widetilde{A}_s(u, \omega)}{\partial u} + \left( \Theta_0^2 + \Theta_1^2 u \right) \delta \widetilde{A}_s(u, \omega) = 0. \quad (\text{B3})$$

The solution of this equation is a sum of Whittaker functions  $M_{\eta, \kappa}(\chi u)$  and  $W_{\eta, \kappa}(\chi u)$  defined in ref.<sup>20</sup>. It reads

$$\delta \widetilde{A}_s(u, \omega) = (C_1'' M_{\eta, \kappa}(\chi u) + C_2'' W_{\eta, \kappa}(\chi u)) \exp\left(\frac{\chi u}{2}\right) u^\rho \quad (\text{B4})$$

with

$$\eta = \frac{\Theta_1^2 + \gamma\Delta_1 - 2\Delta_0\Delta_1}{2\gamma\Delta_1}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{\Delta_0^2 - \Theta_0^2}}{\gamma}, \quad \chi = \frac{2\Delta_1}{\gamma}, \quad \text{and} \quad \rho = \frac{-\gamma + 2\Delta_0}{2\gamma}. \quad (\text{B5})$$

By determining the ratio between the integration constants  $C_1''$  and  $C_2''$  from Eq. (A1), we finally obtain following analytical expression for the transfer function  $|G(\omega)|$  in the strong saturation regime

$$|G(\omega)| = \left| \frac{(P' M_{\eta, \kappa}(\chi) + Q' W_{\eta, \kappa}(\chi)) \exp\left(\frac{\chi}{2}(1 - e^{-\gamma}) + \gamma\rho\right)}{P' M_{\eta, \kappa}(\chi e^{-\gamma}) + Q' W_{\eta, \kappa}(\chi e^{-\gamma})} \right| \quad (\text{B6})$$

with

$$P' = 2 W_{\eta+1, \kappa}(\chi) + N' W_{\eta, \kappa}(\chi), \quad (\text{B7a})$$

$$Q' = (1 + 2\eta + 2\kappa) M_{\eta+1, \kappa}(\chi) - N' M_{\eta, \kappa}(\chi), \quad (\text{B7b})$$

$$N' = 2(\eta - \chi - \rho + D). \quad (\text{B7c})$$

The analytical expression of  $|H(\omega)|$  derived from Eq. (8a) and Eq. (B4) reads

$$|H(\omega)| = \left| \frac{T' (P' S_M + Q' S_W)}{P' M_{\eta, \kappa}(\chi e^{-\gamma}) + Q' W_{\eta, \kappa}(\chi e^{-\gamma})} \right|, \quad (\text{B8})$$

with

$$S_M = \Lambda M_{\eta, \kappa}(\chi e^{-\gamma}) + \left(\frac{1}{2} + \eta + \kappa\right) M_{\eta+1, \kappa}(\chi e^{-\gamma}), \quad (\text{B9a})$$

$$S_W = \Lambda W_{\eta, \kappa}(\chi e^{-\gamma}) - W_{\eta+1, \kappa}(\chi e^{-\gamma}), \quad (\text{B9b})$$

$$\Lambda = \chi e^{-\gamma} + \rho - \eta + \frac{i\omega}{\gamma} \left( \frac{gI_p(0)(1 - r(1 - e^{-\gamma}))}{\beta_A + i\omega} + 1 \right), \quad (\text{B9c})$$

$$T' = \frac{\gamma}{gI_p(0)(1 - r(1 - e^{-\gamma})) \left(1 + \frac{\beta_A}{\beta_A + i\omega}\right)}. \quad (\text{B9d})$$

**Appendix C: Simplified analysis of the origin of the resonance frequencies appearing in the transfer functions**

In this Appendix, we perform a very simplified analytical treatment to show that only three elementary ingredients are necessary to explain the emergence a normalized angular frequency difference of approximately  $\pi$  in the transfer functions characterizing the response of the amplifier. These ingredients are counterpropagation of pump and signal perturbations around arbitrary stationary intensity profiles, SBS coupling and boundary conditions for the perturbations at the ends of the fiber. We first assume an instantaneous acoustic response so that the set of Eqs. (6) reduces to

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \zeta} = -2gI_s(\zeta) \widetilde{\delta A}_s, \quad (\text{C1a})$$

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \widetilde{\delta A}_s}{\partial \zeta} = 2gI_p(\zeta) \widetilde{\delta A}_p. \quad (\text{C1b})$$

By taking the Fourier transform of Eqs. (C1), we obtain the following second order differential equation

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega)}{\partial \zeta^2} + \Omega^2 \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega) = 0, \quad (\text{C2})$$

with

$$\Omega^2 = \omega^2 - 4g^2 I_p(\zeta) I_s(\zeta). \quad (\text{C3})$$

The existence of stationary intensity profiles around which the propagation of the pump and signal perturbations is possible is obviously crucial but their shape is not determining to explain the emergence of resonance frequencies. Although it is not physically realistic, we will therefore assume that the stationary intensity profiles do not depend on  $\zeta$ . The solution of Eq. (C2) is then trivial and it reads

$$\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \omega) = C_1 \exp(i\Omega\zeta) + C_2 \exp(-i\Omega\zeta). \quad (\text{C4})$$

We will now reduce our analysis to situations for which  $\omega^2$  is greater than  $4g^2 I_p I_s$  so that  $\Omega$  is real. This amounts to only consider situations in which  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta, \tau)$  is the sum of a forward- and a backward-propagating sine wave. The transfer function  $|G(\omega)|$  relating the amplitude fluctuations of the signal at  $\zeta = 0$  to the amplitude fluctuations of the signal applied at  $\zeta = 1$  is obtained by using the boundary condition given by Eq. (7a). It simply reads

$$|G(\omega)|^2 = \left| \frac{\widetilde{\delta A_s}(\zeta = 0, \omega)}{\widetilde{\delta A_s}(\zeta = 1, \omega)} \right|^2 = \frac{(1+a)^2}{1+a^2+2a \cos(2\Omega)} \quad (\text{C5})$$

with

$$a = \frac{\Omega - \omega}{\Omega + \omega}, \quad \Omega = \omega \sqrt{1 - \frac{4g^2 I_p I_s}{\omega^2}}. \quad (\text{C6})$$

The expression given by Eq. (C5) is very similar to the transmission function characterizing an empty Fabry-Perot cavity<sup>22</sup>. In particular, resonances are obtained each time that  $\Omega$  rotates by  $\pi$ . The corresponding rotations of the normalized angular frequency  $\omega$  are equal to  $\pi$  if  $\omega^2 \gg 4g^2 I_p I_s$  and they are slightly lower than  $\pi$  if  $\omega^2 \simeq 4g^2 I_p I_s$ .

**REFERENCES**

1. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic, New York, 1989).
2. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic, San Diego, 1992).
3. R. W. Boyd, K. Rzażewski, and P. Narum, *Phys. Rev. A* **42**, 5514 (1990).
4. A. L. Gaeta and R. W. Boyd, *Phys. Rev. A* **44**, 3205 (1991).
5. M. Dämmig, G. Zinner, F. Mitschke, and H. Welling, *Phys. Rev. A* **48**, 3301 (1993).
6. M. Niklès, L. Thévenaz, and P. A. Robert, *J. Lightwave Technol.* **15**, 1842 (1997).
7. A. Yariv, *Quantum Electronics, Third Edition* (Wiley, New York, 1988).
8. Y. Takushima and K. Kikuchi, 1999 IEEE LEOS Annual Meeting Conference Proceedings **1**, 58 (1999).
9. V. I. Kovalev and R. G. Harrison, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1879 (2000).
10. S. Randoux and J. Zemmouri, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 029401 (2002).
11. Y. Takushima and K. Kikuchi, *Opt. Lett.* **20**, 34 (1995).
12. C. Montes, A. Mamhoud, and E. Picholle, *Phys. Rev. A* **49**, 1344 (1994).
13. C. C. Chow and A. Bers, *Phys. Rev. A* **47**, 5144 (1993).
14. W. Lu, A. Johnstone, and R. G. Harrison, *Phys. Rev. A* **46**, 4114 (1992).
15. J. Botineau, C. Leycuras, C. Montes, and E. Picholle, *An. Telecom.* **49**, 479 (1994).
16. J. Botineau, C. Leycuras, C. Montes, and E. Picholle, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 300 (1989).
17. S. E. Schwarz and T. Y. Tan, *Appl. Phys. Lett.* **10**, 4 (1967).
18. L. W. Hillman, R. W. Boyd, J. Krasinski, and C. R. Stroud, *Opt. Comm.* **45**, 416 (1983).

19. R. W. Boyd and S. Mukamel, *Phys. Rev. A* **29**, 1973 (1984).
20. M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical functions* (Dover Publications, New York, 1974).
21. A. A. Fotiadi, E. A. Kuzin, M. P. Petrov, and A. A. Ganichev, *Sov. Tech. Phys. Lett.* **15**, 434 (1989).
22. A. C. Newell and J. V. Moloney, *Nonlinear Optics* (Addison-Wesley, Redwood City, 1992).
23. V. Babin, A. Mocofanescu, V. I. Vlad, and M. J. Damzen, *J. Opt. Soc. Am. B* **16**, 155 (1999).
24. V. I. Kovalev and R. G. Harrison, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 029402 (2002).
25. M. H. Anderson, R. D. Jones, J. Cooper, S. J. Smith, D. S. Elliott, H. Ritsch, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1346 (1990).
26. H. Ritsch, P. Zoller, and J. Cooper, *Phys. Rev. A* **41**, 2653 (1990).
27. I. Bar-Joseph, A. A. Friesem, E. Lichtman, and R. G. Waarts, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1606 (1985).
28. A. L. Gaeta and R. W. Boyd, *Int. J. Nonlinear Opt. Phys.* **1**, 581 (1992).
29. R. Blaha, E. W. Laedke, A. M. Rubenchik, and K. H. Spatschek, *Europhys. Lett.* **7**, 237 (1988).







# Conclusion

Les travaux présentés dans cette thèse ont porté sur deux sujets : le bruit d'intensité du laser Brillouin et la nature de l'élargissement spectral du processus de diffusion Brillouin stimulée dans les fibres.

Nous avons tout d'abord commencé par étudier le bruit d'intensité du laser Brillouin à fibre. Pour cela, nous avons dans un premier temps recherché les diverses sources à l'origine de son bruit d'intensité. Nous avons constaté que seules deux sources de bruit sont prépondérantes : les fluctuations du coefficient de réinjection de la cavité et le bruit d'intensité du laser de pompe. Nous avons dans un second temps évalué l'impact de chacune de ces deux sources de bruit sur le bruit d'intensité du laser Brillouin en déterminant des fonctions de transfert. Pour valider notre travail théorique, nous avons effectué une étude expérimentale. Le laser Brillouin que nous avons réalisé est constitué d'une cavité de faible finesse possédant un bras aérien. Nous avons déterminé la fonction de transfert expérimentale de chacune des sources de bruit pour différents niveaux de pompage. Nous avons obtenu des résultats expérimentaux très proches des résultats théoriques.

Une des finalités de l'étude effectuée est de déterminer si le laser Brillouin peut être utilisé pour réduire le bruit d'intensité du laser de pompe. Nous avons vu que lorsque la cavité est de finesse élevée, le bruit basse fréquence du laser Brillouin peut être bien plus faible que celui du laser de pompe. De ce fait, les lasers Brillouin oscillant dans une cavité de grande finesse peuvent être des solutions intéressantes pour la réduction du bruit d'intensité de certains lasers. Cependant, notre laser Brillouin n'étant pas suffisamment stable, nous n'avons pas mesuré son bruit d'intensité et cette étude demeure une perspective intéressante. Par ailleurs, on pourrait aussi utiliser le laser Brillouin comme un filtre pour le laser de pompe. En effet, le bruit d'intensité du champ de pompe est modifié après s'être propagé dans la cavité du laser Brillouin (voir l'annexe D). L'utilisation d'un laser Brillouin pourrait ainsi permettre de réduire le bruit d'intensité du champ de pompe.

Notre travail a ensuite porté sur la nature de l'élargissement spectral du processus de diffusion Brillouin stimulée dans les fibres. Cette étude s'inscrit dans

un contexte précis. En effet, la nature de l'élargissement spectral du processus de diffusion Brillouin stimulée venait d'être remise en cause par de récents résultats expérimentaux. En 2000, V.I. Kovalev et R.G. Harrison ont annoncé avoir observé un brûlage de trou dans le spectre des fluctuations de l'intensité du rayonnement Stokes délivré par d'un générateur Brillouin à fibre [Kovalev et Harrison, 2000]. Ils ont interprété ce phénomène comme étant la preuve d'un élargissement spectral inhomogène du processus de diffusion Brillouin stimulée. De plus, toujours selon eux, l'origine de ce trou serait due au fait que la fibre est capable de guider toute une distribution de vecteurs d'onde de directions légèrement inclinées par rapport à l'axe de propagation. Cette interprétation remettait en cause un des fondements de l'optique non linéaire guidée où l'on suppose que l'interaction longitudinale entre les ondes selon l'axe de la fibre est découplée de la distribution monomode transverse, ce qui conduit à un modèle unidimensionnel. Cependant elle n'a pas été partagée par tous [Randoux et Zemmouri, 2002] [Fotiadi et al., 2002], et une vive polémique s'est instaurée. Par ailleurs, un brûlage de trou a aussi été obtenu expérimentalement [Takushima et Kikuchi, 1999] et théoriquement dans la bande de gain d'un amplificateur Brillouin à fibre [Takushima et Kikuchi, 1995]. Aucune explication de ce phénomène n'était toutefois donnée. De plus, aucun lien n'était établi entre le brûlage de trou observé pour le générateur et celui obtenu dans l'amplificateur. Une grande confusion s'était donc installée autour de la nature de l'élargissement spectral du processus de diffusion Brillouin stimulée. Notre travail a eu pour but de clarifier la situation. Pour cela, nous avons déterminé analytiquement la fonction de transfert caractérisant la réponse linéaire d'un amplificateur à une faible modulation d'amplitude du signal injecté, ce pour différents régimes de fonctionnement. Nous avons montré que la présence d'un trou dans cette fonction est causée par la saturation du gain conjuguée au couplage entre les fluctuations de l'amplitude du signal et celles du champ de pompe. De plus, nous avons montré que les fluctuations de l'intensité du champ Stokes d'un générateur sont filtrées de la même façon que les fluctuations d'intensité du signal dans un amplificateur. Les origines du brûlage de trou spectral sont donc communes au générateur et à l'amplificateur et l'apparition de ce phénomène peut être interprétée sans invoquer un élargissement inhomogène du processus de diffusion Brillouin stimulé.

Nous avons donc montré qu'il existe une interprétation du brûlage de trou alternative à celle de V.I. Kovalev et R.G. Harrison. Celle de ces derniers tente d'expliquer qualitativement l'origine du brûlage de trou en supposant que celui-ci provient d'un élargissement inhomogène. Selon eux, ce dernier serait dû à la capacité d'une fibre monomode à guider des vecteurs d'onde inclinés par rapport à l'axe de propagation.

Toutefois, aucune étude théorique n'a pour l'instant confirmé leur propos. L'interprétation exposée dans cette thèse est fondamentalement différente puisqu'elle suppose un élargissement spectral homogène. Elle s'appuie sur une étude théorique basée sur le modèle cohérent à trois ondes. Ce dernier est usuellement employé pour décrire le processus de diffusion Brillouin stimulée. Nos résultats analytiques prouvent qu'il n'est pas nécessaire de supposer que l'élargissement spectral est inhomogène pour qu'un brûlage de trou puisse être obtenu. Nous montrons que ce dernier provient de la saturation du gain conjuguée au couplage entre les fluctuations d'amplitude des champs optiques. Par ailleurs, notre interprétation implique le fait que le brûlage de trou doit aussi apparaître dans le spectre des fluctuations de l'intensité du champ de pompe en sortie de fibre. La vérification expérimentale de l'observation du brûlage de trou dans le spectre des fluctuations de l'intensité du champ de pompe en sortie de fibre accrédirait donc un peu plus encore notre interprétation.



# ANNEXES



# Annexe A

## Rappel de quelques notions essentielles sur les systèmes linéaires invariants

### A.1 Signal déterministe

Un système linéaire et invariant (S.L.I.) soumis à une excitation brève assimilable à une impulsion de Dirac  $\delta(t)$  réagit en délivrant une réponse impulsionnelle  $g(t)$  qui le caractérise pleinement (figure A.1).

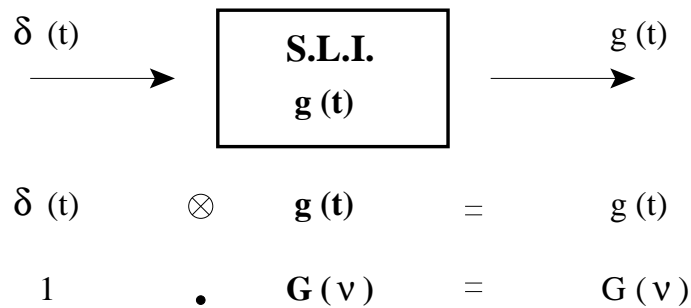


FIG. A.1 – Représentation schématique de la réponse d'un S.L.I. à une impulsion de Dirac  $\delta(t)$ .

Soumis à une excitation quelconque  $x(t)$ , un S.L.I. de réponse impulsionnelle  $g(t)$  délivre une réponse  $y(t)$  qui s'écrit comme la convolution de  $x(t)$  par  $g(t)$  (figure A.2).

$$y(t) = x(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta).g(t - \theta)d\theta. \quad (\text{A.1})$$

Dans l'espace de Fourier, le produit de convolution devient un produit simple. La



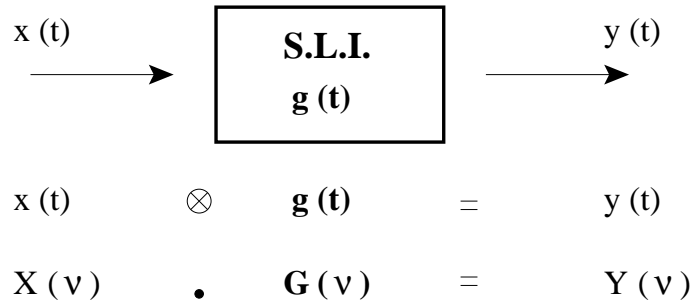


FIG. A.2 – Représentation schématique de la réponse d'un S.L.I. à un signal déterministe  $x(t)$ .

relation (A.1) s'écrit

$$Y(\nu) = X(\nu).G(\nu), \quad (\text{A.2})$$

où  $X(\nu)$ ,  $Y(\nu)$  et  $G(\nu)$  sont les transformées de Fourier respectives de  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $g(t)$ .  $G(\nu)$  est appelé fonction de transfert ou gain complexe du S.L.I..  $G(\nu)$  peut être trouvée en appliquant un signal sinusoïdal de fréquence  $\nu$  à l'entrée du S.L.I.. Le rapport entre l'amplitude du signal en sortie de S.L.I. et l'amplitude du signal en entrée de S.L.I. est égal à  $G(\nu)$ .

## A.2 Signal aléatoire

De part sa nature aléatoire, un signal bruyant ne peut être caractérisé que par des grandeurs statistiques. Dans le cas où le processus aléatoire est ergodique (ce qui sera toujours notre cas), un résultat obtenu sur une moyenne d'ensembles sera le même sur des moyennes temporelles. Pour caractériser temporellement un signal aléatoire  $x(t)$ , on utilise sa fonction d'autocorrélation  $C_{xx}(\tau)$  qui est définie de la façon suivante

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t).x(t - \tau) dt. \quad (\text{A.3})$$

Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que des signaux centrés, c'est à dire à valeur moyenne nulle.  $C_{xx}(0)$  représente la puissance moyenne totale du signal aléatoire  $x(t)$ . La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation correspond par définition à la densité spectrale de puissance  $S_{xx}(\nu)$  du signal bruyant

$$S_{xx}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(\tau).e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau. \quad (\text{A.4})$$

On remarque d'ailleurs que les définitions du bruit d'intensité relatif (cf. chapitre 2 Eq. (2.5)) et de la densité spectrale de puissance sont similaires.

Reprenons le S.L.I. qui est caractérisé par la fonction de transfert  $G(\nu)$  ou par la réponse impulsionnelle  $g(t)$ . La fonction pertinente pour caractériser la réponse de celui-ci à un signal aléatoire est la fonction  $C_{gg}(\tau)$  définie de la façon suivante :

$$C_{gg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t).g(t + \tau)dt. \tag{A.5}$$

On montre que la transformée de Fourier de  $C_{gg}(\tau)$  est égale au module carré de la fonction de transfert  $G(\nu)$  [Papoulis, 1977]

$$|G(\nu)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{gg}(\tau).e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau. \tag{A.6}$$

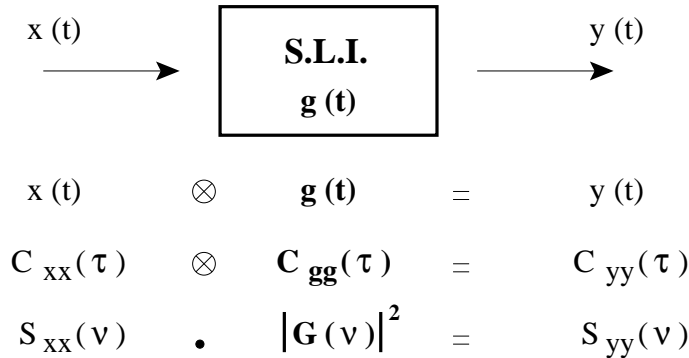


FIG. A.3 – Représentation schématique de la réponse d'un S.L.I. à un signal bruyant  $x(t)$ .

Lorsqu'un signal bruyant  $x(t)$  est injecté dans le S.L.I. défini par sa réponse impulsionnelle  $g(t)$ , le signal de sortie  $y(t)$  est la convolution entre  $x(t)$  et  $g(t)$  (Fig. A.3). Cependant, contrairement aux signaux déterministes, on ne caractérise pas les signaux bruyants par leur évolution temporelle mais par leur fonction d'autocorrélation. Notons  $C_{xx}(\tau)$  et  $C_{yy}(\tau)$  les fonctions d'autocorrélations respectives de  $x(t)$  et  $y(t)$ . On montre que  $C_{yy}(\tau)$  est le produit de convolution de  $C_{xx}(\tau)$  avec  $C_{gg}(\tau)$  [Max et Lacoume, 1996]

$$C_{yy}(\tau) = C_{xx}(\tau) \otimes C_{gg}(\tau). \tag{A.7}$$

En passant dans l'espace de Fourier, la relation (A.7) nous donne directement le lien entre la densité spectrale de puissance du bruit d'entrée et celle du bruit de sortie. Elles sont reliées par la fonction de transfert de la façon suivante

$$S_{yy}(\nu) = |G(\nu)|^2.S_{xx}(\nu) \tag{A.8}$$

Remarquons que le R.I.N. du laser Brillouin est le produit de la densité spectrale de puissance du bruit d'une source par le carré du module de la fonction de transfert (cf. Eq. (A.8)).

Ces notions sur le comportement des signaux déterministes et aléatoires nous ont montré que la fonction de transfert d'un S.L.I.  $G(\nu)$  est bien évidemment indépendante de la nature (bruyante ou non) du signal. Appliquée à l'étude des fonctions de transfert des sources de bruit du laser Brillouin, cette propriété nous permet de déterminer les fonctions de transfert par l'étude de signaux déterministes (exemple : par l'étude du transfert de signaux sinusoïdaux).

# Annexe B

## Détermination de la fréquence de la résonance des fonctions de transfert au seuil

### B.1 Cas de la fonction de transfert pour les variations du coefficient de réinjection

La fonction de transfert  $G_R$  peut être écrite de la façon suivante (chapitre 2, Eq. (2.30))

$$G_R(\nu) = \frac{2 - C_1(\nu)}{2C_1(\nu)} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{C_1(\nu)}{i2\pi n [C_1(\nu) - i2\pi n]} \quad (\text{B.1})$$
$$\text{où } S_0(\nu) = \frac{2 - C_1(\nu)}{2C_1(\nu)} \widetilde{\delta R}(\nu)$$
$$S_n(\nu) = \frac{C_1(\nu)}{i2\pi n [C_1(\nu) - i2\pi n]} \widetilde{\delta R}(\nu)$$
$$C_1(\nu) = i2\pi\nu \left( 1 - \frac{\ln R}{\beta_A + i2\pi\nu} \right)$$

Cette relation a été obtenue grâce à une décomposition de la fonction  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta, \nu)$  sur la base des fonctions  $e^{-ik_n\zeta}$ . De nombreuses résonances apparaissent dans la fonction de transfert. Les fréquences de celles-ci sont proches de multiples entiers de la fréquence unité. Nous avons montré au paragraphe 2.2.1.2 du chapitre 2 que chaque résonance provient principalement d'une fonction  $S_n$ . Au voisinage de  $\nu = 1$ , la fonction  $S_1$  qui est prépondérante pour  $G_R(\nu)$  va alors pouvoir être approximée par

$$G_R(\nu) = \frac{C_1(\nu)}{i2\pi [C_1(\nu) - i2\pi]} \quad (\text{B.2})$$

Cette relation (B.2) peut se mettre sous la forme

$$G_R(\nu) = \frac{1}{i2\pi} \frac{\nu [\beta_A + i2\pi\nu] - \nu \ln R}{(\nu - 1) [\beta_A + i2\pi\nu] - \nu \ln R} \quad (\text{B.3})$$

La connaissance de  $|G_R(\nu)|^2$  va nous permettre de déterminer la fréquence de la résonance.

$$|G_R(\nu)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{A(\nu)}{B(\nu)} \quad (\text{B.4})$$

où  $A(\nu)$  et  $B(\nu)$  s'écrivent

$$A(\nu) = [\beta_A - \ln R]^2 \nu^2 + 4\pi^2 \nu^4 \quad (\text{B.5a})$$

$$B(\nu) = \nu^2 (\ln R)^2 - 2\nu(\nu - 1)\beta_A \ln R + (\nu - 1)^2 [\beta_A^2 + 4\pi^2 \nu^2] \quad (\text{B.5b})$$

Introduisons le terme  $\varepsilon$  défini comme l'écart entre la fréquence de résonance et la fréquence unité

$$\nu = 1 - \varepsilon \quad (\text{B.6})$$

Comme la fréquence de résonance est proche de l'unité,  $\varepsilon$  est un terme petit devant 1. Les termes  $A(\nu)$  et  $B(\nu)$  vont pouvoir s'écrire sous la forme de polynômes en  $\varepsilon$ .

$$A(\varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \alpha_3 \varepsilon^3 + \alpha_4 \varepsilon^4 \quad (\text{B.7a})$$

$$B(\varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + \beta_3 \varepsilon^3 + \beta_4 \varepsilon^4 \quad (\text{B.7b})$$

$$\begin{aligned} \text{où } \alpha_0 &= 4\pi^2 + \beta_A^2 - 2\beta_A \ln R + (\ln R)^2 \\ \alpha_1 &= 16\pi^2 + 2\beta_A^2 - 4\beta_A \ln R + 2(\ln R)^2 \\ \alpha_2 &= 24\pi^2 + \beta_A^2 - 2\beta_A \ln R + (\ln R)^2 \\ \alpha_3 &= 16\pi^2 \\ \alpha_4 &= 4\pi^2 \\ \text{et } \beta_0 &= (\ln R)^2 \\ \beta_1 &= -2\beta_A \ln R + 2(\ln R)^2 \\ \beta_2 &= 4\pi^2 + \beta_A^2 - 2\beta_A \ln R + (\ln R)^2 \\ \beta_3 &= 8\pi^2 \\ \beta_4 &= 4\pi^2 \end{aligned}$$

Chercher la fréquence de résonance revient à chercher le maximum du module carré de la fonction de transfert autour de 1. Ce maximum est obtenu lorsque la dérivée

par rapport à  $\varepsilon$  du rapport  $A(\varepsilon)/B(\varepsilon)$  est nulle, ce qui revient à trouver la valeur de  $\varepsilon$  notée  $\varepsilon_R$  vérifiant la relation

$$B(\varepsilon_R) \cdot \frac{d(A(\varepsilon_R))}{d\varepsilon} - A(\varepsilon_R) \cdot \frac{d(B(\varepsilon_R))}{d\varepsilon} = 0 \quad (\text{B.8})$$

A partir de la relation (B.8), on montre que la différence  $\varepsilon_R$  entre la fréquence de résonance et la fréquence unité s'écrit

$$\varepsilon_R = -\frac{\beta_1}{2\beta_2} = \frac{(\beta_A \ln R - (\ln R)^2)}{\beta_A^2 + 4\pi^2 - 2\beta_A \ln R + (\ln R)^2} \quad (\text{B.9})$$

A partir de cette relation (B.9), on montre que la fréquence de la résonance  $\nu_R$  évolue suivant la relation

$$\nu_R = 1 - \frac{V}{V^2 + \frac{2\pi^2}{\ln R}} \quad (\text{B.10})$$

où  $V = 1 - \frac{\beta_A}{\ln R} = 1 + \frac{\gamma_A}{\Gamma_c}$

## B.2 Cas de la fonction de transfert pour les variations de l'amplitude du laser de pompe

Le mode opératoire utilisé pour trouver la fréquence de résonance de la fonction  $G_R$  est réappliqué pour la fonction  $G_P$ . Celle-ci s'écrit sous la forme suivante (chapitre 2 éq. (2.68))

$$G_P(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n(\nu) \quad (\text{B.11})$$

où  $S_n(\nu) = \frac{C_2(\nu)}{C_1(\nu) - i2\pi n} \text{sinc}(\pi(\nu + n)) \cdot e^{-i\pi(\nu+n)}$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des fonctions définies au chapitre 2 (rels. (2.59)). La résonance provient principalement de la fonction  $S_1$ . Autour de la fréquence de résonance, la fonction de transfert s'écrit donc

$$G_P(\nu) = \frac{C_2(\nu)}{i2\pi - C_1(\nu)} \text{sinc}(\pi\nu) \cdot e^{-i\pi\nu} \quad (\text{B.12})$$

Le module carré de la fonction de transfert s'écrit

$$|G_P(\nu)|^2 = \frac{(\ln R)^2 A(\nu)}{4\pi^2 B(\nu)} \quad (\text{B.13})$$

où  $A(\nu)$  et  $B(\nu)$  sont donnés par les deux relations suivantes

$$A(\nu) = 4\beta_A^2 + 4\pi^2\nu^2(\text{sinc}(\pi(\nu + 1)))^2 \quad (\text{B.14a})$$

$$B(\nu) = (\beta_A^2 + 4\pi^2\nu^2)(\nu - 1)^2 - 2\beta_A \ln \nu(\nu - 1) + \nu^2(\ln R)^2 \quad (\text{B.14b})$$

Soit  $\varepsilon$  l'écart entre la fréquence de la résonance et la fréquence unité.  $\varepsilon$  est défini par la relation  $\nu = 1 - \varepsilon$ . Le fréquence de la résonance étant proche de 1, le terme  $\varepsilon$  est petit. En introduisant  $\varepsilon$  dans  $A(\nu)$  et  $B(\nu)$ , ces fonctions vont s'écrire sous forme de polynômes de la variable  $\varepsilon$

$$A(\varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \alpha_3\varepsilon^3 + \alpha_4\varepsilon^4 \quad (\text{B.15a})$$

$$B(\varepsilon) = \beta_0 + \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2 + \beta_3\varepsilon^3 + \beta_4\varepsilon^4 \quad (\text{B.15b})$$

$$\text{où } \alpha_0 = 0$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = \pi^2 + \beta_A^2$$

$$\alpha_3 = 2\pi^2$$

$$\alpha_4 = \pi^2$$

$$\text{et } \beta_0 = (\ln R)^2$$

$$\beta_1 = -2\beta_A \ln R + 2(\ln R)^2$$

$$\beta_2 = 4\pi^2 + \beta_A^2 - 2\beta_A \ln R + (\ln R)^2$$

$$\beta_3 = 8\pi^2$$

$$\beta_4 = 4\pi^2$$

et où on a approximé  $\text{sinc}(\pi(\nu + 1))$  par  $\frac{\varepsilon}{2}$

La fréquence de la résonance est obtenue en cherchant la valeur  $\varepsilon_R$  maximisant le rapport  $A(\varepsilon)/B(\varepsilon)$ . En ne prenant en compte que les termes en  $\varepsilon$  d'ordre inférieur à trois dans les polynômes  $A(\varepsilon)$  et  $B(\varepsilon)$ , on montre que

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)} \right) = \alpha_0\varepsilon [2\beta_0 + \beta_1\varepsilon] \quad (\text{B.16})$$

$\alpha_0$  étant non nul,  $\varepsilon_R$  est donné par

$$\varepsilon_R = \frac{1}{\frac{\beta_A}{\ln R} - 1} \quad (\text{B.17})$$

La fréquence de résonance  $\nu_R$  suit la relation

$$\nu_R = \frac{1}{1 - \frac{\ln R}{\beta_A}} = \frac{1}{1 + \frac{\Gamma_c}{\gamma_A}} \quad (\text{B.18})$$

On peut remarquer que le calcul permettant de déterminer la fréquence de la première résonance est réapplicable à la  $n^{\text{ième}}$  résonance en prenant pour la fonction de transfert ( $G_R$  ou  $G_P$ ) la composante prépondérante  $S_n$ .

# Annexe C

## Détermination du module des fonctions de transfert à basse fréquence

La détermination du module des fonctions de transfert à basse fréquence  $|G_R(\nu \simeq 0)|$  et  $|G_P(\nu \simeq 0)|$  est réalisée au moyen d'un développement polynômial à l'ordre 4 en  $\zeta$  du profil spatial de  $I_s(\zeta)$  et de  $\widetilde{\delta A}_s(\zeta, \nu)$ . Nous commencerons par déterminer  $|G_R(\nu \simeq 0)|$  en explicitant les différentes étapes de calcul rencontrées. Ces dernières étant les mêmes pour  $|G_P(\nu \simeq 0)|$ , nous n'exposerons ensuite que les résultats intermédiaires nous permettant de déterminer  $|G_P|$  à basse fréquence.

### C.1 Détermination de $|G_R(\nu \simeq 0)|$

Réalisons tout d'abord le changement de variables suivant :

$$\widetilde{\delta B}_s(\zeta, \tau) = \widetilde{\delta A}_s(\zeta, \tau) - \zeta \cdot \widetilde{\delta R}(\tau) \quad (\text{C.1})$$

L'équation de bouclage (2.12b) acquiert une périodicité spatiale et devient

$$\widetilde{\delta B}_s(\zeta = 0, \tau) = \widetilde{\delta B}_s(\zeta = 1, \tau) \quad (\text{C.2})$$

En prenant en compte le changement de variables (C.1), le système d'équations décrivant la dynamique des variations relatives d'amplitudes (2.10) devient



$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \zeta} = gI_s(\zeta) \left( \widetilde{\delta A}_p - \widetilde{\delta A}_a - \widetilde{\delta B}_s - \zeta \widetilde{\delta R} \right), \quad (\text{C.3a})$$

$$\frac{\partial \widetilde{\delta B}_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \widetilde{\delta B}_s}{\partial \zeta} = gI_p(\zeta) \left( \widetilde{\delta A}_p + \widetilde{\delta A}_a - \widetilde{\delta B}_s - \zeta \widetilde{\delta R} \right) - \zeta \frac{\partial \widetilde{\delta R}}{\partial \tau} + \widetilde{\delta R}, \quad (\text{C.3b})$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial \widetilde{\delta A}_a}{\partial \tau} = \widetilde{\delta A}_p - \widetilde{\delta A}_a + \widetilde{\delta B}_s + \zeta \widetilde{\delta R}. \quad (\text{C.3c})$$

Dans l'espace de Fourier, le système d'équations (C.3) se réécrit sous la forme de deux équations dont les variables sont  $\widetilde{\delta A}_p(\zeta, \nu)$  et  $\widetilde{\delta B}_s(\zeta, \nu)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\delta B}_s(\zeta, \nu)}{\partial \zeta} &= i2\pi\nu \left( \frac{gI_p(\zeta)}{\beta_A + i2\pi\nu} + 1 \right) \widetilde{\delta B}_s(\zeta, \nu) - gI_p(\zeta) \left( 1 + \frac{\beta_A}{\beta_A + i2\pi\nu} \right) \widetilde{\delta A}_p(\zeta, \nu) \\ &+ \left[ i2\pi\nu\zeta \left( 1 + \frac{gI_p(\zeta)}{\beta_A + i2\pi\nu} \right) - 1 \right] \widetilde{\delta R}(\nu) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\delta A}_p(\zeta, \nu)}{\partial \zeta} &= -gI_s(\zeta) \left( 1 + \frac{\beta_A}{\beta_A + i2\pi\nu} \right) \widetilde{\delta B}_s(\zeta, \nu) + i2\pi\nu \left( \frac{gI_s(\zeta)}{\beta_A + i2\pi\nu} - 1 \right) \widetilde{\delta A}_p(\zeta, \nu) \\ &- gI_s(\zeta) \left( 1 + \frac{\beta_A}{\beta_A + i2\pi\nu} \right) \widetilde{\delta R}(\nu) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Pour  $\nu \ll 1$ , les équations (C.4) et (C.5) deviennent indépendantes de la fréquence et s'écrivent

$$\frac{\partial \widetilde{\delta B}_s(\zeta)}{\partial \zeta} = -2gI_p(\zeta)\delta A_p(\zeta) - \widetilde{\delta R} \quad (\text{C.6a})$$

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_p(\zeta)}{\partial \zeta} = -2gI_s(\zeta)\delta B_s(\zeta) - 2gI_s(\zeta)\widetilde{\delta R} \quad (\text{C.6b})$$

Ces deux équations se réduisent à l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{d\widetilde{\delta B}_s(\zeta)}{d\zeta} = -2gI_s(\zeta) \left( \widetilde{\delta B}_s(\zeta) + \zeta \widetilde{\delta R} \right) + C_R \quad (\text{C.7})$$

où  $C_R$  est une constante d'intégration indépendante de  $\zeta$ . Au voisinage de  $\zeta = 0$  et de  $\zeta = 1$ ,  $\widetilde{\delta B}_s(\zeta)$  et  $I_s(\zeta)$  peuvent être approximés par les polynômes fonction de  $\zeta$  suivants :

$$\widetilde{\delta B}_{s0}(\zeta) = \widetilde{\delta B}_s(0) + a_1\zeta + \frac{a_2}{2}\zeta^2 + \frac{a_3}{6}\zeta^3 + \frac{a_4}{24}\zeta^4 \quad (\text{C.8a})$$

$$\widetilde{\delta B}_{s1}(\zeta) = \widetilde{\delta B}_s(1) + b_1(\zeta - 1) + \frac{b_2}{2}(\zeta - 1)^2 + \frac{b_3}{6}(\zeta - 1)^3 + \frac{b_4}{24}(\zeta - 1)^4 \quad (\text{C.8b})$$

$$I_{s0}(\zeta) = I_s(0) + \alpha_1\zeta + \frac{\alpha_2}{2}\zeta^2 + \frac{\alpha_3}{6}\zeta^3 \quad (\text{C.9a})$$

$$I_{s1}(\zeta) = I_s(1) + \beta_1(\zeta - 1) + \frac{\beta_2}{2}(\zeta - 1)^2 + \frac{\beta_3}{6}(\zeta - 1)^3 \quad (\text{C.9b})$$

où  $a_i$  et  $b_i$  sont inconnus. Par contre, les termes  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  peuvent être déterminés à partir de l'expression analytique (1.37) du profil de  $I_s(\zeta)$ . Chaque couple d'équations  $[\delta\widetilde{B}_{s_j}; I_{s_j}(\zeta)]$  ( $j = 0, 1$ ) est ensuite injecté dans l'équation (C.7), ce qui conduit à des relations entre les  $a_i$ , les  $\alpha_i$  et  $C_R$  pour  $j = 0$  et entre les  $b_i$ , les  $\beta_i$  et  $C_R$  pour  $j = 1$ . Cependant  $C_R$  est inconnu. Pour l'obtenir, nous connectons  $\delta\widetilde{B}_{s_0}(\zeta)$  et  $\delta\widetilde{B}_{s_1}(\zeta)$  en imposant comme conditions qu'en  $\zeta = 1/2$ , ces deux fonctions sont égales de même que leurs dérivées premières et secondes :

$$\delta\widetilde{B}_{s_0}(\zeta = \frac{1}{2}) = \delta\widetilde{B}_{s_1}(\zeta = \frac{1}{2}), \quad (\text{C.10a})$$

$$\left. \frac{d\delta\widetilde{B}_{s_0}(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=\frac{1}{2}} = \left. \frac{d\delta\widetilde{B}_{s_1}(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=\frac{1}{2}}, \quad (\text{C.10b})$$

$$\left. \frac{d^2\delta\widetilde{B}_{s_0}(\zeta)}{d\zeta^2} \right|_{\zeta=\frac{1}{2}} = \left. \frac{d^2\delta\widetilde{B}_{s_1}(\zeta)}{d\zeta^2} \right|_{\zeta=\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.10c})$$

On trouve finalement que  $C_R$  s'écrit

$$C_R = \frac{2g}{D}[N\delta\widetilde{B}_s(\zeta = 0) + M\delta\widetilde{R}] \quad (\text{C.11})$$

$$\text{où } M = m_0 + m_1 I_s(0) + m_2 I_s^2(0) + m_3 I_s^3(0) \quad (\text{C.12a})$$

$$N = n_0 + n_1 I_s(0) + n_2 I_s^2(0) + n_3 I_s^3(0) \quad (\text{C.12b})$$

$$D = d_0 + d_1 I_s(0) + d_2 I_s^2(0) \quad (\text{C.12c})$$

Les constantes  $m_i$  sont  $m_0 = 2(\alpha_1 - 4\beta_1) + 2\beta_2$ ,  $m_1 = 38R^2 + 10 - 6gR^2\beta_1$ ,  $m_2 = 2g(9R^4 - 1)$ ,  $m_3 = 4g^2R^6$ . Les constantes  $n_i$  s'écrivent  $n_0 = 10(\alpha_1 - \beta_1) + \alpha_2 + \beta_2$ ,  $n_1 = 48(R^2 + 1) - 6g(\alpha_1 + R^2\beta_1)$ ,  $n_2 = 20g(R^4 - 1)$ ,  $n_3 = 4g^2(1 + R^6)$ . Les constantes  $d_i$  sont  $d_0 = 96 - 4g(\alpha_1 + \beta_1)$ ,  $d_1 = 20g(R^2 - 1)$ ,  $d_2 = 4g^2(1 + R^4)$ .  $I_s(0)$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont obtenus à partir de la solution analytique (1.37) du profil de  $I_s(\zeta)$  et s'écrivent

$$I_s(0) = \frac{\Omega}{A - 1} \quad (\text{C.13a})$$

$$\alpha_1 = \frac{-2gA\Omega}{A - 1} \quad (\text{C.13b})$$

$$\alpha_2 = \frac{4g^2A^2\Omega^2(A + 1)}{(A - 1)^2} \quad (\text{C.13c})$$

$$\beta_1 = -\frac{2gA\Omega^2e^{2g\Omega}}{(Ae^{2g\Omega} - 1)^2} \quad (\text{C.13d})$$

$$\beta_2 = -4g^2A\Omega^3e^{2g\Omega} \frac{Ae^{2g\Omega} + 1}{(Ae^{2g\Omega} - 1)^3} \quad (\text{C.13e})$$

$$\text{où } A = \frac{(R^2 - 1)e^{-2g\Omega}}{R^2 - e^{-2g\Omega}} \quad (\text{C.13f})$$

Injectons les expressions (C.8a) et (C.9a) dans les équations (C.6a) et (C.7). En se limitant au premier ordre en  $\zeta$ , la comparaison de ces deux équations permet de trouver que  $|G_R(\nu \simeq 0)|$  s'écrit finalement

$$|G_R(\nu \simeq 0)| = \left| \frac{\widetilde{\delta A_s}(\zeta = 0)}{\widetilde{\delta R}} \right| = \frac{1/2g + M/D}{I_s(0) - N/D} \quad (\text{C.14})$$

## C.2 Détermination de $|G_P(\nu \simeq 0)|$

Dans le cadre de l'étude de  $|G_P(\nu)|$ , aucun changement de variable n'est nécessaire car la fonction  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta, \tau)$  possède déjà la périodicité spatiale adéquate. Reprenons le système d'équations (2.10)

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A_p}}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{\delta A_p}}{\partial \zeta} = gI_s(\zeta) \left( \widetilde{\delta A_p} - \widetilde{\delta A_a} - \widetilde{\delta A_s} \right) \quad (\text{C.15a})$$

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A_s}}{\partial \tau} - \frac{\partial \widetilde{\delta A_s}}{\partial \zeta} = gI_p(\zeta) \left( \widetilde{\delta A_p} + \widetilde{\delta A_a} - \widetilde{\delta A_s} \right) \quad (\text{C.15b})$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial \widetilde{\delta A_a}}{\partial \tau} = \widetilde{\delta A_p} + \widetilde{\delta A_s} - \widetilde{\delta A_a} \quad (\text{C.15c})$$

Dans l'espace de Fourier, le jeu d'équations (C.15) se réécrit sous forme de deux équations différentielles dont les variables sont  $\widetilde{\delta A_p}(\zeta, \nu)$  et  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta, \nu)$  :

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A_s}(\zeta, \nu)}{\partial \zeta} = i2\pi\nu \left( \frac{gI_p(\zeta)}{\beta_A + i2\pi\nu} + 1 \right) \widetilde{\delta A_s}(\zeta, \nu) - gI_p(\zeta) \left( 1 + \frac{\beta_A}{\beta_A + i2\pi\nu} \right) \widetilde{\delta A_p}(\zeta, \nu), \quad (\text{C.16a})$$

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A_p}(\zeta, \nu)}{\partial \zeta} = -gI_s(\zeta) \left( 1 + \frac{\beta_A}{\beta_A + i2\pi\nu} \right) \widetilde{\delta A_s}(\zeta, \nu) + i2\pi\nu \left( \frac{gI_s(\zeta)}{\beta_A + i2\pi\nu} - 1 \right) \widetilde{\delta A_p}(\zeta, \nu). \quad (\text{C.16b})$$

Lorsque  $\nu \ll 1$ , les équations (C.16a) et (C.16b) deviennent indépendantes de la fréquence et s'écrivent

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A_s}(\zeta)}{\partial \zeta} = -2gI_p(\zeta) \widetilde{\delta A_p}(\zeta) \quad (\text{C.17a})$$

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A_p}(\zeta)}{\partial \zeta} = -2gI_s(\zeta) \widetilde{\delta A_s}(\zeta) \quad (\text{C.17b})$$

Ces deux équations se réduisent à l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{d\widetilde{\delta A_s}(\zeta)}{d\zeta} = -2gI_s(\zeta) \widetilde{\delta A_s}(\zeta) + C_P \quad (\text{C.18})$$

où  $C_P$  est une constante d'intégration indépendante de  $\zeta$ . Au voisinage de  $\zeta = 0$  et de  $\zeta = 1$ ,  $\widetilde{\delta A_s}(\zeta)$  et  $I_s(\zeta)$  peuvent être approximés par les polynômes de  $\zeta$  suivants :

$$\widetilde{\delta A_{s0}}(\zeta) = \widetilde{\delta A_s}(0) + a_1\zeta + \frac{a_2}{2}\zeta^2 + \frac{a_3}{6}\zeta^3 + \frac{a_4}{24}\zeta^4 \quad (\text{C.19a})$$

$$\widetilde{\delta A_{s1}}(\zeta) = \widetilde{\delta A_s}(1) + b_1(\zeta - 1) + \frac{b_2}{2}(\zeta - 1)^2 + \frac{b_3}{6}(\zeta - 1)^3 + \frac{b_4}{24}(\zeta - 1)^4 \quad (\text{C.19b})$$

$$I_{s0}(\zeta) = I_s(0) + \alpha_1\zeta + \frac{\alpha_2}{2}\zeta^2 + \frac{\alpha_3}{6}\zeta^3 \quad (\text{C.20a})$$

$$I_{s1}(\zeta) = I_s(1) + \beta_1(\zeta - 1) + \frac{\beta_2}{2}(\zeta - 1)^2 + \frac{\beta_3}{6}(\zeta - 1)^3 \quad (\text{C.20b})$$

$a_i$  et  $b_i$  sont inconnus au contraire de  $\alpha_i$  et de  $\beta_i$  déterminables grâce à la solution analytique (Eq. (1.37)) du profil de  $I_s(\zeta)$ . Chaque couple d'équations  $[\widetilde{\delta A_{sj}}; I_{sj}(\zeta)]$  ( $j = 0, 1$ ) est injecté dans l'équation (C.18), ce qui permet d'obtenir des relations entre les  $a_i$ , les  $\alpha_i$ , les  $b_i$ , les  $\beta_i$  et les  $C_P$ . A l'instar de  $C_R$ ,  $C_P$  est déterminé en imposant comme conditions qu'en  $\zeta = 1/2$ , les fonctions  $\widetilde{\delta A_{s0}}(\zeta)$  et  $\widetilde{\delta A_{s1}}(\zeta)$  sont égales, de même que leurs dérivées premières et secondes. On trouve alors pour  $C_P$  l'expression suivante :

$$C_P = 2g \frac{N}{D} \widetilde{\delta A_s}(\zeta = 0) \quad (\text{C.21})$$

où  $N$  et  $D$  sont données dans la première partie de l'annexe C.

Injectons les expressions (C.19a) et (C.20a) dans les équations (C.17a) et (C.18). En se limitant au premier ordre en  $\zeta$ , la comparaison de ces deux équations permet de trouver que  $|G_R(\nu \simeq 0)|$  s'écrit finalement

$$|G_P(\nu \simeq 0)| = \left| \frac{\widetilde{\delta A_s}(\zeta = 0)}{\widetilde{\delta A_p}(\zeta = 0)} \right| = \frac{\mu^2}{I_s(0) - N/D}. \quad (\text{C.22})$$



# Annexe D

## Bruit d'intensité du champ de pompe en sortie de fibre

Le travail présenté au chapitre 2 porte sur l'étude du bruit d'intensité du laser Brillouin. Nous avons vu qu'une partie du bruit d'intensité du laser de pompe est transféré au rayonnement Stokes. Cette annexe D a pour objet de présenter rapidement les modifications que subit le bruit d'intensité du rayonnement de pompe après propagation dans la fibre.

### D.1 Modèle

En sortie de fibre, le bruit d'intensité du champ de pompe a changé puisqu'une partie de celui-ci a été transféré au champ Stokes. Pour évaluer ces modifications, nous allons chercher à déterminer la fonction de transfert  $G_L(\nu)$  liant le bruit d'intensité du laser de pompe en entrée de fibre au bruit d'intensité du champ de pompe en sortie.  $G_L(\nu)$  est donc définie par la relation

$$G_L(\nu) = \frac{\widetilde{\delta A_p}(\zeta = 1, \nu)}{\widetilde{\delta A_p}(\zeta = 0, \nu)} \quad (\text{D.1})$$

La modélisation est la même que celle effectuée lors de l'étude du transfert du bruit d'intensité du laser de pompe sur le champ Stokes. Cependant, au lieu de chercher le lien entre le bruit d'intensité du champ Stokes en  $\zeta = 0$  et celui du laser de pompe entrant dans la fibre, on détermine la relation entre ce dernier et le bruit d'intensité du champ de pompe en sortie. Pour cela, nous utilisons à nouveau le système d'équations linéarisées basé sur les variations relatives d'amplitudes (Eqs. (2.48)). A celui-ci, nous devons ajouter les conditions de bouclage (2.50) qui correspondent au fait que le coefficient de réinjection  $R$  est constant et que l'amplitude du laser de pompe fluctue d'une faible quantité  $\delta\mu(\tau)$  autour d'une valeur moyenne  $\mu$ .

Finalement, les équations utilisées sont

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \zeta} = gI_s(\zeta) \left( \widetilde{\delta A}_p - \widetilde{\delta A}_a - \widetilde{\delta A}_s \right) \quad (\text{D.2a})$$

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_s}{\partial \tau} - \frac{\partial \widetilde{\delta A}_s}{\partial \zeta} = gI_p(\zeta) \left( \widetilde{\delta A}_p + \widetilde{\delta A}_a - \widetilde{\delta A}_s \right) \quad (\text{D.2b})$$

$$\frac{1}{\beta_A} \frac{\partial \widetilde{\delta A}_a}{\partial \tau} = \widetilde{\delta A}_p + \widetilde{\delta A}_s - \widetilde{\delta A}_a \quad (\text{D.2c})$$

$$\widetilde{\delta A}_p(\zeta = 0, \tau) = \widetilde{\delta \mu}(\tau) \quad (\text{D.2d})$$

$$\widetilde{\delta A}_s(\zeta = 1, \tau) = \widetilde{\delta A}_s(\zeta = 0, \tau) \quad (\text{D.2e})$$

## D.2 Théorie

### Fonction de transfert au seuil

Près du seuil d'oscillation du laser Brillouin, l'intensité du champ Stokes  $I_s(\zeta)$  est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger le membre de droite de l'équation (D.2a). Cette dernière se réécrit simplement

$$\frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{\delta A}_p}{\partial \zeta} = 0. \quad (\text{D.3})$$

Une faible fluctuation de l'amplitude du champ de pompe parcourt donc la fibre sans être affectée. De ce fait,  $G_L(\nu)$  sera constante et égale à 1 quel que soit la fréquence.

$$G_L(\nu) = 1 \quad (\text{D.4})$$

### Fonction de transfert au delà du seuil

Au delà du seuil d'oscillation du laser Brillouin, la fonction de transfert  $|G_L(\nu)|$  dépend du taux de pompage comme on peut le voir sur la figure D.1. Le comportement de  $|G_L(\nu)|$  est très différent de celui de  $|G_R(\nu)|$  ou  $|G_P(\nu)|$ . Pour des cavités de faible finesse,  $|G_L(\nu)|$  ne fait que croître lorsque la fréquence augmente, exception faite aux voisinage des fréquences multiples de l'unité. Pour des cavités de finesse élevée,  $|G_L(\nu)|$  n'est jamais inférieur à 1.

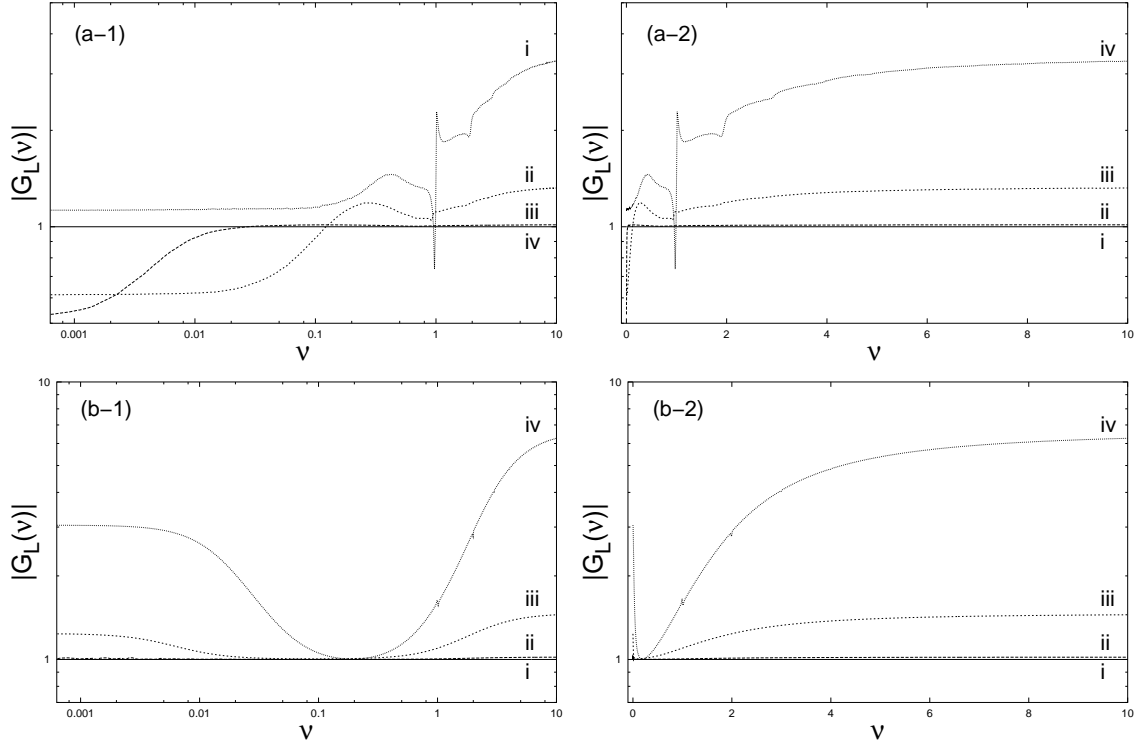


FIG. D.1 – Représentation de  $|G_L(v)|$  pour plusieurs niveaux de pompage  $\mu/\mu_{thr}$  ( $g = 6.04$  et  $\beta_A = 10.93$ ). Les courbes sont représentées en échelles logarithmiques (colonne de gauche, graphe 1) et semi-logarithmiques (colonne de droite, graphe 2) pour deux valeurs de  $R$  :  $R = 0.36$  (graphe a) et  $R = 0.95$  (graphe b). Les courbes en trait plein (i) sont obtenues grâce à la relation (D.4) caractérisant  $|G_L(v)|$  au seuil. Les courbes (ii), (iii) et (iv) en pointillés sont obtenues par simulation numérique pour des valeurs de  $\mu/\mu_{thr}$  respectivement égales à 1.01, 1.20 et 2.00.



## D.3 Expérience

### Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est schématiquement présenté sur la figure D.2. Il est très proche de celui employé pour déterminer  $|G_P(\nu)|$ . Le système de pompage est identique tout comme le système de détection ainsi que la fibre optique (cf. Fig. 2.27). Cette dernière est également positionnée de façon à ce que les champs de pompe et Stokes soient linéairement polarisés. Une séparatrice  $S_1$  permet d'injecter le champ de pompe dans la fibre. Une seconde séparatrice  $S_2$  permet d'extraire une partie du champ pompe de la cavité après qu'il ait traversé la fibre. Entre  $S_1$  et  $S_2$  se trouve un isolateur de Faraday qui empêche l'onde de pompe de circuler dans la cavité. La modulation de l'intensité s'effectue au moyen d'un modulateur électro-optique placé juste derrière le laser de pompe. Le modulateur est associé à un cube polariseur qui permet d'obtenir un rayonnement linéairement polarisé. En traversant le cube polariseur après le modulateur électro-optique et avant d'entrer dans la cavité, l'intensité du faisceau de pompe  $I_P(t)$  est faiblement modulée et s'écrit

$$I_P(t) = \overline{I_P} [1 + m_P(\nu_m) \sin(2\pi\nu_m t)] \quad (\text{D.5})$$

où  $\overline{I_P}$  représente l'intensité de l'onde de pompe si aucun champ électrique n'était appliqué au modulateur électro-optique.  $\nu_m$  et  $m_P$  sont respectivement la fréquence et l'indice de modulation d'intensité du faisceau de pompe. Une séparatrice  $S_3$  placée juste derrière le cube polariseur permet de prélever une partie du rayonnement de pompe avant que celui n'entre dans la cavité. La séparatrice  $S_2$  permet de prélever une partie du faisceau de pompe après que ce dernier se soit propagé dans la fibre. A la sortie de la cavité, l'intensité du champ de pompe  $I_{P_1}(t)$  sera encore modulée à une fréquence  $\nu_m$  avec un indice de modulation  $m_l$

$$I_{P_1}(t) = \overline{I_{P_1}} [1 + m_l(\nu_m) \sin(2\pi\nu_m t)] \quad (\text{D.6})$$

où  $\overline{I_{P_1}}$  représente l'intensité de l'onde de pompe si aucun champ électrique n'était appliqué au modulateur électro-optique.  $m_P$  et  $m_l$  sont obtenus en réalisant l'analyse spectrale des signaux  $I_P(t)$  et  $I_{P_1}(t)$ . Le principe de cette analyse est décrit dans la partie 2.2.2.2. Deux interféromètres de Mach-Zehnder (voir figure 2.27) sont nécessaires pour transposer les spectres autour d'une porteuse radio-fréquence. Le premier est placé juste après  $S_3$  de façon à mesurer  $m_P$ . Le second est positionné derrière  $S_2$  pour pouvoir mesurer  $m_l$ .

La valeur de la fonction de transfert  $|G_L|$  à la fréquence  $\nu_m$  est donnée par le rapport  $m_l/m_P$ . Par ailleurs, une photodiode connectée à un oscilloscope est utilisée

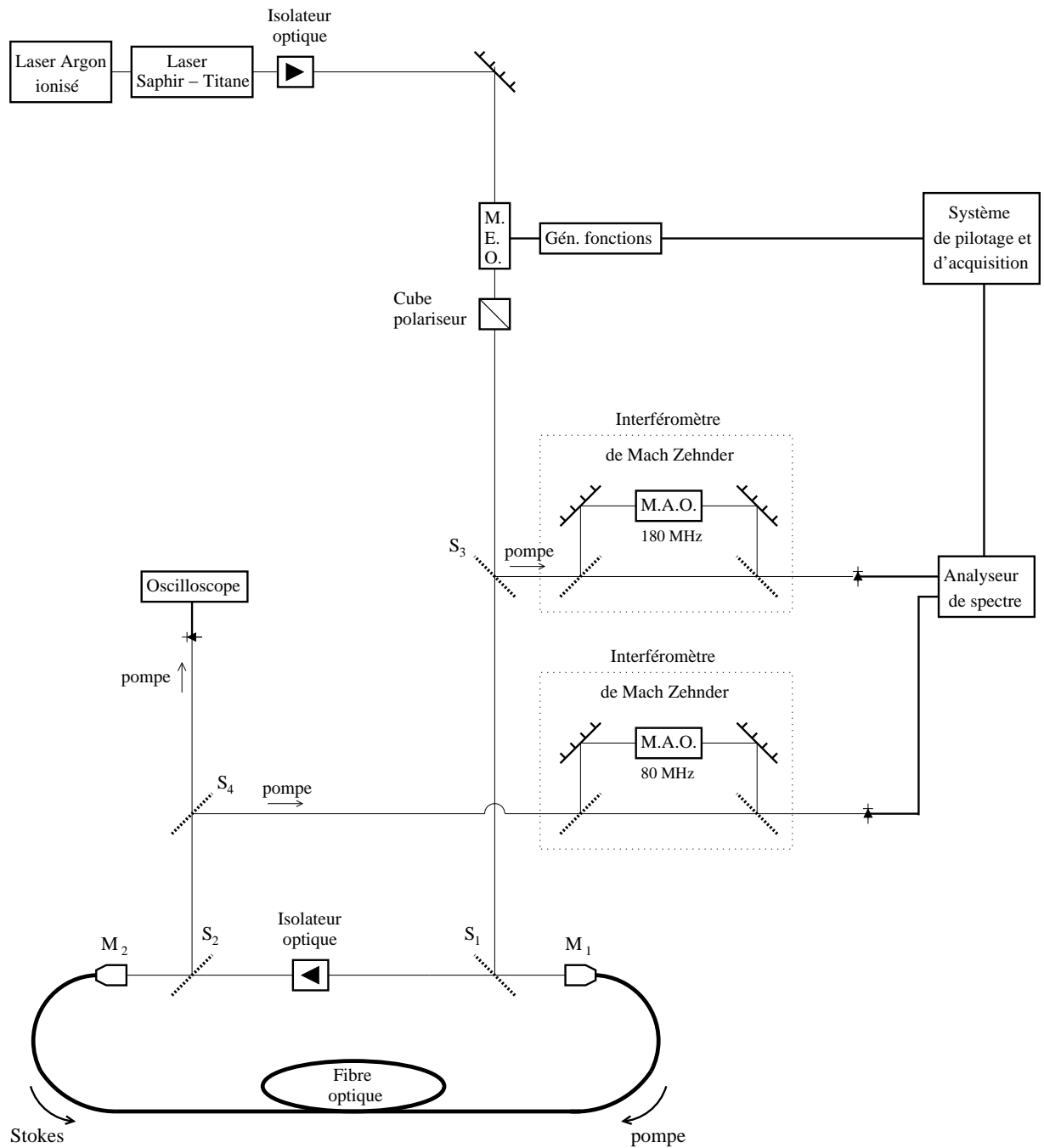


FIG. D.2 – Représentation schématique du dispositif expérimental permettant de déterminer  $|G_L(\nu)|$ .

pour nous permettre de déterminer le taux de déplétion, ce qui nous servira à estimer le niveau de pompage du laser Brillouin.

## Résultats expérimentaux

Nous présentons deux fonctions de transfert  $|G_L(\nu)|$  obtenues expérimentalement pour deux taux de pompage différents. Elles sont composées de 200 points de mesure pour des fréquences comprises entre 20 kHz et 20 MHz. L'indice de modulation  $m_P$  de l'intensité du champ de pompe est de l'ordre de 0.01. La première fonction de transfert obtenue expérimentalement est présentée sur la figure D.3(a). Sur la même figure en trait hachurés est tracée la fonction de transfert réalisée par intégration numérique du modèle cohérent à trois ondes. Le calcul est effectué en prenant les

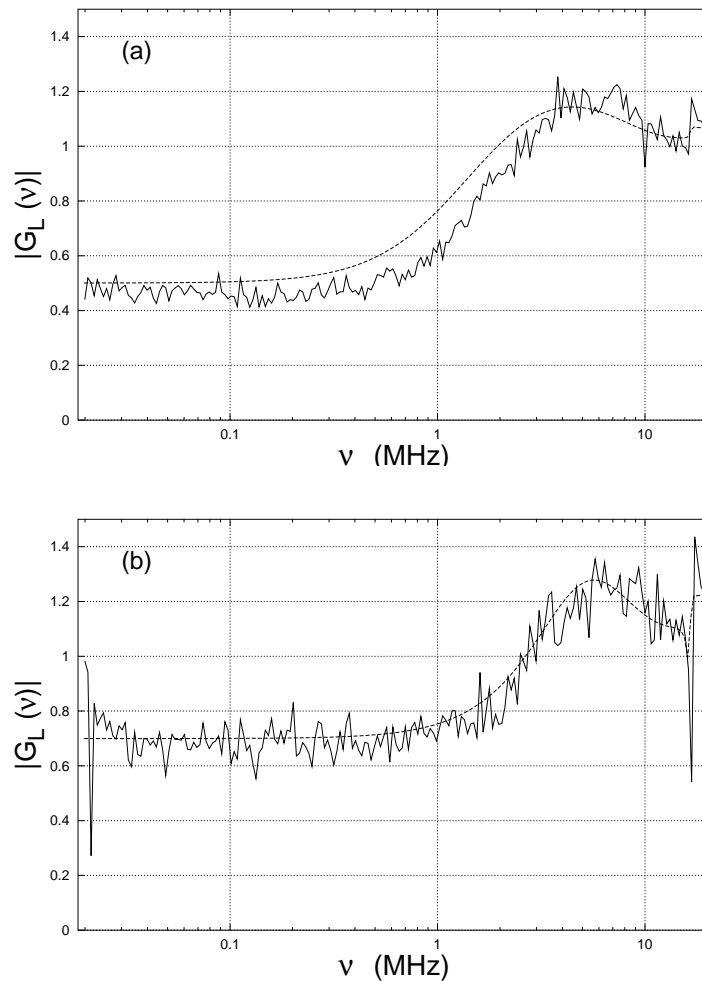


FIG. D.3 – Module de la fonction de transfert  $|G_L(\nu)|$  obtenu expérimentalement (trait plein). La fonction de transfert déterminée numériquement est tracée pour les paramètres  $R=0.36$ ,  $g=6.04$ ,  $\beta_A = 10.93$  et courbe (a) :  $\mu/\mu_{thr} = 1.112$ , courbe (b)  $\mu/\mu_{thr} = 1.355$ .

valeurs de paramètres suivantes :  $R = 0.36$ ,  $g = 6.04$  et  $\beta_A = 10.93$ . Le niveau de pompage  $\mu/\mu_{thr}$  est le seul paramètre libre. Il a été ajusté de telle façon que les résultats numériques et expérimentaux soient les plus proches possibles. La valeur du rapport  $\mu/\mu_{thr}$  ainsi déterminée est de 1.112. On constate que les fonctions de transfert obtenues numériquement et expérimentalement sont très proches l'une de l'autre sur toute la gamme spectrale étudiée. De plus, la concordance entre les taux de déplétion obtenus numériquement et expérimentalement (proches de 30%) nous permet de confirmer l'accord entre les résultats.

Sur la figure D.3(b) est présentée en trait plein une fonction de transfert obtenue expérimentalement pour une intensité de pompe plus importante. La fonction de transfert, obtenue par intégration numérique avec les mêmes valeurs de paramètres que précédemment, est tracée en pointillés. Le paramètre de pompage  $\mu/\mu_{thr}$  permettant le meilleur accord entre les résultats numériques et expérimentaux est de 1.355. De plus, l'accord entre les taux de déplétion obtenus numériquement et expérimentalement (proches de 60 %) nous permet de confirmer la concordance entre les résultats.

## Conclusion

Nous venons d'effectuer une étude visant à déterminer comment le bruit d'intensité du laser de pompe est modifié après avoir traversé une cavité d'un laser Brillouin à fibre. Nous avons montré que le bruit basse fréquence peut être réduit dans des cavités de finesse faible. Par contre, dans les cavités de finesse élevée, le bruit d'intensité est accru.



## BIBLIOGRAPHIE



# Bibliographie

- [Agrawal, 2001a] G. P. Agrawal. *Applications of Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press (2001).
- [Agrawal, 2001b] G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press (2001).
- [Allen et Eberly, 1987] L. Allen et J. Eberly. *Optical resonance and two-level atoms*. Dover publications, INC (1987).
- [Benkert et al., 1990] C. Benkert, M. O. Scully, J. Bergou, L. Davidovich, M. Hillery et M. Orszag. *Role of pumping statistics in laser dynamics : Quantum Langevin approach*. Phys. Rev. A, **41**, 2756 (1990).
- [Botineau et al., 1994] J. Botineau, C. Leycuras, C. Montes et E. Picholle. *A coherent approach to stationary stimulated Brillouin fiber amplifiers*. An. Telecom., **49**, 479 (1994).
- [Botineau et al., 1995] J. Botineau, E. Picholle et D. Bahloul. *Effective stimulated Brillouin gain in singlemode optical fibres*. Eletron. Lett., **31** (1995).
- [Boyd, 1992] R. Boyd. *Nonlinear optics*. Academic Press, INC (1992).
- [Boyd et Mukamel, 1984] R. W. Boyd et S. Mukamel. *Origin of spectral holes in pump-probe studies of homogeneously broadened lines*. Phys. Rev. A, **29**, 1973–1983 (1984).
- [Boyd et al., 1981] R. W. Boyd, M. G. Raymer, P. Narum et D. J. Harter. *Four-wave parametric interactions in a strongly driven two-level system*. Phys. Rev. A, **24**, 411–423 (1981).
- [Boyd et al., 1990] R. W. Boyd, K. Rzazewski et P. Narum. *Noise initiation of stimulated Brillouin scattering*. Phys. Rev. A, **42**, 5514 (1990).
- [Brillouin, 1922] L. Brillouin. *Diffusion de la lumière et des rayons par un corps transparent homogène*. Ann. Phys., **17**, 88–122 (1922).
- [Caves, 1981] C. Caves. *Quantum-mechanical noise in an interferometer*. Phys. Rev. D, **23**, 1693 (1981).
- [Chow et Bers, 1993] C. Chow et A. Bers. *Chaotic stimulated Brillouin scattering in a finite-length medium*. Phys. Rev. A, **47**, 5144–5150 (1993).



- [Debut et al., 2000] A. Debut, S. Randoux et J. Zemmouri. *Linewidth narrowing in Brillouin lasers : Theoretical analysis*. Phys. Rev. A, **62**, 023803–1–023803–4 (2000).
- [Debut et al., 2001] A. Debut, S. Randoux et J. Zemmouri. *Experimental and theoretical study of linewidth narrowing in Brillouin fiber ring lasers*. J. Opt. Soc. Am. B, **18**, 556–567 (2001).
- [Farinas et al., 1995] A. D. Farinas, E. K. Gustafson et R. L. Byer. *Frequency and intensity noise in a injection-locked, solid-state laser*. J. Opt. Soc. Am. B, **12**, 328 (1995).
- [Feynman et al., 1994] R. P. Feynman, R. B. Leighton et M. Sands. *Le cours de physique de Feynman, Mécanique 2*. Interditions (1994).
- [Fotiadi et al., 2002] A. A. Fotiadi, R. Kiyani, O. Deparis, P. Mégret et M. Blondel. *Statistical properties of stimulated Brillouin scattering in single-mode optical fibers above threshold*. Opt. Lett., **27**, 83–85 (2002).
- [Fox et al., 1984] R. F. Fox, G. E. James et R. Roy. *Stochastic pump effects in lasers*. Phys. Rev. A, **30**, 2482 (1984).
- [Gaeta et Boyd, 1991] A. L. Gaeta et R. W. Boyd. *Stochastic dynamics of stimulated Brillouin scattering in an optical fiber*. Phys. Rev. A, **44**, 3205 (1991).
- [Graham et Haken, 1968] R. Graham et H. Haken. *The quantum fluctuations of the parametric oscillator*. Zeitschrift für Physik, **210**, 276 (1968).
- [Grynberg et al., 1997] Grynberg, Aspect et Fabre. *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*. Ellipses (1997).
- [Heiman et al., 1979] D. Heiman, D. S. Hamilton et R. W. Hellwarth. *Brillouin scattering measurements on optical glasses*. Phys. Rev. B, **19**, 6583 (1979).
- [Hill et al., 1976a] K. O. Hill, D. C. Johnson et B. S. Kawasaki. *CW génération of multiple Stokes and anti-Stokes Brillouin-shifted frequencies*. Appl. Phys. Lett., **29**, 185–187 (1976).
- [Hill et al., 1976b] K. O. Hill, B. S. Kawasaki et D. C. Johnson. *CW Brillouin laser*. Appl. Phys. Lett., **28**, 608 (1976).
- [Hillman et al., 1982] L. W. Hillman, R. W. Boyd et D. R. S. Jr. *Natural modes for the analysis of optical bistability and laser instability*. Opt. Lett., **7**, 426–428 (1982).
- [Hillman et al., 1983] L. W. Hillman, R. W. Boyd, J. Krasinski et D. R. S. Jr. *Observation of a spectral hole due to population oscillations in a homogeneously broadened optical absorption line*. Opt. Com., **45**, 416–419 (1983).

- [Huen, 1986] H. P. Huen. *Generation, detection, and application of high-intensity photon number eigenstate fields*. Phys. Rev. Lett., **56**, 2176–2179 (1986).
- [Ippen et Stolen, 1972] E. P. Ippen et R. H. Stolen. *Stimulated Brillouin scattering in optical fibers*. Appl. Phys. Lett., **21**, 539–541 (1972).
- [Kapron et al., 1970] F. P. Kapron, D. B. Keck et R. D. Maurer. *Radiation losses in glass optical waveguides*. Appl. Phys. Lett., **17**, 423–425 (1970).
- [Kovalev et Harrison, 2000] V. Kovalev et R. Harrison. *Observation of a inhomogeneously spectral broadening of stimulated Brillouin scattering in an optical fiber*. Phys. Rev. Lett., **85**, 1879 (2000).
- [Kovalev et Harrison, 2002a] V. Kovalev et R. Harrison. *The dynamics of a SBS fibre laser : the nature of periodic spiking at harmonics of the fundamental oscillation frequency*. Opt. Com., **204**, 349–354 (2002).
- [Kovalev et Harrison, 2002b] V. Kovalev et R. Harrison. *Reply of the comment on "Observation of a inhomogeneously spectral broadening of stimulated Brillouin scattering in an optical fiber"*. Phys. Rev. Lett., **88**, 029402 (2002).
- [Landau et Lifchitz, 1971] L. Landau et E. Lifchitz. *Mécanique des fluides*. Editions Mir (1971).
- [Lecoeuche et al., 2000] V. Lecoeuche, P. Niay, M. Douay, P. Bernage, S. Randoux et J. Zemmouri. *Bragg grating based Brillouin fibre laser*. Opt. Comm., **177**, 303–306 (2000).
- [Lecoeuche et al., 1996] V. Lecoeuche, S. Randoux, B. Ségard et J. Zemmouri. *Dynamics of Brillouin fiber ring laser : off-resonant case*. Phys. Rev. A, **53**, 2822–2828 (1996).
- [Lee et al., 1998] D. H. Lee, M. E. Klein et K. J. Boller. *Intensity noise of pump-enhanced continuous-wave optical parametric oscillators*. Appl. Phys. B, **66**, 747–753 (1998).
- [Lewis, 1995] J. S. Lewis. *Physics and Chemistry of the Solar System*. Academic Press (1995).
- [Lorrain et Corson, 1979] P. Lorrain et D. R. Corson. *Champs et ondes électromagnétiques*. Librairie Armand Collin (1979).
- [Marin et al., 1997] F. Marin, A. Bramati, V. Jost et E. Giacobino. *Demonstration of high sensitivity spectroscopy with squeezed semiconductor lasers*. Opt. Comm., **140**, 146–157 (1997).
- [Max et Lacoume, 1996] J. Max et J. Lacoume. *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, Tome 1. Principes généraux et méthodes classiques, 5<sup>ième</sup> édition*. Masson (1996).

- [Mollenauer et al., 1980] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen et J. P. Gorgon. *Experimental Observation of Picosecond Pulse Narrowing and Solitons in Optical Fibers*. Pys. Rev. Lett, **45**, 1095–1098 (1980).
- [Montes et al., 1999] C. Montes, D. Bahloul, I. Bongrand, J. Botineau, G. Cheval, A. Mamhoud, E. Picholle et A. Picozzi. *Self-pulsing and dynamic stability in cw-pumped Brillouin fiber ring lasers*. J. Opt. Am. B, **16**, 932–951 (1999).
- [Montes et al., 1994a] C. Montes, A. Mahmoud, J. Botineau et E. Picholle. *Three-wave soliton morphogenesis in a CW-pumped Brillouin fiber ring laser*. Fluctuation Phenomena : disorder and nonlinearity, Madrid Ed., page 397 (1994).
- [Montes et al., 1994b] C. Montes, A. Mamhoud et E. Picholle. *Bifurcation in a CW-pumped Brillouin fiber-ring laser : coherent soliton morphogenesis*. Phys. Rev. A, **49**, 1344 (1994).
- [Niklès et al., 1997] M. Niklès, L. Thévenaz et P. Robert. *Brillouin gain spectrum characterization in single-mode optical fibers*. J. Lightw. Tech., **15**, 1842 (1997).
- [Ottaway et al., 1994] D. J. Ottaway, P. J. Veitch, C., Hollitt, D. Mudge, M. W. Hamilton et J. Munch. *Frequency and intensity noise of an injection-locked Nd :YAG ring laser*. Appl. Phys. B, **71**, 163–168 (1994).
- [Papoulis, 1977] A. Papoulis. *Signal Analysis*. Mc Graw-Hill INC (1977).
- [Petermann, 1991] K. Petermann. *Laser Diode modulation and noise*. Kluwer Academic Publishers (1991).
- [Picholle, 1991] E. Picholle. *Thèse de Doctorat : Dynamique de la diffusion Brillouin stimulée dans les fibres optiques*. Université de Nice Sophia-Antipolis (1991).
- [Ponikvar et Ezekiel, 1981] D. Ponikvar et S. Ezekiel. *Stabilized single-frequency stimulated Brillouin fiber ring laser*. Opt. Lett., **6**, 398 (1981).
- [Randoux, 1995] S. Randoux. *Thèse de doctorat : Etude expérimentale et théorique de la dynamique de lasers Brillouin à fibre optique*. Université des Sciences et Technologies de Lille, France (1995).
- [Randoux et al., 1995a] S. Randoux, V. Lecoecue, B. Ségard et J. Zemmouri. *Dynamical analysis of Brillouin fiber lasers : an experimental approach*. Phys. Rev. A, **51**, R4345–R4348 (1995).
- [Randoux et al., 1995b] S. Randoux, V. Lecoecue, B. Ségard et J. Zemmouri. *Dynamical behavior of a Brillouin fiber ring laser emitting two Stokes components*. Phys. Rev. A, **52**, 2327–2334 (1995).
- [Randoux et al., 1997] S. Randoux, V. Lecoecue et J. Zemmouri. *Polarization instabilities and antiphase dynamics in a Brillouin fiber ring laser*. Phys. Rev. A, **56**, R1717–R1720 (1997).

- [Randoux et Zemmouri, 2002] S. Randoux et J. Zemmouri. *Comment on "Observation of an inhomogeneously spectral broadening of stimulated Brillouin scattering in an optical fiber"*. Phys. Rev. Lett., **88**, 029401 (2002).
- [Sargent, 1978] M. Sargent. *Spectroscopic techniques based on Lamb's laser theory*. Phys. Rep., **43**, 223–265 (1978).
- [Schwarz et Tan, 1967] S. E. Schwarz et T. Y. Tan. *Wave interaction in saturable absorbers*. Appl. Lett. Lett., **10**, 4–7 (1967).
- [Shibata et al., 1987] N. Shibata, R. G. Waarts et R. P. Braun. *Brillouin-spectra for single-mode fibers having pure-silica  $GeO_2$ -doped and  $P_2O_5$ -doped cores*. Opt. Lett., **12**, 269–271 (1987).
- [Siegman, 1986] A. Siegman. *Lasers*. University Science Books (1986).
- [Smith et al., 1991] S. Smith, F. Zarinetchi et S. Ezekiel. *Narrow-linewidth stimulated Brillouin fiber laser and applications*. Opt. Lett., **16**, 393 (1991).
- [Stokes et al., 1982] L. F. Stokes, M. Chodorow et H. J. Shaw. *All-fiber stimulated Brillouin ring laser with submilliwatt pump threshold*. Opt. Lett., **7**, 509 (1982).
- [Stolen et al., 1972] R. H. Stolen, E. P. Ippen et A. R. Tynes. *Raman oscillation in glass optical waveguide*. Appl. Phys. Lett., **20**, 62–64 (1972).
- [Svelto, 1998] O. Svelto. *Principle of Lasers, fourth edition*. Plenum Publishing Corporation (1998).
- [Taccheo et al., 1998a] S. Taccheo, P. Laporta, O. Svelto et G. de Geronimo. *Theoretical and experimental analysis of intensity noise of a codoped erbium-ytterbium glass laser*. Appl. Lett. B, **66**, 19–26 (1998).
- [Taccheo et al., 1998b] S. Taccheo, G. Sorbello, P. Laporta et O. Svelto. *Suppression of intensity noise in a diode-pumped Tm-Ho :YAG laser*. Opt. Lett., **25**, 1642–1644 (1998).
- [Takushima et Kikuchi, 1995] Y. Takushima et K. Kikuchi. *Spectral gain hole burning and modulation instability in a Brillouin fiber amplifier*. Opt. Lett., **20**, 34 (1995).
- [Takushima et Kikuchi, 1999] Y. Takushima et K. Kikuchi. *Observation of spectral gain hole burning and modulation instability in a Brillouin fiber amplifier*. 1999 LEOS Annual Meeting Conference Proceedings, **1**, 58 (1999).
- [van Exter et al., 1992] M. P. van Exter, S. J. M. Kuppens et J. P. Woerdman. *Excess Phase Noise in Self-Heterodyne Detection*. IEEE J. Quantum Electron., **28**, 580 (1992).
- [Wu et al., 1986] L. Wu, J. Kimble, J. Hall et H. Wu. *Generation of squeezed states by parametric down conversion*. Phys. Rev. Lett., **57**, 2520 (1986).

- [Yamamoto et al., 1986] Y. Yamamoto, S. Machida et O. Nilsson. *Amplitude squeezing in a pump-noise-suppressed laser oscillator*. Phys. Rev. A, **34**, 4025–4042 (1986).
- [Yariv, 1989] A. Yariv. *Quantum Electronics, Third edition*. John Wiley & sons (1989).
- [Yariv, 1997] A. Yariv. *Optical Electronics in Modern Communications, Fifth edition*. Oxford University Press (1997).
- [Yu et al., 1995] D. Yu, W. Lu et R. Harrison. *Physical origin of the dynamical stimulated Brillouin scattering in optical fibers with feedback*. Phys. Rev. A, **51**, 669 (1995).
- [Zarinetchi et al., 1991] F. Zarinetchi, S. P. Smith et S. Ezekiel. *Stimulated Brillouin fiber-optic laser gyroscope*. Opt. Lett., **16**, 229 (1991).



Le travail présenté dans cette thèse porte sur le bruit d'intensité du laser Brillouin à fibre ainsi que sur le brûlage de trou spectral du processus de diffusion Brillouin stimulée (DBS) dans les fibres.

Le bruit d'intensité du laser Brillouin provient principalement de deux sources : les fluctuations du coefficient de réinjection et le bruit d'intensité du laser de pompe. L'influence de chacune d'elles sur le bruit d'intensité du laser Brillouin est évaluée au moyen d'une fonction de transfert. Une étude théorique de ces deux fonctions a été réalisée puis validée expérimentalement.

Nous montrons ensuite théoriquement que le brûlage de trou spectral, déjà observé expérimentalement pour le générateur et l'amplificateur Brillouin, peut être interprété en supposant que l'élargissement spectral du processus de DBS est de nature homogène. Le brûlage de trou provient de la saturation du gain conjuguée au couplage entre les variations de l'amplitude des champs optiques.

---

## **Title**

Stimulated Brillouin scattering in optical fibers : intensity noise in the laser and spectral hole burning in the amplifier and the generator

---

## **Abstract**

The work reported in this thesis is devoted to the intensity noise of the Brillouin fiber laser and to the spectral hole burning of stimulated Brillouin scattering in fibers.

The intensity noise of Brillouin laser arises mainly from two sources : the fluctuations of the cavity reinjection rate and the intensity noise of the pump laser. The transfer functions relate the laser intensity noise to the fluctuations of these sources. A theoretical study of these two functions has been achieved and validated by experiments.

Then, we show theoretically that the spectral hole burning, recently observed experimentally in Brillouin fiber amplifiers and generators, can be interpreted without invoking an inhomogeneous broadening of the Brillouin line. The hole burning is due both to the gain saturation and the coupling between the intensity fluctuations of the optical waves.

---

## **Mots-clés**

Optique non linéaire, laser Brillouin, amplificateur Brillouin, générateur Brillouin, fibre optique monomode, bruit d'intensité, brûlage de trou spectral, élargissement spectral, fonction de transfert.